HAL
open science

Viscous flux and turbulence models linearization for aerodynamic shape optimization for turbomachineries

Chi-Tuân Pham

To cite this version:

Chi-Tuân Pham. Viscous flux and turbulence models linearization for aerodynamic shape optimization for turbomachineries. Engineering Sciences [physics]. Arts et Métiers ParisTech, 2006. English. NNT : 2006ENAM0030 . pastel-00002058

HAL Id: pastel-00002058

https://pastel.hal.science/pastel-00002058v1

Submitted on 5 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2006-30 ÉCOLE DOCTORALE 432

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Centre de Paris

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR
de
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS

Spécialité : Mécanique

par

Chi-Tuân PHAM

LINÉARISATION DU FLUX VISQUEUX DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET DE MODÈLES DE TURBULENCE POUR L'OPTIMISATION AÉRODYNAMIQUE EN TURBOMACHINES

---

soutenue le 25 septembre 2006 devant le jury composé de

MM.	C.	BASDEVANT	Professeur, Université Paris 13, Paris	Président
	J.-A.	DÉSIDÉRI	Directeur de recherche, INRIA, Sophia-Antipolis	Rapporteur
	C.	FAVRE	Ingénieur, Snecma, Moissy Cramayel	
	A.	LERAT	Professeur, ENSAM, Paris	Directeur de thèse
	M.	MASMOUDI	Professeur, Université Paul Sabatier, Toulouse	Rapporteur
	J.	PETER	Ingénieur, ONERA, Châtillon	

L'ENSAM est un Grand Établissement dépendant du Ministère de l'Éducation Nationale, composé de huit centres :
AIX-EN-PROVENCE ANGERS BORDEAUX CHÂLONS-EN-CHAMPAGNE CLUNY LILLE METZ PARIS

Remerciements

Ce travail de thèse a été financé en convention CIFRE par Snecma et a été en grande partie réalisé au sein du Département de Simulation Numérique des écoulements et Aéroacoustique de l'ONERA à Châtillon.

Je remercie tout d'abord Monsieur Philippe Morice, directeur du DSNA, et Monsieur Jacques Sidès, chef de l'unité MNEI, ainsi que NL puis JB de Snecma, de m'avoir accueilli dans leur équipe.

Je tiens à remercier Monsieur Alain Lerat, Professeur de l'ENSAM, d'avoir accepté de diriger cette thèse en particulier pour tous ses conseils éclairés concernant la rédaction du mémoire et la préparation de la soutenance.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Jacques Peter, ingénieur ONERA, de m'avoir encadré, d'avoir su m'aiguiller aux moments opportuns et plus particulièrement dans la dernière ligne droite pendant les phases cruciales de rédaction et de préparation de la soutenance. Merci également pour les connaissances scientifiques qu'il a pu m'apporter en simulation numérique et aérodynamique.

Mes sincères remerciements vont à Monsieur Jean-Antoine Désidéri, Directeur de Recherche à l'INRIA et Monsieur Mohamed Masmoudi, Professeur de l'Université Paul Sabatier, pour avoir jugé ce mémoire en tant que rapporteur et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je remercie Monsieur Claude Basdevant, Professeur de l'Université Paris 13, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury et Monsieur Christophe Favre, ingénieur Snecma, d'avoir pris part au jury.

Mon travail de thèse n'aurait pas abouti en l'état sans l'aide technique de nombreux ingénieurs ONERA des unités MNEI, MNES, ELSA et ETRI du DSNA, H2T et ACI du DAAP et d'ingénieurs Snecma. Je les remercie ici dans leur globalité. Certains ingénieurs ont eu un rôle particulièrement important pendant cette thèse. J'exprime mes sincères remerciements à Stéphane Burguburu du Département d'Aérodynamique Appliquée de l'ONERA qui, toujours très gentiment, a consacré des heures entières à m'aider à me sortir de situations parfois inextricables sur des configurations de turbomachines. Merci également à ses collègues de l'unité H2T Gilles Billonnet et Lionel Castillon pour leurs aides ponctuelles sur certains points de turbomachines. Je remercie également Daniel Destarac pour ses connaissances et son expertise en aérodynamique externe ainsi que Gérald Carrier, tous deux de l'unité ACI.

Ce travail a eu pour contexte le logiciel *elsA* développé à l'ONERA ; *elsA*, un nom qui hantera peut-être encore longtemps mes esprits, *elsA* l'indocile ou la farouche comme j'ai pu l'appeler par

le passé. Parmi les nombreux ingénieurs qui ont pu m'aider à « dompter » *elsA* et que je remercie, je voudrais chaleureusement remercier Sébastien Heib, grand gourou et fin connaisseur des entrailles de « la bête », qui m'a toujours impressionné par la rapidité, la précision de ses diagnostics et sa gentillesse sans égale. Merci aussi aux autres participants du module d'optimisation avec qui le travail a été un plaisir, le « petit gourou » Julien Mayeur et l'éternel présent, fidèle au poste, Pascal Raud. Je remercie aussi tous les ingénieurs qui m'ont apporté leurs connaissances scientifiques, en particulier Vincent Gleize pour sa maîtrise de la turbulence, Vincent Couaillier et Claude Marmignon pour leur haute connaissance de la simulation numérique, Jean-Pierre Veuillot pour ses connaissances en mécanique des fluides et pour m'avoir permis d'assurer ma transition école d'ingénieurs-début de thèse de manière plus sereine.

J'oublie très certainement un grand nombre d'ingénieurs qui m'ont permis d'effectuer cette thèse et que je remercie ici et toutes les équipes pour la bonne humeur, la bonne ambiance de travail qui y règnent et leur disponibilité.

Je remercie aussi tous les ingénieurs Snecma avec qui j'ai pu travailler, qui ont fait avancer ma thèse et qui m'ont fait prendre conscience des enjeux industriels. Parmi eux, je tiens tout particulièrement à remercier GB qui n'a jamais compté ses heures afin que ma thèse puisse avancer le plus rapidement possible. Merci également aux autres *elsA* boys FC, OK, RM pour leur aide technique. Je remercie aussi DMF pour avoir été mon premier chef, CF son successeur, NL pour avoir suivi presque entièrement ce projet et OS pour ses conseils pour finir une thèse à caractère industriel correctement.

Il est très rare qu'un travail se réalise sans soucis matériels, informatiques ou administratifs. Je tiens donc à remercier Philippe Ceroni et Didier Blaise pour leur aide à résoudre tout problème informatique incompréhensible au commun des doctorants. Je remercie également Ghislaine Denis et Brigitte Commelin pour leur joie communicative, leur profonde connaissance des rouages de l'ONERA et leur efficacité pour résoudre les problèmes administratifs que j'ai pu rencontrer.

Les souvenirs que je garderai de ces années de thèse ne seraient pas ce qu'ils sont sans la compagnie et les bons moments passés avec la bande de doctorants en permanente mutation. Je remercie donc tous les doctorants et stagiaires que j'ai pu côtoyer et apprécier pendant ces années de thèse autour de discussions scientifiques ou générales, de pauses café, de pauses déjeuner ou de pauses d'autres genres : les anciens Érik « Igor le Gore » aviateur normand touche-à-tout et qui contrôle en toute circonstance ; Bruno « Chibre » à la modestie sans pareil, mais quel talent Jedi et quelle LES en turbomachines, chapeau bas ; Noël « Fuxe » la bibliothèque ambulante, adepte de Kirchoff et de l'enflammage ; Grégoire courageux utilisateur d'*elsA* pour les turbomachines ; Lionel expert en cavité, j'aurais préféré un expert caviSte pour les Bouteilles ; Ronan l'aéroacousticien à l'humour si particulier ; Mathieu « Bob » POD master, usine à blagues et peu discret ami du réseau ; Élodie qui a peut-être adapté le cordage de sa raquette de bad ; Bruno « Sonic » à la coupe qui hérisse nos cheveux, adepte des problèmes théoriques en 1D qui n'intéressent que les hauts spécialistes ; Sébastien « Allez Seb » discret numéricien grand fan du foot auxerrois ; Lutz, le grand amateur allemand de saucisses instables ; Olivier « Kéket » expérimentateur/théoricien à la décontraction déroutante ; les plus jeunes Olivier « Oliv » l'ordre 3, c'est son dada, le foot aussi ; François « Richie » coupleur fou et musicien dans l'âme ; Yann le motard qui se faufile entre les tourbillons d'hélicoptères ; Géraldine l'acousticienne gréco-bretonne c'est un autre cocktail que les gradients vietnamo-normands ; Emma dont la stabilité au sens de Lie et à la réunionnaise sont devenus une nouvelle spécialité ; Meryem la dernière apprentie en optimisation de formes, également jeune kendoka-padawan, l'aéroélasticité n'a qu'à bien se tenir,

et aussi tous les stagiaires : Julien L premier apprenti en optimisation aéroélastique ; Kelly le stagiaire le plus rapide de l'histoire du DSNA ; Julien M siffleur à l'œil aiguisé ; Yoann deuxième apprenti en optimisation aéroélastique, grand nippophile ; Cyril autre encyclopédie de la CFD ; Jacques à qui l'on promet un horizon éclairci dans le département obscur de l'aérodynamique appliquée et enfin Stéfan dernier membre recensé de la caste.

Avec les années, parmi les doctorants, certains liens sont plus marqués. Il y a déjà ceux qui ont passé presque simultanément trois ans en léger retard de phase par rapport à moi, les camarades de promo : Guillaume « Guigui 2 » et le couplage, le vélo, le nectar d'abricot, sa Guiguette et ses informations bien gardées ; l'autre Guillaume « Bill » acousticien interpolateur, maître jardinier, grand bavard, le seul qui jongle entre de multiples mots de passe ; Frédéric « Freddy » impliciteur, encyclopédie vivante cumulée du foot et du Tour, comique de répétition et poète à ses heures. Il y a aussi ceux avec qui j'ai passé plus de temps : miss Frédérique la thésarde numéro 1 dans le domaine de l'optimisation de formes, experte en résolution de systèmes linéaires, ouragans, grande voyageuse, bonne pipelette et qui aura partagé le même encadrant et parfois les mêmes problématiques. Fabrice aux multiples sobriquets, d'abord « Casifab », « Joebar » puis « Fafou » et enfin « Fab » paraît-il, numéricien préservant la vorticité émérite, à la coupe de cheveux sans fioriture, au pull orange à faire envie à n'importe quel nostalgique de Casimir, grand contradicteur, maître de la salsa et du kung-fu, expert en double voire triple négation, merci à toi et Steph pour vos relectures. Et enfin la miss Élisa qui a partagé mon bureau pendant trois longues années, à la sympathie reconnue, également grande voyageuse, les modèles de turbulence multi-échelle, ça la connaît et avec qui j'ai pu échanger de nombreuses discussions. Merci aussi pour tes relectures.

Enfin, je voulais remercier ma famille : mes parents qui m'ont soutenu et supporté pendant toutes ces années et pas seulement ces dernières années de thèse, mon frère aussi pour tous ses conseils, ses multiples relectures du manuscrit, toutes ces discussions que l'on a pu échanger pas seulement au sujet de la thèse et tout simplement d'avoir été mon frère.

J'exprimerai une dernière pensée pour mes amis que je ne peux pas tous citer ici et aussi à leurs « p'tit bonhomme » qui ont permis d'égayer encore plus mes soirées et week-ends.

Table des matières

Nomenclature **5**

Introduction **9**

1 Optimisation de formes en mécanique des fluides et calcul de gradients **13**
1.1 Position du problème. Optimisation locale et globale en aérodynamique 13
1.1.1 Position mathématique du problème, notations 13
1.1.2 Modules de chaînes d'optimisation aérodynamique locale ou globale 14
1.1.3 Chaînes d'optimisation 16
1.1.4 Méthodes hiérarchiques pour l'optimisation de formes 17
1.2 Formulation des équations de la mécanique des fluides 18
1.2.1 Équations de Navier-Stokes 18
1.2.2 Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) 20
1.2.3 Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) dans le repère relatif . . . 21
1.2.4 Modèles de turbulence 22
1.2.5 Conditions aux limites 27
1.2.6 Relations aérodynamiques 28
1.3 Optimisation par méthodes de gradient discrètes 28
1.3.1 Introduction. Notations. Dépendances 28
1.3.2 Calcul de gradients par différences finies 29
1.3.3 Calcul de gradients par la méthode de l'équation linéarisée 29
1.3.4 Calcul de gradients par la méthode de l'équation adjointe discrète 30
1.3.5 Intérêt et coût relatif des méthodes adjointe et linéarisée discrètes 31
1.3.6 Dérivées d'ordre élevé 31
1.4 Traitement du modèle de turbulence pour les écoulements visqueux 32
1.5 Conclusion 34

2 Méthodes numériques **35**
2.1 Méthode des volumes finis 36
2.1.1 Terminologie et notations 36
2.1.2 Formulation semi-discrète en espace pour intégration temps/espace découplée 36
2.2 Flux de convection. Schémas décentrés 37
2.2.1 Introduction 37
2.2.2 Schéma de Roe 38
2.2.3 Extension au second ordre d'approximation en espace (méthode MUSCL) 39
2.3 Flux de diffusion discret 40
2.3.1 Gradients évalués aux centres des cellules 41
2.3.2 Gradients évalués aux centres des interfaces des cellules 42

2.4 Discrétisation du modèle de Michel *et al.* Calcul de l'épaisseur de couche limite . 44
2.4.1 Calcul de l'épaisseur de couche limite pour les configurations à deux et trois parois . . . 45
2.4.2 Calcul de l'épaisseur de couche limite pour une configuration à une paroi . 46
2.5 Discrétisation du modèle k-ε Launder-Sharma . . . 47
2.5.1 Flux convectif . . . 47
2.5.2 Flux diffusif . . . 48
2.5.3 Terme source . . . 48
2.6 Conditions aux limites . . . 51
2.6.1 Paroi adiabatique . . . 51
2.6.2 Symétrie . . . 51
2.6.3 Non réflexion . . . 52
2.6.4 Frontière sortante subsonique — Condition de pression. Profil de pression statique imposée . . . 52
2.6.5 Frontière entrante subsonique — Condition d'injection 1 . . . 53
2.6.6 Traitement numérique des conditions aux limites pour le flux diffusif . . . 53
2.7 Conditions de raccord entre domaines . . . 54
2.7.1 Définition des frontières de raccord . . . 54
2.7.2 Traitements numériques des raccords. Cas d'un raccord à points coïncidents 56
2.8 Calcul des gradients . . . 56
2.8.1 Résolution des systèmes linéaires des méthodes adjointe et linéarisée discrètes 56
2.8.2 Définition des matrices jacobiennes exacte et approchée . . . 58
2.8.3 Calcul de la sensibilité du résidu par rapport au maillage . . . 60
2.9 Outils de post-traitement pour le calcul de dérivées de fonctions aérodynamiques 61
2.9.1 Outil de post-traitement pour les configurations d'aérodynamique externe 61
2.9.2 Outil de post-traitement pour les configurations d'écoulements confinés . . 62
2.10 Conclusion . . . 62

3 Linéarisation du flux diffusif 65
3.1 Remarques liminaires et notations . . . 65
3.2 Approximation « μ_t figé » . . . 66
3.3 Approche de type « couche mince » . . . 66
3.3.1 Approche « couche mince » physique . . . 66
3.3.2 Extension de l'approche « couche mince » physique à la linéarisation du flux diffusif . . . 67
3.3.3 Détail du calcul de la formule de flux diffusif dans l'approximation de type « couche mince » . . . 67
3.3.4 Gradients évalués aux centres des interfaces . . . 69
3.3.5 Dérivation par rapport au champ conservatif . . . 70
3.3.6 Traitement des conditions aux limites . . . 71
3.4 Linéarisation du flux diffusif sans approximation de type « couche mince » à « μ_t figé » . . . 73
3.4.1 Première formulation . . . 73
3.4.2 Deuxième formulation . . . 82
3.5 Conclusion partielle sur la linéarisation du flux diffusif et de l'approche « μ_t figé » 86
3.6 Linéarisation du modèle de Michel *et al.* . . . 87
3.6.1 Résolution de l'équation définissant μ_t . . . 87
3.6.2 Dépendances du coefficient de viscosité turbulente μ_t . . . 87

3.6.3 Linéarisation du coefficient de viscosité moléculaire μ 88
3.6.4 Discrétisation et dérivation de la vorticité 89
3.6.5 Dérivation de la longueur de mélange 93
3.7 Linéarisation du modèle k-ε de Launder-Sharma 95
3.7.1 Dérivation des coefficients de viscosité 95
3.7.2 Dérivation du flux visqueux 96
3.7.3 Dérivation du terme de dissipation 98
3.7.4 Dérivation du terme de correction bas Reynolds 99
3.7.5 Dérivation du terme de production 100
3.8 Bilan 101

4 Application à des géométries fixes de référence 103
4.1 Introduction. Résultats présentés. Commentaires communs 103
4.2 Tuyère dite de Déléry : bosse C 104
4.2.1 Géométrie 104
4.2.2 Conditions aérodynamiques 106
4.2.3 Simulation numérique de l'écoulement stationnaire 106
4.2.4 Calcul des sensibilités. Modèle de Michel *et al.* 110
4.2.5 Calcul des sensibilités. Modèle k-ε de Launder-Sharma 112
4.2.6 Conclusion partielle 113
4.3 Aile ONERA M6 113
4.3.1 Géométrie 113
4.3.2 Conditions aérodynamiques et mesures expérimentales 113
4.3.3 Simulation numérique de l'écoulement stationnaire 114
4.3.4 Calcul des sensibilités. Modèle de Michel *et al.* 121
4.3.5 Calcul des sensibilités. Modèle k-ε de Launder-Sharma 130
4.3.6 Conclusion partielle 136
4.4 Conclusion 136

5 Application aux aubes isolées de turbomachine 139
5.1 Introduction. Résultats présentés. Commentaires communs 139
5.2 Distributeur Basse Pression 140
5.2.1 Géométrie 140
5.2.2 Conditions aérodynamiques 140
5.2.3 Simulation numérique de l'écoulement stationnaire 140
5.2.4 Calcul des sensibilités 145
5.2.5 Conclusion partielle 146
5.3 Roue Basse Pression 153
5.3.1 Géométrie 153
5.3.2 Conditions aérodynamiques 153
5.3.3 Simulation numérique de l'écoulement stationnaire 153
5.3.4 Calcul des sensibilités 158
5.3.5 Conclusion partielle 159
5.4 Conclusion 163

Conclusion générale 165

Bibliographie **167**

Annexes **172**

A Annexes mathématiques **173**
A.1 Théorème des fonctions implicites 173
A.2 Algorithme de Newton 173
A.3 Calcul de dérivées par passage en variables complexes 173

B Annexes d'optimisation de formes **175**
B.1 Condition de convergence de l'algorithme itératif 175
B.2 Équations du problème d'optimisation de formes avec toutes les dépendances . . 176
B.2.1 Notations. Dépendances 177
B.2.2 Équations de la méthode de l'équation linéarisée 177
B.2.3 Équations de la méthode adjointe 178

Nomenclature

Abréviations	Définition
CM	linéarisation du flux diffusif avec approche de type « couche mince »
Dest6	somme des termes de destruction de la sixième composante des équations du modèle k-ε
Dest7	somme des termes de destruction de la septième composante des équations du modèle k-ε
DF	différences finies
FVC	linéarisation du flux diffusif sans approche de type « couche mince »
MODLIN	modèle de turbulence linéarisé
MUTFIG	linéarisation à « μ_{t} figé »
Prod6	somme des termes de production de la sixième composante des équations du modèle k-ε
Prod7	somme des termes de production de la septième composante des équations du modèle k-ε

Symboles	Définition
∂	bord d'un domaine (exemple : $\partial\Omega$ est le bord de Ω)
$g_{,x}$, $g_{,y}$, $g_{,z}$	dérivée de la fonction g selon la variable x, y, z
∇	opérateur gradient
$\nabla\wedge$	opérateur rotationnel
$\nabla\cdot$	opérateur divergence

Lettres latines	Définition
a	vitesse du son
c_{p}	coefficient de chaleur spécifique à pression constante
c_{v}	coefficient de chaleur spécifique à volume constant
C_{p}	coefficient de pression
C_{s}	constante de la loi de Sutherland dépendant du gaz considéré
C_μ, $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$	constantes du modèle k-ε
CD_{ff}	coefficient de traînée de champ lointain
CD_{nf}	coefficient de traînée de champ proche
CL_{p}	coefficient de portance de pression
$D_{\boldsymbol{\alpha}}$	domaine de définition de $\boldsymbol{\alpha}$
$\mathbf{D}$	tenseur des taux de déformation
$\mathcal{D}$	fonction d'amortissement
e	énergie interne par unité de masse
E	énergie totale par unité de masse
E_{r}	énergie totale relative par unité de masse
$\mathbf{Fc}$	tenseur du flux convectif
$\mathbf{Fd}$	tenseur du flux diffusif
f_1, f_2	fonctions de correction bas Reynolds (modèle k-ε)
f_μ	fonction de paroi (modèle k-ε)
$\boldsymbol{F}^V$	flux visqueux discret
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^V$	flux visqueux discret évalué sur l'interface frontière b
$\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha})$	fonction contrainte d'indice k
$g_k(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X})$	fonction contrainte d'indice k
g_{E}	grandeur relative exprimée dans le repère entraîné
g_{ref}	grandeur relative à un état de référence donné
H	enthalpie totale par unité de masse
i	nombre complexe, racine carrée de -1 de partie imaginaire positive
$\mathbf{I}$	tenseur ou matrice identité
$\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})$	fonction objectif
$J(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X})$	fonction objectif
K	constante de Kármán
k	énergie cinétique turbulente
k_{t}	coefficient de conductivité thermique turbulent
k_{T}	coefficient de conductivité thermique
$\bar{k}$	somme des coefficients de conductivité thermique
ℓ	longueur de mélange
M	nombre de Mach
$\boldsymbol{N}$	vecteur normale non nécessairement unitaire
n_{a}	taille du vecteur champ aérodynamique $\boldsymbol{W}$
n_{c}	nombre de fonctions contrainte
n_{f}	taille du vecteur de paramètres de forme $\boldsymbol{\alpha}$

p	pression statique
P	terme de production du modèle k-ε
$\boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}$	vecteur de variables primitives attaché à une cellule
p_{i}	pression totale ou pression d'arrêt
Pr	nombre de Prandtl
Pr_{t}	nombre de Prandtl turbulent
$\boldsymbol{q}$	vecteur flux de chaleur
$\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}}$	vecteur flux de diffusion turbulente d'enthalpie
r_{gaz}	constante universelle des gaz parfaits à la masse molaire du gaz considéré
$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X})$	équations de la mécanique des fluides discrétisées
Re	nombre de Reynolds
Re_{t}	nombre de Reynolds turbulent
R_{pi}	rapport des pressions totales
R_{Ti}	rapport des températures totales
S^x, S^y, S^z	projection du vecteur surface $\boldsymbol{S}$ suivant les directions x, y et z
$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha})$	vecteur de coordonnées du maillage surfacique
$\boldsymbol{s}_{\mathrm{E}}$	vecteur vitesse d'entraînement
t	temps
T	température statique
$\boldsymbol{T}$	vecteur terme source
T_{i}	température d'arrêt ou température totale
u	composante suivant l'axe x du vecteur vitesse $\boldsymbol{U}$
$\boldsymbol{U}$	vecteur vitesse de coordonnées u, v et w
$\mathcal{V}$	volume d'une cellule
v	composante suivant l'axe y du vecteur vitesse $\boldsymbol{U}$
$\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$	direction de maillage i (resp. j, k)
$\boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}$	vecteur vitesse relative
w	composante suivant l'axe z du vecteur vitesse $\boldsymbol{U}$
$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})$	vecteur de coordonnées du maillage volumique
$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$	matrice jacobienne du maillage
$\boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}$	vecteur de variables conservatives attaché à une cellule
$\boldsymbol{W}_{\mathrm{g}}$ et $\boldsymbol{W}_{\mathrm{d}}$	états gauche et droit du vecteur champ aérodynamique
$\boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}$	vecteur champ aérodynamique sur une frontière du domaine

Lettres grecques	Définition
$\boldsymbol{\alpha}$	vecteur des paramètres de forme
β_{s}	constante de la loi de Sutherland dépendant du gaz considéré
γ	rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = \frac{c_{\mathrm{p}}}{c_{\mathrm{v}}}$
δ	épaisseur de couche limite
ε	taux de dissipation
$\tilde{\varepsilon}$	taux de dissipation isotrope
η	distance à la paroi
η_{is}	rendement isentropique
$\boldsymbol{\lambda}$	vecteur adjoint
λ_{ijk}	coefficient du flux diffusif
μ	coefficient de viscosité dynamique moléculaire
μ_{t}	coefficient de viscosité dynamique turbulent
$\bar{\mu}$	somme des coefficients de viscosité dynamique moléculaire et turbulent
ν_{t}	coefficient de viscosité cinématique turbulent
$\tilde{\nu}$	coefficient de viscosité cinématique transformé (modèle de Spalart-Allmaras)
ξ	variable réduite de la fonction d'amortissement de Michel *et al.*
ρ	masse volumique du fluide
σ	paramètre de correction entropique de Harten
σ_k, $\sigma_{\tilde{\varepsilon}}$	constantes du flux diffusif pour le modèle k-ε
$\boldsymbol{\tau}$	tenseur des contraintes dues à la viscosité
$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}}$	tenseur de Reynolds
ϕ	fonction limiteur de pente
ψ	fonction de correction entropique de Harten
$\bar{\omega}$	vorticité
Ω	domaine spatial

Introduction

Un turboréacteur est un dispositif mécanique complexe destiné à propulser un aéronef en accroissant la quantité de mouvement d'air ingéré. Les turboréacteurs récents se composent d'une soufflante (ou *fan*), d'un compresseur, d'une chambre de combustion et d'une turbine, disposés suivant le même axe. Le *fan* aspire l'air extérieur destiné, pour partie, à alimenter l'entrée du compresseur (flux primaire), pour partie à être éjecté derrière le moteur sans être passé par le dispositif propulsif (flux secondaire). Le compresseur a pour fonction d'accroître la pression d'arrêt du fluide avant son entrée dans la chambre de combustion. La chambre de combustion est le siège d'une réaction chimique qui élève l'énergie thermique des gaz. La turbine a pour fonction d'entraîner les arbres moteur en détendant les gaz brûlés. Enfin, l'air expulsé par la turbine contribue en plus du flux secondaire au gain de quantité de mouvement.

Le compresseur et la turbine se composent d'une succession d'étages, constitués d'un rotor (roue mobile) et d'un stator (roue fixe). Des aubages, disposés suivant l'azimut, sont montés sur chaque roue. La performance d'une roue est appréciée par des fonctions plus ou moins classiques : rendement isentropique, taux de compression, débit de blocage, pertes globales, profil d'angles en sortie, marge au pompage... Ce type de fonctions, dépendant de l'écoulement et de la géométrie, sera désigné par la suite par l'expression *fonction aérodynamique*. La forme des aubages est déterminée de sorte que l'on obtienne la meilleure valeur des fonctions aérodynamiques pertinentes.

La recherche des formes aérodynamiques optimales a tout d'abord reposé sur le savoir-faire et l'expérience des ingénieurs de conception. Depuis une trentaine d'années, la simulation numérique en mécanique des fluides a permis d'analyser des écoulements internes avec une modélisation de complexité croissante (équation du potentiel — 1970-1980 —, équations d'Euler — 1980-1985 —, équations RANS 1985-). Ce savoir-faire a progressivement été utilisé pour la conception d'aubages de turbomachine en complément des techniques empiriques. Distinguons quatre étapes dans la contribution des simulations numériques à l'optimisation de formes aérodynamiques : l'usage le plus rudimentaire consiste à évaluer la qualité d'un nombre limité de formes par des calculs d'analyse ; cette méthode est aussi ancienne que la simulation numérique en mécanique des fluides. Dès le milieu des années 1970, différents auteurs — notamment Hicks *et al.* [26] et Vanderplaats *et al.* [75] — ont considéré des formes solides paramétrées et ont calculé par différences finies les gradients des fonctions aérodynamiques par rapport aux paramètres de forme, pour alimenter une méthode d'optimisation par descente. Une troisième étape a été initiée par Jameson [28], qui a appliqué en 1988 la méthode du contrôle optimal aux équations de la mécanique des fluides ; dès lors, le calcul des gradients nécessaires à une méthode d'optimisation locale pouvait être réalisé en résolvant des problèmes linéaires — équations adjointes, équation linéarisée — plutôt qu'un grand nombre (au moins autant que de paramètres de forme) de calculs d'analyse (problème non linéaire). Enfin, la puissance des calculateurs modernes a permis la réalisation d'optimisations aérodynamiques globales sur le domaine de paramètres [61]. Ces travaux, encore réservés à la conception de formes simples, utilisent généralement un algorithme

génétique comme minimiseur et des méthodes de régression pour compléter, durant l'optimisation, la connaissance des fonctions aérodynamiques sur le domaine de paramètres.

L'optimisation de formes tridimensionnelles complexes intéressant l'industrie ne peut être réalisée usuellement par ces méthodes d'optimisation globale pour l'instant. Pour cette raison, l'intérêt des bureaux d'études industriels se focalise aujourd'hui sur les méthodes d'optimisation par gradient. Leur mise en œuvre nécessite le développement d'une triple compétence : paramétrisation géométrique des formes solides et des maillages volumiques, méthode de descente, simulation numérique des écoulements et calcul du gradient des fonctions aérodynamiques par rapport aux paramètres de forme. La détermination de l'écoulement et des gradients autour de la forme initiale permet de calculer par la méthode de descente un nouveau vecteur de paramètres de forme auquel le module de remaillage permet d'associer un nouveau maillage volumique. Ces opérations sont enchaînées itérativement jusqu'à détermination d'un optimum local.

De ces trois étapes, la plus complexe est le calcul du gradient des fonctions aérodynamiques par rapport aux paramètres de formes. En effet, les variables géométriques et aérodynamiques de ces fonctions sont liées par les équations de la mécanique des fluides, si bien que le calcul des gradients nécessite la résolution d'une équation linéarisée ou adjointe, c'est-à-dire l'inversion d'un système linéaire de grande taille dont la matrice est la matrice jacobienne des équations de la mécanique par rapport au champ aérodynamique. Par ailleurs, les effets visqueux (décollements, pertes par frottement, pertes par mélange, écart flux-profil, modifications de la pente du diagramme rapport de pression-débit et du débit de blocage...) jouent un rôle prépondérant dans les écoulements autour des aubages de turbomachine. Il convient donc de considérer les équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) pour les calculs d'analyse et d'inverser la matrice jacobienne de ces équations discrétisées par rapport au champ aérodynamique pour les calculs de gradients.

Au début des années 1990, de nombreux auteurs ont mis en œuvre ces calculs avec une modélisation de fluide parfait. Ceux qui utilisaient une méthode dite discrète ont donc linéarisé le bilan de flux de fluide parfait sur chacune des cellules de maillage par rapport au champ aérodynamique. Ils ont remarqué que l'obtention de gradients précis était conditionnée par l'exactitude de la linéarisation, les flux d'interfaces frontière devant notamment être dérivés exactement. Pour l'étude d'écoulements modélisés par les équations RANS, la linéarisation exacte des équations discrètes et des équations du modèle de turbulence est une tâche extraordinairement ardue. Pour cette raison, différents niveaux d'approximations ont été considérés dans la littérature pour le calcul de la matrice jacobienne. Nous en distinguerons quatre :

- la linéarisation du flux visqueux est omise [36] ;
- le coefficient de viscosité turbulente et le coefficient du flux de chaleur turbulent sont considérés constants (approximation dite « μ_t figé ») [30], [67], [72] ;
- le coefficient de viscosité turbulente et le coefficient du flux de chaleur turbulent sont considérés constants et seuls les termes de couche mince du flux visqueux sont dérivés [58], [43] ;
- le modèle de turbulence est linéarisé [2], [34], [22], [50], [32], [38].

La deuxième approximation est si répandue qu'elle peut être considérée comme un traitement standard.

Snecma et l'ONERA développent depuis mi-2004 une chaîne d'optimisation locale de formes, pour laquelle un calcul de gradient avec approximation « μ_t figé » a été retenu. Le support informatique de ce travail est le logiciel *elsA* [9] développé au Département de Simulation Numérique des écoulements et Aéroacoustique (DSNA) de l'ONERA. En complément de ce travail contrac-

tuel, Snecma a souhaité évaluer le bénéfice d'une linéarisation plus précise dans le cadre de la présente thèse en convention CIFRE. L'objectif de cette étude est de calculer des gradients de fonctions aérodynamiques de manière précise en se demandant s'il est nécessaire d'effectuer la linéarisation du flux visqueux des équations de Navier-Stokes avec moins d'approximations. La démarche a consisté à s'appuyer sur une linéarisation du flux visqueux simple (approximation « μ_t figé » et approche de type « couche mince ») qui offre un codage simple et a permis d'obtenir de premières valeurs de gradients d'un ordre de grandeur correct mais pas exactement identiques avec les valeurs de références obtenues par différences finies. La deuxième étape consiste à abandonner l'approche de type « couche mince » et à prendre en compte toutes les dérivées dans le flux visqueux tout en conservant l'hypothèse forte de modèle de turbulence figé. Cependant, l'approche de « μ_t figé » peut être pénalisante notamment pour certains modèles de turbulence. Certains auteurs qui prennent en compte le modèle de turbulence dans leurs linéarisations, parviennent à améliorer la précision de leurs résultats ([2], [34], [22], [50], [32], [38]). Envisageant que l'absence de linéarisation du modèle de turbulence soit trop pénalisante pour certains cas test, l'objectif de linéariser deux modèles de turbulence a été fixé afin de vérifier que c'est bien la linéarisation de ces modèles de turbulence qui permet l'obtention de gradients précis. Parmi l'ensemble des modèles de turbulence utilisés par les départements de Conception de Snecma, deux modèles ont été retenus pour les calculs d'analyse et de gradients : un modèle algébrique (Michel *et al.* [46]) et un modèle à deux équations de transport (k-ε de Launder-Sharma [37]).

Ces travaux ont fait l'objet de deux publications :

- J. Peter, D. Drullion & C.-T. Pham, Contribution to discrete implicit gradient and discrete adjoint method for aerodynamic shape optimization, ECCOMAS, 2004 [58] ;
- J. Peter, C.-T. Pham & D. Drullion, Recent CFD Activities at ONERA : Implicit Stages for Complex Flow Simulations and Gradient Computation for Shape Optimization, *CFD Journal* Special Issue (Workshop Post SAROD'05), à paraître [59].

Chacune de ces deux publications reprend des résultats des chapitres 3 et 4.

Ce manuscrit est organisé comme suit.

Dans le chapitre 1, le problème mathématique d'optimisation de formes aérodynamiques est présenté ainsi que la structure d'une chaîne d'optimisation globale ou locale. La formulation des équations de la mécanique des fluides en modélisation RANS et des modèles de turbulence utilisés dans cette thèse est ensuite rappelée. On décrit alors en détail l'optimisation par méthode de gradients et en particulier les deux méthodes discrètes que sont la méthode de l'équation linéarisée discrète et la méthode adjointe discrète, pour lesquelles un calcul de matrice jacobienne de bilan de flux par rapport au champ aérodynamique doit être réalisé. Une bibliographie détaillée relative au traitement du flux diffusif et des modèles de turbulence pour le calcul de cette matrice jacobienne termine ce chapitre.

Le chapitre 2 décrit la discrétisation des équations RANS par la méthode des volumes finis, en particulier les flux convectif et diffusif, les modèles de turbulence, les spécificités de conditions aux limites et de raccord. En outre, les éléments de résolution des méthodes de gradient discrètes ainsi que le calcul des différents termes sont énoncés (mis à part le calcul de la partie diffusive de la matrice jacobienne de bilan de flux par rapport au champ aérodynamique).

Dans le chapitre 3, les différentes approximations du flux diffusif et des termes des modèles de turbulence de Michel *et al.* et k-ε de Launder-Sharma, ainsi que leur dérivation par rapport au champ aérodynamique sont décrites. Dans un premier temps, le flux diffusif est différentié à « μ_t figé ». Une approximation de type « couche mince » est alors d'abord utilisée, puis on explique la complexification des expressions en s'affranchissant de cette approximation, toujours

à « μ_t figé ». Par la suite, la dérivation des modèles de turbulence est abordée.

Le chapitre 4 présente les résultats de différentes linéarisations du flux diffusif éventuellement combinées à celle du modèle de Michel *et al.* sur deux cas d'épreuve : la tuyère C définie par Déléry dite « bosse C » et l'aile ONERA M6. Des gradients de fonctions aérodynamiques et des sensibilités d'écoulement à la paroi illustrent ces résultats pour chaque linéarisation.

Enfin, dans le chapitre 5, des résultats du même type qu'au chapitre 4 sont présentés pour deux cas de turbomachine. Il s'agit de deux cas d'aubes isolées de turbine : un Distributeur Basse Pression et une Roue Basse Pression.

Chapitre 1

Optimisation de formes en mécanique des fluides et calcul de gradients

Dans ce chapitre, les écoulements considérés sont régis par les équations RANS complétées par des modèles de turbulence. En outre, dans tout ce qui suit, seules les approches discrètes (équation linéarisée et méthode adjointe) sont considérées pour les méthodes de gradient, pas l'approche continue introduite par Jameson en 1988 [28].

1.1 Position du problème. Optimisation locale et globale en aérodynamique

Il est possible de définir des formes ou des surfaces solides de plusieurs manières (splines, B-splines, courbes et surfaces de Bézier...). Ces formes et le volume qui les entoure peuvent ensuite être maillées. On dispose ainsi du vecteur de coordonnées du maillage volumique $\boldsymbol{X}$ en fonction des paramètres de forme.

1.1.1 Position mathématique du problème, notations

Les notations adoptées sont :

$\boldsymbol{\alpha}$	:	vecteur des paramètres de forme caractérisant la forme de l'objet solide autour duquel une simulation numérique est réalisée ;
n_{f}	:	taille du vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ (indice f pour paramètre de **f**orme) ;
$D_{\boldsymbol{\alpha}}$	:	domaine de définition de $\boldsymbol{\alpha}$, hyper-parallélépipède de $\mathbb{R}^{n_{\mathrm{f}}}$;
$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha})$	:	vecteur de coordonnées du maillage surfacique, fonction supposée de classe C^1 ;
$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})$	:	vecteur de coordonnées du maillage volumique construit à partir de la donnée de $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha})$, fonction supposée elle aussi de classe C^1.

La matrice jacobienne du maillage $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$ est accessible soit directement, soit par produit de différentielles :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}. \tag{1.1}$$

En désignant par $\boldsymbol{W}$ le champ aérodynamique (vecteur de taille n_{a}), on note les équations de la mécanique des fluides discrétisées sous la forme :

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X}) = 0. \tag{1.2}$$

La fonction $\boldsymbol{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{n_\mathrm{a}}$ est supposée de classe C^1. Si $\boldsymbol{X}$ (maillage volumique) est fixé à une valeur $\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}_i), \boldsymbol{\alpha}_i \in D_{\boldsymbol{\alpha}}$, l'équation précédente définit ainsi un système non linéaire en $\boldsymbol{W}$ de n_a équations à n_a inconnues. Considérons les vecteurs $(\boldsymbol{W}_i, \boldsymbol{X}_i)$ tels que :

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}_i, \boldsymbol{X}_i) = 0 \text{ et } \det[(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}})(\boldsymbol{W}_i, \boldsymbol{X}_i)] \neq 0. \tag{1.3}$$

Le théorème des fonctions implicites permet de définir $\boldsymbol{W}$ comme une fonction C^1 de $\boldsymbol{X}$ sur un voisinage de $\boldsymbol{X}_i$, puis, par continuité et régularité de $\boldsymbol{X}$, comme une fonction C^1 de $\boldsymbol{\alpha}$ sur un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}_i$. On supposera désormais cette propriété vraie sur tout $D_{\boldsymbol{\alpha}}$.
On peut alors noter $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha})$ (fonction C^1 de $\mathbb{R}^{n_\mathrm{f}}$ dans $\mathbb{R}^{n_\mathrm{a}}$) et réécrire les équations de la mécanique :

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})) = 0. \tag{1.4}$$

Soit $\mathcal{J}$ la fonction objectif que l'on souhaite minimiser (on se place dans le cas d'une optimisation mono-objectif). Elle peut s'écrire avec les mêmes dépendances que les équations de la mécanique des fluides discrétisées $\boldsymbol{R}$:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}) = J(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})). \tag{1.5}$$

De même, les fonctions contraintes $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha})$ peuvent s'exprimer sous la forme $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}) = g_k(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}))$. Soit n_c, leur nombre. La forme définie par un n_f-uplet $\boldsymbol{\alpha}$ est admissible si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n_\mathrm{c}]\!], \quad g_k(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})) \leq 0. \tag{1.6}$$

Objectif et contraintes apparaissent ainsi comme des fonctions des paramètres de forme.
Le problème d'optimisation globale s'écrit finalement :

Chercher $\boldsymbol{\alpha}^*$ dans $D_{\boldsymbol{\alpha}}$ tel que
$\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}^*) = J(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}^*), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}^*)) = \min \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})$ sur $D_{\boldsymbol{\alpha}}$
avec $\forall k \in [\![1, n_\mathrm{c}]\!],\ g_k(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}^*), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}^*)) \leq 0.$

Pour simplifier l'exposé, on supposera toujours dans la suite, d'un point de vue thérorique, que les fonctions objectif et contraintes sont de classe C^1 et convexes. En pratique, ces fonctions ne sont pas toujours convexes.
Définissons aussi le problème de recherche d'un minimum local :

Chercher $\boldsymbol{\alpha}^*$ dans $D_{\boldsymbol{\alpha}}$ tel que
$\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}^*) = J(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}^*), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}^*)) = \min \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})$ sur $V_{\boldsymbol{\alpha}^*}$
($V_{\boldsymbol{\alpha}^*}$ est un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}^*$)
avec $\forall k \in [\![1, n_\mathrm{c}]\!],\ g_k(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}^*), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}^*)) \leq 0.$

Dans les paragraphes qui suivent, une chaîne d'optimisation ainsi que les modules qui la composent et qui permettent d'aboutir à une forme optimisée sont décrites. Cette chaîne permet de construire une suite de formes paramétrées qui convergent vers la solution du problème de minimisation.

1.1.2 Modules de chaînes d'optimisation aérodynamique locale ou globale

1.1.2.1 Code de simulation aérodynamique

Ce module calcule l'écoulement $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha})$ correspondant à un maillage volumique $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})$ en résolvant les équations implicites non-linéaires pour la mécanique des fluides $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})) = 0$. Il intervient dans toutes les méthodes d'optimisation locale et globale.

1.1.2.2 Outil de maillage des surfaces solides et de maillage/remaillage des volumes

Cet outil permet de construire un maillage de surface $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha})$ pour tous les n_{f}-uplets de paramètres de forme $\boldsymbol{\alpha}$ de $D_{\boldsymbol{\alpha}}$. Pour chaque maillage de surface $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha})$, un maillage de volume $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})$, coïncidant avec $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha})$ sur les surfaces solides doit être construit. Cette opération de reconstruction d'un maillage volumique est délicate. Deux situations très distinctes se présentent :

- le maillage de volume a été construit automatiquement par un logiciel de CAO, utilisé aussi pour la construction du maillage de surface. Dans ce cas, les paramètres de forme sont naturellement les paramètres d'entrée du module de construction de maillage surfacique de l'outil CAO. Une modification de paramètre de forme est alors reportée automatiquement dans l'ensemble de la chaîne de construction de maillages qui fournit successivement $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha})$ et $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})$.
- dans tous les autres cas, le maillage de volume $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})$ est construit à partir du maillage surfacique $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha})$, du maillage surfacique initial $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha}^0)$ et du maillage volumique initial $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}^0)$. La déformation du maillage de surface est « transférée » dans le maillage de volume. Plusieurs méthodes permettent de réaliser cette opération. Le rapport de Dugeai [17] fournit de plus amples informations.

1.1.2.3 Outil de simulation aérodynamique et de calcul des gradients

Cet outil calcule l'écoulement discret $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha})$ correspondant à une forme $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})$. Les valeurs des fonctions objectif et contraintes ainsi que de leurs gradients par rapport aux paramètres de forme doivent ensuite être évalués. L'opération la plus complexe est de loin le calcul des gradients des $(n_{\mathrm{c}}+1)$ fonctions par rapport aux n_{f} paramètres de forme.

Une méthode de différences finies peut être utilisée pour ce calcul. C'était effectivement la seule méthode mise en œuvre depuis les débuts de la simulation numérique en mécanique des fluides jusqu'à la fin des années 1980. Elle présente néanmoins un inconvénient majeur : elle nécessite le calcul d'au moins n_{f} écoulements sur des maillages dits décalés $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}+(0,\ldots,0,\delta\alpha_i,0,\ldots,0))$. Cette opération est extrêmement coûteuse, si bien que cette méthode a été supplantée par trois méthodes (en pratique) permettant d'accéder aux dérivées des fonctions sans calcul supplémentaire d'analyse, mais en introduisant des résolutions de systèmes linéaires. Ces trois méthodes, utilisées à partir des années 1990, s'appellent :

- méthode de l'équation linéarisée (méthode discrète) [1] ;
- méthode de l'équation adjointe discrète ;
- méthode de l'équation adjointe continue.

Les deux méthodes discrètes sont décrites en détail dans la section 1.3.

1.1.2.4 Outil de minimisation par algorithme de descente

Cet outil a pour paramètres d'entrée les évaluations des fonctions $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha})$ et des dérivées $\frac{\partial\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_i}$, $\frac{\partial\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\alpha_i}$, $i\in[\![1,n_{\mathrm{f}}]\!]$, $k\in[\![1,n_{\mathrm{c}}]\!]$ dans le cas où $\boldsymbol{\alpha}$ et k sont tels que $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha})=0$. Il applique un algorithme de minimisation locale à partir de ces grandeurs et détermine un nouveau jeu de paramètres de forme $\boldsymbol{\alpha}$. Un maillage de surface et de volume correspondant aux nouveaux paramètres de forme est ensuite construit par les outils de maillage.

[1] A priori, il n'y a pas d'impossibilité à avoir une méthode de l'équation linéarisée continue. Voir les travaux de Turgeon *et al.* [71] pour des écoulements incompressibles.

1.1.2.5 Modèle de bas niveau. Méthode de régression. Algorithme de minimisation globale

Les modèles de bas niveau et les méthodes de régression permettent d'enrichir la connaissance des fonctions objectif et contraintes sur le domaine de paramètres, complétant des évaluations exactes de ces fonctions en un faible nombre de vecteurs de paramètres.

Des simulations aérodynamiques sur des grilles grossières, des simulations avec un modèle physique simplifié (équations d'Euler au lieu des équations de Navier-Stokes...) sont quelques exemples de modèles aérodynamiques de bas niveau, pouvant fournir des évaluations de vecteurs de paramètres à coût réduit pour le problème de minimisation.

Les méthodes de régression sont utilisées dans de nombreux problèmes de mathématiques appliquées. Dans le contexte d'un problème d'optimisation globale pour lequel l'évaluation des fonctions objectif et contraintes est coûteuse, elles permettent de calculer une approximation des fonctions objectifs $\mathcal{J}$ et contraintes $\mathcal{G}_k$ sur le domaine $D_{\boldsymbol{\alpha}}$ à partir d'un ensemble fini d'évaluations exactes $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}_m)$, $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}_m)$ [2]. On peut citer quelques méthodes de régression : interpolation polynomiale, réseau de neurones, Kriging, support de vecteurs. La minimisation globale du problème posé avec les fonctions approchées peut être résolue par une méthode générale (algorithme génétique par exemple) ou par une méthode particulière au type de fonction approchée considéré. Plus d'informations sur le sujet figurent dans [56].

1.1.3 Chaînes d'optimisation

On peut maintenant décrire l'enchaînement des modules pour la réalisation d'une optimisation aérodynamique globale ou locale par méthode de gradient.

Dans toute la suite, on appelle indifféremment dérivée ou gradient de la fonction $\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{G}_k$). Ces dérivées ou gradients seront notés tout aussi indifféremment $\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ ou $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ (resp. $\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ ou $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}^l)$).

1.1.3.1 Minimisation locale par méthode de gradient. Méthode classique

Notons l l'indice d'itération de la chaîne de minimisation locale. Supposons qu'une approximation du paramètre optimal $\boldsymbol{\alpha}^l$ ait été calculée, le module de maillage et remaillage définit les maillages de surface et de volume $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ et $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ ainsi que la dérivée du maillage de volume au point considéré $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$. Ces données permettent au code d'aérodynamique et de calcul de gradients d'évaluer le champ aérodynamique $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}^l)$, puis les fonctions objectif et contraintes $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ et $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}^l)$, puis les gradients de ces fonctions $\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ et $\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$. Le calcul de ces gradients, $\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ et $\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$, n'est pas un problème aisé. Il faut en effet effectuer le calcul des dérivées des fonctions objectif et contraintes $\mathcal{J}$ et $\mathcal{G}_k$ par rapport aux variables dépendantes $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{X}$. C'est un aspect du calcul de ces grandeurs qui fait l'objet de cette thèse (ou étude de *sensibilités*).

Le choix fait à l'ONERA est de séparer strictement un code de calcul aérodynamique et un code de post-traitement. Le code de simulation aérodynamique et de calcul des gradients est le code *elsA* [9]. Le code de post-traitement métier est Xopt (resp. FFD41) pour les applications aux turbomachines (resp. aux avions). L'enchaînement des opérations est le suivant :

- calcul du champ aérodynamique $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ par le code de simulation ;
- calcul des fonctions objectif et contraintes $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ et $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}^l)$ et de leurs dérivées partielles $\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$, $\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$, $\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{W}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$, $\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ par le code de post-traitement ;

[2] Pour un problème d'optimisation aérodynamique, ce qui est coûteux est le calcul du champ aérodynamique $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha})$ à partir d'un maillage $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})$, et non pas l'évaluation des fonctions $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}) = J(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}))$ et $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}) = g_k(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}))$.

– calculs des gradients $\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$, $\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ par le module de calcul de gradients du code de simulation aérodynamique.

Les grandeurs $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}^l)$, $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}^l)$, $\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ et $\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ sont transmises à l'algorithme de descente qui détermine une nouvelle approximation du paramètre optimal $\boldsymbol{\alpha}^{l+1}$.

La figure 1.1 présente le schéma de fonctionnement d'une chaîne d'optimisation locale.

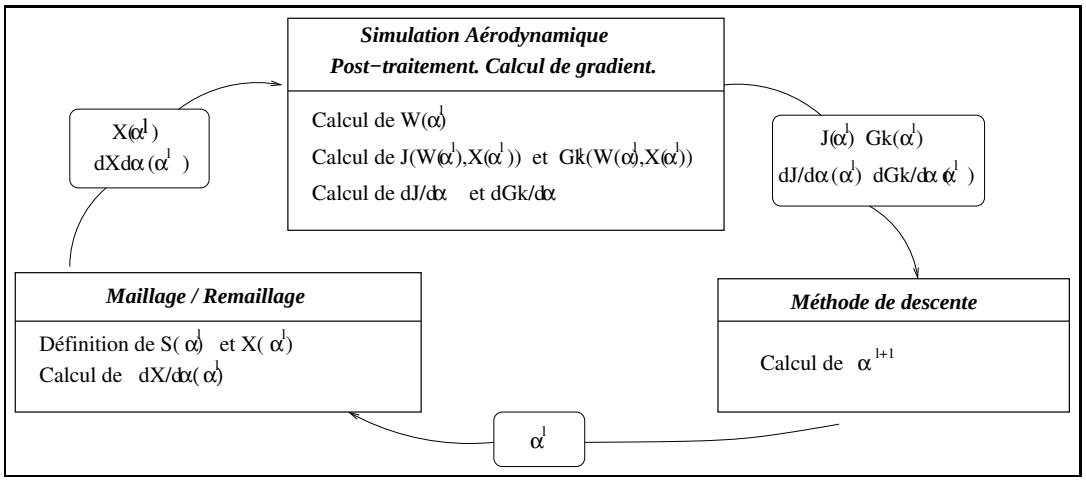

FIG. 1.1 – Schéma d'une chaîne d'optimisation locale.

Un algorithme similaire mais utilisant une résolution imprécise des équations pour la mécanique des fluides et pour le calcul de gradients a été considéré. Il est appelé algorithme ONE-SHOT ([62] et [70]).

1.1.3.2 Minimisation globale

Notons aussi l l'indice d'itération de la chaîne de minimisation globale. À chaque pas l, l'algorithme a connaissance de l'évaluation exacte des fonctions objectif et contraintes $\mathcal{J}$ et $\mathcal{G}_k$ pour un ensemble de n_l vecteurs de paramètres de forme $\boldsymbol{\alpha}_m^l$, $m \in [\![1, n_l]\!]$. Le nombre de points n_l pour lesquels un calcul d'analyse précis a été réalisé est croissant avec l. Supposons que l'ensemble des vecteurs de paramètres $\boldsymbol{\alpha}_m^l$ vienne d'être déterminé. Pour l'ensemble des nouveaux paramètres de forme (les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_m^l$ qui n'étaient pas déjà des $\boldsymbol{\alpha}_m^{l-1}$), le module de maillage/remaillage définit les maillages $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\alpha}_m^l)$ et $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}_m^l)$. Pour chaque nouveau maillage volumique $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}_m^l)$, le code de simulation aérodynamique calcule l'écoulement convergé correspondant $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}_m^l)$. Les valeurs exactes des fonctions objectif et contraintes $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}_m^l)$, $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}_m^l)$ sont évaluées. Enfin des évaluations de bas niveau et/ou une méthode de régression complètent la description des fonctions $\mathcal{J}$ et $\mathcal{G}_k$ sur le domaine des paramètres. Un algorithme de minimisation globale détermine alors les vecteurs de paramètres qu'il est utile d'ajouter aux $\boldsymbol{\alpha}_m^l$ pour constituer l'ensemble des $\boldsymbol{\alpha}_m^{l+1}$.

Après un certain nombre d'itérations l_f, l'algorithme de recherche global peut être arrêté et la recherche des optima peut être achevée par des minimisations locales à partir de tout ou partie des $\boldsymbol{\alpha}_m^{l_\mathrm{f}}$. La figure 1.2 présente le schéma de fonctionnement d'une chaîne d'optimisation globale.

1.1.4 Méthodes hiérarchiques pour l'optimisation de formes

L'équipe de Désidéri [19] et [20] a développé une technique d'enchaînement de résolutions de problèmes d'optimisation de formes : le calcul d'analyse est toujours réalisé sur le même maillage

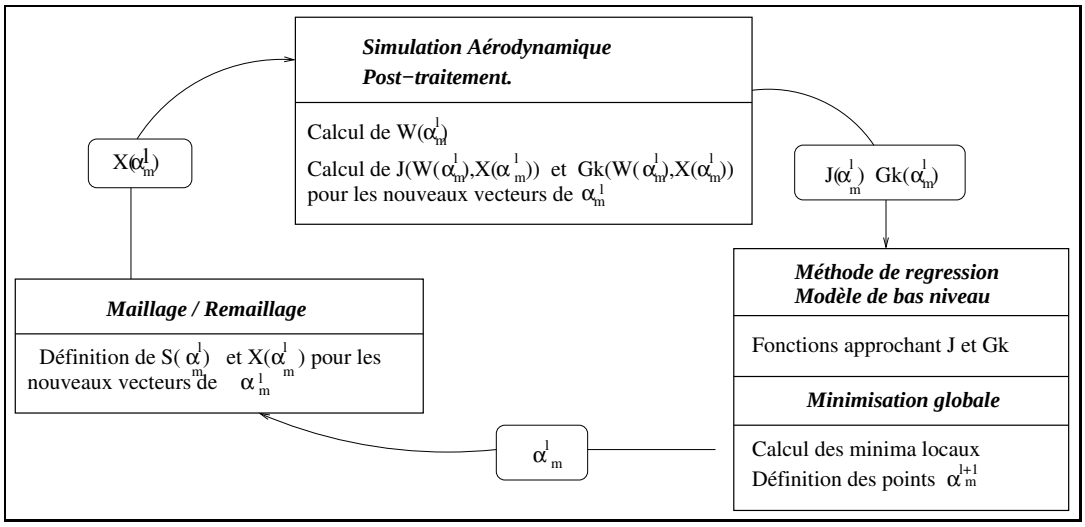

FIG. 1.2 – Schéma d'une chaîne d'optimisation globale.

mais la déformation géométrique peut être décrite dans des espaces vectoriels de plus ou moins grande dimension. Ces espaces sont notés $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$,..., $\mathcal{B}_n$ ($\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{B}_{n-1} \subset \mathcal{B}_n$). Les fonctions de déformation sont des produits tensoriels de polynômes de Bézier. Les coordonnées paramétriques des points susceptibles d'être déformés doivent être calculées pour la géométrie initiale. La propriété intéressante de ces fonctions de déformation est la suivante : la solution du problème d'optimisation pour un espace $\mathcal{B}_k$ (degrés des polynômes de Bézier n_1, n_2, n_3) peut être prolongée exactement dans un espace plus riche ($\mathcal{B}_{k+1}$ avec $n'_1 \geq n_1$, $n'_2 \geq n_2$, $n'_3 \geq n_3$, $(n'_1, n'_2, n'_3) \neq (n_1, n_2, n_3)$). Les points de contrôle correspondant à $\mathcal{B}_{k+1}$ sont évidemment différents de ceux correspondant à $\mathcal{B}_k$. Dans ce cadre, les auteurs envisagent des stratégies multigrilles. Cette méthode trouve notamment des applications en simulation numérique des écoulements pour l'optimisation d'une partie de fuselage d'un avion d'affaire transsonique [21].

1.2 Formulation des équations de la mécanique des fluides

1.2.1 Équations de Navier-Stokes

On suppose que les fluides considérés vérifient les équations de Navier-Stokes complétées par des lois de comportement classiques et de la loi d'état des gaz parfaits. De plus, on admet que la masse volumique du fluide est suffisamment faible pour que les effets de la gravité puissent être négligés (hypothèse de fluide non pesant).

1.2.1.1 Équations de bilan

Ces équations sont présentées sous la forme d'équations aux dérivées partielles permettant de déterminer l'évolution, à partir de conditions initiales données, des champs de la masse volumique ρ, de la quantité de mouvement par unité de volume $\rho \boldsymbol{U}$ et de l'énergie totale par unité de volume ρE (l'énergie totale E étant égale à la somme de l'énergie interne e et de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^2$, toutes ces grandeurs étant homogènes à des énergies par unité de masse). Les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \Big[\rho \boldsymbol{U} \Big] = 0, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{U}}{\partial t} + \nabla\cdot \Big[\rho \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{U} + p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} \Big] = 0\,, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla\cdot \Big[\rho E \boldsymbol{U} + p\boldsymbol{U} - \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{U} + \boldsymbol{q} \Big] = 0\,. \tag{1.9}$$

Dans ces équations, $\boldsymbol{U} = (u, v, w)^{\mathrm{T}}$ désigne le champ de la vitesse absolue ; p, $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{q}$ représentent respectivement la pression, le tenseur des contraintes dues à la viscosité et le vecteur du flux de chaleur dû à la conductivité thermique. Pour fermer le système, il faut donc préciser l'expression du scalaire p, du tenseur $\boldsymbol{\tau}$ et du vecteur $\boldsymbol{q}$.
Dans les équations locales (1.7), (1.8) et (1.9), la notation $\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}$ désigne la dérivée par rapport au temps du champ $\boldsymbol{q}(M, t)$ en un point fixe M (description eulérienne).

1.2.1.2 Lois de comportement

Pour un fluide *newtonien*, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}$ est donné par la loi :

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\,(\nabla\cdot \boldsymbol{U}\,)\,\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}\,, \tag{1.10}$$

où $\mathbf{D}$ est le tenseur des taux de déformation, c'est-à-dire la partie symétrique du gradient de vitesse ($\mathbf{D} = \frac{\nabla \boldsymbol{U} + \nabla \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}}{2}$), et où λ et μ sont les deux coefficients de viscosité du fluide. En supposant vérifiée l'*hypothèse de Stokes*, $3\lambda + 2\mu = 0$, le coefficient de viscosité volumique λ est donné en fonction de μ par :

$$\lambda = -\frac{2}{3}\,\mu\,. \tag{1.11}$$

Le vecteur du flux de chaleur est donné ici par la *loi de Fourier* :

$$\boldsymbol{q} = -k_{\mathrm{T}}\,\nabla T\,, \tag{1.12}$$

où k_{T} désigne le coefficient de conductivité thermique et T la température absolue.

On introduit ici le nombre de Prandtl, nombre adimensionné qui ne dépend pas de la température en pratique et qui permet de relier le coefficient de conductivité thermique k_{T} et le coefficient de viscosité moléculaire μ (deux grandeurs qui dépendent de la température) :

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_{\mathrm{p}}\mu}{k_{\mathrm{T}}}\,. \tag{1.13}$$

En pratique pour nos applications, $\mathrm{Pr} = 0{,}72$.

1.2.1.3 Lois d'état

Ces lois permettent d'exprimer l'énergie interne e, la pression p et les coefficients de viscosité μ et de conductivité thermique k_{T} en fonction de la température T. En supposant le *gaz parfait*, à *chaleurs spécifiques constantes* de rapport $\gamma = c_{\mathrm{p}}/c_{\mathrm{v}}$, l'énergie interne e et la pression p sont données par :

$$e = c_{\mathrm{v}}T\,,\ p = \rho r_{\mathrm{gaz}}T\,, \tag{1.14}$$

où r_{gaz} représente le rapport de la constante universelle des gaz parfaits à la masse molaire du gaz considéré (287 U.S.I.). Pour un gaz calorifiquement parfait, la pression p et la température T sont donc données en fonction de l'énergie interne e par :

$$p = (\gamma - 1)\rho e\,,\ T = \frac{(\gamma - 1)}{r_{\mathrm{gaz}}}e\,. \tag{1.15}$$

Le coefficient de viscosité moléculaire μ dépend de la température. Il est calculé par la *loi de Sutherland* :

$$\mu(T) = \frac{\beta_{\mathrm{s}}\sqrt{T}}{1 + C_{\mathrm{s}}/T}, \tag{1.16}$$

où β_{s} et C_{s} sont deux constantes qui dépendent du gaz considéré (pour l'air, on a $(\beta_{\mathrm{s}}\ ;\ C_{\mathrm{s}}) = (1{,}457.10^{-6}\ ;\ 110{,}4)$ U.S.I.).

1.2.2 Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS)

À grand nombre de Reynolds, la turbulence rend les grandeurs physiques locales instationnaires et les mesures non reproductibles dans une partie du domaine fluide. La modélisation de la turbulence utilise une *approche statistique* dans laquelle un processus de champ $\boldsymbol{g}\,(\,M,t\,)$ est décomposé en un champ moyen et un champ fluctuant :

$$\boldsymbol{g}\,(\,M,t\,) \;=\; \overline{\boldsymbol{g}} + \boldsymbol{g}'\,, \tag{1.17}$$

où le champ moyen $\overline{\boldsymbol{g}}$ est obtenu à l'aide d'une moyenne d'ensemble sur un grand nombre de réalisations de l'écoulement.

On adopte l'hypothèse d'ergodicité, qui permet d'assimiler la moyenne d'ensemble à la moyenne temporelle pour une turbulence stationnaire (les propriétés statistiques sont indépendantes du temps) ou aussi à la moyenne spatiale pour une turbulence homogène (les propriétés statistiques sont indépendantes du point d'observation). Pour les écoulements de fluide compressible, il est commode d'introduire une moyenne pondérée par la masse volumique (dite *moyenne de Favre*). Cette moyenne permet de retrouver formellement un système d'équations proche de celui obtenu pour un écoulement compressible laminaire. En outre, elle permet de réduire le nombre de corrélations dans les équations RANS. Par définition, la moyenne de Favre d'une quantité g est :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{g}}} \;=\; \frac{\overline{\rho\boldsymbol{g}}}{\overline{\rho}}\,. \tag{1.18}$$

La quantité g peut alors se décomposer en :

$$\boldsymbol{g}\,(\,M,t\,) \;=\; \overline{\overline{\boldsymbol{g}}} + \boldsymbol{g}'' \;\text{ avec } \overline{\rho g''} = 0 \text{ mais } \overline{g''} \neq 0. \tag{1.19}$$

En effectuant l'opération de moyenne de Favre aux les équations de Navier-Stokes instantanées (1.7), (1.8) et (1.9), on obtient les équations RANS (pour Reynolds Averaged Navier-Stokes) :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\!\cdot\Big[\,\rho\boldsymbol{U}\,\Big] \;=\; 0\,, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial\rho\boldsymbol{U}}{\partial t} + \nabla\!\cdot\Big[\,\rho\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{U} + p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}}\,\Big] \;=\; 0\,, \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial\rho\,(\,E+k\,)}{\partial t} + \nabla\!\cdot\Big[\,\rho\,(\,E+k\,)\;\boldsymbol{U} + p\boldsymbol{U} - (\,\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}}\,)\cdot\boldsymbol{U} + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q_t}\,\Big] \;=\; 0\,. \tag{1.22}$$

Pour simplifier les notations, les quantités moyennes n'ont pas été surlignées dans ces équations : ρ et p sont des grandeurs moyennes au sens de Reynolds, alors que $\boldsymbol{U}$, E sont des grandeurs moyennes pondérées par la masse et définies par (1.18). Pour le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}$ et le vecteur du flux de chaleur $\boldsymbol{q}$, on suppose que l'on peut considérer les mêmes expressions qu'aux équations (1.10) et (1.12) en substituant aux grandeurs vecteur vitesse $\boldsymbol{U}$ et température T leurs moyennes de Favre.

Parmi les termes de corrélations supplémentaires résultant de l'opération de moyenne, seuls les termes principaux suivants ont été retenus dans (1.20), (1.21) et (1.22) :

- l'énergie cinétique du mouvement turbulent : $k = \frac{1}{2}\overline{\frac{\rho \boldsymbol{U}''^2}{\overline{\rho}}}$;
- le tenseur de Reynolds : $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}} = -\overline{\rho \boldsymbol{U}'' \otimes \boldsymbol{U}''}$;
- le flux de diffusion turbulente d'enthalpie : $\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}} = \overline{\rho \boldsymbol{U}'' h''}$.

Pour fermer le système des équations RANS, il faut modéliser la turbulence, c'est-à-dire exprimer ces nouvelles grandeurs (champ k, tenseur $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}}$ et vecteur $\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}}$) en fonction de l'écoulement moyen. La fermeture la plus utilisée pour le tenseur de Reynolds $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}}$ est basée sur le concept de *viscosité turbulente*, introduit par Boussinesq en 1877. Cette hypothèse consiste à exprimer le tenseur des contraintes de Reynolds par analogie avec le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}$, modélisant l'effet de la turbulence sur le champ moyen par un accroissement de la viscosité. On pose ainsi (en fonction de lois en gradients) :

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}} = -\frac{2}{3}\Big(\rho k + \mu_{\mathrm{t}}\, \nabla\cdot \boldsymbol{U}\Big)\,\mathbf{I} + 2\mu_{\mathrm{t}}\,\mathbf{D}\,, \tag{1.23}$$

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}} = -\frac{c_{\mathrm{p}}\,\mu_{\mathrm{t}}}{\mathrm{Pr}_{\mathrm{t}}}\,\nabla T\,. \tag{1.24}$$

Dans ces deux expressions μ_{t} et Pr_{t} désignent respectivement le coefficient de viscosité dynamique turbulente et le nombre de Prandtl turbulent. Tout comme pour le nombre de Prandtl (équation (1.13)), le nombre de Prandtl turbulent est une constante indépendante de la température. Il est pris en pratique égal à 0,9.

L'hypothèse de Boussinesq permet donc de simplifier la modélisation de la turbulence en la réduisant à la donnée d'expressions pour les trois grandeurs : k, μ_{t} et Pr_{t}.

1.2.3 Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) dans le repère relatif

Pour les aubes de turbomachines en rotation, la préférence va à l'expression des équations de Navier-Stokes dans le repère relatif mobile. Ces équations deviennent [54] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\Big[\rho\,\boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}\Big] = 0\,, \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial \rho\,\boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \nabla\cdot\Big[(\rho\,\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{V})_{\mathrm{E}} + p\mathbf{I} - (\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}})_{\mathrm{E}}\Big] = \rho\boldsymbol{f}_{\mathrm{cor}} + \rho\boldsymbol{f}_{\mathrm{cen}}\,, \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial \rho\,(E_{\mathrm{r}}+k)}{\partial t} + \nabla\cdot\Big[\rho\,(E_{\mathrm{r}}+k)\;\boldsymbol{V}_{\mathrm{E}} + p\,\boldsymbol{V}_{\mathrm{E}} - ((\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}})\cdot\boldsymbol{V})_{\mathrm{E}} + (\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}})_{\mathrm{E}}\Big] = \rho\,\boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{cen}}\,, \tag{1.27}$$

avec les notations :

$$\begin{cases}
\boldsymbol{s}_{\mathrm{E}} & & \text{vitesse d'entraînement du repère relatif } \mathcal{R}_{\mathrm{E}} \text{ par rapport au repère absolu } \mathcal{R}_{\mathrm{A}}; \\
\boldsymbol{V}_{\mathrm{E}} & = & \boldsymbol{U} - \boldsymbol{s}_{\mathrm{E}} & \text{vitesse relative}; \\
g_{\mathrm{E}} & & & \text{grandeur relative exprimée dans le repère entraîné } \mathcal{R}_{\mathrm{E}}\ ; \\
E_{\mathrm{r}} & = & e + \frac{\boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}^2}{2} & \text{énergie totale relative}; \\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{cor}} & = & -2\omega_{\mathrm{E}}(\mathcal{R}_{\mathrm{E}}/\mathcal{R}_{\mathrm{A}}) \wedge \boldsymbol{V}_{\mathrm{E}} & \text{force de Coriolis}; \\
\boldsymbol{f}_{\mathrm{cen}} & = & -\left[\frac{\partial(\boldsymbol{s}_{\mathrm{E}})_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \omega_{\mathrm{E}}(\mathcal{R}_{\mathrm{E}}/\mathcal{R}_{\mathrm{A}}) \wedge \boldsymbol{s}_{\mathrm{E}}\right] & \text{force centrifuge.}
\end{cases} \tag{1.28}$$

1.2.4 Modèles de turbulence

On se place ici uniquement dans l'hypothèse de Boussinesq comme rappelée dans la sous-section 1.2.2. Différents modèles de turbulence utilisés pour la simulation numérique d'écoulements en turbomachine sont présentés dans cette sous-section, en particulier les deux modèles retenus pour les calculs d'analyse et de gradients de cette thèse. Les avantages et inconvénients des différents modèles sont également discutés. Cette synthèse se base sur une publication de Castillon *et al.* [10] et des conversations privées avec Gleize, Billonnet, Castillon, Burguburu et Deck.

La viscosité dynamique turbulente $\nu_\mathrm{t} = \frac{\mu_\mathrm{t}}{\rho}$ est construite à partir de deux échelles caractéristiques, l'une de vitesse U, l'autre de longueur L. Ainsi,

$$\nu_\mathrm{t} \sim U \times L\,. \tag{1.29}$$

1.2.4.1 Modèles algébriques ou modèles à 0 équation

Le coefficient de viscosité turbulente μ_t est une fonction locale explicite ou implicite du champ moyen à chaque instant t et sans mémoire. L'avantage de tels modèles algébriques est leur faible coût. Néanmoins, leur valeur prévisionnelle est limitée (sauf peut-être dans les cas de turbulence en équilibre), mais les modèles plus précis sont complexes et coûteux. Le modèle de base est dérivé des modèles de longueur de mélange. Cette classe de modèles est justifiée par l'existence, au sein des couches cisaillées à grand nombre de Reynolds, d'une région assez étendue d'équilibre approximatif entre les termes de production P et de dissipation d'énergie cinétique turbulente D, considérées comme des échanges entre l'écoulement moyen et l'écoulement fluctuant :

$$\frac{P}{D} \sim 1\,. \tag{1.30}$$

Pour une couche cisaillée de paroi, on montre (argument de similitude ou asymptotique) l'existence d'une région dite *logarithmique* dans laquelle la vitesse tangentielle moyenne U_t^+ s'exprime en fonction de la cote normale y^+ par $U_\mathrm{t}^+ = A\log(y^+)+B$, dans le système de grandeurs adimensionnées de la couche limite compressible. La constante B est déterminée suivant les conditions expérimentales et suivant le nombre de Reynolds ; l'inverse de A, noté K, est au contraire essentiellement invariable (en fluide incompressible) et est appelé constante de Kármán. La valeur standard est $K = 0{,}41$.

Parmi ces modèles algébriques, les modèles de Baldwin-Lomax [4] et de Michel *et al.* [46], [13], [47], sont tous deux disponibles dans *elsA*. Ces modèles étaient largement utilisés dans les années 1980-1990 du fait de leur faible coût de calcul. Cependant, avec l'amélioration de la puissance des calculateurs actuels, cet intérêt tend à disparaître et ces modèles sont moins utilisés qu'auparavant. En outre, pour des configurations de turbomachine, ils ne donnent pas de bons résultats pour certains effets technologiques (film cooling et interaction de jeu).

Modèle de Michel-Quémard-Durant C'est un modèle algébrique fondé sur une viscosité turbulente définie d'après une longueur de mélange par Michel *et al.* [46]. Pour ce modèle, l'échelle de longueur et l'échelle de temps intervenant dans l'expression du coefficient de viscosité dynamique turbulente μ_t sont la longueur de mélange ℓ et l'inverse de la vorticité $\bar{\omega} = \|\nabla \wedge \boldsymbol{U}\|$. Le coefficient de viscosité dynamique turbulente est fonction de la vorticité de l'écoulement moyen $\bar{\omega} = \|\nabla \wedge \boldsymbol{U}\|$ et des grandeurs caractéristiques de la couche limite par l'équation non linéaire suivante :

$$\mu_\mathrm{t} = \rho\,\ell^2\,\mathcal{D}^2(\mu_\mathrm{t})\,\bar{\omega}\,. \tag{1.31}$$

La longueur de mélange ℓ est donnée par Michel *et al.* par une expression universelle :

$$\ell = 0{,}085\,\delta\,\tanh\left(\frac{K}{0{,}085}\frac{\eta}{\delta}\right), \tag{1.32}$$

avec $K = 0{,}41$ constante de Kármán, η la distance à la paroi et δ l'épaisseur de couche limite ou épaisseur de la couche visqueuse pariérale. Pour les faibles et les fortes valeurs de η, on admet les développements asympotiques suivants :

$\ell \cong K\eta$ dans la zone « interne » de la couche limite, près de la paroi ;
$\ell \cong 0{,}085\,\delta$ dans la zone « externe » de la couche limite.

La fonction $\mathcal{D}$ est la fonction d'amortissement (ou correctrice) proposée par Michel-Quémard-Durant et inspirée de celle de van Driest :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mu_{\mathrm{t}}) &= 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{\xi}}{26K}\right), \\ \xi &= \rho\ell^2\frac{\mu+\mu_{\mathrm{t}}}{\mu^2}\bar{\omega}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Cette fonction d'amortissement traduit la décroissance rapide de la turbulence au voisinage de la paroi ($\eta \to 0$). Nulle à la paroi, la fonction correctrice tend vers 1 en écoulement pleinement turbulent. Elle intervient surtout dans la sous-couche visqueuse.

Ce modèle a d'abord été appliqué pour des couches limites turbulentes bidimensionnelles en fluide incompressible puis compressible, puis étendu à des écoulements tridimensionnels. Les expressions de longueur de mélange ℓ et de fonction correctrice $\mathcal{D}$ ont été déterminées de manière empirique, d'abord par une couche limite turbulente de plaque plane en fluide incompressible. Elles ont été confirmées par l'expérience dans un large domaine de conditions aérodynamiques.

D'un point de vue numérique, ce modèle est fortement dépendant du paramètre intervenant dans la détermination de l'épaisseur locale de la couche limite δ à partir du maximum de vorticité sur chaque ligne de maillage. Un défaut qui limite l'utilisation de ce modèle de turbulence est la dépendance à la topologie utilisée, en particulier à cause du calcul de la distance à la paroi et de l'épaisseur de couche limite à laquelle sont proportionnelles les échelles de longueur caractéristiques. En outre, il faut définir un modèle de sillage lorsqu'il n'y a pas de paroi.

1.2.4.2 Modèles à équation de transport

Les modèles à équations de transport tiennent compte de l'effet d'histoire de la turbulence. Parmi les plus utilisés figurent les modèles à deux équations de transport. Pour tous ces modèles, l'échelle de vitesse est la même : $U = \sqrt{k}$. C'est la première grandeur k, l'énergie cinétique turbulente, qui est convectée par la première équation de transport. La deuxième variable transportée varie d'un modèle à l'autre et permet de définir l'échelle de longueur. Un autre modèle à une équation de transport est aussi largement utilisé ; il est décrit dans le paragraphe 1.2.4.2.2.

1.2.4.2.1 Modèle k-ε de Launder-Sharma Ce modèle fait partie d'une famille de variantes de modèles k-ε. On peut citer en exemple ceux de :

- Jones-Launder (la version originale du modèle k-ε) [31] ;
- Launder-Sharma (celui utilisé dans cette thèse) [37] ...

Patel *et al.* [55] ont fait un comparatif de différents modèles k-ε. Pour toutes ces variantes, l'échelle de longueur caractéristique est donnée par :

$$L = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}. \tag{1.34}$$

Les quantités transportées dans le modèle k-ε de Launder-Sharma sont l'énergie cinétique de turbulence k et son taux de dissipation isotrope $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{D}{\rho}$. Ceci permet de déduire une échelle de temps θ caractéristique de la turbulence : $\theta = \frac{k}{\tilde{\varepsilon}}$. Les équations de transport pour le modèle k-ε peuvent s'écrire sous la forme conservative :

$$\begin{array}{rclll} \dfrac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla\cdot \left[\boldsymbol{U}\rho k - \left(\mu + \dfrac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_k}\right)\nabla k \right] & = & P & - (\rho\tilde{\varepsilon} + D), & \\ \dfrac{\partial \rho \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla\cdot \left[\boldsymbol{U}\rho \tilde{\varepsilon} - \left(\mu + \dfrac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}\right)\nabla \tilde{\varepsilon} \right] & = & C_{\varepsilon 1} f_1 \dfrac{\tilde{\varepsilon}}{k} P & - C_{\varepsilon 2} f_2 \rho \dfrac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} & + E, \\ & & \text{Production} & \text{Dissipation} & \text{Correction bas Reynolds} \end{array} \tag{1.35}$$

avec :

$$\begin{array}{rcl} P & = & \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}} : \nabla \boldsymbol{U} = -\rho u_i' u_j' \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \text{ terme de production de } k, \\ \tau_{ij} & = & -\rho u_i' u_j' = \mu_{\mathrm{t}} \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} - \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ij} \right) - \dfrac{2}{3}\rho k \delta_{ij}, \\ \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}} & = & \mu_{\mathrm{t}} \left(\nabla \boldsymbol{U} + (\nabla \boldsymbol{U})^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot \boldsymbol{U})\mathbf{I} \right) - \frac{2}{3}\rho k \mathbf{I}, \\ D & = & 2\mu \left(\nabla\sqrt{k} \right) \cdot \left(\nabla\sqrt{k} \right), \\ E & = & 2\dfrac{\mu\mu_{\mathrm{t}}}{\rho} \left(\nabla \left(\nabla \boldsymbol{U} \right) \right) \vdots \left(\nabla \left(\nabla \boldsymbol{U} \right) \right), \end{array} \tag{1.36}$$

avec les fonctions correctives f_1 et f_2 de proche paroi (ou de correction bas Reynolds turbulent) :

$$f_1 = 1{,}0 \ , \ f_2 = 1 - 0{,}3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}^2} \ , \ \mathrm{Re}_{\mathrm{t}} = \frac{k^2}{\nu\tilde{\varepsilon}} \ . \tag{1.37}$$

Le terme D provient de la définition de la variable $\tilde{\varepsilon}$ comme partie isotrope du taux de dissipation de k. Il peut aussi s'écrire :

$$D = \frac{\mu}{2k}\nabla k \cdot \nabla k. \tag{1.38}$$

Il permet d'imposer comme condition aux limites à la paroi $\tilde{\varepsilon} = 0$, afin d'éviter les difficultés numériques qui pourraient apparaître lors de la définition de la condition aux limites sur ε. En effet, ε varie comme $\frac{1}{y^2}$ au voisinage de la paroi et tend vers l'infini. Par ailleurs, loin de la paroi, $\tilde{\varepsilon} \sim \varepsilon$.

Le terme E est un terme dit « bas Reynolds » comme le terme D [3]. Il a été introduit par Jones et Launder pour éviter l'apparition d'un pic de turbulence non physique autour de $y^+ = 20$. La forme intrinsèque de E est une généralisation de la quantité $(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2$ utilisée à l'origine pour une couche limite sur une paroi plane située en $y = \delta$. Il joue un rôle important dans la région tampon des couches limites. Au voisinage de la paroi, le coefficient de viscosité turbulente μ_{t} est très inférieur au coefficient de viscosité moléculaire μ, tout comme loin de la paroi ainsi que dans la zone logarithmique. Les termes bas Reynolds doivent adapter le comportement du modèle de turbulence dans la couche limite, où les effets visqueux deviennent prépondérants. Un problème se pose dans les zones de couche de mélange ainsi que dans les sillages où ces termes bas Reynolds devraient disparaître (on est alors loin des parois). Des fonctions correctrices f_1 et f_2 modifient ainsi le comportement local des constantes $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$.

[3] en fait « bas nombre de Reynolds turbulent » en toute rigueur, introduit pour reproduire le comportement de $\tilde{\varepsilon}$ au voisinage de la paroi.

Le terme de correction bas Reynolds E est un terme coûteux à calculer (27 termes *a priori*, dus au produit terme à terme de deux tenseurs d'ordre 3). Du fait de la symétrie des tenseurs considérés, il n'y a « que » 18 termes à calculer.

$$E = 2\frac{\mu\mu_{\mathrm{t}}}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j})\right) = 2\frac{\mu\mu_{\mathrm{t}}}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}\right), \tag{1.39}$$

avec la convention de sommation pour les indices répétés, $\boldsymbol{U} = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$ et M de coordonnées $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$.

La viscosité turbulente a pour expression :

$$\mu_{\mathrm{t}} = c_\mu f_\mu \frac{\rho k^2}{\tilde{\varepsilon}} \ . \tag{1.40}$$

La définition des termes D et E, celle de la fonction de paroi f_μ et celle des constantes σ_k, σ_ε, $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ dépendent de la version du modèle k-ε considérée. Pour le modèle de Launder-Sharma, la fonction f_μ est définie par :

$$f_\mu = \exp\left(\frac{-3{,}4}{(1+\mathrm{Re_t}/50)^2}\right), \tag{1.41}$$

et les constantes de ce modèle sont :

$$C_\mu = 0{,}09 \ ; \quad \sigma_k = 1{,}0 \ ; \quad \sigma_\varepsilon = 1{,}3 \ ; \quad C_{\varepsilon 1} = 1{,}44 \ ; \quad C_{\varepsilon 2} = 1{,}92. \tag{1.42}$$

Le modèle de Launder-Sharma ne diffère de celui de Jones-Launder [31] que par les valeurs numériques des constantes $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ et par la formulation de la fonction f_μ. Ces modifications résultent d'optimisations numériques sur diverses configurations et n'ont que peu de conséquences sur les résultats de certains cas, d'après les auteurs en principe (l'exposant JL est mis pour les constantes et fonctions qui diffèrent dans la version Jones-Launder) :

$$f_\mu^{\mathrm{JL}} = \exp\left(\frac{-2{,}5}{1+\mathrm{Re_t}/50}\right) \ ; C_{\varepsilon 1}^{\mathrm{JL}} = 1{,}55 \ ; C_{\varepsilon 2}^{\mathrm{JL}} = 2{,}0. \tag{1.43}$$

La fonction d'amortissement f_μ joue le même rôle que la fonction de van Driest dans la formulation de longueur de mélange. Le nombre de Reynolds turbulent $\mathrm{Re_t}$ remplace la distance à la paroi pour f_μ. La fonction f_μ tend vers 1 loin de la paroi et est égale à 1 dans les sillages, sauf très près du bord de fuite, qui fait transition avec la région de sous-couche des couches limites. On peut vérifier que dans la région externe des couches limites et dans les sillages, le nombre de Reynolds turbulent $\mathrm{Re_t}$ peut redevenir petit, ce qui entraîne une diminution des fonctions correctrices, supposées n'agir que près des parois, allant jusqu'à une annulation de μ_{t}.

À l'origine, ce modèle a été développé pour prévoir le phénomène de relaminarisation des couches limites turbulentes en présence de gradient de pression favorables. Il a une bonne tendance à capturer les interactions onde de choc-couche limite (notamment pour des compresseurs axiaux), les décollements, même à en créer trop (par exemple dans les turbines). Pour des compresseurs centrifuges, des phénomènes tridimensionnels (recirculation...) peuvent être perçus. Il est à noter que la relaminarisation des écoulements est parfois prévue à tort.

Ce modèle souffre d'un problème de robustesse. Les problèmes numériques rencontrés proviennent surtout du terme source, essentiellement sur l'équation sur ε. En pratique, il n'est utilisé que pour des configurations de compresseurs pour les turbomachines. En outre, la turbulence est difficile à amorcer du fait de la tendance forte à la relaminarisation. Il faut en pratique forcer

le coefficient de viscosité turbulente μ_t proportionnel au coefficient de viscosité moléculaire μ au début du calcul. Les hypothèses de Bradshaw sont alors utilisées pour en déduire les valeurs des variables turbulentes ($\frac{u'v'}{k} = 2a_1$ avec $a_1 = \sqrt{0{,}09}$ et donc $\rho k = \frac{\mu_t \|\nabla \wedge \boldsymbol{U}\|}{2a_1}$, $\varepsilon = \frac{\rho C_\mu k^2}{\mu_t}$). Pour avoir un calcul sur une turbine qui converge, il faut mettre beaucoup de turbulence en entrée (condition non suffisante). Tout comme pour les modèles k-ω, la taille de maille aux parois est plus faible ($y^+ \simeq 1$). C'est un modèle qui surestime les pertes pour des compresseurs centrifuges.

Un intérêt du modèle k-ε provient du fait que les fonctions correctrices de faible valeur du nombre de Reynolds turbulent ne dépendent que de la quantité locale $\mathrm{Re}_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}$, ce qui autorise un codage très général, sans utiliser d'informations topologiques relatives au maillage ou à la position des parois, comme cela peut être le cas pour le modèle de Michel *et al.* D'un point de vue numérique, il y a un problème à la paroi, à cause des fonctions d'amortissement et des termes bas Reynolds. En effet, le terme de correction bas Reynolds E (resp. le terme D) introduit une dérivée d'ordre 2 (resp. d'ordre 1), difficile à évaluer près d'un bord du domaine. On a des dégénérescences aux frontières, et en particulier aux parois. En outre, des problèmes apparaissent dans les sillages.

D'autres modèles à équations de transport sont utilisés en pratique, en particulier pour des configurations de turbomachine. Quelques exemples sont brièvement présentés ci-dessous.

1.2.4.2.2 Le modèle à une équation de transport de Spalart et Allmaras Dans ce modèle introduit par Spalart et Allmaras [68], la viscosité dynamique turbulente ν_t est convectée, (en fait, il s'agit d'une viscosité dynamique transformée $\tilde{\nu}$ qui se confond avec ν_t loin des parois). Pour l'échelle de vitesse, on prend $U = \sqrt{k}$, l'échelle de longueur étant déterminée par une fermeture algébrique.

C'est un modèle simple et robuste et qui a de bonnes propriétés numériques, plus que les modèles k-ε. L'équation de transport est construite de manière empirique par ajout de termes successifs, pour prendre en compte de plus en plus de phénomènes physiques. C'est un modèle qui a été calibré sur un profil et qui donne de bons résultats pour certains cas. La viscosité transformée $\tilde{\nu}$ est linéaire de la zone logarithmique au voisinage de la paroi.

Pour des configurations de turbomachine, il est principalement utilisé pour des turbines axiales, pour lesquelles ce modèle décrit assez bien la physique. Il donne des résultats assez proches du modèle k-l de Smith [66]. Pour les configurations de type compresseur, ce modèle n'est pas très bon. Il sous-estime les rendements et surestime les pertes. La prédiction du pompage est plutôt optimiste. Il peut être utilisé pour des compresseurs axiaux.

1.2.4.2.3 Les modèles k-ω Plusieurs variantes pour ce modèle existent, entre autres :
- modèle de Wilcox original de 1988 [76] ;
- modèle de Wilcox avec termes de diffusion croisée de 1993 [77] ;
- modèle de Kok [35] ;
- modèle de Menter BSL (BaSeLine) [45] ;
- modèle de Menter avec correction SST (Shear Stress Tensor) [44]...

Pour toutes ces variantes, l'échelle de longueur cararactéristique est donnée par :

$$L = \frac{k}{\omega}. \tag{1.44}$$

Les quantités transportées dans le modèle k-ω sont l'énergie cinétique de turbulence k et son taux spécifique de dissipation isotrope $\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k}$, avec $\beta^* = 0{,}09$ une constante identique à celle notée C_μ dans les modèles k-ε. Les modèles k-ω minimisent la modélisation. Le problème principal de ces modèles est la forte sensibilité aux conditions à la limite à la paroi, qui est une condition

compliquée ($\omega \to \infty$) et où il n'a pas été possible comme pour le modèle k-ε de définir une variable proche de ω et permettant de simplifier la condition aux limites.

Un autre problème des modèles k-ω de base est qu'ils sont dépendants des grandeurs infinies. Pour s'affranchir de l'influence de ces grandeurs, Menter a proposé une version bicouche dite BSL (pour baseline) [45] qui garde le comportement du modèle k-ω au voisinage de la paroi (robuste et sans introduction de fonctions correctrices) et celui du modèle k-ε à l'extérieur de la couche limite (indépendant donc de l'état ω_∞).

La variante Menter avec correction SST [44] est celle recommandée : elle est meilleure que la version de base de Wilcox (1988), néanmoins assez utilisée. Elle prévoit bien les interactions onde de choc-couche limite, la position des chocs et répond bien aux gradients de pression. Les modèles k-ω sont des modèles plus robustes que les modèles k-ε.

La version de Wilcox dépend des valeurs de grandeurs turbulentes à l'infini. Pour des configurations de turbomachine, la version de Wilcox est un peu plus robuste que le modèle k-ε. Tout comme pour les modèles k-ε, la taille de maille aux parois doit être plus faible.

1.2.4.2.4 Les modèles k-l Historiquement, c'est le modèle k-kl [65] qui a été développé par Smith pour obtenir une dépendance linéaire de μ_t à la distance à la paroi. Toutefois, Smith a eu des difficultés pour exprimer les termes bas Reynolds de l'équation de transport sur kl. Cela l'a donc conduit à construire le modèle k-l de Smith [66], en simplifiant le modèle précédent. La variable l est une distance réduite à la paroi. C'est un modèle plutôt robuste, utile pour initier des calculs turbulents. Ce modèle éprouve des difficultés dans le cas d'une configuration avec coin, à cause du calcul de la distance à la paroi.

Concernant la physique résolue, les avis sont partagés. Certains considèrent qu'elle n'est pas bonne, du fait d'un problème provenant du terme de production de la turbulence. Historiquement, l'auteur insiste sur le bon comportement de son modèle en présence de décollements.

Du point de vue des turbomachines, ce modèle est peu utilisé pour les configurations de calcul de compresseurs. La physique résolue est un peu meilleure qu'avec le modèle de Spalart-Allmaras, notamment pour le pompage. Cependant, il a tendance à surestimer les sillages, et donc les pertes. Ce modèle est surtout utilisé pour des configurations de turbines axiales. Il donne des résultats assez proches du Spalart-Allmaras. Pour les compresseurs centrifuges, ce modèle est robuste et donne une bonne prévision des performances.

1.2.5 Conditions aux limites

Plusieurs types de conditions aux limites sont utilisées au cours de cette thèse, à la fois des conditions qui s'appliquent sur des surfaces matérielles et d'autres qui sont appliquées aux frontières du domaine de calcul. Citons les principales :

- condition de paroi adiabatique (adhérence du fluide à la paroi et flux de chaleur $\boldsymbol{q}$ nul à la paroi) ;
- condition de symétrie par rapport à une surface de normale $\boldsymbol{n}$ qui satisfait le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \rho}{\partial n} & = & 0\,; \\ \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n} & = & 0\,; \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} & = & 0. \end{array}\right. \tag{1.45}$$

- condition de non réflexion introduite pour éviter la réflexion des ondes transitoires sur la frontière ;

- condition entrante subsonique dite « d'injection 1 » pour laquelle la direction de l'écoulement ainsi que l'état d'arrêt sont imposés ;
- condition sortante subsonique pour laquelle un profil de pression statique est imposé.

1.2.6 Relations aérodynamiques

On se place sous les hypothèses de *gaz parfait* (loi d'état (1.14)) et *calorifiquement parfait* (coefficients c_p et c_v constants). Dans ce cadre, définissons les grandeurs qui interviendront dans la définition et l'analyse des écoulements :

- célérité du son : $a = \sqrt{\gamma\, r_\mathrm{gaz}\, T} = \sqrt{\dfrac{\gamma\, p}{\rho}}$;
- nombre de Mach : $M = \dfrac{U}{a}$ (U, module du vecteur vitesse $\boldsymbol{U}$) ;
- enthalpie : $h = e + \dfrac{p}{\rho}$;
- enthalpie totale : $H = E + \dfrac{p}{\rho}$;
- $\rho E = \dfrac{p}{\gamma - 1} + \dfrac{1}{2}\rho U^2$;
- pression d'arrêt : $p_i = p\left(1 + \dfrac{\gamma - 1}{2}\, M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$;
- température d'arrêt : $T_i = T\left(1 + \dfrac{\gamma - 1}{2}\, M^2\right)$,

et des grandeurs pariétales :

- coefficient de pression : $C_\mathrm{p} = \dfrac{p - p_\mathrm{ref}}{\frac{1}{2}\,\rho_\mathrm{ref}\, U_\mathrm{ref}^2}$,

  où les quantités indicées par « ref » sont relatives à un état de référence donné, par exemple l'écoulement non perturbé à l'infini pour l'aérodynamique externe.

1.3 Optimisation par méthodes de gradient discrètes

1.3.1 Introduction. Notations. Dépendances

Il s'agit ici de préciser le calcul du gradient des (n_c+1) fonctions objectif et contraintes $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})$ et $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha})$ par rapport aux n_f paramètres de formes nécessaire à une optimisation locale. Ces fonctions dépendent généralement du maillage $\boldsymbol{X}$ et du champ aérodynamique $\boldsymbol{W}$. Dans ce chapitre, on décrit toutes les méthodes classiques de calcul de gradients pour les dépendances $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}) = J(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}))$, $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}) = g_k(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}))$. Par souci d'allègement des notations et de simplification, on ne fait pas figurer dans les définitions précédentes, et pour toute la suite, la dépendance de chaque grandeur au champ aérodynamique sur une frontière du domaine $\boldsymbol{W}_\mathrm{b}(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})$, qui se calcule à partir du champ $\boldsymbol{W}$ et de la normale à la frontière correspondante (d'où la dépendance en $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{X}$). L'annexe B.2 fournit plus de précisions sur le sujet. Le problème posé est donc :

Différentier $\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}) = J(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}))$ et $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}) = g_k(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}))$
avec la contrainte $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha})) = 0$
les dérivées $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$, $\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}$, $\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}$, $\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{X}}$, $\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{W}}$ étant connues.

Les vecteurs ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{\lambda}$ vecteur adjoint) sont notés en colonne, les gradients de scalaire ($\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}$, $\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}$, $\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{W}}$, $\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{X}}\ldots$) sont notés en ligne.

En effet, les fonctions J et g_k sont des fonctions explicites de $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{X}$, si bien que leurs dérivées par rapport au champ aérodynamique et au maillage sont accessibles. On ne précise pas de quelle manière la quantité $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$ est calculée. Ce calcul dépend des outils de maillage de surface et de volume. S'ils ne fournissent pas les dérivées $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}$ et $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$, la sensibilité du maillage volumique peut être calculée par différences finies.

1.3.2 Calcul de gradients par différences finies

Cette méthode a été utilisée jusqu'au début des années 1990. Elle a tendance à disparaître au bénéfice des deux méthodes présentées ensuite (équation linéarisée et adjointe). Elle a en effet l'inconvénient d'être extrêmement coûteuse car elle nécessite $n_\mathrm{f}+1$ calculs d'écoulement (autant qu'il y a de paramètres de forme plus la forme initiale) pour une évaluation à l'ordre 1 des gradients $\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$ et $\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$, soit la résolution de $n_\mathrm{f}+1$ problèmes non linéaires de taille n_a, même si l'obtention de n_f écoulements voisins est moins onéreuse que le calcul de n_f écoulements indépendants. Par opposition, les méthodes suivantes ne nécessiteront que la résolution de systèmes linéaires.

Soit $\delta\alpha_i$ l'incrément choisi pour les différences finies pour le paramètre de forme $\boldsymbol{\alpha}_i$. Les écoulements $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}+(0,\ldots,0,\delta\alpha_i,0,\ldots,0))$ correspondant aux maillages $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}+(0,\ldots,0,\delta\alpha_i,0,\ldots,0))$ sont calculés et les dérivées de fonctions sont évaluées par les taux d'accroissement :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\alpha_i} \simeq \frac{J(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}+\delta\alpha_i),\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}+\delta\alpha_i)) - J(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}))}{\delta\alpha_i}. \tag{1.46}$$

On a de même l'expression des dérivées des fonctions contraintes g_k par :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}_k}{\mathrm{d}\alpha_i} \simeq \frac{g_k(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}+\delta\alpha_i),\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}+\delta\alpha_i)) - g_k(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha}))}{\delta\alpha_i}. \tag{1.47}$$

Ceci s'étend facilement à des formules à l'ordre 2 ou 3 en $\delta\alpha_i$, le nombre d'écoulements à calculer étant multiplié par un facteur égal à l'ordre de précision. La quantité $\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$ ou $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})$ est appelée *sensitivity* en anglais. Elle est appelée *pente* ou *sensibilité* en français.

Pour certaines applications, le résultat est très sensible à l'amplitude de l'incrément, ce qui rend la méthode impraticable. Cette question est discutée notamment dans la publication [24]. Cette méthode est aussi ancienne que la simulation numérique en mécanique des fluides. Des exemples d'applications et une bibliographie appropriée figurent dans [15].

1.3.3 Calcul de gradients par la méthode de l'équation linéarisée

Cette méthode ainsi que la suivante ont été tout d'abord étudiées, dans le contexte de l'aérodynamique, entre autre par Baysal et Eleshaky au début des années 1990 [5]. En dérivant les équations discrétisées de la mécanique des fluides, on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i} = -\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i}, \tag{1.48}$$

avec α_i, i-ème composante du vecteur $\boldsymbol{\alpha}$. Cette équation est appelée, dans le domaine de l'optimisation de formes, *équation linéarisée*. En la résolvant pour toutes les composantes de $\boldsymbol{\alpha}$, on

accède à la sensibilité de l'écoulement $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$. On peut alors calculer les dérivées totales de l'objectif et des contraintes sous la forme directe :

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}, \tag{1.49}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{W}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}. \tag{1.50}$$

La méthode de l'équation linéarisée permet donc d'accéder aux $(n_\mathrm{c}+1)\times n_\mathrm{f}$ dérivées des fonctions par rapport aux paramètres de forme en résolvant les n_f systèmes linéaires (1.48). Si l'on élimine le terme $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$ dans les relations précédentes, le gradient de l'objectif et des contraintes s'écrit :

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}\right), \tag{1.51}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{W}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}\right). \tag{1.52}$$

1.3.4 Calcul de gradients par la méthode de l'équation adjointe discrète

Les équations du calcul des gradients par la méthode adjointe peuvent être obtenues par différentes manipulations algébriques. Il n'est pas nécessaire de faire intervenir un lagrangien pour les obtenir. Si l'on élimine le terme $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$ dans les relations précédentes, le gradient de l'objectif et des contraintes s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}\alpha_i} = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i} - \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i}\right). \tag{1.53}$$

La transposition des relations issues de la méthode de l'équation linéarisée (1.53) conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}\alpha_i} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}\alpha_i}^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{1.54}$$

(formule équivalente pour une fonction contrainte).

Le vecteur adjoint $\boldsymbol{\lambda}$ pour le calcul du gradient de l'objectif est défini par :

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = -\left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{1.55}$$

D'où finalement l'expression de la transposée du gradient puis du gradient de $\mathcal{J}$ par rapport à l'ensemble des paramètres de forme :

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\mathrm{T}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}, \tag{1.56}$$

ou pour l'écriture en ligne :

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}\right). \tag{1.57}$$

Notons que l'on doit résoudre une équation équivalente pour chaque contrainte :

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_k = -\left(\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{W}}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{1.58}$$

ce qui conduit à l'expression du gradient :

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{G}_k = \frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\lambda}_k^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}\right). \tag{1.59}$$

Une autre manière, plus générale, pour obtenir les expressions précédentes est de procéder comme suit. En multipliant l'équation linéarisée par un vecteur ligne arbitraire $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}$, on obtient :

$$\forall\boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i}\right) = 0. \tag{1.60}$$

On peut additionner cette quantité nulle à l'expression du gradient :

$$\forall\boldsymbol{\lambda}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}\alpha_i} = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i} + \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i}\right). \tag{1.61}$$

D'où la factorisation

$$\forall\boldsymbol{\lambda}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}\alpha_i} = \left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}\right)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i} + \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i}\right). \tag{1.62}$$

Le vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ est choisi de telle sorte que le premier terme de la somme s'annule. On retrouve l'équation adjointe et la forme du gradient exposées précédemment.

Il est important de noter que l'équation adjointe est attachée à une fonction dont on veut calculer le gradient mais pas à un paramètre de forme. Le vecteur adjoint permet de compléter le calcul du gradient de la fonction qui lui est associée, par rapport à l'ensemble des paramètres de forme. La méthode adjointe permet donc d'accéder aux $(n_{\mathrm{c}}+1)\times n_{\mathrm{f}}$ dérivées des fonctions en résolvant $(n_{\mathrm{c}}+1)$ systèmes linéaires.

1.3.5 Intérêt et coût relatif des méthodes adjointe et linéarisée discrètes

Chaque méthode présente des avantages. La méthode de l'équation linéarisée permet l'obtention des dérivées de toutes les quantités qui dépendent de l'écoulement contrairement à la méthode adjointe.

La résolution des systèmes linéaires est l'opération la plus lourde du calcul des gradients. Leur nombre permet de déterminer dans quel cas l'une ou l'autre méthode est plus efficace. Lorsque le nombre de fonctions $(n_{\mathrm{c}}+1)$ est supérieur au nombre de paramètres de forme n_{f}, la méthode de l'équation linéarisée est plus efficace que la méthode adjointe. Dans le cas contraire, c'est la méthode adjointe qui est la plus efficace. Dans la plupart des problèmes industriels, le nombre de paramètres de forme est nettement supérieur au nombre de fonctions contraintes, si bien que la méthode adjointe est privilégiée.

1.3.6 Dérivées d'ordre élevé

Grâce à la méthode de l'équation linéarisée discrète (sous-section 1.3.3), la dérivée du champ aérodynamique par rapport aux paramètres de forme peut être calculée. Des dérivées d'ordre plus élevé peuvent aussi être évaluées en introduisant un processus récursif. Le calcul de ces dérivées permet de représenter convenablement la fonction objectif ou contrainte sur un plus grand domaine de l'espace $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\alpha}}$ que le plan tangent. Guillaume et Masmoudi [23] ont travaillé sur la méthode de calcul des dérivées d'ordre élevé d'un schéma numérique pour le calcul des dérivées d'ordre élevé d'une fonction par rapport aux paramètres de forme. La société Fluorem a mis en œuvre cette technique. Cette méthode nécessite un outil de différentiation automatique pour générer le code qui calcule les dérivées successives. Aubert *et al.* [3] présentent le principe de la méthode et deux applications pour des configurations basse vitesse bidimensionnelles et tridimensionnelles.

1.4 Traitement du modèle de turbulence pour les écoulements visqueux

Jusqu'alors, les méthodes adjointes et linéarisées discrètes ont été présentées de manière générale, en écrivant de manière formelle le résidu des équations pour la mécanique des fluides $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})) = 0$. Des propriétés de régularité des fonctions $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{R}$ ont été données mais il n'a pas été nécessaire de préciser la modélisation retenue pour la mécanique des fluides.

Si la linéarisation des équations discrètes est réalisée sans approximation particulière lorsqu'une modélisation de fluide parfait est envisagée, il n'en va pas de même lorsque des écoulements turbulents de fluide visqueux sont considérés. La mise en œuvre des méthodes discrètes est alors extrêmement ardue et diverses simplifications ont été envisagées dans la littérature. À l'opposé, quelques auteurs ont dérivé aussi précisément que possible les équations de Navier-Stokes moyennées associées à celle(s) du modèle de turbulence. Ces auteurs discutent le bénéfice d'une linéarisation exacte et l'effet des approximations. On pourra notamment se reporter à l'introduction de l'article de Le Moigne *et al.* [38], aux discussions des articles de Kim *et al.* [34], [32], [33], à l'introduction de l'article de Nemec *et al.* [50].

Quatre principaux niveaux d'approximation ont été envisagés :

- dans un très grand nombre d'articles, le coefficient de viscosité turbulente et le coefficient du flux de chaleur turbulent sont considérés constants lors des linéarisations. Ces approximations sont si fréquemment adoptées, qu'elles peuvent être considérées comme le traitement par défaut pour le calcul de gradients avec les équations RANS (se reporter aux études de Jameson [30], Soemarwoto [67] et à la thèse de Valentin [72]). Pour fixer les idées, supposons qu'un modèle à deux équations de transport soit utilisé et, dans le paragraphe qui suit, écrivons la taille des vecteurs associés à une cellule en indice. Le système d'équations pour la mécanique des fluides est un système non linéaire à sept champs, posé sur les cellules de calcul,

$$\boldsymbol{R}_7(\boldsymbol{W}_7(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})) = 0, \tag{1.63}$$

dont les équations linéarisées et adjointes discrètes exactes s'écrivent :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}_7}{\partial \boldsymbol{W}_7}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}_7}{\mathrm{d}\alpha_i} = -\frac{\partial \boldsymbol{R}_7}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i} \qquad \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_7}{\partial \boldsymbol{W}_7}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_7 = -\left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}_7}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{1.64}$$

Pour décrire rigoureusement l'approximation classique mentionnée ci-dessus, écrivons le résidu explicite comme une fonction (notée $\boldsymbol{R}'_7$) du champ moyen (noté $\boldsymbol{W}_5$), du champ turbulent (noté $\boldsymbol{W}_{\mathrm{t}}$), du coefficient de viscosité turbulente μ_{t}, du coefficient de flux de diffusion d'enthalpie turbulente k_{t} et du maillage $\boldsymbol{X}$ (les coefficients μ_{t} et k_{t} ne sont donc pas remplacés par leurs expressions en fonction des champs $\boldsymbol{W}_5$ et $\boldsymbol{W}_{\mathrm{t}}$).

$$\boldsymbol{R}'_7(\boldsymbol{W}_5(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{W}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\alpha}), \mu_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\alpha}), k_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})) = \boldsymbol{R}_7(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})). \tag{1.65}$$

Notons enfin $\boldsymbol{R}'_5$ les cinq premiers champs de $\boldsymbol{R}'_7$. L'approximation classique « figeant les coefficients de la turbulence » consiste à substituer aux équations exactes, les équations :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}'_5}{\partial \boldsymbol{W}_5}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}_5}{\mathrm{d}\alpha_i} = -\frac{\partial \boldsymbol{R}_5}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i} \qquad \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}'_5}{\partial \boldsymbol{W}_5}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_5 = -\left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}_5}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{1.66}$$

Cette présentation sera facilement étendue au cas d'un modèle de turbulence algébrique. Cette approximation suppose que la fonction à dériver dépende principalement (et si possible exclusivement) du champ moyen. Pour la méthode linéarisée et la méthode adjointe

discrètes, les vecteurs à cinq champs $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}_5}{\mathrm{d}\alpha_i}$ et $\boldsymbol{\lambda}_5$ ne sont évidemment pas égaux aux cinq premiers champs des systèmes complets $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}_7}{\mathrm{d}\alpha_i}$ et $\boldsymbol{\lambda}_7$. Lorsqu'un modèle algébrique est utilisé, les systèmes linéaires des méthodes linéarisée et adjointe discrètes ne changent pas de taille, et la simplification consistant à figer μ_t et k_t est une approximation faite dans le calcul de la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$;
- certains auteurs ont ajouté une hypothèse de « couche mince » à celle qui vient d'être décrite. Cette hypothèse consiste à ne prendre en compte, dans la linéarisation du flux visqueux suivant une direction $\boldsymbol{n}$, que les dérivées suivant la direction $\boldsymbol{n}$. Tous les termes de dérivation croisée sont négligés. On pourra se reporter par exemple aux articles [58] et [43] ;
- dans un nombre limité d'articles, la linéarisation du flux visqueux est omise. C'est ce que font les auteurs de l'article [36] ;
- un nombre limité d'études présente des calculs de gradients obtenus avec une linéarisation complète des équations de la mécanique (champ moyen et modèle de turbulence). On présente en détail ces publications ci-dessous.

À notre connaissance, trois types de modèle de turbulence ont été linéarisés :
- le modèle algébrique de Baldwin-Lomax. Il a été différentié par Le Moigne *et al.* [38] et par Kim *et al.* [34]. Le Moigne *et al.* présentent l'application de leur méthode à l'optimisation d'un profil d'aile. Kim *et al.* présentent des calculs de gradients de fonctions aérodynamiques (C_l, C_d, C_m) par rapport à un paramètre de forme (amplitude d'une bosse de Hicks-Henne). Les cas d'application sont des écoulements transsoniques et subsoniques autour du profil NACA0012 ;
- le modèle de Spalart-Allmaras. Il a été différentié par Giles *et al.* [22] [4]. Il a aussi été dérivé par l'équipe d'Anderson, Nielsen et Bonhaus à la NASA Langley ([2], [1], [52], [53]). L'article [52] discute précisément de la validité de l'approximation « μ_t figé », mais aussi de l'effet d'une linéarisation approchée au premier ordre d'un flux convectif du second ordre (en pratique, dans le contexte de l'extension des schémas décentrés au second ordre par l'approche MUSCL), et des approximations possibles pour le calcul de la sensibilité géométrique du résidu. L'article [1] mentionne ce problème de précision des gradients ; néanmoins, il est centré sur la description de la méthode adjointe discrète, la paramétrisation géométrique, le calcul de la sensibilité géométrique du résidu et la présentation de cas tests (profil, profil volet). Il a enfin été linéarisé par Nemec *et al.* dont l'article [50] présente des gradients très précis et des optimisations complètes pour des profils d'aile. Les méthodes adjointes discrètes et linéarisées discrètes sont considérées.
- des modèles à deux équations de transport. Les modèles k-ε, k-ω SST et k-ω standard de Wilcox ont été différentiés, sans recours à un outil de différentiation automatique par Kim *et al.* [32]-[33]. Dans la référence [32], les auteurs comparent les gradients de fonction obtenus par différence finie et par méthode de gradients (adjointe et linéarisée discrète), pour des profils (RAE 2822 et NACA4412), avec et sans l'hypothèse de viscosité turbulente figée, pour les modèles k-ε, k-ω et k-ω SST. Les écarts les plus importants sont obtenus pour une configuration transsonique avec un choc fort. Dans [33], les auteurs présentent des calculs de gradients et des optimisations de forme réalisés, avec les mêmes modèles de turbulence, sur le profil RAE 2822 (écoulement transsonique et écoulement subsonique) et la configuration NLR 173 (profil + volet écoulement faible Mach). Comme dans l'article [32], ils observent de fortes erreurs sur les gradients pour la configuration transsonique avec choc fort. Pour les

[4] mentionné dans [38], pas indiqué dans l'article

optimisations complètes, ils observent que les erreurs sur les gradients, liées à l'hypothèse « μ_t figé » ralentissent — plus ou moins suivant les cas — le processus global d'optimisation de forme. Les auteurs désignent cette hypothèse par l'acronyme CTEV pour Constant Turbulent Eddy Viscosity.

Signalons enfin les articles de Hou *et al.* [27] et Mohammadi [48] qui s'intéressent principalement à la mise en œuvre d'outils de différentiation automatique (pour la méthode linéarisée discrète dans la première publication et pour la méthode adjointe discrète dans la seconde). Ils ont appliqué cette technique à toutes les équations d'un problème visqueux turbulent (modèle de Baldwin-Lomax [27], modèle k-ε dans [48]), mais ne discutent pas de l'utilité de linéariser l'ensemble des équations sans approximation. Mentionnons enfin l'article de Lund *et al.* [39] qui s'intéressent au calcul de gradients par la méthode discrète directe, pour un problème fluide-structure (écoulement incompressible bidimensionnel + élasticité). Ils ont procédé à la linéarisation des équations du modèle de turbulence (Baldwin-Lomax et k-ω de Wilcox) et donnent des indications sur la résolution des équations linéarisées du problème.

1.5 Conclusion

Dans le cadre de cette thèse et du plan de recherche concertée sur lequel elle s'appuie, le choix s'est donc porté sur les deux méthodes discrètes d'optimisation locale que sont la méthode de l'équation linéarisée discrète et la méthode adjointe discrète. La littérature nous montre donc qu'il existe plusieurs approches pour le traitement du flux diffusif (« μ_t figé », approche de type « couche mince », modèle linéarisé) et de sa différentiation pour le calcul de la matrice jacobienne qui intervient dans chacune des deux méthodes discrètes d'optimisation. La détermination de la plus pertinente hypothèse à adopter pour le calcul de gradients par méthodes discrètes pour des applications turbomachines pour les équations RANS avec le modèle de turbulence de Michel *et al.* ou le modèle k-ε de Launder-Sharma est une question ouverte. Les équations du problème ont été présentées dans ce chapitre. Leur discrétisation est décrite dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Méthodes numériques

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la discrétisation des équations RANS pour un problème stationnaire. Les équations sont formulées comme un système de lois de bilan, sous forme intégrale. La méthode de discrétisation considérée et implémentée dans le logiciel *elsA* est la méthode des volumes finis dans laquelle les inconnues sont des valeurs moyennes dans les cellules de discrétisation, lesquelles sont affectées au centre de ces cellules (approche *cell-centered*). En outre, on fait l'hypothèse que les grandeurs sont uniformes sur une interface et égales à la demi-somme des valeurs dans les cellules adjacentes. Ces approximations sont compatibles avec la précision d'ordre 2 des schémas numériques classiques.

Le domaine de calcul est défini par un maillage tridimensionnel multidomaine, structuré éventuellement multiblocs. Les indices de maillage sont notés (i, j, k) (voir figure 2.1). On prend pour convention d'orientation des vecteurs normaux aux surfaces une orientation suivant les indices croissants.

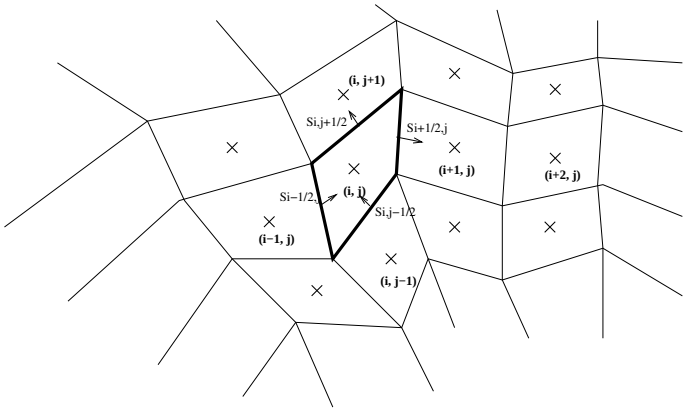

FIG. 2.1 – Schéma de discrétisation pour la méthode des volumes finis.

En plus de la présentation de la discrétisation des termes convectifs, diffusifs, des modèles de turbulence utilisés dans cette thèse, du traitement des conditions aux limites et des conditions de raccord, le calcul des différents termes des équations à résoudre pour l'optimisation de formes est présenté. Le chapitre s'achève par une description des fonctions aérodynamiques utilisées et des outils qui les calculent ainsi que leurs dérivées par rapport au champ aérodynamique et à la métrique.

2.1 Méthode des volumes finis

2.1.1 Terminologie et notations

On considère un système de lois de bilan sous la forme intégrale suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\boldsymbol{W}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\partial\Omega}\Big[\mathbf{Fc}[\boldsymbol{W}\ ]+\mathbf{Fd}[\boldsymbol{W},\nabla\ \boldsymbol{W}]\Big]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma=\int_{\Omega}\boldsymbol{T}[\boldsymbol{W},\nabla\ \boldsymbol{W}]\mathrm{d}\Omega\ , \tag{2.1}$$

où Ω est le domaine de calcul, de frontière $\partial\Omega$, de normale extérieure unitaire $\boldsymbol{n}$.

Les équations de Navier-Stokes locales (1.7), (1.8) et (1.9) exprimées dans le repère absolu s'écrivent :

$$\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{\partial\rho}{\partial t} & + & \nabla\cdot\Big[\rho\boldsymbol{U}\Big] & & & = & 0,\\
\dfrac{\partial\rho\boldsymbol{U}}{\partial t} & + & \nabla\cdot\Big[\rho\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{U}+p\mathbf{I}\Big] & - & \nabla\cdot\Big[\boldsymbol{\tau}\Big] & = & 0,\\
\dfrac{\partial\rho E}{\partial t} & + & \nabla\cdot\Big[\rho E\boldsymbol{U}+p\boldsymbol{U}\Big] & - & \nabla\cdot\Big[\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{U}-\boldsymbol{q}\Big] & = & 0.\\
\text{taux de} & & \text{terme convectif} & & \text{terme diffusif} & & \text{pas de}\\
\text{variation} & & & & & & \text{terme source}
\end{array} \tag{2.2}$$

En intégrant ces équations sur une partie du domaine de calcul (en pratique une cellule du maillage structuré), on obtient une équation du type (2.1). Il apparaît un terme source pour les équations bilan de la quantité de mouvement et de l'énergie dans le cas où l'on formule ces équations en repère mobile (repère entraîné en rotation) — équations (1.25) à (1.27). Ce terme source dépend de la vitesse d'entraînement, comme on a pu le voir aux équations de la sous-section 1.2.3. Néanmoins, le même formalisme que pour l'équation (2.1) peut être donné.

Le domaine de calcul est constitué d'un ensemble de cellules hexaédriques élémentaires représentées par la suite par Ω. Chaque cellule élémentaire Ω est caractérisée par son volume $\mathcal{V}(\Omega)=\int_{\Omega}\mathrm{d}\Omega$ et sa surface fermée $\partial\Omega=\bigcup_{l=1}^{6}\Sigma_l$ où Σ_l représente la face l de la cellule hexaédrique considérée dans le maillage structuré.

2.1.2 Formulation semi-discrète en espace pour intégration temps/espace découplée

On considère l'écriture du système exact (2.1) dans une cellule élémentaire du domaine de calcul :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\boldsymbol{W}\mathrm{d}\Omega=-\left[\sum_{l=1}^{6}\int_{\Sigma_l}\Big[\mathbf{Fc}[\boldsymbol{W}\ ]+\mathbf{Fd}[\boldsymbol{W},\nabla\ \boldsymbol{W}]\Big]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma-\int_{\Omega}\boldsymbol{T}[\boldsymbol{W},\nabla\ \boldsymbol{W}]\mathrm{d}\Omega\right]\ . \tag{2.3}$$

En définissant successivement :

– la valeur moyenne du vecteur des variables conservatives $\boldsymbol{W}$ dans la cellule Ω :

$$\bar{\boldsymbol{W}}_{\Omega}=\frac{1}{\mathcal{V}(\Omega)}\int_{\Omega}\boldsymbol{W}\mathrm{d}\Omega\ ; \tag{2.4}$$

– la valeur du vecteur flux à travers Σ_l :

$$(\bar{\boldsymbol{F}}_n)_{\Sigma_l}=\int_{\Sigma_l}\Big[\mathbf{Fc}[\boldsymbol{W}\ ]+\mathbf{Fd}[\boldsymbol{W},\nabla\ \boldsymbol{W}]\Big]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma\ ; \tag{2.5}$$

– la valeur moyenne du vecteur terme source dans la cellule Ω :

$$\bar{\boldsymbol{T}}_\Omega = \frac{1}{\mathcal{V}(\Omega)} \int_\Omega \boldsymbol{T}[\,\boldsymbol{W}, \nabla\, \boldsymbol{W}]\mathrm{d}\Omega \;; \tag{2.6}$$

on peut écrire le système exact (2.3) sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{V}(\Omega)\,\bar{\boldsymbol{W}}_\Omega) \;=\; -\left[\sum_{l=1}^{6}(\bar{\boldsymbol{F}}_n)_{\Sigma_l} \;-\; \mathcal{V}(\Omega)\,\bar{\boldsymbol{T}}_\Omega\right] . \tag{2.7}$$

On recherche alors une fonction *flux numérique* comme une approximation numérique du *flux exact* $(\bar{\boldsymbol{F}}_n)_{\Sigma_l}$, satisfaisant la propriété usuelle de consistance. On considère alors une méthode numérique *semi-discrétisée en espace* suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{V}(\Omega)\,\boldsymbol{W}_\Omega) \;=\; -\left[\sum_{l=1}^{6}\mathbf{F}(\,\boldsymbol{W}_\Omega,\,\boldsymbol{W}_{\Omega_l})\cdot\boldsymbol{N}_{\Sigma_l} \;-\; \mathcal{V}(\Omega)\,\boldsymbol{T}_\Omega\right] = -\mathcal{V}(\Omega)\boldsymbol{R}_\Omega\,, \tag{2.8}$$

où :

- $\boldsymbol{W}_\Omega$ est une approximation numérique de la valeur moyenne $\bar{\boldsymbol{W}}_\Omega$;
- $\mathbf{F}(\,\boldsymbol{W}_\Omega,\,\boldsymbol{W}_{\Omega_i})$ est le flux numérique, fonction de $\boldsymbol{W}_\Omega$ et des approximations numériques $\boldsymbol{W}_{\Omega_l}$ calculées dans un certain nombre de cellules voisines à chacune des faces Σ_l ;
- $\boldsymbol{N}_{\Sigma_l}$ est la normale extérieure (non unitaire) à Σ_l :

$$\boldsymbol{N}_{\Sigma_l} = \int_{\Sigma_l} \boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma\,.$$

Enfin, $\boldsymbol{R}_\Omega$ sera appelé le *résidu numérique explicite de modélisation.* Ce résidu discret au centre de la cellule Ω est un bilan de flux de cette cellule auquel on ajoute un terme source. Lorsque le maillage multibloc est fixe au cours du temps, le volume de chaque cellule élémentaire $\mathcal{V}(\Omega)$ ne dépend pas du temps. Dans ce cas, on considérera donc la méthode semi-discrétisée en espace (2.8) sous la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{W}_\Omega \;=\; -\frac{1}{\mathcal{V}(\Omega)}\left[\sum_{l=1}^{6}\mathbf{F}(\,\boldsymbol{W}_\Omega,\,\boldsymbol{W}_{\Omega_l})\cdot\boldsymbol{N}_{\Sigma_l} \;-\; \mathcal{V}(\Omega)\,\boldsymbol{T}_\Omega\right] = -\boldsymbol{R}_\Omega\,. \tag{2.9}$$

2.2 Flux de convection. Schémas décentrés

Dans les méthodes de calcul de gradients discrets pour l'optimisation locale, le choix des flux numériques pour le calcul d'analyse est lié au choix de la méthode de gradient : les méthodes discrètes (adjointes ou linéarisées) nécessitent l'inversion de la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$ (section 1.3). Pour assurer un bon conditionnement de cette matrice, il est connu qu'une discrétisation du flux convectif du champ moyen par une formule décentrée est préférable à une discrétisation utilisant des flux centrés (voir par exemple Cormery [12]).

2.2.1 Introduction

Notons $\boldsymbol{Fc} = \mathbf{Fc}\cdot\boldsymbol{n}$ le flux physique dans la direction $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)^{\mathrm{T}}$ et $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Scheme}}$ un flux numérique consistant avec le flux physique $\boldsymbol{Fc}$. On définit des états gauche et droit $\boldsymbol{W}_{\mathrm{g}}$ et $\boldsymbol{W}_{\mathrm{d}}$

sur la facette Σ_l définis respectivement à gauche et à droite de cette facette, et le flux s'écrit alors :

$$\boldsymbol{F}_{\text{Scheme}} = \boldsymbol{F}_{\text{Scheme}}(\boldsymbol{W}_{\text{g}}, \boldsymbol{W}_{\text{d}}). \tag{2.10}$$

Dans le cas du schéma précis au premier ordre, on définit les états gauche et droit par $\boldsymbol{W}_{\text{g}} = \boldsymbol{W}_{\Omega}$ et $\boldsymbol{W}_{\text{d}} = \boldsymbol{W}_{\Omega_l}$. Dans la sous-section 2.2.3, nous décrirons la méthode MUSCL [74] permettant d'étendre au second ordre d'approximation en espace le schéma décentré utilisé.

2.2.2 Schéma de Roe

Dans la sous-section 1.1.1, on a défini le champ aérodynamique $\boldsymbol{W}$. Le flux physique s'écrit dans le cas d'un système à cinq équations dans la direction $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)^{\text{T}}$:

$$\boldsymbol{Fc} = \mathbf{Fc} \cdot \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{pmatrix} n_x + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{pmatrix} n_y + \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{pmatrix} n_z, \tag{2.11}$$

où l'enthalpie totale H est définie dans la section 1.2.6. Soient deux états $\boldsymbol{W}_{\text{g}}$ et $\boldsymbol{W}_{\text{d}}$ de l'espace des états, le flux numérique de Roe $\boldsymbol{F}_{\text{Roe}}$ [63] est défini par :

$$\boldsymbol{F}_{\text{Roe}}(\boldsymbol{W}_{\text{g}}, \boldsymbol{W}_{\text{d}}) \;=\; \frac{\boldsymbol{Fc}(\boldsymbol{W}_{\text{g}}) + \boldsymbol{Fc}(\boldsymbol{W}_{\text{d}})}{2} \;-\; \frac{1}{2}\,|\mathbf{A}|\;(\boldsymbol{W}_{\text{d}} - \boldsymbol{W}_{\text{g}})\;, \tag{2.12}$$

où $|\mathbf{A}| = \mathbf{M}\ \mathbf{diag}(|\lambda_A|)\ \mathbf{M}^{-1}$, la matrice $\mathbf{diag}(|\lambda_A|)$ étant la matrice diagonale des modules des valeurs propres λ_A de $\mathbf{A}$. Ici $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{W}_{\text{g}}, \boldsymbol{W}_{\text{d}})$ est une matrice satisfaisant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\boldsymbol{W}_{\text{g}}, \boldsymbol{W}_{\text{d}}) & \text{est diagonalisable à valeurs propres réelles ;} \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{W}_{\text{g}}, \boldsymbol{W}_{\text{d}})(\boldsymbol{W}_{\text{d}} - \boldsymbol{W}_{\text{g}}) & = \mathbf{Fc}(\boldsymbol{W}_{\text{d}}) - \mathbf{Fc}(\boldsymbol{W}_{\text{g}})\ ; \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}) & = \mathrm{d}_{\boldsymbol{W}}\mathbf{Fc}(\boldsymbol{W}) \text{ différentielle de } \mathbf{Fc} \text{ par rapport à } \boldsymbol{W}. \end{cases} \tag{2.13}$$

où $\tilde{X}$ désigne la moyenne de Roe :

$$\tilde{X} = \frac{\sqrt{\rho_{\text{g}}}X_{\text{g}} + \sqrt{\rho_{\text{d}}}X_{\text{d}}}{\sqrt{\rho_{\text{g}}} + \sqrt{\rho_{\text{d}}}}\ , \tag{2.14}$$

pour $X = u,\ v,\ w,\ H$ et éventuellement $k,\ \varepsilon$, et $\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_{\text{g}}\rho_{\text{d}}}$.

Dans le cas des équations d'Euler, la matrice $\mathbf{A}$ est exactement la matrice jacobienne de $\mathbf{Fc}$ en l'état moyen de Roe $\tilde{\boldsymbol{W}}$. Pour éviter le calcul de la valeur absolue d'une matrice et ainsi réduire le coût de calcul du produit $|\mathbf{A}|\ (\boldsymbol{W}_{\text{d}} - \boldsymbol{W}_{\text{g}})$, on utilise l'expression simplifiée du terme précédent donnée par Collercandy dans [11].

Pour obtenir la solution physique du problème, il faut rendre le schéma de Roe compatible avec la condition d'entropie. Harten [25] a montré que la solution vérifie la condition d'entropie si le flux de Roe (2.12) est modifié de la manière suivante :

$$\boldsymbol{F}_{\text{Roe}}(\boldsymbol{W}_{\text{g}}, \boldsymbol{W}_{\text{d}}) \;=\; \frac{\boldsymbol{Fc}(\boldsymbol{W}_{\text{g}}) + \boldsymbol{Fc}(\boldsymbol{W}_{\text{d}})}{2} \;-\; \frac{1}{2}\,\Psi(|\mathbf{A}|)\;(\boldsymbol{W}_{\text{d}} - \boldsymbol{W}_{\text{g}}). \tag{2.15}$$

où $\Psi(|\mathbf{A}|) = \mathbf{M}\ \mathbf{diag}(\psi(\lambda_A))\ \mathbf{M}^{-1}$, avec la fonction ψ est définie par (voir figure 2.2) :

$$\psi = \begin{cases} |z| & \text{si} \quad |z| \geq \sigma\,, \\ \dfrac{z^2+\sigma^2}{2\sigma} & \text{si} \quad |z| < \sigma\,. \end{cases} \tag{2.16}$$

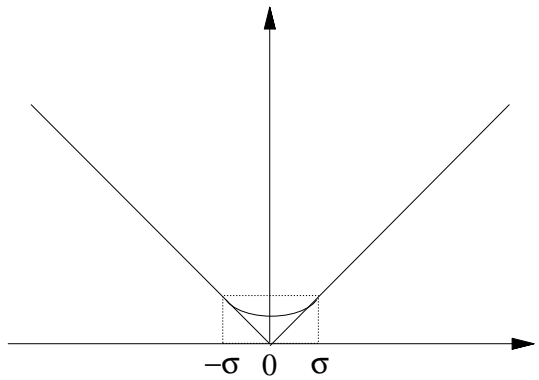

FIG. 2.2 – La fonction ψ de la correction de Harten.

La fonction ψ s'applique aux valeurs propres de la matrice jacobienne $\mathbf{A}$. Le paramètre de correction entropique σ est proportionnel à un majorant de la vitesse maximale des ondes :

$$\sigma = \epsilon_\sigma\ (|\bar{u}| + |\bar{v}| + |\bar{w}| + \bar{a}). \tag{2.17}$$

Avec cette formulation, le flux de Roe reste toujours dissipatif aux points où une vitesse caractéristique s'annule. L'inconvénient de cette correction est qu'elle introduit le paramètre ϵ_σ qui doit être ajusté en fonction des conditions d'écoulement.

Ces formules sont différentiées pour la linéarisation du flux convectif dans le logiciel *elsA*.

2.2.3 Extension au second ordre d'approximation en espace (méthode MUSCL)

La procédure permettant une extension au second ordre d'approximation en espace est la méthode MUSCL de van Leer [74] qui repose sur une reconstruction linéaire par morceaux de la solution approchée. Cette méthode est indépendante du schéma décentré mis en œuvre et est appliquée en maillage structuré successivement dans les trois directions de maillage. L'extrapolation est réalisée sur un ensemble de variables « primitives » $\boldsymbol{P}_{\text{cell}}$ en bijection avec les variables conservatives $\boldsymbol{W}_{\text{cell}}$. On fait le choix suivant pour les variables $\boldsymbol{P}_{\text{cell}}$:

$$\boldsymbol{P}_{\text{cell}} = (\rho, u, v, w, p)^{\text{T}}\ . \tag{2.18}$$

Pour simplifier la présentation, on écrit les formules dans le cas particulier d'un maillage structuré en particularisant la direction curviligne décrite par l'indice de maillage i, les indices j et k étant fixés. On repère ici une cellule de maillage par les indices (i, j, k).

Deux états, respectivement notés $\boldsymbol{P}^{\text{g}}_{i+1/2,j,k}$ et $\boldsymbol{P}^{\text{d}}_{i+1/2,j,k}$, sont définis pour chaque facette $(i+1/2, j, k)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}^{\text{g}}_{i+1/2,j,k} &= \boldsymbol{P}_{i,j,k} + 0{,}5 \times \boldsymbol{slopi}(i,j,k), \\ \boldsymbol{P}^{\text{d}}_{i+1/2,j,k} &= \boldsymbol{P}_{i+1,j,k} - 0{,}5 \times \boldsymbol{slopi}(i+1,j,k), \end{cases} \tag{2.19}$$

où ***slopi*** désigne la pente calculée dans la direction de maillage i de la manière suivante :

$$\boldsymbol{slopi}(i,j,k) = \phi(\boldsymbol{P}_{i,j,k} - \boldsymbol{P}_{i-1,j,k}, \boldsymbol{P}_{i+1,j,k} - \boldsymbol{P}_{i,j,k}) \ . \tag{2.20}$$

La fonction ϕ désigne une des fonctions « limiteur de pente ». Comme le limiteur de pente de van Albada [73] est le seul limiteur différentiable qui soit disponible dans *elsA*, c'est celui qui est utilisé pour les calculs et la linéarisation du flux convectif. Son expression est donnée par :

$$\phi_{\mathrm{va}}(a,b) = \frac{(b^2+\epsilon)\ a\ +\ (a^2+\epsilon)\ b}{a^2\ +\ b^2\ +\ 2\epsilon}, \qquad \text{avec } \epsilon \text{ très petit fixé.} \tag{2.21}$$

Les états $\boldsymbol{W}^{\mathrm{g}}_{i+1/2,j,k}$ et $\boldsymbol{W}^{\mathrm{d}}_{i+1/2,j,k}$ intervenant dans les formules de flux sont déduits des valeurs de $\boldsymbol{P}^{\mathrm{g}}_{i+1/2,j,k}$ et $\boldsymbol{P}^{\mathrm{d}}_{i+1/2,j,k}$.

2.3 Flux de diffusion discret

Dans toute cette section, on note :

$$\begin{array}{rcl} \bar{\mu} & = & \mu + \mu_{\mathrm{t}} \ ; \\ \bar{k} & = & k_{\mathrm{T}} + k_{\mathrm{t}} \ . \end{array} \tag{2.22}$$

Si l'on note :

$$\mathbf{Fd} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Fd_{21} & Fd_{22} & Fd_{23} \\ Fd_{31} & Fd_{32} & Fd_{33} \\ Fd_{41} & Fd_{42} & Fd_{43} \\ Fd_{51} & Fd_{52} & Fd_{53} \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

la matrice **Fd** fait intervenir le gradient de la vitesse et le gradient de la température :

$$\mathbf{Fd} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{\mu}(\frac{4}{3}u_{,x} - \frac{2}{3}v_{,y} - \frac{2}{3}w_{,z}) & \bar{\mu}(u_{,y} + v_{,x}) & \bar{\mu}(u_{,z} + w_{,x}) \\ \bar{\mu}(u_{,y} + v_{,x}) & \bar{\mu}(-\frac{2}{3}u_{,x} + \frac{4}{3}v_{,y} - \frac{2}{3}w_{,z}) & \bar{\mu}(v_{,z} + w_{,y}) \\ \bar{\mu}(u_{,z} + w_{,x}) & \bar{\mu}(v_{,z} + w_{,y}) & \bar{\mu}(-\frac{2}{3}u_{,x} - \frac{2}{3}v_{,y} + \frac{4}{3}w_{,z}) \\ \bar{k}T_{,x} & \bar{k}T_{,y} & \bar{k}T_{,z} \\ +Fd_{21}u + Fd_{22}v + Fd_{23}w & +Fd_{31}u + Fd_{32}v + Fd_{33}w & +Fd_{41}u + Fd_{42}v + Fd_{43}w \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

avec $g_{,x}$ (resp. $g_{,y}$, $g_{,z}$) les dérivées de la grandeur g par rapport à x (resp. y, z), $g \in \{u, v, w, T\}$. Il faut donc établir un schéma de discrétisation de ces gradients. Un choix se pose pour la localisation de l'évaluation de ces gradients (composantes de vitesse u, v, w et température T) :

- gradients évalués aux centres des cellules de discrétisation ;
- ou bien gradients évalués aux centres des interfaces.

Soit g la grandeur scalaire dont on veut évaluer le gradient au centre de la cellule d'indices (i,j,k).

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{,x} \\ g_{,y} \\ g_{,z} \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

On traite en exemple dans ce qui suit le cas de la dérivée d'une grandeur par rapport à x. Pour obtenir la dérivée de cette même grandeur par rapport à y ou z, il suffit de substituer y ou z à x.

2.3.1 Gradients évalués aux centres des cellules

Par la formule de Green, on a :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{i,j,k} \simeq \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \int_{\mathcal{V}_{i,j,k}} \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \oint_S g n_x\,\mathrm{d}S, \quad = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \oint_S g\,\mathrm{d}S^x, \tag{2.26}$$

avec $\mathcal{V}_{i,j,k}$ le volume de la cellule d'indice (i,j,k) (indiqué en pointillés sur la figure 2.3).

Soit

$$\begin{aligned}(g_{,x})_{i,j,k} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{i,j,k} &\simeq \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}}[g_{i+\frac{1}{2},j,k}S^x_{i+\frac{1}{2},j,k} - g_{i-\frac{1}{2},j,k}S^x_{i-\frac{1}{2},j,k} \\ &\quad + g_{i,j+\frac{1}{2},k}S^x_{i,j+\frac{1}{2},k} - g_{i,j-\frac{1}{2},k}S^x_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ &\quad + g_{i,j,k+\frac{1}{2}}S^x_{i,j,k+\frac{1}{2}} - g_{i,j,k-\frac{1}{2}}S^x_{i,j,k-\frac{1}{2}}] \\ &\simeq \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}}[\tfrac{1}{2}(g_{i+1,j,k}+g_{i,j,k})S^x_{i+\frac{1}{2},j,k} - \tfrac{1}{2}(g_{i,j,k}+g_{i-1,j,k})S^x_{i-\frac{1}{2},j,k} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(g_{i,j+1,k}+g_{i,j,k})S^x_{i,j+\frac{1}{2},k} - \tfrac{1}{2}(g_{i,j,k}+g_{i,j-1,k})S^x_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(g_{i,j,k+1}+g_{i,j,k})S^x_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(g_{i,j,k}+g_{i,j,k-1})S^x_{i,j,k-\frac{1}{2}}],\end{aligned} \tag{2.27}$$

avec :

$$\begin{aligned}&S^x_{i+\frac{1}{2},j,k} \text{ projection suivant la direction } x \text{ du vecteur surface de l'interface } (i+\tfrac{1}{2},j,k), \\ &g_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{g_{i,j,k}+g_{i+1,j,k}}{2}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Les signes moins qui apparaissent dans les formules ci-dessus s'expliquent par la convention de surfaces orientées dans le sens des indices croissants comme signalé au début de ce chapitre.

Les grandeurs (excepté les surfaces) avec uniquement des indices entiers sont évaluées aux centres des cellules (matérialisées par des croix $\times$ sur les figures), alors que celles comportant au moins un indice demi-entier sont extrapolées comme des moyennes faisant intervenir des cellules adjacentes (matérialisées par des cercles $\circ$ sur les figures). On obtient ainsi un stencil pour la discrétisation de gradients évalués aux centres des cellules de six points (resp. quatre points) pour un problème tridimensionnel (resp. bidimensionnel) comme on peut le voir sur la figure 2.3 pour le cas bidimensionnel. Ce sont bien des stencils de six (resp. quatre) points pour un problème tridimensionnel (resp. bidimensionnel) et non pas sept (resp. cinq) points, car une fois développée la relation donnant le gradient évalué au centre de la cellule (i,j,k), le coefficient multiplicatif de $g_{i,j,k}$ est : $\frac{1}{2}(S^x_{i+\frac{1}{2},j,k} - S^x_{i-\frac{1}{2},j,k} + S^x_{i,j+\frac{1}{2},k} - S^x_{i,j-\frac{1}{2},k} + S^x_{i,j,k+\frac{1}{2}} - S^x_{i,j,k-\frac{1}{2}})$. Or, ce dernier terme est la projection sur x de l'intégration du vecteur surface élémentaire sur la surface fermée du volume de contrôle. Il est donc nul. Dans le cas de la formulation gradients évalués aux centres des cellules de discrétisation, on utilise une discrétisation centrée pour l'évaluation du flux diffusif sur l'interface *interne* $\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}$:

$$\mathbf{Fd}\cdot\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\mathbf{Fd}_{i,j,k}\cdot\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k} + \mathbf{Fd}_{i+1,j,k}\cdot\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2}. \tag{2.29}$$

On obtient ainsi un stencil pour la discrétisation du flux diffusif avec gradients évalués aux centres des cellules de douze points (resp. huit points) pour un problème tridimensionnel (resp. bidimensionnel) comme on peut le voir sur la figure 2.4 pour le cas bidimensionnel.

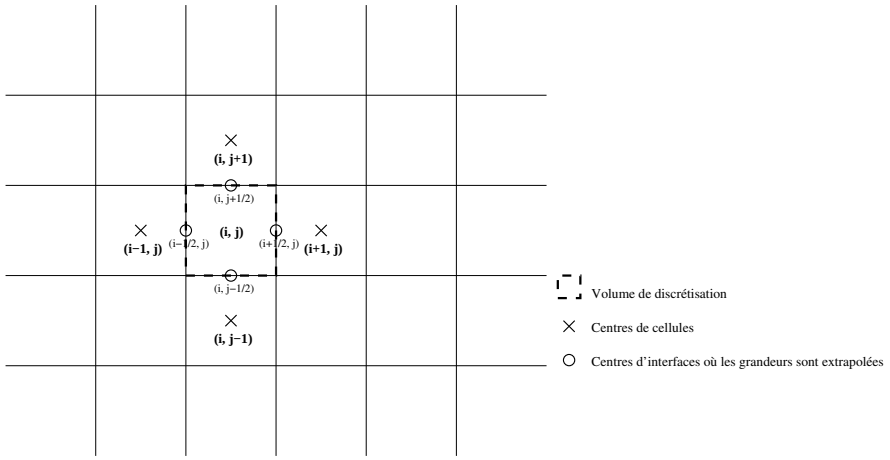

FIG. 2.3 – Stencil du gradient d'un scalaire évalué au centre des cellules.

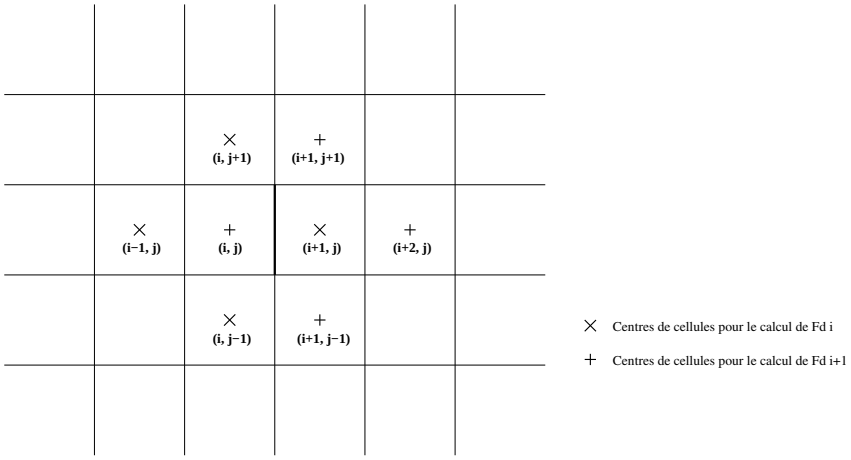

FIG. 2.4 – Stencil du flux diffusif à l'interface d'indices $(i+\frac{1}{2}, j)$ avec gradients évalués au centre des cellules.

2.3.2 Gradients évalués aux centres des interfaces des cellules

On a ainsi, par la formule de Green :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j,k} \simeq \frac{1}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2},j,k}} \int_{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2},j,k}} \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}V &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2},j,k}} \oint_S g n_x\,\mathrm{d}S, \\ &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2},j,k}} \oint_S g\,\mathrm{d}S^x,\end{aligned} \tag{2.30}$$

avec $\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ le volume de contrôle utilisé pour le calcul de ce gradient $\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2}(\mathcal{V}_{i,j,k}+\mathcal{V}_{i+1,j,k})$ (indiqué en pointillés sur la figure 2.5).

Soit

$$\begin{aligned}(g_{,x})_{i+\frac{1}{2},j,k} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j,k} \simeq \frac{1}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2},j,k}} \big[& g_{i+1,j,k} S^x_{i+1,j,k} - g_{i,j,k} S^x_{i,j,k} \\ & + g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} S^x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} S^x_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \\ & + g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} S^x_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} S^x_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \big],\end{aligned} \tag{2.31}$$

avec par exemple :

$$
\begin{aligned}
S^x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} &= \frac{S^x_{i,j+\frac{1}{2},k} + S^x_{i+1,j+\frac{1}{2},k}}{2}, \\
S^x_{i+1,j,k} &= \frac{S^x_{i+\frac{1}{2},j,k} + S^x_{i+\frac{3}{2},j,k}}{2}, \\
S^x_{i,j,k} &= \frac{S^x_{i-\frac{1}{2},j,k} + S^x_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2}, \\
g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} &= \frac{g_{i,j,k} + g_{i+1,j,k} + g_{i,j+1,k} + g_{i+1,j+1,k}}{4}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Les grandeurs (excepté les surfaces) avec uniquement des indices entiers sont évaluées aux centres des cellules (matérialisées par des croix $\times$ sur les figures), alors que celles comportant au moins un indice demi-entier sont extrapolées comme des moyennes faisant intervenir des cellules adjacentes (matérialisées par des cercles $\circ$ sur les figures).

Dans le cas de la formulation *gradients évalués aux centres des interfaces*, on a directement le flux diffusif évalué sur une interface par $\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}$. Les valeurs de $\bar{\mu}$ et du vecteur vitesse $\boldsymbol{U}$ qui apparaissent dans l'expression de $\mathbf{Fd}$ sont égales aux moyennes arithmétiques de ces mêmes grandeurs aux centres des deux cellules d'indices (i, j, k) et $(i+1, j, k)$.

On obtient ainsi un stencil pour la discrétisation de gradients évalués aux interfaces et du flux diffusif de dix points (resp. six points) pour un problème tridimensionnel (resp. bidimensionnel) comme on peut le voir sur les figures 2.5 et 2.6 pour le cas bidimensionnel.

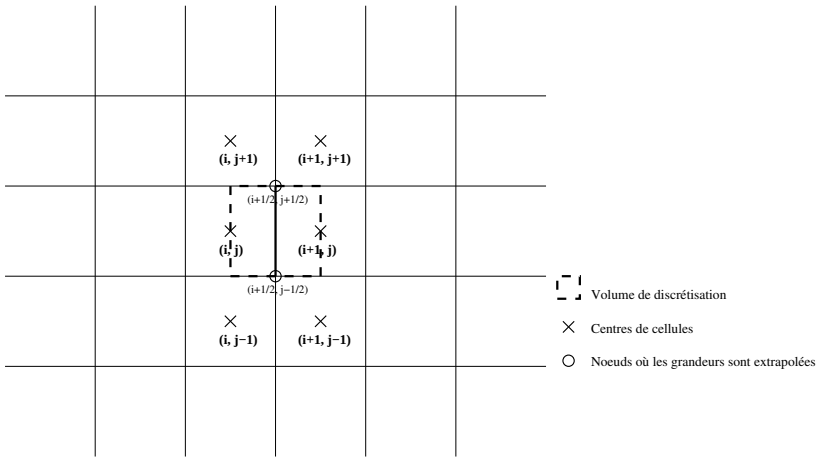

FIG. 2.5 – Stencil du gradient d'un scalaire évalué au centre des interfaces.

Un surcoût mémoire apparaît dans le cas de l'utilisation de gradients de fonctions évalués aux centres des interfaces. En effet, il faut stocker trois (resp. deux) fois plus de champs dans ce cas-là que pour des gradients évalués aux centres des cellules pour un problème tridimensionnel (resp. bidimensionnel), car il y a trois (resp. deux) fois plus d'interfaces que de cellules dans un maillage structuré. Néanmoins, comme le stencil est plus compact, la linéarisation des flux visqueux des interfaces intérieures et des interfaces frontières est plus simple. C'est pour cette dernière raison que cette formulation a été retenue pour la suite.

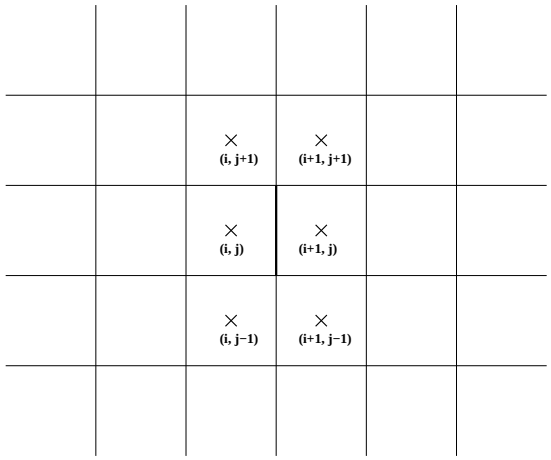

FIG. 2.6 – Stencil du flux diffusif à l'interface d'indices $(i + \frac{1}{2}, j)$ avec gradient évalué au centre des interfaces.

2.4 Discrétisation du modèle de Michel *et al.* Calcul de l'épaisseur de couche limite

L'expression de la longueur de mélange donnée précédemment à l'équation (1.32) est rappelée ici :

$$\ell = 0{,}085\,\delta\,\tanh(\frac{K}{0{,}085}\frac{\eta}{\delta}), \tag{2.33}$$

avec : $K = 0{,}41$, la constante de Kármán, η, la distance à la paroi et δ, l'épaisseur de couche limite.

Dans les sous-sections suivantes, lorsqu'une rangée de cellules est décrite, elle est désignée par son indice de maillage commun à toute la rangée de cellules. Dans *elsA*, il n'est pas prévu de programmation générale pour la détermination de l'épaisseur de couche limite δ dans le cadre de la mise en œuvre du modèle de Michel *et al.* Suivant la topologie/configuration d'un sous-domaine donné (nombre et position relative des parois les unes par rapport aux autres), il peut exister une implémentation particulière. Les topologies utilisées dans cette thèse sont traitées dans *elsA*, que ce soit pour les applications d'aérodynamique externe ou interne. Pour l'application d'aérodynamique externe (aile ONERA M6), il n'y a qu'une paroi à considérer, un seul domaine de maillage dit « CO ». Pour les écoulements en turbomachine, l'espace à traiter est partagé en sous-domaines qui peuvent avoir des topologies différentes. Trois configurations sont envisagées :

- deux parois en vis-à-vis correspondant à l'intégralité de deux plans de maillage opposés (maillage en H, les deux parois étant le carter et le moyeu). Appelons-la configuration 2 ;
- trois parois correspondant à l'intégralité de trois plans de maillage et donc formant deux coins (maillage en O, qui entoure l'aube, les deux parois en vis-à-vis étant aussi le carter et le moyeu, la troisième étant la surface externe de l'aube). Appelons-la configuration 3 ;
- pas de paroi : une valeur d'épaisseur de couche limite uniforme est imposée sur l'ensemble du sous-domaine considéré car la notion de couche limite perd toute signification (cas du jeu pour une aube de turbomachine).

2.4.1 Calcul de l'épaisseur de couche limite pour les configurations à deux et trois parois

L'épaisseur de couche limite δ est déterminée à partir de l'évaluation des distances en des points particuliers situés sur la frontière de la couche limite. Le principe de la détermination de cette frontière de couche limite est de parcourir un ensemble de cellules du maillage de la région extérieure à la couche limite vers la paroi. Une fois qu'une certaine valeur qui répond à un critère est atteinte au centre d'une cellule, on obtient l'épaisseur de couche limite δ comme étant la distance à la paroi du centre de cette cellule. Le parcours considéré dépend de la configuration traitée, alors que le critère de détermination de la frontière en est indépendant. Deux choix sont disponibles dans *elsA* comme critère :

- la valeur du module local de la vorticité vaut une valeur introduite en donnée ;
- la valeur du rapport entre le module local de la vorticité et le maximum du module de la vorticité (sur l'ensemble de cellules parcourues sur une ligne de maillage orthogonale à la paroi) vaut une valeur introduite en donnée.

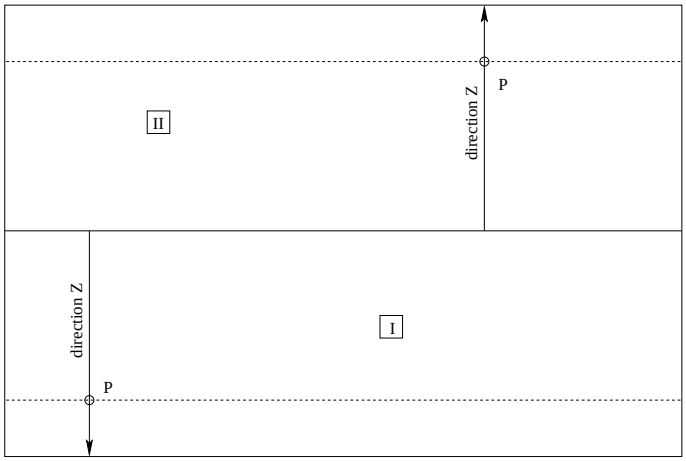

FIG. 2.7 – Schéma de détermination de l'épaisseur de couche limite pour la configuration 2.

Pour la configuration 2 (voir figure 2.7), on délimite deux zones distinctes I et II correspondant aux zones d'influence de chacune des deux parois. La limite entre ces deux zones est en pratique définie comme étant à mi-distance des deux parois en indice de maillage. La recherche de la frontière de couche limite s'effectue dans la direction de maillage sensiblement perpendiculaire à la paroi en se déplaçant dans l'espace des indices du sous-domaine de l'extérieur de la couche limite vers la paroi. Pour chaque rangée de cellules de maillage (notée ici Z) perpendiculaire à la paroi, on détecte le point P où le module de la vorticité atteint la valeur du critère. Dans le cas du second critère, la valeur du maximum de module de vorticité est déterminée préalablement sur chaque ligne de maillage. La valeur de l'épaisseur de couche limite δ en chaque centre de cellule est bornée à $\delta_{\max}$ et est prise uniforme le long de la rangée de cellules Z jusqu'à mi-distance des deux parois, et égale à la distance du point P à la paroi.

Pour la configuration 3 (voir figure 2.8), la frontière de la couche limite est déterminée comme suit. La limite entre ces deux zones est en pratique définie comme étant à mi-distance des deux parois. Les régions I, II et III sont déterminées à partir de l'intersection des deux diagonales dans le plan des indices. La recherche de la couche limite s'effectue le long de chacune des deux diagonales en direction de chacun des deux coins ; on recherche sur chaque diagonale le point B où le module de la vorticité devient supérieur au critère et où la valeur de δ est inférieure à $\delta_{\max}$.

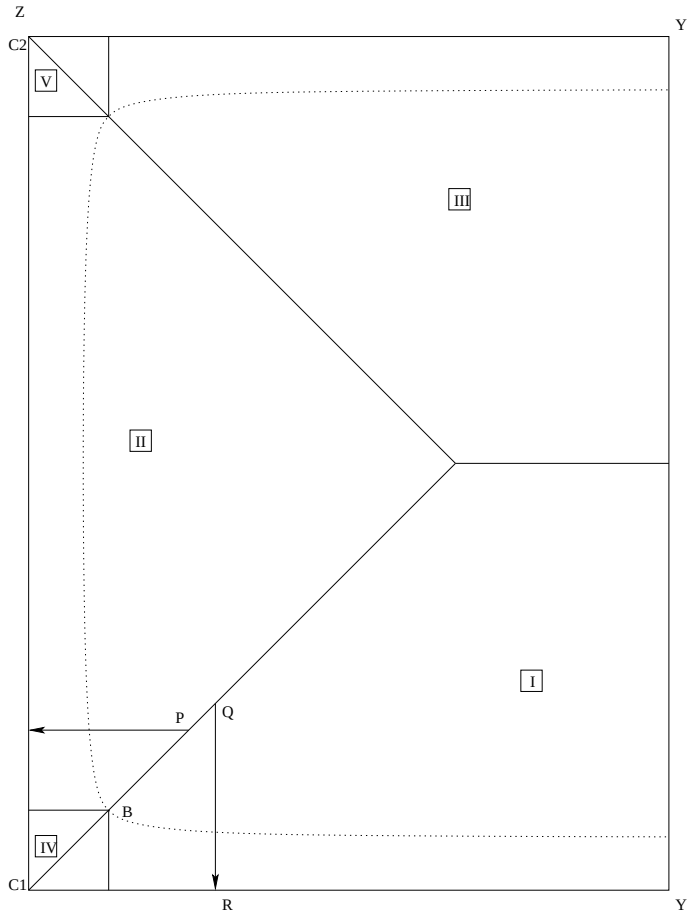

FIG. 2.8 – Schéma de détermination de l'épaisseur de couche limite pour la configuration 3.

L'épaisseur de couche limite a une valeur uniforme, définie comme la valeur de la distance du point B à la paroi. Une valeur de δ uniforme est alors définie dans chacune des régions de coin. Dans les trois autres régions, la recherche est effectuée selon les directions quasi-perpendiculaires aux parois. Dans la région I, on recherche pour chaque rangée de cellules de maillage $Y = \text{cste}$ et en allant vers la paroi, le point P où le module de la vorticité atteint la valeur du critère. Dans la région II, on procède de façon analogue pour les rangées de cellules de maillage $Z = \text{cste}$. Dans la région III, on procède de façon analogue pour les rangées de cellules de maillage $Y = \text{cste}$. Pour chaque centre de cellule des régions I, II ou III, on affecte la valeur trouvée sur chaque rangée de cellules de maillage perpendiculaire à la paroi. Par exemple, l'épaisseur de couche limite sur le « segment » QR est uniforme et correspond à la distance du point P à la paroi.

2.4.2 Calcul de l'épaisseur de couche limite pour une configuration à une paroi

La recherche de la frontière de la couche limite s'effectue dans la direction de maillage sensiblement perpendiculaire à la paroi. De même que pour la configuration 2, pour chaque rangée de cellules de maillage perpendiculaire à la paroi, on détecte le point P où le module de la vorticité atteint la valeur du critère. Pour le second critère la valeur du maximum de module de vorticité est déterminée préalablement sur chaque ligne de maillage. La recherche de la frontière de la couche limite s'effectue ensuite toujours par ligne de maillage sensiblement perpendiculaire à la

paroi en partant de la cellule où le maximum de vorticité est atteint vers l'extérieur de la couche limite. S'il n'y a pas de paroi sur une ligne de maillage orthogonale à la paroi (par exemple dans le cas du sillage de l'aile), il n'y a pas d'épaisseur de couche limite calculée et la viscosité turbulente est laissée nulle (voir figure 2.9).

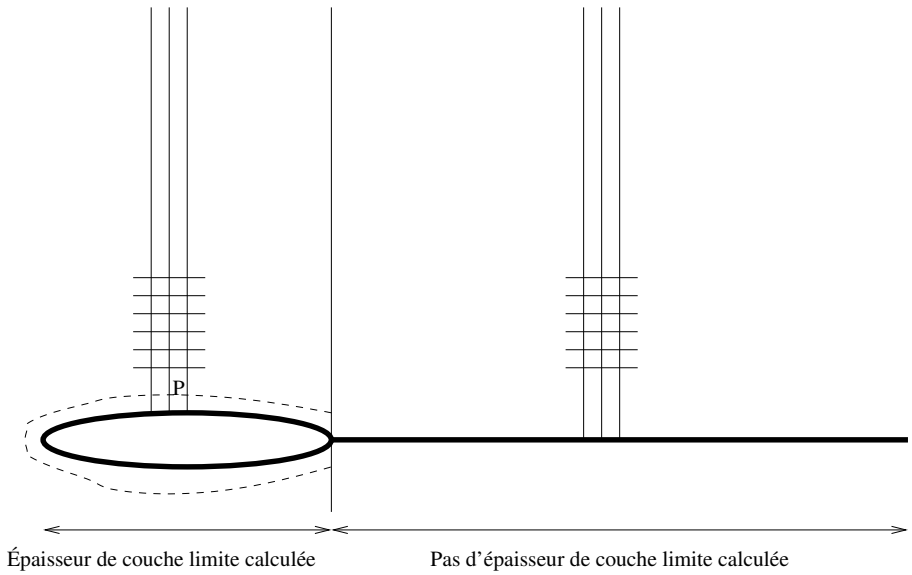

FIG. 2.9 – Schéma de détermination de l'épaisseur de couche limite pour la configuration 0.

2.5 Discrétisation du modèle k-ε Launder-Sharma

2.5.1 Flux convectif

Pour les cinq premières équations, qui correspondent aux équations d'inconnue le champ moyen, on utilise le même flux convectif que pour le cas d'un système à cinq équations (flux de Roe approche MUSCL avec correction entropique de Harten).

Dans le cas du modèle k-ε de Launder-Sharma, pour les deux équations de transport, on utilise aussi un schéma de Roe, mais d'ordre 1 avec une correction de Harten : l'expression du flux de Roe est du même type que (2.15), en prenant $\boldsymbol{W} = (\rho k, \rho\tilde{\varepsilon})^{\mathrm{T}}$, $\Psi(|\mathbf{A}|) = \mathbf{M}\ \mathbf{diag}(\psi(|\lambda_A|))\ \mathbf{M}^{-1}$, avec la fonction ψ définie comme en (2.16). Le paramètre σ vaut $\epsilon_\sigma.\tilde{a}^{\mathrm{L}}$, où on désigne par $\tilde{X}^{\mathrm{L}}$ une moyenne pondérée par les densités volumiques :

$$\tilde{X}^{\mathrm{L}} = \frac{\rho_{\mathrm{g}} X_{\mathrm{g}} + \rho_{\mathrm{d}} X_{\mathrm{d}}}{\rho_{\mathrm{g}} + \rho_{\mathrm{d}}}\ ,\ \text{pour } X \in \{u, v, w, E\}. \tag{2.34}$$

Soit $\tilde{a}^{\mathrm{L}}$, la vitesse du son associée aux grandeurs moyennées par cette moyenne pondérée :

$$\tilde{a}^{\mathrm{L}} = \sqrt{\gamma(\gamma-1)(\tilde{E}^{\mathrm{L}} - \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{L}})^2)}. \tag{2.35}$$

Les valeurs propres sont égales à $\lambda = |\tilde{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{L}} \cdot \boldsymbol{n}|$.

2.5.2 Flux diffusif

Tout comme pour le flux convectif, pour les cinq premières équations, le même flux diffusif que pour le cas d'un système à cinq équations est utilisé (avec gradients évalués aux centres des interfaces). Pour les équations de transport, on utilise également la même discrétisation avec gradients des variables k et $\tilde{\varepsilon}$ évalués aux centres des interfaces.

2.5.3 Terme source

On donne ici la discrétisation de trois parties du terme source :
- terme de production P ;
- terme de destruction D ;
- terme de correction bas Reynolds E.

Comme on l'a vu dans la série d'équations (1.36), le terme de production P s'écrit :

$$P = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}} : \nabla \boldsymbol{U} = \left(\mu_{\mathrm{t}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \tag{2.36}$$

avec la convention de sommation pour les indices répétés. Les gradients de composantes de vitesse sont évalués aux centres des cellules. Leur discrétisation se fait comme dans la section 2.3.1. Pour $g \in \{u, v, w\}$ et $\alpha \in \{x, y, z\}$:

$$\begin{aligned}
(g_{,x})_{i,j,k} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \begin{pmatrix} g_{i+\frac{1}{2},j,k} S^x_{i+\frac{1}{2},j,k} - g_{i-\frac{1}{2},j,k} S^x_{i-\frac{1}{2},j,k} \\ + g_{i,j+\frac{1}{2},k} S^x_{i,j+\frac{1}{2},k} - g_{i,j-\frac{1}{2},k} S^x_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ + g_{i,j,k+\frac{1}{2}} S^x_{i,j,k+\frac{1}{2}} - g_{i,j,k-\frac{1}{2}} S^x_{i,j,k-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(g_{i+1,j,k} + g_{i,j,k}) S^x_{i+\frac{1}{2},j,k} - \frac{1}{2}(g_{i,j,k} + g_{i-1,j,k}) S^x_{i-\frac{1}{2},j,k} \\ + \frac{1}{2}(g_{i,j+1,k} + g_{i,j,k}) S^x_{i,j+\frac{1}{2},k} - \frac{1}{2}(g_{i,j,k} + g_{i,j-1,k}) S^x_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ + \frac{1}{2}(g_{i,j,k+1} + g_{i,j,k}) S^x_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(g_{i,j,k} + g_{i,j,k-1}) S^x_{i,j,k-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.37}$$

On a des formules similaires pour des dérivées par rapport à y ou z en substituant à x les coordonnées y ou z.

Le terme de destruction D peut s'écrire de deux manières (cf. équations (1.36)-(1.38)). Formellement, ces deux expressions sont les mêmes. Néanmoins, dans le code *elsA*, c'est la première expression $D = 2\mu(\nabla\sqrt{k}) \cdot (\nabla\sqrt{k})$ qui est discrétisée. On extrait d'abord le radical de k avant d'évaluer le gradient de cette quantité aux centres des cellules. Dans les formules de la sous-section 2.3.1, la grandeur g vaut alors $\sqrt{k}$:

$$\begin{aligned}
((\sqrt{k})_{,x})_{i,j,k} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \begin{pmatrix} (\sqrt{k})_{i+\frac{1}{2},j,k} S^x_{i+\frac{1}{2},j,k} - (\sqrt{k})_{i-\frac{1}{2},j,k} S^x_{i-\frac{1}{2},j,k} \\ + (\sqrt{k})_{i,j+\frac{1}{2},k} S^x_{i,j+\frac{1}{2},k} - (\sqrt{k})_{i,j-\frac{1}{2},k} S^x_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ + (\sqrt{k})_{i,j,k+\frac{1}{2}} S^x_{i,j,k+\frac{1}{2}} - (\sqrt{k})_{i,j,k-\frac{1}{2}} S^x_{i,j,k-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}((\sqrt{k})_{i+1,j,k} + (\sqrt{k})_{i,j,k}) S^x_{i+\frac{1}{2},j,k} - \frac{1}{2}((\sqrt{k})_{i,j,k} + (\sqrt{k})_{i-1,j,k}) S^x_{i-\frac{1}{2},j,k} \\ + \frac{1}{2}((\sqrt{k})_{i,j+1,k} + (\sqrt{k})_{i,j,k}) S^x_{i,j+\frac{1}{2},k} - \frac{1}{2}((\sqrt{k})_{i,j,k} + (\sqrt{k})_{i,j-1,k}) S^x_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ + \frac{1}{2}((\sqrt{k})_{i,j,k+1} + (\sqrt{k})_{i,j,k}) S^x_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}((\sqrt{k})_{i,j,k} + (\sqrt{k})_{i,j,k-1}) S^x_{i,j,k-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.38}$$

et des formules similaires pour des dérivées par rapport à y et z.

Le terme E est calculé par la relation rappelée ici :

$$E = 2\frac{\mu\mu_{\mathrm{t}}}{\rho}\left(\nabla\left(\nabla\boldsymbol{U}\right)\right)\vdots\left(\nabla\left(\nabla\boldsymbol{U}\right)\right) = 2\frac{\mu\mu_{\mathrm{t}}}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}\cdot\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}\right). \tag{2.39}$$

La formule développée est :

$$E = 2\frac{\mu\mu_{\mathrm{t}}}{\rho}\left(\begin{array}{c} u_{,xx}^2 + u_{,xy}^2 + u_{,xz}^2 + u_{,yx}^2 + u_{,yy}^2 + u_{,yz}^2 + u_{,zx}^2 + u_{,zy}^2 + u_{,zz}^2 \\ +v_{,xx}^2 + v_{,xy}^2 + v_{,xz}^2 + v_{,yx}^2 + v_{,yy}^2 + v_{,yz}^2 + v_{,zx}^2 + v_{,zy}^2 + v_{,zz}^2 \\ +w_{,xx}^2 + w_{,xy}^2 + w_{,xz}^2 + w_{,yx}^2 + w_{,yy}^2 + w_{,yz}^2 + w_{,zx}^2 + w_{,zy}^2 + w_{,zz}^2 \end{array}\right). \tag{2.40}$$

Il reste à exprimer la discrétisation des dérivées d'ordre 2 $g_{,xy}, g \in \{u, v, w\}, (x, y) \in \{x, y, z\}^2$. Notons qu'une fois discrétisées, les relations de Schwarz ne sont plus strictement vérifiées :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) \neq \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}). \tag{2.41}$$

On donne ici l'expression de la discrétisation de la dérivée d'ordre 2 de la grandeur g par rapport à la variable d'espace y puis x (on obtient des formules similaires pour toutes les autres combinaisons dans l'ensemble $\{x, y, z\}^2$) :

$$\begin{aligned}
(g_{,xy})_{i,j,k} = ((g_{,y})_{,x})_{i,j,k} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}}\left(\begin{array}{c} (g_{,y})_{i+\frac{1}{2},j,k}S^x_{i+\frac{1}{2},j,k} - (g_{,y})_{i-\frac{1}{2},j,k}S^x_{i-\frac{1}{2},j,k} \\ +(g_{,y})_{i,j+\frac{1}{2},k}S^x_{i,j+\frac{1}{2},k} - (g_{,y})_{i,j-\frac{1}{2},k}S^x_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ +(g_{,y})_{i,j,k+\frac{1}{2}}S^x_{i,j,k+\frac{1}{2}} - (g_{,y})_{i,j,k-\frac{1}{2}}S^x_{i,j,k-\frac{1}{2}} \end{array}\right), \\
&= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}}\left(\begin{array}{c} \frac{(g_{,y})_{i+1,j,k}+(g_{,y})_{i,j,k}}{2}S^x_{i+\frac{1}{2},j,k} - \frac{(g_{,y})_{i,j,k}+(g_{,y})_{i-1,j,k}}{2}S^x_{i-\frac{1}{2},j,k} \\ +\frac{(g_{,y})_{i,j+1,k}+(g_{,y})_{i,j,k}}{2}S^x_{i,j+\frac{1}{2},k} - \frac{(g_{,y})_{i,j,k}+(g_{,y})_{i,j-1,k}}{2}S^x_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ +\frac{(g_{,y})_{i,j,k+1}+(g_{,y})_{i,j,k}}{2}S^x_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \frac{(g_{,y})_{i,j,k}+(g_{,y})_{i,j,k-1}}{2}S^x_{i,j,k-\frac{1}{2}} \end{array}\right).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

À nouveau, il faut évaluer des dérivées de grandeurs par rapport aux directions spatiales, cette fois-ci aux centres de cellules adjacentes à la cellule courante (i, j, k), soit en les cellules $(i+1, j, k)$, $(i-1, j, k)$, $(i, j+1, k)$, $(i, j-1, k)$, $(i, j, k+1)$, $(i, j, k-1)$. On obtient ainsi la discrétisation de la dérivée d'ordre 2 de g par rapport à la variable y puis x, en tenant compte des simplifications du type intégration du vecteur surface élémentaire sur la surface fermée du volume de contrôle) :

$$(g_{,xy})_{i,j,k} = ((g_{,y})_{,x})_{i,j,k} = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}}\left(\begin{array}{l} \lambda_{xy,i,j,k}g_{i,j,k} + \lambda_{xy,i+2,j,k}g_{i+2,j,k} + \lambda_{xy,i-2,j,k}g_{i-2,j,k} \\ + \lambda_{xy,i,j+2,k}g_{i,j+2,k} + \lambda_{xy,i,j-2,k}g_{i,j-2,k} \\ + \lambda_{xy,i,j,k+2}g_{i,j,k+2} + \lambda_{xy,i,j,k-2}g_{i,j,k-2} \\ + \lambda_{xy,i+1,j+1,k}g_{i+1,j+1,k} + \lambda_{xy,i+1,j-1,k}g_{i+1,j-1,k} \\ + \lambda_{xy,i+1,j,k+1}g_{i+1,j,k+1} + \lambda_{xy,i+1,j,k-1}g_{i+1,j,k-1} \\ + \lambda_{xy,i-1,j+1,k}g_{i-1,j+1,k} + \lambda_{xy,i-1,j-1,k}g_{i-1,j-1,k} \\ + \lambda_{xy,i-1,j,k+1}g_{i-1,j,k+1} + \lambda_{xy,i-1,j,k-1}g_{i-1,j,k-1} \\ + \lambda_{xy,i,j+1,k+1}g_{i,j+1,k+1} + \lambda_{xy,i,j+1,k-1}g_{i,j+1,k-1} \\ + \lambda_{xy,i,j-1,k+1}g_{i,j-1,k+1} + \lambda_{xy,i,j-1,k-1}g_{i,j-1,k-1} \end{array}\right), \tag{2.43}$$

Dans les cellules adjacentes à une frontière, on utilise les valeurs des quantités $\boldsymbol{U}$ et $\sqrt{k}$ données par la condition aux limites. Pour le calcul de $\nabla(\nabla\boldsymbol{U})$ dans une cellule adjacente à la frontière, il faut évaluer $\nabla\boldsymbol{U}$ dans les cellules fictives. Pour cela, $\boldsymbol{U}$ est extrapolé à l'ordre 0.

Les coefficients de la page précédente sont donnés ci-après :

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\lambda_{xy,i} & = & -\left(\begin{array}{l}\dfrac{S^x_{i+\frac{1}{2}}S^y_{i+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+1}}+\dfrac{S^x_{j+\frac{1}{2}}S^y_{j+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{j+1}}+\dfrac{S^x_{k+\frac{1}{2}}S^y_{k+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{k+1}}\\ +\dfrac{S^x_{i-\frac{1}{2}}S^y_{i-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i-1}}+\dfrac{S^x_{j-\frac{1}{2}}S^y_{j-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{j-1}}+\dfrac{S^x_{k-\frac{1}{2}}S^y_{k-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{k-1}}\end{array}\right),\\
\lambda_{xy,i+2,j,k} & = & \dfrac{S^x_{i+\frac{1}{2}}S^y_{i+\frac{3}{2}}}{\mathcal{V}_{i+1}},\\
\lambda_{xy,i-2,j,k} & = & \dfrac{S^x_{i-\frac{1}{2}}S^y_{i-\frac{3}{2}}}{\mathcal{V}_{i-1}},\\
\lambda_{xy,i,j+2,k} & = & \dfrac{S^x_{j+\frac{1}{2}}S^y_{j+\frac{3}{2}}}{\mathcal{V}_{j+1}},\\
\lambda_{xy,i,j-2,k} & = & \dfrac{S^x_{j-\frac{1}{2}}S^y_{j-\frac{3}{2}}}{\mathcal{V}_{j-1}},\\
\lambda_{xy,i,j,k+2} & = & \dfrac{S^x_{k+\frac{1}{2}}S^y_{k+\frac{3}{2}}}{\mathcal{V}_{k+1}},\\
\lambda_{xy,i,j,k-2} & = & \dfrac{S^x_{k-\frac{1}{2}}S^y_{k-\frac{3}{2}}}{\mathcal{V}_{k-1}},\\
\lambda_{xy,i+1,j+1,k} & = & \dfrac{S^x_{i+\frac{1}{2}}S^y_{i+1,j+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+1}}+\dfrac{S^x_{j+\frac{1}{2}}S^y_{i+\frac{1}{2},j+1}}{\mathcal{V}_{j+1}},\\
\lambda_{xy,i+1,j-1,k} & = & -\dfrac{S^x_{i+\frac{1}{2}}S^y_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+1}}-\dfrac{S^x_{j-\frac{1}{2}}S^y_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\mathcal{V}_{j-1}},\\
\lambda_{xy,i+1,j,k+1} & = & \dfrac{S^x_{i+\frac{1}{2}}S^y_{i+1,k+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+1}}+\dfrac{S^x_{k+\frac{1}{2}}S^y_{i+\frac{1}{2},k+1}}{\mathcal{V}_{k+1}},\\
\lambda_{xy,i+1,j,k-1} & = & -\dfrac{S^x_{i+\frac{1}{2}}S^y_{i+1,k-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+1}}-\dfrac{S^x_{k-\frac{1}{2}}S^y_{i+\frac{1}{2},k-1}}{\mathcal{V}_{k-1}},\\
\lambda_{xy,i-1,j+1,k} & = & \dfrac{S^x_{i-\frac{1}{2}}S^y_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i-1}}+\dfrac{S^x_{j+\frac{1}{2}}S^y_{i-\frac{1}{2},j+1}}{\mathcal{V}_{j+1}},\\
\lambda_{xy,i-1,j-1,k} & = & -\dfrac{S^x_{i-\frac{1}{2}}S^y_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i-1}}-\dfrac{S^x_{j-\frac{1}{2}}S^y_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\mathcal{V}_{j-1}},\\
\lambda_{xy,i-1,j,k+1} & = & \dfrac{S^x_{i-\frac{1}{2}}S^y_{i-1,k+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i-1}}+\dfrac{S^x_{k+\frac{1}{2}}S^y_{i-\frac{1}{2},k+1}}{\mathcal{V}_{k+1}},\\
\lambda_{xy,i-1,j,k-1} & = & -\dfrac{S^x_{i-\frac{1}{2}}S^y_{i-1,k-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i-1}}-\dfrac{S^x_{k-\frac{1}{2}}S^y_{i-\frac{1}{2},k-1}}{\mathcal{V}_{k-1}},\\
\lambda_{xy,i,j+1,k+1} & = & \dfrac{S^x_{j+\frac{1}{2}}S^y_{j+1,k+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{j+1}}+\dfrac{S^x_{k+\frac{1}{2}}S^y_{j+\frac{1}{2},k+1}}{\mathcal{V}_{k+1}},\\
\lambda_{xy,i,j+1,k-1} & = & -\dfrac{S^x_{j+\frac{1}{2}}S^y_{j+1,k-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{j+1}}-\dfrac{S^x_{k-\frac{1}{2}}S^y_{j+\frac{1}{2},k-1}}{\mathcal{V}_{k-1}},\\
\lambda_{xy,i,j-1,k+1} & = & \dfrac{S^x_{j-\frac{1}{2}}S^y_{j-1,k+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{j-1}}+\dfrac{S^x_{k+\frac{1}{2}}S^y_{j-\frac{1}{2},k+1}}{\mathcal{V}_{k+1}},\\
\lambda_{xy,i,j-1,k-1} & = & -\dfrac{S^x_{j-\frac{1}{2}}S^y_{j-1,k-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{j-1}}-\dfrac{S^x_{k-\frac{1}{2}}S^y_{j-\frac{1}{2},k-1}}{\mathcal{V}_{k-1}}.
\end{array}
\right.
\tag{2.44}
$$

2.6 Conditions aux limites

Un état à la frontière qui intervient dans le calcul discret du flux convectif et du flux diffusif à la frontière est déterminé ici. Le flux convectif du champ moyen sur l'interface frontière est notamment égal au flux physique de l'état w_{b}. Les grandeurs sur la frontière portent l'indice b alors que celles au centre de la cellule adjacente à l'interface frontière portent l'indice 0 comme on peut le voir sur la figure 2.10.

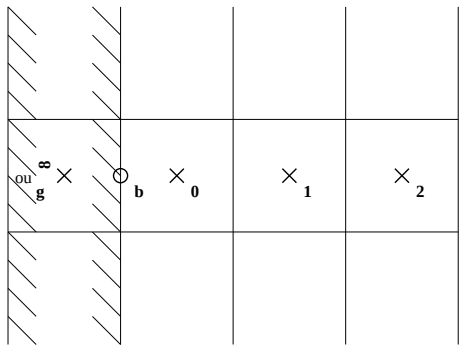

FIG. 2.10 – Notations pour les indices de quantités au voisinage d'une frontière.

2.6.1 Paroi adiabatique

En chaque point M de la paroi, on a adhérence du fluide et nullité du flux de chaleur q. Ces conditions s'expriment donc par les deux relations suivantes :

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}} = \mathbf{0} \text{ et } \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}} = \mathbf{0}. \tag{2.45}$$

Pour les autres grandeurs :

$$\rho_{\mathrm{b}} = \rho_0 \text{ et } p_{\mathrm{b}} = p_0. \tag{2.46}$$

Pour les variables turbulentes du modèle k-ε de Launder-Sharma, on a en plus les relations :

$$\mu_{\mathrm{tb}} = 0, k_{\mathrm{b}} = 0 \text{ et } \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{b}} = 0. \tag{2.47}$$

2.6.2 Symétrie

On suppose l'existence d'une cellule fictive notée g, miroir de la cellule adjacente à la frontière et notée 0. La vitesse en g a une composante normale opposée à la composante normale de la vitesse en 0, $\boldsymbol{U}_0$ et une composante tangentielle (vecteur du plan tangent à la frontière de symétrie), identique à la composante tangentielle de $\boldsymbol{U}_0$ soit :

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{g}} = -\left(\boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} + \boldsymbol{U}_{\mathrm{t}0}, \tag{2.48}$$

avec $\boldsymbol{n}$ normale extérieure à la frontière de symétrie. En définissant la vitesse sur la face de la cellule 0 portée par la frontière Σ_{b}, $\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}$ comme moyenne arithmétique des vitesses $\boldsymbol{U}_0$ et $\boldsymbol{U}_{\mathrm{g}}$, il vient :

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{U}_0 - \left(\boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}. \tag{2.49}$$

Pour les autres grandeurs :

$$\rho_{\mathrm{b}} = \rho_0 \text{ et } p_{\mathrm{b}} = p_0. \tag{2.50}$$

Pour le modèle k-ε de Launder-Sharma, il faut également écrire la nullité de la dérivée normale des deux quantités turbulentes sur la frontière de symétrie :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial k}{\partial n} & = & 0, \\ \dfrac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial n} & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.51}$$

Les trois types de conditions aux limites suivantes utilisent le concept de relations caractéristiques non détaillé ici. Pour plus d'informations, on pourra se référer par exemple au Manuel Théorique *elsA* [54]. Le principe de la méthode consiste à déterminer un état frontière permettant le calcul des flux numériques sur l'interface frontière. On résout un système de cinq équations composé des conditions aux limites imposées (qui remplacent les relations caractéristiques avec vitesse entrante) et des relations caractéristiques utilisables (qui correspondent aux relations caractéristiques avec vitesse sortante).

2.6.3 Non réflexion

Pour cette condition aux limites, on utilise toutes les relations caractéristiques associées à des directions caractéristiques sortantes pour relier w_{b} à w_0 et les caractéristiques entrantes pour relier w_{b} à w_∞, l'état à l'infini. Dans le cas des modèles k-ε, les deux variables turbulentes k et ε sont extrapolées.

2.6.4 Frontière sortante subsonique — Condition de pression. Profil de pression statique imposée

En chaque point de la frontière M_{b}, la pression statique p_{b} est imposée. Les quatre autres variables définissant l'écoulement moyen sont déterminées à l'aide des quatre relations caractéristiques discrètes utilisables. On obtient ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_{\mathrm{b}} & = & p_{\mathrm{imp}}, \\ \rho_{\mathrm{b}} & = & \rho_0 + \frac{p_{\mathrm{imp}}-p_0}{(a^2)_0}, \\ U_{\mathrm{nb}} & = & U_n^0 + \frac{p_{\mathrm{imp}}-p_0}{(\rho a)_0}, \\ U_{\mathrm{t1b}} & = & U_{\mathrm{t1}}^0, \\ U_{\mathrm{t2b}} & = & U_{\mathrm{t2}}^0. \end{array}\right. \tag{2.52}$$

Soit le système d'équations de variables primitives dans le repère cartésien (x, y, z) :

$$\left\{\begin{array}{rclcl} \rho_{\mathrm{b}} & = & \rho_0 + \frac{p_{\mathrm{imp}}-p_0}{(a^2)_0} & = & \rho_0 + \frac{p_{\mathrm{imp}}-p_0}{\gamma p_0}\rho_0, \\ u_{\mathrm{b}} & = & u_0 + \frac{p_{\mathrm{imp}}-p_0}{(\rho a)_0} n_x & = & u_0 + \frac{p_{\mathrm{imp}}-p_0}{\sqrt{\gamma p_0 \rho_0}} n_x, \\ v_{\mathrm{b}} & = & v_0 + \frac{p_{\mathrm{imp}}-p_0}{(\rho a)_0} n_y & = & v_0 + \frac{p_{\mathrm{imp}}-p_0}{\sqrt{\gamma p_0 \rho_0}} n_y, \\ w_{\mathrm{b}} & = & w_0 + \frac{p_{\mathrm{imp}}-p_0}{(\rho a)_0} n_z & = & w_0 + \frac{p_{\mathrm{imp}}-p_0}{\sqrt{\gamma p_0 \rho_0}} n_z, \\ p_{\mathrm{b}} & = & p_{\mathrm{imp}}, & & \end{array}\right. \tag{2.53}$$

avec $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)^{\mathrm{T}}$.

Dans le cas des modèles k-ε, les deux variables turbulentes k et ε sont extrapolées :

$$k_{\mathrm{b}} = k_0 \text{ et } \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{b}} = \tilde{\varepsilon}_0. \tag{2.54}$$

2.6.5 Frontière entrante subsonique — Condition d'injection 1

En un point M_b d'une frontière d'injection subsonique, pour l'écoulement moyen, il faut imposer quatre conditions aux limites. La direction de l'écoulement moyen déterminée par la donnée du vecteur unitaire $\boldsymbol{d}_\mathrm{b}$, la pression d'arrêt p_ib et l'enthalpie d'arrêt h_ib sont imposées. La détermination de l'écoulement est complétée à l'aide de la seule relation caractéristique discrète à vitesse sortante :

$$p_\mathrm{b} + (\rho a)_0 U_\mathrm{b}(\boldsymbol{d}_\mathrm{b} \cdot \boldsymbol{n}) = p_0 + (\rho a)_0 U_0(\boldsymbol{d}_\mathrm{b} \cdot \boldsymbol{n}), \tag{2.55}$$

avec $\boldsymbol{U}_\mathrm{b} = U_\mathrm{b}\boldsymbol{d}_\mathrm{b}$ vitesse qui est donc parallèle au vecteur unitaire imposé $\boldsymbol{d}_\mathrm{b}$.

On utilise la méthode de Newton pour déterminer les inconnues p_b et U_b. On a les relations suivantes :

$$h_\mathrm{ib} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\mathrm{b}}{\rho_\mathrm{b}} + \frac{1}{2}U_\mathrm{b}^2, \tag{2.56}$$

$$\rho_\mathrm{b} = \rho_\mathrm{ib}\left(\frac{p_\mathrm{b}}{p_\mathrm{ib}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_\mathrm{ib}}{h_\mathrm{ib}}\left(\frac{p_\mathrm{b}}{p_\mathrm{ib}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{2.57}$$

En éliminant la masse volumique ρ_b entre (2.56) et (2.57), la pression s'exprime en fonction du module de la vitesse U_b par :

$$p_\mathrm{b} = p_\mathrm{ib}\left(1 - \frac{U_\mathrm{b}^2}{2h_\mathrm{ib}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{2.58}$$

La pression p_b et le module U_b de la vitesse sont alors solutions du système non linéaire constitué des relations (2.55) et (2.58), résolu par une méthode de Newton, puis la masse volumique est déduite de la relation (2.57).

On a ainsi deux relations implicites équivalentes du fait de la relation (2.58) entre les grandeurs $(\rho_0, U_0, p_0, p_\mathrm{b})$ et les grandeurs $(\rho_0, U_0, p_0, U_\mathrm{b})$:

$$f_1(\rho_0, U_0, p_0, p_\mathrm{b}) = p_\mathrm{b} + \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}\sqrt{2h_\mathrm{ib}\left(1 - \left(\frac{p_\mathrm{b}}{p_\mathrm{ib}}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)}(\boldsymbol{d}_\mathrm{b} \cdot \boldsymbol{n}) - p_0 - \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}\, U_0(\boldsymbol{d}_\mathrm{b} \cdot \boldsymbol{n}) = 0, \tag{2.59}$$

$$f_2(\rho_0, U_0, p_0, U_\mathrm{b}) = p_\mathrm{ib}\left(1 - \frac{U_\mathrm{b}^2}{2h_\mathrm{ib}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}\, U_\mathrm{b}(\boldsymbol{d}_\mathrm{b} \cdot \boldsymbol{n}) - p_0 - \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}\, U_0(\boldsymbol{d}_\mathrm{b} \cdot \boldsymbol{n}) = 0. \tag{2.60}$$

Dans le cas des modèles k-ε, les deux variables turbulentes k et ε sont imposées.

2.6.6 Traitement numérique des conditions aux limites pour le flux diffusif

On ne s'intéresse ici qu'au traitement numérique des conditions aux limites pour le flux diffusif, pour le cas où les gradients de vitesse et de température sont évalués aux centres des interfaces (seul cas qui nous intéresse pour la linéarisation du flux diffusif, comme on va pouvoir le voir dans la section 3.3).

La formulation des conditions aux limites de paroi exposée au chapitre précédent indique que le calcul des flux sur l'interface frontière Σ du volume de contrôle nécessite la connaissance du tenseur des contraintes et du flux de chaleur dans le cas d'un fluide visqueux. Notons respectivement ces quantités $\boldsymbol{\tau}_\mathrm{b}$ et $\boldsymbol{q}_\mathrm{b}$.

Les gradients de vitesse et de température $(\nabla \boldsymbol{U})_\mathrm{b}$ et $(\nabla T)_\mathrm{b}$ sont déjà calculés sur les interfaces de bord, les conditions aux limites étant déjà prises en compte. Ils sont toujours calculés par

formule de Green sur la moitié du volume de contrôle de la cellule adjacente à la frontière. La valeur sur l'interface frontière est égale à la valeur vérifiant la condition aux limites (état avec l'indice b).

La viscosité moléculaire est calculée sur l'interface frontière à partir de l'état calculé par la condition aux limites toujours par la loi de Sutherland (1.16) :

$$\mu_{\mathrm{b}} = \frac{\beta_{\mathrm{s}}\sqrt{T_{\mathrm{b}}}}{1 + C_{\mathrm{s}}/T_{\mathrm{b}}}. \tag{2.61}$$

Sur les frontières, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}}$ et le vecteur flux de chaleur $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}$, la viscosité turbulente μ_{tb} et donc le tenseur de Reynolds $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{rb}}$, le vecteur flux de chaleur turbulent $\boldsymbol{q}_{\mathrm{tb}}$ et les grandeurs turbulentes k_{b} et $\tilde{\varepsilon}_{\mathrm{b}}$ dans le cas du modèle k-ε de Launder-Sharma, sont calculés par extrapolation à l'ordre 0 de la valeur de la grandeur correspondante au barycentre de la cellule réelle adjacente à la frontière :

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{\tau}_0, \quad \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{q}_0, \quad \mu_{\mathrm{tb}} = \mu_{\mathrm{t}0}, \quad \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{rb}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}0}, \quad \boldsymbol{q}_{\mathrm{tb}} = \boldsymbol{q}_{\mathrm{t}0}, \quad k_{\mathrm{b}} = k_0, \quad \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{b}} = \tilde{\varepsilon}_0. \tag{2.62}$$

Dans le cas d'une frontière d'entrée subsonique, les variables k et $\tilde{\varepsilon}$ sont imposées.

Dans le cas d'une paroi adiabatique, la viscosité turbulente est annulée sur les interfaces de paroi, tout comme le flux de chaleur et le vecteur vitesse (condition d'adhérence à la paroi) et les variables turbulentes k et $\tilde{\varepsilon}$ (dans le cas du modèle k-ε de Launder-Sharma) :

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{\tau}_0, \quad \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}} = \mathbf{0}, \quad (\nabla T)_{\mathrm{b}} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{U}_{\mathrm{b}} = \mathbf{0}, \quad \mu_{\mathrm{tb}} = 0, \quad \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{rb}} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{q}_{\mathrm{tb}} = \mathbf{0}, \quad k_{\mathrm{b}} = 0, \quad \tilde{\varepsilon}_{\mathrm{b}} = 0. \tag{2.63}$$

La cinquième composante du flux diffusif est donc annulée sur une interface de paroi.

2.7 Conditions de raccord entre domaines

2.7.1 Définition des frontières de raccord

La figure 2.11 montre que la décomposition en sous-domaines ajoute aux frontières matérielles et physiques des frontières de raccord, qui sont des frontières perméables artificielles de part et d'autre desquelles l'écoulement est discrétisé. Nous appelons alors frontière une portion de

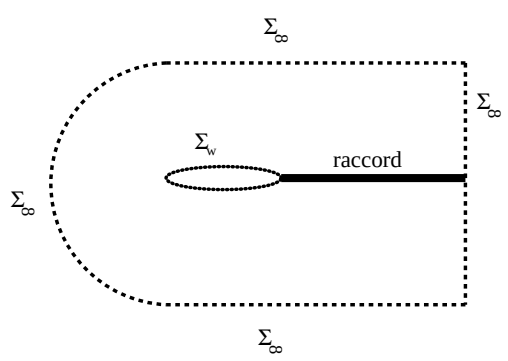

FIG. 2.11 – Domaine de calcul avec une frontière de raccord.

surface qui borne le sous-domaine de calcul et qui est représentée par un rectangle dans l'espace des indices. Les points de la frontière sont les nœuds du maillage qui appartiennent à cette frontière. Les traitements de raccord concernent les cellules de discrétisation pour lesquelles, du fait de la proximité d'une frontière de raccord, les traitements numériques courants ne sont pas

applicables. L'objectif de ces traitements spéciaux est d'assurer une précision de discrétisation de l'écoulement dans chaque voisinage de raccord, proche (voire identique, si c'est possible) de celle que l'on obtiendrait si un seul sous-domaine recouvrait largement ce voisinage.

Des frontières de raccord de plusieurs types existent. En pratique, pour les cas de calculs considérés, seuls les types suivants de frontière de raccord sont utilisés :

- frontière adjacente non coïncidente : dans ce cas, la frontière est confondue avec une frontière d'un autre sous-domaine, mais les points de maillage sur les deux surfaces ne coïncident pas. Le trait gras de la figure 2.12 signale les deux frontières de raccord, chacune bornant un sous-domaine en étant adjacente à l'autre sous-domaine ;

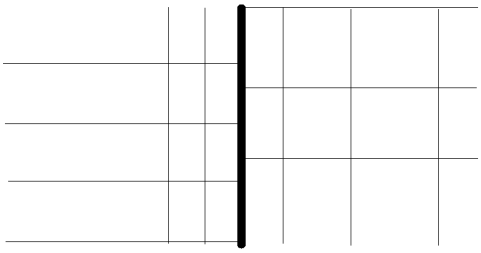

FIG. 2.12 – Frontières adjacentes non coïncidentes.

- frontière adjacente non coïncidente à ligne coïncidente : il s'agit d'un cas particulier de frontières adjacentes non coïncidentes ; dans la surface de maillage séparant les deux sous-domaines, il y a non-coïncidence de la distribution des points le long de lignes de maillage correspondant à une direction donnée, mais il y a coïncidence de ces lignes de maillage. L'intérêt de ce cas particulier est qu'il permet de simplifier considérablement les interpolations nécessaires et qu'il correspond à une topologie de maillage couramment utilisée dans le cadre des écoulements de turbomachine (il s'agit alors de frontières périodiques dont le traitement est identique à celui des frontières adjacentes, à l'adjonction près d'une condition de périodicité). La figure 2.13 montre une vue partielle d'un maillage avec raccord périodique à points non coïncidents à lignes coïncidentes ;

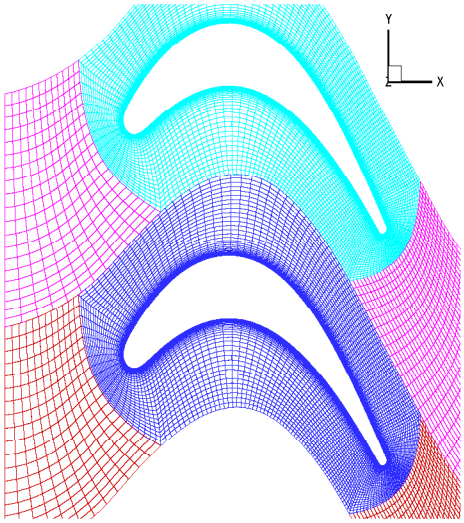

FIG. 2.13 – Vue partielle d'un maillage de turbomachine avec raccord périodique non coïncident à lignes coïncidentes. Topologie HOH.

– frontière adjacente coïncidente : on appelle ainsi une frontière d'un sous-domaine dont tous les points coïncident avec ceux d'une frontière d'un autre sous-domaine (figure 2.14).

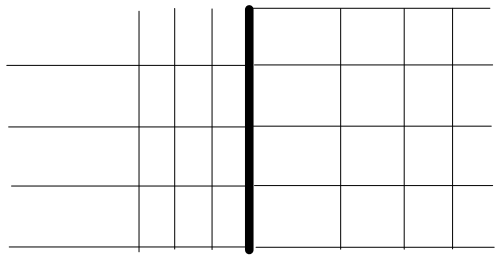

FIG. 2.14 – Frontières adjacentes coïncidentes.

2.7.2 Traitements numériques des raccords. Cas d'un raccord à points coïncidents

Les variables sont connues aux barycentres des cellules du sous-domaine considéré $(1, 2, 3\ldots)$ et sont calculées à partir des valeurs connues dans le sous-domaine opposé dans une ou plusieurs rangées de cellules fictives $(0, -1\ldots)$ du sous-domaine considéré.

Dans le cas d'un raccord à points coïncidents, le nombre de cellules fictives utiles dépend de l'ordre du schéma considéré, de manière à obtenir une discrétisation de type point courant, identique à celle qui existerait s'il n'y avait pas de raccord multidomaine à cet endroit. Les valeurs des variables aux barycentres des cellules fictives sont prises égales aux variables des cellules correspondantes du sous-domaine D2 qui est adjacent à la cellule 1 du sous-domaine D1.

Des formules de type point courant sont alors appliquées après avoir extrait dans le sous-domaine opposé les valeurs sur le nombre de couches de maillage nécessaires au traitement numérique considéré.

2.8 Calcul des gradients

2.8.1 Résolution des systèmes linéaires des méthodes adjointe et linéarisée discrètes

Le calcul de gradients par les méthodes linéarisée ou adjointe nécessite la résolution de systèmes linéaires sur le domaine de calcul :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i} = 0, \quad \forall i \in [\![1, n_\mathrm{f}]\!], \tag{2.64}$$

ou

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} + \left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}\right)^{\mathrm{T}} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_k + \left(\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{W}}\right)^{\mathrm{T}} = 0, \quad \forall k \in [\![1, n_\mathrm{c}]\!]. \tag{2.65}$$

La matrice à inverser est la matrice jacobienne du résidu discret des équations pour la mécanique des fluides, $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$. C'est une matrice creuse impossible à inverser par une méthode directe pour des problèmes de grande taille. Différentes méthodes itératives ont été utilisées pour l'inversion de ce système, notamment une méthode s'apparentant très fortement à celle utilisée pour le calcul d'écoulements stationnaires : une différentielle approchée apparaît à gauche du signe égal et la différentielle exacte ou aussi exacte que possible apparaît à droite du signe égal. La

première matrice sera notée $(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}})^{(\mathrm{APP})}$, la seconde, précédemment notée $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$, sera désormais notée $(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}})^{(\mathrm{EXA})}$. Soit l'algorithme itératif pour la résolution de l'équation adjointe :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}\ (\mathrm{APP})} \left(\boldsymbol{\lambda}^{(l+1)} - \boldsymbol{\lambda}^{(l)}\right) = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}\ (\mathrm{EXA})} \boldsymbol{\lambda}^{(l)} + (\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}})^{\mathrm{T}}\right), \tag{2.66}$$

et pour la méthode de l'équation linéarisée :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{APP})} \left((\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i})^{(l+1)} - (\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i})^{(l)}\right) = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{EXA})} \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i}^{(l)} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i}\right). \tag{2.67}$$

Conservant le vocabulaire usuel des schémas numériques pour le calcul d'écoulements stationnaires, on appelle le membre de gauche *phase implicite*, alors que le membre de droite est appelé *phase explicite*. On peut considérer les deux équations précédentes comme celles d'une méthode de relaxation. La précision de la solution ne dépend que de la phase explicite s'il y a bien convergence. La vitesse de convergence dépend, elle, de la phase implicite.

Notons que de nombreux codes de simulation numérique implémentent des schémas numériques appelés *backward-Euler*, ou Euler rétrograde en français, pour la simulation d'écoulements stationnaires. Ce sont des schémas implicites dont l'utilisation est motivée par de bonnes propriétés de stabilité et de convergence, qui ont été introduits indépendamment par Beam et Warming [6] d'une part, Briley et Mac Donald [8] d'autre part, dans les années 1970 et sont de la forme :

$$(\frac{\mathbf{I}}{\Delta t} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{APP})})(\boldsymbol{W}^{n+1} - \boldsymbol{W}^{n}) = -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}^{n}). \tag{2.68}$$

Lorsque l'on fait tendre le pas de temps Δt vers l'infini, il apparaît des itérations de type Newton, d'où l'autre nom des schémas *backward-Euler* : méthode quasi-Newton. Une adaptation simple des routines résolvant ce système peut donc être utilisée pour la résolution itérative de l'équation linéarisée. Pour la résolution de l'équation adjointe, une opération de transposition est nécessaire.

L'algorithme itératif de résolution définit, à chaque pas l, un grand système linéaire creux qui ne peut, lui non plus, être résolu par une méthode directe pour des configurations bidimensionnelles ou tridimensionnelles. Ce système est généralement résolu de manière approchée par une méthode de relaxation ou de gradient conjugué. Le choix s'est porté sur une méthode de relaxation LU : la matrice $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{APP})}$ — sa transposée pour la méthode adjointe — est décomposée en trois matrices blocs, une matrice diagonale par bloc $\mathbf{D}$, une matrice triangulaire inférieure stricte par bloc $\mathbf{L}$ et une matrice triangulaire supérieure stricte par bloc $\mathbf{U}$. L'algorithme de relaxation est défini par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{d}\boldsymbol{q}^0 & = & 0 \\ (\mathbf{L}+\mathbf{D})\mathrm{d}\boldsymbol{q}^1 & = & \boldsymbol{rhs} \\ (\mathbf{U}+\mathbf{D})\mathrm{d}\boldsymbol{q}^2 & = & \boldsymbol{rhs} - \mathbf{L}\mathrm{d}\boldsymbol{q}^1 \\ \ldots & & \\ (\mathbf{L}+\mathbf{D})\mathrm{d}\boldsymbol{q}^{2k-1} & = & \boldsymbol{rhs} - \mathbf{U}\mathrm{d}\boldsymbol{q}^{2k-2} \\ (\mathbf{U}+\mathbf{D})\mathrm{d}\boldsymbol{q}^{2k} & = & \boldsymbol{rhs} - \mathbf{L}\mathrm{d}\boldsymbol{q}^{2k-1} \\ \boldsymbol{q}^{n+1} & = & \boldsymbol{q}^n + \mathrm{d}\boldsymbol{q}^{2k} \end{array}\right. \tag{2.69}$$

avec $\mathrm{d}\boldsymbol{q}$ qui vaut $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i}\right)^{l+1} - \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i}\right)^{l}$ dans le cas de l'équation linéarisée et $\boldsymbol{\lambda}^{l+1} - \boldsymbol{\lambda}^{l}$ dans le cas de l'équation adjointe. En pratique, pour le calcul de gradients, comme la méthode itérative

ne nécessite pas de solution particulièrement bien convergée en sortie du schéma de relaxation, quatre pas de relaxation seulement sont réalisés ($2k = 4$). Pour nos applications, ce choix a semblé un compromis satisfaisant conduisant au plus faible coût de la méthode itérative (défini comme le coût d'une itération multiplié par le nombre d'itérations nécessaires à la convergence).

On pourra se référer à l'annexe B.1 pour trouver un critère de convergence de l'algorithme itératif.

2.8.2 Définition des matrices jacobiennes exacte et approchée

2.8.2.1 Résidu des équations pour la mécanique des fluides. Matrice jacobienne exacte

Le calcul de gradients par les méthodes directe ou adjointe discrètes nécessite l'inversion par une méthode itérative de la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$ ou de sa transposée. Pour que le conditionnement de cette matrice soit satisfaisant, l'expérience a conduit les auteurs à choisir un flux convectif du champ moyen décentré [12]. Pour le flux diffusif du champ moyen, *elsA* propose un flux diffusif centré avec évaluation des gradients de vitesse et de température aux centres des cellules ou aux centres des interfaces. Pour manipuler une différentielle plus compacte, on a retenu le flux visqueux avec gradients évalués aux centres des interfaces.

En résumé, le résidu exact $\boldsymbol{R}$ est linéarisé en cohérence avec la discrétisation spatiale du calcul stationnaire ; les formules de flux linéarisées sont les suivantes :

- flux convectif du champ moyen :
  - flux de Roe d'ordre 1 (peu utilisé en pratique) avec correction entropique de Harten ;
  - flux de Roe d'ordre 2, avec approche MUSCL, limiteur de pente de van Albada et correction entropique de Harten.
- flux diffusif du champ moyen :
  - flux centré avec gradients évalués aux centres des interfaces.

La linéarisation du flux convectif est rigoureusement exacte, même aux interfaces de bord et interfaces voisines des bords. La linéarisation du flux diffusif est réalisée, par défaut, avec une hypothèse dite de « couche mince » et en figeant les coefficients de viscosité (voir section 1.4). On reviendra en détail sur ces hypothèses, et la manière de s'en affranchir dans le chapitre 3.

2.8.2.2 Matrice jacobienne approchée

La matrice jacobienne approchée est définie à partir des linéarisations approchées des flux convectif et visqueux définies dans [57] et décrites brièvement ci-dessous :

- flux convectifs : linéarisation d'un flux décentré d'ordre 1 de Steger et Warming :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{W}_i)\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}_i + \mathbf{A}^{-}(\boldsymbol{W}_{i+1})\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}_{i+1}; \tag{2.70}$$

- flux visqueux : linéarisation centrée avec approximation de type « couche mince », « μ_{t} figé », gradients évalués aux centres des interfaces :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{v}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{M}^{v}(\boldsymbol{W}_{i+1})\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}_{i+1} - \mathbf{M}^{v}(\boldsymbol{W}_i)\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}_i; \tag{2.71}$$

  avec la matrice $\mathbf{M}$ définie par :

$$\mathbf{M}^{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi^{x} & \gamma^{x} & \gamma^{xy} & \gamma^{xz} & 0 \\ -\xi^{y} & \gamma^{xy} & \gamma^{y} & \gamma^{xy} & 0 \\ -\xi^{z} & \gamma^{xz} & \gamma^{yz} & \gamma^{z} & 0 \\ m51 & m52 & m53 & m54 & \gamma^{k} \end{pmatrix}, \tag{2.72}$$

ses coefficients sont définis par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\gamma^x = \frac{\bar{\mu}}{\rho L}(\frac{4}{3}n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)S & \gamma^y = \frac{\bar{\mu}}{\rho L}(n_x^2 + \frac{4}{3}n_y^2 + n_z^2)S & \gamma^z = \frac{\bar{\mu}}{\rho L}(n_x^2 + n_y^2 + \frac{4}{3}n_z^2)S \\
\gamma^{xy} = \frac{\bar{\mu}}{\rho L}(\frac{1}{3}n_x n_y)S & \gamma^{xz} = \frac{\bar{\mu}}{\rho L}(\frac{1}{3}n_x n_z)S & \gamma^{yz} = \frac{\bar{\mu}}{\rho L}(\frac{1}{3}n_z n_y)S \\
\gamma^k = \frac{\gamma}{\rho L}(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_\mathrm{t}}{\mathrm{Pr_t}})S & & \\
\xi^x = \gamma^x u + \gamma^{xy} v + \gamma^{xz} w & \xi^y = \gamma^{xy} u + \gamma^y v + \gamma^{yz} w & \xi^z = \gamma^{xz} u + \gamma^{yz} v + \gamma^z w \\
m51 = -\xi^x u - \xi^y v - \xi^z w - \gamma^k (E - \boldsymbol{U}^2) & & \\
m52 = \gamma^x u + \gamma^{xy} v + \gamma^{xz} w - \gamma^k u & & \\
m53 = \gamma^{xy} u + \gamma^y v + \gamma^{yz} w - \gamma^k v & & \\
m54 = \gamma^{xz} u + \gamma^{yz} v + \gamma^z w - \gamma^k w & &
\end{array}\right. \tag{2.73}$$

S représente la norme de la moyenne de deux éléments de surface consécutifs dans la direction dans laquelle on considère le flux, $(n_x, n_y, n_z)^\mathrm{T}$ désigne le vecteur normal correspondant, L est une évaluation de la longueur de la cellule dans la même direction

Les termes de bord de la matrice $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{APP})}$, contrairement à ceux de la matrice $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{EXA})}$, sont définis par troncature des formules au point courant, sans tenir compte des conditions aux limites.

2.8.2.3 Amélioration de la convergence

On a vu que les équations adjointes et linéarisées sont résolues par les algorithmes itératifs (2.66) et (2.67). Pour des applications industrielles, il est d'usage de considérer qu'une réduction du résidu du membre de droite de trois ordres de grandeurs (entre la valeur obtenue pour une initialisation par une valeur nulle de vecteur adjoint ou de sensibilité d'écoulements et la valeur obtenue avec la solution approchée courante) conduit à des valeurs de gradients suffisamment précises [12].

Quelques artifices classiques, dans la définition de $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{APP})}$ ont une influence significative sur la robustesse et la vitesse de l'algorithme de résolution itérative [16]. Citons les trois principaux :

- lorsqu'un flux convectif d'ordre 2 est utilisé (flux de Roe combiné avec le limiteur de van Albada dans la méthode MUSCL), la convergence est améliorée si l'on multiplie tous les termes convectifs de la matrice jacobienne approchée par un facteur 3/2. Cet artifice est une prise en compte très grossière dans la matrice jacobienne approchée des formules d'extrapolation MUSCL utilisées dans la construction du résidu $\boldsymbol{R}$ et dérivées dans la matrice jacobienne exacte. Cette technique est utilisée dans nos calculs ;
- la pseudo-intégration temporelle consiste à rajouter un terme en temps $\frac{1}{\Delta t}$ à la matrice jacobienne approchée $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{APP})}$. Le système à résoudre pour la méthode adjointe devient ainsi :

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}\,(\mathrm{APP})}\right)\left(\boldsymbol{\lambda}^{(l+1)} - \boldsymbol{\lambda}^{(l)}\right) = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}\,(\mathrm{EXA})}\boldsymbol{\lambda}^{(l)} + (\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}})^\mathrm{T}\right), \tag{2.74}$$

et pour la méthode de l'équation linéarisée :

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{APP})}\right)\left((\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i})^{(l+1)} - (\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i})^{(l)}\right) = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{EXA})}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha_i}^{(l)} + (\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i})\right). \tag{2.75}$$

Grâce à ce biais, la diagonale dominance de la matrice implicite est augmentée. Cette technique est surtout utilisée pour augmenter la robustesse des résolutions itératives. Elle dégrade généralement la vitesse de convergence ;

– une correction de type Harten est appliquée aux valeurs propres de la valeur absolue de la matrice jacobienne approchée

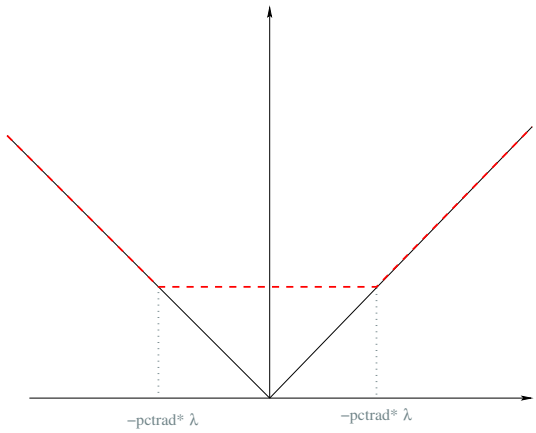

FIG. 2.15 – La fonction ψ de la correction de Harten.

$$\psi = \begin{cases} |z| & \text{si } |z| \geq \text{pctrad} \times \rho \\ \text{pctrad} \times \rho & \text{si } |z| < \text{pctrad} \times \rho \end{cases} \tag{2.76}$$

où ρ est le rayon spectal de la matrice $\mathbf{A}$ et z une de ses valeurs propres. Cette correction limite inférieurement les valeurs du spectre de $|\mathbf{A}|$. Elle s'applique donc aussi indirectement à $\mathbf{A}^+$ et $\mathbf{A}^-$. Elle a pour conséquence d'accentuer la diagonale dominance de la matrice implicite. La correction de type Harten et l'ajout d'un terme en temps jouent en général des rôles équivalents.

2.8.3 Calcul de la sensibilité du résidu par rapport au maillage

Le terme $-\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i}$ pour tout $i \in [\![1, n_\mathrm{f}]\!]$, appelé sensibilité géométrique du résidu, doit être calculé pour les deux méthodes discrètes (linéarisée et adjointe). Pour la méthode de l'équation linéarisée, il apparaît dans le membre de droite du système linéaire à résoudre, alors que pour la méthode adjointe, c'est dans l'assemblage du gradient que ce terme apparaît.

Le choix qui est fait dans *elsA* est d'évaluer ce terme par différences finies en figeant le champ aérodynamique. Ce choix a été motivé par le fait qu'une linéarisation à la main du bilan de flux $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X})$ par rapport au maillage introduit bon nombre de complications. En effet, cela implique les notions de métriques (surfaces, volumes, normales) et d'état à la frontière (les normales interviennent dans leur définition). Il faut donc tout d'abord dériver le bilan de flux $\boldsymbol{R}$ par rapport aux vecteurs surfaces, volumes de cellules, états frontières, normales..., puis exprimer les dérivées de ces dernières grandeurs par rapport aux coordonnées du maillage, ce qui est très lourd.

Ainsi, dans le cas d'une évaluation par différences finies centrées d'ordre 2, en prenant pour pas de discrétisation $\delta\alpha_i$, on fait l'approximation de la dérivée partielle :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i} \simeq \frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha} + \delta\alpha_i)) - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha} - \delta\alpha_i))}{2\delta\alpha_i}. \tag{2.77}$$

On peut également obtenir des formules d'ordre plus élevé, notamment celle d'ordre 3 disponible dans *elsA*. La principale difficulté des différences finies est la bonne détermination du

pas de discrétisation : il faut choisir un petit incrément h pour minimiser l'erreur de troncature, mais il faut aussi que h ne soit pas trop petit pour éviter les erreurs dues à la soustraction de nombres presque égaux : on obtiendrait alors comme dérivée la valeur 0 due au zéro machine du calculateur.

Une autre manière d'évaluer cette quantité, qui a été testée par l'auteur [60], est d'utiliser les nombres complexes. Cette approche, reposant sur l'utilisation de développements en variables complexes pour le calcul des dérivées a d'abord été proposée par Lyness [40] et Lyness et Moler [41], puis par Squire et Trapp [69], ainsi que Newman *et al.* [51] pour évaluer les sensibilités avec un solveur d'écoulements de type Navier-Stokes en maillage non structuré. Cette technique a l'avantage d'être directe à appliquer et de donner des dérivées à l'ordre 2 sans les problèmes numériques dus à la détermination du pas $\delta\alpha$: elle évite les soustractions de nombres presque égaux contrairement aux approximations de dérivées avec des différences finies classiques. L'expression de l'évaluation du terme de sensibilité du résidu par rapport au maillage en utilisant les variables complexes est :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha_i} \simeq \frac{\mathrm{Im}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha} + \mathrm{i}\delta\alpha_i)))}{\delta\alpha_i}, \tag{2.78}$$

(formule d'ordre 2). Pour plus de détails, on pourra se référer à l'annexe A.3.

2.9 Outils de post-traitement pour le calcul de dérivées de fonctions aérodynamiques

2.9.1 Outil de post-traitement pour les configurations d'aérodynamique externe

L'outil utilisé pour fournir des fonctions objectifs ou contraintes, ainsi que leurs dérivées par rapport au champ aérodynamique et à la métrique, est l'outil FFD41, développé par Destarac au Département d'Aérodynamique APpliquée DAAP) de l'ONERA. Les fonctions retenues dans le cadre de notre étude pour les configurations d'aérodynamique externe sont des coefficients de portance ou de traînée (traînée de champ proche D_{nf} et traînée de champ lointain D_{ff}) définis à partir de la portance de pression L_{p}, la traînée de pression D_{p}, la traînée de choc D_{w}, la traînée induite D_{i}, la traînée visqueuse D_{v} et la traînée de frottement D_{f}. Destarac définit ces dernières grandeurs dans [14]. Les deux traînées de champ proche D_{nf} et de champ lointain D_{ff} sont définies comme des sommes de termes précédents :

$$D_{\mathrm{nf}} = D_{\mathrm{p}} + D_{\mathrm{f}} \quad \text{et} \quad D_{\mathrm{ff}} = D_{\mathrm{v}} + D_{\mathrm{w}} + D_{\mathrm{i}}. \tag{2.79}$$

Les fonctions dont la dérivée par rapport au paramètre de forme est évaluée sont des coefficients basés sur ces grandeurs (coefficient de portance CL_{p}, le coefficient de traînée de champ proche CD_{nf} et le coefficient de traînée de champ lointain CD_{ff}) :

$$CL_{\mathrm{p}} = \frac{L_{\mathrm{p}}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S_{\mathrm{ref}}}, \quad CD_{\mathrm{nf}} = \frac{D_{\mathrm{nf}}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S_{\mathrm{ref}}}, \quad CD_{\mathrm{ff}} = \frac{D_{\mathrm{ff}}}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S_{\mathrm{ref}}}, \tag{2.80}$$

avec ρ_∞ masse volumique à l'infini, U_∞ module du vecteur vitesse à l'infini et S_{ref} surface de référence de la configuration.

2.9.2 Outil de post-traitement pour les configurations d'écoulements confinés

L'outil utilisé pour fournir des fonctions objectifs ou contraintes, ainsi que leurs dérivées par rapport au champ aérodynamique et à la métrique, est l'outil Xopt, développé par Castillon au Département d'Aérodynamique APpliquée (DAAP) de l'ONERA. Les fonctions retenues dans le cadre de notre étude pour les configurations d'écoulements confinés sont des moyennes surfaciques de grandeurs aérodynamiques dans le plan de sortie. Si g désigne une grandeur dont on souhaite évaluer la moyenne surfacique :

$$< g > = \frac{\sum_{l=1}^{n_{\text{interfaces}}} g_l S_l}{\sum_{l=1}^{n_{\text{interfaces}}} S_l}, \tag{2.81}$$

avec $< g >$ qui désigne l'opérateur moyenne surfacique et g_l la grandeur au centre de l'interface de surface S_l. Pour alléger les notations, on ne fera pas figurer les crochets de moyenne par la suite. Ces grandeurs aérodynamiques considérées sont prises parmi la :

- masse volumique ρ ;
- densité de vitesse dans la direction x : ρu ;
- densité de vitesse dans la direction y : ρv ;
- densité de vitesse dans la direction z : ρw ;
- densité d'énergie totale ρE.

Une fois ces moyennes établies, on peut définir de nouvelles fonctions, qui dépendent de ces moyennes surfaciques telles que :

- pression statique $p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{U}^2)$;
- température statique $T = \frac{p}{\rho r_{\text{gaz}}}$;
- pression totale ou pression d'arrêt $p_{\text{i}} = p\,(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ avec M nombre de Mach ;

et d'autres fonctions non calculées pour le moment par Xopt :

- le rendement ;
- le débit ;
- la marge au pompage...

Rappelons que le rendement isentropique η_{is} est défini par les quotients de variations de températures comme on peut le voir sur les figures 2.16 et 2.17. Les indices 1 correspondent à des moyennes dans un plan amont, alors que les indices 2 correspondent à des moyennes dans un plan aval.

On peut également exprimer le rendement insentropique par la formule :

$$\eta_{\text{is}} = \frac{1 - R_{p_{\text{i}}}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - R_{T_{\text{i}}}}, \tag{2.82}$$

où les deux rapports $R_{p_{\text{i}}}$ et $R_{T_{\text{i}}}$ sont donnés par :

$$R_{p_{\text{i}}} = \frac{p_{\text{i}2}}{p_{\text{i}1}}\,,\ R_{T_{\text{i}}} = \frac{T_{\text{i}2}}{T_{\text{i}1}}. \tag{2.83}$$

2.10 Conclusion

On a maintenant défini toutes les méthodes numériques ainsi que le calcul des termes intervenant dans le calcul de gradients par méthodes discrètes, à l'exception du calcul de la partie

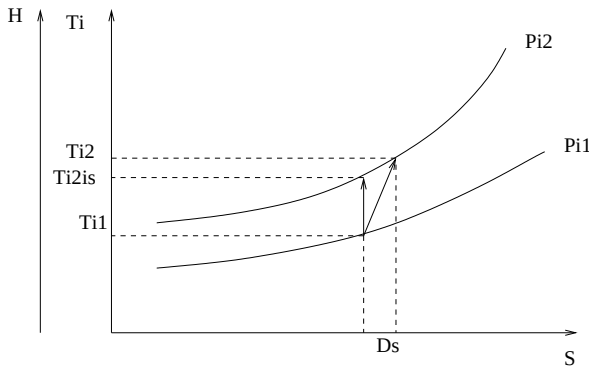

FIG. 2.16 – Caractéristique d'un compresseur.

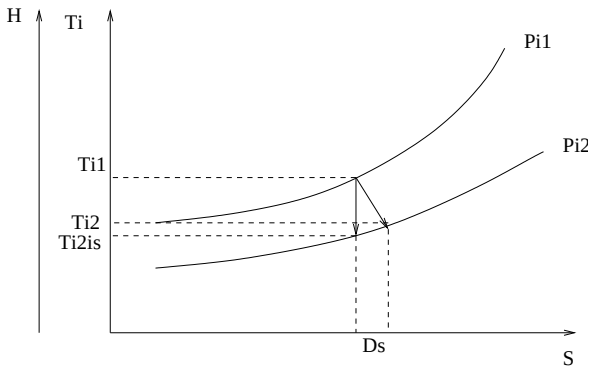

FIG. 2.17 – Caractéristique d'une turbine.

diffusive de la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$. C'est ce calcul, en particulier la discrétisation de différentes approximations du flux diffusif ainsi que leur linéarisation, qui font l'objet du chapitre suivant. Après avoir décrit les différentes linéarisations du flux diffusif, on s'intéressera aussi à la linéarisation de deux modèles de turbulence : le modèle de Michel *et al.* et le modèle k-ε de Launder-Sharma.

Chapitre 3

Linéarisation du flux diffusif

3.1 Remarques liminaires et notations

Comme expliqué dans la discussion de la section 1.4, différentes approximations sont couramment utilisées dans la linéarisation du terme diffusif du résidu discret $\boldsymbol{R}$. Rappelons que le résidu au centre d'une cellule Ω est un bilan de flux et de terme source :

$$\boldsymbol{R}_\Omega = \frac{\sum_{l=1}^{6} (\mathbf{Fc} + \mathbf{Fd}) \cdot \boldsymbol{\Sigma}_l - \boldsymbol{T}}{\mathcal{V}(\Omega)}, \tag{3.1}$$

avec $\mathbf{Fc} + \mathbf{Fd}$ la somme des flux convectifs et diffusifs et $\boldsymbol{T}$ le terme source évalué dans cette cellule. Il est bien entendu que le résidu discret $\boldsymbol{R}$ et en particulier son terme diffusif $\mathbf{Fd}$ ne sont pas évalués durant le calcul d'analyse avec les approximations que l'on va décrire dans tout ce chapitre. Seule la différentielle de ces approximations de flux diffusif apparaît dans le code source.

On cherche donc à calculer la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$ de la manière la plus précise possible pour le calcul du membre de droite des équations (2.66) et (2.67). L'approximation la plus classique est celle dite « μ_t figé » présentée dans la section 3.2. La mise en œuvre d'autres linéarisations est décrite dans les sections suivantes.

Dans toute la suite, les deux notations suivantes sont utilisées :

- $\bar{\mu} = \mu + \mu_\mathrm{t}$;
- $\bar{k} = k_\mathrm{T} + k_\mathrm{t}$.

En outre, comme dans le chapitre précédent, la convention d'orientation des surfaces *indice croissant* est adoptée. Enfin, les gradients de vitesse et de température, les grandeurs $\bar{\mu}$, $\bar{k}$ et les composantes du vecteur vitesse u, v, w, qui apparaissent dans l'expression des différentes formules de flux diffusif données par la suite, sont évalués aux centres des interfaces [1]. Ce choix a été motivé par plusieurs raisons. Théoriquement (calcul de l'erreur de troncature), cette discrétisation est plus précise que l'évaluation des gradients aux centres des cellules. Par ailleurs, le stencil des formules à discrétiser est plus compact. De manière générale, les résultats de calculs d'analyse obtenus avec une évaluation des gradients et des flux aux centres des cellules ne diffèrent presque pas de ceux avec une évaluation aux centres des interfaces d'après Ben Khelil *et al.* [7] et Jameson [29]. Enfin, la plupart du temps, indépendamment du choix de l'évaluation des gradients, c'est une linéarisation à trois points de flux visqueux basée sur l'approche de type « couche mince »

[1] La valeur d'une grandeur évaluée au centre d'une interface vaut la moyenne arithmétique des valeurs au centre des cellules adjacentes à cette interface (cas des composantes de vitesse, de $\bar{\mu}$ et $\bar{k}$).

qui est utilisée pour construire des matrices implicites de schémas *backward-Euler* jacobiennes approchées $(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}})^{\mathrm{APP}}$. Le seul inconvénient du choix de cette évaluation est le coût de calcul et du stockage mémoire (trois fois plus de données à évaluer et éventuellement à stocker que dans l'approche évaluant les gradients aux centres des cellules pour un maillage structuré).

Dans ce chapitre, on reviendra souvent sur le passage du système de variables dites *primitives* $\boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}} = (\rho, u, v, w, p)$ au système de variables dites *conservatives* $\boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)$. Si besoin, la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$ est exprimée en passant par l'intermédiaire de la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{P}}$, puis en multipliant celle-ci par les matrices locales de changement de variables $\frac{\partial \boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}$ avec :

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{u}{\rho} & \dfrac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{v}{\rho} & 0 & \dfrac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\dfrac{w}{\rho} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\rho} & 0 \\ \dfrac{\gamma-1}{2}\boldsymbol{U}^2 & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & -(\gamma-1)w & \gamma-1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Dans toute la suite, on parle indifféremment de flux diffusif, de flux visqueux des équations de Navier-Stokes ou de flux visqueux. Par défaut, ces expressions désignent le flux visqueux du champ moyen dans les équations RANS. On note $\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ le flux diffusif *discret* évalué sur l'interface d'indices $(i+\frac{1}{2}, j, k)$ associée à la surface $\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}$: $\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}$. Pour une interface frontière d'indice b, on note $\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{b}}$ le flux diffusif *discret* évalué sur l'interface frontière b associée à la surface $\boldsymbol{S}_{\mathrm{b}}$: $\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{b}} = \mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{S}_{\mathrm{b}}$

3.2 Approximation « μ_{t} figé »

L'approximation dite « μ_{t} figé » considère que la valeur du coefficient μ_{t} au centre d'une cellule est invariante lors de la modification de la forme et du maillage. La variation des quantités turbulentes pour la linéarisation du flux diffusif n'est alors pas prise en compte et le coefficient μ_{t} est considéré comme indépendant du champ conservatif. En pratique, chaque fois qu'apparaissent μ, k_{T}, μ_{t} ou k_{t} dans une expression à dériver par rapport au champ conservatif $\boldsymbol{W}$, ces grandeurs sont considérées comme des constantes, d'où l'appellation de « μ_{t} figé ». La bibliographie de la section 1.4 a montré que cette approximation est très courante. Son intérêt principal est que le choix et la complexité du modèle de turbulence n'interviennent pas pour la linéarisation du flux diffusif. On a ainsi une linéarisation approchée mais générale de la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$.

3.3 Approche de type « couche mince »

3.3.1 Approche « couche mince » physique

Les hypothèses pour se situer dans cette approche sont que le nombre de Reynolds Re est élevé, et de se trouver au voisinage d'une paroi dans la couche limite (soit l'équation de la paroi : $y = 0$). Par contre, cette approche n'est pas satisfaisante dans le cas de forts décollements. Dans les régions où l'hypothèse de « couche mince » est valide, la partie diffusive des équations de Navier-Stokes vérifie les équations de la couche limite (équations de Prandtl) : dans le flux

visqueux suivant les directions x et y, les dérivées dont l'amplitude est prépondérante sont les dérivées en y (perpendiculaire à la paroi).

3.3.2 Extension de l'approche « couche mince » physique à la linéarisation du flux diffusif

La linéarisation exacte du bilan de flux visqueux de la phase explicite étant plutôt complexe, une différentielle approchée en se plaçant dans une hypothèse de type « couche mince » (voir [42]) est calculée, *i.e.* en négligeant la contribution des termes de dérivation croisée. Pour cela, on considère le flux continu dans une direction donnée $\boldsymbol{V}_1 = (n_x, n_y, n_z)^{\mathrm{T}}$ et pour chaque expression faisant intervenir une dérivée spatiale, seule la partie correspondant à une dérivée suivant $\boldsymbol{V}_1$ est conservée. En pratique, chaque composante de $\mathbf{Fd}\cdot\boldsymbol{V}_1$ est réécrite sous la forme $f_{1,V_1}+f_{2,V_2}+f_{3,V_3}$ où $\boldsymbol{V}_2$ et $\boldsymbol{V}_3$ sont deux vecteurs orthogonaux à $\boldsymbol{V}_1$ et seul le premier terme f_{1,V_1} est conservé.

On obtient ainsi la formule :

$$\mathbf{Fd}\cdot\boldsymbol{V}_1 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu}((\frac{4}{3}n_x^2+n_y^2+n_z^2)u_{,V_1}+\frac{1}{3}n_xn_yv_{,V_1}+\frac{1}{3}n_xn_zw_{,V_1}) \\ \bar{\mu}(\frac{1}{3}n_xn_yu_{,V_1}+(n_x^2+\frac{4}{3}n_y^2+n_z^2)v_{,V_1}+\frac{1}{3}n_yn_zw_{,V_1}) \\ \bar{\mu}(\frac{1}{3}n_xn_yu_{,V_1}+\frac{1}{3}n_xn_yv_{,V_1}+(n_x^2+n_y^2+\frac{4}{3}n_z^2)w_{,V_1}) \\ \bar{k}T_{,V_1} \quad +\bar{\mu}[(\frac{4}{3}n_x^2+n_y^2+n_z^2)u_{,V_1}+\frac{1}{3}n_xn_yv_{,V_1}+\frac{1}{3}n_xn_zw_{,V_1}]u \\ \quad +\bar{\mu}[\frac{1}{3}n_xn_yu_{,V_1}+(n_x^2+\frac{4}{3}n_y^2+n_z^2)v_{,V_1}+\frac{1}{3}n_yn_zw_{,V_1}]v \\ \quad +\bar{\mu}[\frac{1}{3}n_xn_zu_{,V_1}+\frac{1}{3}n_yn_zv_{,V_1}+(n_x^2+n_y^2+\frac{4}{3}n_z^2)w_{,V_1}]w \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

3.3.3 Détail du calcul de la formule de flux diffusif dans l'approximation de type « couche mince »

La matrice de flux diffusif (2.24) est rappelée ici :

$$\mathbf{Fd} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{\mu}(\frac{4}{3}u_{,x}-\frac{2}{3}v_{,y}-\frac{2}{3}w_{,z}) & \bar{\mu}(u_{,y}+v_{,x}) & \bar{\mu}(u_{,z}+w_{,x}) \\ \bar{\mu}(u_{,y}+v_{,x}) & \bar{\mu}(-\frac{2}{3}u_{,x}+\frac{4}{3}v_{,y}-\frac{2}{3}w_{,z}) & \bar{\mu}(v_{,z}+w_{,y}) \\ \bar{\mu}(u_{,z}+w_{,x}) & \bar{\mu}(v_{,z}+w_{,y}) & \bar{\mu}(-\frac{2}{3}u_{,x}-\frac{2}{3}v_{,y}+\frac{4}{3}w_{,z}) \\ \bar{k}T_{,x} & \bar{k}T_{,y} & \bar{k}T_{,z} \\ +Fd_{21}u+Fd_{22}v+Fd_{23}w & +Fd_{31}u+Fd_{32}v+Fd_{33}w & +Fd_{41}u+Fd_{42}v+Fd_{43}w \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Soit

$$\boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

et soient $\boldsymbol{V}_2$ et $\boldsymbol{V}_3$ des vecteurs orthogonaux à $\boldsymbol{V}_1$ (pas nécessairement normés). On peut prendre par exemple :

$$\boldsymbol{V}_2 = \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -n_z \\ n_y \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

On n'écrit ici que les trois composantes liées à la vitesse.

$$\mathbf{Fd}_{2-4}\cdot\boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} \bar{\mu}((\frac{4}{3}u_{,x}-\frac{2}{3}v_{,y}-\frac{2}{3}w_{,z})n_x+(u_{,y}+v_{,x})n_y+(u_{,z}+w_{,x})n_z) \\ \bar{\mu}((u_{,y}+v_{,x})n_x+(-\frac{2}{3}u_{,x}+\frac{4}{3}v_{,y}-\frac{2}{3}w_{,z})n_y+(v_{,z}+w_{,y})n_z) \\ \bar{\mu}((u_{,z}+w_{,x})n_x+(v_{,z}+w_{,y})n_y+(-\frac{2}{3}u_{,x}-\frac{2}{3}v_{,y}+\frac{4}{3}w_{,z})n_z) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

On écrit la deuxième composante de $\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{V}_1$ sous la forme $f_{1,V_1} + f_{2,V_2} + f_{3,V_3}$ et on suppose que les f_i peuvent se mettre sous la forme :

$$f_i = \lambda_{i1} u + \lambda_{i2} v + \lambda_{i3} w. \tag{3.8}$$

Comme on a :

$$u_{,V_1} = u_{,x} n_x + u_{,y} n_y + u_{,z} n_z, \tag{3.9}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}(\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{V}_1)_2 \quad = \quad & (\lambda_{21} u_{,x} + \lambda_{22} v_{,x} + \lambda_{23} w_{,x}) n_x + (\lambda_{21} u_{,y} + \lambda_{22} v_{,y} + \lambda_{23} w_{,y}) n_y + (\lambda_{21} u_{,z} + \lambda_{22} v_{,z} + \lambda_{23} w_{,z}) n_z \\ & -(\lambda_{31} u_{,x} + \lambda_{32} v_{,x} + \lambda_{33} w_{,x}) n_y + (\lambda_{31} u_{,y} + \lambda_{32} v_{,y} + \lambda_{33} w_{,y}) n_x \\ & -(\lambda_{41} u_{,y} + \lambda_{42} v_{,y} + \lambda_{43} w_{,y}) n_z + (\lambda_{41} u_{,z} + \lambda_{42} v_{,z} + \lambda_{43} w_{,z}) n_y.\end{aligned} \tag{3.10}$$

et l'on obtient ainsi le système (puisque cela doit être vrai pour tout champ de vitesse $(u, v, w)^{\mathrm{T}}$) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_{21} n_x - \lambda_{31} n_y & = & \frac{4}{3} \bar{\mu} n_x, \\ \lambda_{22} n_x - \lambda_{32} n_y & = & \bar{\mu} n_y, \\ \lambda_{23} n_x - \lambda_{33} n_y & = & \bar{\mu} n_z, \\ \lambda_{21} n_y + \lambda_{31} n_x - \lambda_{41} n_z & = & \bar{\mu} n_y, \\ \lambda_{22} n_y + \lambda_{32} n_x - \lambda_{42} n_z & = & -\frac{2}{3} \bar{\mu} n_x, \\ \lambda_{23} n_y + \lambda_{33} n_x - \lambda_{43} n_z & = & 0, \\ \lambda_{21} n_z + \lambda_{41} n_y & = & \bar{\mu} n_z, \\ \lambda_{22} n_z + \lambda_{42} n_y & = & 0, \\ \lambda_{23} n_z + \lambda_{43} n_y & = & -\frac{2}{3} \bar{\mu} n_x. \end{array} \right. \tag{3.11}$$

On trouve donc :

$$\lambda_{21} = \frac{\frac{4}{3} n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \bar{\mu}, \quad \lambda_{22} = \frac{n_x n_y}{3(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)} \bar{\mu}, \quad \lambda_{23} = \frac{n_x n_z}{3(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)} \bar{\mu}, \tag{3.12}$$

soit, en prenant un vecteur $\boldsymbol{V}_1$ normé :

$$\lambda_{21} = (\frac{4}{3} n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \bar{\mu} = (\frac{1}{3} n_x^2 + 1) \bar{\mu}, \quad \lambda_{22} = \frac{1}{3} n_x n_y \bar{\mu}, \quad \lambda_{23} = \frac{1}{3} n_x n_z \bar{\mu}, \tag{3.13}$$

et des formules du même type pour les composantes 3 et 4 de $\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{V}_1$. Pour la cinquième composante de $\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{V}_1$, on écrit qu'elle vaut :

$$(\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{V}_1)_5^{\mathrm{CM}} = \bar{k} T_{,V_1} + (\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{V}_1)_2^{\mathrm{CM}} u + (\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{V}_1)_3^{\mathrm{CM}} v + (\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{V}_1)_4^{\mathrm{CM}} w. \tag{3.14}$$

On obtient ainsi l'expression d'une approximation du flux visqueux donnée en (3.3), que l'on va dériver par rapport au champ conservatif $\boldsymbol{W}$ pour obtenir une évaluation de la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$.

3.3.4 Gradients évalués aux centres des interfaces

On écrit ici la discrétisation de la formule (3.3), avec des notations plus précises pour indiquer la localisation de l'évaluation des grandeurs aux interfaces :

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\left((1+\frac{1}{3}n_x^2)(u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_xn_y(v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_xn_z(w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}n_xn_y(u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_y^2)(v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_yn_z(w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}n_xn_z(v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_yn_z(v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_z^2)(w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \bar{k}_{i+\frac{1}{2}}(T_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} \\ +\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\left((1+\frac{1}{3}n_x^2)(u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_xn_y(v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_xn_z(w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right)u_{i+\frac{1}{2}} \\ +\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}n_xn_y(u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_y^2)(v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_yn_z(w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right)v_{i+\frac{1}{2}} \\ +\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}n_xn_z(u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_yn_z(v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_z^2)(w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right)w_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

avec $\boldsymbol{V}_1 = \frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{S_{i+\frac{1}{2},j,k}}$, $S_{i+\frac{1}{2},j,k}$ étant la norme du vecteur $\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}$. Soit g une grandeur parmi $\{u, v, w, T\}$. Le gradient de g dans la direction V_1 est évalué en approximation de type « couche mince » par :

$$(g_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} = \frac{g_{i+1}S_{i+1} - g_iS_i}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}, \quad (3.16)$$

avec les notations :

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= \frac{S_{i+\frac{1}{2},j,k} + S_{i+\frac{3}{2},j,k}}{2}, & S_i &= \frac{S_{i-\frac{1}{2},j,k} + S_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2}, \\ g_{i+1} &= g_{i+1,j,k}, & g_i &= g_{i,j,k}, \\ g_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{g_{i,j,k} + g_{i+1,j,k}}{2}, & g &\in \{u, v, w, \bar{\mu}, \bar{k}, \mathcal{V}\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

On obtient ainsi :

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{(1+\frac{1}{3}n_x^2)(u_{i+1}S_{i+1}-u_iS_i)+\frac{1}{3}n_xn_y(v_{i+1}S_{i+1}-v_iS_i)+\frac{1}{3}n_xn_z(w_{i+1}S_{i+1}-w_iS_i)}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{3}n_xn_y(u_{i+1}S_{i+1}-u_iS_i)+(1+\frac{1}{3}n_y^2)(v_{i+1}S_{i+1}-v_iS_i)+\frac{1}{3}n_yn_z(w_{i+1}S_{i+1}-w_iS_i)}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{3}n_xn_z(u_{i+1}S_{i+1}-u_iS_i)+\frac{1}{3}n_yn_z(v_{i+1}S_{i+1}-v_iS_i)+(1+\frac{1}{3}n_z^2)(w_{i+1}S_{i+1}-w_iS_i)}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \\ \bar{k}_{i+\frac{1}{2}}\frac{T_{i+1}S_{i+1}-T_iS_i}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \\ +\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{(1+\frac{1}{3}n_x^2)(u_{i+1}S_{i+1}-u_iS_i)+\frac{1}{3}n_xn_y(v_{i+1}S_{i+1}-v_iS_i)+\frac{1}{3}n_xn_z(w_{i+1}S_{i+1}-w_iS_i)}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}u_{i+\frac{1}{2}} \\ +\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{3}n_xn_y(u_{i+1}S_{i+1}-u_iS_i)+(1+\frac{1}{3}n_y^2)(v_{i+1}S_{i+1}-v_iS_i)+\frac{1}{3}n_yn_z(w_{i+1}S_{i+1}-w_iS_i)}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}v_{i+\frac{1}{2}} \\ +\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{3}n_xn_z(u_{i+1}S_{i+1}-u_iS_i)+\frac{1}{3}n_yn_z(v_{i+1}S_{i+1}-v_iS_i)+(1+\frac{1}{3}n_z^2)(w_{i+1}S_{i+1}-w_iS_i)}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}w_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}, \quad (3.18)$$

Cette formulation fait intervenir moins de cellules (deux) que la formulation « gradient aux centres » (quatre) pour l'expression du gradient suivant une direction, et par extension, pour

l'expression du flux visqueux avec approximation de type « couche mince ». On obtient aussi directement les dérivées de la grandeur $(g_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}$ par rapport à g_i et g_{i+1} :

$$\frac{\partial (g_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}}{\partial g_{i+1}} = \frac{S_{i+1}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (g_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}}{\partial g_i} = \frac{-S_i}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}. \tag{3.19}$$

3.3.5 Dérivation par rapport au champ conservatif

Chaque composante de $\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ est d'abord dérivée par rapport au système de variables primitives $\boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}} = (\rho, u, v, w, p)^{\mathrm{T}}$ puis multipliée par la matrice de passage $\frac{\partial \boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}$ pour obtenir les dérivées de chaque composante par rapport au champ de variables conservatives $\boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^{\mathrm{T}}$. Ainsi, dans le cas d'une interface intérieure, on note :

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_2 \\ (\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_3 \\ (\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_4 \\ (\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_5 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Les coefficients de conductivité thermique k_{T} et k_{t} sont liés aux coefficients de viscosité moléculaire μ et turbulente μ_{t} via les nombres de Prandtl Pr et Prandtl turbulent Pr_{t} :

$$\bar{k} = k_{\mathrm{T}} + k_{\mathrm{t}} = c_{\mathrm{p}} \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\mathrm{Pr}_{\mathrm{t}}} \right). \tag{3.21}$$

Ainsi, par la loi des gaz parfaits :

$$T = \frac{p}{\rho r_{\mathrm{gaz}}}, \tag{3.22}$$

on obtient :

$$\bar{k}T = \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\mathrm{Pr}_{\mathrm{t}}} \right) \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}. \tag{3.23}$$

En pratique, $\mathrm{Pr} = 0{,}72$ et $\mathrm{Pr}_{\mathrm{t}} = 0{,}9$.

La matrice jacobienne au centre de la cellule d'indice $(i+1, j, k)$ pour la composante de flux diffusif discrétisé approché $\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ par rapport au système de variables primitives $\boldsymbol{P}_{i+1,j,k}$ au centre de la cellule d'indices $(i+1, j, k)$ est :

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{P}_{i+1,j,k}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^x & \gamma^{xy} & \gamma^{xz} & 0 \\ 0 & \gamma^{xy} & \gamma^y & \gamma^{xy} & 0 \\ 0 & \gamma^{xz} & \gamma^{yz} & \gamma^z & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l}
\gamma^x = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{3}n_x^2)\frac{S_{i+1,j,k}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}S_{i+\frac{1}{2},j,k},\\
\gamma^y = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{3}n_y^2)\frac{S_{i+1,j,k}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}S_{i+\frac{1}{2},j,k},\\
\gamma^z = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{3}n_z^2)\frac{S_{i+1,j,k}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}S_{i+\frac{1}{2},j,k},\\
\gamma^{xy} = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{1}{3}n_xn_y\frac{S_{i+1,j,k}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}S_{i+\frac{1}{2},j,k},\\
\gamma^{xz} = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{1}{3}n_xn_z\frac{S_{i+1,j,k}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}S_{i+\frac{1}{2},j,k},\\
\gamma^{yz} = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{1}{3}n_yn_z\frac{S_{i+1,j,k}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}S_{i+\frac{1}{2},j,k},\\
m_{51} = \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}+\frac{\mu_\mathrm{t}}{\mathrm{Pr_t}}\right)_{i+\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{-p_{i+1}}{\rho_{i+1}^2}\frac{S_{i+1,j,k}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}S_{i+\frac{1}{2},j,k},\\
m_{52} = \gamma^x u_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{xy}v_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{xz}w_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^\mathrm{v}_{i+\frac{1}{2},j,k})_2,\\
m_{53} = \gamma^{xy} u_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{y}v_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{yz}w_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^\mathrm{v}_{i+\frac{1}{2},j,k})_3,\\
m_{54} = \gamma^{xz} u_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{yz}v_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{z}w_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^\mathrm{v}_{i+\frac{1}{2},j,k})_4,\\
m_{55} = \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}+\frac{\mu_\mathrm{t}}{\mathrm{Pr_t}}\right)_{i+\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho_{i+1}}\frac{S_{i+1,j,k}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}}S_{i+\frac{1}{2},j,k}.
\end{array}\right. \tag{3.25}$$

et les notations de (3.17). La dérivation par rapport au système de variables primitives $\boldsymbol{P}_{i,j,k}$ au centre de la cellule d'indices (i,j,k) donne des formules similaires à la précédente, en changeant les $S_{i+1,j,k}$ en $-S_{i,j,k}$.

3.3.6 Traitement des conditions aux limites

Dans cette sous-section, pour alléger les notations, l'indice 0 désigne le triplet $(0,j,k)$.

Pour le flux diffusif en approche de type « couche mince », seule la condition aux limites de paroi adiabatique avec adhérence à la paroi est linéarisée précisément. Cette condition aux limites impose les relations : $\mu_\mathrm{t}=0$, $\boldsymbol{U}=0$ et $\nabla T=0$ à l'interface (voir section 2.6). Le volume de contrôle d'intégration pour le calcul du gradient à l'interface frontière b vaut la moitié du volume de la cellule adjacente à la paroi (d'où $\mathcal{V}_\mathrm{b}=\frac{1}{2}\mathcal{V}_0$).

L'approximation de flux discrétisé, donnée dans la relation (3.18) devient alors, en tenant compte de la nullité de la vitesse $\boldsymbol{U}$, de μ_t et de ∇T à la paroi, en prenant $\mu=\mu_0$ sur la paroi et toutes les normes de surface qui apparaissent égales à S_b :

$$\boldsymbol{F}^\mathrm{v}_\mathrm{b} = \left[\begin{array}{c}
0\\
2\mu_0\frac{(1+\frac{1}{3}n_x^2)u_0S_\mathrm{b}+\frac{1}{3}n_xn_yv_0S_\mathrm{b}+\frac{1}{3}n_xn_zw_0S_\mathrm{b}}{\mathcal{V}_0}\\
2\mu_0\frac{\frac{1}{3}n_xn_yu_0S_\mathrm{b}+(1+\frac{1}{3}n_y^2)v_0S_\mathrm{b}+\frac{1}{3}n_yn_zw_0S_\mathrm{b}}{\mathcal{V}_0}\\
2\mu_0\frac{\frac{1}{3}n_xn_zu_0S_\mathrm{b}+\frac{1}{3}n_yn_zv_0S_\mathrm{b}+(1+\frac{1}{3}n_z^2)w_0S_\mathrm{b}}{\mathcal{V}_0}\\
0
\end{array}\right] S_\mathrm{b}. \tag{3.26}$$

La matrice jacobienne au centre de la cellule d'indice 0 adjacente à la paroi, pour la composante de flux diffusif approché $\boldsymbol{F}^\mathrm{v}_\mathrm{b}$ par rapport au système de variables primitives $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{P}_{0,j,k}$ dont les valeurs sont prises au centre de la cellule d'indices $(0,j,k)$ est :

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^\mathrm{v}_\mathrm{b}}{\partial \boldsymbol{P}_{0,j,k}} = \mu_0\frac{2S_\mathrm{b}}{\mathcal{V}_0}\left[\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & (1+\frac{1}{3}n_x^2) & \frac{1}{3}n_xn_y & \frac{1}{3}n_xn_z & 0\\
0 & \frac{1}{3}n_xn_y & (1+\frac{1}{3}n_y^2) & \frac{1}{3}n_yn_z & 0\\
0 & \frac{1}{3}n_xn_z & \frac{1}{3}n_yn_z & (1+\frac{1}{3}n_z^2) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] S_\mathrm{b}. \tag{3.27}$$

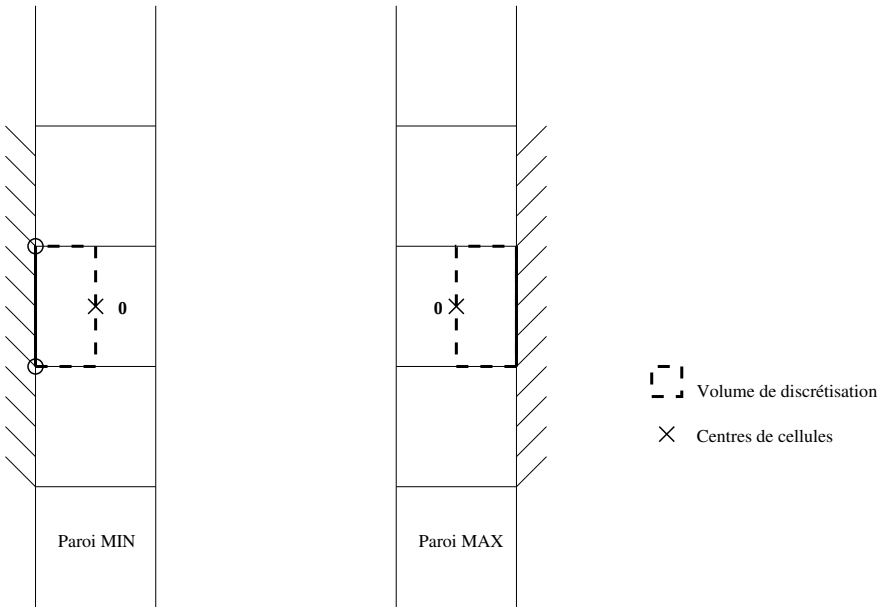

FIG. 3.1 – Stencils de l'approximation du flux diffusif discrétisé à une interface paroi (b, j) d'indices `MIN` et `MAX` avec gradient évalué au centre des interfaces, avec approximation de type « couche mince ».

Pour le cas d'une frontière autre qu'une paroi adiabatique, une matrice jacobienne est construite comme celles provenant de la linéarisation d'une condition aux limites au bord par troncature. Le volume de contrôle de la cellule vaut celui de la cellule adjacente 0, la somme des viscosités vaut celle au centre de la cellule 0 ; de même pour $\bar{k}$. La vitesse à l'interface frontière b est prise égale à la vitesse au centre de la cellule 0 pour la cinquième composante de $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}}$ et est considérée comme constante par rapport aux composantes de vitesses dans la cellule adjacente (pour la dérivation).

Le flux visqueux discrétisé donné dans la relation (3.18) devient alors, en prenant $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0$:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mu}_0 \frac{(1+\frac{1}{3}n_x^2)u_0 S_{\mathrm{b}} + \frac{1}{3}n_x n_y v_0 S_{\mathrm{b}} + \frac{1}{3}n_x n_z w_0 S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}_0} \\ \bar{\mu}_0 \frac{\frac{1}{3}n_x n_y u_0 S_{\mathrm{b}} + (1+\frac{1}{3}n_y^2)v_0 S_{\mathrm{b}} + \frac{1}{3}n_y n_z w_0 S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}_0} \\ \bar{\mu}_0 \frac{\frac{1}{3}n_x n_z u_0 S_{\mathrm{b}} + \frac{1}{3}n_y n_z v_0 S_{\mathrm{b}} + (1+\frac{1}{3}n_z^2)w_0 S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}_0} \\ \bar{k}_0 \frac{T_0 S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}_0} \\ +\bar{\mu}_0 \frac{(1+\frac{1}{3}n_x^2)u_0 S_{\mathrm{b}} + \frac{1}{3}n_x n_y v_0 S_{\mathrm{b}} + \frac{1}{3}n_x n_z w_0 S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}_0} u_0 \\ +\bar{\mu}_0 \frac{\frac{1}{3}n_x n_y u_0 S_{\mathrm{b}} + (1+\frac{1}{3}n_y^2)v_0 S_{\mathrm{b}} + \frac{1}{3}n_y n_z w_0 S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}_0} v_0 \\ +\bar{\mu}_0 \frac{\frac{1}{3}n_x n_z u_0 S_{\mathrm{b}} + \frac{1}{3}n_y n_z v_0 S_{\mathrm{b}} + (1+\frac{1}{3}n_z^2)w_0 S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}_0} w_0 \end{bmatrix} S_{\mathrm{b}}. \tag{3.28}$$

On obtient alors la matrice jacobienne au centre de la cellule d'indice 0 adjacente à la frontière, pour la composante de flux diffusif approché $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}}$ par rapport au système de variables primitives

$\boldsymbol{P}_{0,j,k}$ dont les valeurs sont prises dans la cellule d'indices $(0,j,k)$ est :

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}}}{\partial \boldsymbol{P}_{0,j,k}} = \frac{S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_0(1+\frac{1}{3}n_x^2) & \bar{\mu}_0\frac{1}{3}n_x n_y & \bar{\mu}_0\frac{1}{3}n_x n_z & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_0\frac{1}{3}n_x n_y & \bar{\mu}_0(1+\frac{1}{3}n_y^2) & \bar{\mu}_0\frac{1}{3}n_y n_z & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_0\frac{1}{3}n_x n_z & \bar{\mu}_0\frac{1}{3}n_y n_z & \bar{\mu}_0(1+\frac{1}{3}n_z^2) & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} S_{\mathrm{b}}, \tag{3.29}$$

avec :

$$\begin{cases} m_{51} = \left(\frac{\mu_0}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_{\mathrm{t}0}}{\mathrm{Pr_t}}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{-p_0}{\rho_0^2}, \\ m_{52} = \bar{\mu}_0((1+\frac{1}{3}n_x^2)u_0 + \frac{1}{3}n_x n_y v_0 + \frac{1}{3}n_x n_z w_0), \\ m_{53} = \bar{\mu}_0(\frac{1}{3}n_x n_y u_0 + (1+\frac{1}{3}n_y^2)v_0 + \frac{1}{3}n_y n_z w_0), \\ m_{54} = \bar{\mu}_0(\frac{1}{3}n_x n_z u_0 + \frac{1}{3}n_y n_z v_0 + (1+\frac{1}{3}n_z^2)w_0), \\ m_{55} = \left(\frac{\mu_0}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_{\mathrm{t}0}}{\mathrm{Pr_t}}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho_0}. \end{cases} \tag{3.30}$$

3.4 Linéarisation du flux diffusif sans approximation de type « couche mince » à « μ_{t} figé »

Dans la section précédente, grâce à l'approximation de type « couche mince », une approximation du flux diffusif simple à dériver par rapport au champ conservatif ainsi qu'une linéarisation du flux visqueux ont été construites, ce qui nous a permis d'obtenir une évaluation de la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$. Dans cette section, pour le calcul des termes $\frac{\partial \boldsymbol{Fd}}{\partial \boldsymbol{W}}$ intervenant dans la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$, on supprime toute hypothèse simplificatrice de type « couche mince » concernant l'expression du flux diffusif mais en conservant l'hypothèse forte de « μ_{t} figé ». En particulier, aucun terme de dérivation croisée n'est négligé. L'approche retenue pour l'évaluation des gradients est toujours une évaluation aux interfaces. Des résultats plus précis sont donc attendus.

3.4.1 Première formulation

On procède comme pour la discrétisation et la dérivation du flux visqueux en approche de type « couche mince ». On considère le flux visqueux dans une direction donnée $\boldsymbol{V}_1 = (n_{x1}, n_{y1}, n_{z1})^{\mathrm{T}}$.

Soient trois vecteurs formant une base (en pratique, on prendra ici les trois directions de maillage, leur sens étant toujours choisi suivant les indices croissants ; dans ce cas-là, les vecteurs de base ne sont pas nécessairement orthogonaux deux à deux) :

$$\boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_2 = \begin{pmatrix} n_{x2} \\ n_{y2} \\ n_{z2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_3 = \begin{pmatrix} n_{x3} \\ n_{y3} \\ n_{z3} \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

On écrit les composantes de $\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{V}_1$ sous la forme $f_{1,V_1} + f_{2,V_2} + f_{3,V_3}$ et on suppose que les f_i s'écrivent sous la forme :

$$f_i = \lambda_{i1}u + \lambda_{i2}v + \lambda_{i3}w. \tag{3.32}$$

Notons $(u,v,w)^{\mathrm{T}}$ la vitesse à l'interface $(i+\frac{1}{2},j,k)$ sur laquelle on calcule le flux diffusif. Ainsi :

$$\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu}((\frac{4}{3}u_{,x} - \frac{2}{3}v_{,y} - \frac{2}{3}w_{,z})n_{x1} + (u_{,y}+v_{,x})n_{y1} + (u_{,z}+w_{,x})n_{z1}) \\ \bar{\mu}((u_{,y}+v_{,x})n_{x1} + (-\frac{2}{3}u_{,x} + \frac{4}{3}v_{,y} - \frac{2}{3}w_{,z})n_{y1} + (v_{,z}+w_{,y})n_{z1}) \\ \bar{\mu}((u_{,z}+w_{,x})n_{x1} + (v_{,z}+w_{,y})n_{y1} + (-\frac{2}{3}u_{,x} - \frac{2}{3}v_{,y} + \frac{4}{3}w_{,z})n_{z1}) \\ \dots \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

En développant les $g_{,V_m}, g \in \{u, v, w\}$ et $m \in \{1, 2, 3\}$ sous la forme :

$$g_{,V_m} = g_{,x} n_{xm} + g_{,y} n_{ym} + g_{,z} n_{zm}, \tag{3.34}$$

par identification, on obtient l'expression d'une approximation du flux visqueux sans approximation de type « couche mince » :

$$\mathbf{Fd} \cdot \boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu}(\lambda_{211} u_{,V_1} + \lambda_{212} v_{,V_1} + \lambda_{213} w_{,V_1} & +\lambda_{221} u_{,V_2} + \lambda_{222} v_{,V_2} + \lambda_{223} w_{,V_2} \\ & +\lambda_{231} u_{,V_3} + \lambda_{232} v_{,V_3} + \lambda_{233} w_{,V_3}) \\ \bar{\mu}(\lambda_{311} u_{,V_1} + \lambda_{312} v_{,V_1} + \lambda_{313} w_{,V_1} & +\lambda_{321} u_{,V_2} + \lambda_{322} v_{,V_2} + \lambda_{323} w_{,V_2} \\ & +\lambda_{331} u_{,V_3} + \lambda_{332} v_{,V_3} + \lambda_{333} w_{,V_3}) \\ \bar{\mu}(\lambda_{411} u_{,V_1} + \lambda_{412} v_{,V_1} + \lambda_{413} w_{,V_1} & +\lambda_{421} u_{,V_2} + \lambda_{422} v_{,V_2} + \lambda_{423} w_{,V_2} \\ & +\lambda_{431} u_{,V_3} + \lambda_{432} v_{,V_3} + \lambda_{433} w_{,V_3}) \\ \bar{k} T_{,V_1} + \bar{\mu} & [\ \lambda_{211} u_{,V_1} + \lambda_{212} v_{,V_1} + \lambda_{213} w_{,V_1} \\ & +\lambda_{221} u_{,V_2} + \lambda_{222} v_{,V_2} + \lambda_{223} w_{,V_2} \\ & +\lambda_{231} u_{,V_3} + \lambda_{232} v_{,V_3} + \lambda_{233} w_{,V_3}] u \\ + \bar{\mu} & [\ \lambda_{311} u_{,V_1} + \lambda_{312} v_{,V_1} + \lambda_{313} w_{,V_1} \\ & +\lambda_{321} u_{,V_2} + \lambda_{322} v_{,V_2} + \lambda_{323} w_{,V_2} \\ & +\lambda_{331} u_{,V_3} + \lambda_{332} v_{,V_3} + \lambda_{333} w_{,V_3}] v \\ + \bar{\mu} & [\ \lambda_{411} u_{,V_1} + \lambda_{412} v_{,V_1} + \lambda_{413} w_{,V_1} \\ & +\lambda_{421} u_{,V_2} + \lambda_{422} v_{,V_2} + \lambda_{423} w_{,V_2} \\ & +\lambda_{431} u_{,V_3} + \lambda_{432} v_{,V_3} + \lambda_{433} w_{,V_3}] w \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

où les λ_{lmn}, $(l, m, n) \in \{1, 2, 3\}^3$ sont solutions de systèmes linéaires de type :

$$\begin{cases} \lambda_{i11} n_{x1} + \lambda_{i21} n_{x2} + \lambda_{i31} n_{x3} &= \beta_1, \\ \lambda_{i12} n_{x1} + \lambda_{i22} n_{x2} + \lambda_{i32} n_{x3} &= \beta_2, \\ \lambda_{i13} n_{x1} + \lambda_{i23} n_{x2} + \lambda_{i33} n_{x3} &= \beta_3, \\ \lambda_{i11} n_{y1} + \lambda_{i21} n_{y2} + \lambda_{i31} n_{y3} &= \beta_4, \\ \lambda_{i12} n_{y1} + \lambda_{i22} n_{y2} + \lambda_{i32} n_{y3} &= \beta_5, \\ \lambda_{i13} n_{y1} + \lambda_{i23} n_{y2} + \lambda_{i33} n_{y3} &= \beta_6, \\ \lambda_{i11} n_{z1} + \lambda_{i21} n_{z2} + \lambda_{i31} n_{z3} &= \beta_7, \\ \lambda_{i12} n_{z1} + \lambda_{i22} n_{z2} + \lambda_{i32} n_{z3} &= \beta_8, \\ \lambda_{i13} n_{z1} + \lambda_{i23} n_{z2} + \lambda_{i33} n_{z3} &= \beta_9, \end{cases} \tag{3.36}$$

avec $(\beta_l)_{l=1,\ldots,9}$ fonctions de n_{x1}, n_{y1} et n_{z1}.

Dans λ_{lmn}, l désigne le numéro de composante du flux diffusif, m la direction de dérivation (parmi $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$) et n la composante directionnelle (1 pour x, 2 pour y, 3 pour z).

Ainsi, pour la première composante (puisque cela doit être vrai pour tout champ de vitesse $(u, v, w)^{\mathrm{T}}$) :

$$\begin{cases} \lambda_{211} n_{x1} + \lambda_{221} n_{x2} + \lambda_{231} n_{x3} &= \frac{4}{3} n_{x1}, \\ \lambda_{212} n_{x1} + \lambda_{222} n_{x2} + \lambda_{232} n_{x3} &= n_{y1}, \\ \lambda_{213} n_{x1} + \lambda_{223} n_{x2} + \lambda_{233} n_{x3} &= n_{z1}, \\ \lambda_{211} n_{y1} + \lambda_{221} n_{y2} + \lambda_{231} n_{y3} &= n_{y1}, \\ \lambda_{212} n_{y1} + \lambda_{222} n_{y2} + \lambda_{232} n_{y3} &= -\frac{2}{3} n_{x1}, \\ \lambda_{213} n_{y1} + \lambda_{223} n_{y2} + \lambda_{233} n_{y3} &= 0, \\ \lambda_{211} n_{z1} + \lambda_{221} n_{z2} + \lambda_{231} n_{z3} &= n_{z1}, \\ \lambda_{212} n_{z1} + \lambda_{222} n_{z2} + \lambda_{232} n_{z3} &= 0, \\ \lambda_{213} n_{z1} + \lambda_{223} n_{z2} + \lambda_{233} n_{z3} &= -\frac{2}{3} n_{x1}. \end{cases} \tag{3.37}$$

On a en fait pour chaque composante non pas un système de 9 équations à 9 inconnues, mais trois systèmes découplés de trois équations à trois inconnues.

Pour la première composante, on a ainsi :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_{211}n_{x1}+\lambda_{221}n_{x2}+\lambda_{231}n_{x3} & = & \frac{4}{3}n_{x1}, \\ \lambda_{211}n_{y1}+\lambda_{221}n_{y2}+\lambda_{231}n_{y3} & = & n_{y1}, \\ \lambda_{211}n_{z1}+\lambda_{221}n_{z2}+\lambda_{231}n_{z3} & = & n_{z1}, \end{array}\right. \tag{3.38}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_{212}n_{x1}+\lambda_{222}n_{x2}+\lambda_{232}n_{x3} & = & n_{y1}, \\ \lambda_{212}n_{y1}+\lambda_{222}n_{y2}+\lambda_{232}n_{y3} & = & -\frac{2}{3}n_{x1}, \\ \lambda_{212}n_{z1}+\lambda_{222}n_{z2}+\lambda_{232}n_{z3} & = & 0, \end{array}\right. \tag{3.39}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_{213}n_{x1}+\lambda_{223}n_{x2}+\lambda_{233}n_{x3} & = & n_{z1}, \\ \lambda_{213}n_{y1}+\lambda_{223}n_{y2}+\lambda_{233}n_{y3} & = & 0, \\ \lambda_{213}n_{z1}+\lambda_{223}n_{z2}+\lambda_{233}n_{z3} & = & -\frac{2}{3}n_{x1}. \end{array}\right. \tag{3.40}$$

Chaque système a pour déterminant :

$$\det(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)=\left|\begin{array}{ccc} n_{x1} & n_{x2} & n_{x3} \\ n_{y1} & n_{y2} & n_{y3} \\ n_{z1} & n_{z2} & n_{z3} \end{array}\right|. \tag{3.41}$$

On trouve ainsi (formules de Cramer) :

$$\lambda_{211}=\frac{\left|\begin{array}{ccc} \frac{4}{3}n_{x1} & n_{x2} & n_{x3} \\ n_{y1} & n_{y2} & n_{y3} \\ n_{z1} & n_{z2} & n_{z3} \end{array}\right|}{\det(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)},\quad \lambda_{212}=\frac{\left|\begin{array}{ccc} n_{y1} & n_{x2} & n_{x3} \\ -\frac{2}{3}n_{x1} & n_{y2} & n_{y3} \\ 0 & n_{z2} & n_{z3} \end{array}\right|}{\det(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)},\quad \lambda_{213}=\frac{\left|\begin{array}{ccc} n_{z1} & n_{x2} & n_{x3} \\ 0 & n_{y2} & n_{y3} \\ -\frac{2}{3}n_{x1} & n_{z2} & n_{z3} \end{array}\right|}{\det(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)},$$

$$\lambda_{221}=\frac{\left|\begin{array}{ccc} n_{x1} & \frac{4}{3}n_{x1} & n_{x3} \\ n_{y1} & n_{y1} & n_{y3} \\ n_{z1} & n_{z1} & n_{z3} \end{array}\right|}{\det(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)},\quad \lambda_{222}=\frac{\left|\begin{array}{ccc} n_{x1} & n_{y1} & n_{x3} \\ n_{y1} & -\frac{2}{3}n_{x1} & n_{y3} \\ n_{z1} & 0 & n_{z3} \end{array}\right|}{\det(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)},\quad \lambda_{223}=\frac{\left|\begin{array}{ccc} n_{x1} & n_{z1} & n_{x3} \\ n_{y1} & 0 & n_{y3} \\ n_{z1} & -\frac{2}{3}n_{x1} & n_{z3} \end{array}\right|}{\det(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)},$$

$$\lambda_{231}=\frac{\left|\begin{array}{ccc} n_{x1} & n_{x2} & \frac{4}{3}n_{x1} \\ n_{y1} & n_{y2} & n_{y1} \\ n_{z1} & n_{z2} & n_{z1} \end{array}\right|}{\det(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)},\quad \lambda_{232}=\frac{\left|\begin{array}{ccc} n_{x1} & n_{x2} & n_{y1} \\ n_{y1} & n_{y2} & -\frac{2}{3}n_{x1} \\ n_{z1} & n_{z2} & 0 \end{array}\right|}{\det(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)},\quad \lambda_{233}=\frac{\left|\begin{array}{ccc} n_{x1} & n_{x2} & n_{z1} \\ n_{y1} & n_{y2} & 0 \\ n_{z1} & n_{z2} & -\frac{2}{3}n_{x1} \end{array}\right|}{\det(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)}, \tag{3.42}$$

et des formules du même type pour les composantes 2 et 3. Pour alléger les notations, on conserve dans ce paragraphe les notations λ_{lmn} pour exprimer $\mathbf{Fd}\cdot\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}$. L'expression des flux visqueux (3.3) et (3.35) fait intervenir les gradients de grandeurs dans la direction $\boldsymbol{V}_1$ (mais aussi $\boldsymbol{V}_2$ et $\boldsymbol{V}_3$ pour le cas (3.35)).

3.4.1.1 Dérivation de gradients de grandeurs évalués aux interfaces

Maintenant que l'on a déterminé les coefficients λ_{lmn}, il reste à donner les formules de dérivation des gradients de composantes de vitesse et de température. Soit g, une grandeur parmi $\{u,v,w,T\}$ dont on souhaite évaluer le gradient sur l'interface $(i+\frac{1}{2},j,k)$ (on procède de même à une permutation d'indice près pour une interface $(i,j+\frac{1}{2},k)$ ou $(i,j,k+\frac{1}{2})$).

Les notations utilisées sont les mêmes que pour la figure 2.5, figure reproduite ci-contre.

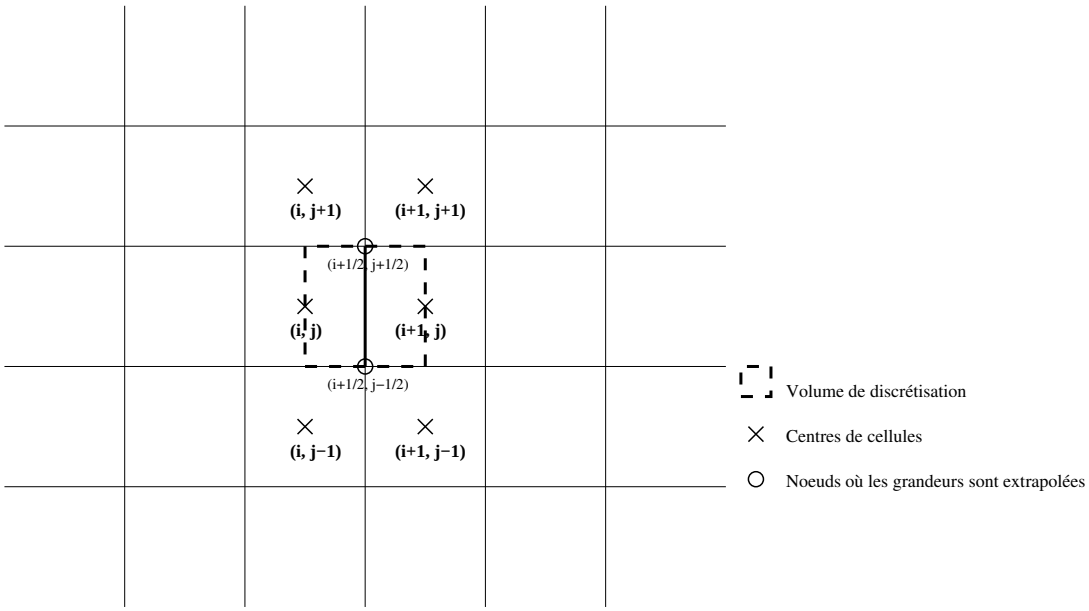

FIG. 3.2 – Stencil de l'approximation du flux diffusif discrétisé à l'interface d'indices $(i+\frac{1}{2},j)$ avec gradient évalué au centre des interfaces. Pas d'approximation de type « couche mince ».

On a les expressions suivantes, pour la discrétisation du gradient de $g, g \in \{u,v,w,T\}$ évalué à l'interface $(i+\frac{1}{2},j,k)$ dans la direction $\boldsymbol{V}_n, n \in \{1,2,3\}$:

$$g_{,Vn} = \frac{\begin{pmatrix} g_{i+1,j,k}\boldsymbol{S}_{i+1,j,k}\cdot\boldsymbol{V}_n & - g_{i,j,k}\boldsymbol{S}_{i,j,k}\cdot\boldsymbol{V}_n \\ + g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}\cdot\boldsymbol{V}_n & - g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}\cdot\boldsymbol{V}_n \\ + g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{V}_n & - g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{V}_n \end{pmatrix}}{\mathcal{V}} \tag{3.43}$$

avec $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{V}_{i,j,k}+\mathcal{V}_{i+1,j,k}}{2}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_{i+1,j,k} &= \frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}+\boldsymbol{S}_{i+\frac{3}{2},j,k}}{2}, & \boldsymbol{S}_{i,j,k} &= \frac{\boldsymbol{S}_{i-\frac{1}{2},j,k}+\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2}, \\ \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} &= \frac{\boldsymbol{S}_{i,j+\frac{1}{2},k}+\boldsymbol{S}_{i+1,j+\frac{1}{2},k}}{2}, & \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} &= \frac{\boldsymbol{S}_{i,j-\frac{1}{2},k}+\boldsymbol{S}_{i+1,j-\frac{1}{2},k}}{2}, \\ \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} &= \frac{\boldsymbol{S}_{i,j,k+\frac{1}{2}}+\boldsymbol{S}_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}}{2}, & \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} &= \frac{\boldsymbol{S}_{i,j,k-\frac{1}{2}}+\boldsymbol{S}_{i+1,j,k-\frac{1}{2}}}{2}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

et

$$\begin{aligned} g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} &= \frac{g_{i,j,k}+g_{i+1,j,k}+g_{i,j+1,k}+g_{i+1,j+1,k}}{4}, \\ g_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} &= \frac{g_{i,j,k}+g_{i+1,j,k}+g_{i,j-1,k}+g_{i+1,j-1,k}}{4}, \\ g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} &= \frac{g_{i,j,k}+g_{i+1,j,k}+g_{i,j,k+1}+g_{i+1,j,k+1}}{4}, \\ g_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} &= \frac{g_{i,j,k}+g_{i+1,j,k}+g_{i,j,k-1}+g_{i+1,j,k-1}}{4}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

On a donc le même type de formules pour les directions $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ et $\boldsymbol{V}_3$, en substituant à n les indices 1, 2 ou 3. Pour le gradient d'une grandeur évalué au centre d'une interface, le même volume de contrôle $\mathcal{V}$ est utilisé pour les trois directions de dérivation $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ et $\boldsymbol{V}_3$.

La dérivation du gradient de g évalué à l'interface $(i+\frac{1}{2},j,k)$ par rapport au champ aérodynamique dépend donc de dix cellules en croix (resp. six) pour un problème tridimensionnel

(resp. bidimensionnel), comme on a pu le voir à la sous-section 2.3.2. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_{,Vn}}{\partial g_{i,j,k}} &= \frac{1}{\mathcal{V}}\left(-\boldsymbol{S}_{i,j,k} + \frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{4}\right)\cdot \boldsymbol{V}_n,\\
\frac{\partial g_{,Vn}}{\partial g_{i+1,j,k}} &= \frac{1}{\mathcal{V}}\left(\boldsymbol{S}_{i+1,j,k} + \frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{4}\right)\cdot \boldsymbol{V}_n,\\
\frac{\partial g_{,Vn}}{\partial g_{i,j+1,k}} &= \frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}\cdot \boldsymbol{V}_n}{4\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial g_{,Vn}}{\partial g_{i+1,j+1,k}} = \frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}\cdot \boldsymbol{V}_n}{4\mathcal{V}},\\
\frac{\partial g_{,Vn}}{\partial g_{i,j-1,k}} &= -\frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}\cdot \boldsymbol{V}_n}{4\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial g_{,Vn}}{\partial g_{i+1,j-1,k}} = -\frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}\cdot \boldsymbol{V}_n}{4\mathcal{V}},\\
\frac{\partial g_{,Vn}}{\partial g_{i,j,k+1}} &= \frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}\cdot \boldsymbol{V}_n}{4\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial g_{,Vn}}{\partial g_{i+1,j,k+1}} = \frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}\cdot \boldsymbol{V}_n}{4\mathcal{V}},\\
\frac{\partial g_{,Vn}}{\partial g_{i,j,k-1}} &= -\frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}\cdot \boldsymbol{V}_n}{4\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial g_{,Vn}}{\partial g_{i+1,j,k-1}} = -\frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}\cdot \boldsymbol{V}_n}{4\mathcal{V}}.
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

Ainsi, en gardant les notations précédentes, on a les expressions des dérivées du flux diffusif discrétisé appliqué à la surface d'indices $(i+\frac{1}{2},j,k)$ avec la notation $g_{i+\frac{1}{2}} = g_{i+\frac{1}{2},j,k}$:

$$
\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathrm{cell}}} = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}
0\\
\lambda_{211}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{221}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{231}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\\
\lambda_{311}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{321}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{331}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\\
\lambda_{411}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{421}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{431}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\\
\left[\lambda_{211}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{221}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{231}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right] u_{i+\frac{1}{2}}\\
+\ \left[\lambda_{311}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{321}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{331}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right] v_{i+\frac{1}{2}}\\
+\ \left[\lambda_{411}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{421}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{431}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right] w_{i+\frac{1}{2}}
\end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,, \tag{3.47}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{cell}}} = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}
0\\
\lambda_{212}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{222}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{232}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\\
\lambda_{312}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{322}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{332}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\\
\lambda_{412}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{422}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{432}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\\
\left[\lambda_{212}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{222}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{232}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right] u_{i+\frac{1}{2}}\\
+\ \left[\lambda_{312}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{322}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{332}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right] v_{i+\frac{1}{2}}\\
+\ \left[\lambda_{412}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{422}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{432}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right] w_{i+\frac{1}{2}}
\end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,, \tag{3.48}
$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{w}_{\mathrm{cell}}} = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{213}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{223}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{233}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} \\ \lambda_{313}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{323}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{333}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} \\ \lambda_{413}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{423}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{433}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} \\ \left[\lambda_{213}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{223}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{233}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right] u_{i+\frac{1}{2}} \\ + \left[\lambda_{313}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{323}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{333}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right] v_{i+\frac{1}{2}} \\ + \left[\lambda_{413}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{423}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{433}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right] w_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,, \tag{3.49}$$

si cell $\in \{(i,j+1,k),(i,j-1,k),(i+1,j+1,k),(i+1,j-1,k),(i,j,k+1),(i,j,k-1),(i+1,j,k+1),(i+1,j,k-1)\}$.

Par contre, si cell $\in \{(i,j,k),(i+1,j,k)\}$, on a :

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathrm{cell}}} = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{211}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{221}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{231}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} \\ \lambda_{311}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{321}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{331}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} \\ \lambda_{411}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{421}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{431}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} \\ \left[\lambda_{211}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{221}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{231}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right] u_{i+\frac{1}{2}} \\ + \left[\lambda_{311}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{321}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{331}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right] v_{i+\frac{1}{2}} \\ + \left[\lambda_{411}\frac{\partial u_{,V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{421}\frac{\partial u_{,V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{431}\frac{\partial u_{,V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right] w_{i+\frac{1}{2}} \\ +\frac{1}{2}(\mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{n}_{i+\frac{1}{2},j,k})_2 \end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,, \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{cell}}} = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{212}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{222}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{232}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} \\ \lambda_{312}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{322}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{332}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} \\ \lambda_{412}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{422}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{432}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} \\ \left[\lambda_{212}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{222}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{232}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right] u_{i+\frac{1}{2}} \\ + \left[\lambda_{312}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{322}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{332}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right] v_{i+\frac{1}{2}} \\ + \left[\lambda_{412}\frac{\partial v_{,V_1}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{422}\frac{\partial v_{,V_2}}{\partial v_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{432}\frac{\partial v_{,V_3}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right] w_{i+\frac{1}{2}} \\ +\frac{1}{2}(\mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{n}_{i+\frac{1}{2},j,k})_3 \end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,, \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{w}_{\mathrm{cell}}} = \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{213}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{223}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{233}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} \\ \lambda_{313}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{323}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{333}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} \\ \lambda_{413}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{423}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{433}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} \\ \left[\lambda_{213}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{223}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{233}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right] u_{i+\frac{1}{2}} \\ + \left[\lambda_{313}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{323}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{333}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right] v_{i+\frac{1}{2}} \\ + \left[\lambda_{413}\frac{\partial w_{,V_1}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{423}\frac{\partial w_{,V_2}}{\partial w_{\mathrm{cell}}} + \lambda_{433}\frac{\partial w_{,V_3}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right] w_{i+\frac{1}{2}} \\ +\frac{1}{2}(\mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{n}_{i+\frac{1}{2},j,k})_4 \end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,. \tag{3.52}$$

Pour la dérivation par rapport à ρ et p, seule la dérivée de la cinquième composante est non nulle. Comme dans la section précédente, on utilise la relation (3.23). On a alors, pour tout triplet d'indices cell,

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_5}{\partial\rho_{\mathrm{cell}}} = \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\mathrm{Pr}_{\mathrm{t}}}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{-p_{\mathrm{cell}}}{\rho^2_{\mathrm{cell}}}\frac{\partial T_{,V1}}{\partial T_{\mathrm{cell}}}S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,, \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_5}{\partial p_{\mathrm{cell}}} = \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\mathrm{Pr}_{\mathrm{t}}}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho_{\mathrm{cell}}}\frac{\partial T_{,V1}}{\partial T_{\mathrm{cell}}}S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,. \tag{3.54}$$

Une fois obtenues ces dérivées dans le système de variables primitives $\boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}$, il reste à repasser en variables conservatives via la matrice de passage $\frac{\partial \boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}$.

3.4.1.2 Traitement des conditions aux limites

Pour le flux diffusif, tout comme dans l'approche de type « couche mince », seule la condition aux limites de paroi adiabatique avec adhérence à la paroi est linéarisée précisément.

Pour tous les types de frontières, les notations suivantes sont adoptées ; elles sont inspirées du traitement des interfaces intérieures. Soit g, une grandeur parmi $\{u, v, w, T\}$ dont on souhaite évaluer le gradient sur l'interface frontière b dans la direction i.

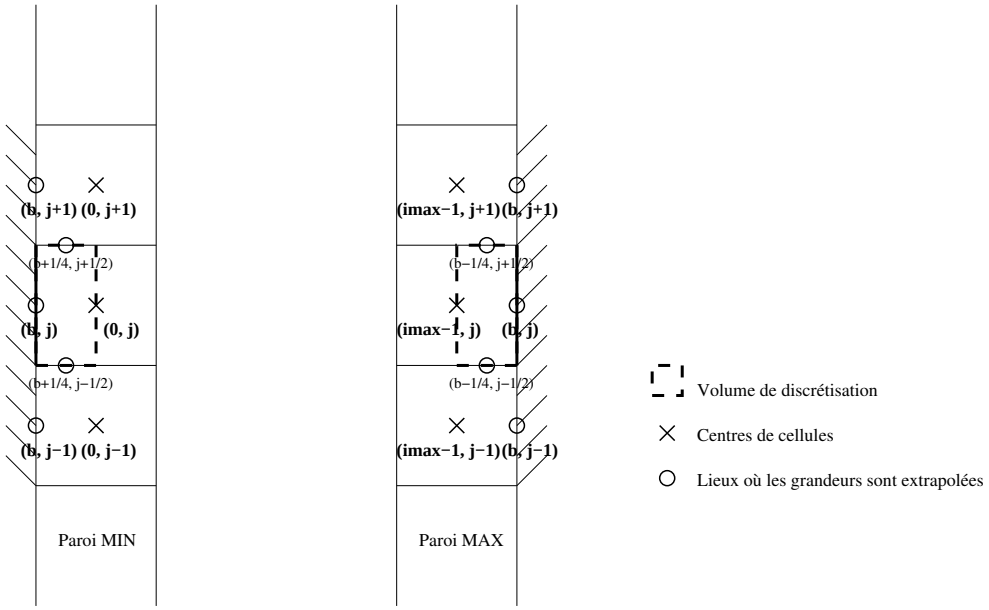

FIG. 3.3 – Stencils de l'approximation du flux diffusif discrétisé à une interface paroi (b, j) d'indices `MIN` et `MAX` avec gradient évalué au centre des interfaces, sans approximation de type « couche mince ».

On se place dans le cas d'une frontière d'indices « MIN » (voir figure 3.3) ; dans le cas d'une frontière d'indices « MAX », on substitue à tous les indices 0 de première composante, l'indice $i_{\max} - 1$. On a les expressions suivantes, pour la discrétisation du gradient de $g, g \in \{u, v, w, T\}$

évalué à l'interface b dans la direction $\boldsymbol{V}_n, n \in \{1,2,3\}$:

$$g_{,V_n} = \frac{\begin{pmatrix} g_{0,j,k}\boldsymbol{S}_{0,j,k}\cdot\boldsymbol{V}_n - g_{\mathrm{b},j,k}\boldsymbol{S}_{\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{V}_n \\ +g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j+\frac{1}{2},k}\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{0,j+\frac{1}{2},k}\cdot\boldsymbol{V}_n - g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j-\frac{1}{2},k}\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{0,j-\frac{1}{2},k}\cdot\boldsymbol{V}_n \\ +g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j,k+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{0,j,k+\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{V}_n - g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j,k-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{0,j,k-\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{V}_n \end{pmatrix}}{\mathcal{V}}, \tag{3.55}$$

avec $\mathcal{V} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_0$.

$$\boldsymbol{S}_0 = \frac{\boldsymbol{S}_{\mathrm{b}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{b}+1}}{2}, \tag{3.56}$$

et

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j+\frac{1}{2},k} &= \frac{g_{\mathrm{b},j,k} + g_{0,j,k} + g_{\mathrm{b},j+1,k} + g_{0,j+1,k}}{4}, \\ g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j-\frac{1}{2},k} &= \frac{g_{\mathrm{b},j,k} + g_{0,j,k} + g_{\mathrm{b},j-1,k} + g_{0,j-1,k}}{4}, \\ g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j,k+\frac{1}{2}} &= \frac{g_{\mathrm{b},j,k} + g_{0,j,k} + g_{\mathrm{b},j,k+1} + g_{0,j,k+1}}{4}, \\ g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j,k-\frac{1}{2}} &= \frac{g_{\mathrm{b},j,k} + g_{0,j,k} + g_{\mathrm{b},j,k-1} + g_{0,j,k-1}}{4}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

On a donc le même type de formules pour les directions $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ et $\boldsymbol{V}_3$, en substituant à n les indices 1, 2 ou 3. Tout comme pour les interfaces intérieures, on peut remarquer que pour l'évaluation du gradient d'une grandeur au centre d'une interface, on utilise le même volume de contrôle $\mathcal{V}$ pour les trois directions de dérivation $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ et $\boldsymbol{V}_3$.

La dérivation du gradient de g évalué à l'interface frontière (b, j, k) par rapport au champ aérodynamique dépend donc de cinq cellules en croix, comme on a pu le voir à la sous-section (2.3.2). On obtient ainsi les formules de dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{,V_n}}{\partial g_{0,j,k}} &= \frac{1}{\mathcal{V}}\left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{b}} + \frac{\boldsymbol{S}_{0,j+\frac{1}{2},k} - \boldsymbol{S}_{0,j-\frac{1}{2},k} + \boldsymbol{S}_{0,j,k+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{S}_{0,j,k-\frac{1}{2}}}{8}\right)\cdot\boldsymbol{V}_n, \\ \frac{\partial g_{,V_n}}{\partial g_{0,j+1,k}} &= \frac{\boldsymbol{S}_{0,j+\frac{1}{2},k}\cdot\boldsymbol{V}_n}{8\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial g_{,V_n}}{\partial g_{0,j-1,k}} = -\frac{\boldsymbol{S}_{0,j-\frac{1}{2},k}\cdot\boldsymbol{V}_n}{8\mathcal{V}}, \\ \frac{\partial g_{,V_n}}{\partial g_{0,j,k+1}} &= \frac{\boldsymbol{S}_{0,j,k+\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{V}_n}{8\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial g_{,V_n}}{\partial g_{0,j,k-1}} = -\frac{\boldsymbol{S}_{0,j,k-\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{V}_n}{8\mathcal{V}}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Les conditions imposées à la frontière, ainsi que le choix des volumes de contrôle sont les mêmes que dans le cas de l'approche de type « couche mince ». On prend $\boldsymbol{V}_{\mathrm{b}} = (u_{\mathrm{b}}, v_{\mathrm{b}}, w_{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ à la frontière (adhérence à la paroi), d'où les $g_{\mathrm{b},j,k}$, $g_{\mathrm{b},j+1,k}$, $g_{\mathrm{b},j-1,k}$, $g_{\mathrm{b},j,k+1}$, $g_{\mathrm{b},j,k-1}$ qui sont nuls si $g \in \{u, v, w\}$. Pour les notations utilisées, on pourra se référer à la figure 3.3. L'approximation du flux diffusif à discrétiser puis différentier, donnée dans la relation (3.35) devient alors :

$$\mathbf{Fd}\cdot\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{211}u_{,V_1} + \lambda_{212}v_{,V_1} + \lambda_{213}w_{,V_1} \\ \quad +\lambda_{221}u_{,V_2} + \lambda_{222}v_{,V_2} + \lambda_{223}w_{,V_2} \\ \quad +\lambda_{231}u_{,V_3} + \lambda_{232}v_{,V_3} + \lambda_{233}w_{,V_3} \\ \lambda_{311}u_{,V_1} + \lambda_{312}v_{,V_1} + \lambda_{313}w_{,V_1} \\ \quad +\lambda_{321}u_{,V_2} + \lambda_{322}v_{,V_2} + \lambda_{323}w_{,V_2} \\ \quad +\lambda_{331}u_{,V_3} + \lambda_{332}v_{,V_3} + \lambda_{333}w_{,V_3} \\ \lambda_{411}u_{,V_1} + \lambda_{412}v_{,V_1} + \lambda_{413}w_{,V_1} \\ \quad +\lambda_{421}u_{,V_2} + \lambda_{422}v_{,V_2} + \lambda_{423}w_{,V_2} \\ \quad +\lambda_{431}u_{,V_3} + \lambda_{432}v_{,V_3} + \lambda_{433}w_{,V_3} \\ 0 \end{pmatrix} S_{\mathrm{b}}. \tag{3.59}$$

Ainsi, en gardant les notations précédentes, on a les expressions des dérivées :

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathrm{cell}}} = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{211}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{221}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{231}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} \\ \lambda_{311}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{321}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{331}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} \\ \lambda_{411}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{421}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{431}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} \\ 0 \end{pmatrix} S_{\mathrm{b}}, \tag{3.60}$$

si cell $\in \{(0,j,k),(0,j+1,k),(0,j-1,k),(0,j,k+1),(0,j,k-1)\}$ (cas d'une frontière d'indices `MIN`) et des formules similaires pour les dérivées par rapport à v_{cell} et w_{cell}, en permutant les λ_{lmn}.

Pour le cas d'une frontière autre qu'une paroi adiabatique, une matrice jacobienne est construite comme celles provenant de la linéarisation d'une condition aux limites au bord par troncature. Les mêmes hypothèses que dans l'approche de type « couche mince » sur les choix de volume de contrôle, des viscosités, des coefficients de diffusion thermique et des composantes de vitesse à l'interface sont utilisées. Ainsi, en gardant les notations précédentes, on a les expressions des dérivées :

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathrm{cell}}} = \bar{\mu}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{211}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{221}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{231}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} \\ \lambda_{311}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{321}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{331}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} \\ \lambda_{411}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{421}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{431}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} \\ \left[\lambda_{211}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{221}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{231}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}}\right] u_0 \\ + \left[\lambda_{311}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{321}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{331}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}}\right] v_0 \\ + \left[\lambda_{411}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{421}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{431}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}}\right] w_0 \end{pmatrix} S_{\mathrm{b}}, \tag{3.61}$$

si cell $\in \{(0,j+1,k),(0,j-1,k),(0,j,k+1),(0,j,k-1)\}$ et des formules similaires pour les dérivées par rapport à v_{cell} et w_{cell}, en permutant les λ_{lmn} ($n=2$ (resp. 3) pour dérivation par rapport à v_{cell} (resp. w_{cell})).

Par contre, si cell $= (0,j,k)$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathrm{cell}}} = \bar{\mu}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{211}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{221}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{231}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} \\ \lambda_{311}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{321}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{331}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} \\ \lambda_{411}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{421}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{431}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} \\ \left[\lambda_{211}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{221}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{231}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}}\right] u_0 \\ + \left[\lambda_{311}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{321}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{331}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}}\right] v_0 \\ + \left[\lambda_{411}\left(\frac{\partial u,_{V_1}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{421}\left(\frac{\partial u,_{V_2}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} + \lambda_{431}\left(\frac{\partial u,_{V_3}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}}\right] w_0 \\ +\tfrac{1}{2}(\mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{b}})_2 \end{pmatrix} S_{\mathrm{b}}. \tag{3.62}$$

On a des formules similaires pour les dérivées par rapport à v_{cell} et w_{cell} en permutant les λ_{lmn} et les termes $\frac{1}{2}(\mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{b}})_n S_{\mathrm{b}}$ avec $(\mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{b}})_n$, n-ième composante de $\mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{b}}$, $n \in \{1,2,3\}$.

Pour la cinquième composante de $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}}$, on a les formules :

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}})_5}{\partial\rho_{\mathrm{cell}}} = \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\mathrm{Pr}_{\mathrm{t}}}\right)_0 \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{-p_{\mathrm{cell}}}{\rho_{\mathrm{cell}}^2}\left(\frac{\partial T_{,V_1}}{\partial T_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} S_{\mathrm{b}}, \tag{3.63}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}})_5}{\partial p_{\mathrm{cell}}} = \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\mathrm{Pr}_{\mathrm{t}}}\right)_0 \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{\partial T_{,V_1}}{\partial T_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} S_{\mathrm{b}}. \tag{3.64}$$

3.4.2 Deuxième formulation

Dans cette sous-section, le flux diffusif est exactement dérivé tel qu'il est discrétisé dans le bilan de flux $\boldsymbol{R}$, mais toujours en conservant l'hypothèse « μ_{t} figé ». L'expression du flux diffusif s'écrit toujours :

$$\mathbf{Fd} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{\mu}(\frac{4}{3}u_{,x} - \frac{2}{3}v_{,y} - \frac{2}{3}w_{,z}) & \bar{\mu}(u_{,y} + v_{,x}) & \bar{\mu}(u_{,z} + w_{,x}) \\ \bar{\mu}(u_{,y} + v_{,x}) & \bar{\mu}(-\frac{2}{3}u_{,x} + \frac{4}{3}v_{,y} - \frac{2}{3}w_{,z}) & \bar{\mu}(v_{,z} + w_{,y}) \\ \bar{\mu}(u_{,z} + w_{,x}) & \bar{\mu}(v_{,z} + w_{,y}) & \bar{\mu}(-\frac{2}{3}u_{,x} - \frac{2}{3}v_{,y} + \frac{4}{3}w_{,z}) \\ \bar{k}T_{,x} + \dots & \bar{k}T_{,y} + \dots & \bar{k}T_{,z} + \dots \end{pmatrix}, \tag{3.65}$$

et

$$\mathbf{Fd}\cdot\boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu}((\frac{4}{3}u_{,x} - \frac{2}{3}v_{,y} - \frac{2}{3}w_{,z})n_x + (u_{,y} + v_{,x})n_y + (u_{,z} + w_{,x})n_z) \\ \bar{\mu}((u_{,y} + v_{,x})n_x + (-\frac{2}{3}u_{,x} + \frac{4}{3}v_{,y} - \frac{2}{3}w_{,z})n_y + (v_{,z} + w_{,y})n_z) \\ \bar{\mu}((u_{,z} + w_{,x})n_x + (v_{,z} + w_{,y})n_y + (-\frac{2}{3}u_{,x} - \frac{2}{3}v_{,y} + \frac{4}{3}w_{,z})n_z) \\ \bar{k}(T_{,x}n_x + T_{,y}n_y + T_{,z}n_z) \\ +\bar{\mu}((\frac{4}{3}u_{,x} - \frac{2}{3}v_{,y} - \frac{2}{3}w_{,z})n_x + (u_{,y} + v_{,x})n_y + (u_{,z} + w_{,x})n_z)u_{i+\frac{1}{2}} \\ +\bar{\mu}((u_{,y} + v_{,x})n_x + (-\frac{2}{3}u_{,x} + \frac{4}{3}v_{,y} - \frac{2}{3}w_{,z})n_y + (v_{,z} + w_{,y})n_z)v_{i+\frac{1}{2}} \\ +\bar{\mu}((u_{,z} + w_{,x})n_x + (v_{,z} + w_{,y})n_y + (-\frac{2}{3}u_{,x} - \frac{2}{3}v_{,y} + \frac{4}{3}w_{,z})n_z)w_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \tag{3.66}$$

avec $\boldsymbol{V}_1 = (n_x, n_y, n_z)^{\mathrm{T}} = \frac{\boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{S_{i+\frac{1}{2},j,k}}$ et $\boldsymbol{U}$ vitesse sur l'interface d'indice $(i+\frac{1}{2}, j, k)$

3.4.2.1 Dérivation de gradients de grandeurs évalués aux interfaces

À $\mu, \mu_{\mathrm{t}}, k_{\mathrm{T}}$ et k_{t} constants, il ne reste plus qu'à dériver la discrétisation des gradients de vitesse et de température qui apparaissent dans l'expression (3.66) par rapport au système de variables primitives $\boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}$ puis de passer en variables conservatives par la matrice de passage $\frac{\partial \boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}$ (équation (3.2)). Dans ce qui suit, on utilise les notations :

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}} &= u_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}}{2}, \\ v_{i+\frac{1}{2}} &= v_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{v_{i,j,k} + v_{i+1,j,k}}{2}, \\ w_{i+\frac{1}{2}} &= w_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{w_{i,j,k} + w_{i+1,j,k}}{2}, \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}} &= \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{\bar{\mu}_{i,j,k} + \bar{\mu}_{i+1,j,k}}{2}, \end{aligned} \tag{3.67}$$

les grandeurs d'indices i, j, k (resp. $i+1, j, k$) étant les grandeurs dans la cellule gauche (resp. droite) de l'interface $(i+\frac{1}{2}, j, k)$.

Pour la dérivation des composantes de vitesse u, v, w et de la température T, on utilise les mêmes formules que dans la section précédente, sachant qu'ici, les vecteurs $\boldsymbol{V}_n$ sont les vecteurs des directions cartésiennes $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$. En effectuant le produit scalaire de vecteur surface par $\boldsymbol{e}_x$ par exemple, on obtient alors les formules :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i,j,k}} &= \frac{1}{\mathcal{V}}\left(-S^x_{i,j,k} + \frac{S^x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - S^x_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + S^x_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - S^x_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{4}\right),\\
\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i+1,j,k}} &= \frac{1}{\mathcal{V}}\left(S^x_{i+1,j,k} + \frac{S^x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - S^x_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + S^x_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - S^x_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{4}\right),\\
\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i,j+1,k}} &= \frac{S^x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{4\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i+1,j+1,k}} = \frac{S^x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{4\mathcal{V}},\\
\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i,j-1,k}} &= -\frac{S^x_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}{4\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i+1,j-1,k}} = -\frac{S^x_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}{4\mathcal{V}},\\
\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i,j,k+1}} &= \frac{S^x_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{4\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i+1,j,k+1}} = \frac{S^x_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}{4\mathcal{V}},\\
\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i,j,k-1}} &= -\frac{S^x_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{4\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i+1,j,k-1}} = -\frac{S^x_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}}{4\mathcal{V}},
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

et des formules similaires pour les dérivées par rapport à y et z.

On a ainsi les expressions des dérivées si cell $\in \{(i,j+1,k),(i,j-1,k),(i+1,j+1,k),(i+1,j-1,k),(i,j,k+1),(i,j,k-1),(i+1,j,k+1),(i+1,j,k-1)\}$:

$$
\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix}
0\\
\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{4}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial u_{,y}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial u_{,z}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_z)\\
\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial u_{,y}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x - \frac{2}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_y)\\
\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial u_{,z}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x - \frac{2}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_z)\\
\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{4}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial u_{,y}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial u_{,z}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_z)u_{i+\frac{1}{2}}\\
+\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial u_{,y}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x - \frac{2}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_y)v_{i+\frac{1}{2}}\\
+\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial u_{,z}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x - \frac{2}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_z)w_{i+\frac{1}{2}}
\end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,,
\tag{3.69}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix}
0\\
\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial v_{,x}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y)\\
\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial v_{,x}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{4}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial v_{,z}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_z)\\
\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial v_{,z}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y - \frac{2}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_z)\\
\bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial v_{,x}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y)u_{i+\frac{1}{2}}\\
+\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial v_{,x}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{4}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial v_{,z}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_z)v_{i+\frac{1}{2}}\\
+\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial v_{,z}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y - \frac{2}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_z)w_{i+\frac{1}{2}}
\end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,,
\tag{3.70}
$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{w}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial w_{,x}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial w_{,y}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial w_{,x}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial w_{,y}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{4}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial w_{,x}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z)u_{i+\frac{1}{2}} \\ + \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial w_{,y}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z)v_{i+\frac{1}{2}} \\ + \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial w_{,x}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial w_{,y}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{4}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z)w_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,. \tag{3.71}$$

Par contre, si cell $\in \{(i,j,k),(i+1,j,k)\}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{4}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial u_{,y}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial u_{,z}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_z) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial u_{,y}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x - \frac{2}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_y) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial u_{,z}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x - \frac{2}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_z) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{4}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial u_{,y}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial u_{,z}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_z)u_{i+\frac{1}{2}} \\ + \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial u_{,y}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x - \frac{2}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_y)v_{i+\frac{1}{2}} \\ + \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial u_{,z}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_x - \frac{2}{3}\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}n_z)w_{i+\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{n}_{i+\frac{1}{2},j,k})_2 \end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,, \tag{3.72}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial v_{,x}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial v_{,x}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{4}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial v_{,z}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_z) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial v_{,z}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y - \frac{2}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_z) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial v_{,x}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y)u_{i+\frac{1}{2}} \\ + \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial v_{,x}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{4}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial v_{,z}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_z)v_{i+\frac{1}{2}} \\ + \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial v_{,z}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_y - \frac{2}{3}\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}n_z)w_{i+\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{n}_{i+\frac{1}{2},j,k})_3 \end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,, \tag{3.73}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{w}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial w_{,x}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial w_{,y}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial w_{,x}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial w_{,y}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{4}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z) \\ \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial w_{,x}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z)u_{i+\frac{1}{2}} \\ + \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{\partial w_{,y}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z)v_{i+\frac{1}{2}} \\ + \bar{\mu}_{i+\frac{1}{2}}(\frac{\partial w_{,x}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_x + \frac{\partial w_{,y}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_y + \frac{4}{3}\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}n_z)w_{i+\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{Fd}^{\mathrm{discret}} \cdot \boldsymbol{n}_{i+\frac{1}{2},j,k})_4 \end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,. \tag{3.74}$$

Tout comme dans la sous-section précédente, pour la dérivation par rapport à ρ et p, seule la dérivée de la cinquième composante est non nulle. Comme dans la section précédente, on utilise

la relation (3.23). On a alors, pour tout triplet d'indices cell,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_5}{\partial\rho_{\mathrm{cell}}} &= \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}+\frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\mathrm{Pr_t}}\right)_{i+\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{-p_{\mathrm{cell}}}{\rho^2_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{\partial T_{,x}}{\partial T_{\mathrm{cell}}}n_x+\frac{\partial T_{,y}}{\partial T_{\mathrm{cell}}}n_y+\frac{\partial T_{,z}}{\partial T_{\mathrm{cell}}}n_z\right)S_{i+\frac{1}{2},j,k},\\
\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_5}{\partial p_{\mathrm{cell}}} &= \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}+\frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\mathrm{Pr_t}}\right)_{i+\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{\partial T_{,x}}{\partial T_{\mathrm{cell}}}n_x+\frac{\partial T_{,y}}{\partial T_{\mathrm{cell}}}n_y+\frac{\partial T_{,z}}{\partial T_{\mathrm{cell}}}n_z\right)S_{i+\frac{1}{2},j,k}.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Une fois obtenues ces dérivées dans le système de variables primitives $\boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}$, il reste à repasser en variables conservatives via la matrice de passage $\frac{\partial \boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}$ (équation (3.2)).

3.4.2.2 Traitement des conditions aux limites

Tout comme pour la première formulation et l'approximation de type « couche mince », pour le flux diffusif, seule la condition aux limites de paroi adiabatique avec adhérence à la paroi est linéarisée précisément.

Les mêmes notations (équations (3.56) et (3.57)) que pour les conditions aux limites de la première formulation (figure 3.3), celles inspirées du traitement des interfaces intérieures de la deuxième formulation, ainsi que les mêmes choix quant aux conditions à imposer aux frontières (coefficient de viscosité, composantes de vitesse, gradient de température, volume de contrôle) sont adoptés.

Plaçons-nous dans le cas d'une frontière d'indices « MIN » (voir figure 3.3). On a les expressions suivantes, pour la discrétisation du gradient discrétisé d'une grandeur $g, g \in \{u, v, w, T\}$ évalué à l'interface b dans la direction x par exemple (on obtient la dérivée par rapport à y ou z en permutant les composantes de vecteur surface) :

$$(g_{,x})_{\mathrm{b}} = \frac{\begin{pmatrix} g_{0,j,k}S^x_{0,j,k} & - g_{\mathrm{b},j,k}S^x_{\mathrm{b}} \\ + g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j+\frac{1}{2},k}\frac{1}{2}S^x_{0,j+\frac{1}{2},k} & - g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j-\frac{1}{2},k}\frac{1}{2}S^x_{0,j-\frac{1}{2},k} \\ + g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j,k+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}S^x_{0,j,k+\frac{1}{2}} & - g_{\mathrm{b}+\frac{1}{4},j,k-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}S^x_{0,j,k-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}}{\mathcal{V}}, \tag{3.76}$$

avec $\mathcal{V} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_0$ et avec les notations des relations 3.56 et 3.57.

On prend $\boldsymbol{V}_{\mathrm{b}} = (u_{\mathrm{b}}, v_{\mathrm{b}}, w_{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ à la frontière (adhérence à la paroi et troncature pour une frontière générale), d'où les $g_{\mathrm{b},j,k}$, $g_{\mathrm{b},j+1,k}$, $g_{\mathrm{b},j-1,k}$, $g_{\mathrm{b},j,k+1}$, $g_{\mathrm{b},j,k-1}$ qui sont nuls si $g \in \{u, v, w\}$.

On a donc le même type de formules pour les directions y et z. Tout comme pour les interfaces intérieures, on peut remarquer que pour le gradient d'une grandeur évalué au centre d'une interface, on utilise le même volume de contrôle $\mathcal{V}$ pour les trois directions de dérivation x, y ou z.

La dérivation du gradient de g évalué à l'interface frontière (b, j, k) par rapport au champ aérodynamique dépend donc de cinq cellules en croix, comme on a pu le voir à la sous-section 2.3.2. On obtient ainsi les formules de dérivées (par exemple par rapport à x) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g_{,x})_{\mathrm{b}}}{\partial g_{0,j,k}} &= \frac{1}{\mathcal{V}}\left(S^x_{\mathrm{b}}+\frac{S^x_{0,j+\frac{1}{2},k}-S^x_{0,j-\frac{1}{2},k}+S^x_{0,j,k+\frac{1}{2}}-S^x_{0,j,k-\frac{1}{2}}}{8}\right),\\
\frac{\partial(g_{,x})_{\mathrm{b}}}{\partial g_{0,j+1,k}} &= \frac{S^x_{0,j+\frac{1}{2},k}}{8\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial(g_{,x})_{\mathrm{b}}}{\partial g_{0,j-1,k}} = -\frac{S^x_{0,j-\frac{1}{2},k}}{8\mathcal{V}},\\
\frac{\partial(g_{,x})_{\mathrm{b}}}{\partial g_{0,j,k+1}} &= \frac{S^x_{0,j,k+\frac{1}{2}}}{8\mathcal{V}}, \qquad \frac{\partial(g_{,x})_{\mathrm{b}}}{\partial g_{0,j,k-1}} = -\frac{S^x_{0,j,k-\frac{1}{2}}}{8\mathcal{V}}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Pour les notations utilisées, on pourra se référer à la figure 3.3. On a ainsi les expressions des dérivées si cell $\in \{(0,j,k),(0,j+1,k),(0,j-1,k),(0,j,k+1),(0,j,k-1)\}$ dans le cas d'une frontière d'indices `MIN` :

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}})}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0(\frac{4}{3}\left(\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_x + \left(\frac{\partial u_{,y}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_y + \left(\frac{\partial u_{,z}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_z) \\ \mu_0(\left(\frac{\partial u_{,y}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_x - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_y) \\ \mu_0(\left(\frac{\partial u_{,z}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_x - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_{,x}}{\partial u_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_z) \\ 0 \end{pmatrix} S_{\mathrm{b}}, \tag{3.78}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}})}{\partial \boldsymbol{v}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0(-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_x + \left(\frac{\partial v_{,x}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_y) \\ \mu_0(\left(\frac{\partial v_{,x}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_x + \frac{4}{3}\left(\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_y + \left(\frac{\partial v_{,z}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_z) \\ \mu_0(\left(\frac{\partial v_{,z}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_y - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_{,y}}{\partial v_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_z) \\ 0 \end{pmatrix} S_{\mathrm{b}}, \tag{3.79}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{v}})}{\partial \boldsymbol{w}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0(-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_x + \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_z) \\ \mu_0(-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_y + \left(\frac{\partial w_{,y}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_z) \\ \mu_0(\left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_x + \left(\frac{\partial w_{,y}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_y + \frac{4}{3}\left(\frac{\partial w_{,z}}{\partial w_{\mathrm{cell}}}\right)_{\mathrm{b}} n_z) \\ 0 \end{pmatrix} S_{\mathrm{b}}. \tag{3.80}$$

Une fois obtenues ces dérivées dans le système de variables primitives $\boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}$, il reste à repasser en variables conservatives via la matrice de passage $\frac{\partial \boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}$ (équation (3.2)).

Pour le cas d'une frontière autre qu'une paroi adiabatique, une matrice jacobienne est construite comme celles provenant de la linéarisation de phases implicites aux bords. Les mêmes hypothèses que dans la première formulation sont aussi utilisées, et donc dans l'approche de type « couche mince » sur les choix de volume de contrôle, des viscosités, des coefficients de diffusion thermique et des composantes de vitesse à l'interface.

On obtient des formules du même type que ci-dessus avec la cinquième composante modifiée.

3.5 Conclusion partielle sur la linéarisation du flux diffusif et de l'approche « μ_{t} figé »

Dans les premières sections de ce chapitre, on a donné des expressions du flux diffusif à « μ_{t} figé » afin d'écrire une approximation de la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$. Dans les deux sections qui suivent, on va donner des expressions de la matrice $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$ en tenant compte du fait que le coefficient de viscosité turbulente μ_{t} dépend du champ aérodynamique $\boldsymbol{W}$ (et donc aussi le coefficient $k_{\mathrm{t}} = \frac{c_{\mathrm{p}}\mu_{\mathrm{t}}}{\mathrm{Pr}_{\mathrm{t}}}$) tout comme le coefficient de viscosité moléculaire μ (et donc aussi le coefficient $k_{\mathrm{T}} = \frac{c_{\mathrm{p}}\mu}{\mathrm{Pr}}$). On va voir, dans les deux sections suivantes, les changements qu'apportent ces hypothèses pour deux modèles de turbulence : le modèle de Michel *et al.* et le modèle k-ε de Launder-Sharma.

3.6 Linéarisation du modèle de Michel *et al.*

Ce modèle de turbulence est un modèle algébrique pour lequel le coefficient de viscosité dynamique turbulent μ_t est donné par une relation implicite liant μ_t au champ moyen.

3.6.1 Résolution de l'équation définissant μ_t

La relation (1.31) est une relation implicite. Cette équation est résolue dans *elsA* [9] à l'aide d'une méthode de point fixe. Cette méthode utilise la valeur de μ_t au pas précédent $n-1$ pour calculer la valeur de μ_t au pas n :

$$\mu_\mathrm{t}^{(n)} = \rho\,\ell^2\,\mathcal{D}^2(\mu_\mathrm{t}^{(n-1)})\,\bar{\omega}, \tag{3.81}$$

avec les mêmes notations que dans la relation implicite (1.31). À convergence, on doit avoir $\mu_\mathrm{t}^{(n)} \sim \mu_\mathrm{t}^{(n-1)}$ et donc la relation (1.31) est vérifiée. Cependant, comme ce qui intéresse l'étude de la linéarisation du modèle de Michel est la dérivée de la viscosité turbulente par rapport au champ aérodynamique (soit $\frac{\partial \mu_\mathrm{t}}{\partial \boldsymbol{W}}$), de manière rigoureuse, il doit être impératif d'avoir la relation implicite (1.31) vérifiée en tout point.

Une autre méthode qui semble plus rigoureuse, quoique moins stable, a donc été testée : un algorithme de Newton est utilisé pour la résolution de l'équation (1.31). L'annexe A.2 présente une courte introduction sur l'algorithme. L'intérêt principal de cette méthode est que lorsqu'il y a convergence, celle-ci se fait de manière quadratique, donc rapide. Cependant, cette méthode n'est pas très stable et la localisation de la solution est très fortement dépendante de l'élément initial. S'il ne se situe pas dans le bassin d'attraction de la solution cherchée, l'algorithme ne converge pas vers la solution. En pratique, quelques problèmes de convergence de la résolution de l'équation (1.31) pour quelques cellules isolées apparaissent sur l'aile ONERA M6.

3.6.2 Dépendances du coefficient de viscosité turbulente μ_t

Pour le modèle de Michel *et al.* avec gradients évalués aux centres des interfaces pour le flux diffusif et les gradients de vitesse, l'objet de la linéarisation du modèle de Michel est la dérivation du coefficient de viscosité dynamique turbulente μ_t par rapport au champ conservatif $\boldsymbol{W} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^\mathrm{T}$, la métrique $\boldsymbol{X}$ étant constante. Soit le calcul de la matrice ligne $\frac{\partial \mu_\mathrm{t}}{\partial \boldsymbol{W}}$. Il faut dériver le flux diffusif discrétisé $\boldsymbol{F}^\mathrm{v}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ à « μ_t figé » comme dans les sous-sections précédentes. En plus de cela, il faut additionner la partie où l'on dérive les facteurs $(\mu + \mu_\mathrm{t})$ et $(k_\mathrm{T} + k_\mathrm{t})$, le reste de l'expression de $\boldsymbol{F}^\mathrm{v}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ étant considéré comme constant, tout comme on dérive le produit de deux fonctions. D'après l'équation (1.31), le coefficient μ_t dépend de :

- la masse volumique ρ ;
- la vorticité $\bar{\omega}$;
- la longueur de mélange ℓ et donc l'épaisseur de couche limite δ et de la distance à la paroi η ;
- la viscosité moléculaire μ via la fonction d'amortissement $\mathcal{D}$.

D'après la relation vérifiée par μ_t dans (1.31), on peut écrire la relation implicite :

$$f(\rho, \ell, \bar{\omega}, \mu, \mu_\mathrm{t}) = 0, \tag{3.82}$$

avec

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (\rho, \ell, \bar{\omega}, \mu, \mu_\mathrm{t}) & \longmapsto & f(\rho, \ell, \bar{\omega}, \mu, \mu_\mathrm{t}) = \rho\,\ell^2\,\mathcal{D}^2(\mu_\mathrm{t})\,\bar{\omega} - \mu_\mathrm{t}. \end{array} \tag{3.83}$$

On utilise un corollaire du théorème des fonctions implicites (voir annexes A.2) pour calculer la dérivée de μ_{t} par rapport à chacune des grandeurs dont dépend μ_{t} :

$$\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \rho} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \rho}}{\frac{\partial f}{\partial \mu_{\mathrm{t}}}}, \quad \frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \ell} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \ell}}{\frac{\partial f}{\partial \mu_{\mathrm{t}}}}, \quad \frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \bar{\omega}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\omega}}}{\frac{\partial f}{\partial \mu_{\mathrm{t}}}}, \quad \frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \mu} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \mu}}{\frac{\partial f}{\partial \mu_{\mathrm{t}}}}, \tag{3.84}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\rho} + \frac{1}{26K}\ell^2\bar{\omega}\mathcal{D}(\mu_{\mathrm{t}})\sqrt{\xi}\exp(-\tfrac{\sqrt{\xi}}{26K}),\\
\frac{\partial f}{\partial \ell} &= 2\rho\ell\mathcal{D}(\mu_{\mathrm{t}})^2\bar{\omega} + 2\frac{1}{26K}\rho\ell\bar{\omega}\mathcal{D}(\mu_{\mathrm{t}})\sqrt{\xi}\exp(-\tfrac{\sqrt{\xi}}{26K}),\\
\frac{\partial f}{\partial \bar{\omega}} &= \rho\ell^2\mathcal{D}(\mu_{\mathrm{t}})^2 + \frac{1}{26K}\rho\ell^2\mathcal{D}(\mu_{\mathrm{t}})\sqrt{\xi}\exp(-\tfrac{\sqrt{\xi}}{26K}),\\
\frac{\partial f}{\partial \mu} &= -\frac{1}{26K}\rho\ell^2\bar{\omega}\frac{\mathcal{D}(\mu_{\mathrm{t}})}{\mu}\frac{\mu+2\mu_{\mathrm{t}}}{\mu+\mu_{\mathrm{t}}}\sqrt{\xi}\exp(-\tfrac{\sqrt{\xi}}{26K}),\\
\frac{\partial f}{\partial \mu_{\mathrm{t}}} &= -1 + \frac{1}{26K}\rho\ell^2\bar{\omega}\frac{\mathcal{D}(\mu_{\mathrm{t}})}{\mu+\mu_{\mathrm{t}}}\sqrt{\xi}\exp(-\tfrac{\sqrt{\xi}}{26K}).
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Étant donné que l'on cherche à calculer $\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \rho}, \frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \rho u}, \frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \rho v}, \frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \rho w}, \frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \rho E}$, il reste à exprimer les dérivées de $\ell, \bar{\omega}$ et μ en fonction du champ conservatif $\boldsymbol{W} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^{\mathrm{T}}$.

3.6.3 Linéarisation du coefficient de viscosité moléculaire μ

L'expression du coefficient de viscosité moléculaire μ, calculé par la loi de Sutherland (1.16), est rappelée ici :

$$\mu = \frac{\beta_{\mathrm{s}}\sqrt{T}}{1 + C_{\mathrm{s}}/T}, \tag{3.86}$$

où β_{s} et C_{s} sont deux constantes qui dépendent du gaz considéré. Le coefficient de viscosité moléculaire μ est donc directement fonction de la température T et donc du champ conservatif $\boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}$ via la formule :

$$T = \frac{\gamma - 1}{r_{\mathrm{gaz}}}e = \frac{\gamma - 1}{r_{\mathrm{gaz}}}(E - \frac{1}{2}\boldsymbol{U}^2). \tag{3.87}$$

D'après la loi d'état des gaz parfaits, on a vu précédemment :

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{r_{\mathrm{gaz}}T}{\gamma - 1}, \tag{3.88}$$

et

$$\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \mu}{\partial \rho u} \\ \frac{\partial \mu}{\partial \rho v} \\ \frac{\partial \mu}{\partial \rho w} \\ \frac{\partial \mu}{\partial \rho E} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \mu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \rho u} \\ \frac{\partial \mu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \rho v} \\ \frac{\partial \mu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \rho w} \\ \frac{\partial \mu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \rho E} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{3.89}$$

On obtient ainsi

$$\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\rho e}(\frac{1}{2} + \frac{C_{\mathrm{s}}}{T+C_{\mathrm{s}}})(\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^2 - e) \\ -\frac{\mu}{\rho e}(\frac{1}{2} + \frac{C_{\mathrm{s}}}{T+C_{\mathrm{s}}})u \\ -\frac{\mu}{\rho e}(\frac{1}{2} + \frac{C_{\mathrm{s}}}{T+C_{\mathrm{s}}})v \\ -\frac{\mu}{\rho e}(\frac{1}{2} + \frac{C_{\mathrm{s}}}{T+C_{\mathrm{s}}})w \\ \frac{\mu}{\rho e}(\frac{1}{2} + \frac{C_{\mathrm{s}}}{T+C_{\mathrm{s}}}) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{3.90}$$

Pour obtenir $\frac{\partial \mu_t}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{W}_{\text{cell}}}$, il suffit de multiplier le vecteur $\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{W}_{\text{cell}}}$ par $\frac{\partial \mu_t}{\partial \mu}$ en chaque cellule. Dans ce cas, toutes les grandeurs sont prises au centre de la même cellule et que l'expression de $\frac{\partial \mu_t}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{W}_{\text{cell}}}$ ne fait pas intervenir de valeurs du champ conservatif $\boldsymbol{W}_{\text{cell}}$ dans les cellules adjacentes. Ceci n'est pas le cas pour les deux dépendances suivantes : vorticité $\bar{\omega}$ et longueur de mélange ℓ.

3.6.4 Discrétisation et dérivation de la vorticité

La vorticité $\bar{\omega} = \|\nabla \wedge \boldsymbol{U}\|$ dépend de la vitesse et de la métrique (via les surfaces et les volumes). La vorticité $\bar{\omega}$ s'exprime plus facilement dans le système de variables dites primitives $\boldsymbol{P}_{\text{cell}}$. Le passage des variables primitives en variables conservatives s'effectue via la matrice de passage $\frac{\partial \boldsymbol{P}_{\text{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\text{cell}}}$ (équation (3.2)).

Vis-à-vis de la vorticité $\bar{\omega}$, il n'y a pas de dépendance en la cinquième variable primitive p

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial \mu_t}} = 0. \tag{3.91}$$

On ne s'intéressera donc à la dérivée partielle (à métrique constante) de $\bar{\omega}$ que par rapport aux quatre premières variables primitives (ρ, u, v, w).

3.6.4.1 Approximation

Une première approximation très précise dans la couche limite a été tentée pour linéariser la norme de la vorticité.

Notons $\boldsymbol{e}_3$ la direction de maillage perpendiculaire à la paroi dans la cellule courante, $\boldsymbol{e}_1 = (n_{x1}, n_{y1}, n_{z1})^{\mathrm{T}}$ et $\boldsymbol{e}_2 = (n_{x2}, n_{y2}, n_{z2})^{\mathrm{T}}$ les directions de maillage dans le plan tangent à la paroi et d_3 la distance entre les centres des cellules où sont prises les composantes des vitesses tangentielles à la paroi $U_{\|1}$ et $U_{\|2}$:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial U_{\|1}}{\partial x_3} & = & \frac{U_{\|1p} - U_{\|1m}}{d_3}, \\
\frac{\partial U_{\|2}}{\partial x_3} & = & \frac{U_{\|2p} - U_{\|2m}}{d_3}, \\
U_{\|1p} & = & \boldsymbol{U}_{p3} \cdot \boldsymbol{e}_1, \\
U_{\|1m} & = & \boldsymbol{U}_{m3} \cdot \boldsymbol{e}_1, \\
U_{\|2p} & = & \boldsymbol{U}_{p3} \cdot \boldsymbol{e}_2, \\
U_{\|2m} & = & \boldsymbol{U}_{m3} \cdot \boldsymbol{e}_2.
\end{array} \tag{3.92}$$

On a ainsi l'approximation de $\bar{\omega}$ par :

$$\begin{array}{rcl}
\bar{\omega} = \|\nabla \wedge \boldsymbol{U}\| \simeq \|\frac{\partial U_{\|}}{\partial x_3}\| & = & \sqrt{\left(\frac{\partial U_{\|1}}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_{\|2}}{\partial x_3}\right)^2} \\
& = & \frac{1}{d_3}\sqrt{(\boldsymbol{U}_{p3} \cdot \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{U}_{m3} \cdot \boldsymbol{e}_1)^2 + (\boldsymbol{U}_{p3} \cdot \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{U}_{m3} \cdot \boldsymbol{e}_2)^2}.
\end{array} \tag{3.93}$$

C'est cette dernière expression qui est dérivée par rapport à chaque composante de vitesse :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial u_{p3}} = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial u_{m3}} & = & \frac{1}{\bar{\omega} d_3^2}\left((\boldsymbol{U}_{p3} - \boldsymbol{U}_{m3}) \cdot \boldsymbol{e}_1 n_{x1} + (\boldsymbol{U}_{p3} - \boldsymbol{U}_{m3}) \cdot \boldsymbol{e}_2 n_{x2}\right), \\
\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial v_{p3}} = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial v_{m3}} & = & \frac{1}{\bar{\omega} d_3^2}\left((\boldsymbol{U}_{p3} - \boldsymbol{U}_{m3}) \cdot \boldsymbol{e}_1 n_{y1} + (\boldsymbol{U}_{p3} - \boldsymbol{U}_{m3}) \cdot \boldsymbol{e}_2 n_{y2}\right), \\
\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial w_{p3}} = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial w_{m3}} & = & \frac{1}{\bar{\omega} d_3^2}\left((\boldsymbol{U}_{p3} - \boldsymbol{U}_{m3}) \cdot \boldsymbol{e}_1 n_{z1} + (\boldsymbol{U}_{p3} - \boldsymbol{U}_{m3}) \cdot \boldsymbol{e}_2 n_{z2}\right).
\end{array} \tag{3.94}$$

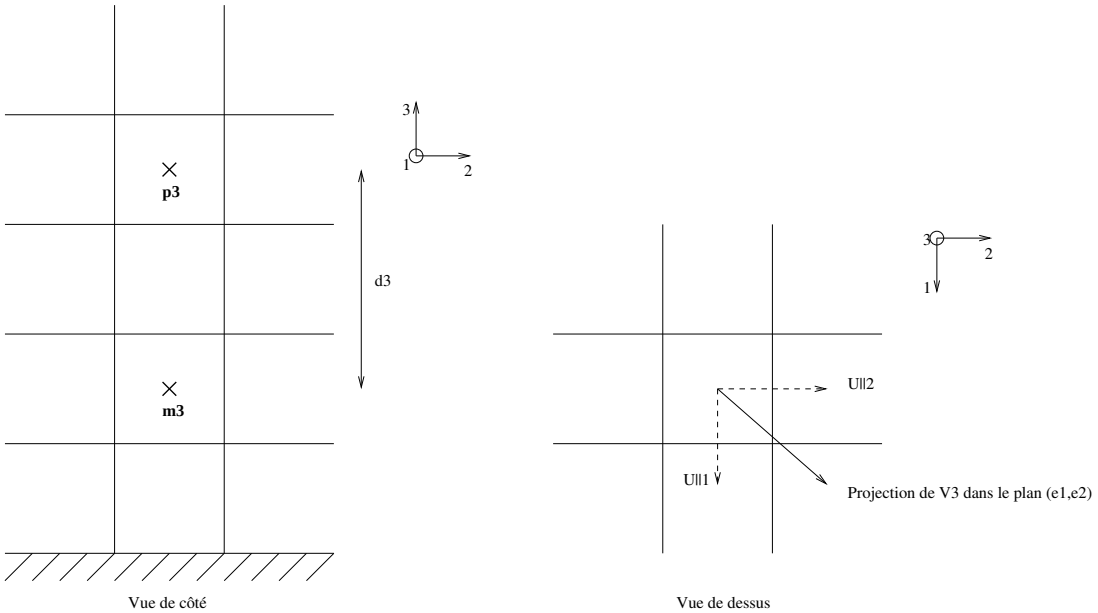

FIG. 3.4 – Stencil de l'approximation de la vorticité.

La dérivée de cette approximation de la vorticité par rapport à la vitesse en une cellule ne fait pas intervenir la vitesse en cette cellule, mais celle au centre des deux cellules adjacentes à la cellule de calcul, dans la direction orthogonale à la paroi. Le stencil de cette évaluation fait donc intervenir deux points.

L'analyse d'un champ de viscosité μ_t autour de l'aile M6 montre que la relation implicite définissant μ_t dans la couche limite est bien vérifiée, mais que celle-ci n'est plus bonne loin de la paroi. Ceci est confirmé pour les champs de vorticité calculés de manière exacte et de manière approchée par la formule ci-dessus, dans tout le domaine. L'approximation est bonne dans la couche limite, près de la paroi donc, mais devient complètement fausse loin de la paroi (plus de 2000 % d'erreur relative à une distance d'une corde au dessus de l'extrados). On doit pouvoir se contenter d'une viscosité turbulente calculée comme en (3.81), qui, de toute façon, devient très petite loin de la paroi. L'influence de cette approximation sur le calcul de gradients n'est pas forcément négligeable.

Un autre point est limitant pour l'implémentation de cette formulation. De manière pratique, ceci est assez facilement implémentable s'il n'y a qu'une paroi, ou alors si deux parois sont en vis-à-vis dans les mêmes plans d'indices de maillages (ils partagent une direction de maillage normale commune). Dans le cas, d'une configuration avec coin (par exemple la configuration dite trois au paragraphe 2.4), l'implémentation ne peut se faire de manière simple et générique.

C'est principalement ce manque de généricité du codage, ainsi que les doutes sur l'influence de cette approximation qui expliquent le choix d'effectuer la dérivation de la discrétisation exacte de la vorticité par rapport au champ aérodynamique exprimé en variables primitives $\boldsymbol{P}_{\text{cell}}$.

3.6.4.2 Discrétisation exacte

La norme de la vorticité est discrétisée telle qu'elle est effectivement discrétisée dans le résidu explicite $\boldsymbol{R}$. Par définition, la vorticité vaut :

$$\bar{\omega} = \|\nabla \wedge \boldsymbol{U}\| = \sqrt{(w_{,y} - v_{,z})^2 + (u_{,z} - w_{,x})^2 + (v_{,x} - u_{,y})^2} \tag{3.95}$$

où les $u_{,y}$ (resp. $u_{,z}, v_{,x}, v_{,z}, w_{,x}, w_{,y}$) désignent les gradients de composante de vitesse u (resp. u, v, v, w, w) dans la direction y (resp. z, x, z, x, y). Ceux-ci sont évalués aux centres des cellules.

Ainsi, si $g \in \{u, v, w\}$ désigne la grandeur dont on souhaite calculer le gradient *discrétisé* au centre de la cellule d'indices (i, j, k) et si l'on note $g_{i+1,j,k}$, $g_{i-1,j,k}$, $g_{i,j+1,k}$, $g_{i,j-1,k}$, $g_{i,j,k+1}$, $g_{i,j,k-1}$ les valeurs de g dans les cellules adjacentes à la cellule d'indices (i, j, k) comme sur la figure 3.5 pour le cas bidimensionnel, on a :

$$\begin{aligned}
(g_{,x})_{i,j,k} &= \frac{g_{i+\frac{1}{2},j,k}S^x_{i+\frac{1}{2}} - g_{i-\frac{1}{2},j,k}S^x_{i-\frac{1}{2}} + g_{i,j+\frac{1}{2},k}S^x_{j+\frac{1}{2}} - g_{i,j-\frac{1}{2},k}S^x_{j-\frac{1}{2}} + g_{i,j,k+\frac{1}{2}}S^x_{k+\frac{1}{2}} - g_{i,j,k-\frac{1}{2}}S^x_{k-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \\
(g_{,y})_{i,j,k} &= \frac{g_{i+\frac{1}{2},j,k}S^y_{i+\frac{1}{2}} - g_{i-\frac{1}{2},j,k}S^y_{i-\frac{1}{2}} + g_{i,j+\frac{1}{2},k}S^y_{j+\frac{1}{2}} - g_{i,j-\frac{1}{2},k}S^y_{j-\frac{1}{2}} + g_{i,j,k+\frac{1}{2}}S^y_{k+\frac{1}{2}} - g_{i,j,k-\frac{1}{2}}S^y_{k-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \\
(g_{,z})_{i,j,k} &= \frac{g_{i+\frac{1}{2},j,k}S^z_{i+\frac{1}{2}} - g_{i-\frac{1}{2},j,k}S^z_{i-\frac{1}{2}} + g_{i,j+\frac{1}{2},k}S^z_{j+\frac{1}{2}} - g_{i,j-\frac{1}{2},k}S^z_{j-\frac{1}{2}} + g_{i,j,k+\frac{1}{2}}S^z_{k+\frac{1}{2}} - g_{i,j,k-\frac{1}{2}}S^z_{k-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i,j,k}}
\end{aligned} \tag{3.96}$$

avec

$$\begin{aligned}
g_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{g_{i,j,k} + g_{i+1,j,k}}{2}, & g_{i-\frac{1}{2},j,k} &= \frac{g_{i,j,k} + g_{i-1,j,k}}{2}, \\
g_{i,j+\frac{1}{2},k} &= \frac{g_{i,j,k} + g_{i,j+1,k}}{2}, & g_{i,j-\frac{1}{2},k} &= \frac{g_{i,j,k} + g_{i,j-1,k}}{2}, \\
g_{i,j,k+\frac{1}{2}} &= \frac{g_{i,j,k} + g_{i,j,k+1}}{2}, & g_{i,j,k-\frac{1}{2}} &= \frac{g_{i,j,k} + g_{i,j,k-1}}{2},
\end{aligned} \tag{3.97}$$

et, pour alléger les notations :

$$\begin{aligned}
S^x_{i+\frac{1}{2}} &= S^x_{i+\frac{1}{2},j,k}, & S^x_{i-\frac{1}{2}} &= S^x_{i-\frac{1}{2},j,k}, \\
S^x_{j+\frac{1}{2}} &= S^x_{i,j+\frac{1}{2},k}, & S^x_{j-\frac{1}{2}} &= S^x_{i,j-\frac{1}{2},k}, \\
S^x_{k+\frac{1}{2}} &= S^x_{i,j,k+\frac{1}{2}}, & S^x_{k-\frac{1}{2}} &= S^x_{i,j,k-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Les notations sont similaires pour les composantes suivant y et z.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i,j,k}} &= \frac{1}{2}\frac{S^x_{i+\frac{1}{2}} - S^x_{i-\frac{1}{2}} + S^x_{j+\frac{1}{2}} - S^x_{j-\frac{1}{2}} + S^x_{k+\frac{1}{2}} - S^x_{k-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i,j,k}}, \\
\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i+1,j,k}} &= \frac{1}{2}\frac{S^x_{i+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i,j,k}}, \\
\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{i-1,j,k}} &= -\frac{1}{2}\frac{S^x_{i-\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i,j,k}},
\end{aligned} \tag{3.99}$$

avec des formules similaires pour les cellules d'indices $(i, j \pm 1, k)$ et $(i, j, k \pm 1)$, ainsi que pour les directions y et z. Le terme $(S^x_{i+\frac{1}{2}} - S^x_{i-\frac{1}{2}} + S^x_{j+\frac{1}{2}} - S^x_{j-\frac{1}{2}} + S^x_{k+\frac{1}{2}} - S^x_{k-\frac{1}{2}})$ correspond à la projection sur l'axe des abscisses de l'intégration du vecteur surface élémentaire sur une surface fermée ; il est donc nul. Il reste donc les dérivées de chaque composante de vitesse dans chaque

direction par rapport à la composante de vitesse considérée dans les cellules adjacentes.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial u_{i+1,j,k}} &= \frac{1}{2\bar{\omega}} \frac{S^z_{i+\frac{1}{2}}(u_{,z} - w_{,x}) + S^y_{i+\frac{1}{2}}(u_{,y} - v_{,x})}{\mathcal{V}_{i,j,k}}, \\
\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial v_{i+1,j,k}} &= \frac{1}{2\bar{\omega}} \frac{S^z_{i+\frac{1}{2}}(v_{,z} - w_{,y}) + S^x_{i+\frac{1}{2}}(v_{,x} - u_{,y})}{\mathcal{V}_{i,j,k}}, \\
\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial w_{i+1,j,k}} &= \frac{1}{2\bar{\omega}} \frac{S^y_{i+\frac{1}{2}}(w_{,y} - v_{,z}) + S^x_{i+\frac{1}{2}}(w_{,x} - u_{,z})}{\mathcal{V}_{i,j,k}}, \\
\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial u_{i-1,j,k}} &= -\frac{1}{2\bar{\omega}} \frac{S^z_{i-\frac{1}{2}}(u_{,z} - w_{,x}) + S^y_{i-\frac{1}{2}}(u_{,y} - v_{,x})}{\mathcal{V}_{i,j,k}}, \\
\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial v_{i-1,j,k}} &= -\frac{1}{2\bar{\omega}} \frac{S^z_{i-\frac{1}{2}}(v_{,z} - w_{,y}) + S^x_{i-\frac{1}{2}}(v_{,x} - u_{,y})}{\mathcal{V}_{i,j,k}}, \\
\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial w_{i-1,j,k}} &= -\frac{1}{2\bar{\omega}} \frac{S^y_{i-\frac{1}{2}}(w_{,y} - v_{,z}) + S^x_{i-\frac{1}{2}}(w_{,x} - u_{,z})}{\mathcal{V}_{i,j,k}}.
\end{aligned}
\tag{3.100}
$$

On a des formules similaires pour des dérivées de la vorticité $\bar{\omega}$ par rapport aux composantes de vitesse dans les cellules d'indices $(i, j+1, k)$, $(i, j-1, k)$, $(i, j, k+1)$ et $(i, j, k-1)$.

La dérivée du gradient de vitesse au centre d'une cellule dépend donc de la valeur de cette vitesse en six (resp. quatre) cellules adjacentes à la cellule courante pour un problème tridimensionnel (resp. bidimensionnel) comme on peut le voir sur la figure 3.5. Le calcul de $\frac{\partial \mu_t}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \boldsymbol{W}_{\text{cell}}}$ dans

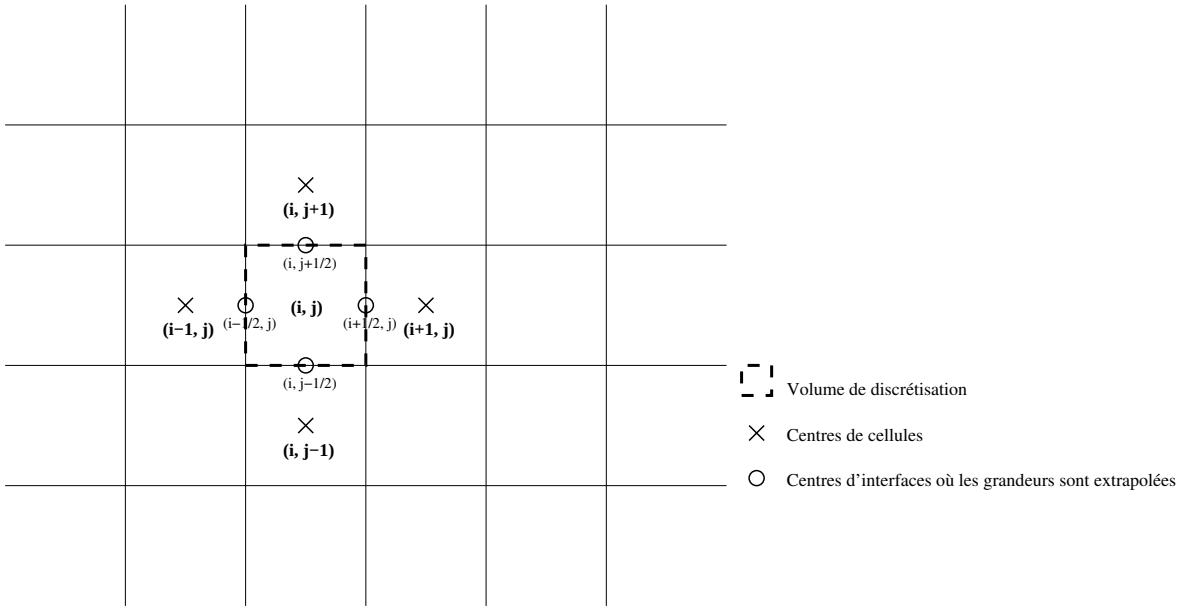

FIG. 3.5 – Stencil du gradient de vitesse discrétisé évalué au centre des cellules.

la cellule d'indice (i, j, k) fait donc également intervenir six (resp. quatre) cellules adjacentes pour un problème tridimensionnel (resp. bidimensionnel). En outre, il faut faire le passage du système de variables primitives $\boldsymbol{P}_{\text{cell}}$ à celui de variables conservatives $\boldsymbol{W}_{\text{cell}}$, c'est-à-dire faire le calcul de $\frac{\partial \mu_t}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \boldsymbol{P}_{\text{cell}}} \frac{\partial \boldsymbol{P}_{\text{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\text{cell}}}$. Il faut donc calculer les expressions $\frac{\partial \mu_t}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \boldsymbol{P}_{i+1,j,k}} \frac{\partial \boldsymbol{P}_{i+1,j,k}}{\partial \boldsymbol{W}_{i+1,j,k}}$, $\frac{\partial \mu_t}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \boldsymbol{P}_{i-1,j,k}} \frac{\partial \boldsymbol{P}_{i-1,j,k}}{\partial \boldsymbol{W}_{i-1,j,k}}$, $\frac{\partial \mu_t}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \boldsymbol{P}_{i,j+1,k}} \frac{\partial \boldsymbol{P}_{i,j+1,k}}{\partial \boldsymbol{W}_{i,j+1,k}}$, $\frac{\partial \mu_t}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \boldsymbol{P}_{i,j-1,k}} \frac{\partial \boldsymbol{P}_{i,j-1,k}}{\partial \boldsymbol{W}_{i,j-1,k}}$, $\frac{\partial \mu_t}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \boldsymbol{P}_{i,j,k+1}} \frac{\partial \boldsymbol{P}_{i,j,k+1}}{\partial \boldsymbol{W}_{i,j,k+1}}$ et $\frac{\partial \mu_t}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \boldsymbol{P}_{i,j,k-1}} \frac{\partial \boldsymbol{P}_{i,j,k-1}}{\partial \boldsymbol{W}_{i,j,k-1}}$.

3.6.5 Dérivation de la longueur de mélange

La longueur de mélange ℓ dépend de la distance à la paroi η qui est une grandeur purement géométrique (le champ aérodynamique $\boldsymbol{W}$ n'intervient pas dans son calcul) et de l'épaisseur de couche limite δ calculée en recherchant un maximum de vorticité (possibilité de deux critères, voir la sous-section 2.4). Par conséquent, du point de vue aérodynamique, la longueur de mélange ℓ dépend de la vitesse $\boldsymbol{U} = (u, v, w)^{\mathrm{T}}$. Tout comme la vorticité $\bar{\omega}$, δ et donc ℓ s'expriment plus naturellement dans le système de variables dites primitives $\boldsymbol{P}_{\mathrm{cell}}$.

L'expression de la longueur de mélange a été donnée précédemment (1.32),

$$\ell = 0{,}085\,\delta\,\tanh(\frac{K}{0{,}085}\frac{\eta}{\delta}), \tag{3.101}$$

avec $K = 0{,}41$ la constante de Kármán, η la distance à la paroi et δ l'épaisseur de couche limite. En pratique, afin d'avoir une épaisseur de couche limite δ et donc une longueur de mélange dérivable, on ne considère que le second critère, le premier critère ne donnant pas de relation explicite entre l'épaisseur de couche limite et le champ aérodynamique (voir section 2.4). L'épaisseur de couche limite δ est obtenue par interpolation de la manière suivante. Notons sur une même ligne de maillage (figure 3.6) $\bar{\omega}_{\max}$ le maximum de vorticité, $\bar{\omega}_1$ la vorticité au centre de la cellule 1, $\bar{\omega}_2$ la vorticité au centre de la cellule 2, η_1 la distance à la paroi du centre de la cellule 1, η_2 la distance à la paroi du centre de la cellule 2.

En outre, notons c_{crit} le pourcentage du deuxième critère. Les points 1 et 2 dépendent de cette valeur de c_{crit}. C'est le pourcentage de vorticité maximal qui détermine l'épaisseur de couche limite. Lorsque la valeur $c_{\mathrm{crit}}\bar{\omega}_{\max}$ est atteinte, l'épaisseur de couche limite δ est trouvée (voir figure 3.6) :

$$\begin{aligned} \delta &= \eta_1 + \frac{c_{\mathrm{crit}}\bar{\omega}_{\max} - \bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}(\eta_2 - \eta_1), \\ &= \eta_2 + \frac{c_{\mathrm{crit}}\bar{\omega}_{\max} - \bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}(\eta_2 - \eta_1). \end{aligned} \tag{3.102}$$

On connaît maintenant les expressions de la longueur de mélange ℓ en fonction de l'épaisseur de couche limite δ. On sait également exprimer cette dernière en fonction de la vorticité au centre de trois cellules. D'où les dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \delta} &= \frac{\ell}{\delta} - 0{,}085\delta\frac{K\eta}{0{,}085\delta^2}\frac{1}{\cosh^2(\frac{K\eta}{0{,}085\delta})}\,, \\ \frac{\partial \delta}{\partial \bar{\omega}_1} &= \frac{\bar{\omega}_2 - c_{\mathrm{crit}}\bar{\omega}_{\max}}{(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)^2}(\eta_1 - \eta_2)\,, \\ \frac{\partial \delta}{\partial \bar{\omega}_2} &= \frac{\bar{\omega}_1 - c_{\mathrm{crit}}\bar{\omega}_{\max}}{(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)^2}(\eta_2 - \eta_1)\,, \\ \frac{\partial \delta}{\partial \bar{\omega}_{\max}} &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}c_{\mathrm{crit}}\,. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Il reste alors à exprimer les dérivées de type :

$$\frac{\partial \bar{\omega}_l}{\partial \boldsymbol{W}_{i_l\pm1,j_l\pm1,k_l\pm1}},\ \text{avec } l \in \{1, 2, \max\}, \tag{3.104}$$

et avec $\boldsymbol{W}_{i_l\pm1,j_l\pm1,k_l\pm1} \in \{\boldsymbol{W}_{i_l+1,j_l,k_l}, \boldsymbol{W}_{i_l-1,j_l,k_l}, \boldsymbol{W}_{i_l,j_l+1,k_l}, \boldsymbol{W}_{i_l,j_l-1,k_l}, \boldsymbol{W}_{i_l,j_l,k_l+1}, \boldsymbol{W}_{i_l,j_l,k_l-1}\}$ de la même manière que dans la sous-section 3.6.4.

Pour obtenir le résultat final $\frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}$, $\frac{\partial \ell}{\partial \delta}$ est multiplié par $\frac{\partial \delta}{\partial \bar{\omega}_l}$ puis par $\frac{\partial \bar{\omega}_l}{\partial \boldsymbol{P}_{i_l\pm1,j_l\pm1,k_l\pm1}}$ avec $l \in \{1, 2, \max\}$ et enfin par $\frac{\partial \boldsymbol{P}_{i_l\pm1,j_l\pm1,k_l\pm1}}{\partial \boldsymbol{W}_{i_l\pm1,j_l\pm1,k_l\pm1}}$ pour le passage du système primitif au système conservatif.

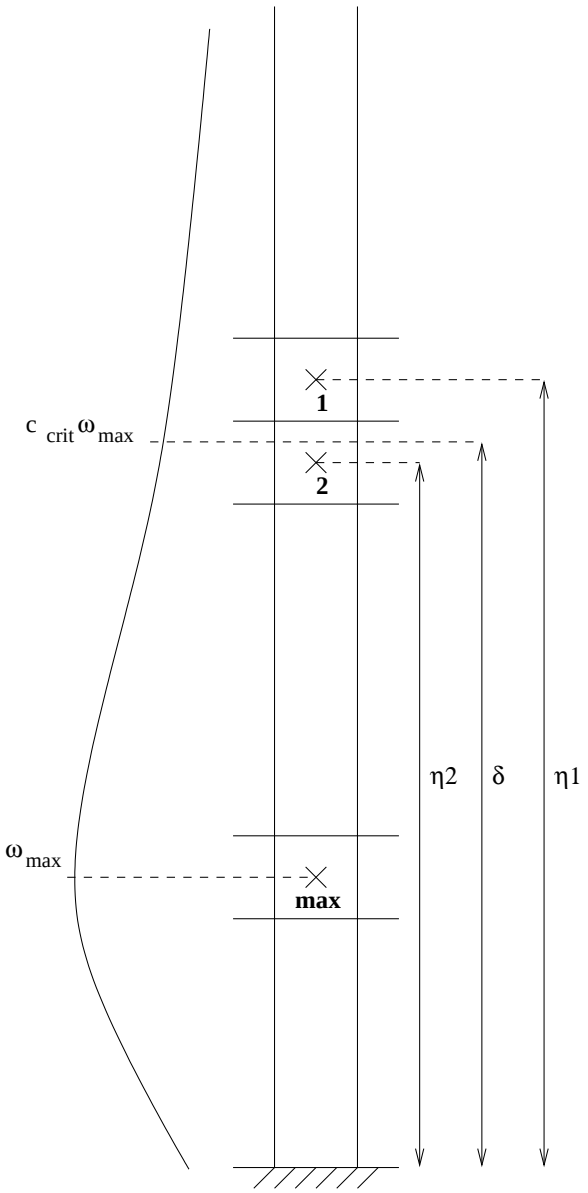

FIG. 3.6 – Notations pour le calcul de l'épaisseur de couche limite δ.

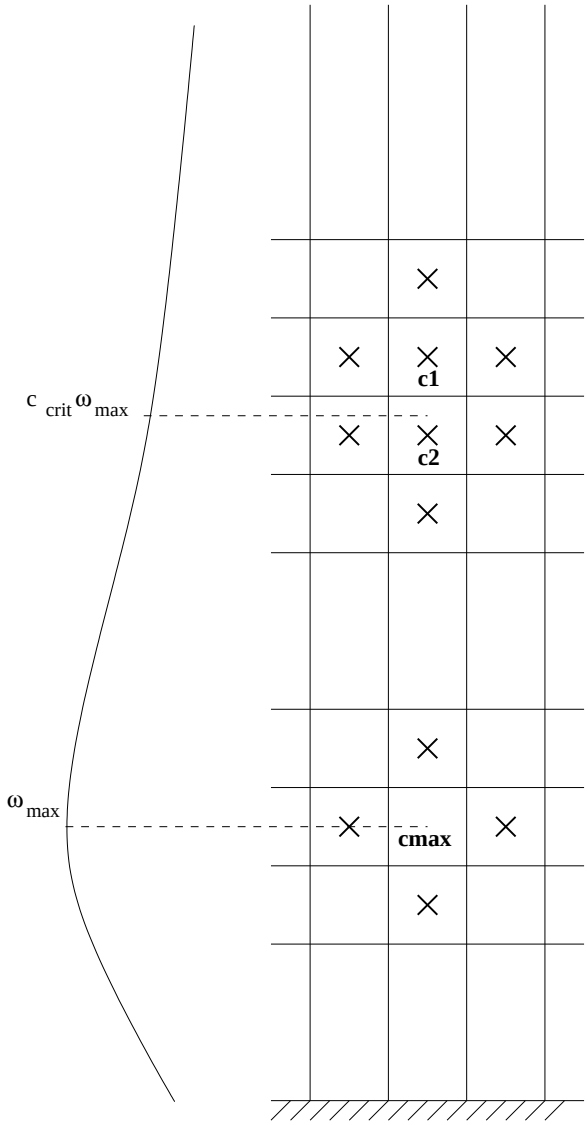

FIG. 3.7 – Stencil de la linéarisation de l'épaisseur de couche limite en fonction du champ aérodynamique.

La dérivation de la longueur de mélange ℓ par rapport au champ aérodynamique au centre d'une seule cellule fait intervenir $3 \times 6 = 18$ (resp. 3×4) cellules pour un problème tridimensionnel (resp. bidimensionnel). Ce sont trois ensembles de six (resp. quatre) cellules « en croix » centrés autour des cellules notées `c1, c2, cmax` par la suite. Ces cellules `c1, c2, cmax` sont les mêmes pour toutes les cellules d'une même ligne de maillage qui possèdent le même maximum de vorticité, et donc la même épaisseur de couche limite. On note ainsi un caractère non compact et non local de la dépendance en ces cellules `c1, c2, cmax` (voir figure 3.7).

3.7 Linéarisation du modèle k-ε de Launder-Sharma

On rappelle ici les équations du modèle k-ε Launder-Sharma données dans le paragraphe 1.2.4.2.1 :

$$\begin{array}{rcllll}
\dfrac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla\cdot \left[\boldsymbol{U}\rho k - \left(\mu + \dfrac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_k}\right)\nabla k \right] & = & P & - (\rho\tilde{\varepsilon} + D), & & \\
\dfrac{\partial \rho \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla\cdot \left[\boldsymbol{U}\rho \tilde{\varepsilon} - \left(\mu + \dfrac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}\right)\nabla \tilde{\varepsilon} \right] & = & C_{\varepsilon 1} f_1 \dfrac{\tilde{\varepsilon}}{k} P & - C_{\varepsilon 2} f_2 \rho \dfrac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} & + E, & \\
 & & \text{Production} & \text{Dissipation} & \text{Correction bas Reynolds} &
\end{array} \tag{3.105}$$

avec :

$$\begin{array}{rcl}
P & = & \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}} : \nabla \boldsymbol{U} = -\rho u_i' u_j' \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \text{ terme de production de } k, \text{ avec ici } \boldsymbol{U} = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}, \\
\tau_{ij} & = & -\rho u_i' u_j' = \mu_{\mathrm{t}} \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} - \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ij} \right) - \dfrac{2}{3}\rho k \delta_{ij}, \\
\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{r}} & = & \mu_{\mathrm{t}} \left(\nabla \boldsymbol{U} + (\nabla \boldsymbol{U})^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot \boldsymbol{U})\mathbf{I} \right) - \frac{2}{3}\rho k \mathbf{I}, \\
D & = & 2\mu \left(\nabla\sqrt{k} \right) \cdot \left(\nabla\sqrt{k} \right), \\
E & = & 2\dfrac{\mu\mu_{\mathrm{t}}}{\rho} \left(\nabla \left(\nabla \boldsymbol{U} \right) \right) \vdots \left(\nabla \left(\nabla \boldsymbol{U} \right) \right),
\end{array} \tag{3.106}$$

avec les fonctions correctives f_1 et f_2 de proche paroi :

$$f_1 = 1{,}0 \ , \ f_2 = 1 - 0{,}3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}^2} \ , \ \mathrm{Re}_{\mathrm{t}} = \frac{k^2}{\nu\tilde{\varepsilon}} \ , \tag{3.107}$$

$$\mu_{\mathrm{t}} = c_\mu f_\mu \frac{\rho k^2}{\tilde{\varepsilon}} \ , \ \text{avec } f_\mu = \exp\left(\frac{-3{,}4}{(1 + \mathrm{Re}_{\mathrm{t}}/50)^2} \right), \tag{3.108}$$

et les constantes de ce modèle sont :

$$C_\mu = 0{,}09 \ ; \quad \sigma_k = 1{,}0 \ ; \quad \sigma_\varepsilon = 1{,}3 \ ; \quad C_{\varepsilon 1} = 1{,}44 \ ; \quad C_{\varepsilon 2} = 1{,}92. \tag{3.109}$$

Notons :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Dest6} & = & -(\rho\tilde{\varepsilon} + D), \\
\mathrm{Dest7} & = & -C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\rho\tilde{\varepsilon}^2}{k}, \\
\mathrm{Prod6} & = & P, \\
\mathrm{Prod7} & = & C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P.
\end{array} \tag{3.110}$$

3.7.1 Dérivation des coefficients de viscosité

Pour le coefficient de viscosité moléculaire, on utilise, tout comme pour la linéarisation du modèle de Michel *et al.*, la loi de Sutherland (1.16). On obtient la même dérivée qu'en (3.89).

Le coefficient de viscosité turbulente est donné par :

$$\mu_{\mathrm{t}} = C_\mu f_\mu \frac{\rho k^2}{\tilde{\varepsilon}}, \ f_\mu = \exp\left(\frac{-3{,}4}{(1 + \mathrm{Re}_{\mathrm{t}}/50)^2} \right), \ C_\mu = 0{,}09 \ . \tag{3.111}$$

On a ainsi la dérivée de μ_{t} par rapport aux variables $\mu, \rho k, \rho\tilde{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \mu} &= -0{,}136 C_\mu f_\mu \frac{\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}^2}{(1+\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}/50)^3}\,, \\
\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \rho k} &= 2 C_\mu f_\mu \frac{k}{\tilde{\varepsilon}}\left(1+0{,}136\frac{\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}}{(1+\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}/50)^3}\right)\,, \\
\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \rho\tilde{\varepsilon}} &= -C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}^2}\left(1+0{,}136\frac{\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}}{(1+\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}/50)^3}\right).
\end{aligned} \tag{3.112}$$

On obtient alors les dérivées de μ_{t} par rapport au systèmes de variables $\boldsymbol{W}_5 = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^{\mathrm{T}}$ par :

$$\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \boldsymbol{W}_5} = \frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{W}_5}. \tag{3.113}$$

3.7.2 Dérivation du flux visqueux

Par rapport à un système à cinq équations, le modèle k-ε de Launder-Sharma rajoute deux équations supplémentaires où apparaît à nouveau un terme visqueux :

$$\begin{aligned}
&-\nabla\cdot\left[\left(\mu+\tfrac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_k}\right)\nabla k\right], \\
&-\nabla\cdot\left[\left(\mu+\tfrac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}\right)\nabla \tilde{\varepsilon}\right].
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Pour les cinq premières équations, on procède comme dans les sections 3.3 et 3.4. En outre, on additionne à chacun des termes respectifs la dérivée $\frac{\partial(\mu+\mu_{\mathrm{t}})}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}$, soit par exemple, si l'on se place dans l'approche de type « couche mince », la dérivée de l'approximation du flux diffusif $\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ par rapport au champ aérodynamique dans une cellule d'indices cell, pour cell $\in \{(i,j,k),(i{+}1,j,k)\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}\right)_{\bar{\mu},\bar{k}} \\
&+ \begin{pmatrix}
0 \\
\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{\mu}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}\left((1+\frac{1}{3}n_x^2)(u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_x n_y (v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_x n_z (w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) \\
\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{\mu}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{1}{3}n_x n_y (u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_y^2)(v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_y n_z (w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) \\
\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{\mu}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{1}{3}n_x n_z (v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_y n_z (v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_z^2)(w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) \\
\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \mu_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}} + \frac{1}{\mathrm{Pr_t}}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t\ cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}\right)\left(\frac{p}{\rho}\right)_{i+\frac{1}{2},V_1} \\
+\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{\mu}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}\left((1+\frac{1}{3}n_x^2)(u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_x n_y (v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_x n_z (w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) u_{i+\frac{1}{2}} \\
+\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{\mu}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{1}{3}n_x n_y (u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_y^2)(v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_y n_z (w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) v_{i+\frac{1}{2}} \\
+\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{\mu}_{\mathrm{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{1}{3}n_x n_z (u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_y n_z (v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_z^2)(w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) w_{i+\frac{1}{2}}
\end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,,
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Pour la dérivation par rapport aux deux variables turbulentes, pour $g \in \{\rho k, \rho\tilde{\varepsilon}\}$ on a :

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\partial g_{\mathrm{cell}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t\ cell}}}{\partial g_{\mathrm{cell}}}\left((1+\frac{1}{3}n_x^2)(u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_x n_y (v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_x n_z (w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t\ cell}}}{\partial g_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{1}{3}n_x n_y (u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_y^2)(v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_y n_z (w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t\ cell}}}{\partial g_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{1}{3}n_x n_z (v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_y n_z (v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_z^2)(w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\mathrm{Pr_t}}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t\ cell}}}{\partial g_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{p}{\rho}\right)_{i+\frac{1}{2},V_1} \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t\ cell}}}{\partial g_{\mathrm{cell}}}\left((1+\frac{1}{3}n_x^2)(u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_x n_y (v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_x n_z (w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) u_{i+\frac{1}{2}} \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t\ cell}}}{\partial g_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{1}{3}n_x n_y (u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_y^2)(v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_y n_z (w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) v_{i+\frac{1}{2}} \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t\ cell}}}{\partial g_{\mathrm{cell}}}\left(\frac{1}{3}n_x n_z (u_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_y n_z (v_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_z^2)(w_{,V_1})_{i+\frac{1}{2}}\right) w_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,. \tag{3.116}$$

Pour les composantes 6 (resp. 7), on a les relations suivantes avec $h = k$ (resp. $\tilde{\varepsilon}$) si l'on note $(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_6$ (resp. $(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_7$) la discrétisation du flux $\left(\mu + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_k}\right)\nabla k \cdot \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ (resp. $\left(\mu + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}\right)\nabla\tilde{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{S}_{i+\frac{1}{2},j,k}$) sur l'interface $(i+\frac{1}{2},j,k)$:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_{67}}{\partial \rho_{\mathrm{cell}}} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho_{\mathrm{cell}}} + \frac{1}{\sigma_h}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial \rho_{\mathrm{cell}}}\right)\frac{1}{2}h_{,V_1}S_{i+\frac{1}{2},j,k} - \left(\mu + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_h}\right)\frac{h_{\mathrm{cell}}}{\rho_{\mathrm{cell}}}\frac{S_{\mathrm{cell}}}{\mathcal{V}}S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,. \tag{3.117}$$

Pour $g \in \{\rho u, \rho v, \rho w, \rho E\}$:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_{67}}{\partial g_{\mathrm{cell}}} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial g_{\mathrm{cell}}} + \frac{1}{\sigma_h}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial g_{\mathrm{cell}}}\right)\frac{1}{2}h_{,V_1}S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,. \tag{3.118}$$

Enfin, pour les dérivées par rapport aux grandeurs turbulentes ρk et $\rho\tilde{\varepsilon}$:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_6}{\partial(\rho k)_{\mathrm{cell}}} = \frac{1}{\sigma_k}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial(\rho k)_{\mathrm{cell}}}\frac{1}{2}k_{,V_1}S_{i+\frac{1}{2},j,k} + \left(\mu + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_k}\right)\frac{1}{\rho_{\mathrm{cell}}}\frac{S_{\mathrm{cell}}}{\mathcal{V}}S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,, \tag{3.119}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_6}{\partial(\rho\tilde{\varepsilon})_{\mathrm{cell}}} = \frac{1}{\sigma_k}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial(\rho\tilde{\varepsilon})_{\mathrm{cell}}}\frac{1}{2}k_{,V_1}S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,, \tag{3.120}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_7}{\partial(\rho k)_{\mathrm{cell}}} = \frac{1}{\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial(\rho k)_{\mathrm{cell}}}\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{,V_1}S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,, \tag{3.121}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{i+\frac{1}{2},j,k})_7}{\partial(\rho\tilde{\varepsilon})_{\mathrm{cell}}} = \frac{1}{\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}\frac{\partial \mu_{\mathrm{t}}}{\partial(\rho\tilde{\varepsilon})_{\mathrm{cell}}}\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{,V_1}S_{i+\frac{1}{2},j,k} + \left(\mu + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}\right)\frac{1}{\rho_{\mathrm{cell}}}\frac{S_{\mathrm{cell}}}{\mathcal{V}}S_{i+\frac{1}{2},j,k}\,. \tag{3.122}$$

Pour les conditions aux limites, on fait l'hypothèse de « μ_{t} figé » pour toutes les composantes du flux visqueux. Pour les cinq premières composantes, on utilise les mêmes conditions aux limites que pour le cas d'un système à cinq équations, à « μ_{t} figé ». Pour les sixième et septième composantes, on a les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{b}})_6}{\partial \rho_{\mathrm{cell}}} &= -\frac{k}{\rho}\left(\mu + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_k}\right)\frac{S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}}S_{\mathrm{b}}\,, \\ \frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{b}})_6}{\partial(\rho k)_{\mathrm{cell}}} &= \frac{1}{\rho}\left(\mu + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_k}\right)\frac{S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}}S_{\mathrm{b}}\,, \\ \frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{b}})_7}{\partial \rho_{\mathrm{cell}}} &= -\frac{\tilde{\varepsilon}}{\rho}\left(\mu + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}\right)\frac{S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}}S_{\mathrm{b}}\,, \\ \frac{\partial(\boldsymbol{F}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{b}})_7}{\partial(\rho\tilde{\varepsilon})_{\mathrm{cell}}} &= \frac{1}{\rho}\left(\mu + \frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\sigma_{\tilde{\varepsilon}}}\right)\frac{S_{\mathrm{b}}}{\mathcal{V}}S_{\mathrm{b}}\,. \end{aligned} \tag{3.123}$$

Dans le cas d'une paroi adiabatique, le volume $\mathcal{V}$ est pris égal à la moitié du volume de la cellule adjacente à la paroi, alors que dans les autres cas, le volume est pris égal au volume de la cellule adjacente à la frontière.

3.7.3 Dérivation du terme de dissipation

Il s'agit de dériver les termes Dest6 et Dest7 par rapport au champ aérodynamique à sept équations $\boldsymbol{W}_7 = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E, \rho k, \rho\tilde{\varepsilon})^{\mathrm{T}}$.

$$\frac{\partial D}{\partial \mu} = 2\nabla\sqrt{k}\cdot\nabla\sqrt{k} = \frac{D}{\mu}\,. \tag{3.124}$$

Pour cell $\in \{(i+1,j,k),(i-1,j,k),(i,j+1,k),(i,j-1,k),(i,j,k+1),(i,j,k-1)\}$:

$$\frac{\partial D}{\partial k_{\mathrm{cell}}} = \frac{\mu}{\mathcal{V}\sqrt{k}_{\mathrm{cell}}}(S^x_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{x}} + S^y_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{y}} + S^z_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{z}})\,, \tag{3.125}$$

soit, comme Dest6 $= -(\rho\tilde{\varepsilon} + D)$:

$$\frac{\partial \mathrm{Dest6}}{\partial \mu} = -2\nabla\sqrt{k}\cdot\nabla\sqrt{k} = -\frac{D}{\mu}\,, \tag{3.126}$$

et

$$\frac{\partial \mathrm{Dest6}}{\partial k_{\mathrm{cell}}} = -\frac{\mu}{\mathcal{V}\sqrt{k}_{\mathrm{cell}}}(S^x_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{x}} + S^y_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{y}} + S^z_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{z}})\,. \tag{3.127}$$

Pour obtenir les dérivées de Dest6 par rapport aux variables $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E, \rho k)^{\mathrm{T}}$, les deux expressions ci-dessus sont multipliées par $\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{W}_5}$, $\frac{\partial k}{\partial \rho}$ ou $\frac{\partial k}{\partial \rho k}$:

$$\frac{\partial \mathrm{Dest6}}{\partial \boldsymbol{W}_5} = \frac{\partial \mathrm{Dest6}}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{W}_5}. \tag{3.128}$$

On a directement :

$$\frac{\partial \mathrm{Dest6}}{\partial \rho k} = 0 \text{ et } \frac{\partial \mathrm{Dest6}}{\partial \rho\tilde{\varepsilon}} = -1. \tag{3.129}$$

Pour cell $\in \{(i+1,j,k),(i-1,j,k),(i,j+1,k),(i,j-1,k),(i,j,k+1),(i,j,k-1)\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{Dest6}}{\partial \rho_{\mathrm{cell}}} &= \frac{\partial \mathrm{Dest6}}{\partial k_{\mathrm{cell}}}\frac{\partial k_{\mathrm{cell}}}{\partial \rho_{\mathrm{cell}}} = \frac{k_{\mathrm{cell}}}{\rho_{\mathrm{cell}}}\frac{\mu}{\mathcal{V}\sqrt{k}_{\mathrm{cell}}}(S^x_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{x}} + S^y_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{y}} + S^z_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{z}})\,,\\
\frac{\partial \mathrm{Dest6}}{\partial \rho k_{\mathrm{cell}}} &= \frac{\partial \mathrm{Dest6}}{\partial k_{\mathrm{cell}}}\frac{\partial k_{\mathrm{cell}}}{\partial \rho k_{\mathrm{cell}}} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{cell}}}\frac{\mu}{\mathcal{V}\sqrt{k}_{\mathrm{cell}}}(S^x_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{x}} + S^y_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{y}} + S^z_{\mathrm{cell}}(\sqrt{k})_{,\mathrm{z}})\,.
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Pour la dérivée du terme Dest7, on a :

$$\frac{\partial \mathrm{Dest7}}{\partial \mu} = 0{,}6C_{\varepsilon 2}(\frac{\tilde{\varepsilon}}{k})^3\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}^3\exp(-\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}^2). \tag{3.131}$$

Pour obtenir la dérivée partielle de Dest7 par rapport aux variables $\boldsymbol{W}_5 = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^{\mathrm{T}}$, il suffit ensuite de multiplier l'expression ci-dessus avec $\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{W}_5}$, soit :

$$\frac{\partial \mathrm{Dest7}}{\partial \boldsymbol{W}_5} = \frac{\partial \mathrm{Dest7}}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{W}_5}. \tag{3.132}$$

Les deux autres dérivées de Dest7 par rapport aux variables ρk et $\rho\tilde{\varepsilon}$ s'obtiennent aussi directement :

$$\frac{\partial \mathrm{Dest7}}{\partial \rho k} = C_{\varepsilon 2}(\frac{\tilde{\varepsilon}}{k})^2\left(f_2 - 1{,}2\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}^2\exp(-\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}^2)\right), \tag{3.133}$$

$$\frac{\partial \mathrm{Dest7}}{\partial \rho\tilde{\varepsilon}} = 2C_{\varepsilon 2}\frac{\tilde{\varepsilon}}{k}\left(-f_2 + 0{,}3\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}^2\exp(-\mathrm{Re}_{\mathrm{t}}^2)\right). \tag{3.134}$$

3.7.4 Dérivation du terme de correction bas Reynolds

Pour la dérivation du terme E, on passe également par le système de variables primitives $\boldsymbol{P}_{\text{cell}}$. On a directement la dérivée du terme E par rapport à ρ exprimé en variables primitives :

$$\frac{\partial E}{\partial \rho_{\text{prim}}} = -2\frac{\mu\mu_{\text{t}}}{\rho^2}\left(\nabla\left(\nabla \boldsymbol{U}\right)\right)\vdots\left(\nabla\left(\nabla \boldsymbol{U}\right)\right) = -\frac{E}{\rho}. \tag{3.135}$$

Pour les composantes de vitesse, si g désigne une de ces composantes dans $\{u, v, w\}$ et cell $\in \{(i,j,k),(i+2,j,k),(i-2,j,k),(i,j+2,k),(i,j-2,k),(i,j,k+2),(i,j,k-2),(i+1,j+1,k),(i+1,j-1,k),(i+1,j,k+1),(i+1,j,k-1),(i-1,j+1,k),(i-1,j-1,k),(i-1,j,k+1),(i-1,j,k-1),(i,j+1,k+1),(i,j+1,k-1),(i,j-1,k+1),(i,j-1,k-1)\}$, on a :

$$\frac{\partial E}{\partial g_{\text{cell}}} = \frac{\mu\mu_{\text{t}}}{\rho\mathcal{V}}\begin{pmatrix} \lambda_{xx,\text{cell}}g_{,xx} + \lambda_{xy,\text{cell}}g_{,xy} + \lambda_{xz,\text{cell}}g_{,xz} \\ +\lambda_{yx,\text{cell}}g_{,yx} + \lambda_{yy,\text{cell}}g_{,yy} + \lambda_{yz,\text{cell}}g_{,yz} \\ +\lambda_{zx,\text{cell}}g_{,zx} + \lambda_{zy,\text{cell}}g_{,zy} + \lambda_{zz,\text{cell}}g_{,zz} \end{pmatrix}, \tag{3.136}$$

avec les $\lambda_{\beta_1\beta_2,\text{cell}}, (\beta_1,\beta_2) \in \{x,y,z\}^2$ définis lors de la discrétisation du terme E, formules (2.44).

Pour la dérivation du terme E, par rapport aux coefficients de viscosité μ et μ_{t}, on a directement :

$$\frac{\partial E}{\partial \mu} = \frac{2\mu_{\text{t}}}{\rho}\left(\nabla\left(\nabla \boldsymbol{U}\right)\right)\vdots\left(\nabla\left(\nabla \boldsymbol{U}\right)\right) = \frac{E}{\mu}, \tag{3.137}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mu_{\text{t}}} = \frac{2\mu}{\rho}\left(\nabla\left(\nabla \boldsymbol{U}\right)\right)\vdots\left(\nabla\left(\nabla \boldsymbol{U}\right)\right) = \frac{E}{\mu_{\text{t}}}. \tag{3.138}$$

On repasse après dans le système de variables conservatives $\boldsymbol{W}_7$ par la matrice de passage $\frac{\partial \boldsymbol{P}_{\text{cell}}}{\partial \boldsymbol{W}_{\text{cell}}}$ pour les composantes du champ moyen, par les vecteurs $\frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{W}_5}$ et par les vecteurs $\frac{\partial \mu_{\text{t}}}{\partial \boldsymbol{W}_7}$.

Pour cell $\in \{(i+2,j,k),(i-2,j,k),(i,j+2,k),(i,j-2,k),(i,j,k+2),(i,j,k-2),(i+1,j+1,k),(i+1,j-1,k),(i+1,j,k+1),(i+1,j,k-1),(i-1,j+1,k),(i-1,j-1,k),(i-1,j,k+1),(i-1,j,k-1),(i,j+1,k+1),(i,j+1,k-1),(i,j-1,k+1),(i,j-1,k-1)\}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial E}{\partial \rho_{\text{cell}}} & = & -\dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\left(\dfrac{\partial E}{\partial u_{\text{cell}}}u_{\text{cell}} + \dfrac{\partial E}{\partial v_{\text{cell}}}v_{\text{cell}} + \dfrac{\partial E}{\partial w_{\text{cell}}}w_{\text{cell}}\right), \\ \dfrac{\partial E}{\partial \rho u_{\text{cell}}} & = & \dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\dfrac{\partial E}{\partial u_{\text{cell}}}, \\ \dfrac{\partial E}{\partial \rho v_{\text{cell}}} & = & \dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\dfrac{\partial E}{\partial v_{\text{cell}}}, \\ \dfrac{\partial E}{\partial \rho w_{\text{cell}}} & = & \dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\dfrac{\partial E}{\partial w_{\text{cell}}}, \\ \dfrac{\partial E}{\partial \rho E_{\text{cell}}} & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.139}$$

Sinon, pour la cellule courante (i,j,k) :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\dfrac{\partial E}{\partial \rho} & = & \dfrac{\partial E}{\partial \rho_{\text{prim}}} - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial E}{\partial u}u + \dfrac{\partial E}{\partial v}v + \dfrac{\partial E}{\partial w}w\right) + \dfrac{\partial E}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho} + \dfrac{\partial E}{\partial \mu_{\text{t}}}\dfrac{\partial \mu_{\text{t}}}{\partial \rho}, \\
\dfrac{\partial E}{\partial \rho u} & = & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial E}{\partial u} + \dfrac{\partial E}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho u} + \dfrac{\partial E}{\partial \mu_{\text{t}}}\dfrac{\partial \mu_{\text{t}}}{\partial \rho u}, \\
\dfrac{\partial E}{\partial \rho v} & = & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial E}{\partial v} + \dfrac{\partial E}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho v} + \dfrac{\partial E}{\partial \mu_{\text{t}}}\dfrac{\partial \mu_{\text{t}}}{\partial \rho v}, \\
\dfrac{\partial E}{\partial \rho w} & = & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial E}{\partial w} + \dfrac{\partial E}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho w} + \dfrac{\partial E}{\partial \mu_{\text{t}}}\dfrac{\partial \mu_{\text{t}}}{\partial \rho w}, \\
\dfrac{\partial E}{\partial \rho E} & = & \dfrac{\partial E}{\partial \mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho E} + \dfrac{\partial E}{\partial \mu_{\text{t}}}\dfrac{\partial \mu_{\text{t}}}{\partial \rho E} \\
\dfrac{\partial E}{\partial \rho k} & = & \dfrac{\partial E}{\partial \mu_{\text{t}}}\dfrac{\partial \mu_{\text{t}}}{\partial \rho k}, \\
\dfrac{\partial E}{\partial \rho \tilde{\varepsilon}} & = & \dfrac{\partial E}{\partial \mu_{\text{t}}}\dfrac{\partial \mu_{\text{t}}}{\partial \rho \tilde{\varepsilon}}.
\end{array}\right. \tag{3.140}$$

3.7.5 Dérivation du terme de production

Posons :

$$\begin{array}{lcl}
\sigma_{11} & = & \mu_{\text{t}}(2u_{,x} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{U})) - \frac{2}{3}\rho k\,, \\
\sigma_{22} & = & \mu_{\text{t}}(2v_{,y} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{U})) - \frac{2}{3}\rho k\,, \\
\sigma_{33} & = & \mu_{\text{t}}(2w_{,z} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{U})) - \frac{2}{3}\rho k\,, \\
\sigma_{12} & = & \mu_{\text{t}}(u_{,y} + v_{,x})\,, \\
\sigma_{13} & = & \mu_{\text{t}}(u_{,z} + w_{,x})\,, \\
\sigma_{23} & = & \mu_{\text{t}}(v_{,z} + w_{,y})\,,
\end{array} \tag{3.141}$$

on a alors :

$$\begin{array}{lcl}
P & = & \mu_{\text{t}}\left(2u_{,x}^2 + 2v_{,y}^2 + 2w_{,z}^2 - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{U})^2 + (u_{,y}+v_{,x})^2 + (u_{,z}+w_{,x})^2 + (v_{,z}+w_{,y})^2\right) - \frac{2}{3}\rho k(\nabla\cdot\boldsymbol{U}) \\
 & = & \mu_{\text{t}}(\nabla\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U} + \nabla\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^{\text{T}} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{U})^2) - \frac{2}{3}\rho k(\nabla\cdot\boldsymbol{U}).
\end{array} \tag{3.142}$$

On a directement :

$$\frac{\partial \text{Prod6}}{\partial \mu_{\text{t}}} = \frac{\partial P}{\partial \mu_{\text{t}}} = \nabla\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U} + \nabla\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}^{\text{T}} - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{U})^2\,, \tag{3.143}$$

$$\left(\frac{\partial \text{Prod6}}{\partial \boldsymbol{W}_5}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{W}_5}\right) = \frac{\partial P}{\partial \mu_{\text{t}}}\frac{\partial \mu_{\text{t}}}{\partial \boldsymbol{W}_5}\,, \tag{3.144}$$

$$\frac{\partial \text{Prod6}}{\partial \rho k} = \frac{\partial P}{\partial \rho k} = -\frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{U}) + \frac{\partial P}{\partial \mu_{\text{t}}}\frac{\partial \mu_{\text{t}}}{\partial \rho k}\,, \tag{3.145}$$

$$\frac{\partial \text{Prod6}}{\partial \rho \tilde{\varepsilon}} = \frac{\partial P}{\partial \rho \tilde{\varepsilon}} = \frac{\partial P}{\partial \mu_{\text{t}}}\frac{\partial \mu_{\text{t}}}{\partial \rho \tilde{\varepsilon}}\,. \tag{3.146}$$

Pour les cellules adjacentes $(i+1,j,k),(i-1,j,k),(i,j+1,k),(i,j-1,k),(i,j,k+1),(i,j,k-1)$, on a :

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \text{Prod6}}{\partial u_{\text{cell}}} = \dfrac{\partial P}{\partial u_{\text{cell}}} = \dfrac{(\sigma_{11} + \frac{\rho k}{3})S^x_{\text{cell}/2} + \sigma_{12}S^y_{\text{cell}/2} + \sigma_{13}S^z_{\text{cell}/2}}{\mathcal{V}}\,, \\
\dfrac{\partial \text{Prod6}}{\partial v_{\text{cell}}} = \dfrac{\partial P}{\partial v_{\text{cell}}} = \dfrac{(\sigma_{22} + \frac{\rho k}{3})S^y_{\text{cell}/2} + \sigma_{12}S^x_{\text{cell}/2} + \sigma_{23}S^z_{\text{cell}/2}}{\mathcal{V}}\,, \\
\dfrac{\partial \text{Prod6}}{\partial w_{\text{cell}}} = \dfrac{\partial P}{\partial w_{\text{cell}}} = \dfrac{(\sigma_{33} + \frac{\rho k}{3})S^z_{\text{cell}/2} + \sigma_{13}S^x_{\text{cell}/2} + \sigma_{23}S^y_{\text{cell}/2}}{\mathcal{V}}\,,
\end{array} \tag{3.147}$$

avec par exemple si cell $= (i+1,j,k), S^x_{\text{cell}/2} = S^x_{i+\frac{1}{2},j,k}$. Et donc,

$$\frac{\partial \text{Prod6}}{\partial \boldsymbol{W}_{5\text{cell}}} = \frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{W}_{5\text{cell}}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\left(\dfrac{\partial P}{\partial u_{\text{cell}}}u_{\text{cell}} + \dfrac{\partial P}{\partial v_{\text{cell}}}v_{\text{cell}} + \dfrac{\partial P}{\partial w_{\text{cell}}}w_{\text{cell}}\right) \\ \dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\dfrac{\partial P}{\partial u_{\text{cell}}} \\ \dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\dfrac{\partial P}{\partial v_{\text{cell}}} \\ \dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\dfrac{\partial P}{\partial w_{\text{cell}}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.148}$$

Pour le terme Prod7, on a facilement :

$$\frac{\partial \text{Prod7}}{\partial \boldsymbol{W}_5} = C_{\varepsilon 1}\frac{\tilde{\varepsilon}}{k}\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{W}_5}, \tag{3.149}$$

$$\frac{\partial \text{Prod7}}{\partial \rho k} = -C_{\varepsilon 1}\frac{\tilde{\varepsilon}}{\rho k^2}P + C_{\varepsilon 1}\frac{\tilde{\varepsilon}}{k}\frac{\partial P}{\partial \rho k}, \tag{3.150}$$

$$\frac{\partial \text{Prod7}}{\partial \rho \tilde{\varepsilon}} = C_{\varepsilon 1}\frac{1}{\rho k}P + C_{\varepsilon 1}\frac{\tilde{\varepsilon}}{k}\frac{\partial P}{\partial \rho \tilde{\varepsilon}}, \tag{3.151}$$

et pour les cellules adjacentes $(i+1,j,k), (i-1,j,k), (i,j+1,k), (i,j-1,k), (i,j,k+1), (i,j,k-1)$, on a :

$$\frac{\partial \text{Prod7}}{\partial \boldsymbol{W}_{5\text{cell}}} = C_{\varepsilon 1}\frac{\tilde{\varepsilon}}{k}\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{W}_{5\text{cell}}} = C_{\varepsilon 1}\frac{\tilde{\varepsilon}}{k}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\left(\dfrac{\partial P}{\partial u_{\text{cell}}}u_{\text{cell}} + \dfrac{\partial P}{\partial v_{\text{cell}}}v_{\text{cell}} + \dfrac{\partial P}{\partial w_{\text{cell}}}w_{\text{cell}}\right) \\ \dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\dfrac{\partial P}{\partial u_{\text{cell}}} \\ \dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\dfrac{\partial P}{\partial v_{\text{cell}}} \\ \dfrac{1}{\rho_{\text{cell}}}\dfrac{\partial P}{\partial w_{\text{cell}}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.152}$$

Lors de l'évaluation du gradient d'une quantité dans le terme source au centre d'une cellule adjacente à un bord du maillage, on prend pour valeurs de champ (composante de vitesse, racine carrée de l'énergie cinétique...) dans la cellule adjacente qui se trouve à l'extérieur du maillage, celle de la cellule courante. Dans le cas du terme bas Reynolds E, si l'on se trouve sur une cellule adjacente au bord du maillage d'indice (i,j,k), par exemple dans le cas d'une frontière d'indices MIN dans la direction des i, on prend pour valeur de $g_{i-2,j,k}$ la valeur dans la cellule courante $g_{i,j,k}$.

3.8 Bilan

Dans ce chapitre sont présentées les différentes formules de discrétisation et de différentiation du flux diffusif et de modèles de turbulence. Trois linéarisations du flux diffusif existent maintenant dans *elsA* et sont à comparer : avec approche de type « couche mince » et sans (pour laquelle on a deux formulations possibles). Nous allons évaluer l'influence de cette approche pour le calcul de gradients de fonctions aérodynamiques.

En outre, la linéarisation du modèle de Michel *et al.* a été décrite. Certains facteurs (en particulier la vorticité) peuvent être différentiés de manière plus ou moins précise. Pour la linéarisation du modèle k-ε, on a profité de l'expérience de la linéarisation du modèle de Michel *et al.* Certaines voies explorées et non concluantes lors de la linéarisation de ce modèle algébrique n'ont pas été tentées à nouveau. Néanmoins, des problèmes informatiques ne nous permettent pas de présenter à cette date des résultats issus de la linéarisation du modèle k-ε. On va donc pouvoir évaluer l'influence de la linéarisation du modèle de turbulence par rapport à une linéarisation à « μ_t figé », notamment pour les calculs utilisant le modèle de Michel *et al.*

Dans les deux chapitres qui suivent, les résultats des linéarisations les plus pertinentes et significatives sur différents cas d'épreuve vont être présentés : des cas académiques d'aérodynamique (tuyère dite de Déléry « bosse C », aile ONERA M6) au chapitre 4 et des cas de turbomachine au chapitre 5.

Chapitre 4

Application à des géométries fixes de référence

4.1 Introduction. Résultats présentés. Commentaires communs

Les géométries et conditions aérodynamiques des différents cas d'épreuve sont tout d'abord présentées. L'écoulement stationnaire autour de la géométrie de base est brièvement décrit. Pour le cas d'aérodynamique externe (aile ONERA M6), on trace notamment les lignes iso-valeurs de l'opposé du coefficient de pression défini par :

$$-C_{\mathrm{p}} = -\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty \boldsymbol{U}_\infty^2}, \tag{4.1}$$

où p_∞, ρ_∞ et $\boldsymbol{U}_\infty$ sont des grandeurs à l'infini. Après avoir défini les paramètres de forme, les résultats obtenus pour le calcul de gradients de fonctions aérodynamiques sont présentés. En pratique, pour chaque cas test, on montre des résultats pour un unique paramètre de forme, d'où l'usage du singulier pour paramètre de forme (tandis que dans les chapitres précédents, $\boldsymbol{\alpha}$ désigne un vecteur de paramètres de forme). Deux types de résultats sont exposés :

- les gradients de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme (méthode de l'équation linéarisée et méthode adjointe) ;
- les sensibilités de l'écoulement par rapport au champ aérodynamique (ou dérivée du champ aérodynamique par rapport au paramètre de forme) dans les cellules adjacentes à la paroi $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha}$ (méthode de l'équation linéarisée).

La valeur des fonctions aérodynamiques ainsi que leurs dérivées par rapport au maillage et au champ aérodynamique sont fournies par les outils de post-traitement FFD41 et Xopt développés au Département d'Aérodynamique APpliquée de l'ONERA (voir la section 2.9). Dans tous les cas, les résultats issus du module de calcul de gradients sont comparés à ceux obtenus par différences finies d'ordre 2 en faisant converger deux calculs d'analyse sur les déformations « plus » et « moins » , *i.e.* en effectuant un calcul d'analyse sur les maillages de la forme déformée correspondant au paramètre de forme $\alpha \pm \delta\alpha$. Les champs de variables conservatives $\boldsymbol{W}$ en sont alors extraits. Cela permet, d'une part de construire une sensibilité d'écoulement de référence calculée par différences finies :

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha} \simeq \frac{\boldsymbol{W}(\alpha + \mathrm{d}\alpha) - \boldsymbol{W}(\alpha - \mathrm{d}\alpha)}{2\delta\alpha}, \tag{4.2}$$

d'autre part, en mettant ces champs conservatifs en entrée des outils de post-traitement FFD41 et Xopt, d'obtenir les valeurs de fonctions aérodynamiques sur les maillages déformés, et tout comme

ci-dessus, de construire une référence calculée par différences finies de gradients de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme.

Dans les chapitres 4 et 5, les abréviations suivantes seront utilisées :

DF	:	différences finies ;
CM	:	linéarisation du flux diffusif avec approche de type « couche mince » ;
FVC	:	linéarisation du flux diffusif sans approche de type « couche mince », (pour Flux Visqueux Complet) ;
MUTFIG	:	linéarisation à « μ_t figé » ;
MODLIN	:	modèle de turbulence linéarisé.

Pour la linéarisation du flux diffusif sans approche de type « couche mince », ce sont les résultats issus de la deuxième formulation (voir sous-section 3.4.2) qui sont présentés. Les résultats issus de la première formulation donnent en pratique des valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques quasiment identiques à ceux de la deuxième formulation (différence d'une unité sur le troisième chiffre significatif, pour certaines). C'est cette dernière formulation qui a été retenue car elle utilise la discrétisation des gradients de vitesse codée dans *elsA* et pas une hypothèse *a priori* d'écriture particulière du flux diffusif, ce qui semble plus juste.

Dans le cas de l'utilisation du modèle de Michel *et al.*, les résultats de différentes linéarisations sont présentés :

- linéarisation du flux diffusif avec approche de type « couche mince » à « μ_t figé » (courbe rouge) ;
- linéarisation du flux diffusif sans approche de type « couche mince » (Flux Visqueux Complet) à « μ_t figé » (courbe magenta) ;
- linéarisation du flux diffusif avec approche de type « couche mince » et modèle de turbulence linéarisé (courbe bleue) ;
- linéarisation du flux diffusif sans approche de type « couche mince » (Flux Visqueux Complet) et modèle de turbulence linéarisé (courbe cyan).

La référence obtenue par différences finies apparaît sur les courbes en vert. Les résultats présentés sous la dénomination *modèle de turbulence linéarisé* correspondent à une linéarisation la moins approchée pour l'évaluation de la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$. La vorticité est alors linéarisée en utilisant l'écriture de sa discrétisation dans *elsA* (voir sous-section 3.6.4) tout comme la longueur de mélange (voir sous-section 3.6.5).

Dans le cas de l'utilisation du modèle k-ε, seuls les résultats des linéarisations à « μ_t figé » sont présentés.

- linéarisation du flux diffusif avec approche de type « couche mince » (courbe rouge) ;
- linéarisation du flux diffusif sans approche de type « couche mince » (Flux Visqueux Complet) (courbe magenta).

Tout comme pour le modèle de Michel *et al.*, la référence obtenue par différences finies apparaît sur les courbes en vert.

4.2 Tuyère dite de Déléry : bosse C

4.2.1 Géométrie

Il s'agit d'une section de soufflerie transsonique à nombre de Mach nominal avant le choc de 1,36. Des études en soufflerie [18] ont été effectuées sur ce cas, dans le canal transsonique S8A de l'ONERA à Chalais-Meudon, afin d'étudier le phénomène d'interaction onde de choc-couche limite. La paroi supérieure est plane et rectiligne. Un demi-profil, ou bosse, est disposé sur la paroi inférieure du canal afin d'accélérer l'écoulement jusqu'à des vitesses légèrement supersoniques.

Un second col sonique de section réglable, placé en sortie de veine permet :

- d'une part, de produire par effet de blocage une onde de choc dont la position et l'intensité peuvent être réglées à la valeur souhaitée ;
- d'autre part, d'isoler l'écoulement étudié des perturbations pouvant provenir des canalisations aval.

La figure 4.1 précise la géométrie du canal dans la zone de mesure. La paroi supérieure présente une légère convergence de 0,33°. Le demi-profil a une épaisseur de 12 mm pour une largeur de 286,37 mm. Son contour est formé d'une partie amont rectiligne de 4° de pente qui se raccorde à un arc de cercle s'étendant jusqu'au bord de fuite. Deux arcs de cercle de 20 mm assurent la continuité des pentes avec les parois rectilignes situées en amont et en aval.

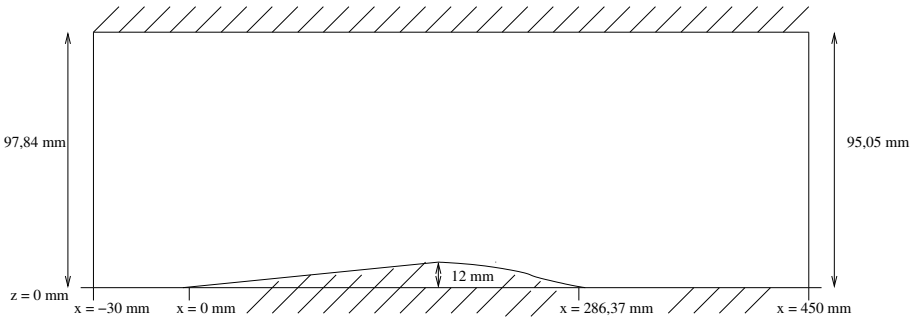

FIG. 4.1 – Bosse C. Domaine de calcul dans le canal transsonique de la soufflerie S8A.

Cette configuration est usuellement appelée « bosse C » car elle fait partie d'une série de trois essais (A, B et C) effectués dans la soufflerie S8A et faisant intervenir des géométries de bosses différentes avec des pentes plus ou moins fortes. Parmi ces trois expériences, l'écoulement C est celui qui présente le décollement de la couche limite le plus important.

Le domaine de calcul a une longueur de 480 mm. La frontière amont est située 30 mm avant l'origine du profil. La hauteur du domaine correspond à la hauteur de la veine d, en tenant compte de la légère inclinaison de la paroi supérieure.

Le paramètre de forme choisi est l'amplitude d'une petite bosse ajoutée sur le convergent de la tuyère, amplitude qui ne dépasse pas au total la hauteur de la bosse elle-même comme on peut le voir sur la figure 4.2 pour une déformation cent fois plus grande que dans notre cas d'épreuve. Pour nos simulations, le paramètre de forme vaut donc 0,05 fois la hauteur de la bosse.

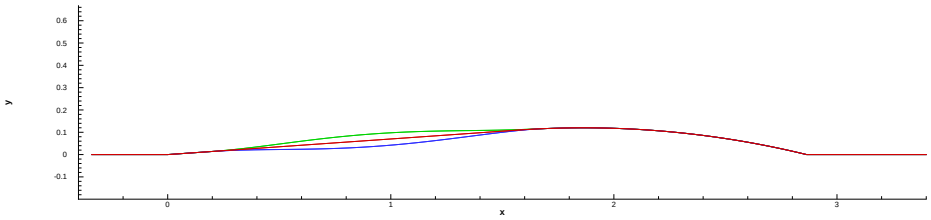

FIG. 4.2 – Bosse C. Paroi inférieure. En rouge, paroi initiale. En bleu, paroi suite à la modification de forme « plus » d'amplitude maximale 0,5 fois la hauteur de la bosse. En vert, paroi suite à la modification de forme « moins » d'amplitude maximale 0,5 fois la hauteur de la bosse.

4.2.2 Conditions aérodynamiques

Les conditions aérodynamiques sont :
- nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_{i0} = \frac{\rho_{i0} a_{i0} d}{\mu_{i0}} = 2{,}078.10^6$;
- température d'arrêt $T_{i0} = 300$ K ;
- pression d'arrêt $p_{i0} = 96\,000$ Pa ;
- rapport entre la pression statique et la pression d'arrêt en sortie $\frac{p}{p_{i0}} = 0{,}627$ (resp. 0,669 ; 0,652) pour l'expérience (resp. le modèle de Michel *et al.*, le modèle k-ε de Launder-Sharma) ;
- parois adiabatiques.

Le nombre de Reynolds est ici basé sur les grandeurs d'arrêt (ou génératrices) : masse volumique d'arrêt ρ_{i0}, vitesse du son d'arrêt $a_{i0} = \sqrt{\frac{\gamma p_{i0}}{\rho_{i0}}}$, viscosité d'arrêt μ_{i0} calculé à partir de la loi de Sutherland, et ramené à la hauteur d du canal.

La comparaison des calculs avec l'expérience (notamment pour les répartitions de pression sur les deux parois) nécessite que le choc soit situé à sa position expérimentale. L'usage pour les simulations numériques sur ce cas test est de choisir la pression sur la frontière aval de manière à obtenir un choc au bon endroit sur la paroi inférieure (saut de pression bien positionné) afin de prévenir les défauts des modèles de turbulence sur le comportement du fluide dans l'interaction (figures 4.8 et 4.9). Conformément à l'étude d'une tuyère de Laval en modélisation quasi-1D, la position du choc recule suivant x si la contre-pression (rapport entre la pression statique et la pression d'arrêt en sortie) est augmentée, et avance suivant x si elle est diminuée.

4.2.3 Simulation numérique de l'écoulement stationnaire

D'un point de vue numérique, l'écoulement est considéré comme bidimensionnel.

Les conditions aux limites sont les suivantes :
- condition d'injection subsonique à la frontière amont (l'écoulement est subsonique) ;
- pression statique imposée sur la frontière aval ;
- condition de paroi adiabatique avec adhérence à la paroi sur les frontières supérieure et inférieure.

Le maillage est construit avec le mailleur MESH3D. Il comporte 153×65 points (voir figure 4.3). D'autre part, il possède deux plans dans la direction dégénérée. Le nombre total de points est donc de 19 890 points ($153 \times 65 \times 2$). Les mailles sont raffinées près des parois et dans la zone

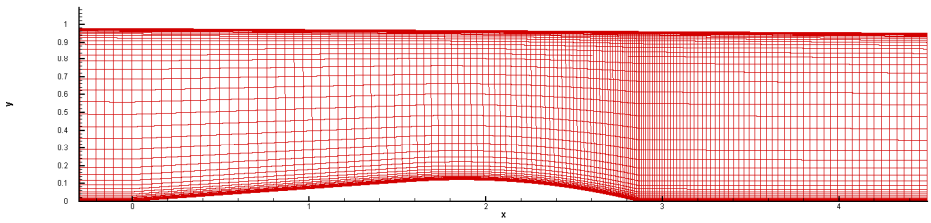

FIG. 4.3 – Bosse C. Vue du maillage.

d'interaction au voisinage du bord de fuite du profil. Les mailles longitudinales suivent globalement l'évolution du profil. Les mailles transversales sont perpendiculaires aux parois planes dans tout le domaine de calcul.

Les courbes de lignes iso-nombre de Mach (figures 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7) montrent l'apparition d'une onde de choc au voisinage du bord de fuite du demi-profil pour les deux modèles de

turbulence. L'interaction onde de choc-couche limite reste naissante pour le calcul avec le modèle de Michel *et al.* Pour les deux modèles considérés, en amont du choc, les lignes iso-nombre de Mach sont identiques.

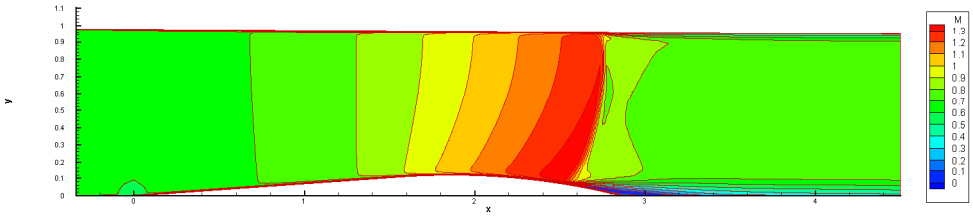

FIG. 4.4 – Bosse C. Lignes iso-nombre de Mach. Modèle de Michel *et al.*

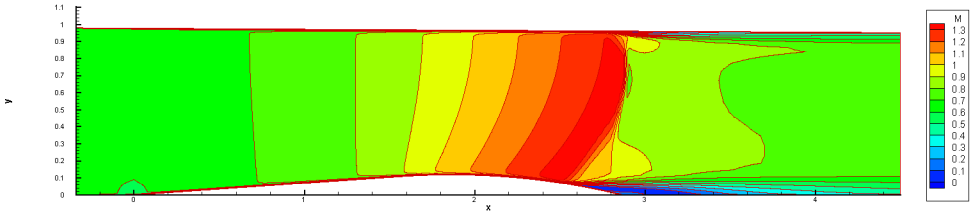

FIG. 4.5 – Bosse C. Lignes iso-nombre de Mach. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

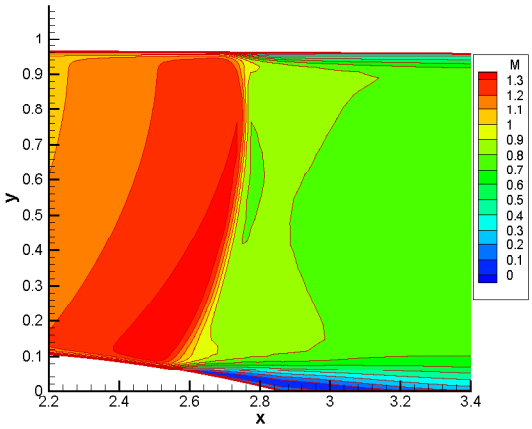

FIG. 4.6 – Bosse C. Lignes iso-nombre de Mach. Zoom sur le choc. Modèle de Michel *et al.*

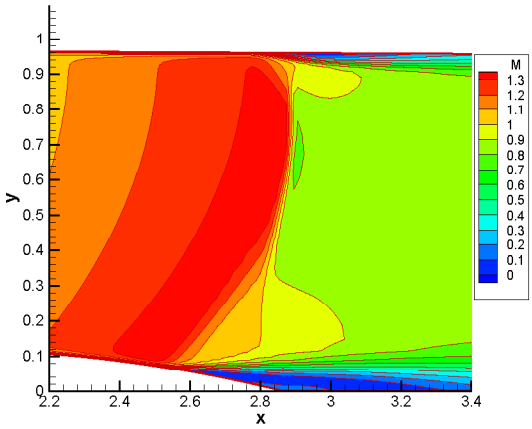

FIG. 4.7 – Bosse C. Lignes iso-nombre de Mach. Zoom sur le choc. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

Pour les deux modèles de turbulence, les courbes iso-valeur du rapport pression statique sur pression d'arrêt $\frac{p}{p_{i0}}$, ne montrent pas trop de différences par rapport à l'expérience en amont du choc, ce qui n'est pas le cas en aval (figures 4.8 et 4.9). Le modèle k-ε de Launder-Sharma donne des résultats plus proches des résultats expérimentaux que le modèle de Michel *et al.* Ils n'influencent donc pas trop la position du point de décollement.

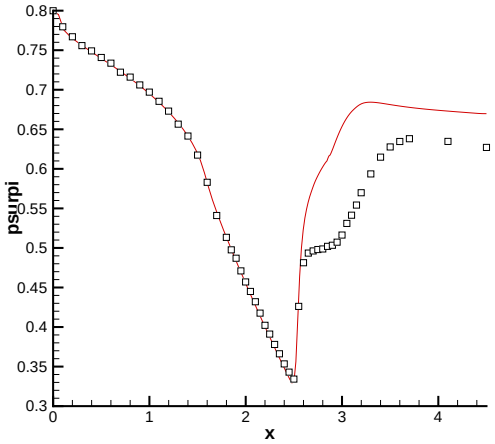

FIG. 4.8 – Bosse C. Courbe du rapport $\frac{p}{p_{i0}}$ à la paroi. Modèle de Michel *et al.* (points expérimentaux en carrés blancs, résultats de calcul en trait continu rouge).

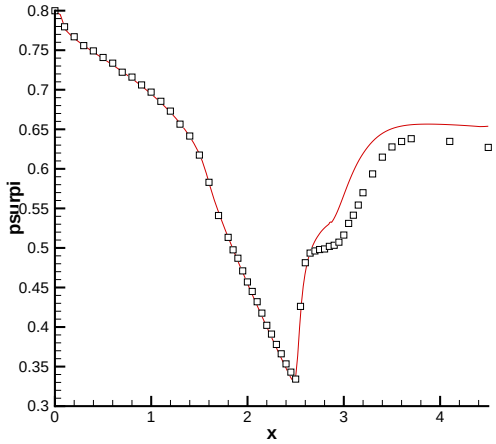

FIG. 4.9 – Bosse C. Courbe du rapport $\frac{p}{p_{i0}}$ à la paroi. Modèle k-ε de Launder-Sharma. (points expérimentaux en carrés blancs, résultats de calcul en trait continu rouge).

Sur les figures 4.10 et 4.11, la turbulence est plus développée et se propage plus loin dans le cas du modèle k-ε de Launder-Sharma. En outre, en amont du choc, la turbulence n'est que peu développée (le coefficient de viscosité turbulente μ_t est moins de cent fois inférieur au coefficient de viscosité moléculaire μ, figures 4.12 et 4.13).

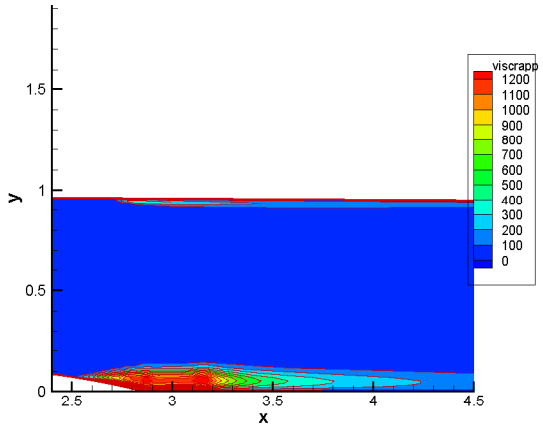

FIG. 4.10 – Bosse C. Zoom. Lignes iso-rapport $\frac{\mu_t}{\mu}$. Modèle de Michel *et al.*

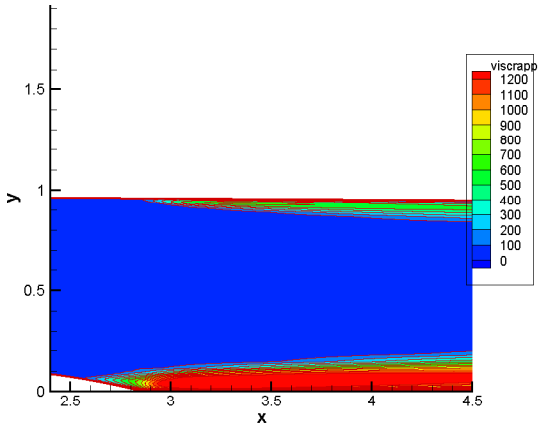

FIG. 4.11 – Bosse C. Zoom. Lignes iso-rapport $\frac{\mu_t}{\mu}$. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

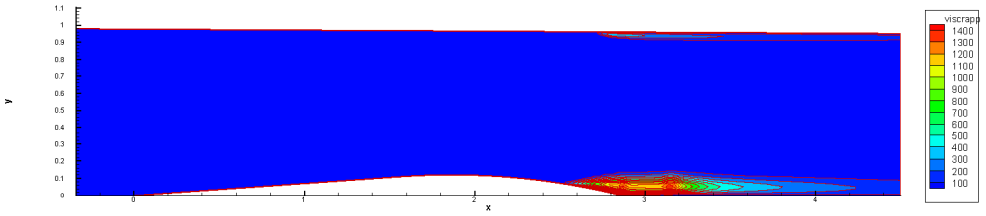

FIG. 4.12 – Bosse C. Lignes iso-rapport $\frac{\mu_t}{\mu}$. Modèle de Michel *et al.*

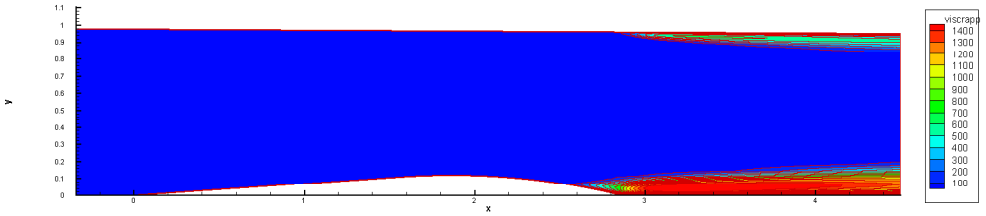

FIG. 4.13 – Bosse C. Lignes iso-rapport $\frac{\mu_t}{\mu}$. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

4.2.4 Calcul des sensibilités. Modèle de Michel *et al.*

Aucun résultat sur les gradients de fonctions aérodynamiques n'est présenté ici car l'outil de post-traitement développé au Département d'Aérodynamique APpliquée de l'ONERA n'est actuellement adapté qu'à des configurations tridimensionnelles.

Les dérivées des composantes du champ conservatif (ou sensibilités) à la paroi (ρ, ρu, ρv, ρE) par rapport au paramètre de forme sont représentées ici. Les résultats présentés sous la dénomination *modèle de turbulence linéarisé* correspondent à une linéarisation avec le moins d'approximations possibles. La vorticité telle qu'elle est discrétisée dans *elsA* (voir sous-section 3.6.4) ainsi que la longueur de mélange (voir sous-section 3.6.5) sont linéarisés. Pour la linéarisation du flux diffusif sans approche de type « couche mince », ce sont les résultats issus de la deuxième formulation (voir sous-section 3.4.2) qui sont présentés. Les dérivées de ρ et ρE (figures 4.14 et 4.15) sont d'amplitude plus forte que celles des composantes de vitesses, mais aussi sur celle de ρv (figure 4.17), toutes les courbes (références obtenues par différences finies et différentes linéarisations) se superposent avant le choc. Ceci est encore vrai après le choc si le modèle de turbulence est linéarisé. Pour la dérivée de ρu (figure 4.16), les courbes se superposent encore si le modèle de turbulence est linéarisé après le choc. Néanmoins, une légère différence apparaît avant le choc entre les courbes de référence obtenues par différences finies et celles obtenues par les différentes linéarisations. Par contre, avec une linéarisation du flux diffusif à « μ_t figé », quelle

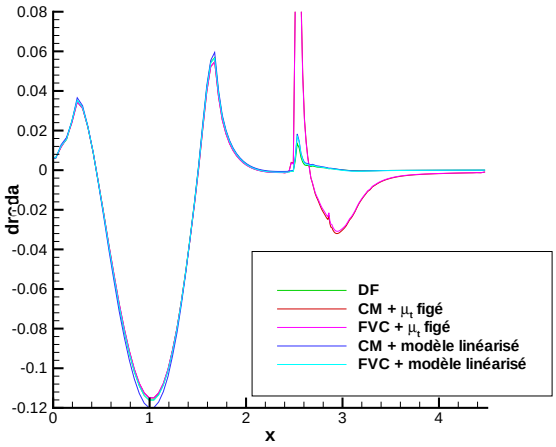

FIG. 4.14 – Bosse C. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi. Modèle de Michel *et al.*

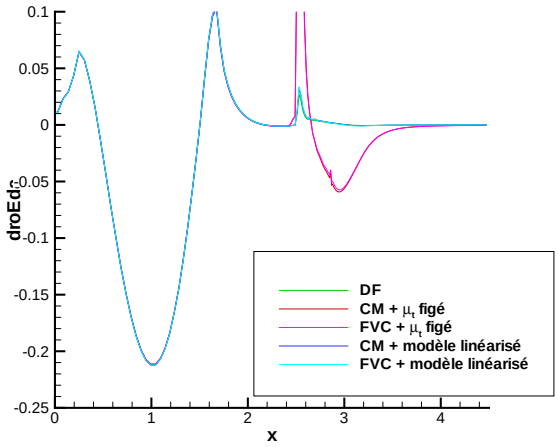

FIG. 4.15 – Bosse C. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi. Modèle de Michel *et al.*

que soit la dérivée de la composante du champ $\boldsymbol{W}$, il apparaît des écarts importants après le choc, le maximum de différences se trouvant au niveau du choc.

Avant le choc, la turbulence est peu développée (le coefficient de viscosité turbulente μ_t est moins de cent fois inférieur au coefficient de viscosité moléculaire μ, figure 4.12). Par contre, après le choc, au voisinage des parois, la turbulence se développe. La viscosité turbulente est significative dans cette zone. Les figures 4.18 et 4.19 montrent les dérivées des coefficients de viscosité turbulente et moléculaire par rapport au paramètre de forme avec les mêmes échelles. Les amplitudes de la dérivée de la viscosité turbulente μ_t sont les plus grandes dans la zone autour du choc, principalement au voisinage des parois, et dans des zones moins étendues au voisinage des deux parois aux abscisses où la paroi inférieure a été déformée. Les amplitudes de la dérivée de la viscosité moléculaire μ sont plus petites que celles de la viscosité turbulente μ_t

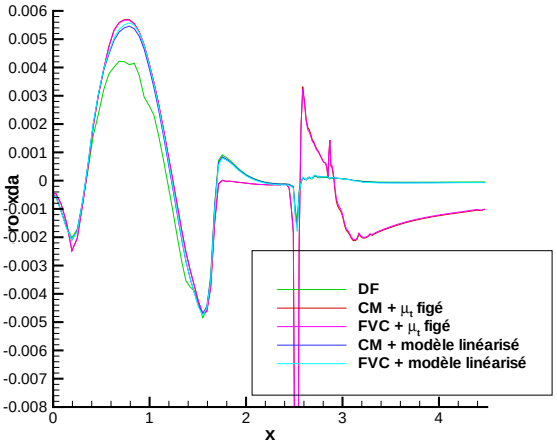

FIG. 4.16 – Bosse C. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi. Modèle de Michel *et al.*

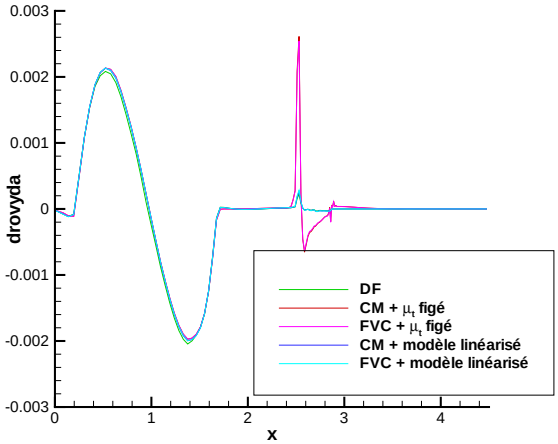

FIG. 4.17 – Bosse C. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi. Modèle de Michel *et al.*

(figure 4.19 avec la même échelle que la figure 4.18), la déformation de la forme modifie donc plus la viscosité turbulente que la viscosité moléculaire.

Les sensibilités dans une cellule adjacente à la paroi (figures 4.14 à 4.17) diffèrent le plus entre une linéarisation à « μ_t figé » et une linéarisation du flux diffusif et du modèle au niveau du choc et entre le choc (abscisse $x = 250$ mm) et l'abscisse $x = 280$ mm (resp. 340 mm, 340 mm, de fin du domaine) pour ρv (resp. ρ, ρE, ρu). C'est bien à ces endroits que l'hypothèse de « μ_t figé » est mise en défaut.

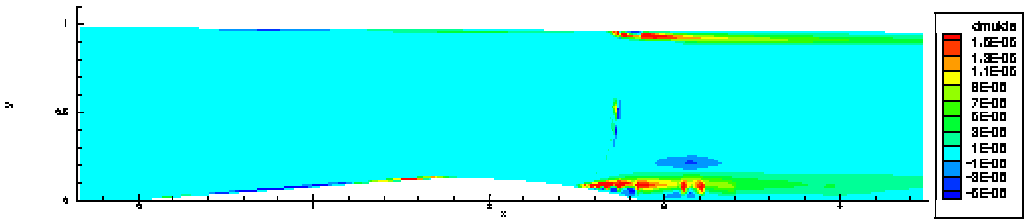

FIG. 4.18 – Bosse C. Lignes iso-$\frac{\mathrm{d}\mu_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\alpha}$. Modèle de Michel *et al.*

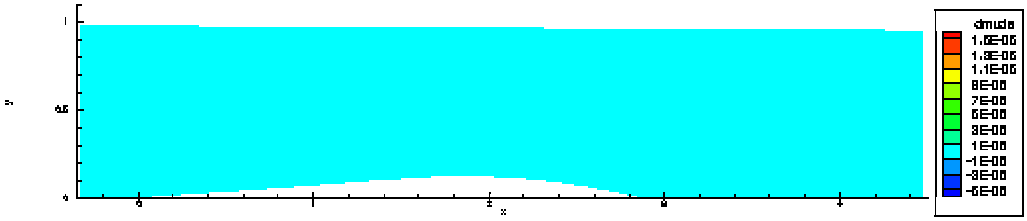

FIG. 4.19 – Bosse C. Lignes iso-$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\alpha}$. Modèle de Michel *et al.*

4.2.5 Calcul des sensibilités. Modèle k-ε de Launder-Sharma

Pour ce modèle de turbulence, les mêmes remarques que celles faites pour le modèle de Michel *et al.* (sous-section 4.2.4) pour des linéarisations à « μ_t figé » peuvent être émises. Sur les dérivées de ρ et ρE (figures 4.20 et 4.21), elles aussi d'amplitude plus forte que les composantes de vitesses, mais également sur celle de ρv (figure 4.23), avant le choc, toutes les courbes (références obtenues par différences finies et différentes linéarisations) se superposent. Ceci est n'est plus vrai après le choc à « μ_t figé », quelle que soit la dérivée de la composante du champ $\boldsymbol{W}$. Des écarts importants après le choc apparaissent alors, le maximum de différence se trouvant au niveau du choc. Sur la dérivée de ρu par rapport au paramètre de forme, (figure 4.22) les différences avant le choc sont encore plus importantes que dans le cas de l'utilisation du modèle de Michel *et al.*

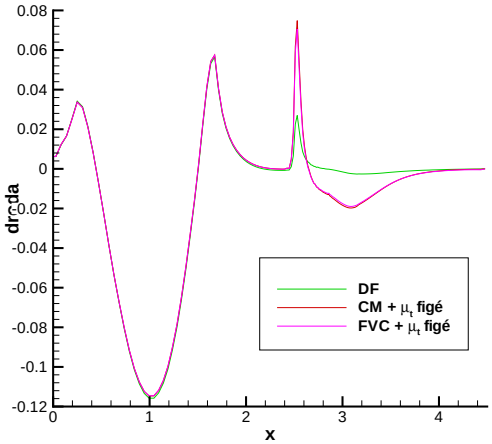

FIG. 4.20 – Bosse C. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

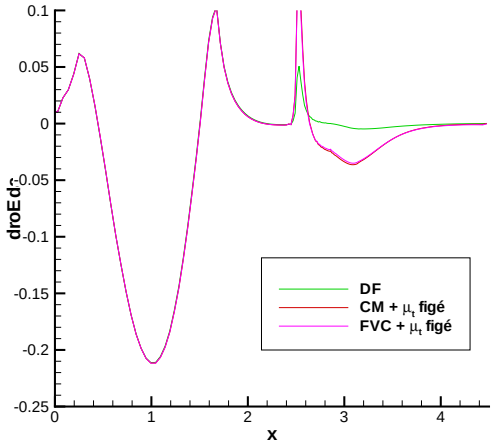

FIG. 4.21 – Bosse C. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

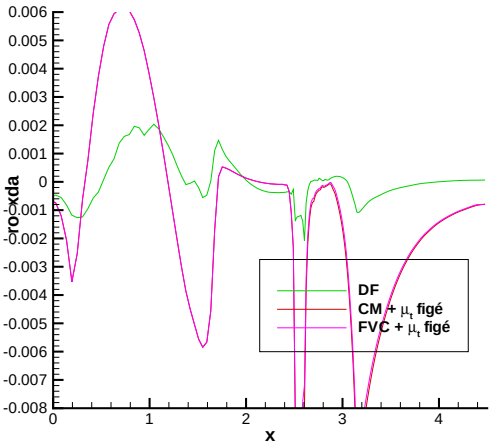

FIG. 4.22 – Bosse C. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

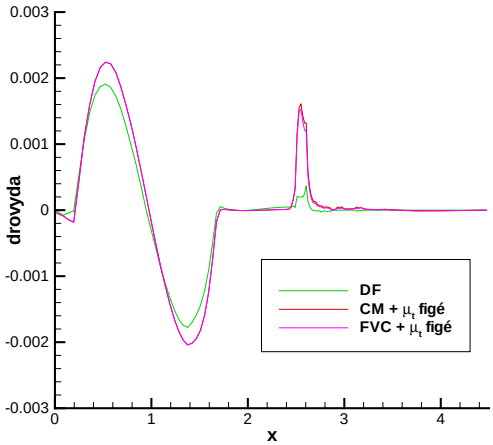

FIG. 4.23 – Bosse C. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

4.2.6 Conclusion partielle

Pour la bosse C, des dérivées de composantes du champ aérodynamique $\boldsymbol{W}$ dans une cellule adjacente à la paroi ont été présentées pour valider les linéarisations du flux diffusif et du modèle de Michel *et al.* quand celui-ci est utilisé pour le calcul d'analyse. Avant l'apparition du choc, les résultats des différentes linéarisations ne diffèrent pas ou peu (pour la dérivée de la variable ρu) de ceux de référence obtenus par différences finies. Par contre, seule la linéarisation du modèle de turbulence (dans le cas du modèle de Michel *et al.*) permet d'avoir les mêmes résultats que ceux de référence. Pour une linéarisation du flux diffusif à « μ_t figé », c'est à l'aval et à la position du choc que les différences apparaissent, exactement là où le coefficient de viscosité turbulente μ_t varie le plus en fonction du paramètre de forme.

Ces remarques ont été faites sur un cas bidimensionnel et exclusivement sur des sensibilités d'écoulement. La section suivante présente des résultats à la fois de sensibilités d'écoulement et de valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme sur une aile.

4.3 Aile ONERA M6

4.3.1 Géométrie

Il s'agit d'une aile tridimensionnelle définie à l'ONERA. En 1972, le département d'Aérodynamique de l'ONERA a dessiné cette aile bien adaptée comme cas d'épreuve pour des études d'écoulements tridimensionnels à haut nombre de Reynolds, en régimes subsoniques et transsoniques. Les essais ont été réalisés à la soufflerie S2MA de l'ONERA à Modane pour des nombres de Mach compris entre 0,7 et 0,92, des angles d'attaque pouvant aller jusqu'à six degrés et des nombres de Reynolds de l'ordre de douze millions, et ont conduit à des écoulements subsonique et transsonique. Ils font l'objet d'un rapport expérimental [64]. La campagne d'essais a contribué à la compréhension de différents phénomènes comme l'interaction choc-couche limite ou les décollements.

Cette aile est issue des séries de modèles de calibration M de l'ONERA et représente le tiers externe d'une aile industrielle. Elle a un rapport d'aspect de 3,8 et n'est pas vrillée. La corde moyenne vaut 0,646 07 m et son envergure vaut 1,196 3 m. Un seul profil a été utilisé pour définir l'aile, issue d'une extrusion conique. Le saumon de l'aile est une troncature parallèle à l'emplanture complétée par l'addition d'un demi-corps de révolution.

La déformation considérée ici est un vrillage angulaire du maillage de tous les plans parallèles au plan de symétrie ($y = 0$), vrillage qui croît linéairement de l'emplanture au saumon. Le centre de la rotation est situé sur le bord d'attaque de l'aile. Le paramètre de forme est l'angle de vrillage maximal dans le plan du saumon. Celui-ci vaut 0,01° pour nos simulations.

4.3.2 Conditions aérodynamiques et mesures expérimentales

Les conditions aérodynamiques sont :
- nombre de Mach à l'infini $M_\infty = 0{,}836$;
- nombre de Reynolds à l'infini $\mathrm{Re}_\infty = 1{,}47.10^6$;
- incidence $\alpha = 3{,}06°$.

Le nombre de Reynolds à l'infini est basé sur la pression statique à l'infini, le module de vitesse à l'infini et la corde à l'emplanture. Une condition de paroi adiabatique est appliquée à la surface de l'aile. Des conditions de non réflexion sont imposées sur les frontières « à l'infini » ainsi qu'une condition de symétrie dans le plan de l'emplanture.

Les résultats obtenus lors de cette campagne d'essais et qui nous permettent de valider les calculs sont des distributions de pression. Deux cent soixante et onze orifices de pression de 0,8 mm de diamètre étaient situés sur sept sections (à 20 %, 44 %, 65 %, 80 %, 90 %, 95 %, 99 %). La précision sur les coefficients de pression est de ±0,02. Des relevés de forces et de moments ont aussi été effectués.

4.3.3 Simulation numérique de l'écoulement stationnaire

On utilise un maillage à 614 705 points ($193 \times 49 \times 65$) monobloc, maillage de type C-O (le maillage se referme sur lui-même sur une frontière de raccord à points coïncidents (figure 4.24)).

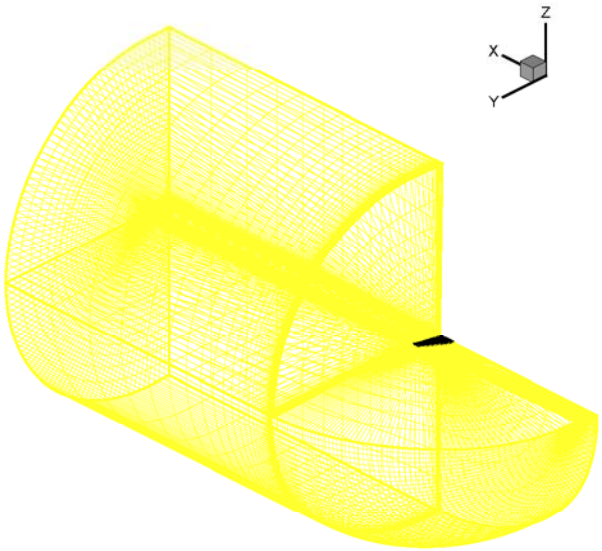

FIG. 4.24 – Aile M6. Vue partielle du maillage (maillage en jaune, aile en noir).

Comme écrit plus haut, des mesures expérimentales de coefficients de pression à la paroi dans sept plans de coupe de l'aile sont disponibles. Cela va permettre de confronter les résultats issus des calculs (résultats en traits continus en rouge) aux mesures (résultats symbolisés par des carrés). Sur l'intrados, le modèle de turbulence n'a normalement pas d'influence sur la physique de l'écoulement. En revanche, sur l'extrados, il faut retrouver la position du choc en toute rigueur. Les deux modèles de turbulence utilisés (Michel *et al.* et k-ε de Launder-Sharma) donnent des résultats très similaires : les courbes à l'intrados sont toujours bien positionnées quelle que soit la coupe ; pour l'extrados, les limites des deux modèles de turbulence sont atteintes, cohérentes avec celles retrouvées classiquement lors de leur utilisation. Les coupes à 20 et 44 % (figures 4.25, 4.26, 4.27 et 4.28), montrent une légère surévaluation de $-C_p$ avant le choc, et une légère sous-évaluation après. Dans les coupes à 65 %, 90 % et 95 % (figures 4.29, 4.30, 4.33, 4.34, 4.35 et 4.36), le dernier point avant le choc est sous-évalué. Pour la coupe à 80 % (figures 4.31 et 4.32), le double choc n'est pas retrouvé par les deux modèles. Néanmoins, les modèles perçoivent une irrégularité. Enfin, dans la coupe à 99 % (figures 4.37 et 4.38), le décollement en bout d'aile n'est pas du tout prédit par les deux modèles. Cela n'a rien de surprenant et fait partie des limites de ces deux modèles de turbulence.

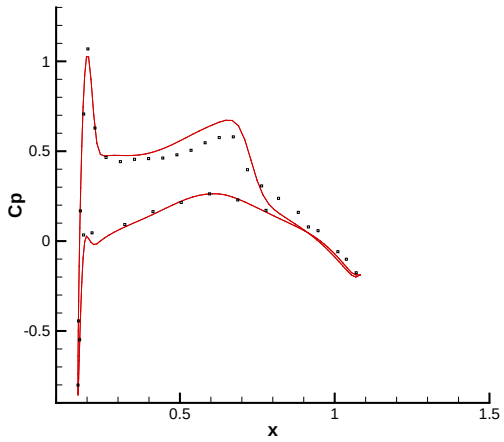

FIG. 4.25 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle de Michel *et al.*

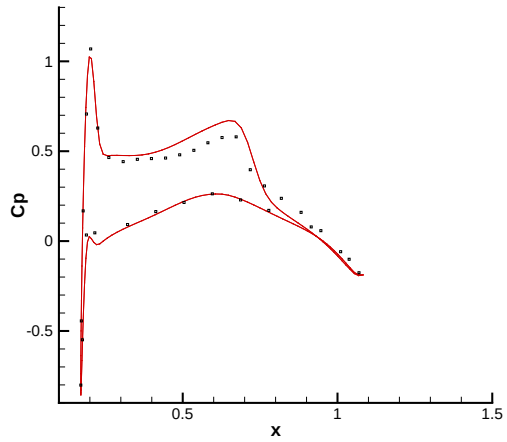

FIG. 4.26 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

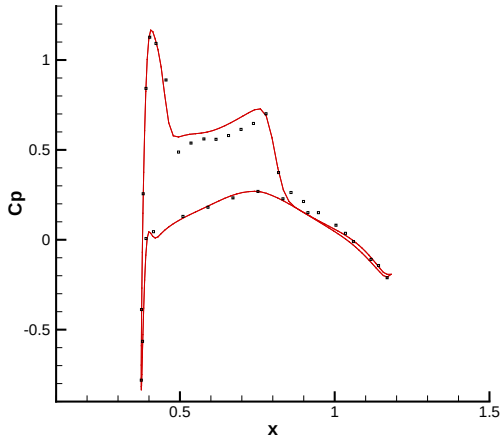

FIG. 4.27 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle de Michel *et al.*

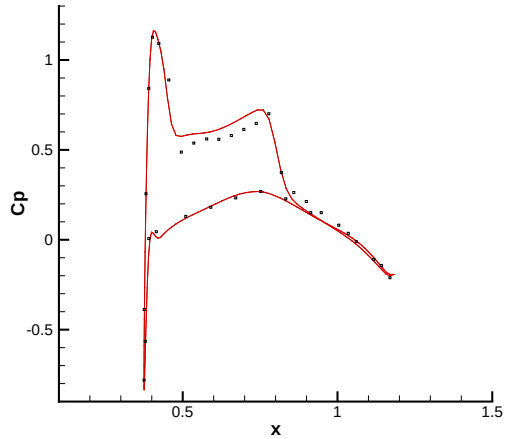

FIG. 4.28 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

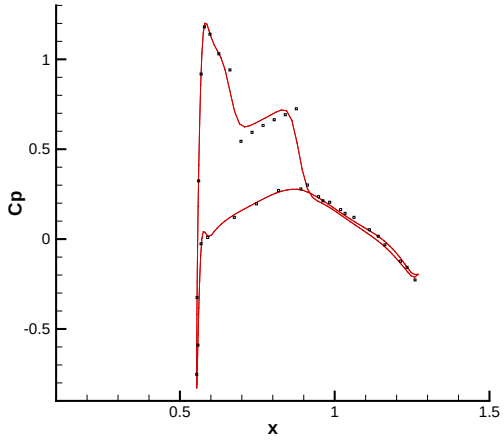

FIG. 4.29 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle de Michel *et al.*

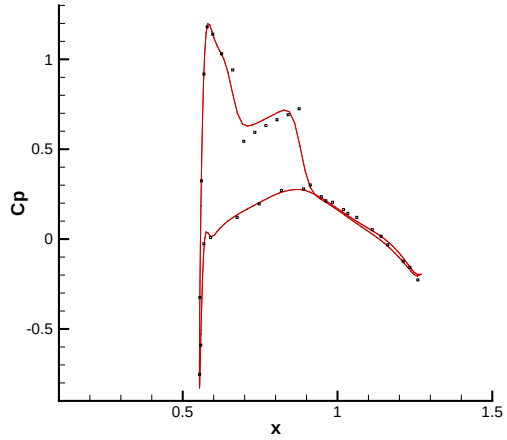

FIG. 4.30 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

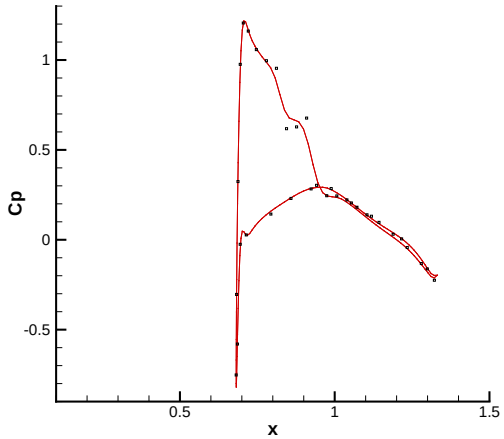

FIG. 4.31 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle de Michel *et al.*

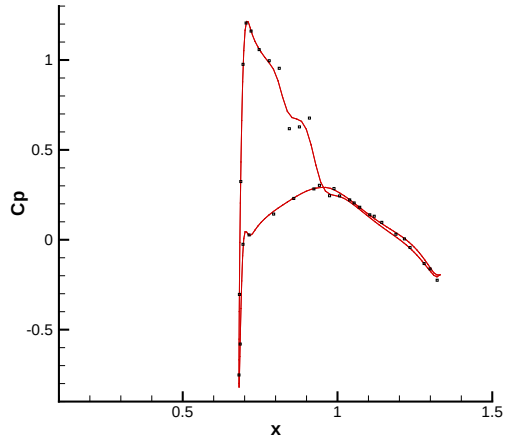

FIG. 4.32 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

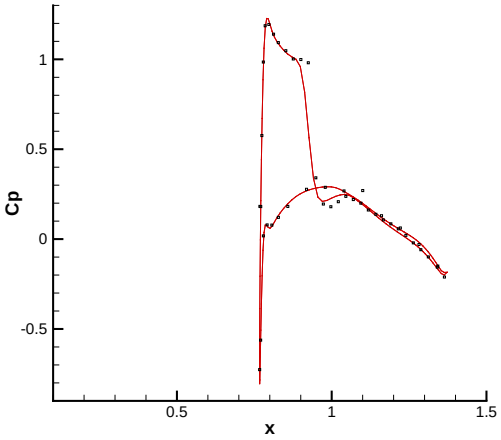

FIG. 4.33 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 90 %. Modèle de Michel *et al.*

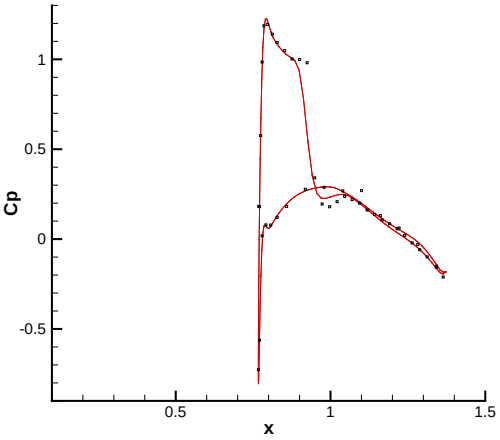

FIG. 4.34 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 90 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

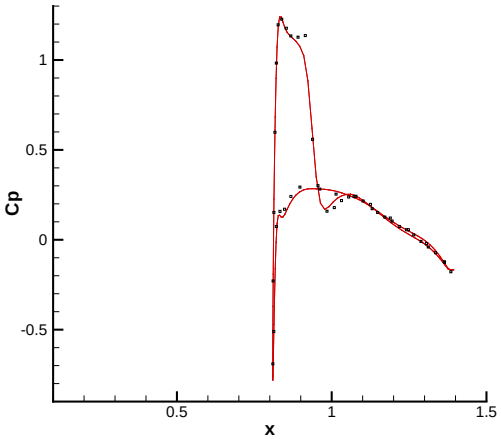

FIG. 4.35 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 95 %. Modèle de Michel *et al.*

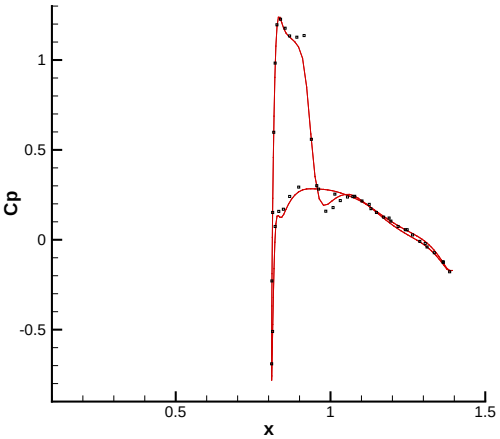

FIG. 4.36 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 95 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

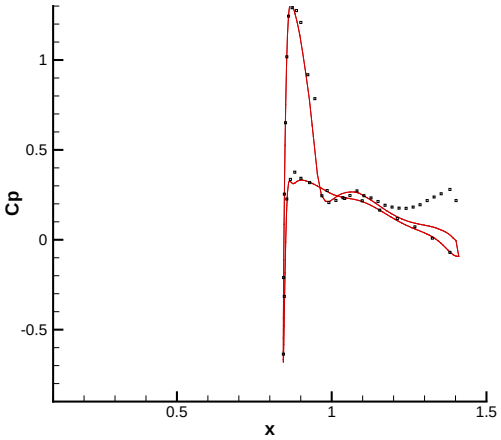

FIG. 4.37 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 99 %. Modèle de Michel *et al.*

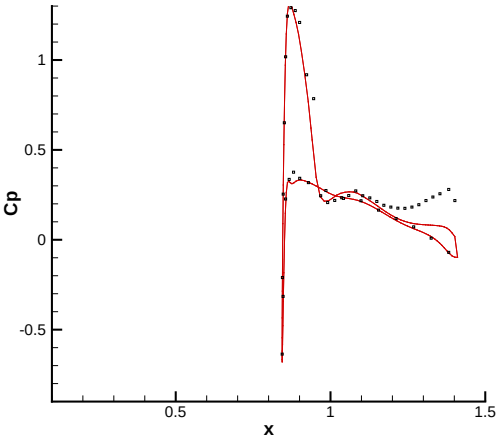

FIG. 4.38 – C_p à la paroi dans le plan de coupe 99 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

L'écoulement autour de l'aile est transsonique avec un choc à l'extrados comme on peut le voir sur les figures 4.39, 4.40, 4.41 et 4.42 pour les deux modèles de turbulence. Seuls deux plans de coupe significatifs à 20 % et 80 % d'envergure sont retenus ici.

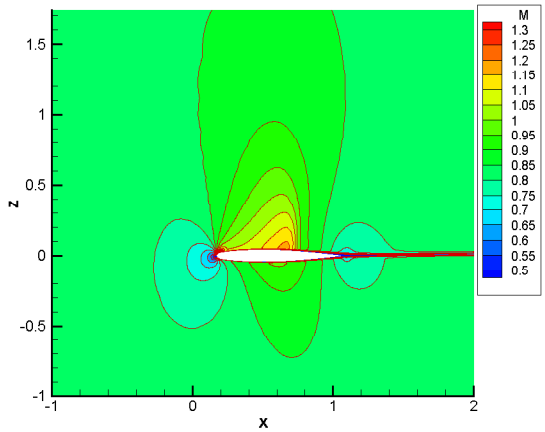

FIG. 4.39 – Aile M6. Lignes iso-nombre de Mach dans le plan de coupe 20 %. Modèle de Michel *et al.*

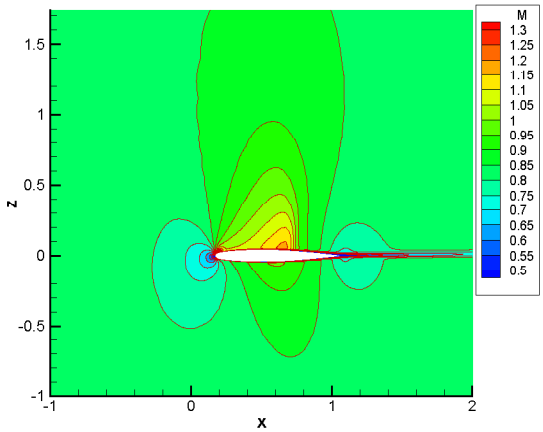

FIG. 4.40 – Aile M6. Lignes iso-nombre de Mach dans le plan de coupe 20 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

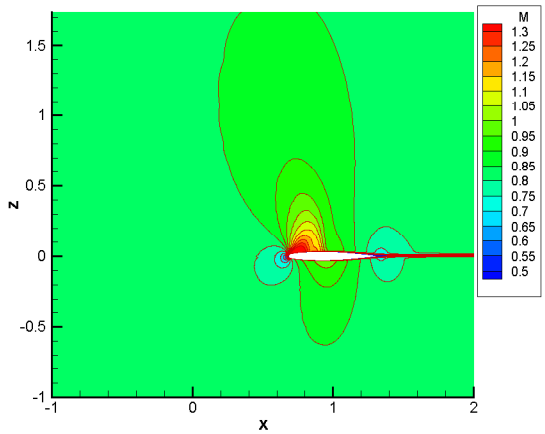

FIG. 4.41 – Aile M6. Lignes iso-nombre de Mach dans le plan de coupe 80 %. Modèle de Michel *et al.*

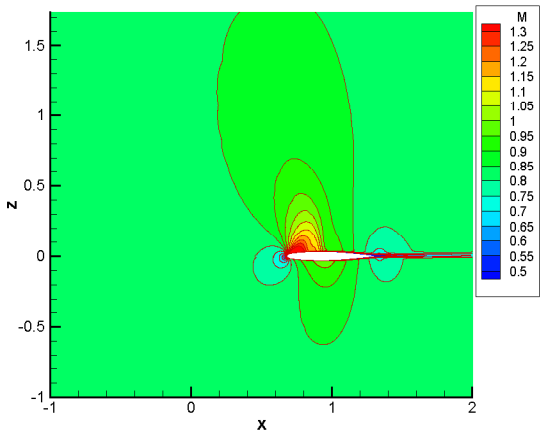

FIG. 4.42 – Aile M6. Lignes iso-nombre de Mach dans le plan de coupe 80 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

Sur les figures représentant le rapport des viscosités turbulente et moléculaire $\frac{\mu_t}{\mu}$ (figures 4.43, 4.44, 4.45 et 4.46), la turbulence se développe surtout sur l'extrados après le choc. Dans le cas de l'utilisation du modèle de Michel *et al.*, il n'y a pas de modèle de sillage (figures 4.43 et 4.45) ; dans ce cas, pour les lignes de maillage qui ne s'appuient pas sur la paroi, la viscosité turbulente est annulée. Par contre, lors de l'utilisation du modèle k-ε de Launder-Sharma, la turbulence continue à se propager dans le sillage (figures 4.44 et 4.46).

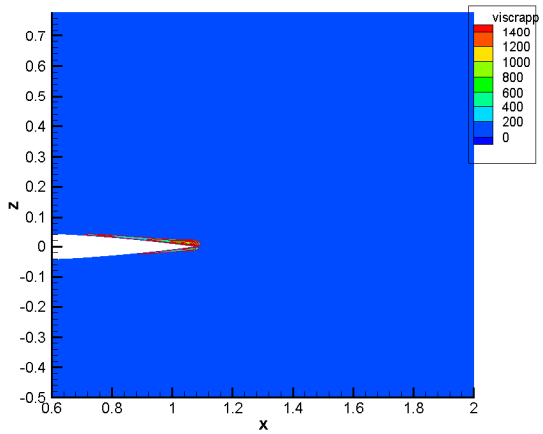

FIG. 4.43 – Aile M6. Lignes iso-rapport $\frac{\mu_t}{\mu}$ dans le plan de coupe 20 %. Modèle de Michel *et al.*

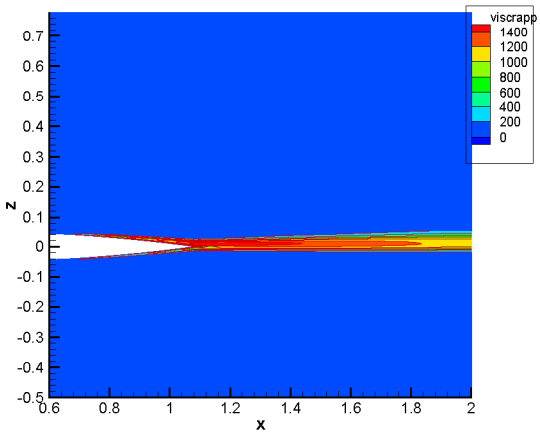

FIG. 4.44 – Aile M6. Lignes iso-rapport $\frac{\mu_t}{\mu}$ dans le plan de coupe 20 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

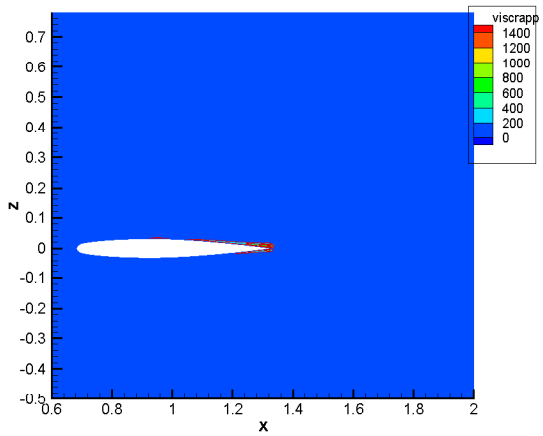

FIG. 4.45 – Aile M6. Lignes iso-rapport $\frac{\mu_t}{\mu}$ dans le plan de coupe 80 %. Modèle de Michel *et al.*

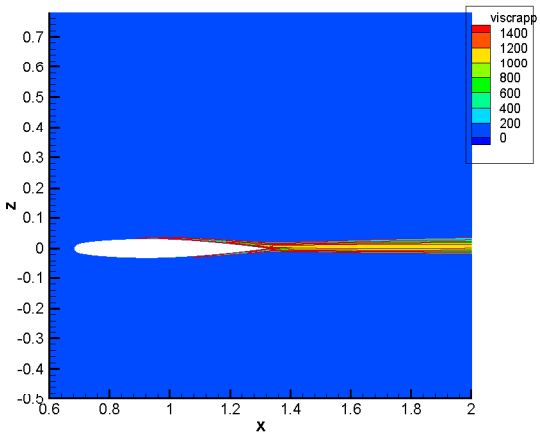

FIG. 4.46 – Aile M6. Lignes iso-rapport $\frac{\mu_t}{\mu}$ dans le plan de coupe 80 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

4.3.4 Calcul des sensibilités. Modèle de Michel *et al.*

4.3.4.1 Gradients de fonctions aérodynamiques

4.3.4.1.1 Calcul de μ_t par méthode de point fixe et linéarisation du modèle de turbulence la moins approchée Les fonctions étudiées sont les coefficients de portance CL_p, de traînée de champ proche CD_{nf} de traînée de champ lointain CD_{ff} définis par Destarac [14] et présentés dans la sous-section 2.9.1. Leurs gradients par rapport au paramètre de forme sont donnés dans le tableau 4.1 pour la méthode de l'équation linéarisée et dans le tableau 4.2 pour la méthode adjointe. Les valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques trouvées par les deux méthodes discrètes (à iso-niveau d'approximation pour la linéarisation du flux diffusif et éventuellement du modèle de turbulence) sont les mêmes.

	DF	CM + MUTFIG	FVC + MUTFIG	CM + MODLIN	FVC + MODLIN
$\frac{dCL_p}{d\alpha}$	-0,356	-0,302	-0,302	-0,352	-0,353
$\frac{dCD_{nf}}{d\alpha}$	-0,031 2	-0,028 4	-0,0284	-0,030 7	-0,030 7
$\frac{dCD_{ff}}{d\alpha}$	-0,028 7	-0,025 8	-0,025 8	-0,028 1	-0,028 1

TAB. 4.1 – Aile M6. Dérivées de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme. Méthode de l'équation linéarisée. Modèle de Michel *et al.*

	DF	CM + MUTFIG	FVC + MUTFIG	CM + MODLIN	FVC + MODLIN
$\frac{dCL_p}{d\alpha}$	-0,356	-0,302	-0,302	-0,352	-0,353
$\frac{dCD_{nf}}{d\alpha}$	-0,031 2	-0,028 4	-0,028 4	-0,030 7	-0,030 7
$\frac{dCD_{ff}}{d\alpha}$	-0,028 7	-0,025 8	-0,025 8	-0,028 1	-0,028 1

TAB. 4.2 – Aile M6. Dérivées de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme. Méthode adjointe. Modèle de Michel *et al.*

Les valeurs de gradients de fonctions obtenues par linéarisation du flux diffusif à « μ_t figé » s'écartent des valeurs de référence calculées par différences finies de 9 % à 15 % suivant les fonctions. Par contre, si le flux diffusif et le modèle de turbulence sont linéarisés tous les deux, l'erreur relative est limitée à moins de 2,1 % et la valeur de gradient de fonction se trouve entre celle de référence et celle trouvée par linéarisation à « μ_t figé ».

Sur ce cas d'épreuve, on obtient donc de très bonnes valeurs de gradients de fonction en linéarisant le plus précisément possible le modèle de turbulence de Michel *et al.*

4.3.4.1.2 Utilisation d'une méthode de Newton pour le calcul du coefficient de viscosité turbulente μ_t pour dans le calcul d'analyse Dans le paragraphe 3.6.1, un autre choix de méthode pour la résolution de l'équation implicite donnant le coefficient de viscosité turbulente μ_t par le modèle de Michel *et al.* est présenté. Il s'agit d'une méthode de Newton.

En pratique, quelques problèmes de convergence de la résolution de l'équation (1.31) pour quelques cellules isolées apparaissent sur l'aile ONERA M6. Le tableau 4.3 (resp. 4.4) donne les

valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme obtenus par différences finies et par linéarisation du flux diffusif et éventuellement du modèle de turbulence pour la méthode de l'équation linéarisée (resp. pour la méthode adjointe).

	DF	CM + MUTFIG	FVC + MUTFIG	CM + MODLIN	FVC + MODLIN
$\frac{\mathrm{d}CL_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,355	-0,302	-0,306	-0,352	-0,356
$\frac{\mathrm{d}CD_\mathrm{nf}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,030 8	-0,028 4	-0,028 6	-0,030 7	-0,030 9
$\frac{\mathrm{d}CD_\mathrm{ff}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,028 2	-0,025 6	-0,025 9	-0,027 8	-0,028 1

TAB. 4.3 – Aile M6. Dérivées de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme. Méthode de l'équation linéarisée. Équation implicite pour le calcul de μ_t résolue par méthode de Newton. Modèle de Michel *et al.*

	DF	CM + MUTFIG	FVC + MUTFIG	CM + MODLIN	FVC + MODLIN
$\frac{\mathrm{d}CL_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,355	-0,302	-0,306	-0,352	-0,356
$\frac{\mathrm{d}CD_\mathrm{nf}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,030 8	-0,028 4	-0,028 6	-0,030 7	-0,030 7
$\frac{\mathrm{d}CD_\mathrm{ff}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,028 2	-0,025 6	-0,025 6	-0,027 8	-0,027 8

TAB. 4.4 – Aile M6. Dérivées de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme. Méthode adjointe. Équation implicite pour le calcul de μ_t résolue par méthode de Newton. Modèle de Michel *et al.*

Les valeurs de gradients obtenues avec la méthode de Newton employée diffèrent seulement de 2 à 3 % par rapport à celles obtenues par méthode de point fixe, que ce soit par différences finies ou par linéarisation du flux diffusif avec éventuellement linéarisation du modèle de turbulence. Comme les différences ne sont pas flagrantes et que surtout, la méthode de point fixe est plus stable, c'est cette dernière qui a été retenue pour calculer le coefficient de viscosité turbulente μ_t.

4.3.4.1.3 Linéarisation partielle du modèle de Michel *et al.* Différents niveaux de linéarisation du modèle de Michel ont été testés pendant cette thèse. Seuls les résultats de ces différents essais avec une linéarisation du flux diffusif avec approximation de type « couche mince » pour la méthode de l'équation linéarisée sont reproduits ici. Lorsqu'un terme est dit figé, les autres termes sont différentiés. Les différentes approximations sont :

- modèle de turbulence non linéarisé (approximation « μ_t figé ») pour comparaison ;
- modèle de turbulence linéarisé (formulation la moins approchée) pour comparaison ;
- vorticité $\bar{\omega}$ et longueur de mélange ℓ figés ;
- vorticité $\bar{\omega}$ approchée par la formule du paragraphe 3.6.4.1 et longueur de mélange ℓ figée ;
- vorticité $\bar{\omega}$ figée ;
- longueur de mélange ℓ figée ;
- viscosité moléculaire μ figée.

	DF	CM + MUTFIG	CM + MODLIN	CM + MODLIN $\bar{\omega}$ et ℓ figés	CM + MODLIN $\bar{\omega}$ approché	CM + MODLIN $\bar{\omega}$ figé	CM + MODLIN ℓ figé	CM + MODLIN μ figé
$\frac{\mathrm{d}CL_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,355	-0,302	-0,353	-0,331	-0,333	-0,369	-0,336	-0,353
$\frac{\mathrm{d}CD_\mathrm{nf}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,031 2	-0,028 4	-0,030 7	-0,029 4	-0,029 5	-0,031 3	-0,029 7	-0,030 7
$\frac{\mathrm{d}CD_\mathrm{ff}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,028 7	-0,025 8	-0,028 1	-0,026 7	-0,026 7	-0,028 6	-0,027 1	-0,028 1

TAB. 4.5 – Aile M6. Dérivées de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme. Méthode de l'équation linéarisée. Linéarisation partielle. Modèle de Michel *et al.*

La prise en compte de la dépendance en la viscosité moléculaire n'a pas d'influence sur la précision des gradients trouvés. Les erreurs relatives trouvées pour la linéarisation la moins approchée du modèle de Michel *et al.* sont de moins de 2,1 % pour les trois coefficients. Il faut donc à la fois différentier le coefficient de viscosité turbulente μ_t par rapport à la vorticité $\bar{\omega}$ et la longueur de mélange ℓ. L'un sans l'autre ne donne pas de résultats précis sur les trois fonctions aérodynamiques. Si la vorticité est différentiée sans la longueur de mélange, les erreurs relatives pour les trois fonctions sont de moins de 6 %, avec moins de 0,5 % d'erreur relative pour les deux coefficients de traînée. La valeur du gradient du coefficient de portance CL_p n'est pas comprise entre la valeur de référence et la valeur issue de la linéarisation à « μ_t figé ». Si la longueur de mélange est différentiée sans la vorticité, les erreurs relatives pour les trois fonctions sont de moins de 4 %. Cette fois-ci, les trois valeurs sont comprises entre les valeurs de référence et les valeurs issues de la linéarisation à « μ_t figé ». Si la longueur de mélange ℓ est figée pour la linéarisation du modèle de turbulence, le fait de linéariser la vorticité $\bar{\omega}$, de linéariser une approximation de son expression ou sa discrétisation exacte ne change pas significativement les valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques trouvés (moins de 1,5 % d'erreur relative). Visiblement, la prise en compte de la longueur de mélange pour la linéarisation du modèle de Michel *et al.* est cruciale pour la précision des gradients.

4.3.4.2 Sensibilités d'écoulement

On présente ici les dérivées des composantes du champ conservatif (ρ, ρu, ρv, ρw, ρE) à la paroi (ou sensibilités à la paroi), par rapport au paramètre de forme dans les plans de coupe où des mesures de coefficients de pression $-C_\mathrm{p}$ ont été effectuées (voir sous-section 4.3.2).

Notons tout d'abord que l'amplitude des courbes de sensibilités augmente lorsque le plan de coupe se rapproche du saumon [1]. Ceci est logique, compte tenu de la nature de la déformation (vrillage angulaire, l'angle de vrillage croissant linéairement de l'emplanture vers le saumon).

Pour les dérivées de ρ et ρE (figures 4.47 à 4.50 et 4.51 à 4.54), les courbes de référence obtenues par différences finies et de linéarisation du modèle de turbulence se superposent à la paroi pour les différents plans de coupe. Quant aux courbes liées à la linéarisation du flux diffusif à « μ_t figé », elles se superposent également aux courbes précédentes, excepté au niveau du choc où apparaît un léger décrochage.

[1] attention aux changements d'échelle verticale suivant les plans de coupe.

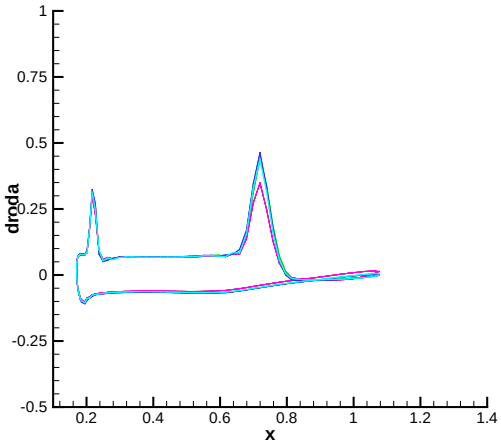

FIG. 4.47 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle de Michel *et al.*

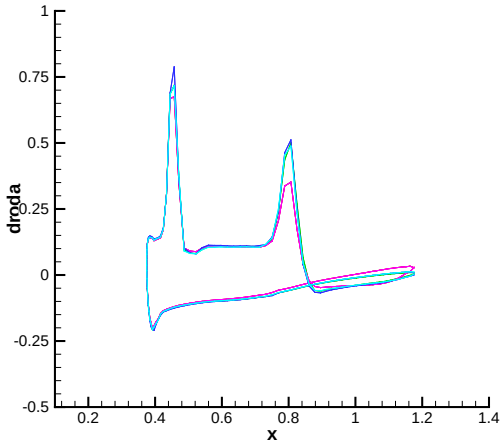

FIG. 4.48 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle de Michel *et al.*

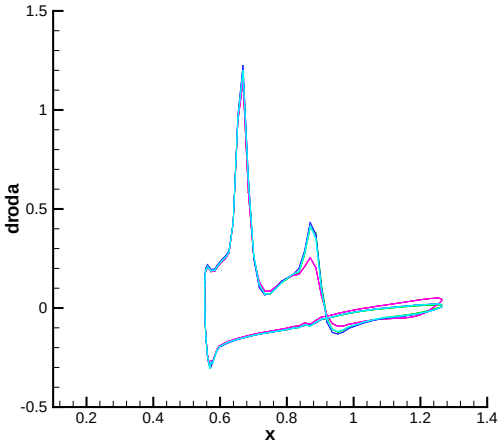

FIG. 4.49 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle de Michel *et al.*

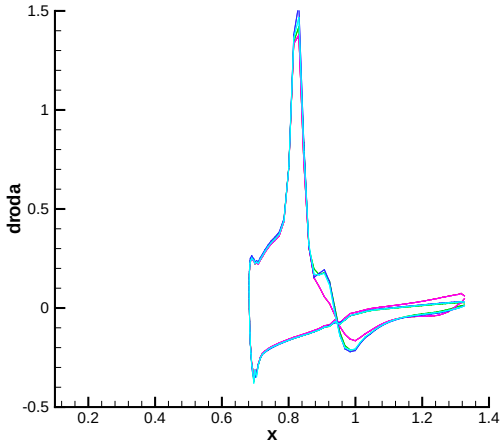

FIG. 4.50 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle de Michel *et al.*

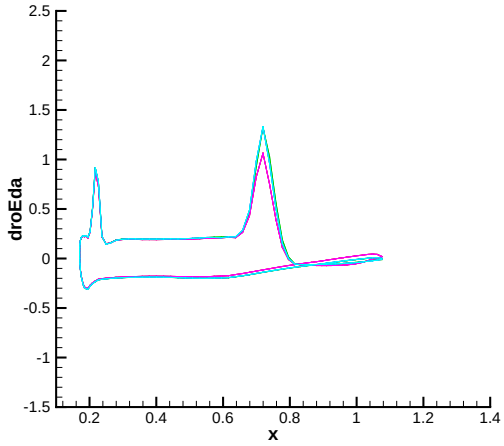

FIG. 4.51 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle de Michel *et al.*

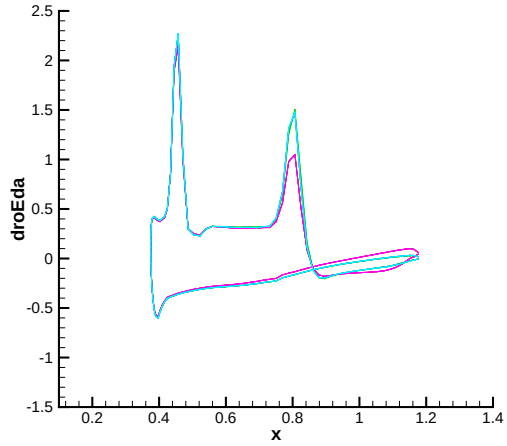

FIG. 4.52 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle de Michel *et al.*

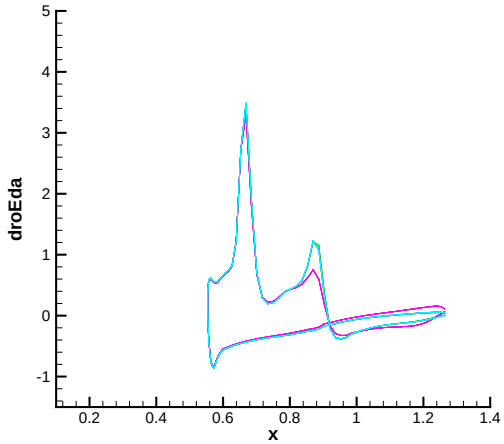

FIG. 4.53 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle de Michel *et al.*

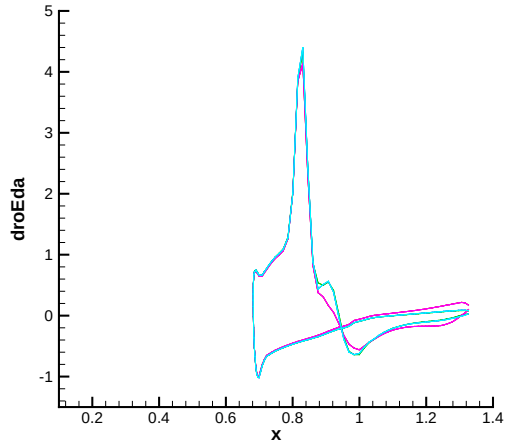

FIG. 4.54 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle de Michel *et al.*

Pour les dérivées des composantes du vecteur quantité de mouvement ρv et ρw (figures 4.55 à 4.58 et 4.59 à 4.62), du bord d'attaque jusqu'à avant le choc, que ce soit sur l'extrados ou l'intrados, les différentes courbes se superposent. Ceci reste vrai dans le cas de la linéarisation du modèle de turbulence après le choc. En revanche, pour une linéarisation du flux diffusif à « μ_t figé », ce n'est plus vrai. Des différences sensibles apparaissent, surtout à l'approche du bord de fuite.

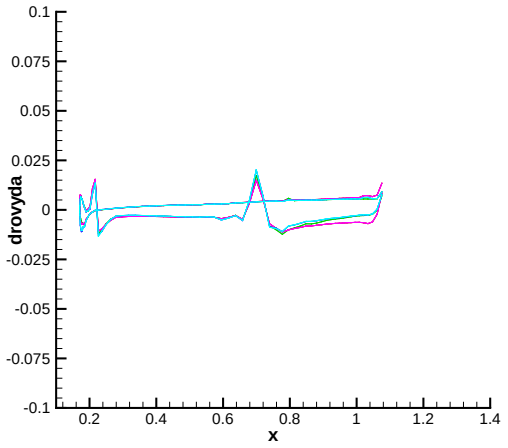

FIG. 4.55 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle de Michel *et al.*

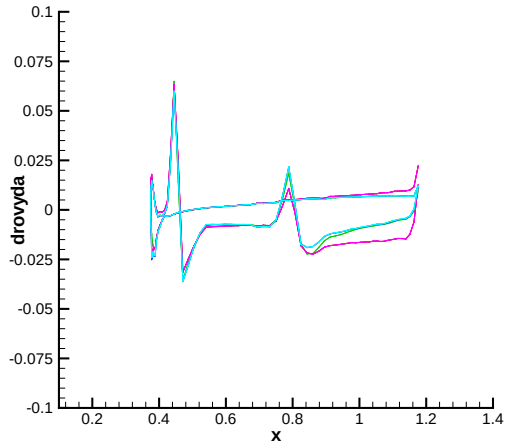

FIG. 4.56 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle de Michel *et al.*

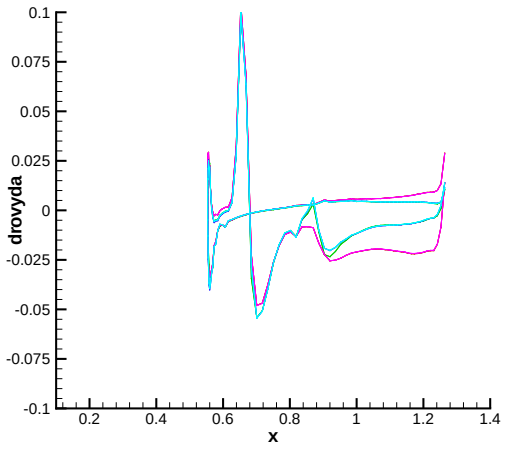

FIG. 4.57 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle de Michel *et al.*

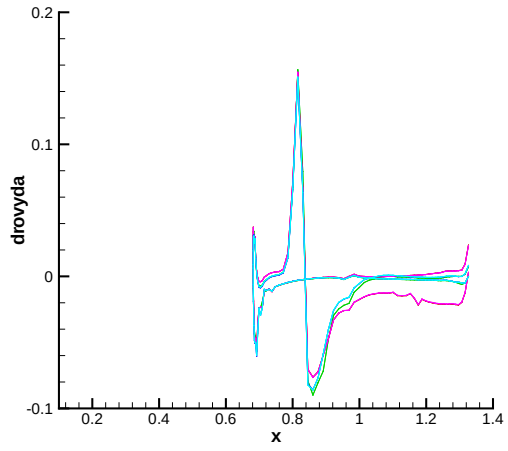

FIG. 4.58 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle de Michel *et al.*

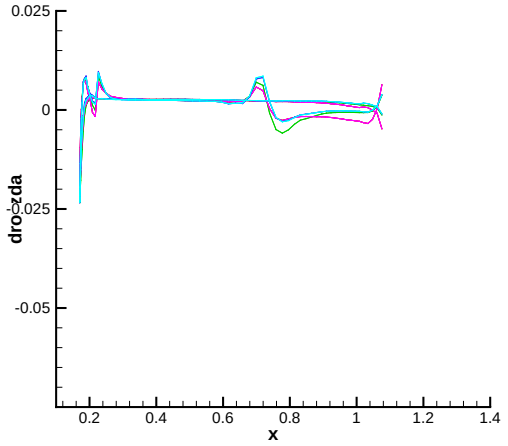

FIG. 4.59 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle de Michel *et al.*

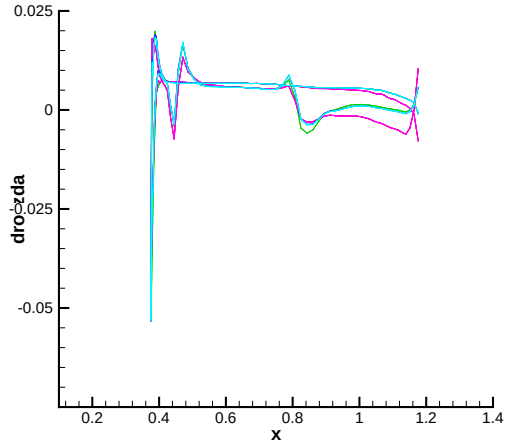

FIG. 4.60 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle de Michel *et al.*

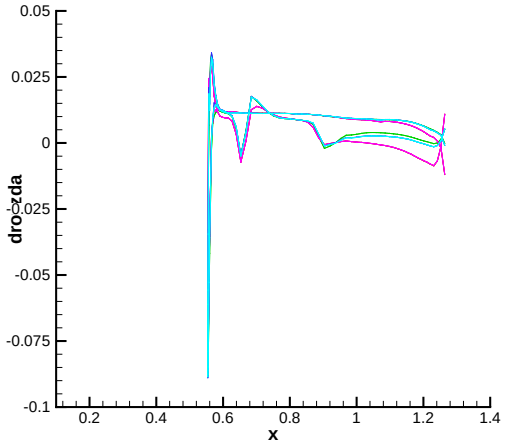

FIG. 4.61 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle de Michel *et al.*

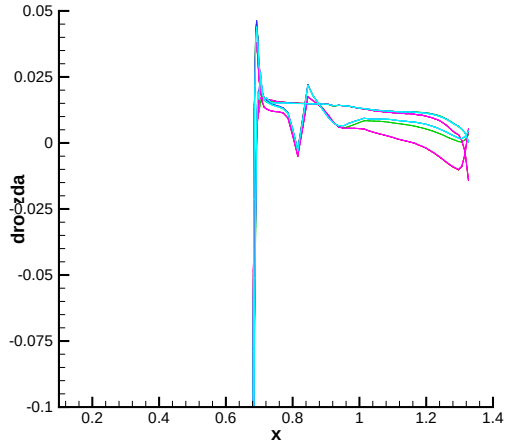

FIG. 4.62 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle de Michel *et al.*

Pour la dérivée de ρu par rapport au paramètre de forme (figures 4.63 à 4.66), les différences sont plus notables. Lorsque le modèle de turbulence est linéarisé, les courbes se superposent avant le choc. Par contre, les résultats sont légèrement différents après le choc, et meilleurs pour le calcul avec linéarisation du modèle de turbulence. La linéarisation à « μ_t figé » donne, elle, de moins bons résultats sur cette sensibilité, quelle que soit la zone, et en particulier vers le bord de fuite.

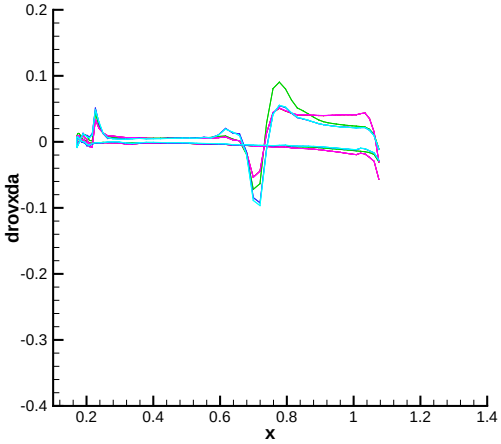

FIG. 4.63 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle de Michel *et al.*

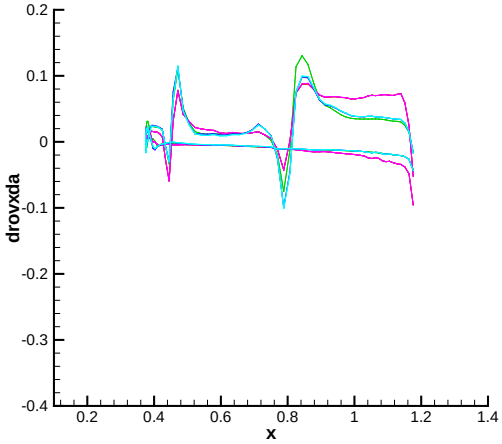

FIG. 4.64 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle de Michel *et al.*

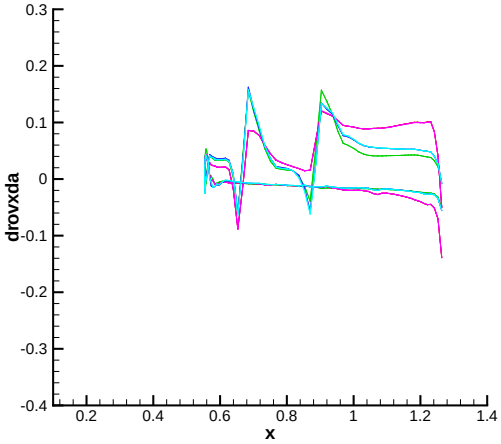

FIG. 4.65 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle de Michel *et al.*

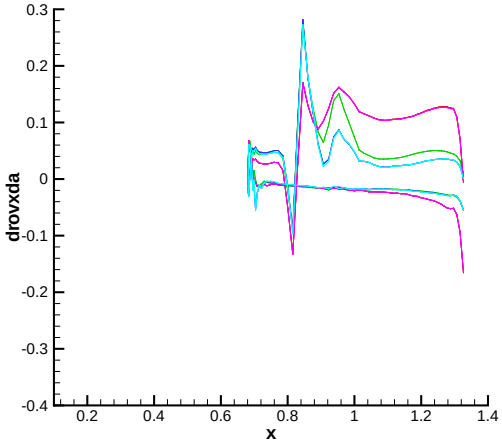

FIG. 4.66 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle de Michel *et al.*

Les figures 4.67 à 4.70 présentent les lignes iso-$\frac{\mathrm{d}\mu_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\alpha}$ dans les plans de coupe 20 %, 44 %, 65 % et 80 %. Les amplitudes de la dérivée du coefficient de viscosité de turbulence μ_t par rapport au paramètre de forme $\frac{\mathrm{d}\mu_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\alpha}$ sont les plus élevées au voisinage de la paroi, surtout sur l'extrados sur l'aile externe (au niveau du choc et du bord de fuite), et un peu moins, mais toujours de manière significative sur l'intrados au bord de fuite, et sur l'extrados sur la première partie de l'aile, lorsque la hauteur de coupe augmente. C'est donc dans ces zones que l'hypothèse de « couche mince » est mise en défaut, comme constaté sur les courbes de sensibilités du champ aérodynamique entre des linéarisations du flux diffusif à « μ_t figé » ou en linéarisant le modèle de turbulence. La dérivée du coefficient de viscosité moléculaire par rapport au paramètre de formes n'a pas été tracée ici car les figures sont semblables à la figure 4.19 : le champ de dérivée est tracé à une échelle uniforme, pour des valeurs comprises entre -5.10^{-6} et 5.10^{-6}.

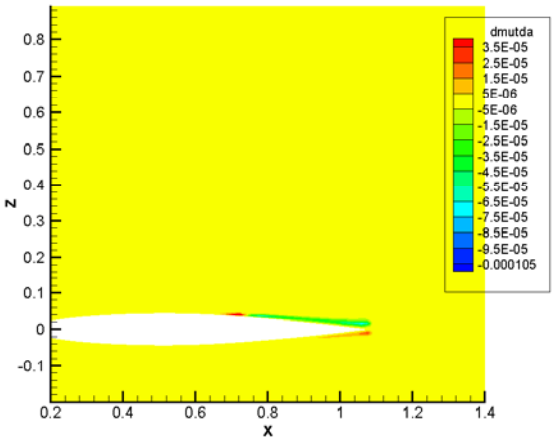

FIG. 4.67 – Aile M6. Lignes iso-$\frac{\mathrm{d}\mu_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de coupe 20 %. Modèle de Michel *et al.*

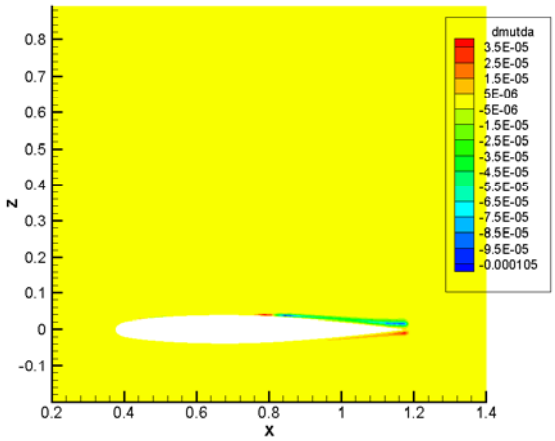

FIG. 4.68 – Aile M6. Lignes iso-$\frac{\mathrm{d}\mu_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de coupe 44 %. Modèle de Michel *et al.*

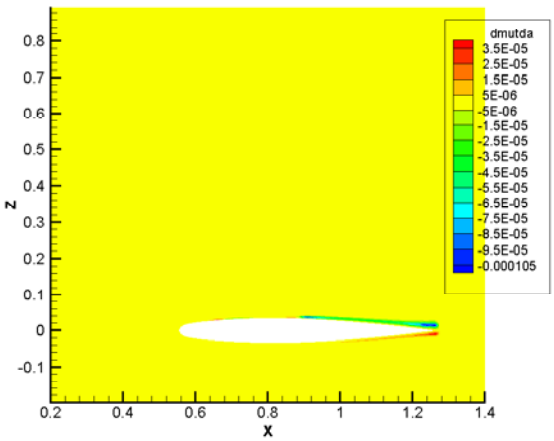

FIG. 4.69 – Aile M6. Lignes iso-$\frac{\mathrm{d}\mu_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de coupe 65 %. Modèle de Michel *et al.*

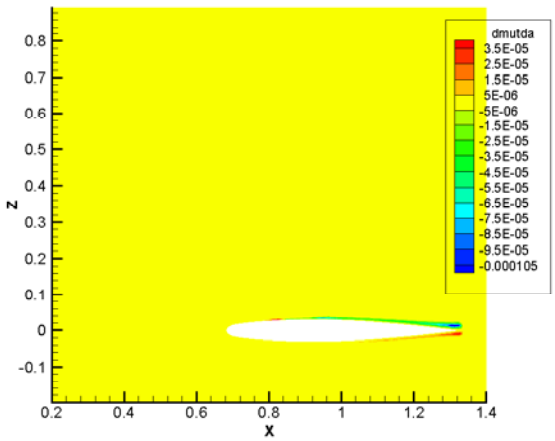

FIG. 4.70 – Aile M6. Lignes iso-$\frac{\mathrm{d}\mu_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de coupe 80 %. Modèle de Michel *et al.*

4.3.5 Calcul des sensibilités. Modèle k-ε de Launder-Sharma

4.3.5.1 Calculs de gradients

Les résultats obtenus sur les gradients des coefficients de portance CL_{p}, de traînée de champ proche CD_{nf} de traînée de champ lointain CD_{ff} sont donnés dans le tableau 4.6 pour la méthode de l'équation linéarisée et dans le tableau 4.7 pour la méthode adjointe.

	DF	CM + MUTFIG	FVC + MUTFIG
$\frac{\mathrm{d}CL_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,359	0,333	0,333
$\frac{\mathrm{d}CD_{\mathrm{nf}}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,031 5	0,030 1	0,030 1
$\frac{\mathrm{d}CD_{\mathrm{ff}}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,029 9	0,027 5	0,027 5

TAB. 4.6 – Aile M6. Dérivées de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme. Méthode de l'équation linéarisée. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

	DF	CM + MUTFIG	FVC + MUTFIG
$\frac{\mathrm{d}CL_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,359	-0,333	-0,333
$\frac{\mathrm{d}CD_{\mathrm{nf}}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,031 5	-0,030 1	-0,030 1
$\frac{\mathrm{d}CD_{\mathrm{ff}}}{\mathrm{d}\alpha}$	-0,029 9	-0,027 6	-0,027 5

TAB. 4.7 – Aile M6. Dérivées de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme. Méthode adjointe. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

Pour les valeurs de gradients de fonction, l'erreur relative entre la référence obtenue par différences finies et la linéarisation à « μ_{t} figé » est comprise entre 4 et 8 %, soit une erreur inférieure au cas d'utilisation du modèle de Michel *et al.* (voir sous-section 4.3.4.1).

4.3.5.2 Sensibilités d'écoulement

Comme pour le modèle de Michel *et al.*, on présente ici les dérivées des composantes du champ conservatif (ou sensibilités) à la paroi (ρ, ρu, ρv, ρw, ρE) par rapport au paramètre de forme dans les plans de coupe où des mesures de coefficients de pression $-C_{\mathrm{p}}$ ont été effectuées (voir sous-section 4.3.2).

L'amplitude des courbes de sensibilités augmente lorsque le plan de coupe se rapproche du saumon (même explication que précédemment).

Tout comme dans le cas de l'utilisation du modèle de Michel *et al.*, pour les dérivées de ρ et ρE (figures 4.71 à 4.74 et 4.75 à 4.78), les courbes de référence obtenues par différences finies et de linéarisation du flux diffusif à « μ_{t} figé » se superposent à la paroi pour les différents plans de coupe, sauf au niveau du choc où un léger décrochage apparaît.

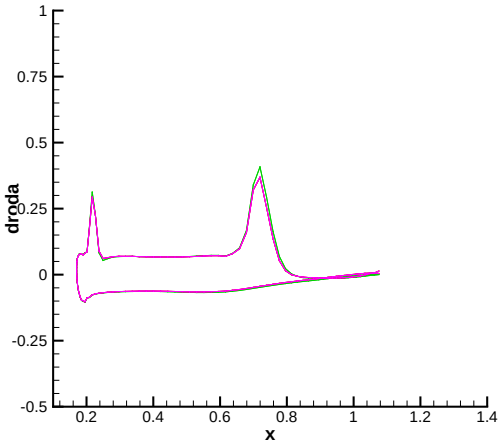

FIG. 4.71 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

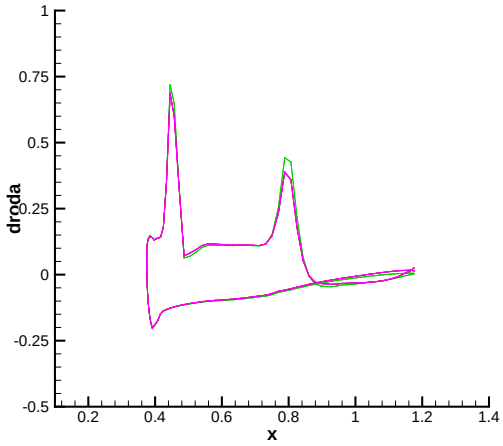

FIG. 4.72 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

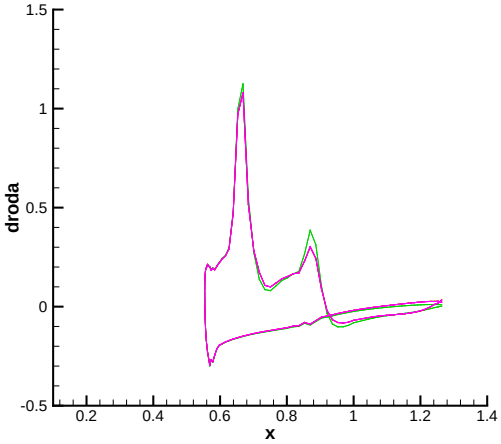

FIG. 4.73 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

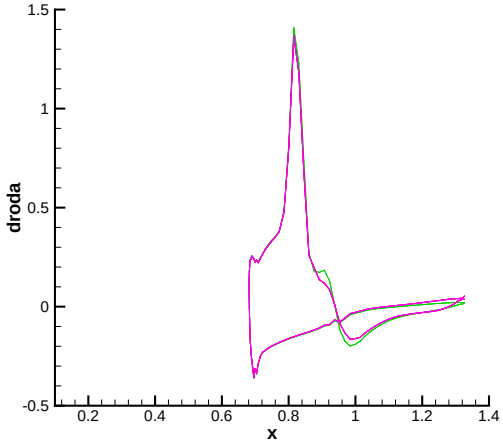

FIG. 4.74 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

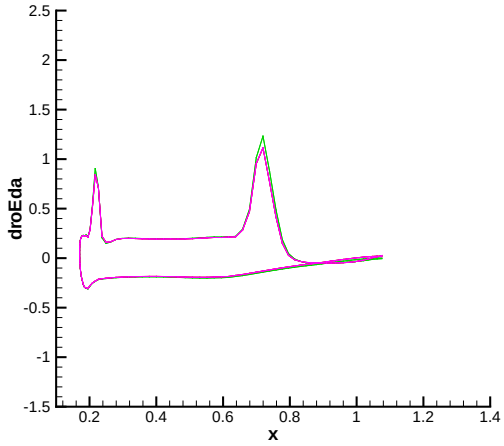

FIG. 4.75 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

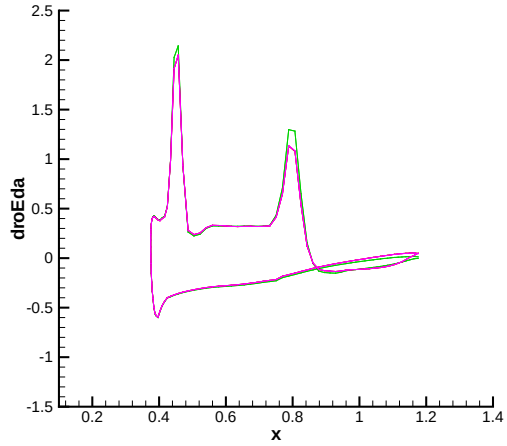

FIG. 4.76 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

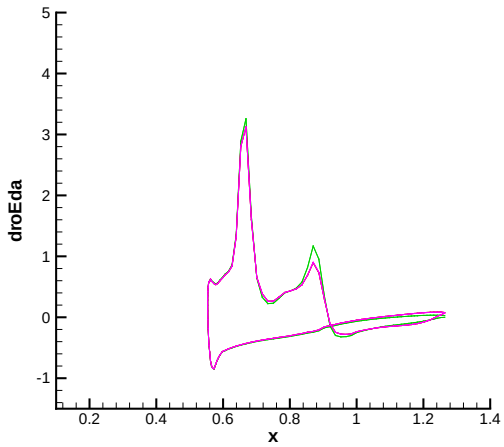

FIG. 4.77 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

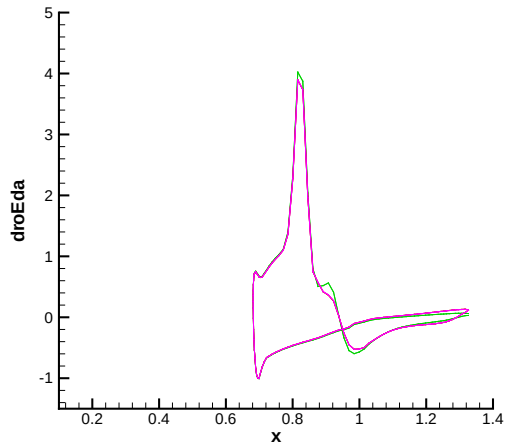

FIG. 4.78 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

Pour la dérivée de la composante du vecteur quantité de mouvement ρv par rapport au paramètre de forme (figures 4.79 à 4.82), les courbes se superposent sur l'intrados sauf au bord de fuite et en amont du cho sur l'extrados.

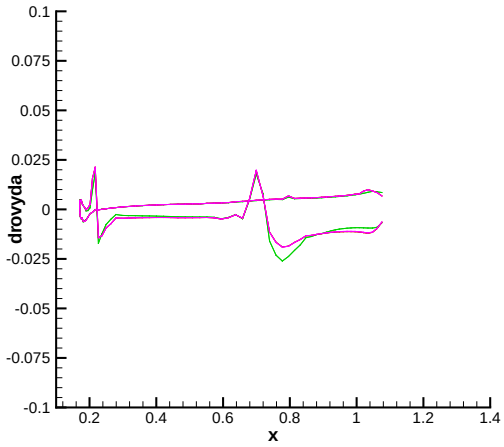

FIG. 4.79 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

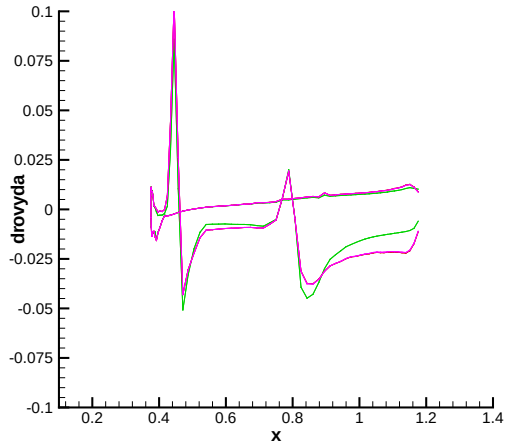

FIG. 4.80 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

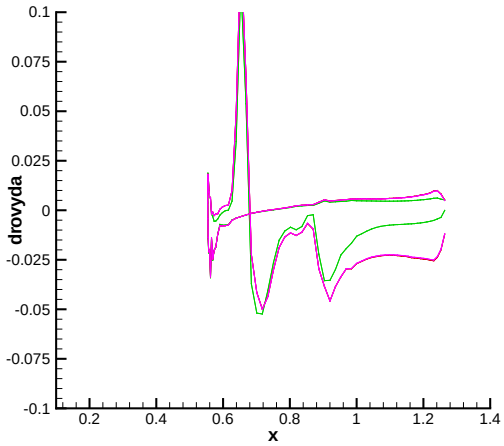

FIG. 4.81 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

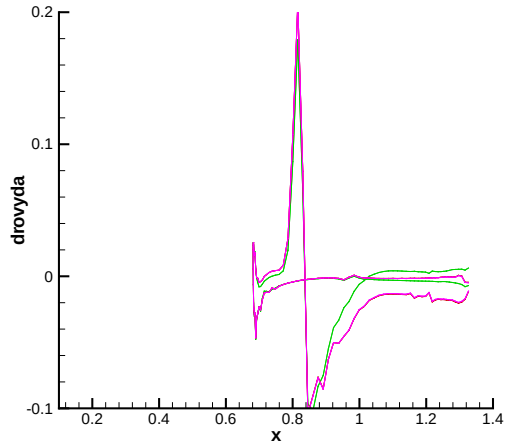

FIG. 4.82 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

Pour la dérivée de la composante du vecteur quantité de mouvement ρw par rapport au paramètre de forme (figures 4.83 à 4.86), les différences les plus notables se trouvent au choc et au bord de fuite.

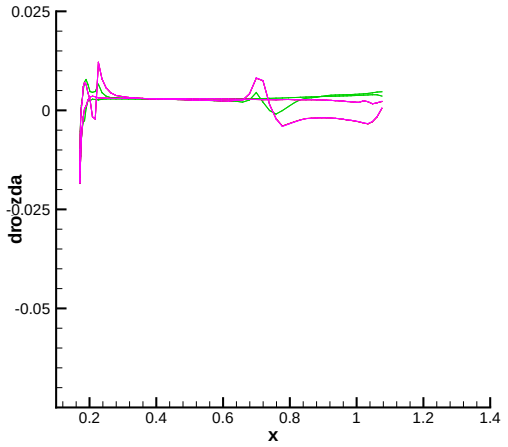

FIG. 4.83 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

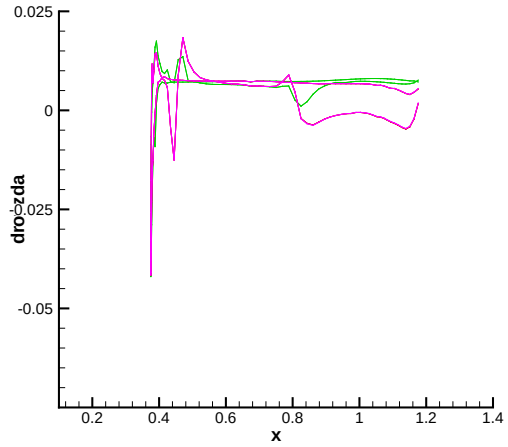

FIG. 4.84 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

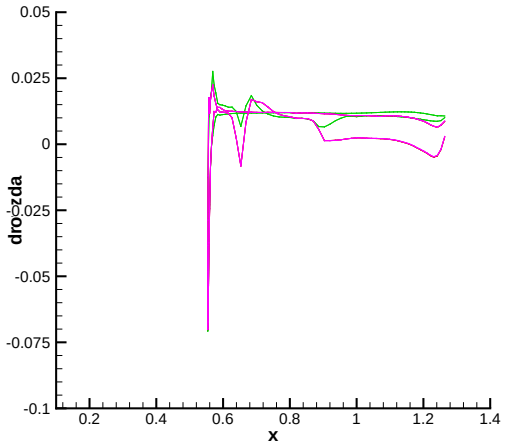

FIG. 4.85 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

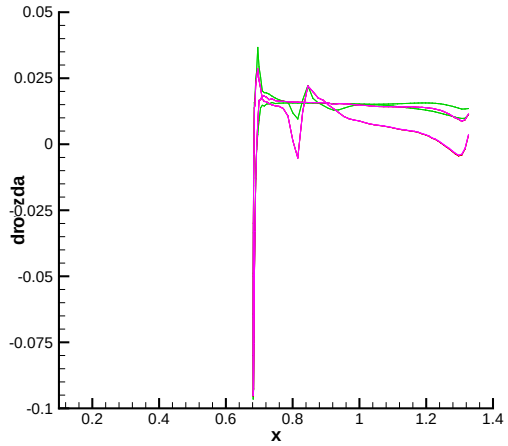

FIG. 4.86 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

Pour la dérivée de ρu par rapport au paramètre de forme (figures 4.87 à 4.90), les différences sont plus notables que pour les autres composantes. Les courbes diffèrent presque partout.

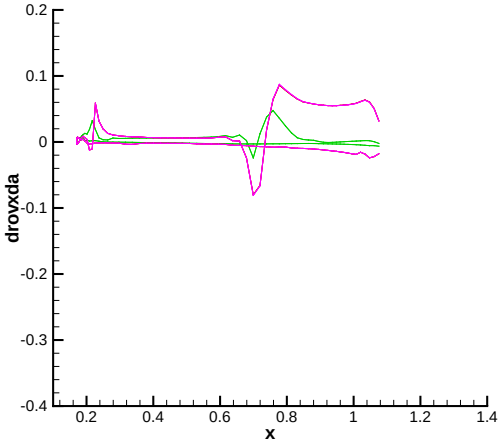

FIG. 4.87 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 20 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

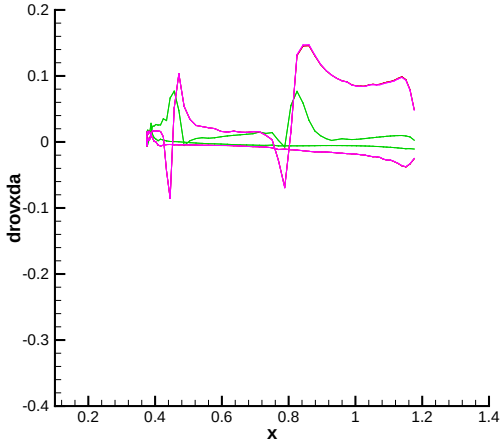

FIG. 4.88 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 44 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

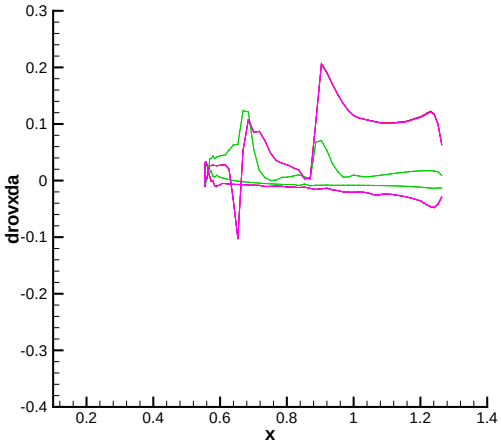

FIG. 4.89 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 65 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

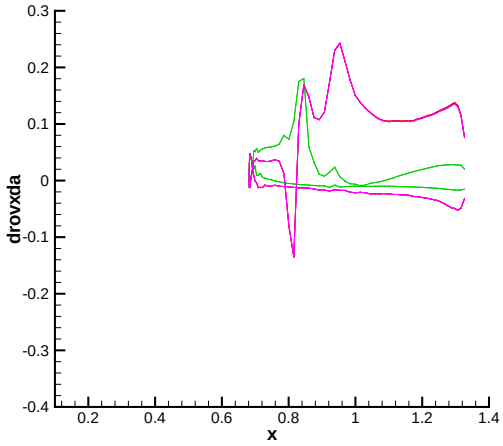

FIG. 4.90 – Aile M6. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ à la paroi dans le plan de coupe 80 %. Modèle k-ε de Launder-Sharma.

4.3.6 Conclusion partielle

Pour l'aile ONERA M6, des dérivées de composantes du champ aérodynamique $\boldsymbol{W}$ dans une cellule adjacente à la paroi ainsi que les gradients de trois fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme ont été présentés pour les deux modèles de turbulence de Michel *et al.* et k-ε de Launder-Sharma. Dans le cas de l'emploi du modèle de Michel *et al.*, la linéarisation du modèle a été validée.

Les linéarisations du flux diffusif avec ou sans approche de type « couche mince », avec ou sans linéarisation du modèle de turbulence donnent des gradients de fonctions et des sensibilités d'écoulement à la paroi plutôt précis. À niveau d'approximations équivalents, les deux méthodes discrètes (équation linéarisée et adjointe) donnent des valeurs de gradients identiques. Les linéarisations avec ou sans approche de type « couche mince » donnent les mêmes résultats. Pour obtenir des gradients de fonctions précis, il est nécessaire de linéariser tous les termes du modèle de Michel *et al.*

Pour les sensibilités d'écoulements, les dérivées de grandeurs isotropes (dérivées de ρ et ρE) par rapport au paramètre de forme sont peu sensibles au niveau d'approximation de la linéarisation, sauf aux voisinages du choc et du bord de fuite. Cela est moins vrai pour les dérivées des composantes de quantité de mouvement, en particulier entre le choc et le bord de fuite sur l'extrados.

4.4 Conclusion

Les résultats obtenus sur ces deux géométries fixes nous permettent de tirer un certain nombre de conclusions. Deux modèles de turbulence (Michel *et al.* et k-ε de Launder-Sharma) sont utilisés ici. Les résultats de la linéarisation du flux diffusif à « μ_{t} figé » ont été présentés pour les deux modèles de turbulence, ainsi que ceux issus de la linéarisation du modèle de Michel *et al.*

Sur les exemples proposés, la méthode de l'équation linéarisée discrète et la méthode adjointe discrète donnent les mêmes valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques par rapport à un paramètre de forme, quelle que soit la fonction. Le fait de linéariser le flux diffusif avec ou sans approche de type « couche mince » n'induit que très peu de différences (sur le calcul de gradients de fonctions aérodynamiques ou sur les sensibilités d'écoulement à la paroi). Les deux formulations pour la linéarisation du flux diffusif sans approche de type « couche mince » donnent des valeurs de gradients identiques. L'approche de type « couche mince » est donc suffisante pour la linéarisation du flux diffusif.

La linéarisation à « μ_{t} figé » donne des résultats convenables (valeurs de gradients et sensibilités), sans être complétement précis (de 4 à 15 % d'erreur relative), mais offre une bonne tendance pour le calcul de la direction de gradient à suivre pour l'algorithme de descente. Elle doit être suffisante pour une optimisation grossière.

En revanche, la linéarisation du modèle de Michel *et al.* a montré que, pour atteindre les résultats présentés (moins de 2,1 % d'erreur relative) et cette précision sur les gradients de fonctions, il était nécessaire de différentier de manière exacte tous les termes qui apparaissent dans l'expression de ce modèle de turbulence (en particulier la vorticité et la longueur de mélange). Cet effort permet d'améliorer grandement la précision des valeurs de gradients de fonctions ainsi que les sensibilités d'écoulement, jusqu'à obtenir des résultats quasiment superposés avec la référence obtenue par différences finies.

Dans la section 2.8, on a vu que la précision de la méthode (adjointe ou linéarisée) dépendait de la *phase explicite*. Les différences qui demeurent par rapport à la linéarisation du modèle de

Michel *et al.* peuvent trouver leur explication dans plusieurs causes :

- un traitement générique plus précis pour les conditions aux limites autres que de paroi pourrait être adopté lors de la linéarisation du flux diffusif et de modèles de turbulence ;
- le problème du choix du pas optimal pour le paramètre de forme reste posé (pour le calcul de la référence obtenue par différences finies ou le calcul du terme de sensibilité par rapport au maillage $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha}$) ;
- l'hypothèse de nullité du bilan de flux discrétisé pour les équations de Navier-Stokes $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X})$ n'est en pratique pas rigoureusement vérifiée (difficulté pour obtenir une solution d'un calcul d'analyse bien convergée).

Aucune conclusion pour la linéarisation du modèle k-ε de Launder-Sharma ne peut malheureusement être établie, des résultats satisfaisants n'ayant pas été obtenus à cette date.

Pour une linéarisation à « μ_t figé », les zones où les sensibilités de l'écoulement sont les plus éloignées de celles de référence (obtenues par différences finies) se situent là où le coefficient de viscosité turbulente a son amplitude la plus forte (qui est aussi l'endroit où il varie le plus). C'est souvent le cas après un choc pour une configuration transsonique. À l'inverse, dans les zones où la turbulence n'est pas ou peu développée (par exemple en amont du choc ou à l'intrados dans le cas d'une aile), l'approximation « μ_t figé » se justifie tout à fait, le coefficient de viscosité turbulente μ_t y variant très peu.

Les différentes linéarisations ayant été testées sur ces deux géométries simples, nous allons maintenant les appliquer sur des configurations de turbomachine.

Chapitre 5

Application aux aubes isolées de turbomachine

5.1 Introduction. Résultats présentés. Commentaires communs

Ce travail de thèse a pour but de calculer des gradients de fonctions aérodynamiques de manière précise. Différentes linéarisations du flux diffusif et du modèle de Michel *et al.* ont été proposées dans le chapitre 3. Elles ont été testées dans le chapitre précédent sur des configurations classiques (une tuyère et une aile). Dans ce chapitre, des résultats sont présentés pour deux aubes de turbine.

Les conditions aérodynamiques et l'écoulement stationnaire autour de la géométrie de base des différents cas d'aubes isolées de turbomachine sont brièvement décrits. Après avoir défini les paramètres de forme, les résultats obtenus pour le calcul de gradients de fonctions aérodynamiques sont présentés. En pratique, pour chaque cas test, des résultats pour un unique paramètre de forme sont montrés, tout comme dans le chapitre 4. Deux types de résultats sont exposés :

- les gradients de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme ;
- les sensibilités de l'écoulement par rapport au champ aérodynamique (ou dérivée du champ aérodynamique par rapport au paramètre de forme) dans le plan de sortie $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha}$.

La valeur des fonctions aérodynamiques ainsi que leurs dérivées par rapport au maillage et au champ aérodynamique sont fournis par l'outil de post-traitement Xopt développé au Département d'Aérodynamique APpliquée de l'ONERA (voir la section 2.9). On rappelle ici que ces fonctions aérodynamiques sont soit des moyennes surfaciques de composantes du champ aérodynamique (ρ, ρu, ρv, ρw, ρE) dans le plan de sortie, soit des fonctions qui dépendent de ces moyennes (p_t, p, T). Les grandeurs les plus significatives à observer sont donc les moyennes des grandeurs conservatives ρ, ρu, ρv, ρw, ρE.

Dans tous les cas, les résultats issus du module de calcul de gradients sont comparés à ceux obtenus par différences finies d'ordre 2. La procédure d'obtention de ces différences finies d'ordre 2 est rappelée à la section 4.1. Les abréviations introduites au chapitre 4 (DF, CM, FVC, MUTFIG, MODLIN) sont utilisées.

Pour la linéarisation du flux diffusif sans approche de type « couche mince », ce sont les résultats issus de la deuxième formulation (voir sous-section 3.4.2) qui sont présentés. Les résultats issus de la première formulation donnent en pratique des valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques quasiment identiques à ceux de la deuxième formulation. C'est cette dernière formulation qui a été retenue car elle utilise la discrétisation des gradients de vitesse codée dans

elsA et pas une hypothèse *a priori* d'écriture particulière du flux diffusif, ce qui semble plus juste.

Dans le cas de l'utilisation du modèle de Michel *et al.*, on présente les résultats de différentes linéarisations :

- linéarisation du flux diffusif avec approche de type « couche mince » à « μ_t figé » ;
- linéarisation du flux diffusif sans approche de type « couche mince » (Flux Visqueux Complet) à « μ_t figé » ;
- linéarisation du flux diffusif avec approche de type « couche mince » et modèle de turbulence linéarisé ;
- linéarisation du flux diffusif sans approche de type « couche mince » (Flux Visqueux Complet) et modèle de turbulence linéarisé.

Les résultats présentés sous la dénomination *modèle de turbulence linéarisé* correspondent à une linéarisation la moins approchée pour l'évaluation de la matrice jacobienne $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$. La vorticité est alors linéarisée en utilisant l'écriture de sa discrétisation dans *elsA* (voir sous-section 3.6.4) tout comme la longueur de mélange (voir sous-section 3.6.5).

On verra que les résultats obtenus avec ou sans approche de type « couche mince » (valeurs de gradients de fonctions ou courbes de dérivée de composantes du champ conservatif dans le plan de sortie), sont très proches voire identiques à la précision ou aux échelles choisies, et en particulier lorsque l'hypothèse de « μ_t figé » est ajoutée.

Dans ce chapitre, comme les résultats présentés sont uniquement sur des aubes de turbines, seul le modèle de Michel *et al.* est utilisé, ce dernier n'étant pas utilisé au sein des équipes de conception de compresseurs.

5.2 Distributeur Basse Pression

5.2.1 Géométrie

Il s'agit d'une aube isolée de distributeur d'une turbine basse pression désignée par la suite sous le sigle DBP. Aucune donnée expérimentale n'est disponible à ce jour pour contrôler les résultats issus des simulations numériques.

La déformation considérée est un déplacement linéaire de l'axe d'empilage. Le paramètre de forme est l'angle que fait la ligne d'empilage avec la verticale. Celui-ci vaut 0,1° pour nos simulations. Sur les figures 5.1 et 5.2, la déformation est représentée pour un angle de +1°, pour des vues respectives au bord d'attaque et au bord de fuite.

5.2.2 Conditions aérodynamiques

Les conditions aérodynamiques utilisées sont :

- température d'arrêt $T_{i0} = 345$ K ;
- pression d'arrêt $p_{i0} = 64\ 200$ Pa ;
- parois adiabatiques.

5.2.3 Simulation numérique de l'écoulement stationnaire

Les conditions aux limites sont :

- condition d'injection subsonique à la frontière amont (l'écoulement est subsonique) ;
- profil de pression statique imposé sur la frontière aval qui respecte un équilibre radial ;
- condition de paroi adiabatique avec adhérence à la paroi sur l'aube, le moyeu et le carter.

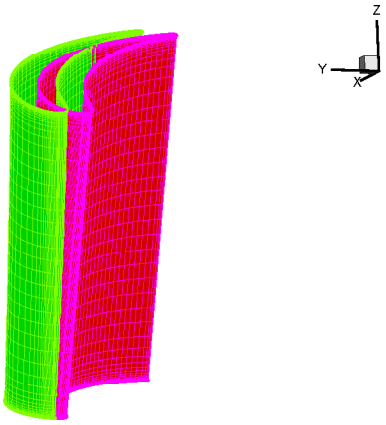

FIG. 5.1 – DBP Turbine. Déformation de l'aube de 1°. Vue au bord d'attaque. En rouge, l'aube de base, en vert l'aube déformée.

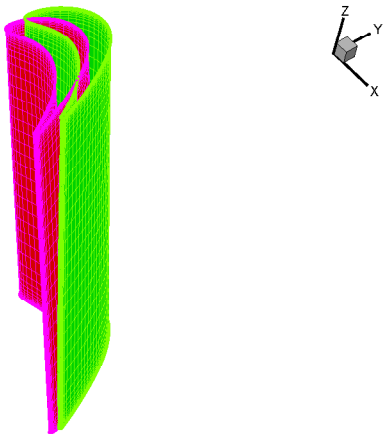

FIG. 5.2 – DBP Turbine. Déformation de l'aube de 1°. Vue au bord de fuite. En rouge, l'aube de base, en vert l'aube déformée.

On utilise un maillage multibloc (cinq domaines) pour une topologie de maillage dite O4H comme on peut le voir dans une coupe en K sur la figure 5.3. Le bloc maillé en O est en rouge, autour de l'aube. Les raccords périodiques sont à points coïncidents.

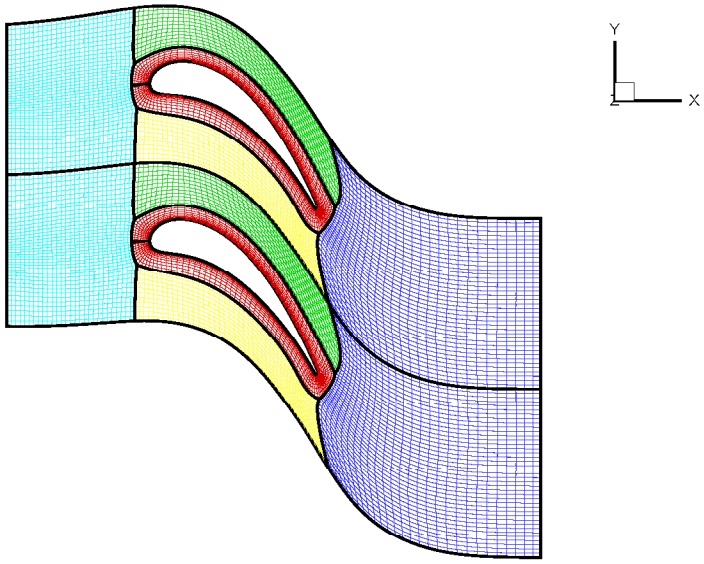

FIG. 5.3 – DBP Turbine. Vue du maillage à mi-hauteur de veine sur une coupe en K.

Les champs présentés en figures 5.4 à 5.6 sont des plans de coupe situés à trois hauteurs de veine : 10 %, 50 %, et 90 %.

On observe un décollement sur l'extrados dans la coupe à 90 % de hauteur de veine, près du bord de fuite (figure 5.6) et un léger décollement en pied, à 10 % de hauteur de veine (figure 5.4). Sur les trois coupes, il comporte des zones de survitesse à l'extrados, notamment à 90 %

de hauteur de veine où l'incidence est importante. Il n'y a pas *a priori* d'écart flux-profil, ce qui est confirmé par la figure de profil d'angle absolu α (figure 5.8).

Sur les courbes de $1 - \frac{p}{p_{\mathrm{i}0}}$ à la paroi (figure 5.7), la coupe à 10 % apparaît en rouge, celle à 50 % en vert et celle à 90 % en bleu. Les commentaires faits sur les lignes iso-nombre de Mach (figures 5.4, 5.5 et 5.6) concordent avec ces courbes. Sur la coupe à 90 %, l'écoulement est d'abord accéléré (survitesse à l'extrados) puis la vitesse reste constante sur la suite du profil.

On contrôle en outre des profils radiaux dans les plans d'entrée et de sortie de l'angle absolu α (figure 5.8), du nombre de Mach absolu M_{abs} (figure 5.9), de la pression statique p (figure 5.11) et de la pression totale p_{i} (figure 5.10) représentative des pertes. Les moyennes dans le plan d'entrée figurent en noir, alors que celles dans le plan de sortie figurent en rouge. Dans le plan de sortie, l'écoulement suit une loi d'équilibre radial, la pression statique est plus faible en pied qu'en tête. Les relevés d'angle absolu (figure 5.8) sont cohérents avec l'observation des courbes de lignes iso-nombre de Mach (figure 5.4 à 5.6) en entrée. À 10 % de hauteur $\alpha = 10^\circ$, à mi-hauteur $\alpha = 15^\circ$ et à 90 % de hauteur $\alpha = 20^\circ$. La baisse d'angle absolu α en pied en sortie est sans doute un effet tridimensionel. Les pertes ($\frac{p_{\mathrm{i}}}{p_{\mathrm{i}0}}$, figure 5.10) sont plus fortes en tête qu'en pied. En pied, la pression totale p_{i} est conservée, alors qu'en tête, on a une perte de 3-4 %. Le fait d'être à un rapport supérieur à 1 vient de la valeur fournie dans le profil de pression imposée en entrée. Pour la répartition du nombre de Mach absolu (figure 5.9), il y a uniformisation en sortie. L'écoulement est accéléré à la traversée de la roue (taux d'accélération d'environ 1,7).

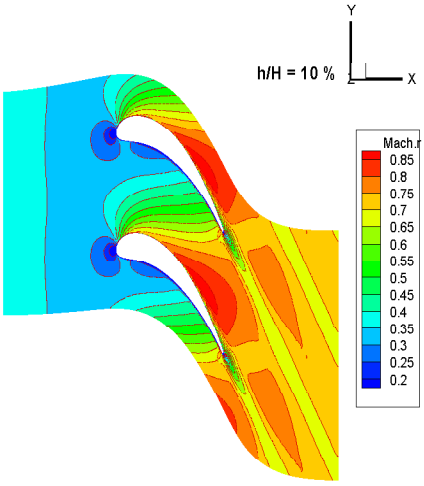

FIG. 5.4 – DBP Turbine. Lignes iso-nombre de Mach à 10 % de hauteur de veine. Modèle de Michel *et al.*

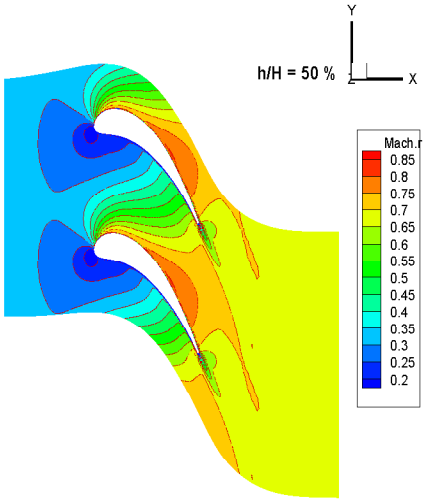

FIG. 5.5 – DBP Turbine. Lignes iso-nombre de Mach à 50 % de hauteur de veine. Modèle de Michel *et al.*

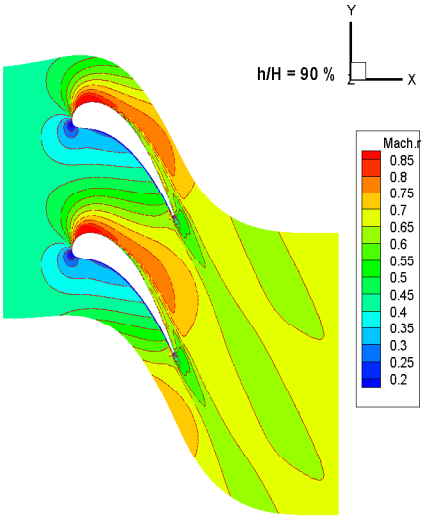

FIG. 5.6 – DBP Turbine. Lignes iso-nombre de Mach à 90 % de hauteur de veine. Modèle de Michel *et al.*

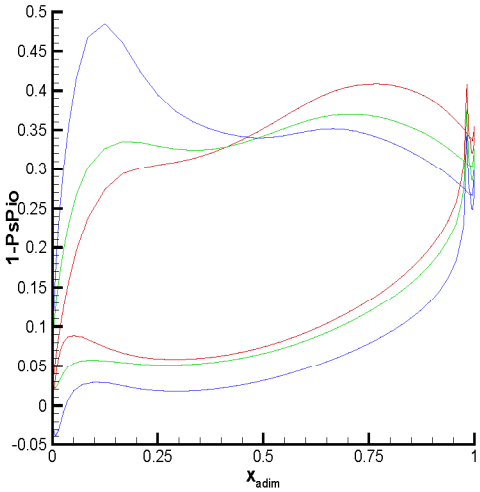

FIG. 5.7 – DBP Turbine. $1 - \frac{p_i}{p_{i0}}$ à la paroi à 10 % (en bleu), 50 % (en vert) et 90 % (en rouge) de hauteur de veine. Modèle de Michel *et al.*

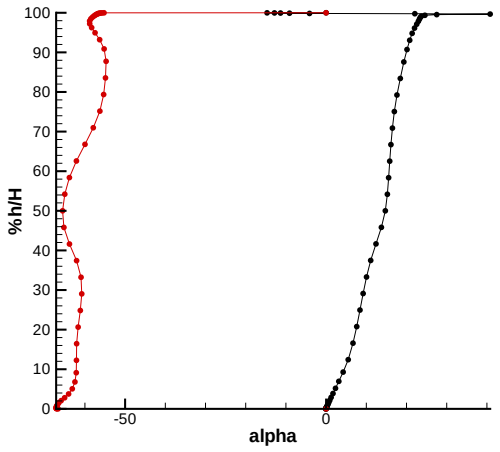

FIG. 5.8 – DBP Turbine. Distribution d'angle absolu en sortie. Modèle de Michel *et al.*

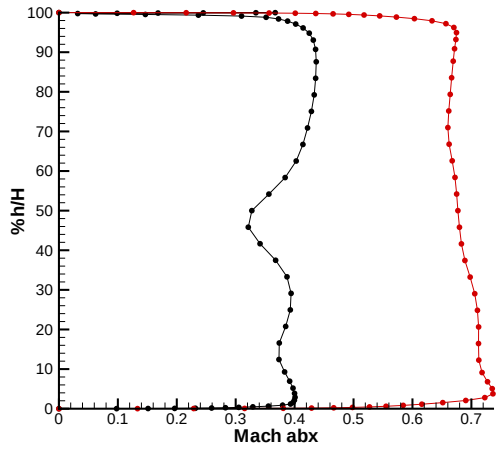

FIG. 5.9 – DBP Turbine. Distribution de nombre de Mach absolu en sortie. Modèle de Michel *et al.*

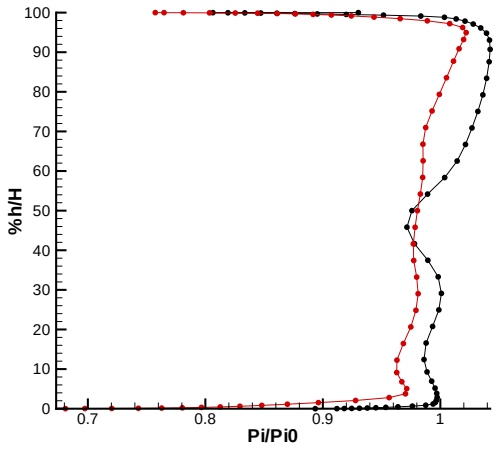

FIG. 5.10 – DBP Turbine. Distribution de pression d'arrêt en sortie. Modèle de Michel *et al.*

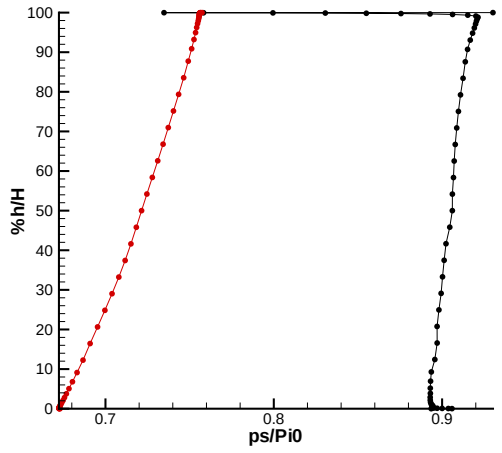

FIG. 5.11 – DBP Turbine. Distribution de pression statique en sortie. Modèle de Michel *et al.*

5.2.4 Calcul des sensibilités

5.2.4.1 Gradients de fonctions aérodynamiques

Les fonctions étudiées sont, pour les cinq premières, des moyennes surfaciques de composantes du champ aérodynamique : ρ, ρu, ρv, ρw, ρE. Les grandeurs moyennes de pression statique moyenne p, température statique T et pression totale p_{i} sont fonctions de moyennes surfaciques des composantes ρ, ρu, ρv, ρw et ρE, comme présenté dans la sous-section 2.9.2. Les gradients des fonctions aérodynamiques étudiées sont donnés dans le tableau 5.1 pour la méthode de l'équation linéarisée.

	DF	CM + MUTFIG	FVC + MUTFIG	CM + MODLIN	FVC + MODLIN
$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$	$5{,}71.10^{-5}$	$1{,}51.10^{-4}$	$1{,}51.10^{-4}$	$3{,}00.10^{-4}$	$1{,}42.10^{-4}$
$\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$	$3{,}78.10^{-3}$	$3{,}89.10^{-3}$	$3{,}89.10^{-3}$	$3{,}87.10^{-3}$	$3{,}87.10^{-3}$
$\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$	$2{,}82.10^{-3}$	$2{,}04.10^{-3}$	$2{,}05.10^{-3}$	$2{,}07.10^{-3}$	$2{,}08.10^{-3}$
$\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$	$6{,}70.10^{-3}$	$6{,}25.10^{-3}$	$6{,}23.10^{-3}$	$6{,}25.10^{-3}$	$6{,}23.10^{-3}$
$\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$	$-5{,}13.10^{-4}$	$-7{,}63.10^{-5}$	$-7{,}78.10^{-5}$	$-1{,}32.10^{-4}$	$-1{,}03.10^{-4}$
$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\alpha}$	$2{,}49.10^{-5}$	$7{,}21.10^{-5}$	$7{,}21.10^{-5}$	$7{,}07.10^{-5}$	$7{,}20.10^{-5}$
$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\alpha}$	$-2{,}02.10^{-5}$	$-4{,}28.10^{-5}$	$-4{,}22.10^{-5}$	$-2{,}10.10^{-4}$	$-3{,}24.10^{-5}$
$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}\alpha}$	$-6{,}92.10^{-4}$	$-2{,}51.10^{-4}$	$-2{,}53.10^{-4}$	$-3{,}18.10^{-4}$	$-2{,}84.10^{-4}$

TAB. 5.1 – DBP Turbine. Dérivées de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme. Méthode de l'équation linéarisée. Modèle de Michel *et al.*

Comme observé dans le chapitre précédent, les linéarisations du flux diffusif avec (CM) ou sans (FVC) approximation de type « couche mince » à « μ_{t} figé » donnent des résultats identiques, ici à deux chiffres significatifs près, parfois trois (sur les moyennes surfaciques de ρ et ρu). Il en est de même dans le cas de la linéarisation du modèle pour les moyennes de composantes de quantité de mouvement (ρu, ρv, ρw). De manière générale, quelle que soit la linéarisation entreprise, toutes les valeurs de gradients de fonctions ont le bon signe par rapport à la référence calculée par différences finies.

En comparant les grandeurs obtenues par ces différentes linéarisations entre elles, on constate que sur les moyennes surfaciques de ρu, ρv, ρw, les différentes linéarisations fournissent des valeurs de gradients presque égales (moins de 1,5 % d'écart relatif). En outre, les valeurs de gradients de fonction trouvées pour ces trois composantes sont en accord avec celles de la référence obtenue par différences finies sans être exactement égaux. Néanmoins, le fait de linéariser le modèle de turbulence donne une valeur sensiblement meilleure pour les moyennes de ρu et ρv, ce qui ne se généralisera pas, sur la moyenne de ρw.

Pour la moyenne de ρE, la linéarisation du modèle de turbulence améliore le résultat, avec un résultat encore meilleur pour la combinaison {linéarisation du modèle + approche de type « couche mince »}. Néanmoins, les valeurs trouvées suite aux diverses linéarisations sont sous-estimées par rapport à la référence calculée par différences finies.

En revanche, sur la moyenne de ρ, il y a peut-être une incohérence quant à la linéarisation du modèle associée à l'approche de type « couche mince ». En outre, quelle que soit la linéarisation, la valeur de gradient trouvée ne correspond pas à la valeur de référence attendue.

Cependant, l'ordre de grandeur des valeurs des gradients des moyennes de ρu, ρv et ρw est supérieur d'un voire deux ordres par rapport à celui des valeurs de gradients de moyennes de ρ et ρE. On calcule assez précisément les forts gradients de fonctions, alors que les valeurs de gradients faibles trouvées ne sont pas conformes à la référence obtenue par différences finies.

Les écarts déjà observés entre les différentes linéarisations et la référence obtenue par différences finies se répercutent sur les résultats des trois dernières fonctions (pression totale moyenne p_{i}, température statique moyenne T, pression statique moyenne p), fonctions qui sont issues des moyennes surfaciques de grandeurs du champ aérodynamique.

5.2.4.2 Calcul des sensibilités

Les champs des dérivées des composantes du champ conservatif $\boldsymbol{W}$ par rapport au paramètre de forme — ou sensibilités — ($\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$, $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$, $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$, $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$, $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$) sont représentés dans le plan de sortie. Ces grandeurs de champ sont évaluées aux centres des cellules. Le plan de sortie où les champs de dérivées sont extraits est dupliqué deux fois selon l'azimut, afin de rendre compte de la périodicité du résultat. La zone en blanc s'explique par le fait que la visualisation est faite aux centres des cellules pour le maillage initial, là où sont évaluées les variables d'état.

Sur les planches de sensibilités, les résultats obtenus avec ou sans approche de type « couche mince » sont également très proches voire identiques (à niveau de linéarisation du modèle de turbulence équivalent), quelle que soit la composante observée, mis à part sur la variable ρw à un endroit.

Pour la sensibilité de ρ (figures 5.12 à 5.16), la linéarisation du modèle de turbulence améliore sensiblement les résultats en pied (zone de $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ comprise entre 0,002 5 et 0,003 5). En outre, vers 50-60 % de hauteur de veine, la connexité du domaine de $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ compris entre $-0{,}001\,5$ et $-0{,}000\,5$ est mieux reproduite.

Pour la sensibilité de ρE (figures 5.17 à 5.21), la linéarisation du modèle de turbulence améliore très légèrement les résultats en tête, au voisinage de la paroi. Néanmoins, quelle que soit la linéarisation effectuée, les variations de $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ sont mal reproduites en tête et en pied. En outre, dans ce cas, les lignes iso-$\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ sont décalées en azimut (zone de $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ autour de 0,004).

Pour la sensibilité de ρu (figures 5.22 à 5.26), la linéarisation du modèle de turbulence améliore légèrement les résultats en tête (zone de $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ comprise entre 0,0021 et 0,0023 est connexe comme pour la référence obtenue par différences finies). En revanche, vers une hauteur de veine de 50-60 %, aucune linéarisation ne reproduit la répartition de $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$.

Pour la sensibilité de ρv (figures 5.27 à 5.31), vers la mi-hauteur de veine, les deux composantes connexes de zone de $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ comprise entre $-0{,}006$ et $-0{,}002$ sont mieux reproduites pour une linéarisation à « μ_{t} figé ».

Pour la sensibilité de ρw (figures 5.32 à 5.36), les différentes linéarisations donnent des résultats quasiment identiques, excepté peut-être à 30 % de hauteur de veine, au voisinage du raccord. Par rapport aux résultats de référence obtenus par différences finies, on peut signaler trois différences notables : en pied, à 30 % de hauteur de veine au voisinage du raccord et en tête.

5.2.5 Conclusion partielle

Les linéarisations du flux diffusif et du modèle de Michel *et al.* ont été validées pour la méthode de l'équation linéarisée pour ce Distributeur Basse Pression de turbine. Ces différentes linéarisations donnent des résultats conformes à la référence obtenue par différences finies : les

sensibilités d'écoulement dans le plan de sortie reproduisent globalement ce qui est attendu ; les valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques sont assez bien calculées, surtout celles de plus forte amplitude, et ont toujours le bon signe. L'approximation de type « couche mince » pour la linéarisation du flux diffusif donne des valeurs de gradients quasiment identiques à la linéarisation avec prise en compte des dérivées croisées (moins de 2 % d'erreur relative pour la plus grosse différence, moins de 0,5 % sinon). Cette tendance se retrouve également sur les courbes de sensibilités d'écoulement par rapport au paramètre de forme. Les valeurs de gradients qui sont de plus forte amplitude sont légèrement mieux calculées si le modèle de turbulence est linéarisé.

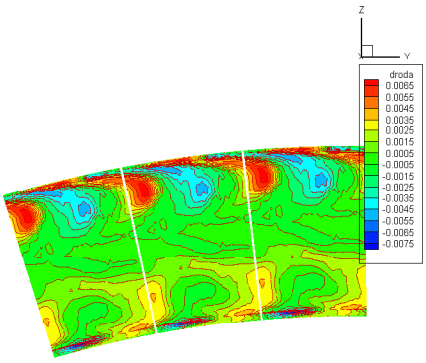

FIG. 5.12 – DBP Turbine. $\frac{d\rho}{d\alpha}$ dans le plan de sortie. DF. Modèle de Michel *et al.*

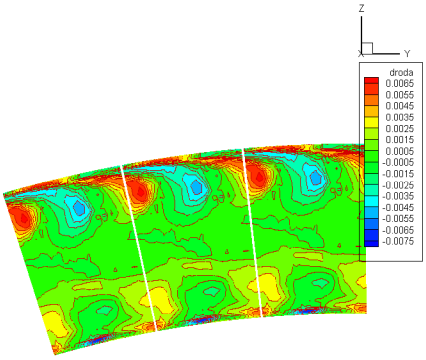

FIG. 5.13 – DBP Turbine. $\frac{d\rho}{d\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

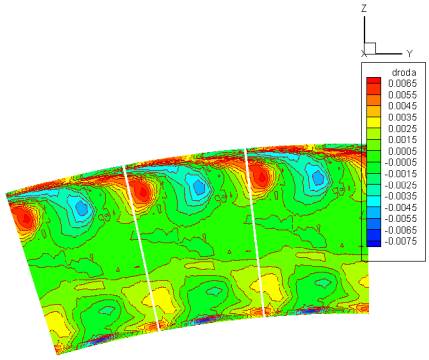

FIG. 5.14 – DBP Turbine. $\frac{d\rho}{d\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

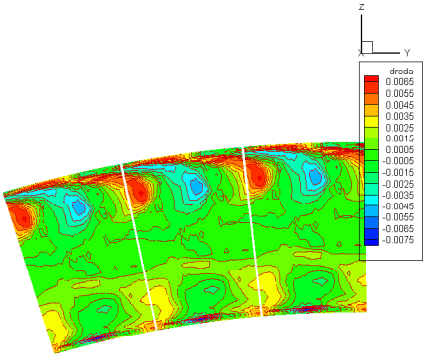

FIG. 5.15 – DBP Turbine. $\frac{d\rho}{d\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MODLIN. Modèle de Michel *et al.*

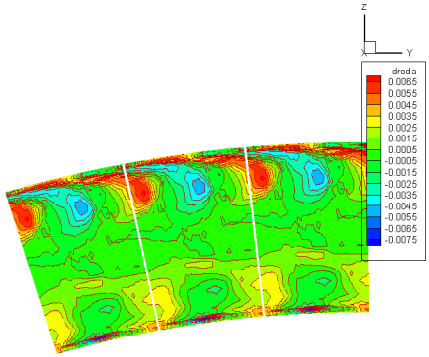

FIG. 5.16 – DBP Turbine. $\frac{d\rho}{d\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MODLIN. Modèle de Michel *et al.*

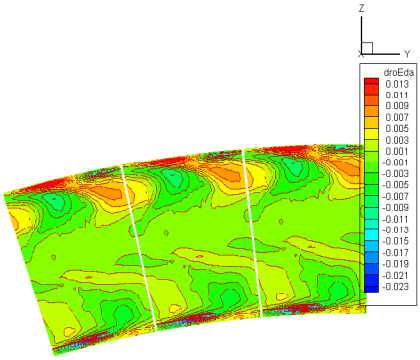

FIG. 5.17 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. DF. Modèle de Michel *et al.*

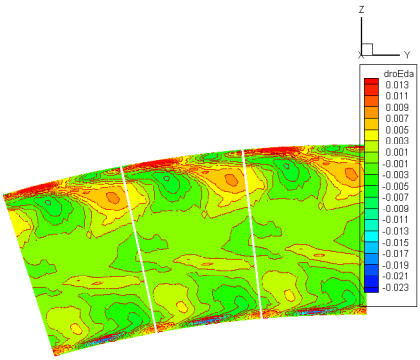

FIG. 5.18 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

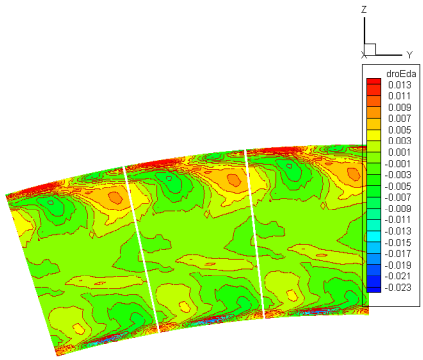

FIG. 5.19 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

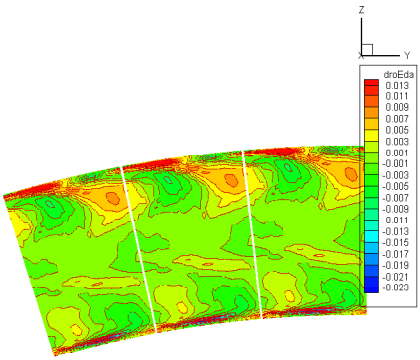

FIG. 5.20 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MODLIN. Modèle de Michel *et al.*

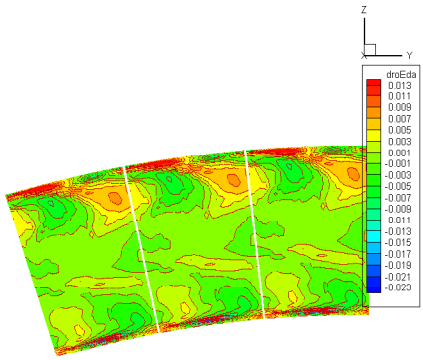

FIG. 5.21 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MODLIN. Modèle de Michel *et al.*

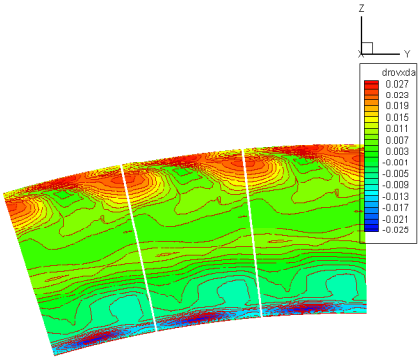

FIG. 5.22 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. DF. Modèle de Michel *et al.*

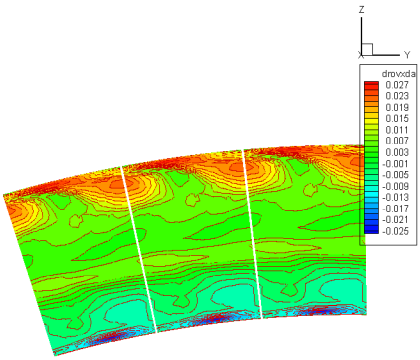

FIG. 5.23 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

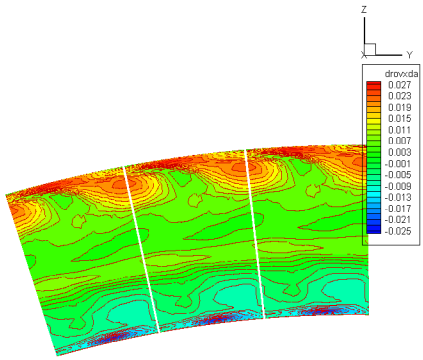

FIG. 5.24 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

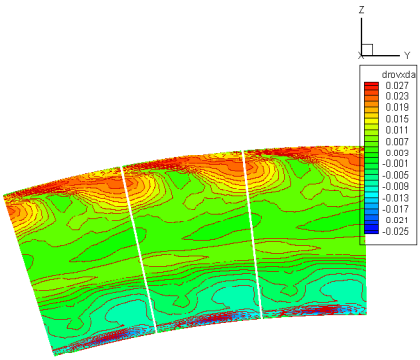

FIG. 5.25 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MODLIN. Modèle de Michel *et al.*

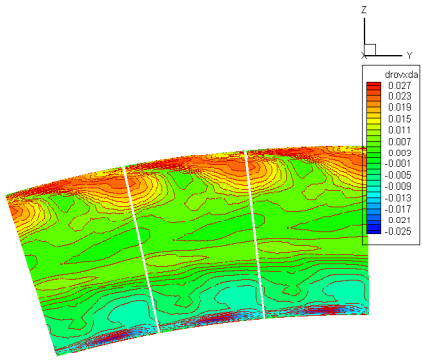

FIG. 5.26 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MODLIN. Modèle de Michel *et al.*

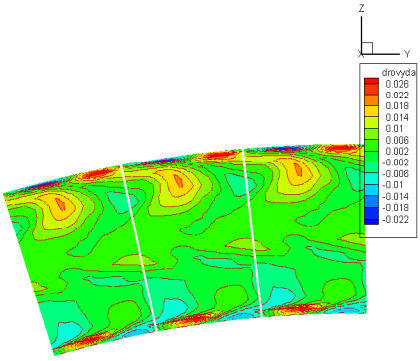

FIG. 5.27 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. DF. Modèle de Michel *et al.*

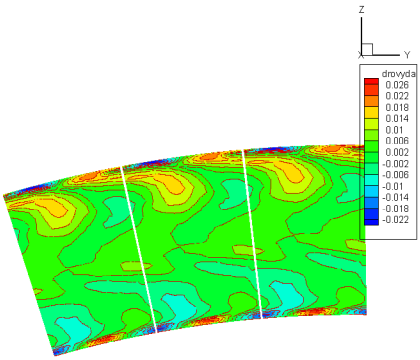

FIG. 5.28 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

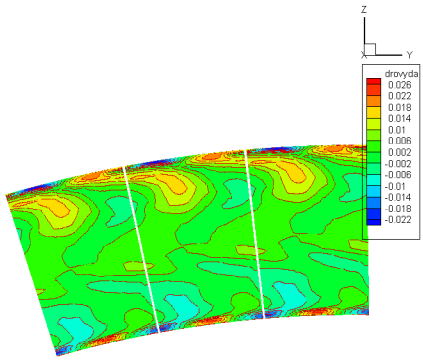

FIG. 5.29 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

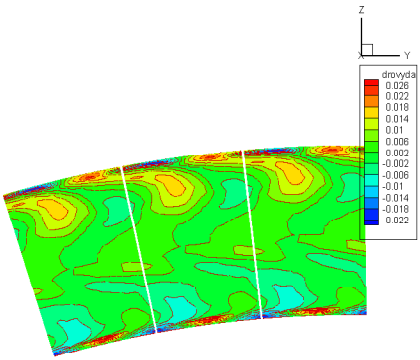

FIG. 5.30 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MODLIN. Modèle de Michel *et al.*

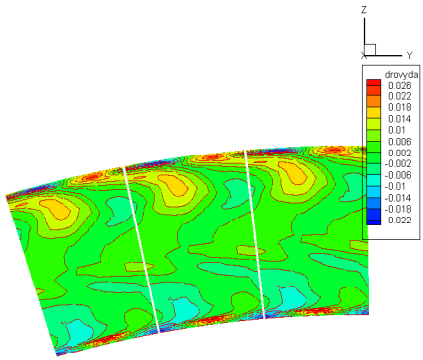

FIG. 5.31 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MODLIN. Modèle de Michel *et al.*

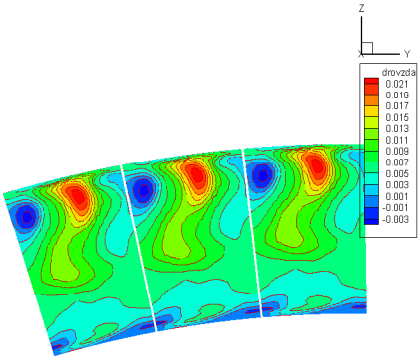

FIG. 5.32 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. DF. Modèle de Michel *et al.*

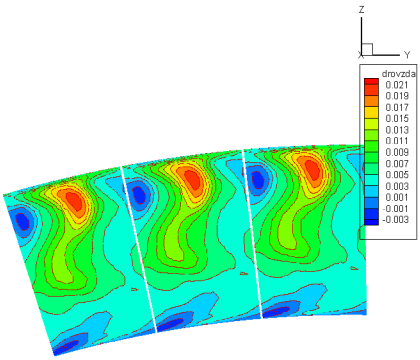

FIG. 5.33 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

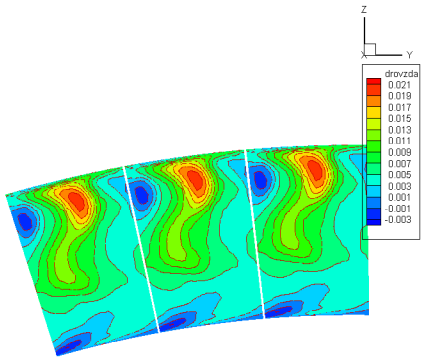

FIG. 5.34 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

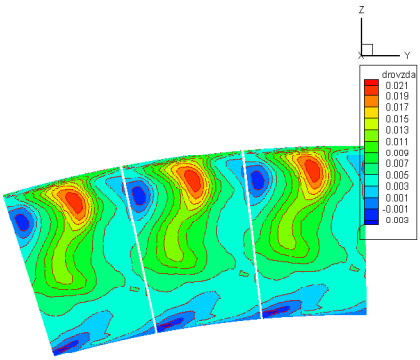

FIG. 5.35 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MODLIN. Modèle de Michel *et al.*

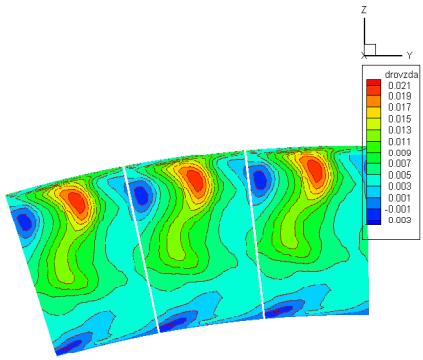

FIG. 5.36 – DBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MODLIN. Modèle de Michel *et al.*

5.3 Roue Basse Pression

5.3.1 Géométrie

Il s'agit d'une aube isolée de roue mobile d'une turbine basse pression, désignée par la suite sous le sigle RBP. On ne dispose pas de données expérimentales pour contrôler les résultats issus des simulations numériques.

Tout comme pour le Distributeur Basse Pression de la section précédente, la déformation considérée est un déplacement linéaire de l'axe d'empilage. Le paramètre de forme est l'angle que fait la ligne d'empilage avec la verticale. Celui-ci vaut 0,1° pour nos simulations. Sur les figures 5.1 et 5.2, la déformation est représentée pour un angle de +1°, pour des vues respectives au bord d'attaque et au bord de fuite.

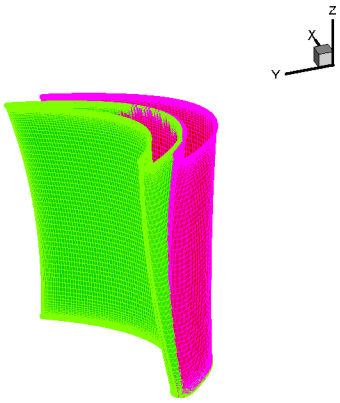

FIG. 5.37 – RBP Turbine. Déformation de l'aube de 1°. Vue au bord d'attaque. En magenta, l'aube de base, en vert l'aube déformée.

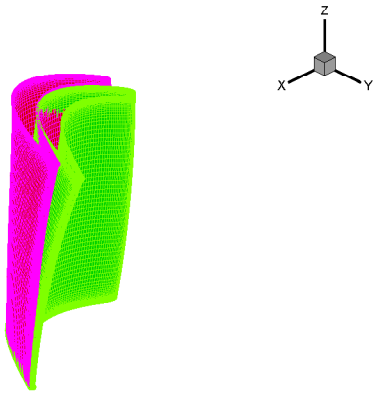

FIG. 5.38 – RBP Turbine. Déformation de l'aube de 1°. Vue au bord de fuite. En magenta, l'aube de base, en vert l'aube déformée.

5.3.2 Conditions aérodynamiques

Les conditions aérodynamiques utilisées sont :
- température d'arrêt $T_{i0} = 1\ 740$ K ;
- pression d'arrêt $p_{i0} = 1\ 500\ 000$ Pa ;
- parois adiabatiques.

5.3.3 Simulation numérique de l'écoulement stationnaire

Les conditions aux limites sont :
- condition d'injection subsonique à la frontière amont (l'écoulement est subsonique) ;
- pression statique imposée uniforme sur toute la hauteur de la frontière aval ;
- condition de paroi adiabatique avec adhérence à la paroi sur l'aube, le moyeu et le carter.

On utilise un maillage multibloc (cinq domaines) pour une topologie de maillage dite O4H comme on peut le voir dans une coupe en K sur la figure 5.3. Le bloc maillé en O est en rouge, autour de l'aube. Les raccords périodiques sont à points coïncidents.

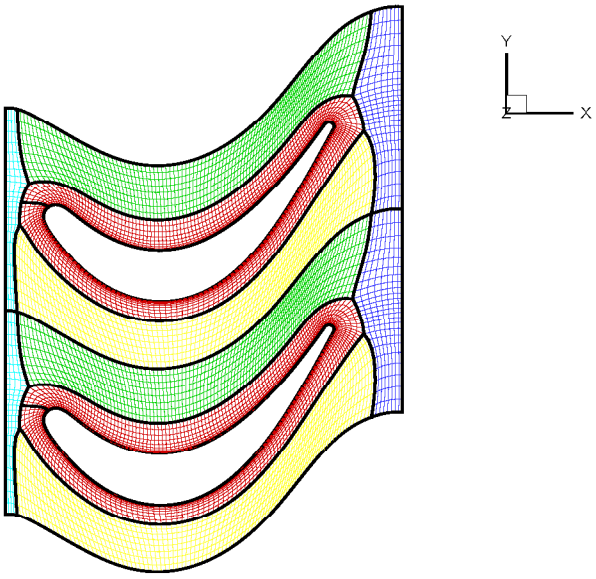

FIG. 5.39 – RBP Turbine. Vue du maillage à mi-hauteur de veine.

Tout comme pour le DBP Turbine, les champs présentés dans des plans de coupe sont situés à trois hauteurs de veine : 10 %, 50 %, et 90 %. Sur les coupes à mi-hauteur (figure 5.41) et en tête (figure 5.42), il apparaît des zones de survitesse à l'extrados. Sur les courbes de $1 - \frac{p}{p_{i0}}$ à la paroi (figure 5.43), la coupe à 10 % apparaît en rouge, celle à 50 % en vert et celle à 90 % en bleu. On observe une incidence fortement négative en tête.

On peut en outre regarder les profils radiaux dans les plans d'entrée et de sortie de différentes grandeurs. Les moyennes dans le plan d'entrée figurent en noir, alors que celles dans le plan de sortie figurent en rouge. Dans le plan de sortie, la pression statique p (ici adimensionnée par p_{i0}) est quasiment constante, ce qui est normal car on a imposé une condition de pression en sortie uniforme (figure 5.44). On vérifie ainsi qu'il ne subsiste quasiment pas de giration résiduelle. Il y a un déficit de pression d'arrêt $\frac{p_i}{p_{i0}}$ (figure 5.49) en tête (entre 75 % et 100 % de hauteur de veine), déficit qui devrait être récupéré en travail (représenté par l'évolution de la température d'arrêt T_i, figure 5.50), ce qui n'est pas le cas. Une chute de nombre de Mach absolu apparaît au-dessus de 75 % de hauteur de veine (figure 5.48) correspondant à un tourbillon tridimensionnel important. L'effet de ce tourbillon est observé sur les angles relatifs et absolus (figures 5.45 et 5.46).

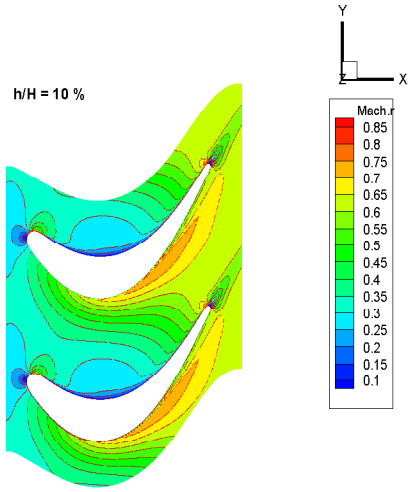

FIG. 5.40 – RBP Turbine. Lignes iso-nombre de Mach à 10 % de hauteur de veine. Modèle de Michel *et al.*

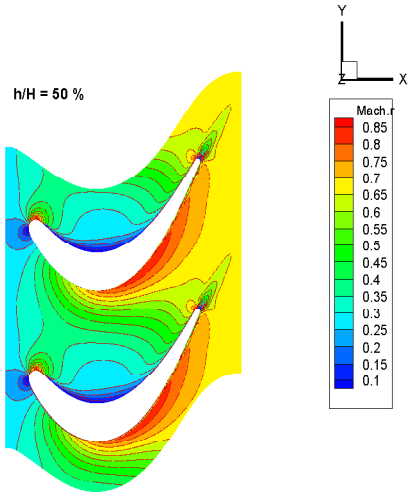

FIG. 5.41 – RBP Turbine. Lignes iso-nombre de Mach à 50 % de hauteur de veine. Modèle de Michel *et al.*

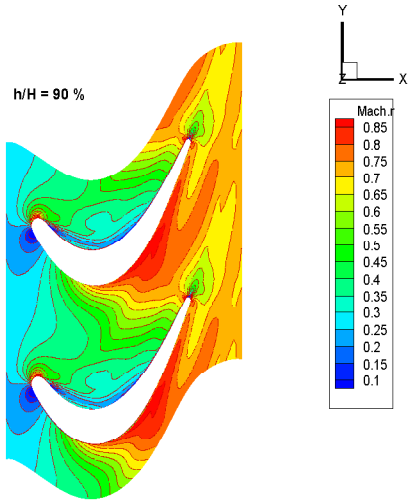

FIG. 5.42 – RBP Turbine. Lignes iso-nombre de Mach à 90 % de hauteur de veine. Modèle de Michel *et al.*

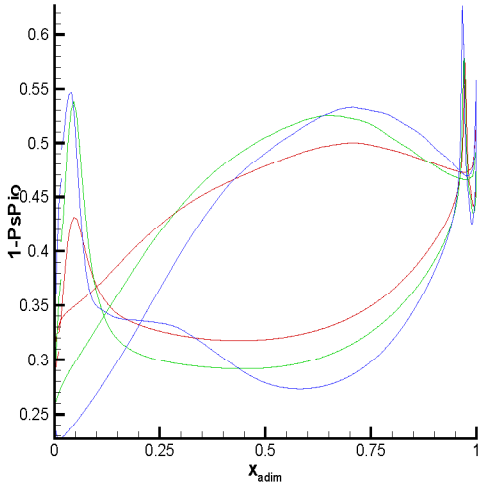

FIG. 5.43 – RBP Turbine. $1 - \frac{p_i}{p_{i0}}$ à la paroi à 10 % (en bleu), 50 % (en vert) et 90 % (en rouge) de hauteur de veine. Modèle de Michel *et al.*

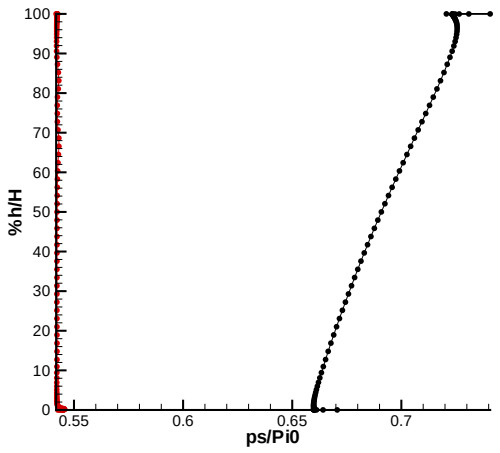

FIG. 5.44 – RBP Turbine. Distribution de pression statique en sortie. Modèle de Michel *et al.*

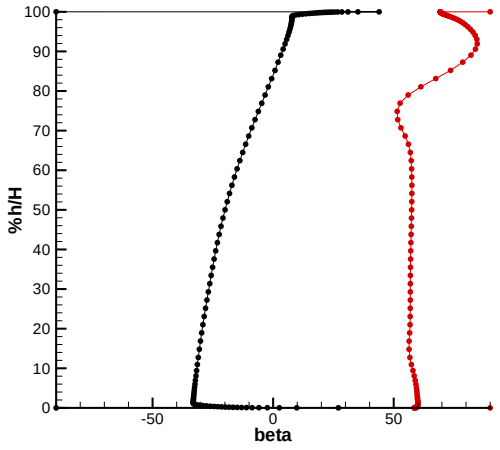

FIG. 5.45 – RBP Turbine. Distribution d'angle relatif en sortie. Modèle de Michel *et al.*

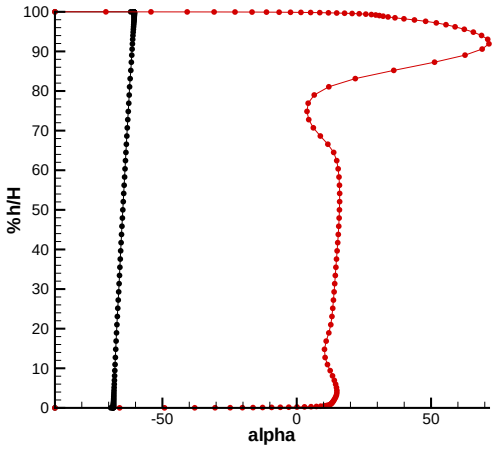

FIG. 5.46 – RBP Turbine. Distribution d'angle absolu en sortie. Modèle de Michel *et al.*

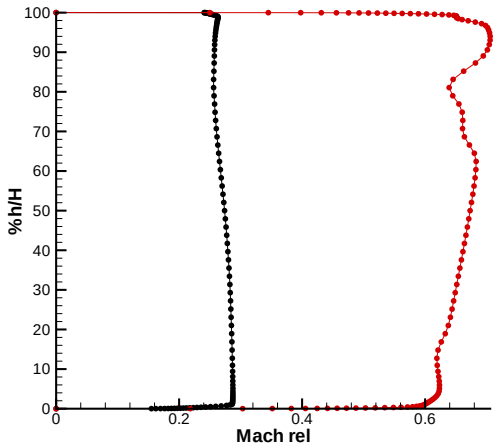

FIG. 5.47 – RBP Turbine. Distribution de nombre de Mach relatif en sortie. Modèle de Michel *et al.*

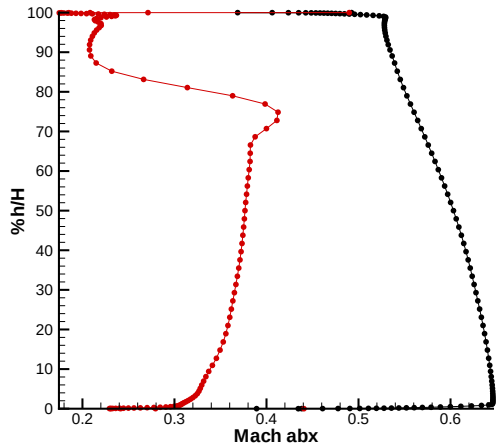

FIG. 5.48 – RBP Turbine. Distribution de nombre de Mach absolu en sortie. Modèle de Michel *et al.*

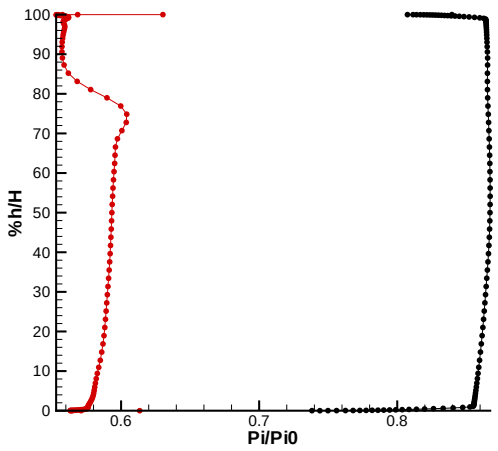

FIG. 5.49 – RBP Turbine. Distribution de pression d'arrêt en sortie. Modèle de Michel *et al.*

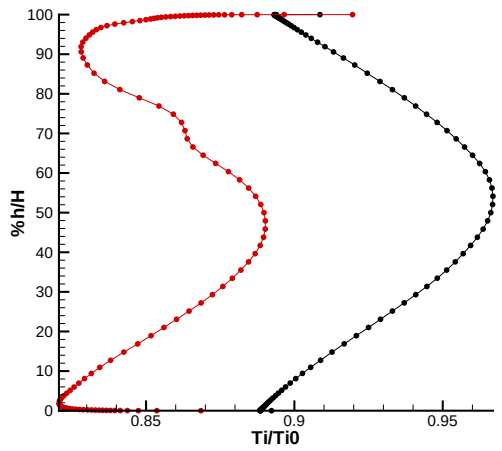

FIG. 5.50 – RBP Turbine. Distribution de température d'arrêt en sortie. Modèle de Michel *et al.*

5.3.4 Calcul des sensibilités

5.3.4.1 Gradients de fonctions aérodynamiques

Les fonctions étudiées sont les mêmes que pour le Distributeur Basse Pression, à savoir, des moyennes surfaciques des composantes du champ aérodynamique et des fonctions de ces moyennes (pressions statique et totale, température statique), comme présenté dans la sous-section 2.9.2. Les gradients des fonctions aérodynamiques étudiées sont donnés dans le tableau 5.2 pour la méthode de l'équation linéarisée. Seuls les résultats issus de linéarisations à « μ_t figé » sont présentés ici.

	DF	CM + MUTFIG	FVC + MUTFIG
$\frac{d\rho}{d\alpha}$	$2{,}62.10^{-4}$	$3{,}21.10^{-4}$	$2{,}84.10^{-4}$
$\frac{d\rho u}{d\alpha}$	$-3{,}27.10^{-4}$	$-6{,}80.10^{-4}$	$-7{,}93.10^{-4}$
$\frac{d\rho v}{d\alpha}$	$-1{,}95.10^{-3}$	$-2{,}73.10^{-3}$	$-2{,}73.10^{-3}$
$\frac{d\rho w}{d\alpha}$	$-1{,}69.10^{-2}$	$-1{,}80.10^{-2}$	$-1{,}83.10^{-2}$
$\frac{d\rho E}{d\alpha}$	$5{,}51.10^{-4}$	$4{,}68.10^{-4}$	$5{,}52.10^{-4}$
$\frac{dp}{d\alpha}$	$2{,}01.10^{-4}$	$3{,}06.10^{-4}$	$3{,}32.10^{-4}$
$\frac{dT}{d\alpha}$	$5{,}69.10^{-5}$	$1{,}87.10^{-4}$	$2{,}89.10^{-4}$
$\frac{dp_i}{d\alpha}$	$-6{,}29.10^{-6}$	$-4{,}61.10^{-4}$	$-4{,}49.10^{-4}$

TAB. 5.2 – RBP Turbine. Dérivées de fonctions aérodynamiques par rapport au paramètre de forme. Méthode de l'équation linéarisée. Modèle de Michel *et al.*

Comme pour le Distributeur Basse Pression (tableau 5.1), toutes les valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques ont le bon signe par rapport à la référence calculée par différences finies. C'est le seul cas testé qui présente des différences marquées entre des linéarisations avec ou sans approximation de type « couche mince » à « μ_t figé ». Néanmoins, sur les grandeurs à fort gradient (moyennes de ρv notamment et ρw), on obtient les mêmes valeurs pour les deux linéarisations.

Les gradients de moyennes surfaciques de variables ρ et ρE sont assez précisément calculés par les deux linéarisations (avec ou sans approximation de type « couche mince ») à « μ_t figé » (15-20 % avec approximation de type « couche mince », moins de 9 % sans approximation de type « couche mince »). Par contre, pour la moyenne surfacique de ρu, il y a un écart supérieur de 100 % d'erreur pour les linéarisations du flux diffusif. Toutefois, sur les moyennes surfaciques à fort gradient (moyennes de ρv notamment et ρw), les résultats obtenus par les différentes linéarisations sont meilleurs (40 % sur la moyenne de ρv, mais surtout moins de 9 % d'erreur sur celle de ρw qui est la valeur de gradient de valeur absolue la plus grande).

Comme il a été dit pour le cas du Distributeur Basse Pression, on calcule bien les forts gradients de fonctions (ici, celui de la moyenne surfacique de ρw), alors que les gradients faibles sont moins bien calculés. En outre, comme précédemment, les trois dernières fonctions (moyennes de pressions totale et statique, et température statique) sont des fonctions des cinq moyennes précédentes. À nouveau, les écarts observés entre les différentes linéarisations et la référence obtenue par différences finies se répercutent sur les résultats de ces fonctions.

5.3.4.2 Calcul des sensibilités

Les champs des dérivées des composantes du champ conservatif $\boldsymbol{W}$ par rapport au paramètre de forme — ou sensibilités — ($\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$, $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$, $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$, $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$, $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$) sont représentés ici dans le plan de sortie. Ces grandeurs de champ sont évaluées aux centres des cellules. Ces champs de dérivées dans un plan de sortie sont représentés dupliqués deux fois selon l'azimut, afin de rendre compte de la périodicité du résultat.

En règle générale, les résultats obtenus par les différentes linéarisations du flux diffusif à « μ_t figé » ne sont pas très bien reproduites entre 70 et 100 % de hauteur de veine. Aux endroits où les sensibilités sont les plus fortes, les deux linéarisations amplifient encore plus les différences.

Pour la sensibilité de ρ (figures 5.51, 5.53 et 5.55), aucune des deux linéarisations à « μ_t figé » ne reproduit la connexité de la zone inférieure à -0,001 ; la linéarisation avec approche de type « couche mince » donne une tendance légèrement meilleure que la linéarisation de base. Pour la sensibilité de ρE (figures 5.52, 5.54 et 5.56), la zone à mi-hauteur comprise entre -0,002 5 et 0,002 5 n'est pas bien reproduite par les deux linéarisations, celle à « μ_t figé » donnant alors une tendance légèrement meilleure. Pour la sensibilité de ρu (figures 5.57, 5.59 et 5.61), le domaine compris entre -0,005 et 0,005 (en vert) n'est pas bien reproduit par les deux linéarisations. Pour la sensibilité de ρw (figures 5.63, 5.64 et 5.65), le pic de sensibilité qui apparaît en pied n'apparaît pas dans les deux linéarisations. La ligne iso-$\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ à -0,017 5 est mal positionnée pour les deux linéarisations.

Les deux linéarisations à « μ_t figé » donnent néanmoins une bonne tendance de variations de champ conservatif. L'apport de la linéarisation du modèle de turbulence aurait peut-être amélioré les résultats.

5.3.5 Conclusion partielle

Les linéarisations du flux diffusif ont été validées ici pour la méthode de l'équation linéarisée pour cette Roue Basse Pression de turbine. Les commentaires de la conclusion partielle pour le Distributeur Basse Pression peuvent être en grande partie repris ici, concernant la linéarisation du flux diffusif à « μ_t figé ». Ces différentes linéarisations donnent aussi des résultats conformes à la référence obtenue par différences finies : les sensibilités d'écoulement dans le plan de sortie reproduisent globalement ce qui est attendu, surtout dans la partie basse de la veine ; les valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques sont assez bien calculées, surtout celle de plus forte amplitude (moins de 9 % d'erreur), et ont toujours le bon signe. L'approximation de type « couche mince » pour la linéarisation du flux diffusif donne des valeurs de gradients du même ordre de grandeur à la linéarisation avec prise en compte des dérivées croisées (moins de 17 % d'erreur relative pour les plus grosses différences, jusqu'à moins de 2 % dans le cas le plus favorable). Cette tendance se retrouve également sur les courbes de sensibilités d'écoulement par rapport au paramètre de forme.

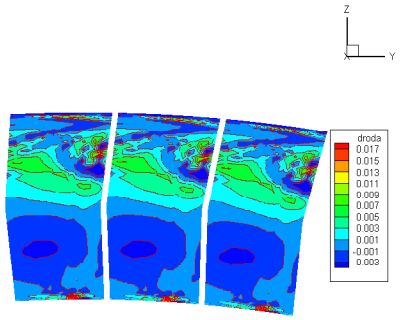

FIG. 5.51 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. DF. Modèle de Michel *et al.*

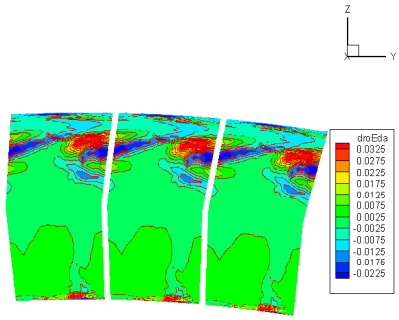

FIG. 5.52 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. DF. Modèle de Michel *et al.*

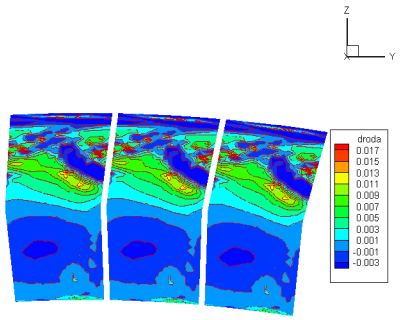

FIG. 5.53 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

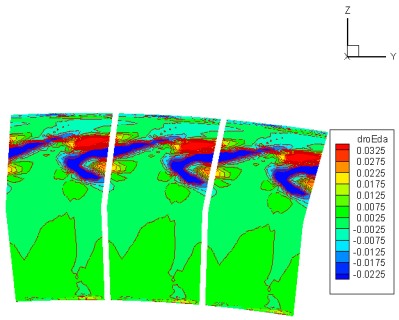

FIG. 5.54 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

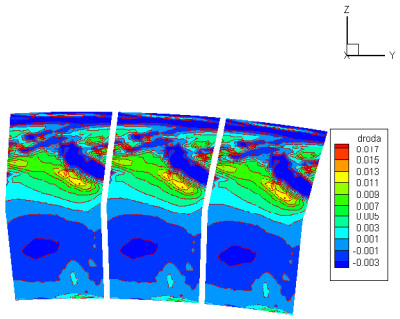

FIG. 5.55 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

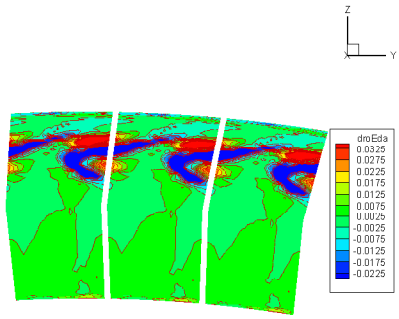

FIG. 5.56 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho E}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

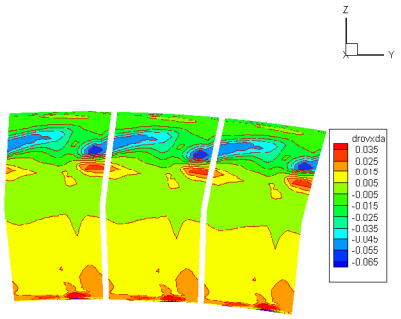

FIG. 5.57 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. DF. Modèle de Michel *et al.*

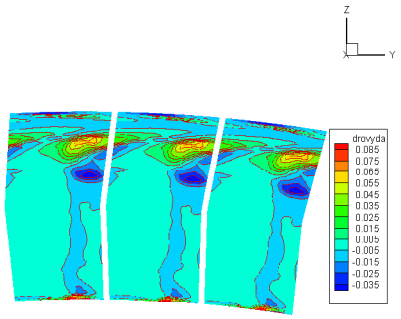

FIG. 5.58 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. DF. Modèle de Michel *et al.*

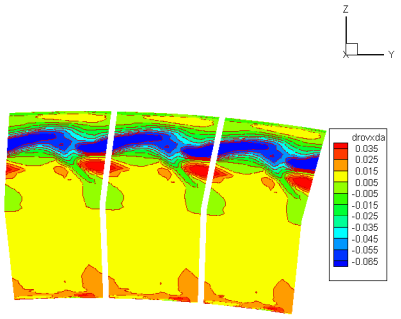

FIG. 5.59 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

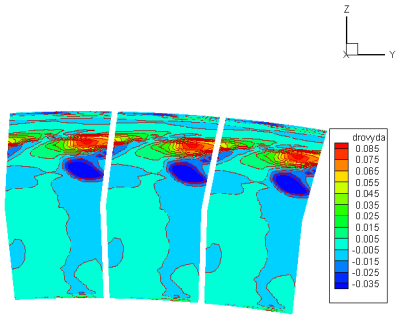

FIG. 5.60 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

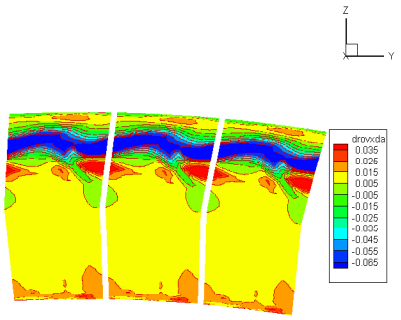

FIG. 5.61 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

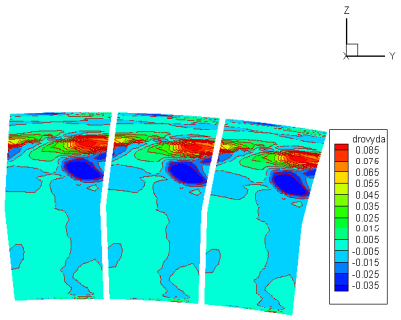

FIG. 5.62 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho v}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

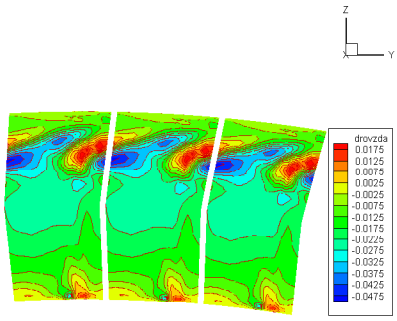

FIG. 5.63 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. DF. Modèle de Michel *et al.*

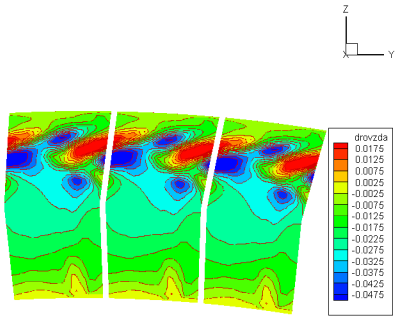

FIG. 5.64 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. CM + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

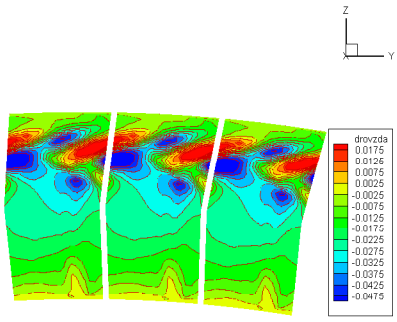

FIG. 5.65 – RBP Turbine. $\frac{\mathrm{d}\rho w}{\mathrm{d}\alpha}$ dans le plan de sortie. FVC + MUTFIG. Modèle de Michel *et al.*

5.4 Conclusion

Un certain nombre de conclusions énoncées à la fin du chapitre précédent peuvent être reproduites ici. Le fait de linéariser le flux diffusif avec ou sans approche de type « couche mince » n'induit que peu de différences (sur le calcul de gradients de fonctions ou sur les sensibilités d'écoulement). L'approche de type « couche mince » est donc suffisante pour la linéarisation du flux diffusif.

La linéarisation à « μ_t figé » donne des résultats convenables (valeurs de gradients et sensibilités), proches de la référence obtenue par différences finies. Certes, elle manque parfois de précision mais elle offre une bonne tendance pour le calcul de la direction de gradient à suivre pour l'algorithme de descente pour les fonctions aérodynamiques de plus fort gradient seulement.

La linéarisation du modèle de Michel *et al.* utilisée dans ce chapitre est celle qui donne les meilleurs résultats pour les cas d'épreuves du chapitre précédent : tous les termes qui apparaissent dans l'expression de ce modèle de turbulence sont différentiés de manière exacte (en particulier la vorticité et la longueur de mélange). Elle améliore la précision des valeurs de gradients de fonctions ainsi que les sensibilités d'écoulement mais de manière moins significative que pour les cas du chapitre précédent.

Dans la section 2.8, on a vu que la précision de la méthode (adjointe ou linéarisée) dépendait de la *phase explicite*. Les différences qui demeurent par rapport à la linéarisation du modèle de Michel *et al.* peuvent trouver leur explication dans plusieurs causes :

- un traitement générique plus précis pour les conditions aux limites autres que de paroi pourrait être adopté lors de la linéarisation du flux diffusif et de modèles de turbulence ;
- le problème du choix du pas optimal pour le paramètre de forme reste posé (pour le calcul de la référence obtenue par différences finies ou le calcul du terme de sensibilité par rapport au maillage $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha}$) ;
- l'hypothèse de nullité du bilan de flux discrétisé pour les équations de Navier-Stokes $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X})$ n'est en pratique pas rigoureusement vérifiée (difficulté pour obtenir une solution d'un calcul d'analyse bien convergée).

Conclusion générale

Parmi les méthodes d'optimisation locale de formes, les deux méthodes discrètes de gradient (méthode de l'équation linéarisée discrète et méthode adjointe discrète) ont été choisies pour calculer les gradients de fonctions aérodynamiques. Pour ces deux méthodes, la précision des résultats est conditionnée par celle du calcul de la matrice jacobienne du bilan de flux des équations de Navier-Stokes par rapport au champ aérodynamique, matrice évaluée par linéarisation des flux convectifs, diffusifs et le cas échéant du terme source. Différents niveaux de précision sont mentionnés dans la littérature : *figeage* ou linéarisation du modèle de turbulence notamment. L'objectif de cette thèse était l'étude des linéarisations du flux diffusif et de modèles de turbulence pour l'optimisation de formes aérodynamiques en turbomachine.

Dans le cadre de cette thèse, deux modèles de turbulence ont été considérés : le modèle algébrique de Michel *et al.* basé sur un schéma de longueur de mélange et le modèle à deux équations de transport k-ε de Launder-Sharma.

Le détail des calculs menant à la linéarisation du flux diffusif avec ou sans terme de dérivation croisée, ainsi que la linéarisation des deux modèles de turbulence utilisés, ont été décrits. En particulier, la dérivation de la vorticité et de la longueur de mélange pour la linéarisation du modèle de Michel *et al.* et la dérivation des termes sources de production, dissipation et de correction bas Reynolds pour la linéarisation du modèle k-ε de Launder-Sharma ont été explicitées. L'ensemble de ces développements a été implémenté dans le code de simulation numérique *elsA* développé à l'ONERA. Ces développements ont été validés pour des configurations bidimensionnelles et tridimensionnelles, d'aérodynamique externe ou d'écoulements confinés, et aussi sur des configurations industrielles d'aube isolée de turbomachine. La linéarisation du flux diffusif avec ou sans terme de dérivation croisée pour les méthodes linéarisée discrète et adjointe discrète, de la linéarisation du modèle de Michel *et al.* pour la méthode de l'équation linéarisée discrète pour des géométries fixes (référence et industrielle) et pour la méthode de l'équation adjointe pour des géométries fixes de référence sont disponibles.

L'influence du niveau d'approximations de la linéarisation du flux diffusif et de modèles de turbulence sur la précision du calcul de gradients est étudiée. Des résultats sur les gradients de fonctions aérodynamiques et des sensibilités de l'écoulement par rapport à la forme sont présentés sur les différents cas d'épreuve. Ce travail a permis de dégager plusieurs réponses quant à l'obtention de gradients de fonctions aérodynamiques précis. La linéarisation du flux diffusif avec prise en compte des termes de dérivation croisée n'est pas nécessaire pour obtenir des valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques plus précis. Une dérivation avec approche de type « couche mince » est donc suffisante pour la linéarisation du flux diffusif. En revanche, il faut linéariser le modèle de turbulence de manière précise pour obtenir des valeurs de gradients de fonctions plus précis.

Certains points techniques restent à améliorer après ce travail de thèse. La validation de la

linéarisation du modèle de Michel *et al.* pour une roue mobile de turbomachine, la linéarisation du modèle de Michel *et al.* pour la méthode adjointe pour des géométries de turbomachine et celle du modèle k-ε de Launder-Sharma sont à achever.

Par ailleurs, l'effet de la linéarisation de modèles de turbulence sur l'efficacité de la chaîne d'optimisation complète peut être testé. L'optimisation d'une aube avec une direction de descente plus précise est possible, ce qui peut réduire le nombre d'itérations de la boucle d'optimisation nécessaire pour atteindre un optimum local.

Le calcul de gradients de fonctions aérodynamiques avait été envisagé au début de cette thèse comme un composant d'une chaîne d'optimisation locale. L'optimisation aérodynamique globale sur un domaine de paramètres est en forte expansion, de sorte que l'on peut envisager d'utiliser des gradients de fonctions aérodynamiques comme entrée complémentaire d'une méthode de régression de fonction intervenant dans un algorithme d'optimisation globale.

Cette thèse permet le calcul de gradients de fonctions pour l'optimisation aérodynamique. La perspective de certaines équipes d'ingénieurs et chercheurs est de pousser plus loin l'optimisation en l'étendant à des problèmes multidisciplinaires : aéro-élasticité, aéro-thermique, aéro-thermo-mécanique, aéro-acoustique... Dans ce contexte, le calcul de gradients aérodynamiques est un composant d'algorithmes itératifs pour le calcul de gradients multidisciplinaires.

Les premières géométries d'aubes isolées de turbomachine donnant des résultats intéressants, l'extension du calcul de gradients à un voire plusieurs étages de turbomachine peut être envisagée. Enfin, l'optimisation sur toute une ligne de fonctionnement et non pas juste pour un point de fonctionnement de la turbomachine peut être envisagée avec une chaîne d'optimisation complète.

Bibliographie

[1] W. K. Anderson & D. L. Bonhaus, Airfoil Design on Unstructured Grids for Turbulent Flows, *AIAA Journal* 1999, **37**, 185–191.

[2] W. K. Anderson & D. L. Bonhaus, Aerodynamic Design on Unstructured Grids for Turbulent Flows, *NASA* TM 112867, 1997.

[3] S. Aubert, J. Tournier, M. Rochette, J. Blanche, M. N' Diaye, S. Melen, M. Till & P. Ferrand, Optimisation of a gas mixer using a new parametric solver, ECCOMAS CFD conference, 2001.

[4] B. S. Baldwin & H. Lomax, Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows, *AIAA Paper* 78-257, 1978.

[5] O. Baysal & M. E. Eleshaky, Aerodynamic sensitivity analysis methods for the compressible Euler equations, *Journal of Fluids Engineering* 1991, **113**, 681–688.

[6] R. M. Beam & R. F. Warming, An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form, *Journal of Computational Physics* 1976, **22**, 87–110.

[7] S. ben Khelil, P. Guillen, M. Lazareff & R. G. Lacau, Numerical simulation of roll induced moment of cruciform tactical missiles, *Aerospace Science and Technology* 2001, **5**, 109–124.

[8] W. R. Briley & H. McDonald, Solution of the multidimensional compressible Navier-Stokes Equations by a generalized implicit method, *Journal of Computational Physics* 1977, **24**, 372–397.

[9] L. Cambier & M. Gazaix, ElsA : an efficient object-oriented solution to CFD complexity, *AIAA Paper* 2002-0108, 2002.

[10] L. Castillon, G. Billonnet & S. Plot, New abilities of the multiapplication *elsA* software in the field of turbomachinery flow computation, ASME, 2002.

[11] R. Collercandy, An improved approach for the computation of transonic/supersonic flows with applications to aerospace configurations, *AIAA Paper* 92-2613, 1992.

[12] M. Cormery, *De l'Optimisation Aérodynamique vers l'Optimisation Multidisciplinaire dans un Contexte Industriel*, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2000.

[13] J. Cousteix, C. Quémard & R. Michel, Application d'un schéma amélioré de longueur de mélange à l'étude des couches limites turbulentes tridimensionnelles, Rapport technique TP 985, AGARD, 1971.

[14] D. Destarac, Far-field/Near-field Drag Balance and Applications of Drag Extraction in CFD, in *VKI for Fluid Dynamics Lecture Series 2003* (Hampton, VA, 2003).

[15] D. Destarac & J. Reneaux, Numerical optimization applied to transport aircraft aerodynamics, *La Recherche Aérospatiale* 1993, **2**, 39–55.

[16] F. Drullion, *Définition et étude de systèmes linéaires pour la simulation d'écoulements et l'optimisation de formes aérodynamiques par méthode de gradient*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2004.

[17] A. Dugeai, Méthode de mouvement de maillage pour l'aéroélasticité, Rapport technique RTS 101/3064, ONERA, 1998.

[18] J. Délery, C. Copy & J. Reisz, Analyse au vélocimètre laser bidirectionnel d'une interaction choc/couche limite turbulente avec décollement étendu, Rapport technique 37/7078 AY 014, ONERA, 1980.

[19] J.-A. Désidéri, Hierarchical Optimum-Shape Algorithms Using Embedded Bézier Parametrizations, in Y. Kuznetsov, P. Neittanmakie & O. Pironneau, éditeurs, *Numerical Methods For Scientific Computing Variational Problems and Applications*, CIMNE Barcelona, 2003.

[20] J.-A. Désidéri & A. Dervieux, Hierarchical Optimization for Shape Optimization in Aerodynamics. I : Multilevel parametric, in *VKI Lecture Series* (2006).

[21] J.-A. Désidéri & A. Janka, Multilevel Shape Parametrization for Aerodynamic Optimization - Application to Drag and Noise Reduction of Transonic/Supersonic Business Jet, ECCOMAS, 2004.

[22] M. B. Giles, M. C. Duta & J. D. Muller, Adjoint Code Developments Using the Exact Discrete Approach, *AIAA Paper* 2001-2596, 2001.

[23] P. Guillaume & M. Masmoudi, Computation of High Order Derivatives in Optimal Shape Design, *Numerische Mathematik* 1994, **67**, 231–250.

[24] R. T. Haftka, Sensitivity calculations for iteratively solved problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1985, **21**, 1535–1546.

[25] A. Harten & J. M. Hyman, Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics* 1983, **50**, 235–269.

[26] R. M. Hicks, E. M. Murman & G. N. Vanderplaats, An assesment of airfoil design by numerical optimization, *NASA* TM X-3092, 1974.

[27] G. J.-W. Hou, V. Maroju, A. C. Taylor III, V. M. Korivi & P. A. Newman, Transonic Turbulent Airfoil Design Optimization With Automatic Differentiation in Incremental Iterative Form, *AIAA Paper* 1995-1692, 1995.

[28] A. Jameson, Aerodynamic design via control theory, *Journal of Scientific Computing* 1988, **3**, 233–360.

[29] A. Jameson, The Present Status, Challenges and Future Developments in Computational Fluid Dynamics, in *Proceedings of 77th AGARD Fluid Dynamics Panel Symposium*, Séville, 1995.

[30] A. Jameson, N. A. Pierce & L. Martinelli, Optimum Aerodynamic Design using the Navier-Stokes Equations, *Theoritical and Computational Fluid Dynamics* 1998, **10**, 213–237.

[31] W. P. Jones & B. E. Launder, The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 1972, **15**, 301–314.

[32] C. S. Kim, C. Kim & O. H. Rho, Sensitivity Analysis for the Navier-Stokes Equations with Two-Equations Turbulence Models, *AIAA Journal* 2001, **39**, 838–845.

[33] C. S. Kim, C. Kim & O.-H. Rho, Effects of Constant Turbulent Eddy Viscosity Assumption on Gradient-Based Design Optimization, *AIAA Paper* 2002-0262, 2002.

[34] H.-J. Kim, C. Kim, O.-H. Rho. & K. D. Lee, Aerodynamic Sensitivity Analysis for Navier-Stokes Equations, *AIAA Paper* 99-0402, 1999.

[35] J. C. Kok, Resolving the Dependance on Freestream Values for the k-ω Turbulence Model, *AIAA Journal* 2000, **38**, 1292–1295.

[36] G. Kuruvila, R. P. Narducci & S. Agrawal, Development and Application of TLNS3D-Adjoint : A Practical Tool for Aerodynamic Shape Optimization, *AIAA Paper* 2001-2400, 2001.

[37] B. E. Launder & B. I. Sharma, Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc, *Letters in Heat and Mass Transfer* 1974, **1**, 131–138.

[38] A. le Moigne & N. Qin, A Discrete Adjoint Method for Aerodynamic Sensitivities for Navier-Stokes Flows, Proceedings of CEAS Research Conference Cambridge, 2002.

[39] E. Lund, H. Moller & L. A. Jakobsen, Shape Optimization of Fluid-Structure Interaction Problems Using Two-Equation Turbulence Models, *AIAA Paper* 2002-1478, 2002.

[40] J. N. Lyness, Numerical Algorithms based on the Theory of Complex Variables, in *Proceedings of ACM 22nd National Conference*, 1967 p. 124–134.

[41] J. N. Lyness & C. B. Moler, Numerical Differentiation of Analytic Functions, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1967, **4**, 202–210.

[42] J. Mayeur, *Extension et optimisation de schémas implicites pour la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires*, Rapport de stage de DEA, ISITV, 2001.

[43] M. Meaux, M. Cormery & G. Voizard, Viscous aerodynamic shape optimization based on the discrete adjoint state for 3D industrial configurations, ECCOMAS, 2004.

[44] F. R. Menter, Zonal Two Equation k-ω Turbulence Models for Aerodynamic Flows, *AIAA Paper* 93-2906, 1993.

[45] F. R. Menter, Improved Two-Equation k-ω Turbulence Models for Aerodynamic Flows, Rapport technique, NASA, TM-103975, 1992.

[46] M. Michel, C. Quémard & R. Durant, Application d'un schéma de longueur de mélange à l'étude des couches limites turbulentes d'équilibre, Rapport technique 154, ONERA, 1969, Note technique.

[47] R. Michel, Méthode de calcul de la couche limite turbulente tridimensionnelle jusqu'à la séparation. Application à un cas simple de turbomachines, Rapport technique TP 1111, AGARD, 1972.

[48] B. Mohammadi, Optimal Shape Design, Reverse Mode of Automatic Differentiation and Turbulence, *AIAA Paper* 97-0099, 1997.

[49] D. Monasse, *Mathématiques. Cours complet. Prépa MP & MP** (Vuibert, 1998).

[50] N. Nemec & D. W. Zingg, Towards Efficient Aerodynamic Shape Optimization Based on the Navier-Stokes Equations, *AIAA Paper* 2001-2532, 2001.

[51] J. C. Newman, W. K. Anderson & D. L. Whitfield, Multidisciplinary Sensitivity Derivatives Using Complex Variables, *MSSU-COE-ERC-98-08* 1998.

[52] E. J. Nielsen & W. K. Anderson, Aerodynamic Design Optimization on Unstructured Meshes Using the Navier-Stokes Equations, *AIAA Journal* 1999, **37**, 1411–1419.

[53] E. J. Nielsen & W. K. Anderson, Recent Improvements in Aerodynamic Design Optimization on Unstructured Meshes, *AIAA Journal* 2002, **40**, 1155–1163.

[54] ONERA, *Manuel Théorique* elsA, 2002, (Spécification Technique des Besoins).

[55] V. C. Patel, W. Rodi & G. Scheuerer, Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows : A Review, *AIAA Journal* 1984, **23**, 1308–1318.

[56] J. Peter, S. Burguburu & M. Marcelet, Introduction à l'optimisation de forme en aérodynamique et quelques exemples d'application, *TP ONERA* À paraître.

[57] J. Peter & F. Drullion, Large stencil viscous flux linearization for the simulation of 3D compressible turbulent flows with backward-Euler schemes, *Computer and Fluids* À paraître.

[58] J. Peter, F. Drullion & C.-T. Pham, Contribution to discrete implicit gradient and discrete adjoint method for aerodynamic shape optimization, ECCOMAS, 2004.

[59] J. Peter, C.-T. Pham & F. Drullion, Recent CFD Activities at ONERA : Implicit Stages for Complex Flow Simulations and Gradient Computation for Shape Optimization, *CFD Journal* À paraître.

[60] C.-T. Pham, *Calcul en variables complexes de la sensibilité des équations d'Euler*, Rapport de stage de DEA, École Centrale de Lyon, 2002.

[61] S. Pierret & R. A. Van Den Braembussche, Turbomachinery Blade Design Using a Navier-Stokes Solver and Artificial Neural Networks, *Journal of Turbomachinery* 1999, **121**, 326–322.

[62] M. H. Rizk, Application of the Single-Cycle Optimization Approach for Aerodynamic Design, *Journal of Aircraft* 1985, **22**, 509–515.

[63] P. L. Roe, Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes, *Journal of Computational Physics* 1981, **43**, 357–372.

[64] V. Schmitt & F. Charpin, Pressure Distributions on the ONERA M6-Wing at Transonic Mach Numbers, Rapport technique 138, AGARD, 1979.

[65] B. R. Smith, The k-kl Turbulence Model and Wall Layer Model for Compressible Flows, *AIAA Paper* 90-1483, 1990.

[66] B. R. Smith, A Near Wall Model for the k-l Two Equation Turbulence Model, *AIAA Paper* 94-2386, 1994.

[67] B. Soemarwoto, The Variational Method for Aerodynamic Optimization Using the Navier-Stokes Equations, Rapport technique ICASE Report 97-71, NASA, 1997.

[68] P. R. Spalart & S. R. Allmaras, A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows, *AIAA Paper* 92-0439, 1992.

[69] W. Squire & G. Trapp, Using complex variables to estimate derivatives of real functions, *SIAM Review* 1998, **40**, 110–112.

[70] S. Ta'asan, One-Shot methods for optimal control of distributed parameter systems I : Finite dimensional control, Rapport technique, ICASE Report 91-2, 1991.

[71] E. Turgeon, D. Pelletier & J. Borggaard, A General Continuous Sensitivity Equation Formulation for the k-ε Model of Turbulence, *AIAA Paper* 2001-3000, 2001.

[72] V. Valentin, *Optimisation Aérodynamique 3-D des Aubages dans les Turbomachines Axiales Multi-Étages*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2002.

[73] G. D. van Albada, B. van Leer & W. W. Roberts, A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics, *Astronomy and Astrophysics* 1982, **108**, 76–84.

[74] B. van Leer, Towards the Ultimate Conservative difference Scheme. V - A Second Order Sequel To Godunov's Method, *Journal of Computational Physics* 1979, **32**, 101–136.

[75] G. N. Vanderplaats & R. M. Hicks, Numerical Airfoil Optimization Using Reduced Number of Design Coordinates, *NASA* TM-73151, 1976.

[76] D. C. Wilcox, Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models, *AIAA Journal* 1988, **26**, 1299–1310.

[77] D. C. Wilcox, A Two-Equation Turbulence Model for Wall-Bounded and Free-Shear Flows, *AIAA Paper* 93-2905, 1993.

Annexes

Annexe A

Annexes mathématiques

Pour plus de renseignements sur les annexes A.1 et A.2, on pourra se référer à [49].

A.1 Théorème des fonctions implicites

Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $f : W \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n, y) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n, y)$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$, que $a = (a_1, \ldots, a_n, b) \in W$ est tel que $f(a_1, \ldots, a_n, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \ldots, a_n, b) \neq 0$.
Alors, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant $(a_1, \ldots, a_n)$, V un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant b tel que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n, y) \in U, \exists!\ y \in V \text{ tel que } f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0. \tag{A.1}$$

Si l'on note $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, l'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U_0 tel que $(a_1, \ldots, a_n) \in U_0 \subset U$.

Il en découle l'expression des dérivées partielles :

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \ldots, a_n, b)}, i \in [\![1, n]\!]. \tag{A.2}$$

A.2 Algorithme de Newton

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I. On suppose que f admet un zéro isolé sur I (*i.e.* $\exists\, x_\alpha, f(x_\alpha) = 0$ avec f strictement monotone sur I). Pour x_0 suffisamment proche de la solution x_α, la suite de réels construite de la manière suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{A.3}$$

converge de manière hyperexponentielle vers la solution x_α : en gros, le nombre de décimales double à chaque itération dans la limite de la précision de la machine.

A.3 Calcul de dérivées par passage en variables complexes

Cette annexe est basée sur un article de Squire et Trapp [69].

Plaçons-nous dans le cas d'une fonction régulière F à valeurs réelles dont on souhaite évaluer la dérivée en un point. Écrivons le développement de Taylor à l'ordre 2 de F en x_0 :

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + hF'(x_0) + \frac{h^2}{2}F''(x_0) + o(h^2). \tag{A.4}$$

Si l'on remplace h par $\mathrm{i}h$ (i étant la racine carrée de -1 à partie réelle positive), si l'on suppose de plus que F est analytique et si l'on note $\mathrm{Im}(F)$ la partie imaginaire de la fonction F, on peut écrire l'approximation :

$$F'(x_0) \simeq \frac{\mathrm{Im}(F(x_0 + \mathrm{i}h))}{h}. \tag{A.5}$$

L'intérêt de cette formulation est qu'elle élimine le problème de la soustraction de nombres presque égaux. Une manière de retrouver cette expression est de considérer le problème en terme de fonctions d'une variable complexe. Soit $F(z)$ une fonction analytique de la variable complexe z. Le développement de F en série de Taylor autour du point x_0 s'écrit :

$$F(x_0 + \mathrm{i}h) = F(x_0) + \mathrm{i}hF'(x_0) - \frac{h^2}{2}F''(x_0) - \frac{\mathrm{i}h^3}{3!}F^{(3)}(x_0) + o(h^3). \tag{A.6}$$

En prenant les parties imaginaires de chaque côté de l'équation ci-dessus, et en divisant chaque membre par h, on obtient :

$$\frac{\mathrm{Im}(F(x_0 + \mathrm{i}h))}{h} = F'(x_0) - \frac{h^2}{3!}F^{(3)(x_0)} + \dots \tag{A.7}$$

Le côté gauche de l'équation est une approximation de $F'(x_0)$ *à l'ordre 2*. Le nombre $\frac{\mathrm{Im}(F(x_0+\mathrm{i}h))}{h}$ est bien réel et n'introduit plus la soustraction de deux nombres presque égaux, ce qui évite les erreurs d'arrondi et permet de choisir h aussi petit que l'on veut. On peut alors choisir des pas de discrétisation très petits sans pertes de précision. Ainsi, en choisissant h tel que les termes d'ordre élevés soient plus petits que le zéro machine, on a l'égalité :

$$F'(x_0) = \frac{\mathrm{Im}(F(x_0 + \mathrm{i}h))}{h}. \tag{A.8}$$

Cette approximation est d'ordre 2 bien qu'une seule évaluation de la fonction soit utilisée. Cela vient du fait que la partie imaginaire du résultat est une fonction paire par rapport à l'incrément imaginaire pur.

Annexe B

Annexes d'optimisation de formes

B.1 Condition de convergence de l'algorithme itératif

On rappelle (voir aussi annexes A.2) que l'algorithme de Newton pour la résolution d'une équation de type :

$$f(x) = 0, \tag{B.1}$$

avec f une fonction numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un bon intervalle s'écrit :

$$f'(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -f(x^{(n)}). \tag{B.2}$$

L'équation linéarisée est un système linéaire d'inconnue $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha}$. Par analogie avec le cas scalaire, on peut écrire que l'on veut résoudre :

$$\boldsymbol{F}(\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha}) = 0 \text{ avec } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}\boldsymbol{Y} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha}. \tag{B.3}$$

$\boldsymbol{F}$ étant alors une fonction à valeur vectorielle. On approche la différentielle de $\boldsymbol{F}$ par une approximation de $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}$. Pour la méthode de l'équation linéarisée, on obtient la méthode de type Newton :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{APP})}\left((\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha})^{(l+1)} - (\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha})^{(l)}\right) = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{EXA})}(\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\alpha})^{(l)} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\alpha}\right). \tag{B.4}$$

À chaque pas de l'algorithme itératif l, on définit un système linéaire différent (le membre de droite de l'équation étant différent), mais on conserve la même matrice. Ce système est résolu en effectuant des pas de relaxation LU. On se restreint ici au cas d'un problème bidimensionnel. La matrice $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{APP})}$ est creuse et pentadiagonale. On décompose :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{APP})} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U} \tag{B.5}$$

$$\begin{array}{lll} \text{avec} & \mathbf{D} & \text{matrice diagonale par blocs,} \\ & \mathbf{U} & \text{matrice triangulaire supérieure par blocs} \\ & & \text{(correspond aux termes d'indices } (i+1,j) \text{ et } (i,j+1)), \\ & \mathbf{L} & \text{matrice triangulaire inférieure par blocs} \\ & & \text{(correspond aux termes d'indices } (i-1,j) \text{ et } (i,j-1)). \end{array} \tag{B.6}$$

Pour résoudre le système (B.4) que l'on écrit pour simplifier

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(\mathrm{APP})} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}, \tag{B.7}$$

on effectue un nombre fini de cycles de type :

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{D}+\mathbf{U})\boldsymbol{X}^{(0)} & = & \boldsymbol{Y}, \\ (\mathbf{D}+\mathbf{L})\boldsymbol{X}^{(1)} & = & \boldsymbol{Y}-\mathbf{U}\boldsymbol{X}^{(0)}, \\ (\mathbf{D}+\mathbf{U})\boldsymbol{X}^{(2)} & = & \boldsymbol{Y}-\mathbf{L}\boldsymbol{X}^{(1)}, \\ (\mathbf{D}+\mathbf{L})\boldsymbol{X}^{(3)} & = & \boldsymbol{Y}-\mathbf{U}\boldsymbol{X}^{(2)}. \end{array} \tag{B.8}$$

Dans cet exemple, c'est un cycle de quatre pas de relaxation.

On peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{D}+\mathbf{L})\boldsymbol{X}^{(n)} & = & \boldsymbol{Y}-\mathbf{U}\boldsymbol{X}^{(n-1)}, \\ (\mathbf{D}+\mathbf{U})\boldsymbol{X}^{(n+1)} & = & \boldsymbol{Y}-\mathbf{L}\boldsymbol{X}^{(n)}, \\ (\mathbf{D}+\mathbf{L})\boldsymbol{X}^{(n+2)} & = & \boldsymbol{Y}-\mathbf{U}\boldsymbol{X}^{(n+1)}. \end{array} \tag{B.9}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} (\boldsymbol{X}^{(n+1)}-\boldsymbol{X}^{(n-1)}) & = & -(\mathbf{D}+\mathbf{U})^{-1}\,\mathbf{L}\,(\boldsymbol{X}^{(n)}-\boldsymbol{X}^{(n-2)}), \\ (\boldsymbol{X}^{(n+2)}-\boldsymbol{X}^{(n)}) & = & -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\,\mathbf{U}\,(\boldsymbol{X}^{(n+1)}-\boldsymbol{X}^{(n-1)}). \end{array} \tag{B.10}$$

Soit

$$(\boldsymbol{X}^{(n+2)}-\boldsymbol{X}^{(n)}) \;=\; (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\,\mathbf{U}\,(\mathbf{D}+\mathbf{U})^{-1}\,\mathbf{L}\,(\boldsymbol{X}^{(n)}-\boldsymbol{X}^{(n-2)}), \tag{B.11}$$

et

$$(\boldsymbol{X}^{(n+1)}-\boldsymbol{X}^{(n-1)}) \;=\; (\mathbf{D}+\mathbf{U})^{-1}\,\mathbf{L}\,(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\,\mathbf{U}\,(\boldsymbol{X}^{(n-1)}-\boldsymbol{X}^{(n-3)}). \tag{B.12}$$

On obtient ainsi deux suites $(\boldsymbol{X}^{(2p)})$ et $(\boldsymbol{X}^{(2p+1)})$ qui sont des suites de Cauchy sous les conditions :

$$\|(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\,\mathbf{U}\,(\mathbf{D}+\mathbf{U})^{-1}\,\mathbf{L}\|_\infty < 1 \text{ et } \|(\mathbf{D}+\mathbf{U})^{-1}\,\mathbf{L}\,(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\,\mathbf{U}\|_\infty < 1. \tag{B.13}$$

Ces suites sont donc convergentes sous ces mêmes hypothèses. Posons $\boldsymbol{l}_1$ et $\boldsymbol{l}_2$ leurs limites respectives. On a alors :

$$(\mathbf{D}+\mathbf{U})\,\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{Y}-\mathbf{L}\,\boldsymbol{l}_2, \tag{B.14}$$

et

$$(\mathbf{D}+\mathbf{L})\,\boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{Y}-\mathbf{U}\,\boldsymbol{l}_1. \tag{B.15}$$

On obtient ainsi, en soustrayant membre à membre, $\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{l}_2$ sous l'hypothèse que $\mathbf{D}$ soit inversible.

B.2 Équations du problème d'optimisation de formes avec toutes les dépendances

On rappelle brièvement les équations du problème.

B.2.1 Notations. Dépendances

Notons $\boldsymbol{\alpha}$ le vecteur des paramètres de contrôle caractérisant la forme de l'objet autour duquel on réalise une simulation aérodynamique. L'entier n_f désigne la taille du vecteur $\boldsymbol{\alpha}$. Les coordonnées du maillage sont notées $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})$, on suppose accessible la dérivée du module de maillage $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$. On note $\boldsymbol{W}$ le champ aérodynamique (vecteur de taille n_a). La variable $\boldsymbol{W}_\mathrm{b}$ désigne les valeurs du champ aérodynamique aux frontières du domaine. L'introduction de cette variable $\boldsymbol{W}_\mathrm{b}$ est justifiée car lors de l'intégration sur des surfaces frontières, c'est l'état $\boldsymbol{W}_\mathrm{b}$ et non pas l'état $\boldsymbol{W}$ qui intervient. En outre, cet état frontière $\boldsymbol{W}_\mathrm{b}$ est fonction à la fois de $\boldsymbol{W}$ mais aussi de la métrique $\boldsymbol{X}$ par le biais des normales.

Soit $\mathcal{J}$ la fonction objectif. Dans le cas le plus général, les dépendances de cette fonction sont :

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}) = J(\boldsymbol{W}_\mathrm{b}(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})), \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})). \tag{B.16}$$

De même, les fonctions contraintes $\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha})$ s'écrivent de la même manière avec dépendances complètes :

$$\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\alpha}) = g_k(\boldsymbol{W}_\mathrm{b}(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})), \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})). \tag{B.17}$$

L'entier n_c désigne le nombre des contraintes. Il est indispensable de faire apparaître explicitement la dépendance en $\boldsymbol{W}_\mathrm{b}$ pour que figurent des produits de dérivées dont les facteurs sont calculés dans différents modules.

Enfin, les équations de l'aérodynamique sont notées :

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X}) = 0, \tag{B.18}$$

(système non linéaire à n_a inconnues et n_a équations). Sous réserve des hypothèses du théorème des fonctions implicites, cette relation définit l'écoulement comme une fonction implicite du maillage. On peut désormais noter $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha})$ et récrire les équations de l'aérodynamique et leur différentielle :

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\alpha})) = 0, \tag{B.19}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}} = -\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}, \tag{B.20}$$

(soit n_f systèmes linéaires de même matrice).

Précisons enfin que les vecteurs ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{\lambda}$ vecteur adjoint...) sont notés en colonne, les gradients de scalaire ($\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}$, $\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}}$, $\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{W}}$...) sont notés en ligne.

B.2.2 Équations de la méthode de l'équation linéarisée

En dérivant les équations de l'aérodynamique, on obtient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}} = -(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}). \tag{B.21}$$

En résolvant cette équation, on accède à la sensibilité de l'écoulement $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}$. On peut alors exprimer les dérivées totales de l'objectif et des contraintes pour la fonction $\mathcal{J}$ avec dépendances complètes. Soit, pour l'objectif :

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}_\mathrm{b}} \frac{\partial \boldsymbol{W}_\mathrm{b}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}} + (\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}} + \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}_\mathrm{b}} \frac{\partial \boldsymbol{W}_\mathrm{b}}{\partial \boldsymbol{W}}) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}. \tag{B.22}$$

On a une formule équivalente pour les contraintes. Compte-tenu de la difficulté à inverser une matrice pentadiagonale par direction de maillage [1] et de conditionnement incertain, la résolution de l'équation linéarisée se fait sous une forme itérative faisant intervenir une différentielle approchée à gauche du signe égal et une différentielle aussi exacte que possible à droite du signe égal. Cet algorithme peut être considéré comme une méthode de relaxation. Il est défini par :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(APP)}\left((\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}})^{(l+1)}-(\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}})^{(l)}\right)=-\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}}^{(EXA)}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}^{(l)}+(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}})\right). \tag{B.23}$$

Le système linéaire posé à chaque pas de cette méthode itérative, est résolu de manière approchée par relaxation LU.

B.2.3 Équations de la méthode adjointe

Par différentes manipulations algébriques (transposition des formules précédentes, lagrangien...), on peut obtenir les formules du calcul de gradient par méthode adjointe. Le vecteur adjoint $\boldsymbol{\lambda}$ pour le calcul du gradient de l'objectif est défini par :

$$(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=-(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}\frac{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}{\partial \boldsymbol{W}}+\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}})^{\mathrm{T}}, \tag{B.24}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}\frac{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}). \tag{B.25}$$

Notons que l'on doit résoudre une équation équivalente pour chaque contrainte :

$$(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_k=-(\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}\frac{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}{\partial \boldsymbol{W}}+\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{W}})^{\mathrm{T}}, \tag{B.26}$$

On obtient ainsi les expressions des gradients de fonctions :

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{J}=\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}\frac{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}), \tag{B.27}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{G}_k=\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}\frac{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\lambda}_k^{\mathrm{T}}(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}). \tag{B.28}$$

Comme précédemment, la résolution de l'équation adjointe se fait sous une forme itérative faisant intervenir une différentielle approchée à gauche du signe égal et une différentielle aussi exacte que possible à droite du signe égal :

$$(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}})^{(\mathrm{APP})\,\mathrm{T}}(\boldsymbol{\lambda}^{(l+1)}-\boldsymbol{\lambda}^{(l)})=-\left((\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{W}})^{(\mathrm{APP})\,\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{(l)}+(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}\frac{\partial \boldsymbol{W}_{\mathrm{b}}}{\partial \boldsymbol{W}}+\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{W}})^{\mathrm{T}}\right). \tag{B.29}$$

Le système linéaire posé à chaque pas de cette méthode itérative est résolu de manière approchée par relaxation LU au pas l.

[1] pour un schéma décentré d'ordre 2 en espace avec méthode MUSCL. Pour un schéma décentré d'ordre un en espace la matrice est tridiagonale par direction de maillage

LINÉARISATION DU FLUX VISQUEUX DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET DE MODÈLES DE TURBULENCE POUR L'OPTIMISATION AÉRODYNAMIQUE EN TURBOMACHINES

RÉSUMÉ : Le calcul de gradients de fonctions aérodynamiques par rapport à des paramètres géométriques de la forme solide est une sous-discipline de la simulation numérique en mécanique des fluides. Cette dérivation par rapport à deux variables dépendantes, le champ aérodynamique et le maillage, liés par les équations discrètes de la mécanique des fluides, nécessite l'inversion d'un système linéaire dont la matrice est la matrice jacobienne des équations de la mécanique des fluides discrétisées par rapport au champ aérodynamique (méthode de l'équation linéarisée) ou la transposée de cette matrice jacobienne (méthode adjointe). La précision du calcul de cette matrice jacobienne fait débat lorsque les équations de la mécanique des fluides sont modélisées avec l'approche RANS.

L'objectif de cette thèse est de déterminer le degré d'exactitude de la linéarisation d'un flux visqueux discret et des équations discrètes de certains modèles de turbulence, nécessaire à l'obtention de gradients précis de fonctions métiers des concepteurs de turbomachines par rapport à des paramètres géométriques d'une aube.

L'écriture de linéarisations approchées du flux visqueux (avec ou sans approche dite de « couche mince ») et de deux modèles de turbulence (modèle algébrique de Michel *et al.* et modèle à deux équations de transport k-ε de Launder-Sharma) est détaillée. Pour le modèle de Michel *et al.*, plusieurs approximations pour la linéarisation des équations du modèle ont été testées et comparées. Des résultats (valeurs de gradients de fonctions aérodynamiques, sensibilités d'écoulement pour la méthode linéarisée) sont présentés pour la tuyère de Déléry dite C, l'aile ONERA M6 et deux configurations d'aube isolée de turbine. Des recommandations sont formulées pour le calcul de gradients pour des configurations de machine tournante avec modélisation RANS.

Mots-clés : *optimisation de formes, méthodes de gradient discrètes, méthode de l'équation linéarisée discrète, méthode adjointe discrète, flux visqueux, modèles de turbulence, turbomachine*

VISCOUS FLUX AND TURBULENCE MODELS LINEARIZATION FOR AERODYNAMIC SHAPE OPTIMIZATION FOR TURBOMACHINERIES

ABSTRACT: The computation of derivatives of aerodynamic functions, with respect to design parameters of the solid shape is now a branch of computational fluid dynamics. This differentiation with respect to two dependent variables, the flow field and the mesh, bound by the discrete fluid dynamics equations, needs the resolution of a linear system. Its matrix is the Jacobian matrix of the fluid dynamics equations with respect to the flow field (direct differentiation method) or the tranposate of this Jacobian matrix (adjoint method). The accuracy of the computation of this Jacobian matrix is discussed when the RANS equations are used.

The aim of this PhD thesis is to determine the level of accuracy for the linearization of a discrete viscous flux and the discrete equations of some turbulence models, needed to reach accurate gradients of functions used by the conceptors of turbomachineries, with respect to some design parameters of a blade.

Approximate viscous flux linearizations (with or without a thin layer approach) and the linearization of two turbulence models (algebraic Michel *et al.* model and Launder-Sharma k-ε two-equation model) are described. Several approximations for the linearization of Michel *et al.*'s model are tested and compared. Results (values of gradients of aerodynamic functions, flow sensibilities for the direct differentiation method) are shown for Déléry's C nozzle, ONERA M6 wing and two turbine isolated blades. Recommendations for the computation of derivatives are given for turbomachinery flows with RANS equations.

Keywords: *shape optimization, discrete gradient-based methods, direct differentiation method, discrete adjoint method, viscous flux, turbulence models, turbomachinery*