



HAL
open science

Sur l'identification des paramètres des lois de comportement des roches argileuses.

Brice Lecampion

► **To cite this version:**

Brice Lecampion. Sur l'identification des paramètres des lois de comportement des roches argileuses. : Sources électroniques à base de nanotubes de carbone - Application aux tubes amplificateurs hyperfréquence.. Géophysique [physics.geo-ph]. Ecole Polytechnique X, 2002. Français. NNT: . pastel-00002114

HAL Id: pastel-00002114

<https://pastel.hal.science/pastel-00002114>

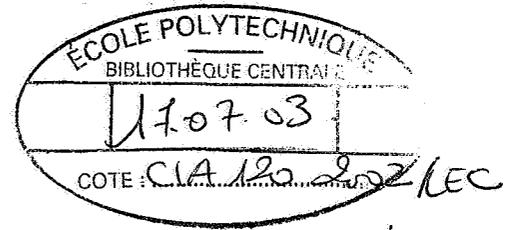
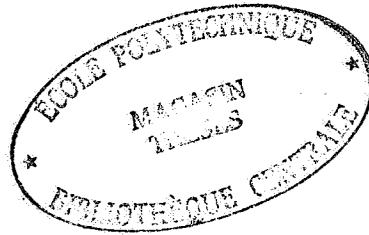
Submitted on 29 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE POLYTECHNIQUE



02 EPXX 0045

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'École Polytechnique
Spécialité Mécanique

usu e

6

par

Brice Lecampion

Sur l'identification des paramètres des lois de comportement des roches argileuses

soutenue à l'École Polytechnique, amphithéâtre Becquerel, le 13 septembre 2002

devant le jury composé de :

Jian Fu Shao *Président*

Emmanuel Detournay *Rapporteur*

Luc Dormieux *Rapporteur*

Andrei Constantinescu

Duc Nguyen Minh

Alain Millard

Odile Ozanam

Luis Ribeiro e Sousa



166133

“We should not overlook the importance of simplicity combined with depth of understanding not only for its cultural value, but as a technological tool.”

M.A. Biot, Acceptance talk of the *ASME Timoshenko medal in applied mechanics*, 1962.

Remerciements

Je remercie tout d'abord Pierre Bérest, directeur du G3S, de m'avoir accueilli au sein des équipes de géomécanique de l'Ecole polytechnique. Son approche des problèmes en mécanique des roches basée sur la pertinence, la simplicité et la rigueur m'a particulièrement marqué. J'ai modestement essayé de m'en inspirer.

Cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans l'intérêt de l'Agence Nationale pour la gestion des déchets radioactifs pour la problématique des méthodes d'identification. Je suis redevable à toute l'équipe de géomécaniciens de l'ANDRA et tout particulièrement à Odile Ozanam qui a suivi mon travail.

Emmanuel Detournay et Luc Dormieux ont passé du temps à examiner mon mémoire. Je leur en suis infiniment reconnaissant, notamment pour leur remarques constructives. Jian-Fu Shao m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, je l'en remercie vivement. Un grand merci également à Alain Millard et Luis Ribeiro e Sousa qui en faisant partie du jury ont apporté leur expertise numérique et pratique.

Duc Nguyen Minh et Andrei Constantinescu ont inspiré et encadré mon travail. Gentillesse, exigence, rigueur et humour sont de parfaits ingrédients pour mener à bien un thèse. ils ont su me les apporter.

Je tiens également à remercier tout le personnel du LMS, notamment son directeur Bernard Halphen, du G3S et de l'ANDRA pour leur sympathie et leur accueil chaleureux. J'aimerais remercier plus particulièrement Laurent Malinsky et François Coste avec qui j'ai eu le plaisir de partager mon bureau. Leur dynamisme et leur amitié ont constitué un élément essentiel à la réussite de cette thèse.

Enfin je tiens à remercier mes proches et amis qui m'ont supporté, au propre comme au figuré, durant ces trois dernières années.

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	Mécanique des roches et identification	11
1.2	Identification et problème inverse	13
1.2.1	Principe de résolution	14
1.2.2	Techniques de minimisation	16
1.3	Questions importantes et résultats existants	20
1.4	Organisation du mémoire	24
I	Poroélasticité	27
2	Le problème d'identification en poroélasticité	29
2.1	Le problème direct \mathcal{P}	29
2.1.1	Equations du problème poroélastique	30
2.1.2	Discussion	33
2.1.3	Formulation variationnelle	35
2.2	Le problème inverse \mathcal{P}^{-1}	38
2.2.1	Application Dirichlet-Neumann (DN)	39
2.2.2	Réciprocité en poroélasticité	40
2.2.3	Discussion sur l'unicité	42
2.2.4	Méthode de résolution du problème	44
2.3	Conclusion	44
3	Calculs de sensibilités en poroélasticité	47
3.1	Méthode de différentiation directe	47

3.1.1	Différentiation des équations de champs	48
3.1.2	Formulation faible	50
3.1.3	Résolution numérique	51
3.2	Méthode de l'état adjoint	53
3.2.1	Lagrangien	54
3.2.2	Conditions nécessaires de stationnarité	55
3.2.3	Le problème adjoint poroélastique	56
3.2.4	Résolution numérique	59
3.3	Exemple numérique et comparaison	60
3.3.1	Configuration	61
3.3.2	Résultats	63
3.4	Conclusions	68
4	Identification à partir d'essais de laboratoire	71
4.1	Description des essais	71
4.1.1	Dispositif expérimental	71
4.1.2	Hypothèse d'un fort élanement	73
4.1.3	Compression isotrope	75
4.1.4	Pulse Test	80
4.2	Identification	84
4.2.1	Identifiabilité et stabilité	84
4.2.2	Interprétation d'essais sur l'Argilite de Meuse-Haute-Marne	93
4.3	Conclusions	98
II	Viscoplasticité	101
5	Comportement viscoplastique des roches argileuses au laboratoire	103
5.1	Comportement viscoplastique des roches argileuses	103
5.1.1	Principaux traits du comportement	104
5.1.2	Analyse qualitative de quelques tests	106
5.1.3	Modélisation	108

5.2	Identification sur des essais de Laboratoire	112
5.2.1	Réponse en fluage	112
5.2.2	Identification	115
5.2.3	Discussion	120
5.3	Conclusions	121
6	Différentiation Directe et identification en élastoviscoplasticité	123
6.1	Problème direct en élastoviscoplasticité	124
6.1.1	Formulation générale	124
6.1.2	Résolution numérique	125
6.2	Différentiation directe	127
6.2.1	Formulation	127
6.2.2	Résolution numérique	130
6.3	Exemples numériques	132
6.3.1	Cas des ouvrages souterrains	132
6.3.2	Exemples d'identification	134
6.4	Conclusion	144
7	Application à un cas réel : le Tunnel de la Chamoise	147
7.1	Le tunnel de la Chamoise	147
7.1.1	Historique	147
7.1.2	Mesures effectuées	149
7.1.3	Formulation du problème d'identification	154
7.2	Modélisation 1D	156
7.2.1	Hypothèses	156
7.2.2	Analyse dimensionnelle	157
7.2.3	Résultats	159
7.3	Modélisation 2D	163
7.3.1	Modèle	163
7.3.2	Résultats et discussions	163
7.4	Conclusions	165

8	Conclusions	169
8.1	Contributions	169
8.2	Implications pratiques	170
8.3	Perspectives	172
A	Algorithme de Levenberg-Marquardt	175
A.1	Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt	176
A.2	Décomposition en valeur singulières	177
A.3	Qualité des résultats : corrélation	178
A.4	Préconditionnement	179
A.5	Critères de convergence	179
A.6	Information a priori	180

Chapitre 1

Introduction

1.1 Mécanique des roches et identification

La mécanique des roches se distingue des autres branches de l'ingénierie (automobile, aéronautique ...) par le simple fait que les matériaux étudiés sont naturels. Les comportements des roches sont très variés et souvent très complexes (non linéarité, couplage entre différents phénomènes...). Les structures souterraines (tunnels, mines ...) sont en général situées dans des massifs hétérogènes : la nature même du comportement de la roche peut changer sur quelques mètres. L'effet d'échelle est évident entre un échantillon d'une dizaine de centimètres prélevé par carottage, la longueur caractéristique d'un ouvrage (quelques mètres de rayon) et la dimension du massif rocheux dans lequel l'ouvrage est situé (quelques kilomètres). Ces différences d'échelles sont au cœur de l'étude de tout ouvrage géotechnique et en sont la principale difficulté.

La rhéologie est un domaine de recherche majeur en mécanique des roches. De nombreux travaux ont permis de modéliser des comportements extrêmement complexes à partir d'essais de laboratoire. Néanmoins, dans tous les cas, ce sont les observations effectuées sur la structure réelle pendant et après sa réalisation qui permettent d'appréhender son comportement mécanique. On s'aperçoit généralement que les calculs réalisés à partir des lois de comportement identifiées sur les essais de laboratoire ne fournissent qu'une piètre estimation des observations in situ. Il n'est pas rare de noter des différences d'un ou plusieurs ordres de grandeur.

Pour un certain nombre de projets, un dimensionnement simple et l'application



FIG. 1.1 – Auscultation d'un ouvrage souterrain.

des règles de l'art suffisent pour garantir la stabilité de la structure. En revanche, pour certains projets sensibles d'un point de vue environnemental, la quantification des perturbations autour des galeries devient aussi importante que la garantie de leur stabilité. On est donc naturellement amené à complexifier la modélisation du comportement du massif rocheux en prenant en compte plus finement un certain nombre de phénomènes. Connaissant les difficultés du passage du laboratoire à la structure réelle, il devient évident qu'il est nécessaire d'utiliser les mesures effectuées sur site pour identifier les paramètres des lois de comportement retenues. D'autre part, pour des lois de comportement complexes, l'identification à partir des réponses aux essais de laboratoire peut également ne pas être triviale.

On est donc en face d'un problème d'identification. Les sollicitations (chargement), la géométrie et la réponse (mesures) de certaines quantités physiques sont connues, en revanche, certains paramètres du système d'équations (coefficients matériaux) sont inconnus.

Au cours de ce chapitre introductif, le cadre général de ce type de problème ainsi que les points importants de sa résolution sont abordés.

1.2 Identification et problème inverse

Le but est d'identifier les paramètres \mathbf{c} d'un modèle à partir des mesures \mathbf{y} pour des sollicitations \mathbf{F} données. C'est un problème inverse (figure 1.2). En règle générale, le problème direct est résolu sous la forme $L(\mathbf{u}(\mathbf{c}), \mathbf{c}) = \mathbf{F}$, où L est un opérateur aux dérivées partielles. Les mesures \mathbf{y} sont un échantillonnage de la solution \mathbf{u} . On remarque que sous cette forme (classique), les paramètres inconnus \mathbf{c} apparaissent implicitement dans la formulation du problème direct.

Il est possible de représenter différemment le problème direct à l'aide d'un opérateur \mathbf{A} reliant les paramètres inconnus du problème inverse \mathbf{c} aux mesures réalisés \mathbf{y} :

$$\mathbf{A} : \mathcal{C}_{ad} \longrightarrow \mathcal{Y} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{c} \longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{c}) \quad (1.2)$$

L'espace \mathcal{C}_{ad} est l'espace des paramètres admissibles \mathbf{c} , inconnus du problème inverse. \mathcal{Y} représente l'espace des mesures.

Le problème inverse s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\text{Trouver } \mathbf{c} \in \mathcal{C}_{ad} \text{ tel que } \mathbf{A}(\mathbf{c}) = \mathbf{y} \text{ connaissant } \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \quad (1.3)$$

Ce type de problème est souvent mal posé au sens d'Hadamard.

- La solution peut ne pas exister (*Non Existence*). Il n'existe aucun $\mathbf{c} \in \mathcal{C}_{ad}$ tel que : $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{c})$. Cela peut notamment être le cas lorsque le modèle choisi n'est pas capable de reproduire les mesures expérimentales.
- La solution peut ne pas être unique (*Non Unicité*). Il peut exister \mathbf{c}_1 et \mathbf{c}_2 tel que : $\mathbf{c}_1 \neq \mathbf{c}_2 \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{c}_1) = \mathbf{A}(\mathbf{c}_2)$
- Une petite perturbation des données \mathbf{y} peut engendrer de fortes variations de la solution \mathbf{c} (*Instabilité*).

Il est important de noter qu'en règle générale, l'opérateur \mathbf{A} n'est *pas connu* et est *non linéaire* par rapport à \mathbf{c} .

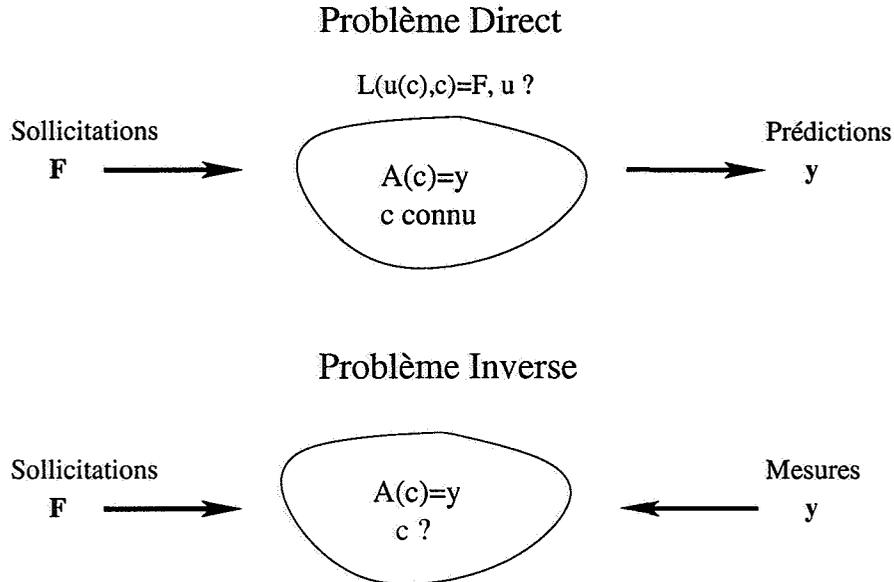


FIG. 1.2 – Représentation schématique des problèmes direct et inverse (identification de c à partir des mesures y).

1.2.1 Principe de résolution

Pour clarifier la représentation formelle ci-dessus, on envisage trois cas classiquement rencontrés dans la pratique.

Tout d'abord, considérons la détermination du module d'Young (ou plutôt de son inverse) lors d'un essai de traction uniaxiale (le comportement du matériau est supposé élastique linéaire homogène et isotrope). On impose une contrainte σ , l'allongement ΔL correspondant est mesuré. La loi de Hooke donne dans ce cas la forme de l'opérateur $A(1/E)$:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} \implies A(1/E) : 1/E \rightarrow \frac{\sigma}{E} \quad (1.4)$$

L'opérateur A est ici connu (explicite) et linéaire. L'identification du module est triviale, elle est unique et stable à la dispersion naturelle et aux erreurs de mesures près.

Pour des configurations plus complexes, il est parfois possible d'obtenir une solution analytique du problème direct. Mais l'opérateur A n'est alors généralement plus linéaire. C'est par exemple le cas de la détermination de la diffusivité thermique $D [L^2 T^{-1}]$ dans

un milieu infini soumis à un point source unité (en $t = 0$, $r = 0$) à partir de la mesure de la température en un point r_m à tout instant t . La solution de ce problème direct *linéaire* est donnée par (Carslaw et Jaeger [27], Zauderer [109]) :

$$T(r_m, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r_m^2}{4Dt}\right) \quad (1.5)$$

Certes l'opérateur reliant la diffusivité D aux mesures $T(r_m, t)$ est connu (explicite) mais il est fortement non linéaire et on ne peut pas exprimer analytiquement D en fonction des mesures $T(r_m, t)$.

Pour des cas encore plus complexes, la solution du problème direct est obtenue par un calcul numérique pour un jeu de paramètres \mathbf{c} fixé. On ne possède donc que des valeurs discrètes de $\mathbf{A}(\mathbf{c})$. C'est le cas le plus fréquent : soit la configuration est trop complexe (conditions aux limites, géométrie), soit le problème direct est lui-même non linéaire. L'opérateur \mathbf{A} est dit implicite.

Dans la pratique, lorsque \mathbf{A} n'est pas linéaire, on recherchera donc des *quasi-solutions* du système $\mathbf{A}(\mathbf{c}) = \mathbf{y}$ en un certain sens. Le problème d'identification se transforme en un problème de minimisation d'une fonctionnelle $\mathcal{J}(\mathbf{c})$ dite fonctionnelle coût, mesurant la distance entre les mesures \mathbf{y} et les prédictions $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ (Beck et Woodbury [9], Bonnet [19]) :

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathcal{C}_{ad}} \mathcal{J}(\mathbf{c}) \quad (1.6)$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \|\mathbf{A}(\mathbf{c}) - \mathbf{y}\|_{\mathbf{y}} \quad (1.7)$$

La forme des fonctionnelles peut être variée. Majoritairement, le choix se porte vers une fonctionnelle de type moindres carrés (norme L^2).

En règle générale, rien n'assure la convexité par rapport aux paramètres \mathbf{c} de la fonctionnelle choisie. La forme plus ou moins régulière de la fonctionnelle est en partie à relier à l'unicité du problème inverse.

Dans certains cas, il peut être intéressant, voire nécessaire, de régulariser le problème lorsqu'il est notoirement mal posé. La méthode la plus classique est d'ajouter un terme régularisant à la fonctionnelle coût. Pour plus de détails, on pourra consulter les ouvrages

de Tikhonov et Arsenin [100], Lavrentiev [67].

1.2.2 Techniques de minimisation

Le problème d'identification se ramène donc à un problème de minimisation d'une fonctionnelle non linéaire. Les méthodes d'optimisation peuvent se diviser en deux grandes catégories : les méthodes *avec* ou *sans* utilisation du gradient de la fonctionnelle.

Les algorithmes *sans gradient* (programmation génétique, simplex ...) permettent de minimiser des fonctionnelles dont la forme peut être très complexe (Holland [55]). Notamment, ces méthodes ne s'arrêtent pas dans les minimums locaux mais permettent d'obtenir un minimum global de la fonctionnelle coût dans l'espace C_{ad} . En revanche, ce type d'algorithme nécessite un très grand nombre d'évaluation de la fonctionnelle (parfois plusieurs milliers d'évaluation). Lorsque cette dernière est issue d'un calcul numérique, les temps de calcul deviennent vite trop coûteux.

C'est pour cette raison que les algorithmes avec gradient sont préférés en pratique. L'information fournie par le gradient permet d'accélérer la convergence. En revanche, ces algorithmes ne fournissent qu'un minimum local. Ils sont donc bien adaptés à des fonctionnelles suffisamment régulières¹. Une présentation des différentes méthodes d'optimisation avec gradient peut être trouvée dans les ouvrages de Gill et al. [48], Bonnans et al. [18]. Par la suite, on utilisera principalement l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Cet algorithme est détaillé en annexe. La performance de telles méthodes repose essentiellement sur l'estimation *précise* du gradient de la fonctionnelle. C'est le point le plus délicat de la mise en oeuvre de la résolution.

Calcul du gradient

Trois techniques permettent de calculer le gradient du type de fonctionnelle envisagée :

- La méthode des différences finies,
- la méthode de différentiation directe,
- la méthode de l'état adjoint.

¹Par régulière, on entend que les fonctionnelles ne présentent pas de multiples vallées dans le domaine physiquement admissible des paramètres C_{ad} .

Les principales caractéristiques de ces trois méthodes sont maintenant décrites dans le cas d'un problème direct linéaire. On reprend la formulation de Tortorelli et Michaleris [101], Haug et al. [54]. Le problème direct $L(\mathbf{u}) = \mathbf{F}$ se réduit à :

$$\mathbf{K}(\mathbf{c})\mathbf{u}(\mathbf{c}) = \mathbf{F} \quad (1.8)$$

\mathbf{K} représente, par exemple, la matrice de rigidité d'un calcul élastique par éléments finis. On envisage la minimisation d'une fonctionnelle du type $\mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbf{c}), \mathbf{c})$ par un algorithme avec gradient. \mathbf{u} est la solution du problème direct linéaire (1.8). Le gradient selon c_i s'écrit sous la forme :

$$\nabla_{c_i} \mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbf{c}), \mathbf{c}) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dc_i} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_i} \quad (1.9)$$

$\frac{d\mathbf{u}}{dc_i}$ correspond à la variation du champ solution \mathbf{u} du problème direct (1.8) selon le paramètre c_i . Cette quantité est également appelée sensibilité selon c_i et sera notée par la suite $\delta_{c_i} \mathbf{u}$.

Différences finies C'est la méthode la plus simple à implémenter. Il suffit de résoudre le problème direct une seconde fois avec le paramètre $c_i + \Delta c_i$ pour obtenir l'estimation suivante de la sensibilité :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dc_i} = \delta_{c_i} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}(c_i + \Delta c_i) - \mathbf{u}(c_i)}{\Delta c_i} \quad (1.10)$$

Cette estimation nécessite la résolution de deux problèmes directs. Pour p paramètres, $p+1$ problèmes directs ($2p+1$ pour un schéma centré) doivent être résolus pour obtenir le gradient de la fonctionnelle. Dans le cas d'un problème direct non-linéaire et/ou d'un grand nombre de paramètres cette méthode devient extrêmement coûteuse en temps de calcul. Le choix du pas est délicat et dépend généralement du paramètre c_i . Le schéma devient vite instable. D'autre part si \mathbf{u} est calculée avec une précision finie, l'estimation donnée (1.10) peut être complètement fautive. Cette méthode est à éviter.

Différentiation directe Comme dans le cas des différences finies, on va obtenir $\frac{d\mathbf{u}}{dc_i}$ mais cette fois ci les résultats seront *exacts* à la précision du calcul près. Cette méthode

est basée sur la différentiation du problème direct (1.8) selon c_i . On obtient un problème auxiliaire ayant pour inconnues $\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{c})}{dc_i}$:

$$\mathbf{K}(\mathbf{c}) \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{c})}{dc_i} = -\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{c})}{\partial c_i} \mathbf{u}(\mathbf{c}) \quad (1.11)$$

On remarque facilement que :

- le second membre (pseudo-chargement) dépend de la solution du problème direct et du paramètre c_i ,
- la matrice de rigidité est la même que celle du problème direct.

Pour obtenir les sensibilités selon les p paramètres, p problèmes auxiliaires linéaires ayant la même matrice de rigidité que le problème direct doivent être résolus. Un gain important en temps de calcul peut être facilement réalisé si la matrice $\mathbf{K}(\mathbf{c})$ est factorisée sous forme LU une fois pour toute.

Les valeurs de sensibilités obtenues par la résolution de (1.11) ont la même précision que les résultats du calcul direct.

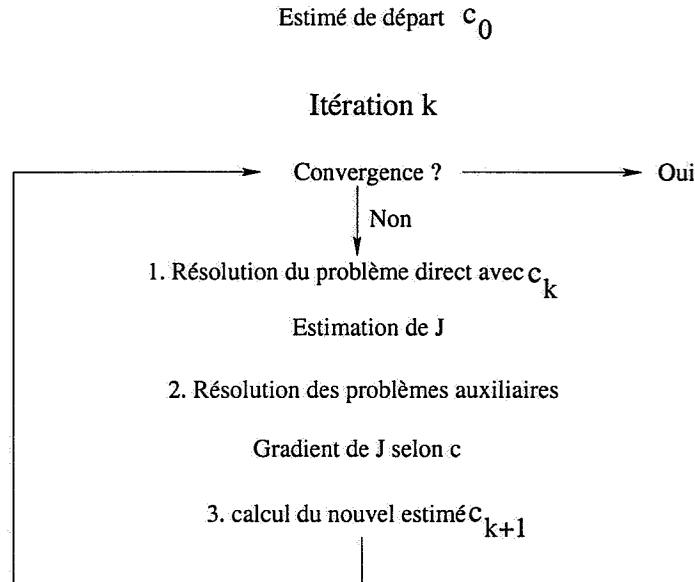
Cette méthode est particulièrement bien adaptée pour le cas d'optimisation selon un nombre de paramètres peu importants. La dérivation du problème différentié est évidemment différente pour chaque problème direct dans le cas non-linéaire.

Etat adjoint La méthode de l'état adjoint permet d'obtenir directement $\nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{J}$ à l'aide d'un seul calcul auxiliaire et ceci quelque soit le nombre de paramètres. En revanche, on n'obtient pas les sensibilités des champs mécaniques $\frac{d\mathbf{u}}{dc_i}$.

On construit le lagrangien suivant en ajoutant les équations du problème direct multipliées par des multiplicateurs de Lagrange à la fonctionnelle de départ :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \mathbf{c}) = \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{c}) - \mathbf{u}^* \underbrace{(\mathbf{K}(\mathbf{c})\mathbf{u}(\mathbf{c}) - \mathbf{F})}_{\text{Problème direct}} \quad (1.12)$$

La variable adjointe \mathbf{u}^* est un multiplicateur de Lagrange. En supposant les variables directes \mathbf{u} et adjointes \mathbf{u}^* mutuellement indépendantes, on voit que le minimum de \mathcal{L} correspond au minimum de \mathcal{J} si \mathbf{u} est solution du problème direct (1.8).

FIG. 1.3 – Etapes de la minimisation de la fonctionnelle coût \mathcal{J} .

Après dérivation du lagrangien par rapport à c_i , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \mathbf{c})}{dc_i} &= \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_i} - \frac{d\mathbf{u}^*}{dc_i} (\mathbf{K}(\mathbf{c})\mathbf{u}(\mathbf{c}) - \mathbf{F}) \\ &+ \frac{d\mathbf{u}}{dc_i} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{u}^* \mathbf{K}(\mathbf{c}) \right) \\ &- \mathbf{u}^* \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{c})}{\partial c_i} \mathbf{u} \end{aligned}$$

Il est facile de remarquer que :

- Si \mathbf{u} est solution du problème direct (1.8),
- et si \mathbf{u}^* est solution du problème adjoint² suivant :

$$\mathbf{K}(\mathbf{c})\mathbf{u}^* = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}} \quad (1.13)$$

alors le gradient de la fonctionnelle est donné par :

$$\nabla_{c_i} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \mathbf{c}) = \nabla_{c_i} \mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbf{c}), \mathbf{c}) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c_i} - \mathbf{u}^* \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{c})}{\partial c_i} \mathbf{u} \quad (1.14)$$

²On peut remarquer que dans l'exemple simple présenté ici \mathbf{K} est auto-adjoint

Le calcul de chaque composante du gradient ne dépend donc que des résultats des problèmes direct (1.8) et adjoint (1.13). On obtient donc toutes les composantes du gradient de la fonctionnelle au prix d'un *seul* calcul auxiliaire qui est toujours linéaire. L'utilisation de l'état adjoint est donc particulièrement efficace pour des problèmes avec un nombre important d'inconnues. Le problème adjoint dépend de la solution du problème direct. Il sera toujours résolu après celui-ci.

Organisation de la minimisation

La résolution du problème de minimisation de $\mathcal{J}(u(c), c)$ est présentée sur la figure 1.3. Chaque itération comporte schématiquement trois phases :

1. La résolution du problème direct (calcul de u) permet le calcul de \mathcal{J} ,
2. la résolution d'un (état adjoint) ou plusieurs (différentiation directe) problèmes auxiliaires permet le calcul de $\nabla_c \mathcal{J}$
3. le pas d'optimisation proprement dit permet le calcul de la nouvelle estimation des paramètres c à partir de \mathcal{J} et $\nabla_c \mathcal{J}$.

Cette présentation est schématique. Suivant l'algorithme d'optimisation, d'autres étapes peuvent intervenir. En pratique, on a utilisé un algorithme de Levenberg-Marquardt avec décomposition en valeurs singulières (SVD). L'optimisation et l'appel aux différents calculs sont effectués à l'aide du logiciel Scilab développé par l'INRIA [52].

1.3 Questions importantes et résultats existants

On a présenté le schéma global de la résolution des problèmes d'identification. Un certain nombre de points restent à préciser à l'aide des résultats existant dans la littérature.

Pour quels types de problèmes existent ils des résultats d'unicité ? La démonstration de l'unicité d'un problème inverse est en général très difficile. Il n'existe pas de résultats généraux.

Les questions théoriques soulevées par les problèmes inverses en font un domaine de recherche actuelle très poussé en mathématique (analyse fonctionnelle, topologie ...). Les

résultats sont limités à des problèmes directs relativement simples, en général linéaires. Isakov présente dans [60, 61] un état de l'art relativement complet sur les problèmes inverses associés aux systèmes d'équations aux dérivées partielles d'un point de vue purement mathématique.

L'optimisation est elle la seule solution possible ? Dans les cas où l'opérateur A est explicite, il est parfois possible de résoudre le problème autrement qu'à l'aide d'une minimisation. Le problème peut s'écrire sous la forme d'équations intégrales (voir par exemple Janno et von Wolfersdorf [63]). Pour la détermination de certains coefficients d'équations aux dérivées partielles simples, il est parfois possible d'exprimer l'opérateur sous la forme d'une transformée spatiale. On pourra se reporter aux articles de Calderon [26], Isaacson et Isaacson [59] pour le cas de la détermination de la conductivité électrique à partir des mesures effectuées sur la frontière. Ikehata [57] généralise cette approche au cas élastique isotrope. Il existe aussi dans certains cas des algorithmes de reconstruction par linéarisation du problème direct selon les inconnues c (Ikehata [58]). L'optimisation d'une fonctionnelle reste pour la majorité des problèmes la seule méthode de résolution.

Les méthodes de calcul de gradient existent-elles dans les cas non linéaires et couplés ? Les techniques de calcul de gradient présentées dans le cas d'un problème direct linéaire sont également dérivables pour des problèmes plus complexes.

Une synthèse des méthodes de calculs de sensibilités (différentiation directe et état adjoint) dans les cas *non linéaires* peut être trouvée dans l'article de Michaleris et al. [80]. Dans le cas de comportement *non linéaire*, la différentiation directe a été formulée par Tsay et al. [102, 103] dans le cadre général. Vidal et al. ont traité le cas élastoviscoplastique [105] et élastoplastique [104]. La résolution est effectuée par la méthode des éléments finis, les exemples portent sur le calcul de sensibilités de forme. La méthode de différentiation directe en élastoviscoplasticité dans le cas de sensibilités sur les paramètres constitutifs est formulée dans le chapitre 6 ainsi que dans [69]. Bonnet et Mukerjee [21] discutent le développement de la différentiation directe en élastoplasticité dans le cadre de la méthode des éléments frontières avec application à la différentiation de domaine. Mahnken et Kuhl

[77] appliquent la différentiation directe pour le cas d'une loi de comportement endommageable non locale.

L'état adjoint dans le cas d'un problème de contact (indentation) a été développé par Tardieu et Constantinescu pour des matériaux élastique [99] et élastoviscoplastique [35, 98]. L'état adjoint en viscoplasticité a également été utilisé par Bourgeois [22] dans le cadre d'un problème de contrôle optimal.

Pour des problèmes *couplés*, ce type de méthode a également été utilisé. Le cas thermoélastique a été formulé par Dems et Mroz [39] (différentiation directe et état adjoint, pas d'exemples numériques). La différentiation directe dans le cas thermoviscoplastique est utilisée par Gavrus et al. [45] pour identifier certains paramètres constitutifs. La méthode de l'état adjoint pour des problèmes directs plus complexes avec convection, changement de phase est formulée par Yang et Zabaras [108].

Pour des problèmes hydromécaniques, Mahnken et Steinmann [78] ont développé la méthode de différentiation directe pour un cas particulier de matériaux poreux plastiques (coefficient de Biot unité). Ce cas limite correspond à un constituant solide incompressible. Les méthodes de différentiation directe et de l'état adjoint en poroélasticité quasi-statique sont formulées et implémentées numériquement dans le chapitre 3.

Quelles types de problèmes d'identification ont été envisagés en géomécanique ?

La plupart des cas traités concernent des problèmes directs linéaires (élastique). Une synthèse peut être trouvée dans l'article de Sakurai [91].

L'identification des paramètres élastiques à partir de mesures in situ à l'aide d'un algorithme avec gradient calculé par différentiation directe est réalisée par Ledesma et al. [71, 46]. Swoboda et al. proposent une méthode similaire [96]. La détermination de paramètres des lois viscoélastiques est également envisagée avec la même méthode par Ohkami et Swoboda [87]. Une identification sans gradient (algorithme du Simplex) des paramètres élastiques est présentée par Gioda et Locatelli [49].

Pour des comportements non linéaires, peu de travaux sont à reporter. Gioda et Maier [50] ont discuté l'identification des paramètres d'une loi plastique (Mohr-Coulomb) ainsi que des contraintes initiales. L'identification est résolue à l'aide d'une minimisation sans

gradient. La méthode est très coûteuse en temps de calcul. Deng [40] résout le problème de l'identification de quelques paramètres de lois élastoplastiques à partir de mesures réalisées sur des structures réelles. La méthode est basée sur le théorème des travaux virtuels. Dans le cas de la détermination des paramètres élastoviscoplastiques à partir des mesures effectuées sur des ouvrages souterrains, on propose dans le chapitre 6 (voir également Lecampion et al. [69]) une méthode d'identification. Cette méthode est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle coût par un algorithme de Levenberg-Marquardt avec un calcul du gradient par différentiation directe. L'application à des mesures réelles est effectuée dans le chapitre 7 (voir également Lecampion et al. [70]).

Pour des problèmes couplés, on peut noter les travaux de Berchenko et Detournay [11] sur l'identification des coefficients thermoporoélastiques du granite à partir d'essais in situ. La méthode est basée sur des solutions analytiques des problèmes directs. Les coefficients sont soit déterminés à l'aide des pics des réponses, soit par lissage (moindres carrés) de toute la courbe. L'identification des coefficients poroélastiques à partir de deux essais de laboratoire courants pour des roches peu perméables est discutée et résolue dans le chapitre 4 (voir également Lecampion et Constantinescu [68]).

Est-il possible d'introduire une composante statistique, une information a priori ?

Il est possible d'introduire dans la fonctionnelle coût une information statistique (covariance sur les données). Cela ne change pas fondamentalement les méthodes de résolution. On pourra se reporter à l'ouvrage de Tarantola [97]. Il est également possible de régulariser le problème d'identification en introduisant une information a priori dans la fonctionnelle par l'intermédiaire d'un terme régularisant. Des détails théoriques peuvent être trouvés dans Bui [24] et respectivement pratiques dans Tarantola [97]

Dans tous les exemples qui seront présentés par la suite, aucune régularisation ni composante statistique n'ont été utilisées. Cela permet de discuter l'unicité et la stabilité des problèmes inverses envisagés. Leur intégration dans l'algorithme de résolution ne pose aucune difficulté une fois le calcul du gradient développé (voir en appendice).

1.4 Organisation du mémoire

Ce travail a pour but de mettre au point des méthodes d'identification des paramètres constitutifs des roches argileuses. Dans le cadre du projet de laboratoire de recherche souterrain de l'ANDRA, il est nécessaire de développer ce type de méthodes en vue de l'interprétation des nombreuses mesures qui seront pratiquées sur site. On s'est focalisé sur deux aspects rhéologiques majeurs du comportement de ce type de roche : le comportement poroélastique d'une part et le comportement élasto-viscoplastique d'autre part.

La première partie se focalise sur l'identification des paramètres poroélastiques. Le chapitre 2 rappelle le problème direct et discute un certain nombre de points importants concernant le problème inverse d'identification. Le troisième chapitre est dédié à la formulation des techniques de calcul de gradient pour le cas poroélastique linéaire. La résolution numérique par éléments finis est discutée. Les méthodes de Différentiation directe et de l'état adjoint sont validées sur un exemple numérique bidimensionnel à l'aide du code de calcul par éléments finis Cast3M. L'identification des coefficients poroélastiques des roches argileuses de Meuse Haute-Marne à partir d'essais de laboratoire est discutée en détail dans le chapitre 4. L'utilisation de solutions semi-explicites approchées des problèmes directs permet d'obtenir une méthode d'identification rapide.

La deuxième partie du mémoire porte sur l'identification des paramètres élasto-viscoplastiques. Les traits du comportement viscoplastiques des roches argileuses de Meuse Haute-Marne sont discutés dans le chapitre 5 sur la base des résultats expérimentaux. La modélisation de ce comportement est envisagée. On propose notamment un modèle viscoplastique avec ecrouissage isotrope non linéaire permettant de reproduire les essais. Les paramètres de cette loi de comportement sont identifiés sur un essai de fluage *unidimensionnel* en conditions drainées. Les déformations différées proviennent alors du comportement poroélastique et viscoplastique de la roche. On montre qu'il est possible de séparer ces deux phénomènes. Tous les paramètres poro-elastoviscoplastiques sont identifiés, une solution semi-explicite de l'essai de fluage est utilisée.

Le chapitre 6 présente une méthode d'identification des paramètres élasto-viscoplastiques

dans le cas général. Comme déjà présenté au cours du présent chapitre, l'identification se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle coût. Le gradient de la fonctionnelle est calculé par Différentiation Directe. La méthode de Différentiation directe est développée dans Cast3M pour la loi élasto-visco-plastique de Norton-Hoff. L'identification des paramètres de cette loi sur des configurations unidimensionnelles et bidimensionnelles d'ouvrages souterrains revêtus ou non est ensuite présentée. Les mesures sont simulées par un premier calcul direct puis éventuellement perturbées. L'unicité et la stabilité de ce problème d'identification sont discutées. La méthode est ensuite appliquée dans le chapitre 7 à un cas réel : le tunnel de la Chamoise. Des modélisations unidimensionnelles et bidimensionnelles en déformation plane sont utilisées pour résoudre le problème direct. Les hypothèses de modélisation sont justifiées. Les paramètres obtenus permettent de reproduire convenablement les données. L'étude de ce cas réel permet également d'émettre un certain nombre de recommandations sur les dispositifs de mesure in situ en vue de l'identification des paramètres des lois de comportement.

Première partie

Poroélasticité

Chapitre 2

Le problème d'identification en poroélasticité

Ce chapitre est consacré à la description du problème d'identification des coefficients poroélastiques à partir de mesures effectuées sur la frontière pour des sollicitations quasi-statiques données. Le matériau est supposé poroélastique linéaire (Biot [16, 17], Detournay et Cheng [41], Coussy [37]).

Dans un premier temps, le problème direct est rappelé. Les équations générales ainsi que la formulation variationnelle sont décrites. Le problème inverse de l'identification des coefficients matériaux est ensuite introduit. Des questions relatives à l'unicité du problème inverse sont évoquées.

2.1 Le problème direct \mathcal{P}

La poroélasticité décrit la réponse d'un matériaux poreux saturé par un fluide. Deux mécanismes majeurs contrôlent cette réponse : "d'une part, une augmentation de la pression de pore induit une dilatation du matériau, d'autre part, une compression de celui-ci induit une augmentation de la pression de pore si l'eau ne peut s'échapper du matériau" (Detournay et Cheng [41]). Ce couplage entre transport de masse fluide et comportement mécanique explique la nature temporelle du phénomène poroélastique.

L'état promécanique du matériau est décrit à l'aide de deux quantités de type contrainte, le tenseur des contraintes totales de Cauchy σ et la pression de pore p , et deux quantités duales de type déformation, le tenseur de déformation du squelette solide ε et l'ap-

port de masse fluide rapportée à la densité volumique du fluide ζ . Les quantités de type déformation sont reliées par des équations de compatibilité à des variables cinématiques : le déplacement du squelette solide \mathbf{u} et le vecteur courant de masse fluide rapporté à la densité volumique du fluide \mathbf{q} .

Dans toute la suite, on utilise la forme classique de la poroélasticité quasi-statique linéaire dont les hypothèses sous-jacentes sont les suivantes (voir Coussy [37] pour plus de détails) :

- petits déplacements, petites déformations ;
- petites variations du vecteur courant de masse fluide, petites variations des variables d'état du fluide.

L'effet des variations de masse fluide sur les forces de volume ainsi que les variations de densité du fluide sont également supposées être négligeables.

2.1.1 Equations du problème poroélastique

Equations de champs

On considère un matériau poreux occupant le domaine Ω de frontière Γ . Ce matériau peut subir des chargements mécaniques et hydrauliques pendant l'intervalle $T = [0, t_f]$, où t_f est le temps final d'observation du phénomène.

L'équation d'équilibre sous l'hypothèse d'un chargement quasi-statique se réduit à la forme suivante :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times T \quad (2.1)$$

\mathbf{F} est la force de volume totale.

L'équation de compatibilité reliant le tenseur des petites déformations au vecteur déplacement du squelette solide est la relation classique de la cinématique des milieux continus :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega \times T \quad (2.2)$$

L'équation de conservation de la masse fluide relie la variation de masse fluide par

unité de temps à l'apport par transport et la création de masse fluide. On l'écrit ici en supposant le fluide incompressible. On norme donc les quantités par la densité volumique du fluide supposée constante :

$$\dot{\zeta} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + g \quad \text{dans } \Omega \times T \quad (2.3)$$

La dérivée par rapport au temps est notée par un point. Par la suite, on supposera le terme de source g de l'équation (2.3) nul. Cette équation (2.3) peut être considérée comme une relation de compatibilité pour le vecteur courant de fluide \mathbf{q} pris comme une variable cinématique [37]. Les trois équations de champs précédentes sont universelles. Elles ne dépendent pas de la nature du comportement du matériau poreux. Elles traduisent l'équilibre mécanique global (2.1), la conservation de la masse fluide (2.3) ainsi que la relation de la cinématique des milieux continus (2.2) en petites déformations.

Il manque pour décrire complètement le problème une relation de comportement reliant les quantités de type contraintes $(\boldsymbol{\sigma}, p)$ aux déformations $(\boldsymbol{\varepsilon}, \zeta)$, ainsi qu'une loi de transport reliant le courant de fluide \mathbf{q} à la pression de pore p régnant dans le matériau. Cette dernière relation est donnée par la loi de Darcy :

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot (\nabla p - \mathbf{f}) \quad \text{dans } \Omega \times T \quad (2.4)$$

\mathbf{f} est la force de volume fluide. \mathbf{k} est le tenseur de conductivité hydraulique $[M^{-1}L^3T]$. C'est un tenseur du deuxième ordre dans le cas anisotrope. La définition de la conductivité hydraulique utilisée ici est reliée à la perméabilité intrinsèque $\kappa [L^2]$ par la relation $\mathbf{k} = \kappa / \mu_f$, où μ_f est la viscosité du fluide $[ML^{-1}T^{-1}]$.

La loi de comportement poroélastique linéaire peut prendre différentes formes. On peut exprimer le couple $(\boldsymbol{\sigma}, p)$ en fonction de $(\boldsymbol{\varepsilon}, \zeta)$. Alternativement, $(\boldsymbol{\varepsilon}, p)$ peut s'écrire en fonction de $(\boldsymbol{\sigma}, \zeta)$. La relation donnant les quantités de type contraintes en fonction des variables de déformations s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0 = (\mathbf{C} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}M) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - M\mathbf{b}\zeta \\ p - p_0 = M(\zeta - \mathbf{b} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \end{cases} \quad (2.5)$$

C est le tenseur d'ordre quatre des modules élastiques drainés $[ML^{-1}T^{-2}]$, b est le tenseur des coefficients de Biot $[\cdot]$ et M le module de Biot $[ML^{-1}T^{-2}]$. σ_0 et p_0 sont les champs de contraintes et de pression de pore initiaux. Le tenseur des modules non drainés $C_u = C + b \otimes bM$ est également utilisé.

Conditions aux limites et conditions initiales

Les équations (2.1) à (2.5) forment le système poroélastique. Les conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann ainsi que les conditions initiales sont à ajouter pour poser complètement le problème. Des forces ainsi qu'un flux de masse fluide peuvent être imposés sur des parties de la frontière Γ du domaine Ω :

$$\begin{cases} \sigma \cdot n = t_g & \text{sur } \Gamma_t \times T \\ q \cdot n = q_g & \text{sur } \Gamma_q \times T \end{cases} \quad (2.6)$$

Ces conditions aux limites sont du type Neumann [37, 92]. Les conditions aux limites de Dirichlet correspondent quant à elles à des déplacements et pression de pore imposés :

$$\begin{cases} u = u_g & \text{sur } \Gamma_u \times T \\ p = p_g & \text{sur } \Gamma_p \times T \end{cases} \quad (2.7)$$

Le problème poroélastique est bien posé si et seulement si les parties Γ_u et Γ_t , respectivement Γ_p et Γ_q forment à chaque instant deux partitions distinctes de la frontière Γ . Ce qui s'écrit schématiquement ¹ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_t \cup \Gamma_u, & \Gamma_t \cap \Gamma_u &= \emptyset \\ \Gamma &= \Gamma_p \cup \Gamma_q, & \Gamma_p \cap \Gamma_q &= \emptyset \end{aligned}$$

¹Comme dans le cas classique de la mécanique du solide, Γ_u et Γ_t ne sont pas géométriquement disjointes. D'une manière plus rigoureuse, il convient de noter les conditions aux limites mécaniques dans chaque direction de l'espace :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} \cdot n_j = t_{gi} & \text{sur } \Gamma_{t_i} \times T \\ u_i = u_{gi} & \text{sur } \Gamma_{u_i} \times T \\ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

et donc $\Gamma = \Gamma_{t_i} \cup \Gamma_{u_i}$, $\Gamma_{t_i} \cap \Gamma_{u_i} = \emptyset$.

On rappelle que la solution d'un problème de type Neumann n'est définie qu'à un déplacement rigide près.

L'état initial du matériau poreux est caractérisé par un champ de contraintes et de pression de pore, notés σ_0 et p_0 . Le déplacement est supposé nul en $t = 0$. Le champ de contraintes σ_0 doit être statiquement admissible, il vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_0 + F_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_0 \cdot \mathbf{n} = t_g(0) & \text{sur } \Gamma_t \end{cases} \quad (2.8)$$

Cet état initial est, d'autre part, un état d'équilibre thermodynamique. L'apport de masse fluide doit donc y être nulle (voir [37]) i.e : $\zeta(0) = 0$ dans Ω . En conséquence, la conservation de la masse fluide (2.3) combinée à la loi de Darcy (2.4) donne le problème aux limites suivant sur le champ de pression de pore initial :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{k} \cdot (\nabla p_0 - \mathbf{f}_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{k} \cdot (\nabla p_0 - \mathbf{f}_0) \cdot \mathbf{n} = q_0^d & \text{sur } \Gamma_q \\ p_0 = p_g(0) & \text{sur } \Gamma_p \end{cases} \quad (2.9)$$

Cet état initial peut être pris comme un état de référence, ce qui permet de réécrire les équations de champs en terme de variations par rapport à cet état. Par la suite, on supposera également que les forces de volumes F et f restent constantes et égales à leur valeur initiale durant l'intervalle de temps T du problème. Dans ce cas, en réécrivant les équations en termes de variations par rapport à l'état initial, les forces de volumes disparaissent de la formulation [37].

2.1.2 Discussion

Les équations générales de la poroélasticité ont été décrites dans le paragraphe précédent. Comme déjà mentionné, on peut isoler trois types d'équations de champs : la relation générale d'équilibre, les équations cinématiques et les lois de comportement.

On peut dériver, de même qu'en élasticité, des équations de Beltrami (sur les contraintes) et de Navier (sur les déplacements), ainsi que différents types d'équations de diffusion (soit

sur la pression de pore, soit sur l'apport de masse fluide). Ces équations de champs sont obtenues par combinaison des équations générales ((2.1) à (2.5)) en prenant un couple de variables comme inconnue principale. Dans toute la suite, on privilégiera soit la forme de base des équations de champs (équilibre, cinématique, comportement), soit la formulation variationnelle du problème directement reliable à une solution numérique par la méthode des éléments finis.

Cas limites

Le système poroélastique quasi statique est un système couplé de type parabolique [92]. Il est important aussi bien d'un point de vue pratique que théorique de s'intéresser aux cas où ce système se simplifie. C'est notamment les cas de la réponse non drainée et du régime permanent.

Le cas non drainé correspond aux temps courts. Il est défini par une variation de masse fluide nulle. Le système d'équations se découple et l'absence du phénomène de diffusion le réduit à un système elliptique de type élastique. Le tenseur élastique correspondant faisant intervenir les modules non drainés :

$$\operatorname{div} \mathbf{C}_u : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

Dans le cas d'un régime permanent, le phénomène de diffusion est également absent. Le système devient elliptique :

$$\operatorname{div} \mathbf{k} \nabla p = 0 \quad (2.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbf{b} p \quad (2.12)$$

Dans le cas général, Detournay et Cheng [41] montrent également que, en milieu infini ou semi-infini, pour des champs de déplacements irrotationnels, la diffusion se découple à chaque instant de l'équation mécanique.

Ces cas limites sont intéressants car le système se ramène à des équations d'une forme plus simple. On reprendra ces cas limites dans l'optique du problème d'identification, des résultats d'unicité existants pour des problèmes inverses liés à ce type de système.

Paramètres matériaux

Dans le cas le plus général d'un matériau anisotrope, les coefficients poroélastiques sont aux nombres de 34 : 21 coefficients d'élasticité drainés, 6 coefficients de Biot, 6 coefficients de conductivité hydraulique ainsi que le module de Biot M [29].

Les symétries matérielles pour un matériau poroélastique quelconque implique les relations suivantes sur les tenseurs d'élasticité, de coefficient de Biot et de conductivité hydraulique :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (2.13)$$

$$b_{ij} = b_{ji} \quad k_{ij} = k_{ji} \quad (2.14)$$

Dans le cas isotrope, le nombre de coefficients matériau indépendants se réduit à cinq coefficients. Par exemple, on peut utiliser les jeux suivant $\mathbf{c} = (E, \nu, b, M, k)$ ou $\mathbf{c} = (K, K_u, \mu, M, k)$. Les différentes relations entre les coefficients poroélastiques peuvent être trouvées dans [41, 37]. Elles ne sont pas rappelées ici.

Un certain nombre de contraintes existent sur ces coefficients. Ces contraintes sont obtenues par une analyse thermodynamique du problème [37]. Les tenseurs des modules élastiques drainés et non drainés doivent être définis positifs. Le coefficient de Biot b doit être compris entre 0 et 1. Le module de Biot M est positif et peut varier de 0 à l'infini. Il en va de même pour la conductivité hydraulique k .

Ces contraintes définissent un espace admissible des paramètres matériau \mathcal{C}_{ad} . D'autre part, les coefficients sont supposés continus (au moins $C^0(\Omega)$) assurant au minimum l'unicité du problème direct.

Dans la suite, \mathbf{c} représentera symboliquement un ensemble de coefficients poroélastiques indépendants, qui seront les inconnues du problème d'identification.

2.1.3 Formulation variationnelle

On rappelle la forme variationnelle du problème aux limites et à la valeur initiale en utilisant la pression de pore et le déplacement comme variables principales. Cette forme est importante car directement reliée à la résolution numérique du problème par éléments

finis dans l'espace et par différence finie dans le temps. C'est l'approche que l'on a utilisée pour résoudre les problèmes directs poroélastiques dans le cas où aucune solution explicite simple n'était possible.

On notera qu'on peut trouver dans la littérature, une formulation faible en fonction des variables (σ, p) [32]. D'une manière plus générale, il est également possible de démontrer un théorème des travaux virtuels en poromécanique [37].

Après dérivation par rapport au temps de l'équation d'équilibre (2.1), en utilisant le théorème de la divergence, il est facile de montrer que l'équation suivante est valable pour tout vecteur $v \in H^1(\Omega)$ durant l'intervalle de temps T :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(v) : \dot{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma} v \dot{\sigma} \cdot n d\Gamma \quad (2.15)$$

De même, à partir de l'équation de conservation de la masse fluide, on obtient à tout instant pour tout champ scalaire $r \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla r q d\Omega = \int_{\Omega} r \dot{\zeta} d\Omega + \int_{\Gamma} r q \cdot n d\Omega \quad (2.16)$$

La formulation faible du problème poroélastique est obtenue en additionnant les deux équations précédentes. La loi de comportement (2.5) et la loi de transport (2.4) permettent alors d'obtenir la formulation faible en fonction des variables (u, p) .

Pour alléger l'écriture, on introduit les opérateurs bi-linéaires suivants.

– L'opérateur d'élasticité :

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_{\Omega} \varepsilon(u) : C : \varepsilon(v) dx \quad (2.17)$$

– l'opérateur d'emmagasinement :

$$\mathcal{D}(p, r) = \int_{\Omega} p \frac{1}{M} r dx \quad (2.18)$$

– l'opérateur de diffusion :

$$\mathcal{A}(p, r) = \int_{\Omega} \nabla p : k : \nabla r dx \quad (2.19)$$

– l'opérateur de couplage :

$$\mathcal{C}(p, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} p \mathbf{b} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{b} p dx \quad (2.20)$$

La dernière égalité est due à la symétrie du tenseur des coefficients de Biot ($b_{ij} = b_{ji}$) et du tenseur des déformations ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$). On peut donc écrire $\mathcal{C}(p, \mathbf{u}) = \mathcal{C}(\mathbf{u}, p)$.

Les symétries matérielles (2.14) donnent également les relations :

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{E}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \mathcal{D}(p, r) = \mathcal{D}(r, p) \quad \mathcal{A}(p, r) = \mathcal{A}(r, p)$$

En utilisant les opérateurs précédemment définis, la formulation faible du problème poroélastique se réduit à l'équation suivante :

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ et $p \in \mathcal{P}$ tel que à chaque instant :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - \mathcal{C}(\dot{p}, \mathbf{v}) - (\mathcal{C}(r, \dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{D}(\dot{p}, r) + \mathcal{A}(p - p_0, r)) \\ = \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \mathbf{t}_g dx + \int_{\Gamma_g} r \mathbf{q}_g \cdot \mathbf{n} dx \\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \text{ et } \forall r \in \mathcal{R} \end{aligned} \quad (2.21)$$

\mathcal{U} et \mathcal{P} sont les espaces fonctionnels des conditions aux limites essentielles, tandis que \mathcal{V} et \mathcal{R} sont les espaces des fonctions tests :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ à } t = 0; \mathbf{u} = \mathbf{u}_g \text{ sur } \Gamma_u \times T \} \\ \mathcal{P} &= \{ p \in H^1(\Omega) \mid p = p_0 \text{ dans } \Omega \text{ à } t = 0; p = p_g \text{ sur } \Gamma_p \times T \} \\ \mathcal{V} &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ à } t = 0; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u \times T \} \\ \mathcal{R} &= \{ r \in H^1(\Omega) \mid r = 0 \text{ dans } \Omega \text{ à } t = 0; r = 0 \text{ sur } \Gamma_p \times T \} \end{aligned}$$

Schéma numérique La discrétisation par éléments finis approxime les différents opérateurs bi-linéaires pour obtenir, après discrétisation temporelle, un système linéaire à chaque pas de temps $[t_n, t_{n+1}]$. Les inconnues nodales sont constituées des différentes composantes du déplacement et de la pression de pore. On note schématiquement \mathbf{U} le vecteur des inconnues nodales $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}$.

La matrice de rigidité \mathbf{K} et la matrice de perméabilité \mathbf{P} du problème s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{D}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{b} & -\frac{1}{M} \end{bmatrix} \mathbf{D} dx \quad \mathbf{P} = \int_{\Omega} \mathbf{E}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \mathbf{E} dx$$

avec :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nabla \end{bmatrix}$$

Les matrices \mathbf{B} , \mathbf{N} , ∇ représentent respectivement l'approximation de l'opérateur de déformation, les fonctions de forme et la matrice de gradient. Pour plus de détails on se reportera à l'ouvrage de Zienkiewicz [110].

En utilisant, un schéma d'intégration temporelle implicite, le système linéaire à chaque pas de temps s'écrit sous forme matricielle :

$$(\mathbf{K} - \Delta t_{n+1} \mathbf{P}) \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{K} \mathbf{U}_n + \mathbf{F}_{n+1} \quad (2.22)$$

avec \mathbf{F}_{n+1} les forces nodales provenant du chargement à l'instant t_{n+1} .

C'est cette méthode de résolution qui est utilisée dans le code **Cast3M** développé par le CEA que l'on a utilisé pour les modélisations numériques des problèmes poroélastiques.

2.2 Le problème inverse \mathcal{P}^{-1}

Le problème d'identification des paramètres poroélastiques à partir de mesures effectuées sur la frontière du corps est un problème inverse. La connaissance de la sollicitation et de la réponse associée donnent des conditions aux limites surabondantes sur la

frontière du domaine pendant l'intervalle de temps d'observation $(\Gamma \times T)$. En contre partie, les paramètres matériaux c sont maintenant inconnus dans Ω .

Dans un premier temps, le problème inverse est analysé d'un point de vue théorique. Certains résultats existants pour le cas élastique sont étendus. L'unicité est discutée en liaison avec les résultats connus pour d'autres systèmes.

2.2.1 Application Dirichlet-Neumann (DN)

La connaissance conjointe de toutes les conditions de Dirichlet (u, p) et de Neumann $(\sigma.n, q.n)$ correspondantes sur $\Gamma \times T$ revient à la connaissance de l'application Dirichlet-Neumann (ou de son inverse). Cette application relie formellement la condition aux limites de Dirichlet à la valeur correspondante de la condition de Neumann. L'application Dirichlet-Neumann (DN) est largement utilisée dans le cadre des problèmes inverses, de nombreux résultats d'unicité dépendent de sa connaissance complète. Dans la pratique, il est évidemment impossible d'obtenir la connaissance de cette application. On impose un nombre fini de sollicitations et les mesures correspondantes le sont également.

En poroélasticité, cette application peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Lambda_c : \begin{pmatrix} u(t) \\ p(t) \end{pmatrix}_{\Gamma} = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \pi(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sigma(t).n \\ \int_0^t q(\tau).n d\tau \end{pmatrix}_{\Gamma} = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

L'intégrale en temps du vecteur quantité de masse fluide provient du caractère parabolique du système.

Dans le cas élastique où cette application est plus simple, de nombreuses remarques intéressantes ont été discutées par Constantinescu [33]. Le cas poroélastique est plus complexe, mais il est possible de discuter quelques résultats similaires.

Dans un premier temps, il est facile de montrer à l'aide du théorème de la divergence que l'énergie poroélastique est reliée aux composantes de l'application DN ainsi qu'au terme dissipatif provenant du transport par conduction du fluide saturant :

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + p\zeta(\mathbf{q})) dx = \underbrace{\int_{\Gamma} \phi(t)\xi(t)dx - \int_{\Gamma} \pi(t)\psi(t)dx}_{\text{composantes de l'application DN}} + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla p \int_0^t \mathbf{q}(\tau) d\tau dx}_{\text{énergie dissipée par conduction}}$$

Contrairement au cas élastique, la connaissance de l'application énergie n'est donc pas équivalente à la connaissance de l'application DN. L'énergie dissipée à l'intérieur du corps par conduction de masse fluide s'ajoutant aux intégrales de surface.

2.2.2 Réciprocité en poroélasticité

On va maintenant utiliser l'identité de réciprocité en poroélasticité pour montrer que l'information contenue dans l'application DN, autrement dit les mesures effectuées sur la frontière, est reliée à d'éventuelles perturbations des coefficients à l'intérieur du corps.

De même qu'en élasticité, il est possible de montrer la relation de réciprocité suivante à partir de la conservation de l'énergie [30] :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} + p^{(1)}\zeta^{(2)} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + p^{(2)}\zeta^{(1)} \quad (2.24)$$

Les exposants (1) et (2) désignent deux états de contrainte et de déformation différents pris éventuellement à des instants et points différents.

On suppose maintenant que les constantes matériaux \mathbf{c} se décomposent en une partie connue \mathbf{c}_0 et une *petite* perturbation $\delta\mathbf{c}$ à l'intérieur du corps qui reste à identifier :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \delta\mathbf{C} \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \delta\mathbf{b}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \delta\mathbf{M} \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \delta\mathbf{k}$$

Comme dans le cas élastique, en suivant l'approche décrite par Constantinescu [33], Constantinescu et Bui [25], on peut décomposer le problème physique perturbé en un problème lié aux coefficients initiaux (\mathbf{c}_0) et un problème lié aux perturbations ($\delta\mathbf{c}$).

La relation de réciprocité est maintenant appliquée aux problème d'ordre zéro (portant sur \mathbf{c}_0) et au problème perturbé (portant sur $\mathbf{c}_0 + \delta \mathbf{c}$). En utilisant la convolution temporelle (voir Cheng et Detournay [30]), on obtient au final :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\tau) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t-\tau) + p(\tau)\zeta_0(t-\tau) - \boldsymbol{\sigma}_0(t-\tau) : \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) - p_0(t-\tau)\zeta(\tau)) dx d\tau \\
 &= \int_0^t \int_{\Gamma} \Lambda_{\mathbf{c}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\tau) \\ p(\tau) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0(t-\tau) \\ p_0(t-\tau) \end{pmatrix} dx d\tau \\
 &- \int_0^t \int_{\Gamma} \Lambda_{\mathbf{c}_0} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0(t-\tau) \\ p_0(t-\tau) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\tau) \\ p(\tau) \end{pmatrix} dx d\tau \\
 &+ \int_0^t \int_{\Omega} \nabla p_0(t-\tau) \left(\int_0^{t-\tau} \delta k \nabla p d\tau' \right) dx d\tau
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

L'indice $_0$ correspond ici aux champs solutions du problème non perturbé, à ne pas confondre avec d'éventuels champs initiaux au temps $t = 0$.

Les relations constitutives poroélastiques (2.5) permettent de faire apparaître explicitement les perturbations des paramètres matériaux :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) : \delta \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t-\tau) - (\delta b M_0 + b_0 \delta M) (\zeta(\tau) \mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t-\tau) + \zeta_0(t-\tau) \mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}(\tau)) \\
 &+ \delta M \zeta(\tau) \zeta_0(t-\tau) - \nabla p_0(t-\tau) \delta k \left(\int_0^{t-\tau} \nabla p d\tau' \right) dx d\tau = \\
 & \int_0^t \int_{\Gamma} \left(\Lambda_{\mathbf{c}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\tau) \\ p(\tau) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0(t-\tau) \\ p_0(t-\tau) \end{pmatrix} - \Lambda_{\mathbf{c}_0} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0(t-\tau) \\ p_0(t-\tau) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\tau) \\ p(\tau) \end{pmatrix} \right) dx d\tau
 \end{aligned}$$

Cette équation est importante car elle relie les perturbations des coefficients poroélastiques aux mesures effectuées sur la frontière.

Il est possible de linéariser l'équation précédente comme dans le cas élastique (Constantinescu [33]). Les champs solutions du problème perturbé peuvent être développés, en

s'arrêtant au premier ordre, en un terme provenant du problème initial et un terme relatif au problème sur les perturbations :

$$u = u_0 + \delta u + O^2(u) \text{ de même pour les autres variables} \quad (2.26)$$

Il en va de même pour l'application DN, en la supposant différentiable.

La méthode précédente a permis dans le cas électrique ($\operatorname{div} \sigma \nabla u = 0$), d'obtenir une expression directe de la conductivité σ à partir de l'application DN. Cette démarche requiert néanmoins la connaissance de solutions pour des charges particulières. C'est la méthode d'Issacson et Issacson [59]. Ce même type d'approche a déjà été utilisé pour l'identification de fissures à l'aide de mesures électriques (Andrieux et Ben Abda [5]), thermiques (Ben Abda et Bui[10]) ; mais la méthode repose également sur la connaissance des solutions pour des chargements particuliers. L'extension de ces méthodes dans le cas poroélastique semble très difficile car la connaissance des solutions du système pour les types de chargement nécessaires est délicate si ce n'est impossible.

2.2.3 Discussion sur l'unicité

Les résultats connus d'unicité des problèmes inverses concernent principalement des problèmes directs linéaire ou faiblement non linéaire. A notre connaissance, aucun résultat d'existence, d'unicité ni de stabilité n'existe à ce jour pour le problème inverse de l'identification des coefficients poroélastiques. Le caractère parabolique couplé du problème rend toute tentative de prouver l'unicité du problème d'identification extrêmement difficile. La plupart des résultats connus concernent des systèmes plus simples. Leur démonstration fait généralement intervenir des techniques mathématique poussées. Notre but n'est pas d'essayer de prouver formellement un quelconque résultat, mais de discuter à la lumière des résultats existants le cas poroélastique.

Dans les cas limites drainé / non drainé, le système poroélastique se réduit à des équations elliptiques faisant intervenir des variables tensorielles et scalaire (équations 2.10, 2.12). Un certain nombre de résultats ont été démontrés concernant l'unicité du problème inverse d'identification de coefficients de ce type de systèmes elliptiques. Le cas de la détection de la conductivité électrique a été largement étudié (Kohn et Vogelius

[64, 65, 66]). Des résultats d'unicité et d'identifiabilité de ce problème de tomographie électrique ont été démontrés par Calderon [26], Isaacs et Isaacson [59]. Ces résultats utilisent l'application Dirichlet-Neumann du problème et la relie à une représentation intégrale de la distribution de la conductivité après linéarisation. Cette démarche utilise la relation de réciprocity du problème (comme dans le cas du paragraphe précédent) ainsi que la connaissance des solutions du problème pour des charges particulières. Ikehata [57], Nakamura et Uhlman [83] ont utilisé la même démarche dans le cas de l'élasticité isotrope. Constantinescu [34] a construit un contre-exemple basé sur un difféomorphisme montrant ainsi la non unicité du problème d'identification dans le cas de l'élasticité anisotrope.

Le cas de la détermination du coefficient de l'équation de diffusion scalaire est également intéressant. L'équation gouvernant l'évolution de la pression de pore (ou celle de l'apport de masse fluide) tombe dans cette catégorie même si la présence du terme de couplage complique le problème. Ce terme peut néanmoins être considéré comme un terme de force si l'on suppose le coefficient associé connu. Isakov dans [61] rappelle et donne un certain nombre de résultats concernant l'identification de a et a_0 dans l'équation $a_0 \partial_t u - \operatorname{div} a \nabla u = 0$ à partir de mesures effectuées sur la surface du corps. Notamment, la connaissance de toute l'application Dirichlet-Neumann assure l'unicité de l'inversion de a et a_0 . Elayyan et Isakov [42] discutent le cas de la reconstruction d'un coefficient de diffusion discontinue. L'unicité est démontrée dans le cas de la connaissance complète de l'application DN. Isakov et Kindermann [62] présentent dans le cas unidimensionnel, une technique d'inversion directe.

A notre connaissance, aucun résultat n'existe pour des systèmes paraboliques couplés. Néanmoins, connaissant les résultats évoqués plus haut, en faisant l'hypothèse que l'application Dirichlet-Neumann est formellement connue, on peut formuler quelques résultats pour le cas poroélastique. Le système non drainé est du type elliptique élastique, les modules C_u sont donc uniquement déterminés par l'application DN dans le cas isotrope. De même dans le cas du régime permanent, on a affaire à deux équations elliptiques faisant intervenir les modules drainés, la conductivité hydraulique et le coefficient de Biot (équation (2.12)). La connaissance de l'application Dirichlet Neumann dans ce cas permet

d'identifier, dans le cas isotrope, d'une manière unique, les modules élastiques drainés, le coefficient de Biot et la conductivité hydraulique.

Connaissant ces résultats, on peut formuler la conjecture suivante dans le cas général du problème d'évolution poroélastique :

La connaissance de l'application DN assure, dans le cas isotrope, l'unicité du problème inverse d'identification des coefficients poroélastiques.

La démonstration semble a priori très difficile. De plus, rien n'assure que le problème inverse soit stable.

Ces résultats supposent la connaissance formelle de l'application Dirichlet-Neumann, hypothèse qui n'est jamais réalisée en pratique, seules quelques valeurs de cette application sont utilisables lors de l'identification. L'identifiabilité dépendra entre autres du trajet de chargement, de la durée d'observation du phénomène et de la qualité des mesures.

2.2.4 Méthode de résolution du problème

Dans la pratique, aucune technique d'inversion directe, telle que celle présentée par Calderon dans le cas électrique, ne semble applicable au système poroélastique. Comme dans la plupart des cas, la résolution du problème inverse passera par la minimisation d'une fonctionnelle coût mesurant la distance entre les mesures et les prédictions de celles-ci pour un jeu de paramètres donné.

2.3 Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire les différentes notations utilisées et de décrire dans le détail le problème direct. Le problème d'identification a été présenté. L'application Dirichlet-Neumann a été reliée à d'éventuelles perturbations géométriques des paramètres constitutifs. Les résultats d'unicité connus ont été remis en perspective dans le cas poroélastique.

La méthode de résolution choisie est classique. Elle passe par la minimisation d'une fonctionnelle mesurant l'écart à la mesure. Par efficacité et souci de robustesse, on choisit

d'effectuer la minimisation par un algorithme avec gradient. Le calcul exact du gradient de la fonctionnelle par rapport aux paramètres à identifier est le point délicat à résoudre, aucune formulation n'existe jusqu'à présent dans le cas poroélastique. Ces techniques sont développées dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Calculs de sensibilités en poroélasticité

Les méthodes de calculs de sensibilités (différentiation directe et état adjoint) sont, dans ce chapitre, développées pour le système poroélastique linéaire dans le cas de chargement quasi-statique.

Le cas du système thermoélastique, relativement proche de celui de la poroélasticité, a été traité par Dems et Mroz [39]. La seule différence vient du fait que le comportement mécanique n'influe pas sur l'équation de conduction de la chaleur. Le couplage n'y est donc pas complet contrairement au cas poroélastique.

Dans un premier temps, la formulation ainsi qu'un certain nombre de détails de calculs sont présentés pour la différentiation directe puis l'état adjoint. Ces méthodes sont implémentées numériquement dans Cast3M. Leur validation est ensuite effectuée sur un exemple complètement bidimensionnel. Une identification de certains coefficients poroélastiques à partir de données simulées est également réalisée sur cet exemple bidimensionnel.

3.1 Méthode de différentiation directe

Dans ce qui suit, on notera $\delta_{c_i} \mathbf{u}$, $\delta_{c_i} \zeta$, $\delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}$ et $\delta_{c_i} p$ les sensibilités au premier ordre selon le paramètre c_i (i.e : dérivées partielles par rapport à c_i) du champ de déplacement, de l'apport de masse fluide, des contraintes et de la pression de pore respectivement. Ces champs de sensibilités sont du même ordre tensoriel que les champs initiaux. Ils sont solu-

tion d'un problème poroélastique contenant des termes de forces additionnelles provenant de la solution du problème initial. Ce problème est obtenu par simple différentiation du problème poroélastique par rapport au paramètre c_i . c_i peut être a priori n'importe quel paramètre intervenant dans le problème initial : coefficients matériaux, contraintes initiales. Toutefois, la formulation présentée ici n'inclut pas les paramètres de formes. L'extension à ce cas n'étant pas une restriction, on se reportera à Arora [6] pour plus de détails sur les sensibilités de forme.

3.1.1 Différentiation des équations de champs

Le problème poroélastique étant linéaire, la différentiation est triviale. On liste ci après les équations générales différenciées par rapport à c_i .

– L'équation d'équilibre différenciée :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial c_i} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \times T \\ \delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{t}_g}{\partial c_i} & \text{sur } \Gamma_t \times T \end{cases} \quad (3.1)$$

– l'équation de compatibilité sur $\delta_{c_i} \mathbf{u}$ s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta_{c_i} \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \delta_{c_i} \mathbf{u} + \nabla^T \delta_{c_i} \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \times T \\ \delta_{c_i} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial c_i} & \text{sur } \Gamma_u \times T \end{cases} \quad (3.2)$$

– la conservation de la masse différenciée :

$$\begin{cases} \delta_{c_i} \dot{\zeta} = -\operatorname{div} \delta_{c_i} \mathbf{q} & \text{dans } \Omega \times T \\ \delta_{c_i} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial q_g}{\partial c_i} & \text{sur } \Gamma_q \times T \end{cases} \quad (3.3)$$

– la loi de Darcy différenciée :

$$\begin{cases} \delta_{c_i} \mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \left(\nabla \delta_{c_i} p - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial c_i} \right) - \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial c_i} \cdot (\nabla p - \mathbf{f}) & \text{dans } \Omega \times T \\ \delta_{c_i} p = \frac{\partial p_g}{\partial c_i} & \text{sur } \Gamma_p \times T \end{cases} \quad (3.4)$$

– La loi de comportement poroélastique sur les sensibilités :

$$\begin{cases} \delta_{c_i}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) = (\mathbf{C} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} M) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta_{c_i} \mathbf{u}) - M \mathbf{b} \delta_{c_i} \zeta + \frac{\partial(\mathbf{C} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} M)}{\partial c_i} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \frac{\partial M \mathbf{b}}{\partial c_i} \zeta \\ \delta_{c_i}(p - p_0) = M(\delta_{c_i} \zeta - \mathbf{b} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta_{c_i} \mathbf{u})) + \frac{\partial M}{\partial c_i} \zeta - \frac{\partial M \mathbf{b}}{\partial c_i} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (3.5)$$

Les conditions initiales peuvent éventuellement dépendre du paramètre c_i . Dans ce cas, il convient de différentier les équations que doivent satisfaire les champs de contrainte et de pression de pore initiaux pour obtenir les champs de sensibilités initiaux correspondants.

Le champ de sensibilités des contraintes doit être solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial c_i} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \\ \delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{t}^d}{\partial c_i}(0) \text{ sur } \Gamma_t \end{cases} \quad (3.6)$$

Quant au champ de sensibilités sur la pression de pore, il doit être à l'instant initial solution du problème :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\mathbf{k} \cdot \left(\nabla \delta_{c_i} p_0 - \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial c_i} \right) \right) = -\operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial c_i} \cdot (\nabla p_0 - \mathbf{f}_0) \right) & \text{dans } \Omega \\ \delta_{c_i} q_0 = \frac{\partial q_g}{\partial c_i} & \text{sur } \Gamma_q \\ \delta_{c_i} p_0 = \frac{\partial p_g}{\partial c_i}(0) & \text{sur } \Gamma_p \end{cases} \quad (3.7)$$

Les équations (3.1) à (3.4) ainsi que les conditions initiales décrivent complètement le problème aux limites et à la valeur initiale sur les champs de sensibilités selon le paramètre c_i . On peut déjà remarquer que la différence entre le problème poroélastique initial et le problème différentié est faible. Seule l'apparition de termes de forces provenant de la différentiation de la loi de comportement et des conditions aux limites modifie le problème. On notera que les termes de forces sont fonctions des champs solutions du problème initial. Dans le cas où l'on cherche les sensibilités selon les paramètres constitutifs, les conditions aux limites du problème différentié deviennent homogènes.

3.1.2 Formulation faible

La formulation faible du problème sur les sensibilités peut être obtenue directement à partir de la formulation forte préalablement établie. Il suffit de suivre la même démarche que pour le problème poroélastique initial. On obtient le résultat suivant en prenant $\delta_{c_i} \mathbf{u}$ et $\delta_{c_i} p$ comme variables principales :

Trouver $\delta_{c_i} \mathbf{u} \in \delta_{c_i} \mathcal{U}$ et $\delta_{c_i} p \in \delta_{c_i} \mathcal{P}$ tel que $\forall v \in \mathcal{V}$ et $\forall r \in \mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{E}(\delta_{c_i} \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - \mathcal{C}(\delta_{c_i} \dot{p}, \mathbf{v})) - (\mathcal{C}(r, \delta_{c_i} \dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{D}(\delta_{c_i} \dot{p}, r) + \mathcal{A}(\delta_{c_i}(p - p_0), r)) \\
& = (\mathcal{C}_{\partial b}(r, \dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{D}_{\partial M}(\dot{p}, r) + \mathcal{A}_{\partial k}(\delta_{c_i}(p - p_0), r)) \\
& \quad - (\mathcal{E}_{\partial C}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - \mathcal{C}_{\partial b}(\dot{p}, \mathbf{v})) \\
& \quad + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \frac{\partial t^d}{\partial c_i} dx + \int_{\Gamma_q} r \frac{\partial q^d \cdot \mathbf{n}}{\partial c_i} dx \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Les conditions initiales étant les suivantes :

$$\delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma} = \delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \delta_{c_i} p = \delta_{c_i} p_0 \quad \delta_{c_i} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Les espaces fonctionnels $\delta_{c_i} \mathcal{U}$ et $\delta_{c_i} \mathcal{P}$ résultent simplement de la différentiation selon c_i de \mathcal{U} et \mathcal{P} :

$$\begin{aligned}
\delta_{c_i} \mathcal{U} & = \left\{ \delta_{c_i} \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \delta_{c_i} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ en } t = 0; \delta_{c_i} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial c_i} \text{ sur } \Gamma_u \times T \right\} \\
\delta_{c_i} \mathcal{P} & = \left\{ \delta_{c_i} p \in H^1(\Omega) \mid \delta_{c_i} p = \delta_{c_i} p_0 \text{ dans } \Omega \text{ en } t = 0; \delta_{c_i} p = \frac{\partial p_g}{\partial c_i} \text{ sur } \Gamma_p \times T \right\}
\end{aligned}$$

D'autre part, la notation $\mathcal{E}_{\partial C}$ représente l'opérateur bi-linéaire suivant :

$$\mathcal{E}_{\partial C} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial c_i} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx \quad (3.10)$$

Une notation similaire est utilisée pour les autres opérateurs faisant intervenir les dérivées partielles selon les paramètres constitutifs, à savoir $\mathcal{A}_{\partial \mathbf{k}}, \mathcal{D}_{\partial M}, \mathcal{C}_{\partial b}$.

Comme pour le problème direct, cette formulation est directement reliée à la résolution numérique du problème par la méthode des éléments finis.

3.1.3 Résolution numérique

Le problème poroélastique direct et le problème différentié sont très similaires. Les seules différences résident dans les conditions aux limites et l'apparition de termes de forces dans les problèmes différentiés. Ce résultat est classique, le système poroélastique étant linéaire [101]. D'un point de vue numérique, cela signifie que seul le second membre du système linéaire va être modifié entre problème direct et problème différentié.

La résolution de ce problème par éléments finis en espace et différence finies dans le temps peut être judicieusement combinée à la résolution du problème direct par le même type de méthode. Pour une meilleure précision, de nombreux auteurs (Vidal et al. [105], Tortorelli et Michaleris [101]) conseillent, pour différents types de système d'équations, de toujours utiliser la même discrétisation spatiale (et la même interpolation) pour les problèmes direct et de sensibilités. Il en va de même pour la discrétisation temporelle. On a toujours respecté cette suggestion.

La méthode de différentiation a été développée dans le code aux éléments finis `Cast3M`. La souplesse du langage de type objet `Gibiane` a permis une implémentation facile des calculs de sensibilités. `Cast3M` possède déjà les fonctionnalités permettant de résoudre le problème poroélastique d'une manière complètement couplée. Le schéma numérique découle directement de la formulation faible en variables (\mathbf{u}, p) préalablement décrite. L'intégration temporelle est effectuée par un schéma aux différences finies de type implicite. `Cast3M` résout donc le système (3.11) à chaque pas de temps :

$$(\mathbf{K} - \Delta t_{n+1} \mathbf{P}) \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{K} \mathbf{U}_n + \mathbf{F}_{n+1} \quad (3.11)$$

Le problème différentié à résoudre s'écrit d'après la formulation variationnelle (3.8) :

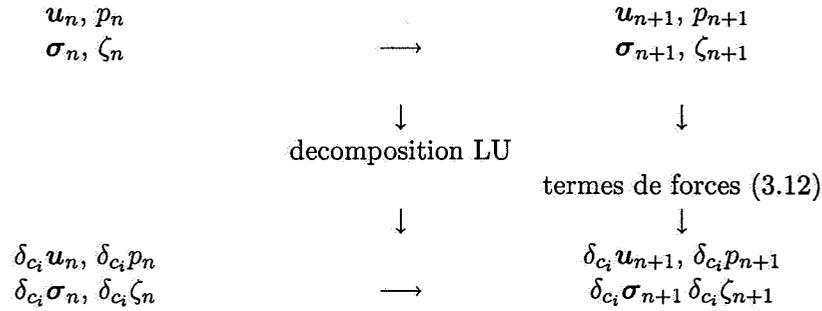


FIG. 3.1 – Schéma de la résolution d’un pas de temps des problèmes direct et différentié.

$$(\mathbf{K} - \Delta t_{n+1} \mathbf{P}) \delta_{c_i} \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{K} \delta_{c_i} \mathbf{U}_n + \frac{\partial \mathbf{F}_{n+1}}{\partial c_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial c_i} (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) + \Delta t_{n+1} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial c_i} \mathbf{U}_{n+1} \quad (3.12)$$

On voit que la matrice de rigidité est identique pour les deux problèmes. En admettant que les pas de temps varient au cours de la simulation, la matrice de rigidité globale $(\mathbf{K} - \Delta t_{n+1} \mathbf{P})$ doit être assemblée à chaque itération du calcul. Le système linéaire (3.11) est ensuite résolu en utilisant la décomposition LU de cette matrice. L’intérêt de cette décomposition devient évident lorsque l’on doit résoudre plusieurs systèmes linéaires dont seul le second membre diffère. En effet, la résolution du système ne nécessite que des opérations élémentaires si l’on connaît la forme LU de la matrice $\mathbf{K} - \Delta t_{n+1} \mathbf{P}$. Les temps de calcul en sont donc très largement réduits. Le calcul de sensibilité sur p paramètres c_i coûtera donc très peu de temps machine alors qu’il nécessite en théorie la résolution de p systèmes linéaires. Dans notre cas, une fois le pas du calcul direct effectué, il suffit de construire le second membre intervenant dans le calcul de sensibilités selon le paramètre c_i (différent pour chaque c_i) et d’avoir accès à la décomposition LU de la matrice de rigidité globale (identique pour tous les c_i). Les calculs de sensibilités pour p paramètres c_i peuvent donc s’effectuer en “parallèle” du calcul direct. La figure 3.1 résume schématiquement l’organisation du calcul.

Cast3M permet d’accéder à la décomposition LU de l’opérateur $(\mathbf{K} - \Delta t_{n+1} \mathbf{P})$. A la fin de chaque pas de temps, il est possible d’appeler une procédure personnelle `perso1`. Les calculs de sensibilités ont donc été grandement facilités par cette “architecture” de la

résolution. Une fois dans `perso1`, on récupère le pointeur de la décomposition LU de la matrice du système, on construit les seconds membres et on calcule le couple $\delta_{c_i} \mathbf{u}_{n+1}, \delta_{c_i} p_{n+1}$.

Dans le cas où l'on désire obtenir les sensibilités sur les paramètres constitutifs, le calcul des seconds membres fait intervenir les résultats du calcul direct ainsi que des opérateurs différenciés par rapport aux paramètres constitutifs du type : $\mathcal{E}_{\partial C}$. Dans le cas isotrope, il est plus facile de calculer les sensibilités en utilisant le jeu de paramètres poroélastiques $\mathbf{c} = (E, \mu, b, M, k)$. On obtient alors facilement la forme des opérateurs de dérivées partielles :

$$\mathcal{E}_{\partial E} = \frac{\mathcal{E}}{E} \quad \mathcal{E}_{\partial \mu} = \frac{\mathcal{E}}{\mu} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{A}_{\partial k} = \frac{\mathcal{A}}{k} \quad \mathcal{C}_{\partial b} = \frac{\mathcal{C}}{b} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{D}_{\partial M} = -\frac{\mathcal{D}}{M} \quad (3.15)$$

Il est ensuite possible de passer à un autre jeu de paramètres indépendants en utilisant les règles de différentiation des fonctions composées et les différentes relations entre les paramètres poroélastiques.

On remarquera également qu'aucune hypothèse d'homogénéité du matériau n'a été nécessaire. Dans la pratique, il est donc possible d'utiliser la formulation pour des matériaux hétérogènes.

3.2 Méthode de l'état adjoint

La formulation de la méthode de l'état adjoint pour obtenir le gradient de la fonctionnelle coût est présentée dans cette section. Elle permet d'obtenir directement le gradient de la fonctionnelle coût selon les différents paramètres à l'aide d'un *unique* problème auxiliaire. En revanche, on n'obtient pas les champs de sensibilités. Son avantage devient évident pour un nombre important de paramètres intervenant dans la minimisation.

Le caractère parabolique du système poroélastique explique qu'il ne soit pas auto-adjoint [31]. Comme pour l'équation de diffusion scalaire, le système adjoint va correspondre à un système d'équations paraboliques similaire mais rétrograde en temps. Pour

le cas de l'équation de la chaleur, on trouve une formulation similaire à celle présentée ici dans Bonnet et al. [20].

Dans ce qui suit, on dérive le système poroélastique adjoint dans le cadre du calcul du gradient d'une fonctionnelle coût dépendant des valeurs du problème direct sur la frontière. Pour ce faire, on utilise la forme schématique suivante pour la fonctionnelle coût :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{c}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \mathbf{q}) &= \int_{\Gamma_t \times T} \varphi_1(\mathbf{u}) \, dx \, dt + \int_{\Gamma_u \times T} \varphi_2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, dx \, dt \\ &+ \int_{\Gamma_q \times T} \varphi_3(p) \, dx \, dt + \int_{\Gamma_p \times T} \varphi_4(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, dx \, dt \end{aligned}$$

où $\varphi_1(\mathbf{u})$, $\varphi_2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})$, $\varphi_3(p)$ et $\varphi_4(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})$ sont fonction des mesures et des prédictions pour une valeur donnée de \mathbf{c} . Cette forme incorpore tout type de mesure sur la frontière du domaine.

3.2.1 Lagrangien

Le problème revient donc à minimiser la fonctionnelle de coût $\mathcal{J}(\mathbf{c}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \mathbf{q})$ selon \mathbf{c} sous la contrainte que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \mathbf{q})$ soient solutions du problème direct. C'est un problème de contrôle optimal d'un système d'équations aux dérivées partielles [74].

Classiquement, on construit un Lagrangien $\mathcal{L}(\mathbf{c}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \mathbf{q}; \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, p^*, \mathbf{q}^*)$ en ajoutant à la fonction coût la formulation faible du problème aux limites. Les champs \mathbf{u}^* , $\boldsymbol{\sigma}^*$, p^* , \mathbf{q}^* sont nommés champs adjoints (ce sont des multiplicateurs de Lagrange).

On rappelle tout d'abord que pour tout \mathbf{v} et r appartenant à $H^1(\Omega)$, la solution du problème direct satisfait l'équation (2.21). Cette équation étant valable à tout instant, après intégration en temps sur l'intervalle T , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_T (\mathcal{E}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - \mathcal{C}(\dot{p}, \mathbf{v})) \, dt - \int_T (\mathcal{C}(r, \dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{D}(\dot{p}, r) + \mathcal{A}(p - p_0, r)) \, dt \\ = \int_T \int_{\Gamma} \mathbf{v} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \, dx \, dt + \int_T \int_{\Gamma} r \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dx \, dt \end{aligned}$$

Le lagrangien est alors défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{c}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \mathbf{q}; \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, p^*, \mathbf{q}^*) &= \mathcal{J}(\mathbf{c}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \mathbf{q}) + \\ &\int_T (\mathcal{E}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^*) - \mathcal{C}(\dot{p}, \mathbf{u}^*)) dt - \int_T (\mathcal{C}(p^*, \dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{D}(\dot{p}, p^*) + \mathcal{A}(p - p_0, p^*)) dt \\ &\quad - \int_T \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dx dt - \int_T \int_{\Gamma} p^* \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dx dt \end{aligned}$$

Toutes les variables (directes et adjointes) sont supposées être mutuellement indépendantes. La construction du lagrangien assure alors que le point selle de \mathcal{L} donne le minimum de \mathcal{J} et que $\mathcal{L} = \mathcal{J}$ si (\mathbf{u}, p) sont solutions du problème direct. Les conditions nécessaires de stationnarité (dérivées au premier ordre nulles) du lagrangien \mathcal{L} par rapport aux variables adjointes redonnent le problème direct. Les mêmes conditions par rapport aux variables directes vont donner un problème poroélastique adjoint rétrograde en temps.

3.2.2 Conditions nécessaires de stationnarité

D'après la forme du lagrangien, on dérive le système adjoint à partir des conditions nécessaires de stationnarité par rapport aux *variables directes*.

Stationnarité par rapport à \mathbf{u}

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}}, d\mathbf{u} \right\rangle = \int_{\Gamma_t \times T} \partial_{\mathbf{u}} \varphi_1(\mathbf{u}) d\mathbf{u} dx dt \quad (3.16)$$

$$+ \int_T (\mathcal{E}(d\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^*) - \mathcal{C}(p^*, d\dot{\mathbf{u}})) dt \quad (3.17)$$

Après intégration par parties en temps, l'expression de la condition de stationnarité donne pour tout $d\mathbf{u}$:

$$\int_T (\mathcal{E}(d\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}^*) - \mathcal{C}(p^*, d\mathbf{u})) dt = \int_{\Gamma_t \times T} \partial_{\mathbf{u}} \varphi_1(\mathbf{u}) d\mathbf{u} dx dt \quad (3.18)$$

$$\mathcal{E}(d\mathbf{u}, \mathbf{u}^*(t_f)) = \mathcal{C}(p^*(t_f), d\mathbf{u}) \quad (3.19)$$

Stationnarité par rapport à p

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}, dp \right\rangle = \int_{\Gamma_q \times T} \partial_p \varphi_3(p) dp dx dt \quad (3.20)$$

$$- \int_T (\mathcal{C}(dp, \mathbf{u}^*) + \mathcal{D}(dp, p^*) + \mathcal{A}(dp, p^*)) dt \quad (3.21)$$

Après intégration par parties en temps, l'expression de la condition de stationnarité donne pour tout dp :

$$- \int_T (\mathcal{C}(dp, \dot{\mathbf{u}}^*) + \mathcal{D}(dp, \dot{p}^*) - \mathcal{A}(dp, p^*)) dt = \quad (3.22)$$

$$\int_{\Gamma_q \times T} \partial_p \varphi_3(p) dp dx dt \quad (3.23)$$

$$\mathcal{C}(dp, \mathbf{u}^*(t_f)) + \mathcal{D}(dp, p^*(t_f)) = 0 \quad (3.24)$$

Stationnarité par rapport à σ

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma}, d\sigma \right\rangle = \int_{\Gamma_u \times T} \partial_\sigma \varphi_2(\sigma) d\sigma \cdot \mathbf{n} dx dt - \int_{\Gamma_u \times T} \mathbf{u}^* d\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} dx dt \quad (3.25)$$

Après intégration par parties en temps, sachant que $\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_g$ sur Γ_t , la condition de stationnarité donne :

$$\dot{\mathbf{u}}^* = -\partial_\sigma \varphi_2(\sigma) \text{ on } \Gamma_u \times T \quad (3.26)$$

$$\mathbf{u}^*(t_f) = 0 \text{ on } \Gamma_u \quad (3.27)$$

Stationnarité par rapport à q

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, dq \right\rangle = \int_{\Gamma_p \times T} \partial_q \varphi_4(q \cdot \mathbf{n}) dq \cdot \mathbf{n} dx dt - \int_{\Gamma \times T} p^* dq \cdot \mathbf{n} dx dt \quad (3.28)$$

Ainsi en prenant en considération les conditions aux limites du problème direct, on obtient :

$$p^* = \partial_q \varphi_4(q \cdot \mathbf{n}) \text{ on } \Gamma_p \times T \quad (3.29)$$

3.2.3 Le problème adjoint poroélastique

Formulation faible du problème adjoint

Des équations précédentes ((3.19) à (3.29)) exprimant la stationnarité du lagrangien par rapport aux variables directes, après sommation, il est possible d'écrire la forme faible du problème adjoint :

Trouver $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}^*$ et $p^* \in \mathcal{P}^*$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{E}(\dot{\mathbf{u}}^*, \mathbf{v}) - \mathcal{C}(\dot{p}^*, \mathbf{v})) - \int_T (\mathcal{C}(r, \dot{\mathbf{u}}^*) + \mathcal{D}(\dot{p}^*, r) - \mathcal{A}(p^*, r)) \\
 = \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \partial_{\mathbf{u}} \varphi_1(\mathbf{u}) dx + \int_{\Gamma_q} r \partial_p \varphi_3(p) dx \\
 \forall r \in \mathcal{R}^* \text{ et } \mathbf{v} \in \mathcal{V}^* \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Les espaces fonctionnels adjoints étant définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}^* &= \{ \mathbf{u}^* \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ en } t = t_f; \dot{\mathbf{u}} = -\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \varphi_2(\boldsymbol{\sigma}) \text{ sur } \Gamma_u \times T \} \\
 \mathcal{P}^* &= \{ p^* \in H^1(\Omega) \mid p^* = 0 \text{ dans } \Omega \text{ en } t = t_f; p^* = -\partial_{\mathbf{q}} \varphi_4(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \text{ sur } \Gamma_p \times T \} \\
 \mathcal{V}^* &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ en } t = t_f; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u \times T \} \\
 \mathcal{R}^* &= \{ r \in H^1(\Omega) \mid r = 0 \text{ dans } \Omega \text{ en } t = t_f; r = 0 \text{ sur } \Gamma_p \times T \}
 \end{aligned}$$

Formulation forte

Connaissant les définitions des différents opérateurs bi-linéaires, on peut facilement déduire la formulation forte du problème adjoint poroélastique à partir de (3.30).

– Conditions finales :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^*(t_f) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^*(t_f) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_t \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}^*(t_f) = 0 \text{ dans } \Omega \\ p^*(t_f) = 0 \text{ sur } \Omega \end{cases} \quad (3.32)$$

– Equations de champs et conditions aux limites :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \times T \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{n} = \partial_{\mathbf{u}} \varphi_1(\mathbf{u}) \text{ dans } \Gamma_t \times T \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^*) = \frac{1}{2} (\nabla \dot{\mathbf{u}}^* + \nabla^T \dot{\mathbf{u}}^*) \text{ dans } \Omega \times T \\ \dot{\mathbf{u}}^* = -\partial_{\boldsymbol{\sigma}} \varphi_2(\boldsymbol{\sigma}) \text{ dans } \Gamma_u \times T \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} \dot{\zeta}^* = -\text{div} \mathbf{q}^* \text{ dans } \Omega \times T \\ \mathbf{q}^* = \partial_p \varphi_3(p) \text{ dans } \Gamma_q \times T \end{cases} \quad (3.35)$$

– Loi de transport adjointe

$$p^* = \partial_q \varphi_4(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \text{ dans } \Gamma_p \times T \quad (3.36)$$

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{k} \nabla p^* \text{ dans } \Omega \times T \quad (3.37)$$

– Loi de comportement adjointe :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = (\mathbf{C} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} M) \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^*) - M \mathbf{b} \dot{\zeta}^* \text{ dans } \Omega \times T \\ p^* = M (\dot{\zeta}^* - \mathbf{b} : \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^*)) \text{ dans } \Omega \times T \end{cases} \quad (3.38)$$

La seule différence avec le problème direct, mise à part les conditions aux limites, vient de la loi de transport adjointe (3.38). L'expression habituelle de la loi de Darcy est dans l'espace adjoint remplacée par son opposée. Ce changement de signe explique le caractère rétrograde du système adjoint en poroélasticité, ce caractère rétrograde étant complété par les conditions finales au temps $t = t_f$.

Expression du gradient de la fonction coût

Le gradient de la fonction coût s'obtient après résolution des problèmes direct et adjoint. Si $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, p, \mathbf{q})$ et $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, p^*, \mathbf{q}^*)$ sont respectivement solutions du problème direct et du problème adjoint, alors d'après l'expression du lagrangien \mathcal{L} :

$$\nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{J} = \nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{L} \quad (3.39)$$

On obtient donc les composantes suivantes selon les différents paramètres constitutifs :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{C}} &= \int_T \mathcal{E}_{\partial \mathbf{C}}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^*) dt \\
\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{b}} &= - \int_T \mathcal{C}_{\partial \mathbf{b}}(\dot{p}, \mathbf{u}^*) dt - \int_T \mathcal{C}_{\partial \mathbf{b}}(p^*, \dot{\mathbf{u}}) dt \\
\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial M} &= - \int_T \mathcal{D}_{\partial M}(p, p^*) dt \\
\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{k}} &= - \int_T \mathcal{A}_{\partial \mathbf{k}}(p - p_0, p^*) dt
\end{aligned}$$

Une fois les problèmes directs et adjoints résolus, il suffit d'évaluer les intégrales précédentes pour obtenir les différentes composantes du gradient de la fonctionnelle coût. Cette intégration, forcément numérique, doit s'effectuer avec une précision suffisante pour obtenir des résultats convenables.

3.2.4 Résolution numérique

Le problème adjoint poroélastique, comme le problème de différentiation directe, a été implémenté dans Cast3M. Contrairement à la différentiation directe, le problème adjoint n'est pas résolu en parallèle mais postérieurement au calcul direct. Ceci est dû à son caractère rétrograde en temps.

Après un changement de variable temporelle : $t^* = t_f - t$, la forme du problème adjoint est strictement équivalente à celle du problème direct. Les conditions aux limites de ce problème dépendent de la solution du problème direct.

Le déroulement du calcul se résume comme suit :

- Calcul poroélastique direct
- Passage en temps rétrograde : changement de variable $t^* = t_f - t$ et préparation des conditions aux limites du problème adjoint,
- calcul poroélastique adjoint dans le temps rétrograde, équivalent à un problème poroélastique direct,
- calcul des intégrales permettant l'estimation des différents composantes du gradient à partir des solutions directes et adjointes (équations (3.40)).

Le calcul des intégrales permettant d'obtenir les composantes du gradient de la fonction coût nécessite de stocker en mémoire tous les champs solutions directs et adjoints

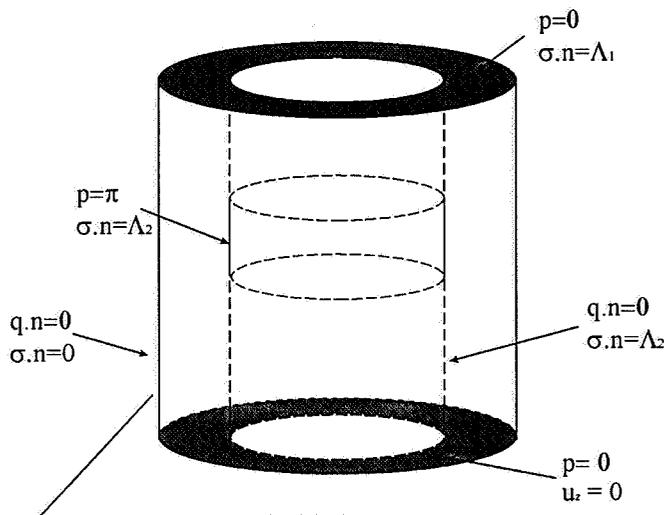


FIG. 3.2 – Configuration et conditions aux limites de l'exemple numérique.

pour tous les pas de temps. Pour des modélisations relativement lourdes, cela peut poser quelques problèmes de place mémoire. L'intégration temporelle du problème adjoint est implicite dans le temps rétrograde, donc explicite dans le temps physique. Numériquement elle est réalisée dans Cast3M à l'aide de la procédure pasapas et du modèle poreux. Certains auteurs conseillent d'utiliser la même discrétisation dans le temps physique pour les problèmes directs et adjoints. Néanmoins, si l'évolution des pas de temps est suffisamment détaillée, cette remarque ne doit pas poser de problème de précision. Le point le plus délicat est le calcul des intégrales du gradient. Plus que les intégrales en elles-mêmes, c'est le calcul des intégrandes qui pose problème. Une précision suffisante n'est obtenue que pour une discrétisation spatiale (et donc temporelle) fine.

3.3 Exemple numérique et comparaison

On montre sur un exemple numérique bidimensionnel la validité des méthodes de calcul du gradient de la fonctionnelle coût préalablement présentées.

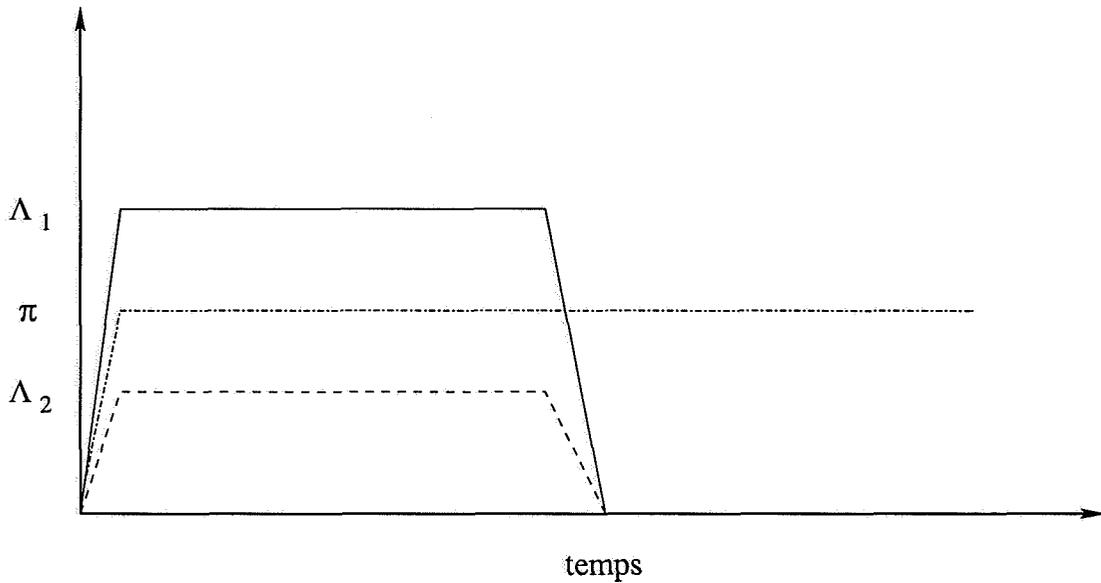


FIG. 3.3 – Evolution des contraintes Λ et pression de pore π appliquées.

3.3.1 Configuration

On considère un cylindre creux de rayon intérieur a et de rayon extérieur b (figure 3.2). Une partie de la surface intérieure est soumise à une pression constante $p = \pi$ durant l'intervalle de temps $[0, t_f]$. Les faces supérieures et inférieures sont drainées (pression de pore nulle). La surface extérieure et l'autre partie de la surface intérieure sont non drainées. Une pression mécanique interne variable au cours du temps est appliquée. De même une pression mécanique est appliquée sur la surface supérieure. L'évolution au cours du temps de ces pressions est donnée sur la figure 3.3.

La figure 3.5 montre l'évolution du déplacement vertical du plateau supérieur en rayon intérieur au cours du temps. On remarque la présence de déformations différées dues au drainage et au couplage poromécanique. Le débit sortant à travers la surface supérieure est reporté sur la figure 3.4. Les isovaleurs de contraintes représentées sur la figure 3.6 montrent le caractère bidimensionnel du problème.

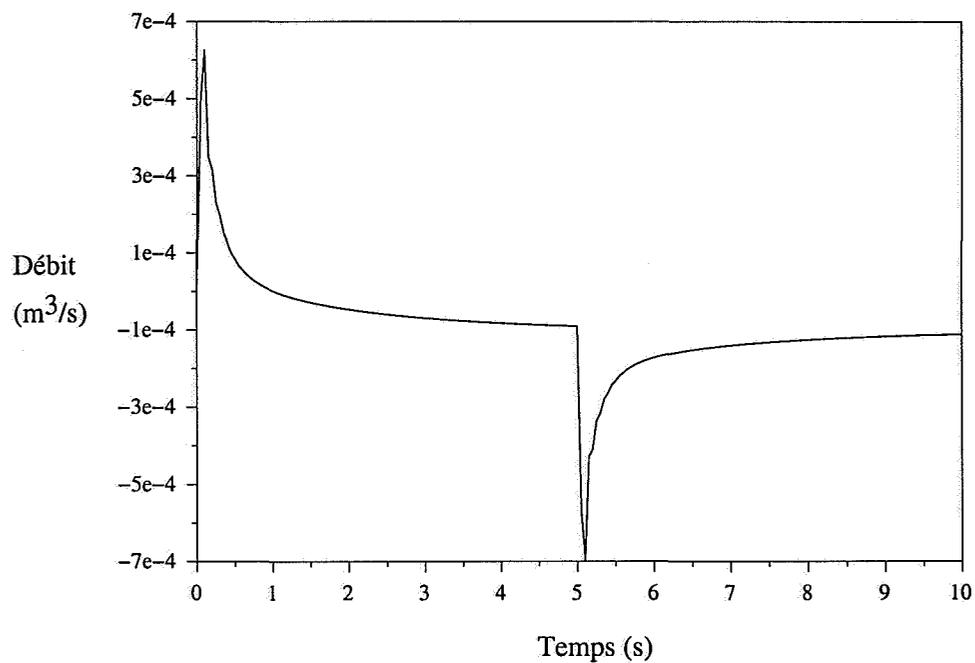


FIG. 3.4 – Evolution temporelle du débit sortant par la face supérieure.

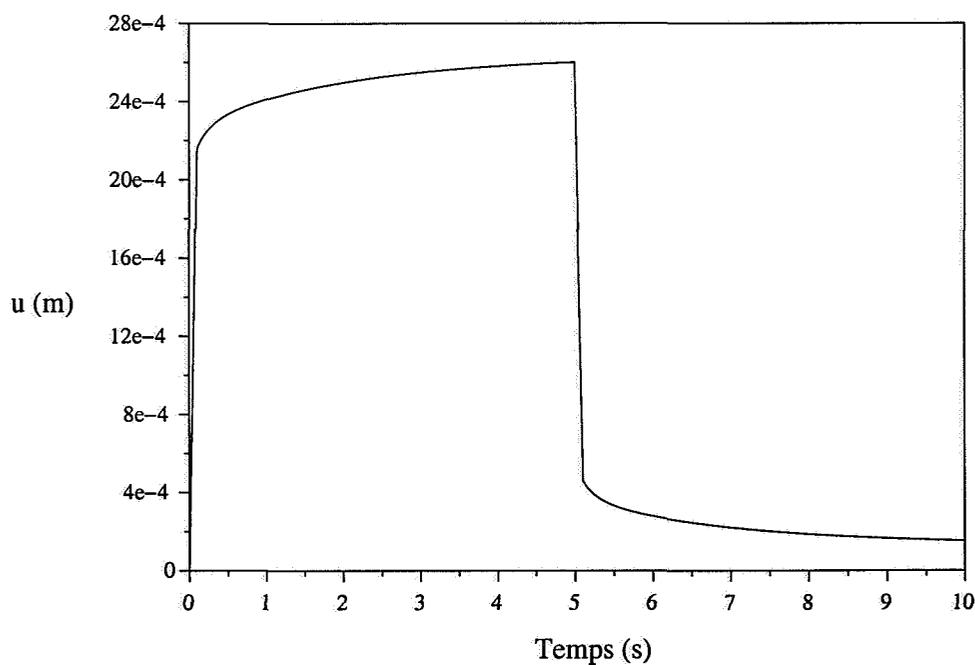


FIG. 3.5 – Evolution temporelle du déplacement vertical du plateau supérieur du cylindre creux.

3.3.2 Résultats

Comparaisons

Les résultats de la différentiation directe ont été comparés aux résultats obtenus par différence finie. L'approximation des sensibilités par différence finie pour les cinq paramètres nécessite la résolution de $5 + 1$ problèmes directs poroélastiques. Il en va de même dans le cas de la différentiation directe mais le couplage avec la résolution du problème direct fait gagner énormément de temps machine. La résolution du problème direct et des cinq problèmes différenciés a pris en moyenne seulement 1.2 fois le coût de la résolution du problème direct ! De plus, les résultats sont beaucoup plus stables que ceux obtenus par différence finie.

La figure 3.8 montre l'évolution de la sensibilité selon le module d'Young drainé du déplacement vertical au coin supérieur droit du maillage dans le cas d'un calcul par différentiation directe et différences finies. Les valeurs des quatre chiffres significatifs sont égales. Il en va de même selon les autres coefficients matériaux sauf selon la perméabilité. La sensibilité selon cette dernière étant tellement faible, le schéma différence finie n'arrive pas à l'estimer correctement (erreur d'arrondi numérique). On voit ici la supériorité de la méthode de différentiation directe qui donne un résultat dont la précision est celle du calcul direct. Les isovaleurs des sensibilités selon le module de Biot sur les contraintes sont représentées sur la figure 3.7. Des formes similaires sont observables selon les autres coefficients.

Les résultats du calcul adjoint ne sont pas très parlants par eux-mêmes. On a simplement vérifié que les valeurs des composantes du gradient étaient cohérentes avec les valeurs obtenues par une approximation de la dérivée par différences finies. Du point de vue du temps de calcul, le calcul adjoint prend autant de temps qu'un calcul direct. L'évaluation de la fonctionnelle coûte ainsi que le calcul des 5 composantes de son gradient coûte approximativement 2 problèmes direct. D'un point de vue numérique, cette méthode est également supérieure aux différences finies.

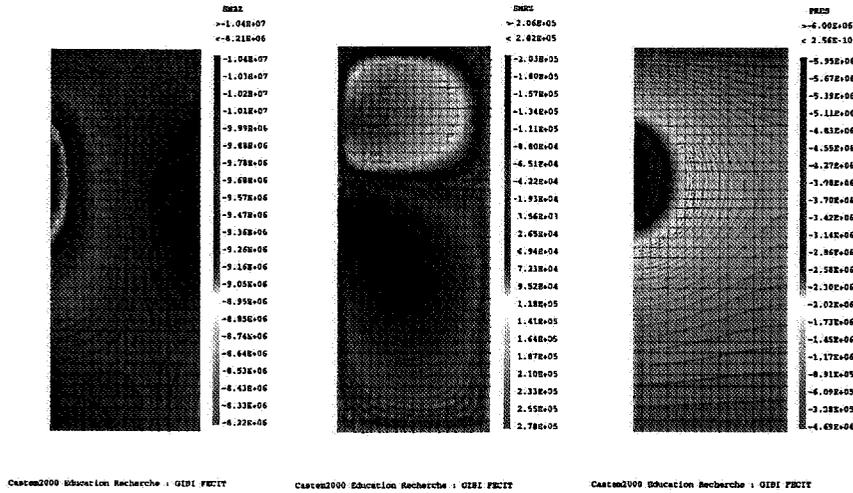


FIG. 3.6 – Isovaleurs de σ_{zz} , σ_{rz} , p au milieu du palier de charge.

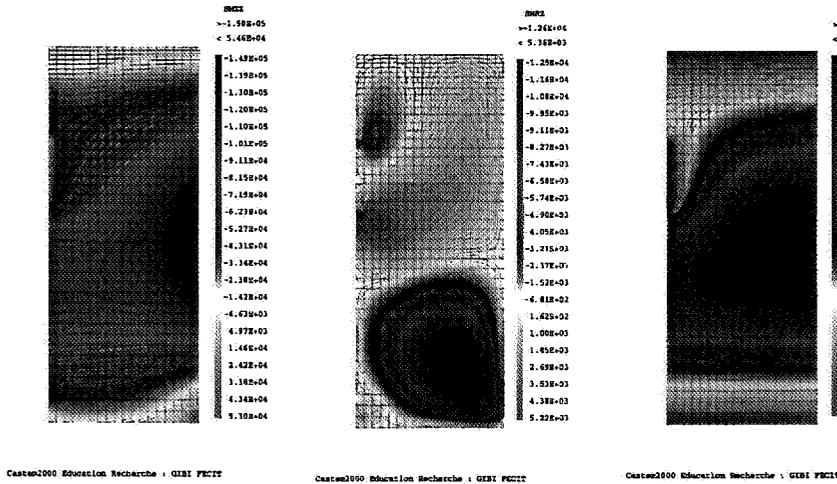


FIG. 3.7 – Isovaleurs de $\delta_M \sigma_{zz}$, $\delta_M \sigma_{rz}$, $\delta_M p$. au milieu du palier de charge. Modélisation axisymétrique.

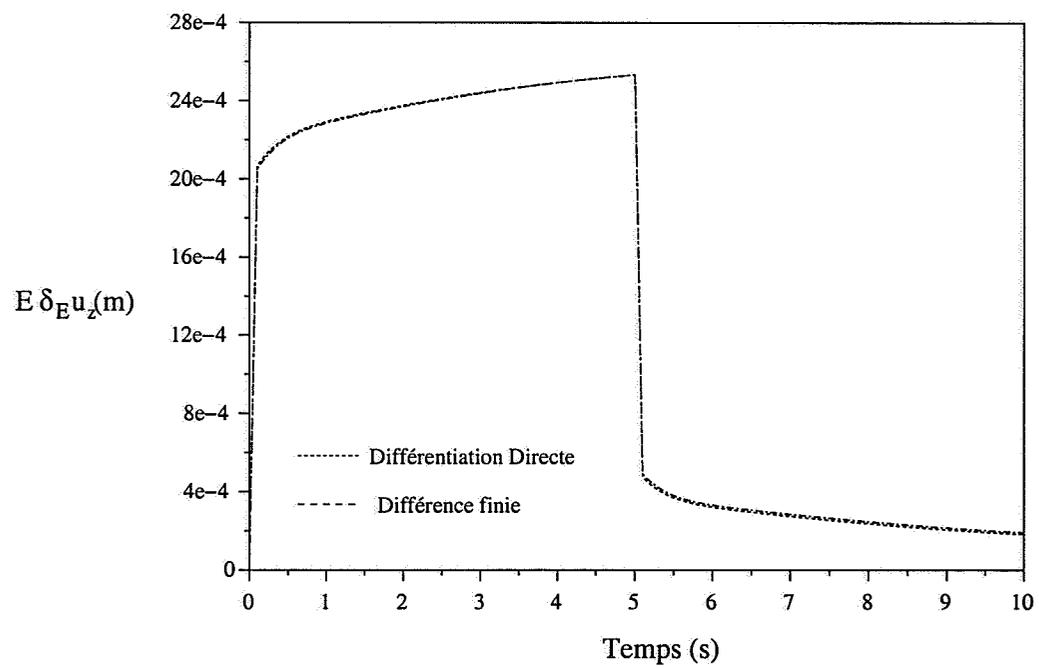


FIG. 3.8 – Evolution de la sensibilité sur le module d'Young du déplacement vertical, différence finie et différentiation directe.

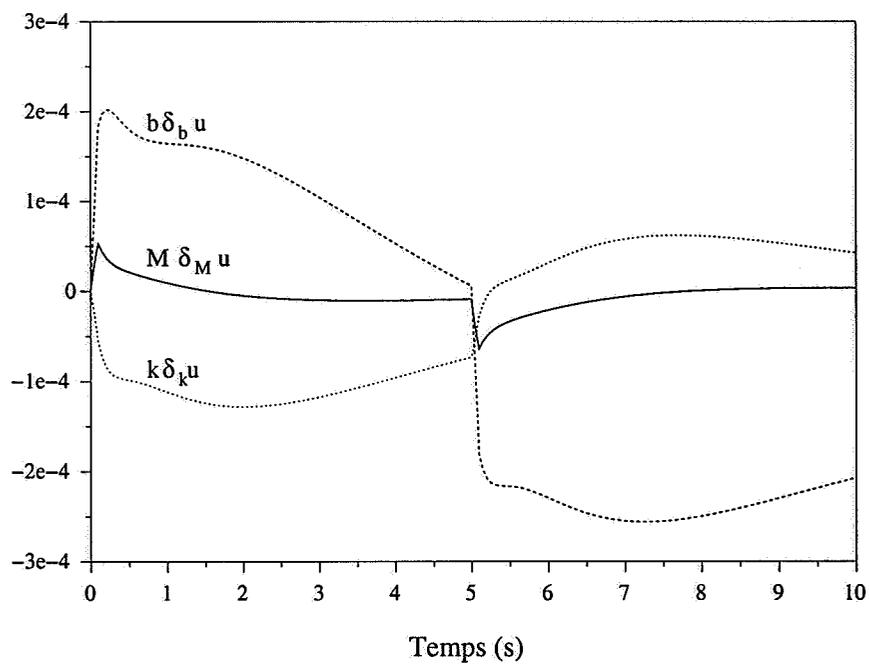


FIG. 3.9 – Evolution temporelle des coefficients de sensibilités sur le déplacement au bord supérieur extérieur du cylindre creux (calcul par différentiation directe).

Application

En guise d'application, une identification à partir de données simulées par un premier calcul direct a été réalisée. *Seule* la mesure du déplacement vertical moyen du plateau supérieur est utilisée lors de l'identification. On minimise une fonctionnelle du type moindres carrés définie comme suit :

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{sup}} \int_T (u_z(\mathbf{c}, t) - u_{zmes}(t))^2 dx dt \quad (3.40)$$

Les valeurs des paramètres choisis pour simuler les mesures sont les suivantes :

$$E = 4.5 \text{ GPa} \quad \nu = 0.2 \quad M = 30 \text{ MPa} \quad (3.41)$$

$$b = 0.658 \quad k = 3 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \cdot \text{Pa}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (3.42)$$

On se propose d'identifier sur la courbe de déplacement vertical le coefficient de Biot b , la conductivité hydraulique k et le module d'Young drainé E .

L'optimisation est effectuée par un algorithme avec gradient. Le gradient de la fonctionnelle est calculé soit par Différentiation Directe, soit par la méthode de l'Etat Adjoint. On pourra ainsi comparer les résultats de la minimisation fournis par les deux méthodes de calcul de sensibilités. Les algorithmes d'optimisation sont légèrement différents dans les deux cas. Un algorithme de Levenberg-Marquardt est utilisé lorsque les sensibilités sont calculées par différentiation directe (voir en annexe). Dans le cas d'un calcul du gradient par état adjoint, la fonctionnelle étant continue, un algorithme de type BFGS [48, 18] avec recherche linéaire d'Armijo est utilisé.

Les tableaux 3.1 et 3.2 présentent respectivement les résultats pour la différentiation directe et l'état adjoint. Dans le cas d'un calcul de gradient par différentiation directe, la convergence a toujours été atteinte en une quinzaine d'itérations avec une bonne précision. La figure 3.10 montre l'évolution des paramètres lors d'une optimisation réalisée par un algorithme de Levenberg-Marquardt avec un calcul de sensibilités par différentiation directe.

Les résultats obtenus à l'aide du calcul adjoint et de l'algorithme de BFGS sont légèrement moins précis (tableau 3.2). La convergence est beaucoup plus lente. Ceci provient sans doute d'une moins bonne précision dans le calcul du gradient par la méthode

	E GPa	k $10^{-10} m^2.Pa^{-1}.s^{-1}$	b
estimé	5.	0.1	0.2
identifié	4.5	0.2997471	0.6580478
estimé	2.	0.6	0.2
identifié	4.51	0.3292477	0.6859921
estimé	6.0	0.8	0.8
identifié	4.5	0.3003186	0.6585730
estimé	8.0	0.09	0.3
identifié	4.499	0.2986915	0.657082
optimum	4.5	0.3	0.658 :

TAB. 3.1 – Résultats de l'identification, utilisation de la différentiation directe

	E GPa	k $10^{-10} m^2.Pa^{-1}.s^{-1}$	b
estimé	5.	0.1	0.2
identifié	4.487	0.25835	0.65573
estimé	2.	0.6	0.2
identifié	4.512	0.34512	0.6654
estimé	6.0	0.8	0.8
identifié	4.485	0.3245	0.6734
estimé	8.0	0.09	0.3
identifié	4.49	0.2867	0.6578
optimum	4.5	0.3	0.658

TAB. 3.2 – Résultats de l'identification, utilisation de l'état adjoint

de l'état adjoint. Comme déjà mentionné, l'évaluation des intégrandes des différentes composantes du gradient (équation 3.40) est relativement délicate numériquement.

3.4 Conclusions

Les formulations des méthodes de différentiation directe et de l'état Adjoint ont été étendues au cas de la poroélasticité. L'implémentation numérique par éléments finis a été discutée et réalisée dans le code Cast3M. Un exemple numérique bidimensionnel a permis de valider numériquement ces deux méthodes.

Leur supériorité par rapport à la méthode des différences finies a été confirmée dans le cas de la poroélasticité : gain en temps de calcul, meilleure précision et stabilité des

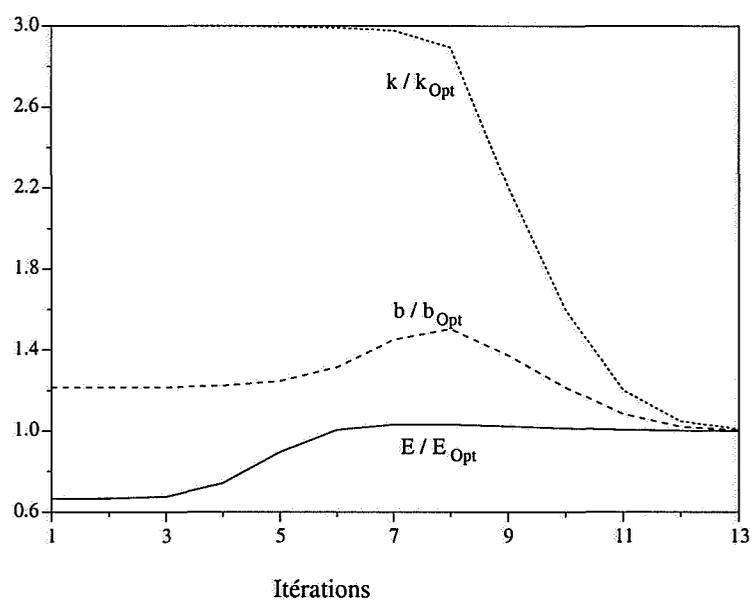


FIG. 3.10 – Convergence des paramètres vers la valeur optimale dans le cas d'un calcul du gradient par Différentiation Directe.

résultats obtenus. Une identification de certains coefficients poroélastiques à partir de mesures de déplacement (simulées) a été réalisée. Le calcul du gradient de la fonctionnelle coût est obtenue soit par la méthode de différentiation directe soit par celle de l'état adjoint. Dans les deux cas, les paramètres supposés ont toujours été retrouvés en une dizaine d'itérations avec une très bonne précision.

Chapitre 4

Identification à partir d'essais de laboratoire

Ce chapitre est consacré à l'identification des coefficients poroélastiques à partir d'essais effectués en laboratoire sur des éprouvettes cylindriques [68]. L'échantillon est supposé homogène et isotrope. On s'attache à résoudre le problème d'identification de certains coefficients poroélastiques à partir de la réponse à deux tests pratiquement réalisables sur des roches faiblement perméables : l'essai de compression isotrope drainé et l'essai dit du pulse test. Après une brève description du dispositif expérimental nécessaire à ce type d'essais, des solutions semi-analytiques approchées sont dérivées et validées permettant ainsi une résolution rapide des problèmes directs. Les sensibilités sont également obtenues semi-analytiquement. L'identification des coefficients poroélastiques est ensuite discutée sur la base de réponses simulées ainsi que de résultats expérimentaux sur des roches argileuses de Meuse Haute-Marne.

4.1 Description des essais

4.1.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental (voir figure 4.1) développé à G3S est constitué d'une presse monolithique MTS de grande rigidité à asservissement numérique Teststar.

L'échantillon cylindrique de roche est placé entre deux talons poreux dans une cellule triaxiale haute pression pouvant permettre un confinement de 100 MPa . La surface ra-

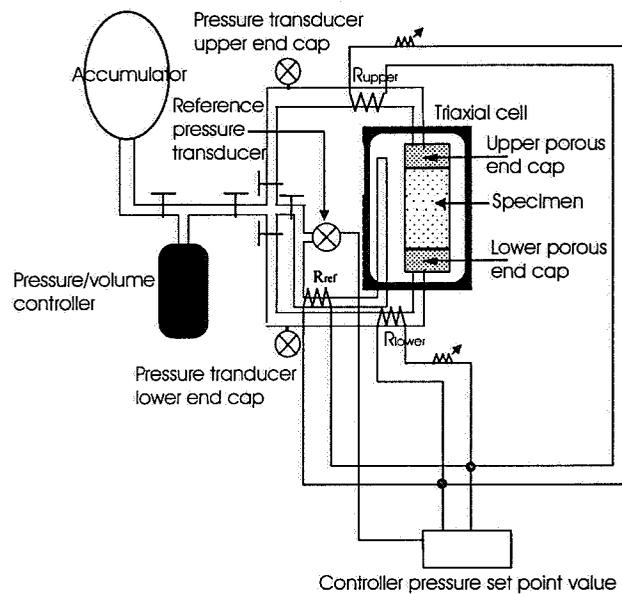


FIG. 4.1 – Dispositif expérimental G3S (d'après Malinsky et al. [79])

diale de l'échantillon est rendue imperméable à l'aide d'une jaquette. Les talons poreux permettent d'appliquer une pression de pore sur le haut et le bas de l'éprouvette. Chaque circuit hydraulique (haut et bas) est composé d'une tuyauterie de très petit volume munie d'un capteur de pression et relie au talon poreux spécialement développé et réalisé afin de minimiser la compressibilité des circuits de mesure et afin de rendre son comportement reproductible quelle que soit la valeur du chargement et de son histoire.

Un contrôleur de pression / volume GDS permet :

- d'appliquer indépendamment une pression de pore aux deux extrémités de l'éprouvette,
- de mesurer la quantité d'eau entrant ou sortant du système composé de l'échantillon, des deux talons poreux et des tuyaux.

Les déplacements mécaniques (changement de hauteur et de diamètre) sont mesurés par des extensomètres MTS placés directement sur l'échantillon l'intérieur de la cellule sous pression. L'extensomètre radial est placé à mi-hauteur.

Le système comporte également un circuit hydraulique de référence permettant de com-

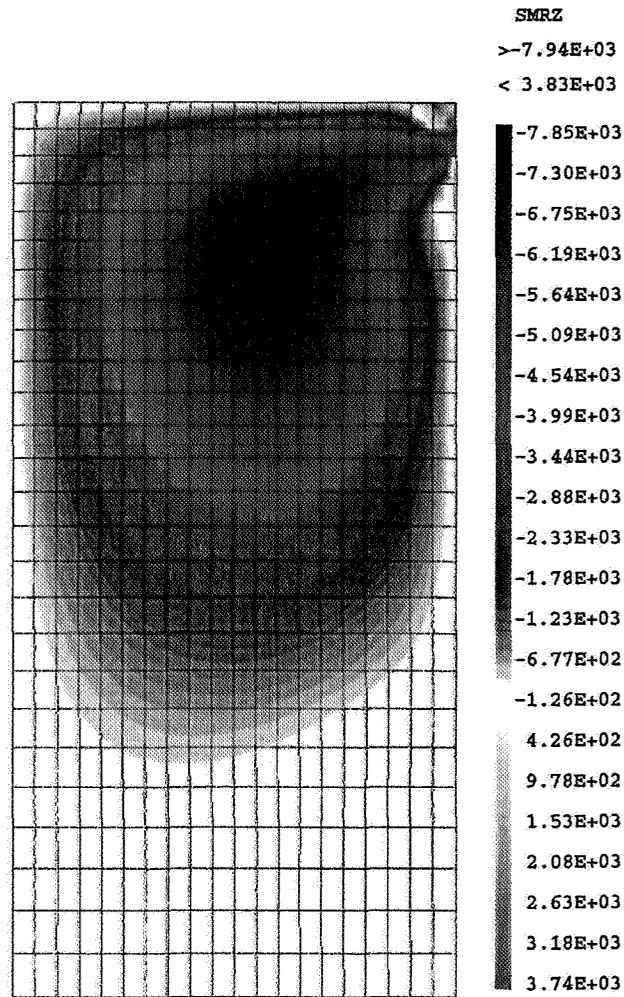
penser les variations thermiques. En effet, ces dernières peuvent entraîner des variations de pression de fluide dans le système de mesure (tuyaux) qui ne sont pas reliés au comportement de l'échantillon. Sans compensation, une variation de un degré implique une variation de pression de 1 MPa. Le circuit de référence (voir figure 4.1) comporte un système de chauffage (Rref) permettant de compenser les variations de pression liées aux fluctuations thermiques. Le système de régulation est réglé de façon à ce que le point de fonctionnement soit situé à quelques degrés au-dessus de la température ambiante moyenne. Une quantité d'énergie identique à celle nécessaire au maintien du circuit de référence à la pression initiale est envoyée dans le dispositif de chauffage (Rlower et Rupper) de chacun des deux circuits de mesure reliés aux extrémités de l'échantillon. Avec un tel dispositif, une variation de la température ambiante de cinq degrés ne produit aucune variation de pression de fluide dans le système de mesure. Ce qui est très important pour les Pulse tests.

4.1.2 Hypothèse d'un fort élancement

Les deux essais discutés ici s'effectuent sur des éprouvettes cylindriques $((r, z) \in [0, R] \times [0, L])$.

Dans le cas général, le couplage poroélastique ne permet pas d'obtenir des solutions analytiques pour ces configurations (Adachi et Detournay [2]). Les problèmes sont complètement bi-dimensionnels (voir figure 4.2). Cet effet est dû aux conditions aux limites sur la surface radiale de l'éprouvette : contrainte normale appliquée constante et flux hydraulique nul. Malgré la simplicité apparente de ces conditions aux limites, le couplage hydro-mécanique implique des champs de contraintes inhomogènes pendant la phase transitoire. Un champ de contraintes homogène isotrope est certes bien statiquement admissible mais le champ de déformation associé n'est pas compatible.

Adachi et Detournay [2] ont également montré que sous l'hypothèse d'un fort élancement cet effet poromécanique pouvait être négligé. La démonstration de cette hypothèse n'est pas reprise ici [1]. On dérive dans les deux cas (compression isotrope et pulse test) des solutions approchées sous l'hypothèse d'un fort élancement (faible rapport $m = R/L$). Ces solutions sont ensuite comparées à des simulations numériques bi-dimensionnelles couplées pour différents rapports de forme.



Castem2000 Education Recherche : GIBI FECIT

FIG. 4.2 – Isovaleur de la composante de cisaillement pendant la phase transitoire lors d'un essai de compression isotrope. Simulation axisymétrique Cast3M, le quart du cylindre est modélisé.

4.1.3 Compression isotrope

L'essai de compression isotrope drainé consiste à appliquer rapidement au temps initial une contrainte de confinement σ^1 :

$$\sigma_{zz} = \sigma H(t) \text{ en } z=L \text{ et } z=0 \quad (4.1)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma H(t) \text{ en } r=R \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

$H(t)$ représente la fonction d'Heavyside.

La surface latérale de l'échantillon reste non drainée tandis que le haut et le bas sont en conditions drainées.

$$p(z = L, t) = p(z = 0, t) = 0 \text{ pour tout } t \quad (4.4)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_r = 0 \text{ pour tout } t \text{ sur la surface radiale} \quad (4.5)$$

Un phénomène de consolidation dû au drainage et à l'effet poroélastique prend place induisant des déformations différées. Le déplacement vertical du plateau supérieur u_z est enregistré pendant la durée de l'essai ainsi que le déplacement radial u_r au centre de l'éprouvette.

Solution approchée

Au départ, l'échantillon est dans un état de contraintes et de pression de pore homogène. Cet état, même s'il n'est pas nul, peut être pris comme référence. Sous l'hypothèse d'un fort élanement, on obtient facilement de l'équation d'équilibre et des conditions aux limites, l'état de contraintes homogènes suivant :

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma H(t) \quad (4.6)$$

Le premier invariant du tenseur des contraintes vaut donc $3\sigma H(t)$. L'équation de diffusion contrôlant la dissipation de pression de pore [41] se réduit alors à une équation

¹La compression est prise ici positive

unidimensionnelle :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} - D \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -B\sigma\delta(t) \\ p(L, t) = p(0, t) = 0 \\ p(z, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

où $\delta(t)$ est la distribution de Dirac, B est le coefficient de Skempton [.]. La diffusivité D [L^2T^{-1}] est donnée par :

$$D = kM \frac{K}{K_u} \quad (4.8)$$

avec K et K_u les modules d'incompressibilités drainés et non drainés.

On utilise par la suite les variables adimensionnelles suivantes :

$$t^* = \frac{Dt}{L^2} \quad z^* = \frac{z}{L} \quad \Pi = \frac{p}{\sigma} \quad (4.9)$$

L'équation (5.17) possède un terme de source volumique instantanée, tandis que les conditions initiales et aux limites sont homogènes. La solution de ce problème peut être obtenue, après intégration, à partir de la solution de l'équation de diffusion unidimensionnelle dans un domaine fini avec une source ponctuelle instantanée. Ce problème a la forme suivante pour une source unité en $z = \xi$:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t^*} - \frac{\partial^2 h}{\partial z^{*2}} = \delta(t^*)\delta(z^* - \xi) \\ h(1, t^*) = h(0, t^*) = 0 \\ h(z^*, 0) = 0 \end{cases}$$

où h est l'inconnue scalaire. La solution de cette équation est connue (Carslaw et Jaeger [27], Zauderer [109]). Deux formes existent ; l'une (4.10) pour les temps courts ($t^* < 1$) , l'autre (4.11) pour les temps longs par rapport au temps caractéristique ($t^* > 1$).

$$h(z^*, t^*; \xi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2\pi^2 t^*) \sin(n\pi z^*) \sin(n\pi \xi) \quad (4.10)$$

$$h(z^*, t^*; \xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^*}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(z^* - \xi - 2n)^2}{4t^*}\right) - \exp\left(-\frac{(z^* + \xi - 2n)^2}{4t^*}\right) \right) \quad (4.11)$$

Dans notre cas, on a utilisé la solution (4.10) qui a toujours donné de très bons résultats. Une dizaine de termes au maximum sont nécessaires à une bonne convergence de la série. Les résultats sont équivalents à ceux donnés par la solution (4.11), ceci même aux temps relativement courts ($t^* < 0.1$). Comme la condition initiale est connue, on ne calcule évidemment pas la solution analytique pour $t = 0$; la convergence de la série n'étant, en cet instant, atteignable qu'avec une infinité de termes.

La solution de notre problème (5.17) est obtenue en intégrant la solution de l'équation précédente pour un terme de source ξ entre 0 et L :

$$\Pi(z^*, t^*) = -B \int_0^1 h(z^*, t^*; \xi) d\xi = -BK(z^*, t^*) \quad (4.12)$$

avec la forme suivante de $\mathcal{K}(z, t)$ après intégration de (4.10) :

$$\mathcal{K}(z^*, t^*) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 t^*) \sin(n\pi z^*) \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi}{n} \right) \quad (4.13)$$

Déplacements, volume sortant La loi de comportement poroélastique, exprimée en coordonnées cylindriques, permet ensuite d'obtenir les déplacements à partir des contraintes et de la pression de pore :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z^*} = \frac{\sigma}{3K} (1 + b\Pi(z^*, t^*)) \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \frac{\sigma}{3K} (1 + b\Pi(z^*, t^*)) \quad (4.15)$$

Sachant que le déplacement vertical u_z est nul en $z^* = 0$, on obtient, après intégration selon z^* , le déplacement vertical du plateau supérieur de l'éprouvette. C'est cette valeur du déplacement qui est mesurée expérimentalement ainsi que la valeur du déplacement radial au milieu de l'éprouvette. On exprime ces déplacements en fonction du jeu de paramètres K , K_u et D , sachant que $Bb = \frac{K_u - K}{K_u}$:

$$\frac{u_z(1, t^*)}{L} = \frac{\sigma}{3K} \left(1 - \frac{K_u - K}{K_u} \mathcal{I}(1, t^*) \right) \quad (4.16)$$

$$\frac{u_r(1/2, t^*)}{R} = \frac{\sigma}{3K} \left(1 - \frac{K_u - K}{K_u} \mathcal{K}(1/2, t) \right) \quad (4.17)$$

où $\mathcal{I}(1, t^*) = \int_0^1 \mathcal{K}(\xi, t^*) d\xi$ est donnée par la série suivante :

$$\mathcal{I}(1, t^*) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 t^*) \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi}{n} \right)^2 \quad (4.18)$$

Aux temps courts, on a $\mathcal{I}(1, 0) = \mathcal{K}(1, 0) = 1$. Les déplacements sont donnés par la solution non drainée : $\frac{u_z(1, 0)}{L} = \frac{u_r(1/2, 0)}{R} = \frac{\sigma}{3K_u}$. Pour les temps long, les séries $\mathcal{I}(1, t^*)$ et $\mathcal{K}(1/2, t)$ tendent vers zéro, on retrouve la solution drainée $\frac{u_z(1, t \rightarrow +\infty)}{L} = \frac{u_r(1/2, t \rightarrow +\infty)}{R} = \frac{\sigma}{3K}$

Dans certains cas, il est possible de mesurer le volume d'eau sortant de l'échantillon par les faces supérieures et inférieures. Soit :

$$V(t) = \int_0^t \int_{\Gamma_{sup}} -k \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=L} d\Gamma dt \quad (4.19)$$

En ramenant ce volume à celui de l'éprouvette, l'expression prend la forme suivante :

$$\mathcal{V}(t^*) = \frac{V(t^*)}{\pi R^2 L} = \frac{b\sigma}{K} \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \exp(-n^2 \pi^2 t^*)) \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi}{n} \right) \frac{\cos(n\pi)}{n} \quad (4.20)$$

Validité de la solution

Il convient de vérifier la validité de la solution approchée pour différents rapports de forme m . Il est notamment important de vérifier que pour le rapport utilisé expérimentalement ($m = 0.25$), la solution approchée est suffisamment satisfaisante pour se passer du calcul éléments finis lors de l'identification. Ce dernier est effectivement beaucoup plus long que l'estimation des séries de la solution semi-explicite (2 minutes contre seulement quelques dixièmes de secondes).

L'essai de compression isotrope a été modélisé numériquement avec Cast3M. Plusieurs modélisations bidimensionnelles axisymétriques pour différents rapports m ont été réalisées avec Cast3M. Les paramètres matériau utilisés sont les suivants :

$$K = 6. GPa \quad K_u = 7.1 GPa \quad M = 4. GPa \quad D = 0.7 \cdot 10^{-3} m^2 \cdot s^{-1} \quad \mu = 2. GPa$$

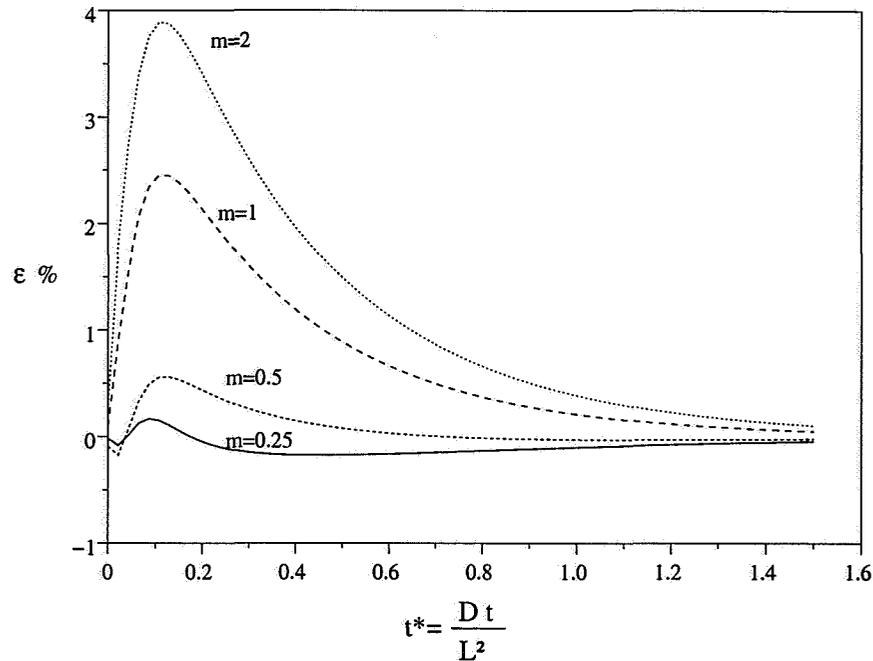


FIG. 4.3 – Erreur relative sur le déplacement vertical entre la solution analytique et le calcul par éléments finis pour différents rapports de forme $m = R/L$.

Le maillage est modifié pour chaque valeur de $m = R/L$ afin d'obtenir une précision optimale. La figure 4.3 montre la différence relative entre la solution approchée et le calcul par éléments finis. On remarque que cette différence n'est significative que lors de la phase transitoire, l'effet de cisaillement disparaissant aux temps longs. La solution numérique tend alors vers la réponse drainée classique (état de contraintes et déformations homogènes).

L'effet de la composante de cisaillement est quasiment négligeable pour les rapports de forme utilisés dans la pratique. Pour $m = 0.25$, l'erreur relative est au maximum de 1%. Cette différence dépend bien entendu de la valeur du coefficient de cisaillement μ (composante σ_{rz} non nulle). Toutefois, plusieurs calculs avec des valeurs différentes de μ n'ont pas montré d'influence majeure. Cette comparaison avec un calcul numérique bidimensionnel justifie l'utilisation de la solution analytique approchée lors de l'identification.

4.1.4 Pulse Test

L'essai du Pulse test est utilisé pour identifier la perméabilité et le coefficient d'emmagasinement d'un matériau poreux (Brace et al. [23], Hsieh et al. [56], Coste et al. [36]). Contrairement aux essais hydrauliques à débit constant, il est de nature transitoire. La méthode consiste à appliquer, de manière instantanée, une pression de fluide en haut et en bas d'une éprouvette cylindrique à partir d'un réservoir inévitablement déformable. L'évolution des pressions dans le réservoir est ensuite enregistrée. La pression d'équilibre finale entre le réservoir et l'échantillon dépend de l'emmagasinement de ce dernier ainsi que de la raideur du réservoir. Cet essai est l'un des seuls envisageable dans le cas de roches très faiblement perméables. La mesure précise des débits sortant de l'échantillon est en effet très délicate écartant ainsi l'utilisation des méthodes classiques (à débit constant).

Le pulse test, d'abord développé par des hydrogéologues, est classiquement interprété sans couplage hydro-mécanique. Or celui-ci peut être dans certains cas relativement fort et induire des contraintes inhomogènes dans l'échantillon [2]. Comme précédemment pour l'essai de compression isotrope, l'effet du cisaillement dû au couplage devient négligeable pour des rapports $m = R/L$ suffisamment petits. Sous cette hypothèse, on se ramène à la solution maintenant classique de Hsieh et al. [56]. Après un rappel des conditions aux limites du test, la solution approchée est dérivée dans le cadre de la théorie de la poroélasticité, à savoir que l'emmagasinement ainsi que la diffusivité de la roche sont reliés aux paramètres poroélastiques.

Description du pulse test

Conditions aux limites et initiales L'échantillon est classiquement sous une pression de confinement isotrope σ maintenue constante pendant la durée de l'essai. Initialement à $t = 0$, les contraintes et la pression de fluide sont homogènes dans l'échantillon (état de référence).

Les conditions aux limites hydrauliques s'écrivent :

- Flux nul sur les côtés de l'éprouvette à tout instant,

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_q$$

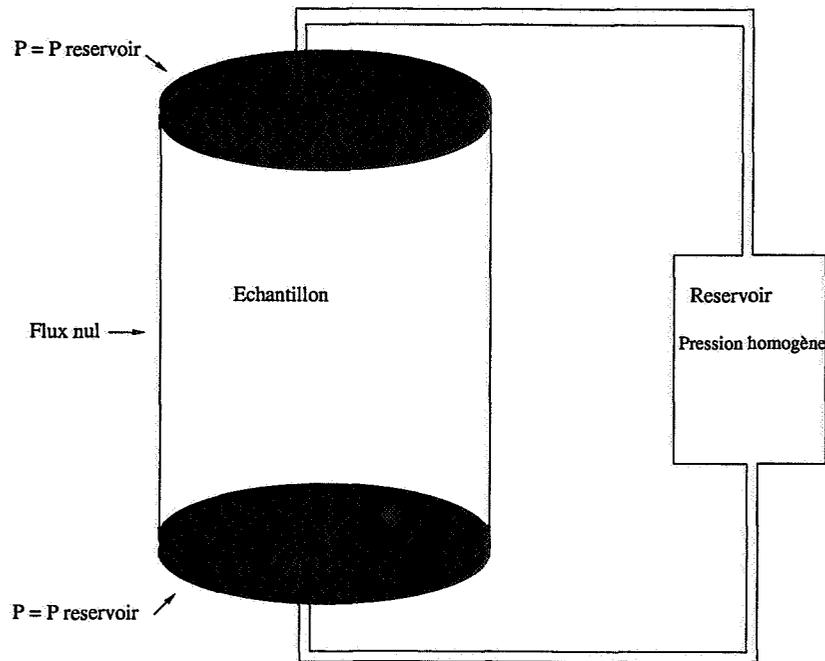


FIG. 4.4 – Schéma du dispositif du pulse test.

- La pression de fluide sur la frontière Γ_{re} entre le réservoir et l'éprouvette est égale à la pression de fluide dans le réservoir p_r . Cette dernière étant homogène, la pression de fluide sur Γ_{re} ne varie pas spatialement :

$$p(\mathbf{r}, t) = p_r(t) \text{ sur } \Gamma_{re} \text{ à tout instant}$$

A l'instant initial $t = 0$, la pression dans le réservoir est imposée à la valeur p_0 dite pression d'injection.

Evolution de la pression dans le réservoir La conservation de la masse fluide dans le réservoir implique que le débit entrant dans celui-ci à l'instant t est égal à la variation de masse fluide par unité de temps :

$$\frac{\partial \zeta_r}{\partial t} = \int_{\Gamma_{re}} -\mathbf{k} \nabla p(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (4.21)$$

$\zeta_r = \frac{m_r}{\rho_{fl}}$ représente le volume total de fluide contenu dans le réservoir. Le comportement du réservoir, supposé linéaire, donne une relation entre le volume de fluide contenu

dans celui ci et la pression p_r qui y règne :

$$\zeta_r = \frac{1}{C_r} p_r$$

C_r est la raideur du réservoir ($[ML^{-5}T^{-1}]$).

Au final, on peut donc réécrire la condition sur la frontière réservoir/échantillon Γ_{re} comme suit :

$$\int_{\Gamma_{re}} -\mathbf{k}\nabla p(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \frac{1}{C_r} \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (4.22)$$

$$p(\mathbf{r}, t) = p(t) \text{ sur } \Gamma_{re} \quad (4.23)$$

On remarque que même si $p(\mathbf{r}, t)$ est homogène sur la frontière Γ_{re} rien n'assure que $\nabla p(\mathbf{r}, t)$ le soit. L'effet des contraintes inhomogènes dues au couplage poroélastique peut jouer sur le gradient de pression pour des grands rapports de forme m . Le problème est donc bi-dimensionnel pendant la phase transitoire.

D'un point de vue numérique, la difficulté de la résolution du Pulse Test provient de la condition aux limites peu classique sur Γ_{re} venant du comportement du réservoir (4.22). On peut utiliser soit un schéma d'intégration temporelle explicite soit implicite². Lors de la comparaison avec la solution approchée, par simplicité, on a choisi un schéma explicite en utilisant des pas de temps suffisamment petits pour respecter les conditions de stabilité du schéma.

²Dans le cas d'un schéma explicite, l'implémentation est simple. Il suffit de calculer la nouvelle pression dans le réservoir à la fin du pas de temps et de l'appliquer sur la frontière Γ_{re} lors du prochain pas :

$$p(t_{n+1}) = p(t_n) + C_r \Delta t \int_{\Gamma_{re}} -\mathbf{k}\nabla p(\mathbf{x}, t_n) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (4.24)$$

Cette pression est alors homogène sur Γ_{re} (equation (4.23) satisfaite).

Dans le cas d'un schéma implicite, on a sur Γ_{re} les condition aux limites suivantes :

$$\int_{\Gamma_{re}} -\mathbf{k}\nabla p(\mathbf{x}, t_{n+1}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \frac{p(t_{n+1}) - p(t_n)}{C_r \Delta t} \quad (4.25)$$

$$p(\mathbf{x}, t_{n+1}) = p(t_{n+1}) \quad (4.26)$$

L'implémentation de ce schéma est en quelque sorte plus complexe, on doit utiliser une relation liant les valeurs de la pression aux noeuds sur Γ_{re} pour satisfaire la deuxième condition. La première équation est résolvable par un schéma itératif en incorporant le débit dans le résidu.

Solution approchée semi-explicite et comparaison

Sous l'hypothèse d'un élanement suffisant ($m \ll 1$), le problème devient unidimensionnel. Le terme de source disparaît dans l'équation de diffusion : les contraintes appliquées ne variant pas pendant le test, la contrainte moyenne reste nulle. Le problème se ramène à celui résolu par Hsieh et al. [56] pour des conditions aux limites légèrement différentes. Dans notre configuration, le haut et le bas de l'éprouvette sont connectés à un même réservoir. Tenant compte de cette symétrie, on applique une condition de flux nul en $z = L/2$. La solution est facilement obtenue à l'aide de la transformée de Laplace.

On utilise les mêmes variables adimensionnelles que précédemment. Mais cette fois ci la pression de pore est normée par la pression d'injection p_0 :

$$t^* = \frac{Dt}{L^2} \quad z^* = \frac{z}{L} \quad \Pi = \frac{p}{p_0}$$

On introduit également le nombre adimensionnel suivant :

$$\gamma = \frac{MK}{C_r K_u \pi R^2 L} \quad (4.27)$$

Ce coefficient γ intervient dans la condition aux limites au niveau du réservoir (forme unidimensionnelle de l'équation (4.22)). L'équation de diffusion et les conditions aux limites (4.22) se simplifient pour donner le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial t^*} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^{*2}} = 0 \\ \gamma \frac{d\Pi}{dt^*} - \frac{\partial \Pi}{\partial z^*} = 0 \text{ en } z^* = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z^*}(1/2, t^*) = 0 \\ p(0, 0) = 1 \end{cases} \quad (4.28)$$

avec la condition initiale $\Pi(z^*, 0) = 0$.

La solution dans l'espace de Laplace de la pression est donnée par :

$$\bar{\Pi}(z^*, s) = \frac{\gamma \cosh(\sqrt{s}(1/2 - z^*))}{\gamma s \cosh\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right) + \sqrt{s} \sinh\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right)} \quad (4.29)$$

Aucune expression analytique simple n'existe pour la transformée inverse de cette fonction. L'inversion se fera donc numériquement en utilisant l'algorithme de Sthefest [28].

Cet algorithme donne de très bons résultats pour l'inversion de fonction réelles. Hsieh et al. [56] ont inversé analytiquement une fonction similaire en utilisant le théorème des résidus, mais la série de Laurent obtenue est plus complexe à programmer que l'algorithme de Sthefest.

A l'aide d'un simple bilan de masse fluide entre l'état initial et l'infini, il est aussi possible d'obtenir la forme analytique de la pression asymptotique d'équilibre entre le réservoir et l'échantillon poroélastique (voir Coste et al. [36]) :

$$\lim_{t^* \rightarrow \infty} \Pi = \frac{2\gamma}{2\gamma + 1} \quad (4.30)$$

Validité de la solution

Comme dans le cas de la compression isotrope, il convient de comparer la solution semi-explicite approchée précédente avec la solution numérique obtenue avec Cast3M pour différents rapports de forme m . Le jeu de paramètres matériaux est le même que précédemment. L'erreur est plus importante dans la phase transitoire que dans le cas de la compression isotrope (voir figure 4.5). La différence pour le rapport de forme expérimental ($m = 0.25$) reste tout à fait acceptable (1% maximum).

4.2 Identification

L'identification des coefficients poroélastiques intervenant dans la réponse des deux tests est maintenant discutée. La résolution est effectuée à l'aide des solutions approchées préalablement décrites. Seul le coefficient de cisaillement n'est pas identifiable, car n'intervenant pas dans ces solutions. Le problème est d'abord étudié du point de vue de son unicité et de sa stabilité. L'identification à partir de données réelles est ensuite réalisée.

4.2.1 Identifiabilité et stabilité

Dans cette partie, les mesures sont simulées par un premier calcul direct puis éventuellement perturbées par un bruit blanc. Elles vérifient donc, à une perturbation près, le modèle choisi.

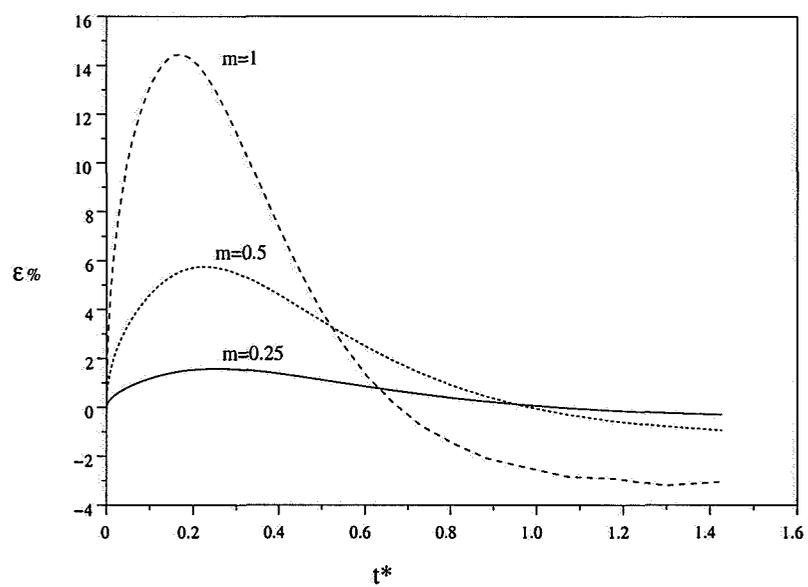


FIG. 4.5 – Erreur relative sur la pression dans le réservoir entre la solution analytique et le calcul par éléments finis bi-dimensionnel pour différents rapport $m = R/L$.

Unicité

Connaissant les solutions semi-analytiques des problèmes directs, il est possible de prouver pour ces configurations particulières l'unicité de certains coefficients matériaux. La réponse en déplacement (u_r et u_z) à l'essai de *compression isotrope* (équations (4.17)) dépend de trois paramètres indépendants : $\left(\frac{\sigma}{K}, \frac{K_u}{K}, \frac{D}{L^2}\right)$. La longueur de l'échantillon L et la charge σ étant connues, l'enregistrement de la réponse à tout instant t permet d'obtenir les trois constantes matériau K , K_u et D .

Le problème d'identification sur le déplacement axial est de trouver $\mathbf{c} = (K, K_u, D)$ tel que :

$$\frac{u_z}{L}(t; \mathbf{c}) = \frac{u_{zmes}}{L}(t) \quad \forall t \quad (4.31)$$

Il est strictement équivalent d'identifier les paramètres suivants $\mathbf{c} = (\alpha = \frac{\sigma}{3}K, \beta = 1 - \frac{\sigma}{3K_u}, D)$. Ce qui permet de mettre $\frac{u_z}{L}$ sous la forme suivante :

$$\frac{u_z}{L}(t; (\alpha, \beta, D)) = \alpha + \beta \mathcal{I} \left(\frac{Dt}{L^2} \right)$$

L'utilisation de ce jeu de paramètres permet de démontrer le résultat d'identifiabilité suivant :

$$\delta \mathbf{c} = \mathbf{0} \iff \frac{u_z}{L}(t; \mathbf{c} + \delta \mathbf{c}) = \frac{u_z}{L}(t; \mathbf{c}) \quad \forall t \quad (4.32)$$

La première partie de cette équivalence est triviale. La réciproque se démontre comme suit. En supposant $\frac{u_z}{L}(t; \mathbf{c} + \delta \mathbf{c}) = \frac{u_z}{L}(t; \mathbf{c})$ pour tout temps, on obtient le système suivant sur les perturbations $(\delta \alpha, \delta \beta, \delta D)$:

$$\delta \alpha + \beta \left(\mathcal{I} \left(\frac{(D + \delta D)t}{L^2} \right) - \mathcal{I} \left(\frac{Dt}{L^2} \right) \right) + \delta \beta \mathcal{I} \left(\frac{(D + \delta D)t}{L^2} \right) = 0 \quad \forall t$$

Si tous les instants sont utilisés lors de l'identification, connaissant la forme de $\mathcal{I} \left(\frac{Dt}{L^2} \right)$ (4.18), la seule solution de ce système surdéterminé est $\delta \alpha = \delta \beta = \delta D = 0$. Ce qui montre la réciproque de (4.32). Le même résultat est démontrable sur le déplacement radial.

En pratique la réponse n'est enregistrée que pour un nombre restreint d'instant. Le système précédent (même surdimensionné) peut alors dans certains cas avoir une solution

au sens des moindres carrés. Néanmoins, dans le cas où la réponse est bien échantillonnée et cohérente avec le modèle, ce résultat assure l'unicité de l'identification.

Si le volume d'eau sortant de l'échantillon est enregistré (équation (4.20)), il est alors possible d'identifier la diffusivité D ainsi que le coefficient $b\frac{\sigma}{K}$. Un résultat d'identifiabilité similaire au précédent peut également être dérivé. La charge étant connue, on peut identifier $\frac{b}{K}$. Si les déformations et le volume sortant sont mesurés, on voit qu'il est possible d'identifier quatre paramètres poroélastiques indépendants (K, K_u, D, b).

Dans le cas du *pulse test*, deux paramètres $\frac{D}{L^2}$ et γ contrôlent l'évolution de la pression dans le réservoir. On peut également prouver l'identifiabilité de γ et de la diffusivité D à partir de la solution en transformée de Laplace (4.29), la connaissance de la réponse à tout instant étant équivalente à sa connaissance pour tout s dans l'espace de Laplace. De plus, si la compressibilité du réservoir est connue, il est possible de déterminer $M\frac{K}{K_u}$ d'après l'expression de γ (4.27).

Méthode d'identification, résultats

Même si les solutions analytiques sont connues, leurs formes ne permettent pas d'obtenir directement un système linéaire pour identifier les coefficients matériaux. L'identification s'effectue donc par minimisation d'une fonctionnelle coût de type moindres carrés : on résout au mieux l'équation (4.31) au sens de la norme L^2 . L'optimisation est réalisée à l'aide d'un algorithme de Levenberg-Marquardt. Les sensibilités des réponses selon les différents paramètres matériaux sont dérivées à partir des solutions analytiques. Dans le cas du *pulse test*, leur expression est calculée dans l'espace de Laplace et inversée numériquement.

La figure 4.6 montre l'évolution temporelle des coefficients de sensibilité du déplacement axial selon les trois paramètres (K, K_u, D) lors d'un essai de compression isotrope. Il est intéressant de noter qu'on retrouve le fait qu'initialement la réponse n'est pas sensible au module drainé, qu'aux temps longs la sensibilité selon ce dernier devient maximale alors que celle selon le module non drainé devient nulle. La sensibilité sur la diffusivité est évidemment maximum pendant la phase transitoire. Dans le cas du *pulse test*, la sensibilité sur la diffusivité est aussi maximum pendant la phase transitoire. La sensibilité selon γ augmente de 0 à une valeur constante.

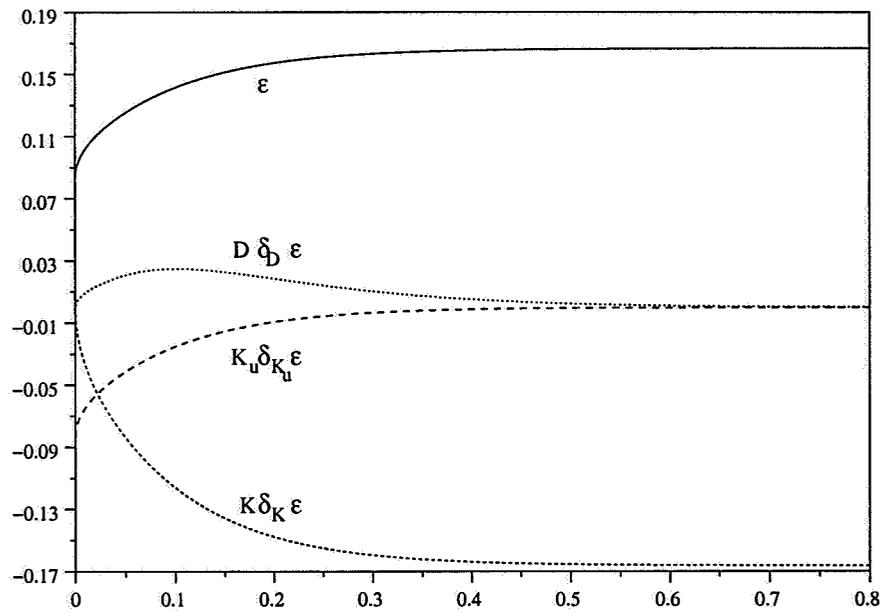


FIG. 4.6 – Déplacement axial et coefficient de sensibilités selon K , K_u et D de ce même déplacement lors d'une compression isotrope.

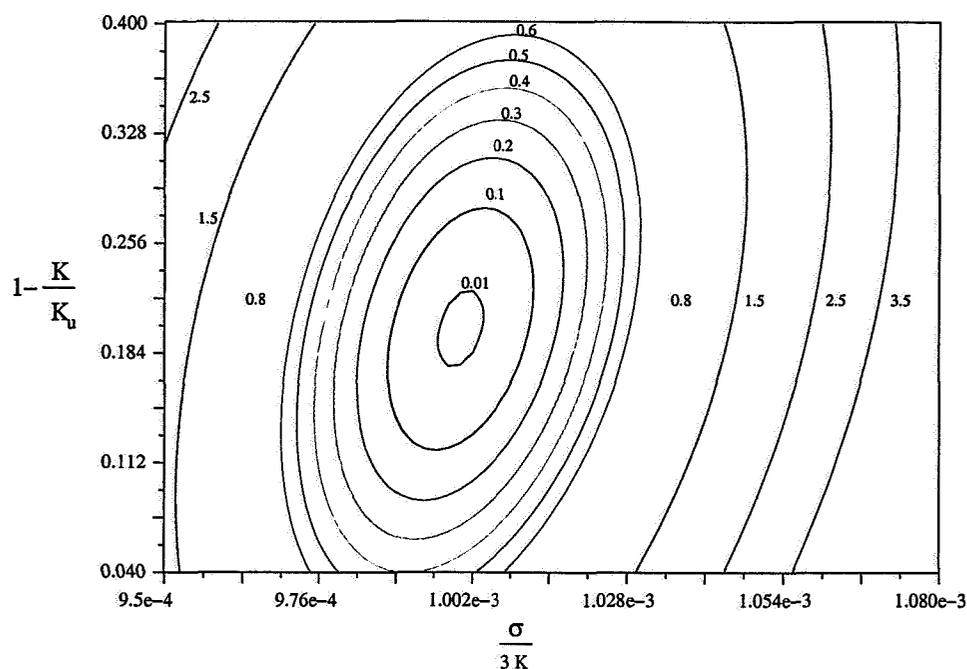


FIG. 4.7 – Isovaleurs de la fonctionnelle coût dans le plan $\left(\frac{K}{K_u}, \frac{\sigma}{3K}\right)$ pour l'essai de compression isotrope drainée avec enregistrement du déplacement axial.

Le fait que les coefficients de sensibilité évoluent d'une manière différente aux cours des tests indique que les réponses contiennent des informations indépendantes sur les différents paramètres.

Les résultats d'unicité précédemment évoqués n'impliquent pas forcément que la fonctionnelle coût soit convexe. Dans le cas d'une réponse simulée, la figure 6.12 montre les isovaleurs de \mathcal{J} pour des mesures de la déformation axiale dans le plan $\left(\frac{\sigma}{K}, \frac{K_u - K}{K_u}\right)$. La même forme est observable dans les autres plans. On remarque que la fonctionnelle a une forme convexe, ce qui assure la convergence de l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Il en va de même pour le Pulse test.

Les résultats de l'identification pour les deux essais sont présentés dans les tableaux 4.1 (pulse test) et 4.2 (compression isotrope). La valeur optimale des paramètres utilisées pour simuler la réponse expérimentale est toujours retrouvée en quelques itérations avec une très bonne précision, ceci quelle que soit la valeur de départ.

	γ	D	\mathcal{J}	$\ \nabla\mathcal{J}\ $
initial	5.	5.	2.20025	
final	1.5	1.0	$1.846 \cdot 10^{-15}$	$5.274 \cdot 10^{-9}$
initial	0.1	0.1	24.64541	
final	1.49999	1.	$2.678 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$
initial	0.1	5.	35.732	
final	1.49999	1.	$8.597 \cdot 10^{-15}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$
initial	5.	0.1	3.65	
final	1.5	1.	$1.883 \cdot 10^{-15}$	$3.7 \cdot 10^{-8}$
optimum	1.5	1		

TAB. 4.1 – Pulse test, réponse simulée, résultats de l'identification pour différents estimés de départ.

	$K \text{ GPa}$	$K_u \text{ GPa}$	$D \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	\mathcal{J}	$\ \nabla\mathcal{J}\ $
initial	1.	10.	0.1	2.75907	
final	2.99999	4.9999	0.3	$4.548 \cdot 10^{-13}$	$7.855 \cdot 10^{-7}$
initial	1.	10.	1.	9.502	
final	3.	5.	0.3	$8.105 \cdot 10^{-12}$	$1.627 \cdot 10^{-8}$
initial	10.	10.	1.	1.0098	
final	2.9999	4.9999	0.29999	$6.305 \cdot 10^{-12}$	$5.589 \cdot 10^{-7}$
initial	0.1	1.	1.	1937.04	
final	2.9997	4.9996	0.3	$1.564 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$
initial	0.1	1.	0.01	86.33	
final	3.0000414	4.9997	0.2999	$8.238 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-5}$
initial	10.	100.	0.1	1.4055741	
final	3.	5.	0.2999	$2.794 \cdot 10^{-14}$	$1.737 \cdot 10^{-7}$
initial	10.	50.	10.	1.0136353	
final	3.	5.	0.3	$2.165 \cdot 10^{-18}$	$5.365 \cdot 10^{-10}$
optimum	3.	5	0.3		

TAB. 4.2 – Résultats de l'identification à partir de réponse simulée sur la compression isotrope pour différents points de départ.

Bruit (%)	γ	$D \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	\mathcal{J}	ϵ_s (%)	$C_{\gamma D}$
0	1.5	1.	$1.883 \cdot 10^{-15}$	0.	0.51
5	1.488687	0.9367344	0.01255	3.56	0.52
10	1.5217027	1.0922701	0.0443	5.25	0.49

TAB. 4.3 – Effet du bruit blanc (Pulse test). Estimé de départ $\gamma = 5.$, $D = 0.1$.*Résultats de stabilité*

La stabilité de l'identification dépend du nombre de mesures, du temps final d'observation, et de la qualité (bruit) des mesures. Tout d'abord, on perturbe les réponses simulées par un bruit blanc. Les résultats de l'optimisation restent très stables dans les deux cas (compression isotrope et pulse test). Pour quantifier les variations des résultats de l'identification, le coefficient de stabilité suivant est calculé. Il représente une perte de précision :

$$\epsilon_s = \frac{\|c - c_{optimum}\|}{\|c_{optimum}\|} \quad (4.33)$$

La figure 4.8 montre l'évolution de ϵ_s avec le degré de bruit blanc des données. La stabilité de l'identification est remarquable. De même, dans le cas du pulse test (figure 4.9), le tableau 4.3 donne ϵ_s ainsi que les corrélations entre les deux paramètres identifiés. La perte de précision est plus importante, ϵ_s augmente plus rapidement mais les résultats restent tout de même très stables vis à vis du bruit blanc. La corrélation $C_{\gamma D}$ entre les deux paramètres γ et D reste identique. La résolution n'est pas influencée par le bruit.

L'influence du temps final d'observation sur l'identification dans le cas de la compression isotrope est visible dans le tableau 4.4. Plus l'instant final d'observation est faible par rapport au temps caractéristique $\frac{L^2}{D_{optimum}}$, moins l'identification est correcte. La corrélation entre la valeur de la diffusivité et le module drainé augmente alors fortement. Le module non drainé reste relativement bien identifié, la réponse aux temps courts dépendant essentiellement de sa valeur.

En résumé, les modules d'incompressibilité drainée et non drainée ainsi que la diffusivité sont identifiables sur la compression isotrope. L'enregistrement du volume sortant permet d'obtenir en plus le coefficient $\frac{K}{b}$ sous les mêmes restrictions. Le coefficient γ ainsi

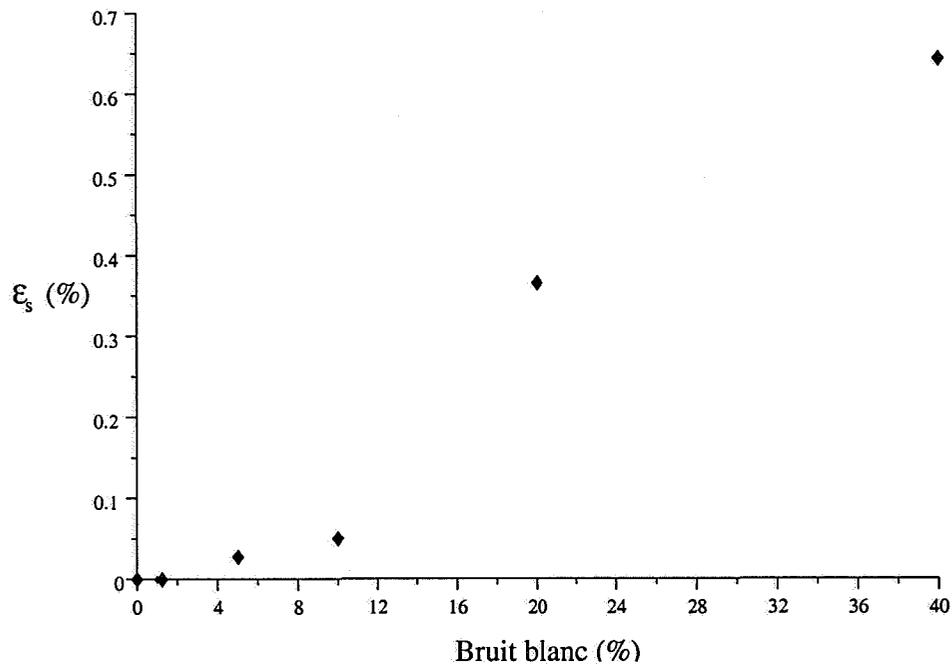


FIG. 4.8 – Stabilité de l'identification sur la compression isotrope. Evolution de ϵ_s avec l'amplitude du bruit blanc.

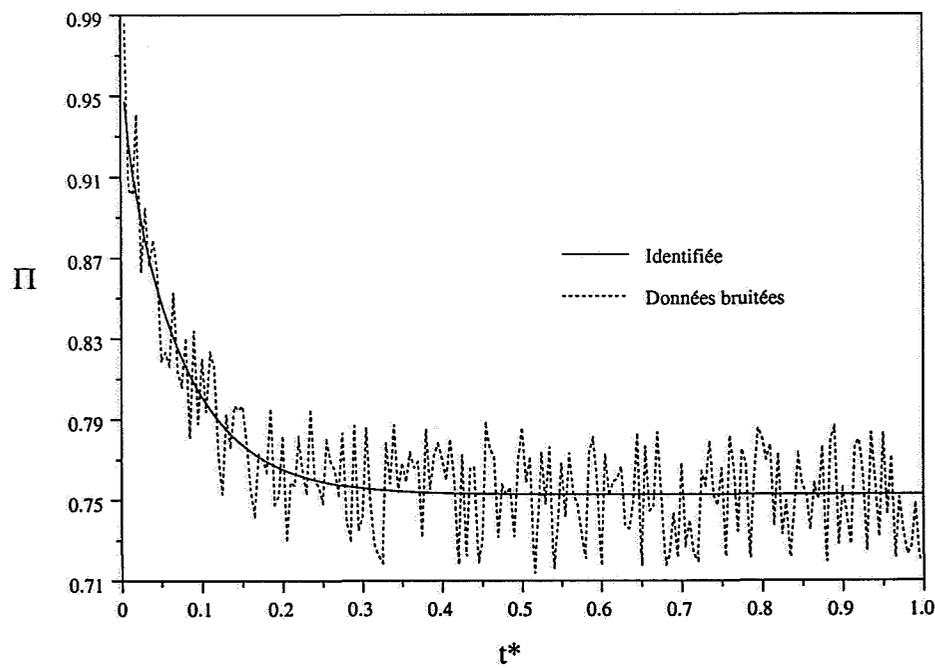


FIG. 4.9 – Pulse test, identification sur des mesures bruitées à 5%.

$t_f \times D_{optimum}/L^2$	K	K_u	D	ϵ_s (%)	C_{KK_u}	C_{KD}	C_{K_uD}
1	1.	9.9999	0.1	$9.95 \cdot 10^{-5}$	0.191	0.482	0.672
0.5	1.	9.9999	0.1	$9.95 \cdot 10^{-5}$	0.341	0.733	0.684
0.25	1.	9.9999	0.1	$9.95 \cdot 10^{-5}$	0.5	0.912	0.704
0.1	1.	10.	0.1	0.	0.541	0.968	0.679
0.01	0.6260	9.9997	0.09323	3.721	0.392	0.998	0.417

TAB. 4.4 – Influence de la durée d’observation du phénomène sur les résultats de l’identification (compression isotrope). Estimé de départ : $K_{ini} = 0.2$, $K_{uini} = 15.$, $D_{ini} = 0.03$.

que la diffusivité D sont identifiables lors d’un Pulse test.

Dans les deux cas, l’identification des coefficients matériau (K , K_u , D pour la compression isotrope, γ , D pour le pulse test) à partir de réponses simulées par un premier calcul direct est bien posée (existence, unicité, stabilité). Dans la pratique, si la réponse de l’essai n’est pas poroélastique, si des erreurs de mesure ou de manipulation de données existent, l’identification pourra s’avérer beaucoup moins précise.

4.2.2 Interprétation d’essais sur l’Argilite de Meuse-Haute-Marne

Essai de 1999

Un certain nombre de Pulse tests ont été réalisés durant la campagne d’essais de 1999 à G3S. On interprète un essai effectué sur un matériau sain sous un confinement de 10 MPa . Les réponses identifiées et expérimentale sont reportées sur la figure 4.10. Les paramètres obtenus sont :

$$D = 3.53 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad \gamma = 0.653$$

Les estimés initiaux n’influent pas sur les valeurs identifiées (tableau 4.5). Mais les coefficients sont fortement corrélés (voir les valeurs de la corrélation $C_{\gamma D}$ entre γ et D dans le tableau 4.5).

Il est également possible d’estimer la valeur de γ à partir de la valeur de la pression asymptotique (c.f. équation (4.30)) et d’effectuer une minimisation ne portant que sur la diffusivité D . La valeur des paramètres ainsi identifiée ne reproduit alors pas très bien la partie médiane de la réponse expérimentale mais bien l’asymptote ainsi que le début de la réponse. On obtient alors pour D une valeur de $3.012 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ avec $\gamma = 0.619$.

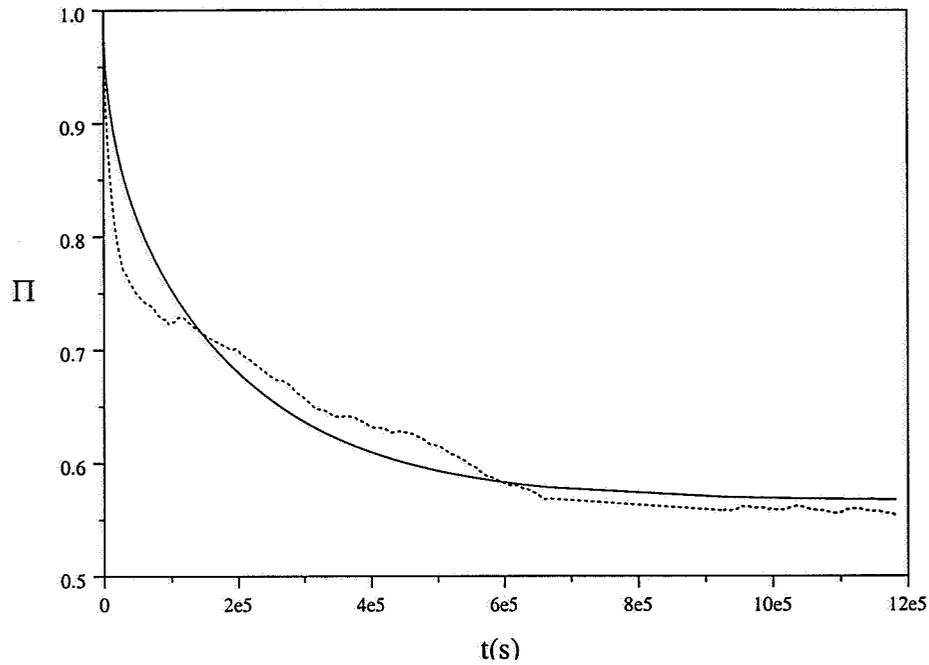


FIG. 4.10 – Pulse test sur une argillite de l'Est. Accord entre la réponse identifiée et la mesure.

	γ	$\frac{D}{L^2}$	\mathcal{J}	$C_{\gamma D}$
initial	0.8	0.000001	0.216	
final	0.65314	$3.186 \cdot 10^{-7}$	0.09084	0.8373
initial	1.8	0.00001	2.872	
final	0.65334	$3.190 \cdot 10^{-7}$	0.09084	0.8372
initial	0.1	$1.5 \cdot 10^{-7}$	16.65	
final	0.65379	$3.195 \cdot 10^{-7}$	0.0906	0.8381

TAB. 4.5 – Pulse test 1999. Résultats de l'identification.

C_r (GPa.m ⁻³)	$\frac{MK}{K_u}$ (MPa)	κ (m ²)
8 10 ⁷	15.536	2.272 10 ⁻²²
4 10 ⁷	7.76	4.549 10 ⁻²²
1.33 10 ⁷	2.58	2.654 10 ⁻²¹
4.8 10 ⁶	0.932	3.788 10 ⁻²¹

TAB. 4.6 – Estimation de la perméabilité intrinsèque et du rapport $\frac{MK}{K_u}$ $\gamma = 0.653$
 $D = 3.530 10^{-9} m^2.s^{-1}$.

La valeur de γ et de D permettent d'estimer le rapport $\frac{MK}{K_u}$ ainsi que la perméabilité intrinsèque κ si l'on connaît la compressibilité du réservoir. Malheureusement, la mesure de la compressibilité du réservoir n'a pas été faite d'une manière très précise. Le tableau 4.6 fournit donc une estimation des valeurs en fonctions des compressibilités de réservoir supposées.

Compression isotrope 2001

Un essai de compression isotrope de 10 MPa a été réalisé sur une argilite de Meuse-Haute Marne déjà fortement sollicitée au préalable. Une tentative de mesures du volume d'eau sortant a été effectuée.

Une différence significative entre les déformations axiales et radiales indiquent une forte anisotropie (la déformation axiale vaut près de 2.5 fois la déformation radiale). Cette anisotropie provient de l'endommagement subi par le matériau préalablement à l'essai. De nombreuses familles de fissures ont été observées (Malinsky et al. [79]). On identifie donc deux jeux de coefficients : l'un sur la base de la mesure du déplacement axial et l'autre sur celle du déplacement radial.

Axial L'identification à partir de la déformation axiale donne un très bon accord (figure 4.11). Elle est également très stable vis-à-vis de l'estimé de départ. La corrélation entre les paramètres identifiés est relativement faible indiquant une bonne résolution. Les coefficients obtenus sont les suivants :

$$K = 1.043 \text{ GPa} \quad K_u = 9.824 \text{ GPa} \quad D = 4.02 10^{-9} m^2 s^{-1} \quad (4.34)$$

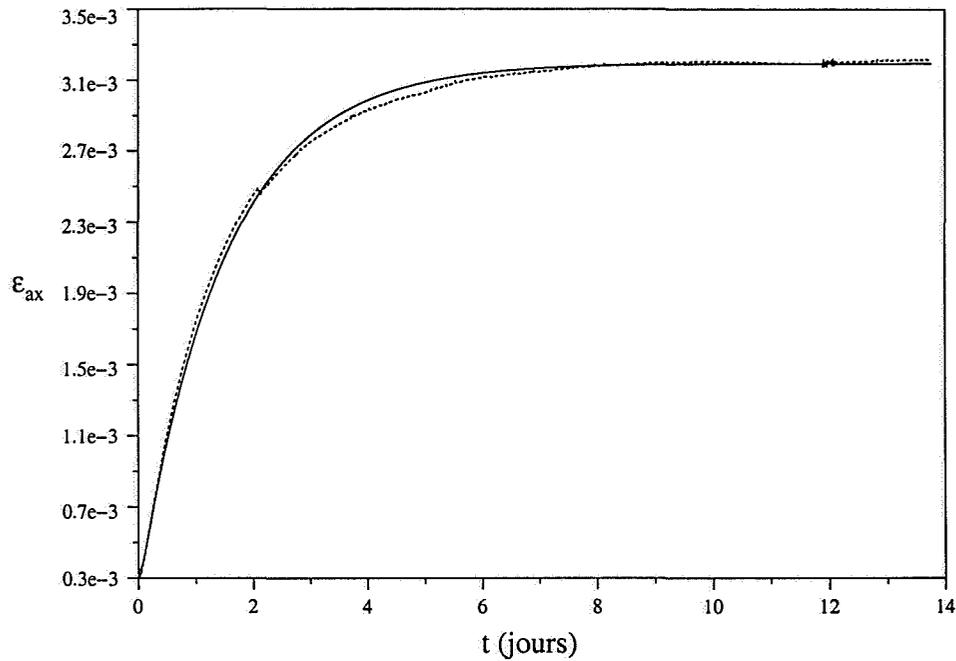


FIG. 4.11 – Déformation axiale expérimentale et identifiée pour une compression isotrope (en charge).

Il est possible d'estimer la valeur de la perméabilité intrinsèque de l'échantillon en fonction des valeurs supposées du module de Biot. Le tableau 4.7 indique une perméabilité intrinsèque de l'ordre de $10^{-21} m^2$, valeur conforme à l'ordre de grandeur de la perméabilité des argilites de l'Est endommagées. La valeur pour un échantillon sain est plutôt de l'ordre de $10^{-22} m^2$.

Radial Contrairement à la déformation axiale, l'identification sur la déformation radiale ne donne pas un si bon accord (figure 4.12). On obtient les valeurs suivantes :

$$K = 2.125 \text{ GPa} \quad K_u = 16.905 \text{ GPa} \quad D = 1.74 \cdot 10^{-9} m^2 \cdot s^{-1}$$

L'anisotropie se retrouve dans la différence entre les modules d'incompressibilités identifiés sur les déplacements axial et radial. Les valeurs sont presque deux fois plus élevées dans le cas du déplacement radial.

Les valeurs de D et K identifiées sont cette fois fortement corréllées ($C_{KD} = 0.81$)

M (GPa.)	κ (m^2)
2.5	$1.514 \cdot 10^{-20}$
5	$7.570 \cdot 10^{-21}$
10	$3.785 \cdot 10^{-21}$
15	$2.523 \cdot 10^{-21}$
20	$1.892 \cdot 10^{-21}$

TAB. 4.7 – Estimation de la perméabilité intrinsèque pour différentes valeurs du module de Biot. Paramètres estimés : $K = 1.043 \text{ GPa}$ $K_u = 9.824 \text{ GPa}$ $K/K_u = 0.1062$ $D = 4.02 \cdot 10^{-9} m^2 \cdot s^{-1}$

indiquant une mauvaise résolution.

On s'aperçoit sur les réponses expérimentales que le déplacement radial n'est pas stabilisé au bout de 15 jours alors que le déplacement axial a déjà atteint son asymptote. Cela pourrait indiquer que la diffusivité radiale est beaucoup plus faible que la diffusivité axiale. Cette explication est démentie par le retard de diffusion au début de l'essai sur le déplacement radial. Expérimentalement, ce retard est peu important et devrait normalement induire une stabilisation du phénomène poroélastique plus rapide que celle observée (voir figure 4.12) Le modèle poroélastique n'arrive pas à bien reproduire les déplacements mesurés.

L'existence de phénomènes physiques d'une autre nature (interaction chimique, gonflement...) peut être la cause de ce moins bon accord obtenu sur le déplacement radial ainsi que la forte corrélation entre le module drainé et la diffusivité. Ces phénomènes physiques connexes sont discutés par Malinsky et al. [79].

Volume sortant L'analyse du volume sortant permet d'estimer une autre valeur de la diffusivité ainsi qu'une valeur de $\frac{b}{K}$ (figure 4.13) :

$$D = 5.78 \cdot 10^{-9} m^2 \cdot s^{-1} \quad \frac{b}{K} = 7.865 \cdot 10^{-5} MPa^{-1}$$

En prenant la valeur préalablement estimée du module drainé, on obtient un coefficient de Biot très faible (autour de 0.1). Cette dernière identification est à prendre avec beaucoup de précaution, la mesure du volume sortant étant sujette à de très nombreuses difficultés

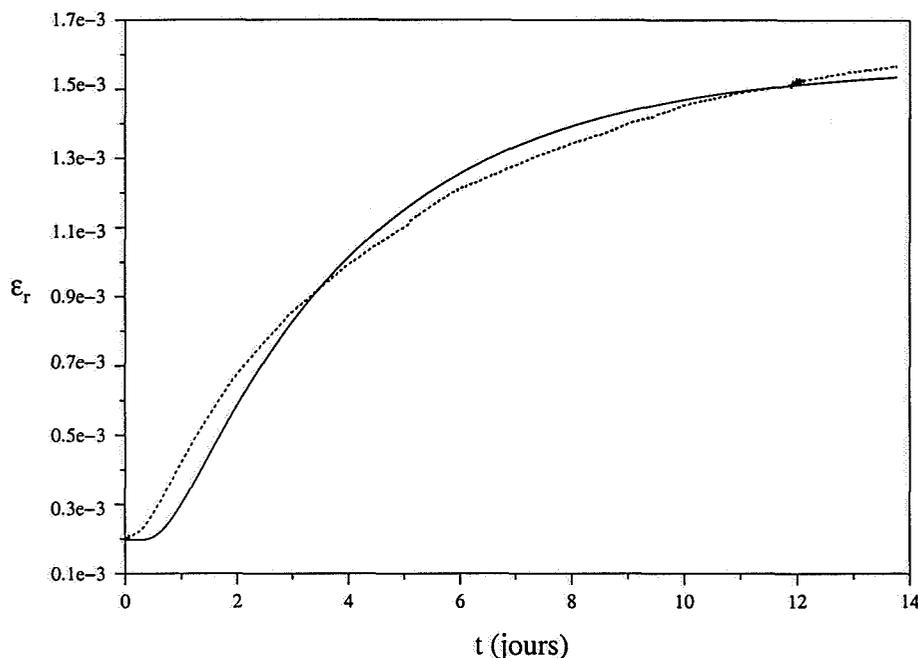


FIG. 4.12 – Déformations radiales (compression isotrope).

expérimentales.

4.3 Conclusions

Dans ce chapitre, l'identification des coefficients poroélastiques à partir d'essais de laboratoire a été discutée dans le détail. Des solutions semi-analytiques approchées, validées par une comparaison avec des calculs éléments finis bi-dimensionnels, ont permis une résolution rapide de l'identification.

L'inversion poussée des courbes expérimentales de la compression isotrope et du pulse test permet une détermination indirecte de tous les coefficients poroélastiques à l'exception du coefficient de cisaillement. Ce dernier est identifiable par ailleurs sur un trajet de chargement déviatorique. L'enregistrement du déplacement axial et radial sur la compression isotrope drainée permet d'obtenir la diffusivité D , les modules d'incompressibilité drainée et non drainée : K , K_u . Le Pulse test permet d'identifier l'emmagasinement et la perméabilité de la roche. L'intérêt de coupler ces deux tests est évident : cela permet

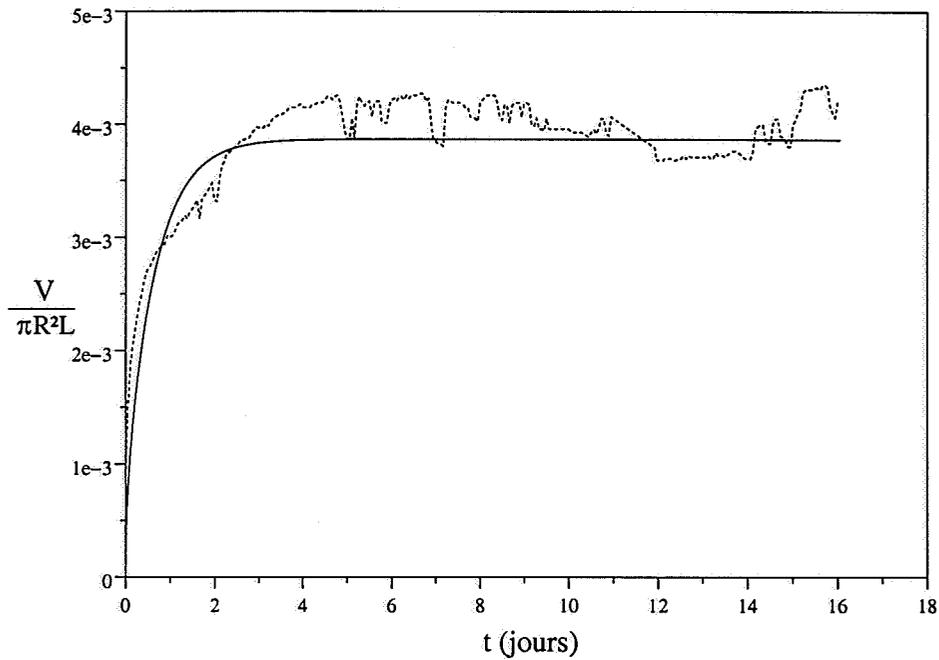


FIG. 4.13 – Volume sortant de l'échantillon (adimensionnel) lors de la compression isotrope.

d'obtenir une redondance de l'information.

D'un point de vue théorique, l'identification des coefficients est bien posée pour les deux essais. La méthode de résolution est robuste et stable.

En pratique, les multiples difficultés expérimentales ainsi que d'éventuels phénomènes physiques annexes compliquent l'identification de ces propriétés dans le cas des argilites de Meuse Haute-Marne. Néanmoins, les résultats sont cohérents avec ceux préalablement obtenus (Coste et al.[36], Escoffier et al. [43], Vincké et al [106]) sur le même type de roche. Cette méthode d'identification est également applicable à d'autres roches peu perméables.

Deuxième partie
Viscoplasticité

Chapitre 5

Comportement viscoplastique des roches argileuses au laboratoire

La catégorie des roches argileuses et marnes est très large et inclut des roches dont les comportements mécaniques peuvent être relativement éloignés. Néanmoins ce type de roches présente généralement des déformations plastiques dépendantes du temps. Notre intérêt porte essentiellement sur les argilites de Meuse Haute-Marne, roches du site du laboratoire souterrain de l'ANDRA actuellement en construction à Bure.

L'analyse des essais de laboratoire réalisés sur l'argilite de Meuse Haute-Marne permet de discuter les principales caractéristiques du comportement. Les principaux modèles utilisés dans la pratique sont remis en perspective.

Dans un deuxième temps, une loi viscoplastique est identifiée sur quelques essais de fluage drainé. On montre qu'il est possible de séparer déformations différées d'origine poroélastiques (réversibles) et déformations viscoplastiques (irréversibles). Les coefficients poroélastiques et viscoplastiques sont identifiés sur un même essai.

5.1 Comportement viscoplastique des roches argileuses

Les origines physiques des déformations viscoplastiques des roches argileuses peuvent être multiples (eau adsorbée, glissement des feuillets d'argile etc...). Elles ne sont pas discutées ici. On se place à un niveau macroscopique dans l'optique du calcul d'ouvrage pour des durées ne dépassant pas un siècle. Les lois de comportement utilisées sont des lois phénoménologiques classiques.

5.1.1 Principaux traits du comportement

Le comportement différé des Argilites de Meuse Haute-Marne a été largement étudié en laboratoire depuis 1996.

Les essais de fluage de 1998 et 2001 permettent d'isoler quelques traits marquants du comportement différé. Tout d'abord, l'amplitude de ces déformations est beaucoup plus faible que celles observées sur le sel gemme, roche très fluante. On remarque une dépendance non linéaire de la vitesse de déformation avec le déviateur appliqué. Les vitesses de déformation augmentent également avec la température. Lors d'essais multipaliers, un palier de décharge (figure 5.1) a permis de mettre en évidence un écrouissage du matériau. Une plasticité rapide intervient également lors de l'application de la charge déviatorique (figure 5.2).

L'existence ou non d'un seuil viscoplastique est importante. Au niveau de la structure, on sait que l'absence de domaine d'élasticité implique que la totalité du poids des terres s'applique sur le revêtement des galeries aux temps infini; d'où un impact sur le dimensionnement du revêtement (Bérest et Nguyen Minh [15]). L'existence d'un seuil est bien évidemment intimement lié à la durée d'observation du phénomène. En ce qui concerne les argilites de l'Est, les essais réalisés ne montrent pas à l'échelle de temps de laboratoire (environ un an) de déformations différées significatives pour des contraintes déviatoriques inférieure à 8 MPa sous une pression de confinement de 10 MPa . Les relaxations successives (Nguyen Minh et al. [85]) lors d'essais d'écrouissage donnent une stabilisation relativement rapide, ce qui tendrait à confirmer l'existence d'un seuil (sans seuil, les contraintes tendent vers zéro). L'étude du fluage sous faibles charges aidera à infirmer ou confirmer ces observations.

En ce qui concerne l'établissement d'un fluage stationnaire; après une phase transitoire, sur la plupart des essais, on observe des vitesses de déformation quasi-constante. Cette constatation est aussi intimement liée à la durée d'observation du phénomène. La durée des essais est de quelques mois maximum.

Les conditions hydrauliques des tests sont également très importantes. Des conditions aux limites drainantes vont impliquer des déformations d'origine poroélastique (consoli-

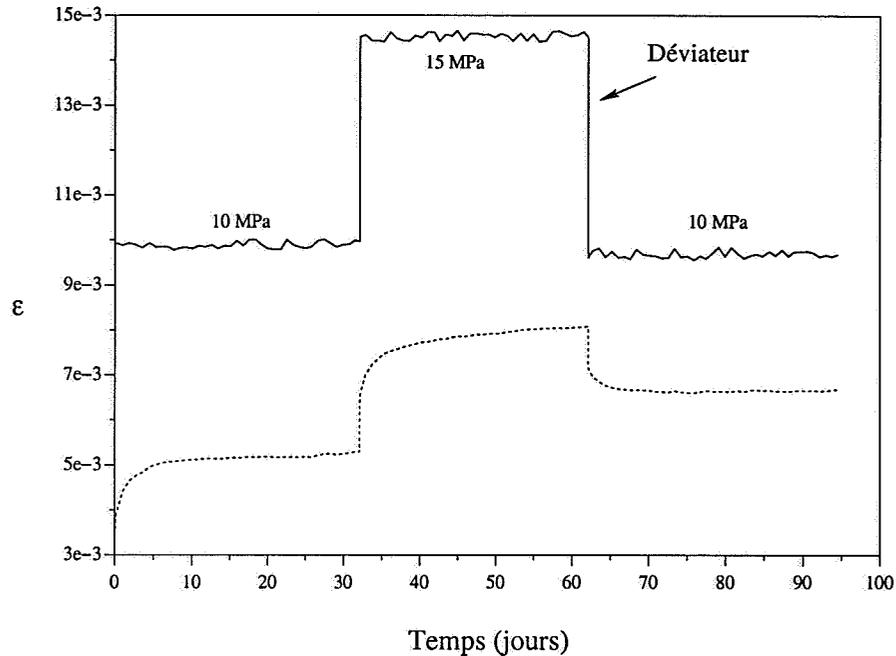


FIG. 5.1 – Réponse expérimentale de l'essai de fluage multipalier 5697-5 (G3S).

dation). Ces déformations réversibles différées se superposent aux déformations viscoplastiques lors de la phase transitoire. On voit sur l'essai 5697 (figure 5.1) qu'une importante partie des déformations transitoires sont recouvrées assez rapidement lors de la décharge indiquant un phénomène réversible du type poroélastique. Il est très difficile de réaliser des essais complètement non drainés sur des roches aussi peu perméables que les argilites de l'Est. De plus, l'interprétation des tests est alors plus complexe, la pression de pore dans l'échantillon étant inconnue. On privilégiera l'analyse des tests effectués en conditions drainées.

Enfin, on notera que les ruptures observées sont toutes du type fragile. En fluage, la rupture est toujours localisée en bande de cisaillement aux pressions de confinement utilisées (environ 10 MPa). Le comportement volumique (dilatance) est négligeable avant la rupture. Par la suite les phénomènes de rupture ne sont pas abordés.

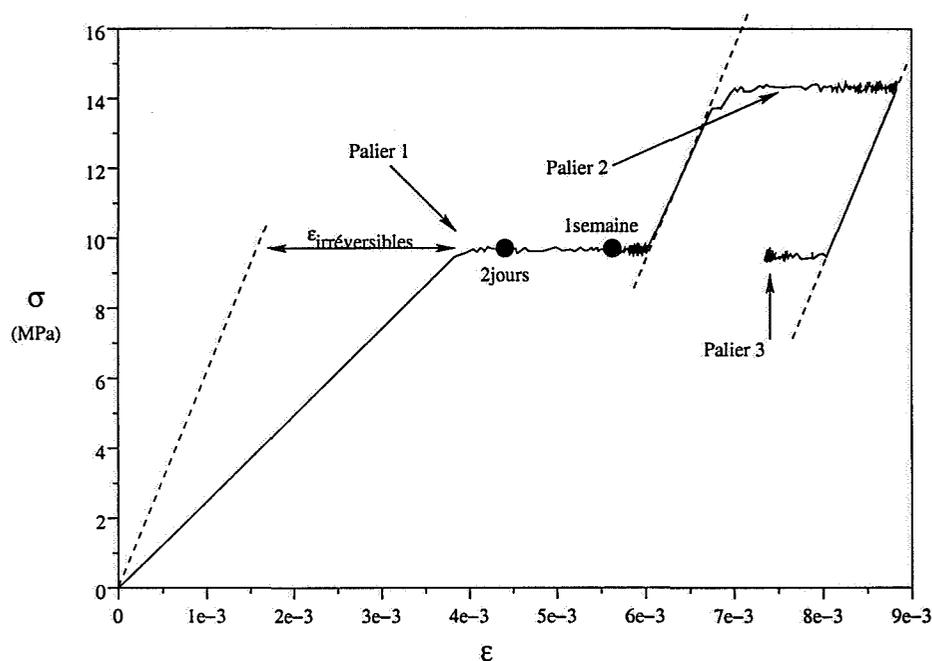


FIG. 5.2 – Réponse expérimentale de l'essai de fluage multipalier 5697-5 en contraintes - déformations.

5.1.2 Analyse qualitative de quelques tests

On s'intéresse maintenant plus particulièrement aux essais de fluage en conditions drainées de la série 5697 (2-5-6-7) correspondant à la couche C1 du site de l'Est [4].

Les tests 5697-5 et 5697-6 sont des essais multipaliers, chaque palier de charge durant approximativement un mois à un mois et demi. La figure 5.1 représente la réponse de l'essai 5697-5.

On peut remarquer que les déformations transitoires deviennent négligeables après quelques jours. Leur amplitude ainsi que leur durée peuvent être reliées au phénomène poroélastique. L'application instantanée du chargement uniaxial engendre une surpression de pore à l'instant initial (effet de Skempton). Les faces supérieure et inférieure étant drainées, les pressions de pore s'équilibrent dans le temps, engendrant des déformations différées réversibles liées au couplage hydromécanique. La constante de temps de ce phénomène

poroélastique peut être estimée comme suit :

$$\tau = \frac{(L/2)^2}{D} \quad (5.1)$$

où L est la hauteur de l'échantillon (105 mm) drainé sur les surfaces supérieure et inférieure. D est la diffusivité poroélastique intervenant dans l'équation gouvernant la diffusion de la pression de pore :

$$D = kM \frac{K}{K_u} \quad (5.2)$$

En prenant les valeurs estimées de la conductivité hydraulique $k = 1.10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{GPa}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, du module de Biot $M = 7 \text{ GPa}$ et des modules d'incompressibilités drainée et non drainée ($K = 6 \text{ GPa}$ et $K_u = 7.1 \text{ GPa}$). On obtient pour une argilite :

$$\tau \approx 10 \text{ jours} \quad (5.3)$$

Cette valeur est en accord avec la fin des déformations transitoires observées expérimentalement. L'importance relative de la déformation différée poroélastique peut être quantifiée par le rapport suivant :

$$\mathcal{D} = \frac{\varepsilon_{\text{drainée}} - \varepsilon_{\text{non drainée}}}{\varepsilon_{\text{non drainée}}} = \frac{K_u - K}{K} \quad (5.4)$$

\mathcal{D} exprime l'importance relative des déformations drainées par rapport aux déformations non drainées. Utilisant les mêmes valeurs des coefficients poroélastiques, la valeur estimée de \mathcal{D} atteint 18%. D'après les courbes expérimentales, il est facile de calculer le rapport entre les déformations à la fin du palier et les déformations instantanées. Plus du tiers des déformations différées peut être attribué à la poroélasticité.

L'importance de la consolidation poroélastique sur la réponse transitoire devient évidente lorsque l'on regarde la déformation différée lors du palier de décharge (de 15 à 10 MPa) sur l'essai 5697-5 (figure 5.1). Une partie de la déformation est recouverte après une phase transitoire de durée compatible avec la constante de temps τ (5.3). L'ordre de grandeur de ces déformations est également compatible avec le rapport \mathcal{D} estimé.

Même si une partie des déformations transitoires est imputable à la diffusion de la pression de pore, des déformations différées irréversibles sont également observables. Après

la phase transitoire, les vitesses de déformations tendent, sur tous les essais, vers une valeur constante synonyme d'un fluage stationnaire à l'échelle d'observation.

L'essai 5697 – 5 met également en évidence un phénomène d'écrouissage du matériau. Après deux paliers à 10 puis 15 MPa, le déviateur est ramené à 10 MPa. Lors de ce troisième palier, après une phase transitoire poroélastique, la vitesse de déformation tend vers une valeur quasi-nulle.

La figure 5.2 représente la réponse de l'essai 5697-5 dans l'espace contraintes - déformations. Il convient de noter que la vitesse d'acquisition des mesures ne permet malheureusement pas d'avoir plusieurs points lors de la montée en charge déviatorique. On observe néanmoins sur le passage du premier au deuxième palier une forte non-linéarité indiquant la présence de déformations irréversibles quasi-instantanées.

En résumé, la réponse à un essai de fluage est la somme d'une partie *poroélastique*, qui évolue de la réponse non drainée vers la réponse drainée, et d'une partie *viscoplastique*. La déformation viscoplastique (irréversible) évolue non linéairement avec la contrainte déviatorique. Le modèle de comportement doit également rendre compte du passage d'un fluage très rapide à un fluage stationnaire en incorporant un phénomène d'écrouissage.

5.1.3 Modélisation

Différentes approches peuvent être envisagées pour modéliser le comportement viscoplastique des roches. L'une d'elle consiste à essayer de reproduire fidèlement les essais de laboratoire quitte à complexifier énormément les lois de comportement en faisant intervenir de l'écrouissage isotrope, cinématique, en couplant la viscoplasticité avec de l'endommagement etc...

Cette démarche a notamment été utilisée par Cristescu [38] qui propose un modèle prenant en compte le comportement volumique irréversible et de nombreux phénomènes d'écrouissage. La loi de comportement est du type Perzyna avec ajout d'un terme pour décrire le fluage secondaire. En incorporant de nombreux effets, la détermination du modèle devient complexe et délicate. De même Munson et Dawson [82] ont proposé un modèle permettant de reproduire fidèlement le fluage du sel gemme. Le modèle nécessite la détermination de 18 paramètres! Modaressi et Laloui ont formulé un modèle thermo-

viscoplastique de type Cam-Clay pour les argiles [81]. Ce modèle est surtout destiné à reproduire le comportement des sols argileux. Aubertin [7], Aubertin et al.[8] ont proposé un modèle complet avec trois variables internes reproduisant écoulement cinématique et isotrope. Ce modèle a ensuite été étendu à un couplage avec de l'endommagement. La dilatance préalable à la rupture peut ainsi être reproduite. Encore une fois c'est le nombre de données par rapport aux nombres de paramètres à déterminer qui est problématique. C'est pourquoi, connaissant les importants effets d'échelles entre laboratoire et structure réelle, l'utilisation de tels modèles semble hasardeuse. On préférera un modèle simplifié dont on maîtrise les hypothèses plutôt que l'utilisation d'un grand nombre de variables internes dont les lois d'évolution seront toujours phénoménologiques.

On se reportera aux ouvrages de Lemaitre et Chaboche [73], Lubliner [76] et l'article fondateur de Perzyna [88] pour une description complète de la théorie de la viscoplasticité. Bérest présente dans [13] une synthèse des modèles viscoplastiques des roches. Par la suite, on fait l'hypothèse de partition de déformations élastique et viscoplastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} \quad (5.5)$$

Dans le cas le plus général, en suivant la formulation de Perzyna, la vitesse de déformation viscoplastique ainsi que l'évolution des variables internes peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} &= \underbrace{\langle f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R}_k) \rangle}_{\text{critère}} \quad \underbrace{\mathbf{j}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R}_k)}_{\text{direction de l'écoulement}} \\ \dot{\mathbf{R}}_k &= \underbrace{h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R}_k)}_{\text{évolution des variables internes}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Lois de comportement envisagées

Au vu des remarques faites sur la difficulté du passage laboratoire / in situ, on va utiliser dans l'optique de l'identification sur des structures réelles des lois de comportements simples. Par la suite, deux modèles sont utilisés : la loi de **Norton-Hoff** et une variante avec **écrouissage isotrope additif non linéaire**. Cette dernière a été formulée sur la base des observations de laboratoire préalablement décrites.

Loi dite de Lemaître-Menzel-Schreiner Avant de présenter ces deux modèles, on rappelle la loi elastoviscoplastique de Lemaître-Menzel-Schreiner. Cette loi a déjà été utilisée pour modéliser la viscoplasticité des roches argileuses (Ghoreychi [47]). Ce n'est pas une loi standard au sens strict (voir Lemaitre et Chaboche [73]). Elle reproduit un fluage de type Andrade. La vitesse de déformation viscoplastique s'écrit :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{3}{2} A \left(\frac{\sigma_{eq}}{K} \right)^n (\epsilon_{eq})^\gamma \frac{\mathbf{s}}{\sigma_{eq}} \quad (5.7)$$

où \mathbf{s} est le tenseur déviatorique des contraintes. σ_{eq} est la contrainte équivalente de Von Misès¹.

C'est un modèle rhéologique de type liquide visqueux (pas de limite d'élasticité). Dans le cas $\gamma = 0$ (i.e. pas d'écrouissage), on retrouve la loi de Norton. Ce type de loi a été beaucoup utilisé pour le sel [3, 14, 44]. Sa popularité est due au fait qu'elle reproduit la forme de la réponse transitoire en fluage. Néanmoins, des hypothèses très fortes sont à la base de cette formulation : l'équation (5.7) implique une vitesse de déformation infinie à l'instant initial et une vitesse de déformation tendant vers zéro à l'infini. Cette loi ne tranche pas entre fluage primaire et secondaire. Elle est purement transitoire. A notre avis, son utilisation est à éviter d'autant plus que dans le cas des roches très faiblement perméables, la majeure partie des déformations transitoires peut être due au couplage hydromécanique.

Loi de Norton-Hoff, viscoplasticité parfaite C'est une généralisation tridimensionnelle de la loi de Bingham. L'expression de la vitesse de déformation viscoplastique est donnée par :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{3}{2} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_Y}{K} \right\rangle^N \frac{\mathbf{s}}{\sigma_{eq}} \quad (5.8)$$

$\langle x \rangle = \frac{|x| + x}{2}$ est la fonction partie positive.

L'écoulement viscoplastique s'effectue dans la direction du tenseur déviatorique des contraintes. La déformation inélastique est donc incompressible.

¹ $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}$

Malgrès son apparente simplicité, la loi de Norton-Hoff (avec seuil) implique une forte non linéarité. Dans le cas d'un calcul de tunnel, un effet d'érouissage de structure est observé. Les convergences différées ont une forme compatible avec celles mesurées sur site. Cette loi de comportement sera utilisée dans les chapitres suivants.

Validité Cette loi de comportement viscoplastique parfaite approxime les essais de fluage par une droite dans le plan (t, ϵ) . Ce type de loi peut donc décrire les déformations différées des matériaux présentant un faible fluage primaire en comparaison du fluage secondaire (stationnaire) pour la durée considérée. Très souvent, le domaine de validité de ce modèle est limité au fluage établi, seul trajet de chargement sur lequel il est identifié.

Loi elastoviscoplastique avec érouissage En l'absence d'essais supplémentaires (trajets de chargements différents), en se basant sur les essais de fluage effectués sur les Argilites de Meuse Haute-Marne, on propose une loi de comportement avec érouissage isotrope additif. La variable d'érouissage caractérise la taille du domaine actuel d'élasticité.

La vitesse de déformation viscoplastique est de la forme suivante :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R}{K_V} \right\rangle^N \frac{3}{2} \frac{s}{\sigma_{eq}} \quad (5.9)$$

$$\dot{R} = \left\langle \frac{(1 - \alpha)\sigma_{eq} - R}{K_W} \right\rangle \quad (5.10)$$

avec :

- R variable interne d'érouissage isotrope $[ML^{-1}T^{-2}]$,
- N exposant de viscosité $[\cdot]$,
- K_V coefficient de viscosité $[ML^{-1}T^{-2+1/N}]$,
- α coefficient d'érouissage $[\cdot]$,
- K_W constante de temps associée à l'érouissage $[T]$.

L'évolution de la variable interne est non linéaire. Cette forme introduit deux constantes de temps dans le comportement du matériaux : l'une liée à la viscosité K_V , l'autre à l'érouissage K_W . Il est donc possible de reproduire le passage d'un fluage transitoire à un fluage stationnaire. En effet, lorsque la variable interne R est saturée ($R = (1 - \alpha)\sigma_{eq}$),

ϵ^{vp} devient constante (à σ_{eq} constant). Comme pour la loi de Norton-Hoff, l'écoulement de type Von Misès implique des déformations viscoplastiques incompressibles.

Limite de validité Les lois avec écrouissage isotrope ne peuvent pas rendre compte d'effets tels que l'hésitation au fluage ou de phénomènes observés sur des essais cycliques (rochet, accommodation ..).

5.2 Identification sur des essais de Laboratoire

On s'applique maintenant à identifier à partir des essais de fluage réalisés en conditions drainées la loi de comportement avec écrouissage additif non-linéaire proposée dans le paragraphe précédent. L'analyse est effectuée dans le cadre de la mécanique des milieux poreux. Le comportement est supposé poroviscoplastique. Néanmoins l'incompressibilité des déformations viscoplastiques simplifie le problème. Les déformations poroélastiques et viscoplastiques s'additionnent mais ne sont pas couplées (voir Coussy [37] pour plus de détails).

5.2.1 Réponse en fluage

On détaille la solution semi-explicite permettant de reproduire les essais de fluage en tenant compte des déformations différées d'origines poroélastique et viscoplastique. L'essai est pratiqué sur des échantillons cylindriques sous une pression de confinement σ_c constante. On suppose dans tout ce qui suit que le rapport $m = R/L$ est suffisamment petit pour négliger l'effet de cisaillement induit par le couplage poroélastique. Le champ de contraintes est alors homogène (voir chapitre précédent).

L'application du déviateur σ à l'instant $t = 0$ induit le champ de contraintes suivant :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma H(t) + \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_c \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$H(t)$ représente la fonction d'Heavyside.

D'où le deviateur des contraintes :

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}H(t) \begin{pmatrix} 2\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Le deux premiers invariants du tenseur des contraintes se réduisent à :

$$\text{trace}(\boldsymbol{\sigma}) \approx (\sigma H(t) + 3\sigma_c) \quad (5.13)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\sigma})} = \sigma H(t) \quad (5.14)$$

La forme du tenseur des déformations viscoplastiques est directement donnée par le deviateur dans le cas d'un écoulement de type Von Misès :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{vp} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{vp} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^{vp}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon^{vp}}{2} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

La déformation totale est la somme de la déformation poroélastique et des déformations viscoplastiques :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} \quad (5.16)$$

Déformation poroélastique

La déformation viscoplastique étant incompressible ($\text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) = 0$), elle n'intervient pas dans l'équation de la diffusion de la pression de pore [37]. Celle ci se réduit alors, dans le cas d'un fort élancement ($m \ll 1$), à une équation unidimensionnelle :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} - D \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\frac{B}{3} \sigma \delta(t) \\ p(L, t) = p(0, t) = 0 \\ p(z, 0) = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

où $\delta(t)$ est la distribution de Dirac, B le coefficient de Skempton.

Cette équation est identique, au facteur $\frac{1}{3}$ près à l'équation de diffusion dans le cas de la compression isotrope (voir chapitre 4). La pression est donnée par :

$$\Pi(z, t) = \frac{p(z, t)}{\sigma} = -\frac{B}{3}\mathcal{K}(z, t) \quad (5.18)$$

$\mathcal{K}(z, t)$ est définie dans le chapitre précédent.

La loi de comportement poroélastique, exprimée en coordonnées cylindriques, permet ensuite d'obtenir les déplacements à partir des contraintes et de la pression de pore. La déformation axiale est donnée :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\sigma}{3K} \left(\frac{3K + \mu}{3\mu} H(t) - \frac{K_u - K}{3K_u} \mathcal{K}(z, t) \right) + \varepsilon^{vp} \quad (5.19)$$

Sachant que le déplacement vertical est nul en $z = 0$, que le champ de déformation viscoplastique est homogène, on obtient après intégration selon z le déplacement vertical du plateau supérieur de l'éprouvette. C'est cette valeur du déplacement qui est mesurée expérimentalement :

$$\frac{u_z(L, t)}{L} = \frac{\sigma}{3K} \left(\frac{3K + \mu}{3\mu} H(t) - \frac{K_u - K}{3K_u} \mathcal{I}(t) \right) + \varepsilon^{vp} \quad (5.20)$$

Déformation viscoplastique

La valeur de la déformation viscoplastique ε^{vp} est quant à elle solution des équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{vp} = \left\langle \frac{\sigma - R}{K_v} \right\rangle^N \\ \dot{R} = \left\langle \frac{(1 - \alpha)\sigma - R}{K_w} \right\rangle \end{cases} \quad (5.21)$$

La déformation viscoplastique ainsi que la variable interne R sont supposées nulles au début de l'essai (i.e. avant le premier palier de charge).

L'évolution de la variable interne pendant un palier de charge est donnée par :

$$R = (1 - \alpha)(1 - \exp(-\frac{t}{K_w}))\sigma + R_0 \quad (5.22)$$

R_0 représente la valeur au début du palier. Cette évolution (5.22) est valable tant que R reste inférieur à $(1 - \alpha)\sigma$. Passé cet instant que l'on notera t_i , la variable d'érouissage reste constante ($\dot{R} = 0$) et égale à $(1 - \alpha)\sigma$: l'érouissage est saturé.

La valeur de t_i est donnée par :

$$t_i = K_w \text{Ln} \frac{(1 - \alpha)\sigma}{R_0} \quad (5.23)$$

La vitesse de déformation viscoplastique prend alors une valeur constante, le fluage devient stationnaire :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left\langle \frac{\alpha\sigma}{K_v} \right\rangle^N \quad (5.24)$$

Sur un essai de fluage multipalier, il est facile de voir que la valeur finale de R pour un palier de charge peut être supérieure à la valeur de la charge déviatorique du palier suivant si celui-ci est associé à une décharge. Dans ce cas, la vitesse de déformation viscoplastique reste nulle lors de ce nouveau palier.

Le modèle viscoplastique choisi rend compte du passage d'un fluage transitoire à un fluage stationnaire, tout en reproduisant le phénomène d'érouissage et de non linéarité avec la contrainte.

La résolution complète des équations scalaires (5.21) gouvernant la déformation viscoplastique est réalisée numériquement à l'aide d'un algorithme de type retour radial implicite (Simo et Hughes [93]).

5.2.2 Identification

L'identification des différents paramètres (poroélastiques et viscoplastiques) à partir des réponses expérimentales est effectuée sur l'essai 5697 – 5. Cet essai possède le trajet de chargement le plus riche : paliers de charge (10, 15 MPa) puis décharge (10 MPa) sous un confinement de 10 MPa. Sans entrer dans les détails de la procédure expérimentale, on retiendra les difficultés de tels essais (contrôle de la température, resaturation de l'échantillon ...).

L'identification est faite à l'aide d'un algorithme de Levenberg-Marquardt. On minimise la fonctionnelle coût de type moindres carrés mesurant la distance au sens de la norme L^2 entre la déformation axiale enregistrée et celle calculée.

Analyse dimensionnelle, identifiabilité

La valeur du déplacement axial u_z/L est fonction de 11 paramètres sur un palier de fluage :

$$\frac{u_z}{L} = f(t, \sigma, L, K, K_u, \mu, D, K_v, N, \alpha, K_w) \quad (5.25)$$

Ces paramètres s'expriment en fonction de trois dimensions indépendantes : $[M]$, $[L]$, $[T]$. La déformation axiale est donc fonction de $11 - 3 = 8$ paramètres adimensionnels. Dans notre cas, il est facile d'isoler les trois temps adimensionnels suivants qui sont reliés respectivement au phénomène de diffusion, de fluage stationnaire et de fluage transitoire :

$$t_d^* = \frac{Dt}{L^2} \quad t_s^* = \frac{\sigma t^{1/N}}{K_v} \quad t_t^* = \frac{t}{K_w}$$

Les autres paramètres adimensionnels proviennent des différents rapports entre les constantes mécaniques. Au final, u_z/L peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{u_z}{L} = \Phi \left(t_d^*, t_s^*, t_t^*, \frac{K}{K_u}, \frac{\mu}{K_u}, \frac{\sigma}{K_u}, N, \alpha \right)$$

La réponse à un essai de fluage dépend donc de 8 paramètres indépendants reliés aux 8 paramètres matériaux : 4 poroélastiques, 4 viscoplastiques. Contrairement au cas de la compression isotrope et du pulse test en poroélasticité, l'existence et l'unicité du problème d'identification ne sont pas démontrables. Le problème est a priori fortement mal posé si l'on veut identifier conjointement tous les coefficients.

Au lieu d'essayer d'identifier tous les paramètres en une seule optimisation, on procède comme suit :

- Dans un premier temps, les coefficients poroélastiques sont identifiés sur le troisième palier de l'essai qui correspond à une décharge supposée poroélastique.
- Certains paramètres viscoplastiques sont estimés à partir des vitesses de déformations asymptotiques mesurées sur chaque palier des différents essais 5697 – (2, 5, 6, 7).
- Les paramètres viscoplastiques sont ensuite identifiés sur les deux premiers paliers de charge en supposant les coefficients poroélastiques connus.
- Au final, une identification couplée des paramètres viscoplastiques et poroélastiques est réalisée en partant de l'estimation préalablement trouvée.

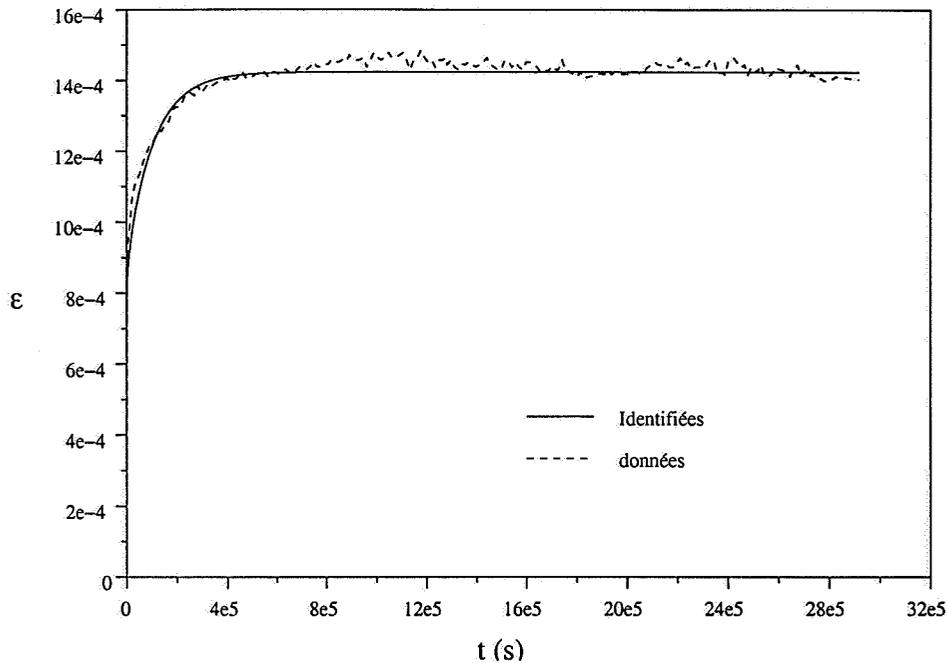


FIG. 5.3 – Identification poroélastique sur le troisième palier de l'essai 5697-5 (décharge).

Identification des paramètres poroélastiques sur la décharge

La décharge du palier de 15 à 10 MPa peut être considérée comme poroélastique, si l'on suppose que le matériau s'est suffisamment écroui de telle sorte que la vitesse de déformation viscoplastique reste nulle lors de ce troisième palier. Cette affirmation est confirmée par le fait qu'après la période transitoire liée à la consolidation poroélastique, la vitesse de déformation est quasiment nulle. Il est possible d'identifier les paramètres poroélastiques sur cette décharge.

La figure 5.3 montre la réponse expérimentale du troisième palier de l'essai 5697-5 ainsi que la réponse identifiée. Les déformations sont représentés positivement sur cette figure.

Identification des paramètres viscoplastiques

Identification à partir des vitesses asymptotiques En fluage, le modèle proposé conduit au bout d'un certain temps à un fluage stationnaire. La vitesse de déformation viscoplastique asymptotique du palier i est égal à :

	K_u (GPa)	K (GPa)	μ (GPa)	D ($m^2.s^{-1}$)
estimé	9	3	1.5	2.10^{-9}
identifié	9.145	0.7465	2.22	$4.124 10^{-9}$
estimé	7	6	1.9	$3 10^{-9}$
identifié	8.7	0.735	2.26	$4.89 10^{-9}$
estimé	9	2	0.4	$1. 10^{-10}$
identifié	8.42	0.66	2.51	$5.94 10^{-9}$

TAB. 5.1 – Identification des paramètres poroélastiques sur la décharge (essai 5697-5) pour différents estimés de départ.

K_V (MPa.s ^{1/N})	α	N
$4.7 10^{-1}$	$2.1 10^{-6}$	2.34

TAB. 5.2 – Estimation des paramètres viscoplastiques à partir des vitesses de déformations asymptotiques en fluage.

$$\dot{\varepsilon}_{as_i}^{vp} = \left\langle \frac{\alpha \sigma_i}{K_V} \right\rangle^N \quad (5.26)$$

Pour chaque palier, $\dot{\varepsilon}_{as_i}^{vp}$ est estimée en calant une droite sur la fin de la courbe de la déformation différée en fonction du temps. Il est alors facile d'identifier au sens des moindres carrés α , N et K_V en reformulant le système en logarithme :

$$\frac{1}{N} \text{Ln}(\dot{\varepsilon}_{as_i}^{vp}) + \text{Ln}(K_V) - \text{Ln}(\alpha) = \text{Ln}(\sigma_i) \quad (5.27)$$

Les différents paliers des essais 5697 – (2, 5, 6, 7) permettent ainsi une première estimation de certains paramètres viscoplastique à partir des vitesses de déformation asymptotiques. Le tableau 5.2 résume les résultats.

Identification des paramètres viscoplastiques sur la réponse complète L'identification des paramètres viscoplastiques est effectuée sur les 2 premiers paliers de charge de l'essai 5697-5.

Les paramètres poroélastiques sont, dans un premier temps, supposés connus. Des identifications ont été effectuées en prenant pour valeurs des paramètres poroélastiques les différents jeux estimés précédemment. Les résultats sont très proches dans tous les cas. Les

K_v (MPa.s ^{1/N})	N	K_w (s)	α
0.435037	2.30	0.0356	$2.5 \cdot 10^{-6}$

TAB. 5.3 – Résultat de l'identification des coefficients viscoplastiques pour le jeu de paramètres poroélastiques supposés.

	K_u (GPa)	K (GPa)	μ (GPa)	D (m ² .s ⁻¹)	K_v (MPa.s ^{1/N})	N	K_w (s)	α
estimé	8.7	1	2.264	$4.89 \cdot 10^{-9}$	$4.35 \cdot 10^{-1}$	2.3	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$3.24 \cdot 10^{-6}$
identifié	8.703	0.617	2.264	$5.539 \cdot 10^{-9}$	$4.394 \cdot 10^{-1}$	2.306	$3.4 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$
estimé	8.7	5	2.26	$1.10 \cdot 10^{-9}$	$4.35 \cdot 10^{-1}$	2.	$5.10 \cdot 10^{-2}$	$3.10 \cdot 10^{-6}$
identifié	8.71	0.568	2.265	$5.743 \cdot 10^{-9}$	$4.35 \cdot 10^{-1}$	2.308	$3.38 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$
estimé	8.7	0.1	2.264	$5.10 \cdot 10^{-9}$	$2.10 \cdot 10^{-1}$	2.	$5.10 \cdot 10^{-2}$	$1.10 \cdot 10^{-5}$
identifié	8.73	0.5647	2.279	$5.781 \cdot 10^{-9}$	$2.76 \cdot 10^{-1}$	2.398	$2.52 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-6}$

TAB. 5.4 – Résultats de l'identification conjointe des paramètres poroélastiques et viscoplastiques sur l'essai 5697-5

paramètres viscoplastiques au début de l'optimisation sont ceux préalablement estimés à l'aide des valeurs des vitesses asymptotiques (tableau 5.2).

Le tableau 5.3 présente les résultats. La réponse simulée est relativement proche de l'expérience. Néanmoins, il semble nécessaire de recalculer l'ensemble des paramètres (poroélastiques et viscoplastiques) pour mieux reproduire la réponse expérimentale. Les valeurs de N et K_w identifiées sont relativement corrélées. Deux paliers de charges ne semblent pas suffisants pour distinguer correctement ces deux coefficients.

Des identifications conjointes des paramètres poroélastiques et viscoplastiques à partir de différents estimés initiaux ont été réalisées. Le tableau 5.4 résume les résultats obtenus. Les estimés initiaux sont relativement proches les uns des autres. Comme on l'a déjà fait remarquer, le trajet de chargement n'est a priori pas assez riche pour identifier de manière unique les 8 paramètres. Les résultats du tableau doivent donc être pris comme des recalages.

La figure 5.4 confronte la réponse identifiée et les déformations enregistrées sur l'essai 5697 – 5. Les déformations poroélastiques et viscoplastiques sont également représentées.

Les corrélations entre les différents paramètres sont assez faibles, sauf entre le module drainé K et le paramètre d'écroutissage α ($C = 0.8$). Une légère corrélation entre respec-

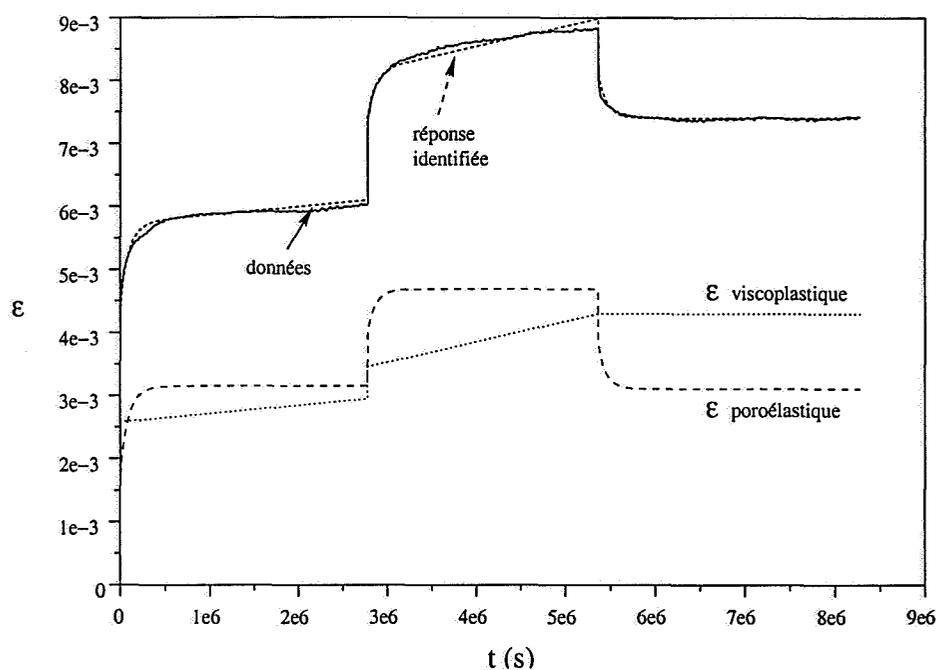


FIG. 5.4 – Identification de tous les coefficients sur les deux premiers paliers

tivement D et α , D et K est également observée. Néanmoins, ces valeurs indiquent une distinction relativement bonne entre les différents paramètres.

5.2.3 Discussion

Les résultats des différentes identifications sont cohérents. Les paramètres identifiés représentent correctement la réponse expérimentale. Les valeurs des paramètres sont dans les ordres de grandeurs attendus, notamment en ce qui concerne la poroélasticité. Les valeurs sont comparables à celles obtenues sur les essais de compression isotrope et de pulse test.

Le modèle viscoplastique permet de reproduire correctement les déformations irréversibles. On remarque tout de même que le modèle n'est pas en parfait accord avec l'expérience sur le deuxième palier. La déformation viscoplastique est trop linéaire en comparaison de l'expérience. La loi de comportement choisie reste trop simple.

La figure 5.5 représente la modélisation de l'essai monopulier 5697-2 avec les paramètres

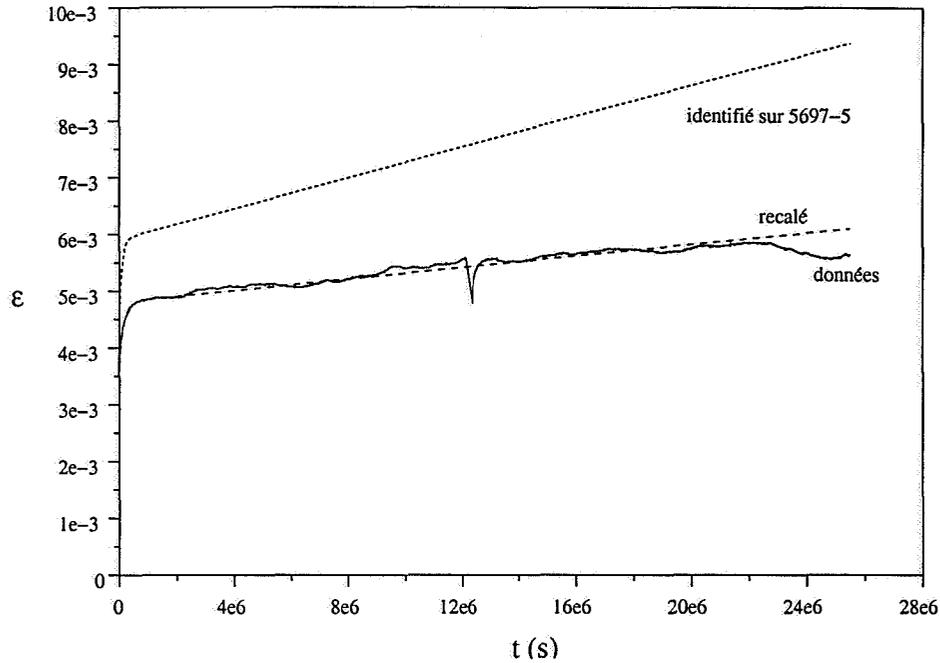


FIG. 5.5 – Mesures expérimentales de l'essai 5697-2, réponse simulée à partir des paramètres identifiés sur l'essai 5697-5, recalage.

identifiés sur l'essai 5697-5 ainsi que le recalage effectué (nouveaux paramètres : $K_W = 2.9 \cdot 10^{-2} s$, $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-6}$, autres paramètres inchangés). Les paramètres identifiés sur 5697-5 surestiment les déformations irréversibles initiales ainsi que la vitesse de déformation asymptotique.

Cet exemple met en évidence la forte variation des paramètres identifiés d'un test à l'autre. Dans la perspective d'une validation de cette loi de comportement, il semble nécessaire dans un premier temps de faire des identifications sur un maximum d'essais.

5.3 Conclusions

Les essais de laboratoire ont permis de mettre en évidence les points importants du comportement des argilites de Meuse Haute-Marne. Une loi de comportement élasto-viscoplastique avec un écrouissage isotrope non linéaire a été proposée. L'identification des paramètres matériaux sur un essai de fluage multiphasé a permis de séparer les déformations

d'origine *poroélastique* et *viscoplastique*. Les paramètres obtenus permettent de reproduire correctement les réponses expérimentales. Néanmoins, il conviendrait d'effectuer des identifications sur d'autres trajets de chargement (relaxation drainée ...) avant de conclure de la pertinence de la forme de la loi viscoplastique retenue ainsi que sur la valeur des coefficients estimés. D'autre part, il est fort probable que les déformations observées sur la structure seront d'amplitude très différentes (effet d'échelle).

Dans les chapitres suivants, consacrés à l'identification à partir de mesures effectuées sur des ouvrages réels, on utilise la loi élastoviscoplastique parfaite de Norton-Hoff (avec un seuil d'élasticité). L'aspect hydro-mécanique n'est plus pris en compte.

Chapitre 6

Différentiation Directe et identification en élastoviscoplasticité

Pour la plupart des problèmes rencontrés en pratique, il n'existe pas de solutions explicite en élastoviscoplasticité. Les solutions sont obtenues numériquement. C'est notamment le cas pour les ouvrages souterrains. Comme en poroélasticité, l'identification des paramètres matériaux prise comme la minimisation d'une fonctionnelle par un algorithme du gradient nécessite de disposer d'une méthode de calcul de sensibilités. Le but est d'obtenir les variations des champs mécaniques selon les paramètres que l'on désire identifier. La méthode de différentiation directe en élastoviscoplasticité est présentée et validé pour la loi de Norton-Hoff. La formulation suit le même cadre que les travaux de Vidal et al.[105], Tsay et al. [102, 103]. La méthode est rappelée en se focalisant principalement sur les paramètres constitutifs. On ne considère pas la différentiation de domaine, contrairement aux auteurs cités. On s'emploie à décrire l'intérêt du couplage entre résolution du problème direct et du problème de sensibilité par un schéma implicite dans le cadre de la méthode des éléments finis [93]. Le calcul de sensibilités est ensuite appliqué au cas d'un tunnel revêtu ou non dans un matériau élastoviscoplastique de type Norton-Hoff. On envisage des problèmes unidimensionnel et bidimensionnel. L'identification des paramètres matériau est discutée à partir de données simulées par un premier calcul direct.

6.1 Problème direct en élastoviscoplasticité

Une présentation des problèmes aux limites et à la valeur initiale en élastoviscoplasticité peut être trouvée dans l'ouvrage Lubliner [76]. Son [95] montre notamment l'existence et l'unicité de la solution du problème d'évolution. La formulation du problème ainsi que sa résolution par éléments finis sont succinctement rappelées.

6.1.1 Formulation générale

On considère l'intervalle de temps $T = [0, t_f]$ durant lequel la structure va subir un chargement que l'on particularisera par la suite pour le cas des ouvrages souterrains.

La frontière $\Gamma = \partial\Omega$ du domaine Ω est partitionnée en deux parties Γ_t et Γ_u sur lesquelles sont imposés respectivement la contrainte normale et le déplacement.

En $t = 0$, le milieu est dans son état naturel précontraint :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (6.1)$$

Tous les autres champs sont nuls à cet instant.

Les équations du problème en vitesses sont données par le système d'équations suivant :

– Equation d'équilibre et tractions imposées à la frontière :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\boldsymbol{f}} = 0 & \text{dans } \Omega \times T \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{n} = \dot{\boldsymbol{t}}^d & \text{sur } \Gamma_t \times T \end{cases} \quad (6.2)$$

– Equations de compatibilité et déplacements imposés :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}) = \frac{1}{2} (\nabla \dot{\boldsymbol{u}} + \nabla^T \dot{\boldsymbol{u}}) & \text{dans } \Omega \times T \\ \dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{u}}^d & \text{sur } \Gamma_u \times T \end{cases} \quad (6.3)$$

– Loi de comportement élasto-viscoplastique du matériau :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}) & \text{dans } \Omega \times T \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \text{dans } \Omega \times T \end{cases} \quad (6.4)$$

ϕ est un pseudo-potential du tenseur des contraintes (Lemaitre et Chaboche [73], Lubliner [76]). Pour plus de clarté, on considère le cas de la viscoplasticité parfaite. L'introduction d'un écrouissage ne pose aucune difficulté mais alourdirait la présentation.

L'implémentation du problème aux limites et à la valeur initiale est classiquement réalisée par éléments finis dans l'espace et différences finies dans le temps. En utilisant un schéma d'intégration temporelle implicite, la formulation faible du problème s'écrit à l'instant $t = t_{n+1}$:

Trouver $\mathbf{u}_{n+1} \in \mathcal{U}$, $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{vp}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \mathbf{f}_{n+1} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} t_{n+1}^d d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{n+1}) - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{vp}) + \boldsymbol{\sigma}_0 \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{vp} = \boldsymbol{\epsilon}_n^{vp} + \Delta t_{n+1} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \end{cases} \quad (6.5)$$

où tous les champs $X(t_{n+1})$ au temps $t = t_{n+1}$ sont notés X_{n+1} . On note également $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$. \mathcal{U} et \mathcal{V} sont les espaces fonctionnels classiques :

$$\begin{cases} \mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}^d(t_{n+1}) \text{ sur } \Gamma_u\} \\ \mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u\} \end{cases} \quad (6.6)$$

6.1.2 Résolution numérique

Au pas de temps t_{n+1} , la résolution du système 6.5 s'effectue itérativement. L'approximation éléments finis donne l'équation suivante (méthode des résidus [110]) :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}_{n+1}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \left(\mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{U}_{n+1} - \Delta t_{n+1} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma}_{RRA}(\mathbf{B} \mathbf{U}_{n+1}))}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) d\Omega - \mathcal{F}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (6.7)$$

où

– \mathbf{B} correspond à l'approximation éléments finis de l'opérateur de déformation,

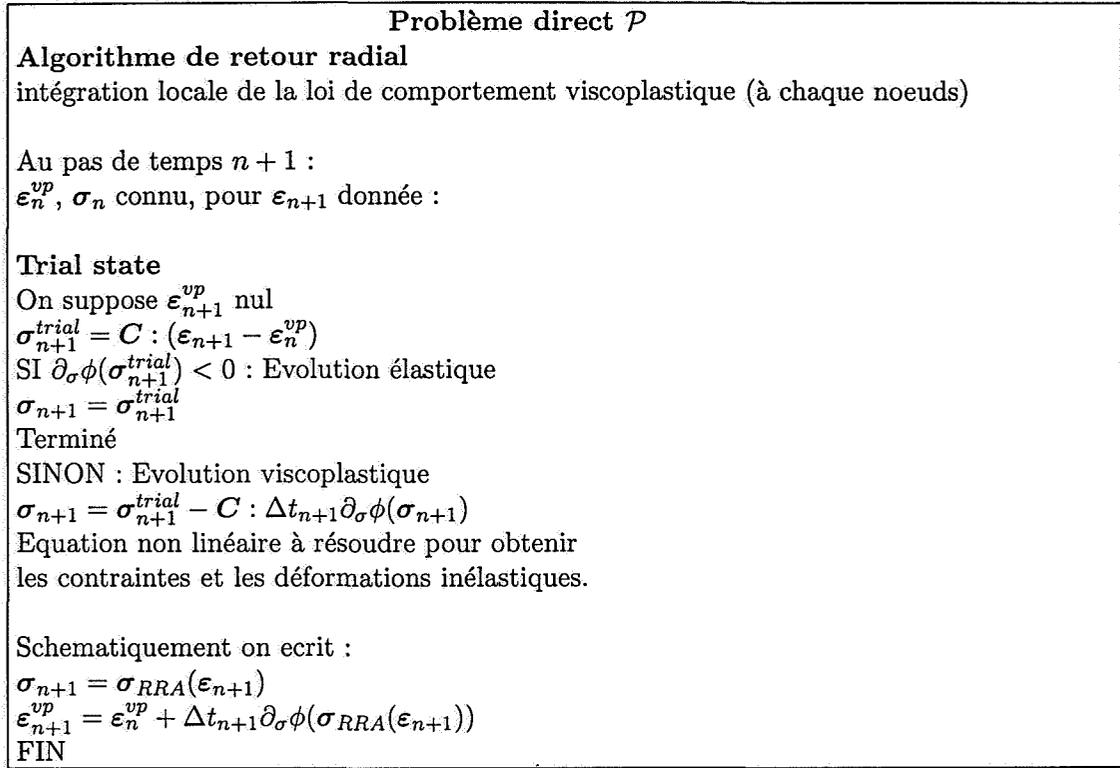
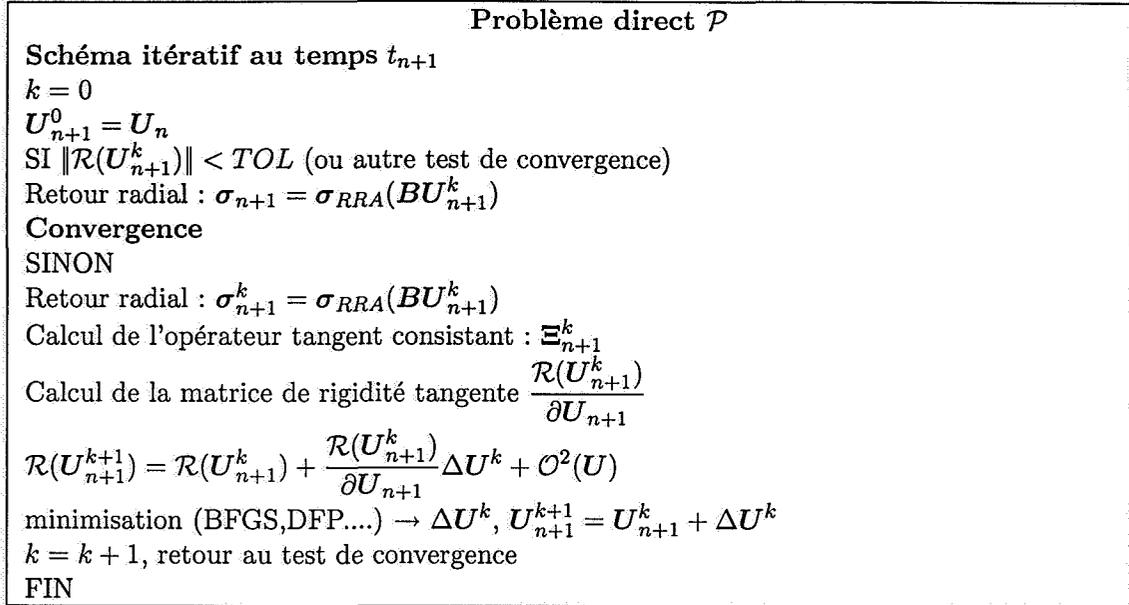


FIG. 6.1 – Algorithme de retour radial

- \mathcal{F}_{n+1} représente l'approximation éléments finis des termes de forces provenant du chargement et des instants précédents.
- \mathbf{U}_{n+1} est le vecteur des déplacements nodaux.
- $\sigma_{RRA}(\mathbf{B}\mathbf{U}_{n+1})$ représente les contraintes σ_{n+1} obtenue localement par un algorithme de retour radial [94, 93] pour une déformation totale ε_{n+1} donnée. Cet algorithme de projection est résumé sur la figure 6.1.

La résolution de l'équation non linéaire précédente (6.7) ($\mathcal{R} = \mathbf{0}$) s'effectue itérativement par un algorithme avec gradient (type BFGS, DFP etc.). Le calcul de $\frac{\partial \mathcal{R}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}}$ nécessite le calcul de l'opérateur tangent $\Xi_{n+1} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}|_{n+1}$. Cet opérateur est obtenu par une linéarisation exacte des équations de comportement discrétisées [93]. Dans le cas de la viscoplasticité parfaite, on obtient [93] :

$$\Xi_{n+1} = \left(\mathbf{C}^{-1} + \Delta t_{n+1} \frac{\partial^2 \phi(\sigma_{n+1})}{\partial \sigma^2} \right)^{-1} \quad (6.8)$$

FIG. 6.2 – Itération sur la formulation variationnelle au temps t_{n+1} .

d'où

$$\frac{\partial \mathcal{R}(U_{n+1})}{\partial U_{n+1}} = \int_{\Omega} B^T \Xi_{n+1} B d\Omega \quad (6.9)$$

La figure 6.2 résume l'algorithme de résolution sur un pas de temps. La convergence et la stabilité d'un tel schéma peut être démontrée [95, 93]. L'utilisation de la matrice tangente permet une meilleure convergence. L'intérêt d'une telle méthode de résolution avec utilisation de la matrice tangente est encore plus évidente lorsque que l'on couple le calcul direct avec un calcul de sensibilités par différentiation directe comme on va le montrer.

6.2 Différentiation directe

6.2.1 Formulation

La différentiation directe permet d'obtenir les variations des champs selon les paramètres (les sensibilités) sur tout le domaine, aux différents instants. Soit c_i un paramètre à identifier, les sensibilités par rapport à ce paramètre du déplacement et des contraintes seront notées respectivement $\delta_{c_i} u$ et $\delta_{c_i} \sigma$.

La différentiation du problème élasto-viscoplastique va donner un système d'équations aux dérivées partielles similaires dans lequel l'équation reliant la sensibilité des contraintes à celle des déplacements est du type visco-élastique anisotrope inhomogène. Le problème différentié sera linéaire. La différentiation des équations d'équilibre et de compatibilité est triviale, les opérateurs gradient et divergence étant linéaires. Les conditions aux limites et initiales sont également facilement différentiées. La différentiation de la loi de comportement doit être quant à elle effectuée avec plus d'attention.

Différentiation de la loi de comportement discrétisée

Le pseudo-potential est une fonction des paramètres c_i et du champs de contraintes lui aussi dépendant de c_i . On doit donc écrire schématiquement $\phi(\sigma(c_i), c_i)$. La différentiation des équations de comportement (équations 6.4) donne :

$$\begin{aligned} \delta_{c_i} \sigma_{n+1} &= \frac{\partial C}{\partial c_i} : (\varepsilon(u_{n+1}) - \varepsilon_{n+1}^{vp}) \\ &+ C : (\varepsilon(\delta_{c_i} u_{n+1}) - \delta_{c_i} \varepsilon_{n+1}^{vp}) + \frac{\partial \sigma_0}{\partial c_i} \end{aligned}$$

$$\delta_{c_i} \varepsilon_{n+1}^{vp} = \delta_{c_i} \varepsilon_n^{vp} + \Delta t_{n+1} \frac{\partial^2 \phi(\sigma(c_i), c_i)}{\partial \sigma \partial c_i} + \Delta t_{n+1} \frac{\partial^2 \phi(\sigma_{n+1})}{\partial \sigma^2} \delta_{c_i} \sigma_{n+1}$$

En combinant les deux dernières équations, on dérive la loi de comportement suivante sur les sensibilités :

$$\begin{aligned} \delta_{c_i} \sigma_{n+1} &= \Xi_{n+1} : \varepsilon(\delta_{c_i} u_{n+1}) - \Xi_{n+1} : \delta_{c_i} \varepsilon_n^{vp} \\ &+ \Xi_{n+1} : C^{-1} : \frac{\partial C}{\partial c_i} : (\varepsilon(u_{n+1}) - \varepsilon_{n+1}^{vp}) \\ &- \Xi_{n+1} : \frac{\partial^2 \phi(\sigma_{n+1}(c_i), c_i)}{\partial \sigma \partial c_i} \Delta t_{n+1} \\ &+ \Xi_{n+1} : C^{-1} : \frac{\partial \sigma_0}{\partial c_i} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Où Ξ_{n+1} est l'opérateur tangent consistant préalablement défini par l'équation (6.8).

Cette relation de comportement (6.10) est du type visco-élastique. Les sensibilités des contraintes au temps t_{n+1} dépendent *linéairement* des sensibilités sur le déplacement à l'instant t_{n+1} et de quantités connues en t_n et t_{n+1} .

Formulation faible du problème de sensibilités \mathcal{P}^f

En suivant la même méthode que pour le problème direct, la formulation faible du problème aux limites et à valeur initiale des sensibilités s'écrit en $t = t_{n+1}$ comme suit :

Trouver $\delta_{c_i} \mathbf{u}_{n+1} \in \delta_{c_i} \mathcal{U}$ et $\delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ vérifiant :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial c_i} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \frac{\partial t_{n+1}^d}{\partial c_i} d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (6.11)$$

avec la relation (6.10) de comportement sur les sensibilités décrite précédemment et les conditions initiales suivantes en $t = 0$:

$$\begin{cases} \delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_0}{\partial c_i} \\ \delta_{c_i} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

$\delta_{c_i} \mathcal{U}$ est par ailleurs défini par :

$$\delta_{c_i} \mathcal{U} = \left\{ \delta_{c_i} \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \delta_{c_i} \mathbf{u}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{u}_{n+1}^d}{\partial c_i} \text{ sur } \Gamma_u \right\} \quad (6.13)$$

Forme Incrémentale \mathcal{P}^f

Pour bien voir la structure du calcul qui est effectué pas à pas, on décompose la sensibilité sur le déplacement comme suit :

$$\delta_{c_i} \mathbf{u}_{n+1} = \delta_{c_i} \Delta \mathbf{u} + \delta_{c_i} \mathbf{u}_n \quad (6.14)$$

La formulation faible incrémentale s'écrit alors :

Trouver $\delta_{c_i} \Delta \mathbf{u} \in \delta_{c_i} \mathcal{U} = \left\{ \delta_{c_i} \Delta \mathbf{u} \in H^1 \mid \delta_{c_i} \Delta \mathbf{u} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}^d}{\partial c_i} \text{ on } \Gamma_u \right\}$ et $\delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ vérifiant

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varepsilon(v) : \Xi_{n+1} : \varepsilon(\delta_{c_i} \Delta u) d\Omega &= \int_{\Omega} v \frac{\partial f_{n+1}}{\partial c_i} d\Omega + \int_{\Gamma_T} v \frac{\partial t_{n+1}^d}{\partial c_i} d\Gamma \\
&+ \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \Xi_{n+1} : \left[\frac{\partial^2 \phi(\sigma_{n+1}(c_i), c_i)}{\partial \sigma \partial c_i} \Delta t_{n+1} \right] d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \Xi_{n+1} : C^{-1} : \frac{\partial C}{\partial c_i} : \left(\varepsilon(\Delta u) - \Delta t_{n+1} \frac{\partial \phi(\sigma_{n+1})}{\partial \sigma} \right) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \Xi_{n+1} : C^{-1} : \delta_{c_i} \sigma_n d\Omega \quad \forall v \in \mathcal{V}
\end{aligned}$$

avec la loi de comportement :

$$\begin{aligned}
\delta_{c_i} \sigma_{n+1} &= \Xi_{n+1} : \varepsilon(\delta_{c_i} \Delta u) \\
&+ \Xi_{n+1} : C^{-1} : \left[\delta_{c_i} \sigma_n + \frac{\partial C}{\partial c_i} : \left(\varepsilon(\Delta u) - \Delta t_{n+1} \frac{\partial \phi(\sigma_{n+1})}{\partial \sigma} \right) \right] \\
&- \Xi_{n+1} : \frac{\partial^2 \phi(\sigma_{n+1}(c_i), c_i)}{\partial \sigma \partial c_i} \Delta t_{n+1}
\end{aligned}$$

On remarque que le problème est linéaire selon $\delta_{c_i} \Delta u$. Le second membre est différent suivant le paramètre c_i envisagé. En revanche, l'opérateur tangent Ξ_{n+1} (membre de gauche) ne dépend pas de c_i .

Dans le cas où c_i est un paramètre constitutif, les dérivées partielles $\frac{\partial f_{n+1}}{\partial c_i}$, $\frac{\partial t_{n+1}^d}{\partial c_i}$, $\frac{\partial \sigma_0}{\partial c_i}$ sont nulles. Les conditions aux limites du problème différentié deviennent homogènes.

6.2.2 Résolution numérique

D'un point de vue éléments finis, le système linéaire précédent sur les sensibilités à l'instant t_{n+1} peut s'écrire schématiquement :

$$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{R}(U_{n+1})}{\partial U_{n+1}}}_{\text{Matrice tangente convergée 6.9}} \delta_{c_i} \Delta U_{n+1} = \underbrace{\delta_{c_i} F}_{\text{pseudo-chargement}} \quad (6.15)$$

avec $\delta_{c_i} \Delta U_{n+1}$ vecteur des inconnues nodales (sensibilités) ; $\delta_{c_i} F$ représente l'approximation éléments finis des termes de forces intervenant dans le second membre de l'équation (6.15).

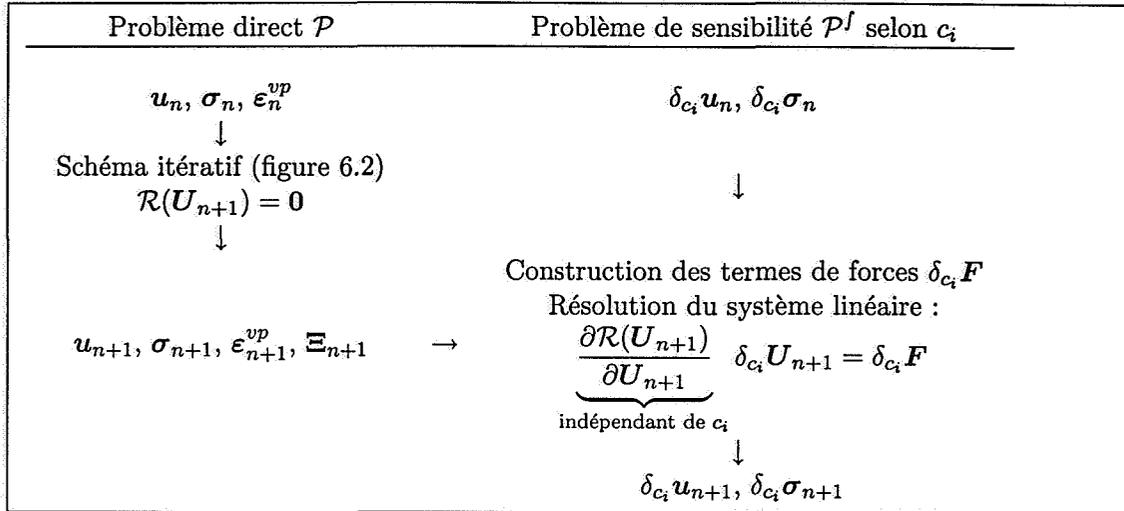


FIG. 6.3 – Organisation d'un pas d'intégration entre calcul direct et différentié.

La figure 6.3 résume l'organisation entre calcul direct et calcul différentié. Une fois le pas d'intégration du calcul initial élasto-viscoplastique convergé, les termes de forces des problèmes différentiés sont construits. La matrice de rigidité des problèmes différentiés correspond à la matrice tangente du problème initial, elle est identique quelque soit le paramètre c_i . D'une manière identique au cas linéaire, une fois la décomposition LU de cette matrice de rigidité effectuée, la résolution des p systèmes linéaires différentiés (si on a p paramètres) est très rapide. Une fois les sensibilités selon le déplacement calculées, la loi de comportement (6.15) permet d'obtenir les sensibilités selon les contraintes en t_{n+1} .

Cette méthode de différentiation directe a été développée dans le code éléments finis Cast3M pour la loi viscoplastique parfaite de Norton-Hoff. Le calcul incrémental élastoviscoplastique est effectué à l'aide de l'algorithme préalablement décrit (figure 6.2), les itérations s'effectuent avec la matrice tangente (procédure pasapas, opérateur K_{tangent}). Le problème différentié est résolu, comme dans le cas poroélastique, en parallèle à l'aide la procédure perso1. Cette procédure est automatiquement appelée par pasapas à la fin d'un pas de temps du calcul direct. On notera que Cast3M ne permet pas d'obtenir l'opérateur tangent $\boldsymbol{\Xi}_{n+1}$, par l'intermédiaire de l'opérateur K_{tangent} seule la matrice de rigidité tangente $\frac{\partial \mathcal{R}(\mathbf{U}_{n+1})}{\partial \mathbf{U}_{n+1}}$ est calculée et stockée pour les itérations directes. Or pour obtenir le termes

de forces intervenant dans les problèmes de sensibilités, on a besoin de l'opérateur Ξ_{n+1} . Il est donc calculé dans `perso1`, en langage `Gibiane`, à partir des résultats du calcul direct. La figure 6.4 résume les différentes expressions (potentiel, opérateur tangent consistant, termes de forces) pour la loi de Norton-Hoff.

La durée du calcul direct et des 4 calculs différenciés revient environ à 1.5 fois la durée d'un calcul direct. On voit l'avantage de cette technique comparé à la méthode de différence finie qui nécessiterait le calcul de 5 problèmes directs pour obtenir les sensibilités sur les 4 paramètres constitutifs. Les résultats obtenus par différenciation directe ont été validés par une comparaison avec un schéma aux différences finies.

Il convient de noter également que l'utilisation du vrai opérateur tangent cohérent Ξ_{n+1} et non d'une approximation numérique est essentielle pour obtenir des résultats précis sur les sensibilités. On se référera à l'article de Vidal et al.[105] pour plus de précision sur ce point.

6.3 Exemples numériques

On s'intéresse maintenant à l'application de la méthode de Différentiation Directe dans le cas de l'identification des paramètres constitutifs à partir de mesures réalisés sur les ouvrages souterrains. On considère l'intervalle de temps $T = [0, t_f]$ durant lequel l'ouvrage va être excavé, revêtu et instrumenté. Plusieurs types d'observations, majoritairement des mesures de déplacement, seront effectuées durant cette période.

6.3.1 Cas des ouvrages souterrains

On rappelle les trajets de chargement subits par le massif rocheux lors de l'excavation d'un tunnel. Le domaine d'étude Ω évolue dans le temps lors de l'excavation et la mise en place du revêtement. Ce domaine se décompose comme suit :

- $\Omega = \Omega_m$ pour $t \in]-\infty, 0]$, le massif non excavé.
- $\Omega = \Omega_X$ pour $t \in [0, t_l]$ le milieu excavé avant la pose du revêtement.
- $\Omega = \Omega_X \cup \Omega_\ell$ for $t > t_l$ le milieu excavé et revêtu.

L'expression du pseudo-potential ϕ pour la loi élasto-viscoplastique de Norton-Hoff est donnée par :

$$\phi(\sigma) = \frac{K}{N+1} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_Y}{K} \right\rangle^{N+1}$$

où $\langle x \rangle$ est la partie positive de x .

L'opérateur tangent cohérent en t_{n+1} est donné par :

$$\Xi_{n+1} = \left(C^{-1} + A_{n+1} J + B_{n+1} \frac{s_{n+1} \otimes s_{n+1}}{(\sigma_{eq})_{n+1}^2} \right)^{-1}$$

avec :

$$A_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{\Delta t_{n+1}}{(\sigma_{eq})_{n+1}} \left\langle \frac{(\sigma_{eq})_{n+1} - \sigma_Y}{K} \right\rangle^N$$

$$B_{n+1} = -\frac{9}{4} \Delta t_{n+1} \left(\left\langle \frac{(\sigma_{eq})_{n+1} - \sigma_Y}{K} \right\rangle^N - \frac{N}{K} \left(\left\langle \frac{(\sigma_{eq})_{n+1} - \sigma_Y}{K} \right\rangle^{N-1} \right) \right)$$

Dérivées partielles selon les paramètres constitutifs :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma \partial N} &= \left\langle \frac{(\sigma_{eq}) - \sigma_Y}{K} \right\rangle^N \text{Ln} \left(\left\langle \frac{(\sigma_{eq}) - \sigma_Y}{K} \right\rangle \right) \frac{3}{2} \frac{s}{\sigma_{eq}} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma \partial K} &= -\frac{N}{K} \left\langle \frac{(\sigma_{eq}) - \sigma_Y}{K} \right\rangle^N \frac{3}{2} \frac{s}{\sigma_{eq}} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma \partial \sigma_Y} &= -\frac{N}{K} \left\langle \frac{(\sigma_{eq}) - \sigma_Y}{K} \right\rangle^{N-1} \frac{3}{2} \frac{s}{\sigma_{eq}} \end{aligned}$$

FIG. 6.4 – Expressions pour la loi viscoplastique de Norton-Hoff.

L'indice ℓ correspond aux revêtement. L'interface entre la roche et le revêtement sera notée $\Gamma_{X\ell}$. Ce dernier est considéré élastique isotrope :

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}_\ell : \dot{\varepsilon} \quad (x, t) \in \Omega_\ell \times T_1 =]t_\ell, t_f] \quad (6.16)$$

Numériquement, le calcul est réalisé sur le domaine global $\Omega_X \cup \Omega_\ell$. Avant l'installation du revêtement, celui ci est rendu inactif en prenant une valeur très faible pour son module d'Young. D'un point de vue numérique, une valeur trop faible de ce module, par exemple : $E_{\text{revêtement}} \ll 10^{-15} E_{\text{roche}}$, engendre des erreurs numériques substantielles dans le calcul de sensibilités. Ces propagations d'erreur s'expliquent facilement par des erreurs d'arrondis dans le calcul des termes de forces du problème différentié (équation (6.15)).

Le chargement imposé numériquement est donc le suivant :

- Pour $t \in [-\infty, 0[$, le massif non-excavé est en équilibre dans un état de contraintes initiales σ_0 . La condition prescrite dans le calcul éléments finis est : $\sigma \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_\ell} = \sigma_0 \cdot \mathbf{n}$. La rigidité dans Ω_ℓ étant négligeable, cette condition est pratiquement équivalente à la condition réelle : $\sigma \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{X\ell}} = \sigma_0 \cdot \mathbf{n}$.
- Pour $t \in [0, t_\ell[$: le tunnel est excavé mais le revêtement n'est pas encore posé. La frontière $\Gamma_{X\ell}$ du massif rocheux est libre de contraintes. On impose : $\sigma \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_\ell} = \mathbf{0}$. La rigidité dans Ω_ℓ étant négligeable, cette condition est pratiquement équivalente à la condition réelle : $\sigma \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{X\ell}} = \mathbf{0}$.
- Pour $t \in [t_\ell, t_f]$, le revêtement élastique est posé. La condition aux limites s'écrit maintenant : $\sigma \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_\ell} = \mathbf{0}$. En revanche, la rigidité du revêtement n'est plus négligeable et la force entre le massif rocheux et le revêtement $\sigma \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{X\ell}}$ n'est plus nulle.

Dans ce qui suit, l'excavation du tunnel est supposée être instantanée. Le temps de déconfinement, lié à la vitesse d'excavation, est négligeable par rapport à la durée d'observation : quelques jours en comparaison d'une dizaine d'années.

6.3.2 Exemples d'identification

Des exemples d'identification des paramètres constitutifs (E, N, K, σ_Y) de la loi de Norton-Hoff ¹ dans la configuration d'un ouvrage souterrain sont maintenant présentés.

¹dans ce qui suit, on suppose ν connu et égal à 0.3 (valeur moyenne pour les roches).

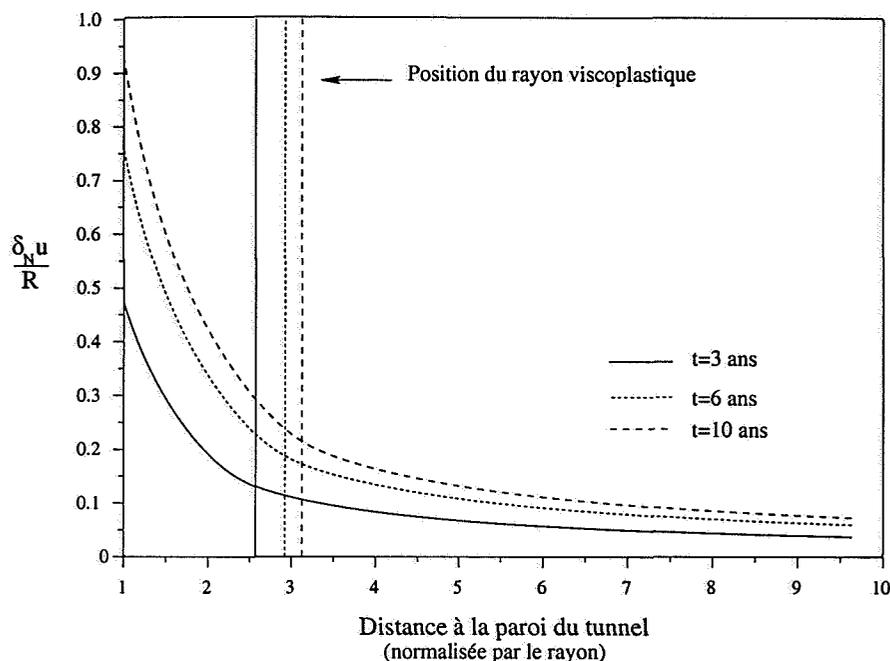


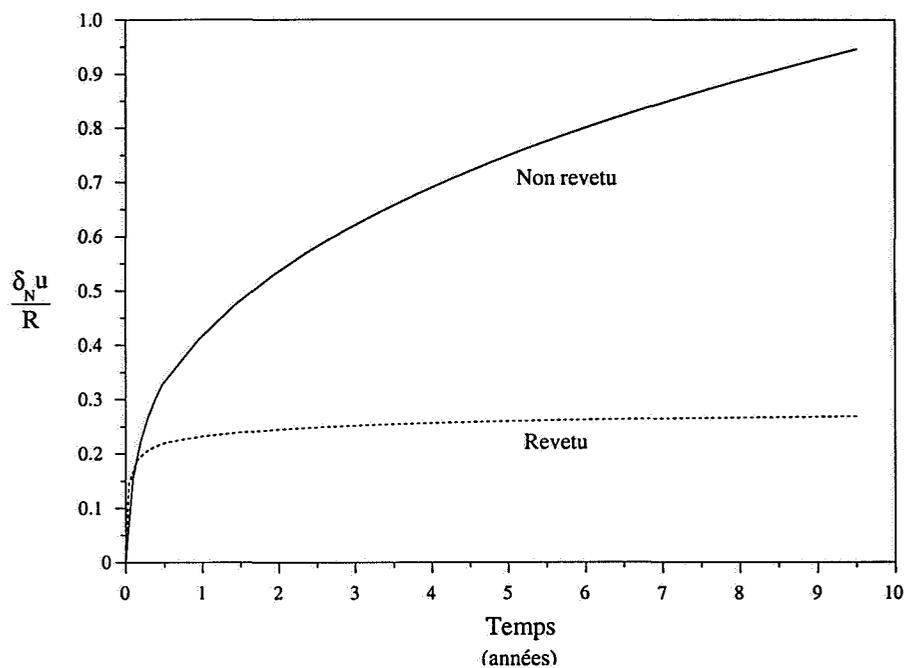
FIG. 6.5 – Coupe de $\delta_N u_r$ selon l'axe radial au tunnel en trois instants (3, 6 et 9 ans).

L'identification est résolue par la minimisation d'une fonctionnelle coût de type moindres carrées par un algorithme de Levenberg-Marquardt.

Cas unidimensionnel

On considère le cas simple d'un tunnel circulaire dans un milieu infini avec des contraintes initiales isotropes. Le problème est donc complètement unidimensionnel. On discute le problème d'identification dans le cas du tunnel revêtu et non revêtu. Comme évoqué plus haut le temps d'excavation est négligeable comparé au temps d'observation : l'excavation est terminée en $t = 0^+$. Dans le cas du tunnel revêtu, le revêtement est posé à peu près vingt jours après la fin de l'excavation. Le revêtement est supposé élastique avec un module d'Young de 15 GPa et un coefficient de Poisson de 0.25.

Les mesures sont simulées par un premier calcul direct avec un jeu de paramètres dit optimum c_{opt} . Ces valeurs optimales ont été prises pour reproduire l'ordre de grandeur des déplacements constatés in situ mais également en relation avec les données connues sur les

FIG. 6.6 – Evolution au cours du temps de $\delta_N u_r$ en paroi.

roches argileuses de Meuse Haute-Marne. On prend les valeurs suivantes pour l'optimum :

$$\begin{cases} E = 4. \text{GPa} & \nu = 0.3 \\ \sigma_Y = 1. \text{MPa} & N = 8. \\ K = 1.4 \text{MPa} \cdot \text{s}^{1/N} \end{cases}$$

Pour le tunnel non revêtu, seuls les déplacements radiaux sont supposés enregistrés en trois points : en paroi et respectivement à 2 et 3 rayons de la paroi. Dans le cas du tunnel revêtu, seules la convergence et la pression à l'interface revêtement / massif seront utilisées.

Avant toute optimisation, les résultats du calcul de sensibilités méritent une attention particulière. En effet, les sensibilités sont directement reliées à la quantité d'information sur un paramètre contenu dans les champs de déplacements et de contraintes. La figure 6.5 montre la sensibilité selon N du déplacement radial le long de l'axe radial au tunnel pour le cas non revêtu. Exactement la même forme est obtenue selon les autres paramètres,

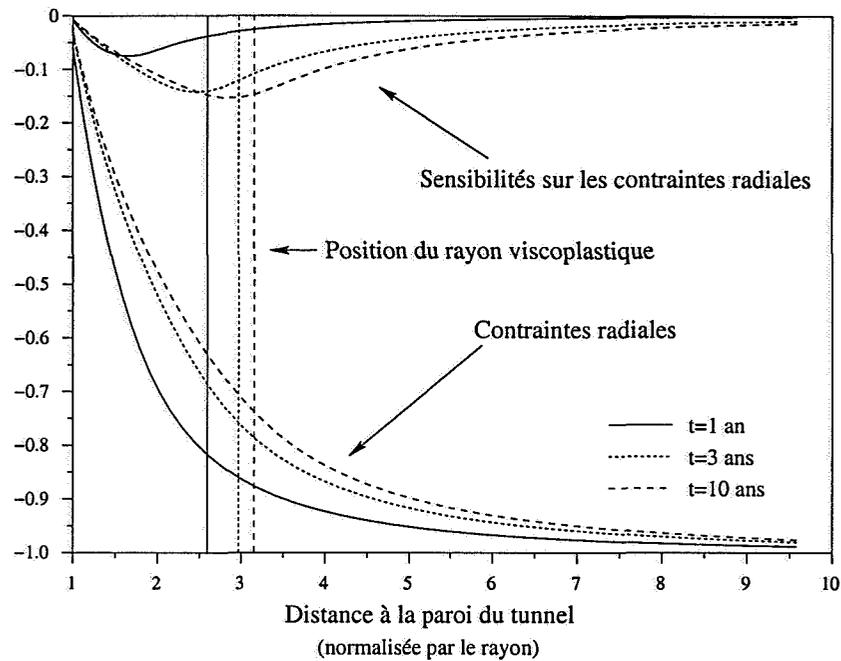


FIG. 6.7 – Coupe de σ_{rr} et $\delta_N \sigma_{rr}$ selon l'axe radial au tunnel. Cas unidimensionnel non revêtu.

pour le cas revêtu ou non revêtu. La plupart de l'information est située à moins de trois rayons de la paroi, cette limite est directement liée à la zone viscoplastique. Le profil de la sensibilité sur la contrainte radiale (figure 6.7) selon un axe radial au tunnel confirme cette remarque.

L'évolution de la sensibilité du déplacement radial dans le temps en paroi est représentée pour les cas revêtu et non revêtu sur la figure 6.6. On remarque une nette différence. La constante de temps de la structure est largement diminuée en présence du revêtement (voir [15] pour plus de détails). Dans le cas revêtu, la sensibilité atteint rapidement une valeur asymptotique contrairement au cas non revêtu pour lequel au bout de 10 ans la sensibilité n'est pas stabilisée. Ce résultat est important car il indique que pour le cas revêtu aucune nouvelle information sur les paramètres n'est à attendre après 3-4 ans de mesures. En effet, l'identification dans le cas revêtu n'est pas influencé par la période d'observation : les résultats sont identiques avec 1, 3 ou 10 ans de mesures. Ce n'est pas le cas pour le tunnel revêtu comme le montrent les résultats du tableau 6.1. Néanmoins, dans

t_f	E (GPa)	σ_Y (MPa)	N	K (MPa.s ^{1/N})
10 ans	4.004	1.06	7.947	142.0
3 ans	4.003	1.94	7.201	170.1
1 an	3.99	1.16	7.09	189.5
estimé	1.0	1	7.	200
optimum	4.0	2	8.	140

TAB. 6.1 – Influence de la période d'observation sur les résultats de l'inversion, cas unidimensionnel non revêtu.

	E (GPa)	σ_Y (MPa)	N	K (MPa.s ^{1/N})	\mathcal{J}	$\ \nabla\mathcal{J}\ $	Iterations
initial	1.	1.	9.	100.	0.129	0.199	
final	4.132	1.439	7.926	130.0	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	10
initial	5	1.	7.	200	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	
final	4.12	1.982	7.245	157.8	$1 \cdot 10^{-7}$	$8.9 \cdot 10^{-6}$	12
initial	4	0.5	7.5	100	0.250	0.348	
final	3.97	1.048	8.032	135.5	$2.9 \cdot 10^{-6}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	15
initial	4.50	1	7.5	160	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	
final	4.127	1.665	7.64	140.	$2.1 \cdot 10^{-6}$	$7.0 \cdot 10^{-6}$	12
Optimum	4.	1.	8	140.			

TAB. 6.2 – Cas non revêtu, résultats pour plusieurs estimés initiaux.

ce cas précis, on notera qu'une extrapolation effectuée à partir des paramètres identifiés sur les trois premières années ne donne qu'une erreur de 5% sur la convergence à dix ans. L'extrapolation est visible sur la figure 6.11.

Les tableaux 6.2 et 6.3 présentent les résultats de l'identification pour différents estimés de départ, pour une durée d'observation d'une dizaine d'années. Les résultats sont corrects, plus particulièrement dans le cas revêtu où l'information contenue dans les mesures est plus riche comme remarqué précédemment. Pour tous les jeux de paramètres identifiés, les déplacements aux cours du temps sont superposables aux mesures. L'optimum est atteint en une dizaine d'itérations maximum (figure 6.8).

Dans le cas du tunnel non revêtu, l'identification réalisée en utilisant la seule mesure de convergence en paroi ou avec les trois points de mesures donne les mêmes résultats. Ce qui s'explique par le fait que l'information (les sensibilités) sur les paramètres atteint sa valeur maximale en paroi.

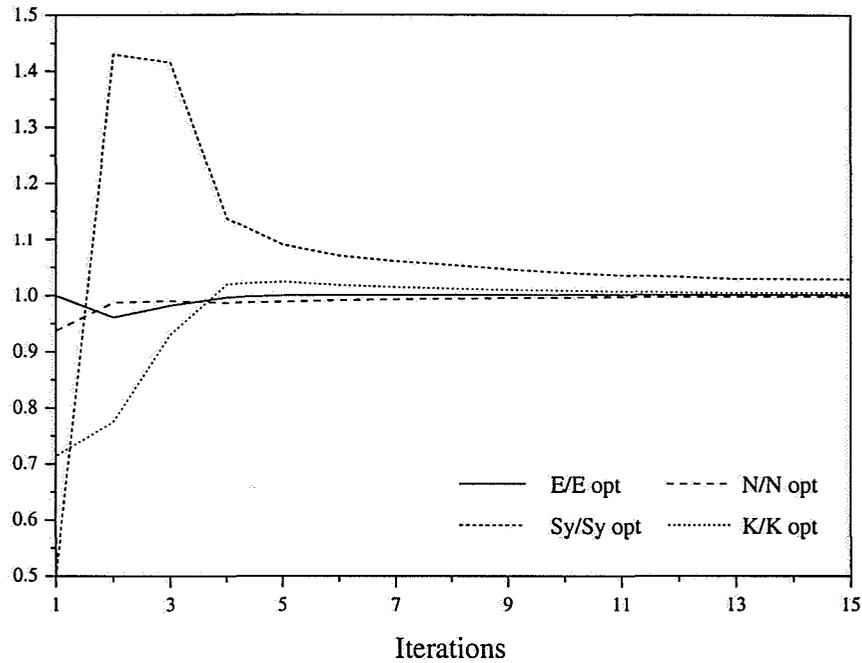
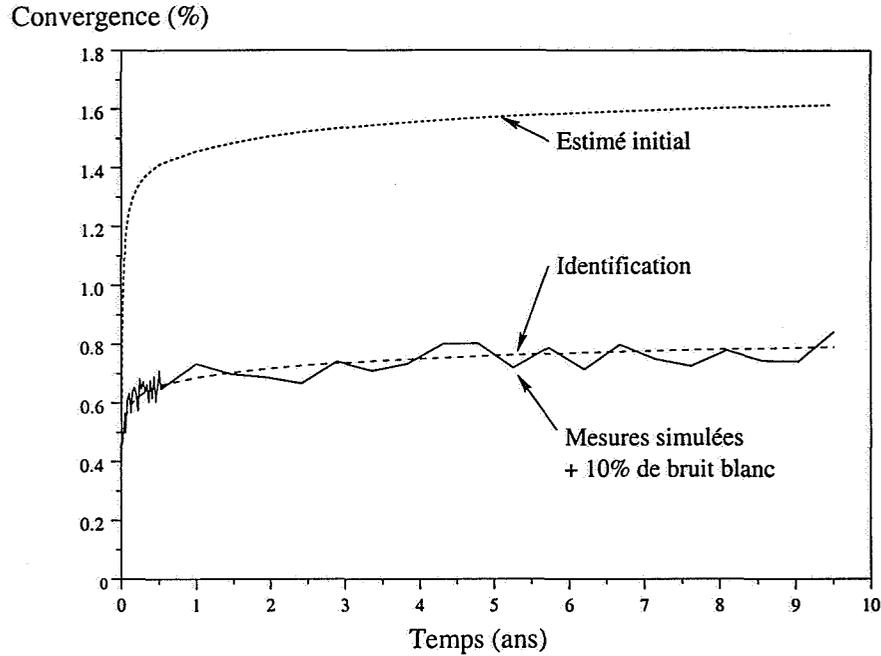


FIG. 6.8 – Convergence vers l'optimum des différents paramètres en une dizaine d'itérations, cas unidimensionnel.

	E (GPa)	σ_Y (MPa)	N	K (MPa.s ^{1/N})	\mathcal{J}	$\ \nabla\mathcal{J}\ $	Iterations
initial	1.	1.	9.	100.	790.13	635.6	
final	4.014	0.908	8.129	135.5	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-2}$	14
initial	1	1.	7.	200	714.22	399.3	
final	4.00	1.060	7.947	142.0	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-3}$	12
initial	4	0.5	7.5	100	250.9	183.1	
final	4.0	1.02	7.98	140.7	$2.7 \cdot 10^{-6}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	15
initial	4.50	1	7.5	160	0.685	0.78	
final	4.00	1.05	7.95	141.7	$1.06 \cdot 10^{-5}$	$7.6 \cdot 10^{-3}$	13
Optimum	4.	1.	8.	140.			

TAB. 6.3 – Cas unidimensionnel revêtu, résultats pour plusieurs estimés initiaux.

FIG. 6.9 – Accord sur les données de convergence u/R , cas de données bruitées à 10%.

	E (GPa)	σ_Y (MPa)	N	K (MPa.s $^{-1/N}$)	\mathcal{J}	$\ \nabla\mathcal{J}\ $	Iterations
initial	1.	1.	9.	100.	792.6562	649.4	
final	4.213	2.144	7.30	151.1	0.7914	$7.0892 \cdot 10^{-3}$	10
initial	5	1.	7.	200	4.057	6.05	
final	4.199	2.21	7.21	156.0	0.7912	$4.1716 \cdot 10^{-3}$	9
initial	4	0.5	7.5	100	254.86	180.4	
final	4.176	2.339	7.045	165.5	0.7913	$5.96 \cdot 10^{-3}$	11
initial	4.50	1	7.5	160	1.822	1.157	
final	4.184	2.293	7.10	162.1	0.7910446	$3.2713 \cdot 10^{-3}$	11
Optimum	4.	1.	8.	140.			

TAB. 6.4 – Résultats de l'identification, cas revêtu unidimensionnel, données perturbées par un bruit blanc (10%).

L'effet d'un bruit blanc sur les données simulées a été étudié. Les résultats sont assez sensibles au bruit blanc. L'erreur relative avec les paramètres optimum est de l'ordre de 5% pour 10% d'amplitude de bruit blanc. La convergence calculée avec les paramètres estimé et identifié ainsi que les données bruités sont représentés sur la figure 6.9. On remarque que l'accord reste tout à fait correct.

Exemple bidimensionnel

Le modèle numérique Le problème envisagé est complètement bidimensionnel. Ceci est dû à la forme géométrique de la section du tunnel ainsi qu'à l'état de contraintes initiales qui est pris anisotrope ($K_0 = 0.8$). Le trajet de chargement est similaire au cas unidimensionnel. Des mesures de convergence en paroi seront utilisées ainsi que deux mesures de pression à l'interface massif / revêtement. Le cas où des mesures de déplacement dans deux points du massif sont disponibles sera également présentés.

L'optimum est ici légèrement différent :

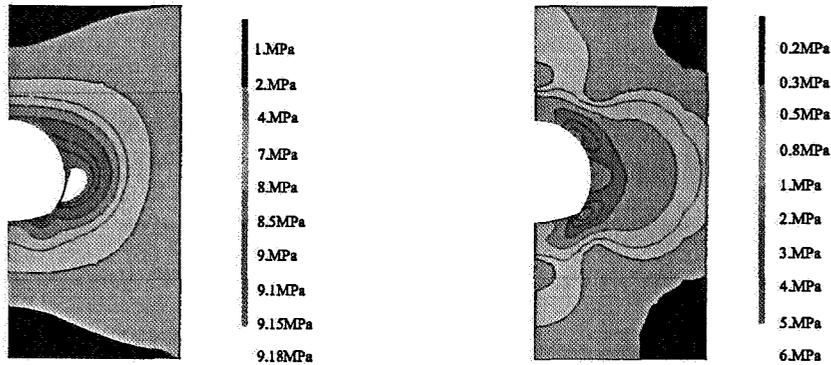
$$\begin{cases} E = 4.\text{GPa} & \nu = 0.3 \\ \sigma_Y = 3.\text{MPa} & N = 8. \\ K = 1.2\text{MPa}\cdot\text{s}^{1/N} \end{cases}$$

Résultats de l'optimisation Le tableau 6.5 montre les résultats de l'algorithme de Levenberg-Marquardt dans le cas où des déplacements sont mesurés dans le massif à l'aide d'un extensomètre en forage. Les résultats sont très bons. Dans la plupart des cas, la convergence est obtenue en moins de dix itérations.

Sans les points de mesures de déplacement dans le massif, les résultats sont très légèrement moins bons (tableau 6.6) mais restent tout à fait acceptables.

Discussion sur l'unicité de l'identification

Les résultats précédents ont montrés qu'il était possible d'identifier les paramètres de la loi de comportement de Norton-Hoff à partir des mesures de déplacements et de pression sur le revêtement ou dans le massif. Dans tous les cas, les données ont été parfaitement reproduites même lorsque les paramètres identifiés ne correspondaient pas exactement aux

FIG. 6.10 – Isovaleurs de Von Mises de σ et $\delta_N \sigma$ ($\sigma_Y = 3. MPa$).

	$E (GPa)$	$\sigma_Y (MPa)$	N	$K (MPa.s^{1/N})$	\mathcal{J}	$\ \nabla \mathcal{J}\ $	Iterations
initial	1.	2.0	7.	200.	1713.2	855.3	
final	4.00	2.995	8.00	119.8	1.10^{-7}	$1.12 \cdot 10^{-3}$	12
initial	6.	2.	9.	50.	90.48	427.3	
final	3.998	3.126	7.84	124.7	$4.06 \cdot 10^{-5}$	$2.03 \cdot 10^{-3}$	15
initial	6.	4.	7.	200.	49.63	80.14	
final	3.999	3.04	7.94	121.5	$2.27 \cdot 10^{-5}$	$8.9 \cdot 10^{-2}$	15
initial	1.	2.	9.	200.	1083.2	908.2	
final	4.00	3.0	7.998	120.1	1.10^{-7}	$6.0 \cdot 10^{-3}$	11
Optimum	4.00	3.0	8	120			

TAB. 6.5 – Résultats pour différents points de départ, mesures en paroi et dans le massif (modèle bidimensionnel).

	E (GPa)	σ_Y (MPa)	N	K (MPa.s ^{1/N})	\mathcal{J}	$\ \nabla\mathcal{J}\ $	Iterations
initial	1.	2.0	7.	200.	1604.80	800.7	
final	4.0	3.00	7.999	120.00	< 1. 10 ⁻⁷	5.9 10 ⁻⁴	12
initial	6.	2.	9.	50.	85.04	424.32	
final	4.00	2.997	8.001	120.00	< 1. 10 ⁻⁷	5.6 10 ⁻³	12
initial	6.	4.	7.	200.	46.7	71.69	
final	4.00	3.01	7.98	120.5	1.13 10 ⁻⁵	7.1 10 ⁻³	15
initial	1.	2.	9.	200.	1006.2	840.42	
final	4.00	3.001	7.999	120.1	< 1. 10 ⁻⁷	5.11 10 ⁻³	11
Optimum	4.	3	8.	120			

TAB. 6.6 – Résultats pour différents points de départ, sans mesures dans le massif (modèle bidimensionnel).

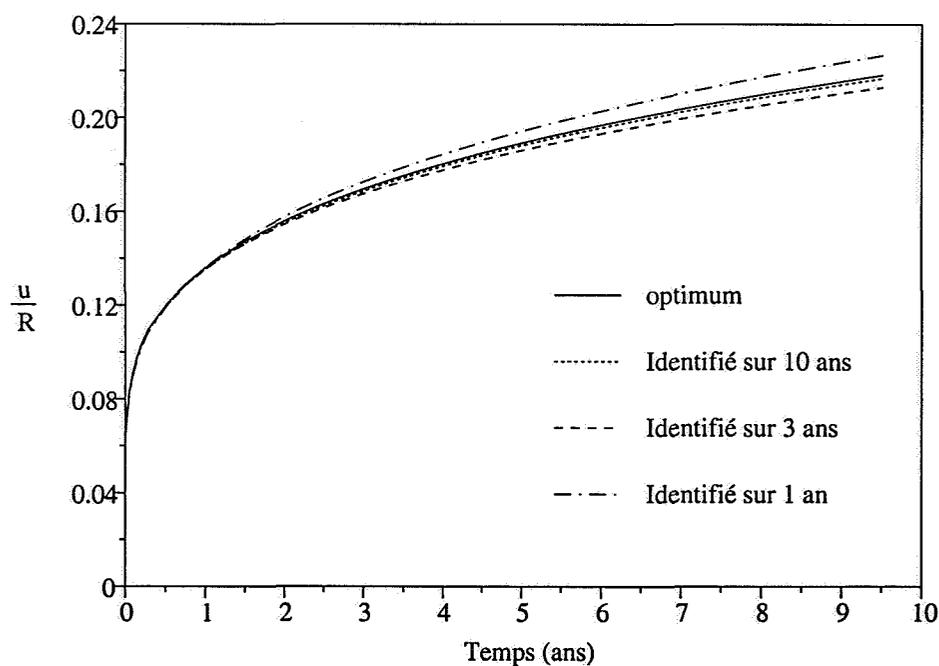


FIG. 6.11 – Accord sur les données u/R , identification sur différentes périodes et extrapolation. Cas unidimensionnel non revêtu.

paramètres optimum. Ces constatations amènent à se poser la question de l'unicité d'un tel problème inverse.

Les figures 6.12 représentent la fonctionnelle coût dans le plan $N - K$ dans les deux cas unidimensionnels revêtu et non revêtu. Ce graphique a été réalisé à l'aide d'une série de calculs directs. La même forme est également observable dans les autres plans ($E - K$, $N - \sigma_Y \dots$).

Dans les deux cas, on observe une longue vallée plate entourant l'optimum qui est un minimum unique pour la fonctionnelle dans la région explorée. L'existence de cette vallée fait penser que seule une combinaison des paramètres est identifiable facilement sur ce trajet de chargement. Les faibles variations de la fonctionnelle dans cette vallée peuvent également interférer avec des erreurs numériques, expliquant ainsi que dans certains cas les paramètres optimum ne soient pas parfaitement recouverts. Néanmoins, l'accord entre les mesures et les prédictions est satisfaisant : la fonctionnelle coût est quasi nulle. D'un point de vue ingénieur, même si les paramètres obtenus ne sont pas exactement égaux aux valeurs optimales, l'erreur de prédiction n'est pas énorme (voir figure 6.11). Des constatations similaires ont été reportées par Constantinescu et Tardieu [35].

Ces observations sont à rapprocher d'une série de résultats d'unicité obtenu en viscoélasticité sur des configurations simples (Janno et Von Wolfersdorf [63], Lorenzi et Yakhno[75]). Ces résultats mathématiques sont basés sur une formulation integro-différentielle de la loi de comportement viscoélastique et ne semblent pas faciles à étendre à la forme de la viscoplasticité utilisée dans notre cas.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le calcul des sensibilités selon les paramètres constitutifs des lois de comportement élastoviscoplastiques a été résolu par la méthode de différentiation directe. On a présenté en détail l'intérêt du couplage entre la résolution des problèmes direct et différentiés dans le cadre de la méthode des éléments finis. Cette technique permet un gain important en temps de calcul. La méthode a été implémenté dans le code aux éléments finis Cast3M pour la loi de Norton-Hoff. Des exemples d'identification des paramètres de la

loi de Norton-Hoff sur différentes configurations d'ouvrages souterrains à partir de mesures préalablement simulées ont été discutés. Les paramètres optimum sont été retrouvés en quelques itérations. Aucune information a priori ou méthode de régularisation n'ont été utilisées. Ces résultats tendent à indiquer l'unicité de ce problème d'identification dans le cas de données simulées par un calcul direct élastoviscoplastique préalable avec le même modèle. En revanche, les résultats obtenus pour des données perturbées par un bruit blanc mettent en évidence une stabilité moyenne du problème identification.

D'un point de vue pratique, le calcul de sensibilités par différentiation directe a d'autre part permis de visualiser l'information quantitative relative aux différents points de mesures. Cette technique peut donc permettre de justifier les stratégies de mesures et de suivi des ouvrages souterrains dans des roches viscoplastiques. En ce qui concerne l'identification, même si il apparaît qu'il est difficile d'obtenir une bonne résolution de tous les paramètres, l'extrapolation des réponses ainsi que les différents accords sont satisfaisant. Les prédictions avec les paramètres identifiés ne donneront jamais de grosses erreurs.

On retiendra également que, bien que présentée pour un comportement élasto-viscoplastique parfait, la méthode de différentiation directe est suffisamment générale pour être appliquée à des matériaux viscoplastiques ou plastiques écrouissables.

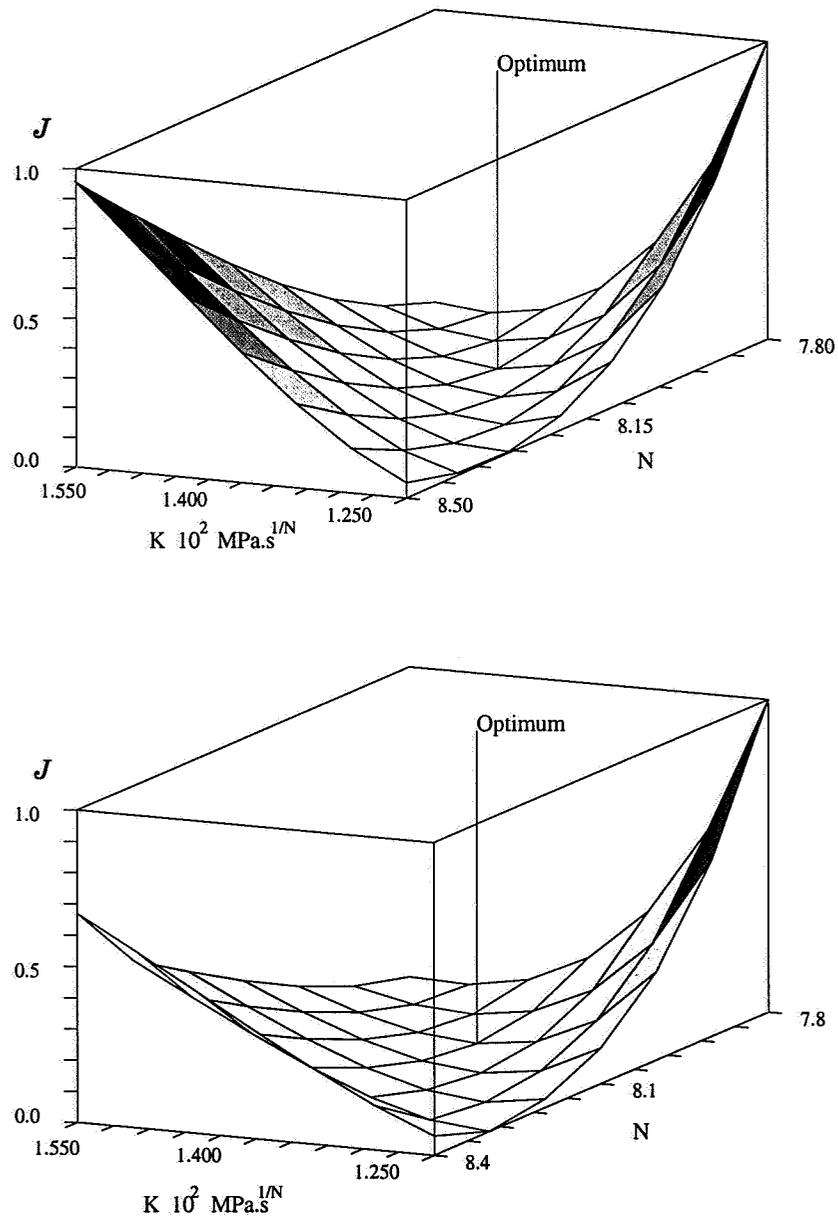


FIG. 6.12 – Fonctionnelle coût \mathcal{J} dans le plan $N - K$ respectivement pour les cas non revêtu et revêtu. Mesures simulées non perturbées.

Chapitre 7

Application à un cas réel : le Tunnel de la Chamoise

La méthode d'identification des paramètres élastoviscoplastique présentée au chapitre précédent est maintenant appliquée à un cas d'ouvrage réel : le tunnel de la Chamoise. Les mesures, utilisées dans ce chapitre, nous ont été gracieusement fournies par la société Scetauroute. L'aide de Dominique Allagnat et Yves Guerpillon (Scetauroute) a été particulièrement précieuse pour cette partie du travail. Les aspects particuliers de ce tunnel sont présentés succinctement. Les différents type de mesures ainsi que les détails importants pour la modélisation de l'excavation sont discutés. L'identification des paramètres de la loi de Norton-Hoff est réalisée à partir des mesures de déplacements relatifs fournies par des extensomètres en forage. On envisage d'abord une modélisation unidimensionnelle de la structure. La géométrie bidimensionnelle de la section est ensuite prise en compte dans le modèle numérique utilisé pour identifier les paramètres matériaux.

7.1 Le tunnel de la Chamoise

7.1.1 Historique

Le tunnel de la Chamoise fait partie de la liaison autoroutière Macon-Genève (A40). Il permet d'éviter la traversée de Nantua, en traversant le massif des Monts d'Ain. Il débouche à l'Est sur le viaduc de Nantua-Neyrolles. Cet ouvrage comporte deux tubes. La construction du premier (tube Nord) a été effectué entre 1982 et 1985 (date de mise en

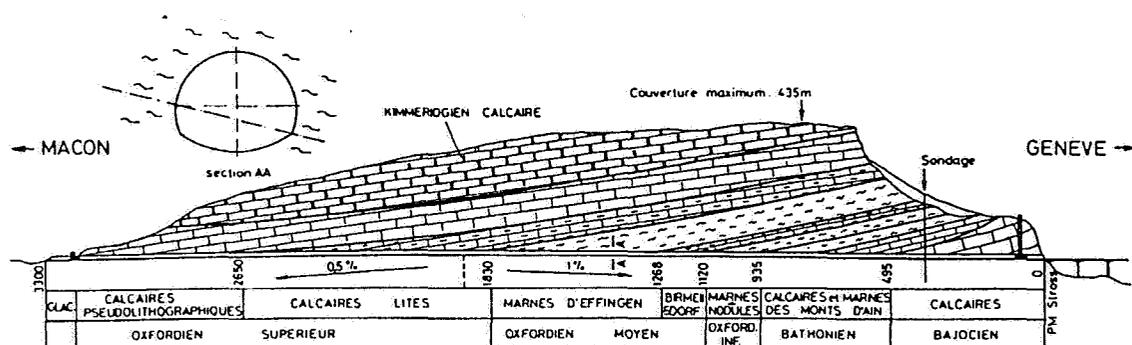


FIG. 7.1 – Coupe Géologique longitudinale du tunnel de Chamoise (d'après Scetauroute [72])

service). Le doublement du tunnel (tube Sud) a été réalisé dix ans plus tard entre 1992 et 1995. La construction et l'exploitation de cet ouvrage ont été concédées à la Société des Autoroutes Paris-Rhin-Rhône (SAPRR). La maîtrise complète a été confiée à Scetauroute qui a également mis en place les mesures à long terme.

Contexte géologique

Le tunnel traverse un massif monoclinal ayant un pendage de 30° vers l'Ouest (voir figure 7.1). La partie centrale du tunnel (environ 800 mètres) traverse des marnes de l'Oxfordien sous 400 mètres de couverture. Ces marnes ne sont le siège d'aucune circulation d'eau, aucun phénomène hydromécanique n'entre donc en jeu. Le comportement mécanique de ces marnes a été étudié au laboratoire. Des essais triaxiaux à faible vitesse de déformations ainsi que des essais de fluage de quelques semaines ont pu mettre en évidence un comportement elastoviscoplastique. Le caractère viscoplastique de ces marnes a été confirmé par les mesures effectuées dans la galerie de reconnaissance [84]. Cette galerie de 3.20 mètres de diamètre a permis en outre de tester les différents modes d'excavation et de soutènement envisagés.

On notera également qu'aucune déformation différée n'a été observée dans la partie de l'ouvrage traversant les calcaires.

E	Cohesion	Temps caractéristique de fluage	Resistance différée
3.5 GPa	4 MPa	$\tau_{creep} = 25$ jours	10 MPa

TAB. 7.1 – Paramètres estimés à partir des tests de laboratoire (d’après Nguyen Minh et al. [84])

Creusement

Le tunnel est excavé en section divisée : section circulée, stross puis contrevoûte pour le tube Nord. Le tube Sud n’a été excavé qu’en deux phases : section circulée, puis stross et contrevoûte en même temps. Le diamètre final des ouvrages est de 11 mètres environ. La distance entre les deux tubes varie de 30 à 73 mètres. Cette dernière valeur correspond à la distance au milieu du tunnel, dans les marnes de l’Oxfordien. Le creusement du second tube n’a eu aucun effet sur les déformations du premier.

L’excavation dans les marnes est réalisée par une machine à attaque ponctuelle. Dans le cas du tube Sud, la vitesse d’avancement est de l’ordre de 6 mètres par jour environ. Un soutènement provisoire (boulonnage et béton projeté) est mis en place quelques mètres après le front de taille. Le boulonnage a une densité de 1 boulon (de diamètre $\phi 25$ et d’une longueur de 4 mètres) pour une surface de 2 mètres carrés environ. La contrevoûte du tube Nord n’a pas été boulonnée, ce qui engendra des déformations différées plus importantes. Le béton projeté a une épaisseur de 10 à 15 cm.

Le revêtement final est constitué d’un anneau en béton d’une épaisseur d’environ 45 cm. Cet anneau a été bétonné 6 à 10 mois après le début du creusement de la section circulée.

7.1.2 Mesures effectuées

Certaines sections du tunnel ont été instrumentées pour suivre l’évolution du comportement de l’ouvrage (figure 7.2). Le système de surveillance consiste en des mesures de déplacements et de contraintes : extensomètres en forage, cellules de pression totales et extensomètres à corde vibrante noyés dans le béton du revêtement définitif. Plus de précision sur ces dispositifs de mesures sont fournies dans Guerpillon et al. [53], Leger

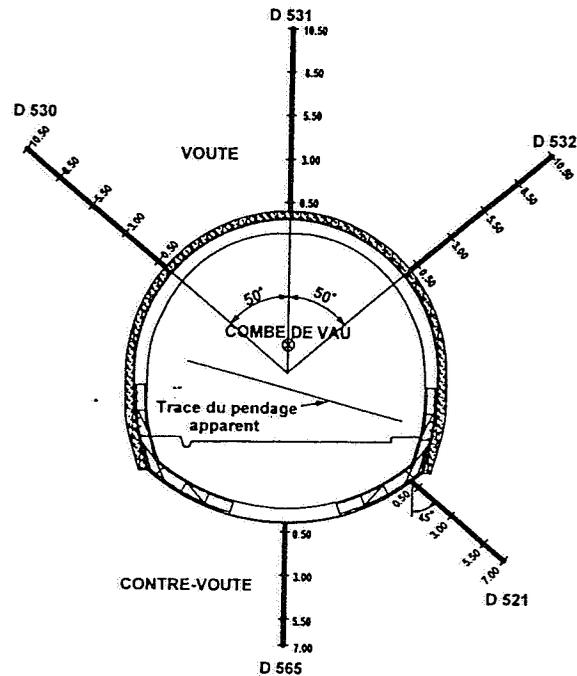


FIG. 7.2 – Section type de mesures dans les marnes (d'après Scetauroute [72]).

et al. [72]. Des mesures de convergences ont également été réalisées lors de l'excavation. Ces mesures de convergences deviennent plus délicates une fois le tunnel mis en service car cela implique un arrêt de la circulation. On s'est intéressé plus particulièrement aux mesures de déplacement : convergence et extensomètre. Les effets dus au retrait du béton compliquent légèrement l'analyse des mesures effectuées sur le revêtement. Ces dernières ne sont donc pas analysées. Dans [72], les auteurs montrent la cohérence des mesures de déplacement et de contraintes dans le revêtement.

Convergences

Les mesures de convergence ont été réalisées avec deux appareils distancemètre à fil invar (type D01 CETE lyon). Les plots de convergence sont constitués d'une barre de $\phi 40 \text{ mm}$ en acier doux scellée à la résine sur toute sa hauteur équipée d'une tête en bronze. Ce type de dispositif est fiable et facile à mettre en oeuvre. D'autre part, la précision des déplacements mesurés est de l'ordre de $1/20$ de millimètres.

Les premières mesures de convergence sont effectuées peu après le front de taille. Néanmoins, elles ne donnent évidemment pas le déplacement instantané, une partie importante du déconfinement ayant déjà eu lieu en partie en avant du front et sur les quelques mètres séparant la section de mesure du front de taille.

On notera λ_m , le taux de déconfinement à l'instant où est effectuée la première mesure de convergence. En supposant la déformation élastique, il est possible d'estimer les modules élastiques du massif. La formule de la convergence d'un tunnel circulaire dans un milieu infini soumis à un état de contrainte initial isotrope P est donnée par :

$$\frac{u}{R} = (1 + \nu) \frac{P}{E} \quad (7.1)$$

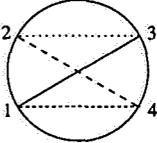
La mesure effectuée est relative : mesure du zéro et premier relevé. Si l'on considère que le déconfinement est total ($\lambda = 0$) lors de la deuxième mesure, la partie du déconfinement entre les deux instants est donc égal à $P = \lambda_m \sigma_0$.

Le tableau 7.2 donne une approximation du rapport entre module élastique et contrainte de déconfinement ($\lambda_m \sigma_0$). Le diamètre moyen de la section supérieure circulée est pris de l'ordre de 11 mètres lors de ces approximations.

Ces mesures de convergence mettent en évidence une forte anisotropie des déformations (de 1 à 5). Cette anisotropie se retrouve également dans les mesures par extensomètres. La direction de cette anisotropie est relativement bien corrélée avec le pendage apparent des marnes. Un état de contraintes initiales complexe, ou une anisotropie mécanique peuvent en être l'origine. Cette anisotropie des déformations s'observe aussi bien sur les mesures du tube Sud que sur celles du tube Nord.

Les mesures de convergences ont continué tout au long de la phase de travaux. Dans le cas du tube Nord, les mesures de convergence ont été poursuivies régulièrement sur les sections instrumentées pour la surveillance à long terme. Seulement quelques mesures de convergence ont été réalisées après la date de mise en service du tube Sud.

La convergence différée moyenne sur le tube Nord est de 1/1000 (soit 10 mm de déplacement relatif) en dix ans en prenant pour origine des déformations la pose du revêtement (presque un an après le début de l'excavation). Sur la même durée, on ob-



	1-3	2-4	1-4
Δu (mm)	8	55	55
$\frac{\Delta u}{2R_{moyen}}$	$0.73 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
$\frac{E}{\lambda_m \sigma_0}$	1780	260	260

TAB. 7.2 – Estimation de $\frac{E}{\lambda_m \sigma_0}$ à partir des convergences à l'excavation (valeurs supposées $\nu = 0.3$, $R_{moyen} = 5.5$).

serve une déformation 6 fois moins importante sur le tube Sud au niveau de la même section (PM 1500). Cette différence s'explique par le fait que le tube Nord (excavé en premier) n'avait pas été boulonné en contrevoûte.

Extensomètres

Les mesures par extensomètre en forage, source principale de données, sont des mesures relatives dans l'espace et dans le temps (voir figure 7.4) :

$$\begin{aligned} \Delta u(t_i, j) &= (u(t_i, r_j) - u(t_i, r_f)) \\ &\quad - (u(t_0, r_j) - u(t_0, r_f)) \end{aligned} \quad (7.2)$$

r_f est la position du point fixe de l'extensomètre (situé à 12,5 mètres de la paroi de la galerie), r_j est la position du capteur j , t_0 correspond à l'instant de début d'enregistrement des mesures par extensomètres, environ 2 à 4 jours après l'excavation de la section de mesure dans le cas du tube Sud.

Les extensomètres utilisés sont du type DISTOFOR. Cet appareil (Telemac [90]) est fait d'un tube télescopique portant des anneaux de couplage à l'intérieur de manchons télescopiques et d'une canne de mesure fixé en fond de forage. Les capteurs portés par la canne sont situés au même niveau que les anneaux de couplage. Les capteurs coulissent sans frottement à l'intérieur des anneaux de couplage rendus solidaires du massif et situés à des manchons télescopiques. Le capteur et l'anneau forme un circuit oscillant dont le signal

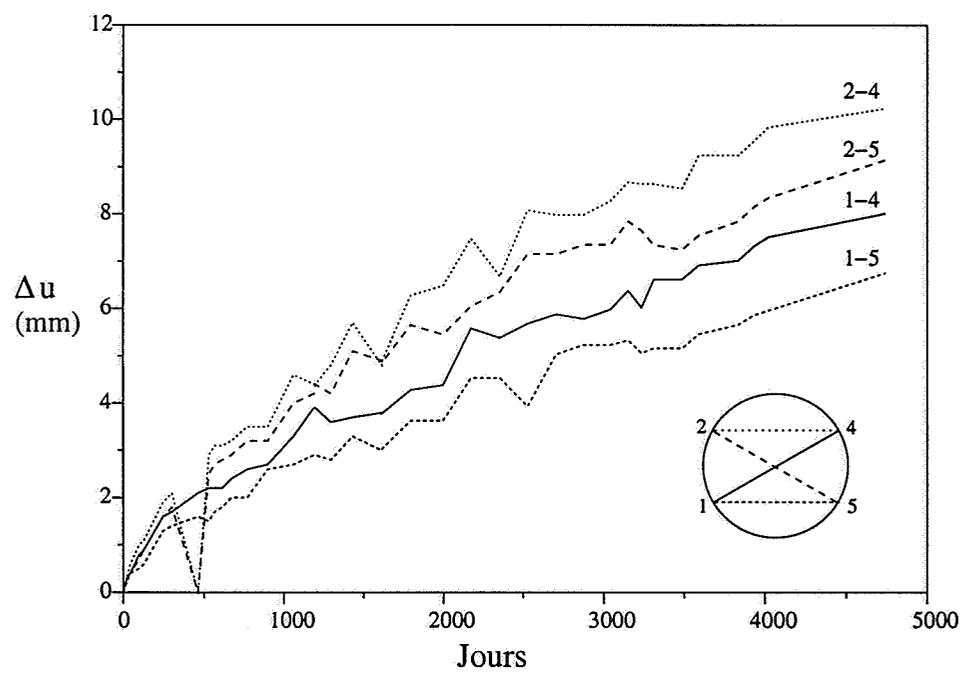


FIG. 7.3 – Convergence à long terme, tube Nord, section *PM1500*. L'origine correspond à la mise en place du revêtement définitif.

de sortie est une fréquence. Cette fréquence est fonction de la distance relative du capteur et de l'anneau. La précision des déplacements mesurés est de l'ordre $1/20$ de millimètre. Un capteur de température a été ajouté au niveau de chaque capteur de déplacement C_j . Un système électronique permet la correction automatique du zéro ainsi que de la dérive de température et de la dérive à long terme.

La figure 7.5 montre les déplacements relatifs enregistrés par les différents capteurs de l'extensomètre situé en voûte de la section $PM1500$. Les déplacements différés ne sont pas négligeables. On remarque notamment que la stabilisation n'est pas obtenue après la pose du revêtement définitif. L'effet des variations de température saisonnière est clairement visible sur les déplacements. Cet effet thermique est également visible sur les mesures de convergences à long terme du tube Nord (figure 7.3). Dans le cas du tube Nord, un autre effet thermique se rajoute aux variations saisonnières. L'augmentation régulière du trafic dans le tunnel Nord (avant le doublement) a eu pour conséquence une augmentation progressive de la température, qui se répercute sur les mesures de convergences (Leger et al. [72]). Il convient de noter que d'un point de vue théorique, pour un milieu élastoviscoplastique, la température influe sur la vitesse de convergence d'un tunnel circulaire dans un milieu infini (contrairement au cas élastique) (Bérest[12], Wong [107]). Le bétonnage du revêtement définitif induit un échauffement (prise du béton). Un saut de déplacement thermoélastique est visible à cet instant sur le capteur $C1$ (figure 7.5) situé à seulement 50 centimètres de l'anneau en béton. Dans la modélisation qui portera sur le tube Sud, l'effet thermique ne sera pas considéré et ce saut de déplacement sera donc corrigé.

7.1.3 Formulation du problème d'identification

L'identification s'effectuera à partir des mesures d'extensomètres en forage du tube Sud. Plus particulièrement, on se focalise sur la section de mesure $PM1500$. Les données de convergence effectuées pendant l'excavation seront utilisées pour obtenir une approximation de départ du module élastique.

Les marnes sont supposées être homogènes et isotropes. Leur comportement est modélisé par une loi élastoviscoplastique du type Norton-Hoff. Ce comportement est défini par 5 paramètres constitutifs : E , ν , σ_Y , N et K . Dans ce qui suit, on suppose le coefficient

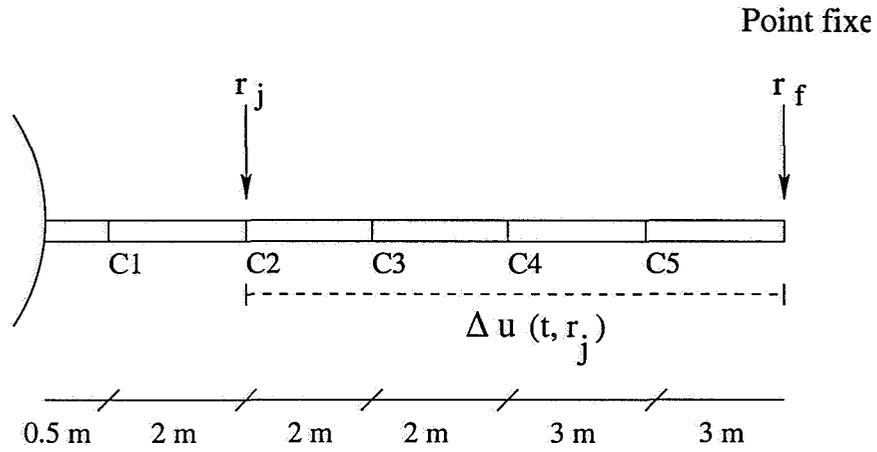


FIG. 7.4 – Schéma du dispositif de mesures par extensomètre en forage.

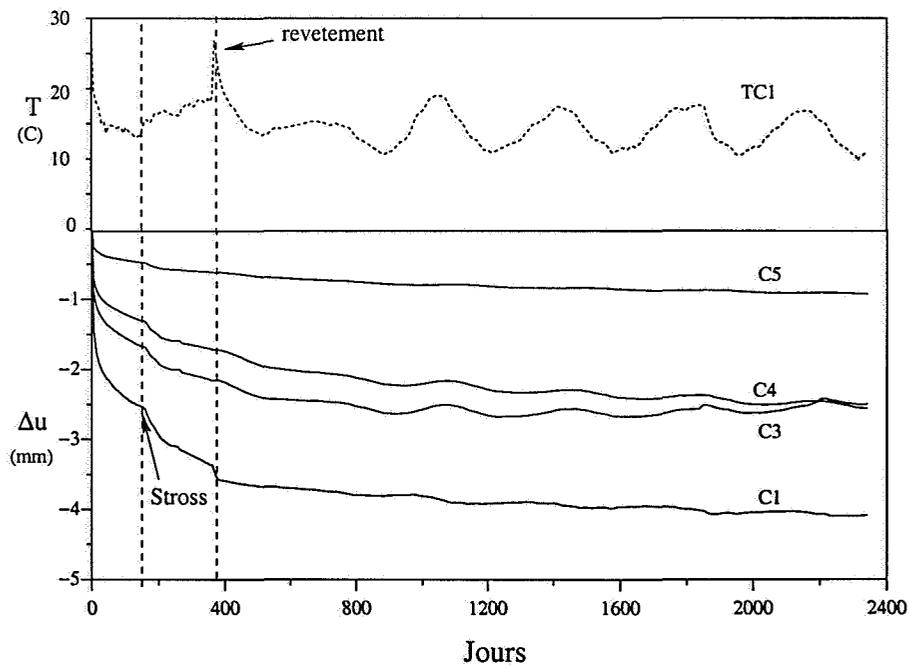


FIG. 7.5 – Mesures brutes, extensomètre en voûte de la section PM1500 du tube Sud.

de Poisson connu et égal à $\nu = 0.3$. Le but est d'identifier les paramètres de cette loi élastoviscoplastique à partir des mesures de déplacement relatif fournies par les extensomètres en forage.

L'identification est réalisée à l'aide de la méthode décrite au chapitre précédent. La fonctionnelle coût est définie comme suit :

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1, k} \sum_{j=1, p} \left(\frac{\Delta u(t_i, r_j, \mathbf{c}) - \Delta u_m(t_i, r_j)}{r_f - r_j} \right)^2 \quad (7.3)$$

k et p représente respectivement le nombre d'instantants de mesures et le nombre de capteurs utilisés lors de l'optimisation. Le déplacement relatif Δu est défini par l'équation (7.2).

7.2 Modélisation 1D

Dans un premier temps, on considère un modèle unidimensionnel de la structure. Le tunnel est considéré comme circulaire dans un milieu infini et soumis à une contrainte initiale isotrope σ_0 . Cette simplification permet une première estimation des paramètres ainsi qu'une discussion de nombreuses incertitudes.

7.2.1 Hypothèses

Les contraintes initiales sont supposées être homogènes et isotropes. La couverture de 400m environ, permet d'estimer la valeur de σ_0 à 10MPa en supposant une densité de 2.5. On a vu préalablement que les déformations enregistrées mettaient en évidence une forte anisotropie. La modélisation unidimensionnelle doit donc être considérée comme équivalente. L'identification sera effectuée en prenant un seul extensomètre mesurant dans cette configuration 1D des déplacements radiaux. Les paramètres identifiés seront des estimations "isotrope" équivalentes.

La figure 7.6 présente la modélisation du déconfinement. L'excavation est réalisée en deux phases. Le déconfinement $(1 - \lambda_s)\sigma_0$ dû à l'excavation de la demi-section supérieure est supposé instantané. Cette simplification est justifiée par l'avancement relativement rapide du front de taille (environ 6 mètres par jour). D'après la formule de Panet [89], le

épaisseur e	E_b	rigidité normale $\frac{E_b}{1 - \nu_b^2} \frac{e}{R}$
50 cm	25 GPa	≈ 1.2 GPa

TAB. 7.3 – Caractéristiques mécanique du revêtement.

déconfinement estimé est dans ce cas quasiment terminé au bout d'une journée¹. L'excavation du stross est reproduite par un déconfinement linéaire pour éviter un saut élastique instantané qui n'est pas visible sur les extensomètres en voûte. Ce déconfinement linéaire du stross introduit un nouveau paramètre de chargement $a_s = \frac{t_{sf} - t_s}{\lambda_s}$ (voir figure 7.6). On notera également que le rayon de l'ouvrage modélisé en 1D est un rayon moyen. Ce rayon évolue avec l'excavation du stross. Cette simplification entraîne de grosses incertitudes qui seront en quelque sorte intégrées dans le paramètre de chargement a_s . Le soutènement provisoire n'est pas modélisé. Ce qui implique évidemment une surestimation des propriétés du massif.

Le revêtement est supposée élastique linéaire, il est mise en place en $t = t_l$. Le tableau 7.3 résume ses caractéristiques mécaniques.

7.2.2 Analyse dimensionnelle

En tenant compte des hypothèse de modélisation, le déplacement relatif Δu ([L]) mesuré dépend des paramètres suivants :

- t temps [T]
- r_j position du capteur j [L]
- r_f rayon au point fixe de l'extensomètre [L]
- t_0 début de l'enregistrement des mesures [T]
- R rayon moyen de l'ouvrage [L]
- σ_0 contrainte in situ moyenne [$ML^{-1}T^{-2}$]

¹Panet [89] approxime dans le cas élastique le déconfinement λ en fonction de la distance x au front de taille par l'expression suivante :

$$\lambda(x/R) = 0.71 \left(\frac{0.84}{0.84 + x/R} \right)^2$$

Pour avancement de 6 mètres par jour, avec un rayon moyen de $R=6$ mètres environ, λ est nul au bout de 2 jours. Le déconfinement est total.

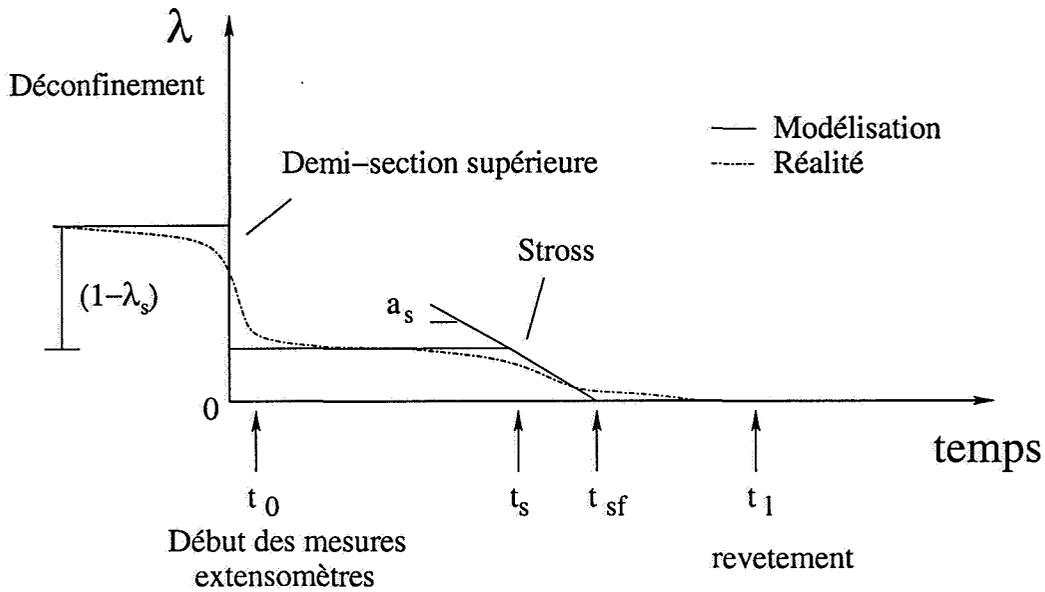


FIG. 7.6 – Modélisation du déconfinement, cas unidimensionnel.

- σ_Y limite d'élasticité [$ML^{-1}T^{-2}$]
- E Module d'Young des marnes [$ML^{-1}T^{-2}$]
- ν coefficient de Poisson [.]
- N exposant de viscosité [.]
- K coefficient de viscosité [$ML^{-1}T^{-2}T^{-1/N}$]

On introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$t^* = \frac{\sigma_0}{K} t^{1/N} \quad \rho_j = \frac{r_j}{R} \quad \alpha = \frac{E}{\sigma_0} \quad \beta = \frac{\sigma_Y}{\sigma_0}$$

Durant la première phase, de l'excavation de la demi-section supérieure ($t = 0$) au début de l'excavation du stross ($t = t_s$), le déconfinement est égal à $(1 - \lambda_s)\sigma_0$. Les mesures relatives de déplacements peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta u}{R} = \Phi_1((1 - \lambda_s)t^*, \rho_j, \rho_f, (1 - \lambda_s)t_0^*, (1 - \lambda_s)\alpha, (1 - \lambda_s)\beta, N, \nu)$$

La deuxième phase va de l'excavation du stross à la pose du revêtement. La modélisation du trajet de chargement ainsi que le caractère viscoplastique du modèle impliquent que le déplacement dépend de trois paramètres supplémentaires : t_s^* , λ_s et $a_s^* = \frac{\sigma_0}{K} a_s^{1/N}$.

$$\frac{\Delta u}{R} = \Phi_2(t^*, \rho_j, \rho_f, t_0^*, \alpha, \beta, N, \nu, t_s^*, \lambda_s, a_s^*)$$

La dernière phase commence avec la pose au temps t_l du revêtement de rigidité normale K_l . Deux nouveaux paramètres adimensionnels se rajoutent alors au jeu précédent : $\xi = \frac{E}{K_l}$ (rapport de rigidité massif / revêtement) et t_l^* .

$$\frac{\Delta u}{R} = \Phi_3(t^*, \rho_j, \rho_f, t_0^*, \alpha, \beta, N, \nu, t_s^*, \lambda_s, a_s^*, \xi, t_l^*)$$

Un certain nombre de paramètres sont connus précisément : les temps de mise en place des mesures, du début de l'excavation du stross et de la pose du revêtement, la position des capteurs $\rho_f - \rho$ par rapport au point fixe, les caractéristiques du revêtement.

Mis à part les paramètres matériaux ($\alpha, \beta, N, \frac{\sigma_0}{K}$), les paramètres les plus mal connus sont ceux modélisant le trajet de chargement λ_s et a_s , ainsi que le rayon moyen de l'ouvrage.

Il est évident que la valeur de ces paramètres va grandement influencer les valeurs des constantes matériaux identifiées. On peut néanmoins contourner une partie de ces incertitudes en réalisant des optimisation sur plusieurs phases.

1. Entre t_0 et t_s , le déconfinement étant égal à $\theta\sigma_0$, on identifiera $((1 - \lambda_s)\alpha, (1 - \lambda_s)\beta, \frac{(1 - \lambda_s)\sigma_0}{K}, N)$.
2. Les mesures entre t_s et t_l permettent d'ajuster les valeurs de a_s et λ_s (sans optimisation).
3. Finalement, une optimisation sur toute la durée $[t_0, t_f]$ des mesures permettra de réajuster $\alpha, \beta, \frac{\sigma_0}{K}$ et N .

7.2.3 Résultats

Le tableau 7.4 résume les paramètres optimaux trouvés pour la première phase. L'utilisation des mesures entre l'excavation du stross et la pose du revêtement a permis d'estimer (sans minimisation) les valeurs suivantes pour les paramètres de chargement : $a_s = 6764$ et $\lambda_s = 1.7 \cdot 10^{-2}$.

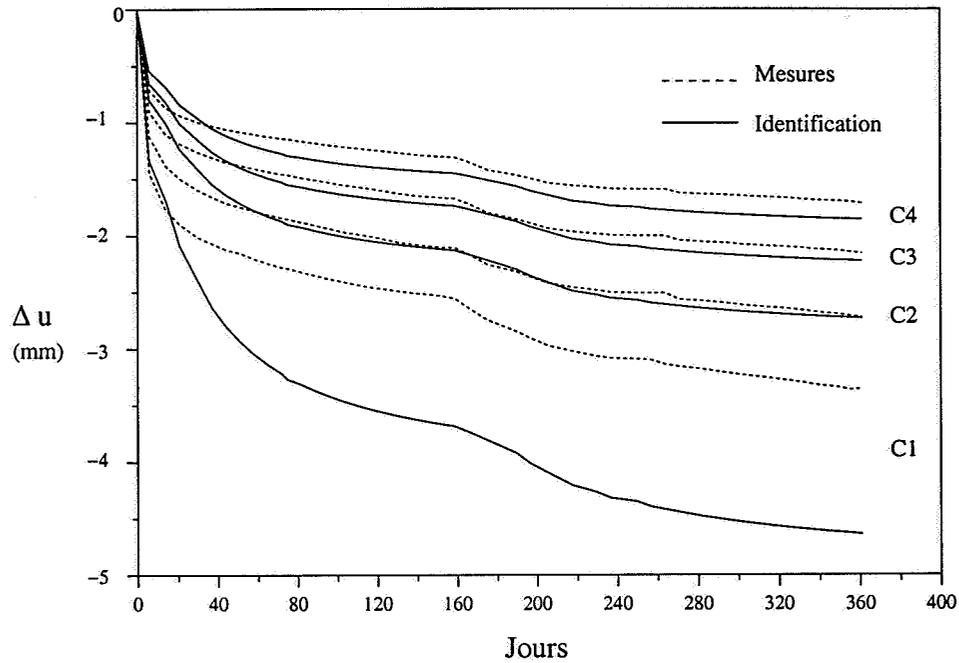


FIG. 7.7 – Accord entre réponse identifiée et mesures depuis la mise en place des extensomètres à la pose du revêtement (extensomètre en voûte, section *PM1500*).

extensomètre	$(1 - \lambda_s)\alpha$	$(1 - \lambda_s)\beta$	N	$\frac{(1 - \lambda_s)\sigma_0}{K}$
voûte	307.18	0.865	2.1	$6.55 \cdot 10^{-2}$
rein Nord	337.9	0.96	2.08	$6.31 \cdot 10^{-2}$
rein Sud	369.58	1.0394	2.1	$7.31 \cdot 10^{-2}$

TAB. 7.4 – Résultats de l'identification entre $[t_0, t_s]$.

	α	β	N	$\frac{\sigma_0}{K}$
	312.3	0.879	2.1	$6.659 \cdot 10^{-2}$
σ_0	E (MPa)	σ_Y	N	K (MPa.jours $^{1/N}$)
10 MPa	3123	8.79	2.1	150.7
15 MPa	4682	13.185	2.1	225.25

TAB. 7.5 – Resultats de l'identification (totale).

Une optimisation totale, prenant en compte toute les mesures de la pose d'extensomètre aux temps final d'observation, a permis de réestimer les paramètres. Lors de cette optimisation, λ_s et a_s sont pris égaux aux valeurs précédemment trouvées. Le tableau 7.5 donne l'estimation des paramètres adimensionnels ainsi qu'une estimation des paramètres physiques pour différentes valeurs de la contraintes initiale σ_0 . Les valeurs des paramètres constitutifs sont de l'ordre de grandeur attendu.

Les corrélations entre les paramètres identifiés sont données dans le tableau 7.6 pour le cas de l'extensomètre en voûte. On note une forte corrélation entre E et σ_Y respectivement, N et K . Cette mauvaise résolution entre certains paramètres identifiés est due à l'absence de données au tout début de l'excavation. En effet, les extensomètres sont posés 2 jours après l'excavation de la section. Or, on sait (voir chapitre précédent) que l'information sur les paramètres contenue dans les mesures est maximum au début. L'identification sera donc grandement améliorée et stabilisée par l'ajout de mesures pendant l'excavation.

Les mesures ainsi que les réponses identifiées sur la période $[t_0, t_i]$ sont représentées sur la figure 7.7. On remarque un bon accord pour les deux extensomètres $C2$, $C3$ et $C4$. En revanche, le modèle n'arrive pas à reproduire les variations spatiales du déplacement près de la paroi du tunnel (capteur $C1$). La présence d'une zone endommagée ainsi que la présence du soutènement par boulonnage (non modélisé) peuvent expliquer le plus faible déplacement différé observé in situ près de la paroi du tunnel.

La figure 7.8 présente la réponse identifiée et la mesure sur toute la période d'observation. Les déplacements identifiés s'arrêtent avec la pose du soutènement, contrairement à ce qui est mesuré. Il n'a pas été possible de reproduire correctement les mesures au delà de la pose du revêtement. Cet arrêt brutal des déplacements identifiés s'explique une nouvelle

	α	β	N	K
α	1.	0.989	- 0.399	0.501
β	0.989	1.	- 0.480	0.581
N	- 0.399	- 0.480	1.	- 0.989
K	0.501	0.581	- 0.989	1.

TAB. 7.6 – Matrice de corrélation des paramètres identifiés, cas unidimensionnel.

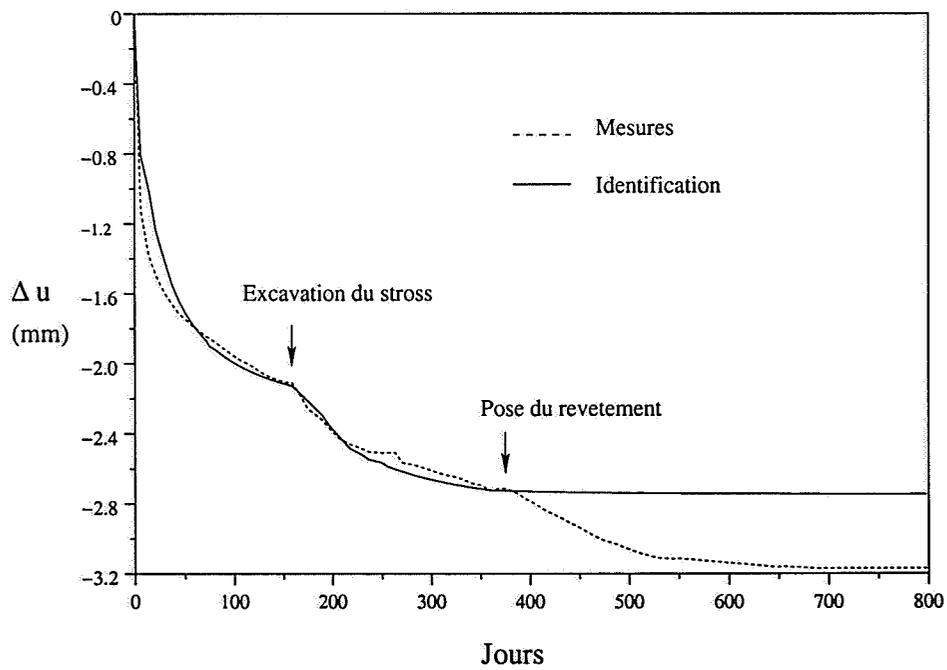


FIG. 7.8 – Capteur C2, extensomètre en voute, section PM1500, modélisation unidimensionnelle.

fois par la simplicité du modèle numérique. La présence du soutènement (zone boulonnée) réduirait l'impact du contraste entre la rigidité de l'anneau en béton du revêtement et le module d'Young du massif. Ce facteur est connu [15] pour jouer sur la constante de temps de la structure, un fort contraste de rigidité, i.e : $E_{\text{revêtement}} \ll E_{\text{roche}}$, bloque les déplacements différés. D'autre part, in situ, un certain temps peut se produire avant la mise en contact complète de l'anneau de béton avec le massif.

7.3 Modélisation 2D

7.3.1 Modèle

Une modélisation bidimensionnelle en déformations planes de la structure est maintenant envisagée. Le maillage est représenté sur la figure 7.9. Cela permet de s'affranchir d'une partie des incertitudes concernant le trajet de chargement et la géométrie. Les paramètres λ_s et a_s n'interviennent donc plus dans la modélisation. La modélisation géométrique est fidèle au gabarit de la section. L'excavation est toujours supposée instantanée. Aucune anisotropie n'est introduite, que ce soit sur les contraintes initiales ou sur le comportement mécanique.

On réalise une identification sur la période allant de l'excavation de la section circulée (plus précisément de la pose des extensomètres) au début de l'excavation du stross. Les mesures peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\frac{\Delta u}{R} = \Phi(t^*, \rho_j, \rho_f, t_0^*, \alpha, \beta, N, \nu)$$

7.3.2 Résultats et discussions

Le tableau 7.7 résume les résultats. Deux jeux identifiés à partir des mesures de l'extensomètre en voûte reproduisent correctement les mesures (figure 7.10). On remarque que les valeurs des paramètres identifiées sont dans le même ordre de grandeur que dans le cas unidimensionnel.

Les corrélations entre les paramètres identifiés sont meilleures que dans le cas de la modélisation unidimensionnelle du problème direct comme le montre le tableau 7.8. La modélisation bi-dimensionnelle permet de mieux distinguer les paramètres de la loi de comportement élastoviscoplastique. Les paramètres N et K restent fortement corrélés.

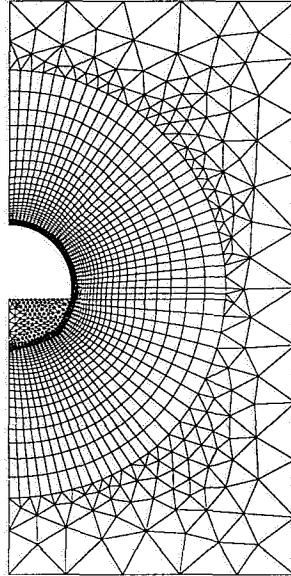


FIG. 7.9 – Maillage (vue rapprochée) de la section circulée du tunnel de la Chamoise (section *PM1500*).

	α	β	N	$\frac{\sigma_0}{K}$	\mathcal{J}	$\ \nabla \mathcal{J}\ $
jeu 1	313.4	1.04341	2.151	$6.7 \cdot 10^{-2}$	$1.620 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
jeu 2	331.9	1.00564	2.189	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$1.140 \cdot 10^{-8}$	$3.3 \cdot 10^{-7}$

TAB. 7.7 – Paramètres identifiés sur l'intervalle $[t_0, t_s]$, modélisation bi-dimensionnelle.

jeux 1	α	β	N	K
α	1.	- 0.614	- 0.688	0.591
β	- 0.614	1.	- 0.145	0.26
N	- 0.688	- 0.145	1.	- 0.989
K	0.591	0.26	- 0.989	1.
jeux 2	α	β	N	K
α	1.	- 0.5754	- 0.538	0.399
β	- 0.575	1.	- 0.377	0.517
N	- 0.538	- 0.377	1.	- 0.983
K	0.399	0.517	- 0.983	1.

TAB. 7.8 – Matrice de corrélation des paramètres identifiés à l'aide du modèle bidimensionnel.

Ce sont d'ailleurs ces paramètres qui varient le plus entre les deux jeux identifiés (voir tableau 7.7).

L'accord, pour les deux jeux, entre mesures et la réponse identifiée est représenté sur les figure 7.10 et 7.11.

Un modèle plus sophistiqué est inutile sans des données supplémentaires, notamment pendant l'excavation. L'introduction de paramètres supplémentaires, inhérente au raffinement de la modélisation, entraîne également des incertitudes sur ces paramètres qu'il est difficile de lever sans de nombreuses données.

7.4 Conclusions

Ce chapitre a permis d'appliquer la méthode d'identification des paramètres de la loi de comportement élastoviscoplastique de Norton-Hoff à un cas réel. Les déformations différées des sections marneuses du tunnel de la Chamoise ont été analysées. La complexité de la réalité du terrain nous amène à hiérarchiser les hypothèses de modélisation.

L'identification a été menée à l'aide de deux modélisations du problème : un modèle unidimensionnel et une modélisation bidimensionnelle du tunnel prenant en compte la vraie géométrie de la section. L'estimation des paramètres fournies par le modèle unidimensionnel a été confirmée par l'identification bi-dimensionnelle. Néanmoins, une importante corrélation entre certains paramètres de la loi de comportement subsiste dans le cas de

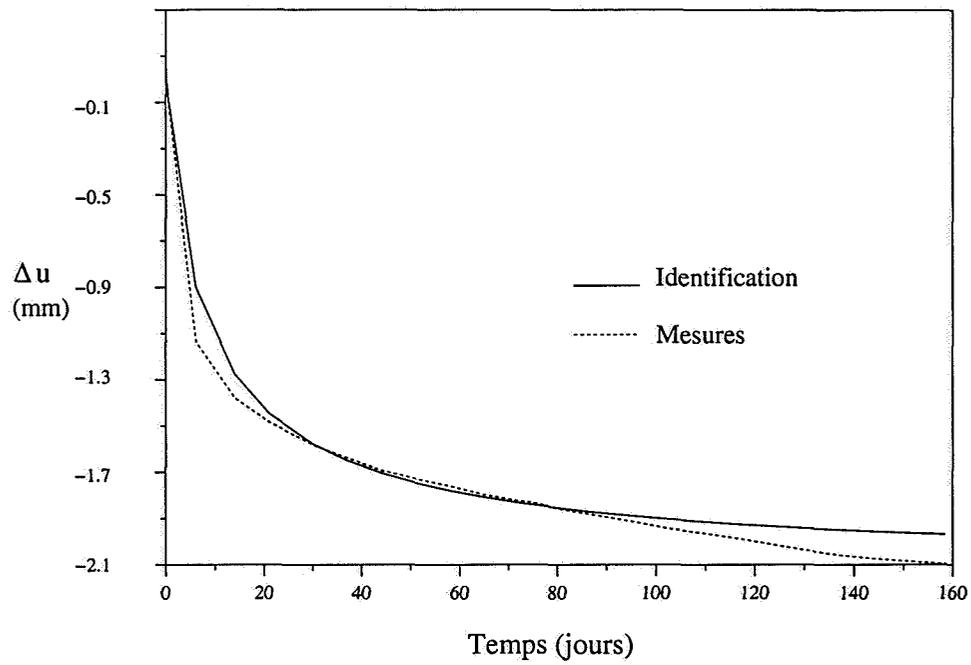


FIG. 7.10 – Accord entre mesures et réponses identifiées (Capteur C3, extensomètre en voûte). Identification réalisée avec le modèle bidimensionnel.

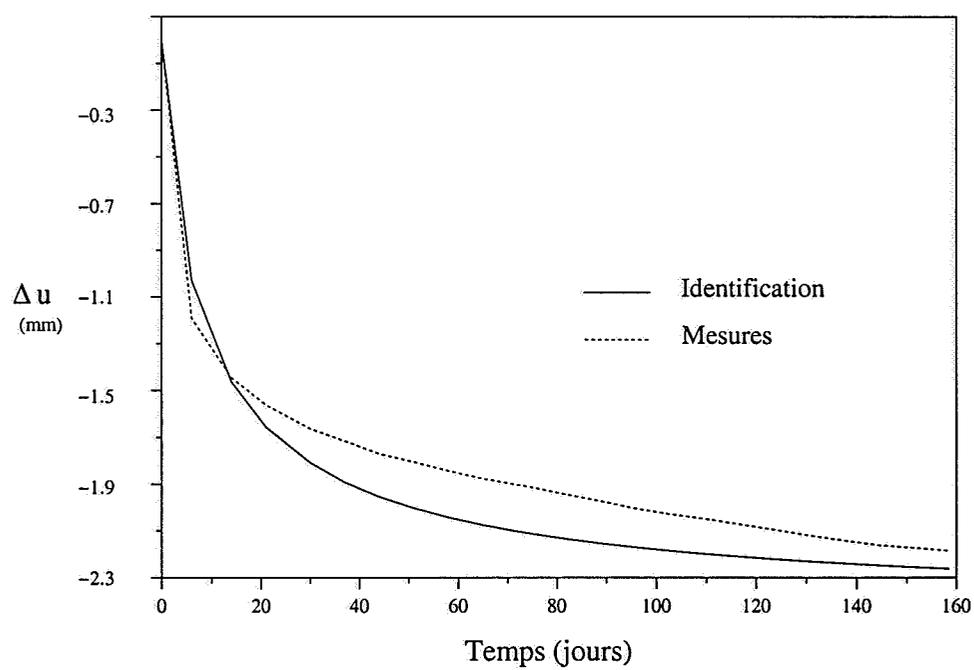


FIG. 7.11 – Accord entre mesures et réponses identifiées (Capteur *C4*, extensomètre en voûte). Identification réalisée avec le modèle bidimensionnel.

l'identification réalisée avec le modèle bidimensionnel. Cette corrélation s'explique par le manque de données pendant l'excavation. L'introduction du soutènement (boulonnage et béton projeté) dans la modélisation permettra certainement de mieux reproduire les mesures, mais l'augmentation des paramètres rendra l'identification encore moins résolue. De nouvelles mesures contenant suffisamment d'informations (c.f. calcul de sensibilité) seront alors nécessaires.

Plusieurs recommandations peuvent être faite sur la base de ces résultats :

- Il est très important d'avoir une stratégie en vue de l'identification dès le début de la construction de l'ouvrage. La méthode de différentiation directe permet de visualiser quels capteurs sont essentiels pour quel type d'information.
- La principale difficulté rencontrée sur ce cas réel provenait du manque de données pendant l'excavation. Il est très important de disposer de mesures en avant du front de taille pour obtenir une identification fiable. L'idéal serait d'enregistrer l'évolution des déplacements lors du passage du front, d'avoir un zéro temporel (t_0) le plus loin possible en avant du front de taille. En effet, le maximum d'informations indépendantes sur les différents paramètres est disponible durant cette période. Plus l'instant de début des mesures est éloigné de l'excavation, moins l'identification est fiable.

Chapitre 8

Conclusions

Dans cette thèse, l'identification des paramètres des lois de comportement a été envisagée dans le cadre d'une méthode générale basée sur la minimisation d'une fonctionnelle coût quantifiant la distance entre mesures et prédictions.

8.1 Contributions

L'utilisation d'algorithmes de minimisation avec gradient pour résoudre ce type de problèmes implique de disposer de techniques permettant d'obtenir les variations des champs mécaniques selon les paramètres à identifier (calcul de sensibilité). Notre contribution a notamment porté sur le développement de ces techniques pour deux types de problème classiques en mécanique des roches :

1. Les méthodes de différentiation directe et de l'état adjoint ont été formulées et implémentées en poroélasticité linéaire quasi-statique. L'aspect numérique a été traité par éléments finis (Cast3M). La précision et la rapidité des deux méthodes ont été mises en évidence.
2. En élasto-viscoplasticité, la méthode de différentiation directe a été formulée pour le calcul de sensibilité selon les paramètres constitutifs. La méthode a été implémentée pour la loi de comportement de Norton-Hoff (code éléments finis Cast3M). Le couplage entre la résolution du problème élasto-viscoplastique initial et des problèmes différentiés, basé sur l'utilisation de l'opérateur tangent cohérent, rend cette technique de calcul de sensibilité extrêmement performante.

Les différentes applications aussi bien à partir de données simulées que de données réelles permettent de dégager un certain nombre de points concernant la faisabilité de l'identification des paramètres constitutifs :

1. En *poroélasticité*, dans le cas homogène isotrope, l'exemple numérique du chapitre 3 ainsi que les configurations particulières étudiées au chapitre 4 (compression isotrope drainée, pulse test) montrent que, *pour ces cas précis*, les paramètres constitutifs sont identifiables d'une manière unique et stable dans le cas de données simulées. L'utilisation des données provenant des tests effectués sur les roches argileuses de Meuse Haute-Marne a confirmée le caractère bien posé de l'identification sur les configurations particulières du chapitre 4.

D'un point de vue théorique, les résultats existants dans littérature amènent à penser que si l'on dispose des réponses à toutes les sollicitations (connaissance complète de l'application Dirichlet-Neumann) les cinq paramètres constitutifs sont identifiables d'une manière unique dans le cas homogène isotrope.

2. Pour le cas de l'identification de la loi *élasto-viscoplastique* de Norton-Hoff, les paramètres sont correctement identifiables à partir des mesures effectuées sur les ouvrages souterrains (déplacement par extensomètres en forage, convergence) à condition que les mesures soient réalisées dès le début de l'excavation. Dans le cas de données simulées (chapitre 6), on a vu que l'identification donne un résultat unique. En revanche, elle est moyennement stable vis à vis d'une perturbation des données. L'application à un cas réel (chapitre 7) a confirmée la nécessité de disposer des mesures au tout début du phénomène. Les nombreuses incertitudes de ce cas réel ont montrées la nécessité d'identifier les paramètres adimensionnels indépendants intervenant dans la réponse (analyse dimensionnelle). La complexification du modèle n'est envisageable qu'avec l'apport de mesures supplémentaires contenant des informations indépendantes sur les paramètres.

8.2 Implications pratiques

Les principaux aspects pratiques de ce travail sont les suivants :

1. La méthode décrite au cours du chapitre 4 permet de déterminer la plupart des coefficients poroélastiques (K, K_u, M, κ) à partir de deux tests réalisables sur des roches très peu perméables. La résolution des problèmes directs par des solutions semi-explicites approchées permet une identification très rapide. De plus, on a vu que la méthode d'identification permettait de mettre en évidence des phénomènes annexes non reproductibles par le modèle poroélastique : mauvais accord entre réponse identifiée et expérience, forte corrélation entre certains paramètres identifiés. Cette méthode peut être facilement appliquée à d'autres type de roches.
2. On a montré (chapitre 5) que les déformations différées observées sur les roches argileuses de Meuse Haute-Marne en condition de fluage drainée se décomposent en une partie *poroélastique* et une partie *viscoplastique*. La formulation d'un modèle de comportement viscoplastique simple mais avec écrouissage non linéaire semble prometteuse. Les paramètres poroélastiques et viscoplastiques ont été identifiés sur un essai de fluage multipalier. Ce résultat clôt le débat concernant l'origine des déformations différées dans les roches argileuses très faiblement perméables. Les deux phénomènes, couplage hydromécanique et viscoplasticité, doivent être pris en compte. On notera que sur la structure les deux phénomènes sont séparables (temps caractéristiques différents).
3. L'identification des paramètres de la loi élasto-visco-plastique de Norton-Hoff est réalisable à partir de mesures de déplacement effectuées sur des ouvrages souterrains. Malgré les restrictions déjà citée, les extrapolations à long terme qui peuvent être faites à l'aide des paramètres identifiés sur une période de temps fini restent dans un marge d'erreur assez faible (quelques %). En pratique, on insiste sur le fait que l'identification est d'autant mieux résolu que l'on possède des mesures dès le début de l'excavation.
4. Outre sa nécessité dans le cadre de la méthode d'identification, la méthode de différentiation directe est très précieuse pour obtenir une quantification dans l'espace et dans le temps de l'information sur les paramètres inconnus contenue dans les champs physiques mesurables. Les résultats obtenus par différentiation directe

sont utiles pour justifier de la pertinence de la position des points de mesures et de la durée d'observation.

5. Numériquement, les calculs de sensibilités sont résolubles à l'aide de codes éléments finis classiques. On doit néanmoins pouvoir intervenir dans la structure du calcul pour bénéficier pleinement des avantages de la différentiation directe et de l'état adjoint. L'effort de programmation en est également grandement réduit. Un code tel que Cast3M (langage objet éléments finis) a facilité le développement de ces techniques.

8.3 Perspectives

Pour finir, sans prétendre à l'exhaustivité, les points suivants semblent à l'avenir devoir retenir une attention particulière :

1. L'introduction de composantes statistiques et d'information a priori dans le processus d'identification est facilement réalisable et permettra de mieux analyser les résultats dans les cas réels. C'est un point d'autant plus intéressant qu'une forte dispersion est attendue en géomécanique. Le calcul du gradient reste évidemment le point prioritaire dans toute optimisation.
2. La localisation d'inhomogénéité est un problème important en géomécanique. La détection de zone de plus faible résistance, de plus forte perméabilité, est très intéressante aussi bien d'un point de vue pratique que théorique. Des méthodes existent mais leur application à des cas réels n'est pas encore probante.
3. L'extension des méthodes de calcul de sensibilités à des lois de comportement plus complexes est facilement envisageable : plasticité, viscoplasticité avec écrouissage, thermo-poro-élasticité, poro-élasto-plasticité respectivement viscoplasticité. Les expressions mathématiques deviennent vite très lourdes sans apporter de modifications majeures aux techniques déjà présentées. Les formulations n'ont donc pas été décrites pour ces cas. Leur développement ne devrait pas poser de problèmes autres que d'ordre purement numérique.

4. Dans les années à venir, on peut penser que la plupart des codes numériques proposeront des utilitaires de calcul de sensibilités pour de nombreux modèles rencontrés en pratique. Certains codes (ansys, abacus) proposent déjà ce type de fonctionnalités pour des cas simples (linéaire). D'un point de vue du développement et de l'utilisation, il est à parier que seuls des codes permettant de programmer à un haut niveau et de manipuler des objets éléments finis sauront s'imposer dans ce domaine.

Annexe A

Algorithme de Levenberg-Marquardt

On s'intéresse à la minimisation de la fonctionnelle non linéaire suivante par une méthode avec gradient :

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,m} w_i (u_i(\mathbf{c}) - u_{mes_i})^2 \quad (\text{A.1})$$

où

- \mathbf{c} représente le vecteur des p paramètres appartenant à un espace admissible noté \mathcal{C}_{ad} ,
- m est le nombre de mesures,
- w_i est le poids de la mesure i .

L'algorithme de Gauss-Newton ou sa version modifiée de Levenberg-Marquardt prend avantage de la nature "discrète" de la fonctionnelle coût. C'est cette technique qui a été utilisée sauf indiqué. On peut noter que même si la fonctionnelle est définie par une intégrale, elle se ramène numériquement à une forme similaire.

On notera par la suite :

$$y_i = (u_i - u_{mes_i}) \quad (\text{A.2})$$

$$A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial c_j} \quad (\text{A.3})$$

$$Q_{lm}(i) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial c_l \partial c_m} \quad (\text{A.4})$$

$$(\text{A.5})$$

$$W_{ij} = w_{ij} \quad (\text{A.6})$$

On a donc :

$$\mathcal{J}(c) = \frac{1}{2} y^T W y \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla_c \mathcal{J}(c) = A^T W y \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla_c^2 \mathcal{J}(c) = A^T W A + \sum_{i=1, m} Q(i) w_i y_i \quad (\text{A.9})$$

Le développement limité au premier ordre de la fonctionnelle donne :

$$\mathcal{J}(c + \Delta c) = \mathcal{J}(c) + \nabla_c \mathcal{J}(c) \Delta c + O(\Delta c^2) \quad (\text{A.10})$$

La condition nécessaire de stationnarité (gradient nul) avec l'approximation précédente donne l'équation suivante :

$$\nabla_c \mathcal{J} + \nabla_c^2 \mathcal{J} \Delta c = 0 \quad (\text{A.11})$$

A.1 Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt

L'idée est de négliger les termes des dérivées secondes $\frac{\partial^2 u_i}{\partial c_l \partial c_m}$ intervenant dans la matrice hessienne et de le remplacer par un petit terme diagonal λ . C'est l'approximation de Levenberg-Marquardt [48].

$$\nabla_c^2 \mathcal{J} \approx A^T W A + \lambda I \quad (\text{A.12})$$

alors Δc est solution de :

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}) \Delta \mathbf{c} = -\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (\text{A.13})$$

Si λ est nul, on retrouve le cas de Gauss-Newton. Ce choix ($\lambda = 0$) comporte plusieurs désavantages. La matrice hessienne approximée n'est pas définie positive, on obtient alors soit un maximum, soit un minimum. De plus, on a aucun contrôle sur le pas $\Delta \mathbf{c}$ qui peut facilement donner des valeurs en dehors de l'espace des paramètres admissible. D'autre part en pratique, rien n'assure que la matrice jacobienne \mathbf{A} soit bien conditionnée.

La méthode de Levenberg-Marquardt ($\lambda \neq 0$) régularise donc l'algorithme de Gauss-Newton. On remarque que pour une valeur très grande de λ , on se ramène à un algorithme de plus grande pente. L'idée est donc de débiter l'algorithme avec une valeur relativement forte de λ , et de faire décroître λ à chaque itération. On passe ainsi d'un algorithme de plus grande pente à un Gauss-Newton. Notamment près de l'optimum, l'approximation de la dérivée hessienne doit être très bonne et la valeur de λ très faible [18].

A.2 Décomposition en valeur singulières

La décomposition en valeur singulières (dit SVD ou décomposition de Lanczos) de la matrice jacobienne \mathbf{A} permet une résolution efficace de l'équation (A.13).

On rappelle cette décomposition (voir Golub et Van Loan [51], Numerical Recipes [86] pour plus de détails). La matrice rectangulaire \mathbf{A} se décompose comme suit :

$$\mathbf{A}_{(m,n)} = \mathbf{U}_{(m,n)} \mathbf{S}_{(n,n)} \mathbf{V}_{(n,n)}^T \quad (\text{A.14})$$

Les matrices \mathbf{V} et \mathbf{U} contiennent les vecteurs propres normés de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ et $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ respectivement, tandis que $\mathbf{S}_{(n,n)}$ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{V}_i = (S_i)^2 \mathbf{V}_i \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{U}_i = (S_i)^2 \mathbf{U}_i \quad (\text{A.16})$$

De plus V et U vérifient :

$$V^T V = I_n \quad (\text{A.17})$$

$$U U^T = I_m \quad (\text{A.18})$$

La solution du système (A.13) se réduit, une fois la décomposition SVD effectuée à la forme suivante :

$$\Delta c_j = \frac{S_j}{S_j^2 + \lambda} (V I_n U^T y)_j \quad (\text{A.19})$$

en supposant les poids W unité.

Cette forme est intéressante car elle montre l'effet régularisant de λ . Dans la pratique, A est très souvent mal conditionnée, reflétant ainsi le caractère mal posé du problème. Si $\lambda = 0$, l'effet d'une valeur propre quasi-nulle donnera une estimation très fautive de δc (terme en $1/S$). On voit donc immédiatement l'effet de l'ajout du terme λ sur la stabilité de la résolution.

On peut également tronquer le développement en valeurs singulières en ne prenant pas en compte l'effet des valeurs propres très faibles. On élimine ainsi l'effet des données mal conditionnées. Cette technique est connue sous le nom d'inverse généralisée ou inverse de Moore et Penrose [86].

A.3 Qualité des résultats : corrélation

L'algorithme de Levenberg-Marquardt résout le problème de moindres carrés non linéaire. Comme dans le cas linéaire, il est possible de qualifier les solutions obtenues : ellipsoïde de confiance etc.. On pourra se reporter à Tarantola [97], Numerical Recipes [86] pour plus de détails. Il est possible d'estimer le degré de corrélation des paramètres identifiés à l'aide de la matrice jacobienne. On rappelle la formule de la matrice de covariance Cov sur les résultats (une fois l'optimisation terminée, i.e. algorithme convergé) :

$$Cov = (A^T A)^{-1}$$

Dans le cas où l'on a utilisé une décomposition SVD pour résoudre le système, on obtient Cov sous une forme simple :

$$Cov_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_i^2} V_{ji} V_{ki} \quad (\text{A.20})$$

Les valeurs diagonales de la matrice de covariance donne le degré de confiance dans le paramètre identifié (qualité de l'accord).

La matrice de corrélation est définie par :

$$C_{ij} = \frac{Cov_{ij}}{Cov_{ii}^{1/2} Cov_{jj}^{1/2}} \quad (\text{A.21})$$

Les composantes de cette matrice sont comprises entre -1 et 1 . La diagonale est évidemment unité. Les valeurs hors diagonale quantifient le degré de corrélation entre les paramètres identifiés. Plus la valeur est proche de 1 (corrélation) ou -1 (anti-corrélation) plus les paramètres sont corrélés. Si deux paramètres sont fortement corrélés à la fin d'une optimisation, on sait alors que l'on n'identifie avec confiance qu'une combinaison de ces deux paramètres : les valeurs identifiés ne sont pas indépendantes. Attention, cette analyse n'est valable que si les dérivées secondes croisées sont négligeables.

A.4 Préconditionnement

Préalablement à l'optimisation les variables doivent être normés de telle manière que les composantes du gradient soient numériquement du même ordre de grandeur. On minimise donc $\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \mathcal{J}(P\mathbf{x})$ selon \mathbf{x} . Le gradient selon \mathbf{x} est donc donné par

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J} = P \nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{J} \quad (\text{A.22})$$

On a toujours utilisé un preconditionnement strictement diagonal.

A.5 Critères de convergence

Les critères de convergences de l'algorithme portent sur la norme du gradient et la convergence de la suite des valeurs estimés successives. A l'itération, ces critères s'écrivent respectivement :

- $\|\nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{J} \mathbf{c}_k\| < \epsilon$
- $\|\Delta \mathbf{c}_k\| < \epsilon(1 + \|\mathbf{c}_k\|)$

A.6 Information a priori

Il peut être intéressant d'ajouter un terme régularisant à la fonctionnelle permettant de tenir compte d'une information a priori.

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} + (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)^T \mathbf{C}_p (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \quad (\text{A.23})$$

\mathbf{C}_p est reliée à la confiance dans l'information a priori.

En négligeant les termes provenant des dérivées secondes dans la matrice hessienne, en utilisant une décomposition SVD de la matrice jacobienne \mathbf{A} , on arrive à :

$$\Delta \mathbf{c} = (\mathbf{S} \mathbf{W} \mathbf{S} + \mathbf{C}_p)^{-1} (\mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{U}^T \mathbf{W} \mathbf{y} + \mathbf{C}_p (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)) \quad (\text{A.24})$$

On remarque que l'introduction de l'information a priori régularise également la solution comme le paramètre λ de Levenberg-Marquardt. Dans la pratique, on n'a jamais utilisé cette technique. \mathbf{C}_p est un paramètre de compromis, son choix peut être fait de manière optimale à l'aide d'une minimisation. On retiendra également que si le poids de α est trop grand, l'effet des mesures est alors complètement masqué : on identifie l'information a priori.

Bibliographie

- [1] Adachi J.I. Pulse test and very slender case. personal communication, 1995.
- [2] Adachi J.I. and Detournay E. A poroelastic solution of the oscillating pore pressure method to measure permeabilities of "tight" rocks. *Int. Journ. Rock Mech. Min. Sci.*, 34(3-4), 1997. Paper No. 062.
- [3] Aït Chalal A. A comparison of the responses of the munson-dawson and the lemaitre model. In M. Ghoreychi, P. Bérest, H. Reginald Hardy, and M. Langer, editors, *The Mechanical Behavior of Salt, Third Conference*, pages 67-74. Trans Tech Publications, 1993.
- [4] ANDRA, Direction scientifique. Référentiel géologique du site l'est. Technical Report A RP ADS 99-005, ANDRA, 1999.
- [5] Andrieux S. and Ben Abda A. Identifications of planar cracks by complete overdetermined data : inversion formulae. *Inverse Problems*, 12(3) :553-563, 1996.
- [6] Arora J.S. and Cardoso J.B. Variational principle for shape sensitivity analysis. *AIAA J.*, 30 :538-547, 1992.
- [7] Aubertin M., Gill, D.E., and Ladanyi B. An internal variable model for the creep of rock salt. *Rocks mechanics and Rock engineering*, (24) :81-97, 1991.
- [8] Aubertin M., Julien M.R., Servant S., and Gill D.E. A rate-dependent model for the ductile behavior of salt rocks. *Can. Geotech. J.*, 36 :660-674, 1999.
- [9] Beck J.V. and Woodbury K. Inverse problems and parameter estimation : integration of measurements and analysis. *Meas. Sci. Technol.*, 9 :839-847, 1998.
- [10] Ben Abda A. and Bui H.D. Reciprocity principle and crack identification in transient thermal problems. *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 9(1) :1-6, 2001.

- [11] Berchenko I. *Thermal Loading of a Saturated Rock Mass : Field Experiment and Modeling Using Thermoporoelastic Singular Solutions*. PhD thesis, University of Minnesota, 1998.
- [12] Bérest P. Point source of heat in an elastoviscoplastic medium. *Journ. Therm. Stress.*, 1986.
- [13] Bérest P. *Viscoplasticity in rock mechanics*, pages 239–262. Elsevier Applied Science, 1990.
- [14] Bérest P. Notes de calculs. Technical report, Laboratoire de Mécanique des Solides, 1999.
- [15] Bérest P. and Nguyen Minh D. Modèle viscoplastique pour le comportement d'un tunnel revêtu. *Revue Française de Geotechnique*, 23 :19–25, 1983.
- [16] Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12 :155–164, 1941.
- [17] Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. Appl. Phys.*, 26 :182–185, 1955.
- [18] Bonnans J.F., Gilbert J.C., Lemaréchal C., and Sagastizabál C. *Optimisation Numérique*. Springer, 1997.
- [19] Bonnet M. *Problèmes Inverses*. cours du DEA Dynamique des structures et couplages, 2000.
- [20] Bonnet M., Bui H.D., Maigre H., and Planchard J. Identification of heat conduction coefficient : application to nondestructive testing. In Bui H.D. and Tanaka M., editors, *IUTAM symposium on inverse problems in engineering mechanics*. Springer Verlag, Tokyo, 1992.
- [21] Bonnet M. and Mukerjee S. Implicit bem formulations for usual and sensitivity problems in elastoplasticity using the consistent tangent operator concept. *Int. J. Solids Structures*, 33(30) :4461–4480, 1996.
- [22] Bourgeois Laurent. *Contrôle Optimal et Problèmes Inverses en Plasticité*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, France, 1997.

- [23] Brace W. F., Walsh J.B., and Frangos W.T. Permeability of granite under high pressure. *J. Geophys. Res.*, 73(6) :2225–2236, 1968.
- [24] Bui H.D. *Introduction aux Problèmes Inverses en Mécanique des Matériaux*. Eyrolles, Paris, 1993.
- [25] Bui H.D. and Constantinescu A. Spatial localization of the error on constitutive law for the identification of defects in elastic bodies. *Archives of Mechanics*, 52(4–5), 2001.
- [26] Calderon A. On an inverse boundary value problem. In Rio de Janeiro Soc. Brasileira de Matemática, editor, *Seminar on Numerical analysis and its Application to Continuum Physics*, pages 65–73, 1980.
- [27] Carslaw H.S. and Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford science publications, 1959.
- [28] Cheng A.H-D, Sidauruk P., and Abousleiman Y. Approximate inversion of the laplace transform. *The Mathematica Journal*, 4(2) :76–82, 1994.
- [29] Cheng A.H.D. Material coefficients of anisotropic poroelasticity. *Int. Journ. Rock Mech. Min. Sci.*, 34(2) :199–205, 1997.
- [30] Cheng A.H.D. and Detournay E. On singular integral equations and fundamental solutions of poroelasticity. *Int. J. Solids Structures*, 35(34–35) :4521–4555, 1988.
- [31] Cheng A.H.D. and Predeleanu M. Transient boundary element formulation in poroelasticity. *Appl. Math. Modelling*, 11 :285–290, 1987.
- [32] Cividini A. and Rossi A. Z. The consolidation problem treated by a consistent (static) finite element approach. *Int. J. Numer. Anal. Meth. in Geomech.*, 7 :435–455, 1983.
- [33] Constantinescu A. *Sur l'identification des modules élastiques*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, France, 1994.
- [34] Constantinescu A. On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements. *Inv. Probl. Eng.*, 1 :293–315, 1995.

- [35] Constantinescu A. and Tardieu N. On the identification of elastoviscoplastic constitutive law from indentation tests. *Inv. Probl. Eng.*, 9 :19–44, 2001.
- [36] Coste F., Bounenni A., Chanchole S., and Su K. A method for measuring mechanical, hydraulic and hydromechanical properties during damaging in materials with low permeability. In *Int. Workshop on THM modeling of argillaceous rocks, Ecole des Mines de Paris, France*, 1999.
- [37] Coussy O. *Mechanics of Porous Continua*. Wiley, 1995.
- [38] Cristescu N.D. and Hunsche U. *Time Effects in Rocks Mechanics*. John Wiley & Sons, 1998.
- [39] Dems K. and Mróz Z. Variational approach to sensitivity analysis in thermoelasticity. *J. Therm. Stress.*, 10 :283–306, 1987.
- [40] Deng Desheng. *Problèmes de Rétro-analyse en Géotechnique, méthode basée sur le théorème des travaux virtuels*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [41] Detournay E. and Cheng A.H.D. *Fundamentals of Poroelasticity, Comprehensive rocks engineering*, volume 2, chapter 5. pergamon, 1993.
- [42] Elayyan A. and Isakov V. On an inverse diffusion problem. *SIAM J. Appl. Math.*, 57(6) :1737–1748, 1997.
- [43] Escoffier S., Homand F., Giraud A., and Su K. Mesure de la perméabilité et du coefficient de biot dans les argilites de l'est. In *XV^{ième} congrès Français de Mécanique, Nancy, France*, 2001.
- [44] Durup G. et Xu J. Comparative study of certain constitutive laws used to describe the rheological deformation of salts. In M. Ghoreychi, P. Bérest, H. Reginald Hardy, and M. Langer, editors, *The Mechanical Behavior of Salt, Third Conference*, pages 75–83. Trans Tech Publications, 1993.
- [45] Gavrus A., Massoni E., and Chenot J.L. The analysis of inelastic behaviour formulated as an inverse rheological approach. *Meas. Sci. Technol.*, 9 :848–863, 1998.

- [46] Gens A., Ledesma A., and Alonso E.E. Estimation of parameters in geotechnical backanalysis-ii. application to a tunnel excavation problem. *Computers and Geotechnics*, 18(1) :29–46, 1996.
- [47] Ghoreychi M. Comportement rhéologique et couplages thermo-hydro-mécaniques dans les argilites de l'est : expériences macroscopiques et analyses microscopiques. In ANDRA CNRS, editor, *Etude de l'Est du Bassin Parisien*, pages 109–126, 1997.
- [48] Gill P.E., Murray W., and Wright M.H. *Practical optimization*. Academic Press, 1982.
- [49] Gioda G. and Locatelli L. Back analysis of the measurements performed during the excavation of a shallow tunnel in sand. *Int. J. Numer. Anal. Meth. in Geomech.*, 23 :1407–1425, 1999.
- [50] Gioda G. and Maier G. Direct search solution of an inverse problem in elastoplasticity : identification of cohesion, friction angle and in situ stress by pressure tunnel tests. *Int. J. Numer. Anal. Meth. in Geomech.*, 15 :1823–1848, 1980.
- [51] Golub G.H. and Van Loan C.F. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, 1985.
- [52] Gomez C. *Engineering and Scientific Computing with Scilab*. Boston : Birkhauser, 1999.
- [53] Guerpillon Y. and Allagnat D. Les mesures géotechniques effectuées lors de la construction du tunnel autoroutier de chamoise. In *Grands ouvrages souterrains, Florence*, pages 470–479, 1986.
- [54] Haug E. J., Choi K. Y., and Komkov V. *Design sensitivity analysis of structural system*. Academic press, 1986.
- [55] Holland J. *Adaptation in natural and artificial systems*. University of Michigan Press, 1975.
- [56] Hsieh P.A., Neuzil C.E., Bredehoeft J.D., and Silliman S.E. Transient laboratory method for determining the hydraulic properties of tight rocks- part i : Theory. *Int. Journ. Rock Mech. Min. Sci.*, 18 :245–252, 1981.

- [57] Ikehata M. Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. *SIAM J. Math. Anal.*, 50 :1635–1644, dec. 1990.
- [58] Ikehata M. The linearization of the dirichlet to neumannn data map in anisotropic plate theory. *Inverse Problems*, 11 :165–181, aug. 1995.
- [59] Isaacson D. and Isaacson E. L. Comment on calderon’s paper : On an inverse boundary value problem. *SIAM journal*, pages 553–559, 1988.
- [60] Isakov V. Uniqueness and stability in multi-dimensional inverse problem. *Inverse Problems*, 9 :579–621, 1993.
- [61] Isakov V. *Inverse Problem for Partial Differential Equation*. Springer, New York, 1998.
- [62] Isakov V. and Kindermann S. Identification of the diffusion coefficient in a one-dimensional parabolic equation. *Inverse Problems*, 16 :665–680, 2000.
- [63] Janno J. and von Wolfersdorf L. An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity. *Inverse Problems*, 17(1) :13–24, 2001.
- [64] Kohn R.V. and Vogelius M. Determining conductivity by boundary measurments. *Comm. Pure. Appl. Math.*, XXXVII :289–298, 1984.
- [65] Kohn R.V. and Vogelius M. Determining conductivity by boundary measurments ii interior results. *Comm. Pure Appl. Math.*, XXXVIII :643–667, 1985.
- [66] Kohn R.V. and Vogelius M. Relaxation of a variational method for impedance computed tomography. *Comm. Pure Appl. Math.*, XL :745–777, 1987.
- [67] Lavrentiev M.M. *Some improperly posed problems of mathematical physics*. Springer Verlag, 1967.
- [68] Lecampion B. and Constantinescu A. Identification of poroelastic constants of deep argillaceous rocks. 2 :inverse analysis. In J-L Auriault et al., editor, *Poromechanics 2, 2nd Biot conference on Poromechanics, Grenoble, France*, pages 245–250, 2002.

- [69] Lecampion B., Constantinescu A., and Nguyen Minh D. Parameter identification for lined tunnels in a viscoplastic medium. *Int. J. Numer. Anal. Meth. in Geomech.*, 26(12) :1191–1211, 2002.
- [70] Lecampion B., Constantinescu A., Nguyen Minh D., and Allagnat D. On the determination of elastoviscoplastic constants of hard marls from in situ measurements performed on a motorway tunnel in the alps. In R. Hammah et al., editor, *North American Rocks Mechanics Symposium, Toronto*, pages 251–258, 2002.
- [71] Ledesma A., Gens A., and Alonso E.E. Estimation of parameters in geotechnical backanalysis-i. maximum likelihood approach. *Computers and Geotechnics*, 18(1) :1–27, 1996.
- [72] Leger B., Roussel J.C., Guerpillon Y., and Allagnat D. Ten years of geotechnical measurements through chamoise tunnel marls. In Vouille G. and Bérest P., editors, *9th congress of ISRM*. Balkema, Rotterdam, 1999.
- [73] Lemaître J. and Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [74] Lions J.L. *Contrôle optimal des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1968.
- [75] Lorenzi A. and Yakhno V.G. An identification problem related to isotropic non-homogeneous stratified viscoelastic cylindrical body. *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 5(1) :29–53, 1997.
- [76] Lubliner J. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, 1990.
- [77] Mahnken R. and Kuhl E. Parameter identification of gradient enhanced damage models with the finite element method. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 18 :819–835, 1999.
- [78] Mahnken R. and Steinmann P. A finite element algorithm for parameter identification of material models for fluid saturated porous media. *Int. J. Numer. Anal. Meth. in Geomech.*, 25 :415–434, 2001.
- [79] Malinsky L., Chanchole S., and Coste F. Identification of poroelastic constants of deep argillaceous rocks. 1 : experimental set up and qualitative analysis. In *2nd Biot conference on Poromechanics, Grenoble, France*, 2002.

- [80] Michaleris P., Tortorelli D.A., and Vidal C.A. Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with applications to elastoplasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37, 1994.
- [81] Modaressi H. and Laloui L. A thermo-viscoplastic constitutive model for clays. *Int. J. Numer. Anal. Meth. in Geomech.*, 21 :313–335, 1997.
- [82] Munson, D.E and Dawson, P.R. A transient creep model for salt during stress loading and unloading. Technical Report Sand-83-0952, Sandia National Laboratories, Alburquerque, 1982.
- [83] Nakamura G. and Uhlmann G. Inverse problems at the boundary for an elastic medium. *SIAM J. Math. Anal.*, 26 :263–279, mar. 1995.
- [84] Nguyen Minh D., Habib P., and Guerpillon Y. Time dependent behaviour of a pilot tunnel driven in hard marls. In *Design and Performance of Underground Excavations*, pages 453–459, Cambridge, 1984. ISRM/BGS.
- [85] Nguyen Minh D., Bergues J., and Hoteit N. Détermination du comportement mécanique des roches argileuses. In *Proceedings of the 9th Congress of ISRM, Paris*, pages 645–650, 1999.
- [86] Numerical Recipes group. *Numerical Recipes in C*. Cambridge university Press, 1988.
- [87] Ohkami T. and Swoboda G. Parameter identification of viscoelastic materials. *Computers and geotechnics*, (24) :279–295, 1999.
- [88] Perzyna P. Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in Appl. Mech.*, 9 :243–377, 1966.
- [89] Panet M. *Le calcul des tunnels par la méthode Convergence-Confinement*. Presses des Ponts et Chaussées, 1995.
- [90] Roctest Telemac Inc. *Extensomètre modèle DISTOFOR*.
- [91] Sakurai S. *Back analysis in rock engineering, Comprehensive rocks engineering*, pages 534–569. Pergamon, 1993.

- [92] Showalter R. E. Diffusion in poro-elastic media. *Jour. Math. Anal. Appl.*, (251) :310–340, 2000.
- [93] Simo J. C. and Hughes T.J.R. *Computational Inelasticity*. Springer, 1997.
- [94] Simo J.C. and Taylor R.L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, (48) :101–118, 1985.
- [95] Nguyen Quoc Son. On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, (11) :817–832, 1977.
- [96] Swoboda G., Ichikawa Y., Qinxi Dong, and Zaki M. Back analysis of large geotechnical models. *Int. J. Numer. Anal. Meth. in Geomech.*, 23 :1455–1472, 1999.
- [97] Tarantola A. *Inverse Problem Theory*. Elsevier, 1987.
- [98] Tardieu N. *Identification de lois de comportement élastoviscoplastique par indentation*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, France, 2000.
- [99] Tardieu N. and Constantinescu A. On the determination of elastic coefficients from indentation experiments. *Inverse Problems*, 16(3) :577–588, 2000.
- [100] Tikhonov A.N. and Arsenin V.Y. *Solutions to ill-posed problems*. Winston Wiley, New York, 1977.
- [101] Tortorelli D.A. and Michaleris P. Design sensitivity analysis : overview and review. *Inv. Probl. Eng.*, (1) :71–103, 1994.
- [102] Tsay J.J. and Arora J.S. Nonlinear design sensitivity analysis for path dependent problems. part 1 : General theory. *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, 81 :183–208, 1989.
- [103] Tsay J.J. and Arora J.S. Nonlinear design sensitivity analysis for path dependent problems. part 2 : Analytical examples. *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, 81 :209–228, 1989.
- [104] Vidal C.A. and Haber R.B. Design sensitivity analysis for rate-independent elastoplasticity. *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, pages 393–431, 1993.

- [105] Vidal C.A., Lee H.S., and Haber R.B. The consistent tangent operator for design sensitivity analysis of history-dependent response. *Computing Systems in Engineering*, 2(5/6) :509–523, 1991.
- [106] Vincké O., Longuemar P., Boutéca M., and Deflandre J.P. Investigation of the poromechanical behavior of shales in the elastic domain. In *SPE/ISRM 47589*, pages 515–520, 1998.
- [107] Wong H. *Comportement Des Galeries Souterraines Soumises À un Chargement Thermique*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994.
- [108] Yang G.Z. and Zabaras N. An adjoint method for the inverse design of solidification processes with natural convection. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 42 :1121–1144, 1998.
- [109] Zauderer E. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. Wiley, 1977.
- [110] Zienkiewicz O. C. *The Finite Element Method*. Mc Graw-Hill, 1977.