



Modélisation du redémarrage des écoulements de bruts paraffiniques dans les conduites pétrolières

Guillaume Vinay

► To cite this version:

Guillaume Vinay. Modélisation du redémarrage des écoulements de bruts paraffiniques dans les conduites pétrolières. Sciences de l'ingénieur [physics]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005. Français. NNT : . pastel-00001842

HAL Id: pastel-00001842

<https://pastel.hal.science/pastel-00001842>

Submitted on 12 Jul 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE DES MINES DE PARIS



INSTITUT FRANÇAIS DU PÉTROLE

École Doctorale 364 : Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'École des Mines de Paris

Spécialité « Mécanique numérique »

présentée par

Guillaume VINAY

Soutenue publiquement le 17 Novembre 2005

Modélisation du redémarrage des écoulements de bruts paraffiniques dans les conduites pétrolières

Directeur de thèse : Jean-François Agassant

Promoteur de thèse : Anthony Wachs

Jury :

M. Michel LEBOUCHÉ	Président
M. Philippe COUSSOT	Rapporteur
M. Roland GLOWINSKI	Rapporteur
M. Thierry COUPEZ	Examineur
M. Jean-François AGASSANT	Directeur de thèse
M. Anthony WACHS	Promoteur de thèse

Table des matières

Remerciements	vii
Notations	ix
Préambule	1
I Le comportement et la modélisation des bruts paraffiniques	5
1 Introduction	6
2 La rhéologie des bruts paraffiniques	6
2.1 Mise en évidence des phénomènes	6
2.2 Les outils et les méthodes de mesure	16
3 Compressibilité du bouchon de gel	22
3.1 Formation du gel	23
3.2 Influence des poches de gaz sur le redémarrage	26
4 Comportement à la paroi	28
4.1 Comportement d'un brut paraffinique à la paroi	28
4.2 Exemples d'autres matériaux	32
5 La modélisation des bruts paraffiniques	33
5.1 Caractérisation thermique de l'état initial	33
5.2 Les modèles de redémarrage	35
5.3 Choix du modèle de redémarrage	43
6 Notre scénario d'arrêt et de redémarrage	44
7 Conclusion	48
II Résolution numérique	49
1 Introduction	50

2	Equations gouvernantes	50
2.1	Conservation de la masse	50
2.2	Conservation de la quantité de mouvement	51
2.3	Loi de comportement	51
2.4	Conservation de l'énergie	53
2.5	Equation de transport : méthode VOF	54
2.6	Système d'équations du problème	55
3	Conditions aux limites du domaine d'écoulement	56
4	Formulation mathématique	57
4.1	Résolution du problème vitesse-pressure compressible avec une méthode de Lagrangien augmenté	58
4.2	Algorithme général de résolution	63
5	Discrétisation des équations par une méthode de Volumes Finis	65
5.1	Equation de transport	66
5.2	Conservation de la masse	71
5.3	Conservation de la quantité de mouvement	72
5.4	Equation de conservation de l'énergie	78
5.5	Equation de Moore	80
5.6	Calcul du tenseur des taux de déformation $\mathbf{d}$	81
6	Résolution des systèmes linéaires	82
6.1	Le problème de Stokes	82
6.2	Equations d'énergie, de transport et de Moore	84
7	Tests numériques	84
7.1	Influence du maillage	84
7.2	Propriétés de convergence	87
8	Conclusion	90
III Application à l'arrêt et au redémarrage d'un brut paraffinique		93
1	Introduction	94
2	Application à l'arrêt de l'écoulement d'un brut paraffinique	95
2.1	Description du problème	95
2.2	Ecoulement isotherme d'un fluide de Bingham	96

2.3	Ecoulement d'un fluide de Bingham avec une viscosité thermodépendante	97
2.4	Ecoulement d'un fluide de Bingham avec une contrainte seuil thermodépendante	99
2.5	Arrêt de l'écoulement par refroidissement	103
3	Application au redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique	109
3.1	Déplacement d'un fluide par un autre fluide	109
3.2	Ecoulement d'un fluide viscoplastique compressible isotherme	119
3.3	Redémarrage d'un fluide viscoplastique thixotrope compressible	130
4	Conclusion	135
IV	Application à des situations réelles	139
1	Introduction	140
2	Démarche à suivre pour l'étude d'un cas réel	140
3	Essais expérimentaux pour déterminer les paramètres physiques	146
3.1	Détermination des paramètres de Houska par la méthode de Cawkwell . .	147
3.2	Détermination des paramètres de Houska par la méthode de Hénaut . . .	150
3.3	Thermodépendance des paramètres de Houska	153
3.4	Mise en place d'un montage expérimental pour caractériser la compressibilité	156
4	Cas de validation avec une boucle expérimentale	160
4.1	Présentation de la boucle expérimentale	161
4.2	Paramètres du modèle de Perkins & Turner	162
4.3	Paramètres de simulation	163
4.4	Résultats	163
5	Conclusion	165
	Conclusion générale	167
	ANNEXES	174
A	Ecoulement stationnaire non-isotherme d'un fluide viscoplastique : FLUENT 6.0	177
1	Introduction	178
2	Présentation du problème	178

3	Implémentation des modèles rhéologiques	179
4	Validation pour un cas d'écoulement simple : un fluide Newtonien non-isotherme	181
5	Résultats des simulations d'un fluide viscoplastique	184
5.1	Cas d'un écoulement viscoplastique isotherme	184
5.2	Prise en compte des effets thermiques	185
6	Conclusion	187
B Publications et participations à congrès		189

Remerciements

Mes premiers remerciements iront à mes encadrants, Jean-François Agassant et Anthony Wachs. Mon directeur de thèse, Jean-François Agassant, m'a donné toute sa confiance en me laissant une grande liberté tout en étant toujours disponible pour m'orienter vers des chemins judicieux qui ont conduit à un échange scientifique fructueux. J'exprime à mon promoteur de thèse, Anthony Wachs, toute ma reconnaissance pour son aide, ses nombreux conseils, sa disponibilité quotidienne, son dynamisme, sa générosité et sa bonne humeur.

J'exprime ma sincère reconnaissance aux membres du jury, Michel Lebouché, Président, Philippe Coussot et Roland Glowinski, Rapporteurs et Thierry Coupez, Examineur. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je souhaite vivement remercier Eric Heintze de m'avoir accueilli aussi chaleureusement dans sa direction Mécanique Appliquée. Je remercie également Françoise Brucy de m'avoir toujours impliqué dans toutes les étapes du projet Cold Start.

Je remercie également l'équipe du laboratoire des Noisetiers sans qui je n'aurais pu réaliser des essais expérimentaux dans une aussi bonne humeur. Un grand merci en particulier à Isabelle Hénaut et Matthieu Olivaud qui ont eu la patience et la gentillesse de m'initier aux manipulations expérimentales.

Un grand merci à l'ensemble de la direction Mécanique Appliquée dans laquelle l'ambiance est toujours bonne grâce aux différentes personnes qui l'animent ; Anthony (Tonio le rider), Manu (le surfer des Sables), Martin (l'homme du grand nord), Philippe (Philou et sa blague quotidienne), Yannick (The expert ...), Sandrine, Véro, Gilles l'Ariègeois, Julien, les Francis, Marc, Laurent et Nadège, ma partenaire de bureau.

On ne peut pas oublier les fabuleux thésards qui ont aussi leur part de bonne humeur ; Momo, Rémi, Patrice, David (l'homme marié à la blague « classe » et au « Moon Walk » légendaire) et Pierre-Victor ; une pensée pour les nombreux voyages « professionnels », avec Pierre-Victor ... plus nombreux que ceux passés avec nos petites amies respectives ... Ont-elles eu des doutes ?

Un sincère et chaleureux remerciement à mes amis, Mike, Damien, Boris, Véro, Jay, Marion, Fred, Emilie, Seb ...

Enfin, un immense merci à ma grande et généreuse famille, à mes parents, ma soeur, mes frères ... un doux merci à Céline pour ses relectures, pour son soutien, pour être là ... avec moi.

Notations

a	Coefficient de restructuration du modèle de Houska
b	Coefficient de déstructuration du modèle de Houska
e	Epaisseur de la paroi du pipeline
k	Partie permanente de la consistance
Δk	Partie thixotrope de la consistance
k_y	Taux de rupture pour la contrainte de cisaillement
k_μ	Taux de rupture pour la viscosité plastique
n	Indice d'écoulement
m	Paramètre d'ajustement du modèle de Houska
u et w	Composantes radiale et axiale de la vitesse
D	Diamètre de la conduite
$\mathbf{D}$	Tenseur des taux de déformation
E	Module d'Young du pipeline
K	Module de Compressibilité du fluide (<i>Bulk modulus</i>)
L	Longueur de la conduite
P	Pression
Q	Débit massique
Q_v	Débit volumique
R	Rayon de la conduite
U	Vitesse
$\bar{U}$	Vitesse moyenne
λ	Paramètre de structure
κ	Perméabilité du gel
τ	Contrainte de cisaillement
τ_w	Contrainte de frottement à la paroi
τ_y	Contrainte seuil
τ_{y0}	Partie permanente de la contrainte seuil
τ_{y1}	Partie thixotrope de la contrainte seuil
$\dot{\gamma}$	Taux de déformation
μ	Viscosité dynamique
μ_a	Viscosité apparente
μ_p	Viscosité plastique
ρ	Masse volumique
Θ	Température du fluide
Θ_{cc}	Température cristallisation commençante
Θ_g	Température de gel

Préambule

Depuis quelques dizaines d'années, l'exploration de nouveaux puits de pétrole (Offshore profond, bruts lourds ...) oblige les compagnies pétrolières à trouver un point d'équilibre fragile entre les avantages et les inconvénients à exploiter de telles ressources. Chaque gisement, de part sa composition et sa situation géographique, donne des propriétés particulières au brut que l'on peut en extraire. La FIG. -1 présente de façon simplifiée le principe de production d'un gisement pétrolier.

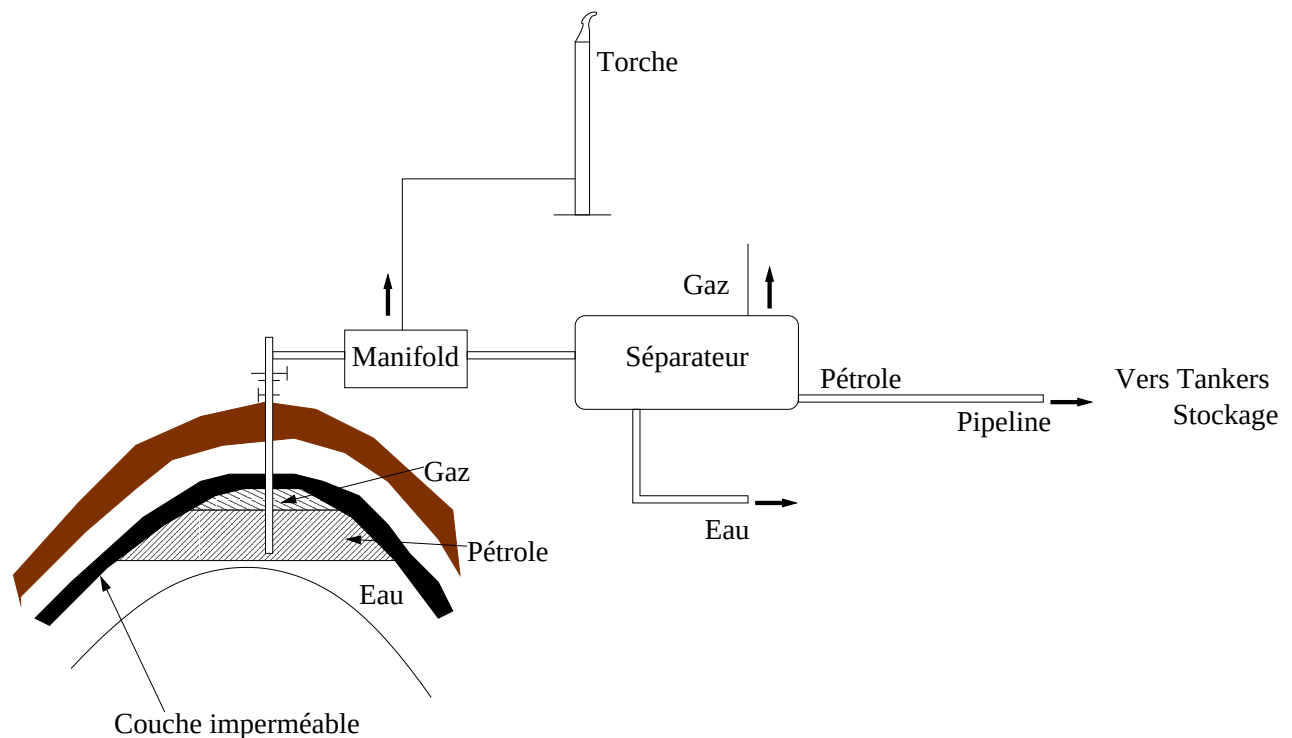


FIG. -1 schéma simplifié du principe de production d'un réservoir pétrolier

Le puits permet d'extraire du réservoir le brut, mais également de l'eau et du gaz. Un séparateur divise le fluide récupéré en 3 phases : eau, gaz et pétrole. Le brut est transporté par pipeline soit jusqu'à une raffinerie ou une cuve de stockage, soit jusqu'au port pour être acheminé par tanker. C'est au cours de ce transport par pipeline que la compagnie pétrolière peut rencontrer des problèmes avec l'acheminement du brut ; tout dépend de sa composition. En effet, le pétrole est classifié suivant ses composants majoritaires et la mesure de sa densité par la gravité API (du nom de *American Petroleum Institute*). Ainsi un pétrole est léger si le degré API est supérieur à 31.1, moyen s'il est compris entre 22.3 et 31.1, lourd s'il est compris entre 10 et 22.3 et extra lourd s'il est inférieur à 10. L'échelle API rend compte de

la viscosité et donc de la longueur des chaînes carbonées des composés. Plus les chaînes sont longues, plus le pétrole est lourd et plus il est difficile de l'extraire et de le transporter. Les bruts paraffiniques, qui représentent environ 20% des ressources mondiales, sont des bruts légers ou moyens. Ils contiennent entre 2% et 10% de paraffines et ont la particularité d'avoir une température de prise en gel élevée, souvent supérieure à la température de l'environnement dans lequel le pétrole est transporté. Les paraffines sont des alcanes qui se composent de chaînes hydrocarbonées pour la plupart linéaires (n-paraffines), et certaines avec quelques composants ramifiés (iso-paraffines). La température joue un rôle important dans l'écoulement des bruts paraffiniques, puisqu'elle contrôle la formation des cristaux de paraffines. Au dessus de la température de cristallisation commençante Θ_{cc} , les bruts paraffiniques possèdent une viscosité faible et constante. Cependant, dès l'apparition de cristaux de paraffines, le comportement rhéologique des bruts paraffiniques change et est désormais caractérisé par un seuil d'écoulement et une viscosité, tous deux dépendants du cisaillement, de la température et du temps.

La principale difficulté dans le transport par pipeline des bruts paraffiniques, concerne le redémarrage de l'écoulement. Les opérateurs pétroliers sont amenés à arrêter l'écoulement dans la conduite pour diverses raisons techniques (panne, intervention d'entretien ...). Ainsi, à l'arrêt, la conduite étant soumise à des conditions thermiques extérieures sévères (régions arctiques, installations sous-marines ...), la température du fluide diminue. Cette diminution de température entraîne la cristallisation des paraffines, et si la température chute en dessous de la température de gel, le brut est gélifié. Si la diminution de la température dure suffisamment longtemps, le brut paraffinique subit une contraction thermique laissant apparaître des poches de gaz qui confèrent au matériau une compressibilité. Finalement, après un long arrêt, un bouchon de gel de plusieurs centaines de mètres occupe le pipeline et il devient difficile de redémarrer l'écoulement.

Plusieurs solutions sont utilisées par les pétroliers pour remettre en route l'écoulement. La première consiste à chauffer le tronçon de pipeline contenant le brut gélifié de façon à le liquéfier. Mais cette technique n'est employée que dans des cas extrêmes, en raison des coûts très élevés de sa mise en oeuvre. Une deuxième solution consiste à appliquer une pression importante pour déstructurer le gel, nettoyer le pipeline de tout débris de gel et retrouver un écoulement stable. En général, un brut chaud est introduit à l'entrée de la conduite pour déplacer le bouchon de gel. Les phénomènes impliqués lors de ce redémarrage ne sont pas complètement connus et ce manque de compréhension entraîne par exemple une surestimation des pressions de redémarrage. Ainsi, les compagnies pétrolières doivent investir dans des pipelines et des pompes capables de supporter de telles surpressions. Ce surcoût à l'investissement peut être diminué si on améliore la compréhension de la phénoménologie du redémarrage et sa modélisation. Ces travaux de thèse vont s'attacher, d'une part à améliorer la compréhension du comportement d'un brut paraffinique au travers d'études expérimentales, d'autre part à enrichir sa modélisation afin que les simulations numériques prévoient des pressions et des temps de redémarrage les plus précis possibles.

Ce manuscrit de thèse se compose de 4 chapitres. Dans le premier, nous décrivons précisément le comportement mécanique, rhéologique et thermique d'un brut paraffinique en faisant référence aux travaux théoriques, expérimentaux et numériques réalisés sur la caractérisation de ce fluide complexe au cours de ces 30 dernières années. Toutes les propriétés des bruts paraffiniques sont décrites : viscoplasticité, thixotropie, thermodépendance, compressibilité, comportement à la paroi ... Ensuite, nous présentons les différents outils et méthodes de mesure des propriétés des bruts paraffiniques. Enfin, nous décrivons différents modèles rhéologiques pre-

nant en compte la viscoplasticité et la thixotropie, tout en discutant les différences de chacun afin de choisir le modèle le plus adapté au redémarrage des bruts paraffiniques. Un scénario est également proposé et permet de synthétiser le comportement complexe d'un brut paraffinique lors des phases d'arrêt et de redémarrage de l'écoulement.

Dans le second chapitre, nous présentons les méthodes mathématiques et numériques mises en oeuvre pour développer un code numérique capable de simuler l'écoulement d'un brut paraffinique dans une conduite 2D axisymétrique. En fait, le problème lié au transport des bruts paraffiniques se compose de deux phases. La phase précédant l'arrêt qui correspond à l'écoulement incompressible non-isotherme d'un fluide viscoplastique et la phase de redémarrage qui consiste à déplacer un fluide viscoplastique, thixotrope et compressible à l'aide d'un autre fluide. Le système d'équations répondant au problème global est donc établi. Ensuite, la formulation mathématique est décrite essentiellement en ce qui concerne l'implémentation de la loi constitutive. En effet, la méthode utilisée repose sur une technique de Lagrangien augmenté, qui permet de prendre en compte la non-dérivabilité du modèle de fluide à seuil. Cette technique, habituellement utilisée pour les fluides viscoplastiques incompressibles, est adaptée aux écoulements compressibles et viscoplastiques. Puis, les équations sont discrétisées par une méthode de Volumes Finis. Un intérêt particulier est porté à la discrétisation des termes de transport dans le but de limiter la diffusion numérique. Ensuite, nous présentons les méthodes et les algorithmes de résolution des systèmes linéaires, spécialement modifiés pour résoudre le problème compressible. Enfin, quelques tests numériques sont menés afin de s'assurer des bonnes propriétés de convergence des différents algorithmes.

Le troisième chapitre est dédié à l'analyse d'une série de résultats numériques concernant l'arrêt d'une part et le redémarrage d'autre part de l'écoulement d'un brut paraffinique. L'application à l'arrêt d'un brut paraffinique consiste à faire l'étude de l'écoulement 2D axisymétrique monophasique non-isotherme d'un fluide viscoplastique incompressible dont les propriétés rhéologiques dépendent de la température. Nous nous intéressons particulièrement à l'influence des effets thermiques sur la physionomie de l'écoulement et la localisation des zones cisailées/non-cisailées. Ensuite, nous présentons les résultats relatifs au redémarrage d'un brut paraffinique. Nous analysons les résultats de simulations qui permettent d'étudier la sensibilité du modèle de redémarrage à chacun de ses paramètres. Ainsi, nous présentons des études concernant les déplacements de deux fluides viscoplastiques, puis nous nous intéressons à l'écoulement compressible d'un fluide viscoplastique, avant de mettre en avant les effets combinés de la thixotropie et de la compressibilité sur le redémarrage.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous abordons le transport des bruts paraffiniques d'un point de vue industriel. Nous proposons d'abord une méthode destinée aux opérateurs pétroliers pour estimer les conditions de redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique dans un pipeline. Cette procédure est composée de 6 étapes à la fois expérimentales et numériques. Ensuite, nous présentons des essais expérimentaux qui permettent de déterminer les paramètres physiques du problème. En particulier, nous décrivons les méthodes expérimentales pour déterminer les paramètres de la loi de comportement et la compressibilité du bouchon de gel. Enfin, l'étude d'une boucle expérimentale est utilisée pour valider le code de calcul et comparer les résultats obtenus, en particulier en terme de pression.

Une étude supplémentaire a été réalisée au cours de cette thèse et est présentée dans un chapitre Annexe A. Cette étude numérique de faisabilité est réalisée avec le logiciel FLUENT 6.0 et vise à établir un état initial thermique pour le redémarrage. Nous décrivons comment est implémenté le modèle rhéologique dans ce code industriel, et quelles sont les limites de l'utilisation de ce logiciel pour notre étude.

Ces travaux de thèse ont également donné lieu aux articles, publiés ou soumis, regroupés dans le chapitre Annexe B :

- *Numerical simulation of non-isothermal viscoplastic waxy crude oil flows*, G. Vinay, A. Wachs & J.F. Agassant, publié dans la revue *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, juillet 2005.
- *Numerical simulation of weakly compressible Bingham flows : application to the restart of waxy crude oils*, G. Vinay, A. Wachs & J.F. Agassant, soumis à la revue *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, novembre 2005.
- *Numerical simulation of weakly compressible viscoplastic waxy crude oil flows*, G. Vinay, A. Wachs & J.F. Agassant, *Fourth Interational Conference on CFD in the Oil and Gas, Metallurgical & Process Indutries*, SINTEF/NTNU Trondheim, Norway, 6-8 June 2005.
- *Simulation numérique d'un écoulement de fluide viscoplastique thermodépendant : application au transport des bruts paraffiniques*, G. Vinay, A. Wachs & J.F. Agassant, *Congrès Français de Mécanique*, Troyes, France, 29 Aout - 2 Sepembre 2005.
- *Méthode de détermination des conditions de redémarrage des écoulements de bruts paraffiniques*, A. Wachs, F. Brucy, I. Hénaut, & G. Vinay, Brevet d'invention : N° d'enregistrement national 04/13 303, 2005

Chapitre I

Le comportement et la modélisation des bruts paraffiniques

1 Introduction

Au cours de ces trente dernières années, de nombreuses études théoriques, expérimentales ou numériques ont été menées pour caractériser le comportement rhéologique d'un brut paraffinique lors de son transport. Bénéficiant de ces travaux passés, nous présentons dans ce chapitre le comportement complexe et la modélisation de ce type de pétrole. Les phénomènes thermiques et mécaniques sont liés entre eux et il est difficile de rendre compte du comportement global du fluide en étudiant chaque aspect séparément. Cependant, par souci de clarté, nous étudions chaque propriété dans ce chapitre. D'abord, son comportement rhéologique change selon les conditions thermiques et mécaniques d'écoulement puisqu'un brut paraffinique peut être Newtonien ou viscoplastique et thixotrope. Afin d'améliorer la méthode de caractérisation rhéologique d'un brut paraffinique et de mieux comprendre comment il se comporte, beaucoup d'expériences en laboratoire ou en grandeur nature ont été menées. Ainsi nous passons en revue les principales techniques expérimentales pour mesurer les paramètres mécaniques et rhéologiques de ce pétrole. Ensuite, il est possible que le brut paraffinique se comporte comme un solide compressible lorsqu'il est gelifié ; nous verrons comment le gel se forme et quelle influence a la compressibilité de ce gel lors du redémarrage. De plus, un brut paraffinique se comporte de différentes façons à la paroi selon son état rhéologique. En particulier, s'il est gelifié, nous verrons qu'il existe un frottement de type solide à la paroi. Ensuite, nous présentons plusieurs approches pour modéliser l'arrêt et le redémarrage d'un écoulement de bruts paraffiniques. Puisque la température a une grande influence sur le comportement des bruts paraffiniques, plusieurs études théoriques et numériques proposent des calculs thermiques dans une conduite pour établir un état rhéologique du fluide lors de l'arrêt. De plus, différents modèles rhéologiques ont été proposés pour prédire le comportement d'un brut paraffinique au redémarrage ; les plus complets prennent en compte la viscoplasticité et la thixotropie. Enfin, en tenant compte de l'influence des différentes propriétés mécaniques et thermiques, nous proposons un scénario d'arrêt et de redémarrage d'un écoulement de brut paraffinique dans une conduite. C'est ce scénario que nous tenterons de modéliser dans les chapitres qui suivent.

2 La rhéologie des bruts paraffiniques

2.1 Mise en évidence des phénomènes

Lorqu'on étudie le comportement d'un brut paraffinique, celui-ci peut être considéré aussi bien comme un fluide Newtonien, non-Newtonien à seuil, thixotrope et même comme un solide plastique hétérogène, selon les conditions thermiques et mécaniques dans lesquelles il se trouve. Cependant, dans tous les cas, la température joue un rôle très important et nous pouvons caractériser le comportement du fluide par deux températures spécifiques :

- La température de cristallisation commençante Θ_{cc} (*WAT, Wax Appearance Temperature*) est la température pour laquelle les premiers cristaux de paraffines apparaissent. Certains l'appellent également point de trouble (*Cloud Point*).
- La température de gel Θ_g ou le point d'écoulement (*Pour Point*) représente la limite pour laquelle le brut passe de l'état fluide (il peut s'écouler) à un état gel-solide.

Pour illustrer ce comportement, nous découpons l'écoulement d'un brut paraffinique dans une conduite en 6 parties (FIG. I-1), chacune représentative de ces différents comportements

(Drouffe et al. [18]) :

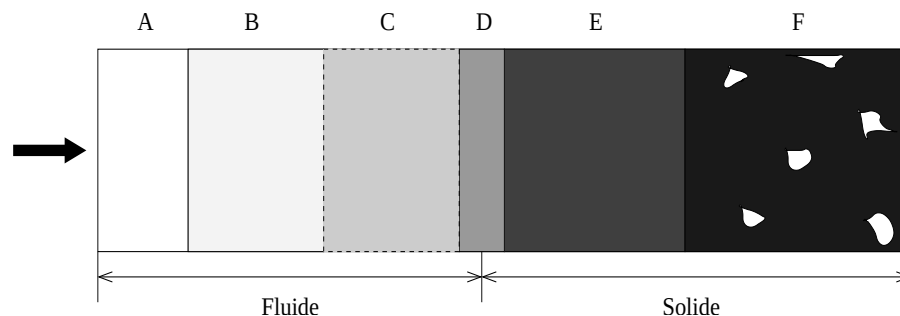


FIG. I-1 Découpage d'une conduite illustrant les différents comportements rhéologiques d'un brut paraffinique

- Partie A : L'écoulement est Newtonien, puisque le pétrole injecté est chaud, avec une température supérieure au point trouble.
- Partie B : Le brut se refroidit et sa température est comprise entre le point trouble et la température de gel ; son comportement devient non-Newtonien.
- Partie C : Les cristaux de paraffine se regroupent en agrégats et le fluide a maintenant un comportement qui dépend du temps ; c'est un fluide non-Newtonien à seuil et thixotrope.
- Partie D : Cette zone est l'interface entre la partie C fluide, et la partie E solide. Elle se comporte comme un bouchon solide avec apparition de fissures dans lesquelles le fluide pénètre.
- Partie E : Ce bouchon solide de gel résiste à la pression du fluide amont, par un frottement solide à la paroi. Cette pression est suffisamment forte pour remplir les poches de gaz emprisonnées au sein du gel.
- Partie F : Le gel est protégé du milieu amont par le bouchon de la partie E et reste donc intact ; il est de plus compressible car on observe des poches de gaz au sein du gel.

Thermodépendance

Lorsqu'un brut paraffinique s'écoule dans des conditions thermiques favorables ($\Theta > \Theta_{cc}$), il se comporte comme un fluide Newtonien. Cependant, lorsqu'on diminue la température, on observe que le comportement rhéologique devient non-Newtonien. Barry [5] l'a vérifié expérimentalement sur deux bruts paraffiniques Nord Africains.

La FIG. I-2 présente les résultats expérimentaux d'un brut paraffinique Nord Africain de type I à gauche et de type II à droite. Barry a tracé la contrainte de cisaillement (τ) en fonction du taux de cisaillement ($\dot{\gamma}$) et montre ainsi qu'au dessus d'une certaine température (75°F pour le type I), ce brut a un comportement Newtonien, puisqu'il y a une relation linéaire entre la contrainte et le taux de cisaillement. Elle s'écrit :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (\text{I.1})$$

Ensuite, lorsque la température diminue (70°F pour le type II), on constate que la courbe n'obéit plus à une relation linéaire, mais plutôt à une loi puissance (du type loi d'OSTWALD-DE-WAELE) :

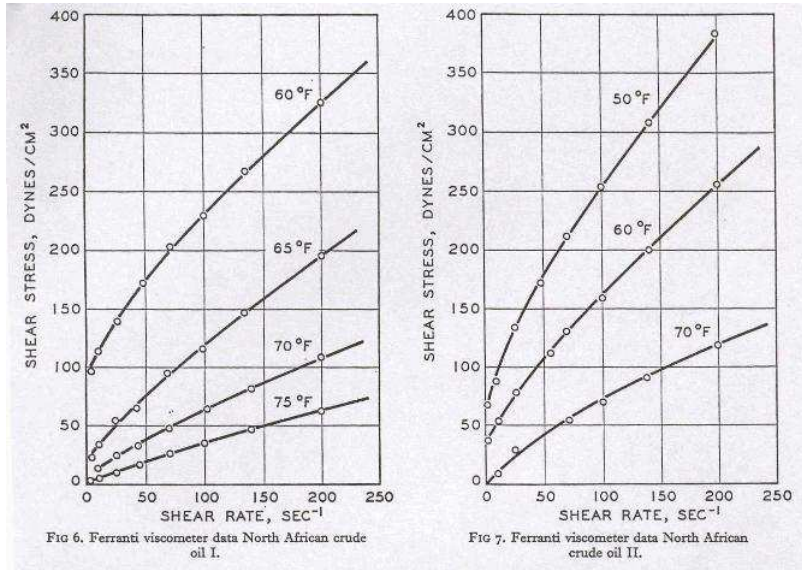


FIG. I-2 Comportements rhéologiques d'un brut paraffinique Nord Africain pour différentes températures, d'après Barry [5]

$$\begin{cases} \tau = k \dot{\gamma}^n \\ 0 < n \leq 1 \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Le fluide n'est plus Newtonien, mais pseudo-plastique ou rhéofluidifiant.

Enfin, si la température diminue encore (70°F pour le type I ou 60°F pour le type II), il apparaît une contrainte critique en dessous de laquelle il n'y a pas d'écoulement ; par exemple, la contrainte seuil, notée τ_y est de 100 dynes.cm⁻² (10 Pa) pour le brut de type I à une température de 60°F. Puis, une fois cette contrainte seuil dépassée, le brut se comporte comme un matériau d'Ostwald. Ainsi, le fluide a maintenant un comportement viscoplastique qu'il est possible de représenter par la relation d'HERSCHEL-BULKLEY :

$$\begin{cases} \tau = \tau_y + k \dot{\gamma}^n & \text{si } \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_y \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Finalement, ces données expérimentales montrent qu'un brut paraffinique a un comportement différent selon la température à laquelle il s'écoule. Cette simple étude expérimentale nous permet de mettre en évidence le rôle important que la température joue dans le comportement rhéologique d'un brut paraffinique, et on peut déjà supposer que les paramètres de ces différents modèles (k, μ, τ_y, n) dépendent tous de la température.

Influence du taux de cisaillement

Lorsqu'on transporte un brut paraffinique, le débit a une importance dans le comportement du fluide. En effet, nous allons voir que le brut peut être Newtonien s'il est transporté à fort débit ou devenir viscoplastique s'il est transporté à faible débit.

Knegt et al. [29] ont fait une étude expérimentale sur un brut paraffinique transporté dans

le pipeline Rotterdam-Rhine dans le nord de l'Europe. Afin de caractériser le comportement de ce brut, plusieurs expériences ont été menées pour comparer les débits mesurés dans des pipelines modèles, et les débits calculés avec deux modèles rhéologiques différents (Newton, Bingham) et une méthode de Hedström, détaillée ci-après.

Un fluide de BINGHAM est décrit par la relation suivante :

$$\begin{cases} \tau = \tau_y + \mu_p \dot{\gamma} & \text{si } \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_y \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

On calcule les débits volumiques pour des fluides Newtoniens et de Bingham à partir de la formule de RABINOWITSCH suivante :

$$\frac{Q_v}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 f(\tau) d\tau \quad (\text{I.5})$$

Cette formule est valable pour tous les fluides visqueux en régime laminaire dans une conduite cylindrique, en prenant $f(\tau) = \dot{\gamma}$ et $\tau_w = \frac{D}{4} \frac{\Delta P}{L}$, τ_w contrainte de frottement à la paroi.

On obtient ainsi la relation de HAGEN-POISEUILLE pour un fluide Newtonien :

$$Q_v = \frac{\pi D^4}{128 \mu} \frac{\Delta P}{L} \quad (\text{I.6})$$

et la relation de REINER-BUCKINGHAM pour un fluide de Bingham :

$$Q_v = \frac{\pi D^4}{128 \mu_p} \frac{\Delta P}{L} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{4 \tau_y}{D} \frac{L}{\Delta P} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{4 \tau_y}{D} \frac{L}{\Delta P} \right)^4 \right) \quad (\text{I.7})$$

La méthode de HEDSTRÖM est basée sur une représentation graphique équivalente à la relation (I.7) de Reiner-Buckingham. Elle fait intervenir des nombres adimensionnels qui permettent de déterminer graphiquement le débit.

$$\mathcal{R}e_p = \frac{\rho \bar{U} D}{\mu_p} \quad \text{nombre de Reynolds plastique}$$

$$\mathcal{B}i = \frac{\tau_y D}{\bar{U} \mu_p} \quad \text{nombre de Bingham}$$

$$\mathcal{H}e = \frac{\tau_y \rho D^2}{\mu_p^2} = \mathcal{B}i \cdot \mathcal{R}e_p \quad \text{nombre d'Hedström}$$

Knegt et al. [29] présentent les différences entre les débits mesurés et les débits calculés avec ces différentes méthodes sur le tableau de la FIG. I-3.

Deviations of Calculated Flow Rates from Observed Flow Rates			
(Average in per cent of observed flow rates)			
Diameter	Method		
	Newtonian	Bingham	Hedstrom
16-inch line	+6	-7	-6
24-inch line	+17	0	+4

FIG. I-3 Différences entre les débits mesurés et les débits calculés (en %), d'après Knegtel et al. [29]

Les résultats fournis par le pipeline de plus gros diamètre (*24-inch line*) ont été obtenus à faible taux de cisaillement (80 s^{-1}). Le brut se comporte alors d'avantage comme un fluide viscoplastique de type Bingham, puisque Knegtel obtient une différence entre les débits mesurés et les débits calculés avec le modèle de Bingham de pratiquement 0%.

Les expériences réalisées dans le pipeline de petit diamètre (*16-inch line*) ont été faites à fort taux de cisaillement (400 s^{-1}). On constate que l'erreur sur les débits calculés augmente dans les cas Bingham (de 0 à -7) et Hedström (de +4 à -6), et diminue dans le cas Newtonien (de +17 à +6). Ainsi, un brut paraffinique fortement cisailé va tendre vers un comportement Newtonien, c'est-à-dire que lorsque le brut s'écoule avec un débit important, la viscosité et la contrainte seuil diminuent et le fluide devient Newtonien.

Fluide thixotrope

Nous reprenons la définition que donne Midoux [31] pour décrire un fluide thixotrope : « La consistance de ces fluides dépend aussi bien de la vitesse de cisaillement que de la durée de cisaillement. Si un fluide thixotrope est soumis à un cisaillement après une période de repos, sa structure se désorganise peu à peu et sa viscosité apparente décroît avec le temps. Au fur et à mesure que le nombre de liaisons détruites augmente, la vitesse de décroissance de la viscosité apparente diminue et la structure tend à se réorganiser à une vitesse qui varie comme le nombre de liaisons détruites. » Nous allons ainsi vérifier que non seulement les paramètres rhéologiques d'un brut paraffinique dépendent de la température et du taux de cisaillement, mais également du temps et de son histoire thermo-mécanique.

Perkins et al. [35] ont étudié un pétrole de Prudoe Bay en Alaska et ont mis en avant les propriétés thixotropes de ce brut paraffinique. Ils font apparaître un phénomène de vieillissement (*aging*) du gel, ce qui les amène à faire des tests dans 12 viscosimètres cylindriques différents en même temps. Ils s'assurent que les 12 échantillons de bruts ont les mêmes états rhéologiques, mécaniques et thermiques au début de l'expérience. Après refroidissement puis maintien d'un échantillon à la température d'essai pendant une durée variable selon l'échantillon, il a été constaté une augmentation de la rigidité du gel avec ce temps de maintien.

Un autre essai réalisé par Henaut [26], montre que le temps de maintien à l'état de gel (*holding time*) a une influence sur la contrainte seuil, comme nous le montre la FIG. I-4. Dès les premiers instants, la contrainte seuil du brut augmente rapidement. Puis, la contrainte seuil atteint une valeur constante ($\approx 15000 \text{ Pa}$), ce qui indique que la structure du brut n'évolue

plus au cours du temps.

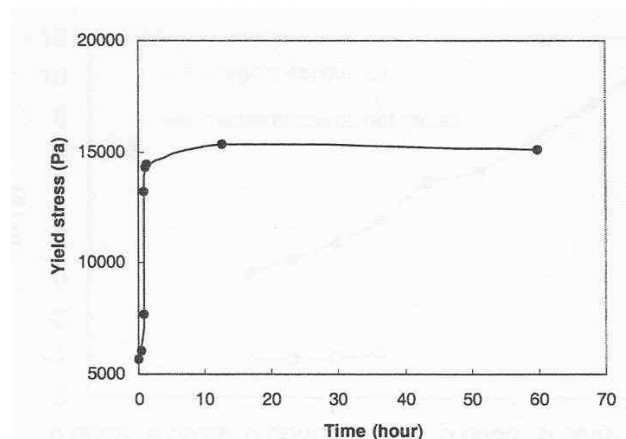


FIG. I-4 Contrainte seuil en fonction du temps de maintien pour une température constante (25°C) d'un brut paraffinique du Gabon (ATORA), mesurée sur un scissomètre (Wykeham Farrance), d'après Henaut [26]

Wardhaugh et Boger [64] déterminent la dépendance en temps en mesurant la contrainte de cisaillement lorsqu'ils augmentent puis diminuent le taux de cisaillement. Sur la FIG. I-5, le brut thixotrope (■) présente une boucle de chargement (Hystérésis) ce qui signifie que son comportement a évolué au cours du temps. Lorsqu'on observe le fluide qui n'est pas thixotrope (□), on constate que les courbes de chargement et de déchargement sont superposées; son comportement est constant dans le temps.

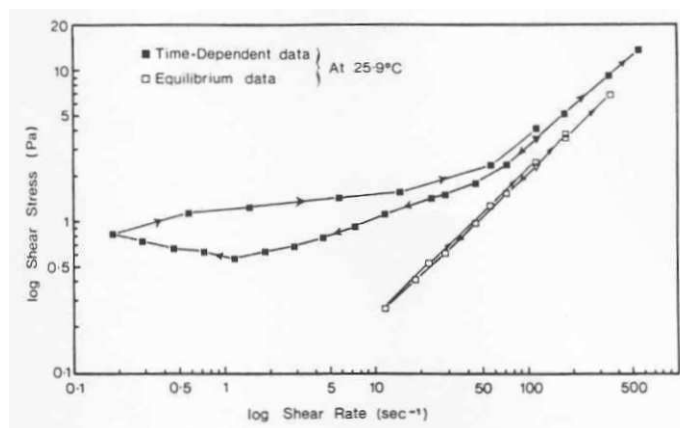


FIG. I-5 Mise en évidence de la thixotropie d'un brut paraffinique de Jackson-Hutton à 25.9°C, d'après Wardhaugh et Boger [64]

Enfin, des essais de fluage réalisés par Hénaut montrent que si une contrainte est imposée suffisamment longtemps, l'écoulement redémarre. En effet, sur la FIG. I-6, Hénaut présente plusieurs essais de fluages pour lesquels des contraintes entre 800 et 2500 Pa ont été appliquées sur l'échantillon pendant 10 à 10^5 s (27 h). Pour une contrainte de 1000 Pa, la déformation augmente de 5 % en 1000 s, puis le matériau cède. Or lorsqu'on applique une contrainte de 2500 Pa, le matériau cède en moins de 10 s.

Le passé thermo-mécanique d'un brut paraffinique a une influence sur son comportement

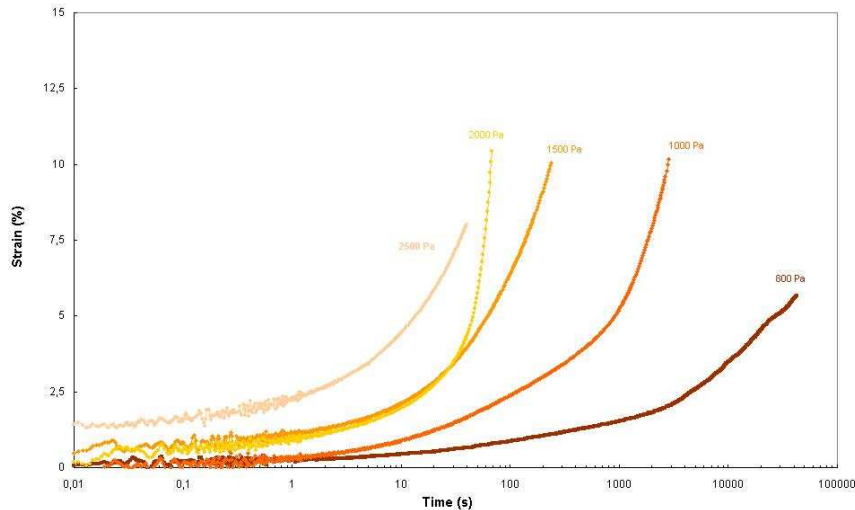


FIG. I-6 Mise en évidence de l'influence du temps sur la contrainte lors d'un essai de fluage sur un échantillon du brut Aтора à 25°C, d'après Hénaut

et plus particulièrement lors du redémarrage. En effet, si le brut subit de fortes différences de température ou de débit, il ne se comporte pas de la même façon qu'un brut transporté à débit et température constants. C'est pourquoi, nous allons décrire le caractère thixotrope d'un brut paraffinique en évoquant indépendamment son comportement lié à son histoire thermique puis lié à son passé mécanique.

Histoire thermique : Nous reprenons ici les travaux de Perkins et al. [35] qui ont étudié les effets du passé thermique sur le pétrole d'Alaska. Ils montrent l'influence de l'histoire thermique sur la contrainte seuil, à travers différents tests effectués sur plusieurs échantillons de brut de Prudoe Bay (FIG. I-7) :

- L'échantillon *beneficiated oil* a subi une forte augmentation de température (180 °F) afin d'éliminer tout passé thermique et mécanique. Le refroidissement très lent (1 °F/min) imposé à cet échantillon a permis d'obtenir la contrainte seuil la plus basse.
- Les échantillons A, B et C ont subi des cycles de température de différentes amplitudes (Amplitude cycle A < Amplitude cycle B < Amplitude cycle C) ; ils ont été refroidis à une température intermédiaire, puis rechauffés (à une température insuffisante pour éliminer toute histoire thermique) et enfin refroidis à la température d'essai. On constate ainsi que plus l'échantillon est soumis à de fortes variations de température, plus la contrainte seuil augmente. Ainsi, il est important de conserver une température de transport constante et la plus haute possible pour garder une contrainte seuil minimum et donc garantir un redémarrage plus facile.

Finalement, ces travaux expérimentaux nous permettent de conclure que pour s'affranchir du passé thermique, il est nécessaire de chauffer l'échantillon à une température élevée.

Un autre aspect de l'histoire thermique est l'influence de la vitesse de refroidissement des échantillons. Pour l'échantillon *beneficiated oil*, sa très faible vitesse de refroidissement permet de conserver une petite contrainte seuil. En revanche, Perkins et al. [35] observent une augmentation de la contrainte seuil lorsque cet échantillon est refroidi très rapidement (une trempe

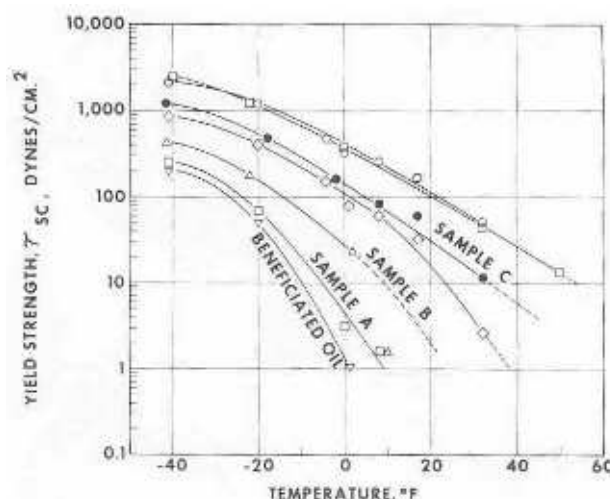


FIG. I-7 Influence du passé thermique sur un pétrole de Prudoe Bay, d'après Perkins et al. [35]

dans un bain froid par exemple correspond à un taux de refroidissement de quelques dizaines de degrés par minute). Henaut et Brucy de l'IFP [27], mettent en évidence l'influence de la température et de la vitesse de refroidissement sur la contrainte seuil. Sur la FIG. I-8, nous observons d'abord que plus la température est basse, plus la contrainte seuil est élevée. Par exemple, l'échantillon refroidi à $0.5^{\circ}\text{C}.\text{min}^{-1}$ présente une contrainte seuil de 1500 Pa à 34°C et de 62000 Pa à 0°C . Ensuite, le comportement du brut est étudié lorsqu'il a été refroidi de deux façons différentes (à $0.5^{\circ}\text{C}.\text{min}^{-1}$ et à $0.01^{\circ}\text{C}.\text{min}^{-1}$). Les valeurs des contraintes seuil montrent que plus le brut est refroidi rapidement, plus sa contrainte seuil est grande. Ce phénomène est dû à la différence de formation des cristaux selon cette vitesse de refroidissement. En effet, à l'aide d'un microscope optique, il est observé qu'un refroidissement lent entraîne la formation de gros cristaux, mais en petite quantité, alors qu'un refroidissement rapide favorise la formation d'un grand nombre de petits cristaux. Ainsi, ces derniers, de part leur importante surface de contact, améliorent la qualité d'enchevêtrement et la cohésion des cristaux et sont ainsi responsables de fortes contraintes seuil.

Histoire mécanique : Le taux de cisaillement lors de l'écoulement a une forte influence sur le comportement du brut, mais il apparaît également que son histoire en cisaillement modifie son comportement lors de l'écoulement. En effet, un pétrole qui a été fortement cisailé et qui est maintenant au repos subit un processus de restructuration de part son caractère thixotrope, mais présente une viscosité apparente plus faible qu'un fluide qui est resté immobile pendant toute cette période.

Mackay et al. [30] ont réalisé une étude rhéologique d'un brut paraffinique, le brut Canadien d'Avalon J-34, au cours de laquelle ils mettent en évidence l'influence de l'histoire mécanique sur la contrainte de cisaillement et sur la viscosité de ce brut. Ils ont établi un protocole de taux de cisaillement constitué de 8 phases au cours desquelles le cisaillement prend trois valeurs différentes (96 s^{-1} , 38 s^{-1} et 0 s^{-1}), comme le montre la figure du haut de la FIG. I-9. Sa partie basse présente la variation de la contrainte de cisaillement en fonction du temps lors du programme de cisaillement.

Il apparaît que la contrainte dépend du taux de cisaillement appliqué lors de la phase

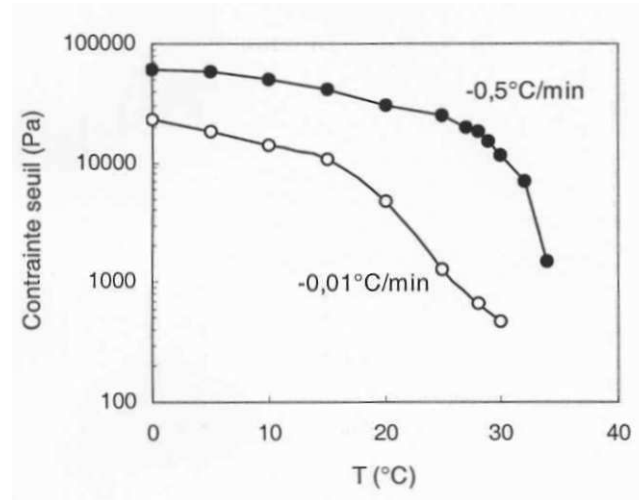


FIG. I-8 Influence de la vitesse de refroidissement sur la contrainte seuil d'un brut paraffinique gélifié, d'après Henaut et al [27]

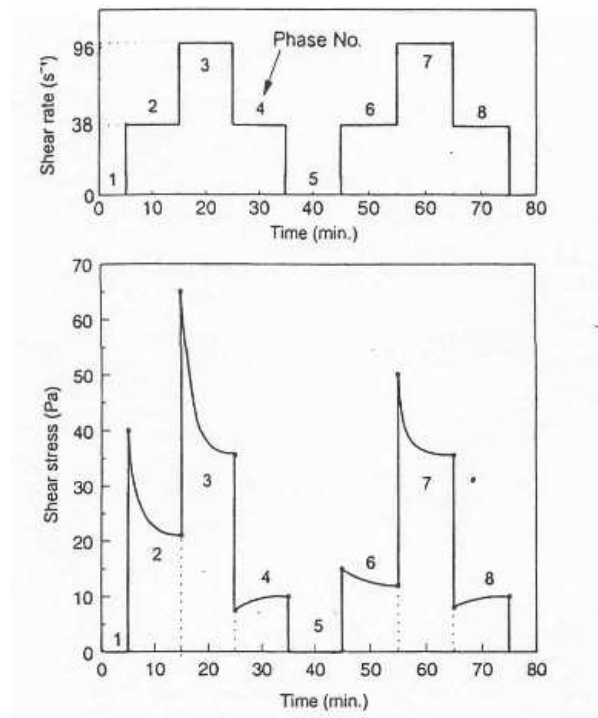


FIG. I-9 Protocole de cisaillement composé de 8 phases, d'après Mackay et al. [30]

précédente. En effet, lors de la phase 4 qui est précédée d'une phase à fort cisaillement, le gel se déstructure partiellement et la contrainte est plus faible que lors de la phase 2, qui n'est précédée d'aucun cisaillement. La phase 6 est cisailée à 38 s^{-1} , comme la phase 4; or la contrainte de cisaillement est plus importante dans la phase 6 que dans la phase 4. Au cours de la phase 5 pendant laquelle il n'y a pas eu de sollicitation, le gel a pu se reformer, ce qui explique cette augmentation de la contrainte de cisaillement. Ainsi, pendant les 10 minutes de la phase 5, le caractère thixotrope du brut paraffinique est mis en évidence puisque la structure de gel évolue au cours du temps.

La FIG. I-10 présente les courbes de viscosité apparente du brut, avant et après avoir été fortement cisailé à 96 s^{-1} . On remarque une réelle influence de l'histoire en cisaillement sur la viscosité, puisque le fluide a un comportement moins visqueux après avoir été fortement sollicité mécaniquement. On peut donner une explication à ce phénomène en raisonnant sur les cristaux de gel, comme l'a fait Mackay. La faible température d'écoulement (0.2°C) favorise l'apparition de cristaux dans le brut, ce qui explique cette grande viscosité ; ainsi la taille et la quantité de ces cristaux contrôlent la viscosité. Or, pour des taux de cisaillement importants, ces cristaux s'orientent dans le sens de l'écoulement et s'érodent, ce qui provoque une baisse de la viscosité. Cazaux [9], dans une étude sur la gélification des bruts paraffiniques, montre par diffraction des rayons X que le cisaillement est capable d'induire un alignement des cristaux dans le sens de l'écoulement.

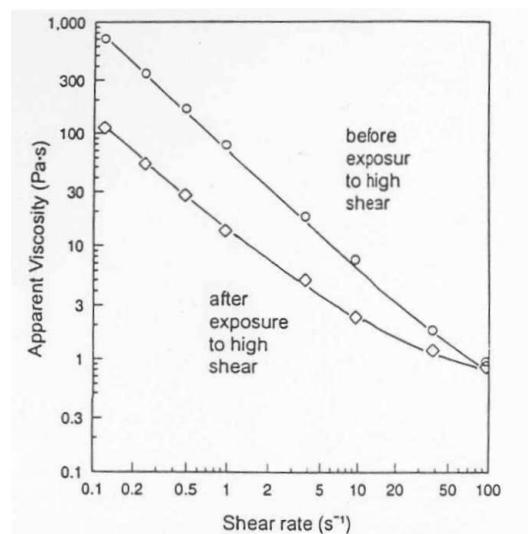


FIG. I-10 Viscosité apparente en fonction du taux de cisaillement à une température de 0.2°C , avant et après avoir subi un fort cisaillement (96 s^{-1}), d'après Mackay et al. [30]

Verschuur et al. [54], au cours d'une étude mettant en évidence les problèmes d'échelle (écoulement dans un pipeline grandeur réelle ou dans un pipeline de laboratoire), nous font part de l'influence du type de refroidissement sur le redémarrage. Ils procèdent avec deux types de refroidissement :

- Dynamique (*dynamic cooling*) : la température diminue pendant que le fluide s'écoule ; une fois que la température d'essai est atteinte, on arrête l'écoulement.
- Statique (*static cooling*) : le fluide s'écoule au dessus de la température de gel ; on arrête l'écoulement puis on fait diminuer la température jusqu'à la température d'essai.

Verschuur et al. [54] ont fait des tests sur des bruts du Proche et du Moyen Orient ; le TAB. I.1 présente les résultats des expériences sur le mélange d'un brut de Libye et du Moyen Orient. On constate dans le test 1.2 au cours duquel le refroidissement dynamique occupe une plage importante de température, que le redémarrage est 3 fois plus rapide et que la contrainte de cisaillement est 50 fois plus faible que pour le refroidissement statique. Ainsi, les conditions d'arrêt de l'écoulement ont une énorme influence sur le comportement du brut au redémarrage. Verschuur et al. [54] n'expliquent pas cette différence de comportement, mais on peut cependant interpréter ce résultat de la façon suivante. On comprend que la gélification va se faire des parois vers le centre du pipeline puisqu'il existe un gradient de température qui va favoriser l'apparition de cristaux de gel sur la paroi. Lors d'un refroidissement dynamique, le cisaillement

imposé permet une orientation des cristaux dans le sens de l'écoulement (d'après Cazaux [9]). Lorsque la conduite est prise en gel, les cristaux de paraffines sont figés dans une direction privilégiée ; la contrainte seuil est faible. Au contraire, lors d'un refroidissement statique, cette orientation des cristaux n'existe pas et provoque un enchevêtrement compact, à l'origine d'une contrainte seuil élevée.

Run number	1.1	1.2
Crude oil	Blend of Libyan and Middle East	Blend of Libyan and Middle East
Pour point, °C	17	17
Dynamic cooling range, °C	-	54.0 → 18.6
Static cooling range, °C	54.0 → 15.6	18.6 → 15.6
Test temperature, °C	15.6	15.6
Time after yielding, minutes	61	20
Shear stress, N.m ⁻²	25	0.5
Flow rate, m ³ .hr ⁻¹	8.0	10.0
Apparent viscosity, Pa.s	9.1	0.15

TAB. I.1 Résultats des expériences pour un mélange Moyen-Orient/Libye, d'après Verschuur et al. [54]

2.2 Les outils et les méthodes de mesure

Les différents viscosimètres

Deux méthodes sont utilisées pour mesurer les paramètres d'écoulement d'un fluide visqueux :

- La rhéométrie capillaire qui permet de déterminer la relation entre la contrainte de cisaillement τ et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ à partir des mesures du gradient de pression et du débit dans un tube rectiligne. Dans ce type de système, $\dot{\gamma}$ n'est pas constant, mais varie de 0 au centre à sa valeur maximale à la paroi.
- La viscosimétrie rotative (cylindres, plans, cônes) permet de mesurer directement la contrainte de cisaillement pour un taux de cisaillement quasi uniforme dans l'appareil (cisaillement uniforme pour le viscosimètre cône-plan).

Nous décrivons brièvement dans la suite le principe des viscosimètres rotatifs que nous utilisons lors de nos études expérimentales.

- Viscosimètre cône-plan

La FIG. I-11 présente un schéma de principe d'un viscosimètre cône-plan. Pour un angle θ petit ($< 5^\circ$), on peut considérer que le fluide est soumis à un taux de cisaillement constant dans tout l'entrefer, défini par l'équation suivante :

$$\dot{\gamma} = \frac{d\Omega}{d\theta} \simeq \frac{\Omega}{\theta} = f(\tau) \quad (\text{I.8})$$

Donc, la contrainte de cisaillement ne dépend pas de r , comme $\dot{\gamma}$, et le couple se calcule par :

$$C = 2\pi\tau \int_0^R r^2 dr \longrightarrow \tau = \frac{3C}{2\pi R^3} \quad (\text{I.9})$$

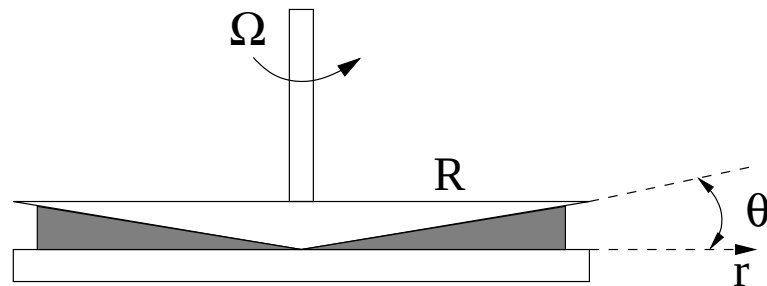


FIG. I-11 Schéma descriptif d'un rhéomètre cone-plan

Finalement, à partir de la mesure du couple et des équations (I.8) et (I.9), il est possible de tracer directement le rhéogramme $\tau - \dot{\gamma}$ pour déterminer le comportement du fluide. Cet appareil, en plus de sa simplicité d'utilisation, présente l'avantage de pouvoir contrôler facilement la température de l'échantillon. Il est de plus bien adapté pour étudier le comportement de fluide non-Newtonien (pseudoplastique ou viscoélastique).

- Rhéométrie oscillatoire

Le principe repose sur l'application d'une déformation de type sinusoïdal sur un échantillon dans un rhéomètre cône-plan ou plan-plan et sur la mesure de la réponse sinusoïdale de la contrainte de cisaillement. On détermine ainsi un module G^* et une viscosité complexe μ^* en fonction d'une fréquence (ou pulsation).

La partie réelle G' du module complexe de cisaillement est le module élastique (en phase avec la consigne) et la partie imaginaire G'' est le module visqueux (en opposition de phase avec la consigne).

Le problème difficile de la mesure du seuil de contrainte

Dans la plupart des études de redémarrage, la procédure pour mesurer la contrainte seuil se fait dans un tube (viscosimètre capillaire) dans lequel est introduit le brut, qui est chauffé à une température « purificatrice » qui permet d'effacer toute trace de passé mécanique et thermique. L'échantillon est ensuite maintenu au repos pendant une période propre à chaque expérience, puis il est refroidi à une certaine vitesse jusqu'à la température d'expérience, où il est maintenu une nouvelle fois au repos. Ensuite, une pression est imposée à l'entrée de la conduite, suivie d'une période de repos, puis d'une succession de séquences de pressions de plus en plus élevées et de repos. Le gel est considéré comme déstructuré quand une certaine quantité de brut est sortie du tube. A partir de la pression mesurée, il est possible de déterminer la contrainte de cisaillement à la paroi grâce à la formule (I.10) :

$$\tau_w = \frac{D}{4} \frac{\Delta P}{L} \quad (\text{I.10})$$

Les temps de repos, les pressions appliquées par différents expérimentateurs sont regroupés dans le tableau de la FIG. I-12, proposé par Baticky et Ritter [6] en 1978. Ce tableau permet de voir également les différents appareils utilisés et les différentes techniques d'observation pour définir quand le brut redémarre.

Finalement, il apparaît que chacun possède sa propre procédure pour mesurer une contrainte seuil. Il semble donc que ce n'est pas la précision qui est recherchée, mais plutôt une indication qualitative du seuil d'écoulement. Baticky et Ritter [6] rapportent des conclusions de plusieurs

1. TUBE TESTING					
Experimentors	Tube Size	Initial Step, Wall Shear Stress (Pa)	Waiting Period (min)	Subsequent Steps, Wall Shear Stress (Pa)	Yield Stress Definition
Gill & Russell ⁽⁹⁾ Billington ⁽³⁾	1 mm dia U-tubes 1½ mm dia × 4.50 m	3.0	PAUSE	3.0	Flow observed
		Various single stress values — recording response time when critical velocity estimated, then extrapolating to zero time for yield.			
Davenport & Russell ⁽⁵⁾	1½ mm dia, 10.9 mm × 55.2 m	—	—	—	Flow observed
Wyllie & Jones ⁽²¹⁾	1½ mm dia	2.8	5	2.8	Flow observed
Ford, Ellis & Russell ⁽⁸⁾	6.35 mm dia × 15.25 m	—	—	—	—
Price ⁽¹⁵⁾	6.35 mm dia × 15.25 m	1.0	15	1.0	Movement greater than 2.5 cm in 15 min.
	12.7 mm dia × 15.25 m	—	—	—	—
Brod, Deanne & Rossi ⁽⁴⁾	6.35 mm dia × 15.25 m	1.0	15	1.0	Movement > 2.0 cm in 15 min.
	12.7 mm dia × 15.25 m (.38 m dia coils)	—	—	—	—
Uhde & Kopp ⁽¹⁸⁾	6.35 mm dia × 15.25 m	1.5	15	1.0	Flow observed
Davenport & Somper ⁽⁶⁾	6.35 mm dia × 15 m	1.0	30	1.0	Continuous movement
	12.7 mm dia × 15 m	—	—	—	—
	24.3 mm dia × 100 m	1.0	60	1.0	Continuous movement
	77.9 mm dia × 300 m	—	—	—	—
Verschuur, den Hartog & Verheul ⁽¹⁹⁾	4 mm dia × 0.6 m	Two tests total, Injected kerosene Injected test oil			
Perkins & Turner ⁽¹²⁾	7.9 mm dia × 15.25 m				
2. VISCOMETRIC TESTING					
Experimentors	Geometry	Testing Procedure			
Savins & Cox ⁽¹⁷⁾	Cone & Plate	Visually observed yield point at onset of cone motion after start of up-curve shearing.			
Davenport & Somper ⁽⁶⁾	Coaxial Cylinder Height: 67 mm Cup radius 20 mm Bob radius 15, 18 19 mm	Applied initial stress, paused, applied subsequent stresses in step-wise manner, observed movement.			
Petrellis & Flumerfelt ⁽¹³⁾	Cone & Plate	Down-curve residual shear stress following "smaller" deformation cycle.			

FIG. I-12 Différentes techniques pour mesurer la contrainte seuil, d'après Baticky et al. [6]

études qui montrent que les résultats ne peuvent pas être exploités avec précision. En effet, des mesures faites sur un même brut avec un même appareil peuvent conduire à des différences de plus de 30%. Davenport et Somper [16] analysent leurs mesures de contrainte seuil en indiquant que les différences trouvées sont dues à un manque de reproductibilité des essais. Pour illustrer ce problème, Perkins et Turner [35] ont réalisé deux séries d'essais en modifiant la vitesse d'injection du brut et la pompe utilisée. Lorsque le pétrole est injecté lentement avec une seule pompe, la reproductibilité est estimée à $\pm 7.9\%$, alors que l'injection rapide du brut avec 3 pompes différentes a un effet néfaste sur la reproductibilité qui atteint $\pm 22.8\%$. En fait, ces différences sur la mesure de la contrainte seuil sont principalement attribuées aux propriétés liées à l'histoire mécanique et thermique de l'échantillon, même si celui-ci est préchauffé pour éliminer toute trace de son passé. En effet, cette température de prétraitement n'est peut-être pas assez élevée, ou le temps pendant lequel l'échantillon est préchauffé n'est pas assez long. Ce manque de reproductibilité est également dû à la formation des cavités de gaz et de fissures dans le gel lors du refroidissement, provoqués par la contraction thermique. Cette contraction du brut est responsable d'une dégradation du contact entre l'échantillon et les parois des viscosimètres rotationnels, ce qui altère la précision. Baticky et Ritter ont proposé un nouvel instrument de mesure, basée sur une configuration de viscosimètre rotationnel, avec lequel il est possible de combler les cavités de gaz apparues lors du refroidissement grâce à un système de « trop-plein » de brut. Ainsi, la reproductibilité et la précision des essais sont améliorées.

D'une manière générale, la viscométrie cône-plan est préférée aux tubes ou aux viscosimètres cylindriques pour caractériser les fluides non-Newtoniens et thixotropes, car la vitesse et la contrainte de cisaillement sont constantes dans l'entrefer pour de petits angles et la température

est facilement contrôlable.

Ronningsen [36] énumère d'autres méthodes pour déterminer la contrainte seuil :

- Une extrapolation directe de la courbe contrainte de cisaillement (τ) - taux de cisaillement ($\dot{\gamma}$) ou de la courbe $\ln \tau$ - $\ln \dot{\gamma}$ permet de déterminer la contrainte seuil.
- L'utilisation d'un scissomètre (*vane technique*) à contrainte ou taux de cisaillement imposé, permet de mesurer le couple maximum qui correspond à la contrainte seuil.
- La rhéométrie oscillatoire, habituellement destinée à la caractérisation des propriétés viscoélastiques, est utilisée pour déterminer la contrainte seuil. Une faible sollicitation sinusoïdale du cisaillement permet de mesurer le module d'élasticité G' dont la valeur correspond à la contrainte seuil, au cisaillement près ($G' \approx \frac{\tau_0}{\gamma_0}$), lorsqu'on se trouve à la limite élastique du gel.
- Une méthode semblable à celle adoptée dans un tube peut être conduite dans un pipeline. La contrainte seuil est déterminée par la mesure du débit en réponse à une pression imposée en entrée.

Mesure des températures critiques

Une procédure normalisée (ASTM D97) est proposée pour déterminer le point d'écoulement. Les appareils utilisés (éprouvette, thermomètre ...) répondent également à un standard précisé dans la procédure. L'échantillon doit d'abord être chauffé à 45°C, puis être refroidi. Tous les 3°C, l'échantillon est mis en mouvement ; si après 5 secondes aucun écoulement n'est observé, alors cette température est augmentée de 3°C et elle correspond à la température de gel « haute ». Pour obtenir la température de gel « basse », il faut reprendre ce protocole, mais en préchauffant l'échantillon à 105°C pour être certain d'éliminer toute trace de gel.

Pour déterminer la température de cristallisation, il existe également des procédures classiques. Cependant, pour rendre compte de l'aspect physique, on peut évaluer la thermodépendance de la viscosité, et déterminer la température correspondant à une rupture de pente qui traduit l'apparition de cristaux de paraffines. Cette méthode est plutôt qualitative, mais permet de comparer le comportement de différents bruts, comme le montre la FIG. I-13, empruntée à Wardhaugh et Boger [64]. Wardhaugh précise qu'il est possible de comparer ces bruts car ils ont été chauffés à la même température, cisailés à la même vitesse (7.3 s⁻¹) et refroidis au même taux.

On observe deux catégories de bruts sur ce graphe. La première regroupe les 3 bruts de Jabiru, de Jackson et de McKee sur lesquels la température de cristallisation est facilement identifiable par la croissance soudaine et rapide de la viscosité. On peut donner une estimation de leurs températures de cristallisation commençante : Jabiru $\Theta_{cc} = 20^\circ\text{C}$, Jackson $\Theta_{cc} = 24^\circ\text{C}$ et McKee $\Theta_{cc} = 32^\circ\text{C}$. Ces bruts contiennent une importante quantité de paraffines et peu de résines et d'asphaltènes alors que le brut de Daqing, qui compose la deuxième catégorie, contient autant de paraffines que d'asphaltènes et de résines. La présence de toutes ces substances entraîne une forte viscosité qui croît également avec la température. Cependant, nous ne pouvons pas noter une température de cristallisation précise, car l'augmentation de viscosité est toujours importante, mais plus progressive. Ce phénomène est dû à la présence de résines et d'asphaltènes qui entourent les cristaux de paraffines lors du refroidissement, ce qui atténue la cristallisation soudaine du brut dans son ensemble.

A l'IFP, la température de cristallisation commençante Θ_{cc} est déterminée par des essais de

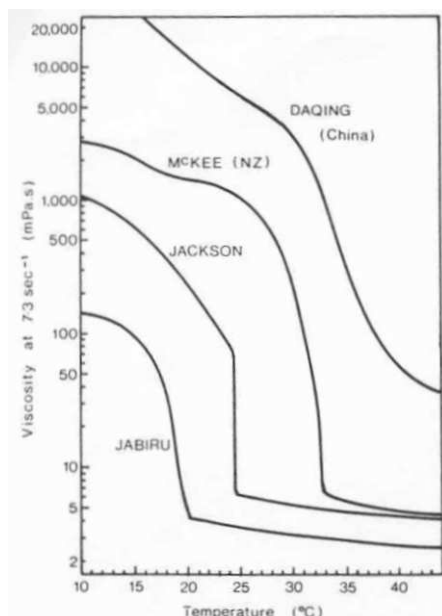


FIG. I-13 Comparaison de différents bruts paraffiniques, d'après Wardhaugh et Boger [64]

calorimétrie différentielle. La DSC (*Differential Scanning Calorimetry*) permet une détection des changements de phases lorsque la température varie. Cette technique repose sur des principes thermodynamiques liés à l'augmentation du flux de chaleur lorsque des cristaux de paraffines se forment. La Θ_{cc} correspond à la température à partir de laquelle le flux de chaleur augmente brusquement. La courbe de DSC sur la FIG. I-14 pour un échantillon de brut de Perdana a été réalisée par Cazaux [9]. La Θ_{cc} de ce brut est de 30.0°C.

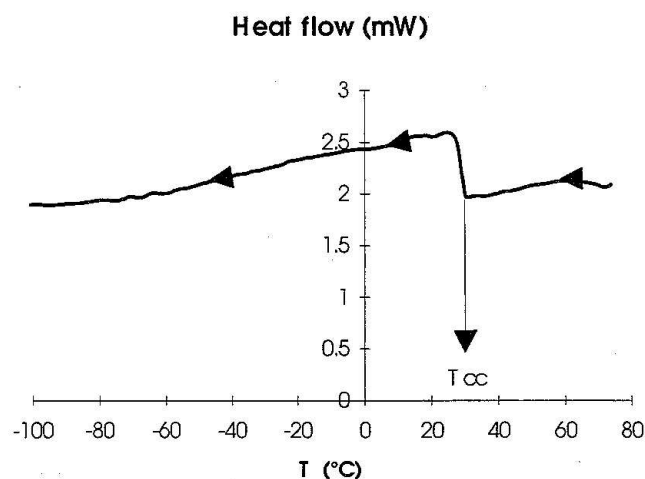


FIG. I-14 Courbe de DSC du brut Perdana refroidi à 5°C.min⁻¹, d'après Cazaux [9]

Economides et Chaney [20] utilisent un viscosimètre à bille (*falling ball viscometer*) pour mesurer la viscosité apparente du brut de Prudoe Bay en Alaska. Sur le graphe de la FIG. I-15, il est possible d'évaluer approximativement les températures de gel et de cristallisation commençante; la forte augmentation de la viscosité indique l'apparition de cristaux pour une température d'environ 22°C. Ensuite, la viscosité continue de croître jusqu'à tendre vers une valeur infinie, ce qui signifie que le brut n'est plus un fluide mais un solide; il est donc complètement

gélifié. On peut estimer la température de gel à environ 0°C.

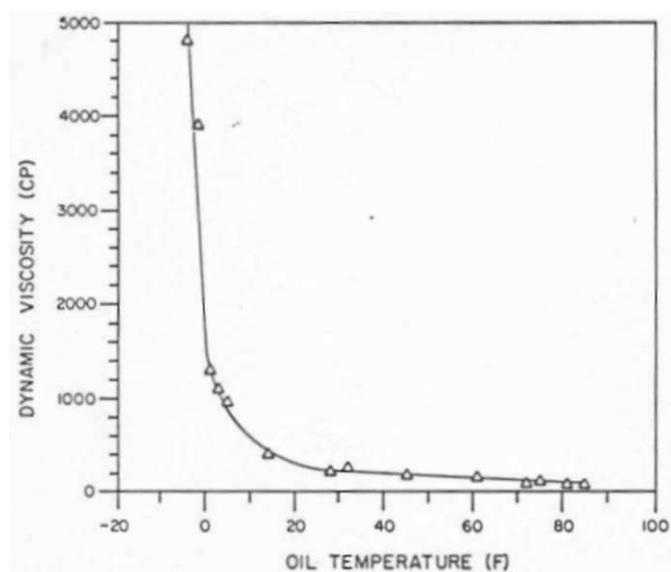


FIG. I-15 Courbe expérimentale de la viscosité dynamique, d'après Economides et Chaney [20]

Cette procédure est intéressante lorsque l'on désire comparer les températures critiques de différents bruts. Cependant, elle ne permet pas d'acquérir une grande précision de ces températures, qui est par ailleurs plus altérée par les problèmes liés à la reproductibilité de l'essai.

Discussion sur quelques instruments de mesures

Il semble que le problème majeur rencontré lors des essais est lié à la reproductibilité. Ainsi, chacun établit son propre protocole expérimental adapté au caractère particulier du brut qu'il étudie. Procéder ainsi ne permet pas de comparer des résultats obtenus pour différents bruts et par différents auteurs.

Davenport et Somper [16] ont comparé les données expérimentales d'un brut Libyen mesurées avec un rhéomètre à cylindres coaxiaux, deux pipelines modèles (6 mm et 12 mm de diamètres) et deux pipelines réels (diamètres de 25 mm et 75 mm). Lorsqu'ils comparent les résultats obtenus avec le rhéomètre et le pipeline modèle sur la FIG. I-16, les résultats sont complètement différents. En effet, si on regarde la courbe obtenue avec le viscosimètre, le brut se comporte comme un fluide de type Herschel-Bulkley, alors que la courbe tracée à partir des données du pipeline modèle décrit un comportement de Bingham.

La comparaison des contraintes seuil mesurées par les différentes installations sur le tableau de la FIG. I-17, permet d'établir une cohérence entre ces résultats : la compressibilité et la contraction volumique peuvent expliquer ces différences, par leurs influences bénéfiques sur le redémarrage lorsqu'elles ont suffisamment d'espace pour se développer (*Section I-3.2*). C'est pourquoi la contrainte seuil mesurée par le pipeline modèle est plus faible que celle mesurée par le viscosimètre, en particulier pour les températures les plus faibles ($\Theta = 15.6^\circ\text{C}$).

La mesure des propriétés rhéologiques et mécaniques d'un brut paraffinique semble très difficile. La principale raison d'une reproductibilité moyenne des essais est le fait que les propriétés du matériau dépendent de beaucoup de paramètres qu'il est impossible de contrôler en même

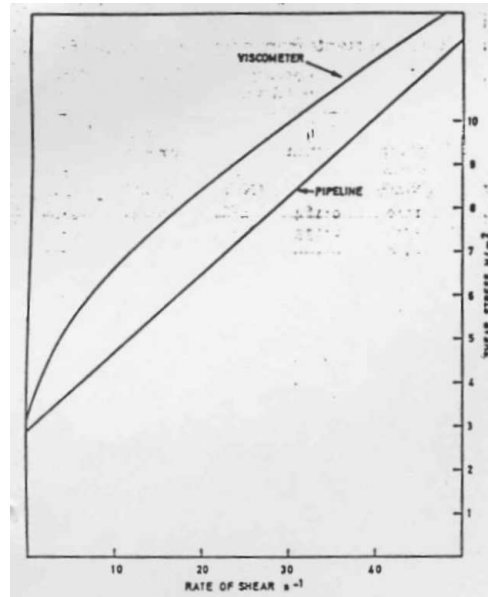


FIG. I-16 Comparaison des courbes contrainte de cisaillement - taux de cisaillement entre le pipeline modèle et le viscosimètre à cylindres coaxiaux, d'après Davenport et al. [16]

Temperature °C	Yield values (N/m²) from						
	Kent rig		Model pipeline		Co-axial cylinder viscometer		
	77.9 mm line	24.3 mm line	12.7 mm line	6.35 mm line	5 mm gap	2-mm gap	1-mm gap
21.1	2.0; 1.5	3.0; 4.5	2.0	2.0	1.0	0.5; 1.0	1.0
19.7	4.0; 1.5	4.0; 5.0	4.0	4.5	2.0	2.0	5.0
18.3	13.0; 3.0	8.0; 5.0	7.0	8.5	2.0; 4.0	8.0	6.0
16.9	6.0; 5.5	9.0; 8.0	17.5	17.5	17.5	15.0	5.0; 7.5
15.6	8.0	10.5; 12.0	20.0	22.5	40.0	70.0	55.0

FIG. I-17 Valeurs de la contrainte seuil mesurée par plusieurs dispositifs expérimentaux, d'après Davenport et al. [16]

temps (la température, le taux de cisaillement, l'histoire thermique, l'histoire mécanique, le temps...). Il est nécessaire d'établir un protocole expérimental universel qui permettrait d'obtenir une base de données utile pour comparer les propriétés des différents bruts paraffiniques, et ainsi mieux comprendre le comportement de chacun.

3 Compressibilité du bouchon de gel

Nous avons expliqué au début de ce chapitre que le bouchon de gel est compressible de part la présence de poches de gaz. Nous allons voir comment ces poches se forment dans un premier temps, puis quelle est leur influence sur le redémarrage.

3.1 Formation du gel

La formation du gel est expliquée par le phénomène de cristallisation des particules de paraffines qui se propage des parois au centre de la conduite; ce phénomène dépend de 3 facteurs :

- Les facteurs mécaniques liés à l'écoulement

Comme le type de refroidissement (statique ou dynamique) influe sur le redémarrage, il agit également sur la formation du gel et des cavités de gaz. Nous avons donc mené des expériences de visualisation du retrait thermique lorsque le refroidissement se fait sous cisaillement. L'installation expérimentale est composée d'un « tube scanner » (FIG. I-18), intégré dans une petite boucle dans laquelle un brut paraffinique circule. Cette boucle est installée dans une étuve thermostatée qui nous permet de contrôler la température ambiante de la chambre.



FIG. I-18 Tube scanner (Diamètre $D=0.05$ m, Longueur $L=0.79$ m)

On réalise cette étude avec un brut paraffinique du Gabon (ATORA) dont la température de gel Θ_g est de 30°C environ. Le brut est chauffé à 50°C pendant 2 heures afin d'éliminer tout passé thermo-mécanique. Le brut circule dans la boucle à un débit de 150 L.h^{-1} . On impose ensuite une rampe de refroidissement de 50°C à 20°C à la vitesse de $0.5^\circ\text{C.min}^{-1}$. La température de test atteinte (20°C), on arrête l'écoulement et on laisse le brut au repos à cette même température plusieurs heures pour s'assurer qu'il est totalement pris en gel. On retire ensuite le « tube scanner » de la boucle et on le passe aux rayons X dans un scanner (FIG. I-19). Le tube est fabriqué dans un matériau qui permet de laisser passer les rayons X.

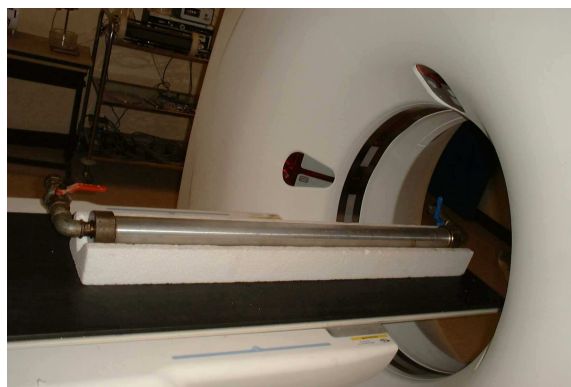


FIG. I-19 Visualisation du tube aux rayons X dans le scanner de l'IFP

La FIG. I-20 représente les coupes transversales de l'échantillon, sur lesquelles on observe le retrait du brut (taches noires). L'influence du cisaillement lors du refroidissement se traduit par un retrait assez faible (entre 3% et 4%) et par une localisation diffuse des poches de gaz.

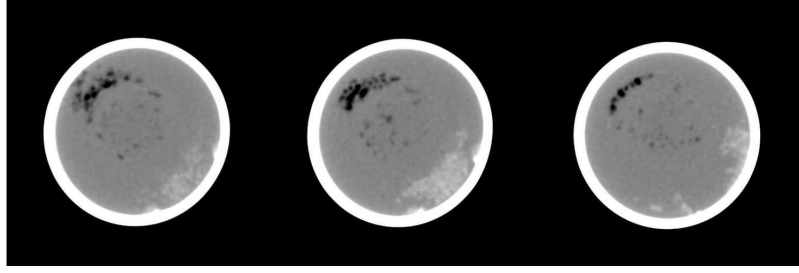


FIG. I-20 Localisation du retrait pour un refroidissement dynamique de 50°C à 20°C ($0.5^{\circ}\text{C.min}^{-1}$) pour un débit de 150 L.h^{-1}

Lors du refroidissement dynamique, le brut s'écoule toujours malgré une température test de 20°C , inférieure à la température de gel (30°C). En effet, le débit imposé par la pompe permet de cisailier le brut en permanence ce qui retarde la gélification. On observe néanmoins un important dépôt de paraffines sur les parois du tube responsable d'une diminution de la section utile. En effet, les parois, plus froides que le coeur de l'écoulement, sont le siège de la formation du gel. Ainsi, le brut ne s'écoulant plus près des parois, la section utile à l'écoulement diminue et les pertes de charge augmentent. On imagine très bien que ce phénomène de dépôt pose d'énormes problèmes de transport sur des installations réelles. Les compagnies pétrolières sont contraintes de nettoyer régulièrement les pipelines.

Lors du refroidissement statique, Verschuur et al. [53] parlent d'un phénomène d'auto-destruction qui résulte de la contraction thermique. Cette diminution de volume liée à la contraction thermique, engendre des mouvements internes dans le brut qui peuvent conduire à un déchirement du bouchon de gel à la paroi, ou même dans la section, d'où l'existence, non pas d'un, mais de plusieurs bouchons de gel séparés par des poches de gaz. De plus, ce mouvement très lent, alimenté par la pression hydrostatique, permet au brut encore liquide (effluent) de se déplacer à travers le réseau cristallin du gel à une vitesse V_{SL} et ainsi de détruire localement le réseau de cristaux. Finalement, il existe un certain équilibre entre la construction et la déstructuration du réseau cristallin. Cette vitesse locale maximale liée à l'auto-destruction est décrite par cette relation :

$$V_{SL} = \beta \cdot z \cdot \frac{d\Theta}{dt} \quad (\text{I.11})$$

avec β le coefficient d'expansion thermique ($^{\circ}\text{C}^{-1}$), z la distance jusqu'à l'extrémité finale de la conduite et $\frac{d\Theta}{dt}$ la vitesse de refroidissement ($^{\circ}\text{C.s}^{-1}$).

Cette vitesse de déplacement engendre un gradient de pression, et Verschuur considère que le réseau cristallin du gel se comporte comme un milieu poreux et utilise l'équation de Darcy :

$$\frac{dp}{dz} = V_{SL} \frac{\mu}{\kappa} \quad (\text{I.12})$$

où κ est la perméabilité du gel. Or la pression est reliée à la contrainte de cisaillement à la paroi par :

$$\frac{dp}{dz} = \frac{4\tau_w}{D} \quad (\text{I.13})$$

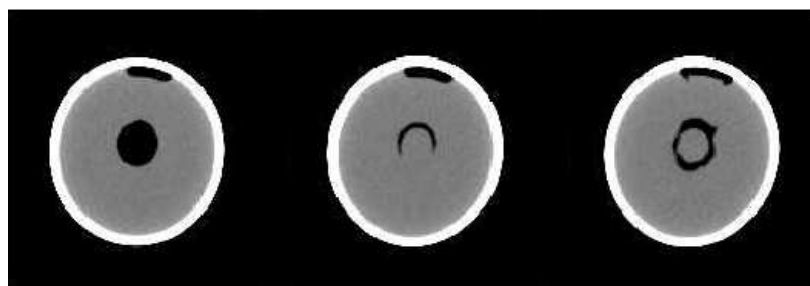
Verschuur obtient finalement une expression de la contrainte à la paroi :

$$\tau_w = \frac{zD}{4} \frac{d\Theta}{dt} \beta \frac{\mu}{\kappa} \quad (\text{I.14})$$

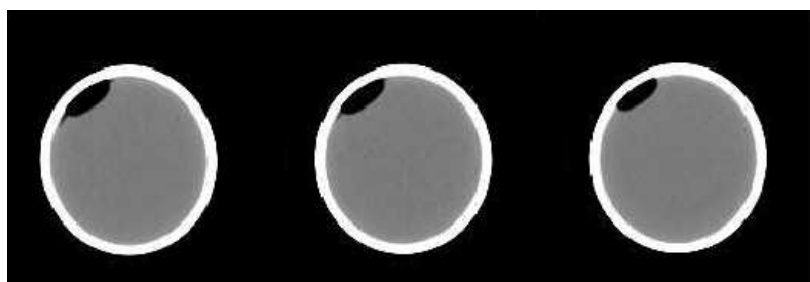
En utilisant le critère $\tau_w = \tau_y$, il est possible de calculer la longueur de gel structuré (*unyielded length*).

- Les facteurs thermiques

L'apparition et le dépôt des paraffines sont conditionnés par la différence de température entre la paroi et le centre du pipeline ; c'est d'ailleurs ce gradient de température qui régit la vitesse de dépôt des paraffines. Lorsque ce dépôt se forme, la couche de paraffine a un rôle d'isolant et modifie ce gradient de température. Ainsi, le phénomène de cristallisation des paraffines diminue et le gel au centre de la conduite devient moins dense. Ce phénomène sera d'autant plus amplifié si on travaille dans des pipelines avec de gros diamètres. On peut ainsi en partie expliquer un phénomène redondant dans les études expérimentales, qui est le manque de corrélation des résultats entre les expériences faites sur des conduites de faible diamètre dans les laboratoires et sur les pipelines réels sur site. Comme les cristaux de paraffines occupent moins de volume que les paraffines liquides, il apparaît un retrait du brut qui laisse place à des cavités de gaz lors du refroidissement. Ces cavités se forment à différents endroits dans la conduite selon la vitesse de refroidissement. L'influence de cette vitesse de refroidissement est mise en évidence sur les coupes transversales d'une conduite réalisées par Hénaut [25] au laboratoire des Noisetiers à l'IFP. L'auteur compare deux vitesses de refroidissement sur une portion de conduite dont l'écoulement est arrêté (1°C/min sur la FIG. I-21a et 0.01°C/min sur la FIG. I-21b).



(a) Vitesse de refroidissement de 1°C/min



(b) Vitesse de refroidissement de 0.01°C/min

FIG. I-21 Localisation des poches de gaz pour un refroidissement statique de 50 à 20 °C : (a) 1°C/min, (b) 0.01°C/min

La cristallisation des paraffines se fait de façon radiale car c'est le gradient de température qui conditionne ce phénomène. Ainsi lors du refroidissement, les cristaux de paraffines ont tendance à se former près de la paroi pour libérer une cavité de gaz au centre de la conduite. La vitesse de refroidissement importante accélère la prise en gel. Ainsi, la formation rapide de cristaux de paraffines près de la paroi libère une cavité gazeuse centrale. Nous observons en réalité sur la FIG. I-21a deux types de poches : une cavité au sommet de la conduite due à l'influence de la gravité et une cavité prisonnière du gel au centre. Lors d'un refroidissement lent, la gravité a le temps de jouer pleinement son rôle et le brut encore liquide peut venir combler la cavité centrale de gaz libérée par la formation lente de cristaux de paraffines à la paroi. Puis, ce brut liquide prend lentement en gel et laisse apparaître une cavité de gaz au sommet de la conduite. C'est pourquoi nous observons une cavité unique au sommet de la conduite sur la FIG. I-21b. Dans les deux cas, cette contraction thermique fait apparaître un volume de gaz qui représente entre 7% et 8% du volume de la conduite.

- Les facteurs liés à l'état de surface de la conduite

Le redémarrage d'un brut paraffinique dépend de l'état de surface de la conduite, puisque le gel, se comportant comme un solide, peut glisser sur les parois du pipeline. Dans cette hypothèse, dans les premiers instants du redémarrage, la condition de non-glissement standard adoptée pour un fluide n'est plus valable et il existe un frottement solide (de type Coulomb par exemple). Ce phénomène encore peu étudié est nécessaire à l'amélioration de la compréhension et de la modélisation du redémarrage. Nous consacrons, dans la suite, un paragraphe aux études destinées à comprendre le comportement d'un brut paraffinique à la paroi (*Section I-4*).

De plus, à une échelle plus petite, un revêtement rugueux va favoriser le phénomène de dépôt de paraffines. En effet, les paraffines auront tendance à s'immobiliser plus facilement sur les irrégularités du revêtement rugueux, que sur un revêtement ultra-lisse.

3.2 Influence des poches de gaz sur le redémarrage

De part la présence de poches de gaz (entre 2 et 12% du volume de la conduite), le brut gélifié (gel+poches de gaz) présente une certaine compressibilité (10^{-6} Pa^{-1} à 10^{-8} Pa^{-1}). Nous allons voir que la compressibilité favorise le redémarrage du brut et qu'il est nécessaire de prendre en compte cette propriété dans la modélisation du redémarrage des bruts paraffiniques. Verschuur et al. [53] ont fait des expériences qui visent à expliquer les discordances entre les résultats obtenus pour un même brut paraffinique, mais s'écoulant dans deux conduites de longueurs et de diamètres différents. Pour les deux tests, la vitesse de refroidissement et la température de mesure sont les mêmes. La pression nécessaire pour redémarrer l'écoulement dans le petit tube (0.6 m de longueur et 0.004 m de diamètre) est de 100 Pa, alors qu'une pression de 10 Pa suffit pour redémarrer l'écoulement dans le grand tube (16 m de longueur et 0.006 m de diamètre). D'après Verschuur, une certaine longueur de gel non déstructuré (*unyielded length*) minimale est nécessaire pour que ce phénomène de compressibilité soit efficace. Ainsi, la petite conduite ne contient pas une longueur de gel suffisante pour que les effets bénéfiques des poches de gaz favorisent le redémarrage. Par contre, dans la grande conduite, la compressibilité plus importante permet d'avoir une pression de redémarrage plus faible.

Lorsque le gel est considéré comme incompressible, un certain déplacement à une extrémité du pipeline va provoquer un déplacement identique dans toute la conduite. Ainsi, la contrainte

de cisaillement est constante et la pression varie de façon linéaire sur toute la longueur du tube. La déstructuration du gel se fait alors pour la même contrainte dans toute la conduite et au même instant. La pression de redémarrage à appliquer se calcule de la façon suivante :

$$\Delta P = \frac{4L}{D} \cdot \tau_y \quad (\text{I.15})$$

où L et D sont respectivement la longueur et le diamètre de la conduite.

Par contre, quand la compressibilité est introduite, le déplacement du bouchon de gel augmente avec la pression. Ainsi, la contrainte de cisaillement à la paroi va croître depuis l'extrémité finale de la conduite en direction de l'entrée jusqu'à atteindre la contrainte seuil. Ce point est ce qu'on appelle le front de fusion, et en amont de celui-ci, la structure du gel est détruite. Ces distributions de pression et de contrainte sont représentées sur la FIG. I-22, empruntée à Verschuur et al. [53].

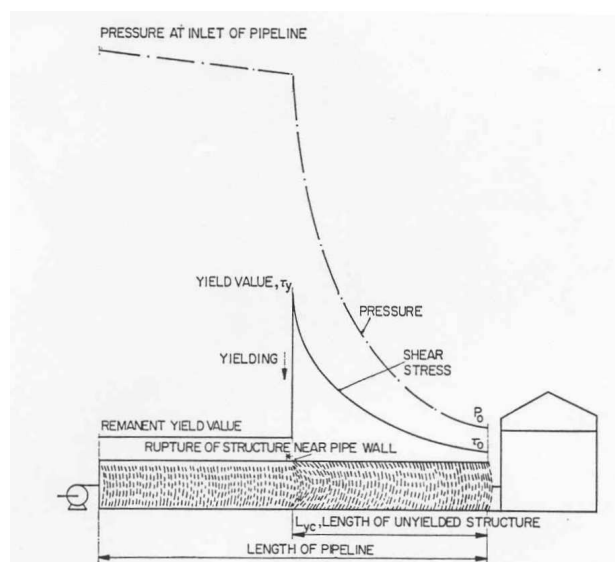


FIG. I-22 Distribution de pression et de contrainte le long d'un pipeline pris en gel, d'après Verschuur et al. [53]

Remarques : Nous avons vu qu'un brut paraffinique pris en gel ne pourra être redémarré que si on impose une pression suffisante pour que la contrainte à la paroi soit supérieure à la contrainte seuil. Cependant, des expériences ont montré que quelques fois, le redémarrage peut se faire pour une contrainte inférieure à la contrainte d'écoulement. En prenant en compte l'influence bénéfique de la compressibilité du gel, nous pouvons expliquer pourquoi un brut paraffinique peut être mis en écoulement avec une pression plus faible que la pression calculée avec la formule (I.15).

De plus, on voit l'apparition d'effets antagonistes entre les différents phénomènes mis en jeu dans le redémarrage. Si le brut est refroidi sous un faible cisaillement (refroidissement quasi statique), il y aura beaucoup de poches de gaz, donc une forte compressibilité, mais également une contrainte seuil élevée. Inversement, un brut refroidi sous un fort cisaillement (refroidissement dynamique) aura une contrainte seuil plus faible, mais également un retrait moins important et donc une compressibilité plus faible. Ainsi, même si la compressibilité joue un rôle important, c'est la contrainte seuil qui reste prédominante dans le processus de

redémarrage puisqu'il est plus facile de redémarrer une conduite refroidie dynamiquement que de façon statique, comme le montre Verschuur et al. sur le TAB. I.1

4 Comportement à la paroi

Lorsque le brut s'écoule sous forme liquide, il a un comportement de fluide à la paroi : il adhère. Cependant, il est possible que dans les premiers instants du redémarrage, le bouchon de gel se comporte comme un solide et qu'il glisse à la paroi. C'est pourquoi, il serait intéressant de comprendre ce phénomène afin d'évaluer son influence sur le redémarrage. Bien que peu d'études y soient consacrées, nous exposons quelques résultats de frottement à la paroi, puis nous élargissons notre recherche aux études menées sur le comportement d'autres matériaux (ex : les bétons).

4.1 Comportement d'un brut paraffinique à la paroi

Au cours d'une étude de faisabilité, Hénaut [25] a réalisé quelques expériences pour évaluer le frottement du gel à la paroi. L'auteur a utilisé un rhéomètre à contrainte imposée avec une géométrie plan-plan en appliquant une force normale (flèche verte verticale) et une contrainte de cisaillement (flèche rouge) sur un échantillon de brut paraffinique d'ATORA, comme le présente la photo de la FIG. I-23 (ici, le rhéomètre est en fait utilisé comme un tribomètre).

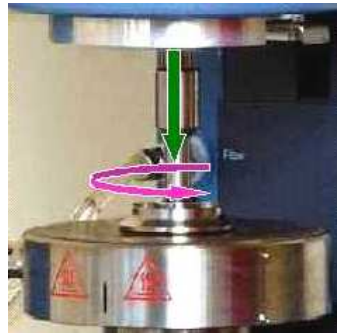


FIG. I-23 Utilisation d'un rhéomètre plan-plan pour la mesure du frottement pariétal, d'après Hénaut [25]

La loi de type Coulomb (I.16) utilisée relie la contrainte de cisaillement à la pression par un coefficient de frottement noté η_{Coulomb} .

$$\tau = \eta_{\text{Coulomb}} P \quad (\text{I.16})$$

En traçant la courbe contrainte de cisaillement maximale - contrainte normale sur la FIG. I-24, on identifie le coefficient de frottement statique comme étant la pente des droites. A basse température, le brut est sous forme de gel et se comporte comme un solide, ce qui explique l'apparition d'un frottement à la paroi ($\eta_{\text{Coulomb}} = 0.065$ pour $\Theta = 3^\circ\text{C}$). Lorsque la température augmente, le brut se comporte de plus en plus comme un fluide et de moins en moins comme un solide ; ainsi, le glissement à la paroi diminue jusqu'à ce que le contact devienne collant (coefficient de frottement proche de 0 pour $\Theta = 20^\circ\text{C}$).

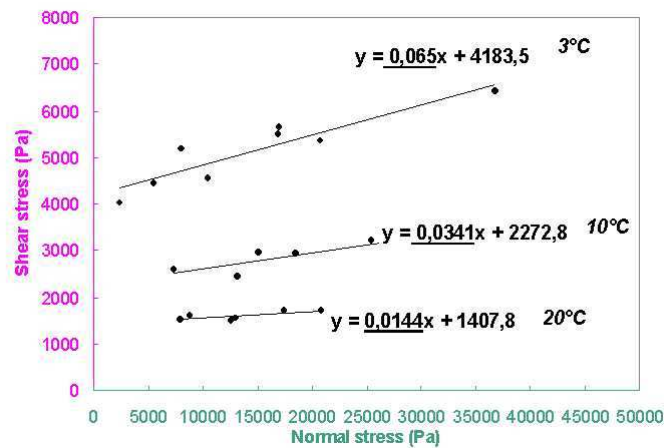


FIG. I-24 Mesure du frottement pariétal du brut ATORA à l'aide d'un rhéomètre à contrainte imposée avec une géométrie plan-plan, d'après Hénaut [25]

Au CEMEF, Sanchiz [43] a également réalisé une étude du frottement du brut ATORA à l'aide d'un tribomètre rotatif. Il procède de la même façon qu'avec la géométrie plan-plan et trace la courbe contrainte de cisaillement maximale - contrainte normale pour une température de 10°C (FIG. I-25). Cependant, Sanchiz impose des contraintes normales plus faibles que Hénaut [25], ce qui entraîne une augmentation du coefficient de frottement (0.3 pour Sanchiz contre 0.03 pour Hénaut). Cela signifie que la loi de Coulomb n'est plus valable sur une large plage de contraintes normales puisque le coefficient de frottement n'est pas constant.

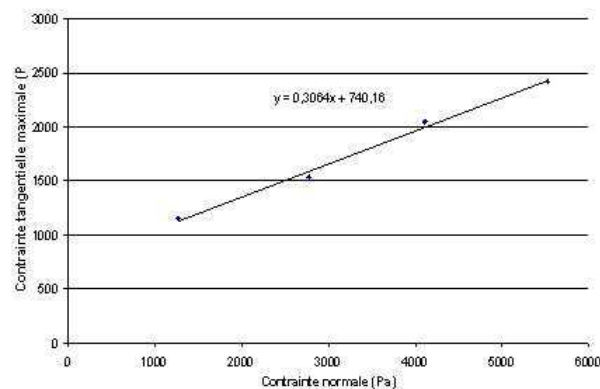


FIG. I-25 Mesure du frottement pariétal du brut ATORA avec un tribomètre rotatif plan-plan, d'après Sanchiz [43]

Enfin, pour imposer des contraintes normales plus grandes, un montage expérimental (FIG. I-26) a été mis en place à l'IFP pour caractériser le frottement pariétal des bruts paraffiniques lors du redémarrage. Cet appareil expérimental se place au sein de la boucle utilisée pour la caractérisation du retrait. Ainsi, il est possible de refroidir le brut présent dans le « tube pariétal » (1 sur la FIG. I-26) de façon statique ou dynamique. La procédure expérimentale est la même que celle utilisée au cours des expériences sur le retrait. Les mesures se déroulent en deux étapes. La première consiste à appliquer une pression axiale sur le brut gélifié grâce à un piston à commande hydraulique (vérin 5). Puis, dans un deuxième temps, on déplace l'enve-

loppe du tube à l'aide d'un second vérin (vérin 6). Des capteurs de force (8) et de déplacement (9) sont installés sur le montage pour effectuer les mesures.

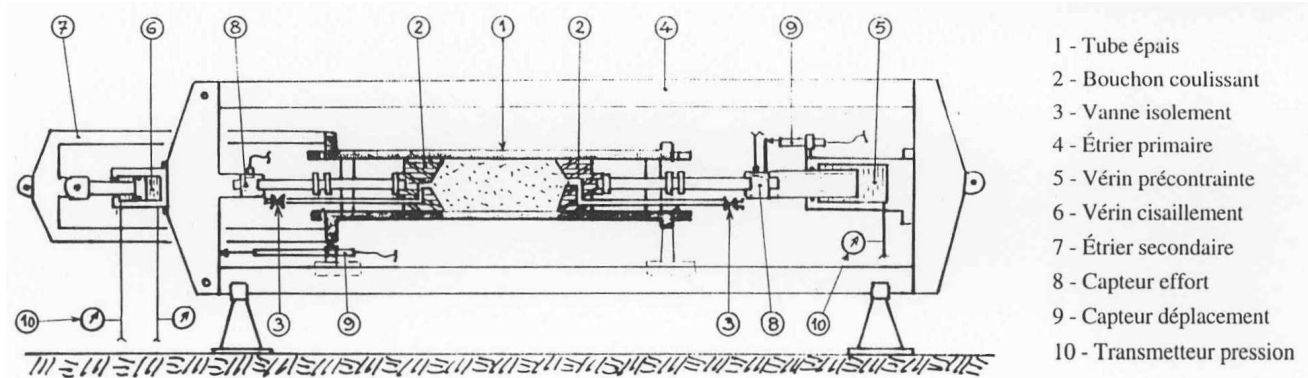


FIG. I-26 Montage expérimental pour la mesure du frottement pariétal

Ce montage nous permet de mesurer plusieurs données :

- Etape 1 :
 - la variation de volume lorsqu'on comprime le bouchon de gel (volume total occupé par les poches de gaz)
 - la contrainte normale σ appliquée sur le gel (la contrainte axiale appliquée sur le bouchon de gel est entièrement transmise de façon radiale dans le gel)
- Etape 2 : la contrainte de cisaillement τ nécessaire pour déplacer le bouchon de gel

Des premiers essais ont été réalisés par Hénaut [26] et Sanchiz [43] sur le brut du Gabon (ATORA) refroidi au repos de 50°C à 10°C à $1^{\circ}\text{C}.\text{min}^{-1}$. Nous avons réalisé des essais sur ce même brut refroidi dynamiquement (débit de 100 L.h^{-1}). Les résultats de la première étape sont présentés sur la FIG. I-27.

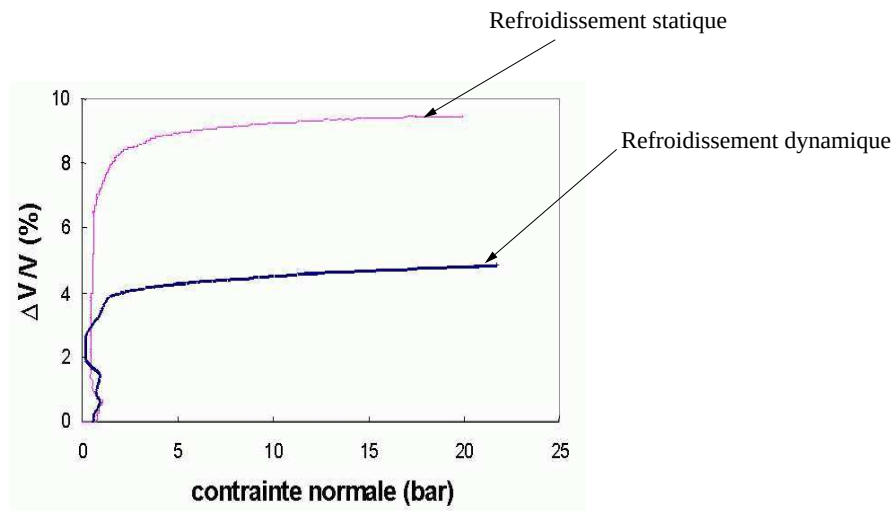


FIG. I-27 Compression axiale du brut ATORA à 10°C

Au début de l'essai, la variation de volume est très importante malgré une pression axiale faible; ensuite le volume se stabilise et la pression augmente jusqu'à atteindre la pression maximale que peut fournir la pompe au vérin, soit 20 bars. Ainsi, on met en évidence la

compressibilité du brut gélifié et cette variation de volume correspond au comblement du retrait. On peut l'évaluer à 8% dans le cas statique et 4% dans le cas dynamique. On retrouve donc les valeurs mesurées avec le scanner (*cf. Section I-3*).

Nous présentons ensuite les résultats des essais de la deuxième étape lors d'un refroidissement statique. Ces essais, effectués par Hénaut [26] et Sanchiz [43], sont présentés sur la FIG. I-28.

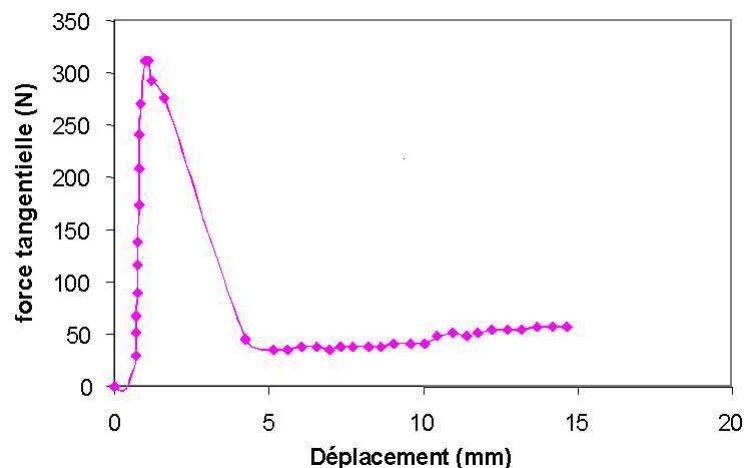


FIG. I-28 Force tangentielle appliquée sur le brut ATORA à 10°C

Cette courbe présente un maximum correspondant à la force nécessaire pour déplacer le tube pariétal. A partir de cette force maximale, nous déterminons la contrainte de cisaillement maximale avec la relation suivante :

$$\tau = \frac{\text{force cisaillement}}{\text{surface latérale du tube}} \quad (\text{I.17})$$

Les essais réalisés pour un refroidissement statique avec le rhéomètre, le tribomètre et le frottement pariétal sont regroupés sur la FIG. I-29. Nous remarquons que le frottement diminue avec la contrainte normale. Pour la plupart des matériaux (nous le verrons pour le béton dans la suite), plus on augmente la force normale sur l'échantillon, plus il est difficile de le déplacer, donc plus le frottement est important. Ce brut paraffinique a un comportement inverse : plus la contrainte normale imposée est forte, plus le frottement diminue. En fait l'augmentation de la pression normale sur l'échantillon favorise sa déstructuration à la paroi, et entraîne une baisse du coefficient de frottement. En effet, nous avons vu qu'une sollicitation en cisaillement d'un brut gélifié provoque une déstructuration des cristaux de paraffine ; il est probable que ce même phénomène soit également responsable de cette évolution originale du frottement ; on se rapproche ainsi d'un frottement solide avec lubrification.

En fait, Hénaut [26] et Sanchiz [43] ont observé l'apparition de traces liquides lors du déplacement d'un brut paraffinique sur une plaque en acier. L'expérience consiste à remplir une cellule cylindrique (4 cm de diamètre) creuse et sans fond d'un brut paraffinique. Ensuite, la cellule est posée sur une plaque en acier et un refroidissement jusqu'à une température inférieure au point d'écoulement lui est imposé de telle sorte que le brut soit gélifié. Le but de cette expérience est d'observer le comportement du brut en contact avec la plaque. Progressivement, la plaque est inclinée jusqu'à la verticale, et les auteurs constatent que la cellule reste collée sur la plaque. Finalement, une masse est appliquée sur l'échantillon afin de lui imposer une

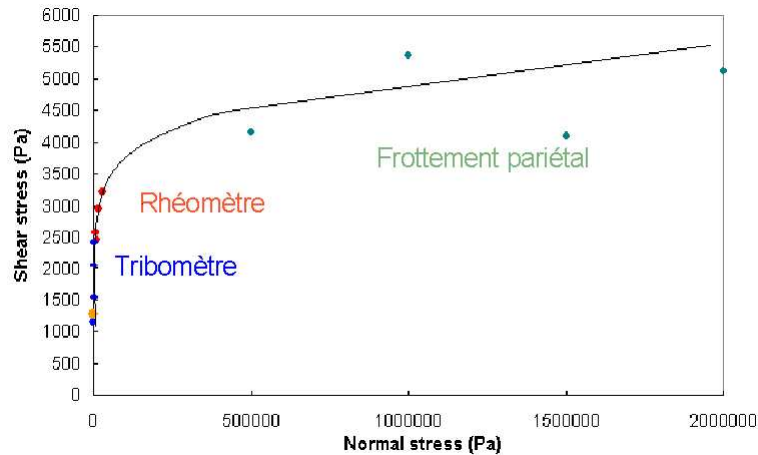


FIG. I-29 Evolution du coefficient de frottement pariétal pour un refroidissement statique

contrainte tangentielle suffisante (1274 Pa) pour décoller la cellule de la plaque par glissement. Ainsi, on observe sur la FIG. I-30 des traces liquides restant sur la plaque en acier dues à la déstructuration du brut lors du glissement.

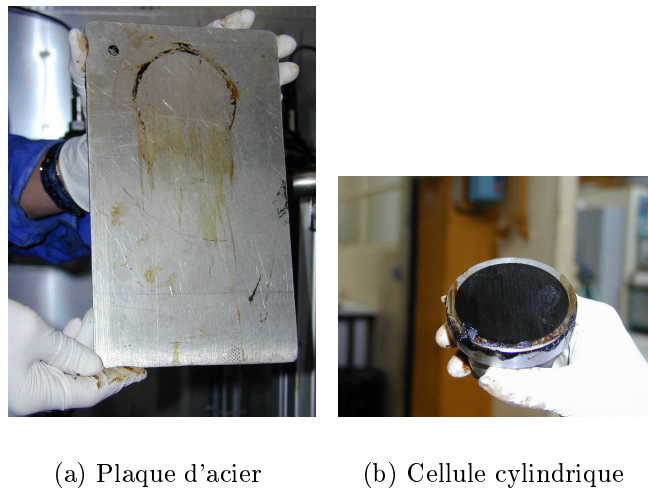


FIG. I-30 Traces liquides sur la plaque en acier du brut gélifié déstructuré, d'après Sanchiz [43]

4.2 Exemples d'autres matériaux

Lorsqu'on recherche des matériaux au comportement complexe, proche des bruts paraffiniques, on trouve les bétons. Il apparaît que les phénomènes de frottement lors du remplissage d'un coffrage ne sont pas encore très connus, mais ils pourraient être responsables d'une variation de la pression exercée sur les parois, qui doit être évaluée précisément afin de dimensionner convenablement les coffrages. C'est pourquoi, Djelal et al. [17] s'intéressent à la pression et au frottement d'un béton lors de sa mise en œuvre dans les coffrages. Ils mesurent à l'aide d'un tribomètre les coefficients de frottement de 2 bétons différents (FIG. I-31). Le béton (1) (Béton Fluide, BF) présente une augmentation du frottement avec la force normale et le béton (2) (Béton AutoPlaçant, BAP) possède un coefficient de frottement constant égale à 0.018. Ainsi,

contrairement à un brut paraffinique, le béton a un comportement « normal », c'est à dire que le frottement augmente avec la contrainte normale. Djelal et al. [17] observent une vitesse de glissement de 5 mm.s^{-1} pour le BAP et de 4 mm.s^{-1} pour le BF.

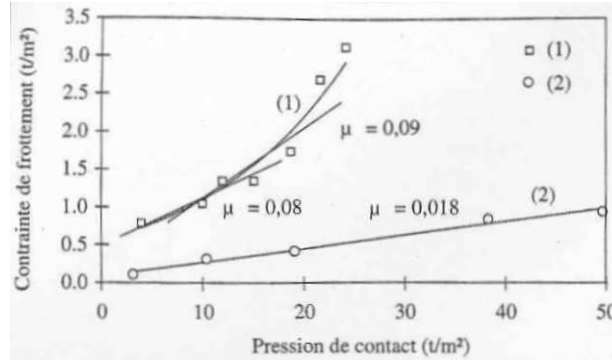


FIG. I-31 Evolution de la contrainte de frottement en fonction de la pression de contact : (1) BF, (2) BAP, d'après Djelal et al. [17]

Bien que le comportement des bétons soit différent de celui des bruts paraffiniques, on peut s'inspirer des travaux effectués sur la caractérisation du frottement des bétons en utilisant une loi de Coulomb pour déterminer un coefficient de frottement correspondant à chaque plage de contrainte normale.

5 La modélisation des bruts paraffiniques

5.1 Caractérisation thermique de l'état initial

Les propriétés thermiques liées à l'histoire du brut ont une influence importante sur le comportement du fluide lors du redémarrage. Ainsi, il est nécessaire d'établir un état initial de la distribution en température dans la conduite lorsque l'écoulement est arrêté. Plusieurs études ont été menées au cours des dernières années pour décrire cet état initial thermique. En 1979, Smith [48] étudie le transfert thermique radial d'une section de pipeline et détermine la quantité de chaleur perdue par la conduite dans son environnement (FIG. I-32).

Si la conduite est enterrée, posée sur le sol, dans l'eau, ou munie d'une couche isolante, les transferts de chaleur sont différents; c'est pourquoi Smith [48] calcule le flux de chaleur, en faisant intervenir les paramètres thermiques liés à l'environnement du pipeline :

$$Q = \frac{\Theta_{\text{Ext}} - \Theta}{\frac{1}{2\pi r_1 h_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi \kappa_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi \kappa_2} + \frac{1}{2\pi r_3 h_0}} \quad (\text{I.18})$$

où h_0 et h_1 sont les coefficients de transfert de chaleur et Θ_{Ext} la température extérieure.

Ce calcul est intéressant puisqu'il permet d'évaluer l'influence thermique de l'environnement extérieur sur le pipe; de plus, il est possible de déduire le champ de température dans la conduite, moyennant quelques hypothèses. C'est l'étude que proposent Economides et Chaney

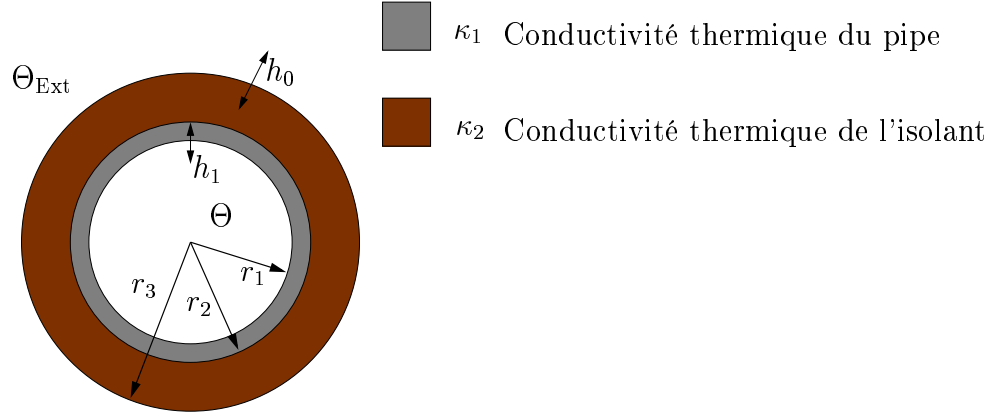


FIG. I-32 Transfert de chaleur dans une section de pipeline

[20] en 1983. Par une application numérique, ils montrent que la perte de chaleur est principalement due à la conductivité thermique de l'isolant ; donc l'équation (I.18) se simplifie et le flux de chaleur sur une longueur de pipeline dx s'écrit :

$$Q = 2\pi r_2 U (\Theta_{\text{Ext}} - \Theta) dx, \text{ avec } U = \frac{2\kappa_2}{\ln(r_3/r_2)} \quad (\text{I.19})$$

En considérant que la température dépend uniquement du temps, l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\rho C_p \frac{d\Theta}{dt} \pi r_1^2 dx = -2\pi r_2 U (\Theta - \Theta_{\text{Ext}}) dx \quad (\text{I.20})$$

En intégrant cette égalité, et en posant $\Theta = \Theta_0$ à $t = 0$, on a :

$$\Theta = \Theta_{\text{Ext}} + (\Theta_0 - \Theta_{\text{Ext}}) e^{-\frac{2r_2 U}{\rho C_p r_1^2} t} \quad (\text{I.21})$$

Ainsi, nous avons l'évolution de la température dans le pipeline au cours du temps. Les hypothèses imposées par Economides et Chaney sont sévères, puisqu'elles ne permettent pas à la température de varier dans l'espace. Or il est évident que la température dépend des coordonnées radiale et axiale. Cependant, cette étude reste intéressante car elle donne une évolution simple de la température lors de l'arrêt, ce qui permet d'établir un état initial des propriétés rhéologiques et mécaniques (viscosité, contrainte seuil ...).

En 1998, Xiaoheng et al. [69] proposent un modèle à une dimension, en ne considérant que la conduction thermique. La convection naturelle est négligée puisque le brut étudié possède une forte viscosité. De plus, le gradient de température axiale est négligé devant la variation de température radiale. Enfin, l'énergie de cristallisation des paraffines n'est pas prise en compte. Les auteurs introduisent une conductivité thermique globale pour écrire un modèle plus simple

pour chaque partie, indicée i , du système ($i = 1$ pour le brut, $i = 2$ pour le pipeline, $i = 3$ pour la couche isolante et $i = 4$ pour l'environnement dans lequel le pipeline se trouve) :

$$\rho_i C_{p_i} \frac{\partial \Theta_i}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa_i r \frac{\partial \Theta_i}{\partial r} \right) \quad (\text{I.22})$$

Les calculs réalisés avec ce modèle sont plutôt satisfaisants lorsqu'ils sont comparés avec les mesures expérimentales du tableau de la FIG. I-33. On observe cependant une augmentation de l'erreur avec le temps, qui se traduit par une sous-estimation de la température au centre comme aux parois de la conduite. Cette approche propose donc une prévision plutôt pessimiste de l'évolution du champ de température.

Time (hr)	Temperature at center (°C)			Temperature at inner wall (°C)		
	T1	T2	T1-T2	T1	T2	T1-T2
0	72.6	72.6	0.0	70.7	70.7	0.0
5	60.8	61.1	-0.3	59.0	59.3	-0.3
10	52.4	52.2	0.2	50.3	50.6	-0.3
15	46.0	45.8	0.2	43.5	44.2	-0.7
25	37.6	38.4	-0.8	34.8	37.2	-2.4
35	32.8	34.2	-1.4	30.3	33.3	-3.0
45	30.5	32.0	-1.5	28.2	31.2	-3.0

Notes: T1 – Temperature calculated
T2 – Temperature measured

FIG. I-33 Evolution au cours du temps de la température du brut au centre et à la paroi d'un pipeline de 20 cm de diamètre lors du refroidissement, d'après Xiaoheng et al. [69]

Cependant la température moyenne calculée lors du refroidissement correspond aux valeurs mesurées (FIG. I-34). Ainsi, ce modèle se révèle être d'une bonne précision pour estimer un champ de température décrivant l'état initial avant le redémarrage.

Les modèles présentés ici sont très intéressants pour établir un état initial thermique dans la conduite. Le plus complet est celui présenté par Xiaoheng et al. [69] puisque la température dépend à la fois du temps et du rayon. Pour apporter encore plus de précision à ce modèle, il faut prendre en compte la variation de la température selon l'axe de la conduite. Ainsi, il serait possible de calculer les paramètres mécaniques et rhéologiques du brut pour établir des conditions initiales de température pour l'écoulement.

5.2 Les modèles de redémarrage

Depuis que les bruts paraffiniques sont étudiés, plusieurs modèles ont été proposés pour décrire leur comportement complexe. Nous détaillons quelques uns d'entre eux :

- Dès 1971, Davenport et Somper [16] ont développé un modèle de redémarrage et ont basé leur théorie sur 3 hypothèses :
 - Le brut est considéré comme un fluide de Bingham et obéit donc à l'équation (I.4).

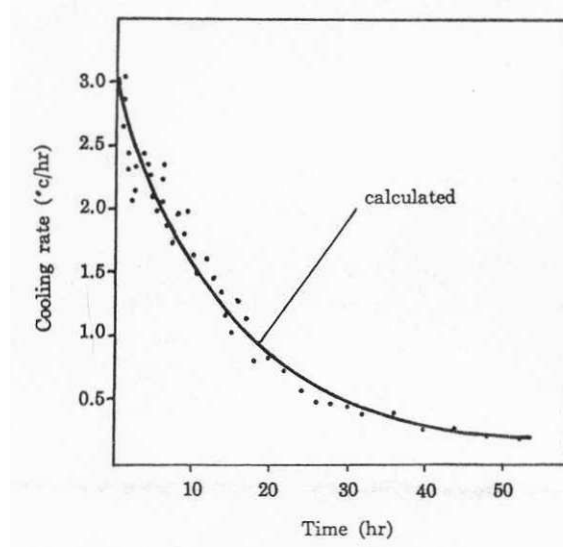


FIG. I-34 Comparaison entre les taux de refroidissement calculé et mesuré

- Lors du redémarrage, la chute de viscosité apparente est due soit à la chute de la contrainte seuil τ_y , soit à la chute de la viscosité plastique μ_p .
- Les chutes de contrainte seuil ou de viscosité plastique sont toutes les deux régies par une loi du 1^{er} ordre, soit :

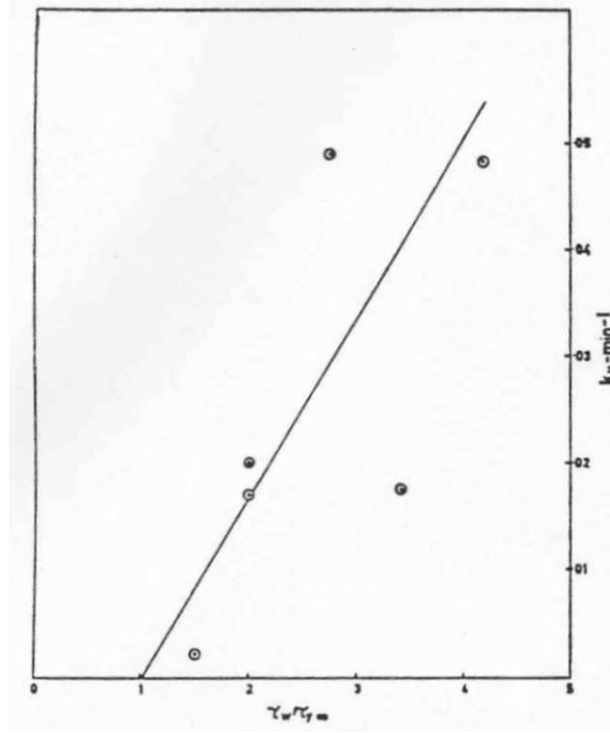
$$\begin{aligned} \frac{d\tau_y}{dt} &= -k_y(\tau_y - \tau_{y\infty}) \implies \frac{\tau_y - \tau_{y\infty}}{\tau_{y0} - \tau_{y\infty}} = e^{-k_y t} \\ \frac{d\mu}{dt} &= -k_\mu(\mu - \mu_\infty) \implies \frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = e^{-k_\mu t} \end{aligned} \quad (I.23)$$

Les résultats de Davenport et Somper indiquent que finalement, la chute de la viscosité apparente est due essentiellement à la chute de la viscosité plastique, car ils ont mesuré de très faibles variations de la contrainte d'écoulement τ_y ; la viscosité apparente peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mu_a = \frac{\mu}{1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_y}{\tau_w} + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_y}{\tau_w} \right)^4}$$

Lorsque le taux de rupture (*breakdown rate*) k_μ est tracé en fonction du rapport contrainte à la paroi/contrainte seuil ($\frac{\tau_w}{\tau_y}$), une courbe approximativement linéaire est obtenue comme nous le montre la FIG. I-35. Ainsi, le taux de rupture suit effectivement une équation du 1^{er} ordre et est une fonction linéaire de la contrainte appliquée. Finalement, ce modèle très simple permet d'obtenir les bases d'un modèle rhéologique ; cependant, nous savons que la viscosité et la contrainte seuil ne dépendent pas uniquement du temps, mais également de la température et de la vitesse de cisaillement.

- Perkins et Turner [35] ont également développé un modèle viscoplastique et thixotrope.

FIG. I-35 Variation du taux de rupture de viscosité k_μ

$$\begin{cases} \tau = \frac{\tau_y}{(1 + \epsilon)^{b_1}} + \frac{b_2 \dot{\gamma}^{b_3}}{(1 + \epsilon)^{b_4}} + \mu \dot{\gamma} & \text{si } \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_y \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

où $\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement, τ la contrainte de cisaillement, ϵ la déformation de cisaillement. b_1 , b_2 , b_3 et b_4 sont quatre constantes d'ajustement qu'il est possible de déterminer expérimentalement. Le premier terme fait apparaître une contrainte seuil τ_y qu'il est nécessaire de dépasser pour que le fluide s'écoule. Le terme $b_2 \dot{\gamma}^{b_3}$ permet de prendre en compte les effets rhéofluidifiants du fluide. Enfin, la thixotropie est introduite par le terme $(1 + \epsilon)$. Lorsque le brut est gélifié, la déformation est nulle et on a $\epsilon = 0$. Lors du redémarrage, le gel se déstructure et se déforme avec le temps. Ainsi, puisque le taux de cisaillement évolue au cours du temps, la déformation se calcule selon :

$$\epsilon = \int_0^t \dot{\gamma} dt \quad (\text{I.25})$$

Cependant, dans l'étude menée par Perkins et Turner, le terme de seuil est négligé. D'autre part, la déstructuration du gel dépendant du taux de cisaillement, Perkins et Turner réécrivent leur modèle en faisant dépendre les termes thixotropes du taux de cisaillement. Finalement, le modèle de Perkins et Turner s'écrit :

$$\tau = \frac{a_0 \dot{\gamma}^{a_1}}{(1 + \epsilon)^{a_2 \dot{\gamma}^{a_3}}} + \mu \dot{\gamma} \quad (\text{I.26})$$

où a_0 , a_1 , a_2 et a_3 sont quatre constantes.

Le modèle (I.26) est souvent préféré à (I.24) car il ne présente pas de discontinuité et son implémentation numérique est plus facile. Cependant, le modèle (I.24) nous semble le plus

intéressant et le plus complet car il prend en compte à la fois les effets viscoplastiques et thixotropes des bruts paraffiniques. Néanmoins, la détermination et le manque de signification physique des constantes b_0 , b_1 , b_2 et b_3 rendent son utilisation difficile.

- Ananda Rao et al. [4], en 1985, proposent un nouveau modèle basé sur la diminution simultanée de la contrainte seuil et de la viscosité, pour décrire la déstructuration d'un brut paraffinique gélifié. On retrouve l'approche de Davenport et Somper, mais ici la chute de la viscosité et de la contrainte seuil se fait simultanément, dans un modèle de Herschel-Bulkley. D'autre part, Rao et al. [4] introduisent le paramètre de structure λ , proposé par Moore en 1959, pour décrire l'état du gel :

$$\lambda = \frac{\text{Nombre de liaisons à chaque instant du redémarrage}}{\text{Nombre total de liaisons lorsque le pipeline est complètement gélifié}}$$

Ainsi, $\lambda = 1$ indique un état de gel complet, alors que $\lambda = 0$ signifie que le gel est complètement détruit. Les variations de la viscosité et de la contrainte sont donc introduites de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\tau_y &= \tau_{y\infty} + \lambda(\tau_{y0} - \tau_{y\infty}) \\ \mu &= \mu_\infty + \lambda^m(\mu_0 - \mu_\infty)\end{aligned}\tag{I.27}$$

Enfin, Ananda Rao et al. [4] ont établi une équation qui décrit le comportement du paramètre de structure. Le taux de déstructuration $\frac{d\lambda}{dt}$ est proportionnel à la contrainte de cisaillement appliquée à la paroi, comme l'ont déjà fait remarquer Davenport et Somper. Ainsi, en faisant intervenir un coefficient de déstructuration b , Rao et al. [4] proposent cette équation simple :

$$\frac{d\lambda}{dt} = -b\tau\lambda\tag{I.28}$$

Selon les valeurs de m , le mécanisme de rupture est soit contrôlé par la diminution de la viscosité (m petit), soit par la chute de la contrainte seuil (m grand). Rao et al. [4] utilisent les données de Davenport et Somper pour déterminer les paramètres de leur modèle (m , n , b , τ_{y0} ...) et le valider. Ils trouvent une grande valeur pour b , ce qui signifie que la déstructuration est rapide, et une petite valeur de m , ce qui signifie que la viscosité est le paramètre déclencheur du mécanisme de rupture. Les conclusions établies par Davenport et Somper sont donc également vérifiées par ce nouveau modèle.

En 1989, Viswanathan et Khilar [57] améliorent le modèle de Ananda Rao et al. [4] en modifiant le paramètre de déstructuration b , et en le rendant dépendant du temps et de la microstructure du gel (facteur de frottement, énergie de gel ...). Finalement, cette amélioration permet d'introduire dans le modèle une partie de l'aspect physique du redémarrage, ce qui leur a permis de capter les effets dus au diamètre de la conduite sur la pression de redémarrage (la pression nécessaire au redémarrage diminue quand le diamètre du pipeline augmente).

- En 1987, Sestak et al. [45] proposent un modèle plus complet qui repose sur le modèle thixotrope de Houska :

$$\begin{cases} \tau = \tau_{y0} + \lambda\tau_{y1} + (k + \lambda\Delta k) \dot{\gamma}^n & \text{si } \tau > \tau_{y0} + \lambda\tau_{y1} \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_{y0} + \lambda\tau_{y1} \end{cases}\tag{I.29}$$

Cette généralisation du modèle de Herschel-Bulkley au comportement thixotrope fait apparaître 5 paramètres (τ_{y0} , τ_{y1} , k , Δk et n) à déterminer expérimentalement. Le paramètre de structure λ vérifie l'équation de Moore, plus complète que celle utilisée par Rao et al. [4], puisqu'elle fait également intervenir un coefficient de structuration a :

$$\frac{d\lambda}{dt} = a(1 - \lambda) - b\lambda \dot{\gamma}^m \quad (\text{I.30})$$

L'équation de Moore ajoute 3 paramètres rhéologiques à déterminer. Nous décrirons plus tard une méthode proposée par Cawkwell [8] pour déterminer les 8 paramètres de ce modèle.

Sestak et al. [45] ont effectué des calculs 1D qui permettent de déterminer les temps de redémarrage d'une conduite, et ont pu observer l'influence du caractère thixotrope du fluide sur le débit et le temps de redémarrage. En augmentant la partie thixotrope de la contrainte seuil, le débit augmente plus rapidement et donc le redémarrage est plus rapide. Cependant, sur la FIG. I-36, les courbes de débit présentent un maximum qui n'est physiquement pas cohérent. En effet, cela signifierait qu'il est plus difficile de déplacer le brut chaud entrant qui est Newtonien que le fluide viscoplastique qui présente une forte résistance.

Les auteurs comparent également le temps de redémarrage calculé au cours de leurs simulations et celui mesuré lors des expériences. Il apparaît que le temps de redémarrage calculé est surestimé par rapport à celui mesuré. En fait, la compressibilité n'est pas prise en compte dans le modèle proposé par Sestak. C'est pourquoi les expériences dans une conduite de laboratoire, bénéficiant de l'influence de la compressibilité, présentent des temps de redémarrage plus courts.

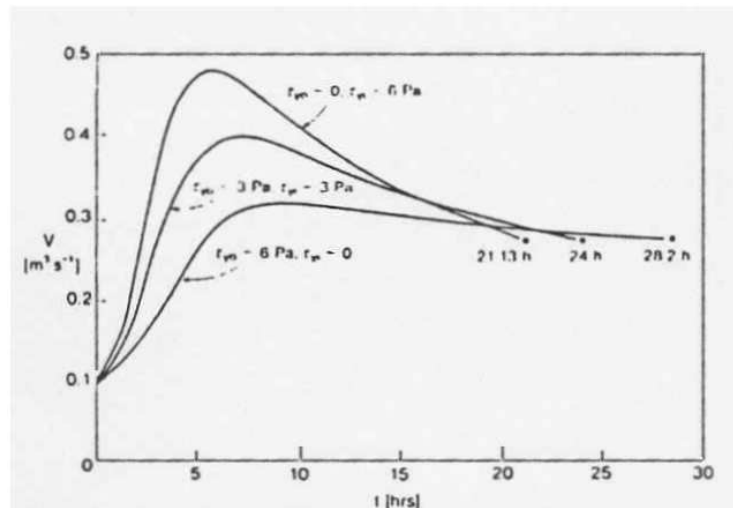


FIG. I-36 Influence de la contrainte seuil sur le débit et sur le temps de redémarrage

- Cawkwell et Charles [7] présentent, la même année, une version améliorée du modèle 1D de Sestak et al. [45] ; ils prennent notamment en compte la compressibilité du gel. Ainsi, les équations du problème s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u) = 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rz}) \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

La compressibilité du fluide et du pipeline est introduite de la façon suivante dans l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

avec $\alpha = \frac{1}{\rho a_s^2}$, facteur de compressibilité globale et $a_s^2 = \frac{K/\rho}{1 + \frac{KD}{Ee}}$ (I.32)

où e est l'épaisseur de la paroi de la conduite, E le module élastique de la conduite et K la compressibilité du fluide.

Cawkwell et al. [7] reprennent le modèle de Houska ((I.29)-(I.30)) qui prend en compte à la fois la viscoplasticité et la thixotropie des bruts paraffiniques. Une pression en entrée P_{in} et une pression en sortie P_{out} sont imposées, et le temps de redémarrage est calculé. Cawkwell et al. [7] ont testé deux fluides de compressibilités différentes ($1.235 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$ et $1.2 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$) et ont comparé le temps de redémarrage de chacun avec les résultats trouvés par Sestak et al. [45], sur la FIG. I-37. Une différence de 12% entre le fluide à faible compressibilité et le fluide de Sestak non compressible est calculée, et une différence de 42% avec le fluide plus compressible. Cawkwell et al. montrent que le facteur de compressibilité a une grande influence sur le temps de redémarrage. Plus le gel a une grande compressibilité, plus il est facile et rapide de redémarrer et vidanger un pipeline.

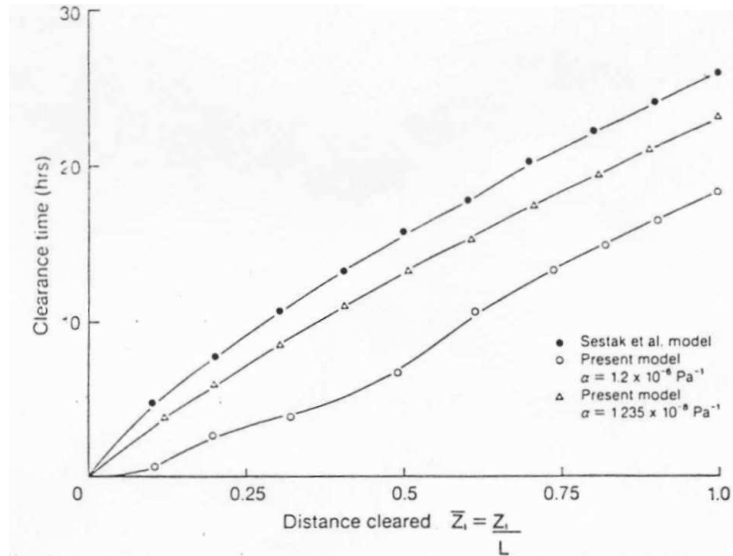


FIG. I-37 Différence de temps de redémarrage entre les modèles de Sestak et de Cawkwell pour différentes compressibilités, d'après Cawkwell et al. [7]

Sur la FIG. I-38, Cawkwell et al. ont établi les profils de pression sur la longueur d'une conduite prise en gel à différents instants. Une augmentation de la pression apparaît en début de pipeline, quelques secondes après la mise en pression, qui dépasse la valeur de l'état stationnaire final (décroissance linéaire de la pression). Cawkwell attribue ce phénomène à la compressibilité et aux effets d'inertie du gel thixotrope. Un temps assez court

(275 s) est nécessaire pour obtenir un gradient de pression linéaire dans la conduite, ce qui signifie que le gel est détruit à la paroi sur toute la longueur du pipeline. L'écoulement est redémarré, mais une grande partie de gel est encore présente, notamment au centre de la conduite, et la pression à imposer pour conserver cet écoulement encore fortement visqueux est importante. Le temps pour retrouver les conditions initiales d'écoulement est beaucoup plus grand.

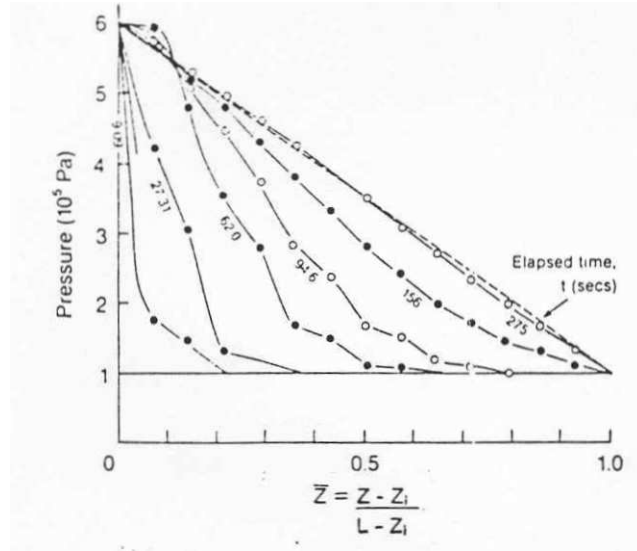


FIG. I-38 Profils de pression en fonction du temps le long d'un pipeline gélifié pour une compressibilité de $1,235 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$, d'après Cawkwell et al. [7]

Bien que les résultats numériques ne soient pas comparés avec des résultats expérimentaux, on peut penser que ce modèle rend compte de la phénoménologie globale du redémarrage d'un brut paraffinique. Cependant, même si les résultats sont qualitativement corrects, on peut avoir des doutes sur la précision des résultats numériques (pression et temps de redémarrage). Pour améliorer les résultats, il serait nécessaire d'affiner le calibrage de la valeur de la compressibilité, et de prendre en compte les variations radiales des paramètres de l'écoulement (modélisation 2D).

- En 1992, Ronningsen [36] observe qu'un brut paraffinique peut se comporter différemment selon les conditions d'écoulements; il peut aussi bien être considéré comme un fluide de Bingham, un fluide de Herschel-Bulkley, ou même encore un fluide de Casson ($\tau^{1/2} = \tau_y^{1/2} + \mu^{1/2} \dot{\gamma}^{1/2}$). C'est pourquoi Ronningsen a choisi de regrouper ces différents comportements dans un seul et même modèle :

$$\tau = \tau_y + (\tau_B + \mu \dot{\gamma})(1 - e^{-\beta \dot{\gamma}}) \quad (\text{I.33})$$

où τ_B est la contrainte seuil pour le fluide de Bingham. Le paramètre β détermine si le comportement du brut est de type Bingham (β grand), ou si le brut a un comportement non linéaire de type Herschel-Bulkley ou Casson (β petit). Pour compléter ce modèle, Ronningsen propose une équation du 1^{er} ordre qui décrit l'aspect thixotrope de la viscosité lors du redémarrage :

$$\mu = (\mu_0 - \mu_\infty)e^{-k_1 t} + \mu_\infty \quad (\text{I.34})$$

Il propose également un modèle de Bingham du 2^{nd} ordre qui traduit la dépendance en temps de la contrainte seuil :

$$\tau_B = \frac{1}{A + Bt} + \tau_{B\infty} \quad (\text{I.35})$$

Ronningsen compare les résultats obtenus avec le modèle de viscosité du 1^{er} ordre et avec le modèle en contrainte du 2^{nd} ordre, et montre qu'ils donnent tous les deux de bons résultats, avec un léger avantage pour le premier. Cependant, l'auteur préférera le modèle de Bingham de part sa simplicité.

- Chang et al. [10], en 1999, proposent une étude numérique sur le redémarrage d'un brut paraffinique ; ils considèrent un brut chaud entrant avec un comportement de Bingham, qui pousse le brut gélifié qui a un comportement viscoplastique thixotrope. Le fluide entrant est modélisé par une équation de Bingham, alors que le fluide sortant par le modèle de Houska. Ils ajoutent à ce modèle une description plus précise du redémarrage en faisant intervenir trois valeurs de contraintes seuil différentes :

- τ_e , la contrainte de limite élastique du gel, en dessous de laquelle le gel se comporte comme un solide et au dessus de laquelle, le gel commence à se déformer.
- τ_s , la contrainte seuil statique, qui représente la contrainte de cisaillement minimum à appliquer pour faire s'écouler le brut.
- τ_d , la contrainte seuil dynamique, qui est l'extrapolation de la courbe contrainte de cisaillement/taux de cisaillement, pour un taux de cisaillement nul.

Ainsi, Chang et al. [10] proposent trois situations possibles lors du redémarrage d'une conduite prise en gel par un brut paraffinique :

1. $\tau_w > \tau_s$: La pression imposée est suffisamment importante pour que la contrainte de cisaillement à la paroi soit plus grande que la contrainte seuil statique ; le redémarrage est instantané.
2. $\tau_s > \tau_w > \tau_e$: Le gel subit une déformation plastique et la contrainte à la paroi augmente jusqu'à atteindre la contrainte seuil statique ; ainsi, le redémarrage se fait avec un retard.
3. $\tau_w < \tau_e$: Le gel est soumis à une déformation élastique réversible, ce qui ne permet pas le redémarrage.

Ce modèle retranscrit correctement la phénoménologie du redémarrage d'un brut paraffinique, et nous permet de l'analyser de façon qualitative. Cependant il ne prend en compte ni la compressibilité du gel, ni les transferts thermiques entre le fluide et son environnement. De plus, seules les variations axiales des propriétés rhéologiques sont prises en compte, alors que nous savons que les propriétés du brut changent selon le rayon du pipeline, notamment grâce aux effets thermiques.

- Roussel et al. [41] proposent un modèle thixotrope basé sur le modèle de Coussot et al. [14]. Il est de formulation simple puisqu'il est représenté par une viscosité apparente $\eta = \tau / \dot{\gamma}$, où la contrainte de cisaillement τ et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ dépendent d'un paramètre de structure λ :

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_0 (1 + \lambda^n) \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{1}{\mathcal{T}} - \alpha \dot{\gamma} \lambda\end{aligned}\tag{I.36}$$

où η_0 , n , $\mathcal{T}$ et α sont quatre paramètres du matériau. Ce modèle présente l'avantage de ne pas avoir de contrainte seuil ; le matériau s'écoule toujours et les zones non-cisaillées correspondent aux régions où la viscosité tend vers l'infini quand le temps augmente. En fait, cette approche est basée sur un phénomène de « bifurcation de viscosité ». Au cours du temps, la viscosité saute de façon discontinue d'une valeur basse vers l'infini, selon les conditions expérimentales (contrainte forte ou faible, respectivement). D'après l'équation (I.36), le blocage du matériau est le résultat d'une compétition entre deux temps caractéristiques $1/\mathcal{T}$ et α . $1/\mathcal{T}$ correspond au temps nécessaire pour le matériau à se restructurer ; c'est une donnée intrinsèque au matériau. α est lié au cisaillement imposé par l'écoulement. Finalement, les zones non-cisaillées correspondent aux régions où la restructuration du matériau domine la déstructuration imposée par l'écoulement.

5.3 Choix du modèle de redémarrage

Aujourd'hui, la physique qui régit le redémarrage d'un brut paraffinique est globalement comprise. Cependant, la complexité de cette phénoménologie pose des problèmes pour établir un modèle complet, capable de décrire le comportement du brut le plus précisément possible tout en étant assez simple pour servir d'outil de prévision. Nous pouvons néanmoins retenir les propriétés indispensables pour établir une modélisation réaliste et précise :

- Le comportement du brut paraffinique lié à son histoire thermique et mécanique montre qu'il est important d'établir des conditions initiales précises puisqu'elles ont une grande influence sur le redémarrage. Comme la température joue un rôle majeur dans ce système, l'état initial peut être caractérisé par la solution d'un problème de transfert de chaleur, ce qui permet d'avoir le champ de température dans la conduite, et les valeurs initiales des paramètres rhéologiques et mécaniques qui dépendent également de la température (coefficient de compressibilité, paramètre de structure, viscosité, contrainte seuil ...).
- La rhéologie du brut doit être décrite par un modèle viscoplastique et thixotrope, dont les paramètres sont identifiables par l'expérience.
- Pour prendre en compte les effets thermiques, il est important d'attribuer aux paramètres rhéologiques du modèle une dépendance en température, qu'il sera nécessaire de caractériser expérimentalement.
- La compressibilité du gel est un paramètre important dans le processus de redémarrage ; c'est pourquoi il est nécessaire d'introduire au minimum une compressibilité globale, qui rend compte de la compressibilité des poches de gaz et de la conduite.
- Il est important de prendre en compte non seulement les variations axiales, mais également les variations radiales des paramètres, en particulier pour respecter l'influence des transferts de chaleur.
- Il serait également intéressant de prendre en compte les effets de frottement à la paroi du bouchon de gel qui ont leur rôle à jouer dans le redémarrage.

Deux modèles ont retenu notre attention : le modèle de Perkins & Turner (I.24-I.25) et le modèle de Houska (I.29-I.30).

Nous réécrivons (I.25) :

$$\epsilon = \int_0^t \dot{\gamma} dt = \int_0^t \frac{d\epsilon}{dt} dt \quad (\text{I.37})$$

Finalement, on a :

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon = \dot{\gamma} \quad (\text{I.38})$$

Nous comparons ces deux modèles dans le tableau TAB. I.2 :

Houska	Perkins & Turner
$\begin{cases} \tau = \tau_0(\lambda) + \mu_0(\lambda) \dot{\gamma} & \text{si } \tau > \tau_0(\lambda) \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_0(\lambda) \end{cases}$	$\begin{cases} \tau = \tau_0(\epsilon) + \mu_0(\epsilon) \dot{\gamma} & \text{si } \tau > \tau_0(\epsilon) \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_0(\epsilon) \end{cases}$
$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \lambda = a(1 - \lambda) - b\lambda \dot{\gamma}^m$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon = \dot{\gamma}$
$\begin{aligned} \tau_0(\lambda) &= \tau_{y0} + \lambda \tau_{y1} \\ \mu_0(\lambda) &= (k + \lambda \Delta k) \dot{\gamma}^{n-1} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \tau_0(\epsilon) &= \frac{\tau_y}{(1 + \epsilon)^{b_1}} \\ \mu_0(\epsilon) &= \mu + \frac{b_2 \dot{\gamma}^{b_3-1}}{(1 + \epsilon)^{b_4}} \end{aligned}$
paramètre de structure : $\lambda \in [0, 1]$	déformation : $\epsilon \in [0, \infty]$

TAB. I.2 Comparaison des modèles de Houska et de Perkin & Turner

Finalement, les modèles de Houska et de Perkins & Turner sont très proches. Cependant, le modèle de Perkins & Turner est moins complet puisqu'il correspond au modèle de Houska en prenant $a = 0$, $b = 1$ et $\tau_{y0} = 0$. D'autre part, même si le modèle de Houska possède un plus grand nombre de paramètres, leur détermination expérimentale semble plus simple et leur signification physique reste plus évidente. Finalement, nous choisissons de travailler avec le modèle de Houska. La détermination expérimentale des 8 paramètres est détaillée dans le *Chapitre IV*.

6 Notre scénario d'arrêt et de redémarrage

La description précise du comportement des bruts paraffiniques (*Section I-2*) nous permet d'établir un scénario de l'arrêt et du redémarrage de l'écoulement d'un tel fluide dans une conduite. Nous présentons à travers des illustrations graphiques les différentes étapes de ce scénario tout en mettant en avant les aspects sur lesquels la phénoménologie n'est pas clairement établie.

Arrêt de l'écoulement

Lorsque le brut paraffinique s'écoule dans des conditions favorables en température, il est Newtonien. Puis, si la température diminue, son comportement devient viscoplastique et thixotrope. La FIG. I-39 présente l'évolution au cours du temps de la température Θ (trait plein noir) et de la contrainte seuil τ_y (trait pointillé rouge) dans la conduite (l'évolution de la viscosité μ est identique à celle de la contrainte seuil).

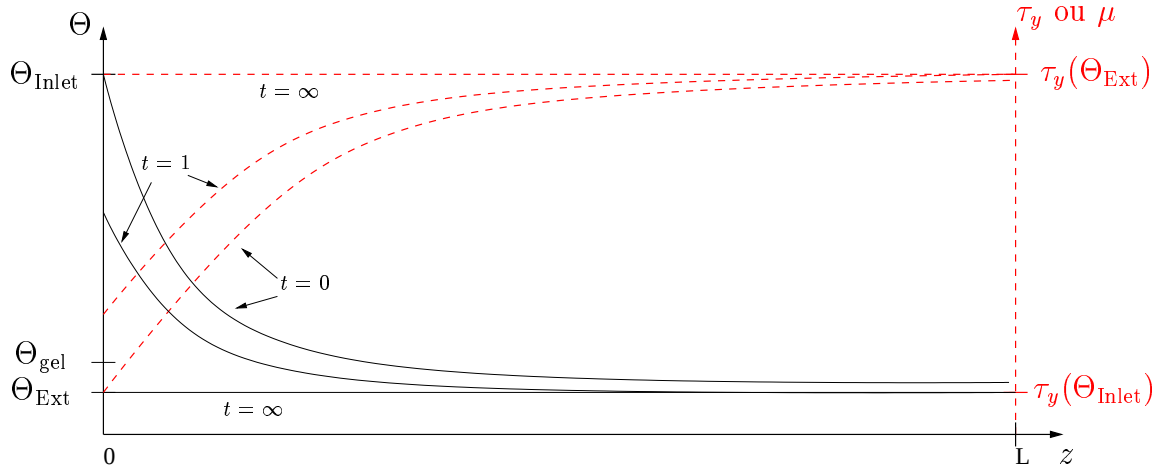


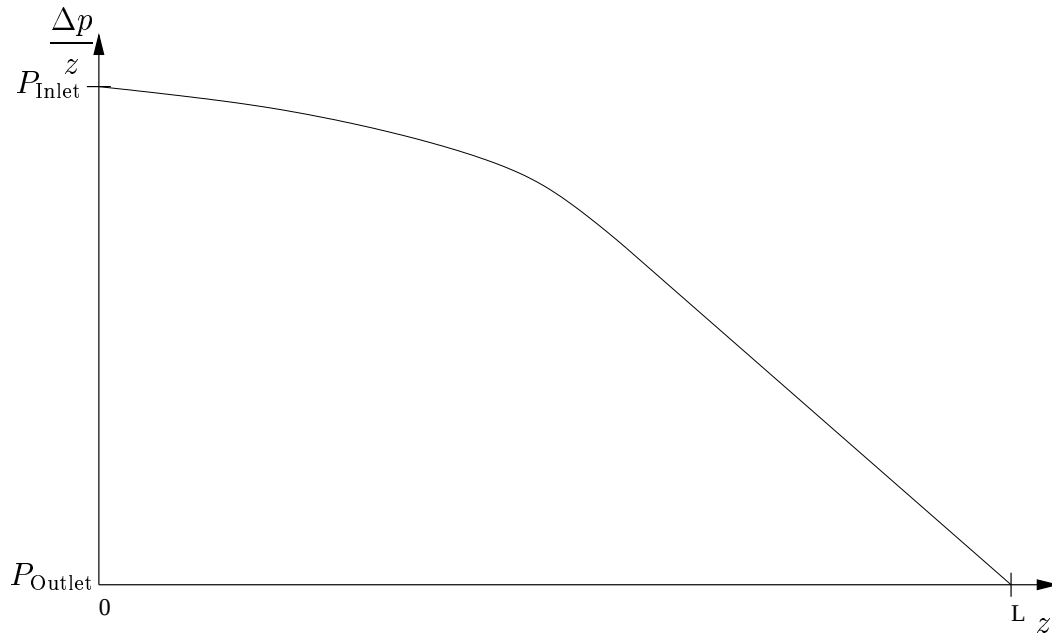
FIG. I-39 Evolution de la température et de la contrainte seuil le long de la conduite au cours de l'arrêt

L'instant $t = 0$ correspond à l'écoulement stationnaire d'un brut paraffinique avant l'arrêt de la conduite. A l'entrée de la conduite, la température du brut est élevée et égale à la température Θ_{Inlet} . En sortie, la température du brut est égale à la température extérieure Θ_{Ext} , inférieure à la température de prise en gel Θ_{gel} . La température d'entrée Θ_{Inlet} varie selon la fonction de la conduite. S'il s'agit d'une conduite de production entre le puits et un centre de stockage, Θ_{Inlet} est comprise entre 40 et 100°C selon les propriétés du gisement. S'il s'agit d'une conduite entre deux centres de stockage, Θ_{Inlet} est plus faible et dépend des conditions extérieures. La température extérieure Θ_{Ext} varie entre -40°C et 40°C selon la localisation du gisement (*onshore* : Alaska (-40°C), Afrique (40°C) ; *offshore* (3°C) ...).

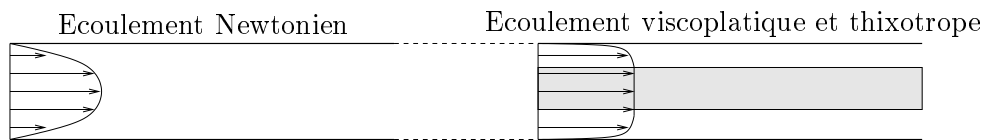
Comme la température varie le long de la conduite, les propriétés rhéologiques du brut (viscosité et contrainte seuil) et les pertes de charge ($\frac{\Delta p}{z}$) évoluent entre l'entrée et la sortie de la conduite (FIG. I-40). Ainsi, l'écoulement est Newtonien et peu visqueux en entrée ($\tau_y(\Theta_{\text{Inlet}}) \approx 0$), et les pertes de charge sont faibles. Au contraire, en aval de la conduite, l'écoulement est très visqueux, viscoplastique et thixotrope, et les pertes de charge sont élevées.

Ensuite, lorsque l'écoulement s'arrête, selon sa position dans la conduite, le fluide subit deux types de refroidissement (FIG. I-41) :

- A l'entrée, le brut est refroidi au repos de Θ_{Inlet} à Θ_{Ext} (refroidissement statique). Il apparaît alors un retrait dû à une contraction volumique du gel qu'on représente sur la partie gauche de la FIG. I-41. Ce retrait d'environ 7% se traduit par une compressibilité du gel (*Section I-3*). De plus, ce gel est caractérisé par une grande contrainte seuil.
- Le brut qui se situe en aval dans le pipeline est refroidi sous écoulement de Θ_{Inlet} à Θ_{Ext} (refroidissement dynamique). Lorsque la production est arrêtée, ce brut ne subit pas de refroidissement puisqu'il est déjà à la température extérieure Θ_{Ext} . Ainsi, on observe



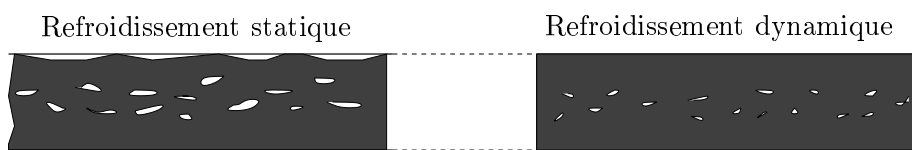
(a) Chute de pression linéique dans la conduite



(b) Physionomie de l'écoulement

FIG. I-40 Ecoulement d'un brut paraffinique avant l'arrêt de la conduite ($t = 0$)

moins de retrait (environ 4%) et donc peu de compressibilité (*Section I-3*). Cependant, ce gel possède une faible contrainte seuil.

FIG. I-41 Physionomie de l'écoulement après l'arrêt ($t = \infty$)

Redémarrage de l'écoulement

De part ces propriétés rhéologiques, le comportement du brut paraffinique aux premiers instants du redémarrage dépend de la manière dont il a été arrêté. C'est pourquoi le redémarrage de l'entrée de la conduite ne se fera pas dans les mêmes conditions que le redémarrage du brut figé en aval. Le scénario de redémarrage se décompose en 3 étapes :

- Etape 1 :

Pour redémarrer l'écoulement, un fluide chaud sous pression est injecté en entrée de la conduite. Ainsi, dans un premier temps, les poches de gaz vont se comprimer. La grande

compressibilité du gel aura un rôle plus important en entrée qu'à la sortie du pipeline, comme nous le montre la FIG. I-42. Bien que la compressibilité ait une influence bénéfique sur le redémarrage, il est plus facile de redémarrer une conduite refroidie en écoulement qu'au repos (*cf.* TAB. I.1).

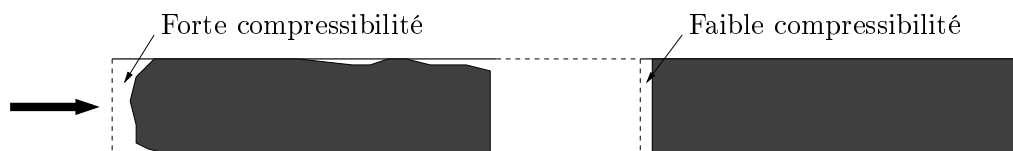


FIG. I-42 Compression des poches de gaz

- Etape 2 :

2 situations différentes s'imposent pour cette étape : le gel commence à se déstructurer soit près de la paroi (FIG. I-43), soit au centre de la conduite (FIG. I-44).

Si le temps d'arrêt est long, la température et la contrainte seuil sont homogènes dans la conduite. Or, le phénomène de déstructuration du gel est régi par le cisaillement, qui est plus fort près de la paroi. Ainsi, la déstructuration du gel se fait de la paroi vers le centre de la conduite.



FIG. I-43 Déstructuration du gel à la paroi

Si le temps d'arrêt est court, le régime thermique n'est pas encore établi dans toute la conduite. En particulier, au centre de la conduite, une température plus élevée permet de conserver une contrainte seuil plus faible. Ainsi, la déstructuration s'initie au centre de la conduite.



FIG. I-44 Déstructuration du gel au centre

- Etape 3 :

La déstructuration du gel à la paroi se fait de proche en proche sur toute la longueur de la conduite. Nous avons un écoulement de type bouchon très visqueux. Puis le bouchon de gel au centre diminue radialement grâce au cisaillement, jusqu'à retrouver les conditions d'écoulement établi (FIG. I-40).

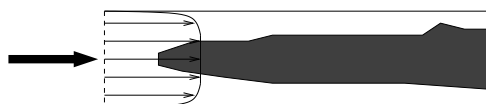


FIG. I-45 Déstructuration du gel à la paroi

La déstructuration du gel au centre se propage sur toute la longueur de la conduite. Les « zones mortes » à la paroi s'érodent avec le cisaillement puis disparaissent. Enfin, nous retrouvons un écoulement viscoplastique et thixotrope stationnaire (FIG. I-40).

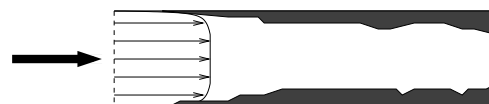


FIG. I-46 Déstructuration du gel au centre

Nous avons également tracé l'évolution au cours du temps de la chute de pression dans la conduite. En entrée de la conduite, le fluide est Newtonien incompressible, donc la chute de pression est linéaire. Puis, la compressibilité du bouchon de gel donne une forme exponentielle à la chute de pression. Enfin, en Etape 3, on retrouve la chute de pression d'un écoulement stationnaire d'un brut paraffinique (FIG. I-40).

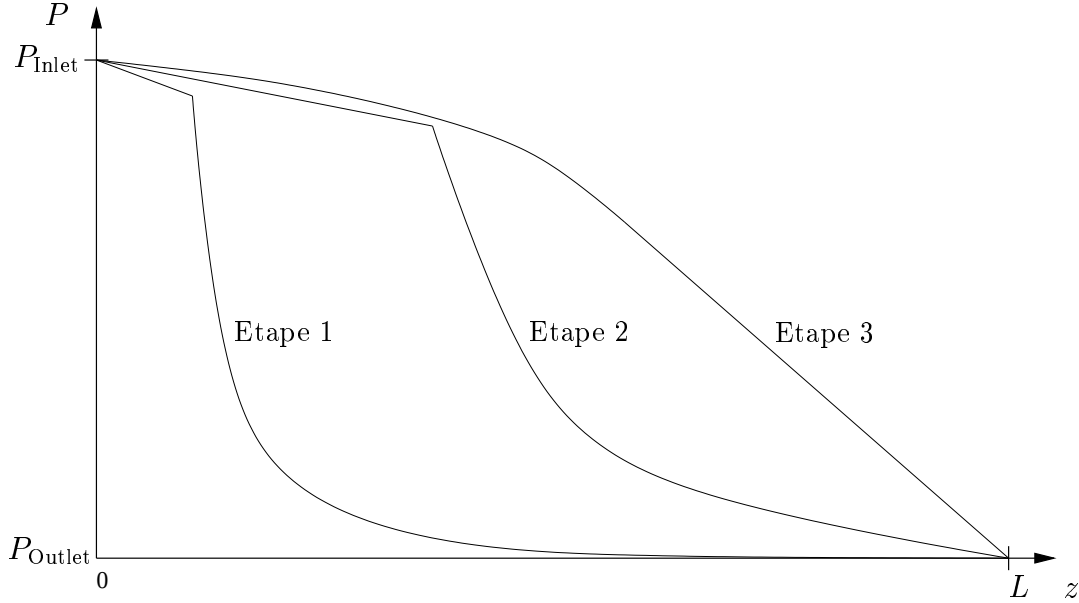


FIG. I-47 Evolution de la chute de pression au cours du redémarrage

7 Conclusion

Au cours d'une description précise du comportement rhéologique, nous avons montré qu'un brut paraffinique a une rhéologie complexe puisqu'il est Newtonien pour des températures élevées ($\Theta > \Theta_{cc}$), et viscoplastique et thixotrope pour des températures plus basses ($\Theta_{cc} > \Theta > \Theta_g$). De plus, il se forme un bouchon de gel hétérogène compressible (apparition de cavités de gaz) pour de faibles températures ($\Theta < \Theta_g$). La difficulté pour caractériser un tel fluide vient du fait que pour ces températures critiques, la contrainte seuil et la viscosité dépendent de la nature du brut et de son histoire mécanique et thermique. Finalement, un brut paraffinique est décrit par un grand nombre de paramètres rhéologiques et mécaniques interdépendants.

La rhéologie complexe d'un brut paraffinique rend sa modélisation difficile. Néanmoins, à partir de modèles simples, améliorés et enrichis au cours des années, il est possible de prédire le comportement d'un tel brut lors de son redémarrage. Le modèle de Houska permet de décrire la phénoménologie de ce processus le plus fidèlement possible et de déterminer la pression de redémarrage avec une bonne précision. Même si le modèle de Houska prend en compte la viscoplasticité et la thixotropie, il est également nécessaire d'introduire les effets thermiques et la compressibilité qui sont des facteurs prédominants lors du redémarrage d'un brut paraffinique.

Enfin, en basant notre réflexion sur l'étude du comportement des bruts paraffiniques, nous avons établi un scénario d'arrêt et de redémarrage dont les principaux acteurs sont : les effets thermiques lors de l'arrêt, la compressibilité et la contrainte seuil lors du redémarrage. Finalement, les conditions dans lesquelles l'écoulement est arrêté ont une influence importante sur le processus de redémarrage. Ainsi, la modélisation du redémarrage d'un écoulement de bruts paraffiniques doit être accompagnée de la modélisation de l'arrêt de cet écoulement.

Chapitre II

Résolution numérique

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous établissons les équations régissant l'écoulement d'un brut paraffinique dans une conduite. Nous présentons également les méthodes mathématiques et numériques mises en œuvre pour résoudre ces équations. Un intérêt particulier est porté à l'implémentation de la loi de comportement et à la discrétisation des termes de transport rencontrés à plusieurs reprises dans les équations. Une étude préliminaire avec le logiciel industriel FLUENT 6, présentée en *Annexe A*, nous a permis d'identifier ses limites pour nos travaux de thèse et nous a orienté vers le développement de notre propre code de calcul. Nous travaillons à partir d'un code volumes finis développé par Wachs [58] sur les écoulements stationnaires de fluides viscoélastiques dans une conduite à contraction brusque. Nous modifions donc ce code afin de l'adapter aux écoulements non-isothermes compressibles instationnaires de fluides viscoplastiques dans une conduite 2D axisymétrique. Par souci de clarté, nous nommons ce code StarWaCS pour *STARt up of WAxy Crude oilS*. Les méthodes numériques et les algorithmes implémentés dans StarWaCS sont présentés dans ce chapitre. Enfin, nous réalisons des tests numériques concernant l'influence du maillage et les propriétés de convergence des algorithmes.

2 Equations gouvernantes

Nous détaillons dans les sections suivantes comment chacune des équations du mouvement est adaptée au problème d'un écoulement faiblement compressible d'un fluide viscoplastique thixotrope dont les paramètres rhéologiques dépendent de la température.

2.1 Conservation de la masse

Soit Ω un domaine fermé de $\mathbb{R}^d$ et $[0, T]$ un intervalle de temps. La conservation de la masse pour un écoulement compressible s'écrit :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.1})$$

où $\frac{d}{dt}$ est la dérivée particulaire définie par $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla$, ρ la masse volumique et $\mathbf{U}$ le vecteur vitesse. ∇ et $\nabla \cdot$ sont respectivement les opérateurs gradient et divergence.

Lors de la description du comportement des bruts paraffiniques (*Chapitre I*), nous avons noté l'influence de la température d'une part et l'effet de la compressibilité des poches de gaz d'autre part. C'est pourquoi, la masse volumique $\rho(\Theta, p)$ dépend à la fois de la température Θ et de la pression p . Les facteurs de compressibilité isotherme $\mathcal{X}_\Theta$ et de dilation thermique isobare α sont définis par :

$$\mathcal{X}_\Theta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_\Theta \quad \text{et} \quad \alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \Theta} \right)_p \quad (\text{II.2})$$

La conservation de la masse (II.1) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \times \frac{dp}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial \Theta} \times \frac{d\Theta}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.3})$$

En utilisant (II.2), on a finalement :

$$\mathcal{X}_\Theta \frac{dp}{dt} - \alpha \frac{d\Theta}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.4})$$

La masse volumique ρ est fonction de la température lorsque le brut paraffinique a une température supérieure à la température de cristallisation Θ_{cc} . Dès que les premiers cristaux de paraffines apparaissent et que la viscosité augmente, la variation de la masse volumique avec la température devient faible. Or, nous étudions le comportement du brut paraffinique lorsque la température est inférieure à la température de cristallisation. Ainsi, le coefficient de dilation thermique isobare α est négligé et la conservation de la masse s'écrit :

$$\mathcal{X}_\Theta \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p \right) + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.5})$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit finalement en fonction de la pression p , de la vitesse $\mathbf{U}$ et du coefficient de compressibilité $\mathcal{X}_\Theta$ qu'il est possible de déterminer expérimentalement.

2.2 Conservation de la quantité de mouvement

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) + \nabla p = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.6})$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des extra-contraintes.

Nous introduisons le nombre de Reynolds $\mathcal{Re}$ adimensionnel :

$$\mathcal{Re} = \frac{\rho \bar{U} R}{\mu} \quad (\text{II.7})$$

où $\bar{U}$ est la vitesse moyenne dans une section de la conduite, μ la viscosité dynamique, et R le rayon de la conduite.

Nous sommes dans la situation où le fluide étudié est très visqueux (la viscosité varie de 0.1 Pa.s à quelques dizaines de Pa.s) et s'écoule lentement. Les écoulements étudiés sont donc laminaires avec des nombres de Reynolds faibles (entre 1 et 100).

2.3 Loi de comportement

Le modèle rhéologique d'un fluide viscoplastique compressible s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = 2\mu(\dot{\gamma}) \cdot \mathbf{D} + \left(\left(\xi - \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{U}) \right) \mathbf{I} + \frac{\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|} \cdot \tau_y & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| > \tau_y \\ \mathbf{D} = 0 & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| \leq \tau_y \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

où τ_y est la contrainte seuil, ξ la viscosité volumique et $\mathbf{I}$ le tenseur identité.

$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^\top)$ est le tenseur des taux de déformation et $\dot{\gamma}$ le taux de déformation défini par $\dot{\gamma} = 2\|\mathbf{D}\|$. La *norme Euclidienne* $\|\cdot\|$ est définie par :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} |\mathbf{x}_{ij}|^2} \quad (\text{II.9})$$

Comme on considère que le fluide étudié est un fluide de Stokes, la viscosité volumique ξ est nulle. Autrement dit on suppose que les forces de viscosité sont uniquement dues au cisaillement et non aux variations de volume. Finalement, la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = 2\mu(\dot{\gamma}) \cdot \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{I} \right) + \frac{\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|} \cdot \tau_y & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| > \tau_y \\ \mathbf{D} = 0 & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| \leq \tau_y \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Le comportement des fluides viscoplastiques thixotropes est modélisé par Houska [28]. Il introduit dans le modèle viscoplastique un paramètre de structure λ qui permet de rendre compte des effets thixotropes. Ainsi, la contrainte seuil et la viscosité comportent chacune une partie permanente (respectivement τ_{y0} et k) et une partie thixotrope (respectivement τ_{y1} et Δk) et s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mu(\dot{\gamma}, \lambda) = (k + \lambda \Delta k) \dot{\gamma}^{n-1} \\ \tau_y(\lambda) = \tau_{y0} + \lambda \tau_{y1} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

où n est le paramètre de rhéofluidification.

D'autre part, le paramètre de structure λ est régi par la loi d'évolution en temps suivante, également appelée équation de Moore :

$$\frac{d\lambda}{dt} = a(1 - \lambda) - b\lambda \dot{\gamma}^m \quad (\text{II.12})$$

où a et b sont respectivement les paramètres de restructuration et de déstructuration, et m un paramètre d'ajustement. Dans la littérature ([4], [7], [45]), le terme de gauche n'est jamais explicité de façon claire. S'agit-il d'une dérivée particulière ou d'une dérivée temporelle classique ? Nous estimons que la quantité λ est transportée par l'écoulement et finalement nous écrivons la loi d'évolution du paramètre de structure ainsi :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \lambda = a(1 - \lambda) - b\lambda \dot{\gamma}^m \quad (\text{II.13})$$

De plus, l'influence de la température sur le comportement des bruts paraffiniques est prise en compte à travers les 8 paramètres du modèle de Houska. Nous donnons à ces paramètres rhéologiques des lois de thermodépendance, déterminées de façon expérimentale grâce au protocole développé par Cawkwell [8] et Hénaut [27] (*Chapitre IV*). Finalement, le modèle rhéologique de Houska pour un écoulement compressible s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = 2\mu(\Theta, \dot{\gamma}, \lambda) \cdot \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U})\mathbf{I} \right) + \frac{\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|} \cdot \tau_y(\Theta, \lambda) & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| > \tau_y(\Theta, \lambda) \\ \mathbf{D} = 0 & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| \leq \tau_y(\Theta, \lambda) \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \lambda = a(\Theta)(1 - \lambda) - b(\Theta)\lambda \dot{\gamma}^m \quad (\text{II.15})$$

avec $\mu(\Theta, \dot{\gamma}, \lambda) = \left(k(\Theta) + \lambda \Delta k(\Theta) \right) \dot{\gamma}^{n-1}$ et $\tau_y(\Theta, \lambda) = \tau_{y0}(\Theta) + \lambda \tau_{y1}(\Theta)$.

On définit le nombre adimensionnel de Bingham BI d'une façon générale comme le rapport de la contrainte seuil et de la contrainte à la paroi τ_w , soit :

$$BI = \frac{\tau_y}{\tau_w} \quad (\text{II.16})$$

Le nombre de Bingham rend compte des effets viscoplastiques.

En fait, dans le cas d'un écoulement établi dans une conduite axisymétrique, on définit la contrainte de cisaillement à la paroi τ_w par $\tau_w = \frac{-\Delta p \cdot R}{2L}$, où Δp est la chute de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite et L la longueur de la conduite. On a finalement :

$$\mathcal{B}i = \frac{2\tau_y}{hR} \quad (\text{II.17})$$

avec $h = -\frac{\Delta p}{L}$. Si $\mathcal{B}i = 0$, il n'y a pas d'effet de seuil, l'écoulement est cisailé dans toute la section. Si $0 < \mathcal{B}i < 1$, il y a un écoulement de type bouchon dans une section de la conduite. Enfin, lorsque $\mathcal{B}i \geq 1$, le fluide ne peut pas s'écouler.

2.4 Conservation de l'énergie

En négligeant l'énergie de changement de phase, l'équation de l'énergie pour un écoulement compressible s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla e \right) = -\nabla \cdot \Phi - p \nabla \cdot \mathbf{U} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.18})$$

où e est l'énergie interne, Φ un flux de diffusion, défini par la loi de Fourier $\Phi = -\lambda_f \nabla \Theta$ avec λ_f la conductivité thermique du fluide.

Les lois de la thermodynamique nous permettent d'introduire l'enthalpie massique h :

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (\text{II.19})$$

et

$$dh = C_p d\Theta + \frac{1}{\rho} (1 - \alpha \Theta) dp \quad (\text{II.20})$$

où C_p est la capacité calorifique du fluide, Θ la température et α le coefficient de dilation thermique isobare défini précédemment.

Ainsi, on écrit :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{II.21})$$

Or, d'après l'équation de conservation de la masse (II.1), on a :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (\text{II.22})$$

Donc

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (\text{II.23})$$

En utilisant les équations (II.18), (II.20) et (II.23), il vient :

$$\rho C_p \frac{d\Theta}{dt} = \lambda_f \nabla^2 \Theta + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} + \alpha \Theta \frac{dp}{dt} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.24})$$

On introduit trois nombres adimensionnels :

- le nombre de Brinkman $\mathcal{Br}$ qui décrit l'influence de la dissipation visqueuse :

$$\mathcal{Br} = \frac{\mu \bar{U}^2}{\lambda_f (\Theta_{\text{Ext}} - \Theta_{\text{Fluide}})} \quad (\text{II.25})$$

où Θ_{Ext} et Θ_{Fluide} sont respectivement la température extérieure et la température du fluide.

- le nombre de Peclet $\mathcal{Pe}$ qui mesure l'importance de la convection :

$$\mathcal{Pe} = \frac{\rho C_p \bar{U} L}{\lambda_f} \quad (\text{II.26})$$

- le nombre de Cameron $\mathcal{Ca}$ qui permet d'estimer la longueur d'établissement du champ de température :

$$\mathcal{Ca} = \frac{\lambda_f L}{\rho C_p \bar{U} R^2} = \frac{L^2}{R^2 \mathcal{Pe}} \quad (\text{II.27})$$

Comme le nombre de Brinkman $\mathcal{Br}$ est petit (entre 10^{-2} et 10^{-8} selon les conditions d'écoulement), nous négligeons le terme lié à la dissipation visqueuse $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}$ de l'équation de l'énergie (II.24). Le coefficient de dilation thermique isobare α est également négligé. Finalement, l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \Theta \right) = \lambda_f \nabla^2 \Theta \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.28})$$

2.5 Equation de transport : méthode VOF

Le redémarrage d'un brut paraffinique s'effectue en déplaçant le brut gélifié par ce même brut chaud, donc fluide. Ainsi, même si le brut en entrée et le brut gélifié sont identiques à la même température, ils possèdent des propriétés rhéologiques différentes lorsque la température varie. C'est pourquoi nous pensons qu'il est important de prendre en compte les phénomènes induits par le déplacement d'un fluide par un autre. Cet écoulement bi-fluide est modélisé par

une méthode de *Volume Of Fluid* (VOF) introduite par Hirt et Nichols [24] et basée sur un principe de fraction volumique. Une fonction couleur C est définie pour localiser la présence des différents fluides dans l'écoulement. En fait, C représente la fraction volumique moyenne de chaque fluide dans chaque cellule du maillage. En particulier, si on considère la présence de deux fluides dans la conduite, $C = 1$ correspond à une maille remplie de fluide 1 alors que $C = 0$ indique que la maille ne contient que du fluide 2. L'interface entre les deux fluides correspond aux valeurs de C comprises entre 0 et 1. Pour une localisation plus précise de cette interface, on lui fixe une valeur, par exemple $C = 0.5$. Les propriétés (ρ , μ et τ_y) des fluides 1 et 2 sont respectivement indicées 1 et 2. Ainsi, les propriétés moyennes de l'écoulement sont définies par :

$$\rho = \rho_1 C + \rho_2 (1 - C) \quad (\text{II.29})$$

$$\mu = \mu_1 C + \mu_2 (1 - C) \quad (\text{II.30})$$

$$\tau_y = \tau_{y1} C + \tau_{y2} (1 - C) \quad (\text{II.31})$$

La conservation de la masse pour chaque fluide s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho_1 C)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_1 \mathbf{U})C) = 0 \quad \text{pour le fluide 1} \quad (\text{II.32})$$

$$\frac{\partial(\rho_2 (1 - C))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \mathbf{U} (1 - C)) = 0 \quad \text{pour le fluide 2} \quad (\text{II.33})$$

En additionnant (II.32) et (II.33), on retrouve l'équation de conservation de la masse (II.1). De plus, la fonction couleur est régie par une équation de convection pure :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla C = 0 \quad (\text{II.34})$$

2.6 Système d'équations du problème

Finalement, le système d'équations décrivant l'écoulement faiblement compressible d'un fluide viscoplastique thixotrope dont les paramètres rhéologiques dépendent de la température s'écrit :

$$\mathcal{X}_\Theta \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p \right) + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.35})$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) + \nabla p = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.36})$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \Theta \right) = \lambda_f \nabla^2 \Theta \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.37})$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla C = 0 \quad (\text{II.38})$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \lambda = a(\Theta)(1 - \lambda) - b(\Theta)\lambda \dot{\gamma}^m \quad (\text{II.39})$$

où

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = 2\mu(\Theta, \dot{\gamma}, \lambda, C) \cdot \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U})\mathbf{I} \right) + \frac{\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|} \cdot \tau_y(\Theta, \lambda, C) & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| > \tau_y(\Theta, \lambda, C) \\ \mathbf{D} = 0 & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| \leq \tau_y(\Theta, \lambda, C) \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

$$\text{avec } \mu(\Theta, \dot{\gamma}, \lambda, C) = \left(\left[k_1(\Theta)C + k_2(\Theta)(1 - C) \right] + \lambda \left[\Delta k_1(\Theta)C + \Delta k_2(\Theta)(1 - C) \right] \right) \dot{\gamma}^{n-1} \text{ et}$$

$$\tau_y(\Theta, \lambda, C) = \left[\tau_{y0_1}(\Theta)C + \tau_{y0_2}(\Theta)(1 - C) \right] + \lambda \left[\tau_{y1_1}(\Theta)C + \tau_{y1_2}(\Theta)(1 - C) \right].$$

3 Conditions aux limites du domaine d'écoulement

La géométrie de calcul est une conduite 2D axisymétrique ($d = 2$) référencée par les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et représentée sur la FIG. II-1. La composante orthoradiale v du vecteur vitesse est nulle et toutes les composantes de vitesse sont indépendantes de la coordonnée orthoradiale θ .

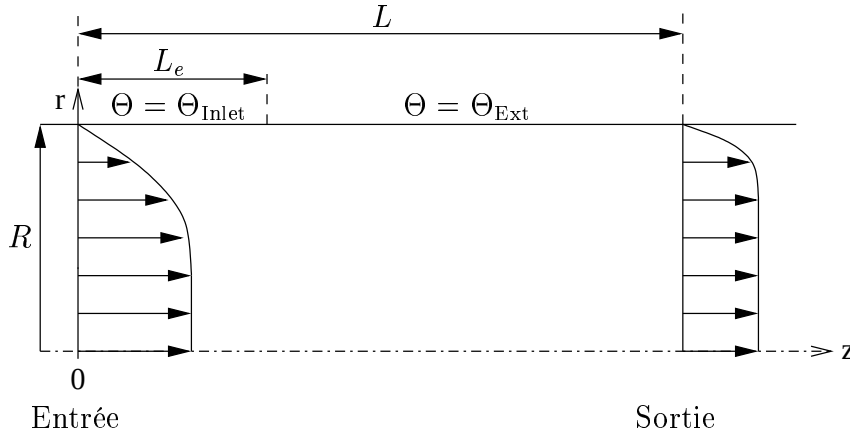


FIG. II-1 Géométrie et conditions aux limites du domaine d'écoulement

L_e est la longueur d'entrée au-delà de laquelle la température à la paroi est différente de la température d'entrée. Les conditions aux limites pour le domaine d'écoulement sont détaillées ci-dessous.

- A l'entrée

La longueur d'entrée L_e est choisie suffisamment grande pour éviter que l'écoulement entrant ne soit affecté par le changement de température à la paroi. De plus, selon le problème étudié, nous imposons une pression ou un profil de vitesse établi.

- Vitesse imposée

Des conditions de Dirichlet sont imposées sur toutes les grandeurs du problème (vitesse, pression et température).

$$u = 0, w = w_{\text{Inlet}} \quad (\text{II.41})$$

$$\Theta = \Theta_{\text{Inlet}} \quad (\text{II.42})$$

- Pression imposée

Des conditions de Dirichlet sont imposées sur la pression, la température et sur la composante radiale de la vitesse. Des conditions de Neumann sont imposées sur la

composante axiale de la vitesse.

$$u = 0, \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.43})$$

$$p = p_{\text{Inlet}} \quad (\text{II.44})$$

$$\Theta = \Theta_{\text{Inlet}} \quad (\text{II.45})$$

- A la paroi

Une condition de non glissement est imposée pour le champ de vitesse et des conditions aux limites de Dirichlet pour la température sont adoptées afin d'imposer un refroidissement à l'écoulement ($\Theta_{\text{Inlet}} > \Theta_{\text{Ext}}$). Nous ne prenons donc pas en compte le frottement à la paroi.

$$u = w = 0 \quad (\text{II.46})$$

$$\Theta = \begin{cases} \Theta_{\text{Inlet}} : z < L_e \\ \Theta_{\text{Ext}} : z \geq L_e \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

- Sur l'axe de symétrie

$$u = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.48})$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.49})$$

- A la sortie

Des conditions aux limites de Dirichlet sont imposées sur la composante radiale de la vitesse et sur la pression (la pression est arbitrairement fixée à 0 sur la section de sortie). Des conditions de Neumann sont imposées sur la température et sur la composante axiale de la vitesse.

$$u = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.50})$$

$$p = 0 \quad (\text{II.51})$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.52})$$

4 Formulation mathématique

Le problème vitesse-pressure compressible est constitué des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (II.35)-(II.36) et du modèle rhéologique (II.40). Le problème vitesse-pressure compressible et les équations d'énergie (II.37), de convection (II.38) et de Moore (II.39) sont résolus de façon découplée. Cette section nous permet de formuler la méthode mathématique pour résoudre un système d'équations elliptiques non linéaires (système vitesse-pressure (II.35)-(II.36)-(II.40)). Nous terminons cette section en écrivant l'algorithme général de résolution.

4.1 Résolution du problème vitesse-pressure compressible avec une méthode de Lagrangien augmenté

La principale difficulté dans la simulation numérique des fluides viscoplastiques est issue de la non-dérivabilité de la loi rhéologique et de l'incapacité à évaluer précisément les contraintes dans les régions où le fluide n'est pas cisailé. Il existe deux grandes familles de méthodes mathématiques pour résoudre ce problème. La première, très utilisée depuis de nombreuses années, consiste à régulariser la loi de comportement par une équation continue. L'une des lois régularisantes les plus répandues est la loi exponentielle proposée par Papanastasiou [34]. Cette méthode est facile à mettre en place car le nouveau problème régularisé est purement visqueux. Cependant, le critère pour visualiser les zones cisailées/non-cisailées ne permet pas de différencier rigoureusement ces régions puisque le tenseur des taux de déformation n'est jamais strictement nul (mais seulement proche de 0). En fait, les zones cisailées/non-cisailées sont identifiées grâce à un critère de Von Mises. La deuxième méthode repose sur une technique d'optimisation sous contraintes inégalités à l'aide de multiplicateurs de Lagrange (Duvaut et Lions détaillent de façon rigoureuse l'analyse mathématique de cette technique dans [19]). Cette méthode consiste à minimiser une fonctionnelle (appelée Lagrangien augmenté) en déterminant son point-selle, solution du problème, grâce à un algorithme d'Uzawa. Le principal avantage de cette technique est qu'elle permet de prendre en compte la discontinuité de la loi de comportement. Désormais, puisque les zones non-cisailées de l'écoulement sont caractérisées par un tenseur des taux de déformation strictement nul, les régions cisailées/non-cisailées sont parfaitement identifiables. Cette méthode est d'abord présentée pour résoudre le problème d'un écoulement instationnaire viscoplastique incompressible. Ensuite, nous adaptons cette méthode pour résoudre le problème d'un écoulement instationnaire compressible d'un fluide viscoplastique.

Cas d'un fluide viscoplastique incompressible

Nous présentons d'abord la méthode de Lagrangien augmenté pour traiter le cas d'un écoulement instationnaire viscoplastique incompressible, soit le système :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.53})$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) + \nabla p = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (\text{II.54})$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = 2\mu \cdot \mathbf{D} + \frac{\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|} \cdot \tau_y & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| > \tau_y \\ \mathbf{D} = 0 & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| \leq \tau_y \end{cases} \quad (\text{II.55})$$

Nous introduisons les espaces fonctionnels suivants :

$$\mathcal{V}(\Omega) = \{ \mathbf{V} \in (\mathcal{H}^1(\Omega))^d \mid \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \} \quad (\text{II.56})$$

$$\mathcal{V}_0(\Omega) = \{ \mathbf{V} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{V}|_{\partial\Omega} = 0 \} \quad (\text{II.57})$$

$$\mathcal{H}_0^1(\Omega) = \{ \mathbf{V} \in (\mathcal{H}^1(\Omega))^d, \mid \mathbf{V}|_{\partial\Omega} = 0 \} \quad (\text{II.58})$$

$$\mathcal{D}(\Omega) = (\mathcal{L}^2(\Omega))^{d \times d} \quad (\text{II.59})$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega) \quad (\text{II.60})$$

et la fonctionnelle $\mathcal{L} : \mathcal{V}_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{V}^2 d\Omega + \int_{\Omega} \mu |\mathbf{D}(\mathbf{V})|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \sqrt{2} \tau_y |\mathbf{D}(\mathbf{V})| d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} d\Omega \quad (\text{II.61})$$

Le terme instationnaire $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$ de l'équation (II.54) est discrétisé par un schéma d'Euler du 1^{er} ordre en temps et s'écrit $\frac{\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{k-1}}{\Delta t}$, où Δt est le pas de discrétisation en temps. Pour alléger l'écriture, l'indice k est supprimé. De plus, $\mathbf{f}$ correspond à la somme du terme instationnaire $\left(\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{U}^{k-1}\right)$ et du terme d'inertie $(-\mathbf{U}^{k-1} \cdot \nabla \mathbf{U}^{k-1})$ de l'équation (II.54), traité de façon explicite. Enfin, $|\cdot|$ représente la *norme de Frobenius*, définie par :

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq d} |\mathbf{x}_{ij}|^2} = \sqrt{2} \|\mathbf{x}\| \quad (\text{II.62})$$

D'après Glowinski et al. [23], la solution $\mathbf{U} \in \mathcal{V}_0(\Omega)$ du problème (II.53)-(II.54)-(II.55) est telle que :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) = \min_{\mathbf{V} \in \mathcal{V}_0} \mathcal{L}(\mathbf{V}) \quad (\text{II.63})$$

La difficulté dans la résolution du problème (II.63) est due à la non-dérivabilité du troisième terme $\int_{\Omega} \sqrt{2} \tau_y |\mathbf{D}(\mathbf{V})| d\Omega$ de la fonctionnelle (II.61).

Une nouvelle variable $\mathbf{q} \in \mathcal{D}(\Omega)$ est introduite telle que :

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}(\mathbf{V}) \quad (\text{II.64})$$

et la fonctionnelle correspondante $\mathcal{L}^* : \mathcal{V}_0(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\mathcal{L}^*(\mathbf{V}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{V}^2 d\Omega + \int_{\Omega} \mu |\mathbf{D}(\mathbf{V})|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \sqrt{2} \tau_y |\mathbf{q}| d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} d\Omega \quad (\text{II.65})$$

La solution $(\mathbf{U}, \mathbf{d}) \in \mathcal{V}_0(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ du problème (II.53)-(II.54)-(II.55) est désormais telle que :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{d}) = \min_{\mathbf{q}} \min_{\mathbf{V}} \mathcal{L}^*(\mathbf{V}, \mathbf{q}) \quad (\text{II.66})$$

Les contraintes (II.53) et (II.64) sont relaxées par l'introduction de deux multiplicateurs de Lagrange : un champ de multiplicateurs de Lagrange scalaire $l \in \mathcal{P}(\Omega)$ pour la pression et un champ de multiplicateurs de Lagrange tensoriel $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour le tenseur des contraintes plastiques. On définit ainsi la fonctionnelle suivante $\bar{\mathcal{L}} : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(\mathbf{V}, l, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{V}^2 d\Omega + \int_{\Omega} \mu |\mathbf{D}(\mathbf{V})|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \sqrt{2} \tau_y |\mathbf{q}| d\Omega \\ & - \int_{\Omega} l \nabla \cdot \mathbf{V} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha} : (\mathbf{D}(\mathbf{V}) - \mathbf{q}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

La solution $(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ est un point-selle du Lagrangien $\bar{\mathcal{L}}$ et est déterminée par :

$$\bar{\mathcal{L}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma) = \max_{\boldsymbol{\alpha}} \min_{\mathbf{q}} \max_l \min_{\mathbf{V}} L(\mathbf{V}, l, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.68})$$

Afin d'améliorer la convergence du système, Glowinski et Le Tallec [23] proposent d'introduire un terme de pénalisation supplémentaire à la fonctionnelle $\bar{\mathcal{L}}$. Ainsi, le Lagrangien augmenté s'écrit :

$$\bar{\mathcal{L}}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma) = \bar{\mathcal{L}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma) + \frac{\tilde{r}}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{U}) - \mathbf{d}|^2 d\Omega \quad (\text{II.69})$$

où $\tilde{r}$ est un scalaire positif. On montre facilement que tout point-selle de $\bar{\mathcal{L}}_{\tilde{r}}$ est également point-selle de $\bar{\mathcal{L}}$ [22, 23].

En appliquant les conditions d'optimalité, nous pouvons écrire les quatre équations d'Euler pour le Lagrangien augmenté (II.69) :

- $\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma)}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{h}) = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$
- $\iff \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{U} \cdot \mathbf{h} d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{U}) : \mathbf{D}(\mathbf{h}) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{h} d\Omega + \int_{\Omega} \Gamma : \mathbf{D}(\mathbf{h}) d\Omega$
 $+ \tilde{r} \int_{\Omega} (\mathbf{D}(\mathbf{U}) - \mathbf{d}) : \mathbf{D}(\mathbf{h}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{h} d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$
- $\iff \int_{\Omega} \left(\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{U} + \nabla p - \nabla \cdot ((2\mu + \tilde{r}) \mathbf{D}(\mathbf{U})) - \nabla \cdot (\Gamma - \tilde{r} \mathbf{d}) - \mathbf{f} \right) \cdot \mathbf{h} d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$

Finalement, la première équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{U} - \nabla \cdot ((2\mu + \tilde{r}) \mathbf{D}(\mathbf{U})) + \nabla p = \nabla \cdot (\Gamma - \tilde{r} \mathbf{d}) + \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.70})$$

- $\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma)}{\partial p}(k) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\iff - \int_{\Omega} k \nabla \cdot \mathbf{U} d\Omega = 0, \quad \forall k \in \mathcal{P}(\Omega)$$

On retrouve ainsi le caractère incompressible dans l'écriture de la deuxième équation d'Euler :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.71})$$

- Comme la fonction $\bar{\mathcal{L}}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma)$ n'est pas dérivable en $\mathbf{d}$, nous déterminons le minimum local en $\mathbf{d}$, pour $(\mathbf{U}, p, \Gamma)$ fixés, en écrivant l'inégalité variationnelle suivante :

$$\bar{\mathcal{L}}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{q}, \Gamma) \geq \bar{\mathcal{L}}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \int_{\Omega} \sqrt{2} \tau_y |\mathbf{q}| d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{\Gamma} : \mathbf{q} d\Omega + \frac{\tilde{r}}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{U}) - \mathbf{q}|^2 d\Omega \\
&\geq \int_{\Omega} \sqrt{2} \tau_y |\mathbf{d}| d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{\Gamma} : \mathbf{d} d\Omega + \frac{\tilde{r}}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{U}) - \mathbf{d}|^2 d\Omega, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{D}(\Omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \tilde{r} \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \mathbf{q} d\Omega + \int_{\Omega} \sqrt{2} \tau_y |\mathbf{q}| d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{\Gamma} + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U})) : \mathbf{q} d\Omega \\
&\geq \tilde{r} \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} d\Omega + \int_{\Omega} \sqrt{2} \tau_y |\mathbf{q}| d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{\Gamma} + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U})) : \mathbf{d} d\Omega, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{D}(\Omega)
\end{aligned}$$

On montre que la solution de l'inégalité variationnelle écrite ci-dessus vérifie [23, 39] :

$$\mathbf{d} = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{\sqrt{2} \tau_y}{\|\mathbf{\Gamma} + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U})\|} \right) (\mathbf{\Gamma} + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U})) & \text{si } \|\mathbf{\Gamma} + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U})\| > \sqrt{2} \tau_y \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{\Gamma} + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U})\| \leq \sqrt{2} \tau_y \end{cases} \quad (\text{II.72})$$

qui peut être réécrite avec la *norme Euclidienne* $\|\cdot\|$:

$$\mathbf{d} = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{\tau_y}{\|\mathbf{\Gamma} + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U})\|} \right) (\mathbf{\Gamma} + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U})) & \text{si } \|\mathbf{\Gamma} + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U})\| > \tau_y \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{\Gamma} + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U})\| \leq \tau_y \end{cases} \quad (\text{II.73})$$

$$\bullet \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \mathbf{\Gamma})}{\partial \mathbf{\Gamma}}(\mathbf{m}) = 0, \quad \forall \mathbf{m} \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\Longleftrightarrow - \int_{\Omega} (\mathbf{D}(\mathbf{U}) - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{m} d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{m} \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Finalement, la dernière équation d'Euler s'écrit :

$$\mathbf{D}(\mathbf{U}) - \mathbf{d} = 0 \quad (\text{II.74})$$

Cas d'un fluide viscoplastique compressible

La méthode décrite précédemment est maintenant adaptée à un écoulement instationnaire viscoplastique compressible. Désormais, la pression n'apparaît plus comme un multiplicateur de Lagrange puisque la contrainte (II.53) n'est plus vérifiée pour un fluide compressible. De plus, la vitesse $\mathbf{V}$ est désormais définie dans $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Ainsi, la nouvelle fonctionnelle $\tilde{\mathcal{L}} : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{V}, l) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{V}^2 d\Omega + \int_{\Omega} \mu |\mathbf{D}(\mathbf{V})|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \sqrt{2} \tau_y |\mathbf{D}(\mathbf{V})| d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} d\Omega \\
&\quad - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \mu |\nabla \cdot \mathbf{V}|^2 d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\mathcal{X}_{\theta}}{\Delta t} l^2 d\Omega - \int_{\Omega} l \nabla \cdot \mathbf{V} d\Omega - \int_{\Omega} g \cdot l d\Omega
\end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

où g correspond à la somme du terme instationnaire et du terme de transport de l'équation (II.35), traité de façon explicite. Le terme instationnaire $\frac{\partial p}{\partial t}$ de l'équation (II.35) est également discrétisé par un schéma d'Euler du 1^{er} ordre en temps.

La solution $(\mathbf{U}, p) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$ du problème (II.35)-(II.36)-(II.40) est telle que :

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{U}, p) = \max_l \min_{\mathbf{V}} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{V}, l) \quad (\text{II.76})$$

Comme précédemment, on définit une variable $\mathbf{q} \in \mathcal{D}(\Omega)$, un champ tensoriel de multiplieurs de Lagrange $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, et on introduit le terme de pénalisation pour augmenter le Lagrangien $\tilde{\mathcal{L}}$. Finalement, le Lagrangien augmenté $\mathcal{L}_{\tilde{r}} : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{V}, l, \mathbf{q}, \alpha) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{V}^2 d\Omega + \int_{\Omega} \mu |\mathbf{D}(\mathbf{V})|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \sqrt{2} \tau_y |\mathbf{q}| d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} d\Omega \\ & - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \mu (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\mathcal{X}_{\theta}}{\Delta t} l^2 d\Omega - \int_{\Omega} l \nabla \cdot \mathbf{V} d\Omega - \int_{\Omega} g \cdot l d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \alpha : (\mathbf{D}(\mathbf{V}) - \mathbf{q}) d\Omega + \frac{\tilde{r}}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{U}) - \mathbf{d}|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

La solution $(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ du problème (II.35)-(II.36)-(II.40) est un point-selle du Lagrangien $\mathcal{L}_{\tilde{r}}$ déterminé par :

$$\mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma) = \max_{\alpha} \min_{\mathbf{q}} \max_l \min_{\mathbf{V}} \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{V}, l, \mathbf{q}, \alpha) \quad (\text{II.78})$$

Les conditions d'optimalité du Lagrangien augmenté (II.77) s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma)}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{h}) = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \quad (\text{II.79})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma)}{\partial p}(k) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{P}(\Omega) \quad (\text{II.80})$$

$$\mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{q}, \Gamma) \geq \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (\text{II.81})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \Gamma)}{\partial \Gamma}(\mathbf{m}) = 0, \quad \forall \mathbf{m} \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (\text{II.82})$$

et nous permettent d'établir les quatre équations d'Euler :

- $\frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \mathbf{\Gamma})}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{h}) = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \iff \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{U} \cdot \mathbf{h} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{U}) : \mathbf{D}(\mathbf{h}) \, d\Omega - \frac{2}{3} \int_{\Omega} \mu (\nabla \cdot \mathbf{U}) (\nabla \cdot \mathbf{h}) \, d\Omega \\ - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{h} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{\Gamma} : \mathbf{D}(\mathbf{h}) \, d\Omega + \tilde{r} \int_{\Omega} (\mathbf{D}(\mathbf{U}) - \mathbf{d}) : \mathbf{D}(\mathbf{h}) \, d\Omega \\ - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{h} \, d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Finalement, la première équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{U} - \nabla \cdot \left[(2\mu + \tilde{r}) \mathbf{D}(\mathbf{U}) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{I} \right] + \nabla p = \nabla \cdot (\mathbf{\Gamma} - \tilde{r} \mathbf{d}) + \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.83})$$

- $\frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \mathbf{\Gamma})}{\partial p}(k) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\iff - \int_{\Omega} \frac{\mathcal{X}_{\theta}}{\Delta t} p \cdot k \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{U} \cdot \nabla k \, d\Omega - \int_{\Omega} g \cdot k \, d\Omega = 0, \quad \forall k \in \mathcal{P}(\Omega)$$

La deuxième équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\mathcal{X}_{\theta}}{\Delta t} p + \nabla \cdot \mathbf{U} = g \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.84})$$

- Comme précédemment, la fonction $\mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \mathbf{\Gamma})$ n'est pas dérivable en $\mathbf{d}$. En écrivant l'inégalité variationnelle $\mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{q}, \mathbf{\Gamma}) \geq \mathcal{L}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \mathbf{\Gamma}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{D}(\Omega)$, on retrouve l'équation (II.73) pour le calcul du tenseur $\mathbf{d}$.

- $\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_{\tilde{r}}(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \mathbf{\Gamma})}{\partial \mathbf{\Gamma}}(\mathbf{m}) = 0, \quad \forall \mathbf{m} \in \mathcal{D}(\Omega)$

On retrouve la dernière équation d'Euler (II.74).

Le point-selle $(\mathbf{U}, p, \mathbf{d}, \mathbf{\Gamma})$ est calculé à partir d'un algorithme d'Uzawa [21, 23] adapté pour un écoulement compressible. Les différentes étapes de cet algorithme correspondent aux équations d'Euler établies précédemment. Les deux premières équations (II.83)-(II.84) définissent un problème de Stokes compressible modifié par l'ajout d'un second membre $\nabla \cdot (\mathbf{\Gamma} - \tilde{r} \mathbf{d})$. L'algorithme d'Uzawa final est intégré au sein de l'algorithme général de résolution.

4.2 Algorithme général de résolution

La résolution du problème de l'écoulement instationnaire d'un fluide viscoplastique thixotrope compressible thermodépendant est réalisée grâce à un algorithme découplé. Pour chaque pas de temps, le système vitesse-pressure (II.35)-(II.36)-(II.40) est d'abord résolu, puis les équations d'énergie (II.37), de transport (II.38) et de Moore (II.39) sont résolues successivement. Le critère de convergence retenu pour la résolution du problème vitesse-pressure porte sur la contrainte (II.74) et sur la stabilité des champs de vitesse et de pression. L'algorithme général est arrêté lorsque le régime stationnaire en température et en vitesse est atteint. Ainsi, en introduisant les trois critères de convergence ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 , l'algorithme général de résolution s'écrit :

- Initialisation de $\mathbf{U}^0, p^0, \mathbf{d}^0, \mathbf{\Gamma}^0$ et Θ^0
- Boucle en temps $t^k = t^{k-1} + \Delta t^k$
 - Résolution du problème vitesse-pressure compressible par un algorithme d'Uzawa
 - ★ Initialisation : $\mathbf{U}_0^k = \mathbf{U}^{k-1}, p_0^k = p^{k-1}, \mathbf{d}_0^k = \mathbf{d}^{k-1}$ et $\mathbf{\Gamma}_0^k = \mathbf{\Gamma}^{k-1}$
 - ★ $i \geq 1$
 - ★ ETAPE 1 : Résolution du problème de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathcal{X}_\theta}{\Delta t} p_i^k + \nabla \cdot \mathbf{U}_i^k = g(\mathbf{U}^{k-1}, p^{k-1}) \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\rho_{i-1}^k}{\Delta t} \mathbf{U}_i^k - \nabla \cdot \left[\left(2\mu^{k-1} + \tilde{r} \right) \mathbf{D}(\mathbf{U}_i^k) - \frac{2}{3} \mu^{k-1} (\nabla \cdot \mathbf{U}_i^k) \mathbf{I} \right] + \nabla p_i^k = \\ \nabla \cdot \left(\mathbf{\Gamma}_{i-1}^k - \tilde{r} \mathbf{d}_{i-1}^k \right) + \mathbf{f}(\mathbf{U}^{k-1}, \rho_{i-1}^k) \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{U}_i^k = \mathbf{U}^k \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{II.85})$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} g(\mathbf{U}^{k-1}, p^{k-1}) = \frac{\mathcal{X}_\theta}{\Delta t} p^{k-1} - \mathcal{X}_\theta \mathbf{U}^{k-1} \cdot \nabla p^{k-1} \\ \mathbf{f}(\mathbf{U}^{k-1}, \rho_{i-1}^k) = \frac{\rho_{i-1}^k}{\Delta t} \mathbf{U}^{k-1} - \rho_{i-1}^k \mathbf{U}^{k-1} \cdot \nabla \mathbf{U}^{k-1} \end{array} \right.$$

- ★ ETAPE 2 : Calcul du tenseur des taux de déformation $\mathbf{d}_i^k$

$$\mathbf{d}_i^k = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{\tau_y^{k-1}}{\|\mathbf{\Gamma}_{i-1}^k + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U}_i^k)\|} \right) (\mathbf{\Gamma}_{i-1}^k + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U}_i^k)) \\ \quad \text{si } \|\mathbf{\Gamma}_{i-1}^k + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U}_i^k)\| > \tau_y^{k-1} \\ 0 \quad \text{si } \|\mathbf{\Gamma}_{i-1}^k + \tilde{r} \mathbf{D}(\mathbf{U}_i^k)\| \leq \tau_y^{k-1} \end{array} \right. \quad (\text{II.86})$$

- ★ ETAPE 3 : Mise à jour du multiplicateur de Lagrange $\mathbf{\Gamma}_i^k$

$$\mathbf{\Gamma}_i^k = \mathbf{\Gamma}_{i-1}^k + \tilde{r} (\mathbf{D}(\mathbf{U}_i^k) - \mathbf{d}_i^k) \quad (\text{II.87})$$

- ★ Mise à jour de la masse volumique ρ_i^k

$$\rho_i^k = \rho_0 e^{\mathcal{X}_\theta p_i^k} \quad (\text{II.88})$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide dans les conditions standards de pression et de température.

- ★ Convergence si

$$\Delta(\mathbf{U}, p)_i = \max_{\Omega} |\mathbf{U}_i^k - \mathbf{U}_{i-1}^k| + \max_{\Omega} |p_i^k - p_{i-1}^k| \leq \epsilon_1 \quad (\text{II.89})$$

$$\Delta \mathbf{D}_i = \max_{\Omega} |\mathbf{D}(\mathbf{U}_i^k) - \mathbf{d}_i^k| \leq \epsilon_2 \quad (\text{II.90})$$

- ★ $i = i + 1$

- Résolution de l'équation d'énergie

$$\rho^k C_p \left(\frac{\Theta^k}{\Delta t} + \mathbf{U}^k \cdot \nabla \Theta^{k-1} \right) = \lambda_f \nabla^2 \Theta^k + \rho^k C_p \frac{\Theta^{k-1}}{\Delta t} \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.91})$$

– Résolution de l'équation de transport pour la méthode VOF

$$\frac{C^k}{\Delta t} + \mathbf{U}^k \cdot \nabla C^{k-1} = \frac{C^{k-1}}{\Delta t} \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.92})$$

– Résolution de l'équation de Moore

$$\frac{\lambda^k}{\Delta t} + \mathbf{U}^k \cdot \nabla \lambda^{k-1} = \frac{\lambda^{k-1}}{\Delta t} + a^k(1 - \lambda^{k-1}) - b^k \lambda^{k-1} \dot{\gamma}^m \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.93})$$

– Sortie des résultats ($\mathbf{U}, p, \Theta, \mathbf{d}, C, \lambda \dots$)

– Convergence si

$$\max(\Delta\Theta^k, \Delta\mathbf{U}^k) \leq \epsilon_3 \quad (\text{II.94})$$

$$\text{avec } \Delta\Theta^k = \frac{\max_{\Omega} |\Theta^k - \Theta^{k-1}|}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta\mathbf{U}^k = \frac{\max_{\Omega} |\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{k-1}|}{\Delta t}$$

– $k = k + 1$

On note que les équations d'énergie (II.37), de transport (II.38) et de Moore (II.39) sont discrétisées en temps par un schéma d'Euler explicite du 1^{er} ordre. De plus, on appelle **MUA** (pour *Modified Uzawa Algorithm*), l'algorithme composé des étapes 1, 2 et 3 de l'algorithme général de résolution (c'est à dire les étapes de la boucle en i repérées par $\star$).

5 Discrétisation des équations par une méthode de Volumes Finis

Le domaine de calcul Ω est divisé en un nombre fini de volumes. A chaque variable (u, w, p, Θ, C et λ) est associée un volume de contrôle centré sur cette dernière et sur lequel on intègre les équations d'équilibre, comme le montre la FIG. II-2. Nous utilisons une grille décalée de type Marker And Cell (MAC) pour la disposition des variables vitesse, pression et température sur le maillage. Cette position décalée permet d'écrire les dérivés premières avec des schémas centrés d'une précision d'ordre 2.

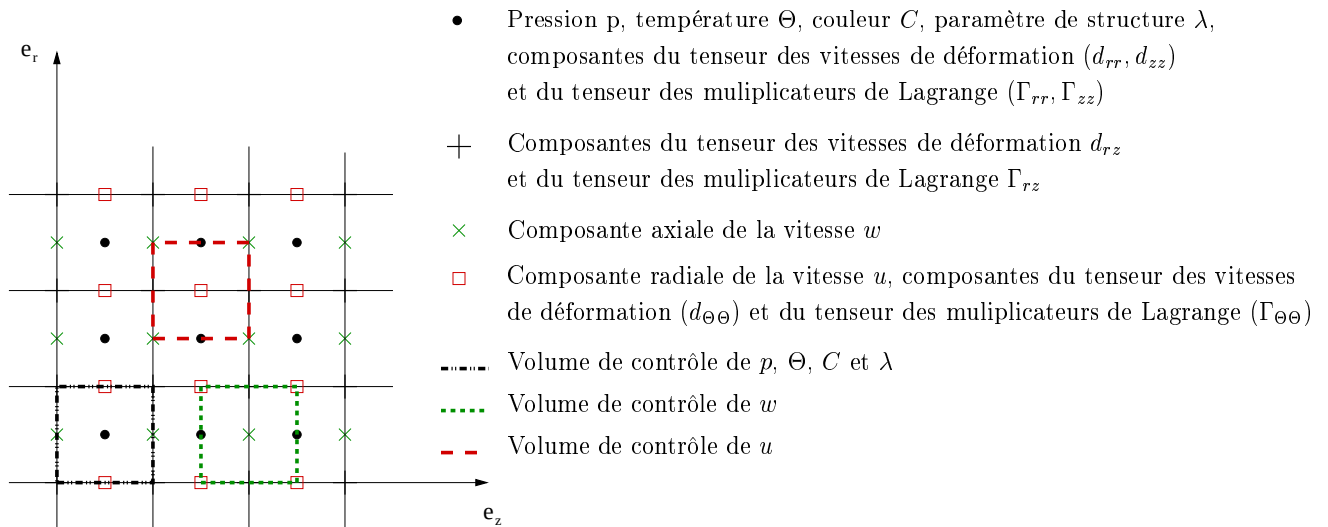


FIG. II-2 Disposition décalée des variables sur le maillage

Les composantes de vitesse (u et w) sont localisées sur les faces des cellules alors que la pression p , la température Θ , la fonction couleur C et le paramètre de structure λ sont centrés sur chaque maille. Les composantes ($d_{rr}, d_{zz}, \Gamma_{rr}, \Gamma_{zz}$) du tenseur des vitesses de déformation et du tenseur des multiplicateurs de Lagrange sont calculées au centre des mailles alors que les composantes ($d_{\theta\theta}, \Gamma_{\theta\theta}$) sont calculées sur les faces des cellules. Les composantes extra-diagonales (d_{rz}, Γ_{rz}) sont évaluées sur les nœuds du maillage.

Nous détaillons l'intégration et la discrétisation des équations du problème pour chaque volume de contrôle. Chacune d'elles possède des propriétés mathématiques différentes. C'est pourquoi il existe plusieurs schémas de discrétisation adaptés à chacune de ces équations afin de les résoudre avec la meilleure précision.

5.1 Equation de transport

Nous nous intéressons ici à une équation de type hyperbolique que nous rencontrons à plusieurs reprises dans l'écriture de notre système. La discrétisation de cette équation est d'autant plus importante qu'elle régit le transport des quantités telles que la vitesse, la pression, la température, la fonction couleur de la méthode VOF ou le paramètre de structure de l'équation de Moore.

Discrétiser une équation de convection est un problème récurrent dans le monde de la simulation de la mécanique des fluides. Même si les schémas classiques du 1^{er} ordre (centré, décentré amont, Lax-Friedrich ...) sont robustes et monotones, ils sont responsables d'une grande diffusion qui a des effets dramatiques sur la précision de la solution. Les schémas d'un ordre supérieur sont moins dissipatifs, mais présentent des instabilités numériques qui font apparaître des oscillations non physiques dans les zones de forts gradients. Au cours de ces dernières années, de nouvelles méthodes performantes de résolution ont été développées pour résoudre les systèmes hyperboliques d'équations conservatives. Parmi ces méthodes, les schémas TVD (*Total Variation Diminishing*) sont très utilisés.

Nous résolvons une équation hyperbolique 1D par la méthode des volumes finis en utilisant trois schémas numériques différents (1^{er} ordre décentré amont, 2nd ordre Quick et TVD). Nous comparons les résultats et mettons en avant les qualités des schémas TVD.

Résolution d'une équation hyperbolique 1D

L'équation de convection 1D s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.95})$$

avec u la vitesse constante positive de convection de la quantité C .

Nous écrivons l'équation (II.95) sous la forme conservative :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial f(C)}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.96})$$

avec $f(C) = uC$.

Par intégration sur le volume de contrôle Ω (FIG. II-3), l'équation de convection s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} d\Omega = 0 \quad (\text{II.97})$$

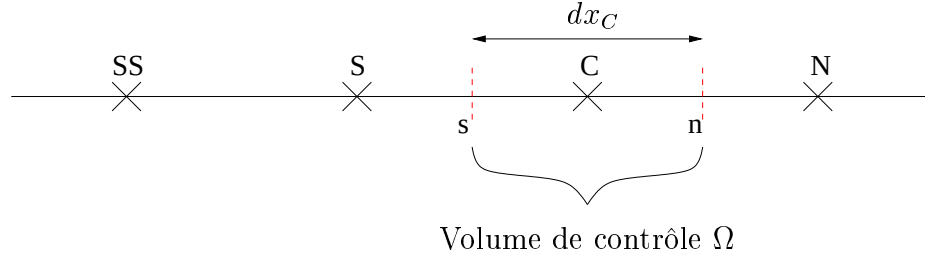


FIG. II-3 Volume de contrôle Ω pour l'équation de convection (II.96)

En utilisant le théorème de Green, il vient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \text{ où } \mathbf{n} \text{ est la normale sortante.} \quad (\text{II.98})$$

Finalement, en utilisant un schéma d'Euler explicite du 1^{er} ordre en temps, on a :

$$C_C^{k+1} = C_C^k - \frac{\Delta t}{dx_C} (F_n^k - F_s^k) \quad (\text{II.99})$$

avec $dx_C = x_n - x_s$, F le flux convectif dont la forme dépend du choix du schéma. Les indices n et s indiquent la localisation du flux sur les faces nord et sud respectivement du volume de contrôle Ω . Les indices C , N , S et SS indiquent la localisation de la fonction couleur C .

- Schéma du 1^{er} ordre décentré amont (*Upwind*)

Ce schéma est décrit dans une étude réalisée par Wang [63] dans laquelle l'auteur compare plusieurs schémas numériques appliqués à une équation de transport 1D. L'équation de convection (II.96) discrétisée avec un schéma du 1^{er} ordre décentré amont s'écrit :

$$C_C^{k+1} = C_C^k - u \frac{\Delta t}{dx_C} (C_C^k - C_S^k) \quad (\text{II.100})$$

d'où

$$C_C^{k+1} = C_C^k - \frac{\Delta t}{dx_C} (F_n^k - F_s^k) \quad (\text{II.101})$$

avec $\begin{cases} F_n^k = u C_C^k \\ F_s^k = u C_S^k \end{cases}$

- Schéma du 2nd ordre QUICK

Ce schéma est également décrit dans [63]. L'équation de convection (II.96) discrétisée avec un schéma du 2nd ordre QUICK s'écrit :

$$C_C^{k+1} = C_C^k - \frac{\Delta t}{dx_C} (F_n^k - F_s^k)$$

$$\text{avec } \begin{cases} F_n^k = u \left(\frac{3}{8} C_N^k + \frac{3}{4} C_C^k - \frac{1}{8} C_S^k \right) \\ F_s^k = u \left(\frac{3}{8} C_C^k + \frac{3}{4} C_S^k - \frac{1}{8} C_{SS}^k \right) \end{cases} \quad (\text{II.102})$$

- Schéma TVD Lax-Wendroff Superbee

La recherche de schémas ayant à la fois les propriétés de robustesse des schémas monotones près des discontinuités et de précision des schémas d'ordre deux dans les zones de régularité, a conduit à introduire une nouvelle notion : la variation totale (VT) que l'on définit de la façon suivante :

$$VT(C^k) = \sum_i |C_i^k - C_{i-1}^k| \quad (\text{II.103})$$

De tels schémas numériques font décroître la variation totale de la solution. On les appelle schéma TVD pour *Total Variation Diminishing*. On dit qu'un schéma est TVD si, pour tout $k \geq 0$, on a :

$$VT(C^{k+1}) \leq VT(C^k) \quad (\text{II.104})$$

Nous utilisons un schéma TVD proposé by Yee [70] à limiteur de pente *quasi d'ordre deux*, c'est à dire d'ordre deux sauf au voisinage des extréma de la solution. En effet, le schéma TVD est construit à partir du schéma du 2nd ordre de Lax-Wendroff en utilisant le limiteur de pente introduit par Roe et appelé Superbee. L'équation de convection (II.96) discrétisée avec un schéma TVD Lax-Wendroff Superbee s'écrit :

$$C_C^{k+1} = C_C^k - \frac{\Delta t}{dx_C} (F_n^k - F_s^k)$$

$$\text{avec } \begin{cases} F_n^k = u \left(C_C^k + 0.5 \left(1 - u \frac{\Delta t}{dx_C} \right) \phi_n (C_N^k - C_C^k) \right) \\ F_s^k = u \left(C_S^k + 0.5 \left(1 - u \frac{\Delta t}{dx_C} \right) \phi_s (C_C^k - C_S^k) \right) \end{cases} \quad (\text{II.105})$$

où ϕ est le limiteur de pente Superbee. Par exemple, sur la face n , ϕ est défini par :

$$\phi_n = \phi(\xi_n^k) = \max \left(0, \min(1, 2\xi_n^k), \min(2, \xi_n^k) \right) \text{ avec } \xi_n^k = \frac{C_C^k - C_S^k}{C_N^k - C_C^k} \quad (\text{II.106})$$

Nous comparons les trois schémas numériques en visualisant l'évolution au cours du temps d'un créneau d'amplitude 1 et de largeur 0.2 sur la FIG. II-4.

On choisit une vitesse de convection $u = 0.01$ et un pas de discrétisation en espace $\Delta x = 5 \cdot 10^{-2}$. Comme les trois schémas sont discrétisés de façon explicite en temps, une condition de stabilité de type CFL doit être respectée. Ce critère CFL est défini par :

$$\text{CFL} = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (\text{II.107})$$

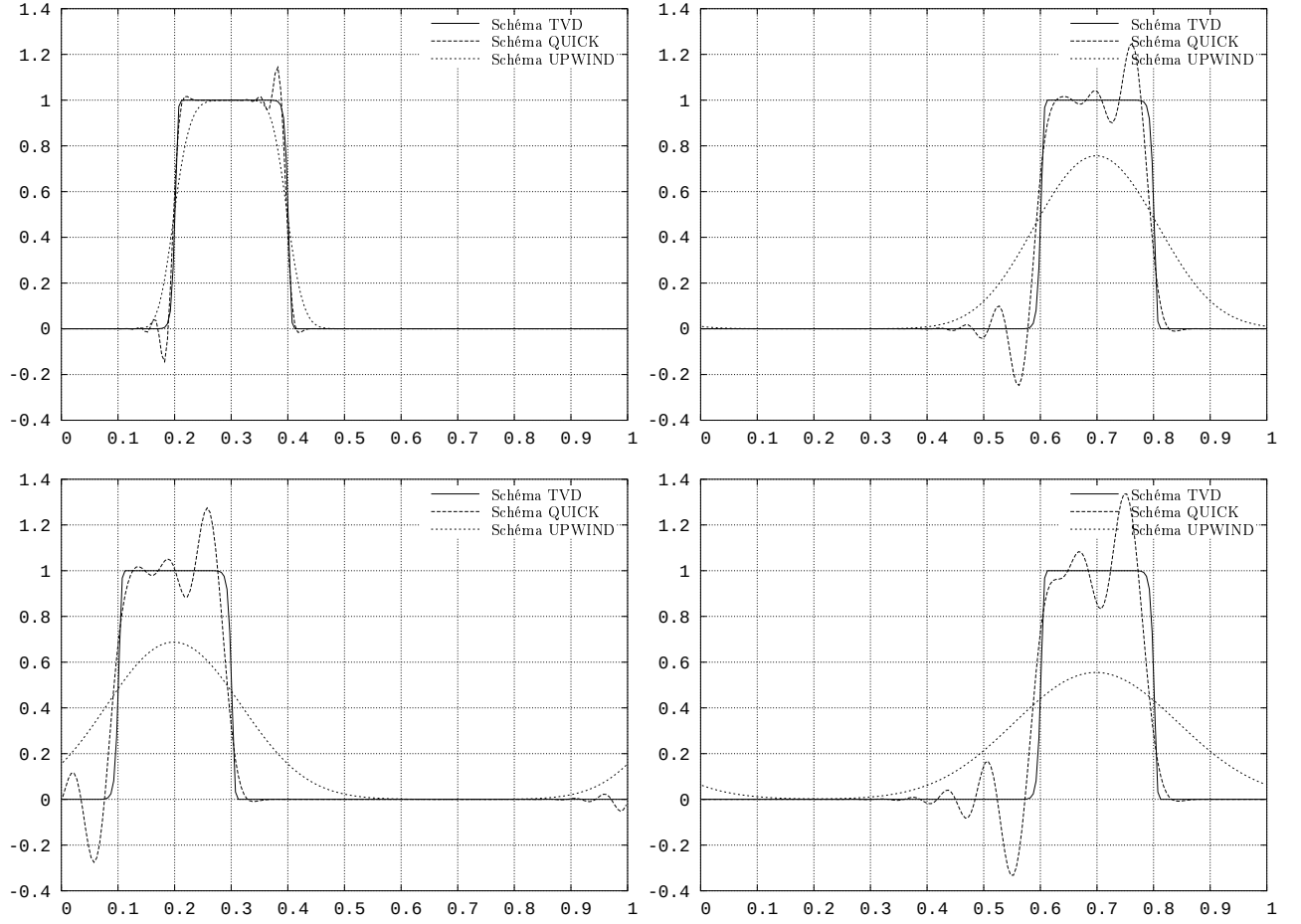


FIG. II-4 Convection d'un crêneau au temps 1000, 15000, 20000 et 35000

Ainsi, le pas de temps Δt est choisi égal à 0.01 pour respecter la condition $CFL < 0.5$.

Le schéma décentré amont du 1^{er} ordre est très diffusif puisque les angles du crêneau s'arrondissent, sa base s'élargit et son amplitude diminue. La forme initiale du crêneau n'est plus identifiable. Ce schéma est donc robuste mais il manque de précision. Le schéma Quick du 2nd ordre conserve les dimensions du crêneau mais des oscillations apparaissent aux ruptures de pentes, c'est à dire aux endroits de forts gradients de C . Ce schéma est donc plus précis mais il manque de stabilité. Enfin, le crêneau convecté par le schéma TVD préserve sa forme et ses dimensions sans présenter d'oscillations. Le schéma TVD permet de concilier les qualités de robustesse du schéma du 1^{er} ordre et la précision du schéma du 2nd ordre.

Résolution d'une équation de convection 2D

Nous adaptons ce schéma TVD pour discrétiser l'équation de transport (II.38). On intègre cette équation sur le volume de contrôle Ω_C centré sur la fonction couleur C (FIG. II-5) :

$$\int_{\Omega_C} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega_C + \int_{\Omega_C} \mathbf{U} \cdot \nabla C d\Omega_C = 0 \quad (\text{II.108})$$

On introduit le flux $\mathbf{F}$ défini par $\mathbf{F} = \mathbf{U}C$. Comme $\mathbf{U} \cdot \nabla C = \nabla \cdot \mathbf{F} - C \nabla \cdot \mathbf{U}$, on a :

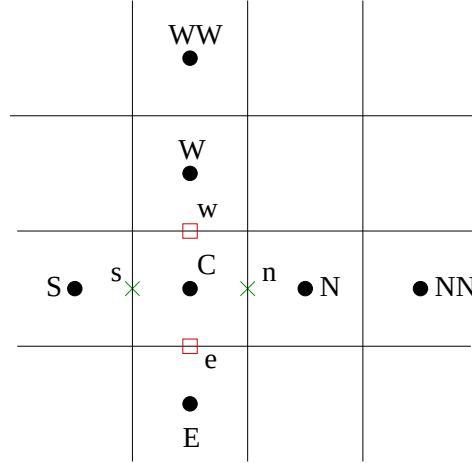


FIG. II-5 Volume de contrôle Ω_C centré sur la fonction couleur pour l'équation de transport (II.108)

$$\int_{\Omega_C} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega_C + \int_{\Omega_C} \nabla \cdot \mathbf{F} d\Omega_C = \int_{\Omega_C} C \nabla \cdot \mathbf{U} d\Omega_C \quad (\text{II.109})$$

Le théorème de Green nous permet d'écrire :

$$\int_{\Omega_C} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega_C + \int_{S_C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_C = \int_{\Omega_C} C \nabla \cdot \mathbf{U} d\Omega_C \quad (\text{II.110})$$

Le terme en temps est discrétisé par un schéma explicite du 1^{er} ordre et les flux sont calculés sur chaque face du volume de contrôle Ω_C :

$$\begin{aligned} \left(C_C^k - C_C^{k-1} \right) \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t} + \left(F_w^{k-1} r_w - F_e^{k-1} r_e \right) dz_C + \left(F_n^{k-1} - F_s^{k-1} \right) r_C dr_C \\ = C_C^{k-1} \left[\nabla \cdot \mathbf{U}^k \right]_C r_C dr_C dz_C \end{aligned} \quad (\text{II.111})$$

où $dr_C = r_w - r_e$, $dz_C = z_n - z_s$, F est le flux de convection discrétisé avec un schéma TVD Lax-Wendroff Superbee. Les indices w , e , n et s indiquent la localisation du flux F et des composantes de la vitesse u et w , alors que les indices W , WW , E , N , NN , S et C indiquent la position de la fonction couleur C . Le terme de droite $\left[\nabla \cdot \mathbf{U}^k \right]_C$ est calculé au centre du volume de contrôle :

$$\left[\nabla \cdot \mathbf{U}^k \right]_C = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_C + \frac{u_C^k}{r_C} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_C = \frac{u_w^k - u_e^k}{dr_C} + \frac{u_w^k + u_e^k}{2r_C} + \frac{w_n^k - w_s^k}{dz_C} \quad (\text{II.112})$$

Finalement, l'équation de transport s'écrit :

$$\begin{aligned} C_C^k = C_C^{k-1} \left[1 + \Delta t \left(\frac{u_w^k - u_e^k}{dr_C} + \frac{u_w^k + u_e^k}{2r_C} + \frac{w_n^k - w_s^k}{dz_C} \right) \right] \\ - \frac{\Delta t}{r_C dr_C dz_C} \left(\left(F_w^{k-1} r_w - F_e^{k-1} r_e \right) dz_C + \left(F_n^{k-1} - F_s^{k-1} \right) r_C dr_C \right) \end{aligned} \quad (\text{II.113})$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} F_w^{k-1} = \max(u_w^k, 0) \left(C_C^{k-1} + 0, 5 \left(1 - u_w^k \frac{\Delta t}{dr_C} \right) \phi_w \left(C_W^{k-1} - C_C^{k-1} \right) \right) \\ \quad + \min(u_w^k, 0) \left(C_W^{k-1} - 0, 5 \left(1 + u_w^k \frac{\Delta t}{dr_C} \right) \phi_{ww} \left(C_{WW}^{k-1} - C_W^{k-1} \right) \right) \\ F_e^{k-1} = \max(u_e^k, 0) \left(C_E^{k-1} + 0, 5 \left(1 - u_e^k \frac{\Delta t}{dr_C} \right) \phi_e \left(C_C^{k-1} - C_E^{k-1} \right) \right) \\ \quad + \min(u_e^k, 0) \left(C_C^{k-1} - 0, 5 \left(1 + u_e^k \frac{\Delta t}{dr_C} \right) \phi_w \left(C_W^{k-1} - C_C^{k-1} \right) \right) \\ F_n^{k-1} = \max(w_n^k, 0) \left(C_C^{k-1} + 0, 5 \left(1 - w_n^k \frac{\Delta t}{dz_C} \right) \phi_n \left(C_N^{k-1} - C_C^{k-1} \right) \right) \\ \quad + \min(w_n^k, 0) \left(C_N^{k-1} - 0, 5 \left(1 + w_n^k \frac{\Delta t}{dz_C} \right) \phi_{nn} \left(C_{NN}^{k-1} - C_N^{k-1} \right) \right) \\ F_s^{k-1} = \max(w_s^k, 0) \left(C_S^{k-1} + 0, 5 \left(1 - w_s^k \frac{\Delta t}{dz_C} \right) \phi_s \left(C_C^{k-1} - C_S^{k-1} \right) \right) \\ \quad + \min(w_s^k, 0) \left(C_C^{k-1} - 0, 5 \left(1 + w_s^k \frac{\Delta t}{dz_C} \right) \phi_n \left(C_N^{k-1} - C_C^{k-1} \right) \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.114})$$

où ϕ est le limiteur de pente Superbee. Par exemple, sur la face w , ϕ est défini par :

$$\phi_w = \phi(\xi_w^{k-1}) = \max \left(0, \min(1, 2\xi_w^{k-1}), \min(2, \xi_w^{k-1}) \right) \text{ avec } \xi_w^{k-1} = \frac{C_C^{k-1} - C_E^{k-1}}{C_W^{k-1} - C_C^{k-1}} \quad (\text{II.115})$$

5.2 Conservation de la masse

Par intégration sur le volume de contrôle Ω_p centré sur la pression (FIG. II-6), l'équation de conservation de la masse (II.85) s'écrit :

$$\int_{\Omega_p} \frac{\mathcal{X}_\theta}{\Delta t} p^k d\Omega_p + \int_{\Omega_p} \nabla \cdot \mathbf{U}^k d\Omega_p = \int_{\Omega_p} g(\mathbf{U}^{k-1}, p^{k-1}) d\Omega_p \quad (\text{II.116})$$

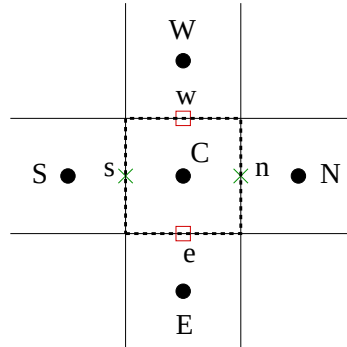


FIG. II-6 Volume de contrôle Ω_p centré sur la pression pour l'équation de conservation de la masse (II.116)

On remplace $g(\mathbf{U}^{k-1}, p^{k-1})$ et on pose $\mathbf{F}^{k-1} = p^{k-1} \mathbf{U}^{k-1}$. De plus, pour simplifier l'écriture,

on s'affranchit des exposants k :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} \frac{\mathcal{X}_\theta}{\Delta t} p d\Omega_p + \int_{\Omega_p} \nabla \cdot \mathbf{U} d\Omega_p \\ = \int_{\Omega_p} \frac{\mathcal{X}_\theta}{\Delta t} p^{k-1} d\Omega_p - \int_{\Omega_p} \mathcal{X}_\theta \nabla \cdot \mathbf{F}^{k-1} d\Omega_p + \int_{\Omega_p} \mathcal{X}_\theta p^{k-1} \nabla \cdot \mathbf{U}^{k-1} d\Omega_p \end{aligned} \quad (\text{II.117})$$

En utilisant le théorème de Green, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} \frac{\mathcal{X}_\theta}{\Delta t} p d\Omega_p + \int_{S_p} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS_p \\ = \int_{\Omega_p} \frac{\mathcal{X}_\theta}{\Delta t} p^{k-1} d\Omega_p - \int_{S_p} \mathcal{X}_\theta \mathbf{F}^{k-1} \cdot \mathbf{n} dS_p + \int_{\Omega_p} \mathcal{X}_\theta p^{k-1} \nabla \cdot \mathbf{U}^{k-1} d\Omega_p \end{aligned} \quad (\text{II.118})$$

où $\mathbf{n}$ est la normale sortante.

On calcule les flux sur chaque face du volume de contrôle Ω_p :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\theta p_C \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t} + (u_w r_w - u_e r_e) dz_C + (w_n - w_s) r_C dr_C \\ = \mathcal{X}_\theta \left[p_C^{k-1} \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t} - (F_w^{k-1} r_w - F_e^{k-1} r_e) dz_C - (F_n^{k-1} - F_s^{k-1}) r_C dr_C \right. \\ \left. + \left(\frac{u_w^{k-1} - u_e^{k-1}}{dr_C} + \frac{u_w^{k-1} + u_e^{k-1}}{2r_C} + \frac{w_n^{k-1} - w_s^{k-1}}{dz_C} \right) p_C^{k-1} r_C dr_C dz_C \right] \end{aligned} \quad (\text{II.119})$$

avec $dr_C = r_w - r_e$, $dz_C = z_n - z_s$ et F défini par (II.114). On note e , w , n et s les positions du flux F et des composantes u et w de la vitesse sur les faces du volume de contrôle et C , E , W , S et N les positions de la pression p .

Finalement l'équation de conservation de la masse discrétisée est donnée par :

$$b_C p_C + a_E u_E + a_W u_W + a_N w_N + a_S w_S = S_p \quad (\text{II.120})$$

$$\text{avec } \begin{cases} b_C &= -\mathcal{X}_\theta \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t} \\ a_E &= r_e dz_C \\ a_W &= -r_w dz_C \\ a_N &= -r_C dr_C \\ a_S &= r_C dr_C \\ S_p &= \mathcal{X}_\theta \left[(F_w^{k-1} r_w - F_e^{k-1} r_e) dz_C + (F_n^{k-1} - F_s^{k-1}) r_C dr_C \right. \\ &\quad \left. - p_C^{k-1} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{u_w^{k-1} - u_e^{k-1}}{dr_C} + \frac{u_w^{k-1} + u_e^{k-1}}{2r_C} + \frac{w_n^{k-1} - w_s^{k-1}}{dz_C} \right) r_C dr_C dz_C \right] \end{cases} \quad (\text{II.121})$$

5.3 Conservation de la quantité de mouvement

On intègre l'équation de conservation de la quantité de mouvement (II.85) :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\rho^k}{\Delta t} \mathbf{U}^k d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[\left(2\mu^{k-1} + \tilde{r} \right) \mathbf{D}(\mathbf{U}^k) - \frac{2}{3} \mu^{k-1} (\nabla \cdot \mathbf{U}^k) \mathbf{I} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \nabla p^k d\Omega \\
= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\mathbf{\Gamma}^k - \tilde{r} \mathbf{d}^k \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{U}^{k-1}, \rho^{k-1}) d\Omega
\end{aligned} \tag{II.122}$$

Pour simplifier l'écriture, on s'affranchit des exposants k et on introduit les deux tenseurs $\boldsymbol{\phi}$ et $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ définis par :

$$\boldsymbol{\phi} = (2\mu^{k-1} + \tilde{r}) \mathbf{D} - \frac{2}{3} \mu^{k-1} (\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \phi_{rr} & 0 & \phi_{rz} \\ 0 & \phi_{\theta\theta} & 0 \\ \phi_{rz} & 0 & \phi_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \phi_{rr} &= \left(\frac{4}{3} \mu^{k-1} + \tilde{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \mu^{k-1} \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \phi_{\theta\theta} &= \left(\frac{4}{3} \mu^{k-1} + \tilde{r} \right) \frac{u}{r} - \frac{2}{3} \mu^{k-1} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \phi_{zz} &= \left(\frac{4}{3} \mu^{k-1} + \tilde{r} \right) \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu^{k-1} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \\ \phi_{rz} &= \frac{2\mu^{k-1} + \tilde{r}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\lambda} - \tilde{r} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{rr} & 0 & \mathcal{T}_{rz} \\ 0 & \mathcal{T}_{\theta\theta} & 0 \\ \mathcal{T}_{rz} & 0 & \mathcal{T}_{zz} \end{pmatrix}$$

et les vecteurs correspondants :

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \phi_{rr} \\ 0 \\ \phi_{rz} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \phi_{rz} \\ 0 \\ \phi_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{rr} \\ 0 \\ \mathcal{T}_{rz} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\mathcal{T}}_{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{rz} \\ 0 \\ \mathcal{T}_{zz} \end{pmatrix}$$

En projetant l'équation de la quantité de mouvement (II.122) sur les axes $\mathbf{r}$ et $\mathbf{z}$, et en intégrant respectivement sur les volumes de contrôles Ω_u et Ω_w , nous écrivons :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_u} \frac{\rho}{\Delta t} u d\Omega_u + \int_{\Omega_u} \frac{\partial p}{\partial r} d\Omega_u - \int_{\Omega_u} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}_r - \frac{\phi_{\theta\theta}}{r} \right) d\Omega_u \\
&= \int_{\Omega_u} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_r - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right) d\Omega_u + \int_{\Omega_u} \frac{\rho}{\Delta t} u^{k-1} d\Omega_u - \int_{\Omega_u} \rho \mathbf{U}^{k-1} \cdot \nabla u^{k-1} d\Omega_u
\end{aligned} \tag{II.123a}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_w} \frac{\rho}{\Delta t} w d\Omega_w + \int_{\Omega_w} \frac{\partial p}{\partial z} d\Omega_w - \int_{\Omega_w} \nabla \cdot \boldsymbol{\phi}_z d\Omega_w \\
&= \int_{\Omega_w} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_z d\Omega_w + \int_{\Omega_w} \frac{\rho}{\Delta t} w^{k-1} d\Omega_w - \int_{\Omega_w} \rho \mathbf{U}^{k-1} \cdot \nabla w^{k-1} d\Omega_w
\end{aligned} \tag{II.123b}$$

On pose $\mathbf{F}_r^{k-1} = u^{k-1} \mathbf{U}^{k-1}$ et $\mathbf{F}_z^{k-1} = w^{k-1} \mathbf{U}^{k-1}$. A l'aide du théorème de Green, il vient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_u} \frac{\rho}{\Delta t} u d\Omega_u + \int_{\Omega_u} \frac{\partial p}{\partial r} d\Omega_u - \int_{S_u} \boldsymbol{\phi}_r \cdot \mathbf{n} dS_u + \int_{\Omega_u} \frac{\phi_{\theta\theta}}{r} d\Omega_u \\
&= \int_{S_u} \boldsymbol{\tau}_r \cdot \mathbf{n} dS_u - \int_{\Omega_u} \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} d\Omega_u + \int_{\Omega_u} \frac{\rho}{\Delta t} u^{k-1} d\Omega_u \\
&\quad - \int_{S_u} \rho \mathbf{F}_r^{k-1} \cdot \mathbf{n} d\Omega_u + \int_{\Omega_u} \rho u^{k-1} \nabla \cdot \mathbf{U}^{k-1} d\Omega_u
\end{aligned} \tag{II.124a}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_w} \frac{\rho}{\Delta t} w d\Omega_w + \int_{\Omega_w} \frac{\partial p}{\partial z} d\Omega_w - \int_{S_w} \boldsymbol{\phi}_z \cdot \mathbf{n} dS_w \\
&= \int_{S_w} \boldsymbol{\tau}_z \cdot \mathbf{n} dS_w + \int_{\Omega_w} \frac{\rho}{\Delta t} w^{k-1} d\Omega_w \\
&\quad - \int_{S_w} \rho \mathbf{F}_z^{k-1} \cdot \mathbf{n} d\Omega_w + \int_{\Omega_w} \rho w^{k-1} \nabla \cdot \mathbf{U}^{k-1} d\Omega_w
\end{aligned} \tag{II.124b}$$

On calcule maintenant les intégrales de surface sur le volume de contrôle Ω_u (FIG. II-7) de l'équation de la quantité de mouvement projetée sur l'axe $\mathbf{r}$ (II.124a). Les indices E , W , N , S et C désignent les positions de la composante radiale u de la vitesse, les indices NE , NW , SE et SW les positions de la composante axiale w de la vitesse et les indices e , w , n et s les positions des faces où les dérivées de la vitesse, les multiplicateurs de Lagrange et les flux $\mathbf{F}_r^{k-1}$ sont calculés.

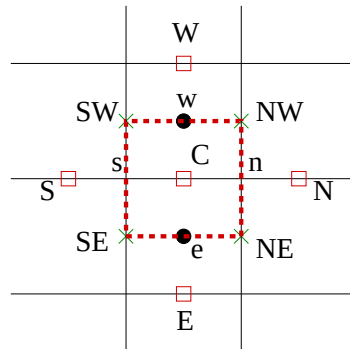


FIG. II-7 Volume de contrôle Ω_u centré sur la vitesse pour l'équation de la quantité de mouvement projetée sur l'axe $\mathbf{r}$ (II.124a)

L'équation (II.124a) devient :

$$\begin{aligned}
& \rho u_C \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t} + (p_w - p_e) r_C dz_C - (\phi_{rr_w} r_w - \phi_{rr_e} r_e) dz_C \\
& \quad - (\phi_{rz_n} - \phi_{rz_s}) r_C dr_C + \frac{\phi_{\theta\theta_C}}{r_C} r_C dr_C dz_C \\
& = (\mathcal{T}_{rr_w} r_w - \mathcal{T}_{rr_e} r_e) dz_C + (\mathcal{T}_{rz_n} - \mathcal{T}_{rz_s}) r_C dr_C - \frac{\mathcal{T}_{\theta\theta_C}}{r_C} r_C dr_C dz_C \\
& \quad + \rho u_C^{k-1} \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t} - \rho \left(F_{r_w}^{k-1} r_w - F_{r_e}^{k-1} r_e \right) dz_C \\
& \quad - \rho \left(F_{r_n}^{k-1} - F_{r_s}^{k-1} \right) r_C dr_C + \rho u_C^{k-1} \left[\nabla \cdot \mathbf{U}^{k-1} \right]_C r_C dr_C dz_C
\end{aligned} \tag{II.125}$$

où $dr_C = r_w - r_e$, $dz_C = z_n - z_s$ et $\left[\nabla \cdot \mathbf{U}^{k-1} \right]_C = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_C + \frac{u_C^{k-1}}{r_C} + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_C$.

En remplaçant les composantes de ϕ par leurs expressions, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \rho u_C \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t} + (p_w - p_e) r_C dz_C + \left(2\mu_C^{k-1} + \tilde{r} \right) \frac{u_C}{r_C} dr_C dz_C \\
& \quad - \left(\left[\left(\frac{4}{3} \mu_w^{k-1} + \tilde{r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_w - \frac{2}{3} \mu_w^{k-1} \left(\frac{u_w}{r_w} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_w \right) \right] r_w \right. \\
& \quad \left. - \left[\left(\frac{4}{3} \mu_e^{k-1} + \tilde{r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_e - \frac{2}{3} \mu_e^{k-1} \left(\frac{u_e}{r_e} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_e \right) \right] r_e \right) dz_C \\
& \quad - \left(\frac{(2\mu_n^{k-1} + \tilde{r})}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)_n - \frac{(2\mu_s^{k-1} + \tilde{r})}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)_s \right) r_C dr_C \\
& = (\mathcal{T}_{rr_w} r_w - \mathcal{T}_{rr_e} r_e) dz_C + (\mathcal{T}_{rz_n} - \mathcal{T}_{rz_s}) r_C dr_C - \frac{\mathcal{T}_{\theta\theta_C}}{r_C} r_C dr_C dz_C + \rho u_C^{k-1} \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t} \\
& \quad - \rho \left(F_{r_w}^{k-1} r_w - F_{r_e}^{k-1} r_e \right) dz_C - \rho \left(F_{r_n}^{k-1} - F_{r_s}^{k-1} \right) r_C dr_C \\
& \quad + \rho u_C^{k-1} \left[\nabla \cdot \mathbf{U}^{k-1} \right]_C r_C dr_C dz_C
\end{aligned} \tag{II.126}$$

Les dérivées de la vitesse sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_w &= \frac{u_W - u_C}{dr_w}; & u_w &= \frac{u_W + u_C}{2}; & \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_w &= \frac{w_{NW} - w_{SW}}{dz_C} \\
\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_e &= \frac{u_C - u_E}{dr_e}; & u_e &= \frac{u_C + u_E}{2}; & \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_e &= \frac{w_{NE} - w_{SE}}{dz_C} \\
\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_n &= \frac{u_N - u_C}{dz_n}; & & & \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_s &= \frac{u_C - u_S}{dz_s} \\
\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_n &= \frac{w_{NW} - w_{NE}}{dr_C}; & & & \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_s &= \frac{w_{SW} - w_{SE}}{dr_C} \\
\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_C &= \frac{u_W - u_E}{2dr_C}; & & & \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_C &= \frac{(w_{NW} + w_{NE}) - (w_{SW} + w_{SE})}{2dz_C}
\end{aligned}$$

où $dr_w = r_W - r_C$, $dr_e = r_C - r_E$, $dz_n = z_N - z_C$ et $dz_s = z_C - z_S$.

Finalement, l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon l'axe $\mathbf{r}$ s'écrit :

$$a_C u_C + a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + b_w p_w + b_e p_e + a_{NW} w_{NW} + a_{SW} w_{SW} + a_{NE} w_{NE} + a_{SE} w_{SE} = S_r \quad (\text{II.127})$$

avec :

$$\begin{aligned} b_e &= -r_C dz_C & ; & \quad b_w = r_C dz_C \\ a_N &= -\frac{(2\mu_n^{k-1} + \tilde{r})}{2} \frac{r_C dr_C}{dz_n} & ; & \quad a_S = -\frac{(2\mu_s^{k-1} + \tilde{r})}{2} \frac{r_C dr_C}{dz_s} \\ a_E &= -\left[\left(\frac{4}{3} \mu_e^{k-1} + \tilde{r} \right) \frac{r_e}{dr_e} + \frac{1}{3} \left(\mu_e^{k-1} - \mu_C^{k-1} \right) \right] dz_C \\ a_W &= -\left[\left(\frac{4}{3} \mu_w^{k-1} + \tilde{r} \right) \frac{r_w}{dr_w} - \frac{1}{3} \left(\mu_w^{k-1} - \mu_C^{k-1} \right) \right] dz_C \\ a_{NE} &= \frac{(2\mu_n^{k-1} + \tilde{r})}{2} r_C - \frac{1}{3} \left(2\mu_e^{k-1} r_e + \mu_C^{k-1} dr_C \right) \\ a_{NW} &= -\frac{(2\mu_n^{k-1} + \tilde{r})}{2} r_C + \frac{1}{3} \left(2\mu_w^{k-1} r_w - \mu_C^{k-1} dr_C \right) \\ a_{SE} &= -\frac{(2\mu_s^{k-1} + \tilde{r})}{2} r_C + \frac{1}{3} \left(2\mu_e^{k-1} r_e + \mu_C^{k-1} dr_C \right) \\ a_{SW} &= \frac{(2\mu_s^{k-1} + \tilde{r})}{2} r_C - \frac{1}{3} \left(2\mu_w^{k-1} r_w - \mu_C^{k-1} dr_C \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_C &= \left[\left(\frac{4}{3} \mu_w^{k-1} + \tilde{r} \right) \frac{r_w}{dr_w} + \frac{1}{3} \mu_w^{k-1} + \left(\frac{4}{3} \mu_e^{k-1} + \tilde{r} \right) \frac{r_e}{dr_e} - \frac{1}{3} \mu_e^{k-1} \right] dz_C \\ &\quad - a_N - a_S + \left(\frac{4}{3} \mu_C^{k-1} + \tilde{r} \right) \frac{dr_C dz_C}{r_C} + \rho \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_r &= (\mathcal{T}_{rr_w} r_w - \mathcal{T}_{rr_e} r_e) dz_C + (\mathcal{T}_{rz_n} - \mathcal{T}_{rz_s}) r_C dr_C - \frac{\mathcal{T}_{\theta\theta_C}}{r_C} r_C dr_C dz_C \\ &\quad - \rho \left(F_{r_w}^{k-1} r_w - F_{r_e}^{k-1} r_e \right) dz_C - \rho \left(F_{r_n}^{k-1} - F_{r_s}^{k-1} \right) r_C dr_C \\ &\quad + \rho u_C^{k-1} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{u_W^{k-1} - u_E^{k-1}}{2 dr_C} + \frac{u_C^{k-1}}{r_C} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(w_{NW}^{k-1} + w_{NE}^{k-1}) - (w_{SW}^{k-1} + w_{SE}^{k-1})}{2 dz_C} \right) r_C dr_C dz_C \end{aligned}$$

où $\mathbf{F}_r$ est le flux de convection discrétisé par le schéma de Lax-Wendroff TVD Superbee, défini par (II.114).

De la même façon, on intègre sur le volume de contrôle Ω_w (FIG. II-8) l'équation de la quantité de mouvement projetée sur l'axe z (II.124b). Les indices E, W, N, S et C désignent les positions de la composante axiale w de la vitesse, les indices NE, NW, SE et SW les positions de la composante radiale u de la vitesse et les indices e, w, n et s les positions des faces du volume de contrôle Ω_w . De plus $dr_C = r_w - r_e$, $dz_C = z_n - z_s$, $dr_w = r_W - r_C$, $dr_e = r_C - r_E$, $dz_n = z_N - z_C$ et $dz_s = z_C - z_S$.

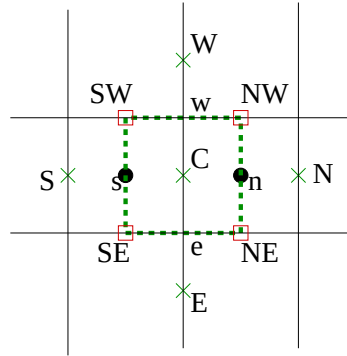


FIG. II-8 Volume de contrôle Ω_w centré sur la vitesse pour l'équation de la quantité de mouvement projetée sur l'axe z (II.124b)

Finalement, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe z (II.124b) sous forme discrétisée s'écrit :

$$\begin{aligned} a_C w_C + a_E w_E + a_W w_W + a_N w_N + a_S w_S + b_n p_n + b_s p_s \\ + a_{NW} u_{NW} + a_{SW} u_{SW} + a_{NE} u_{NE} + a_{SE} u_{SE} = S_z \end{aligned} \quad (\text{II.128})$$

avec :

$$\begin{aligned} b_n &= r_C dr_C & ; & \quad b_s = -r_C dr_C \\ a_E &= -\frac{(2\mu_e^{k-1} + \tilde{r})}{2} \frac{r_e dz_C}{dr_e} & ; & \quad a_W = -\frac{(2\mu_w^{k-1} + \tilde{r})}{2} \frac{r_w dz_C}{dr_w} \\ a_N &= -\left(\frac{4}{3}\mu_n^{k-1} + \tilde{r}\right) \frac{r_C dr_C}{dz_n} & ; & \quad a_S = -\left(\frac{4}{3}\mu_s^{k-1} + \tilde{r}\right) \frac{r_C dr_C}{dz_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{NE} &= \frac{(2\mu_e^{k-1} + \tilde{r})}{2} r_e - \frac{\mu_n^{k-1}}{3} (2r_C - dr_C) \\
a_{NW} &= -\frac{(2\mu_w^{k-1} + \tilde{r})}{2} r_w + \frac{\mu_n^{k-1}}{3} (2r_C + dr_C) \\
a_{SE} &= -\frac{(2\mu_e^{k-1} + \tilde{r})}{2} r_e + \frac{\mu_s^{k-1}}{3} (2r_C - dr_C) \\
a_{SW} &= \frac{(2\mu_w^{k-1} + \tilde{r})}{2} r_w - \frac{\mu_s^{k-1}}{3} (2r_C + dr_C) \\
a_C &= -a_E - a_W - a_N - a_S + \rho \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_z &= (\mathcal{T}_{rz_w} r_w - \mathcal{T}_{rz_e} r_e) dz_C + (\mathcal{T}_{zz_n} - \mathcal{T}_{zz_s}) r_C dr_C \\
&\quad - \rho \left(F_{z_w}^{k-1} r_w - F_{z_e}^{k-1} r_e \right) dz_C - \rho \left(F_{z_n}^{k-1} - F_{z_s}^{k-1} \right) r_C dr_C \\
&\quad + \rho w_C^{k-1} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{(u_{NW}^{k-1} + u_{SW}^{k-1}) - (u_{NE}^{k-1} + u_{SE}^{k-1})}{2dr_C} \right. \\
&\quad \left. + \frac{u_{NW}^{k-1} + u_{SW}^{k-1} + u_{NE}^{k-1} + u_{SE}^{k-1}}{4r_C} + \frac{w_N^{k-1} - w_S^{k-1}}{2dz_C} \right) r_C dr_C dz_C
\end{aligned}$$

où $\mathbf{F}_z$ est le flux de convection discrétisé par le schéma de Lax-Wendroff TVD Superbee, défini par (II.114).

5.4 Equation de conservation de l'énergie

On intègre l'équation de l'énergie (II.37) sur le volume de contrôle Ω_Θ (FIG. II-9) :

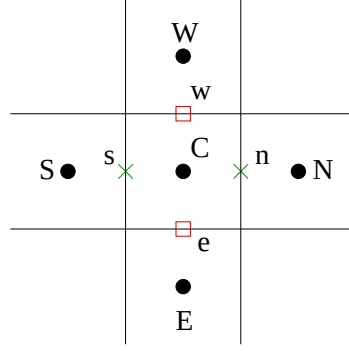
$$\int_{\Omega_\Theta} \rho C_p \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \Theta \right) d\Omega_\Theta = \int_{\Omega_\Theta} \lambda_f \nabla^2 \Theta d\Omega_\Theta \quad (\text{II.129})$$

En posant $\mathbf{F} = \mathbf{U} \Theta$ il vient :

$$\int_{\Omega_\Theta} \rho C_p \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} \right) d\Omega_\Theta = \int_{\Omega_\Theta} \lambda_f \nabla^2 \Theta d\Omega_\Theta + \int_{\Omega_\Theta} \rho C_p \Theta \nabla \cdot \mathbf{U} d\Omega_\Theta \quad (\text{II.130})$$

Le théorème de Green implique :

$$\int_{\Omega_\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial t} d\Omega_\Theta + \int_{S_{\Omega_\Theta}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_{\Omega_\Theta} = \frac{\lambda_f}{\rho C_p} \int_{S_\Theta} \nabla \Theta \cdot \mathbf{n} dS_\Theta + \int_{\Omega_\Theta} \Theta \nabla \cdot \mathbf{U} d\Omega_\Theta \quad (\text{II.131})$$

FIG. II-9 Volume de contrôle Ω_Θ centré sur la température pour l'équation de l'énergie

Sachant que le terme en temps est discrétisé par un schéma explicite du 1^{er} ordre, l'équation d'énergie est donnée par :

$$\begin{aligned}
 & \left(\Theta_C^k - \Theta_C^{k-1} \right) \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t} + \left(F_w^{k-1} r_w - F_e^{k-1} r_e \right) dz_C + \left(F_n^{k-1} - F_s^{k-1} \right) r_C dr_C \\
 & = \frac{\lambda_f}{\rho^k C_p} \left(\left(G_w^k r_w - G_e^k r_e \right) dz_C + \left(G_n^k - G_s^k \right) r_C dr_C \right) \\
 & \quad + \Theta_C^{k-1} \left[\nabla \cdot \mathbf{U}^k \right]_C r_C dr_C dz_C
 \end{aligned} \tag{II.132}$$

où $\left[\nabla \cdot \mathbf{U}^k \right]_C$ est défini par (II.112). F est le flux de convection discrétisé avec le schéma TVD Lax-Wendroff Superbee (II.114), et G est le flux de diffusion discrétisé par un schéma centré implicite défini par :

$$\begin{aligned}
 G_w^k &= \frac{\Theta_W^k - \Theta_C^k}{dr_w}; & G_n^k &= \frac{\Theta_N^k - \Theta_C^k}{dr_n} \\
 G_e^k &= \frac{\Theta_C^k - \Theta_E^k}{dr_e}; & G_s^k &= \frac{\Theta_C^k - \Theta_S^k}{dr_s}
 \end{aligned} \tag{II.133}$$

On a $dr_C = r_w - r_e$ et $dz_C = z_n - z_s$. Les indices w, e, n et s indiquent la localisation des flux F et G et des composantes de la vitesse u et w , alors que les indices W, WW, E, N, NN, S et C indiquent la position de la température Θ .

L'équation de l'énergie (II.129) s'écrit donc :

$$a_C \Theta_C + a_E \Theta_E + a_W \Theta_W + a_N \Theta_N + a_S \Theta_S = S \tag{II.134}$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} a_E = -\frac{\lambda_f}{\rho^k C_p} \frac{r_e \Delta t}{r_C dr_C dr_e} \quad ; \quad a_W = -\frac{\lambda_f}{\rho^k C_p} \frac{r_w \Delta t}{r_C dr_C dr_w} \\ a_N = -\frac{\lambda_f}{\rho^k C_p} \frac{\Delta t}{dz_C dz_n} \quad ; \quad a_S = -\frac{\lambda_f}{\rho^k C_p} \frac{\Delta t}{dz_C dz_s} \\ a_C = 1 - a_E - a_W - a_N - a_S \\ S = \Theta_C^{k-1} \left[1 + \Delta t \left(\frac{u_w^k - u_e^k}{dr_C} + \frac{u_w^k + u_e^k}{2r_C} + \frac{w_n^k - w_s^k}{dz_C} \right) \right] \\ \quad - \frac{\Delta t}{r_C dr_C} (F_w^{k-1} r_w - F_e^{k-1} r_e) - \frac{\Delta t}{dz_C} (F_n^{k-1} - F_s^{k-1}) \end{array} \right. \quad (\text{II.135})$$

5.5 Equation de Moore

On intègre l'équation de Moore (II.39) sur le volume de contrôle Ω_C (FIG. II-5) :

$$\int_{\Omega_C} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \lambda \right) d\Omega_C = \int_{\Omega_C} \left(a(1 - \lambda) - b\lambda \dot{\gamma}^m \right) d\Omega_C \quad (\text{II.136})$$

On pose $\mathbf{F} = \mathbf{U}\lambda$ et on écrit :

$$\int_{\Omega_C} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} \right) d\Omega_C = \int_{\Omega_C} \left(a(1 - \lambda) - b\lambda \dot{\gamma}^m \right) d\Omega_C + \int_{\Omega_C} \lambda \nabla \cdot \mathbf{U} d\Omega_C \quad (\text{II.137})$$

Le théorème de Green nous permet d'écrire :

$$\int_{\Omega_C} \frac{\partial \lambda}{\partial t} d\Omega_C + \int_{S_C} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS_C = \int_{\Omega_C} \left(a(1 - \lambda) - b\lambda \dot{\gamma}^m \right) d\Omega_C + \int_{\Omega_C} \lambda \nabla \cdot \mathbf{U} d\Omega_C \quad (\text{II.138})$$

où $\mathbf{n}$ est la normale sortante.

Le terme en temps est discrétisé par un schéma d'Euler du 1^{er} ordre. On calcule les flux sur chaque face du volume de contrôle Ω_C , et on a :

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_C^k - \lambda_C^{k-1} \right) \frac{r_C dr_C dz_C}{\Delta t} + \left(F_w^{k-1} r_w - F_e^{k-1} r_e \right) dz_C + \left(F_n^{k-1} - F_s^{k-1} \right) r_C dr_C \\ & = \left[a - \lambda_C^{k-1} (a + b \dot{\gamma}^m) \right] r_C dr_C dz_C + \lambda_C^{k-1} \left[\nabla \cdot \mathbf{U} \right]_C r_C dr_C dz_C \end{aligned} \quad (\text{II.139})$$

où F est le flux de convection défini par (II.114) et $\left[\nabla \cdot \mathbf{U} \right]_C$ est défini par (II.112). On a $dr_C = r_w - r_e$ et $dz_C = z_n - z_s$.

Finalement, l'équation de Moore sous forme discrétisée est donnée par :

$$\begin{aligned} \lambda_C^k &= \lambda_C^{k-1} \left[1 - \Delta t (a + b \dot{\gamma}^m) + \Delta t \left(\frac{u_w^k - u_e^k}{dr_C} + \frac{u_w^k + u_e^k}{2r_C} + \frac{w_n^k - w_s^k}{dz_C} \right) \right] \\ &+ a\Delta t - \frac{\Delta t}{r_C dr_C} (F_w^{k-1} r_w - F_e^{k-1} r_e) - \frac{\Delta t}{dz_C} (F_n^{k-1} - F_s^{k-1}) \end{aligned} \quad (\text{II.140})$$

5.6 Calcul du tenseur des taux de déformation $\mathbf{d}$

Nous expliquons comment le tenseur des taux de déformation $\mathbf{d}$ est calculé à l'étape (II.86) de l'algorithme de résolution présenté dans la *Section II-4.2*. D'après la FIG. II-2, les composantes d_{rr} et d_{zz} sont évaluées au centre des cellules, la composante $d_{\theta\theta}$ sur les faces des cellules et la composante extra-diagonale d_{rz} sur les nœuds du maillage. En fait, le calcul de $\mathbf{d}$ ne nécessite pas d'intégration Volumes Finis de l'équation (II.86), mais l'évaluation locale de chaque composante d_{ij} sur le maillage.

De plus, les composantes λ_{ij} et $D_{ij}(\mathbf{U})$ sont calculées sur les mêmes points du maillage que les composantes respectives d_{ij} . Ainsi, le terme $\lambda_{ij} + \tilde{r}D_{ij}(\mathbf{U})$ est simple à évaluer. Cependant, le calcul du terme $\|\boldsymbol{\lambda} + \tilde{r}\mathbf{D}(\mathbf{U})\|$ est plus délicat puisqu'il est nécessaire d'interpoler certaines composantes.

Cette interpolation linéaire est illustrée par un exemple : le calcul de la composante d_{rr} . Puisque la composante d_{rr} est localisée au centre de la cellule, les composantes de $\boldsymbol{\lambda}$ et $\mathbf{D}(\mathbf{U})$ doivent être interpolées au centre de la cellule. Ainsi, d_{rr} est calculé par :

$$d_{rr} = d_{rr,C} = \frac{1}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{\tau_y(\Theta_C)}{\|\boldsymbol{\lambda} + \tilde{r}\mathbf{D}(\mathbf{U})\|_{rr,C}} \right) (\lambda_{rr,C} + \tilde{r}D_{rr,C}) \quad (\text{II.141})$$

avec

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\lambda} + \tilde{r}\mathbf{D}(\mathbf{U})\|_{rr,C} = & \left[\frac{1}{2} (\lambda_{rr,C} + \tilde{r}D_{rr,C})^2 + \frac{1}{2} (\lambda_{\theta\theta,C} + \tilde{r}D_{\theta\theta,C})^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\lambda_{zz,C} + \tilde{r}D_{zz,C})^2 + (\lambda_{rz,C} + \tilde{r}D_{rz,C})^2 \right]^{0.5} \end{aligned} \quad (\text{II.142})$$

Grâce à la FIG. II-10, les interpolations linéaires au centre de la cellule des composantes $\lambda_{\theta\theta,C}$ et $\lambda_{rz,C}$ du tenseur des multiplicateurs de Lagrange sont données par :

$$\lambda_{\theta\theta,C} = \frac{1}{2} (\lambda_{\theta\theta,w} + \lambda_{\theta\theta,e}) \quad (\text{II.143})$$

$$\lambda_{rz,C} = \frac{1}{4} (\lambda_{rz,sw} + \lambda_{rz,nw} + \lambda_{rz,se} + \lambda_{rz,ne}) \quad (\text{II.144})$$

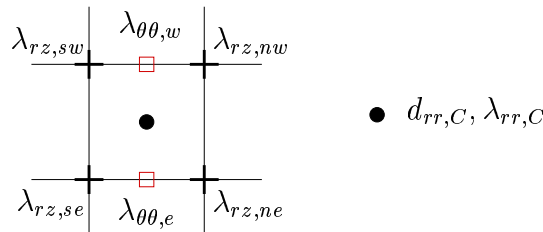


FIG. II-10 Localisation des composantes $\lambda_{\theta\theta,C}$ et $\lambda_{rz,C}$ du tenseur des multiplicateurs de Lagrange pour le calcul de la composante d_{rr} du tenseur des vitesses de déformation

Les composantes du tenseur des vitesses de déformation $\mathbf{D}(\mathbf{U})$ sont interpolées de la même façon que les composantes du tenseur des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$. Le calcul des autres

composantes (d_{zz} , $d_{\theta\theta}$ et d_{rz}) du tenseur des taux de déformation $\mathbf{d}$ est basé sur la même règle d'interpolation linéaire.

6 Résolution des systèmes linéaires

6.1 Le problème de Stokes

Le problème de Stokes (II.85) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \quad (\text{II.145})$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice carrée $N \times N$ symétrique définie positive, $\mathbf{B}$ une matrice $N \times M$, $\mathbf{C}$ une matrice diagonale $M \times M$, $(\mathbf{U}, \mathbf{f}) \in \mathbb{R}^N$ et $(\mathbf{p}, \mathbf{g}) \in \mathbb{R}^M$.

On introduit les grandeurs caractéristiques suivantes :

- une longueur caractéristique : $\bar{L}$
- un temps caractéristique : $\mathcal{T}$
- une vitesse caractéristique : $\bar{U}$
- une viscosité caractéristique : $\bar{\mu} = \mu + \tilde{\tau} + \frac{\rho_0}{\mathcal{T}} \bar{L}^2$

On écrit alors le système matriciel adimensionné :

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{A}}{\bar{\mu}\bar{L}} & \frac{\mathbf{B}}{\bar{L}^2} \\ \frac{\mathbf{B}^T}{\bar{L}^2} & \frac{\mathbf{C}}{\bar{L}^3/\bar{\mu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{U}}{\bar{U}} \\ \frac{\mathbf{p}}{\bar{\mu}\bar{U}/\bar{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{f}}{\bar{\mu}\bar{U}\bar{L}} \\ \frac{\mathbf{g}}{\bar{U}\bar{L}^2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.146})$$

Finalement, en introduisant la notation adimensionnée $\bar{\mathbf{X}}$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ \bar{\mathbf{g}} \end{pmatrix} \quad (\text{II.147})$$

Le système matriciel (II.147) est résolu par une méthode itérative. L'algorithme d'Uzawa/gradient conjugué proposé par Fortin et al. [21] ou Glowinski et al. [23] pour résoudre un problème de Stokes incompressible, est adapté à la résolution d'un problème de Stokes compressible et s'écrit :

- **Initialisation** : $i = 0$
 - Calcul de $\mathbf{r}^{(0)} = \Lambda \bar{\mathbf{p}}^{(0)} - \mathbf{b}$
où $\Lambda = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{C}}$ et $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{g}}$
 - ★ Résolution de $\bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{U}}^{(0)} = \bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{p}}^{(0)}$ (II.148)
 - ★ Calcul de $\mathbf{r}^{(0)} = \bar{\mathbf{g}} - \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{p}}^{(0)} - \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{U}}^{(0)}$
 - Calcul de la direction de descente $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$
- **Processus itératif** : $i \geq 1$

- Calcul de $\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{w}^{(i-1)} = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{w}^{(i-1)} - \bar{\mathbf{C}} \mathbf{w}^{(i-1)}$
- ★ Résolution de

$$\bar{\mathbf{A}} \mathbf{t}^{(i)} = \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{w}}^{(i-1)} \quad (\text{II.149})$$
- ★ Calcul de $\mathbf{q}^{(i)} = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{t}^{(i)} - \bar{\mathbf{C}} \mathbf{w}^{(i-1)}$
- Calcul de $\alpha = \frac{|\mathbf{r}^{(i-1)}|^2}{\mathbf{w}^{(i-1)} \cdot \mathbf{q}^{(i)}}$
- Calcul de $\bar{\mathbf{p}}^{(i)}$, $\mathbf{r}^{(i)}$ et $\bar{\mathbf{U}}^{(i)}$
 - ★ $\bar{\mathbf{p}}^{(i)} = \bar{\mathbf{p}}^{(i-1)} - \alpha \mathbf{w}^{(i-1)}$
 - ★ $\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i-1)} - \alpha \mathbf{q}^{(i-1)}$
 - ★ $\bar{\mathbf{U}}^{(i)} = \bar{\mathbf{U}}^{(i-1)} + \alpha \mathbf{t}^{(i)}$
- Calcul de $\beta = \frac{|\mathbf{r}^{(i)}|^2}{|\mathbf{r}^{(i-1)}|^2}$
- Calcul de la direction de descente $\mathbf{w}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i)} + \beta \mathbf{w}^{(i-1)}$
- Convergence si $|\mathbf{r}^{(i)}| \leq \epsilon$

où ϵ est le critère de convergence. Désormais, on nomme cet algorithme **MSA** (*Modified Stokes Algorithm*).

La principale différence entre un problème de Stokes incompressible standard et le problème de Stokes compressible résolu ici, concerne la matrice $\bar{\mathbf{C}}$. Cependant, cet algorithme **MSA** permet de résoudre aussi bien un problème compressible qu'un problème incompressible. En effet, dans le cas incompressible où $\bar{\mathbf{C}} = 0$, l'algorithme **MSA** est toujours valide.

Cependant, selon Glowinski et Le Tallec [23], la résolution du système matriciel (II.147) pour le cas incompressible ($\bar{\mathbf{C}} = 0$) peut être améliorée. C'est pourquoi, lors des calculs de simulations d'un écoulement incompressible, le système (II.147) est remplacé par le système (II.150) :

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}} + \tilde{r}' \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}} + \tilde{r}' \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{g}} \\ \bar{\mathbf{g}} \end{pmatrix} \quad (\text{II.150})$$

où $\tilde{r}'$ est un scalaire positif. Cette approche, présentée ici au niveau matriciel, est basée sur la même technique de Lagrangien augmenté utilisée dans la *Section II-4* (On montre facilement que les systèmes (II.147) et (II.150) ont la même solution). Le système (II.150) est ensuite résolu avec l'algorithme **MSA** (avec $\bar{\mathbf{C}} = 0$).

En théorie, plus $\tilde{r}'$ est grand, plus l'algorithme **MSA** converge rapidement. Par conséquent, le paramètre de Lagrange $\tilde{r}'$ peut être choisi aussi grand que la précision machine le permet. Cependant, selon Glowinski [22] et Wachs [58], la convergence de l'algorithme **MSA** dépend également du conditionnement de la matrice $\bar{\mathbf{A}} + \tilde{r}' \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T$. En effet, le système matriciel symétrique

$$\left(\bar{\mathbf{A}} + \tilde{r}' \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T \right) \mathbf{U} = \mathbf{f} + \tilde{r}' \bar{\mathbf{B}} \mathbf{g} \quad (\text{II.151})$$

doit être résolu à chaque itération i de l'algorithme **MSA** (Résolution de (II.148) et (II.149) dans l'algorithme **MSA**). Or, nous résolvons ce système matriciel symétrique avec une méthode itérative (algorithme de gradient conjugué préconditionné SSOR) dont les qualités de convergence dépendent du conditionnement de la matrice $\bar{\mathbf{A}} + \tilde{r}' \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T$. Ainsi, puisque le conditionnement de la matrice $\bar{\mathbf{A}} + \tilde{r}' \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T$ augmente avec $\tilde{r}'$, plus $\tilde{r}'$ est grand, plus la résolution du système (II.151) est coûteuse. Finalement, la vitesse de convergence de l'algorithme **MUA**

repose sur un compromis entre le nombre d'itérations (faible pour $\tilde{r}'$ grand) et le coût par itération (faible pour $\tilde{r}'$ petit). Les tests effectués par Wachs [58] montrent que la valeur optimale de $\tilde{r}'$ se situe sur l'intervalle $[10^2, 10^4]$.

6.2 Equations d'énergie, de transport et de Moore

La discrétisation des équations d'énergie, de transport et de Moore permet d'écrire un système linéaire simple à résoudre pour chacune d'entre elles :

$$\mathbf{D}\mathbf{X} = \mathbf{h} \quad (\text{II.152})$$

où $\mathbf{D}$ est une matrice carrée $J \times J$ et $(\mathbf{X}, \mathbf{h}) \in \mathbb{R}^J$. $\mathbf{X}$ représente la température Θ , la fonction couleur C ou le paramètre de structure λ . En fait, dans le cas de l'équation d'énergie, la matrice $\mathbf{D}$ est une matrice tridiagonale symétrique. Le système (II.152) est donc résolu par un algorithme de gradient conjugué préconditionné SSOR. Dans le cas des équations de transport et de Moore, la matrice $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale. Ainsi, il n'y a pas réellement de système à résoudre. La difficulté réside plutôt dans la discrétisation du second membre $\mathbf{h}$ et plus précisément dans la partie convective. Comme nous l'avons détaillé précédemment, l'utilisation d'un schéma de type TVD permet d'assurer l'obtention d'une solution stable et précise.

De plus, les termes de convection des équations de la quantité de mouvement, d'énergie, de transport et de Moore sont traités de façon explicite en temps. Ainsi, il est nécessaire de respecter une condition CFL pour assurer la stabilité du schéma explicite. Cette condition CFL est définie par :

$$\text{CFL} = \max_{\Omega_{\mathbf{x}_j} \in \Omega} \left(\frac{|u_j| + |w_j|}{\min(\Delta r_j, \Delta z_j)} \right) \cdot \Delta t < 0,5 \quad (\text{II.153})$$

où Δr et Δz sont respectivement les pas d'espaces dans les directions $\mathbf{r}$ et $\mathbf{z}$. Selon les paramètres de simulation et les dimensions caractéristiques de la conduite, les pas de temps varient entre 10^{-1} s et 10^{-4} s.

7 Tests numériques

Les calculs sont réalisés avec l'algorithme général de résolution (*Section II-4.2*). Les résultats sont interprétés avec les grandeurs physiques adimensionnées : les coordonnées adimensionnées r/R et z/L , la composante axiale de vitesse adimensionnée w/w_{max} , la pression adimensionnée p/p_{max} , la température adimensionnée $\frac{\Theta - \Theta_{Ext}}{\Delta\Theta}$ (avec $\Delta\Theta = \Theta_{Inlet} - \Theta_{Ext}$) et les nombres adimensionnels Bi et Re .

7.1 Influence du maillage

Pour l'étude de l'influence du maillage, les dimensions du domaine sont choisies telles que le rapport des longueurs est $\frac{L}{R} = 200$. Le maillage cartésien est structuré et régulier dans chaque direction. Les nombres de mailles dans les directions $\mathbf{r}$ et $\mathbf{z}$ sont respectivement notés N_r et N_z . Le rapport de maille entre les deux directions $\mathbf{r}$ et $\mathbf{z}$ est défini par :

$$R_c = \frac{\Delta r}{\Delta z} = \frac{L/N_z}{R/N_r} \quad (\text{II.154})$$

Plusieurs maillages sont étudiés et le TAB. II.1 rassemble leurs caractéristiques.

Maillages	$N_r \times N_z$	Rapport de maille R_c	$\epsilon_r(\%)$	$\epsilon_z(\%)$
Mesh1	10×50	40	0.694	
Mesh2	20×30	133	0.174	0.434
Mesh3	20×50	80	0.174	0.326
Mesh4	20×100	40	0.174	0.164
Mesh5	20×200	20	0.174	0.055
Mesh6	20×300	13	0.174	/
Mesh7	30×50	120	0.077	
Mesh8	40×50	160	0.043	

TAB. II.1 Caractéristiques et influence du maillage

L'influence du maillage dans la direction $\mathbf{r}$ est évaluée grâce aux profils de vitesse axiale de l'écoulement incompressible stationnaire isotherme d'un fluide de Bingham. La solution analytique d'un tel écoulement se calcule facilement. En effet, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II.155})$$

La loi de comportement s'écrit :

$$\begin{cases} \tau = \tau_y + \mu \dot{\gamma} & \text{si } \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_y \end{cases} \quad (\text{II.156})$$

Si $Bi \geq 1$, l'écoulement de la conduite est bloqué et si $Bi \in [0, 1[$, la vitesse axiale s'écrit :

$$w(r) = \begin{cases} w_0 = \frac{hR^2}{4\mu}(1 - Bi)^2 & \text{si } r \in [0, R_0] \\ \frac{hR^2}{4\mu} \left((1 - 2Bi) + 2Bi \frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) & \text{si } r \in [R_0, R] \end{cases} \quad (\text{II.157})$$

où R_0 correspond au rayon de la zone bouchon et $h = -\frac{\partial p}{\partial z}$.

Le débit volumique Q est donné par :

$$Q = \frac{\pi h R^4}{8\mu} \left(1 - \frac{4}{3}Bi + \frac{1}{3}Bi^4 \right) \quad (\text{II.158})$$

L'erreur ϵ_r entre la solution analytique w' et la solution calculée w est définie par :

$$\epsilon_r = \frac{\max_{i=0, N_r} |w_i - w'_i|}{\max_i w'_i} \quad (\text{II.159})$$

L'erreur ϵ_r a été calculée pour les huit maillages. Puisque l'écoulement est stationnaire, la vitesse axiale w est invariante selon l'axe z et l'erreur ϵ_r ne dépend pas du nombre de mailles N_z . Nous nous intéressons aux maillages Mesh1, Mesh3, Mesh7 et Mesh8 pour évaluer l'influence du nombre de mailles N_r dans la direction r . Sur la FIG. II-11, nous comparons le profil de vitesse axiale de l'écoulement stationnaire d'un fluide de Bingham avec $Bi = 0.5$ pour ces quatre maillages avec la solution analytique. Dès le maillage Mesh2, la solution calculée est qualitativement très proche de la solution analytique.

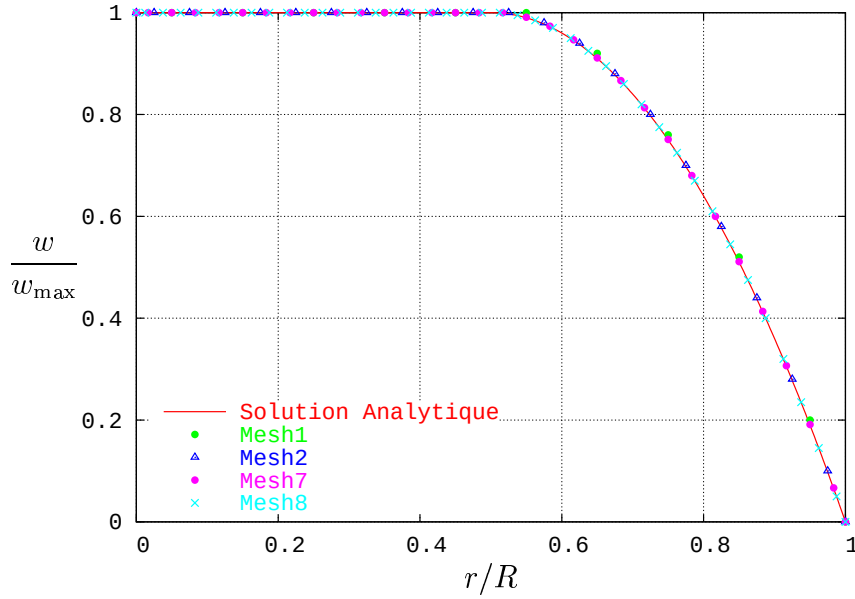


FIG. II-11 Comparaison du profil de vitesse axiale de l'écoulement stationnaire d'un fluide de Bingham avec $Bi = 0.5$ pour les quatre maillages Mesh1, Mesh3, Mesh7 et Mesh8 avec la solution analytique

Une analyse quantitative plus fine est menée dans le TAB. II.1. Nous observons que l'erreur diminue avec la taille des mailles, ce qui confirme la bonne convergence de la solution avec le raffinement du maillage. Finalement, nous choisissons $N_r = 20$ qui est le meilleur compromis entre précision et temps de calcul.

L'influence du maillage dans la direction z est évaluée pour l'écoulement compressible instationnaire isotherme d'un fluide viscoplastique. En tenant compte des remarques précédentes sur l'influence du maillage dans la direction r , les calculs sont effectués pour la famille de maillage Mesh2-Mesh6 ($N_r = 20$) où N_z varie de 30 à 300. L'erreur relative ϵ_z entre deux champs de pression calculés à un instant donné pour deux maillages consécutifs, est défini par :

$$\epsilon_z = \frac{|P_{moyen}(N_z) - P_{moyen}(N'_z)|}{|P_{moyen}(N'_z)|} \quad (II.160)$$

où $P_{moyen} = \frac{1}{L} \int_L P dz$ désigne la pression moyenne dans le conduit et N'_z est le nombre de mailles dans la direction z (Par exemple, pour le maillage Mesh2, on choisit $N_z = 30$ et $N'_z = 50 \dots$). La FIG. II-12 montre que plus le maillage est fin dans la direction z , plus l'erreur relative ϵ_z est faible. Ainsi, cette tendance confirme une nouvelle fois les bonnes propriétés de convergence de la solution avec le raffinement du maillage. Cependant, la précision de la solution ne s'améliore pas de façon significative pour $N_z > 100$. Finalement, nous choisissons

le maillage Mesh4 ($N_r = 20$ et $N_z=100$), comme meilleur compromis entre précision et temps de calcul.

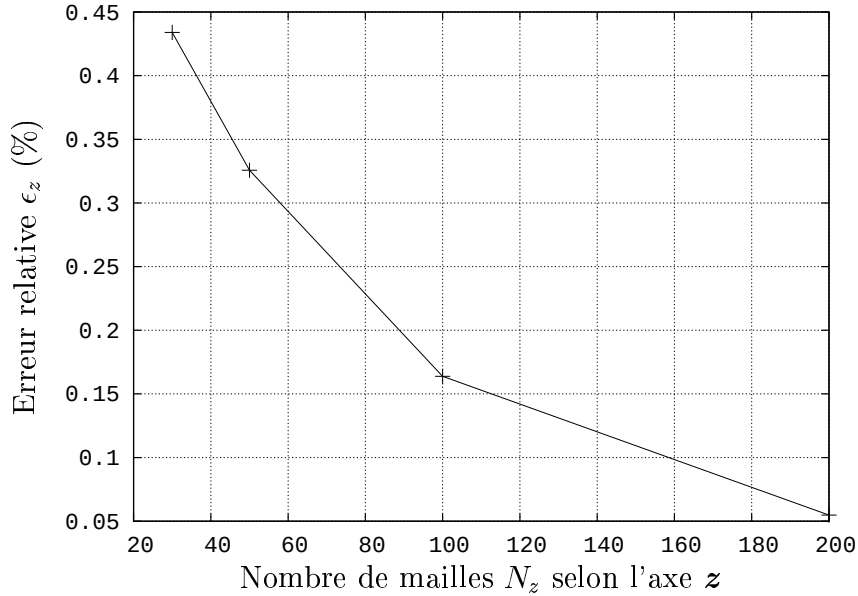


FIG. II-12 Influence du nombre de mailles N_z dans la direction z sur l'erreur relative ϵ_z

7.2 Propriétés de convergence

Des tests numériques ont été réalisés pour évaluer les critères de convergence ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 . L'algorithme **MUA** (*Section II-4.2*) converge à chaque pas de temps, en respectant les deux critères ϵ_1 et ϵ_2 . Tous les résultats présentés dans cette section sont obtenus au premier pas de temps de l'algorithme général de résolution (*Section II-4.2*). Nous avons effectué des calculs pour les trois couples suivants : $(\epsilon_1 = 10^{-4}, \epsilon_2 = 10^{-4})$, $(\epsilon_1 = 10^{-5}, \epsilon_2 = 10^{-5})$ et $(\epsilon_1 = 10^{-6}, \epsilon_2 = 10^{-6})$. Nous constatons que les solutions obtenues pour les trois couples sont très proches et présentent une bonne précision même pour les valeurs $(\epsilon_1 = 10^{-4}, \epsilon_2 = 10^{-4})$. De plus, la capacité de l'algorithme **MUA** à converger vers des valeurs faibles $(\epsilon_1 = 10^{-6}, \epsilon_2 = 10^{-6})$ souligne sa robustesse. Néanmoins, la vitesse de convergence diminue considérablement entre $(\epsilon_1 = 10^{-5}, \epsilon_2 = 10^{-5})$ et $(\epsilon_1 = 10^{-6}, \epsilon_2 = 10^{-6})$, comme le montre la FIG. II-13. C'est pourquoi, nous choisissons de travailler avec le couple de valeurs $(\epsilon_1 = 10^{-5}, \epsilon_2 = 10^{-5})$.

La solution stationnaire est obtenue lorsque l'évolution de la solution au cours d'un pas de temps est inférieure à 10^{-5} ; on choisit donc $\epsilon_3 = 10^{-5}$. En fait, des calculs ont été réalisés pour des valeurs de ϵ_3 comprises entre 10^{-4} et 10^{-6} et ont permis de conclure que la solution n'évolue plus dès $\epsilon_3 = 10^{-4}$. Enfin, la précision des solutions obtenues ainsi que les propriétés très satisfaisantes de convergence de l'algorithme **MUA** prouvent que la méthode d'interpolation utilisée dans la *Section II-5.6* pour calculer les composantes du tenseur des taux de déformation $\mathbf{d}$ est bien adaptée à la discrétisation globale Volumes Finis.

L'extension de l'algorithme d'Uzawa standard [21, 23] à la résolution d'un écoulement non-isotherme (viscosité et contrainte seuil variant dans l'espace) n'engendre aucun problème de convergence particulier. Cependant, la vitesse de convergence de l'algorithme **MUA** décroît lorsque les variations en espace de la viscosité et de la contrainte seuil augmentent. Par exemple, pour les cas non-isothermes, le nombre d'itérations par pas de temps de l'algorithme **MUA** est plus grand pour $\Delta\Theta = 20K$ que pour $\Delta\Theta = 1K$, comme le montre la FIG. II-14.

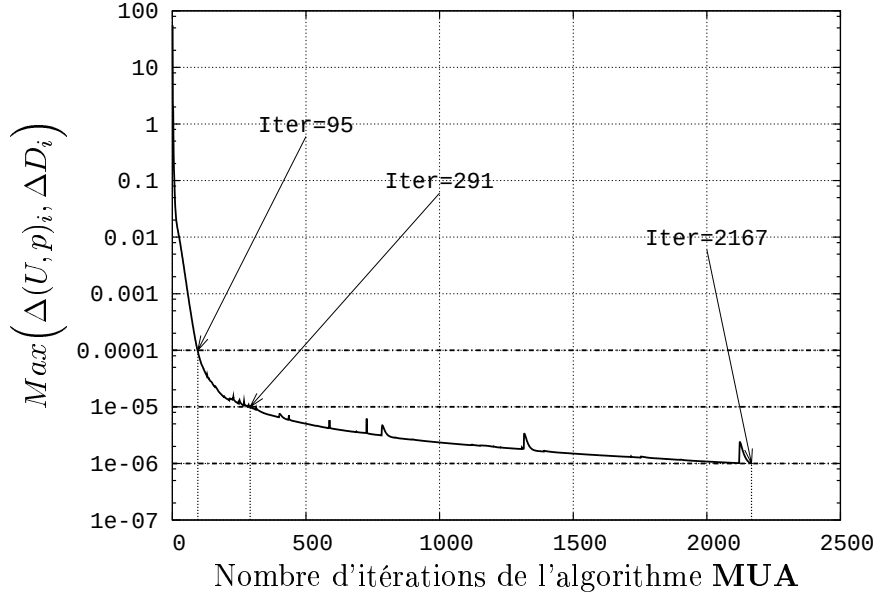


FIG. II-13 Influence des critères de convergence ϵ_1 et ϵ_2 sur la vitesse de convergence de l'algorithme **MUA** ($\Delta\Theta = 5K$)

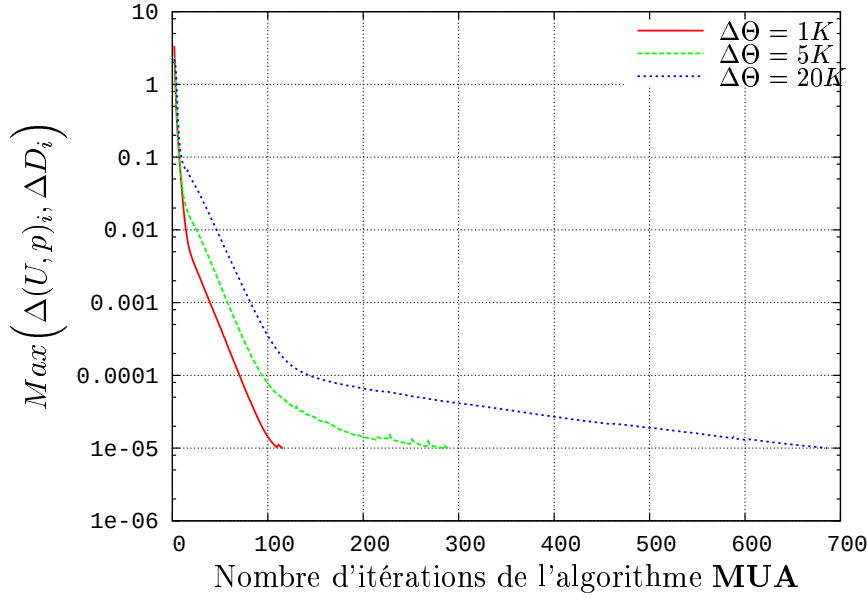


FIG. II-14 Influence des variations de la viscosité et de la contrainte seuil sur la vitesse de convergence de l'algorithme **MUA**, pour différents écarts de température à la paroi ($\Delta\Theta = 1K$, $\Delta\Theta = 5K$ et $\Delta\Theta = 20K$)

De plus, l'introduction de la compressibilité dans l'algorithme d'Uzawa standard [21, 23] n'a pas de répercussions sur la convergence. Au contraire, la FIG. II-15 montre que la compressibilité permet d'accélérer la convergence de l'algorithme **MUA**. Cependant, il est surprenant que ce gain sur la vitesse de convergence ne soit plus présent pour les faibles compressibilités ($\chi_\Theta = 10^{-8}$). En effet, le nombre d'itérations de l'algorithme **MUA** est plus grand dans le cas compressible ($\chi_\Theta = 10^{-8}$) que dans le cas incompressible ($\chi_\Theta = 0$).

Nous nous intéressons maintenant à l'algorithme **MSA**, présenté dans la *Section II-6.1*. L'algorithme **MSA**, qui permet de résoudre le système (II.85), converge pour chaque « ETAPE 1 »

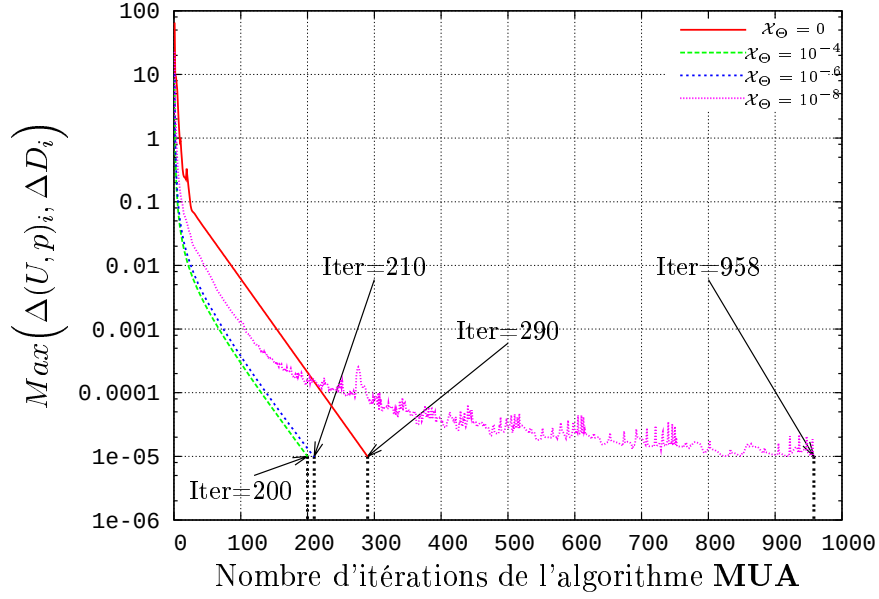


FIG. II-15 Influence de la compressibilité sur la vitesse de convergence de l'algorithme **MUA**

de l'algorithme **MUA**. Le critère de convergence ϵ est fixé à 10^{-10} . Sur la FIG. II-16, l'influence de la compressibilité sur la vitesse de convergence de l'algorithme **MSA** est évaluée à la première itération de l'algorithme **MUA**. Le coefficient de compressibilité χ_Θ joue le rôle d'un facteur de relaxation puisque, plus il est grand, plus la convergence est rapide. Dans le cas incompressible ($\chi_\Theta = 0$), le système de Stokes n'est plus relaxé et le nombre d'itérations nécessaire à l'algorithme **MSA** pour converger est grand. Finalement, l'algorithme **MSA** conserve les bonnes propriétés de convergence de l'algorithme d'Uzawa/gradient conjugué standard tout en améliorant sa vitesse de convergence.

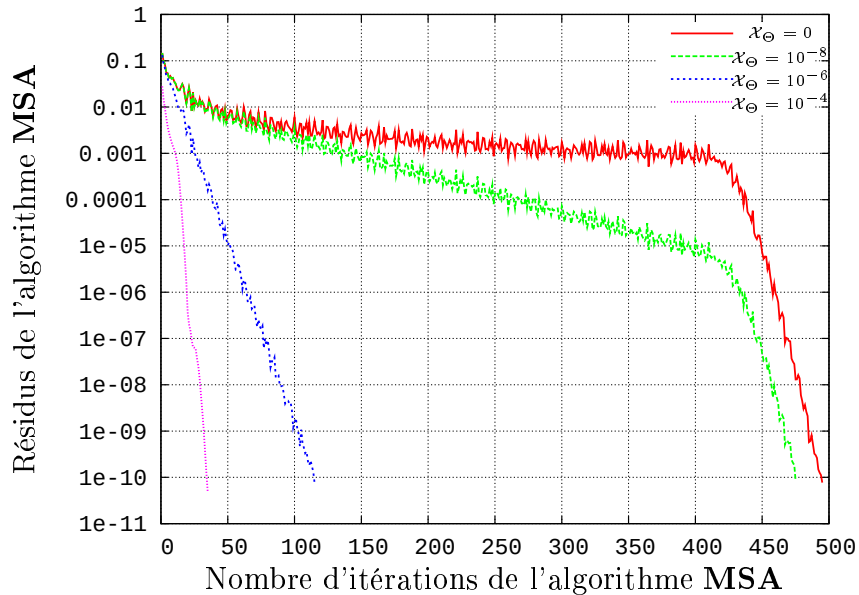


FIG. II-16 Influence de la compressibilité sur la vitesse de convergence de l'algorithme **MSA** à la première itération de l'algorithme **MUA**

Sur la FIG. II-17, le nombre d'itérations de l'algorithme **MUA** est tracé en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme **MSA**. A la première itération de l'algorithme **MUA**, nous retrouvons la conclusion faite pour la FIG. II-16 ; plus la compressibilité est faible, plus la

convergence est lente (495 itérations à $\mathcal{X}_\Theta = 0$ et 35 itérations à $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4}$ pour l'algorithme **MSA**). Dès la seconde itération de l'algorithme **MUA**, le nombre d'itérations de l'algorithme **MSA** pour $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4}$ diminue jusqu'à 20. Cependant, dans le cas incompressible ($\mathcal{X}_\Theta = 0$), le nombre d'itérations de l'algorithme **MSA** chute à 1. En fait, une pression est imposée en entrée et en sortie de la conduite, et le système de Stokes (II.85) est résolu en terme de pression grâce à l'algorithme **MSA**. Ainsi, dans le cas incompressible, la solution en pression du système de Stokes est atteinte à la première itération de l'algorithme **MUA**. Finalement, dès la seconde itération de l'algorithme **MUA**, une seule itération de l'algorithme **MSA** est nécessaire pour mettre à jour la vitesse ($\bar{\mathbf{U}}^{(i)} = \bar{\mathbf{U}}^{(i-1)} + \alpha \mathbf{t}^{(i)}$).

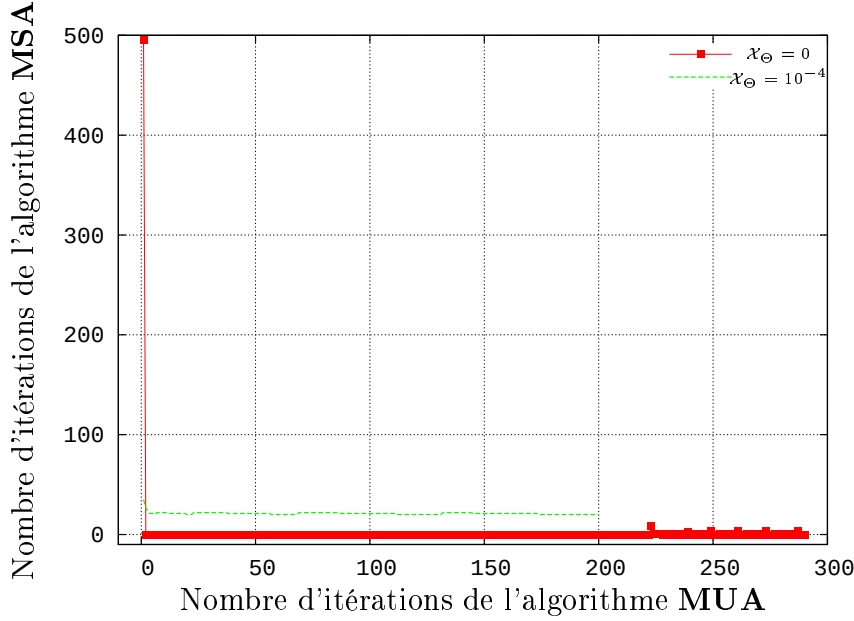


FIG. II-17 Influence de la compressibilité sur le nombre d'itérations de l'algorithme **MSA**

Sur la FIG. II-18, nous comparons le cas précédent d'un écoulement incompressible avec une pression imposée en entrée, avec le même écoulement incompressible avec une vitesse imposée en entrée. Quelque soit le type de conditions aux limites appliqué en entrée, le nombre d'itérations nécessaire à l'algorithme **MSA** pour résoudre le problème de Stokes est sensiblement identique (495 itérations pour le cas pression imposée, 507 pour le cas vitesse imposée) pour la première itération de l'algorithme **MUA**. Cependant, contrairement au cas avec pression imposée, la solution en pression n'est pas atteinte dès la première itération de l'algorithme **MUA** lorsque la vitesse est imposée comme condition limite d'entrée. Ainsi, à chaque itération de l'algorithme **MUA**, environ 480 itérations sont nécessaires pour résoudre le problème de Stokes avec vitesse imposée.

8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi les différentes équations régissant l'écoulement d'un brut paraffinique dans une conduite et présenté les méthodes mathématiques et numériques mises en œuvre pour les résoudre. La compressibilité est introduite dans l'équation de conservation de la masse grâce au coefficient de compressibilité isotherme $\mathcal{X}_\Theta$. Les effets viscoplastiques et thixotropes sont modélisés par la loi de comportement de Houska. De plus, l'influence de la température sur le comportement rhéologique est prise en compte à travers la thermodépendance des paramètres du modèle de Houska. Ce dernier est implémenté grâce à une méthode

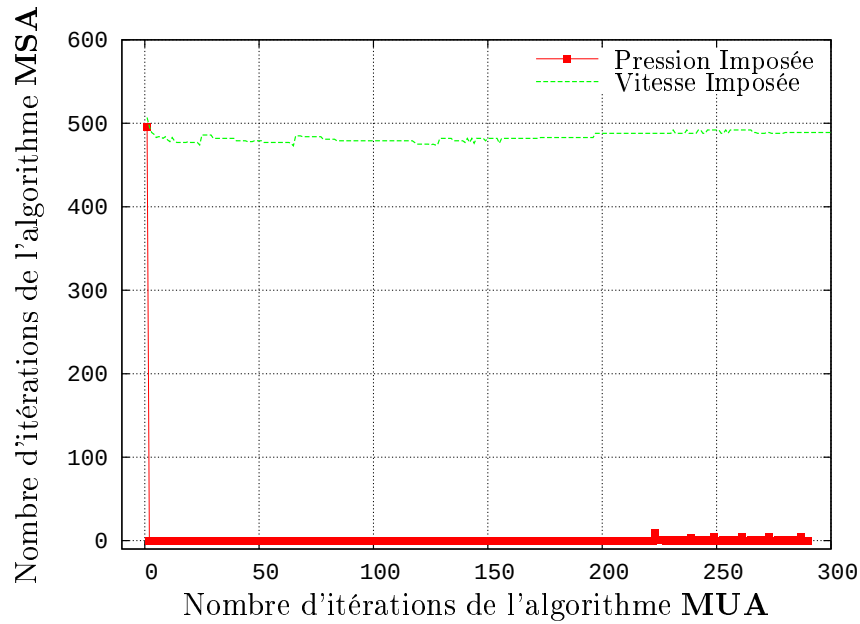


FIG. II-18 Influence du type de conditions aux limites d'entrée (pression ou vitesse) sur le nombre d'itérations de l'algorithme **MSA**

de Lagrangien augmenté associée à un algorithme d'Uzawa afin d'appréhender convenablement son caractère discontinu. La technique de Lagrangien augmenté et l'algorithme d'Uzawa, habituellement utilisés pour des écoulements incompressibles isothermes de fluides viscoplastiques, sont adaptés aux écoulements faiblement compressibles et non-isothermes.

Une méthode de Volumes Finis est adoptée pour discrétiser les équations du problème. Les inconnues du problème (vitesse, pression, température ...) sont positionnées sur une grille décalée de type MAC. De plus, les termes de convection sont traités avec un schéma TVD de Lax-Wendroff à limiteur de pente Superbee. L'exemple de convection d'un créneau a montré qu'un tel schéma présente les qualités de robustesse des schémas du 1^{er} ordre et de précision des schémas du 2nd ordre. Enfin, le calcul des déformations pour la loi de comportement est basé sur une méthode d'interpolation linéaire et se révèle être bien adapté à la méthode de discrétisation par des Volumes Finis.

Après avoir présenté les algorithmes implémentés dans le code numérique StarWaCS, des tests numériques concernant l'influence du maillage et les propriétés de convergence sont présentés. Les algorithmes standards de types Uzawa sont adaptés à la résolution d'écoulements compressibles et non-isothermes. Les propriétés de convergence sont conservées dans les deux cas, non-isotherme et compressible. L'algorithme général mis en place semble être efficace, robuste et stable puisque les calculs présentés convergent sans condition particulière. Cependant, la vitesse de convergence dépend du choix des paramètres de Lagrange, eux-mêmes liés au type de problème étudié (valeurs de viscosité, de contrainte seuil, de masse volumique ...). De plus, la convergence est plus lente lorsque de grandes variations de température sont imposées aux paramètres rhéologiques (viscosité et contrainte seuil). Au contraire, de fortes compressibilités permettent d'améliorer la vitesse de convergence. Désormais, nous avons un outil numérique complet capable de simuler l'écoulement instationnaire compressible d'un fluide viscoplastique dont les paramètres rhéologiques dépendent de la température.

Chapitre III

Application à l'arrêt et au redémarrage d'un brut paraffinique

1 Introduction

Lors de la description des bruts paraffiniques, nous avons mis en avant l'importance des phénomènes thermiques sur leur comportement. En particulier, les propriétés thermiques liées à l'histoire du brut ont une influence importante sur le comportement du fluide lors du redémarrage. Ainsi, nous ne pouvons envisager de faire une étude du redémarrage sans nous intéresser à l'arrêt de l'écoulement. Ensuite, lors du redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique dans une conduite, les opérateurs pétroliers injectent un fluide dont le comportement est proche d'un fluide Newtonien afin de déplacer le brut gélifié. Les propriétés de ce gel, décrites dans le *Chapitre I*, sont celles d'un fluide viscoplastique thixotrope et compressible. Finalement, le redémarrage d'un brut paraffinique correspond à l'écoulement compressible viscoplastique et thixotrope de deux fluides dont les propriétés rhéologiques sont différentes. L'écoulement fluide-fluide est modélisé par une méthode de type *Volume Of Fluid* et le brut paraffinique par un fluide de Houska faiblement compressible.

Ce chapitre est composé de deux sections dans lesquelles nous présentons successivement des résultats concernant l'arrêt et le redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique. Dans la 1^{ère} section, nous proposons des calculs numériques qui permettent de décrire l'état stationnaire de l'écoulement non-isotherme d'un fluide viscoplastique. Après avoir décrit le problème, nous présentons les résultats numériques de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite axisymétrique pour différentes situations (viscosité ou contrainte seuil thermodépendante, vitesse ou pression imposée). Les calculs réalisés avec l'algorithme général présenté dans le *Chapitre II* permettent d'obtenir une solution dont l'évolution en temps est réelle (au sens physique). Cependant, nous nous intéressons à l'état stationnaire de l'écoulement du brut avant l'arrêt de la conduite. Nous présentons donc les résultats obtenus à la convergence du calcul instationnaire et correspondant à la solution stationnaire. Pour réaliser ces calculs instationnaires, la solution est initialisée à $t = 0$ comme un fluide au repos dans toute la conduite. Ainsi, l'évolution en temps de la solution simule le redémarrage d'un écoulement non-isotherme d'un fluide viscoplastique. L'analyse des résultats est en particulier dédiée à la physionomie de l'écoulement et à la localisation des zones cisailées/non-cisailées.

Dans la 2^{nde} section, nous présentons les simulations numériques de chaque propriété de l'écoulement lors du redémarrage. Nous nous intéressons d'abord à un écoulement fluide-fluide de deux fluides Newtoniens, puis de deux fluides viscoplastiques. Nous voyons que sous certaines conditions, une couche statique de fluide à la paroi apparaît si les deux fluides viscoplastiques ont des contraintes seuil différentes. Ensuite, nous présentons les simulations numériques d'un écoulement monophasique d'un fluide viscoplastique faiblement compressible. L'influence de la compressibilité et des effets viscoplastiques sur la physionomie de l'écoulement est mise en évidence. Enfin, des simulations numériques d'un fluide thixotrope sont menées dans une dernière section. Nous réalisons l'étude de trois écoulements différents qui nous permet de conclure sur les effets positifs de la thixotropie et de la compressibilité sur le redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique.

2 Application à l'arrêt de l'écoulement d'un brut paraffinique

2.1 Description du problème

Nous nous intéressons à l'état stationnaire du refroidissement de l'écoulement d'un fluide viscoplastique dans une conduite axisymétrique dont les paramètres rhéologiques dépendent de la température. Cette situation modélise le transport par pipeline des bruts paraffiniques : le pétrole brut chaud sort de la tête de puits à la température Θ_{Inlet} et s'écoule dans la conduite en subissant un refroidissement, imposé par les conditions thermiques extérieures $\Theta_{\text{Ext}} < \Theta_{\text{Inlet}}$.

Plusieurs expériences [8, 27] montrent que les propriétés rhéologiques des bruts paraffiniques dépendent fortement de la température. Une première approche raisonnable consiste à imposer une thermodépendance aux paramètres rhéologiques (viscosité et contrainte seuil) de la loi de comportement. Les fonctions de thermodépendance peuvent être établies soit par interpolation (ajustement de données expérimentales), soit par l'implémentation de lois classiques d'Arrhénius ou WLF (Williams-Landel-Ferry). Cependant, d'après les données expérimentales, dans la plage de température sur laquelle nous faisons notre étude, la forme des fonctions est linéaire. De plus, le but de ce chapitre est d'examiner l'influence des effets thermiques sur un fluide viscoplastique plutôt que de modéliser une situation réelle. C'est pourquoi la loi de thermodépendance des paramètres rhéologiques sera simple (linéaire).

La géométrie du domaine d'écoulement est celle décrite dans le *Chapitre II* sur la FIG. II-1 ; l'écoulement est découpé en trois parties :

1. une zone d'entrée de longueur L_e où les températures du fluide et de la paroi sont maintenues constantes et égales à la température Θ_{Inlet} . Il s'agit de l'écoulement classique d'un fluide viscoplastique avec une zone bouchon de rayon constant au centre de la conduite.
2. une zone de transition où le champ de température évolue. La longueur de cette zone de transition dépend des nombres de Cameron et Peclet. En effet, nous pouvons estimer la longueur d'établissement $L_{\text{établi}}$ du champ de température par :

$$L_{\text{établi}}^2 = \mathcal{C}a \mathcal{P}e R^2 \quad (\text{III.1})$$

Comme le champ de température est établi pour $\mathcal{C}a \geq 1$, nous prenons $\mathcal{C}a = 1$. Or, plus $\mathcal{P}e$ est grand, plus la longueur d'établissement $L_{\text{établi}}$ est grande. Ainsi, le nombre de Peclet $\mathcal{P}e$ est choisi de telle sorte que le champ de température soit établi avant la sortie de la conduite.

3. une zone aval proche de la sortie de la conduite où le champ de température est à nouveau établi. La température du fluide étant constante et égale à Θ_{Ext} , nous retrouvons un écoulement viscoplastique classique, mais avec un bouchon d'un rayon différent de celui de la zone d'entrée.

La question à laquelle nous allons répondre dans ce chapitre concerne la physionomie de l'écoulement dans la zone de transition. Quelle est la nature de l'écoulement en termes de zones cisailées/non-cisailées dans cette région ? Existe-t-il un changement continu de la zone bouchon, comme le montre la FIG. III-1.

Les calculs réalisés avec l'algorithme général de résolution (*Section III-4.2*) sont interprétés avec les grandeurs physiques adimensionnées : les coordonnées adimensionnées r/R et z/L ,

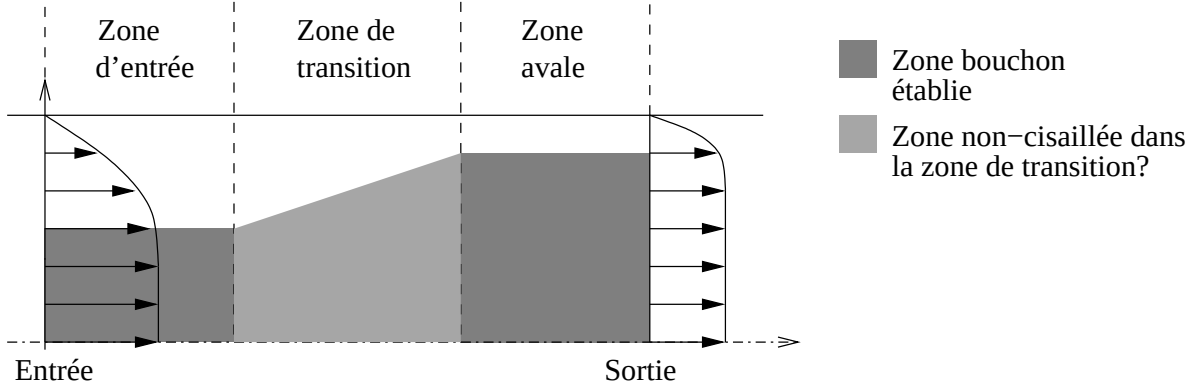


FIG. III-1 Physionomie de l'écoulement dans la zone de transition : une première approche naïve

la composante axiale de vitesse adimensionnée w/w_{max} , la pression adimensionnée p/p_{max} , la température adimensionnée $\frac{\Theta - \Theta_{Ext}}{\Delta\Theta}$ (avec $\Delta\Theta = \Theta_{Inlet} - \Theta_{Ext}$) et les nombres adimensionnels $\mathcal{B}i$ et $\mathcal{R}e$.

Nous présentons d'abord la simulation de l'écoulement isotherme d'un fluide de Bingham. Cet écoulement classique et simple permet de valider les résultats numériques obtenus. Ensuite, nous prenons en compte les effets thermiques et nous analysons les résultats lorsque la viscosité dépend de la température, puis lorsque la contrainte seuil est thermodépendante. Nous découplons volontairement les effets thermiques sur la viscosité et la contrainte seuil afin d'identifier clairement l'influence de chacun. Enfin, nous proposons l'étude d'un cas applicatif correspondant à l'arrêt de l'écoulement d'un fluide viscoplastique thermodépendant, provoqué par les effets thermiques.

2.2 Écoulement isotherme d'un fluide de Bingham

Les dimensions de la conduite sont choisies telles que $\frac{L}{R} = 40$. On impose une vitesse moyenne $\bar{U}$ en entrée de la conduite. On introduit un nouveau nombre de Bingham $\bar{\mathcal{B}}i$; en effet, comme nous imposons une vitesse en entrée de la conduite, la contrainte de paroi τ_w est maintenant définie grâce à la vitesse moyenne de l'écoulement $\bar{U}$, soit $\tau_w = \frac{\mu\bar{U}}{R}$. Finalement, le nombre de Bingham $\bar{\mathcal{B}}i$ est défini par :

$$\bar{\mathcal{B}}i = \frac{\tau_y R}{\mu \bar{U}} \quad (\text{III.2})$$

Le calcul d'un écoulement isotherme d'un fluide de Bingham pour $\bar{\mathcal{B}}i = 5$ présenté dans cette section sert de validation pour le code. Les profils de vitesse axiale calculés et analytiques sont comparés sur la FIG. III-2. Le profil de vitesse fait apparaître une zone bouchon au centre de la conduite, où le fluide n'est pas cisaillé, et qui occupe environ la moitié de la section.

Ces courbes confirment le bon accord entre la solution numérique et analytique. Les zones non-cisaillées sont facilement identifiables puisqu'elles sont caractérisées par un cisaillement strictement nul : $\mathbf{D} = 0$. Sur la FIG. III-3, on observe que la zone non-cisaillée (région en blanc) correspond exactement à la moitié de la conduite; la zone noire est la partie cisaillée de l'écoulement.

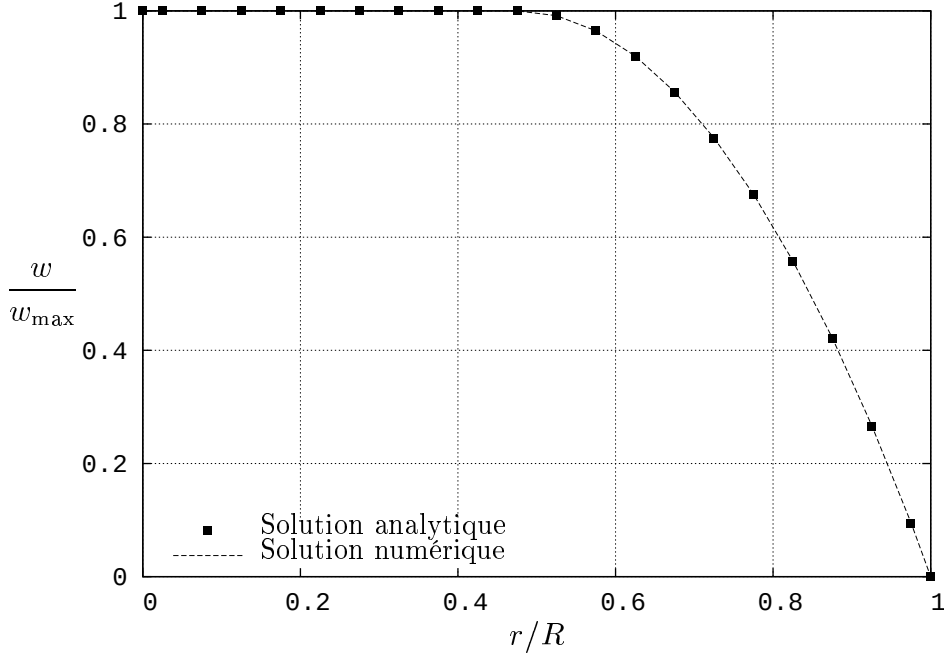


FIG. III-2 Profils numérique et analytique de la vitesse axiale d'un écoulement isotherme pour $\bar{Bi} = 10$

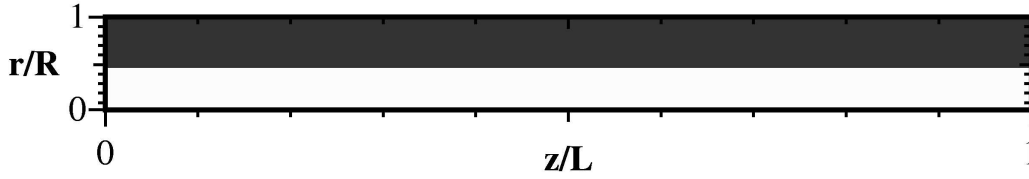


FIG. III-3 Visualisation des zones cisailées/non-cisailées de l'écoulement isotherme d'un fluide de Bingham pour $\bar{Bi} = 10$

L'observation des déformations calculées avec le code StarWaCS, nous permet d'illustrer la supériorité de la méthode de Lagrangien augmenté sur les méthodes de régularisation. En effet, nous distinguons clairement les zones bouchons des zones cisailées puisque, contrairement aux résultats obtenus avec FLUENT (*cf. Annexe A*), les déformations sont strictement nulles lorsque la contrainte de cisaillement τ est inférieure à la contrainte seuil τ_y .

2.3 Écoulement d'un fluide de Bingham avec une viscosité thermodépendante

Les dimensions de la conduite sont choisies telles que $\frac{L}{R} = 40$. En tenant compte des conditions aux limites en température, la longueur d'entrée L_e est fixée à $\frac{1}{4}L$. Afin d'obtenir un champ de température établi avant la sortie de la conduite, le nombre de Peclet Pe est fixé à 400 tel que $L_{\text{établi}} = \frac{1}{4}L$. Pour l'écoulement d'un fluide de Bingham avec une viscosité thermodépendante, on considère le modèle rhéologique (II.40) en prenant $n = 1$, $\tau_y(\Theta) = \tau_y$

et $\mu(\Theta) = A\Theta + B$, où A et B sont deux constantes. En fixant l'écart de température à la paroi $\Delta\Theta$ à 20K, les deux constantes A et B sont choisies telles que le rapport des viscosités sortie/entrée, défini par $\frac{\mu(\Theta_{\text{Ext}})}{\mu(\Theta_{\text{Inlet}})}$, soit de 20. Ainsi, les nombres de Bingham en entrée et en sortie de la conduite sont respectivement $\mathcal{Bi}_{\text{Inlet}} = 10$ et $\mathcal{Bi}_{\text{Outlet}} = 0.5$. De plus, un profil de vitesse est imposé à l'entrée de la conduite.

La FIG. III-4 montre les contours du champ de température et permet de distinguer les trois parties de l'écoulement que nous avons déjà décrites.

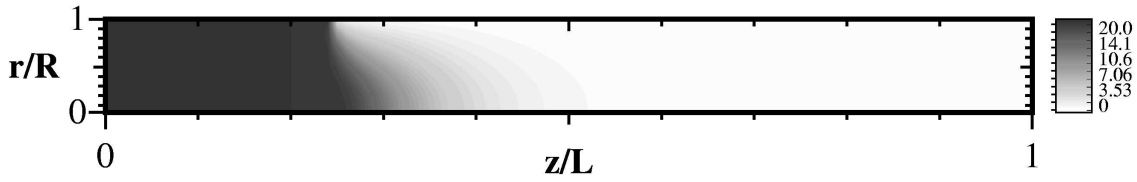


FIG. III-4 Contours du champ de température de l'écoulement non-isotherme d'un fluide de Bingham dont la viscosité dépend de la température ($\mathcal{Bi}_{\text{Inlet}} = 10$ et $\mathcal{Bi}_{\text{Outlet}} = 0.5$)

On observe que le régime thermique est bien établi puisque la température à la sortie de la conduite est constante et égale à la température extérieure (Θ_{Ext}). Des profils de vitesse axiale sur plusieurs sections sont tracés sur la FIG. III-5. Dans la zone de transition où la température varie, les profils de vitesse axiale sont modifiés et ont une forme de « cloche ». Cette forme particulière est due à la cinématique de l'écoulement couplée avec la thermodépendance de la viscosité. En fait, comme le fluide est à une température plus faible à la paroi qu'au centre de la conduite, sa viscosité est plus grande et l'écoulement est donc ralenti près de la paroi. Au contraire, au centre de la conduite, la conservation du débit impose une accélération de l'écoulement.

Les zones cisailées/non-cisailées sont visualisées sur la FIG. III-6. On distingue sur cette figure les trois différentes parties de l'écoulement déjà observées sur la FIG. III-4. Dans la zone d'entrée où la température reste constante ($\Theta = \Theta_{\text{Inlet}}$), on retrouve un écoulement de Bingham isotherme avec une zone bouchon au centre de rayon constant. Ensuite, sur les derniers mètres de la conduite, le régime thermique est établi ($\Theta = \Theta_{\text{Ext}} < \Theta_{\text{Inlet}}$) et la viscosité est donc constante. Nous retrouvons le cas d'un écoulement isotherme d'un fluide de Bingham dont la zone bouchon au centre est de plus petit rayon puisque $\mathcal{Bi}_{\text{Outlet}}$ est plus petit que $\mathcal{Bi}_{\text{Inlet}}$ (car $\mu(\Theta_{\text{Ext}}) > \mu(\Theta_{\text{Inlet}})$).

Le résultat le plus intéressant concerne la zone de transition où les effets thermiques influent sur la physionomie de l'écoulement. La FIG. III-6 montre clairement qu'il n'y pas une évolution continue de la taille du bouchon dans la zone de transition comme nous l'observons lorsque la loi de comportement est régularisée (cf. *Annexe A*). Au contraire, le fluide est cisailé dans toute la zone de transition. De par ces observations, on déduit que, dans le cas d'un écoulement non-isotherme d'un fluide de Bingham dont la viscosité dépend de la température, tant que le champ de température n'est pas établi, c'est à dire que la température varie dans la direction z , le fluide est cisailé et il ne peut pas exister de zone bouchon.

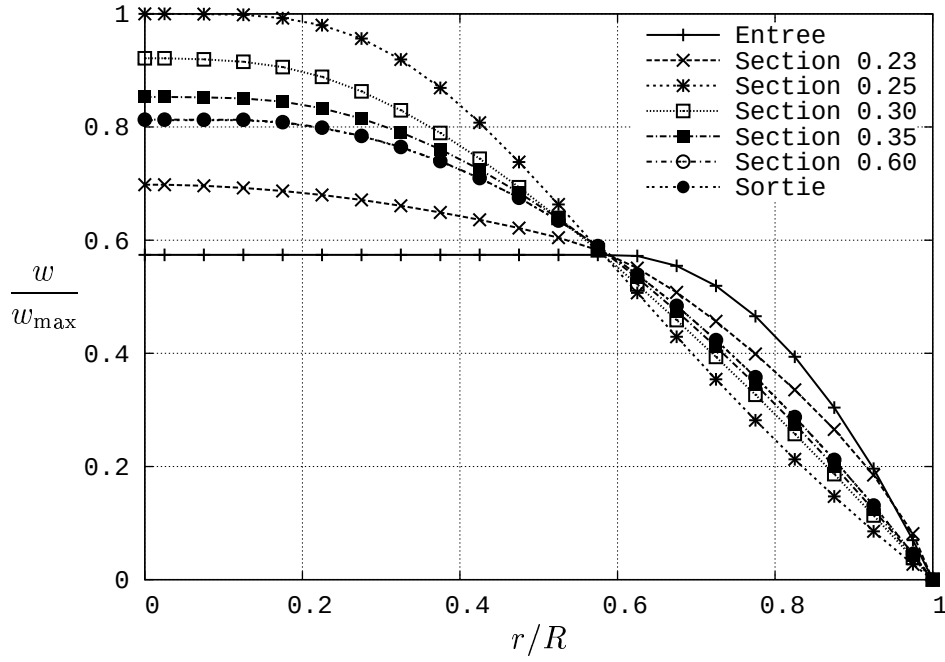


FIG. III-5 Profils de vitesse axiale sur plusieurs sections de l'écoulement non-isotherme d'un fluide de Bingham dont la viscosité dépend de la température ($\bar{\mathcal{B}}i_{\text{Inlet}} = 10$ et $\bar{\mathcal{B}}i_{\text{Outlet}} = 0.5$)

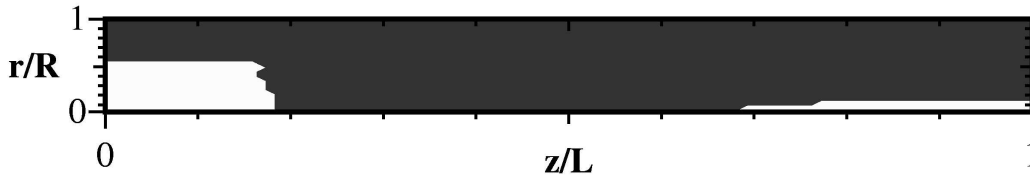


FIG. III-6 Visualisation des zones cisailées/non-cisailées de l'écoulement non-isotherme d'un fluide de Bingham dont la viscosité dépend de la température ($\bar{\mathcal{B}}i_{\text{Inlet}} = 10$ et $\bar{\mathcal{B}}i_{\text{Outlet}} = 0.5$)

2.4 Ecoulement d'un fluide de Bingham avec une contrainte seuil thermodépendante

On conserve la géométrie précédente pour le domaine de calcul ($\frac{L}{R} = 40$, $L_e = \frac{1}{4}L$ et $\mathcal{P}e = 400$). Pour l'écoulement d'un fluide de Bingham avec une contrainte seuil thermodépendante, on considère le modèle rhéologique (II.40) en prenant $n = 1$, $\tau_y(\Theta) = C\Theta + D$ et $\mu(\Theta) = \mu$, où C et D sont deux constantes, choisies pour que $\bar{\mathcal{B}}i_{\text{Inlet}} = 1.5$ et $\bar{\mathcal{B}}i_{\text{Outlet}} = 50$ dans le cas où l'écart de la température à la paroi $\Delta\Theta$ est 20K. Les résultats présentés dans cette sous-section sont obtenus pour trois écarts de température $\Delta\Theta = 1\text{K}$, $\Delta\Theta = 5\text{K}$ et $\Delta\Theta = 20\text{K}$. Les nombres de Bingham et les rapports de contraintes seuil sortie/entrée sont rassemblés dans le TAB. III.1. Un profil de vitesse est également imposé à l'entrée de la conduite.

Les contours des trois champs de température sont présentés et comparés sur la FIG. III-7. Pour les trois écarts de température $\Delta\Theta$ considérés, le champ de température a la même physionomie. Cependant, si on s'intéresse à l'aspect instationnaire, on remarque que le temps t_{Statio} requis pour atteindre la solution stationnaire augmente avec l'écart de température

$\Delta\Theta = \Theta_{\text{Ext}} - \Theta_{\text{Inlet}} \text{ (K)}$	$\frac{\tau_y(\Theta_{\text{Ext}})}{\tau_y(\Theta_{\text{Inlet}})}$	$\bar{\mathcal{B}}i_{\text{Inlet}}$	$\bar{\mathcal{B}}i_{\text{Outlet}}$
1	2.617	1.5	3.92
5	9.083	1.5	13.62
20	33.3	1.5	50

TAB. III.1 Paramètres de simulation pour l'écoulement d'un fluide de Bingham avec une contrainte seuil thermodépendante

$\Delta\Theta$: d'après la FIG. III-8, on a $t_{\text{Statio}}(\Delta\Theta = 1K) = 54.60 \text{ s}$, $t_{\text{Statio}}(\Delta\Theta = 5K) = 67.84 \text{ s}$ et $t_{\text{Statio}}(\Delta\Theta = 20K) = 75.34 \text{ s}$.

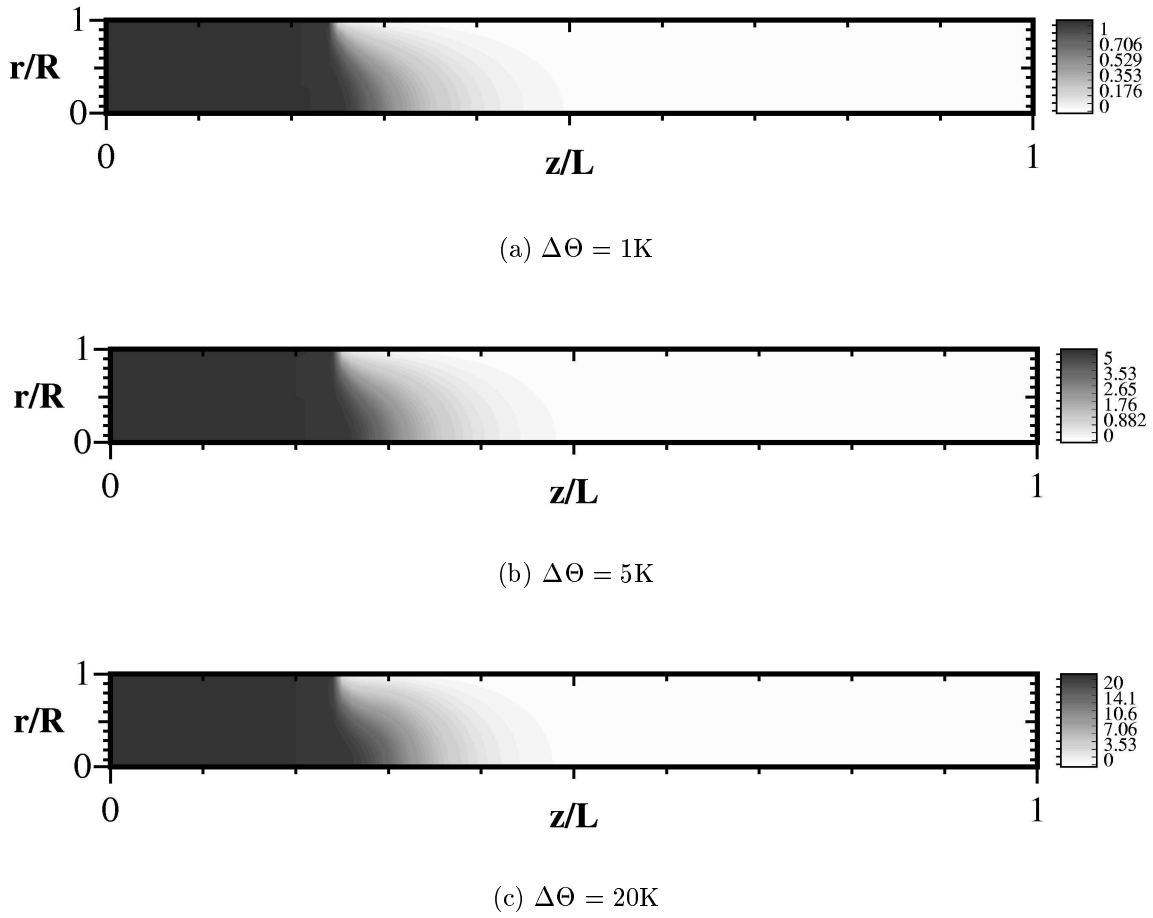


FIG. III-7 Contours du champ de température de l'écoulement non-isotherme d'un fluide de Bingham dont la contrainte seuil dépend de la température : (a) $\Delta\Theta = 1K$, (b) $\Delta\Theta = 5K$ et (c) $\Delta\Theta = 20K$

Les zones cisailées/non-cisailées visualisées sur la FIG. III-9 nous permettent de distinguer les trois différentes parties de l'écoulement. Au cours de ces calculs, le nombre de Bingham à l'entrée $\bar{\mathcal{B}}i_{\text{Inlet}}$ est maintenu constant égal à 1.5. La taille du bouchon à la sortie dépend du nombre de Bingham en sortie $\bar{\mathcal{B}}i_{\text{Outlet}}$ et de l'écart de température à la paroi $\Delta\Theta$ puisque la contrainte seuil est thermodépendante. Un grand écart de température $\Delta\Theta$ conduit à un grand nombre de Bingham en sortie et donc à une zone bouchon large au centre de la conduite, comme on le voit sur le TAB. III.1 et sur la FIG. III-9. De plus, on constate que la zone de

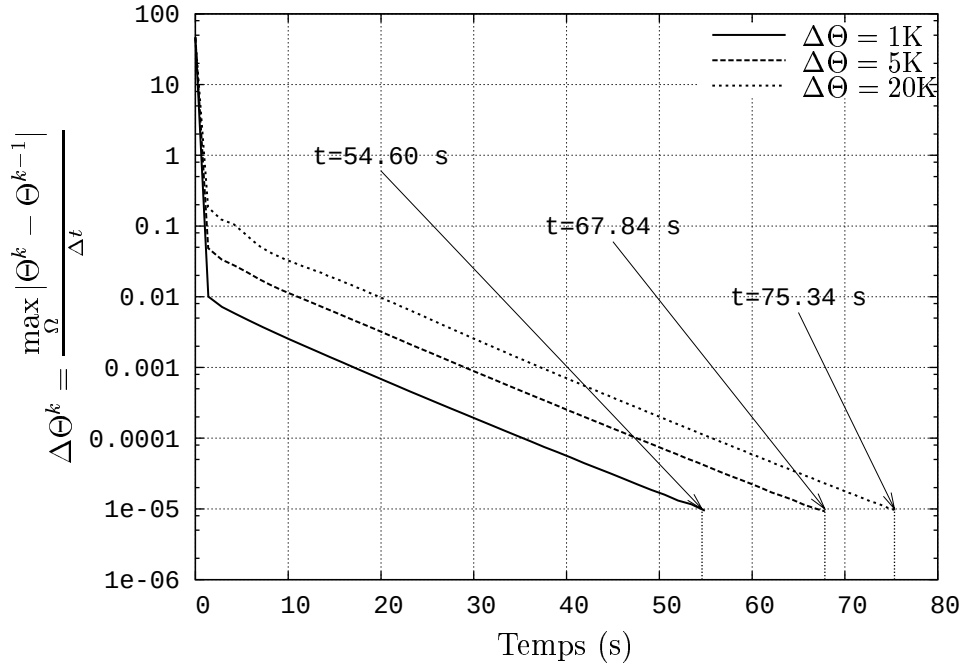


FIG. III-8 Influence de l'écart de température $\Delta\Theta$ sur le temps requis pour atteindre la solution stationnaire de l'écoulement non-isotherme d'un fluide de Bingham dont la contrainte seuil dépend de la température

transition non-cisaillée est d'autant plus en amont de l'écoulement que l'écart de température $\Delta\Theta$ est grand. Ceci signifie que la champ de température s'établit plus tôt dans la conduite (selon la direction z) et donc que les effets convectifs sont plus faibles quand $\Delta\Theta$ est grand. En fait, plus l'écart de température à la paroi est grand, plus la viscosité apparente μ_a (avec $\mu_a = \tau_y(\Theta) / (\dot{\gamma} + \mu)$) de l'écoulement est grande et plus les effets convectifs au voisinage de la paroi sont faibles.

Comme pour le cas où la viscosité est thermodépendante, le fluide est totalement cisaillé dans la zone de transition et il n'y pas de changement continu de la taille du bouchon. Ainsi, lors de l'écoulement non-isotherme d'un fluide de Bingham dont la contrainte seuil dépend de la température, tant que le champ de température n'est pas établi, c'est à dire que la température varie dans la direction z , le fluide est cisaillé et il ne peut pas exister de zone bouchon.

Les profils de vitesse axiale pour les trois écarts de température sont tracés sur la FIG. III-10. Dans la zone de transition, la différence de température entre la paroi et le centre de la conduite donne au profil de vitesse une forme en « cloche ». Ce profil en forme de « cloche » est d'autant plus accentué que l'écart de température $\Delta\Theta$ est grand. On observe nettement les différences sur les profils de vitesse de la FIG. III-10 entre $\Delta\Theta = 20K$ et $\Delta\Theta = 1K$. On explique la forme en « cloche » du profil de vitesse axiale comme pour le cas où la viscosité est thermodépendante, mais en raisonnant sur la viscosité apparente μ_a .

Enfin, nous nous intéressons au cas $\Delta\Theta = 1K$. Les profils de vitesse axiale de la FIG. III-10 semblent présenter un plateau au centre de la conduite qui habituellement est synonyme de zone bouchon. Ainsi, en basant nos conclusions uniquement sur l'observation des profils de vitesse, nous aurions supposé la présence d'un bouchon continu dont la taille varie sur toute la zone de transition, comme nous l'avions imaginé sur la FIG. III-1. Or la FIG. III-9 nous permet de tirer les bonnes conclusions quant à la localisation des zones cisaillées/non-cisaillées. Quoi qu'il en soit, l'observation de la FIG. III-10 accompagnée d'une justification théorique liée au

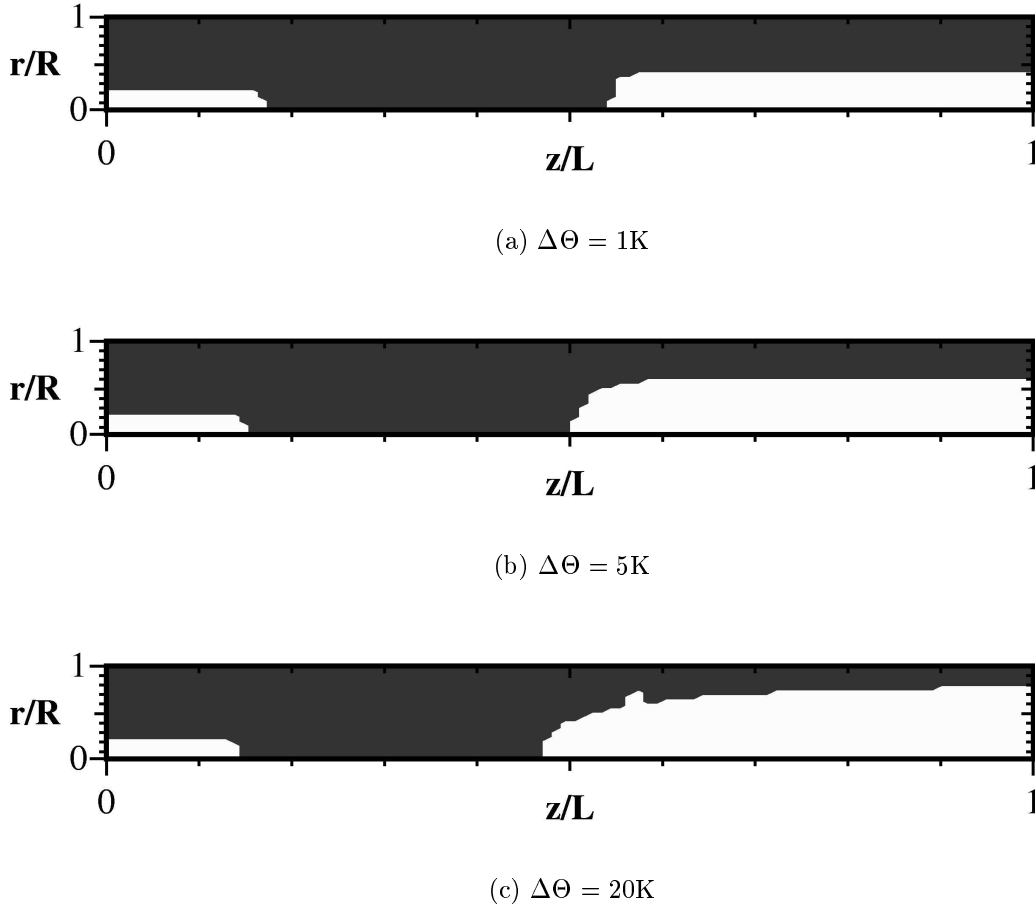


FIG. III-9 Visualisation des zones cisailées/non-cisailées de l'écoulement non-isotherme d'un fluide de Bingham dont la contrainte seuil dépend de la température : (a) $\Delta\Theta = 1\text{K}$, (b) $\Delta\Theta = 5\text{K}$ et (c) $\Delta\Theta = 20\text{K}$

modèle rhéologique de Bingham nous permet également de tirer les bonnes conclusions. En effet, comme la vitesse axiale au centre varie le long de la conduite, on a $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$. Or le modèle de Bingham désigne les zones non-cisailées par $\mathbf{D} = 0$. Dans le cas 2D axisymétrique, on a :

$$\mathbf{D} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \frac{u}{r} = 0, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{III.3})$$

Ainsi, même si les profils de vitesse axiale semblent avoir un plateau au centre de la conduite, dès que la vitesse axiale varie selon l'axe z , le fluide est cisailé.

Finalement, nous pouvons maintenant répondre à la question « existe-t-il un changement continu de la zone bouchon dans la zone de transition ? ». Lorsque la contrainte seuil varie avec la température, le fluide est cisailé et il n'existe pas de zone bouchon au centre de l'écoulement.

Remarque : En réalité, les effets thermiques doivent être pris en compte à la fois à travers la viscosité et la contrainte seuil. Un cas réel, dans lequel la viscosité et la contrainte seuil dépendent de la température, sera présenté dans le *Chapitre IV*.

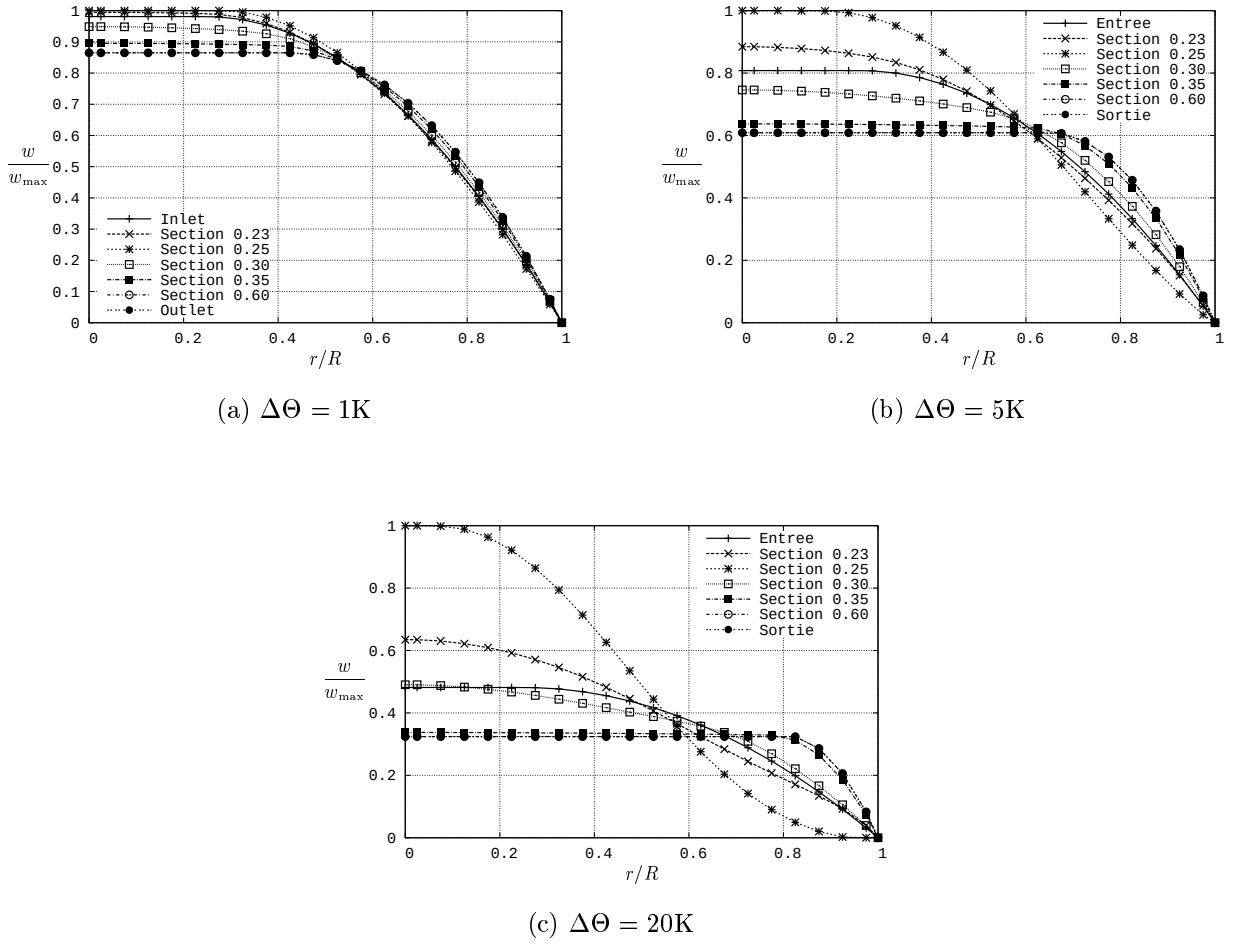


FIG. III-10 Profils de vitesse axiale sur plusieurs sections d'un écoulement non-isotherme d'un fluide de Bingham dont la contrainte seuil dépend de la température : (a) $\Delta\Theta = 1K$, (b) $\Delta\Theta = 5K$ et (c) $\Delta\Theta = 20K$

2.5 Arrêt de l'écoulement par refroidissement

Nous présentons dans cette section l'écoulement instationnaire d'un fluide de Bingham dont seule la contrainte seuil dépend de la température. Les dimensions de la conduite sont choisies telles que $\frac{L}{R} = 200$ et la longueur d'entrée L_e est fixée à $L_e = \frac{1}{10}L$. Désormais, une pression est imposée à l'entrée de la conduite. La loi de dépendance est identique à celle utilisée dans la section précédente. Cependant, l'écart de température à la paroi $\Delta\Theta$ est égale à 25K dans un premier temps. En fait, cette situation correspond à l'écoulement d'un brut paraffinique pendant la journée au cours de laquelle l'écart de température $\Delta\Theta$ est de 25K. Ensuite, quand les conditions de stationnarité sont atteintes en vitesse et en température, on augmente l'écart de température $\Delta\Theta$ à 40K. Ainsi, cette situation correspond à l'écoulement d'un brut paraffinique pendant la nuit, où la température extérieure Θ_{Ext} a diminué.

On retrouve le même type d'écoulement que dans la section précédente pour un écart de température $\Delta\Theta$ de 25K. Les nombres de Bingham Bi_{Inlet} et Bi_{Outlet} valent respectivement 0.02 et 0.83 (nous rappelons qu'il est nécessaire que le nombre de Bingham Bi soit inférieur à 1 pour que le fluide s'écoule). Les paramètres thermiques (conductivité thermique et capacité

calorifique) sont choisis pour que la longueur d'établissement $L_{\text{établi}}$ du champ de température soit plus courte que la longueur de la conduite et pour que les effets conductifs soient amplifiés. En fait, les valeurs de ces paramètres ne sont pas celles correspondant à la réalité physique, mais ce choix nous permet de diminuer les temps de calcul (conduite courte et effets thermiques accélérés). L'évolution au cours du temps de la température est présentée sur la FIG. III-11. A l'instant initial $t = 0$, la température du fluide est égale à la température d'entrée Θ_{Inlet} . On remarque que les effets convectifs sont faibles devant les effets de diffusion thermique car l'écoulement est lent et très visqueux.

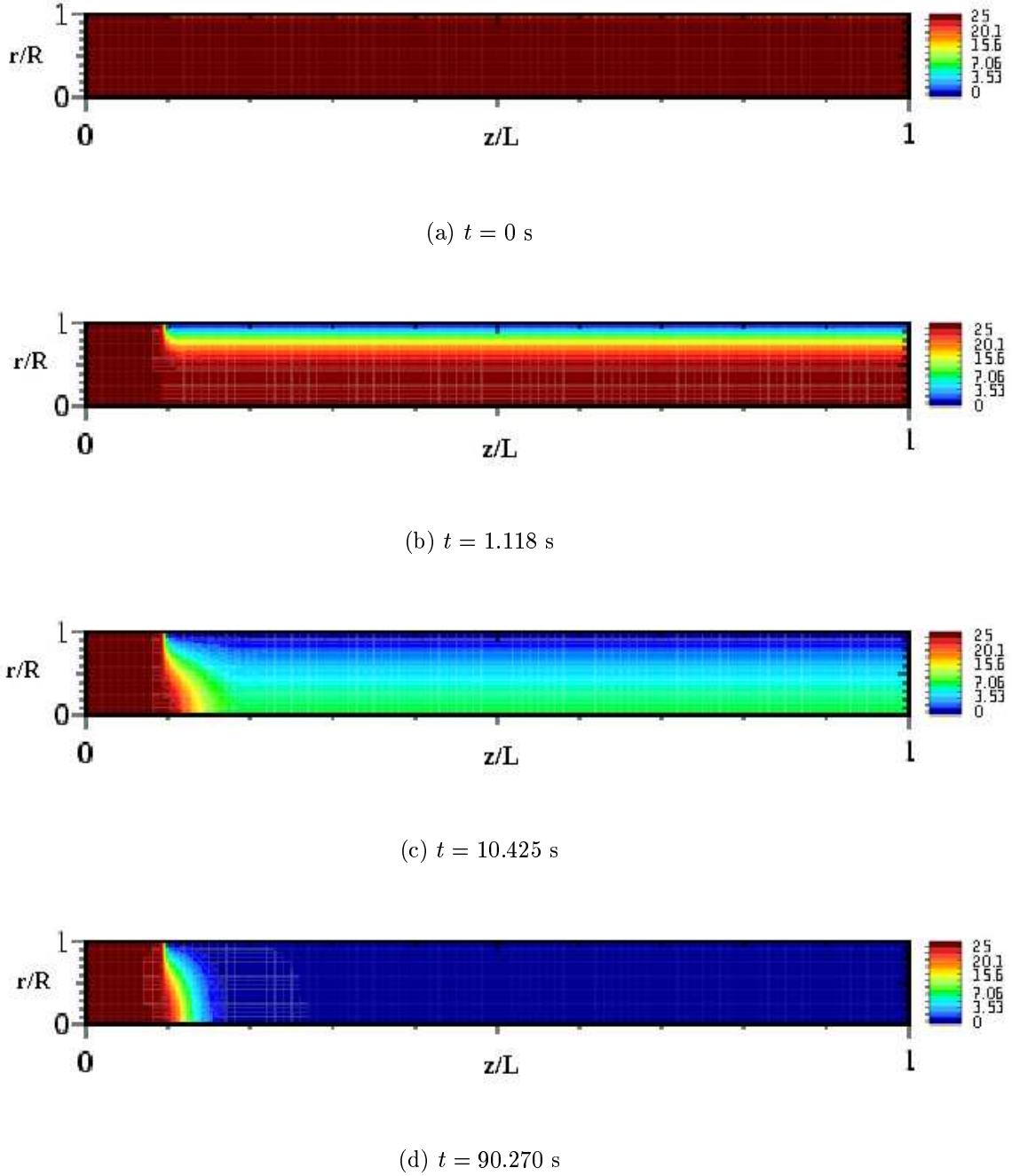


FIG. III-11 Evolution au cours du temps de la température pour $\Delta\Theta = 25\text{K}$

L'évolution au cours du temps des zones cisailées/non-cisailées est présentée sur la FIG. III-12. Les zones non-cisailées correspondent aux régions blanches. On identifie une nou-

velle fois les trois zones de l'écoulement : zone d'entrée, de transition et de sortie. On remarque que le fait d'imposer une pression comme condition d'entrée, au lieu d'une vitesse, ne modifie pas la physionomie de l'écoulement. En effet, les mêmes conclusions sont tirées ; dès que la température varie le long de la conduite, le fluide de Bingham est cisailé et il ne peut pas exister de zone bouchon.

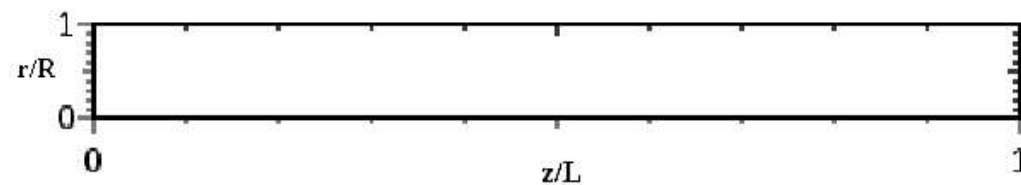
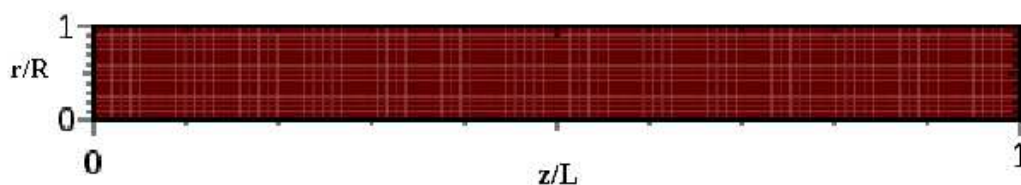
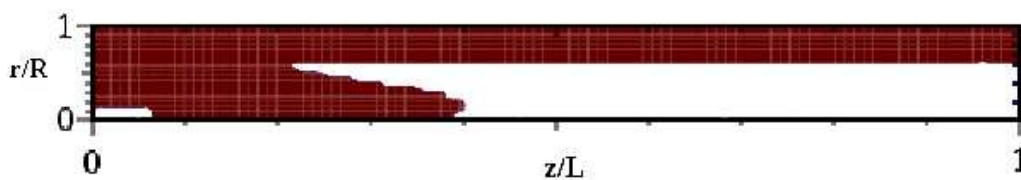
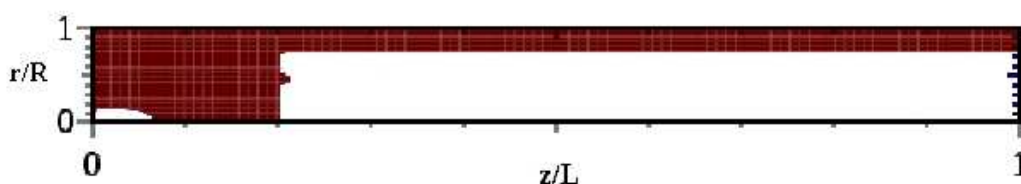
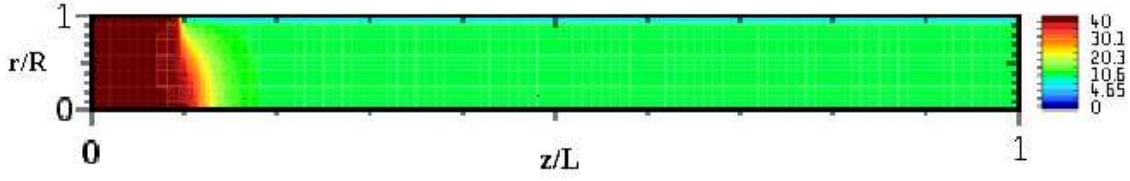
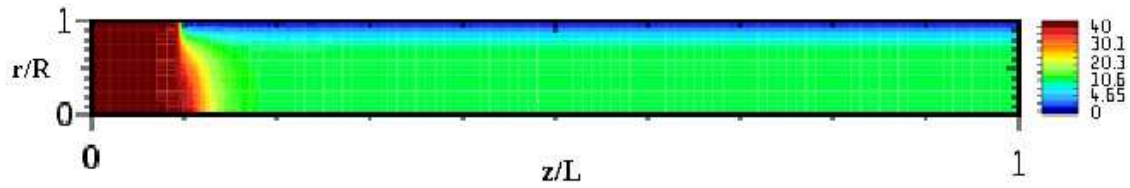
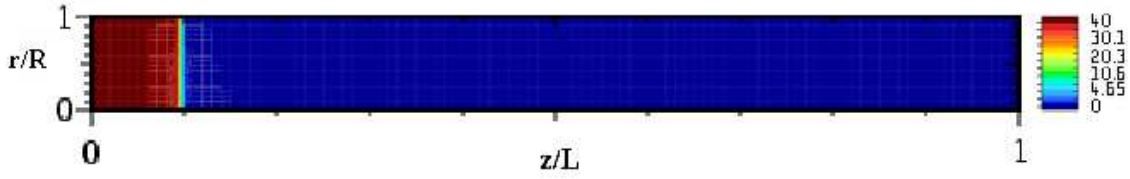
(a) $t = 0$ s(b) $t = 1.118$ s(c) $t = 10.425$ s(d) $t = 90.270$ s

FIG. III-12 Evolution au cours du temps des zones cisailées/non-cisailées pour $\Delta\Theta = 25\text{K}$

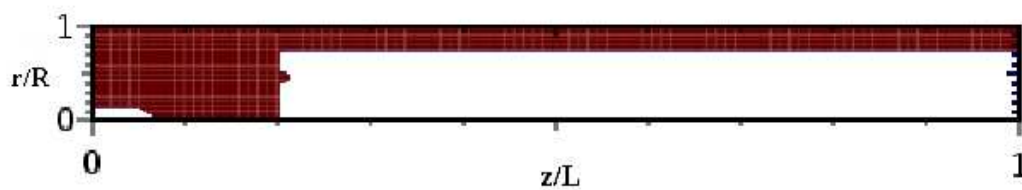
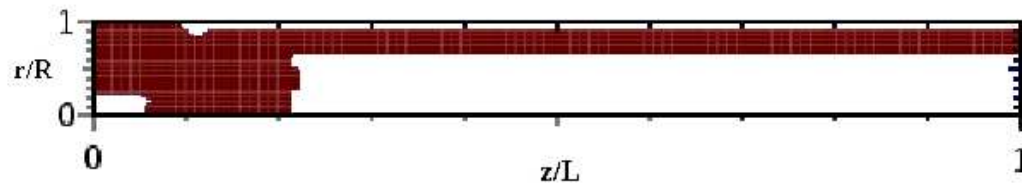
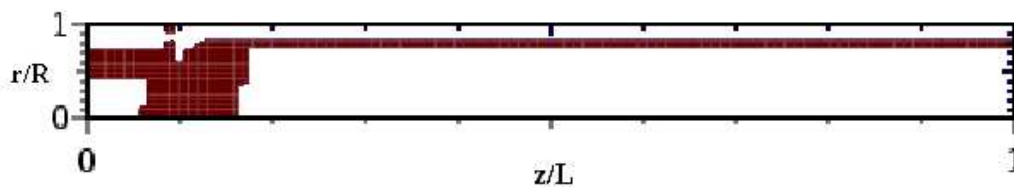
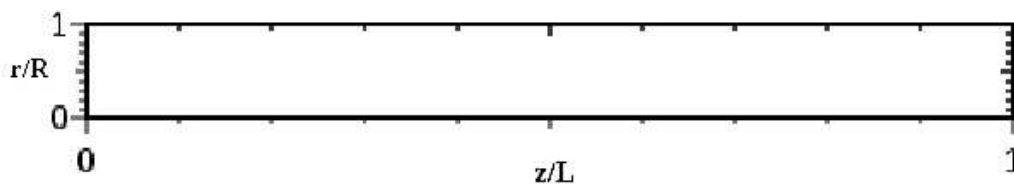
Le régime stationnaire en vitesse et en température est atteint pour un temps de $t = 90.270$ s. A partir de cet instant, on modifie la condition à la paroi en température pour que l'écart en température $\Delta\Theta$ soit de 40K . Désormais, les nombres de Bingham en entrée et en sortie de la conduite sont respectivement $\mathcal{Bi}_{\text{Inlet}} = 0.02$ et $\mathcal{Bi}_{\text{Outlet}} = 1.31$. Finalement, d'après la FIG. III-13, le refroidissement du fluide continue en aval de la conduite. Comme la

température est basse, la contrainte seuil est élevée et l'écoulement ralentit. Ainsi, les effets diffusifs deviennent prédominants et le refroidissement s'accélère.

(a) $t = 90.270$ s(b) $t = 90.602$ s(c) $t = 195.517$ sFIG. III-13 Evolution au cours du temps de la température pour $\Delta\Theta = 40\text{K}$

La FIG. III-14 présente l'évolution au cours du temps des zones cisillées/non-cisillées pour un écart de température $\Delta\Theta = 40\text{K}$. Une zone non-cisillée ou « zone morte » apparaît près de la paroi à partir du temps $t = 90.602$ s. Puisque la température est très faible près de la paroi, la contrainte seuil est très élevée. Ainsi, la pression constante au cours du temps imposée en entrée, n'est plus suffisante pour déplacer le fluide près de la paroi. Localement, comme la contrainte τ est inférieure à la contrainte seuil τ_y , le modèle de Bingham donne $\mathbf{D} = 0$ et impose une vitesse constante dans cette zone. Or comme il y a une condition d'adhérence à la paroi, la vitesse est nulle dans cette région et le fluide ne peut s'écouler ; il s'agit d'une zone morte. Ensuite, le refroidissement s'accélérait, cette zone morte croît radialement jusqu'à atteindre le centre de la conduite et provoquer l'arrêt de l'écoulement au temps $t = 90.778$ s. Finalement, la contrainte τ est inférieure à la contrainte seuil $\tau_y(\Theta_{\text{Ext}})$ du fluide dans toute la section. La pression appliquée en entrée de la conduite n'est donc pas suffisante pour assurer l'écoulement.

L'évolution au cours du temps du débit massique est présentée sur la FIG. III-15. Le débit massique est adimensionné par le débit massique obtenu pour l'état stationnaire Q_{Steady} (à $t = 90.270$ s). On note un pic du débit massique au début du calcul. En effet, puisque le fluide est à la température Θ_{Inlet} , la contrainte seuil et donc la viscosité apparente est faible

(a) $t = 90.270$ s(b) $t = 90.602$ s(c) $t = 90.760$ s(d) $t = 90.778$ sFIG. III-14 Evolution au cours du temps des zones cisailées/non-cisailées pour $\Delta\Theta = 40\text{K}$

et le débit est grand. Cependant, lorsque le fluide refroidit, la viscosité apparente augmente et le débit diminue jusqu'à atteindre un régime stationnaire. Ensuite, lorsque le nouvel écart de température $\Delta\Theta = 40\text{K}$ est imposé au temps $t = 90.270$ s, on observe une chute du débit massique due au refroidissement, jusqu'à ce que l'écoulement s'arrête.

Cette brusque diminution du débit est mise en évidence sur la FIG. III-16, zoom de la FIG. III-15 entre le temps $t = 90$ s et $t = 91$ s. En fait, l'écoulement s'arrête très rapidement (0.6 s) car les paramètres thermiques (C_p et λ_f) ont été choisis afin d'amplifier les effets conductifs. En effet, les valeurs données aux paramètres thermiques ne représentent pas la réalité physique, mais permettent de mettre en avant les phénomènes physiques engendrés par une

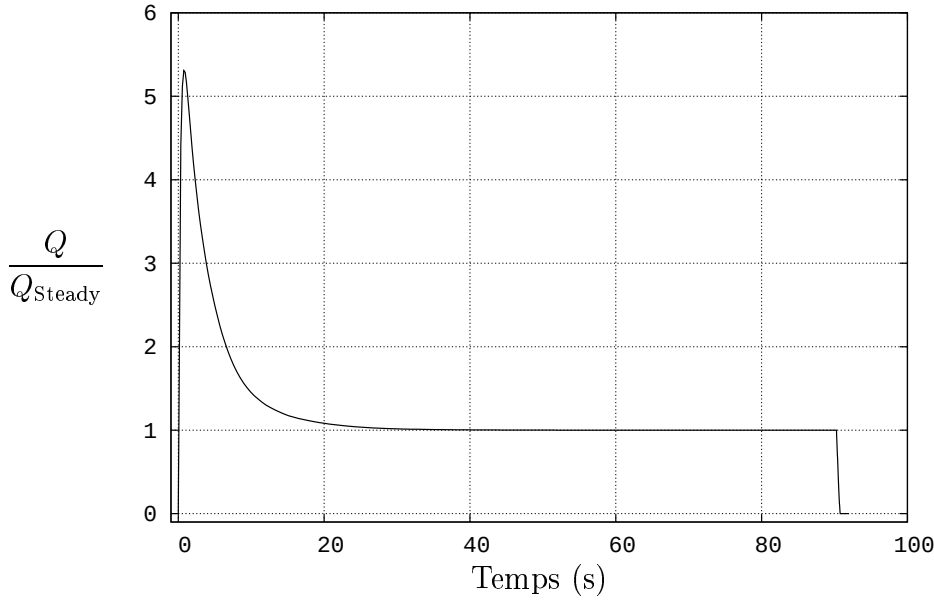


FIG. III-15 Evolution au cours du temps du débit massique de l'écoulement non-isotherme d'un fluide de Bingham dont la contrainte seuil dépend de la température, lorsque l'écart de température $\Delta\Theta$ augmente de 25K à 40K au temps $t = 90.270$ s

diminution de la température extérieure. Ainsi, lorsque la nouvelle différence de température est imposée, la vitesse d'écoulement étant faible, le refroidissement par conduction est très rapide et l'écoulement s'arrête en moins de 1 s.

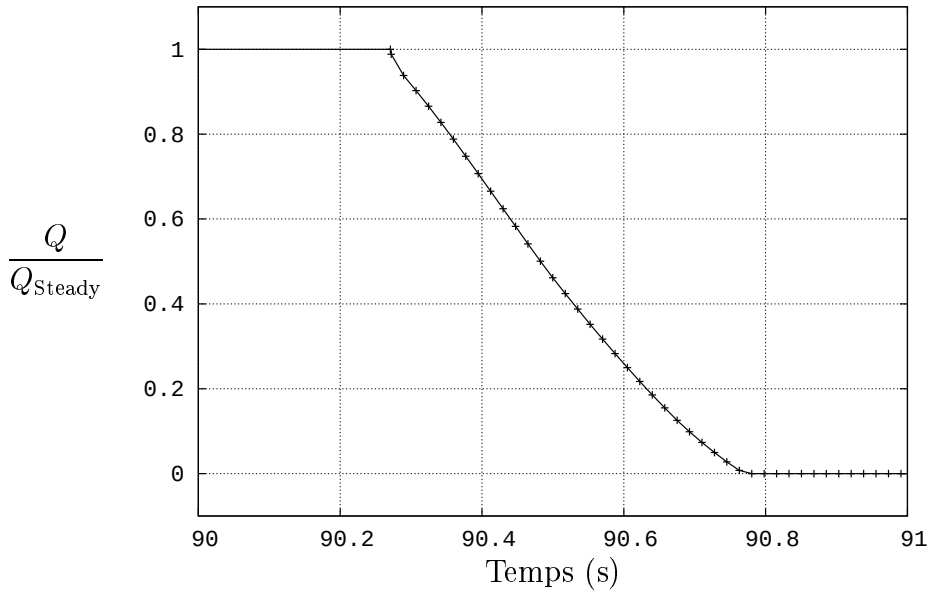


FIG. III-16 Evolution entre les temps $t = 90$ s et $t = 91$ s du débit massique de l'écoulement non-isotherme d'un fluide de Bingham dont la contrainte seuil dépend de la température, lorsque l'écart de température $\Delta\Theta$ augmente de 25K à 40K au temps $t = 90.270$ s

Ainsi, l'influence des effets thermiques sur l'écoulement d'un brut paraffinique est mise en avant, puisqu'une forte chute de la température peut provoquer le blocage de la conduite. D'autre part, l'algorithme général associé à la technique de Lagrangien augmenté fait preuve de robustesse et de stabilité puisqu'il est capable de converger vers une solution représentant une situation de « non-écoulement ».

3 Application au redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique

Nous présentons dans cette section l'influence de chacune des propriétés d'un brut paraffinique lors du redémarrage. D'abord, nous analysons les résultats obtenus pour l'écoulement de deux fluides Newtoniens puis viscoplastiques, modélisé par une méthode VOF. Ensuite, nous évaluons l'influence de la compressibilité sur l'écoulement d'un fluide viscoplastique. Enfin, les effets combinés de la thixotropie et de la compressibilité sur le redémarrage d'un fluide viscoplastique sont identifiés.

3.1 Déplacement d'un fluide par un autre fluide

Lors du redémarrage d'un brut paraffinique, les opérateurs pétroliers injectent du brut chaud en entrée de la conduite pour déplacer le bouchon de gel. Ce déplacement d'un fluide par un autre fluide est modélisé par une méthode de *Volume of Fluid* dont les équations sont détaillées dans le *Chapitre II*. Nous présentons donc dans cette section des écoulements bi-fluides isothermes et incompressibles de fluides Newtoniens et viscoplastiques dans une conduite 2D axisymétrique. L'écoulement à l'état initial est décrit sur la FIG. III-17. Le fluide 1 (fluide rouge) déplace le fluide 2 (fluide bleu).

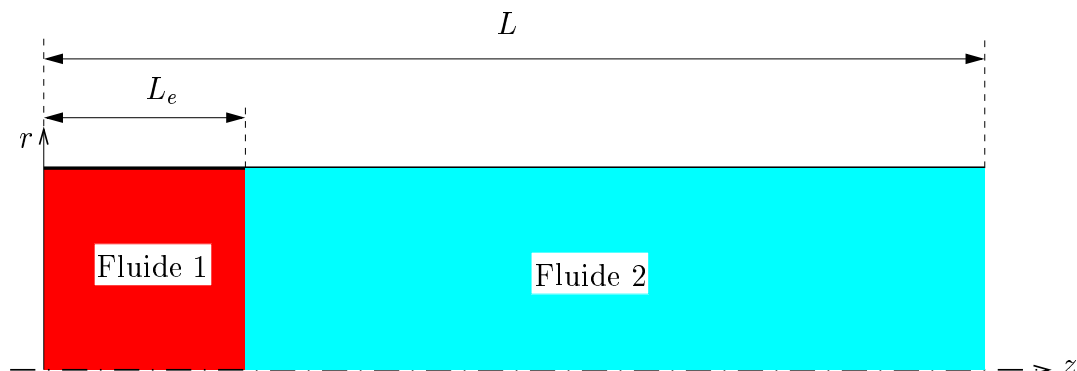


FIG. III-17 Etat initial d'un écoulement fluide-fluide

Nous présentons successivement l'écoulement de deux fluides identiques Newtoniens puis de deux fluides identiques de Bingham, afin de valider les résultats numériques obtenus. Puis, nous analysons les résultats obtenus lorsque les deux fluides de Bingham ont des propriétés différentes, situation correspondant à la réalité.

Solutions analytiques d'un écoulement 2D axisymétrique avec déplacement fluide-fluide

Dans le cas de l'écoulement de deux fluides identiques dans une géométrie simple, il est possible de calculer une solution analytique de l'efficacité de déplacement. En fait, en imposant un profil de vitesse solution à l'entrée de la conduite, l'écoulement est stationnaire et seule l'interface est convectée. Le calcul de l'efficacité de déplacement dans une conduite axisymétrique est illustré sur la FIG. III-18. L'efficacité est comprise entre 0 et 1 et correspond au rapport entre

le volume que le fluide 1 a déplacé et le volume initial de fluide 2. L'efficacité de déplacement est définie par :

$$E = \frac{V_{\text{Eff}}}{V_{\text{total}}} = \frac{\int_A \min(L_{\text{Eff}}, z) dS}{\int_0^{L_{\text{Eff}}} \int_A dS dz} \quad (\text{III.4})$$

où A représente l'aire de la section de la conduite.

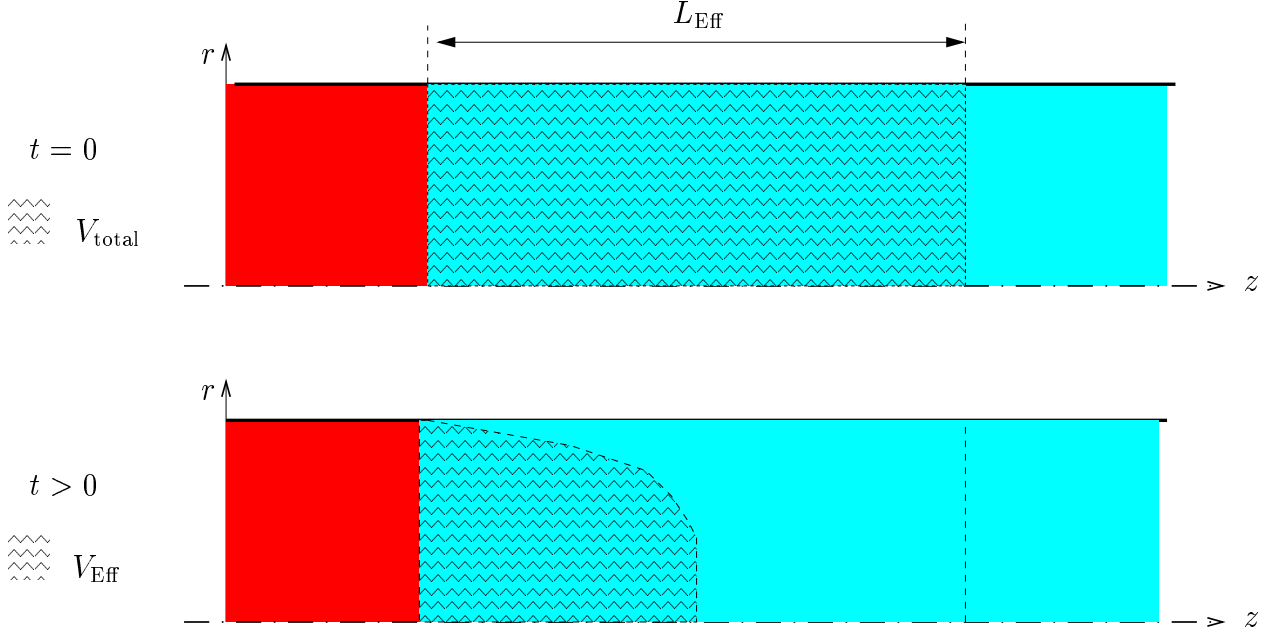


FIG. III-18 Calcul de l'efficacité de déplacement dans une conduite axisymétrique

Deux temps caractéristiques sont introduits :

- un temps caractéristique T^* défini par

$$T^* = t \frac{\bar{U}}{L_{\text{Eff}}} \quad (\text{III.5})$$

- le temps T_b pour lequel l'interface atteint la cote $z = L_{\text{Eff}}$, défini par

$$T_b = \frac{L_{\text{Eff}}}{U_{\text{max}}} \quad (\text{III.6})$$

où U_{max} est la vitesse maximale dans la section S .

D'après Wachs [59], l'efficacité de déplacement pour un fluide Newtonien et pour un fluide de Bingham, s'écoulant dans une conduite 2D axisymétrique s'écrit :

- Cas d'un fluide Newtonien

On détermine facilement les vitesses caractéristiques :

$$\bar{U} = \frac{hR^2}{8\mu} \quad (\text{III.7})$$

$$U_{\text{max}} = \frac{hR^2}{4\mu} \quad (\text{III.8})$$

Ainsi, l'efficacité de déplacement en fonction de T^* s'écrit :

$$E = \int_0^1 \min(1, 2T^*(1 - u^2)) u \, du \quad (\text{III.9})$$

Finalement, selon la position de l'interface, nous obtenons :

1. si $t < T_b$, soit $T^* < \frac{1}{2}$:

$$E(T^*) = T^* \quad (\text{III.10})$$

2. si $t = T_b$, soit $T^* = \frac{1}{2}$:

$$E(T^*) = \frac{1}{2} \quad (\text{III.11})$$

3. si $t > T_b$, soit $T^* > \frac{1}{2}$:

$$E(T^*) = 1 - \frac{1}{4T^*} \quad (\text{III.12})$$

- Cas d'un fluide de Bingham

Les vitesses caractéristiques de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite axisymétrique s'écrivent :

$$\bar{U} = \frac{hR^2}{8\mu} \left(1 - \frac{4}{3}\mathcal{B}i + \frac{1}{3}\mathcal{B}i^4 \right) \quad (\text{III.13})$$

$$U_{\max} = \frac{hR^2}{4\mu} (1 - \mathcal{B}i)^2 \quad (\text{III.14})$$

On pose $\alpha = 1 - \frac{4}{3}\mathcal{B}i + \frac{1}{3}\mathcal{B}i^4$. Finalement, selon la position de l'interface, nous obtenons :

1. si $t < T_b$, soit $T^* < \frac{\alpha}{2(1 - \mathcal{B}i)^2}$:

$$E(T^*) = T^* \quad (\text{III.15})$$

2. si $t = T_b$, soit $T^* = \frac{\alpha}{2(1 - \mathcal{B}i)^2}$:

$$E(T^*) = \frac{\alpha}{2(1 - \mathcal{B}i)^2} \quad (\text{III.16})$$

3. si $t > T_b$, soit $T^* > \frac{\alpha}{2(1 - \mathcal{B}i)^2}$:

$$E(T^*) = \beta^2 + \frac{4T^*}{\alpha} \left(\frac{1}{4} - \frac{\mathcal{B}i}{3} - (1 - 2\mathcal{B}i)\frac{\beta^2}{2} - \frac{2}{3}\mathcal{B}i\beta^3 + \frac{\beta^4}{4} \right) \quad (\text{III.17})$$

$$\text{avec } \beta = \mathcal{B}i + \sqrt{(1 - \mathcal{B}i)^2 - \frac{\alpha}{2T^*}}.$$

Cas de deux fluides Newtoniens

- **Validation sur l'écoulement de deux fluides Newtoniens identiques**

Nous comparons les résultats obtenus à l'aide du code StarWaCS 2D avec la solution analytique de l'efficacité de déplacement calculée précédemment pour deux fluides Newtoniens. Un profil de vitesse est imposée à l'entrée de la conduite tel que $\mathcal{R}e_1 = \mathcal{R}e_2 = 0.01$. $\mathcal{R}e_1$ et $\mathcal{R}e_2$ sont respectivement les nombres de Reynolds du fluide 1 et du fluide 2. Nous comparons donc l'évolution de l'efficacité de déplacement en fonction du temps caractéristique T^* sur la FIG. III-19.

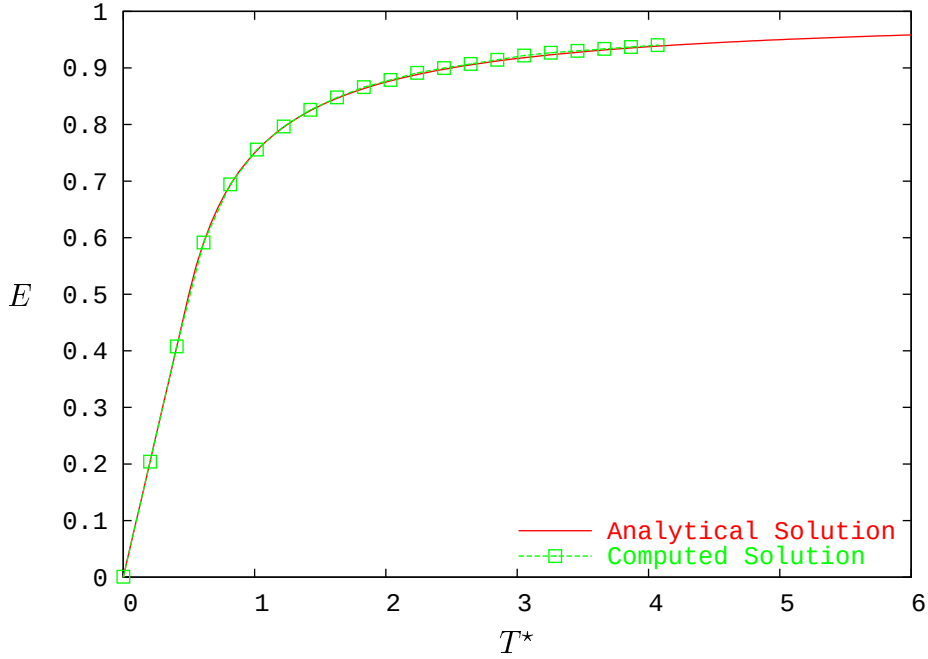


FIG. III-19 Efficacité de déplacement pour deux fluides Newtoniens identiques

Nous constatons que l'accord entre la solution analytique et la solution numérique est très satisfaisant.

- **Écoulement de deux fluides Newtoniens différents**

Un profil de vitesse est imposée à l'entrée de la conduite tel que $\mathcal{R}e_1 = 17$ et $\mathcal{R}e_2 = 34$. On définit le rapport des viscosités N_μ du fluide 1 sur le fluide 2 par :

$$N_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (\text{III.18})$$

où μ_1 et μ_2 sont respectivement les viscosités dynamiques du fluide 1 et du fluide 2. Nous présentons les résultats de l'écoulement de deux fluides Newtoniens dont le rapport de viscosités est $N_\mu = 0.5$. La FIG. III-20 indique que l'efficacité de déplacement E pour $N_\mu = 0.5$ est inférieure à l'efficacité pour $N_\mu = 1$. En effet, l'efficacité de déplacement est plus faible lorsque le fluide déplacé possède une viscosité plus grande que le fluide entrant. La FIG. III-21 montre l'évolution au cours du temps de la fonction couleur. La forme de l'interface met en évidence la pénétration du fluide 1 dans le fluide 2, caractéristique d'un phénomène de digitation visqueuse lorsque le rapport de viscosité N_μ est inférieure à 1. D'autre part, les bonnes propriétés du schéma TVD utilisé pour résoudre l'équation de transport (II.38) sont mises en évidence sur la FIG. III-21. En effet, l'interface est nette

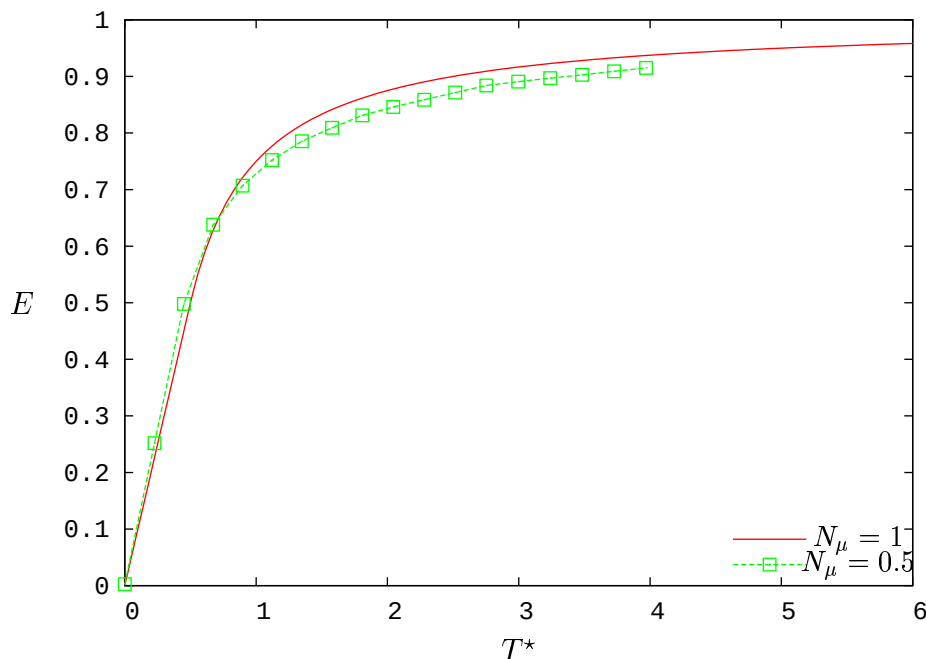


FIG. III-20 Efficacité de déplacement pour deux fluides Newtoniens de différentes viscosités avec $N_\mu = 0.5$

et les effets de diffusion sont faibles et se limitent à deux mailles de part et d'autre de l'interface.

La FIG. III-22 présente l'évolution au cours du temps de la chute de pression dans la conduite. On identifie l'interface aux premiers instants du calcul par la rupture de pente de la pression. La pente est plus faible dans le fluide entrant puisque la viscosité est plus faible. Lorsque le fluide entrant a rempli la conduite, nous retrouvons un écoulement de type monophasique avec une chute de pression linéaire.

La FIG. III-23 met en évidence l'évolution au cours du temps du profil de vitesse axiale en sortie de la conduite. Au temps $t = 50.065$ s, on identifie clairement sur le profil de vitesse que le fluide 1 atteint la sortie de la conduite. En effet, on distingue une « enflure » au centre de la conduite dû à la différence de viscosité du fluide entrant. Ensuite, cet « enflure » augmente radialement au cours du temps puisque la proportion de fluide 1 dans la section de sortie augmente jusqu'à occuper toute la section lorsque le fluide 2 sera totalement sorti. Ce profil de vitesse original est caractéristique d'un écoulement stratifié. En effet, sur la dernière section de la conduite, depuis la paroi jusqu'au centre de l'écoulement, on rencontre successivement une couche du fluide 2 et une couche du fluide 1.

Cas de 2 fluides de Bingham

- **Validation sur l'écoulement de 2 fluides de Bingham identiques**

Un profil de vitesse est imposé tel que $\mathcal{R}e_1 = \mathcal{R}e_2 = 0.07$ et $\bar{\mathcal{B}}i_1 = \bar{\mathcal{B}}i_2 = 11.29$. $\bar{\mathcal{B}}i_1$ et $\bar{\mathcal{B}}i_2$ sont respectivement les nombres de Bingham des fluides 1 et 2.

Nous comparons l'évolution de l'efficacité de déplacement en fonction du temps caractéristique T^* sur la FIG. III-24.

Une nouvelle fois, l'accord entre la solution analytique et la solution numérique est très satisfaisant.

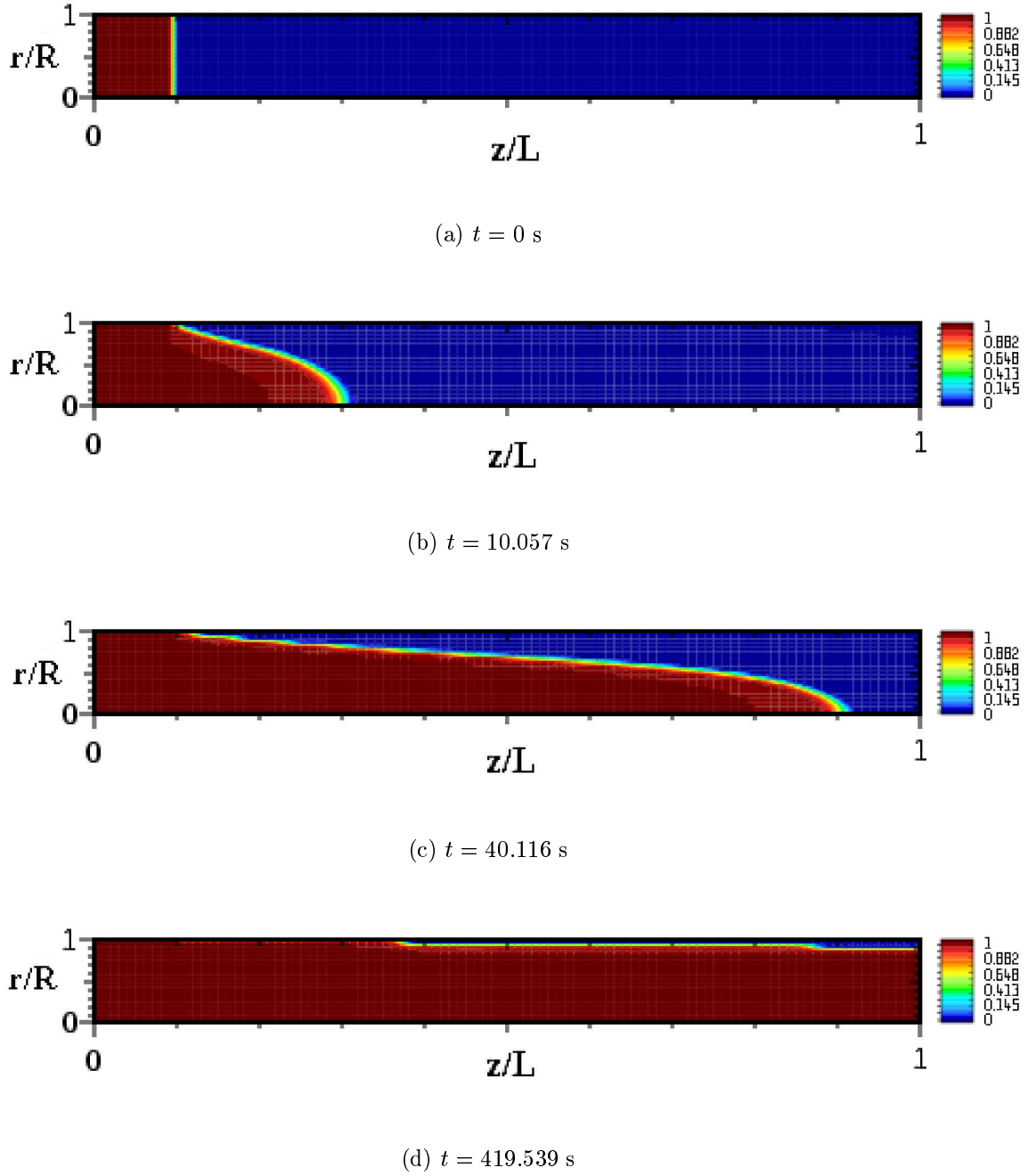


FIG. III-21 Evolution au cours du temps de la fonction couleur pour l'écoulement de deux fluides Newtoniens de différentes viscosités avec $N_\mu = 0.5$

- **Écoulement de 2 fluides de Bingham avec des contraintes seuil différentes**

On définit le rapport des contraintes seuil N_{τ_y} du fluide 1 sur le fluide 2 par :

$$N_{\tau_y} = \frac{\tau_{y1}}{\tau_{y2}} \quad (\text{III.19})$$

où τ_{y1} et τ_{y2} sont respectivement les contraintes seuil du fluide 1 et du fluide 2.

Lorsqu'un fluide viscoplastique s'écoulant dans une conduite est déplacé par un autre fluide viscoplastique, il est possible que le fluide déplacé laisse une couche statique à la paroi. Ceci se produit uniquement lorsque la contrainte seuil du fluide déplacé est plus

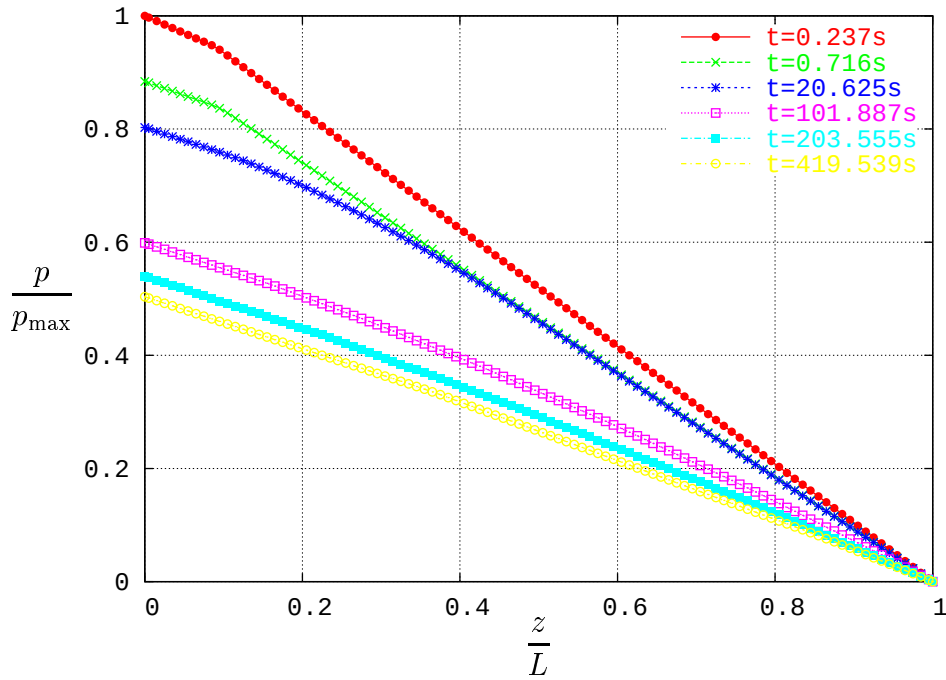


FIG. III-22 Evolution au cours du temps de la chute de pression pour l'écoulement de deux fluides Newtoniens de différentes viscosités avec $N_\mu = 0.5$

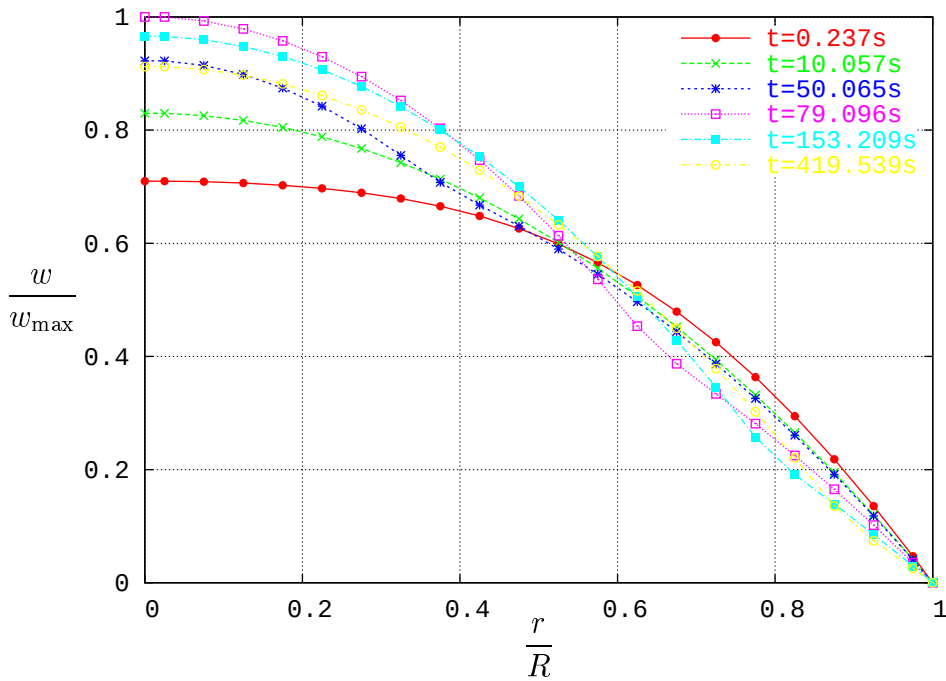


FIG. III-23 Evolution au cours du temps du profil de vitesse axiale en sortie de la conduite pour l'écoulement de deux fluides Newtoniens de différentes viscosités avec $N_\mu = 0.5$

grande que la contrainte seuil du fluide entrant. En fait, ce phénomène s'explique par un effet mécanique qui apparaît quand la contrainte seuil du fluide déplacé τ_{y2} ne dépasse pas la contrainte de cisaillement à la paroi τ_w . Une étude réalisée par Allouche et al. [3] sur la cimentation des *casings* dans les puits de forage met en évidence ce phénomène. En fait, l'étape de cimentation consiste à chasser et remplacer la boue de forage par du ciment afin d'assurer la stabilité et l'étanchéité du puits. Ce processus de cimentation sera d'autant plus efficace s'il ne reste plus de boue dans la conduite et en particulier à la

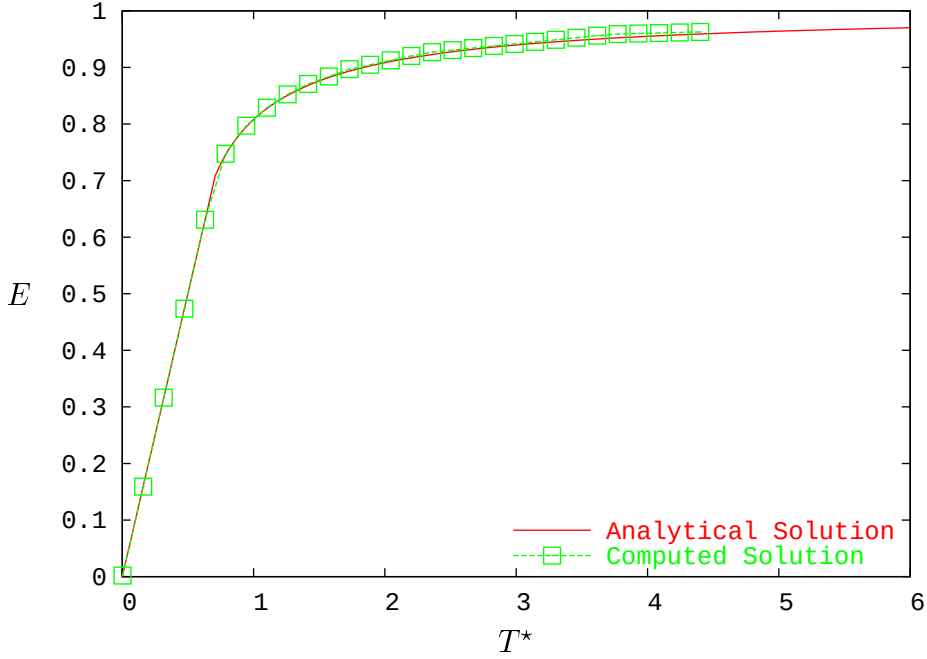


FIG. III-24 Efficacité de déplacement pour deux fluides de Bingham identiques

paroi. A partir d'une analyse mathématique simple d'un écoulement 1D plan, Allouche et al. proposent un critère pour déterminer la présence ou l'absence d'une couche statique à la paroi dans le cas de deux fluides de Bingham . Ce critère s'écrit :

$$N_{\tau_y} > \frac{1}{\xi(\bar{\mathcal{B}}_{i_1}, 1)} \implies \text{pas de couche statique à la paroi} \quad (\text{III.20})$$

$$N_{\tau_y} \leq \frac{1}{\xi(\bar{\mathcal{B}}_{i_1}, 1)} \implies \text{présence d'une couche statique à la paroi}$$

où $\xi(\bar{\mathcal{B}}_{i_1}, 1)$ est la racine de l'équation :

$$2\xi^3 - \left(3 + \frac{6}{\bar{\mathcal{B}}_{i_1}}\right)\xi^2 + 1 = 0 \quad (\text{III.21})$$

sachant que $\xi(\bar{\mathcal{B}}_{i_1}, 1) > 1$ pour $\bar{\mathcal{B}}_{i_1} > 0$.

On peut donner une signification physique à l'équation (III.21) en posant $\frac{1}{\xi(\bar{\mathcal{B}}_{i_1}, 1)} = \mathcal{B}_{i_1}$:

$$\bar{U} = \frac{\tau_{y_1} Y}{3\mu_1 \mathcal{B}_{i_1}} \left(1 - \frac{3}{2}\mathcal{B}_{i_1} + \frac{1}{2}\mathcal{B}_{i_1}^3\right) \quad (\text{III.22})$$

Nous retrouvons finalement l'expression de la vitesse moyenne de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans la demi-section d'un canal plan/plan de hauteur Y .

Cette analyse mathématique est maintenant adaptée à une conduite axisymétrique et on obtient alors l'expression suivante pour la vitesse moyenne de l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite de rayon R :

$$\bar{U} = \frac{\tau_{y_1} R}{4\mu_1 \mathcal{B}_{i_1}} \left(1 - \frac{4}{3}\mathcal{B}_{i_1} + \frac{1}{3}\mathcal{B}_{i_1}^4\right) \quad (\text{III.23})$$

Et le nombre de Bingham $\mathcal{B}i_1$ correspond à la racine de l'équation :

$$\mathcal{B}i_1^4 - 4\left(1 + \frac{3}{\bar{\mathcal{B}}i_1}\right)\mathcal{B}i_1 + 3 = 0 \quad (\text{III.24})$$

sachant que $\mathcal{B}i_1 < 1$ pour $\bar{\mathcal{B}}i_1 > 0$.

Finalement, on peut donner une forme simple du critère de présence ou d'absence de couche statique à la paroi, en fonction du rapport des contraintes seuil N_{τ_y} et du nombre de Bingham du fluide entrant $\mathcal{B}i_1$:

$$N_{\tau_y} > \mathcal{B}i_1 \implies \text{pas de couche statique à la paroi} \quad (\text{III.25})$$

$$N_{\tau_y} \leq \mathcal{B}i_1 \implies \text{présence d'une couche statique à la paroi}$$

Nous proposons une illustration de ce phénomène de couche statique à la paroi. Nous imposons un profil de vitesse en entrée de la conduite axisymétrique tel que $\bar{\mathcal{B}}i_1 = 1$. Ensuite, l'équation (III.24) est résolue par une méthode de Newton et on obtient $\mathcal{B}i \approx 0.57$. Nous présentons donc deux cas avec deux rapports de contrainte seuil N_{τ_y} différents :

- Cas n°1 : $N_{\tau_y} = 0.8$, donc le critère (III.25) prédit qu'il n'y a pas de couche statique à la paroi.
- Cas n°2 : $N_{\tau_y} = 0.3$, d'après le critère (III.25), nous devrions observer une couche statique à la paroi.

Nous présentons d'abord les résultats pour le cas n°1. L'évolution de l'interface au cours du temps présentée sur la FIG. III-25 permet de conclure qu'il n'existe pas de couche statique à la paroi. En effet, le fluide 2 est déplacé sur toute la section de la conduite.

Cependant pour le cas n°2, l'évolution de l'interface au cours du temps représenté sur la FIG. III-26 montre clairement l'apparition d'une couche de fluide 2 (fluide bleu) à la paroi qui n'est pas déplacée par le fluide 1 (fluide rouge).

La visualisation des zones cisailées/non-cisailées sur la FIG. III-27 nous permet d'identifier que cette couche à la paroi est statique puisqu'elle correspond à une zone non-cisailée (région blanche). Cette zone morte à la paroi est de hauteur constante et n'évolue pas au cours du temps.

Les profils de vitesse axiale sur plusieurs sections le long de la conduite sont tracés sur la FIG. III-28. Le profil de vitesse axiale correspondant à la section $\frac{z}{L} = 0.30$ montre que le fluide est au repos dans la couche statique à la paroi, puisque la vitesse est strictement nulle dans cette zone.

Remarque :

On peut réécrire le critère (III.25) sous la forme suivante :

$$N_{\tau_y} \leq \mathcal{B}i_1 \iff \mathcal{B}i_2 \geq 1 \quad (\text{III.26})$$

D'après ce critère, il semble que l'écoulement devrait être arrêté puisque le nombre de Bingham est plus grand que 1. Cependant, la condition d'entrée étant de type vitesse imposée, il y a toujours un écoulement au sein de la conduite. En effet, pour un débit constant en entrée de la conduite, la pression à l'entrée de la conduite s'ajuste pour conserver l'écoulement comme le montre la FIG. III-29. Cependant, en imposant une pression constante au cours temps en entrée de la conduite, il semble impossible d'obtenir un écoulement stationnaire avec une couche statique à la paroi. C'est pourquoi tous les résultats présentés ci-dessus sont réalisés avec une condition d'entrée de type vitesse.

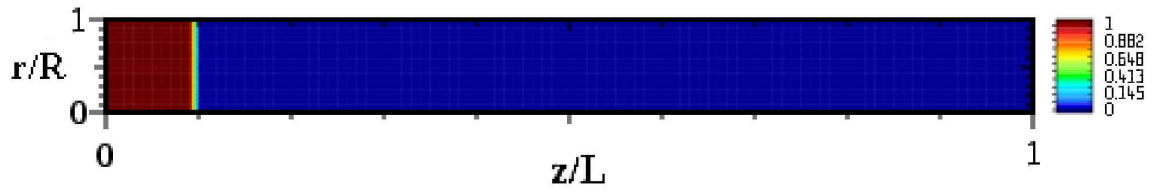
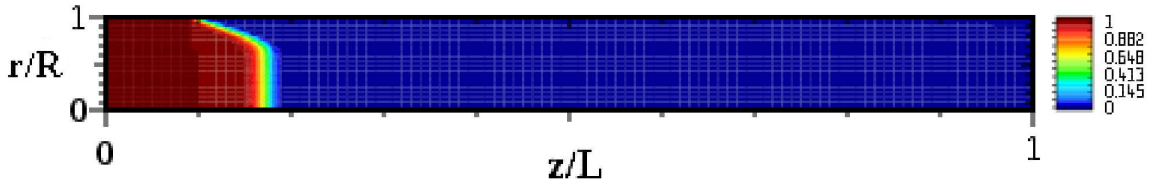
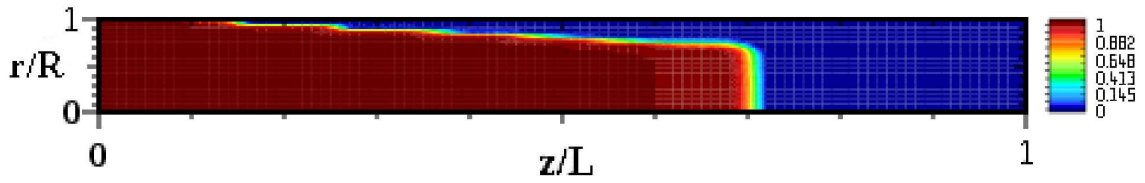
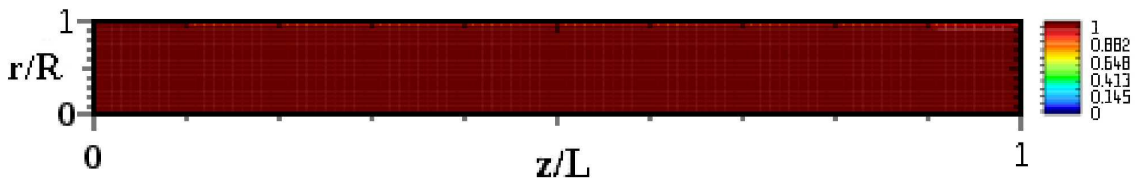
(a) $t = 0$ s(b) $t = 49.689$ s(c) $t = 400.204$ s(d) $t = 7416.807$ s

FIG. III-25 Evolution au cours du temps de la fonction couleur pour l'écoulement de deux fluides de Bingham de différentes contraintes seuil avec $N_{\tau_y} = 0.8$

Ainsi, les écoulements fluide-fluide Newtoniens et viscoplastiques présentés ont permis de valider les résultats numériques puisque l'évolution de l'efficacité présente un bon accord avec la solution analytique. De plus, nous avons mis en évidence l'apparition d'une couche statique à la paroi lors de l'écoulement de deux fluides viscoplastiques de contraintes seuil différentes. L'avantage apporté par la technique du Lagrangien augmenté est une nouvelle fois observé. En effet, la zone morte à la paroi est facilement identifiable puisqu'elle correspond à une région où le tenseur des taux de déformation est strictement nul.

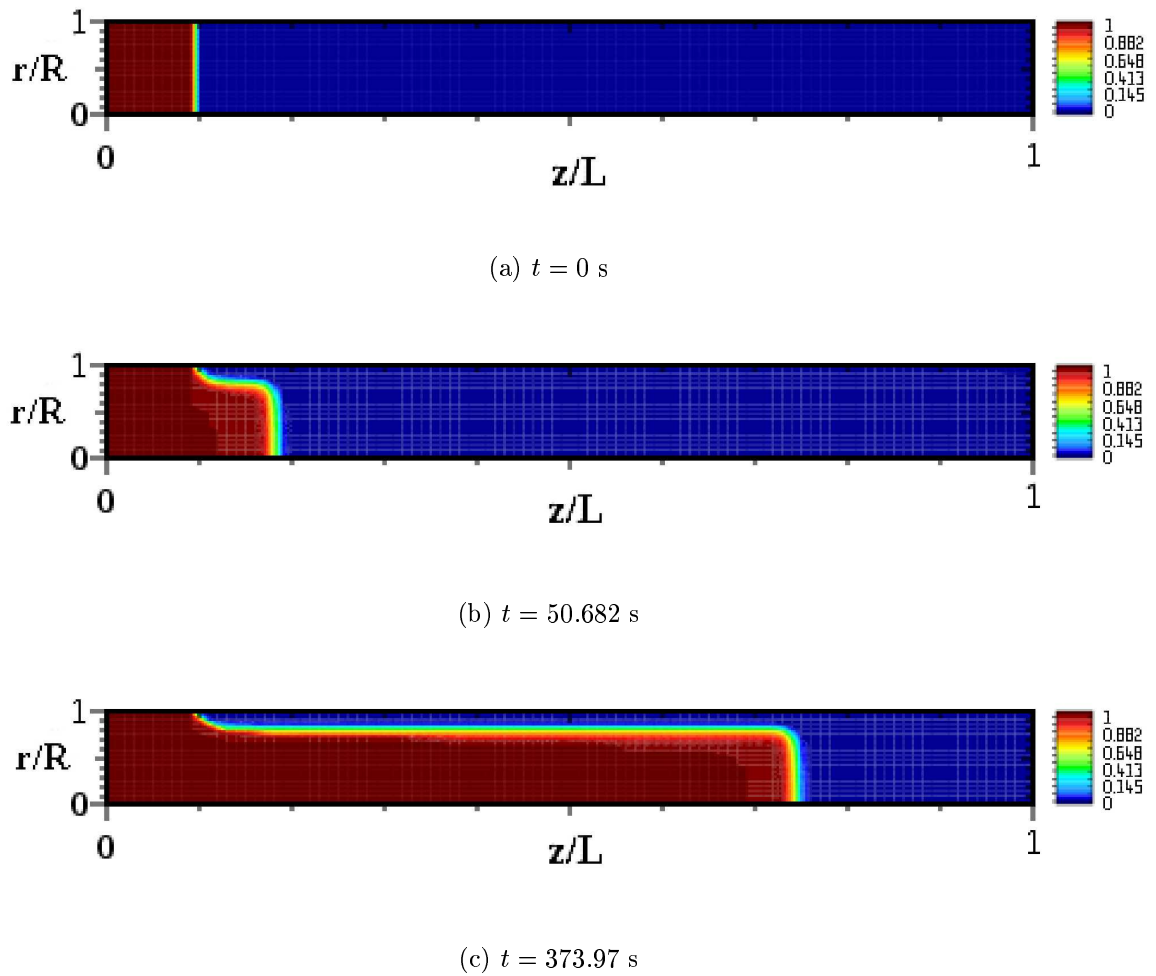


FIG. III-26 Evolution au cours du temps de la fonction couleur pour l'écoulement de deux fluides de Bingham de différentes contraintes seuil avec $N_{\tau_y} = 0.3$

3.2 Ecoulement d'un fluide viscoplastique compressible isotherme

Nous présentons dans cette section des simulations numériques concernant les écoulements faiblement compressibles d'un fluide viscoplastique. Nous analysons l'influence de la compressibilité et du nombre de Bingham sur cet écoulement. Les calculs présentés dans cette section sont réalisés avec une pression imposée en entrée de la conduite. La géométrie de la conduite est choisie telle que $\frac{L}{R} = 200$.

Ecoulement d'un fluide de Bingham compressible pour $Re = 1.5$, $Bi = 0.5$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

L'écoulement d'un fluide de Bingham compressible pour $Re = 1.5$, $Bi = 0.5$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$ est présenté dans cette section. Le rapport entre le débit massique Q et le débit massique Q_{steady} calculé pour l'état stationnaire, est tracé sur la FIG. III-30 en fonction du temps t . A l'instant initial, le fluide est au repos. Aux premiers instants, lorsque l'écoulement n'a pas redémarré en sortie de conduite, on observe un pic du débit massique en entrée qui dépasse la valeur de l'état stationnaire. L'état stationnaire est atteint lorsque les débits massiques en

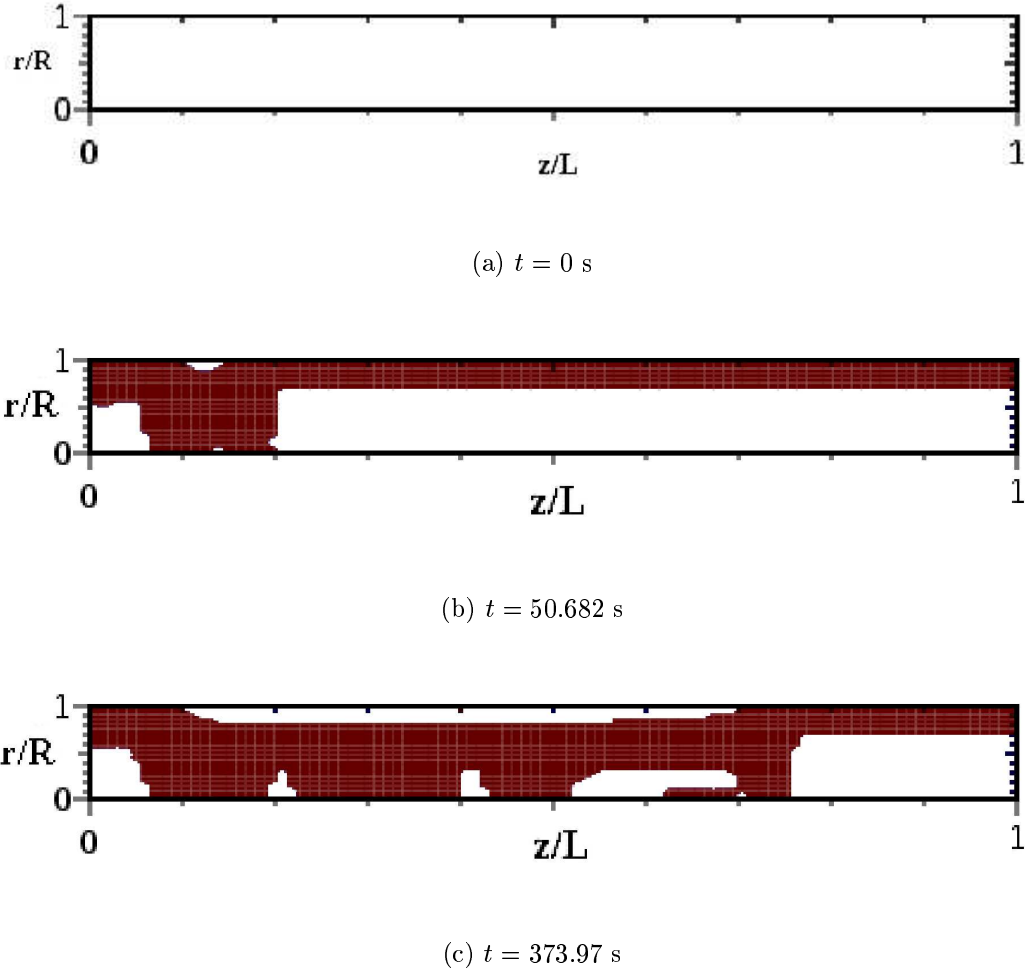


FIG. III-27 Evolution au cours du temps des zones cisailées/non-cisailées de l'écoulement de deux fluides de Bingham de différentes contraintes seuil avec $N_{\tau_y} = 0.3$

entrée et sortie sont égaux.

Sur la FIG. III-31, la pression est tracée en fonction de z/L à différents instants. Aux premiers instants, les profils de pression présentent une forme exponentielle, caractéristique d'un écoulement compressible. Dès le temps $t = 1.51$ s, les effets de la compressibilité disparaissent et la chute de pression devient linéaire. Cependant, le temps nécessaire pour atteindre le régime stationnaire en vitesse est plus long et est de $t = 40.1$ s.

La FIG. III-32 présente l'évolution en temps des profils de vitesse axiale à la sortie de la conduite, de l'instant où le fluide n'est pas encore redémarré (vitesse nulle) jusqu'à l'état stationnaire. Ainsi, au temps final on retrouve un profil de vitesse classique de l'écoulement établi d'un fluide de Bingham, avec semble-t-il, une région bouchon au centre de la conduite qui correspond à la moitié du rayon ($Bi = 0.5$).

Cependant, d'après la FIG. III-33, les profils de vitesse axiale d'entrée et de sortie à l'état stationnaire ($t = 40.1$ s) ne sont pas superposés puisque l'écoulement est compressible ($\nabla \cdot \mathbf{U} \neq 0$ d'après l'équation de conservation de la masse (II.35)). Ainsi, la vitesse axiale varie le long de la conduite, i.e. $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$. Selon les conclusions tirées dans la *Section III-2*, puisque la vitesse axiale varie le long de la conduite, le fluide est cisailé et il ne peut pas exister de zone bouchon.

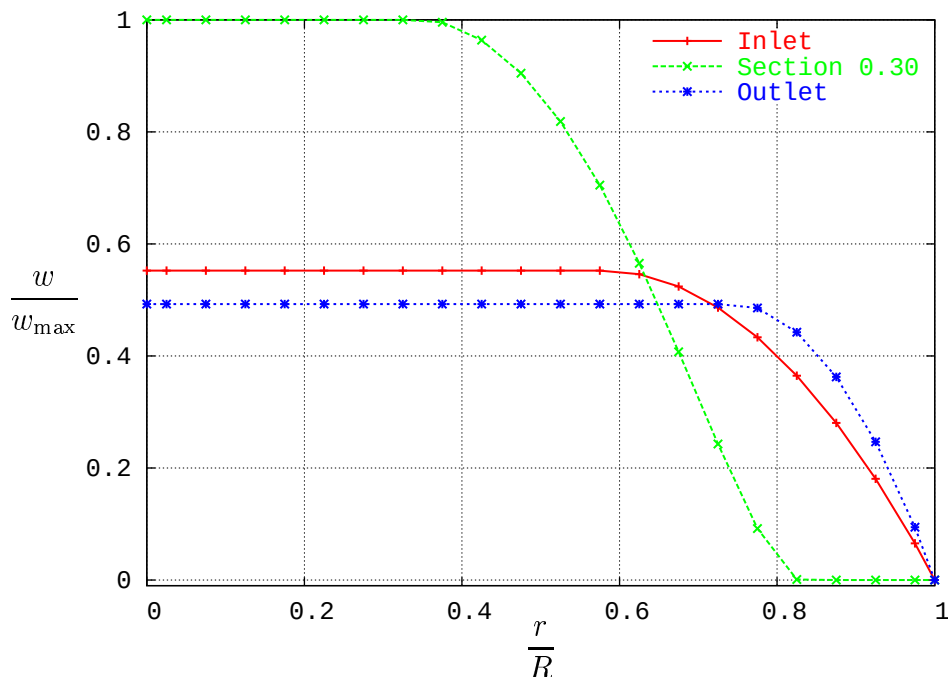


FIG. III-28 Profils de vitesse axiale sur plusieurs sections le long de la conduite pour l'écoulement de deux fluides de Bingham de différentes contraintes seuil avec $N_{\tau_y} = 0.3$

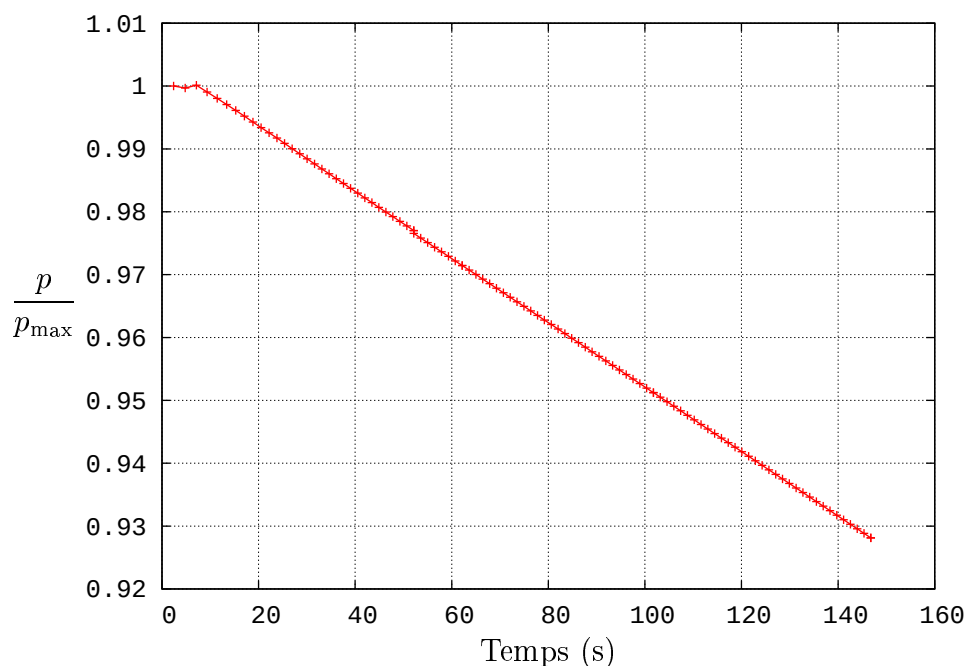


FIG. III-29 Evolution en temps de la pression à l'entrée de la conduite pour l'écoulement de deux fluides de Bingham de différentes contraintes seuil avec $N_{\tau_y} = 0.3$

La FIG. III-34 présente l'évolution au cours du temps des zones cisailées/non-cisailées. Les zones non-cisailées sont représentées par les régions blanches. La figure correspondant aux zones cisailées/non-cisailées à l'état stationnaire ($t = 40.1$ s) confirme la remarque précédente ; le fluide est cisailé dans toute la conduite et il n'existe pas de zone de bouchon. Nous pouvons également observer la propagation du front de compression au cours du temps, qui représente la frontière entre le fluide cisailé et le fluide encore au repos.

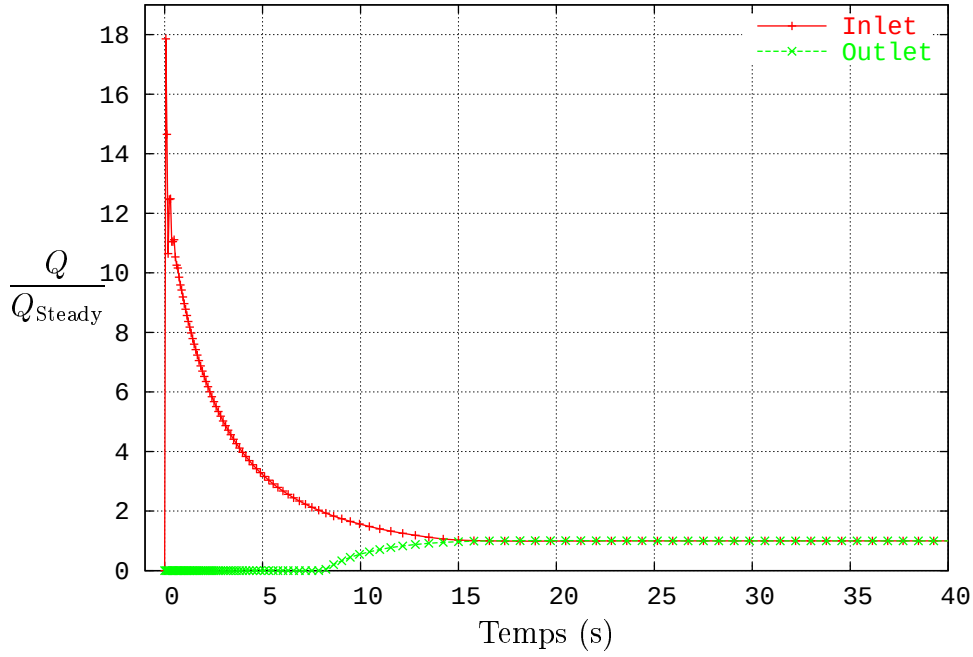


FIG. III-30 Evolution en temps des débits massiques d'entrée et de sortie de l'écoulement compressible d'un fluide Bingham pour $Re = 1.5$, $Bi = 0.5$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

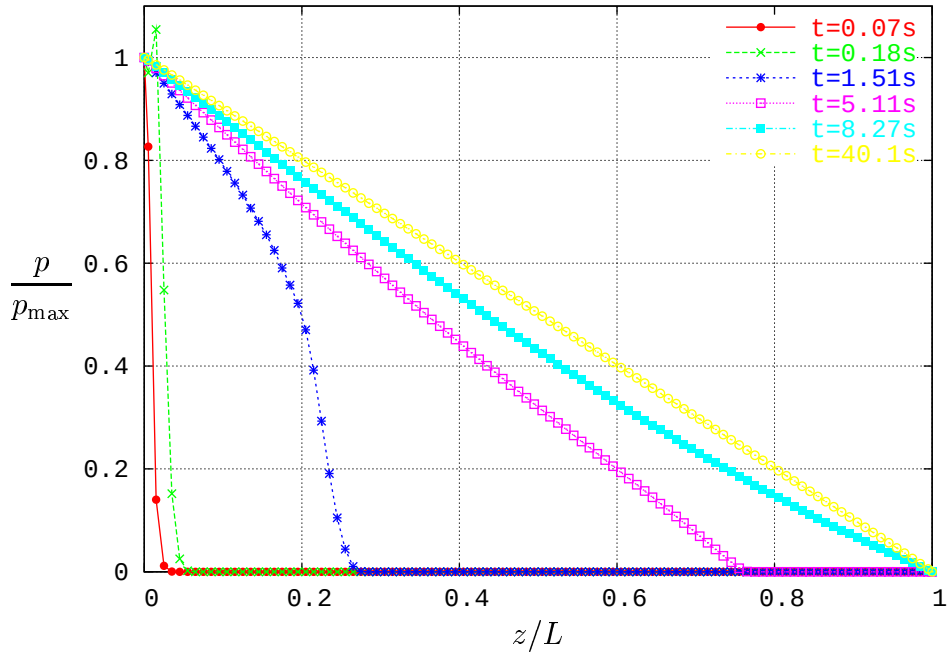


FIG. III-31 Evolution en temps de la chute de pression de l'écoulement compressible d'un fluide Bingham pour $Re = 1.5$, $Bi = 0.5$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

Influence du coefficient de compressibilité

Dans cette section, nous comparons les écoulements compressibles d'un fluide de Bingham ($Re = 1.5$ et $Bi = 0.5$) pour trois compressibilités différentes $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$, $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$. L'évolution en temps des débits massiques d'entrée et de sortie est présentée sur la FIG. III-35. Le pic du débit massique d'entrée est d'autant plus marqué que la compressibilité est grande. De plus, pour une faible compressibilité ($\mathcal{X}_\Theta = 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$), les débits

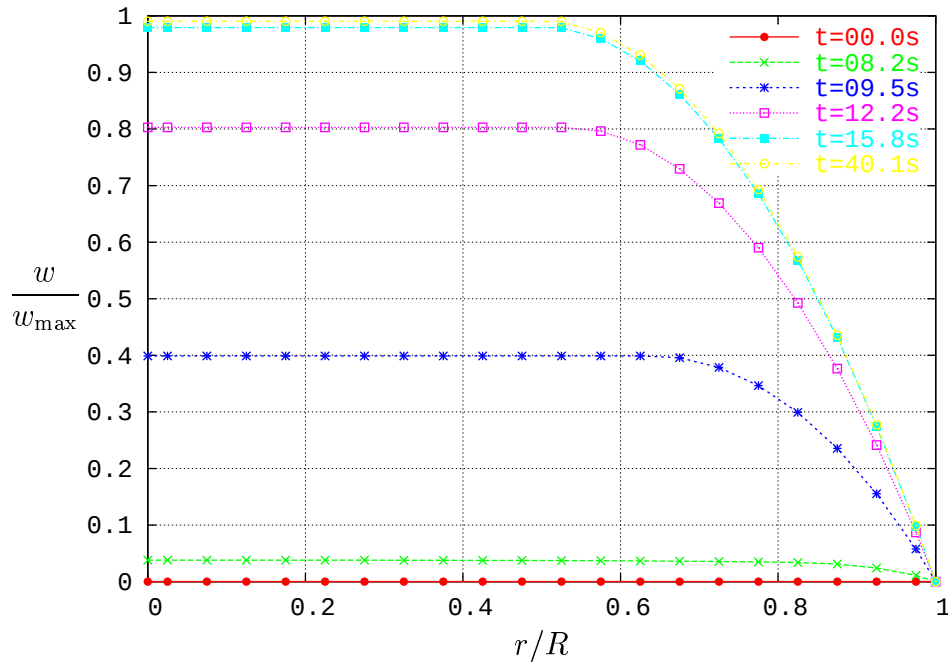


FIG. III-32 Evolution en temps des profils de vitesse axiale de sortie de l'écoulement compressible d'un fluide Bingham pour $\mathcal{Re} = 1.5$, $\mathcal{Bi} = 0.5$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

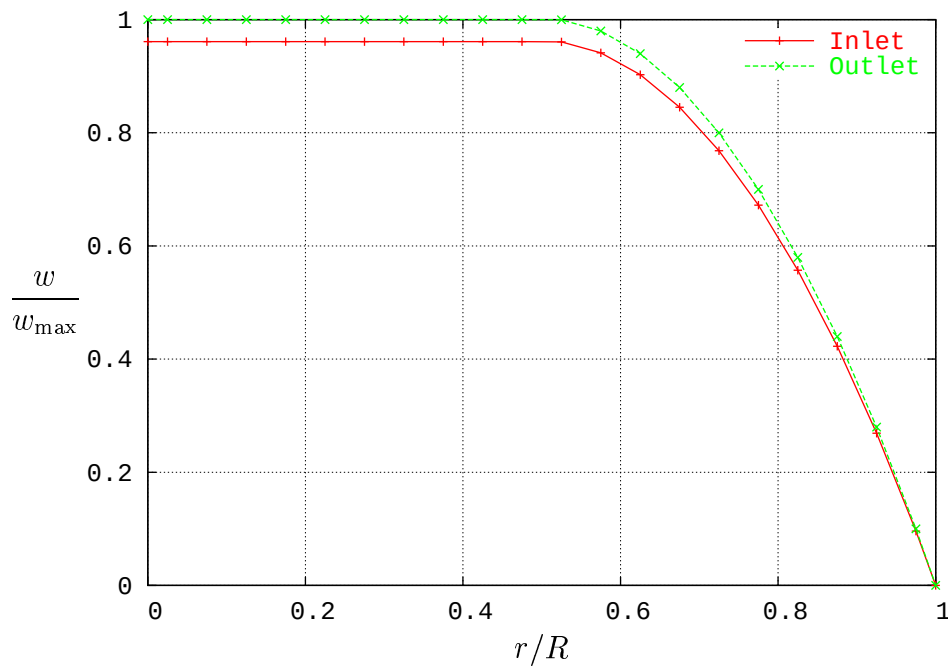


FIG. III-33 Profils de vitesse axiale d'entrée et de sortie de l'écoulement compressible d'un fluide Bingham pour $\mathcal{Re} = 1.5$, $\mathcal{Bi} = 0.5$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

massiques ne présentent pas d'oscillations et atteignent leurs valeurs stationnaires de façon monotone. D'autre part, plus la compressibilité est grande, plus l'écoulement en sortie redémarre tard. Quatre fois plus de temps est nécessaire pour redémarrer l'écoulement de compressibilité $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$ que l'écoulement de compressibilité $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$. Ainsi, le régime stationnaire est atteint plus rapidement si l'écoulement est faiblement compressible.

De plus, nous comparons les profils de pression pour une compressibilité de $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

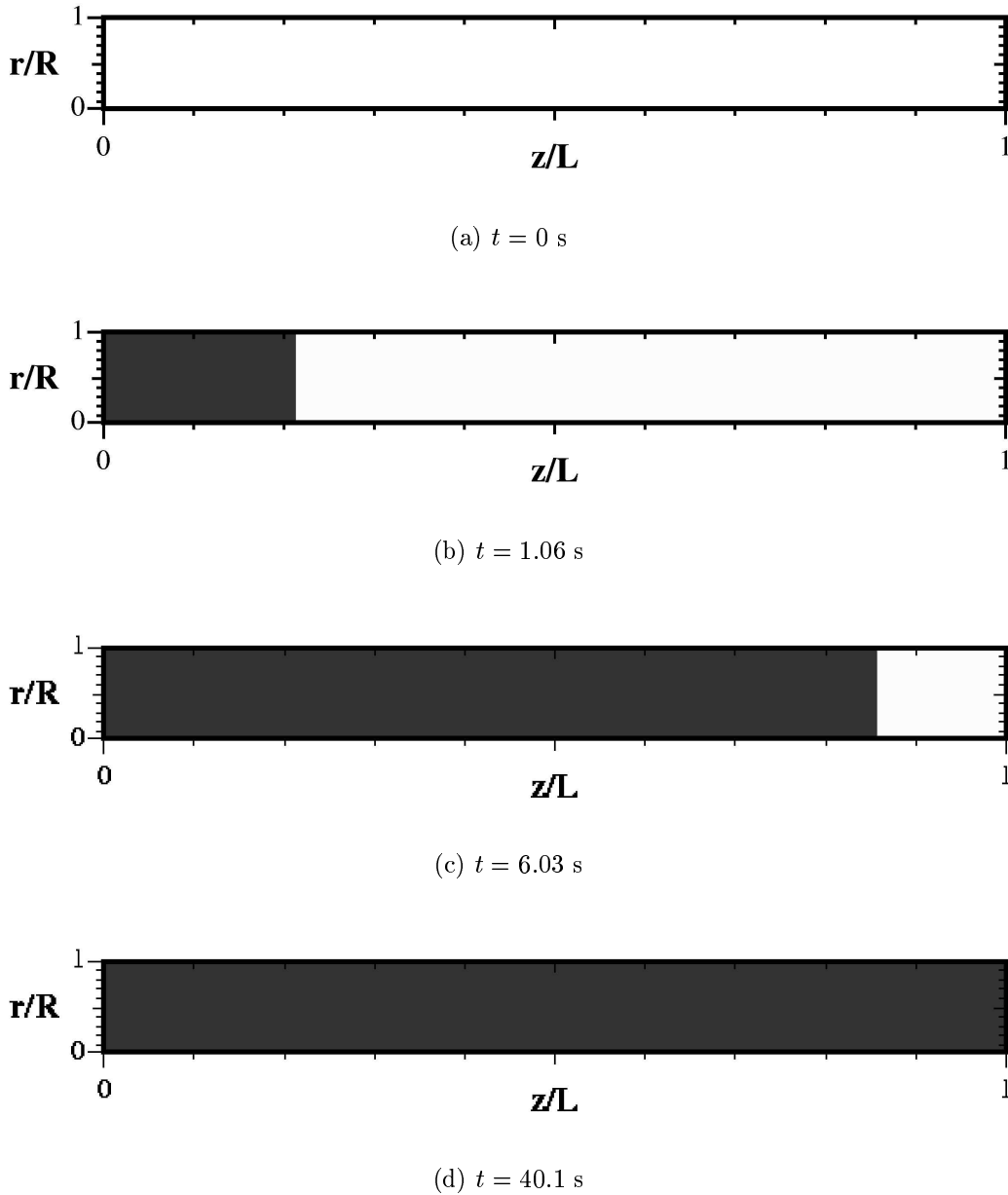
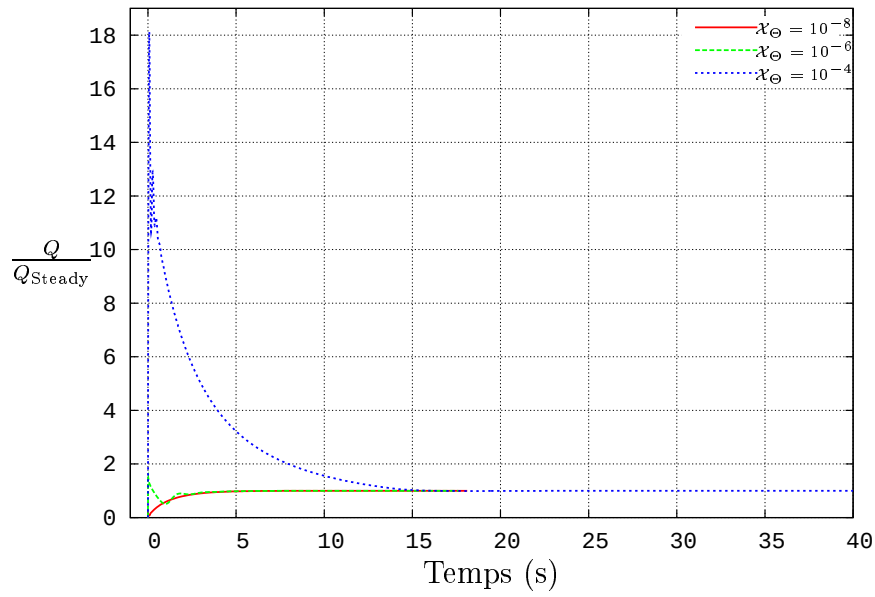


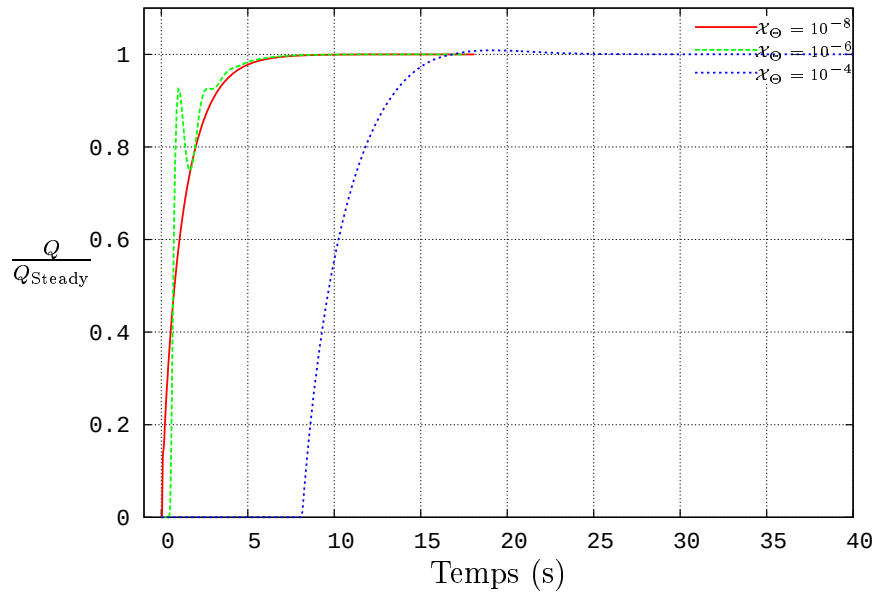
FIG. III-34 Evolution au cours du temps des zones cisailées/non-cisailées (respectivement les régions noires/blanches) de l'écoulement compressible d'un fluide de Bingham pour $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4}$ Pa^{-1} , $\mathcal{Re} = 1.5$ et $\mathcal{Bi} = 0.5$: (a) $t = 0$ s, (b) $t = 0.063$ s, (c) $t = 1.06$ s, (d) $t = 6.03$ s et (e) $t = 40.1$ s

(cf. FIG. III-31) et de $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-8}$ Pa^{-1} (cf. FIG. III-36). Lorsque la compressibilité est plus faible, le pic de pression observé aux premiers instants sur la FIG. III-31 n'existe plus et la forme exponentielle est moins marquée. Cependant, on observe que la pression oscille autour du profil de pression linéaire final. En effet, le profil de pression de l'instant $t = 0.09$ s a une forme concave et dépasse le profil linéaire avant d'atteindre le régime stationnaire.

Rappelons que lors du redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique, les compagnies pétrolières désirent connaître la pression à imposer en entrée, mais également le temps nécessaire pour retrouver les mêmes conditions d'écoulement précédant l'arrêt. Une forte compressibilité permet d'obtenir une importante chute de pression à l'entrée de la conduite, mais en contre



(a) Débit massique d'entrée



(b) Débit massique de sortie

FIG. III-35 Evolution au cours du temps des débits massiques d'entrée et de sortie de l'écoulement compressible d'un fluide de Bingham pour trois compressibilités différentes ($\mathcal{X}_\Theta = 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$, $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$) avec $\mathcal{R}e = 1.5$ et $\mathcal{B}i = 0.5$: (a) Débit massique d'entrée, (b) Débit massique de sortie

partie le temps de redémarrage de l'écoulement en sortie est plus long.

Remarque : Les pics observés sur les profils de pression et sur les débits d'entrée ont une signification physique. Cependant, nous observons également des oscillations comparables à du « bruit » qu'il faut sans doute attribuer à un artefact numérique.

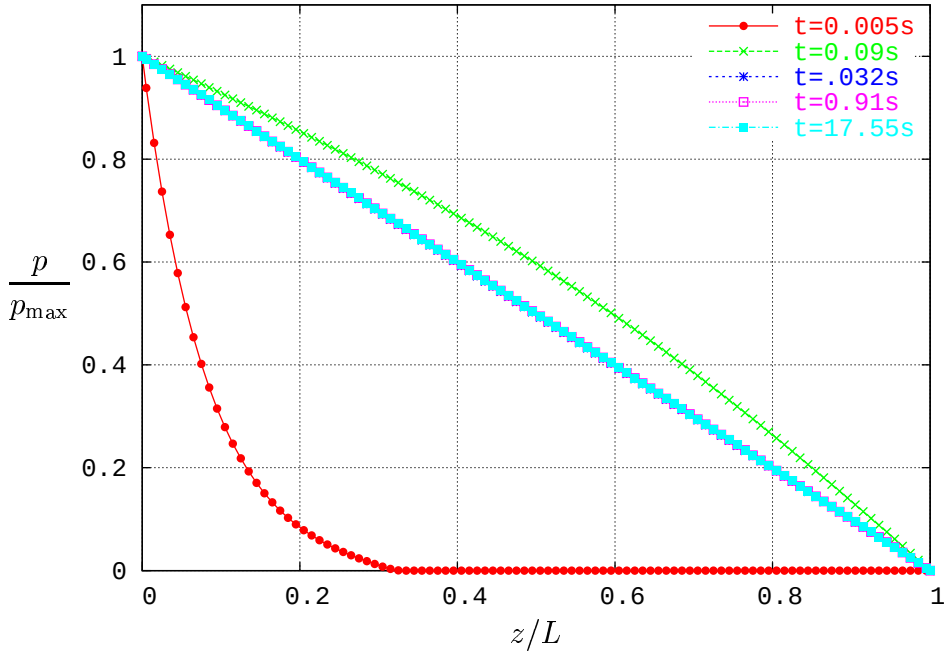


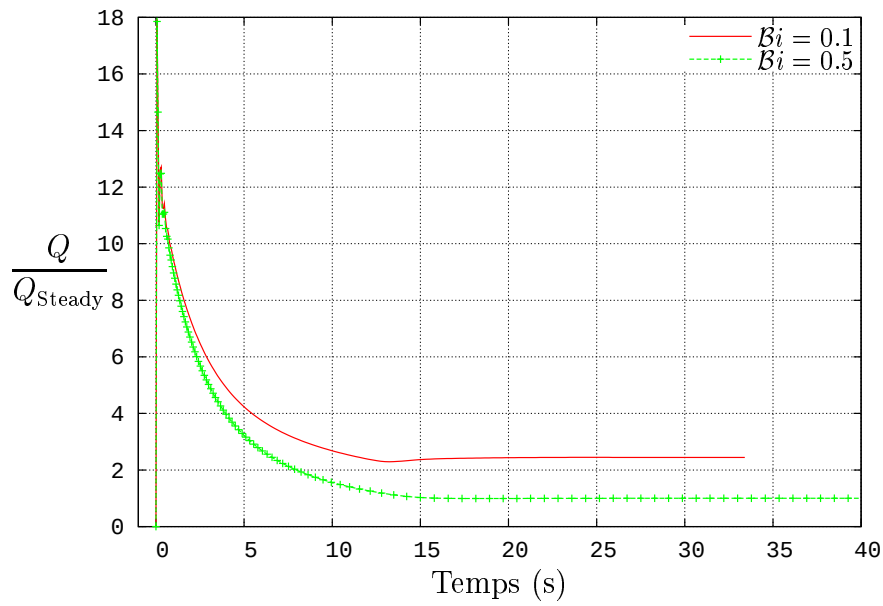
FIG. III-36 Evolution en temps de la chute de pression de l'écoulement compressible d'un fluide de Bingham pour $Re = 1.5$, $Bi = 0.5$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$

Influence du nombre de Bingham

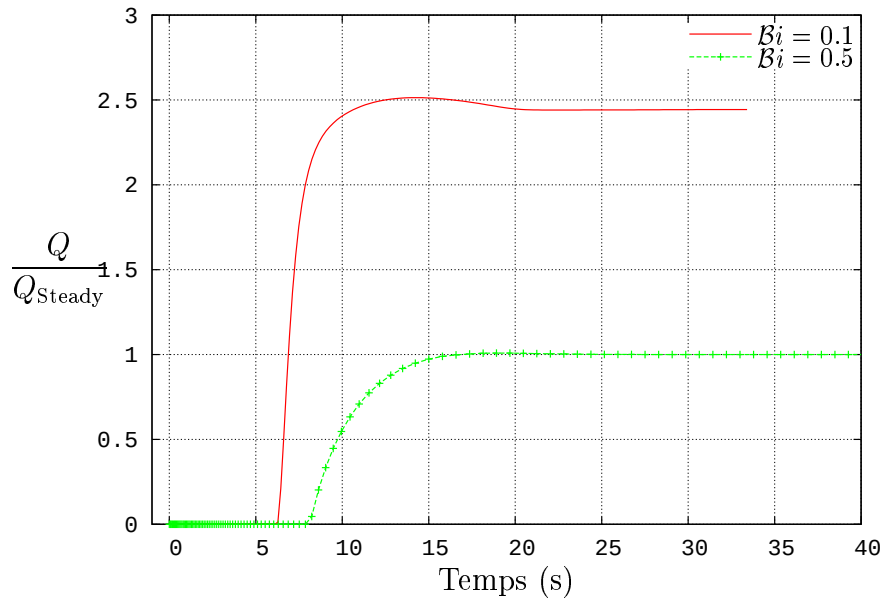
Dans cette section, nous analysons l'influence du nombre de Bingham Bi sur l'écoulement compressible d'un fluide viscoplastique. Nous comparons l'écoulement compressible d'un fluide de Bingham pour $Bi = 0.1$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$ avec les résultats présentés précédemment pour $Bi = 0.5$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$. Dans les deux situations, la pression imposée en entrée est la même ; seule la contrainte seuil τ_y est modifiée afin de faire varier le nombre de Bingham.

L'évolution au cours du temps des débits massiques d'entrée et de sortie sont comparés sur la FIG. III-37. Dans les deux cas ($Bi = 0.1$ et $Bi = 0.5$), le débit massique est adimensionné par le même débit de référence Q_{Steady} ; le débit massique obtenu à l'état stationnaire pour $Bi = 0.5$ est choisi comme débit de référence. Dans les premiers instants, les débits massiques d'entrée présentent un pic de la même amplitude, puisque la compressibilité est la même dans les deux situations. Cependant, la valeur du débit massique lorsque l'état stationnaire est atteint, est différente selon le nombre de Bingham. En fait, lorsque $Bi = 0.1$, la contrainte seuil et donc la viscosité apparente sont plus faibles. Ainsi, le débit massique à l'état stationnaire est plus important. C'est pourquoi le débit massique pour le régime établi avec $Bi = 0.1$ est plus grand que le débit massique pour $Bi = 0.5$.

Sur la FIG. III-37b, nous remarquons également que le fluide à la sortie de la conduite redémarre plus tôt lorsque le nombre de Bingham est faible. Dans le tableau TAB. I.1 du *Chapitre I*, les résultats des expériences réalisées par Verschuur et al. [54] ont montré qu'un refroidissement dynamique permet d'obtenir des contraintes seuil plus faibles et donc un temps de redémarrage plus court. Il est intéressant de noter que nous retrouvons les mêmes tendances ; un écoulement compressible viscoplastique redémarre d'autant plus vite que sa contrainte seuil est faible.



(a) Débit massique d'entrée



(b) Débit massique de sortie

FIG. III-37 Evolution au cours du temps des débits massiques d'entrée et de sortie de l'écoulement compressible ($\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$) d'un fluide de Bingham pour $\mathcal{B}i = 0.1$ et $\mathcal{B}i = 0.5$: (a) Débit massique d'entrée, (b) Débit massique de sortie

Écoulement compressible d'un fluide de Bingham avec $\mathcal{B}i > 1$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

Nous présentons les résultats concernant le redémarrage de l'écoulement compressible d'un fluide de Bingham avec $\mathcal{B}i > 1$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$. Nous savons que dans le cas incompressible, l'écoulement ne pourrait redémarrer puisque le nombre de Bingham $\mathcal{B}i$ est supérieur à 1.

La FIG. III-39 présente l'évolution en temps des débits massiques d'entrée et de sortie. A

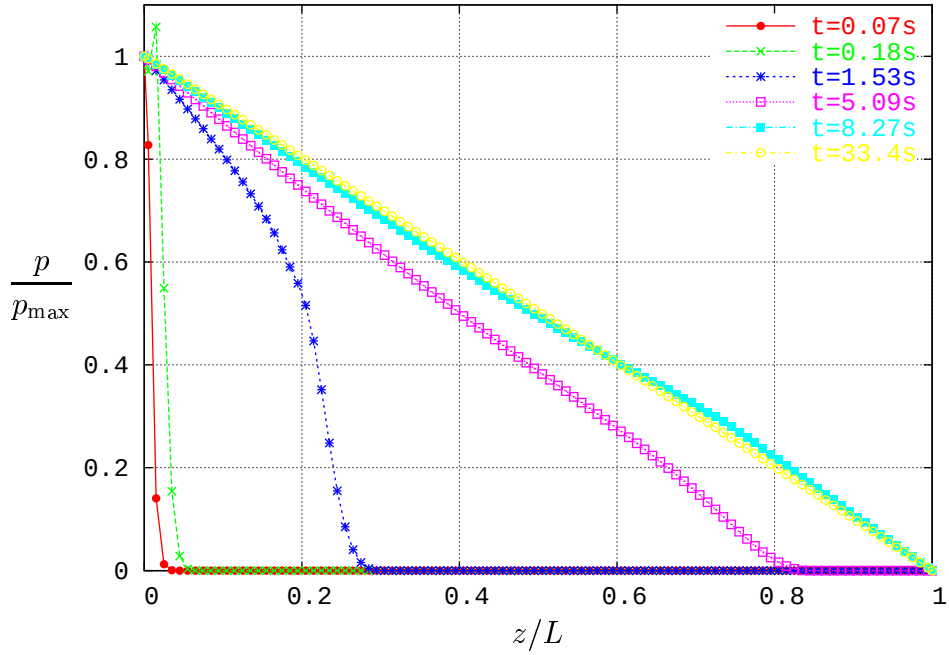


FIG. III-38 Evolution en temps de la chute de pression de l'écoulement compressible d'un fluide de Bingham pour $\mathcal{Bi} = 0.1$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

l'instant initial, le fluide est au repos, puis grâce à la compressibilité l'écoulement redémarre brusquement à l'entrée de la conduite. Ensuite, le débit massique d'entrée diminue jusqu'à atteindre 0. L'écoulement s'arrête au temps $t = 607.37 \text{ s}$ car la pression imposée en entrée de la conduite n'est plus suffisante pour assurer l'écoulement. On note que la FIG. III-39 est un zoom de l'évolution au cours du temps des débits, centré sur les 50 premières secondes de l'écoulement afin d'améliorer la visualisation du pic de débit massique à l'entrée de la conduite.

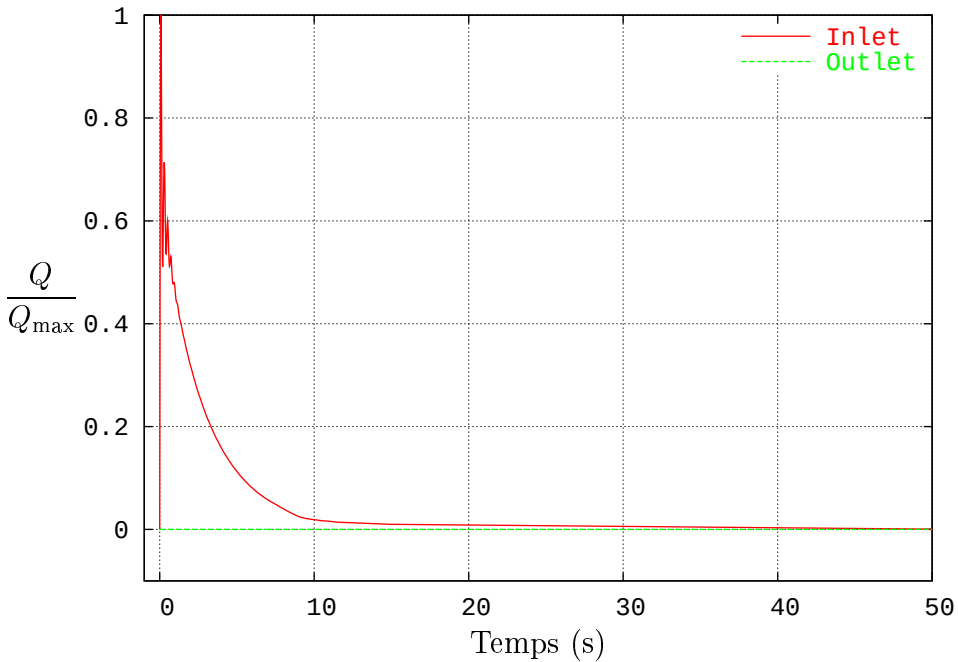


FIG. III-39 Evolution en temps des débits massiques d'entrée et de sortie de l'écoulement compressible d'un fluide Bingham pour $\mathcal{Bi} = 1.1$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

L'évolution au cours du temps de la chute de pression sur la FIG. III-40 nous permet de décrire ce phénomène. Aux premiers instants du redémarrage, la compressibilité est l'acteur principal et permet d'obtenir de fortes chutes de pression à l'entrée de la conduite. En effet, la pression chute de la pression d'entrée P_{Inlet} à 0 sur une très courte longueur, puis reste à 0 sur le reste de la conduite. Nous pouvons ainsi suivre la progression du front de compression, qui correspond à la rupture de pente entre une pression non nulle et une pression nulle. Finalement, le fluide s'écoule en amont de ce front et est au repos en aval. Lorsque le front de compression a parcouru une longueur L_C critique, l'écoulement s'arrête. En effet, nous sommes dans la situation où la longueur atteinte par le front correspond à une perte de charge critique $h_C = \frac{\Delta p}{L_C}$ qui signifie que $\mathcal{B}i = 1$ (avec $\mathcal{B}i = \frac{2\tau_y}{h_C R}$). D'ailleurs, nous pouvons facilement calculer la longueur critique L_C que le front atteint lorsque l'écoulement s'arrête par :

$$L_C = \frac{R\Delta p}{2\tau_y} \quad (\text{III.27})$$

Pour le cas considéré, on trouve $\frac{L_C}{L} = 0.9$, qui correspond bien à la longueur critique déterminée par le code, identifiable sur le profil de pression au temps $t = 607.37$ s de la FIG. III-40. Le fluide s'écoule sur une longueur de 0.9 lorsque l'écoulement s'arrête.

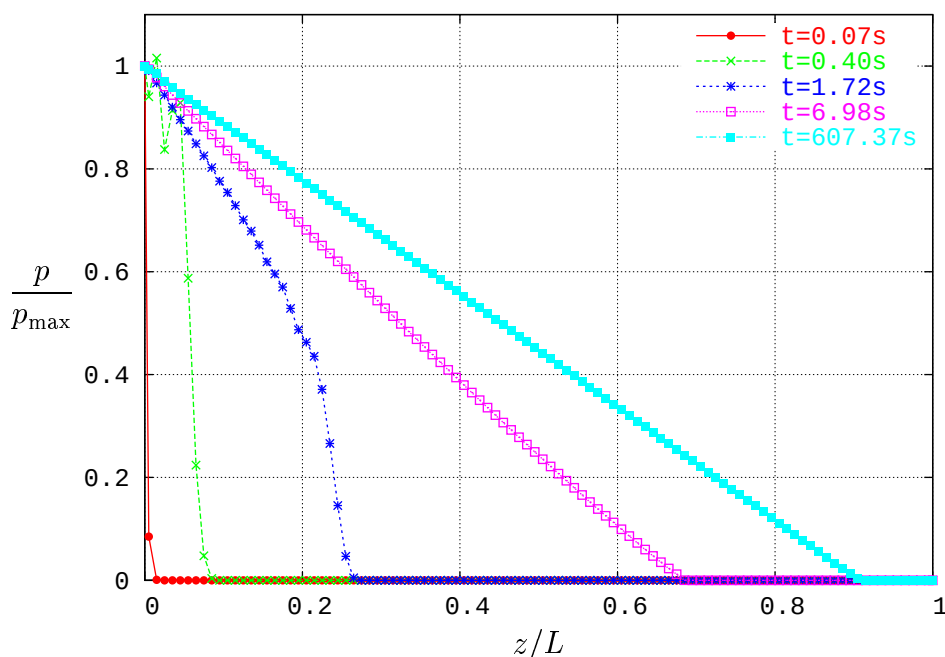


FIG. III-40 Evolution en temps de la chute de pression de l'écoulement compressible d'un fluide de Bingham pour $\mathcal{B}i = 1.1$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

Finalement, le classique écoulement bouchon observé lors de l'écoulement d'un fluide viscoplastique incompressible dans une conduite n'est plus présent lorsque la compressibilité est introduite. De plus, la compressibilité permet d'obtenir une chute de pression importante à l'entrée de la conduite, ce qui représente un atout pour le redémarrage d'un brut paraffinique. Enfin, il est intéressant de noter la capacité de l'algorithme général à converger vers une situation de « non-écoulement ». Ce résultat permet de confirmer la robustesse et la stabilité de l'algorithme utilisé.

3.3 Redémarrage d'un fluide viscoplastique thixotrope compressible

Au cours de la description des bruts paraffiniques, nous avons mis en avant l'influence de la thixotropie. Nous avons également détaillé le modèle de Houska qui permet de prendre en compte à la fois les effets de seuil et les effets thixotropes. Nous présentons dans cette section des résultats d'écoulements viscoplastiques thixotropes dans un premier temps. Puis, nous ajouterons la compressibilité afin de montrer l'influence bénéfique sur le redémarrage des effets combinés de la compressibilité et de la thixotropie.

Ecoulement d'un fluide viscoplastique thixotrope incompressible

Nous présentons les résultats de l'écoulement d'un fluide de Houska incompressible. Nous imposons une pression en entrée de la conduite telle que $\mathcal{B}i_{\text{Houska}} = 0.6$. La contrainte seuil utilisée pour calculer ce nombre de Bingham $\mathcal{B}i_{\text{Houska}}$ correspond à la contrainte maximale, obtenue à l'état initial lorsque le fluide est complètement structuré ($\lambda = 1$), soit $\tau_y = \tau_{y0} + \tau_{y1}$. Le paramètre de déstructuration b du modèle de Houska est volontairement choisi grand comparé au paramètre de restructuration a , afin d'accentuer le mécanisme de déstructuration.

La FIG. III-41 présente les zones cisailées/non-cisailées de l'écoulement d'un fluide de Houska pour $\mathcal{B}i_{\text{Houska}} = 0.6$. Nous retrouvons la zone au centre de la conduite qui correspond à 60% du rayon, en accord avec le nombre de Bingham.

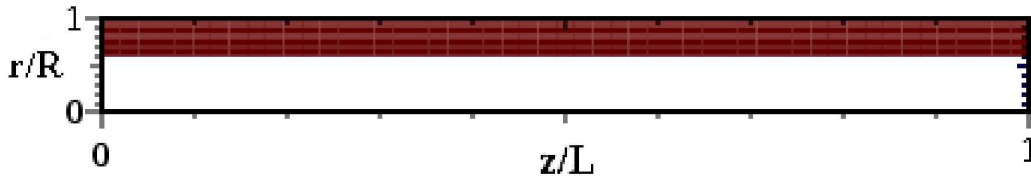


FIG. III-41 Zones cisailées/non-cisailées (respectivement les régions rouges/blanches) à l'état stationnaire de l'écoulement d'un fluide de Houska pour $\mathcal{B}i_{\text{Houska}} = 0.6$

D'après le modèle de Houska, le mécanisme de déstructuration est contrôlé par le cisaillement. L'évolution au cours du temps de la déstructuration du matériau présenté sur la FIG. III-42 met en évidence ce mécanisme. A l'instant initial, le fluide est totalement structuré ($\lambda = 1$). Puis lorsque l'écoulement démarre, le matériau se déstructure près de la paroi sous les effets du fort cisaillement. Cependant, le matériau reste structuré dans la zone bouchon puisque le cisaillement y est strictement nul.

L'avantage de la technique du Lagrangien augmenté pour appréhender la discontinuité de la loi rhéologique est une nouvelle fois mis en avant grâce à ce résultat. En effet, comme le tenseur des taux de déformation $\mathbf{d}$ est strictement nul dans la zone bouchon, le matériau ne se déstructure pas. Nous pouvons vérifier sur la FIG. III-43 que le paramètre de structure est égal à 1 dans la zone bouchon. En utilisant une loi régularisante, le tenseur des taux de déformation n'est pas nul dans la zone bouchon, mais proche de zéro, et ainsi, le matériau se déstructure également dans la zone bouchon. Le mécanisme de déstructuration sera plus lent que dans la zone d'écoulement car le cisaillement est très faible, mais au temps final, le fluide sera totalement déstructuré, ce qui est en désaccord avec le modèle de Houska.

Nous présentons sur la FIG. III-44 les profils de vitesse axiale d'entrée et de sortie de la

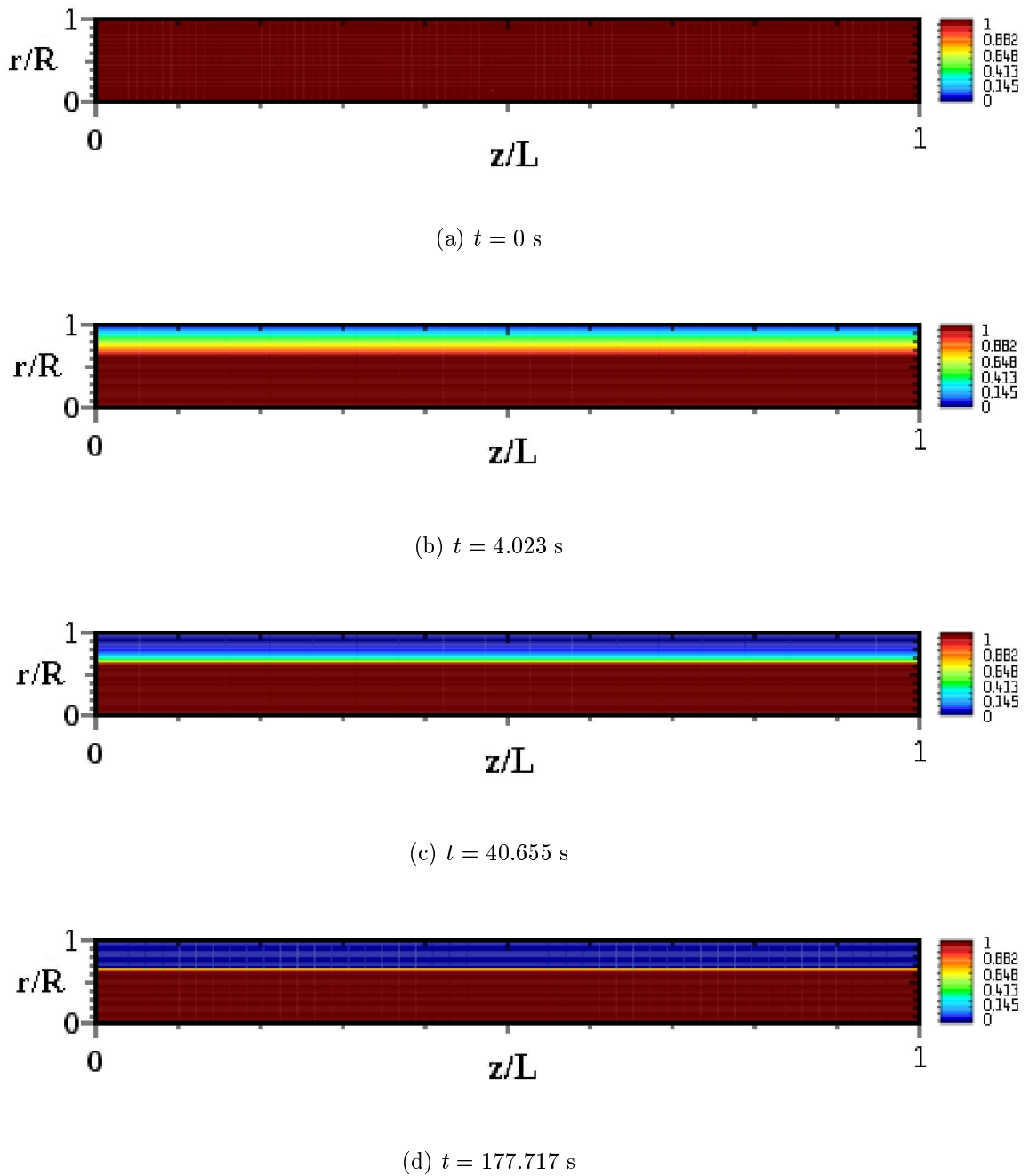


FIG. III-42 Evolution au cours du temps de la déstructuration du matériau pour l'écoulement d'un fluide de Houska pour $\mathcal{B}i_{\text{Houska}} = 0.6$

conduite. Une rupture originale du profil de vitesse est visible à la frontière entre la zone cisailée et la zone bouchon. De tels profils sont très différents de ceux obtenus avec un fluide viscoplastique, puisque la transition entre la région cisailée et non-cisailée est continue (*cf.* FIG. III-2 par exemple).

En fait, Roussel et al. [41] observent expérimentalement cette forme particulière du profil de vitesse pour l'écoulement d'un fluide thixotrope sur la FIG. III-45. Ces données expérimentales sont déterminées par IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) dans un rhéomètre à géométrie de Couette (cylindres coaxiaux) et le fluide utilisé est de l'eau contenant une suspension de

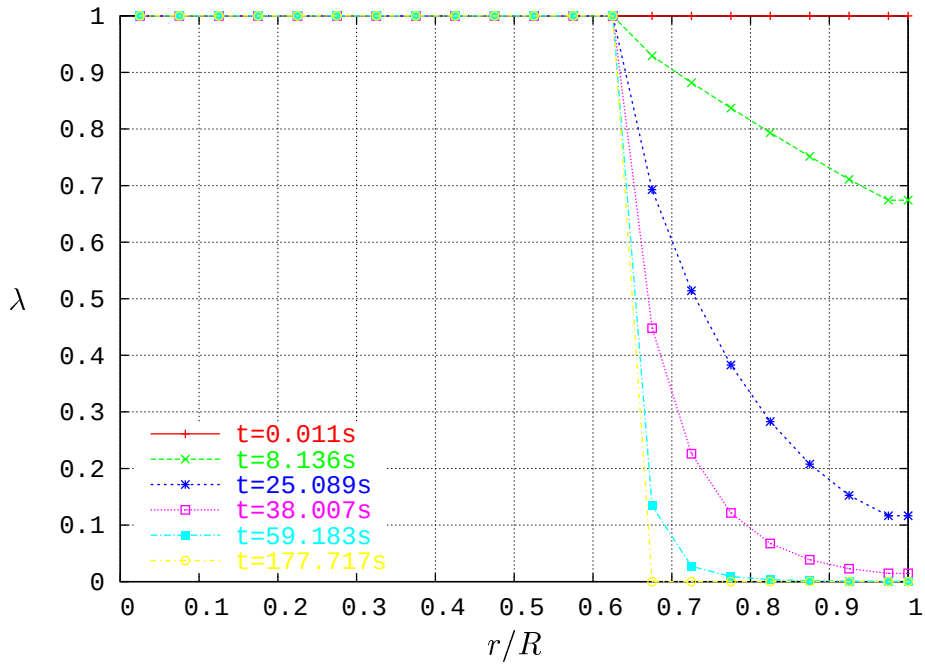


FIG. III-43 Evolution au cours du temps du paramètre de structure λ dans la section de sortie de l'écoulement incompressible d'un fluide de Houska pour $\mathcal{B}i_{\text{Houska}} = 0.6$

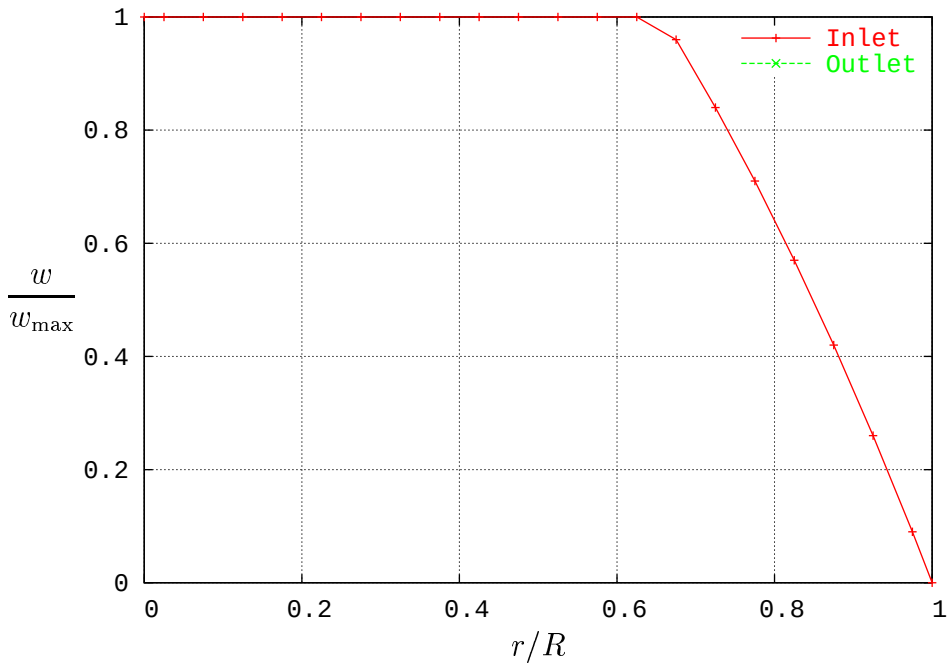


FIG. III-44 Profils de vitesse axiale d'entrée et de sortie à l'état stationnaire, de l'écoulement incompressible d'un fluide de Houska pour $\mathcal{B}i_{\text{Houska}} = 0.6$

bentonite. L'échantillon est précisailé pendant 10 min puis est laissé au repos. Les 3 courbes présentées sur la FIG. III-45 correspondent à 3 temps de repos différents (0, 10 et 80 min). Les profils de vitesse à l'état stationnaire déterminés expérimentalement sont comparés avec les profils de vitesse déterminés par le modèle thixotrope (trait continu) proposé par Roussel et al. [41] et présenté dans le *Chapitre I*. Finalement, les profils de vitesse axiale obtenus avec le modèle de Houska sont semblables à ceux trouvés expérimentalement et numériquement par Coussot et al [14].

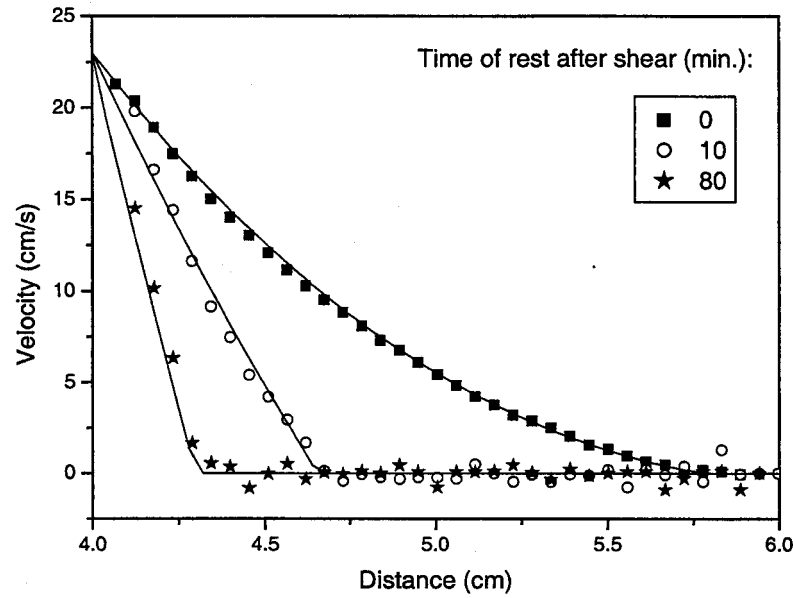


FIG. III-45 Profils de vitesse axiale à l'état stationnaire calculés avec le modèle (I.36) et mesurés par IRM pour une vitesse imposée (60 rpm) après avoir précisailonné l'échantillon (10 min à 120 rpm) et laissé au repos pour trois temps différents, d'après Roussel et al. [41]

Influence de la compressibilité et de la thixotropie sur le redémarrage

Le principal problème lié au redémarrage des écoulements de bruts paraffiniques concerne l'estimation de la pression minimale à appliquer à l'entrée de la conduite. Dans la section *Section III-3.2*, nous avons mis en évidence que la compressibilité permet d'obtenir de grandes vitesses et de fortes chutes de pression à l'entrée de la conduite dans les premiers instants du redémarrage. D'autre part, d'après le modèle de Houska, le mécanisme de déstructuration du gel est contrôlé par le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Ainsi, nous pensons qu'un fluide viscoplastique et thixotrope, qui ne peut être redémarré dans une situation incompressible, pourra être redémarré grâce aux effets combinés de la compressibilité et de la thixotropie.

Nous proposons donc trois calculs dont la géométrie est définie telle que $\frac{L}{R} = 200$. Une pression est imposée à l'entrée de la conduite de telle sorte que le nombre de Bingham $\mathcal{Bi}$ soit supérieur à 1. Pour les trois cas, à l'instant initial, le fluide est au repos.

- Cas n°1 : fluide thixotrope de Bingham incompressible. Les paramètres rhéologiques du modèle de Houska sont choisis tel que $\mathcal{Bi}_{\text{Houska}} = 1.025$. Le matériau à l'état initial est structuré ($\lambda = 1$).
- Cas n°2 : fluide de Bingham compressible. La contrainte seuil est choisie telle que $\mathcal{Bi} = 1.025$ et la compressibilité est fixée à $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$.
- Cas n°3 : fluide thixotrope de Bingham compressible avec $\mathcal{Bi}_{\text{Houska}} = 1.025$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$. Le matériau est structuré à l'état initial ($\lambda = 1$).

Nous comparons sur la FIG. III-46 l'évolution au cours du temps (50 premières secondes du calcul) du débit massique à l'entrée de la conduite pour les trois cas. Pour le cas n°1, comme $\mathcal{Bi}_{\text{Houska}} > 1$ il est évident que l'écoulement ne redémarre pas, le débit massique reste à 0. Le cas n°2 est semblable à celui présenté dans la *Section III-3.2*. La compressibilité permet de

redémarrer l'écoulement en entrée de la conduite pendant les premiers instants du redémarrage, puis l'écoulement s'arrête lorsque le front de compression atteint la longueur critique L_C pour laquelle $\mathcal{B}i = 1$. Dans le cas n°3, les effets de la thixotropie et de la compressibilité sont pris en compte et l'écoulement redémarre. Nous décrivons ce redémarrage à travers trois phases : compression, déstructuration et établissement de l'écoulement.

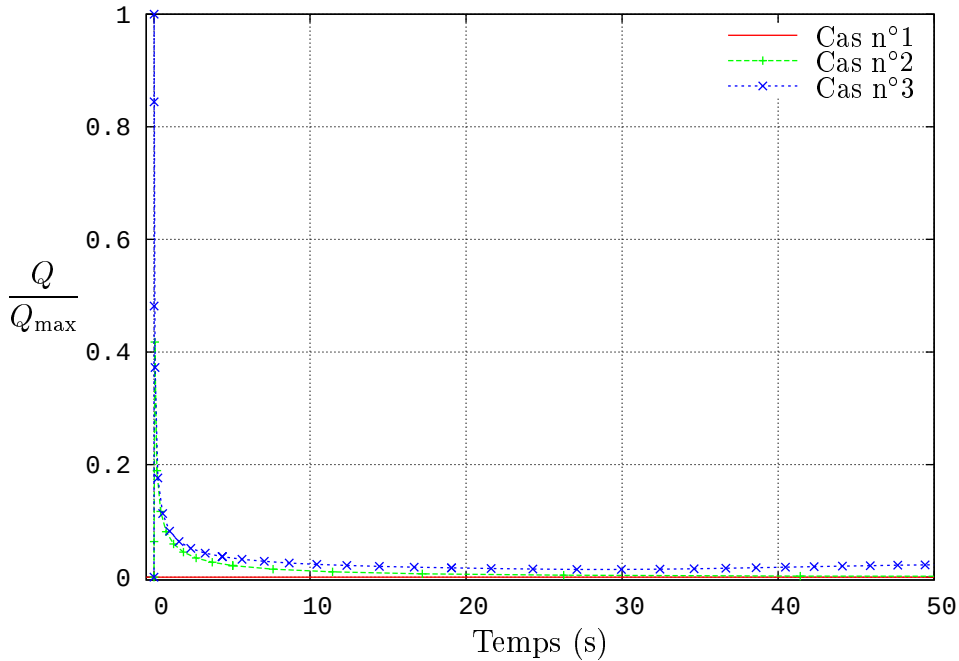


FIG. III-46 Evolution en temps des débits massiques d'entrée pour trois écoulements : Houska incompressible ($\mathcal{B}i_{\text{Houska}} = 1.025$ et $\mathcal{X}_{\Theta} = 0 \text{ Pa}^{-1}$), Bingham compressible ($\mathcal{B}i = 1.025$ et $\mathcal{X}_{\Theta} = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$), Houska compressible ($\mathcal{B}i_{\text{Houska}} = 1.025$ et $\mathcal{X}_{\Theta} = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$)

La FIG. III-47 présente l'évolution au cours du temps du débit massique pour le cas n°3 (Zoom sur les 400 premières secondes) et nous permet d'identifier les trois phases décrites ci-après.

- Compression

Cette première phase lors du redémarrage est dominée par les effets de compression et permet d'initier l'écoulement. Elle est identifiable sur la FIG. III-47 par le pic de débit massique d'entrée aux premiers instants du redémarrage. D'ailleurs, cette phase est également présente pour le cas n°2. La compression permet d'obtenir de fortes chutes de pression et une importante augmentation du débit. Ainsi, les importantes vitesses à l'entrée de la conduite engendrent un fort cisaillement qui permet d'initier le mécanisme de déstructuration du matériau.

- Déstructuration

Le mécanisme de déstructuration est donc initié par la phase de compression. Ainsi, le paramètre de structure chute à l'entrée de la conduite comme le montre la FIG. III-48 ($\lambda < 1$).

La viscosité et la contrainte seuil, qui dépendent du paramètre de structure, diminuent également. C'est pourquoi, contrairement au cas n°2, le débit massique d'entrée ne chute pas jusqu'à 0 après la phase de compression, mais jusqu'à une valeur minimale supérieure à 0 (FIG. III-47). Maintenant, le processus de déstructuration est lancé et s'accélère par un phénomène d'« auto-alimentation ». En effet, comme le débit augmente, le cisaille-

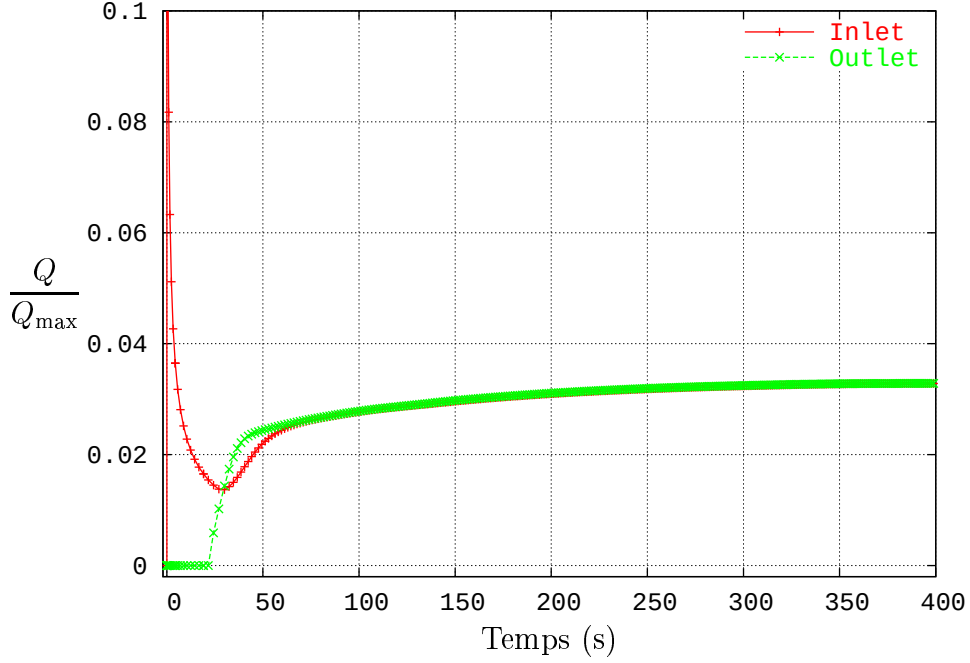


FIG. III-47 Evolution en temps des débits massiques d'entrée et de sortie pour l'écoulement compressible d'un fluide de Houska pour $\mathcal{B}i_{\text{Houska}} = 1.025$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

ment augmente et le paramètre de structure λ décroît d'autant plus vite. Finalement, la viscosité et la contrainte seuil décroissent rapidement et le débit augmente de plus en plus vite. Enfin, le débit continue d'augmenter plus lentement jusqu'à atteindre le régime stationnaire. En fait, comme le paramètre b contrôle le processus de déstructuration, il est nécessaire qu'il soit choisi grand afin que la contrainte seuil diminue rapidement et que l'écoulement puisse être redémarré.

- Etablissement de l'écoulement

L'écoulement atteint un régime stationnaire lorsque les débits massiques présentent un plateau et sont égaux. La chute de pression est maintenant linéaire, comme le montre le profil de pression $t = 611.907 \text{ s}$ de la FIG. III-49. L'écoulement est de type bouchon avec une zone non-cisaillée au centre de la conduite qui correspond à environ 40% du rayon.

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs simulations numériques qui mettent en avant chacune des propriétés de l'arrêt et du redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique. Nous avons d'abord réalisé des simulations numériques de l'écoulement stationnaire isotherme d'un fluide viscoplastique. La bonne précision de la solution a permis de valider notre méthode de résolution. D'autre part, nous avons présenté des résultats concernant l'arrêt de l'écoulement causé soit par les effets thermiques (température extérieure basse et contrainte thermodépendante), soit par des conditions rhéologiques particulières ($\mathcal{B}i > 1$). Ces résultats démontrent des bonnes propriétés de convergence de l'algorithme. En effet, la capacité de l'algorithme général à converger sans condition particulière vers une solution correspondant à un écoulement arrêté, témoigne de sa robustesse et de sa stabilité. Enfin, l'introduction de la compressibilité dans les écoulements viscoplastiques se traduit par de fortes chutes de pression et d'importants débits

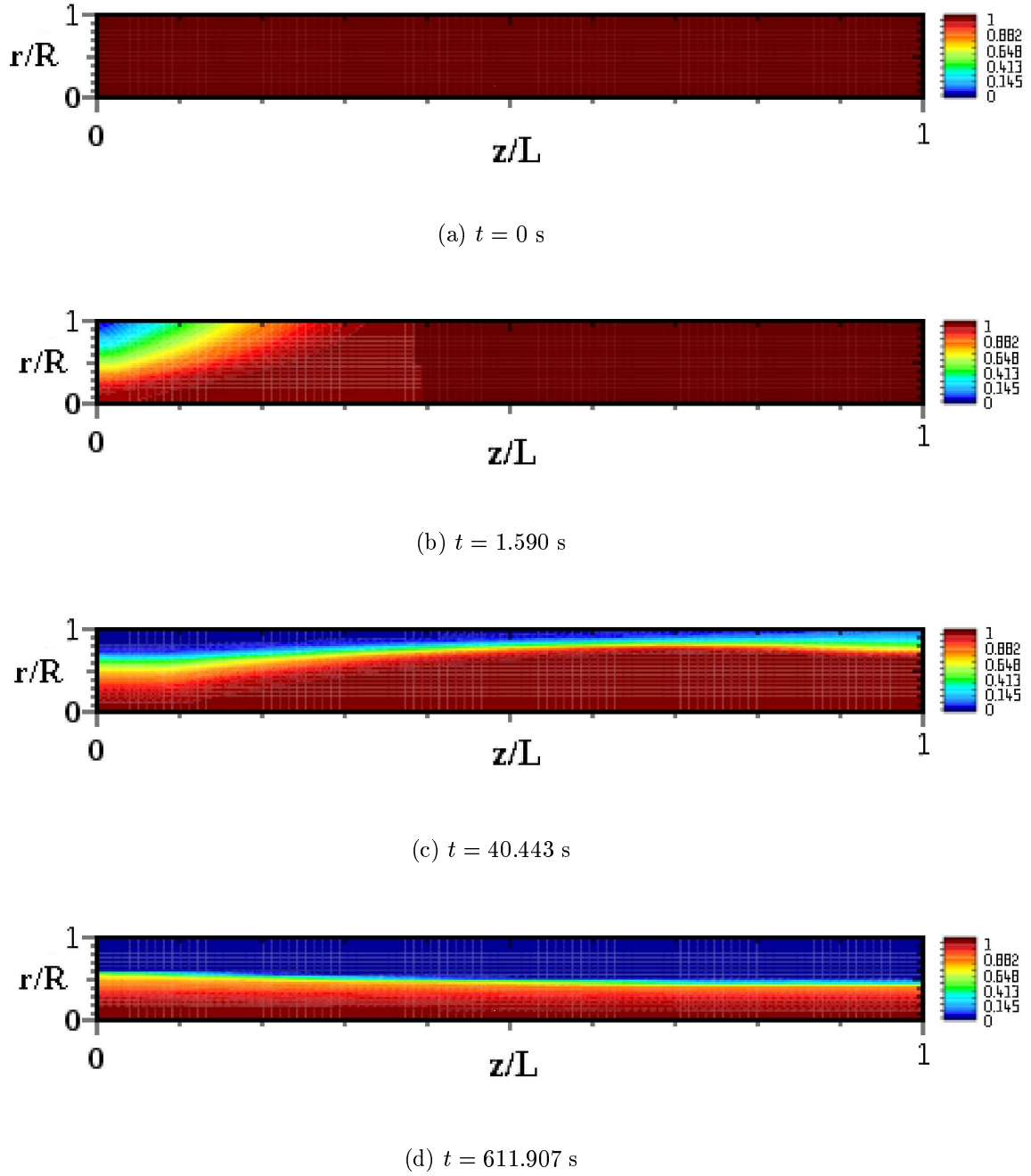


FIG. III-48 Evolution au cours du temps de la déstructuration du matériau de l'écoulement d'un fluide de Houska pour $\mathcal{B}i_{\text{Houska}} = 1.025$ et $\mathcal{X}_{\Theta} = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

à l'entrée de la conduite. L'apparition d'oscillations de la pression et du débit à l'entrée de la conduite peut être due à un artefact numérique et nécessite d'autres simulations pour approfondir l'analyse. Une étude paramétrique faisant varier la compressibilité permettrait d'identifier les limites de la plage d'utilisation de cette approche faiblement compressible.

Le principal résultat de ce chapitre concerne la localisation des zones cisailées/non-cisailées. En effet, il semble que les zones non-cisailées soient très sensibles à la variation des paramètres du problème. Par exemple, lorsqu'un fluide viscoplastique dont les paramètres rhéologiques sont thermodépendants (viscosité et contrainte seuil), s'écoule dans une conduite axisymétrique, tant

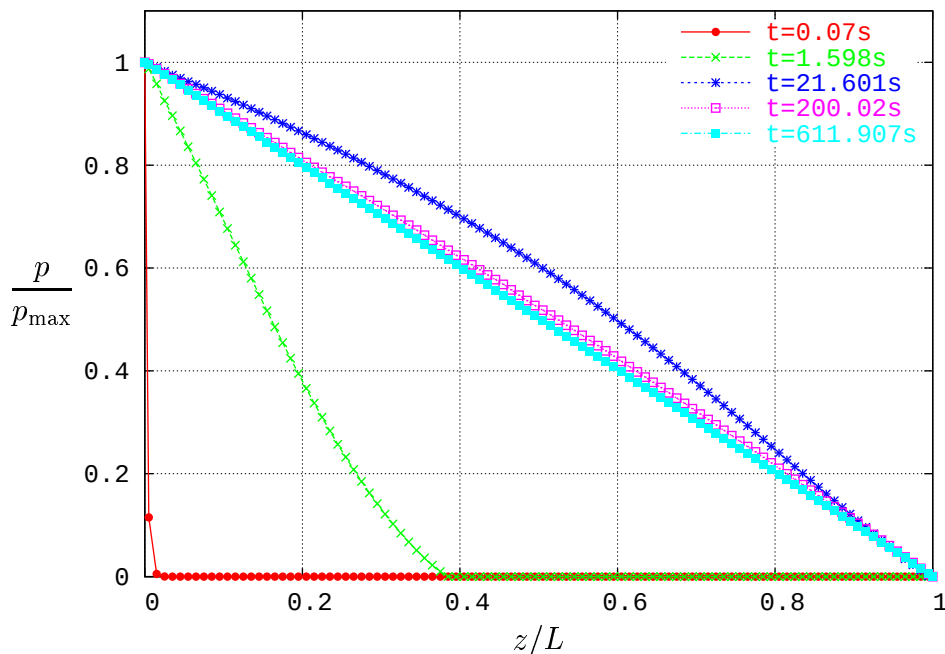


FIG. III-49 Evolution en temps de la chute de pression de l'écoulement compressible d'un fluide de Houska pour $\mathcal{B}i = 1.025$ et $\mathcal{X}_\Theta = 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$

que le champ de température varie dans le sens de l'écoulement, le fluide est cisailé, même faiblement. Concernant l'écoulement d'un fluide viscoplastique compressible, nous avons montré que même si les profils de vitesse axiale semblent avoir la forme classique caractéristique de l'écoulement d'un fluide de Bingham, d'après la localisation des zones cisailées/non-cisailées il n'existe pas de zone bouchon au centre de l'écoulement. En d'autres termes, le classique écoulement bouchon observé dans la situation incompressible ne peut être obtenu pour un fluide viscoplastique compressible. En fait, la localisation des régions cisailées/non-cisailées est en accord avec la définition stricte du modèle de Bingham comme nous l'avons démontré. Ces résultats sont obtenus grâce à la méthode de Lagrangien augmenté adoptée pour implémenter le modèle de Bingham. D'ailleurs, on ne retrouve pas ces résultats avec une méthode de régularisation (*Annexe A*).

D'autre part, nous avons montré le caractère 2D du redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique en présentant les résultats concernant des écoulements de type fluide-fluide. Nous avons décrit un cas original d'écoulement de deux fluides viscoplastiques dans lequel une couche statique du fluide déplacé reste immobile à la paroi. La technique du Lagrangien augmenté utilisée pour appréhender le caractère discontinue de la loi rhéologique a permis d'obtenir une zone morte près de la paroi dans laquelle le tenseur des taux de déformation est strictement nul. De plus, nous avons mené l'étude de trois écoulements différents afin de mesurer l'influence des effets combinés de la thixotropie et de la compressibilité sur la capacité de redémarrage. En fait, chacun de ces deux effets introduits individuellement, ne peut permettre le redémarrage d'un fluide bloqué. La compressibilité permet d'initier le redémarrage de l'écoulement à l'entrée de la conduite et le caractère thixotrope tend à diminuer la contrainte seuil et la viscosité lors de cette phase d'initiation. Finalement, il est possible de redémarrer l'écoulement d'un fluide à la fois thixotrope et compressible, alors que l'écoulement ne redémarre pas si le fluide ne possède seulement qu'une des deux propriétés.

Finalement, on peut se demander s'il est correct d'utiliser le modèle de Bingham thermodé-

pendant puisqu'il ne permet pas d'obtenir un écoulement bouchon dans la zone de transition. Il serait intéressant de pouvoir confronter ces résultats numériques avec des expériences d'écoulements de fluides viscoplastiques thermodépendants afin de vérifier si les zones non-cisaillées peuvent coexister avec un champ de température non constant. Nous pourrions alors conclure si ce modèle rhéologique est adapté à ce type d'écoulement. Néanmoins, de tels essais sont difficiles à mettre en place car il faudrait assurer le contrôle de la température tout en visualisant l'échantillon sous écoulement. D'une manière générale, la validation de ces calculs numériques pourrait être réalisée en les comparant avec des essais expérimentaux (pression de redémarrage pour l'écoulement compressible et thixotrope, par exemple). Une telle comparaison est présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre IV

Application à des situations réelles

1 Introduction

La principale préoccupation des compagnies pétrolières lors du transport des bruts paraffiniques concerne la pression minimale et le temps nécessaire pour redémarrer l'écoulement après un arrêt dû à une opération de maintenance ou d'urgence. Dans ce chapitre, nous donnons un point de vue industriel pour répondre au problème du redémarrage d'un brut paraffinique. En fait, nous présentons une procédure basée à la fois sur des calculs numériques et sur des essais expérimentaux qui permet d'identifier les étapes à suivre pour déterminer les conditions initiales et les paramètres du redémarrage.

Ensuite, nous décrivons la méthode expérimentale proposée par Cawkwell et al. [8] pour déterminer les huit paramètres du modèle de Houska. Une variante pour déterminer les trois paramètres cinétiques a , b et m , proposée par Henaut [27] est également présentée. Nous avons mis en application cette méthode expérimentale pour mesurer la thermodépendance des huit paramètres du modèle de Houska pour un brut du Gabon, Atora.

Enfin, nous comparons un cas expérimental de redémarrage d'une boucle expérimentale décrit par Chrisman et al. [11], et les résultats numériques obtenus avec le code de calcul StarWaCS. En particulier, l'évolution au cours du temps de la pression dans la conduite sera étudiée.

2 Démarche à suivre pour l'étude d'un cas réel

Nous proposons dans cette section une méthode industrielle qui permet d'estimer les conditions de redémarrage des écoulements de bruts paraffiniques. Cette procédure est issue du brevet d'invention « Méthode de détermination des conditions de redémarrage des écoulements de bruts paraffiniques » [62]. En fait, le but de cette méthodologie est de répondre d'un point de vue pratique aux différentes questions que se posent les compagnies pétrolières lorsqu'elles doivent redémarrer un pipeline qui transporte un brut paraffinique :

- Quel est la pression minimale à imposer pour redémarrer la conduite ?
- Quel est le temps nécessaire pour vidanger la conduite des débris de gel et retrouver des conditions stables d'écoulement ?
- Quel est le temps maximal d'arrêt autorisé pour que les installations en place (pompes, pipelines ...) puissent redémarrer l'écoulement ?

Cette méthode est composée de six étapes au cours desquelles des calculs numériques et des essais expérimentaux sont menés afin d'évaluer les paramètres de redémarrage. Nous détaillons chacune de ces six étapes.

ETAPE 1 : Détermination des paramètres physiques du problème

Dans un premier temps, nous déterminons expérimentalement les propriétés thermiques et rhéologiques du brut paraffinique étudié. D'abord, la température de cristallisation commençante Θ_{cc} est mesurée par DSC et le point d'écoulement Θ_g est mesuré par la procédure normalisée ASTM D97 (*cf. Chapitre I*). Il est également nécessaire de mesurer la masse volumique ρ_0 , la capacité calorifique C_p et la conductivité thermique λ_f du brut.

Ensuite, nous devons évaluer les huit paramètres du modèle rhéologique de Houska. Un protocole expérimental a été développé pour réaliser des mesures précises et fiables de ces huit paramètres ; cette technique de mesure est détaillée dans la *Section IV-3*. Comme la température

joue un rôle majeur dans la phase d'arrêt de l'écoulement, chacun des huit paramètres est mesuré pour différentes températures inférieures à Θ_{cc} . Ainsi, chaque paramètre dépend de la température selon une loi établie par interpolation des données expérimentales.

De plus, la compressibilité du brut gélifié est mesurée expérimentalement. Dans la *Section IV-3*, nous présentons le montage expérimental qui permet d'évaluer la compressibilité d'une part, mais également de visualiser le comportement des poches de gaz lors du redémarrage.

Enfin, il est nécessaire de connaître la géométrie de la conduite (rayon R et longueur L) et les conditions aux limites du problème : le débit ou la pression que peuvent fournir les installations de pompage, la température du fluide à l'entrée Θ_{Inlet} et la température à la paroi Θ_{Ext} relevées sur le site. Finalement, tous les paramètres physiques du problème sont déterminés et sont utilisés lors des différentes simulations numériques.

ETAPE 2 : Description de l'écoulement stationnaire avant l'arrêt

La description de l'état initial est réalisée en deux étapes successives : la description de l'état stationnaire de l'écoulement non-isotherme d'un fluide viscoplastique puis le calcul de l'évolution de la température dans la conduite pendant la phase d'arrêt (Etape 3).

Cette étape consiste donc à déterminer le profil des champs de température et de contraintes de cisaillement en écoulement stationnaire selon l'axe de la conduite, ce qui correspond aux profils $t = 0$ de la FIG. I-39. Ces profils sont déterminés par une simulation numérique de l'écoulement non-isotherme d'un fluide viscoplastique dont les paramètres rhéologiques dépendent de la température. Ces calculs sont semblables à ceux présentés dans le *Chapitre III*. Les lois de thermodépendance pour les paramètres rhéologiques établies à l'étape 1, sont implémentées dans le code StarWaCS et les conditions aux limites en température sont celles relevées sur le site de production.

ETAPE 3 : Calculs thermiques lors de l'arrêt

Cette étape consiste à décrire l'évolution du champ de température lorsque l'écoulement dans la conduite est arrêté. Il s'agit donc d'un calcul thermique où seul les échanges conductifs sont considérés puisque le fluide est au repos. Ce calcul nous permet d'obtenir le profil du champ de température à l'état initial du redémarrage. Nous pouvons rencontrer deux cas de figures. Soit l'arrêt est court et la température du fluide n'est pas constante dans la conduite (profil noté $t = 1$ sur la FIG. I-39), soit le temps d'arrêt est long et la température est uniforme et égale à la température extérieure Θ_{Ext} (profil noté $t = \infty$ sur la FIG. I-39).

Les calculs de cette étape sont simples à mettre en place et permettent de prendre conscience de l'importance des effets 2D sur le refroidissement d'une conduite cylindrique. Plaçons-nous dans une section de la conduite et résolvons l'équation :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \quad (\text{IV.1})$$

Nous présentons l'évolution au cours du temps de la température à la paroi, au centre et à mi-rayon et la température moyenne pour deux conduites de diamètres différents, 2" (FIG. IV-1) et 48" (FIG. IV-2). Evidemment, plus la conduite possède un grand diamètre, plus le temps nécessaire pour que la température au centre diminue est grand. Pour la conduite de 2", la température est homogène dans la conduite au bout de 5000 s, soit environ 1h20min. Dans

la conduite de 48", la température au centre atteint la température extérieure après 10^6 s soit environ 11 jours.

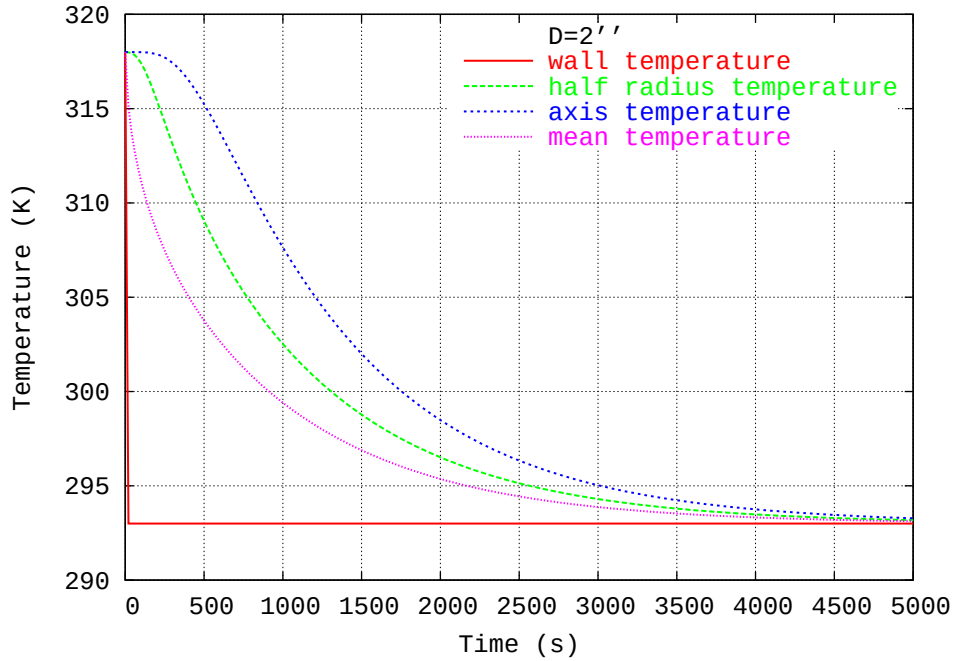


FIG. IV-1 Evolution de la température dans la section d'une conduite cylindrique de diamètre $D = 2''$

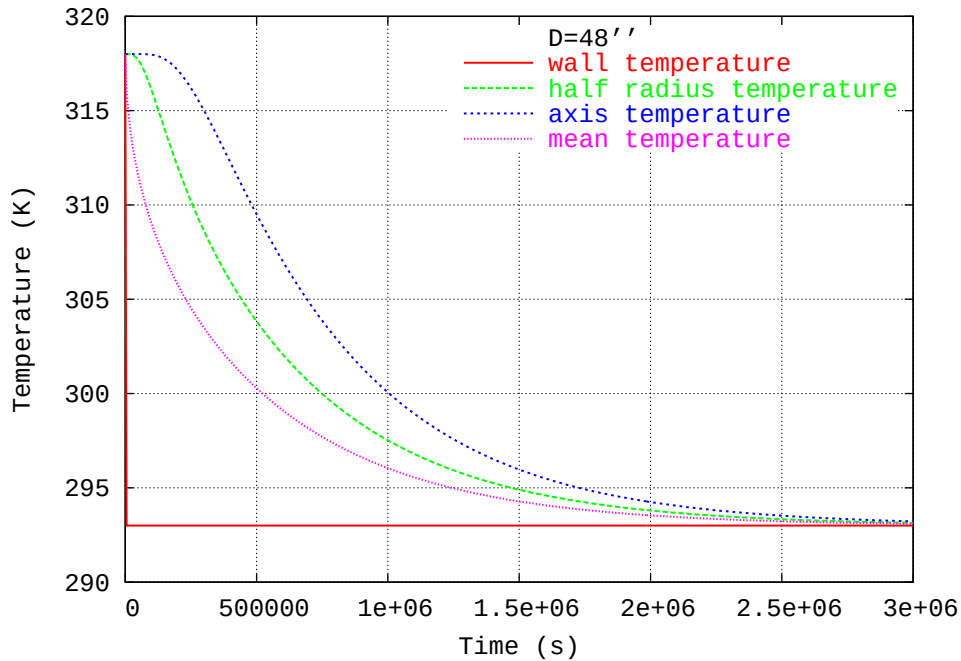


FIG. IV-2 Evolution de la température dans la section d'une conduite cylindrique de diamètre $D = 48''$

En fait, ces calculs permettent d'abord de conclure que si la conduite possède un grand diamètre, le temps disponible lors de l'arrêt est plus grand puisque la température moyenne dans la conduite diminuera lentement. D'autre part, les travaux numériques ([7], [45]) existants sont basés sur une approche 1D, et les effets thermiques sont pris en compte à travers des

profils de température moyenne dans la section. Or dans les conduites de gros diamètres, la température au centre de l'écoulement reste différente de la température extérieure pendant une longue période. Ainsi, à l'état initial du redémarrage, la contrainte seuil n'est pas uniforme dans la section mais peut présenter de fortes variations. Nous en déduisons qu'une approche 1D trouve ses limites lorsque le diamètre de la conduite est grand, mais reste néanmoins performante en temps de calcul pour l'estimation de la pression et du temps de redémarrage pour de longues conduites.

ETAPE 4 : Choix des scénarios thermomécaniques lors de l'arrêt

Jusqu'à présent, seuls les effets thermiques ont été pris en compte, or le passé thermomécanique (refroidissement statique ou dynamique, lent ou rapide) a une influence sur les paramètres rhéologiques, en particulier sur la contrainte seuil (*cf.* le TAB. I.1 et les explications qui l'accompagnent dans le *Chapitre I*). Nous choisissons donc différents scénarios thermomécaniques afin de prendre en compte l'influence des conditions de refroidissement. Chacun de ces scénarios sera reproduit expérimentalement afin de déterminer précisément les paramètres de redémarrage à l'état initial.

A partir des profils de température établis à l'étape 3, nous choisissons différents scénarios thermomécaniques de refroidissement selon la position du brut dans la conduite. En pratique, le choix des sections de mesure se fait en relation avec la topographie et les conditions en température du site afin qu'avec un minimum de sections nous soyons capable de donner une représentation fidèle des conditions d'écoulement dans la conduite. Sur la FIG. IV-3 est représenté le profil de température moyenne dans la section le long de la conduite au temps $t = t_{\text{Stop}}$ lorsque l'écoulement est arrêté. Ce profil est obtenu par le calcul de l'étape 2 et correspond à l'écoulement stationnaire d'un fluide viscoplastique thermodépendant. Le profil de température moyenne au temps $t = t_{\text{Start}}$ est calculé à l'étape 3 et correspond au profil de température de la conduite lorsque l'écoulement est redémarré. Finalement, la différence entre $t = t_{\text{Stop}}$ et $t = t_{\text{Start}}$ représente le temps pendant lequel la conduite a été arrêtée.

Nous prenons l'exemple de deux sections dans la conduite, notées S_1 et S_2 sur la FIG. IV-3. La section S_1 subit un refroidissement statique (le brut s'écoulait à une température $\Theta_{1\text{Stop}}$ supérieure à la température d'apparition des cristaux de paraffine Θ_{cc}), puis est refroidie jusqu'à la température $\Theta_{1\text{Start}}$ au repos. Le brut de la section S_2 a subi un refroidissement dynamique de Θ_{Inlet} à $\Theta_{2\text{Stop}}$ lorsqu'il s'est écoulé de l'entrée de la conduite à la section S_2 , puis il est refroidi au repos de $\Theta_{2\text{Stop}}$ à Θ_{Ext} .

Maintenant, nous reproduisons expérimentalement les conditions décrites par les scénarios thermomécaniques dans chacune des sections considérées afin de mesurer les paramètres rhéologiques. Par exemple, le cas de la section S_2 est illustré sur la FIG. IV-4. L'échantillon subit un refroidissement de la température Θ_{Inlet} à la température $\Theta_{2\text{Stop}}$ tout en étant cisailé à un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ qui correspond à la vitesse de l'écoulement stationnaire défini à l'étape 2. Ensuite, ce même échantillon subit un nouveau refroidissement au repos de $\Theta_{2\text{Stop}}$ à Θ_{Ext} . Enfin, on effectue les mesures rhéométriques à cette température. Cette procédure nous garantit que les propriétés rhéologiques sont mesurées dans des conditions similaires à celles du champ.

ETAPE 5 : Description des paramètres de redémarrage à l'état initial

Un paramètre essentiel dans la description de l'état initial du redémarrage est la valeur du paramètre de structure λ . Intuitivement, on peut choisir $\lambda = 1$ à l'instant initial dans toute

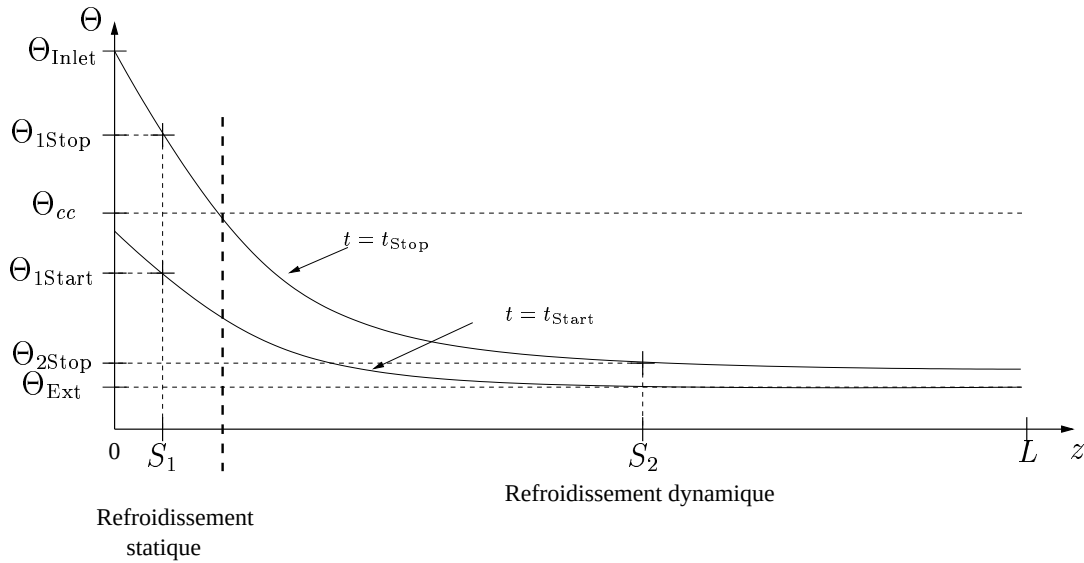


FIG. IV-3 Choix du scénario thermomécanique pour différentes sections

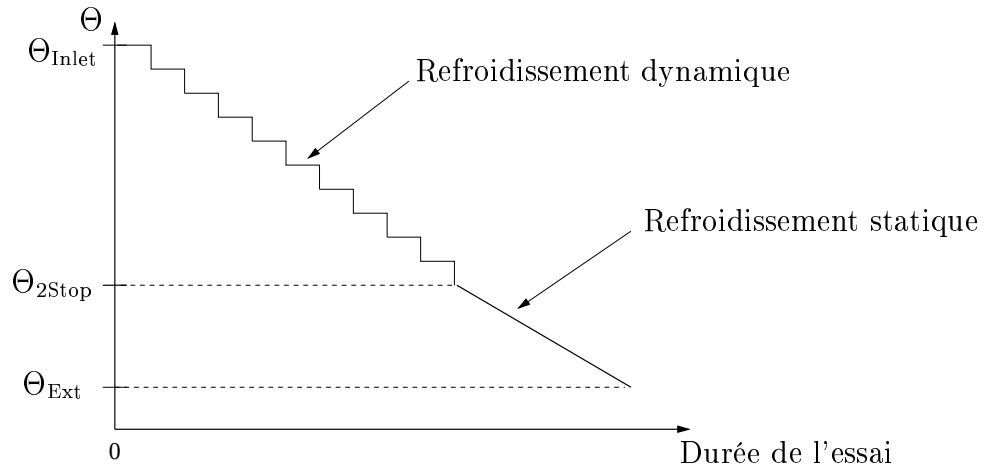


FIG. IV-4 Scénario thermomécanique imposé à l'échantillon pour décrire le brut de la section S2

la conduite, puisque le brut est gélifié. Cependant, cela signifie que l'état de gel est le même dans toute la conduite et que finalement la contrainte seuil τ_y est définie par $\tau_y = \tau_{y0} + \tau_{y1}$. Plaçons-nous dans le cas où la température à l'état initial pour le redémarrage est constante et égale à la température extérieure. Comme les contraintes seuil τ_{y0} et τ_{y1} dépendent de la température, nous aurons une contrainte seuil τ_y constante dans toute la conduite.

Or d'après les scénarios décrits lors de l'étape 4, l'entrée de la conduite subit un refroidissement statique alors qu'en aval de la conduite, le refroidissement est majoritairement dynamique. De plus, d'après le TAB. I.1, un refroidissement statique est responsable d'une plus grande contrainte seuil τ_y qu'un refroidissement dynamique. En effet, il est observé *in situ* que la contrainte seuil τ_y est plus grande à l'entrée de la conduite qu'à la sortie. Ainsi, dans le cas d'une température constante et égale à la température extérieure, si nous prenons uniquement en compte les effets thermiques dans la description des propriétés rhéologiques, l'état initial réel ne sera pas reproduit convenablement. Il est donc nécessaire de tenir compte des effets du passé thermomécanique.

Nous décidons d'introduire les effets du passé thermomécanique à travers la description de l'état initial du paramètre de structure λ . En utilisant les procédures expérimentales établies dans l'étape 4 pour reproduire les scénarios en différentes sections de la conduite, nous mesurons la contrainte seuil τ_y pour chaque section considérée. D'autre part, nous émettons deux hypothèses (FIG. IV-5), dans le cas où la température est constante dans toute la conduite :

- la contrainte seuil déterminée dans la section la plus avale de la conduite, qui a subi un refroidissement dynamique de Θ_{Inlet} à Θ_{Ext} , correspond à la contrainte seuil minimale $\tau_{y\text{min}}$. Ainsi, comme nous l'avons décrit dans le *Chapitre I*, les cristaux de paraffines sont figés dans une direction privilégiée et le gel possède une structure plus faible. On suppose donc que $\lambda = 0$.
- la contrainte seuil déterminée dans la section d'entrée de la conduite, qui a subi un refroidissement statique de Θ_{Inlet} à Θ_{Ext} , correspond à la contrainte seuil maximale $\tau_{y\text{max}}$. En effet, les cristaux de paraffines sont enchevêtrés et confèrent au matériau une structure compacte et plus résistante. Ainsi, on suppose que $\lambda = 1$.

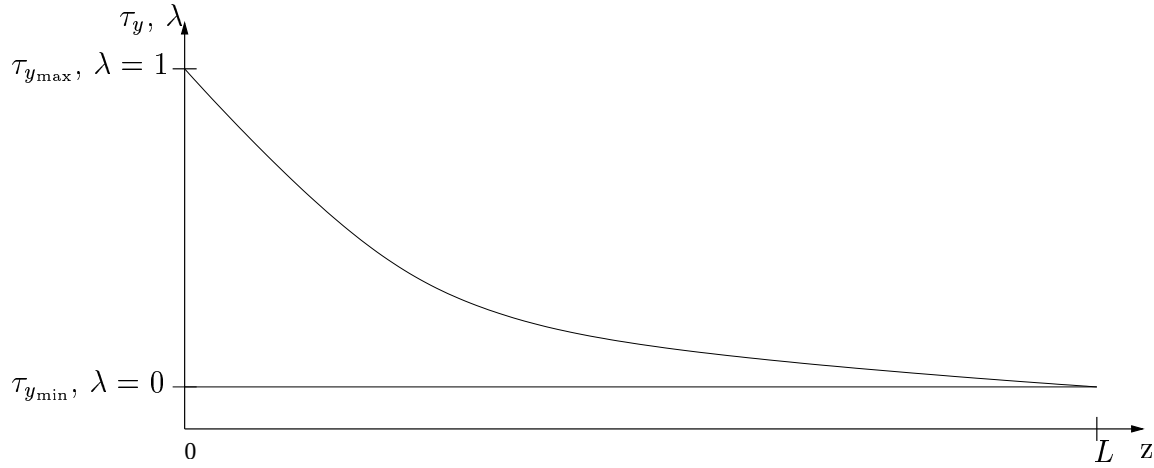


FIG. IV-5 Description des paramètres de redémarrage (τ_y et λ) à l'état initial

Comme tous les paramètres rhéologiques, en particulier les contraintes seuil τ_{y0} et τ_{y1} , ont été mesurés selon la procédure de l'étape 4, nous pouvons maintenant déterminer les valeurs à l'état initial du paramètre de structure λ dans chaque section grâce au modèle de Houska par :

$$\lambda = \frac{\tau_y - \tau_{y0}}{\tau_{y1}} \quad (\text{IV.2})$$

Ainsi, $\tau_{y\text{min}}$ devrait correspondre à τ_{y0} mesurée dans la section la plus avale de la conduite et $\tau_{y\text{max}}$ à $\tau_{y0} + \tau_{y1}$ mesurée à l'entrée de la conduite. Dans la situation où le temps d'arrêt de la conduite est très long, et la température est constante et égale à la température extérieure, la variation de la contrainte seuil τ_y à l'état initial correspond à la situation réelle.

Le procédé de description du paramètre de structure à l'état initial est le même si la température n'est pas constante dans la conduite. Cependant, il est plus difficile de déterminer les deux sections qui correspondent aux états extrêmes de structure du matériau ($\lambda = 0$ et $\lambda = 1$). En effet, prenons le cas des sections S_1 et S_2 présenté sur la FIG. IV-3. A l'instant initial du redémarrage, la section S_1 est à la température $\Theta_{1\text{Start}}$ supérieure à la température $\Theta_{2\text{Start}}$ de la section S_2 . Donc la contrainte seuil de la section S_1 devrait être la plus faible. Cependant, la section S_1 est refroidie au repos alors que la section S_2 est refroidie sous écoulement. Finalement,

les effets thermiques et mécaniques jouent de façon antagoniste sur la valeur de la contrainte seuil. Il est donc, *a priori*, difficile de connaître la section qui correspond aux états extrêmes de structure $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$. Une nouvelle fois, la précision de cette méthode repose sur le nombre de sections choisies le long de la conduite pour effectuer les mesures des paramètres rhéologiques.

ETAPE 6 : Redémarrage

Cette étape de redémarrage repose sur des simulations numériques qui permettent d'évaluer la pression de redémarrage et le temps nécessaire pour vidanger la conduite à partir des conditions initiales déterminées dans les étapes précédentes. Les calculs modélisent la vidange de la conduite remplie du brut gélifié par l'injection du même fluide chaud ou d'un autre fluide qui possède un comportement Newtonien (eau, gazole ...). Finalement, ces calculs correspondent à l'écoulement non-isotherme d'un fluide viscoplastique thixotrope et compressible dans une conduite cylindrique, déplacé par un fluide chaud dont le comportement est proche d'un fluide Newtonien.

Le principe du code de calcul consiste à imposer une pression à l'entrée de la conduite afin de déterminer si l'écoulement redémarre ou non. Dans le cas où il redémarre, nous déterminons le temps nécessaire pour vidanger la conduite du brut gélifié et retrouver des conditions stationnaires d'écoulement. Si l'écoulement ne redémarre pas, il suffit d'augmenter la pression et de relancer une simulation. En fait, par une méthode de dichotomie, il est possible de déterminer la pression minimale nécessaire pour redémarrer l'écoulement, sachant que la pression maximale est définie par la relation $\Delta p = \frac{4\tau_y L}{D}$.

Lorsque la conduite étudiée est longue, le modèle 2D devient difficile à utiliser en raison de son coût de calcul (de quelques heures à plusieurs semaines). Ainsi, un modèle 1D de redémarrage a été développé par Wachs [61] à l'IFP et repose sur le même principe que le modèle 2D développé au cours de ces travaux de thèse. Evidemment, le modèle 2D de redémarrage est plus précis et permet d'observer l'évolution radiale des différents paramètres dans la conduite mais nécessite de longs temps de calcul. Le modèle 1D est rapide mais moins précis car les effets radiaux sont absents. Finalement d'un point de vue pratique, le choix entre un calcul 1D ou 2D repose sur le cas étudié. En effet, s'il s'agit de l'étude d'un pipeline industriel de plusieurs centaines de kilomètres, l'opérateur pétrolier est uniquement intéressé par la pression minimale et le temps nécessaire pour redémarrer la conduite. Ainsi, le modèle 1D est bien adapté. Cependant, l'étude d'une conduite expérimentale de plusieurs mètres peut être réalisée par le modèle 2D et permettra d'obtenir une description du redémarrage plus précise.

3 Essais expérimentaux pour déterminer les paramètres physiques

Dans les deux premières sous-sections, nous présentons les méthodes de Cawkwell et de Hénaut pour déterminer les paramètres du modèle de Houska. Ensuite, nous utilisons la méthode proposée par Hénaut pour déterminer la thermodépendance des paramètres de Houska. Enfin, nous présentons les résultats obtenus avec un montage expérimental qui permet de caractériser la compressibilité.

3.1 Détermination des paramètres de Houska par la méthode de Cawkwell

Nous utilisons un article de Cawkwell [8], issu de sa thèse pour décrire la procédure à suivre pour déterminer les huit paramètres du modèle de Houska.

Le modèle rhéologique utilisé par Cawkwell et Charles est composé des équations (I.29 - I.30). Ainsi, pour utiliser ce modèle, il est nécessaire de déterminer les huit paramètres qui le composent : τ_{y0} , τ_{y1} , k , Δk , n , a , b et m . Ces paramètres sont mesurés pour deux bruts différents de l'Arctique Canadien : Bent Horn et Cape Allison. Pour éliminer tous les problèmes dus à l'histoire mécanique et thermique, les échantillons sont chauffés à 50°C, puis préparés dans un rhéomètre cône-plan, équipé d'une chemise thermique qui permet de contrôler la température avec précision, notamment lors du refroidissement. Ces échantillons sont ensuite refroidis à un taux de 0.35°C.min⁻¹ jusqu'à la température d'essai, où ils y sont maintenus pendant une heure.

Cawkwell détermine expérimentalement les huit paramètres en les regroupant en trois catégories. La première est constituée de τ_{y0} , k et n , mesurés lorsque le brut gélifié est fortement précisailé ($\dot{\gamma} = 3072 \text{ s}^{-1}$) pendant 10 minutes. Ce fort cisaillement permet de complètement déstructurer le gel ($\lambda = 0$), et finalement le brut obéit à l'équation simplifiée suivante :

$$\tau = \tau_{y0} + k \dot{\gamma}^n \quad (\text{IV.3})$$

La partie permanente de la contrainte seuil τ_{y0} est alors déterminée en extrapolant la courbe contrainte seuil - taux de cisaillement pour une vitesse de cisaillement nulle. D'après la FIG. IV-6, Cawkwell estime la contrainte seuil permanente égale 12.4 Pa.

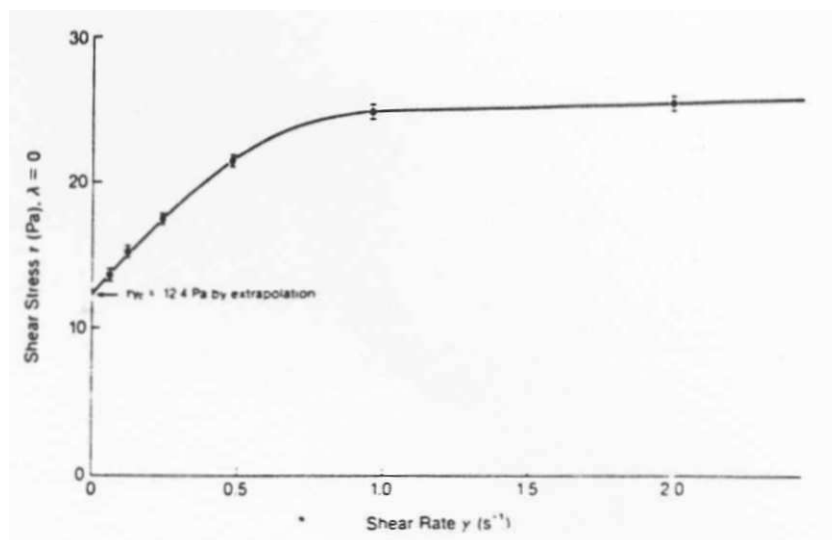


FIG. IV-6 Estimation de la contrainte seuil permanente τ_{y0} d'un brut de Cape Alison à 0°C, d'après Cawkwell [8]

Ensuite, il suffit de tracer $\ln(\tau - \tau_{y0})$ en fonction de $\ln \dot{\gamma}$. L'ordonnée à l'origine correspond à la partie permanente de la consistance du brut k et la pente à l'indice d'écoulement n . La FIG. IV-7 permet d'obtenir ces deux paramètres : $k = 0.95 \text{ Pa.s}^n$ et $n = 0.81$.

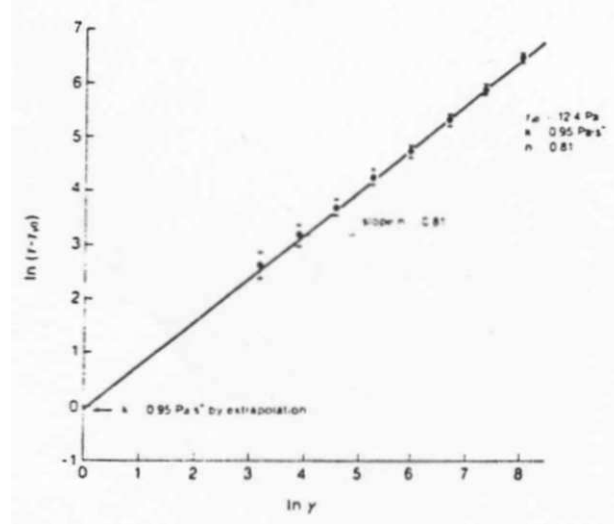


FIG. IV-7 Estimation de la consistance permanente k et de l'indice d'écoulement n d'un brut de Cape Alison à 0°C , d'après Cawkwell [8]

Le second groupe est composé des paramètres liés à la thixotropie du brut, τ_{y1} et Δk . Pour les déterminer, il faut que le brut soit totalement pris en gel ($\lambda = 1$), soit :

$$\tau = \tau_{y0} + \tau_{y1} + (k + \Delta k) \dot{\gamma}^n \quad (\text{IV.4})$$

La valeur de $\tau_{y0} + \tau_{y1}$ est obtenue par extrapolation de la courbe contrainte de cisaillement maximale - taux de cisaillement, à un taux de cisaillement nul. Connaissant la partie permanente de la contrainte seuil τ_{y0} , il est simple de calculer la partie thixotrope τ_{y1} . La FIG. IV-8 permet de déterminer $\tau_{y0} + \tau_{y1} = 138 \text{ Pa}$, donc $\tau_{y1} = 125.6 \text{ Pa}$, pour le brut Cape Alison à 0°C .

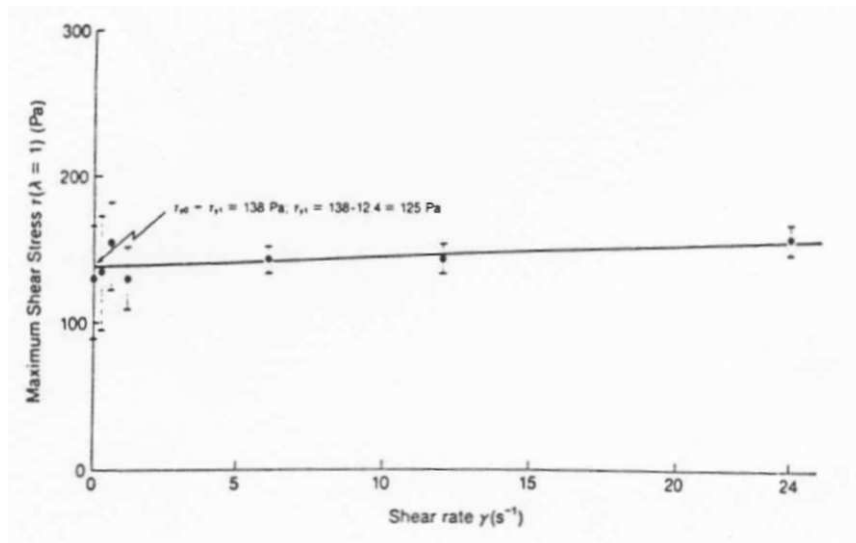


FIG. IV-8 Estimation de la partie thixotrope de la contrainte seuil τ_{y1} d'un brut de Cape Alison à 0°C , d'après Cawkwell [8]

L'ordonnée à l'origine de la courbe $\ln(\tau - \tau_{y0} - \tau_{y1}) - \ln \dot{\gamma}$ de la FIG. IV-9 correspond à la

valeur de $\ln(k + \Delta k)$, et le calcul de la pente permet de retrouver l'indice d'écoulement n et de le comparer à la valeur précédente. Ainsi, Cawkwell trouve $k + \Delta k = 3.67 \text{ Pa.s}^n$ et obtient la valeur de la consistance thixotrope $\Delta k = 2.72 \text{ Pa.s}^n$. La valeur de n est en fait uniquement déterminée avec la courbe de la FIG. IV-7 car ces mesures sont plus simples et donc plus précises. C'est pourquoi Cawkwell impose à cette droite une pente de $n = 0.81$, ce qui lui permet de déterminer la consistance thixotrope avec plus de précision.

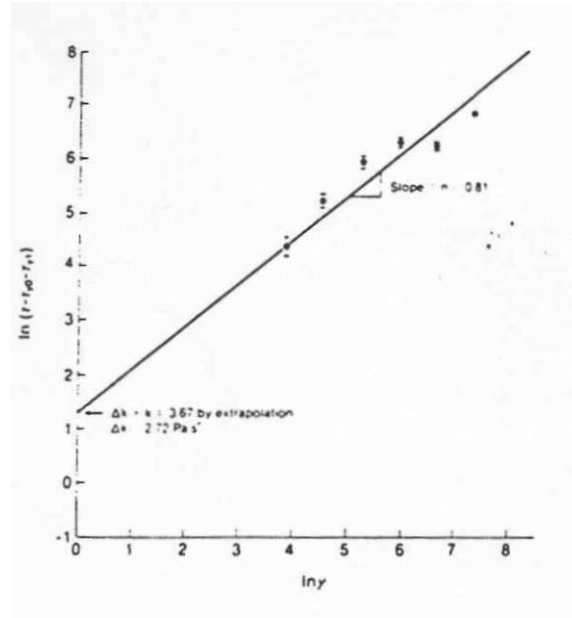


FIG. IV-9 Estimation de la partie thixotrope de la consistance Δk d'un brut de Cape Alison à 0°C , d'après Cawkwell [8]

Les derniers paramètres à déterminer sont ceux associés à l'équation du paramètre de structure λ (a , b et m). Ces paramètres, ne pouvant être mesurés, sont estimés par une méthode mathématique d'optimisation. En intégrant l'équation de Moore (I.30), on obtient :

$$\lambda = \frac{a}{a + b \dot{\gamma}^m} + \frac{b \dot{\gamma}^m}{a + b \dot{\gamma}^m} e^{-(a + b \dot{\gamma}^m)t} \quad (\text{IV.5})$$

Pour vérifier la cohérence des valeurs des paramètres des deux premières catégories (τ_{y0} , τ_{y1} , k , Δk et n) et de la troisième catégorie (a , b et m), Cawkwell compare la variation du paramètre de structure λ en fonction du temps sur la FIG. IV-10 lorsqu'il le calcule avec l'équation (IV.5), et lorsqu'il le calcule à partir de l'équation (IV.6). On remarque que les deux courbes sont proches l'une de l'autre, ce qui signifie que le calcul des paramètres a , b et m par cette méthode est satisfaisant.

$$\lambda = \frac{\tau - \tau_{y0} - k \dot{\gamma}^n}{\tau_{y1} + \Delta k \dot{\gamma}^n} \quad (\text{IV.6})$$

Nous avons présenté les résultats obtenus par Cawkwell pour le brut de Cape Alison à une température de 0°C . Ce protocole est répété pour plusieurs températures et pour le brut de Bent Horn, afin d'établir la dépendance en température des paramètres rhéologiques. Tous ces

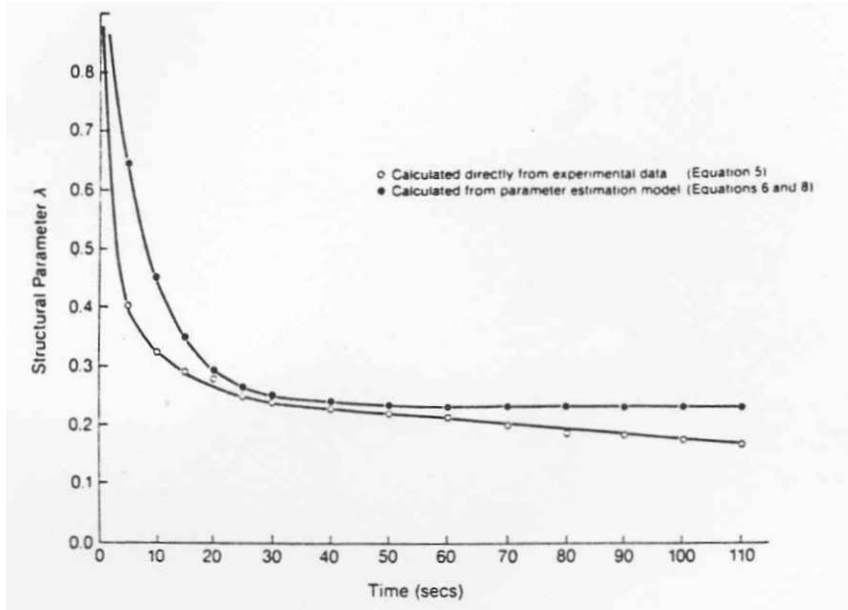


FIG. IV-10 Comparaison du paramètre de structure λ calculé par linéarisation et déterminé par l'expérience d'un brut de Cape Alison à 0°C pour une vitesse de cisaillement de 96 s^{-1} , d'après Cawkwell [8]

résultats sont regroupés sur les deux tableaux de la FIG. IV-11. Il est néanmoins important de noter qu'il faut être rigoureux dans l'analyse des résultats (en particulier a , b et m), car un problème d'optimisation n'a pas une solution unique.

Ces données montrent qu'il est évident que la température a une forte influence sur les paramètres rhéologiques. A partir de ces mesures, il est possible de caractériser cette dépendance et même d'établir une loi fonction de la température pour chaque paramètre. Finalement, cette méthode permet de déterminer avec une bonne précision les paramètres du modèle de Houska. En particulier, comme nous l'ont montré les courbes du paramètre de structure, l'évaluation des paramètres a , b et m est satisfaisante.

3.2 Détermination des paramètres de Houska par la méthode de Henaut

Au laboratoire de rhéologie de l'IFP, Henaut [27] a développé une autre méthode pour déterminer les paramètres cinétiques a , b et m , en utilisant la rhéométrie oscillatoire. Pour déterminer le paramètre de structuration a , un échantillon de brut du Gabon (ATORA) est cisailé (50 s^{-1}) lors de son refroidissement puis laissé au repos. Afin d'observer sa restructuration, le module élastique G' est mesuré en balayant en fréquence l'échantillon. Comme le brut est au repos, l'équation structurale de Moore s'écrit :

$$\frac{d\lambda}{dt} = a(1 - \lambda) \quad (\text{IV.7})$$

Et s'intègre :

Measured parameters					
Temperature (°C)	τ_{y0} (Pa)	τ_{y1} (Pa)	k (Pa s ⁿ)	Δk (Pa s ⁿ)	n
<i>Cape Allison</i>					
2.5	6.0 ± 0.5	23 ± 2	0.75 ± 0.1	0.47 ± 0.1	0.81 ± 0.02
0.0	12.4 ± 0.5	125 ± 8	0.95 ± 0.1	2.72 ± 0.4	0.81 ± 0.02
-2.5	16.0 ± 1.0	199 ± 10	1.82 ± 0.2	4.86 ± 0.6	0.75 ± 0.02
-5.5	20.0 ± 1.0	360 ± 15	6.05 ± 0.3	16.1 ± 1.0	0.66 ± 0.02
-10.0	34.0 ± 1.5	416 ± 20	10.5 ± 0.4	18.0 ± 1.0	0.65 ± 0.02
-15.0	68.0 ± 2.0	1082 ± 50	13.5 ± 0.5	23.1 ± 1.2	0.66 ± 0.02
<i>Bent Horn</i>					
-2.5	0.2 ± 0.03	0	0.086 ± 0.005	0	0.95 ± 0.02
-6.1	0.54 ± 0.05	0.90 ± 0.1	0.75 ± 0.05	0.30 ± 0.05	0.71 ± 0.02
-11.5	0.75 ± 0.08	4.25 ± 0.2	0.82 ± 0.05	0.67 ± 0.05	0.72 ± 0.02

Parameters obtained by parameter estimation			
Temperature (°C)	a (s ⁻¹)	b (s ^{m-1})	m
<i>Cape Allison</i>			
2.5	0.0171 ± 0.0010	0.00605 ± 0.00028	0.532 ± 0.31
0.0	0.0293 ± 0.0016	0.0236 ± 0.0024	0.306 ± 0.131
-2.5	0.0268 ± 0.0014	0.0319 ± 0.0043	0.252 ± 0.135
-5.5	0.0191 ± 0.0012	0.0345 ± 0.0017	0.237 ± 0.022
-10.0	0.0276 ± 0.0020	0.0466 ± 0.0094	0.244 ± 0.141
-15.0	0.0309 ± 0.0019	0.0669 ± 0.0056	0.195 ± 0.036
<i>Bent Horn</i>			
-2.5	0.0	0.0	0.0
-6.1	0.00767 ± 0.00067	0.0616 ± 0.0067	0.565 ± 0.75
-11.5	0.0317 ± 0.0024	0.0480 ± 0.0031	0.549 ± 0.24

FIG. IV-11 Données expérimentales des huit paramètres de Houska pour les bruts paraffiniques de Cape Alison et de Brent Horn, d'après Cawkwell [8]

$$\lambda = 1 - (1 - \lambda_0)e^{-at} \quad (\text{IV.8})$$

avec λ_0 , le paramètre de structure au début de la mise en repos de l'échantillon ($t = 0$).

En observant l'évolution du module d'élasticité, on constate que plus le gel se forme, plus G' augmente. En effet, lors de cette structuration, le brut a tendance à se comporter de plus en plus comme un solide élastique. C'est pourquoi Hénaut propose intuitivement l'équation (IV.9), dans laquelle le paramètre de structure λ est remplacé par le rapport du module d'élasticité G' après un temps de repos t et du module élastique du brut refroidi au repos $G'_{\text{non-cisaillé}}$.

$$\frac{G'}{G'_{\text{non-cisaillé}}} = 1 - \left(1 - \frac{G'_0}{G'_{\text{non-cisaillé}}}\right)e^{-at} \quad (\text{IV.9})$$

avec G'_0 , le module d'élasticité après le refroidissement, juste avant la mise au repos.

En traçant $\ln \frac{\frac{G'}{G'_{\text{non-cisaillé}}} - 1}{1 - \frac{G'_0}{G'_{\text{non-cisaillé}}}}$ en fonction du temps, on obtient une droite de pente $-a$ sur

la FIG. IV-12 ($a = 10^{-7} \text{ s}^{-1}$).

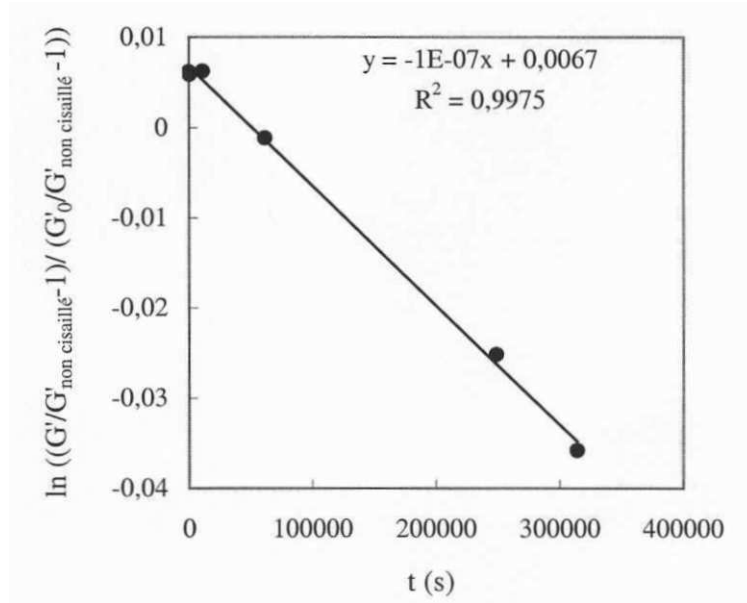


FIG. IV-12 Détermination du paramètre de restructuration a du modèle de Houska, d'après Henaut et al. [27]

Henaut procède de la même façon pour déterminer les paramètres b et m , en négligeant la reprise du gel, qui est lente par rapport à la déstructuration; ainsi, l'équation structurale s'écrit :

$$\frac{d\lambda}{dt} = -b \dot{\gamma}^m \lambda \quad (\text{IV.10})$$

Elle s'intègre et s'écrit en fonction du module élastique :

$$\ln \frac{G'}{G'_0} = -b \dot{\gamma}^m t \quad (\text{IV.11})$$

Pour déterminer les paramètres cinétiques b et m , le brut est précisailé pendant la même durée (1 min) à différents gradients (10, 20, 50 et 100 s^{-1}). En traçant la courbe $\ln \left(-\frac{1}{t} \ln \frac{G'}{G'_0} \right)$ en fonction de $\ln \dot{\gamma}$, sur la FIG. IV-13, il est possible de déterminer m qui est la pente de la droite, et $\ln b$ qui est l'ordonnée à l'origine.

Pour vérifier ces valeurs, Hénaut propose une série d'expériences qui consiste à appliquer au brut gélifié un même gradient de cisaillement (100 s^{-1}) pendant différentes périodes (15, 30, 60 et 150 s). Ainsi, en traçant $\ln \frac{G'}{G'_0}$ en fonction de la durée de cisaillement, on obtient une droite de pente $b \dot{\gamma}^m$, à partir de laquelle il est possible de comparer les valeurs de b et m obtenues précédemment.

Finalement, cette méthode permet de déterminer expérimentalement les paramètres cinétiques de l'équation de structure, indépendamment des cinq autres paramètres rhéologiques.

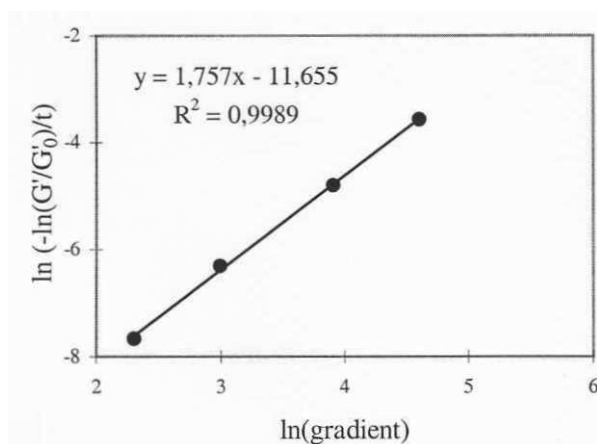


FIG. IV-13 Détermination des paramètres b et m du modèle de Houska, d'après Henaut et al. [27]

Cependant, nous ne pouvons pas comparer la précision de cette méthode avec celle proposée par Cawkwell, car il serait nécessaire d'utiliser le même brut paraffinique, avec le même viscosimètre et dans les mêmes conditions d'essai.

3.3 Thermodépendance des paramètres de Houska

A plusieurs reprises, nous avons mis en avant l'influence des effets thermiques sur le comportement des bruts paraffiniques. Ainsi, nous avons mesuré la thermodépendance des paramètres du modèle rhéologique, c'est-à-dire des huit paramètres du modèle de Houska. Nous présentons dans cette section les mesures de ces huit paramètres pour le brut Gabonais Aтора à cinq températures différentes (22.5°C, 25°C, 27.5°C, 30°C et 32.5 °C), réalisées à l'IFP par Toutou-Mélinge [51]. La température de gel Θ_g de ce brut est de 30°C. Le protocole expérimental proposé par Hénaut est utilisé pour déterminer les paramètres du modèle de Houska pour chaque température. Les mesures obtenues sont rassemblées dans le TAB. IV.1.

Température (K)	295.5	298	300.5	303	305.5
Température (°C)	22.5	25	27.5	30	32.5
Paramètres de Houska					
τ_{y0} (Pa)	251	188	134	56	26
τ_{y1} (Pa)	875	661	484	235	41
k (Pa.s)	0.28	0.20	0.18	0.17	0.16
Δk (Pa.s)	1.52	1.49	0.17	0.0	0.0
n	1.02	0.99	0.89	0.92	1.03
a (10^{-8} s^{-1})	2.0	7.0	12.0	39.0	203.0
b (s^{-1})	0.026	0.016	0.014	0.010	0.011
m	0.32	0.29	0.30	0.31	0.37

TAB. IV.1 Résultats des mesures des huit paramètres du modèle de Houska à cinq températures différentes (22.5°C, 25°C, 27.5°C, 30°C et 32.5 °C)

La plage de température a été restreinte pour des raisons techniques. En effet, à 20°C nous ne pouvons pas effectuer de mesure car la contrainte seuil du gel est tellement élevée que le rhéomètre n'est pas assez puissant pour cisailer l'échantillon. D'autre part, comme la

température de cristallisation commençante Θ_{cc} est évaluée à 33.3°C, il n'est pas utile de faire des essais au dessus de cette température puisque le brut a un comportement Newtonien.

Paramètres rhéologiques τ_{y0} , τ_{y1} , k , Δk et n

D'après la FIG. IV-14, les paramètres τ_{y0} et τ_{y1} diminuent lorsque la température augmente. Ces mesures confirment la tendance naturelle du gel à être de moins en moins résistant lorsque la température croît. De plus, le comportement thermodépendant des deux contraintes seuil est linéaire sur la plage de température considérée. Pour des températures élevées, les contraintes seuil τ_{y0} et τ_{y1} faibles montrent que le brut tend vers un comportement Newtonien et non-thixotrope.

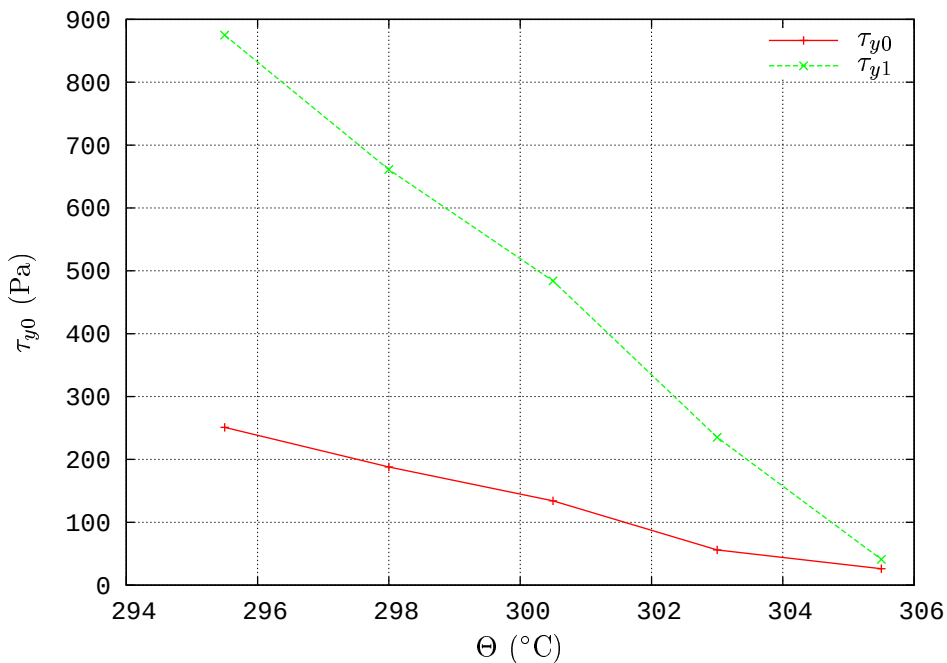


FIG. IV-14 Thermodépendance des contraintes seuil permanente τ_{y0} et thixotrope τ_{y1} du brut paraffinique Aтора

La dépendance en température des consistances k et Δk est présentée sur la FIG. IV-15. La partie permanente de la viscosité varie de façon inversement exponentielle avec la température. Ce comportement est proche de celui observé dans la littérature et est souvent caractérisé par les lois classiques d'Arrhénius ou WLF (Williams-Landel-Ferry). La partie thixotrope diminue également lorsque la température augmente. Lorsque la température est supérieure à 30°C, soit la température de gel Θ_g , le caractère thixotrope disparaît puisque Δk est nul.

Le paramètre de rhéofluidification n ne varie pas de façon monotone avec la température et il est donc difficile de tirer des conclusions sur sa thermodépendance. Cependant, il reste très proche de 1, ce qui signifie que le brut paraffinique Aтора est peu rhéofluidifiant.

Paramètres cinétiques a , b et m

L'évolution avec la température des paramètres de restructuration a et de destruction b est présentée sur la FIG. IV-16. Le paramètre de restructuration a augmente avec la tem-

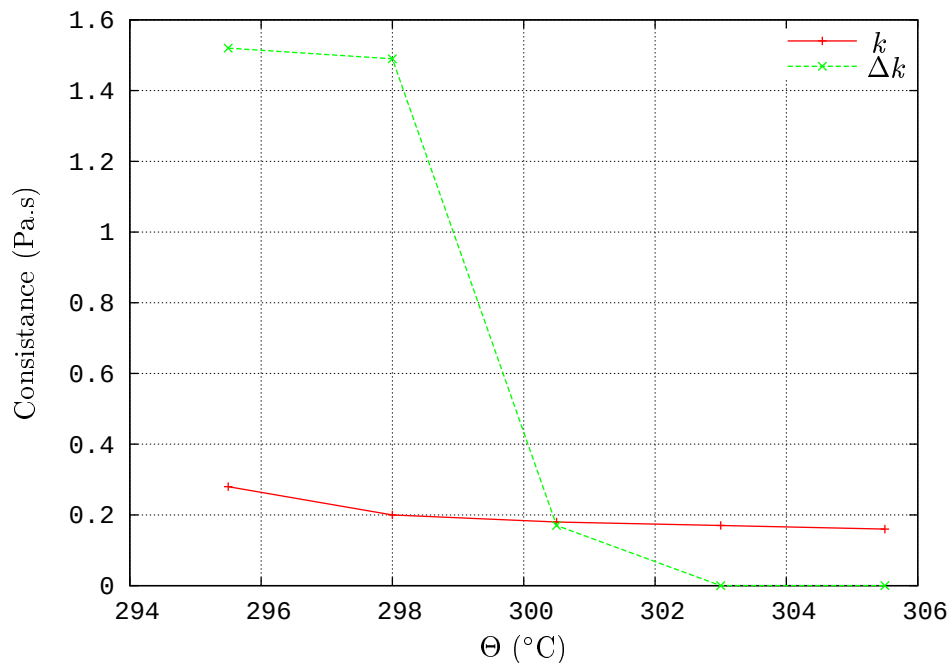


FIG. IV-15 Thermodépendance des consistances permanente k et thixotrope Δk du brut paraffinique Atora

pérature. En effet, lorsque la température augmente, il y a de moins en moins de cristaux de paraffines et leur mobilité est plus grande puisqu'ils évoluent dans un environnement plus fluide. Ainsi, le regroupement en agrégats est facilité et la structure du matériau se reforme plus rapidement. En fait, il serait nécessaire d'approfondir cette hypothèse en réalisant différents essais expérimentaux, basés sur une analyse physico-chimique de la structure du matériau (Diffraction par rayons X, RMN ...).

Au contraire, le paramètre de déstructuration du gel b diminue lorsque la température augmente. Ainsi, lorsque la température croît, la structure du gel est de moins en moins dense et il est de plus en plus facile de briser le réseau de cristaux.

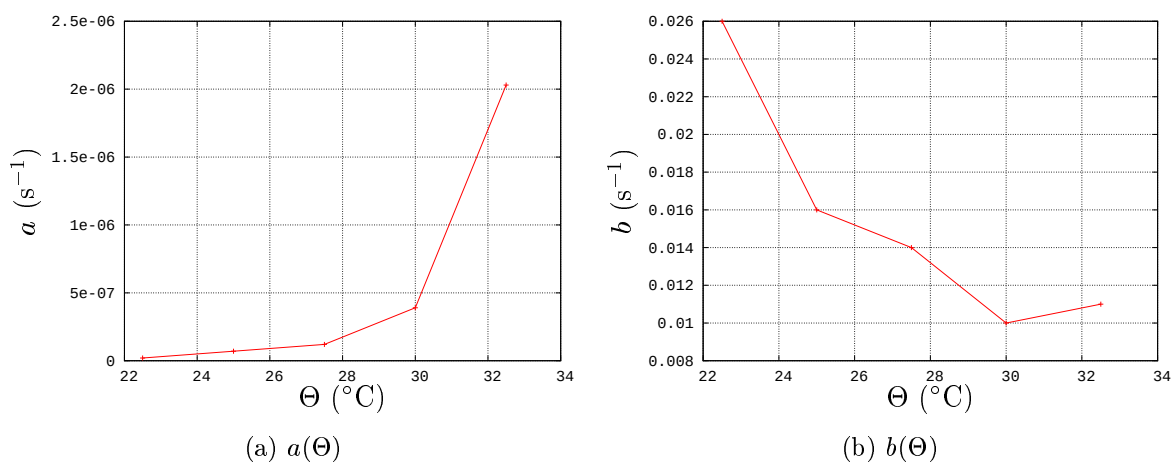


FIG. IV-16 Thermodépendance des paramètres de restructuration a et de déstructuration b du brut paraffinique Atora

Enfin le paramètre d'ajustement m ne présente pas de tendance claire de thermodépendance.

Nous lui attribuons une valeur moyenne d'environ 0.32.

3.4 Mise en place d'un montage expérimental pour caractériser la compressibilité

Au cours du refroidissement, il apparaît un retrait du brut laissant place à des poches de gaz. Ces cavités se traduisent par une compressibilité du bouchon de gel lors du redémarrage. Il serait intéressant de visualiser le comportement de ces poches au cours de la remise en route de l'écoulement afin de mieux comprendre comment se comble le retrait. Nous avons donc réalisé un montage expérimental reposant sur le principe de la FIG. IV-17.

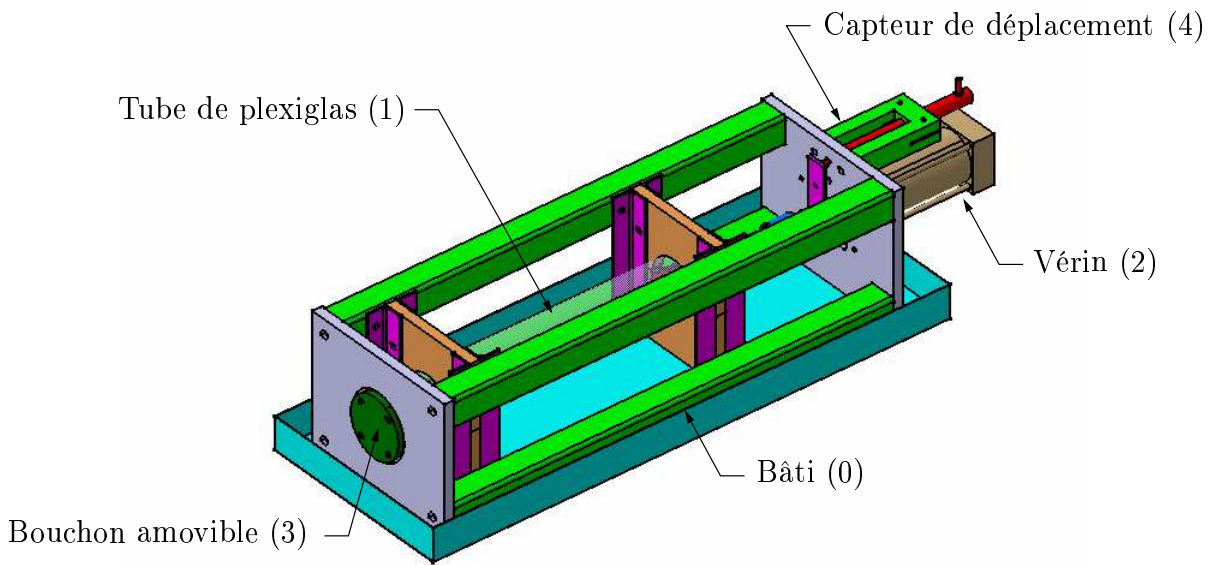


FIG. IV-17 Schéma de principe du montage expérimental de visualisation des poches de gaz

Le tube étanche en plexiglas (1) de diamètre $D = 50$ mm et de longueur $L = 348$ mm est rempli de brut paraffinique. Nous réalisons un essai avec le brut paraffinique ATORA du Gabon, dont la température de gel Θ_g est de 30°C . Le montage est placé au sein d'une étuve thermostatée et un refroidissement statique très lent ($0.01^\circ\text{C}.\text{min}^{-1}$) de 50°C à 20°C est imposé à l'échantillon. Ainsi, nous nous assurons d'avoir un retrait au sommet de la conduite, comme le montre la FIG. IV-18. L'échantillon est laissé plusieurs heures à la température d'essai (20°C) pour s'assurer que la température est constante dans le tube.

Ensuite, un vérin (2) est adapté à l'une des extrémités du tube plexiglas et est alimenté par une pompe hydraulique capable de délivrer 2.10^6 Pa maximum. La tige de ce vérin est fixée sur un piston qui permet de déplacer le brut gélifié dans le tube. A l'autre extrémité du tube est adapté un bouchon amovible (3) qui permet de retenir le bouchon de gel. Un capteur de déplacement (4) est installé sur la tige du vérin afin de mesurer le déplacement du brut gélifié sous l'action du vérin. Nous réalisons deux essais de redémarrage différents dont les conditions initiales sont celles définies ci-dessus. Lors du premier essai, le bouchon amovible est vissé à



FIG. IV-18 Visualisation du retrait (au sommet) dans le tube plexiglas du montage expérimental (vue de côté)

l'extrémité du tube afin de mesurer la compressibilité et de décrire l'évolution des cavités de gaz lorsque le vérin comprime l'échantillon. Le deuxième essai se déroule dans les mêmes conditions mais nous retirons le bouchon amovible afin de visualiser le comportement du retrait dans cette configuration.

Essai n°1 avec bouchon amovible fixé à l'extrémité du tube plexiglas

Cet essai se décompose en 2 phases.

- Compression

Nous appliquons une pression de $1.5 \cdot 10^6$ Pa pour comprimer les poches. Comme la pompe hydraulique délivre un faible débit d'huile dans la chambre du vérin, la montée en pression est lente et s'apparente à une rampe de pression. Nous mesurons le déplacement en fonction de la pression et nous traçons sur la FIG. IV-19 le déplacement relatif $\frac{\Delta l}{l_0}$ en fonction de la pression (l_0 correspond à la longueur initiale de brut dans le tube plexiglas mesurée par le capteur de déplacement). La phase de compression correspond au trait plein rouge. Lorsque la pression atteint $1.5 \cdot 10^6$ Pa, le déplacement relatif est maximal et correspond à environ 0.037. Ceci signifie que les poches de gaz comprimées représentaient environ 3.7% du volume total du tube avant le phase de compression.

Le tube plexiglas transparent permet de visualiser l'évolution du retrait au cours de la phase de compression. Les poches de gaz se combent uniformément sur toute la longueur du tube. Ainsi, le bouchon de gel a un comportement proche d'un solide puisqu'en lui appliquant une pression axiale par l'intermédiaire du vérin, elle est transmise radialement et de façon homogène sur toute la longueur du tube. C'est pourquoi le retrait se comble uniformément dans tout le tube.

- Détente

Lors de la phase de détente, nous imposons une consigne en pression nulle et mesurons le déplacement relatif en fonction de la pression. La phase de détente correspond à la courbe pointillée verte sur la FIG. IV-19. Le volume initial occupé par les poches de gaz n'est pas atteint à la fin de l'essai puisque le déplacement relatif est de 0.022. Différentes hypothèses sont développées pour justifier le fait que le piston ne revient pas à sa position initiale. D'abord, il est possible que du gaz se soit dissout dans le brut gélifié pendant la phase de compression et reste dans cet état pendant la phase de détente. D'autre part, lors de la compression le réseau cristallin se brise et des paraffines cristallisées se liquéfient et occupent donc moins de volume que lorsqu'elles sont sous forme de cristaux. Ainsi, comme le processus de cristallisation se met en place uniquement en présence d'un gradient de

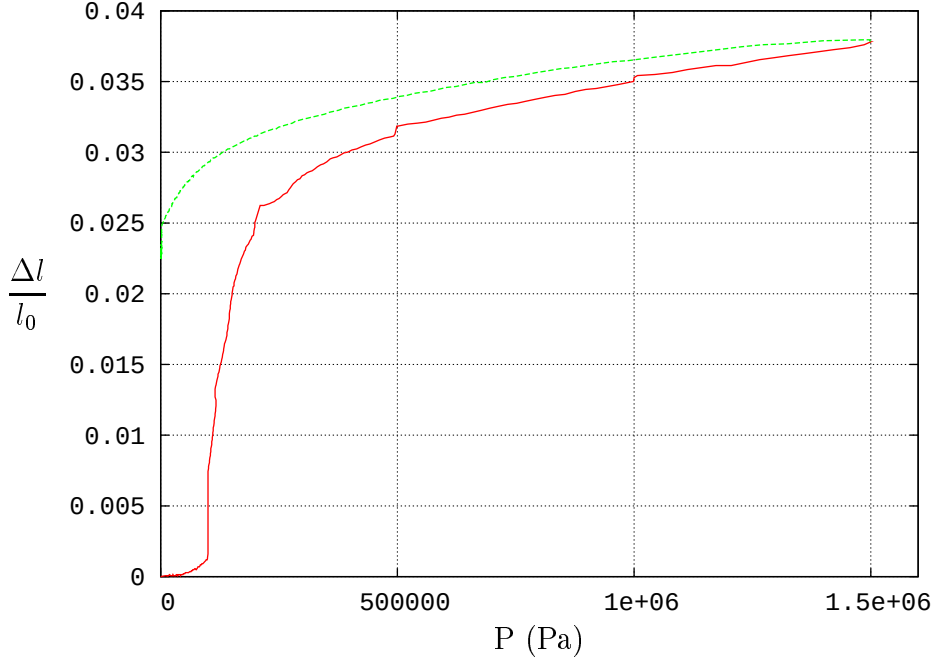


FIG. IV-19 Evolution du déplacement relatif en fonction de la pression lorsque le tube est fermé avec le bouchon amovible

température, le bouchon de gel ne retrouve pas son volume initial lors de la phase de détente, à température constante.

Cet essai permet surtout de déterminer la compressibilité χ_Θ du matériau. La compressibilité définie par la relation (II.2) faisant intervenir la masse volumique ρ peut être décrite par le déplacement l , puisque le tube est de rayon constant :

$$\chi_\Theta = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta P} \quad (\text{IV.12})$$

Ainsi, on trace l'évolution du coefficient de compressibilité χ_Θ en fonction de la pression sur la FIG. IV-20. La compressibilité diminue de façon continue avec la pression et tend vers une valeur asymptotique de $6.4 \cdot 10^{-7}$. C'est cette valeur de compressibilité qui est retenue pour les simulations numériques.

Essai n°2 avec bouchon amovible retiré

Nous présentons maintenant un essai lorsque le bouchon amovible est enlevé lors de la phase de compression. Ainsi, le brut est libre de sortir du tube. Une consigne de pression de $1.5 \cdot 10^6$ Pa est imposée à la pompe pour déplacer le vérin. L'évolution au cours du temps de la pression imposée sur le vérin est tracé sur la FIG. IV-21. Pendant la phase de montée en pression, malgré la consigne en pression de $1.5 \cdot 10^6$ Pa, la pression ne dépasse pas $1.3 \cdot 10^5$ Pa. La phase de compression, caractérisée par le pic de pression, est courte (environ 100 s). La pression nécessaire pour assurer l'écoulement est atteinte après 500 s et est de l'ordre de $1.3 \cdot 10^5$ Pa.

En fait, nous observons que le retrait n'est toujours pas comblé alors que le bouchon de gel se déplace. Comme les poches de gaz ne se sont pas comprimées, le pic de pression engendré par la compression est faible. Nous pouvons néanmoins observer la phase de compression grâce à

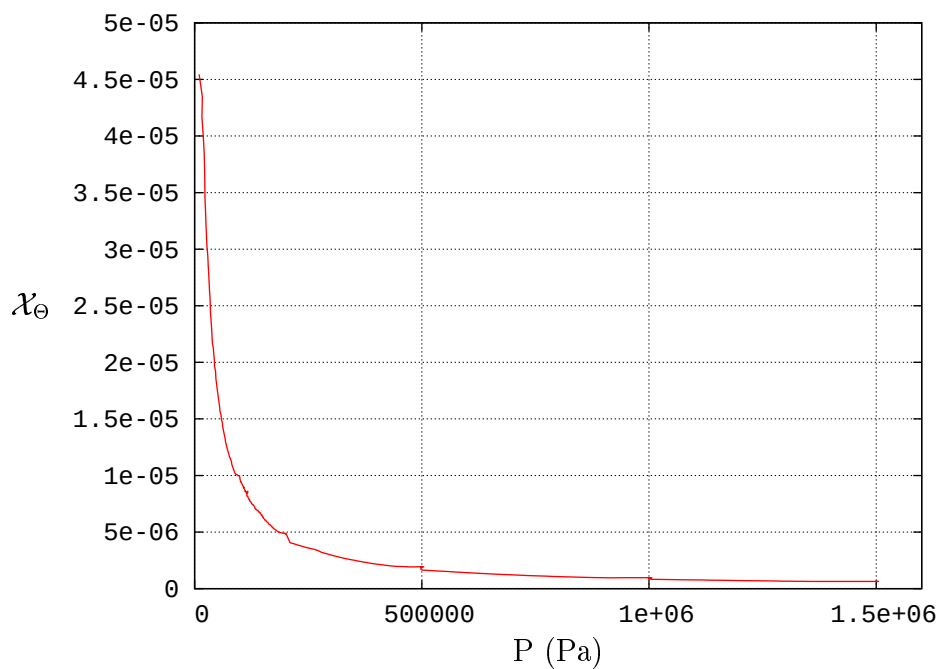


FIG. IV-20 Evolution de la compressibilité χ_Θ en fonction de la pression lorsque le tube est fermé avec le bouchon amovible

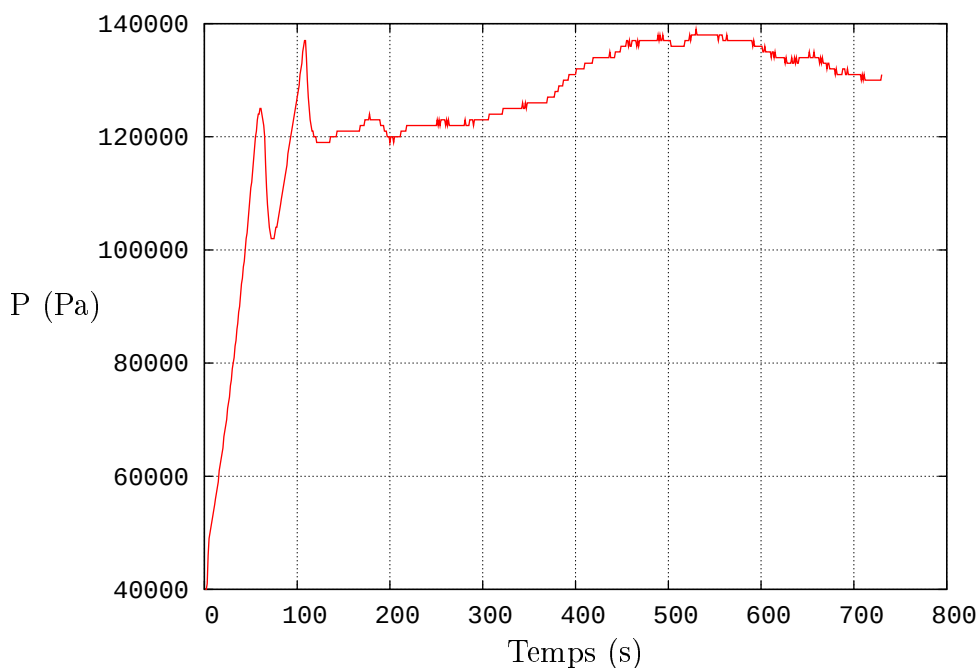


FIG. IV-21 Evolution au cours du temps de la pression imposée sur le vérin lorsque le tube est ouvert

la FIG. IV-22, sur laquelle est tracée l'évolution en temps des déplacements du bouchon de gel à l'entrée et la sortie du tube. La compression entraîne un retard du déplacement du bouchon de gel à la sortie d'environ 40 s.

Le fait que les poches de gaz ne se compriment pas est sans doute dû à l'état de surface du tube plexiglas. En effet, le retrait ne se comble pas car la contrainte de cisaillement à la paroi est très faible. En fait, nous pensons qu'un phénomène de glissement à la paroi apparaît

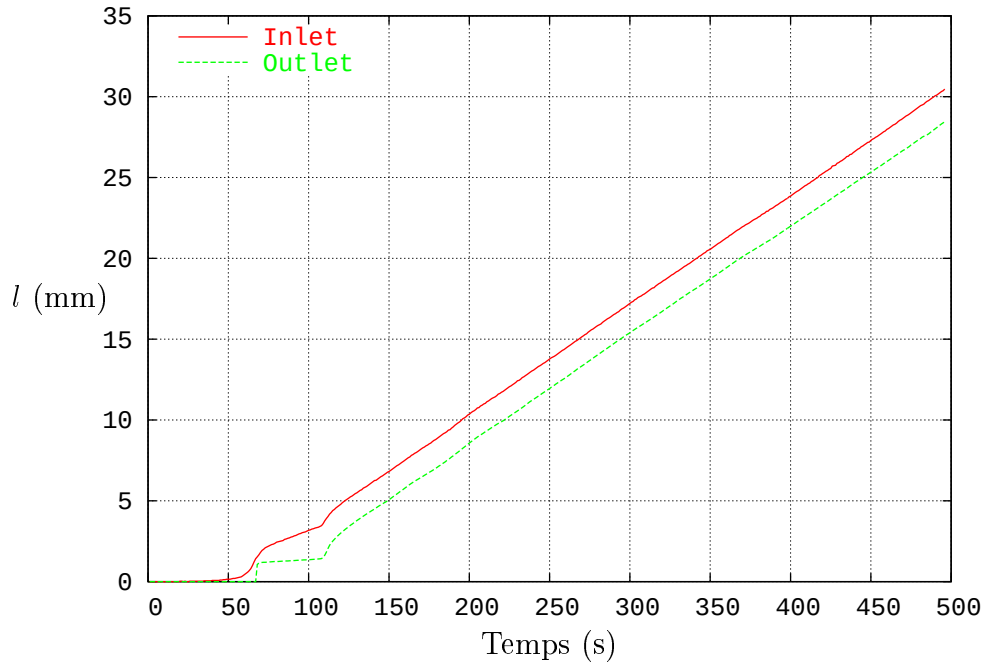


FIG. IV-22 Evolution en temps des déplacements du bouchon de gel à l'entrée et la sortie du tube

et que ce dernier est prépondérant lors de cet essai. D'ailleurs, nous observons que le bouchon de gel se déplace comme un seul bloc solide et ne se déstructure pas. Finalement, un état de surface plus rugueux permettrait d'augmenter la contrainte de cisaillement à la paroi afin que les poches de gaz se comblerent et que le gel se déstructure. C'est ce qui doit se produire dans des conduites en acier avec une rugosité plus grande. Cette observation mérite d'être étudiée attentivement afin de proposer un modèle de frottement à la paroi.

Finalement, ce montage expérimental simple nous permet de soulever plusieurs questions auxquelles il serait possible de répondre par une étude expérimentale plus approfondie. D'abord, l'état de surface de la conduite a une importance dans le processus de redémarrage et il serait intéressant de refaire l'essai n°2 avec des tubes de différentes rugosités. D'autre part, à l'aide d'une pompe plus puissante et de plusieurs capteurs de pression, nous pourrions obtenir une évolution en temps plus précise de la pression sur toute la longueur de la conduite.

4 Cas de validation avec une boucle expérimentale

Nous souhaitons comparer un calcul numérique et un essai expérimental afin d'évaluer la précision du modèle. Néanmoins, il existe très peu de données expérimentales complètes dans la littérature concernant le redémarrage des écoulements de bruts paraffiniques car il est difficile d'obtenir les paramètres des modèles de redémarrage (les huit paramètres du modèle de Houska par exemple) et les conditions exactes dans lesquelles sont effectuées les essais. D'autre part, l'utilisation de StarWaCS 2D ne nous permet pas de faire l'étude d'un pipeline industriel de grandes dimensions car son coût en temps de calcul est dissuasif. Cependant, nous avons à notre disposition les données et les résultats expérimentaux obtenus dans une conduite de laboratoire par Chrisman et al. [11] de la société *Alyeska Pipeline Service Company*. Nous comparons donc dans cette section les résultats numériques obtenus avec StarWaCS et les mesures réalisées dans

la boucle d'essai, en particulier en terme de pression.

4.1 Présentation de la boucle expérimentale

Le schéma de principe de la boucle expérimentale est présenté sur la FIG. IV-23. La conduite utilisée est de longueur $L = 15.3924$ m (50.5 ft de P_1 à P_7) et de diamètre $D = 7.87 \cdot 10^{-3}$ m (0.31 in). La conduite est enroulée en spirale sur une hauteur de 7 in, soit 0.1178 m. Chrisman et al. [11] ont imposé un refroidissement de la conduite au repos de $\Theta_{\text{Inlet}} = 35$ °F = 274.82 K à $\Theta_{\text{Ext}} = -20$ °F = 244.26 K pendant 60 heures. Ensuite, lors de la phase de redémarrage, le bouchon de gel est déplacé par une huile chaude (Θ_{Inlet}) dont la viscosité est faible. En fait, le fluide entrant est séparé du brut paraffinique gélifié par un racleur (*pig*) afin que les deux fluides ne se mélangent pas ; cela signifie que l'interface entre les deux fluides reste plane. A l'instant initial, le racleur est positionné au point noté "0" *Start Point* sur la FIG. IV-23, ce qui correspond à une longueur d'entrée $L_{\text{Inlet}} = 0.1524$ m (0.5 ft). Un débit volumique $Q_{\text{Inlet}} = 1.87 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ est imposé à l'entrée de la conduite et sept capteurs de pression sont placés sur la boucle afin de mesurer l'évolution de la pression au cours de temps.

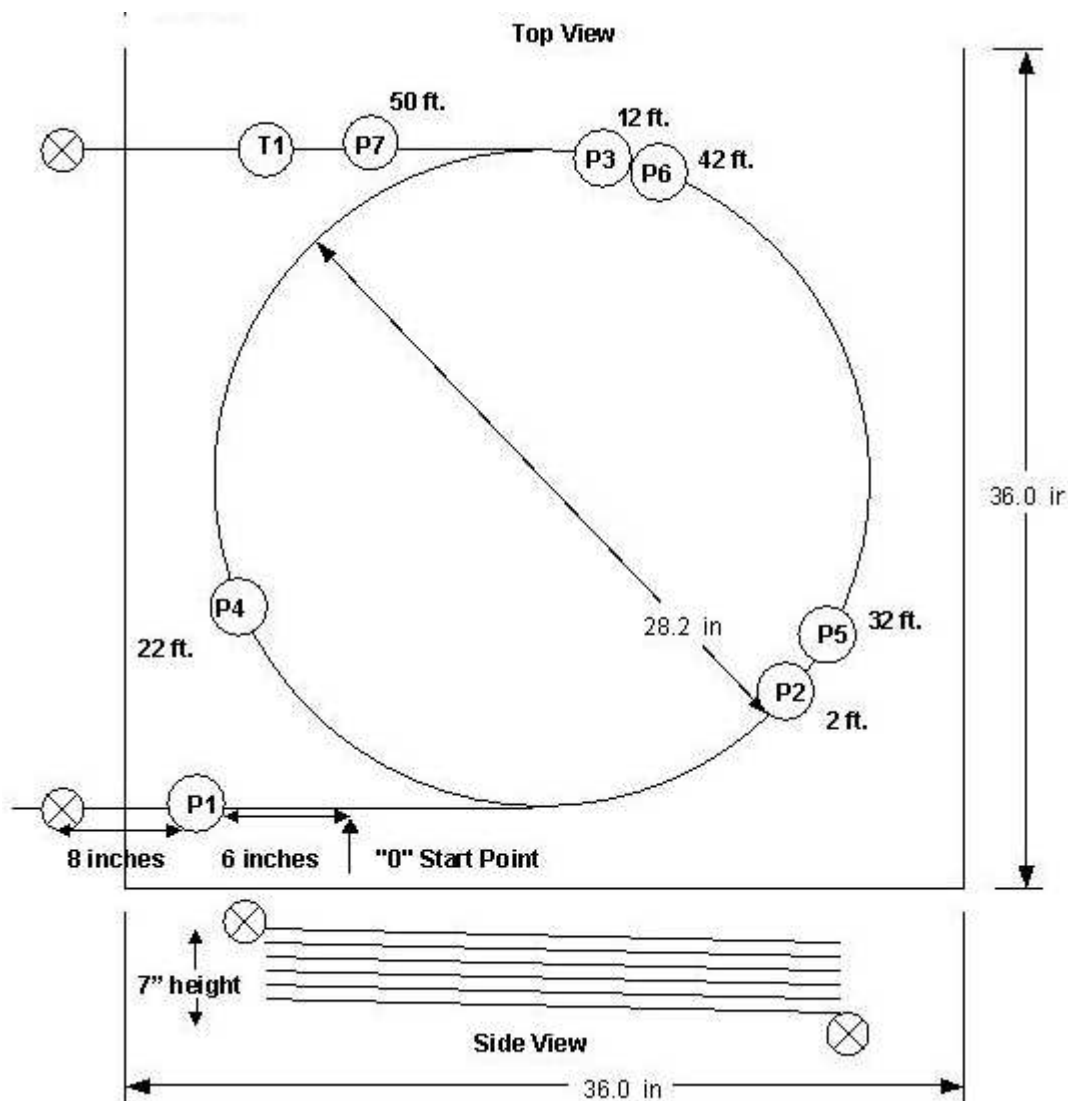


FIG. IV-23 Schéma de principe de la boucle Alyeska

Les résultats obtenus par Chrisman et al. et présentés sur la FIG. IV-24, concernent l'évolution au cours du temps de la pression, mesurée grâce aux sept capteurs décrits sur la FIG. IV-23.

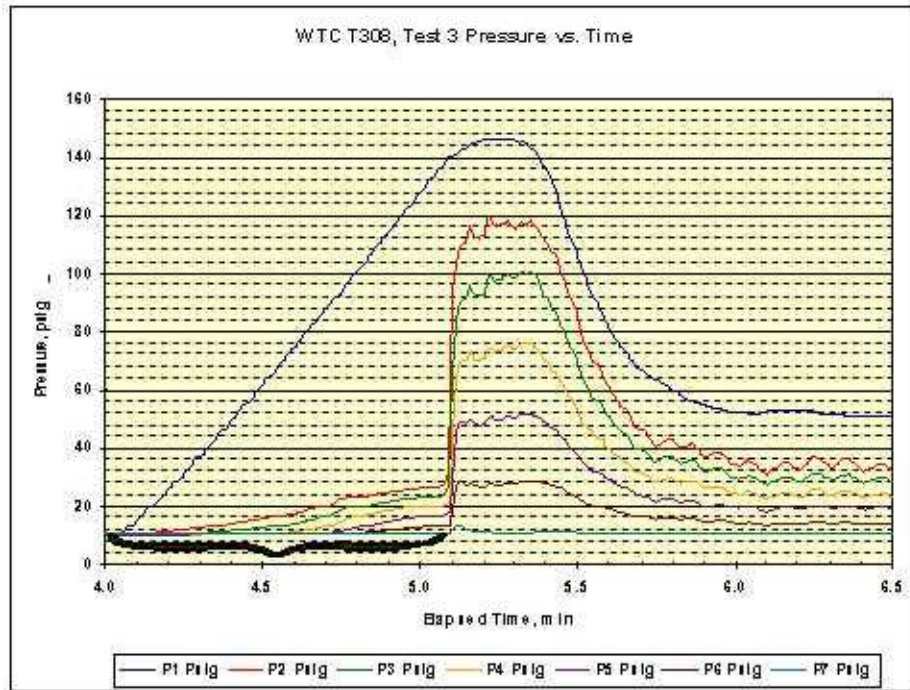


FIG. IV-24 Evolution en temps de la pression mesurée dans la boucle de laboratoire, d'après Chrisman et al. [11]

La pression du capteur P_1 augmente immédiatement après la mise en route de la pompe car il se situe avant le pig et mesure donc la pression dans le fluide entrant qui déplace le pig. La pression des autres capteurs augmente quelques secondes après le redémarrage de la conduite. Ce comportement est caractéristique des poches de gaz présentes dans le bouchon de gel, qui confèrent une compressibilité au matériau. Ainsi, lorsque la pompe alimente la conduite, le fluide injecté appuie sur le pig qui vient comprimer les poches de gaz dans le bouchon de gel. Finalement, la phase de compression correspond à l'augmentation rapide de la pression. Ensuite, après avoir atteint un maximum (145 psi), les pressions dans la conduite chutent pour se stabiliser vers une valeur constante après 2 min de redémarrage. La phase de diminution de la pression correspond à la déstructuration du matériau. En effet, lors de la déstructuration, la viscosité et la contrainte seuil diminuent, donc à débit constant, la pression chute également.

4.2 Paramètres du modèle de Perkins & Turner

Chrisman et al. [11] ont choisi la loi de Perkins & Turner (I.24) pour modéliser le comportement du brut paraffinique. Ils ont donc déterminé les propriétés rhéologiques du modèle à l'aide d'un rhéomètre. En particulier, les paramètres du modèle de Perkins & Turner sont donnés par :

$$\begin{aligned} b_1 &= b_4 = 0.326 \\ b_2 &= 0.00886 \text{ Pa.s} \\ b_3 &= 0.248 \end{aligned}$$

De plus, la dépendance en température de la viscosité et de la contrainte seuil est représentée par une équation déterminée par interpolation des courbes $\mu(\Theta)$ et $\tau_y(\Theta)$, soit :

$$\mu(\Theta) = 8.7 \cdot 10^{-4} \times \left(10^{10^{12.79 - 2.02 \ln(1.8 \times \Theta + 0.33)} - 0.6} \right) \quad (\text{IV.13})$$

$$\tau_y(\Theta) = 0.1e^{-468.5688 + 3.8661 \times \Theta - 0.0078505 \times \Theta^2} \quad (\text{IV.14})$$

La masse volumique est choisie telle que $\rho = 850 \text{ kg.m}^{-3}$, et les paramètres thermiques sont définis par $C_p = 1760 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $\lambda_f = 0.137 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Le refroidissement du brut au repos imposé par Chrisman et al. laisse supposer que des poches de gaz vont se former et donner une compressibilité au bouchon de gel. Cependant, Chrisman et al. ne mesurent pas cette compressibilité du brut gélifié. Nous choisissons trois valeurs de coefficients de compressibilité $\mathcal{X}_\Theta$ (0 , 10^{-10} et 10^{-8}).

4.3 Paramètres de simulation

Nous adaptons l'essai expérimental de Chrisman et al. pour réaliser une simulation numérique avec le code StarWaCS, dans lequel nous avons implémenté le modèle de Perkins & Turner. Désormais, on considère la conduite 2D axisymétrique horizontale présentée sur la FIG. II-1, dont les longueurs et températures aux limites sont décrites dans le TAB. IV.2. Nous imposons un profil de vitesse axiale à l'entrée de la conduite (w_{Inlet}) calculé à partir du débit $Q_{\text{Inlet}} = 1.87 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$ et une pression nulle à la sortie de la conduite.

L (m)	R (m)	L_{Inlet} (m)	Θ_{Ext} (K)	Θ_{Inlet} (K)	w_{Inlet} (m.s^{-1})
15.3924	$3.935 \cdot 10^{-3}$	0.1524	244.26	274.82	$3.76 \cdot 10^{-3}$

TAB. IV.2 Paramètres et conditions aux limites pour la simulation

Les effets de gravité dus à la géométrie (enroulement de la conduite sur une hauteur de 7 in) de la boucle expérimentale ne sont pas pris en compte dans les simulations numériques. La principale différence avec le cas expérimental est que nous ne prenons pas en compte le « pig ». De plus, le fluide entrant possède les mêmes propriétés que le brut paraffinique. Cependant, comme à l'état initial il est chaud ($\Theta_{\text{Inlet}} = 274.82 \text{ K}$), il possède une contrainte seuil et une viscosité faible ; son comportement est proche de celui d'un fluide Newtonien. Finalement, l'interface entre le fluide entrant et le bouchon de gel n'est pas plane, comme dans le cas expérimental (« pig »), mais a une forme particulière, liée aux conditions d'écoulement.

4.4 Résultats

Nous présentons donc les résultats numériques obtenus avec le code StarWaCS pour différentes compressibilités. Sur la FIG. IV-25 est présentée l'évolution de la pression au cours du temps pour le cas incompressible ($\mathcal{X}_\Theta = 0$), à différentes sections dans la conduite. La position de ces sections est proche de celles des 7 capteurs utilisés dans l'expérience. La phase d'augmentation de la pression qui correspond à la compression n'existe pas puisque l'écoulement est

incompressible. De plus, la pression maximale (189 psi) est supérieure à la pression obtenue par Chrisman et al. Nous observons également l'influence bénéfique de la compressibilité sur le redémarrage lors de l'essai expérimental dans la boucle, au cours duquel l'écoulement redémarre avec une pression plus faible (145 psi).

Nous remarquons que la pression mesurée par le capteur P_7 lors de l'essai expérimental est de 10 psi, puisqu'il existe une certaine longueur de conduite après ce capteur. Cependant, ce capteur correspond à la sortie de la conduite dans le cas de la simulation numérique. Or nous avons imposé une pression nulle à la sortie. C'est pourquoi, nous devons prendre en compte ce décalage de pression ; finalement, la pression calculée avec le code numérique sera sous-estimée de 10 psi.

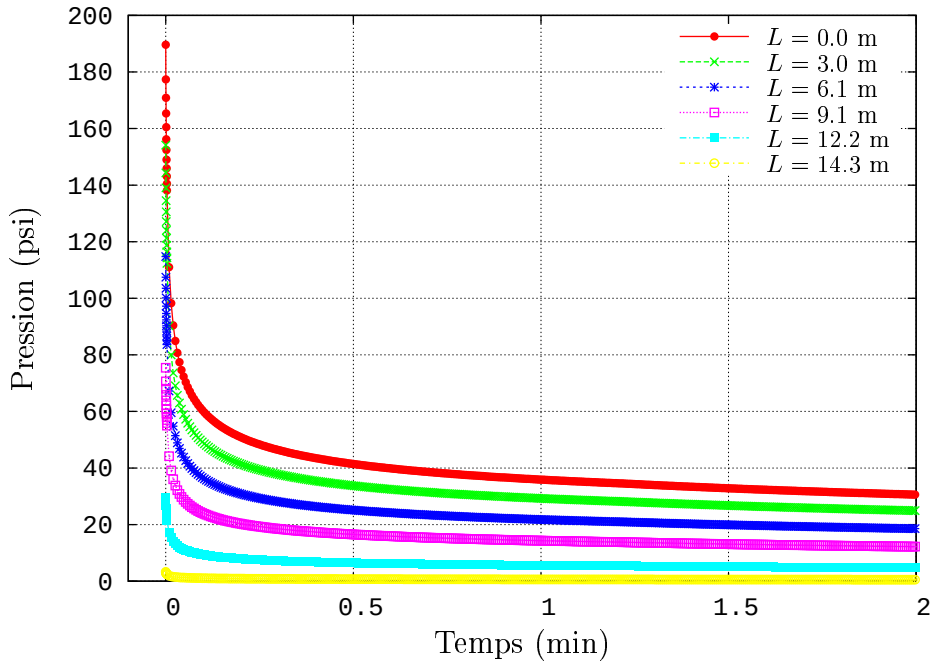


FIG. IV-25 Evolution en temps de la pression pour le cas incompressible ($\chi_\Theta = 0$)

Nous réalisons un second calcul avec une compressibilité $\chi_\Theta = 10^{-8}$. L'évolution de la pression au cours du temps à différentes sections de la conduite est présentée sur la FIG. IV-26. Dans ce cas, la pression maximale (71 psi) est inférieure à la pression mesurée lors de l'essai expérimental. Cependant, nous retrouvons les mêmes ordres de grandeurs pour l'évolution en temps des phénomènes physiques. En effet, les phases de compression et de déstructuration durent environ 1.5 min, comme nous l'observons sur la FIG. IV-24 lors de l'essai expérimental. Nous observons également les effets de compressibilité sur le retard de pression à la sortie de la conduite. En effet, la pression augmente immédiatement à l'entrée de la conduite, alors qu'elle augmente quelques secondes plus tard à la sortie.

Ce résultat permet de mettre en évidence l'influence bénéfique de la compressibilité puisque nous obtenons une pression de redémarrage inférieure à la pression obtenue dans le cas incompressible. Cependant, afin de s'approcher des conditions de l'expérience, nous proposons un troisième calcul avec une compressibilité plus faible. On choisit $\chi_\Theta = 10^{-10}$. L'évolution de la pression au cours du temps à différentes sections de la conduite est présentée sur la FIG. IV-27. La pression de redémarrage est désormais de 154 psi. Finalement, la pression de redémarrage est proche de celle mesurée par Chrisman et al., mais la phase de compression est très courte et ne dure que quelques secondes.

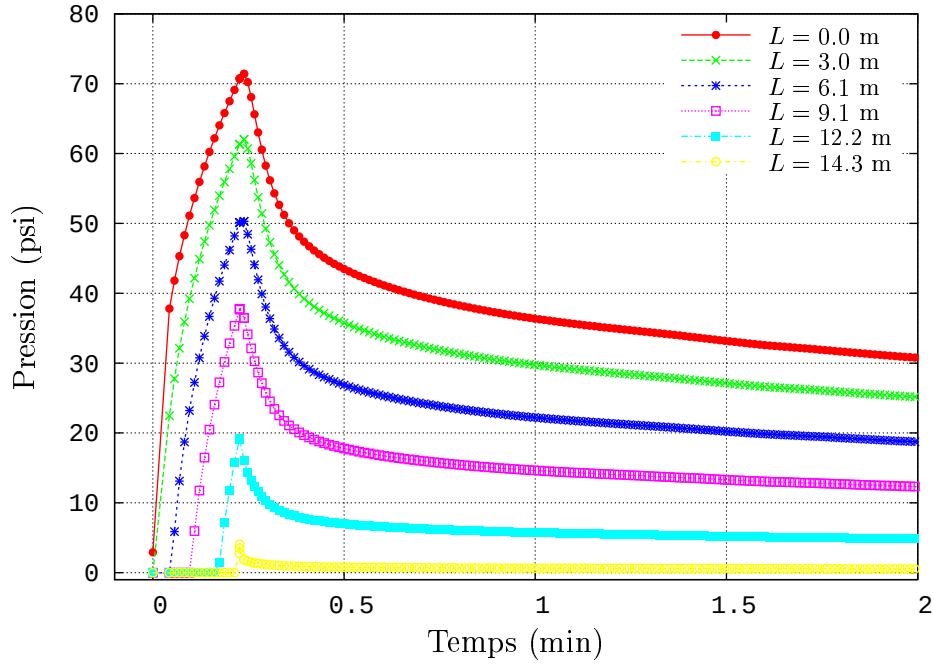


FIG. IV-26 Evolution en temps de la pression pour le cas compressible ($\mathcal{X}_\Theta = 10^{-8}$)

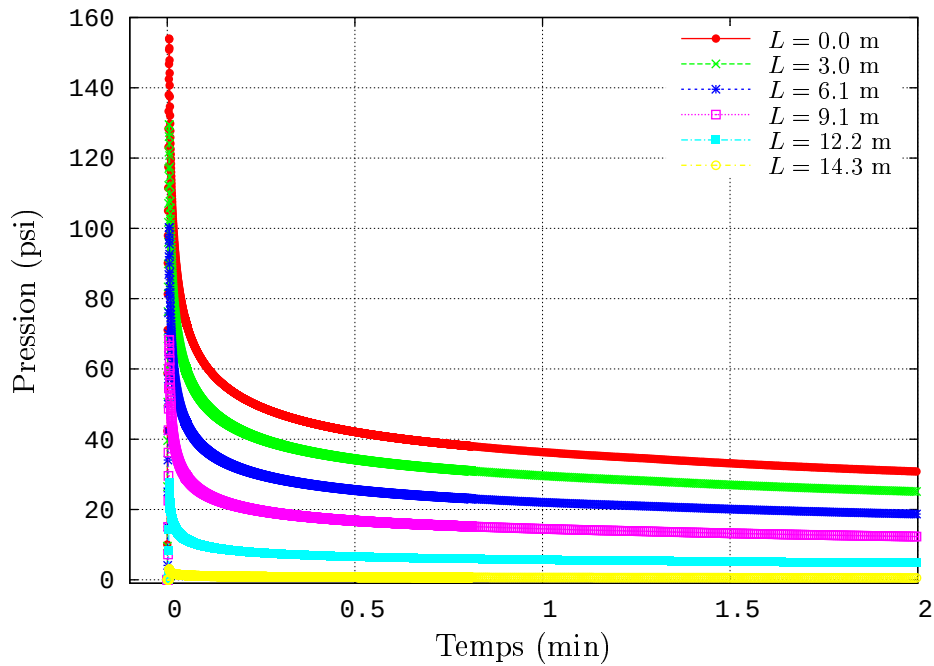


FIG. IV-27 Evolution en temps de la pression pour le cas compressible ($\mathcal{X}_\Theta = 10^{-10}$)

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème lié au redémarrage des écoulements de brut paraffinique d'un point de vue industriel. Nous avons d'abord décrit la démarche à suivre pour étudier le problème d'arrêt et de redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique dans un pipeline réel. Les six étapes que composent cette procédure utilisent à la fois des calculs numériques et des essais expérimentaux pour décrire l'état thermique et rhéologique à l'instant initial du redémarrage et pour calculer la pression minimale et le temps nécessaire pour

remettre en route l'écoulement. Pour mettre en application cette procédure, il serait intéressant de l'utiliser dans un contexte industriel afin d'identifier ses limites et ses contraintes dans un premier temps, puis d'évaluer son efficacité et sa précision dans la détermination des conditions de redémarrage.

Nous avons ensuite présenté des méthodes expérimentales pour déterminer les huit paramètres du modèle de Houska. La mesure des cinq paramètres rhéologiques τ_{y0} , τ_{y1} , k , Δk et n semble maîtrisée si le protocole expérimental est suivi rigoureusement. La méthode numérique proposée par Cawkwell et al. [8] pour déterminer les trois paramètres cinétiques a , b et m repose sur une technique d'optimisation dont la solution n'est pas unique. Il est donc nécessaire de l'utiliser avec attention et d'avoir une idée préalable de l'ordre de grandeur des paramètres à trouver. La méthode proposée par Hénaut [27] pour déterminer ces paramètres cinétiques est expérimentale et est basée sur l'analogie entre la structure du matériau et son module élastique G' . Nous avons également appliqué cette méthode expérimentale pour déterminer la thermodépendance des paramètres du modèle de Houska. Les dépendances en température pour les paramètres rhéologiques sont classiques et trouvent des explications clairement liées au comportement d'un brut paraffinique. Cependant, d'autres expériences basées sur la physico-chimie seraient nécessaires pour expliquer les variations avec la température des paramètres cinétiques, qui ont une signification fortement liée à la structure du matériau.

Enfin, un essai expérimental réalisé dans une boucle de laboratoire par Chrisman et al. [11] est présenté et utilisé pour valider le code numérique StarWaCS. Les résultats numériques obtenus montrent que les fortes tendances observées expérimentalement sont retrouvées. Même si plusieurs données expérimentales, non précisées par Chrisman et al., ont du être interprétées, nous estimons que le code de calcul StarWaCS est un bon outil de prédiction des conditions de redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique. Néanmoins, son utilisation reste limitée à des conduites de faibles longueurs pour des raisons de coût de calcul.

Conclusion générale

Lors de cette étude, nous avons abordé le problème lié au transport des bruts paraffiniques d'un point de vue théorique. Un brut paraffinique s'écoule comme un fluide newtonien ou comme un fluide viscoplastique et thixotrope selon les conditions thermiques et mécaniques. En fait, les propriétés rhéologiques d'un brut paraffinique dépendent de la température à laquelle il s'écoule, du cisaillement qu'on lui impose, mais également de son histoire thermique et mécanique. Ainsi, en écoulement avant l'arrêt, un brut paraffinique est modélisé par un fluide viscoplastique dont les propriétés rhéologiques (viscosité et contrainte seuil) dépendent de la température. Lors de l'arrêt, le brut refroidit et il se forme un bouchon de gel compressible au sein duquel des poches de gaz apparaissent. Puis, pour redémarrer l'écoulement, un fluide chaud est injecté à l'entrée de la conduite pour déplacer et détruire le bouchon de gel. Finalement, le comportement d'un brut paraffinique au redémarrage est décrit par le déplacement d'un fluide viscoplastique, thixotrope et compressible, par un autre fluide. La description de différents modèles de redémarrage nous a permis de choisir celui proposé par Houska qui reproduit fidèlement le comportement viscoplastique et thixotrope des bruts paraffiniques.

Le modèle viscoplastique est implémenté grâce à une technique de Lagrangien augmenté associée à un algorithme d'Uzawa afin d'appréhender sa non-dérivabilité. Ainsi, la loi de comportement est implémentée de façon exacte. Nous avons introduit la compressibilité dans le modèle de redémarrage et le caractère fluide-fluide est modélisé par une méthode VOF. D'autre part, les équations du problème sont discrétisées grâce à une méthode de Volumes Finis sur une grille décalée de type MAC. De plus, un schéma TVD de Lax-Wendroff à limiteur de pente Superbee est utilisé pour traiter les termes de transport, et a montré qu'il possède de bonnes propriétés de robustesse et de précision. La méthode de résolution habituellement utilisée pour les fluides viscoplastiques incompressibles a été adaptée à des situations compressibles. D'ailleurs, différents tests numériques ont été menés et prouvent que les algorithmes de résolution utilisés sont efficaces, robustes, stables et convergent sans conditions particulières. Le résultat le plus marquant concerne la localisation des zones cisailées/non-cisailées et a pu être mis en évidence grâce à l'utilisation de la méthode de Lagrangien augmenté pour implémenter la loi de comportement. Si un fluide à seuil est compressible ou est soumis à un gradient de température, il n'existe pas de zone bouchon stricte dans l'écoulement et le fluide est cisailé, même faiblement. Ce résultat ne peut être retrouvé lorsque la loi de comportement est implémentée de façon approchée par une méthode de régularisation.

Nous avons également montré que l'étude d'un brut paraffinique est complexe, car son comportement est régi par un grand nombre de paramètres dépendant les uns des autres. Il apparaît que l'étude du redémarrage d'un brut paraffinique ne peut être menée convenablement si une analyse attentive des conditions d'écoulement avant l'arrêt n'est pas réalisée. D'un point de vue applicatif et en synthétisant les propriétés des bruts paraffiniques, nous avons décrit leur comportement à travers un scénario d'arrêt et de redémarrage. Une procédure alimentée d'études

numériques et expérimentales donne les étapes à suivre pour étudier le problème d'arrêt et de redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique dans un pipeline réel. Nous avons également utilisé les méthodes expérimentales développées par Cawkwell [8] et Henaut [27] pour déterminer la thermodépendance des paramètres du modèle de Houska. Nous avons présenté plusieurs simulations qui permettent d'évaluer la sensibilité du modèle à chacun de ses paramètres. En particulier, lors de l'écoulement de 2 fluides viscoplastiques possédant des contraintes seuil différentes, les avantages de la technique du Lagrangien augmenté ont une nouvelle fois été mis en avant puisque la couche statique à la paroi observée est caractérisée par une vitesse strictement nulle. Ensuite, nous avons réalisé des simulations numériques de l'écoulement compressible d'un fluide de Houska et l'influence des effets combinés de la thixotropie et de la compressibilité sur la capacité de redémarrage a été observée. En effet, un fluide thixotrope incompressible ne pouvant être redémarré, peut être remis en écoulement si une compressibilité lui est ajoutée. Enfin, nous avons mené une étude comparative entre les résultats numériques obtenus à l'aide du code numérique et les résultats expérimentaux mesurés sur une boucle de laboratoire par Chrisman et al. [11]. Toutes les propriétés des bruts paraffiniques (viscoplasticité, thixotropie, thermodépendance et compressibilité) ont été prises en compte afin de simuler le redémarrage précisément. Les pressions mesurées expérimentalement sont du même ordre de grandeur que celles calculées par le code numérique.

D'un point de vue numérique, nous avons développé un code de calcul 2D qui est un bon outil de prédiction des conditions de redémarrage de l'écoulement d'un brut paraffinique. Cependant, son utilisation reste limitée à des conduites de petites dimensions (boucles de laboratoire) car son coût de calcul est assez élevé et peut atteindre quelques semaines lorsque le problème étudié est complexe. Ainsi, pour rendre son utilisation possible dans un cadre industriel, il est nécessaire d'améliorer l'algorithmique et les méthodes de résolution. Nous pensons qu'une méthode de projecteurs, proposée par Glowinski [22], accompagnée d'un préconditionnement basé sur un opérateur Laplacien pourrait améliorer significativement les performances de la méthode de résolution. D'autre part, les calculs sont longs car les pas de temps sont faibles et limités par la condition CFL. Nous proposons donc deux solutions à ce problème. Soit, nous impliciteons les termes de transport discrétisés pas un schéma TVD afin de s'affranchir de la condition sur le pas de temps, soit nous utilisons une méthode de « splitting » proposée par Glowinski [22], efficace et précise pour de petits pas de temps, et qui consiste à découper le système d'équations en plusieurs sous-systèmes simples et rapides à résoudre. Enfin, l'IFP disposant de supercalculateurs parallèles, il serait intéressant d'implémenter un nouvel algorithme permettant de réaliser du calcul parallèle.

Le comportement global d'un brut paraffinique semble bien compris, mais il reste encore quelques zones d'ombre à éclaircir. Le comportement à la paroi mérite une étude approfondie, car comme nous l'a montré l'expérience (*cf. Chapitre IV*), l'état de surface de la conduite a certainement une influence sur le redémarrage. De plus, de nouvelles expériences orientées sur une analyse physico-chimique permettraient de donner des explications significatives, en particulier sur le comportement des paramètres de structures sous l'influence de la température. Enfin, il serait intéressant de mettre en place une boucle expérimentale sur laquelle on puisse ajuster les paramètres d'arrêt et de redémarrage afin de tester le modèle pour différentes conditions de production. Même si nous sommes capables de décrire convenablement les bruts paraffiniques, cette boucle expérimentale permettrait d'améliorer sa modélisation qui reste très complexe.

Il existe plusieurs approches pour modéliser les fluides viscoplastiques thixotropes, et nous pensons qu'il serait intéressant d'appliquer celle proposée par Coussot et al. [14] à l'étude des bruts paraffiniques. D'autre part, la modélisation du comportement d'un brut paraffinique lors

de l'arrêt pourrait être enrichie de modèles thermodynamiques afin de prendre en compte la contraction thermique et la formation des poches. Ensuite, la compressibilité est introduite de façon globale dans l'écoulement, or les expériences montrent que les poches de gaz sont localisées soit au coeur, soit au sommet de la conduite. Un nouveau modèle de compressibilité localisé pourrait apporter une meilleure description des conditions de redémarrage. Enfin, on utilise le modèle de Houska initialement conçu pour des situations isothermes. Il atteint sans doute ses limites pour une application non-isotherme dans laquelle ses paramètres sont thermodépendants.

Finalement, l'étude d'un écoulement aussi complexe est importante car elle ne se limite pas seulement au transport des bruts paraffiniques dans les conduites pétrolières, mais trouve un grand nombre d'applications dans divers domaines industriels (boues de forage, agroalimentaire, avalanches, glissements de terrain ...).

Bibliographie

- [1] J.F. Agassant, P. Avenas, J.P. Sergent, B. Vergnes, and M. Vincent. *La mise en forme des matières plastiques*. Tec & Doc, Lavoisier, 1996.
- [2] J.A. Ajienka and C.U. Ikoku. Criteria for the design of waxy crude oil pipelines : maximum pump (horsepower) pressure requirement. *The Journal of Petroleum Science and Engineering*, pages 87–94, 1995.
- [3] M. Allouche, I.A. Frigaard, and G. Sona. Static wall layers in the displacement of two visco-plastic fluids in a plane channel. *The Journal of Fluid Mechanics*, 424 :243–277, 2000.
- [4] B.M. Ananda Rao, S.P. Mahajan, and K.C. Khilar. A model on the breakdown of crude oil gel. *The Canadian Journal of Chemical Engineerin*, 63 :170–172, 1985.
- [5] E.G. Barry. Pumping non-newtonian waxy crude oils. *Journal of Institute of Petroleum*, 57(554) :76–85, 1971.
- [6] J.P. Baticky and R.A. Ritter. Yield stress measurement of gelling oils. *The Journal of Canadian Petroleum*, pages 66–72, 1978.
- [7] M.G. Cawkwell and M.E. Charles. An improved model for start-up of pipelines containing gelled crude oil. *The Journal of Pipelines*, 7 :41–52, 1987.
- [8] M.G. Cawkwell and M.E. Charles. Characterization of canadian arctic thixotropic gelled crude oils utilizing an eight-parameter model. *The Journal of Pipelines*, 7 :251–264, 1989.
- [9] G. Cazaux. Investigations sur la gélification des bruts paraffiniques : liens entre structure et rhéologie. Technical Report 44603, Institut Français du Pétrole, 1998.
- [10] C. Chang, Q. Dzuy Nguyen, and H.P. Ronningsen. Isothermal start-up of pipeline transportation waxy crude oil. *The Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 87 :127–154, 1999.
- [11] K.A. Chrisman, A.B. Metzner, P.S. Carpenter, R.M. Roehner, and Baskurt U.J. Application of non-newtonian rheological testing to modelin of gelled pipeline startup. *Oil and Gas Journal*, 2005.
- [12] D.F. Cooper, J.W. Smith, M.E. Charles, E.J. Ryan, and G. Alexander. Transient temperature effects in predicting start-up characteristics of gelling-type crude oils. In *International Conference of Heat Transfert*, volume 4, pages 67–71, 1978.
- [13] T. Coupez, M.A. Zine, and J.F. Agassant. Numerical simulation of bingham fluid flow. In *Progress and trends in rheology IV, C. Gallegos Ed., Steinkopf, Darmstadt*, pages 341–343, 1994.
- [14] P. Coussot, J.S. Raynaud, F. Bertrand, P. Moucheron, Guilbaud J.P., H.T. Huynh, S. Jarny, and D. Lesueur. Coexistence of liquid and solid phases in flowing soft-glassy materials. *Physical review letters*, 88(218301) :1–4, 2002.

- [15] Y. Dafan and L. Zheming. Rheological properties of daqing crude oil and its application in pipeline transportation. In *Society of Petroleum Engineers*, volume 14854, pages 91–102, 1986.
- [16] T.C. Davenport and R.S.H. Somper. The yield value and breakdown of crude oil gel. *Journal of Institute of Petroleum*, 57(554) :86–105, 1971.
- [17] C. Djelal, Y. Vanhove, A. Magin, and M.E. Brachet. Frottement et pression d'un béton lors de sa mise en œuvre dans les coffrages. In *36^{ème} Colloque du Groupe Français de Rhéologie*, 2001.
- [18] J.M. Drouffe, E. Geissler, J. Doucet, and M.E. Brachet. Bruts paraffiniques : Modélisation du redémarrage. Technical report, Science & Tec, 1992-1996.
- [19] G. Duvaut and J.L. Lions. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [20] M.J. Economides and G.T. Chaney. The rheological properties of prudhoe bay oil and the effects of a prolonged flow interruption on its flow behavior. In *Society of Petroleum Engineers*, volume 11711, pages 427–436, 1983.
- [21] M. Fortin and R. Glowinski. *Méthodes de lagrangien augmenté. Application à la résolution numérique de problèmes aux limites*. Dunod-Bordas, 1982.
- [22] R. Glowinski. *Numerical Methods for Fluids (Part 3)*. P.G. Ciarlet and J.L. Lions, North-Holland, Elsevier, 2003.
- [23] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1989.
- [24] C.W. Hirt and B.D. Nichols. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39 :201–225, 1981.
- [25] I. Hénaut. Etude des bruts paraffiniques. Technical report, Institut Français du Pétrole, 2002.
- [26] I. Hénaut. Characterisation data on crude oils. Technical Report 57404, Institut Français du Pétrole, 2003.
- [27] I. Hénaut and F. Brucy. Description rhéologique des bruts paraffiniques gélifiés. In *Congrès du Groupe Français de Rhéologie*, 2001.
- [28] M. Houska. *Engineering aspects of the rheology of thixotropic liquids*. PhD thesis, Faculty of Mechanical Engineering, Czech Technical University of Prague, 1981.
- [29] J.T. Knegt and E. Zeilinga. Field tests with waxy crudes in the rotterdam-rhine pipeline system. *Journal of Institute of Petroleum*, 57(555) :165–174, 1971.
- [30] D. Mackay, D. Berger, M.E. Charles, and H. Van Ooijen. Rhéological characterization of waxy crude oils for environmental purposes. In *16th Arctic and Marine Oil spill Technical Seminar*, 1993.
- [31] N. Midoux. *Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique*. Tec & Doc - Lavoisier, 1993.
- [32] S. Misra, D. Baruah, and K. Singh. Paraffin problems in crude oil production and transportation : A review. In *Society of Petroleum Engineers*, volume 28181, pages 50–54, 1995.
- [33] M.V. Modi, H. Kiswanto, and L.V.S. Merrill. Engineering solutions to handle waxy kakap kra crude. In *Proceedings Indonesian Petroleum Association*, pages 59–275, 1994.
- [34] T.C. Papanastasiou. Flow of materials with yield. *Journal of Rheology*, 31 :385–404, 1987.

- [35] T.K. Perkins and J.B. Turner. Starting behavior of gathering lines and pipelines filled with prudhoe bay oil. *Journal of Petroleum Technology*, pages 301–308, 1971.
- [36] H.P. Ronningsen. Rheological behaviour of gelled, waxy north sea crude oils. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 7 :177–213, 1992.
- [37] H.P. Ronningsen and B. Bjorndal. Wax precipitation from north sea crude oils. 1- crystallization and dissolution temperatures, and newtonian and non-newtonian flow properties. *Energy & Fuels*, 5(6) :895–908, 1991.
- [38] N. Roquet. Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoplastiques par un algorithme de lagrangien augmenté et une méthode d'éléments finis incompressibles. Technical report, Université d'Orsay, 1996.
- [39] N. Roquet. *Résolution numérique d'écoulements à effets de seuil par éléments finis mixtes et adaptation de maillage*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2000.
- [40] N. Roquet and P. Saramito. An adaptive finite element method for bingham fluid flows around a cylinder. *Computational Methods Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3317–3341, 2003.
- [41] N. Roussel, R. Le Roy, and P. Coussot. Thixotropy modelling at local and macroscopic scales. *The Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 114 :85–95, 2004.
- [42] R.J. Russel and E.D. Chapman. The pumping of 85°f pour point assam (nahorkatiya) crude oil at 65°f. *Journal of Institute of Petroleum*, 57(554) :117–128, 1971.
- [43] G. Sanchiz. Etude expérimentale d'un brut paraffinique. Technical report, CEMEF/IFP, 2002.
- [44] B. Sarkar and A. Bhattacharya. Transportation of waxy crude through pipeline systems : Analysis of some critical design parameters. In *International Offshore and Polar Engineering Conference*, pages 315–321, 1991.
- [45] J. Sestak, M.E. Charles, M.G. Cawkwell, and M. Houska. Start-up of gelled crude oil pipelines. *The Journal of Pipelines*, 6 :15–24, 1987.
- [46] T.R. Sifferman. Flow properties of difficult-to-handle waxy crude oils. *Journal of Petroleum Technology*, pages 1042–1050, 1979.
- [47] T.R. Sifferman. Flow properties of waxy udang crudes. In *Proceedings Indonesian Petroleum Association, Ninth Annual Convention*, pages 489–499, 1980.
- [48] P.B. Smith. Guidelines set out for pumping heavy crudes. *The Oil and the Gas Journal*, pages 111–115, 1979.
- [49] P.B. Smith and R.M.J. Ramdsen. The prediction of oil gelation in submarine pipelines and the pressure required for restarting flow. In *European Offshore Petroleum Conference and Exhibition*, pages 283–290, 1978.
- [50] W.H. Thomason. Start-up and shut-in issues for subsea production of high paraffinic crudes. In *Offshore Technology Conference*, number 11967, 2000.
- [51] Z. Toutou-Melingé. Identification of atora crude oil houska's parameter thermal dependence. Technical report, Institut Français du Pétrole, 2005.
- [52] A. Uhde and G. Kopp. Pipeline problems resulting from the handling of waxy crudes. *Journal of Institute of Petroleum*, 57(554) :63–73, 1971.
- [53] E. Verschuur, M. Verheul, and A.P. Den Hartog. The effect of thermal shrinkage and compressibility on the yielding of gelled crude oils in pipelines. *Journal of Institute of Petroleum*, 57(555) :131–138, 1971.

- [54] E. Verschuur, M. Verheul, and A.P. Den Hartog. Pilot-scale studies on restarting pipelines containing gelled waxy crudes. *Journal of Institute of Petroleum*, 57(555) :139–146, 1971.
- [55] H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method*. Prentice Hall, 1995.
- [56] G. Vinay, A. Wachs, and J.F. Agassant. Numerical simulation of non-isothermal viscoplastic waxy crude oil flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 128 :144–162, 2005.
- [57] T. Viswanathan and K.C. Khilar. Hydrodynamically induced gel breakdown in pipes. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 67 :353–360, 1989.
- [58] A. Wachs. *Modèles thermologiques et simulations numériques bi- et tridimensionnelles d'écoulements non-isothermes de fluides viscoélastiques*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.
- [59] A. Wachs. Simulation numérique d'écoulements avec interface fluide-fluide en conduites de géométrie annulaire excentrée. Technical Report 56716, Institut Français du Pétrole, 2002.
- [60] A. Wachs. Simulation numérique d'écoulements de fluides viscosplastiques en conduites annulaires excentrées avec le logiciel fluent 5.5. Technical Report 56578, Institut Français du Pétrole, 2002.
- [61] A. Wachs. Truc. Technical report, Institut Français du Pétrole, 2005.
- [62] A. Wachs, F. Brucy, I. Hénaut, and G. Vinay. Méthode de détermination des conditions de redémarrage des écoulements de bruts paraffiniques. Brevet d'invention : N° d'enregistrement national 04/13 303, 2005.
- [63] Y. Wang and K. Hutter. Comparisons of numerical methods with respect to convectively dominated problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 37 :721–745, 2001.
- [64] L.T. Wardhaugh and D.V. Boger. Measurement of the unique flow properties of waxy crude oils. *Institution of Chemical Engineers*, 65 :74–83, 1987.
- [65] L.T. Wardhaugh and D.V. Boger. Flow characteristics of waxy crude oils : Application to pipeline design. *AIChE Journal*, 37 :871–885, 1991.
- [66] L.T. Wardhaugh, D.V. Boger, and S.P. Tonner. Rheology of waxy crude oils. In *Society of Petroleum Engineers*, number 17625, pages 803–810, 1988.
- [67] G. Wheeler, H. Gouhie, and F. Laskowski. Restart protection for pipeline transporting paraffinic crude oil. In *Society of Petroleum Engineers*, number 19265, pages 1–5, 1989.
- [68] T.M. Williams, J.J.C. Hsu, and H.L. Patterson. Measurement of break away yield stress of waxy crude oil and pipeline restart system design. In *Offshore Technology Conference*, number 9231, pages 721–727, 1996.
- [69] Y. Xiaoheng, C. Dabin, Z. Peng, C. Yiquan, and L. Xiaoping. Study on shutdown and restart of offshore heavy crude pipeline. *Unitar*, pages 573–578, 1998.
- [70] H.C. Yee, Warming R.F., and Harten A. Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations. *Journal of Computational Physics*, 57 :327–360, 1985.

ANNEXES

Annexe A

**Ecoulement stationnaire non-isotherme
d'un fluide viscoplastique : FLUENT 6.0**

1 Introduction

Ce chapitre annexe présente une étude numérique de faisabilité avec le logiciel FLUENT 6.0 préliminaire à celle réalisée avec le code STARWACS dans la section *Section A-2*. Les objectifs de cette étude sont les mêmes et visent à établir l'état thermique stationnaire de l'écoulement d'un brut paraffinique avant l'arrêt de la conduite. Cependant, dans FLUENT 6.0, la loi de comportement est implémentée grâce à une méthode de régularisation proposée par Papanastasiou [34].

Après avoir établi la géométrie du problème, nous présentons les équations gouvernant l'écoulement stationnaire d'un fluide viscoplastique. La section suivante explique comment nous implémentons le modèle rhéologique régularisé dans FLUENT. Nous validons ensuite le logiciel avec les simulations d'un fluide Newtonien non-isotherme. Enfin, nous réalisons des calculs avec un fluide viscoplastique isotherme d'abord, puis non-isotherme. L'analyse de ces résultats nous conduit à mettre en avant les limites de FLUENT et des lois régularisantes pour notre étude.

2 Présentation du problème

Nous désirons comprendre comment se comporte un fluide viscoplastique en écoulement lorsqu'il est refroidi dans une conduite cylindrique. La géométrie du problème est une conduite plane 2D axisymétrique d'une longueur $L = 1000$ m et de rayon $R = 0.5$ m (FIG. A-1). On impose un débit massique en entrée Q et une température $\Theta_{\text{Inlet}} = 310$ K, ainsi qu'un flux convectif ou une température $\Theta_{\text{Ext}} = 290$ K sur les parois ($\Theta_{\text{Inlet}} > \Theta_{\text{Ext}}$). Nous réalisons des calculs avec ou sans isolant. Cette première étude nous permet d'analyser le comportement en écoulement d'un fluide viscoplastique dont les propriétés rhéologiques (viscosité et contrainte seuil) dépendent de la température.

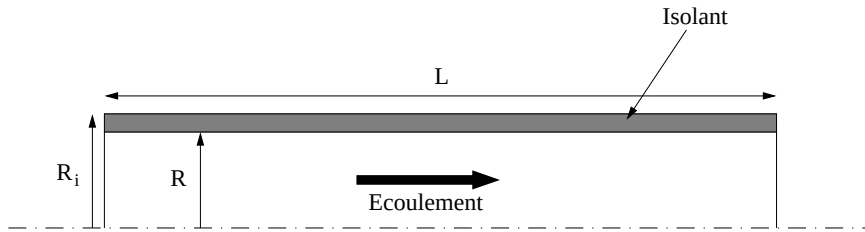


FIG. A-1 Conduite plane 2D axisymétrique

Les équations gouvernant l'écoulement stationnaire d'un fluide viscoplastique incompressible sont :

- Conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (\text{A.1})$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A.2})$$

- Conservation de l'énergie :

$$\rho C_p \mathbf{U} \cdot \nabla \Theta = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} + \lambda_f \nabla^2 \Theta \quad (\text{A.3})$$

- Loi de comportement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = 2\mu(\dot{\gamma}) \cdot \mathbf{D} + \frac{\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|} \cdot \tau_y & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| > \tau_y \\ \mathbf{D} = 0 & \text{si } \|\boldsymbol{\tau}\| \leq \tau_y \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

où τ_y est la contrainte seuil. $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^\top)$ est le tenseur des taux de déformation et $\dot{\gamma}$ le taux de déformation défini par $\dot{\gamma} = 2\|\mathbf{D}\|$.

D'autre part, on impose les conditions aux limites suivantes :

- Entrée : profil de vitesse (poiseuille) et température constante (Θ_{Inlet})
- Sortie : pression nulle
- Paroi : vitesse nulle et flux convectif ($q = h_f(\Theta_{\text{Ext}} - \Theta_{\text{Fluide}})$)

3 Implémentation des modèles rhéologiques

Nous utilisons le modèle rhéologique (A.4) le plus général pour représenter les fluides Newtoniens et non-Newtoniens. Nous nous intéressons particulièrement aux fluides viscoplastiques qui sont caractérisés par une contrainte seuil τ_y . On peut représenter la contrainte en fonction du taux de cisaillement sur la FIG. A-2, dans le cas unidimensionnel. Il apparaît une discontinuité de la pente de la fonction $\tau = f(\dot{\gamma})$ en $\dot{\gamma} = 0$.

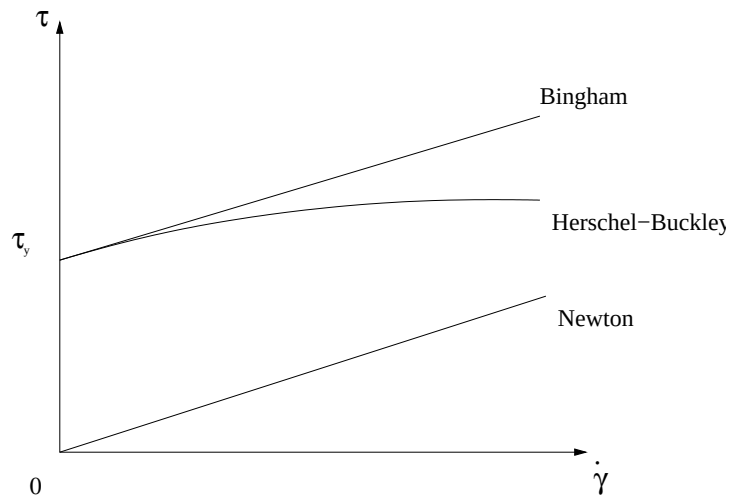


FIG. A-2 Lois de comportement viscoplastique unidimensionnelles

Cette discontinuité implique donc que cette loi de comportement n'est pas dérivable en $\dot{\gamma} = 0$, ce qui constitue la principale difficulté dans la simulation numérique des écoulements viscoplastiques. Deux types de techniques sont utilisés pour lever cette indétermination. La première est basée sur une méthode de minimisation sous contrainte associée à une méthode de Lagrangien augmenté ([21] et *Chapitre 2*). La deuxième, très simple à mettre en place et très utilisée, consiste à utiliser une loi de régularisation. Nous utilisons donc la deuxième approche, implémentée dans FLUENT, pour réaliser cette étude de faisabilité.

On réécrit la loi de comportement en faisant apparaître la viscosité apparente μ_a :

$$\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (\text{A.5})$$

Différentes lois de régularisations sont proposées dans la littérature :

- modèle bi-viscosité

$$\mu_a = \begin{cases} \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}_c^{n-1} & \text{si } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_c \\ \frac{\dot{\gamma}_c}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}^{n-1} & \text{si } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

- modèle ϵ

$$\mu_a = \mu + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma} + \epsilon} \quad (\text{A.7})$$

- modèle exponentiel

$$\mu_a = \mu + (1 - e^{-m \dot{\gamma}}) \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \quad (\text{A.8})$$

Toutes ces lois ont chacune leur intérêt selon les conditions dans lesquelles elles sont utilisées. Néanmoins, d'après une étude réalisée par Wachs [60], le modèle exponentiel, proposé par Papanastasiou [34], présente le meilleur compromis entre robustesse et précision. L'auteur constate que la valeur du paramètre m conditionne la vitesse de convergence et la précision. Wachs propose un critère pour le calcul de m en fonction du gradient de cisaillement maximal $\dot{\gamma}_{\max}$; ce critère est valable dans le cas d'écoulements simples (conduite cylindrique par exemple) :

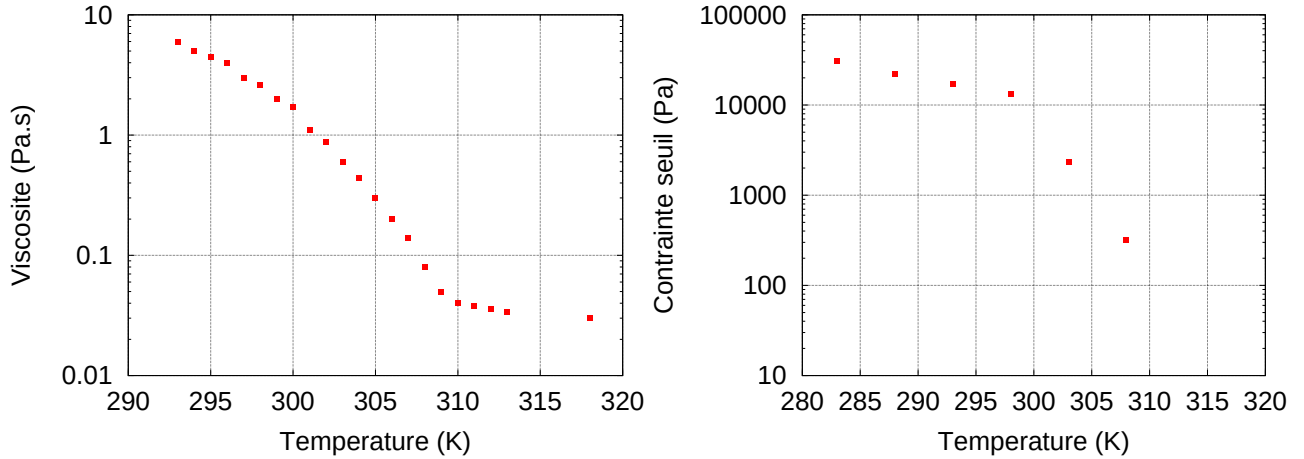
$$m = \frac{1000}{\dot{\gamma}_{\max}} \quad (\text{A.9})$$

Ces modèles sont implémentés dans FLUENT grâce à des fonctions écrites en langage C (*User Defined Functions*). Le modèle de Herschel-Bulkley s'écrit sous la forme suivante si on utilise la loi de régularisation exponentielle :

$$\mu_a = \mu \dot{\gamma}^{n-1} + (1 - e^{-m \dot{\gamma}}) \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \quad (\text{A.10})$$

Afin de prendre en compte l'influence de la température sur le comportement du fluide, nous introduisons une dépendance en température de la viscosité μ et de la contrainte seuil τ_y . Des lois en température sont établies à partir de données expérimentales de Hénaut [26] caractérisant un brut paraffinique du Gabon (ATORA). On retrouve les variations de la viscosité μ et de la contrainte seuil τ_y sur la FIG. A-3.

remarque : Nous avons fait apparaître le terme $\tau : \mathbf{D}$ de dissipation visqueuse dans l'équation (A.3). Or, le calcul du nombre adimensionnel de Brinkman nous permet de négliger ce terme. En effet, selon la vitesse imposée, on trouve un nombre de Brinkman compris entre 10^{-5} et 10^{-8} ; donc $Br \ll 1$.

FIG. A-3 Dépendance thermique de la viscosité μ et de la contrainte seuil τ_y du brut ATORA

$$\mathcal{Br} = \frac{\mu \bar{U}^2}{\lambda_f (\Theta_{\text{Ext}} - \Theta_{\text{Fluide}})} \quad \text{avec } \bar{U} \text{ vitesse moyenne} \quad (\text{A.11})$$

4 Validation pour un cas d'écoulement simple : un fluide Newtonien non-isotherme

Nous présentons d'abord des calculs FLUENT avec un fluide Newtonien dont la viscosité dépend de la température :

$$\tau = \mu(\Theta) \dot{\gamma} \quad (\text{A.12})$$

Nous observons l'influence du débit sur la température au centre de la conduite sur la FIG. A-4. Plus le débit est important, plus les effets convectifs thermiques sont grands, et donc plus la température au centre de la conduite reste élevée.

Les profils de vitesse axiale et de température tracés dans différentes sections sont présentés sur les FIGS. A-5 et A-6 pour un débit massique Q de 5 kg.s^{-1} . Nous retrouvons le profil de Poiseuille imposé en entrée, puis dans les sections suivantes les profils de vitesse ont une forme de « cloche ». Les fortes variations de température près des parois de la conduite engendrent d'importantes variations de la viscosité. Ainsi, cette grande viscosité est responsable d'un écoulement plus lent à la paroi et est à l'origine de la forme particulière de ces profils de vitesse.

Si nous regardons les courbes des FIGS. A-7 et A-8, obtenues pour un débit plus faible ($Q=0,1 \text{ kg.s}^{-1}$), les profils de température indiquent que dès 500 m, la température est constante dans la section (il en est de même pour la viscosité) ; le régime thermique de l'écoulement est donc établi. Ainsi, les profils de vitesse retrouvent une forme classique de Poiseuille. Nous pouvons estimer la longueur d'établissement du régime d'écoulement établi en calculant le nombre de Cameron :

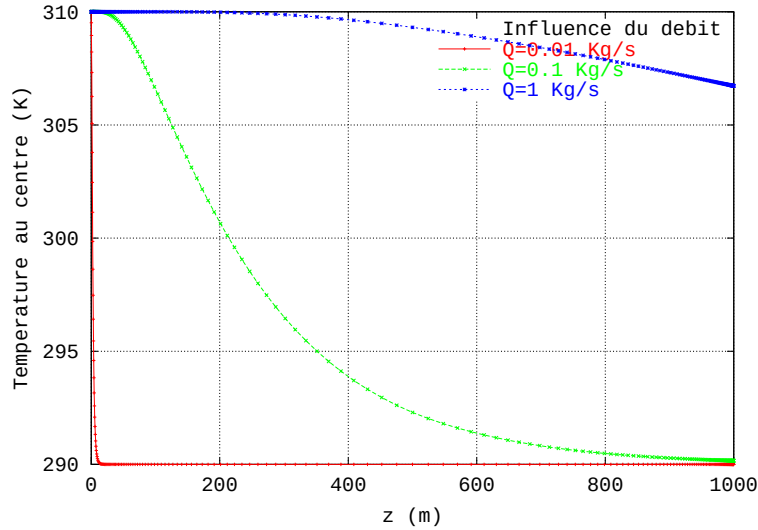
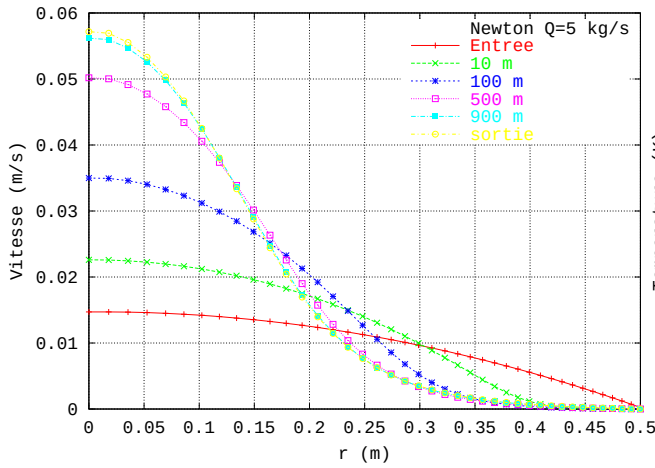
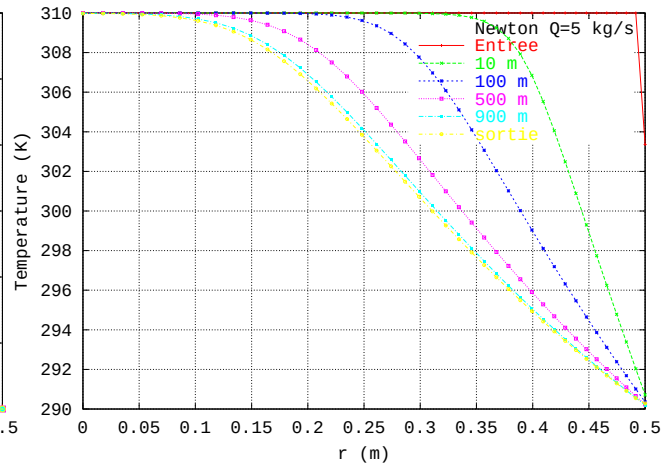


FIG. A-4 Influence du débit sur la température

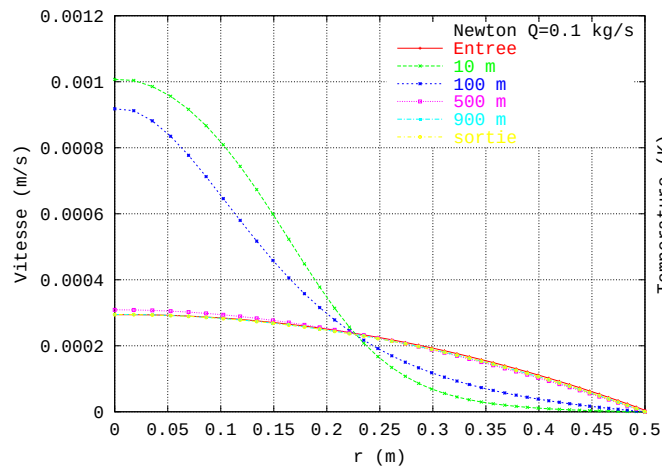
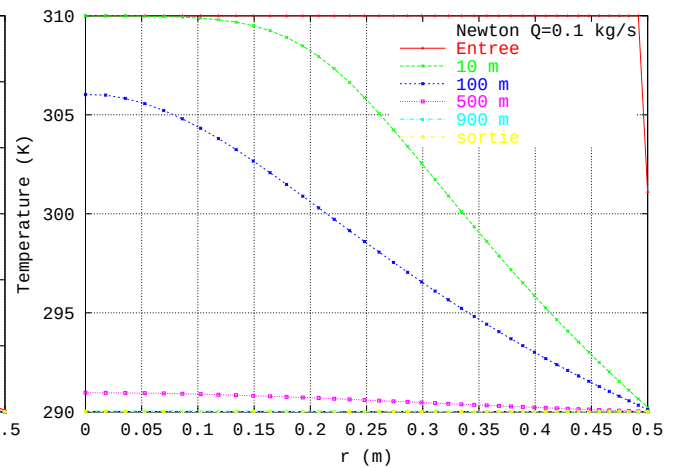
FIG. A-5 Profils de vitesse axiale pour $Q = 5 \text{ kg.s}^{-1}$ FIG. A-6 Profils de température pour $Q = 5 \text{ kg.s}^{-1}$

$$Ca = \frac{\lambda_f L}{\rho C_p \bar{U} R^2} \quad (\text{A.13})$$

Lorsqu'on impose un débit de 0.1 kg.s^{-1} , le nombre de Cameron s'écrit $Ca \approx 2.59 \cdot 10^{-3} L$. Le nombre de Cameron doit être supérieur à 1 pour que le régime d'équilibre soit atteint. La longueur d'établissement est donc égale à 389 m. Ce calcul simple nous permet de vérifier que les résultats numériques sont cohérents.

On s'intéresse également aux pertes de charges sur le TAB. A.1. Les pertes de charges calculées avec un isolant sont plus faibles puisque l'isolant permet de conserver une viscosité plus faible. On le vérifie avec la formule de calcul des pertes de charges (A.14).

$$\Delta P = \frac{\rho C_f \bar{U}^2 \Delta L}{2D} \quad \text{avec } C_f = \frac{64}{Re} \quad (\text{A.14})$$

FIG. A-7 Profils de vitesse axiale pour $Q = 0.1 \text{ kg.s}^{-1}$ FIG. A-8 Profils de température pour $Q = 0.1 \text{ kg.s}^{-1}$

où $Re = \frac{\rho \bar{U} D}{\mu}$ est le nombre de Reynolds et D le diamètre de la conduite.

Débit (kg.s^{-1})	0,01	0,1	1	5
Sans isolant	$1.13 \cdot 10^{-3}$	$7.25 \cdot 10^{-2}$	$1.38 \cdot 10^{-1}$	$2.02 \cdot 10^{-1}$
Avec isolant	$1.10 \cdot 10^{-3}$	$6.36 \cdot 10^{-2}$	$5.68 \cdot 10^{-2}$	$7.49 \cdot 10^{-2}$

TAB. A.1 Calculs des pertes de charges (Pa.m^{-1})

De plus, on observe une variation des pertes de charges originale sur la FIG. A-9, puisqu'une conduite de 600 m permet d'avoir une réduction des pertes de charges de 30% avec un débit 10 fois plus grand, lorsque l'écoulement n'est pas encore établi. Cependant, la puissance dissipée s'écrit $\Delta P \times V$. Ainsi, même si les pertes de charges sont réduites (-30%), la puissance fournie à la pompe pour augmenter le débit ($\times 10$) est très importante et ne peut être compensée par le gain en pertes de charges.

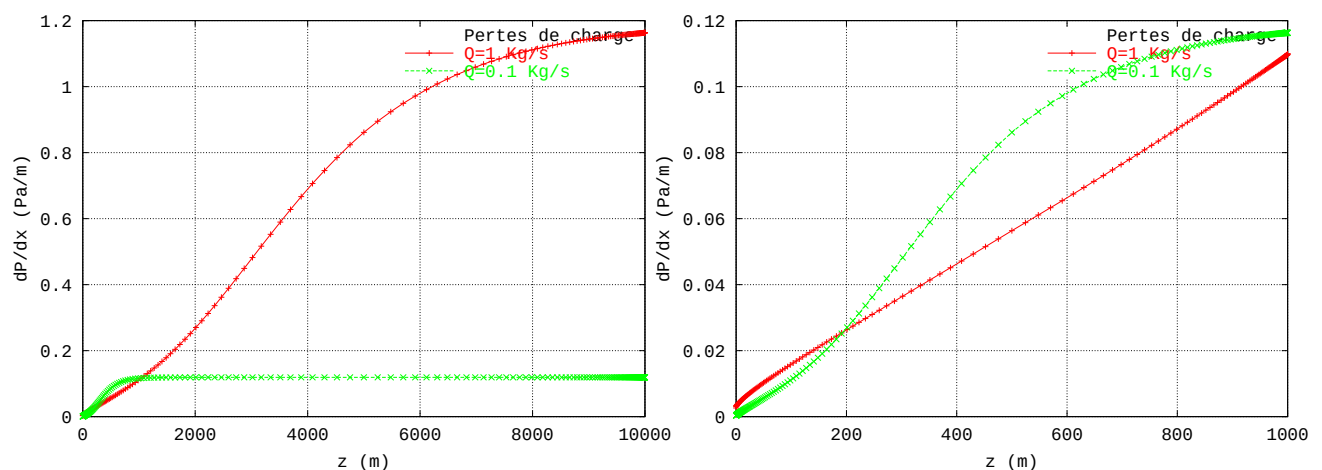


FIG. A-9 Influence du débit sur les pertes de charges

5 Résultats des simulations d'un fluide viscoplastique

5.1 Cas d'un écoulement viscoplastique isotherme

Nous savons que le comportement des bruts paraffiniques est viscoplastique ; c'est pourquoi, le modèle d'Herschel-Bulkley (A.4) est le plus adapté. Cependant, nous choisissons dans un premier temps de faire des calculs pour $n = 1$, c'est à dire pour un fluide de Bingham. Nous comparons sur la FIG. A-10 les profils de vitesses issus du calcul numérique et de la solution exacte. Ici, le bouchon représente environ 50% du rayon de la conduite.

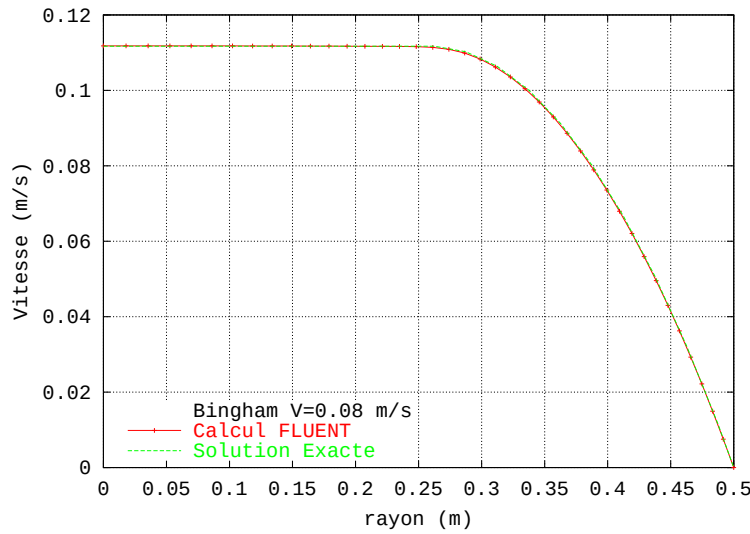


FIG. A-10 Profils de vitesse axiale analytique et calculée avec Fluent pour une vitesse moyenne de 0.08 m.s^{-1}

On note qu'il est indispensable de faire converger ces calculs avec des résidus très faibles ($\approx 10^{-8}$) pour obtenir des résultats de cette qualité. Cette remarque est importante pour l'interprétation des résultats dans le cas d'un fluide viscoplastique non-isotherme *Section A-5.2*.

La FIG. A-11 représente le champ des taux de déformation. On observe une zone de cisaillement quasi nulle au centre ($\dot{\gamma} \approx 10^{-6}$) qui correspond à la zone bouchon. L'utilisation d'une loi régularisante ne nous permet pas d'observer deux zones distinctes ; une zone non-cisaillée (zone bouchon où $\dot{\gamma} = 0$) et une zone cisaillée ($\dot{\gamma} \neq 0$).

Wachs [60] propose deux critères pour distinguer ces zones. Certains prennent une valeur arbitraire de cisaillement pour différencier les zones plastiques et cisaillées. Mais le choix de cette valeur prête à discussion et peut donner lieu à des erreurs dans l'interprétation des résultats. D'autres utilisent le critère de Von Mises sur les contraintes :

$$|\tau| < \tau_y \quad (\text{A.15})$$

Cette méthode présente l'avantage de ne pas avoir à choisir arbitrairement un cisaillement critique et possède un fort sens physique puisqu'elle prend en compte une donnée intrinsèque au matériau, la contrainte seuil τ_y . Nous utilisons le critère de Von Mises pour visualiser les zones déformées et plastiques sur la FIG. A-12.



FIG. A-11 Champ des taux de déformation $\dot{\gamma}$ (en s^{-1}) pour une vitesse moyenne de $0,08 \text{ m.s}^{-1}$

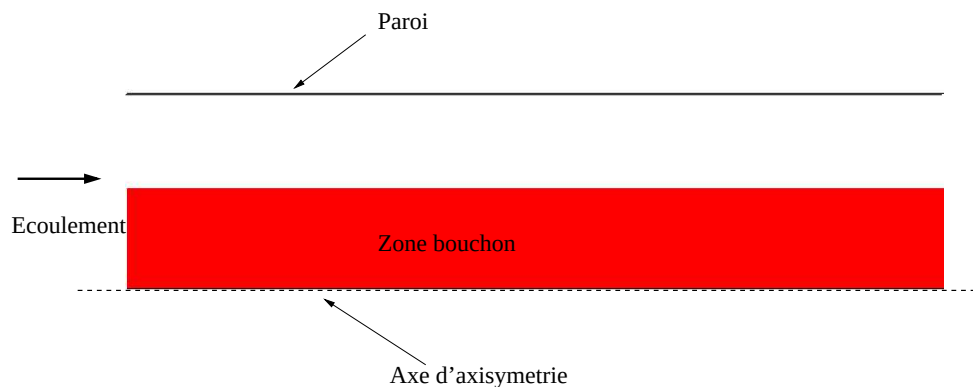
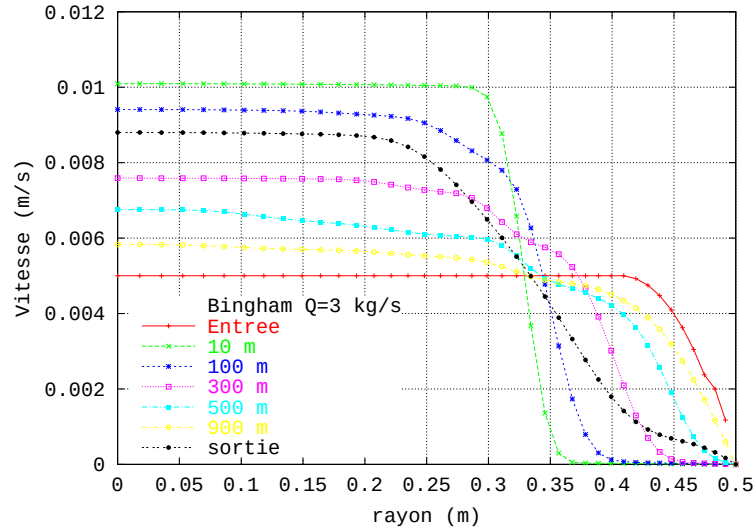


FIG. A-12 Visualisation des zones non-cisaillées (zone rouge) par le critère de Von Mises

5.2 Prise en compte des effets thermiques

Les conditions de simulation sont les mêmes que précédemment, avec en plus la viscosité et la contrainte seuil qui dépendent de la température. Cependant, ces calculs ne convergent pas puisque les résidus ne descendent pas en dessous de 10^{-2} . Bien qu'ayant utilisé plusieurs schémas de discrétisation disponibles dans Fluent, nous ne pouvons pas faire converger les calculs. Nous exposons néanmoins les résultats obtenus. Les profils de vitesse axiale dans différentes sections sont présentés sur la FIG. A-13.

L'allure des profils de vitesse montre d'une part une « zone morte » près de la paroi puisque la vitesse est proche de zéro (on retrouve un profil de cloche). D'autre part, on observe un plateau constant au centre de l'écoulement sur les profils de vitesse, caractéristique d'un écoulement bouchon. Cependant, la vitesse axiale w de la zone bouchon au centre varie dans la longueur de l'écoulement (FIG. A-14). Or, d'après la définition du modèle d'Herschel-Bulkley, la zone bouchon correspond à $\dot{\gamma} = 0$. Pour ce problème 2D axisymétrique, $\dot{\gamma}$ s'écrit :

FIG. A-13 Profils de vitesse axiale sur différentes sections pour $Q=3 \text{ kg.s}^{-1}$

$$\dot{\gamma} = 2 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2} \quad (\text{A.16})$$

donc, au centre de la conduite nous avons :

$$\dot{\gamma} = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial r} = 0 ; u = 0 ; \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ; \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.17})$$

D'après les profils de vitesse obtenus avec les calculs, nous avons $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$, comme l'illustre la FIG. A-14.

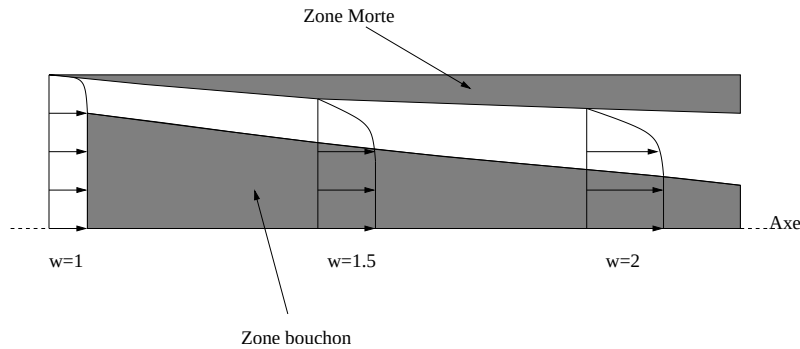


FIG. A-14 Profils de vitesse dans la conduite

Pour visualiser les zones cisailées/non-cisailées, nous affichons le champ des taux de déformation $\dot{\gamma}$ sur la FIG. A-15. Comme nous utilisons une loi régularisante pour gérer la discontinuité du modèle de Herschel-Bulkley, nous ne pouvons pas observer distinctement une zone strictement non-cisailée avec $\dot{\gamma} = 0$ et une zone cisailée avec $\dot{\gamma} \neq 0$, comme nous le remarquons précédemment *Section A-5.1*.

Nous visualisons les zones non-cisailées sur les 150 premiers mètres de la conduite à l'aide du critère de Von Mises. Sur la FIG. A-16, on identifie la zone morte près de la paroi et la zone

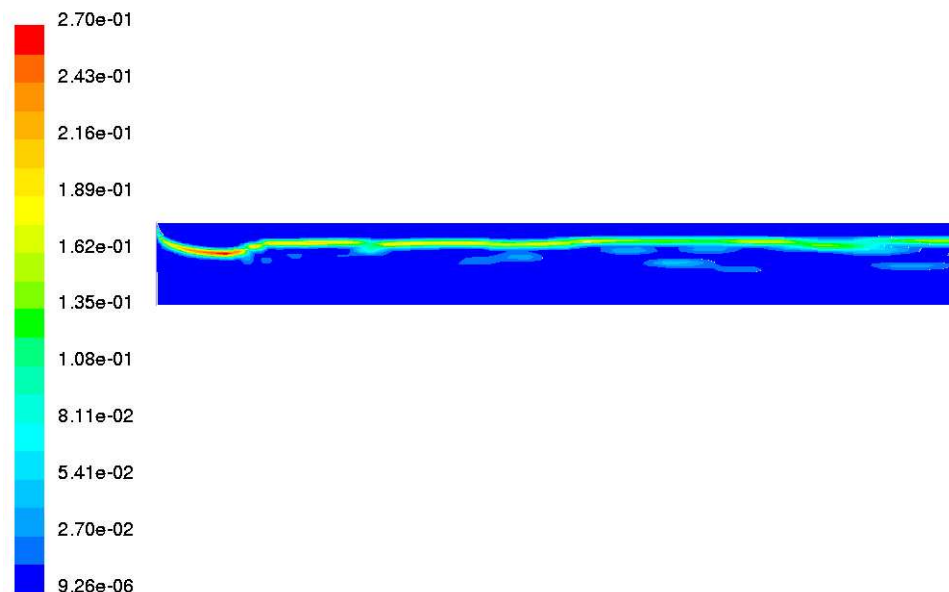


FIG. A-15 Champ des taux de déformation $\dot{\gamma}$ à l'entrée de la conduite à $Q=3 \text{ kg.s}^{-1}$

bouchon au centre incohérente avec les profils de vitesse, comme expliqué ci-dessus. De plus, les zones non-cisaillées (zones rouges) sont irrégulières et les profils de vitesses en désaccord avec la loi rhéologique.

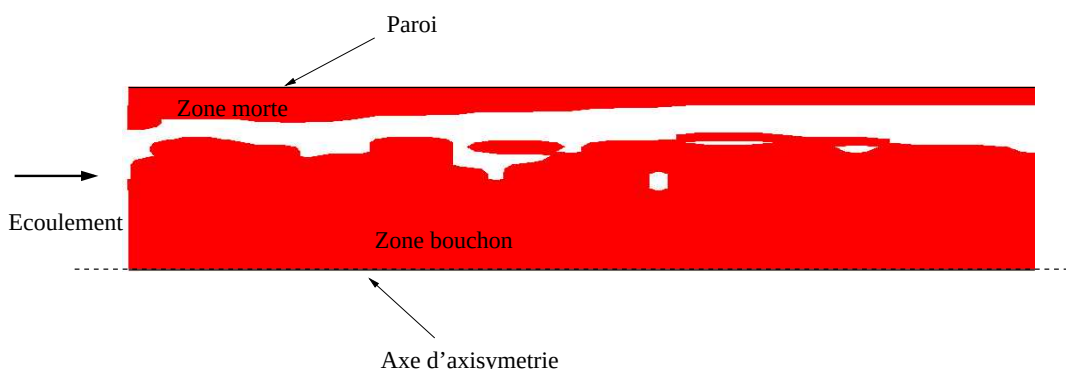


FIG. A-16 Visualisation des zones non-cisaillées (zones rouges) par le critère de Von Mises à l'entrée de la conduite

A ce stade de l'étude, les raisons pour lesquelles les calculs ne convergent pas peuvent être multiples : l'algorithme de résolution (SIMPLE pour *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) utilisé dans Fluent, la loi de régularisation...

6 Conclusion

Les travaux numériques effectués avec FLUENT nous ont conduit à deux conclusions. D'abord, les résultats des simulations d'un écoulement Newtonien non-isotherme dans une conduite 2D axisymétrique sont validés. Cependant, les simulations réalisées avec un fluide viscoplastique non-isotherme n'aboutissent pas. En effet, l'utilisation d'une loi régularisante ne

nous permet pas de conclure sur la physionomie et la localisation des zones non-cisaillées d'un écoulement viscoplastique non-isotherme. Il est donc justifié d'utiliser une autre méthode d'implémentation pour la loi rhéologique. Ce dernier point nous amène à la deuxième conclusion sur ces travaux numériques. Ce code industriel est en effet très peu flexible, puisqu'il n'est pas possible d'accéder aux sources. Ainsi par exemple, il est difficilement possible d'utiliser une méthode de Lagrangien augmenté pour implémenter le modèle rhéologique, puisqu'elle n'existe pas dans FLUENT. De plus, il apparaît que les temps de calcul sont importants si on utilise un modèle rhéologique plus complexe (modèle de Houska). C'est pourquoi, nous avons décidé de nous tourner vers le développement d'un « code propre », StarWaCS, afin d'accorder plus de souplesse à nos travaux numériques au cours de cette thèse.

Annexe B

Publications et participations à congrès

Résumé

Même si le transport par *pipelines* de bruts conventionnels reste relativement aisé, il devient plus problématique si le brut est composé d'un grand nombre de molécules hydrocarbonées comme les paraffines. Ces bruts paraffiniques ont la particularité d'avoir une température de prise en gel élevée, souvent supérieure à la température de l'environnement dans lequel il s'écoule. Lorsque l'écoulement dans la conduite est arrêté, la température diminue et entraîne la formation de bouchons de gel de plusieurs centaines de mètres. Après un long arrêt, il devient difficile de redémarrer l'écoulement. Le manque de compréhension des phénomènes impliqués lors du transport d'un brut paraffinique conduit à une surestimation des pressions de redémarrage et donc à un surcoût pour les compagnies pétrolières. Ainsi, ces travaux de thèse s'attachent à améliorer la compréhension du comportement d'un brut paraffinique et à enrichir sa modélisation afin que les simulations numériques prévoient des pressions et des temps de redémarrage plus précis. En faisant référence aux travaux théoriques, expérimentaux et numériques, il est décrit le comportement viscoplastique, thixotrope et compressible d'un brut paraffinique. Les propriétés thermiques et mécaniques liées à l'histoire du brut jouent un rôle essentiel sur le comportement du brut au redémarrage. Ainsi, le transport d'un brut paraffinique avant l'arrêt de la conduite correspond à l'écoulement stationnaire non-isotherme dans une conduite 2D axisymétrique d'un fluide viscoplastique dont les propriétés rhéologiques dépendent de la température. Le comportement d'un brut paraffinique au redémarrage est décrit par le déplacement d'un fluide viscoplastique, thixotrope et compressible par un autre fluide. Le caractère thixotrope est pris en compte par le modèle de Houska et la compressibilité est introduite dans le modèle de redémarrage. La loi de comportement est implémentée grâce à une technique de Lagrangien augmenté associée à un algorithme d'Uzawa afin d'appréhender sa non-dérivabilité. Les équations du problème sont discrétisées grâce à une méthode de Volumes Finis et un schéma TVD (*Total Variation Diminishing*) est utilisé pour traiter les termes de transport. La méthode de résolution habituellement utilisée pour les fluides viscoplastiques incompressibles est adaptée à des situations compressibles. Différents tests numériques sont menés et montrent les bonnes propriétés de convergence des algorithmes de résolution. Les résultats non-isothermes montrent la sensibilité des zones cisailées/non-cisailées aux variations de la température. L'influence des effets combinés de la thixotropie et de la compressibilité sur la capacité de redémarrage est également observée. Un fluide thixotrope incompressible ne pouvant être redémarré, peut être remis en écoulement si une compressibilité lui est ajoutée. Enfin, une étude comparative entre les résultats numériques et expérimentaux permet de valider le code numérique.

Abstract

Pipelining crude oils that contain large proportions of paraffins can cause many specific difficulties. These oils, known as *waxy crude oils*, usually exhibit high "pour point", where this temperature is higher than the external temperature conditions surrounding the pipeline. During the shutdown, since the temperature decreases in the pipeline, the gel-like structure builds up and the main difficulty concerns the issue of restarting. This PhD attempts to improve waxy crude oil behaviour understanding thanks to experiment, modelling and numerical simulation in order to predict more accurately time and pressure required to restart the flow. Using various contributions to the literature, waxy crude oils are described as viscoplastic, thixotropic and compressible fluid. Strong temperature history dependence plays a prevailing role in the whole shutdown and restart process. Thus, waxy crude oils under flowing conditions correspond to the non-isothermal flow of a viscoplastic material with temperature-dependent rheological properties. Besides, the restart of a waxy crude oil is simulated by the isothermal transient flow of a weakly compressible thixotropic fluid in axisymmetric pipe geometry. We retain the Houska model to describe the thixotropic/viscoplastic feature of the fluid and compressibility is introduced in the continuity equation. The viscoplastic constitutive equation is involved using an augmented Lagrangian method and the resulting equivalent saddle-point problem is solved thanks to an Uzawa-like algorithm. Governing equations are discretized using a Finite Volume method and the convection terms are treated thanks to a TVD (*Total Variation Diminishing*) scheme. The Lagrangian functional technique usually used for incompressible viscoplastic flows, is adapted to compressible situations. Several numerical results attest the good convergence properties of the proposed transient algorithm. The non-isothermal results highlight the strong sensitivity of the flow pattern to the temperature changes in terms of yielded/unyielded regions. Then, the combined effects of compressibility and thixotropy have beneficial influence on the restart issue. In fact, a thixotropic flow, not able to start up in compressible situations, could be restarted thanks to compressibility. At last, comparison between numerical and experimental results allows to validate the numerical code.