



**HAL**  
open science

# Study of site effects due to topographical and geotechnical conditions using a hybrid finite element/boundary element method

Khoa Van Nguyen

► **To cite this version:**

Khoa Van Nguyen. Study of site effects due to topographical and geotechnical conditions using a hybrid finite element/boundary element method. Sciences of the Universe [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2005. English. NNT : . pastel-00001839

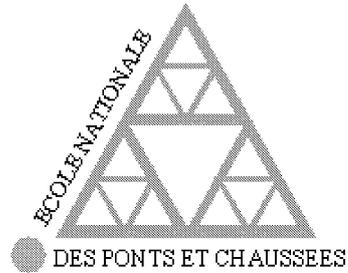
**HAL Id: pastel-00001839**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00001839>**

Submitted on 3 May 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

**Docteur de l'École Nationale des Ponts et Chaussées**

Spécialité : Géotechnique

par

**Khoa Van NGUYEN**

Sujet de thèse :

**ÉTUDE DES EFFETS DE SITE DUS AUX CONDITIONS  
TOPOGRAPHIQUES ET GÉOTECHNIQUES PAR UNE MÉTHODE  
HYBRIDE ÉLÉMENTS FINIS/ÉLÉMENTS FRONTIÈRES**

Soutenue le 17 janvier 2005 à l'E.N.P.C

devant le jury composé de :

Rapporteurs : Marc BOULON

Arezou MODARESSI

Examineurs : Jean-Pierre MAGNAN

Ferri ALIABADI

Berhouz GATMIRI

Directeur de thèse : Roger FRANK



# Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Berhouz GATMIRI qui a dirigé mon travail de thèse et qui m'a témoigné de sa confiance et de son aide scientifique.

Je remercie Monsieur Roger FRANK de m'avoir accueilli au Centre de Recherche et d'Enseignement en MÉcanique des Sols (CERMES) et corrigé mon mémoire. Je tiens à rendre hommage à ses qualités humaines et pédagogiques.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Madame Arezou MODARESSI et Monsieur Marc BOULON pour me faire l'honneur d'accepter de juger mon travail en tant que rapporteurs.

Mes plus vifs remerciements vont également à Messieurs Jean-Pierre MAGNAN et Ferri ALIABADI pour avoir accepté de participer à ce jury de thèse.

Je voudrais remercier chaleureusement tous les membres du CERMES ainsi que mes amis vietnamiens de l'AEGC, qui ont fait de ces trois années une belle étape de ma vie.

Je remercie de tout mon cœur mes parents, qui ont su me donner sans cesse leur soutien et leur amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études.

J'exprime particulièrement toute ma gratitude et mon amour à ma petite femme Minh Ngoc pour son soutien moral constant à travers les différentes périodes, pour sa confiance et sa patience.



---

# Résumé

Ce travail de thèse a pour but de développer la méthode des éléments frontières (BEM) et la méthode hybride éléments finis/éléments frontières (FEM/BEM) pour l'élastodynamique et la poroélastodynamique, et d'appliquer ces méthodes aux études d'effets de site sismiques et d'interaction dynamique sol-structure.

La première partie du mémoire aborde les problèmes théoriques. Les formulations, en domaine temporel, de la BEM et de la FEM/BEM peuvent tenir compte du caractère ouvert des espaces (semi-)infinis. En particulier, la FEM/BEM peut également prendre en compte des comportements matériels complexes. Ces formulations ont cependant des difficultés numériques pouvant limiter leur applicabilité en pratique : il s'agit de la stabilité numérique du schéma temporel, de l'augmentation rapide du temps de calcul avec le nombre de pas de temps et de l'effet de la troncature de l'espace semi-infini. Des techniques, destinées à améliorer les performances de ces méthodes, sont alors proposées. Pour l'application de la BEM en poroélastodynamique, une expression analytique de la solution fondamentale temporelle est proposée, en faisant deux hypothèses : l'accélération relative, par rapport au squelette, du fluide interstitiel est négligée et les constituants du milieu (grains solides et fluide) sont incompressibles. Cette solution approchée, en termes de déplacements et de pressions interstitielles, est adéquate pour les sols sous sollicitations sismiques. Toutes les formulations sont validées et intégrées dans le code de calcul HYBRID.

La seconde partie de la thèse est consacrée à l'application de la BEM et de la FEM/BEM aux calculs sismiques. Les phénomènes physiques et les caractéristiques principales des effets de site bidimensionnels, dus aux conditions topographiques et géotechniques, sont présentés. On prouve théoriquement que les effets de site peuvent considérablement aggraver le potentiel destructeur du mouvement sismique, car ils amplifient le mouvement, prolongent la durée du séisme et provoquent des mouvements différentiels. Des études paramétriques sont effectuées et montrent l'influence significative sur le mouvement sismique en surface de plusieurs facteurs : le contenu fréquentiel de l'excitation, le contraste d'impédance sédiment/substratum, la géométrie du relief ou du bassin (largeur, profondeur ou hauteur, pente, forme), l'épaisseur de la sédimentation, l'effet multicouche et la saturation en eau interstitielle. Une étude, portant sur l'interaction dynamique barrage/fondation, démontre la nécessité de tenir compte de l'effet de flexibilité de la fondation dans les calculs sismiques des barrages en terre.

## Mots clés

éléments finis - éléments frontières - couplage - élastodynamique - poroélastodynamique - solution fondamentale - effets de site - interaction sol/structure - barrage



# Abstract

The purpose of this dissertation is to develop the boundary element method (BEM) and the coupled finite element/boundary element method (FEM/BEM) for elastodynamics and poroelastodynamics, and to study the local site effects and the dynamic soil-structure interaction using these methods.

The first part is devoted to theoretical problems. The time-dependant formulations of the BEM and the FEM/BEM enable us to study (semi-)infinite domains. Particularly, the FEM/BEM can also take account of the complex material behaviours. However, these formulations have some numerical difficulties, which may restrict their applicability in seismic calculations. These are the numerical stability of the time-marching procedure, the dramatic increase in computing time with the number of time steps and the truncation effect of the half-space. Some techniques, which are intended to improve the performances of these methods, are then presented. An analytical transient fundamental solution is proposed for the application of the BEM to the poroelastodynamics, using two assumptions : the acceleration, relative to the skeleton, of the pore fluid is neglected and the fluid and solid particles are incompressible. This approximate solution in terms of displacements and pore pressures is appropriate for soils under seismic motion. All of these formulations are validated and integrated into the computer code HYBRID.

The applications of the BEM and the FEM/BEM in seismic calculations are presented in the second part. The principal characteristics and the physical phenomena of local site effects (i.e. effects of surface topography and alluvial basin geometry on seismic ground motion) are presented. It is theoretically shown that the local site effects may considerably enhance the destruction potential of seismic motion, because they amplify the ground motion, increase the duration of the earthquake and cause differential motions. Parametric studies are carried out and illustrate the important influence on the ground surface motion of several factors : the frequency content of the excitation, the impedance ratio sediment/bedrock, the geometry of the relief or the basin (width, depth or height, slope and form), the thickness of sedimentation, the multi-layer effect and the pore water saturation. A study of the dam/foundation interaction shows that it is necessary to consider the effect of the foundation flexibility in seismic calculations of earth dams.

## Key words

finite element - boundary element - hybrid - elastodynamics - poroelastodynamics - fundamental solution - local site effects - soil/structure interaction - earth dam



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>I Formulations théoriques</b>	<b>11</b>
<b>1 BEM et couplage FEM/BEM en élastodynamique</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction et bibliographie . . . . .	13
1.2 Équations intégrales de frontière . . . . .	17
1.2.1 Théorème de réciprocité . . . . .	17
1.2.2 Équations intégrales de frontière . . . . .	19
1.3 Mise en œuvre de la méthode des éléments frontières . . . . .	20
1.3.1 Discrétisation de la géométrie et interpolation des variables . . . . .	20
1.3.2 Évaluation analytique des intégrales temporelles . . . . .	23
1.3.3 Équations intégrales discrétisées . . . . .	27
1.3.4 Evaluation numérique des intégrales élémentaires . . . . .	28
1.4 Couplage éléments finis/éléments frontières . . . . .	31
1.4.1 Méthode des éléments finis en élastodynamique . . . . .	31
1.4.2 Matrice de rigidité équivalente de la zone d'éléments frontières . . . . .	34
1.4.3 Procédure de couplage FEM/BEM . . . . .	35
1.5 Code de calcul HYBRID . . . . .	37
1.5.1 Présentation du code . . . . .	37
1.5.2 Validation du code . . . . .	38
1.6 Étude de la stabilité numérique des solutions BEM . . . . .	41
1.6.1 Instabilité numérique . . . . .	41
1.6.2 Amélioration de la stabilité par la méthode $\theta$ . . . . .	48
1.7 Modélisation de l'espace semi-infini : effet de troncature . . . . .	53
1.7.1 Cas d'une charge externe sur la surface . . . . .	54
1.7.2 Cas d'un signal sismique incident . . . . .	55
1.7.3 Moyens de diminuer l'effet de troncature . . . . .	57
1.8 Une amélioration de la performance de la BEM . . . . .	61
1.8.1 Inconvénients de la BEM . . . . .	61
1.8.2 Stratégie d'amélioration . . . . .	62
1.8.3 Formulation . . . . .	63

1.8.4	Validation . . . . .	66
1.9	Conclusion . . . . .	69
<b>2</b>	<b>BEM en poroélastodynamique</b>	<b>71</b>
2.1	Bibliographie . . . . .	71
2.1.1	Théorie des milieux poreux . . . . .	71
2.1.2	Méthode des éléments frontières en poroélastodynamique . . . . .	72
2.2	Comportement dynamique des milieux poreux saturés . . . . .	74
2.2.1	Système d'équations . . . . .	74
2.2.2	Récapitulatif des formulations . . . . .	76
2.2.3	Mise en œuvre numérique de la méthode des éléments finis . . . . .	78
2.3	Équations intégrales de frontière . . . . .	82
2.3.1	Théorème de réciprocité . . . . .	82
2.3.2	Représentation intégrale . . . . .	84
2.3.3	Équations intégrales de frontière . . . . .	86
2.4	Solutions fondamentales . . . . .	87
2.4.1	Solution fondamentale du domaine de Laplace . . . . .	88
2.4.2	Solution temporelle analytique . . . . .	91
2.4.3	Validation de la nouvelle solution fondamentale . . . . .	93
2.5	Mise en œuvre numérique de la méthode des éléments frontières . . . . .	96
2.5.1	Évaluation des matrices $G_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$ et $H_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$ . . . . .	96
2.5.2	Régularisation des intégrales fortement singulières . . . . .	98
2.6	Applications numériques . . . . .	99
2.6.1	Exemple 1 : Génération de l'onde de Rayleigh . . . . .	99
2.6.2	Exemple 2 : Propagation unidimensionnelle d'ondes . . . . .	100
2.7	Conclusion . . . . .	103
<b>II</b>	<b>Applications aux calculs sismiques</b>	<b>109</b>
<b>3</b>	<b>Effets de site topographiques</b>	<b>111</b>
3.1	Introduction et bibliographie . . . . .	111
3.1.1	Généralités sur les effets de site . . . . .	111
3.1.2	Preuves des effets de site . . . . .	115
3.1.3	Méthodes d'évaluation des effets de site . . . . .	117
3.2	Effets de site topographiques : caractéristiques, causes et paramètres . . . . .	122
3.2.1	Caractéristiques principales . . . . .	122
3.2.2	Phénomènes physiques principaux . . . . .	124
3.2.3	Paramètres principaux . . . . .	129
3.3	Effets de site topographiques des pentes . . . . .	131
3.3.1	Influence de la fréquence adimensionnelle . . . . .	132

---

3.3.2	Influence de l'angle d'inclinaison de la pente . . . . .	135
3.4	Effets de site topographiques des vallées . . . . .	136
3.4.1	Influence de la fréquence adimensionnelle . . . . .	136
3.4.2	Influence de l'inclinaison de la pente . . . . .	138
3.4.3	Influence de la forme de la vallée . . . . .	140
3.5	Effets de site topographiques des collines . . . . .	142
3.6	Conclusion . . . . .	144
<b>4</b>	<b>Effets de site dans les remplissages sédimentaires</b>	<b>147</b>
4.1	Caractérisation des effets de site dans les remplissages sédimentaires . . . . .	147
4.1.1	Effets de stratigraphie 1D . . . . .	147
4.1.2	Effets de bassin 2D . . . . .	149
4.2	Comparaison 1D et 2D . . . . .	157
4.3	Étude paramétrique des effets de site 2D . . . . .	163
4.3.1	Paramètres principaux . . . . .	163
4.3.2	Influence du contenu fréquentiel de l'excitation . . . . .	166
4.3.3	Influence du contraste d'impédance sédiment/substratum . . . . .	168
4.3.4	Influence de la profondeur de la vallée . . . . .	171
4.3.5	Influence de la largeur de la vallée . . . . .	173
4.3.6	Influence de la forme de la vallée . . . . .	175
4.3.7	Influence de l'épaisseur de la sédimentation . . . . .	177
4.3.8	Effet multicouche de la sédimentation . . . . .	180
4.3.9	Effet de la saturation en eau . . . . .	182
4.3.10	Réponse de l'affleurement rocheux à proximité de la vallée . . . . .	188
4.4	Conclusion . . . . .	189
<b>5</b>	<b>Comportement sismique des barrages en terre</b>	<b>191</b>
5.1	Introduction et bibliographie . . . . .	191
5.1.1	Généralités . . . . .	191
5.1.2	Facteurs affectant la réponse sismique des barrages en terre . . . . .	194
5.1.3	Méthodes d'analyse . . . . .	197
5.2	Interaction barrage/fondation . . . . .	200
5.2.1	Exemple 1 : Barrage en terre construit sur un massif rocheux . . . . .	201
5.2.2	Exemple 2 : Barrage en terre construit sur une couche sédimentaire . . . . .	205
5.3	Conclusion . . . . .	206
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>207</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>211</b>



# Introduction générale

Parmi les catastrophes naturelles qui affectent la surface de la terre, les séismes sont sans doute celles qui ont le plus d'effets destructeurs dans les zones urbanisées. Ils sont responsables de la destruction de villes entières, la cause de la mort de milliers d'hommes et ont souvent des conséquences économiques désastreuses pour les pays touchés. Jusqu'à présent, malgré le progrès constant des connaissances scientifiques, il n'est pas possible de prévoir l'instant où un séisme se produira en un lieu donné. Ainsi, afin de réduire au maximum les endommagements éventuels dans les zones à haut risque sismique, il est impératif d'identifier des caractéristiques sismiques de ces zones (aléa, sismicité) et de prendre en compte le risque sismique dans la conception des ouvrages (construction parasismique).

Pour des mesures de prévention efficaces, il est nécessaire de comprendre l'origine et la manifestation en surface des séismes. L'origine des séismes peut être diverse : dans la plupart des cas, un séisme est de type tectonique, ce qui correspond à un glissement relatif brutal entre des plaques tectoniques ; dans les autres cas, les séismes non tectoniques sont d'origine, soit naturelle (activités volcaniques, grands glissements de terrain, effondrements soudains de cavités souterrains), soit artificielle (tests nucléaires, exploitations de carrières). Quelle que soit leur origine, les séismes sont caractérisés par la libération d'une quantité importante d'énergie ; cette énergie est transportée, du foyer de séisme jusqu'à la surface terrestre, par les ondes sismiques. Le mouvement en surface est alors gouverné non seulement par la source mais aussi par le trajet parcouru par les ondes sismiques à travers les différentes couches de sols (ou de roches). La simulation des ondes sismiques dans les calculs, pour évaluer l'aléa sismique des zones urbanisées ou le comportement sismique des constructions, est alors incontournable. Comme les phénomènes de propagation d'ondes sismiques présentent des aspects particuliers (par exemple, la diffraction d'ondes, le rayonnement d'ondes à l'infini), il est souvent indispensable de procéder à des simulations numériques. Dans la pratique, les deux méthodes numériques les plus utilisées pour étudier ces phénomènes sont la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments frontières (BEM), chacune ayant ses avantages et ses inconvénients.

- Méthode numérique assez universelle, la FEM est souvent nécessaire, parfois indispensable, pour modéliser le comportement hétérogène, inélastique, non-linéaire des domaines à géométrie complexe. La FEM est indiscutablement la méthode la plus utilisée par l'ingénieur pour résoudre les problèmes concernant des domaines bornés. Cependant, cette

méthode est mal adaptée aux problèmes faisant intervenir la propagation d'ondes dans les milieux infinis ou semi-infinis, qui sont souvent rencontrés en géotechnique et en génie parasismique. En effet, dans ces problèmes, on est contraint de faire appel à une troncature artificielle, qui crée des réflexions parasites pouvant compromettre gravement la précision du résultat. En régime transitoire, le maillage doit s'agrandir suffisamment pour éviter ces ondes parasites, ce qui augmente considérablement la taille du modèle et rend le coût des calculs prohibitifs. En régime stationnaire, l'extension du maillage n'est même pas applicable ; la totalité du domaine d'étude est affectée par des ondes parasites.

- Quant à la BEM, cette méthode a l'avantage de résoudre les problèmes faisant intervenir la propagation d'ondes dans les domaines ouverts (infinis ou semi-infinis), car sa formulation représente exactement le rayonnement d'ondes à l'infini. Toutefois, il est difficile de modéliser les comportements inélastiques et non-linéaires par cette méthode. En fait, pour les comportements complexes, les solutions fondamentales (qui sont la réponse du milieu infini soumis à une force ponctuelle, unitaire et impulsionnelle, exercée en un point dans ce milieu) ne sont généralement pas connues sous une forme analytique. La BEM trouve naturellement son efficacité dans les problèmes faisant intervenir des domaines à comportement élastique linéaire.

Ainsi, l'utilisation de la FEM ou de la BEM seule, dans les problèmes de génie parasismiques, n'est pas efficace, car ces problèmes font appel, en général, à la fois à des domaines ouverts et à des comportements plus ou moins complexes de la structure superficielle ou du sol dans le champ proche. Dans ce contexte, l'utilisation d'une méthode hybride éléments finis/éléments frontières (FEM/BEM) semble attractive. Selon cette méthode, le champ proche (la structure, la fondation et/ou un volume fini de sol alentour) hétérogène, non-linéaire, inélastique et géométriquement complexe est traité par des éléments finis ; le champ lointain homogène, élastique linéaire et semi-infini est modélisé par des éléments frontières (figure 1). Cette méthode hybride peut prendre en compte le caractère ouvert du domaine d'étude et des aspects inélastiques, non-linéaires et hétérogènes des matériaux dans le champ proche. Grâce à ces avantages importants, elle peut être appliquée avec succès à de nombreux problèmes de génie parasismique et de géotechnique.

L'utilisation de la BEM et de la FEM/BEM peut être envisagée pour deux problèmes importants de génie parasismique : les effets de site sismiques et l'interaction dynamique sol-structure.

- Effets de site sismiques : il s'agit de la modification du mouvement sismique en surface due aux conditions géotechnique et topographiques locales d'un site donné par rapport au mouvement observé sur un site voisin correspondant à des conditions de référence. Dans beaucoup de cas, cette modification correspond à l'amplification importante et à la prolongation notable de la durée du mouvement sismique en surface ; cela signifie que les effets de site sont souvent défavorables et peuvent accroître considérablement l'impact d'un séisme. Un exemple connu des effets de site est celui du séisme de Michoacan

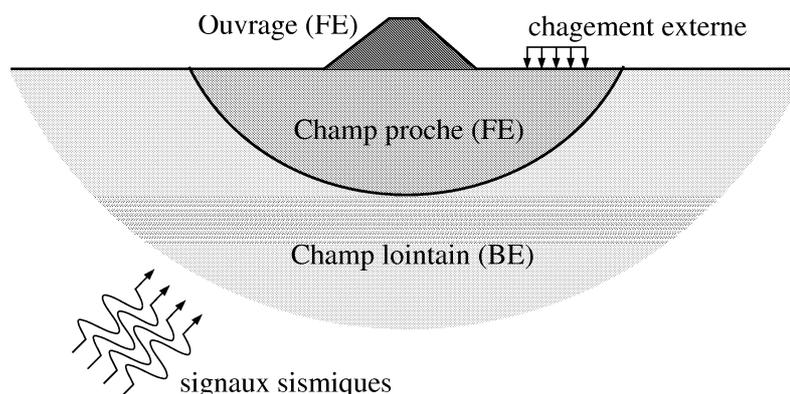


FIG. 1 – Modèle représentatif éléments finis/éléments frontières pour les calculs sismiques

(Mexique) en 1985 : l'accélération maximale a atteint 0.17 g dans le centre ville de Mexico, alors que cette valeur n'est qu'environ de 0.035 g sur l'affleurement rocheux au voisinage de la ville. Les études approfondies sur ces effets sont donc nécessaires pour leur incorporation efficace dans les codes parasismiques.

- Interaction dynamique sol-structure : il s'agit du couplage mécanique entre la structure et le sol qui la supporte, pouvant affecter le comportement dynamique de la structure. Dans les calculs sismiques de structures, la fondation est souvent supposée infiniment rigide ; l'action sismique est donc représentée par un mouvement vibratoire, homogène sur toute la fondation. En réalité, la réponse sismique d'une structure peut être influencée d'une manière substantielle par la flexibilité de la fondation et par le comportement du sol situé dans la zone d'influence de la structure. L'interaction dynamique sol-structure est d'autant plus déterminante que le sol est déformable et/ou que la structure est massive. Ainsi, dans le cas des constructions massives fondées sur des sols plus ou moins déformables, il est nécessaire de modéliser l'ensemble constitué du sol, de la fondation et de la structure.

L'objectif de cette thèse est d'appliquer la BEM et la FEM/BEM aux calculs d'effets de site et d'interaction dynamique sol-structure. Sur le plan théorique, il s'agit d'établir des formulations théoriques pour la BEM et la FEM/BEM en dynamique transitoire (dans le domaine temporel). Sur le plan numérique, ces formulations sont mises en œuvre dans le code de calcul HYBRID. Une fois le code vérifié et validé, des études paramétriques, portant sur des effets de site sismiques et sur l'interaction dynamique barrage/fondation, sont effectuées.

Le mémoire est divisé en deux parties. La première partie (chapitres 1 et 2) aborde des formulations théoriques de la BEM et de la FEM/BEM en élastodynamique (pour les milieux continus) et en poroélastodynamique (pour les milieux poreux saturés), ainsi que des validations par le code HYBRID. La deuxième partie (chapitres 3, 4 et 5) est destinée

à étudier des effets de site sismiques et le comportement dynamique des barrages en terre.

Le premier chapitre est un travail théorique consacré à l'adaptation des formulations de la BEM et de la FEM/BEM aux calculs sismiques. Pour prendre en compte l'hétérogénéité, l'inélasticité et la non-linéarité de la structure ou du sol dans le champ proche, ces formulations sont établies en domaine temporel. Concernant la FEM/BEM, le traitement de l'interface entre des domaines, traités par différents types d'éléments, nécessite une procédure spécifique respectant les conditions de continuité. Des problèmes d'origine purement numérique, associés aux formulations de la BEM, sont étudiés : la stabilité, l'effet de troncature, les performances (en termes de temps de calcul). Ces problèmes constituent des inconvénients principaux pouvant limiter l'applicabilité de la BEM et, par conséquent, de la FEM/BEM. Nous proposons d'utiliser l'interpolation temporelle mixte et la méthode  $\theta$  pour améliorer la stabilité de la procédure d'avancement pas-à-pas dans le temps. Les erreurs commises par des ondes parasites, dues à la troncature du modèle d'un espace semi-infini, sont mises en évidence. Nous présentons une technique d'amélioration capable de diminuer considérablement le temps de calcul et l'espace de stockage sur ordinateur et de réduire les erreurs commises par l'effet de troncature.

Le chapitre 2 vise à développer des formulations de la BEM pour la poroélastodynamique. À l'heure actuelle, l'application de la BEM aux problèmes poroélastodynamiques est encore limitée, car l'expression analytique exacte de la solution fondamentale, en domaine temporel, n'a pas été publiée, en raison de la complexité du système d'équations régissant le comportement dynamique des milieux poreux saturés. Nous proposons une solution fondamentale temporelle approchée, en termes de déplacements et de pressions interstitielles ( $u_i, p$ ), en faisant deux hypothèses : l'accélération relative, par rapport au squelette, du fluide interstitiel est négligée et les constituants du milieu (grains solides et fluide) sont incompressibles. Cette solution approchée est validée et incorporée dans le code HYBRID. La stabilité du schéma temporel de la formulation de la BEM, utilisant la solution fondamentale proposée, est aussi étudiée.

Dans le chapitre 3, nous mettons en évidence d'une manière théorique les phénomènes physiques et les caractéristiques principales des effets de site topographiques (dus aux conditions topographiques en surface). Ensuite, nous effectuons une étude paramétrique portant sur les effets de site topographiques des pentes, des vallées et des collines (sous l'excitation des ondes SV à propagation verticale). L'influence de la fréquence adimensionnelle (rapport de la dimension caractéristique du relief à la longueur d'onde incidente), de l'angle d'inclinaison de la pente et de la forme du relief (pour les vallées et les collines) est examinée. Dans ce chapitre, la BEM seule est utilisée pour modéliser des reliefs (figure 2a).

Le chapitre 4 a pour objectif d'étudier les effets de site dans les remplissages sédimentaires à géométrie bidimensionnelle (vallées, bassins). La mise en évidence des phénomènes physiques, impliqués dans les problèmes 2D (génération des ondes de surface, résonance

globale 2D), et une comparaison 1D-2D sont effectuées pour insister sur l'importance des effets 2D et sur la nécessité de leur prise en compte dans les calculs sismiques (évaluation de l'aléa local, conception des constructions). Ensuite, nous procédons à une étude paramétrique pour évaluer l'influence de plusieurs facteurs importants pouvant affecter le mouvement sismique en surface : le contenu fréquentiel de l'excitation (des ondes SV à propagation verticale sont considérées), le contraste d'impédance sédiment/substratum, la géométrie de la vallée ou du bassin (profondeur, largeur, forme), l'épaisseur de la sédimentation (cas des vallées partiellement remplies), l'hétérogénéité verticale des propriétés mécaniques de la sédimentation (effet multicouche) et la saturation en eau interstitielle (vallées saturées d'eau). Comme le comportement du sédiment peut être complexe, l'utilisation de la méthode hybride est quasiment inévitable : le substratum rocheux est traité par des éléments frontières, alors que le sédiment est modélisé par des éléments finis (figure 2b).

Le dernier chapitre est destiné à illustrer l'application de la méthode hybride FEM/BEM aux calculs sismiques des barrages en terre (ou en enrochement). En utilisant cette méthode hybride, le barrage et/ou le sol alentour sont modélisés par des éléments finis, tandis que le massif rocheux de fondation est représenté par des éléments frontières (figure 2c). Nous montrons l'importance de l'interaction dynamique barrage/fondation sur la réponse sismique des barrages, d'où l'impératif de la prendre en compte dans les calculs sismiques des barrages.

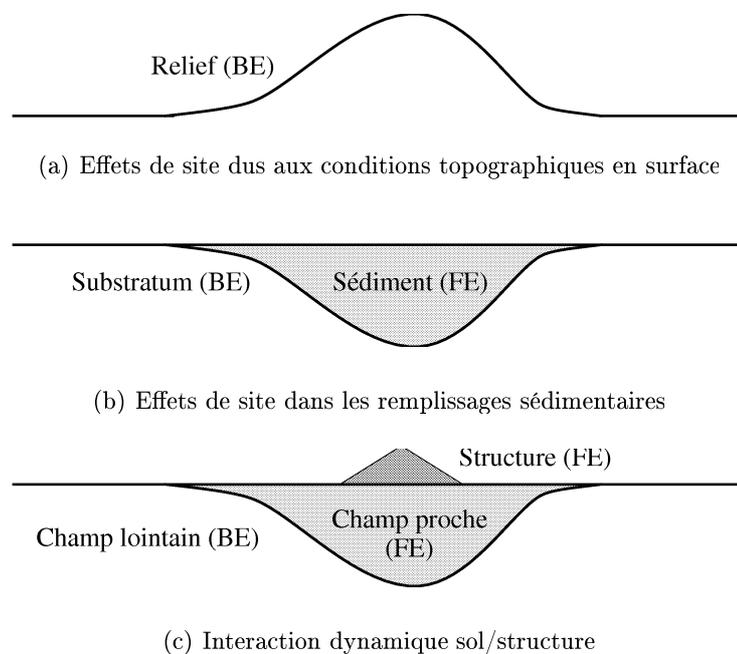


FIG. 2 – Application de la BEM et de la FEM/BEM aux calculs sismiques



Première partie

Formulations théoriques



## Chapitre 1

# Méthode des éléments frontières et couplage éléments finis/éléments frontières en élastodynamique

Ce chapitre débute par une brève bibliographie sur l'application de la méthode des éléments frontières (BEM) en élastodynamique ainsi que son couplage avec la méthode des éléments finis (FEM). La formulation des équations intégrales et sa mise en œuvre par la méthode des éléments frontières sont décrites. Ensuite, un schéma de couplage FEM/BEM et sa validation par le code de calcul HYBRID sont présentés. Enfin, des problèmes numériques concernant la stabilité numérique, l'effet de la troncature de l'espace semi-infini et une méthode d'amélioration sont abordés.

### 1.1 Introduction et bibliographie

La méthode des éléments frontières repose sur la discrétisation des équations intégrales de frontière. L'étude de ces dernières a commencé il y a plus d'un siècle et constitue une branche importante de la physique mathématique classique (théorie du potentiel). Mais le développement de la méthode des éléments frontières en tant qu'outil de résolution numérique est toutefois postérieur à celui des méthodes des éléments finis et des différences finis. Les premiers travaux ont été proposés durant les années 60 (par exemple, [Rizzo, 1967], [Cruse, 1969]). Par la suite, on peut voir un très grand nombre de recherches sur cette méthode. A l'heure actuelle, la méthode des éléments frontières est appliquée dans beaucoup de domaines de la physique et de la mécanique. Elle permet principalement la résolution numérique de problèmes régis par des équations aux dérivées partielles linéaires (équation de Laplace ou de Poisson, équation d'ondes acoustiques et électromagnétiques, équations de l'élastostatique et de l'élastodynamique linéaire..). Elle est particulièrement performante, par rapport à la méthode des éléments finis, en traitant des problèmes extérieurs (milieux infinis ou semi-infinis) et des domaines variables ou inconnus (propagation de fissures, op-

timisation de la forme de structures, problèmes inverses à domaine inconnu..). Son champ d'application est donc très étendu.

Dans ce qui suit, nous n'aborderons que son application en élastodynamique transitoire et son couplage possible avec la méthode des éléments finis. Mais d'abord, le principe général de la méthode des éléments frontières est décrit.

### Principe de la méthode des éléments frontières

Un problème aux limites, d'inconnue  $u$ , posé sur un domaine  $\Omega \in \mathcal{R}^n (n = 1, 2, 3)$  et associé à un opérateur aux dérivées partielles du second ordre  $\mathcal{L}$  présente typiquement la structure suivante :

$$\mathcal{L} u + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1a)$$

$$u = g_1 \quad \text{sur } \partial\Omega_u \quad (1.1b)$$

$$T^n(u) = g_2 \quad \text{sur } \partial\Omega_t \quad (1.1c)$$

où  $g_1, g_2$  et la source  $f$  sont donnés ;  $u \rightarrow T^n(u)$  est un opérateur différentiel du premier ordre sur  $u$  et linéaire par rapport à la normale  $n$  à  $\partial\Omega$ .

On montre qu'il est possible d'associer à chaque opérateur  $\mathcal{L}$  une *formule de réciprocité* :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}u.v - \mathcal{L}v.u) dV = \int_{\partial\Omega} (T^n(u).v - T^n(v).u) dS \quad (1.2)$$

La substitution de  $v$  par une fonction Green  $G(x, y)$ , qui vérifie l'équation locale (1.1a) pour une source ponctuelle  $f(y) = \delta(y - x)$  appliquée en un point fixé  $x \notin \partial\Omega$ , conduit ainsi à la relation suivante :

$$c u(x) = \int_{\Omega} f(y)G(x, y)dV_y + \int_{\partial\Omega} [u(y)T^n G(x, y) - T^n u(y)G(x, y)]dS_y \quad (1.3)$$

Cette formule de *représentation intégrale*, qui donne explicitement la valeur de  $u$  en tout point  $x$  à l'intérieur à  $\Omega$ , n'est valable que pour  $x \notin \partial\Omega$ . Il reste donc à formuler une *équation intégrale de frontière* qui ne porterait que sur les valeurs à la frontière de  $u$  et  $T^n(u)$ . L'obtention de cette équation repose sur un passage à la limite, car les fonctions  $G$  et  $T^n(G)$  présentent en  $x \in \partial\Omega$  une singularité non intégrable. Une fois celui-ci accomplie, la méthode des équations intégrales procède en deux temps :

1. Résolution de l'équation intégrale de frontière, permettant de connaître les valeurs de  $(u, T^n u)$  en tout point de  $\partial\Omega$ . Cette résolution s'effectue normalement de manière numérique par l'intermédiaire de la *méthode des éléments frontières*. Celle-ci repose sur l'adaptation de notions initialement créées et développées dans le contexte de la méthode des éléments finis.
2. Application de la formule de représentation intégrale, permettant le calcul explicite de la valeur de  $u$  en tout point intérieur à  $\Omega$ .

Alors, le calcul de  $u$  dans la domaine  $\Omega$  est ramené à celui des valeurs inconnues de  $(u, T^n u)$  sur la frontière  $\partial\Omega$ . Il est ainsi possible de restreindre le support géométrique de la phase de résolution, et donc la discrétisation, à la frontière  $\partial\Omega$  et non au domaine  $\Omega$  : on a 'gagné' une dimension d'espace (3D  $\rightarrow$  2D, 2D  $\rightarrow$  1D). Cela constitue un avantage très important de cette méthode.

## Méthodes des éléments frontières en élastodynamique

Un des points forts des méthodes des éléments frontières est la possibilité de traiter des domaines ouverts sans avoir à tronquer artificiellement le domaine d'étude. En effet, les conditions à l'infini sont exactement prises en compte de manière automatique dans la formulation des équations intégrales via l'utilisation de la fonction fondamentale (en élastodynamique, ces conditions représentent la radiation des ondes de volume vers l'infini). Ce point est particulièrement important en dynamique où une frontière artificielle créera des réflexions parasites (non physiques) d'ondes sortantes pouvant provoquer des erreurs graves. Il en découle que les problèmes dynamiques posés en milieu infini ou semi-infini sont un champ d'application privilégié des méthodes des éléments frontières. Les applications concernent surtout la géotechnique (calcul sismique des bâtiments, tunnels, fondations..) et la simulation du contrôle non-destructif (diffraction d'ondes par des fissures). C'est sans doute pourquoi la recherche sur l'emploi des méthodes des éléments frontières en élastodynamique est très abondante les deux dernières décennies.

Nous ne présenterons ici qu'un aperçu de la littérature sur les méthodes des éléments frontières en élastodynamique, ce qui est très abondante. Une liste détaillée des références peut être consultée dans [Beskos, 1987] (période avant 1986) et [Beskos, 1997] (période 1986-1996).

Les méthodes des éléments frontières peuvent être globalement classées en trois catégories : méthodes directes, méthodes indirectes et méthodes variationnelles. Les méthodes directes semblent actuellement être les plus utilisées grâce à leur robustesse et à leur souplesse. Le principe de ces méthodes est d'abord d'établir une équation intégrale de frontière, en termes de déplacements et de contraintes, ensuite de discrétiser cette équation par la méthode de points de collocation. La recherche actuelle se concentre dans le traitement des problèmes numériques associés. Il s'agit de l'évaluation des intégrales fortement singulières ou hyper-singulières, la stabilité des schémas temporels, le traitement des coins, l'effet de la troncature des domaines semi-infinis, la présence des fréquences propres fictives par la résolution en domaine fréquentiel, etc.

Les méthodes indirectes, quant à elles, consistent à résoudre numériquement l'équation intégrale indirecte exprimée en termes des variables intermédiaires (densités des potentiels de simple couche ou double couche), d'où le nom 'indirect' ; les quantités physiques, déplacements et contraintes, sont ensuite déduites de ces variables. La méthode de discontinuité des déplacements est aussi une méthode indirecte spéciale. Ces méthodes trouvent leur avantage dans les calculs de diffraction d'ondes (e.g. problèmes des effets de site) où elles

peuvent donner une compréhension claire sur la naissance et la nature des ondes diffractées.

Toutes les méthodes appartenant aux deux premières catégories sont caractérisées par leurs matrices résolvantes asymétriques et pleines, ce qui conduit à une augmentation significative du temps de calcul et de l'espace de stockage en mémoire de l'ordinateur. Les méthodes du troisième groupe, dans le but d'éviter ces inconvénients, discrétisent l'équation intégrale (directe ou indirecte) par une approche variationnelle. Le système d'équations est donc symétrique, mais ces méthodes font intervenir des intégrales doubles dans les équations intégrales discrétisées au lieu des intégrales simples dans les méthodes usuelles, ce qui nécessitent plus d'opérations pour les évaluer.

À part ces trois groupes principaux, il existe d'autres variantes comme les méthodes 'T-matrix', les méthodes de nombre d'ondes discret ou les méthodes 'dual reciprocity', etc.

### Couplage éléments finis/éléments frontières

La question de l'efficacité relative des méthodes des éléments finis (FEM) et des éléments frontières (BEM) semble peu pertinente. La FEM occupe une position dominante, son champ d'application étant incontestablement plus vaste que celui de la BEM. La BEM, quant à elle, présente une supériorité pour le traitement de certaines situations (propagation d'ondes, présence de milieux infinis, frontières mobiles ou inconnues). Il faut donc sans doute considérer les deux approches comme complémentaires plutôt que concurrentes ; l'intersection de leurs domaines de compétences est d'ailleurs loin d'être vide. Ce point de vue est concrétisé par certaines méthodes hybrides reposant sur l'utilisation couplée de ces deux méthodes. De telles méthodes hybrides peuvent manifestement bénéficier des avantages de chaque méthode.

Dans la littérature, plusieurs méthodes hybrides ont été proposées. Les premières contributions sont les travaux de Zienkiewicz et al. [1977] et de Brebbia et Georgious [1979] pour l'élastostatique dans lesquels sont décrits des principes de base pour le couplage des deux méthodes. Pour l'élastodynamique, on peut distinguer les schémas de couplage traités soit dans le domaine fréquentiel soit dans le domaine temporel ; ces schémas sont principalement appliqués aux problèmes d'interaction dynamique sol-structure ou fluide-structure : Karabalis et Beskos [1985] sont parmi les premiers qui ont examiné le comportement dynamique en régime transitoire 2D et 3D des fondations flexibles par un schéma FEM/BEM. Touhei et Yoshida [1988] ont établi une formulation mixte pour étudier la diffraction des ondes scalaires par une vallée triangulaire. Yazdchi et al. [1999] ont exploré l'interaction barrage-fondation par un schéma couplé temporel. Estorff et Antes [1991] ont présenté une procédure hybride générale applicable à plusieurs analyses fluide-structure. La première formulation hybride en dynamique capable de traiter la non-linéarité et l'irréversibilité matérielle a été publiée par Pavlatos et Beskos [1994]. D'autres formulations inélastiques méritant d'être citées sont celles de Abouseeda et Dakoula [1998], Estorff et Firuziaan [2000], Pavlatos et Beskos [1999]. Il existe beaucoup d'autres formulations FEM/BEM en élastodynamique ; une bibliographie assez détaillée des formulations récentes peut être

consultée dans [Beskos, 1997].

En théorie, on peut distinguer deux approches fondamentales pour établir un couplage FEM/BEM : l'une considère la zone BE comme une zone FE équivalente, l'autre en revanche traite la zone FE comme une zone BE équivalente. Comme la plupart des codes de calcul existants sont des codes d'éléments finis, il est donc préférable de choisir la première approche. C'est sans doute pourquoi, en pratique, c'est la première approche qui est la plus développée ; la deuxième est au contraire peu utilisée.

Dans la première approche, les procédures de couplage peuvent être classées en deux groupes : direct asymétrique ou indirect symétrique.

1. Le premier consiste à construire la matrice de rigidité équivalente de la zone BE et l'assembler directement à celle de la zone FE. Cet assemblage est effectué de manière usuelle en respectant les conditions de continuité à l'interface commune (condition de compatibilité pour les déplacements ou condition d'équilibre pour les efforts). L'avantage de cette procédure est la simplicité. Par contre, son inconvénient est l'asymétrie de la matrice résolvante globale car la matrice de rigidité équivalente de la zone BE est toujours asymétrique, non définie positive et pleine. Le temps de calcul et la demande de ressources de l'ordinateur pour la résolution du système couplé augmentent donc considérablement.
2. Dans le but de construire un système couplé symétrique, la deuxième procédure introduit une fonctionnelle dont la valeur stationnaire donne la solution des systèmes d'équations dans toutes les zones FE et BE. Les conditions de continuité ne sont pas exactement satisfaites aux nœuds communs des deux zones BE et FE, mais sur toute l'interface commune, dans un sens intégral. Ainsi, la matrice résolvante globale est symétrique, mais la construction de cette matrice nécessite plus d'opérations que le cas précédent car la formulation est plus compliquée.

Dans ce travail, nous avons choisi la première approche et utilisé la procédure directe en acceptant la propriété asymétrique du système pour avoir une formulation simple et réaliste.

## 1.2 Équations intégrales de frontière

### 1.2.1 Théorème de réciprocité

Pour une distribution donnée  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  de force volumique exercée sur le solide  $\Omega$  considéré, on appelle *état élastodynamique* tout triplet  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{F})$  vérifiant la loi de comportement élastique isotrope et l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{i,i} + \frac{1}{2} \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.4)$$

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i - F_i \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (1.5)$$

Tout problème élastodynamique bien posé comporte en outre des conditions aux limites sur la frontière  $\Gamma$  ainsi que des conditions initiales. De plus, des conditions à l'infini doivent

être imposées si  $\Gamma$  n'est pas borné :

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij} n_j = t_i^d & \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times [0, T] \\ u_i &= u_i^d & \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_u \times [0, T] \\ u_i(\mathbf{x}, 0) &= u_{io}(\mathbf{x}) \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = v_{io}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Considérons deux états élastodynamique quelconques de positions différentes dans l'espace et à des instants différents :  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{F})$  et  $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{F}^*)$ , associés aux conditions initiales  $(\mathbf{u}_o, \mathbf{v}_o)$  et  $(\mathbf{u}_o^*, \mathbf{v}_o^*)$ . La relation de réciprocité peut s'exprimer sous la forme locale grâce à la symétrie du tenseur d'élasticité :

$$\sigma_{ij}(\chi, \tau) \varepsilon_{ij}^*(x - \chi, t - \tau) = \sigma_{ij}^*(x - \chi, t - \tau) \varepsilon_{ij}(\chi, \tau) \quad (0 \leq \tau \leq t) \quad (1.6)$$

Pour obtenir le théorème de réciprocité (dans le sens intégral), on intègre l'équation ci-dessus sur le tout le domaine  $\Omega$  de l'instant  $\tau = 0$  à l'instant  $\tau = t$  :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \star \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \star \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (1.7)$$

le symbole  $\star$  désignant le produit de convolution temporel de 2 champs de vecteurs :

$$(a \star b)(t) = \int_0^t a(t - \tau) b(\tau) d\tau = \int_0^t a(\tau) b(t - \tau) d\tau$$

En utilisant la relation linéaire déplacement-déformation, l'équation d'équilibre et la théorème de divergence, le terme de gauche de l'équation (1.7) est développé :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \star \varepsilon_{ij}^* d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \star u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} [(\sigma_{ij} \star u_i^*)_{,i} - \sigma_{ij,j} \star u_i^*] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \star u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} (\rho \ddot{u}_i - F_i) \star u_i^* d\Omega \end{aligned}$$

En faisant un développement semblable pour le terme de droite de l'équation (1.7), le théorème de réciprocité est finalement obtenu :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} [(t_i \star u_i^* - t_i^* \star u_i) d\Gamma + \int_{\Omega} (F_i \star u_i^* - F_i^* \star u_i) d\Omega \\ &\quad - \rho \int_{\Omega} [(\dot{u}_i u_{io}^* - v_{io} u_i^*) + (u_i v_{io}^* - u_{io} \dot{u}_i^*)] d\Omega \end{aligned} \quad (1.8)$$

L'apparition des conditions initiales dans (1.8) résulte d'une intégration par partie :

$$\int_{\Omega} \ddot{u}_i \star u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} [(\dot{u}_i u_{io}^* - v_{io} u_i^*) + (u_i v_{io}^* - u_{io} \dot{u}_i^*) + u_i \star \ddot{u}_i^*] d\Omega$$

En supposant l'absence de forces volumiques externes et les conditions initiales nulles, on obtient la forme simplifiée ne faisant intervenir que l'intégrale de contour :

$$\int_{\Gamma} (t_i \star u_i^* - t_i^* \star u_i) d\Gamma = 0 \quad (1.9)$$

### 1.2.2 Équations intégrales de frontière

On considère la solution fondamentale dans l'espace infini (fonction de Green) associée à une force ponctuelle unitaire impulsionnelle exercée en un point fixé  $\boldsymbol{\chi} \in R^3$  hors de la frontière  $\Gamma$ , de direction  $e_j$  et à l'instant  $\tau$  :

$$F_{ij}^* = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}) \delta(t - \tau)$$

On note la solution :  $G_{ij}$  - déplacement de direction  $e_i$  au point  $\mathbf{x}$   
 $H_{ij}$  - vecteur contrainte sur la facette de la normale  $n_i$   
 au point  $\mathbf{x}$

En 2D, la solution fondamentale  $G_{ij}$  n'est autre que la solution de Stock, et  $H_{ij}$  est le vecteur-contrainte associé.

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{H(v_1 t' - r)}{v_1 r^2} \left[ \frac{(2v_1^2 t'^2 - r^2) r_{,i} r_{,j}}{\sqrt{v_1^2 t'^2 - r^2}} - \delta_{ij} \sqrt{v_1^2 t'^2 - r^2} \right] + \frac{H(v_2 t' - r)}{v_2 r^2} \left[ -\frac{(2v_2^2 t'^2 - r^2) r_{,i} r_{,j}}{\sqrt{v_2^2 t'^2 - r^2}} + \delta_{ij} \sqrt{v_2^2 t'^2 - r^2} + \frac{\delta_{ij} r^2}{\sqrt{v_2^2 t'^2 - r^2}} \right] \right\} \quad (1.10)$$

$$H_{ij} = \frac{\mu}{2\pi\rho r} \left\{ \frac{H(v_1 t' - r)}{v_1} \left[ \frac{A_1 r^2}{(v_1^2 t'^2 - r^2)^{3/2}} + \frac{2A_2 (2v_1 t' - r)}{r \sqrt{v_1^2 t'^2 - r^2}} \right] - \frac{H(v_2 t' - r)}{v_2} \left[ \frac{A_3 r^2}{(v_2^2 t'^2 - r^2)^{3/2}} + \frac{2A_2 (2v_2 t' - r)}{r \sqrt{v_2^2 t'^2 - r^2}} \right] \right\} \quad (1.11)$$

où

$$t' = t - \tau \quad : \text{ temps retardé}$$

$$r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}| \quad : \text{ distance entre la source et le point considéré}$$

$$A_1 = (\lambda/\mu) n_i r_{,j} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,n}$$

$$A_2 = n_i r_{,j} + n_j r_{,i} + r_{,n} (\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j})$$

$$A_3 = r_{,n} (2r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) - n_j r_{,i}$$

$$H(x) \quad : \text{ fonction de Heaviside}$$

$$v_1, v_2 \quad : \text{ vitesse de propagation de l'onde P, S}$$

Ces solutions ont des propriétés importantes suivantes

1. *La réciprocité* :  $G_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\chi}, \tau) = G_{ij}(\mathbf{x}, -\tau; \boldsymbol{\chi}, -t)$
2. *L'invariance par translation temporelle* :  $G_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\chi}, \tau) = G_{ij}(\mathbf{x}, t + t_1; \boldsymbol{\chi}, \tau + t_1)$
3. *La symétrie* :  $G_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\chi}, \tau) = G_{ji}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\chi}, \tau)$
4. *La causalité* :  $G_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\chi}, \tau) = 0$  si  $v(t - \tau) < |\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}|$ , c'est-à-dire que la contribution due à chaque type d'onde (P et S) est nulle si l'onde n'a pas atteint le point considéré. Le non-respect de cette propriété lors de l'intégration numérique des intégrales élémentaires peut provoquer de très graves erreurs.

5. *La singularité* :  $\lim_{r \rightarrow 0} G_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\chi}, \tau) = \infty$ . Le développement limité en  $r$  autour de  $r = 0$  montre que les parties singulières des solutions de Stock (en élastodynamique) et de Kelvin (en élastostatique) sont égales, c'est-à-dire que  $G_{ij}$  est faiblement singulière de l'ordre  $\ln(r)$  et  $H_{ij}$  est fortement singulière de l'ordre  $r^{-1}$ . Ainsi, l'intégrale spatiale de  $G_{ij}$  autour du point source  $\boldsymbol{\chi}$  est intégrable tandis que celle de  $H_{ij}$  ne converge que dans un sens de la valeur principale de Cauchy.

La théorème de réciprocité (1.8) appliqué à l'état élastodynamique réel inconnu et à la solution fondamentale définie au-dessus, avec la force volumique et les conditions initiales nulles, entraîne :

$$cu_j(\boldsymbol{\chi}, t) = \int_{\Gamma} (G_{ij} \star t_i - H_{ij} \star u_i) d\Gamma \quad (1.12)$$

avec  $\begin{cases} c = 1 & \text{si } \boldsymbol{\chi} \in \Omega \\ c = 0 & \text{si } \boldsymbol{\chi} \notin \Omega \end{cases}$  (par définition :  $\int_{\Omega} u_i(\boldsymbol{\chi}, \tau) \star \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}) \delta(t - \tau) d\Omega = cu_j(\boldsymbol{\chi}, t)$ )

La présentation intégrale (1.12) permet de calculer, pour un instant donné  $t$ , la valeur du déplacement  $u_i$  et du vecteur-contrainte  $t_i$  en un point  $\mathbf{x}$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$  en fonction des valeurs  $(u_i, t_i)$  sur la frontière. Pour un problème bien posé, la moitié des composantes scalaires des champs est donnée par les conditions aux limites, l'autre moitié restant inconnue. Il reste donc à définir une équation intégrale portant seulement sur les champs à la frontière. Comme l'expression (1.12) ne vaut que pour  $\boldsymbol{\chi} \notin \Gamma$ , l'établissement d'une équation intégrale doit donc recourir à une procédure de passage à la limite tenant compte du caractère singulier de la solution fondamentale. En mettant le point source  $\boldsymbol{\chi}$  à la frontière  $\Gamma$ , on obtient les équations intégrales de frontière suivantes :

$$c_{ij}(\boldsymbol{\chi}) u_j(\boldsymbol{\chi}, t) = \int_{\Gamma} (G_{ij} \star t_j - H_{ij} \star u_j) d\Gamma \quad (1.13)$$

avec le terme libre

$$c_{ij}(\boldsymbol{\chi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} H_{ij}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}) d\Gamma$$

Ce terme dépend de la géométrie local de la surface  $\Gamma$  au point  $\boldsymbol{\chi}$  ( $c_{ij}(\boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$  si  $\boldsymbol{\chi}$  est un point régulier sur  $\Gamma$ ). Comme la solution  $H_{ij}$  est fortement singulière, l'intégrale de contour contenant  $H_{ij}$  ne converge que dans un sens de la valeur principale de Cauchy. La régularisation de cette intégrale sera abordée dans les parties suivantes.

## 1.3 Mise en œuvre de la méthode des éléments frontières

### 1.3.1 Discrétisation de la géométrie et interpolation des variables

La première démarche consiste à diviser la frontière en éléments frontières disjoints de forme relativement simple. On suppose que la frontière  $\Gamma$  est discrétisée avec  $K$  noeuds

$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_K)$  et  $E$  éléments frontières  $(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_E)$ . La géométrie de chaque élément est définie par les coordonnées des noeuds et les fonctions de forme (habituellement polynomiale). Cette description paramétrique générique permet de définir sans difficultés des éléments courbes.

Ensuite, les inconnues (déplacement et vecteur-contrainte) sont à leur tour discrétisées à l'aide des noeuds d'interpolation, qui coïncident généralement avec noeuds géométriques, et des fonctions d'interpolation :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^K \mathcal{N}_k^1(\mathbf{x}) \mathbf{u}_k(t) \quad (1.14a)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^K \mathcal{N}_k^2(\mathbf{x}) \mathbf{t}_k(t) \quad (1.14b)$$

$\mathbf{u}_k(t)$ ,  $\mathbf{t}_k(t)$  sont des valeurs nodales au noeud  $k$

$\mathcal{N}_k^1$ ,  $\mathcal{N}_k^2$  sont respectivement des fonctions d'interpolation pour le déplacement et le vecteur-contrainte

L'interpolation choisie doit être conforme, c'est-à-dire qu'elle garantit la continuité du champ interpolé à la jonction des éléments. Si on utilise des éléments isoparamétriques, ce qui est le cas courant, les fonctions de forme et les fonctions d'interpolation sont identiques ( $\mathcal{N}^1 = \mathcal{N}^2 = \mathcal{N}$ ). Dans ce travail, nous utilisons des éléments isoparamétriques quadratiques (figure 1.1).

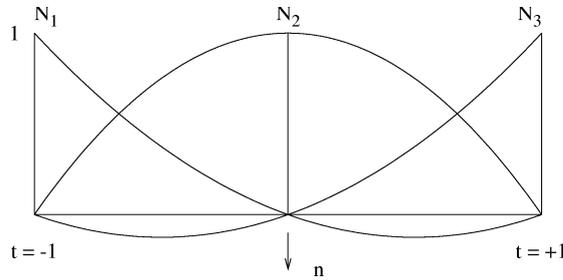


FIG. 1.1 – Interpolation spatiale quadratique

En raison de l'apparition de la variable de temps, la troisième démarche implique la discrétisation temporelle et la méthode d'avancement "pas à pas" (*time-marching schemes*). L'intervalle de temps considéré  $[0, t]$  est subdivisé en  $N$  intervalles égaux :  $t = N\Delta t$ . Des fonctions d'interpolation  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$  sont introduites, de sorte que :

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^N \Phi_1^m(\mathbf{x}) \mathbf{U}_k^m \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{t}_k(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^N \Phi_2^m(\mathbf{x}) \mathbf{T}_k^m \quad (1.15b)$$

$\mathbf{U}_k^m$ ,  $\mathbf{T}_k^m$  sont des valeurs nodales au noeud  $k$  à l'instant  $t = m\Delta t$

En réalité, les fonctions d'interpolation temporelles sont souvent choisies constantes ou linéaires dans chaque intervalle (figure 1.2), car, avec ces interpolations, l'intégration temporelle de la solution fondamentale peut être analytiquement effectuée. En effet, si on utilise des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur, l'intégration temporelle doit s'effectuer numériquement, ce qui rend le temps de calcul plus long, tandis que la précision ne s'améliore pas beaucoup.

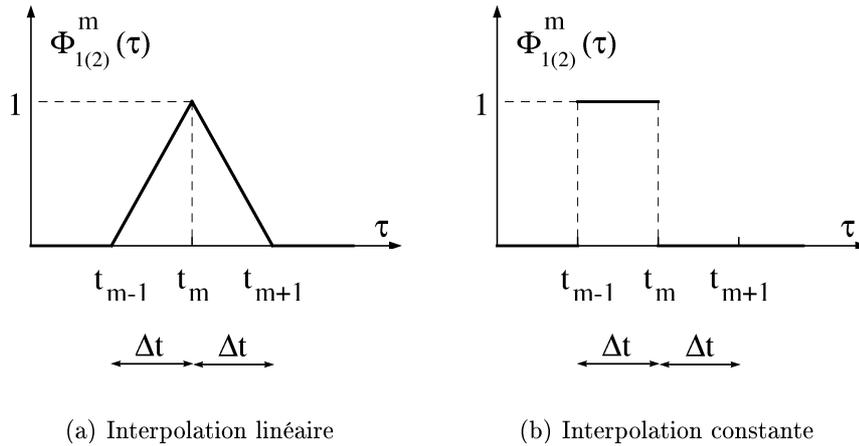


FIG. 1.2 – Fonctions d'interpolation temporelle

La fonction d'interpolation temporelle linéaire par morceaux est définie par :

$$\Phi_{1(2)}^m(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - t_{m-1}}{\Delta t} & \text{si } t_{m-1} \leq \tau \leq t_m \\ \frac{t_{m+1} - \tau}{\Delta t} & \text{si } t_m \leq \tau \leq t_{m+1} \\ 0 & \text{si } (\tau < t_{m-1}) \cup (\tau > t_{m+1}) \end{cases} \quad (1.16)$$

La fonction d'interpolation temporelle constante par morceaux est donnée par :

$$\Phi_{1(2)}^m(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_{m-1} \leq \tau \leq t_m \\ 0 & \text{si } (\tau < t_{m-1}) \cup (\tau > t_m) \end{cases} \quad (1.17)$$

En pratique, on a trois possibilités pour le choix des fonctions d'interpolation : constante, linéaire ou mixte. Dans les parties suivantes, nous allons traiter des avantages et des inconvénients de chacune d'elles.

**Interpolation constante :** les deux champs de déplacement et de vecteur-contrainte  $(\mathbf{u}, \mathbf{t})$  sont supposés constants dans chaque intervalle de temps  $\Delta t$ .

**Interpolation linéaire :** les deux champs de déplacement et de vecteur-contrainte  $(\mathbf{u}, \mathbf{t})$  varie linéairement dans chaque intervalle de temps  $\Delta t$ .

**Interpolation mixte :** le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  varie linéairement tandis que le champs de vecteur-contrainte  $\mathbf{t}$  est constant dans chaque intervalle de temps  $\Delta t$ .

Une fois les fonctions d'interpolation spatiale et temporelle définies, on a :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^K \mathcal{N}_k^1(\mathbf{x}) \Phi_1^m(t) \mathbf{U}_k^m \quad (1.18a)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^K \mathcal{N}_k^2(\mathbf{x}) \Phi_2^m(t) \mathbf{T}_k^m \quad (1.18b)$$

Le fait que les valeurs nodales des inconnues peuvent être prises hors des intégrales est très important, car les intégrales ne contiennent désormais que des fonctions connues ; elles sont évaluées analytiquement (dans le temps) et numériquement (dans l'espace, par la quadrature de Gauss). Alors, la résolution numérique est ramenée à la détermination des valeurs nodales inconnues  $\mathbf{U}_k^m = \mathbf{u}(\mathbf{x}_k, t^m)$  et  $\mathbf{T}_k^m = \mathbf{t}(\mathbf{x}_k, t^m)$

### 1.3.2 Évaluation analytique des intégrales temporelles

Considérons le produit de convolution  $G_{ij} \star t_j$  en un point  $\mathbf{x} \in \Gamma$

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{x}, t) \star t_j(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t G_{ij}(\mathbf{x}, t - \tau) t_j(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \sum_{m=1}^N G_{ij}(\mathbf{x}, t - \tau) \Phi_2^m(\tau) t_j^m(\mathbf{x}) d\tau \\ &= \sum_{m=1}^N G_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) t_j^m(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

où

$t_j^m(\mathbf{x})$  : vecteur-contrainte dans le direction  $e_j$  au point  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t^m$

$$G_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) = \int_0^t G_{ij}(\mathbf{x}, t - \tau) \Phi_2^m(\tau) d\tau = \int_0^{N\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, N\Delta t - \tau) \Phi_2^m(\tau) d\tau$$

De façon similaire, nous définissons  $H_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) = \int_0^{N\Delta t} H_{ij}(\mathbf{x}, N\Delta t - \tau) \Phi_2^m(\tau) d\tau$ .

$$H_{ij}(\mathbf{x}, t) \star u_j(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^N H_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) u_j^m(\mathbf{x}) \quad (1.20)$$

Il faut ensuite calculer analytiquement les expressions  $G_{ij}^{Nm}(\mathbf{x})$  et  $H_{ij}^{Nm}(\mathbf{x})$  selon le choix des fonctions d'interpolation temporelles  $\Phi_1^m(t)$  et  $\Phi_2^m(t)$ . L'expression explicite de ces termes a été dérivée par Israil et Banerjee [1990a, 1990b]. Dans ce qui suit, nous ne présenterons que la démarche pour les dériver.

### a. Interpolation temporelle constante

Avec le choix de la fonction d'interpolation constante par morceaux :

$$G_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, N\Delta t - \tau) d\tau = \int_{(N-m)\Delta t}^{(N-m+1)\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

$$H_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} H_{ij}(\mathbf{x}, N\Delta t - \tau) d\tau = \int_{(N-m)\Delta t}^{(N-m+1)\Delta t} H_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

et en définissant :

$$G_{ij}^k(\mathbf{x}) = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad \text{et} \quad \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

$$H_{ij}^k(\mathbf{x}) = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} H_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad \text{et} \quad \bar{H}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t H_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

on obtient :

$$G_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) = G_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}) = \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (N-m+1)\Delta t) - \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (N-m)\Delta t)$$

$$H_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) = H_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}) = \bar{H}_{ij}(\mathbf{x}, (N-m+1)\Delta t) - \bar{H}_{ij}(\mathbf{x}, (N-m)\Delta t)$$

À partir de (1.10) et de (1.11), on a :

$$\begin{aligned} G_{ij}^k(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{m=1}^2 \frac{1}{v_m^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{2} \left[ \cosh^{-1} \left( \frac{v_m k \Delta t}{r} \right) - \cosh^{-1} \left( \frac{v_m (k-1) \Delta t}{r} \right) \right] \right. \\ &\quad + \left[ k \sqrt{k^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} - (k-1) \sqrt{(k-1)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} \right] \\ &\quad \left. (-1)^m \frac{1}{2} (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) \frac{v_m^2 \Delta t^2}{r^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} H_{ij}^k(\mathbf{x}) &= \frac{\mu}{2\pi\rho r} \sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{-A_1 \delta_{1m} + A_3 \delta_{2m}}{v_m^2} \left[ k / \sqrt{k^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (k-1) / \sqrt{(k-1)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} \right] - (-1)^m \frac{2A_2 \Delta t^2}{r^2} \right. \\ &\quad \left. \left[ k \sqrt{k^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} - (k-1) \sqrt{(k-1)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

## b. Interpolation temporelle linéaire

En sélectionnant la fonction d'interpolation constante par morceaux :

$$G_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} \frac{\tau - t_{m-1}}{\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, N\Delta t - \tau) d\tau + \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \frac{t_m - \tau}{\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, N\Delta t - \tau) d\tau$$

et utilisant l'intégration par partie :

$$\begin{aligned} G_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) &= \int_{(N-m)\Delta t}^{(N-m+1)\Delta t} \left[ (N-m+1) - \frac{\tau}{\Delta t} \right] G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\ &+ \int_{(N-m-1)\Delta t}^{(N-m)\Delta t} \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - (N-m) \right] G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \end{aligned}$$

et posant :

$$\begin{aligned} G_{ij}^k(\mathbf{x}) &= G_{ij1}^k(\mathbf{x}) + G_{ij2}^{k-1}(\mathbf{x}) \\ &= \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \left[ k - \frac{\tau}{\Delta t} \right] G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \int_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - (k-2) \right] G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \end{aligned}$$

on a

$$G_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) = G_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x})$$

Pour calculer  $G_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x})$ , nous définissons  $\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau$

et  $\bar{\bar{G}}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int \int_0^t G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau$  les primitives d'ordre 1 et 2 de  $G_{ij}(\mathbf{x}, t)$ .

$$\begin{aligned} G_{ij1}^k(\mathbf{x}) &= \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \left[ k - \frac{\tau}{\Delta t} \right] G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\ &= \left[ k\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, t) - \frac{t\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} + \frac{\bar{\bar{G}}_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \right]_{t=(k-1)\Delta t}^{t=k\Delta t} \\ &= -\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (k-1)\Delta t) + \frac{1}{\Delta t} [\bar{\bar{G}}_{ij}(\mathbf{x}, k\Delta t) - \bar{\bar{G}}_{ij}(\mathbf{x}, (k-1)\Delta t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{ij2}^k(\mathbf{x}) &= \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - (k-1) \right] G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\ &= \left[ -(k-1)\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, t) + \frac{t\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} - \frac{\bar{\bar{G}}_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \right]_{t=(k-1)\Delta t}^{t=k\Delta t} \\ &= \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, k\Delta t) - \frac{1}{\Delta t} [\bar{\bar{G}}_{ij}(\mathbf{x}, k\Delta t) - \bar{\bar{G}}_{ij}(\mathbf{x}, (k-1)\Delta t)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_{ij}^k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta t} [\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, k\Delta t) - 2\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (k-1)\Delta t) + \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (k-2)\Delta t)]$$

À partir de (1.10) et de (1.11), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} G_{ij}^k(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{m=1}^2 \frac{1}{v_m^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{2} \left[ k \cosh^{-1} \left( \frac{v_m N \Delta t}{r} \right) - 2(k-1) \cosh^{-1} \left( \frac{v_m (k-1)\Delta t}{r} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (k-2) \cosh^{-1} \left( \frac{v_m (k-2)\Delta t}{r} \right) \right] + (-1)^m \frac{1}{2} (\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) \frac{v_m^2 \Delta t^2}{r^2} \right. \\ &\quad \left[ k^2 \sqrt{k^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} - 2(k-1)^2 \sqrt{(k-1)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} + (k-2)^2 \sqrt{(k-2)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} \right] \\ &\quad - (-1)^m \frac{1}{3} (\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) \left[ \left( k^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2} \right)^{3/2} - 2 \left( (k-1)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2} \right)^{3/2} \right. \\ &\quad \left. + \left( (k-2)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2} \right)^{3/2} \right] - (-1)^m (\delta_{ij} \delta_{2m} - r_{,i}r_{,j}) \left[ \sqrt{k^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \sqrt{(k-1)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} + \sqrt{(k-2)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Le calcul de  $H_{ij}^{Nm}(\mathbf{x})$  s'effectue de façon similaire :

$$H_{ij}^{Nm}(\mathbf{x}) = H_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} H_{ij}^k(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\Delta t} [\bar{H}_{ij}(\mathbf{x}, k\Delta t) - 2\bar{H}_{ij}(\mathbf{x}, (k-1)\Delta t) + \bar{H}_{ij}(\mathbf{x}, (k-2)\Delta t)] \\ &= \frac{\mu}{2\pi\rho r} \sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{-A_1 \delta_{1m} + A_3 \delta_{2m}}{v_m^2} \left[ \sqrt{k^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} - 2 \sqrt{(k-1)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{(k-2)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} \right] - (-1)^m \frac{2A_2}{3} \frac{\Delta t^2}{r^2} \left[ \left( k^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2} \right)^{3/2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left( (k-1)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2} \right)^{3/2} + \left( (k-2)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2} \right)^{3/2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.24)$$

### c. Interpolation temporelle mixte

L'emploi de l'interpolation temporelle linéaire donnera évidemment un meilleur résultat que l'interpolation temporelle constante. Pourtant, l'hypothèse de la continuité du vecteur-contrainte à la frontière n'est pas physiquement correcte dans certains cas où le vecteur-contrainte peut être discontinu : c'est le cas d'une application brutale de la force externe surfacique (en 3D) ou linéique (en 2D) sur la frontière, ou encore le cas de la réflexion d'ondes à une frontière fixe. Dans ces cas, l'utilisation de l'interpolation temporelle mixte semble plus correcte : dans chaque intervalle de temps, la variation du déplacement est supposée linéaire alors que le vecteur-contrainte reste constant. Comme le calcul de  $H_{ij}^k(\mathbf{x})$ , associé à la variation linéaire du champ de déplacement, intervient deux pas de temps

consécutifs, il convient donc de supposer que le vecteur-contrainte est constant pendant l'intervalle correspondant. En conséquence,  $H_{ij}^k(\mathbf{x})$  est obtenu par (1.24) et  $G_{ij}^k(\mathbf{x})$  est calculé par :

$$\begin{aligned} G_{ij}^k(\mathbf{x}) = & \frac{1}{4\pi\rho} \sum_{m=1}^2 \frac{1}{v_m^2} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{2} \left[ \cosh^{-1} \left( \frac{v_m k \Delta t}{r} \right) - \cosh^{-1} \left( \frac{v_m (k-2) \Delta t}{r} \right) \right] \right. \\ & + \left[ k \sqrt{k^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} - (k-2) \sqrt{(k-2)^2 - \frac{r^2}{v_m^2 \Delta t^2}} \right] \\ & \left. (-1)^m \frac{1}{2} (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) \frac{v_m^2 \Delta t^2}{r^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.25)$$

### 1.3.3 Équations intégrales discrétisées

Une fois la discrétisation dans le temps et dans l'espace est effectuée, un système d'équations algébriques sera établi pour construire une solution approchée du problème original. Dans ce travail, la méthode de collocation est utilisée. Selon cette méthode, l'équation intégrale (1.13) doit être exactement vérifiée aux points de collocation à tous les instants. En pratique, la collocation se fait à tous les nœuds d'interpolation, c'est-à-dire que les points de collocation coïncident avec les nœuds d'interpolation.

L'équation intégrale (1.13) s'écrit au nœud  $\mathbf{x}_k$  à l'instant  $t = N\Delta t$

$$c_{ij} U_{jk}^N = \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \left[ \int_{\Gamma_e} G_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_k(\mathbf{x}) d\Gamma \right] T_{jk}^m - \left[ \int_{\Gamma_e} H_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_k(\mathbf{x}) d\Gamma \right] U_{jk}^m \right\} \quad (1.26)$$

Écrivons l'équation (1.26) pour tous les nœuds  $\mathbf{x}_k$  ( $k=1..N$ ); nous avons un système d'équations s'exprimant sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{c} \mathbf{U}^N = \sum_{m=1}^N (\mathbf{G}^{N-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1} \mathbf{U}^m) \quad (1.27)$$

ou sous la forme :

$$\bar{\mathbf{H}}^1 \mathbf{U}^N = \mathbf{G}^1 \mathbf{T}^N + \sum_{m=1}^{N-1} (\mathbf{G}^{N-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1} \mathbf{U}^m) \quad (1.28)$$

dans lesquelles

- $\mathbf{U}^N, \mathbf{T}^N$  vecteurs de déplacement et de contrainte nodaux
- $\mathbf{G}^k, \mathbf{H}^k$  matrices "noyau" de taille  $2K \times 2K$ . Ces matrices sont pleines. Cela est dû au fait que, par l'intermédiaire des solutions fondamentales, tous les points de  $\Gamma$  ont une influence sur tous les autres points.
- $\mathbf{c}$  matrice ( $2K \times 2K$ ) contenant les termes  $c_{ij}$  sur sa diagonale
- $\bar{\mathbf{H}}^1 = \mathbf{H}^1 + \mathbf{c}$

L'équation (1.28) fait appel à la structure d'une convolution discrète qui fait a priori apparaître les valeurs à tous les instants antérieurs; cela met en évidence le fait que les inconnues à chaque instant dépendent non seulement des conditions aux limites mais aussi de l'histoire du chargement.

Comme les variables à l'instant considéré  $t$  sont pour moitié inconnues et pour moitié données par les conditions aux limites du problème, il faut procéder à une permutation de colonnes de manière à isoler les valeurs nodales restées inconnues après prise en compte des conditions aux limites, de sorte que l'équation (1.28) prend la forme

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^N = \mathbf{B}\mathbf{Y}^N + \sum_{m=1}^{N-1} (\mathbf{G}^{N-m+1}\mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1}\mathbf{U}^m) \quad (1.29)$$

dans laquelle

$\mathbf{X}^N$  vecteur des valeurs nodales inconnues

$\mathbf{Y}^N$  vecteur des valeurs nodales données

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$  matrices associées à  $\mathbf{X}^N$  et  $\mathbf{Y}^N$ . Ces matrices sont établies à la première étape et ne changent pas durant le processus itératif. La matrice  $\mathbf{A}$ , matrice résolvante, est normalement pleine et non-symétrique, ce qui constitue une différence majeure par rapport aux méthodes des éléments finis.

L'équation (1.28) ou (1.29) constitue un processus de résolution d'avancement pas à pas dans le temps (*time-marching scheme*): les inconnues à l'instant  $t$  sont calculées en supposant résolu tous les instants antérieurs, et les conditions initiales à  $t = 0$  permettent de démarrer ce processus.

### Les étapes à résoudre du problème

1. Assemblage des matrices  $\mathbf{G}^1, \bar{\mathbf{H}}^1 \dots \mathbf{G}^N, \mathbf{H}^N$
2. Prise en compte des conditions aux limites, construction des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$
3. Résolution de (1.28) ou (1.29) à chaque pas de temps.

#### 1.3.4 Evaluation numérique des intégrales élémentaires

Les intégrales élémentaires sont habituellement calculées de manière numérique par la quadrature de Gauss en coordonnées intrinsèques :

$$\int_{\Gamma_e} G_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_k(\mathbf{x}) d\Gamma = \sum_{\alpha=1}^3 \int_{-1}^1 G_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}(\xi)) \mathcal{N}_\alpha(\xi) |J(\xi)| d\xi$$

$$\int_{\Gamma_e} H_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_k(\mathbf{x}) d\Gamma = \sum_{\alpha=1}^3 \int_{-1}^1 H_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}(\xi)) \mathcal{N}_\alpha(\xi) |J(\xi)| d\xi$$

Cependant, l'intégration numérique doit être évaluée en faisant attention à la singularité des solutions fondamentales  $G_{ij}, H_{ij}$ . En particulier, la solution  $H_{ij}$  est fortement singulière et les intégrales correspondantes n'existent que dans le sens de la valeur principale de Cauchy. En conséquence, on doit distinguer trois types d'intégrales, chacune ayant le traitement qui lui convient.

### a. Intégrales élémentaires régulières

A l'instant  $t$  considéré, la singularité apparaît lorsque le point d'observation  $\mathbf{x}$  s'approche du point source  $\boldsymbol{\chi}$ . Cette approche correspond toujours à l'instant initial  $t_o$ , et non pas aux instants ultérieurs. Par conséquent, aux instants ultérieurs ( $t_N, N > 1$ ) les intégrales élémentaires sont toutes régulières. Pour le premier pas de temps, elles sont régulières si le point d'observation  $\mathbf{x}$  ne se trouve pas dans le même élément que le point source  $\boldsymbol{\chi}$ .

Le choix du nombre de points de Gauss est crucial pour ce type d'intégrale. Il dépend de la position relative entre  $\mathbf{x}$  et  $\boldsymbol{\chi}$ . En effet, la présence de termes en  $\ln(r), r^{-1}$  ( $r = |\boldsymbol{\chi} - \mathbf{x}|$ ) provenant des solutions élémentaires entraîne des variations très fortes de l'intégrale si  $\mathbf{x}$  est proche de  $\boldsymbol{\chi}$ . Au contraire, si  $\mathbf{x}$  est éloigné de  $\boldsymbol{\chi}$ , ces termes deviennent à peu près constants. Bien entendu, la notion de *proximité* de  $\mathbf{x}$  à  $\boldsymbol{\chi}$  est à prendre dans un sens relatif. Une estimation d'erreur est alors nécessaire. Cette estimation doit permettre de déterminer le nombre de sous-éléments et le nombre de points de Gauss pour chaque élément, de sorte que la précision de l'intégration soit quasiment égale pour tous les éléments quel que soit sa position relative par rapport au point source. Dans ce travail, l'estimation approximative décrite dans [Beer et Watson, 1992] est utilisée ; le nombre de sous-éléments (qui varie de 1 à 4) et l'ordre de l'intégration (qui varie de 3 à 10) peuvent se faire automatiquement.

### b. Intégrales élémentaires singulières

Lorsque le point d'observation  $\mathbf{x}$  se trouve dans le même élément que le point source  $\boldsymbol{\chi}$ , la précision de l'évaluation numérique des intégrales élémentaires est sérieusement dégradée même si un grand nombre de points de Gauss sont utilisés. Dans ce cas, il faut diviser l'élément considéré en sous-éléments. Cette division (décrite dans [Beer et Watson, 1992]), qui dépend de la position du point source dans l'élément (aux extrémités ou au milieu), rend ces intégrales régulières. On peut donc appliquer les techniques présentées ci-dessus pour les évaluer. Les intégrales faiblement singulières sont estimées de la même façon.

Cependant, lorsque le point d'observation coïncide avec le point source, l'intégrale de la matrice  $\bar{\mathbf{H}}^1$  est fortement singulière ; elle n'existe que dans le sens de la valeur principale de Cauchy et donc ne peut pas être correctement calculée par la quadrature de Gauss. Un schéma d'intégration indirecte est présenté dans la partie suivante.

### c. Évaluation du bloc diagonal de la matrice $\bar{\mathbf{H}}^1$

Le bloc diagonal (2x2) de la matrice  $\bar{\mathbf{H}}^1$  contient le coefficient  $c_{ij}$  et la valeur principale de Cauchy de l'intégrale de  $H_{ij}(\mathbf{x})$  :

$$\bar{H}_{ij}^1 = c_{ij} + \int_{\Gamma_1} H_{ij}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma$$

( $\mathcal{N}_1$  est la fonction de forme au nœud *singulier*,  $\Gamma_1$  est l'élément *singulier*)

De même, pour le cas statique :

$${}^s H_{ij} = c_{ij} + \int_{\Gamma_1} {}^s H_{ij}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma$$

Alors

$$\bar{H}_{ij}^1 = {}^s H_{ij} + \int_{\Gamma_1} (H_{ij}(\mathbf{x}) - {}^s H_{ij}(\mathbf{x})) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (1.30)$$

Comme la différence  $H_{ij}(\mathbf{x}) - {}^s H_{ij}(\mathbf{x})$  ne contient aucune singularité, le deuxième terme de (1.30) peut être calculé grâce aux techniques d'intégration numérique usuelle. Le premier terme  ${}^s H_{ij}$  est fortement singulier, mais il peut être évalué grâce au concept de "translation du corps rigide" [Ahmad et Banerjee, 1988]. On considère en fait, en régime statique, un champ de déplacement unitaire de translation du corps rigide qui entraîne un champ de contrainte nul.

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} \quad \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{I} : \text{vecteur unitaire de déplacement dans une direction choisie})$$

L'application de l'équation (1.28) pour cet état conduit à :

$${}^s \bar{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

ou

$${}^s \bar{H}_{ij} = - \left[ \sum_{\alpha=2}^3 \int_{\Gamma_1} {}^s H_{ij}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma + \sum_{e=2}^E \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma_e} {}^s H_{ij}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma \right] \quad (1.31)$$

Cela signifie que les termes singuliers situés sur le bloc diagonal (2x2) de  ${}^s \bar{\mathbf{H}}$  peuvent être déterminés à partir de la somme des termes hors de la diagonale qui sont réguliers.

En effet, l'égalité de singularité des solutions élémentaires dynamique et statique, ou la régularité de la différence de ces deux dernières, ramène la régularisation de l'équation intégrale dynamique à celle de l'équation statique. En d'autres termes, les intégrales singulières du problème dynamique sont régularisées en retranchant le noyau statique au noyau dynamique.

En présence du problème impliquant un espace semi-infini, la technique de "translation du corps rigide" n'est plus valable, car le domaine  $\Omega$  considéré n'est pas fermé. Des éléments dits enfermants (*enclosing element*) [Ahmad et Banerjee, 1988] sont introduits pour surmonter cette difficulté (figure 1.3). L'utilisation de ces éléments est basée sur l'hypothèse que le déplacement et le vecteur-contrainte aux éléments enfermants à une distance suffisamment importante a un effet négligeable sur le déplacement en tous les points réels du modèle. Ainsi, le bloc diagonal de  ${}^s \bar{\mathbf{H}}$  est obtenu par la somme des termes hors de la diagonale calculée sur tous les éléments réels du modèle aussi bien que sur les éléments enfermants :

$${}^s H_{ij} = - \left[ \sum_{\alpha=2}^3 \int_{\Gamma_1} {}^s H_{ij}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma + \sum_{e=2}^E \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma_e} {}^s H_{ij}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma + \sum_{l=2}^L \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma_l} {}^s H_{ij}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma \right] \quad (1.32)$$

( $L$  est le nombre des éléments enfernants,  $\Gamma_l$  sont des éléments enfernants)

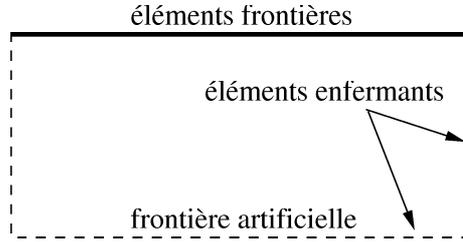


FIG. 1.3 – Modélisation de l'espace semi-infini

## 1.4 Couplage éléments finis/éléments frontières

Dans la formulation de couplage FEM/BEM présentée ci-après, la zone d'éléments frontières sera considérée comme une zone d'éléments finis équivalente et assemblée à la celle-ci. La procédure de couplage directe est utilisée.

### 1.4.1 Méthode des éléments finis en élastodynamique

#### a. Formulation de base

Considérons un domaine  $\Omega$  élastique linéaire à condition de déformation plane et soumis aux forces dynamiques externes et/ou à l'incidence des ondes sismiques; l'équation d'équilibre discrétisée par éléments finis de ce domaine à l'instant donné  $t = N\Delta t$  peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\mathbf{U}^t = \mathbf{R}^t \quad (1.33)$$

dans laquelle

$\ddot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}$  : vecteurs d'accélération, de vitesses et de déplacements nodaux

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega \quad \text{matrice de masse}$$

$$\mathbf{C} = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \xi \mathbf{N} d\Omega \quad \text{matrice d'amortissement}$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad \text{matrice de rigidité}$$

$$\mathbf{R}^t = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{F} d\Omega + \sum_{e=1}^{n'} \int_{\Gamma_e^t} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^d d\Gamma \quad \text{vecteur des forces externes}$$

Pour tenir compte de l'irréversibilité et/ou de la non-linéarité matérielle du domaine en question, il est préférable de réécrire l'équation d'équilibre sous une forme incrémentale : les inconnues ne sont plus les déplacements nodaux  $\mathbf{U}^t$  mais leurs incréments  $\Delta\mathbf{U}^t$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_k^{N+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_k^{N+1} + {}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}_k^{N+1} = \mathbf{R}^{N+1} - \mathbf{F}_{k-1}^{N+1} \quad (1.34)$$

où

$$\Delta\mathbf{U}_k^N = \mathbf{U}_k^{N+1} - \mathbf{U}_{k-1}^{N+1}$$

$${}^t\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^t \mathbf{B} d\Omega \quad \text{matrice de rigidité tangente}$$

$$\mathbf{F}^t = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}^t - \boldsymbol{\sigma}_o) d\Omega \quad \text{matrice des efforts internes}$$

$\boldsymbol{\sigma}_o$  indique la contrainte initiale (si elle existe)

L'équation (1.34) fait intervenir un schéma d'itérations pour assurer au fur et à mesure l'équilibre des forces externes et internes. Dans cette équation, la matrice de rigidité tangente  ${}^t\mathbf{K}$  varie continûment pendant le temps car elle est fonction de l'état de contrainte - déformation actuel  ${}^t\mathbf{K} = {}^t\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ . Il existe plusieurs techniques afin d'évaluer cette matrice, parmi lesquelles deux schémas largement utilisés : le schéma de Newton-Raphson et le schéma de Newton-Raphson modifié. Pour le premier, la matrice de rigidité tangente nécessite d'être reconstruite après chaque itération, ce qui entraîne beaucoup d'opérations de calcul. Quant au second schéma, le taux de convergence diminue mais la reconstruction de la matrice de rigidité tangente ne doit s'effectuer qu'une seule fois pour chaque incrément de temps  $\Delta t$ . Dans ce travail, nous avons adopté le schéma de Newton-Raphson modifié.

## b. Intégration directe

Une procédure d'intégration directe permet d'avancer 'pas à pas' dans le temps, c'est-à-dire de déterminer l'état actuel à l'instant  $t$  en connaissant les états antérieurs. Une telle procédure est numériquement indispensable pour le calcul de la réponse en régime transitoire des systèmes non-linéaires. De plus, il est très utile d'observer l'évolution des phénomènes physiques en temps réel. Néanmoins, cette procédure a un problème majeur : l'instabilité des solutions numériques. En fait, dans beaucoup de cas, les solutions numériques sont sensiblement instables : soit elles oscillent autour des valeurs réelles, soit elles s'éloignent des valeurs réelles et tendent vers l'infini. En conséquence, un schéma d'intégration implicite est préférable car on peut contrôler la stabilité de la solution.

Parmi plusieurs schémas d'intégration directe, nous avons sélectionné le schéma d'intégration à un seul pas de Newmark, qui est le plus employé grâce à son efficacité pour le contrôle de la stabilité numérique. Selon ce schéma, les vitesses  $\dot{\mathbf{U}}^{N+1}$  et les déplacements  $\mathbf{U}^{N+1}$  sont calculés par la formule

$$\dot{\mathbf{U}}^{N+1} = \dot{\mathbf{U}}^N + [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{U}}^N + \gamma\ddot{\mathbf{U}}^{N+1}]\Delta t \quad (1.35a)$$

$$\mathbf{U}^{N+1} = \mathbf{U}^N + \dot{\mathbf{U}}^N \Delta t + [(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{\mathbf{U}}^N + \beta\ddot{\mathbf{U}}^{N+1}]\Delta t^2 \quad (1.35b)$$

Les coefficients  $\gamma$  et  $\beta$  doivent satisfaire aux conditions  $\gamma \geq 1/2$  et  $\beta \geq 1/4$  pour que la convergence soit inconditionnellement stable, c'est-à-dire que la stabilité ne dépende pas du choix du pas de temps  $\Delta t$ . Nous avons choisi :  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$ , ce qui assure une convergence inconditionnellement stable et aussi une bonne précision. Ce choix correspond à la règle du trapèze :

$$\dot{\mathbf{U}}_k^{N+1} = \dot{\mathbf{U}}^N + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{U}}^N + \ddot{\mathbf{U}}_k^{N+1}) \quad (1.36a)$$

$$\mathbf{U}_k^{N+1} = \mathbf{U}^N + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\mathbf{U}}^N + \dot{\mathbf{U}}_k^{N+1}) = \mathbf{U}^N + \dot{\mathbf{U}}^N \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{\mathbf{U}}^N + \ddot{\mathbf{U}}_k^{N+1}) \quad (1.36b)$$

Reportons les relations (1.36a) et (1.36b) dans l'équation (1.34) ; on obtient l'équation :

$${}^t\bar{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{U}_k^N = \mathbf{R}^{N+1} - \bar{\mathbf{F}}_{k-1}^{N+1} \quad (1.37)$$

dans laquelle

$${}^t\bar{\mathbf{K}} = {}^t\mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{k-1}^{N+1} &= \mathbf{F}_{k-1}^{N+1} + \left(\frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C}\right)(\mathbf{U}_{k-1}^{N+1} - \mathbf{U}^N) \\ &\quad - \left(\frac{4}{\Delta t}\mathbf{M} + \mathbf{C}\right)\dot{\mathbf{U}}^N - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^N \end{aligned}$$

Les inconnues dans l'équation (1.37) sont les incréments des déplacements nodaux après chaque itération  $\Delta\mathbf{U}_k^{N+1}$ . Cette équation d'éléments finis n'est donc pas directement utilisée pour coupler avec l'équation d'éléments frontières dont les inconnues sont les déplacements nodaux. Alors, il faut modifier l'équation (1.37) de manière à faire apparaître les déplacements  $\mathbf{U}_k^{N+1}$  :

$${}^t\bar{\mathbf{K}}^N\mathbf{U}_k^{N+1} = \mathbf{R}^{N+1} + \mathbf{Z}_{k-1}^{N+1} \quad (1.38)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k-1}^{N+1} &= -\mathbf{F}_{k-1}^{N+1} + {}^t\mathbf{K}^N\mathbf{U}_{k-1}^{N+1} \\ &\quad + \mathbf{M}\left(\frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{U}^N + \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^N + \ddot{\mathbf{U}}^N\right) + \mathbf{C}\left(\frac{2}{\Delta t}\mathbf{U}^N + \dot{\mathbf{U}}^N\right) \end{aligned}$$

### c. Critère de convergence

La procédure itérative (1.38) ne s'arrête que quand un ou des critères sont satisfaits. Comme on a besoin de calculer les déplacements nodaux à l'instant  $t$ , il est naturel de définir un critère en déplacement. En principe, un critère peut être donné soit en valeur absolue soit en valeur relative. Pour le premier choix, il s'agit d'arrêter la procédure itérative à chaque pas de temps lorsque la valeur absolue de la norme de l'incrément des déplacements nodaux est inférieure à une tolérance prédéfinie. Pour le second choix, à la

fin d'une procédure itérative, le rapport de la norme de l'incrément des déplacements à celui des déplacements réels doit être inférieur à une tolérance. En pratique, le critère en valeur relative est habituellement utilisé; il est exprimé par la formule :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{U}_k^N\|}{\|\mathbf{U}^{N+1}\|} < \epsilon_d \quad (1.39)$$

La tolérance  $\epsilon_d$  doit être bien choisie. En effet, si elle est trop lâche, les résultats obtenus sont imprécis; par contre si elle est trop serrée, il faut effectuer beaucoup d'opérations de calcul de manière inutile pour obtenir des résultats précis. En géotechnique, pour un critère de déplacement en valeur relative, une tolérance  $\epsilon_d$  de l'ordre  $10^{-4}$  à  $10^{-2}$  est généralement acceptable.

Dans la formule (1.39), comme le vecteur  $\mathbf{U}^{N+1}$  n'est pas connu, il est généralement acceptable d'utiliser dans le critère (1.39) la dernière valeur  $\mathbf{U}_k^{N+1}$  comme une approximation de  $\mathbf{U}^{N+1}$ . Cependant, cette approximation n'est pas vraiment appropriée dans certains cas où les déplacements changent très peu après chaque itération mais ils continuent à changer pour beaucoup d'itérations, par exemple pour des analyses des solides élasto-plastiques. Dans ces cas, un critère supplémentaire est nécessaire. Des critères en force (1.40) ou en énergie interne (1.41) peuvent être alternativement utilisés :

$$\frac{\|(\mathbf{R}^{N+1} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_k^{N+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_k^{N+1}) - \mathbf{F}_k^{N+1}\|}{\|(\mathbf{R}^{N+1} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_k^{N+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_k^{N+1}) - \mathbf{F}^N\|} < \epsilon_f \quad (1.40)$$

$$\frac{\|\Delta \mathbf{U}_k^N [(\mathbf{R}^{N+1} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_k^{N+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_k^{N+1}) - \mathbf{F}_k^{N+1}]\|}{\|\Delta \mathbf{U}_1^N [(\mathbf{R}^{N+1} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_k^{N+1} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_k^{N+1}) - \mathbf{F}^N]\|} < \epsilon_e \quad (1.41)$$

Une fois un critère ou des critères satisfait(s), le vecteur  $\mathbf{U}^{N+1}$  est connu (par une valeur approchée  $\mathbf{U}_k^{N+1}$ ) et ses dérivées temporelles  $\dot{\mathbf{U}}^{N+1}$ ,  $\ddot{\mathbf{U}}^{N+1}$  sont calculées par :

$$\dot{\mathbf{U}}^{N+1} = \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{U}^{N+1} - \mathbf{U}^N) - \dot{\mathbf{U}}^N \quad (1.42a)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^{N+1} = \frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{U}^{N+1} - \mathbf{U}^N) - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^N - \ddot{\mathbf{U}}^N \quad (1.42b)$$

### 1.4.2 Matrice de rigidité équivalente de la zone d'éléments frontières

Le couplage FEM/BEM ne peut évidemment s'effectuer que dans le cas où les deux systèmes d'équations de ces méthodes font intervenir les mêmes variables. Or, la méthode des éléments finis donne la relation entre le vecteur des déplacements nodaux et celui des forces nodales. La méthode des éléments frontières, au contraire, relie les déplacements nodaux aux vecteurs-contraintes nodaux. Ainsi, ceci conduit d'abord à convertir le vecteur des contraintes nodales en vecteur des forces nodales.

On considère, à l'instant  $t$  quelconque, un élément  $e$  soumis à une distribution de contrainte  $\mathbf{t}$ . Le principe des puissances virtuelles est considéré pour établir une relation

entre la contrainte élémentaire et la force élémentaire :

$$\begin{aligned}\delta\Pi^e &= \int_{\Gamma_e} \delta\mathbf{u}^{eT} \mathbf{t}^e d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \delta(\mathcal{N}\mathbf{U}^e)^T (\mathcal{N}\mathbf{T}^e) d\Gamma \\ &= \delta\mathbf{U}^{eT} \left( \int_{\Gamma_e} \mathcal{N}^T \mathcal{N} d\Gamma \right) \mathbf{T}^e = \delta\mathbf{U}^{eT} \mathbf{F}^e\end{aligned}\quad (1.43)$$

d'où

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{P}^e \mathbf{T}^e \quad (P_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} \mathcal{N}_i \mathcal{N}_j d\Gamma : \text{matrice de distribution})$$

En assemblant la matrice  $\mathbf{P}^e$  de tous les éléments de la zone d'éléments frontières, on obtient la matrice de distribution globale  $\mathbf{P}$  qui sert à convertir, dans le sens intégral, le vecteur des contraintes nodales en vecteur des forces nodales *équivalent* :

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}\mathbf{T} \quad (1.44)$$

Une fois que les contraintes nodales sont converties en forces nodales, l'équation intégrale discrétisée par éléments frontières peut être transformée pour faire apparaître sa matrice de rigidité équivalente, en multipliant tous les deux membres de l'équation (1.28) par le terme  $\mathbf{P}(\mathbf{G}^1)^{-1}$  :

$${}^b\mathbf{K} \mathbf{U}^{N+1} = \mathbf{R}^{N+1} + \mathbf{Z}^N \quad (1.45)$$

dans laquelle

$${}^b\mathbf{K} = \mathbf{P}(\mathbf{G}^1)^{-1} \bar{\mathbf{H}}^1 \quad \text{matrice de rigidité équivalente de la zone BE}$$

$$\mathbf{R}^{N+1} = \mathbf{P}\mathbf{T}^{N+1}$$

$$\mathbf{Z}^N = \mathbf{P}(\mathbf{G}^1)^{-1} \sum_{m=1}^{N-1} (\mathbf{G}^{N-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1} \mathbf{U}^m)$$

L'équation (1.45) est maintenant compatible avec l'équation (1.38).

### 1.4.3 Procédure de couplage FEM/BEM

Nous présenterons ici la procédure de couplage éléments finis/éléments frontières proposée par Gatmiri et Kamalian [2002]. Considérons le domaine  $\Omega$  divisé en deux zones : zone BE ( $\Gamma_B \cap \Gamma_I$ ), modélisée par des éléments frontières, et zone FE ( $\Omega_F$ ), discrétisée par des éléments finis, connectées par leur interface commune  $\Gamma_I$  comme illustré sur la figure 1.4. La démarche pour le couplage FEM/BEM se compose de trois étapes :

D'abord, l'équation du domaine FE est réécrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff}^N & \mathbf{K}_{fi}^N \\ \mathbf{K}_{if}^N & \mathbf{K}_{ii}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_i^F \end{Bmatrix}_k^{N+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_f \\ \mathbf{R}_i^F \end{Bmatrix}^{N+1} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Z}_f \\ \mathbf{Z}_i^F \end{Bmatrix}_{k-1}^{N+1} \quad (1.46)$$

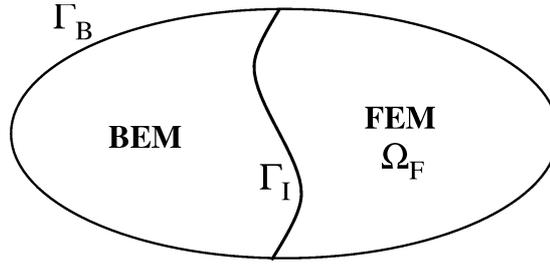


FIG. 1.4 – Shéma de couplage FEM/BEM

De manière similaire, l'équation du domaine BE est réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} {}^b\mathbf{K}_{ii} & {}^b\mathbf{K}_{ib} \\ {}^b\mathbf{K}_{bi} & {}^b\mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i^B \\ \mathbf{U}_b \end{Bmatrix}^{N+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_i^B \\ \mathbf{R}_b \end{Bmatrix}^{N+1} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Z}_i^B \\ \mathbf{Z}_b \end{Bmatrix}^N \quad (1.47)$$

Ensuite, pour assembler les équations (1.46) et (1.47), les conditions de continuité doivent être satisfaites : sur l'interface commune  $\Gamma_I$ , les déplacements nodaux des zones BE et FE doivent être égaux et l'équilibre doit être respecté :

$$\mathbf{U}_i^F = \mathbf{U}_i^B \quad \text{condition de compatibilité} \quad (1.48a)$$

$$\mathbf{R}_i^F = -\mathbf{R}_i^B \quad \text{condition d'équilibre} \quad (1.48b)$$

Enfin, l'assemblage des équations (1.46) et (1.47), en tenant compte les conditions (1.48a) et (1.48b), entraîne un système d'équations couplé FEM/BEM comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff}^N & \mathbf{K}_{fi}^N & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{if}^N & \mathbf{K}_{ii}^N + {}^b\mathbf{K}_{ii} & {}^b\mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{0} & {}^b\mathbf{K}_{bi} & {}^b\mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_b \end{Bmatrix}_k^{N+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_f \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_b \end{Bmatrix}^{N+1} + \begin{Bmatrix} (\mathbf{Z}_f)_{k-1}^{N+1} \\ (\mathbf{Z}_i^F)_{k-1}^{N+1} + (\mathbf{Z}_i^B)^N \\ (\mathbf{Z}_b)^N \end{Bmatrix} \quad (1.49)$$

La résolution de l'équation (1.49), par une procédure d'avancement pas-à-pas dans le temps avec éventuellement un schéma itératif dans chaque pas de temps (si la non-linéarité matérielle est prise en compte), donnera la réponse en régime transitoire du domaine considéré modélisé par FE/BE. L'avantage principale de ce schéma de couplage FEM/BEM réside dans le fait qu'il peut prendre en compte du caractère ouvert des domaines (semi-)infinis et aussi des aspects non-linéaire, irréversible et hétérogène du comportement des matériaux réels. Une remarque importante est l'asymétrie de la matrice de rigidité effective globale, car la matrice de rigidité équivalente de la zone BE est elle-même asymétrique. Cette matrice asymétrique n'est factorisée qu'une seule fois pour une analyse linéaire, mais elle doit être factorisée pour chaque pas de temps, ce qui entraîne une quantité d'opérations de calcul importante. Ce constat constitue l'inconvénient majeur de cette procédure de couplage.

## 1.5 Code de calcul HYBRID

### 1.5.1 Présentation du code

Dans ce travail, un code de calcul nommé HYBRID, initialement écrit par Gatmiri et amélioré par Kamalian, a été modifié et complété. Ce code est capable de résoudre des problèmes bidimensionnels (en déformation plane) statiques ou dynamiques transitoires. Il est particulièrement efficace pour traiter des problèmes dynamiques en géotechnique dans des domaines (semi-)infinis comme la propagation d'ondes, l'interaction dynamique sol-structure, le comportement dynamique des ouvrages et des fondations, l'effet local de site.

Le code HYBRID combine la méthode des éléments finis (FE) et la méthode des éléments frontières (BE). Chaque partie, FE ou BE, peut être utilisée séparément ou elles peuvent être couplées l'une avec l'autre pour analyser des problèmes plus complexes. La partie FE est constituée d'éléments finis de volume quadratiques à 8 nœuds *secs*, qui ont un comportement purement mécanique sans influence de la pression d'eau interstitielle, ou des éléments *saturés* qui obéissent à la théorie des milieux poreux saturés, comportant donc un couplage hydro-mécanique. Cette partie FE peut modéliser différents types de comportement matériel : élastique linéaire, élastique non-linéaire de type hyperbolique (modèle [Duncan et Chang, 1970] et [Hardin et Drnevich, 1972]) ou élasto-plastique (modèle [Prévoist, 1985]). La partie BE, quant à elle, constituée d'éléments frontières linéiques quadratiques à 3 nœuds *secs* ou *saturés* élastiques linéaires (les éléments saturés utilisent la solution fondamentale simplifiée proposée dans ce travail, section 2.5). En tenant compte des avantages et des inconvénients de chaque méthode, la partie FE sert à modéliser l'ouvrage et le sol alentour, qui peuvent avoir un comportement complexe, alors que la partie BE est utilisée pour modéliser le sol dans le champ lointain, supposé élastique linéaire.

Le code est écrit en Fortran (norme 77). Il s'agit d'un programme exécutable, qui est alimenté par un fichier de données en texte et fournit en sortie un fichier de résultats en texte. Ce programme se compose de 4 parties fonctionnelles distinctes :

1. Acquisition des données de base : il s'agit des informations, lues à partir d'un fichier de données en texte, concernant le maillage, le chargement, les matériaux, les conditions aux limites, les conditions initiales et d'autres paramètres. Le stockage de ces données est regroupé dans un seul vecteur ; l'accès aux différentes variables se fait donc par l'intermédiaire d'un système d'index flottants.
2. Remplissage des matrices : c'est une partie cruciale du programme. La tâche principale est la construction de la matrice résolvante (matrice de rigidité de la zone FE, matrice  $\mathbf{G}^1$  de la zone BE ou matrice de rigidité équivalente de la zone FE/BE). Le traitement est différent selon les éléments (FE ou BE) et le comportement associé à l'élément (élastique ou plastique, linéaire ou non). Cette matrice est stockée selon la méthode dite 'ligne de ciel' (skyline).

3. Résolution du système : la méthode pour résoudre le système d'équations est fonction du type de problème considéré. Si seuls des éléments finis secs sont utilisés, alors la méthode de résolution sera la méthode de Mondkar & Powel, applicable aux matrices symétriques. Par contre, s'il existe des éléments finis saturés ou des éléments frontières, on devra utiliser la méthode de Taylor applicable aux matrices asymétriques.
4. Traitement des résultats, mise à jour des données : une subroutine calcule les vecteurs des contraintes incrémentales et totales ; une autre met à jour les déplacements nodaux et les pressions interstitielles pour l'itération suivante ; et un ensemble de subroutines envoie les résultats vers différents fichiers de sortie.

La structure globale du programme est donnée par la figure 1.5.

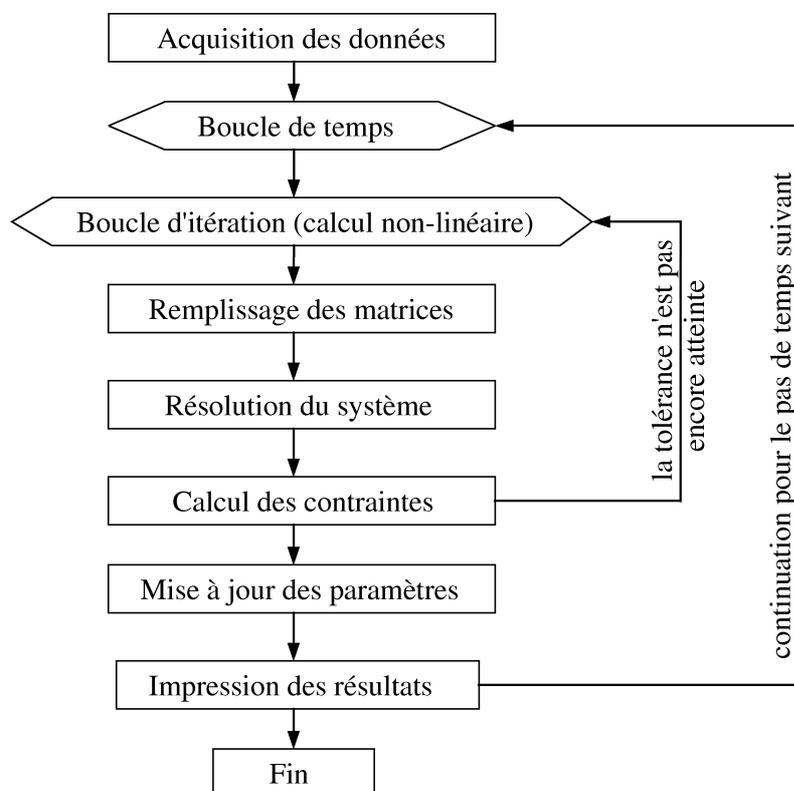


FIG. 1.5 – Algorithme global du code HYBRID

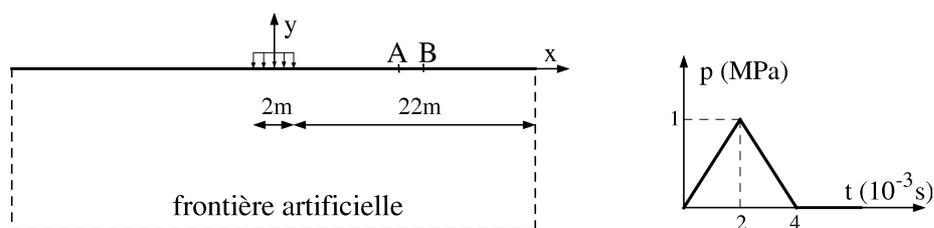
### 1.5.2 Validation du code

Afin de valider le code HYBRID, nous avons réalisé plusieurs cas test. Nous ne présenterons qu'ici deux exemples représentatifs pour illustrer la capacité et l'efficacité du code pour analyser avec précision des problèmes dynamiques en régime transitoire impliquant des domaines semi-infinis.

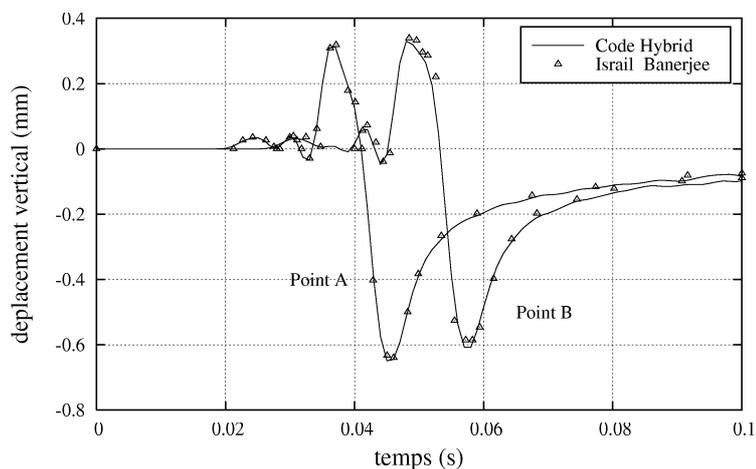
### a. Exemple 1

Cet exemple a pour objectif de valider la partie BE du code HYBRID. Il illustre la génération de l'onde de Rayleigh sur une surface libre de l'espace semi-infini. Le résultat obtenu par HYBRID a été comparé avec celui obtenue par Israil et Banerjee [1990a].

Une impulsion de forme triangulaire est uniformément répartie sur une largeur de 2m d'un espace semi-infini homogène (figure 1.6a). Les propriétés mécaniques de l'espace semi-infini sont  $E = 330$  MPa,  $\nu = 0.25$  et  $\rho = 1785.7$  kg/m<sup>3</sup>. Un maillage uniforme de 44 éléments frontières quadratiques de longueur  $\Delta h = 1$  m est construit. Le domaine est tronqué à une distance de 22 m de la zone de chargement ; cette distance est suffisamment grande pour que la réponse aux points considérés A (10 m,0) et B (13 m,0) ne soit pas compromise par cette troncature. En présence du domaine semi-infini, les éléments enfermants sont introduits pour régulariser les intégrales singulières. Le pas de temps choisi est  $\Delta t = 0.002$  (s), soit  $\Delta t \approx \Delta h/v_1$  où  $v_1$  est la vitesse de l'onde de compression. Le déplacement vertical aux points A,B est tracé sur la figure 1.6b.



(a) Géométrie et Chargement



(b) Mouvement aux points A,B

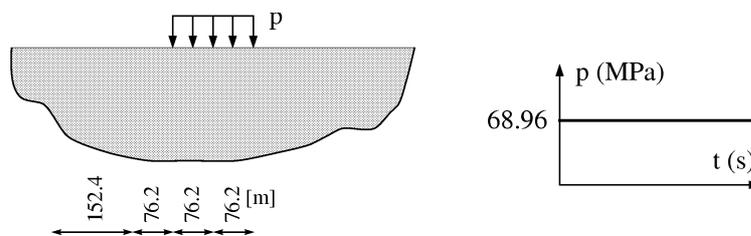
FIG. 1.6 – Génération de l'onde de Rayleigh

Sur la figure 1.6b, on observe que le résultat obtenu par le code HYBRID s'accorde très bien avec celui publié par Israil et Banerjee [1990a], ce qui justifie la précision de la partie BE du code HYBRID.

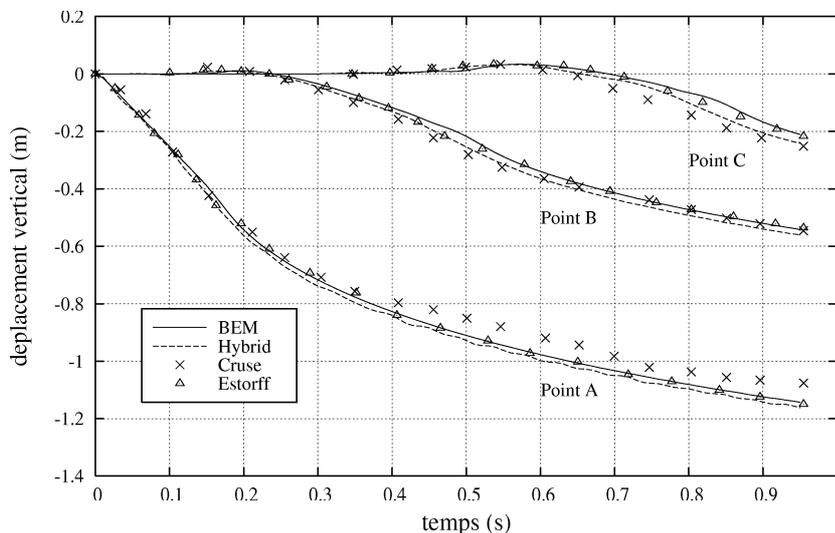
## b. Exemple 2

Cet exemple a pour objectif de valider la partie de couplage FE/BE du code HYBRID. Il illustre la réponse dynamique d'un espace semi-infini à une application brutale d'une pression sur sa surface libre. Cette configuration a été choisie pour comparer le résultat du HYBRID avec celui de Cruse [1968] et de von Estorff et Firuziaan [2200].

Une pression uniformément répartie est brutalement appliquée sur une largeur de 152.4 m d'un espace semi-infini homogène (figure 1.7a). Les propriétés mécaniques de l'espace semi-infini sont  $E = 330$  MPa,  $v_1 = 821$  m/s,  $v_2 = 474$  m/s où  $v_1$ ,  $v_2$  sont respectivement les vitesses de propagation de l'onde P et de l'onde S. Deux maillages réguliers (taille d'éléments  $\Delta h = 19.5$  m) ont été construits : un maillage BE et un maillage FE/BE. En présence du domaine semi-infini, les éléments enfermants sont introduits dans tous les maillages. Le pas de temps choisi est  $\Delta t = 0.01$  s. Le déplacement vertical aux points A(0 m,0), B(152.4 m,0) et C(304.8 m,0) est tracé sur la figure 1.7b.



(a) Géométrie et Chargement



(b) Mouvement aux points A,B,C

FIG. 1.7 – Réponse d'un espace semi-infini à une application brutale de force externe

On observe également sur la figure 1.7b l'accord des résultats BE et FE/BE du code HYBRID avec les solutions de référence, ce qui valide la partie FE et le couplage FE/BE du code HYBRID.

## 1.6 Étude de la stabilité numérique des solutions BEM

En général, une procédure d'avancement pas-à-pas d'une méthode numérique résolvant des équations différentielles (ou des équations aux dérivées partielles) provoque probablement des instabilités indésirables, c'est-à-dire que la solution numérique soit oscille autour de la solution réelle, soit elle s'éloigne graduellement de cette dernière et tend vers l'infini. Cette instabilité purement numérique, fréquemment observée en dynamique transitoire, est rencontrée dans la méthode des éléments finis [Zienkiewicz et Taylor, 2000] et aussi dans la méthode des éléments frontières [Mansur, 1983]. Pour la méthode des éléments finis, ce type de problème a été bien étudié et des schémas d'intégration temporelle inconditionnellement stables ont été proposés et largement appliqués (e.g. Newmark,  $\theta$ -Wilson ..). Quant à la méthode des éléments frontières, un petit nombre de recherches aborde ce problème et, jusqu'à présent, cet aspect très important est encore loin d'être maîtrisé.

Dans le contexte actuel, quelques stratégies ont été proposées. L'objectif commun est d'amortir les ondes artificielles dues au cumul des perturbations pendant le temps. Yu et al. [2000] ont discrétisé les équations intégrales par la méthode de Galerkin et ont trouvé des résultats plus stables que ceux résolus par la méthode de points de collocation usuelle. Marrero et Dominguez [2003] ont amélioré la stabilité par l'usage d'une combinaison linéaire d'équations intégrales aux instants consécutifs avec un algorithme de prédiction. Schanz [2001] a utilisé la solution fondamentale du domaine de Laplace dans le schéma temporel par l'intermédiaire d'une technique dite 'convolution quadrature'. Mansur et ses collègues [Yu et al., 1998], [Yu et al., 2001], [Araujo et al., 1999] ont pris l'idée de base de la méthode  $\theta$ -Wilson et proposé la méthode  $\theta$  dans laquelle l'amortissement numérique est ajouté via le coefficient  $\theta$ . Toutefois, jusqu'à aujourd'hui, aucune procédure inconditionnellement stable avec sa justification mathématique n'a été publiée.

Dans cette section, nous allons étudier cet aspect et discuter des techniques d'amélioration. Nous présenterons aussi la méthode  $\theta$  qui est relativement simple et très efficace.

### 1.6.1 Instabilité numérique

Nous allons traiter dans la suite trois exemples. Le premier concerne un espace semi-infini sous chargement brutal en surface. Le deuxième, en simulant une explosion dans un tunnel situant en-dessous d'un espace semi-infini multicouche, montre l'existence de l'instabilité numérique et l'influence du choix du pas de temps et du schéma d'interpolation temporelle. Le troisième modélise la propagation unidimensionnelle d'ondes dans une colonne de sol; cet exemple présente les facteurs compromettant la stabilité et la précision du résultat, ainsi que une technique d'amélioration.

#### a. Exemple 1 : Espace semi-infini sous chargement en surface

Nous avons repris l'exemple 2 de la section 1.5.2 concernant la réponse d'un espace semi-infini soumis à une application brutale d'une pression externe sur une partie de sa

surface libre. Pour examiner l'effet du choix du pas de temps et de la finesse du maillage, nous avons choisi des valeurs *très différentes* du pas de temps ( $\Delta t = 0.01$  s et  $\Delta t = 0.05$  s) et de la taille des éléments ( $\Delta h = 19.5$  m et  $\Delta h = 76.2$  m). Le déplacement vertical de la station A en fonction du temps correspondant à différents  $\Delta t$  et  $\Delta h$  est présenté sur la figure 1.8.

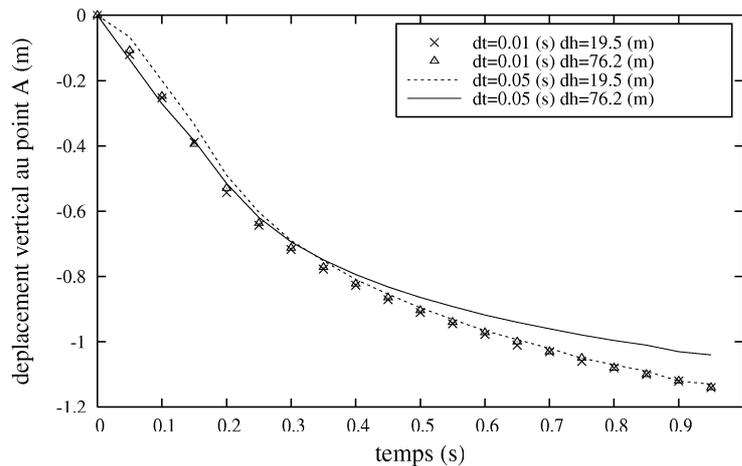


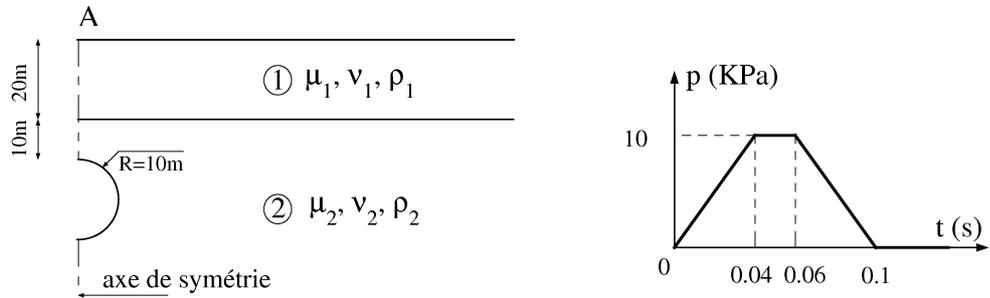
FIG. 1.8 – Espace semi-infini sous chargement en surface

Comme montré sur la figure 1.8, les courbes coïncident bien l'une avec l'autre, sauf celle correspondant à  $\Delta t = 0.05$  s et  $\Delta h = 76.2$  m qui est encore stable, mais moins précise que les autres. Dans cet exemple, la solution numérique est toujours stable quelles que soient les valeurs de  $\Delta t$  et  $\Delta h$ . Ainsi, le choix du pas de temps et de la finesse du maillage n'influence pas la stabilité de la solution de cet exemple.

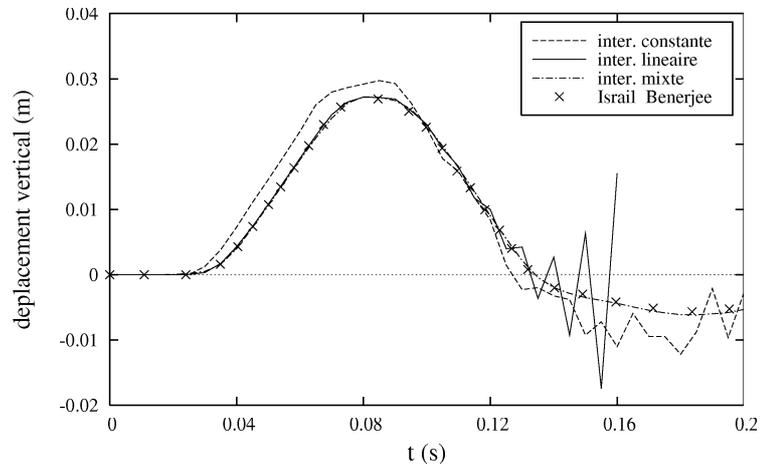
## b. Exemple 2 : Explosion dans un tunnel

La figure 1.9a illustre les paramètres du problème considéré : Un espace semi-infini se compose de deux couches superposées l'une sur l'autre. Les propriétés mécaniques de ces deux couches sont :  $\mu_1 = 647.2$  kPa,  $\nu_1 = 0.35$ ,  $\rho_1 = 3250$  kg/m<sup>3</sup> ;  $\mu_2 = 1991.15$  kPa,  $\nu_2 = 0.3$ ,  $\rho_2 = 2850$  kg/m<sup>3</sup>. L'explosion dans le tunnel, situé dans la couche inférieure, est simulée par l'application brutale d'une pression radiale sur sa paroi. Grâce à la symétrie, seule la moitié du domaine est modélisée par un maillage uniforme d'éléments frontières. La variation du déplacement au point A en fonction du temps, correspondant aux différents  $\Delta t$  et fonctions d'interpolation temporelle, est tracée sur les figures 1.9b et 1.9c. Le résultat est également comparé à celui obtenu par Israil et Banerjee [1990b].

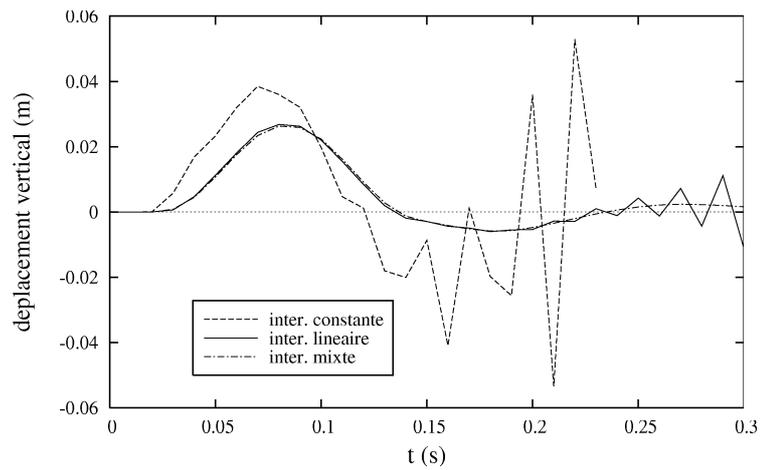
Contrairement à l'exemple précédent, on observe dans les figures 1.9b et 1.9c l'apparition de l'instabilité numérique. La question se pose donc ici : dans quelles circonstances l'instabilité numérique se produit-elle ? Pour répondre à cette question, il faut examiner et comparer les phénomènes physiques impliqués dans ces exemples. En comparant les deux exemples, nous avons trouvé que le seul phénomène physique produit dans l'exemple 1 est



(a) Paramètres du problème



(b)  $\Delta t=0.005$  s



(c)  $\Delta t=0.01$  s

FIG. 1.9 – Explosion dans un tunnel

la propagation d'ondes vers l'infini, alors que dans l'exemple 2 il existe aussi des réflexions multiples des ondes sur la surface libre, sur l'interface entre les deux couches et sur la paroi du tunnel. Ainsi, ces réflexions d'ondes provoquent probablement l'instabilité numérique au cours du processus d'avancement dans le temps dans l'exemple 2. En traitant d'autres exemples, nous nous sommes rendu compte que les réflexions d'ondes aux interfaces sont une source de perturbation accompagnée de l'instabilité numérique pour les solutions résolues par BEM en dynamique transitoire.

En ce qui concerne le choix de la fonction d'interpolation temporelle, nous considérons d'abord les interpolations linéaire et constante. Si on prend  $\Delta t = 0.005$  s, le résultat correspondant à l'interpolation linéaire devient instable plus vite que celui correspondant à l'interpolation constante. Par contre, si  $\Delta t = 0.01$  s, l'interpolation linéaire est meilleure que l'interpolation constante. Donc, le choix du pas de temps est crucial pour ces deux types d'interpolation temporelle. À l'opposé de ces deux fonctions d'interpolation, l'emploi de la fonction d'interpolation mixte, pour les deux pas de temps  $\Delta t$  choisis, ne provoque aucune instabilité numérique dans l'intervalle de temps considérée  $[0, 0.2]$  s. De plus, le résultat obtenu par ce type d'interpolation temporelle coïncide bien avec celui correspondant à l'interpolation linéaire (partie stable) et aussi avec le résultat de référence publié par Israil et Banerjee [1990b]. Cette observation nous suggère que l'hypothèse de l'invariance du vecteur-contrainte dans chaque pas de temps ne compromet pas beaucoup la précision du résultat. Il nous semble que ce type d'interpolation temporelle est le meilleur.

En bref, le choix de la valeur du pas de temps  $\Delta t$  et de la fonction d'interpolation temporelle joue un rôle très important. Dans l'exemple suivant, nous allons examiner plus profondément les facteurs qui compromettent la stabilité et la précision du résultat des problèmes résolus par la méthode des éléments frontières.

### c. Exemple 3 : Propagation d'ondes dans une colonne de sol

Comme mentionné ci-dessus, des réflexions d'ondes aux limites ou aux interfaces du domaine considéré sont une source de perturbation souvent accompagnée de l'instabilité numérique. Afin d'éviter toute instabilité, l'algorithme du schéma temporel choisi doit être suffisamment robuste pour reproduire précisément ces réflexions. Donc, pour valider et tester la stabilité numérique et aussi la précision des schémas temporels d'éléments frontières, il vaudrait mieux considérer un domaine borné à l'intérieur duquel les ondes se réfléchissent multiples fois. Dans la littérature, plusieurs chercheurs ont considéré l'exemple d'une tige soumise à une pression longitudinale, brutale et constante, car cet exemple typique produit des réflexions multiples aux extrémités de la tige. En choisissant le coefficient de Poisson  $\nu = 0$ , ils n'ont examiné que la propagation et les réflexions unidimensionnelles de l'onde de compression.

Dans ce travail, nous examinons un exemple similaire mais plus critique. Il s'agit d'une colonne de sol soumise à une pression longitudinale, brutale et constante à la surface supérieure; le déplacement horizontal des surfaces latérales est empêché, tandis que la

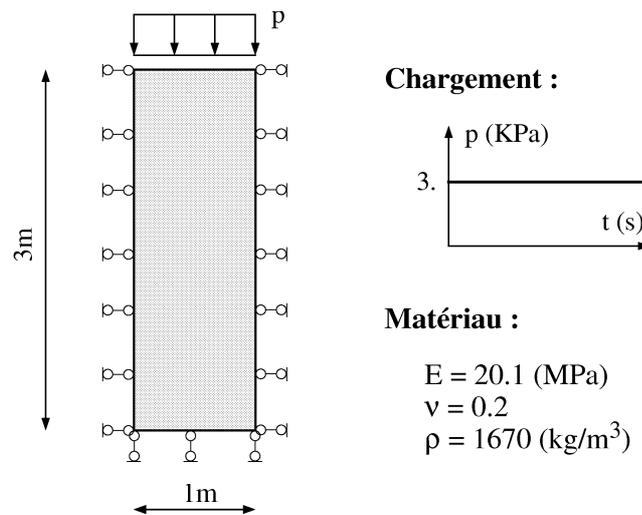


FIG. 1.10 – Colonne de sol

surface inférieure est verticalement fixée. La géométrie, le chargement et les propriétés mécaniques du sol sont décrits sur la figure 1.10. Un maillage uniforme de 16 éléments quadratiques de même longueur 0,5 m est utilisé. Cet exemple correspond à la réponse d'une couche de sol reposant sur un substratum rocheux soumise à une pression verticale, brutale et constante, uniformément répartie sur toute la surface supérieure. Le coefficient de Poisson est choisi non nul ( $\nu = 0.2$ ). Outre l'onde de compression et ses réflexions aux extrémités de la colonne, il existe aussi l'onde de cisaillement et ses réflexions sur les surfaces latérales de la colonne. L'existence de ces derniers rend plus rapide le cumul des erreurs suivie par l'instabilité du résultat. En effet, considérons une colonne de sol identique mais de dimensions 1 m x 10 m ayant respectivement les valeurs du coefficient de Poisson :  $\nu=0$  et  $\nu=0.2$ . Le déplacement vertical de la surface supérieure, en fonction du temps, pour ces deux cas est tracé sur la figure 1.11, en utilisant l'interpolation temporelle linéaire. On trouve que l'instabilité numérique se produit plus tôt pour le cas  $\nu \neq 0$ , même avant la première réflexion de l'onde P à la surface inférieure, ce qui prouve que cet exemple est plus critique que celui de la tige ( $\nu=0$ ).

Avec cet exemple, nous essayons de trouver la meilleure fonction d'interpolation temporelle et le pas de temps  $\Delta t$  optimal associé. Afin de tenir compte simultanément de l'influence de la valeur du pas de temps  $\Delta t$  et de la finesse du maillage, un paramètre adimensionnel est introduit :

$$\beta = \frac{c_p \Delta t}{\Delta h}$$

$c_p$  - vitesse de l'onde de compression

$\Delta t$  - pas de temps

$\Delta h$  - longueur d'un élément (choisie de manière à représenter correctement la géométrie du domaine d'étude)

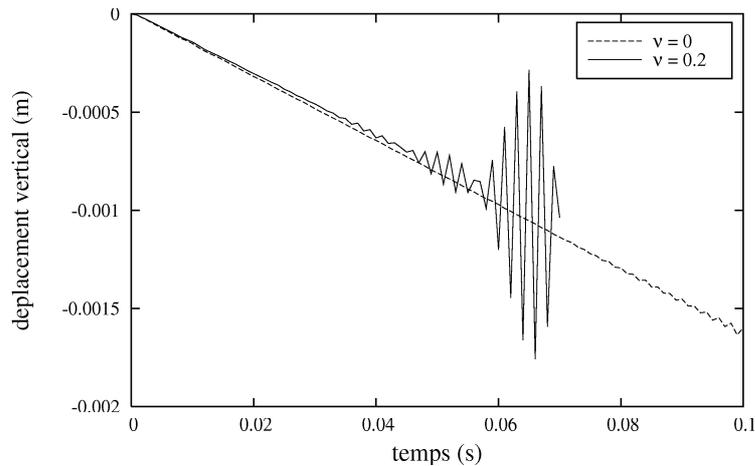


FIG. 1.11 – Influence du coefficient de Poisson

La figure 1.12 présente les courbes exprimant la variation du déplacement vertical de la surface supérieure en fonction du temps correspondant aux 3 types d'interpolation temporelle, avec différentes valeurs de  $\beta$  : 0.25, 0.5, 0.75 et 1. A partir de ce résultat, nous pouvons en déduire des remarques importantes.

**Cas de l'interpolation temporelle linéaire :** Dans ce cas, l'instabilité se produit toujours après quelques dizaines de pas de temps. Le choix de  $\Delta t$  n'améliore pas beaucoup la situation. Il nous semble que plus  $\Delta t$  est petit, plus le nombre de pas de temps correspondant à la partie stable du résultat augmente. Cependant, cette augmentation n'est pas significative et comme  $\Delta t$  décroît, le résultat devient plus vite instable. Un autre exemple semblable mais avec une colonne de 10 m de haut (maillage uniforme de 44 éléments de même longueur 0.5 m) a montré que l'instabilité se produit même avant l'arrivée de l'onde P à la surface inférieure (figure 1.11). La raison pour laquelle cette interpolation est si mauvaise, du point de vue de la stabilité, vient de l'hypothèse où le vecteur-contrainte est supposée toujours continu pendant le temps alors qu'elle n'est pas. En conséquence, la détérioration très rapide du vecteur-contrainte entraîne plus tard celle du déplacement.

Dans la littérature, certains chercheurs ont suggéré un choix optimal pour  $\beta$ . Certains ont parlé d'un seuil inférieur de  $\beta$  au-dessous duquel le résultat est instable. Ce seuil est malheureusement difficile à déterminer. Araujo et al. [1999], en considérant l'exemple d'une tige (mais en 3D et  $\nu=0$ ), ont trouvé le résultat acceptable pour  $\beta=0.55$  et  $\beta=0.6$  mais pas pour  $\beta=0.25$ ,  $\beta=0.5$  et  $\beta=0.75$ . Yu et al. [2000] ont considéré un exemple similaire mais pour l'onde scalaire bidimensionnelle et ont trouvé que le résultat est instable pour  $\beta=0.4$  et  $\beta=0.5$ . Ainsi, avec ce type d'interpolation temporelle, il n'y a pas de règle générale pour le choix de  $\beta$  optimal, car un tel paramètre varie pour chaque problème et son choix est trop délicat.

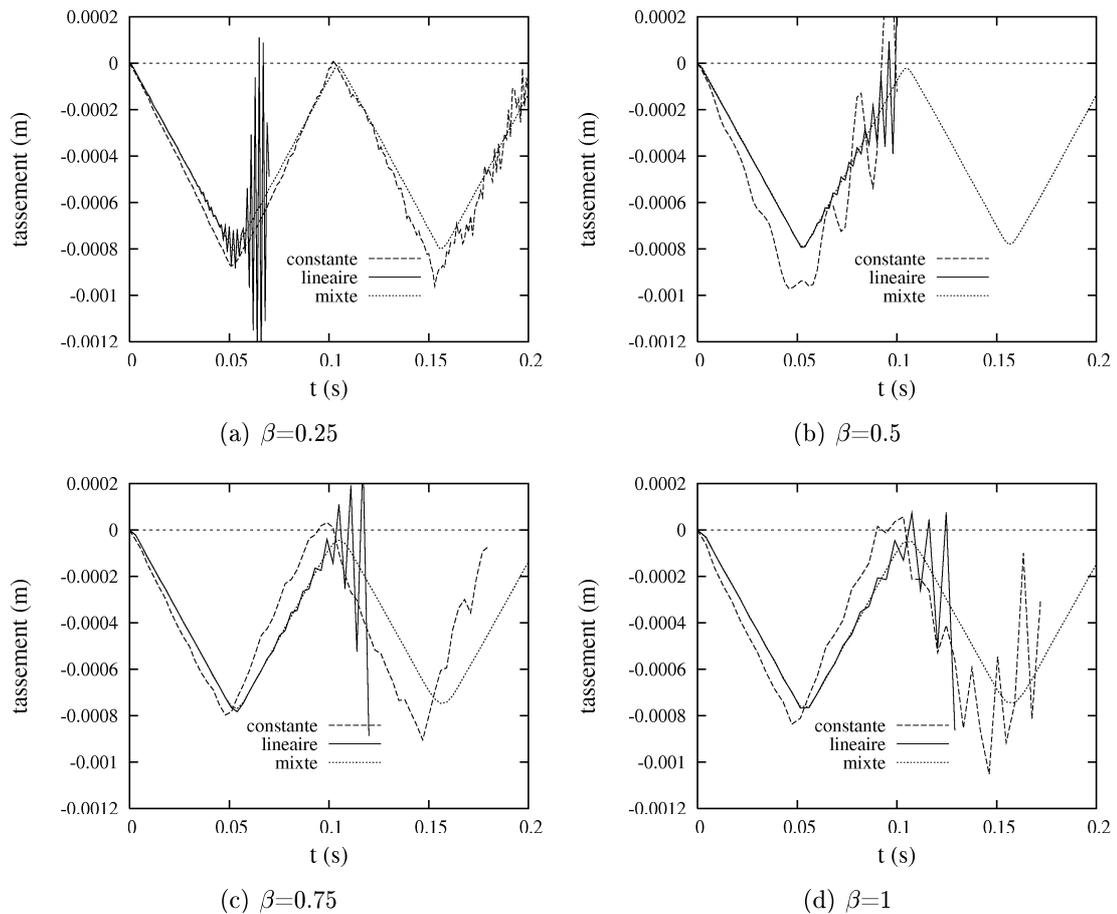


FIG. 1.12 – Influence du pas de temps

**Cas de l'interpolation temporelle constante :** Du point de vue de la stabilité, ce cas présente un meilleur résultat par rapport au cas précédent quand  $\beta=0.75$  et  $\beta=0.25$ . Quand  $\beta=0.5$  et  $\beta=1$ , le résultat n'est ni meilleur, ni pire. Mais le résultat est certainement moins précis que celui du cas précédent, sauf pour  $\beta=0.25$ . La raison de ces observations est relativement simple. En effet, l'hypothèse de l'invariance du vecteur-contrainte dans chaque pas de temps, ce qui conduit à la discontinuité du vecteur-contrainte au cours du temps, convient à cet exemple. Cependant, comme le déplacement et le vecteur-contrainte sont supposés constants dans chaque pas de temps,  $\Delta t$  ou  $\beta$  doit être suffisamment petit afin d'assurer la précision du résultat. En bref, dans cet exemple, cette interpolation semble être meilleure que l'interpolation linéaire. Mais comme on a vu dans l'exemple 2 (explosion dans un tunnel), l'emploi de cette interpolation a donné un résultat pire. Ainsi, on peut dire, du point de vue de la stabilité, que ces deux types d'interpolation sont sensibles et n'ont pas intérêt à être intégrés dans un code de calcul pour résoudre d'autres problèmes, plus généraux et plus compliqués.

**Cas de l'interpolation temporelle mixte :** À l'opposé des deux cas précédents, l'utilisation de l'interpolation mixte, dans cet exemple, ne produit pas l'instabilité numérique quelle que soit la valeur de  $\beta$ . La précision de ce type d'interpolation est bonne en comparaison avec celle de l'interpolation linéaire (partie stable). En effet, l'hypothèse de la constance par morceaux du vecteur-contrainte assure la stabilité de la solution tandis que l'hypothèse de la linéarité par morceaux du déplacement assure une bonne précision. De toute évidence, c'est la meilleure interpolation temporelle.

L'avantage majeur de cette interpolation est qu'elle nous permet un large choix de  $\beta$ . Cet avantage est particulièrement utile pour des problèmes compliqués impliquant plusieurs matériaux avec des éléments de différentes longueurs dans son maillage. Rappelons que  $\beta = \frac{v_p \Delta t}{\Delta h}$ . Ainsi, si on peut sélectionner une valeur de  $\beta$  appropriée pour un élément, cette valeur n'est pas bonne pour un autre élément de différente longueur. De plus, sur un même élément,  $\beta$  est différent pour l'onde P et l'onde S. Enfin, s'il existe plusieurs matériaux dans un même problème,  $\beta$  peut prendre plusieurs valeurs pour des éléments situés à la frontière commune des matériaux. Par conséquent, l'emploi de l'interpolation constante et linéaire pour un problème général quelconque n'est pas conseillée, car il est pratiquement difficile à trouver  $\beta$  approprié. Dans tous les cas, l'interpolation mixte est le meilleur choix et elle est fortement conseillée pour les calculs par la méthode des éléments frontières.

### 1.6.2 Amélioration de la stabilité par la méthode $\theta$

Parmi plusieurs stratégies d'amélioration de la stabilité, nous avons constaté que la méthode  $\theta$  est simple mais très efficace. Elle est en outre facile à intégrer dans un code de calcul existant, sans trop de modifications. C'est pour ces raisons que nous l'avons utilisée pour améliorer le résultat numérique obtenu par le code HYBRID. Cependant, dans les travaux originaux, les auteurs n'ont pas utilisé les expressions explicites simples des 'noyaux'  $G_{ij}^k, H_{ij}^k$ , mais ont directement intégré les solutions de Stock avec un schéma d'intégration relativement compliqué. Nous proposons donc d'utiliser l'algorithme  $\theta$  avec les 'noyaux' publiés par Israil et Banerge [1990a, 1990b], mais avec une petite modification pour qu'ils s'accordent ensemble.

#### a. Formulation

Cette méthode reprend l'idée de base de la méthode  $\theta$ -Wilson qui est largement utilisée avec la méthode des éléments finis en dynamique : la stabilité des solutions numériques est assurée par l'ajout de l'amortissement numérique (via un coefficient  $\theta > 1$ ). Cependant, cette méthode est appliquée non pas pour l'accélération, mais pour le déplacement et le vecteur-contrainte. En effet, l'accélération, et aussi la vitesse, ne sont pas présentes dans la formule de l'équation intégrale en dynamique du fait de l'emploi de la solution fondamentale dynamique.

L'état élastodynamique à l'instant  $t - \Delta t$  étant connue, l'équation intégrale (1.28) est

écrite pour l'instant  $t + (\theta - 1)\Delta t$  (avec  $\theta > 1$ ) et la réponse à l'instant  $t$  est obtenue en supposant que le déplacement et le vecteur-contrainte  $(\mathbf{u}, \mathbf{t})$  varient linéairement dans l'intervalle  $[t - \Delta t, t + (\theta - 1)\Delta t]$ . Le schéma d'avancement pas-à-pas dans le temps est représenté sur la figure 1.13.

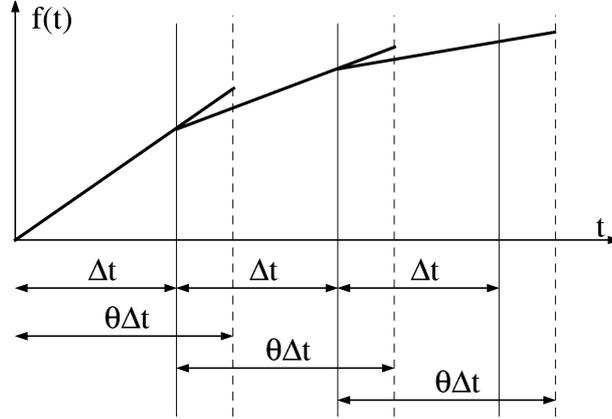


FIG. 1.13 – Procédure d'avancement dans le temps  $\theta$  (d'après [Araujo et al., 1999])

Pour faciliter la lecture, nous désignons  $N_{\theta} = N - 1 + \theta$  et  $t_{\theta} = t + (\theta - 1)\Delta$

D'abord, les champs de déplacement et de contrainte sont interpolés comme suit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{\theta}) = \sum_{m=1}^{N_{\theta}} \sum_{k=1}^K \mathcal{N}_k^1(\mathbf{x}) \Phi_1^m(t) \mathbf{U}_k^m \quad (1.50a)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t_{\theta}) = \sum_{m=1}^{N_{\theta}} \sum_{k=1}^K \mathcal{N}_k^2(\mathbf{x}) \Phi_2^m(t) \mathbf{T}_k^m \quad (1.50b)$$

Les fonctions d'interpolation  $\Phi_{1(2)}^m(t)$  ( $m = 1..N - 1$ ) ne changent pas, mais  $\Phi_{1(2)}^{N_{\theta}}(t)$  sont modifiés comme indiqué sur figure 1.14.

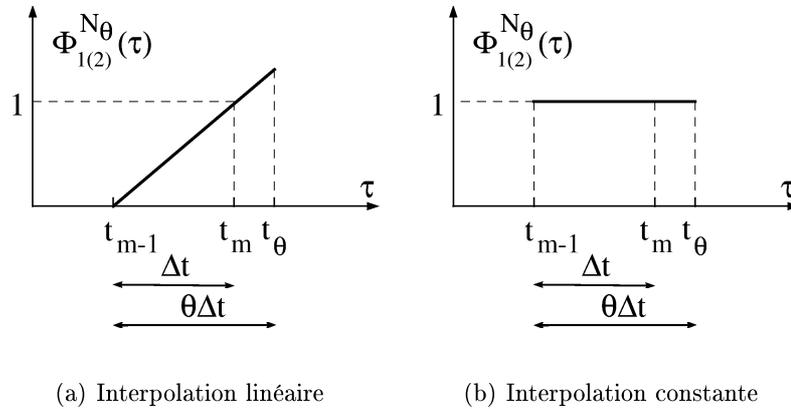


FIG. 1.14 – Fonctions d'interpolation temporelle pour  $\Phi_{1(2)}^{N_{\theta}}(t)$

Pour l'approximation linéaire :

$$\Phi_{1(2)}^{N_\theta}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - t_{N-1}}{\Delta t} & \text{si } t_{N-1} \leq \tau \leq t_\theta \\ 0 & \text{si } \tau < t_{N-1} \end{cases} \quad (1.51)$$

Pour l'approximation constante :

$$\Phi_{1(2)}^{N_\theta}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_{N-1} \leq \tau \leq t_\theta \\ 0 & \text{si } \tau < t_{N-1} \end{cases} \quad (1.52)$$

En suivant la même procédure que celle présentée précédemment (1.26), on a

$$c_{ij} \bar{u}_{jk}^{N_\theta} = \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^K \left\{ \left[ \int_{\Gamma_e} G_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}, \theta) \mathcal{N}_k(\mathbf{x}) d\Gamma \right] \bar{t}_{jk}^m - \left[ \int_{\Gamma_e} G_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}, \theta) \mathcal{N}_k(\mathbf{x}) d\Gamma \right] \bar{u}_{jk}^m \right\} \quad (1.53)$$

ou dans l'autre forme matricielle

$$\bar{\mathbf{H}}^1(\theta) \mathbf{U}^{N_\theta} = \mathbf{G}^1(\theta) \mathbf{T}^{N_\theta} + \sum_{m=1}^{N-1} (\mathbf{G}(\theta)^{N-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}(\theta)^{N-m+1} \mathbf{U}^m) \quad (1.54)$$

Pour calculer  $\bar{\mathbf{u}}^N, \bar{\mathbf{t}}^N$ , nous utilisons la relation

$$\mathbf{U}^{N_\theta} = \theta \mathbf{U}^N - (\theta - 1) \mathbf{U}^{N-1} \quad (1.55a)$$

$$\mathbf{T}^{N_\theta} = \theta \mathbf{T}^N - (\theta - 1) \mathbf{T}^{N-1} \quad (1.55b)$$

En insérant (1.55) dans l'équation (1.54), on obtient enfin :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}^1(\theta) \mathbf{U}^N &= \mathbf{G}^1(\theta) \mathbf{T}^N - \frac{\theta - 1}{\theta} [\mathbf{G}^1(\theta) \mathbf{T}^{N-1} - \bar{\mathbf{H}}^1(\theta) \mathbf{U}^{N-1}] \\ &\quad + \frac{1}{\theta} \sum_{m=1}^{N-1} (\mathbf{G}(\theta)^{N-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}(\theta)^{N-m+1} \mathbf{U}^m) \end{aligned} \quad (1.56)$$

Cette équation a une structure très similaire à l'équation (1.26) : nous retrouvons (1.26) en faisant  $\theta = 1$ . Cette similitude rend facile l'incorporation de la méthode  $\theta$  dans un code BEM existant. Néanmoins, l'ajout du paramètre  $\theta$  change l'expression des matrices "noyaux"  $G_{ij}^k$  et  $H_{ij}^k$ . Alors, il nous faut recalculer ces matrices.

## b. Calcul des matrices $G_{ij}^k(\mathbf{x}, \theta), H_{ij}^k(\mathbf{x}, \theta)$

### Interpolation temporelle constante

$$\begin{aligned} G_{ij}^{N_\theta m}(\mathbf{x}, \theta) &= G_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}, \theta) = \int_0^{t_\theta} G_{ij}(\mathbf{x}, t_\theta - \tau) \Phi_2^m(\tau) d\tau \\ &= \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, N_\theta \Delta t - \tau) d\tau = \int_{(N_\theta - m)\Delta t}^{(N_\theta - m + 1)\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{ij}^{N_\theta N}(\mathbf{x}, \theta) &= G_{ij}^1(\mathbf{x}, \theta) = \int_0^{t_\theta} G_{ij}(\mathbf{x}, t_\theta - \tau) \Phi_2^{N_\theta}(\tau) d\tau \\
&= \int_{(N-1)\Delta t}^{N_\theta \Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, N_\theta \Delta t - \tau) d\tau = \int_0^{\theta \Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
G_{ij}^k(\mathbf{x}, \theta) &= \int_{(k-2+\theta)\Delta t}^{(k-1+\theta)\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\
&= \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (k-1+\theta)\Delta t) - \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (k-2+\theta)\Delta t) \\
G_{ij}^1(\mathbf{x}, \theta) &= \int_0^{\theta \Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, \theta \Delta t) - \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, 0)
\end{aligned} \tag{1.57}$$

En conséquence,  $G_{ij}^k(\mathbf{x}, \theta)$  et aussi  $H_{ij}^k(\mathbf{x}, \theta)$  sont facilement calculés en utilisant les expressions (1.21), (1.22) de  $G_{ij}^k(\mathbf{x})$  et de  $H_{ij}^k(\mathbf{x})$  et en remplaçant  $k$  par  $k-1+\theta$ .

### Interpolation temporelle linéaire

$$\begin{aligned}
G_{ij}^{N_\theta m}(\mathbf{x}, \theta) &= G_{ij}^{N-m+1}(\mathbf{x}, \theta) = \int_0^{t_\theta} G_{ij}(\mathbf{x}, t_\theta - \tau) \Phi_2^m(\tau) d\tau \\
&= \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} \frac{\tau - t_{m-1}}{\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, N_\theta \Delta t - \tau) d\tau \\
&\quad + \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \frac{t_m - \tau}{\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, N_\theta \Delta t - \tau) d\tau \\
&= \int_{(N_\theta - m)\Delta t}^{(N_\theta - m + 1)\Delta t} \left[ (N_\theta - m + 1) - \frac{\tau}{\Delta t} \right] G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\
&\quad + \int_{(N_\theta - m - 1)\Delta t}^{(N_\theta - m)\Delta t} \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - (N - m) \right] G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{ij}^{N_\theta N}(\mathbf{x}, \theta) &= G_{ij}^1(\mathbf{x}, \theta) = \int_0^{t_\theta} G_{ij}(\mathbf{x}, t_\theta - \tau) \Phi_2^{N_\theta}(\tau) d\tau \\
&= \int_{(N-1)\Delta t}^{N_\theta \Delta t} \frac{\tau - t_{m-1}}{\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, N_\theta \Delta t - \tau) d\tau \\
&= \int_0^{\theta \Delta t} \left( \theta - \frac{\tau}{\Delta t} \right) G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
G_{ij}^k(\mathbf{x}, \theta) &= G_{ij1}^k(\mathbf{x}, \theta) + G_{ij2}^k(\mathbf{x}, \theta) \\
&= \int_{(k-2+\theta)\Delta t}^{(k-1+\theta)\Delta t} \left[ (k-1+\theta) - \frac{\tau}{\Delta t} \right] G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\
&\quad + \int_{(k-3+\theta)\Delta t}^{(k-3+\theta)\Delta t} \left[ \frac{\tau}{\Delta t} - (k-3+\theta) \right] G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta t} [\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (k-1+\theta)\Delta t) - 2\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (k-2+\theta)\Delta t) \\
&\quad + \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (k-3+\theta)\Delta t)] \\
\\
G_{ij}^1(\mathbf{x}, \theta) &= G_{ij1}^k(\mathbf{x}, \theta) = \int_0^{\theta\Delta t} \left( \theta - \frac{\tau}{\Delta t} \right) G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\
&= -\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, 0) + \frac{1}{\Delta t} [\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, \theta\Delta t) - \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, 0)]
\end{aligned}$$

En somme, comme le cas de l'interpolation constante traité précédemment,  $G_{ij}^k(\mathbf{x}, \theta)$  et aussi  $H_{ij}^k(\mathbf{x}, \theta)$  sont facilement calculés en utilisant les expressions (1.23), (1.24) de  $G_{ij}^k(\mathbf{x})$  et de  $H_{ij}^k(\mathbf{x})$  et en remplaçant  $k$  par  $k-1+\theta$ .

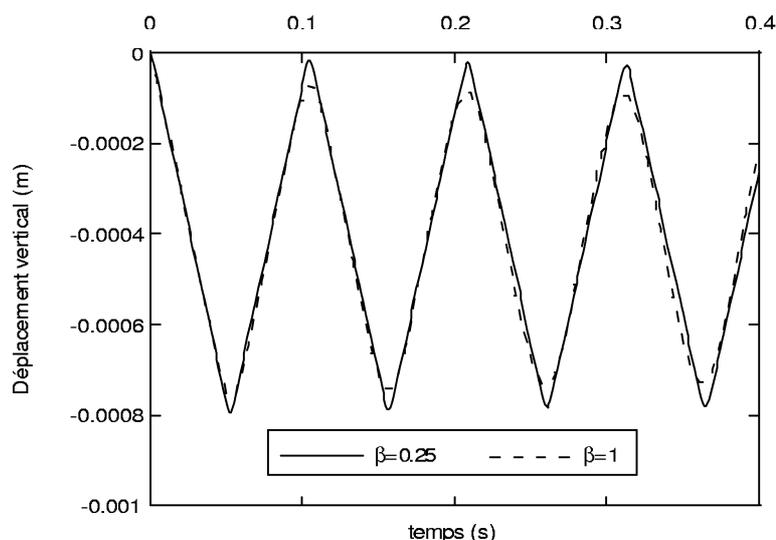
### Interpolation temporelle mixte

L'expression de  $H_{ij}^k(\mathbf{x}, \theta)$  est similaire à celle du cas de l'interpolation linéaire, alors que  $G_{ij}^k(\mathbf{x}, \theta)$  est identique à celle du cas de l'interpolation constante, mais il fait intervenir les instants  $(k+\theta-1)\Delta t$  et  $(k+\theta-3)\Delta t$  :

$$\begin{aligned}
G_{ij}^k(\mathbf{x}, \theta) &= \frac{1}{2} \int_{(k-3+\theta)\Delta t}^{(k-1+\theta)\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2} [\bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (k-1+\theta)\Delta t) - \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, (k-2+\theta)\Delta t)] \\
G_{ij}^1(\mathbf{x}, \theta) &= \int_0^{\theta\Delta t} G_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, \theta\Delta t) - \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, 0)
\end{aligned}$$

### c. Vérification de la méthode $\theta$

Nous avons repris l'exemple 3 (section 1.6.1) pour vérifier et examiner l'efficacité de la méthode  $\theta$ . La figure 1.15 montre le résultat avec  $\theta=1.4$ , l'interpolation linéaire et différentes valeurs de  $\beta$ .

FIG. 1.15 – Efficacité de la méthode  $\theta$ 

On trouve que la situation s'améliore beaucoup avec l'application de cet algorithme : aucune instabilité n'est détectée dans l'intervalle  $t = [0, 0.4 \text{ s}]$ , alors que si  $\theta = 1$  (interpolation linéaire) le résultat devient instable après  $0.05 \text{ s}$  ( $\beta = 0.25$ ) ou  $0.1 \text{ s}$  ( $\beta = 1$ ). Néanmoins, l'amplitude de l'oscillation diminue au cours du temps. En fait, le coefficient  $\theta > 1$  joue un rôle d'amortissement numérique de la propagation des ondes artificielles dues aux perturbations. Ainsi, plus  $\theta$  est grand, plus l'instabilité numérique éventuelle est réduite, mais le résultat est aussi amorti. Si  $\theta$  est trop grand, la précision n'est plus assurée. De plus, avec une valeur de  $\theta$  donnée, il y aura plus d'amortissement si  $\beta$  est plus élevé. Yu et al. [1998] ont proposé les valeurs optimales suivantes :  $\theta$  de 1.4 à 2 avec  $\beta$  de 0.4 à 1.

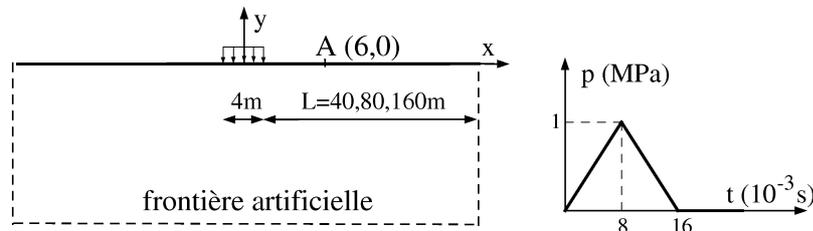
## 1.7 Modélisation de l'espace semi-infini : effet de troncature

La méthode des éléments frontières est capable de traiter des domaines infinis sans avoir à tronquer artificiellement le domaine d'étude. Cependant, afin de modéliser un espace semi-infini (demi-plan en 2D), une troncature à une distance suffisamment loin de la zone intéressée, lors de la discrétisation, est incontournable si la fonction de Green du milieu infini est utilisée. Cette troncature est susceptible de produire des erreurs non-négligeables.

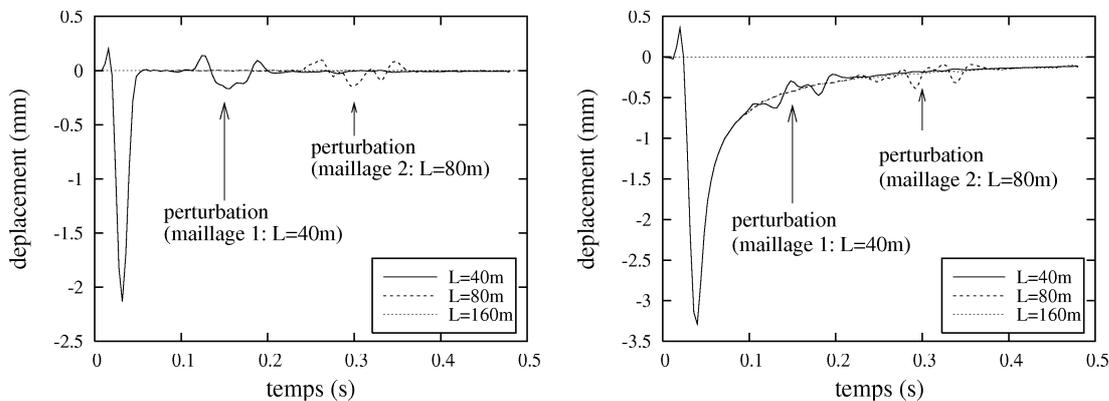
Nous distinguons dans la suite deux cas : le cas d'une charge externe sur la surface libre et le cas d'un signal sismique incident.

### 1.7.1 Cas d'une charge externe sur la surface

Nous avons choisi un exemple simulant la génération et la propagation de l'onde de Rayleigh sur la surface libre de l'espace semi-infini : une impulsion de forme triangulaire est uniformément répartie sur une largeur de 4 m d'un espace semi-infini homogène (figure 1.16a). Les propriétés mécaniques de l'espace semi-infini sont  $v_p = 497$  m/s,  $v_s = 287$  m/s,  $v_r = 250$  m/s et  $\rho = 1785.7$  kg/m<sup>3</sup> où  $v_p$ ,  $v_s$ ,  $v_r$  sont respectivement la vitesse de propagation de l'onde P, l'onde S et l'onde Rayleigh. Pour étudier l'effet de troncature, trois maillages uniformes d'éléments frontières quadratiques de longueur  $\Delta h = 2$  m sont considérés. L'espace semi-infini est respectivement tronqué à une distance  $L = 40$  m (maillage 1),  $L = 80$  m (maillage 2),  $L = 160$  m (maillage 3) de la zone de chargement. La solution liée au modèle 3 ( $L = 160$  m) est considérée comme la solution de référence dans l'intervalle de temps considéré  $t = [0, 0.5$  s]; elle sera comparée avec les solutions des modèles 1 et 2. Le déplacement vertical au point A (6 m, 0) est tracé sur les figures 1.16b et 1.16c.



(a) Géométrie et chargement



(b) Mouvement horizontal

(c) Mouvement vertical

FIG. 1.16 – Réflexion artificielle de l'onde de surface à la limite du maillage, cas d'une impulsion triangulaire

Les figures 1.16b et 1.16c montrent que, en comparaison avec la réponse du modèle 3, les réponses liées aux modèles 1 et 2 présentent des perturbations; et les perturbations du modèle 2 se produisent après celles du modèle 1. L'origine de ces perturbations est probablement due à l'onde de surface artificielle. En effet, les équations intégrales utilisant la fonction de Green du milieu infini ne tiennent compte que de la radiation des ondes de

volume et non pas des ondes de surface. L'hypothèse de la réflexion de l'onde de surface à la limite du modèle, ce qui provoque la propagation, vers l'intérieur du modèle, d'une onde de surface physiquement inexistante, est donc raisonnable. De plus, en évaluant le temps de propagation de l'onde de Rayleigh à partir du moment initial jusqu'au moment où elle revient de la limite du modèle au point considéré, on remarque que ce temps correspond bien à l'instant d'apparition des perturbations. Ce calcul confirme donc l'hypothèse ci-dessus.

En bref, la troncature du maillage d'un espace semi-infini peut perturber le résultat obtenu par BEM et fait naître des erreurs non souhaitables suite à la présence des ondes de surface artificielles. Cet effet prend une importance plus grande en dynamique stationnaire qu'en dynamique transitoire. En régime transitoire, les ondes n'atteignent la frontière artificielle qu'après un temps fini, en deçà duquel la troncature n'a pas d'effet. Il est donc toujours possible de tronquer le domaine à une distance finie suffisamment grande de manière à éviter les réflexions parasites. En revanche, la totalité du domaine d'étude est affectée en régime stationnaire. Le résultat montré sur la figure 1.17 illustre cet argument : un exemple identique que celui précédent mais avec une charge sinusoïdale de période  $T = 0.06$  s a été examiné, la différence entre les amplitudes de vibrations au point A (valeurs stationnaires), obtenus par les maillages 1 ( $L=40$  m) et 3 ( $L=160$  m), a des valeurs pratiquement inadmissibles (6.25% pour la composante verticale et 18.25% pour la composante horizontale). En conséquence, il faut être très prudent à propos de cet effet de troncature, lorsque l'on considère des problèmes dynamiques en régime stationnaire.

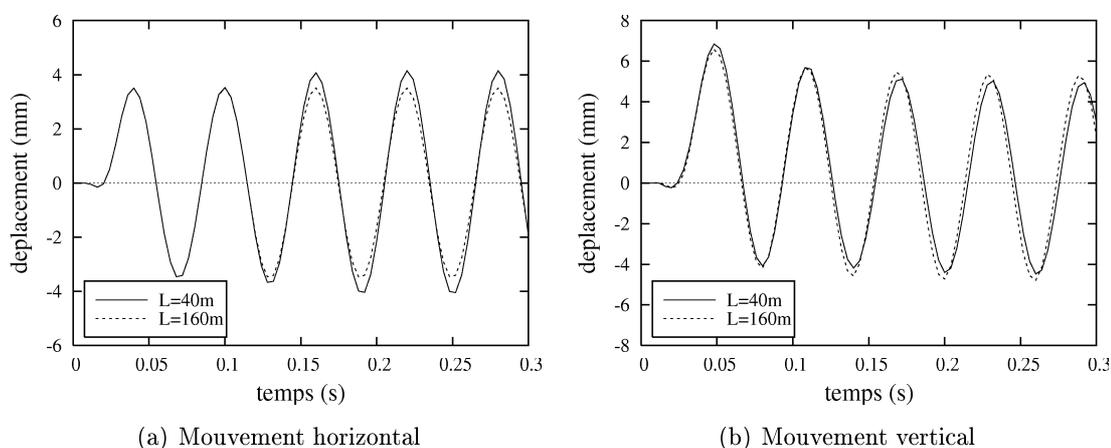


FIG. 1.17 – Réflexion artificielle de l'onde de surface à la limite du maillage; cas d'une charge sinusoïdale

### 1.7.2 Cas d'un signal sismique incident

Les cas où le chargement est un signal sismique incident sont couramment rencontrés dans les calculs de la réponse sismique des ouvrages (ou des structures), tenant compte de l'interaction dynamique sol-structure ou dans les problèmes de diffraction des ondes sismiques par une irrégularité topographique ou par une vallée sédimentaire. Il est donc

utile d'étudier soigneusement l'effet de troncature dans ces cas, car ces problèmes ont une grande importance en pratique. Dans ce qui suit, nous ne considérons que des ondes planes de type P, SV ou de Rayleigh.

### a. Formulation

Pour appliquer l'incidence des ondes sismique comme un chargement, il faut ajouter  $\mathbf{u}_{eq}$ , champ des déplacements dûs aux ondes incidentes, à l'équation intégrale (1.13) :

$$c_{ij}(\boldsymbol{\chi})u_j(\boldsymbol{\chi}, t) = \int_{\Gamma} (G_{ij} \star t_j - H_{ij} \star u_j) d\Gamma + u_{eq-j}(\boldsymbol{\chi}, t) \quad (1.58)$$

En conséquence, l'équation intégrale discrétisée (1.28) est modifiée comme suit :

$$\bar{\mathbf{H}}^1 \mathbf{U}^N = \mathbf{G}^1 \mathbf{T}^N + \sum_{m=1}^{N-1} (\mathbf{G}^{N-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1} \mathbf{U}^m) + \mathbf{U}_{eq}^N \quad (1.59)$$

Si la méthode  $\theta$  est utilisée, l'équation (1.56) doit aussi se transformer :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}^1(\theta) \mathbf{U}^N &= \mathbf{G}^1(\theta) \mathbf{T}^N + \frac{\theta - 1}{\theta} [\mathbf{G}^1(\theta) \mathbf{T}^{N-1} - \bar{\mathbf{H}}^1(\theta) \mathbf{U}^{N-1}] \\ &+ \frac{1}{\theta} \sum_{m=1}^{N-1} (\mathbf{G}(\theta)^{N-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}(\theta)^{N-m+1} \mathbf{U}^m) + \mathbf{U}_{eq}^N - \frac{\theta - 1}{\theta} \mathbf{U}_{eq}^{N-1} \end{aligned} \quad (1.60)$$

### b. Propagation d'erreurs

L'utilisation des formulations (1.59) ou (1.60) nécessite d'appliquer le champ incident  $\mathbf{u}_{eq}$  à tous les nœuds de la partie modélisée par des éléments frontières simulant l'espace semi-infini. Comme les points extrêmes du modèle sont des points diffractants, des ondes de surface artificielles peuvent être émises par les bords et se propager vers l'intérieur du modèle. Pour démontrer ceci, nous avons considéré un exemple d'un espace semi-infini soumis à l'incidence verticale d'une onde SV de type Ricker de fréquence centrale  $f_c = 3$  Hz ; les caractéristiques mécaniques du milieu sont  $E = 12000$  MPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 2400$  kg/m<sup>3</sup>. Un maillage constitué de 80 éléments frontières de même longueur  $\Delta h = 100$  m a été construit. La figure 1.18 montre le déplacement vertical de tous les nœuds uniformément répartis sur la surface. On observe clairement la propagation d'une onde des bords vers l'intérieur du modèle. Analytiquement, dans cet exemple, le mouvement vertical doit toujours être nul sur toute la surface libre de l'espace semi-infini. Ainsi, cette onde n'existe pas physiquement ; sa nature est purement numérique.

L'existence de ces ondes artificielles compromet évidemment la précision des simulations par BEM. Dans l'exemple suivant, nous avons examiné la diffraction des ondes SV harmoniques de fréquence  $f = 3.5$  Hz à propagation verticale par une colline trapézoïdale (figure 1.19a). Les caractéristiques mécaniques du milieu supposé homogène sont  $E = 12000$  MPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 2400$  kg/m<sup>3</sup>. Pour montrer l'importance des erreurs dues à l'effet de troncature, deux maillages uniformes d'éléments frontières quadratiques de longueur  $\Delta h = 20$  m

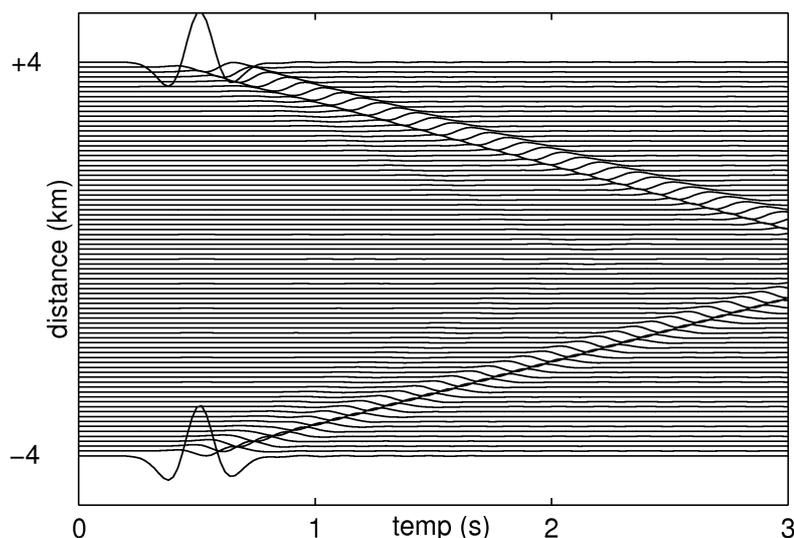


FIG. 1.18 – Propagation d'erreurs dues à la troncature du modèle

sont considérés. L'espace semi-infini est respectivement tronqué à une distance  $L=400$  m (maillage 1) et  $L=2100$  m (maillage 2) à partir du pied de la colline. Comme l'extension du modèle 2 ( $L=2100$  m) est suffisamment grande pour que les ondes artificielles n'atteignent pas la colline dans l'intervalle de temps considérée  $t = [0, 0.7$  s], sa solution est considérée comme la solution de référence ; elle sera comparée avec la solution du modèle 1. Le déplacement au pied de la colline, normalisé par l'amplitude de l'onde incidente, est tracé en fonction du temps sur les figures 1.19b et 1.19c. Ces figures montrent des erreurs significatives de la solution du modèle 1 par rapport à celle du modèle 2, en particulier pour la composante verticale.

### 1.7.3 Moyens de diminuer l'effet de troncature

L'effet de troncature peut être complètement évité en utilisant la solution fondamentale du milieu semi-infini. Mais une telle solution en élastodynamique transitoire doit être complexe ; son emploi compliquera la procédure de résolution. Dans cette partie, nous n'aborderons donc que des méthodes capable de réduire l'effet de troncature des schémas BEM utilisant la solution fondamentale du milieu infini. En général, on peut classer les méthodes existantes en quatre catégories : l'élargissement du maillage, l'introduction de bords absorbants, l'usage des éléments frontières infinis et l'inclusion du champ réfléchi dans le champ libre

#### a. Élargissement du maillage

C'est la méthode la plus simple. On réduit l'effet de troncature en positionnant les bords du modèle loin de la zone intéressée, de manière à ce que les ondes réfléchies ou diffractées sur les bords arrivent tardivement dans l'intervalle de temps considérée. Bien évidemment,

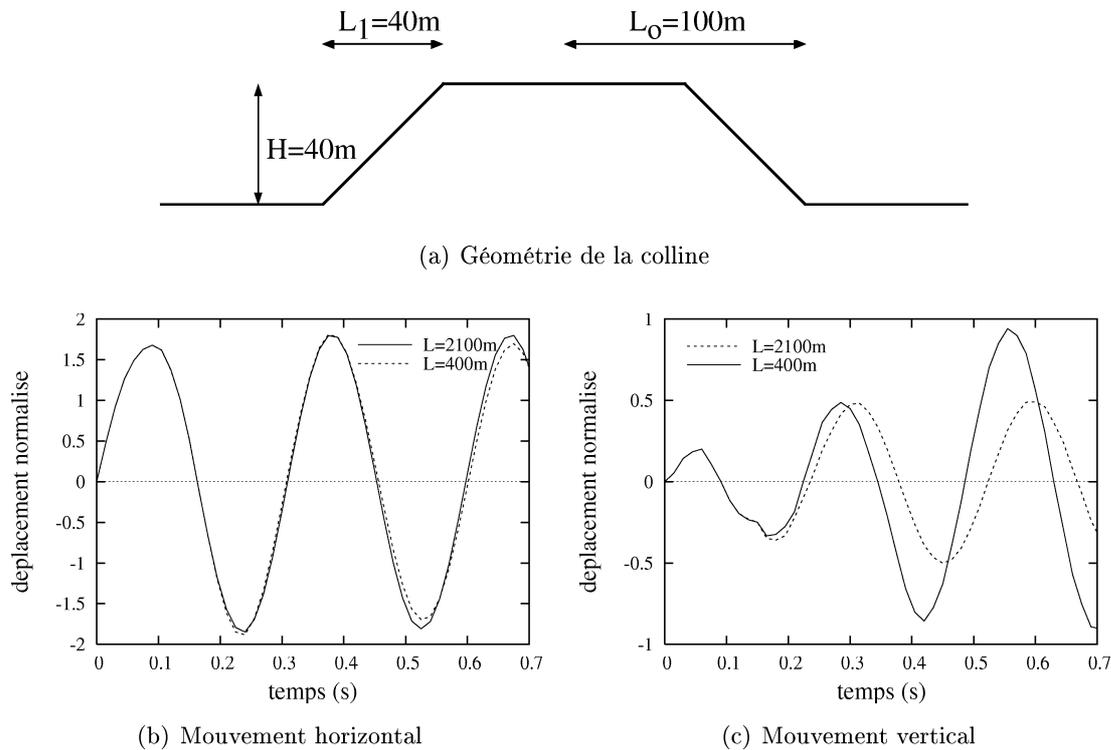


FIG. 1.19 – Erreurs produites par ondes de surface artificielles

l'inconvénient majeur de cette méthode est que la taille de la surface à discrétiser augmente et le temps de calcul peut croître considérablement.

Si on sélectionne cette méthode, une remarque importante concerne la taille des éléments situés hors de la zone intéressée. La taille de ces éléments est normalement plus grande que celle des éléments situés dans la zone intéressée. Rappelons que pour la méthode des éléments finis, la taille des éléments doit changer graduellement, sinon la précision et surtout la stabilité de la solution seront compromises. Mais pour la méthode des éléments frontières et dans les problèmes faisant intervenir un espace semi-infini, les éléments 'grands' peuvent être placés à côté des éléments 'petits', sans réduire la précision et la stabilité de la solution : le rapport de longueur entre deux éléments voisins peut prendre une valeur de 1 à 5, même 10.

Afin d'illustrer ceci, nous avons repris l'exemple de la colline présenté ci-avant en considérant trois modèles, tous étendus jusqu'à la distance  $L=2100$  m à partir du pied de la colline. Le modèle 1 est constitué d'un maillage uniforme avec des éléments de longueur  $\Delta h = 20$  m, le modèle 2 se compose d'éléments petits  $\Delta h = 20$  m pour discrétiser la colline et des éléments grands  $\Delta h = 100$  m hors de la colline, le modèle 3 est similaire au modèle 2 mais avec des éléments  $\Delta h = 20$  m et  $\Delta h = 200$  m. Le premier modèle a 220 éléments, le deuxième a 52 éléments et le dernier a 32 éléments. Le déplacement normalisé au pied de la colline est montré sur la figure 1.20 ; il présente une précision tout à fait raisonnable dans le cas des modèles 2 et 3, en comparaison avec la réponse du modèle 1, alors que le

temps de calcul de ces deux modèles est beaucoup réduit par rapport à celui du premier.

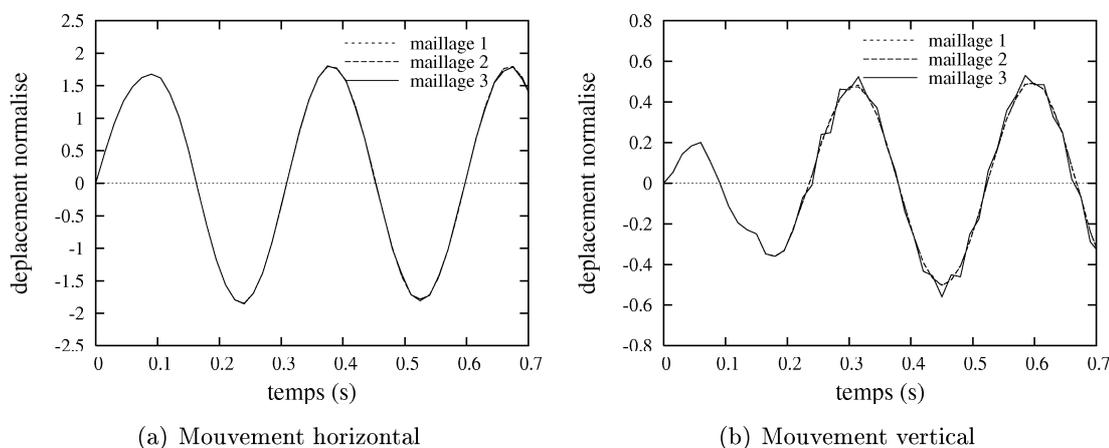


FIG. 1.20 – Influence du choix de la taille des éléments situés hors de la zone d'étude

En somme, on peut diminuer considérablement le temps de calcul en choisissant la taille des éléments comme mentionné ci-dessus. Toutefois, l'élargissement du maillage n'est plus effectif si le nombre de pas de temps est très élevé, car le maillage doit être très étendu.

### b. Introduction de bords absorbants

Cette méthode a pour objectif d'amortir numériquement des ondes de surface virtuelles se propageant vers la zone centrale. En utilisant cette technique, la zone d'étude et son entourage sont modélisés par des éléments élastiques alors que des bords absorbants, situés aux limites du modèle, sont constitués d'éléments de comportement artificiellement visco-élastique avec un coefficient d'amortissement relativement élevé. Ces bords absorberont totalement l'énergie des ondes virtuelles avant l'arrivée de ces ondes dans la zone centrale.

Cette technique a été utilisée avec succès par Pederson [1994] pour étudier la diffraction 3D des ondes sismiques par des structures à géométries 2D. L'ajout d'éléments absorbants dans un code existant n'est pas difficile. Cependant, il faut faire attention à augmenter graduellement le coefficient d'amortissement vers les bords pour ne pas faire introduire une limite brutale dans le modèle, qui réagirait comme un source de diffraction.

### c. Usage des éléments frontières infinis

Cette méthode consiste à ajouter des éléments frontières infinis aux extrémités du modèle afin d'assurer la continuité vers l'infini du maillage. Pour représenter correctement une surface infinie (une ligne infinie en 2D), une des fonctions de forme de ces éléments spéciaux doit prendre les limites  $-1$  et  $\infty$  au lieu des valeurs usuelles  $-1$  et  $+1$ . Le choix des fonctions d'interpolation est basé sur la connaissance du comportement asymptotique à l'infini des champs élastiques (par exemple, la décroissance en distance en  $1/r$  du champ de déplacement ou  $1/r^2$  du champ de traction). Du fait de l'utilisation des fonctions de forme

et fonctions d'interpolation particulières, cette méthode nécessite des techniques spéciales pour traiter des intégrales singulières sur ces éléments.

#### d. Inclusion du champs réfléchi dans le champ libre

Cette méthode consiste à utiliser une formulation autre que (1.60) pour appliquer l'action des ondes sismiques incidentes. Comme le mouvement total est la superposition des mouvements engendrés par des ondes incidentes, ondes réfractées, onde réfléchies et/ou ondes diffractées, il est naturel de décomposer le champ de déplacement total  $\mathbf{u}$  en champ libre  $\mathbf{u}^o$  et champ *diffracté*  $\mathbf{u}^d$ . Ainsi, le déplacement total est mis sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^o + \mathbf{u}^d$$

En général, le champ libre  $\mathbf{u}^o$  venant de l'infini ne vérifie pas les conditions à l'infini, alors que le champ diffracté  $\mathbf{u}^d$  les vérifie car il s'agit d'un champ d'ondes s'éloignant de la surface libre. Donc, les équations intégrales s'appliquent au champ diffracté. A part les conditions à l'infini, le champ diffracté  $\mathbf{u}^d$  doit aussi satisfaire la condition d'équilibre (contrainte totale nulle) sur la surface libre du modèle :  $\mathbf{t}^d + \mathbf{t}^o = 0$ . Quant au champ libre  $\mathbf{u}^o$ , il sera appliqué à tous les nœuds de la partie modélisée par éléments frontières simulant l'espace semi-infini. Ce champ peut inclure ou non la réflexion sur la surface libre. Dans le premier cas,  $\mathbf{u}^o$  est exactement le champ incident  $\mathbf{u}_{eq}$ . Dans l'autre cas, il s'agit de la réponse d'un espace semi-infini homogène élastique sans la présence d'aucune structure. Un tel champ peut être calculé analytiquement comme une somme d'ondes montantes et descendantes. Dans ce cas, les conditions aux limites sur la partie plane de la surface libre, y compris les bords du modèle, sont automatiquement satisfaites. Par conséquent, les points aux extrémités du modèle ne sont plus des sources de diffraction; l'effet de troncature diminuera considérablement.

Cette méthode a été utilisée avec succès par Sanchez-Sesma et ses collègues pour étudier des effets de site dus aux irrégularités topographiques ou aux vallées sédimentaires [Sanchez-Sesma et Campillo, 1993], [Sanchez-Sesma et al., 1993]. Dans leurs simulations, bien qu'ils n'étendent le maillage qu'à une distance assez modeste :  $L$  varie de  $3a$  à  $5a$  ( $a$  est la dimension caractéristique de la zone d'étude), ils ont obtenu de bons résultats. De plus, leurs résultats sont exprimés en domaine fréquentiel, qui est plus critique que le domaine temporel du point de vue de l'effet de troncature. Ainsi, l'efficacité de cette méthode est bien justifiée.

Cependant, cette méthode a aussi ses inconvénients. D'abord, dans les problèmes faisant intervenir des structures convexes (e.g. des rides, des collines), le champ libre est calculé en faisant une continuation analytique vers le haut, c'est-à-dire en prenant l'expression de  $\mathbf{u}^o$  pour la partie d'altitude  $z > 0$  de l'espace, tandis que cette expression n'est valable que dans la partie  $z \leq 0$  de l'espace. Cette hypothèse peut donc poser un problème de non-causalité. L'existence des bruits liés à la nature non-causale du champ libre a été détectée par Pederson [1994]. De façon analogue, cette méthode n'est plus efficace si le

niveau de la surface libre n'est pas le même des deux côtés de la zone d'étude. Enfin, la décomposition du champ total en champ libre et champ diffracté complique le schéma de couplage FEM/BEM.

Dans la section ci-après, nous allons décrire une autre méthode pouvant minimiser l'effet de troncature et améliorer la performance de la BEM et le couplage FEM/BEM.

## 1.8 Une amélioration de la performance de la BEM

### 1.8.1 Inconvénients de la BEM

Un inconvénient majeur de la BEM appliquée en dynamique transitoire est l'augmentation **dramatique** du temps de calcul lorsque le nombre pas de temps  $N$  est élevé. Cet inconvénient a son origine dans la structure de convolution discrète dans le schéma temporel de la BEM (1.28), qui fait *a priori* apparaître à un instant donné les valeurs nodales de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$  à tous les instants antérieurs. En effet, suite à la présence des produits de convolution  $G_{ij} \star t_j$  et  $H_{ij} \star u_j$  dans l'équation intégrale (1.13), l'intégration temporelle doit toujours redémarrer à partir de l'instant initial  $t_o$  jusqu'à l'instant actuel  $t$ . Ainsi, le temps pour évaluer ces intégrales dans chaque pas de temps et, en conséquence, le temps total croît très vite avec le nombre pas de temps.

Un autre inconvénient, provenant aussi du schéma temporel de la BEM, concerne l'augmentation significative de la quantité d'informations à stocker dans la mémoire de l'ordinateur au cours de la procédure d'avancement dans le temps. En fait, toutes les matrices  $\mathbf{G}^k$  et  $\mathbf{H}^k$  sont à sauvegarder jusqu'à la fin du calcul, car la convolution discrète fait appel à ces matrices. Or, ces matrices sont toutes pleines et asymétriques; elles nécessitent donc un espace important de la mémoire de l'ordinateur. En outre, quand le nombre pas de temps  $N$  est assez grand, cet espace peut facilement dépasser la capacité de la mémoire centrale. Par exemple, si on a un modèle de seulement 160 nœuds et si on sauvegarde les matrices  $\mathbf{G}^k$  et  $\mathbf{H}^k$  sous le format texte, l'espace mémoire pour stocker ces matrices pour chaque pas de temps est d'environ 5 Mo. Ainsi, si on effectue un calcul de 200 pas de temps, l'espace total nécessaire pour ce calcul est de 1 Go. Or, à l'heure actuelle, les PC courants n'ont que 256 Mo ou 512 Mo de mémoire centrale. Il nous faut, dans ces cas, nous contenter de stocker ces matrices dans une mémoire externe (souvent sur un disque dur). Sachant que la vitesse de manipulation d'un disque dur est bien moindre que celle de la mémoire centrale, les procédures de lecture/écriture de ces matrices sur le disque dur ralentissent considérablement le temps de calcul.

En somme, ces inconvénients peuvent compromettre gravement l'application de la BEM en dynamique transitoire. Par exemple, dans le tableau 1.1 sont donnés les temps de calcul  $t$  correspondant à différents nombre pas de temps  $N$  d'un modèle de seulement 160 éléments frontières, lancé sur un PC dont la vitesse du microprocesseur est de 2.4 Hz. La BEM est-elle encore efficace si on doit résoudre un problème plus grand et avec un nombre de pas de temps,  $N = 2000$  à titre d'exemple (c'est souvent le cas de l'usage d'un accélérogramme

d'un séisme de longue durée)? Ainsi, il faut alléger ces inconvénients le plus possible si on veut largement appliquer la BEM en pratique.

N	25	50	75	100	125
$t$	2'	6'	25'	57'	94'

TAB. 1.1 – Augmentation du temps de calcul avec le nombre pas de temps

### 1.8.2 Stratégie d'amélioration

Afin d'améliorer la performance de la BEM, une possibilité est de tronquer les intégrales temporelles, c'est-à-dire de ne plus démarrer l'intégration à partir de l'instant initial  $t_0$  mais à partir d'un instant ultérieur, en conservant la précision du résultat dans une limite acceptable. En tenant compte de la propriété de la solution fondamentale, cette mesure est raisonnable. En effet, on observe sur la figure 1.21 une décroissance rapide de la fonction de Green  $G_{ij}$  avec le temps. En conséquence, les composantes des matrices  $\mathbf{G}^{N-m+1}$  et aussi  $\mathbf{H}^{N-m+1}$ , présentes dans la structure de convolution discrète (1.28), diminuent vite quand  $m$  diminue; elles sont d'autant plus insignifiantes que  $m$  est plus petit. Cela signifie que l'influence des états  $(\mathbf{U}^m, \mathbf{T}^m)$  aux premiers instants ( $m$  petit) sur l'état actuel  $(\mathbf{U}^N, \mathbf{T}^N)$  est faible si  $N$  est suffisamment grand. Cette influence peut donc être négligée dans la mesure où l'erreur produite par cette troncature ne dépasse pas une tolérance présélectionnée. Évidemment, le choix d'un critère de troncature et de la tolérance associée doit être bien étudié pour ne pas compromettre la précision du résultat final.

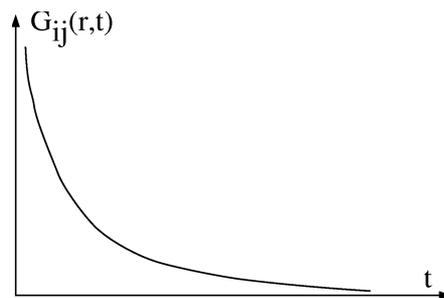


FIG. 1.21 – Variation de la fonction Green en fonction du temps

Cette stratégie d'amélioration a été appliquée, avec différents critères de troncature, par Demirel et Wang [1987] et Abouseeda et Dakoulas [1998]. Dans ce qui suit, nous proposons une autre variante inspirée de l'idée de Davey et Hinduja [1989]. En suivant les mêmes étapes que Davey et Hinduja ont proposé pour des problèmes de conduction transitoire de la chaleur, nous avons établis une formulation similaire applicable en élastodynamique transitoire.

### 1.8.3 Formulation

Il existe en général deux schémas temporels pour résoudre des équations intégrales en régime transitoire. La procédure II (équation 1.28) intègre le produit de convolution à partir de l'instant initial  $t_o$  jusqu'à l'instant actuel  $t_N$ . La procédure I, plus classique, l'intègre de  $t_{N-1}$  à  $t_N$  en considérant l'état à l'instant précédent  $t_{N-1}$  comme état initial, ensuite l'état actuel sera l'état initial pour l'étape suivante, etc. Chaque procédure a ses avantages et ses inconvénients; elles donneront des résultats 'exacts'. Notre formulation présentée ci-dessous est une combinaison de ces deux procédures, mais elle donnera des résultats approximatifs.

Considérons d'abord la formulation intégrale de la procédure I

$$\begin{aligned} c_{ij} u_j^N(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \int_{t_{N-1}}^{t_N} F_i(\mathbf{x}, \tau) G_{ij}(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} \int_{t_{N-1}}^{t_N} [G_{ij}(\mathbf{x}, t - \tau) t_i(\mathbf{x}, \tau) - H_{ij}(\mathbf{x}, t - \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau)] d\tau d\Gamma \end{aligned} \quad (1.61)$$

Ensuite, les fonctions d'interpolation spatiale et temporelle usuelles (section 1.2.1) sont sélectionnées pour les champs de déplacement et de vecteur-contrainte et la distribution des efforts internes volumiques  $F_i(\mathbf{x}, t)$  est supposée constant par morceaux. L'équation intégrale discrétisée de la procédure I est mise en forme :

$$\mathbf{c}\mathbf{U}^N = \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-1}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^1(\mathbf{x}) d\Omega + (\mathbf{G}^1 \mathbf{T}^N - \mathbf{H}^1 \mathbf{U}^N) \quad (1.62)$$

L'équation (1.62) permet de calculer l'état actuel  $t_N$  en connaissant l'état de l'instant antérieur  $t_{N-1}$ . Si  $k$  états antérieurs sont connus ( $k > 1$ ), l'état actuel peut aussi être calculé à partir de ces états. Comme montré ultérieurement, la précision du résultat dépendra du choix de  $k$ . Normalement, les valeurs  $k$ , qui varie de 3 à 7, donneront de bons résultats. Dans le cas de  $k > 1$ , l'équation (1.62) est modifiée comme suit :

$$\mathbf{c}\mathbf{U}^N = \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) d\Omega + \sum_{m=N-k+1}^N (\mathbf{G}^{N-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1} \mathbf{U}^m) \quad (1.63)$$

La formulation (1.63) est exacte, mais elle fait intervenir une intégrale dans le domaine  $\Omega$  de  $\mathbf{F}^{N-k}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^k(\mathbf{x})$ . La présence d'une intégrale de domaine est le grand inconvénient de cette formulation. En fait, l'évaluation de cette intégrale de domaine conduit traditionnellement à découper le domaine d'étude  $\Omega$  en *cellules d'intégration*, construites à l'aide d'un maillage de type éléments finis. Les valeurs aux nœuds de ces cellules de la force interne volumique  $F_i$  sont d'abord évaluées; l'intégration numérique sur le domaine est ensuite calculée par la quadrature de Gauss. Cette procédure nécessite beaucoup d'opérations de calcul et, par conséquent, de temps. En outre, la division en cellules d'intégration n'est pas évidente quand on traite un domaine ouvert. Ainsi, l'intégration numérique, par cellules

d'intégration, de cette intégrale de domaine n'est pas appréciée. Nous essayons dans la suite de l'évaluer approximativement par une autre procédure.

Considérons le théorème de la valeur moyenne appliqué aux intégrales de domaine :

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{k-1}(\mathbf{x}) d\Omega = \overline{\mathbf{F}^{N-k}} \int_{\Omega} \mathbf{G}^{k-1}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) d\Omega &= (\overline{\mathbf{F}^{N-k}} + \eta) \int_{\Omega} \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) d\Omega \\ &\approx \overline{\mathbf{F}^{N-k}} \int_{\Omega} \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (1.65)$$

Dans les formules (1.64) et (1.65),  $\overline{\mathbf{F}^{N-k}}$  est considéré comme une valeur moyenne représentative de  $\mathbf{F}^{N-k}(\mathbf{x})$  dans le domaine  $\Omega$ . L'erreur de l'approximation (1.65) est normalement négligeable car  $\eta \ll \overline{\mathbf{F}^{N-k}}$  dans la majorité des cas. A partir de (1.64) et (1.65), l'intégrale de domaine dans l'équation (1.63) est estimée de manière approchée :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) d\Omega &\approx \overline{\mathbf{F}^{N-k}} \int_{\Omega} \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) d\Omega \\ &\approx \underbrace{\frac{\int_{\Omega} \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) d\Omega}{\int_{\Omega} \mathbf{G}^{k-1}(\mathbf{x}) d\Omega}}_{\psi_k} \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{k-1}(\mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (1.66)$$

Le coefficient  $\psi_k$  dans la formule (1.66) ne dépend que du coefficient  $k$  présélectionné ; il peut donc être calculé a priori. Pour évaluer le deuxième terme du membre droit de la formule (1.66), nous appliquons l'équation (1.63) avec  $N-1$  &  $m$  et  $N-1$  &  $m-1$  :

$$\mathbf{cU}^{N-1} = \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k-1}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) d\Omega + \sum_{m=N-k}^{N-1} (\mathbf{G}^{N-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1} \mathbf{U}^m) \quad (1.67)$$

$$\mathbf{cU}^{N-1} = \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{k-1}(\mathbf{x}) d\Omega + \sum_{m=N-k+1}^{N-1} (\mathbf{G}^{N-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1} \mathbf{U}^m) \quad (1.68)$$

Soustrayant l'équation (1.67) de l'équation (1.68), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^{k-1}(\mathbf{x}) d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k-1}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) d\Omega \\ &+ (\mathbf{G}^{k+1} \mathbf{T}^{N-k} - \mathbf{H}^{k+1} \mathbf{U}^{N-k}) \end{aligned} \quad (1.69)$$

A partir de (1.66) et (1.69), on obtient la première approximation du membre gauche de l'équation (1.63) :

$$\begin{aligned} \mathbf{cU}^N &\approx \psi_k \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k-1}(\mathbf{x}) \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) d\Omega + \psi_k (\mathbf{G}^{k+1} \mathbf{T}^{N-k} - \mathbf{H}^{k+1} \mathbf{U}^{N-k}) \\ &+ \sum_{m=N-k+1}^N (\mathbf{G}^{N-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1} \mathbf{U}^m) \end{aligned} \quad (1.70)$$

L'équation (1.70) contient encore une intégrale de domaine de  $\mathbf{F}^{N-k-1}(\mathbf{x})\mathbf{G}^k(\mathbf{x})$ . Nous devons donc suivre la procédure précédente pour faire apparaître l'intégrale de domaine de  $\mathbf{F}^{N-k-2}(\mathbf{x})\mathbf{G}^k(\mathbf{x})$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k-1}(\mathbf{x})\mathbf{G}^k(\mathbf{x})d\Omega &\approx \psi_k \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k-1}(\mathbf{x})\mathbf{G}^{k-1}(\mathbf{x})d\Omega \\ &\approx \psi_k \left[ \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k-2}(\mathbf{x})\mathbf{G}^k(\mathbf{x})d\Omega + (\mathbf{G}^{k+2}\mathbf{T}^{N-k-1} - \mathbf{H}^{k+2}\mathbf{U}^{N-k-1}) \right] \end{aligned}$$

Ensuite, on a la deuxième approximation de l'équation (1.63)

$$\begin{aligned} \mathbf{cU}^N &\approx (\psi_k)^2 \int_{\Omega} \mathbf{F}^{N-k-2}(\mathbf{x})\mathbf{G}^k(\mathbf{x})d\Omega + (\psi_k)^2 (\mathbf{G}^{k+2}\mathbf{T}^{N-k-1} - \mathbf{H}^{k+2}\mathbf{U}^{N-k-1}) \\ &+ \psi_k (\mathbf{G}^{k+1}\mathbf{T}^{N-k} - \mathbf{H}^{k+1}\mathbf{U}^{N-k}) + \sum_{m=N-k+1}^N (\mathbf{G}^{N-m+1}\mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1}\mathbf{U}^m) \end{aligned}$$

En suivant la procédure de recul décrite ci-dessus, la dernière approximation de l'équation (1.63) est finalement obtenue

$$\begin{aligned} \mathbf{cU}^N &\approx (\psi_k)^{N-k} \int_{\Omega} \mathbf{F}^0(\mathbf{x})\mathbf{G}^k(\mathbf{x})d\Omega \\ &+ \sum_{i=1}^{N-k} (\psi_k)^i (\mathbf{G}^{k+i}\mathbf{T}^{N-k-i+1} - \mathbf{H}^{k+i}\mathbf{U}^{N-k-i+1}) \\ &+ \sum_{m=N-k+1}^N (\mathbf{G}^{N-m+1}\mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1}\mathbf{U}^m) \end{aligned} \quad (1.71)$$

Avec les conditions initiales nulles ( $\mathbf{F}^0(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$ ), l'intégrale de domaine dans l'équation (1.71) est nulle. L'équation intégrale discrétisée approchée ne fera intervenir que des intégrales de contour, aucune discrétisation en domaine n'est nécessaire. Cette équation peut s'écrire sous une forme usuelle comme celle de l'équation classique (1.28) :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}^1\mathbf{U}^N &\approx \mathbf{G}^1\mathbf{T}^N + \sum_{m=N-1}^{N-k+1} (\mathbf{G}^{N-m+1}\mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1}\mathbf{U}^m) \\ &+ \sum_{m=N-k}^1 (\psi_k)^{N-k+1-m} (\mathbf{G}^{N-m+1}\mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1}\mathbf{U}^m) \end{aligned} \quad (1.72)$$

La structure de l'équation (1.72) est semblable à celle de l'équation (1.28). L'évaluation du produit de convolution discret est d'abord effectuée exactement comme celle de l'équation (1.28) (procédure II) pour les  $k$  derniers instants  $m = N-1 \rightarrow N-k+1$ . Pour les instants antérieurs  $m = N-k \rightarrow 1$  la contribution de chaque instant est multipliée par un facteur  $(\psi_k)^{N-k+1-m}$ . En général, ce facteur diminue très vite en fonction exponentielle, lorsque  $m$  diminue. En effet, par définition, le coefficient  $\psi_k$  est normalement inférieur à l'unité  $\psi_k < 1$  en raison de la décroissance rapide de la fonction de Green avec le temps (figure 1.21). Ainsi, après  $q$  étapes ( $q < N-k$ ), le facteur  $(\psi_k)^{N-k+1-m}$  devient très petit ; la

contribution des instants antérieurs multipliée par ce facteur est très faible et est donc négligée. Donc, l'évaluation du produit de convolution discret est tronquée après  $k+q$  étapes ; cela signifie aussi que la détermination de l'état actuel nécessite seulement la connaissance des états de  $k+q$  instants antérieurs. On a l'expression de l'équation tronquée :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{U}^N &\approx \mathbf{G}^1\mathbf{T}^N + \sum_{m=N-1}^{N-k+1} (\mathbf{G}^{N-m+1}\mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1}\mathbf{U}^m) \\ &+ \sum_{m=N-k}^{N-k-q} (\psi_k)^{N-k+1-m} (\mathbf{G}^{N-m+1}\mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{N-m+1}\mathbf{U}^m) \end{aligned} \quad (1.73)$$

Le coefficient  $q$  est déterminé par le critère  $(\psi_k)^q < \epsilon$  où  $\epsilon$  est une tolérance suffisamment petite à choisir a priori. Notons que cette tolérance n'est pas une mesure de l'erreur globale produite par notre approximation ; elle ne donne qu'un critère pour tronquer l'intégration temporelle. Évidemment, la précision de l'approximation est contrôlée par cette tolérance  $\epsilon$  et aussi par le coefficient  $k$ . Ces coefficients doivent donc être bien choisis pour assurer une précision raisonnable. Le choix de ces coefficients dépend du type de problème considéré. Dans des problèmes faisant intervenir un espace semi-infini, que nous allons traiter dans les chapitres suivants, nous avons sélectionné  $k = 5$  et  $\epsilon = 0.1$ .

Le dernier coefficient à calculer est  $\psi_k$ . Comme le calcul de ce coefficient intervient une intégrale de domaine, nous devons recourir au théorème de divergence pour transformer cette intégrale en intégrale de contour :

$$\psi_k = \frac{\int_{\Omega} \mathbf{G}^k(\mathbf{x})d\Omega}{\int_{\Omega} \mathbf{G}^{k-1}(\mathbf{x})d\Omega} = \frac{\int_{\Gamma} \mathbf{I}^k(\mathbf{x})\mathbf{n}d\Gamma}{\int_{\Gamma} \mathbf{I}^{k-1}(\mathbf{x})\mathbf{n}d\Gamma} \quad (1.74)$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^k(\mathbf{x}) &= [\mathbf{I}(\mathbf{x}, t)]_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \quad \text{et} \quad \mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega} \int_0^t \mathbf{G}(\mathbf{x}, \tau) d\tau d\Omega \\ \mathbf{I}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{m=1}^2 \frac{H(\alpha_m - 1)}{v_m^3} \left( \frac{1}{2} \delta_{ij} I_{1m} - \frac{1}{3} I_{2m} \right) \\ I_{1m} &= r (\alpha_m \cosh^{-1}(\alpha_m) - \beta_m) - v_m \cosh^{-1}(v_m/r) + \sqrt{v_m^2 - r^2} \\ I_{2m} &= r(1 - r_{,i}r_{,j}) \left( \beta_m^3 - (v_m^2/r^2 - 1)^{3/2} \right) \\ \alpha_m &= \frac{v_m t}{r} \quad \text{et} \quad \beta_m = \sqrt{\alpha_m^2 - 1} \end{aligned}$$

#### 1.8.4 Validation

Avec la formulation (1.73), la détermination de l'état actuel n'implique que  $k+q$  états antérieurs. Le fait que  $k+q \ll N$  si  $N$  est élevé (de l'ordre de quelques dizaines ou plus) entraîne une réduction notable du temps de calcul. De plus, seulement  $k+q$  matrices  $\mathbf{G}^i$  et  $\mathbf{H}^i$  sont à stocker ; l'espace nécessaire pour le stockage temporaire des informations pendant le calcul est aussi considérablement réduit. Ce sont des points forts de la formulation proposée.

Cependant, la solution de l'équation (1.73) n'est qu'une approximation de la solution de référence de l'équation (1.28). Afin de vérifier la précision de la formulation proposée, nous avons repris l'exemple d'une colline soumise à l'incidence de l'onde SV harmonique, utilisé dans la section 1.7.2. Sur la figure 1.22 est tracée la variation, en fonction du temps, des déplacements horizontal et vertical au pied de la colline, normalisés par l'amplitude de l'onde incidente. Dans cet exemple, en posant  $k = 5$  et  $\epsilon = 0.1$ , la résolution par la BEM améliorée (eq. 1.73) ne tient compte que des  $k + q = 20$  dernières pas de temps, alors que le nombre pas de temps total est de 50. Malgré cette troncature, le résultat par la BEM améliorée est en excellent accord avec celui obtenu par la BEM dite 'classique' (eq. 1.28).

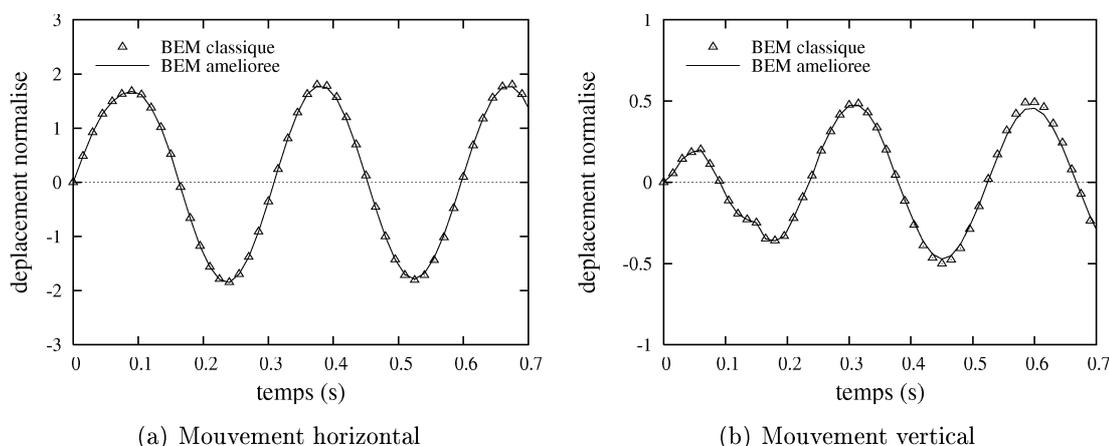
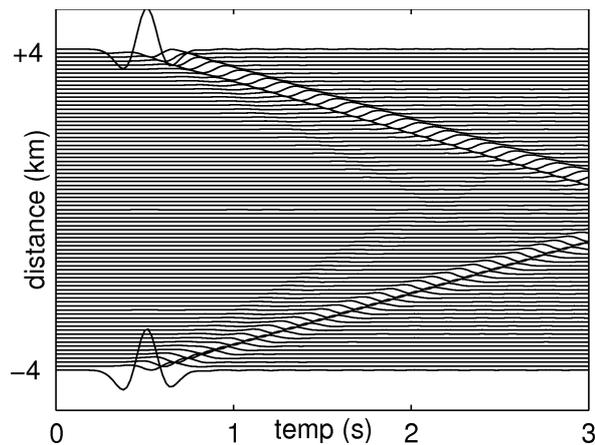


FIG. 1.22 – Comparaison entre la BEM classique et la BEM améliorée

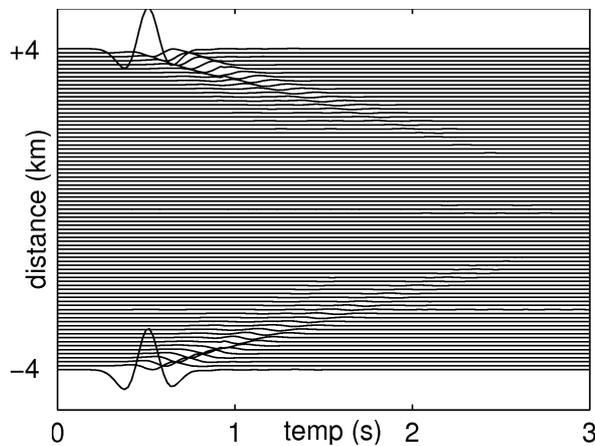
Un autre avantage très important de la formulation (1.73) est la capacité de réduire l'effet de troncature dans les problème faisant intervenir un espace semi-infini. Revenons à l'exemple de l'espace semi-infini soumis à l'incidence verticale d'une onde SV harmonique présenté dans la section 1.7.2. La calcul par la BEM classique montre l'existence d'une onde artificielle se propageant des bords à l'intérieur du modèle (figure 1.23a). Cette onde est aussi présente dans le résultat par la BEM améliorée (figure 1.23b), mais elle est amortie très vite et n'atteint pas la zone centrale du modèle.

Cette capacité d'amortir des ondes parasites de la BEM améliorée a son origine dans la procédure de troncature de l'intégration temporelle. En effet, après un certain pas de temps, les ondes parasites, nées aux premiers instants, ne sont plus prises en compte du fait de la troncature; ses effets sont donc atténués au fur et à mesure jusqu'à zéro.

Tenant compte de la propriété d'amortissement des ondes d'erreurs de la BEM améliorée, le maillage d'un modèle simulant l'espace semi-infini n'a pas besoin d'être trop étendu. En fait, on n'a qu'à étendre le maillage à une distance assez 'modeste' dans la mesure où les ondes artificielles sont complètement atténuées avant d'arriver à la zone centrale du maillage. Pour démontrer cette idée, nous avons repris l'exemple de la colline soumise à l'incidence sismique ci-dessus. La réponse 1 calculée par la BEM classique avec l'extension du maillage  $L=2100$  m est la solution de référence dans l'intervalle  $t = [0, 0.7$  s]. Elle sera



(a) Résultat par BEM classique



(b) Résultat par BEM améliorée

FIG. 1.23 – Effet de la troncature de l'espace semi-infini

comparée avec des réponses correspondant à un maillage réduit, avec l'extension  $L=400$  m, calculées par la BEM classique, réponse 2, ou par la BEM améliorée, réponse 3. Comme montré sur la figure 1.24, la réponse 3 s'accorde très bien avec la réponse de référence alors que la réponse 2 est très erronée. Cette constatation confirme donc l'idée ci-dessus.

En somme, la BEM améliorée a trois avantages vraiment utiles : la réduction du temps de calcul des intégrales temporelles, la réduction de l'espace de stockage des données temporaires et la réduction du maillage des modèles impliquant l'espace semi-infini. Grâce à ces trois avantages, le temps de calcul total diminue considérablement tandis que la précision reste raisonnable. La demande de ressources de l'ordinateur est aussi beaucoup réduite. L'application de la BEM améliorée en dynamique transitoire devient donc clairement très attractive.

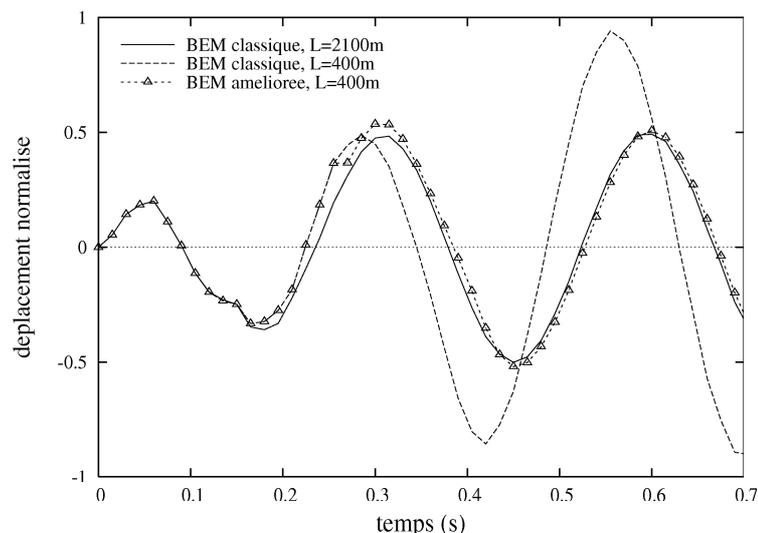


FIG. 1.24 – Précision des maillages réduits

## 1.9 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à étudier l'application du couplage éléments finis/éléments frontières en dynamique transitoire. Dans la première partie, nous avons décrit les formulations de la méthode des éléments frontières et son couplage avec la méthode d'éléments fins ; le code de calcul HYBRID et sa validation ont aussi été présentés. Dans la deuxième partie, des problèmes numériques associés ont été étudiés. Il s'agit de l'augmentation dramatique du temps de calcul avec le nombre de pas de temps, de la stabilité du schéma temporel et de l'effet de la troncature de l'espace semi-infini. Ces problèmes constituent des inconvénients pouvant restreindre l'applicabilité de ce couplage en pratique.

Selon nous, l'inconvénient majeur du schéma BEM et FEM/BEM, qui influence le plus sur leurs performances, concerne le temps de calcul et l'espace de stockage des informations temporaires sur l'ordinateur qui croissent très vite avec le nombre pas de temps. Une méthode d'amélioration, inspirée de l'idée de Davey & Hinduja [1989], a donc été développée. L'efficacité de cette méthode est surprenante, particulièrement si le nombre pas de temps  $N$  est de l'ordre de plusieurs centaines ou milliers. Toutefois, cette méthode approximative introduit une source d'erreur qui peut produire l'instabilité dans certains cas. Dans ce travail, nous avons appliquée cette méthode avec succès aux problèmes impliquant des domaines semi-infinis. Mais il faut être prudent pour l'appliquer aux problèmes concernant des domaines bornés car l'instabilité est plus critique dans ces cas. Une étude pour le choix optimal des coefficients  $m$  et  $\epsilon$  qui contrôlent la précision est donc nécessaire.

En étudiant la stabilité du schéma d'avancement pas-à-pas dans le temps de la BEM et du FEM/BEM, nous avons observé l'instabilité d'origine purement numérique, en particulier dans les problèmes impliquant un domaine borné. Cette instabilité peut apparaître très vite et causer une détérioration complète des résultats. Pour éviter cette instabilité et

assurer la précision, nous proposons d'utiliser l'interpolation temporelle mixte avec le pas de temps approprié  $\beta = 1$ . La méthode  $\theta$  est aussi une bonne technique, mais elle introduit un amortissement, purement numérique, en même temps que des erreurs. Dans la majorité des cas en élastodynamique, le choix de l'interpolation mixte est suffisant.

Un autre obstacle pour l'usage de BEM et FEM/BEM est l'existence des ondes artificielles, qui peuvent provoquer des erreurs inadmissibles, suite à la troncature du maillage d'un modèle simulant un espace semi-infini. Dans ce travail, cet obstacle est surmonté par l'extension du maillage en prenant des éléments de grande taille hors de la zone d'étude et par l'utilisation de la méthode d'amélioration présentée ci-dessus.

## Chapitre 2

# Méthodes des éléments frontières en poroélastodynamique

Dans ce chapitre, nous commençons par décrire brièvement la théorie des milieux poreux saturés ainsi que l'établissement de l'équation intégrale de frontière. Ensuite, une approximation de la solution fondamentale temporelle, en termes de  $(u_i, p)$ , sera dérivée. Enfin, l'intégration de cette solution dans le code HYBRID et sa validation seront présentées.

### 2.1 Bibliographie

#### 2.1.1 Théorie des milieux poreux

Pour des milieux infiltrés de fluide, tels que des sols saturés d'eau ou des roches imbibées d'huile, la théorie de la mécanique des milieux continus n'est qu'une approximation parfois brute pour examiner le comportement dynamique de ces milieux. En fait, le mouvement libre du fluide interstitiel peut modifier considérablement la réponse mécanique du milieu considéré. Dans ces cas, l'usage de la théorie des milieux poreux (la poromécanique), qui est capable de modéliser la présence du fluide interstitiel et son interaction avec le squelette solide, est indispensable. Cette théorie a actuellement son champ d'application dans plusieurs domaines tels que le génie civil, la géologie, la sismologie, la biomécanique, etc. Plusieurs problèmes d'ingénieur, en particulier des problèmes d'évolution, doivent recourir à cette théorie, parmi lesquels on peut citer : le dimensionnement des centrales nucléaires, des barrages sous chargements sismiques, la stabilité des plate-formes off-shore, le potentiel de liquéfaction des sols, la propagation d'ondes dans de différentes formations géologiques.

La première contribution à la théorie de la poromécanique a été présentée par Biot [1941] pour des problèmes quasi-statiques des matériaux isotropes élastiques linéaires infiltrés de fluide visqueux. Elle a été généralement considérée comme le point de départ de la théorie de la poroélasticité. Dans les années suivantes, Biot a élargi sa théorie aux cas de l'élasticité anisotrope [Biot, 1955] et aussi de la viscoélasticité [Biot, 1956a]. Son extension aux problèmes dynamiques a été publiée dans deux articles, l'un pour la gamme de basse

fréquence [Biot, 1956b] et l'autre pour la gamme de haute fréquence [Biot, 1956c]. Ainsi, par une série d'articles, Biot a construit une théorie assez complète susceptible de modéliser plusieurs aspects du comportement mécanique des milieux poreux saturés de fluide (statique ou dynamique, isotrope ou anisotrope, visqueux ou non). Cette théorie, en utilisant une description phénoménologique macroscopique basée sur l'hypothèse de l'existence d'un potentiel de déformation élastique et d'une fonction de dissipation visqueuse, établit un système d'équations aux dérivées partielles couplées régissant les mouvements du squelette et du fluide interstitiel. La signification physique des nouvelles constantes matérielles présentes dans sa théorie a été bien expliquée par Biot et Willis [1957]. Ces constantes ont été mesurées en laboratoire pour la première fois par Yew et al. [1979]. Parmi les résultats importants de la théorie de Biot était l'identification de trois ondes de volume, deux ondes de compression et une onde de cisaillement. L'existence de la seconde onde de compression, connue sous le nom d'onde lente, a été expérimentalement confirmée [Plona, 1980].

Dans les travaux initiaux de Biot, le squelette est supposé élastique linéaire et subit de petites déformations (hypothèse de petites perturbations). L'extension de sa théorie pour prendre en compte des transformations finies et le comportement inélastique non-linéaire du squelette a été menée par Zienkiewicz et Bettles [1982], Zienkiewicz et al. [1990], Prévost [1980] et d'autres. Cette extension a acquis une importance considérable ces dernières années, due au souci accru avec le phénomène de liquéfaction des dépôts de sable saturé sous chargement sismique.

Une approche différente pour la théorie de la poromécanique, appelée 'théorie de mélange', a été initialement proposée par Truesdell et Touppin [1960] et suivie par plusieurs auteurs ([Green et Naghdi, 1965], [Bowen, 1976]). Cette approche est basée sur la description, à l'échelle microscopique, du comportement mécanique des constituants, considérés comme des milieux continus, et leur interaction, et sur des techniques d'homogénéisation pour décrire le comportement macroscopique du milieu. En principe, cette théorie peut être appliquée aux matériaux hétérogènes multi-phasiques généraux. Sous certaines conditions, l'application de cette théorie aux milieux poreux saturés bi-phasiques entraîne un système d'équations similaire à celui de Biot. Cependant, pour plusieurs variables et constantes matérielles résultant de cette théorie compliquée, il est très difficile à trouver la signification physique correspondante. Ainsi, l'utilisation de cette théorie par l'ingénieur est très restreinte. En pratique, la théorie de Biot est la plus connue et admise par les ingénieurs ainsi que les scientifiques, surtout dans les domaines de géomécanique et géophysique.

### 2.1.2 Méthode des éléments frontières en poroélastodynamique

En raison de la complexité du système couplé d'équations régissant le comportement d'un milieu poreux saturé, la résolution d'un problème poromécanique par une méthode numérique est quasiment incontournable. La méthode numérique la plus utilisée est, bien entendu, la méthode des éléments finis. Cependant, cette méthode rencontre des difficultés pour modéliser la propagation d'ondes dans un milieu infini ou semi-infini. Dans ces cas, la

méthode des éléments frontières est souvent employée, car la radiation des ondes de volume est automatiquement prise en compte dans sa formulation..

L'application de la méthode des éléments frontières aux problèmes poroélastiques a été initialement limitée aux problèmes quasi-statiques (surtout des problèmes de consolidation des sols saturés). Parmi les formulations d'équations intégrales établies dans le domaine de Laplace, on peut citer les travaux de Cleary [1977], Cheng et Ligget [1984] pour les cas 2D, Badmus et al. [1993] pour les cas 3D. Dargush et Banerjee [1989], Cheng et Detournay [1998] ont publié plus tard des formulations dans le domaine temporel.

Pour des problèmes dynamiques, les premières formulations ont été établies dans les domaines transformés (Fourier ou Laplace) car une expression explicite de la solution fondamentale en domaine temporel est mathématiquement difficile à trouver. La première formulation, exprimée en termes de déplacements du squelette et du fluide  $(u_i, w_i)$ , dans le domaine de Laplace, a été présentée par Manolis et Beskos [1989]. Cependant, les variables  $w_i$  ne peuvent pas être directement mesurables ; par conséquent, l'utilisation de ces variables n'est pas pratique, du point de vue de l'ingénieur. En réalité, la pression interstitielle  $p$  est couramment employée au lieu de  $w_i$ , surtout en géotechnique, simplement car elle est mesurable. De plus, Bonnet [1987] a montré que, dans les domaines transformés, seulement 4 variables, 3 composantes de déplacement du squelette  $u_i$  et la pression du fluide  $p$ , sont indépendantes. Basées sur ces 4 variables (3 variables en 2D), plusieurs formulations ont été publiées par Cheng et al. [1991], Dominguez [1992] pour le domaine fréquentiel et par Chen et Dargush [1995] pour le domaine de Laplace. Quant aux formulations établies directement dans le domaine temporel, on peut mentionner celle de Wiebe et Ante [1991] , en termes de  $(u_i, U_i)$ , et celle de Chen [1994b], en termes de  $(u_i, p)$ , utilisant des solutions fondamentales temporelles. Récemment, Schanz [2001] a proposé un schéma temporel, mais utilisant la solution transformée du domaine de Laplace.

L'utilisation d'un schéma temporel d'éléments frontières nécessite normalement de connaître la solution fondamentale temporelle, à l'exception du schéma de Schanz [2001], dans lequel la solution fondamentale du domaine de Laplace est employée. Pour des problèmes quasi-statiques, une solution temporelle exacte existe [Dargush et Banerjee, 1989]. Toutefois, jusqu'à l'heure actuelle aucune expression analytique exacte de la solution temporelle n'a été publiée. Les solutions temporelles existant dans la littérature sont toutes des approximations. La première tentative d'obtenir la solution temporelle, en termes de 6 variables, est due à Burridge et Vargas [1979]. Ensuite, des approximations à court terme ( $t$  petit) ont été présentées par Kaynia et Banerjee [1992a], en termes de  $(u_i, w_i)$ , et par Kaynia [1992b], en termes de  $(u_i, p)$ . En dérivant la solution exacte du domaine de Laplace, Chen a proposé des approximations pour le cas 3D [Chen, 1994a] et 2D [Chen, 1994b]. Récemment, Gatmiri et Kamalian [1999] ont publié une approximation à long terme ( $t$  grand) appropriée au cas 'u-p', en négligeant l'accélération du fluide interstitiel. Les solutions temporelles ci-dessus sont toutes analytiquement validées, mais aucune d'elles n'est intégrée ni son efficacité testée dans un code de calcul d'éléments frontières. Dans le cadre de ce

travail, nous proposons une approximation de la solution temporelle, adaptée aux milieux de constituants incompressibles, sous sollicitations de basse fréquence.

## 2.2 Comportement dynamique des milieux poreux saturés

### 2.2.1 Système d'équations

#### a. Choix des variables d'état

A l'échelle macroscopique adoptée par l'ingénieur, un milieu poreux est représenté par la superposition de deux milieux continus, associés respectivement au squelette et au fluide. Cela signifie qu'à tout instant et en tout point de l'espace, deux particules coïncident, l'une appartenant au squelette et l'autre au fluide. Ces deux particules sont animées de vitesses distinctes car le fluide peut, a priori, se déplacer librement par rapport au squelette. Le mouvement du fluide peut donc être représenté, soit séparément du squelette [Biot, 1955], [Dominguez, 1992], soit en relation avec le mouvement du squelette [Zienkiewicz et Bettess, 1982], [Zienkiewicz, 1982]. La deuxième approche signifie que l'on adopte une description cinématique, généralement lagrangienne, par rapport au squelette pour les variables attachées au squelette et aussi au fluide. Cette dernière description s'avère plus pertinente pour la formulation des lois de comportement du milieu poreux, point clé de la modélisation. Par conséquent, elle est largement acceptée en pratique.

En ce qui concerne la représentation des efforts intérieurs, deux descriptions peuvent être considérées : l'une en contraintes partielles  $\sigma_s$  du squelette et  $\sigma_f$  du fluide [Biot, 1955], l'autre en contrainte totale  $\sigma$  et pression interstitielle  $p$  [Zienkiewicz et Bettess, 1982], [Zienkiewicz, 1982]. Ces deux descriptions sont équivalentes du point de vue mathématique. Cependant, la deuxième description est généralement préférable, du point de vue de l'ingénieur, car elle fait intervenir des quantités physiques directement mesurables, ce qui conviennent aux conventions usuelles de la mécanique des sols et des roches. En revanche, les quantités de la première description ne sont pas mesurables ; en outre, il est quasiment impossible d'interpréter les conditions aux limites en termes de contraintes partielles. Donc, la première description n'a qu'une valeur théorique et son utilisation pratique est très limitée.

En bref, les variables d'état couramment utilisées par l'ingénieur sont le déplacement du squelette avec le déplacement relatif fluide/squelette, pour décrire le mouvement du milieu, et la contrainte totale avec la pression interstitielle, pour représenter les efforts internes. L'écriture des équations régissant le comportement dynamique des milieux poreux saturés en termes de ces variables sont présentées ci-dessous.

#### b. Équation d'équilibre global

Cette équation exprime l'équilibre global des forces agissant sur un volume élémentaire représentatif, à savoir le gradient de la contrainte totale, la densité de force externe

volumique et la force d'inertie :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \quad (2.1)$$

dans laquelle  $u_i$  est le déplacement du squelette,  $w_i$  désigne le déplacement relatif moyen du fluide par rapport au squelette ;  $\rho_s, \rho_f, \rho$  indiquent, respectivement, les masses volumiques du grain solide, du fluide et du système squelette/fluide ( $\rho = n\rho_f + (1-n)\rho_s$ ) ;  $n$  est la porosité et  $F_i$  représente la densité de force externe volumique.

### c. Équation d'écoulement du fluide

Il s'agit de la loi de Darcy généralisée. Cette équation décrit l'équilibre des forces agissant sur la phase fluide du volume élémentaire représentatif, à savoir le gradient de la pression interstitielle, la force d'inertie et la force 'résistante' du fluide due à sa viscosité :

$$-p_{,i} = \frac{1}{k} q_i + \rho_f \ddot{u}_i + m \ddot{w}_i - f_i \quad (2.2)$$

dans laquelle  $p$  est la pression interstitielle ;  $q_i = \dot{w}_i$  désigne le flux de fluide ;  $k$  représente le coefficient de perméabilité ;  $f_i = \rho_f g_i$  est la force externe volumique agissant sur le fluide ;  $m = \rho_f/n$  (selon [Zienkiewicz et Bettess, 1982]) ou  $m = \rho_f/n + \rho_a/n^2$  (selon [Biot, 1956b]) où  $\rho_a$  peut être interprété comme la masse volumique *apparente* correspondant à la relation de l'écoulement réel du fluide dans le réseau des pores par rapport au mouvement moyen macroscopique du fluide.

### d. Loi de comportement du squelette

En généralisant le concept de contrainte effective largement utilisé dans la mécanique des sols, Biot et Willis [1957] et Zienkiewicz [1982] ont défini une autre contrainte effective, appropriée aux milieux poreux saturés, y compris les sols, comme suit :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha p \delta_{ij} \quad (2.3)$$

avec

$$\alpha \simeq 1 - K_o/K_s \leq 1$$

où  $\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}$  et  $p$  sont la contrainte totale, la contrainte effective et la pression interstitielle (par convention,  $\sigma_{ij}, \sigma'_{ij}$  positives en traction et  $p$  positive en compression) ;  $K_s, K_f, K_o$  indiquent les modules de compression du grain solide, du fluide et du système squelette/fluide ;  $\alpha$  est le coefficient de Biot. Pour des roches,  $\alpha$  prend des valeurs de 0.5 à 0.8 ; pour la plupart des sols  $K_o \ll K_s$  (cela signifie que la déformation volumique moyenne du squelette est très petite par rapport à la variation de la porosité),  $\alpha$  est proche 1 et la définition originale de la contrainte effective de Terzhagi est retrouvée.

Généralement le comportement du squelette est régi par cette contrainte effective. Dans le cas du milieu inélastique non-linéaire, l'équation constitutive du squelette est de la forme incrémentale suivante :

$$d\sigma'_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{ij} \quad (2.4)$$

$D_{ijkl}$  désigne le tenseur (d'ordre 4) d'élasticité drainée tangent du squelette, mesuré à pression interstitielle constante. Il dépend normalement de l'état de contrainte - déformation actuel  $D_{ijkl} = D_{ijkl}(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$  et aussi de l'histoire du chargement.

Si le milieu est isotrope élastique linéaire, la loi de comportement peut s'écrire sous la forme simple en termes de contrainte totale :

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{ii} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \alpha p\delta_{ij} \quad (2.5)$$

où  $\lambda, \nu$  sont les coefficients de Lamé du squelette (mesurés en condition drainée)

### e. Conservation de la masse du fluide

Cette équation exprime l'équilibre dynamique entre le volume du fluide sortant et celui du fluide entrant dans un volume élémentaire représentatif :

$$\zeta = -w_{i,i} + Q = \alpha\varepsilon_{ii} + \frac{1}{M}p \quad (2.6)$$

dans laquelle  $\zeta$  est la variation en volume du fluide ;  $\gamma$  indique la vitesse d'injection du fluide (s'il existe une source d'injection du fluide à l'intérieur du milieu) et  $Q = \int_{t_0}^t \gamma dt$  désigne le volume cumulé du fluide injecté ;  $M$ , appelé le module de Biot [Biot et Willis, 1957], [Zienkiewicz, 1982], représente la compressibilité combinée du grain solide et du fluide

$$\frac{1}{M} = \frac{\alpha - n}{K_s} + \frac{n}{K_f}$$

Dans le cas des sols saturés par un fluide incompressible (de l'eau, par exemple), on a  $K_f, K_s \gg K_o$ , ce qui conduit à  $1/M \approx 0$ . Dans ce cas, le deuxième terme du membre de droite de l'équation (2.6) peut être négligé.

## 2.2.2 Récapitulatif des formulations

### a. Formulation générale

Dans le cas général, le comportement dynamique d'un milieu poreux saturé élastique linéaire est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + F_i &= \rho\ddot{u}_i + \rho_f\ddot{w}_i \\ -p_{,i} &= \frac{1}{k}q_i + \rho_f\ddot{u}_i + m\ddot{w}_i - f_i \\ \sigma_{ij} &= \lambda\varepsilon_{ii} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \alpha p\delta_{ij} \end{aligned}$$

$$-w_{i,i} + Q = \alpha \varepsilon_{ii} + \frac{1}{M} p$$

Ces équations peuvent être regroupées pour faire apparaître un système d'équations plus compact en termes de 6 variables de base  $u_i$  et  $w_i$  :

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \alpha^2 M + \mu) u_{j,ji} + \alpha M w_{j,ji} - \rho \ddot{u}_i - \rho_f \ddot{w}_i + F_i - \alpha M Q_{,i} = 0 \quad (2.7)$$

$$\alpha M u_{j,ji} + M w_{j,ji} - \frac{\dot{w}_i}{k} - m \ddot{w}_i - \rho_f \ddot{u}_i - M Q_{,i} + f_i = 0 \quad (2.8)$$

Tout problème bien posé comporte, en outre, des conditions initiales ainsi que des conditions aux limites sur la frontière  $\Gamma$  du domaine d'étude  $\Omega$ . Les conditions aux limites, associées au squelette, affectent soit le déplacement, soit la contrainte. Parallèlement, celles qui sont associées au fluide, affectent soit la pression interstitielle soit le débit de fluide.

$$u_i = u_i^d \text{ sur } \Gamma_u$$

$$t_i = t_i^d \text{ sur } \Gamma_t \quad (\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma \text{ et } \Gamma_u \cap \Gamma_t = 0)$$

$$p = p^d \text{ sur } \Gamma_p$$

$$q_i n_i = q^d \text{ sur } \Gamma_q \quad (\Gamma_p \cup \Gamma_q = \Gamma \text{ et } \Gamma_p \cap \Gamma_q = 0)$$

Les équations (2.7) et (2.8), avec les conditions aux limites et les conditions initiales associées, constituent une formulation générale d'un problème poroélastodynamique. Toutefois, cette formulation n'est pas beaucoup utilisée en réalité. En effet, l'utilisation des variables  $w_i$  n'est pas du tout pratique pour l'ingénieur, surtout en géotechnique, car ces variables ne peuvent pas être directement mesurables. De plus, la mise en œuvre numérique de cette formulation par les méthodes numériques usuelles (méthode des éléments finis, méthode des éléments frontières) a des difficultés spécifiques. L'emploi de la pression interstitielle  $p$  comme une variable de base est préférable. Ainsi, les formulations simplifiées, exprimées en termes de  $u_i$  et  $p$ , concernant des cas particuliers (chargement de basse fréquence, problème de consolidation, condition drainée ou non-drainée) sont couramment employées. La formulation générale (2.7, 2.8) n'est utilisée que dans les cas où aucune simplification n'est admise, par exemple pour des milieux très poreux, soumis aux chargements de haute fréquence [Zienkiewicz et Bettess, 1982], [Zienkiewicz et al., 1980].

### b. Formulation réduite 'u-p'

Cette formulation, initialement introduite par Zienkiewicz et al. [1980], est basée sur l'omission de l'accélération relative du fluide  $\ddot{w}_i$ . Zienkiewicz et Bettess [1982] ont montré théoriquement que cette hypothèse est valable pour des chargements de basse fréquence (par exemple, des sollicitations sismiques) ou des phénomènes de vitesse moyenne. Dans ces cas, l'accélération relative du fluide est considérée comme négligeable ; les termes contenant  $\ddot{w}_i$  peuvent être supprimés. Alors, les équations (2.1) et (2.2) deviennent :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.9)$$

$$p_{,i} = \frac{1}{k}q_i + \rho_f \ddot{u}_i \quad (2.10)$$

Cette hypothèse conduit alors à un système d'équations plus simple que (2.7) et (2.8) exprimé en termes de 4 variables de base indépendantes  $u_i$  et  $p$  :

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} - \alpha p_{,i} - \rho \ddot{u}_i + F_i = 0 \quad (2.11)$$

$$k p_{,ii} + k \rho_f \ddot{u}_{i,i} - \alpha \dot{u}_{i,i} - \frac{1}{M} \dot{p} + \gamma = 0 \quad (2.12)$$

Comme dans le cadre de ce travail nous traitons essentiellement la réponse de structures soumises à des sollicitations sismiques, à la quelle l'hypothèse ci-dessus est applicable, la formulation u-p sera employée.

### c. Formulation transformée du domaine de Laplace

La réponse en régime transitoire d'un problème dynamique peut être généralement obtenue, soit directement dans le domaine temporel par l'intégration directe, soit dans le domaine de Laplace par la transformation de Laplace inverse de la réponse transformée. Il est donc utile d'écrire, ici, les formulations du domaine de Laplace d'un problème poroélastodynamique général [Chen, 1994b] :

$$\mu \tilde{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \tilde{u}_{j,ji} - \rho_1 s^2 \tilde{u}_i - \alpha^* \tilde{p}_{,i} + \tilde{F}_i = 0 \quad (2.13)$$

$$\xi \tilde{p}_{,ii} - \frac{s}{M} \tilde{p} - \alpha^* \tilde{u}_{i,i} + \tilde{\gamma} = 0 \quad (2.14)$$

où le symbole  $\sim$  signifie la transformation de Laplace  $\tilde{a} = \int_0^{+\infty} a e^{-st} dt$

$\xi = 1/(ms + 1/k)$ ,  $\alpha^* = \alpha - \rho_f s \xi$ ,  $\rho_1 = \rho - \rho_f^2 s \xi$ .

Ainsi, dans cette formulation transformée, le jeu des variables de base sont  $(u_i, p)$  car  $w_i$  peut être déterminé à partir de ces variables par la relation :

$$\tilde{w}_i = \frac{\xi}{s} (\tilde{p}_{,i} - s^2 \rho_f \tilde{u}_i)$$

Dans le cas 'u-p', où l'accélération du fluide est négligée, la formulation transformée est plus simple :

$$\mu \tilde{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \tilde{u}_{j,ji} - \rho s^2 \tilde{u}_i - \alpha \tilde{p}_{,i} + \tilde{F}_i = 0 \quad (2.15)$$

$$k \tilde{p}_{,ii} - \alpha^* \tilde{u}_{i,i} + \tilde{\gamma} = 0 \quad (2.16)$$

### 2.2.3 Mise en œuvre numérique de la méthode des éléments finis

L'application de la méthode des éléments finis aux problèmes porodynamiques a été introduite par Zienkiewicz et ses collègues [Zienkiewicz et Shiomi, 1984], [Zienkiewicz et al., 1990]. En fonction du choix des variables de base et des approximations utilisées, ils ont proposé plusieurs formulations d'éléments finis. Dans ce qui suit, nous présenterons brièvement la procédure d'établissement de la formulation discrétisée dans le cas 'u-p'.

### a. Discrétisation de la géométrie et interpolation des variables

La première démarche consiste à diviser le domaine d'étude  $\Omega$  en éléments finis disjoints de forme relativement simple (généralement des éléments triangulaires ou quadrilatéraux en 2D). On suppose que le domaine  $\Omega$  est maillé avec  $K$  nœuds ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_K$ ) et  $E$  éléments finis ( $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_E$ ). La géométrie de chaque élément est définie par les coordonnées des nœuds et les fonctions de forme (habituellement polynomiale). Cette description paramétrique permet de définir, sans difficulté, des éléments courbes.

Ensuite, les inconnues, les champs de déplacements et de pression interstitielle, sont à leur tour discrétisés à l'aide de fonctions d'interpolation :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{N}_k^u(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}_k^t \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{N}_k^p(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{p}}_k^t \quad (2.17b)$$

$\bar{\mathbf{u}}_k(t)$ ,  $\bar{\mathbf{p}}_k(t)$  sont les valeurs nodales au nœud  $k$  ;  $\mathbf{N}_k^u$ ,  $\mathbf{N}_k^p$  sont respectivement des fonctions d'interpolation pour le déplacement et la pression interstitielle.

Dans la plupart des cas les fonctions d'interpolation sont les mêmes que les fonctions de forme (c'est-à-dire  $\mathbf{N}^u = \mathbf{N}^p = \mathbf{N}$ ), ce qui est le cas des éléments isoparamétriques. Dans ce travail, nous avons utilisé des éléments isoparamétriques quadrilatéraux à 8 nœuds (figure 2.1)

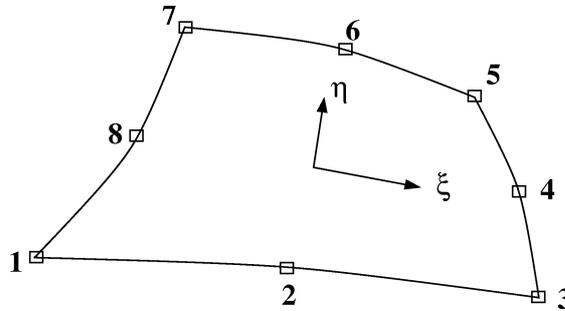


FIG. 2.1 – Éléments finis isoparamétriques quadrilatéraux à 8 nœuds

### b. Formulation discrétisée

Dès que la discrétisation géométrique et l'interpolation des variables sont réalisées, un système d'équations algébriques est établi pour construire une approximation de la solution correcte désirée. Pour la méthode des éléments finis, il s'agit d'établir la formulation faible du problème original. Il y a principalement deux procédés différents pour obtenir une telle formulation faible : le premier est la méthode des résidus pondérés, le second est la détermination de fonctionnelles variationnelles que l'on cherche à rendre stationnaires. Pour

un problème général, le premier procédé semble plus facile à suivre que le second, car il n'est pas toujours évident de trouver la fonctionnelle appropriée d'un problème compliqué. Parmi plusieurs variantes de la méthode des résidus pondérés, la méthode de Galerkin, qui utilise simplement les fonctions de forme comme pondération, est la plus employée. Zienkiewicz et ses collègues [Zienkiewicz et Shiomi, 1984], [Zienkiewicz et al., 1990] ont adopté cette méthode pour établir la formulation d'éléments finis décrite ci-dessous.

On considère d'abord l'équation d'équilibre global (2.1), la loi de comportement du squelette (2.5) et les conditions aux limites associées. Grâce au théorème de la divergence, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T (\mathbf{t}^d - \mathbf{t}) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{F} \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T (\mathbf{t}^d - \mathbf{t}) d\Gamma \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{R}_1 \quad (2.18)$$

dans laquelle

$$\mathbf{M}_1 = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega \quad \text{matrice de masse}$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad \text{matrice de rigidité}$$

$$\mathbf{Q}^T = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \alpha \mathbf{m} \mathbf{N} d\Omega \quad \text{matrice de couplage}$$

$$\mathbf{R}_1 = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{F} d\Omega + \sum_{e=1}^{n'} \int_{\Gamma_e^t} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^d d\Gamma \quad \text{vecteur des forces externes volumiques}$$

$\mathbf{m} = (110)^T$  est le vecteur unitaire;  $n'$  - le nombre des éléments à la frontière  $\Gamma_t$

Considérons ensuite l'équation d'écoulement du fluide (2.2), l'équation de conservation de la masse du fluide (2.6) et les conditions aux limites associées. Nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \left( \operatorname{div} [k(\nabla \mathbf{p} + \rho_f \ddot{\mathbf{u}})] - (\alpha \mathbf{m} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\dot{p}}{M}) \right) d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}^T (\mathbf{q} - \mathbf{q}^d) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T k(\nabla \mathbf{p} + \rho_f \ddot{\mathbf{u}}) \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^T k(\nabla \mathbf{p} + \rho_f \ddot{\mathbf{u}}) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\alpha \mathbf{m} \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{M} \mathbf{N} \dot{\bar{\mathbf{p}}}) d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}^T (\mathbf{q} - \mathbf{q}^d) d\Gamma \end{aligned}$$

ce qui entraîne l'équation :

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{H} \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{S} \dot{\bar{\mathbf{p}}} = \mathbf{R}_2 \quad (2.19)$$

dans laquelle

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_2 &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{N}^T k \rho_f \mathbf{N} d\Omega \quad \text{matrice de masse} \\ \mathbf{S} &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{1}{M} \mathbf{N} d\Omega \quad \text{matrice de compressibilité} \\ \mathbf{H} &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \nabla \mathbf{N}^T k \nabla \mathbf{N} d\Omega \quad \text{matrice de perméabilité} \\ \mathbf{R}_2 &= - \sum_{e=1}^{n''} \int_{\Gamma_e^q} \mathbf{N}^T \mathbf{q}^d d\Gamma \quad \text{vecteur des forces agissant sur le fluide}\end{aligned}$$

$n''$ - nombre des éléments à la frontière  $\Gamma_q$

On obtient donc le système d'équations couplées (2.18) et (2.19). En combinant ces équations, on a alors un système d'équations algébriques sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Il est utile d'introduire la notion de vecteur de déplacements *généralisés* en considérant la pression interstitielle comme une composante additionnelle [Dargush et Banerjee, 1989] :

$$U_\alpha = \{u_1 \ u_2 \ p\}^T \quad (\alpha = 1 \rightarrow 3)$$

Avec cette convention, l'équation (2.20) s'écrit alternativement sous une forme parfaitement identique à l'équation dynamique des milieux continus (1.33) :

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}^* \mathbf{U}^t = \mathbf{R}^{*t} \quad (2.21)$$

### c. Intégration directe et schéma d'itération

En utilisant la notion de déplacement généralisé, la structure de la formulation en éléments finis des milieux poreux saturés est tout à fait semblable à celle des milieux continus. Les schémas d'itération et d'intégration directe, décrits précédemment dans la section 1.4.1 pour les milieux continus, sont alors applicables au cas des milieux poreux saturés. Si on utilise le schéma de Newton-Raphson modifié (pour prendre en compte le comportement inélastique non-linéaire du squelette) et le schéma de Newmark avec  $\gamma = 1/2$  et  $\beta = 1/4$  (pour l'intégration directe), on obtient une équation similaire à l'équation (1.38). La solution en ce qui concerne le déplacement généralisé à l'itération  $k$  à l'instant  $t = (N + 1)\Delta t$  s'écrit :

$${}^t \bar{\mathbf{K}}^{*N} \mathbf{U}_k^{N+1} = \mathbf{R}^{*N+1} + \mathbf{Z}_{k-1}^{*N+1} \quad (2.22)$$

dans laquelle

$$\mathbf{R}^{*N+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{Bmatrix}^{N+1} \quad (2.23a)$$

$${}^t\hat{\mathbf{K}}^{*N} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{K}^N + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M}_1 & -\mathbf{Q}^T \\ \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M}_2 + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{Q} & \mathbf{H} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (2.23b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k-1}^{*N+1} = & - \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{k-1}^{N+1} d\Omega - {}^t\mathbf{K}^N \bar{\mathbf{u}}_{k-1}^{N+1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_1 \left( \frac{4}{\Delta t^2} \bar{\mathbf{u}}^N + \frac{4}{\Delta t} \dot{\bar{\mathbf{u}}}^N + \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^N \right) \\ \mathbf{M}_2 \left( \frac{4}{\Delta t^2} \bar{\mathbf{u}}^N + \frac{4}{\Delta t} \dot{\bar{\mathbf{u}}}^N + \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^N \right) \end{Bmatrix} \\ & + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \left( \frac{2}{\Delta t} \bar{\mathbf{u}}^N + \dot{\bar{\mathbf{u}}}^N \right) + \mathbf{S} \left( \frac{2}{\Delta t} \bar{\mathbf{p}}^N + \dot{\bar{\mathbf{p}}}^N \right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.23c)$$

## 2.3 Équations intégrales de frontière

### 2.3.1 Théorème de réciprocité

Considérons deux états poroélastodynamiques différents  $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, p, \zeta)$  et  $(\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*, p^*, \zeta^*)$ , associés aux conditions initiales  $(u_{io}, v_{io}, w_{io}, q_{io})$  et  $(u_{io}^*, v_{io}^*, w_{io}^*, q_{io}^*)$ . La relation de réciprocité peut s'exprimer sous la forme locale [Cheng et Predeleanu, 1987] :

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + p \zeta^* = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} + p^* \zeta \quad (2.24)$$

En fait, cette relation est établie en utilisant l'hypothèse du comportement isotrope élastique linéaire et la propriété symétrique du tenseur d'élasticité  $D_{ijkl} = D_{klij}$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + p \zeta^* &= (D_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \alpha p \delta_{ij}) \varepsilon_{ij}^* + p \zeta^* = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^* + p(\zeta^* - \alpha \varepsilon_{ii}^*) \\ &= D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* \varepsilon_{ij} + \frac{pp^*}{M} = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} + p^* \zeta \end{aligned}$$

Cette relation est valable pour toute paire d'états quelconques de différentes positions dans l'espace et de différents instants ( $t_1 = \tau, t_2 = t - \tau$ ). On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij}(\chi, \tau) \varepsilon_{ij}^*(x - \chi, t - \tau) + p(\chi, \tau) \zeta^*(x - \chi, t - \tau) \\ &= \sigma_{ij}^*(x - \chi, t - \tau) \varepsilon_{ij}(\chi, \tau) + p^*(x - \chi, t - \tau) \zeta(\chi, \tau) \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'intégration de l'équation (2.25) sur tout le domaine  $\Omega$ , de l'instant  $\tau = 0$  à l'instant  $\tau = t$  conduit au théorème de réciprocité (dans le sens intégral) pour la poroélastodynamique, qui peut être considéré comme une généralisation du théorème de Maxwell-Betti pour la poroélastodynamique :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} \star \varepsilon_{ij}^* + p \star \zeta^*) d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* \star \varepsilon_{ij} + p^* \star \zeta) d\Omega \quad (2.26)$$

le symbole  $\star$  désignant le produit de convolution temporelle

$$(a \star b)(t) = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau = \int_0^t a(\tau)b(t-\tau)d\tau$$

Grâce à la relation linéaire déplacement-déformation, l'équation d'équilibre (2.1), la conservation de la masse du fluide (2.6), la loi de Darcy généralisée (2.2) et le théorème de divergence, les termes du membre de gauche de l'équation (2.26) peuvent être développés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \star \varepsilon_{ij}^* d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \star u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} [(\sigma_{ij} \star u_i^*)_{,i} - \sigma_{ij,j} \star u_i^*] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \star u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} (\rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i - F_i) \star u_i^* d\Omega \\ \\ \int_{\Omega} p \star \zeta^* d\Omega &= \int_{\Omega} p \star (-w_{i,i}^* + Q^*) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} [(p \star w_i^*)_{,i} - p_{,i} \star w_i^*] d\Omega + \int_{\Omega} p \star Q^* d\Omega \\ &= - \int_{\Gamma} p \star w_i^* n_i d\Gamma + \int_{\Omega} p \star Q^* d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} (f_i - \frac{1}{k} q_i - \rho_f \ddot{u}_i - m \ddot{w}_i) \star w_i^* d\Omega \end{aligned}$$

En faisant un développement identique pour le membre de droite de l'équation (2.26), le théorème de réciprocité s'obtient finalement :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} [(t_i \star u_i^* - t_i^* \star u_i) - (p \star w^* - p^* \star w)] d\Gamma \quad (2.27) \\ &\quad + \int_{\Omega} [(F_i \star u_i^* - F_i^* \star u_i) + (f_i \star w_i^* - f_i^* \star w_i) - (Q \star p^* - Q^* \star p)] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} [(\rho u_i + \rho_f w_i) v_{io}^* - (\rho u_{io} + \rho_f w_{io}) \dot{u}_i^* + (\rho \dot{u}_i + \rho_f q_i) u_{io}^* \\ &\quad \quad - (\rho v_{io} + \rho_f q_{io}) u_i^* + (\rho_f u_i + m w_i) q_{io}^* - (\rho_f u_{io} + m w_{io}) q_i^* \\ &\quad \quad + (\rho_f \dot{u}_i + m q_i) w_{io}^* - (\rho_f v_{io} + m q_{io}) w_i^* + \frac{1}{k} (w_{io} w_i^* - w_i w_{io}^*)] d\Omega \end{aligned}$$

$t_i = \sigma_{ij} n_j$  - vecteur-contrainte poroélastiquement associé au vecteur de déplacement  $u_i$

$$t_i = [(\lambda u_{k,k} - \alpha p) \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})] n_j \quad (2.28)$$

$w = w_i n_i$  - composante normale sur la facette  $n_i$  du déplacement relatif fluide/squelette

En supposant l'absence de forces volumiques externes et de source d'injection du fluide ( $F_i = 0, f_i = 0, Q = 0$ ) et les conditions initiales nulles, on obtient la forme simplifiée ne faisant intervenir que l'intégrale de contour :

$$\int_{\Gamma} [(t_i \star u_i^* - t_i^* \star u_i) - (p \star w^* - p^* \star w)] d\Gamma = 0 \quad (2.29)$$

### 2.3.2 Représentation intégrale

Considérons la solution fondamentale de l'espace infini, associée à une force ponctuelle unitaire impulsionnelle, exercée en un point fixé  $\boldsymbol{\chi} \in R^3$  hors de la frontière  $\Gamma$ , de direction  $e_j$  et à l'instant  $\tau$  :

$$F_{ij}^* = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi})\delta(t - \tau), \quad f_i^* = 0, \quad Q^* = 0$$

On appelle les composantes de cette solution :

$U_{ij}^F$  - déplacement de direction  $e_i$  en un point  $\mathbf{x}$

$H_{ij}^F$  - vecteur-contrainte sur la facette  $n_i$  en un point  $\mathbf{x}$

$P_j^F$  - pression interstitielle en un point  $\mathbf{x}$

$W_j^F$  - composante normale du déplacement relatif fluide/squelette en un point  $\mathbf{x}$

Le théorème de réciprocité (2.27) appliqué à l'état poroélastodynamique réel inconnu et à la solution fondamentale définie ci-dessus, dans l'hypothèse des conditions initiales nulles, entraîne :

$$\begin{aligned} cu_j(\boldsymbol{\chi}, t) &= \int_{\Gamma} [(U_{ij}^F \star t_i - H_{ij}^F \star u_i) - (W_j^F \star p - P_j^F \star w)] d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} (U_{ij}^F \star F_i + W_j^F \star f_i - P_j^F \star Q) d\Omega \end{aligned} \quad (2.30)$$

Considérons ensuite la solution fondamentale associée à une source, pour le volume cumulé du fluide injecté, ponctuelle unitaire impulsionnelle, exercée en un point fixé  $\boldsymbol{\chi} \in R^3$ , à l'instant  $\tau$  :

$$Q^* = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi})\delta(t - \tau), \quad F_i^* = 0, \quad f_i^* = 0$$

avec les composantes de cette solution

$U_i^Q$  - déplacement de direction  $e_i$  en un point  $\mathbf{x}$

$H_i^Q$  - vecteur-contrainte sur la facette  $n_i$  en un point  $\mathbf{x}$

$P^Q$  - pression interstitielle en un point  $\mathbf{x}$

$W^Q$  - composante normale du déplacement relatif fluide/squelette en un point  $\mathbf{x}$

Le théorème de réciprocité (2.27) appliqué à l'état poroélastodynamique réel inconnu et à la solution fondamentale définie ci-dessus, dans l'hypothèse des conditions initiales nulles, conduit à :

$$\begin{aligned} cp(\boldsymbol{\chi}, t) &= \int_{\Gamma} [(U_i^Q \star t_i - H_i^Q \star u_i) - (W^Q \star p - P^Q \star w)] d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} [U_i^Q \star F_i + W^Q \star f_i - P^Q \star Q] d\Omega \end{aligned} \quad (2.31)$$

En supposant l'absence de sources volumiques  $(F_i, f_i, Q_i)$ , les représentations intégrales ne feront intervenir que des intégrales de contour :

$$cu_j(\boldsymbol{\chi}, t) = \int_{\Gamma} [(U_{ij}^F \star t_i - H_{ij}^F \star u_i) - (W_j^F \star p - P_j^F \star w)] d\Gamma \quad (2.32)$$

$$cp(\boldsymbol{\chi}, t) = \int_{\Gamma} [(U_i^Q \star t_i - H_i^Q \star u_i) - (W^Q \star p - P^Q \star w)] d\Gamma \quad (2.33)$$

Les représentations intégrales (2.32) et (2.33) font intervenir les variables  $w_i$ , déplacements relatifs fluide/squelette, qui ne sont pas directement mesurables. L'usage de ces formules n'est donc pas pratique, du point de vue de l'ingénieur. De plus, jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas de solution fondamentale exacte correspondant à ces formules. Ainsi, il vaudrait mieux établir des représentations intégrales exprimées en termes de déplacements  $u_i$  et de pression interstitielle  $p$ .

Considérons maintenant une force ponctuelle unitaire, exercée brutalement à l'instant  $\tau$  en un point fixé  $\boldsymbol{\chi} \in R^3$  hors de la frontière  $\Gamma$ , de direction  $e_j$  :

$$F_{ij}^* = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}) H(t - \tau), \quad f_i^* = 0, \quad Q^* = 0$$

On note la solution fondamentale du milieu infini associée à cette force

$G_{ij}$  - déplacement de direction  $e_i$  en un point  $\mathbf{x}$

$H_{ij}$  - vecteur-contrainte sur la facette  $n_i$  en un point  $\mathbf{x}$

$G_{3j}$  - pression interstitielle en un point  $\mathbf{x}$

$H_{3j}$  - débit de fluide sur la facette  $n_i$  en un point  $\mathbf{x}$

$$H(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq \tau \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases} \quad \text{désigne la fonction de Heaviside}$$

Sachant que  $\frac{dH(t - \tau)}{dt} = \delta(t - \tau)$ , nous avons alors :

$$\dot{G}_{ij} = U_{ij}^F \implies U_{ij}^F \star t_i = \dot{G}_{ij} \star t_i$$

$$\dot{H}_{ij} = H_{ij}^F \implies H_{ij}^F \star t_i = \dot{H}_{ij} \star t_i$$

$$\dot{G}_{3j} = P_j^F \implies P_j^F \star w = G_{3j} \star q + (G_{3j} w_o - G_{3j} w)$$

$$H_{3j} = W_j^F \implies W_j^F \star p = H_{3j} \star p$$

Alors, dans l'hypothèse des conditions initiales nulles, la représentation intégrale en termes de déplacement peut s'écrire sous une autre forme :

$$cu_j(\boldsymbol{\chi}, t) = \int_{\Gamma} \left[ (\dot{G}_{ij} \star t_i - \dot{H}_{ij} \star u_i) - (H_{pj} \star p - G_{pj} \star q) \right] d\Gamma \quad (2.34)$$

Afin d'avoir une expression similaire pour la pression interstitielle, considérons une source d'injection du fluide ponctuelle unitaire exercée brutalement à l'instant  $\tau$  en un point fixé  $\boldsymbol{\chi} \in R^3$

$$\gamma^* = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}) H(t - \tau), \quad F_i^* = 0, \quad f_i^* = 0$$

avec la solution fondamentale associées

$G_{i3}$  - déplacement de direction  $e_i$  en un point  $\mathbf{x}$

$H_{i3}$  - vecteur-contrainte sur la facette  $n_i$  en un point  $\mathbf{x}$

$G_{33}$  - pression interstitielle en un point  $\mathbf{x}$

$H_{33}$  - débit de fluide sur la facette  $n_i$  en un point  $\mathbf{x}$

Par des arguments analogues, la représentation intégrale en termes de pression se transforme en une nouvelle forme :

$$cp(\boldsymbol{\chi}, t) = \int_{\Gamma} \left[ (\ddot{G}_{i3} \star t_i - \ddot{H}_{i3} \star u_i) - (\dot{H}_{33} \star p - \dot{G}_{33} \star q) \right] d\Gamma \quad (2.35)$$

En combinant les équations (2.34) et (2.35), on a alors la forme matricielle de la représentation intégrale :

$$\begin{bmatrix} u_j \\ p \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \left( \begin{bmatrix} \dot{G}_{ij} & G_{3j} \\ \ddot{G}_{i3} & \dot{G}_{33} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} t_i \\ q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{H}_{ij} & H_{3j} \\ \ddot{H}_{i3} & \dot{H}_{33} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} u_i \\ p \end{bmatrix} \right) d\Gamma \quad (2.36)$$

Il convient d'introduire la notion de vecteurs de déplacement et de contrainte *généralisés* en considérant la pression interstitielle  $p$  et le débit de fluide  $q$ , respectivement, comme des composantes additionnelles [Dargush et Banerjee, 1989] :

$$U_{\alpha} = \{u_1 \ u_2 \ p\}^T \quad \text{et} \quad T_{\alpha} = \{t_1 \ t_2 \ q\}^T$$

Avec cette convention, on obtient une représentation intégrale de la poroélastodynamique semblable à celle de l'élastodynamique :

$$cU_{\beta}(\boldsymbol{\chi}, t) = \int_{\Gamma} [(G_{\alpha\beta} \star T_{\beta} - H_{\alpha\beta} \star U_{\beta})] d\Gamma \quad (2.37)$$

(les indices  $\alpha, \beta$  prennent des valeurs de 1 à 3)

### 2.3.3 Équations intégrales de frontière

La présentation intégrale (2.37) permet d'évaluer, à chaque instant  $t$ , la valeur des déplacements  $u_i$  et de la pression interstitielle  $p$  en un point  $\boldsymbol{\chi}$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$  en fonction des valeurs  $(u_i, t_i, p, q)$  sur la frontière  $\Gamma$ . Pour un problème bien posé, la moitié des composantes scalaires des variables est donnée par des conditions aux limites, l'autre moitié restant inconnue. Il reste donc à définir une équation intégrale ne portant que des inconnues sur la frontière  $\Gamma$ . Comme l'expression (2.37) ne vaut que pour  $\boldsymbol{\chi} \notin \Gamma$ , l'établissement d'une équation intégrale doit recourir à une procédure de passage à la limite tenant compte du caractère singulier de la solution fondamentale.

Le développement en série des solutions fondamentales  $G_{\alpha\beta}$  et  $H_{\alpha\beta}$  ([Chen et Dargush, 1995], [Dargush et Banerjee, 1989]) a montré que la singularité de ces solutions, lorsque le point d'observation  $\mathbf{x}$  s'approche du point source  $\boldsymbol{\chi}$ , est égale à celle de la fonction Green de l'élastostatique (tableau 2.1).

En conséquence, en mettant le point source  $\boldsymbol{\chi}$  à la frontière  $\Gamma$ , on obtient les équations intégrales de frontière :

$$c_{ij}(\boldsymbol{\chi}) u_j(\boldsymbol{\chi}, t) = \int_{\Gamma} [(\dot{G}_{ij} \star t_i - \dot{H}_{ij} \star u_i) - (H_{3j} \star p - G_{3j} \star q)] d\Gamma \quad (2.38)$$

$$c(\boldsymbol{\chi}) p(\boldsymbol{\chi}, t) = \int_{\Gamma} [(\ddot{G}_{i3} \star t_i - \ddot{H}_{i3} \star u_i) - (H_{33} \star p - G_{33} \star q)] d\Gamma \quad (2.39)$$

ou, avec la convention des champs *généralisés*, les équations (2.38) et (2.39) peuvent être remplacées par :

$$c_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\chi}) U_{\beta}(\boldsymbol{\chi}, t) = \int_{\Gamma} [(G_{\alpha\beta} \star T_{\beta} - H_{\alpha\beta} \star U_{\beta})] d\Gamma \quad (2.40)$$

Composantes	Singularité
$G_{ij}$	faiblement singulières ( $\ln(1/r)$ )
$G_{i3}$	régulières (1)
$G_{3j}$	régulières (1)
$G_{33}$	faiblement singulière ( $\ln(1/r)$ )
$H_{ij}$	fortement singulières ( $1/r$ )
$H_{i3}$	faiblement singulières ( $\ln(1/r)$ )
$H_{3j}$	régulières (1)
$H_{33}$	fortement singulière ( $1/r$ )

TAB. 2.1 – Singularité des solutions fondamentales

avec les termes libres :

$$c_{ij}(\boldsymbol{\chi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} H_{ij}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}) d\Gamma$$

$$c(\boldsymbol{\chi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} H_{33}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}) d\Gamma$$

Ces termes dépendent de la géométrie locale de la surface  $\Gamma$  au point  $\boldsymbol{\chi}$  (si  $\boldsymbol{\chi}$  est un point régulier de  $\Gamma$ ,  $c_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ ). Comme les composantes  $H_{ij}$  et  $H_{33}$  sont fortement singulières, les intégrales de contour contenant ces termes ne convergent que dans le sens de la valeur principale de Cauchy.

## 2.4 Solutions fondamentales

L'emploi de l'équation intégrale (2.40) nécessite la connaissance de la solution fondamentale temporelle, en termes de  $(u_i, p)$ , qui est la réponse du milieu infini à une excitation ponctuelle unitaire et brutale (en 2D, il s'agit d'une ligne de force ou d'une ligne de source d'injection de fluide) :

$$F_{ij}^* = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi})H(t - \tau), \gamma^* = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\chi})H(t - \tau)$$

En raison de la complexité du problème, l'expression explicite de cette solution ne peut quasiment pas être obtenue par la résolution directe du système d'équations de la poroélastodynamique. Généralement, cette solution doit être résolue de manière indirecte : on cherche d'abord la solution des équations poroélastodynamiques transformées dans le domaine de Laplace (2.41) et (2.42) ; ensuite, la solution temporelle sera obtenue par une transformation inverse de la solution *transformée* :

$$\mu\tilde{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu)\tilde{u}_{j,ji} - \rho_1 s^2 \tilde{u}_i - \alpha^* \tilde{p}_{,i} + \frac{1}{s} \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.41)$$

$$\xi \tilde{p}_{,ii} - \frac{s}{M} \tilde{p} - \alpha^* \tilde{u}_{i,i} + \frac{1}{s} \delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.42)$$

$\xi = 1/(ms + 1/k)$ ,  $\alpha^* = \alpha - \rho_f s \xi$ ,  $\rho_1 = \rho - \rho_f^2 s \xi$ .

La solution des équations (2.41) et (2.42) a été résolue par Chen [1994b]. Cependant, la transformation inverse de cette solution est extrêmement difficile, voire impossible, en raison de sa complexité. En particulier, en comparaison avec la solution du problème tridimensionnel [Chen, 1994a], la solution bidimensionnelle est plus difficile à inverser analytiquement du fait de la présence des fonctions de Bessel modifiées  $K_0, K_1$ . Afin de surmonter cette difficulté, il faut donc trouver une solution approchée suffisamment précise mais simple à inverser analytiquement.

Il y a deux approches pour trouver une solution approchée. La première approche consiste à simplifier l'expression de la solution transformée de Laplace pour que sa transformation inverse puisse se faire analytiquement. En suivant cette stratégie, plusieurs auteurs ont proposé leur propre approximation [Chen, 1994b], [Kaynia et Banerjee, 1992], [Gatmiri et Kamalian, 1999]. La seconde approche consiste à simplifier les équations de base de la poroélastodynamique de manière que la solution transformée du système d'équations modifiées soit analytiquement inversible. Dans le cadre de ce travail, nous avons adopté la seconde approche et proposé une solution approchée. La modification du système d'équations s'est fait en faisant deux hypothèses :

1. L'accélération relative du fluide  $\ddot{w}_i$  est considérée comme négligeable, donc tous les termes contenant  $\ddot{w}_i$  peuvent être supprimés. Cette hypothèse correspond à la formulation 'u-p' présentée ci-dessus (section 2.2.2) ; elle est valable pour des chargements de basse fréquence (par exemple les sollicitations sismiques) ou des phénomènes de vitesse moyenne.
2. Les constituants du milieu, les grains solides et le fluide, sont supposés incompressibles  $K_s, K_f \gg K_o$ . Cela signifie que le module de Biot tend vers l'infini  $M \rightarrow \infty$ , on peut alors supprimer le terme contenant  $1/M$ . Cette seconde hypothèse est pratiquement vérifiée pour la plupart des sols saturés d'eau.

Les simplifications ci-dessus sont généralement raisonnables pour des problèmes géotechniques dont le chargement est de type basse fréquence (tel que le chargement sismique).

Une fois les hypothèses acceptées, les équations (2.41) et (2.42) sont modifiées comme suit :

$$\mu \tilde{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \tilde{u}_{j,ji} - \rho s^2 \tilde{u}_i - \alpha \tilde{p}_{,i} + \frac{1}{s} \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.43)$$

$$k \tilde{p}_{,ii} - \alpha^* \tilde{u}_{i,i} + \frac{1}{s} \delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.44)$$

### 2.4.1 Solution fondamentale du domaine de Laplace

Il est commode de réécrire les équations (2.43) et (2.44) sous une forme matricielle en utilisant la notion de déplacements généralisés ( $\tilde{U}_i = \tilde{u}_i, \tilde{U}_3 = \tilde{p}$ ) :

$$\mathbf{B}(\partial \mathbf{x}, s) \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{I} \frac{1}{s} \delta(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

dans laquelle  $\mathbf{I}$  désigne la matrice unité ;  $\mathbf{B}(\partial\mathbf{x}, s) = [B_{\alpha\beta}(\partial\mathbf{x}, s)]_{3 \times 3}$  est la matrice d'opérateurs différentiels dont les composantes sont :

$$\begin{aligned} B_{ij}(\partial\mathbf{x}, s) &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij}(\mu\Delta - \rho s^2) \\ B_{i3}(\partial\mathbf{x}, s) &= -\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \\ B_{3j}(\partial\mathbf{x}, s) &= -\alpha^* s \frac{\partial}{\partial x_j} \\ B_{33}(\partial\mathbf{x}, s) &= k\Delta \end{aligned}$$

$i, j = 1, 2$  ;  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace

Le problème est de trouver la solution  $\tilde{\mathbf{G}} = [\tilde{G}_{\alpha\beta}]_{3 \times 3}$  qui satisfait l'équation (2.45). Pour résoudre cette équation, nous avons utilisé la méthode de Kupradze [1979], ce qui nous permet de déterminer neuf composantes inconnues de  $\tilde{\mathbf{G}}$  par une fonction scalaire inconnue  $\varphi$ .

La première étape est de déterminer  $\mathbf{B}^*(\partial\mathbf{x}, s)$ , la matrice d'opérateurs différentiels adjointe de  $\mathbf{B}(\partial\mathbf{x}, s)$ , définie par :

$$B_{\alpha k}(\partial\mathbf{x}, s) B_{k\beta}^*(\partial\mathbf{x}, s) = \delta_{\alpha\beta} \det \mathbf{B}(\partial\mathbf{x}, s) \quad (2.46)$$

dans laquelle le déterminant de  $\mathbf{B}(\partial\mathbf{x}, s)$  est calculé comme suit :

$$\det(\mathbf{B}(\partial\mathbf{x}, s)) = \mu(\lambda + 2\mu)k(\Delta - \lambda_1^2)\Delta(\Delta - \lambda_2^2) \quad (2.47)$$

où :

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{\rho s^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{\alpha\alpha^* s}{k(\lambda + 2\mu)} \\ \lambda_2^2 &= \frac{\rho s^2}{\mu} \end{aligned}$$

Les composantes de la matrice d'opérateurs  $\mathbf{B}^*(\partial\mathbf{x}, s)$ , construite à partir des cofacteurs de la matrice d'opérateurs  $\mathbf{B}(\partial\mathbf{x}, s)$ , sont calculées :

$$\begin{aligned} B_{ij}^*(\partial\mathbf{x}, s) &= -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [(\lambda + \mu)k\Delta - \alpha\alpha^* s] + \delta_{ij}(\lambda + 2\mu)k(\Delta - \lambda_1^2)\Delta \\ B_{3j}^*(\partial\mathbf{x}, s) &= \mu\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta - \lambda_2^2) \\ B_{i3}^*(\partial\mathbf{x}, s) &= \mu s \alpha^* \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta - \lambda_2^2) \\ B_{33}^*(\partial\mathbf{x}, s) &= \mu(\lambda + 2\mu)(\Delta - \lambda_2^2) \left( \Delta - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \lambda_2^2 \right) \end{aligned}$$

La deuxième étape est de chercher un scalaire  $\varphi$ , la solution de l'équation :

$$\det(\mathbf{B}(\partial\mathbf{x}, s))\varphi + \frac{1}{s}\delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.48)$$

$$\text{ou} \quad [\det(\mathbf{B}(\partial\mathbf{x}, s))\mathbf{I}]\varphi + \frac{1}{s}\mathbf{I}\delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.49)$$

A partir de (2.46) et (2.48), on peut déduire que

$$\mathbf{B}(\partial\mathbf{x}, s)\mathbf{B}^*(\partial\mathbf{x}, s) + \frac{1}{s}\mathbf{I}\delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.50)$$

Par conséquent, on a :

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{B}^*(\partial\mathbf{x}, s)\varphi \quad (2.51)$$

Cette équation permet de déterminer neuf composantes de  $\tilde{\mathbf{G}}_{\alpha\beta}$  par l'application de la matrice d'opérateurs  $\mathbf{B}^*(\partial\mathbf{x}, s)$  à un seul scalaire inconnu  $\varphi$ .

La combinaison de l'équation (2.47) avec l'équation (2.48) amène à une nouvelle équation :

$$\mu(\lambda + 2\mu)k(\Delta - \lambda_1^2)\Delta(\Delta - \lambda_2^2)s\varphi + \delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.52)$$

En posant  $\Phi = \mu(\lambda + 2\mu)ks\varphi$ , on a alors :

$$(\Delta - \lambda_1^2)\Delta(\Delta - \lambda_2^2)\Phi + \delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.53)$$

Pour résoudre cette équation, on suppose que :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \Delta(\Delta - \lambda_2^2)\Phi \\ \varphi_2 &= (\Delta - \lambda_2^2)(\Delta - \lambda_1^2)\Phi \\ \varphi_3 &= (\Delta - \lambda_1^2)\Delta\Phi \end{aligned}$$

En substituant les expressions ci-dessus dans l'équation (2.53), on obtient :

$$(\Delta - \lambda_1^2)\varphi_1 + \delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.54a)$$

$$(\Delta - \lambda_2^2)\varphi_3 + \delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.54b)$$

$$\Delta\varphi_2 + \delta(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.54c)$$

Les deux premières équations ne sont autres que l'équation de Helmholtz dans  $R^2$ , tandis que la troisième équation est l'équation de Laplace. Les solutions de ces équations sont bien connues :

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi}K_O(\lambda_1 r) \quad \varphi_2 = -\frac{1}{2\pi}\ln(r) \quad \varphi_3 = \frac{1}{2\pi}K_O(\lambda_2 r)$$

Par définition de  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi - \lambda_2^2\Phi &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_1^2} \\ \Delta\Phi - \lambda_1^2\Phi &= \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\lambda_2^2} \end{aligned}$$

La fonction  $\Phi$  est donc déterminée :

$$\Phi = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_1^2} - \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\lambda_2^2} \right) = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_O(\lambda_1 r)}{\lambda_1^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\ln(r)}{\lambda_1^2\lambda_2^2} + \frac{K_O(\lambda_2 r)}{\lambda_2^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \right)$$

Alors :

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi\mu(\lambda+2\mu)ks} \left( \frac{K_0(\lambda_1 r)}{\lambda_1^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + \frac{\ln(r)}{\lambda_1^2\lambda_2^2} + \frac{K_0(\lambda_2 r)}{\lambda_2^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \right)$$

La dernière étape est d'appliquer la matrice d'opérateurs  $\mathbf{B}^*(\partial\mathbf{x}, s)$  au scalaire  $\varphi(r, s)$  ; on obtient finalement la solution fondamentale transformée bidimensionnelle :

$$\tilde{G}_{ij} = (A_{ij}H_{12} + B_{ij}H_{11})\frac{\Lambda^2}{\rho s^3} - A_{ij}\frac{1}{r}\frac{\Lambda^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2\rho s^3} \quad (2.55a)$$

$$-(A_{ij}H_{22} + B_{ij}H_{21})\frac{\lambda_2^2}{\rho s^3} + \frac{C_{ij}}{s}H_{21}$$

$$\tilde{G}_{3j} = \frac{r_{,j}}{2\pi(\lambda+2\mu)k}\alpha^* \left( \frac{1}{\lambda_1^2 r} - H_{12} \right) \quad (2.55b)$$

$$\tilde{G}_{i3} = \frac{r_{,i}}{2\pi(\lambda+2\mu)k}\frac{\alpha}{s} \left( \frac{1}{\lambda_1^2 r} - H_{12} \right) \quad (2.55c)$$

$$\tilde{G}_{33} = \frac{1}{2\pi k}\frac{1}{s\lambda_1^2}[(\lambda_1^2 - \Lambda^2)H_{11} - \Lambda^2 \ln(r)] \quad (2.55d)$$

où

$$\Lambda^2 = \frac{\rho s^2}{\lambda + 2\mu}$$

$$H_{k1}(r, s) = K_0(\lambda_k r) \quad H_{k2}(r, s) = \frac{1}{\lambda_k}K_1(\lambda_k r) \quad k = 1, 2$$

$$A_{ij}(r) = \frac{1}{2\pi r} \left( \frac{2x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) \quad B_{ij}(r) = \frac{x_i x_j}{2\pi r^2} \quad C_{ij}(r) = \frac{\delta_{ij}}{2\pi\mu}$$

$K_0(\lambda_k r), K_1(\lambda_k r)$  sont les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce, de zéro et de premier ordre.

$\tilde{G}_{ij}$  - déplacement de direction  $e_i$  dû à la force ponctuelle de direction  $e_j$

$\tilde{G}_{3j}$  - pression interstitielle due à la force ponctuelle de direction  $e_j$

$\tilde{G}_{i3}$  - déplacement de direction  $e_i$  dû à la source ponctuelle de fluide injecté

$\tilde{G}_{33}$  - pression interstitielle due à la source ponctuelle de fluide injecté

## 2.4.2 Solution temporelle analytique

Lorsque la solution transformée est dérivée, la solution temporelle analytique sera obtenue par la transformation de Laplace inverse de la solution transformée. D'abord, il faut réécrire les expressions de  $\tilde{G}_{\alpha\beta}$  en une autre forme accessible à une inversion analytique :

$$\tilde{G}_{ij} = e_1\frac{H_{12}}{s} + e_2\frac{H_{11}}{s} + \frac{e_3}{s^3} + \frac{e_4}{s^2} + \frac{e_5}{s} - \frac{e_5}{s+2\beta} + e_6\frac{H_{22}}{s} + e_7\frac{H_{21}}{s} \quad (2.56a)$$

$$\tilde{G}_{3j} = r_{,j}(d_1 + d_2 s)H_{12} + \frac{r_{,j}}{r} \left( \frac{d_3}{s} + \frac{d_4}{s+2\beta} \right) \quad (2.56b)$$

$$\tilde{G}_{i3} = r_{,i}f_1\frac{H_{12}}{s} + \frac{r_{,i}}{r} \left( \frac{f_2}{s^2} + \frac{f_3}{s} - \frac{f_3}{s+2\beta} \right) \quad (2.56c)$$

$$\tilde{G}_{33} = \left( \frac{g_1}{s} + \frac{g_2}{s+2\beta} \right) H_{11} + \frac{g_2 \ln(r)}{s+2\beta} \quad (2.56d)$$

où les expressions des coefficients  $d, e, f, g$  sont données dans l'annexe 2A (page 104)

Ensuite, on doit trouver les transformations inverses  $h_{kl}(r, t)$  des fonctions de Bessel modifiées  $H_{k,l}(r, s)$  :

$$\begin{aligned} h_{k1}(r, t) &= \mathcal{L}^{-1}(H_{k1}(r, s)) \\ h_{k2}(r, t) &= \mathcal{L}^{-1}(H_{k2}(r, s)) \quad k, l = 1, 2 \end{aligned}$$

Les fonctions  $h_{kl}(r, t)$  sont trouvées en réécrivant les coefficients  $\lambda_1, \lambda_2$  (pour que l'on puisse utiliser les formules (2.57a-d) [Abramowitz et Stegun, 1965]) comme suit :

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{(s + \beta)^2 - \beta^2}}{v_1} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{s}{v_2}$$

$$\text{où} \quad v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad v_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho - \alpha\rho_f}} \quad \beta = \frac{\alpha^2}{2k(\rho - \alpha\rho_f)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[K_0(as)] = \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} H(t - a) \quad (a > 0) \quad (2.57a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s} K_1(as)\right] = \sqrt{t^2 - a^2} H(t - a) \quad (a > 0) \quad (2.57b)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[K_0(a\sqrt{s^2 - b^2})] = \frac{\cosh(b\sqrt{t^2 - a^2})}{\sqrt{t^2 - a^2}} H(t - a) \quad (a > 0) \quad (2.57c)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_1(a\sqrt{s^2 - b^2})}{\sqrt{s^2 - b^2}}\right] = \frac{\sinh(b\sqrt{t^2 - a^2})}{ab} H(t - a) \quad (a > 0) \quad (2.57d)$$

Les expressions des fonctions  $h_{kl}(r, t)$  ainsi que leurs dérivées sont données dans l'annexe 2B (page 104).

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} G_{ij}(r, t) &= e_1 \int_{r/v_1}^t h_{12}(\tau) d\tau + e_2 \int_{r/v_1}^t h_{11}(\tau) d\tau + e_3 t^2/2 + e_4 t + e_5 - e_5 e^{-2\beta t} \quad (2.58a) \\ &+ \left[ e_8 \ln(t + \sqrt{t^2 - r^2/v_2^2}) + e_6 \frac{v_2^2 t}{2r} \sqrt{t^2 - r^2/v_2^2} - e_8 \ln(r/v_2) \right] H(t - r/v_2) \end{aligned}$$

$$G_{3j}(r, t) = r_{,j} (d_1 h_{12}(r, t) + d_2 \dot{h}_{12}(r, t)) + \frac{r_{,j}}{r} (d_3 + d_4 e^{-2\beta t}) \quad (2.58b)$$

$$G_{i3}(r, t) = r_{,i} f_1 \int_{r/v_1}^t h_{12}(\tau) d\tau + \frac{r_{,i}}{r} (f_2 t + f_3 - f_3 e^{-2\beta t}) \quad (2.58c)$$

$$G_{33}(r, t) = \int_{r/v_1}^t (g_1 + g_2 e^{-2\beta(t-\tau)}) h_{11}(\tau) d\tau + g_2 \ln(r) e^{-2\beta t} \quad (2.58d)$$

Une fois que les déplacements et les pressions interstitielles sont connus, les vecteurs-contrainte et les débits de fluide sont déterminés, en utilisant la loi de comportement du squelette et la loi de Darcy généralisée pour le fluide, comme suit :

$$H_{ij}(r, t) = (\lambda G_{ij,i} - \alpha G_{3j}) n_i + \mu (G_{ij,m} + G_{m,j,i}) n_m \quad (2.59a)$$

$$H_{3j}(r, t) = -k (G_{3j,m} + \rho_f \ddot{G}_{mj}) n_m \quad (2.59b)$$

$$H_{i3}(r, t) = (\lambda G_{i3,i} - \alpha G_{33}) n_i + \mu (G_{i3,m} + G_{m3,i}) n_m \quad (2.59c)$$

$$H_{33}(r, t) = -k (G_{33,m} + \rho_f \ddot{G}_{m3}) n_m \quad (2.59d)$$

Les expressions des dérivées temporelles et spatiales des fonctions  $G_{\alpha\beta}$  sont données respectivement dans les annexes 2C et 2D (pages 105 et 106).

### 2.4.3 Validation de la nouvelle solution fondamentale

Pour valider la nouvelle solution fondamentale temporelle analytique, nous l'avons comparée à la solution de Chen [1994b]. Rappelons que la solution de Chen est la racine des équations (2.41) et (2.42) du domaine de Laplace. Comme elle a été résolue sans aucune hypothèse, elle peut être considérée comme une solution de référence. La solution temporelle correspondant à cette solution est cependant obtenue seulement de manière numérique. La formulation de Durbin [1974], avec  $\epsilon$  algorithme destiné à l'accélération de la convergence, a été utilisée pour calculer la transformation de Laplace inverse de cette solution. La comparaison de ces deux solutions fondamentales est illustrée sur les figures 2.2 et 2.3.

Dans cet exemple, les sources sont situées à l'origine (0,0), alors que le récepteur se trouve aux coordonnées (0.1,0.2). Les propriétés mécaniques et physiques du matériau, un sol mou saturé d'eau, sont les suivantes :

$\lambda$	$\mu$	$K_s$	$K_f$	$\rho_s$	$\rho_f$	$k$	$\alpha$	$n$
MPa	MPa	MPa	MPa	kg/m <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>	m/s		
12,5	8,33	10 <sup>5</sup>	0,22.10 <sup>4</sup>	2600	1000	0,001	1	0,3

A partir de ces résultats, on peut tirer quelques conclusions :

1. La solution analytique s'accorde très bien à la solution de référence aux instants tardifs. Lorsque le temps augmente, les deux solutions s'approchent de la solution quasi-statique. Néanmoins, elles se différencient l'une de l'autre aux premiers instants, particulièrement pour les composantes de pression interstitielle  $G_{3j}$  et  $G_{33}$ .
2. Dans les milieux poreux saturés, il existe trois types d'ondes de volume : l'onde de dilatation de première espèce  $P_1$ , l'onde de dilatation de seconde espèce  $P_2$  et l'onde de cisaillement  $S$ . Sur les courbes liées à la solution de Chen, l'arrivée de ces trois ondes peut être détectée soit par des changements brutaux des déplacements, soit par la présence des pulsations de pression. Mais dans les expressions de la solution analytique, il n'y a que deux ondes : l'onde  $P_1$  et l'onde  $S$ , associées respectivement aux coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Sur les figures 2.2 et 2.3, l'impulsion associée à l'arrivée de l'onde  $P_2$  n'est pas présente sur les courbes de la solution analytique. Ainsi, l'onde lente  $P_2$  ne peut pas être correctement représentée par cette nouvelle solution.
3. Les valeurs initiales des composantes de pression  $G_{3j}$  et  $G_{33}$  ne sont pas nulles, alors la condition de causalité du processus de la propagation d'ondes n'est pas satisfaite.

Les deux solutions s'accordent bien aux instants tardifs. La différence majeure entre elles, observée aux premiers instants ( $t < 0,004s$  dans cet exemple), est due aux deux hypothèses que nous avons adoptées pour dériver la solution analytique. Premièrement, l'accélération relative du fluide  $\ddot{w}_i$  est négligée, alors la vibration du fluide ne peut pas être

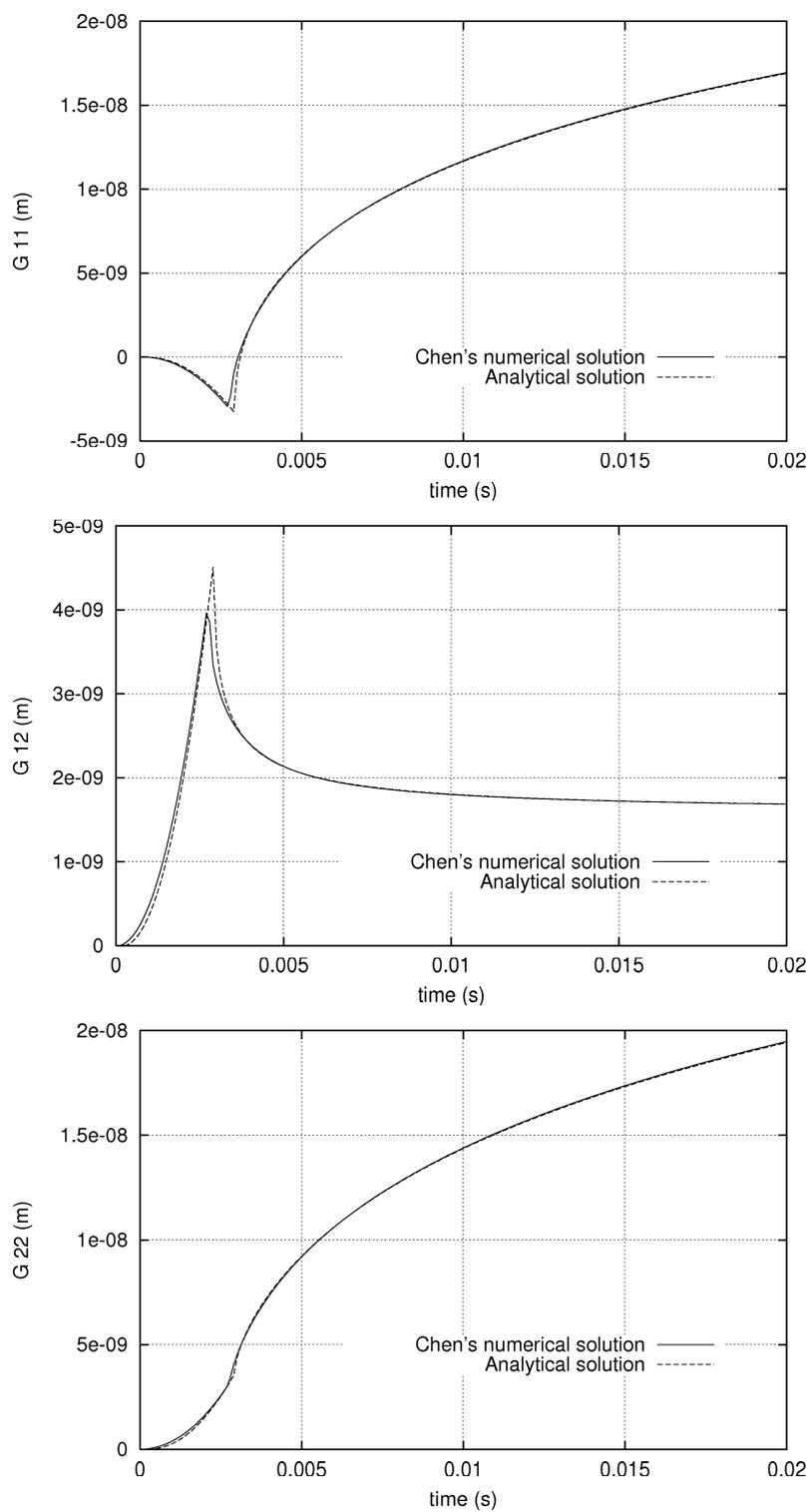


FIG. 2.2 – Déplacements généralisés au point (0.1,0.2) due à la source située à (0,0)

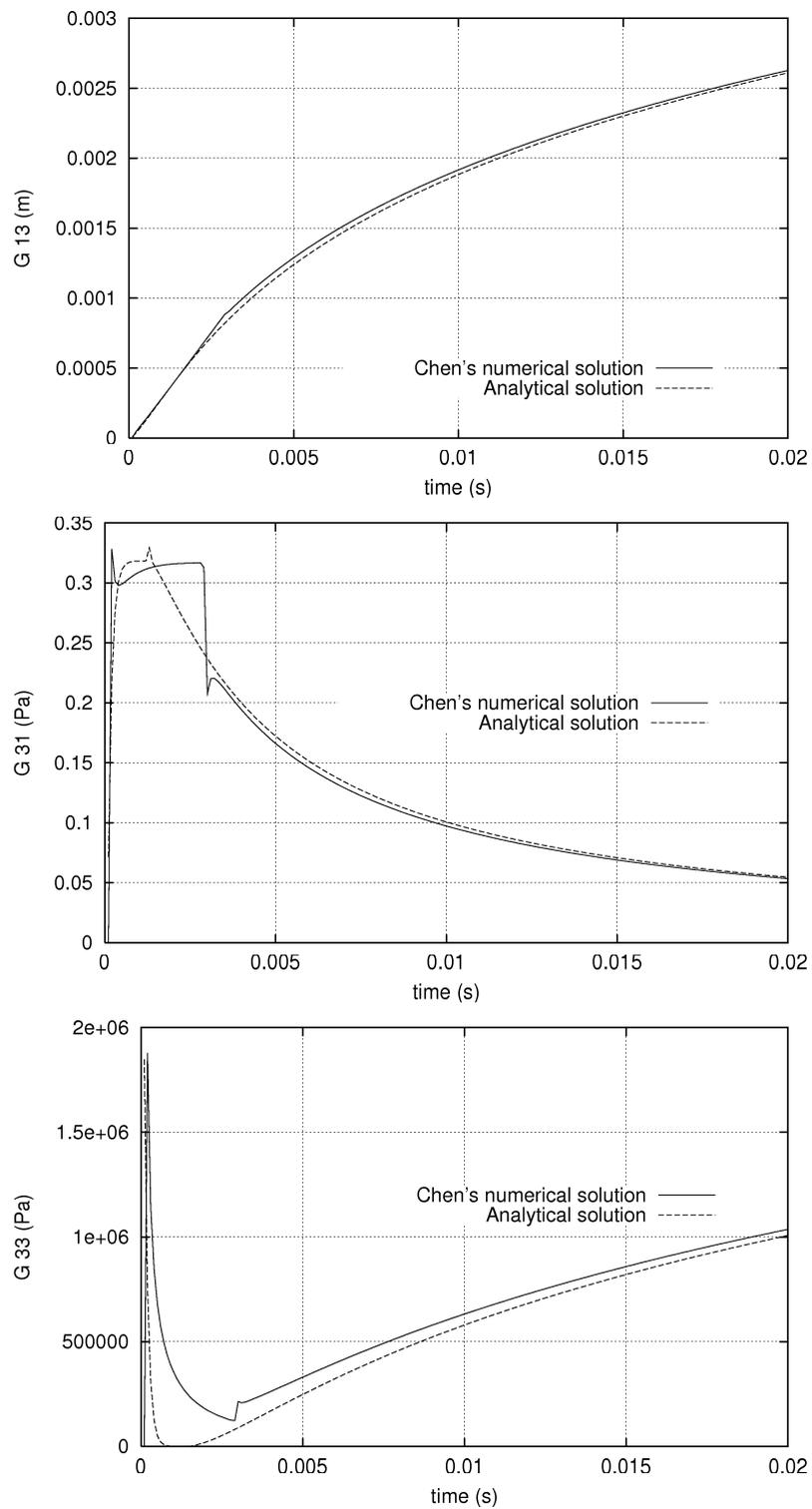


FIG. 2.3 – Déplacements généralisés au point (0.1,0.2) due à la source située (0,0)

correctement représentée. Deuxièmement, en acceptant l'hypothèse de l'incompressibilité des grains solides et du fluide, il n'existe qu'un mouvement dilatation/compression en phase du système squelette/fluide. Ainsi, l'onde lente  $P_2$  disparaît dans la solution analytique; elle est complètement remplacée par un procédé de diffusion. Cette diffusion commence dès le début, avant l'arrivée des ondes, ce qui explique les valeurs initiales non nulles des composantes de pression  $G_{3j}$  et  $G_{33}$ .

En conclusion, la solution analytique proposée peut être considérée comme une bonne approximation, surtout pour des instants tardifs. Cette solution a été validée et intégrée dans le code HYBRID.

## 2.5 Mise en œuvre numérique de la méthode des éléments frontières

En utilisant la notion de déplacements et de vecteurs-contrainte généralisés, on constate que l'équation intégrale de frontière (2.40) du milieu poreux saturé est exactement semblable à celle du milieu continu (1.13). Ainsi, la mise en œuvre numérique de l'équation (2.40) par la méthode des éléments frontières est identique à celle abordée dans le chapitre 1, sauf qu'il y a trois degrés de liberté en chaque nœud : deux composantes de déplacement et une composante de pression interstitielle.

Dans cette section, nous ne traitons que des particularités de la méthode des éléments frontières appliquée à la poroélastodynamique, en ce qui concerne les matrices 'noyaux'  $G_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$  et  $H_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$ .

### 2.5.1 Évaluation des matrices $G_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$ et $H_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$

Selon le choix de l'interpolation temporelle, ces matrices sont évaluées différemment.

#### a. Interpolation temporelle constante

$$G_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} G_{ij}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^k & \dot{G}_{i3}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^k \\ \bar{G}_{3j}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^k & G_{33}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^k \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$H_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} H_{ij}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{t=k\Delta t} & \dot{H}_{i3}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{t=k\Delta t} \\ \bar{H}_{3j}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{t=k\Delta t} & H_{33}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{t=k\Delta t} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Les composantes de  $H_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)$  sont calculées à partir des composantes de  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)$  en utilisant la loi de comportement élastique linéaire du squelette et la loi de Darcy généralisée

pour le fluide :

$$\begin{aligned}
H_{ij}(r, t) &= (\lambda G_{ij,i} - \alpha G_{3j})n_i + \mu(G_{ij,m} + G_{m,j,i})n_m \\
\bar{H}_{3j}(r, t) &= -k(\bar{G}_{3j,m} + \rho_f \dot{G}_{mj})n_m \\
\dot{H}_{i3}(r, t) &= (\lambda \dot{G}_{i3,i} - \alpha \dot{G}_{33})n_i + \mu(\dot{G}_{i3,m} + \dot{G}_{m3,i})n_m \\
H_{33}(r, t) &= -k(G_{33,m} + \rho_f \ddot{G}_{m3})n_m
\end{aligned}$$

Les dérivées et intégrales temporelles ainsi que les dérivés spatiales des composantes de  $G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)$  sont présentées respectivement dans les annexes 2C et 2D (pages 105 et 106).

### b. Interpolation temporelle linéaire

$$G_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - \bar{G}_{ij}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} & G_{i3}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - G_{i3}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} \\ \bar{\bar{G}}_{3j}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - \bar{\bar{G}}_{3j}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} & \bar{G}_{33}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - \bar{G}_{33}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$H_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \bar{H}_{ij}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - \bar{H}_{ij}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} & H_{i3}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - H_{i3}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} \\ \bar{\bar{H}}_{3j}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - \bar{\bar{H}}_{3j}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} & \bar{H}_{33}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - \bar{H}_{33}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Dans ce cas

$$\bar{H}_{ij}(r, t) = (\lambda \bar{G}_{ij,i} - \alpha \bar{G}_{3j})n_i + \mu(\bar{G}_{ij,m} + \bar{G}_{m,j,i})n_m \quad (2.64a)$$

$$\bar{\bar{H}}_{3j}(r, t) = -k(\bar{\bar{G}}_{3j,m} + \rho_f G_{mj})n_m \quad (2.64b)$$

$$H_{i3}(r, t) = (\lambda G_{i3,i} - \alpha G_{33})n_i + \mu(G_{i3,m} + G_{m3,i})n_m \quad (2.64c)$$

$$\bar{H}_{33}(r, t) = -k(G_{33,m} + \rho_f \dot{G}_{m3})n_m \quad (2.64d)$$

### c. Interpolation temporelle mixte

Comme les déplacements  $u_i$  et le débit de fluide  $q$  sont toujours continus, il est logique d'utiliser les fonctions d'interpolation temporelle linéaire pour ces quantités. Par contre, les vecteurs-contrainte  $t_i$  et la pression interstitielle  $p$  peuvent être discontinus au cours du temps ; il est alors raisonnable de supposer que ces quantités sont constantes dans chaque pas de temps. Toutefois, l'utilisation de l'interpolation linéaire, pour  $u_i$  et  $q$ , fait intervenir 2 pas de temps consécutifs ; il convient donc de supposer que les vecteurs-contrainte et la pression sont constants pendant l'intervalle correspondant. Avec ces fonctions d'interpolation, les matrices  $G_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$  et  $H_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$  ont une nouvelle forme :

$$G_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}G_{ij}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{k\Delta t} & \frac{1}{\Delta t} \left( G_{i3}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - G_{i3}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} \right) \\ \frac{1}{2}\bar{G}_{3j}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{k\Delta t} & \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{G}_{33}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - \bar{G}_{33}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} \right) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$H_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{H}_{ij}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - \bar{H}_{ij}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} \right) & \frac{1}{2}\dot{H}_{i3}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{k\Delta t} \\ \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{\bar{H}}_{3j}(\mathbf{x}, t)|_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - \bar{\bar{H}}_{3j}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{(k-1)\Delta t} \right) & \frac{1}{2}H_{33}(\mathbf{x}, t)|_{(k-2)\Delta t}^{k\Delta t} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

### 2.5.2 Régularisation des intégrales fortement singulières

L'intégration numérique doit se préoccuper de la singularité des solutions fondamentales  $G_{\alpha\beta}$  et  $H_{\alpha\beta}$ . En particulier, les composantes  $H_{ij}$  et  $H_{33}$  sont fortement singulières. Les intégrales élémentaires contenant ces composantes n'existent qu'au sens de la valeur principale de Cauchy ; elles ne peuvent pas être correctement calculées par la quadrature de Gauss. Afin de résoudre ce problème, l'idée de base est de ramener la régularisation des intégrales singulières du cas dynamique à celle du cas statique, sachant que la singularité des solutions fondamentales dynamique et statique est identique [Dargush et Banerjee, 1989], [Chen et Dargush, 1995]. En d'autres termes, les intégrales singulières du problème dynamique sont régularisées en retranchant le noyau statique au noyau dynamique :

$$\bar{H}_{ij}^1 = {}^s H_{ij} + \int_{\Gamma_1} (H_{ij}(\mathbf{x}) - {}^s H_{ij}(\mathbf{x})) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2.67a)$$

$$\bar{H}_{33}^1 = {}^s H_{33} + \int_{\Gamma_1} (H_{33}(\mathbf{x}) - {}^s H_{33}(\mathbf{x})) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2.67b)$$

( $\mathcal{N}_1$  est la fonction de forme au nœud *singulier* ;  $\Gamma_1$  est l'élément *singulier*)

Comme les différences  $H_{ij}(\mathbf{x}) - {}^s H_{ij}(\mathbf{x})$  et  $H_{33}(\mathbf{x}) - {}^s H_{33}(\mathbf{x})$  ne contiennent aucune singularité, l'évaluation du deuxième terme de (2.67a) et de (2.67b) ne pose aucune difficulté spéciale. Par contre, les premiers termes  ${}^s H_{ij}$  et  ${}^s H_{33}$  sont singuliers ; ils seront indirectement évalués par l'emploi du concept de "translation de corps rigide". Ce fameux concept a été utilisé avec succès pour des problèmes élastostatique [Cruse, 1974] et élastodynamique [Ahmad et Banerjee, 1988]. Dargush et Banerjee [1989], Chen et Dargush [1995] ont récemment proposé une nouvelle interprétation de ce concept, adaptée aux problèmes poroélastostatiques.

Considérons d'abord un champ de déplacement unitaire uniformément réparti dans tout le domaine  $\Omega$ , tel qu'il n'y a aucun mouvement relatif fluide/squelette ( $u_i = 1$  et  $q = 0$ ). Dans ce cas, il est facile à montrer qu'il n'y a pas de contrainte et de pression interstitielle générées dans le domaine  $\Omega$  ( $t_i = 0$  et  $p = 0$ ). Ainsi, avec l'application de l'équation intégrale de la poroélastostatique à cet état, on constate que quatre éléments  ${}^s H_{11}$ ,  ${}^s H_{12}$ ,  ${}^s H_{21}$ ,  ${}^s H_{22}$  situés sur le bloc (3x3) diagonal de  ${}^s \bar{\mathbf{H}}$  sont égaux à la somme

des coefficients correspondants de tous les blocs non-diagonaux de même ligne, avec un changement de signe.

$${}^s H_{ij} = - \left[ \sum_{\alpha=2}^3 \int_{\Gamma_1} {}^s H_{ij}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma + \sum_{e=2}^E \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma_e} {}^s H_{ij}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma \right] \quad (2.68)$$

Examinons ensuite la composante  ${}^s H_{33}$  : une pression unitaire  $p = 1$  uniformément répartie sur toute la frontière  $\Gamma$  du même domaine  $\Omega$  produit un débit de fluide nul  $q = 0$  sur la toute la frontière, mais les champs de déplacements et de vecteurs-contrainte ne sont pas nuls ( $u_i \neq 0$  et  $t_i \neq 0$ ). Heureusement,  ${}^s G_{3j} = 0$  et  ${}^s H_{3j} = 0$  (cf. annexe 2E), ce qui implique que le coefficient  ${}^s H_{33}$  situé sur le bloc (3x3) diagonal de  ${}^s \bar{\mathbf{H}}$  est égal à la somme des coefficients correspondants de tous les blocs non-diagonaux de même ligne, avec un changement de signe.

$${}^s H_{33} = - \left[ \sum_{\alpha=2}^3 \int_{\Gamma_1} {}^s H_{33}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma + \sum_{e=2}^E \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma_e} {}^s H_{33}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) d\Gamma \right] \quad (2.69)$$

Les expressions des composantes de la solution fondamentale de la poroélastostatique sont données dans l'annexe 2E (page 107).

Avec l'emploi du concept de "translation de corps rigide" généralisé, l'intégration numérique des intégrales élémentaires singulières est évaluée avec précision. Dans le cas des domaines semi-infinis, les éléments 'enfermants' [Ahmad et Banerjee, 1988] pourront être ajoutés pour appliquer la technique de "translation de corps rigide".

## 2.6 Applications numériques

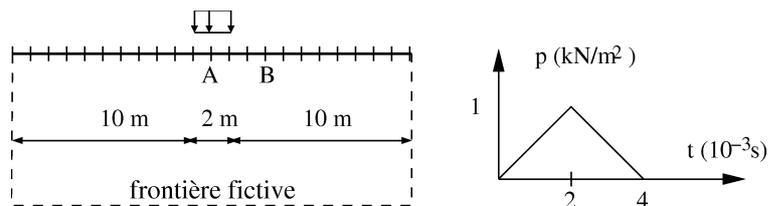
Afin de valider la formulation d'éléments frontières utilisant la solution fondamentale proposée, deux exemples sont traités : le premier modélise la génération de l'onde de surface, le second concerne la propagation unidimensionnelle d'ondes dans les milieux poreux saturés.

### 2.6.1 Exemple 1 : Génération de l'onde de Rayleigh

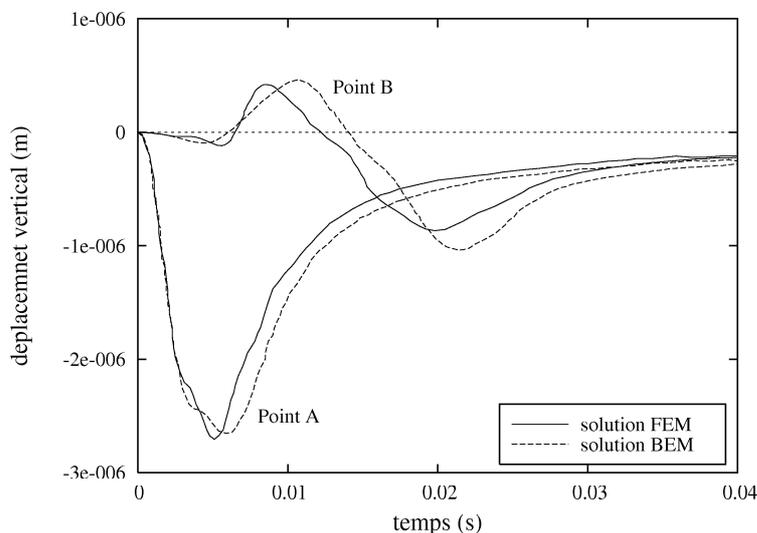
Cet exemple illustre la génération de l'onde de Rayleigh sur la surface libre de l'espace semi-infini constitué d'un milieu poreux saturé. Le résultat obtenu par la formulation d'éléments frontières proposée a été comparé avec celui résolu par la méthode des éléments finis.

Une impulsion de forme triangulaire est uniformément répartie sur une largeur de 2m d'un espace semi-infini homogène saturé d'eau (figure 2.4a). Les propriétés mécaniques et physiques de l'espace semi-infini sont :  $E = 254.4$  MPa,  $M = 5210$  MPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 1884$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_f = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $k = 3.55 \times 10^{-2}$  m/s,  $\alpha = 0.981$ . Un maillage uniforme de 20 éléments frontières quadratiques de longueur  $\Delta h = 1$  m est construit. Le domaine est tronqué à une distance 10 m de la zone de chargement ; cette distance est suffisamment grande pour

que la réponse aux points intéressés A(0 m,0) et B(3 m,0) ne soit pas compromise par cette troncature. En présence du domaine semi-infini, les éléments enfermants sont introduits pour régulariser les intégrales singulières. L'interpolation temporelle mixte et la méthode  $\theta$  ( $\theta=1.4$ ) sont utilisées avec le pas de temps  $\Delta t = 2.10^{-4}$  s. La variation du déplacement aux points A et B est tracée sur la figure 2.4b. Le résultat résolu par l'approche proposée est en bon accord avec celui obtenu par la méthode des éléments finis.



(a) Géométrie et Chargement



(b) Déplacement vertical sur la surface libre

FIG. 2.4 – Génération de l'onde de Rayleigh

### 2.6.2 Exemple 2 : Propagation unidimensionnelle d'ondes

Considérons un espace semi-infini soumis à une charge verticale, brutale et constante, uniformément répartie sur toute la surface libre (figure 2.5a). La surface libre est perméable ( $p = 0 \forall t$ ). L'espace semi-infini est constitué d'un sol homogène poreux saturé d'eau avec les mêmes caractéristiques mécaniques et physiques que l'exemple précédent.

Un maillage uniforme de 10 éléments frontières quadratiques de longueur  $\Delta h=1$  m est construit ; des éléments enfermants sont introduits pour régulariser les intégrales singulières. L'interpolation temporelle mixte est utilisée avec le pas de temps  $\Delta t = 2.10^{-4}$  s. La variation du déplacement vertical à la surface libre (mesuré au nœud au milieu du maillage) est montrée dans la figure 2.5b. Le résultat du calcul numérique est comparé à la

solution analytique de Schanz et Cheng [2000]. On observe un bon accord entre la solution analytique et la solution numérique résolue par la formulation proposée.

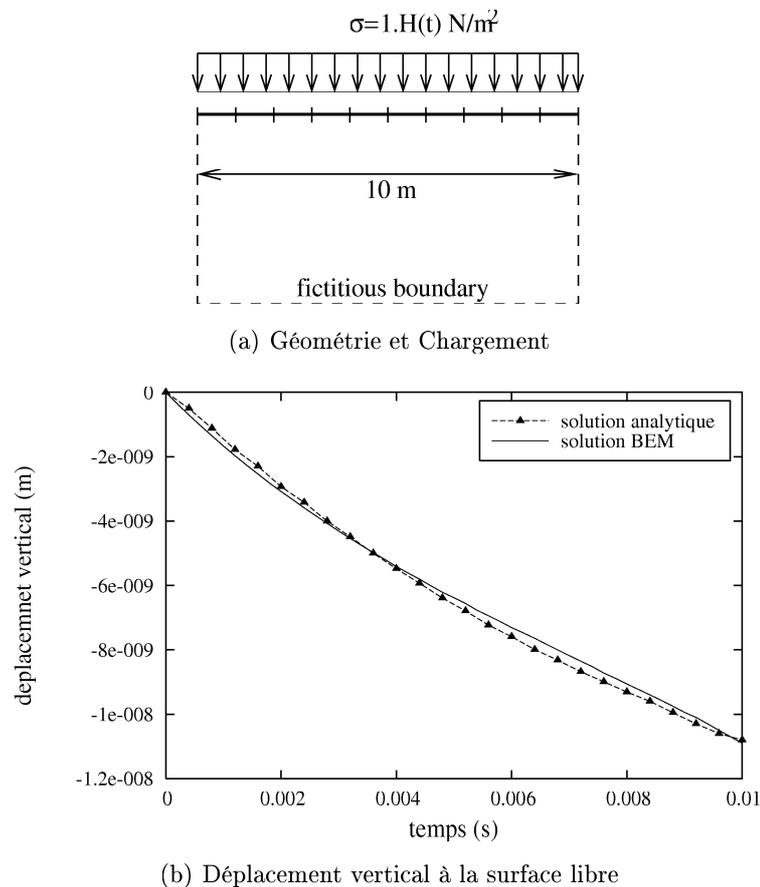


FIG. 2.5 – Propagation unidimensionnelle d'ondes

Pour étudier la stabilité du schéma temporel de la formulation proposée, l'influence du choix du pas de temps  $\Delta t$  et de la fonction d'interpolation temporelle a été examinée. Sur les figures 2.6a et 2.6b est montrée l'existence de l'instabilité numérique. L'instabilité est plus critique si le pas de temps choisi est plus grand ou si l'interpolation constante est choisie. La stabilité est améliorée en utilisant l'interpolation mixte ou la méthode  $\theta$  (figure 2.7). Ces observations sont en accord avec les conclusions tirées pour l'élastodynamique (section 1.6).

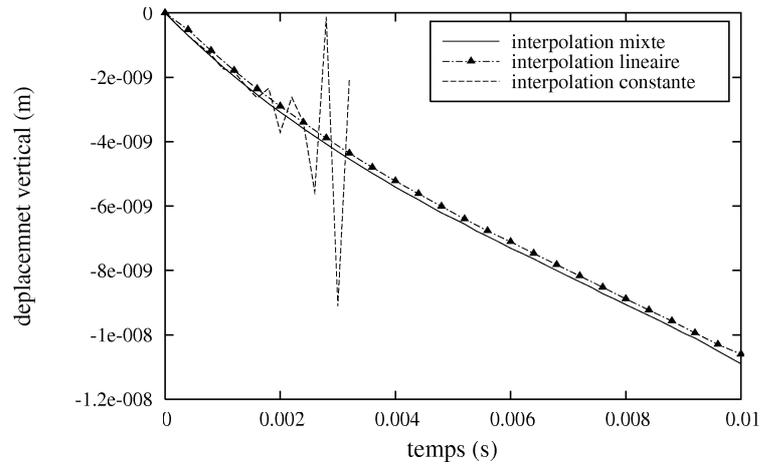
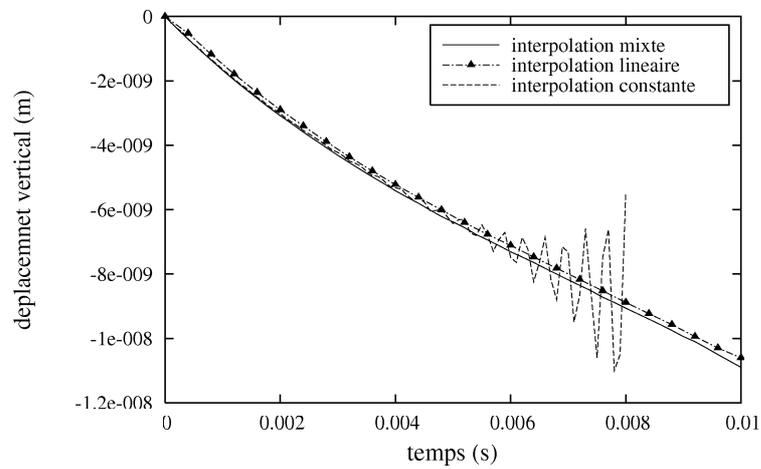
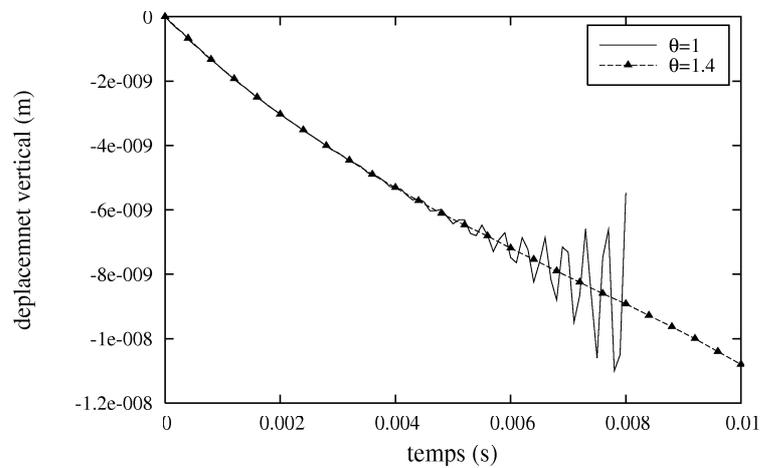
(a)  $\Delta t = 2.10^{-4} \text{s}$ (b)  $\Delta t = 1.10^{-4} \text{s}$ 

FIG. 2.6 – Influence du choix du pas de temps et de l'interpolation temporelle

FIG. 2.7 – Résultat avec la méthode  $\theta$  ( $\Delta t = 1.10^{-4} \text{s}$ , interpolation constante)

L'apparition de l'instabilité numérique, dans cet exemple, est un élément important. On sait que, dans un problème d'évolution, l'instabilité numérique est due au cumul des erreurs, qui ont diverses origines, pendant le schéma d'intégration temporel. Cependant, en élastodynamique, un problème faisant intervenir seulement un espace semi-infini ne pose pratiquement pas de problème d'instabilité et, par conséquent, un large choix de  $\Delta t$  est possible (section 1.6.1a). Ainsi, la formulation proposée est assez sensible du point de vue de la stabilité. Selon nous, cette sensibilité est probablement due à l'existence de deux nouvelles sources d'erreurs importantes (par rapport aux problèmes de l'élastodynamique) :

1. La première concerne le mauvais conditionnement de la matrice résolvante  $\mathbf{A}$ . En effet, cette matrice est obtenue après une permutation des colonnes de  $\mathbf{G}^1$  et  $\bar{\mathbf{H}}^1$  pour tenir compte des conditions aux limites. Or, sur les figures 2.2 et 2.3, on trouve que les composantes de ces deux matrices sont d'un ordre très différent :  $G_{ij}$  sont de l'ordre de  $10^{-9}$  à  $10^{-8}$  alors que  $G_{33}$  est de l'ordre de  $10^5$  à  $10^6$ . Ce mauvais conditionnement peut affecter significativement la précision de la résolution du système d'équations algébriques. Bien que nous utilisons des chiffres en double précision, cette source est probablement encore notable.
2. La deuxième source est l'emploi de la solution fondamentale analytique qui n'est qu'une approximation de la solution exacte. Cette solution fondamentale s'accorde bien avec la solution exacte pour les instants tardifs, mais pas très bien pour les premiers instants, particulièrement les composantes de pression  $G_{3j}$  et  $G_{33}$ . De plus, cette solution contient des intégrales temporelles qui doit être évaluées par l'intégration numérique, ce qui provoque aussi une source d'erreurs.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie de la poroélastodynamique ainsi que sa mise en œuvre numérique par la méthode des éléments finis et par la méthode des éléments frontières. Une approximation de la solution fondamentale temporelle a été proposée et validée.

Comme démontrée ci-dessus, la formulation d'éléments frontières proposée est toutefois sensible à la stabilité numérique. L'origine de cette sensibilité peut être diverse, mais nous présumons qu'elle est due principalement au conditionnement de la matrice résolvante et à l'utilisation de la solution fondamentale approchée.

Pour la première source d'erreurs, elle est presque inévitable si la notion de déplacements et de tractions généralisés est admise. Ce problème est aussi rencontré dans la méthode des éléments finis. Revenons à l'équation d'éléments finis (2.20) : on constate que les composantes sur la diagonale des matrices de rigidité,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{H}$ , sont d'ordres très différents. Cependant, dans les problèmes dynamiques, cette différence peut être compensée par le choix d'un pas de temps suffisamment petit (expression 2.23b). De plus, la stabilité des schémas temporels de la méthode des éléments finis a été bien maîtrisée ; l'instabilité peut

donc être évitée par l'utilisation des algorithmes inconditionnellement stables (Newmark ou  $\theta$ -Wilson). Quant à la méthode des éléments frontière, on ne sait pas comment faire pour résoudre ce problème. La question est encore ouverte.

En ce qui concerne la seconde source d'erreurs, elle n'apparaît pas si une solution fondamentale exacte est utilisée. Cependant, les solutions fondamentales exactes n'existent que dans les domaines transformés (par exemple, la solution de Cheng et al. [1991] dans le domaine fréquentiel, les solutions de Chen [1994a, 1994b] dans le domaine de Laplace). L'usage de ces solutions pour obtenir le résultat en régime transitoire nécessite normalement une transformation inverse, ce qui ne pose pratiquement pas de problème de stabilité. Par contre, dans le domaine temporel, une solution exacte n'existe malheureusement pas encore. Les solutions proposées dans la littérature, jusqu'à présent, sont toutes des approximations. Dans le contexte actuel, le schéma de Schanz [2001], dans lequel la solution fondamentale transformée est incorporée dans le schéma d'intégration temporel par l'intermédiaire de la 'quadrature convolution', semble une bonne idée.

En résumé, notre approche peut être considérée comme un premier pas pour appliquer la méthode des éléments frontières aux problèmes poroélastodynamiques en régime transitoire. Des études approfondies nécessaires pour la perfectionner constituent une perspective ouverte par ce travail.

## APPENDIX 2A : Coefficients $d, e, f, g$

$$\begin{array}{llll}
 e_1 = \frac{A_{ij}}{\lambda + 2\mu} & e_2 = \frac{B_{ij}}{\lambda + 2\mu} & e_3 = \frac{D_{ij}}{\rho} & e_4 = \frac{-D_{ij}}{2(\rho - \alpha\rho_f)\beta} \\
 e_5 = \frac{-e_4}{2\beta} & e_6 = \frac{-A_{ij}}{\mu} & e_7 = \frac{-B_{ij}}{\mu} + C_{ij} & e_8 = e_7 - e_6 r/2 \\
 e_9 = e_5/2\beta & e_{10} = 2\beta e_4 & d_1 = \frac{-\alpha}{2\pi(\lambda + 2\mu)\kappa} & d_2 = \frac{\rho f}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \\
 d_3 = \frac{1}{2\pi\alpha} & d_4 = \frac{-\rho}{2\pi\alpha(\rho - \alpha\rho_f)} & d_5 = d_4/2\beta & d_6 = d_5/2\beta \\
 f_1 = d_1 & f_2 = d_3 & f_3 = \frac{-\kappa(\rho - \alpha\rho_f)}{2\pi\alpha^3} & f_4 = 2\beta f_2 \\
 g_1 = \frac{1}{2\pi\kappa} & g_2 = \frac{-\rho}{2\pi\kappa(\rho - \alpha\rho_f)} & g_3 = g_1 + g_2 & g_4 = -2\beta g_2 \\
 g_5 = 2\beta g_1 & g_6 = g_2/2\beta & & 
 \end{array}$$

## APPENDIX 2B : Fonctions $h_{kl}(r, t)$ $k, l = 1, 2$

$$h_{11}(r, t) = \frac{e^{-\beta t} \cosh\left(\beta\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2}\right)}{\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2}} H(t - r/v_1)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_{11}(r, t) &= \left[ -\frac{\cosh(\beta\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2})(t + \beta(t^2 - r^2/v_1^2))}{\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2}} \right. \\ &\quad \left. + \beta t \sinh(\beta\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2}) \right] \times \frac{e^{-\beta t}}{t^2 - r^2/v_1^2} H(t - r/v_1) \\ h_{12}(r, t) &= \frac{v_1^2 e^{-\beta t} \sinh(\beta\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2})}{r\beta} H(t - r/v_1) \\ \dot{h}_{12}(r, t) &= \left[ \frac{\cosh(\beta\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2})t}{\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2}} - \sinh(\beta\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2}) \right] \frac{v_1^2 e^{-\beta t}}{r} H(t - r/v_1) \\ h_{12,m}(r, t) &= \left[ -\frac{\cosh(\beta\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2})}{\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2}} - \frac{v_1^2}{\beta r^2} \sinh(\beta\sqrt{t^2 - r^2/v_1^2}) \right] \\ &\quad \times e^{-\beta t} r_{,m} H(t - r/v_1) \\ h_{21}(r, t) &= \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2/v_2^2}} H(t - r/v_2) \\ \dot{h}_{21}(r, t) &= \frac{-t}{(t^2 - r^2/v_2^2)^{3/2}} H(t - r/v_2) \\ h_{22}(r, t) &= \frac{v_2^2}{r} \sqrt{t^2 - r^2/v_2^2} H(t - r/v_2) \\ \dot{h}_{22}(r, t) &= \frac{v_2^2 t}{r\sqrt{t^2 - r^2/v_2^2}} H(t - r/v_2) \end{aligned}$$

## APPENDIX 2C : Dérivées et intégrales temporelles de $G_{\alpha\beta}$

On désigne  $\bar{G}_{\alpha\beta}(r, t) = \int_0^t G_{\alpha\beta}(r, \tau) d\tau$   
 $\bar{\bar{G}}_{\alpha\beta}(r, t) = \int_0^t \int_0^\tau G_{\alpha\beta}(r, \tau) d\tau$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}_{ij}(r, t) &= e_1 \int_{r/v_1}^t \int_{r/v_1}^\tau h_{12}(\tau) d\tau + e_2 \int_{r/v_1}^t \int_{r/v_1}^\tau h_{11}(\tau) d\tau + e_3 t^3/6 + e_4 t^2/2 + e_5 t \\ &\quad - e_9 (1 - e^{-2\beta t}) + \left[ e_8 (t \ln(t + \sqrt{t^2 - r^2/v_2^2}) - \sqrt{t^2 - r^2/v_2^2} - t \ln(r/v_2)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{e_6 v_2^2}{6r} (t^2 - r^2/v_2^2)^{3/2} \right] \times H(t - r/v_2) \end{aligned}$$

$$\dot{\bar{G}}_{ij}(r, t) = e_1 h_{12} + e_2 h_{11} + e_3 t + e_4 (1 - e^{-2\beta t}) + e_6 h_{22} + e_7 h_{21}$$

$$\ddot{\bar{G}}_{ij}(r, t) = e_1 \dot{h}_{12} + e_2 \dot{h}_{11} + e_3 + e_{10} e^{-2\beta t} + e_6 \dot{h}_{22} + e_7 \dot{h}_{21}$$

$$\bar{\bar{G}}_{3j}(r, t) = r_{,j} \int_{r/v_1}^t (d_1(t - \tau) + d_2) h_{12}(\tau) d\tau + (d_3 t^2/2 + d_5 t - d_6 (1 - e^{-2\beta t})) r_{,j}/r$$

$$\bar{\bar{G}}_{3j}(r, t) = r_{,j} \int_{r/v_1}^t d_1 h_{12}(\tau) d\tau + r_{,j} d_2 h_{12}(r, t) + (d_3 t + d_5 (1 - e^{-2\beta t})) r_{,j}/r$$

$$\dot{G}_{i3}(r, t) = r_{,i} f_1 h_{12} + (f_2 - f_2 e^{-2\beta t}) r_{,i} / r$$

$$\ddot{G}_{i3}(r, t) = r_{,i} f_1 \dot{h}_{12} + f_4 e^{-2\beta t} r_{,j} / r$$

$$\bar{G}_{33}(r, t) = \int_{r/v_1}^t [g_1(t - \tau) + g_6(1 - e^{-2\beta(t-\tau)})] h_{11}(\tau) d\tau + g_6 \ln(r)(1 - e^{-2\beta t})$$

$$\dot{G}_{33}(r, t) = g_4 \int_{r/v_1}^t e^{-2\beta(t-\tau)} h_{11}(\tau) d\tau g_3 h_{11} + g_4 \ln(r) e^{-2\beta t}$$

### APPENDIX 2D : Dérivées spatiales de $G_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ij,m} = & e_1 \int_{r/v_1}^t \int_{r/v_1}^t h_{12,m}(\tau) d\tau + e_{1,m} \int_{r/v_1}^t \int_{r/v_1}^t h_{12}(\tau) d\tau + e_{2,m} \int_{r/v_1}^t \int_{r/v_1}^t h_{11}(\tau) d\tau \\ & - e_2 \frac{r_{,m}}{v_1^2} (h_{12} + 2\beta \int_{r/v_1}^t \int_{r/v_1}^t h_{12}(\tau) d\tau) + e_{3,m} t^3 / 6 + e_{4,m} t^2 / 2 + e_{5,m} t \\ & - e_{9,m} (1 - e^{-2\beta t}) + \left[ e_{8,m} (t \ln(t + \sqrt{t^2 - r^2/v_2^2}) - \sqrt{t^2 - r^2/v_2^2} - t \ln(r/v_2)) \right. \\ & \left. - e_7 \frac{r_{,m}}{r} \sqrt{t^2 - r^2/v_2^2} + (e_{6,m} - e_6 \frac{r_{,m}}{r}) \frac{v_2^2}{6r} (t^2 - r^2/v_2^2)^{3/2} \right] \times H(t - r/v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{ij,m} = & e_1 \int_{r/v_1}^t h_{12,m}(\tau) d\tau + e_{1,m} \int_{r/v_1}^t h_{12}(\tau) d\tau + e_{2,m} \int_{r/v_1}^t h_{11}(\tau) d\tau \\ & - e_2 \frac{r_{,m}}{v_1^2} (\dot{h}_{12} + 2\beta h_{12}) + e_{3,m} t^2 / 2 + e_{4,m} + e_{5,m} (1 - e^{-2\beta t}) \\ & + \left[ e_{8,m} (\ln(t + \sqrt{t^2 - r^2/v_2^2}) - \ln(r/v_2)) - e_7 \frac{r_{,m} t}{r \sqrt{t^2 - r^2/v_2^2}} \right. \\ & \left. + (e_{6,m} - e_6 \frac{r_{,m}}{r}) \frac{v_2^2 t}{2r} \sqrt{t^2 - r^2/v_2^2} \right] \times H(t - r/v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{3j,m} = & r_{,j} \int_{r/v_1}^t [d_1(t - \tau) + d_2] h_{12,m}(\tau) d\tau + r_{,jm} \int_{r/v_1}^t [d_1(t - \tau) + d_2] h_{12}(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{r^2} (\delta_{jm} - 2r_{,j} r_{,m}) (d_3 t^2 / 2 + d_5 t - d_6 (1 - e^{-2\beta t})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{3j,m} = & r_{,j} (d_1 \int_{r/v_1}^t h_{12,m}(\tau) d\tau + d_2 h_{12,m}) + r_{,jm} (d_1 \int_{r/v_1}^t h_{12}(\tau) d\tau + d_2 h_{12}) \\ & + \frac{1}{r^2} (\delta_{jm} - 2r_{,j} r_{,m}) (d_3 t + d_5 - d_5 e^{-2\beta t}) \end{aligned}$$

$$G_{3j,m} = r_{,j}(d_1 h_{12,m} + d_2 \dot{h}_{12,m}) + \frac{1}{r}(\delta_{jm} - r_{,j}r_{,m})(d_1 h_{12} + d_2 \dot{h}_{12}) \\ + \frac{1}{r^2}(\delta_{jm} - 2r_{,j}r_{,m})(d_3 + d_4 e^{-2\beta t})$$

$$G_{i3,m} = f_1[r_{,i} \int_{r/v_1}^t h_{12,m}(\tau) d\tau + r_{,im} \int_{r/v_1}^t h_{12}(\tau) d\tau] \\ + \frac{1}{r^2}(\delta_{im} - 2r_{,i}r_{,m})(f_2 t + f_3(1 - e^{-2\beta t}))$$

$$\dot{G}_{i3,m} = f_1(r_{,i} h_{12,m} + r_{,im} h_{12}) + \frac{1}{r^2}(\delta_{im} - 2r_{,i}r_{,m})(f_2 - f_2 e^{-2\beta t})$$

$$\bar{G}_{33,m} = -\frac{r_{,m}}{v_1^2}(g_3 h_{12} + g_5 \int_{r/v_1}^t h_{12}(\tau) d\tau) + g_6 \frac{r_{,m}}{r}(1 - e^{-2\beta t})$$

$$G_{33,m} = -\frac{r_{,m}}{v_1^2}(g_3 \dot{h}_{12} + g_5 h_{12}) + g_2 \frac{r_{,m}}{r} e^{-2\beta t}$$

## APPENDIX 2E : Solutions fondamentales permanentes

Connaissant les solutions dynamiques, les solutions du régime permanent peuvent être obtenues en prenant le temps  $t$  égal à l'infini. Pour les calculer, on peut appliquer le théorème de la limite de la valeur finale :

$$G_{\alpha\beta}^{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, s)$$

Alors

$$G_{ij}^{st} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij}(3-4\nu) \ln r \right] \quad \left( \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \right) \quad (2.70a)$$

$$G_{3j}^{st} = 0 \quad (2.70b)$$

$$G_{i3}^{st} = \frac{\alpha}{8\pi k(\lambda + 2\mu)} x_i (1 - 2 \ln r) \quad (2.70c)$$

$$G_{33}^{st} = -\frac{1}{2\pi k} \ln r \quad (2.70d)$$

Une fois que les déplacements et la pression interstitielle sont connus, les vecteurs-contrainte et le débit de fluide s'obtiennent facilement grâce à la loi de comportement du squelette et à la loi de Darcy pour le fluide :

$$T_{ij}^{st} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}]r_{,n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_{,j} - r_{,j}n_{,i})\} \quad (2.71a)$$

$$T_{3j}^{st} = 0 \quad (2.71b)$$

$$T_{i3}^{st} = \frac{\alpha\mu}{4\pi k(\lambda + 2\mu)} [(1 + 2 \ln r)n_i - 2r_{,i}r_{,n}] \quad (2.71c)$$

$$T_{33}^{st} = \frac{r_{,n}}{2\pi r} \quad (2.71d)$$



## Deuxième partie

# Applications aux calculs sismiques



## Chapitre 3

# Effets de site topographiques

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'effet de site topographique, qui apparaît éventuellement lors d'un tremblement de terre. Nous commençons par des généralités, puis abordons des preuves et les méthodes d'évaluation des effets de site en général. Ensuite, nous décrivons les caractéristiques principales, les phénomènes physiques et les paramètres importants de l'effet de site topographique. Enfin, nous effectuons une étude paramétrique portant sur l'effet de site topographique des pentes, des vallées et des collines.

### 3.1 Introduction et bibliographie

#### 3.1.1 Généralités sur les effets de site

Lors d'un événement sismique, les ondes sont émises depuis le foyer et se propagent jusqu'à la surface à travers divers milieux. Le mouvement d'un site donné, lors d'un tremblement de terre, est généralement gouverné par trois facteurs principaux : la source, le trajet parcouru des ondes sismiques et les conditions géotechniques locales. Les deux premiers facteurs sont communément analysés à l'échelle régionale ; ils déterminent l'aléa régional. Le dernier facteur, lié aux conditions locales, détermine l'aléa local. L'existence et l'influence considérable de ce dernier facteur ont été observées en réalité. En fait, l'enregistrement de quelques séismes récents ont montré que le mouvement du terrain dans certaines zones a été fortement amplifié de façon inattendue par rapport à celui d'autres zones. Il est aussi fréquemment observé, après un séisme destructif, une concentration de dégâts graves, parfois dramatiques, dans une certaine zone alors que des dommages dans d'autres zones au voisinage sont beaucoup moins importants. Dans pratiquement tous les cas où l'inventaire des dégâts a pu être fait de façon suffisamment détaillée, on a constaté que la répartition des dégâts était généralement bien corrélée avec les conditions géotechniques et topographiques de surface de la zone considérée. Un exemple connu qui fait preuve de ces observations est le cas du séisme de Michoacan (Mexique) en 1985. Après ce séisme, les dégâts des bâtiments dans le bassin sédimentaire de Mexico City étaient considérablement plus graves que ceux des bâtiments sur le rocher affleurant le bassin. Des enregistrements par instruments

ont montré que le mouvement à l'intérieur de Mexico City a été notablement amplifié en comparaison avec celui à l'extérieur de la ville (figure 3.1). Une autre preuve est le cas du séisme de Lima (Pérou) en 1974. Pendant ce séisme, les accélérographes enregistrés en deux sites de presque même distance épacentrale ont montré des dissimilitudes prononcées. Le premier site, dans le centre de Lima, a éprouvé seulement des secousses mineures. Le second site, situé sur le bassin sédimentaire de La Molina, a été soumis à des secousses graves pendant le même séisme. À part ces deux exemples, les séismes de Loma Prieta (Etats Unis) en 1989, de Northridge (Etats Unis) en 1995, d'Arménie en 1988, d'Iran en 1990, aux Philippines 1990 sont aussi des exemples typiques qui montrent le rôle important des conditions géotechniques locales sur la réponse sismique du site.

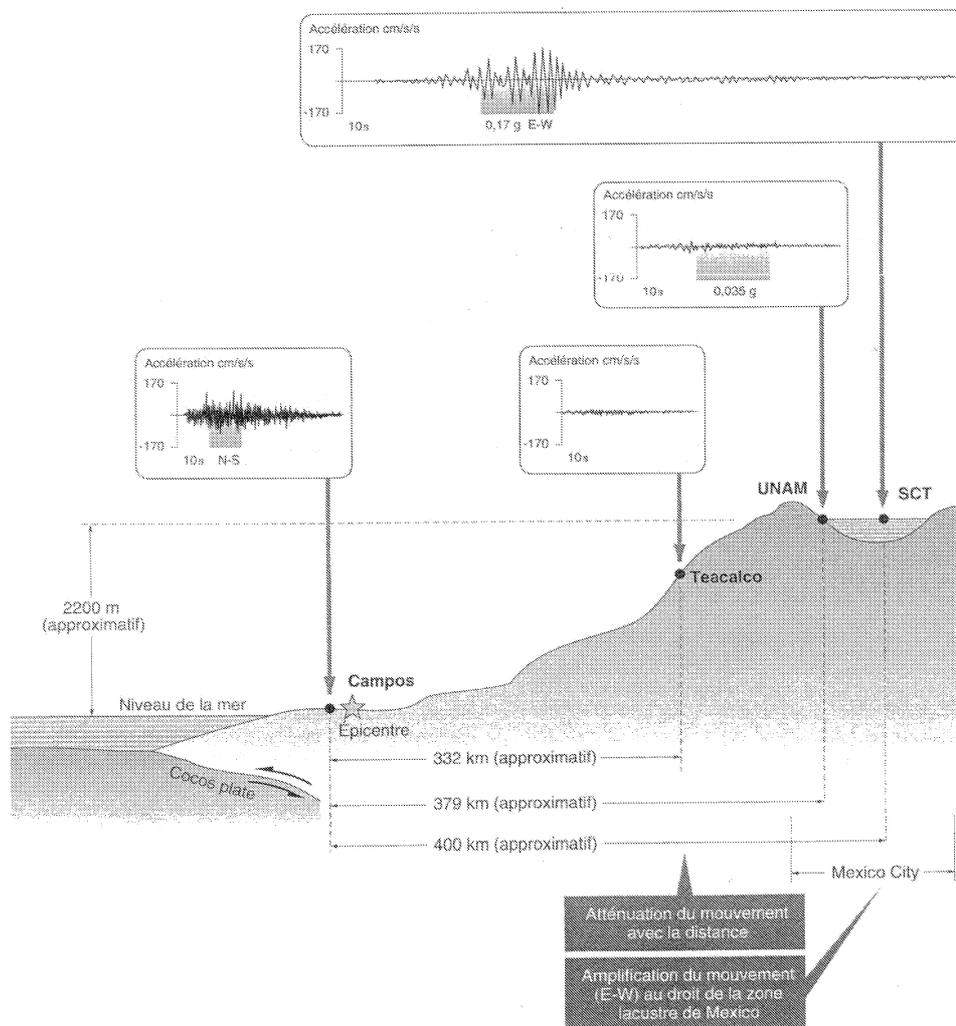


FIG. 3.1 – Accélérographes du séisme de Michoacan (Mexique) du 19 septembre 1985 (extrait de [Davidovici, 1999]).

On appelle effet de site les modifications du mouvement sismique en surface dues aux conditions géotechniques et topographiques locales d'un site donné par rapport au mouvement observé sur un site 'voisin' correspondant à des conditions de référence (affleurement rocheux suivant une surface horizontale au voisinage du site étudié). Les rapports des amplitudes spectrales de différents sites (au sommet de la colline et à l'intérieur du bassin sédimentaire) à celui de référence illustre cette définition (figure 3.2).

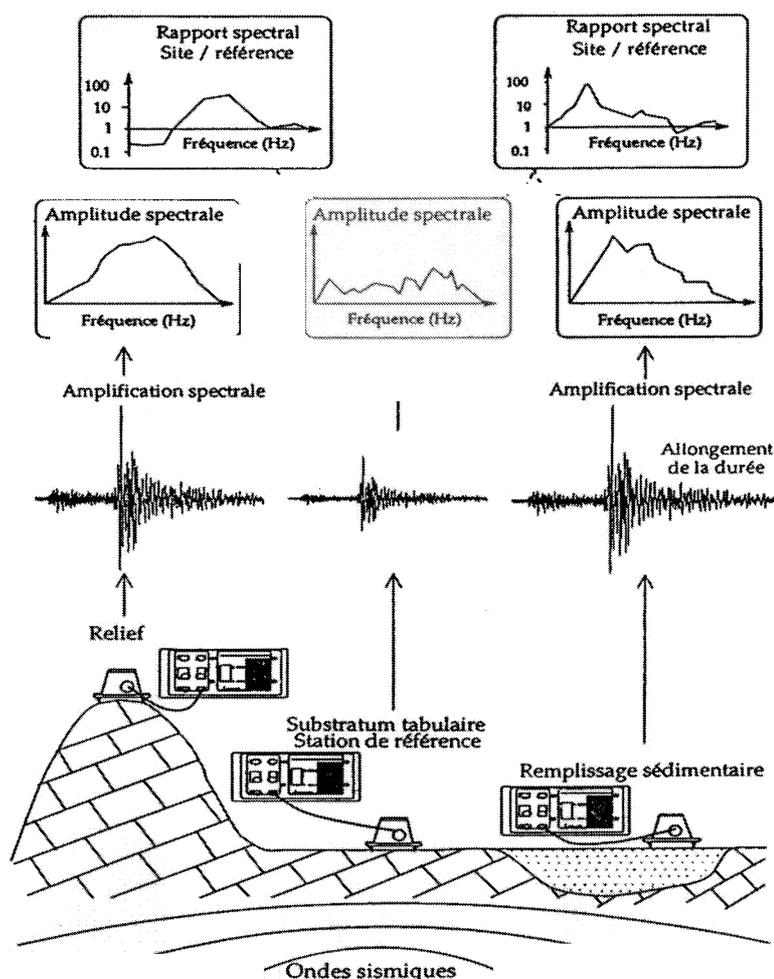


FIG. 3.2 – Définition de l'effet de site (extrait de [Duval, 2003]).

Sur la figure 3.3 sont représentées quatre configurations typiques pour lesquelles différentes formes d'effets de site peuvent se manifester. Les cas (a), (b) et (c) sont caractérisés par le contraste de raideur (ou d'impédance) entre un rocher et un sol relativement mou. L'influence de la variation latérale du substratum sous-jacent est aussi présente dans le cas (b). Le cas (d) correspond à l'effet de site dû à la topographie en surface.

Le cas (a) est rencontré très fréquemment dans les zones consacrées à l'urbanisation et à l'aménagement industriel. C'est le cas le plus simple, car il peut se prêter à des modélisations unidimensionnelles pour des ondes à propagation verticale. Dans ce cas, la connaissance précise des caractéristiques géométriques et mécaniques des différentes couches de

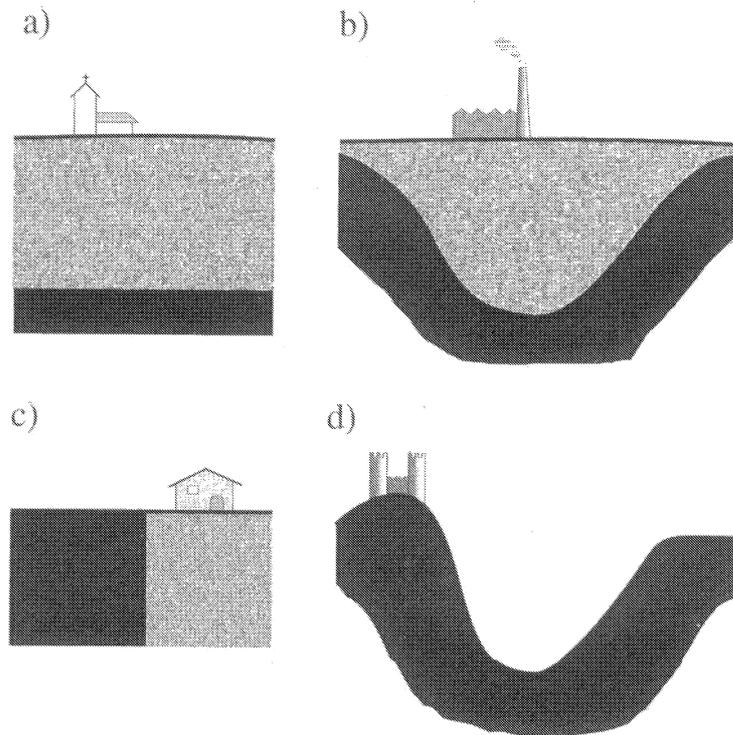


FIG. 3.3 – Quatre configurations souvent à l'origine des effets de site. (a) stratigraphie horizontale (b) relief souterrain : bassin, vallée sédimentaire (c) discontinuité latérale (d) topographie : colline, vallée, pente

terrain est assez facilement acquise, puisqu'elle ne nécessite que des reconnaissances géotechniques limitées. Par ailleurs, l'hypothèse d'un champ d'ondes incident à propagation verticale constitue une hypothèse habituelle pour la définition du mouvement sismique. Le cas (a) est ainsi le cas le plus étudié et appliqué dans la pratique. Relatifs à des structures géotechniques complexes, les cas (b), (c) et (d) font intervenir des effets bi ou tridimensionnels. La réponse sismique du site, dans ces cas, devient très compliquée par rapport à celle du cas (a). La prévision du mouvement sismique du terrain, dans ces cas, pose de vraies difficultés sur le plan théorique mais aussi sur le plan expérimental. En effet, la méthode théorique ou numérique utilisée pour la prévision doit être suffisamment robuste afin de tenir compte, d'une part, de la diffraction et de l'interférence des ondes et, d'autre part, du caractère ouvert de l'espace semi-infini. L'acquisition des données géotechniques nécessite aussi de nombreuses reconnaissances avancées. Vu la complexité et la difficulté du problème, l'étude des effets de site de ces trois derniers cas est jusqu'à présent réservée à des opérations à caractère de recherche et à quelques grands projets (ouvrages exceptionnels ou sites de grandes zones urbaines); sa prise en compte éventuelle dans les codes parasismiques est plutôt conventionnelle. Dans ce travail, nous nous efforçons d'éclaircir

les causes de ces effets et effectuons des études paramétriques afin d'estimer l'importance des facteurs principaux qui décident de la réponse sismique du site. L'effet de site topographique, cas (d), est analysé dans ce chapitre; les cas (b) et (c) seront considérés dans le chapitre suivant. La figure 3.4 dessine 3 configurations de base de la topographie.

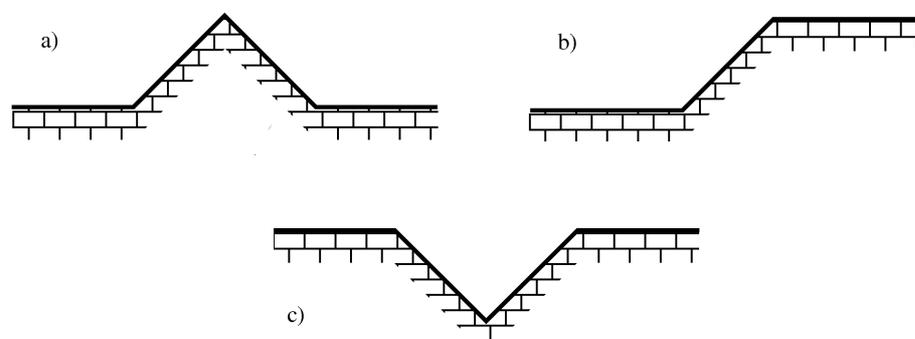


FIG. 3.4 – Trois configurations de base à l'origine des effets de site topographiques : (a) Colline, (b) Pente, (c) Vallée.

### 3.1.2 Preuves des effets de site

#### a. Effets de site dans les remplissages sédimentaires

Il est admis que les dommages des constructions situées sur un remplissage sédimentaire sont généralement plus sévères que ceux des constructions situées sur un rocher. De nombreuses observations macrosismiques ont indiqué très clairement les effets préjudiciables associés aux sédiments de sols mous, et ont démontré comment les intensités sismiques locales, dans de telles conditions, peuvent augmenter de 2 ou 3 degrés (sur l'échelle de MM ou de MSK). Dans ces dernières décennies, les enregistrements ont aussi témoigné de la modification du signal sismique sur les remplissages sédimentaires, le plus souvent sous la forme d'une amplification qui correspond assez couramment à un facteur de l'ordre de 2 à 3, mais peut atteindre des valeurs sensiblement plus élevées. Ces observations montrent l'importance substantielle des effets de site dans les remplissages sédimentaires.

En pratique, est généralement acceptée l'hypothèse de la stratigraphie horizontale des couches de sol sous-jacentes. Cette hypothèse est raisonnable dans la grande majorité des cas (vallées peu encaissées, bassins sédimentaires). Les calculs unidimensionnels basés sur cette hypothèse ont été vérifiés par des mesures lors de nombreux séismes récents. Ces calculs sont en général capable d'illustrer les aspects essentiels de la réponse sismique en surface des sédiments. Par conséquent, l'évaluation des effets de site dans les sédimentations unidimensionnelles a été incorporée dans quelques codes parasismiques modernes (par exemple, Eurocode 8, PS 92/5.2.4). Cependant, dans plusieurs cas où la variation latérale du substratum sous-jacent n'est pas négligeable (vallées profondes), les calculs unidimensionnels ne peuvent pas expliquer la forte amplification ou la prolongation de la durée du

mouvement du site. Des preuves théoriques et expérimentales ont montré des implications d'effets bi- ou tridimensionnels. Par exemple, la distribution localisée de dommages dans la ville de Skopje (ex-Yougoslavie), après le séisme de 1963, est liée aux hétérogénéités latérales souterraines. La concentration des ondes par les interfaces irrégulières souterraines est susceptible d'avoir l'amplification forte de mouvement dans certaines zones limitées de la ville [Poceski, 1969]. L'observation macrosismique, après le séisme de Hayward (Californie, Etats Unis) en 1868, a montré que l'effet le plus destructif s'est localisé sur la sédimentation alluviale et particulièrement le long de la ligne de contact entre cette sédimentation et le rocher. King et Tucker [1984], grâce à des mesures à vallée Chusal (Tadjikistan), ont indiqué que l'analyse unidimensionnelle peut prévoir la réponse moyenne du sédiment au voisinage du centre de la vallée, mais pas aux bords car les mouvements y sont considérablement différents. Les effets similaires ont aussi été observés pour quelques autres vallées pendant différents séismes (Caracas, Venezuela en 1967; San Fernando, Etats Unis en 1971; Leninakan, Arménie en 1988).

#### **b. Effet de site topographique**

L'amplification importante du mouvement sismique due à l'effet de site topographique est un phénomène bien identifié. L'observation macrosismique de la répartition de dégâts significatifs et l'enregistrement par instrumentation des mouvements forts du terrain de quelques séismes récents ont affirmé l'importance de cet effet. En effet, après des séismes destructifs, on a souvent signalé que les immeubles situés au sommet des falaises, des collines ou des montagnes subissent des dommages beaucoup plus intenses que ceux situés à la base. Par exemple, le séisme de Tokachi (Japon) en 1968 a produit des dommages considérables aux bâtiments près du bord d'une falaise, alors que des autres bâtiments situés à une certaine distance du bord ne présentaient aucun dommage. Un séisme récent, à Kozani (Grèce) en 1995, a apporté les preuves de dommages graves dans les villages construits sur des collines. D'autres exemples similaires peuvent être observés après les séismes de Friuli (Italie) en 1976, d'Irpinia (Italie) en 1980 ou au Chili en 1985. Par ailleurs, des enregistrements expérimentaux ont aussi montré que la topographie affecte considérablement l'amplitude et le contenu fréquentiel du mouvement du terrain. Par exemple, l'accélérographe au barrage de Pacoima, dans le sud de la Californie, a enregistré une accélération horizontale maximale d'environ de 1.25 g dans les deux directions horizontales pendant le séisme de San Fernando (Etats-Unis) de magnitude  $M_L = 6.4$  [Trifunac et Hudson, 1971]. Cette valeur, qui était considérablement plus grande que prévue pour un séisme de cette magnitude, résultait de la configuration du site du barrage (vallée encaissée) et de la position de l'appareil enregistreur au sommet d'un des appuis (sans cette amplification topographique, l'accélération n'aurait été que de 0.73 g). Un autre exemple est la mesure sur un site dont la pente est très raide, dans les Alpes Maritimes (France), qui a révélé que les spectres dans une bande de fréquence étroite autour 5 Hz diffèrent d'un degré de magnitude entre la crête et la base [Nechtschein et al., 1995]. Un autre exemple bien connu (et

mal compris) est l'enregistrement du mouvement à la station Tarzana, pendant le séisme de Northridge (Californie, Etat-Unis) en 1994, dans lequel le coefficient d'amplification spectral a atteint une valeur de 5 dans une bande de fréquence étroite, au voisinage de 3 Hz. Un aperçu de ces études expérimentales avec leurs résultats peut être trouvé dans [Geli et al., 1988], [Faccioli, 1991].

Une fois que les effets de site sont mis en évidence, des études approfondies sur ces effets deviennent vitales. En effet, la plupart des zones urbaines et industrielles, en particulier les plus grandes villes du monde, sont situées au-dessus de bassins sédimentaires. Les grands séismes, dans le passé, ont provoqué dans ces zones des pertes humaines et économiques immenses. En ce qui concerne l'effet de site topographique, il y a deux préoccupations. D'une part, les zones les plus sollicitées par des séismes sont fréquemment montagneuses et, pour des raisons de sécurité, beaucoup de villes et villages ont été construits sur des collines ou montagnes. D'autre part, cet effet est étroitement lié au phénomène de glissement de terrain, observé souvent pendant de forts séismes, qui ont causé des dommages et destructions extrêmement sévères. En conséquence, la prise en compte des effets de site dans les codes parasismiques est indispensable. Cependant, à l'heure actuelle, seul l'effet de site unidimensionnel est incorporé dans quelques codes modernes ; l'effet de bassin et l'effet de site topographique ne sont pas encore pris en compte de manière efficace dans ces codes. Ces derniers effets de site nécessitent donc des études approfondies pour une meilleure compréhension. La section suivante présentera un bref panorama des méthodes destinées à évaluer et à prévenir des effets de site.

### 3.1.3 Méthodes d'évaluation des effets de site

Il y a deux approches fondamentales afin d'estimer les effets de site : soit par des observations et/ou mesures in-situ, soit par des modélisations théoriques ou numériques basées sur les informations géotechniques disponibles du site. La première approche est indispensable pour une meilleure compréhension des effets de site, qui ne sont pas jusqu'à présent complètement compris. La deuxième approche a aussi un rôle primordial, non seulement pour la compréhension, mais aussi pour la capacité de prévision des effets de site. Ainsi, toutes les deux approches sont certainement importantes. Le choix de la méthode utilisée dépend de l'importance de chaque projet et aussi du 'coût' (argent, temps) et de la fiabilité de chaque méthode.

#### a. Méthodes expérimentales

Considérant que, vers la fin des années '70 et dans les années '80, les développements s'étaient concentrés sur l'approche numérique, la situation est plus équilibrée ces dernières années. L'expérimentation a connu un grand développement depuis environ 1990. Plusieurs projets d'investigation expérimentale, basés sur des nouvelles techniques, ont été développés et ont apporté des résultats de valeur. En général, l'expérimentation des effets de site

comporte trois aspects essentiels.

Le premier est l'établissement de formules ou relations empiriques permettant de calculer la valeur de certains paramètres du mouvement (intensité sismique, coefficient d'amplification, spectre de réponse) à partir des caractéristiques géologiques, géotechniques ou géométriques des terrains du site. Ces relations empiriques, dérivées d'un jeu de données d'un site particulier où les observations macrosismiques et les informations sur les conditions géologiques locales sont disponibles, sont appliquées à d'autres sites où seulement la géologie locale est connue. Ces relations sont particulièrement utiles pour la première estimation des effets de site et le (pré-)dimensionnement des structures ou des ouvrages. Mais elles sont souvent extrêmement simples, parfois forfaitaires ; alors ses précisions ne sont pas toujours garanties. Un exemple typique concerne les spectres réglementaires dans les codes parasismiques (PS 92/5.2.4, Eurocode 8) qui relie le spectre de réponse du mouvement en surface avec la condition géologique du site. Un autre exemple est la définition d'un coefficient d'amplification topographique (recommandation AFPS 90/5.3.3) comme présentée sur la figure 3.5.

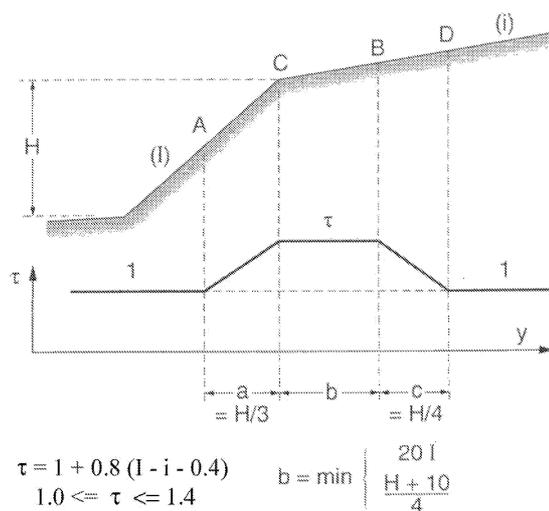


FIG. 3.5 – Variation du coefficient d'amplification  $\tau$  suivant la topographie du site (PS 92/5.2.4, AFPS 90/5.3.3)

Le second aspect est la détermination des traits dominants de la réponse du site (fréquence fondamentale, coefficients d'amplification) par des mesures in-situ. À l'heure actuelle, cette mission est réalisée soit par la mesure du bruit de fond, soit par la mesure de la microsismicité.

1. La première technique consiste à utiliser le bruit de fond du sous-sol, c'est-à-dire des mouvements de faible amplitude résultant des perturbations naturelles ou artificielles (le vent, les vagues, le trafic, les activités industrielles), comme source d'excitation

'gratuite'. Cette technique, proposée et utilisée notamment au Japon, est devenue répandue au niveau international par sa variante de Nakaruma [Nakamura, 1989] (méthode H/V), qui a mis en évidence la corrélation entre la fréquence de résonance de couches superficielles avec les valeurs de pic du rapport du spectre de Fourier de la composante horizontale à celui de la composante verticale. Bien que ses résultats ne soient pas clairement expliqués, cette technique constitue un moyen fiable de détermination de la fréquence fondamentale. De plus, cette technique est facile à mettre en oeuvre et peu coûteuse. Néanmoins, il est assez aventureux de vouloir en tirer d'autres informations sur les caractéristiques du site.

2. La deuxième technique utilise, soit des signaux sismiques de faible niveau résultant de petits séismes relativement fréquents, soit des 'séismes' artificiels (explosion nucléaire, exploitation minière...). Cette technique est assez simple ; les facteurs d'amplification peuvent être déduits de manière assez fiable par son utilisation ; plusieurs problèmes de la technique 'bruit de fond' n'existent plus. C'est pourquoi elle a été fréquemment utilisée ces dernières décennies. Toutefois, cette technique est assez coûteuse et lourde, car elle nécessite, en général, une campagne d'observations de plusieurs mois et un travail important d'analyse et d'interprétation des mesures. Il faut, en effet, s'affranchir des particularités liées aux sources et aux effets de propagation, pour déduire des enregistrements des effets qui sont propres au site étudié.

Enfin, le dernier aspect est l'analyse des effets des séismes antérieurs ressentis sur le site, même s'ils n'ont pas donné lieu à des enregistrements. On a constaté que la carte de dommages a souvent présenté une forte corrélation avec la géologie du terrain sous-jacent. Par conséquent, des observations macrosismiques (l'inventaire des dégâts causés par des séismes passés), peuvent également apporter des informations très utiles. Elles constituent un moyen d'estimation, au moins qualitative, de l'importance des effets de site.

Une bibliographie assez abondante sur les méthodes expérimentales peut être trouvée dans [Aki, 1988] et [Bard et Riepl-Thomas, 2000].

## **b. Modélisations théoriques et numériques**

Les effets de site peuvent impliquer divers phénomènes complexes concernant le champ d'ondes incident (champ proche ou champ lointain, onde de volume ou onde de surface), la structure géologique locale (1D, 2D ou 3D, homogène ou hétérogène), le comportement du sol (élastique ou anélastique, linéaire ou non-linéaire, sec ou saturé, fissuré ou non,...). Le domaine est donc très étendu. Des modélisations théoriques ou numériques, plus ou moins sophistiquées, sont destinées à examiner quelques aspects des effets de site (aucun modèle n'est capable d'examiner simultanément tous ses aspects). Ces modèles sont des représentations plus ou moins simplifiées des milieux et des éléments étudiés. Chaque méthode a donc son domaine de validité en fonction des simplifications qu'elle suppose. Ces trois dernières décennies, beaucoup de méthodes ont été proposées et développées. La littérature sur cette approche théorique pour l'estimation des effets de site est très abondante ;

elle semble plus abondante que celle de l'approche expérimentale. Cette section est donc limitée à présenter un aperçu des travaux récents et destinée à fournir une idée globale des méthodes théoriques et numériques pour estimer les effets de site.

Selon un ordre croissant de la dimension du problème considéré, les modèles sont regroupés en trois catégories. Les modèles unidimensionnels intègrent une représentation stratigraphique du sous-sol ; ils ne sont donc valables qu'à l'échelle très locale d'un ouvrage isolé ou dans le cas des bassins alluvionnaires très peu encaissés. De par leur simplicité de mise en oeuvre et d'application, ils sont fréquemment utilisés en génie parasismique ou sismologie. L'analyse unidimensionnelle est également la base des normes parasismiques pour la prise en compte de l'influence de l'hétérogénéité verticale du sol sur le mouvement sismique de surface. Quand l'hétérogénéité latérale n'est pas négligeable, c'est-à-dire qu'il existe des irrégularités topographiques en surface ou souterraines, des modèles bi- ou tri-dimensionnels doivent être envisagés. Le problème, dans ces cas, devient nettement compliqué par rapport au problème unidimensionnel, car de nouveaux phénomènes physiques apparaissent. En comparaison avec les cas 2D, les problèmes 3D sont significativement coûteux en volume de calcul. En réalité, les phénomènes physiques en 3D sont les mêmes que ceux en 2D, sauf qu'ils se manifestent en trois dimensions. Diverses études montrent qu'il y a moins de différences, en termes d'augmentation de l'amplification, dans le passage du 2D au 3D que dans celui du 1D au 2D. En conséquence, la majorité des méthodes se concentre à étudier les problèmes 2D. Parmi des méthodes capables d'analyser les effets de site 2D ou 3D, on peut globalement distinguer trois catégories essentielles : les solutions analytiques, les méthodes numériques traitées 'dans le domaine', les méthodes numériques traitées 'sur la frontière'.

### **Solutions analytiques**

Comme le problème est compliqué, il n'existe pas beaucoup de solutions analytiques. Les solutions existantes ne sont valables que pour des configurations relativement simples. Les problèmes les plus simples concernent la diffraction bidimensionnelle des ondes SH qui peuvent être analysées séparément des autres ondes. En utilisant la séparation des variables, Trifunac [1971, 1973] a obtenu la solution exacte pour la diffraction des ondes SH par une vallée alluviale et par une vallée vide demi-circulaire ; Wong et Trifunac [1974a, 1974b] ont trouvé la solution similaire pour le cas d'une vallée alluviale et d'une vallée demi-elliptique. Un résultat très simple a été montré par Sanchez-Sesma [1985] pour le cas d'une colline triangulaire. Par contre, pour les problèmes impliquant les ondes SV ou P, les solutions exactes sont difficiles à trouver. Quelques solutions ont été obtenues de manière approximative sous certaines conditions simplifiées. On peut citer le résultat de Lee [1982] pour le cas d'une vallée vide semi-sphérique ; cette approche est cependant limitée aux basses fréquences. Sanchez-Sesma [1990] a aussi obtenu la réponse d'une colline triangulaire pour quelques circonstances spéciales.

En somme, les solutions analytiques ne sont pas nombreuses et elles ne correspondent qu'à des cas très simples. Toutefois, ces solutions sont profitables pour comprendre les aspects fondamentaux des phénomènes. Elles sont aussi des références pour vérifier les méthodes numériques. Bien que les configurations étudiées soient simples, on constate que les réponses sont vraiment complexes. Cette constatation montre la nécessité du développement des méthodes numériques pour traiter des problèmes plus compliqués (configuration plus complexe ou loi de comportement du sol plus élaborée).

### **Méthodes numériques traitées 'dans le domaine'**

Ces méthodes sont caractérisées par une discrétisation effectuée dans tout le domaine considéré. On peut distinguer deux approches principales : la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis.

La méthode des différences finies a été utilisée par Boore [1972] pour évaluer l'effet de site topographique provoqué par une colline, et par Boore et al. [1981] pour le cas d'une pente. Liao et al. [1980] ont appliqué cette méthode afin d'étudier le cas des topographies axisymétriques. Harmsen et Harding [1981] ont aussi utilisé cette technique pour examiner l'effet de bassin. Cette méthode est théoriquement capable de modéliser des configurations complexes et le comportement non-linéaire du sol, mais la taille du problème augmente très vite avec la complexité du problème considéré, ainsi le volume de calcul dépasse facilement la capacité de calcul des ordinateurs courants.

Méthode numérique assez universelle, la méthode des éléments finis a aussi été employée pour étudier des effets de site [Castellani et al., 1982], [Lysmer et Drake, 1972]. Elle est particulièrement adaptée pour des problèmes faisant intervenir des domaines à comportement inélastique, non-linéaire et hétérogène. Pourtant, elle rencontre des difficultés pour prendre en compte la radiation d'ondes vers l'infini dans les problèmes dynamiques faisant intervenir un domaine 'semi-)infini. Bien que différentes techniques de frontière absorbante [Ang et Newmark, 1971] ou d'éléments infinis [Zhao et Valliappan, 1993] soit proposées pour surmonter cette difficulté, cette méthode n'est pas couramment utilisée seule en dynamique des sols. Toutefois, sa combinaison avec d'autres méthodes est favorable : par exemple, sa combinaison avec la méthode de différences finies [Ohtsuki et Harumi, 1983] ou avec la méthode des éléments frontières [Mossesian et Dravinski, 1992].

### **Méthodes numériques traitées 'sur la frontière'**

À l'opposé des méthodes mentionnées précédemment, la discrétisation de ces méthodes n'est réalisée que sur la frontière, et non dans tout le domaine d'étude. Leurs avantages essentiels consistent dans la réduction d'une dimension du problème considéré (3D à 2D, 2D à 1D) et l'absence des frontières artificielles simulant un domaine (semi-)infini. C'est pour cette raison que ces méthodes sont bien appropriées aux calculs de propagation d'ondes dans les milieux ouverts. Par conséquent, elles sont en constant développement ces dernières

années.

En général, on peut classer ces méthodes en deux groupes principaux : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Beaucoup d'études ont été effectuées en utilisant des méthodes directes, parmi lesquelles on peut citer le travail de Wong et Jennings [1975] pour le cas d'une vallée de forme arbitraire, l'étude de Reinoso et al. [1994] et de Shinozaki et Yoshida [1992] pour la réponse 2D et 3D d'un bassin sédimentaire. Les méthodes indirectes, quant à elles, ont été appliquées dans les travaux de Sanchez-Sesma et Campillo [1993], Sanchez-Sesma et al. [1993], Pederson et al. [1995].

Les méthodes des éléments frontières rencontrent des difficultés pour tenir compte de la non-linéarité et de l'inélasticité du comportement du sol. Pour surmonter ces difficultés, une possibilité est de les coupler avec la méthode des éléments finis. Cette méthode hybride a été appliquée avec succès par Mossesian & Dravinski [1992], Gatmiri et Kamalian [2002]. L'autre type de difficulté des méthodes des éléments frontières concerne l'évaluation des intégrales fortement singulières ou hyper-singulières. Une possibilité pour résoudre ce problème est la combinaison avec la méthode de nombre d'ondes discrètes qui a été utilisée par Gaffet et Bouchon [1989], Campillo et Bouchon [1985], Kawase [1988], [Kawase et Aki, 1989]. Avec cette combinaison, la singularité des fonctions de Green n'existe pas dans les termes du développement en nombre d'ondes, d'où l'intégration le long de la frontière peut s'effectuer facilement et la convergence est aussi améliorée. Cette procédure cependant demande des ressources d'ordinateur considérable.

À part les méthodes présentées plus haut, il existe dans la littérature d'autres méthodes, telles que la méthode d'optique généralisée, la méthode de nombre d'ondes discrètes, etc. Une bibliographie assez complète des méthodes théoriques et numériques peut être trouvée dans [Sanchez-Sesma, 1987].

## 3.2 Effets de site topographiques : caractéristiques, causes et paramètres

### 3.2.1 Caractéristiques principales

Nous avons mentionné précédemment la nécessité des études expérimentales, mais la mise en œuvre des investigations expérimentales sur l'effet de site topographique bi- ou tri-dimensionnels dans des sites réels est actuellement limitée. Le nombre de ces investigations est si faible qu'il est difficile de réaliser une analyse statistique fiable à partir des données existantes. Par contre, de très nombreux cas d'école ont été étudiés par des méthodes numériques. Ces études ne correspondent généralement qu'à des cas simplifiés, voire idéalisés : configuration simple du relief ; comportement linéaire, élastique, isotrope, homogène du sol ; composition simple du signal sismique (SH, SV, P ou Rayleigh). Néanmoins, elles ont permis de dégager des tendances générales qui confirment certains résultats macrosismiques et expérimentaux observés en réalité. On peut résumer ici trois caractéristiques principales

de l'effet de site topographique :

1. dans le cas des collines et des pentes, on aperçoit systématiquement une amplification significative du mouvement en crête et une atténuation assez faible à la base. Par contre, dans le cas des vallées, le mouvement est souvent atténué à la base et légèrement amplifié aux bords. L'effet d'amplification (ou d'atténuation) est généralement plus intense pour les composantes horizontales que pour la composante verticale. C'est pour cette amplification que l'on a constaté des dégâts sévères d'immeubles situés sur les collines ou près du bord des pentes. La figure 3.6 illustre les cas d'une pente et d'une colline. On aperçoit clairement que le mouvement au sommet de la colline double, alors que celui à la base de la colline diminue deux fois par comparaison avec le mouvement du terrain sans relief. Néanmoins, la constatation ci-dessus n'est pas toujours théoriquement justifiée. Ainsi, une tentative de prévenir une amplification du mouvement aux reliefs convexes et une atténuation du mouvement aux reliefs concaves [Bard et Riepl-Thomas, 2000] nécessite une vérification consciencieuse.

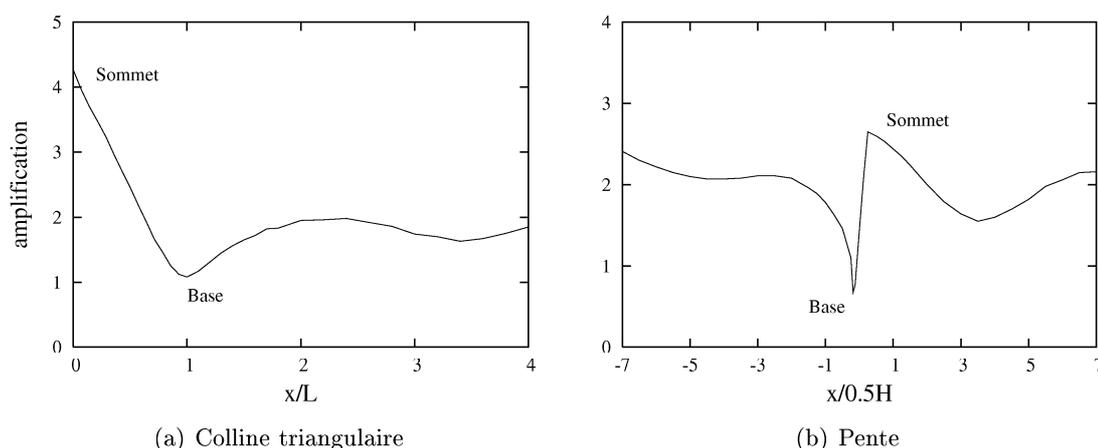


FIG. 3.6 – Coefficient d'amplification du mouvement en surface libre soumise à l'incidence verticale des ondes planes SV harmoniques. (a) Cas d'une colline triangulaire : demi-largeur  $L = 1$ , hauteur  $H = 1$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , vitesse de l'onde de cisaillement  $v_s = 1$ , fréquence adimensionnelle  $\eta = 2Lf/v_s = 0.5$ . (b) Cas d'une pente : hauteur  $H = 1$ , angle d'inclinaison  $\alpha = 75^\circ$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , vitesse de l'onde de cisaillement  $v_s = 1$ , fréquence adimensionnelle  $\eta = H/v_s = 0.25$

2. il apparaît des mouvements différentiels notables sur les pentes des reliefs. La figure 3.6 montre une forte variation de l'amplitude sur les pentes ; la phase de vibrations varie aussi beaucoup. Ces mouvements différentiels se produisent aussi sur la surface libre à proximité du relief. En comparaison avec le cas de l'espace semi-infini sans relief dont la réponse sismique est identique partout sur la surface libre, l'amplitude et la phase de la vibration d'un point d'observation sur la surface libre dans ce cas

dépendent de la distance relative de ce point au relief. Il pourrait donc y avoir un impact important sur la réponse dynamique des grands ouvrages comme les barrages, les ponts ou les oléoducs situés proche du relief.

3. la réponse du site dépend nettement du contenu fréquentiel de l'excitation. Cette influence se manifeste de manière différente suivant la position du point considéré (et pouvant aller jusqu'à l'atténuation totale). L'ampleur de cette influence est contrôlée par le rapport de la longueur d'onde à la dimension caractéristique du relief.

### 3.2.2 Phénomènes physiques principaux

Les causes des effets de site sont assez nombreuses. On peut les grouper en deux catégories principales. La première catégorie concerne la rupture du sol comme le glissement de terrain ou la liquéfaction. Ces phénomènes attirent beaucoup l'attention des ingénieurs et des scientifiques, car leurs conséquences sont, bien évidemment, très significatives. La deuxième catégorie est liée aux phénomènes de propagations d'ondes dans le sol (ou la roche). Ces phénomènes sont très fréquemment constatés dans la réalité ; ils sont des causes principales des effets de site et, en conséquence, ont un impact important sur la conception des constructions et des ouvrages. Dans ce travail, nous ne traitons que cette deuxième catégorie. En principe, il existe quatre phénomènes physiques principaux :

**Sensibilité du mouvement en surface du terrain à la direction des ondes incidentes** : cette sensibilité ne touche pas les ondes SH polarisées perpendiculairement au plan d'incidence, elle ne concerne que les ondes SV et P polarisées dans le plan d'incidence. Elle est particulièrement marquée pour les ondes SV à angle d'incidence autour de l'angle critique. En effet, si l'angle d'incidence de l'onde SV est égale à l'angle critique, l'onde P réfléchie se propage horizontalement ; au-delà de l'angle critique, l'onde P réfléchie devient l'onde de surface. Sur la figure 3.7, on constate que le coefficient d'amplification atteint une valeur d'environ de 5 pour une bande étroite de l'angle d'incidence ( $1^\circ$ ). On note que cette sensibilité est indépendante de la fréquence.

**Focalisation des ondes à l'intérieur d'un relief convexe** : ce phénomène peut être illustré par l'exemple très simple [Sanchez-Sesma, 1990] d'une colline triangulaire symétrique soumise à l'excitation de l'onde SH à propagation verticale (figure 3.8). Si l'angle  $\alpha$  au sommet de la colline est égal à  $2\pi/n$ , un point quelconque à l'intérieur de la colline voit passer  $n$  ondes différentes (onde incidente plus  $n - 1$  ondes réfléchies). Comme ces ondes sont en phase à la crête de la colline, l'amplitude du mouvement en point doit être  $n$  fois plus grand que celle de l'onde incidente. Dans cet exemple, l'amplitude du mouvement à la crête de la colline est indépendante de la fréquence, tandis que le mouvement des autres points est fonction de la fréquence. Cette dépendance se manifeste de manière différente suivant la position du point considéré et elle est contrôlée par le rapport de la longueur d'onde à la dimension caractéristique du site.

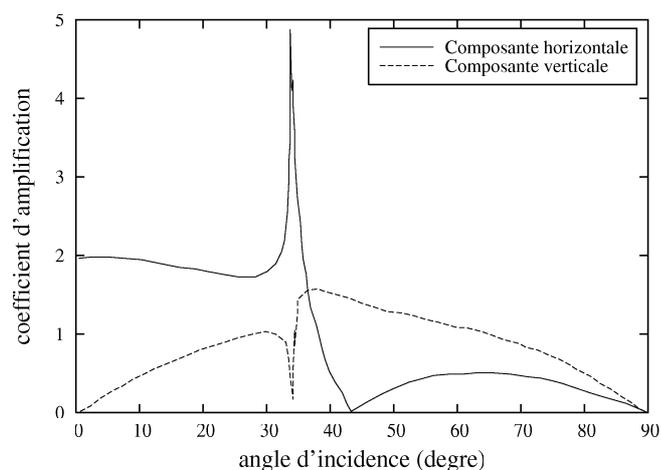


FIG. 3.7 – Amplitudes normalisées du mouvement en surface libre à l'excitation des ondes SV en fonction de l'angle d'incidence (coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$ ) (d'après [Aki, 1988])

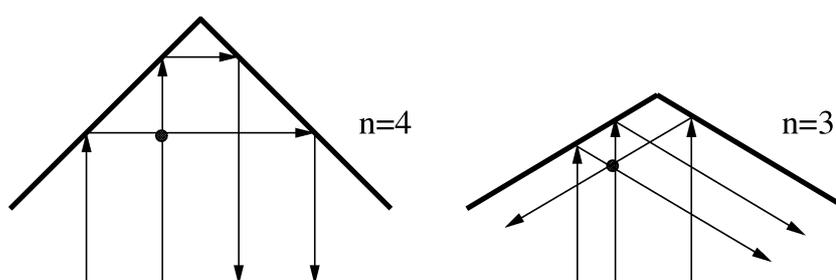


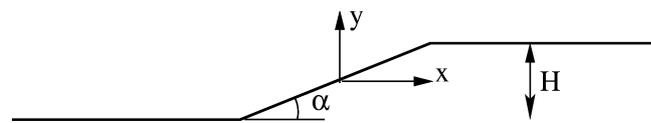
FIG. 3.8 – Réponse des collines triangulaires aux ondes SH incidentes à propagation verticale. Illustrations pour  $n = 3$  et  $n = 4$  (angle au sommet de la colline égal à  $2\pi/n$ ) (d'après [Sanchez-Sesma, 1985])

**Diffraction des ondes de volume et la naissance des ondes de surface** : la diffraction apparaît toujours sauf si la dimension du relief est trop petite par rapport à la longueur d'onde incidente. L'onde diffractée se produit au point singulier du relief (aux bords, au sommet ou à la base). Si l'onde incidente est l'onde SH dont la polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence, l'onde diffractée est aussi de type SH. Dans le cas d'incidence de l'onde P ou de l'onde SV, l'onde diffractée contient non seulement l'onde P ou l'onde SV mais aussi l'onde de surface de Rayleigh. La naissance de l'onde de Rayleigh est bien illustrée sur les figures 3.9 et 3.10. Dans le cas de la pente (figure 3.9), les ondes de Rayleigh sont générées aux coins inférieur et supérieur de la pente ; elles se propagent le long de la surface de la pente et vers les surfaces libres à gauche et à droite de la pente. Il est cependant difficile de distinguer sur la surface supérieure l'onde de surface de l'onde SV réfléchi sur la pente. Dans le cas de la vallée (figure 3.10), les ondes diffractées sont engendrées à la base et aux bords de la vallée ; elles se propagent le long de la pente à l'intérieur

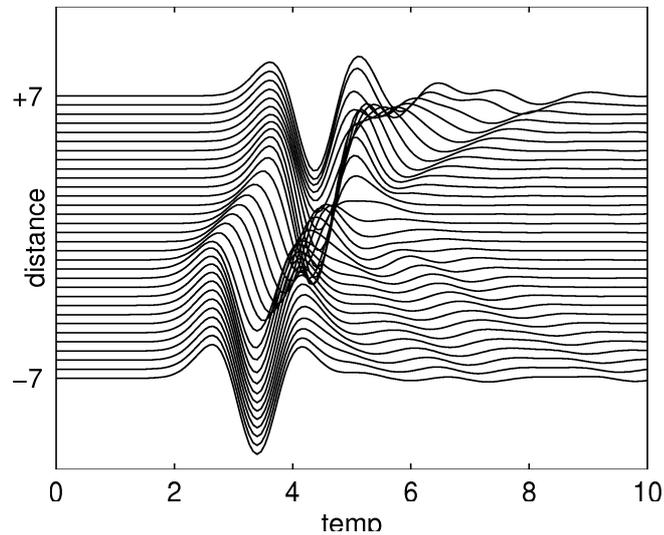
de la vallée et vers les surfaces libres à l'extérieur de la vallée. La propagation de ces ondes diffractées à l'intérieur de la vallée est le mouvement principal observé après l'arrivée de l'onde incidente. Dans ce cas, on peut détecter séparément l'arrivée de l'onde SV réfléchie sur la pente de la vallée et l'arrivée des ondes diffractées. De manière similaire, les ondes diffractées se produisent au sommet et aux bords dans le cas de la colline. L'apparition des ondes diffractées provoque un mouvement différentiel important sur la pente des reliefs.

**Interférence de différents types d'ondes** : le mouvement d'un point sur la surface libre est excité non seulement par l'onde incidente mais aussi par d'autres ondes différentes qui viennent par différents chemins (phénomène dit '*scattering*' en anglais). Dans le cas de l'onde SH incidente, il n'existe que 3 types d'ondes : l'onde SH incidente, l'onde SH réfléchie et l'onde SH diffractée. L'interaction de ces ondes est assez complexe. Dans le cas de l'onde SV ou de l'onde P, la situation devient plus complexe : comme il existe la conversion d'énergie entre l'onde P et l'onde SV, les ondes réfléchies se composent de l'onde P, de l'onde SV et éventuellement de l'onde de surface si l'onde incidente est l'onde SV ; les ondes diffractées, à leur tour, contiennent l'onde P, l'onde SV et l'onde de Rayleigh. L'interférence de ces différentes ondes est complexe et l'effet de site topographique dans le cas des ondes P, SV est évidemment plus accentué que celui dans le cas de l'onde SH. Certainement, la conséquence directe de l'interférence des ondes est la dépendance en fréquence de l'excitation du mouvement en surface et l'existence du mouvement différentiel, non seulement à l'intérieur du relief mais aussi sur la surface libre à proximité du relief.

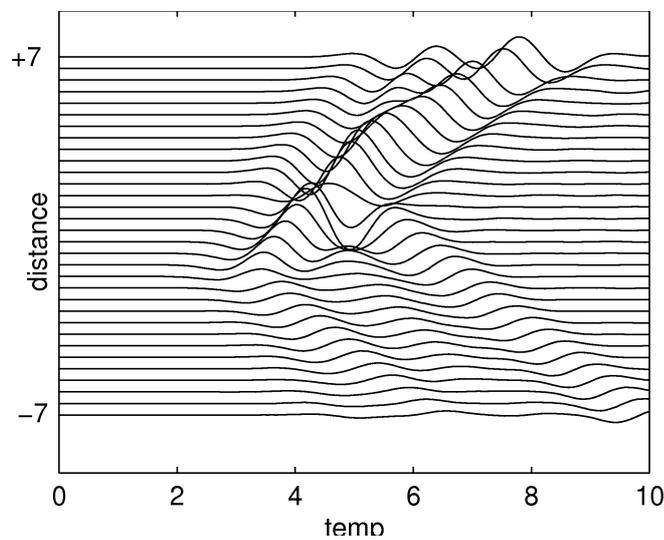
Les quatre phénomènes présentés ci-dessus sont des causes principales de l'effet de site topographique. Cependant, il faut garder à l'esprit qu'il est couramment constaté des écarts importants entre les observations expérimentales et les résultats obtenus au moyen de modèles théoriques. Ces écarts sont parfois grands : certains enregistrements mettent en évidence des coefficients d'amplification 3 à 4 fois plus grand que ceux calculés. Un exemple typique est le cas du site de Cedar Hill Nursery à Tarzana au nord de l'agglomération de Los Angeles : ce site a montré, lors du séisme de Northridge en 1994, un enregistrement de l'accélération énorme atteignant 1.8 g sur une des composantes horizontales, c'est-à-dire 2 à 4 fois plus grand que le mouvement d'autres sites au voisinage ; or ce phénomène d'amplification spectaculaire n'avait pas été observé lors des séismes Big Bear et Landers en 1992. On peut alors se demander s'il n'y a pas d'autres causes que celles mentionnées ci-avant. La question est encore ouverte. En conséquence, pour une meilleure compréhension des phénomènes impliqués dans l'effet de site topographique, des investigations expérimentales in-situ avec une densité forte de mesures et une reconnaissance géotechnique détaillée seront indispensables.



(a) Géométrie de la pente



(b) Déplacement horizontal



(c) Déplacement vertical

FIG. 3.9 – Réponse en domaine temporel d'une pente aux ondes SV incidentes à propagation verticale. Hauteur de la pente  $H = 2$ , angle d'inclinaison  $\alpha = 30^\circ$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , vitesse de l'onde de cisaillement  $v_s = 1$ , signal incident de type Ricker (fréquence centrale adimensionnelle  $\eta = Hf/v_s = 2$ ). Le mouvement en surface est calculé en des points équidistants entre  $x/0.5H = -7$  et  $x/0.5H = +7$ . Il est supposé que  $H/v_s = 1s$  pour l'échelle de temps.

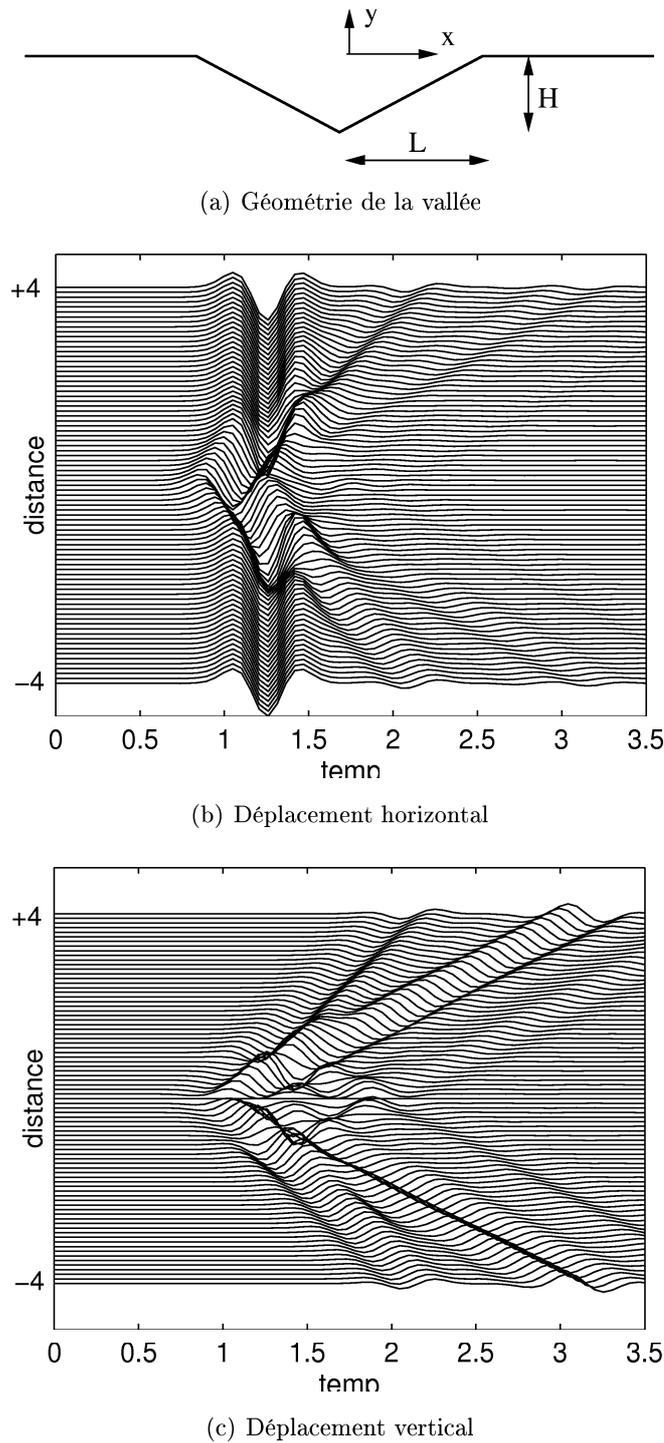


FIG. 3.10 – Réponse en domaine temporel d'une vallée triangulaire aux ondes SV incidentes à propagation verticale. Demi-largeur de la vallée  $L = 1$ , profondeur  $H = 0.4$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , vitesse de l'onde de cisaillement  $v_s = 1$ , signal incident de type Ricker (fréquence centrale adimensionnelle  $\eta = 2Lf/v_s = 2$ ). Le mouvement en surface est calculé en des points équidistants entre  $x/L = -4$  et  $x/L = +4$ . Il est supposé que  $2L/v_s = 1s$  pour l'échelle de temps.

### 3.2.3 Paramètres principaux

Le nom même d'effet de site laisse entendre que des modifications constatées dans les mouvements sont dues uniquement aux conditions locales du site. En réalité d'autres causes liées aux caractéristiques du champ d'onde incidente peuvent aussi jouer leur rôle. Dans le cas d'un effet de site dû à la condition topographique locale, on distingue différents facteurs principaux qui influence la réponse sismique du site. Ces facteurs concernent le champ d'ondes incidentes (type d'onde, direction, contenu fréquentiel), les conditions géotechniques du site et le relief lui-même.

**Type d'onde incidente** : on distingue généralement deux types d'ondes : les ondes de volume (onde longitudinale P et ondes transversales SV, SH) et les ondes de surface (Rayleigh ou Love). Les ondes de volume, émises par la libération de l'énergie sur le plan de faille, se propagent dans la croûte terrestre ; quand ces ondes atteignent la surface, une partie de leur énergie peut être convertie en ondes de surface (figure 3.11). La vibration en surface est essentiellement provoquée par des ondes transversales, dont l'amplitude est nettement supérieure à celle de l'onde longitudinale, et par des ondes de surface. Plus on s'éloigne de l'épicentre, plus la prépondérance des ondes de surface s'accroît en raison de la faible atténuation géométrique de ces ondes (décroissance en  $1/\sqrt{R}$ ,  $R$  étant la distance épacentrale, au lieu de  $1/R$  pour les ondes de volume). Ainsi, le champ d'onde incidente arrivent à la surface est une combinaison souvent très complexe de différents types d'onde. Néanmoins, pour évaluer clairement l'importance de chaque type d'onde, il est préférable de les examiner séparément.

L'étude de l'effet de l'onde SH est le cas le plus simple car le mouvement anti-plan produit par cette onde est découplé de celui provoqué par les autres ondes ; dans certains contextes simples, des solutions analytiques exactes existent. Beaucoup d'études analytiques et numériques ont été menées et nous avons jusqu'à présent une connaissance assez approfondie de l'effet de site topographique provoqué par des ondes SH. Par contre, le cas des ondes SV et P est plus compliqué car les mouvements produits par ces deux ondes sont couplés et il existe des modes de conversion d'énergie entre ces deux ondes et avec des ondes de surface. Dans ces cas, aucune solution analytique n'existe. Parmi ces deux types d'ondes, l'étude de l'effet de l'onde P est théoriquement intéressante mais elle est peu importante du point de vue pratique du fait de la faible amplitude de l'onde P comparée à celle de l'onde SV. Ainsi, nous avons choisi d'étudier l'effet de site topographique sous l'action de l'onde SV. L'étude de l'effet de l'onde Rayleigh est intéressante et importante ; elle n'est cependant pas abordé dans ce travail, mais devrait faire l'objet des études ultérieures.

**Direction de propagation de l'onde incidente** : l'angle d'incidence de l'onde sismique peut être quelconque, mais en pratique l'hypothèse de la verticalité de la direction de l'onde incidente est habituellement acceptée. Dans la majorité des cas, cette hypothèse est raisonnable. En effet, quand la rigidité des couches de sol augmente avec la profondeur, ce

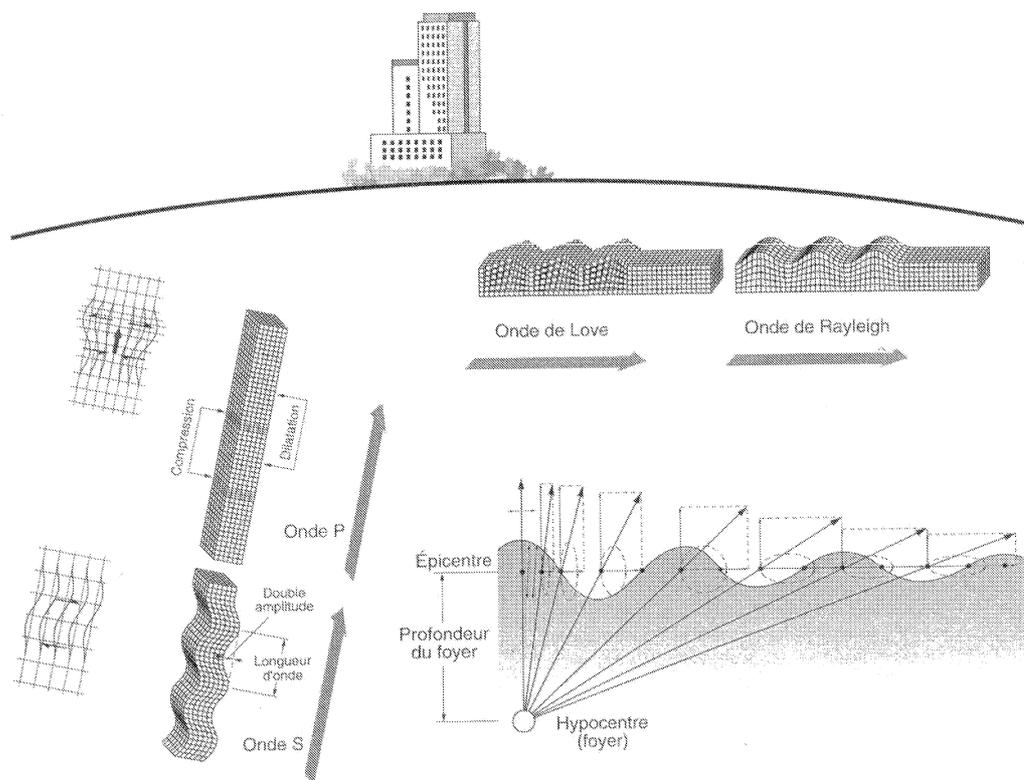


FIG. 3.11 – Principales ondes sismiques (extrait de [Davidovici, 1999])

qui est souvent le cas, les rais sismiques se 'redressent' en s'approchant de la surface qu'ils atteignent sous une incidence presque verticale. Dans ce qui suit, nous n'examinons donc que des ondes à propagation verticale.

**Caractéristiques mécaniques du sol** parmi lesquels la vitesse des ondes transversales  $v_s$  est la valeur la plus importante : dans les calculs parasismiques ou sismologiques, le sol est couramment supposé élastique linéaire. Cette hypothèse est, en général, suffisante pour déterminer les caractéristiques les plus importantes de la réponse sismique, pour les niveaux courants de l'excitation sismique, où le niveau des déformations du sol pendant les séismes reste modeste. En réalité, l'application de cette hypothèse aux calculs quantitatifs des phénomènes sismiques connaît un grand succès. Bien évidemment, il faut tenir compte du comportement non-linéaire et irréversible du sol dans les cas où le degré de la non-linéarité (ou plasticité) du comportement du sol n'est pas négligeable (sol très mou ou séisme de forte intensité). Dans les sections qui suivent, le sol est supposé homogène, isotrope et élastique linéaire.

**Dimension et la forme de l'irrégularité topographique** : nous considérons trois types principaux de topographie : les pentes, les vallées et les collines. La dimension d'une pente est caractérisée par sa hauteur  $H$  et l'angle d'inclinaison  $\alpha$ , alors que la dimension d'une vallée ou d'une colline est généralement déterminée par sa hauteur  $H$  (pour une colline) ou sa profondeur  $H$  (pour une vallée) et sa demi-largeur  $L$ . La forme d'une vallée (ou d'une colline) peut être diverse, mais on peut distinguer des configurations de base : triangle, trapèze (rectangle), demi-ellipse (demi-cercle).

**Contenu fréquentiel et particulièrement la fréquence prédominante du champ d'onde incidente** : un signal sismique est normalement multi-fréquentiel avec une gamme de fréquences significatives, qui s'étend de 0,5 Hz à 10 Hz dans la grande majorité des cas. Toutefois, pour mieux comprendre l'influence de la fréquence du signal d'excitation, nous considérons des signaux monochromes. Afin d'assurer la généralité de l'étude, une fréquence adimensionnelle, qui combine en même temps l'effet de la fréquence, de la dimension de la topographie et de la vitesse de propagation d'onde, est considérée. Pour les pentes, il s'agit de  $\eta = \frac{fH}{v_s} = \frac{H}{\lambda}$ , où  $f$  et  $\lambda$  sont la fréquence et la longueur de l'onde incidente,  $v_s$  est la vitesse de l'onde de cisaillement de l'espace semi-infini. Pour les vallées ou les collines,  $\eta = \frac{2fL}{v_s} = \frac{2L}{\lambda}$ . Ce paramètre présente physiquement le rapport entre la dimension effective de l'irrégularité et la longueur de l'onde incidente. La valeur  $\eta = 1$  correspond au cas où la longueur de l'onde incidente est comparable à la dimension caractéristique du relief.

Dans les sections suivantes, nous effectuerons une étude paramétrique portant sur l'effet de site topographique des pentes, des vallées et des collines soumises à l'excitation des ondes SV harmoniques à propagation verticale. Les problèmes traités sont bidimensionnels, c'est-à-dire que la longueur du relief est importante par rapport aux deux autres dimensions. Pour ne pas perdre de généralité, toutes les quantités sont sans dimension.

### 3.3 Effets de site topographiques des pentes

Dans cette section, nous examinons la modification de la réponse sismique d'un site par une pente. L'influence de la fréquence adimensionnelle et de l'angle d'inclinaison de la pente sur l'amplitude du mouvement en surface sera étudiée.

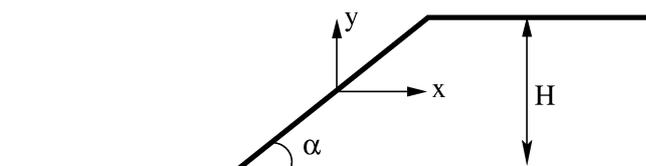


FIG. 3.12 – Géométrie et dimensions de la pente.

### 3.3.1 Influence de la fréquence adimensionnelle

Nous considérons une pente d'angle d'inclinaison  $\alpha = 45^\circ$ . Sur la figure 3.13 est présentée la variation spatiale en domaine fréquentiel du coefficient d'amplification le long de la surface libre. Dans cette figure, toutes les distances sont normalisées par la demi-hauteur de la pente  $0.5H$  : la pente elle-même se trouve dans l'intervalle défini par  $|x/0.5H| \leq 1$ , son inverse  $|x/0.5H| \geq 1$  correspond aux surfaces libres horizontales. Le coefficient d'amplification est l'amplitude spectrale de vibration normalisée par l'amplitude de l'onde incidente. Notons que dans le cas de l'espace semi-infini à surface horizontale, ce coefficient d'amplification est égal à 2 pour la composante horizontale et nul pour la composante verticale sur toute la surface libre, quelle que soit la fréquence du signal incident. Avec la présence de la pente, comme montré sur la figure 3.13, l'amplitude du mouvement sur la pente et au voisinage de celle-ci est significativement modifiée. La réponse du site n'est plus homogène, le mouvement d'un point étant fonction de sa position relative à la pente. Cette modification dépend fortement de la fréquence du signal sismique ; autrement dit, elle dépend du rapport entre la longueur d'onde incidente à la dimension de la pente. Quelques remarques peuvent être en tirées.

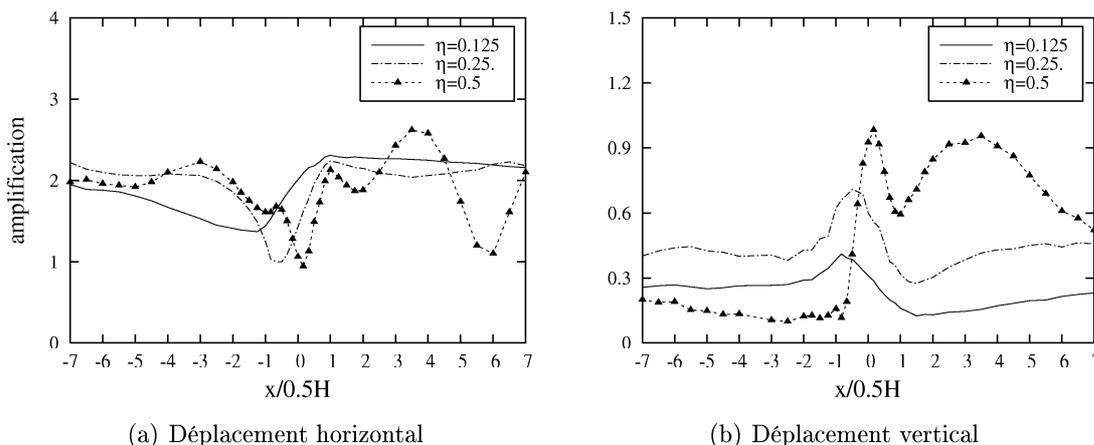


FIG. 3.13 – Coefficient d'amplification le long de la surface libre d'une pente soumise à l'excitation des ondes incidentes SV harmoniques à propagation verticale pour différentes fréquences adimensionnelles  $\eta = Hf/v_s$ . Angle d'inclinaison  $\alpha = 45^\circ$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

**Cas des basses fréquences ( $\eta = 0.125$ )** : nous visons d'abord la composante horizontale du mouvement. Le mouvement est amplifié au sommet et atténué à la base de la pente. L'amplitude du mouvement atteint sa valeur maximale  $u_{xmax} = 2.31$  au sommet et la valeur minimale  $u_{xmin} = 1.37$  à la base de la pente. La variation de l'amplitude sur la pente est donc notable. Sur la surface plane supérieure, l'amplitude diminue graduellement jusqu'à la valeur de 2 en s'éloignant la pente. Sur la surface plane inférieure, l'amplitude augmente progressivement en s'éloignant la pente ; elle tend aussi vers la valeur de 2 loin de

la pente. Ainsi, à une distance suffisamment grande de la pente, la réponse sismique du site se rapproche de celle de l'espace semi-infini. En ce qui concerne la composante verticale, la valeur de pic du déplacement se produit sur la pente :  $u_{ymax} = 0.41$ , ce qui est une valeur non négligeable.

**Cas des hautes fréquences ( $\eta = 0.25$  et  $0.5$ )** : l'allure des courbes de spectre de mouvement devient beaucoup compliquée, comparée avec celle du cas des basses fréquences : Le point dont l'amplitude du mouvement horizontal est minimale ne se trouve plus à la base, mais sur la pente. Il semble que ce point s'écarte de la base de la pente, lorsque la fréquence de l'excitation augmente. De même, la valeur de pic de l'amplitude du mouvement horizontal ne se trouve pas forcément au sommet de la pente, mais ailleurs. En outre, l'effet d'amplification ou d'atténuation du mouvement est plus prononcé dans ces cas. Par exemple,  $u_{xmax} = 2.62$  et  $u_{xmin} = 0.94$  pour le cas  $\eta = 0.5$ , comparé à  $u_{xmax} = 2.31$  et  $u_{xmin} = 1.37$  du cas  $\eta = 0.125$ . Sur les surfaces planes, la variation spatiale de l'amplitude du mouvement est forte, en particulier sur la surface supérieure où il existe une interférence des ondes de surface et des ondes réfléchies. Il est impossible à détecter dans l'intervalle considéré  $x/0.5H \in [-7, +7]$  le point où le mouvement du site s'approche de celui de l'espace semi-infini ; ce point doit alors se situer très loin de la pente. En ce qui concerne la composante verticale, l'amplitude du mouvement croît avec l'augmentation de la fréquence. Le pic se trouve toujours sur la pente, mais il se décale un peu vers le sommet. Ce pic atteint la valeur  $u_{ymax} = 0.98$ , de même ordre que la composante horizontale.

En bref, l'influence de la fréquence de l'excitation est évidente et importante. La différence des réponses basse fréquence et haute fréquence est conditionnée par le rapport entre la longueur d'onde incidente et la dimension du relief. En effet, quand la fréquence du signal incident est petite, sa longueur d'onde est grande par rapport à la dimension du relief, le phénomène de diffraction d'ondes est moins marqué et, en conséquence, l'impact de la topographie sur le mouvement du site est moins important. D'autres simulations, avec des fréquences adimensionnelles plus petites ( $\eta < 0.125$ ), montrent que plus la fréquence est petite, plus le mouvement du site s'approche de celui de l'espace semi-infini. En revanche, lorsque la fréquence augmente, la longueur des ondes incidentes est du même ordre que la dimension du relief ; la diffraction des ondes est donc plus marquée.

Cependant, il est nécessaire de signaler que la dépendance en fréquence est moins marquée en domaine temporel qu'en domaine fréquentiel. La figure 3.15 présente la comparaison entre la réponse du site à un signal de type Ricker d'ordre 2 (figure 3.14) avec celle à un signal harmonique (la fréquence centrale du signal multi-fréquentiel est la même que la fréquence du signal monochrome  $\eta_c = \eta = 2$ ). Pour le cas du signal temporel réel, on observe : l'effet d'amplification ou d'atténuation est allégé ; la variation spatiale de l'amplitude est plus douce ; le point où le mouvement du site s'approche de celui de l'espace semi-infini est détectable dans l'intervalle considéré. Cette différence est due au caractère multi-fréquentiel du signal réel : l'effet des fréquences basses compense l'effet des fréquences

hautes.

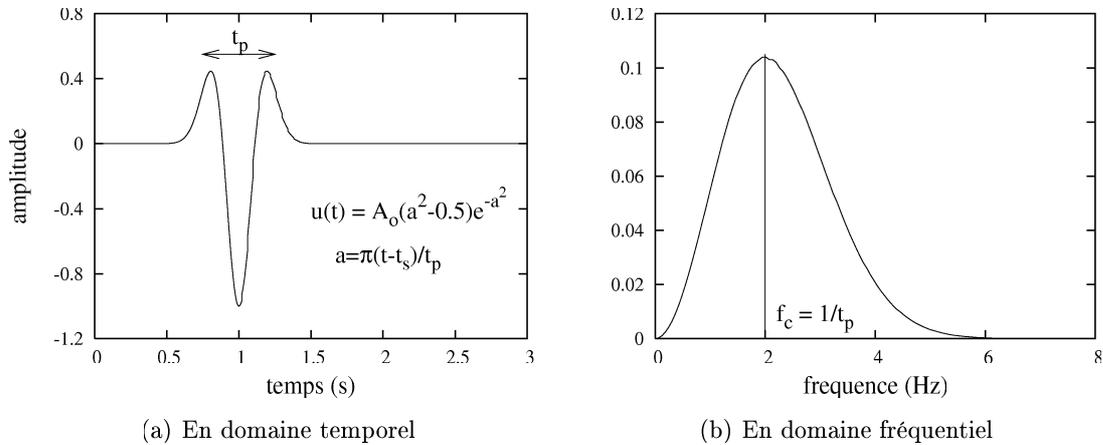


FIG. 3.14 – Définition d'un signal de Ricker d'ordre 2 ( $t_s = 1s, t_p = 0.5s$ )

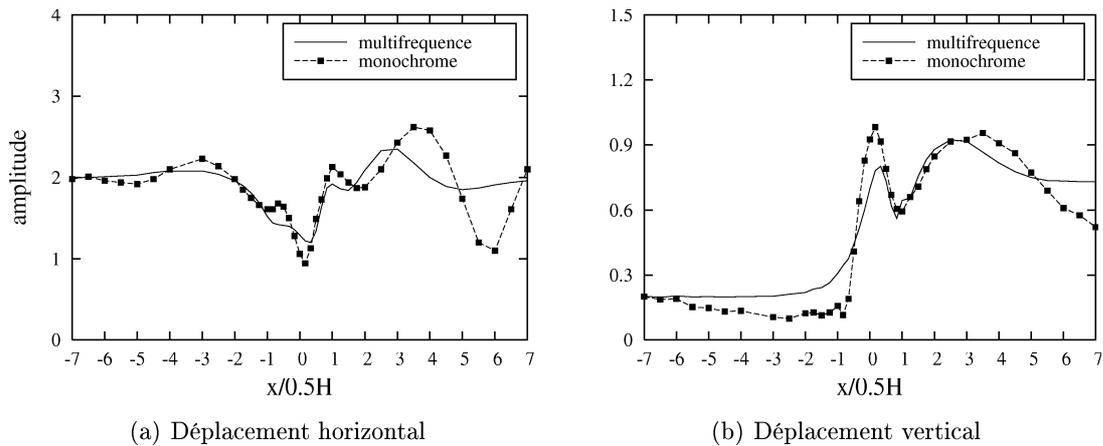


FIG. 3.15 – Amplitudes normalisées du mouvement en surface libre d'une pente soumise à l'excitation des ondes incidentes SV à propagation verticale. La fréquence centrale adimensionnelle du signal multi-fréquentiel de type Ricker est la même que la fréquence adimensionnelle du signal harmonique  $\eta = Hf/v_s = 0.5$ . Angle d'inclinaison  $\alpha = 45^\circ$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

La dépendance en fréquence de la réponse du site est complexe, mais on peut tirer quelques conclusions générales : dans la zone au voisinage de la base de la pente, le mouvement est atténué ; le mouvement dans la zone au voisinage du sommet est amplifié. Plus la fréquence est élevée, plus le mouvement différentiel est accentué, plus la zone d'influence par la présence de la pente est étendue et plus la composante verticale du mouvement est importante.

### 3.3.2 Influence de l'angle d'inclinaison de la pente

L'influence de l'inclinaison de la pente est évaluée en maintenant les autres paramètres. La figure 3.16 illustre les spectres du mouvement en surface, dans le cas  $\eta = 0.25$ , avec trois différentes valeurs de l'angle d'inclinaison :  $\alpha = 30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $75^\circ$ . Il est montré que plus la pente est raide, plus l'effet d'amplification en haut et l'effet d'atténuation en bas de la pente sont accentués. Par exemple,  $u_{xmin} = 0.67$  et  $u_{xmax} = 2.65$  pour le cas  $\alpha = 75^\circ$  alors que  $u_{xmin} = 1.25$  et  $u_{xmax} = 2.33$  pour le cas  $\alpha = 30^\circ$ . De plus, sur les surfaces planes, en particulier la surface supérieure, le mouvement différentiel est plus aggravé si la pente est plus raide. Quant à la composante verticale, l'amplitude du mouvement croît avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison.

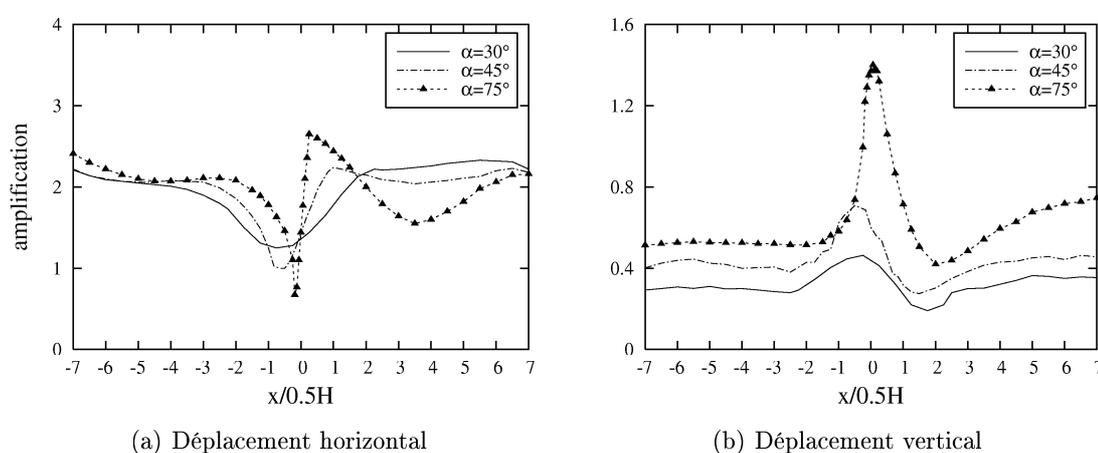


FIG. 3.16 – Coefficient d'amplification le long de la surface libre de pentes de différents angles d'inclinaison soumises à l'excitation des ondes incidentes SV harmoniques à propagation verticale. Coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , fréquence adimensionnelle  $\eta = Hf/v_s = 0.25$ .

La figure 3.17 présente des courbes similaires à ceux de la figure 3.16, mais avec une fréquence adimensionnelle plus élevée ( $\eta = 0.5$ ). Les résultats, dans ces deux cas, sont similaires, sinon que les effets sont plus importants pour le cas de haute fréquence. À titre d'exemple, pour le cas  $\alpha = 75^\circ$  :  $u_{xmin} = 0.42$ , ce qui présente une atténuation significative, et  $u_{ymax} = 1.88$ , qui est une valeur comparable à celle de la composante horizontale. Cette contestation est raisonnable, comme nous avons mentionné ci-avant l'influence de la fréquence.

L'inclinaison de la pente joue donc aussi un rôle important. En général, les pentes raides sont plus défavorables, car l'effet d'amplification et le mouvement différentiel sont plus importants dans ces cas. Au contraire, lorsque la pente est 'douce', l'influence de l'inclinaison de la pente est moins critique. Bien évidemment, si on diminue l'inclinaison de la pente jusqu'à  $0^\circ$ , la réponse du site tend vers celle de l'espace semi-infini.

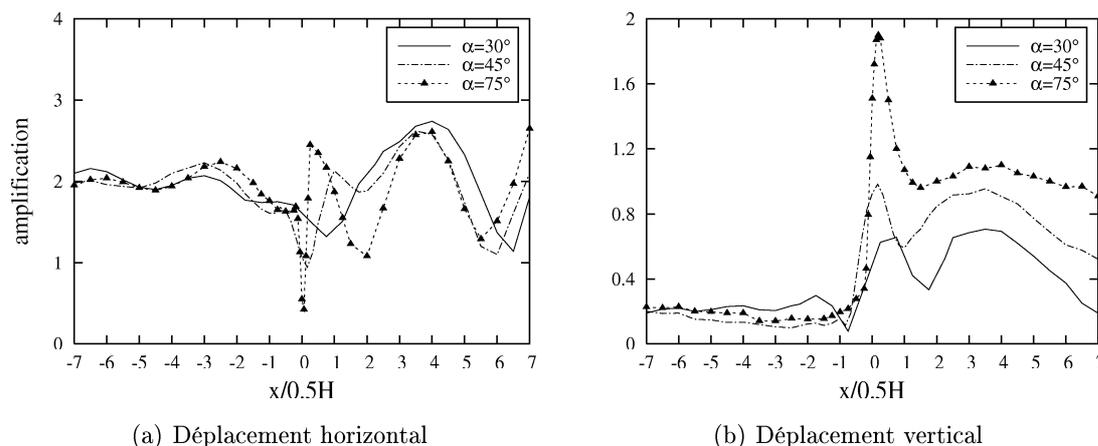


FIG. 3.17 – Coefficient d'amplification le long de la surface libre de pentes de différents angles d'inclinaison soumises à l'excitation des ondes incidentes SV harmoniques à propagation verticale. Coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , fréquence adimensionnelle  $\eta = Hf/v_s = 0.5$ .

### 3.4 Effets de site topographiques des vallées

L'effet de site provoqué par la présence d'une vallée dépend de trois paramètres principaux : la fréquence adimensionnelle, l'inclinaison et la forme de la vallée. L'influence de chaque paramètre sera étudiée dans cette section.

#### 3.4.1 Influence de la fréquence adimensionnelle

Nous considérons une vallée triangulaire, dont le rapport  $H/L = 0.4$ , soumise à l'incidence verticale des ondes SV de différentes fréquences adimensionnelles  $\eta = 0.5, 1., 1.5, 2.$  ( $\eta = 2Lf/v_s$ ). Parmi ces quatre fréquences adimensionnelles choisies, la valeur  $\eta = 0.5$  est considérée comme 'basse', car dans ce cas la dimension effective de la vallée (sa largeur) est inférieure à la longueur des ondes incidentes. En revanche, les valeurs  $\eta = 1, 1.5, 2$  sont considérées comme 'hautes', car la largeur de la vallée est supérieure ou égale à la longueur des ondes incidentes. Les courbes représentant la variation spatiale de l'amplitude spectrale normalisée du mouvement en surface sont dessinées sur la figure 3.18. Sur cette figure, toutes les distances sont normalisées par la demi-largeur de la vallée  $L$  : l'intervalle défini par  $|x/L| \leq 1$  illustre la partie à l'intérieur de la vallée et l'intervalle défini par  $|x/L| \geq 1$  correspond aux surfaces libres horizontales à l'extérieur de la vallée. Grâce à la symétrie de la vallée et à la verticalité de la direction de l'onde incidente, nous ne montrons que le résultat de la moitié droite. Quelques caractéristiques principales du mouvement de la vallée peuvent être tirées comme suit :

**En basse fréquence ( $\eta = 0.5$ )** : la courbe du spectre de mouvement est assez monotone. L'amplitude du mouvement horizontal est minimale à la base de la vallée ; elle augmente graduellement le long de la pente et atteint la valeur maximale aux bords. Ainsi,

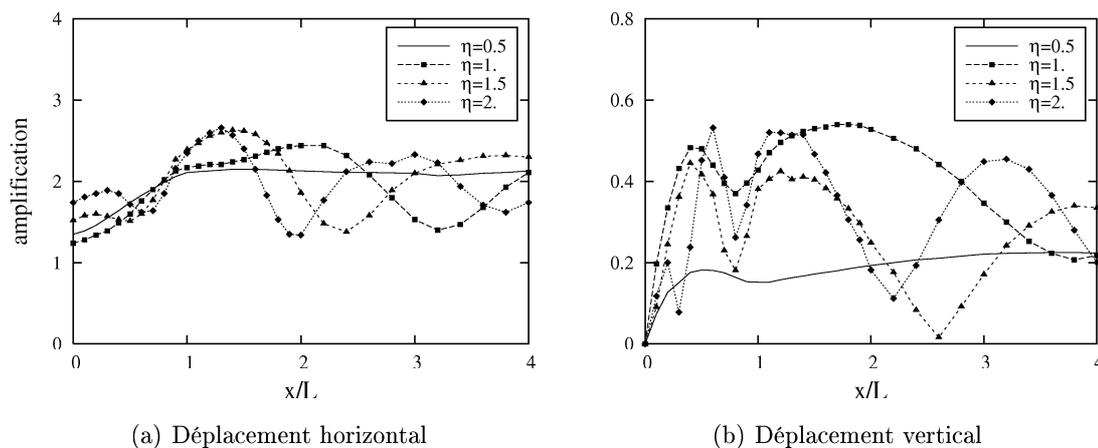


FIG. 3.18 – Coefficient d’amplification le long de la surface libre d’une vallée triangulaire soumise à l’excitation des ondes incidentes SV harmoniques à propagation verticale pour différentes fréquences adimensionnelles  $\eta = 2Lf/v_s$ . Demi-largeur de la vallée  $L = 1$ , profondeur  $H = 0.4$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

le mouvement est atténué à la base et légèrement amplifié aux bords de la vallée. Quant à la composante verticale, elle est nulle à la base de la vallée en raison de la symétrie du problème, elle est non nulle sur la pente de la vallée. Sur la surface libre à l’extérieur de la vallée, la valeur de l’amplitude varie faiblement pour les deux composantes.

**En haute fréquence ( $\eta = 1.0, 1.5, 2.0$ )** : la variation spatiale du coefficient d’amplification est forte ; l’allure des courbes représentant le spectre de mouvement est complexe. Sur ces courbes, il y a plusieurs pics et dépressions tant à l’intérieur de la vallée que sur la surface libre horizontale à l’extérieur. Ainsi, à l’extérieur de la vallée il existe successivement des zones dont le mouvement est amplifié et d’autres zones dont le mouvement est atténué. La répartition de ces pics ou ces dépressions est plus dense si on augmente la fréquence. Les positions des pics ou des dépressions du mouvement vertical ne sont pas nécessairement les mêmes que celles du mouvement horizontal. Par rapport au cas de basse fréquence, l’effet d’amplification est plus souligné. Cependant, la valeur maximale de l’amplitude spectrale, horizontale et aussi verticale, est assez comparable pour ces trois fréquences ; les points correspondants à leur valeur maximale se trouvent en différentes positions. Donc, si l’on continue à augmenter la fréquence, la valeur maximale du coefficient d’amplification ne change pas beaucoup, mais le spectre du mouvement devient plus complexe.

Ainsi, la fréquence a une influence importante sur l’effet de site des vallées. Si la fréquence est élevée, cette influence est significative et compliquée, surtout pour les cas où la longueur des ondes incidentes est comparable ou inférieure à la dimension de la vallée. En revanche, si la fréquence est tellement basse que la vallée peut être considérée comme un petit ‘obstacle’, son effet sur la réponse du site peut être négligé et le mouvement du site s’approche de celui de l’espace semi-infini. Cependant, comme le cas de la pente, nous in-

sistons sur le fait que la dépendance en fréquence est moins marquée en domaine temporel qu'en domaine fréquentiel, en raison du caractère multi-fréquentiel du signal temporel réel. La figure 3.19 confirme cette affirmation par la comparaison entre la réponse du site à un signal de type Ricker d'ordre 2 et celle à un signal harmonique (la fréquence centrale du signal multi-fréquentiel est la même que la fréquence du signal monochrome  $\eta_c = \eta = 2$ ).

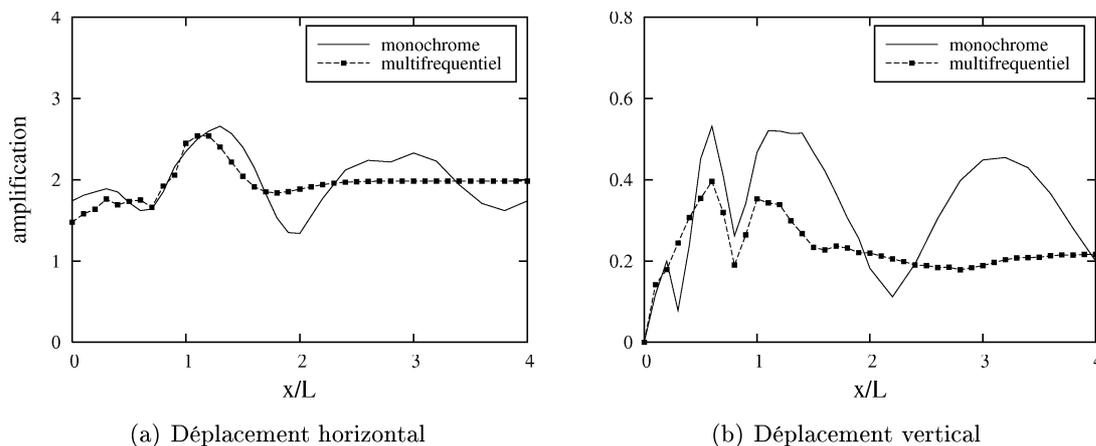


FIG. 3.19 – Amplitudes normalisées du mouvement en surface libre d'une vallée triangulaire soumise à l'excitation des ondes incidentes SV à propagation verticale. La fréquence centrale adimensionnelle du signal multi-fréquentiel de type Ricker est la même que la fréquence adimensionnelle du signal harmonique  $\eta = 2Lf/v_s = 2$ . Demi-largeur de la vallée  $L = 1$ , profondeur  $H = 0.4$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

### 3.4.2 Influence de l'inclinaison de la pente

L'influence de l'inclinaison de la pente est évaluée en faisant varier la profondeur et en maintenant la largeur de la vallée. Ainsi, plus la vallée est profonde, plus sa pente est raide. La figure 3.20 illustre les spectres de mouvement en surface, dans le cas de basse fréquence  $\eta = 0.5$ , d'une vallée triangulaire avec trois différentes profondeurs  $H/L = 0.2, 0.4$  et 1. Il est montré que plus la pente est raide, plus l'effet d'amplification aux bords et l'effet d'atténuation à la base de la vallée sont accentués. Par exemple,  $u_{xmin} = 1.68$  et  $u_{xmax} = 2.1$  pour la vallée peu profonde  $H/L = 0.2$  alors que  $u_{xmin} = 0.73$  et  $u_{xmax} = 2.56$  pour la vallée profonde  $H/L = 1$ , la différence est assez nette. L'écart important entre la valeur minimale à la base et la valeur maximale aux bords signifie aussi que le mouvement différentiel sur la pente de la vallée profonde est notable. En ce qui concerne la composante verticale, la différence entre la réponse de la vallée profonde et celle de la vallée peu profonde est vraiment importante :  $u_{ymax} = 0.91$  pour  $H/L = 1$  contre  $u_{ymax} = 0.22$  pour  $H/L = 0.4$  ou  $u_{ymax} = 0.11$  pour  $H/L = 0.2$ .

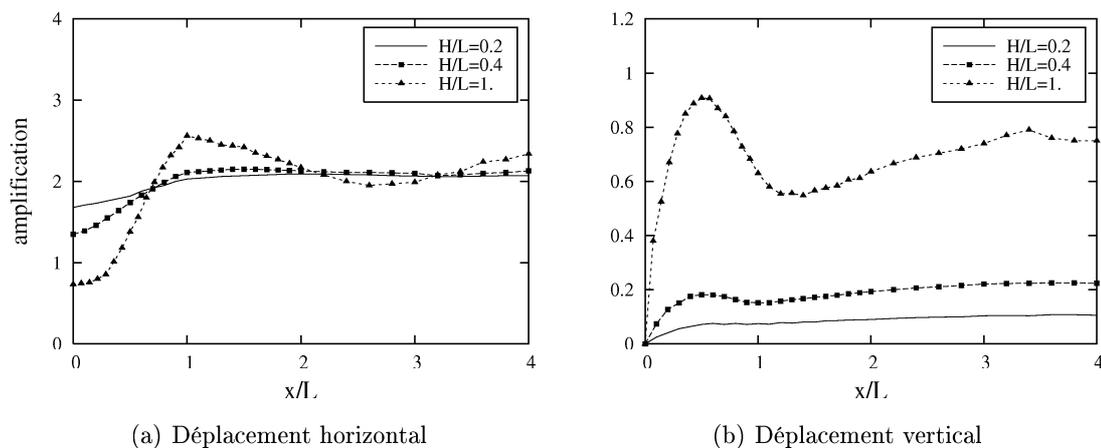


FIG. 3.20 – Coefficient d’amplification le long de la surface libre de vallées triangulaires de différentes profondeurs  $H$  soumises à l’excitation des ondes incidentes SV harmoniques à propagation verticale. Demi-largeur des vallées  $L = 1$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , fréquence adimensionnelle  $\eta = 2Lf/v_s = 0.5$ .

La figure 3.21 présente des courbes similaires à celles de la figure 3.20, mais dans le cas de haute fréquence  $\eta = 2$ . Comme la fréquence est haute, la réponse est très complexe, mais la tendance générale est similaire à celle du cas de basse fréquence : l’effet d’amplification et le mouvement différentiel sont plus significatifs pour la vallée profonde. En particulier, dans le cas  $H/L = 1$ , le mouvement aux bords de la vallée n’est pas amplifié, mais atténué.

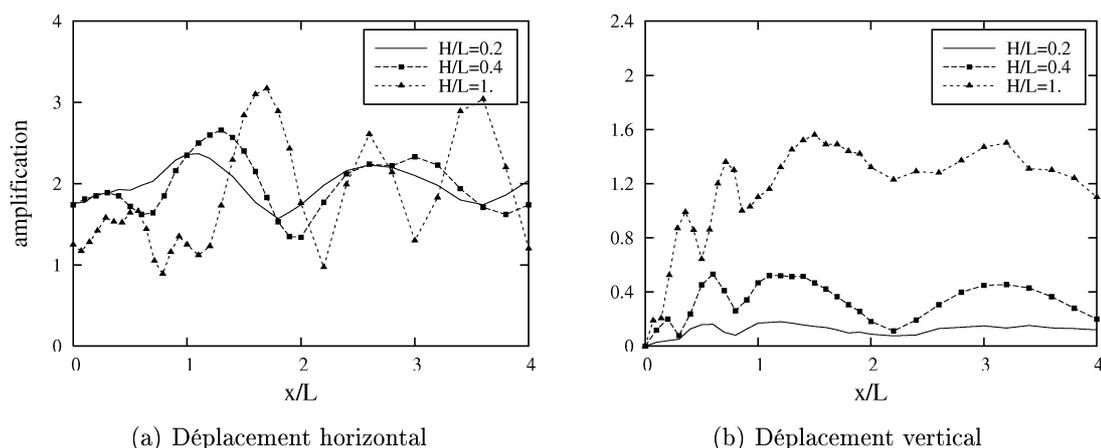


FIG. 3.21 – Coefficient d’amplification le long de la surface libre de vallées triangulaires de différentes profondeurs  $H$  soumises à l’excitation des ondes incidentes SV harmoniques à propagation verticale. Demi-largeur des vallées  $L = 1$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , fréquence adimensionnelle  $\eta = 2Lf/v_s = 2$ .

### 3.4.3 Influence de la forme de la vallée

Cette influence est évaluée en traitant des exemples avec des vallées de même dimensions, mais de différentes formes. La forme d'une vallée peut être diverse, mais on peut distinguer des configurations de base : triangle, trapèze, demi-ellipse (figure 3.22). Dans ce qui suit, nous distinguons des vallées peu profondes et des vallées profondes ; seuls les résultats en basse fréquence  $\eta = 0.5$  sont présentés.

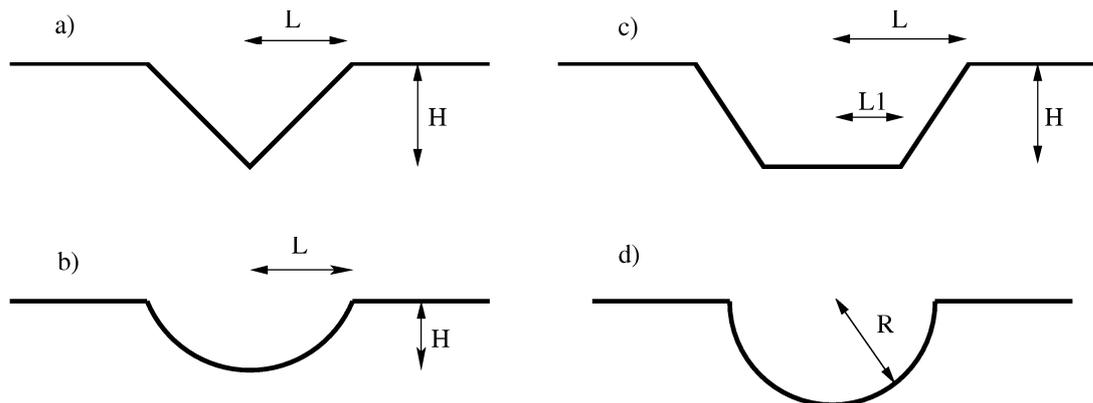


FIG. 3.22 – Géométrie et dimensions de différents types de vallées : (a) Vallée triangulaire, (b) Vallée demi-elliptique, (c) Vallée trapézoïdale, (d) Vallée demi-circulaire.

**Exemples avec des vallées peu profondes  $H/L = 0,4$**  : nous considérons une vallée triangulaire  $L1/L = 0$ , une vallée rectangulaire  $L1/L = 1$ , des vallées trapézoïdales avec  $L1/L = 0,2$  et  $L1/L = 0,6$  et une vallée demi-elliptique. Sur la figure 3.23 sont reportés les spectres du mouvement en basse fréquence ( $\eta = 0.5$ ) de ces vallées. Nous observons, quelle que soit la forme de la vallée, une atténuation de mouvement à la base et une amplification légère sur les bords. Cette observation convient aux résultats en basse fréquence présentés précédemment. Pour les vallées trapézoïdales et la vallée rectangulaire, l'amplitude du mouvement est assez constante sur la partie horizontale de la vallée ; cette amplitude augmente graduellement sur la pente de la base vers les bords. Une autre remarque importante est que plus l'inclinaison de la pente est élevée, plus l'amplification aux bords de la vallée est importante et plus le mouvement vertical devient significatif par rapport au mouvement horizontal. En fait, la vallée triangulaire est la moins critique et la vallée rectangulaire est la plus dangereuse. De plus, pour la vallée rectangulaire dont la pente est verticale, il existe un saut sur les courbes de spectre du mouvement, le changement d'amplitude en bas et en haut de la pente est donc brusque. Pour la vallée demi-elliptique, l'inclinaison de la pente n'est pas constante mais elle varie continûment. Son inclinaison 'moyenne' a une valeur intermédiaire et on trouve que sa courbe se trouve entre celles des cas extrêmes (triangulaire et rectangulaire).

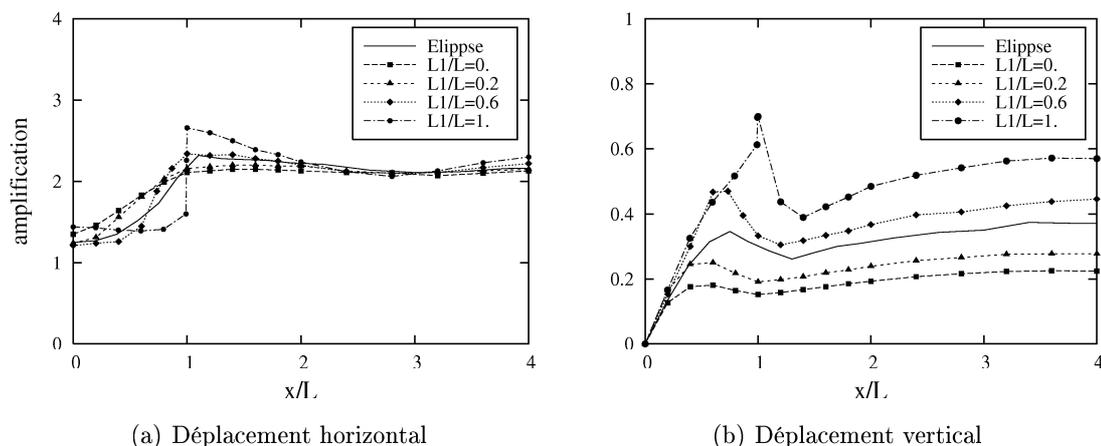


FIG. 3.23 – Coefficient d'amplification le long de la surface libre des vallées *peu profondes*  $H/L = 0.4$  soumises à l'excitation des ondes incidentes SV harmoniques à propagation verticale. Différentes formes sont étudiées : ellipse, triangle ( $L1/L = 0$ ), trapèze ( $L1/L = 0.2, 0.6$ ) et rectangle ( $L1/L = 1$ ). Demi-largeur des vallées  $L = 1$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , fréquence adimensionnelle  $\eta = 2Lf/v_s = 0.5$ .

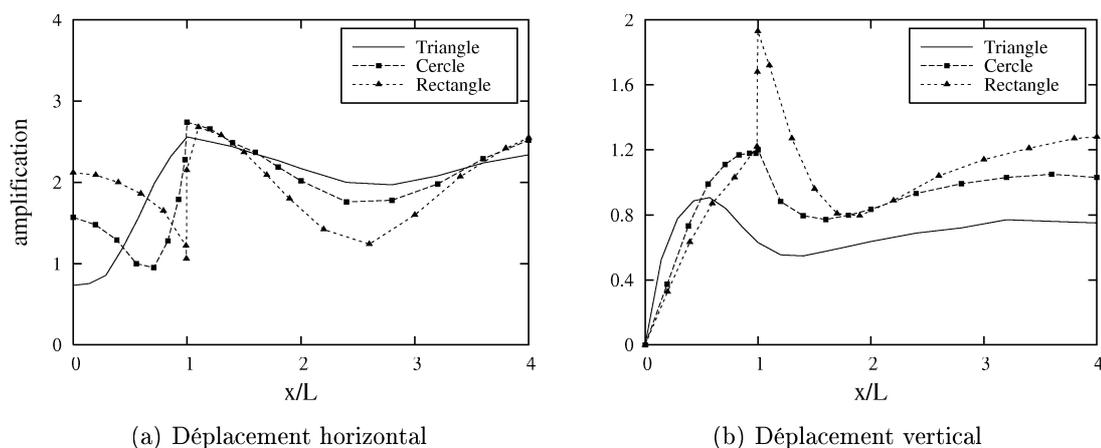


FIG. 3.24 – Coefficient d'amplification le long de la surface libre des vallées *profondes*  $H/L = 1$  soumises à l'excitation des ondes incidentes SV harmoniques à propagation verticale. Différentes formes sont à étudiées : demi-cercle, triangle et rectangle. Demi-largeur des vallées  $L = 1$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , fréquence adimensionnelle  $\eta = 2Lf/v_s = 0.5$ .

**Exemples avec des vallées profondes  $H/L = 0,4$**  : nous considérons une vallée triangulaire  $L1/L = 0$ , une vallée rectangulaire  $L1/L = 1$  et une vallée demi-circulaire. Les résultats sont montrés sur la figure 3.24. Nous découvrons que, sauf le cas de la vallée triangulaire, l'allure du spectre de mouvement horizontal à l'intérieur des vallées profondes est très différente de celle des vallées peu profondes. En effet, l'amplitude du mouvement

à la base de la vallée n'est plus un minimum, mais un maximum. En particulier, dans le cas de la vallée rectangulaire, le mouvement à la base est amplifié  $u_x = 2.12$ , ce qui est au contraire aux cas courants où le mouvement en ce point est souvent atténué. De plus, l'amplitude des points sur la surface horizontale de la vallée rectangulaire n'est plus semblable. Le mouvement de la vallée rectangulaire est le plus critique : l'effet d'amplification et le mouvement différentiel, dans ce cas, sont importants. Au contraire, le mouvement de la vallée triangulaire est toujours le moins critique.

En somme, la forme de la vallée peut modifier significativement sa réponse sismique. Cette influence, en général, se manifeste assez différemment selon la profondeur de la vallée. La vallée rectangulaire est la plus critique ; les autres formes de vallée, dont la pente 'moyenne' est moins raide, sont moins critiques.

### 3.5 Effets de site topographiques des collines

Pour estimer l'effet de site des collines, nous avons traité les mêmes exemples que pour le cas des vallées. Les trois paramètres principaux (fréquence adimensionnelle, inclinaison et forme de la colline) ont été successivement étudiés. L'influence de la fréquence adimensionnelle, de l'inclinaison, de la forme sont respectivement illustrées sur les figures 3.25, 3.26 et 3.27.

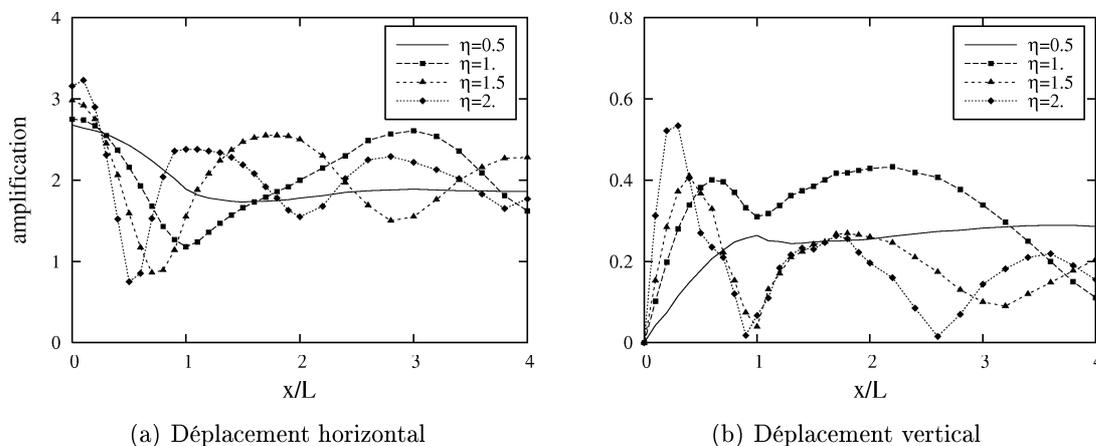


FIG. 3.25 – Coefficient d'amplification le long de la surface libre d'une colline triangulaire soumise à l'excitation des ondes incidentes SV harmoniques à propagation verticale pour différentes fréquences adimensionnelles  $\eta = 2Lf/v_s$ . Demi-largeur de la colline  $L = 1$ , hauteur  $H = 0.4$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

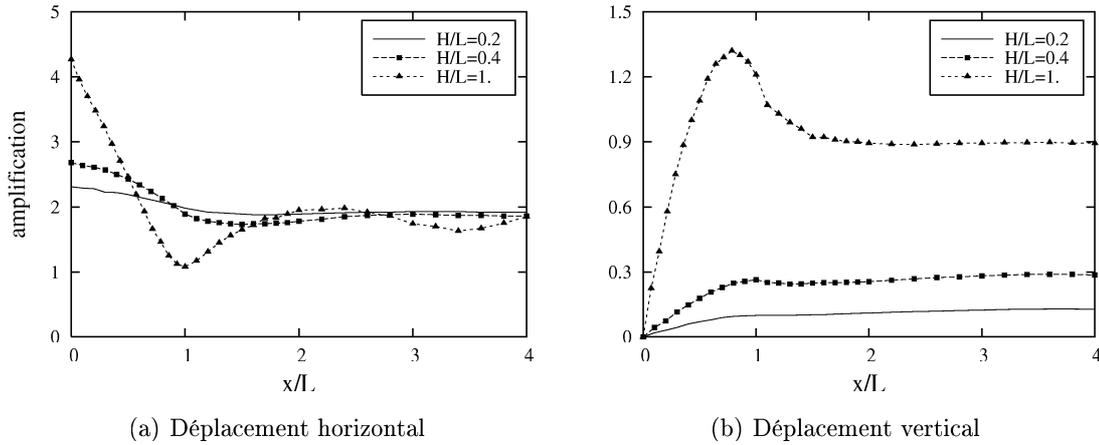


FIG. 3.26 – Coefficient d'amplification le long de la surface libre des collines triangulaires de différentes hauteurs  $H$  soumises à l'excitation des ondes incidentes SV harmoniques à propagation verticale. Demi-largeur des collines  $L = 1$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , fréquence adimensionnelle  $\eta = 2Lf/v_s = 0.5$ .

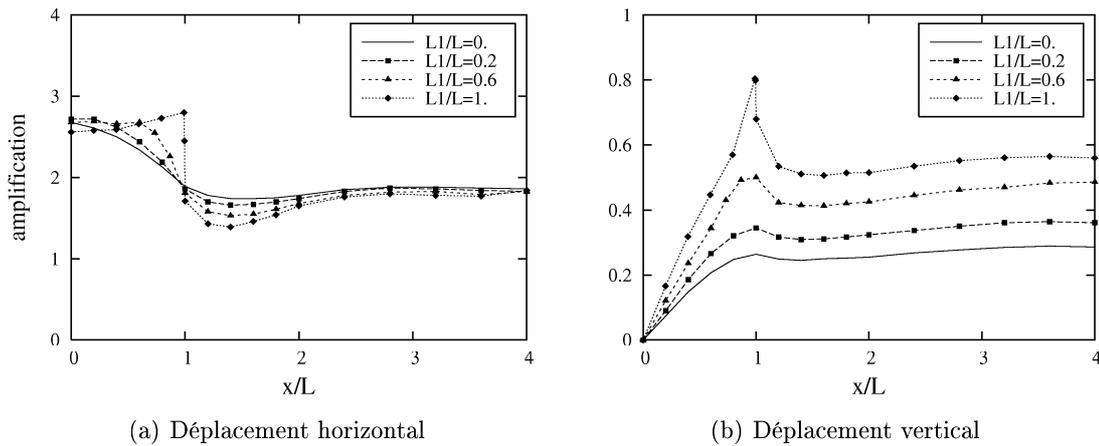


FIG. 3.27 – Coefficient d'amplification le long de la surface libre des collines soumises à l'excitation des ondes incidentes SV harmoniques à propagation verticale. Différentes formes sont à considérer : triangle ( $L1/L = 0$ ), trapèze ( $L1/L = 0.2, 0.6$ ) et rectangle ( $L1/L = 1$ ). Demi-largeur des collines  $L = 1$ , hauteur  $H = 0.4$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , fréquence adimensionnelle  $\eta = 2Lf/v_s = 0.5$ .

La caractéristique principale de l'effet de site des collines est que le mouvement au sommet de la colline est toujours amplifié. Le coefficient d'amplification peut atteindre la valeur 4.27 pour le cas de la colline haute ( $H/L = 1, \eta = 0.5$ ), c'est-à-dire deux fois plus grand que celui de l'espace semi-infini. Il est noté que le mouvement au pied de la colline est généralement atténué en basse fréquence, mais il peut être amplifié si la fréquence est élevée ( $u_x = 2.38$  avec  $\eta = 2, H/L = 0.4$ ). En comparant les figures 3.25, 3.26 et 3.27 avec les figures correspondantes du cas des vallées (3.18, 3.20 et 3.23 respectivement), nous

constatons que l'allure des spectres de mouvement de la colline est semblable à celle de la vallée de même dimension, mais dans le sens inverse. Ainsi, les conclusions tirées pour le cas des vallées peuvent être applicables au cas des collines.

### 3.6 Conclusion

Les objectifs essentiels de ce chapitre sont la mise en évidence des phénomènes physiques principaux et l'influence des paramètres importants de l'effet de site topographique. Grâce aux études paramétriques réalisées portant sur l'effet de site topographique de différentes configurations (pentes, vallées, collines), nous pouvons tirer quelques conclusions générales comme suit.

- Dans la majorité des cas, le mouvement est amplifié à la crête des collines, au sommet des pentes et aux bords des vallées ; il est systématiquement atténué à la base de ces reliefs. Cette observation est vérifiée surtout pour les cas de basse fréquence. Cependant, si la fréquence de l'excitation est haute, cette observation dans certaines conditions n'est plus valable (le mouvement à la base de la vallée et le mouvement au pied de la colline peuvent être amplifiés). Une exception est l'amplification de la crête de la colline, quelle que soit la fréquence de l'excitation, car cette amplification est principalement due à la focalisation des ondes à l'intérieur de la colline.
- Le mouvement en surface n'est plus homogène comme dans le cas de l'espace semi-infini, mais il varie fortement sur la surface libre. Il existe successivement des zones dont le mouvement est amplifié et d'autres zones dont le mouvement est atténué. L'amplitude et la phase de vibration d'un point d'observation sur la surface libre sont fonction de la distance relative de ce point au relief. À une distance suffisamment grande, la réponse du site s'approche de celle de l'espace semi-infini. Cette distance est fonction du contenu fréquentiel de l'excitation, du relief lui-même et surtout de la viscosité du sol, qui peut atténuer les ondes de surfaces. Cette propriété peut être considérée lors de la procédure de microzonage.
- Il existe des mouvements différentiels notables à l'intérieur du relief et aussi sur la surface libre à proximité du relief. Ce type de mouvement, dû à l'existence des ondes de surface et son interférence avec des ondes incidentes, peut avoir un impact important sur la réponse sismique des ouvrages importants (barrages, ponts, oléoducs..) situés près du relief. Il est donc nécessaire de prendre en compte cet aspect lors du dimensionnement de ces ouvrages.
- Bien que dans les exemples examinés ci-avant le signal incident soit de type SV à propagation verticale, la composante verticale du mouvement en surface existe. Cette composante est, dans certains cas, importante par rapport à la composante horizontale. Il faut donc considérer, dans ces cas, l'effet simultané du mouvement en surface dans les deux directions dans les calculs dynamiques des structures ou de l'interaction sol-structure.

- La réponse du site dépend fortement du contenu fréquentiel de l'excitation. L'ampleur de cette influence est contrôlée par le rapport entre la longueur d'onde et la dimension caractéristique du relief. En général, plus la fréquence augmente, plus l'effet est significatif et compliqué et plus la zone influencée par la présence du relief est étendue, surtout pour les longueurs d'ondes comparables ou inférieures à la dimension du relief. En revanche, si la fréquence est suffisamment basse, le relief peut être considéré comme un petit 'obstacle'; son effet sur la réponse du site peut être négligé.
- L'effet de site topographique est aussi substantiellement affecté par la dimension et la forme du relief. En fait, plus la pente 'moyenne' du relief est élevée, plus l'effet de site topographique dû à ce relief est accentué. Pour des reliefs de mêmes dimensions (largeur et profondeur/hauteur), la forme triangulaire est la moins critique et la forme rectangulaire est le cas le plus critique (falaises verticales, par exemple).



## Chapitre 4

# Effets de site dans les remplissages sédimentaires

Nous avons présenté, dans le chapitre précédent, la généralité des effets de site et mené une étude paramétrique portant sur les effets de site topographiques. Dans ce chapitre, nous allons aborder les effets de sites dans les remplissages sédimentaires à géométrie bidimensionnelle. Le chapitre débute par la caractérisation des effets de site 1D et 2D en mettant en évidence des phénomènes physiques en jeu. Puis, une comparaison, entre la réponse 2D et la réponse 1D correspondante, sera montrée afin d'insister sur la nécessité de la prise en compte des effets 2D pour l'évaluation de l'aléa sismique local. Enfin, une étude paramétrique, consacrée à estimer l'influence de différents facteurs importants, sera présentée.

### 4.1 Caractérisation des effets de site dans les remplissages sédimentaires

Les effets de site produits dans les remplissages sédimentaires sont communément attribués à deux phénomènes physiques principaux : la résonance verticale des ondes de volume, due à la stratigraphie, et la propagation latérale des ondes de surface, due à la géométrie bi- ou tri-dimensionnelle du bassin. Dans les cas simples à configuration unidimensionnelle, seul le premier phénomène est observé, alors que dans les cas bi- ou tri-dimensionnels, le second phénomène est aussi présent. En conséquence, on distingue généralement des effets de site 1D (effets de stratigraphie) et des effets 2D ou 3D (effets de bassin).

#### 4.1.1 Effets de stratigraphie 1D

Les effets de stratigraphie se manifestent à une échelle où les variations latérales des propriétés mécaniques et de la géométrie du sous-sol sont négligeables (vallées peu encaissées, bassins sédimentaires). Le modèle de sol est alors constitué d'une superposition de couches homogènes, horizontales et d'épaisseur constante surmontant un substratum

rocheux.

Les causes des effets de site dans ce cas sont assez bien comprises ; elles tiennent essentiellement aux manifestations de deux phénomènes faciles à comprendre :

1. l'augmentation d'amplitude de l'onde réfractée par rapport à celle de l'onde incidente quand il y a un contraste d'impédance marqué entre deux milieux ;
2. le piégeage d'énergie par des réflexions multiples des ondes à l'intérieur d'une couche (les ondes sismiques arrivant à la surface se réfléchissent aux interfaces entre différentes couches et restent piégées aux abords de la surface).

Pour illustrer des caractéristiques principales des effets stratigraphiques, considérons un cas simple d'une seule couche au-dessus d'un espace semi-infini élastique soumis à l'incidence verticale d'une onde SV plane harmonique (figure 4.1a). En comparaison avec le mouvement de référence correspondant à la réponse sismique du substratum sans la couche de sol au-dessus, le mouvement en surface de la couche supérieure est soit amplifié, soit atténué. Les amplifications résultent de l'addition de différentes ondes réfléchies, qui arrivent en phase ; tandis que les arrivées en opposition de phase peuvent, au contraire, produire des atténuations. Par des calculs simples, le rapport de l'amplitude spectrale du mouvement au point A, situé à la surface, à celle du mouvement au point B, situé à l'interface entre la couche et le substratum, est déterminé par la formule [Kramer, 1996] :

$$\frac{u_A}{u_B} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(k_s H) + \alpha^2 \sin^2(k_s H)}} \quad (4.1)$$

où  $H$  désigne l'épaisseur de la couche ;  $k_s = 2\pi f/v_s$  indique le nombre d'ondes où  $v_s$  est la vitesse de propagation de l'onde SV et  $f$  est la fréquence prédominante de l'excitation sismique ;  $\alpha$  est le rapport d'impédance entre la couche et le substratum rocheux :

$$\alpha = \frac{\rho_s v_s}{\rho_r v_r}$$

où  $\rho_r, v_r$  et  $\rho_s, v_s$  sont respectivement les masses spécifiques et les vitesses de l'onde de cisaillement du substratum rocheux et de la couche superficielle.

Comme montré sur la figure 4.1b, le mouvement à la surface de la couche est toujours amplifié ( $u_A/u_B \geq 1$ ) si le rapport d'impédance est inférieure ou égale à l'unité  $\alpha \leq 1$ , ce qui est pratiquement justifié. La valeur maximale de l'amplitude est donnée par

$$\left(\frac{u_A}{u_B}\right)_{max} = \frac{1}{\alpha} \quad (4.2)$$

Cette amplification maximale du mouvement de surface se produit à des fréquences particulières, caractéristiques de la résonance de la couche superficielle. Ces fréquences sont fonction de la vitesse des ondes et de l'épaisseur de la couche :

$$f_n = (2n + 1) \frac{v_s}{4H} \quad (4.3)$$

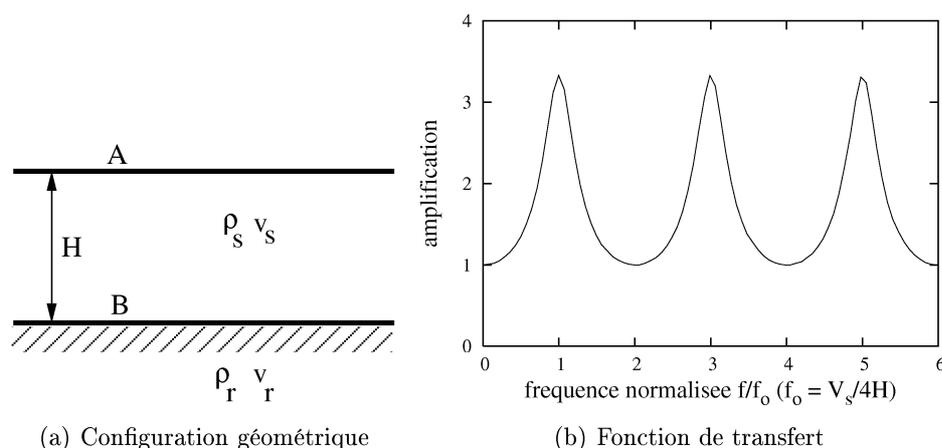


FIG. 4.1 – Effet de site 1D d'une couche de sol reposante sur un stratum rocheux

dans laquelle  $f_{ho} = v_s/4H$ , correspondant au premier pic, est communément appelée la fréquence de résonance fondamentale de la couche unidimensionnelle.

Ainsi, les effets de stratigraphie dépendent non seulement du contraste d'impédance sédiment/substratum (qui détermine les amplitudes des ondes réfléchies), mais aussi de la fréquence des ondes incidentes et de la longueur du trajet de ces ondes (qui déterminent les déphasages). La dépendance en contraste d'impédance confirme des observations expérimentales fréquemment rencontrées en réalité, concernant les amplifications préjudiciables associées aux sédiments constitués des sols mous. En effet, l'amplification est renforcée lorsque le contraste d'impédance entre les couches superficielles et le substratum sous-jacent est plus important. Quant à la dépendance en fréquence, elle affirme le fait que l'effet de site n'est pas nécessairement répétitif en un lieu donné, si les caractéristiques fréquentielles des séismes susceptibles d'y être ressentis sont variables. Plusieurs cas de non-répétitivité ont été rapportés, comme par exemple le cas des sites près de San Francisco, où de fortes amplifications ont été observées pendant le séisme de Loma Prieta (État Unis) en 1989, alors que rien de particulier n'avait été constaté à l'occasion d'un séisme antérieur (22 mars 1957), dont le contenu fréquentiel était plus riche en hautes fréquences.

#### 4.1.2 Effets de bassin 2D

Les effets de bassin se produisent dans un bassin sédimentaire ou dans une vallée alluviale, où l'hétérogénéité latérale des propriétés mécaniques du sous-sol ou la variation d'épaisseur de la couche superficielle n'est pas négligeable. Les phénomènes physiques impliqués dans ce cas 2D (ou 3D) sont beaucoup plus complexes que ceux du cas 1D. En général, ils sont décomposables en deux types de phénomènes distincts :

**Piégeage des ondes de volume :** Comme dans le cas des effets de stratigraphie décrit plus haut, les ondes de volume sont aussi piégées à l'intérieur du bassin, en raison du contraste d'impédance entre la sédimentation et le rocher sous-jacent. Sous certaines

conditions, l'effet de résonance verticale se produit et amplifie considérablement le mouvement en surface. En outre, par le jeu des interférences constructives, la variation latérale de la géométrie du bassin peut conduire à des focalisations du champ d'ondes au niveau de la surface. Ces phénomènes peuvent renforcer l'amplification du mouvement en surface et accroître sa durée.

**Génération des ondes de surface :** À l'arrivée aux bords du bassin, les ondes incidentes sont diffractées et elles font naître des ondes de surface; l'une se propage vers l'extérieur du bassin et l'autre se propage à l'intérieur du bassin, d'un bord à l'autre, et se réfléchit aux bords du bassin. Si l'onde incidente est de type SH, elle produira des ondes de Love; dans le cas de l'incidence de l'onde SV ou de l'onde P, des ondes de Rayleigh seront créées. Considérons une vallée alluviale triangulaire (figure 4.2) soumise à l'incidence verticale d'une onde SV plane de type Ricker d'ordre 2. La génération et la propagation des ondes de surface sont bien illustrées dans les figures 4.3 et 4.4. Dans le cas de la sollicitation de type basse fréquence (fréquence centrale  $f_c = 2.5$  Hz), seul le mode fondamental de l'onde de Rayleigh est observée (figure 4.3). Dans le cas de la sollicitation plus riche en hautes fréquences ( $f_c = 5$  Hz), le second mode de l'onde de Rayleigh est également détecté (figure 4.4). Des résultats théoriques similaires obtenus par Kawase et Aki [1989] (pour le cas d'une vallée trapézoïdale) ou par Bard et Bouchon [1980a, 1980b] (pour le cas d'une vallée de forme sinusoïdale) témoignent aussi de la génération des ondes de surface. Sur le plan expérimental, l'existence de ces ondes latérales a été observée par des enregistrements expérimentaux à la vallée Santa Clara (Californie, États-Unis) lors du séisme de Loma Prieta en 1989 [Frankel et al., 1991] ou au bassin Kanto près de Tokyo (Japon) [Kinoshita et al., 1992].

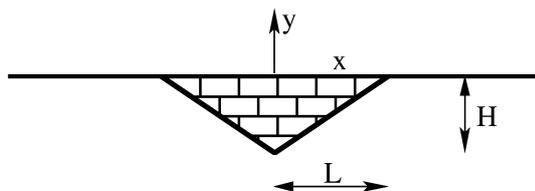
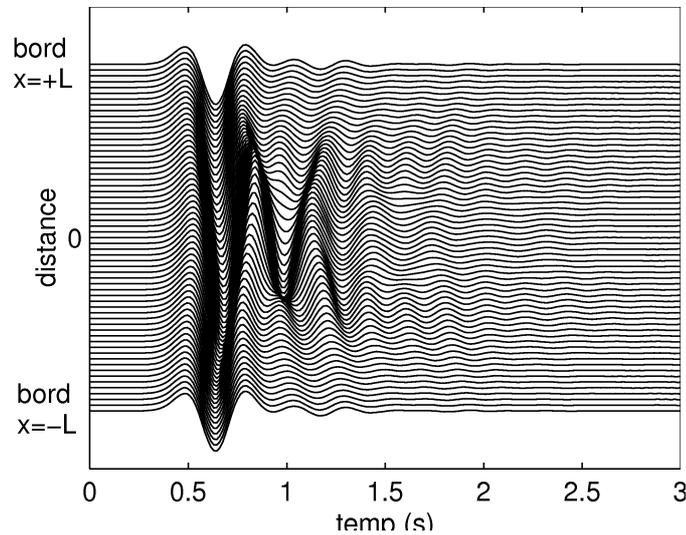


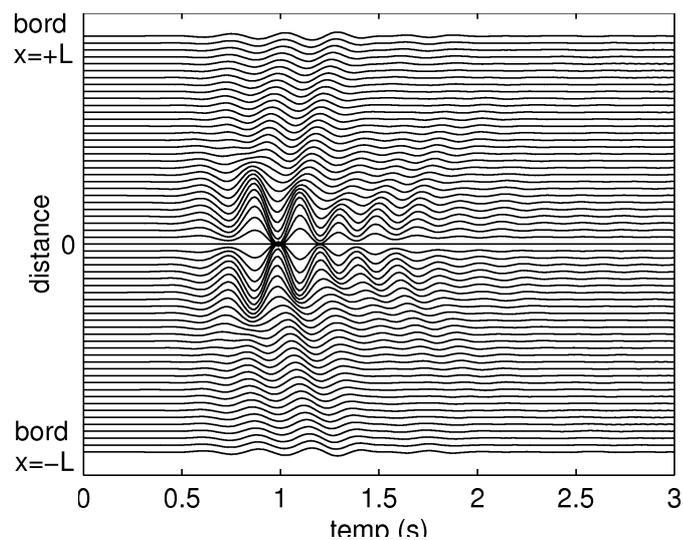
FIG. 4.2 – Configuration d'une vallée triangulaire

Dans un bassin ou une vallée, ces deux phénomènes ne se manifestent pas séparément, mais simultanément. Leur superposition conduit à distinguer plusieurs configurations possibles, selon la prépondérance de l'un ou l'autre des phénomènes. Cette prédominance est globalement contrôlée par la géométrie de la vallée, concrètement par l'élanement du bassin, défini comme le rapport de la demi-largeur  $L$  à la profondeur  $H$ .

**Si l'élanement est grand (vallée allongée et peu profonde),** la résonance verticale se distingue de la propagation des ondes de surface dans la zone centrale de la vallée, car les ondes de surface arrivent dans cette zone plus tard que les ondes de volume réfractées et réfléchies verticales. La fréquence de résonance fondamentale de la vallée reste proche

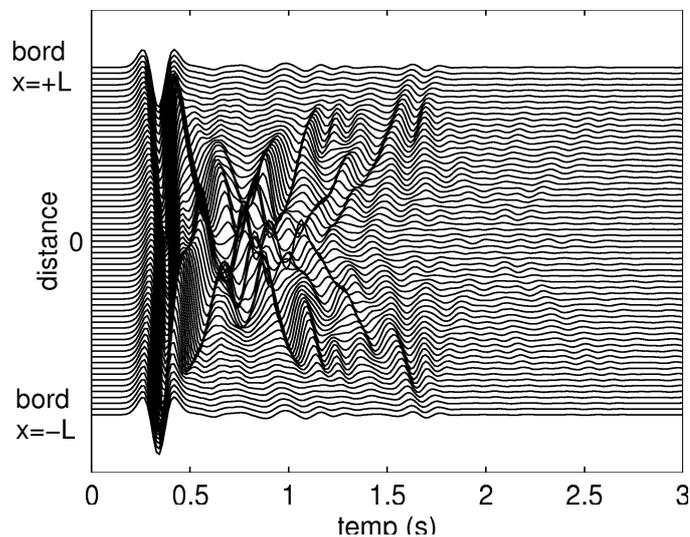


(a) Mouvement horizontal

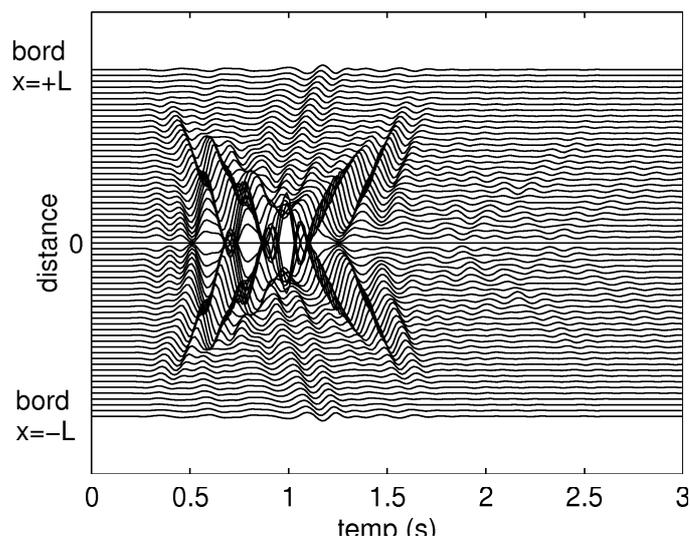


(b) Mouvement vertical

FIG. 4.3 – Mouvement en surface à l'intérieur d'une vallée triangulaire soumise aux incidences verticales des ondes SV planes (cas 'basse fréquence'). Demi-largeur de la vallée  $L = 300$  m, profondeur  $H = 40$  m; coefficients de Poisson  $\nu_s = 0.3$  (sol),  $\nu_r = 0.4$  (roche); masses spécifiques  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>; vitesses de l'onde de cisaillement  $v_s = 450$  m/s,  $v_r = 1000$  m/s; signal incident de type Ricker d'ordre 2 (fréquence centrale  $f_c = 2.5$  Hz).



(a) Mouvement horizontal



(b) Mouvement vertical

FIG. 4.4 – Mouvement en surface à l'intérieur d'une vallée triangulaire soumise aux incidences verticales des ondes SV planes (cas 'haute fréquence'). Demi-largeur de la vallée  $L = 300$  m, profondeur  $H = 40$  m ; coefficients de Poisson  $\nu_s = 0.3$  (sol),  $\nu_r = 0.4$  (roche) ; masses spécifiques  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup> ; vitesses de l'onde de cisaillement  $v_s = 450$  m/s,  $v_r = 1000$  m/s ; signal incident de type Ricker d'ordre 2 (fréquence centrale  $f_c = 5$  Hz).

de celle du cas unidimensionnel. Les ondes de surface se propageant d'un bout à l'autre de la vallée sont susceptibles d'amplifier considérablement le mouvement en surface tant en amplitude qu'en durée. De plus, ces ondes rendent le mouvement de surface spatialement incohérent, ce qui constitue un facteur aggravant de l'aléa sismique.

**En revanche, dans le cas d'élançement faible (vallée profonde)**, la résonance verticale de la couche ne se distingue plus de la propagation des ondes de surface. En effet, dans ce cas, la longueur d'onde des ondes de surface est de même ordre de la largeur de la vallée, donc les réflexions multiples de ces ondes, au sein de la vallée, conduisent à des interférences latérales. La superposition des interférences verticales et latérales peut produire un phénomène de résonance globale 2D de la vallée. Sur la figure 4.5 sont montrés les modes de résonance 2D fondamentaux d'une vallée alluviale de forme sinusoïdale : mode de dilatation/compression (cas de l'onde incidente P, figure 4.5a), mode de cisaillement (cas de l'onde incidente SV, figure 4.5b) et mode de cisaillement anti-plan (cas de l'onde incidente SH, figure 4.5c).

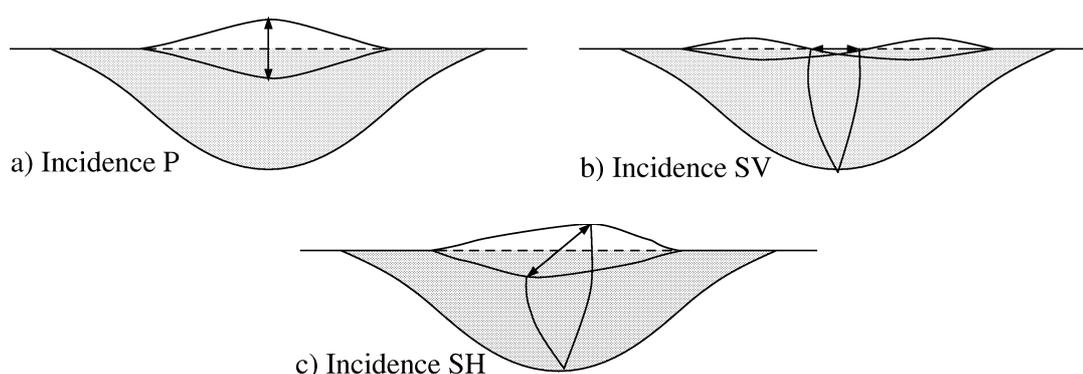


FIG. 4.5 – Illustration de trois modes fondamentaux d'une vallée alluviale de forme sinusoïdale : (a) mode de dilatation/compression, (b) mode de cisaillement et (c) mode de cisaillement anti-plan. Pour chaque mode, la distribution du mouvement correspondant aux instants de mouvement maximal ( $t_o$  et  $t_o + 0.5/f_o$ ) est tracée ; la ligne discontinue représente la surface au repos (d'après [Bard et Bouchon, 1985]).

L'existence du phénomène de résonance 2D d'une vallée profonde a été abordée en premier par Bard et Bouchon [1985]. Des caractéristiques fondamentales de ce phénomène spécifique, résultant de l'investigation théorique de ces auteurs s'accordent bien avec des observations expérimentales réalisées par Tucker et King [1984] et King et Tucker [1984], à la vallée Garm (Tadjikistan), et par Kagami et al. [1982], sur les deux sites de Niigata et de San Fernando. Afin de montrer ces caractéristiques, considérons l'exemple de la vallée alluviale triangulaire (figure 4.2) soumise à l'excitation des ondes SV planes à propagation verticale. La figure 4.6 présente la réponse en domaine fréquentiel de la vallée ; la figure 4.7a donne la réponse en domaine temporel de la vallée où la fréquence dominante de l'excitation (de type Ricker) est égale à la fréquence fondamentale de la vallée ( $f_c = f_o = 4.4$  Hz). Sur

ces figures, des déplacements horizontaux sont calculés et tracés en des points uniformément répartis sur la surface ; les amplitudes du mouvement sont toutes normalisées par celle de l'espace semi-infini sans présence de la vallée.

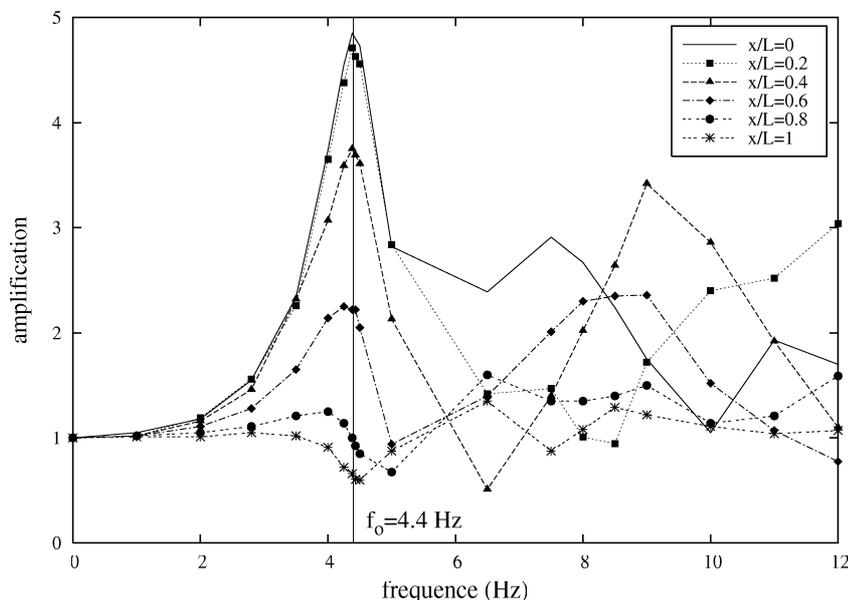


FIG. 4.6 – Réponse en domaine fréquentiel d'une vallée triangulaire soumise aux incidences verticales des ondes SV. Le mouvement en surface est calculé en des points régulièrement répartis sur la surface. Demi-largeur de la vallée  $L = 100$  m, profondeur  $H = 40$  m ; coefficients de Poisson  $\nu_s = 0.3$  (sol),  $\nu_r = 0.4$  (roche) ; masses spécifiques  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup> et vitesses de l'onde de cisaillement  $v_s = 450$  m/s ,  $v_r = 1000$ m/s.

Le résultat illustré sur ces figures nous permet de déduire ces conclusions suivantes :

- Dans la zone centrale ( $|x/L| \leq 0.6$  dans cet exemple), la fréquence propre fondamentale de tous les points, correspondant aux premiers pics de déplacement (figure 4.6), prend la même valeur :  $f_o = 4.4$  Hz. Cela signifie que la fréquence fondamentale du mouvement d'un point quelconque dans la zone centrale est indépendante de l'épaisseur locale de la sédimentation en ce point. Il existe donc une fréquence de résonance 2D fondamentale globale pour toute la vallée. La valeur de cette fréquence est généralement supérieure à celle du cas 1D correspondant (c'est-à-dire le cas d'une couche horizontale de mêmes propriétés mécaniques et de même épaisseur que l'épaisseur maximale de la vallée) : dans cet exemple, la fréquence de résonance 1D est  $f_{ho} = 2.8$  Hz  $<$   $f_o = 4.4$  Hz. Pour les modes de vibration supérieurs, la valeur des fréquences propres correspondantes est fonction de la position du point considéré.
- L'amplitude de mouvement des points dans la zone centrale est maximale en mode fondamental, alors que les points situés hors de cette zone sont les plus excités en modes supérieurs. En mode fondamental, l'effet d'amplification du mouvement en surface est maximal au milieu de la vallée ; il diminue graduellement en allant vers les bords où il

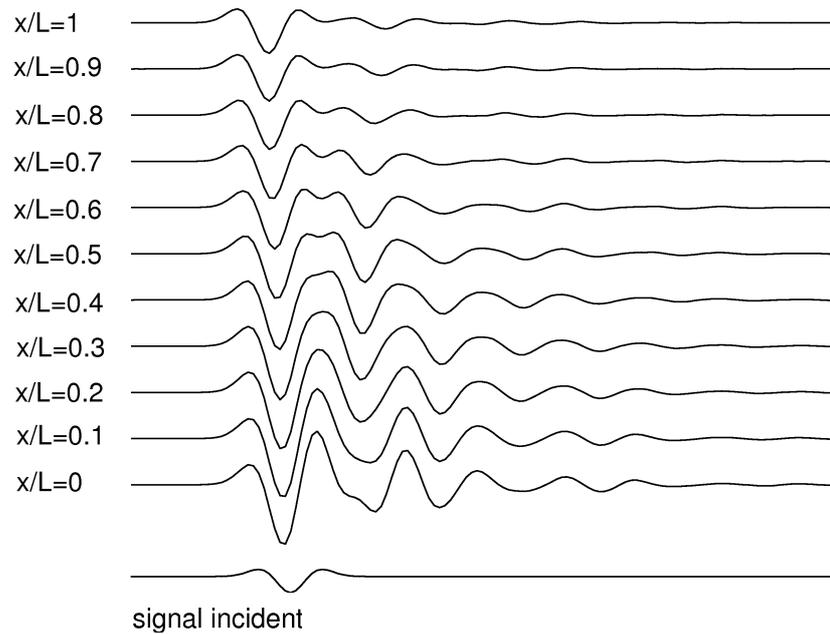
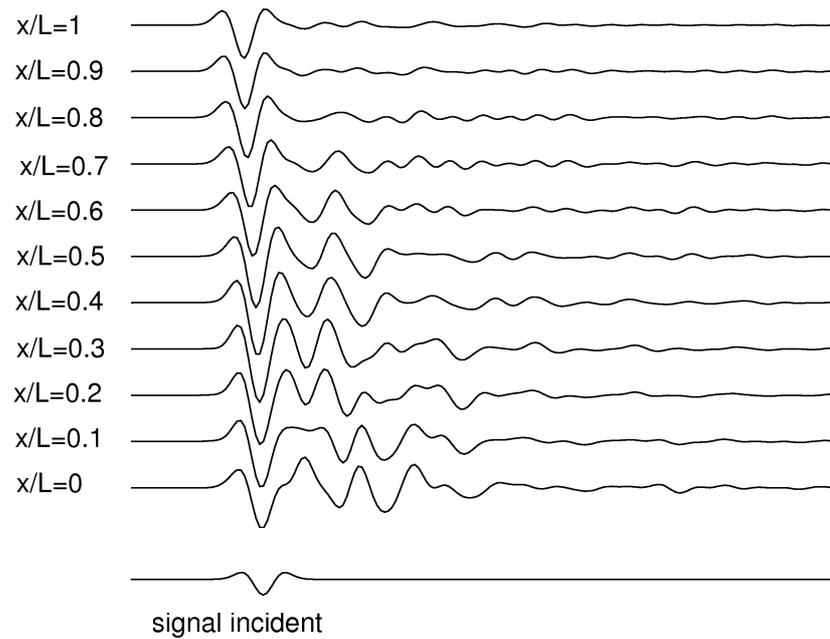
(a)  $f_c = f_o = 4.4Hz$  ( $f_o$  : fréquence de résonance de la vallée)(b)  $f_c = 8.5Hz$ 

FIG. 4.7 – Illustration du mouvement différentiel à l’intérieur d’une vallée triangulaire soumise aux incidences verticales des ondes SV : a)  $f_c = f_o$ , mouvement quasiment en phase dans la zone centrale; b)  $f_c \neq f_o$ , mouvement différentiel significatif. Demi-largeur de la vallée  $L = 100$  m, profondeur  $H = 40$  m; coefficients de Poisson  $\nu_s = 0.3$  (sol),  $\nu_r = 0.4$  (roche); masses spécifiques  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup> et vitesses de l’onde de cisaillement  $v_s = 450$  m/s,  $v_r = 1000$  m/s; signal incident de type Ricker d’ordre 2.

est atténué : dans cet exemple,  $u_{max} = 4.85$  à  $x/L = 0$  (au milieu) et  $u_{min} = 0.66$  à  $x/L = 1$  (aux bords).

- En mode fondamental, les mouvements en surface des points à travers la zone centrale de la vallée sont en phase. Ce constat est particulièrement justifié si l'onde incidente est monochrome avec la fréquence égale à la fréquence de résonance de la vallée. Dans le cas d'une excitation multifréquentielle, si sa fréquence prédominante est proche de la fréquence de résonance, le mouvement en surface à travers la zone centrale est quasiment en phase (figure 4.7a) ; par contre, le mouvement différentiel sera significatif (figure 4.7b).
- La durée du mouvement au sein de la vallée est considérablement prolongée par rapport à celle du signal incident.

Ainsi, la réponse sismique d'une vallée alluviale dépend fortement de sa géométrie. Pour prévoir le type de réponse sismique d'une vallée alluviale quelconque, la notion de 'rapport de forme' critique (*critical shape ratio* en anglais) a été utilisé [Bard et Bouchon, 1985] : on peut dire, si le rapport  $H/L$  est inférieur à cette valeur critique, que le comportement sismique de la vallée est caractérisé essentiellement par la résonance verticale 1D + la propagation latérale des ondes de surface ; par contre, si le rapport  $H/L$  est supérieur à la valeur critique, le phénomène prédominant est la résonance 2D. Cette valeur critique est toutefois fonction du rapport d'impédance sédiment/substratum, car la génération des ondes latérales est contrôlée par ce coefficient (ou par le contraste de vitesse). La figure 4.8 montre la détermination du rapport de forme critique en fonction du contraste de vitesse, pour le cas d'une vallée de forme sinusoïdale soumise à l'incidence verticale des ondes SH.

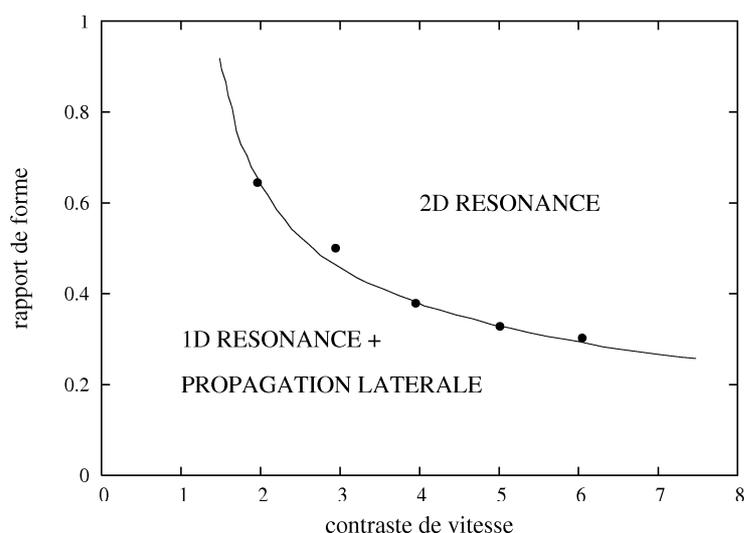


FIG. 4.8 – Condition d'existence de la résonance 2D d'une vallée alluviale de forme sinusoïdale soumise à l'incidence des ondes SH (d'après [Bard et Bouchon, 1985]).

## 4.2 Comparaison 1D et 2D

Le modèle de stratigraphie 1D est couramment appliqué en génie parasismique ainsi qu'en sismologie, pour les calculs du niveau d'amplification du mouvement à la surface libre. En effet, ce modèle constitue une schématisation acceptable des conditions réelles pour des sites à stratigraphie essentiellement horizontale, où le contraste d'impédance avec le rocher sous-jacent est suffisamment fort pour que l'on puisse admettre une incidence quasiment verticale des rais sismiques. Du point de vue des praticiens, la connaissance des caractéristiques géométriques et mécaniques des différentes couches de terrain à stratigraphie horizontale est assez facilement réalisée, puisqu'elle ne nécessite que des reconnaissances géotechniques simples. En conséquence, l'évaluation des effets de site dans les remplissages sédimentaires par un schéma 1D a été incorporée dans plusieurs codes parasismiques modernes (Eurocode 8, PS 92) et mise en œuvre dans de nombreux codes de calcul (Shake, Eera). Néanmoins, un tel modèle simple montre ses limites lorsque l'hypothèse d'un milieu à stratigraphie horizontale n'est plus valide et que les effets 2D ne sont plus négligeables, ce qui, en définitive, correspond à un très grand nombre de cas. Comme présentés plus haut, les phénomènes physiques impliqués dans les cas 2D sont beaucoup plus complexes que ceux en 1D ; l'effet de bassin peut renforcer de manière substantielle l'effet de stratigraphie.

Afin d'insister sur la nécessité de la prise en compte des effets de site 2D, nous allons, dans cette section, mettre en valeur les différences majeures entre la solution 2D et la solution 1D correspondante, en comparant les paramètres caractéristiques du mouvement sismique (amplitude, contenu fréquentiel et durée) de ces solutions. Dans les exemples suivants, nous allons considérer une vallée alluvionnaire triangulaire, de dimensions  $L = 100$  m et  $H = 40$  m, soumise à l'incidence des ondes SV planes de type Ricker à propagation verticale. Le substratum est constitué d'une roche moyenne (vitesse de l'onde de cisaillement  $v_r = 1000$  m/s) ; le sédiment peut être un sol de bonne qualité ( $v_s = 450$  m/s), faible ( $v_s = 225$  m/s) ou médiocre ( $v_s = 150$  m/s). Les résultats sont exprimés en déplacements, normalisés par ceux de l'espace semi-infini homogène sans présence de la vallée (ou de la couche). Pour chaque point sur la surface libre, la solution 1D correspondante est la réponse de la couche de sol de mêmes caractéristiques mécaniques et de même épaisseur que l'épaisseur locale de la sédimentation en ce point.

### a. Comparaison en amplitude :

La figure 4.9 présente la comparaison des solutions 2D et 1D (cas du sol médiocre) en domaine temporel, pour plusieurs points sur la surface libre. On observe alors une différence significative entre ces solutions, tant en amplitude qu'en durée. Pour les points dans la zone centrale de la vallée ( $x/L = 0$  et  $x/L = 0.2$ ), la valeur de pic de la composante horizontale du cas 2D est supérieure à celle du cas 1D ; cela signifie que l'effet 2D renforce l'effet 1D, en termes d'amplitude de mouvement. En revanche, pour les points situés hors de cette zone ( $x/L = 0.4$  et  $x/L = 0.6$ ), la valeur de pic de déplacement du cas 2D est

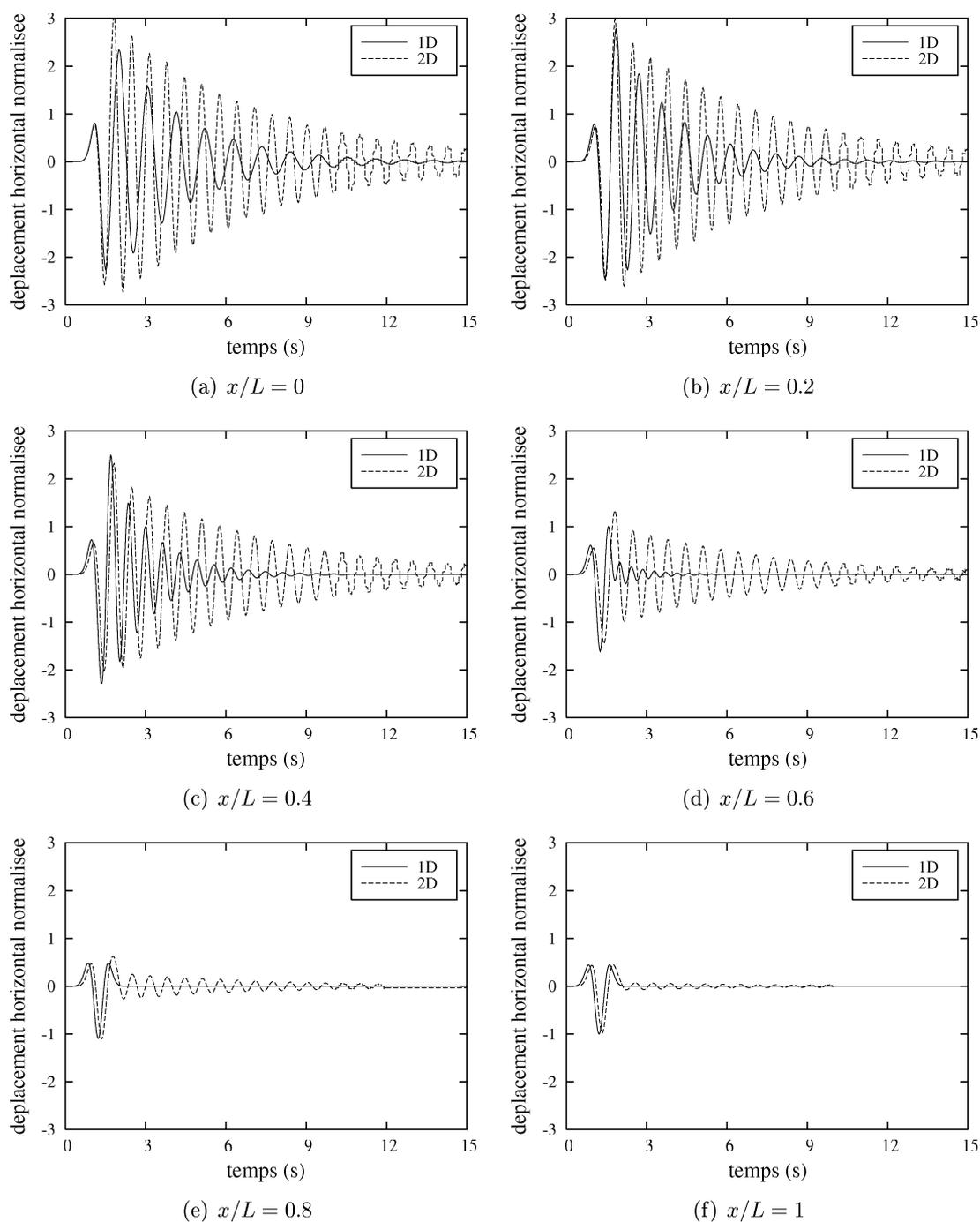


FIG. 4.9 – Comparaison des solutions 2D et 1D en domaine temporel. Demi-largeur de la vallée  $L = 100$  m, profondeur  $H = 40$  m; coefficients de Poisson  $\nu_s = 0.3$  (sol),  $\nu_r = 0.4$  (roche); masses spécifiques  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>; vitesses de l'onde de cisaillement  $v_s = 450$  m/s,  $v_r = 1000$  m/s; onde SV incidente de type Ricker (fréquence centrale  $f_c = 1$  Hz) à propagation verticale.

légèrement inférieur à celle du cas 1D, c'est-à-dire que l'effet 2D affaiblit l'effet 1D. Quant aux points situés près des bords ( $x/L = 0.8$  et  $x/L = 1$ ), la différence entre ces solutions est négligeable. Ainsi, cet exemple montre que l'effet d'amplification du mouvement en surface en cas 2D est renforcé ou affaibli par rapport au cas 1D, selon la position du point considéré.

Considérons maintenant la réponse 2D au point au milieu de la vallée ( $x/L = 0$ ) et la réponse 1D correspondante. Sur la figure 4.10 sont tracées les variations de la valeur de pic de déplacement horizontal, correspondant aux solutions 1D et 2D, en fonction de la fréquence centrale  $f_c$  de l'excitation (de type Ricker) pour les deux cas de sol moyen et de sol faible. Le résultat montré sur cette figure confirme l'influence prépondérante du mode fondamental sur le mouvement sismique en surface : les fréquences centrales  $f_c$  de l'excitation, associées aux mouvements en surface les plus amplifiés, sont au voisinage de la fréquence fondamentale  $f_{ho}$  de la couche ou  $f_o$  de la vallée. On observe une tendance générale : la réponse 2D est plus défavorable que celle 1D, si l'excitation est riche en hautes fréquences ; concrètement, la fréquence dominante de l'excitation est au voisinage ou supérieure à la fréquence fondamentale  $f_o$  de la vallée. En revanche, pour des excitations de type basse fréquence, l'effet d'amplification de la réponse 1D est plus importante.

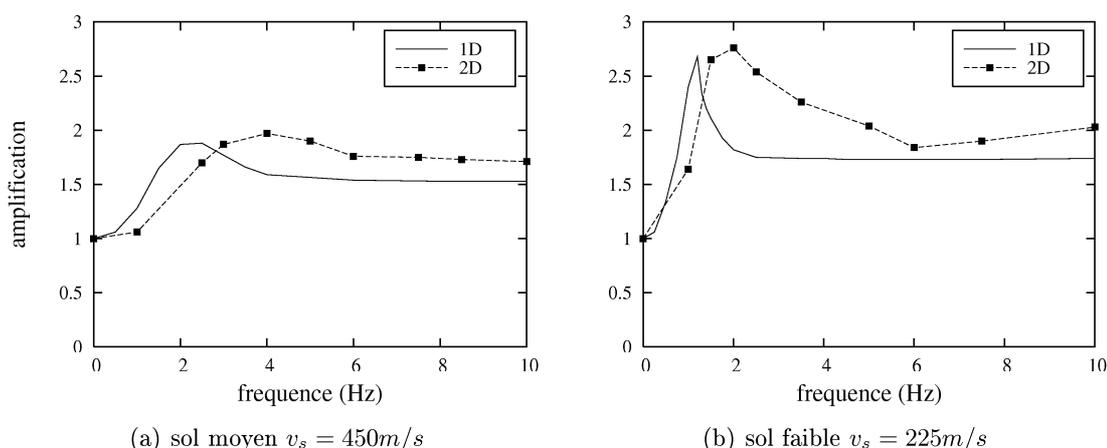


FIG. 4.10 – Comparaison des solutions 2D et 1D en termes de valeur de pic de déplacement horizontal. Demi-largeur de la vallée  $L = 100$  m, profondeur  $H = 40$  m ; coefficients de Poisson  $\nu_s = 0.3$  (sol),  $\nu_r = 0.4$  (roche) ; masses spécifiques  $\rho_s = 1600 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_r = 2400 \text{ kg/m}^3$  ; vitesses de l'onde de cisaillement  $v_s = 450 \text{ m/s}$ ,  $v_r = 1000 \text{ m/s}$  ; onde SV incidente de type Ricker à propagation verticale.

### b. Comparaison en contenu fréquentiel :

Dans le cas 1D, le mouvement sur la surface libre de la couche horizontale est homogène ; il y a donc un seul spectre de Fourier du mouvement en surface. En revanche, dans le cas 2D d'une vallée, les points différents réagissent de façon différente, d'où le mouvement sismique en surface de la vallée est généralement hétérogène. Ainsi, il y a plusieurs spectres

de Fourier du mouvement en surface; chacun est associé à un point d'observation. La figure 4.11 présente les spectres de Fourier (pour l'excitation Ricker de basse fréquence,  $f_c = 1$  Hz) de plusieurs points, uniformément répartis sur la surface libre de la vallée. Ces spectres sont nettement distincts du spectre de la solution 1D, correspondant au point au milieu ( $x/L = 0$ ). La forme 'pyramide' très étroite des spectres 2D met en évidence l'effet prépondérant du mode de résonance 2D sur la réponse sismique de la vallée.

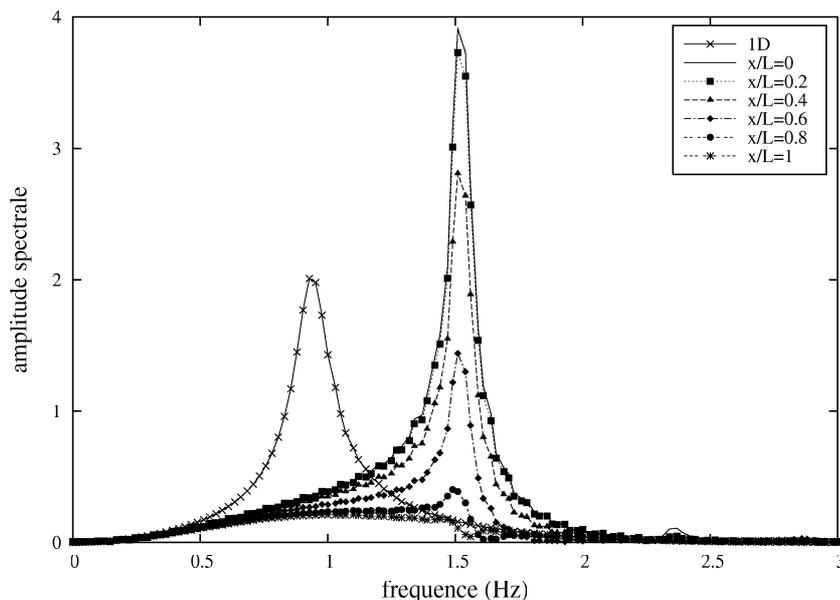


FIG. 4.11 – Spectres de Fourier du mouvement de plusieurs points à l'intérieur d'une vallée triangulaire, en comparaison avec le cas 1D ( $x/L = 0$ ). Demi-largeur de la vallée  $L = 100$  m, profondeur  $H = 40$  m; coefficients de Poisson  $\nu_s = 0.3$  (sol),  $\nu_r = 0.4$  (roche); masses spécifiques  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>; vitesses de l'onde de cisaillement  $v_s = 450$  m/s,  $v_r = 1000$  m/s; onde SV incidente de type Ricker ( $f_c = 1$  Hz) à propagation verticale.

Un paramètre intrinsèque de la vallée (ou de la couche), caractérisant sa réponse sismique, est sa fréquence de résonance fondamentale. Dans le cas 1D, la fréquence fondamentale est déterminé par la formule  $f_{ho} = v_s/4H$ , ce qui implique qu'elle est fonction des caractéristiques mécaniques ( $v_s$ ) et de l'épaisseur ( $H$ ) de la couche. Dans le cas 2D, cette fréquence dépend également du rapport de forme  $H/L$  de la vallée, car ce rapport décide du type de comportement de la vallée (résonance 1D + propagation latérale ou résonance 2D). En outre, cette fréquence dépend aussi du type d'ondes incidentes, car il y a trois modes de résonance (figure 4.5) associés à trois types d'ondes incidentes (SV, P, SH). Comme les phénomènes physiques impliqués dans le cas 2D sont très complexes, il est difficile de déterminer de manière exacte la fréquence fondamentale dans le cas 2D. Il

existe cependant des formules empiriques, proposées par Bard et Bouchon [1985] :

$$f_o^P \approx f_{ho}^P \sqrt{1 + (H/L)^2} \quad (4.4a)$$

$$f_o^{SV} \approx f_{ho}^{SV} \sqrt{1 + (2.9H/L)^2} \quad (4.4b)$$

$$f_o^{SH} \approx f_{ho}^{SH} \sqrt{1 + (2H/L)^2} \quad (4.4c)$$

où  $f_{ho}$  est la fréquence fondamentale du cas 1D correspondant au point au milieu  $x/L = 0$  (on ne considère ici que des vallées symétriques)

Dans l'exemple ci-dessus, il est facile à détecter la valeur de la fréquence fondamentale 2D de la vallée ( $f_o = 1.5$  Hz) et celle 1D de la couche ( $f_{ho} = 0.94$  Hz). Ces valeurs vérifient approximativement la formule (4.4b) avec une erreur négligeable. En traitant plusieurs autres exemples, nous trouvons que les formules (4.4a), (4.4b) et (4.4c) sont assez fiables et qu'on peut les utiliser dans la pratique.

### c. Comparaison en durée :

Sur la figure 4.9 on découvre que la durée du signal sismique, dans le cas 2D, est visiblement prolongée, par rapport à celle dans le cas 1D correspondant. Cette prolongation est, en particulier, prononcée si le sol alluvial est médiocre. Cela tient essentiellement au fait que des trains d'ondes de surface effectuent plusieurs trajets aller-retour entre les bords opposés de la vallée. Cette prolongation sera réduite si la viscosité du sol alluvial est importante, car cet amortissement matériel a pour effet d'amortir les ondes de surface. L'autre raison, aussi importante, est le piégeage des ondes de volume à l'intérieur de la vallée, en raison du contraste d'impédance sédiment/substratum. Ce phénomène de piégeage existe aussi dans le cas 1D de la couche de sol, mais il est accentué dans le cas 2D en raison du caractère 'fermé' de la vallée, qui entraîne des réflexions multiples très complexes des ondes de volume.

La remarque sur l'allongement de la durée du séisme est particulièrement importante pour des sites qui présentent un risque potentiel de liquéfaction, car une des conditions nécessaires pour le déclenchement de ce phénomène dommageable est que le nombre de cycles de la sollicitation, qui est strictement lié à la durée du signal sismique, soit suffisamment important.

### d. Mouvement différentiel en cas 2D :

Dans le cas 1D d'une couche horizontale, les mouvements de tous les points sur la surface sont en phase. En revanche, dans les cas 2D, le mouvement sismique d'un point quelconque sur la surface dépend de sa position ; il existe donc un mouvement différentiel important sur la surface libre, sauf si la vallée se trouve en mode de vibration fondamental. L'existence de ce mouvement, dû essentiellement à la propagation des ondes de surface à l'intérieur de la vallée, est montrée sur la figure 4.7b, où la fréquence prédominante de l'excitation est bien différente de la fréquence de résonance de la vallée.

Ce type de mouvement peut causer des dommages significatifs aux ouvrages importants, dont les dimensions sont du même ordre que la longueur d'ondes, tels que les barrages, les ponts, les canalisations. La conception de ces ouvrages traversant la vallée doit, par conséquent, tenir compte du mouvement différentiel.

#### e. Mouvement vertical dans cas 2D :

Une particularité remarquable de la réponse 2D, par rapport à la réponse 1D, est la présence de la composante verticale du mouvement, bien que l'onde incidente soit polarisée horizontalement. Rappelons que, dans le cas 1D, si l'onde incidente est une onde SV à propagation verticale, la composante verticale du mouvement en surface est nulle. Sur les figures 4.12a et 4.12b est tracée la variation temporelle des composantes horizontale et verticale au point  $x/L = 0.5$ , pour deux cas :  $f_c = 2.5$  Hz et  $f_c = 5$  Hz (pour l'onde incidente SV de type Ricker). On observe que les grandeurs de ces deux composantes sont comparables et que les instants d'occurrence de leurs pics de déplacement ne sont pas très distincts. Comme nous allons le montrer dans les sections suivantes, la grandeur de la composante verticale du mouvement est significative, comparée à celle de la composante horizontale, dans les cas où, soit les vallées sont profondes, soit les excitations sont riches en hautes fréquences, soit le contraste d'impédance sédiment/substratum est notable.

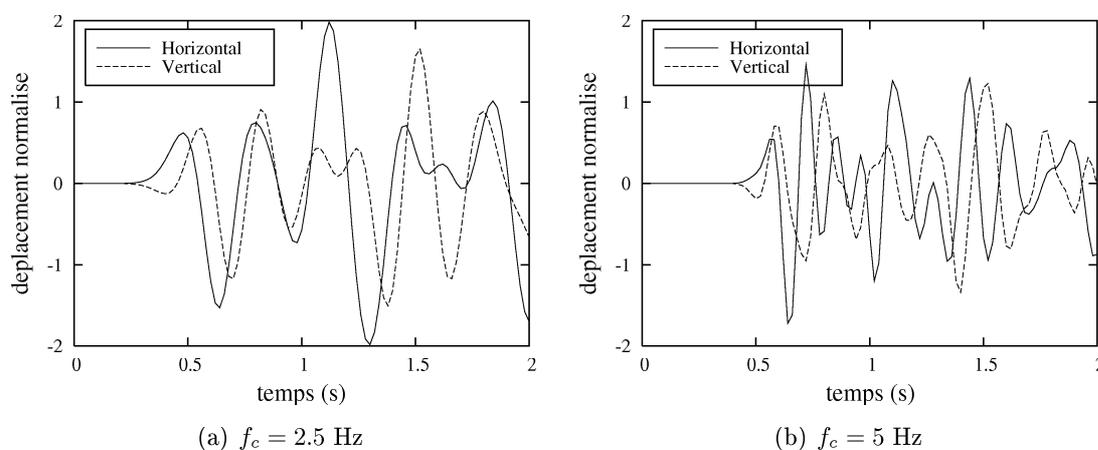


FIG. 4.12 – Importance de la composante verticale du mouvement en surface d'une vallée triangulaire. Les déplacements sont calculés à  $x/L = 0.5$ . Demi-largeur de la vallée  $L = 100$  m, profondeur  $H = 40$  m; coefficients de Poisson  $\nu_s = 0.3$  (sol),  $\nu_r = 0.4$  (roche); masses spécifiques  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>; vitesses de l'onde de cisaillement  $v_s = 450$  m/s,  $v_r = 1000$  m/s; onde SV incidente de type Ricker à propagation verticale.

Dans la majorité des cas pratiques, l'effet de la composante verticale du mouvement sismique n'est pas considéré, car l'amplitude du mouvement vertical est généralement plus faible que celle du mouvement horizontal et que la 'force sismique' dans la direction verticale ne représente, en général, qu'une fraction relativement faible du poids propre. Cependant, l'analyse des observations post-sismiques peut mettre cet effet en évidence dans certaines

conditions : on peut observer des amorces de flambage des éléments verticaux de structures métalliques ou également des piles de ponts. Ces amorces de flambage sont dues manifestement à l'effet de la composante verticale du mouvement. Une autre manifestation de cet effet est la projection en l'air de structures ou d'objets, simplement posés, lors des séismes très violents. Ainsi, dans ces cas, il ne faut pas oublier l'importance de la composante verticale, et aussi l'effet simultané de deux composantes, dans la réponse sismique des vallées alluvionnaires. Une manière simple afin de prendre effectivement en compte l'effet de la composante verticale est de prendre, pour l'action verticale, une simple réduction (dans le rapport 50% à 100%) de l'action horizontale, quelle que soit la fréquence.

En conclusion, la réponse 2D est profondément différente à la réponse 1D. La divergence entre ces solutions (en termes d'amplitude, de contenu fréquentiel et de durée du mouvement surfacique) est, en particulier, significative pour les vallées profondes. Par ailleurs, le modèle 1D ne peut pas expliquer la composante verticale et l'existence du mouvement différentiel, qui peuvent être responsables de dommages considérables. En conséquence, dans le cas des vallées ou des bassins sédimentaires, les effets de site 2D doivent être pris en compte pour l'évaluation de l'aléa sismique local et également pour la conception des ouvrages. L'approche 1D n'est conseillée que dans le cas des sites à stratigraphie essentiellement horizontale.

## 4.3 Étude paramétrique des effets de site 2D

### 4.3.1 Paramètres principaux

La modification du mouvement de surface par un bassin sédimentaire est très variable et dépend de nombreux paramètres concernant le champ d'ondes incidentes, la géométrie de la vallée, les propriétés mécaniques du sédiment et du substratum ou, encore, la position du point considéré sur la surface libre. Une étude exhaustive des effets de site dans les bassins sédimentaires doit tenir compte de l'ensemble des facteurs suivants :

**Type d'ondes incidentes :** nous avons choisi d'étudier des effets de site dus à l'excitation des ondes SV planes

**Direction du champ d'ondes incidentes :** l'hypothèse de la propagation verticale de l'onde incidente a été adoptée dans cette étude, ce qui est une hypothèse habituelle pour la définition des sollicitations sismiques.

**Contenu fréquentiel du signal incident :** nous préférons examiner dans cette étude la réponse dynamique transitoire en domaine temporel du site, ce qui nous donne une image intuitive de la réponse du site sous l'action d'un séisme réel. Deux types de sollicitations peuvent être envisagés : des signaux réels donnés par un accélérogramme ou des signaux purement synthétiques, déterminés d'après des expressions analytiques. Parmi ces deux

types, l'usage de la seconde catégorie pour des études paramétriques est plus pratique, car il est facile de modifier le contenu fréquentiel de la sollicitation, alors que le contenu fréquentiel d'un signal réel est fixe. Par contre, l'utilisation des signaux réels est appropriée pour les études de cas. Nous avons choisi dans cette étude le signal de Ricker d'ordre 2, qui est très couramment utilisé. La définition de ce signal est présentée sur la figure 3.14 (chapitre 3). Les expressions analytiques du signal de Ricker sont les suivantes :

En domaine temporel

$$u(t) = A_o \left( \frac{\pi^2(t - t_s)^2}{t_p^2} - 0.5 \right) \exp \left( -\frac{\pi^2(t - t_s)^2}{t_p^2} \right) \quad (4.5)$$

En domaine fréquentiel

$$u(f) = -A_o \frac{f^2 t_p^2 \sqrt{2}}{2\pi} \exp(-t_p^2 f^2) \exp(-2i\pi f t_s) \quad (4.6)$$

où  $t_s$  est la valeur de temps pour laquelle le signal est maximal ;  $t_p$  est la période caractéristique du signal.

La fréquence dominante du signal de Ricker est facilement calculée :  $f_c = 1/t_p$ . Ainsi, en faisant varier la valeur de  $t_p$ , on peut modifier le contenu fréquentiel de l'excitation : par exemple, en diminuant  $t_p$ , on a une excitation plus riche en hautes fréquences. Dans cette étude, la fréquence dominante  $f_c$  de l'onde incidente prend des valeurs dans l'intervalle [1, 10 Hz], ce qui constitue la gamme de fréquences la plus significative dans la majorité des cas du génie parasismique.

**Contraste d'impédance sédiment/substratum** représenté par le rapport d'impédance  $\alpha = \frac{\rho_s v_s}{\rho_r v_r}$ . Le substratum rocheux sous-jacent et le sédiment sont tous supposés homogènes, isotropes et élastiques linéaires (l'amortissement matériel est négligé). Cette hypothèse est très couramment utilisée dans les calculs parasismiques ou sismologiques. Nous essayons, dans cette étude, de sélectionner des valeurs représentatives pour les paramètres matériels. Les caractéristiques mécaniques du substratum rocheux sont fixées pour tous les exemples : vitesse de l'onde de cisaillement  $v_r = 1000$  m/s, coefficient de Poisson  $\nu_r = 0.4$ , masse spécifique  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>. Le sol alluvial a le coefficient de Poisson  $\nu_s = 0.3$ , la masse spécifique  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup> (2000 kg/m<sup>3</sup> si la sédimentation est saturée d'eau). Afin d'étudier l'effet du contraste d'impédance, la vitesse de l'onde de cisaillement du sédiment peut prendre les valeurs  $v_s = 750$  m/s, 450 m/s, 225 m/s et 150 m/s pour couvrir une large gamme de sols (de bonne qualité jusqu'à une mauvaise qualité). Les rapports d'impédance correspondants ont respectivement les valeurs 0.5, 0.3, 0.15 et 0.1.

**Géométrie de la vallée :** En pratique, on a l'habitude d'associer la géométrie d'une vallée, généralement complexe, à une forme relativement simple. Les études des cas d'école, concernant les vallées à géométrie idéalisée, malgré leur simplification, ont permis cependant de dégager des tendances générales du comportement de la vallée réelle. Pour la majorité

des exemples traités dans ce chapitre, nous considérons une vallée triangulaire symétrique (figure 4.2) de dimensions  $H = 40$  m et  $L = 100$  m. Pour étudier l'influence de la dimension de la vallée, la profondeur prend les valeurs  $H = 40$  m et  $100$  m et la demi-largeur prend les valeurs  $L = 40$ m,  $100$ m,  $200$ m et  $300$ m. En ce qui concerne la forme de la vallée, nous distinguons des configurations de base : triangulaire, rectangle et demi-ellipse. Pour étudier l'effet de remplissage, l'épaisseur de la sédimentation  $H_1$  peut avoir plusieurs valeurs :  $H_1/H = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  ( $H_1/H = 0$  correspond à une vallée vide et  $H_1/H = 1$  est relatif à une vallée complètement remplie).

**Effet multicouche du sédiment :** dans la littérature, l'effet de stratigraphie multicouche 1D a été beaucoup étudié, mais jusqu'à présent peu de recherches abordent cet effet dans le cas 2D. Dans le but de dégager quelques caractéristiques générales de cet effet dans le cas 2D, nous examinons un cas simple d'une vallée rectangulaire,  $H = 60$  m et  $L = 100$  m, dont la sédimentation est constituée de trois couches de même épaisseur  $h = 20$  m, mais de différentes raideurs.

**Effet de la saturation en eau :** dans la majorité des cas, le sédiment est couramment supposé sec et modélisé comme un milieu continu, ce qui constitue une hypothèse largement acceptée en génie parasismique et en sismologie. Néanmoins, une question peut être posée : si la sédimentation est saturée d'eau, ce qui est le cas de plusieurs bassins sédimentaires associés aux grands fleuves, la saturation d'eau peut-elle modifier de manière substantielle la réponse sismique du bassin ? La réponse serait 'Oui', car on sait que le mouvement du fluide interstitiel et son interaction avec le squelette solide affectent considérablement le comportement mécanique du milieu. De plus, la propagation d'ondes dans un milieu poreux saturé est assez différente de celle dans un milieu continu sec, du fait de l'existence de la seconde onde de compression (onde lente ou onde de Biot). Ainsi, en théorie, la réponse sismique d'un remplissage sédimentaire saturé d'eau, dans certaines conditions, peut diverger significativement de celle d'un remplissage sec. Une étude quantitative liée à ce problème est donc abordée dans ce travail.

Dans ce qui suit, nous présentons une étude paramétrique portant sur l'influence des différents facteurs, mentionnés ci-dessus, sur le comportement sismique des vallées (ou bassins) sédimentaires. Cette étude est basée sur l'évaluation des paramètres caractéristiques du mouvement en surface : l'amplitude, le contenu fréquentiel et la durée. Les problèmes traités sont 2D, correspondant aux vallées suffisamment longues et de section transversale presque constante. La vallée alluvionnaire est modélisée par des éléments finis, alors que le substratum rocheux sous-jacent est modélisé par des éléments frontières. Les résultats des analyses sont exprimés en termes de déplacements sur la surface libre. Les composantes horizontale et verticale du mouvement sont toutes normalisées par la composante horizontale de déplacement de l'espace semi-infini homogène sans présence de la vallée. Rappelons que, dans le cas de l'espace semi-infini, le mouvement sur toute la surface libre est homogène,

avec l'amplitude normalisée égale à l'unité pour la composante horizontale et nulle pour la composante verticale. Ainsi, une valeur supérieure à l'unité signifie une amplification, tandis qu'une valeur inférieure à l'unité correspond à une atténuation.

### 4.3.2 Influence du contenu fréquentiel de l'excitation

D'abord, nous examinons l'influence de la fréquence dominante du signal incident  $f_c$  sur l'effet d'amplification du mouvement en surface. Considérons une vallée triangulaire soumise à l'incidence verticale des ondes SV (de type Ricker) de différentes fréquences dominantes :  $f_c = 1$  Hz, 2.5 Hz, 5 Hz et 7.5 Hz. Les dimensions de la vallée sont  $L = 100$  m et  $H = 40$  m, le rapport d'impédance est  $\alpha = 0.3$  (sol moyen) et la fréquence fondamentale  $f_o$  est égale à 4.4 Hz (figure 4.11). Parmi les quatre fréquences  $f_c$  choisies, la valeur  $f_c = 7.5$  Hz est considérée comme 'haute', car elle est nettement supérieure à la fréquence fondamentale de la vallée ; la valeur  $f_c = 5$  Hz est 'modérée', car elle est au voisinage de  $f_o$  et les fréquences  $f_c = 1$  Hz et 2.5 Hz sont de type 'basse' fréquence.

La figure 4.13 donne les courbes représentant la variation spatiale de la valeur de pic des composantes horizontale et verticale du mouvement sur la surface libre, ce qui fournit une image (ou une tendance) générale de l'effet d'amplification 2D le long de la surface libre. Sur cette figure, l'intervalle défini par  $|x| \leq 100$  m illustre la partie à l'intérieur de la vallée et, inversement, l'intervalle défini par  $|x| > 100$  m correspond à l'affleurement rocheux à l'extérieur de la vallée. Grâce à la symétrie géométrique de la vallée et à la verticalité de la direction de l'onde incidente, nous ne montrons que le résultat de la moitié droite.

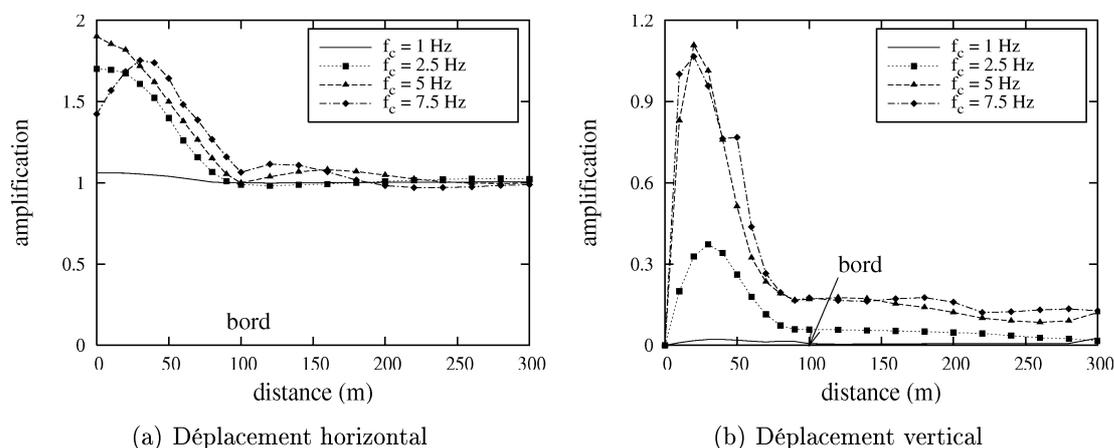


FIG. 4.13 – Effet d'amplification du mouvement en surface d'une vallée triangulaire soumise à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 pour différentes fréquences dominantes. Dimensions de la vallée :  $L = 100$  m,  $H = 40$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s.

Quelques remarques sont tirées comme suit :

*Pour la composante horizontale* : comme prévu, parmi les quatre fréquences choisies, l'effet d'amplification maximal est lié à la fréquence  $f_c = 5$  Hz, qui est la plus proche de la fréquence fondamentale  $f_o$  de la vallée. Pour les sollicitations de fréquences modérées ou basses, on observe que, plus la fréquence  $f_c$  croît, plus le mouvement horizontal est amplifié; l'amplitude du mouvement atteint sa valeur maximale au milieu de la vallée, puis elle diminue graduellement en allant vers les bords. À l'égard des sollicitations de hautes fréquences, la zone centrale n'est plus la zone la plus amplifiée; en fait, le point de l'amplitude maximale se trouve hors de cette zone. Dans tous les cas, les coefficients d'amplification varient très peu sur l'affleurement rocheux à l'extérieur de la vallée; ils prennent des valeurs au voisinage de l'unité (avec une différence maximale d'environ 10%)

*Pour la composante verticale* : comme nous l'avons indiqué dans la section 4.2, bien que le signal incident ne contienne que la composante horizontale (l'onde SV verticale), il existe un mouvement vertical sur la surface libre. Les valeurs de pic de cette composante augmentent progressivement avec la fréquence  $f_c$ , si la sollicitation est encore de type basses fréquences ( $f_c < f_o$ ). Pour les excitations de hautes fréquences, ces valeurs de pic se stabilisent et elles sont comparables avec celles de la composante horizontale. Sur l'affleurement rocheux horizontal, ces valeurs sont presque constantes.

Afin d'examiner l'influence de la fréquence dominante sur la variation temporelle et la durée du mouvement de la vallée, nous considérons la même vallée que précédemment. Sur la figure 4.14a est tracée la variation temporelle du déplacement horizontal au milieu de la vallée, pour le cas du sol moyen ( $\alpha = 0.3$ ), avec différentes fréquences :  $f_c = 1$  Hz, 3 Hz et 8.5 Hz. Sur la figure 4.14b sont dessinées des courbes similaires, mais pour le cas du sol de bonne qualité ( $\alpha = 0.5$ ), avec les fréquences :  $f_c = 2.5$  Hz, 5 Hz et 10 Hz.

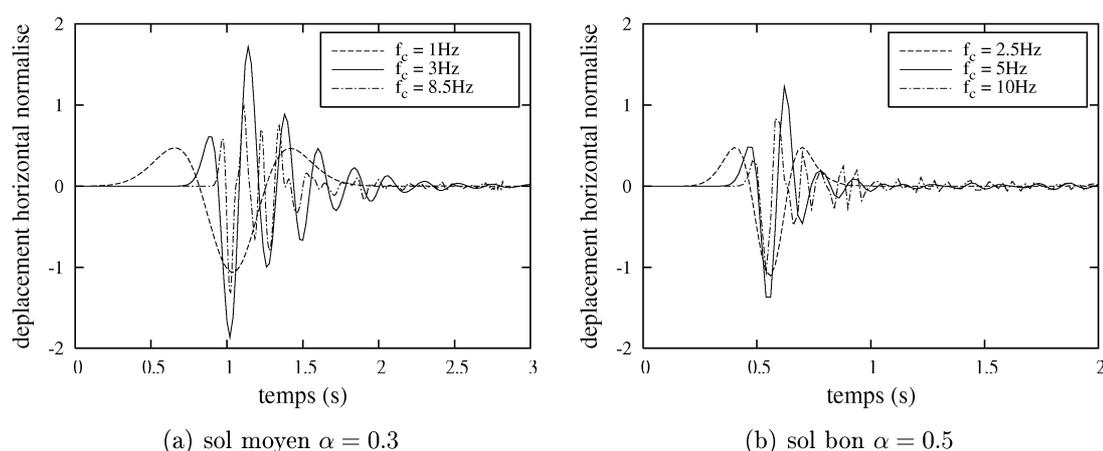


FIG. 4.14 – Mouvement en surface au milieu d'une vallée triangulaire soumise à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 pour différentes fréquences. Dimensions de la vallée :  $L = 100$  m,  $H = 40$  m; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>.

On observe, sur les figures ci-dessus, que la fréquence  $f_c$  n'affecte pas beaucoup la durée du mouvement. Par contre, cette fréquence modifie notablement la forme du signal d'origine : si  $f_c$  est petite, la forme du signal d'excitation est approximativement conservée alors que, quand  $f_c$  est élevée, la variation temporelle du mouvement en surface devient très compliquée et complètement différente de celle du signal d'origine. En effet, lorsque l'excitation est riche en hautes fréquences, elle contient des ondes dont la longueur est du même ordre que les dimensions de la vallée. Ainsi, l'effet de diffraction de ces ondes aux bords de la vallée est plus marqué et il peut générer plusieurs modes d'ondes de surface, ce qui implique un mouvement en surface temporellement et spatialement complexe.

En ce qui concerne le mouvement différentiel, revenons aux figures 4.3 et 4.4, où l'on trouve que le mouvement en surface de la vallée dans le cas de 'hautes fréquences' (figure 4.4), avec l'existence de l'onde Rayleigh de second mode, est nettement plus complexe que celui dans le cas de 'basses fréquences' (figure 4.3). Ainsi, l'effet du mouvement différentiel est plus accentué dans le cas des excitations riches en hautes fréquences, ce qui constitue un facteur d'aggravation du potentiel destructeur du séisme.

En somme, le contenu fréquentiel de l'excitation (représenté par sa fréquence dominante  $f_c$ ) joue un rôle primordial sur la réponse sismique de la vallée. Ce facteur affecte essentiellement l'amplitude du mouvement en surface. La dépendance en fréquence de la réponse sismique de la vallée est généralement complexe, mais on peut tirer quelques conclusions générales : l'effet d'amplification est maximal quand la fréquence dominante  $f_c$  est proche de la fréquence fondamentale de la vallée. Pour les sollicitations de fréquences modérées et basses, la zone centrale est la plus amplifiée ; dans les cas des sollicitations de hautes fréquences, les points de l'amplitude maximale se trouvent hors de cette zone. Plus  $f_c$  est élevée, plus les effets de la composante verticale et du mouvement différentiel sont accentués.

### 4.3.3 Influence du contraste d'impédance sédiment/substratum

Nous commençons par l'étude de l'influence du contraste d'impédance sur l'effet d'amplification. Considérons une vallée triangulaire, de dimensions  $L = 100$  m et  $H = 40$  m, sous l'excitation de type Ricker ( $f_c = 2.5$  Hz). Le rapport d'impédance prend plusieurs valeurs :  $\alpha = 0.5, 0.3$  et  $0.1$  pour couvrir une large gamme de sols (de bonne qualité jusqu'à une mauvaise qualité). Les figures 4.15a et 4.15b illustrent la variation spatiale de la valeur de pic des composantes horizontale et verticale du mouvement sur la surface libre.

On observe une tendance générale de l'effet d'amplification, en fonction du contraste d'impédance : à l'intérieur de la vallée, le mouvement horizontal et aussi vertical est plus amplifié quand le contraste d'impédance est plus net ( $\alpha$  diminue). Sur l'affleurement rocheux à l'extérieur, le mouvement est similaire à celui de l'espace semi-infini (l'amplitude du déplacement horizontal est proche de l'unité avec une différence maximale de 6% ; l'amplitude du déplacement vertical maximal est égal à 10% de l'amplitude du déplacement horizontale)

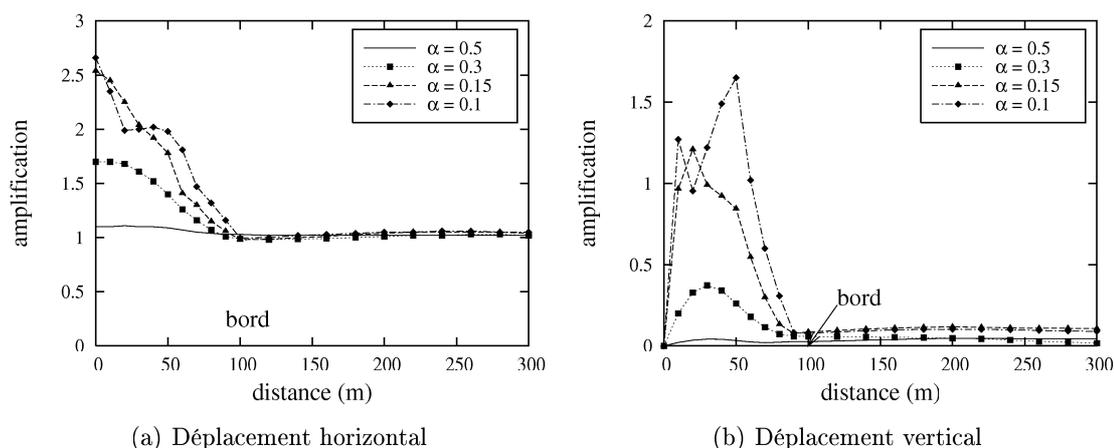
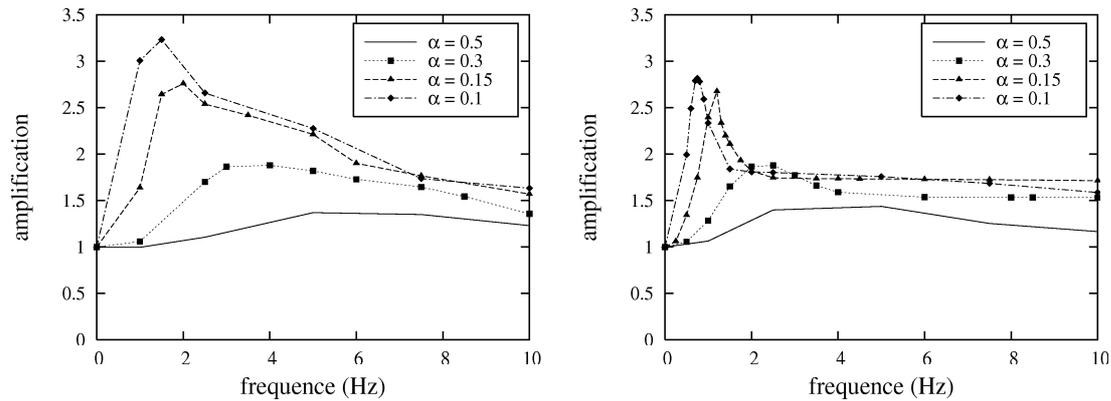


FIG. 4.15 – Effet d’amplification du mouvement en surface libre d’une vallée triangulaire soumise à l’incidence verticale des ondes SV de type Ricker d’ordre 2 ( $f_c = 2.5$  Hz) pour différentes valeurs du coefficient d’impédance  $\alpha$ . Dimensions de la vallée :  $L = 100$  m,  $H = 40$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>.

Cependant, il faut garder à l’esprit que la modification du rapport d’impédance correspond au changement de la fréquence fondamentale  $f_o$  de la vallée, tandis que l’effet d’amplification, comme montré précédemment, dépend fortement du rapport de la fréquence dominante  $f_c$  de l’excitation sur la fréquence fondamentale  $f_o$ . Ainsi, une question peut se poser ici : la tendance ci-dessus est-elle encore valable pour d’autres valeurs de  $f_c$  ? Pour répondre à cette question, nous reprenons l’exemple précédent et faisons varier la valeur de  $f_c$ . La figure 4.16a donne la variation, en fonction de  $f_c$ , de la valeur maximale de l’amplitude du mouvement horizontal en surface de la vallée, sur toute la surface libre. La figure 4.16b présente des courbes similaires, mais pour le cas 1D équivalent d’une couche de sol d’épaisseur  $H = 40$  m. Le résultat montré sur ces figures prouve que, quelle que soit la configuration du remplissage sédimentaire (1D ou 2D) et pour toutes les sources d’excitation, les sols médiocres amplifient plus le mouvement en surface que les sols de qualité mécanique meilleure.

Afin d’illustrer l’influence du contraste d’impédance sur la variation temporelle et la durée du mouvement de la vallée, les déplacements horizontaux, en fonction du temps, en deux points,  $x/L = 0$  (au milieu) et  $x/L = 0.5$ , sont dessinés sur la figure 4.17. Il est clair que si le sol est de qualité médiocre, la durée du mouvement est considérablement prolongée et le mouvement en surface est significativement modifié, par rapport à celui du signal d’origine. La complexité du mouvement en surface conduit, bien entendu, à un mouvement différentiel notable.



(a) Cas 2D d'une vallée triangulaire  $L = 100$  m,  $H = 40$  m  
 (b) Cas 1D d'une couche horizontale  $H = 40$  m

FIG. 4.16 – Coefficient d'amplification maximal sur la surface libre. Caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>.

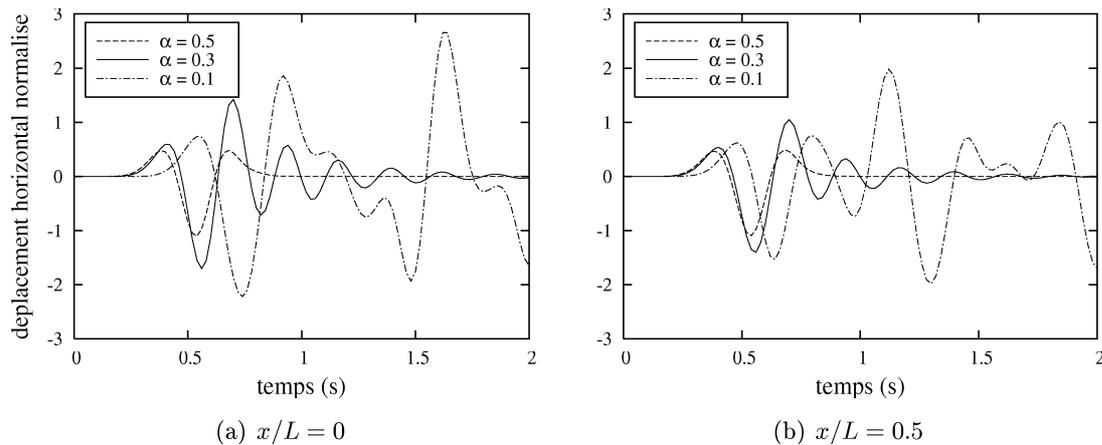


FIG. 4.17 – Mouvement sur la surface d'une vallée triangulaire soumise à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2.5$  Hz). Dimensions de la vallée :  $L = 100$  m,  $H = 40$  m; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>.

Ainsi, le contraste d'impédance a une influence importante sur la réponse sismique des vallées alluviales, en particulier sur l'effet d'amplification. En fait, plus ce contraste est marquant, plus la proportion d'énergie des ondes de volume alors que des ondes de surface piégées dans la vallée est importante et la radiation de ces ondes vers l'infini est faible. En conséquence, lorsque ce contraste d'impédance est net, l'effet d'amplification est souligné, la durée est allongée et le mouvement en surface devient complexe.

### 4.3.4 Influence de la profondeur de la vallée

Cette influence est évaluée en faisant varier la profondeur et en conservant la largeur de la vallée. La figure 4.18 montre les répartitions spatiales des valeurs de pic des déplacements sur la surface libre d'une vallée triangulaire, correspondant à deux profondeurs assez différentes  $H = 40$  m et  $H = 100$  m (la demi-largeur de la vallée est fixe  $L = 100$  m, la fréquence dominante de l'excitation est  $f_c = 2.5$  Hz et le sol est de moyenne qualité :  $\alpha = 0.3$ ). La figure 4.19 présente des courbes similaires, mais dans le cas du sol faible ( $\alpha = 0.15$ ).

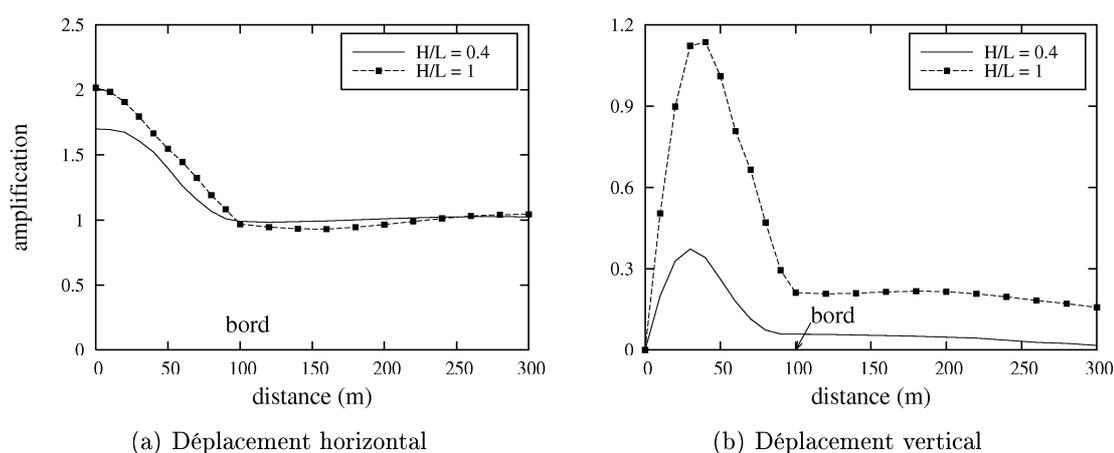


FIG. 4.18 – Effet d'amplification du mouvement en surface de vallées triangulaires, de différentes profondeurs  $H$ , soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2.5$  Hz). Demi-largeur de la vallée  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du **sol moyen** :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s.

*Considérons d'abord la composante horizontale* : sur l'affleurement horizontal à l'extérieure de la vallée, l'effet d'amplification est toujours semblable à celui de l'espace semi-infini (avec un écart maximal de 7%). Sur la surface à l'intérieur de la vallée, la vallée profonde amplifie le mouvement plus que la vallée peu encaissée dans le cas du sol moyen ; au contraire, elle allège l'effet d'amplification par rapport à la vallée peu encaissée, dans le cas du sol faible. L'explication est cependant simple : en utilisant les formules (4.3) et (4.4b) pour calculer la fréquence fondamentale de la vallée, dans le cas du sol moyen  $\alpha = 0.3$ , on a  $f_o = 4.4$  Hz si  $H = 40$  m, et  $f_o = 3.45$  Hz si  $H = 100$  m. Comme la fréquence dominante de l'excitation  $f_c = 2.5$  Hz est plus proche de 3.45 Hz que de 4.4 Hz, cette excitation amplifie le mouvement de la vallée profonde plus que celui de la vallée peu encaissée. En revanche, dans le cas du sol faible ( $\alpha = 0.15$ ), on a  $f_o = 2.15$  Hz si  $H = 40$  m, et  $f_o = 1.73$  Hz si  $H = 100$  m. Dans ce cas, 2.15 Hz est plus proche de 2.5 Hz que de 1.73 Hz, d'où le mouvement de la vallée peu encaissée est plus amplifié que celui de la vallée profonde. Ainsi, encore une fois, on trouve que l'effet d'amplification dépend fortement du rapport de la fréquence dominante des sollicitations à la fréquence fondamentale de la vallée  $f_c/f_o$ .

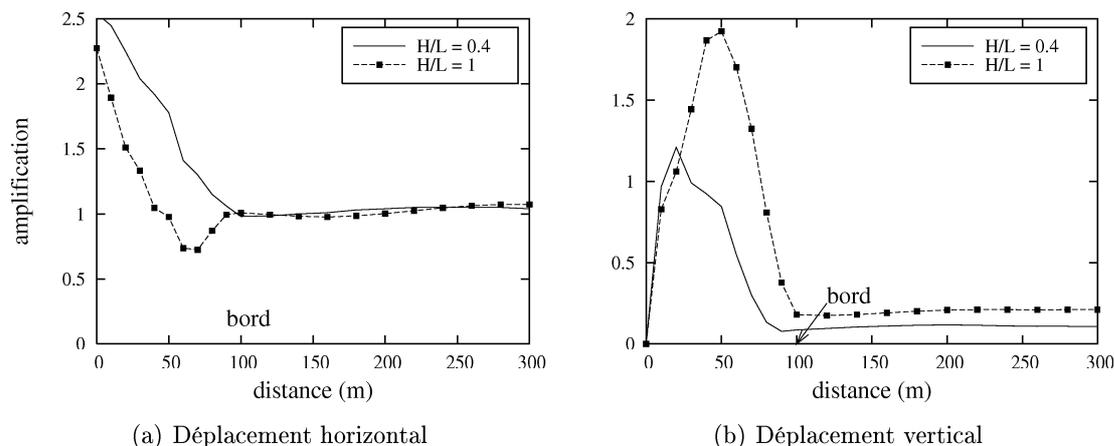


FIG. 4.19 – Effet d'amplification du mouvement en surface de vallées triangulaires, de différentes profondeurs  $H$ , soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2.5$  Hz). Demi-largeur de la vallée  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du **sol faible** :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 225$  m/s.

*Examinons ensuite la composante verticale* : du fait de l'obliquité de l'interface souterraine entre la sédimentation et le substratum, les ondes SV réfractées arrivent à la surface libre sous des angles d'incidence différentes de  $90^\circ$ . Plus l'interface souterraine est raide, c'est-à-dire plus la vallée est profonde, plus la composante verticale de ces ondes réfractées est importante. C'est pour cette raison que, dans les deux cas considérés, le mouvement vertical est toujours plus important pour les vallées profondes. La composante verticale, dans le cas des vallées profondes, peut atteindre une valeur comparable à celle de la composante horizontale ( $u_{ymax} = 1.92$  et  $u_{xmax} = 2.27$  dans le cas du sol faible  $\alpha = 0.15$ ).

En ce qui concerne la durée du mouvement, le résultat montré sur la figure 4.20, représentant les variations temporelles du mouvement au milieu de la vallée ( $\alpha = 0.15$ ,  $f_c = 1$  Hz), suggère que la vallée profonde allonge la durée du signal incident plus que la vallée peu encaissée.

En bref, la profondeur joue un rôle aussi important sur le comportement sismique de la vallée, car elle affecte directement sa fréquence fondamentale. En conséquence, elle modifie la relation entre la fréquence dominante de l'excitation et la fréquence fondamentale de la vallée. En outre, l'effet de la composante verticale et la prolongation de la durée sont prononcés pour des vallées profondes.

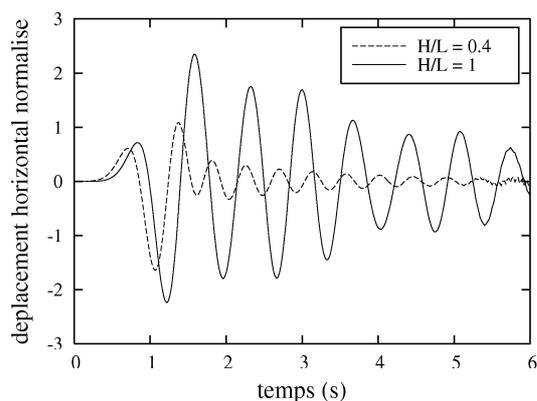


FIG. 4.20 – Mouvement horizontal au milieu de vallées triangulaires, de différentes profondeurs  $H$ , soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 1$  Hz). Demi-largeur de la vallée :  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 225$  m/s.

#### 4.3.5 Influence de la largeur de la vallée

Par l'intermédiaire de la formule (4.4b), on sait que la fréquence fondamentale de la vallée dépend du rapport de forme  $H/L$  : plus ce rapport est faible, plus le décalage de la fréquence fondamentale 2D de la vallée par rapport à celle 1D correspondante est réduit. Ainsi, en fixant la profondeur et en faisant varier la largeur de la vallée, on modifie la fréquence de résonance  $f_o$  de la vallée. Cela signifie que la variation de la demi-largeur  $L$  fait changer le rapport de la fréquence dominante de l'excitation à la fréquence fondamentale  $f_c/f_o$  ; par conséquent, l'effet d'amplification du mouvement en surface sera modifié. Cet argument est clairement montré sur la figure 4.21, qui donne les répartitions spatiales des valeurs de pic des déplacements, sur la surface libre d'une vallée triangulaire, correspondant à différentes demi-largeurs :  $L = 40$  m, 100 m, 200 m et 300 m (la profondeur de la vallée est fixe  $H = 40$  m, la fréquence dominante de l'excitation est  $f_c = 2.5$  Hz et le sol est de moyenne qualité :  $\alpha = 0.3$ ). En effet, en utilisant les formules (4.3) et (4.4b) pour calculer les fréquences fondamentales  $f_o$ , on obtient les valeurs 8.63 Hz, 4.4 Hz, 3.25 Hz et 3 Hz correspondant, respectivement, aux demi-largeurs 40 m, 100 m, 200 m et 300 m. Comme la fréquence  $f_o = 3$  Hz, parmi ces quatre fréquences, est la plus proche de la fréquence dominante de l'excitation  $f_c = 2.5$  Hz, la vallée allongée  $L = 300$  m est la plus amplifiée. En revanche, l'effet d'amplification est minimal dans le cas de la vallée étroite ( $L = 40$  m), où  $f_o$  est nettement supérieure à  $f_c$ .

Dans la section 4.2, nous avons abordé deux comportements possibles de la vallée : la résonance 1D + la propagation des ondes de surface (si la vallée est allongée) et la résonance globale 2D (si la vallée est profonde). D'où, pour les vallées suffisamment larges, le mouvement dans la zone centrale est principalement dominé par le phénomène de résonance

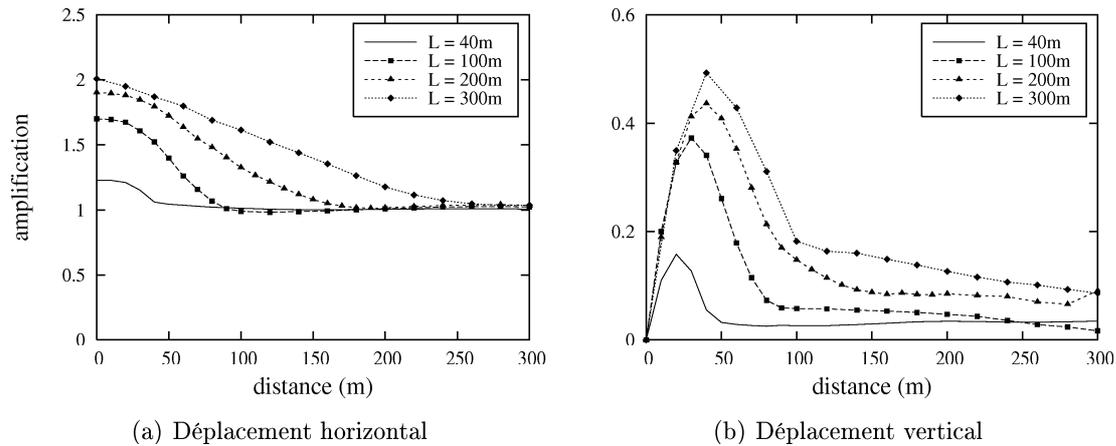


FIG. 4.21 – Effet d'amplification du mouvement en surface de vallées triangulaires, de différentes demi-largeurs  $L$ , soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2.5$  Hz). Profondeur de la vallée  $H = 40$  m; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s.

1D. Pour illustrer cette idée, les variations temporelles du déplacement horizontal au milieu de la vallée ( $x/L = 0$ ), pour différentes largeurs, et les spectres de Fourier associés, sont tracés (figure 4.22a et 4.22b). On trouve visiblement que, plus la vallée est large, plus la réponse au milieu de la vallée s'approche de celle 1D correspondante.

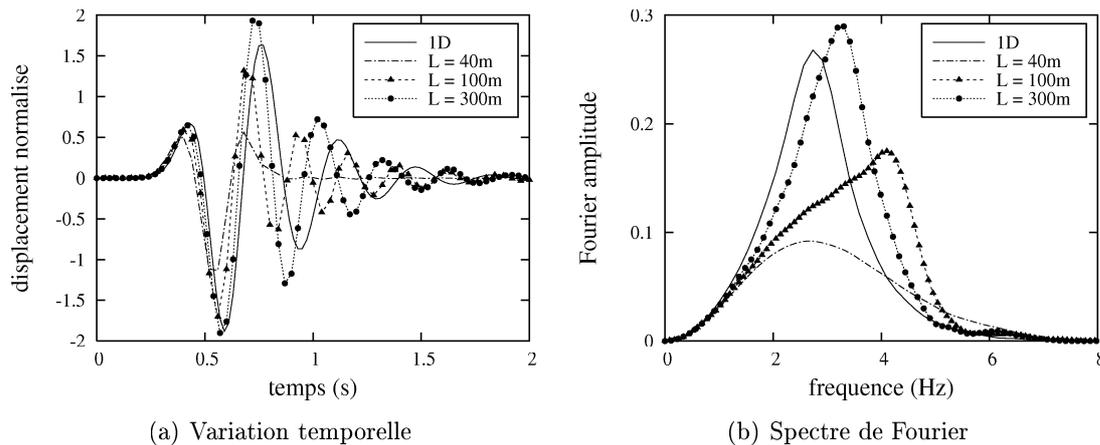


FIG. 4.22 – Mouvement horizontal au milieu de vallées triangulaires, de différentes demi-largeurs  $L$ , soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2.5$  Hz). Profondeur de la vallée  $H = 40$  m; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s.

Ainsi, l'influence de la largeur sur le mouvement en surface de la vallée est significative, car ce facteur décide du type de comportement de la vallée, ainsi que de sa fréquence fondamentale. En principe, on peut utiliser l'approche 1D pour évaluer le mouvement en surface de la zone centrale de la vallée, et seulement cette zone, pour des vallées suffisamment larges. La notion 'suffisamment large' est cependant assez ambiguë, car une vallée est considérée comme 'large' ou 'étroite' non seulement par le rapport de forme  $H/L$ , mais aussi par le contraste d'impédance sédiment/substratum (figure 4.8).

### 4.3.6 Influence de la forme de la vallée

Pour évaluer l'influence de la forme géométrique de la vallée, nous examinons des vallées de même dimensions et caractéristiques mécaniques, mais de différentes formes. La forme d'une vallée peut être diverse, mais on distingue des configurations de base : triangle, demi-ellipse, rectangle (figure 4.23).

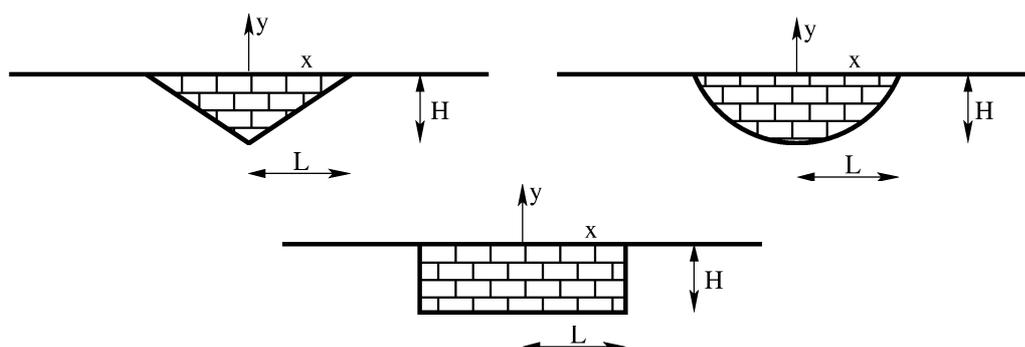


FIG. 4.23 – Trois configurations de base des vallées : triangle, demi-ellipse, rectangle

La figure 4.24 illustre les répartitions spatiales des pics de la composante horizontale, correspondant à trois formes (dimensions de la vallée :  $L = 100$  m et  $H = 40$  m, rapport d'impédance :  $\alpha = 0.3$ , fréquence dominante de l'excitation :  $f_c = 2.5$  Hz). La figure 4.25 présente des courbes similaires, mais pour des vallées profondes ( $H = 100$  m), les autres paramètres étant les mêmes qu'auparavant. Sur ces deux figures, on observe des tendances générales : à l'égard de la composante horizontale, les vallées triangulaires sont les moins amplifiées, les vallées rectangulaires sont les plus excitées. L'écart entre les valeurs de pic, correspondant à ces deux cas, va jusqu'à 35%. L'effet d'amplification des vallées demi-elliptiques (ou demi-circulaires) est au niveau intermédiaire entre ces deux cas extrêmes. On a aussi obtenu des résultats similaires dans le cas des vallées vides, sans présence du sédiment, traitées dans le chapitre précédent. Cela suggère que plus la pente 'moyenne' de l'interface souterraine sédiment/substratum est importante, plus l'effet d'amplification est aggravé. Quant à la composante verticale, on n'observe pas de différence notable entre les résultats liés à différentes formes.

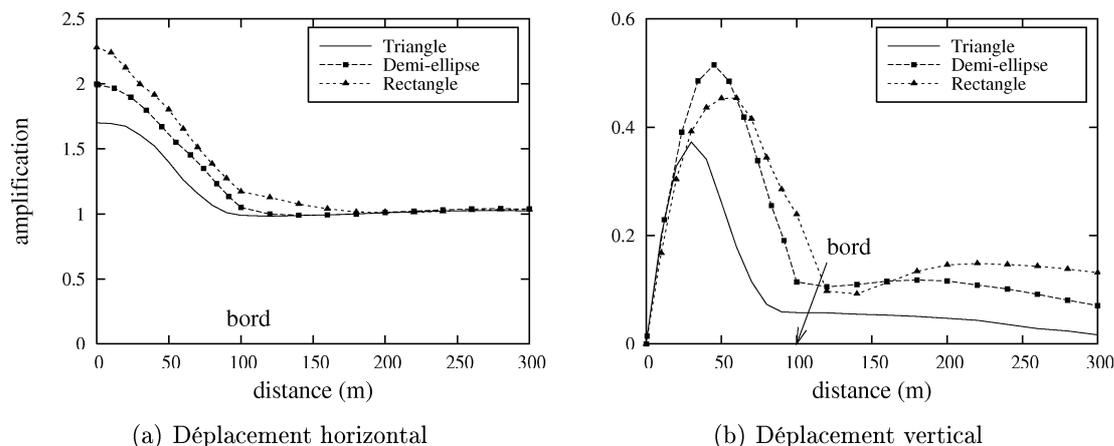


FIG. 4.24 – Effet d'amplification du mouvement en surface de vallées **peu encaissées** soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2.5$  Hz). Différentes formes sont étudiées : triangle, demi-ellipse et rectangle. Dimensions de la vallée  $H = 40$  m,  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s.

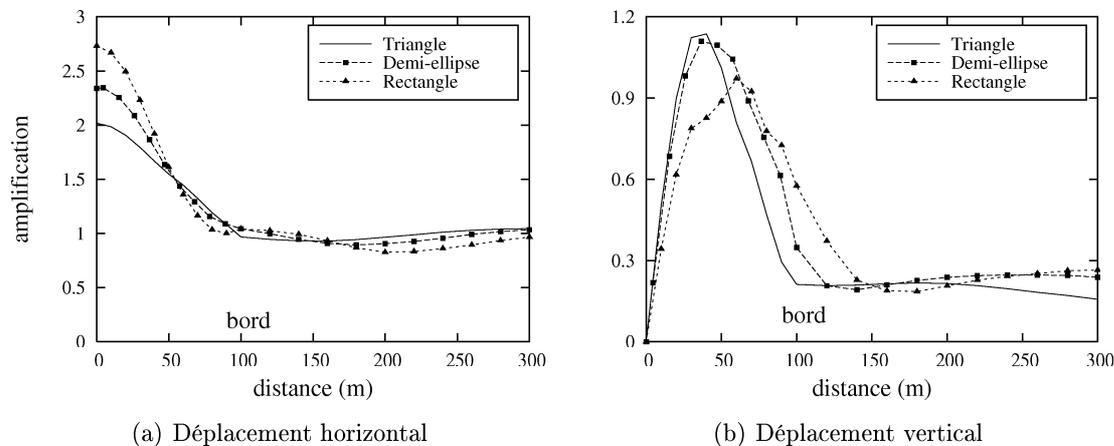


FIG. 4.25 – Effet d'amplification du mouvement en surface de vallées **profondes** soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2.5$  Hz). Différentes formes sont étudiées : triangle, demi-cercle et rectangle. Dimensions de la vallée  $H = 100$  m,  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s.

Pour étudier l'influence de la forme sur la durée du mouvement, les variations temporelles du déplacement horizontal au milieu de la vallée, liées à ces trois formes, et leurs spectres de Fourier sont tracés (figure 4.26a et 4.26b, cas de la vallée peu profonde). On découvre que la forme de la vallée n'affecte pas beaucoup la durée, mais elle peut modifier notablement le spectre du mouvement.

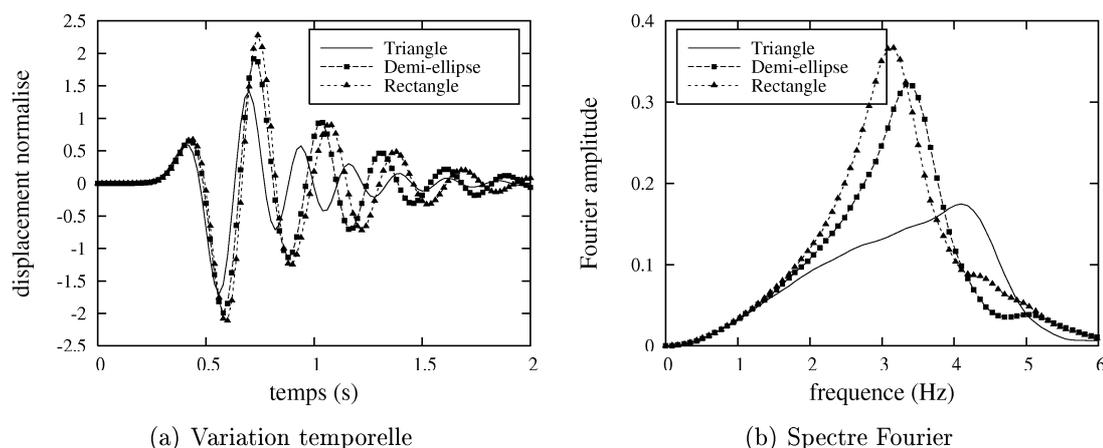


FIG. 4.26 – Mouvement horizontal au milieu de vallées peu encaissées, de différentes formes, soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2.5$  Hz). Dimensions de la vallée  $H = 40$  m,  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s.

Ainsi, la forme de la vallée peut modifier sensiblement l'effet d'amplification et le spectre du mouvement. En général, la vallée rectangulaire est la plus critique ; les autres formes de la vallée, dont la pente 'moyenne' de l'interface souterraine sédiment/substratum est moins raide, sont moins amplifiées.

#### 4.3.7 Influence de l'épaisseur de la sédimentation

En réalité, il existe des cas où la vallée n'est pas complètement remplie par la sédimentation (figure 4.27). La réponse sismique des vallées partiellement remplies est évidemment différente de celle des vallées pleines. Le but de cette partie est donc d'étudier l'influence de l'épaisseur du remplissage sédimentaire sur le comportement sismique de la vallée.

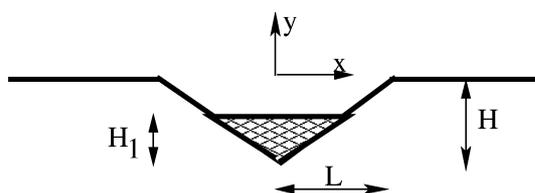


FIG. 4.27 – Vallée alluviale partiellement remplie

Généralement, on peut supposer que le mouvement de la vallée résulte de la superposition de deux effets différents : l'effet de bassin, dû au remplissage sédimentaire, et l'effet topographique, dû à la géométrie 2D de l'affleurement rocheux. Cela signifie que l'effet topographique influence la réponse du remplissage sédimentaire et, vice-versa, la présence du remplissage sédimentaire affecte le mouvement de l'affleurement rocheux. Mais comment

influent-ils l'un sur l'autre ?

Considérons une vallée triangulaire de dimensions  $H = 40$  m et  $L = 100$  m et de rapport d'impédance  $\alpha = 0.3$ . L'épaisseur du remplissage sédimentaire prend successivement les valeurs  $H_1 = 0$  m, 10 m, 20 m, 30 m et 40 m, parmi lesquelles la valeur  $H_1 = 40$  m correspond au cas d'une vallée pleine, et la valeur  $H_1 = 0$  m est relative au cas d'une vallée vide. Les figures 4.28 et 4.29 présentent les répartitions spatiales des pics de déplacements horizontal et vertical, correspondant à différentes épaisseurs du remplissage, respectivement pour les excitations de Ricker :  $f_c = 2.5$  Hz et  $f_c = 7.5$  Hz.

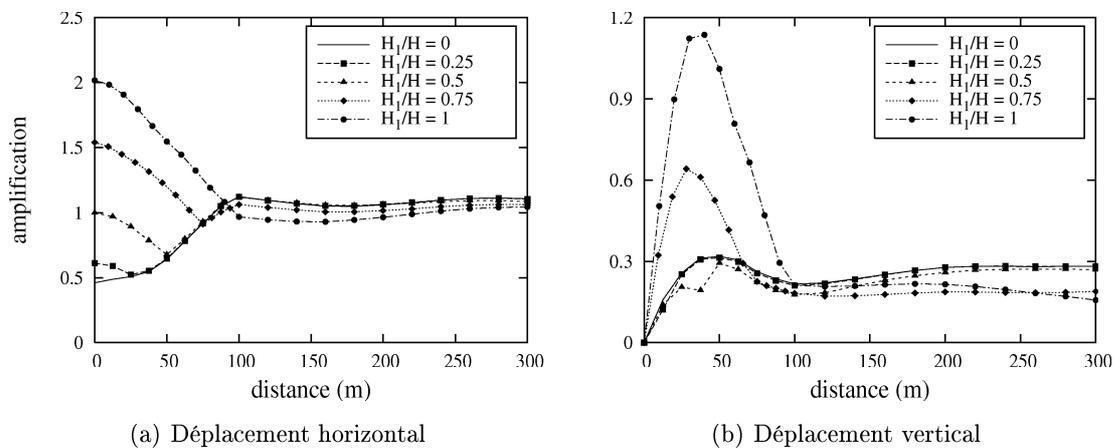


FIG. 4.28 – Effet d'amplification du mouvement en surface de vallées partiellement remplies soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 de **fréquences modérées** ( $f_c = 2.5$  Hz). Dimensions de la vallée :  $H = 40$  m,  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s.

Examinons d'abord l'influence du remplissage sédimentaire sur le mouvement de l'affleurement rocheux. On découvre clairement que le mouvement sur l'affleurement rocheux est très proche de celui d'une vallée vide ( $H_1 = 0$  m), tant en composante horizontale qu'en composante verticale. Cette remarque est valable non seulement pour les points situés à la surface horizontale, mais aussi pour les points sur la pente de la vallée. Le résultat, présenté sur la figure 4.30b, renforce la validité de cette constatation. En fait, on trouve que la variation temporelle du mouvement au point  $x/L = 0.75$  est presque inchangée, quelle que soit l'épaisseur du remplissage sédimentaire ( $H_1 = 0$  m, 20 m ou 30 m). Ainsi, cette constatation nous permet de conclure que la présence du remplissage sédimentaire affecte faiblement le mouvement de l'affleurement rocheux.

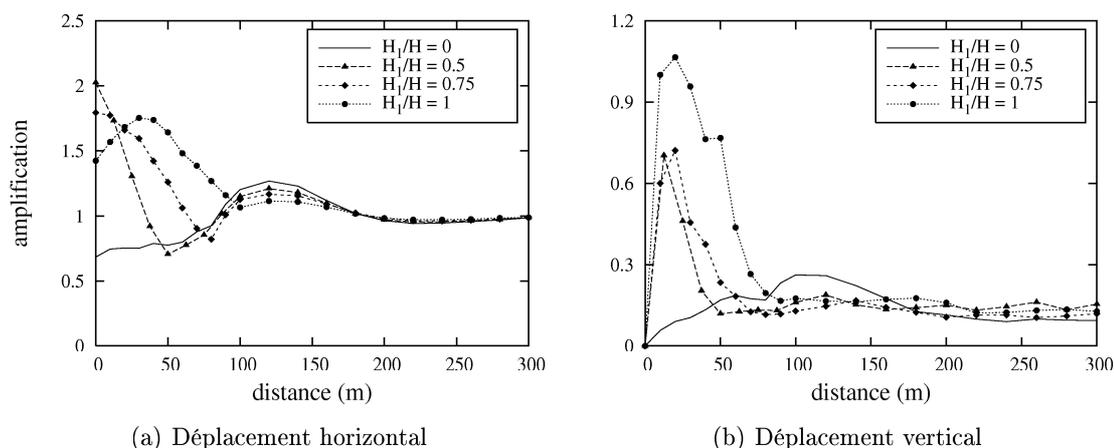


FIG. 4.29 – Effet d’amplification du mouvement en surface de vallées partiellement remplies soumises à l’incidence verticale des ondes SV de type Ricker d’ordre 2 de **hautes fréquences** ( $f_c = 7.5$  Hz). Dimensions de la vallée :  $H = 40$  m,  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s.

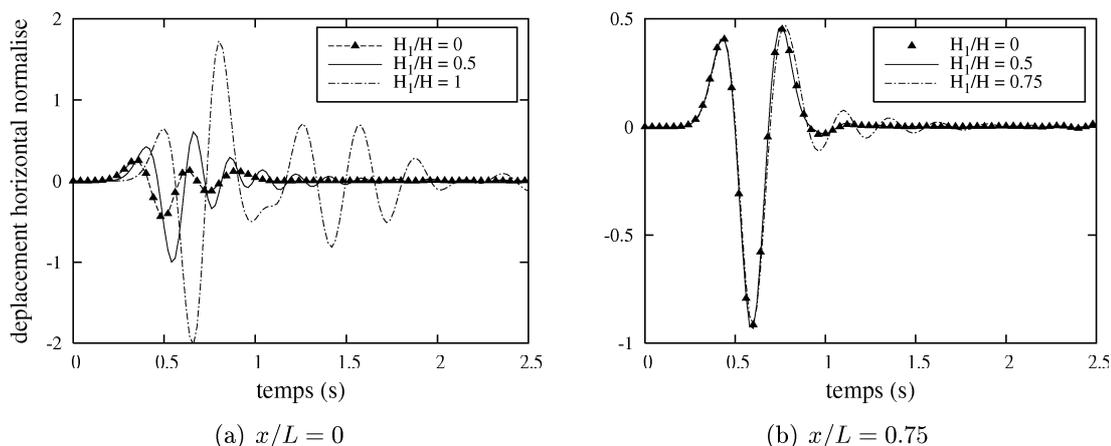


FIG. 4.30 – Mouvement en surface de vallées partiellement remplies soumises à l’incidence verticale des ondes SV de type Ricker ( $f_c = 2.5$  Hz). Dimensions de la vallée :  $H = 40$  m,  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s.

Considérons maintenant l’importance de l’effet topographique sur la réponse du remplissage sédimentaire. On a vu dans le chapitre précédent, portant sur l’effet de site topographique, que le mouvement à la base d’une vallée vide est souvent atténué. Les résultats illustrés par les figures 4.28 et 4.29 montrent que l’effet d’amplification du mouvement sur la surface libre du remplissage sédimentaire dépend de l’épaisseur de la sédimentation et d’autres paramètres (fréquence dominante de l’excitation, contraste d’impédance). Si l’épaisseur du remplissage est faible, ou plus précisément, si l’effet d’amplification dans le

remplissage sédimentaire n'est pas suffisamment fort, il ne peut pas compenser l'effet d'atténuation, dû à la condition topographique locale. C'est pour cette raison que l'on observe, dans quelques situations, l'atténuation du mouvement en surface d'une partie ou de la totalité du remplissage sédimentaire. Ainsi, l'effet topographique a une influence substantielle sur la réponse du remplissage sédimentaire.

*Pour la composante horizontale du mouvement* : On aperçoit que, dans le premier exemple (figure 4.28,  $f_c = 2.5$  Hz), plus l'épaisseur du remplissage est élevée, plus le mouvement en surface est amplifié. Mais cette observation n'est plus valable pour le second exemple (figure 4.29,  $f_c = 7.5$  Hz). Afin d'expliquer ce résultat, il faut d'abord calculer la fréquence fondamentale du remplissage sédimentaire, en tenant compte des effets 2D par les formules (4.3) et (4.4b). On obtient, successivement, les valeurs  $f_c = 17$  Hz, 8.6 Hz, 5.7 Hz et 4.4 Hz, correspondant aux épaisseurs  $H_1 = 10$  m, 20 m, 30 m, 40 m. Dans le premier exemple, on trouve que  $2.5 < 4.4 < 5.7 < 8.6 < 17$ , d'où l'effet d'amplification du mouvement sur la surface du remplissage sédimentaire est maximal pour la vallée plaine ( $H_1 = 40$  m) et minimal pour la vallée peu remplie ( $H_1 = 10$  m). Dans le second exemple, on obtient  $4.4 < 5.7 < 7.5 < 8.6 < 17$ , donc le coefficient d'amplification est maximal pour le cas de l'épaisseur  $H_1 = 20$  m, où la fréquence fondamentale correspondante est la plus proche de la fréquence dominante de l'excitation.

*Pour la composante verticale du mouvement* : sur les figures 4.28 et 4.29, on découvre que la grandeur de cette composante croît avec l'épaisseur du remplissage, c'est-à-dire plus le remplissage est épais, plus la valeur de la composante verticale est importante. Cette constatation est conforme à la conclusion tirée dans la partie 4.3.4 (plus la vallée est profonde, plus le mouvement vertical est notable).

En ce qui concerne la durée du mouvement, elle est plus longue si le remplissage sédimentaire est plus épais (figure 4.30a)

Pour conclure, la géométrie 2D de l'affleurement rocheux a une influence considérable sur la réponse sismique des vallées partiellement remplies. Le comportement de ces vallées dépend à la fois de l'effet de bassin et de l'effet topographique. Mais l'effet de bassin semble plus prépondérant que l'effet topographique, sauf dans le cas des vallées peu remplies où l'effet d'amplification dans le remplissage ne peut pas compenser l'effet d'atténuation, dû à la topographie de l'affleurement rocheux.

### 4.3.8 Effet multicouche de la sédimentation

Jusqu'à présent, nous n'avons traité que des exemples dans lesquels la sédimentation est homogène. En réalité, la stratigraphie multicouche de la sédimentation est aussi fréquemment rencontrée. Évidemment, cette hétérogénéité verticale peut affecter considérablement le mouvement sismique en surface de la vallée. Dans cette partie, nous essayons d'illustrer l'influence importante de la stratigraphie multicouche et d'insister sur la nécessité de la prendre en compte, dans les calculs, des effets de site 2D.

Dans les exemples suivants, nous examinons le cas simple d'une vallée rectangulaire,

$H = 60$  m et  $L = 100$  m, soumise à l'incidence verticale de l'onde SV de type Ricker ( $f_c = 2$  Hz). La sédimentation est constituée de trois couches horizontales de même épaisseur ( $h = 20$  m), de mêmes caractéristiques mécaniques  $\nu_s$  et  $\rho_s$ , mais de différentes raideurs (figure 4.31). Trois exemples sont traités :

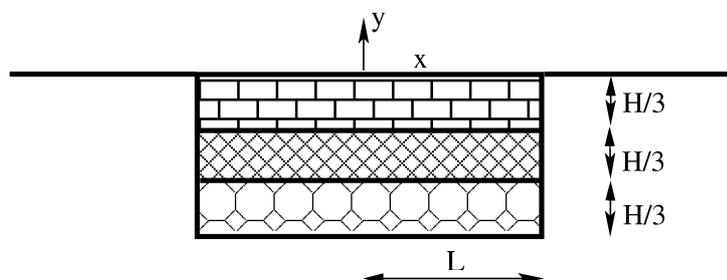


FIG. 4.31 – Vallée alluviale rectangulaire de trois couches

**Exemple 1 :** nous considérons deux cas, l'un avec la sédimentation multicouche et l'autre avec la sédimentation homogène. Pour le premier cas, les raideurs des couches diminuent de bas en haut : la couche du fond est constituée d'un sol de bonne qualité ( $\alpha = 0.5$ ), le sol de la couche en surface est faible ( $\alpha = 0.15$ ) et la couche au milieu a une raideur intermédiaire :  $\alpha = (0.5 + 0.15)/2 = 0.325$ . Pour le second cas, le sol est de qualité moyenne ( $\alpha = 0.325$ ). La figure 4.32 présente les répartitions spatiales des pics des composantes horizontale et verticale du mouvement en surface pour ces deux cas. Le résultat montre clairement que l'effet d'amplification du cas 'hétérogène' est plus remarqué que celui du cas 'homogène'.

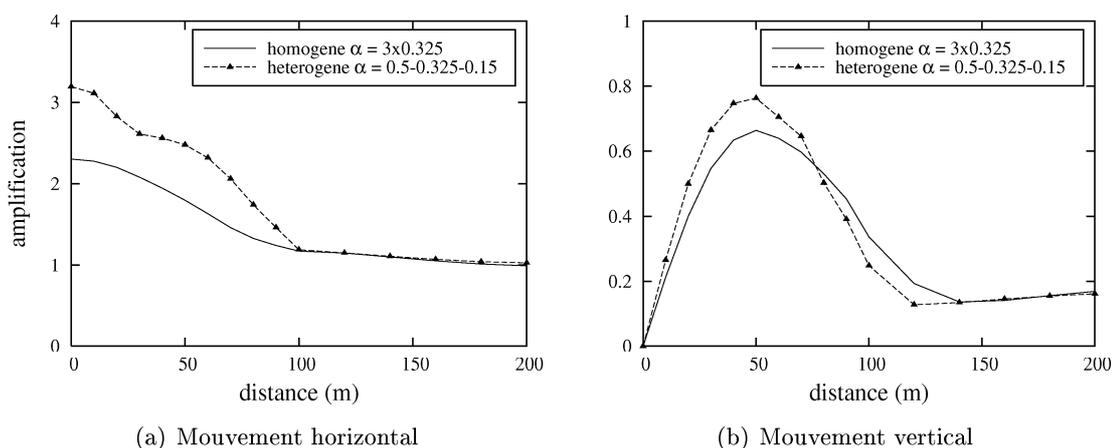


FIG. 4.32 – Exemple 1 : Effet d'amplification du mouvement en surface de vallées rectangulaires multicouches, soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2$  Hz). Dimensions de la vallée :  $H = 60$  m,  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>.

**Exemple 2 :** la sédimentation multicouche est constituée d'une couche faible ( $\alpha = 0.15$ ) entre deux couches de qualité moyenne ( $\alpha = 0.325$ ). Le sol de la sédimentation homogène est de qualité moyenne ( $\alpha = 0.325$ ). Le résultat sur la figure 4.33 montre également que, dans le cas 'hétérogène', le mouvement en surface est plus amplifié que celui du cas 'homogène' correspondant.

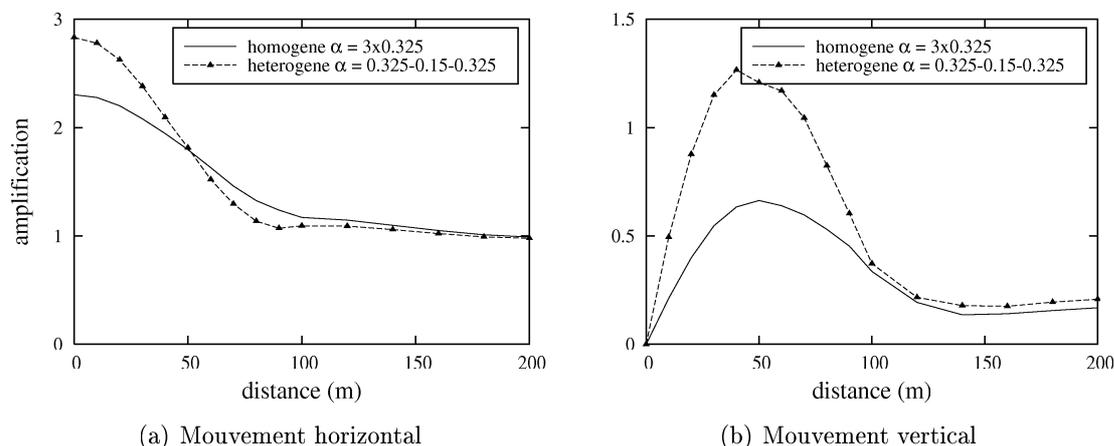


FIG. 4.33 – Exemple 2 : Effet d'amplification du mouvement en surface de vallées rectangulaires multicouches, soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2$  Hz). Dimensions de la vallée :  $H = 60$  m,  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>.

**Exemple 3 :** la sédimentation multicouche est constituée d'une couche moyenne ( $\alpha = 0.325$ ) entre deux couches faibles ( $\alpha = 0.15$ ). Le sol de la sédimentation homogène est faible ( $\alpha = 0.15$ ). Sur la figure 4.34, on n'observe pas une différence considérable entre les deux cas, mais l'effet d'amplification du cas 'hétérogène' est encore plus critique que celui du cas 'homogène' correspondant.

En somme, l'hétérogénéité verticale des caractéristiques mécaniques de la sédimentation peut avoir un impact significatif sur la réponse sismique en surface de la vallée. Sa prise en compte dans les modèles de calculs des effets de site 2D est donc indispensable.

#### 4.3.9 Effet de la saturation en eau

Dans cette partie, nous étudions le comportement sismique des vallées remplies par des sols saturés d'eau. Pour modéliser le remplissage sédimentaire, des éléments finis 'saturés', adaptés à la formulation 'u-p' (section 2.2.2), avec la pression interstitielle comme troisième degré de liberté, sont utilisés. Le substratum rocheux est supposé imperméable et donc modélisé par des éléments frontières 'secs' (section 1.3).

Les caractéristiques mécaniques du substratum et du sédiment sont les mêmes que celles utilisées dans les exemples précédents, sauf que la masse spécifique du sédiment prend une

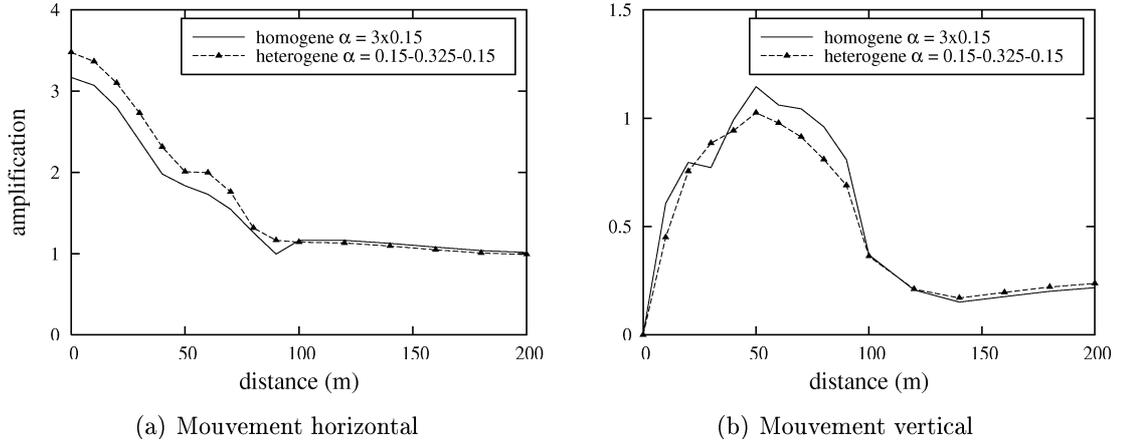


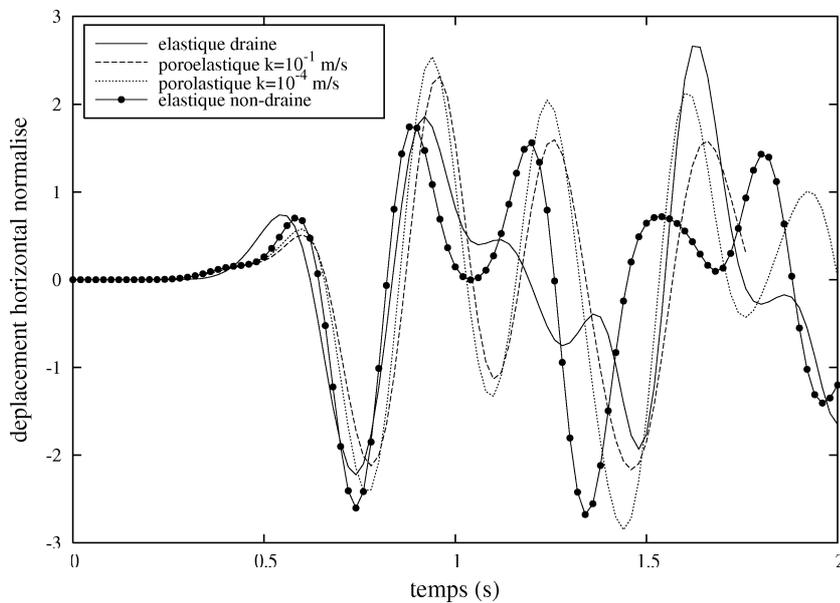
FIG. 4.34 – Exemple 3 : Effet d'amplification du mouvement en surface des vallées rectangulaires multicouches, soumises à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2$  Hz). Dimensions de la vallée :  $H = 60$  m,  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>.

valeur moyenne des sols saturés :  $\rho_s = 2000$  kg/m<sup>3</sup>. En outre, pour un sol saturé, il existe quatre nouveaux paramètres matériels : la porosité  $n$ , le coefficient de Biot  $\alpha$ , le module de Biot  $M$  et le coefficient de perméabilité isotrope  $k$ . Les trois premiers paramètres ont des valeurs moyennes représentatives d'une grande variété des sols :  $n = 40\%$ ,  $\alpha = 1$  et  $M \approx K_f/n = 5400$  MPa (en considérant que les grains solides sont incompressibles). De plus, le résultat numérique est généralement insensible au changement de ces paramètres. La coefficient de perméabilité  $k$  peut prendre des valeurs dans une large gamme de  $10^{-1}$  à  $10^{-10}$  m/s.

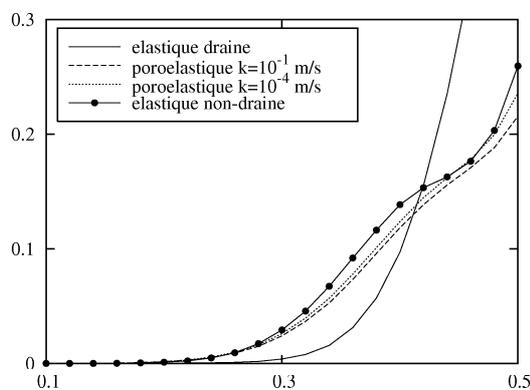
#### a. Influence de la perméabilité :

Considérons une vallée triangulaire de dimensions  $H = 40$  m et  $L = 100$  m, de rapport d'impédance  $\alpha = 0.15$ , soumise à une excitation  $f_c = 2.5$  Hz. Le coefficient de perméabilité prend successivement les valeurs  $k = 10^{-1}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-7}$  et  $10^{-10}$  m/s. Les sols drainés ( $k = \infty$ ) et non-drainés ( $k = 0$ ) équivalents sont également considérés. La figure 4.35a montre les variations temporelles du déplacement horizontal au milieu de la vallée, correspondant à différents coefficients de perméabilité.

Les courbes correspondant aux valeurs  $k = 10^{-7}$  m/s et  $k = 10^{-10}$  m/s (qui ne sont pas tracées sur la figure 4.35) coïncident presque exactement avec celle correspondant à  $k = 10^{-4}$  m/s. Cette coïncidence montre que, pour les sols courants dont le coefficient de perméabilité  $k$  varie de  $10^{-4}$  à  $10^{-10}$  m/s, la perméabilité a une influence négligeable sur la réponse sismique de la vallée. Ainsi, même si la fréquence dominante de l'excitation  $f_c = 2.5$  Hz est modérée, le mouvement du terrain sous la sollicitation sismique est tellement rapide



(a) Intervalle (0,2 s)



(b) Zoom dans l'intervalle (0.1,0.5 s)

FIG. 4.35 – Mouvement horizontal au milieu d'une vallée triangulaire, remplie par des sols saturés de différentes perméabilités, soumise à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2.5$  Hz). Dimensions de la vallée :  $H = 40$  m,  $L = 100$  m; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 2000$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 225$  m/s,  $n = 40\%$ ,  $\alpha = 1$ ,  $M = 5400$  MPa.

que l'eau interstitielle n'ait pas de temps de s'évacuer dans les pores et le sol se comporte comme un milieu poreux très peu perméable.

En comparant la réponse des milieux poroélastiques à celle des milieux élastiques drainé et non-drainé correspondants, une différence considérable est observée même dans les cas extrêmes : le milieu poroélastique très perméable ( $k = 10^{-1}$  m/s) se comporte différemment par rapport au milieu élastique drainé ; la réponse du milieu poroélastique très peu perméable ( $k = 10^{-10}$  m/s) et celle du milieu élastique non-drainé sont aussi différentes. L'origine de cette différence notable réside dans l'existence de deux ondes de compression,  $P_1$  et  $P_2$ , dans les milieux poreux saturés, au lieu d'une seule onde de compression  $P$  dans les milieux continus. Les phénomènes physiques associés à ces deux ondes (propagation, réflexion, réfraction, diffraction) ne sont évidemment pas identiques à ceux relatifs à l'onde  $P$ . Cependant, l'onde de compression de deuxième espèce (onde lente  $P_2$ ) est très dispersive et atténuée ; ainsi, selon nous, elle ne joue pas un rôle significatif. Un facteur important est l'écart très remarquable entre la vitesse de l'onde rapide  $P_1$  par rapport à celle de l'onde  $P$  : sur la figure 4.35b, on observe que l'onde  $P_1$  arrive à la surface libre plus tôt que l'onde  $P$  ; la vitesse de l'onde  $P_1$  est sensiblement égale à la vitesse de l'onde  $P$  du milieu élastique non-drainé correspondant. En outre, il faut tenir compte d'un phénomène additif concernant la diffusion post-sismique de la pression interstitielle, c'est-à-dire quand le terrain se déplace moins rapidement. En effet, sur les figures 4.36, 4.37 et 4.38, nous constatons une tendance générale : dans les premiers temps, la réponse du milieu élastique est approximativement similaire à celle du milieu poroélastique ; mais ces réponses s'écartent l'un de l'autre progressivement quand le temps augmente. Ainsi, ce résultat montre que la modélisation d'un milieu poreux saturé comme un milieu continu équivalent (drainé ou non-drainé) n'est qu'une approximation grossière.

#### **b. Comportement sismique du remplissage sédimentaire saturé :**

Pour estimer l'influence de l'eau interstitielle, nous supposons que : si la vallée agit essentiellement en cisaillement sous la sollicitation sismique (c'est le cas des vallées peu profondes, remplies par un sol de bonne qualité, sous des excitations de basses fréquences), l'effet de saturation n'est pas considérable. Dans ces cas, pour estimer des paramètres principaux du mouvement en surface (amplitude, durée), la modélisation de la sédimentation comme un milieu continu drainé équivalent est acceptable. Dans les autres cas, où le comportement en cisaillement de la vallée est moins prépondérant, l'effet de saturation est significatif et une modélisation de la sédimentation comme un milieu poreux saturé est nécessaire. Cette hypothèse est fondée sur la similitude de la propagation d'onde de cisaillement dans les milieux poreux et les milieux continus. Pour vérifier cette hypothèse, nous examinerons successivement l'influence du contenu fréquentiel de l'excitation, de la profondeur de la vallée et du contraste d'impédance sédiment/substratum.

Nous commençons par l'exemple d'une vallée triangulaire peu profonde,  $H = 40$  m et  $L = 100$  m, remplie par un sol de bonne qualité ( $\alpha = 0.3$ ) et soumise à l'excitation

de fréquences modérées ( $f_c = 2.5$  Hz). Dans cet exemple, le comportement sismique de la vallée est essentiellement en cisaillement. Les résultats correspondant aux cas d'un sédiment poroélastique et d'un sédiment élastique drainé équivalent sont comparés. La figure 4.36b montre les variations temporelles du déplacement horizontal au milieu de la vallée; la figure 4.36a présente les répartitions spatiales des pics de déplacement horizontal dans ces deux cas. Il est montré que l'effet d'amplification, dans ces deux cas, est semblable. Comme indiqué ci-avant, la variation temporelle du mouvement en surface du sédiment élastique suit assez bien celle du sédiment poroélastique pour les premiers instants; ensuite, elles divergent progressivement au cours du temps. Néanmoins, cette différence n'est pas notable.

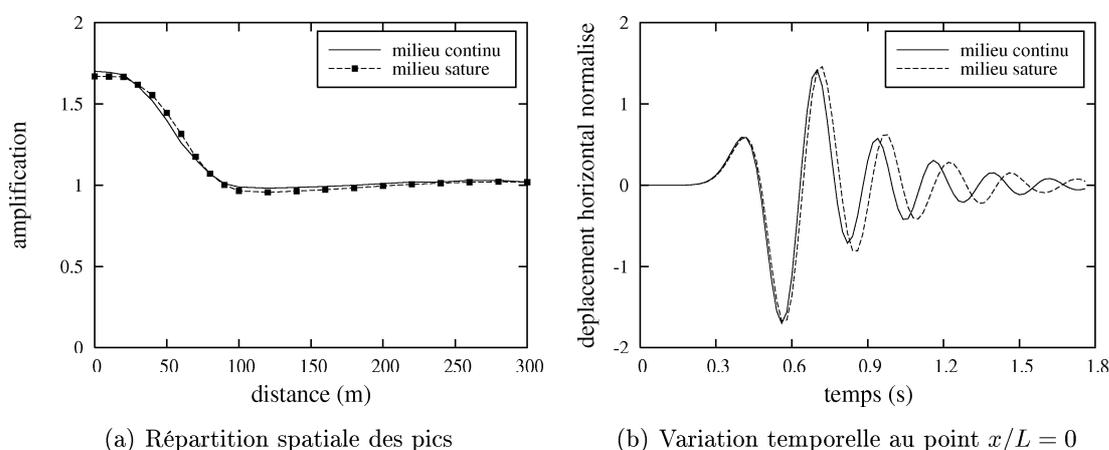


FIG. 4.36 – Mouvement horizontal en surface d'une vallée triangulaire remplie par un sol saturé soumise à l'incidence verticale des ondes SV de type Ricker d'ordre 2 ( $f_c = 2.5$  Hz). Dimensions de la vallée :  $H = 40$  m,  $L = 100$  m; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 2000$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s,  $n = 40\%$ ,  $\alpha = 1$ ,  $M = 5400$  MPa.

En suite, nous considérons d'autres cas, où le comportement global en cisaillement de la vallée est moins prépondérant. La figure 4.37 présente les variations temporelles du déplacement horizontal au milieu d'une vallée peu profonde ( $H = 40$  m et  $L = 100$  m), remplie par un sol faible ( $\alpha = 0.15$ ), pour deux excitations :  $f_c = 2.5$  Hz et  $f_c = 7.5$  Hz. La figure 4.38 montre des courbes similaires, mais pour une vallée profonde ( $H = 100$  m et  $L = 100$  m), remplie par un sol de qualité moyenne ( $\alpha = 0.3$ ).

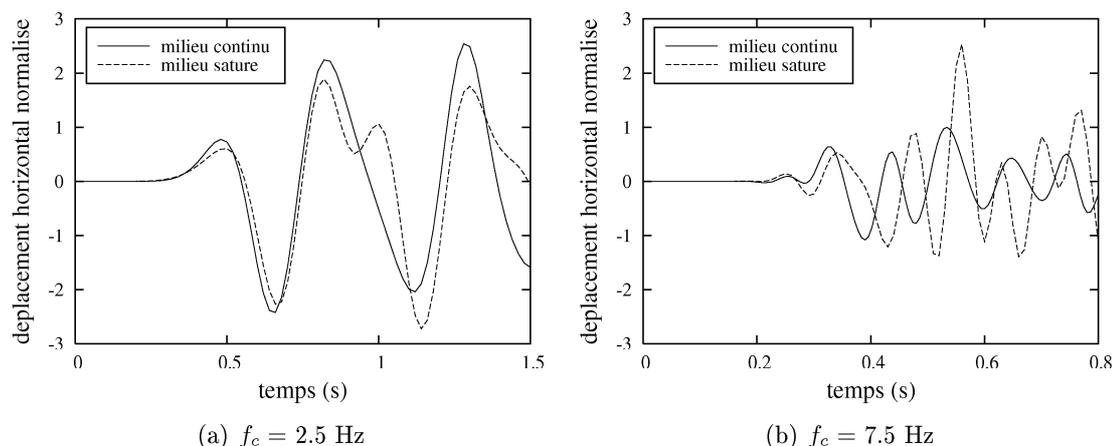


FIG. 4.37 – Mouvement horizontal au milieu d’une vallée triangulaire peu profonde, remplie par un sol saturé, soumise à l’incidence verticale des ondes SV de type Ricker d’ordre 2. Dimensions de la vallée :  $H = 40$  m,  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 2000$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 225$  m/s (sol faible),  $n = 40\%$ ,  $\alpha = 1$ ,  $M = 5400$  MPa.

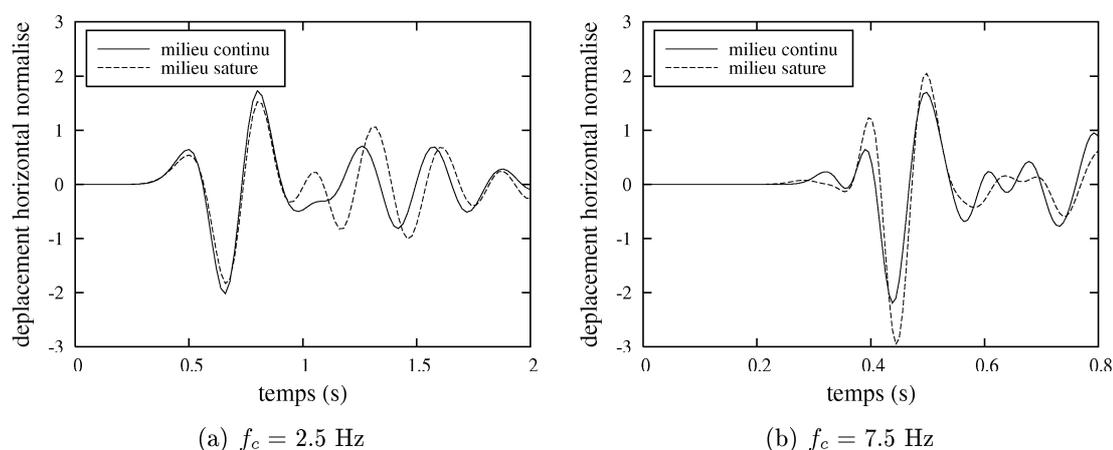


FIG. 4.38 – Mouvement horizontal au milieu d’une vallée triangulaire profonde, remplie par un sol saturé, soumise à l’incidence verticale des ondes SV de type Ricker d’ordre 2. Dimensions de la vallée :  $H = 100$  m,  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 2000$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s (sol moyen),  $n = 40\%$ ,  $\alpha = 1$ ,  $M = 5400$  MPa.

On constate que, dans le cas où la fréquence dominante de l’excitation reste modérée ( $f_c = 2.5$  Hz), la différence entre la réponse ‘saturée’ et la réponse ‘drainée’ devient plus significative, si la vallée est plus profonde ou si la qualité mécanique du sédiment est plus faible. Cependant, cette différence peut être négligée avec une erreur acceptable ; le modèle d’un milieu élastique drainé équivalent peut encore être utilisé pour modéliser la sédimentation. Par contre, si l’excitation est plus riche en hautes fréquences ( $f_c = 7.5$  Hz),

cette différence est très marquée, particulièrement en termes d'amplification du mouvement du terrain, ce qui met en évidence l'influence importante de la fréquence  $f_c$ . Ainsi, plus le contenu fréquentiel de l'excitation est riche en hautes fréquences, plus le mouvement en surface du cas 'saturé' est amplifié, en comparaison avec celui du cas 'drainé'. Cette différence est, en particulier, significative pour le cas du sol de mauvaise qualité. En effet, dans ce cas, la vitesse de l'onde  $P_1$  dans le sol saturé est bien plus élevée que celle de l'onde P dans le sol drainé équivalent ; par conséquent, ce changement brutal modifie considérablement la réponse de la vallée.

En conclusion, par l'intermédiaire des exemples ci-dessus, notre hypothèse est justifiée. La conclusion est la nécessité de la prise en compte de l'effet de saturation en eau dans les cas des vallées profondes, remplies par un sol faible et soumises aux sollicitations riches en hautes fréquences.

#### 4.3.10 Réponse de l'affleurement rocheux à proximité de la vallée

Dans les exemples présentés jusqu'à présent, les effets de site, en particulier l'effet d'amplification, sont évalués en comparant le mouvement en surface à l'intérieur de la vallée à celui de l'espace semi-infini. Rappelons que, si la direction des ondes incidentes est verticale, ce qui est souvent justifiée, le mouvement de l'espace semi-infini reflète exactement le champ d'ondes incidentes (il double simplement l'amplitude de l'onde incidente). Mais, en pratique, les effets de site sont habituellement estimés par des modifications du mouvement en surface de la vallée par rapport au mouvement observé sur un site voisin correspondant à des conditions de référence. Dans la plupart des cas, l'affleurement rocheux horizontal à proximité de la vallée est souvent sélectionné comme le site de référence. On peut se poser la question : ce site de référence reflète-t-il correctement le champ d'ondes sismiques incidentes ? Afin de répondre, il faut comparer les paramètres caractéristiques du mouvement de l'affleurement rocheux à ceux de l'espace semi-infini. Grâce aux exemples présentés dans les parties précédentes, on peut tirer les conclusions suivantes :

- la durée et la variation temporelle du mouvement de l'affleurement rocheux, à proximité de la vallée, et de l'espace semi-infini sont, dans la majorité des cas, sont très semblables (figure 4.39a). Dans les cas des vallées profondes, des vallées rectangulaires et des excitations de hautes fréquences, cette similarité est moins marquée (figure 4.39b).
- à l'égard du mouvement horizontal, l'amplitude de la composante horizontale de l'affleurement rocheux est très semblable à celle de l'espace semi-infini, dans les cas courants. Ceci est moins justifié pour les cas critiques mentionnés ci-dessus. En général, la différence entre les deux cas diminue vite avec la distance. En effet, dans la zone  $x = [L, 1.5L]$ , la différence, en termes de valeur de pic du déplacement horizontal, est au voisinage de 5-10% ; dans les cas critiques (vallée rectangulaire, par exemple), cette différence peut atteindre 15% ; au-delà de cette distance ( $x > 1.5L$ ), la différence est faible, de l'ordre 1-3%. Ainsi, pour diminuer au maximum les erreurs, il vaut mieux d'installer des stations d'enregistrement suffisamment loin de la vallée.

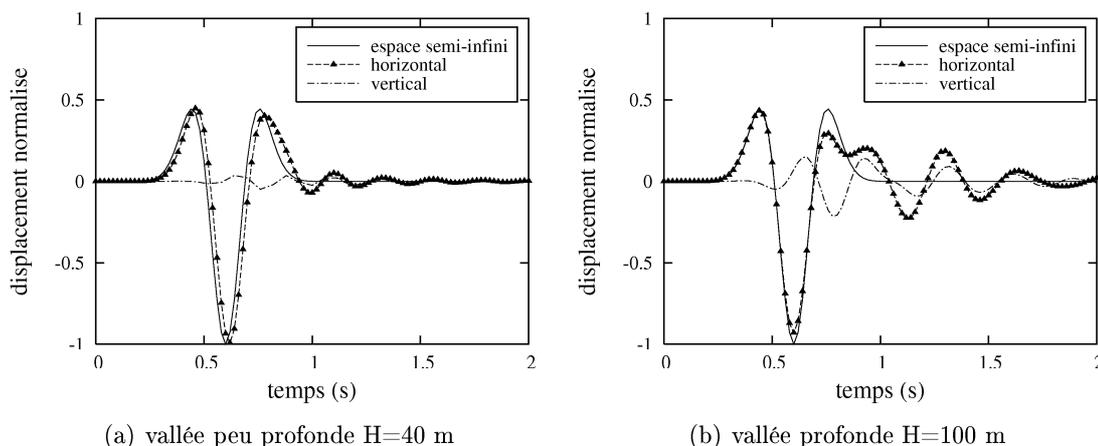


FIG. 4.39 – Mouvement horizontal à  $x/L = 1.5$  sur l’affleurement rocheux horizontal à proximité de la vallée. Demi-largeur de la vallée  $L = 100$  m ; caractéristiques mécaniques du substratum rocheux :  $\nu_r = 0.4$ ,  $\rho_r = 2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_r = 1000$  m/s et du sol alluvial :  $\nu_s = 0.3$ ,  $\rho_s = 1600$  kg/m<sup>3</sup>,  $v_s = 450$  m/s ; onde SV incidente de type Ricker  $f_c = 2.5$  Hz.

- la différence majeure de ces deux réponses réside dans le mouvement vertical. Dans le cas de l’espace semi-infini, il n’existe pas de mouvement vertical. Mais, dans le cas de l’affleurement rocheux, la composante verticale du mouvement est non nulle. Cette composante est évidemment due à l’arrivée des ondes de surface, générées aux bords de la vallée, et à l’arrivée des ondes de volumes réfléchies sur l’interface souterraine sédiment/substratum. La valeur de pic de cette composante est pratiquement de l’ordre de 10% de la composante horizontale ; dans les cas critiques, elle peut atteindre 20-25% de la composante horizontale.

En bref, dans les cas courants des vallées sédimentaires peu encaissées soumises aux excitations de fréquences modérées, la présence de la vallée n’a pas une influence significative sur la réponse sismique de l’affleurement rocheux horizontal à proximité. Dans ces cas, les paramètres caractéristiques du signal sismique (durée, spectre, amplitude) peuvent être, d’une manière assez précise, évalués via l’enregistrement du mouvement de ce site de référence. Dans les autres cas (vallées profondes, vallées rectangulaires, sollicitations de hautes fréquences), cette conclusion est moins justifiée ; mais, dans une certaine mesure, elle peut être acceptable.

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre est destiné à étudier des caractéristiques principales des effets de site dans les vallées ou les bassins sédimentaires. Dans la première partie, nous avons présenté les phénomènes physiques impliqués dans les effets de site 2D, concernant la génération des ondes de surface et la résonance globale 2D. Dans la seconde partie, nous avons mené une comparaison entre la réponse 2D et la réponse 1D correspondante, afin de mettre en

valeur les différences majeures entre ces réponses. Enfin, nous avons effectué une étude paramétrique, portant sur l'influence des facteurs importants pouvant affecter le mouvement sismique en surface des remplissages 2D.

À partir des résultats d'un grand nombre d'exemples présentés dans ce chapitre, nous pouvons tirer les conclusions générales suivantes :

- l'origine de la différence des effets de bassin 2D et des effets de stratigraphie 1D réside dans la focalisation du champ d'ondes, au niveau de la surface libre, et la génération des ondes de surface, se propageant d'un bord à l'autre du bassin dans le cas 2D. En outre, l'interférence des ondes de surface et des ondes de volume, piégées à l'intérieur du bassin, peut conduire à la résonance globale 2D du bassin, pouvant amplifier considérablement le mouvement en surface.
- généralement, des effets de site 2D sont plus défavorables que des effets 1D : l'amplitude du mouvement en surface dans le cas 2D est supérieure ou inférieure à celle dans le cas 1D, selon le contenu fréquentiel de la sollicitation sismique incidente ; mais, dans les cas critiques, elle peut être nettement supérieure à celle dans le cas 1D. Par rapport au cas 1D, la durée du mouvement dans le cas 2D est significativement prolongée. De plus, des effets 2D provoquent des mouvements verticaux importants et des mouvements différentiels considérables, qui peuvent aggraver le potentiel destructeur du séisme. En conséquence, la prise en compte des effets de site 2D, pour évaluer l'aléa sismique dans les remplissages sédimentaires à géométrie 2D, est indispensable. L'approche 1D n'est conseillée que pour les sites à stratigraphie essentiellement horizontale ou pour la partie centrale des bassins sédimentaires suffisamment allongés.
- dans la majorité des cas (sollicitations sismiques de fréquences modérées et basses), la zone centrale de la vallée (ou du bassin) est la plus amplifiée. En allant vers les bords, l'effet d'amplification diminue graduellement ; le mouvement aux points près des bords de la vallée s'approche de celui de l'affleurement rocheux horizontal.
- il existe plusieurs facteurs affectant la réponse sismique de la vallée sédimentaire, parmi lesquels les deux facteurs les plus déterminants sont le contraste d'impédance sédiment/ substratum et le rapport de la fréquence prédominante de l'excitation sismique à la fréquence fondamentale de la vallée  $f_c/f_o$  : l'effet d'amplification est accentué lorsque le contraste d'impédance est marqué et le rapport  $f_c/f_o$  est au voisinage de l'unité. En outre, la géométrie de la vallée, l'hétérogénéité verticale de la sédimentation et la présence de l'eau interstitielle peuvent modifier de manière substantielle le mouvement en surface de la vallée.

## Chapitre 5

# Comportement sismique des barrages en terre

Ce chapitre est destiné à illustrer l'application de la méthode hybride FEM/BEM aux calculs sismiques des barrages. Nous commençons par la présentation des généralités sur les barrages, puis nous envisageons les facteurs principaux pouvant affecter le comportement sismique des barrages en terre ainsi que des méthodes capables d'évaluer leur influence. Enfin, nous insistons sur la nécessité de tenir compte de l'interaction barrage/fondation dans les calculs sismiques des barrages.

## 5.1 Introduction et bibliographie

### 5.1.1 Généralités

Les barrages sont des ouvrages importants pouvant s'acquitter de plusieurs fonctions. Un barrage peut servir comme ouvrage de retenue, de diversion ou encore de stockage d'eau. Les barrages de retenue ont pour fonction d'arrêter ou de réduire les volumes d'eau d'une rivière, de sorte à prévenir les risques d'inondation. Les barrages de diversion sont utilisés afin de dévier la rivière de son lit naturel, généralement pour l'irrigation. Les barrages de stockage servent à emmagasiner l'eau qui servira ultérieurement, tel un réservoir artificiel.

Les barrages sont essentiellement classés en fonction du matériau utilisé lors de leur construction. En général, on distingue deux grandes catégories :

**Barrages en terre compactée ou en enrochement :** ces ouvrages ont pour fonction essentielle de retenir des plans d'eau de hauteur et d'étendue parfois très importantes. Ils sont de type d'ouvrages non déversants, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas courir le risque d'être débordés ; plusieurs d'entre eux sont alors accompagnés de structures évacuatrices pour prévenir des dommages sérieux. Selon la catégorie de matériaux disponible en place, leur qualité et leur quantité, les barrages peuvent être de trois grands types :

- barrages homogènes : ils sont construits en matériaux peu perméables et sont équipés de différents systèmes de drainage (figure 5.1a).
- barrages à noyau étanche : ils comprennent un noyau étanche en matériaux imperméables (terre compactée argileuse) et, de part et d'autre, des matériaux perméables (des enrochements ou des alluvions de rivière) (figure 5.1b).
- barrages zonés : plusieurs types de matériaux sont utilisés et leur position est d'autant plus centrale dans le corps du barrage que leur perméabilité est plus faible (figure 5.1c)

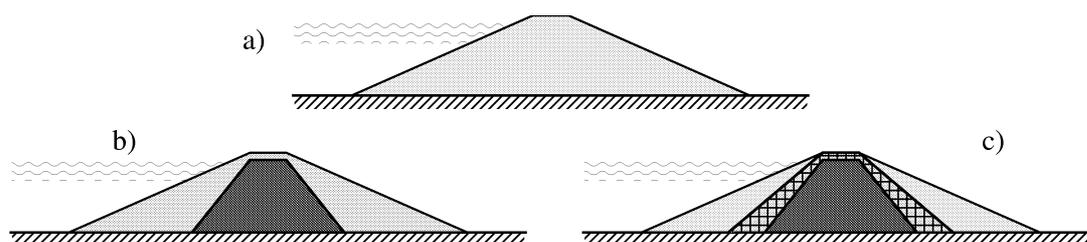


FIG. 5.1 – Exemples des barrages en terre (ou en enrochement) : (a) barrage homogène, (b) barrage à noyau, (c) barrage zoné

**Barrages en béton :** ce sont souvent des ouvrages déversants ; leur crête est donc conçue de sorte qu'elle peut résister à l'érosion créée par l'écoulement rapide de l'eau. La construction de ce type d'ouvrages est fréquemment liée à une centrale hydraulique. Selon la conception, il y a trois grands types :

- les barrages-poids retiennent le réservoir en utilisant simplement leur poids propre. La poussée des eaux sur le barrage est équilibrée par l'effet de gravité : c'est la masse du barrage qui s'oppose à cette poussée et la transmet à la fondation. La surface en contact avec le réservoir (face amont) est normalement verticale, alors que la face aval s'incline graduellement en se rapprochant du sol (figure 5.2a), la section est la plus large au niveau de la fondation où la pression d'eau est maximale ;
- les barrages à contreforts ressemblent aux barrages-poids, sauf qu'ils sont munis de plusieurs contreforts (figure 5.2b). Le béton de ce type d'ouvrage est généralement armé, contrairement aux barrages-poids ;
- les barrages voûtes utilisent l'effet d'arc pour retenir le réservoir. On les trouve généralement dans les vallées étroites ou encore dans les canyons. La surface en contact avec le réservoir est cambrée vers celui-ci (figure 5.2c). Lorsque l'eau pousse sur cette surface, le barrage transmet cette poussée vers ses appuis (flancs de la vallée). Grâce à cet effet d'arc, les sections des barrages voûtes peuvent être minces.

La conception et le dimensionnement des barrages doivent être effectués avec soin car leur rupture peut avoir des conséquences environnementales et économiques catastrophiques. Le tableau 5.1 regroupe les types d'analyse qu'il convient d'effectuer dans les

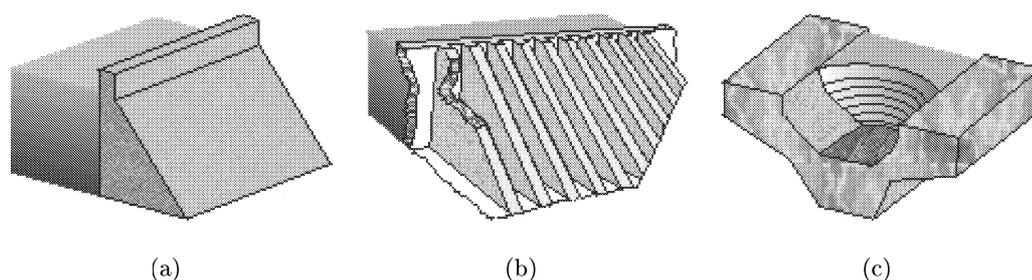


FIG. 5.2 – Exemples des barrages en béton : (a) barrage-poids, (b) barrage à contreforts, (c) barrage voûte

problèmes des barrages en terre (selon le cas, certains types d'analyse ne sont pas nécessaires).

Type d'analyse	Type de problèmes à considérer
Étude des déformations de l'ouvrage (couplage hydromécanique)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Étude des phases de construction (effet de la vitesse de mise en place du remblai, court terme, long terme, consolidation, fin de la construction et mise en eau).</li> <li>- Écoulement dans le barrage (transitoire, permanent, vidange partielle ou totale).</li> <li>- Interaction entre des matériaux de rigidité et de perméabilité différentes (remblai, sol de fondation, noyau, recharges en enrochement). Prise en compte des discontinuités rocheuses.</li> <li>- Sollicitations exceptionnelles (séismes, crues). Problèmes de liquéfaction.</li> </ul>
Étude hydraulique (milieux indéformables saturés ou non)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Contrôle des écoulements à l'intérieur du remblai et, éventuellement, dans le sol de fondation.</li> <li>- Possibilité d'érosion interne.</li> <li>- Effet de la non-saturation du matériau.</li> <li>- Fonctionnement des filtres et des drains.</li> </ul>
Étude de stabilité de l'ouvrage	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Étude des contraintes dans le barrage et dans la fondation.</li> <li>- Report de charges entre structures pour les sites étroits.</li> </ul>

TAB. 5.1 – Types d'analyses pour des barrages en terre (d'après [Lino, 1988]).

En complément des analyses de stabilité classiques, et en fonction du projet, des calculs de type sismique sont de plus en plus souvent effectués pour évaluer le niveau de déformations et de contraintes dans l'ouvrage lors d'un séisme et également pour estimer le potentiel de liquéfaction. Ces calculs comportent généralement deux aspects : d'une part, l'étude du comportement sismique de l'ouvrage et d'autre part, l'étude de l'interaction hydrodynamique avec la retenue d'eau. Dans ce chapitre, nous n'aborderons que le premier aspect concernant la réponse sismique des barrages en terre compactée homogène sans présence de la retenue d'eau.

### 5.1.2 Facteurs affectant la réponse sismique des barrages en terre

Durant ces trois dernières décennies, l'étude du comportement sismique des barrages a beaucoup attiré l'attention des chercheurs ainsi que des ingénieurs. Sur le plan théorique, plusieurs formulations analytiques et numériques ont été développées. Sur le plan expérimental, le nombre des expériences réalisées sur des modèles réduits (utilisant des tables vibrantes ou des centrifugeuses) et des enregistrements sur des ouvrages réels en vraie grandeur ont augmenté significativement. Ces études ont montré qu'il existe plusieurs facteurs pouvant affecter la réponse sismique des barrages en terre. On peut citer trois facteurs principaux :

#### a. Interaction barrage/fondation

Dans la plupart des analyses statiques, le massif rocheux de fondation est fréquemment supposé infiniment rigide et, par conséquent, simplement représenté par des conditions aux limites sur la frontière inférieure du modèle. Cette hypothèse est encore utilisée dans plusieurs analyses dynamiques : seul le barrage est modélisé (par exemple, par des éléments finis) ; l'action sismique est souvent présentée soit par l'application des déplacements imposés au niveau de la fondation du barrage, soit par l'application des forces d'inertie sur tout le modèle. Cependant, l'effet de flexibilité de la fondation sur la réponse dynamique d'un ouvrage rigide et lourd, tel est le cas des barrages, a été montré significatif [Gazetas, 1987], [Abouseeda et Dakoulas, 1996]. En effet, l'interaction avec une fondation déformable modifie la fréquence propre fondamentale du barrage lui-même. En outre, avec l'ajout de l'amortissement, dit radiatif ou géométrique, représentant le transport d'une partie de l'énergie vibratoire du barrage vers l'infini, l'amortissement total du système barrage/fondation est plus important que celui du barrage seul contenant uniquement l'amortissement matériel dû au comportement hystérétique du sol. De plus, le mouvement sismique réel au niveau de la fondation n'est pas toujours homogène, mais peut être hétérogène du fait de l'arrivée des ondes de surface ; alors que le modèle d'une fondation rigide ne peut pas représenter cette variabilité spatiale du mouvement du terrain. En général, l'effet de la flexibilité de la fondation peut rendre le mouvement sismique du barrage plus ou moins critique suivant la nature du sol, les caractéristiques de l'ouvrage et de la fondation. La nécessité d'étudier la

réponse sismique d'un barrage, en ne le considérant pas isolément, mais comme une partie intégrante d'un ensemble comprenant l'ouvrage et le massif de fondation, rend les analyses d'interaction barrage/fondation impérieuses.

### b. Comportement cyclique inélastique et non-linéaire du sol

Il ressort des constatations expérimentales que l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire du sol, qui est communément utilisée, ne constitue qu'une approximation relativement grossière de la réalité. En effet, sous des sollicitations cycliques, le sol montre souvent un comportement inélastique, non-linéaire et hystérétique ; le domaine d'élasticité correspond à une gamme de déformations très faibles.

Sur la figure 5.3 est illustré le comportement typique en cisaillement du sol pour un cycle de contrainte fermé, qui est caractérisé par une boucle d'hystérésis. On trouve que les deux propriétés mécaniques les plus importantes, le module de cisaillement  $G$  et le coefficient d'amortissement  $D$  (qui caractérise l'énergie dissipée par le matériau lors d'un cycle), dépendent fortement du niveau de déformation. La figure 5.4 montre des courbes représentant la variation du rapport des modules  $G/G_{max}$  et du coefficient d'amortissement  $D$  en fonction de la déformation de distorsion  $\gamma$  ( $G = \tau/\gamma$  indique le module de cisaillement sécant et  $G_{max}$  est la valeur maximale obtenue pour un très faible niveau de déformation). Il est clairement montré que plus la distorsion est élevée, plus la raideur du sol est faible et l'amortissement matériel est important. Par exemple, sur la figure 5.4,  $G/G_{max} = 0.66$  si  $\gamma = 0.1 \%$  et  $G/G_{max} = 0.24$  si  $\gamma = 1 \%$ ; cela signifie que la raideur du sol est considérablement dégradée lors des excitations sismiques de fort niveau. Dès que le chargement cyclique n'est plus fermé, le comportement devient plus complexe à décrire.

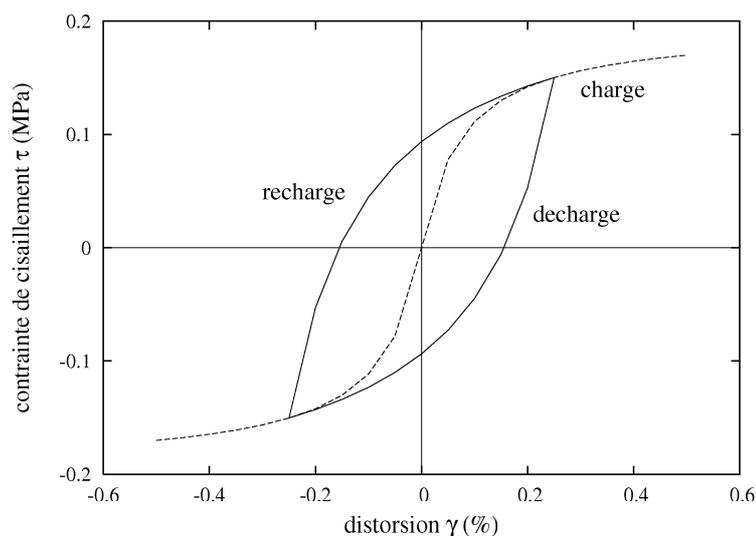


FIG. 5.3 – Courbe de contrainte-déformation en cisaillement cyclique

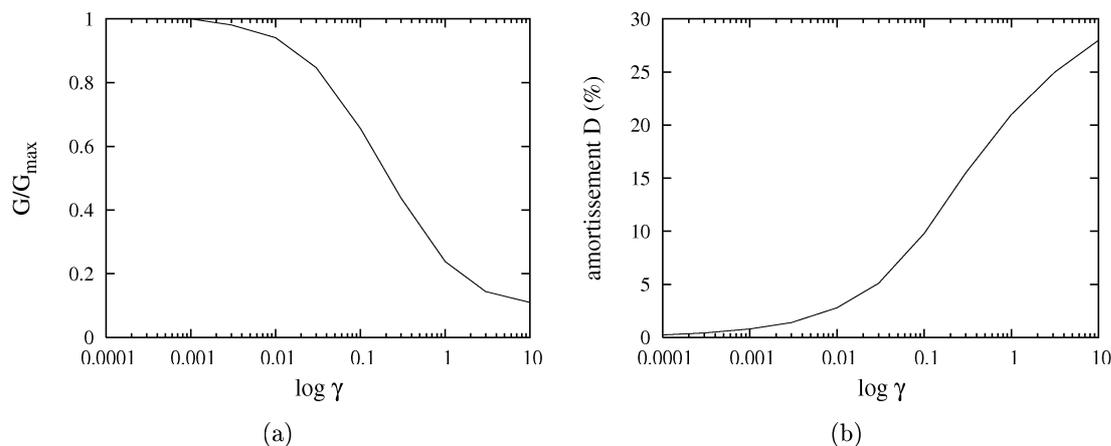


FIG. 5.4 – Variation du module de cisaillement et du coefficient d'amortissement en fonction de la déformation de distorsion

Un autre aspect important du comportement cyclique du sol concerne les déformations volumiques qui provoquent un durcissement du matériau. En outre, la tendance à la variation irréversible de volume existe et se traduit par une augmentation de la pression interstitielle, donc par une diminution des contraintes effectives. Le comportement du sol, gouverné par ces dernières, est donc affecté. Dans le cas des sables lâches saturés soumis à des sollicitations sismiques mettant en jeu un grand nombre de cycles, la variation volumique est susceptible de rendre nulle la résistance au cisaillement du sol, ce qui correspond à la rupture par liquéfaction.

Ainsi, la description complète du comportement réel du sol nécessite des modèles de comportement robustes et, certainement, sophistiqués. Parmi plusieurs modèles existants dans la littérature, les deux modèles méritant d'être cités sont : le modèle d'élastoplasticité généralisée [Zienkiewicz et Mroz, 1984], [Pastor et Zienkiewicz, 1990] et le modèle d'élastoplasticité avec écrouissage cinématique anisotrope à surfaces de charge multiples [Prévost, 1980a], [Prévost, 1985]. Cependant, la caractérisation de tels modèles est très compliquée. En pratique, pour la majorité des analyses sismiques des barrages terre, l'utilisation de modèles simples et approximatifs, de type hyperbolique, est suffisante [Hardin et Drnevich, 1972], [Finn et al., 1992].

### c. Hétérogénéité du sol

Dans le cas des barrages constitués de plusieurs matériaux distincts (barrages à noyau central, barrages zonés), il faut tenir compte de l'interaction entre des matériaux de rigidité et de perméabilité différentes. Par exemple, dans le cas des barrages en enrochement avec un noyau central en terre, il existe de forts gradients de déformation dans les zones de transition. Des éléments de contact ou d'interface peuvent être introduits pour représenter les glissements ou les frottements aux frontières entre les matériaux.

Même dans le cas des barrages homogènes construits en un seul matériau, la rigidité

du matériau n'est pas constante, mais dépend de la contrainte de confinement. En effet, l'expérience montre que le module de cisaillement  $G_{max}$  et le module de compressibilité volumétrique  $K$  dépendent de la contrainte de confinement effective  $\sigma'_m = \sigma'_{ii}/3$ . Des études paramétriques [Hardin et Drnevich, 1972], [Duncan et Chang, 1970] ont mis en évidence les paramètres principaux affectant la valeur de ces modules; il en découle des formules empiriques, parmi lesquelles on peut citer la formule de Hardin [1978] pour calculer  $G_{max}$  et celle de Duncan et Chang [1970] pour calculer  $K$  :

$$G_{max} = \frac{625}{0.3 + 0.7e^2} OCR^k \left( \frac{\sigma'_m}{p_a} \right)^n$$

$$K = K_b p_a \left( \frac{\sigma'_m}{p_a} \right)^{n'}$$

où  $e$  désigne l'indice des vides;  $OCR$  est le rapport de surconsolidation;  $p_a$  représente la pression atmosphérique;  $k$ ,  $n$ ,  $K_b$ ,  $n'$  sont des constantes dépendant du matériau.

Ainsi, les couches de sol près des surfaces libres inclinées sont plus souples que celles près du centre. Il est à noter que les barrages de grande hauteur apportent des contraintes de compression très importantes au niveau de la fondation, tandis que ces contraintes sont relativement faibles au niveau de la crête, d'où une différence significative dans la rigidité des couches de sol.

### 5.1.3 Méthodes d'analyse

L'analyse du comportement des barrages peut être 2D ou 3D, en fonction de l'environnement de l'ouvrage (profil de la vallée, longueur et courbure éventuelle du barrage). L'analyse 3D n'est généralement effectuée que dans des conditions où la vallée est assez étroite; dans ces cas, la prise en compte de l'interaction 3D barrage/vallée est nécessaire. D'une façon générale, la pratique est d'étudier les barrages en terre, qui sont communément rectilignes et longs, en 2D, selon une section transversale. Globalement, on peut classer les méthodes utilisées pour l'analyse sismique 2D des barrages en terre en trois groupes : la méthode "poutre de cisaillement" ('*shear beam*' en anglais), la méthode des éléments finis et la méthode hybride FEM/BEM.

#### a. Méthode "poutre de cisaillement"

Cette méthode a été proposée pour la première fois par Mononobe et al. [1936]; elle a ensuite été vérifiée et élargie pour couvrir une grande variété de conditions réelles. Un aperçu assez complet de différentes variantes de cette méthode, ainsi que leurs applications, a été présenté par Gazetas [1987].

La méthode est essentiellement appliquée aux barrages sur fondation rigide, soumis à l'incidence des ondes de cisaillement SV à propagation verticale. Elle est basée sur deux hypothèses principales :

1. le barrage se déforme surtout en cisaillement pendant le séisme ; il existe donc seulement le mouvement horizontal et la déformation de distorsion ;
2. les déplacements horizontaux et les déformations (ou contraintes) de cisaillement sont uniformément distribués le long des tranches horizontales minces à travers la section transversale du barrage (figure 5.5).

Ces hypothèses conduisent à la résolution d'une équation différentielle, décrivant la réponse sismique du barrage de forme très simple :

$$\rho(\ddot{u}_x(y) + \ddot{u}_g) = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{G}(y) \cdot y \cdot \frac{\partial u_x(y)}{\partial y} \right)$$

dans laquelle  $\ddot{u}_g$  désigne l'accélération sismique incident,  $u_x(y)$  indique le déplacement horizontal au point d'ordonnée  $y$  et  $\bar{G}(y)$  est le module de cisaillement d'une tranche horizontale à travers le barrage au point d'ordonnée  $y$ .

$$\bar{G}(y) = \frac{1}{x_1 + x_2} \int_{-x_1}^{x_2} G(x, y) dy$$

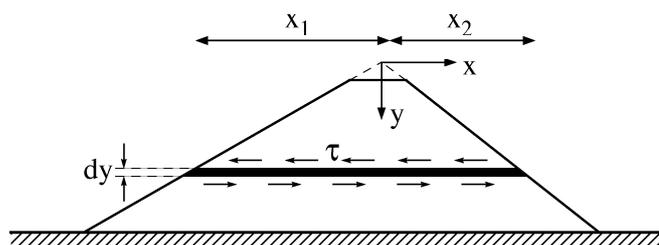


FIG. 5.5 – Illustration du modèle "poutre de cisaillement"

En réalité, ces deux hypothèses ne reflètent pas correctement la réponse réelle du barrage. A l'égard de la première hypothèse, même dans le cas du mouvement purement horizontal de la fondation, le mouvement vertical et les déformations de compression au sein du barrage sont toujours présents du fait des réflexions des ondes sur les surfaces inclinées du barrage. En ce qui concerne la seconde hypothèse, elle ne satisfait pas la condition de contrainte nulle sur les surfaces libres inclinées du barrage. Toutefois, plusieurs études comparatives ont prouvé que ces hypothèses sont approximativement justifiées [Chopra, 1967], [Dakoulas, 1985], [Gazetas, 1987]. En effet, en réalisant des analyses par la méthode des éléments finis, il est montré que le mouvement vertical peut, dans plusieurs cas, être négligé et la distribution des déformations (ou contraintes) de cisaillement à travers le barrage est assez uniforme, sauf dans des zones relativement étroites près des surfaces inclinées.

La méthode "poutre de cisaillement" constitue donc un excellent outil pour l'ingénieur. D'abord, elle est très simple et intuitive. Ensuite, elle permet une estimation très rapide des caractéristiques principales de la réponse sismique du barrage comme la fréquence

propre fondamentale, les modes de vibration et le mouvement transitoire. Dans plusieurs cas simples, des expressions analytiques peuvent être obtenues. Enfin, l'extension de cette méthode pour tenir compte, de manière simple, de l'hétérogénéité, de la non-linéarité et de l'inélasticité du sol a aussi été réalisée [Gazetas, 1987], [Gazetas et Dakoulas, 1992], [Dakoulas, 1990]. Ainsi, cette méthode est particulièrement avantageuse pour des calculs préliminaires (pour des avant-projets); en outre, elle constitue une référence pour la vérification des résultats obtenus par des méthodes plus sophistiquées. Cependant, il faut garder à l'esprit que cette méthode n'est précise que pour des problèmes relativement simples (barrages homogènes ou barrages zonés, avec un contraste de raideur faible entre les matériaux, avec des modèles de comportement simples). Pour des problèmes plus compliqués, l'usage de la méthode des éléments finis est presque incontournable.

### **b. Méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis a été employée pour étudier la réponse sismique des barrages dès les années 1960s [Chopra, 1967], [Seed et al., 1969]; jusqu'à présent, elle est encore la méthode la plus utilisée. Les avantages indiscutables de cette méthode, par rapport aux autres méthodes numériques, résident dans la capacité de modéliser efficacement l'hétérogénéité, l'inélasticité et la non-linéarité des sols constituant le barrage. Avec l'incorporation de lois de comportement robustes (par exemple, [Prévost, 1980a] et [Zienkiewicz et Mroz, 1984]), cette méthode est capable de prévoir avec précision la réponse des ouvrages réels; en particulier, elle peut estimer le potentiel de liquéfaction du sol, qui est un phénomène très dangereux pour la sécurité des barrages.

Toutefois, dans la plupart des modèles aux éléments finis, la fondation du barrage est supposée infiniment rigide; l'amortissement radiatif n'est alors pas pris en compte. En effet, la modélisation de ce type d'amortissement est un des points délicats de l'utilisation de la méthode des éléments finis. Cet amortissement correspond aux ondes émises dans le massif de fondation par des vibrations du barrage, qui transportent vers l'infini une partie de l'énergie vibratoire de l'ouvrage et jouent donc un rôle amortisseur. Cet effet entraîne une diminution progressive de l'amplitude des oscillations, même si aucune autre cause d'amortissement interne (viscosité dans le sol, frottement à l'interface barrage/fondation) n'est présent. Afin de représenter cet amortissement et d'éviter l'extension du modèle, ce qui rend le coût des calculs prohibitifs, l'utilisation d'éléments spécifiques, connectés aux limites du maillage, peut être envisagée :

- traitement par des éléments "absorbants", permettant d'absorber l'énergie des ondes sortant du domaine d'étude et d'annuler l'amplitude des ondes réfléchies [Lysmer et Kuhlemeyer, 1969], [Ang et Newmark, 1971]. Néanmoins, le choix des caractéristiques de ces éléments spécifiques (rigidité, amortisseur) est délicat, car il dépend des propriétés du sol et aussi des caractéristiques de la sollicitation. En fait, des conditions de frontière absorbante sont souvent adaptées à un type d'ondes particulier et peuvent se révéler peu efficaces pour d'autres types d'ondes. Par exemple, si ces conditions sont ajustées pour

éviter les réflexions des ondes SV se propageant perpendiculairement à la frontière, ses effets absorbants seront moindres pour les ondes SV obliques ou pour les ondes P ;

- traitement par des éléments "infinis", dont une des extrémités est rejetée à l'infini, favorisant une décroissance artificielle de l'amplitude des ondes et limitant également les réflexions parasites [Zhao et Valliappan, 1993], [Yerli et al., 1999]. Le choix du type de décroissance pour les fonctions d'interpolation ou les fonctions de forme de ces éléments est cependant difficile, car il est imposé par le type de problème physique et par le type d'ondes considéré.

En bref, l'usage des éléments absorbants ou des éléments infinis pour représenter les conditions à l'infini n'est pas applicable pour tous les types de problèmes : la tendance générale est la sous-estimation de l'amortissement radiatif en raison des réflexions parasites des ondes insuffisamment absorbées à la frontière.

### c. Méthode hybride FEM/BEM

Nous savons que la BEM présente l'avantage d'un traitement rigoureux des conditions à l'infini. Un couplage FEM/BEM peut alors surmonter les difficultés liées à la modélisation de l'amortissement radiatif : la frontière constituée des éléments frontières est "consistante", c'est-à-dire qu'elle absorbe parfaitement tous les types d'ondes, quel que soit leur angle d'incidence. Une seule exception concerne la réflexion parasite des ondes de surface aux limites du modèle BEM. Toutefois, l'erreur commise par la propagation des ondes parasites peut être considérablement réduite grâce à la technique d'amélioration que nous avons proposée dans le chapitre 1. Ainsi, la méthode hybride constitue un moyen efficace pour étudier le comportement sismique des barrages. Sur la figure 5.6 est illustré un modèle typique FE/BE. Une brève bibliographie des méthodes hybrides a été abordée dans le chapitre 1.

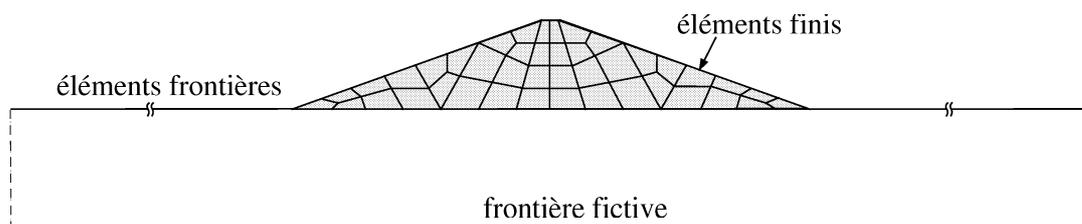


FIG. 5.6 – Modèle typique éléments finis/éléments frontières d'un barrage en terre

## 5.2 Interaction barrage/fondation

Dans cette section, nous étudions l'interaction dynamique barrage/fondation, concrètement l'effet du contraste d'impédance entre le sol constituant le barrage et la roche du massif de fondation.

En considérant un barrage rectiligne et suffisamment long, nous traitons des problèmes bidimensionnels (selon une section transversale). Deux cas sont examinés : l'un considère un barrage en terre homogène, symétrique construit directement sur un espace rocheux semi-infini, l'autre concerne le même barrage reposant sur une couche de sol sédimentaire au-dessus d'un massif rocheux semi-infini. Dans ces exemples, les matériaux du barrage, de la couche sédimentaire et de la fondation sont tous homogènes, isotropes, élastiques linéaires. Le résultat des analyses est exprimé en termes de déplacements, horizontal et vertical, normalisés avec le déplacement horizontal sur la surface du massif de fondation semi-infini sans présence du barrage ; une valeur supérieure à l'unité signifie une amplification alors qu'une valeur inférieure à l'unité correspond à une atténuation.

### 5.2.1 Exemple 1 : Barrage en terre construit sur un massif rocheux

La géométrie du barrage est illustrée sur la figure 5.7. Le sol constituant le barrage est de bonne qualité avec un coefficient de Poisson  $\nu_b = 0.3$ , une masse spécifique  $\rho_b = 2000 \text{ kg/m}^3$  et une vitesse de l'onde de cisaillement  $v_b = 360 \text{ m/s}$ . Le massif rocheux de fondation a un coefficient de Poisson  $\nu_r = 0.4$  et une masse spécifique  $\rho_r = 2400 \text{ kg/m}^3$ . Afin d'étudier l'effet du contraste d'impédance, la vitesse de l'onde de cisaillement du massif de fondation prend les valeurs  $v_r = 1000 \text{ m/s}$ ,  $2000 \text{ m/s}$  et infini. Les signaux incidents sont des ondes SV de type Ricker ( $f_c = 2 \text{ Hz}$ ) à propagation verticale. Le barrage est modélisé par des éléments finis alors que le massif de fondation semi-infini est modélisé par des éléments frontières.

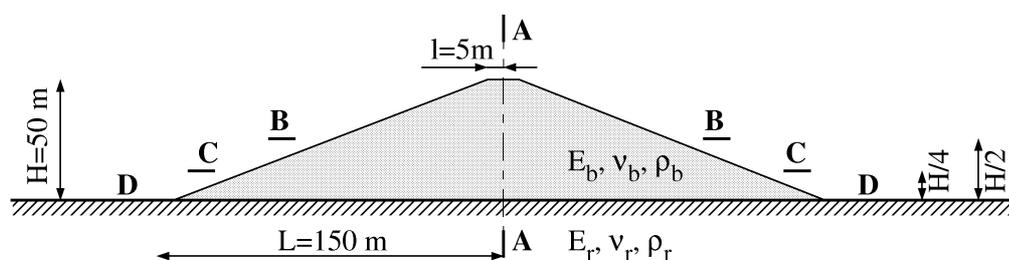
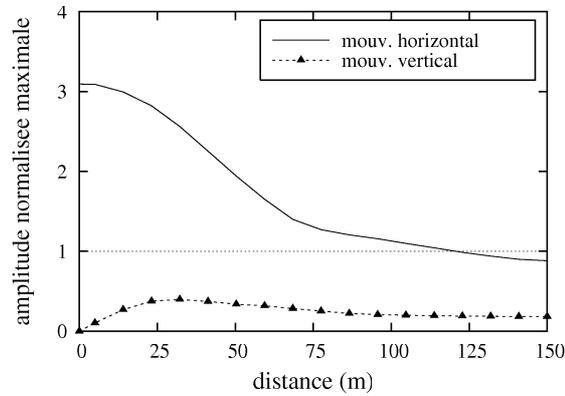
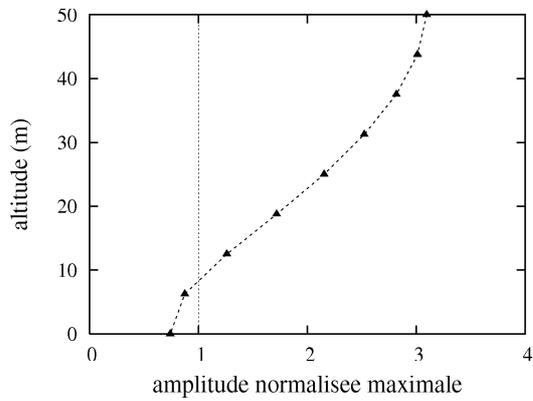


FIG. 5.7 – Barrage homogène construit directement sur un massif rocheux (barrage 1).

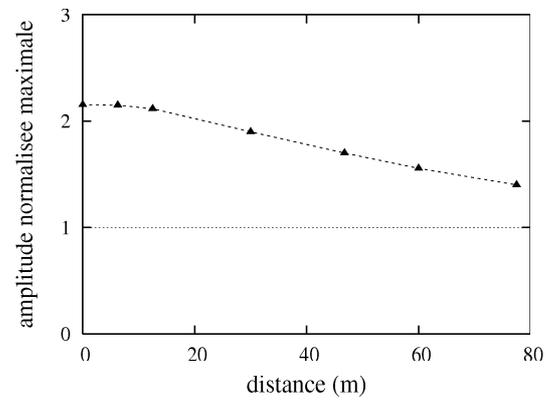
Considérons d'abord le cas de la fondation flexible ( $v_r = 1000 \text{ m/s}$ ). Sur la figure 5.8a sont tracées les courbes représentant les variations spatiales des valeurs de pic des composantes horizontale et verticale du mouvement sur la surface inclinée droite du barrage ; les figures 5.8b, 5.8c, 5.8d et 5.8e montrent respectivement les variations spatiales des valeurs de pic du déplacement horizontal selon la coupe verticale A-A au centre, la coupe horizontale B-B à l'altitude  $H/2$ , la coupe horizontale C-C à l'altitude  $H/4$  et la coupe horizontale D-D au niveau de la fondation. Grâce à la symétrie, seuls les résultats de la moitié droite sont présentés sur ces figures.



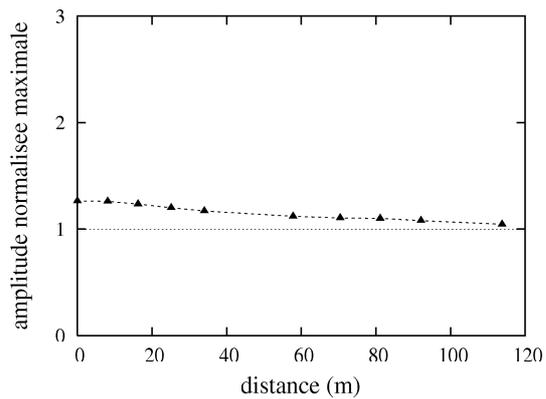
(a) sur la surface inclinée



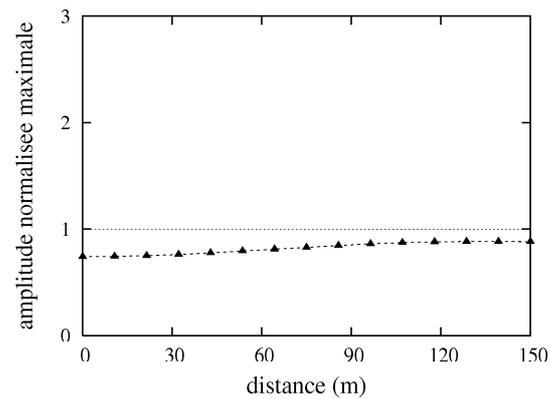
(b) sur la coupe verticale A-A



(c) sur la coupe horizontale B-B



(d) sur la coupe horizontale C-C



(e) sur la coupe horizontale D-D

FIG. 5.8 – Variation spatiale des valeurs de pic de l'amplitude du mouvement horizontal et vertical sur la surface inclinée (a) et du mouvement horizontal selon différentes coupes (b, c, d, e).

Quelques caractéristiques du mouvement du barrage peuvent en déduire comme suit :

- l'amplitude du mouvement horizontal est maximale à la crête du barrage ; elle diminue graduellement en allant vers la base. Le mouvement du barrage est notablement amplifié par rapport à celui du massif de fondation semi-infini (sauf la partie inférieure près de la fondation, où le mouvement est légèrement atténué). Dans le chapitre 3, on a observé l'effet d'amplification du mouvement d'une colline due à la focalisation des ondes incidentes. Le même phénomène se produit dans le cas du barrage, mais l'effet d'amplification dans ce cas est plus prononcé que celui de la colline, car il existe, en outre, le piégeage des ondes à l'intérieur du barrage dû au contraste d'impédance barrage/fondation.
- la répartition spatiale des valeurs de pic du mouvement horizontal est assez homogène sur les coupes C-C et D-D, mais elle est relativement irrégulière sur la coupe B-B où la valeur au centre est assez différente de celle de la surface inclinée. Ceci montre que la seconde hypothèse de la méthode "poutre de cisaillement", qui suppose que le mouvement horizontal est uniformément distribué sur toutes les coupes horizontales, est justifiée pour la partie inférieure du barrage et que cette hypothèse est moins vérifiée pour la partie supérieure.
- le mouvement vertical du barrage est faible par rapport au mouvement horizontal ( $u_{y_{max}} = 0.4$  et  $u_{x_{max}} = 3.1$ ), mais il ne semble pas être négligeable. Ceci prouve que la première hypothèse de la méthode "poutre de cisaillement", disant qu'il existe seulement un mouvement horizontal, est très approximative.

Examinons maintenant l'effet du contraste d'impédance barrage/fondation, en faisant varier la raideur du massif de fondation et en fixant la raideur du barrage. Trois types de fondation sont considérés : fondation flexible ( $v_r = 1000$  m/s), fondation rigide ( $v_r = 2000$  m/s) et fondation infiniment rigide ( $v_r \rightarrow +\infty$ ).

Les répartitions spatiales des valeurs de pic du mouvement horizontal sont présentées sur la figure 5.9a (pour la surface inclinée) et sur la figure 5.9b (pour la coupe verticale A-A). Il est clair que plus la fondation est rigide, plus le mouvement du barrage est amplifié. Ceci est physiquement logique, car plus le contraste d'impédance barrage/fondation est net, plus la proportion d'énergie des ondes piégées au sein du barrage est importante et, par conséquent, plus l'effet d'amplification est marqué. En outre, on trouve que l'écart entre la réponse du cas de la fondation flexible et celle du cas de la fondation infiniment rigide est très important ; cela signifie que l'hypothèse de fondation infiniment rigide surestime considérablement l'amplitude du mouvement du barrage.

Sur la figure 5.10 sont tracées les variations temporelles du mouvement à la crête du barrage correspondant aux trois types de fondation. On trouve que : pour le cas de la fondation flexible où l'amortissement radiatif est important, le mouvement est vite atténué ; pour le cas de la fondation rigide, où l'amortissement est moins élevé, l'atténuation du mouvement est plus lente ; enfin, pour le cas de la fondation parfaitement rigide, où il n'existe aucun amortissement, le mouvement entre dans le régime permanent très vite et la durée du mouvement, en théorie, tend vers l'infini. Donc, plus la fondation est rigide, plus

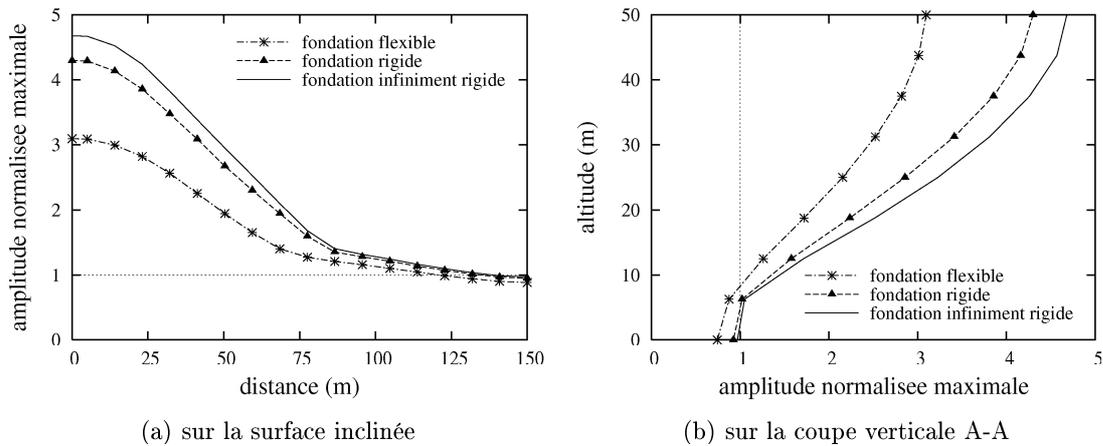


FIG. 5.9 – Effet de la flexibilité de la fondation sur l'amplitude du mouvement horizontal du barrage.

la durée du mouvement du barrage est allongée. On sait que la durée du mouvement est liée au nombre de cycles de chargement, qui est un des facteurs déclenchant la liquéfaction du sol. Ainsi, l'hypothèse de fondation infiniment rigide surestime le potentiel de rupture par liquéfaction du barrage.

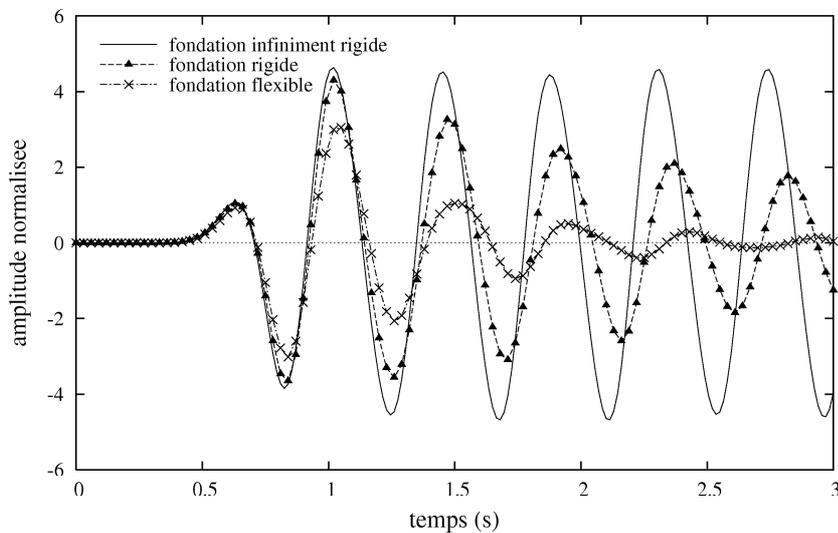


FIG. 5.10 – Effet de la flexibilité de la fondation sur la durée de vibration du barrage.

En conclusion, la flexibilité de la fondation joue un rôle important sur la réponse sismique du barrage. Généralement, plus la fondation est rigide, plus le mouvement est amplifié et la durée est allongée. L'interaction barrage/fondation est alors très importante : cette interaction tend à réduire les exigences vis-à-vis du barrage, ce qui peut réduire significativement le coût de l'ouvrage.

### 5.2.2 Exemple 2 : Barrage en terre construit sur une couche sédimentaire

En général, un barrage devrait être construit sur une fondation suffisamment solide pour que les tassements immédiat et différé soient inférieurs à des seuils prédéfinis assez faibles. Dans un grand nombre des cas en pratique, le creusement et l'enlèvement de couches sédimentaires compressibles sont effectués jusqu'au massif rocheux sain sous-jacent pour toute la section de la fondation du barrage. Cependant, sur beaucoup de sites, le remplissage sédimentaire est tellement profond que l'excavation jusqu'au massif rocheux est économiquement impossible. Dans ces cas, le barrage n'est pas construit sur l'affleurement rocheux, mais sur une couche de sol de bonne qualité (figure 5.11).

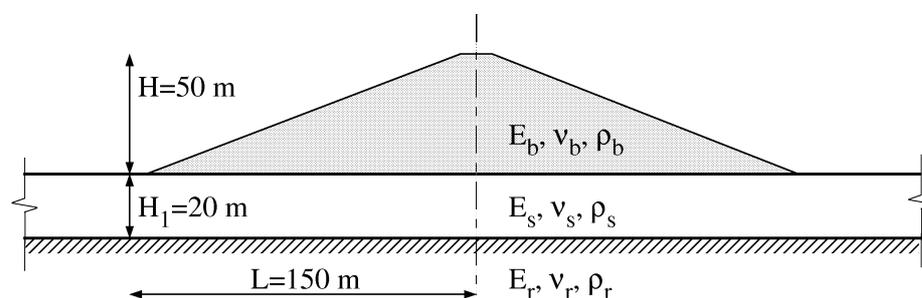


FIG. 5.11 – Barrage homogène reposant sur une couche sédimentaire (barrage 2).

Dans cet exemple, nous étudions l'influence de la couche sédimentaire en comparant la réponse sismique du barrage dans ce cas (barrage 2) avec celle correspondant au cas du barrage construit directement sur la fondation rocheuse (barrage 1). Les caractéristiques mécaniques du barrage et de la fondation sont les mêmes que celles de l'exemple précédent. Le sol de la couche sédimentaire est de bonne qualité avec un coefficient de Poisson  $\mu_s = 0.3$ , une masse spécifique  $\rho_s = 2000$  kg/m<sup>3</sup> et une vitesse de l'onde de cisaillement  $v_s = 720$  m/s.

La figure 5.12a présente les répartitions spatiales des valeurs de pic du mouvement horizontal sur la coupe verticale A-A tandis que la figure 5.12b montre les variations temporelles du mouvement à la crête du barrage correspondant aux deux configurations, pour le cas de la fondation flexible ( $v_r = 1000$  m/s). Les résultats illustrés par ces figures montrent une différence négligeable entre les réponses des barrages 1 et 2. Par contre, dans le cas de la fondation rigide ( $v_r = 2000$  m/s), cette différence est significative : l'effet d'amplification est marqué (figure 5.13a) et la prolongation de la durée est aussi notable (figure 5.13b). En effet, en raison du contraste d'impédance assez net, l'interface couche/fondation réfléchit partiellement les ondes l'atteignant ; une proportion importante d'énergie transportée par les ondes sortant du barrage est donc renvoyée vers le barrage au lieu d'être transportée à l'infini, ce qui explique le mouvement plus défavorable du barrage 2.

En bref, la couche de sol au-dessus du massif rocheux peut modifier significativement

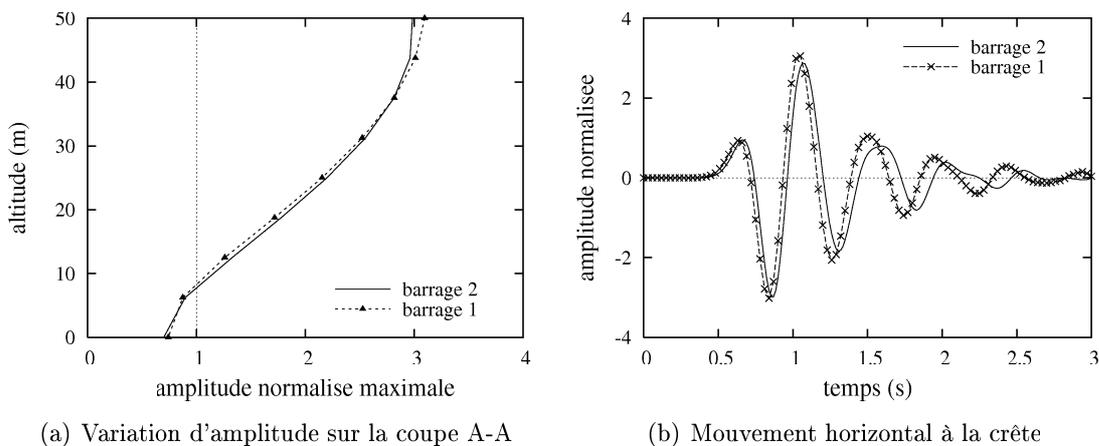


FIG. 5.12 – Effet de la présence d’une couche sédimentaire sur le mouvement du barrage. Cas de **faible contraste** d’impédance couche/fondation.

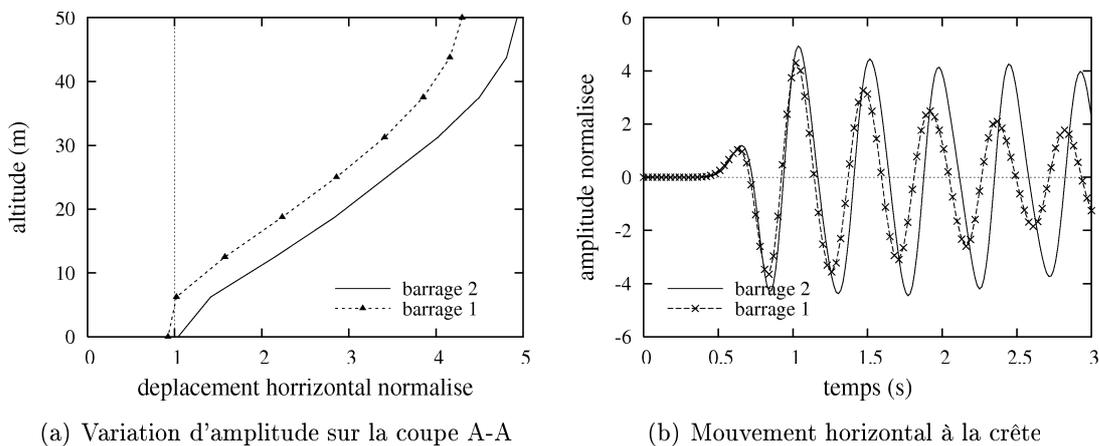


FIG. 5.13 – Effet de la présence d’une couche sédimentaire sur le mouvement du barrage. Cas de **fort contraste** d’impédance couche/fondation

la réponse sismique du barrage, particulièrement dans le cas de la fondation rigide. La conception du barrage doit alors être modifiée pour tenir compte de la présence de la couche sédimentaire.

### 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les facteurs principaux pouvant affecter significativement la réponse sismique des barrages en terre, ainsi que les méthodes d’analyse existant dans la littérature. Une étude portant sur l’interaction dynamique barrage/fondation a été effectuée. Cette étude montre clairement l’impératif d’introduire la flexibilité de la fondation dans les calculs sismiques des barrages, ce qui peut réduire considérablement les exigences vis-à-vis de l’ouvrage.

# Conclusions et Perspectives

Dans le cadre de ce travail, nous avons développé la méthode des éléments frontières (BEM) et la méthode hybride éléments finis/éléments frontières (FEM/BEM) pour l'élastodynamique et la poroélastodynamique, et nous avons appliqué ces méthodes aux études d'effets de site sismiques et d'interaction dynamique sol-structure.

Les formulations de la BEM et de la FEM/BEM, que nous avons présentées, sont traitées en domaine temporel et peuvent traiter le caractère transitoire du mouvement et tenir compte des comportements matériels complexes. Nous avons abordé les problèmes numériques de la BEM qui peuvent affecter l'applicabilité de cette méthode et, par conséquent, de la FEM/BEM : il s'agit de la stabilité numérique du schéma temporel, de l'augmentation rapide du temps de calcul avec le nombre de pas de temps et de l'effet de la troncature de l'espace semi-infini.

- L'étude sur la stabilité a montré que l'instabilité numérique, susceptible d'apparaître pendant la procédure d'avancement dans le temps, est particulièrement critique pour les problèmes faisant intervenir des réflexions multiples d'ondes. Pour éviter cette instabilité, nous avons proposé d'utiliser l'interpolation temporelle mixte (vecteurs-contrainte linéaires et déplacements constants par morceaux) avec le pas de temps adimensionnel  $\beta = 1$ , ce qui est suffisant dans la plupart des cas. Nous avons présenté aussi une technique, dite 'méthode  $\theta$ ', efficace et simple pour assurer la stabilité, en utilisant le paramètre  $\theta$  pour contrôler l'amortissement numérique.
- Afin d'accroître les performances de la BEM, nous avons proposé une technique d'amélioration pouvant réduire considérablement le temps de calcul et l'espace de stockage des informations temporaires sur l'ordinateur. L'idée de base de cette technique est de tronquer les intégrales temporelles dans la formulation discrétisée de la BEM. Nous avons appliqué, avec succès, cette technique aux problèmes impliquant les domaines semi-infinis ; elle fonctionne bien même si le nombre de pas de temps est très élevé (d'ordre de plusieurs milliers). Mais l'application de cette technique aux problèmes concernant les domaines bornés doit se faire avec soin, car l'instabilité est plus critique dans ces cas ; l'étude de la stabilité de cette technique, pour ces problèmes, est donc nécessaire.
- Nous avons mis en évidence l'existence des ondes parasites dues à la troncature du maillage des modèles simulant un espace semi-infini. Les erreurs commises à cause de ces ondes artificielles peuvent être réduites par l'extension du maillage, en utilisant des

éléments frontières de grande taille hors de la zone d'étude, et par l'utilisation de la technique d'amélioration proposée.

En ce qui concerne l'application de la BEM pour la dynamique transitoire des milieux poreux saturés, nous avons présenté une formulation en domaine temporel et nous avons proposé une expression analytique de la solution fondamentale, en termes de déplacements et de pressions interstitielles  $(u_i, p)$ , en faisant deux hypothèses : l'accélération relative du fluide interstitiel, par rapport au squelette, est négligée et les constituants du milieu (grains solides et fluide) sont incompressibles (ces hypothèses sont généralement raisonnables pour les sols sous sollicitations sismiques). La solution fondamentale approchée proposée s'accorde bien, pour des instants tardifs, avec la solution exacte, mais moins bien pour les premiers instants, en particulier pour les composantes de pression. La formulation de la BEM utilisant cette solution proposée a été validée, mais elle présente une sensibilité relativement forte à l'instabilité numérique. Des études approfondies sur cette sensibilité sont alors nécessaires, d'abord, pour comprendre les causes et, ensuite, pour trouver des techniques efficaces capables d'atténuer ou d'éviter les instabilités.

Les formulations de la BEM et de la FEM/BEM, établies pour l'élastodynamique ainsi que pour la poroélastodynamique, ont été intégrées dans le code de calcul HYBRID. Capable de traiter de nombreux problèmes généraux en dynamique transitoire, en particulier les problèmes faisant intervenir des domaines (semi-)infinis, le code HYBRID peut être utilisé comme un outil performant de modélisation numérique pour les calculs sismiques. Dans ce travail, nous l'avons utilisé pour étudier les effets de site sismiques et l'interaction dynamique sol-structure.

Une étude paramétrique, portant sur les effets de site topographiques des pentes, des vallées et des collines, a montré l'influence significative sur le mouvement en surface de plusieurs facteurs : la fréquence adimensionnelle (rapport de la dimension caractéristique du relief à la longueur d'onde incidente), l'angle d'inclinaison de la pente et la forme du relief (pour les vallées et les collines). Cette étude a également montré des aspects défavorables des effets de site topographiques (amplification considérable, mouvement différentiel significatif, effet simultané du mouvement vertical et du mouvement horizontal); on a insisté donc sur la nécessité d'une incorporation efficace des effets de site topographiques dans les codes parasismiques, car dans quelques codes actuels (AFPC 90/5.3.3, PS 92/5.2.4, par exemple), ces effets sont pris en compte de manière très simple et forfaitaire.

En ce qui concerne les effets de site dans les remplissages sédimentaires, nous avons mis en évidence les phénomènes physiques présents dans les problèmes 2D (génération des ondes de surface, résonance globale 2D). Ensuite, une étude comparative 1D-2D a été menée. Celle-ci a montré que les effets de bassin 2D sont généralement plus défavorables que les effets de stratigraphie 1D. En effet, par rapport à la réponse 1D, le mouvement de la réponse 2D est, dans beaucoup de cas, largement amplifié; la durée du mouvement est,

dans tous les cas, significativement prolongée; il existe, en outre, des mouvements différentiels importants. Ainsi, des effets de site 2D peuvent aggraver notablement le potentiel destructeur des séismes; leur prise en compte est indispensable pour l'évaluation de l'aléa sismique local ainsi que pour la conception des constructions. Une étude paramétrique, destinée à évaluer l'influence de plusieurs facteurs pouvant affecter le mouvement sismique en surface des vallées sédimentaires, a prouvé l'effet déterminant du contraste d'impédance sédiment/substratum et du rapport de la fréquence dominante de l'excitation à la fréquence fondamentale de la vallée considérée  $f_c/f_o$ : l'effet d'amplification est prononcé lorsque le contraste d'impédance est marqué et le rapport  $f_c/f_o$  est proche de l'unité. Cette étude a aussi montré que la géométrie de la vallée, l'épaisseur de la sédimentation, l'hétérogénéité verticale de la sédimentation et la saturation en eau interstitielle peuvent modifier de manière substantielle la réponse sismique des vallées sédimentaires.

Sachant que l'interaction dynamique sol-structure est d'autant plus déterminante que le sol est déformable et/ou que la structure est massive, nous avons choisi d'étudier cette interaction dans le cas des barrages en terre (ou en enrochement). Les calculs ont montré que plus le massif rocheux de fondation est flexible, moins le mouvement du barrage est amplifié et prolongé. Ainsi, la prise en compte de l'interaction dynamique barrage/fondation est très importante, car elle tend à réduire les exigences vis-à-vis du barrage (par rapport aux exigences correspondant aux modèles de fondation infiniment rigide), ce qui peut réduire le coût de l'ouvrage.

Dans les études d'effets de site sismiques et de comportement sismique des barrages ci-dessus, nous n'avons examiné que des exemples relativement simples. En effet, nous avons seulement considéré, comme sollicitation sismique, des ondes SV, à propagation verticale, harmoniques ou transitoires de type Ricker. L'étude de l'effet des autres types de sollicitation (onde SV et onde P oblique, onde de Rayleigh), en utilisant des accélérogrammes réels, devra alors faire l'objet d'études ultérieures. Dans tous les exemples, nous avons supposé que les matériaux (les sols ou les roches) sont élastiques linéaires. Or, en réalité, les sols des sédimentations ou des barrages peuvent avoir un comportement complexe. En outre, la formulation de FEM/BEM présentée est capable de traiter des comportements plus compliqués: le modèle élastique non-linéaire de Finn et al. [1992] et le modèle élastoplastique à écrouissage cinématique de Prévost [1985] ont été intégrés dans le code HYBRID. Faute de temps, l'intégration de ces modèles n'est pas encore validée. Il faut donc, dans le premier temps, valider cette intégration. Une fois les modifications justifiées, le code HYBRID permettra, premièrement, d'étudier l'influence de la non-linéarité et de l'inélasticité sur la réponse sismique des vallées sédimentaires et des barrages en terre et, deuxièmement, d'effectuer des études de cas sur des ouvrages en vraie grandeur, de comportement plus ou moins complexe, sous l'action des séismes (accélérogrammes) réels.

Les perspectives de ce travail sont ainsi les suivantes :

- test de la stabilité de la technique d'amélioration proposée pour des problèmes faisant intervenir des domaines bornés ;
- étude de la stabilité de la formulation de la BEM établie pour la poroélastodynamique ;
- étude d'effets de site en considérant différents types de sollicitation (onde SV et onde P oblique, onde de Rayleigh), et en utilisant des accélérogrammes réels ;
- validation des modèles de Finn et al. [1992] et de Prévost [1985] dans le code HYBRID ;
- étude de l'influence de la non-linéarité et de l'inélasticité sur la réponse sismique des vallées sédimentaires et des barrages en terre ;
- études de cas pour des barrages et/ou des vallées sédimentaire réels.

# Bibliographie

- Abouseeda, H. et Dakoulas, P. (1996). Response of earth dams to P and SV waves using coupled FE-BE formulation. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 25 :1177–1194.
- Abouseeda, H. et Dakoulas, P. (1998). Non-linear dynamic earth dam-foundation interaction using a BE-FE method. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 27 :917–936.
- Abramowitz, M. et Stegun, I. (1965). *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards, Washington D.C.
- Ahmad, S. et Banerjee, P. (1988). Multi-domain BEM for two-dimensional problems of elastodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26 :891–911.
- Aki, K. (1988). Local site effects on strong ground motion. In *Earthquake Engineering and Soil Dynamics II : Recent Advances in Ground Motion Evaluation*, pages 103–155. Geotechnical Special Publication, Am. Soc. Civil Engr., New York.
- Ang, A. et Newmark, N. (1971). Development of a transmitting boundary for numerical wave motion calculation. Technical report, Defence atomic support agency, Washington DC, contract DASA-1-0040.
- Araujo, F., Mansur, W., et Nishikava, L. (1999). A linear  $\theta$  time-marching algorithm in 3D BEM formulation for elastodynamics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23 :825–833.
- Badmus, T., Cheng, A.-D., et Grilli, S. (1993). A Laplace-transform based three-dimensional BEM for poroelasticity. *International journal for numerical methods in engineering*, 36(1) :67–85.
- Bard, P.-Y. et Bouchon, M. (1980a). The seismic response of sediment-filled valleys. Part I : The case of incident SH waves. *Bulletin of the seismological society of America*, 70 :1263–1286.
- Bard, P.-Y. et Bouchon, M. (1980b). The seismic response of sediment-filled valleys. Part II : The case of incident P and SV waves. *Bulletin of the seismological society of America*, 70 :1921–1941.
- Bard, P.-Y. et Bouchon, M. (1985). The two-dimensional resonance of sediment-filled valleys. *Bulletin of the seismological society of America*, 75(2) :519–540.

- Bard, P.-Y. et Riepl-Thomas, J. (2000). Chapter 2 : Wave propagation in complex geological structures and their effects on strong ground motion. In *Wave motion in earthquake engineering*, pages 37–95. WIT Press.
- Beer, G. et Watson, J. (1992). *Introduction to finite and boundary element methods for engineers*. John Wiley & son.
- Beskos, D. (1987). Boundary element methods in dynamic analysis. *Apl. Mech. Rev.*, 40 :1–23.
- Beskos, D. (1997). Boundary element methods in dynamic analysis : Part II (1986-1996). *Apl. Mech. Rev.*, 50(3) :149–197.
- Biot, M. (1941). General theory of three dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, 12 :155–164.
- Biot, M. (1955). Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of applied physics*, 26 :182–185.
- Biot, M. (1956a). Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. *Journal of applied physics*, 27(5) :459–467.
- Biot, M. (1956b). Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I-Low-frequency range. *Journal of the acoustical society of america*, 28 :168–178.
- Biot, M. (1956c). Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. II-Higher-frequency range. *Journal of the acoustical society of america*, 28 :179–191.
- Biot, M. (1962). Mechanics of deformation and acoustic propagation in prous media. *Journal of applied physics*, 33 :1482–1498.
- Biot, M. et Willis, D. (1957). The elastic coefficients of the theory of consolidation. *Journal of Applied Physics*, 24 :594–601.
- Bonnet, G. (1987). Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range. *Journal of the acoustic society of america*, 82(5) :1758–1762.
- Bonnet, M. (1995). *Equations intégrales et éléments de frontière - Application en mécanique des solides et des fluides*. CNRS édition/Eyrolles.
- Boore, D. (1972). A note on the effect of simple topography on seismic SH waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 62 :275–284.
- Boore, D., Harmsen, S., et Harding, S. (1981). Wave scattering from a steep change in surface topography. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 71 :117–125.
- Bowen, R. (1976). Theory of mixture. In *Continuum Physics, Vol.III*. Academic Press, New York.
- Brebbia, C. et Georgious, P. (1979). Combination of boundary and finite elements for elastostatics. *Applied mathematical modelling*, 3 :121–220.
- Burridge, R. et Vargas, C. (1979). The fundamental solution in dynamic poroelasticity. *Geophys.J.R.Astron.Soc.*, 58 :61–90.

- Campillo, M. et Bouchon, M. (1985). Synthetic SH seismograms in a laterally varying medium by the discrete wavenumber method. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 83 :307–317.
- Castellani, A., Peano, A., et Sardella, L. (1982). On analytical and numerical techniques for seismic analysis of topographic irregularities. In *Proc. European Conf. Earthquake Eng.*, 7th, pages 415–423, Athens, Greece.
- Chen, J. (1994a). Time domain fundamental solution to Biot's complete equations of dynamic poroelasticity. Part II : Three-dimensional solution. *International journal of solids and structures*, 31(2) :169–202.
- Chen, J. (1994b). Time domain fundamental solution to Biot's complete equations of dynamic poroelasticity. Part I : Two-dimensional solution. *International journal of solids and structures*, 31(10) :1447–1490.
- Chen, J. et Dargush, G. (1995). Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analyses. *International journal of solids and structures*, 32(15) :2257–2278.
- Cheng, A.-D., Badmus, T., et Beskos, D. (1991). Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with BEM solution. *Journal of engineering mechanics*, 117(5) :1136–1157.
- Cheng, A.-D. et Detournay, E. (1998). On singular integral equations and fundamental solutions of poroelasticity. *International journal of solids and structures*, 35(34-35) :4521–4555.
- Cheng, A.-D. et Liggett, J. (1984). Boundary integral equation method for linear porous-elasticity with application to soil consolidation. *International journal for numerical methods in engineering*, 20 :279–296.
- Cheng, A.-D. et Predeleanu, M. (1987). Transient boundary element formulation for poroelasticity. *Appl. Math. Modelling*, 11 :285–290.
- Chopra, A. (1967). Earthquake response of earth dams. *Journal of soil mechanics and foundation division, ASCE*, 93(SM2).
- Cleary, M. (1977). Fundamental solutions for a fluid-saturated porous solid. *International journal solids and structures*, 13 :785–806.
- Cruse, T. (1968). A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. *Int J Math Anal Appl*, 22 :341–355.
- Cruse, T. (1969). Numerical solution in three-dimensional elastostatics. *Int. J. Solids Struct.*, 5 :1259–1274.
- Cruse, T. (1974). An improved boundary integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis. *Computer and structure*, 4 :741–754.
- Dakoulas, P. (1985). *Contributions to seismic analysis of earth dams*. PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute.
- Dakoulas, P. (1990). Nonlinear response of dams founded on alluvial deposits in narrow canyons. *Soil dynamics and earthquake engineering*, 9(6) :301–312.

- Dargush, G. et Banerjee, P. (1989). A time domain boundary element method for poroelasticity. *International journal for numerical methods in engineering*, 28 :2423–2449.
- Davey, K. et Hinduja, S. (1989). An improved procedure for solving transient heat conduction problems using the boundary element method. *International journal for numerical methods in engineering*, 28 :2293–2306.
- Davidovici, V. (1999). *La construction en zone sismique*. Le Moniteur.
- Demirel, V. et Wang, S. (1987). An efficient boundary element method for two-dimensional transient wave propagation problems. *Appl. Math. Modelling*, 11 :411–416.
- Dominguez, J. (1992). Boundary element approach for dynamic poroelastic problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 35 :307–324.
- Duncan, J. et Chang, C.-Y. (1970). Nonlinear analysis of stress and strain in soils. *Journal of soil mechanics and foundations division, ASCE*, 96(SM5) :1629–1653.
- Durbin, F. (1974). Numerical inversion of laplace transform : An efficient improvement to Duber and Abate's method. *Computer Journal*, 17(4) :371–376.
- Duval, A.-M. (2003). Utilisation de la méthode du bruit de fond. In *Risques sismiques : aléa et vulnérabilité à différentes échelles*, pages 37–62, Paris, France. Laboratoire Centrale des Ponts et Chaussées.
- Faccioli, E. (1991). Seismic amplification in the presence of geological and topographic irregularities. In *Proceedings of the second international conference on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics*, pages 1779–1797, St. Louis, Missouri, S. Prakash. University of Missouri-Rolle.
- Finn, W., Gillon, M., Newton, C., et Yogendrakumar, M. (1992). Simulating the seismic response of a rockfill dam. In *Numerical models in geomechanics*, pages 379–391, Balkema, Rotterdam.
- Francisco, J., Sanchez-Sesma, F., et Campillo, M. (1991). Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features : A boundary integral formulation. *Bull. Seism. Soc. Am*, 81(6) :2234–2253.
- Frankel, A., Hough, S., Friberg, P., et Busby, R. (1991). Observations of Loma Prieta aftershocks from a dense array in Sunnyval, California. *Bulletin of the seismological society of America*, 81 :1900–1922.
- Gaffet, S. et Bouchon, M. (1989). Effects of two-dimensional topographies using the discrete wavenumber-boundary intergral equation method in P-SV cases. *J. Acoust. Soc. Am*, 85 :2277–2283.
- Gatmiri, B. (1990). A simpified finite element analysis of wave-induced effective stresses and pore pressures in permeable sea beds. *Géotechnique*, 40(1) :15–30.
- Gatmiri, B. et Kamalian, M. (1999). Transient BIE and fundamental solutions of dynamic poroelasticity. In *Numerical models in geomechanics-NUMOG VII*, pages 249–254.

- Gatmiri, B. et Kamalian, M. (2002). Combination of boundary element and finite element methods for evaluation of dynamic response of saturated porous media. In *5th European conference on Numerical methods in geomechanical engineering NUMGE 2002*, pages 947–956, Paris. Presses de l'ENPC-LCPC.
- Gazetas, G. (1987). Seismic response of earth dams : some recent developments. *Soil dynamics and earthquake engineering*, 6(1) :1–47.
- Gazetas, G. et Dakoulas, P. (1992). Seismic analysis and design of rockfill dams : state-of-art. *Soil dynamics and earthquake engineering*, 11 :27–61.
- Geli, L., Bard, P.-Y., et Jullien, B. (1988). The effect of topography on earthquake ground motion : a review and new results. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 78 :42–63.
- Green, A. et Naghdi, P. (1965). A dynamical theory of interacting continua. *International journal of engineering Science*, 3 :231–241.
- Hardin, B. (1978). The nature of stress-strain behavior for soils. In *State of the art. International conference on earthquake engineering and soil dynamics*, Pasadena, California.
- Hardin, B. et Drnevich, V. (1972). Shear modulus and damping in soils : design equations and curves. *Journal of soil mechanics and foundations division, ASCE*, 98(SM7) :667–692.
- Harmsen, S. et Harding, S. (1981). Surface motion over a sedimentary valley for incident plane P and SV waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 72 :655–670.
- Israil, A. et Banerjee, P. (1990a). Advanced time-domain formulation of BEM for two-dimensional transient elastodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 :1421–1440.
- Israil, A. et Banerjee, P. (1990b). Two-dimensional transient wave-propagation problems by time-domain BEM. *International Journal of Solids and Structures*, 26(8) :851–864.
- Kagami, H., Duke, C., Liang, G., et Ohta, Y. (1982). Observation of 1 to 5 second microtremors and their application to earthquake engineering. Part 2 : Evaluation of site effect upon seismic wave amplification due to extremely deep soil deposits. *Bulletin of the seismological society of America*, 72 :987–998.
- Karabalis, P. et Beskos, D. (1985). Dynamic response of three-dimensional flexible foundations by time BEM and FEM. *Soil dynamics and earthquake engineering*, 24(2) :91–101.
- Kawase, H. (1988). Time-domain response of a semicircular canyon for incident SV, P and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 78 :1415–1437.
- Kawase, H. et Aki, K. (1989). A study on the response of a soft basin for incident S, P and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 79 :1361–1382.
- Kaynia, A. (1992). Transient Green's functions of fluid-saturated porous media. *Computers and structures*, 44(1/2) :19–27.

- Kaynia, A. et Banerjee, P. (1992). Fundamental solution of Biot's equations of dynamic poroelasticity. *Int. J. Eng. Sci.*
- King, J. et Tucker, B. (1984). Observed variations of earthquake motion over a sediment-filled valley. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 74 :135–152.
- Kinoshita, S., Fujiwara, H., Mikoshiba, T., et Hoshino, T. (1992). Secondary Love waves observed by a strong motion array in the Tokyo Lowlands, Japan. *J. Phys. Earth.*, 40 :99–116.
- Kramer, S. (1996). *Geotechnical earthquake engineering*. Prentice Hall.
- Kupradze, V. (1979). *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North-Holland, Amsterdam.
- Lee, V. (1982). A note on the scattering of elastic plane waves by a hemispherical canyon. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1 :122–129.
- Liao, Z., Baipo, Y., et Yifan, Y. (1980). Effect of three-dimensional topography on earthquake ground motion. In *Proc. World Conf. Earthquake. Eng., 7th*, pages 161–168, Istanbul.
- Lino, M. (1988). Hydraulique des sols et barrages. In *Actes des journées d'étude ENPC sur l'utilisation de la méthode des éléments finis dans les projets de géotechnique*, pages 3–9. Press de l'ENPC, Paris.
- Lysmer, J. et Drake, L. (1972). A finite element method for seismology. In *Methods of Computational Physics, II*. Academic Press, New York.
- Lysmer, J. et Kuhlemeyer, R. (1969). Finite dynamic model for infinite media. *Journal of engineering mechanics division, ASCE*, 95(EM4).
- Manolis, G. et Beskos, D. (1988a). *Boundary element methods in elastodynamics*. Unwin-Hyman (Chapman & Hall), London.
- Manolis, G. et Beskos, D. (1989). Integral formulation and fundamental solution of dynamic poroelasticity and thermoelasticity. *Acta Mechanica*, 76 :89–104.
- Mansur, W. (1983). *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*. PhD thesis, University of Southampton.
- Marrero, M. et Dominguez, J. (2003). Numerical behavior of time domain BEM for three-dimensional transient elastodynamic problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27 :39–48.
- Mononobe, H., Takata, A., et Matumura, M. (1936). Seismic stability of the earth dam. In *Proceedings of the 2nd congress on large dams*, volume 4, pages 435–443, Washington DC, IV.
- Mossesian, T. et Dravinski, M. (1992). A hybrid approach for scattering of elastic waves by three-dimensional irregularities of arbitrary shape. *J. Phys. Earth.*, 40 :241–261.
- Nakamura, Y. (1989). A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface. *Quarterly Report of RTRI 30 [1], Japon*.

- Nechtschein, S., Bard, P.-Y., Gariel, J.-C., Meneroud, J.-P., Dervin, P., Cushing, M., Gaubert, B., Vidal, S., et Duval, A.-M. (1995). A topographic effect study in the nice region. In *Proceedings of the fifth international conference on seismic zonation*, pages 1067–1074, Nice, France. Ouest Edition Nantes.
- Ohtsuki, A. et Harumi, K. (1983). Effect of topography and subsurface inhomogeneities on seismic SV waves. *Int. J. Earth. Engr. Struct. Dyn.*, 11 :441–462.
- Pastor, M. et Zienkiewicz, O. (1990). Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 14(151-190).
- Pavlatos, G. et Beskos, D. (1994). Dynamic elastoplastic analysis by FEM/BEM. *Engineering analysis with boundary elements*, 14 :51–63.
- Pavlatos, G. et Beskos, D. (1999). Dynamic inelastic soil-structure interaction using a hybrid BEM/FEM scheme. In *Proc. IUTAM/IACM Symposium on Discretization methods in structural mechanics*, pages 233–240. Kluwer Academic Publishers.
- Pedersen, H. (1994). *Etude de la diffraction tridimensionnelle des ondes sismiques dans des structures à géométrie bidimensionnelle - Développement théorique et application*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- Pedersen, H., Campillo, M., et Sanchez-Sesma, F. (1995). Azimuth dependent wave amplification in alluvial valleys. *Soil. Dyn. Earth. Engr.*, 14 :289–300.
- Plona, T. (1980). Observation of a second bulk compressional wave in porous medium at ultrasonic frequencies. *App. Phys. Lett.*, 36 :259–261.
- Poceski, A. (1969). The ground effect of the Skopje july 26, 1963 earthquake. *Bull. Seism. Soc. Am*, 59 :1–29.
- Prévost, J. (1980a). Constitutive theory for soils. In *Proceedings of the workshop on limit equilibrium plasticity and generalized stress-strain in geotechnical engineering*. ASCE, Mac Gill University.
- Prévost, J. (1980b). Mechanics of continuous porous media. *Int.J.Engng Sci.*, 18 :787–800.
- Prévost, J. (1985). A simple plasticity theory for frictional cohesionless soils. *Soils dynamics and earthquake engineering*, 4(1).
- Reinoso, E., Wrobel, L., et Power, H. (1994). Preliminary results of the modelling of the Mexico City valley with two-dimensional boundary element method for the scattering of SH waves. *Soil. Dyn. Earth. Engr.*, 12 :457–468.
- Rizzo, F. (1967). A integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quart. Appl. Math.*, 25 :83–95.
- Sanchez-Sesma, F. (1985). Diffraction of elastic SH waves by wedges. *Bull. Seism. Soc. Am*, 75 :1435–1446.
- Sanchez-Sesma, F. (1987). Site effects on strong ground motion. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 6(2) :124–132.

- Sanchez-Sesma, F. (1990). Elementary solutions for the response of a wedge-shaped medium to incident sh and sv waves. *Bull. Seism. Soc. Am*, 80 :737–742.
- Sanchez-Sesma, F. et Campillo, M. (1993). Topographic effects for incident P, SV and Rayleigh waves. *Tectonophysics*, 218 :113–125.
- Sanchez-Sesma, F., Ramos-Martinez, J., et Campillo, M. (1993). An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves. *Earth. Engr. Struct. Dyn.*, 22 :279–295.
- Schanz, M. (2001a). Application of 3D time domain boundary element formulation to wave propagation in poroelastic solids. *Engineering analysis with boundary elements*, 25 :363–376.
- Schanz, M. (2001b). *Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. A boundary element approach*. Springer.
- Schanz, M. et Cheng, A.-D. (2000). Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column. *Acta Mechanica*, 145 :1–18.
- Seed, H., Lee, K., et Idriss, I. (1969). An analysis of Sheffield Dam failure. *Journal of soil mechanics and foundation division, ASCE*, 95(SM6) :1453–1490.
- Shinozaki, Y. et Yoshida, K. (1992). Seismic ground motion in three-dimensional sedimentary basin. In *Special Seminar on Seismic Ground Motion in Sedimentary Basin*, Kyoto, Japan.
- Touhei, T. et Yoshida, N. (1988). Dynamic response analysis of ground using a coupled finite and boundary element method for time marching analysis. In *Numerical methods in geomechanics*, pages 1707–1713, Balkema, Rotterdam.
- Trifunac, M. (1971). Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bull. Seism. Soc. Am*, 61 :1755–1770.
- Trifunac, M. (1973). Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical canyon. *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 1 :267–281.
- Trifunac, M. et Hudson, D. (1971). Analysis of the Pacoima dam accelerogram - San Fernando, California earthquake of 1971. *Bull. Seism. Soc. Am*, 61 :1393–1411.
- Truesdell, C. et Touppin, R. (1960). The classical field theories. In *Handbuch der physik Bd/III/I*. Springer Verlag.
- Tucker, B. et King, J. (1984). Dependence of sediment-filled valley response on input amplitude and valley properties. *Bulletin of the seismological society of America*, 74 :153–166.
- von Estorff, O. et Ante, H. (1991). On FEM-BEM coupling for fluid structure interaction analyses in the time domain. *International journal for numerical methods in engineering*, 31 :1151–1168.
- von Estorff, O. et Firuziaan, M. (2000). Coupled BEM/FEM approach for nonlinear soil/structure interaction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24 :715–725.

- Wiebe, T. et Antes, H. (1991). A time domain integral formulation of dynamic poroelasticity. *Acta mechanica*, 90 :125–137.
- Wong, H. et Jennings, P. (1975). Effect of canyon topographies on strong ground motion. *Bull. Seism. Soc. Am*, 65 :1239–1257.
- Wong, H. et Trifunac, M. (1974a). Scattering of plane SH waves by a semi-elliptical canyon. *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 3 :157–169.
- Wong, H. et Trifunac, M. (1974b). Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bull. Seism. Soc. Am*, 64 :1389–1408.
- Yazdchi, M., Khalili, N., et Valliappan, S. (1999). Dynamic soil-structure interaction analysis via coupled finite element-boundary element method. *Soil dynamics and earthquake engineering*, 18 :499–517.
- Yerli, H., Temel, B., et Kiral, E. (1999). Multi-wave transient and harmonic infinite elements for two-dimensional unbounded domain problems. *Comput Geotech*, 24(3) :185–206.
- Yew, C., Jogi, P., et Gray, K. (1979). Estimation of the mechanical properties of fluid-saturated rocks using the measured wave motions. *J. Energy. Mes. Tech.*, 101 :112–116.
- Yu, G., Mansur, W., Carrer, J., et Gong, L. (1998). A linear  $\theta$  method applied to 2D time-domain BEM. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 14 :1171–1179.
- Yu, G., Mansur, W., Carrer, J., et Gong, L. (2000). Stability of Galerkin and collocation time domain boundary element methods as applied to the scalar wave equation. *Computers and Structures*, 74 :495–506.
- Yu, G., Mansur, W., Carrer, J., et Lie, S. (2001). A more stable scheme for BEM/FEM coupling applied to two-dimensional elastodynamics. *Computers and Structures*, 79 :811–823.
- Zhao, C. et Valliappan, S. (1993). Seismic wave scattering effects under different canyon topographic and geological conditions. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 12 :129–143.
- Zienkiewicz, O. (1982). Basic formulation of static and dynamic behaviour of soil and other porous media. In *Numerical methods in geomechanics*, pages 39–55. Boston and London : D.Reidel.
- Zienkiewicz, O. et Bettess, P. (1982). Soils and other saturated media under transient, dynamic conditions : General formulation and the validity of various simplifying assumptions. In *Soils Mechanics - transient and cyclic loads*. John Wiley & Son Ltd.
- Zienkiewicz, O., Chan, A., Pastor, M., Paul, D., et Shiomi, T. (1990). Static and dynamic behaviour of soils : A rational approach to quantitative solutions. I-Fully saturated problems. In *Proc.R.Soc.Lond*, pages 285–309.
- Zienkiewicz, O., Chang, C., et Bettess, P. (1980). Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils. *Géotechnique*, 30(4) :385–395.

Zienkiewicz, O., Kelly, D., et Bettles, P. (1977). The coupling of finite element and boundary solution procedures. *International journal for numerical methods in engineering*, 11 :276–355.

Zienkiewicz, O. et Mroz, Z. (1984). Generalized plasticity formulation and applications to geomechanics. In *Mechanics of engineering materials*, pages 655–680, Chichester, Sussex. John Wiley.

Zienkiewicz, O. et Shiomi, T. (1984). Dynamic behaviour of saturated porous media : The generalized Biot formulation and its numerical solution. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 8 :71–96.

Zienkiewicz, O. et Taylor, R. (2000). *The finite element method*, volume 1 : Solid mechanics. Butterworth-Heinemann, 5th edition.