



**HAL**  
open science

# Fatigue polycyclique des structures métalliques : durée de vie sous chargements variables.

Mohamad Jabbado

► **To cite this version:**

Mohamad Jabbado. Fatigue polycyclique des structures métalliques : durée de vie sous chargements variables.. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2006. Français. NNT : . pastel-00002116

**HAL Id: pastel-00002116**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00002116v1>**

Submitted on 29 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Thèse de Doctorat de l'École Polytechnique

Spécialité : **Mécanique et Matériaux**

présentée par

**Mohamad JABBADO**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

*Sujet de la thèse*

**Fatigue polycyclique des structures métalliques : durée de vie  
sous chargements variables**

Soutenue le 14 Mars 2006

devant le jury composé de

Messieurs	Ky DANG VAN	Président
	Thierry PALIN-LUC	Rapporteur
	Said TAHERI	Rapporteur
	Michele CIAVARELLA	Examineur
	Joseph ZARKA	Examineur
	Habibou MAITOURNAM	Directeur de thèse



### ***A mes Parents,***

*Vous avez veillé sur moi depuis ma naissance jusqu'à ce que je suis ; vous m'avez assuré une vie digne ; vous avez manifesté beaucoup de sacrifices afin de me voir grandir devant vos yeux. Aujourd'hui, vient mon tour pour vous remercier en vous offrant ce travail qui est le fruit de vos sacrifices. **Maman, Papa,** je vous dois toute ma vie !*

***"Seuls les faibles blâment leurs parents, leur race, l'époque où ils sont nés, le manque de chance ou les aléas du destin. Mais chacun d'entre nous a le pouvoir de dire : « Voici ce que je suis aujourd'hui et voilà ce que je serai demain »."***

AMOUR LOUIS

### ***A mes proches,***

*J'apprécie beaucoup la grande affection que vous tenez pour moi. A cette reconnaissance, je vous manifeste mes meilleurs sentiments en vous offrant le fruit de mon travail.*

### ***A mes amis,***

***" L'apprentissage de la vie, c'est de se donner les moyens de surmonter cette angoisse qu'on a d'elle, en se structurant, en prenant ses responsabilités, en se disciplinant."***

BOTHOREL JEAN

### ***A mes collègues,***

***" Le savoir que l'on ne complète pas chaque jour diminue tous les jours."***

Proverbe Chinois



## *Remerciements*

Je remercie Monsieur B. Halphen, Directeur du LMS, pour son accueil chaleureux et pour avoir accepté que j'effectue mes travaux de recherche au sein de son laboratoire.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude à Monsieur K. Dang Van, le Maître de Fatigue, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse et de m'accueillir dans son équipe de recherche au LMS.

Je remercie également Messieurs T. Palin-Luc, Maître de conférences à l'ENSAM de Bordeaux et Directeur-Adjoint de LAMEFIP-ENSAM CER de Bordeaux, et S. Taheri, Ingénieur de recherche EDF, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de rapporter cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs J. Zarka, Directeur technique de CADLM et Ancien Directeur de recherche CNRS, et M. CIAVARELLA, Professeur associé à l'Université « Politecnico Di Bari (Italie) », pour avoir accepté d'être examinateurs de mon jury de thèse. J'éprouve toute ma reconnaissance à Monsieur J. Zarka qui a initié ce travail et m'avait offert un soutien technique et logistique pendant les premiers mois de ma thèse où je travaillais dans la société CADLM.

Je tiens à remercier la société Ligeron SA, représentée par Monsieur A. Azarian, et le LMS pour avoir financé mes études de recherche. Toute ma reconnaissance s'adresse à Monsieur A. Azarian qui a bien voulu s'intéresser à mon travail et suivre l'avancement de ma thèse. Mes remerciements vont aussi à la société Allevard Rejna Autosuspensions, représentée par Monsieur A. Ouakka avec qui on a monté une collaboration entre ladite société et le LMS dans le cadre d'une application industrielle du modèle que j'ai construit pendant la thèse.

J'éprouve une sincère reconnaissance pleine d'amitié à H. Karaouni et A. Benchissou pour l'ambiance qu'ils m'ont offert pendant la période de mon séjour à CADLM.

Je tiens à remercier tous mes collègues du LMS qui m'ont aidé en répondant à mes questions. Que ma famille et tous mes amis soient assurés de mon immense gratitude et de ma sincère reconnaissance pour leur soutien permanent.

Enfin, il me faudrait des siècles entiers pour remercier mon directeur de thèse Habibou Maitournam, car celui qui m'apprend une lettre, je serai pour lui un esclave. Quant à lui, il était pour moi le bon directeur qui m'a imprégné la mécanique et la fatigue des structures, et le vrai Professeur reconnu par sa modestie, et ses idées claires, pertinentes et encourageantes qui ont fait de moi un jeune ingénieur chercheur ambitieux prêt à conquérir le monde.

Habibou Maitournam, veuillez accepter ici, toute ma reconnaissance et ma gratitude à votre personne ; tout ce que je dis de vous c'est peu devant tous les services que vous m'avez offert pendant mon séjour à l'Ecole Polytechnique à savoir la bonne direction, le support technique, l'aide morale et logistique, la culture scientifique et le conseil. Je me permets de vous décrire en quelques modestes lignes :

- la modestie qui vous caractérise malgré le grand savoir scientifique que vous possédez, est un élément majeur qui assure tout le plaisir de travailler sous votre direction ;
- votre humour pour le travail et votre insistance sur la réussite font de vous « **mon exemple préféré à suivre** »

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>11</b>
<b>1 BIBLIOGRAPHIE : Prédiction de durée de vie en fatigue à grand nombre de cycles</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction	15
1.2 Courbe de Wöhler et les différents domaines de fatigue	16
1.3 Classification des chargements	18
1.3.1 Chargement affine	20
1.3.2 Chargement non affine	20
1.4 Estimation de durée de vie en fatigue multiaxiale sous chargement d'amplitude constante	20
1.4.1 Méthode de Papadopoulos (2001) [59]	20
1.4.2 Méthode de Susmel et Petrone (2002) [72]	24
1.5 Estimation de durée de vie en fatigue sous sollicitation uniaxiale d'amplitude variable	25
1.5.1 Les méthodes de comptage	26
1.5.2 Les lois d'endommagement	27
1.5.2.1 Loi de Miner et ses dérivés [50]	27
1.5.2.2 Loi de Lemaitre-Chaboche [42, 43]	28
1.5.3 Courbe de Wöhler	29
1.6 Estimation de durée de vie en fatigue multiaxiale sous charges variables	30
1.6.1 Méthodes basées sur la technique de comptage de cycles	31
1.6.1.1 Méthode de Wang et Brown (1992) [75, 76, 77, 78]	31
1.6.1.2 L'approche statistique de Macha et Bedkowsky [1, 10, 11, 45]	32
1.6.1.3 Méthode de Robert et ses dérivées [26, 80, 81]	34
1.6.1.4 Méthode de Lagoda et Macha [38, 39]	38
1.6.2 Méthodes sans comptage de cycles	40
1.6.2.1 Méthode de Preumont, Piéfort et Pitoiset [60, 61, 62, 64]	40
1.6.2.2 Méthode de l'intégrale curviligne de Stephanov [69, 70, 71]	41
1.6.2.3 Loi d'endommagement de Papadopoulos [56]	43
1.6.2.4 Méthode de Morel (1996) [51, 53]	46
1.6.2.5 Méthode de Zarka-Karaoui (2001) [33, 84]	49

1.7	Conclusion . . . . .	51
<b>2</b>	<b>Proposition d'un modèle de prévision de la durée de vie en endurance limitée</b>	<b>54</b>
2.1	Introduction . . . . .	54
2.2	Choix de l'approche macro-méso (Dang Van) . . . . .	57
2.2.1	Rappel des relations générales du passage à l'échelle mésoscopique . . . . .	58
2.3	Modèle initial de prédiction de durée de vie en fatigue . . . . .	60
2.3.1	Description générale du modèle . . . . .	60
2.3.2	Relations de passage macro-méso en fatigue polycyclique . . . . .	61
2.3.3	Comportement mécanique à l'échelle mésoscopique . . . . .	62
2.3.4	Choix du paramètre du dommage . . . . .	64
2.3.5	Evaluation de $\varepsilon_s^{pc}$ par la méthode directe . . . . .	65
2.3.5.1	Présentation de la méthode directe . . . . .	65
2.3.5.2	Mise en oeuvre de la méthode directe . . . . .	67
2.3.6	Applicabilité du modèle . . . . .	69
2.4	Modèle de prédiction adopté . . . . .	70
2.4.1	Présentation du modèle . . . . .	70
2.4.2	Calcul de $\varepsilon_s^{pc}$ par la méthode simplifiée . . . . .	71
2.4.2.1	Principe de la méthode simplifiée . . . . .	72
2.4.2.2	Mise en oeuvre de la méthode simplifiée . . . . .	73
2.4.2.3	Expression explicite de $\varepsilon_s^{pc}$ : cas des chargements affines simples . . . . .	75
2.4.3	Critère mésoscopique de durée de vie en fatigue . . . . .	76
2.4.3.1	Loi mésoscopique de durée de vie : cas des chargements affines simples . . . . .	77
2.4.3.2	Loi mésoscopique de durée de vie : cas général . . . . .	77
2.4.4	Identification des paramètres du modèle . . . . .	79
2.4.4.1	Recherche de relations entre $\alpha$ , $\beta$ et $\gamma$ . . . . .	79
2.4.4.2	Identification des paramètres optimaux du modèle . . . . .	80
2.5	Conclusion . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Confrontation : Résultats de prévision du modèle / durées de vie expérimentales</b>	<b>83</b>
3.1	Introduction . . . . .	83
3.2	Prévision de durées de vie des essais réalisés sur l'aluminium 6082 T6 . . . . .	83
3.2.1	Matériau . . . . .	83
3.2.2	Eprouvettes . . . . .	84
3.2.3	Essais de fatigue réalisés sur l'aluminium 6082 T6 . . . . .	84
3.2.4	Application du modèle . . . . .	86
3.2.4.1	Identification des paramètres du modèle . . . . .	86
3.2.4.2	Evaluation de $\varepsilon_s^{pc}$ . . . . .	87
3.2.4.3	Calcul de durées de vie en fatigue . . . . .	88

3.3	Simulation des essais de fatigue réalisés sur la fonte GS61 . . . . .	88
3.3.1	Présentation du matériau [12] . . . . .	88
3.3.2	Caractéristiques mécaniques du matériau . . . . .	89
3.3.3	Description des essais de fatigue testés . . . . .	90
3.3.4	Application du modèle sur la fonte GS61 . . . . .	93
3.3.4.1	Identification des paramètres . . . . .	93
3.3.4.2	Calcul de durées de vie des essais de fatigue réalisés sur la fonte GS61 . . . . .	95
3.4	Application du modèle à des essais de fatigue réalisés sur l'acier 30 NCD 16 . .	96
3.4.1	Présentation de l'acier 30 NCD 16 . . . . .	96
3.4.2	Essais de fatigue réalisés par Dubar sur l'acier 30 NCD 16 . . . . .	96
3.4.3	Identification des paramètres du modèle pour l'acier 30 NCD 16 . . . . .	98
3.4.4	Résultats de prédiction de durées de vie . . . . .	99
3.5	Application du modèle aux données de fatigue de l'acier SM45C . . . . .	100
3.5.1	Présentation de l'acier SM45C . . . . .	100
3.5.2	Description des essais de fatigue réalisés sur l'acier SM45C . . . . .	101
3.5.3	Identification des paramètres du modèle de l'acier SM45C . . . . .	102
3.5.4	Simulation des essais de fatigue réalisés sur l'acier SM45C . . . . .	102
3.6	Validation expérimentale du modèle sur l'acier 10 HNAP . . . . .	103
3.6.1	Présentation du matériau . . . . .	103
3.6.2	Description des essais de fatigue sur l'acier 10 HNAP . . . . .	104
3.6.2.1	Courbe de Wöhler en traction-compression . . . . .	104
3.6.2.2	Courbe de Wöhler en torsion alternée symétrique . . . . .	104
3.6.2.3	Essais de fatigue en traction pour diverses valeurs de la contrainte moyenne . . . . .	105
3.6.2.4	Essais de fatigue sous chargement variable . . . . .	107
3.6.3	Identification des paramètres du modèle de l'acier 10 HNAP . . . . .	110
3.6.4	Simulation des essais de fatigue réalisés sur le 10 HNAP . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Application à un cas industriel</b>	<b>113</b>
4.1	Introduction . . . . .	113
4.2	Processus de fabrication des ressorts de suspension . . . . .	114
4.3	Géométrie de la structure fournie . . . . .	115
4.4	Chargement imposé . . . . .	116
4.5	Données du matériau . . . . .	118
4.5.1	Caractéristiques en fatigue du matériau . . . . .	118
4.5.2	Caractéristiques mécaniques et loi de comportement du matériau . . . . .	119
4.6	Prédiction numérique de la durée de vie . . . . .	122
4.6.1	Recherche du cycle stabilisé sous le chargement imposé . . . . .	122

4.6.2	Post-traitement en fatigue : application du modèle prédictif proposé . . .	123
4.6.2.1	Identification des paramètres du modèle . . . . .	123
4.6.2.2	Résultats de prédiction . . . . .	124
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>128</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>130</b>
	<b>Notations</b>	<b>138</b>
	<b>A Tracé de la courbe de Wöhler</b>	<b>141</b>
	<b>B Approche simplifiée de Zarka sur le comportement inélastique des solides</b>	<b>143</b>
	<b>C Critère de Dang Van [22] (1973-1987)</b>	<b>147</b>

# Introduction Générale

La fatigue des structures métalliques soumises à des sollicitations cycliques est un phénomène qui est traditionnellement étudié à deux niveaux. La fatigue est respectivement qualifiée « **d’oligocyclique** » ou « **de polycyclique** » si le chargement produisant la rupture est appliqué durant un petit ou un grand nombre de cycles. A son tour, la « **fatigue polycyclique** » se divise en deux domaines : « **endurance limitée** » où l’on parle du régime fini de durée de vie et « **endurance illimitée** » où la structure peut supporter un nombre de cycles théoriquement infini sans qu’elle ne casse. La vérification traditionnelle de la tenue en fatigue des structures métalliques travaillant à grand nombre de cycles se faisait dans le domaine de l’endurance illimitée où le constructeur se contentait d’assurer la tenue de sa pièce à un « très » grand nombre de cycles fixé. Dans un contexte de forte compétition économique, les exigences croissantes des industriels pour l’optimisation de leurs structures rendent cette démarche insuffisante. En effet, les industriels ont pour objectif d’optimiser leurs structures au plus juste ; ils ne veulent plus les dimensionner au-delà de ce qui est strictement nécessaire et inscrit au cahier des charges. Devant cette nécessité compétitive, ils se sont orientés vers l’étude du domaine de l’endurance limitée. Ce domaine qui intéressait peu de chercheurs, constitue actuellement un axe important de leurs recherches devant la forte demande industrielle.

D’autre part, les composants mécaniques sont généralement de nature complexe subissant des chargements complexes. Les industriels recherchent un modèle de prédiction de durée de vie de leurs composants, qui est d’utilisation simple, d’une grande applicabilité sur les matériaux métalliques et qui traite presque tous les cas de charges possibles. Dans le domaine de l’endurance limitée, très peu de critères sont proposés. A l’heure actuelle, aucun d’entre eux n’est utilisable dans les bureaux d’études, et ne répond complètement à la demande d’un outil prédictif de durée de vie. En effet, la plupart des approches existantes s’appuient sur des méthodes de comptage de cycles, dont l’extension au cas de sollicitations multiaxiales s’avère difficile voire impossible du fait de la difficulté d’extraire et de définir des cycles.

Le but de cette thèse est d’établir un modèle déterministe de prévision de durée de vie des structures métalliques travaillant en endurance limitée, qui traite presque tous les cas de charges possibles (à amplitudes constante et variable) sans avoir recours au comptage des cycles et sans tenir compte de l’effet d’entaille comme les structures considérées ne présentent pas de défauts géométriques. Il doit être d’utilisation simple pour permettre son emploi en bureaux d’études, et s’appliquer à une grande variété de matériaux métalliques.

Dans le premier chapitre, une étude bibliographique est consacrée à la présentation de différentes méthodes de calcul de durée de vie en fatigue à grand nombre de cycles. Dans ces méthodes, on distingue le cas des sollicitations cycliques d'amplitude constante et celui des sollicitations d'amplitude variable. Les méthodes pour les chargements sous sollicitations d'amplitude variable sont classées suivant le type de sollicitation (uniaxiale ou multiaxiale) et le fait d'adopter ou non un comptage des cycles.

Dans le cadre des sollicitations multiaxiales d'amplitude constante, on présente deux méthodes qui adoptent le concept du plan critique. La première, développée par Papadopoulos, repose sur la définition d'une courbe de Wöhler multiaxiale exprimant la durée de vie en fonction de l'amplitude de la cisssion généralisée  $T_a$ , de la valeur moyenne  $\sigma_{H,m}$  et de l'amplitude  $\sigma_{H,a}$  de la pression hydrostatique. La seconde, proposée par Susmel et Petrone, résulte de la combinaison d'un diagramme de Wöhler modifié et du concept du plan critique.

Dans le cadre des sollicitations uniaxiales d'amplitude variable, on donne la méthode classique couramment utilisée. Elle est basée sur une technique de comptage des cycles. Elle se compose généralement d'une méthode de comptage des cycles (le plus souvent comptage Rainflow), une loi de dommage et de cumul (Miner) et une courbe de Wöhler.

Enfin, pour les sollicitations multiaxiales d'amplitude variable, on classe les méthodes avec un comptage ou sans comptage des cycles. Les méthodes adoptant une technique de comptage des cycles nécessitent d'abord la définition d'une variable de comptage selon laquelle se fait l'extraction des cycles multiaxiaux. Une fois que les cycles sont extraits, la durée de vie de chaque cycle élémentaire sera calculée par l'intermédiaire d'un critère de fatigue multiaxial. Ensuite, une loi de dommage de type Miner ou Lemaitre-Chaboche permet de calculer et de cumuler le dommage généré par la séquence. Ces méthodes diffèrent selon les auteurs par le choix de la variable du comptage et du critère de fatigue multiaxial pour la détermination de la durée de vie des cycles élémentaires. Parmi les méthodes qui s'affranchissent d'une technique de comptage de cycles, on distingue :

- la méthode spectrale de Preumont, Piéfort et Pitoiset, basée sur la réponse de la structure dans le domaine fréquentiel ;
- la méthode de l'intégrale curviligne de Stephanov, basée sur une variable de dommage liée au trajet de chargement que décrit le vecteur contrainte sur le plan principal  $(I, II)$  ;
- la loi de dommage de Papadopoulos reposant sur le choix de la déformation plastique mésoscopique cumulée comme variable de dommage ; la rupture survenant lorsque cette variable atteint une valeur critique ;
- la méthode de Morel, basée sur une approche mésoscopique de type plan critique avec le choix de la déformation plastique mésoscopique cumulée comme variable de dommage ;

- la méthode de Zarka-Karaouni reposant sur la définition d’une règle d’équivalence entre deux chargements locaux et sur le choix de la déformation plastique mésoscopique cumulée, introduite par Papadopoulos, comme variable de dommage.

Le second chapitre est consacré à la proposition **d’un modèle phénoménologique et déterministe** de prévision de durée de vie en endurance limitée. Il est basé sur une approche mésoscopique et utilise en partie les idées proposées par Dang Van, Papadopoulos et Morel. La variable de dommage choisie est la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$ . Mais ici, la rupture n’est pas liée à une valeur critique de la déformation plastique mésoscopique cumulée  $\varepsilon^{pc}$ , elle est définie par une relation à l’échelle mésoscopique entre  $\varepsilon_s^{pc}$  et le nombre de cycles à l’amorçage  $N_R$ . De plus, le critère de plasticité à l’échelle mésoscopique est différent : le modèle de plasticité de Schmid est remplacé par un modèle élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire avec une limite élastique dépendant de la pression hydrostatique pour tenir compte du processus complexe de nucléation des microfissures.

Une première approche utilisant une déformation plastique mésoscopique à trace non nulle et une méthode de calcul directe du cycle stabilisé mésoscopique est formulée. Devant la difficulté d’identification de ses paramètres, elle a été abandonnée au profit d’une seconde approche. Celle-ci considère une déformation plastique mésoscopique déviatorique et utilise la méthode simplifiée de Zarka sur le comportement inélastique des solides pour la détermination du cycle stabilisé mésoscopique. Elle fait intervenir six paramètres pour lesquels une procédure d’identification est donnée. Cette procédure exige la connaissance d’une **courbe de Wöhler** (idéalement en flexion alternée symétrique) et **de deux limites d’endurance** (soient par exemple en flexion et en torsion purement alternées).

Le troisième chapitre consiste à valider le modèle proposé pour des chargements sous sollicitations multiaxiales d’amplitudes constante et variable. Toutes les données utilisées sont issues de la littérature. Elles concernent cinq matériaux :

- **l’aluminium Al 6082 T6** pour lequel les essais disponibles sont purement alternés en flexion simple, en torsion simple et en flexion-torsion combinée. Tous ces essais sont à amplitude constante ;
- **la fonte GS61** pour lequel les essais sont de même nature que ceux testés sur **l’aluminium Al 6082 T6** ;
- **l’acier 30 NCD16** pour lequel les essais sont en torsion purement alternée, en flexion avec ou sans contrainte moyenne et en flexion-torsion combinée avec ou sans contrainte moyenne. Tous ces essais sont à amplitude constante ;

- **l'acier SM45C** pour lequel les essais sont en torsion purement alternée et en flexion avec ou sans contrainte moyenne. Ces essais sont aussi à amplitude constante ;
- **l'acier 10 HNAP** pour lequel les essais sont à amplitude constante et à amplitude variable. Les essais à amplitude constante sont en torsion purement alternée et en traction pour diverses valeurs de la contrainte moyenne. Cependant, ceux à amplitude variable sont constitués d'essais en flexion-torsion combinée à trajet radial.

Le quatrième chapitre est consacré à l'application du modèle sur une structure industrielle. On s'intéresse à l'étude de la tenue en fatigue d'un ressort de suspension d'automobile fabriqué par la société « Allevard Rejna ».

# Chapitre 1

## BIBLIOGRAPHIE : Prédiction de durée de vie en fatigue à grand nombre de cycles

### 1.1 Introduction

La vérification traditionnelle de la tenue des structures en fatigue au seuil de l'endurance (même en utilisant des critères d'endurance multiaxiaux) ne suffit plus aujourd'hui. En effet, dans un contexte de forte compétition économique, les industriels cherchent à optimiser leurs solutions pour assurer la durée de vie ou le coefficient de sécurité escomptés de leurs composants. Ces derniers ne sont donc plus dimensionnés au-delà de ce qui est strictement nécessaire et inscrit au cahier des charges. Dans un contexte de dimensionnement en fatigue, la plupart des structures mécaniques sont confrontées au problème de fatigue à grand nombre de cycles, et plus précisément de l'endurance limitée (on parle de durée de vie finie). Une autre exigence s'impose : comme les industriels se trouvent devant des composants de plus en plus complexes subissant de chargements complexes, ils recherchent un modèle de prédiction de durée de vie de leurs composants qui traite presque tous les cas de charges possibles.

Dans les années 80 et 90, la fatigue multiaxiale a été un sujet de recherche important, de nombreux critères ont été développés que ce soit en fatigue oligocyclique ou en fatigue à grand nombre de cycles. Cependant, en fatigue polycyclique, et plus précisément en endurance limitée, très peu de critères ont été proposés. Cette zone d'étude constitue donc un domaine de recherche et présente un intérêt majeur pour toutes les industries qui font face au problème de la fatigue en général : automobile, aéronautique et nucléaire. Elle fait l'objet de ce chapitre où nous allons décrire les principales méthodes adoptées pour la prédiction de durée de vie des pièces soumises à des chargements multiaxiaux d'amplitude constante et d'amplitude variable.

La plus grande partie de ce chapitre est consacrée aux méthodes de prédiction de durée de vie des pièces sous sollicitations d'amplitude variable étant donné la complexité du problème et la fréquence d'apparition de telles sollicitations dans l'industrie. En effet, lorsqu'on considère les problèmes de fatigue des structures, il arrive très souvent que les chargements multiaxiaux appliqués à un composant mécanique soient d'amplitude variable. Pour de tels chargements, la plupart des critères, adaptés aux chargements périodiques à amplitude constante ou à des trajets de chargement relativement simples, se révèlent insuffisants.

Le problème posé est compliqué, et ce à plusieurs titres. Les premières difficultés sont liées à la multiaxialité des contraintes qui entraîne souvent un trajet de charge très complexe dans l'espace des contraintes. Les données issues d'essais simples de fatigue (flexion, torsion, ...) servant pour l'identification des paramètres du modèle ne sont pas facilement disponibles. De plus, les méthodes classiques de prédiction de durée de vie, qui s'appuient sur une technique de comptage de cycles, sur la définition d'une règle de dommage et d'une loi de cumul, présentent une difficulté majeure. En effet, lors de sollicitations multiaxiales d'amplitude variable, il est difficile voire impossible d'extraire et d'identifier des cycles.

Certaines méthodes de traitement statistique sembleraient pouvoir résoudre ce type de problème. Mais nous verrons qu'il faut rester très prudent. Il peut être dangereux, lors d'une prédiction, de représenter un chargement à l'aide d'un seul paramètre statistique. Ce dernier peut avoir peu de chance d'être équivalent, en terme de dommage, à l'ensemble des niveaux de charge de la séquence d'amplitude variable appliquée jusqu'à rupture.

Dans ce chapitre, l'étude bibliographique proposée se présente comme suit :

- on présente d'abord les méthodes de prévision de durée de vie pour les chargements périodiques sous sollicitations multiaxiales d'amplitude constante ;
- puis on classe les méthodes pour les chargements sous sollicitations d'amplitude variable avec ou sans comptage de cycles que ce soit pour une sollicitation uniaxiale ou multiaxiale.

## **1.2 Courbe de Wöhler et les différents domaines de fatigue**

La courbe de Wöhler est appelée courbe S-N (Stress - Number of cycles) dans les pays anglo-saxons. Universellement connue, la courbe de Wöhler est la plus ancienne et la seule qui permet de visualiser la tenue de la pièce ou des matériaux dans le domaine de fatigue. Elle définit une relation entre la contrainte appliquée  $\sigma$  (parfois notée S) et le nombre de cycles à la rupture  $N_R$  (en fait nombre de cycles pour lequel on observe P% de ruptures). En pratique, la courbe de Wöhler est généralement donnée pour une probabilité de rupture  $p = 0.5$ .

Pour la tracer, on réalise généralement des essais simples qui consistent à soumettre chaque éprouvette à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude de chargement constante fluctuant autour d'une valeur moyenne fixée, et à noter le nombre de cycles au bout duquel l'amorçage d'une fissure est observé, appelé ici nombre de cycles à rupture  $N_R$ . Pour plus de commodité, ce nombre  $N_R$  est reporté en abscisse sur une échelle logarithmique, et l'amplitude de contrainte  $\sigma_a$  est reportée en ordonnée sur une échelle linéaire. Ainsi, à chaque pièce essayée, correspond donc un point du plan  $(N_R, \sigma_a)$  et à partir d'un certain nombre d'essais à contrainte généralement décroissante, on peut établir la courbe de Wöhler (Fig. 1.1) qui a l'allure suivante :

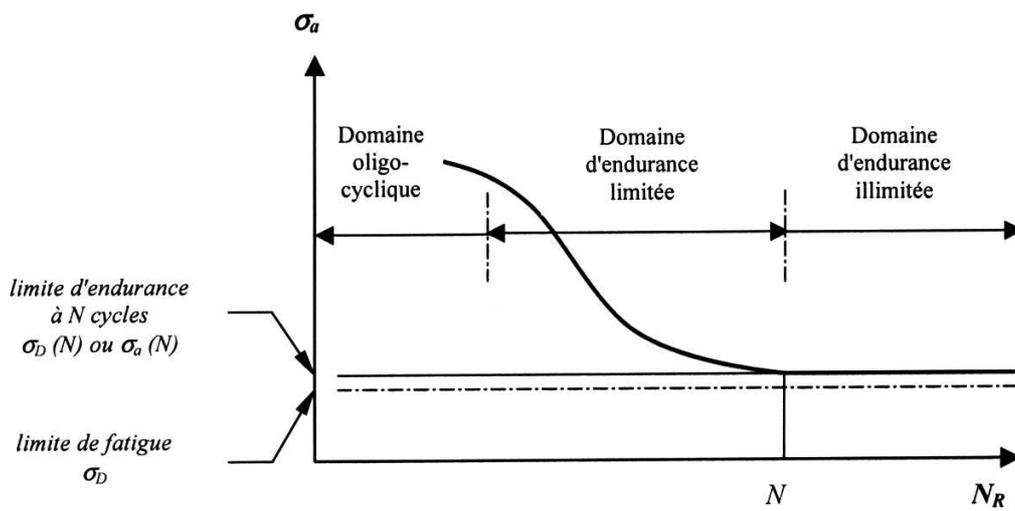


FIG. 1.1 – Courbe de Wöhler et les différents domaines de fatigue

Sur cette courbe, connue sous les noms de courbe de Wöhler et courbe S-N (Stress-Number of cycles), on peut distinguer trois domaines :

- **Domaine de fatigue plastique oligocyclique**, pour faible nombre de cycles (soit par exemple, des durées de vie inférieures à  $10^5$  cycles pour un matériau donné). Il correspond à des contraintes élevées pour lesquelles se produit une déformation plastique macroscopique du matériau. On peut situer ce domaine depuis la contrainte correspondant à la limite d'adaptation macroscopique jusqu'à celle correspondant à la charge de rupture statique  $R_m$  du métal considéré, sollicité dans les mêmes conditions.

Dans cette zone, la rupture survient après un certain nombre de cycles et est précédée d'une déformation plastique notable. Par suite de l'amplitude de la contrainte maximale, chaque cycle d'effort entraîne une déformation plastique d'ensemble accompagnée le plus souvent soit d'un durcissement notable, soit d'un adoucissement du métal. Coffin [19] a montré que, dans le cas uniaxial, le nombre de cycles  $N_R$  était relié à la déformation plastique élémentaire  $\Delta\varepsilon^P$  accompagnant chaque cycle par la relation :

$$\frac{\Delta \varepsilon^P}{2} = A (2N_R)^a \quad (1.1)$$

$A$  et  $a$  étant des constantes liées au matériau.

- **Domaine de fatigue ou d’endurance limitée**, où la rupture survient après un nombre limité de cycles ( $10^5$  à  $10^7$ ) sans être accompagnée d’une déformation plastique d’ensemble, mesurable. La réponse de l’éprouvette peut être purement élastique (comportement élastique dès les premiers cycles) ou bien adapté (comportement devenu élastique après stabilisation cyclique). Dans ce régime, le nombre de cycles  $N_R$  croît quand l’amplitude de la contrainte périodique  $\sigma_a$  décroît. De nombreuses formules mathématiques ont été proposées pour relier  $N_R$  à  $\sigma_a$ . On peut citer à titre d’exemple celle donnée par Basquin (1910) :

$$N_R \sigma_a^\beta = C \quad (1.2)$$

- **Domaine d’endurance illimitée ou zone de sécurité**, qui correspond aux contraintes les plus petites, inférieures à une contrainte seuil, dite limite de fatigue. En deçà de cette valeur limite de  $\sigma$ , notée  $\sigma_D$ , il n’y a jamais de rupture par fatigue quel que soit le nombre de cycles appliqué. Cette limite peut ne pas exister ou être mal définie pour certains matériaux (aciers à haute résistance, métaux non ferreux). Dans ce cas, on introduit la notion de limite de fatigue conventionnelle ou limite d’endurance. Il s’agit, pour une contrainte moyenne  $\sigma_m$  donnée, de l’amplitude de contrainte pour laquelle il est constaté 50% de rupture après un nombre fini  $N$  (appelé censure) de cycles. On la note  $\sigma_D(N)$ , et selon le matériau la censure  $N$  varie entre  $10^6$  à  $10^8$  cycles. Pour les aciers  $N$  est habituellement pris à  $10^7$ .

### 1.3 Classification des chargements

Les efforts résultant des actions extérieures agissant sur les pièces mécaniques peuvent être des sollicitations de type simple (traction, flexion ou torsion), une combinaison de ces sollicitations (flexion-torsion, traction-torsion) ou complexes (contacts frottants, thermomécaniques, ...). Quel que soit le mode de sollicitation, simple ou combiné, les composantes du tenseur des contraintes développées dans la pièce varient suivant une fonction du temps et correspondent à des signaux de types différents. On classe ces signaux suivant quatre groupes (voir figure 1.2) :

1. Signal simple d’amplitude constante. On en distingue les signaux périodiques « sinusoïdaux », « triangles », « carrés », ...
2. Signal constitué de deux blocs de charge d’amplitude constante. Le deuxième bloc est appliqué jusqu’à rupture. De ce type, on peut étudier les effets de séquences Haut-Bas ou Bas-Haut.

3. Signal constitué de plusieurs blocs d'amplitude constante. La méthode des blocs programmés de GASSNER [28] est l'exemple le plus connu.
4. Signal d'amplitude variable. Il s'agit de signaux réels relevés en service. On en distingue deux catégories : les signaux d'amplitude variable à bande large et ceux à bande étroite. On peut les différencier en utilisant le facteur d'irrégularité  $I$  du signal ou bien la densité spectrale de puissance. Le facteur d'irrégularité  $I$  ( $I = N_0/N_e$ ) est par définition le rapport du nombre de passages à zéro du signal ( $N_0$ ) et du nombre d'extrema ( $N_e$ ) contenus dans le signal. Quand  $I$  tend vers 1, le signal est dit à "bande étroite". Cependant quand  $I$  tend vers 0, il est qualifié de "bande large". La densité spectrale de puissance définit en valeur quadratique moyenne  $X_{RMS}$  (R.M.S : Root Mean Square) la contribution de chaque fréquence à l'intensité de la sollicitation. Elle est donnée par l'équation (1.3) :

$$X_{RMS}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [X(t) - X_m]^2 dt \quad (1.3)$$

Où  $T$  est la durée du signal considéré, et  $X_m$  est la valeur moyenne du signal définie par l'équation (1.4) :

$$X_m = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad (1.4)$$

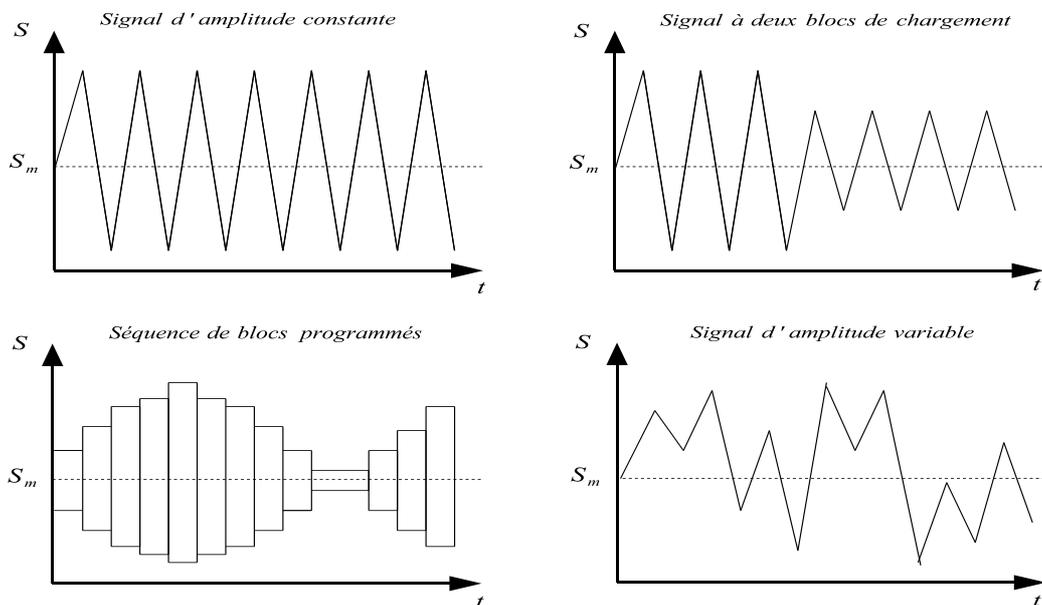


FIG. 1.2 – Différents types de signaux

Ce dernier type constitue dans le cas général le signal à amplitude aléatoire. L'aspect aléatoire est lié pour sa part à la nature imprévisible des sollicitations. Le signal aléatoire est souvent caractérisé par des paramètres statistiques. En particulier, un signal est dit stationnaire si ces caractéristiques calculées sur une partie du signal restent valables pour l'ensemble du signal ou encore si sa structure de probabilité reste invariante vis-à-vis d'un changement de l'origine des temps.

Après avoir présenté les différentes formes que peuvent prendre les composantes du tenseur des contraintes, nous classons les chargements en deux catégories. En effet, les chargements induisent en général un état de contrainte multiaxial au niveau de la structure. A un instant  $t$  donné, l'état de contrainte peut être représenté par un point dans l'espace des contraintes. Ce point représentatif décrit une courbe  $\phi$  qui est strictement fermée pour les chargements périodiques. On qualifie ainsi le chargement par « affine » ou « non affine » selon la nature de sa trajectoire dans l'espace des contraintes.

### **1.3.1 Chargement affine**

Un chargement affine est un chargement dont la trajectoire dans l'espace des contraintes est un segment de droite. Si ce segment est décrit de manière monotone entre ses extrémités, ce chargement est affine simple. Sinon, il est dit affine complexe. Un chargement biaxial en phase à amplitude constante est un exemple du chargement affine simple alors qu'un chargement uniaxial à amplitude variable est affine complexe.

Parmi les chargements affines, nous pouvons encore distinguer les chargements proportionnels que nous qualifierons aussi de radiaux. Ce sont ceux pour lesquels le trajet de chargement dans l'espace des contraintes, est un segment d'une droite passant par l'origine.

### **1.3.2 Chargement non affine**

Un chargement est dit non affine si sa trajectoire dans l'espace des contraintes n'est pas rectiligne. Cette trajectoire peut prendre des formes simples (rectangle, carré, losange, etc.) ou bien complexes à trajectoire quelconque. Le chargement multiaxial hors phase à amplitude variable ou aléatoire en constitue un exemple.

## **1.4 Estimation de durée de vie en fatigue multiaxiale sous chargement d'amplitude constante**

Cette partie présente les méthodes de prévision de durée de vie en fatigue multiaxiale sous sollicitations cycliques à amplitude constante, qui sont récemment publiées. Elle limite l'étude au domaine de l'endurance limitée (durée de vie finie). Les méthodes présentées reposent sur le concept du plan critique.

### **1.4.1 Méthode de Papadopoulos (2001) [59]**

Papadopoulos avait consacré une grande partie de ses travaux à l'étude de la fatigue polycyclique en endurance illimitée [56, 58].

Récemment, il a commencé à étudier le domaine de l'endurance limitée. En 2001, l'auteur proposa un critère d'endurance et établit une méthode de prévision de durée de vie qui traite les chargements multiaxiaux proportionnels et non-proportionnels d'amplitude constante [59]. En effet, il étend le critère d'endurance aux durées de vie finies en s'appuyant sur quelques hypothèses afin de définir par la suite une courbe de Wöhler multiaxiale exprimant la durée de vie en fonction de l'amplitude de la cission généralisée  $T_a$ , de la valeur moyenne  $\sigma_{H,m}$  et de l'amplitude  $\sigma_{H,a}$  de la pression hydrostatique.

Le critère d'endurance défini par l'auteur repose sur le concept du plan critique et peut être exprimé comme une relation d'inégalité séparant le domaine sûr de celui non sûr (Eq. 1.5). Il fait intervenir deux grandeurs :  $\sigma_{H,max}$ , pression hydrostatique maximale, et  $T_a$ , amplitude de la cission généralisée associée à un plan physique (noté  $\Delta$ ). Ce plan est défini dans le trièdre (Oxyz) par les coordonnées sphériques  $\varphi$  et  $\theta$  de son vecteur normal  $\underline{n}$  (Fig. 1.3). Il en résulte que  $T_a$  est fonction de  $\varphi$  et  $\theta$ . Le plan critique est défini par l'auteur comme étant celui sur lequel  $T_a(\varphi, \theta)$  atteint sa valeur maximum, c'est-à-dire  $\max T_a = \max_{(\varphi, \theta)} T_a(\varphi, \theta)$ . La condition d'endurance est alors donnée par :

$$\max T_a + \alpha_\infty \sigma_{H,max} \leq \gamma_\infty \quad (1.5)$$

où  $\alpha_\infty$  et  $\gamma_\infty$  sont deux paramètres liés au matériau. L'indice  $\infty$  a été utilisé par Papadopoulos pour rappeler que le critère de fatigue (Eq. 1.5) délimite (au moins théoriquement) le domaine de fatigue de durée de vie illimitée.

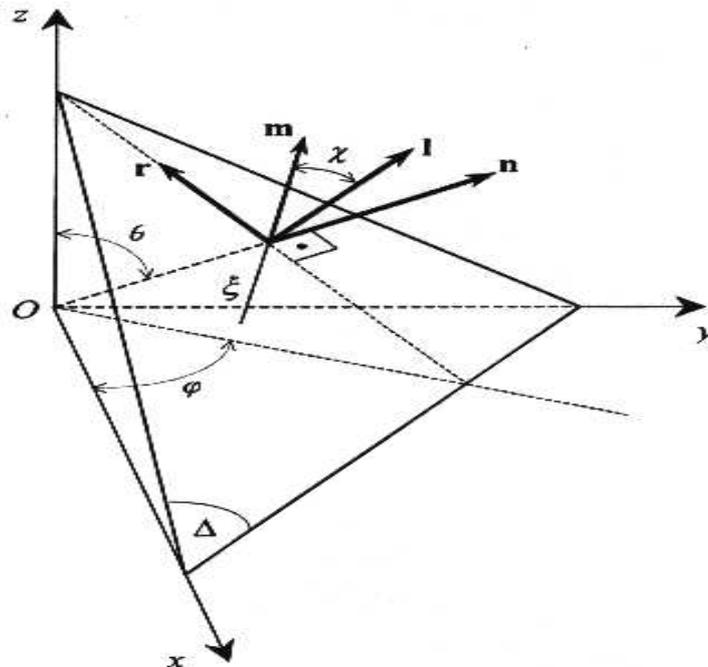


FIG. 1.3 – Plan  $\Delta$  et le repère direct  $(l, r, n)$  associé [59]

Pour le calcul de  $T_a$ , l'auteur définit un trièdre orthonormé direct  $(\underline{l}, \underline{r}, \underline{n})$  (Fig. 1.3). Pour un plan  $\Delta$  bien défini (c'est-à-dire  $\varphi$  et  $\theta$  fixes), l'évaluation de  $T_a$  nécessite la connaissance de l'amplitude de la cission résolue agissant sur toutes les directions du plan. Or, la cission résolue  $\tau$  est la composante tangentielle du vecteur-contrainte ( $\sigma_n = \sigma \cdot \underline{n}$ ) sur une direction  $\xi$  de vecteur unitaire  $\underline{m}$ . Nous pouvons donc écrire :  $\tau = \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{m}$ . Soit  $\chi$  l'angle que fait la direction  $\xi$  avec le vecteur unitaire  $\underline{l}$ ,  $\tau$  s'écrit donc en fonction de  $\varphi$ ,  $\theta$  et  $\chi$  comme suit :

$$\begin{aligned} \tau = & [\sin\theta \cos\varphi \sigma_{xx} + \sin\theta \sin\varphi \sigma_{xy} + \cos\theta \sigma_{xz}] (-\sin\varphi \cos\chi - \cos\theta \cos\varphi \sin\chi) \\ & + [\sin\theta \cos\varphi \sigma_{xy} + \sin\theta \sin\varphi \sigma_{yy} + \cos\theta \sigma_{yz}] (\cos\varphi \cos\chi - \cos\theta \sin\varphi \sin\chi) \\ & + [\sin\theta \cos\varphi \sigma_{xz} + \sin\theta \sin\varphi \sigma_{yz} + \cos\theta \sigma_{zz}] \sin\theta \sin\chi \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dans le cas d'un chargement à amplitude variable, la cission résolue  $\tau$  est fonction de  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\chi$  et du temps  $t$ . Pour un plan  $\Delta$  et une direction  $\xi$  bien définis, l'amplitude de la cission résolue agissant sur le plan  $\Delta$  suivant la direction  $\xi$  est donnée par l'équation (1.7) :

$$\tau_a(\varphi, \theta, \chi) = \frac{1}{2} \left[ \max_{t \in P} \tau(\varphi, \theta, \chi, t) - \min_{t \in P} \tau(\varphi, \theta, \chi, t) \right] \quad (1.7)$$

où  $P$  est la période du chargement à amplitude variable.

Par suite, pour un plan donné, l'expression de  $T_a$  est donnée par l'équation (1.8) :

$$T_a(\varphi, \theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\chi=0}^{2\pi} \tau_a^2(\varphi, \theta, \chi) d\chi} \quad (1.8)$$

L'auteur avait utilisé les limites de fatigue en torsion et en flexion purement alternées ( $\tau_{-1}$ ,  $f_{-1}$ ) pour identifier les paramètres  $\alpha_\infty$  et  $\gamma_\infty$ . Il révélait que l'identification peut se faire moyennant deux autres limites de fatigue (par exemple des limites de fatigue en traction pour  $R=-1$  et  $R=0$ ). Ces paramètres en fonction de  $\tau_{-1}$  et  $f_{-1}$  sont :

$$\alpha_\infty = 3 \left( \frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad \gamma_\infty = \tau_{-1} \quad (1.9)$$

L'auteur avait signalé que l'utilisation des limites de fatigue du type effort-axial sur éprouvettes lisses permet d'identifier les valeurs de  $\alpha_\infty$  et  $\gamma_\infty$  sans inclure aucun effet du gradient de contrainte. Cependant, l'utilisation de  $\tau_{-1}$  et  $f_{-1}$  reflète tout simplement le fait que les limites d'endurance en torsion et en flexion soient plus souvent disponibles que celles du type effort-axial.

Papadopoulos assimile le critère de fatigue (Eq. 1.5) à une surface de durée de vie infinie séparant le domaine sûr de celui non sûr. Cependant, pour la prédiction de durées de vie finies, il suppose que le lieu géométrique de toute durée de vie finie, peut être représenté par une surface similaire à celle pour ( $N = \infty$ ) en satisfaisant certaines propriétés que nous détaillons dans la suite.

En effet, en partant de l'équation  $\sigma_{H,max} = \sigma_{H,m} + \sigma_{H,a}$ , le critère d'endurance (Eq. 1.5) peut être écrit sous une nouvelle forme :  $\max T_a + \alpha_\infty \sigma_{H,m} + \alpha_\infty \sigma_{H,a} \leq \gamma_\infty$ . L'auteur le reporte dans le trièdre droit  $(\sigma_{H,m}, \sigma_{H,a}, \max T_a)$  où il décrit le demi-espace sûr. Le critère  $\gamma$  représente une surface dite iso-vie correspondant à  $(N = \infty)$  (Fig. 1.4). L'équation de cette surface est :

$$\max T_a + \alpha_\infty \sigma_{H,m} + \alpha_\infty \sigma_{H,a} = \gamma_\infty \quad (1.10)$$

De la même manière, l'auteur considère le lieu géométrique de l'ensemble des points représentatifs de l'état de contrainte ayant même durée de vie finie, comme étant la surface satisfaisant les propriétés suivantes :

- **Propriété 1** : Le lieu géométrique des points représentatifs de l'état de contrainte ayant même durée de vie est une surface dans le trièdre  $(\sigma_{H,m}, \sigma_{H,a}, \max T_a)$ , Fig. 1.4.
- **Propriété 2** : L'intersection de toute surface de même durée de vie (iso-vie) avec l'axe  $\sigma_{H,m}$  est situé au point  $\sigma_{H,m} = \gamma_\infty / \alpha_\infty$ , Fig. 1.4.
- **Propriété 3** : L'intersection de toute surface de durée de vie finie, avec le plan  $(\sigma_{H,a}, \max T_a)$ , est parallèle à l'intersection de la surface  $(N = \infty)$  avec le même plan, Fig. 1.4.

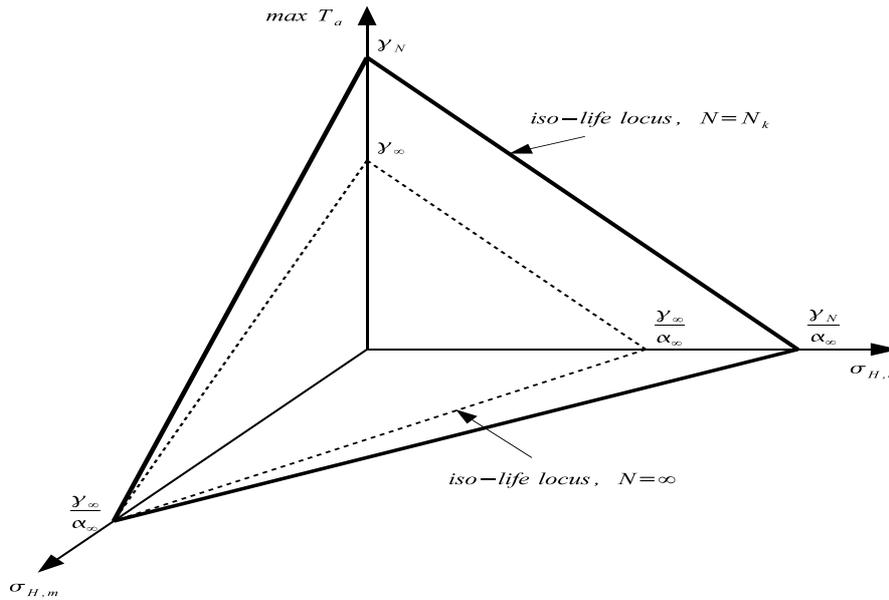


FIG. 1.4 – Surface iso-vie dans l'espace  $(\sigma_{H,m}, \sigma_{H,a}, \max T_a)$

En satisfaisant ces propriétés, l'équation de toute surface de durée de vie finie prend la forme :

$$\max T_a = \gamma_N - \alpha_\infty \frac{\gamma_N}{\gamma_\infty} \sigma_{H,m} - \alpha_\infty \sigma_{H,a} \quad (1.11)$$

où  $\gamma_N$  représente le point d'intersection de cette surface avec l'axe  $\max T_a$ . En remplaçant les valeurs de  $\alpha_\infty$  et  $\gamma_\infty$  (Eq. 1.9), l'équation (1.11) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\max T_a + 3 \left( \frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{H,a}}{1 - \frac{3}{\tau_{-1}} \left( \frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{H,m}} = \gamma_N \quad (1.12)$$

Le terme gauche de l'équation ne dépend pas du nombre de cycles. Ce dernier apparaît dans le terme droit sous la forme de la quantité  $\gamma_N$ . Afin de comprendre le sens physique de  $\gamma_N$ , l'auteur considère un essai de torsion purement alternée et il lui applique l'équation (1.12). Il obtient donc :

$$\max T_a = \gamma_N = \sigma_{yz} \quad (1.13)$$

Par conséquent, la quantité  $\gamma_N$  représente l'amplitude de cisssion dans un essai de torsion purement alternée. Elle peut être reliée au nombre de cycles à l'amorçage noté  $N$  suivant une équation de courbe de Wöhler en torsion purement alternée.

Finalement, l'auteur établit sa courbe de Wöhler multiaxiale en utilisant l'équation (1.12) et en choisissant une loi de puissance en fonction de nombre de cycles pour la courbe de Wöhler en torsion purement alternée. Néanmoins, le modèle n'impose pas une forme particulière de la courbe de Wöhler. Il laisse le choix libre aux chercheurs de désigner cette forme qui décrit mieux les données expérimentales uniaxiales. La courbe de Wöhler multiaxiale s'énonce donc comme suit :

$$\frac{\max T_a + 3 \left( \frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{H,a}}{1 - \frac{3}{\tau_{-1}} \left( \frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \sigma_{H,m}} = \gamma_N = \sigma_{yz} = \frac{\tau_{-1}}{1 - kN^{-\lambda}} \quad (1.14)$$

Les paramètres  $k$  et  $\lambda$  sont identifiés à l'aide d'une courbe de Wöhler en torsion alternée.

#### 1.4.2 Méthode de Susmel et Petrone (2002) [72]

Susmel avait proposé un critère de fatigue multiaxiale en endurance limitée, basé sur la combinaison d'une courbe de Wöhler modifiée et du concept du plan critique. Dans sa description du critère, l'auteur suppose le matériau comme homogène et isotrope.

L'approche microscopique a été adoptée pour donner une interprétation physique du dommage par fatigue. Elle dépend pour un métal polycristallin de deux grandeurs : la valeur maximum de l'amplitude de cisssion (déterminée par le concept du plus petit cercle circonscrit au trajet fermé décrit par l'extrémité du vecteur cisaillement) et la contrainte normale maximum agissant sur le plan de cisaillement maximal.

L'auteur considère ainsi une éprouvette cylindrique soumise à un chargement multiaxial d'amplitude constante. Puis en se référant au plan du cisaillement maximal (plan d'amorçage de fissures défini par les angles  $\phi^*$  et  $\theta^*$ ), il introduit le rapport de contrainte  $\rho$  du plan critique, donné par l'équation (1.15) :

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}(\phi^*, \theta^*)}{\tau_a} \quad (1.15)$$

où la contrainte normale maximum  $\sigma_{n,max}$  permet d'inclure l'influence de la contrainte moyenne sur la tenue en fatigue.

Par suite, l'auteur fait appel à son diagramme de Wöhler modifié en reportant respectivement en abscisse et en ordonné sur une échelle bi-logarithmique le nombre de cycles à la rupture et l'amplitude de cission calculée sur le plan critique. L'auteur démontre ainsi que pour différentes valeurs de  $\rho$  sont produites différentes courbes de fatigue dans le diagramme modifié de Wöhler [72] (figure 1.5).

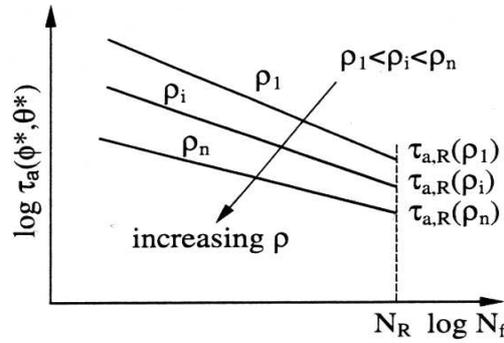


FIG. 1.5 – Diagramme de Wöhler modifié [72]

Chaque courbe est déterminée par la valeur inverse de la pente,  $k_\tau(\rho)$  et par la valeur référence de l'amplitude de cission,  $\tau_{a,R}(\rho)$  correspondant au nombre de cycles  $N_R$  (habituellement pris à  $2 \cdot 10^6$  cycles dans plusieurs codes de design).

Selon l'auteur, la prévision de durée de vie en fatigue pour un chargement multiaxial à amplitude constante est possible en appliquant l'expression suivante :

$$N_f = \left[ \frac{\tau_{a,R}(\rho)}{\tau_a(\phi^*, \theta^*)} \right]^{k_\tau(\rho)} N_R \quad (1.16)$$

Pour l'évaluation de  $k_\tau(\rho)$  et  $\tau_{a,R}(\rho)$ , l'auteur établit une expression linéaire de ces fonctions à partir des courbes de fatigue en flexion ( $\rho = 1$ ) et en torsion ( $\rho = 0$ ). Ces équations sont données par :

$$\begin{cases} \tau_{a,R}(\rho) = \tau_{a,R}(\rho = 0) + [\tau_{a,R}(\rho = 1) - \tau_{a,R}(\rho = 0)] \rho \\ k_\tau(\rho) = k_\tau(\rho = 0) + [k_\tau(\rho = 1) - k_\tau(\rho = 0)] \rho \end{cases} \quad (1.17)$$

## 1.5 Estimation de durée de vie en fatigue sous sollicitation uniaxiale d'amplitude variable

Dans cette partie, nous présentons la technique classique de prévision de durée de vie la plus répandue pour traiter les chargements variables simples sous sollicitation uniaxiale. Cette étape permettra d'introduire des notions nécessaires à la compréhension du phénomène de fatigue sous charges variables, en particulier celles de méthodes de comptage de cycles, de loi d'endommagement et du cumul.

La méthode classique de prévision de durée de vie de pièces soumises à un chargement uniaxial d'amplitude variable se compose généralement de trois éléments :

- une méthode de comptage de cycles ;
- une règle d'endommagement et une loi de cumul ;
- une courbe de Wöhler.

### 1.5.1 Les méthodes de comptage

Une méthode de comptage est une méthode permettant de recenser un évènement statistique dans une séquence aléatoire de chargement. Cet évènement peut être, par exemple, des extrema, des étendues ou cycles du signal. Une méthode de comptage de cycles de contrainte détermine donc le nombre ou la densité de présence des cycles de contrainte dans le signal de chargement. En d'autres termes, la méthode de comptage consiste à discrétiser la séquence de chargement variable en cycles élémentaires simples faciles à mettre en œuvre dans tout processus de prévision de durée de vie en fatigue. En effet, chaque cycle élémentaire, extrait de la séquence de chargement, est repéré par son amplitude  $\sigma_a$  et sa valeur moyenne  $\bar{\sigma}$  auxquels correspond une durée de vie bien définie. Ensuite, le dommage élémentaire du cycle extrait est calculé à l'aide d'une règle d'endommagement. Le processus se répète le long de la séquence étudiée pour évaluer le dommage total  $D_T$  à l'aide d'une loi de cumul, et par suite déterminer le nombre de séquences à la rupture.

Quelques méthodes de comptage ont été mises au point par les experts. Elles conduisent toutes à des résultats différents et donc, pour certaines, à des erreurs dans le calcul de la durée de vie. Nous pouvons citer à titre d'exemple six grandes familles de techniques de comptage, décrites dans différents ouvrages [2, 4] :

- le comptage des temps de maintien,
- le comptage des extrema entre deux passages par la valeur moyenne,
- le comptage des étendues,
- le comptage des étendues appariées,
- le comptage des dépassements de niveaux,
- le comptage de cycle Rainflow dit de « la goutte d'eau ».

Le choix d'une méthode dépend de la façon dont sont définis les cycles de contrainte. Chaque méthode procède, à partir d'une définition de la notion de cycle qui lui est propre, à l'évaluation du nombre de cycles et de ses étendues, pour une durée  $t$  de la séquence étudiée.

Il est à noter que les méthodes de comptage de cycles ne peuvent être appliquées qu'à une seule variable. Les deux dernières « méthode de comptage Rainflow » et « méthode des dépassements de niveaux » sont les plus utilisées par les auteurs des méthodes de calcul.

## 1.5.2 Les lois d'endommagement

Les lois d'endommagement permettent, une fois déterminée la durée de vie du matériau relative à chaque cycle extrait, de calculer l'endommagement correspondant et d'en faire le cumul. Une loi de cumul d'endommagement est une règle permettant d'accumuler une variable d'endommagement  $D$ , elle-même définie par une loi d'endommagement. Pour les chargements cycliques, la variable d'endommagement  $D$  est généralement calculée grâce aux caractéristiques d'un cycle de chargement (amplitude de contrainte, contrainte moyenne, contrainte maximum, etc ...). Lorsque la séquence de chargement est traitée, l'endommagement cumulé conduit à l'estimation de la durée de vie du matériau en terme du nombre de répétitions de la séquence à l'amorçage d'une fissure macroscopique.

La loi de Miner [50] est d'une utilisation très répandue en raison de sa simplicité et de sa facilité de mise en œuvre afin de traiter le cas des séquences de charge d'amplitude variable. Pourtant, elle présente un certain nombre d'inconvénients. En particulier, cette loi ne prend pas en compte l'effet de petits cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance ni l'ordre d'apparition des cycles. Les insuffisances de la loi de Miner [50] ont conduit à la création de nouvelles lois d'endommagement, la plupart non linéaires, comme l'approche énergétique d'ELLYIN [35, 36] et la loi de Lemaitre et Chaboche [42, 43].

Malgré l'abondance des travaux de recherche sur le sujet, aucune méthode ne fait l'unanimité. A l'heure actuelle, il n'existe pas de loi d'endommagement capable de tout résoudre. Dans la suite, on se contente de donner un exemple d'une loi linéaire (Miner) et d'une autre non linéaire (Lemaitre et Chaboche).

### 1.5.2.1 Loi de Miner et ses dérivés [50]

Cette loi est sans aucun doute la plus connue et la plus utilisée en bureau d'étude, du fait de sa simplicité. Il s'agit d'une loi de cumul linéaire d'endommagement. La variable d'endommagement est supposée égale à la fraction de vie définie par :

$$D = \frac{n}{N} \quad (1.18)$$

où  $n$  est le nombre de cycles effectués et  $N$  le nombre de cycles à rupture pour le chargement considéré.

Si un signal est constitué de  $k$  niveaux différents, l'endommagement généré vaut :

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} \quad (1.19)$$

où  $n_i$  est le nombre de cycles effectués avec un chargement de niveau de contrainte  $i$  pour lequel le nombre de cycles à rupture est  $N_i$ . La rupture est supposée atteinte quand  $D$  vaut une valeur critique  $D_c$  souvent prise égale à 1.

Cette loi rend bien compte du fait que les niveaux de contraintes inférieurs à la limite d'endurance sont supposés non endommageants. D'autre part, de nombreuses constatations expérimentales [24, 55, 66, 73] ont permis de montrer que les cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance peuvent causer un dommage non négligeable s'ils sont mixés à d'autres cycles d'amplitude supérieure à cette valeur limite. Différents auteurs ont donc tenté d'améliorer la règle de MINER en prenant en compte l'endommagement dû à certains ou tous les cycles sous la limite d'endurance. Les différentes méthodes proposées sont regroupées ci-dessous :

– Règle de MINER élémentaire :

On prolonge, dans la zone d'endurance illimitée, la droite représentative de la courbe de Wöhler.

– Règle de MINER modifiée :

On effectue la même modification que ci-dessus mais on suppose non endommageants les cycles d'amplitude inférieure à la moitié de la limite d'endurance ( $0.5 \sigma_D$ ).

– Règle de MINER-HAIBACH [30] :

On prolonge la droite représentative de la courbe de Wöhler par une droite de pente plus faible. HAIBACH propose la valeur  $2m - 1$  ( $m$  est la pente de la droite représentative de la courbe de Wöhler dans un plan bi-logarithmique ( $\text{Log } \sigma, \text{Log } N$ )).

En conclusion, malgré toutes les tentatives pour l'amélioration de la qualité des prédictions de la règle de Miner, elles ne permettent pas de comprendre les mécanismes physiques de l'endommagement, en particulier l'influence des petits cycles et les effets de séquence.

### 1.5.2.2 Loi de Lemaitre-Chaboche [42, 43]

Cette loi proposée par Lemaitre et Chaboche repose sur l'évolution non linéaire du paramètre d'endommagement en fonction du nombre de cycles, ainsi que sa dépendance vis-à-vis du niveau de chargement. Elle prend encore en compte l'effet de petits cycles, dont l'amplitude est inférieure à la limite d'endurance du matériau. Cette loi est initialement dédiée aux chargements uniaxiaux aléatoires mais son utilisation a été étendue au cas de chargements multiaxiaux. L'utilisation d'un critère multiaxial de fatigue permet de calculer la durée de vie  $N$  du matériau pour tout cycle multiaxial élémentaire et par là-même de définir le cycle de sollicitation uniaxiale comme par exemple  $\sigma_{-1}(N)$  qui lui est équivalent (c'est-à-dire de même durée de vie). Cette relation d'équivalence qui s'établit entre le cycle uniaxial et celui multiaxial, permet d'étendre l'utilisation de la loi d'endommagement de Lemaitre et Chaboche au cadre de la fatigue multiaxiale.

Cette loi s'énonce suivant une relation différentielle entre l'accroissement du dommage  $dD$  et le nombre  $dN$  de cycles identiques (d'amplitude  $\sigma_{ai}$ , de moyenne  $\sigma_{mi}$ ), comme l'exprime l'équation (1.20).

$$dD = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^\alpha \left[ \frac{\sigma_{ai}}{M_0(1 - b\sigma_{mi})(1 - D)} \right]^\beta dN \quad (1.20)$$

où

$$\begin{cases} \alpha & = 1 - a \left( \frac{\sigma_{ai} - \sigma_A(\sigma_{mi})}{R_m - \sigma_{ai} - \sigma_{mi}} \right) \\ \sigma_A(\sigma_{mi}) & = \sigma_D(1 - b\sigma_{mi}) \end{cases} \quad (1.21)$$

Avec  $\sigma_A(\sigma_m)$  est l'amplitude du cycle d'endurance de contrainte moyenne  $\sigma_m$ , et  $\alpha$  peut prendre deux valeurs selon que le cycle est d'amplitude supérieure ou inférieure à  $\sigma_A(\sigma_{mi})$  :

- cas d'un grand cycle :  $\sigma_{ai} > \sigma_A(\sigma_{mi})$ , la valeur de  $\alpha$  est donnée par l'équation (1.21).
- cas d'un petit cycle :  $\sigma_{ai} \leq \sigma_A(\sigma_{mi})$ , la valeur de  $\alpha$  vaut 1.

$\beta$ ,  $a$  et  $M_0$  sont des coefficients propres au matériau.  $R_m$  est la résistance maximale à la traction du matériau.  $\sigma_D$  est la limite d'endurance du matériau (en traction alternée symétrique).  $b$  est un coefficient matériau représentant l'influence de la contrainte moyenne sur la limite de fatigue.

L'intérêt relevé de cette loi tient à sa traduction de l'effet de séquence (ordre d'apparition des cycles), sa prise en compte systématique de l'influence de tous les cycles appliqués, y compris les petits cycles dès que le dommage est initié et enfin son évolution non linéaire du dommage, qui traduit mieux certaines observations faites en métallurgie.

### 1.5.3 Courbe de Wöhler

Après avoir appliqué la technique de comptage des cycles Rainflow sur la séquence de chargement variable (de durée finie  $T$ ), chaque cycle  $i$  de contrainte, extrait de la séquence de chargement, est repéré par son amplitude  $\sigma_{a,i}$  et sa valeur moyenne  $\bar{\sigma}$ . Il lui correspond une durée de vie  $N_i$  bien définie. Pour la calculer et associer le dommage correspondant, on doit se servir dans un premier temps d'un diagramme de Haig (Goodman, Gerber, Soderberg  $\dots$ ) pour évaluer les amplitudes des cycles alternés symétriques équivalents (au sens du critère) associées à chacun des cycles  $i$ . Puis, à l'aide d'une courbe de Wöhler ( $R=-1$ ) et d'une loi de cumul d'endommagement (Miner par exemple), on calcule l'endommagement élémentaire  $D_i$  associé à chaque cycle.

Ensuite, l'endommagement total  $D_T$  à la fin de la séquence considérée résulte de l'accumulation, conformément à la loi de cumul d'endommagement choisie, des endommagements élémentaires  $D_i$ . Enfin, le nombre de séquences à l'amorçage  $N_{SR}$  est calculée en inversant le dommage total  $D_T$  ( $N_{SR} = 1 / D_T$ ).

## 1.6 Estimation de durée de vie en fatigue multiaxiale sous charges variables

Le caractère multiaxial provient généralement de l'existence de plusieurs types de sollicitations, qui sont appliquées selon des directions différentes. L'aspect aléatoire est lié pour sa part à la nature imprévisible des sollicitations. Les structures automobiles en sont des exemples typiques. La conduite pratiquée et le relief du sol sur lequel évolue le véhicule donnent lieu à des séquences de chargement multiaxiales et à amplitudes variables pour les éléments tels que les triangles de suspension, les ressorts, les barres stabilisatrices, les éléments de châssis, etc . . .

Dans le cas le plus général, toutes les composantes du tenseur de contraintes ont des évolutions propres totalement découplées entre elles. Représentées dans l'espace des contraintes, elles décrivent souvent un trajet de chargement complexe. Dans ce cadre, les techniques de comptage de cycles ne s'appliquent qu'après un post-traitement car elles utilisent une seule variable scalaire de comptage. En effet, les chercheurs adoptant de telles techniques ont intérêt à réduire l'évolution temporelle du tenseur de contraintes ou de déformation d'ordre 2 (6 composantes) à l'évolution temporelle d'une seule variable scalaire à laquelle ils font subir un comptage. Les auteurs de cette technique nomment cette variable scalaire variable de comptage. A chaque cycle de cette variable, ils déterminent les paramètres faisant partie de leur critère de fatigue multiaxiale pour déterminer la durée de vie associée. Ces paramètres peuvent être l'amplitude de la cission résolue macroscopique, la pression hydrostatique moyenne, la contrainte de cisaillement et la contrainte normale agissant sur un plan physique, etc. Puis, ils calculent les dommages élémentaires et font le cumul. Une fois encore, la règle de Miner est la plus employée du fait de sa simplicité.

Le passage du tenseur de contrainte ou de déformation symétrique d'ordre 2 (6 composantes) à une seule variable scalaire n'est souvent que purement mathématique et n'a pas de sens physique. Cette réduction a pour effet de découpler certaines composantes et par conséquent de nuire à la qualité des prédictions de durée de vie.

Les méthodes de calcul de durée de vie, qui adoptent une telle technique dans le cas des états de contraintes multiaxiaux, sont majoritaires. Elles sont souvent basées sur des combinaisons de la contrainte de cisaillement et de la contrainte normale agissant sur un plan physique, et sur la recherche du plan d'amorçage de la fissure. Ces approches sont regroupées sous le nom d'approches du plan critique. On y distingue celles qui sont basées, soit sur les historiques du tenseur des contraintes et / ou des déformations, soit sur des concepts énergétiques. Généralement, les approches développées en déformation sont issues de la fatigue oligocyclique tandis que les approches en contrainte et en énergie sont issues du domaine de l'endurance limitée.

Dans la suite, on classe les méthodes de prévision de durée de vie en fatigue sous sollicitations multiaxiales variables en deux catégories :

- méthodes basées sur la technique de comptage de cycles ;
- méthodes sans comptage de cycles.

Dans la première catégorie, on donne :

- un exemple d'approche en déformation :
  - méthode de Wang et Brown (1992) ;
- deux exemples d'approche en contrainte :
  - l'approche statistique de Macha et Bedkowsky (1989) ;
  - méthode de Robert et ses dérivées (1996) ;
- un exemple d'approche énergétique :
  - méthode de Lagoda et Macha (1997).

Cette sélection porte sur les méthodes apparues durant la dernière décennie et qui constituent les principaux axes de recherche dans le domaine. Une description de ces méthodes pourrait être retrouvée aussi dans la thèse de Banvillet [8].

## 1.6.1 Méthodes basées sur la technique de comptage de cycles

### 1.6.1.1 Méthode de Wang et Brown (1992) [75, 76, 77, 78]

Wang et Brown (1992) propose la loi suivante pour la prédiction de durée de vie en fatigue multiaxiale :

$$\frac{\gamma_a + S\Delta\varepsilon_n}{1 + \nu' + S(1 - \nu')} = \frac{\sigma'_f - 2\bar{\sigma}_n}{E}(2N_r)^b + \varepsilon'_f(2N_r)^c \quad (1.22)$$

où  $\Delta\varepsilon_n$  est l'étendue de déformation normale au plan de cisaillement maximum,  $\gamma_a$  l'amplitude de déformation de cisaillement,  $S$  constante du matériau,  $\nu'$  le coefficient de Poisson effectif,  $\bar{\sigma}_n$  la contrainte moyenne normale au plan de cisaillement maximum,  $E$  le module de Young,  $\sigma'_f$ ,  $\varepsilon'_f$ ,  $b$  et  $c$  sont respectivement la résistance à la fatigue, le coefficient de ductilité et leurs exposants respectifs.

C'est un critère mixte (en contraintes et en déformations) basé sur les travaux de Brown et Miller [14], et utilisant la courbe de Manson-Coffin-Basquin en traction ( $R_\sigma=-1$ ) couplée à la correction de Morrow [54] comme courbe de référence. Il est de type plan critique, celui-ci étant défini comme le plan supportant la distorsion maximale. Il provient lui aussi du comportement du matériau en fatigue oligocyclique. Les auteurs supposent avoir dans un premier temps la séquence multiaxiale des trajets de chargement en déformations et en contraintes.

Pour extraire et identifier les cycles multiaxiaux, ils utilisent une méthode de comptage basée sur l'évolution relative de la déformation équivalente de von Mises par rapport à des maximums rencontrés le long de la séquence multiaxiale. Les cycles de déformation identifiés et extraits de la séquence étudiée sont utilisés pour calculer la durée de vie du matériau par cycle à l'aide du critère proposé. Une loi de dommage de type Miner permet de calculer et de cumuler le dommage au point où l'analyse en fatigue est réalisée, pour l'ensemble des cycles extraits de la séquence étudiée. La durée de vie à rupture est alors exprimée en nombre d'applications de la séquence.

### 1.6.1.2 L'approche statistique de Macha et Bedkowsky [1, 10, 11, 45]

Cette approche utilise aussi le concept du plan critique. Ce dernier est déterminé à l'aide des caractéristiques statistiques de la séquence multiaxiale en contraintes. Dans la démarche proposée, le chargement temporel engendrant un état de contraintes multiaxial est tout d'abord réduit à l'évolution temporelle d'une seule variable équivalente. Pour cela, les auteurs définissent, pour chaque plan orienté par  $(\theta, \phi)$  et chaque direction  $\psi$  de ce plan, une contrainte équivalente  $\sigma_{eqMB}(t, \theta, \phi, \psi)$  comme la combinaison linéaire de la contrainte normale  $\sigma_n(t, \theta, \phi)$  et de la cisssion résolue  $\tau(t, \theta, \phi, \psi)$  :

$$\sigma_{eqMB}(t, \theta, \phi, \psi) = B \cdot \tau(t, \theta, \phi, \psi) + K \cdot \sigma_n(t, \theta, \phi) \quad (1.23)$$

$B$  et  $K$  sont des constantes supposées indépendantes de la durée de vie et déterminées à l'aide des limites d'endurance en traction  $\sigma_{-1}^D$  et torsion  $\tau_{-1}^D$  alternées symétriques sur éprouvettes lisses. Le choix de  $B$  et  $K$  n'est pas très bien expliqué dans la littérature. Bedkowsky

[11] choisit de prendre :  $B = 1$  et  $K = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{-1}^D}{2\tau_{-1}^D - \sigma_{-1}^D}\right)^2 - 1}$ .

Cependant, Lagoda et Macha [37] considèrent  $K = 1$  et  $B = -\frac{\sigma_{-1}^D}{\tau_{-1}^D}$ .

Le critère est valable si  $\sigma_{-1}^D/\tau_{-1}^D < 2$  ce qui est généralement le cas.

Le plan critique recherché est celui dont la contrainte équivalente  $\sigma_{eqMB}$  présente la variance maximale, laquelle peut être établie au moyen de la matrice de covariance de la séquence multiaxiale aléatoire et des cosinus directeurs de la normale unitaire au plan considéré.

L'organigramme de la méthode est représenté sur la Fig. 1.6.

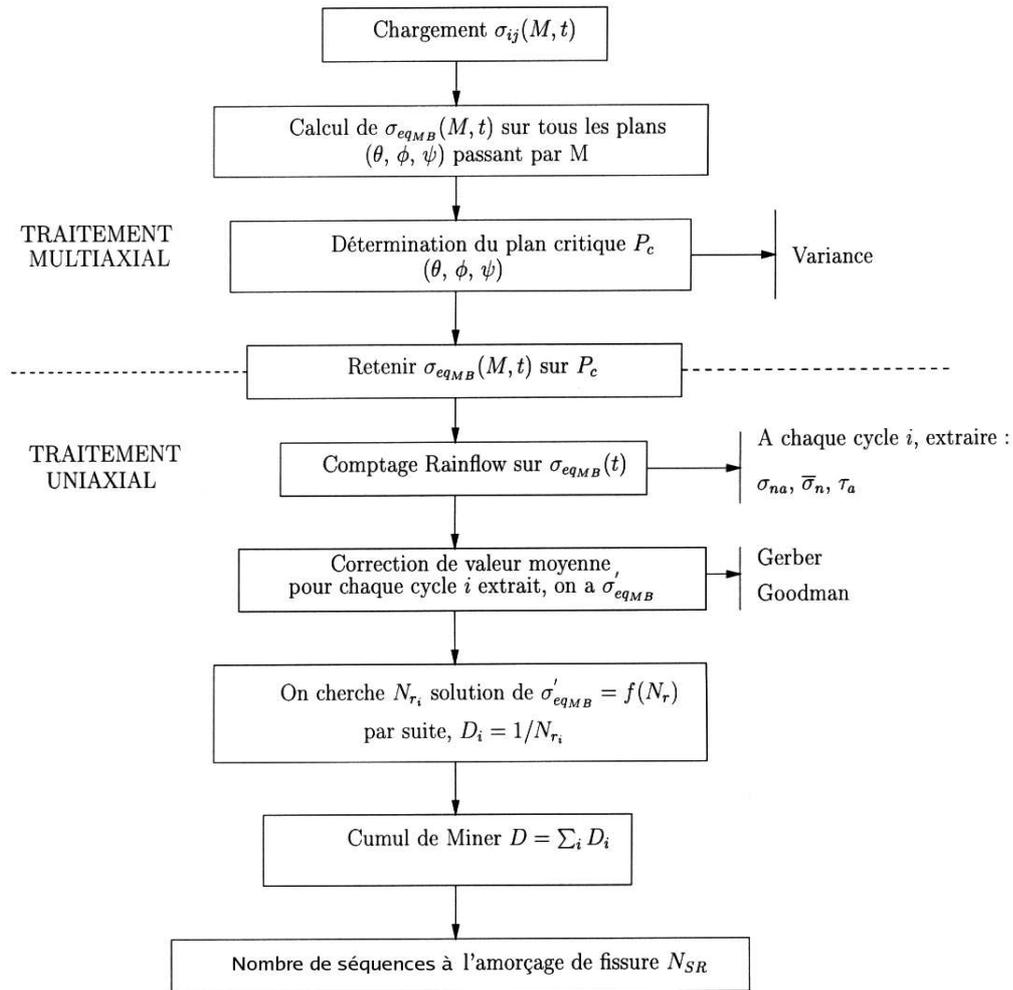


FIG. 1.6 – Organigramme de l'approche statistique de Macha et Bedkowsky

Sur le plan critique ainsi déterminé, les auteurs effectuent un comptage Rainflow sur la contrainte équivalente  $\sigma_{eqMB}(t)$ . A chaque cycle de cette contrainte, ils calculent l'amplitude de la cission résolue  $\tau_a$ , l'amplitude  $\sigma_{na}$  et la valeur moyenne  $\bar{\sigma}_n$  de la contrainte normale. Puis ils utilisent une correction de contrainte moyenne de type Goodman ou Gerber sur cette composante normale. A l'aide des courbes de Basquin du matériau, en traction et en torsion alternées symétriques, une expression de la contrainte équivalente en fonction de la durée de vie peut être déduite  $\sigma_{eqMB} = f(N_r)$ . L'endommagement  $D_i$  relatif à chacun des cycles extraits  $i$ , est déterminé avec la règle de Miner en cherchant  $N_{r_i}$  solution de l'équation  $\sigma_{eqMB} = f(N_r)$ . Le cumul de dommage est réalisé suivant la loi du cumul linéaire de Miner. L'amorçage est supposé atteint quand  $D = 1$ . La durée de vie à l'amorçage d'une fissure est alors exprimée en nombre de répétitions de la séquence de chargement. Le plan critique est le plan d'amorçage.

Les auteurs proposent d'utiliser les courbes de Basquin, mais limitent la prise en compte des cycles de petites amplitudes, en considérant comme non endommageants les cycles équivalents d'amplitude inférieure à  $0.5 \times \sigma_{-1}^D$

Comme cette méthode statistique est basée sur la variance du paramètre d'endommagement, elle peut masquer l'effet d'une surcharge dans une direction particulière.

### 1.6.1.3 Méthode de Robert et ses dérivées [26, 80, 81]

La méthode de prévision de durée de vie de Robert a connu plusieurs évolutions successives depuis sa première formulation [65]. Les derniers travaux sur cette méthode ont été réalisés par Weber [80, 81], et ont fait appel au concept du dommage par plan. Ce concept a pour objectif de ne pas décrire le dommage de façon globale au point de la structure où est réalisé le calcul en fatigue, mais de se placer à l'échelle du plan où le dommage devient directionnel, c'est-à-dire dépendant de l'orientation du plan considéré passant par ce point. Pour cela, les auteurs considèrent en chaque point d'étude une sphère discrétisée en facettes d'aires équivalentes sur lesquelles le dommage sera calculé.

Les auteurs utilisent une méthode classique du style comptage des cycles et adoptent une loi de dommage du type Miner pour l'estimation des durées de vie sous chargement multiaxial d'amplitude variable. Pour extraire et identifier des cycles multiaxiaux, ils choisissent une variable de comptage particulière [34] : la contrainte normale  $\sigma_{h_0 h_0}(t)$  au plan fixe  $\pi_0$  défini par les angles  $\varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$  et  $\gamma_0 = \frac{\pi}{\sqrt{19}}$  (Fig. 1.7). Ces angles ont été choisis, selon les auteurs, de façon à présenter une partie décimale illimitée non périodique afin de dissocier facilement deux tenseurs consécutifs conduisant à des valeurs voisines de la contrainte normale.

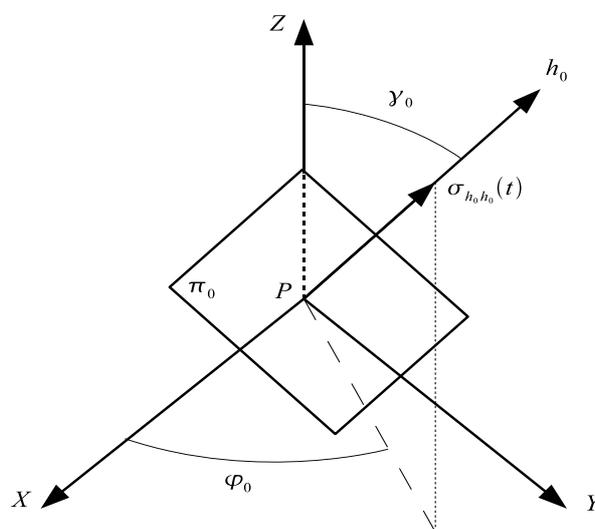


FIG. 1.7 – Contrainte normale choisie comme variable de comptage

Cependant, pour l'estimation des durées de vie facette par facette et pour n'importe quel type de cycle extrait, Robert définit un indicateur d'endommagement par plan  $E_h$  comme suit :

$$E_h = \max_t \left( \frac{\tau_{ha}(t) + \alpha(N_r) \cdot \sigma_{hha}(t) + \beta(N_r) \cdot \sigma_{hhm}}{\gamma(N_r)} \right) \quad (1.24)$$

L'indicateur d'endommagement  $E_h$  lié au plan de normale  $h$  correspond à la valeur maximale, au cours d'un cycle de contraintes, de la combinaison linéaire des contraintes tangentielles et normale alternées, et de la contrainte normale moyenne agissant sur ce plan.

La figure (1.8) donne une représentation graphique de ces termes de contraintes qui interviennent dans la formulation de  $E_h$ .

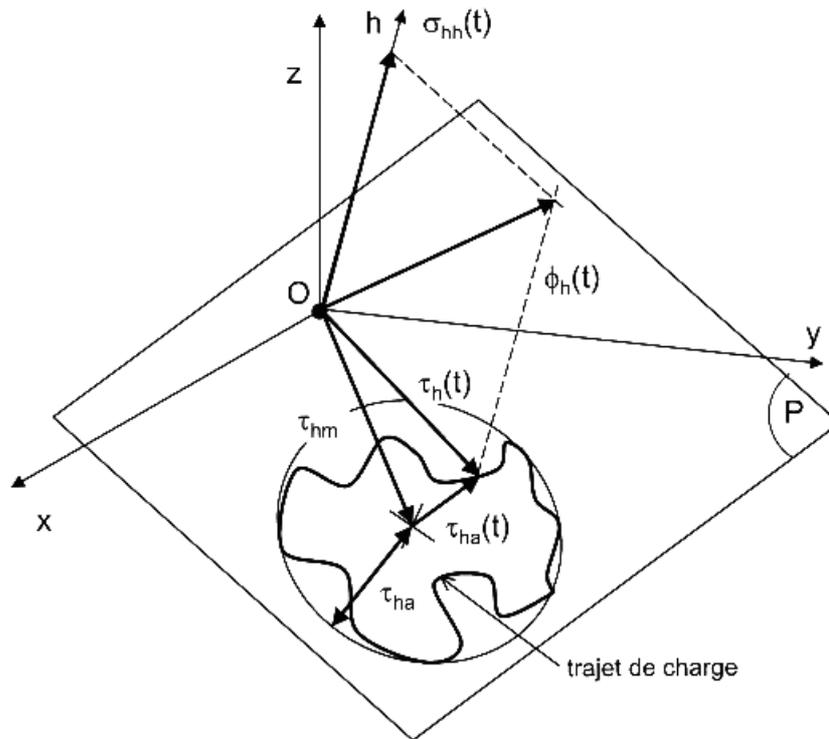


FIG. 1.8 – Représentation graphique des termes de contraintes intervenant dans  $E_h$  [79]

Les paramètres  $\alpha(N_r)$ ,  $\beta(N_r)$  et  $\gamma(N_r)$  sont obtenus à l'aide des trois courbes  $S - N$  du matériau en traction alternée symétrique  $\sigma_{-1}(N_r)$ , en traction répétée  $\sigma_0(N_r)$  et en torsion alternée symétrique  $\tau_{-1}(N_r)$ .

$$\begin{cases} \gamma(N_r) = \tau_{-1}(N_r) \sqrt{\alpha^2(N_r) + 1} \\ \alpha(N_r) = \frac{\frac{\tau_{-1}(N_r)}{\sigma_{-1}(N_r)} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\tau_{-1}(N_r)}{\sigma_{-1}(N_r)} \left(1 - \frac{\tau_{-1}(N_r)}{\sigma_{-1}(N_r)}\right)}} \\ \beta(N_r) = 2 \frac{\gamma(N_r)}{\sigma_0(N_r)} - \frac{\sigma_0(N_r)}{8\gamma(N_r)} - \alpha(N_r) \end{cases} \quad (1.25)$$

Les conditions de validité du critère sont  $\frac{1}{2} < \frac{\tau_{-1}(N_r)}{\sigma_{-1}(N_r)} < 1$  et  $\frac{1}{2} < \frac{\sigma_0(N_r)}{\sigma_{-1}(N_r)} < 1$ .

Pour chaque cycle  $i$  extrait par la méthode de comptage Rainflow, les auteurs calculent les grandeurs  $\tau_{ha}(t)$ ,  $\sigma_{hha}(t)$  et  $\sigma_{hhm}$  et cherchent  $N_{r_i}$  solution de l'équation implicite  $E_h(N_{r_i}) = 1$  (Eq. 1.24). Par la suite, ils déterminent l'endommagement  $D_i$  relatif au cycle extrait  $i$  avec une règle de dommage du type Miner ou Lemaitre-Chaboche. L'amorçage est supposé atteint quand  $D = 1$ . En chaque point d'étude, le cumul du dommage est réalisé facette par facette et pour la séquence entière du chargement multiaxial d'amplitude variable. La facette la plus endommagée constitue le plan critique [80] auquel correspond le nombre de séquences  $N_{seq}$  du chargement. L'algorithme simplifié de la méthode est donnée sur la Fig. 1.9.

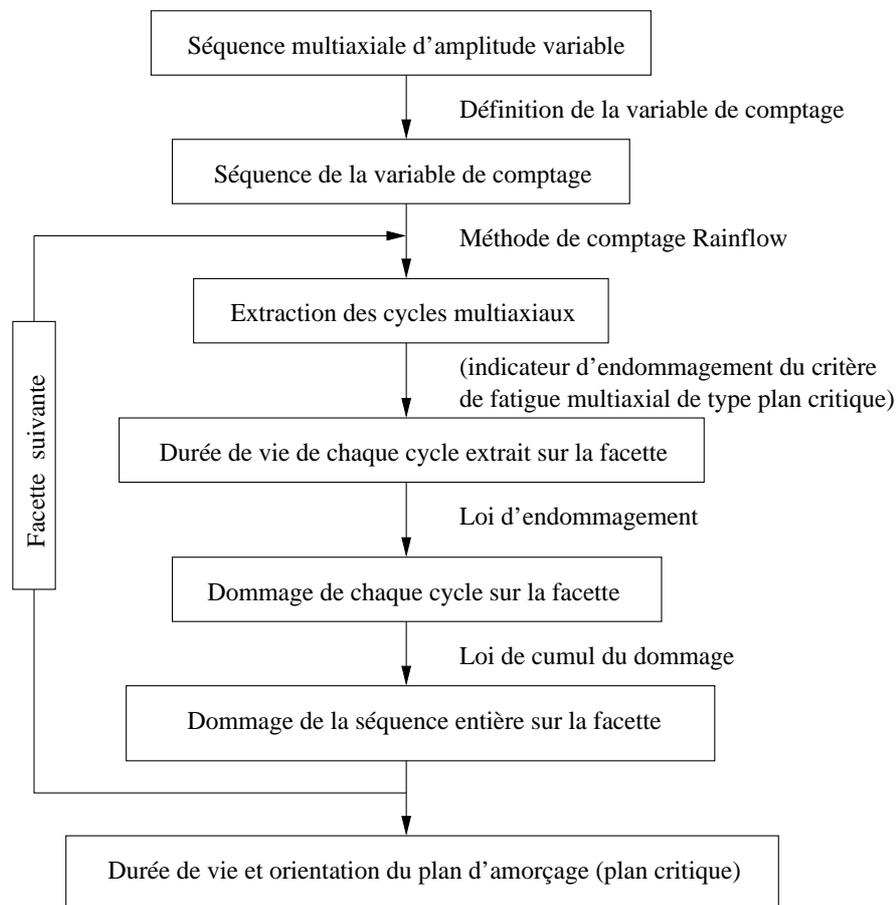


FIG. 1.9 – Synoptique de la méthode du dommage par plan

Les auteurs étaient conscients de l'inconvénient majeur de la variable de comptage retenue qui se situe au niveau du choix du plan de comptage. En effet, suivant le plan choisi pour effectuer le comptage des cycles (identification et extraction), le nombre et la forme des cycles extraits varient. Ce qui se traduit donc par des durées de vie différentes chaque fois que le plan de comptage est différent.

Pour s'affranchir du problème de l'influence du plan de comptage sur les durées de vie, les auteurs avaient décidé d'effectuer le comptage plan par plan. Ainsi, chaque facette sert à la fois du plan de comptage et de cumul du dommage. La méthodologie est alors très simple et consiste à choisir le plan le plus endommagé parmi tous les plans comme plan critique.

La Fig. 1.10 présente l'algorithme de cette nouvelle méthode (comptage et dommage plan par plan).

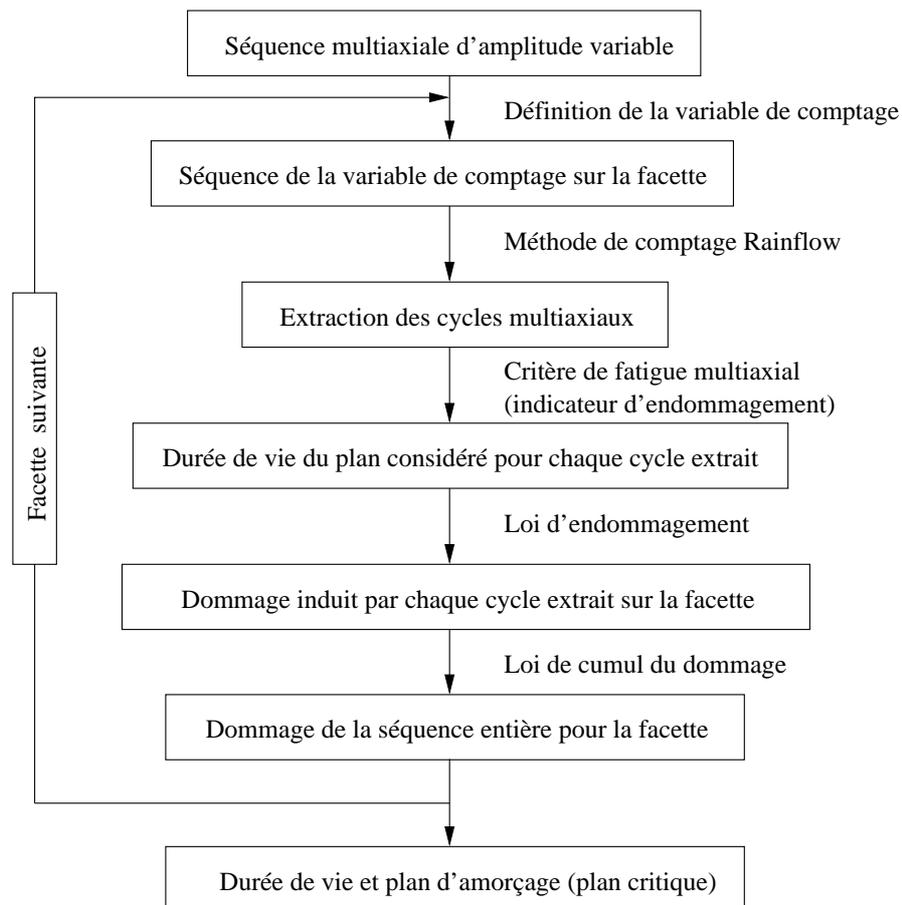


FIG. 1.10 – Synoptique du principe du comptage et dommage plan par plan

Sur chacune des facettes, les auteurs utilisent la contrainte normale qui lui est propre comme variable de comptage pour construire la séquence de la variable de comptage et lui appliquer le comptage Rainflow afin d'identifier et d'extraire les cycles multiaxiaux. Puis ils appliquent l'indicateur d'endommagement du critère du Robert de manière à déterminer la durée de vie des cycles extraits en résolvant l'équation (1.24) sur la facette considérée. Le dommage est alors calculé et cumulé sur celle-ci afin de déterminer sa durée de vie pour la séquence entière. Cette opération est répétée sur l'ensemble des facettes explorées. La durée de vie du matériau au point où est faite l'étude est celle du plan critique, c'est-à-dire celle du plan le plus endommagé par l'ensemble de la séquence.

Les deux méthodes présentées : « dommage par plan » et « comptage et dommage par plan » sont très coûteuses en termes de temps de calcul et de données de fatigue. En effet, l'application des deux méthodes nécessite la résolution de l'équation implicite en  $N$ ,  $E_h = 1$  par *facette* et pour *chaque cycle extrait*. En outre, la seconde méthode « comptage et dommage par plan » requiert plus de temps de calcul que la première puisque le comptage Rainflow se fait *facette* par *facette*. Ce qui n'était pas le cas pour la première méthode où le comptage Rainflow se faisait sur un plan fixe. D'autre part, trois courbes de Wöhler sont nécessaires pour l'identification des paramètres  $\alpha(N_r)$ ,  $\beta(N_r)$  et  $\gamma(N_r)$  (Eq. 1.25) ; ce qui constitue un obstacle supplémentaire à l'application des ces deux méthodes.

De plus, ces deux méthodes ne considèrent pas l'effet des petits cycles (cycles d'amplitudes inférieures à la limite d'endurance) car les auteurs utilisent les courbes de Basquin tronquées à la limite d'endurance pour représenter le comportement en fatigue du matériau. Or, ce point est en désaccord avec de nombreux résultats expérimentaux [55, 66, 73] qui mettent en évidence une influence significative des cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance sur la durée de vie.

#### 1.6.1.4 Méthode de Lagoda et Macha [38, 39]

Les auteurs utilisent comme variable de leur critère, la « densité d'énergie de déformation normale »  $W_n(t)$  calculée sur un plan particulier de normale  $\underline{n}$  :

$$W_n(t) = \frac{\varepsilon_n(t) \cdot \sigma_n(t)}{2} \frac{\text{sgn}[\varepsilon_n(t)] + \text{sgn}[\sigma_n(t)]}{2} \quad (1.26)$$

La fonction « *sgn* » est définie par :

$$\begin{cases} \text{sgn}(x) = -1 & \text{si } x < 0 \\ \text{sgn}(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ \text{sgn}(x) = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La prise en compte du « *sgn* » de  $\varepsilon_n(t)$  et de  $\sigma_n(t)$  permet de distinguer les états de traction des états de compression. De plus, la variable  $W_n(t)$  ne forme qu'un seul cycle quand la densité d'énergie de déformation  $\frac{1}{2}\varepsilon_n(t)\sigma_n(t)$  en forme deux (Fig. 1.11).

Les auteurs proposent d'effectuer une méthode Rainflow de comptage des cycles sur  $W_n(t)$ . Pour chaque cycle  $i$ , ils déterminent l'amplitude de  $W_n$ , notée  $W_{na_i}$  et cherchent ensuite la durée de vie associée  $N_{r_i}$  solution de l'équation (1.27) similaire à la proposition de SWT [67].

$$W_{na_i} = \frac{\sigma_f'^2}{2E} (2N_{r_i})^{2b} + \frac{\sigma_f' \varepsilon_f'}{2} (2N_{r_i})^{b+c} \quad (1.27)$$

En endurance, cette formule se réduit à :

$$W_{na_i} = \frac{\sigma_f'^2}{2E} (2N_{r_i})^{b'} \quad (1.28)$$

où  $b' = 2b$ .

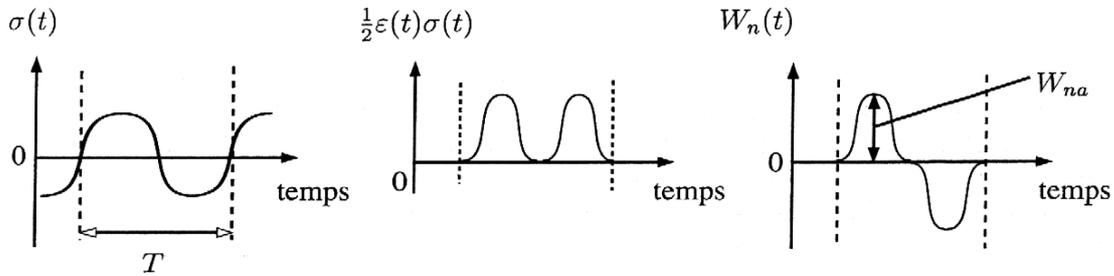


FIG. 1.11 – Comparaison de l'évolution de  $W_n(t)$  par rapport à celle de  $\frac{1}{2}\varepsilon_n(t) \cdot \sigma_n(t)$

L'endommagement  $D_i$  relatif à chaque cycle  $i$  est calculé avec la règle de Miner ( $D$  est supposé égal à 1 à l'amorçage d'une fissure). Ce calcul est effectué sur tous les plans de vecteur normal  $\underline{n}(\theta, \phi)$ . Le plan critique, à l'image de la proposition de Bannantine [6, 7], est celui sur lequel l'endommagement  $D$  est maximum (durée de vie calculée la plus courte). La durée de vie à l'amorçage d'une fissure est alors exprimée en nombre de répétitions de la séquence de chargement :  $N_{SR} = 1 / \max_{\theta, \phi} [D(\theta, \phi)]$ .

La méthode de Lagoda et Macha ressemble beaucoup à celle de Bannantine [6, 7] à deux différences près. En effet, les deux méthodes adoptent la même démarche pour prévoir le comportement en fatigue. Elles sont basées sur une approche énergétique où la durée de vie est reliée à un critère énergétique. Les deux approches sont distinctes par le choix de la variable du comptage et du critère de fatigue adopté. En effet, la déformation normale  $\varepsilon_n(t)$  choisie par Bannantine comme variable de comptage, était remplacée par  $W_n(t)$  dans la proposition de Macha et Lagoda. Ainsi, Bannantine [6, 7] utilise le critère de fatigue de Smith-Watson-Topper (SWT) [67] qui prévoit l'effet de la contrainte moyenne sur la durée de vie. Cependant, Macha et Lagoda proposent d'utiliser un critère de fatigue similaire mais qui n'est pas adapté pour traiter les chargements avec contraintes moyennes non nulles. Les auteurs affirment que dans le cas d'un chargement stationnaire gaussien sans valeur moyenne, l'influence sur la durée de vie de la valeur moyenne relative à chacun des cycles extraits est négligeable. Dans ce cas précis, leur méthode est utilisable.

Sur la base de constatations expérimentales, Lagoda et Macha envisagent de ne pas compter les cycles ayant une amplitude de contrainte inférieure à 50 % de la limite d'endurance : c'est-à-dire en exprimant la limite d'endurance en énergie  $W_{na}^D$ , les cycles tels que  $W_{na_i} < 0.25 W_{na}^D$ .

Leur méthode a été testée et comparée par Banvillet et al. [9] aux modèles de Bannantine [6, 7], Fatemi-Socie [7, 68], Socie [68], Wang-Brown [75, 76, 77, 78] et Morel [51, 52] sur des essais sur l'acier 10 HNAP soumis à des chargements aléatoires non gaussiens. Avec la méthode de Socie, elle conduit à de bonnes corrélations avec les résultats expérimentaux.

## **1.6.2 Méthodes sans comptage de cycles**

### **1.6.2.1 Méthode de Preumont, Piéfort et Pitoiset [60, 61, 62, 64]**

Les auteurs s'intéressent à l'endommagement par fatigue à grand nombre de cycles de structures soumises à des vibrations aléatoires. Comme l'approche temporelle est trop coûteuse et donc inutilisable dans ce cas, ils proposent l'utilisation de méthodes spectrales basées sur la réponse de la structure dans le domaine fréquentiel. Ils se sont limités aux chargements gaussiens de moyennes nulles.

Les « méthodes spectrales » établissent des relations analytiques d'estimation de l'endommagement uniquement à l'aide des moments spectraux. Elles sont issues des secteurs industriels dans lesquels le chargement en contraintes est obtenu à partir de la réponse vibratoire de la structure considérée ; c'est par exemple le cas de l'industrie offshore ou de la « fatigue vibratoire ».

Cette approche est basée sur une nouvelle définition de la contrainte équivalente de von Mises comme processus aléatoire. Cette contrainte variable uniaxiale équivalente est construite dans le domaine fréquentiel en combinant, pour chaque fréquence, les densités spectrales de puissance de contraintes selon la relation quadratique de von Mises. La densité spectrale de puissance du processus équivalent est ainsi obtenue et il est possible de calculer ses moments spectraux. Un processus d'analyse du signal est alors appliqué à cette contrainte équivalente pour évaluer très rapidement le dommage dans l'ensemble des éléments finis de la structure. Il est basé sur des formulations fréquentielles (approximation de Rayleigh [21, 82] ou la méthode de Single Moment [40, 44]) qui constituent une alternative au comptage Rainflow.

Ces méthodes permettent d'estimer la durée de vie d'une pièce soumise à un chargement aléatoire d'origine vibratoire à l'aide de la courbe de Basquin (courbe S-N) et de la densité spectrale de la contrainte équivalente de von Mises.

D'autre part, la génération artificielle d'historiques de la contrainte de von Mises est également possible. Un comptage Rainflow des cycles peut alors être effectué et la méthode s'apparente donc aux méthodes classiques de prévision de durée de vie pour les états de contraintes uniaxiaux. Pitoiset, dans sa thèse [63] utilise aussi un comptage « Rainflow multiaxial », et présente des formulations fréquentielles des critères de Mataka et de Crossland.

### 1.6.2.2 Méthode de l'intégrale curviligne de Stephanov [69, 70, 71]

C'est une méthode qui s'affranchit d'une technique de comptage de cycle explicite. Elle repose sur les hypothèses suivantes :

1. La fissure de fatigue apparaît exclusivement en surface du matériau (état de contraintes planes).
2. L'élément infinitésimal  $ds$  du trajet de chargement  $S$  (trajet de l'extrémité du vecteur contrainte sur le plan principal  $(I, II)$ ) induit un endommagement élémentaire  $dD$ .

L'auteur était conscient que ces hypothèses sont insuffisantes pour traiter le cas général d'un chargement complexe dont les directions principales  $(I, II)$  des contraintes sont mobiles. Pour cela, Stephanov définit une variable supplémentaire  $\Delta\tau \sim d\tau$  liée à l'incrément angulaire  $d\phi$  de rotation des directions principales  $(I, II)$  par rapport à la pièce. Le trajet de chargement  $S$  peut alors être représenté **dans un nouveau repère fictif**  $(\sigma^I, \sigma^{II}, \Delta\tau)$  illustré sur la figure (1.12).

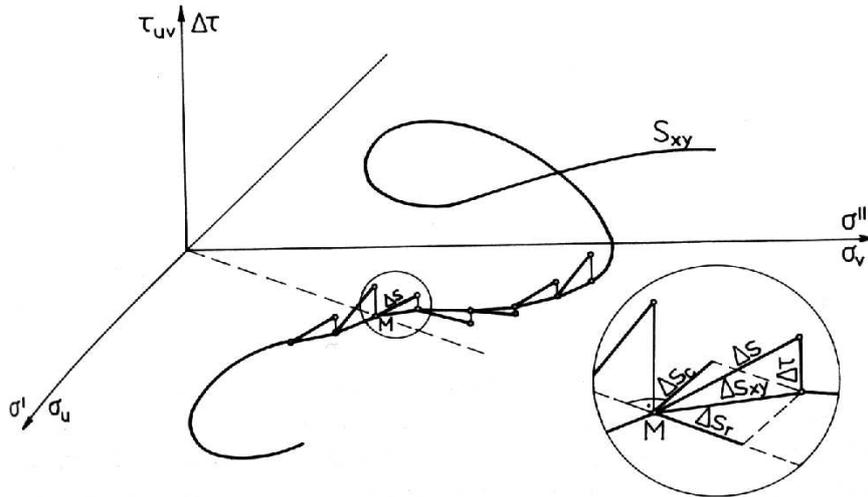


FIG. 1.12 – Trajectoire composée d'éléments  $\Delta s$  et leurs composants dans le repère  $(\sigma^I, \sigma^{II}, \Delta\tau)$  [69]

Ainsi, l'élément infinitésimal  $ds$  peut être décomposé dans ce repère comme suit :

$$ds = \sqrt{ds_{xy}^2 + d\tau^2} = \sqrt{ds_r^2 + ds_c^2 + d\tau^2} \quad (1.29)$$

où  $ds_{xy}$  est la projection de  $ds$  dans le plan principal  $(I, II)$ ,  $ds_r$  et  $ds_c$  sont respectivement les composantes radiale et circonférentielle de  $ds_{xy}$ .

L'auteur définit l'endommagement élémentaire  $dD$  généré par un élément de trajet  $ds$  sous la forme de trois fonctions d'endommagement liées à chacune des composantes de  $ds$  :

$$dD = \sqrt{dD_r^2 + dD_c^2 + dD_\tau^2} = \sqrt{(R_r ds_r)^2 + (R_c ds_c)^2 + (R_\tau d\tau)^2} \quad (1.30)$$

Par suite, l'endommagement total  $D$  est alors obtenu en cumulant les dommages élémentaires  $dD$  le long du trajet de chargement  $S$  :

$$D = \int_S \sqrt{(R_r ds_r)^2 + (R_c ds_c)^2 + (R_\tau d\tau)^2} \quad (1.31)$$

où  $R_r$ ,  $R_c$  et  $R_\tau$  sont des fonctions d'endommagement liées au matériau et aux niveaux des contraintes dans le matériau. L'amorçage d'une fissure est supposé atteint quand  $D = 1$ .

Stephanov propose de choisir dans un premier temps des fonctions d'endommagement identiques ( $R = R_r = R_c = R_\tau$ ). En adoptant une telle approximation, le problème revient à déterminer la valeur de  $R$  à l'aide des essais expérimentaux simples (chargements proportionnels). Par exemple, pour une sollicitation de traction alternée symétrique, la fonction d'endommagement  $R(s)$  est donnée par l'équation (1.32) en utilisant la courbe S-N ( $\sigma^m N = \text{constant}$ ).

$$R(s) = \frac{d}{d\sigma_a} \left( \frac{1}{4N_r(\sigma_a)} \right) \quad (1.32)$$

Cependant, l'auteur indique qu'il est nécessaire de déterminer les deux autres fonctions d'endommagement  $R_c$  et  $R_\tau$  pour toute bonne prédiction de durées de vie. Ces fonctions sont calculées à l'aide de courbes S-N sous chargements non proportionnels impliquant une rotation des directions principales ( $I, II$ ) et une variation du rapport  $\sigma_I/\sigma_{II}$ . Ceci nécessite donc l'utilisation de deux courbes de fatigue expérimentales supplémentaires.

La démarche de cette méthode se résume comme suit : à chaque incrément de temps  $dt$ , le calcul des contraintes principales  $\sigma_I(M, t + dt)$  et  $\sigma_{II}(M, t + dt)$  situent le point courant  $M$  dans le plan ( $I, II$ ) (cf. Fig. 1.12). En fonction de la position du point courant  $M$ , les fonctions d'endommagement sont évaluées. L'endommagement élémentaire  $dD$  induit par l'élément de trajet  $ds$  est ensuite calculé. Ainsi, l'endommagement total  $D$  est obtenu d'une manière continue en intégrant les dommages élémentaires  $dD$  le long de la séquence de chargement. L'amorçage d'une fissure est supposé atteint quand  $D = 1$ .

L'auteur précise : plus on possède d'essais sur le matériau, mieux on connaît de courbe  $R(s)$ , donc plus la prédiction de durées de vie est meilleure. Mais en pratique, son usage est difficile. La détermination des fonctions  $R_c$  et  $R_\tau$  n'est expliquée dans aucune des références recensées. **L'application de cette méthode est, par conséquent, restreinte aux chargements proportionnels.** Enfin, les fonctions d'endommagement n'ont pas de justification physique ; elles proviennent d'une analyse mathématique du trajet de chargement.

### 1.6.2.3 Loi d'endommagement de Papadopoulos [56]

Papadopoulos [56] propose une loi d'endommagement associée au mécanisme physique de nucléation des fissures de fatigue, permettant de calculer le nombre de cycles que dure la phase d'amorçage d'une microfissure dans le processus d'endommagement par fatigue. Pour cela, il adopte l'approche mésoscopique introduite par Dang Van [5, 23, 58], et considère comme paramètre responsable du dommage la déformation plastique mésoscopique cumulée notée  $\epsilon^p$ . En effet, d'après lui, certains cristaux défavorablement orientés par rapport au chargement se plastifient et la déformation plastique mésoscopique ainsi accumulée conduit à leur rupture.

Pour la modélisation de sa loi d'endommagement, l'auteur avait pris quelques hypothèses :

- (H1) Il considère un comportement du cristal à trois phases : durcissement, saturation et adoucissement.
- (H2) Le cristal obéit au critère de plasticité de von Mises.
- (H3) Il se limite aux chargements proportionnels.
- (H4) A l'échelle macroscopique l'éprouvette est globalement homogène, isotrope et reste élastique dans son ensemble au cours d'un essai de fatigue à grand nombre de cycles.
- (H5) L'amorçage des microfissures se traduit par la violation du domaine défini par le critère de fatigue de Papadopoulos faisant intervenir deux grandeurs :
  - le second invariant du tenseur déviateur des contraintes, noté  $k^*$ ,
  - la pression hydrostatique macroscopique, notée  $P$ .

La condition de non-nucléation de fissure se traduit par l'équation suivante :

$$k^* \leq k_{lim} \quad (1.33)$$

où  $k_{lim}$  correspond à une limite d'endurance généralisée. Elle est unique pour les chargements similaires qui admettent la même pression hydrostatique moyenne  $\bar{P}$  et le même rapport  $\frac{k^*}{P_a}$  ( $P_a$  est l'amplitude de la pression hydrostatique) :

$$k_{lim} = \frac{-\alpha \cdot \bar{P} + \beta \cdot k^*}{\alpha + \frac{k^*}{P_a}} \cdot \frac{k^*}{P_a} \quad (1.34)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres liés au matériau.

D'après l'hypothèse (H1), le comportement à l'érouissage du cristal est modélisé à l'aide de trois phases successives (Fig. 1.13) : durcissement, saturation et adoucissement. La limite d'élasticité du cristal évolue de la valeur initiale  $k_0$  ( $D = 0$ ), prend la valeur  $k_s = k_{lim}$  dans la phase de saturation, et atteint la valeur zéro à la rupture  $k = 0$  (dommage total  $D = 1$ ). La fonction de charge est définie à l'aide du critère de plasticité de von Mises (hypothèse (H2)) :

$$f(\sigma) = \frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{a}) : (\mathbf{s} - \mathbf{a}) - k^2 \leq 0 \quad (1.35)$$

où  $\mathbf{a} = c\boldsymbol{\varepsilon}^p$

L'évolution de la limite d'élasticité  $k$  et la vitesse du tenseur de déformation plastique mésoscopique  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  pour les trois phases sont données par :

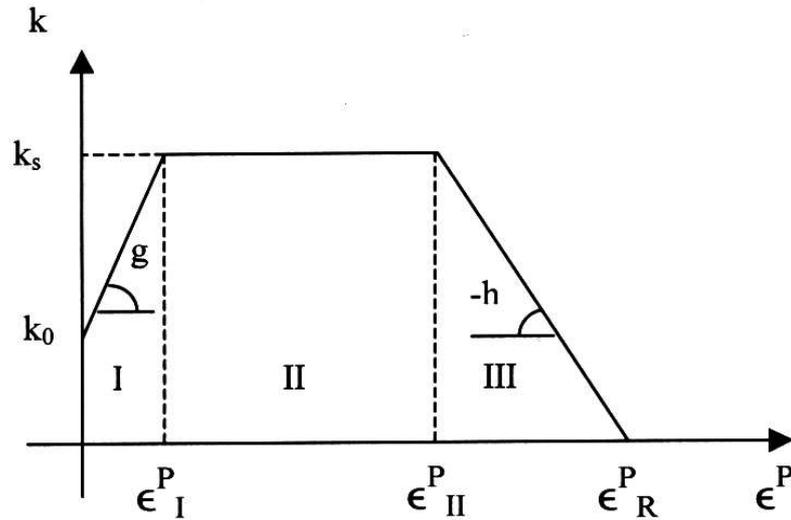


FIG. 1.13 – Courbe d'écrouissage  $k(\boldsymbol{\varepsilon}^p)$  pour un cristal élastoplastique à trois phases

– **Durcissement (I) :**

$$\dot{k} = g \cdot \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{A} \quad (1.36)$$

Avec  $g > 0$  et  $A = c + 2\mu + g \cdot \sqrt{2}$

– **Saturation (II) :**

$$\dot{k} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{C} \quad (1.37)$$

Avec  $C = c + 2\mu$

– **Adoucissement (III) :**

$$\dot{k} = -h \cdot \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{B} \quad (1.38)$$

Avec  $B = c + 2\mu - h \cdot \sqrt{2}$

où  $c$  est le module d'écrouissage cinématique,  $\mu$  le module de cisaillement macroscopique,  $g$  le module de durcissement et  $h$  le module d'adoucissement.

La loi d'évolution de dommage définie par Papadopoulos est donnée par l'équation :

$$\dot{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} \quad (1.39)$$

La variable  $D$  n'est pas normalisée ( $D = 1$  à la nucléation). Elle pourrait l'être en utilisant la déformation plastique mésoscopique cumulée à la rupture du cristal  $\in_R^p$  par :

$$D(N) = \frac{\in^p(N)}{\in_R^p} \quad (1.40)$$

mais malheureusement  $\in_R^p$  n'est pas intrinsèque et dépend du chargement.

Pour une structure soumise à un chargement cyclique proportionnel situé au-dessus de la limite d'endurance, la déformation plastique mésoscopique cumulée peut être obtenue analytiquement en fonction du nombre de cycles appliqués et des paramètres du chargement macroscopique.

Ainsi, le nombre de cycles à la nucléation peut s'exprimer analytiquement selon l'équation (1.41) :

$$N_R = p \ln \left[ \frac{\frac{\|\Delta \mathbf{S}\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta \mathbf{S}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} \right] + q \frac{k_{lim}}{\frac{\|\Delta \mathbf{S}\|}{2\sqrt{2}} - k_{lim}} - \frac{r}{\frac{\|\Delta \mathbf{S}\|}{2\sqrt{2}}} \quad (1.41)$$

$$\text{avec } p = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right)$$

$$q = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \frac{1}{l}$$

$$r = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \frac{k_0}{g}$$

où  $l$  est un coefficient qui permet de lier la déformation plastique cumulée à rupture  $\in_R^p$  et  $k_{lim}$  :

$$\in_R^p = \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{l} + \frac{1}{h} \right) k_{lim} - \frac{k_0}{g} \quad (1.42)$$

Par l'application de sa loi de dommage, Papadopoulos s'intéresse **uniquement** à la succession de deux chargements multiaxiaux proportionnels pour laquelle il obtient des solutions analytiques. Dans ce cas, il faut bien distinguer la succession de deux chargements cycliques proportionnels similaires et celle de deux chargements non similaires.

Le modèle de cumul du dommage proposé dépend de six paramètres dont deux sont les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  du critère de fatigue, connues moyennant deux limites d'endurance. Les autres sont identifiables à partir d'une courbe S-N à la nucléation et d'un essai de cumul particulier.

L'auteur a restreint le domaine de validité de sa loi aux chargements violant son critère de fatigue, le cas des chargements avec des sollicitations égales et inférieures à la limite d'endurance du matériau sort donc du cadre de sa proposition (voir hypothèse (H5)). Ainsi, dans son modèle, il s'intéresse uniquement aux chargements proportionnels où il dispose de solution analytique (voir hypothèse (H3)).

### 1.6.2.4 Méthode de Morel (1996) [51, 53]

Morel avait proposé une méthode de calcul de la durée de vie en endurance limitée, qui repose sur une approche mésoscopique de type plan critique. Il a apporté un soin particulier à la description de l'influence du déphasage sur l'accumulation du dommage. Cependant, sa méthode ne s'applique qu'aux matériaux métalliques (dits "doux") dont le rapport  $\tau_{-1}^D/\sigma_{-1}^D$  vérifie  $0.5 < \tau_{-1}^D/\sigma_{-1}^D < 0.6$ .  $\tau_{-1}^D$  et  $\sigma_{-1}^D$  sont respectivement les limites d'endurance en torsion et en traction purement alternées.

Dans la description de sa méthode, l'auteur s'inspire beaucoup des travaux développés par Papadopoulos notamment l'utilisation d'une mesure de déformation plastique mésoscopique cumulée  $T_\sigma$  associée à un plan matériel particulier [57] et la modélisation du comportement du grain selon trois phases distinctes [56] (durcissement, saturation et adoucissement); il considère la déformation plastique mésoscopique cumulée  $\Gamma$  comme paramètre d'endommagement et suppose que l'amorçage d'une fissure de fatigue se produit quand cette dernière atteint une valeur critique  $D = D_R = \Gamma_R$  (voir figure 1.14). Le critère de plasticité utilisé par Morel est de type Schmid avec écrouissage isotrope et cinématique.

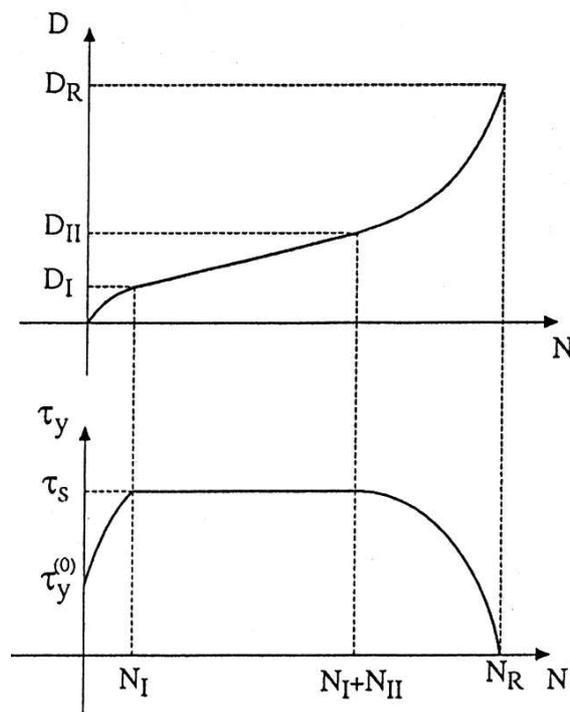


FIG. 1.14 – Evolution du dommage et de la limite d'élasticité pour les trois phases de comportement du cristal [51]

En suivant la description du dommage selon les trois phases du comportement du cristal, l'auteur donne la durée de vie à l'amorçage  $N_a$ , dans le cas des chargements sinusoïdaux, selon une courbe  $S - N$  à la nucléation d'une fissure :

$$N_a = p \ln \left( \frac{C_A}{C_A - \tau_s} \right) + q \left( \frac{\tau_s}{C_A - \tau_s} \right) - \frac{r}{C_A} \quad (1.43)$$

Cette courbe fait intervenir les termes suivants :

- $C_A$ , amplitude maximale de la cission résolue macroscopique déterminée sur une direction fixe ( $m^*$ ) dans le plan critique  $P_c$  de mesure  $T_\sigma$  maximale.
- $\tau_s$ , limite d'élasticité du cristal dans la phase de saturation ; elle s'apparente à une limite d'endurance dépendant de  $C_A$ , de l'amplitude  $P_a$  et de la valeur moyenne  $P_m$  de la pression hydrostatique, du coefficient de déphasage  $H$  et de deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  liés au matériau :

$$\tau_s = \frac{-\alpha P_m + \beta}{\alpha \frac{P_a}{C_A} + H} \quad (1.44)$$

$$\text{où } \alpha = \sqrt{\pi} \left( 3 \frac{\tau_{-1}^D}{\sigma_{-1}^D} - \frac{3}{2} \right) \text{ et } \beta = \tau_{-1}^D \sqrt{\pi}.$$

- $p$ ,  $q$ , et  $r$  sont des paramètres identifiables à l'aide d'une seule courbe de Wöhler expérimentale.

Pour déterminer la durée de vie à l'amorçage dans le cas des chargements multiaxiaux d'amplitude variable, l'auteur procède comme suit :

1. repérage du plan critique  $P_c$  à l'aide de la mesure  $T_{\sigma_{RMS}}$  (utilisation de la valeur quadratique moyenne appliquée à l'évolution de la cission résolue macroscopique sur différentes directions ;
2. calcul du coefficient de déphasage  $H$  :

$$H = \frac{T_{\Sigma_{RMS}}}{C_{RMS}} \quad (1.45)$$

les valeurs  $T_{\Sigma_{RMS}}$  et  $C_{RMS}$  sont calculées à l'aide des équations (1.46) et (1.47) ; les angles  $\theta_0$  et  $\phi_0$  définissent le plan critique  $P_c$  sur lequel  $T_{\sigma_{RMS}}$  est maximum ;

$$\tau_{RMS}(\theta, \phi, \psi) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tau_i - \bar{\tau})^2} \quad \text{et} \quad T_{\sigma_{RMS}}(\theta, \phi) = \sqrt{\int_0^{2\pi} \tau_{RMS}^2(\theta, \phi, \psi) d\psi} \quad (1.46)$$

$$T_{\Sigma_{RMS}} = T_{\sigma_{RMS}}(\theta_0, \phi_0) \quad \text{et} \quad C_{RMS} = \max_{\psi} [\tau_{RMS}(\theta_0, \phi_0, \psi)] \quad (1.47)$$

où  $\tau_i$  sont les extrema du signal de la cission résolue macroscopique  $\tau(t)$ ,  $N$  est leur nombre et  $\bar{\tau}$  est la moyenne d'expression  $\frac{1}{N} \sum_i \tau_i$  ;

3. sur chaque direction ( $m$ ) du plan critique  $P_c$  :

(a) détermination des évolutions de la pression hydrostatique macroscopique  $P(t)$  et de la cission résolue macroscopique  $\tau(t)$  ;

(b) évaluation du seuil de saturation  $\tau_s$  en faisant la moyenne des seuils calculés à chaque transition de la séquence représentative de l'évolution de  $\tau(t)$  ;

(c) calcul pas à pas de la déformation plastique mésoscopique cumulée  $\Gamma$  en suivant l'évolution de la limite élastique mésoscopique  $\tau_y$  selon les trois phases (durcissement, saturation et adoucissement) ;

(d) calcul du nombre de séquences (associé à la direction  $m$ ) nécessaire pour atteindre  $\Gamma_R$  ;

4. estimation du nombre de séquences à l'amorçage sur la direction de dommage maximale ( $m^*$ ).

Dans le cas des chargements sinusoïdaux, les paramètres du modèle sont identifiés moyennant une courbe de Wöhler et deux limites d'endurance. On requiert en supplément un essai particulier de cumul de dommage dans le cas des chargements multiaxiaux d'amplitude variable.

La méthode de Morel est prometteuse dans son aspect de description du phénomène de fatigue en endurance limitée ; ceci à travers le choix de la déformation plastique mésoscopique cumulée qui exprime la plasticité, un des mécanismes de fatigue se produisant à l'échelle mésoscopique ; elle tient compte des principaux facteurs influant sur la durée de vie en fatigue polycyclique (la pression hydrostatique et l'influence de déphasage). Mais à son stade actuel, elle ne répond pas complètement à la demande d'un outil prédictif de durée de vie, utilisable aisément en bureau d'étude. En effet, c'est une méthode relativement compliquée (recherche du plan critique  $P_c$  et cumul de dommage sur chaque direction dans ce plan) ; son application pour les chargements multiaxiaux d'amplitude variable demande des données de fatigue qui ne sont toujours pas disponibles (une courbe  $S - N$ , deux limites d'endurance et un essai particulier de cumul de dommage) ; en plus, elle se limite aux matériaux doux. D'autre part, elle ne s'affranchit pas totalement d'une méthode de comptage, car son auteur a recours au comptage des extrema de l'évolution de la cission résolue macroscopique  $\tau(t)$  sur chaque direction ( $m$ ) dans  $P_c$  dans un seul but de calculer la limite d'élasticité mésoscopique dans la phase de saturation du cristal  $\tau_y$ . Encore une fois, cela rend la tâche difficile et lourde.

### 1.6.2.5 Méthode de Zarka-Karaouni (2001) [33, 84]

Zarka et Karaouni proposent une méthode de prédiction de durée de vie qui s'affranchit d'une technique fine de comptage de cycles. Leur approche est fondée à l'échelle mésoscopique. Elle repose sur le fait de trouver en terme de « dommage » une description ou « mesure » discriminatoire du chargement réel d'amplitude variable. Cela se fait essentiellement par l'introduction d'une règle d'équivalence entre deux chargements locaux, puis par la définition d'un chargement cyclique affine simple équivalent en terme du dommage au chargement réel d'amplitude variable.

Les auteurs ont choisi comme mesure représentative du chargement variable la déformation plastique cumulée locale  $\varepsilon_{pc}$  (ou encore l'énergie plastique dissipée locale  $W_D$ ). Cette mesure a été introduite par Papadopoulos [56, 58] et utilisée après par Morel [51, 52]. Les auteurs reprennent l'hypothèse de Papadopoulos [58] et de Morel [52], et supposent qu'à l'amorçage de la fissuration, cette mesure atteint une valeur critique caractéristique du matériau.

La règle d'équivalence, représentée en figure (1.15), est énoncée par l'auteur comme suit :

*Deux chargements sont équivalents vis-à-vis du dommage par fatigue :*

- *s'ils produisent la même déformation plastique cumulée LOCALE  $\varepsilon_{pc}$  (ou  $W_D$ ), et afin de conserver les mêmes mécanismes d'endommagement :*
- *s'ils ont le même centre  $C_f$ ,*
- *et si le chargement équivalent a une fluctuation sensiblement supérieure ou égale à  $F^\sigma$  (mais inférieure à deux fois la limite élastique macroscopique afin d'assurer l'adaptation globale de la structure).*

$C_f$  et  $F^\sigma$  ont comme expressions dans le cas unidimensionnel :

$$\begin{cases} C_f = \frac{1}{2}(\Sigma_{max} + \Sigma_{min}) \\ F^\sigma = \frac{1}{2}(\Sigma_{max} - \Sigma_{min}) \end{cases} \quad (1.48)$$

$\Sigma_{max}$  et  $\Sigma_{min}$  sont respectivement les contraintes maximale et minimale du chargement uniaxial considéré.

Pour l'évaluation de la déformation plastique cumulée locale  $\varepsilon_{pc}$ , les auteurs supposent l'accommodation à l'échelle mésoscopique et utilisent l'approche simplifiée de Zarka [83] sur la modélisation inélastique des matériaux.

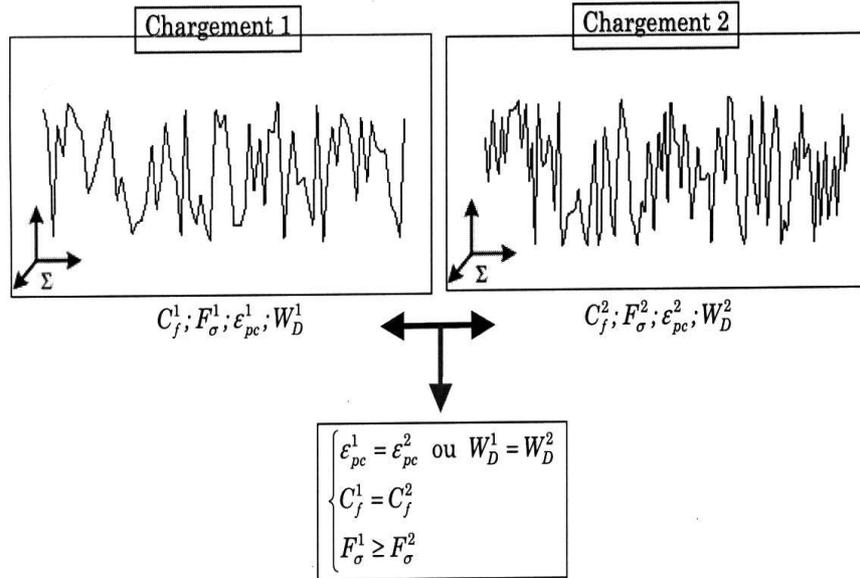


FIG. 1.15 – Règle d'équivalence entre deux chargements locaux [33]

**En fatigue uniaxiale**, les auteurs modélisent le volume élémentaire représentatif VER, à l'échelle mésoscopique, par un système à un degré de liberté représentant le matériau à écrouissage cinématique linéaire. Ce modèle est caractérisé par les paramètres suivants :

- $k_e$  : module élastique à l'échelle mésoscopique,
- $h$  : module d'écrouissage linéaire à l'échelle mésoscopique,
- $S$  : limite élastique mésoscopique ou seuil du patin.

Pour identifier ces paramètres, les auteurs ont choisi de faire certaines hypothèses. En effet, ils considèrent que :

- le module élastique mésoscopique  $k_e$  est égal au module de Young  $E$ ,
- le module d'écrouissage mésoscopique  $h$  est égal à celui à l'échelle macroscopique  $H$ ,
- la limite élastique mésoscopique  $S$  est égale à la limite d'endurance du matériau  $\sigma_{-1}^D$ .

Pour estimer la durée de vie en fatigue uniaxiale d'amplitude variable (en nombre de blocs d'amplitude variable), les auteurs ont mis au point la procédure suivante :

1. calcul du centre, de la fluctuation et de la déformation plastique cumulée pour un bloc du chargement réel.
2. évaluation de la famille des chargements cycliques équivalents associés  $(\Delta\Sigma^{eq}, N^{eq})$ .
3. choix d'un chargement équivalent particulier  $(C_f^{eq}, \Delta\Sigma^{eq}, N^{eq})$ .
4. si  $C_f^{eq} \neq 0$ , une correction avec une règle de type Goodman, Gerber ou Morrow est opérée  $\Rightarrow (0, \Delta\Sigma^{eq'}, N^{eq})$ .
5. en s'appuyant sur l'expression analytique de la courbe de Wöhler  $(\Delta\Sigma, N)$ , on détermine le nombre de cycles à amplitude constante  $(N_f)$  associé à  $\Delta\Sigma^{eq'}$ .

6. déduction du nombre de blocs à l'initiation/rupture  $N_{br} = N_f / N^{eq}$ .

La méthode présentée semble prometteuse par le fait qu'elle s'affranchit d'une technique fine de comptage de cycles. Cependant, à son stade actuel, elle nécessite quelques améliorations. Elle ne prend pas en compte l'effet de petits cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance, ni l'ordre d'apparition des cycles. Elle n'a pas encore été testée pour une large gamme de modes de sollicitations et de matériaux. Elle exige aussi de recourir à une courbe du style diagramme de Haig (Goodman, Gerber ou Soderberg) pour prendre en compte l'effet de la contrainte moyenne.

D'un autre point de vue, son extension au cas de sollicitations multiaxiales présente des difficultés du fait que le VER doit être modélisé à l'échelle mésoscopique par un système multi-paramètres. Par conséquent, le nombre de paramètres à identifier peut être important, ce qui complique cette identification (il serait nécessaire de disposer de plusieurs courbes de Wöhler, par exemple).

Néanmoins, cette méthode constitue une approche nouvelle dans sa manière d'aborder le problème de fatigue en endurance limitée. Elle a inspiré notre travail notamment dans la détermination des grandeurs mécaniques mésoscopiques du cycle stabilisé.

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procédé à une analyse détaillée de différentes méthodes de prévision de durée de vie en endurance limitée. Les méthodes présentées sont apparues durant la dernière décennie ; elles constituent les principaux axes de recherche dans le domaine de fatigue à grand nombre de cycles. Nous avons classé ces méthodes en trois catégories selon le type de chargement auquel elles s'appliquent : chargement multiaxial d'amplitude constante, chargement uniaxial variable et chargement multiaxial variable (chargement réel complexe).

Dans le cadre de la fatigue multiaxiale sous sollicitations périodiques à amplitude constante, nous avons présenté deux méthodes : la méthode de Papadopoulos [59] et celle de Susmel et Petrone [72]. Les deux adoptent le concept du plan critique. La première repose sur la définition d'une courbe de Wöhler multiaxiale exprimant la durée de vie en fonction de l'amplitude de la cission généralisée  $T_a$ , de la valeur moyenne  $\sigma_{H,m}$  et de l'amplitude  $\sigma_{H,a}$  de la pression hydrostatique. La deuxième résulte de la combinaison d'un diagramme de Wöhler modifié et du concept du plan critique. Dans ce nouveau diagramme, l'amplitude de contrainte habituellement reportée en ordonné dans le diagramme de Wöhler a été remplacée par l'amplitude de cission calculée sur le plan critique.

Les deux méthodes n'ont pas été validées avec des chargements à contrainte moyenne non nulle, ce qui limite leur application et pose des interrogations sur leur qualité de prédiction vis-à-vis d'un chargement complexe. La première est d'utilisation plus pratique que la seconde. En effet, la première nécessite une courbe de Wöhler et deux limites de fatigue alors que la seconde exige une courbe de Wöhler supplémentaire.

Dans le cadre de la fatigue sous charges variables, nous avons distingué la fatigue uniaxiale variable et la fatigue sous sollicitations multiaxiales variables. En effet, les premières études ont abordé la fatigue uniaxiale variable et ont contribué au développement de méthodes de prévision de durée de vie sous sollicitations multiaxiales variables. Nous avons discerné aussi les méthodes qui adoptent une technique de comptage de cycles de celles qui s'affranchissent d'une telle technique.

Il est habituel, pour une sollicitation uniaxiale, d'utiliser une méthode de comptage afin de décomposer la séquence étudiée en cycles élémentaires simples faciles à mettre en œuvre dans tout processus de prévision de durée de vie en fatigue. Une méthode basée sur une technique de comptage de cycles se compose généralement d'une méthode de comptage de cycles (comptage Rainflow), une loi de dommage et de cumul (Miner) et une courbe de Wöhler.

D'une manière générale, les méthodes adoptant une technique de comptage de cycles sous sollicitations multiaxiales variables, nécessitent une définition d'une variable de comptage selon laquelle se fait l'extraction des cycles multiaxiaux. Cette variable diffère d'un chercheur à un autre. Soit par exemple, pour Wang et Brown, la variable de comptage est basée sur l'évolution relative de la déformation équivalente de von Mises par rapport à des maximums rencontrés le long de la séquence multiaxiale. Pour Macha et Bedkowsky, il s'agit d'une contrainte équivalente sur le plan critique, faisant intervenir la contrainte normale et la cisssion résolue. Le repérage du plan critique nécessite l'utilisation d'un traitement statistique. Dans les versions récentes de la méthode de Robert, il s'agit de la contrainte normale  $\sigma_{h_0 h_0}(t)$  au plan fixe  $\pi_0$  ( $\varphi_0 = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$ ,  $\gamma_0 = \frac{\pi}{\sqrt{19}}$ ) pour la méthode du dommage par plan, et de la contrainte normale par plan pour le principe du comptage et dommage plan par plan. Finalement, pour Lagoda et Macha, la variable de comptage est homogène à une densité volumique d'énergie de déformation. Une fois que les cycles sont extraits, la durée de vie de chaque cycle est calculée par l'intermédiaire d'un critère de fatigue multiaxial. Ensuite, une loi de dommage de type Miner permet de calculer et de cumuler le dommage généré par la séquence. La méthode de Robert qui nécessite le plus d'information sur le matériau (3 courbes de Wöhler), est la plus difficile d'emploi. Enfin, l'utilisation des méthodes de comptage dans le cadre des chargements complexes est le point le plus discutable et n'est pas un pré-requis pour prévoir la durée de vie d'une pièce.

D'autre part, très peu de méthodes dispensent d'une technique de comptage de cycles. Nous distinguons la méthode de Stephanov, la méthode de Preumont, Piéfort et Pitoiset, la loi d'endommagement de Papadopoulos, la méthode de Morel et la méthode de Zarka-Karaoui. La première, développée sans réels fondements physiques, n'est pas applicable aux chargements complexes. Quant à la seconde, sa formulation se limite aux chargements à moyenne nulle. En revanche, la loi de dommage de Papadopoulos et la méthode de Morel semblent être les mieux justifiées physiquement mais Papadopoulos restreint l'utilisation de sa méthode aux chargements proportionnels, quant à Morel, sa méthode est relativement compliquée et ne s'applique que pour les matériaux doux. La méthode de Zarka-Karaoui utilise une règle d'équivalence entre deux chargements locaux, et par suite la définition d'un chargement cyclique affine simple équivalent en terme du dommage au chargement réel d'amplitude variable. Les auteurs tiennent compte de l'effet de la contrainte moyenne en adoptant une correction classique du style diagramme de Haig. L'extension effective de leur méthode aux chargements multiaxiaux d'amplitude variable reste à faire et à valider.

# Chapitre 2

## Proposition d'un modèle de prévision de la durée de vie en endurance limitée

### 2.1 Introduction

L'évaluation de la durée de vie en fatigue des structures industrielles généralement soumises à des chargements complexes à caractère multiaxial d'amplitude variable présente un intérêt majeur pour toutes les industries. La plupart d'entre elles affrontent le problème de fatigue à grand nombre de cycles en endurance limitée. Dans ce domaine, très peu de critères sont proposés.

On y distingue en majorité les critères basés sur une technique de comptage de cycles [11, 45, 80, 81] se composant généralement d'une méthode de comptage de cycles (le plus souvent, la méthode de comptage Rainflow), un calcul de dommage sur un plan critique et une loi de cumul de type Miner [50] ou Lemaitre-Chaboche [42, 43]. L'utilisation de telles méthodes dans le cas général d'un chargement complexe dont les composantes du tenseur des contraintes ont des évolutions propres totalement découplées, est le point le plus discutable. En effet, il est difficile voire impossible d'identifier et d'extraire des cycles. De plus, ces méthodes sont fondées sur des aspects purement mathématiques ; elles ignorent souvent le comportement réel des matériaux en présence.

D'autres approches proposées par Papadopoulos [58] et Morel [52] utilisent la déformation plastique mésoscopique cumulée comme variable de dommage et supposent que la rupture se produit quand cette variable atteint une valeur critique. Les deux approches semblent les mieux fondées physiquement. En revanche, la méthode de Papadopoulos est utilisable seulement pour les chargements proportionnels, celle de Morel est relativement compliquée à utiliser et ne s'applique qu'aux matériaux métalliques vérifiant  $0.5 < \tau_{-1}^D / \sigma_{-1}^D < 0.6$ . Récemment, Papadopoulos avait proposé un modèle de prévision de durée de vie en endurance limitée applicable seulement aux chargements multiaxiaux proportionnels et non proportionnels d'amplitude constante [59].

Dans ce modèle, il établit une courbe de Wöhler multiaxiale exprimant la durée de vie en fonction de l'amplitude de la cisssion généralisée  $T_a$ , de la valeur moyenne  $\sigma_{H,m}$  et de l'amplitude  $\sigma_{H,a}$  de la pression hydrostatique.

Aucune des approches présentées dans le premier chapitre ne répond totalement aux problèmes industriels. Notre but est de proposer un modèle qui satisfait ces besoins. La tâche est difficile, il s'agit de construire **un modèle phénoménologique**, prédictif sur structures et d'utilisation simple. Il doit s'appliquer à une grande variété de matériaux métalliques et traiter presque tous les cas de charges possibles.

On s'intéresse au domaine de l'endurance limitée, il paraît donc nécessaire pour que le modèle soit réaliste qu'il soit fondé à l'échelle mésoscopique puisque la fatigue polycyclique est un phénomène débutant au niveau des grains. En modélisant le phénomène d'amorçage de fissure en fatigue polycyclique dans les matériaux métalliques polycristallins, Dang Van [5, 23, 58] avait distingué deux échelles : l'échelle macroscopique et l'échelle mésoscopique. L'échelle macroscopique est définie par un volume élémentaire représentatif (V.E.R.) supposé homogène et isotrope contenant un grand nombre de grains (cristaux) d'orientation, de formes et d'états internes différents. Cependant, l'échelle mésoscopique est de l'ordre de la taille des grains qui constituent une partition de V.E.R. En fatigue polycyclique, certains grains (cristaux) défavorablement orientés par rapport au chargement peuvent plastifier alors que le reste de la matrice (V.E.R.) a une réponse adapté ou purement élastique.

Dans ce chapitre, on propose un modèle déterministe de prévision de durée de vie à l'amorçage en endurance limitée applicable pour tout type de séquences répétées de chargement multiaxial d'amplitude variable. Ce modèle se caractérise par sa simplicité pour permettre son utilisation en bureaux d'études ; il s'applique à de grandes variétés de matériaux métalliques sans la prise en compte de l'effet d'entaille. Il utilise en partie les idées proposées par Dang Van, Papadopoulos et Morel. Il est basé sur une approche mésoscopique et sur l'utilisation de la déformation plastique mésoscopique cumulée (ou de manière équivalente l'énergie dissipée) du cycle stabilisé comme variable de dommage. Mais, contrairement à Morel, la rupture n'est pas liée à une valeur critique de la déformation plastique mésoscopique cumulée, elle est définie par une relation à l'échelle mésoscopique entre cette grandeur et la durée de vie à l'amorçage  $N_R$ . De plus, le critère de plasticité à l'échelle mésoscopique est différent : le modèle de plasticité de Schmid est remplacé par un modèle élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire avec une limite élastique mésoscopique dépendant de la pression hydrostatique. Rappelons que, bien que la plasticité des grains soit indépendante de la pression hydrostatique, ce modèle phénoménologique a été adopté pour tenir compte du fait que la nucléation des microfissures est un phénomène complexe faisant intervenir non seulement la plasticité, mais aussi la création et la croissance des vides. Or, cette dernière est dépendante de la pression hydrostatique.

C'est pourquoi, nous avons choisi d'utiliser un critère de « plasticité » qui prend en compte cette influence. Dans le cas particulier de chargements cycliques affines à amplitude constante, la loi mésoscopique pour la prévision de la durée de vie en fatigue est définie par une relation de puissance entre la durée de vie à l'amorçage  $N_R$  et la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$ . D'une manière générale, elle est définie par un facteur de dommage  $D$  dépendant de  $\varepsilon_s^{pc}$  et de certains paramètres caractéristiques du matériau et du chargement.

## 2.2 Choix de l'approche macro-méso (Dang Van)

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons à la fatigue polycyclique. Dans un tel régime, une pièce mécanique peut se rompre après un nombre parfois élevé de cycles du chargement appliqué, alors même que les contraintes induites n'ont jamais dépassé la limite élastique conventionnelle, et que la réponse de la structure est élastique, c'est-à-dire linéaire et réversible. Selon ce type de comportement, il n'y a aucune dissipation et par conséquent aucun endommagement. Pourtant, la rupture survient après un grand nombre de cycles (de l'ordre de quelques millions). Ce problème a intéressé un grand nombre de chercheurs qui ont tenté de le comprendre et de l'expliquer. Des études expérimentales ont permis de comprendre les mécanismes physiques de la fatigue polycyclique, mais elles n'ont généralement pas conduit à des outils quantitatifs de prédiction sur structures. Les approches phénoménologiques se sont révélées plus pratiques pour l'industrie. C'est notamment le cas des théories fondées sur les concepts d'adaptation à toutes les échelles initiées par Dang Van [23], et que Mandel [48] exprime par : « la rupture qui intervient dans des conditions où en se référant au critère macroscopique, on devrait avoir adaptation parfaite, est due au caractère approximatif du critère macroscopique . . . en effet dans les grains peuvent se produire de petites déformations irréversibles contenues ».

Pour une explication plus détaillée, considérons un milieu continu observé à l'échelle macroscopique. Il est bien connu que la matière est formée d'atomes et donc essentiellement discontinue. Dans les métaux, les atomes forment des empilements réguliers appelés cristaux. Les pièces métalliques que l'on considère habituellement sont des agrégats de ces cristaux appelés grains dont les dimensions varient de quelques microns à quelques millimètres. Les grains sont individuellement anisotropes, mais si on considère un agrégat d'un nombre suffisamment grand de grains, le comportement à l'échelle macroscopique devient isotrope. Le volume élémentaire représentatif (V.E.R) associé à la description macroscopique de l'agrégat à l'aide de la mécanique des milieux continus doit donc englober un nombre suffisant de grains. Les contraintes et les déformations déterminées à l'échelle macroscopique sont une sorte de « moyennes » dans le (V.E.R) des champs de contraintes et de déformations qui y règnent au niveau des grains. La réponse macroscopique d'un agrégat polycristallin peut être élastique, cependant certains grains défavorablement orientés peuvent plastifier et conduire à la rupture de la pièce après l'accumulation au cours de cycles de petites déformations irréversibles induites au niveau de ces grains.

Il est ainsi apparu intéressant pour construire un modèle réaliste de fatigue polycyclique de prendre en compte les mécanismes de dissipation à l'échelle mésoscopique où le volume élémentaire représentatif est de l'ordre de quelques grains. Dang Van [23], Papadopoulos [56] et Morel [51] avaient formulé leurs critères sur une analyse mésoscopique de fatigue rapportée aux grandeurs macroscopiques pour les besoins de calcul. Nous partons aussi sur ce choix et nous construisons le modèle à l'échelle mésoscopique.

## 2.2.1 Rappel des relations générales du passage à l'échelle mésoscopique

L'approche mésoscopique (ou approche macro-méso) est caractérisée par un passage de l'échelle macroscopique à l'échelle mésoscopique. L'échelle macroscopique est par définition celle où le volume élémentaire représentatif associé  $V(\underline{x})$  est supposé homogène et isotrope, dans lequel les tenseurs des contraintes  $\Sigma(\underline{x})$  et des déformations  $\mathbf{E}(\underline{x})$  sont constants. Le volume  $V(\underline{x})$  est de l'ordre de celui d'une maille de la discrétisation de la structure en éléments finis ou de la taille d'une jauge de déformation. Pourtant, dans le cas des métaux, ce volume contient de nombreux cristaux d'orientation, de formes et d'états internes différents. Cela amène à définir une échelle mésoscopique de l'ordre de la taille des grains qui constituent une partition de  $V(\underline{x})$ . L'état mécanique des grains est décrit par les contraintes  $\sigma(\underline{y}, \underline{x})$  et les déformations  $\varepsilon(\underline{y}, \underline{x})$  mésoscopiques où  $\underline{y}$  désigne la position du cristal dans le repère local associé à  $V(\underline{x})$ . Les grandeurs  $\sigma$  et  $\varepsilon$  ne sont pas homogènes dans  $V(\underline{x})$ , et par conséquent, différentes de  $\Sigma(\underline{x})$  et de  $\mathbf{E}(\underline{x})$ . En général, le passage des grandeurs mésoscopiques du cristal (i.e. du grain) aux grandeurs macroscopiques du polycristal (i.e. du volume  $V(\underline{x})$ ), ne peut pas se faire par une opération directe de moyenne.

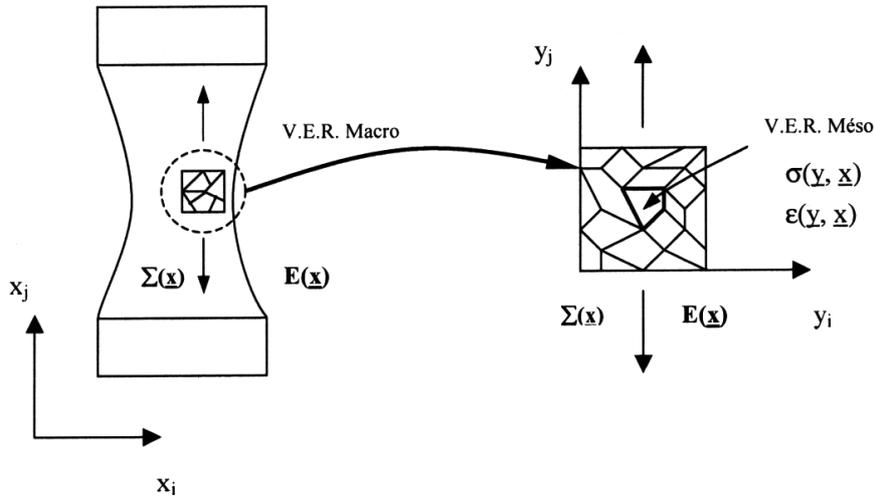


FIG. 2.1 – Echelles macroscopique et mésoscopique pour un métal polycristallin

Cependant, Hill [32] et Mandel [47] ont défini une condition connue sous le nom d'hypothèse de macro-homogénéité, par laquelle l'opération directe de moyenne est correcte. Dans ce cas, à partir de tout champ de déformations  $\varepsilon(\underline{y}, \underline{x})$  cinématiquement admissible et de tout champ de contrainte  $\sigma(\underline{y}, \underline{x})$  statiquement admissible, ces deux champs n'étant pas nécessairement associés, on peut calculer la déformation macroscopique  $\mathbf{E}(\underline{x})$  et la contrainte macroscopique  $\Sigma(\underline{x})$  par des moyennes directes [15, 16] :

$$\mathbf{E}(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon(\underline{y}, \underline{x}) dV_y \quad (2.1)$$

$$\Sigma(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V \sigma(\underline{y}, \underline{x}) dV_y \quad (2.2)$$

Par contre, on ne peut pas écrire de relations analogues pour les parties élastique et plastique de la déformation dont les définitions sont :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p(\underline{y}, \underline{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}, \underline{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^e(\underline{y}, \underline{x}) \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\underline{y}, \underline{x}) = \boldsymbol{l}^{-1}(\underline{y}, \underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{y}, \underline{x}) \quad (2.4)$$

et

$$\boldsymbol{E}^p(\underline{x}) = \boldsymbol{E}(\underline{x}) - \boldsymbol{E}^e(\underline{x}) \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{E}^e(\underline{x}) = \boldsymbol{L}^{-1}(\underline{x}) : \boldsymbol{\Sigma}(\underline{x}) \quad (2.6)$$

où  $\boldsymbol{l}^{-1}(\underline{y}, \underline{x})$  et  $\boldsymbol{L}^{-1}(\underline{x})$  sont respectivement les tenseurs mésoscopique et macroscopique des compliances élastiques.

Les relations correctes de passage méso-macro pour les parties plastique et élastique de la déformation ont été établies par Mandel [47]. Elles font intervenir le tenseur de localisation des contraintes  $\boldsymbol{A}(\underline{y})$  qui associe à la contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma}(\underline{x})$ , la contrainte mésoscopique fictive  $\boldsymbol{A}(\underline{y}) \boldsymbol{\Sigma}(\underline{x})$ , qui existerait si le milieu était purement élastique. On obtient alors les relations suivantes :

$$\boldsymbol{E}(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}, \underline{x}) : \boldsymbol{A}(\underline{y}) dV_y \quad (2.7)$$

et :

$$\boldsymbol{E}^e(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^e(\underline{y}, \underline{x}) : \boldsymbol{A}(\underline{y}) dV_y \quad (2.8)$$

qui, par soustraction, conduisent à :

$$\boldsymbol{E}^p(\underline{x}) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^p(\underline{y}, \underline{x}) : \boldsymbol{A}(\underline{y}) dV_y \quad (2.9)$$

Des équations (2.2) et (2.7), on tire :

$$\frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{A}(\underline{y}) dV_y = \boldsymbol{I} \quad (2.10)$$

où  $\boldsymbol{I}$  est le tenseur unité d'ordre 4. Par contre, les relations (2.8) et (2.9) ne peuvent en général pas être ramenées à des formes aussi simples que l'équation (2.2).

Le tenseur des contraintes mésoscopiques  $\boldsymbol{\sigma}(\underline{y}, \underline{x})$  peut clairement toujours être décomposé de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{y}, \underline{x}) = \boldsymbol{\sigma}^{el}(\underline{y}, \underline{x}) + \boldsymbol{\rho}(\underline{y}, \underline{x}) \quad (2.11)$$

où  $\boldsymbol{\rho}(\underline{y}, \underline{x})$  est le champ des contraintes résiduelles mésoscopiques et  $\boldsymbol{\sigma}^{el}(\underline{y}, \underline{x})$  le champ de contraintes fictives qui existerait si le milieu était purement élastique. Selon Mandel, on a :

$$\boldsymbol{\sigma}^{el}(\underline{y}, \underline{x}) = \boldsymbol{A}(\underline{y}) : \boldsymbol{\Sigma}(\underline{x}) \quad (2.12)$$

d'où la relation :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{y}, \underline{x}) = \boldsymbol{A}(\underline{y}) : \boldsymbol{\Sigma}(\underline{x}) + \boldsymbol{\rho}(\underline{y}, \underline{x}) \quad (2.13)$$

qui constitue la relation fondamentale du passage à l'échelle mésoscopique pour les contraintes.

## 2.3 Modèle initial de prédiction de durée de vie en fatigue

### 2.3.1 Description générale du modèle

On ne s'intéresse qu'au phénomène de fatigue à grand nombre de cycles, plus précisément au domaine de l'endurance limitée où l'on parle de durées de vie finies s'étendant de  $5 \cdot 10^4$  à  $10^7$  (ce champ de variation du nombre de cycles dépend du matériau considéré). En conséquence, à l'échelle macroscopique, le matériau a un comportement purement élastique (pas de déformation plastique macroscopique décelable) ou a un état limite adapté après stabilisation des premiers cycles. Cependant, à l'échelle mésoscopique, le lieu privilégié du processus d'endommagement par fatigue polycyclique, de déformations plastiques mésoscopiques peuvent se produire dans des grains défavorablement orientés ou entre ces derniers. Dang Van, dans son approche de fatigue polycyclique, suppose l'adaptation à l'échelle mésoscopique puisqu'il traite le cas de l'endurance illimitée où la durée de vie de la structure est théoriquement infinie. Comme ici, c'est le domaine de l'endurance limitée qui est considéré, le matériau n'est plus adapté à l'échelle mésoscopique ; on suppose conformément à la proposition faite dans [20] qu'il atteint un état limite accommodé.

Le modèle proposé est basé sur les points suivants qu'on va développer.

1. Les contraintes mésoscopiques sont évaluées en utilisant les relations de passage macro-méso rappelées en (2.13) mais qui seront simplifiées grâce à certaines hypothèses que nous adopterons.
2. A l'échelle mésoscopique, le matériau est supposé avoir un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire, avec une limite élastique mésoscopique dépendant de la pression hydrostatique.
3. La variable de dommage choisie est la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$ . Son calcul est fait par la méthode directe ou par la méthode simplifiée de Zarka.
4. La loi mésoscopique pour la prévision de la durée de vie en fatigue est définie par une relation entre la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  et la durée de vie à l'amorçage  $N_R$ . Elle est sous forme de puissance pour les chargements cycliques affines d'amplitude constante. L'extension de cette loi pour considérer les séquences répétées de chargement multiaxial d'amplitude variable se fait par la définition d'un facteur de dommage  $D$ . Ce facteur dépend de  $\varepsilon_s^{pc}$ , de  $N_R$  et de certains paramètres caractéristiques du matériau et du chargement. La loi mésoscopique de durée de vie en fatigue sera détaillée dans la section portant sur le modèle de prédiction finalement adopté.

### 2.3.2 Relations de passage macro-méso en fatigue polycyclique

Les conditions de passage entre les grandeurs mésoscopiques et macroscopiques ont été détaillées au paragraphe (2.2.1). Leur application exige la connaissance du tenseur de localisation  $\mathbf{A}$  en tout point du VER, ce qui ne peut se faire sans simplifications. Dans ce but, on adopte les hypothèses suivantes [5] :

- (H1) le grain est considéré comme une inclusion dans une matrice élastique ;
- (H2) la matrice impose sa déformation au cristal (grain) ;
- (H3) le grain et la matrice sont isotropes et possèdent les mêmes coefficients élastiques.

Les hypothèses (H1) et (H2) permettent d'écrire la relation suivante :

$$\mathbf{E}(\underline{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}, \underline{x}) \quad (2.14)$$

Qu'on note simplement :

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.15)$$

Or d'après le paragraphe (2.3.1) nous avons vu qu'en fatigue polycyclique, aucune plasticité n'est détectable à l'échelle macroscopique (au moins après un certain nombre de cycles appliquées). Nous pouvons donc réécrire l'équation (2.15) sous la forme :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.16)$$

Dans l'hypothèse (H3), le grain et la matrice sont considérés isotropes et possèdent les mêmes coefficients élastiques, c'est-à-dire que :

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} \Leftrightarrow (L_{ijkl}) = (l_{ijkl}) = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \quad (2.17)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé communs à la matrice et à l'inclusion. En multipliant les deux membres de l'équation (2.16) par le tenseur d'élasticité  $\mathbf{L} = \mathbf{l}$ , il vient :

$$\Sigma_{ij} = (2\mu \varepsilon_{ij}^e + \lambda \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij}) + (2\mu \varepsilon_{ij}^p + \lambda \varepsilon_{kk}^p \delta_{ij}) \quad (2.18)$$

Le premier terme du membre à droite n'est autre que la composante (ij) du tenseur des contraintes mésoscopiques  $\boldsymbol{\sigma}$  ; le second terme est égal à  $\mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}^p$ . On a donc, d'après l'équation précédente :

$$\boldsymbol{\sigma}(M, t, m) = \boldsymbol{\Sigma}(M, t) - \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.19)$$

La comparaison des équations (2.13) et (2.19) nous permet d'identifier les tenseurs  $\mathbf{A}$  et  $\boldsymbol{\rho}$  dans le cadre des hypothèses traduites par les équations (2.16) et (2.17). Le tenseur de localisation se réduit au tenseur unité :

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (2.20)$$

Une conséquence directe de ces hypothèses est que les contraintes mésoscopiques fictives  $\sigma^{el}$  qui existeraient dans le grain si celui-ci avait un comportement purement élastique, sont égales aux contraintes macroscopiques  $\Sigma$  :

$$\sigma^{el} = \Sigma \quad (2.21)$$

Le tenseur de contraintes résiduelles  $\rho$  est :

$$\rho = -L : \varepsilon^p \quad (2.22)$$

On décompose le tenseur de déformation plastique mésoscopique  $\varepsilon^p$  en deux parties :

$$\varepsilon^p = \varepsilon_d^p + \varepsilon_h^p \mathbf{I} \quad (2.23)$$

où  $\varepsilon_d^p$  et  $\varepsilon_h^p \mathbf{I}$  sont respectivement les parties déviatorique et sphérique du tenseur total de déformation plastique mésoscopique  $\varepsilon^p$ .

Le tenseur de contraintes résiduelles  $\rho$  se réécrit donc comme suit :

$$\begin{aligned} \rho &= -[\lambda \operatorname{tr} \varepsilon^p \mathbf{I} + 2\mu (\varepsilon_d^p + \varepsilon_h^p \mathbf{I})] \\ &= -[(3\lambda + 2\mu) \varepsilon_h^p \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon_d^p] \end{aligned} \quad (2.24)$$

De l'équation (2.24), on peut conclure que les pressions hydrostatiques mésoscopique  $p$  et macroscopique  $P$  ne sont pas égales car  $\operatorname{tr} \rho$  est non nul. Elles sont reliées par :

$$p = P - (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_h^p \quad (2.25)$$

$$p = P - \bar{\lambda} \varepsilon_h^p \quad \text{avec} \quad \bar{\lambda} = \frac{E}{1 - 2\nu} \quad (2.26)$$

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

### 2.3.3 Comportement mécanique à l'échelle mésoscopique

Nous choisissons un comportement mécanique susceptible de rendre compte, au niveau mésoscopique, des principaux facteurs intervenant dans la nucléation des fissures de fatigue c'est-à-dire la plasticité mésoscopique et l'endommagement local (présence de vides). C'est pourquoi un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire avec une limite élastique mésoscopique  $k(p)$  dépendant de la pression hydrostatique instantanée, a été adopté. Il s'apparente ainsi à un critère de Drucker-Prager à écrouissage cinématique linéaire.

Le critère de plasticité possède la forme suivante :

$$f(\sigma, c\varepsilon^p, p) = f(s, c\varepsilon^p, p) = \sqrt{\frac{1}{2}(s - c\varepsilon^p) : (s - c\varepsilon^p)} - k(p) \leq 0 \quad (2.27)$$

où  $f(\sigma, c\varepsilon^p, p)$  est la fonction de charge,  $c$  le module d'écrouissage linéaire à l'échelle mésoscopique,  $s = \operatorname{dev} \sigma$  est le déviateur de contraintes et  $p$  la pression hydrostatique mésoscopique.

Dans l'espace des déviateurs des contraintes,  $f = 0$  définit une hypersphère de centre  $c \varepsilon^p$  et de rayon  $k(p)$  (cf figure 2.2). La limite élastique mésoscopique  $k(p)$  est considérée comme dépendant de la pression hydrostatique instantanée  $p(t)$ . Ce modèle doit permettre de tenir compte de l'effet de la pression hydrostatique en traction et en compression sur la durée de vie en fatigue. Cet effet n'est plus le même en traction et en compression. Les observations expérimentales ont mis en évidence qu'en présence d'une pression hydrostatique positive, la durée de vie de l'éprouvette ou de la pièce diminue. L'effet inverse se produit avec une pression hydrostatique de compression. Pour la modélisation de ce double effet et pour des raisons de simplification, nous avons choisi une loi d'évolution bilinéaire de  $k(p)$  (voir figure 2.3). Elle est donnée par l'équation (2.28) :

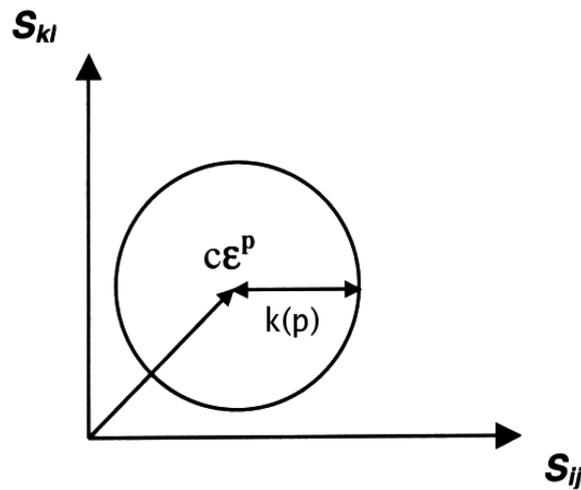


FIG. 2.2 – Domaine d'élasticité dans l'espace des déviateurs

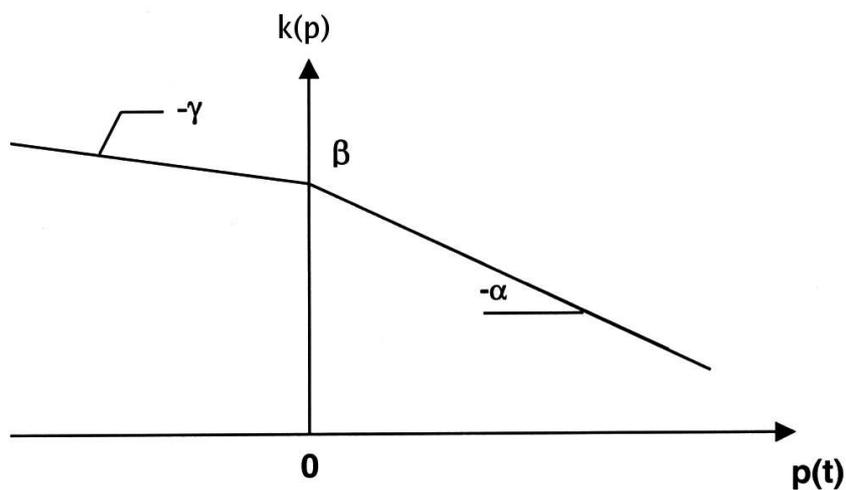


FIG. 2.3 – Loi d'évolution de la limite élastique mésoscopique  $k(p)$

La loi d'évolution bilinéaire de la limite élastique mésoscopique  $k(p)$  est :

$$\begin{cases} k(p) = \beta - \alpha p(t) & \text{pour } p(t) \geq 0 \\ k(p) = \beta - \gamma p(t) & \text{pour } p(t) < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres dépendant du matériau.

La vitesse du tenseur de déformation plastique mésoscopique  $\varepsilon^p$  est régie par la règle de normalité :

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad f \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda f = 0 \quad (2.29)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur plastique.

### 2.3.4 Choix du paramètre du dommage

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons à la tenue en fatigue des structures travaillant à grand nombre de cycles, et plus précisément dans le régime fini de durées de vie. En fatigue polycyclique, le matériau a un comportement purement élastique ou atteint un état limite adapté à l'échelle macroscopique. A cette échelle, les déformations plastiques macroscopiques sont nulles ou bénignes dues à la stabilisation des premiers cycles. A l'échelle mésoscopique et en endurance illimitée, on a le même comportement qu'à l'échelle macroscopique. On dit donc qu'il y a adaptation à toutes les échelles. Cependant, à l'échelle mésoscopique mais en régime fini de durées de vie, le matériau atteint un état limite accommodé selon la proposition de Constantinescu et al. [20]. Les déformations plastiques mésoscopiques induites au niveau des grains défavorablement orientés peuvent être à l'origine du processus du dommage par fatigue polycyclique et dont l'accumulation au cours de cycles peut conduire à la rupture.

Plusieurs chercheurs ont fait le choix de la déformation plastique mésoscopique cumulée  $\varepsilon^{pc}$  comme paramètre du dommage. A titre d'exemple, nous citons Papadopoulos [58], Morel [52] et Zarka & Karaouni [84]. Elle est donnée par :

$$\varepsilon^{pc}(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p(\tau) : \dot{\varepsilon}^p(\tau)} d\tau \quad (2.30)$$

Dans notre proposition de prévision de durée de vie en fatigue, nous choisissons la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  comme paramètre de dommage. Son calcul s'avère lourd et coûteux. Pour simplifier la tâche, nous utilisons pour son évaluation soit la méthode directe [3, 46, 49] décrite dans le paragraphe suivant, soit la méthode simplifiée de Zarka [83] dans le cas du comportement simplifié adopté plus loin.

### 2.3.5 Evaluation de $\varepsilon_s^{pc}$ par la méthode directe

Pour évaluer la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$ , il faut calculer localement les quantités  $\varepsilon_d^p$  et  $\varepsilon_h^p$  pour tout le trajet de chargement jusqu'à l'obtention d'un état stabilisé. Leurs évolutions sont régies par la règle de normalité :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_d^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \\ \dot{\varepsilon}_h^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial p} \end{cases} \quad f \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda f = 0 \quad (2.31)$$

où

$$f = f(\mathbf{s}, c \varepsilon_d^p, p) = \sqrt{(\mathbf{s} - c \varepsilon_d^p) : (\mathbf{s} - c \varepsilon_d^p)} - \sqrt{2} k(p) \quad (2.32)$$

L'évaluation des quantités  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}$  et  $\frac{\partial f}{\partial p}$  permet d'écrire l'équation (2.31) sous une autre forme :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_d^p = \lambda \frac{\mathbf{s} - c \varepsilon_d^p}{\|\mathbf{s} - c \varepsilon_d^p\|} \\ \dot{\varepsilon}_h^p = \sqrt{2} \lambda \bar{k} \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\text{où } \bar{k} = \begin{cases} \alpha & \text{si } p > 0 \\ \gamma & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

Le calcul de  $\varepsilon^p$  est fait incrémentalement. L'utilisation de la méthode simplifiée, présentée plus loin, est recommandée si la limite élastique mésoscopique  $k(p)$  est indépendante de  $p$ , ou si elle ne dépend que de  $P$ . Pour le modèle étudié à ce stade, son adoption n'est pas préférable du fait que les pressions hydrostatiques mésoscopique  $p$  et macroscopique  $P$  ne sont pas égales. En effet, dans le cas actuel,  $p$  est fonction de  $P$  et de  $\varepsilon_h^p$ . Par suite, le calcul sur un incrément donné ( $P$  donné) nécessite des itérations du fait de la dépendance de  $k(p)$  en  $p$  qui est fonction de  $\varepsilon_h^p$ . Cela rend la procédure globale très lourde et coûteuse et donc inutilisable en bureau d'études. Nous choisissons donc, pour l'évaluation de  $\varepsilon_s^{pc}$ , d'adopter la méthode directe qui ne présente pas ce genre de problèmes.

#### 2.3.5.1 Présentation de la méthode directe

L'objectif de la méthode cyclique directe [3, 46, 49] est de rechercher directement le cycle stabilisé d'une structure soumise à un chargement périodique. Elle est itérative. Elle consiste, pour l'évaluation de  $\varepsilon_s^{pc}$ , à déterminer des solutions plastiquement admissibles sur tout le cycle de chargement à partir des solutions précédentes en supposant connues les grandeurs mécaniques à l'instant initial  $t_1$  du début de cycle. Le processus itératif est répété en forçant la périodicité des déformations plastiques jusqu'à l'obtention de l'état stabilisé. Autrement dit, on repart à l'étape suivante avec comme valeur initiale de  $\varepsilon_1^p$  du début de cycle, celle  $\varepsilon_n^p$  de fin de cycle.

Plus précisément, pour la recherche de  $\varepsilon_s^{pc}$ , on discrétise le chargement de période  $T$  en  $n$  instants ( $t_i, i = 1, n$ ). On détermine les grandeurs mécaniques à chaque instant  $t_i$  du cycle stabilisé. On cumule ensuite les normes  $\|\varepsilon_i^p - \varepsilon_{i-1}^p\|$  sur tout le cycle. Deux cas peuvent se présenter :

- cas élastique :  $\varepsilon_i^p = \varepsilon_{i-1}^p \Rightarrow \Delta\varepsilon^p = \mathbf{0}$  ;
- cas élastoplastique (recherche de solution plastiquement admissible) :  $\varepsilon_i^p \neq \varepsilon_{i-1}^p \Rightarrow \Delta\varepsilon^p \neq \mathbf{0}$  ;

En pratique : connaissant  $\sigma_i, \varepsilon_i^p$  (donc  $s_i$  et  $p_i$ ) et  $\Delta\Sigma$ , on détermine :

$$s_{i+1}^* = s_i + \Delta S \quad (2.34)$$

$$p_{i+1}^* = p_i + \Delta P \quad (2.35)$$

On calcule ensuite la fonction  $f(s_{i+1}^*, c\varepsilon_{di}^p, p_{i+1}^*)$  et on teste :

- si  $f < 0$ , la réponse est donc élastique ; on a :  $\Delta\varepsilon^p = \mathbf{0}$  ( $\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p$ ) et  $\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\Sigma$  ; on en déduit :

$$p_{i+1} = p_{i+1}^* = p_i + \Delta P \quad (2.36)$$

$$s_{i+1} = s_{i+1}^* = s_i + \Delta S \quad (2.37)$$

- si  $f \geq 0$ , la réponse est élastoplastique ; on a alors :  $\Delta\varepsilon^p \neq \mathbf{0}$  ( $\varepsilon_{i+1}^p \neq \varepsilon_i^p$ ). Le calcul de  $\Delta\varepsilon^p$  est effectué de manière implicite de façon à obtenir une solution plastiquement admissible à l'instant  $i + 1$ , soit :  $f(s_{i+1}, c\varepsilon_{di+1}^p, p_{i+1}) = 0$  ; comme  $\Delta\varepsilon^p \neq \mathbf{0}$ , on a alors :

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \mathbf{L} : (\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p) \quad (2.38)$$

La matrice impose sa déformation au cristal, on a donc  $\Delta\varepsilon = \Delta E$  et l'équation (2.38) devient :

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\Sigma - \mathbf{L} : \Delta\varepsilon^p \quad (2.39)$$

Il en résulte :

$$\begin{cases} s_{i+1} = s_i + \Delta S - 2\mu \Delta\varepsilon_d^p \\ p_{i+1} = p_i + \Delta P - \frac{1}{3} tr(\mathbf{L} : \Delta\varepsilon^p) \end{cases} \quad (2.40)$$

or,

$$\mathbf{L} : \Delta\varepsilon^p = \lambda tr \Delta\varepsilon^p \mathbf{I} + 2\mu (\Delta\varepsilon_d^p + \Delta\varepsilon_h^p \mathbf{I}) \quad (2.41)$$

$$= (3\lambda + 2\mu) \Delta\varepsilon_h^p \mathbf{I} + 2\mu \Delta\varepsilon_d^p \quad (2.42)$$

On écrit donc :

$$p_{i+1} = p_i + \Delta P - (3\lambda + 2\mu) \Delta\varepsilon_h^p = p_i + \Delta P - \bar{\lambda} \Delta\varepsilon_h^p \quad (2.43)$$

En remplaçant chaque terme par sa valeur dans l'équation  $f(\mathbf{s}_{i+1}, c \boldsymbol{\varepsilon}_{di+1}^p, p_{i+1}) = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_i + \Delta \mathbf{S} - 2\mu \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_d^p - c \boldsymbol{\varepsilon}_{di}^p - c \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_d^p\| &= \sqrt{2} k(p_{i+1}) \\ \|\mathbf{s}_i + \Delta \mathbf{S} - c \boldsymbol{\varepsilon}_{di}^p - (c + 2\mu) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_d^p\| &= \sqrt{2} (\beta - \bar{k} (p_i + \Delta P) + \bar{\lambda} \bar{k} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_h^p) \\ \|\boldsymbol{\xi}_i^* - (c + 2\mu) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_d^p\| &= \sqrt{2} (k^* + \bar{\lambda} \bar{k} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_h^p) \end{aligned} \quad (2.44)$$

où

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_i^* &= \mathbf{s}_i + \Delta \mathbf{S} - c \boldsymbol{\varepsilon}_{di}^p \\ k^* &= \beta - \bar{k} (p_i + \Delta P) \end{cases} \quad (2.45)$$

$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_d^p$ ,  $(\mathbf{s}_{i+1} - c \boldsymbol{\varepsilon}_{di+1}^p)$  et  $\boldsymbol{\xi}_i^*$  ont même direction comme l'on a :

$$\mathbf{s}_{i+1} - c \boldsymbol{\varepsilon}_{di+1}^p = \boldsymbol{\xi}_i^* - (c + 2\mu) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_d^p \quad (2.46)$$

L'incrément de la partie déviatorique de déformation plastique  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_d^p$  s'écrit donc :

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_d^p &= \lambda \frac{\mathbf{s}_{i+1} - c \boldsymbol{\varepsilon}_{di+1}^p}{\|\mathbf{s}_{i+1} - c \boldsymbol{\varepsilon}_{di+1}^p\|} \\ &= \lambda \frac{\boldsymbol{\xi}_i^*}{\|\boldsymbol{\xi}_i^*\|} \end{cases} \quad (2.47)$$

A partir des équations (2.44) et (2.47), on peut évaluer la valeur de  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{\|\boldsymbol{\xi}_i^*\| - \sqrt{2} k^*}{c + 2\mu + 2\bar{\lambda} \bar{k}^2} \quad (2.48)$$

Connaissant  $\lambda$ , on peut déterminer les parties sphérique  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_d^p \mathbf{I}$  et déviatorique  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_d^p$  de  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$ .  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_d^p$  est donnée par l'équation (2.47) et  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_h^p = \sqrt{2} \lambda \bar{k}$ . Le tenseur de déformation plastique sur l'incrément  $i + 1$  est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_i^p + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.49)$$

### 2.3.5.2 Mise en oeuvre de la méthode directe

Le processus de calcul de la déformation plastique mésoscopique cumulée à l'état stabilisée, notée  $\boldsymbol{\varepsilon}_s^{pc}$  par la méthode directe comporte les étapes suivantes :

- le chargement représentatif de l'état limite adapté à l'échelle macroscopique est donné par  $\Sigma(t)$ . Ce chargement est périodique de période  $T$ . On le discrétise en  $n$  instants  $(t_i, i = 1, n)$  ;
- on suppose connues les grandeurs mécaniques à l'instant  $t_1$  du début de cycle :  $\boldsymbol{\sigma}_1$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_1^p$  (plutôt  $\mathbf{s}_1, p_1, \boldsymbol{\varepsilon}_{d1}^p$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_{h1}^p$ ). On considère  $\boldsymbol{\sigma}_1 = \Sigma$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_1^p = \mathbf{0}$  ;
- on calcule les quantités :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_n^* &= \mathbf{s}_n + \Delta \mathbf{S} - c \boldsymbol{\varepsilon}_{dn}^p \\ k^* &= \beta - \bar{k} (p_n + \Delta P) \end{cases} \quad (2.50)$$

– on teste :

- si  $\|\xi_n^*\| - \sqrt{2} k^* < 0$ , la réponse est alors élastique ;

on obtient :

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n + \Delta S \\ p_{n+1} = p_n + \Delta P \\ \varepsilon_{dn+1}^p = \varepsilon_{dn}^p \\ \varepsilon_{hn+1}^p = \varepsilon_{hn}^p \end{cases} \quad (2.51)$$

par suite, l'incrément  $d\varepsilon^p$  sur  $[n, n+1]$  est nul ( $d\varepsilon^p = 0$ ) ;

- si  $\|\xi_n^*\| - \sqrt{2} k^* \geq 0$ , la réponse est alors élastoplastique ;

on calcule :

$$\lambda = \frac{\|\xi_n^*\| - \sqrt{2} k^*}{c + 2\mu + 2\lambda \bar{k}^2} \quad (2.52)$$

on obtient :

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_d^p = \lambda \frac{\xi_n^*}{\|\xi_n^*\|} \\ \Delta\varepsilon_h^p = \sqrt{2} \lambda \bar{k} \\ s_{n+1} = s_n + \Delta S - 2\mu \Delta\varepsilon_d^p \\ p_{n+1} = p_n + \Delta P - (3\lambda + 2\mu) \Delta\varepsilon_h^p \\ \varepsilon_{dn+1}^p = \varepsilon_{dn}^p + \Delta\varepsilon_d^p \\ \varepsilon_{hn+1}^p = \varepsilon_{hn}^p + \Delta\varepsilon_h^p \end{cases} \quad (2.53)$$

on détermine donc l'incrément  $\|d\varepsilon^p\|$  sur  $[n, n+1]$  :

$$\|d\varepsilon^p\| = \|\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p\| \quad (2.54)$$

– on répète les deux étapes précédentes sur tout le cycle de chargement ;

– on détermine  $\varepsilon^{pc}$  sur le cycle de chargement :

$$\varepsilon^{pc} = \sum_{i=1}^{n-1} \|\varepsilon_{i+1}^p - \varepsilon_i^p\| \quad (2.55)$$

– on refait le même processus à l'étape suivante mais avec des valeurs initiales différentes à l'instant  $t_1$  du début de cycle :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_n \\ \varepsilon_1^p = \varepsilon_n^p \end{cases} \quad (2.56)$$

on détermine  $\varepsilon^{pc}$  correspondante à cette étape ;

– le critère d'arrêt est donné par :

$$\frac{(\varepsilon^{pc})^{j+1} - (\varepsilon^{pc})^j}{(\varepsilon^{pc})^j} < \epsilon \quad (2.57)$$

où  $j$  est l'indice de l'étape ; si la condition est remplie, on note  $s = j$  et par suite  $\varepsilon_s^{pc} = (\varepsilon^{pc})^s$ .

### 2.3.6 Applicabilité du modèle

Pour le modèle étudié, le processus de calcul de la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé a été présenté brièvement dans les paragraphes précédents. Pour son évaluation, la méthode directe a été utilisée. Elle ne permet pas de donner une expression explicite de  $\varepsilon_s^{pc}$  pour les chargements cycliques affines simples. Une telle expression est indispensable pour l'identification des paramètres du modèle pour toute bonne prédiction de durées de vie des structures travaillant en endurance limitée. La difficulté d'utilisation de cette méthodologie est donc liée à un problème d'identification des paramètres du modèle.

En effet, la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé, notée  $\varepsilon_s^{pc}$  dépend des paramètres :  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $c$ ,  $\mu$  et  $\lambda$ . Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  caractérisent la loi d'évolution de la limite élastique mésoscopique  $k(p)$  en fonction de la pression hydrostatique mésoscopique  $p$ .  $c$  est le module d'érouissage mésoscopique.  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé. Comme on a :  $l = L$ , ils sont directement liés au module de Young  $E$  et au coefficient de Poisson  $\nu$  par :

$$\begin{cases} 2\mu & = \frac{E}{1+\nu} \\ (3\lambda + 2\mu) & = \frac{E}{1-2\nu} \end{cases} \quad (2.58)$$

D'autres paramètres liés au critère mésoscopique de durée de vie s'ajoutent. Ils relient la déformation plastique mésoscopique cumulée à l'état stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  à la durée de vie à l'amorçage. L'identification de tous les paramètres mis en jeu est primordiale pour toute bonne prédiction de durée de vie. On adopte la procédure suivante :

1. En endurance illimitée, le grain s'adapte et par conséquent la déformation plastique mésoscopique cumulée à l'état stabilisé est nulle ( $\varepsilon_s^{pc} = 0$ ). On considère deux limites d'endurance en flexion et torsion purement alternées et on utilise la condition ( $\varepsilon_s^{pc} = 0$ ) pour chacun d'eux afin de trouver des relations liant les paramètres.
2. En utilisant les relations précédemment obtenues, on procède à un problème d'optimisation afin de trouver les paramètres appropriés du modèle. Dans le contexte d'optimisation des paramètres, on cherche à minimiser l'erreur relative entre les durées de vie expérimentales et prédites par application du critère mésoscopique de durée de vie sur des chargements cycliques affines d'amplitude constante. En particulier, on pourrait utiliser une courbe de Wöhler en flexion purement alternée pour réaliser cette optimisation.

Le problème revient à avoir une expression explicite de  $\varepsilon_s^{pc}$  pour les chargements cycliques affines d'amplitude constante afin de déterminer les paramètres du modèle. Or, on ne dispose pas d'une telle expression pour le modèle étudié.

D'autre part, la recherche d'une expression explicite de  $\varepsilon_s^{pc}$  peut être obtenue par la résolution du problème d'apprentissage automatique par algorithme génétique. Il repose sur la construction d'une base de données numériques constituées de paramètres d'entrées et de sorties. Les paramètres d'entrées sont de deux types : paramètres « primitifs » liés aux paramètres du modèle et paramètres « évolués » que l'expert choisit dans le but de faciliter et d'accélérer l'apprentissage automatique. La sortie est généralement décrite par la donnée qu'on souhaite exprimer en fonction des paramètres d'entrées. Mais cette option est coûteuse et n'est pas facilement utilisable dans l'industrie. Elle rend inexploitable l'utilisation du critère dans les bureaux d'études du fait de la difficulté rencontrée lors de l'identification des paramètres.

Cette difficulté nous a poussé à adopter un second modèle qui consiste à considérer le tenseur de déformation plastique mésoscopique comme déviatorique. Dans ce cas, comme on le verra par la suite, le problème évoqué ne se pose plus car on dispose pour les chargements cycliques affines simples d'une expression explicite de la déformation plastique mésoscopique cumulée à l'état stabilisé. Par conséquent, l'identification se fait aisément et d'une manière claire facilitant ainsi l'utilisation du modèle dans les bureaux d'études. En considérant  $\varepsilon^p$  comme déviatorique, la méthode simplifiée est utilisée pour le calcul de  $\varepsilon_s^{pc}$ . Dans tout le reste, ce choix est adopté.

## 2.4 Modèle de prédiction adopté

### 2.4.1 Présentation du modèle

Devant la difficulté rencontrée dans le modèle présenté précédemment, difficulté liée à un problème d'identification des paramètres et pour des raisons simplificatrices, on reprend ce modèle mais en considérant cette fois-ci que les déformations plastiques mésoscopiques se font sans changement de volume ( $\varepsilon_{kk}^p = 0$ ). Par conséquent, le tenseur de déformations plastiques mésoscopiques  $\varepsilon^p$  est déviatorique. Cela conduit à une formulation simple de relation de passage macro-méso en fatigue polycyclique présentée au paragraphe (2.3.2). Une conséquence de cette formulation est l'égalité entre la pression hydrostatique mésoscopique  $p$  et la pression hydrostatique macroscopique  $P$ .

En effet, comme est  $\varepsilon^p$  déviatorique, l'équation (2.19) s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} - 2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.59)$$

D'autre part, les contraintes résiduelles mésoscopiques  $\boldsymbol{\rho}$  sont proportionnelles aux déformations plastiques du cristal :

$$\boldsymbol{\rho} = -2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.60)$$

On en déduit immédiatement qu'à l'image de  $\varepsilon^p$ , le tenseur  $\rho$  est déviatorique :

$$tr(\rho) = -2\mu tr(\varepsilon^p) = 0 \iff \rho_{kk} = 0 \quad (2.61)$$

et que :

$$P = \frac{1}{3} tr \Sigma = \frac{1}{3} tr \sigma = p \quad (2.62)$$

Finalement, la relation de passage entre les contraintes macroscopiques  $\Sigma(M, t)$  au point  $M$  (élément de volume) et les contraintes mésoscopiques  $\sigma(M, t, m)$  au point  $m$  (au niveau de grain) peut s'exprimer comme suit :

$$\sigma(M, t, m) = \Sigma(M, t) + \rho(M, t, m) \quad (2.63)$$

où  $\rho(M, t, m)$  est donnée par l'équation (2.60).

La propriété donnée par l'équation (2.62) permet d'exprimer directement la limite élastique mésoscopique  $k(p)$  en fonction de la pression hydrostatique macroscopique  $P$ , il vient :

$$k(p) = k(P) \quad (2.64)$$

Le critère de plasticité est :

$$f(\sigma, c\varepsilon^p, P) = f(\mathbf{s}, c\varepsilon^p, P) = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{s} - c\varepsilon^p) : (\mathbf{s} - c\varepsilon^p)} - k(P) \leq 0 \quad (2.65)$$

La vitesse de déformation plastique mésoscopique  $\dot{\varepsilon}^p$  est régie par la règle de normalité suivante :

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \quad \dot{f} \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \dot{f} = 0 \quad (2.66)$$

Dans le domaine de l'endurance limitée, le matériau atteint un état limite accommodé à l'échelle mésoscopique. La déformation plastique mésoscopique cumulée du cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  est la variable de dommage. Son évaluation sera faite par la méthode simplifiée pour les raisons exposées au paragraphe (2.3.5).

Le critère de fatigue mésoscopique pour l'évaluation de la durée de vie est une relation de puissance entre  $\varepsilon_s^{pc}$  et  $N_R$  pour le cas des chargements affines simples d'amplitude constante. L'extension de cette loi au cas général se fait par la définition d'une loi de dommage dépendant de  $\varepsilon_s^{pc}$ , de  $N_R$  et de certains paramètres caractéristiques du matériau et du chargement.

## 2.4.2 Calcul de $\varepsilon_s^{pc}$ par la méthode simplifiée

Pour estimer la durée de vie, il est nécessaire d'évaluer la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  choisie comme paramètre de dommage. Pour son calcul, l'approche simplifiée de Zarka [83] sur le comportement inélastique des solides peut, pour le modèle considéré, être utilisée moyennant une adaptation mineure.

### 2.4.2.1 Principe de la méthode simplifiée

La méthode simplifiée permet de calculer d'une manière directe le cycle stabilisé d'une structure sollicitée par un chargement cyclique, à partir de la réponse purement élastique et de constructions géométriques simples. Dans notre cas, les contraintes mésoscopiques purement élastiques sont données par les contraintes macroscopiques  $\Sigma$  qui sont déterminées à partir de calculs macroscopiques. Ainsi, comme la pression hydrostatique macroscopique  $P(t)$  est connue et égale à la pression hydrostatique mésoscopique  $p(t)$ , la limite élastique mésoscopique  $k(p)$  est donc évaluée par simple application de l'équation (2.28).

Zarka [83] représente le volume élémentaire représentatif (V.E.R) comme un assemblage direct de sous-éléments ou de mécanismes élémentaires à propriétés mécaniques simples, qui interagissent entre eux pour donner le comportement global : atomes, grains, cristaux dans un polycristal. Comme le matériau considéré est supposé avoir un comportement élastoplastique, le V.E.R ne comporte donc que des sous-éléments de type  $\alpha$  (voir *annexe B*) qui provoquent des déformations instantanées avec seuil ; ils représentent la plasticité et jouent le rôle des patins dans les assemblages rhéologiques.

En se référant aux notations de Zarka dans son approche sur la modélisation inélastique des matériaux, présentée en *annexe B*, le tenseur de contraintes mésoscopiques  $\sigma$  au niveau du mécanisme élémentaire de type  $\alpha$  s'écrit :

$$\sigma = \mathbf{A} \Sigma - \mathbf{y} \quad (2.67)$$

où  $\mathbf{A}$  est le tenseur de localisation élastique ; il est égal au tenseur identité d'ordre quatre  $\mathbf{I}$  en comparant les équations (2.63) et (2.67).  $\mathbf{y}$  est le tenseur des paramètres transformés. Il représente le tenseur opposé à celui des contraintes résiduelles. Il est relié au tenseur des paramètres internes  $\alpha$  par une relation linéaire (Eq. 2.68) car le comportement élastoplastique à l'échelle mésoscopique est à écrouissage cinématique linéaire.

$$\mathbf{y} = c \alpha \quad (2.68)$$

Le tenseur de déformations plastiques mésoscopiques  $\varepsilon^p$  est :

$$\varepsilon^p = \mathbf{A}^T \alpha \quad (2.69)$$

Or,

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (2.70)$$

Il en résulte que :

$$\begin{cases} \varepsilon^p = \alpha \\ \mathbf{y} = c \varepsilon^p \end{cases} \quad (2.71)$$

Le tenseur de déformations plastiques mésoscopiques  $\varepsilon^p$  est supposé ici déviatorique. Il en est donc de même du tenseur des paramètres internes  $\alpha$ . Le tenseur des paramètres transformés  $\mathbf{y}$  l'est aussi. La partie déviatorique de l'équation (2.67) s'écrit :

$$\mathbf{s} = \mathbf{S} - \mathbf{y} \quad (2.72)$$

L'évolution du paramètre  $\alpha$  est définie par la règle de normalité :

$$\dot{\alpha} \in \partial\varphi_{C_0}(\mathbf{s}) \quad \mathbf{s} \in C_0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{s}) \leq 0 \quad (2.73)$$

où  $\dot{\alpha}$  est une normale extérieure au convexe  $C_0$  en  $\mathbf{s}_\alpha$ . Ce convexe admet l'origine comme centre de symétrie. Ces conditions peuvent s'exprimer également à l'aide des paramètres transformés  $\mathbf{y}$  et du convexe mobile  $\hat{C}(\mathbf{S})$  déduit de  $C_0$  par une translation de vecteur  $\mathbf{S}$  ;  $\dot{\alpha}$  est alors une normale intérieure en  $\mathbf{y}$  à  $\hat{C}(\mathbf{S})$  :

$$\dot{\alpha} \in -\partial\varphi_{\hat{C}(\mathbf{S})}(\mathbf{y}) \quad \mathbf{y} \in \hat{C}(\mathbf{S}) \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{S} - \mathbf{y}) \leq 0 \quad (2.74)$$

L'approche simplifiée s'applique de la façon suivante :

- si tous les convexes sphériques de rayons  $k(p(t))$  et centrés en  $\mathbf{S}(t) = \text{dev } \Sigma(t)$ , ont une intersection non vide, un état limite adapté se produit et la déformation plastique mésoscopique cumulée induite à chaque cycle stabilisé prend une valeur nulle ;
- d'autre part, si tous les convexes ne présentent pas d'intersection commune, un état limite accommodé se produit et la déformation plastique mésoscopique cumulée induite à chaque cycle stabilisé est non nulle ; elle est évaluée à partir de règles simples.

#### 2.4.2.2 Mise en oeuvre de la méthode simplifiée

La déformation plastique mésoscopique cumulée du cycle stabilisé, notée  $\varepsilon_s^{pc}$  est calculée selon la procédure itérative suivante :

- en partant d'un état limite adapté à l'échelle macroscopique, le chargement représentatif de période  $T$  est donné par  $\Sigma(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . On le discrétise entre les instants  $t_1 = 0$ ,  $t_2, \dots, t_n = T$ . On détermine ensuite  $\mathbf{S}(t_i) = \text{dev } \Sigma(t_i)$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$  ;
- dans l'espace des paramètres transformés  $\mathbf{y}$ , le chargement est représenté par des convexes sphériques  $C_i$  de rayons  $k(p(t_i))$  et centrés en  $\mathbf{S}(t_i)$ , pour  $i$  allant de 1 à  $n$  ;
- on part de l'état initial où l'on a :  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$  ; on effectue ensuite des projections successives sur l'ensemble des convexes sphériques  $C_i$  pour l'obtention de solutions plastiquement admissibles  $\mathbf{y}(t_i)$  ;
- $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}_i$  est plastiquement admissible sur le convexe  $C_{i+1}$  si :

$$\|\mathbf{S}(t_{i+1}) - \mathbf{y}_i\| \leq k(p(t_{i+1})) \quad (2.75)$$

dans ce cas, on a :  $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i$  ;

- si la condition précédente n'est pas réalisée, on projette  $\mathbf{y}_i$  sur le convexe  $C_{i+1}$  afin de déterminer la solution  $\mathbf{y}_{i+1}$  plastiquement admissible :

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{S}(t_{i+1}) - k(p(t_{i+1})) \frac{\mathbf{S}(t_{i+1}) - \mathbf{y}_i}{\|\mathbf{S}(t_{i+1}) - \mathbf{y}_i\|} \quad (2.76)$$

- après avoir parcouru le cycle de chargement ( $\Sigma(t_i)$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$ ), on part d'un état initial différent donné par  $\mathbf{y}_n = c \boldsymbol{\varepsilon}^p(t_n)$  puis on effectue des projections successives sur l'ensemble de convexes sphériques  $C_i$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$  ;
- l'opération précédente est répétée jusqu'à obtention du cycle stabilisé où l'on a  $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_1$  ;
- les termes  $\mathbf{y}_i$ , pour  $i$  allant de 1 à  $n$ , sont connus et considérés fixes après l'obtention du cycle stabilisé ;
- la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé, notée  $\boldsymbol{\varepsilon}_s^{pc}$  est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{pc} = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i\| \quad (2.77)$$

où

$$\|\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i\| = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) : (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i)} \quad (2.78)$$

La recherche du cycle stabilisé est illustrée sur la figure (2.4). Sur cette figure, on ne représente qu'une seule itération ; l'itération suivante consiste à prendre  $\mathbf{y}_4$  comme le nouvel état initial et à appliquer la même démarche que la première itération jusqu'à la stabilisation.

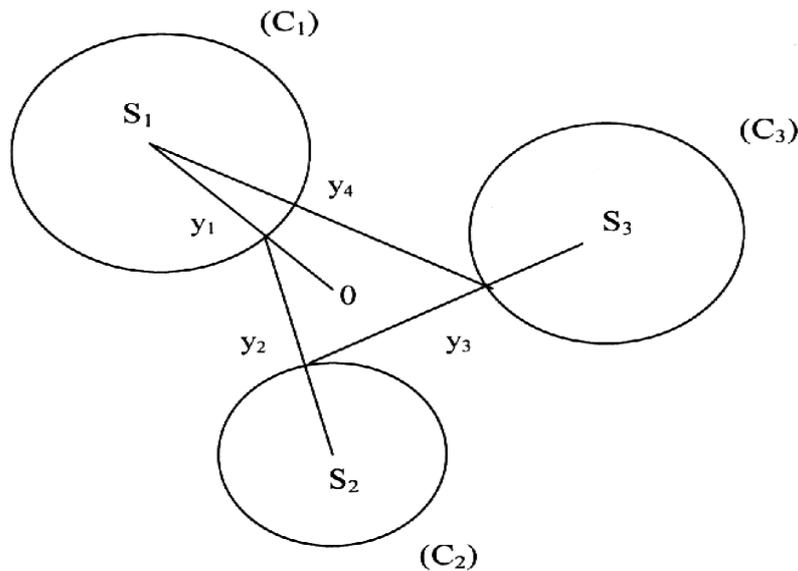


FIG. 2.4 – Recherche du cycle stabilisé à l'échelle mésoscopique

### 2.4.2.3 Expression explicite de $\varepsilon_s^{pc}$ : cas des chargements affines simples

Considérons un chargement affine simple décrivant une trajectoire rectiligne dans l'espace des paramètres transformés repéré formellement par  $(\mathbf{y}_{ij}, \mathbf{y}_{kl})$  (voir figure 2.5). On le représente par les convexes sphériques  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .  $C_1$  et  $C_3$  sont confondus, centrés en  $\mathcal{S}_1$  et de rayon  $k(p_1)$ .  $C_2$  est centré en  $\mathcal{S}_2$  et de rayon  $k(p_2)$ . Sur la figure (2.5), le cycle stabilisé est décrit par le trajet  $(\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2$  et  $\mathbf{y}_2 \mathbf{y}_3)$ . D'après l'équation (2.77), on peut écrire :

$$\varepsilon_s^{pc} = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{c} \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i\| \quad (2.79)$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{c} (\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\| + \|\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2\|) \quad (2.80)$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{c} (\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\| + \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|) \text{ car } \mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_1 \quad (2.81)$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{2}{c} (\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|) \quad (2.82)$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{2}{c} (2k^* - k(p_1) - k(p_2)) \quad (2.83)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{(2k^* - k_{max} - k_{min})}{c} \quad (2.84)$$

où  $c$  est le module d'écroissage cinématique linéaire à l'échelle mésoscopique,  $k_{max}$  et  $k_{min}$  sont les valeurs maximum et minimum de la limite élastique mésoscopique  $k(p)$  au cours du chargement. Connaissant les valeurs  $p_1 = p_{min}$  et  $p_2 = p_{max}$  à partir de l'histoire de la pression hydrostatique  $p(t)$ , on calcule  $k_{max}$  et  $k_{min}$  par simple application de l'équation (2.28).  $k^*$  est le rayon de la plus petite hypersphère contenant le trajet de chargement  $\phi$  dans l'espace des déviateurs des contraintes macroscopiques. La recherche du centre  $\mathbf{z}^*$  et du rayon  $k^*$  de cette hypersphère est expliquée par Papadopoulos [56] à travers la résolution du problème de min-max :

$$\begin{cases} \mathbf{z}^* = \min_{\mathbf{z}'} \left\{ \max_{t > t_0} \sqrt{[\mathbf{S}(t) - \mathbf{z}'] : [\mathbf{S}(t) - \mathbf{z}']} \right\} \\ k^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \max_{t > t_0} \sqrt{[\mathbf{S}(t) - \mathbf{z}^*] : [\mathbf{S}(t) - \mathbf{z}^*]} \right\} \end{cases} \quad (2.85)$$

Pour un chargement à trajet radial ou affine, l'expression de  $k^*$  se réduit à :

$$k^* = \frac{\sqrt{\Delta \mathbf{S} : \Delta \mathbf{S}}}{2\sqrt{2}} \quad (2.86)$$

où :

- $k^* = \tau_a$  pour les essais de torsion ;  $\tau_a$  : l'amplitude de cisson ;
- $k^* = \frac{\sigma_a}{\sqrt{3}}$  pour les essais de flexion ;  $\sigma_a$  : l'amplitude de contrainte normale ;

$$- k^* = \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{3} + \tau_a^2} \text{ pour les essais de flexion-torsion en phase.}$$

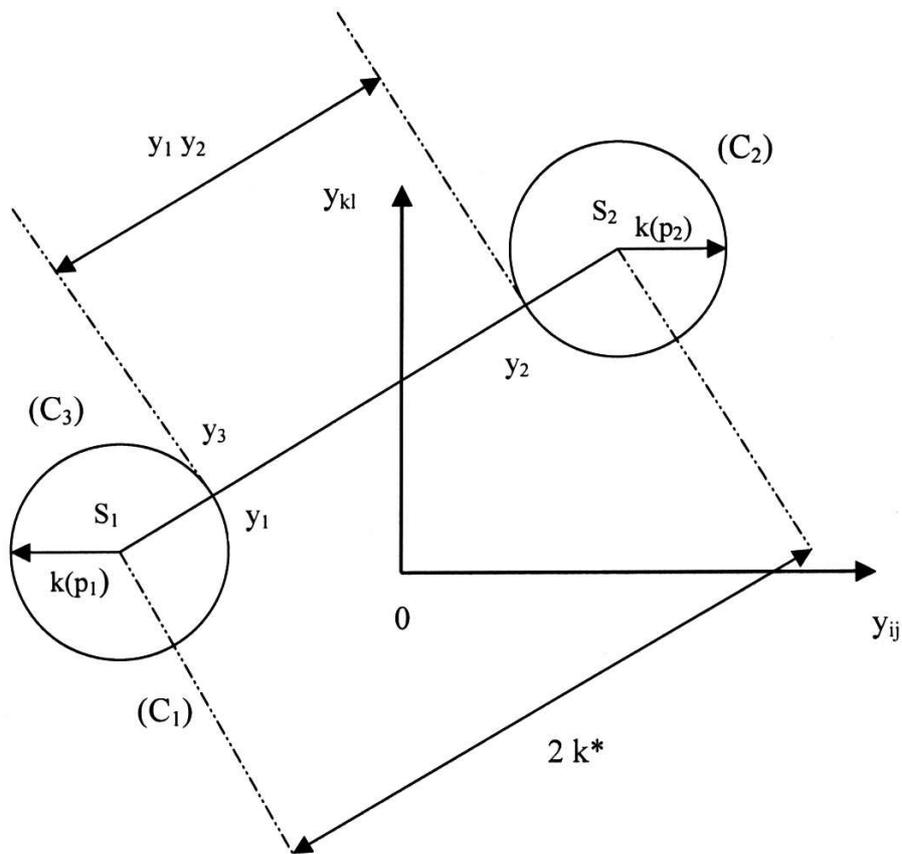


FIG. 2.5 – Cycle stabilisé mésoscopique du chargement affine simple

### 2.4.3 Critère mésoscopique de durée de vie en fatigue

En endurance illimitée, le matériau atteint un état limite adapté aux deux échelles : macroscopique et mésoscopique. Le comportement est dit « purement élastique » s'il n'y a pas de déformation plastique et « adapté » si les déformations plastiques, dues aux premiers cycles, se stabilisent pour atteindre le cycle élastique. Dans le domaine de l'endurance limitée, le matériau a un comportement « adapté » ou « purement élastique » à l'échelle macroscopique, cependant à l'échelle mésoscopique, il atteint un état limite accommodé. Ce comportement stabilisé obtenu à l'échelle mésoscopique est identique à celui obtenu à l'échelle macroscopique dans le domaine de fatigue oligocyclique. Pour ce dernier domaine, la déformation plastique et l'énergie plastique dissipée sont des paramètres appropriés pour l'estimation de la durée de vie en fatigue. Ainsi, la relation de « Manson-Coffin » est le critère de fatigue le plus connu et le plus utilisé. Elle relie l'amplitude ou l'étendue de variation de la déformation plastique du cycle stabilisé au nombre de cycles à la rupture.

D'autres chercheurs [18, 27] optent pour l'utilisation d'un critère énergétique reliant l'énergie plastique dissipée durant le cycle stabilisé au nombre de cycles à la rupture. Bien que ces deux approches soient équivalentes dans le cas isotherme et pour des matériaux à comportement élastoplastique simple, l'approche énergétique semble plus puissante car elle peut être directement utilisée pour les problèmes de fatigue anisotherme [18].

Dans le cadre de notre étude, nous supposons que ces grandeurs sont aussi appropriées à l'étude de la fatigue à grand nombre de cycles à l'échelle mésoscopique, qu'elles le sont à l'échelle macroscopique pour la fatigue oligocyclique. Nous rappelons que beaucoup de chercheurs comme Papadopoulos [58], Morel [52], et Zarka & Karaoui [84] ont choisi la déformation plastique mésoscopique cumulée comme paramètre de dommage. Nous considérons ici la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  comme paramètre du dommage.

#### 2.4.3.1 Loi mésoscopique de durée de vie : cas des chargements affines simples

On considère ici les chargements cycliques affines d'amplitude constante. On étudie la tenue en fatigue des structures métalliques en endurance limitée ; le comportement élastoplastique mésoscopique atteint un état limite accommodé. On définit le critère mésoscopique de durée de vie pour les chargements cycliques affines d'amplitude constante comme étant une relation de puissance entre la déformation plastique mésoscopique cumulée induite à chaque cycle stabilisé,  $\varepsilon_s^{pc}$  et le nombre de cycles à l'amorçage  $N_R$ . Il s'écrit :

$$N_R = A (\varepsilon_s^{pc})^{-\xi} \quad (2.87)$$

où  $\xi$  et  $A$  sont deux paramètres intrinsèques au matériau et qui sont déterminés à partir d'essais simples en fatigue.

Pour ce type de chargement,  $\varepsilon_s^{pc}$  est donnée par l'équation explicite (Eq. 2.84). Dans un premier temps, ce critère a servi à l'identification des paramètres du modèle et à la simulation de durées de vie des chargements simples. D'une manière générale, la loi mésoscopique de durée de vie sera donnée par un facteur de dommage  $D$  dépendant de  $\varepsilon_s^{pc}$  et de certains paramètres caractéristiques du matériau et du chargement. Elle fera l'objet du paragraphe suivant.

#### 2.4.3.2 Loi mésoscopique de durée de vie : cas général

La loi mésoscopique de durée de vie (Eq. 2.87) est dédiée aux chargements cycliques affines d'amplitude constante. Or, les structures qui subissent le phénomène de fatigue sont généralement soumises à des séquences répétées de chargement multiaxial d'amplitude variable. Une extension de cette loi à ces chargements pour la prédiction de durée de vie est établie à travers la définition d'un facteur de dommage  $D$  dépendant de  $\varepsilon_s^{pc}$  et de certains paramètres caractéristiques du matériau et du chargement. La loi de dommage s'écrit :

$$D = N A^{-1} \left( \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{2k^* - k_{max} - k_{min}}{c} \right)^{\xi-1} \varepsilon_s^{pc} \quad (2.88)$$

où  $N$  est le nombre de blocs appliqués,  $c$  est le module d'écrouissage cinématique mésoscopique,  $k^*$ ,  $k_{max}$  et  $k_{min}$  sont des caractéristiques de chargement :  $k^*$  le rayon de la plus petite hypersphère contenant le trajet de chargement dans l'espace de déviateur des contraintes,  $k_{max}$  et  $k_{min}$  sont les valeurs maximum et minimum de la limite élastique mésoscopique  $k(p)$ , correspondant respectivement aux valeurs  $p_{min}$  et  $p_{max}$  de  $p(t)$ .

L'amorçage de fissures est supposé atteint quand  $D = 1$  et le nombre de blocs correspondant est noté  $N_R$  :

$$N_R = A \left( \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{2k^* - k_{max} - k_{min}}{c} \right)^{1-\xi} (\varepsilon_s^{pc})^{-1} \quad (2.89)$$

L'équation (2.89) satisfait les conditions suivantes :

- (C1) elle donne l'équation (2.87) dans le cas des chargements cycliques affines d'amplitude constante ;
- (C2) considérons deux séquences répétées de chargement cyclique affine d'amplitude constante  $S_1$  et  $S_2$ . La séquence  $S_1$  est constituée d'un seul cycle par bloc et la séquence  $S_2$  de  $n$  cycles par bloc,  $N_1$  et  $N_2$  leurs nombres de blocs respectifs à l'amorçage de fissures, l'équation (2.89) conduit à  $N_1 = n N_2$ .

En effet, considérons un chargement cyclique affine d'amplitude constante de durée de vie  $N_R$ , et appliquons l'équation (2.89) à ce chargement dont  $\varepsilon_s^{pc}$  est obtenue analytiquement par l'équation (2.84) :

$$\varepsilon_s^{pc} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left( \frac{2k^* - k_{max} - k_{min}}{c} \right) \quad (2.90)$$

L'équation (2.89) devient :

$$N_R = A (\varepsilon_s^{pc})^{-\xi} \quad (2.91)$$

On retrouve donc la loi mésoscopique de durée de vie (Eq. 2.87) dédiée aux chargements cycliques affines d'amplitude constante. En procédant de la même manière pour (C2), on peut écrire :

$$N_1 = A (\varepsilon_s^{pc})^{-\xi} \quad \text{et} \quad N_2 = A n^{-1} (\varepsilon_s^{pc})^{-\xi} \quad (2.92)$$

On en déduit :  $N_1 = n \times N_2$ .

Pour résumer, les étapes principales pour la prévision de la durée de vie en fatigue d'une structure soumise à des séquences répétées de chargement multiaxial d'amplitude variable sont : (i) identification des paramètres du modèle pour le matériau considéré s'ils ne sont pas disponibles, (ii) détermination des contraintes macroscopiques purement élastiques pour la structure entière et (iii) pour chaque point de la structure : (a) évaluation des quantités  $k_{max}$ ,  $k_{min}$  et  $k^*$ , (b) calcul de la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  (c) détermination du nombre de blocs à l'amorçage via l'équation (2.89).

## 2.4.4 Identification des paramètres du modèle

Le critère de fatigue (Eq. 2.87) dépend de deux paramètres intrinsèques au matériau :  $\xi$  et  $A$ . D'autre part, la déformation plastique mésoscopique cumulée  $\varepsilon_s^{pc}$  est fonction d'autres paramètres :  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $c$ . Trois d'entre eux ( $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ ) sont liés directement à la limite élastique mésoscopique  $k(p)$ . Le dernier paramètre  $c$  est le module d'écrouissage cinématique linéaire du matériau élastoplastique à l'échelle mésoscopique. Par suite, le nombre de paramètres à identifier s'élève à six. On les identifie à l'aide de deux limites d'endurance issues, par exemple d'essais en torsion alternée et flexion alternée, et d'une courbe de Wöhler en traction ou en flexion alternée. La procédure d'identification est basée sur deux étapes.

1. Application du critère à la limite d'endurance (en flexion et en torsion) : cela conduit à des relations entre les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , qui seront utilisés plus tard dans un problème d'optimisation.
2. Identification de tous les paramètres du modèle par la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes (relations obtenues précédemment) : il s'agit de minimiser l'erreur entre la courbe simulée et la courbe expérimentale de Wöhler d'un essai simple (typiquement un essai de flexion alternée).

### 2.4.4.1 Recherche de relations entre $\alpha$ , $\beta$ et $\gamma$

Trouver des relations entre  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  consiste à appliquer le critère (Eq. 2.87) dans le domaine de l'endurance illimitée en considérant des chargements simples. Soient par exemple des chargements cycliques proportionnels dont l'expression de la déformation plastique mésoscopique cumulée induite à chaque cycle stabilisé,  $\varepsilon_s^{pc}$  est donnée par l'équation (2.84). On considère d'abord un essai de torsion alternée symétrique en endurance illimitée. Le tenseur de contraintes est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau_{-1} & 0 \\ \tau_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

Comme le grain atteint dans ce cas un état limite adapté à l'échelle mésoscopique, la déformation plastique mésoscopique cumulée induite par ce chargement à chaque cycle stabilisé, prend une valeur nulle ( $\varepsilon_s^{pc} = 0$ ). La pression hydrostatique est aussi nulle ( $p(t) = 0$ ).

En se référant à l'équation (2.28), la limite élastique mésoscopique  $k(p)$  se réduit à la valeur  $\beta$ .  $\varepsilon_s^{pc}$  s'écrit donc :

$$\varepsilon_s^{pc} = \frac{2 k^* - 2 \beta}{c} \times \frac{4}{\sqrt{3}} \quad (2.94)$$

où  $k^* = \tau_{-1}$ . En résolvant l'équation ( $\varepsilon_s^{pc} = 0$ ),  $\beta$  prend la valeur  $\tau_{-1}$  qui est la limite d'endurance en torsion alternée.

Puis on considère un essai de flexion alternée symétrique en endurance illimitée. Le tenseur de contraintes correspondant est :

$$\begin{pmatrix} f_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

où  $f_{-1}$  est la limite d'endurance en flexion purement alternée. Pour ce chargement,  $k^* = \frac{f_{-1}}{\sqrt{3}}$  et les valeurs  $k_{min}$  et  $k_{max}$  de  $k(p)$  sont obtenues par simple application de l'équation (2.28) :

$$\begin{cases} k_{min} = \beta - \alpha p_a \\ k_{max} = \beta + \gamma p_a \end{cases} \quad (2.96)$$

où  $p_a = \frac{f_{-1}}{3}$  : l'amplitude de la pression hydrostatique.

En remplaçant chaque terme par sa valeur dans l'équation (2.84), on obtient une forme simple de  $\varepsilon_s^{pc}$  qui dépend des paramètres :  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  et de  $f_{-1}$ .

$$\varepsilon_s^{pc} = \frac{\frac{2f_{-1}}{\sqrt{3}} - 2\beta + \frac{f_{-1}}{3}(\alpha - \gamma)}{c} \times \frac{4}{\sqrt{3}} \quad (2.97)$$

En endurance illimitée, on a :  $\varepsilon_s^{pc} = 0$ . Cela permet de relier  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  à  $f_{-1}$  selon l'équation :

$$\alpha - \gamma = 2 \left( \frac{3\beta}{f_{-1}} - \sqrt{3} \right) \quad (2.98)$$

En conclusion, l'application du critère à la limite d'endurance a permis d'établir deux relations entre les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  : l'équation (2.98) et la relation  $\beta = \tau_{-1}$ . Ces deux relations sont d'une grande utilité dans un contexte d'optimisation pour l'identification des paramètres du modèle qui fera l'objet du paragraphe suivant.

#### 2.4.4.2 Identification des paramètres optimaux du modèle

Les paramètres du modèle sont déterminés par l'application du critère (Eq. 2.87) en endurance limitée pour un essai de flexion alternée en utilisant les relations trouvées au paragraphe précédent. On construit, par le modèle, la courbe de Wöhler numérique résultant de cet essai. A chaque niveau de contrainte  $f$  correspond une valeur de  $\varepsilon_s^{pc}$  donnée par l'équation (2.97) mais en remplaçant  $f_{-1}$  par  $f$ . Pour les différents niveaux de contrainte auxquels correspondent des durées de vie de la courbe de Wöhler en flexion purement alternée, l'application du critère permet d'obtenir une courbe S-N numérique dépendant des paramètres :  $\xi$ ,  $A$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Les valeurs optimales de ces paramètres sont celles qui minimisent l'erreur relative entre les durées de vie expérimentales et prédites. Pour les déterminer, on va résoudre un problème d'optimisation en utilisant les deux relations obtenues dans le paragraphe précédent et en minimisant une fonction « coût ». Cette fonction a été choisie comme la somme des erreurs relatives entre les durées de vie expérimentale et simulée.

## 2.5 Conclusion

Dans le domaine de la fatigue à grand nombre de cycles, les approches phénoménologiques, à l'échelle mésoscopique, initiées par Dang Van [23] et développées par la suite par Papadopoulos [56] se sont révélées plus pratiques pour l'industrie. Elles sont fondées sur le concept d'adaptation à toutes les échelles en endurance illimitée. En se basant sur ces approches et en utilisant en partie les idées de Papadopoulos [58], Morel [52] et Zarka & Karaouni [84], nous avons proposé **un modèle phénoménologique et déterministe à l'échelle mésoscopique** pour la prévision de la durée de vie des structures travaillant **en endurance limitée**. Le modèle s'applique à tout type de séquences répétées de chargement multiaxial d'amplitude variable étant donné la fréquence d'apparition de telles sollicitations dans l'industrie ; il est d'utilisation simple et valable pour une grande variété de matériaux métalliques en l'absence de l'effet d'entaille. Il peut donc être utilisé en bureaux d'études.

La variable de dommage choisie est la déformation plastique mésoscopique cumulée (ou bien de manière équivalente l'énergie plastique dissipée) sur le cycle stabilisé. Pour son évaluation, nous procédons comme suit :

- nous évaluons les grandeurs mésoscopiques en utilisant les relations générales de passage macro-méso rappelées en (2.13), avec l'aide d'hypothèses simplificatrices [5].
- nous considérons qu'à l'échelle mésoscopique, le matériau a un comportement élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire avec une limite élastique mésoscopique dépendant de la pression hydrostatique. Nous rappelons que Morel [52] utilise un modèle de plasticité différent de type « Schmid ».
- enfin, nous utilisons « **la méthode directe** » [3, 46, 49] ou « **la méthode simplifiée** » [83].

Comme pour tout modèle prédictif de durée de vie, il s'agit de trouver ses paramètres appropriés pour une bonne qualité de prédiction. En considérant d'abord le tenseur total (parties sphérique et déviatorique) de déformation plastique mésoscopique  $\varepsilon^p$ , ce choix est écarté par le fait d'un problème lié à l'identification des paramètres du modèle. Nous avons ensuite supposé que les déformations plastiques mésoscopiques se font sans changement de volume. Il découle de ce choix que le tenseur de déformation plastique mésoscopique est déviatorique. En conséquence, les pressions hydrostatiques mésoscopique  $p$  et macroscopique  $P$  sont égales. Dans ce cas, « **la méthode simplifiée** » est pratique pour l'évaluation de la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  car le calcul par incrément de temps se fait sans itération. De plus, le problème d'identification des paramètres du modèle ne se pose plus car on dispose d'expressions analytiques de  $\varepsilon_s^{pc}$  pour les chargements simples.

Etant donné qu'à l'échelle mésoscopique et en endurance limitée, le matériau atteint un état limite accommodé [20], on définit le critère mésoscopique de durée de vie comme une relation entre la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  et la durée de vie à l'amorçage  $N_R$ . Il est différent de celui proposé par Morel [52] pour lequel la rupture est liée à une valeur critique de la déformation plastique mésoscopique cumulée  $\varepsilon^{pc}$ . Dans le cas particulier des chargements cycliques affines à amplitude constante, la loi mésoscopique de durée de vie est donnée par une relation de puissance entre  $\varepsilon_s^{pc}$  et  $N_R$ . D'une manière générale, elle est définie par un facteur de dommage  $D$  dépendant de  $\varepsilon_s^{pc}$  et de certains paramètres caractéristiques du matériau et du chargement.

Le modèle possède six paramètres identifiables moyennant **une courbe de Wöhler** (idéalement en flexion alternée) et **deux limites d'endurance** (par exemple en flexion et en torsion purement alternées).

# Chapitre 3

## Confrontation : Résultats de prévision du modèle / durées de vie expérimentales

### 3.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de valider le modèle prédictif, proposé au chapitre 2. Cela consiste à simuler des essais disponibles dans la littérature pour déterminer les durées de vie à l'amorçage par l'application du modèle et à comparer celles-ci aux durées de vie expérimentales. La validation du modèle porte sur une grande variété de matériaux métalliques. Les chargements testés sont de deux types : chargements cycliques de sollicitation multiaxiale d'amplitude constante et séquences répétées de sollicitation multiaxiale d'amplitude variable. Les données de fatigue des matériaux utilisés et les chargements testés sont issus de la littérature.

Pour une bonne prédiction de durée de vie, il faut d'abord identifier les paramètres appropriés du modèle. Cela est possible à l'aide **d'une courbe de Wöhler** (idéalement en flexion alternée) et **deux limites d'endurance** (soient par exemple en flexion et en torsion purement alternées).

### 3.2 Prédiction de durées de vie des essais réalisés sur l'aluminium 6082 T6

#### 3.2.1 Matériau

le matériau testé est l'aluminium 6082 T6, utilisé par Susmel et Petrone [72] afin de valider leur méthode de prédiction de durée de vie. Les caractéristiques mécaniques de ce matériau sont rassemblés au tableau (3.1).

$E$ [MPa]	$R_e$ [MPa]	$R_m$ [MPa]
69400	298	343

TAB. 3.1 – Caractéristiques mécaniques statiques de l'aluminium 6082 T6 [72]

### 3.2.2 Eprouvettes

Les éprouvettes ont été réalisées à partir des barres étirées (diamètre 30 mm) et dont la forme géométrique est donnée par la figure (3.1). Elles sont polies successivement avec des composés de diamant de  $6\text{-}\mu\text{m}$  jusqu'à l'obtention d'une bonne finition ressemblant à un miroir.

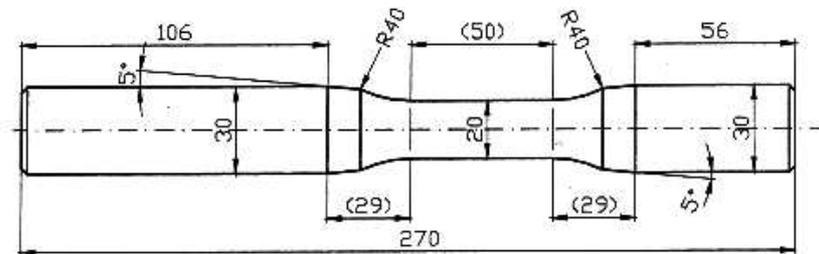


FIG. 3.1 – Eprouvette de flexion-torsion (dimension en millimètres) [72]

### 3.2.3 Essais de fatigue réalisés sur l'aluminium 6082 T6

Les essais simulés sont purement alternés et récapitulés dans les tableaux (3.2) et (3.3). Ils sont constitués d'essais simples en flexion, torsion et flexion-torsion en phase et hors-phase pour deux cas de rapport de contrainte biaxial,  $\lambda = \frac{\tau_{xy,a}}{\sigma_{x,a}}$  ( $\lambda > 1$  et  $\lambda < 1$ ). Les durées de vie envisagées s'étendent de  $10^4$  à  $1.5 \cdot 10^6$  cycles. Les limites de fatigue en torsion et flexion purement alternées sont déterminées à  $2 \cdot 10^6$  cycles :  $t_{-1} = 92$  MPa et  $f_{-1} = 132$  MPa.

N° série	$\sigma_{x,a}$ [MPa]	$\tau_{xy,a}$ [MPa]	$\lambda$	$\delta$ [°]	$N_{f,5\%}$ [Cycles]
P1B1	190	0	0	0	160000
P2B2	180	0	0	0	248518
P3B3	164	0	0	0	444411
P4B4	144	0	0	0	1069220
P5B5	224	0	0	0	56285
P6B4	145	0	0	0	1238325
P7B1	187	0	0	0	200480
P8B3	161	0	0	0	423590
PC9T1	0	117	$\infty$	0	534032
<b>PC10T2</b>	<b>0</b>	<b>155</b>	$\infty$	<b>0</b>	<b>26987</b>
PC11T3	0	127	$\infty$	0	76665
PC12T3	0	127	$\infty$	0	132295
PC13T1	0	117	$\infty$	0	203535
<b>PC14T2</b>	<b>0</b>	<b>155</b>	$\infty$	<b>0</b>	<b>16195</b>
PC15T4	0	106	$\infty$	0	$> 1.1 \cdot 10^6$
PC16T4	0	104	$\infty$	0	565150

TAB. 3.2 – Essais simples de flexion et torsion (R=-1) [72]

N° série	$\sigma_{x,a}$ [MPa]	$\tau_{xy,a}$ [MPa]	$\lambda$	$\delta$ [°]	$N_{f,5\%}$ [Cycles]
P17BT1	57	100	1.75	0	266435
P18BT2	51	84	1.65	0	1119254
P19BT2	51	84	1.65	0	1416225
P20BT3	71	118	1.66	0	83000
P21BT3	70	118	1.69	0	75695
P22BT1	59	99	1.68	0	630325
P23BT4	132	97	0.73	0	157210
P24BT4	132	99	0.75	0	126470
P25BT5	144	107	0.74	0	35450
P26BT5	149	105	0.70	0	68465
P27BT6	122	90	0.74	0	252658
P28BT7	116	83	0.72	0	316149
P30BT8	148	66	0.45	90	278836
P31BT9	152	47	0.31	90	465010
P32BT8	149	68	0.46	90	118965
P33BT9	155	72	0.46	90	447525
P34BT10	190	105	0.55	90	47940
P35BT10	189	106	0.56	90	30995
<b>P36BT11</b>	<b>79</b>	<b>129</b>	<b>1.63</b>	<b>90</b>	<b>23080</b>
P37BT12	69	110	1.59	90	202807
P38BT13	68	99	1.46	90	262980
P39BT13	68	99	1.46	90	398615
P41BT15	79	116	1.47	90	46045

TAB. 3.3 – Essais de flexion-torsion en phase et hors-phase (R=-1) [72]

Dans les tableaux (3.2) et (3.3),  $\sigma_{x,a}$  est l'amplitude de contrainte normale,  $\tau_{xy,a}$  est l'amplitude de cisaillement,  $\lambda$  est le rapport de contrainte biaxial,  $\delta$  est le déphasage entre les composantes de contraintes appliquées et  $N_{f,5\%}$  représente le nombre de cycles à la rupture, défini par une baisse de 5% de la rigidité en flexion ou en torsion.

Il est intéressant de signaler qu'une quantité réduite de plasticité a été mesurée par des jauges de déformation dans les essais PC10T2, PC14T2 et P36BT11 [72]. Ils sont donc situés dans le domaine de la fatigue oligocyclique. Par conséquent, ils ne sont pas simulés comme on traite seulement le domaine de la fatigue polycyclique et plus précisément l'endurance limitée.

### 3.2.4 Application du modèle

#### 3.2.4.1 Identification des paramètres du modèle

Une courbe de Wöhler et deux limites de fatigue en flexion et en torsion purement alternées sont suffisantes pour identifier les paramètres du modèle :  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\xi$ ,  $c$  et  $A$ . Ces paramètres sont identifiés en référant au paragraphe (2.4.4). Cela consiste à résoudre un problème d'optimisation. En effet, à l'aide de deux limites d'endurance, nous trouvons des relations entre  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  puis nous utilisons une courbe de Wöhler en flexion purement alternée ( $R=-1$ ) et nous cherchons à minimiser une fonction coût. Elle est choisie comme étant la somme de pourcentage des erreurs relatives entre les durées de vie expérimentales et prédites. Les paramètres du modèle sont identifiés lorsque cette fonction atteint une valeur minimale. Les résultats du problème d'optimisation sont donnés dans le tableau (3.4) et reportés sur la figure (3.2).

N° série	$\sigma_{x,a}$ [MPa]	$N_{cyc}$ (expérimental) [Cycles]	$N_{cyc}$ (prédit) [Cycles]	$ Erreur\ relative $ [%]
P5B5	224	56285	85137	51.26
P1B1	190	160000	160441	0.28
P7B1	187	200480	172572	13.92
P2B2	180	248518	208009	16.30
P3B3	164	444411	362555	18.42
P8B3	161	423590	414831	2.07
P6B4	145	1238325	1238161	0.01
P4B4	144	1069220	1380067	29.07

TAB. 3.4 – Résultat du problème d'optimisation (essais de flexion ( $R=-1$ ))

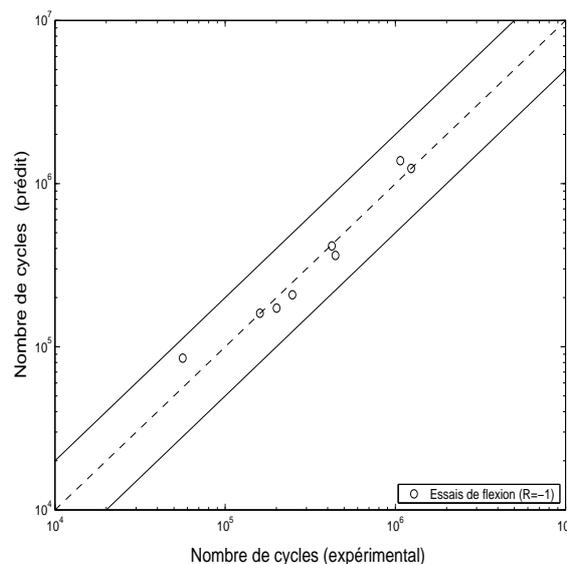


FIG. 3.2 – Identification des paramètres du modèle pour l'aluminium 6082 T6

Sur la figure (3.2), la diagonale représente une bonne corrélation entre les durées de vie expérimentales et prédites. Les segments de droite situés de part et d'autre de la diagonale, correspondent à une erreur sur la durée de vie en fatigue d'un facteur de deux. Les paramètres du modèle de l'aluminium 6082 T6 sont donnés dans le tableau (3.5).

$\alpha$	$\beta$ [MPa]	$\gamma$	$\xi$	$c$ [MPa]	$A$
0.82473	92	0.08246	1.3773	51126	71.41

TAB. 3.5 – Paramètres du modèle pour l'aluminium 6082 T6

La loi d'évolution de la limite élastique mésoscopique  $k$  en fonction de la pression hydrostatique  $p$  est représentée sur la figure (3.3).

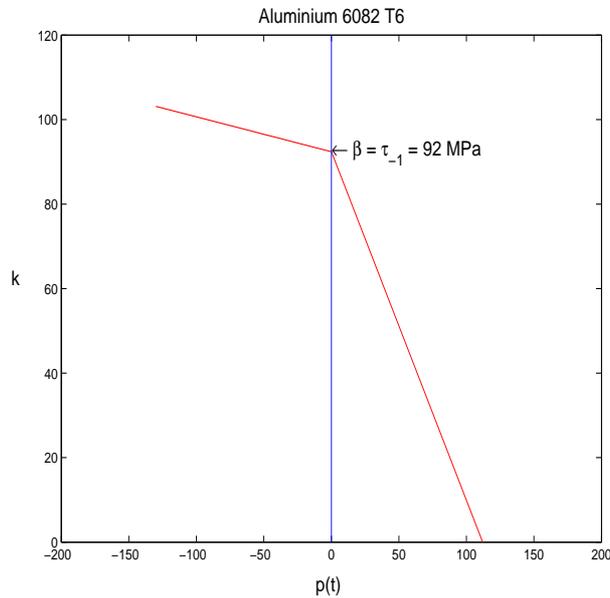


FIG. 3.3 – Loi d'évolution de la limite élastique mésoscopique  $k(p)$

### 3.2.4.2 Evaluation de $\varepsilon_s^{pc}$

Les essais de fatigue simulés sont sous chargements périodiques d'amplitude constante à **trajets radial et non radial**. Pour ceux à trajet non radial, on réfère au paragraphe (2.4.2.2) pour l'évaluation de la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$ . Cependant, pour les chargements proportionnels d'amplitude constante, on dispose d'une expression analytique de  $\varepsilon_s^{pc}$  donnée par l'équation (2.84) avec les valeurs suivantes de  $k^*$  :

- $k^* = \tau_a$  (amplitude de cisson) pour les essais de torsion.
- $k^* = \frac{\sigma_a}{\sqrt{3}}$  pour les essais de flexion où  $\sigma_a$  est l'amplitude de contrainte normale.
- $k^* = \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{3} + \tau_a^2}$  pour les essais de flexion-torsion en phase.

### 3.2.4.3 Calcul de durées de vie en fatigue

Après avoir identifié les paramètres du modèle, et déterminé  $\varepsilon_s^{pc}$  pour chacun des essais simulés, le nombre de cycles correspondant à l'amorçage est obtenu en utilisant l'équation (2.89). Dans les figures 3.4 (a) et 3.4 (b), on compare respectivement les durées de vie observées expérimentalement aux résultats du modèle et à ceux donnés par la méthode de Susmel et al. [72]. Les résultats de prédiction du modèle pour les essais simulés sous chargements périodiques d'amplitude constante à trajet radial sont en bon accord avec les durées de vie expérimentales. Ceux pour les essais simulés sous chargements à trajet non radial le sont moins bien. Par rapport aux résultats de prédiction du Susmel et al. [72], ceux du modèle sont meilleurs pour les essais de flexion-torsion pour  $\lambda < 1$  où la composante de flexion est plus importante que celle de torsion. Ceci est explicable par le fait qu'on identifie les paramètres du modèle moyennant une courbe de Wöhler en flexion.

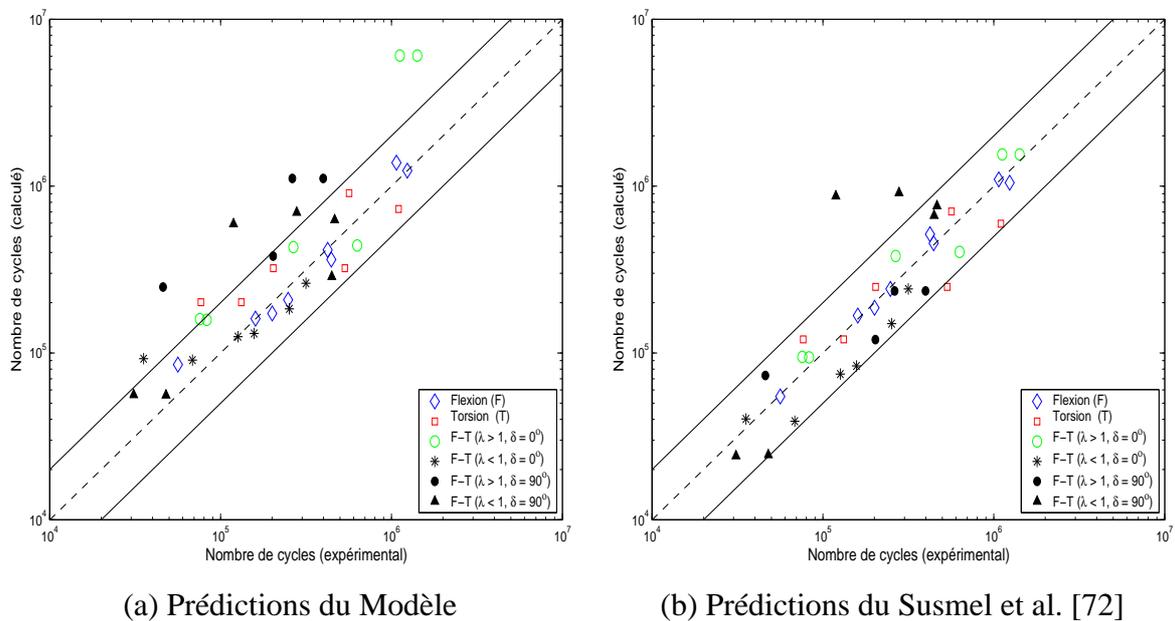


FIG. 3.4 – Comparaison des résultats de prédiction avec les durées de vie expérimentales

## 3.3 Simulation des essais de fatigue réalisés sur la fonte GS61

### 3.3.1 Présentation du matériau [12]

Il s'agit d'une fonte à matrice perlitique dans laquelle le graphite se trouve sous forme sphéroïdale. Elle est intitulée GS61 par la société Renault et correspond selon la norme AFNOR (NFA 32-201) à la FGS 700/2. Les essais de caractérisation montrent en fait que cette fonte se rapproche davantage de la FGS 800/2. Sa composition chimique (en % massique) est :

C norme	Si norme	Mn contrôlé	Cu contrôlé	Sn contrôlé	Ni contrôlé
3.50-3.90	1.80-2.80	0.85	0.03	0.01	0.03

TAB. 3.6 – Composition chimique (en % massique) de la fonte GS61 [8, 12]

### 3.3.2 Caractéristiques mécaniques du matériau

Bennebach [12] a réalisé des essais de traction sur des éprouvettes prélevées à différents endroits d'un morceau de vilebrequin afin d'établir la courbe  $\sigma - \varepsilon$  et d'en tirer les caractéristiques mécaniques de ce matériau. La forme de ces éprouvettes est donnée par la figure (3.5).

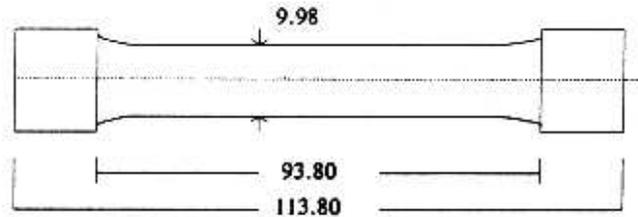


FIG. 3.5 – Eprouvette de traction (dimension en mm) [12]

La courbe de traction monotone est donnée par la figure (3.6) :

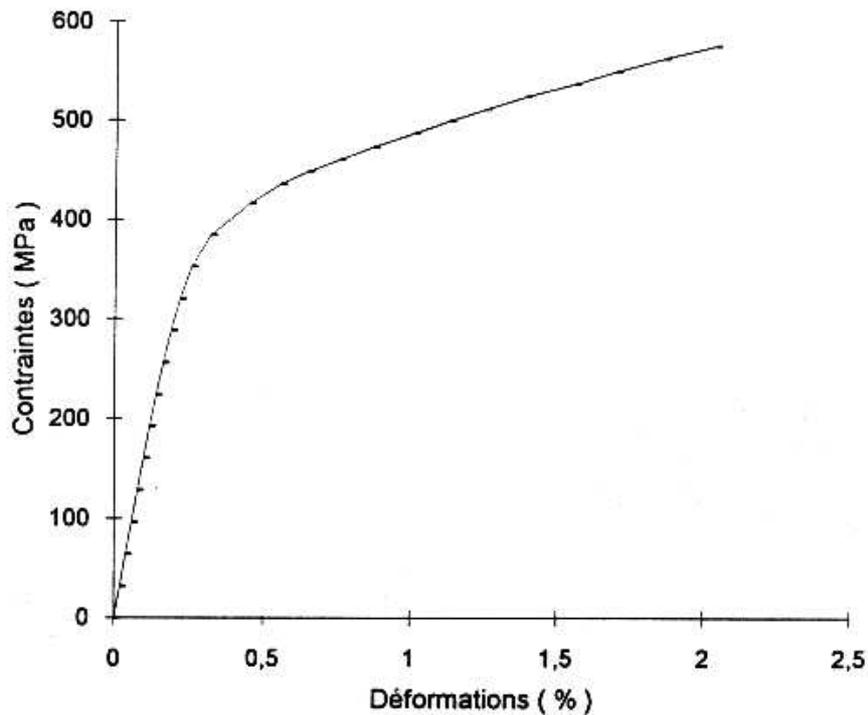


FIG. 3.6 – Courbe expérimentale de traction monotone de la fonte GS61 [12]

Les caractéristiques mécaniques obtenues sont :

- Module d'élasticité :  $E = 165200$  MPa.
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.277$ .
- Limite d'élasticité à 0.2% :  $Re_{0.2\%} = 416$  MPa.
- Résistance maximale :  $R_m = 750$  MPa.
- Allongement à rupture :  $A \approx 5\%$ .

Le même type d'essai réalisé par la Direction des Etudes Matériaux de la société Renault, sur des éprouvettes de diamètre 7 mm, a donné des résultats très proches :

- Module d'élasticité :  $E = 164900 \text{ MPa}$ .
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.275$ .
- Limite d'élasticité à 0.2% :  $Re_{0.2\%} = 462 \text{ MPa}$ .
- Résistance maximale :  $R_m = 795 \text{ MPa}$ .
- Allongement à rupture :  $A \approx 9\%$ .

La courbe de traction monotone a été modélisée par une équation de type Ramberg-Osgood :

$$\varepsilon_{tot} = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.1)$$

$\varepsilon_{tot}$  est la déformation longitudinale totale.

$k = 1121$  et  $n = 0.144$ .

Remarques :

- En ce qui concerne la limite d'élasticité ou de proportionnalité (valeur limite de la contrainte à partir de laquelle apparaît une déformation plastique), le domaine élastique est pratiquement limité à la limite élastique à 0.02% qui vaut dans ce cas 330 MPa.
- Le comportement en compression de cette fonte est caractéristique des fontes perlitiques. La limite d'élasticité en compression est supérieure de 10% à 20% à celle en traction.

### 3.3.3 Description des essais de fatigue testés

Les essais testés ont été menés en sollicitations alternées symétriques, c'est à dire à valeur moyenne nulle. Ils sont réalisés par Bennebach [12] sur des éprouvettes cylindriques à zone centrale torique, dont les coefficients théoriques de concentration de contrainte sont 1.07 en flexion et 1.05 en torsion. Les sollicitations sont du type :

$$S = S_a \sin(\omega t) \text{ pour la flexion.}$$

$$T = T_a \sin(\omega t + \phi) \text{ pour la torsion.}$$

La fréquence de sollicitation  $\omega$  est fixée à 40 Hz pour l'ensemble des essais.

Les points de la courbe de Wöhler correspondant à  $10^6$  et  $2 \cdot 10^5$  cycles sont obtenus par la méthode de l'escalier avec, respectivement, 25 et 15 éprouvettes. Le point correspondant à une durée de vie voisine de  $10^5$  cycles est déterminé par la méthode des fréquences cumulées avec une dizaine d'éprouvettes. Ces deux méthodes sont basées sur la normalité des distributions de la contrainte (escalier) et du logarithme des nombres de cycles à rupture (fréquences cumulées).

Les résultats d'essais comparés avec les prévisions de notre proposition sont en flexion plane alternée symétrique, en torsion alternée symétrique et en flexion-torsion en phase.

### Flexion plane alternée symétrique

Les résultats des essais de fatigue en flexion plane alternée symétrique sont regroupés dans le tableau (3.7).

N cycles	$10^6$	$2 \cdot 10^5$	$1.2 \cdot 10^5$
$n$	25	15	10
Méthode	SC	SC	FC
$\sigma_{nom}$ (MPa)	276	318	348
$\sigma_{loc}$ (MPa)	294	330	355
Ecart type (MPa)	11	9	-

TAB. 3.7 – Essais en flexion plane alternée ( $R=-1$ ),  $Kt_{fl} = 1.07$  [12]

où  $N$  est le nombre de cycles « ciblé »,  $n$  le nombre d'éprouvettes utilisées,  $SC$  et  $FC$  réfèrent respectivement à la méthode de l'escalier et à celle des fréquences cumulées,  $\sigma_{nom}$  est la contrainte normale nominale issue du chargement limite et  $\sigma_{loc}$  est la contrainte normale locale obtenue par un calcul éléments finis en élastoplasticité.

La courbe de Wöhler en flexion plane alternée ( $R=-1$ ) est :

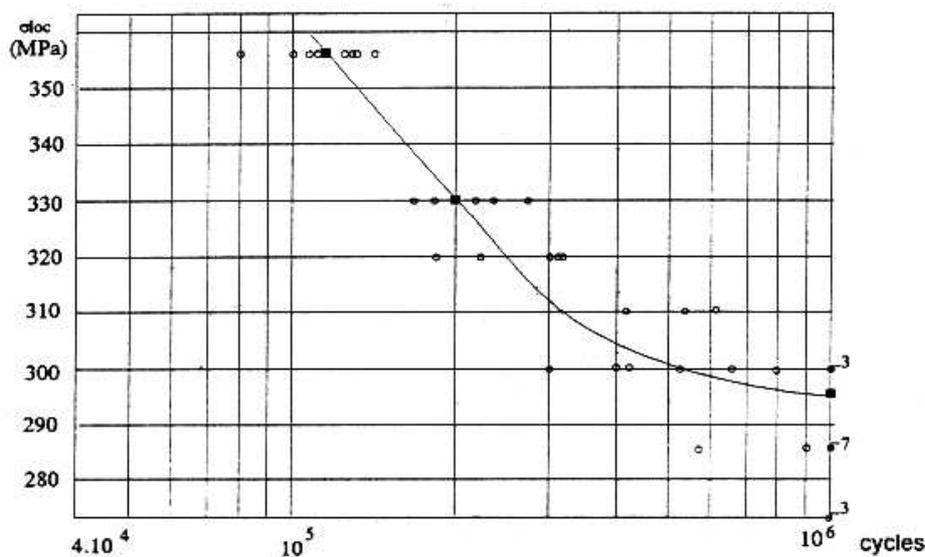


FIG. 3.7 – Courbe de Wöhler en flexion plane alternée ( $R=-1$ ),  $Kt_{fl} = 1.07$  [12]

La limite d'endurance en flexion plane alternée symétrique est déterminée à  $10^6$  cycles :  $f_{-1} = 294$  MPa.

## Torsion alternée symétrique

Les essais de torsion sont donnés dans le tableau (3.8) :

N cycles	$10^6$	$2 \cdot 10^5$	$0.98 \cdot 10^5$
$n$	25	15	10
Méthode	SC	SC	FC
$\tau_{nom}$ (MPa)	228	261	280
$\tau_{loc}$ (MPa)	220	242	254
Ecart type (MPa)	non significatif	non significatif	-

TAB. 3.8 – Essais en torsion alternée symétrique,  $Kt_{fl} = 1.05$  [12]

où  $\tau_{nom}$  est la contrainte de cisaillement nominale issue du chargement limite et  $\tau_{loc}$  est la contrainte de cisaillement locale obtenue par un calcul éléments finis en élastoplasticité.

La courbe de Wöhler en torsion alternée (R=-1) est :

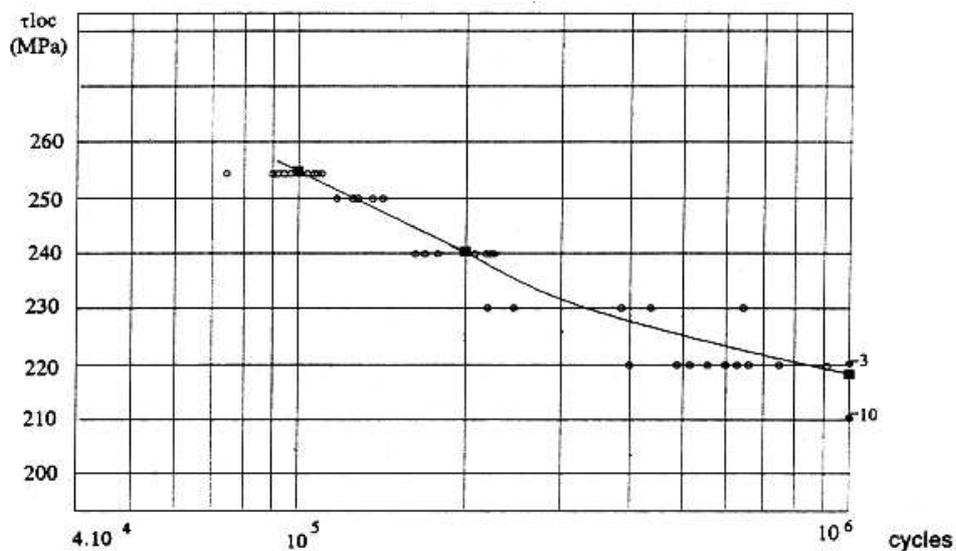


FIG. 3.8 – Courbe de Wöhler en torsion alternée (R=-1),  $Kt_{to} = 1.05$  [12]

La limite d'endurance en torsion alternée (R=-1) est évaluée à  $10^6$  cycles, sa valeur d'après la figure (3.8) est :  $\tau_{-1} = 218$  MPa.

## Flexion-torsion combinées

Ayant défini le comportement du matériau sous sollicitations simples de flexion et de torsion, Bennebach [12] avait effectué des essais combinant ces deux types de sollicitations. Le rapport des amplitudes de contraintes entre la flexion et la torsion ( $S_a/T_a$ ) est fixé à  $\sqrt{3}$ .

Les essais de flexion-torsion combinées en phase sont regroupés dans le tableau suivant :

N cycles	$10^6$	$2 \cdot 10^5$	$1.1 \cdot 10^5$
$n$	25	15	10
Méthode	SC	SC	FC
$\sigma_{nom}$ (MPa)	212	242	265
$\tau_{nom}$ (MPa)	127	142	159
$\sigma_{loc}$ (MPa)	228	256	286
$\tau_{loc}$ (MPa)	132	148	165
Ecart type (MPa)	non significatif	non significatif	-

TAB. 3.9 – Essais en flexion-torsion combinée en phase,  $Kt_{fl} = 1.07$  [12]

Pour ce type d'essais, la courbe de Wöhler est :

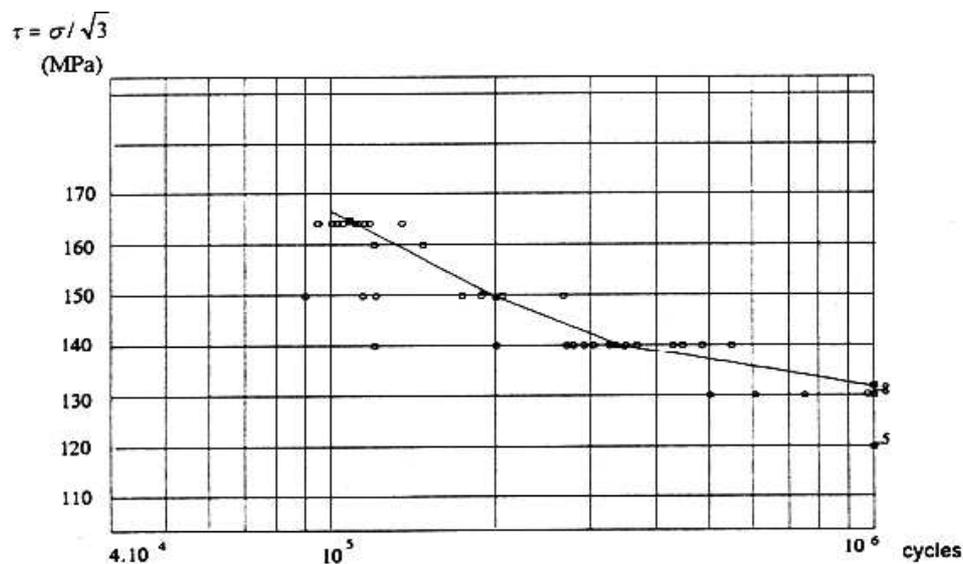


FIG. 3.9 – Courbe de Wöhler en flexion-torsion combinée en phase,  $Kt_{fl} = 1.07$  [12]

### 3.3.4 Application du modèle sur la fonte GS61

#### 3.3.4.1 Identification des paramètres

Les paramètres du modèle relatifs à la fonte GS61 sont identifiés à l'aide d'une courbe de Wöhler en flexion alternée symétrique ( $R=-1$ ) et de deux limites d'endurance tout en résolvant un problème d'optimisation. Les résultats du problème d'optimisation sont donnés dans le tableau (3.10). Sur une échelle bi-logarithmique représentée en Fig. 3.10, nous reportons respectivement en abscisse et en ordonnée les durées de vie expérimentales et calculées. L'identification des paramètres du modèle porte sur une bonne corrélation entre ces durées de vie.

$N^{\circ}$ série	$\sigma_{x,a}$ [MPa]	$N_{cyc}$ (expérimental) [Cycles]	$N_{cyc}$ (prédit) [Cycles]	$ Erreur\ relative $ [%]
1	362	100000	110800	10.80
2	358	110000	115833	5.30
3	355	120000	119980	0.02
4	330	200000	176570	11.72
5	325	220000	197015	10.45
6	320	254000	224113	11.62
7	310	320000	319860	0.04
8	300	533000	656247	23.05

TAB. 3.10 – Résultat du problème d’optimisation pour la fonte GS61

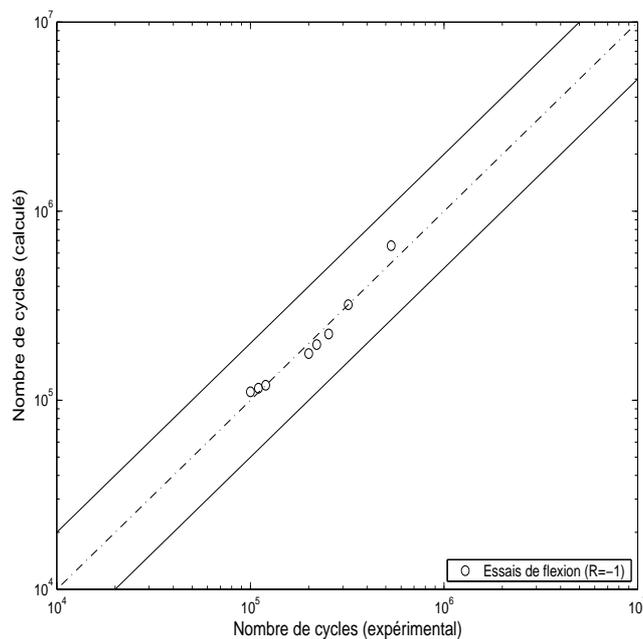


FIG. 3.10 – Comparaison des durées de vie expérimentales et estimées pour des essais de flexion plane alternée (R=-1)

Les paramètres du modèle pour la fonte GS61 sont regroupés dans le tableau suivant :

$\alpha$	$\beta$ [MPa]	$\gamma$	$\xi$	$c$ [MPa]	$A$
0.9895	218	0.0046	0.7327	70588	1683.77

TAB. 3.11 – Paramètres du modèle pour la fonte GS61

Pour la fonte GS61, la loi d’évolution de la limite élastique mésoscopique  $k$  en fonction de la pression hydrostatique  $p$  est donnée par la figure (3.11).

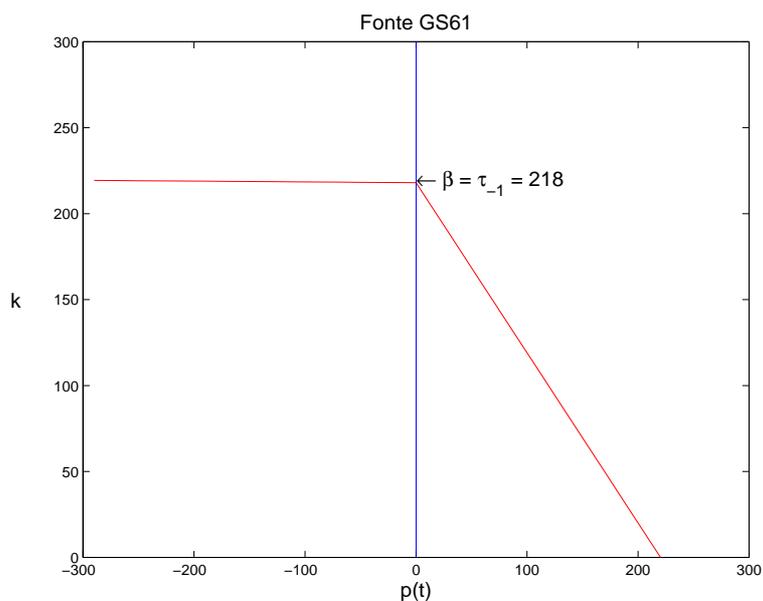


FIG. 3.11 – Loi d'évolution de la limite élastique mésoscopique  $k(p)$

### 3.3.4.2 Calcul de durées de vie des essais de fatigue réalisés sur la fonte GS61

Nous présentons sur la figure (3.12) les résultats de prédiction des essais en torsion alternée symétrique ( $R=-1$ ) et des essais combinés de flexion-torsion en phase. Une bonne corrélation avec les durées de vie expérimentales est obtenue.

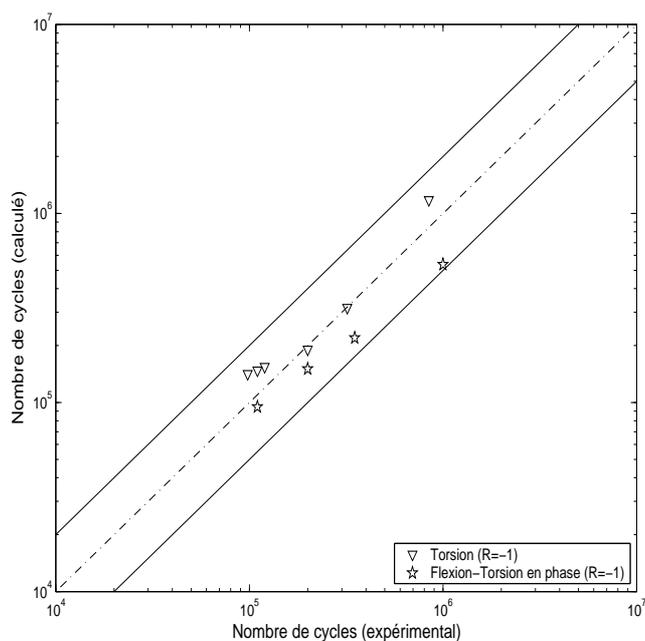


FIG. 3.12 – Comparaison des durées de vie expérimentales et estimées pour la fonte GS61

## 3.4 Application du modèle à des essais de fatigue réalisés sur l'acier 30 NCD 16

### 3.4.1 Présentation de l'acier 30 NCD 16

L'acier 30 NCD 16 considéré ici est un acier trempé revenu. Dubar [25] avait réalisé des essais de fatigue sur ce matériau qui est fourni par la Société EUROCOPTER sous forme de plusieurs lots de caractéristiques mécaniques et dynamiques sensiblement différentes. Les caractéristiques mécaniques relatives à chaque lot ont été déterminées par Dubar [25] en effectuant un essai de traction monotone par lot. Il finit par définir le « matériau moyen » : celui qui a les caractéristiques suivantes :

$Re_{0.02\%}$ [MPa]	$Re_{0.2\%}$ [MPa]	$R_m$ [MPa]	$\sigma_D$ [MPa]	$\tau_D$ [MPa]
895	1080	1200	690	428

TAB. 3.12 – Caractéristiques mécaniques et dynamiques du « matériau moyen » [25]

Les caractéristiques mécaniques et dynamiques du « matériau moyen » et des lots 4 et 5 sont identiques. Pour les lots 4 et 5, elles sont :

	$Re_{0.02\%}$ [MPa]	$Re_{0.2\%}$ [MPa]	$R_m$ [MPa]	$\sigma_D$ [MPa]	$\tau_D$ [MPa]
Lot 4	800	1090	1177	680	426
Lot 5	840	1000	1135	680	-

TAB. 3.13 – Caractéristiques mécaniques et dynamiques des lots 4 et 5 [25]

où

- $Re_{0.02\%}$  : limite élastique à 0.02% de déformation plastique,
- $Re_{0.2\%}$  : limite élastique à 0.2% de déformation plastique,
- $R_m$  : résistance maximum à la traction,
- $\sigma_D$  : limite d'endurance en flexion alternée symétrique,
- $\tau_D$  : limite d'endurance en torsion alternée symétrique.

### 3.4.2 Essais de fatigue réalisés par Dubar sur l'acier 30 NCD 16

Dubar [25] a étudié la résistance à la fatigue de l'acier 30 NCD 16. Il a effectué sur les lots 4 et 5 des essais en fatigue résultant de différentes configurations de flexion et de torsion (flexion simple, torsion simple et flexion-torsion combinées). Les résultats d'essais sont obtenus en utilisant deux méthodes : la méthode de l'escalier pour l'endurance illimitée et la méthode des fréquences cumulées pour le régime fini de durées de vie (endurance limitée). Ces essais ont été utilisés pour tester le modèle proposé. Ils sont présentés dans la suite.

Les essais effectués sous sollicitations simples de flexion et de torsion sont regroupés dans les tableaux (3.14) et (3.15).

$N^{\circ}$ série	$\sigma_{x,m}$ [MPa]	$\sigma_{x,a}$ [MPa]	$\tau_{xy,a}$ [MPa]	$N$ [Cycles]
1	0	820	0	51000
2	0	795	0	80000
3	0	790	0	90000
4	0	785	0	95000
5	0	780	0	100000
6	0	765	0	120000
7	0	752	0	140000
8	0	725	0	200000
9	0	720	0	210000
10	0	715	0	230000
11	0	708	0	250000
12	450	640	0	51000
13	450	620	0	140000
14	290	695	0	120000
15	290	660	0	250000

TAB. 3.14 – Essais de flexion simple [25]

$N^{\circ}$ série	$\sigma_{x,m}$ [MPa]	$\sigma_{x,a}$ [MPa]	$\tau_{xy,a}$ [MPa]	$N$ [Cycles]
16	0	0	527	51000
17	0	0	505	80000
18	0	0	500	90000
19	0	0	497	95000
20	0	0	495	100000
21	0	0	482	120000
22	0	0	470	140000
23	0	0	450	200000
24	0	0	446	210000
25	0	0	445	230000
26	0	0	440	250000

TAB. 3.15 – Essais de torsion alternée symétrique [25]

Les résultats d'essais combinés de flexion-torsion en phase avec ou sans contrainte moyenne  $\sigma_{x,m}$  sont donnés dans le tableau suivant :

$N^{\circ}$ série	$\sigma_{x,m}$ [MPa]	$\sigma_{x,a}$ [MPa]	$\tau_{xy,a}$ [MPa]	$N$ [Cycles]
27	0	600	335	80000
28	0	548	306	200000
29	290	0	460	120000
30	450	0	460	120000
31	450	0	430	250000
32	450	490	285	95000
33	290	500	290	120000

TAB. 3.16 – Essais de flexion-torsion combinées [25]

### 3.4.3 Identification des paramètres du modèle pour l'acier 30 NCD 16

Des essais de flexion plane alternée symétrique (voir tableau 3.14) et deux limites de fatigue en flexion et en torsion purement alternées ( $f_{-1} = 680$  MPa,  $\tau_{-1} = 426$  MPa) permettent d'identifier les paramètres du modèle de l'acier 30 NCD 16. En effet, l'identification des paramètres consiste à minimiser l'écart relatif entre les durées de vie expérimentales et calculées pour des essais de flexion purement alternée ( $R=-1$ ). Cela se traduit clairement sur la figure (3.13) par l'obtention d'une bonne corrélation entre ces différentes durées de vie.

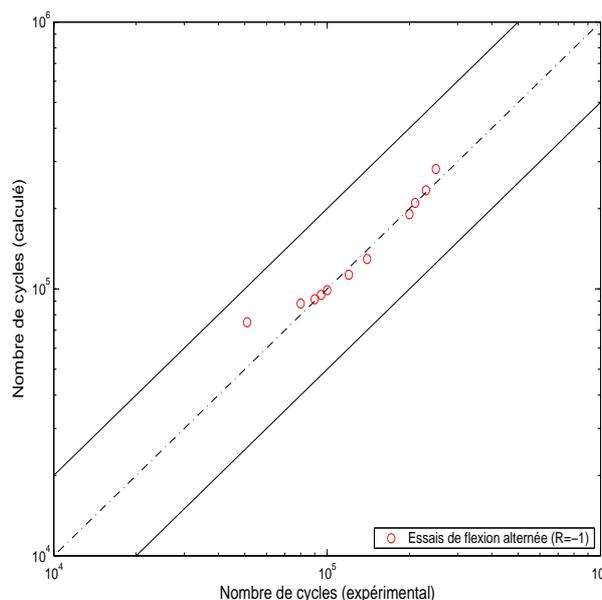


FIG. 3.13 – Identification des paramètres du modèle pour l'acier 30 NCD 16

Les paramètres du modèle pour l'acier 30 NCD 16 sont donnés dans le tableau suivant :

$\alpha$	$\beta$ [MPa]	$\gamma$	$\xi$	$c$ [MPa]	$A$
0.4799	426	0.1852	0.8217	23456	2670

TAB. 3.17 – Paramètres du modèle pour l'acier 30 NCD 16

Pour l'acier 30 NCD 16, la loi d'évolution de la limite élastique mésoscopique  $k$  en fonction de la pression hydrostatique  $p$  est donnée comme suit :

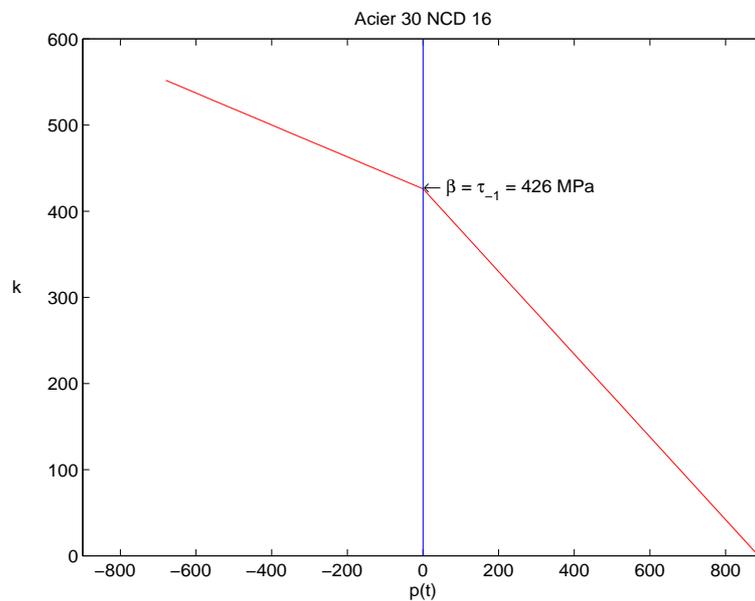


FIG. 3.14 – Loi d'évolution de la limite élastique mésoscopique  $k(p)$

### 3.4.4 Résultats de prédiction de durées de vie

Ayant identifié les paramètres du modèle de l'acier 30 NCD 16 et déterminé  $\varepsilon_s^{pc}$  pour chacun des essais testés, il est simple de calculer le nombre de cycles à l'amorçage pour n'importe quel chargement périodique proportionnel d'amplitude constante par application du critère de fatigue (Eq. 2.87). Sur la figure (3.15) sont reportées les durées de vie observées expérimentalement et celles calculées. Les résultats de prédiction sont en bon accord avec les durées de vie expérimentales.

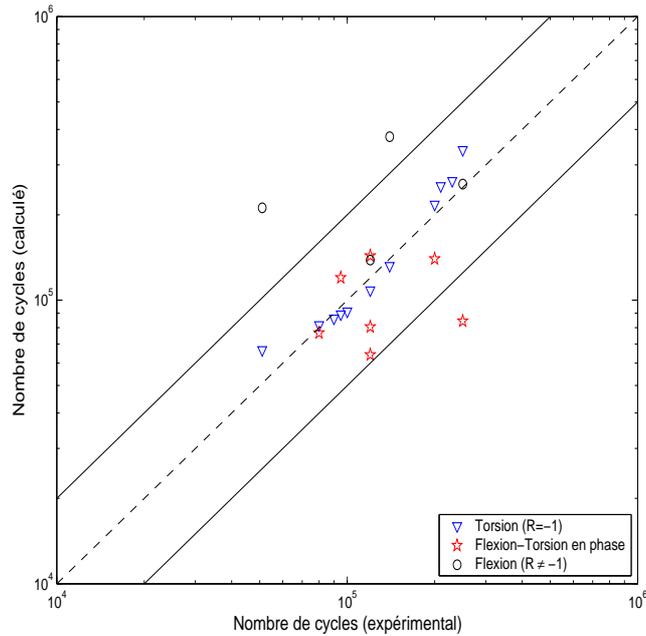


FIG. 3.15 – Comparaison de durées de vie expérimentales et estimées pour l’acier 30 NCD 16

## 3.5 Application du modèle aux données de fatigue de l’acier SM45C

### 3.5.1 Présentation de l’acier SM45C

C’est un acier de construction d’une utilisation répandue pour les vilebrequins et les composants structuraux. La composition chimique et les propriétés mécaniques de ce matériau sont données respectivement dans les tableaux (3.18) et (3.19).

C	Mn	P	S	Si	Ni	Cr	Cu
0.42	0.73	0.02	0.012	0.28	0.14	0.18	0.13

TAB. 3.18 – Composition chimique de l’acier SM45C [41]

$\sigma_y$ (MPa)	$R_m$ (MPa)	$E$ (GPa)	$G$ (GPa)	$\nu$	$A$ %
638	824	213	82.5	0.29	22

TAB. 3.19 – Caractéristiques mécaniques statiques de l’acier SM45C [41]

où

- $\sigma_y$  : limite élastique,
- $R_m$  : résistance maximum à la traction,
- $E$  : module de Young,
- $G$  : module de cisaillement,
- $\nu$  : coefficient de Poisson,
- $A$  : allongement à rupture.

### 3.5.2 Description des essais de fatigue réalisés sur l'acier SM45C

Des essais préliminaires de fatigue en torsion purement alternée et flexion purement alternée ont été effectués par Lee [41]. Ces deux types d'essais ont été réalisés avec des éprouvettes de même forme géométrique. En outre, l'auteur avait effectué des essais de fatigue en flexion avec contrainte moyenne pour étudier son effet sur la durée de vie de l'acier SM45C. Tous les essais de fatigue uniaxiale réalisés par Lee [41] sont illustrés sur la figure (3.16). Cette figure montre une baisse de durée de vie en flexion de l'acier SM45C en présence d'une contrainte moyenne positive. L'amorçage de fissure a été décelé lors d'une baisse de 10% de la rigidité du spécimen ou de l'éprouvette utilisée.

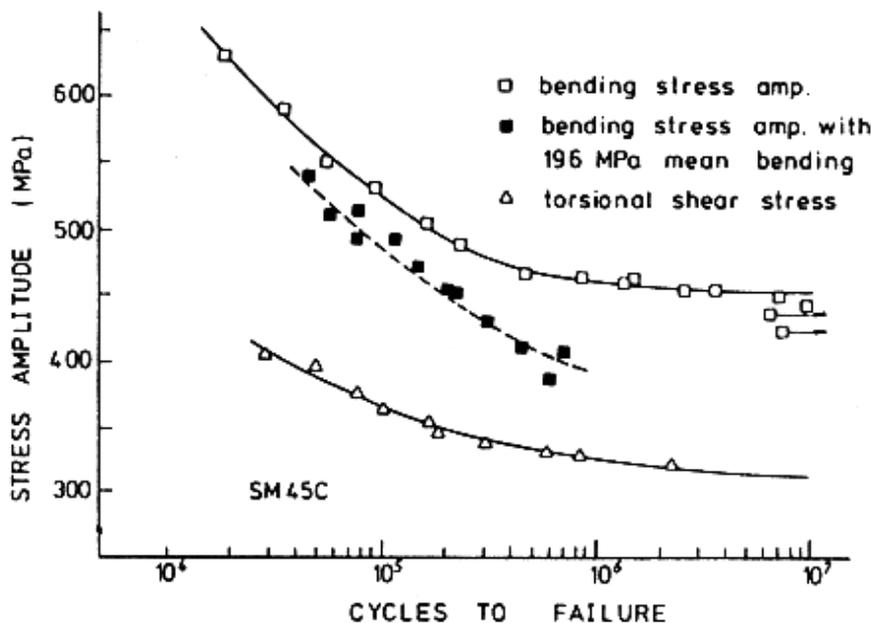


FIG. 3.16 – Courbes de fatigue réalisées sur l'acier SM45C par Lee [41]

Les limites de fatigue en flexion alternée symétrique et torsion alternée symétrique sont relevées respectivement des courbes de fatigue en flexion purement alternée et torsion purement alternée illustrées sur la figure (3.16). Ces valeurs sont :

$f_{-1}$  : 442 MPa.

$\tau_{-1}$  : 311 MPa.

### 3.5.3 Identification des paramètres du modèle de l'acier SM45C

Les paramètres du modèle de l'acier SM45C sont identifiés en référant au paragraphe (2.4.4). Ils sont illustrés dans le tableau suivant :

$\alpha$	$\beta$ [MPa]	$\gamma$	$\xi$	$c$ [MPa]	$A$
0.7638	311	0.0062	1.3607	24094	183.56

TAB. 3.20 – Paramètres du modèle pour l'acier SM45C

Pour l'acier SM45C, la loi d'évolution de la limite élastique mésoscopique  $k$  en fonction de la pression hydrostatatique  $p$  est donnée par la figure (3.17).

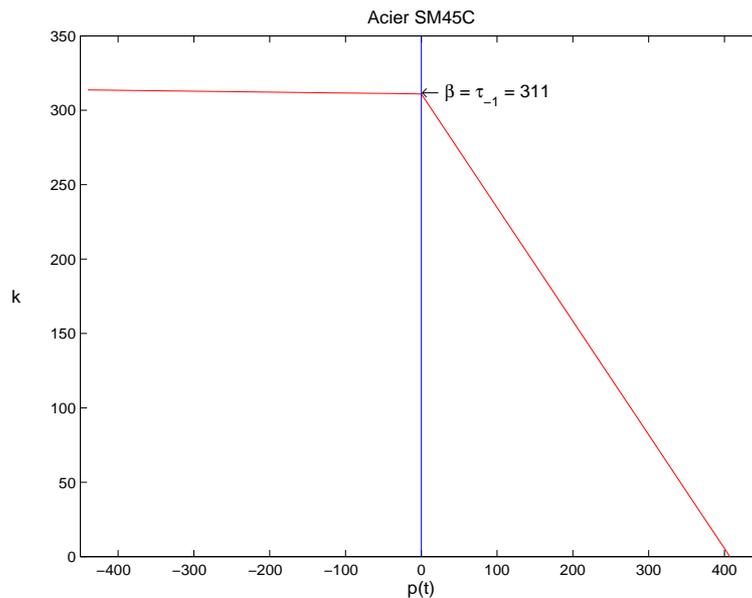


FIG. 3.17 – Loi d'évolution de la limite élastique mésoscopique  $k(p)$

### 3.5.4 Simulation des essais de fatigue réalisés sur l'acier SM45C

Les essais testés sont constitués d'essais simples en flexion et torsion purement alternées, et d'essais en flexion avec une contrainte moyenne de 190 MPa. Les valeurs pour ces sollicitations ont été relevées sur les courbes de Wöhler (Fig. 3.16). Les essais en flexion purement alternée ( $R=-1$ ) ont servi pour l'identification des paramètres du modèle. Les autres essais ont été simulés par application du modèle proposé. La figure (3.18) montre une bonne prédiction des essais simulés par comparaison aux essais déterminés expérimentalement.

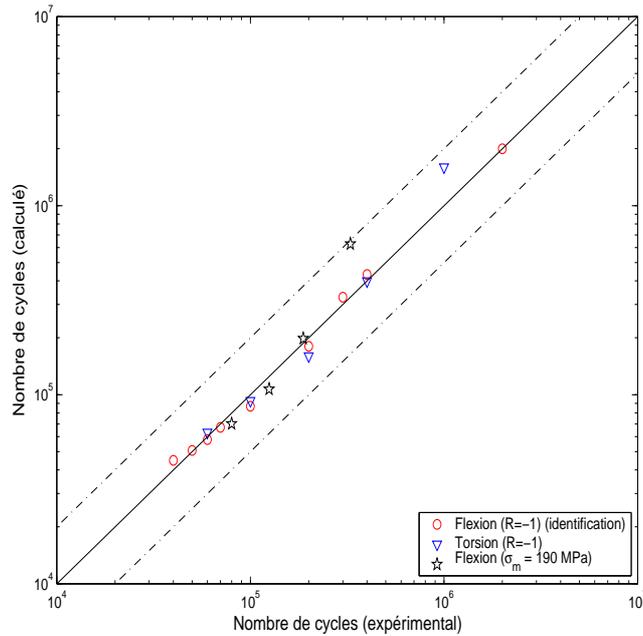


FIG. 3.18 – Comparaison de durées de vie expérimentales et estimées pour l’acier SM45C

## 3.6 Validation expérimentale du modèle sur l’acier 10 HNAP

### 3.6.1 Présentation du matériau

Des essais de fatigue ont été réalisés sur l’acier 10 HNAP. C’est un acier à très bas carbone qui ressemble au 10 NC 6. Dans le tableau (3.21), on donne sa composition chimique :

C	Mn	Si	P	S	Cr	Cu	Ni	Fe
0.115%	0.71%	0.41%	0.082%	0.028%	0.81%	0.30%	0.50%	le reste

TAB. 3.21 – Composition chimique de l’acier 10 HNAP [11]

Les caractéristiques mécaniques de cet acier sont mentionnées dans le tableau (3.22) :

$Re_{0.2\%}$	$R_m$	$A$	$\nu$	$E$
418 MPa	566 MPa	32%	0.29	215000 MPa

TAB. 3.22 – Caractéristiques mécaniques de l’acier 10 HNAP [11]

- où,
- $\sigma_e$  : limite élastique à 0.2% de déformation plastique,
  - $R_m$  : résistance maximum à la traction,
  - $A$  : allongement à rupture,
  - $\nu$  : coefficient de Poisson,
  - $E$  : module de Young.

### 3.6.2 Description des essais de fatigue sur l'acier 10 HNAP

L'équipe de Macha a effectué un grand nombre d'essais de fatigue sur l'acier 10 HNAP. Ainsi elle a réalisé non seulement des essais simples en traction-compression et en torsion purement alternée ( $R=-1$ ) afin d'établir les courbes de Wöhler correspondantes mais aussi des essais sous chargements variables sur des éprouvettes cylindriques du même matériau [1]. VIDAL [74] avait effectué des essais en traction sur ce matériau pour diverses valeurs de la contrainte moyenne. Elle en a établi la courbe de Wöhler en traction répétée dans le but de valider sur cet acier la méthode de Robert dont l'utilisation nécessite trois courbes de Wöhler en traction alternée symétrique, torsion alternée symétrique et traction répétée.

#### 3.6.2.1 Courbe de Wöhler en traction-compression

Le modèle choisi par Macha pour la courbe de Wöhler en traction-compression est celui du Basquin :

$$\ln N = a - b \ln [\sigma_{-1} (N)] \quad (3.2)$$

Macha donne la pente de cette courbe ainsi que le point de rupture des pentes :

$$b = 9.82$$

$$\sigma_{-1}^D = 252 \text{ MPa} ; N(\sigma_{-1}^D) = 1280000 \text{ cycles}$$

On peut donc déterminer la valeur de la constante  $a$  de cette équation. On trouve :  $a = 68.361$ . L'équation de la courbe de Wöhler en traction-compression est donc :

$$\ln N = 68.361 - 9.82 \ln [\sigma_{-1} (N)] \quad (3.3)$$

#### 3.6.2.2 Courbe de Wöhler en torsion alternée symétrique

La courbe de Wöhler en torsion alternée symétrique a été modélisée en utilisant l'équation suivante :

$$\ln N = a - b \tau_{-1}(N) \quad (3.4)$$

Le point de rupture des pentes est déterminé à  $N = 2042049$  cycles ;  $\tau_{-1}^D = 182$  MPa.

Cette courbe n'est obtenue que sous forme de graphique donnant la durée de vie en minutes (Fig. 3.19). La fréquence des sollicitations est de 10 Hz. On peut donc très facilement remonter au nombre de cycles. Le relevé de quelques points permet de remonter à son équation. Les points relevés sur le graphique sont donnés dans le tableau (3.23) avec la conversion des minutes en nombre de cycles. Ces différents points permettent de déterminer les paramètres  $a$  et  $b$  de l'équation (3.4). Il vient :

$$\ln N = 21.55 - 0.0385 \tau_{-1}(N) \quad (3.5)$$

$\tau_a$ (MPa)	Durée de vie (min)	Durée de vie (cycles)
260	175.7	105420
240	357.4	214440
220	782.7	469620
200	1800.2	1080120
182	3403.4	2042049

TAB. 3.23 – Points relevés sur la courbe de Wöhler en torsion alternée symétrique [74]

La courbe de Wöhler en torsion alternée symétrique est :

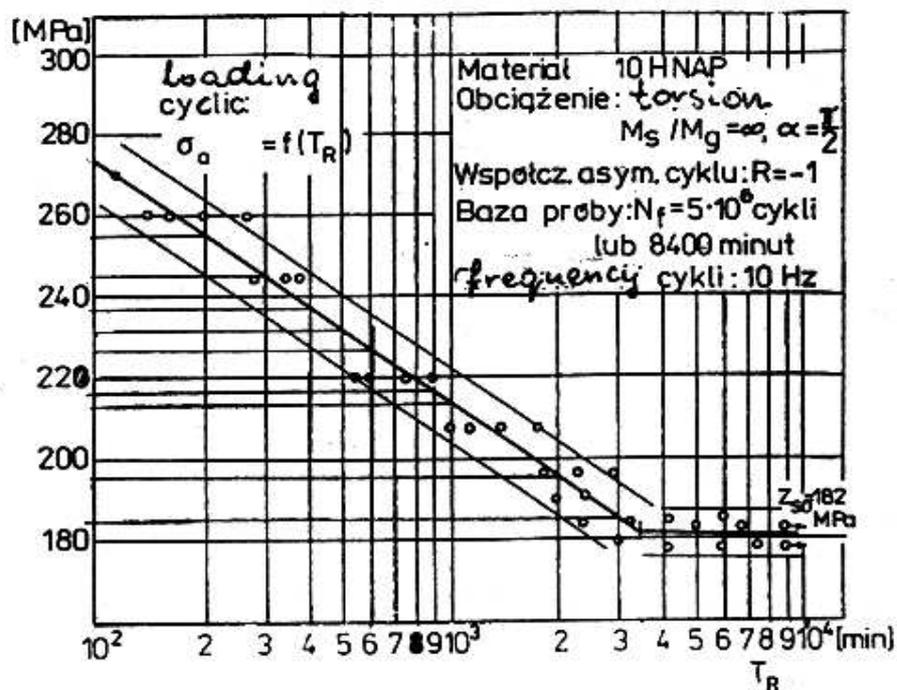


FIG. 3.19 – Courbe de Wöhler en torsion alternée symétrique [11, 74]

### 3.6.2.3 Essais de fatigue en traction pour diverses valeurs de la contrainte moyenne

VIDAL [74] avait effectué des essais en traction sur l'acier 10 HNAP pour diverses valeurs de la contrainte moyenne. Les résultats sont regroupés dans le tableau (3.24). Ils nous ont permis de tracer les courbes de Wöhler pour différentes valeurs de la contrainte moyenne  $\sigma_m$ . Ces courbes sont modélisées par l'équation de Wöhler :

$$\ln N = A - B \sigma_{max} \quad (3.6)$$

Dans le tableau (3.25), on donne en fonction de  $\sigma_m$  les valeurs des constantes  $A$  et  $B$  de l'équation (3.6).

$\sigma_a$ (MPa)	$\sigma_m$ (MPa)	$N_{exp}$ (cycles)
250	75	439300 ; 402500
270	75	358200 ; 854700 ; 318700
290	75	252300 ; 376300 ; 379700
310	75	54800 ; 123400 ; 45000
250	150	157400 ; 1333000
270	150	172100 ; 121500 ; 233100
290	150	124300 ; 41900 ; 60500
230	225	413900 ; 204500 ; 545200
250	225	122400 ; 229600 ; 104000
270	225	110000 ; 29900 ; 66000
190	300	497100 ; 234300 ; 524800
210	300	463500 ; 367300 ; 259500
230	300	219000 ; 179400 ; 222400
250	300	95300 ; 118200 ; 59100

TAB. 3.24 – Résultats expérimentaux des essais en traction pour diverses valeurs de  $\sigma_m$

Les courbes de Wöhler en traction pour diverses valeurs de la contrainte moyenne sont données par la figure suivante :

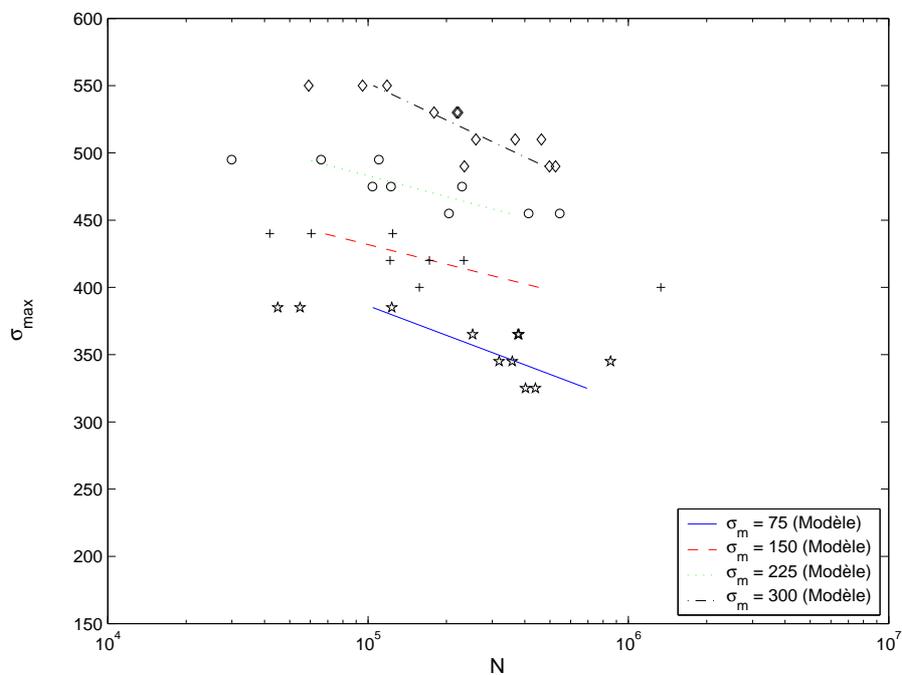


FIG. 3.20 – Courbes de Wöhler en traction pour diverses valeurs de la contrainte moyenne

$\sigma_m$ (MPa)	A	B
75	23.72	0.0316
150	32.022	0.0475
225	33.102	0.0447
300	25.474	0.0253

TAB. 3.25 – Caractéristiques des courbes de Wöhler en traction pour différentes valeurs de la contrainte moyenne

### 3.6.2.4 Essais de fatigue sous chargement variable

Des essais de fatigue sous chargement multiaxial aléatoire ont été réalisés sur des éprouvettes cylindriques de l'acier 10 HNAP [1]. Le chargement considéré est proportionnel et résulte d'une combinaison de flexion et de torsion. Le signal aléatoire est à caractère stationnaire et a une distribution normale comme loi de probabilité. Des essais de ce type, ont été analysés et simulés par Carpinteri et al. [17]. Ils nous ont été fournis sous forme de 35 tests réalisés sur l'acier 10 HNAP pour deux valeurs de l'angle  $\alpha$  :  $\alpha = \pi/8$  et  $\alpha = \pi/4$ .  $\alpha$  est l'angle que fait le moment résultant  $M$  avec le moment de flexion  $M_B$  (voir figure 3.21).

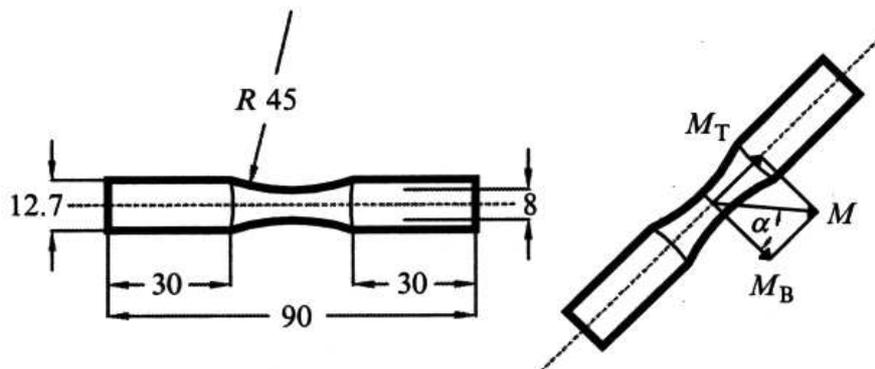


FIG. 3.21 – Essais de fatigue aléatoire de flexion-torsion sur éprouvettes cylindriques [17]

La séquence stationnaire de chargement aléatoire contient 49152 valeurs relevées par un intervalle de temps de 0.00375 secondes (fréquence = 266.67 Hz). Elle est représentée sur la figure (3.22). Sa durée totale est 184.32 secondes. Cette séquence est multipliée par des coefficients de charge correspondant à la flexion  $f(\sigma_{xx})$  et à la torsion  $f(\tau_{xy})$  afin d'obtenir de séquences de chargement multiaxial aléatoire. Comme le signal est stationnaire, la durée de vie à rupture est déterminée en nombre de séquences à rupture  $N_{Sq}$ . Connaissant  $N_{Sq}$  et la durée totale en secondes de la séquence étudiée, on peut facilement exprimer la durée de vie de la pièce en secondes. Les résultats d'essais en fatigue sous charges variables sont récapitulés dans les tableaux (3.26) et (3.27) en fonction de l'angle  $\alpha$  et du rapport  $r$  ;  $r = f(\tau_{xy})/f(\sigma_{xx})$ .

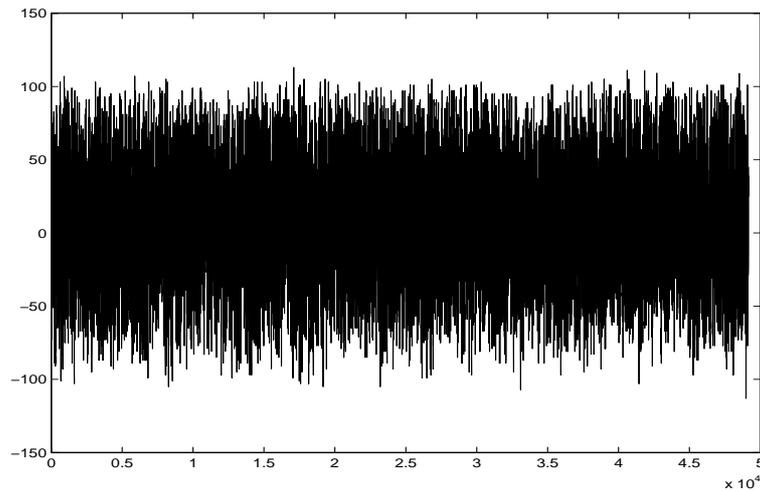


FIG. 3.22 – Séquence de chargement aléatoire stationnaire de distribution normale

**1<sup>er</sup> type d'essais :**  $\alpha = \pi/8$  et  $r = f(\tau_{xy})/f(\sigma_{xx}) = 0.2$

$N^{\circ}$	$f(\sigma_{xx})$	$f(\tau_{xy})$	$r$	$T_{exp}(sec)$
1	5.7084	1.1822	0.2	16843.2
2	5.2917	1.0959	0.2	17780.1
3	4.8337	1.0010	0.2	24416.5
4	5.2674	1.0909	0.2	24858.2
5	5.4534	1.1294	0.2	26518.3
6	5.2002	1.0769	0.2	36162.3
7	4.7944	0.9929	0.2	47600.4
8	4.3862	0.9084	0.2	57993.9
9	4.6241	0.9576	0.2	60428
10	4.0194	0.8324	0.2	73373.3
11	4.0127	0.8310	0.2	87609.1
12	4.2292	0.8758	0.2	89185.2
13	3.9213	0.8121	0.2	106900
14	3.7731	0.7814	0.2	117358
15	4.1148	0.8521	0.2	118902
16	3.6150	0.7486	0.2	132448
17	3.3135	0.6862	0.2	170571
18	4.1298	0.8553	0.2	178215
19	3.4761	0.7199	0.2	225288
20	3.3430	0.6923	0.2	352635
21	3.0135	0.6241	0.2	355720

TAB. 3.26 – Résultats de fatigue sous charges variables pour  $\alpha = \pi/8$  et  $r = 0.2$

2<sup>e</sup> type d'essais :  $\alpha = \pi/4$  et  $r = f(\tau_{xy})/f(\sigma_{xx}) = 0.5$

$N^{\circ}$	$f(\sigma_{xx})$	$f(\tau_{xy})$	$r$	$T_{exp}(sec)$
1	4.2519	2.1260	0.5	15379.4
2	4.0567	2.0284	0.5	21465.7
3	3.8982	1.9491	0.5	25350.4
4	3.7823	1.8912	0.5	45949
5	3.5963	1.7982	0.5	62434.8
6	3.4497	1.7249	0.5	75225.7
7	2.9423	1.4712	0.5	115009
8	2.8814	1.4407	0.5	136794
9	2.3299	1.1650	0.5	203365
10	2.8399	1.4200	0.5	221370
11	2.8493	1.4247	0.5	244757
12	2.2542	1.1271	0.5	251723
13	2.3651	1.1826	0.5	288080
14	2.4215	1.2108	0.5	405444

TAB. 3.27 – Résultats de fatigue sous charges variables pour  $\alpha = \pi/4$  et  $r = 0.5$

Sur la figure (3.23), on donne un exemple d'une séquence de chargement multiaxial aléatoire.

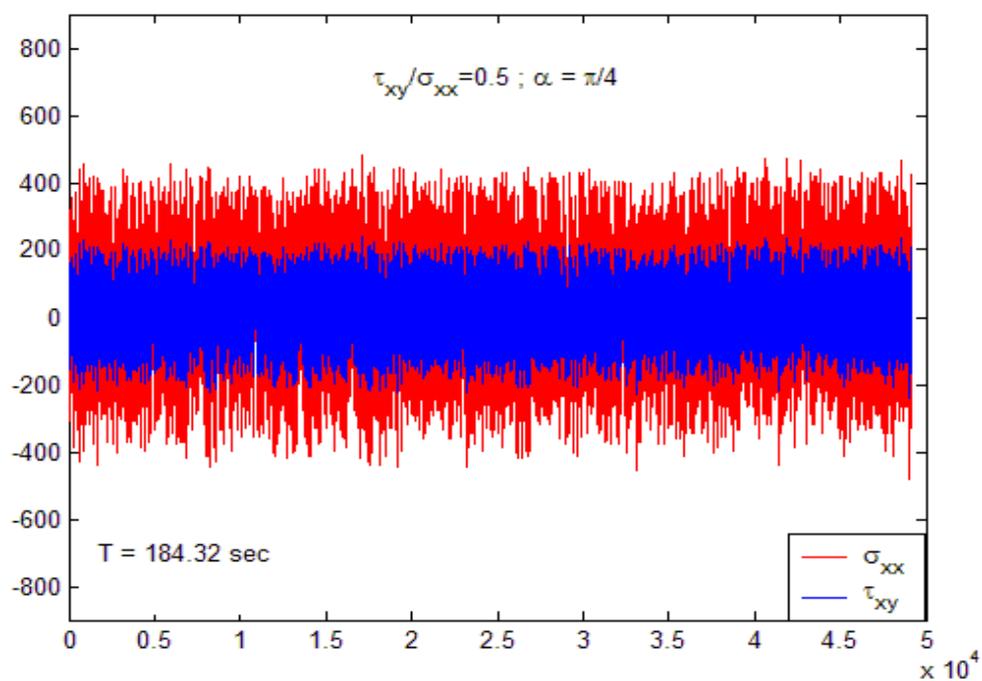


FIG. 3.23 – Séquence de chargement multiaxial aléatoire

### 3.6.3 Identification des paramètres du modèle de l'acier 10 HNAP

Comme on a vu précédemment, l'identification des paramètres du modèle nécessite une courbe de Wöhler et deux limites d'endurance. Pour l'acier 10 HNAP, la limite d'endurance en traction-compression est déterminée à  $N = 1280000$  cycles :  $\sigma_{-1}^D = 252$  MPa ; la limite d'endurance en torsion alternée  $\tau_{-1}^D$  est égale à 182 MPa et déterminée à  $N = 2042049$  cycles. Les paramètres du modèle de l'acier 10 HNAP peuvent être identifiés en référant au paragraphe (2.4.4). Ils sont regroupés dans le tableau suivant :

$\alpha$	$\beta$ [MPa]	$\gamma$	$\xi$	$c$ [MPa]	$A$
0.9016	182	0.0324	0.9001	48734	1370

TAB. 3.28 – Paramètres du modèle de l'acier 10 HNAP

Pour l'acier 10 HNAP, la loi d'évolution de la limite élastique mésoscopique  $k$  en fonction de la pression hydrostatique  $p$  est :

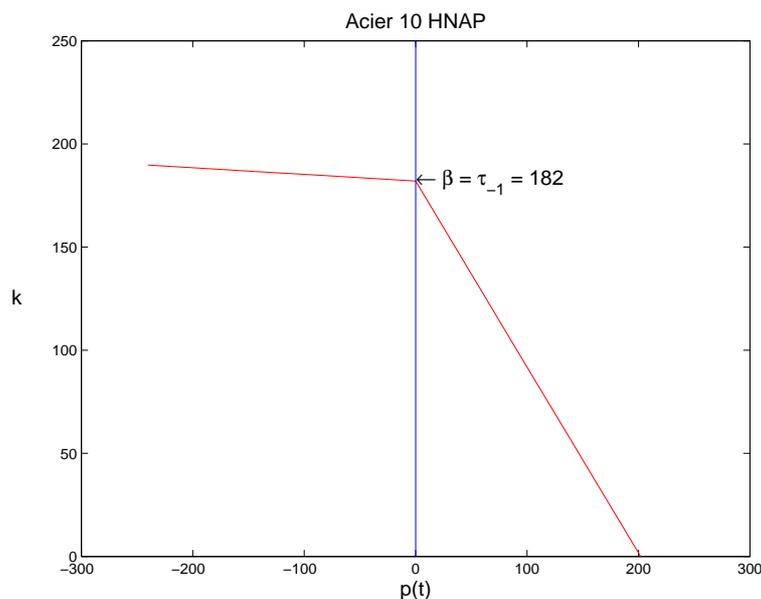


FIG. 3.24 – Loi d'évolution de la limite élastique mésoscopique  $k(p)$

### 3.6.4 Simulation des essais de fatigue réalisés sur le 10 HNAP

Après avoir déterminé les paramètres du modèle de l'acier 10 HNAP et calculé  $\varepsilon_s^{pc}$  pour chacun des essais testés, le nombre de cycles à l'amorçage peut être obtenu par application directe de l'équation (2.87) pour les chargements périodiques proportionnels d'amplitude constante et par application de l'équation (2.89) pour les chargements multiaxiaux d'amplitude variable.

Sur la figure (3.25), on donne les résultats de prédiction des essais en traction-compression qui ont servi à l'identification des paramètres du modèle, ainsi ceux en torsion purement alternée. Ces derniers sont à prendre avec précautions à cause de l'effet du gradient car les éprouvettes sollicitées en traction et en torsion ne sont pas de même nature.

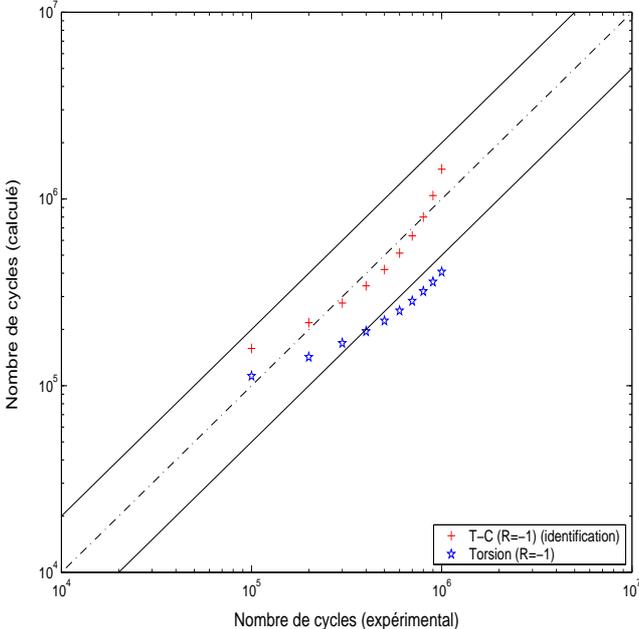


FIG. 3.25 – Simulation des essais en traction-compression et en torsion purement alternée

Les résultats de prédiction des essais en traction pour diverses valeurs de la contrainte moyenne  $\sigma_m$  sont récapitulés en figure (3.26). Ces résultats sont en bonne corrélation avec les durées de vie expérimentales.

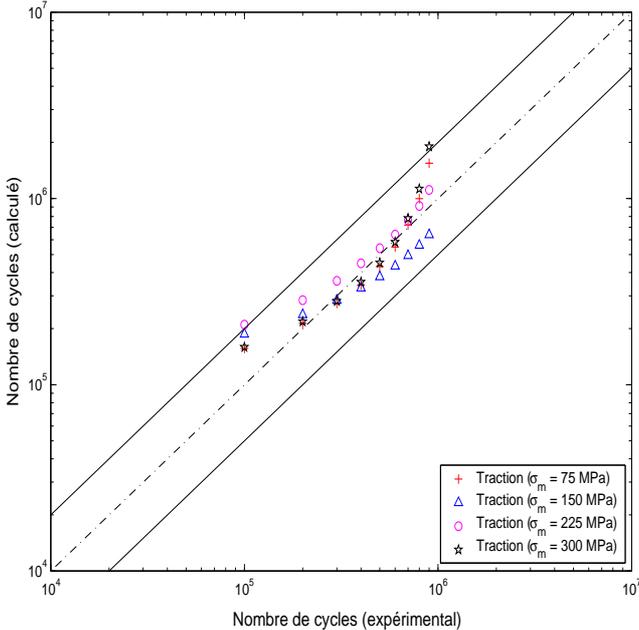


FIG. 3.26 – Résultats de prédiction des essais en traction pour diverses valeurs de  $\sigma_m$

Les essais de chargements multiaxiaux d'amplitude variable sont reportés sur les figures (3.27) et (3.28) en fonction de l'angle  $\alpha$  et du rapport  $r$ . Sur ces figures, on donne les résultats de prédiction du modèle proposé et de celui présenté par Carpinteri et al. [17]. Pour le premier type d'essais ( $\alpha = \pi/8$  et  $r = 0.2$ ), les meilleures prédictions sont données par le modèle proposé. Cependant, pour le second type d'essais ( $\alpha = \pi/4$  et  $r = 0.5$ ), les prédictions de Carpinteri et al. [17] sont relativement meilleures.

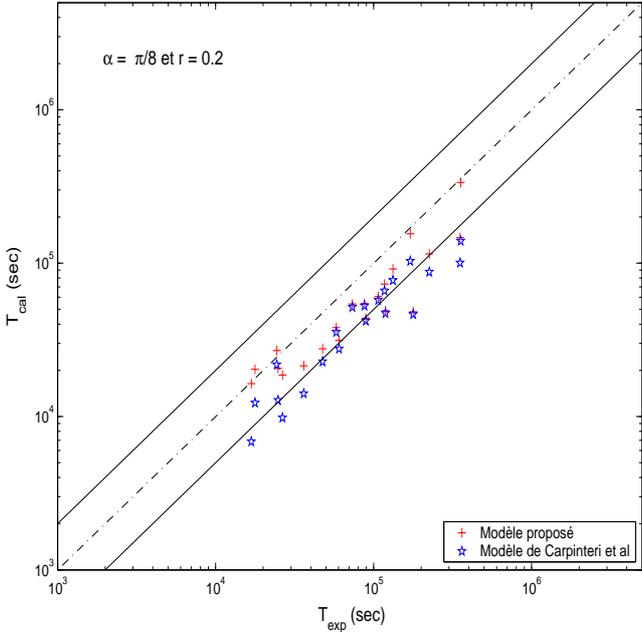


FIG. 3.27 – Résultats de prédiction des essais sous charges variables pour  $\alpha = \pi/8$  et  $r = 0.2$

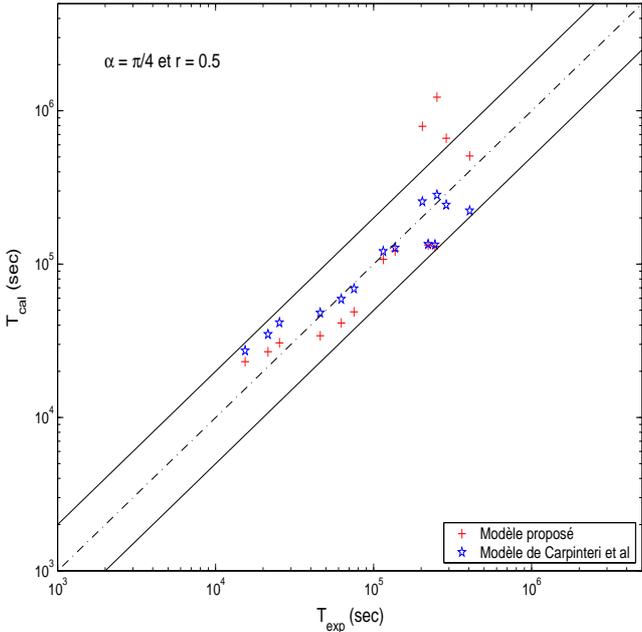


FIG. 3.28 – Résultats de prédiction des essais sous charges variables pour  $\alpha = \pi/4$  et  $r = 0.5$

# Chapitre 4

## Application à un cas industriel

### 4.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif l'application à une structure réelle industrielle du modèle de prédiction de durée de vie en fatigue proposé au chapitre 2. Dans le chapitre précédent, la validation du modèle a été réalisée sur des essais effectués sur des éprouvettes, et qui sont tirés de la littérature. Ici, on passe à une application du modèle prédictif sur une structure industrielle où l'on doit étudier la tenue à la fatigue des ressorts de suspension d'automobile fournis par la société Allevard Rejna « Fabricant de ressorts ».

Ces ressorts assurent la liaison élastique reliant les roues à la structure principale d'un véhicule. En fonction de leur rôle destiné à absorber et à transmettre en douceur les dénivellements de la route, ces ressorts sont soumis à des sollicitations cycliques ou plus généralement variables à cause du fond routier qui est souvent cahoteux et irrégulier. Par conséquent, ils présentent le phénomène de fatigue qui provoque la rupture à la suite de la naissance et de la propagation de fissures. En général, le phénomène de fatigue que subissent ces ressorts est qualifié de polycyclique. Dans ce régime, l'amorçage des micro-fissures, ainsi que le nombre de cycles à l'amorçage dépendent :

- (i) du cycle de contrainte induit dans le ressort sous le chargement imposé, et qui atteint systématiquement un état stabilisé à l'échelle macroscopique ;
- (ii) des caractéristiques de fatigue du matériau (par exemple : limites d'endurance et essais simples de fatigue réalisés sur des éprouvettes de la structure en question) ;
- (iii) de la loi de comportement mécanique du matériau (loi isotrope, écrouissage cinématique linéaire / non linéaire) ;

- (iv) des contraintes résiduelles issues du mode de fabrication du ressort (notamment de l'ensemble du processus de traitement mécanique et thermique des barres d'aciers formant le ressort).

## 4.2 Processus de fabrication des ressorts de suspension

La fabrication d'un ressort comprend en général les phases suivantes :

- on part d'abord d'une barre d'acier cylindrique. Cette barre subit différentes préparations de surface : usinage, étirage ou tout simplement laminage. Cette préparation de surface joue un rôle primordial sur la tenue en fatigue des structures. En effet, l'existence ou l'absence des micro-défauts, dont dépend le phénomène de fatigue, est fortement liée à cette préparation. En principe, les barres usinées ne présentent pas de défauts de surface.
- la barre est ensuite introduite dans un four porté à une température de l'ordre de 900 °C pendant 10 minutes à peu près. Ceci, a pour but d'obtenir une transformation complète en austénite.
- la forme hélicoïdale du ressort est obtenue à une température voisine de 950 °C à l'aide d'une machine qui s'appelle « tour » qui enroule la barre autour d'elle. Cette opération est connue sous le nom « Enroulement à Chaud » ou bien en anglais « Hot Coiling ». On distingue aussi l'enroulement à froid connu sous le nom « Cold Coiling » où le fil arrive déjà traité sous forme de bobine et la forme hélicoïdale est induite par des gallets/Guides/Mandrin et un couteau de coupe.
- par la suite, le ressort hélicoïdal subit un traitement thermique (trempe et revenu). La trempe se fait dans l'huile à une température entre 40 °C et 80 °C pendant un temps suffisamment long afin de refroidir complètement le ressort. L'austénite atteint donc un pourcentage final de l'ordre de 7 à 8%. Quant au revenu, il s'effectue sur le ressort à une température de 450 °C pendant une durée de 20 à 40 minutes.
- on effectue ensuite la préconformation (presetting) : c'est une opération de compression élasto-plastique ou thermo-élastoplastique qui vise la stabilité dimensionnelle du ressort. Elle est d'une grande importance pour la tenue à la fatigue du ressort. Elle consiste à comprimer le ressort jusqu'à ce que les spires soient jointives. Cette opération peut se faire à la température ambiante ou à chaud à 250 °C. A la fin de cette opération, le ressort perd respectivement 10% ou 20% de sa longueur si la préconformation est réalisée à froid ou à chaud.

- sur le ressort déjà préconformé, on réalise l'opération de grenailage (shot peening) qui est une méthode de traitement de surface du métal. Elle consiste à bombarder le ressort avec des petites billes métalliques. Celles-ci induisent une plastification et donc des contraintes résiduelles de compression sur une profondeur de l'ordre du diamètre des billes utilisées. Ces contraintes résiduelles ont un effet bénéfique vis-à-vis de la tenue en fatigue car elles augmentent la durée de vie en fatigue du ressort.
- on peut procéder à une autre préconformation, mais toujours à froid.
- Enfin, on peint le ressort à chaud (200 °C) pour le protéger contre la corrosion.

### 4.3 Géométrie de la structure fournie

La structure fournie est représentée en Fig. 4.1. Elle est composée de deux parties : le ressort de suspension modélisé soit comme une poutre, soit comme une structure tridimensionnelle, et les coupelles qui sont des surfaces rigides à travers lesquelles on impose le chargement.

Le ressort est caractérisé par les données suivantes :

- hauteur libre ( $H=442.886$  mm) : hauteur hors tout et correspond à la hauteur du produit à la fin de la ligne de fabrication ;
- rayon du fil ( $R= 6.6$  mm) ;
- diamètre moyen d'enroulement : il s'étend entre 48 mm (spires terminales) et 73 mm (spires centrales) ;
- nombre de spires : 5.

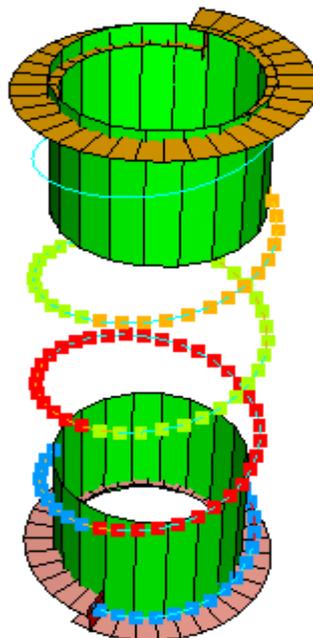


FIG. 4.1 – Structure fournie : ressort de suspension et coupelles inférieure et supérieure

Pendant la phase d'action où le ressort se déforme, sa hauteur décrit un cycle qui varie entre deux valeurs limites :

- hauteur rebond / détente : roues pendantes ou de montage ;
- hauteur choc / attaque : fin de course due à la butée attaque.

Les coupelles sont des surfaces rigides dont le rôle est de permettre au ressort de se déplacer sous le chargement imposé qui leur est appliqué. La coupelle qui est en contact avec la partie supérieure du ressort est dite coupelle supérieure. Elle est considérée comme fixe dans la modélisation. L'autre coupelle permettant le déplacement du ressort est en contact avec sa partie inférieure. Elle est dite coupelle inférieure.

## 4.4 Chargement imposé

Le chargement imposé sur le ressort est un chargement en déplacement. Il lui est transmis par l'intermédiaire de la coupelle inférieure qui est soumise à un déplacement vertical variable. Il définit pour le ressort en service le cycle de vie qui fluctue entre deux hauteurs extrêmes : hauteur rebond et hauteur choc.

Le cycle de vie ou bien cycle de fonctionnement de ressort comprend les étapes suivantes :

- on part d'abord de la « Hauteur libre » où le ressort n'est pas encore installé dans le véhicule ; cette hauteur correspond à celle de sa sortie de la ligne de production ; pour le ressort étudié, la hauteur libre est : 442.886 mm ;
- après son installation dans le véhicule, le ressort diminue de hauteur sous l'effet du poids qu'il supporte (poids du véhicule) et atteint une hauteur dite « Hauteur nominale » ; c'est la hauteur du ressort quand le véhicule est au repos et reposant sur un terrain régulier horizontal ; elle est égale à 137 mm pour le ressort considéré ;
- pendant que le véhicule est en marche, il traverse des routes qui sont de nature cahoteuses et irrégulières ; le ressort de suspension réagit en changeant de hauteur (élongation ou raccourcissement) afin de minimiser les irrégularités et de transmettre en douceur les dénivellements de la route ; sa hauteur fluctue donc entre deux valeurs extrêmes caractéristiques du ressort : la plus grande dite « Hauteur rebond » et la plus petite dite « Hauteur choc » ; la « Hauteur rebond » est atteint quand l'élongation du ressort est maximum, tandis que sa « Hauteur choc » est atteint quand il est comprimé au maximum ; pour le ressort étudié, les hauteurs « choc » et « rebond » sont respectivement 75 mm et 289 mm.

Les différentes hauteurs caractéristiques du ressort sont obtenues en imposant sur la coupelle inférieure des déplacements caractéristiques. Ces derniers sont reliés par une relation linéaire aux hauteurs correspondantes. Cela se traduit clairement par la figure suivante.

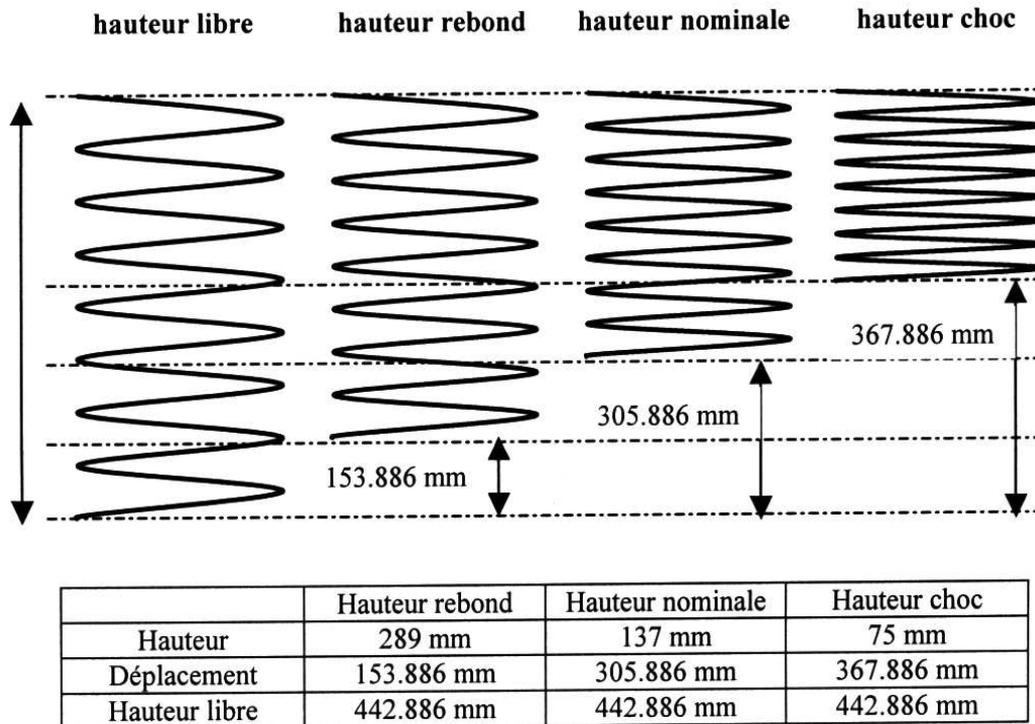


FIG. 4.2 – Relation linéaire entre la hauteur du ressort et le déplacement correspondant imposé sur la coupelle inférieure

Dans le cadre de notre étude de la tenue en fatigue du ressort de suspension, deux cas de charges sont considérés :

- signal nominal où l'on impose sur la coupelle inférieure des cycles en déplacement à amplitude constante jusqu'à la rupture. Chaque cycle est repéré par le déplacement maximum ( $d_{max} = 367.886$  mm) correspondant à la « Hauteur choc » et le déplacement minimum ( $d_{min} = 153.886$  mm) correspondant à la « Hauteur rebond ». Le signal nominal est représenté en figure (4.3) ;
- signal exceptionnel où l'on impose sur la coupelle inférieure une séquence de chargement en déplacement constituée des déplacements variables fluctuant entre les déplacements maximum  $d_{max}$  et minimum  $d_{min}$ . Cette séquence est répétée jusqu'à la rupture (apparition de fissures macroscopiques dans le ressort). Elle est représentée en figure (4.4).

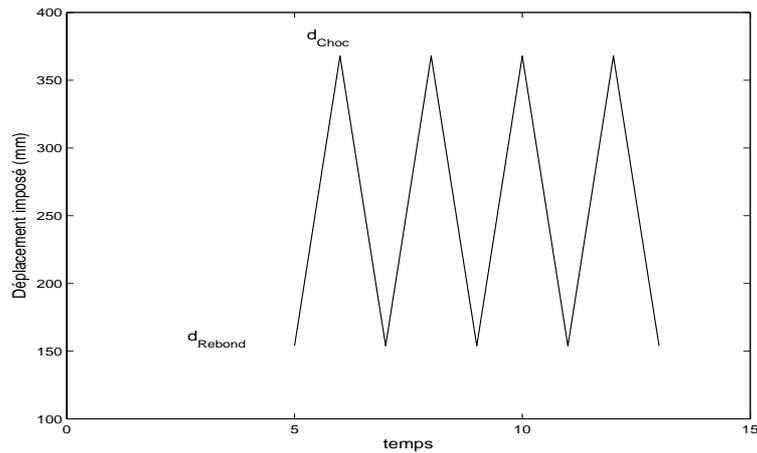


FIG. 4.3 – Signal nominal : cycle en déplacement à amplitude constante

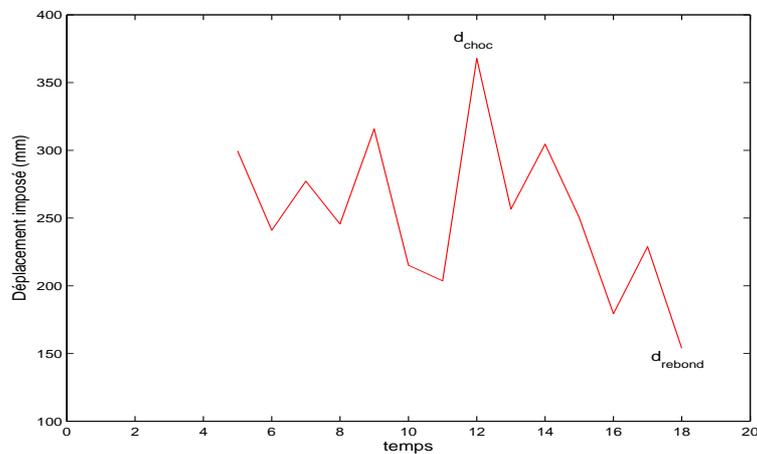


FIG. 4.4 – Signal exceptionnel : séquence de déplacements variables

Sur les figures (4.3) et (4.4) , on ne représente pas la phase de préparation du ressort s'étendant de l'instant  $t = 0$  à l'instant  $t = 5$ .

## 4.5 Données du matériau

### 4.5.1 Caractéristiques en fatigue du matériau

Des essais simples de fatigue en flexion et en torsion purement alternées ont été réalisés sur des éprouvettes de la structure en question. Ils nous ont été fournis par la société « Allevard Rejna » sous forme de courbes de Wöhler en flexion et en torsion purement alternées ( $R=-1$ ). Ces courbes ont été modélisées en adoptant la forme bi-logarithmique de Basquin (cf annexe A) :

$$\ln N_R = A \ln \sigma_a + B \quad (4.1)$$

où  $A$  et  $B$  ont les valeurs suivantes :

– pour la flexion :

$$A = -30.28$$

$$B = 220.3$$

– pour la torsion :

$$A = -20.29$$

$$B = 141.6$$

On représente ces courbes sur la figure (4.5). Les limites d'endurance en flexion alternée  $f_{-1}$  et en torsion alternée  $t_{-1}$  sont :  $f_{-1} = 915$  MPa et  $t_{-1} = 523.7$  MPa.

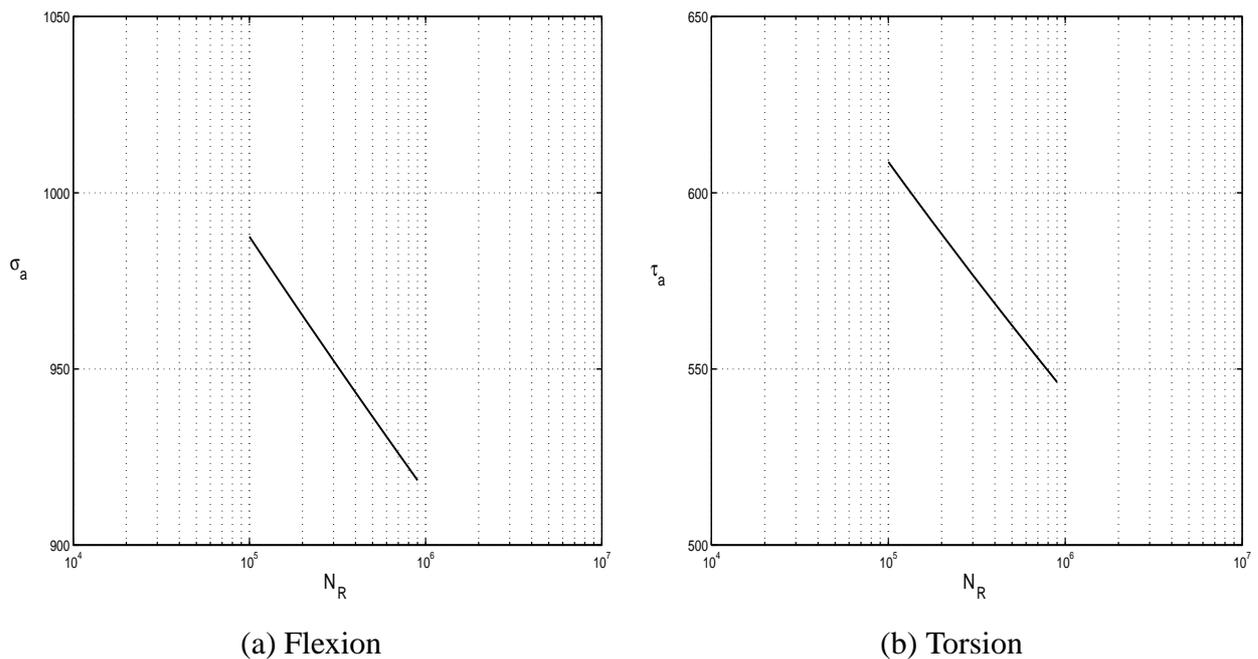


FIG. 4.5 – Courbes de Wöhler en flexion et en torsion purement alternées (R=-1)

## 4.5.2 Caractéristiques mécaniques et loi de comportement du matériau

Des essais de traction sur des éprouvettes prélevées à différents endroits du « ressort » ont été réalisés afin d'établir la courbe  $\sigma - \varepsilon$  et d'en tirer les caractéristiques mécaniques du matériau constituant le ressort. La courbe de traction monotone, donnée par la figure (4.6), nous a été fournie par la société Allevard Rejna sous forme de données numériques des contraintes et des déformations correspondantes. Ces valeurs sont mentionnées dans le tableau (4.1). Le module de Young  $E$ , la limite élastique macroscopique  $\sigma_y$  et le coefficient du Poisson  $\nu$  sont des caractéristiques mécaniques du matériau. Pour le matériau utilisé, la valeur de  $\nu$  est égale à 0.29.  $E$  et  $\sigma_y$  s'obtiennent à partir de la courbe  $\sigma - \varepsilon$ .  $E$  est par définition la pente de la partie linéaire réversible et  $\sigma_y$  la contrainte limite à partir de laquelle apparaît une déformation plastique.

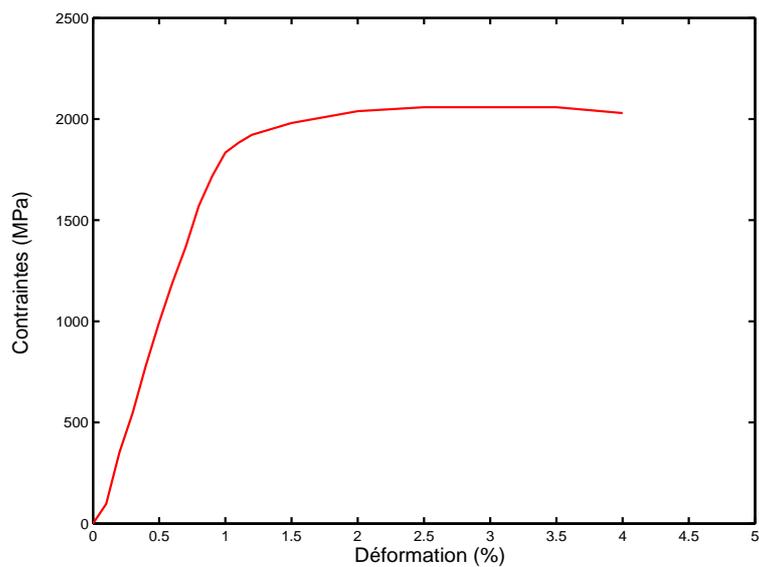


FIG. 4.6 – Loi de comportement établie à partir d’essais de traction monotone

Déformation (%)	Contraintes [MPa]
0	0
0.1	97.56
0.2	351.22
0.3	546.34
0.4	780.49
0.5	995.12
0.6	1190.24
0.7	1365.85
0.8	1570.73
0.9	1717.07
1	1834.15
1.1	1882.93
1.2	1921.95
1.5	1980.49
2	2039.02
2.5	2058.54
3	2058.54
3.5	2058.54
4	2029.27

TAB. 4.1 – Valeurs expérimentales de la loi de comportement

A partir de la courbe expérimentale, on détermine le module de Young du matériau qui vaut  $E = 208710$  MPa ainsi que la limite élastique en traction ( $\sigma_y = 1571$  MPa).

Dans le cadre de notre étude de la tenue en fatigue des ressorts de suspension, nous avons utilisé deux lois de comportement élastoplastique :

- loi de comportement à écrouissage isotrope ;
- loi de comportement à écrouissage cinématique linéaire.

Pour une loi de comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire, la partie plastique  $\sigma(\varepsilon^p)$  est linéaire. Pour la modélisation d'une telle loi, on approche par une droite les points expérimentaux de la partie plastique  $\sigma(\varepsilon^p)$  correspondant à la zone du travail du ressort. Celle-ci est déterminée lors d'un calcul élastoplastique préliminaire donnant les valeurs maximales de déformations plastiques pouvant être atteintes ( $\varepsilon^p$  de l'ordre de  $10^{-3}$ ). Sur la figure (4.7), on donne la loi de comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire. Les points représentatifs définissant cette loi sont mentionnés dans le tableau (4.2).

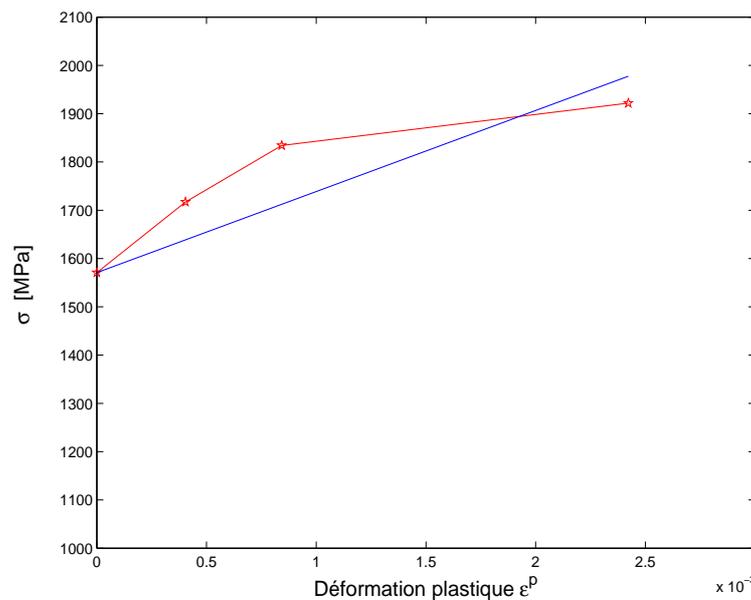


FIG. 4.7 – Loi de comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire : partie plastique

$\sigma$	$\varepsilon^p$
1571	0
1977.45	0.002422342

TAB. 4.2 – Valeurs de la partie plastique de loi de comportement à écrouissage cinématique linéaire

## 4.6 Prédiction numérique de la durée de vie

### 4.6.1 Recherche du cycle stabilisé sous le chargement imposé

Comme les ressorts subissent le phénomène de fatigue à grand nombre de cycles, leur comportement mécanique à l'échelle macroscopique est donc élastique ou atteint un état limite adapté. En pratique, on applique au ressort le chargement cyclique imposé (signal nominal ou exceptionnel) et on effectue les cycles jusqu'à l'obtention d'un état élastique ou adapté. Cet état est identifié par une déformation plastique nulle au départ et qui reste nulle ou bien par une déformation plastique qui devient constante après un nombre suffisant de cycles de chargement imposé. Le calcul par éléments finis pour la recherche du cycle stabilisé est fait sous « Abaqus » pour les deux signaux « nominal » et « exceptionnel » et pour les deux lois de comportement élastoplastique suivantes :

- comportement élastoplastique à écrouissage isotrope ;
- comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire.

Pour des raisons d'optimisation, la modélisation adoptée pour le ressort est du type poutre, c'est-à-dire on fait une approximation d'une structure tridimensionnelle par un modèle unidimensionnel. Par conséquent, le ressort est représenté par sa fibre neutre de section transversale circulaire de 6.6 mm de rayon. Elle est constituée d'éléments du type « poutre ». Pour le modèle poutre, les calculs sont faits sous « Abaqus » en supposant que ces éléments sont rectilignes, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas courbés. En réalité, les éléments composant le ressort ne sont pas droits. Pour en tenir compte et pour rendre le modèle plus exact, on corrige la composante de torsion du tenseur de contraintes stabilisé, en la multipliant par un facteur correctif donné par la société « Allevard Rejna », qui s'exprime comme suit :

$$Corr = \frac{w + 0.5}{w - 0.75} \quad (4.2)$$

où  $w = \frac{D}{d}$  ;  $d$  est le diamètre du fil et  $D$  est le diamètre d'enroulement.

D'autre part, lors du processus de fabrication du ressort, des contraintes résiduelles sont générées par le traitement de surface (grenailage) que subit le ressort. C'est l'un des derniers traitements du ressort. Celles-ci induisent une plastification et donc des contraintes résiduelles de compression sur une profondeur de l'ordre du diamètre des billes utilisées. Ces contraintes ont un effet bénéfique car elles retardent l'amorçage des microfissures et par conséquent augmentent la durée de vie en fatigue.

Pour une vraie prise en compte du grenailage et donc pour inclure l'effet des contraintes résiduelles sur la tenue en fatigue, on doit modéliser ce traitement pour obtenir l'état résiduel (contraintes, déformations, déformations plastiques) dans tout le ressort.

Cet état servira d'état initial du ressort sous chargement cyclique. Il pourra donc éventuellement se modifier et se stabiliser à un autre niveau. Mais dans cette étude on n'adopte pas cette méthodologie. On utilise une approximation du problème en supposant que les contraintes résiduelles de compression restent constantes au cours du cycle de vie du ressort. Elles sont données par la société « Allevard Rejna » sous forme de pression hydrostatique moyenne  $P_m$  de  $-450 \text{ MPa}$ . Pour la prise en compte de leur effet sur la durée de vie, on procède comme suit :

- on détermine d'abord le tenseur de contraintes stabilisé à l'échelle macroscopique ;
- puis on rajoute aux termes diagonaux la valeur  $P_m = -450 \text{ MPa}$ .

## 4.6.2 Post-traitement en fatigue : application du modèle prédictif proposé

### 4.6.2.1 Identification des paramètres du modèle

La première étape de la prévision de durée de vie du ressort consiste à identifier les paramètres du modèle proposé qui sont :  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $c$ ,  $\xi$  et  $A$ . Ils sont déterminés à l'aide **d'une courbe de Wöhler** (idéalement une courbe en flexion alternée) et **deux limites d'endurance** (soient par exemple en flexion et en torsion purement alternées). La méthode d'identification, rappelée au paragraphe (2.4.4), consiste d'abord à trouver des relations entre les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Puis, les paramètres optimaux du modèle sont obtenus par la résolution d'un problème d'optimisation en utilisant les relations trouvées : il s'agit de minimiser l'erreur entre la courbe simulée et la courbe expérimentale de Wöhler d'un essai simple (typiquement un essai en flexion alternée). Pour une courbe de Wöhler en flexion alternée, les durées de vie simulées sont obtenues par application de l'équation (2.87). Elles sont comparées aux durées de vie expérimentales dans la figure (4.8).

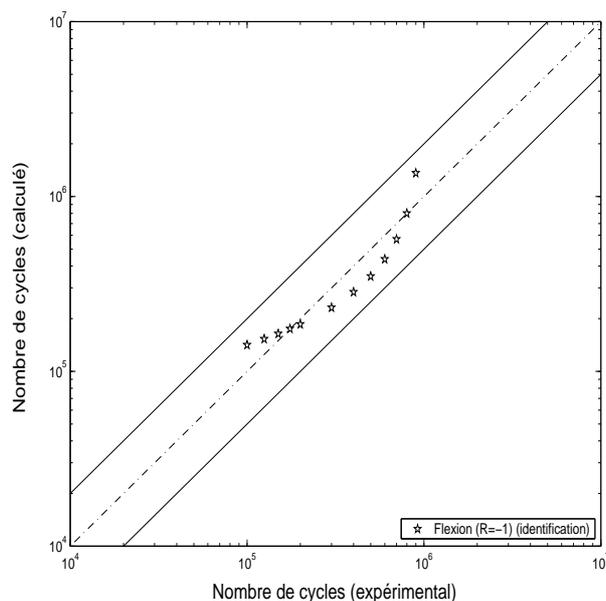


FIG. 4.8 – Simulation d'une courbe de Wöhler en flexion alternée (R=-1)

On en déduit les paramètres suivants :

$\alpha$	$\beta$ [MPa]	$\gamma$	$\xi$	$c$ [MPa]	$A$
0.67217	523.7	0.70217	0.74066	19148	4676

TAB. 4.3 – Paramètres du modèle

#### 4.6.2.2 Résultats de prédiction

Le ressort a été modélisé sous « Abaqus » en adoptant un modèle de type « poutre » constitué de 163 noeuds. A chaque point du ressort correspondent quatre points de Gauss de la section qui lui est affectée, notés  $PG3$ ,  $PG7$ ,  $PG11$  et  $PG15$  où sont évaluées les contraintes. Après avoir extrait le cycle de contraintes stabilisé en chaque point de Gauss et identifié les paramètres du modèle, on peut calculer par la méthode simplifiée [83] (paragraphe 2.4.2) la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$ . Deux cas peuvent se présenter :

- la valeur de  $\varepsilon_s^{pc}$  est nulle ( $\varepsilon_s^{pc} = 0$ ). Dans ce cas, la durée de vie pour le point étudié est infinie ( $N_R = \infty$ ) (endurance illimitée) ;
- la valeur de  $\varepsilon_s^{pc}$  est non nulle ( $\varepsilon_s^{pc} \neq 0$ ). Dans ce cas, ce point est en endurance limitée. Sa durée de vie est estimée par la loi proposée (Eq. 2.89).

Enfin, la durée de vie du ressort est la plus petite des durées de vie de tous les points du modèle.

Le calcul a été fait avec la prise en compte ou non de l'effet des contraintes résiduelles (effet du grenailage) pour deux lois de comportement élastoplastique (écrouissage cinématique linéaire et écrouissage isotrope) et pour les signaux « nominal » et « exceptionnel ». Les résultats de prédiction ont montré, **qu'en l'absence des contraintes résiduelles**, la durée de vie est infinie partout à l'exception de quelques noeuds au point Gauss «  $PG11$  » pour les deux lois de comportement élastoplastique et pour les deux signaux. Ces résultats sont récapitulés dans les tableaux (4.4), (4.5), (4.6) et (4.7). Le noeud critique est le noeud « **N° 140** » (voir Fig. 4.9 (a)) pour lequel la durée de vie est la plus petite. Pour ce noeud, on donne dans les figures (4.10) et (4.11) les cycles de contraintes stabilisés pour les deux signaux et les deux lois de comportement élastoplastique. Une comparaison du modèle a été faite avec le **critère du Dang Van** (cf. Annexe C). Ce critère donne l'information sur la fatigue ou la non fatigue de la structure sous le chargement imposé selon que la valeur est positive ou négative. Il ne prédit pas la durée de vie dans le cas où il est violé. Les résultats du critère de Dang Van sont donnés dans le tableau (4.8).

<i>Noeud</i>	$k^*$	$k_{min}$	$k_{max}$	$\varepsilon_s^{pc} / \sqrt{\frac{4}{3}}$	$D$	$N_{seq}$
138	475.81	457.22	486.36	1.68E-03	2.51E-06	3.99E+05
139	482.95	456.12	488.27	4.49E-03	5.20E-06	1.92E+05
<b>140</b>	488.00	456.95	490.92	5.87E-03	6.34E-06	<b>1.58E+05</b>
141	490.82	459.56	494.18	5.83E-03	6.30E-06	1.59E+05
142	491.58	462.57	497.74	4.77E-03	5.44E-06	1.84E+05
143	490.12	465.91	501.50	2.68E-03	3.54E-06	2.82E+05

TAB. 4.4 – Résultats de prédiction de durées de vie sous le signal nominal et pour la loi isotrope

<i>Noeud</i>	$k^*$	$k_{min}$	$k_{max}$	$\varepsilon_s^{pc} / \sqrt{\frac{4}{3}}$	$D$	$N_{seq}$
138	473.94	458.50	487.40	1.52E-04	3.26E-07	3.06E+06
139	480.25	457.38	489.20	2.98E-03	3.85E-06	2.59E+05
<b>140</b>	483.99	458.05	492.11	4.41E-03	5.35E-06	<b>1.87E+05</b>
141	490.81	460.52	495.47	4.46E-03	4.93E-06	2.03E+05
142	491.67	463.43	499.28	3.48E-03	4.07E-06	2.46E+05
143	490.27	466.79	503.40	1.56E-03	2.18E-06	4.59E+05

TAB. 4.5 – Résultats de prédiction de durées de vie sous le signal nominal et pour la loi cinématique linéaire

<i>Noeud</i>	$k^*$	$k_{min}$	$k_{max}$	$\varepsilon_s^{pc} / \sqrt{\frac{4}{3}}$	$D$	$N_{seq}$
138	475.98	457.16	486.28	8.35E-04	1.23E-06	8.14E+05
139	481.77	456.26	488.30	2.25E-03	2.68E-06	3.72E+05
<b>140</b>	485.49	456.93	490.99	2.95E-03	3.35E-06	<b>2.99E+05</b>
141	492.51	459.62	494.12	2.93E-03	3.08E-06	3.25E+05
142	492.59	462.53	497.71	2.39E-03	2.66E-06	3.76E+05
143	490.65	465.89	501.52	1.34E-03	1.73E-06	5.77E+05

TAB. 4.6 – Résultats de prédiction de durées de vie sous le signal exceptionnel et pour la loi isotrope

<i>Noeud</i>	$k^*$	$k_{min}$	$k_{max}$	$\varepsilon_s^{pc} / \sqrt{\frac{4}{3}}$	$D$	$N_{seq}$
138	473.92	458.72	487.18	6.04E-05	1.30E-07	7.67E+06
139	480.25	457.60	489.42	1.47E-03	1.92E-06	5.21E+05
<b>140</b>	483.97	458.28	492.11	2.19E-03	2.67E-06	<b>3.75E+05</b>
141	490.86	460.74	495.69	2.22E-03	2.46E-06	4.07E+05
142	491.65	463.65	499.28	1.71E-03	2.01E-06	4.98E+05
143	490.28	466.79	503.42	8.06E-04	1.13E-06	8.87E+05

TAB. 4.7 – Résultats de prédiction de durées de vie sous le signal exceptionnel et pour la loi cinématique linéaire

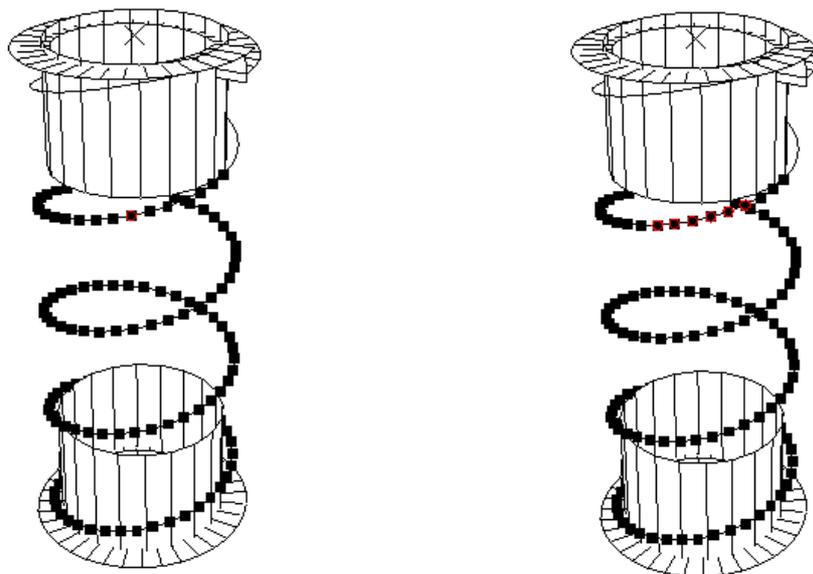
Les résultats du critère de Dang Van **en l'absence des contraintes résiduelles** montrent que la durée de vie est infinie partout (valeur négative du critère) pour les deux signaux et les deux lois de comportement élastoplastique utilisés (voir tableau 4.8).

signal	loi de comportement	noeud critique	valeur du critère
nominal	isotrope	N° 141	-0.28240E-01
nominal	cinématique	N° 142	-0.32332E-01
exceptionnel	isotrope	N° 141	-0.28398E-01
exceptionnel	cinématique	N° 142	-0.32385E-01

TAB. 4.8 – Résultats du critère de Dang Van pour les deux signaux et les deux lois de comportement élastoplastique (sans contraintes résiduelles)

En tenant compte de l'effet des contraintes résiduelles, les résultats du modèle donnent une durée de vie infinie pour les deux signaux et les deux lois de comportement élastoplastique utilisés. En effet, la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  est nulle pour tous les noeuds du modèle poutre du ressort. On obtient le même résultat en appliquant le critère de Dang Van dont la valeur reste négative partout.

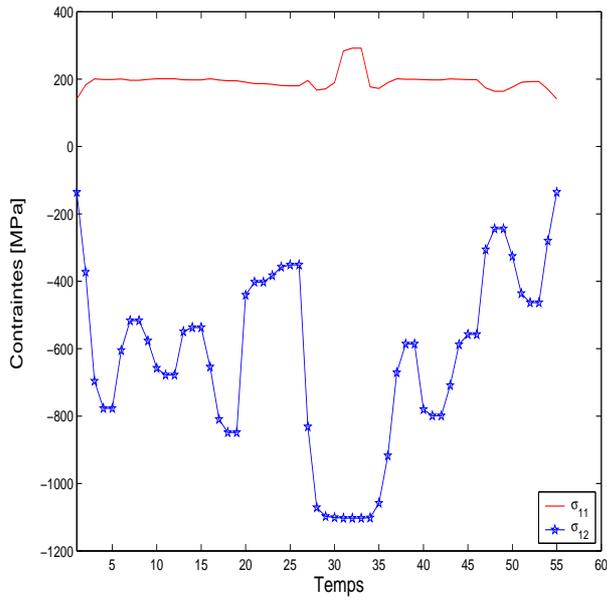
En l'absence des résultats expérimentaux (durées de vie), les prédictions effectuées n'ont pas pu être validées. Cependant les localisations des points critiques obtenues correspondent à celles observées habituellement sur les ressorts de suspension.



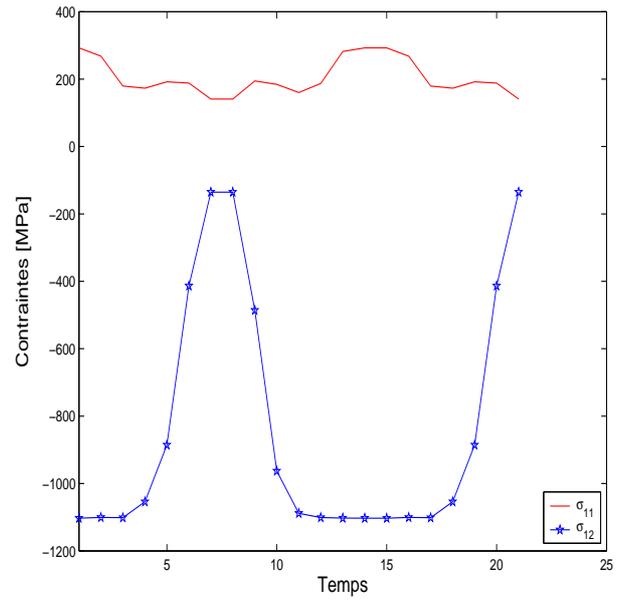
(a) Noeud critique : N° 140

(b) Noeuds : N° 138 - N° 143

FIG. 4.9 – Noeuds les plus sollicités du modèle de type poutre

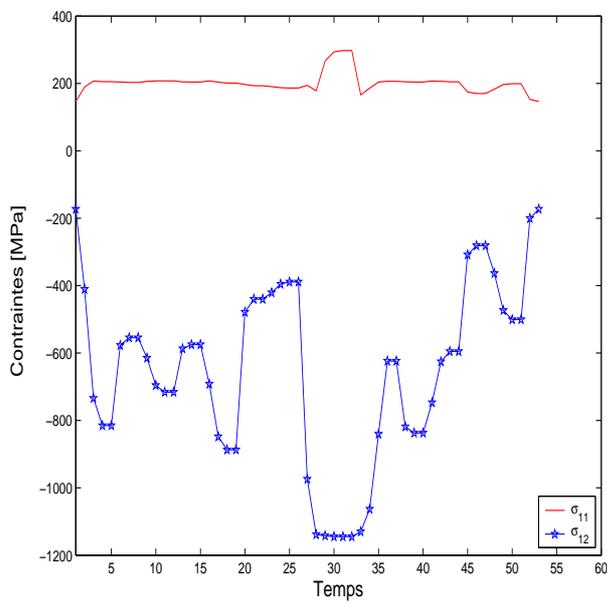


(a) Signal exceptionnel

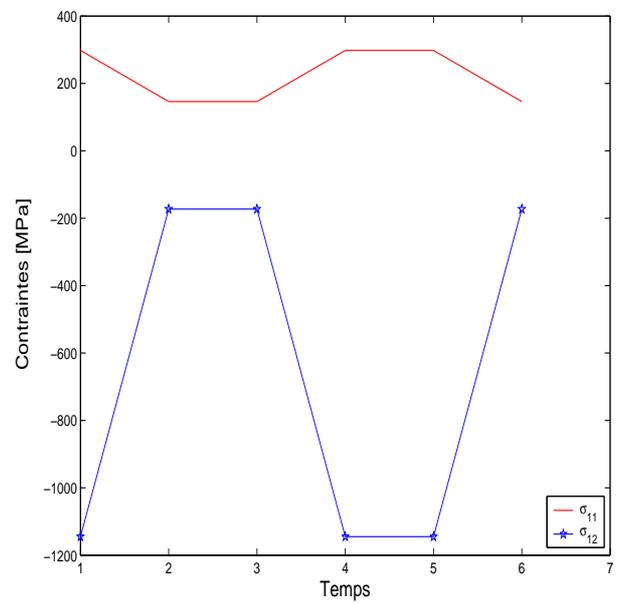


(b) Signal nominal

FIG. 4.10 – Cycles de contraintes stabilisés du noeud critique pour la loi de comportement à écouissage cinématique linéaire



(a) Signal exceptionnel



(b) Signal nominal

FIG. 4.11 – Cycles de contraintes stabilisés du noeud critique pour la loi de comportement à écouissage isotrope

# Conclusion Générale

Cette étude a été consacrée à l'élaboration **d'un modèle phénoménologique et déterministe de prévision de durée de vie** des structures travaillant **en endurance limitée** sous sollicitations multiaxiales d'amplitude variable sans avoir recours au comptage des cycles. Un soin particulier est apporté au modèle pour qu'il soit applicable à une grande variété de matériaux métalliques et d'utilisation simple pour permettre son emploi en bureaux d'études.

Notre travail a consisté d'abord à décrire les méthodes de calcul de durée de vie en endurance limitée (régime fini de durée de vie). Nous avons classé ces méthodes selon le type de sollicitation (uniaxiale ou multiaxiale), la nature du signal (à amplitude constante ou à amplitude variable) et le fait d'adopter ou non un comptage de cycles. Il est apparu que l'approche mésoscopique, initiée par Dang Van [23] et développée après par Papadopoulos [56] permet de donner une interprétation physique du dommage par fatigue polycyclique. Papadopoulos [56, 58], Morel [51, 52] et Zarka-Karaoui [33] l'ont utilisée et ont choisi la déformation plastique mésoscopique cumulée comme variable du dommage. Les auteurs ont supposé que la rupture se produit quand cette variable atteint une valeur critique.

Pour construire le modèle prédictif de durée de vie, nous avons adopté l'approche mésoscopique (ou approche macro-méso) et utilisé en partie les idées proposées par Papadopoulos, Morel et Zarka-Karaoui. En effet, nous avons considéré la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  comme variable du dommage. Mais, contrairement aux auteurs, la rupture n'est pas liée à une valeur critique de la déformation plastique mésoscopique cumulée  $\varepsilon^{pc}$ , elle est définie par une relation à l'échelle mésoscopique entre  $\varepsilon_s^{pc}$  et le nombre de cycles à l'amorçage  $N_R$ . De plus, le critère de plasticité à l'échelle mésoscopique est différent. En effet, la nucléation des microfissures et des fissures est un phénomène complexe faisant intervenir non seulement la plasticité, mais aussi la création et la croissance des vides. Même si la plasticité métallique est en général indépendante de la pression hydrostatique, la croissance des vides est fonction de cette dernière. Pour cela, nous avons choisi un modèle élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire avec une limite élastique mésoscopique dépendant de la pression hydrostatique pour tenir compte de cette influence.

Une première approche utilisant une déformation plastique mésoscopique à trace non nulle et une méthode de calcul directe du cycle stabilisé mésoscopique est formulée. La difficulté d'obtention, pour les chargements simples, d'une formule explicite de la déformation plastique mésoscopique du cycle stabilisé rend compliquée la procédure d'identification des paramètres du modèle. Pour cela, cette approche a été abandonnée au profit d'une seconde approche plus simple et qui ne présente pas ce problème. Celle-ci considère une déformation plastique mésoscopique déviatorique et utilise la méthode simplifiée de Zarka sur le comportement inélastique des solides pour la détermination du cycle stabilisé mésoscopique.

En endurance limitée, le comportement élastoplastique à l'échelle mésoscopique atteint un état limite accommodé. Le critère mésoscopique de durée de vie a été défini pour les chargements cycliques affines d'amplitude constante comme une relation de puissance entre la déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  et le nombre de cycles à l'amorçage  $N_R$ . Ce critère a servi pour l'identification des paramètres du modèle en utilisant des chargements simples. Une extension de cette loi pour considérer les séquences répétées de chargement multiaxial d'amplitude variable est faite via un facteur d'endommagement  $D$  dépendant de  $\varepsilon_s^{pc}$  et de certains paramètres caractéristiques du matériau et du chargement. L'amorçage est supposé atteint quand  $D = 1$ .

Le modèle fait intervenir six paramètres :  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $c$ ,  $\xi$  et  $A$ . Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont liés directement à la limite élastique mésoscopique  $k(p)$ .  $\xi$  et  $A$  sont deux paramètres intrinsèques au matériau et liés au critère mésoscopique de durée de vie.  $c$  est le module d'écrouissage cinématique linéaire du matériau élastoplastique à l'échelle mésoscopique. L'identification de ces paramètres comprend deux étapes :

1. Application du critère à la limite d'endurance (en flexion et en torsion) : cela conduit à des relations entre les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , qui seront utilisées plus tard dans un problème d'optimisation.
2. Identification de tous les paramètres du modèle par la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes (relations obtenues précédemment) : il s'agit de minimiser l'erreur entre la courbe simulée et la courbe expérimentale de Wöhler d'un essai simple (typiquement un essai de flexion alternée).

La procédure d'identification des paramètres du modèle exige la connaissance d'une **courbe de Wöhler** (idéalement en flexion alternée symétrique) et **de deux limites d'endurance** (soient par exemple en flexion et en torsion purement alternées).

Pour valider le modèle, nous avons simulé des essais de fatigue issus de la littérature et réalisés sur des éprouvettes lisses de cinq matériaux (aluminium Al 6082 T6, fonte GS61, acier 30 NCD16, acier SM45C et acier 10 HNAP) sous chargements multiaxiaux d'amplitudes constante et variable.

Une bonne corrélation des résultats de prédiction du modèle avec les résultats expérimentaux a été obtenue pour les chargements proportionnels utilisés que ce soit à amplitude constante ou à amplitude variable. Les résultats de prédiction sont moins bons pour les essais réalisés sur l'aluminium Al 6082 T6 sous chargements non proportionnels d'amplitude constante.

En outre, le modèle a été appliqué pour étudier la tenue en fatigue d'un ressort de suspension d'automobile fabriqué par la société « Allevard Rejna » sous deux signaux « nominal » et « exceptionnel ». Deux lois de comportement ont été utilisées : écrouissage isotrope et écrouissage cinématique linéaire. Les chargements générés sous les deux signaux sont à trajets non-affines (déphasage non nul). Les durées de vie ont été calculées avec la prise en compte ou non des contraintes résiduelles. Les résultats ont montré qu'en l'absence des contraintes résiduelles, le ressort a une durée de vie finie. Cependant, en présence des contraintes résiduelles, la durée de vie est infinie partout. Une comparaison avec le critère de Dang Van, donne une durée de vie infinie partout en l'absence ou en présence des contraintes résiduelles. Il serait intéressant pour une validation complète du modèle de comparer ses résultats de prédiction de durées de vie à des résultats expérimentaux.

Les perspectives les plus immédiates portent sur la validation du modèle pour différents trajets hors-phases ou non proportionnels (cf amplitude variable). Son application à d'autres structures industrielles avec une confrontation aux résultats expérimentaux est indispensable pour son utilisation en bureaux d'études.

# Bibliographie

- [1] ACHELIC, H., BEDKOWSKY, W., GRZELAK, J., MACHA, E. (1994). Fatigue life of 10HNAP steel under synchronous random bending and torsion. In *Proceedings of the 4th International Conference on Biaxial /Multiaxial Fatigue, St Germain-en-Laye (France)* **1**, 421-434.
- [2] AFNOR. (1993). Fatigue sous sollicitations d'amplitude variable. Méthode Rainflow de comptage. A 03-406. AFNOR, 1-32.
- [3] AKEL, S., NGUYEN, Q.S. (1989). Determination of the limit response in cyclic plasticity. In : *Owen D.R.J., Hinton E. and Onate E. (Eds.), Computational Plasticity : models, software and applications*, 639-650.
- [4] ASTM. (1985). Standard practices for cycle fatigue counting in fatigue analysis. Designation E 1049-85, vol. 03.01 of Metal Test Methods and Analytical procedure. ASTM, 836-848.
- [5] BALLARD, P., DANG VAN, K., DEPERROIS A., PAPADOPOULOS, I.V. (1995). High-cycle fatigue and finite element analysis. *Fatigue and Fracture of Eng. Mat. & Struct*, **18**, 397-411.
- [6] BANNANTINE, J. (1989). A variable amplitude fatigue life prediction method. PhD thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign.
- [7] BANNANTINE, J., AND SOCIE, D. (1991). A variable amplitude multiaxial fatigue life prediction method. In : *Kusmaul K, McDiarmid D, Socie D, editors. Fatigue under biaxial and multiaxial loading, ESIS 10. London : MEP ; 35-51.*
- [8] BANVILLET, A. (2001). Prédiction de durée de vie en fatigue multiaxiale sous chargements réels : vers des essais accélérés. Thèse de Doctorat, ENSAM CER de Bordeaux.
- [9] BANVILLET, A., LAGODA, T., MACHA, E., NIESLONY, A., PALIN-LUC, T., AND VITTORI, J.-F. (2004). Fatigue life under non-Gaussian random from various models. *Int. J. Fatigue* **26**, 349-363.
- [10] BEDKOWSKY, W., MACHA, E. (1992). Fatigue fracture plane under multiaxial random loadings - Prediction by variance of equivalent stress based on the maximum shear and normal stresses. *Mat.-wiss. u. Werkstofftech.* **23**, 82-94.

- [11] BEDKOWSKY, W. (1994). Determination of the critical plane and effort criterion in fatigue life evaluation for materials under multiaxial random loading. Experimental verification based on fatigue tests of cruciform specimen. In *Proceedings of the 4th International Conference on Biaxial /Multiaxial Fatigue, St Germain-en-Laye (France)* **1** , 435-447.
- [12] BENNEBACH, M. (1993). Fatigue multiaxiale d'une fonte GS. Influence de l'entaille et d'un traitement de surface. Thèse de Doctorat, ENSAM CER de Bordeaux.
- [13] BRAND, A., FLAVENOT, J. F., TOURNIER, C. (1980). Recueil de données technologiques sur la fatigue. CETIM, Paris.
- [14] BROWN, M.W., AND MILLER, K. (1973). A theory for fatigue under multiaxial stress-strain conditions. In *Proc. of Inst. Mech. Engrs* **187**, 745-755.
- [15] BUI, H. (1970). Evolution de la frontière du domaine élastique des métaux avec l'écroutissage plastique et comportement élastoplastique d'un agrégat de cristaux cubiques. *Sciences et Techniques de l'Armement, Mémorial de l'artillerie française*, 1<sup>er</sup> fascicule.
- [16] BUI, H., ZAOUÏ, A., ZARKA, J. (1972). Sur le comportement élastoplastique et viscoplastique des monocristaux et polycristaux métalliques de structure à faces centrées. In *Foundations of Plasticity*, A. SAWCZUK Editor.
- [17] CARPINTERI, A., SPAGNOLI, A., AND VANTADORI, S. (2003). A multiaxial fatigue criterion for random loading . *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* **26**, 515-522.
- [18] CHARKALUK, E., BIGNONNET, A., CONSTANTINESCU, A., DANG VAN, K. (2002). Fatigue design of structures under thermomechanical loadings. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* **25**, Issue 12, 1199-1206.
- [19] COFFIN, L.F.JR. (1959). Internal stresses and fatigue in metals. Elsevier Publishing.
- [20] CONSTANTINESCU, A., DANG VAN, K., MAITOURNAM, M.H. (2003). A unified approach for high and low cycle fatigue based on shakedown concepts. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* **26**, Issue 6, 561-568.
- [21] CRANDALL, S.H., AND MARK, W.D. (1963). Random vibration in Mechanical Systems. Academic Press, N.Y.
- [22] DANG VAN, K. (1973). « Sur la Résistance à la Fatigue des Métaux ». *Sciences et Techniques de l'Armement, Mémorial de l'artillerie française*, 3<sup>ème</sup> fascicule.
- [23] DANG VAN, K. (1999). Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach, in : Dang Van K., Papadopoulos I.V. (Éds), High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design, CISM Courses and Lectures N° 392, Springer-Verlag, 57-88.
- [24] DOWLING, N.E. (1988). Estimation and correlation of fatigue lives for random loading. *International Journal of Fatigue* **10**, N° 3, 179-185.

- [25] DUBAR, L. (1992). Fatigue multiaxiale des aciers - Passage de l'endurance à l'endurance limitée -Prise en compte des accidents géométriques. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Talence, France.
- [26] FOGUE, M., KENMEUGNE, B., WEBER, B., AND ROBERT, J.-L. (1998). Compteur de cycles et calcul de durée de vie en fatigue multiaxiale d'amplitude variable. *Mécanique Industrielle et Matériaux*, 51, 3, 140-144.
- [27] GARUD, Y.S. (1979). A New Approach to the Evaluation of Fatigue Under Multiaxial loadings. *Methods for Predicting Material Life in Fatigue*, ASME, New York, 247-263.
- [28] GASSNER, E. (1973). Zur experimentellen Lebensdauerermittlung von Konstruktionselementen mit zufallsartigen Beanspruchungen. *Materialprüfung*, Vol. 15, N° 6, 197-205.
- [29] GLINKA, G., SHEN, G., AND PLUMTREE, A. (1995). A multiaxial fatigue strain energy density parameter related to the critical fracture plane. *Fat. Fract. Engng. Mater. Struct.* **18**, 1, 37-46.
- [30] HAIBACH, E. (1970). Modifizierte Lineare Schadensakkumulations-Hypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalls mit fortschreitender Schädigung. *Laboratorium für Betriebsfestigkeit, Darmstadt, Technische Mitteilungen*, TN N° 50/70.
- [31] HALPHEN, B. (1978). Problèmes quasistatiques en viscoplasticité. Université Pierre et Marie curie.
- [32] HILL, R. (1967). The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids* **15**.
- [33] KARAOUNI, H. (2001). Nouveaux outils pour la conception fiable des structures. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique.
- [34] KENMEUGNE, B. (1996). Contribution à la modélisation du comportement en fatigue sous sollicitations multiaxiales d'amplitude variable. Thèse de Doctorat, INSA de Lyon. N° ordre 96 ISAL 0064.
- [35] KUJAWSKI, D. AND ELLYIN, F. (1984). A cumulative damage theory for fatigue crack initiation and propagation. *International Journal of Fatigue* **6**, N° 2, 83-88.
- [36] KUJAWSKI, D. AND ELLYIN, F. (1988). On the concept of cumulative fatigue damage. *Int. J. Fract.* **37**, 263-278.
- [37] LAGODA, T. AND MACHA, E. (1994). Estimated and experimental fatigue lives of 30Cr-NiMo8 steel under in and out-of-phase combined bending and torsion with variables amplitudes. *Fat. Fract. Engng. Mater. Struct.* **17**, N° 11, 1307-1318.
- [38] LAGODA, T., MACHA, E., AND BEDKOWSKY, W. (1999). A critical plane approach based on energy concepts : application to biaxial random tension-compression high-cycle fatigue regime. *Int. J. Fatigue* **21**, 431-443.
- [39] LAGODA, T. (2001). Energy models for fatigue life estimation under uniaxial random loading. Part I and Part II. *Int. J. Fatigue* **23**, 467-489.

- [40] LARSEN, C., AND LUTES, L. (1991). Predicting the fatigue life of offshore structures by the single-moment spectral method. *Probabilistic Engineering Mechanics* **6**, N° 2, 96-108.
- [41] LEE, S-B. (1989). Out-of-phase bending and torsion fatigue of steels. In : Brown MW, Miller KJ, editors. *Biaxial and multiaxial fatigue*, EGF3. London : Mechanical Engineering Publications, 612-634.
- [42] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.L. (1978). Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *Journal de Mécanique Appliquée* **2**, N° 3, 317-363.
- [43] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.L. (1996). *Mécanique des Matériaux Solides*. Paris : Dunod.
- [44] LUTES, L., AND LARSEN, C. (1990). Improved spectral method for variable amplitude fatigue prediction. *J. Struct. Div., ASCE* **116**, N° 4, 1149-1164.
- [45] MACHA, E. (1989). Generalization of fatigue fracture criteria for multiaxial sinusoidal loading in the range of random loading. In *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, B. M.W. and M. K.J., Eds., EGF 3, 425-436.
- [46] MAITOURNAM, M.H., POMMIER, B., THOMAS, J.J. (2002). Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique sous chargement thermomécanique cyclique. *C. R. Mécanique* **330**, 703-708.
- [47] MANDEL, J. (1971). *Plasticité classique et viscoplasticité*. Courses and Lectures of CISM, N° 97, Springer-Verlag Publishers, Wien, New-York.
- [48] MANDEL, J. (1976). Adaptation d'une structure plastique écrouissable. *Mech. Res. Comm.* **3**, 251-256.
- [49] MAOUCHE, N., MAITOURNAM, M.H., DANG VAN, K. (1997). On a new method of evaluation of the inelastic state due to moving contacts, *Wear* **203-204**, 139-147.
- [50] MINER, M.A. (1945). Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME* **12**, N° 3, 159-164.
- [51] MOREL, F. (1996). *Fatigue Multiaxiale sous Chargement d'Amplitude Variable*. Thèse de Doctorat, Université de Poitiers.
- [52] MOREL, F. (1998). A fatigue prediction method based on a mesoscopic approach in constant amplitude multiaxial loading. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* **21**, 241-256.
- [53] MOREL, F. (2000). A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading. *International Journal of Fatigue* **22**, 101-119.
- [54] MORROW, J. (1965). Low cycle fatigue behavior of quenched and tempered SAE 1045 steel. Tech. rep., University of Illinois at urbana-Champaign (Dpt. of Theoretical and Applied Mechanis).
- [55] PALIN-LUC, T. (1996). *Fatigue multiaxiale d'une fonte GS sous sollicitations combinées d'amplitude variable*. Thèse de Doctorat, ENSAM CER de Bordeaux.

- [56] PAPADOPOULOS, I.V. (1987). Fatigue polycyclique des métaux - une nouvelle approche. Thèse de Doctorat, ENPC.
- [57] PAPADOPOULOS, I.V. (1993). Fatigue limit of metals under multiaxial stress conditions : the microscopic approach. Technical Note N° I.93.101, Commission of the European Communities, Joint Research Center, ISEI/IE 2495/93.
- [58] PAPADOPOULOS, I.V. (1999). Multiaxial fatigue limit criterion of metals : a mesoscopic scale approach. In *High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design*, CISM Courses and Lectures N° 392 (Edited by Dang Van K. and Papadopoulos I.V.), Springer-Verlag, 89-143.
- [59] PAPADOPOULOS, I.V. (2001). Long life fatigue under multiaxial loading. *International Journal of Fatigue* **23**, 839-849.
- [60] PITOISET, X., KERNILIS, A., PREUMONT, A., AND PIEFORT, V. (1998). Estimation du dommage en fatigue multiaxiale de structures métalliques soumises à des vibrations aléatoires. *Rev. Française de Mécanique*, N° 3, 201-208.
- [61] PITOISET, X., AND PREUMONT, A. (2000). Méthodes spectrales pour une analyse des structures métalliques en fatigue aléatoire. *Rev. Française Mécanique*, N° 1, 3-11.
- [62] PITOISET, X., AND PREUMONT, A. (2000). Spectral methods for multiaxial random fatigue analysis of metallic structures. *Int. J. Fatigue* **22**, 541-550.
- [63] PITOISET, X. (2001). Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux. Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles.
- [64] PREUMONT, A. (1990). Vibrations aléatoires et analyse spectrale. Lausanne : Presses polytechnique et universitaire romandes.
- [65] ROBERT, J.-L. (1992). Contribution à l'étude de la fatigue multiaxiale sous sollicitations périodiques ou aléatoires. Thèse de Doctorat, INSA de Lyon.
- [66] SEKI, M., TANAKA, T., AND DENO, S. (1971). Estimation of the fatigue life under program load including the stresses lower than endurance limit. *Bulletin of the J. S. M. E.* **14**, 69, 183-190.
- [67] SMITH, R., WATSON, P., AND TOPPER, T. (1970). A stress strain function for the fatigue of metals. *Journal of Materials (JMLSA)* **5**, 4, 293-298.
- [68] SOCIE, D. (1993). Critical plane approaches for multiaxial fatigue damage assessment. In : *McDowell DL, Ellis R, editors. Advances in multiaxial fatigue*, ASTM STP 1191. Philadelphia, PA : ASTM ; 7-36.
- [69] STEPANOV, S. (1993). A curvilinear integral method for multiaxial fatigue life computing under non-proportional, arbitrary or random stressing. *Int. J. Fatigue* **15**, N° 6, 467-472.

- [70] STEPHANOV, S. (1995). A curvilinear integral method : Computer realization and testing 1 (under non-proportional reversed axial force and torque). *Int. J. Fatigue* **17**, N° 8, 567-575.
- [71] STEPHANOV, S. (1996). A curvilinear integral method : Testing 2 (under non-proportional pulsating axial force and internal pressure). *Int. J. Fatigue* **18**, N° 1, 41-48.
- [72] SUSMEL, L. AND PETRONE, N. (2002) Multiaxial fatigue life estimations for 6082-T6 cylindrical specimens under in-phase and out-of-phase biaxial loadings. In : *Biaxial and Multiaxial fatigue and Fracture* (Edited by Carpinteri A. et al.) ESIS, 83-104.
- [73] TANAKA, T., AND FUJII, T. (1977). Studies on fatigue damage caused by stresses below the endurance limit. *Bulletin of the JSME* **20**, 143, 505-512.
- [74] VIDAL, E. (1996). Prévision de la durée de vie en fatigue multiaxiale sous sollicitations d'amplitude variable à l'aide d'un critère global. Thèse de Doctorat, INSA de Lyon.
- [75] WANG, C.H., AND BROWN, M.W. (1994). A study of the deformation behavior under multiaxial loading. *Eur. J. Mechanics, A/Solids* **13**, N° 2, 175-188.
- [76] WANG, C.H., AND BROWN, M.W. (1996). Multiaxial random load fatigue : life prediction techniques and experiments. In : *Pineau A., Cailletaud G., and Lindley T.C., editors. Multiaxial fatigue and design*, ESIS 21. London : MEP ; 513-527.
- [77] WANG, C.H., AND BROWN, M.W. (1996). Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue - Part I : Theories. *Journal of Engineering Materials and Tecnology* **118**, 367-370.
- [78] WANG, C.H., AND BROWN, M.W. (1996). Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue - Part II : Comparison with experimental results. *Journal of Engineering Materials and Tecnology* **118**, 371-374.
- [79] WEBER, B. (1999). Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque. Thèse de Doctorat, INSA de Lyon.
- [80] WEBER, B., CARMET, A., KENMEUGNE, B., AND ROBERT, J.-L. (1999). On a global stress based approach for fatigue assessment under multiaxial random loading. In *Engineering Against Fatigue*, J. Beynon, M. Brown, R. Smith, T. Lindley, and B. Tomkins, Eds., 407-414.
- [81] WEBER, B., CARMET, A., KENMEUGNE, B., AND ROBERT, J.-L. (1999). A stress based approach for fatigue assessment under multiaxial variable amplitude loading. In *Multiaxial Fatigue and Fracture*, ESIS 25, E. Macha, W. Bedkowski, and T. Lagoda, Eds., 218-233.
- [82] WIRSCHING, P., AND LIGHT, M. (July 1980). Fatigue under wide band random stress. *J. Struct. Div., ASCE* **106**, N° 7, 1593-1607.
- [83] ZARKA, J., FRELAT, J., INGLEBERT G., NAVIDI, P. (1990). *A new Approach to Inelastic Analysis of Structures*, Martinus Nijhoff Publisher.

- [84] ZARKA, J., KARAOUNI H. (2001). Fatigue analysis during one-parameter loadings, First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics.

# Notations

$\sigma_a$	Amplitude de contrainte périodique
$\sigma_m, \bar{\sigma}$	Contrainte moyenne
$\sigma_n$	Contrainte normale
$\sigma_{na}$	Amplitude de la contrainte normale
$\bar{\sigma}_n$	Contrainte moyenne normale au plan de cisaillement maximum
$\sigma_{n,max}$	Contrainte normale maximum
$\sigma_{H,a}, P_a$	Amplitude de la pression hydrostatique macroscopique
$\sigma_{H,m}, \bar{P}, P_m$	Valeur moyenne de la pression hydrostatique macroscopique
$\sigma_{H,max}$	Valeur maximale de la pression hydrostatique macroscopique
$\sigma_D$	Limite d'endurance
$\sigma_{-1}^D, f_{-1}$	Limite d'endurance en traction ou en flexion purement alternée
$\tau_{-1}^D, \tau_{-1}$	Limite d'endurance en torsion purement alternée
$T_a$	Amplitude de la cission généralisée
$\tau$	Cission résolue (Papadopoulos 2001)
$\bar{\tau}$	Valeur moyenne de $\tau$
$\tau_a(\varphi, \theta, \chi)$	Amplitude de la cission résolue (Papadopoulos 2001)
$\gamma_N$	Amplitude de cission dans un essai de torsion purement alternée
$k^*$	Rayon de la plus petite hypersphère du déviateur des contraintes macroscopiques
$\rho$	Rapport de contrainte du plan critique (Susmel et al.)
$\tau_{a,R}(\rho)$	Valeur référence de l'amplitude de cission (Susmel et al.)
$k_\tau(\rho)$	Valeur inverse de la pente de droite dans le diagramme de Wöhler modifié
$I$	Facteur d'irrégularité du signal
$N_0$	Nombre de passage à zéro du signal
$N_e$	Nombre d'extrema contenus dans le signal
$X_{RMS}$	Valeur quadratique moyenne de la densité spectrale de puissance
$X_m$	Valeur moyenne du signal
$D$	Facteur d'endommagement
$D_c$	Valeur critique de $D$
$D_T$	Domage total

$\Delta \varepsilon^P$	Etendue de déformation plastique (Coffin)
$\varepsilon^p$	Tenseur des déformations plastiques mésoscopiques
$\varepsilon_d^p$	Tenseur déviatorique des déformations plastiques mésoscopiques
$\varepsilon_h^p \mathbf{I}$	Tenseur sphérique des déformations plastiques mésoscopiques
$\varepsilon^{pc}$	Déformation plastique mésoscopique cumulée
$\varepsilon^p$	Déformation plastique mésoscopique cumulée (Papadopoulos 1987)
$\varepsilon_R^p$	Déformation plastique mésoscopique cumulée à la rupture
$\Gamma$	Déformation plastique mésoscopique cumulée (Morel)
$\Gamma_R$	Valeur critique de $\Gamma$
$\varepsilon_s^{pc}$	Déformation plastique mésoscopique cumulée sur le cycle stabilisé
$\Delta \varepsilon_n$	Etendue de déformation normale au plan de cisaillement maximum
$\gamma_a$	Amplitude de déformation de cisaillement
$N_R$	Nombre de cycles à l'amorçage
$N_a$	Nombre de cycles à l'amorçage (Morel)
$N_{seq}, N_{SR}$	Nombre de séquences à l'amorçage
$E$	Module de Young
$\sigma'_f$	Résistance à la fatigue
$\varepsilon'_f$	Coefficient de ductilité
$R_m$	Résistance maximale à la traction monotone
$Re_{0.2\%}$	Limite élastique à 0.2% de déformation plastique
$G$	Module de cisaillement
$A$	Allongement à rupture
$c$	Module d'érouissage cinématique linéaire à l'échelle mésoscopique
$\mu$	Module de cisaillement macroscopique (Papadopoulos 1987)
$g$	Module de durcissement
$h$	Module d'adoucissement
$\alpha_\infty$ et $\gamma_\infty$	Paramètres de la méthode de Papadopoulos 2001
$p, q, r$	Paramètres dépendant du matériau (Méthode de Morel)
$\sigma_{eqMB}$	Contrainte équivalente de Macha et Bedkowsky
$\sigma_{h_0h_0}$	Contrainte normale au plan fixe $\pi_0$
$E_h$	Indicateur d'endommagement par plan (Robert)
$W_n$ (t)	Densité d'énergie de déformation normale
$W_{na}$	Amplitude de $W_n$
$W_{na}^D$	Limite d'endurance en énergie
$ds$	Élément infinitésimal du trajet de chargement $S$
$ds_{xy}$	Projection de $ds$ dans le plan principal ( $I, II$ )
$ds_r$	Composante radiale de $ds_{xy}$
$ds_c$	Composante circonférentielle de $ds_{xy}$
$R_r, R_c$ et $R_\tau$	Fonctions d'endommagement (Stephanov)

$k_{lim}$	Limite d'endurance généralisée (Papadopoulos 1987)
$k_0$	Valeur initiale de la limite d'élasticité du cristal (Papadopoulos 1987)
$k_s$	Limite d'élasticité du cristal dans la phase de saturation (Papadopoulos 1987)
$\tau_y$	Limite élastique mésoscopique (Méthode de Morel)
$\tau_s$	Limite d'élasticité du cristal dans la phase de saturation (Méthode de Morel)
$C_A$	Amplitude maximale de la cission résolue macroscopique
$H$	Coefficient de déphasage (Méthode de Morel)
$\tau_{RMS}$	Valeur quadratique moyenne de l'évolution de la cission résolue $\tau(t)$
$C_{RMS}$	Valeur maximale prise par $\tau_{RMS}$ sur le plan critique $P_c$
$T_{\Sigma_{RMS}}$	Variable de cission utilisée par Morel pour repérer le plan critique $P_c$
$C_f$	Centre de chargement (Méthode de Zarka-Karaoui)
$F^\sigma$	Fluctuation, égale à l'amplitude de chargement en cas uniaxial
$\Sigma_{max}$	Contrainte maximale du chargement uniaxial appliqué
$\Sigma_{min}$	Contrainte minimale du chargement uniaxial appliqué
$k_e$	Module élastique à l'échelle mésoscopique (Zarka-Karaoui)
$h$	Module d'écroutissage linéaire à l'échelle mésoscopique (Zarka-Karaoui)
$S$	Limite élastique mésoscopique (Zarka-Karaoui)
$V(\underline{x})$	Volume élémentaire représentatif de l'échelle macroscopique
$\Sigma(\underline{x})$	Tenseur des contraintes macroscopiques
$\mathbf{E}(\underline{x})$	Tenseur des déformations macroscopiques
$\mathbf{E}^p(\underline{x})$	Tenseur des déformations plastiques macroscopiques
$\mathbf{E}^e(\underline{x})$	Tenseur des déformations élastiques macroscopiques
$\mathbf{L}^{-1}(\underline{x})$	Tenseur macroscopique des compliances élastiques
$\boldsymbol{\sigma}(\underline{y}, \underline{x})$	Tenseur des contraintes mésoscopiques
$\boldsymbol{\rho}(\underline{y}, \underline{x})$	Champ des contraintes résiduelles mésoscopiques
$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{y}, \underline{x})$	Tenseur des déformations mésoscopiques
$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\underline{y}, \underline{x})$	Tenseur des déformations élastiques mésoscopiques
$\mathbf{l}^{-1}(\underline{y}, \underline{x})$	Tenseur mésoscopique des compliances élastiques
$\mathbf{A}(\underline{y})$	Tenseur de localisation des contraintes
$k(p)$	Limite élastique mésoscopique (Jabbado)
$k_{max}$	Valeur maximale de $k(p)$
$k_{min}$	Valeur minimale de $k(p)$
$p$	Pression hydrostatique mésoscopique
$\mathbf{s}$	Tenseur déviateur des contraintes mésoscopiques
$\mathbf{S}$	Tenseur déviateur des contraintes macroscopiques
$\alpha, \beta, \gamma, c, \xi$ et $A$	Paramètres du modèle de Jabbado
$\mathbf{y}$	Tenseur des paramètres transformés
$\boldsymbol{\alpha}$	Tenseur des paramètres internes
$N$	Nombre de blocs appliqués (Jabbado)

# Annexe A

## Tracé de la courbe de Wöhler

Diverses expressions ont été proposées pour rendre compte de la forme de la courbe de Wöhler (courbe S - N). La plus ancienne, **proposée par Wöhler**, s'écrit :

$$\ln N_R = a - b \sigma_a$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes.

Cette relation ne peut pas rendre compte d'une branche horizontale ou asymptotique de la courbe S - N complète. Dans le plan  $(\ln N_R, \sigma_a)$ , elle assimile à une droite la portion correspondant à l'endurance limitée.

Depuis longtemps, la courbe S - N ne présentait pas réellement de « coude » aigu, comme le fait croire trop souvent une représentation sommaire, mais une courbure progressive raccordant la branche descendante à la branche horizontale. C'est pour rendre compte de cette courbure, que dès 1910, **Basquin** a proposé la formule :

$$\ln N_R = a - b \ln \sigma_a$$

Elle s'écrit sous une autre forme en posant  $A = e^a$  et  $c = 1/b$  :

$$\sigma_a = (A/N_R)^c$$

Cette équation représente un genre d'hyperbole dont une branche se raccorde asymptotiquement à l'axe  $N_R$ . Ce type de courbe ne permet donc pas plus de décrire le phénomène de « la limite de fatigue », que celui-ci soit absolu ou seulement apparent mais suffisamment marqué.

Pour rendre compte de l'asymptote horizontale ou limite d'endurance  $\sigma_D$ , **Stromeyer (1914)** a introduit donc l'équation :

$$\ln N_R = a - b \ln(\sigma_a - \sigma_D)$$

ou :

$$\sigma_a = \sigma_D + (A/N_R)^c$$

avec  $A = e^a$  et  $c = 1/b$ .

La courbe obtenue est identique à celle que décrit l'équation de Basquin à ceci près que  $\sigma_a$  étant remplacé par  $\sigma_a - \sigma_D$ . La courbe possède une asymptote horizontale d'ordonnée  $\sigma_D$  en général non confondu avec l'axe des durées de vie.

**En 1924, Palmgren** proposa l'équation :

$$\ln(N_R + B) = a - b \ln(\sigma_a - \sigma_D)$$

qui rend compte également d'un point d'inflexion et s'écrit aussi :

$$\sigma_a = \sigma_D + \left( \frac{A}{N_R + B} \right)^c$$

**En 1955, CORSON** a introduit, sur des bases expérimentales très réduites, l'équation :

$$N_R = \frac{A e^{-c(\sigma_a - \sigma_D)}}{\sigma_a - \sigma_D}$$

Puis **Bastenaire (1971)** :

$$N_R + B = \frac{A e^{-c(\sigma_a - \sigma_D)}}{\sigma_a - \sigma_D}$$

Citons enfin, pour mémoire, l'équation dite de **Weibull** :

$$\ln(N_R + B) = a - b \ln \frac{\sigma_a - \sigma_D}{R - \sigma_D}$$

dans laquelle  $a$ ,  $b$ ,  $B$  et  $\sigma_D$  sont des paramètres constants et  $R$  la résistance à la traction du matériau.

# Annexe B

## Approche simplifiée de Zarka sur le comportement inélastique des solides

### Introduction

Le comportement d'un matériau (élément d'une structure), est fonction de sa nature, de son état initial et du chargement qui lui est appliqué.

Zarka [83] avait proposé une approche systématique de la description des comportements inélastiques des solides dont les principaux éléments sont décrits dans la suite. Cette approche reste physiquement raisonnable car elle retient bien les interactions fondamentales entre les mécanismes inélastiques locaux et les agrégats qui impliquent des comportements globaux particuliers et entièrement différents des comportements locaux.

Les mécanismes inélastiques qui se produisent lors des déformations des métaux, résultent de phénomènes physiques de nature diverse : la diffusion des lacunes et des interstitiels, le glissement et la montée des dislocations, et le glissement plan sur plan, qui modifient peu le réseau cristallin.

Dans sa théorie, Zarka définit le comportement d'un matériau, par ses trois caractéristiques : (B) tenseur fonction de la matière, (A) tenseur fonction du chargement et (S) seuil de plasticité qui peut être une fonction de la température. (A et B pouvant varier avec la modélisation mathématique).

### Paramètres internes

Les sous-éléments élastiques linéaires ont des déformations réversibles et instantanées ; ils assurent l'élasticité globale de l'élément de volume ainsi que le couplage entre les mécanismes élémentaires non élastiques. Il n'est pas nécessaire de les individualiser.

Au contraire, les déformations irréversibles  $\varepsilon^{P(X)}$  des sous-éléments inélastiques introduits dans la microstructure fictive adoptée jouent un rôle essentiel dans le comportement global. Elles sont choisies comme paramètres internes caractéristiques de l'état du matériau. Ces paramètres sont des êtres tensoriels : scalaires, vecteurs, tenseur du second ordre . . . Si la microstructure réelle est connue, ils peuvent éventuellement être liés simplement à sa déformation.

Selon leurs effets sur le comportement global de l'élément, nous distinguons trois types de sous-éléments :

- les sous-éléments  $\alpha$  qui provoquent des déformations instantanées avec seuil ; (ils représentent la plasticité et jouent le rôle des patins dans les assemblages rhéologiques) ;
- ceux qui conduiront à des déformations différées sans seuil, sous-éléments de type  $\beta$  ; (caractérisant la viscosité et équivalents dans les assemblages rhéologiques à des amortisseurs) ;
- Ceux qui entraîneront des déformations différées avec seuil, sous-éléments de type  $\gamma$  ; (ils décrivent la viscoplasticité et peuvent être représentés, toujours dans les modèles rhéologiques unidimensionnels, par un couple amortisseur-patin en parallèle) ;

L'ensemble des paramètres internes de l'élément de volume, désigné par  $\mathbf{X}$  (ou  $\varepsilon^{P(X)}$ ), représente l'ensemble des micro-déformations de l'élément. ( $\varepsilon^{P(\alpha)}$ ,  $\varepsilon^{P(\beta)}$ ,  $\varepsilon^{P(\gamma)}$ ) ou, en notation abrégée, ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) représenteront respectivement l'ensemble des paramètres internes associés aux sous-éléments de type  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\gamma$  :

$$\varepsilon^{P(X)} = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{P(\alpha)} \\ \varepsilon^{P(\beta)} \\ \varepsilon^{P(\gamma)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Plasticité instantanée} \\ \text{Viscoélasticité linéaire} \\ \text{Viscoplasticité} \end{array}$$

### Contraintes locales au niveau des sous-éléments inélastiques

Désignons par  $\Sigma$  le tenseur de contrainte global exercé sur l'élément de volume fondamental. Il s'agit d'un tenseur de contrainte généralisé : ce sera un tenseur symétrique du second ordre classique pour un milieu continu tridimensionnel, un scalaire pour une tige.

Les éléments de liaison entre les sous-éléments inélastiques sont choisis élastiques linéaires. En supposant l'élément de volume fondamental macroscopiquement homogène au sens de Hill (1967) et Mandel (1964), nous pouvons écrire les contraintes locales  $\sigma^{(\alpha)}$ ,  $\sigma^{(\beta)}$  et  $\sigma^{(\gamma)}$  qui régissent l'évolution des mécanismes élémentaires de type  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(X)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(\beta)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(\gamma)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(\alpha)} \\ \mathbf{A}^{(\beta)} \\ \mathbf{A}^{(\gamma)} \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} - \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_\alpha \\ \mathbf{Y}_\beta \\ \mathbf{Y}_\gamma \end{pmatrix} \text{ soit } = \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{Y}$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^{(\alpha)}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^{(\beta)}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{(\gamma)}$  sont des contraintes généralisées ayant respectivement même nature (même nombre de composantes scalaires, vectorielles ou tensorielles) que  $\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\alpha)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\beta)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\gamma)}$ .  $\mathbf{A}$  est le tenseur de localisation élastique dans les sous-éléments. Il est constant si l'on suppose les propriétés élastiques invariantes.  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}$  représente donc les contraintes élastiques locales provoquées au niveau des sous-éléments par le chargement global  $\boldsymbol{\Sigma}$ , et  $\mathbf{Y}$  est opposé aux contraintes résiduelles locales engendrées dans les sous-éléments par les déformations inélastiques locales  $\boldsymbol{\varepsilon}^{P(X)}$  (ou  $\mathbf{X}$ ).

### Paramètres transformés

Le tenseur de localisation élastique  $\mathbf{A}$  est fixé dès que les propriétés élastiques locales sont connues ; ici, l'élément de volume est supposé globalement homogène et les conditions aux limites sont fixées par l'hypothèse de macro-homogénéité de Hill-Mandel. Il permet d'obtenir les contraintes élastiques locales et la déformation plastique globale. Reste à définir la relation entre les contraintes résiduelles locales ou leurs opposées  $\mathbf{Y}$  et les paramètres  $\mathbf{X}$  décrivant les déformations inélastiques mésoscopiques. Nous appellerons paramètres transformés ces  $\mathbf{Y}$ . Du fait de l'élasticité linéaire constante adoptée pour les éléments de liaison, ils seront fonction linéaire des micro-déformations  $\mathbf{X}$ . Dans l'hypothèse d'une structure discrétisée du matériau, c'est-à-dire du choix d'un nombre fini de paramètres internes pour représenter l'état inélastique, cette fonction sera caractérisée simplement par une matrice  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} B^{(\alpha)} & C^T & D^T \\ C & B^{(\beta)} & E^T \\ D & E & B^{(\gamma)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{P(\alpha)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{P(\beta)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{P(\gamma)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_\alpha \\ \mathbf{Y}_\beta \\ \mathbf{Y}_\gamma \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}$  est une matrice constante, symétrique, non négative.

### Lois d'évolution des paramètres inélastiques

Pour compléter la description du matériau, il faut ajouter à ces relations locales les lois d'évolution pour les paramètres internes  $\mathbf{X}$ . Les dérivées temporelles de  $\mathbf{X}$  dépendront des contraintes locales  $\boldsymbol{\sigma}^{(X)}$ . Les sous-éléments sont supposés parfaits. Dans la suite, nous présenterons seulement la loi d'évolution des déformations instantanées avec seuil (paramètres  $\alpha$ ).

### Sous-éléments $\alpha$ (plastiques parfaits)

Les sous-éléments  $\alpha$  sont à l'origine des déformations instantanées irréversibles avec seuil. Le seuil de plasticité est défini à l'aide d'un convexe fixe  $C_0$  auquel doit appartenir  $\sigma^{(\alpha)}$ . On suppose que  $C_0$  admet l'origine comme centre de symétrie. Dans la plupart des applications, le convexe classique de von Mises est toujours utilisé pour des raisons de simplicité.

A ce convexe de plasticité est associée la règle d'écoulement normal qui fixe l'évolution des paramètres internes :

$$\dot{\alpha} \in \partial\varphi_{C_0}(\sigma^{(\alpha)}) \quad \sigma^{(\alpha)} \in C_0 \Leftrightarrow f(\sigma^{(\alpha)}) \leq 0$$

$\dot{\alpha}$  est une normale extérieure au convexe  $C_0$  en  $\sigma^{(\alpha)}$ . Ces conditions peuvent s'exprimer également à l'aide des paramètres transformés  $Y$  et du convexe mobile  $\hat{C}(\Sigma)$  déduit de  $C_0$  par une translation de vecteur  $A^\alpha \Sigma$ ;  $\dot{\alpha}$  est alors une normale intérieure en  $Y$  à  $\hat{C}(\Sigma)$  :

$$\dot{\alpha} \in -\partial\varphi_{\hat{C}(\Sigma)}(Y) \quad Y \in \hat{C}(\Sigma) \Leftrightarrow f(A^{(\alpha)} \Sigma - Y) \leq 0$$

### Déformations plastiques globales

Inversement,  $A$  permet d'obtenir la déformation plastique globale  $E^P$  en fonction des paramètres internes caractérisant les micro-déformations inélastiques  $X$ .

$$E^p = A^T \varepsilon^{P(x)} = A^T X = A^{(\alpha)T} \alpha + A^{(\beta)T} \beta + A^{(\gamma)T} \gamma$$

# Annexe C

## Critère de Dang Van [22] (1973-1987)

Dang Van pense que lors d'un chargement cyclique, une réponse adaptée du grain est une condition nécessaire pour que ne s'amorce aucune fissure au bout d'un nombre infini de cycles. L'idée de base est donc d'écrire que la contrainte mésoscopique dans un grain au cours du cycle limite doit satisfaire le critère de plasticité. La démarche de Dang Van va donc se résumer de la manière suivante :

- A partir du cycle de chargement extérieur, on détermine le cycle de contraintes macroscopique  $\Sigma$  qui par définition est élastique en fatigue polycyclique. On en déduit le cycle adapté des contraintes qu'on note  $\sigma^{lim}$ .
- Ce cycle adapté des contraintes mésoscopiques  $\sigma^{lim}$  doit à tout instant satisfaire le critère de plasticité du grain. Grâce aux relations de passage macro-méso, on réécrit le critère de plasticité mésoscopique en ne faisant intervenir que les grandeurs macroscopiques.

L'adaptation supposée à l'échelle mésoscopique signifie qu'après un nombre de cycles, les déformations plastiques deviennent indépendantes de temps. Il en sera de même pour les contraintes résiduelles qui leur sont proportionnelles :

$$\exists t_0 \in R \text{ tel que } \forall t \geq t_0$$

$$\sigma^{lim}(t) = \Sigma(t) + \rho^*$$

De plus les contraintes  $\sigma^{lim}$  doivent satisfaire à tout instant le critère de plasticité de grain, soit :

$$\forall t \quad f(\sigma^{lim}(t)) \leq 0$$

Il reste à déterminer la fonction  $f(\sigma^{lim})$  en tenant compte d'observations métallurgiques et de résultats d'essais de fatigue.

Il ressort de l'analyse expérimentale que toutes les premières microfissures de fatigue s'orientent et croissent dans le plan de cisaillement maximal (c'est-à-dire à 45° par rapport au plan de la tôle dans un essai de flexion 3 points sur un assemblage soudé tôle-raidisseeur en Té) et que la pression hydrostatique a une influence considérable sur la durée de vie à la fatigue. Dang Van postula en 1973 un critère de fatigue de la forme :

$$\forall \underline{n}, \forall t \quad \hat{\tau}(\underline{n}, t) + a \hat{p}(t) \leq b$$

où  $\hat{p}(t)$  et  $\hat{\tau}(\underline{n}, t)$  sont respectivement la pression hydrostatique instantanée et la cission instantanée associées à la contrainte mésoscopique adaptée  $\sigma^{lim}(t)$ . Ce dernier critère peut se réécrire :

$$\max_{\underline{n}} \left[ \max_t [\hat{\tau}(\underline{n}, t) + a \hat{p}(t)] \right] \leq b$$

Quand on se limite strictement à l'application du critère de Dang Van, le problème est d'évaluer  $\hat{p}(t)$  et  $\hat{\tau}(\underline{n}, t)$  à partir de la contrainte macroscopique  $\Sigma(t)$  obtenue par un calcul de structure.

Le calcul de  $\hat{p}(t)$  est facile. En effet, la pression mésoscopique à tout instant est égale à la pression macroscopique qui est donné par le calcul de structure :

$$P = \frac{1}{3} tr \sigma = \frac{1}{3} tr \Sigma$$

En revanche, le calcul de  $\hat{\tau}(\underline{n}, t)$  est moins évident. C'est là que se trouve la différence entre les deux versions de Dang Van. Dans le critère original de 1973, Dang Van détermine la cission instantanée par une méthode que nous ne rappellerons pas ici, et dont l'implémentation numérique s'est avérée fastidieuse. Dans la version du critère de Dang Van de 1987, le calcul de la cission instantanée se fait d'une façon qui se prête très bien aux méthodes numériques. Il se fait de la manière suivante :

On détermine le centre  $-\rho^*$  de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement  $S$  dans l'hyperplan des déviateurs de contraintes. Les contraintes mésoscopiques sont alors :

$$s = S + \rho^*$$

La cission mésoscopique maximale à un instant  $t$  donné vaut donc :

$$\max_{\underline{n}} [\hat{\tau}(\underline{n}, t)] = \frac{\hat{\sigma}_I(t) - \hat{\sigma}_{III}(t)}{2} = \hat{\tau}(t)$$

où  $\hat{\sigma}_I(t)$  et  $\hat{\sigma}_{III}(t)$  sont respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs propres du déviateur des contraintes mésoscopiques dans le cycle adapté.

Comme la pression hydrostatique en un point à un instant donné est indépendante de la normale  $\underline{n}$ , le critère de Dang Van s'écrit :

$$\max_t [\hat{\tau}(t) + a \hat{p}(t) - b] \leq 0$$



## **Fatigue Polycyclique des Structures Métalliques : Durée de Vie sous Chargements Variables**

### RESUME :

L'objectif de ce travail est de présenter un modèle prédictif de durée de vie à l'amorçage des structures métalliques travaillant en endurance limitée et qui sont soumises à des sollicitations multiaxiales d'amplitude variable. La particularité de ce modèle déterministe réside dans son utilisation possible dans l'industrie qui requiert certaines exigences : modèle prédictif sur structures sans comptage de cycles, d'utilisation simple en termes de données et de rapidité (pas trop de paramètres à identifier, pas trop de données de fatigue utilisées et calcul moins coûteux) et applicable sur une large variété de matériaux métalliques pour tout type de séquences répétées de chargement multiaxial d'amplitude variable. Après une analyse bibliographique des critères proposés dans ce domaine, aucun d'entre eux n'est utilisable dans les bureaux d'études, et ne répond pas complètement aux exigences industrielles.

Le modèle est fondé à l'échelle mésoscopique. Il repose sur deux points : (i) le choix de la déformation plastique mésoscopique cumulée du cycle stabilisé  $\varepsilon_s^{pc}$  comme variable de dommage avec l'utilisation d'un modèle élastoplastique dépendant de la pression hydrostatique pour son évaluation, (ii) la détermination de la durée de vie à l'amorçage via un facteur d'endommagement dépendant de  $\varepsilon_s^{pc}$  et de certains paramètres liés au matériau et au chargement.

Le modèle fait intervenir six paramètres identifiables à l'aide d'une courbe de Wöhler et deux limites d'endurance. La validation du modèle est assurée via des essais de fatigue (de la littérature) sous chargement multiaxial d'amplitude constante et variable, réalisés sur cinq matériaux. De bonnes corrélations avec les essais expérimentaux ont été obtenues. Enfin, le modèle est utilisé pour déterminer la durée de vie à l'endurance limitée d'un ressort de suspension d'automobile.

**Mots-clés :** Fatigue polycyclique - Durée de vie finie - Chargement multiaxial d'amplitude variable - Comportement plastique aux différentes échelles - Facteur d'endommagement.

## **High-Cycle Fatigue of Metallic Structures : Lifetime Duration under Variable Loadings**

### ABSTRACT :

The purpose of this work is to present a reliable model for the assessment of the lifetime at crack nucleation of metallic structures, working in finite life regime of high-cycle fatigue and subjected to variable amplitude multiaxial loadings. This deterministic model is characterized by its possible use in the industry which demands certain requirements : predictive model on structures without counting of cycles, model of simple use (not too many parameters to be identified, not too many fatigue data to be used and less expensive calculation) and applicable on a broad variety of metallic materials for any type of repeated blocks of variable amplitude multiaxial loading. After a bibliographical analysis of the criteria suggested in this field, none of them is used in design offices, and does not fulfill completely the industrial requirements.

The model is based on a mesoscopic approach. Two features characterise it : (i) the choice of the accumulated plastic meso-strain per stabilized cycle  $\varepsilon_s^{pc}$  as relevant parameter in fatigue design with the use of a hydrostatic stress dependent elastoplastic model to evaluate it, (ii) the assessment of the lifetime at crack nucleation by the definition of a damage factor depending on the accumulated plastic meso-strain per stabilized cycle  $\varepsilon_s^{pc}$  and some material and loading parameters.

The model has six parameters identified with one SN curve and two fatigue limits. The validation of the model is ensured via fatigue tests (from the literature) under constant and variable amplitude multiaxial loadings, carried out on five materials. Good correlations with the experimental fatigue lives were obtained. Finally, the model is used to determine the lifetime of a vehicle suspension spring working in finite life regime.

**Keywords :** High-cycle fatigue - Finite lifetime - Variable amplitude multiaxial loading - Plastic behavior at various scales - Damage factor.