



**HAL**  
open science

# Decomposition Max-Plus des surmartingales et ordre convexe. Application aux options Americaines et a l'assurance de portefeuille.

Asma Meziou

► **To cite this version:**

Asma Meziou. Decomposition Max-Plus des surmartingales et ordre convexe. Application aux options Americaines et a l'assurance de portefeuille.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2006. Français. NNT: . pastel-00002177

**HAL Id: pastel-00002177**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00002177>**

Submitted on 29 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée et soutenue par

**Asma MEZIOU ép. ABDERRAZEK**

**Décomposition Max-Plus des  
surmartingales et ordre convexe  
Application aux options Américaines  
et à l'assurance de portefeuille**

**Jury**

Nicole	EL KAROUI	(Directrice de thèse)
Hans	FÖLLMER	(Rapporteur)
Nicolas	GAUSSEL	(Examineur)
Emmanuel	GOBET	(Examineur)
Monique	JEANBLANC-PICQUÉ	(Présidente du jury)
Elyès	JOUINI	(Examineur)
Damien	LAMBERTON	(Rapporteur)
Nizar	TOUZI	(Examineur)

le 28 novembre 2006



# Remerciements

Je remercie tout d'abord et très chaleureusement Nicole El Karoui, ma directrice de thèse, pour son soutien constant et son excellente direction à la fois avisée et exigeante à laquelle cette thèse doit beaucoup.

Je tiens également à lui exprimer toute ma gratitude et mon profond respect pour sa rigueur scientifique, son dynamisme et ses précieux conseils dont j'ai tiré un grand profit.

Mes remerciements les plus respectueux vont également à Hans Föllmer et Damien Lambertson qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir rapporter la thèse en y prêtant toute l'attention nécessaire. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monique Jeanblanc en acceptant de présider mon jury de thèse.

Je suis de même très touchée par la présence dans le jury de Nicolas Gaussel qui m'a encadrée lors de mon stage de DEA effectué à la Société Générale Asset Management et qui m'a ainsi initiée aux problématiques tournant autour de l'assurance de portefeuille, thème qui a motivé ma thèse.

Je remercie vivement Emmanuel Gobet pour sa présence au jury et pour m'avoir encadrée avec beaucoup de compétence, d'enthousiasme et de disponibilité dans un travail de recherche sur le pricing des options Swing, effectué lors de ma première année de thèse. Ses conseils et ses commentaires ont été fort judicieux et bien appréciés.

Mes remerciements vont également à Nizar Touzi et Elyès Jouini qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Je rappelle que Nizar Touzi m'a si bien accueillie avec Christian Gouriéroux au sein du CREST pendant ma troisième année de thèse. Je tiens à leur faire part de ma sincère reconnaissance ainsi qu'à la très sympathique secrétaire Fanda Traoré pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont réservé.

Je voudrais aussi exprimer tout le plaisir que j'ai éprouvé en travaillant au sein du très convivial CMAP, cadre privilégié pour préparer une thèse.

Je garde toujours le meilleur souvenir de tous les membres du laboratoire que j'ai cotoyés pendant ces années de thèse. Je remercie de même tous ceux qui ont partagé mon bureau durant cette période. Par l'entente et l'esprit d'entraide qu'ils ont sans cesse manifestés, ils sont devenus au fil du temps de véritables amis.

Je remercie toute l'équipe de "Modèles aléatoires, finance et statistique" du CMAP pour nos échanges scientifiques mais aussi pour avoir créé une ambiance agréable et chaleureuse au sein du groupe de travail.

Merci à Jeanne, Liliane, Nasséra, Sébastien et Véronique, nos chers secrétaires, pour leur gentillesse, leur bonne humeur et les nombreux services qu'ils ont rendus toujours avec le sourire.

Merci également à Vincent Giovangigli, l'ancien directeur du CMAP et à son successeur Kamel Hamdache pour leur aimable accueil et leur soutien sans faille durant ces années de thèse.

Je voudrais aussi remercier Sylvain Ferrand, notre administrateur système, pour sa compétence, sa disponibilité et son assistance en informatique.

En ce moment où je passe par une étape majeure dans mon parcours universitaire, mes pensées vont vers mes parents qui n'ont ménagé aucun effort pour me soutenir et me réconforter tout le long de mes études et parfois même au prix de durs sacrifices. Je saisis cette heureuse circonstance pour leur exprimer, dans un élan de fierté et de tendresse, mes sentiments de gratitude et de profonde affection.

Le mot de la fin, c'est un vif et affectueux remerciement à mon cher époux Walid, pour la bienveillance qu'il n'a cessé de manifester à mon égard et son soutien constant et inconditionnel.

Sa présence à mes côtés et surtout dans les moments difficiles, ses encouragements et l'assistance précieuse qu'il m'a fournie m'ont permis de mener à bon terme ce travail. Qu'il soit assuré du profond amour que j'éprouverai toujours pour lui.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<i>Références bibliographiques de l'introduction</i> . . . . .	17
<b>I Algèbre Max-Plus</b>	<b>19</b>
I.1 Introduction générale à l'algèbre Max-Plus . . . . .	20
I.2 Domaines d'application de l'algèbre Max-Plus . . . . .	24
I.3 Algèbre Max-Plus : définitions et propriétés . . . . .	28
I.3.1 Définitions . . . . .	28
I.3.2 L'algèbre Max-Plus comme structure ordonnée . . . . .	29
I.3.3 Idempotence de l'addition et non simplifiabilité . . . . .	31
I.3.4 Equations linéaires . . . . .	32
I.3.5 Probabilité Max-Plus et processus stochastiques Max-Plus . . . . .	34
I.3.5.1 Probabilité Max-Plus . . . . .	35
I.3.5.2 Martingales Max-Plus . . . . .	36
I.3.5.3 Equations différentielles stochastiques Max-Plus . . . . .	39
I.3.5.4 EDP rétrogrades et progressives . . . . .	41
I.3.5.5 Programmation dynamique Max-Plus additive . . . . .	44
I.3.5.6 Limites de grandes déviations . . . . .	46
<i>Références bibliographiques du chapitre I</i> . . . . .	47
<b>II Décomposition Max-Plus de surmartingales</b>	<b>49</b>
II.1 Introduction . . . . .	50
II.2 Cadre . . . . .	50
II.3 Décompositions de surmartingales . . . . .	54
II.4 Résultat Principal . . . . .	56
II.5 Résultat d'unicité . . . . .	57
<i>Références bibliographiques du chapitre II</i> . . . . .	63
<b>III Généralisation du point de vue de Darling-Liggett-Taylor</b>	<b>65</b>
III.1 Introduction . . . . .	66

III.2	Décomposition Max-Plus et Calls Américains . . . . .	67
III.3	Processus de Lévy . . . . .	69
III.3.1	Processus de Lévy multiplicatifs positifs . . . . .	72
III.3.1.1	Horizon infini . . . . .	72
III.3.1.2	Horizon défini par une v.a. exponentielle indépendante . . . . .	78
III.3.2	Processus de Lévy additifs . . . . .	81
III.4	Approximation numérique de la frontière d'exercice . . . . .	82
III.4.1	Simulation de $b_h$ . . . . .	87
III.4.2	Simulation de $b_{jh}$ , $j = 2, \dots, N$ . . . . .	87
III.4.3	Exemples numériques . . . . .	91
	<i>Références bibliographiques du chapitre III</i> . . . . .	95
<b>IV</b>	<b>Existence de la décomposition Max-Plus des surmartingales</b>	<b>97</b>
IV.1	Introduction . . . . .	98
IV.2	Aperçu des principaux résultats sur les problèmes de temps d'arrêt . . . . .	98
IV.3	Une famille convexe de surmartingales . . . . .	101
IV.3.1	Temps d'arrêt optimaux . . . . .	103
IV.4	Analyse convexe et caractérisation de la décomposition Max-Plus . . . . .	107
IV.5	Décomposition Max-Plus et options Américaines . . . . .	115
IV.6	Cas Markovien . . . . .	119
	<i>Références bibliographiques du chapitre IV</i> . . . . .	125
<b>V</b>	<b>Optimalité de la décomposition Max-Plus pour l'ordre convexe</b>	<b>127</b>
V.1	Introduction . . . . .	128
V.2	Propriétés principales de l'ordre convexe . . . . .	129
V.3	Problème d'optimisation de martingale . . . . .	132
V.4	Martingales Max-Plus et processus de Lévy . . . . .	135
V.4.1	Résultat analytique . . . . .	135
V.4.2	Horizon infini . . . . .	137
V.4.2.1	Processus de Lévy multiplicatif . . . . .	137
V.4.2.2	Mouvement Brownien de drift négatif . . . . .	142
V.4.3	Horizon exponentiel indépendant . . . . .	147
	<i>Références bibliographiques du chapitre V</i> . . . . .	151
<b>VI</b>	<b>Optimisation de portefeuille sous contraintes pour l'ordre convexe</b>	<b>153</b>
VI.1	Introduction . . . . .	154
VI.2	Assurance de portefeuille et fonds communs de placement . . . . .	155
VI.3	Problème d'optimisation de martingale . . . . .	161
VI.3.1	Fonction d'utilité et aversion pour le risque . . . . .	161
VI.3.2	Cadre de l'assurance de portefeuille . . . . .	163

VI.3.3	Formulation et résolution du “nouveau” problème de martingale	164
VI.3.3.1	Formules fermées pour un Brownien géométrique	165
VI.3.3.2	Résultat principal	166
VI.4	Application à l’assurance de portefeuille	169
VI.4.1	Problème “non-contraint” et changement de numéraire	170
VI.4.2	Solution optimale du problème “contraint”	175
VI.4.2.1	Fonctions d’utilité CRRA	175
VI.5	Conclusion	183
	<i>Références bibliographiques du chapitre VI</i>	185
<b>VII</b>	<b>Martingales d’Azéma-Yor et Décomposition Max-Plus</b>	<b>187</b>
VII.1	Introduction	189
VII.2	Définition de la martingale d’Azéma-Yor	190
VII.3	Martingales Max-Plus et martingales d’Azéma-Yor	191
VII.3.1	Exemples précédents revisités	193
VII.4	Options Américaines et martingales d’Azéma-Yor	196
VII.4.1	Symétrie Call-Put	196
VII.4.2	Décomposition Max-Plus et enveloppe de Snell	197
VII.4.3	Martingales d’Azéma-Yor et Calls Américains perpétuels	199
VII.4.4	Frontière universelle et règle de pricing	203
VII.4.4.1	Call Américain perpétuel	203
VII.4.4.2	Put Américain perpétuel	204
VII.5	Stratégies dynamiques sous des contraintes de “drawdown”	208
VII.6	Assurance de Portefeuille dans le cadre d’Azéma-Yor	213
VII.7	Conclusion	216
	<i>Références bibliographiques du chapitre VII</i>	217
<b>VIII</b>	<b>Numerical methods for the pricing of Swing options</b>	<b>219</b>
VIII.1	Statement of the problem and notations	222
VIII.2	Numerical methods based on dynamic programming equation	225
VIII.2.1	Writing the dynamic programming equation	226
VIII.2.2	Implementation of the dynamic programming equation	227
VIII.2.3	Forest of trees	229
VIII.2.3.1	Description of the algorithm	229
VIII.2.3.2	Numerical results	230
VIII.2.4	Monte Carlo method using Longstaff-Schwartz methodology	231
VIII.2.4.1	Description of the algorithm	231
VIII.2.4.2	Numerical results	233
VIII.3	Parametric approximation	235
VIII.3.1	Theoretical results : bang-bang consumption	235



VIII.3.2	Using a neural network . . . . .	237
VIII.3.2.1	Description and motivations . . . . .	237
VIII.3.2.2	The gradient algorithm . . . . .	238
VIII.3.2.3	Numerical results . . . . .	239
VIII.3.3	Direct parameterization of the purchase threshold . . . . .	242
VIII.3.3.1	For the Swing contract . . . . .	242
VIII.3.3.2	Optimization of parameters . . . . .	244
VIII.3.3.3	Applications to storage contract . . . . .	244
VIII.3.3.4	Results . . . . .	245
VIII.4	Conclusion . . . . .	245
	<i>Références bibliographiques du chapitre VIII</i> . . . . .	247
<b>A</b>	<b>Frontière optimale d'Allegretto, Barone-Adesi et Elliott</b>	<b>249</b>
<b>B</b>	<b>Proof of Theorem VIII.5</b>	<b>251</b>
	<i>Références bibliographiques de la thèse</i>	<b>253</b>

# Introduction

La motivation initiale de la thèse vient du thème de **l'assurance de portefeuille**, que j'avais abordé lors de mon stage de DEA effectué au sein de la Société Générale Asset Management. Il s'agit en effet d'une technique de gestion dynamique permettant de limiter en cas de baisse du marché, la perte de valeur d'un portefeuille tout en lui laissant la possibilité de profiter, dans une plus ou moins grande mesure, d'une hausse du marché. L'abandon d'une partie des gains réalisés par le marché en cas de hausse représente le coût implicite d'une telle assurance.

Ainsi, le point de départ a été de considérer un problème très pratique d'optimisation de portefeuille, où les stratégies admissibles doivent partir de la même richesse initiale et dominer un certain processus de plancher à toute date intermédiaire jusqu'à la maturité du fonds (garantie Américaine).

Pour résoudre ce problème, nous avons effectué quelques transformations qui nous ont amenés à reconsidérer le problème dans un cadre plus abstrait et plus général et à nous poser des questions très théoriques. Le cœur du problème s'est révélé être une sorte de décomposition de surmartingales dans une structure mathématique particulière, appelée **“algèbre Max-Plus”**.

Par ailleurs, nous avons découvert que les applications en finance de cette nouvelle décomposition ne se limitent pas uniquement à l'assurance de portefeuille, mais s'étendent notamment aux options Américaines.

Ainsi dans notre exposé, nous procéderons dans l'ordre inverse du déroulement des événements. Nous commencerons d'abord par étudier le problème de décomposition des surmartingales dans l'algèbre Max-Plus et nous nous tournerons ensuite vers les applications en finance.

L'algèbre Max-Plus désigne l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  muni des deux opérations binaires : l'addition  $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$  et la multiplication  $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$ .

Elle diffère des structures de corps classiques par le fait que l'addition n'est pas une loi de groupe, mais est idempotente :  $a \oplus a = a$ . Cette structure algébrique particulière introduit un point de vue d'algèbre linéaire aux problèmes de programmation dynamique et de grandes déviations, et s'avère très efficace pour effectuer des calculs algébriques (cf. [BCOQ92]).

D'autres décompositions de surmartingales ont déjà été suggérées dans la structure classique des nombres réels, la plus connue dans la théorie moderne des probabilités étant celle de Doob-Meyer. Elle représente toute surmartingale  $Z$  de la classe  $(\mathcal{D})$ , comme la différence d'une martingale locale  $M$  et d'un processus croissant prévisible  $A$ . Cette décomposition additive peut se réécrire sous la forme suivante :

$$Z_t = \mathbf{E}[A_\zeta - A_t | \mathcal{F}_t] + \mathbf{E}[Z_\zeta | \mathcal{F}_t]. \quad (1)$$

Nous établissons également dans la thèse une décomposition “**additive**” des surmartingales de la classe  $(\mathcal{D})$ , mais l'additivité doit être perçue au sens de Max-Plus. Plus précisément, étant donnée une surmartingale  $Z$  quasi-continue à gauche de la classe  $(\mathcal{D})$ , définie sur  $[0, \zeta]$  où  $\zeta$  est un temps d'arrêt, nous avons pour but de construire un processus optionnel  $L$  semi-continu supérieurement à droite, tel que  $Z$  puisse s'écrire en termes du maximum glissant (“**running supremum**”) de  $L$  :

$$Z_t = \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq u \leq \zeta} L_u \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t \right] = \mathbf{E} \left[ \oint_{[t, \zeta]} L_u \oplus Z_\zeta | \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq \zeta. \quad (2)$$

Ici,  $\oint$  désigne une intégrale non-linéaire appelée **intégrale Max-Plus**. Le running supremum de  $L$  sur  $[0, \tau]$  pour tout temps d'arrêt  $\tau$  entre 0 et  $\zeta$  peut s'interpréter comme la valeur d'un processus croissant  $\Lambda_\tau$ , et par conséquent la représentation précédente (2) est analogue à la décomposition (1) de Doob-Meyer.

La martingale  $M^\oplus$  définie comme l'espérance conditionnelle de  $\Lambda_\zeta \oplus Z_\zeta$  :

$$M_t^\oplus = \mathbf{E}[\Lambda_\zeta \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq \zeta} L_u \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t \right],$$

s'appelle la martingale de la décomposition Max-Plus de  $Z$  et domine  $\Lambda_\tau \oplus Z_\tau$  pour tout temps d'arrêt  $\tau$ . Contrairement à la décomposition additive de Doob-Meyer, l'égalité a seulement lieu aux points croissants de  $\Lambda$ , c'est-à-dire aux temps d'arrêt  $\tau$  vérifiant  $L_\tau = \Lambda_\tau = \oint_0^\tau L_u$ .

Avant d'établir l'existence d'un tel processus  $L$ , nous traitons d'abord la question de l'unicité. Nous montrons au chapitre II que la martingale  $M^\oplus$  est **unique**. Par contre, ce résultat n'est plus vrai pour le processus croissant. Tout ce qu'on peut

dire est que l'ensemble des processus croissants admissibles  $\Lambda$  admet un élément maximal  $\Lambda^{\max}$ .

Quant au résultat d'existence d'une telle décomposition, il est essentiellement basé sur des méthodes simples de dualité convexe, qui se sont avérées particulièrement utiles pour le problème du Bandit [Whi80, KK95], et pour des représentations non-linéaires de processus généraux [BK04, Kl05].

Une application intéressante de la décomposition Max-Plus des surmartingales est le problème d'un **Call Américain**, sans facteur d'actualisation, écrit sur un sous-jacent quelconque  $Y$  de la classe  $(\mathcal{D})$ . En effet, grâce à la représentation de l'enveloppe de Snell de  $Y$  sous forme d'espérance conditionnelle d'un certain running supremum  $L_{t,\zeta}^* = \sup_{t \leq u \leq \zeta} L_u$ , nous caractérisons explicitement un temps d'arrêt optimal en termes du processus indice  $L$ . Ainsi, la simple connaissance de  $L$  permet de résoudre complètement le problème d'arrêt optimal **sans avoir à calculer le prix de l'option Américaine**.

De plus, toujours grâce à la décomposition Max-Plus, nous identifions les Calls Américains à des options **Lookback**. Ceci généralise en particulier les résultats de Darling, Liggett et Taylor [DLT72] sur les options Américaines, uniquement valables dans le cas discret, lorsque le sous-jacent est une somme partielle de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de drift négatif. Notre extension aux cas d'un sous-jacent surmartingale  $Z$  évoluant suivant un processus de Lévy géométrique (avec seulement des sauts négatifs) conduit à un processus indice  $L$ , proportionnel au sous-jacent  $Z$ .

Comme il a déjà été signalé, l'intérêt initial de la décomposition Max-Plus des surmartingales provenait de l'assurance de portefeuille. En effet, s'appuyant sur la décomposition Max-Plus des surmartingales, la thèse suggère une nouvelle approche au problème classique de maximisation d'utilité sous des contraintes de type Américain. Il s'agit en fait de trouver un portefeuille auto-finançant  $V$  dominant un plancher dynamique à toute date intermédiaire jusqu'à l'échéance du fonds (garantie Américaine).

La résolution se fait en deux étapes. En choisissant un nouveau numéraire, nous transformons d'abord le problème réel d'assurance de portefeuille en un problème général **d'optimisation de martingale**, sous contrainte de dominer un obstacle  $Y$ , ou de façon équivalente son enveloppe de Snell. Par ailleurs, toutes les martingales admissibles doivent partir de la même valeur initiale. L'optimisation dans ce nouveau problème contraint est relative à **l'ordre stochastique convexe** sur la valeur terminale, de manière à éviter toute hypothèse arbitraire sur la forme de la fonction d'utilité d'un décideur.

Ainsi, la stratégie optimale ne dépend pas de la forme de la fonction d'utilité, contrai-

rement aux problèmes d’optimisation usuels, où le choix de la fonction d’utilité reste majeur. Ici, le rôle de la fonction d’utilité se trouve minimisé puisqu’elle n’intervient que dans le choix du numéraire.

Ensuite, la deuxième étape consiste à montrer que la martingale de la décomposition Max-Plus de l’enveloppe de Snell du plancher  $Y$  résout le problème posé. Un exemple explicite est complètement traité dans le cadre d’un mouvement Brownien géométrique.

Cette application a fait l’objet d’un article publié dans “*Mathematical Finance*”, intitulé “Constrained optimization with respect to stochastic dominance. Application to portfolio insurance” [KM06a].

La dernière partie de notre étude se tourne vers les liens entre la décomposition Max-Plus et les **martingales d’Azéma-Yor**. Celles-ci ont été introduites par les auteurs [AY79] pour résoudre le problème de Skorohod, et en dépit de leur simplicité, elles suffisent dans de nombreux cas à obtenir des résultats d’accès difficile.

Dans notre contexte, ces martingales se révèlent être un outil simple et efficace pour donner, sous forme explicite, la décomposition Max-Plus d’une surmartingale  $Z$ , lorsque celle-ci est une fonction concave  $u$  d’une martingale locale  $N$ . Dans ce cas, la martingale d’Azéma-Yor associée à  $u$  et  $N$  coïncide avec la martingale de la décomposition Max-Plus de la surmartingale  $Z$ .

Ceci permet de décrire précisément la frontière d’arrêt optimal d’un Call Américain écrit sur un tel sous-jacent  $Z$ , et d’obtenir une formule fermée pour le prix. Des exemples illustratifs basés sur des diffusions unidimensionnelles sont présentés dans l’avant-dernier chapitre de la thèse. Nous retrouvons en particulier, d’une manière très élémentaire, la plupart des résultats classiques sur les frontières Américaines des processus à accroissements indépendants.

La martingale d’Azéma-Yor permet également de résoudre d’autres problèmes d’optimisation en finance, comme par exemple celui de trouver des martingales optimales vérifiant des contraintes de type “**drawdown**” ou encore, celui de trouver la “meilleure” martingale dominant un **plancher** donné fonction d’une martingale de référence, par rapport à l’ordre convexe sur la valeur terminale.

Un article traitant de la décomposition Max-Plus des surmartingales et de ses applications en finance, intitulé “Max-Plus decomposition of supermartingales and convex order. Application to American options and portfolio insurance”, a été soumis aux “*Annals of Probability*” [KM06b].

Un troisième article sur les applications des martingales d’Azéma-Yor en finance est en cours de rédaction.

Par ailleurs, nous avons rédigé, en collaboration avec d’autres membres du Centre

de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique (Charles Dossal, Emmanuel Gobet, Rémi Munos) et la Direction Recherche Gaz de France - Projet Valoris (Christophe Barrera-Esteve, Florent Bergeret, Damien Reboul-Salze), un article intitulé “Numerical methods for the pricing of Swing options : a stochastic control approach”, qui a été accepté pour publication dans “*Methodology and Computing in Applied Probability*” [BEBD<sup>+</sup>06]. L'article, présenté dans la dernière partie de la thèse, a pour objectif de résoudre numériquement un problème particulier de contrôle stochastique. Il s'agit de valoriser les deux types de **contrats Swing** les plus rencontrés dans les métiers du gaz à savoir les contrats d'**approvisionnement** et les **stockages**.

Le premier type de contrat permet à son détenteur d'acheter du gaz tous les jours, à un prix fixé à l'avance et selon le volume de son choix. Quant au contrat de stockage, il offre deux possibilités : soit acheter du gaz sur le marché et l'injecter dans un réservoir initialement vide, soit soutirer du gaz et le vendre sur le marché. Dans les deux cas, le volume du gaz est sujet à des contraintes journalières et périodiques (mensuelles ou annuelles). Le prix de tels contrats dépend à la fois du prix du sous-jacent et de la consommation cumulée, et résout donc une équation de programmation dynamique avec une variable d'état bi-dimensionnelle.

Afin de calculer ce prix, nous proposons d'abord dans l'article une version adaptée de la méthode de Longstaff-Schwarz (originellement utilisée pour les options Bermudéennes). Ensuite, nous explorons deux approches de recherche de consommation optimale sous forme paramétrique. La première méthode est basée sur les réseaux de neurones : le critère à optimiser est régulier et l'optimisation est rendue aisée à l'aide d'un algorithme de gradient stochastique. La seconde définit le comportement optimal en fonction de seuils de consommation paramétrés par des éléments finis. Des tests numériques ont permis d'illustrer l'efficacité de ces approches. Elles sont itératives, contrairement aux méthodes basées sur la programmation dynamique, et permettent donc de donner une estimation du prix à chaque instant au cours des itérations. De plus, elles ne se limitent pas aux modèles à un facteur.

## Plan de la thèse

La thèse est organisée de la manière suivante :

- Le premier chapitre est consacré à la description des propriétés essentielles de l'algèbre Max-Plus et de ses domaines d'application.
- Au chapitre II, nous étendons le théorème de Doob-Meyer de décomposition des surmartingales à l'algèbre Max-Plus, et nous étudions la question d'unicité de la

martingale et du processus croissant associés.

- Nous généralisons au chapitre III le point de vue de Darling et de ses co-auteurs concernant les problèmes d'arrêt optimal. Quelques exemples illustratifs basés sur les processus de Lévy additifs et multiplicatifs mettent en évidence le lien entre la décomposition Max-Plus et les options Américaines, et montrent que nous pouvons complètement résoudre le problème de Call Américain sans facteur d'actualisation, sans avoir à calculer le prix. Nous proposons également une méthode permettant d'approcher numériquement la frontière d'un Put Américain écrit sur un Brownien géométrique. La question est abordée dans la thèse, plus comme une amorce de réflexion sur ce thème, que sous la forme d'une solution aboutie en toute généralité.
- Le chapitre IV a pour objectif d'établir l'existence de la décomposition des surmartingales dans l'algèbre Max-Plus. Grâce à des arguments simples de dualité convexe, nous montrons que la décomposition Max-Plus d'une surmartingale donnée, continue à droite est étroitement liée à la résolution d'une famille convexe de problèmes d'arrêt optimal et nous exhibons ainsi une décomposition explicite dans l'algèbre Max-Plus. Ensuite, nous appliquons notre théorème de décomposition Max-Plus pour résoudre le problème de Call Américain écrit sur un sous-jacent général. Dans une dernière partie, nous reconsidérons les différentes étapes de la décomposition Max-Plus dans un cadre Markovien, afin de mettre en évidence l'aspect Markovien des processus impliqués.
- Au chapitre V, nous caractérisons la martingale de la décomposition Max-Plus en tant que solution optimale d'un problème d'optimisation particulier sous contraintes, formulé en termes d'ordre stochastique convexe. Nous donnons également quelques formules fermées de martingales associées à des décompositions Max-Plus de processus de Lévy multiplicatifs et additifs.
- Le chapitre VI est consacré à l'application de la décomposition Max-Plus des surmartingales à l'assurance de portefeuille (avec garantie Américaine).
- Au chapitre VII, nous exploitons la martingale d'Azéma-Yor pour déduire la décomposition Max-Plus de toute fonction concave croissante d'une martingale locale continue. Cet exemple de décomposition Max-Plus est très utile et couvre entre autres tous les cas considérés de processus de Lévy. Nous abordons également dans ce chapitre certaines applications de la martingale d'Azéma-Yor en finance (options Américaines, assurance de portefeuille, contraintes de drawdown).
- Le dernier chapitre concerne l'article sur les méthodes numériques de pricing des

options Swing.

Nous y développons de nouvelles approches de pricing des contrats Swing les plus rencontrés dans les métiers du gaz, et nous les comparons à des méthodes déjà existantes.

Ainsi, la thèse suggère une nouvelle approche dans la théorie des martingales, consistant à regarder les martingales sous forme d'espérance conditionnelle d'un certain running supremum. Ces martingales ne sont rien d'autre qu'une extension des martingales de Doob-Meyer dans l'algèbre Max-Plus. L'analyse de ces martingales et de leurs propriétés d'optimalité suggère des applications potentielles, notamment via la martingale d'Azéma-Yor, à la théorie des martingales et leurs processus du maximum.

De plus, notre point de vue différent donne un cadre unifié à la solution de différents problèmes d'optimisation du type arrêt optimal ou bandit, en reliant la notion de frontière à celle d'indice, par le biais de la décomposition Max-Plus.

Ainsi, la décomposition Max-Plus des surmartingales et l'unicité de la martingale associée se révèlent très utiles dans de nombreux problèmes d'optimisation et ont un large champ d'applications, comme les options Américaines et l'assurance de portefeuille en finance. Nous pensons également que notre approche peut être reliée à d'autres travaux développés dans l'algèbre Max-Plus (grandes déviations, ...).





# Références bibliographiques

- [AY79] J. Azéma and M. Yor, “Une solution simple au problème de Skorohod”, Séminaire de probabilités de Strasbourg **13** (1979), pp. 90–115.
- [BCOQ92] F. Baccelli, G. Cohen, G. Olsder and J. Quadrat, *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*, Wiley and Sons, 1992.
- [EBED<sup>+</sup>06] C. Barrera-Esteve, F. Bergeret, C. Dossal, E. Gobet, A. Meziou, R. Munos, and D. Reboul-Salze, “Numerical methods for the pricing of Swing options : a stochastic control approach”, Methodology and Computing in Applied Probability **8** (2006), no. 4, pp. 517–540.
- [BK04] P. Bank and N. El Karoui, “A stochastic representation theorem with applications to optimization and obstacle problems”, The Annals of Probability **32** (2004), no. 1B, pp. 1030–1067.
- [DLT72] D. A. Darling, T. Liggett and H. M. Taylor, “Optimal stopping for partial sums”, Annals of Mathematical Statistics **43** (1972), no. 4, pp. 1363–1368.
- [KK95] N. El Karoui and I. Karatzas, “The optimal stopping problem for a general American put-option”, Mathematical Finance (1995), pp. 63–74.
- [Kl05] N. El Karoui and H. Föllmer, “A non-linear Riesz representation in probabilistic potential theory”, Ann. Ins. Henri Poincaré, Probab. Stat. **41** (2005), no. 3, pp. 269–283.
- [KM06a] N. El Karoui and A. Meziou, “Constrained optimization with respect to stochastic dominance : application to portfolio insurance”, Mathematical Finance **16** (2006), no. 1, pp. 103–117.
- [KM06b] ———, “Max-plus decomposition of supermartingales and convex order. application to American options and portfolio insurance”, submitted to Annals of Probability (2006).

- [Whi80] P. Whittle, “Multi-armed bandits and the Gittins index”, Journal of the Royal Statistical Society Series B, Methodological **42(2)** (1980), pp. 143–149.

# Algèbre Max-Plus

---

## Résumé

L'algèbre Max-Plus est simplement obtenue en échangeant les opérations  $(+, \times)$  en  $(\max, +)$ . Elle apparaît dans plusieurs problèmes de mathématiques et de physique, en particulier dans l'étude de phénomènes asymptotiques. Le projet MAXPLUS de l'INRIA [ACG<sup>+</sup>94, BCOQ92, AQV94] a pour but de développer la théorie, l'algorithme et les applications des algèbres de type Max-Plus, en relation avec les domaines où celles-ci interviennent :

- la théorie de la décision (commande optimale déterministe et stochastique, théorie des jeux)
- la modélisation et l'évaluation de performance de systèmes à événements discrets (réseaux de transport ou de télécom, systèmes de production)
- la recherche opérationnelle (résolution de problèmes d'optimisation discrète)
- la théorie des perturbations (perturbations de valeurs propres), etc.

Nous décrivons dans ce chapitre les propriétés essentielles de l'algèbre Max-Plus et ses principaux domaines d'application, en nous inspirant essentiellement des travaux du groupe MAXPLUS (S. Gaubert, M. Akian, J.P. Quadrat, G. Cohen,...) et des polycopiés de cours de G.Cohen [Coh95] et de S. Gaubert [Gau99].

Par ailleurs, à partir de l'algèbre Max-Plus, on peut construire un formalisme analogue au calcul des probabilités. Ceci introduit en particulier un point de vue d'algèbre linéaire aux problèmes de programmation dynamique et aux grandes déviations. Nous présentons dans ce chapitre les principaux résultats de la théorie de probabilité Max-Plus, en nous basant essentiellement sur l'article de Fleming [Fle04].

## I.1 Introduction générale à l’algèbre Max-Plus

Le semi-corps **Max-Plus** est l’ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , muni de l’addition  $(a, b) \mapsto a \oplus b = \max(a, b)$  et de la multiplication  $(a, b) \mapsto a \otimes b = a + b$ . Cette structure algébrique diffère des structures de corps classiques par le fait que l’addition n’est pas une loi de groupe, mais est idempotente :  $a \oplus a = a$ .

On rencontre parfois des variantes de cette structure : par exemple, le semi-corps **Min-Plus** est l’ensemble  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  muni des lois  $a \oplus b = \min(a, b)$  et  $a \otimes b = a + b$ , et le semi-anneau **tropical** est l’ensemble  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  muni des mêmes lois.

L’objet de “l’algèbre Max-Plus” est de généraliser les constructions de l’algèbre et de l’analyse classique, qui reposent pour une bonne part sur des anneaux ou des corps tels que  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$ , au cas de semi-anneaux de type Max-Plus.

L’intérêt pour les structures de type Max-Plus est contemporain de la naissance de la théorie des treillis. Depuis, les structures de type Max-Plus ont été développées indépendamment par plusieurs écoles, en relation avec plusieurs domaines. Les motivations venant de la Recherche Opérationnelle (programmation dynamique, problèmes de plus court chemin, problèmes d’ordonnancement, optimisation discrète) ont été centrales dans le développement du domaine. Les semi-anneaux de type Max-Plus sont bien sûr reliés aux algèbres de Boole. L’algèbre Max-Plus apparaît de manière naturelle en contrôle optimal et dans la théorie des équations aux dérivées partielles d’Hamilton-Jacobi. Elle apparaît aussi en analyse asymptotique (asymptotiques de type WKB, grandes déviations, asymptotiques à température nulle en physique statistique), puisque l’algèbre Max-Plus apparaît comme limite de l’algèbre usuelle. La théorie des opérateurs linéaires Max-Plus peut être vue comme faisant partie de la théorie des opérateurs de Perron-Frobenius non-linéaires, ou de la théorie des applications contractantes ou monotones sur les cônes, laquelle a de nombreuses motivations, telle l’économie mathématique et la théorie des jeux.

Dans la communauté des systèmes à événements discrets, l’algèbre Max-Plus a été beaucoup étudiée parce qu’elle permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, lesquels déterminent le comportement temporel de systèmes de production ou de réseaux. Parmi les développements récents du domaine, on peut citer le calcul des réseaux, qui permet de calculer des bornes pire des cas de certaines mesures de qualité de service. En informatique théorique, l’algèbre Max-Plus (ou plutôt le semi-anneau tropical) a joué un rôle décisif dans la résolution de problèmes de décision en théorie des automates. Notons finalement que l’algèbre Max-Plus est apparue récemment en géométrie algébrique et en théorie des représentations.

- **Algèbre Max-Plus, programmation dynamique et commande optimale.** L'exemple le plus simple d'un problème conduisant à une équation Min-Plus linéaire est le problème classique du plus court chemin. Considérons en effet un graphe dont les noeuds sont numérotés de 1 à  $n$  et dont le coût de l'arc allant du noeud  $i$  au noeud  $j$  est noté  $M_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Le coût minimal d'un chemin de longueur  $k$  allant de  $i$  à  $j$  peut s'écrire en termes d'équation de programmation dynamique :

$$v_{ij}(k) = \min_{1 \leq s \leq n} (M_{is} + v_{sj}(k-1)).$$

On reconnaît ainsi une équation linéaire Min-Plus :

$$v(k) = M.v(k-1),$$

où on note par la concaténation le produit matriciel induit par la mesure de l'algèbre Min-Plus.

Le *problème classique de Lagrange* du calcul des variations peut être vu comme une version continue du problème précédent. Ainsi, l'équation d'Hamilton-Jacobi que vérifie  $v$  est une équation de la programmation dynamique à temps continu et peut s'interpréter comme une équation Min-Plus linéaire. En particulier, ses solutions vérifient un principe de superposition Min-Plus : si  $v$  et  $w$  sont deux solutions, et si  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\inf(\lambda + v, \mu + w)$  est encore solution de l'équation. Ce point de vue, inauguré par Maslov, a conduit au développement de l'Ecole d'Analyse Idempotente.

- **Applications monotones et théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, ou l'approche opératorielle du contrôle optimal et des jeux.**

Depuis le tout début des travaux en décision Markovienne, on sait que les opérateurs de la programmation dynamique de problèmes de contrôle optimal ou de jeux, avec critère additif, ont des propriétés de monotonie et de contraction pour la norme sup. Or les applications monotones qui sont contractantes pour la norme sup peuvent être vues comme des généralisations non-linéaires des matrices sous-stochastiques. Une sous-classe utile, généralisant les matrices stochastiques, est formée des applications qui sont monotones et commutent avec l'addition d'une constante. Les problèmes de programmation dynamique peuvent être traduits en termes d'opérateurs  $f$  :

- l'équation de programmation dynamique d'un problème de commande optimale à horizon fini s'écrit en effet  $x(k) = f(x(k-1))$ , où  $x(k)$  est la fonction valeur en horizon  $k$  et  $x(0)$  est donné
- la fonction valeur  $y$  d'un problème à horizon infini (y compris le cas d'un problème d'arrêt optimal) vérifie  $y = f(y)$

- la fonction valeur  $z$  d'un problème avec facteur d'actualisation  $0 < \alpha < 1$  vérifie  $z = f(\alpha z)$
- etc.

Ce point de vue abstrait a été très fructueux. Il permet d'inclure la programmation dynamique dans la perspective plus large de la théorie de Perron-Frobenius non-linéaire, qui traite des applications non linéaires sur des cônes vérifiant des conditions de monotonie, de contraction ou d'homogénéité.

L'étude des points fixes de  $f$  donne la valeur de problèmes de décision en horizon infini. L'étude du comportement asymptotique de  $f^k$ , et en particulier l'étude de l'existence de la limite de  $f^k(x)/k$  lorsque  $k$  tend vers l'infini, permet d'obtenir le coût ergodique d'un problème de contrôle optimal ou de jeux. L'asymptotique plus précise de  $f^k$ , à une normalisation près, permet d'obtenir le comportement précis de l'itération sur les valeurs.

Signalons enfin que les applications de la théorie des applications monotones contractantes ne se limitent pas au contrôle optimal et aux jeux mais servent aussi à la modélisation des systèmes à événements discrets et en analyse statique de programmes.

#### – **Processus de Bellman.**

Un autre point de vue sur la commande optimale est la théorie des *processus de Bellman* qui fournit un analogue Max-Plus de la théorie des probabilités. Cette théorie a été développée à partir de la notion de *mesure idempotente* introduite par Maslov. Elle établit une correspondance entre probabilités et optimisation, dans laquelle les variables aléatoires deviennent des variables de coût (qui permettent de paramétrer les problèmes d'optimisation), la notion d'espérance conditionnelle est remplacée par celle de coût conditionnel (pris sur un ensemble de solutions faisables), la propriété de Markov correspond au principe de la programmation dynamique de Bellman, et la convergence faible à une convergence de type épigraphe. Les théorèmes limites pour les processus de Bellman (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, lois stables) fournissent des résultats asymptotiques en commande optimale. Ces résultats généraux permettent en particulier de comprendre qualitativement les difficultés d'approximation des solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi.

#### – **Systèmes à événements discrets.**

Un des problèmes que se posent les chercheurs est d'optimiser des systèmes à événements discrets, dans lesquels les décisions résultent éventuellement de l'intervention de plusieurs agents, avec chacun ses propres critères. On peut alors se poser la question suivante : peut-on atteindre un équilibre global, et en vertu de

quelles décisions ?

Pour simplifier la résolution de problèmes complexes, il suffit parfois de changer de cadre axiomatique. Cela vaut pour les systèmes à événements discrets, que l'on peut aborder dans le cadre de l'algèbre Max-Plus. Cette dernière ressemble beaucoup à l'algèbre classique, sauf qu'elle est construite à partir de deux autres opérations élémentaires, mieux adaptées à ces systèmes et à la programmation dynamique : le calcul du maximum et de l'addition. Elle permet de représenter les phénomènes de synchronisation comme des phénomènes linéaires, donc d'avoir des intuitions qualitatives simples et des algorithmes efficaces.

Ainsi, l'approche Max-Plus des systèmes à événements discrets fournit un analogue Max-Plus de la théorie des systèmes linéaires classiques, incluant les notions de représentation d'état, de stabilité, de séries de transfert, etc.

Les systèmes dynamiques Max-Plus linéaires aléatoires sont particulièrement utiles dans la modélisation des réseaux. Les modèles d'automates à multiplicités Max-Plus, incluant certaines versions temporisées des modèles de traces ou de tas de pièces, permettent de représenter des phénomènes de concurrence ou de partage de ressources. Les automates à multiplicités Max-Plus ont été étudiés en informatique théorique. Ils fournissent des modèles particulièrement adaptés à l'analyse de problèmes d'ordonnancement.

– **Algèbre linéaire Max-Plus.**

Une bonne partie des résultats de l'algèbre Max-Plus concerne l'étude des systèmes d'équations linéaires. On peut distinguer trois familles d'équations, qui sont traitées par des techniques différentes :

1. Le problème spectral Max-Plus  $Ax = \lambda x$  et ses généralisations. Celui-ci apparaît en contrôle optimal déterministe et dans l'analyse des systèmes à événements discrets.
2. Le problème  $Ax = b$  intervient en commande à mi-temps. Il est intimement lié au problème d'affectation optimale, et plus généralement au problème de transport optimal. Il se traite via la théorie des correspondances de Galois abstraite, ou théorie de la résiduation. Les versions en dimension infinie du problème  $Ax = b$  sont reliées aux questions d'analyse convexe abstraite, et de dualité non convexe.
3. Le problème linéaire général  $Ax = Bx$  conduit à des développements combinatoires intéressants (polyèdres Max-Plus, déterminants Max-Plus, symétrisation).

– **Algèbre Max-Plus et asymptotiques.**

Le rôle de l'algèbre Min-Plus dans les problèmes asymptotiques est évident si l'on



écrit

$$\epsilon^a + \epsilon^b \approx \epsilon^{\min(a,b)}, \quad \epsilon^a \times \epsilon^b = \epsilon^{a+b}, \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

L'algèbre Min-Plus peut être vue comme la limite d'une déformation de l'algèbre classique, en introduisant le semi-anneau  $\mathbb{R}_\epsilon$ , qui est l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , muni de l'addition  $(a, b) \mapsto -\epsilon \log(e^{-\frac{a}{\epsilon}} + e^{-\frac{b}{\epsilon}})$  et de la multiplication  $(a, b) \mapsto a+b$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\mathbb{R}_\epsilon$  est isomorphe au semi-corps usuel des réels positifs,  $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ , mais pour  $\epsilon = 0^+$ ,  $\mathbb{R}_\epsilon$  n'est autre que le semi-anneau Min-Plus. Cette idée a été introduite par Maslov, motivé par l'étude des asymptotiques de type WKB d'équations de Schrödinger. Ce point de vue permet d'utiliser des résultats algébriques pour résoudre les problèmes d'asymptotiques, puisque les équations limites ont souvent un caractère Min-Plus linéaire.

La même déformation apparaît classiquement en théorie des grandes déviations à la loi des grands nombres : dans ce contexte, les objets limites sont des mesures idempotentes au sens de Maslov.

Ainsi, des relations ont été établies entre l'algèbre Max-Plus et les grandes déviations et ces idées ont été appliquées aux perturbations singulières de valeurs propres.

## I.2 Domaines d'application de l'algèbre Max-Plus

L'algèbre Max-Plus intervient dans de nombreux domaines : théorie de la décision (commande optimale déterministe et stochastique, théorie des jeux), analyse asymptotique et théorie des probabilités, modélisation et évaluation de performance de systèmes à événements discrets (réseaux de transport ou de télécom, systèmes de production), et plus généralement, recherche opérationnelle (résolution de problèmes d'optimisation discrète).

### – Commande optimale et théorie des jeux.

La commande optimale et la théorie des jeux ont de nombreuses applications bien répertoriées : économie, finance, gestion de stock, optimisation des réseaux, aide à la décision, etc. Ce sont des problèmes de décision dans le temps.

La théorie de la décision vise précisément à évaluer les chances et/ou les coûts de tel ou tel comportement futur d'un système, en présence d'incertitudes dues au hasard ou aux choix d'adversaires. Dans bien des cas, il est possible de s'affranchir du passé de ce système (comme dans un jeu d'échecs), et de n'évaluer son avenir qu'à partir du seul état présent. Il s'agit d'une simplification non négligeable qui, en termes mathématiques, consiste à se placer dans le cadre de la théorie des processus de décision Markoviens.

Un outil de base, en décision Markovienne, est la programmation dynamique : à chaque état du système étudié, est associée une valeur déterminée par une équation non linéaire, appelée équation de Bellman en théorie de la commande optimale. C'est en effet à ce mathématicien américain que l'on doit l'invention de la programmation dynamique, il y a une cinquantaine d'années.

Les systèmes Max-Plus linéaires se révèlent être très pertinents pour étudier les propriétés théoriques des équations de la programmation dynamique et développer des algorithmes pour les résoudre. De nouveaux algorithmes et méthodes de discrétisation sont ainsi développés à partir des résultats Max-Plus et de leurs généralisations. Ceci est particulièrement intéressant dans les problèmes de grande taille, qui nécessitent le développement d'algorithmes rapides (algorithmes de graphe) ou de nouvelles approximations.

– **Systèmes à événements discrets.**

Depuis l'invention de la programmation dynamique, les chercheurs se sont rendu compte que cette équation, ainsi que celle d'Isaacs pour les jeux, pouvait servir à modéliser des systèmes dits à événements discrets. Cette expression fait référence à l'occurrence d'événements comparables à l'arrivée de nouveaux clients dans une file d'attente.

Alors que la théorie classique des systèmes “continus” (y compris en temps discret) et de l'Automatique s'intéresse à des systèmes “naturels” obéissant essentiellement aux lois de la Physique, et descriptibles par des équations différentielles ou aux dérivées partielles (ou leur discrétisation approchée en temps), le vocable “*Systèmes (Dynamiques) à Événements Discrets*” (SED) recouvre des systèmes également dynamiques, mais dont la dynamique échappe totalement à ce genre de description<sup>1</sup>. En réalité, c'est plutôt le niveau descriptif auquel on se place qui est à la source de cette impossibilité : au lieu de s'intéresser au déroulement continu des phénomènes, on ne se soucie que des “début” et des “fin” de ces phénomènes (les “événements discrets”) et de leur enchaînement dynamique, logique ou temporel. Cette classe de systèmes donne lieu à des phénomènes de synchronisation et de concurrence, que l'on rencontre typiquement dans les réseaux de télécommunications (réseaux informatiques) [LT02], les systèmes de production (ateliers flexibles, lignes d'assemblage) [CDQV83, CDQV85], les systèmes de transport (routier, ferroviaire ou aérien) [LMQ01, Bra93, OSM98], ou encore en robotique et dans des applications médicales.

L'importance prise par ces systèmes dans notre société a conduit de nombreux chercheurs à proposer des modèles mathématiques permettant de décrire leur com-

---

<sup>1</sup>Ces systèmes sont généralement de conception humaine, en opposition aux systèmes “naturels” décrits par les lois de la physique.

portement afin d'en évaluer les performances et d'optimiser leur conception ou leur pilotage. La diversité de ces systèmes conduit naturellement à différents modèles, tels que les modèles à base d'automates à états finis, les chaînes de Markov et les Réseaux de Petri.

L'un des premiers ouvrages concernant les structures algébriques de type Max-Plus est sans doute celui de R. A. Cuninghame-Green [CG79], mais c'est en Août 1981 [CGQ99] que l'équipe Max-Plus de l'INRIA a assuré le lien avec les systèmes à événements discrets. L'idée forte fut de montrer qu'en changeant d'algèbre, le comportement de certains systèmes à événements discrets pouvait être décrit à l'aide d'équations linéaires. Il s'agit des systèmes caractérisés uniquement par des phénomènes de synchronisation ou de retard. Ils correspondent à une sous-classe de réseaux de Petri temporisés, les Graphes d'Événements Temporisés (GET).

Au cours des années 80, cette équipe a ainsi construit une théorie des systèmes Max-Plus linéaires à l'image de celle qui existait pour les systèmes linéaires dans l'algèbre classique. Ce travail donna lieu à un ouvrage collectif paru en 1992 [BCOQ92], de Baccelli, Cohen, Olsder et Quadrat, qui constitue une excellente référence à jour sur l'approche Max-Plus linéaire des Systèmes à Événements Discrets (déterministes et stochastiques), et plus généralement sur le semi-anneau Max-Plus. Nous renvoyons également le lecteur intéressé par la théorie des systèmes à événements discrets aux excellentes notes de cours de G.Cohen [Coh95] et de S. Gaubert [Gau99].

Les systèmes dynamiques Max-Plus linéaires et leurs généralisations (automates, systèmes monotones ou contractants), fournissent des modèles naturels dont les résultats analytiques peuvent être appliqués aux problèmes d'évaluation de performance. Ainsi, l'approche Max-Plus permet par exemple de calculer le temps de cycle pour des circuits digitaux, calculer le débit pour des ateliers, des réseaux ferroviaires ou routiers, évaluer ou maximiser la performance des réseaux de communication, fabriquer des contrôleurs (ou même des "feedbacks") vérifiant certaines contraintes de sécurité ou de service, représenter des phénomènes de synchronisation ou de concurrence (partage de ressources) :

- *Synchronisation.* L'accomplissement de certains événements entraîne l'apparition simultanée de plusieurs ressources ou la vérification simultanée de plusieurs conditions. La fin d'un événement entraîne l'apparition simultanée de plusieurs autres événements. Par exemple, pour qu'une conversation téléphonique ait lieu, il faut qu'une ligne soit disponible pour acheminer l'appel et que les deux interlocuteurs aient décroché. La fin de la conversation marque la libération de la

ligne, et le fait que les deux interlocuteurs peuvent désormais vaquer à d'autres occupations. De telles considérations peuvent être reprises par exemple à propos d'un atelier flexible.

- *Concurrence.* Certains événements excluent l'apparition simultanée d'autres événements. Par exemple, une machine ne peut travailler que sur une seule pièce à la fois. A la SNCF, les voies sont divisées en tronçons appelés "cantons". Le "cantonnement" consiste à exclure par un système de feux rouges la présence simultanée de deux trains sur le même canton. Sur un bus d'ordinateur non multiplexé, un seul message peut transiter à la fois.

L'algèbre Max-Plus est donc apparue comme la structure mathématique adéquate pour modéliser linéairement le phénomène de synchronisation, alors que ce phénomène semble fortement non-linéaire "de point de vue" des outils algébriques conventionnels. Bien que la motivation initiale ait paru dans l'étude des systèmes à événements discrets, il s'est révélé que la théorie des systèmes *linéaires* dans l'algèbre Max-Plus peut être appropriée à d'autres fins aussi.

- **Recherche opérationnelle.**

Le rôle de l'algèbre Max-Plus dans certains problèmes de recherche opérationnelle est maintenant bien connu (programmation dynamique, problèmes de chemins, d'affectation ou de transport, certains problèmes d'ordonnancement, problèmes avec des contraintes disjonctives).

Premièrement, il existe des liens profonds entre l'algèbre Max-Plus et les problèmes d'optimisation discrète. Ces liens conduisent parfois à de nouveaux algorithmes pour les problèmes de recherche opérationnelle classiques, comme le problème de circuit de poids moyen maximum. Certains problèmes combinatoires, comme ceux de programmation disjonctive, peuvent être décomposés par des méthodes de type Max-Plus. Ensuite, le rôle de l'algèbre Max-Plus dans les problèmes d'ordonnancement est bien connu depuis les années 60, puisque les dates de complétion peuvent souvent se calculer à partir d'équations linéaires Max-Plus. Plus récemment, des représentations de problèmes d'ordonnancement ont pu être obtenues à partir de semi-groupes de matrices Max-Plus : une première représentation a été obtenue dans le cas du "jobshop", une représentation plus simple a été obtenue dans le cas du "flowshop". Ce point de vue algébrique a été très utile dans le cas du "flowshop" : il permet de retrouver des résultats anciens de dominance et d'obtenir ainsi de nouvelles bornes. Finalement, en regardant l'algèbre Max-Plus comme une limite de l'algèbre classique, on peut utiliser des outils algébriques en optimisation combinatoire.

– **Théorie des perturbations.**

Il s'agit de l'étude de problèmes asymptotiques dont les équations limites ont une structure de type Max-Plus, tels que les perturbations singulières de valeurs propres ou les grandes déviations.

Signalons également que les problèmes de l'algèbre Max-Plus de base (analogues Max-Plus des modules et des polyèdres convexes, des déterminants, des notions de rang, des systèmes d'équations linéaires, des vecteurs propres, des équations polynomiales, mesures idempotentes, etc.) ont souvent joué un rôle décisif dans les applications précédentes de l'approche Max-Plus. L'intérêt pour certains problèmes de base Max-Plus est récemment apparu dans plusieurs autres domaines de mathématiques.

## I.3 Algèbre Max-Plus : définitions et propriétés

### I.3.1 Définitions

#### Définition I.1 (Semi-anneau)

Un semi-anneau  $\mathcal{K}$  est un ensemble muni de deux opérations internes  $\oplus$  et  $\otimes$  appelées respectivement "addition" et "multiplication", telles que :

- l'addition est associative :  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$  ;
- l'addition est commutative :  $a \oplus b = b \oplus a$  ;
- l'addition possède un élément neutre noté  $0_{\oplus}$  et appelé "zéro" :  $a \oplus 0_{\oplus} = a$  ;
- la multiplication est associative :  $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$  ;
- la multiplication possède un élément neutre noté  $e_{\otimes}$  et appelé "identité" :  $a \otimes e_{\otimes} = e_{\otimes} \otimes a = a$  ;
- la multiplication est distributive par rapport à l'addition :  $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$  et idem pour la multiplication à gauche.

Nous avons là toutes les propriétés de structure des anneaux, sauf qu'il n'est pas requis que  $\oplus$  soit une loi de groupe.

Comme en algèbre usuelle, le signe multiplicatif est parfois omis.

#### Théorème I.1

Le zéro d'un semi-anneau est absorbant pour la seconde opération, c'est-à-dire  $0_{\oplus} \otimes a = a \otimes 0_{\oplus} = 0_{\oplus}$ ,  $\forall a \in \mathcal{K}$ .

**Preuve - I.1 -**

$$0_{\oplus} = 0_{\oplus}e_{\otimes} = 0_{\oplus}(0_{\oplus} \oplus e_{\otimes}) = 0_{\oplus}^2 \oplus 0_{\oplus} = 0_{\oplus}^2.$$

Par suite,

$$\forall a \in \mathcal{K}_*, \quad 0_{\oplus} = 0_{\oplus}e_{\otimes} = 0_{\oplus}a^{-1}a = 0_{\oplus}(a^{-1} \oplus 0_{\oplus})a = 0_{\oplus}a^{-1}a \oplus 0_{\oplus}^2a = 0_{\oplus}a.$$

■

On dit que le semi-anneau est

– *idempotent* ou *dioïde*, si la première opération est idempotente, c'est-à-dire si

$$a \oplus a = a, \quad \forall a \in \mathcal{K}; \quad (\text{I.1})$$

– *commutatif* si le groupe est commutatif (la multiplication est commutative).

**Définition I.2 (Semi-corps)**

Si la multiplication définit un groupe sur  $\mathcal{K}_* := \mathcal{K} \setminus \{0_{\oplus}\}$ , alors on qualifie  $(\mathcal{K}, \oplus, \otimes)$  de semi-corps.

Un semi-corps est dit

- *idempotent* si l'addition vérifie (I.1) ;
- *commutatif* si le produit est commutatif.

**Définition I.3 (Structure algébrique  $\mathbb{R}_{\max}$ )**

Le symbole  $\mathbb{R}_{\max}$  désigne l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  muni des deux opérations binaires  $\max$  et  $+$  notées  $\oplus$  et  $\otimes$  respectivement. On a  $0_{\oplus} = -\infty$  et  $e_{\otimes} = 0$ .

On appelle cette structure l'**algèbre Max-Plus**.

**Théorème I.2**

La structure algébrique  $\mathbb{R}_{\max}$  est un dioïde (et même un semi-corps idempotent).

### I.3.2 L'algèbre Max-Plus comme structure ordonnée

La notion de *semi-treillis* est rappelée dans la définition suivante :

**Définition I.4 (Semi-treillis)**

Un ensemble ordonné  $(E, \leq)$  est un semi-treillis supérieur si toute partie à deux éléments de  $E$  admet une borne supérieure, i.e.

$$\forall a, b \in E^2, \quad \exists c \in E, \quad ((x \geq a \text{ et } x \geq b) \iff x \geq c).$$

On note  $c = a \vee b$ .

Un dioïde  $\mathcal{K}$  peut être muni de la relation d'ordre naturelle suivante :

$$a \leq b \quad \text{si} \quad a \oplus b = b. \quad (\text{I.2})$$

On écrit  $a < b$  lorsque  $a \leq b$  et  $a \neq b$ .

Comme l'addition est idempotente, on a  $a = a \oplus a \geq a$ , ce qui montre la réflexivité. L'antisymétrie et la transitivité sont claires. Cette relation d'ordre est compatible avec les lois de structure de  $\mathcal{K}$ , i.e. :

$$\begin{aligned} a \leq b &\Rightarrow a \oplus c \leq b \oplus c \\ a \leq b &\Rightarrow ac \leq bc. \end{aligned}$$

$(\mathcal{K}, \leq)$  est ainsi un semi-treillis dans lequel la borne supérieure est donnée par  $\oplus$  ( $a \oplus b$  est le plus petit majorant de  $a, b$ ) et  $0_{\oplus}$  est le plus petit élément.

Dans l'algèbre Max-Plus  $\mathbb{R}_{\max}$ , la relation  $\leq$  coïncide avec l'ordre coutumier. Nous introduisons maintenant la sous classe commode et importante des *dioïdes complets*.

### Définition 1.5 (Dioïde complet)

Le dioïde  $\mathcal{K}$  est complet s'il est complet en tant qu'ensemble ordonné par (I.2) et s'il vérifie les deux propriétés suivantes, dites de "distributivité infinie" :

$$\begin{aligned} \forall A \subset \mathcal{K}, \forall b \in \mathcal{K}, \quad (\bigoplus_{a \in A} a)b &= \bigoplus_{a \in A} ab, \\ b(\bigoplus_{a \in A} a) &= \bigoplus_{a \in A} ba. \end{aligned}$$

En d'autres termes, un dioïde complet est un dioïde où toute somme (infinie) d'éléments est définie et où la distributivité (à droite et à gauche) de  $\otimes$  par rapport à  $\oplus$  s'étend aux sommes infinies.

Il en résulte immédiatement que

$$(\bigoplus_{a \in A} a)(\bigoplus_{b \in B} b) = \bigoplus_{(a,b) \in A \times B} ab.$$

### Exemple 1.3 (Dioïde complété de $\mathbb{R}_{\max}$ )

$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , muni du max et du +, avec la convention  $(+\infty) + (-\infty) = -\infty$ , est un dioïde complet que l'on notera  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ .

### Remarque 1.4

On peut montrer que la complétion et l'inversibilité de la loi produit sont incompatibles. Autrement dit, nous avons le résultat suivant : un semi-corps idempotent

non trivial n'a pas de plus grand élément, et n'est pas complet en particulier. En effet, soit  $\infty$  le plus grand élément d'un semi-corps idempotent  $\mathcal{K}$ . Nous avons  $\infty \cdot \infty \geq \infty \cdot e_{\otimes} = \infty$ , et en simplifiant  $\infty = e_{\otimes}$ . Ainsi, tout  $x$  non nul vérifie

$$x \leq e_{\otimes}. \quad (\text{I.3})$$

D'où en passant aux inverses,  $x^{-1} \geq e_{\otimes}$ . L'autre inégalité s'obtient en appliquant (I.3) à  $x^{-1}$ , d'où  $x = e_{\otimes}$  et  $\mathcal{K} = \{0_{\oplus}, e_{\otimes}\}$  est trivial.

### I.3.3 Idempotence de l'addition et non simplifiabilité Impossibilité de la symétrisation

Les propriétés combinatoires des dioïdes (associativité, commutativité, distributivité, etc.) sont similaires à celles des structures algébriques usuelles. La différence majeure provient du fait que l'addition ne définit pas une structure de groupe (pas de "signe moins" ou d'opposé).

Ainsi en comparant les propriétés de  $\oplus$  et de  $\otimes$  à celles de  $+$  et de  $\times$ , nous voyons que :

1. nous avons perdu la symétrie de l'addition (pour  $a$  donné, il n'existe pas d'élément  $b$  tel que  $\max(b, a) = -\infty$  dès que  $a \neq -\infty$ );
2. nous avons gagné l'idempotence de l'addition;
3. il n'existe pas de diviseurs de zéro dans  $\mathbb{R}_{\max}$  ( $a \otimes b = 0_{\oplus} = -\infty \Rightarrow a = -\infty$  ou  $b = -\infty$ ).

Le fait que  $\oplus$  soit idempotent et non inversible, est la principale caractéristique originale de cette algèbre "exotique", ce qui la rend très différente des autres structures plus familières. En effet, les axiomes d'idempotence et de cancellativité sont exclusives : si pour tous  $a, b, c$ , ( $a \oplus b = a \oplus c \Rightarrow b = c$ ) et ( $a \oplus a = a$ ), il vient  $a = 0_{\oplus}$ , pour tout  $a$  (il suffit de simplifier  $a \oplus a = a \oplus 0_{\oplus}$ ).

En essayant d'effectuer des calculs algébriques dans cette structure, nous pouvons nous apercevoir que l'idempotence est aussi utile que l'existence d'un élément symétrique pour simplifier les formules. Par exemple, puisque la nouvelle addition  $\oplus$  est idempotente et l'ordre est total ( $\max(a, b) \in \{a, b\}$ ), l'analogie de la formule binomiale

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$



est

$$n \max(a, b) = \max(na, nb).$$

qui est beaucoup plus simple. D'un autre côté, le max n'est pas simplifiable :  $\max(a, b) = b$  n'implique pas que  $a = 0_{\oplus}$ .

### I.3.4 Equations linéaires

Les équations linéaires dans l'algèbre Max-Plus peuvent avoir ou ne pas avoir de solution. De plus, même s'il existe une solution, elle peut ne pas être unique.

#### Définition 1.6 (Fonction linéaire)

La fonction  $f : \mathbb{R}_{\max} \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$  est linéaire si elle satisfait

$$f(c) = c \otimes f(e_{\otimes}), \quad \forall c \in \mathbb{R}_{\max}.$$

Par conséquent toute fonction linéaire est de la forme  $y = f(c) = a \otimes c$ , où  $a = f(e_{\otimes})$ . Les graphes de telles fonctions sont des droites de pente un et d'ordonnée à l'origine  $a$ .

#### Définition 1.7 (Fonction affine)

La fonction  $f : \mathbb{R}_{\max} \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ ,

$$f(c) = ac \oplus b, \quad a, b \in \mathbb{R}_{\max}$$

est dite affine.

Son graphe est le sup de la fonction constante et d'une droite de pente 1.

#### Définition 1.8 (Equation affine)

L'équation affine scalaire générale est de la forme

$$ax \oplus b = a'x \oplus b'. \tag{I.4}$$

En effet puisque  $\oplus$  n'a pas d'inverse, l'équation (I.4) ne peut pas se réduire à  $ax \oplus b = 0_{\oplus}$ .

La solution de l'équation scalaire générale (I.4) est la suivante :

**Théorème I.5**

– Si les inégalités

$$((a' < a) \text{ et } (b < b')) \text{ ou } ((a < a') \text{ et } (b' < b)) \quad (\text{I.5})$$

sont vraies, alors la solution est unique et donnée par

$$x = (b \oplus b') / (a \oplus a');$$

- Si  $a \neq a', b \neq b'$ , et (I.5) n'est pas vérifiée, alors il n'existe pas de solution dans  $\mathbb{R}_{\max}$  ;
- Si  $a = a'$  et  $b \neq b'$ , la solution n'est pas unique et toutes les solutions sont données par  $x \geq (b \oplus b') / a$  ;
- Si  $a \neq a'$  et  $b = b'$ , la solution n'est pas unique et toutes les solutions sont données par  $x \leq b / (a \oplus a')$  ;
- Si  $a = a'$  et  $b = b'$ , alors tout  $x \in \mathbb{R}$  est solution.

En pratique, il est préférable de simplifier (I.4) avant de la résoudre. Par exemple, si  $a > a'$  et  $b' > b$ , alors  $ax \oplus b = a'x \oplus b' \iff ax = b'$ .

L'exemple qui suit est un cas particulier du théorème précédent.

**Exemple I.6 (Equation linéaire)**

Examinons les solutions en  $x$  de l'équation

$$z \oplus x = m. \quad (\text{I.6})$$

Il est à noter que l'ensemble des solutions peut être vide contrairement aux équations linéaires classiques. Lorsqu'il n'est pas vide, l'ensemble des solutions admet un plus grand élément  $x = m$ .

**Preuve - I.6 -**

- Si  $m < z$ , alors il n'existe pas de solution.
- Si  $m > z$ , alors  $x = m$ .
- Si  $m = z$ , alors tout  $x \leq z$  est solution, mais  $x = m$  est la solution maximale. ■

Le lecteur intéressé par les systèmes d'équations linéaires dans les dioïdes pourra se reporter à Gondran et Minoux [GM84], Carré [Car79], ainsi qu'à Cao, Kim et Roush [CKR84]. Pour une présentation plus récente et plus orientée systèmes à événements discrets, on pourra également se reporter à Baccelli et al [BCOQ92],

ainsi qu'aux références qui y sont citées. Ce livre résume à peu près l'état de l'art en 92 sur les systèmes à événements discrets Max-Plus linéaires aussi bien déterministes que stochastiques, et donne des résultats algébriques récents (comme par exemple la symétrisation).

### I.3.5 Probabilité Max-Plus et processus stochastiques Max-Plus

La structure algébrique  $\mathbb{R}_{\max}$  introduit un point de vue d'algèbre linéaire aux problèmes de programmation dynamique et aux grandes déviations. Une théorie de probabilités Max-Plus non-linéaires a été introduite pour formaliser ce point de vue (voir par exemple [Aki99] de M. Akian, [AQV94] de J.-P. Quadrat et M. Viot, [MD99] de P. Del Moral et M. Doisy), où la probabilité Max-Plus d'un événement correspond au gain d'un ensemble de décisions. Lorsque l'espace de décision est  $\mathbb{R}^+$  et le processus de gain une fonction réelle déterministe, cette **probabilité non-linéaire** est définie comme une **intégrale non-linéaire**.

#### Exemple I.7 (Intégrale Max-Plus et running supremum)

Soit  $(l_t)_{t \in [0, \zeta]}$  une fonction à valeurs réelles. Pour tout couple  $(s, t)$  vérifiant  $0 \leq s \leq t \leq \zeta$ , le running supremum (ou maximum glissant) de  $l$  entre  $s$  et  $t$  est, par définition, une intégrale Max-Plus sur  $[s, t]$  par rapport à  $l$ ,

$$l_{s,t}^* = \sup_{s \leq u \leq t} l_u = \oint_s^t l_u = I^+([s, t]). \quad (\text{I.7})$$

La fonction  $t \rightarrow l_{s,t}^*$  définie sur  $[s, \zeta]$  est croissante, continue à droite si  $l$  est semi-continue supérieurement à droite (s. c. s. d.), c'est-à-dire

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} l_{t+\varepsilon} \leq l_t.$$

L'additivité Max-Plus  $\left( \oint_s^t l_v \right) \oplus \left( \oint_t^u l_v \right) = \oint_s^u l_v$  découle de la relation suivante

$$\sup_{s \leq v \leq t} l_v \vee \sup_{t \leq v \leq u} l_v = \sup_{s \leq v \leq u} l_v.$$

Le processus  $(l_{0,t}^*)$  croît uniquement aux instants  $s$  tels que  $l_s = l_{0,s}^*$ .

Ainsi, si l'on considère la théorie de la mesure dans laquelle le demi-corps des réels positifs est remplacé par un demi-anneau idempotent, on obtient la notion de mesure idempotente introduite par Maslov. Les mesures ou intégrales idempotentes à densité correspondent alors à des suprema de fonctions pour la relation d'ordre partiel induite par la structure idempotente.

A partir de l'algèbre Max-Plus ou Min-Plus,<sup>2</sup> on peut donc construire un formalisme analogue au calcul des probabilités :

Soit  $\Omega$  un "espace échantillon", et  $Q$  une fonction sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^-$ , telle que  $\sup_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 0$ . Alors pour tout  $A \subset \Omega$ , la probabilité Max-Plus de  $A$  est  $\mathbf{P}^+(A) = \sup_{\omega \in A} Q(\omega)$ .  $Q(\omega)$  est appelée vraisemblance de  $\omega$ , et  $Q$  la fonction de densité de probabilité Max-Plus. Une variable aléatoire Max-Plus est une fonction  $Z$  sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_{\max}$ . L'espérance Max-Plus de  $Z$  est  $\mathbf{E}^+(Z) = \int_{\Omega} Z(\omega) \otimes \mathbf{P}^+(d\omega) = \sup_{\omega \in \Omega} [Z(\omega) + Q(\omega)]$ . Notons que si  $\mathbf{E}^+(Z) < +\infty$ , alors  $Z$  est Max-Plus intégrable. Il est également immédiat de voir que  $\mathbf{E}^+$  est stable par limite croissante et linéaire par rapport à l'addition Max-Plus et la multiplication scalaire.

Dans le cas particulier où  $\Omega = \mathbb{R}^+$  et  $Z(\omega) = l_{]s,t]}(\omega)$ ,  $l_{]s,t]}$  étant la fonction indicatrice Max-Plus qui vaut 0 si  $\omega \in ]s, t]$  et  $-\infty$  sinon,  $\mathbf{E}^+(Z)$  n'est autre que notre intégrale Max-Plus (I.7).

La théorie du calcul de probabilité Max-Plus a été profondément développée par W. H. Fleming qui a considéré la notion d'intégrale Max-Plus additive dans son article [Fle04]. Il a abordé la notion de martingale Max-Plus, analogue à celle de maxingale exponentielle, telle qu'elle a été définie dans [Puh01]. Les résultats que Fleming a présentés dans [Fle04] peuvent être vus comme un premier pas vers un calcul stochastique Max-Plus (quelques propriétés de la probabilité Max-Plus, notion d'équation différentielle stochastique Max-Plus, équations différentielles partielles rétrogrades et progressives, etc.).

Même si nous ne les utilisons pas, nous présentons ici, sans démonstration, les principaux résultats de la théorie développée par Fleming dans [Fle04].

### I.3.5.1 Probabilité Max-Plus

Soit  $\Omega$  un "espace échantillon" et  $Q$  une fonction sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^-$  avec

$$\sup_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 0.$$

Pour tout  $A \subset \Omega$ , la probabilité Max-Plus de  $A$  est

$$\mathbf{P}^+(A) = \sup_{\omega \in A} Q(\omega).$$

$Q(\omega)$  est appelée *vraisemblance* de  $\omega$ , et  $Q$  la *fonction de densité de probabilité Max-Plus*. On appelle variable aléatoire Max-Plus toute fonction  $Z$  définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^-$ . L'espérance Max-Plus de  $Z$  est

$$\mathbf{E}^+(Z) = \sup_{\omega \in \Omega} [Z(\omega) + Q(\omega)].$$

---

<sup>2</sup>L'algèbre Min-Plus est le dual de l'algèbre Max-Plus (le zéro étant cette fois  $+\infty$ ).

Si  $\mathbf{E}^+(Z) < +\infty$ , alors  $Z$  est Max-Plus intégrable. Il est immédiat que  $\mathbf{E}^+$  est linéaire par rapport à l'addition Max-Plus et la multiplication scalaire. De plus, si  $Z_n(\omega) \uparrow Z(\omega)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors  $\mathbf{E}^+(Z_n) \uparrow \mathbf{E}^+(Z)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

### Espérance Conditionnelle Max-Plus.

Pour tout  $A$  tel que  $\mathbf{P}^+(A) > -\infty$ , la densité de probabilité Max-Plus conditionnelle sachant  $A$  est définie par

$$Q(\omega|A) = \begin{cases} Q(\omega) - \sup_{\alpha \in A} Q(\alpha), & \omega \in A \\ -\infty, & \omega \notin A. \end{cases}$$

L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire Max-Plus intégrable  $Z$  s'écrit sous la forme

$$\mathbf{E}^+[Z|A] = \sup_{\omega} [Z(\omega) + Q(\omega|A)].$$

En particulier, soit  $\Pi$  une fonction qui envoie  $\Omega$  sur un autre espace  $\Omega'$  et posons  $A(\omega') = \Pi^{-1}(\omega')$ . Désignons par  $Q(\omega|\omega')$  la densité conditionnelle Max-Plus correspondante. Alors si  $\mathbf{P}^+[A(\omega')] > -\infty$ ,

$$Q(\omega|\omega') = \begin{cases} Q(\omega) - Q'(\omega'), & \text{si } \omega' = \Pi(\omega) \\ -\infty, & \text{si } \omega' \neq \Pi(\omega), \end{cases}$$

et  $Q'(\omega') = \sup_{\omega' = \Pi(\omega)} Q(\omega)$ .  $Q'(\omega')$  est la densité de la mesure de probabilité Max-Plus sur  $\Omega'$  induite par la fonction  $\Pi$ . Similairement, l'espérance conditionnelle Max-Plus est notée par  $\mathbf{E}^+(Z|\omega')$ . Il est évident que  $\mathbf{E}^+(Z|\omega')$  est Max-Plus intégrable et

$$\mathbf{E}^+[\mathbf{E}^+(Z|\omega')|\omega''] = \mathbf{E}^+(Z|\omega''). \quad (\text{I.8})$$

De plus, si  $Y$  et  $Z$  sont Max-Plus intégrables et  $Y(\omega) = Y'[\Pi(\omega)]$  pour tout  $\omega$ , alors :

$$\mathbf{E}^+[Y|\omega'] = Y'(\omega') \quad (\text{I.9})$$

$$\mathbf{E}^+[(Y \oplus Z)|\omega'] = Y'(\omega') \oplus \mathbf{E}^+[Z|\omega'] \quad (\text{I.10})$$

$$\mathbf{E}^+[(Y \otimes Z)|\omega'] = Y'(\omega') \otimes \mathbf{E}^+[Z|\omega']. \quad (\text{I.11})$$

### I.3.5.2 Martingales Max-Plus

Considérons un intervalle de temps  $0 \leq t \leq T$  et un espace échantillon  $\Omega = \Omega_T$ . A chaque instant  $t$ , soit  $\Pi_t$  une fonction de  $\Omega_T$  dans un espace  $\Omega_t$ , où  $\Pi_T$  est la fonction

identité pour  $t = T$ . De plus, pour  $0 \leq \tau < t \leq T$ ,  $\Pi_\tau = \tilde{\Pi}_{\tau t} \circ \Pi_t$ , où  $\tilde{\Pi}_{\tau t}$  envoie  $\Omega_t$  sur  $\Omega_\tau$ . Les éléments de  $\Omega_t$  sont notés par  $\omega^t$ .

Pour  $0 \leq t \leq T$ , soit  $M_t$  une famille de variables aléatoires Max-Plus intégrables, telle que  $M_t = M_t(\omega^t)$ .  $M_t$  est alors une *martingale Max-Plus* si, pour  $0 \leq \tau < t \leq T$

$$\mathbf{E}^+[M_t|\omega^\tau] = M_\tau. \quad (\text{I.12})$$

Similairement,  $M_t$  est une *surmartingale Max-Plus* (resp. *sous-martingale Max-Plus*) si dans (I.12), l'égalité est remplacée par une inégalité  $\leq$  (resp.  $\geq$ ).

### Exemple I.8

Si  $Z$  est Max-Plus intégrable, alors  $M_t = \mathbf{E}^+[Z|\omega^t]$  est une *martingale Max-Plus*. Ceci résulte de (I.8) avec  $\omega' = \omega^t, \omega'' = \omega^\tau$ .

Dans la suite, nous allons essentiellement considérer le cas particulier suivant. Soit  $q(v)$  une fonction à valeurs réelles de la classe  $\mathcal{C}^1$  définie sur l'eulidien  $\mathbb{R}^m$  et vérifiant les hypothèses suivantes :

- (i)  $q(v) \geq 0, \min_v q(v) = 0$
- (ii)  $q$  est strictement convexe sur  $\mathbb{R}^m$
- (iii)  $|v|^{-1}q(v) \rightarrow +\infty$  p.s.  $|v| \rightarrow \infty$ .

En particulier, (I.13) a lieu si  $q(v) = p^{-1}|v|^p, p > 1$ . Soit  $\Omega$  l'ensemble des fonctions absolument continues  $\omega$  définies sur  $[0, T]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , telles que

$$\omega_0 = 0, \int_0^T q(v_s)ds < \infty, v_s = \dot{\omega}_s. \quad (\text{I.14})$$

Ici  $\dot{\omega}_s = d\omega_s/ds$ . Soit  $Q(= Q_T)$  la densité Max-Plus donnée par

$$Q(\omega.) = - \int_0^T q(\dot{\omega}_s)ds. \quad (\text{I.15})$$

Soit  $\Pi_t$  la restriction de  $\omega$  à  $[0, t]$  :

$$\omega^t = \Pi_t(\omega.) = \omega.|_{[0,t]}.$$

La densité  $Q_t(\omega^t)$  induite par  $\Pi_t$  et la densité conditionnelle  $Q(\omega|\omega^t)$  sont données par

$$(a) Q_t(\omega^t) = - \int_0^t q(\dot{\omega}_s)ds \quad (\text{I.16})$$

$$(b) Q(\omega|\omega^t) = - \int_t^T q(\dot{\omega}_s)ds. \quad (\text{I.17})$$

**Exemple I.9**

Soit  $q^*(\theta)$  la fonction duale convexe de  $q(v)$  :

$$q^*(\theta) = \max_v [\theta \cdot v - q(v)], \quad \theta \in \mathbb{R}^m.$$

Soit  $\theta_s = \theta_s(\omega^s)$  bornée sur  $[0, T]$  pour tout  $\omega$ . et soit

$$M_t = \int_0^t [\theta_s \cdot d\omega_s - q^*(\theta_s) ds].$$

Pour  $\tau < t$ , il vient à partir de (I.17)

$$\mathbf{E}^+[M_t | \omega^\tau] = M_\tau + \sup_{\omega} \left[ \int_\tau^t [\theta_s \cdot \dot{\omega}_s - q^*(\theta_s) - q(\dot{\omega}_s)] ds \right].$$

L'intégrale est négative, et donc  $M_t$  est une surmartingale Max-Plus. Le terme à intégrer est nul si  $q_v(\dot{\omega}_s) = \theta_s$ . Ainsi,  $M_t$  est une martingale Max-Plus si l'équation différentielle fonctionnelle  $\dot{\omega}_s = q_v^{-1}(\theta_s)$  admet une solution bornée sur  $[\tau, t]$  avec une donnée initiale  $\omega^\tau$ .

Il existe d'autres choix intéressants pour l'espace échantillon et la densité Max-Plus, parmi lesquels :

(a) Si l'état initial  $x_0$  à l'instant  $t = 0$  est inconnu, on peut prendre  $\omega = (x_0, \omega)$  et

$$Q(\omega) = \phi_0(x_0) - \int_0^T q(\dot{\omega}_s) ds,$$

où  $\phi_0(x_0)$  désigne la vraisemblance (densité de probabilité Max-Plus) de  $x_0$ .

(b) Soit  $\omega = x$ . et  $I(x)$  une fonctionnelle de "grandes déviations" de la forme

$$I(x) = \int_0^T \Lambda(x_s, \dot{x}_s) ds,$$

où  $\Lambda(x, y) \geq 0$ ,  $\Lambda(x, \bar{y}(x)) = 0$ . Sous d'autres hypothèses adéquates,  $Q(x) = -I(x)$  est une densité de probabilité Max-Plus.

Le choix  $q(v) = \frac{1}{2}|v|^2$  présente un intérêt particulier pour les grandes déviations des systèmes dynamiques de type Wentzell-Freidlin, sous de faibles perturbations Browniennes.

**Exemple I.10**

Supposons que  $V_t = V_t(\omega^t)$ ,  $l_t = l_t(\omega^t)$  sont bornées et vérifient pour  $0 \leq \tau < t \leq T$

$$V_\tau = \mathbf{E}^+ \left[ \left( \int_\tau^t l_s ds + V_t \right) | \omega^\tau \right]. \quad (\text{I.18})$$

Soit  $M_t = \int_0^t l_s ds + V_t$ . D'après (I.9), (I.11) et (I.18),  $M_t$  est une martingale Max-Plus.

**Exemple I.11**

Définissons l'intégrale Max-Plus de  $l_s$  sur  $[\tau, t]$  comme

$$\oint_{\tau}^t l_s ds = \sup_{[\tau, t]} l_s. \quad (\text{I.19})$$

Supposons que  $\Phi_t = \Phi_t(\omega^t)$  et  $l_t = l_t(\omega^t)$  sont bornées et vérifient pour  $0 \leq \tau < t \leq T$

$$\Phi_{\tau} = \mathbf{E}^+ \left[ \left( \oint_{\tau}^t l_s ds \oplus \Phi_t \right) | \omega^{\tau} \right].$$

Soit  $M_t = \oint_0^t l_s ds \oplus \Phi_t$ . Comme

$$\oint_0^t l_s ds = \left( \oint_0^{\tau} l_s ds \right) \oplus \left( \oint_{\tau}^t l_s ds \right), \quad (\text{I.20})$$

les équations (I.9), (I.11) et (I.20) impliquent que  $M_t$  est une martingale Max-Plus.

Les exemples I.10 et I.11 apparaîtront dans les sections I.3.5.4 et I.3.5.5, en liaison avec les principes de programmation dynamique Max-Plus multiplicatif et Max-Plus additif.

**I.3.5.3 Equations différentielles stochastiques Max-Plus**

Soit  $\omega_s$  une fonction absolument continue sur  $[0, T]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  et vérifiant (I.14). Considérons ensuite une densité Max-Plus  $Q(\omega_s)$  comme celle décrite dans (I.15). Les formules (I.16) et (I.17) reflètent la propriété qu'avec un tel choix de  $Q(\omega_s)$ ,  $\omega_s$  est un "processus à accroissements Max-Plus indépendants", selon la terminologie de [Qua98]. Lorsque  $q(v) = \frac{1}{2}|v|^2$ ,  $\omega_s$  est l'analogie Max-Plus d'un mouvement Brownien  $m$ -dimensionnel.

Soit  $x_s \in \mathbb{R}^n$  évoluant suivant l'équation différentielle

$$dx_s = f(x_s)ds + \sigma(x_s)d\omega_s. \quad (\text{I.21})$$

De manière équivalente, (I.21) se réécrit comme

$$\dot{x}_s = f(x_s) + \sigma(x_s)v_s, \quad (\text{I.22})$$

où  $v_s = \dot{\omega}_s$  peut être considérée comme une perturbation inconnue rentrant linéairement dans la dynamique d'un état système  $x_s$ . Si  $\omega_s$  dans l'équation (I.21) était



remplacé par un mouvement Brownien, nous aurions une équation différentielle stochastique au sens d'Itô. Gardant cette analogie, (I.21) est appelée *équation différentielle stochastique Max-Plus*. Nous supposons que  $f$  et  $\sigma$  sont de la classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $f$ ,  $f_x$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma_x$  bornées. Ces hypothèses sont certes fortes et peuvent être affaiblies, elles permettent toutefois d'éviter certaines complications techniques.

Nous donnons dans cette section et la section I.3.5.4, quelques résultats élémentaires autour du calcul stochastique Max-Plus, analogue à celui d'Itô (associé aux solutions d'équations différentielles stochastiques au sens d'Itô).

### Règle différentielle Max-Plus.

Pour  $x, p \in \mathbb{R}^n$ , posons

$$H(x, p) = f(x) \cdot p + q^*(\sigma'(x)p). \quad (\text{I.23})$$

Soit  $G(t, x)$  une fonction quelconque de la classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $x_s$  vérifie l'équation (I.21) sur  $[0, T]$ , alors on pose

$$\begin{aligned} (a) \quad M_t^G &= \int_0^t [\theta_s \cdot d\omega_s - q^*(\theta_s) ds], \\ (b) \quad \theta_s &= \sigma'(x_s) G_x(s, x_s). \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire permet d'aboutir au résultat suivant analogue à la règle différentielle stochastique d'Itô.

$$dG(s, x_s) = \left[ \frac{\partial G}{\partial s}(s, x_s) + H(x_s, G_s(s, x_s)) \right] ds + dM_s^G. \quad (\text{I.24})$$

### Proposition I.12

Soit  $G(t, x)$  une fonction de la classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors

- (a)  $M_t^G$  est une surmartingale Max-Plus.
- (b)  $M_t^G$  est une martingale Max-Plus si  $G_x$  est bornée.

### Propriété de Markov Max-Plus.

La famille des solutions  $x_s$  de l'équation différentielle (I.21), avec une donnée initiale arbitraire, constitue une contrepartie déterministe au processus de diffusion Markovien obtenu en remplaçant  $\omega_s$  par un mouvement Brownien.  $x_s$  est appelé processus décisionnel de diffusion, ou de manière équivalente processus de Bellman-Maslov. Nous ne donnons pas ici de définition précise d'un processus de Markov Max-Plus, puisque nous n'en servirons pas dans la suite. Nous allons plutôt considérer des versions Max-Plus de certains concepts associés, tels que les densités de transition et les EDP rétrogrades et progressives.

Pour  $0 \leq t < s \leq T$ , nous notons par  $P(t, x; s, \zeta)$  la densité de transition Max-Plus de  $x_s$  solution de (I.21), avec pour condition initiale  $x_t = x$ . Il en résulte que

$$P(t, x; s, \zeta) = - \inf_v \left\{ \int_t^s q(v_r) dr : x_t = x, x_s = \zeta \right\}, \quad (\text{I.25})$$

à condition que l'ensemble des  $v$ . admissibles, avec  $q(v_r)$  intégrable sur  $[t, s]$ , soit non vide. Sinon,  $P(t, x; s, \zeta)$  vaudrait  $-\infty$ . La fonction  $P$  est l'analogie Max-Plus de la densité de transition d'un processus Markovien de diffusion. L'équation suivante, valable pour  $0 \leq \tau < t < s \leq T$ , est l'analogie de l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$P(\tau, y; s, \zeta) = \sup_x \{ P(\tau, y; t, x) + P(t, x; s, \zeta) \}.$$

La notation  $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E}_{tx}^+$  dans la proposition I.13, indique la donnée initiale  $x_t = x$ . Par ailleurs pour  $t < r < T$ , nous notons par  $x^{r,T}$  la restriction de la trajectoire échantillon  $x$  à l'intervalle de temps  $[r, T]$ .

### Proposition I.13

Soit  $t < r < T$ . Pour toute fonction bornée  $F(x^{r,T})$ ,

$$\mathbf{E}_{tx}^+ [F(x^{r,T})] = \mathbf{E}_{tx}^+ \{ \mathbf{E}_{r,x_r}^+ [F(x^{r,T})] \}.$$

#### I.3.5.4 EDP rétrogrades et progressives

Le générateur d'un processus de diffusion Markovien est un opérateur différentiel partiel linéaire, du second ordre, parabolique et de type elliptique (éventuellement dégénéré). Les EDP linéaires rétrogrades et progressives correspondantes, dépendantes du temps, sont de type parabolique. Dans le cadre Max-Plus, le générateur de diffusion Markovien est remplacé par l'opérateur de premier ordre  $H$  dans (I.23) et (I.24). Les EDP rétrogrades et progressives correspondantes (voir (I.29) et (I.32) ci-après) sont non-linéaires par rapport aux opérations arithmétiques usuelles. Cependant, ces EDP sont linéaires par rapport à l'addition Max-Plus et à la multiplication scalaire. Les équations (I.29) et (I.32) sont des EDP du premier ordre. Les solutions de ces EDP sont typiquement non régulières, mais doivent être interprétées comme solutions de viscosité.

Commençons par décrire une solution  $V(t, x)$  de l'EDP rétrograde Max-Plus (I.29), dans laquelle a été inclue un terme inhomogène  $l(x)$ . Selon la terminologie de la théorie de contrôle,  $l$  est une fonction de "coût courant" ("running cost"). Nous associons à l'équation (I.29) une condition terminale en  $T$  (I.30), où  $g$  désigne une fonction de "coût terminal". Afin d'éviter certaines complications techniques, nous supposons de

plus que  $l$  et  $g$  sont de la classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $l, l_x, g$  et  $g_x$  bornées.

Etant donnée la condition initiale  $x_t = x$ , nous considérons le problème de contrôle suivant. Soit  $x_s$  la solution de (I.22) pour  $t \leq s \leq T$ , où le contrôle est donné par  $v_s$ . Posons

$$J(t, x; v) = \int_t^T [l(x_s) - q(v_s)] ds + g(x_T).$$

La fonction valeur  $V(t, x)$  définie par

$$V(t, x) = \sup_v J(t, x; v), \quad (\text{I.26})$$

peut se réécrire comme une espérance Max-Plus. En effet, en posant

$$Z_{tT} = \int_t^T l(x_s) ds + g(x_T), \quad (\text{I.27})$$

il vient

$$V(t, x) = \mathbf{E}_{tx}^+(Z_{tT}), \quad (\text{I.28})$$

où les indices indiquent simplement la condition initiale  $x_t = x$ .

#### Proposition I.14

*Il existe un contrôle minimisant  $v^0$ . De plus, il existe une constante  $M$  telle que  $|v_s^0| \leq M$ .*

La proposition I.14 implique que la fonction valeur  $V(t, x)$  ne change pas en imposant  $|v_s| \leq M$ . On a alors

#### Théorème I.15

*La fonction valeur  $V$  vérifie une condition de Lipschitz sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ . De plus,  $V(t, x)$  est l'unique solution de viscosité bornée, continue, Lipschitz, de l'EDP rétrograde*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(x, V_x) + l(x) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (\text{I.29})$$

*avec la condition terminale*

$$V(T, x) = g(x). \quad (\text{I.30})$$

Si (I.29) - (I.30) admet une solution  $G(t, x)$  régulière (de la classe  $\mathcal{C}^1$ ) avec  $G_x$  bornée, alors il résulte de la règle différentielle Max-Plus (I.24) que  $G(t, x) = V(t, x)$ . Cependant, une telle solution régulière n'existe pas.

### Interprétation probabiliste Max-Plus.

Soit  $x_s$  solution de (I.22) pour  $0 \leq s \leq T$ , avec une condition initiale arbitraire  $x_0$  à l'instant 0. Pour  $0 \leq t < T$ , si la condition initiale pour (I.22) est donnée par  $x_t$  sur l'intervalle de temps  $[t, T]$ , alors  $V(t, x_t)$  réalise le sup dans (I.26). Pour  $\tau < t$ , le principe de programmation dynamique implique que

$$V(\tau, x_\tau) = \sup_v \left[ \int_\tau^t [l(x_s) - q(v_s)] ds + V(t, x_t) \right]. \quad (\text{I.31})$$

De façon équivalente (puisque  $v_s = \dot{\omega}_s$ ),

$$V(\tau, x_\tau) = \mathbf{E}^+ \left[ \left( \int_\tau^t l(x_s) ds + V(t, x_t) \right) \middle| \omega^\tau \right].$$

Soit  $M_t = \int_0^t l(x_s) ds + V(t, x_t)$ . Alors à partir de l'exemple I.10, avec  $V_t = V(t, x_t)$  :

### Proposition I.16

*$M_t$  est une martingale Max-Plus.*

La propriété de martingale Max-Plus de  $M_t$  est équivalente au principe de programmation dynamique. Elle est valable sous des hypothèses beaucoup plus faibles que celles que nous avons faites. Comme la multiplication Max-Plus revient à une addition ordinaire, l'équation (I.31) peut s'appeler principe de programmation dynamique Max-Plus multiplicatif. Nous considérerons dans la section I.3.5.5 un principe correspondant de programmation dynamique Max-Plus additif.

### EDP Progressives.

Supposons que l'état  $x_0$  à l'instant  $t = 0$  est inconnu, et considérons  $\phi(x_0)$  la vraisemblance (densité Max-Plus) de  $x_0$ . La vraisemblance de  $x_s$  qui vérifie (I.21) est notée par  $\phi(s, x_s)$ , où

$$\phi(s, \zeta) = \sup_{x_0} \{ \phi_0(x_0) + P(0, x_0; s, \zeta) \}$$

et  $P$  désigne la densité de transition Max-Plus dans (I.25). L'EDP progressive Max-Plus s'écrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \tilde{H}(\zeta, \phi_\zeta), \quad s \geq 0, \quad (\text{I.32})$$

où  $\phi_\zeta$  est le gradient et

$$\tilde{H}(\zeta, p) = -f(\zeta) \cdot p + q^*(-\sigma'(\zeta)p).$$

La condition initiale pour (I.32) est  $\phi(0, \zeta) = \phi_0(\zeta)$ .

**Remarque I.17**

Une fonction  $\psi$  sur  $\mathbb{R}^n$  est dite *semi-convexe* si : pour tout  $R > 0$  il existe  $C_R$  telle que  $\psi(x) + C_R|x|^2$  est convexe sur la sphère  $\{|x| \leq R\}$ . Si  $f, \sigma, l$  sont supposées de la classe  $\mathcal{C}^2$  en plus des hypothèses précédentes, la semi-convexité de  $\phi_0$  engendre la semi-convexité de  $\phi(s, \cdot)$  pour  $s > 0$ . De manière analogue pour la fonction valeur,  $V(t, \cdot)$  est semi-convexe si  $g$  l'est. La classe des fonctions semi-convexes est naturellement liée aux processus stochastiques Max-Plus gouvernés par (I.21). Ce lien est analogue à celui qui existe entre les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^n$  et les équations différentielles stochastiques au sens d'Itô.

**I.3.5.5 Programmation dynamique Max-Plus additive**

Dans cette section, nous considérons un analogue Max-Plus  $Z_{tT}^+$  au critère  $Z_{tT}$  donné par (I.27). Par souci de simplification, le terme de coût terminal  $g(x_T)$  dans (I.27) sera maintenant omis.  $f, \sigma$  et  $l$  satisfont aux mêmes hypothèses précédentes. Soit

$$Z_{tT}^+ = \bigoplus_t^T l(x_s) ds, \quad (\text{I.33})$$

où comme précédemment  $x_s$  est solution de (I.21) pour  $t \leq s \leq T$  avec  $x_t = x$  et comme dans (I.19),

$$\bigoplus_t^T l(x_s) ds = \max_{[t, T]} l(x_s). \quad (\text{I.34})$$

Par correspondance à (I.28), nous posons

$$V^+(t, x) = \mathbf{E}_{tx}^+(Z_{tT}^+).$$

Dans la section I.3.5.6,  $V^+(t, x)$  s'obtient comme limite de grandes déviations des normes  $L_\lambda$  lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ , si dans (I.14)  $q(v) = \frac{1}{2}|v|^2$ .

Soit  $0 \leq t < r < T$ . Comme l'intégrale Max-Plus en temps dans (I.34) est additive sous une subdivision de  $[t, T]$  en  $[t, r]$  et  $[r, T]$ , il découle de l'identité (I.10) et de la proposition I.13 :

$$\begin{aligned} V^+(t, x) &= \mathbf{E}_{tx}^+ \left[ \left( \bigoplus_t^r l(x_s) ds \right) \oplus \left( \bigoplus_r^T l(x_s) ds \right) \right] \\ &= \mathbf{E}_{tx}^+ \left[ \left( \bigoplus_t^r l(x_s) ds \right) \oplus \left( \mathbf{E}_{rxr}^+ \bigoplus_r^T l(x_s) ds \right) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi  $V^+$  satisfait au principe de programmation dynamique Max-Plus additif :

$$V^+(t, x) = \mathbf{E}_{tx}^+ \left[ \left( \bigoplus_t^r l(x_s) ds \right) \oplus V^+(r, x_r) \right]. \quad (\text{I.35})$$

Dans l'exemple I.11, posons  $\Phi_t = V^+(t, x_t)$  et  $l_s = l(x_s)$ . L'identité (I.35) appliquée à  $x = x_t$  donne alors :

**Proposition I.18**

$M_t = \left( \oint_0^t l(x_s) ds \right) \oplus V^+(t, x_t)$  est une martingale Max-Plus.

La fonction  $V(t, x)$  satisfait à l'EDP rétrograde (I.29) au sens de viscosité (théorème I.15). Nous allons voir dans cette section que  $V^+(t, x)$  vérifie une inégalité variationnelle correspondante (I.36), mais signalons d'abord quelques propriétés de  $V^+$ .

**Lemme I.19**

- (a)  $\|V^+\| \leq \|l\|$  où  $\| \cdot \|$  est la norme sup.
- (b)  $V^+(T, x) = l(x)$ .
- (c)  $V^+(t, x)$  est une fonction décroissante de  $t$ .

**Lemme I.20**

- (a)  $V^+(t, x) = \oint_t^T U(t, s; x) ds$ .
- (b)  $V^+$  satisfait une condition de Lipschitz sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ .
- (c) Il existe une constante  $M$  telle que

$$V^+(t, x) = \sup_{|v_s| \leq M} \left[ Z_{tT}^+ - \int_t^T q(v_s) ds \right].$$

Comme  $V^+$  est Lipschitz continue,  $V^+$  est différentiable en presque tout  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ . Le théorème suivant montre que  $V^+$  satisfait l'inégalité de programmation dynamique (I.36) .

**Théorème I.21**

Si  $V^+$  est différentiable en  $(t, x)$  avec  $t < T$ , alors

$$0 = \max[l(x) - V^+(t, x), V_t^+(t, x) + H(x, V_x^+(t, x))], \quad (\text{I.36})$$

où  $H$  est donnée par (I.23).

Si (I.36) est vraie pour presque tout  $(t, x)$ ,  $V^+$  est appelée solution généralisée de l'inégalité variationnelle. Malheureusement, en plus de la fonction valeur  $V^+$ , il existe typiquement infiniment beaucoup d'autres solutions généralisées de (I.36) avec la même condition terminale  $l(x)$  en  $T$ . Ce problème disparaît en considérant des solutions de viscosité plutôt que des solutions généralisées. Le théorème suivant est l'analogie du théorème I.15.

**Théorème I.22**

$V^+(t, x)$  est l'unique solution de viscosité bornée, Lipschitz, continue, de l'inégalité variationnelle (I.36) avec la condition terminale

$$V^+(T, x) = l(x).$$

**I.3.5.6 Limites de grandes déviations**

Nous posons dans cette section  $q(v) = \frac{1}{2}|v|^2$ . L'EDS Max-Plus (I.21) résulte naturellement de la théorie de grandes déviations de Freidlin-Wentzell pour de faibles perturbations aléatoires [FW84]. Pour  $\epsilon > 0$ , considérons  $x_s^\epsilon$ , solution au sens d'Itô de l'EDS

$$dx_s^\epsilon = f(x_s^\epsilon)ds + \epsilon^{\frac{1}{2}}\sigma(x_s^\epsilon)dB_s, \quad t \leq s \leq T$$

avec  $x_t^\epsilon = x$ , et  $B_s$  mouvement Brownien  $m$ -dimensionnel. Comme dans (I.27), on pose

$$Z_{tT}^\epsilon = \int_t^T l(x_s^\epsilon)ds + g(x_T^\epsilon).$$

Alors sous nos hypothèses précédentes,

$$\mathbf{E}_{tx}^+(Z_{tT}^\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbf{E}_{tx}[\exp(\epsilon^{-1}Z_{tT}^\epsilon)].$$

La contrepartie Max-Plus additive dans la section I.3.5.5 résulte d'un autre type de limite. C'est une version de grandes déviations d'une  $L_\lambda$ -norme, lorsque  $\lambda = \epsilon^{-1}$  tend vers l'infini. Soit  $F(x)$  une fonction positive telle que  $l(x) = \log F(x)$  vérifie nos hypothèses précédentes. Posons

$$\mathcal{J}_{tT}^\epsilon = \int_t^T F(x_s^\epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}} ds = \int_t^T \exp(\epsilon^{-1}l(x_s^\epsilon)) ds.$$

Il découle de la théorie des grandes déviations que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log(\mathcal{J}_{tT}^\epsilon) = \oint_t^T \mathbf{E}_{tx}^+[l(x_s)] ds = \mathbf{E}_{tx}^+(Z_{tT}^+),$$

avec  $Z_{tT}^+$  donnée par (I.33).

# Références bibliographiques

## Chapitre I

- [ACG<sup>+</sup>94] M. Akian, G. Cohen, S. Gaubert, J. P. Quadrat and V. Viot (Max-Plus Working Group), “Max-Plus algebra and applications to system theory and optimal control”, The Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zurich, Switzerland (1994), pp. 1502–1511.
- [Aki99] M. Akian, “Densities of idempotent measures and large deviations”, Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1999), pp. 79–111.
- [AQV94] M. Akian, J.-P. Quadrat and M. Viot, “Bellman processes”, 11th International Conference on Analysis and Optimization of Systems : Discrete Event Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences **199** (1994).
- [BCOQ92] F. Baccelli, G. Cohen, G. Olsder and J. Quadrat, *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*, Wiley and Sons, 1992.
- [Bra93] H. Braker, *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*, Phd thesis, Delft University of Technology, 1993.
- [Car79] B.A. Carré, *Graphs and Networks*, Oxford University Press, 1979.
- [CDQV83] G. Cohen, D. Dubois, J. Quadrat and M. Viot, “Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioides”, Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France (1983).
- [CDQV85] ———, “A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing”, IEEE Trans. on Automatic Control **AC-30** (1985), pp. 210–220.
- [CG79] R. Cuninghame-Green, *Minimax Algebra*, Number 166 in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, 1979.
- [CGQ99] G. Cohen, S. Gaubert and J.-P. Quadrat, “Max-Plus algebra and system theory : Where we are and where to go now”, Annual Reviews in Control **23** (1999), pp. 207–219.



- [CKR84] Z.Q. Cao, K.H. Kim and F.W. Roush, *Incline Algebra and Applications*, Ellis Horwood, 1984.
- [Coh95] G. Cohen, *Théorie algébrique des systèmes à événements discrets*, Polycopié de cours. Centre Automatique et Systèmes, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau & INRIA, Rocquencourt, 1995.
- [Fle04] W. H. Fleming, “Max-Plus stochastic processes”, *Applied Mathematics and Optimization* **49** (2004), no. 2, pp. 159–181.
- [FW84] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems*, Springer-Verlag, 1984.
- [Gau99] S. Gaubert, *Introduction aux systèmes dynamiques à événements discrets*, Polycopié de cours ENSTA–ENSMP–Orsay (DEA ATS), 1992 (révisé en 1999).
- [GM84] M. Gondran and M. Minoux, “Linear algebra in dioids : a survey of recent results”, *Annals of Discrete Mathematics* **19** (1984), pp. 147–164.
- [LMQ01] P. Lolito, E. Mancinelli and J.-P. Quadrat, “A minplus derivation of the fundamental car-traffic law”, Report 324, INRIA (2001).
- [LT02] J.-Y. LeBoudec and P. Thiran, *Network Calculus*, Springer Verlag, 2002.
- [MD99] P. Del Moral and M. Doisy, “Maslov idempotent probability calculus”, *Theory of Probability and Its Applications* **43** (1999), pp. 562–576.
- [OSM98] G. Olsder, Subiono and Gettrick M. M., “Course notes : On large scale max-plus algebra model in railway systems”, *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique*, Ecole de printemps d’informatique théorique (1998).
- [Puh01] A. Puhalskii, *Large Deviations and Idempotent Probability*, Chapman and Hall CRC Press, May 2001.
- [Qua98] J.-P. Quadrat, “Min-Plus probability calculus”, *Actes 26ème Ecole de Printemps d’Informatique Théorique*, Noirmoutier (1998).

# Décomposition Max-Plus de surmartingales

---

## Résumé

Nous établissons dans ce chapitre un théorème de décomposition des surmartingales de la classe  $(\mathcal{D})$  dans l'algèbre Max-Plus.

Nous abordons notamment la question d'unicité des processus associés. Alors que la martingale de la décomposition Max-Plus est unique, ce résultat n'est plus vrai pour le processus croissant. Tout ce que l'on peut affirmer est que l'ensemble des processus croissants admissibles admet un élément maximal.

Deux exemples illustrant la décomposition Max-Plus de surmartingales dégénérées sont également donnés dans le chapitre.

## II.1 Introduction

L'un des théorèmes les plus fondamentaux de la théorie des processus stochastiques est la fameuse décomposition additive de Doob-Meyer qui date des années 60. Elle caractérise toute surmartingale de la classe  $(\mathcal{D})$  sous forme de différence d'une martingale locale et d'un processus croissant prévisible. Depuis et pour des motivations essentiellement financières, elle a été étendue à une classe plus large de processus [KQ95, Kra96]. Citons également la décomposition multiplicative [Jac78, Mem78] qui elle aussi, revêt un intérêt considérable en finance.

Nous allons d'abord rappeler les versions standard de ces théorèmes de décompositions de surmartingales, et nous proposerons ensuite un nouveau théorème de décomposition des surmartingales de la classe  $(\mathcal{D})$  dans l'algèbre Max-Plus (notée  $\mathbb{R}_{\max}$ ). Il s'agit en quelque sorte d'une extension du théorème de Doob-Meyer puisque la représentation est additive dans  $\mathbb{R}_{\max}$ .

L'existence des processus associés à la décomposition Max-Plus sera étudiée au chapitre IV. Nous nous concentrerons plutôt ici sur les questions d'unicité. Ainsi, nous verrons que la martingale de la décomposition est unique, contrairement à ce qui se passe pour le processus croissant. Tout ce que l'on peut dire est que l'ensemble des processus croissants admissibles admet un élément maximal.

La décomposition Max-Plus sera également illustrée dans ce chapitre par des exemples liés à des surmartingales dégénérées, d'abord comme processus décroissant, ensuite comme martingale.

## II.2 Cadre

Nous donnons ici les notations et définitions qui seront utilisées tout au long de la thèse.

L'incertitude est modélisée par un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  satisfaisant les conditions usuelles :

- $\mathcal{F}_0$  contient les ensembles négligeables de  $\mathcal{F}$ .
- $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est une famille *croissante* de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ , i.e.  $\mathcal{F}_s$  est incluse dans  $\mathcal{F}_t$  si  $s \leq t$ . La famille  $\mathcal{F}_t$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , est appelée la tribu des événements antérieurs à  $t$  et on désigne par  $\mathcal{F}_\infty$  la tribu engendrée par toutes les sous-tribus  $\mathcal{F}_t$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on pose

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \quad \mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{s>t} \mathcal{F}_s,$$

où  $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$  par convention.

– La famille  $(\mathcal{F}_t)$  est *continue à droite*, i.e.  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ .

Nous supposons en outre que la famille  $(\mathcal{F}_t)$  est *quasi-continue à gauche*. Contrairement à la définition de la continuité à droite, cette notion fait intervenir des temps d'arrêt. En particulier, l'égalité pour tout temps constant  $t$  des tribus  $\mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{F}_{t-}$  est une propriété plus faible que la quasi-continuité à gauche.

Nous rappelons d'abord ici des définitions de tribus associées aux temps d'arrêt, puis la notion de quasi-continuité à gauche pour une famille de tribus.

### Définition II.1 (Tribus associées aux temps d'arrêt)

Soit  $T$  un temps d'arrêt de la famille  $(\mathcal{F}_t)$ .

(a) On appelle **tribu des événements antérieurs à  $T$**  la tribu  $\mathcal{F}_T$  formée par les éléments  $A$  de  $\mathcal{F}_\infty$  tels que

$$A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+.$$

(b) On appelle **tribu des événements strictement antérieurs à  $T$**  la tribu  $\mathcal{F}_{T-}$  engendrée par les éléments de  $\mathcal{F}_0$  et par les ensembles de la forme

$$A \cap \{t < T\} \quad \text{où } A \in \mathcal{F}_t \text{ et } t \in \mathbb{R}_+.$$

La tribu  $\mathcal{F}_T$  est donc définie globalement, tandis que la tribu  $\mathcal{F}_{T-}$  est définie par un système de générateurs stable pour  $(\cap f)$ .

### Remarque II.1

Dans la définition (b), on peut remplacer la condition " $A \in \mathcal{F}_t$ " par " $A \in \mathcal{F}_{t-}$ ", et même par " $A \in \cup_{s < t} \mathcal{F}_s$ ". En effet, si  $A$  appartient à  $\mathcal{F}_t$ , l'ensemble  $A \cap \{T > t\}$  est égal à la réunion des ensembles  $A \cap \{T > r\}$  lorsque  $r$  parcourt les rationnels  $> t$ , et  $A$  appartient à  $\cup_{s < r} \mathcal{F}_s$ .

Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [Del72] et [DM87b] pour de plus amples détails sur les tribus associées aux temps d'arrêt, la classification des temps d'arrêt et plus largement, la théorie générale des processus.

### Définition II.2

La famille de tribus  $(\mathcal{F}_t)$  est dite **quasi-continue à gauche** si, pour tout temps d'arrêt prévisible<sup>1</sup>  $\tau$ ,

$$\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\tau-}.$$

$\mathcal{F}_{\tau-}$  est appelée la **tribu des événements strictement antérieurs à  $\tau$** .

---

<sup>1</sup>La notion de temps d'arrêt prévisible sera rappelée au chapitre IV.

Le préfixe “quasi” rappelle que l'égalité de  $\mathcal{F}_{\tau-}$  et de  $\mathcal{F}_\tau$  n'est demandée que pour les temps d'arrêt prévisibles  $\tau$ . Il existe en effet des familles quasi-continues à gauche telles que l'égalité  $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\tau-}$  soit en défaut pour certains temps d'arrêt  $\tau$  non prévisibles.

On montre (voir [Del72] pour la démonstration) que la famille  $(\mathcal{F}_t)$  est quasi-continue à gauche si et seulement si, elle n'admet pas de temps de discontinuité :

$$\bigvee_n \mathcal{F}_{\tau_n} = \mathcal{F}_{(\lim \tau_n)},$$

si  $(\tau_n)$  est une suite croissante de temps d'arrêt.

Une famille de tribus quasi-continue à gauche est aussi caractérisée par le fait que toute martingale  $M$  est quasi-continue à gauche, c'est-à-dire  $\Delta M_\tau = 0$  p.s. pour tout temps d'arrêt prévisible  $\tau > 0$ .

Comme nous nous intéressons dans ce chapitre à la décomposition des surmartingales, il est essentiel de rappeler d'abord quelques notions relatives à la théorie des martingales et des surmartingales.

### Définition II.3

Un processus adapté réel  $Z = (Z_t)$  est une surmartingale (resp. martingale) si, pour chaque  $t$ ,  $Z_t$  est une variable aléatoire intégrable, et si, pour tout couple  $(s, t)$  tel que  $s \leq t$ , on a

$$Z_s \geq \mathbf{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] \text{ p.s.} \quad (\text{resp. } Z_s = \mathbf{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] \text{ p.s.}).$$

### Théorème II.2 (Régularité des trajectoires)

- Une surmartingale  $Z = (Z_t)$  admet une modification continue à droite si et seulement si la fonction  $t \mapsto \mathbf{E}[Z_t]$  est continue à droite. En particulier, toute martingale admet une modification continue à droite.
- Une surmartingale continue à droite admet p.s. des limites à gauche finies.

L'horizon du problème est un temps d'arrêt noté  $\zeta$  et peut être infini.

Les processus que nous considérons dans la thèse sont principalement de la classe  $(\mathcal{D})$ . Nous donnons ci-dessous leur définition (cf. [DM87a], définition 20, p.89).

### Définition II.4

Soit  $X$  un processus mesurable. On dit que  $X$  est borné dans  $L^1$  (par rapport à  $(\mathcal{F}_t)$ ) si le nombre

$$\|X\|_1 = \sup_T \mathbf{E}[|X_T| \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}]$$

est fini,  $T$  parcourant l'ensemble de tous les temps d'arrêt de  $(\mathcal{F}_t)$ . Si de plus toutes les variables aléatoires  $X_T \mathbf{1}_{\{T < \infty\}}$  sont uniformément intégrables, on dit que  $X$  appartient à la classe  $(\mathcal{D})$ .

On dit aussi qu'un processus adapté  $X$  est **de la classe**  $(\mathcal{D})$  si  $|X|$  est dominé par une martingale **uniformément intégrable**.

Rappelons ci-dessous la définition d'intégrabilité uniforme.

**Définition II.5 (Intégrabilité Uniforme)**

On dit qu'une famille de variables aléatoires  $(X_\alpha, \alpha \in I)$  est *uniformément intégrable* si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in I} \int_{\{|X_\alpha| \geq \alpha\}} |X_\alpha| d\mathbf{P} = 0.$$

Il est équivalent d'avoir les deux conditions suivantes :

- (a)  $\sup_{\alpha} \mathbf{E}[|X_\alpha|] < +\infty$  ;
- (b) pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que l'on ait

$$A \in \mathcal{F} \text{ et } \mathbf{P}(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{\alpha \in I} \mathbf{E}[\mathbf{1}_A \cdot |X_\alpha|] < \epsilon.$$

Une partie finie de  $L^1$  est uniformément intégrable, ainsi qu'une famille dominée dans  $L^1$ . Plus généralement, si  $\mathcal{H}$  est uniformément intégrable, et si une famille  $\mathcal{H}_1$  est telle que

$$\forall X \in \mathcal{H}_1, \exists Y \in \mathcal{H}, |X| \leq |Y|,$$

alors  $\mathcal{H}_1$  est uniformément intégrable.

Une surmartingale  $X = (X_t)$  sera alors dite uniformément intégrable si la famille  $(X_t)$  est uniformément intégrable.

Le critère suivant est très utile en pratique pour s'assurer de l'intégrabilité uniforme d'une famille.

**Proposition II.3 (Théorème De La Vallée Poussin)**

Une famille  $(X_\alpha, \alpha \in I)$  est *uniformément intégrable* si et seulement si il existe une fonction  $\Phi(x) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , croissante, telle que  $\frac{\Phi(x)}{x}$  converge vers  $+\infty$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , et telle que

$$\sup_{\alpha \in I} \mathbf{E}[\Phi(|X_\alpha|)] < +\infty.$$

Ainsi, une partie bornée dans  $L^p$  est uniformément intégrable dès que  $p > 1$ .

Notons que dans le cas particulier où  $X$  est une martingale continue à droite,  $X$  est de la classe  $(\mathcal{D})$  si et seulement si elle est uniformément intégrable.

Le théorème suivant donne un critère simple d'appartenance à la classe  $(\mathcal{D})$  pour les surmartingales positives, dû à Johnson et Helms [JH63].

**Théorème II.4**

Soient  $Z$  une surmartingale continue à droite positive et  $R_n(\omega) = \inf\{t : Z_t(\omega) \geq n\}$ . Alors  $Z$  appartient à la classe  $(\mathcal{D})$  si et seulement si  $\lim_n \mathbf{E}[Z_{R_n} \mathbf{1}_{\{R_n < \infty\}}] = 0$ .

Une surmartingale (resp. martingale)  $Z$  de la classe  $(\mathcal{D})$  est appelée une  $(\mathcal{D})$ -**surmartingale** (resp.  $(\mathcal{D})$ -**martingale**).

**II.3 Décompositions de surmartingales**

En 1937, Joseph Leo Doob a donné un cadre mathématique rigoureux de l'étude des processus stochastiques en temps discret et continu.

S'appuyant sur la théorie des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques et sur les travaux de Paul Lévy, Doob a créé la théorie des martingales et a développé nombre de ses applications.

En France, les travaux de Joseph Doob ont notamment beaucoup influencé les recherches de Paul-André Meyer, dont le livre "Probabilités et Potentiel" [DM87b] prolonge l'oeuvre de Doob. Un résultat, dû à Doob, puis étendu par P.-A. Meyer, d'une importance considérable dans l'étude des processus stochastiques, est la **décomposition additive** des surmartingales, appelée "**décomposition de Doob-Meyer**". Elle caractérise toute surmartingale de la classe  $(\mathcal{D})$  comme étant la différence unique entre une martingale locale et un processus prévisible croissant.

Récemment, pour des raisons liées à des problèmes d'optimisation en mathématiques financières, cette décomposition a été étendue à un processus définissant une surmartingale pour une famille infinie de mesures de probabilité équivalentes. Cependant El Karoui et Quenez [KQ95], et ensuite Kramkov [Kra96], ont établi qu'une telle décomposition n'a lieu qu'en relaxant la propriété de prévisibilité du processus croissant.

Pour différentes raisons, nous sommes concernés dans notre étude par une décomposition optionnelle de surmartingales, mais dans un sens différent.

Par ailleurs, la décomposition additive n'est pas la seule à présenter un intérêt. La **décomposition multiplicative** par exemple, a retenu beaucoup d'attention en mathématiques financières [Jam04]. Nous allons d'abord rappeler la version standard du théorème de décomposition de Doob-Meyer ([Mey73], [KS91], [DM87a] (Th 4.10, p. 24)).

**Théorème II.5**

Soit  $Z$  une  $(\mathcal{D})$ -surmartingale définie sur  $[0, \zeta]$ , où  $\zeta$  est un temps d'arrêt éventuellement infini.

1. Il existe un processus croissant  $A$  unique càdlàg (continu à droite, limité à gauche) prévisible, tel que  $A_0 = 0$ ,  $A_\zeta$  intégrable et

$$Z_t = \mathbf{E}[A_\zeta - A_t | \mathcal{F}_t] + \mathbf{E}[Z_\zeta | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq \zeta. \quad (\text{II.1})$$

2. De plus avec cette représentation, nous avons

$$Z_t + A_t = M_t^A, \quad 0 \leq t \leq \zeta. \quad (\text{II.2})$$

où le processus  $M^A$  défini par  $M_t^A = \mathbf{E}[A_\zeta + Z_\zeta | \mathcal{F}_t]$  est une  $(\mathcal{D})$ -martingale. Cette décomposition est unique (à des processus évanescents près).

3. En outre, si  $Z$  est quasi-continu à gauche, alors  $A$  est continu.

Comme mentionné précédemment, il existe d'autres décompositions relatives à des opérations différentes de l'addition, telle que la multiplication. On parle alors de décomposition multiplicative de surmartingales positives ([Jac78, Mem78]).

### Théorème II.6

Soit  $Z$  une  $(\mathcal{D})$ -surmartingale strictement positive.

1. Il existe un processus croissant  $B$  intégrable, prévisible tel que  $B_0 = 1$  et

$$Z_t = \mathbf{E}\left[Z_\zeta \times \frac{B_\zeta}{B_t} \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq \zeta. \quad (\text{II.3})$$

2. De plus avec cette représentation, nous avons

$$Z_t \times B_t = M_t^P, \quad 0 \leq t \leq \zeta. \quad (\text{II.4})$$

où  $M^P$  définie par  $M_t^P = \mathbf{E}[B_\zeta \times Z_\zeta | \mathcal{F}_t]$  est une  $(\mathcal{D})$ -martingale. Cette décomposition est unique (à des processus évanescents près).

Il est à noter qu'en raison de la non-linéarité de l'espérance conditionnelle par rapport à la multiplication, l'équation (II.3) ne peut pas s'écrire sous la forme

$$Z_t = \mathbf{E}\left[\frac{B_\zeta}{B_t} \middle| \mathcal{F}_t\right] \times \mathbf{E}[Z_\zeta | \mathcal{F}_t].$$

Intéressons-nous à présent à un nouveau type de décomposition relative à l'opération max, qui joue le rôle de l'addition dans le semi-corps Max-Plus  $\mathbb{R}_{\max} : x \oplus y = \max(x, y)$ . Le problème est alors de trouver un processus optionnel  $L$  tel que

$$Z_t = \mathbf{E}\left[\sup_{t \leq u \leq \zeta} L_u \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}\left[\bigoplus_t^\zeta L_u \middle| \mathcal{F}_t\right].$$



## II.4 Résultat Principal

Le théorème qui va suivre est le théorème principal du chapitre. Nous lui donnons une forme très semblable à celle du théorème II.5. La première partie est la version Max-Plus de la décomposition des surmartingales, exprimée en termes de running supremum (ou maximum glissant) d'un processus  $L$ . Contrairement à ce qui se passe avec la décomposition additive ou multiplicative (voir les équations (II.2) et (II.4)), ici l'identité  $\mathbf{E}[\Lambda_T | \mathcal{F}_t] = Z_t \oplus \Lambda_t$  n'est pas vraie à chaque instant  $t$  dans  $[0, \zeta]$ . Nous avons juste une inégalité.

Nous donnons ici une preuve partielle du théorème. L'existence d'un processus satisfaisant aux propriétés ci-dessous sera montrée au chapitre IV. Elle est établie dans le cas où le processus  $Z$  est quasi-continu à gauche, notion qui sera définie au chapitre IV. Nous étudions d'abord la question de l'unicité.

### Théorème II.7

Soit  $Z$  une  $(\mathcal{D})$ -surmartingale quasi-continue à gauche définie sur  $[0, \zeta]$ .

1.  $Z$  admet la décomposition Max-Plus suivante : pour tout temps d'arrêt  $S \leq \zeta$ ,

$$Z_S = \mathbf{E} \left[ \sup_{S \leq u \leq \zeta} L_u \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_S \right] = \mathbf{E} \left[ \oint_{[S, \zeta]} L_u \oplus Z_\zeta | \mathcal{F}_S \right], \quad (\text{II.5})$$

où  $L = (L_t)_{0 \leq t \leq \zeta}$  est un processus optionnel, semi-continu supérieurement à droite et vérifiant  $L_\zeta \leq Z_\zeta$ .

2. Soit  $L_{t,s}^*$  le running supremum (ou maximum glissant) càdlàg de  $L_u$  :  $L_{t,s}^* = \sup_{t \leq u \leq s} L_u = \oint_{[t,s]} L_u$ .

Définissons la  $(\mathcal{D})$ -martingale  $M^\oplus$  par

$$M_S^\oplus := \mathbf{E} [L_{0,\zeta}^* \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_S], \quad \text{pour tout temps d'arrêt } S \leq \zeta. \quad (\text{II.6})$$

Alors

$$M^\oplus \geq \max(Z, L_{0,\cdot}^*) = Z \oplus L_{0,\cdot}^*, \quad (\text{II.7})$$

et pour tout temps d'arrêt  $S \leq \zeta$ ,

$$L_S = L_{0,S}^* \Rightarrow M_S^\oplus = Z_S \oplus L_{0,S}^* = Z_S. \quad (\text{II.8})$$

Nous avons en particulier la condition de “flat-off” suivante :

$$\int_{[0, \zeta]} (M_s^\oplus - Z_s) dL_{0,s}^* = 0. \quad (\text{II.9})$$

3. Cette décomposition est unique au sens du théorème II.8 ci-dessous.

**Preuve - Preuve partielle -**

1. Voir Chapitre IV pour la construction du processus  $L_u$ .
2. Pour tout instant  $t$  dans  $[0, \zeta]$ , l'additivité  $\oplus$  de  $L^*$  entraîne que

$$\begin{aligned} M_t^\oplus &= \mathbf{E}[L_{0,\zeta}^* \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[L_{0,t}^* \vee L_{t,\zeta}^* \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t] \\ &\geq L_{0,t}^* \vee \mathbf{E}[L_{t,\zeta}^* \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t] = L_{0,t}^* \vee Z_t. \end{aligned}$$

De plus, si  $S$  est un temps d'arrêt où  $L_S = L_{0,S}^*$ , alors  $L_{0,\zeta}^* = L_{S,\zeta}^*$  et par conséquent

$$M_S^\oplus = \mathbf{E}[L_{0,\zeta}^* \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_S] = \mathbf{E}[L_{S,\zeta}^* \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_S] = Z_S. \quad \blacksquare$$

La représentation II.5 du théorème précédent est une décomposition additive de surmartingale dans la structure algébrique  $\mathbb{R}_{\max}$ , analogue à celle de Doob-Meyer. Cependant, le processus croissant ici est seulement optionnel et non forcément prévisible. Cette restriction est semblable à celle qui figure dans la décomposition de Kramkov [Kra96].

Notons également que contrairement à ce qui se passe dans la décomposition Max-Plus, dans les décompositions précédentes l'égalité  $M_S^A = Z_S$ , où  $M^A$  est la martingale de la décomposition additive de Doob-Meyer (resp.  $M_S^P = Z_S$ , où  $M^P$  est la martingale de la décomposition additive) est uniquement vraie jusqu'au premier temps d'arrêt où le processus croissant  $A$  (resp.  $B$ ) commence à croître.

## II.5 Résultat d'unicité

Pour l'unicité, il n'est pas nécessaire de supposer a priori que le processus croissant intervenant dans la décomposition Max-Plus est un running supremum. Seule la condition de "flat-off" (II.9) est requise.

**Théorème II.8 (Unicité)**

*Soit  $Z$  une  $(\mathcal{D})$ -surmartingale. Supposons qu'il existe une  $(\mathcal{D})$ -martingale  $M$  avec  $M_0 = Z_0$ , et un processus croissant càdlàg adapté  $\Lambda$  à valeurs dans  $[-\infty, +\infty)$ , tel que, presque sûrement,*

$$M_t \geq Z_t \quad \forall t \in [0, \zeta], \quad M_\zeta = \Lambda_\zeta \vee Z_\zeta. \tag{II.10}$$

Supposons en outre que  $\Lambda$  croît uniquement aux instants  $t \leq \zeta$  où  $M_t = Z_t$ . Autrement dit,  $\Lambda$  satisfait la “condition de flat-off”

$$\int_{[0, \zeta]} (M_t - Z_t) d\Lambda_t = 0, \quad p.s. \quad (\text{II.11})$$

Alors la martingale  $M$  est unique et notée  $M^\oplus$  dans la suite.

De plus, étant donnée une telle martingale  $M^\oplus$ , l'ensemble  $\mathcal{K}$  des processus croissants  $\Lambda$  vérifiant (II.10) et (II.11), admet un élément maximal qui vérifie également la condition (II.11). On le note  $\Lambda^{\max}$ .

### Remarque II.9

(a) Lorsque  $\Lambda$  est un running supremum de la forme  $L_{0,t}^* = \sup_{0 \leq s \leq t} L_s$ ,  $\Lambda$  ne croît qu'aux instants  $t$  tels que  $L_{0,t}^* = L_t$ . Ainsi la “condition de flat-off” imposant que  $M_t^\oplus = Z_t$  aux points de croissance de  $\Lambda$ , entraîne la condition (II.8) du théorème II.7.

(b) A la maturité, la “condition de flat-off” implique que sur le sous-ensemble  $\{\Lambda_\zeta > \Lambda_{\zeta-\epsilon}, \forall \epsilon > 0\}$ ,  $\Lambda_\zeta \leq Z_\zeta$  puisque  $M_\zeta^\oplus = Z_\zeta$ . Cette inégalité est encore vraie si  $\Lambda_\zeta^+ > \Lambda_\zeta$ , où  $\Lambda_\zeta^+ := \Lambda_\zeta \vee Z_\zeta$ .

(c) Si  $Z$  est minoré par un réel  $c$ , la martingale  $M^\oplus$  l'est aussi et le processus croissant  $\Lambda \oplus c$  satisfait aux conditions (II.7) et (II.8).

### Remarque II.10 (Programmation Dynamique)

La décomposition de Doob-Meyer est indépendante de la maturité puisque pour tout temps d'arrêt  $\tau$  dans  $[0, \zeta]$ ,

$$Z_t = \mathbf{E}[A_\tau - A_t | \mathcal{F}_t] + \mathbf{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_t].$$

Il paraît donc naturel d'étudier le rôle de la maturité dans la décomposition Max-Plus de  $Z$ . Le processus  $L$  et la martingale  $M^\oplus$  dépendent a priori de la maturité  $\zeta$ , et en les indexant par  $\zeta$ , la décomposition Max-Plus de  $Z$  devient

$$Z_t = \mathbf{E}\left[ \sup_{t \leq u \leq \zeta} L_u^\zeta \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t \right],$$

et les conditions sur  $L^\zeta$  et  $M^{\oplus, \zeta}$  sont

$$M_t^{\oplus, \zeta} \geq Z_t \quad \forall t \in [0, \zeta], \quad M_\zeta^{\oplus, \zeta} = L_{0, \zeta}^{*, \zeta} \vee Z_\zeta \quad \text{et} \quad \int_0^\zeta (M_t^{\oplus, \zeta} - Z_t) dL_{0,t}^{*, \zeta} = 0.$$

Considérons une nouvelle maturité  $\tau$ , où  $\tau$  est un temps d'arrêt quelconque dans  $[0, \zeta]$ , et intéressons-nous à la décomposition Max-Plus de  $Z$  sur  $[0, \tau]$  :

$$Z_t = \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq u \leq \tau} L_u^\tau \vee Z_\tau \mid \mathcal{F}_t \right].$$

$M^{\oplus, \zeta}$  et  $L_{0, \cdot}^{*, \zeta}$  vérifient les deux conditions

$$M_t^{\oplus, \zeta} \geq Z_t \quad \forall t \in [0, \tau] \quad \text{et} \quad \int_0^\tau (M_t^{\oplus, \zeta} - Z_t) dL_{0, t}^{*, \zeta} = 0.$$

Le seul problème qui subsiste est la condition terminale  $M_\tau^{\oplus, \zeta} = L_{0, \tau}^{*, \zeta} \vee Z_\tau$ , qui n'est pas forcément vérifiée par  $M^{\oplus, \zeta}$  et  $L_{0, \cdot}^{*, \zeta}$ .

Donc si  $\tau$  est un temps d'arrêt tel que  $M_\tau^{\oplus, \zeta} = Z_\tau \oplus L_{0, \tau}^{*, \zeta}$ , alors  $M^{\oplus, \zeta}$  est également la martingale de la décomposition Max-Plus de  $Z$  sur l'intervalle  $[0, \tau]$ .

Par contre ce résultat n'est plus vrai si  $M_\tau^{\oplus, \zeta} > Z_\tau \oplus L_{0, \tau}^{*, \zeta}$ , puisque la condition terminale n'est pas satisfaite.

Ainsi à la différence des autres décompositions de surmartingales où pour tout temps d'arrêt  $\tau$ , la décomposition sur  $[0, \zeta]$  est la même que celle sur  $[0, \tau]$ . Ici, ce résultat est uniquement valable si  $M_\tau^\oplus = Z_\tau \vee L_{0, \tau}^*$ .

Avant d'établir le résultat d'unicité, donnons quelques exemples associés à des surmartingales dégénérées, d'abord comme processus décroissant et ensuite comme martingale.

### Exemple II.11

(a) CAS D'UN PROCESSUS DÉCROISSANT.

Si  $Z$  est un processus décroissant adapté intégrable, alors pour tout  $t \in [0, \zeta]$

$$M_t^\oplus = \Lambda_t^{\max} = Z_0, \quad p.s.$$

En effet, il est aisé de voir que  $Z_0$  est une martingale vérifiant la décomposition Max-Plus de  $Z$ . C'est aussi la seule candidate puisque la martingale de la décomposition est unique.

(b) CAS D'UNE MARTINGALE.

Si  $Z$  est une martingale, alors pour tout  $t \in [0, \zeta]$

$$M_t^\oplus = Z_t \quad \text{et} \quad \Lambda_t^{\max} \leq Z_t = \mathbf{E}[Z_\zeta \mid \mathcal{F}_t].$$

Ainsi  $\Lambda^{\max}$  est le plus grand processus croissant càdlàg dominé par  $Z$ . Il s'agit de l'infimum conditionnel de la variable aléatoire  $Z_\zeta$  par rapport à la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}_t$  :

$$\Lambda_t^{\max} = \mathcal{F}_t\text{-ess inf}\{Z_\zeta\} = \text{ess sup}\{Y_t \in \mathcal{F}_t \mid Y_t \leq Z_\zeta \text{ p.s.}\} \quad \forall t \in [0, \zeta].$$

En effet, définissons pour  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $\Lambda_r^{\max}$  comme l'infimum conditionnel de  $Z_\zeta$  par rapport à  $\mathcal{F}_r$ . La suite  $(\Lambda_r^{\max})_{r \in \mathbb{Q}}$  est croissante avec  $\Lambda_t^{\max}$  comme régularisée à droite. Il est clair que  $\Lambda_t^{\max} \leq \mathbf{E}(Z_\zeta | \mathcal{F}_t) = Z_t$ . De plus, si  $\Lambda$  est un processus croissant càdlàg tel que  $\Lambda_t \leq \Lambda_\zeta \leq Z_\zeta$ , alors  $\Lambda_t \leq \Lambda_t^{\max}$ .

### Remarque II.12

L'infimum conditionnel est défini par E. N. Barron, P. Cardaliaguet et R. Jensen [BCJ03]. Le concept de **maxingale** est également introduit, en liaison avec l'infimum conditionnel par rapport à une filtration, et utilisé pour développer la nouvelle théorie d'arrêt optimal dans  $L^\infty$ , ainsi que le concept de temps d'arrêt **absolument optimal**.

Dans notre cas,  $\Lambda^{\max}$  est une maxingale puisque  $\Lambda_t^{\max} = \mathcal{F}_t\text{-ess inf}\{\Lambda_\zeta^{\max}\}$ , presque sûrement, pour tout  $t \in [0, \zeta]$ .

Contrairement aux martingales, il s'avère que les maxingales sont plus simples à analyser car elles convergent toujours fondamentalement. Notons également que ces processus sont différents de ceux qui apparaissent dans la théorie de Fleming ou de Puhalskii [Fle04, Puh01]. En effet, ce n'est pas la probabilité Max-Plus<sup>2</sup> qui est employée ici mais plutôt la probabilité usuelle.

La preuve de l'unicité est essentiellement basée sur l'observation que  $M_\zeta$  est égale à la valeur terminale  $\Lambda_\zeta^+$  d'un processus croissant. Ce type d'argument a été introduit pour la première fois par N. El Karoui et M. Jeanblanc-Picqué dans [KJP98]. Il apparaît aussi dans les papiers [KJPL05] de N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picqué et V. Lacoste, ainsi que [BK04] de P. Bank et N. El Karoui.

### Preuve - Preuve du théorème II.8 -

Nous utilisons ici la notation  $\Lambda^+$ , introduite dans la remarque II.9, pour désigner le processus  $\Lambda$  qui saute en  $\zeta$ .  $\Lambda^+$  est défini par  $\Lambda_t^+ = \Lambda_t$  pour  $t < \zeta$  et  $\Lambda_\zeta^+ = \Lambda_\zeta \vee Z_\zeta$ . Il satisfait encore à la condition de "flat-off".

Supposons qu'il existe deux décompositions  $(M^1, \Lambda^{+,1})$  et  $(M^2, \Lambda^{+,2})$  vérifiant les conditions précédentes (II.10) et (II.11). Par souci de simplicité, nous supposons d'abord que  $\Lambda_0^{+,1}$  et  $\Lambda_0^{+,2}$  sont finis (notons que cette hypothèse est automatiquement satisfaite si la surmartingale  $Z$  est minorée). Ensuite à la fin de la preuve, nous montrerons que cette hypothèse artificielle peut être levée.

---

<sup>2</sup>La probabilité Max-Plus sera introduite au chapitre suivant I.

(a) Soit  $f$  une fonction arbitraire positive, régulière et convexe dans  $\mathcal{C}_b^2$ , nulle en zéro (par exemple, la régularisée  $\mathcal{C}^2$ -bornée de  $x \mapsto x^+$  sur les intervalles de la forme  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  et  $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}] \cup [\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$  ( $\varepsilon > 0$ )). Comme  $f(0) = 0$ , la convexité de  $f$  entraîne que

$$f(M_\zeta^1 - M_\zeta^2) \leq f'(M_\zeta^1 - M_\zeta^2) (M_\zeta^1 - M_\zeta^2) = f'(\Lambda_\zeta^{+,1} - \Lambda_\zeta^{+,2}) (M_\zeta^1 - M_\zeta^2). \quad (\text{II.12})$$

Nous allons utiliser la règle différentielle classique pour les processus à variation finie. Pour cela, il convient d'introduire la dérivée discrète de  $f'$ ,  $f_d''$  comme

$$\begin{cases} f_d''(x, \delta) = \frac{1}{\delta}(f'(x + \delta) - f'(x)), & \text{si } \delta \neq 0 \\ f_d''(x, 0) = f''(x), & \text{si } \delta = 0 \end{cases}$$

Nous poserons dans la suite,

$$\Delta_s^{1,2} = (\Lambda_s^{+,1} - \Lambda_s^{+,2}) - (\Lambda_{s^-}^{+,1} - \Lambda_{s^-}^{+,2}), \quad \text{pour } s \in (0, \zeta].$$

Il vient donc

$$f'(\Lambda_\zeta^{+,1} - \Lambda_\zeta^{+,2}) = f'(\Lambda_0^{+,1} - \Lambda_0^{+,2}) + \int_{(0, \zeta]} f_d''(\Lambda_{s^-}^{+,1} - \Lambda_{s^-}^{+,2}, \Delta_s^{1,2}) d(\Lambda_s^{+,1} - \Lambda_s^{+,2}).$$

La fonction  $f_d''$  est positive et bornée, puisque  $f$  est convexe régulière dans  $\mathcal{C}_b^2$ . Comme nous n'avons pas réellement besoin de la forme explicite de  $f_d''$ , nous introduisons la notation

$$\tilde{f}_d''(s) := f_d''(\Lambda_{s^-}^{+,1} - \Lambda_{s^-}^{+,2}, \Delta_s^{1,2}).$$

Notons également que la valeur courante de la martingale uniformément intégrable  $M^1 - M^2$  à chaque instant  $s$  est simplement l'espérance conditionnelle de sa valeur terminale par rapport à la filtration  $\mathcal{F}_s$ . D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f'(\Lambda_\zeta^{+,1} - \Lambda_\zeta^{+,2})(M_\zeta^1 - M_\zeta^2)] &= \mathbf{E}[f'(\Lambda_0^{+,1} - \Lambda_0^{+,2})(M_\zeta^1 - M_\zeta^2)] \\ &\quad + \mathbf{E}\left[\int_{(0, \zeta]} (M_s^1 - M_s^2) \tilde{f}_d''(s) d(\Lambda_s^{+,1} - \Lambda_s^{+,2})\right]. \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\Lambda^{+,1}$  (resp.  $\Lambda^{+,2}$ ) ne croît qu'aux instants  $t \leq \zeta$  où  $M_t^1 = Z_t$  (resp.  $M_t^2 = Z_t$ ). Par suite,

$$\begin{aligned} &\int_{(0, \zeta]} (M_s^1 - M_s^2) \tilde{f}_d''(s) d(\Lambda_s^{+,1} - \Lambda_s^{+,2}) \\ &= \int_{(0, \zeta]} \tilde{f}_d''(s) ((Z_s - M_s^2) d\Lambda_s^{+,1} - (M_s^1 - Z_s) d\Lambda_s^{+,2}) \leq 0. \end{aligned}$$

Ces considérations conduisent donc à l'inégalité :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f'(\Lambda_\zeta^{+,1} - \Lambda_\zeta^{+,2})(M_\zeta^1 - M_\zeta^2)] &\leq \mathbf{E}[f'(\Lambda_0^{+,1} - \Lambda_0^{+,2})(M_\zeta^1 - M_\zeta^2)] \\ &= \mathbf{E}[f'(\Lambda_0^{+,1} - \Lambda_0^{+,2})(M_0^1 - M_0^2)] = 0. \end{aligned}$$

L'inégalité (II.12) entraîne que

$$\mathbf{E}[f(M_\zeta^1 - M_\zeta^2)] \leq 0,$$

pour toute fonction convexe  $f$  dans  $\mathcal{C}_b^2$ . Il en découle immédiatement que  $M^1 = M^2$ .

(b) Dans le cas où  $\Lambda_0^1$  et  $\Lambda_0^2$  sont infinis, il suffit juste de poser que  $-\infty + \infty = 0$ .

(c) Considérons l'ensemble des processus croissants de  $\mathcal{K}$  vérifiant

$$\int_{[0,\zeta]} (M_t^\oplus - Z_t) d\Lambda_t^+ = 0, \quad M_\zeta^\oplus = \Lambda_\zeta^+ = \Lambda_\zeta \vee Z_\zeta.$$

Cet ensemble est stable par rapport à l'addition Max-Plus. En effet, si  $M_\zeta^\oplus = \Lambda_\zeta^1 \vee Z_\zeta = \Lambda_\zeta^2 \vee Z_\zeta$ , la même égalité a lieu pour  $\Lambda^1 \vee \Lambda^2$  comme nous avons vu dans l'exemple I.6 qui résout une équation linéaire (I.6) dans l'algèbre Max-Plus.

De plus, comme  $\Lambda^{+,1}$  et  $\Lambda^{+,2}$  ne croissent qu'aux instants  $t$  où  $M_t^\oplus = Z_t$ , le processus  $\Lambda^{+,1} \vee \Lambda^{+,2}$  satisfait également la même propriété.

L'idée maintenant est d'introduire le supremum essentiel de cette famille de processus croissants. Pour cela, on pose pour tout  $r \in \mathbb{Q}^+$ ,

$$\widetilde{\Lambda}_r = \text{ess sup} \{ \Lambda_r; \Lambda \in \mathcal{K} \}.$$

La famille  $(\widetilde{\Lambda}_r)_{r \in \mathbb{Q}^+}$  est clairement croissante, et pour tout réel  $t$  dans  $[0, \zeta)$ , on définit la régularisée à droite de  $\widetilde{\Lambda}_r$  :  $\Lambda_t^{\max} = \lim_{r \downarrow t} \widetilde{\Lambda}_r$ .

■

# Références bibliographiques

## Chapitre II

- [BCJ03] E. N. Barron, P. Cardaliaguet and R. Jensen, “Conditional essential suprema with applications”, *Applied Mathematics and Optimization* **48** (2003), no. 3, pp. 229–253.
- [BK04] P. Bank and N. El Karoui, “A stochastic representation theorem with applications to optimization and obstacle problems”, *Annals of Probability* **32** (2004), no. 1B, pp. 1030–1067.
- [Del72] C. Dellacherie, *Capacités et Processus Stochastiques*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1972.
- [DM87a] C. Dellacherie and P. Meyer, *Probabilités et Potentiel, Chapitre VI : Théorie des Martingales : Martingales en Temps Continu*, Hermann, Paris, 1987.
- [DM87b] ———, *Probabilités et Potentiel. Théorie des Martingales*, Hermann, Paris, 1987.
- [Fle04] W. H. Fleming, “Max-Plus stochastic processes”, *Applied Mathematics and Optimization* **49** (2004), no. 2, pp. 159–181.
- [Jac78] J. Jacod, “Projection prévisible et décomposition multiplicative d’une semi-martingale positive”, *Université de Strasbourg - Séminaire de Probabilités (1977/78)*.
- [Jam04] F. Jamshidian, “Numeraire-invariant option pricing and American, bermudan and trigger stream rollover”, Working Paper, NIB Capital Bank (July 2004).
- [JH63] G. Johnson and L.L. Helms, “Class (d) supermartingales”, *Bulletin of the AMS* **69** (1963), pp. 59–62.
- [KJP98] N. El Karoui and M. Jeanblanc-Picqué, “Optimization of consumption with labor income”, *Finance and Stochastics* **2** (1998), no. 4, pp. 409–440.



- [KJPL05] N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picqué and V. Lacoste, “Optimal portfolio management with American capital guarantee”, *Journal of Economic Dynamics and Control* **29** (2005), pp. 449–468.
- [KQ95] N. El Karoui and M. C. Quenez, “Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market”, *SIAM Journal of Control and Optimization* **33(1)** (1995), pp. 29–66.
- [Kra96] D. O. Kramkov, “Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets”, *Probability Theory and Related Fields* **105** (1996), pp. 459–479.
- [KS91] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New-York, 1988, 1991.
- [Mem78] J. Memin, “Décompositions multiplicatives de semi-martingales exponentielles et applications”, Université de Strasbourg - Séminaire de Probabilités (1977/78).
- [Mey73] P. A. Meyer, “Une représentation de surmartingales”, Université de Strasbourg - Séminaire de Probabilités (1972/73).
- [Puh01] A. Puhalskii, *Large Deviations and Idempotent Probability*, Chapman and Hall CRC Press, May 2001.

# Généralisation du point de vue de Darling-Liggett-Taylor

---

## Résumé

Nous généralisons dans ce chapitre les travaux de Darling, Liggett et Taylor qui ont traité dans leur papier [DLT72] le problème d'un Call Américain écrit sur une somme partielle de variables aléatoires i.i.d. de drift négatif, et caractérisé des temps d'arrêt optimaux en termes du running supremum du sous-jacent.

Nous considérons donc un Call Américain écrit sur un sous-jacent surmartingale  $Z$ , qui se représente dans l'algèbre Max-Plus à l'aide du running supremum d'un certain processus indice  $L$ . Nous montrons que le problème de trouver un temps d'arrêt optimal admet une solution universelle explicite (par rapport au strike) qui s'exprime en fonction de  $L$ . Le calcul de la fonction valeur devient donc complètement inutile pour résoudre le problème d'option Américaine.

Nous présentons ensuite quelques exemples illustratifs basés sur des sous-jacents modélisés par des processus de Lévy (multiplicatifs et additifs). La décomposition Max-Plus est en effet immédiate pour cette classe de processus.

Le chapitre s'achève par une méthode numérique d'approximation de la frontière d'exercice pour un Put Américain écrit sur un Brownien géométrique. Cette méthode repose sur la décomposition Max-Plus et la symétrie Call-Put.

## III.1 Introduction

Les mathématiques financières ont popularisé un certain type de problèmes d'arrêt optimal, appelé options Américaines. Ces options peuvent être exercées à tout moment avant leur échéance.

Pour valoriser une option Américaine, il est crucial de déterminer les conditions sous lesquelles l'option doit être exercée. La théorie moderne des options affirme qu'il existe une frontière telle qu'il est optimal pour le détenteur de l'option d'exercer son droit dès que les valeurs des biens sous-jacents traversent cette frontière. Pour les options d'achat ou de vente portant sur un seul bien, cette frontière est simplement une fonction du temps appelée prix critique. Si l'on connaît cette frontière, valoriser une option Américaine revient alors à valoriser une option Européenne car la date d'exercice est bien déterminée. Cependant, on n'est pas capable en général de donner une formule explicite décrivant la frontière d'exercice.

Nous généralisons dans ce chapitre les idées de Darling, Liggett et Taylor, qui ont considéré dans leur papier [DLT72] des Calls Américains écrits sur des sommes partielles  $S_n$  de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de drift négatif. Ils ont accordé une grande importance au "running supremum" du sous-jacent  $S_n$ . Ils ont en effet exprimé des temps d'arrêt optimaux et le prix de l'option Américaine en fonction de ce running supremum.

Ainsi, à partir d'une représentation de surmartingale en termes de running supremum d'un certain processus indice  $L$ , nous caractérisons en premier lieu un temps d'arrêt optimal à l'aide de  $L$ , et nous représentons la fonction valeur en fonction du running supremum de  $L$ .

Ensuite, nous étudions les Calls Américains écrits sur des surmartingales  $Z$  définissant des processus de Lévy, ou encore des processus à accroissements (additifs ou multiplicatifs) indépendants stationnaires. Ces processus ont en effet de nombreuses propriétés intéressantes et constituent un domaine d'étude en plein développement. Ce sont également de beaux exemples où la décomposition Max-Plus est quasi-immédiate. Nous présentons dans le chapitre quelques exemples illustratifs, montrant que le problème de Call Américain peut se résoudre entièrement dans ces cas, sans avoir à calculer le prix explicite.

Quant à la dernière partie du chapitre, elle suggère une approximation numérique pour calculer la frontière d'une option Américaine écrite sur un Brownien géométrique. Notre outil principal est la décomposition Max-Plus des surmartingales et la symétrie Call-Put.

## III.2 Décomposition Max-Plus et Calls Américains

Comme il a déjà été mentionné, Darling, Liggett et Taylor ont traité en 1972 un problème d'option Américaine lorsque le sous-jacent  $S_n$  est une marche aléatoire de la forme

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad S_0 = 0,$$

$X_1, X_2, \dots$  étant des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que  $\mathbf{E}[X_1] = -\mu < 0$  et  $\mathbf{E}[X^2] = \sigma^2 + \mu^2 < \infty$ . Darling et ses co-auteurs ont particulièrement résolu dans leur papier [DLT72] le problème de trouver un temps d'arrêt  $T^*$  parmi tous les temps d'arrêt  $T$  relatifs à  $(S_n)$ , qui maximise l'espérance du gain

$$\mathbf{E}[(x + S_T)^+].$$

Ils ont montré que la stratégie optimale consiste à s'arrêter au premier instant  $n$  s'il existe, pour lequel  $x + S_n \geq \mathbf{E}[M]$ , avec  $M = \max\{S_0, S_1, \dots\}$ . Avec ce temps d'arrêt optimal  $T^*$ , le gain espéré optimal vaut

$$\mathbf{E}[(x + S_{T^*})^+] = \mathbf{E}[(x + M - \mathbf{E}[M])^+].$$

Considérons un modèle en finance où  $x + S_n$  représente le prix du marché d'un actif donné à la date  $n$  et considérons une option qui permet à son détenteur d'acheter à tout moment cet actif à un prix normalisé à zéro et de le revendre au prix du marché. Il s'agit donc pour le détenteur de l'option de trouver le meilleur moment pour exercer son option afin d'optimiser son gain. Ce problème d'option Américaine n'est qu'une interprétation financière du problème d'arrêt de Darling-Liggett-Taylor, et dans ce contexte ne jamais s'arrêter équivaut à ne jamais exercer l'option Américaine.

En 2002, E. Mordecki a généralisé dans son article [Mor02] les travaux de Darling et de ses co-auteurs à un marché de Lévy à temps continu, par approximation à partir du temps discret. Il a ainsi considéré des Calls Américains perpétuels écrits sur des sous-jacents dirigés par des processus de Lévy et explicité le prix de ces options en termes du supremum des processus de Lévy.

Nous nous proposons à notre tour de généraliser les idées précédentes dans le théorème III.1, en considérant un Call Américain écrit sur un sous-jacent surmartingale  $Z$  de la classe  $(\mathcal{D})$ , mais non forcément régi par un processus de Lévy. Nous nous basons pour cela sur la représentation de  $Z$  sous forme d'espérance conditionnelle d'un certain running supremum. Afin de résoudre un problème d'optimisation de consommation dépendant du passé, P. Bank et H. Föllmer ont donné le même genre de représentation de la fonction valeur dans [Bl03], en partant d'une autre décomposition (voir la remarque III.10), qui ne couvre pas le cas décrit ici.

**Théorème III.1**

Soit  $Z$  une surmartingale quasi-continue à gauche de la classe  $(\mathcal{D})$  admettant la décomposition Max-Plus suivante en termes d'un processus  $(L_t)$  semi-continu supérieurement à droite :

$$Z_t = \mathbf{E}[\sup_{t \leq s \leq \zeta} L_s \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[L_{t,\zeta}^* \oplus Z_\zeta | \mathcal{F}_t].$$

Le problème de trouver un temps d'arrêt optimal  $\tau_t^*(m)$  au Call Américain  $C^{Am}(Z, m)$  écrit sur  $Z$ , de prix d'exercice  $m$  :

$$C_t^{Am}(Z, m) = \text{ess sup}_{t \leq s \leq \zeta} \mathbf{E}[(Z_s - m)^+ | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[(Z_{\tau_t^*(m)} - m)^+ | \mathcal{F}_t],$$

admet une solution universelle explicite (par rapport au prix d'exercice  $m \geq 0$ ) donnée par

$$\tau_t^*(m) = T_t(m) \wedge \zeta := \inf\{s \geq t; L_{t,s}^* \geq m\} \wedge \zeta = \inf\{s \geq t; L_s \geq m\} \wedge \zeta. \quad (\text{III.1})$$

De plus, le Call Américain  $C^{Am}(Z, m)$  est explicitement caractérisé comme une option Lookback :

$$C_t^{Am}(Z, m) = \mathbf{E}[(L_{t,\zeta}^* \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[(\sup_{t \leq s \leq \zeta} L_s \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_t], \quad t \leq \zeta. \quad (\text{III.2})$$

Ainsi grâce à l'équation (III.1) reliant le temps d'arrêt optimal  $T_t(m)$  au processus indice  $L_t$ , nous n'avons pas besoin de calculer la fonction valeur pour résoudre le problème d'arrêt optimal, si nous disposons de la décomposition Max-Plus de  $Z$ .

Le point clé est que le conditionnement par  $\mathcal{F}_S$  peut être omis dans la représentation Max-Plus de  $Z_S$  et nous pouvons donc remplacer  $Z$  par  $L_{\cdot,\zeta}^*$  dans le calcul du prix du Call Américain.

**Preuve - III.1 -**

Observons tout d'abord que le processus  $(\mathbf{E}[(L_{t,\zeta}^* \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_t])_{t \in [0, \zeta]}$  est l'espérance conditionnelle d'un processus décroissant et définit donc une surmartingale. De plus, en remarquant que  $Z_S = \mathbf{E}[L_{S,\zeta}^* \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_S]$  pour tout temps d'arrêt  $S \leq \zeta$  et  $\mathbf{E}[(X - m)^+] \geq (\mathbf{E}[X] - m)^+$  pour toute variable aléatoire  $X$ , il vient pour tout temps d'arrêt  $S \leq \zeta$

$$\mathbf{E}[(L_{S,\zeta}^* \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_S] \geq (\mathbf{E}[L_{S,\zeta}^* \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_S] - m)^+ = (Z_S - m)^+.$$

Par conséquent, la surmartingale  $(\mathbf{E}[(L_{t,\zeta}^* \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_t])_{t \in [0, \zeta]}$  domine le processus  $(Z_t - m)^+$  et forcément aussi son enveloppe de Snell  $C_t^{Am}(Z, m)$ .

Introduisons  $T_t(m)$  comme le premier temps d'arrêt après  $t$ , où le processus  $(L_{t,u}^*)_{u \geq t}$  dépasse  $m$  :

$$T_t(m) := \inf\{s \in [t, \zeta]; L_{t,s}^* \geq m\}, \quad = \infty^+ \text{ si l'ensemble est vide.}$$

La notation  $\infty^+$  désigne ici un “deuxième infini” permettant aux temps d'arrêt de sévanouir.

Sur l'ensemble  $\{T_t(m) \leq \zeta\}$ ,  $L_{T_t(m),\zeta}^* \vee Z_\zeta = L_{t,\zeta}^* \vee Z_\zeta \geq m$  et par suite

$$Z_{T_t(m)} = \mathbf{E}[L_{T_t(m),\zeta}^* \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_{T_t(m)}] \geq m, \quad \text{sur } \{T_t(m) \leq \zeta\}.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(L_{t,\zeta}^* \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{T_t(m) \leq \zeta\}} (L_{T_t(m),\zeta}^* \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{T_t(m) \leq \zeta\}} (L_{T_t(m),\zeta}^* \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_{T_t(m)}] | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{T_t(m) \leq \zeta\}} \mathbf{E}[L_{T_t(m),\zeta}^* \vee Z_\zeta - m | \mathcal{F}_{T_t(m)}] | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{T_t(m) \leq \zeta\}} (Z_{T_t(m)} - m) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{E}[(Z_{T_t(m) \wedge \zeta} - m)^+ | \mathcal{F}_t], \quad \text{p.s.,} \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du fait que  $Z_{T_t(m) \wedge \zeta} - m$  est négatif si  $T_t(m) = \infty^+$ . Ainsi  $\mathbf{E}[(L_{t,\zeta}^* \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[(Z_{T_t(m) \wedge \zeta} - m)^+ | \mathcal{F}_t] \leq C_t^{\text{Am}}(Z, m)$  par définition de l'enveloppe de Snell. Ceci achève la preuve puisque l'inégalité réciproque a déjà été montrée. ■

Les surmartingales  $Z$  qui sont des processus de Lévy, ou encore des processus à accroissements (additifs ou multiplicatifs) indépendants stationnaires, nous fournissent de beaux exemples où la décomposition Max-Plus est immédiate. Nous présentons dans ce qui suit quelques exemples illustratifs, montrant que le problème de Call Américain peut se résoudre complètement sans avoir besoin du prix explicite. Nous avons juste à calculer l'espérance du running supremum de  $Z$ , et non sa distribution de probabilité.

### III.3 Processus de Lévy

Pour valoriser et couvrir les produits financiers, il est crucial d'avoir un bon modèle pour la distribution de probabilité de l'actif sous-jacent. Le modèle le plus célèbre à temps continu est le fameux modèle de Black-Scholes qui modélise les logarithmes des rendements du sous-jacent par une loi Normale.

Cependant, un des problèmes majeurs du modèle de Black-Scholes est que les logarithmes des rendements de la plupart des actifs financiers rencontrés en réalité (actions, indices, ...) ne suivent pas une loi Normale. Leurs courbes de distribution présentent des asymétries (par exemple plus de gros rendements négatifs que ce qui résulte de la distribution Normale) et des queues plus épaisses que la loi Normale, symptomatiques de la discontinuité des prix (plus de rendements exceptionnellement élevés dans l'absolu, ainsi que de faibles rendements dans l'absolu, et trop peu de rendements moyens par rapport à ce qui est stipulé par la loi Normale).

Ainsi, les sauts dans la dynamique des prix sont bien une réalité du marché et pas seulement un outil mathématique. Il est évident qu'une dynamique de ce type ne peut pas être modélisée correctement par un processus aléatoire continu. En même temps, c'est à ces grands changements imprévisibles dans les prix qu'est associée la partie majeure des pertes liées à l'actif financier. Il est donc important de les prendre en compte et de trouver d'autres distributions plus flexibles pour une gestion efficace du risque.

L'introduction des processus de Lévy dans la modélisation financière (depuis les années 80-90) s'est révélée être une méthode naturelle et efficace pour expliquer l'observation de mouvements de grande amplitude dans les marchés. Ces processus fournissent en effet une classe de modèles avec sauts, à la fois assez riche pour bien décrire les données empiriques et assez simple pour faire beaucoup de calculs analytiques. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les processus de Lévy et leurs applications en finance aux ouvrages [CT04, Sch03, App04, Sat99].

Les “**running suprema**” de processus de Lévy ont été particulièrement étudiés par S. Asmussen, F. Avram, M. R. Pistorius dans [AAP04]. Ils ont abordé les cas du put Américain perpétuel et de l'option Russe lorsque le prix du sous-jacent est modélisé par un processus de Lévy exponentiel, et ont explicité les prix pour des sous-jacents appartenant à la classe des processus de Lévy avec des sauts de type phase dans les deux sens. Cette classe de processus est en effet assez riche puisqu'elle est connue pour être dense dans la classe de tous les processus de Lévy. De plus, le modèle est soluble analytiquement pour de nombreuses options.

Le pricing des options Russes repose sur une réduction bien connue au problème de premier temps de passage d'un processus de Lévy réfléchi à son supremum. Ceci le rend en quelque sorte plus difficile que le problème analogue concernant le processus de Lévy non-contraint, utilisé pour résoudre le problème de pricing des options Américaines perpétuelles. Ces problèmes se résolvent explicitement dans le cas de type phase, grâce à une approche de type arrêt de martingale et à la factorisation de Wiener-Hopf.

Nous distinguerons dans la suite entre les processus de Lévy **additifs** et les proces-

sus de Lévy **multiplicatifs**.

- Les processus de Lévy additifs ou simplement processus de Lévy sont définis comme des processus stochastiques à accroissements indépendants et stationnaires. Autrement dit, si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy, alors  $X_t - X_s$  où  $t > s$  est indépendant de l'histoire du processus jusqu'à l'instant  $s$ . De plus, sa loi dépend uniquement de  $t - s$  et non de  $t$  ou  $s$  pris séparément.

### Définition III.1 (Processus à accroissements indépendants et stationnaires)

On dit qu'un processus continu à droite à valeurs réelles  $\{X_t, t \geq 0\}$  est un processus à accroissements indépendants stationnaires s'il possède les deux propriétés suivantes :

(Indépendance des accroissements) : pour tous  $t, s \geq 0$ ,  $(X_{t+s} - X_t) \perp \mathcal{F}_t^X$ , où  $(\mathcal{F}_t^X, t \in \mathbb{R}_+)$  est la filtration naturelle du processus  $X$  :  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_r, 0 \leq r \leq t)$ .

(Stationnarité des accroissements) : pour tous  $t, s \geq 0$ , la loi de  $X_{t+s} - X_t$  est égale à la loi de  $X_s - X_0$ . La loi de  $X_{t+s} - X_t$  ne dépend donc pas de  $t$ .

Pour de tels processus, donner la loi de  $X_t - X_0, \forall t > 0$ , ainsi que celle de  $X_0$  suffit à caractériser entièrement le processus.

La définition précédente, vraie pour tout temps  $s \geq 0$  fixe, peut se généraliser à des temps  $S$  aléatoires. C'est la propriété de Markov forte des processus à accroissements indépendants et stationnaires :

### Théorème III.2

Soit  $\{X_t, t \geq 0\}$  un processus à accroissements indépendants stationnaires, nul en 0, et soit  $S$  un temps d'arrêt. Alors sur l'ensemble  $\{S < \infty\}$ , le processus  $\{X_{t+S} - X_S, t \in \mathbb{R}_+\}$  est indépendant de  $\mathcal{F}_S^X$  et a la même loi que  $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ .

### Exemple III.3

Le mouvement Brownien ainsi que le processus de Poisson sont des processus de Lévy.

- Les processus de Lévy multiplicatifs sont définis comme étant des processus stochastiques à accroissements relatifs indépendants et stationnaires. Ce sont des exponentielles de processus de Lévy.

Considérons d'abord le cas d'un Call Américain  $C^{\text{Am}}(Z, m)$  écrit sur un sous-jacent  $Z$  défini par des processus de Lévy multiplicatif positif.



### III.3.1 Processus de Lévy multiplicatifs positifs

Soit  $Z$  un processus de Lévy multiplicatif positif de valeur initiale  $x$  et tel que  $\mathbf{E}[\sup_{0 \leq t \leq \zeta} Z_t] < +\infty$ . Cette dernière condition assure que  $Z$  est de la classe  $(\mathcal{D})$  (voir [KS98], Appendix D).

Comme  $Z_0 = x$ , alors  $Z_t = x\mathcal{Z}_t$ , où  $\mathcal{Z}$  est le processus  $Z$  partant de 1.

Nous supposons d'abord que la maturité  $\zeta$  est infinie.

#### III.3.1.1 Horizon infini

Grâce à la propriété d'indépendance des accroissements relatifs de  $Z$ , il est très simple de déterminer un processus croissant  $L_{0,t}^* = \sup_{0 \leq u \leq t} L_u$ , vérifiant la décomposition Max-Plus de  $Z$ . Ensuite, l'application du théorème III.1 permet d'obtenir immédiatement une caractérisation explicite d'un temps d'arrêt optimal sans avoir à calculer le prix du Call Américain. La seule quantité à connaître est  $x\mathbf{E}[\sup_{t \geq 0} Z_t]^{-1} = x\mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*]^{-1} = \mathbf{E}[\mathcal{Z}_{0,\infty}^*]^{-1}$ , qui ne dépend pas de la valeur initiale  $x$ .

#### Proposition III.4

Soit  $Z$  un processus de Lévy multiplicatif positif définissant une surmartingale de valeur initiale positive  $x$  et telle que  $\mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*] < +\infty$ . En notant  $Z_t^* := Z_{0,t}^* = \sup_{0 \leq u \leq t} Z_u$ , il vient :

$$1. Z_t = b\mathbf{E}[Z_{t,\infty}^* | \mathcal{F}_t] \quad \text{et} \quad L_{0,t}^* = bZ_t^*, \quad \text{où} \quad b = \frac{1}{\mathbf{E}[\mathcal{Z}_{0,\infty}^*]}.$$

2. Un temps d'arrêt optimal pour le Call Américain perpétuel  $C^{Am}(Z, m)$  est explicitement caractérisé par

$$T_t(m) = \inf \{s \geq t; bZ_s \geq m\} = \inf \{s \geq t; Z_s \geq m \mathbf{E}[\mathcal{Z}_{0,\infty}^*]\},$$

et la frontière d'exercice est ainsi donnée par  $E^c(m) = \frac{m}{b} = m\mathbf{E}[\mathcal{Z}_{0,\infty}^*]$ .

#### Preuve - III.4 -

1. Utilisons la notation précédente  $Z_{s,t}^* = \sup_{s \leq u \leq t} Z_u$ . Grâce à l'indépendance des accroissements relatifs de  $Z$  et à la propriété d'intégrabilité de  $Z_{0,\infty}^*$ , il vient

$$Z_t = b \mathbf{E}[Z_{t,\infty}^* | \mathcal{F}_t], \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{x} \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq u} Z_u\right] = \mathbf{E}[\mathcal{Z}_{0,\infty}^*], \quad L_t = bZ_t, \quad (\text{III.3})$$

puisque

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Z_{t,\infty}^*|\mathcal{F}_t] &= Z_t \mathbf{E}\left[\sup_{t \leq u} \frac{Z_u}{Z_t} \middle| \mathcal{F}_t\right] = Z_t \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq u} \left(\frac{Z_{u+t}}{Z_t}\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= Z_t \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq u} Z_u\right] = Z_t \mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*].\end{aligned}$$

2. Une application immédiate du théorème III.1 fournit un temps d'arrêt optimal de la forme

$$T_t(m) = \inf \{s \geq t; L_s \geq m\} = \inf \{s \geq t; bZ_s \geq m\},$$

$$\text{avec } b = \frac{x}{\mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*]} = \frac{1}{\mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*]}.$$

■

Notons également que d'après le théorème III.1, un Call Américain perpétuel écrit sur  $Z$  de strike  $m$  n'est autre qu'une option Lookback perpétuelle écrite sur le processus indice  $L$ , de même strike  $m$  :

$$C_0^{\text{Am}}(Z, m) = \mathbf{E}[(bZ_{0,\infty}^* - m)^+] = \mathbf{E}\left[\left(\frac{Z_{0,\infty}^*}{\mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*]} - m\right)^+\right]. \quad (\text{III.4})$$

### Remarque III.5

Lorsque la maturité est finie et notée par  $T$ , nous sommes intuitivement amenés à remplacer la constante  $b$  dans la décomposition Max-Plus de  $Z$  par une fonction  $b(\cdot)$ , telle qu'à chaque instant  $t$ ,

$$Z_t = \mathbf{E}\left[\sup_{t \leq u \leq T} b(T-u)Z_u \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Pour une justification rigoureuse de ce résultat, nous renvoyons le lecteur au théorème IV.9 du prochain chapitre, où nous construirons un processus indice  $L(u, Z_u)$  sous la forme

$$\begin{aligned}L(u, Z_u) &= \sup\{m; C_u^{\text{Am}}(Z, m) = Z_u - m\} \\ &= Z_u \sup\left\{\frac{m}{Z_u}; C_u^{\text{Am}}\left(\frac{Z}{Z_u}, \frac{m}{Z_u}\right) = 1 - \frac{m}{Z_u}\right\} = Z_u L(u, 1).\end{aligned}$$

Ainsi la quantité  $L(u, 1) = \frac{L(u, Z_u)}{Z_u}$  ne dépend pas de  $Z_u$  et nous la désignons par  $b(T-u)$ .

Cependant, nous n'avons pas d'expression explicite pour la fonction  $b(\cdot)$ . Nous verrons dans la dernière partie une méthode numérique d'approximation de  $b(\cdot)$ .

Donnons à présent quelques exemples de processus de Lévy multiplicatifs positifs  $Z$  pour lesquels le Call Américain perpétuel correspondant peut se résoudre explicitement. Comme il nous suffit juste de connaître la frontière d'exercice, les exemples suivants reviennent à calculer l'espérance du maximum de  $Z$ .

Le premier exemple est celui du mouvement Brownien géométrique, motivé par des applications en finance. Ce processus est en effet très souvent utilisé pour modéliser le prix d'un actif financier.

### Exemples de calculs de l'espérance du maximum.

#### – Mouvement Brownien géométrique :

Considérons un mouvement géométrique Brownien de drift négatif ( $r \geq 0$ ) et de valeur initiale positive, de manière à ce qu'il définisse une surmartingale :

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = -r dt + \sigma dW_t, \quad Z_0 = x > 0. \quad (\text{III.5})$$

Posons  $\gamma = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}$ . Il est bien connu que

$$\mathbf{P}[Z_{0,\infty}^* \geq m] = \left(\frac{x}{m} \wedge 1\right)^\gamma, \quad \mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*] = \frac{\gamma}{\gamma-1}x \quad \text{et donc} \quad \mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*] = \frac{\gamma}{\gamma-1}.$$

Ce résultat classique sera prouvé au chapitre V. Il en découle que  $b = \frac{\gamma-1}{\gamma}$  et

$$T_S(m) = \inf \{t \geq S; Z_t \geq E^c(m) = \frac{\gamma}{\gamma-1}m\}.$$

#### – Processus de Lévy géométrique :

La même décomposition reste valable pour un **processus de Lévy géométrique** avec sauts définissant une surmartingale. Nous devons néanmoins introduire d'autres hypothèses afin de satisfaire la condition  $\mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*] < \infty$ . Nous nous inspirons ici des idées de E. Mordecki dans son papier [Mor01].

Considérons le cas particulier où l'horizon  $\zeta$  est infini et  $Z_t = xe^{X_t}$ ,  $X$  étant un processus de Lévy sans sauts positifs, ou encore un processus de Lévy semi-continu supérieurement (cf. [Mor01]). La formule de Lévy-Khinchine permet d'exprimer la fonction caractéristique de  $X$  en fonction de son triplet caractéristique  $(a, \sigma^2, \Pi)$  :

$$\mathbf{E}e^{i\mu X_t} = \exp \left\{ t \left[ i\mu a - \frac{1}{2}\sigma^2\mu^2 + \int_{-\infty}^0 (e^{i\mu y} - 1 - i\mu y \mathbf{1}_{\{-1 < y < 0\}}) \Pi(dy) \right] \right\},$$

où  $a$  et  $\sigma \geq 0$  sont deux constantes réelles, et  $\Pi$  une mesure positive de support  $(-\infty, 0)$ , telle que  $\int (1 \wedge y^2) \Pi(dy) < +\infty$ . La mesure  $\Pi$  est appelée la mesure

de Lévy et le triplet de paramètres  $(a, \sigma^2, \Pi)$  détermine complètement la loi du processus  $X$ . De plus pour  $\lambda > 0$ , le processus  $\left(\frac{e^{\lambda X_t}}{\mathbf{E}[e^{\lambda X_t}]}\right)_{t \geq 0}$  est une martingale. L'exposant de Laplace  $\kappa = \kappa(\lambda)$  est défini par

$$\kappa(\lambda) = a\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda y} - 1 - \lambda y \mathbf{1}_{\{-1 < y < 0\}}) \Pi(dy), \quad \text{pour } \lambda \geq 0, \quad (\text{III.6})$$

et vérifie  $\mathbf{E}[e^{\lambda X_t}] = e^{t\kappa(\lambda)}$ .

Nous supposons en outre que le processus  $e^{rt}e^{X_t}$  est une martingale, et cette condition entraîne que  $\mathbf{E}[e^{X_t}] = e^{-rt}$ , c'est-à-dire  $\kappa(1) = -r$ .

Comme  $\kappa(0) = 0$ ,  $\kappa$  est convexe et  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \kappa(\lambda) = +\infty$ , il existe  $\gamma_{\text{Lévy}} > 1$  tel que  $\kappa(\gamma_{\text{Lévy}}) = 0$ . Autrement dit, le processus  $e^{\gamma_{\text{Lévy}} X_t} = \left(\frac{Z_t}{x}\right)^{\gamma_{\text{Lévy}}}$  est une martingale. A partir de l'article [Mor01], nous pouvons déduire que

$$\mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*] = \frac{\gamma_{\text{Lévy}}}{\gamma_{\text{Lévy}} - 1}, \quad \text{où } \gamma_{\text{Lévy}} > 1 \text{ est tel que } \kappa(\gamma_{\text{Lévy}}) = 0.$$

### Formules fermées.

Une fois qu'on connaît la frontière d'exercice optimal, on peut traiter l'option Américaine comme une option barrière en termes d'évaluation et de couverture (on peut par exemple utiliser les techniques de simulations Monte Carlo pour les options vanille).

Ainsi numériquement grâce à l'équation (III.4), on peut calculer le prix du Call Américain perpétuel  $C_0^{\text{Am}}(Z, m)$  avec simplement deux simulations Monte-Carlo, l'une pour  $\mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*]$  et l'autre pour toute l'espérance (III.4). Nous devons juste vérifier auparavant que  $\mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*] < +\infty$ .

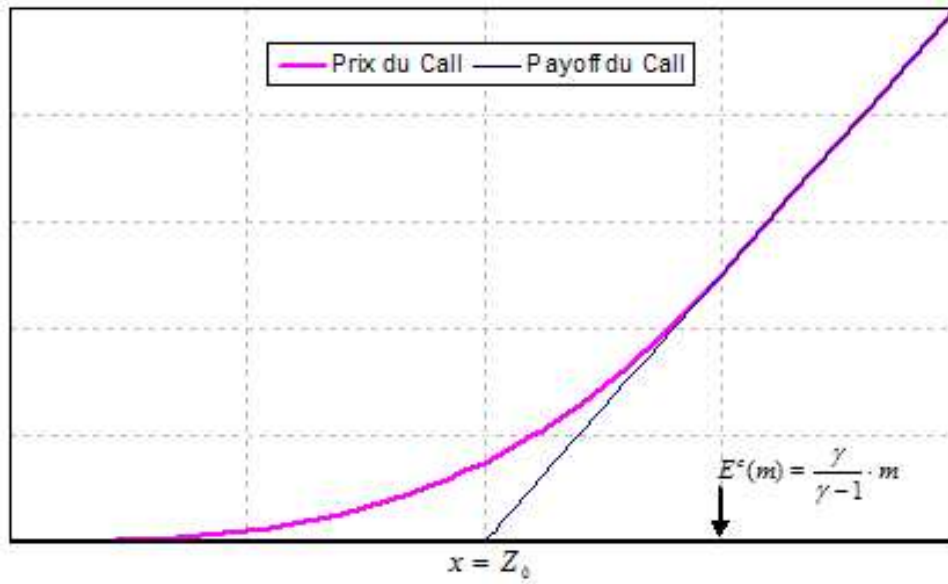
Toutefois, il se trouve que dans beaucoup de cas de processus de Lévy, les espérances sont simples à calculer et peuvent s'exprimer sous forme explicite.

Par exemple, la proposition suivante donne l'expression explicite de  $C_t^{\text{Am}}(Z, m)$  dans le cas où  $Z$  suit un mouvement Brownien géométrique, mais comme ce prix est inutile pour résoudre le problème d'arrêt optimal, nous reléguons la preuve au chapitre V.

### Proposition III.6

Considérons un mouvement Brownien géométrique  $Z$  de paramètres  $(-r, \sigma)$  et posons  $\gamma = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}$ . Le prix du Call Américain écrit sur le sous-jacent  $Z$ , de strike  $m$  est donné par

$$C_t^{\text{Am}}(Z, m) = \mathbf{E}\left[\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} Z_{t,\infty}^* - m\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] = \begin{cases} \left(\frac{m}{\gamma-1}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{Z_t}{\gamma}\right)^\gamma & \text{si } \frac{\gamma-1}{\gamma} Z_t \leq m \\ Z_t - m & \text{si } \frac{\gamma-1}{\gamma} Z_t \geq m. \end{cases}$$

FIG. III.1 – Prix du Call Américain  $C_0^{\text{Am}}(Z, m)$ 

### Puts Américains.

On peut facilement voir qu'un tel Call Américain sans facteur d'actualisation revient à un Put Américain "classique" par un simple changement de mesure de probabilité.

En effet, grâce à la propriété de martingale du processus continu positif  $e^{rt}Z_t$ , on peut définir une nouvelle mesure de probabilité  $\mathbf{Q}^Z$  sur  $\mathcal{F}_t$  par sa densité de Radon-Nikodym par rapport à  $\mathbf{P}$  :

$$\frac{d\mathbf{Q}^Z}{d\mathbf{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{rt} \frac{Z_t}{Z_0} = e^{rt} \frac{Z_t}{x}.$$

Ensuite considérant  $xZ^{-1}$  comme nouveau numéraire, nous transformons notre Call Américain en un Put Américain classique écrit sur un nouveau sous-jacent  $\frac{1}{Z}$  et avec un nouveau strike  $\frac{1}{m}$  :

$$\begin{aligned} C_0^{\text{Am}}(Z, m) &= \sup_{\tau} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} [(Z_{\tau} - m)^+] = \sup_{\tau} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^Z} [xe^{-r\tau} Z_{\tau}^{-1} (Z_{\tau} - m)^+] \\ &= \sup_{\tau} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^Z} [e^{-r\tau} (x - mZ_{\tau}^{-1})^+] = mx \sup_{\tau} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^Z} \left[ e^{-r\tau} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{Z_{\tau}} \right)^+ \right] \\ &= mx \text{Put}_0^{\text{Am}} \left( \frac{1}{x}, \frac{1}{m} \right) = mZ_0 \text{Put}_0^{\text{Am}} \left( \frac{1}{Z_0}, \frac{1}{m} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Il est à noter que le nouveau sous-jacent  $Z^{-1}$  a bien la bonne dynamique puisqu'il définit une sous-martingale sous la probabilité  $\mathbf{Q}^Z$  et suit un processus de Lévy multiplicatif positif.

Par exemple, dans le cas où  $Z$  est un mouvement Brownien géométrique de paramètres  $(-r, \sigma)$ , la dynamique de  $Z^{-1}$  sous  $\mathbf{Q}^Z$  est donnée par

$$d\left(\frac{1}{Z_t}\right) = \frac{1}{Z_t}(r dt + \sigma dW_t).$$

De plus, la frontière d'exercice  $E^p(m^{-1})$  du nouveau Put classique  $\text{Put}^{\text{Am}}(Z^{-1}, m^{-1})$  n'est rien d'autre que l'inverse de  $E^c(m)$ , c'est-à-dire

$$E^p(m^{-1}) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} m^{-1}.$$

Rappelons que pour un Put Américain classique perpétuel de strike  $K$  et de sous-

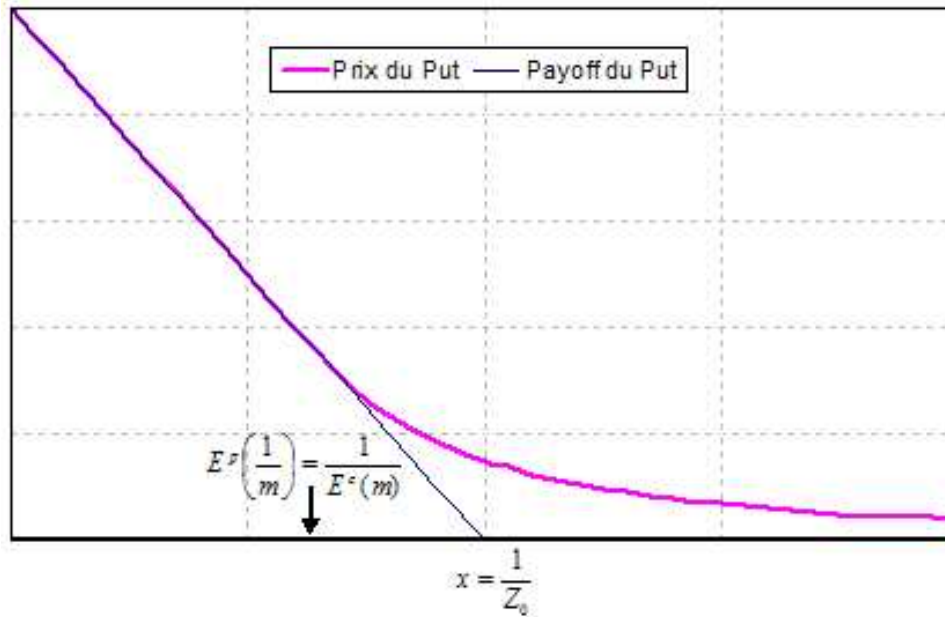


FIG. III.2 – Prix du Put Américain perpétuel  $\text{Put}_0^{\text{Am}}\left(\frac{1}{Z_0}, \frac{1}{m}\right)$  dans le cas d'un mouvement Brownien géométrique.

jaçant  $S$ , dont la dynamique sous la probabilité risque-neutre est de la forme

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t, \quad \text{avec } W_t \text{ } \mathbf{Q} \text{ - mouvement Brownien,}$$

la formule de la frontière d'exercice est donnée par  $E^p(K) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} K$ .

La formule de dualité Call-Put (III.7), basée sur un changement adéquat de mesure de probabilité, peut être plus généralement étendue à un processus de diffusion uni-dimensionnel homogène en temps, possédant une fonction de volatilité (voir chapitre VII, section VII.4). Cependant, les deux sous-jacents “duaux” n’auront plus forcément la même dynamique. Nous renvoyons le lecteur à l’article [FM03] pour de plus amples détails sur la dualité entre les prix des Puts et des Calls.

Dans le cas où  $Z = xe^{Xt}$ ,  $X$  étant un processus de Lévy sans sauts positifs, on peut montrer que moyennant un changement de probabilité,  $C_t^{\text{Am}}(Z, m)$  est simplement le prix d’un Put perpétuel, écrit sur le sous-jacent  $me^{-Xt}$  et de strike  $K = x$ . L’article [Mor01] de Mordecki permet de déduire une formule fermée pour  $C_t^{\text{Am}}(Z, m)$  comme fonction de  $Z_t$ . Cette fonction est la même que celle de la proposition III.6. Nous avons juste à substituer le paramètre  $\gamma_{\text{Lévy}}$  à  $\gamma$ .

### III.3.1.2 Horizon défini par une v.a. exponentielle indépendante

Supposons à présent que l’horizon  $\zeta$  est une variable aléatoire exponentielle indépendante de paramètre  $\beta > 0$ . La propriété caractéristique des lois exponentielles est d’être “sans mémoire”. Soit  $\mathcal{G}_t$  la filtration augmentée continue à droite générée par  $\mathcal{F}_{t \wedge \zeta} \vee \sigma(t \wedge \zeta)$ . Nous pouvons alors observer que sur l’ensemble  $\{t < \zeta\}$ , toute variable aléatoire  $\mathcal{G}_t$ -mesurable sur  $\Omega \times \mathbb{R}^+$  est aussi  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Ainsi pour toute variable aléatoire  $X \in \mathcal{G}_\zeta$ ,

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{G}_t] \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} = \frac{\mathbf{E}[X \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} | \mathcal{F}_t]}{\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} | \mathcal{F}_t]} \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} = e^{\beta t} \mathbf{E}[X \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} | \mathcal{F}_t] \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}. \quad (\text{III.8})$$

Avant de dériver une décomposition explicite de  $Z$  dans l’algèbre Max-Plus, relativement à la filtration  $\mathcal{G}$ , observons d’abord le lemme suivant :

#### Lemme III.7

Sur l’ensemble  $\{t < \zeta\}$  et pour toute fonction  $f$  positive ou bornée,

$$\mathbf{E}\left[f\left(\frac{Z_{t,\zeta}^*}{Z_t}\right) \middle| \mathcal{G}_t\right] = \mathbf{E}\left[f\left(\frac{Z_{0,\zeta}^*}{x}\right)\right].$$

$\frac{Z_{t,\zeta}^*}{Z_t}$  est alors conditionnellement indépendante sachant  $\mathcal{G}_t$  et a la même distribution que  $\frac{Z_{0,\zeta}^*}{x}$ .

**Preuve - III.7 -**

Appliquons l'égalité (III.8) à  $X = f\left(\frac{Z_{t,\zeta}^*}{Z_t}\right)$  sur l'ensemble  $\{t < \zeta\}$ ,

$$\mathbf{E}\left[f\left(\frac{Z_{t,\zeta}^*}{Z_t}\right)\middle|\mathcal{G}_t\right] = e^{\beta t}\mathbf{E}\left[f\left(\frac{Z_{t,\zeta}^*}{Z_t}\right)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}\left[\int_t^\infty \beta e^{-\beta(s-t)} f\left(\frac{Z_{t,s}^*}{Z_t}\right) ds\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

Grâce aux propriétés d'indépendance et de stationnarité des accroissements relatifs de  $Z$ , le membre droit de la dernière identité ne dépend pas de  $t$  et est donné par

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\infty \beta e^{-\beta u} f\left(\frac{Z_{0,u}^*}{x}\right) du\right] = \mathbf{E}\left[f\left(\frac{Z_{0,\zeta}^*}{x}\right)\right]. \quad \blacksquare$$

Il en résulte que

$$Z_t \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} = \mathbf{E}\left[\int_t^\infty \beta e^{-\beta(s-t)} \frac{Z_{t,s}^*}{Z_t} ds\middle|\mathcal{F}_t\right]^{-1} \times \mathbf{E}[Z_{t,\zeta}^* | \mathcal{G}_t] \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} = b_\beta \mathbf{E}[Z_{t,\zeta}^* | \mathcal{G}_t] \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}, \quad (\text{III.9})$$

où  $\frac{1}{b_\beta} = \mathbf{E}\left[\frac{Z_{0,\zeta}^*}{x}\right] = \mathbf{E}[Z_{0,\zeta}^*]$ . Observons ici que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Z_{t,\zeta}^* | \mathcal{G}_t] &= \mathbf{E}\left[\int_t^\infty \beta e^{-\beta(s-t)} Z_{t,s}^* ds\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}\left[\int_t^\infty \beta e^{-\beta(s-t)} Z_{t,s^-}^* ds\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbf{E}[Z_{t,\zeta^-}^* | \mathcal{G}_t], \end{aligned}$$

et par conséquent  $Z_{t,\zeta}^* = Z_{t,\zeta^-}^*$  p.s.

Il est à noter que la représentation (III.9) ne peut pas être considérée comme une décomposition Max-Plus de  $Z$  puisque l'égalité  $Z_t = b_\beta \mathbf{E}[Z_{t,\zeta}^* | \mathcal{G}_t]$  n'est valable que pour  $t < \zeta$ . Pour obtenir une décomposition Max-Plus dans ce cas, il faudrait introduire le processus

$$\tilde{Z}_t = Z_t \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} = Z_{t \wedge \zeta} - Z_\zeta \mathbf{1}_{\{\zeta \leq t\}}.$$

Grâce à la positivité de  $Z$ ,  $\tilde{Z}$  définit clairement une  $\mathcal{G}_t$ -surmartingale comme différence d'une surmartingale et d'un processus décroissant. Observons aussi que  $\tilde{Z}_\zeta = 0$ , ce qui conduit aux mêmes propriétés que le cas précédent. Par ailleurs, la positivité de  $Z$  implique pour  $t < \zeta$ ,

$$Z_{t,\zeta}^* = \sup_{t \leq u \leq \zeta} Z_u = \sup_{t \leq u < \zeta} Z_u = \sup_{t \leq u < \zeta} (Z_u \mathbf{1}_{\{u < \zeta\}}) = \sup_{t \leq u < \zeta} \tilde{Z}_u = \sup_{t \leq u \leq \zeta} \tilde{Z}_u = \tilde{Z}_{t,\zeta}^*.$$

Notons que pour  $t = \zeta$ ,  $\sup_{t \leq u \leq \zeta} Z_u = Z_\zeta \neq \sup_{t \leq u \leq \zeta} \tilde{Z}_u = \tilde{Z}_\zeta = 0$ .

Nous obtenons ainsi la décomposition Max-Plus suivante de  $\tilde{Z}$  :



**Lemme III.8**

Soit  $\tilde{Z}_t = Z_t \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  et  $b_\beta = \frac{1}{\mathbf{E}[Z_\zeta^*]}$ . Nous avons alors pour  $t \leq \zeta$ ,

$$\tilde{Z}_t = b_\beta \mathbf{E}[Z_{t,\zeta}^* | \mathcal{G}_t] \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} = b_\beta \mathbf{E}[\tilde{Z}_{t,\zeta}^* | \mathcal{G}_t] \text{ et } L_{0,t}^{\tilde{Z},*} = b_\beta \tilde{Z}_t^* = b_\beta Z_t^*.$$

Ainsi, les résultats de la proposition III.4 s'étendent au cas de l'horizon exponentiel et s'énoncent de la même façon. Nous avons juste à substituer  $\tilde{Z}$  à  $Z$ ,  $b_\beta$  à  $b$  et la filtration  $\mathcal{G}_t$  à  $\mathcal{F}_t$ .

**Exemple III.9 (Mouvement Brownien géométrique)**

Nous allons montrer au chapitre V que si  $Z$  suit un mouvement Brownien géométrique de paramètres  $(-r, \sigma)$ , alors  $b_\beta = \frac{\delta - 1}{\delta}$ , où  $\delta$  est la plus grande racine de l'équation  $y^2 - \gamma y - \frac{2\beta}{\sigma^2} = 0$  ( $\delta \geq \gamma = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}$ ).

Désignons par  $C^{Am}(\tilde{Z}, m)$  un Call Américain écrit sur le sous-jacent surmartingale  $\tilde{Z}$ , de strike  $m$  et de maturité  $\zeta$  :

$$C_t^{Am}(\tilde{Z}, m) = \text{ess sup}_{t \leq S \leq \zeta} \mathbf{E}[(\tilde{Z}_S - m)^+ | \mathcal{G}_t].$$

Alors, un temps d'arrêt optimal à partir de l'instant  $t$ , pour le Call Américain  $C^{Am}(\tilde{Z}, m)$ , est donné par

$$T_t(m) \wedge \zeta = \inf \left\{ S \geq t ; Z_S \geq E^c(m) = \frac{\delta}{\delta - 1} m \right\} \wedge \zeta,$$

et le prix du Call se calcule explicitement de la même manière que dans le cas de l'horizon infini :

$$C_t^{Am}(\tilde{Z}, m) = \mathbf{E} \left[ \left( \frac{\delta - 1}{\delta} \tilde{Z}_{t,\zeta}^* - m \right)^+ \middle| \mathcal{G}_t \right] = \begin{cases} \left( \frac{m}{\delta - 1} \right)^{1-\delta} \left( \frac{\tilde{Z}_t}{\delta} \right)^\delta & \text{si } \frac{\delta-1}{\delta} \tilde{Z}_t \leq m \\ \tilde{Z}_t - m & \text{si } \frac{\delta-1}{\delta} \tilde{Z}_t \geq m. \end{cases}$$

**Remarque III.10**

L'équation (III.9) conduit à la représentation suivante de  $Z$  sur l'ensemble  $\{t < \zeta\}$  :

$$Z_t = \frac{1}{b_\beta} \mathbf{E} \left[ \int_t^{+\infty} \beta e^{-\beta(s-t)} Z_{t,s}^* ds \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (\text{III.10})$$

Soient  $\mu$  une mesure aléatoire optionnelle positive et  $f = f(\omega, t, x) : \Omega \times [0, +\infty] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un champ aléatoire vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $(\omega, t) \mapsto f(\omega, t, x)$  est un processus progressivement mesurable dans  $L^1(\mathbf{P}(d\omega) \otimes \mu(\omega, dt))$ .
2. Pour tout  $(\omega, t) \in \Omega \times [0, +\infty]$ , la fonction  $x \mapsto f(\omega, t, x)$  est continue et strictement décroissante de  $+\infty$  dans  $-\infty$ .

Alors, pour tout processus optionnel donné  $X = (X_t)_{t \in [0, +\infty]}$  avec  $X_{+\infty} = 0$ , P. Bank et N. El Karoui ont construit dans leur article [BK04], un processus progressivement mesurable  $\xi = (\xi_\nu)_{\nu \in [0, +\infty]}$  avec des trajectoires semi-continues supérieurement à droite, telles que

$$f(t, \sup_{\nu \in [t, s]} \xi_\nu) \mathbf{1}_{(t, +\infty]}(t) \in L^1(\mathbf{P} \otimes \mu(dt))$$

et

$$X_t = \mathbf{E} \left[ \int_{(t, +\infty]} f(s, \sup_{\nu \in [t, s]} \xi_\nu) \mu(dt) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

pour tout temps d'arrêt  $t \in \mathcal{T}$ . Cette représentation stochastique de  $X$  en termes du running supremum de  $\xi$  n'est rien d'autre que l'équation (III.10), dans le cas particulier où  $X_t = Z_t e^{-\beta t}$ ,  $\xi = Z$ ,  $f(s, l) = \beta e^{-\beta s l}$  et  $\mu(dt) = dt$ .

### III.3.2 Processus de Lévy additifs

Soit  $Z$  une surmartingale à accroissements additifs indépendants, de valeur initiale  $x$  et telle que  $\mathbf{E}[Z_{0, \infty}^*] < +\infty$ . Soit  $\mathcal{Z}$  le processus  $Z$  partant de 0 :  $\mathcal{Z}_t = Z_t - x$ . Nous supposons que la maturité  $\zeta$  est infinie.

Utilisant les mêmes notations que précédemment et posant

$$b = \mathbf{E} \left[ \sup_{0 \leq u} Z_u \right] - x = \mathbf{E}[Z_{0, \infty}^*] - x = \mathbf{E}[\mathcal{Z}_{0, \infty}^*],$$

il est aisé de voir que  $Z_t$  est de la forme  $Z_t = \mathbf{E}[Z_{t, \infty}^* - b | \mathcal{F}_t]$ , grâce à l'indépendance des accroissements de  $Z$ . Nous avons alors juste à calculer l'espérance  $\mathbf{E}[\mathcal{Z}_{0, \infty}^*]$  et appliquer le théorème III.1 pour résoudre le problème de Call Américain. Le calcul de la fonction valeur est encore inutile dans ce cas.

#### Proposition III.11

Soit  $Z$  un processus de Lévy additif définissant une surmartingale de valeur initiale  $x$ , et telle que  $\mathbf{E}[Z_{0, \infty}^*] < +\infty$ . Nous avons alors

1.  $Z_t = \mathbf{E}[Z_{t, \infty}^* - b | \mathcal{F}_t]$  et  $L_{0, t}^{Z, *} = Z_t - b$ , où  $b = \mathbf{E}[\mathcal{Z}_{0, \infty}^*]$ .
2. Un temps d'arrêt optimal pour le Call Américain perpétuel  $C^{Am}(Z, m)$  est explicitement caractérisé par

$$T_S^Z(m) = \inf \{ t \geq S ; Z_t - b \geq m \} = \inf \{ t \geq S ; Z_t \geq m + \mathbf{E}[\mathcal{Z}_{0, \infty}^*] \},$$

et la frontière d'exercice est ainsi donnée par  $E^c(m) = m + \mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*]$ .

3. Le prix à l'instant  $t$  du Call Américain perpétuel  $C^{Am}(Z, m)$  est donné par

$$C_t^{Am}(Z, m) = \mathbf{E}[(Z_{t,\infty}^* - \mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*] - m)^+ | \mathcal{F}_t].$$

### Exemple III.12 (Mouvement Brownien)

Considérons un mouvement Brownien de drift négatif, de manière à définir une surmartingale  $Z$  :

$$dZ_t = -\mu dt + \sigma dW_t, \quad Z_0 = 0, \quad \mu \geq 0, \quad (\text{III.11})$$

et posons  $\gamma = \frac{2\mu}{\sigma^2}$ . La loi de  $Z_{0,\infty}^*$  peut se déduire de l'exemple précédent du mouvement Brownien géométrique et nous obtenons  $b = \frac{1}{\gamma}$ . Nous pouvons également déduire une formule fermée pour le prix du Call  $C_t^{Am}(Z, m)$  comme fonction de  $Z_t$ .

### Proposition III.13

Soit  $Z$  un mouvement Brownien de paramètres  $(-\mu, \sigma)$  :  $Z_t = \sigma W_t - \mu t$ , et posons  $\gamma = \frac{2\mu}{\sigma^2}$ . Nous avons alors

$$1. \quad Z_t = \mathbf{E}[Z_{t,\infty}^* | \mathcal{F}_t] - \frac{1}{\gamma} \quad \text{et} \quad L_{0,t}^* = Z_{0,t}^* - \frac{1}{\gamma} = Z_t^* - \frac{1}{\gamma}.$$

2. Le Call Américain perpétuel  $C^{Am}(Z, m)$  a une formule fermée donnée par

$$\begin{aligned} C_t^{Am}(Z, m) &= \mathbf{E}[(Z_{t,\infty}^* - \frac{1}{\gamma} - m)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma m - 1 + \gamma Z_t) & \text{si } Z_t < \frac{1}{\gamma} + m \\ Z_t - m & \text{si } Z_t \geq \frac{1}{\gamma} + m. \end{cases} \end{aligned}$$

## III.4 Approximation numérique de la frontière d'exercice

Dans un marché financier, l'absence d'opportunité d'arbitrage se traduit par l'existence d'une probabilité, équivalente à la probabilité historique, sous laquelle les processus des prix actualisés des actifs de base sont des martingales. Dans un marché complet, une telle probabilité est unique (notée  $\mathbf{Q}$ ) et appelée probabilité risque-neutre.

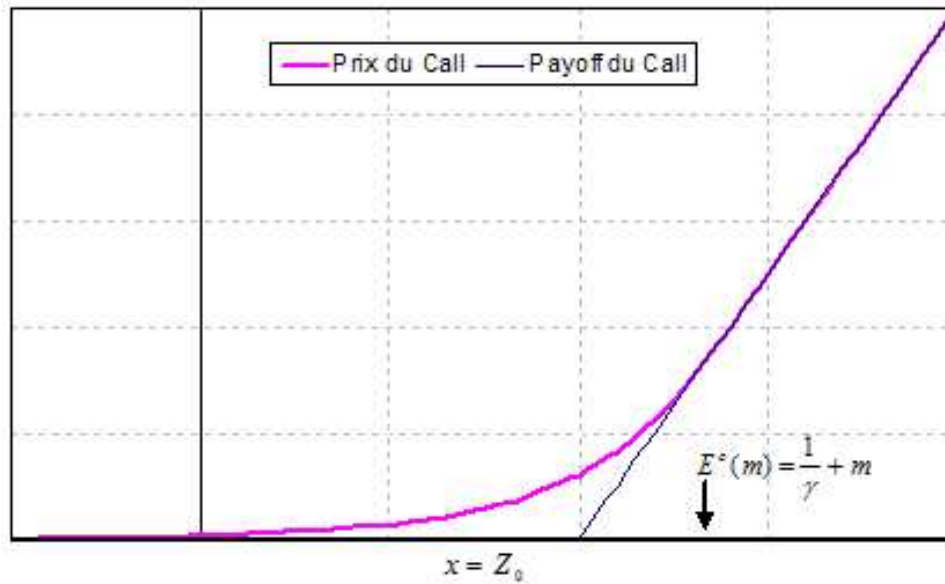


FIG. III.3 – Prix du Call Américain perpétuel  $C_0^{\text{Am}}(Z_0, m)$  dans le cas où  $Z$  suit un mouvement Brownien de drift négatif.

Plaçons-nous sous  $\mathbf{Q}$  et considérons un actif risqué  $S$  dont le processus de prix est dirigé par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t, \quad S_0 = x,$$

où  $W_t$  est un mouvement Brownien sous  $\mathbf{Q}$ .

Soit  $\text{Put}_t^{\text{Am}}(S_t, m)$  le prix d'un Put Américain écrit sur  $S$ , de maturité fixée  $T$  et de strike  $m$  :

$$\text{Put}_t^{\text{Am}}(S_t, m) = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[e^{-r(\tau-t)}(m - S_\tau)^+ | \mathcal{F}_t].$$

Par la symétrie Call-Put, ce Put peut se transformer en un Call Américain sans facteur d'actualisation, écrit sur un sous-jacent surmartingale. En effet, Comme le processus continu positif  $e^{-rt}S_t$  est une martingale, on peut introduire une nouvelle mesure de probabilité  $\mathbf{Q}^S$  sur  $\mathcal{F}_t$  telle que

$$\left. \frac{d\mathbf{Q}^S}{d\mathbf{Q}} \right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-rt} \frac{S_t}{S_0} = e^{-rt} \frac{S_t}{x}.$$

Posons ensuite  $Z_t := \frac{1}{S_t}$ . Sous la probabilité  $\mathbf{Q}^S$ ,  $Z$  est un mouvement Brownien géométrique de paramètres  $(-r, \sigma)$  :

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = -r dt + \sigma dW_t^S, \quad Z_0 = \frac{1}{x},$$

où  $W_t^S := W_t + \sigma t$  est un  $\mathbf{Q}^S$ -mouvement Brownien.

Ainsi sous la nouvelle mesure de probabilité  $\mathbf{Q}^S$ , le Put Américain “classique” peut se réinterpréter comme un Call Américain, sans facteur d’actualisation, écrit sur  $Z$  et de strike  $m^{-1}$  :

$$\begin{aligned} \text{Put}_t^{\text{Am}}(S_t, m) &= \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ e^{-r(\tau-t)} (m - S_\tau)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} \left[ \frac{S_t}{S_\tau} (m - S_\tau)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= m S_t \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} \left[ \left( Z_\tau - \frac{1}{m} \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] = m S_t C_t^{\text{Am}}(Z, m^{-1}). \end{aligned} \tag{III.12}$$

La frontière d’exercice optimal du Put Américain est simplement une fonction de la maturité restante “ $s^*(T-t)$ ”, appelée prix critique et définie par la relation

$$s^*(T-t) = \sup\{S; S \notin \mathcal{C}\},$$

où  $\mathcal{C}$  est la région de continuation dans laquelle l’exercice immédiat du Put Américain n’est jamais optimal (en moyenne, il est possible d’obtenir un meilleur gain en exerçant l’option à un instant ultérieur) :

$$\mathcal{C} := \{(S, t); \text{Put}_t^{\text{Am}}(S, m) > (m - S)^+\}.$$

Le temps d’arrêt  $\rho_t^*$  défini par

$$\rho_t^* = \inf\{\tau \geq t; S_\tau \leq s^*(T-\tau)\} \wedge T,$$

réalise le supremum dans l’expression du prix du Put et il est donc optimal de s’arrêter à chaque fois que le niveau du sous-jacent  $S$  descend en dessous du prix critique.

Par la symétrie Call-Put, le temps d’arrêt optimal  $\rho_t^*$  pour le Put Américain  $\text{Put}_t^{\text{Am}}(S_t, m)$  coïncide presque sûrement avec  $\tau_t^*(m^{-1}) = T_t(m^{-1}) \wedge T$  (voir théorème III.1), qui est optimal pour le Call  $C_t^{\text{Am}}(Z, m^{-1})$ .

D’après le théorème III.1,  $\tau_t^*(m^{-1})$  est caractérisé par

$$\tau_t^*(m^{-1}) = \inf\{\tau \geq t; L_\tau \geq m^{-1}\} \wedge T,$$

$L$  étant le processus indice de la décomposition Max-Plus de  $Z$ . Par ailleurs, dans la remarque III.5, nous avons exprimé  $L$  sous la forme  $L_t = b_{T-t}Z_t$ , où  $u \mapsto b_u$  est une fonction du temps. Il vient donc que

$$\begin{aligned}\tau_t^*(m^{-1}) &= \inf\{\tau \geq t; b_{T-\tau}Z_\tau \geq m^{-1}\} \wedge T = \inf\{\tau \geq t; Z_\tau \geq m^{-1}b_{T-\tau}^{-1}\} \wedge T \\ &= \inf\{\tau \geq t; S_\tau \leq m b_{T-\tau}\} \wedge T,\end{aligned}$$

et par suite, la frontière d'arrêt optimal  $s^*(T-t)$  vaut également  $m.b_{T-t}$ . Comme nous ne sommes pas capables de décrire la frontière d'exercice sous forme explicite, nous allons discrétiser le problème afin d'approcher numériquement la fonction  $t \mapsto b_{T-t}$  et ensuite utiliser l'égalité  $s^*(T-t) = m.b_{T-t}$ .

A la maturité, on sait que  $s^*(0) = m$  et  $b_0 = 1$ . Posons  $T = N.h$ , où  $N$  est le nombre de pas et supposons dans notre approximation que la fonction  $t \mapsto b_{T-t}$  est constante par morceaux sur des intervalles de longueur  $h$ . Elle s'écrit donc sous la forme

$$b_{T-t} = b_0 \mathbf{1}_{\{t=Nh\}} + \sum_{j=1}^N b_{jh} \mathbf{1}_{\{(N-j)h \leq t < (N-j+1)h\}}.$$

Nous nous proposons de calculer le vecteur  $b = \{b_{jh}, j = \dots, N\}$  par récurrence en nous basant sur la décomposition Max-Plus de  $Z$ . Nous exploiterons notamment la propriété d'indépendance des accroissements relatifs de  $Z$  et le fait que la loi conditionnelle du maximum d'un Brownien géométrique se calcule explicitement connaissant sa valeur terminale.

Nous verrons également dans la récurrence que le calcul d'un élément  $b_{jh}$  fait apparaître les valeurs précédemment calculées  $\{b_{kh}, 1 \leq k \leq j-1\}$ , avec un poids différent à chaque itération  $j$ . Ceci a pour effet de rendre la résolution plus délicate.

La décomposition Max-Plus de  $Z$  et l'approximation de la fonction  $t \mapsto b_{T-t}$  permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}Z_{(N-1)h} &= \mathbf{E}\left[\sup_{(N-1)h \leq u \leq Nh} (b_{Nh-u}Z_u) \mid \mathcal{F}_{(N-1)h}\right] \\ &= \mathbf{E}\left[b_h \sup_{(N-1)h \leq u \leq Nh} Z_u \mid \mathcal{F}_{(N-1)h}\right],\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$1 = \mathbf{E}\left[b_h \sup_{(N-1)h \leq u \leq Nh} \left(\frac{Z_u}{Z_{(N-1)h}}\right)\right] = \mathbf{E}[b_h Y_{N-1}^h],$$

où nous avons posé  $Y_{N-1}^h := \sup_{(N-1)h \leq u \leq Nh} \left(\frac{Z_u}{Z_{(N-1)h}}\right)$ . En adoptant les mêmes notations et les mêmes approximations pour  $Z_{(N-2)h}$ , nous obtenons

$$Z_{(N-2)h} = \mathbf{E}\left[b_{2h} \sup_{(N-2)h \leq u \leq (N-1)h} Z_u \vee b_h Y_{N-1}^h Z_{(N-1)h} \mid \mathcal{F}_{(N-2)h}\right],$$

ou encore

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{E} \left[ b_{2h} \sup_{(N-2)h \leq u \leq (N-1)h} \left( \frac{Z_u}{Z_{(N-2)h}} \right) \vee b_h Y_{N-1}^h \frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[ b_{2h} Y_{N-2}^h \vee b_h Y_{N-1}^h \frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Ensuite en effectuant des itérations successives jusqu'au rang  $j$  compris entre 2 et  $N$ , il vient

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{E} \left[ b_{jh} Y_{N-j}^h \vee b_{(j-1)h} Y_{N-j+1}^h \frac{Z_{(N-j+1)h}}{Z_{(N-j)h}} \vee \dots \right. \\ &\quad \left. b_{kh} Y_{N-k}^h \prod_{i=k+1}^j \left( \frac{Z_{(N-i+1)h}}{Z_{(N-i)h}} \right) \vee \dots \vee b_h Y_{N-1}^h \prod_{i=2}^j \left( \frac{Z_{(N-i+1)h}}{Z_{(N-i)h}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

où  $Y_{N-i}^h := \sup_{(N-i)h \leq u \leq (N-i+1)h} \left( \frac{Z_u}{Z_{(N-i)h}} \right)$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Les variables aléatoires  $(Y_{N-i}^h)_{1 \leq i \leq N}$  sont indépendantes grâce à l'indépendance des accroissements relatifs de  $Z$ .

Par ailleurs, la loi du maximum d'un Brownien géométrique se calcule explicitement lorsqu'on connaît sa valeur terminale. Ainsi, la fonction de répartition de la loi conditionnelle de  $Y_{N-i}^h$  sachant  $\left\{ \frac{Z_{(N-i+1)h}}{Z_{(N-i)h}} = K \right\}$  est donnée par

$$\mathbf{P} \left[ Y_{N-i}^h \leq H \mid \frac{Z_{(N-i+1)h}}{Z_{(N-i)h}} = K \right] = 1 - \exp \left[ \frac{2}{\sigma^2 h} \ln \left( \frac{K}{H} \right) \ln(H) \right], \quad \text{pour } 1, K \leq H. \quad (\text{III.15})$$

Nous pouvons donc simuler les variables  $Y_{N-i}^h$  par la méthode d'inversion de la fonction de répartition. Cette méthode se base sur le résultat suivant :

- Si  $F$  est la fonction de répartition de la loi conditionnelle que nous cherchons à simuler et si  $U$  est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$ , alors la loi conditionnelle de  $X = F^{-1}(U)$  a pour fonction de répartition  $F$ .  $F^{-1}$  désigne ici l'inverse à droite de  $F$ , c'est-à-dire

$$F^{-1}(\alpha) = \inf \{ x, F(x) \leq \alpha \}.$$

D'après l'identité (III.15),  $F(x, K) = 1 - \exp \left[ \frac{2}{\sigma^2 h} (\ln K - \ln x) \ln x \right]$ , pour  $x \geq \max(1, K)$ . Nous pouvons donc inverser explicitement  $F$  par rapport à  $x$  et l'expression obtenue est de la forme

$$F^{-1}(y, K) = \exp \left[ \frac{1}{2} \left( \ln K + \sqrt{\ln^2 K - 2\sigma^2 h \ln(1-y)} \right) \right].$$

L'algorithme est alors le suivant :

### III.4.1 Simulation de $b_h$

On calcule d'abord

$$b_h = \frac{1}{\mathbf{E}[Y_{N-1}^h]} = \frac{1}{\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left(Y_{N-1}^h \mid \frac{Z_{Nh}}{Z_{(N-1)h}}\right)\right]}.$$

Pour cela, on génère  $n$  réalisations de variables aléatoires  $K_i$  indépendantes et de même loi que  $\frac{Z_{Nh}}{Z_{(N-1)h}}$  :

$$K_i = \exp\left[-\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma W_h^i\right], \quad (\text{III.16})$$

les  $W_h^i$  étant des mouvements Browniens standard indépendants.

Ensuite pour chaque réalisation simulée  $K_i$ , on génère  $p$  réalisations  $u_j^i$  de variables aléatoires  $U_j^i$  indépendantes et de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On effectue enfin une double boucle Monte Carlo pour approcher  $\mathbf{E}[Y_{N-1}^h] = \frac{1}{b_h}$  (pour cela  $n$  et  $p$  doivent être suffisamment grands) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_h} = \mathbf{E}[Y_{N-1}^h] &\simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[Y_{N-1}^h \mid \frac{Z_{Nh}}{Z_{(N-1)h}} = K_i\right] \\ &\simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p F^{-1}(u_j^i, K_i)\right] \quad \text{pour } n, p \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

### III.4.2 Simulation de $b_{jh}$ , $j = 2, \dots, N$

#### • Simulation de $b_{2h}$

D'après la relation (III.13), le réel  $b_{2h}$  doit annuler la fonction  $f_2$  définie par

$$f_2(x) = \mathbf{E}\left[x Y_{N-2}^h \vee b_h Y_{N-1}^h \frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}}\right] - 1. \quad (\text{III.17})$$

Le nombre  $b_h$  a déjà été calculé à l'itération précédente et  $Y_{N-1}^h$  est indépendant de  $Y_{N-2}^h$  et de  $\frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}}$ .



Comme c'est la loi conditionnelle de  $Y_{N-j}^h$  sachant  $\frac{Z_{(N-j+1)h}}{Z_{(N-j)h}}$  (pour  $j = \{1, 2\}$ ) qui est facile à simuler, on écrit la fonction  $f_2(x)$  sous la forme

$$f_2(x) = \mathbf{E} \left[ \mathbf{E} \left\{ x Y_{N-2}^h \vee b_h Y_{N-1}^h \frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}} \mid \frac{Z_{Nh}}{Z_{(N-1)h}}, \frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}} \right\} \right] - 1.$$

Ensuite, on procède comme suit :

- On génère  $n$  réalisations  $(K_1^i, K_2^i)$  (pour  $i = 1, \dots, n$ ) de variables aléatoires indépendantes et de même loi que  $(\frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}}, \frac{Z_{Nh}}{Z_{(N-1)h}})$ . Comme  $\frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}}$  et  $\frac{Z_{Nh}}{Z_{(N-1)h}}$  sont également indépendantes entre elles, ceci revient à générer  $2n$  tirages indépendants du même Brownien géométrique (III.16).
- Pour chaque couple généré  $(K_1^i, K_2^i)$ , on approche par Monte-Carlo la quantité

$$g_2(x, K_1^i, K_2^i) = \mathbf{E} \left[ x Y_{N-2}^h \vee b_h Y_{N-1}^h \frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}} \mid \frac{Z_{Nh}}{Z_{(N-1)h}} = K_1^i, \frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}} = K_2^i \right],$$

en utilisant la loi conditionnelle (III.15) et la méthode de simulation par inversion de la fonction de répartition. On obtient alors pour un entier  $p$  suffisamment grand,

$$g_2(x, K_1^i, K_2^i) \simeq \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p x F^{-1}(u_l^2, K_2^i) \vee b_h F^{-1}(u_l^1, K_1^i) K_2^i,$$

où les  $\{u_l^1, u_l^2, l = 1, \dots, p\}$  sont  $2p$  réalisations de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

- La fonction  $f_2(x)$  définie par (III.17) est approchée par une autre boucle de type Monte-Carlo :

$$f_2(x) \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_2(x, K_1^i, K_2^i) - 1.$$

- Par la relation (III.13), on sait que  $f_2(b_{2h}) = 0$ . Il suffit donc d'utiliser un algorithme de recherche de zéros d'une fonction pour trouver la valeur de  $b_{2h}$  (citons par exemple la méthode de dichotomie).

#### • Simulation de $b_{jh}$ , $j = 2, \dots, N$

La simulation de  $b_{jh}$  pour  $j \in \llbracket 2, N \rrbracket$  est strictement analogue à celle de  $b_{2h}$ . En effet d'après la relation (III.14), le réel  $b_{jh}$  est un zéro de la fonction  $f_j$  définie

par

$$f_j(x) = \mathbf{E} \left[ x Y_{N-j}^h \vee b_{(j-1)h} Y_{N-j+1}^h \frac{Z_{(N-j+1)h}}{Z_{(N-j)h}} \vee \dots \right. \\ \left. b_{kh} Y_{N-k}^h \prod_{i=k+1}^j \left( \frac{Z_{(N-i+1)h}}{Z_{(N-i)h}} \right) \vee \dots \vee b_h Y_{N-1}^h \prod_{i=2}^j \left( \frac{Z_{(N-i+1)h}}{Z_{(N-i)h}} \right) \right] - 1.$$

Pour utiliser les lois conditionnelles des  $Y_{N-k}^h$  pour  $k = 1, \dots, j$ , on écrit  $f_j(x)$  sous la forme

$$f_j(x) = \mathbf{E} \left[ \left\{ x Y_{N-j}^h \vee b_{(j-1)h} Y_{N-j+1}^h \frac{Z_{(N-j+1)h}}{Z_{(N-j)h}} \vee \dots \right. \right. \\ \left. \left. b_h Y_{N-1}^h \prod_{i=2}^j \left( \frac{Z_{(N-i+1)h}}{Z_{(N-i)h}} \right) \middle| \frac{Z_{Nh}}{Z_{(N-1)h}}, \dots, \frac{Z_{(N-j+1)h}}{Z_{(N-j)h}} \right\} \right] - 1.$$

On génère  $jn$  tirages indépendants du même mouvement Brownien géométrique (III.16), c'est-à-dire  $n$  réalisations  $(K_1^i, K_2^i, \dots, K_j^i)$  des variables aléatoires indépendantes  $\left( \frac{Z_{Nh}}{Z_{(N-1)h}}, \frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}}, \dots, \frac{Z_{(N-j+1)h}}{Z_{(N-j)h}} \right)$  (pour  $i = 1, \dots, n$ ).

Ensuite, on approche la fonction  $f_j(x)$  par

$$f_j(x) \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_j(x, K_1^i, K_2^i, \dots, K_j^i) - 1, \quad (\text{III.18})$$

où pour tout  $j$  compris entre 2 et  $N$ ,  $g_j$  est définie par

$$g_j(x, K_1^i, K_2^i, \dots, K_j^i) = \mathbf{E} \left[ x Y_{N-j}^h \vee b_{(j-1)h} Y_{N-j+1}^h \frac{Z_{(N-j+1)h}}{Z_{(N-j)h}} \vee \dots \right. \\ \left. \vee b_h Y_{N-1}^h \prod_{i=2}^j \left( \frac{Z_{(N-i+1)h}}{Z_{(N-i)h}} \right) \middle| \frac{Z_{Nh}}{Z_{(N-1)h}} = K_1^i, \frac{Z_{(N-1)h}}{Z_{(N-2)h}} = K_2^i, \dots, \frac{Z_{(N-j+1)h}}{Z_{(N-j)h}} = K_j^i \right].$$

Cette dernière fonction est approchée de la même façon que  $g_2$  : on génère  $jp$  réalisations de variables aléatoires indépendantes uniformes sur  $[0, 1]$ . On les note par  $\{u_l^1, u_l^2, \dots, u_l^j, l = 1, \dots, p\}$ . Puis, par Monte Carlo on écrit que

$$g_j(x, K_1^i, K_2^i, \dots, K_j^i) \simeq \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p \left[ x F^{-1}(u_l^j, K_j^i) \vee b_{(j-1)h} F^{-1}(u_l^{j-1}, K_{j-1}^i) K_j^i \vee \dots \right. \\ \left. \vee b_{kh} F^{-1}(u_l^k, K_k^i) \prod_{q=k+1}^j K_q^i \vee \dots \vee b_h F^{-1}(u_l^1, K_1^i) \prod_{q=2}^j K_q^i \right].$$

Enfin par un algorithme de recherche de zéros d'une fonction, on détermine  $b_{jh}$  tel que  $f_j(b_{jh}) = 0$ , avec  $f_j$  donnée par (III.18).

Une fois qu'on a obtenu le vecteur  $b = \{b_{jh} \mid j = 0, \dots, N\}$ , il suffit de le multiplier par le strike  $m$  du Put Américain  $\text{Put}^{\text{Am}}(S_t, m)$  pour obtenir une approximation de la frontière d'arrêt optimal  $s^*(T - t)$ .

Pour pouvoir appliquer la méthode de dichotomie par exemple, nous avons besoin de préciser les bornes entre lesquelles se trouve le zéro de la fonction  $f_j$ . Pour chaque  $b_{jh}$ , nous avons déjà une borne supérieure donnée par  $b_{(j-1)h}$  puisque  $s^*(T - t) = mb_{T-t}$  et on sait que la frontière d'un Put Américain est une fonction décroissante de la maturité restante.

Quant à la borne inférieure, nous avons utilisé l'approximation de la frontière d'Allegretto, Barone-Adesi et Elliott dans leur article [ABAE95], à laquelle nous avons soustrait un certain réel positif  $\epsilon$  assez petit. Ceci nous a également permis de comparer nos résultats aux leurs.

L'annexe A reprend les principales lignes de l'algorithme d'Elliott et de ses co-auteurs, pour approcher la frontière d'arrêt optimal d'un Put Américain. Le lecteur intéressé est invité à consulter l'article [ABAE95] et le livre d'Elliott-Kopp [EK99] pour de plus amples détails sur cette méthode.

Au voisinage de la maturité, nous avons considéré les deux estimations analytiques suivantes comme bornes inférieures possibles de  $b_{jh}$  :

1. La première est donnée par

$$\frac{s^*(jh)}{m} - \epsilon = 1 - \sigma \sqrt{jh \ln \left( \frac{1}{jh} \right)} - \epsilon.$$

Elle se déduit simplement de la limite (III.19) lorsque la maturité restante jusqu'à la date d'échéance tend vers 0 (cf. [AS95, BBRS95, Lam95, Vil99, EKK02, LV03]) :

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{m - s^*(T - t)}{\sigma m \sqrt{(T - t) \ln \left( \frac{1}{T - t} \right)}} = 1, \quad (\text{III.19})$$

$m$  étant le strike du Put Américain.

2. La seconde estimation testée est de la forme

$$\frac{s^*(jh)}{m} - \epsilon = e^{-\sqrt{2\sigma^2 jh} \sqrt{\alpha \left( \frac{\sigma^2}{2} jh \right)}} - \epsilon,$$

avec  $\alpha \left( \frac{\sigma^2}{2} jh \right) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi k^2 \sigma^2 jh)$  et  $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ . Elle est due à Chen-Chadam-

Stamincar [CC03, CCS01] :

$$s^*(\tau) = m e^{-2\sqrt{\tau}\sqrt{\alpha(\tau)}}, \quad (\text{III.20})$$

avec  $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$ ,  $\alpha(\tau) \simeq -\ln(\sqrt{4\pi k^2\tau})$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$  et  $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ .

### III.4.3 Exemples numériques

Nous illustrons ci-dessous notre méthode d'approximation de la frontière par différents exemples numériques. Les deux premières figures III.4 et III.5 correspondent à des maturités très petites ( $T_1 = 0.05$  et  $T_2 = 0.01$ ). La première représente le vecteur  $\{m.b_{jh} ; j = 0, \dots, N\}$  comme une fonction de la maturité restante  $T-t = j.h$  et le compare à l'approximation asymptotique de la frontière Américaine donnée par (III.19) :

$$s^*(jh) = m \left( 1 - \sigma \sqrt{jh \ln \left( \frac{1}{jh} \right)} \right). \quad (\text{III.21})$$

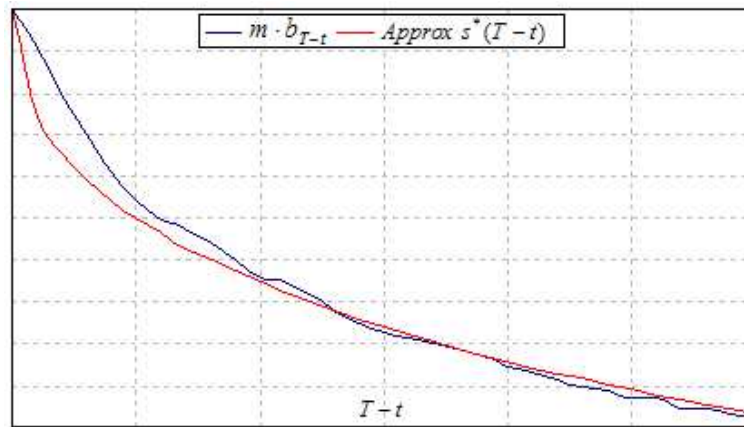


FIG. III.4 – Représentation de  $mb_{T-t}$  comme une fonction de  $T-t$  et comparaison avec l'approximation analytique (III.21), pour  $r = 0.08, \sigma = 0.25, T_1 = 0.05$ , Nombre de pas = 30.

La deuxième figure compare plutôt notre méthode numérique à l'approximation analytique de Chen-Chadam-Stamincar donnée par (III.20) :

$$s^*(jh) = m \exp(-\sqrt{2\sigma^2jh}) \exp(\sqrt{-0.5 \ln(2\pi k^2\sigma^2jh)}), \quad \text{avec } k = \frac{2r}{\sigma^2}. \quad (\text{III.22})$$

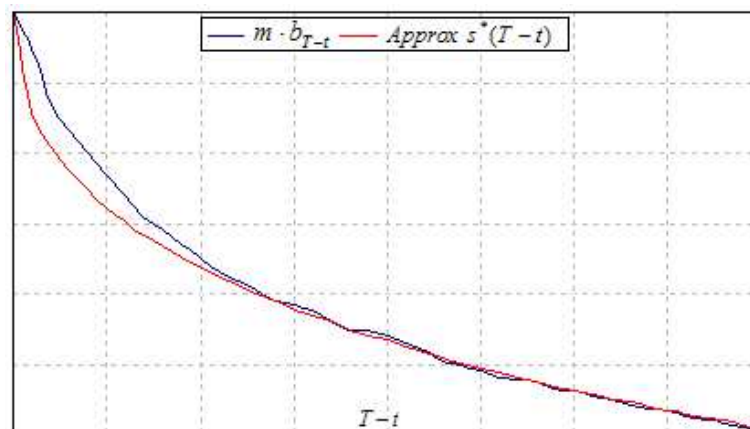


FIG. III.5 – Représentation de  $mb_{T-t}$  comme une fonction de  $T-t$  et comparaison avec l'approximation analytique (III.22), pour  $r = 0.08, \sigma = 0.20, T_2 = 0.01$ , Nombre de pas = 40.

Nous pouvons noter à travers ces deux exemples que la frontière  $mb_{T-t}$  que nous construisons approche bien les solutions analytiques (III.21) et (III.22).

Quant aux deux dernières figures III.6 et III.7, elles comparent notre frontière  $mb_{T-t} = \{m \cdot b_{jh} ; j = 0, \dots, N\}$  à celle d'Elliott et de ses co-auteurs (voir l'annexe A), pour des maturités plus grandes :  $T_3 = 5$  et  $T_4 = 10$ . Ici aussi, notre approximation numérique donne des résultats satisfaisants.

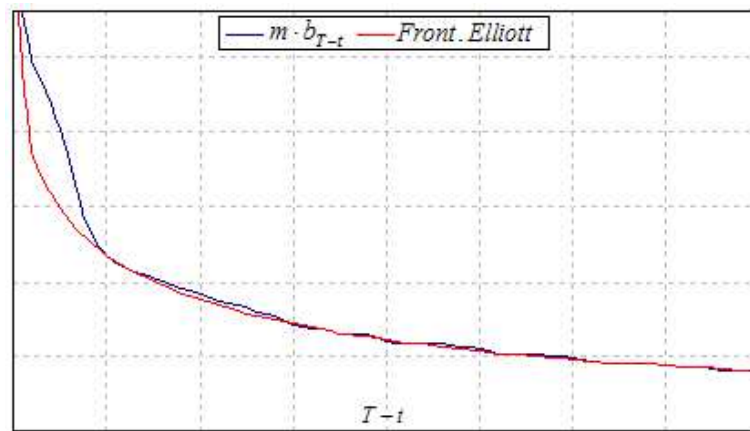


FIG. III.6 – Représentation de  $mb_{T-t}$  comme une fonction de  $T-t$  et comparaison avec l'approximation d'Elliott et al., pour  $r = 0.08, \sigma = 0.25, T_3 = 5$ , Nombre de pas = 40.

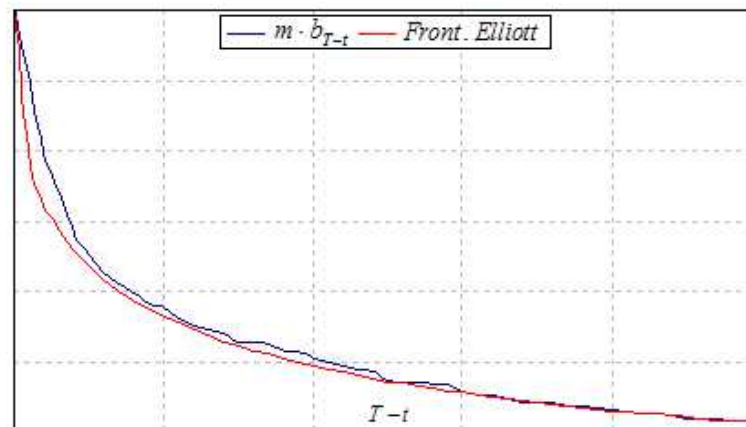


FIG. III.7 – Représentation de  $mb_{T-t}$  comme une fonction de  $T-t$  et comparaison avec l'approximation d'Elliott et al., pour  $r = 0.08, \sigma = 0.25, T_4 = 10$ , Nombre de pas = 50.

Signalons enfin que notre approximation numérique pourra être comparée à d'autres méthodes numériques de calcul de la frontière Américaine et améliorée en conséquence.

Le but de cette section n'est pas vraiment de trouver une solution aboutie en toute généralité, mais plutôt d'amorcer la réflexion sur la possibilité d'approcher la frontière via la décomposition Max-Plus.



# Références bibliographiques

## Chapitre III

- [AAP04] S. Asmussen, F. Avram and M. Pistorius, “Russian and American put options under exponential phase-type lévy models”, *Stochastic Processes and their Applications* **109** (2004), pp. 79–111.
- [ABAE95] W. Allegretto, G. Barone-Adesi and R.J. Elliott, “Numerical evaluation of the critical price and American options”, *European Journal of Finance* **1** (1995), pp. 69–78.
- [App04] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, 2004.
- [AS95] F. Ait-Sahlia, *Optimal stopping and weak convergence methods for some problems in financial economics*, Ph.d. dissertation, Stanford University, 1995.
- [BBRS95] G. Barles, J. Burdeau, M. Romano and N. Sansoen, “Critical stock price near expiration”, *Mathematical Finance* **5** (1995), pp. 77–95.
- [BK04] P. Bank and N. El Karoui, “A stochastic representation theorem with applications to optimization and obstacle problems”, *The Annals of Probability* **32** (2004), no. 1B, pp. 1030–1067.
- [Bl03] P. Bank and H. Föllmer, “American options, multi-armed bandits and optimal consumption plans : A unifying view”, *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2002*, *Lecture Notes in Mathematics* **1814** (2003), pp. 1–42.
- [CC03] J. Chadam and X. Chen, “Analytical and numerical approximations for the early exercise boundary for American Put options”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A : Mathematical Analysis* **10** (2003), no. 5, pp. 640–660.



- [CCS01] J. Chadam, X. Chen and R. Stamicar, “The optimal exercise boundary for American Put options : analytical and numerical approximations”, University of Pittsburgh preprint (2001).
- [CT04] R. Cont and P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2004.
- [DLT72] D. A. Darling, T. Liggett and H. M. Taylor, “Optimal stopping for partial sums”, *Annals of Mathematical Statistics* **43** (1972), no. 4, pp. 1363–1368.
- [EK99] J. Elliott and P. Ekkehard Kopp, *Mathematics of Financial Markets*, Springer Finance, 1999.
- [EKK02] J. D. Evans, R. J. Keller and R. Kuske, “American options on assets with dividends near expiry”, *Math. Finance* **12(3)** (2002), pp. 219–237.
- [FM03] J. Fajardo and E. Mordecki, *Put-call duality and symmetry*, Finance Lab Working Papers 54, Finance Lab, Ibmecc São Paulo, October 2003.
- [KS98] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Lam95] D. Lamberton, *Critical price for an American option near maturity*, Seminar on Stochastic Analysis (E. Bolthausen, M. Dozzi and F. Russo, eds.), vol. 36, Progress in Probability. Birkhäuser, Boston, 1995, pp. 353–358.
- [LV03] D. Lamberton and S. Villeneuve, “Critical price for an American option on a dividend-paying stock”, *Ann. Appl. Prob.* **13** (2003), pp. 800–815.
- [Mor01] E. Mordecki, “Elementary proofs on optimal stopping”, *Prepublicaciones de Matemática de la Universidad de la República* (2001).
- [Mor02] ———, “Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes”, *Finance and Stochastics* **VI** (2002), no. 4, pp. 473–493.
- [Sat99] K. I. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press : Cambridge, UK, 1999.
- [Sch03] W. Schoutens, *Lévy Processes in Finance*, Wiley Series in Probability and Statistics, 2003.
- [Vil99] S. Villeneuve, *Options Américaines dans un modèle de Black-Scholes multi-dimensionnel*, Doctoral dissertation, Université de Marne-la-Vallée, 1999.

# Existence de la décomposition Max-Plus des surmartingales

---

## Résumé

Ce chapitre a pour objectif d'établir l'existence de la décomposition des surmartingales dans l'algèbre Max-Plus, en utilisant essentiellement des techniques simples de dualité convexe.

Pour cela, nous introduisons une famille convexe d'enveloppes de Snell indexée par un paramètre réel  $m$  et nous étudions ses propriétés en tant que fonction de  $m$ . Puis, nous considérons des problèmes d'arrêt optimal associés à cette famille d'enveloppes de Snell et nous montrons que la décomposition des surmartingales  $(\mathcal{D})$ -régulières (quasi-continues à gauche, de la classe  $(\mathcal{D})$ ) est étroitement liée à la résolution de tels problèmes.

L'étape suivante est d'utiliser notre théorème de décomposition Max-Plus pour généraliser les résultats du chapitre III sur les Calls Américains. Les sous-jacents considérés ne sont plus forcément des surmartingales mais des processus généraux  $(\mathcal{D})$ -réguliers.

Enfin, nous reconsidérons les différentes étapes de la décomposition Max-Plus dans un cadre Markovien, afin de mettre en évidence l'aspect Markovien des processus impliqués.

## IV.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'établir l'existence de la décomposition des surmartingales dans l'algèbre Max-Plus. Pour cela, nous allons utiliser des méthodes de dualité convexe qui s'avèrent très efficaces pour ce genre de problème.

Dans notre contexte, Whittle était le premier à introduire dans son papier [Whi80] une famille convexe de problèmes d'arrêts optimaux, en vue de résoudre le problème du bandit. Depuis, la même idée a été exploitée par d'autres auteurs, comme El Karoui-Karatzas [KK95] pour le problème du bandit, Bank-El Karoui [BK04] ou encore El Karoui-Föllmer [Kl05] pour obtenir une représentation non-linéaire de processus généraux (voir la remarque III.10 et la section IV.6).

## IV.2 Aperçu des principaux résultats sur les problèmes de temps d'arrêt

En général, tout processus  $X$  que nous considérerons dans la suite est défini sur  $[0, \zeta]$  et supposé adapté, càdlàg.

Lorsqu'on travaille, en théorie générale des processus, sur l'ensemble de temps  $[0, \infty]$ , il est d'usage d'introduire un "deuxième infini" permettant aux temps d'arrêt de s'évanouir. Or comme d'habitude, un temps d'arrêt peut prendre des valeurs infinies, donc afin d'éviter toute confusion avec l'horizon  $\zeta$ , nous utilisons la notation  $\infty^+$  pour désigner les valeurs infinies des temps d'arrêt. Par convention, tous les processus sont nuls à cet instant.

La famille des temps d'arrêt (finis ou non) est notée par  $\mathcal{T}$ , et pour tout temps d'arrêt  $S$ ,  $\mathcal{T}_S$  est l'ensemble des temps d'arrêt postérieurs à  $S$  :  $\mathcal{T}_S = \{\tau \geq S ; \tau \in \mathcal{T}\}$ .

Tout processus adapté  $X$ , pour lequel la famille  $\{X_{\tau \wedge \zeta}\}_{\tau \in \mathcal{T}}$  est uniformément intégrable, est de la classe  $(\mathcal{D})$ . Il s'agit en fait d'une condition nécessaire et suffisante pour que  $X$  soit de la classe  $(\mathcal{D})$ . Elle est donc équivalente à la caractérisation donnée au chapitre II, section II (cf. [KS91]).

Comme nous allons essentiellement travailler avec des temps d'arrêt, les critères suivants sont très utiles pour montrer la régularité des trajectoires (cf. [DM87, th. 48-49]).

- Un processus optionnel  $X$  de la classe  $(\mathcal{D})$  est continu à droite ( $X = X^+$ ) si et seulement si  $\mathbf{E}[X_{\tau_n} \mathbf{1}_{\tau_n < \infty^+}] \rightarrow \mathbf{E}[X_\tau \mathbf{1}_{\tau < \infty^+}]$ , pour toute suite *décroissante* de temps d'arrêt  $(\tau_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{T}$ , avec  $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$  p.s.

- Pour la régularité à gauche, nous devons être plus précis. Un processus  $X$  de la classe  $(\mathcal{D})$  est dit quasi-continu à gauche si  $\mathbf{E}[X_{\tau_n} \mathbf{1}_{0 < \tau_n < \infty+}] \rightarrow \mathbf{E}[X_{\tau} \mathbf{1}_{0 < \tau < \infty+}]$ , pour toute suite *strictement croissante* de temps d'arrêt  $(\tau_n)_{n \geq 0}$ , avec  $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \tau_n$  p.s.  $\tau$  est dit prévisible. Rappelons ci-dessous la définition d'un temps d'arrêt prévisible.

### Définition IV.1

Un temps d'arrêt  $\tau$  est dit **prévisible** s'il existe une suite de temps d'arrêt  $(\tau_n)$  vérifiant les conditions suivantes :

- (a)  $(\tau_n)$  est croissante et admet  $\tau$  pour limite,
- (b)  $\tau_n < \tau$  sur l'ensemble  $\{\tau > 0\}$  pour tout  $n$ .

Dans ces conditions, on dit que la suite  $(\tau_n)$  annonce  $\tau$ .

Dans ce cas, le processus  $X$  est limité à gauche, avec comme processus des limites à gauche  $X_-$ , (cf. [DM87], th 48-49, p.120) et pour tout temps d'arrêt prévisible  $\tau$  annoncé par une suite  $(\tau_n)$ ,

$$\mathbf{E}[X_{\tau-} \mathbf{1}_{0 < \tau < \infty+}] = \mathbf{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\tau_n} \mathbf{1}_{0 < \tau_n < \infty+}\right].$$

Comme  $X$  est de la classe  $(\mathcal{D})$ , nous pouvons passer à la limite sous le signe  $\mathbf{E}$  et

$$\mathbf{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\tau_n} \mathbf{1}_{0 < \tau_n < \infty+}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_{\tau_n} \mathbf{1}_{0 < \tau_n < \infty+}] = \mathbf{E}[X_{\tau} \mathbf{1}_{0 < \tau < \infty+}],$$

où la dernière égalité découle de la quasi-continuité à gauche de  $X$ . Ainsi pour tout temps d'arrêt prévisible  $\tau$ ,

$$\mathbf{E}[X_{\tau-} \mathbf{1}_{0 < \tau < \infty+}] = \mathbf{E}[X_{\tau} \mathbf{1}_{0 < \tau < \infty+}]. \quad (\text{IV.1})$$

En dépit de cette égalité, les processus  $X$  et  $X_-$  sont différents en général et  $X$  n'est donc pas continu à gauche. La raison principale est que  $X_-$  est prévisible tandis que  $X$  est optionnel. Le problème disparaît en introduisant la projection prévisible  $X^{(p)}$  de  $X$ , caractérisée par l'identité

$$X_{\tau}^{(p)} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty+\}} = \mathbf{E}[X_{\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty+\}} | \mathcal{F}_{\tau-}],$$

pour tout temps d'arrêt prévisible  $\tau$ , avec la convention  $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$ . Ainsi,

$$\mathbf{E}[X_{\tau-} \mathbf{1}_{0 < \tau < \infty+}] = \mathbf{E}[X_{\tau}^{(p)} \mathbf{1}_{0 < \tau < \infty+}] = \mathbf{E}[X_{\tau} \mathbf{1}_{0 < \tau < \infty+}],$$

et les deux processus prévisibles  $X_-$  et  $X^{(p)}$  sont indistinguables (la preuve que nous donnons ci-après est tirée de l'ouvrage [DM87] de Dellacherie-Meyer).

**Preuve.**

Soit  $\tau$  un temps d'arrêt prévisible borné et strictement positif, annoncé par une suite  $(\tau_n)$ . Soit  $A \in \mathcal{F}_{\tau_i}$ ; appliquons (IV.1) aux temps d'arrêt  $T_n = \tau_{i+n}\mathbf{1}_A + \tau\mathbf{1}_{A^c}$ , il vient que  $\int_A X_\tau d\mathbf{P} = \int_A X_{\tau-} d\mathbf{P}$ , et donc

$$X_{\tau-} = \mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_{\tau-}] \quad \text{p.s.}$$

Mais d'autre part, on a  $X_\tau^{(p)} = \mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_{\tau-}]$  p.s., donc l'unicité de la projection prévisible entraîne que les processus **prévisibles**  $X_-$  et  $X^{(p)}$  sont indistinguables. ■

Dans ce qui suit, un processus  $X$  quasi-continu à gauche, appartenant à la classe  $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$  (des processus càdlàg de la classe  $(\mathcal{D})$ ), sera dit  $(\mathcal{D})$ -régulier.

- Toutes les martingales de la classe  $(\mathcal{D})$  sont  $(\mathcal{D})$ -régulières.
- Tout processus prévisible croissant  $A$  associé à la décomposition Doob-Meyer d'une surmartingale  $(\mathcal{D})$ -régulière  $Z$  est continu, puisqu'il vérifie l'égalité suivante

$$\mathbf{E}[A_\tau \mathbf{1}_{\tau < \infty+}] = \mathbf{E}[A_{\tau-} \mathbf{1}_{\tau < \infty+}]$$

pour tout temps d'arrêt prévisible  $\tau$ .

Le lemme suivant porte sur les transformations convexes de processus quasi-continus à gauche, et nous sera très utile dans la suite.

**Lemme IV.1**

Si  $X_- \equiv X^{(p)}$ , alors pour toute fonction continue convexe  $\varphi$ , nous avons

$$\varphi(X_-) \leq \varphi(X)^{(p)}.$$

En particulier pour tout réel  $m$ ,  $X_- \vee m \leq (X \vee m)^{(p)}$ .

**Preuve - IV.1 -**

Pour tout temps d'arrêt prévisible  $\tau$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\varphi(X_{\tau-}) \mathbf{1}_{\tau < \infty+}] &= \mathbf{E}[\varphi(X_\tau^{(p)}) \mathbf{1}_{\tau < \infty+}] = \mathbf{E}[\varphi(\mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_{\tau-}]) \mathbf{1}_{\tau < \infty+}] \\ &\leq \mathbf{E}[\mathbf{E}[\varphi(X_\tau) | \mathcal{F}_{\tau-}] \mathbf{1}_{\tau < \infty+}] = \mathbf{E}[\varphi(X_\tau) \mathbf{1}_{\tau < \infty+}] = \mathbf{E}[\varphi(X_\tau)^{(p)} \mathbf{1}_{\tau < \infty+}], \end{aligned}$$

où l'inégalité découle de la convexité de  $\varphi$ . ■

### IV.3 Une famille convexe de surmartingales

Soit  $Z = (Z_t; t \in [0, \zeta])$  une surmartingale  $(\mathcal{D})$ -régulière. Introduisons l'enveloppe de Snell  $Z.(m) = (Z_t(m); t \in [0, \zeta])$  de  $Z \vee m = (Z_t \vee m; t \in [0, \zeta])$ , c'est-à-dire la plus petite surmartingale càdlàg qui majore  $Z \vee m$ , indexée par le paramètre réel  $m$ . On se propose d'étudier les propriétés de cette famille de surmartingales en tant que fonction du paramètre  $m$ . La propriété clé est la convexité par rapport à  $m$  de ce champ aléatoire.

La caractérisation duale de  $Z.(m)$  est bien connue : pour tout temps d'arrêt  $S \in \mathcal{T}_{0, \zeta}$ ,  $Z_S(m)$  est de la forme

$$Z_S(m) = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{S, \zeta}} \mathbf{E}[Z_\tau \vee m | \mathcal{F}_S], \quad (\text{IV.2})$$

où  $\mathcal{T}_{S, \zeta}$  désigne la collection des  $\mathcal{F}$ -temps d'arrêt à valeurs dans  $[S, \zeta]$ .

Par ailleurs, les observations suivantes nous seront utiles.

- Si  $Z$  est une martingale  $M$ , alors  $M \vee m$  est une sous-martingale et il n'est jamais optimal de s'arrêter avant la maturité. Ainsi  $M.(m)$  est une martingale et

$$M_S(m) = \mathbf{E}[M_\zeta \vee m | \mathcal{F}_S]. \quad (\text{IV.3})$$

- Lorsque  $Z$  est une surmartingale  $(\mathcal{D})$ -régulière et donc de la classe  $(\mathcal{D})$ , il existe deux martingales uniformément intégrables  $U$  et  $V$  telles que  $U \leq Z \leq V$ . Ainsi l'enveloppe de Snell  $Z.(m)$  appartient à la classe  $(\mathcal{D})$  et

$$\mathbf{E}[U_\zeta \vee m | \mathcal{F}_S] \leq Z_S(m) \leq \mathbf{E}[V_\zeta \vee m | \mathcal{F}_S].$$

Les propriétés principales de  $(Z_S(m))_{S \in \mathcal{T}_{0, \zeta}}$  reposent essentiellement sur des propriétés liées à l'enveloppe de Snell et à la théorie d'arrêt optimal. La proposition suivante précise les régularités de cette famille paramétrisée de surmartingales par rapport au paramètre  $m$ .

#### Proposition IV.2

- Il existe une version régulière 1-Lipschitzienne du champ aléatoire  $(S, m) \mapsto Z_S(m)$ , telle que  $m \mapsto Z_S(m)$  est convexe croissante et  $m \mapsto Z_S(m) - m$  est convexe décroissante. De plus, pour toute variable aléatoire  $\Lambda_S$   $\mathcal{F}_S$ -mesurable,

$$Z_S(\Lambda_S) = \text{ess sup}_{S \leq \tau \leq \zeta} \mathbf{E}[Z_\tau \vee \Lambda_S | \mathcal{F}_S], \quad \tau \in \mathcal{T}_{S, \zeta}.$$

- La frontière  $m$  est absorbante pour le processus  $Z.(m)$ . En particulier, si

$$\theta_S(m) := \inf\{t \in [S, \zeta]; Z_t(m) = m\}, \quad (= \infty^+ \text{ si } \{\} = \emptyset),$$

alors sur l'ensemble  $\{\theta_S(m) \leq \zeta\}$ ,  $Z_U(m) = m$  pour tout  $U \in [\theta_S(m), \zeta]$ .

**Preuve - IV.2 -**

- Observons d'abord que si  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  sont deux familles bornées de nombres réels,

$$\sup_{i \in I} a_i - \sup_{j \in I} b_j \leq \sup_{i \in I} (a_i - \sup_{j \in I} b_j) \leq \sup_{i \in I} (a_i - b_i),$$

et  $|\sup_{i \in I} a_i - \sup_{j \in I} b_j| \leq \sup_{i \in I} |a_i - b_i|$ . Ainsi, comme la fonction  $m \mapsto x \vee m$  est 1-Lipschitzienne,

$$|Z_S(m) - Z_S(m')| \leq |m - m'|.$$

Nous pouvons alors définir le champ aléatoire régulier  $(Z_t(m); m \in \mathbb{Q})$  et réaliser une extension continue en  $m$  de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .

L'étape suivante est de remplacer  $m$  par une  $\mathcal{F}_S$ -variable aléatoire minorée et de montrer ensuite que nous avons encore :

$$Z_T(\Lambda_S) = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \geq T} \mathbf{E}[Z_\tau \vee \Lambda_S | \mathcal{F}_T], \quad T \in \mathcal{T}_{S, \zeta} \quad \text{p.s.}$$

Il est d'abord à noter que les propriétés essentielles de  $(Z_S(m))_{S \in \mathcal{T}_{0, \zeta}}$  découlent du fait que pour tout temps d'arrêt  $T$ , la famille  $\{\mathbf{E}[Z_\tau \vee m | \mathcal{F}_T]; \tau \geq T\}$  est filtrante croissante. En effet soient  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux temps d'arrêt  $\geq T$ , et posons  $U_i = \mathbf{E}[Z_{\tau_i} \vee m | \mathcal{F}_T]$  ( $i = 1, 2$ ); il vient

$$U_1 \vee U_2 = \mathbf{E}[Z_R \vee m | \mathcal{F}_T], \quad \text{où } R = \tau_1 \text{ si } U_1 \geq U_2, \quad R = \tau_2 \text{ si } U_1 < U_2.$$

Il en résulte en particulier pour tout temps d'arrêt  $S \leq T$ ,

$$\mathbf{E}\left[\operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{T, \zeta}} \mathbf{E}(Z_\tau \vee m | \mathcal{F}_T) | \mathcal{F}_S\right] = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{T, \zeta}} \mathbf{E}[Z_\tau \vee m | \mathcal{F}_S], \quad \text{p.s.}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{E}[Z_T(m) | \mathcal{F}_S] = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{T, \zeta}} \mathbf{E}[Z_\tau \vee m | \mathcal{F}_S], \quad \text{p.s.} \quad (\text{IV.4})$$

Définissons à présent, pour toute variable aléatoire étagée  $\Lambda_S = \sum \mathbf{1}_{A_i} m_i$ , avec  $(A_i)$  une partition  $\mathcal{F}_S$ -mesurable de  $\Omega$ ,

$$\tilde{Z}_T(\Lambda_S) = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \geq T} \mathbf{E}[Z_\tau \vee \Lambda_S | \mathcal{F}_T], \quad T \in \mathcal{T}_{S, \zeta} \quad \text{p.s.}$$

Afin d'utiliser la propriété (IV.4), définissons un nouveau temps d'arrêt  $S_{A_i}$  qui

vaut  $S$  sur  $A_i$  et  $\zeta$  sur  $A_i^c$ . Il vient

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1}_{A_i} \tilde{Z}_S(\Lambda_S) &= \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{E}[\tilde{Z}_{S_{A_i}}(\Lambda_S) | \mathcal{F}_S] \\
 &= \mathbf{1}_{A_i} \operatorname{ess\,sup}_{\tau \geq S_{A_i}} \left\{ \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{E}[Z_\tau \vee m_i | \mathcal{F}_S] + \mathbf{1}_{A_i^c} \mathbf{E}[Z_\zeta \vee \Lambda_S | \mathcal{F}_S] \right\} \\
 &= \mathbf{1}_{A_i} \operatorname{ess\,sup}_{\tau \geq S} \left\{ \mathbf{E}[Z_\zeta \vee \Lambda_S | \mathcal{F}_S] \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{E}[(Z_\tau \vee m_i - Z_\zeta \vee m_i) | \mathcal{F}_S] \right\} \\
 &= \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{E}[Z_\zeta \vee m_i | \mathcal{F}_S] \\
 &\quad + \mathbf{1}_{A_i} \operatorname{ess\,sup}_{\tau \geq S_{A_i}} \left\{ \mathbf{E}[(Z_\tau \vee m_i - \mathbf{E}[Z_\zeta \vee m_i | \mathcal{F}_\tau]) | \mathcal{F}_S] \right\} \\
 &= \mathbf{1}_{A_i} \operatorname{ess\,sup}_{\tau \geq S_{A_i}} \mathbf{E}[Z_\tau \vee m_i | \mathcal{F}_S] = \mathbf{1}_{A_i} Z_S(m_i) \quad \text{p.s.}
 \end{aligned}$$

Ceci entraîne donc que  $\tilde{Z}_S(\Lambda_S) = Z_S(m_i)$  sur l'ensemble  $A_i$ , et par suite

$$\tilde{Z}_S(\Lambda_S) = \Sigma \mathbf{1}_{A_i} Z_S(m_i) = Z_S(\Lambda_S), \quad \text{p.s.}$$

Le même argument peut s'appliquer à tout temps d'arrêt  $T \geq S$  pour obtenir

$$Z_T(\Lambda_S) = \tilde{Z}_T(\Lambda_S) = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \geq T} \mathbf{E}[Z_\tau \vee \Lambda_S | \mathcal{F}_T], \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{T}_{S, \zeta}.$$

Grâce à la propriété de Lipschitz, cette formule peut s'étendre par continuité à toute variable aléatoire  $\mathcal{F}_S$ -mesurable minorée.

- Une propriété classique des surmartingales positives est que 0 est absorbant. L'application de ce résultat à la surmartingale positive  $Z.(m) - m$  permet d'obtenir le résultat souhaité.

La même propriété reste valable lorsque  $m$  est remplacé par une variable aléatoire  $\mathcal{F}_S$ -mesurable  $\Lambda_S$ . ■

### IV.3.1 Temps d'arrêt optimaux

Dans cette section, nous exposons brièvement quelques propriétés basiques relatives à la théorie d'arrêt optimal (voir [Kar81, KS98] pour un développement plus général), en insistant notamment sur le lien entre l'enveloppe de Snell et les temps d'arrêt optimaux. Les résultats s'expriment directement en termes des processus  $Z.(m)$ .

On cherche à maximiser  $\mathbf{E}[Z_\tau \vee m]$  lorsque  $\tau$  parcourt la classe de tous les temps d'arrêt dans  $\mathcal{T}_{0, \zeta}$ . Un temps d'arrêt  $\tau^*$  tel que  $\mathbf{E}[Z_{\tau^*} \vee m] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, \zeta}} \mathbf{E}[Z_\tau \vee m]$  est dit optimal.



Le critère d'optimalité suivant met en évidence le rôle joué par l'enveloppe de Snell.

### Proposition IV.3

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un temps d'arrêt  $\tau$  soit optimal est que l'on ait  $Z_\tau(m) = Z_\tau \vee m$  p.s., et que  $Z_{t \wedge \tau}(m)$  soit une martingale.

### Preuve - IV.3 -

La surmartingale càdlàg  $Z_t(m)$  appartenant à la classe  $(\mathcal{D})$ ,  $Z_{t \wedge \tau}(m)$  est une martingale si et seulement si  $\mathbf{E}[Z_\tau(m)] = \mathbf{E}[Z_0(m)]$ . D'autre part, pour tout temps d'arrêt  $\tau$

$$Z_\tau \vee m \leq Z_\tau(m) \quad , \quad \mathbf{E}[Z_\tau(m)] \leq \mathbf{E}[Z_0(m)] = \sup_{S \in \mathcal{T}_{0,\zeta}} \mathbf{E}[Z_S \vee m].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tau \text{ est optimal} &\iff \mathbf{E}[Z_\tau \vee m] = \mathbf{E}[Z_0(m)] \\ &\iff \mathbf{E}[Z_\tau \vee m] = \mathbf{E}[Z_\tau(m)] = \mathbf{E}[Z_0(m)] \\ &\iff Z_\tau \vee m = Z_\tau(m) \text{ p.s. et } \mathbf{E}[Z_\tau(m)] = \mathbf{E}[Z_0(m)]. \end{aligned}$$

■

### Théorème IV.4

Supposons que  $Z$  est une surmartingale  $(\mathcal{D})$ -régulière. Nous avons alors

1.  $Z(m)$  est une surmartingale  $(\mathcal{D})$ -régulière.
2. Posons

$$T_S(m) := \inf\{t \in [S, \zeta]; Z_t(m) = Z_t\}, \quad = \infty^+ \text{ si l'ensemble est vide.}$$

Le temps d'arrêt  $T_S(m) \wedge \zeta$  est un temps d'arrêt optimal :

$$Z_S(m) = \mathbf{E}\left[\sup(Z_{T_S(m) \wedge \zeta}, m) \mid \mathcal{F}_S\right], \quad \text{et} \quad Z_{T_S(m) \wedge \zeta}(m) = \sup(Z_{T_S(m) \wedge \zeta}, m),$$

mais le plus petit temps d'arrêt optimal est  $\widehat{T}_S(m) := T_S(m) \wedge \theta_S(m)$ .

3. La famille  $m \mapsto T_S(m) \wedge \zeta$  est croissante et continue à gauche.

### Remarque IV.5

La preuve de la continuité à gauche de la famille  $m \mapsto T_S(m) \wedge \zeta$  est la partie la plus technique du travail. Elle peut être omise dans une première lecture.

**Preuve - IV.5 -**

1. Si la surmartingale  $Z$  est continue (dans le cas d'une filtration Brownienne par exemple), le processus  $Z \vee m$  est également continu, et la théorie classique peut s'appliquer pour expliquer la première partie du théorème (voir [KK95]). Dans le cas général où la surmartingale  $Z$  est quasi-continue à gauche, le processus  $Z \vee m$  est seulement quasi-continu supérieurement à gauche, puisque d'après le lemme IV.1,  $Z^- \vee m \leq (Z \vee m)^{(p)}$ . Autrement dit, en termes de temps d'arrêt, pour toute suite croissante de temps d'arrêt  $S_n \uparrow S$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[Z_{S_n} \vee m] \leq \mathbf{E}[Z_S \vee m]$  (cf. la seconde remarque préliminaire de la section IV.2).

Pour conclure, nous devons utiliser des résultats généraux sur les problèmes d'arrêt optimal; en particulier, le résultat désiré découle immédiatement du théorème 2.43, p. 142 dans [Kar81].

2. Observons d'abord que

$$\begin{aligned} Z_{T_S(m) \wedge \zeta}(m) &= Z_{T_S(m)}(m) \mathbf{1}_{\{T_S(m) \leq \zeta\}} + \sup(Z_\zeta, m) \mathbf{1}_{\{T_S(m) = \infty^+\}} \\ &= Z_{T_S(m)} \mathbf{1}_{\{T_S(m) \leq \zeta\}} + \sup(Z_\zeta, m) \mathbf{1}_{\{T_S(m) = \infty^+\}}. \end{aligned}$$

Or sur l'ensemble  $\{T_S(m) \leq \zeta\}$ ,  $Z_{T_S(m)}(m) = Z_{T_S(m)} \geq m$  et donc  $Z_{T_S(m) \wedge \zeta}(m) = \sup(Z_{T_S(m) \wedge \zeta}, m)$ .

Il reste à observer que

$$\begin{aligned} Z_{\widehat{T}_S(m)}(m) &= Z_{\theta_S(m) \wedge (T_S(m) \wedge \zeta)}(m) \\ &= \sup(Z_{T_S(m) \wedge \zeta}, m) \mathbf{1}_{\{T_S(m) \wedge \zeta \leq \theta_S(m)\}} + m \mathbf{1}_{\{\theta_S(m) < T_S(m) \wedge \zeta\}}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme  $m$  est absorbant sur l'ensemble  $\{\theta_S(m) < T_S(m) \wedge \zeta\}$ ,

$$Z_{T_S(m) \wedge \zeta}(m) = m = \sup(Z_{T_S(m) \wedge \zeta}, m).$$

Nous obtenons donc finalement

$$Z_{\widehat{T}_S(m)}(m) = Z_{T_S(m) \wedge \zeta}(m) = \sup(Z_{T_S(m) \wedge \zeta}, m)$$

et  $Z_S(m) = \mathbf{E}[Z_{\widehat{T}_S(m)}(m) | \mathcal{F}_S] = \mathbf{E}[\sup(Z_{T_S(m) \wedge \zeta}, m) | \mathcal{F}_S]$ , puisque  $\widehat{T}_S(m)$  est un temps d'arrêt optimal.

3. Croissance : Soient  $m_1$  et  $m_2$  deux réels tels que  $m_1 \leq m_2$ . Si  $T_S(m_2) = \zeta$ , il en découle immédiatement que  $T_S(m_1) \leq T_S(m_2)$ . Sinon, nous déduisons de la propriété de croissance de  $m \mapsto Z_S(m)$  que

$$Z_{T_S(m_2)}(m_1) \leq Z_{T_S(m_2)}(m_2) = Z_{T_S(m_2)} \quad \text{p.s.}$$

Ceci implique donc que  $T_S(m_1) \leq T_S(m_2)$ , puisque  $T_S(m_1)$  est le premier temps d'arrêt  $U$  après  $S$  où  $Z_U(m_1) = Z_U$ .

Continuité à gauche : Soit  $\epsilon > 0$ . Comme  $m \mapsto Z_U(m)$  est Lipschitzienne et continue à chaque instant  $U \geq S$ ,  $Z_U(m - \epsilon) \rightarrow Z_U(m)$  p.s. et dans  $L^1$ , lorsque  $\epsilon \downarrow 0$ .

Posons  $T_S^\epsilon := T_S(m - \epsilon)$ ,  $T_S := T_S(m)$  et  $T_{S^-} := \lim \uparrow T_S(m - \epsilon)$ . Nous spécifions la partie prévisible  $T_{S^-}^{(p)}$  de  $T_{S^-}$  comme le temps d'arrêt défini par

$$\begin{aligned} T_{S^-}^{(p)} &= T_{S^-} \text{ sur } H_{T_S}^- = \{\omega, T_S^\epsilon \uparrow \uparrow T_{S^-}\}, = \infty^+ \text{ sinon,} \\ T_{S^-}^{(s)} &= T_{S^-} \text{ sur } (H_{T_S}^-)^c = \{\omega, \exists \epsilon T_S^\epsilon = T_{S^-}\}, = \infty^+ \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Ainsi  $T_{S^-} = \inf (T_{S^-}^{(p)}, T_{S^-}^{(s)})$ .

Nous pouvons donner une description précise de la limite des différents termes :

(a) sur  $(H_{T_S}^-)^c$ ,  $\lim Z_{T_S^\epsilon \wedge \zeta}(m - \epsilon) = Z_{T_{S^-} \wedge \zeta}(m)$ . De plus,

- Si  $T_{S^-} \leq \zeta$ , alors  $T_S^\epsilon \leq \zeta$  et  $Z_{T_S^\epsilon \wedge \zeta} = Z_{T_S^\epsilon} \geq m - \epsilon$  tend vers  $Z_{T_{S^-}} \geq m$ .
- Si  $T_{S^-} = \infty^+$ , alors il existe  $\epsilon$  tel que  $T_S^\epsilon = \infty^+$  et  $Z_{T_S^\epsilon \wedge \zeta}(m - \epsilon) = \sup(Z_\zeta, m - \epsilon)$ .

Ainsi dans les deux cas,  $Z_{T_{S^-} \wedge \zeta}(m) = \sup(Z_{T_{S^-} \wedge \zeta}, m)$ . On en déduit aisément que  $T_{S^-}(m) = T_S(m)$  sur  $(H_{T_S}^-)^c$ .

(b) sur  $H_{T_S}^-$ , grâce à la monotonie stricte de la suite  $T_S^\epsilon$ ,  $T_{S^-}^{(p)} \leq \zeta$ , et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_{T_S^\epsilon \wedge \zeta}(m - \epsilon) = Z_{T_{S^-}^{(p)}}(m)$ . D'autre part,  $Z_{T_S^\epsilon}(m - \epsilon) = Z_{T_S^\epsilon}$  puisque  $T_S^\epsilon \leq \zeta$  p.s. Par suite,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_{T_S^\epsilon \wedge \zeta}(m - \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_{T_S^\epsilon} = Z_{T_{S^-}^{(p)}}$ .

Comme  $T_{S^-}^{(p)}$  est prévisible sur  $H_{T_S}^-$ , et grâce à la quasi-continuité à gauche de  $Z$  et de  $Z(\cdot)$ , il vient

$$Z_{T_{S^-}^{(p)}}(m) = Z_{T_{S^-}^{(p)}}^{(p)}(m) = Z_{T_{S^-}^{(p)-}} = Z_{T_{S^-}^{(p)}}^{(p)} = \mathbf{E}[Z_{T_{S^-}^{(p)}} | \mathcal{F}_{T_{S^-}^{(p)-}}].$$

Ainsi sur l'ensemble  $H_{T_S}^-$ ,  $Z_{T_{S^-}^{(p)}}(m) = Z_{T_{S^-}^{(p)}}$  p.s et  $T_{S^-}^{(p)} = T_{S^-} = T_S(m)$ , puisque  $T_S(m)$  est le plus petit temps d'arrêt  $U$  après  $S$  vérifiant  $Z_U(m) = Z_U$ .

■

**Remarque IV.6**

Si la surmartingale  $Z$  n'est pas quasi-continue à gauche, il a été démontré dans [Kar81] qu'il peut y avoir une perte d'optimalité dans le problème d'arrêt optimal du processus  $Z \vee m$ . Plus précisément, le candidat à être un temps d'arrêt optimal est l'instant  $\hat{\tau}_S(m)$  tel que

$$\hat{\tau}_S(m) := \inf\{t \geq S ; Z_t(m) = Z_t \vee m \text{ ou } Z_t^-(m) = Z_t^- \vee m\} \wedge \zeta.$$

Il est possible d'adapter la preuve précédente en introduisant les deux familles de temps d'arrêt  $\tilde{\theta}_S(m) = \inf\{t \geq S; Z_t(m) = m \text{ ou } Z_t^-(m) = m\}$  et  $\tilde{T}_S(m) = \inf\{t \geq S; Z_t(m) = Z_t \text{ ou } Z_t^-(m) = Z_t^-\}$ .

## IV.4 Analyse convexe et caractérisation de la décomposition Max-Plus de $Z$

Dans ce qui suit, la surmartingale  $Z$  est supposée  $(\mathcal{D})$ -régulière. Nous travaillons encore avec la version 1-Lipschitzienne du champ aléatoire  $m \mapsto Z_t(m)$ . Grâce à la convexité et à la monotonie de  $m \mapsto Z_t \vee m$ , le champ aléatoire  $Z_t(m)$  hérite des mêmes propriétés. En particulier, il est possible de caractériser la dérivée à gauche de  $Z_S(m)$  par rapport à  $m$ .

On peut trouver des idées similaires dans l'article [KK95] de N. El Karoui et I. Karatzas. Considérant certaines propriétés (par rapport à  $K$ ) d'une famille convexe de Puts Américains, ils donnent en effet une représentation de la prime d'exercice anticipé d'un Put Américain de strike donné  $K > 0$ , sur un horizon fini. La différence majeure dans notre contexte est que le prix du sous-jacent est une surmartingale non obligatoirement continue, mais seulement continue en espérance par rapport aux temps d'arrêt. Le théorème de représentation d'un processus quelconque  $X$  de la classe  $(\mathcal{D})$ , établi par P. Bank et N. El Karoui [BK04] est également très proche de ce point de vue.

**Proposition IV.7 (Représentation Statique de  $Z_t(m)$ )**

Fixons  $S$  dans  $\mathcal{T}_{0,\zeta}$  et considérons  $\Lambda_S(\alpha)$  l'inverse à gauche à l'instant  $\alpha$  de l'application  $m \mapsto T_S(m)$ , où  $m \in \mathbb{R}$  :

$$\Lambda_S(\alpha) := \sup\{m ; T_S(m) \leq \alpha\}, \quad \text{avec la notation conventionnelle } \sup\{\emptyset\} = -\infty.$$

(a) La fonction convexe  $m \mapsto Z_S(m)$  admet une dérivée à gauche vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{\partial^-}{\partial m} Z_S(m) &= \mathbf{P}[Z_\zeta < m; T_S(m) = \infty^+ | \mathcal{F}_S] \\ &= \mathbf{P}[Z_\zeta < m; \Lambda_S(\zeta) < m | \mathcal{F}_S] = 1 + \frac{\partial^-}{\partial m} C_S^{A_m}(Z, m), \quad p.s. \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

(b) Pour tout réel  $m$ ,

$$Z_S(m) = \mathbf{E}[\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta \vee m | \mathcal{F}_S], \quad \text{et } Z_S = Z_S(-\infty) = \mathbf{E}[\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_S] \quad p.s.$$

Ce résultat est intimement lié aux “théorèmes d’enveloppe traditionnels” qui ont pour objectif de décrire comment la *valeur* d’un problème d’optimisation change en fonction des paramètres du problème. Plus précisément un théorème d’enveloppe est un principe général qui fournit des conditions suffisantes assurant la différentiabilité par rapport au paramètre, de la valeur d’un problème d’optimisation paramétrisé. Il donne également une formule pour la dérivée.

Ce principe est très utile en économie. Supposons par exemple que l’on cherche à prédire comment une légère hausse du prix de l’un des inputs d’une entreprise impacte ses profits. Ce problème peut paraître compliqué au premier abord puisque l’entreprise peut choisir de modifier la quantité d’input lorsque son prix varie. On pourrait supposer que l’unique façon d’aborder ce problème serait de considérer la fonction de production de l’entreprise, de déterminer la nouvelle quantité optimale d’input et de calculer les profits dans la nouvelle situation. Cependant, grâce au théorème de l’enveloppe, le problème devient très simple. On a juste à déterminer la quantité d’input actuellement utilisée par l’entreprise et à la multiplier par la variation du prix.

Lorsque la variation du prix est importante, le théorème de l’enveloppe ne peut plus s’appliquer directement puisque la dérivée de la fonction de profit n’est plus un indicateur sûr de la variation totale de profit.

Nous renvoyons le lecteur intéressé à l’article [Mil99] pour une revue des théorèmes d’enveloppe.

### Preuve - IV.7 -

(a) La preuve est basée sur l’optimalité de  $T_S(m) \wedge \zeta$  et sur les inégalités convexes classiques

$$\epsilon \mathbf{1}_{\{x < m - \epsilon\}} \leq x \vee m - x \vee (m - \epsilon) \leq \epsilon \mathbf{1}_{\{x < m\}}.$$

Nous avons en effet :

$$x \vee m - x \vee (m - \epsilon) = (m - x) \mathbf{1}_{\{m - \epsilon \leq x < m\}} + \epsilon \mathbf{1}_{\{x < m - \epsilon\}} \leq \epsilon \mathbf{1}_{\{x < m\}}.$$

L'ensemble  $\{Z_{T_S(m) \wedge \zeta} < m\}$  joue un rôle clé. Pour pouvoir l'exprimer autrement, nous exploitons le fait que sur l'ensemble  $\{T_S(m) \leq \zeta\}$ ,  $Z_{T_S(m)} = Z_{T_S(m)}(m) \geq m$ . Il en résulte aussitôt que

$$\{Z_{T_S(m) \wedge \zeta} < m\} = \{Z_\zeta < m; T_S(m) = \infty^+\}.$$

Les observations précédentes entraînent la série d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned} Z_S(m) - Z_S(m - \epsilon) &\leq \mathbf{E}[\sup(Z_{T_S(m) \wedge \zeta}, m) - \sup(Z_{T_S(m) \wedge \zeta}, m - \epsilon) | \mathcal{F}_S)] \\ &\leq \epsilon \mathbf{P}[Z_{T_S(m) \wedge \zeta} < m | \mathcal{F}_S] \\ &= \epsilon \mathbf{P}[Z_\zeta < m; T_S(m) = \infty^+ | \mathcal{F}_S]. \end{aligned}$$

Maintenant pour obtenir une borne inférieure, nous exploitons l'optimalité de  $T_S(m - \epsilon) \wedge \zeta$  :

$$\begin{aligned} Z_S(m) - Z_S(m - \epsilon) &\geq \mathbf{E}[\sup(Z_{T_S(m-\epsilon) \wedge \zeta}, m) - \sup(Z_{T_S(m-\epsilon) \wedge \zeta}, m - \epsilon) | \mathcal{F}_S] \\ &\geq \epsilon \mathbf{P}[Z_{T_S(m-\epsilon) \wedge \zeta} < m - \epsilon | \mathcal{F}_S] \\ &= \epsilon \mathbf{P}[Z_\zeta < m - \epsilon; T_S(m - \epsilon) = \infty^+ | \mathcal{F}_S]. \end{aligned}$$

Comme la suite  $(T_S(m))_m$  est croissante et continue à gauche,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbf{P}[Z_\zeta < m - \epsilon; T_S(m - \epsilon) = \infty^+ | \mathcal{F}_S] \leq \mathbf{P}[Z_\zeta < m; T_S(m) = \infty^+ | \mathcal{F}_S]. \quad (\text{IV.6})$$

Cependant  $\{T_S(m) = \infty^+\} = \bigcap_\epsilon \{T_S(m - \epsilon) = \infty^+\}$  puisque sur l'ensemble  $H_{T_S}^-$ ,  $T_S(m) = \lim T_S(m - \epsilon) \leq \zeta$  et sur  $(H_{T_S}^-)^c$ , il existe  $\epsilon$  tel que  $T_S(m - \epsilon) = T_S(m)$ . Ainsi,  $\{T_S(m) = \infty^+\}$  ne peut pas être atteint par des suites  $\{T_S(m - \epsilon) \leq \zeta\}$  et l'inégalité dans (IV.6) est une vraie égalité. Il en découle finalement que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^-}{\partial m} Z_S(m) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbf{P}[Z_\zeta < m - \epsilon; T_S(m - \epsilon) = \infty^+ | \mathcal{F}_S] \\ &= \mathbf{P}[Z_\zeta < m; T_S(m) = \infty^+ | \mathcal{F}_S]. \end{aligned}$$

(b) Nous cherchons maintenant à réintégrer afin de dériver une représentation explicite de  $Z_S(m)$ . Pour ce faire, nous avons besoin d'exprimer plus simplement l'événement  $\{T_S(m) = \infty^+\}$  en fonction de  $m$ .

Notons que  $\{m; T_S(m) \leq \zeta\}$  est un intervalle fermé à droite par  $\Lambda_S(\zeta)$ , également défini par

$$\Lambda_S(\zeta) = \sup\{m; T_S(m) \leq \zeta\} \quad (= -\infty \text{ si } \{\} = \emptyset).$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial^-}{\partial m} Z_S(m) = \mathbf{P}[Z_\zeta < m ; m > \Lambda_S(\zeta) | \mathcal{F}_S] = \mathbf{P}[m > \Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_S].$$

Il nous faut ensuite des conditions aux bords. Comme

$$Z_S(m) - m = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{S,\zeta}} \mathbf{E}[(Z_\tau - m)^+ | \mathcal{F}_S],$$

nous pouvons utiliser (IV.3) pour montrer que si la surmartingale  $Z$  est dominée par la martingale  $V$ ,

$$0 \leq \lim_{m \uparrow +\infty} (Z_S(m) - m) \leq \lim_{m \uparrow +\infty} \mathbf{E}[(V_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_S] = 0$$

et  $Z_S(m) - m$  peut donc s'écrire sous forme d'intégrale :

$$Z_S(m) - m = \int_m^{+\infty} -\frac{\partial^-}{\partial \alpha} (Z_S(\alpha) - \alpha) d\alpha.$$

Il est à noter ici que nous ne pouvons pas directement réintégrer  $\frac{\partial^-}{\partial m} Z_S(m)$ , puisque la limite de  $Z_S(m)$  lorsque  $m$  tend vers  $-\infty$  est égale à  $Z_S$  qui est inconnue.

Ensuite d'après l'équation (IV.5),

$$Z_S(m) - m = \int_m^{+\infty} \mathbf{P}[\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta \geq \alpha | \mathcal{F}_S] d\alpha.$$

L'application du théorème de Fubini conditionnel permet d'obtenir les égalités suivantes :

$$Z_S(m) - m = \mathbf{E} \left[ \int_m^{+\infty} \mathbf{1}_{\{\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta \geq \alpha\}} d\alpha \middle| \mathcal{F}_S \right] = \mathbf{E}[(\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_S],$$

et  $Z_S(m) = \mathbf{E}[\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta \vee m | \mathcal{F}_S]$ .

Faisons maintenant tendre  $m$  vers  $-\infty$  et appliquons le théorème de convergence monotone. Il vient

$$\lim_{m \downarrow -\infty} Z_S(m) = Z_S(-\infty) = \mathbf{E} \left[ \lim_{m \downarrow -\infty} \Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta \vee m \middle| \mathcal{F}_S \right] = \mathbf{E}[\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_S].$$

Par ailleurs, la suite  $(T_S(m))_m$  décroît vers  $T_S^+(-\infty)$ , et par continuité à droite de  $Z$ ,  $Z_{T_S(m) \wedge \zeta} \vee m$  tend vers  $Z_{T_S^+(-\infty) \wedge \zeta}$ . Par le théorème de Lebesgue,

$$\begin{aligned} Z_S &\leq \lim_{m \downarrow -\infty} Z_S(m) = \lim_{m \downarrow -\infty} \mathbf{E}[\sup(Z_{T_S(m) \wedge \zeta}, m) | \mathcal{F}_S] \\ &= \mathbf{E} \left[ \lim_{m \downarrow -\infty} \sup(Z_{T_S(m) \wedge \zeta}, m) \middle| \mathcal{F}_S \right] = \mathbf{E}[Z_{T_S(-\infty) \wedge \zeta} | \mathcal{F}_S] \leq Z_S, \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du fait que  $T_S(-\infty)^+ \wedge \zeta$  est un temps d'arrêt postérieur à  $S$  et  $Z$  est une surmartingale.

Il en résulte aussitôt que  $Z_S = Z_S(-\infty) = \mathbf{E}[\Lambda_S(\zeta) \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_S]$ .

■

La proposition précédente donne une représentation statique de  $Z_t(m)$  ( $t$  fixé). Nous allons exploiter ci-après la structure dynamique de l'enveloppe de Snell  $\{Z_t(m); t \geq 0\}$  afin de déduire une représentation exhibant la dépendance de  $\Lambda_t(\zeta)$  par rapport à  $t$ . Pour ce faire, nous allons employer des techniques liées aux changements de variables dans  $\mathbb{R}$ , que nous rappelons dans le lemme suivant :

### Lemme IV.8

*Posons*

$$\Lambda_t(\alpha) := \sup\{m ; T_t(m) \leq \alpha\}; \quad \alpha \in [t, \zeta], \quad = -\infty \text{ si l'ensemble est vide.}$$

*Alors  $\Lambda_t(\alpha)$  définit l'inverse continu à droite de la fonction croissante, continue à gauche  $m \mapsto T_t(m)$ . En d'autres termes,*

$$T_t(m) \leq \alpha \iff m \leq \Lambda_t(\alpha), \quad \forall \alpha \in [t, \zeta].$$

Notons ici que puisque les inégalités sont larges,  $\Lambda_t(\alpha)$  représente l'inverse à droite du processus continu à gauche  $m \mapsto T_t(m)$ . Des travaux antérieurs sur le changement de temps [KW77] montrent que le processus  $\alpha \mapsto \Lambda_t(\alpha)$  est continu à droite. Observons que le cas présent est différent des cas usuels, où nous considérons plutôt des inverses à droite de processus continus à droite, et où les inégalités sont par conséquent strictes. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article de El Karoui-Weindenfeld [KW77] pour de plus amples détails sur la théorie du changement de temps.

Le théorème suivant représente le processus croissant  $\{\Lambda_t(\alpha); t \leq \alpha \leq \zeta\}$  en termes d'un processus de running supremum et donne une forme explicite à la martingale  $M^\oplus$  de la décomposition Max-Plus de  $Z$ .

### Théorème IV.9

*Soit  $L_t$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_t$ -mesurable définie par*

$$\begin{aligned} L_t &:= \sup\{m \in \mathbb{Q} ; Z_t(m) = Z_t\} \\ &= \sup\{m \in \mathbb{Q} ; T_t(m) = t\} \quad = -\infty \text{ si l'ensemble est vide.} \end{aligned}$$

*Soit  $L_{t,\alpha}^*$  le running supremum de  $L$  sur  $[t, \alpha]$  ( $t \leq \alpha \leq \zeta$ ), c'est-à-dire  $L_{t,\alpha}^* = \sup_{t \leq s \leq \alpha} L_s$ . Nous avons alors*



- (a)  $L_{t,\alpha}^* = \Lambda_t(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in [t, \zeta]$  et  $Z_t(m) = \mathbf{E}[L_{t,\zeta}^* \vee Z_\zeta \vee m | \mathcal{F}_t]$ .
- (b)  $\alpha \mapsto L_{t,\alpha}^*$  est continue à droite pour tout  $\alpha \in [t, \zeta[$ .
- (c) Le processus  $(M_t)_{t \geq 0}$  défini par

$$M_t = \mathbf{E}[L_{0,\zeta}^* \vee Z_\zeta | \mathcal{F}_t] = Z_t(L_{0,t}^*) \geq Z_t = Z_t(-\infty), \quad 0 \leq t \leq \zeta$$

est la martingale  $M^\oplus$  de la décomposition Max-Plus de  $Z$ , puisque le processus croissant  $(L_{0,t}^*)$  satisfait à la condition de flat-off

$$\int_{[0,\zeta]} (M_t - Z_t) dL_{0,t}^* = 0. \quad p.s.$$

### Preuve - IV.9 -

- (a) Tout d'abord, notons que la croissance et la continuité de la fonction  $m \mapsto Z_t(m)$  impliquent que  $L_t$  est l'extrémité droite de l'intervalle fermé  $\{m, Z_t(m) = Z_t\}$ .
- Notons ensuite que pour  $\alpha \leq \zeta$ ,  $T_t(m) \leq \alpha$ , si et seulement si, il existe  $s \in [t, \alpha]$  tel que  $Z_s(m) = Z_s$ , ou encore de manière équivalente  $L_s \geq m$ . Ceci conduit à la série d'égalités suivante :

$$\begin{aligned} \{T_t(m) = t\} &= \bigcap_{\alpha > 0} \{T_t(m) \leq t + \alpha\} \\ &= \bigcap_{\alpha > 0} \{\exists s \in [t, t + \alpha]; L_s \geq m\} = \left\{ \limsup_{s \downarrow t} L_t \geq m \right\}. \end{aligned}$$

Cependant, comme  $T_t(m) = t$  si et seulement si  $L_t \geq m$ , il en résulte immédiatement que  $L_t = \limsup_{s \downarrow t} L_t$  et  $L_t$  est semi-continu supérieurement à droite. Ainsi

$$T_t(m) \leq \alpha \iff \exists s \in [t, \alpha]; m \leq L_s \iff m \leq L_{t,\alpha}^*.$$

Cette dernière équivalence conjointement avec le lemme précédent implique aisément que  $L_{t,\alpha}^* = \Lambda_t(\alpha)$  pour tout  $\alpha \in [t, \zeta]$ . De plus grâce à la proposition IV.7,  $Z_t(m) = \mathbf{E}[L_{t,\zeta}^* \vee Z_\zeta \vee m | \mathcal{F}_t]$ .

- (b) Il s'agit d'une conséquence immédiate de (a) et de la continuité à droite de  $\alpha \mapsto \Lambda_t(\alpha)$ .

(c)  $(L_{0,t}^*)_{t \geq 0}$  est évidemment un processus croissant. Considérons un temps d'arrêt  $S$  correspondant à un point de croissance de  $L_{0,\cdot}^*$ .

- Si  $S < \zeta$ , il vérifie nécessairement  $\sup_{0 \leq t \leq \zeta} L_t = \sup_{S \leq t \leq \zeta} L_t$ , d'où

$$M_S = \mathbf{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq \zeta} L_t \vee Z_\zeta \mid \mathcal{F}_S \right] = \mathbf{E} \left[ \sup_{S \leq t \leq \zeta} L_t \vee Z_\zeta \mid \mathcal{F}_S \right] = Z_S.$$

- Si  $S = \zeta$ , nous avons  $L_{0,S^-}^* < L_S$ , sinon le processus croissant ne pourrait pas sauter en  $\zeta$ . Or  $L_\zeta = Z_\zeta$  et  $M_\zeta = L_{0,\zeta^-}^* \vee L_\zeta$ , il en résulte immédiatement que  $M_\zeta = Z_\zeta$  et la condition de flat-off est bien vérifiée. Ceci entraîne immédiatement, au vu du théorème II.8, l'unicité de la martingale dans la décomposition Max-Plus  $M_S = Z_S \oplus L_{0,S}^*$ , où  $S$  vérifie  $L_S = L_{0,S}^*$ . ■

La proposition IV.7 et le théorème IV.9 permettent d'étudier la régularité de la dérivée de la fonction valeur  $C_S^{Am}(Z, m)$  par rapport au strike  $m$ . Nous disons qu'il y a "**smooth-fit**" si les deux dérivées coïncident à la frontière d'arrêt optimal déterminée par  $m = L_S = \sup\{m; C_S^{Am}(Z, m) = Z_S - m\}$ . Le corollaire suivant décrit complètement les sauts de la dérivée à droite à la frontière et établit les conditions sous lesquelles le "smooth-fit" a lieu.

#### Corollaire IV.10 (Principe de smooth-fit)

1. Les dérivées à gauche et à droite du prix du Call Américain  $C_S^{Am}(Z, m)$  par rapport à  $m$  ont pour expression

$$\begin{aligned} \frac{\partial^-}{\partial m} C_S^{Am}(Z, m) &= -\mathbf{P}[Z_\zeta \vee L_{S,\zeta}^* \geq m \mid \mathcal{F}_S], \\ \frac{\partial^+}{\partial m} C_S^{Am}(Z, m) &= -\mathbf{P}[Z_\zeta \vee L_{S,\zeta}^* > m \mid \mathcal{F}_S] \quad p.s. \end{aligned}$$

2. La dérivée à gauche est presque sûrement continue à la frontière  $m = L_S$  :

$$\left. \frac{\partial^-}{\partial m} C_S^{Am}(Z, m) \right|_{m=L_S} = \left. \frac{\partial^-}{\partial m} (Z_S - m) \right|_{m=L_S} = -1.$$

3. La dérivée à droite n'est pas continue à la frontière si

$$\mathbf{P}[Z_\zeta \vee L_{S,\zeta}^* = L_S \mid \mathcal{F}_S] = \mathbf{P}[L_t \leq L_S, \forall t \in [S, \zeta] \mid \mathcal{F}_S] > 0. \quad (\text{IV.7})$$

Ainsi le principe de smooth-fit n'a pas lieu si la fonction de répartition conditionnelle de  $Z_\zeta \vee L_{S,\zeta}^*$  saute au point  $L_S$ .

**Preuve - IV.10 -**

La formule de la dérivée à gauche du prix du Call découle immédiatement de la proposition IV.7. Quant à l'expression de la dérivée à droite, elle résulte de la convexité de la fonction  $m \mapsto Z_S(m)$ , qui entraîne que  $\frac{\partial^+}{\partial m} Z_S(m) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\partial^-}{\partial m} Z_S(m + \epsilon)$ .

On en déduit alors que

$$\frac{\partial^+}{\partial m} C_S^{\text{Am}}(Z, m) = - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbf{P}[Z_\zeta \vee L_{S,\zeta}^* \geq m + \epsilon | \mathcal{F}_S] = - \mathbf{P}[Z_\zeta \vee L_{S,\zeta}^* > m | \mathcal{F}_S].$$

■

Il est intéressant de noter que lorsque le sous-jacent  $Z$  évolue selon un processus de Lévy multiplicatif positif, le principe de smooth-fit que nous avons défini ici est équivalent au principe “classique”<sup>1</sup> rencontré habituellement dans le contexte des Puts Américains (voir [AK05, Théorème 6]). En effet, d'après l'équation (III.7), les prix de Calls Américains sont transformés en prix de Puts Américains “classiques” avec coefficient d'actualisation, en échangeant simplement le strike et le prix spot du sous-jacent :

$$C_0^{\text{Am}}(Z, m) = m Z_0 \text{Put}_0^{\text{Am}}\left(\frac{1}{Z_0}, \frac{1}{m}\right) = \text{Put}_0^{\text{Am}}(m, Z_0).$$

Ainsi tout point  $m$  de notre frontière correspond à un point  $x$  de la frontière du Put Américain tel que  $L(x) = bx = m$ .

**Remarque IV.11**

*Rappelons que le temps d'arrêt  $T_S(m) \wedge \zeta$  est optimal, tandis que  $T_S(m)$  ne l'est pas. De plus, le plus petit temps d'arrêt optimal est*

$$\widehat{T}_S(m) = T_S(m) \wedge \theta_S(m),$$

*où  $\theta_S(m)$  est défini comme étant le premier temps d'arrêt après  $S$  où  $Z_S(m)$  vaut  $m$ .*

*La fonction  $m \mapsto \theta_S(m)$  est décroissante, de domaine effectif*

$$\text{Dom}_S := \{m; \theta_S(m) \leq \zeta\} = [K_{S,\zeta}, +\infty],$$

*où  $K_{S,\zeta}$  est la plus petite valeur de  $m$  pour laquelle  $Z_S(m) - m = 0$ . Autrement dit,*

$$K_{S,\zeta} := \mathcal{F}_S - \text{ess sup } Z_{S,\zeta}^* = \text{ess inf } \{Y_S \mid Y_S \in \mathcal{F}_S, Y_S \geq Z_{S,\zeta}^* \text{ p.s.}\}.$$

*Observons que*

---

<sup>1</sup>Le principe de smooth-fit usuel établit que le point d'arrêt optimal  $b$ , qui sépare la région de continuation  $\mathcal{C}$  de la région d'arrêt  $\mathcal{D}$  dans le problème d'arrêt optimal  $V(x) = \sup_\tau \mathbf{E}_x G(X_\tau)$ , est caractérisé par le fait que  $V'(b)$  existe et vaut  $G'(b)$ .

- Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt tels que  $S \leq T$ , alors  $K_{S,\zeta} \geq K_{T,\zeta}$ .  
En effet, comme toute variable  $\mathcal{F}_T$ -mesurable est  $\mathcal{F}_S$ -mesurable, nous avons

$$\begin{aligned} K_{S,\zeta} &= \text{ess inf}\{Y \in \mathcal{F}_S, Y \geq Z_{S,\zeta}^* \geq Z_{T,\zeta}^* \text{ p.s.}\} \\ &\geq \text{ess inf}\{Y \in \mathcal{F}_T, Y \geq Z_{T,\zeta}^* \text{ p.s.}\} = K_{T,\zeta}. \end{aligned}$$

- Pour tout temps d'arrêt  $U \geq S$ ,  $Z_S(K_{S,\zeta}) = Z_U(K_{S,\zeta}) = K_{S,\zeta}$ , p.s.

## IV.5 Décomposition Max-Plus et options Américaines

Contrairement à ce qu'il est possible d'obtenir dans un contexte d'évaluation d'options de type Européen, il n'existe pas de formule analytique simple pour évaluer les options Américaines, même si la volatilité du sous-jacent est supposée constante. La possibilité d'exercice prématuré qu'offre ce type de contrat complique considérablement son évaluation.

Dans le chapitre III, nous avons traité le problème de trouver un temps d'arrêt optimal à un Call Américain écrit sur un sous-jacent surmartingale de classe  $(\mathcal{D})$ .

Nous allons nous intéresser ici à des Calls Américains plus généraux sans facteur d'actualisation, écrits sur un sous-jacent  $Y$   $(\mathcal{D})$ -régulier, mais non forcément une surmartingale. Nous notons par  $Z^Y$  l'enveloppe de Snell de  $Y$ , qui définit également un processus  $(\mathcal{D})$ -régulier selon [Kar81, KS91].

### Théorème IV.12

Soit  $Y$  un processus  $(\mathcal{D})$ -régulier,  $Z^Y$  l'enveloppe de Snell de  $Y$  et  $C^{\text{Am}}(Y, m)$  le prix d'un Call Américain donné, à chaque temps d'arrêt  $S \leq \zeta$ , par

$$C_S^{\text{Am}}(Y, m) = \text{ess sup}_{\tau \geq S} \mathbf{E}[(Y_\tau - m)^+ | \mathcal{F}_S].$$

1. Les Calls Américains respectivement écrits sur  $Y$  et  $Z^Y$  ont le même prix :

$$C_S^{\text{Am}}(Y, m) = C_S^{\text{Am}}(Z^Y, m).$$

2. Soit  $L^Z$  un processus indice dans la décomposition Max-Plus de  $Z^Y$ . Le temps d'arrêt  $T_S^Z(m) \wedge \zeta := \inf\{t \geq S ; L_t^Z \geq m\} \wedge \zeta$  est un temps d'arrêt optimal.

### Caractérisation intrinsèque en termes de $Y$ .

3. Définissons les temps d'arrêt  $D_S$  et  $T_S^Y(m)$  par

$$\begin{aligned} D_S &:= \inf\{t \geq S ; Z_t^Y = Y_t\} \\ T_S^Y(m) &:= \inf\{t \geq S ; C_t^{\text{Am}}(Y, m) = Y_t - m\}. \end{aligned}$$

Alors  $D_{T_S^Z(m) \wedge \zeta} = T_S^Y(m) \wedge \zeta$  et  $m \mapsto T_S^Y(m) \wedge \zeta$  est croissant, continu à gauche.

4. Posons  $L_S^Y := \sup\{m ; C_S^{\text{Am}}(Y, m) = Y_S - m\}$  et  $L_{s,u}^{Y,*} = \sup_{s \leq t \leq u} L_t^Y$ . Alors  $L_{S,\zeta}^{Z,*} = L_{S,\zeta}^{Y,*}$  pour tout temps d'arrêt  $S \leq \zeta$  et  $C_S^{\text{Am}}(Y, m)$  a une formule fermée donnée par

$$C_S^{\text{Am}}(Y, m) = \mathbf{E}[(L_{S,\zeta}^{Z,*} \vee Z_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_S] = \mathbf{E}[(L_{S,\zeta}^{Y,*} \vee Y_\zeta - m)^+ | \mathcal{F}_S].$$

### Preuve - IV.12 -

1. Notons d'abord que

$$C_t^{\text{Am}}(Z^Y, m) = \text{ess sup}_{t \leq S \leq \zeta} \mathbf{E}[Z_S^Y \vee m | \mathcal{F}_t] - m := Z_t^Y(m) - m.$$

Soit  $Z'$  une surmartingale dominant  $Y \vee m$ . Comme  $Z'$  domine  $Y$ , elle domine aussi son enveloppe de Snell  $Z^Y$ . Il en découle immédiatement que  $Z'$  domine  $Z^Y \vee m$  et donc forcément son enveloppe de Snell  $Z^Y(m)$ . Ainsi l'enveloppe de Snell de  $Y \vee m$  domine  $Z^Y(m)$ , et comme l'inégalité inverse est trivialement vraie, on obtient le résultat désiré.

2. Ce point a déjà été prouvé au chapitre III, pour tout processus indice  $L$  vérifiant la décomposition Max-Plus de  $Z$ . Nous donnons ici une autre preuve spécifique au processus indice  $L$  construit dans ce chapitre. Grâce au théorème IV.4, le temps d'arrêt  $T_S^Z(m) \wedge \zeta$  défini par

$$T_S^Z(m) \wedge \zeta = \inf\{u \geq S ; C_u^{\text{Am}}(Y, m) = Z_u^Y - m\} \wedge \zeta$$

est optimal. Soit  $L^Z$  le processus indice suivant intervenant dans la décomposition Max-Plus de  $Z^Y$  :

$$L_S^Z = \sup\{m ; Z_S^Y(m) = Z_S^Y\} = \sup\{m ; C_S^{\text{Am}}(Z^Y, m) = Z_S^Y - m\}.$$

$T_S^Z(m)$  est l'inverse à gauche de  $\alpha \mapsto L_{S,\alpha}^{Z,*}$  et satisfait par suite la relation mentionnée ci-dessus dans le théorème IV.12.

3. Afin de simplifier les notations dans cette preuve, nous allons omettre le paramètre  $m$  dans les expressions des temps d'arrêt  $T_S^Z(m)$  et  $T_S^Y(m)$ . Posons

$$D_S(m) := D_{T_S^Z \wedge \zeta} = \inf\{t \geq T_S^Z \wedge \zeta ; Z_t^Y = Y_t\}.$$

Comme  $D_S(m)$  est le premier temps d'arrêt après  $T_S^Z \wedge \zeta$ , où  $Y$  atteint son enveloppe de Snell  $Z^Y$ , il découle immédiatement de la théorie d'arrêt optimal

$$Z_{T_S^Z \wedge \zeta}^Y = \mathbf{E}[Y_{D_S(m)} | \mathcal{F}_{T_S^Z \wedge \zeta}]. \quad (\text{IV.8})$$

Grâce à l'optimalité du temps d'arrêt  $T_S^Z \wedge \zeta$  pour  $Z^Y(m)$ ,  $Z_{T_S^Z \wedge \zeta}^Y(m) = \sup(Z_{T_S^Z \wedge \zeta}^Y, m)$  et donc

$$\begin{aligned} Z_{T_S^Z \wedge \zeta}^Y(m) &= \mathbf{E}[Y_{D_S(m)} | \mathcal{F}_{T_S^Z \wedge \zeta}] \vee m \leq \mathbf{E}[\sup(Y_{D_S(m)}, m) | \mathcal{F}_{T_S^Z \wedge \zeta}] \\ &\leq Z_{T_S^Z \wedge \zeta}^Y(m). \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

Ainsi la chaîne d'inégalités est effectivement une série d'égalités, qui prouve que  $D_S(m)$  est un temps d'arrêt optimal à partir de  $T_S^Z \wedge \zeta$  :  $Z_{D_S(m)}^Y(m) = \sup(Z_{D_S(m)}^Y, m)$ .

Notons maintenant que  $Z_{T_S^Z}^Y(m) = Z_{T_S^Z}^Y \geq m$  sur l'ensemble  $\{T_S^Z \leq \zeta\}$ . Cette observation conjointement avec l'égalité (IV.8) implique que  $Y_{D_S(m)} \geq m$  sur  $\{T_S^Z \leq \zeta\}$ .

Ceci permet de réinterpréter  $D_S(m)$  en tant que  $T_S^Y$ . En effet, sur l'ensemble  $\{T_S^Z \leq \zeta\}$ ,

$$\begin{aligned} D_S(m) &= \inf\{t \geq T_S^Z ; Z_t^Y = Y_t\} \\ &= \inf\{t \geq T_S^Z ; Z_t^Y(m) = Z_t^Y = Y_t\} \\ &= \inf\{t \geq S ; Z_t^Y(m) = Z_t^Y = Y_t\} = T_S^Y, \end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité découle du fait que  $T_S^Z$  est le premier temps d'arrêt après  $S$  où  $Z^Y(m) = Z^Y$ .

Il vient finalement que  $T_S^Y = D_S(m)$  sur l'ensemble  $\{T_S^Z \leq \zeta\}$ .

De plus comme  $D_S(m) \leq \zeta$ , il en résulte aussitôt que  $T_S^Y \leq \zeta$  sur  $\{T_S^Z \leq \zeta\}$  et par suite  $\{T_S^Z \leq \zeta\} = \{T_S^Y \leq \zeta\}$  (puisque  $T_S^Z \leq T_S^Y$  p.s.). Ainsi, il est facile de voir que

$$D_S(m) = D_{T_S^Z(m) \wedge \zeta} = T_S^Y(m) \wedge \zeta.$$

Maintenant, nous voudrions étendre les propriétés de  $T_S^Z(m)$  par rapport à  $m$  (continuité à gauche et croissance) au temps d'arrêt  $T_S^Y(m)$ , via l'application  $t \mapsto D_t$ . Il est évident que l'application  $m \mapsto T_S^Y(m) \wedge \zeta$  est croissante puisque  $t \mapsto D_t$  l'est. De la même manière, nous aurions obtenu la continuité à gauche si  $t \mapsto D_t$  était continu à gauche. Le problème est que cette dernière propriété n'est pas vraie en général mais seulement le long des temps d'arrêt  $T_S^Z(m) \wedge \zeta$ . Posons  $D_S^-(m) := \lim \uparrow D_S(m - \epsilon)$ . Grâce à la propriété de croissance de

$m \mapsto D_S(m)$  et à la quasi-continuité à gauche des processus  $Z^Y$  et  $Y$ , les remarques préliminaires du paragraphe IV.2 impliquent que

$$\mathbf{E}[Z_{D_S(m-\epsilon)}^Y] \rightarrow \mathbf{E}[Z_{D_S^-(m)}^Y] \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[Y_{D_S(m-\epsilon)}] \rightarrow \mathbf{E}[Y_{D_S^-(m)}] \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow 0.$$

Comme  $Z_{D_S(m-\epsilon)}^Y = Y_{D_S(m-\epsilon)}$  et  $Z^Y \geq Y$ , il en découle aussitôt que

$$Z_{D_S^-(m)}^Y = Y_{D_S^-(m)},$$

et par suite  $D_S^-(m) = D_S(m)$  puisque  $D_S(m)$  est le premier temps d'arrêt  $U$  après  $T_S^Z \wedge \zeta$  vérifiant  $Z_U^Y = Y_U$ .

4. Le running supremum  $L_{S,u}^{Y,*}$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$L_{S,u}^{Y,*} = \sup\{m; T_S^Y(m) \leq u\}.$$

En effet,  $T_S^Y(m) \leq u \iff \exists t \in [S, u]; Z_t^Y(m) = Y_t \iff \exists t \in [S, u]; m \leq L_t^Y \iff m \leq L_{S,u}^{Y,*}$ .

Ainsi  $m \mapsto T_S^Z(m)$  et  $m \mapsto T_S^Y(m)$  définissent des fonctions différentes qui sont toutes les deux croissantes et continues à gauche. Leurs inverses continus à droite  $u \mapsto L_{S,u}^{Z,*}$  et  $u \mapsto L_{S,u}^{Y,*}$  sont ainsi différents mais de même valeur en  $\zeta$ , grâce aux équivalences suivantes :

$$T_S^Y(m) \leq \zeta \iff m \leq L_{S,\zeta}^{Y,*} \quad \text{et} \quad T_S^Z(m) \leq \zeta \iff T_S^Z(m) \leq \zeta,$$

qui impliquent que  $m \leq L_{S,\zeta}^{Y,*} \iff m \leq L_{S,\zeta}^{Z,*}$  pour tout  $m$ . Ainsi en appliquant le théorème IV.9, il vient

$$\begin{aligned} C_S^{\text{Am}}(Y, m) &= \mathbf{E}[L_{S,\zeta}^{Z,*} \vee m | \mathcal{F}_S] - m = \mathbf{E}[(L_{S,\zeta}^{Z,*} - m)^+ | \mathcal{F}_S] \\ &= \mathbf{E}[(L_{S,\zeta}^{Y,*} - m)^+ | \mathcal{F}_S]. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### Remarque IV.13

Il est à noter que les processus croissants  $(L_{0,\cdot}^{Y,*})$  et  $(L_{0,\cdot}^{Z,*})$  sont en général différents. On peut le vérifier aisément dans un cadre déterministe où  $Z_t^Y = \sup_{t \leq u \leq T} Y_u$ . Le prix du Call Américain écrit sur  $Z^Y$  peut alors s'exprimer comme

$$\begin{aligned} C_t^{\text{Am}}(Z^Y, m) &= \sup_{t \leq u \leq T} (Z_u^Y - m)^+ = \sup_{t \leq u \leq T} \left( \sup_{u \leq v \leq T} (Y_v - m)^+ \right) \\ &= \sup_{t \leq v \leq T} (Y_v - m)^+ = C_t^{\text{Am}}(Y, m) = (Z_t^Y - m)^+. \end{aligned}$$

Quant aux processus indices  $L^Y$  et  $L^Z$ , ils sont différents. En effet,

$$\begin{aligned} L_t^Z &= \sup\{m ; Z_t^Y(m) = Z_t^Y\} = \sup\{m ; Z_t^Y \vee m = Z_t^Y\} = Z_t^Y \\ L_t^Y &= \sup\{m ; Z_t^Y \vee m = Y_t\} = \sup\{m ; Z_t^Y \vee m = Z_t^Y = Y_t\}. \end{aligned}$$

Ainsi si  $Z_t^Y = Y_t$ , alors  $L_t^Z = L_t^Y = Z_t^Y$ , sinon  $L_t^Y = -\infty$ .

Soit  $\alpha$  un réel tel que  $\sup_{0 \leq u \leq T} Y_u = Y_\alpha = Z_\alpha^Y = Z_0^Y$ . Si  $\alpha \leq t$ , alors  $L_{0,t}^{Y,*} = Z_0^Y = L_{0,t}^{Z,*}$ , sinon  $L_{0,t}^{Y,*} = -\infty \neq L_{0,t}^{Z,*}$ .

## IV.6 Cas Markovien

Dans un cadre Markovien, l'étude des processus revient à celle des fonctions.

Soit  $X$  un processus fortement Markovien ("un processus droit"), à valeurs dans un espace d'état topologique  $E$  dont la tribu Borélienne  $\mathcal{B}(E)$  est séparable.

On s'intéresse à l'évolution du processus  $X$  jusqu'à un temps terminal  $\zeta$ , fini ou infini, appelé durée de vie du processus  $X$ .

Intuitivement, un processus de Markov  $X$  défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  est un processus sans mémoire. Son comportement dans le futur ne dépend du passé qu'à travers le présent. En d'autres termes, à chaque instant  $t$ ,  $X_t$  contient toujours assez d'information pour "générer" le futur (il suffit de mettre assez d'information dans  $X_t$ ).

### Définition IV.2

Soit  $(X_t)$  un processus stochastique  $\mathcal{F}_t$ -adapté, à valeurs dans un espace mesurable  $(E, \mathcal{B}(E))$ . On dit que  $(X_t)$  est un processus de Markov par rapport à la famille  $(\mathcal{F}_t)$  (ou que  $(X_t)$  est markovien par rapport à  $(\mathcal{F}_t)$ ) si pour tout  $t$ , les tribus  $\mathcal{F}_t$  et  $\sigma(X_s, s \geq t)$  sont conditionnellement indépendantes, la variable aléatoire  $X_t$  étant donnée.

Cette partie a pour objectif de reconsidérer les différentes étapes de la décomposition Max-Plus dans le cas Markovien, afin de mettre en évidence l'aspect Markovien des différents processus impliqués. Pour ce faire, nous nous intéressons particulièrement aux fonctions excessives  $f$  telles que  $f(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  définissent des surmartingales càdlàg. Le problème est de montrer que la décomposition Max-Plus de  $f(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  peut s'exprimer à l'aide d'un processus indice  $L_t = L(X_t)$ . Le problème alors peut se formuler comme suit :



- Etant donnée une fonction excessive  $f$  sur  $E$ , existe-t-il une fonction  $L$  telle que

$$f(x) = \mathbf{E}_x \left[ \sup_{0 \leq t < \zeta} L(X_t) \right] = \mathbf{E}_x \left[ \int_0^\zeta L(X_t) dt \right]. \quad (\text{IV.10})$$

Dans le cas unidimensionnel et si  $L$  est croissant, l'équation (IV.10) est équivalente à  $f(x) = \mathbf{E}_x [L(\sup_{0 \leq t < \zeta} X_t)]$ .

Il n'est pas certain a priori que ce problème admette une solution, mais si elle existe, la fonction  $L$  peut s'interpréter comme une "dérivée" Max-Plus.

Ce genre de représentation est assez inhabituel, car la théorie potentielle classique fait intervenir une intégrale classique et non une intégrale Max-Plus. Elle apparaît par exemple dans l'article de N. El Karoui et H. Föllmer [Kl05], illustrant des développements récents dans le cadre classique de la théorie potentielle probabiliste, tout en précisant le lien avec la théorie potentielle non-linéaire. Les auteurs ont montré en particulier que sous des hypothèses de régularité peu restrictives, toute fonction  $u$  admet une *décomposition de Riesz non-linéaire* en termes d'un opérateur potentiel non-linéaire  $\overline{G}$  sous-additif et d'un autre opérateur correspondant  $\underline{D}$  sur-additif. Ce dernier opérateur  $\underline{D}$  est un opérateur de "dérivée" au sens de la théorie potentielle non-linéaire développée par Dellacherie [Del90] :

$$u(x) = \mathbf{E}_x \left[ \int_0^\zeta \sup_{0 \leq s \leq t} \underline{D}u(X_s) dt \right] = \overline{G}\underline{D}u(x).$$

Soit  $P_t f$  le semi-groupe du processus de Markov  $X$  (avec  $P_t 1 \leq 1$ ), défini par

$$P_t f(x) = \mathbf{E}_x [f(X_t) \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}].$$

Le processus de Markov  $X$  est caractérisé par son semi-groupe de transition  $P_t$ , qui est l'analogue en temps continu de la matrice de transition associée à une chaîne de Markov.

Le théorème de Daniell-Kolmogorov (voir [RW94]) assure l'existence d'un processus de Markov de fonction de transition donnée.

#### Proposition IV.14

Soient  $\{P_t, t \geq 0\}$  un semi-groupe de transition et  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $E$ . Il existe alors un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  ainsi qu'un processus de Markov  $(X_t)_{t \geq 0}$  de fonction de transition  $\{P_t, t \geq 0\}$  défini sur cet espace tel que

$$X_0 \stackrel{\text{loi}}{=} \nu.$$

Une fonction  $f$  est dite **excessive** si

$$f \in \mathcal{B}(E), \quad P_t f(x) \leq f(x) \quad \text{et} \quad P_t f(x) \rightarrow f(x) \quad \text{lorsque} \quad t \rightarrow 0.$$

D'après les hypothèses droites, les fonctions excessives sont continues à droite sur les trajectoires (donc un processus droit est en particulier fortement Markovien).

Soit  $\mathcal{B}^e(E)$  la tribu engendrée sur  $E$  par les fonctions excessives.

Avec un tel semi-groupe, le processus  $X$  est seulement sous-Markovien. Afin de le rendre Markovien, on adjoint à l'espace d'état  $E$  un point cimetière  $\partial$ , sur lequel on envoie le processus  $X$  après  $\zeta$  (c'est-à-dire que si  $\zeta < t$ ,  $X_t = \partial$ ). On étend aussi toutes les fonctions définies sur  $E$  à des fonctions nulles au point cimetière  $\partial$ .

Pour toute probabilité  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{B}(E))$ , on définit la probabilité  $\mathbf{P}_\mu$  par la formule :

$$\mathbf{P}_\mu(A) = \int \mathbf{P}_x(A) \mu(dx).$$

Considérons une réalisation de ce processus de Markov  $X$  sur un espace  $(\Omega, (\mathcal{F}_t^e), \theta_t, X_t, \zeta, \mathbf{P}_x)$ , où :

- $\theta_t$  est une famille de transformations mesurables  $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega$  telle que pour tout  $s \geq 0$ ,

$$X_s \circ \theta_t = X_{s+t}.$$

$\theta_t$  est appelé opérateur de translation.

- $\zeta$  est le temps de mort du processus :

$$\zeta \circ \theta_t = \zeta - t \quad \text{sur} \quad \{t < \zeta\}, \quad \text{et} \quad X_t \in \{\partial\} \quad \text{sur} \quad \{t \geq \zeta\}.$$

- $\mathcal{F}_t^e$  désigne la filtration naturelle générée par  $\mathcal{B}^e(E)$  et  $X$ . C'est la complétion de  $\sigma(f(X_s); s \leq t, f \in \mathcal{B}^e(E))$  par rapport à la famille  $\{\mathbf{P}_\mu; \mu \text{ mesure finie sur } \mathcal{P}(E)\}$ .

Ainsi pour toute fonction excessive  $f$ ,  $f(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  est une surmartingale càdlàg pour toutes les mesures de probabilités  $(\mathbf{P}_\mu; \mu \in \mathcal{P}(E))$ . Ceci permet d'éviter toute hypothèse de continuité sur  $f$ . De plus, pour toute fonction  $g$   $\mathcal{B}^e(E)$ -mesurable, le processus  $g(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  est optionnel pour toute loi  $\mathbf{P}^\mu$ .

Soit  $Y_t = g(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  un processus  $(\mathcal{D})$ -régulier pour toute mesure de probabilité  $(\mathbf{P}_\mu)$ , où  $g$  est supposée positive. Cette hypothèse n'est pas vraiment indispensable, mais du point de vue de l'enveloppe de Snell et comme  $Y_\zeta = 0$ , il est équivalent de considérer  $\text{Sn}(Y)$  ou  $\text{Sn}(Y \vee 0)$ .

Considérons ensuite l'enveloppe de Snell de  $Y$ .

Nous rappelons ci-dessous le théorème 2.54 p. 152 du livre [Kar81], qui donne un procédé de construction par approximation de l'enveloppe de Snell lorsque le processus de gain est de la forme  $g(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  et s.c.i. à droite sur les trajectoires pour toute loi  $\mathbf{P}_\mu$ .

**Théorème IV.15**

Soit  $g$  une fonction positive, mesurable par rapport à la tribu engendrée par les excessives. On suppose de plus que le processus  $Y_t = g(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  est, pour toute probabilité initiale  $\mathbf{P}_\mu$ , s.c.i. à droite et de la classe  $(\mathcal{D})$ .

Définissons  $K(g) = \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} P_r g$  et  $q^0 = g, \dots, q^n = K(q^{n-1})$ .

La suite  $q^n$  est une suite croissante de fonctions  $\mathcal{B}^e(E)$ -mesurables qui converge vers une fonction  $q$ .

Pour toute loi  $\mu$  sur  $E$ ,  $q(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  est la  $\mathbf{P}^\mu$ -enveloppe de Snell du processus  $Y_t$ .

Cette hypothèse de régularité portant sur le processus de gain ne peut être supprimée qu'au prix d'efforts considérables. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux notes de cours de l'Ecole d'Été de Saint-Flour de N. El Karoui [Kar81].

Ainsi selon l'article [KJPS98] et le théorème précédent du livre [Kar81], l'enveloppe de Snell de  $Y$  est associée à la fonction  $Rg$ , définie comme étant le plus petit point fixe de l'opérateur  $Kg : \mathcal{B}^e(E) \rightarrow \mathcal{B}^e(E)$ , tel que  $Kg(x) = \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} P_r g(x)$ . Notons que  $g \geq 0 \Rightarrow Rg \geq 0$ . Nous obtenons ainsi

$$Rg(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbf{E}_x [g(X_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau < \zeta\}}]. \quad (\text{IV.11})$$

$Rg$  peut être en fait identifiée avec la plus petite fonction excessive dominant  $g$ . Si nous nous plaçons à l'instant  $t$ , l'équation (IV.11) devient

$$Rg(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}_\mu [g(X_\tau)\mathbf{1}_{\{\tau < \zeta\}} | \mathcal{F}_t], \quad \mathbf{P}_\mu - p.s.,$$

et par suite, le problème (IV.10) revient à trouver un temps d'arrêt optimal au Call Américain  $C^{\text{Am}}(Y, m)$  écrit sur  $Y$  et de maturité  $\zeta$ .

Notons ici qu'une constante  $m$  ne peut pas être considérée comme une fonction sur  $E$ . Pour éviter toute ambiguïté, la fonction constante correspondante sera notée par  $m\mathbf{1}_E$ .

**Théorème IV.16**

Soit  $v(x, m) = R(g - m)^+(x) + m\mathbf{1}_E(x)$ , pour  $m \geq 0$ . Alors

(i) La décomposition Max-Plus de  $Rg(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  à l'instant 0 est donnée par

$$Rg(x) = \mathbf{E}_x \left[ \sup_{0 \leq u < \zeta} L(X_u) \right], \quad (\text{IV.12})$$

où  $L$  est la fonction définie sur  $E$  par

$$L(x) := \sup\{m; R(g - m)^+(x) = g(x) - m\mathbf{1}_E(x)\} \quad (\text{et } 0 \text{ ailleurs}).$$

(ii) Plus généralement, le prix à l'instant 0 du Call Américain  $C^{Am}(Y, m)$  est donné par

$$R(g - m)^+(x) = \mathbf{E}_x \left[ \sup_{0 \leq u < \zeta} (L - m)^+(X_u) \right],$$

et un temps d'arrêt optimal est caractérisé par

$$T_0^Y(m) \wedge \zeta = \inf\{t \geq 0; L(X_t) \geq m\} \wedge \zeta.$$

La preuve du théorème IV.16 est simplement basée sur l'observation que l'enveloppe de Snell de  $g(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} \vee m$  est donnée par

$$v(X_t, m)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} + m\mathbf{1}_{\{t \geq \zeta\}}.$$

De plus, l'équation (IV.12) montre que le problème initial (IV.10) admet une solution, ce qui n'était pas clair a priori. Cependant, cette solution n'est pas forcément unique, puisqu'il n'y a pas d'unicité pour les processus croissants impliqués dans la décomposition Max-Plus de  $Rg(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$ .

H. Föllmer et T. Knispel discutent du cas Markovien dans un article récent [IK06] sur les fonctions excessives. Ils donnent également une description de l'unicité (partielle) de la fonction  $L$  à l'aide de la théorie potentielle probabiliste.

#### Remarque IV.17

À l'instant  $t$ , la décomposition Max-Plus de  $Rg(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  devient

$$Rg(X_t)\mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} = \mathbf{E}_x \left[ \sup_{t \leq u < \zeta} L(X_u) | \mathcal{F}_t \right],$$

et le prix du Call Américain à l'instant  $t$  est donné par

$$R(g - m)^+(X_t) = \mathbf{E}_x \left[ \sup_{t \leq u < \zeta} (L - m)^+(X_u) | \mathcal{F}_t \right].$$

#### Exemple IV.18

Revenons à l'exemple du chapitre III et réinterprétons-le en termes de processus de Markov. La surmartingale  $Z$  est un processus de Markov uni-dimensionnel qui évolue suivant un mouvement Brownien géométrique :

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = -r dt + \sigma dW_t, \quad Z_0 = 1.$$

Introduisons un temps de mort  $\zeta$  supposé une variable exponentielle indépendante de paramètre  $\beta > 0$ , et un point cimetièr  $\partial$  (on pose  $Z_t = \partial$ , si  $t \geq \zeta$ ).  $Z$  est ainsi prolongé à un processus de Markov à valeurs dans l'espace élargi  $\mathbb{R} \cup \{\partial\}$ .

Ensuite, nous définissons formellement la fonction identité par  $Id(x) = x$  sur  $\mathbb{R}$  et  $Id(\partial) = 0$ . Notons qu'avec cette convention, la surmartingale  $\tilde{Z}_t = Z_t \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  introduite au chapitre III peut s'écrire :  $\tilde{Z}_t = Id(Z_t)$ .

Grâce au théorème IV.16, l'enveloppe de Snell  $\tilde{Z}_t(m)$  de  $\tilde{Z} \vee m$  est une fonction de  $(Z, m)$  et peut se décomposer comme suit dans l'algèbre Max-Plus :

$$\tilde{Z}_t(m) = \begin{cases} \mathbf{E}[\sup_{t \leq u < \zeta} L(Z_u) \mathbf{1}_{\{u < \zeta\}} \vee m | \mathcal{F}_t] & \text{pour } t < \zeta, \\ m & \text{pour } t \geq \zeta, \end{cases}$$

avec  $L(x) = \frac{\delta - 1}{\delta}x$ , comme nous l'avons montré au chapitre III. Il vient finalement :

$$\tilde{Z}_t = \mathbf{E}\left[\sup_{t \leq u \leq \zeta} \frac{\delta - 1}{\delta} Z_u \mathbf{1}_{\{u < \zeta\}} | \mathcal{G}_t\right] = \frac{\delta - 1}{\delta} \mathbf{E}[\tilde{Z}_{t, \zeta}^* | \mathcal{G}_t].$$

# Références bibliographiques

## Chapitre IV

- [AK05] L. Alili and A. E. Kyprianou, “Some remarks on first passage of Lévy processes, the American put and pasting principles”, *Annals of Applied Probability* **15** (2005), no. 3, pp. 2062–2080.
- [BK04] P. Bank and N. El Karoui, “A stochastic representation theorem with applications to optimization and obstacle problems”, *The Annals of Probability* **32** (2004), no. 1B, pp. 1030–1067.
- [Del90] C. Dellacherie, “Théorie des processus de production. modèles simples de la théorie du potentiel non linéaire”, *Séminaire de Probabilités XXV, Lecture Notes in Mathematics* (1990), no. 1426, pp. 52–104.
- [DM87] C. Dellacherie and P. Meyer, *Probabilités et Potentiel, Chapitre VI : Théorie des Martingales : Martingales en Temps Continu*, Hermann, Paris, 1987.
- [Kar81] N. El Karoui, *Les Aspects Probabilistes du Contrôle Stochastique. Ecole d’Eté de Probabilités de Saint-Flour IX-1979*, *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, New-York, 1981.
- [KJPS98] N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picqué and S. E. Shreve, “Robustness of the Black-Scholes formula”, *Mathematical Finance* **8** (1998), no. 2, pp. 93–126.
- [KK95] N. El Karoui and I. Karatzas, “The optimal stopping problem for a general American put-option”, *Mathematical Finance* (1995), pp. 63–74.
- [Kl05] N. El Karoui and H. Föllmer, “A non-linear Riesz representation in probabilistic potential theory”, *Ann. Ins. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **41** (2005), no. 3, pp. 269–283.
- [KS91] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New-York, 1988, 1991.

- [KS98] ———, *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [KW77] N. El Karoui and G. Weidenfeld, *Théorie générale et changement de temps*, Séminaire de Probabilités de Strasbourg, vol. 11, Springer Verlag, 1977, pp. 79–108.
- [lK06] H. Föllmer and T. Knispel, “Potentials of a markov process are expected suprema”, to appear in ESAIM Probability and Statistics, Stochastic Analysis and Mathematical Finance (in honor of Nicole El Karoui’s 60th birthday) (2006).
- [Mil99] P. Milgrom, *The envelope theorems*, Working Papers 99016, Stanford University, Department of Economics, 1999, available at <http://ideas.repec.org/p/wop/stanec/99016.html>.
- [RW94] L.C.G. Rogers and D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol.1*, Wiley, Chichester, 1994.
- [Whi80] P. Whittle, “Multi-armed bandits and the Gittins index”, *Journal of the Royal Statistical Society Series B, Methodological* **42(2)** (1980), pp. 143–149.

# Optimalité de la décomposition Max-Plus par rapport à l'ordre convexe

---

## Résumé

Nous caractérisons dans ce chapitre la martingale de la décomposition Max-Plus en tant que solution optimale d'un certain problème d'optimisation de martingale sous contraintes. Toutes les martingales admissibles doivent partir de la même valeur initiale et dominer un certain processus plancher de la classe  $(\mathcal{D})$ . L'optimisation est relative à l'ordre convexe sur les valeurs terminales. Cet ordre est en effet très utile dans de nombreux domaines et permet notamment de généraliser la théorie de l'utilité en économie, comme nous allons le voir dans le chapitre VI.

Nous présentons par ailleurs quelques exemples illustratifs de martingales associées à des décompositions Max-Plus de processus de Lévy multiplicatifs et additifs. La classe de ces processus à accroissements indépendants et stationnaires fournit en effet de beaux exemples où la décomposition Max-Plus peut s'obtenir de manière explicite, aussi bien dans le cas de l'horizon infini que dans le cas de l'horizon exponentiel indépendant.



## V.1 Introduction

La tâche d'un gestionnaire de portefeuille consiste à choisir la bonne combinaison de titres en vue de maximiser le rendement de l'investisseur, compte tenu d'un niveau de risque donné. La gestion de portefeuille est un processus continu et dynamique.

Les versions simples des problèmes de portefeuille peuvent être résolues par les techniques d'optimisation classiques, comme l'approche “**moyenne-variance**” introduite par le prix Nobel Harry Markowitz [Mar52, Mar59]. Celle-ci tient compte du rendement moyen, de l'écart-type et de la corrélation des rendements des différents actifs ; on détermine ainsi le portefeuille d'actifs minimisant les risques par rapport à un taux de rendement donné.

Bien que très populaire, le critère probabiliste “moyenne-variance” ne suffit pas toujours à comparer deux variables aléatoires, et peut même conduire à des aberrations, comme le montrent P. Bernhard et G. Cohen dans [BC79].

Un autre critère probabiliste de décision est le critère de **l'espérance de l'utilité** de von-Neumann-Morgenstern (1944) [MvN44]. Il consiste à représenter les préférences dans l'incertain par des fonctions d'utilité concaves<sup>1</sup> et à préférer la décision qui a l'espérance de l'utilité du gain la plus élevée possible. Ce critère de l'espérance de l'utilité, plus général que le critère d'espérance-variance, est très utilisé en économie de l'incertain et en finance du fait de sa simplicité.

Il existe une autre approche en économie et en finance, utilisant la notion d'ordre stochastique, pour comparer des variables aléatoires réelles représentant des gains ou des pertes. La **dominance stochastique** généralise en effet la théorie de l'utilité en évitant toute hypothèse arbitraire concernant la forme de la fonction d'utilité. Elle n'impose aucune spécification explicite des fonctions d'utilités des agents.

Le concept de dominance stochastique permet de comparer des distributions entières de probabilité. Il a été introduit en économie par Rothchild-Stiglitz en 1970 comme mesure du risque de variables aléatoires (voir [RS70]), et donne un cadre systématique pour analyser le comportement économique dans un environnement incertain. Plus généralement, les relations d'ordre stochastique donnent un point de vue perspicace pour analyser le comportement de systèmes stochastiques complexes.

---

<sup>1</sup>La concavité de la fonction d'utilité traduit l'aversion pour le risque. Un individu averse au risque préfère un gain certain à un gain aléatoire de même espérance mathématique. Plus généralement, si les deux risques ont la même espérance mathématique, cet individu préférera celui dont la variance est plus faible. Il préférera par exemple avoir l'espérance d'une variable aléatoire réelle avec probabilité 1 plutôt que la variable elle-même.

Elles ont été utilisées à des époques très variées et dans de nombreux domaines tels que le pricing, la finance, l'assurance, le risque financier et actuariel, les problèmes de décision, les simulations stochastiques, etc. La mesure du risque impliqué par les variables aléatoires est rendue possible grâce à l'utilisation de fonctions convexes générales.

Nous allons donc, en premier lieu, définir et caractériser les propriétés essentielles de l'ordre stochastique convexe. Ensuite, nous poserons un problème d'optimisation de martingale sous contraintes en termes d'ordre convexe. Toutes les martingales admissibles doivent partir de la même valeur initiale et dominer un certain processus de plancher  $Y$ . Nous montrerons que la martingale de la décomposition Max-Plus de l'enveloppe de Snell de  $Y$  résout ce problème d'optimisation et nous donnerons également quelques exemples illustratifs de "martingales Max-Plus".

Nous verrons dans le prochain chapitre que le problème de martingale que nous traitons ici peut s'appliquer en assurance de portefeuille, lorsqu'une contrainte de type Américain est imposée sur la valeur liquidative du fonds ouvert.

## V.2 Propriétés principales de l'ordre convexe

### Définition V.1

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires réelles.

On dit que  $X_1$  est moins variable que  $X_2$  par rapport à l'ordre stochastique convexe, et on écrit  $X_1 \leq_{cx} X_2$  si pour toute fonction convexe  $g$  à valeurs réelles,

$$\mathbf{E}[g(X_1)] \leq \mathbf{E}[g(X_2)], \quad (\text{V.1})$$

lorsque les espérances précédentes sont bien définies.

Si  $\mathbf{E}[X_1] = \mathbf{E}[X_2]$ , les fonctions test peuvent se limiter à  $\Phi_m(x) = x \vee m$  pour tout réel  $m$ .

Nous avons aussi les équivalences suivantes qui permettent de caractériser l'ordre convexe d'une autre manière :

### Proposition V.1

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires réelles de même espérance et de fonctions de répartition  $F_1$  et  $F_2$ . Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $X_1 \leq_{cx} X_2$
2. Pour tout réel  $a$ ,

$$\int_{-\infty}^a F_1(u) du \leq \int_{-\infty}^a F_2(u) du,$$

3. Pour tout réel  $a$ ,

$$\int_a^{+\infty} \bar{F}_1(u) du \leq \int_a^{+\infty} \bar{F}_2(u) du,$$

sous réserve que les intégrales soient bien définies,  $\bar{F}_1$  et  $\bar{F}_2$  étant les fonctions de survie<sup>2</sup> de  $X_1$  et  $X_2$ .

Observons quelques points essentiels concernant l'ordre convexe.

- Les fonction  $g_1$  et  $g_2$ , définies par  $g_1(x) = x$  et  $g_2(x) = -x$ , sont toutes les deux convexes. Ainsi, l'application de la définition V.1 donne

$$X_1 \leq_{cx} X_2 \Rightarrow \mathbf{E}(X_1) = \mathbf{E}(X_2).$$

Seules les variables aléatoires **de même espérance** peuvent être comparées par l'ordre convexe.

- L'ordre convexe compare la “dispersion” de variables aléatoires de même espérance. En considérant une fonction convexe spécifique ( $g_3(x) = (x - m)^2$ ), nous pouvons particulièrement voir que

$$X_1 \leq_{cx} X_2 \Rightarrow \text{Var}(X_1) \leq \text{Var}(X_2), \quad \text{lorsque } \text{Var}(X_2) < \infty.$$

Cependant, l'implication réciproque n'est pas vraie. Ainsi, l'ordre convexe est plus fort que celui de la variance puisqu'il prend en compte des perspectives de risque irrégulières ou asymétriques.

- En général, les fonctions convexes sont des fonctions qui prennent leur (relative-ment) grandes valeurs dans les régions de la forme  $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$  pour  $a < b$ . Ainsi si  $X_1 \leq_{cx} X_2$ , alors  $X_2$  a plus de chance que  $X_1$  de prendre des valeurs “extrêmes”. En d'autres termes,  $X_2$  est “plus variable” que  $X_1$ .
- Rappelons qu'une fonction  $g$  à valeurs réelles est **convexe** si  $g(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(g(X))$  pour toute variable aléatoire  $X$ . Nous avons en particulier  $\mathbf{E}(X) \leq_{cx} X$  pour toute variable aléatoire  $X$ . Plus généralement, notons que si  $g$  est une fonction convexe, alors par l'inégalité de Jensen,

$$\mathbf{E}\{g(\mathbf{E}[X_2|X_1])\} \leq \mathbf{E}\{\mathbf{E}[g(X_2)|X_1]\} = \mathbf{E}[g(X_2)].$$

---

<sup>2</sup>Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de survie (fonction de queue) la fonction  $\bar{F}(u) = \mathbf{P}\{X > u\}$ .

Ceci signifie que  $\mathbf{E}[X_2|X_1] \leq_{cx} X_2$ . Cette propriété est en fait caractéristique au sens du beau théorème suivant de *Strassen*, qui caractérise l'ordre convexe par construction sur le même espace de probabilité :

*Si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux variables aléatoires telles que  $X_1 \leq_{cx} X_2$ , alors il existe deux variables aléatoires  $\widetilde{X}_1$  et  $\widetilde{X}_2$  définies sur le même espace de probabilité telles que*

$$\widetilde{X}_i \stackrel{d}{=} X_i \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad \text{et} \quad \widetilde{X}_1 = \mathbf{E}[\widetilde{X}_2|\widetilde{X}_1] \quad p.s.$$

Ce théorème sur la dominance stochastique est un outil crucial en théorie d'interaction des systèmes de particules, et a trouvé d'innombrables applications intéressantes dans d'autres domaines. Le lecteur intéressé pourra consulter [IS02] (corollaire 2.100) ou [lr01] pour une preuve de ce théorème.

- Notons que  $X_1 \leq_{cx} X_2$  est équivalente à  $-X_1 \leq_{cx} -X_2$ . Ceci signifie que contrairement aux ordres monotones convexes, l'ordre convexe ne dépend pas de l'interprétation des variables aléatoires comme étant des variables de gain ou de perte.
- On dit que  $X_1$  est plus petite que  $X_2$  par rapport à l'**ordre convexe décroissant**, et on écrit  $X_1 \leq_{dcx} X_2$ , si l'inégalité (V.1) a lieu pour toutes les fonctions convexes décroissantes  $g$ , pour lesquelles les espérances existent. Ceci implique en particulier que  $\mathbf{E}[X_1] \geq \mathbf{E}[X_2]$  et si les deux espérances sont égales, l'ordre décroissant convexe revient simplement à l'ordre convexe.
- Notons que l'ordre **convexe décroissant** est strictement équivalent à la dominance stochastique de second ordre, qui n'est rien d'autre que l'ordre **concave croissant** classique en finance. Il s'agit d'un modèle fondamental pour les préférences averses au risque et se caractérise de manière équivalente par les fonctions d'utilité. Le terme "convexe décroissant" est naturel lorsque nous traitons des problèmes de minimisation et non de maximisation.

Ce sont von Neumann et Morgenstern qui ont développé en fait la théorie de l'utilité espérée [MvN44] : pour tout décideur rationnel, il existe une fonction d'utilité  $u(\cdot)$  telle que le décideur préfère  $X$  à  $Y$  si et seulement si  $\mathbf{E}[u(X)] > \mathbf{E}[u(Y)]$ . Cependant en pratique, il est presque impossible de déterminer explicitement la fonction d'utilité d'un agent. Des difficultés supplémentaires peuvent surgir lorsqu'un groupe de décideurs avec des fonctions d'utilité différentes doivent parvenir à un consensus.

En termes de théorie d'utilité,  $X \leq_{dcx} Y$  signifie que  $\mathbf{E}[u(X)] \geq \mathbf{E}[u(Y)]$  pour toute fonction d'utilité  $u(\cdot)$  concave croissante. Autrement dit, le gain  $X$  est préféré au gain  $Y$  par tout décideur averse au risque.

Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Shaked et Shanthikumar [SS94] pour un exposé plus complet sur l'ordre convexe et les autres ordres stochastiques.

### V.3 Problème d'optimisation de martingale

Il est naturel de se poser le problème de “trouver la plus petite martingale” dominant un processus de plancher, par exemple en finance où les martingales peuvent être considérées comme des stratégies de portefeuille auto-finançantes<sup>3</sup>, et aussi dans le langage des jeux équitables où les martingales peuvent être assimilées à la fortune gagnée par une stratégie de pari.

Cependant, l'ensemble des martingales n'est pas stable par passage à l'opération “infimum”, puisque l'inf de deux martingales est une *surmartingale* et non une martingale. Ainsi, le problème n'a pas de solution en général et nous devons affaiblir l'hypothèse de “l'ordre fort” en un ordre stochastique convexe.

Tandis que ce genre de problème, posé en termes d'ordre convexe, est peu commun en finance car on ne considère en général qu'une seule fonction convexe, il paraît plus classique dans d'autres domaines de la théorie des probabilités. Par exemple, R. P. Kertz et U. Rösler se sont posés dans [Ks93] un problème de martingale similaire au nôtre, dans lequel l'optimisation est également relative à l'ordre stochastique convexe sur les valeurs terminales. Cependant, notre contrainte de domination trajectorielle est remplacée par une contrainte imposant que la distribution du maximum d'une martingale admissible soit une mesure de probabilité donnée  $\nu$ . Kertz et Rösler caractérisent complètement la solution en utilisant les notions de fonctions maximales de Hardy-Littlewood et d'enveloppes convexes.

Formulons à présent notre problème d'optimisation contraint en termes d'ordre convexe. Les notations sont celles de la section IV.5 du chapitre IV :  $Z^Y$  est l'enveloppe de Snell d'un processus optionnel  $Y$  à valeurs réelles de la classe  $(\mathcal{D})$ .

Introduisons l'ensemble suivant des martingales admissibles :

$$\mathcal{M}^Y = \left\{ (M_t)_{t \geq 0} \text{ martingale u.i.} \mid M_0 = Z_0^Y \text{ et } M_t \geq Y_t \ \forall t \in [0, \zeta] \right\}.$$

Notons que toute martingale dominant un processus de plancher  $Y$  domine forcément son enveloppe de Snell  $Z^Y$ . Par suite, afin de satisfaire la contrainte de plancher

---

<sup>3</sup>Définition de l'auto-financement : à l'instant  $t = 0$ , l'agent investit une certaine richesse initiale dans le marché puis au cours du temps, il fait évoluer la répartition des titres dans son portefeuille. Il n'y a ni apport de fonds ni retrait d'argent pour consommation.

$M_t \geq Y_t$  pour tout  $t \leq \zeta$ , la valeur initiale de toute martingale admissible  $M$  doit être au moins égale à la valeur initiale de l'enveloppe de Snell de  $Y$ . Autrement dit,

$$M_0 \geq Z_0^Y = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\zeta}} \mathbf{E}[Y_\tau].$$

*Nous avons pour objectif de trouver la plus petite martingale  $M^*$  dans  $\mathcal{M}^Y$  par rapport à l'ordre stochastique convexe sur la valeur terminale, c'est-à-dire :*

$$M_\zeta^* \leq_{cx} M_\zeta \quad \text{pour toute martingale } (M_t)_{0 \leq t \leq \zeta} \text{ dans } \mathcal{M}^Y.$$

D'abord, il est facile de vérifier que l'ensemble  $\mathcal{M}^Y$  des martingales admissibles n'est pas vide puisqu'il contient déjà la martingale  $M^A(Y)$  de la décomposition Doob-Meyer de  $Z^Y$ .

De plus, Rogers a montré dans [Rog02] que cette martingale  $M^A(Y)$  réalise le minimum sur toutes les martingales  $M$  de valeur initiale  $Z_0^Y$ , dans la représentation suivante :

$$Z_0^Y = \inf_M \mathbf{E} \left[ \sup_{t \in [0,\zeta]} (Y_t - M_t) \right] + M_0. \quad (\text{V.2})$$

Cependant, c'est aussi trivialement le cas pour toute martingale admissible  $M$  dans  $\mathcal{M}^Y$  puisque

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{t \in [0,\zeta]} (Y_t - M_t) \right] + M_0 \leq \mathbf{E} \left[ \sup_{t \in [0,\zeta]} (Z_t^Y - M_t) \right] + M_0 \leq M_0 = Z_0^Y \quad \forall M \in \mathcal{M}^Y.$$

Le problème posé est en général difficile à résoudre et on se limite habituellement à la martingale de Doob-Meyer  $M^A(Y)$ .

Le théorème suivant affirme que la martingale  $M^{Y,\oplus}$ , introduite dans la section IV.5 du chapitre IV résout notre problème d'optimisation sous contraintes. Il en résulte en particulier que  $M_\zeta^{Y,\oplus}$  est moins variable que  $M_\zeta^A(Y)$ .

### **Théorème V.2**

*La martingale  $M^{Y,\oplus}$  de la décomposition Max-Plus de  $Z^Y$  est la plus petite martingale dans  $\mathcal{M}^Y$ , par rapport à l'ordre stochastique convexe sur la valeur terminale.*

### **Preuve - V.2 -**

Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq \zeta}$  un élément arbitraire de  $\mathcal{M}^Y$  et  $(L_{0,t}^{Y,*})$  un processus croissant vérifiant la décomposition Max-Plus de  $Z^Y$ . Nous allons montrer que  $M_\zeta^{Y,\oplus} \leq_{cx} M_\zeta$ .

Comme  $M$  domine  $Z^Y$ , l'enveloppe de Snell  $Z^M(m)$  de  $(M \vee m)$  domine aussi  $(Z^Y(m))$ .

Or nous avons déjà observé au chapitre IV (voir équation (IV.3)) que  $Z_S^M(m) = \mathbf{E}[M_\zeta \vee m | \mathcal{F}_S]$  pour tout  $S$  dans  $\mathcal{T}$ . Il en résulte immédiatement que

$$\mathbf{E}[M_\zeta \vee m | \mathcal{F}_S] \geq \mathbf{E}[L_{S,\zeta}^{Y,*} \vee Z_\zeta^Y \vee m | \mathcal{F}_S] \quad \forall S \in \mathcal{T}.$$

Plus généralement, cette inégalité reste vraie pour toute fonction convexe  $g$ , c'est-à-dire :

$$\mathbf{E}[g(M_\zeta) | \mathcal{F}_S] \geq \mathbf{E}[g(L_{S,\zeta}^{Y,*} \vee Z_\zeta^Y) | \mathcal{F}_S] \quad \forall S \in \mathcal{T}. \quad (\text{V.3})$$

Grâce à la condition terminale  $M_\zeta^\oplus = L_{0,\zeta}^{Y,*} \vee Z_\zeta^Y$ , l'équation (V.3) implique en particulier (pour  $S = 0$ ) que

$$\mathbf{E}[g(M_\zeta)] \geq \mathbf{E}[g(L_{0,\zeta}^{Y,*} \vee Z_\zeta^Y)] = \mathbf{E}[g(M_\zeta^{Y,\oplus})],$$

et la martingale  $(M_t^{Y,\oplus})_{0 \leq t \leq \zeta}$  est effectivement optimale.

Il est à noter que ce genre d'argument s'applique seulement aux temps d'arrêt  $S$  tels que  $L_{0,S}^{Y,*} = L_S^Y$ , c'est-à-dire aux points de croissance de  $L_{0,\cdot}^{Y,*}$ . ■

Observons que

- Si on impose une autre valeur initiale  $m$  pour toutes les martingales admissibles dans  $\mathcal{M}^Y$ ,  $m$  doit être nécessairement supérieure à  $Z_0^Y$ , sinon le problème n'aura pas de solution. Ensuite, les mêmes résultats restent vrais si le processus croissant  $(L_{0,t}^{Y,*})_{t \geq 0}$  est remplacé par  $(L_{0,t}^{Y,*} \vee m)_{t \geq 0}$ .
- Comme la valeur initiale de toute martingale est égale à sa moyenne, la formulation de la condition initiale dépend fortement de l'ordre stochastique choisi. Si nous considérons l'ordre convexe, toutes les martingales admissibles doivent partir de la même valeur initiale  $m$ . Si nous optons plutôt pour l'ordre convexe décroissant, la valeur initiale de toute martingale admissible  $M$  ne doit pas dépasser la valeur initiale de n'importe quelle solution optimale du problème. Elle doit être également supérieure ou égale à  $Z_0^Y$ .
- Tandis que le problème d'optimisation paraît difficile à résoudre au premier abord, le fait de considérer l'enveloppe de Snell d'une famille convexe de processus et sa décomposition dans l'algèbre Max-Plus simplifie énormément la résolution. Celle-ci n'utilise en effet que des outils simples d'analyse convexe.

**Remarque V.3**

*Si on considère un nouvel environnement financier dans lequel les stratégies de portefeuille sont des martingales, le problème traité ici peut s'appliquer à l'assurance de portefeuille.*

*En effet, nous pouvons le voir comme un problème particulier de choix de portefeuille où une contrainte de type Américain est imposée sur la valeur liquidative du fond ouvert. Traditionnellement, les investisseurs sont supposés munis d'une fonction d'utilité concave croissante  $u$  et le choix du portefeuille repose sur la maximisation de l'utilité espérée de la richesse terminale, parmi tout l'ensemble des portefeuilles admissibles. Cependant, il est quasi-impossible en pratique de représenter explicitement les fonctions d'utilité des investisseurs.*

*Dans notre approche, l'optimisation est relative à l'ordre convexe sur les valeurs terminales et la stratégie optimale est donc robuste par rapport à différentes préférences. Ainsi, ce modèle est très utile, surtout lorsqu'un groupe de décideurs avec des fonctions d'utilité différentes cherche à parvenir à un consensus. Le lecteur est renvoyé au chapitre VI pour de plus amples détails sur l'application du problème de martingale à l'assurance de portefeuille.*

## V.4 Martingales Max-Plus et processus de Lévy

Comme nous avons vu au chapitre III, les processus à accroissements indépendants et stationnaires fournissent de beaux exemples où la décomposition Max-Plus peut se mettre sous une forme quasi-fermée. Tandis que le chapitre III privilégie surtout le lien entre la décomposition Max-Plus et les options Américaines, nous insistons plutôt ici sur les différentes martingales impliquées dans la décomposition Max-Plus des processus de Lévy.

La distinction intéressante à établir ici est celle entre l'horizon infini et l'horizon défini par une variable aléatoire exponentielle indépendante. Nous considérerons ainsi les deux cas et nous déterminerons à chaque fois la forme explicite et la dynamique de la martingale Max-Plus  $M^\oplus$ .

### V.4.1 Résultat analytique

Soit  $Z$  un mouvement Brownien géométrique de paramètres  $(-r, \sigma)$ . Nous rappelons ici quelques résultats classiques sur la distribution de probabilité du running supremum de  $Z$ , c'est-à-dire  $Z_t^* := Z_{0,t}^* = \sup_{0 \leq u \leq t} Z_u$ .



**Lemme V.4**

Posons  $\gamma = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}$  et  $\delta$  la racine supérieure ou égale à  $\gamma$  de l'équation  $y^2 - \gamma y - \frac{2\beta}{\sigma^2} = 0$ .

Soit  $\zeta$  une variable exponentielle indépendante de paramètre  $\beta > 0$ . Le cas où  $\zeta$  est infinie presque sûrement correspond à  $\beta = 0$  et sera donc traité en même temps.

$$1. \mathbf{P}[Z_\zeta^* \geq m] = \left(\frac{x}{m} \wedge 1\right)^\delta, \text{ et } \mathbf{E}[Z_\zeta^*] = \frac{\delta}{\delta - 1}x.$$

$$2. \mathbf{E}[(Z_\zeta^* - m)^+] = \begin{cases} \frac{m}{\delta - 1} \left(\frac{x}{m}\right)^\delta & \text{si } m \geq x \\ \frac{x}{\delta - 1} - m & \text{si } m \leq x \end{cases} = C_\delta^*(x, m).$$

**Preuve - V.4 -**

1. Introduisons le temps de passage au dessus de  $m$  :

$$T_m := \inf\{t ; Z_t \geq m\}.$$

La variable aléatoire  $T_m$  définit bien un temps d'arrêt puisque

$$\begin{aligned} \{T_m \leq t\} &= \{\sup_{s \leq t} Z_s \geq m\} = \{\forall \epsilon, \exists s \in \mathbb{Q}, s \leq t : Z_s > m - \epsilon\} \\ &= \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}^+} \{\cup_{s \leq t, s \in \mathbb{Q}} \{Z_s > m - \epsilon\}\}. \end{aligned}$$

L'égalité précédente montre que  $\{T_m \leq t\}$  est obtenu à partir d'opérations dénombrables d'union et d'intersection d'éléments de  $\mathcal{F}_t$ , et appartient donc à cette tribu (la présence de  $\mathbb{Q}$  est indispensable pour garder la dénombrabilité). La preuve est basée sur l'équivalence  $\{Z_t^* \geq m \Leftrightarrow T_m \leq t\}$ , qui implique que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[Z_\zeta^* \geq m] &= \mathbf{E}\left[\int_0^\infty \beta e^{-\beta s} \mathbf{P}(Z_s^* \geq m) ds\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty \beta e^{-\beta s} \mathbf{P}(T_m \leq s) ds\right] \\ &= \mathbf{E}[\exp(-\beta T_m)], \end{aligned}$$

et même si  $\beta = 0$ ,  $\mathbf{P}[Z_{0,\infty}^* \geq m] = \mathbf{P}[T_m < +\infty] = \lim_{\beta \rightarrow 0} \mathbf{E}[\exp(-\beta T_m)]$ .

Pour calculer ces quantités, on se propose de déterminer le coefficient  $\alpha$  tel que  $e^{-\beta t} Z_t^\alpha$  définisse une martingale exponentielle, et d'appliquer ensuite le théorème de Doob afin d'en déduire certaines propriétés de  $T_m$ .

Pour tout réel positif  $\alpha$ ,

$$e^{-\beta t} Z_t^\alpha = x^\alpha \exp\left[-\left(\beta + \alpha r + \frac{\alpha \sigma^2}{2}\right)t + \alpha \sigma W_t\right].$$

Posons  $\gamma = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}$  et  $\delta$  la racine positive, plus grande que  $\gamma$ , du trinôme  $\alpha^2 - \gamma\alpha - \frac{2\beta}{\sigma^2}$  ( $\delta = \gamma$  si  $\beta = 0$ ). Le processus  $e^{-\beta t} Z_t^\delta = x^\delta \exp \left[ \delta \sigma W_t - \frac{\delta^2 \sigma^2}{2} t \right]$  est alors une martingale exponentielle et en particulier,  $\mathbf{E} \left[ e^{-\beta(T_m \wedge t)} Z_{T_m \wedge t}^\delta \right] = x^\delta$ . Comme  $e^{-\beta(T_m \wedge t)} Z_{T_m \wedge t}^\delta$  est positif et borné par  $m \vee x$  pour tout  $t$ , alors lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , le membre de gauche tend vers  $(m \vee x)^\delta \times \mathbf{E} \left[ e^{-\beta T_m} \right] = (m \vee x)^\delta \times \mathbf{P} [Z_\zeta^* \geq m]$ . Ainsi  $\mathbf{P} [Z_\zeta^* \geq m] = \left( \frac{x}{m} \wedge 1 \right)^\delta$  et

$$\mathbf{E} [Z_\zeta^*] = \mathbf{E} [(Z_\zeta^*)^+] = \int_0^{+\infty} \mathbf{P} (Z_\zeta^* \geq m) dm = \int_0^x dm + \int_x^{+\infty} \left( \frac{x}{m} \right)^\delta dm = \frac{\delta}{\delta - 1} x.$$

2. Plus généralement, pour  $m \geq x$ , le prix d'un Call écrit sur le supremum est donné par

$$\mathbf{E} [(Z_\zeta^* - m)^+] = \int_0^{+\infty} \mathbf{P} [Z_\zeta^* - m \geq \alpha] d\alpha = \int_0^{+\infty} \left( \frac{x}{\alpha + m} \right)^\delta d\alpha = \frac{m}{\delta - 1} \left( \frac{x}{m} \right)^\delta.$$

Mais si  $m \leq x$ , alors  $Z_\zeta^* \geq m$  et  $\mathbf{E} [(Z_\zeta^* - m)^+] = \mathbf{E} [Z_\zeta^* - m] = \frac{\delta}{\delta - 1} x - m$ . ■

Nous reconnaissons ici le prix d'un Call Américain perpétuel (voir [IS02, KS98]). Le résultat est général comme nous avons pu l'observer au théorème III.1. Le lemme précédent V.4 donne une preuve de la proposition III.6. Nous traitons d'abord le cas de l'horizon infini.

## V.4.2 Horizon infini

### V.4.2.1 Processus de Lévy multiplicatif

Soit  $Z$  un processus de Lévy multiplicatif tel que  $\mathbf{E} [Z_{0,\infty}^*] < +\infty$ . La décomposition Max-Plus de  $Z$  admet une formule fermée grâce à l'indépendance de ses accroissements relatifs.

- Mouvement Brownien Géométrique :

#### Proposition V.5

Soit  $Z$  un mouvement Brownien géométrique de paramètres  $(-r, \sigma)$ , et posons  $\gamma = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}$ . La martingale de la décomposition Max-Plus de  $Z$  peut se caractériser

ser explicitement comme une fonction  $\phi_\gamma$  de  $(Z_t, Z_t^*)$  :

$$M_t^\oplus = \frac{\gamma-1}{\gamma} Z_t^* \left[ \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{Z_t}{Z_t^*} \right)^\gamma + 1 \right] := \phi_\gamma(Z_t, Z_t^*).$$

En particulier,  $M_t^\oplus = Z_t \oplus L_{0,t}^*$  si et seulement si  $Z_t = Z_t^*$ .

De plus, en tant que martingale,  $M_t^\oplus$  peut se représenter comme une intégrale stochastique :

$$dM_t^\oplus = \left( \frac{Z_t}{Z_t^*} \right)^{\gamma-1} \sigma Z_t dW_t = \left( \frac{Z_t}{Z_t^*} \right)^{\gamma-1} dM_t^A,$$

où  $M^A$  désigne la martingale de la décomposition Doob-Meyer de  $Z$ .

### Preuve - V.5 -

Par le théorème d'unicité II.8,  $M_t^\oplus = b_\gamma \mathbf{E}[Z_{0,\infty}^* | \mathcal{F}_t]$  est la martingale de la décomposition Max-Plus de  $Z$ . Comme la distribution de  $Z_{0,\infty}^*$  est bien connue, il existe une formule fermée de  $M_t^\oplus$  en tant que fonction de  $(Z_t, Z_t^*)$  :

$$M_t^\oplus = b_\gamma \mathbf{E}[(Z_{t,\infty}^* - Z_t^*)^+ | \mathcal{F}_t] + b_\gamma Z_t^* = b_\gamma Z_t \mathbf{E} \left[ \left( \frac{Z_{t,\infty}^*}{Z_t} - \frac{Z_t^*}{Z_t} \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] + b_\gamma Z_t^*. \quad (\text{V.4})$$

Comme  $Z_{t,\infty}^*/Z_t$  est indépendante de  $Z_t^*/Z_t$  et a la même distribution que  $Z_{0,\infty}^*/x$ , l'équation (V.4) peut se réécrire comme suit :

$$M_t^\oplus = b_\gamma Z_t C_\gamma^*(1, m_t) + b_\gamma Z_t^*, \quad \text{avec } m_t := \frac{Z_t^*}{Z_t} \geq 1. \quad (\text{V.5})$$

Ensuite en remplaçant  $m_t$  par son expression dans le lemme V.4, nous déterminons explicitement  $M^\oplus$  :

$$M_t^\oplus = \frac{\gamma-1}{\gamma} Z_t^* \left[ \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{Z_t}{Z_t^*} \right)^\gamma + 1 \right] := \phi_\gamma(Z_t, Z_t^*).$$

Comme le processus croissant associé est de la forme

$$L_{0,t}^* = b_\gamma Z_t^* = \frac{\gamma-1}{\gamma} Z_t^*,$$

nous pouvons immédiatement voir que la martingale  $M^\oplus$  est différente de  $Z \vee L_{0,\cdot}^*$  :

$$M_t^\oplus - (Z_t \vee L_{0,t}^*) = \frac{\gamma-1}{\gamma} Z_t^* \left[ \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{Z_t}{Z_t^*} \right)^\gamma - \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{Z_t}{Z_t^*} - 1 \right)^+ \right].$$

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{\gamma-1} x^\gamma - \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} x - 1 \right)^+$  est positive sur  $[0, 1]$ , nulle en 0 et 1 et atteint son maximum au point  $b_\gamma = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ .

Ainsi  $M_t^\oplus = Z_t \vee L_{0,t}^*$  si et seulement si  $Z_t = Z_t^*$ , c'est-à-dire si et seulement si  $t$  est un point de croissance du processus  $L_{0,\cdot}^*$ .

En outre, comme nous savons que  $M_t^\oplus = \phi_\gamma(Z_t, Z_t^*)$  est une martingale, d'après la formule d'Itô, sa décomposition sous forme d'intégrale stochastique demande juste à connaître la dérivée de la fonction  $\phi$  par rapport à  $Z$  :

$$dM_t^\oplus = \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial x}(Z_t, Z_t^*) Z_t \sigma dW_t.$$

Nous obtenons donc

$$dM_t^\oplus = \left(\frac{Z_t}{Z_t^*}\right)^{\gamma-1} \sigma Z_t dW_t = \left(\frac{Z_t}{Z_t^*}\right)^{\gamma-1} dM_t^A, \quad (\text{V.6})$$

où  $M^A$  désigne la martingale de la décomposition de Doob-Meyer de  $Z$ . A partir de l'équation (V.6) et des figures V.1 et V.2, nous pouvons observer en particulier que  $M^\oplus$  est moins variable que  $M^A$  puisque  $\gamma \geq 1$  et  $Z_t^* \geq Z_t$ . ■

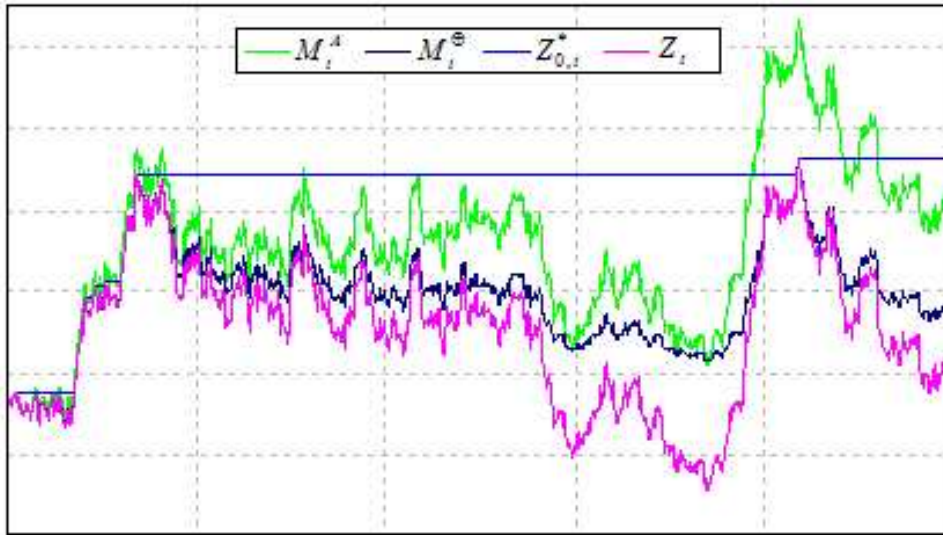


FIG. V.1 – Comparaison de la martingale Max-Plus avec celle de Doob-Meyer sur une trajectoire possible du Brownien géométrique  $Z$  de paramètres  $(-r = -0.04, \sigma = 0.2)$ .

Les deux figures V.1 et V.2 montrent aussi, sur deux exemples différents de trajectoires de  $Z$ , qu'à chaque fois que  $Z$  atteint son maximum ( $Z_t = Z_{0,t}^*$ ), la martingale  $M^\oplus$  colle au plancher  $Z$ , contrairement à ce qui se passe pour la martingale  $M^A$  de

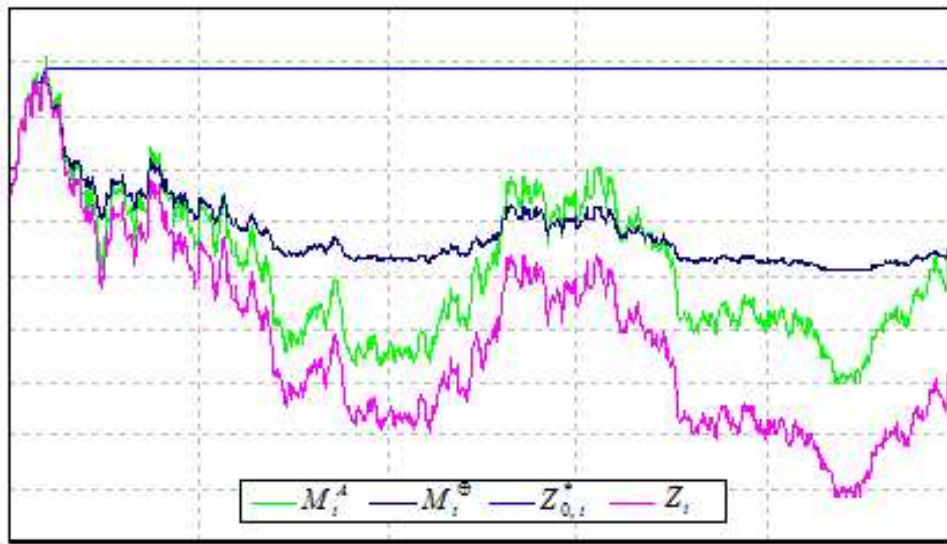


FIG. V.2 – Comparaison de la martingale Max-Plus avec celle de Doob-Meyer sur une autre trajectoire du Brownien géométrique  $Z$  de paramètres  $(-r = -0.04, \sigma = 0.2)$ .

Doob-Meyer. En effet comme  $dM_t^A = \sigma Z_t dW_t$ , la martingale de Doob-Meyer est de la forme

$$M_t^A = Z_t + \int_0^t r Z_s ds,$$

et ne revient donc plus au plancher  $Z$  une fois qu'elle a décollé.

La deuxième figure V.2 montre notamment que même si la martingale  $M^\oplus$  est moins risquée que celle de Doob-Meyer, elle peut atteindre de plus hauts niveaux dans certains cas.

Plaçons-nous dans le cadre d'un environnement financier où les stratégies de portefeuille sont des martingales, et considérons le problème d'un fonds ouvert dont la valeur liquidative doit dominer un certain plancher  $Z$  sur toute la durée de vie du fonds (cf. remarque V.3). Nous pouvons assimiler le plancher à un benchmark de marché (indice boursier par exemple).

La figure V.3 correspond au cas où la trajectoire du plancher présente des phases de forte croissance et change de maximum à plusieurs reprises. La martingale de Doob-Meyer est alors plus performante que la martingale de la décomposition Max-Plus et profite plus d'une hausse du marché. Ceci s'explique surtout par le fait que la martingale Max-Plus doit coller à son plancher à chaque fois que ce dernier atteint un nouveau maximum.

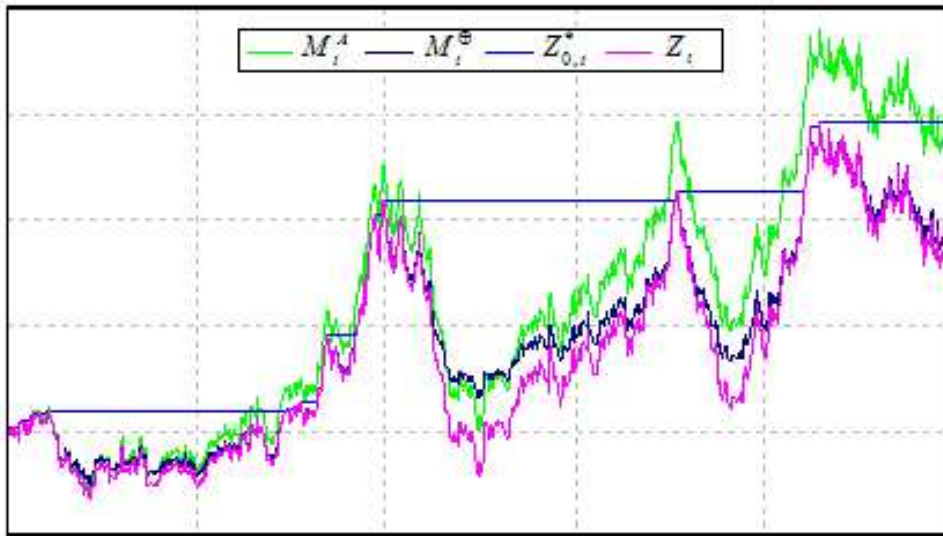


FIG. V.3 – Comparaison de la martingale Max-Plus avec celle de Doob-Meyer sur une trajectoire possible du Brownien géométrique  $Z$  de paramètres  $(-r = -0.04, \sigma = 0.3)$ .

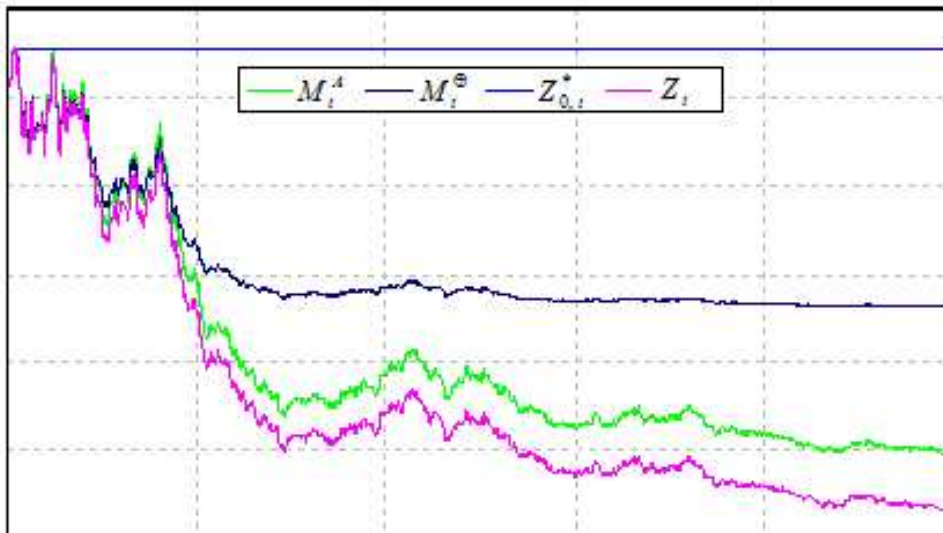


FIG. V.4 – Comparaison de la martingale Max-Plus avec celle de Doob-Meyer sur un autre type de trajectoire du Brownien géométrique  $Z$  de paramètres  $(-r = -0.04, \sigma = 0.3)$ .

Par contre, si le marché a tendance à baisser comme l'indique la figure V.4, et que

le plancher  $Z$  atteint très peu de fois un nouveau maximum sur la durée de vie du fonds, l'ordre de performance est inversé. La stratégie de la martingale Max-Plus n'est plus contrainte à revenir au niveau du plancher et produit donc une meilleure performance que la stratégie de Doob-Meyer, en atténuant davantage la perte de valeur du portefeuille.

Ces deux dernières courbes traduisent bien la notion d'optimalité par rapport à l'ordre convexe. En cas de baisse des marchés actions, la stratégie optimale associée à la décomposition Max-Plus permettra de limiter l'impact de cette baisse sur le fonds, et sera en général plus performante que les autres stratégies d'assurance de portefeuille. En revanche, en cas de hausse du marché, elle limitera plus l'exposition au marché action. Elle est donc de ce fait moins sensible que les autres stratégies, aussi bien aux évolutions positives que négatives des marchés actions.

- Processus de Lévy géométrique :

Soit  $C^{\text{Am}}(Z, m)$  un Call Américain perpétuel écrit sur un processus de Lévy géométrique  $Z$  définissant une surmartingale, de strike  $m$ . La difficulté principale pour calculer son prix réside dans la complexité des formules fermées pour les options Lookback. En nous basant sur le papier [Mor01] de Mordecki, nous avons explicitement déterminé au chapitre III le prix d'un tel Call, dans le cas particulier où  $Z_t = xe^{X_t}$ ,  $X$  étant un processus de Lévy semi-continu supérieurement (c'est-à-dire un processus avec uniquement des sauts négatifs).

Ensuite grâce à la relation  $M_t^\oplus = C_t^{\text{Am}}(Z_t, bZ_t^*) + bZ_t^*$ , nous déduisons aisément une formule fermée pour la martingale Max-Plus  $M^\oplus$  en tant que fonction  $\phi_{\gamma_{\text{Lévy}}}$  de  $(Z_t, Z_t^*)$ . Cette fonction  $\phi_{\gamma_{\text{Lévy}}}$  a la même forme que celle de la proposition V.5 et la constante  $\gamma_{\text{Lévy}} > 1$  est telle que  $\kappa(\gamma_{\text{Lévy}}) = 0$  :

$$M_t^\oplus = \phi_{\gamma_{\text{Lévy}}}(Z_t, Z_t^*) = \frac{\gamma_{\text{Lévy}} - 1}{\gamma_{\text{Lévy}}} Z_t^* \left[ \frac{1}{\gamma_{\text{Lévy}} - 1} \left( \frac{Z_t}{Z_t^*} \right)^{\gamma_{\text{Lévy}}} + 1 \right]. \quad (\text{V.7})$$

#### V.4.2.2 Mouvement Brownien de drift négatif

Soit  $Z$  un mouvement Brownien drifté de valeur initiale 0 et de paramètres  $(-\mu, \sigma)$  où  $\mu = r + \frac{\sigma^2}{2}$  :

$$dZ_t = -\mu dt + \sigma dW_t, \quad Z_0 = 0.$$

Supposons que la maturité  $\zeta$  est infinie.

La martingale de la décomposition Max-Plus de  $Z$  admet une formule fermée basée

sur l'indépendance des accroissements de  $Z$ . Nous avons vu dans la section III.3.2 du chapitre III que  $Z_t$  peut simplement s'écrire :

$$Z_t = \mathbf{E}[Z_{t,\infty}^* - b | \mathcal{F}_t], \quad \text{où} \quad b = \mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*].$$

Ensuite par le théorème d'unicité II.8,

$$M_t^\oplus = \mathbf{E}[Z_{0,\infty}^* - b | \mathcal{F}_t]$$

est la martingale de la décomposition Max-Plus associée au running supremum du processus  $Z_t - b$ .

Nous pouvons calculer la loi de  $Z_{0,\infty}^*$  à partir du lemme V.4, ce qui permet de déduire une formule fermée pour  $M_t^\oplus$  comme fonction de  $(Z_t, Z_{0,t}^*)$ .

La proposition suivante donne une caractérisation explicite de la martingale  $M^\oplus$ . Sa preuve est strictement analogue à celle de la proposition V.5.

### Proposition V.6

La martingale  $M^\oplus$  associée à la décomposition de  $Z$  est de la forme

$$M_t^\oplus = \frac{1}{\gamma} [\exp(-\gamma(Z_t^* - Z_t)) - 1] + Z_t^* := \phi(Z_t, Z_t^*). \quad (\text{V.8})$$

En particulier,  $M_t^\oplus = Z_t \oplus L_{0,t}^*$  si et seulement si  $Z_t = Z_t^*$ .

De plus, en tant que martingale,  $M_t^\oplus$  peut se représenter sous forme d'intégrale stochastique :

$$dM_t^\oplus = \exp(-\gamma(Z_t^* - Z_t)) \sigma dW_t = \exp(-\gamma(Z_t^* - Z_t)) dM_t^A,$$

où  $M^A$  est la martingale de la décomposition de Doob-Meyer de  $Z$ .

### Preuve - V.6 -

La martingale  $M^\oplus$  de la décomposition Max-Plus de  $Z_t = -\mu t + \sigma W_t$  est de la forme

$$\begin{aligned} M_t^\oplus &= \mathbf{E}\left[Z_{0,\infty}^* - \frac{1}{\gamma} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}\left[(Z_{t,\infty}^* \vee Z_t^*) - \frac{1}{\gamma} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbf{E}[(Z_{t,\infty}^* - Z_t^*)^+ | \mathcal{F}_t] + Z_t^* - \frac{1}{\gamma} \\ &= \mathbf{E}[(Z_{t,\infty}^* - Z_t) - (Z_t^* - Z_t)]^+ | \mathcal{F}_t + Z_t^* - \frac{1}{\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

Comme  $Z_{t,\infty}^* - Z_t$  est indépendante de  $Z_t^* - Z_t$  et a la même loi que  $Z_{0,\infty}^*$ , l'équation (V.9) peut se réécrire comme suit :

$$M_t^\oplus = \mathbf{E}\left[(Z_{0,\infty}^* - \frac{1}{\gamma} - m_t)^+\right] + Z_t^* - \frac{1}{\gamma} = C_\gamma^*(0, m_t) + Z_t^* - \frac{1}{\gamma}, \quad (\text{V.10})$$



où  $m_t := Z_t^* - Z_t - \frac{1}{\gamma}$  et  $C_\gamma^*(0, m_t)$  est le prix à la date  $t = 0$  d'un Call Américain écrit sur  $Z$  et de strike " $m_t$ " ( $m_t$  est supposé déterministe). Pour calculer ce prix, nous posons  $Y_t = \exp(Z_t)$  et nous nous basons sur le lemme V.4 qui donne la loi du running supremum d'un mouvement Brownien géométrique. Il en résulte que

$$\begin{aligned} C_\gamma^*(0, m_t) &= \int_0^\infty \mathbf{P}[Z_{0,\infty}^* \geq m_t + \frac{1}{\gamma} + \alpha] d\alpha = \int_0^\infty \mathbf{P}[Y_{0,\infty}^* \geq \exp(m_t + \frac{1}{\gamma} + \alpha)] d\alpha \\ &= \int_0^\infty \exp[-\gamma(m_t + \frac{1}{\gamma} + \alpha)] d\alpha = \frac{1}{\gamma} \exp[-\gamma(m_t + \frac{1}{\gamma})] \\ &= \frac{1}{\gamma} \exp[-\gamma(Z_t^* - Z_t)]. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation précédente conjointement avec l'équation (V.10) permet finalement de déduire l'expression explicite de  $M_t^\oplus$  :

$$M_t^\oplus = \frac{1}{\gamma} \exp[-\gamma(Z_t^* - Z_t)] + Z_t^* - \frac{1}{\gamma} := \phi_\gamma(Z_t, Z_t^*).$$

Nous pouvons immédiatement voir que  $M_t^\oplus$  est différente de  $L_{0,t}^* \vee Z_t = (Z_t^* - \frac{1}{\gamma}) \vee Z_t$  :

$$M_t^\oplus - (Z_t \vee L_{0,t}^*) = \frac{1}{\gamma} \exp[-\gamma(Z_t^* - Z_t)] - (Z_t - Z_t^* + \frac{1}{\gamma})^+.$$

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma x) - (\frac{1}{\gamma} - x)^+$  est positive sur  $[0, +\infty)$ , nulle en 0 et en  $+\infty$  et atteint son maximum au point  $b_\gamma = \frac{1}{\gamma}$ . Ainsi  $M_t^\oplus = Z_t \vee L_{0,t}^*$  si et seulement si  $Z_t = Z_t^*$ .

Par ailleurs, comme  $M_t^\oplus = \phi_\gamma(Z_t, Z_t^*)$  est une martingale, sa décomposition en intégrale stochastique nécessite seulement de connaître la dérivée de  $\phi_\gamma$  par rapport à  $Z$  :  $dM_t^\oplus = \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial x}(Z_t, Z_t^*) \sigma dW_t$ . Il vient finalement

$$dM_t^\oplus = \exp(-\gamma(Z_t^* - Z_t)) \sigma dW_t = \exp(-\gamma(Z_t^* - Z_t)) dM_t^A,$$

où  $M^A$  est la martingale associée à la décomposition de Doob-Meyer de  $Z$ . ■

La figure V.5 montre sur un exemple de trajectoire de  $Z$  (mouvement Brownien de drift négatif), que  $M_t^\oplus = Z_t$  si et seulement si  $Z_{0,t}^* = Z_t$ .

Ainsi, sur la première période où le plancher change deux fois de maximum, la martingale Max-Plus est presque collée à son plancher. Par contre sur la seconde

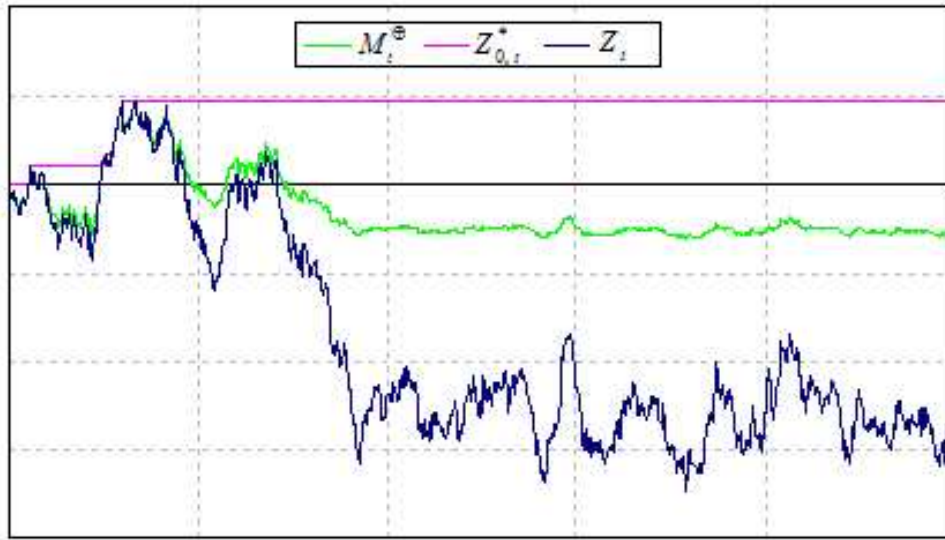


FIG. V.5 – Représentation de la martingale de Max-Plus  $M_t^\oplus$  et du running supremum de  $Z$  sur une trajectoire de  $Z$ ,  $Z$  étant un mouvement Brownien drifté de paramètres  $(-\mu = -0.06, \sigma = 0.2)$ .

période où le plancher subit une forte chute, la martingale Max-Plus parvient à se maintenir à un niveau assez stable, bien supérieur à celui du plancher.

Sur le même exemple de trajectoire, la figure V.6 montre que la martingale de Doob-Meyer est nettement plus variable que la martingale optimale  $M^\oplus$ . Celle-ci est en effet presque plate sur la seconde période, contrairement à la martingale de Doob-Meyer qui évolue suivant un mouvement Brownien de paramètres  $(0, \sigma)$  :  $M_t^A = \sigma W_t$ .

Nous représentons dans la figure V.7 une autre trajectoire possible de mouvement Brownien drifté. Dans sa trajectoire, le plancher change plusieurs fois de maximum au cours de la vie du fonds, ce qui contraint la martingale Max-Plus à coller à son plancher à plusieurs reprises et à être donc moins performante que la martingale de Doob-Meyer.

Par contre, dans les zones où le niveau du plancher chute, la baisse du niveau de la martingale Max-Plus est nettement moins marquée que celle de Doob-Meyer. Cette robustesse en cas de baisse du plancher caractérise l'optimalité de la martingale Max-Plus par rapport à l'ordre convexe.

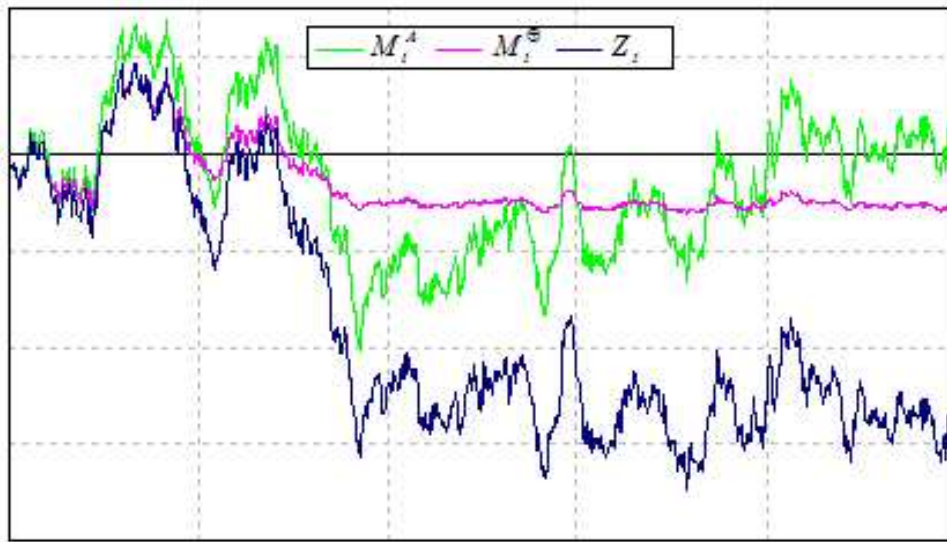


FIG. V.6 – Comparaison des martingales Max-Plus et de Doob-Meyer sur une trajectoire de  $Z$ ,  $Z$  étant un mouvement Brownien drifté de paramètres  $(-\mu = -0.06, \sigma = 0.2)$ .

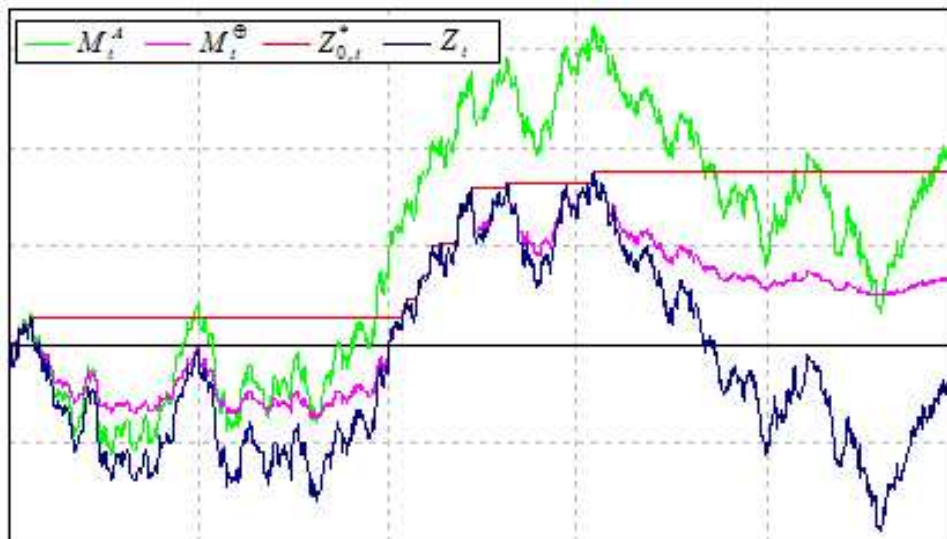


FIG. V.7 – Comparaison des martingales Max-Plus et de Doob-Meyer sur une autre trajectoire de  $Z$ ,  $Z$  étant un mouvement Brownien drifté de paramètres  $(-\mu = -0.12, \sigma = 0.4)$ .

**Remarque V.7**

Nous pouvons prouver ici la formule fermée du Call Américain  $C^{Am}(Z, m)$  de la proposition III.13. En effet, si  $Z_t \geq m + \frac{1}{\gamma}$ ,

$$\begin{aligned} C_t^{Am}(Z, m) &= \mathbf{E}\left[\left(Z_{t,\infty}^* - \frac{1}{\gamma} - m\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}\left[Z_{t,\infty}^* - \frac{1}{\gamma} - m \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbf{E}\left[Z_{t,\infty}^* - Z_t \middle| \mathcal{F}_t\right] + Z_t - \frac{1}{\gamma} - m = \mathbf{E}\left[Z_{0,\infty}^*\right] + Z_t - \frac{1}{\gamma} - m = Z_t - m. \end{aligned}$$

Par contre, si  $Z_t < m + \frac{1}{\gamma}$ ,

$$\begin{aligned} C_t^{Am}(Z, m) &= \mathbf{E}\left[\left(Z_{t,\infty}^* - \frac{1}{\gamma} - m\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}\left[\left(Z_{t,\infty}^* - Z_t - \frac{1}{\gamma} - m + Z_t\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\left(Z_{0,\infty}^* - \frac{1}{\gamma} - m_t\right)^+\right] = C_\gamma(0, m_t), \end{aligned}$$

où  $m_t := m - Z_t$ . D'après la preuve de la proposition V.6, il vient finalement

$$C_t^{Am}(Z, m) = C_\gamma(0, m - Z_t) = \frac{1}{\gamma} \exp\left[-\gamma\left(m - Z_t + \frac{1}{\gamma}\right)\right].$$

**V.4.3 Horizon exponentiel indépendant**

Nous supposons maintenant que la maturité  $\zeta$  est une variable aléatoire exponentielle indépendante de paramètre  $\beta > 0$ , et que  $Z$  est un mouvement Brownien géométrique de paramètres  $(-r, \sigma)$ .

Nous adoptons les mêmes notations que celles de la section III.3.1.2 du chapitre III. La martingale  $\widetilde{M}^\oplus$  associée à la décomposition Max-Plus de  $\widetilde{Z}$  est alors de la forme

$$\widetilde{M}_t^\oplus = b_\beta \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq u \leq \zeta} \widetilde{Z}_u \middle| \mathcal{G}_t\right] = b_\beta \mathbf{E}[\widetilde{Z}_{0,\zeta}^* \middle| \mathcal{G}_t] = b_\beta \mathbf{E}[Z_{0,\zeta}^* \middle| \mathcal{G}_t].$$

Comme la distribution de  $Z_{0,\zeta}^*$  est également explicite dans ce cas, nous pouvons de nouveau en déduire une formule fermée de  $\widetilde{M}_t^\oplus$  comme fonction de  $(Z_t, Z_{0,t}^*)$ , pour  $t < \zeta$ .

Notons que la loi de  $Z_{0,\zeta}^*$  a la même forme que celle dans le cas de l'horizon infini, mais  $\gamma$  est remplacée par  $\delta$ . Ensuite, les calculs sont strictement identiques et conduisent à la même formule fermée pour la martingale  $\widetilde{M}^\oplus$ .

**Proposition V.8**

– La martingale Max-Plus associée à  $\tilde{Z}_t = Z_t \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  est de la forme

$$\tilde{M}_t^\oplus = \frac{\delta - 1}{\delta} \tilde{Z}_t^* \left[ \frac{1}{\delta - 1} \left( \frac{\tilde{Z}_t}{\tilde{Z}_t^*} \right)^\delta + 1 \right] = \phi_\delta(\tilde{Z}_t, \tilde{Z}_t^*), \quad \text{pour tout } t \in [0, \zeta].$$

En particulier,  $\tilde{M}_t^\oplus = \tilde{Z}_t \oplus \tilde{L}_{0,t}^*$  si et seulement si  $\tilde{Z}_t = \tilde{Z}_t^*$ .

– En tant que martingale,  $\tilde{M}_t^\oplus$  peut se représenter comme la somme d'une intégrale stochastique et d'une martingale purement discontinue, pour tout  $t \leq \zeta$  :

$$d\tilde{M}_t^\oplus = \left( \frac{Z_t}{Z_t^*} \right)^{\delta-1} \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} dM_t^A + \Delta \tilde{M}_t^\oplus d\tilde{N}_t^d,$$

où  $\tilde{N}_t^d := \mathbf{1}_{\{\zeta \leq t\}} - \beta(t \wedge \zeta)$  et  $\Delta \tilde{M}_{\zeta^-}^\oplus = \tilde{M}_{\zeta^-}^\oplus - \tilde{M}_{\zeta^-}^\oplus = -\frac{Z_\zeta^*}{\delta} \left( \frac{Z_\zeta}{Z_\zeta^*} \right)^\delta$ .

**Preuve - V.8 -**

– Pour tout  $t < \zeta$ ,  $\tilde{M}_t^\oplus = \frac{\delta - 1}{\delta} Z_t \mathbf{E} \left[ m_t \vee \frac{Z_{t,\zeta}^*}{Z_t} \mid \mathcal{G}_t \right]$  avec  $m_t = \frac{Z_{0,t}^*}{Z_t}$ .

Comme la variable aléatoire  $\frac{Z_{t,\zeta}^*}{Z_t}$  est conditionnellement indépendante sachant la filtration  $\mathcal{G}_t$  et distribuée comme  $\frac{Z_{0,\zeta}^*}{x}$ , l'application du lemme V.4 implique que

$\tilde{M}_\zeta^\oplus = \frac{\delta - 1}{\delta} Z_\zeta^*$ , et pour  $t < \zeta$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{M}_t^\oplus &= \frac{\delta - 1}{\delta} Z_t \mathbf{E} \left[ m_t \vee \frac{Z_{0,\zeta}^*}{x} \right] = \frac{\delta - 1}{\delta} \frac{Z_t}{x} \left( \mathbf{E}[(Z_\zeta^* - m_t x)^+] + m_t x \right) \\ &= \frac{\delta - 1}{\delta} \frac{Z_t}{x} \left( \frac{m_t x}{\delta - 1} \left( \frac{1}{m_t} \right)^\delta + m_t x \right) = \frac{\delta - 1}{\delta} Z_t^* \left[ \frac{1}{\delta - 1} \left( \frac{Z_t}{Z_t^*} \right)^\delta + 1 \right]. \end{aligned}$$

– A l'instant  $\zeta$ , le processus  $\tilde{Z}$  saute de  $\tilde{Z}_{\zeta^-} = Z_\zeta$  à 0. Par conséquent, la martingale  $\tilde{M}_\zeta^\oplus$  a également un saut d'amplitude

$$\Delta \tilde{M}_\zeta^\oplus = \tilde{M}_\zeta^\oplus - \tilde{M}_{\zeta^-}^\oplus = \phi_\delta(\tilde{Z}_\zeta, \tilde{Z}_\zeta^*) - \phi_\delta(Z_\zeta, Z_\zeta^*) = -\frac{Z_\zeta^*}{\delta} \left( \frac{Z_\zeta}{Z_\zeta^*} \right)^\delta = \frac{1}{\delta} \left( \frac{Z_\zeta}{Z_\zeta^*} \right)^{\delta-1} \Delta \tilde{Z}_\zeta.$$

Comme le processus  $\tilde{N}_t^d := \mathbf{1}_{\{\zeta \leq t\}} - \int_0^{t \wedge \zeta} \beta du$  est une martingale et  $\Delta \tilde{M}_\zeta^\oplus$  est la valeur en  $\zeta$  d'un processus  $\mathcal{G}_t$ -prévisible, alors

$$\tilde{M}_t^{\oplus,d} := \Delta \tilde{M}_\zeta^\oplus \mathbf{1}_{\{\zeta \leq t\}} + \int_0^{t \wedge \zeta} \beta \frac{Z_u^*}{\delta} \left( \frac{Z_u}{Z_u^*} \right)^\delta du$$

est la partie purement discontinue de la  $\mathcal{G}$ -martingale  $\widetilde{M}_t^\oplus$  (toute martingale purement discontinue est la somme compensée de ses sauts).

Observons que si  $\widetilde{N}_t^{\widetilde{Z},d} := -Z_\zeta \mathbf{1}_{\{\zeta \leq t\}} + \int_0^{t \wedge \zeta} \beta Z_u du$  est la martingale correspondant au saut de  $\widetilde{Z}$ , alors

$$d\widetilde{M}_t^{\oplus,d} = \frac{1}{\delta} \left( \frac{Z_t}{Z_t^*} \right)^{\delta-1} d\widetilde{N}_t^{\widetilde{Z},d}.$$

La partie continue de la martingale  $\widetilde{M}_t^\oplus$  est donnée par

$$\widetilde{M}_t^{\oplus,c} = \phi_\delta(Z_{t \wedge \zeta}, Z_{t \wedge \zeta}^*) - \int_0^{t \wedge \zeta} \beta \frac{Z_u^*}{\delta} \left( \frac{Z_u}{Z_u^*} \right)^\delta du$$

avec comme décomposition infinitésimale

$$d\widetilde{M}_t^{\oplus,c} = \frac{\partial \phi_\delta}{\partial x}(Z_{t \wedge \zeta}, Z_{t \wedge \zeta}^*) dM_{t \wedge \zeta}^A,$$

où  $M^A$  désigne la martingale de la décomposition de Doob-Meyer de  $Z$ . ■

Notons que dans le cas de l'horizon infini,  $M^\oplus$  était continue même en  $\zeta = \infty$ , puisque  $Z_t$  tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Par contre ici,  $Z_\zeta$  n'est pas égale a priori à  $\widetilde{Z}_\zeta = 0$ , et donc la martingale  $\widetilde{M}^\oplus$  saute à l'instant  $\zeta$ .



# Références bibliographiques

## Chapitre V

- [BC79] P. Bernhard and G. Cohen, “On the rationality of some decision rules in a stochastic environment”, *IEEE Transactions on Automatical Control* **AC-24** (1979), no. 5.
- [Ks93] R. P. Kertz and U. Rösler, “Hyperbolic-concave functions and Hardy-Littlewood maximal functions”, *Stochastic Inequalities, IMS Lecture Notes-Monograph Series* **22** (1993), pp. 196–210.
- [KS98] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [lr01] A. Müller and L. Ruschendorf, “On the optimal stopping values induced by general dependence structures”, *Journal of Applied Probability* **38** (2001), no. 3, pp. 672–684.
- [IS02] H. Föllmer and A. Schied, *Stochastic Finance*, de Gruyter Studies in Mathematics, Berlin, New York, 2002.
- [Mar52] H. Markowitz, “Portfolio selection”, *Journal of Finance* **7** (1952), pp. 77–91.
- [Mar59] ———, *Portfolio selection : Efficient diversification of investment*, John Wiley and Sons, New York, 1959.
- [Mor01] E. Mordecki, “Elementary proofs on optimal stopping”, *Prepublicaciones de Matemática de la Universidad de la República* (2001).
- [MvN44] O. Morgenstern and J. von Neumann, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.
- [Rog02] L. C. G. Rogers, “Monte Carlo valuation of American options”, *Mathematical Finance* **12** (2002), pp. 271–286.
- [RS70] M. Rothschild and J.E. Stiglitz, “Increasing risk, I : A definition”, *Journal of Economic Theory* **2(3)** (1970), pp. 225–243.



- [SS94] M. Shaked and J. G. Shanthikumar, *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.

# Optimisation sous contraintes par rapport à l'ordre convexe. Application à l'assurance de portefeuille

---

## Résumé

Nous nous intéressons dans ce chapitre à un problème classique d'optimisation de portefeuille où les stratégies admissibles doivent dominer un certain processus de plancher à toute date intermédiaire (garantie Américaine). Nous transformons le problème en un problème de martingale dont le but est de dominer un obstacle, ou de façon équivalente son enveloppe de Snell. L'optimisation est relative à l'ordre stochastique convexe sur la valeur terminale, de manière à ne pas avoir à spécifier explicitement la fonction d'utilité de l'agent. Un outil clé est la représentation de la surmartingale obstacle en termes d'un processus de running supremum (décomposition Max-Plus). Un exemple explicite illustratif, basé sur le mouvement Brownien géométrique est donné à la fin du chapitre.

## VI.1 Introduction

Notre problème ici est motivé par l'**assurance de portefeuille** qui est un exemple populaire d'allocation dynamique d'actifs. Il s'agit d'une technique de gestion dynamique permettant de limiter en cas de baisse du marché, la perte de valeur d'un portefeuille tout en lui laissant la possibilité de profiter, dans une plus ou moins grande mesure, d'une hausse de marché. L'abandon d'une partie des gains réalisés par le marché en cas de hausse représente le coût implicite d'une telle assurance.

Les fonds garantis gérés selon cette technique intéressent surtout les épargnants prudents qui recherchent une diversification des styles de gestion sur les marchés actions sans aucun risque de perte de capital. Ils combinent

- un investissement sans risque sur des fonds monétaires,
- et une gestion dynamique de fonds actions.

Le principe de la méthode consiste à déterminer la répartition adéquate des deux types d'actifs afin que la valeur du portefeuille reste supérieure à une valeur fixée a priori.

Ainsi les produits d'assurance offrent à leurs acquéreurs une richesse minimale garantie, communément appelée "**plancher**". Les vendeurs de tels produits d'assurance sont obligés d'honorer leurs engagements quant à la garantie quelles que soient les fluctuations du marché. Ils ont donc tout intérêt à suivre une stratégie de portefeuille leur permettant de remplir cette exigence, s'ils ne veulent pas encourir de coûts supplémentaires.

La classe de telles stratégies est large. Elles sont traditionnellement basées sur un modèle axiomatique de préférences averses au risque, où les décideurs sont supposés avoir une fonction d'utilité espérée et le choix du portefeuille consiste à maximiser l'utilité espérée parmi tout l'ensemble des portefeuilles admissibles. Ainsi, chaque stratégie qui prend moins de risque lorsque le niveau de richesse est bas et plus de risque au fur et à mesure que la richesse s'accroît, est candidate.

Or, la fonction d'utilité dépend de préférences individuelles, et les agents ne sont pas toujours disposés ou capables de répondre à des questions précises concernant leurs préférences. Ainsi, moins on impose de restrictions sur la fonction d'utilité, plus les résultats seront applicables. Ceci nous conduit à la notion d'ordre stochastique convexe (ou de manière équivalente concave) qui ne requiert aucune spécification explicite de la fonction d'utilité de l'agent. Il utilise plutôt des conditions très générales de préférence du risque et de non-satiété<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>L'axiome de non-satiété signifie grossièrement que l'on préfère toujours plus à moins.

Dans ce chapitre, nous visons à résoudre le problème de décision classique “choix de portefeuille” avec une nouvelle approche non encore exploitée dans la littérature disponible sur le sujet. L’idée principale consiste à diviser le problème en deux étapes. Nous considérons d’abord un nouvel environnement dans lequel les stratégies de portefeuille sont des martingales et nous essayons d’optimiser un critère général convexe sur toutes les martingales vérifiant une contrainte de type Américain. Ensuite, nous montrons que moyennant un changement de probabilité adéquat, nous pouvons utiliser notre résultat pour résoudre le problème de maximisation d’utilité, sous les hypothèses standard de complétude du marché et d’absence d’arbitrage et de friction.

Le chapitre est organisé comme suit. Tout d’abord, nous expliquerons le mécanisme de gestion d’un Fonds Commun de Placement (FCP) selon la technique de l’assurance de portefeuille (garantie en capital à l’échéance du fonds en général). Puis, nous poserons un problème d’optimisation de martingale motivé par l’assurance de portefeuille et nous discuterons de la nécessité d’introduire la notion d’ordre convexe face à l’ambiguïté du choix de la fonction d’utilité. Ensuite, nous reformulerons le problème de martingale en termes d’ordre convexe et nous le résoudrons dans un cas particulier avant de donner la solution générale.

Suivant les mêmes idées que ceux de Bank-Föllmer dans [Bl03] et Bank-El Karoui dans [BK04], nos résultats d’optimalité reposent sur une nouvelle représentation des surmartingales sous forme d’espérance conditionnelle d’un processus de running surpremium. Cette représentation n’est autre que la décomposition des surmartingales dans l’algèbre Max-Plus (cf. chapitre II). Nous reviendrons enfin dans le monde réel où les portefeuilles ne sont plus des martingales, et nous consacrerons la dernière partie à la résolution d’un problème classique d’allocation optimale de portefeuille, lorsqu’une contrainte de type Américain est imposée sur la valeur liquidative du fonds ouvert.

## VI.2 Assurance de portefeuille et fonds communs de placement

Plusieurs stratégies s’offrent à l’investisseur, institutionnel ou particulier, qui décide de consacrer ses fonds à la constitution d’un portefeuille d’actifs financiers. La plus connue et la plus simple est celle qui consiste à choisir une fois pour toutes, sur un horizon d’investissement donné, un portefeuille d’actifs risqués, en principe bien diversifié, et de constater le résultat en fin de période. L’alternative consiste à procéder à des révisions de la composition du portefeuille, entre le début et la fin de

la période de gestion, au fur et à mesure que les cours boursiers changent. Dans les deux cas, en l'absence d'une couverture adéquate, le portefeuille peut subir une perte importante, voire catastrophique, comme en ont témoigné les krachs d'octobre 1987 et d'octobre 1989.

Ainsi, même si à long-terme la rentabilité des actions est très supérieure à celle des actifs sans risque, voire même excessivement supérieure, leurs fortes variances impliquent que la probabilité qu'un portefeuille risqué soit moins rentable ex-post est substantielle. Aussi, l'investisseur peut être tenté de se construire un portefeuille lui permettant à la fois de bénéficier de la hausse des marchés tout en lui assurant **un revenu minimum ou une valeur terminale minimum déterminée à l'avance** (à condition qu'elle soit atteignable) pour son portefeuille.

L'investisseur a a priori le choix entre investir sa richesse en actifs risqués (ou dans un indice de marché) ou dans l'actif certain. La conséquence d'un investissement dans les actifs risqués est évidemment d'exposer totalement les revenus du portefeuille aux évolutions du marché. A contrario, un investissement dans l'actif certain rend le revenu du portefeuille indépendant des résultats du marché. Le coût de cette stratégie de sécurité est que l'on renonce à bénéficier des hausses du marché.

Proposée initialement aux Etats-Unis en 1971 par deux compagnies d'assurances, Harleysville Mutual Insurance Company et Prudential Insurance Company, l'assurance de portefeuille ne rencontra qu'un succès mitigé parce que les investisseurs ne voyaient pas, à l'époque, beaucoup d'intérêt à la gestion en fonds communs, que les contrats proposés manquaient de souplesse et que les actifs supports souffraient d'un manque de liquidité rédhibitoire. L'idée fut reprise, pour les actions cotées en bourse, et améliorée par deux professeurs américains de l'Université de Californie à Berkeley, Hayne Leland et Mark Rubinstein, dès 1976 sur le plan théorique, et depuis 1981 en pratique, dans le cadre de leur société LOR (Leland, O'Brien and Rubinstein) qui devait connaître un essor rapide et spectaculaire. Le coup de frein dû au krach d'octobre 1987 démontra les limites des techniques utilisées jusqu'alors mais permit d'en développer d'autres.

Leland et Rubinstein utilisèrent l'argument de Black et Scholes (1973), selon lequel une combinaison judicieuse de l'action support et d'une option écrite sur cette dernière produit un portefeuille localement sans risque, pour "synthétiser" une option à partir d'une position adéquate dans l'action support et dans l'actif sans risque. Les techniques dites **OBPI (Option Based Portfolio Insurance)** étaient nées, utilisant des options réelles ou synthétiques. Elles consistent à former un portefeuille composé d'un actif risqué  $S$  (usuellement un indice financier) couvert par un Put défini sur lui. Pour une valeur quelconque à échéance de  $S$ , la valeur du portefeuille doit toujours être au-dessus d'un montant fixe correspondant au prix d'exercice du

Put.

Ces techniques se heurtant à différents problèmes, dont ceux de la détermination d'un horizon précis d'investissement et de l'estimation des volatilités des actions supports, de nouvelles stratégies de gestion dites à coussin ont été développées. La première d'entre elles, ou plutôt leur ancêtre, est basée sur le principe très simple du **stop-loss**. La stratégie consiste à fixer a priori une valeur minimale du portefeuille, souvent appelée "**plancher**", à tout instant. Au cours de la gestion, chaque fois que la valeur du portefeuille franchit à la baisse (resp. à la hausse) ce seuil, l'intégralité du portefeuille est placée en actif sécurisé (resp. risqué).

Cette méthode présente deux inconvénients majeurs. D'une part, elle est génératrice de forts coûts de transaction puisqu'à chaque fois, c'est la totalité du portefeuille qui change de support. D'autre part, on ne considère dans cette règle que le fait que le seuil a été franchi ou non, sans tenir compte de la marge par rapport à celui-ci. Si après un franchissement à la hausse, l'actif baisse de façon brutale, et dans des proportions supérieures à la marge dont on dispose, la garantie peut se révéler impossible à tenir.

Dès 1986, Perold et Sharpe [PS88], puis Black et Jones [BJ87] ont proposé une méthode améliorée, appelée "méthode du coussin proportionnel" ou **CPPI** (*Constant Proportion Portfolio Insurance*) en anglais, dans laquelle ils définissent certaines règles mécaniques d'achat et de vente des actifs sous-jacents. Cette méthode consiste à définir un "plancher", partie du portefeuille qui se valorise à un taux sans risque (ou dont le risque est maîtrisé), de façon à ce qu'un niveau de garantie défini au préalable puisse être atteint à l'échéance. L'écart entre le plancher et la valeur du portefeuille constitue la marge, souvent appelée "**coussin**", disponible pour investir en actif risqué. Sa valeur est révisée, chaque fois que cela est possible, entre la date initiale et l'horizon.

Par exemple, si l'on veut garantir 100 dans un an, pour un portefeuille qui vaut 100 aujourd'hui, et que le taux sans risque rémunère 5% par an, il suffit de placer 95.3 en actif sans risque pour être certain d'obtenir 100 à la fin. Le risque de défaut est alors nul, puisque même si la valeur de l'actif perd 100%, la garantie peut être tenue, mais les 4.7 investis en actif risqué ne permettent pas d'augmenter significativement la rentabilité du portefeuille par rapport au taux sans risque.

Afin d'augmenter l'espérance de rentabilité de l'investissement, les auteurs du modèle proposent  $m \times 4.7$ , où  $m$  est supérieur ou égal à 1. Ceci a en contrepartie pour effet d'augmenter le risque pris. Par exemple, si  $m = 2$ , on investira 9.4 en actif risqué, mais cette fois le risque est plus important puisqu'il suffit que celui-ci baisse de plus de 50% entre deux réallocations ( $\frac{9.4}{2} = 4.7$ ), pour que la garantie ne soit plus tenue. Et bien sûr, si l'on prend un multiplicateur  $m$  élevé, ce risque peut devenir

important. Toute la logique de la méthode est d'obtenir un compromis entre le risque que l'on accepte et l'espérance de rentabilité que l'on souhaite obtenir.

Cette méthode a le mérite d'être simple à mettre en oeuvre, et de permettre un bon contrôle du risque de défaut. Toutefois, les méthodes de rebalancement sont nombreuses et le choix doit en être optimisé. En outre, le résultat, en termes de performance, ne dépend pas uniquement de la valeur finale de l'actif risqué, comme c'est le cas pour une option (au moins Européenne). En d'autres termes, le résultat est très dépendant de la trajectoire de l'actif risqué dans le temps.

Le développement de la gestion collective de l'épargne et la croissance spectaculaire des OPCVM<sup>2</sup>, tant en France qu'en Europe, impliquent désormais de nouveaux critères de choix et de mesures de performance. La modernisation des marchés financiers et le développement des produits dérivés et des techniques d'assurance de portefeuille ont bouleversé les modes de gestion traditionnels.

### **Objectif de gestion d'un FCP.**

Un Fonds Commun de Placement (FCP)<sup>3</sup> a pour objectif de participer à l'évolution des marchés actions, obligataires et monétaires sur un horizon déterminé, par la gestion dynamique de l'allocation entre les actifs risqués et non risqués. Les investissements sont notamment réalisés par le biais de parts ou actions d'OPCVM et de fonds d'investissement.

La gestion du FCP est encadrée par des règles issues de la technique d'assurance de portefeuille, permettant d'offrir une garantie du capital net investi.

Ce type de fonds s'adresse à des investisseurs qui souhaitent bénéficier d'une performance générée par un portefeuille diversifié géré dynamiquement, sans pour autant prendre un risque de perte s'ils conservent leurs parts jusqu'à la date de garantie. Ils bénéficient en effet, à cette date-là, de la garantie de 100% du capital net investi (hors commission de souscription).

En cas d'évolution défavorable des marchés, le portefeuille sera susceptible d'être intégralement investi en produits de taux, permettant ainsi d'atteindre la valeur liquidative<sup>4</sup> minimum garantie à la date d'échéance.

---

<sup>2</sup>OPCVM : Organisme de Placements collectifs en Valeurs Mobilières. C'est un nom générique regroupant les SICAV ou FCP. Il existe une grande variété d'OPCVM en fonction de la nature des placements réalisés par l'OPCVM (actions, obligataire, monétaire). Ce support d'investissement permet de confier son investissement à des experts financiers en accédant notamment à un portefeuille largement diversifié, même avec un faible montant investi.

<sup>3</sup>Un FCP est un portefeuille de valeurs mobilières en copropriété, géré par une société de gestion pour le compte des porteurs de parts.

<sup>4</sup>La valeur liquidative d'un FCP correspond à la valeur à un instant donné d'une part du fonds. Elle est obtenue en divisant la valeur globale de l'ensemble des titres qui composent le FCP, par le nombre total de parts existantes.

**Stratégie d'investissement.**

La stratégie d'investissement consiste en une gestion dynamique du portefeuille. Celui-ci est constitué de deux sous-portefeuilles :

- le sous-portefeuille “**actif risqué**” est destiné à produire la performance recherchée. Il est généralement investi en OPCVM et fonds d'investissement actions, obligataires et diversifiés. Il peut être également investi en OPCVM monétaires à vocation internationale et en fonds de gestion alternative.
- le sous-portefeuille “**actif sans risque**” est généralement investi en OPCVM et fonds d'investissement monétaires euros, obligataires euros et monétaires dynamiques, ainsi qu'en titres de créance et instruments du marché monétaire. Il permet d'assurer une protection de la valeur liquidative à l'échéance.

La pondération de ces deux sous-portefeuilles prend en compte le scénario d'évolution des marchés financiers et est régulièrement réajustée de manière à respecter les contraintes de garantie à l'échéance du produit. En particulier, pour préserver la garantie, la stratégie d'investissement consiste à suivre les facteurs de risque de l'actif dynamique ainsi que l'évolution des taux d'intérêt de manière à déterminer la proportion d'actif dynamique autorisée.

Le poids maximal du sous-portefeuille “actif risqué” est encadré par des règles issues de la technique d'assurance de portefeuille. Il est réévalué en permanence afin d'obtenir la valeur liquidative garantie à l'échéance du fonds. Il est ainsi fonction de l'écart entre la valeur liquidative et la valeur actualisée de la valeur liquidative garantie (dite “valeur plancher”), et dépend également d'hypothèses de perte potentielle maximale sur les différents marchés composant l'univers d'investissement du FCP.

Ainsi selon les circonstances du marché, le gérant peut être amené à investir la totalité du fonds dans l'actif non risqué, ou inversement dans l'actif dynamique.

Si la part investie en actif dynamique représente 100% de l'actif, ceci va évidemment permettre de maximiser le potentiel de performance du fonds.

Par contre en cas d'évolution extrêmement défavorable des marchés, la valeur liquidative devenant très proche de la valeur plancher, le FCP est susceptible d'être totalement désinvesti des sous-portefeuilles et d'être alors intégralement et définitivement investi en instruments de taux destinés à permettre à la valeur liquidative de converger vers la valeur liquidative garantie. On parle alors de “**monétarisation**”. Dès lors, la valeur liquidative du fonds reflètera par construction et jusqu'à l'échéance du produit, la valeur actualisée de la garantie.

Ceci a évidemment pour inconvénient de ne pas pouvoir bénéficier d'un éventuel rebond des marchés dans la période qui précède la date de garantie.



**Profil de risque.**

Les instruments financiers dans lesquels est investi le FCP sont sélectionnés par la société de gestion et connaissent les évolutions et aléas du marché.

Les principaux risques auxquels s'expose l'investisseur (y compris par le biais des OPCVM et fonds d'investissement dans lesquels le portefeuille est investi) sont :

- **le risque de perte d'opportunité** dans le cas où le FCP, à la suite d'évolutions très défavorables des marchés, a été conduit à être totalement désinvesti du portefeuille "actif risqué" et ce jusqu'à la date de garantie et sans avoir la possibilité d'y être de nouveau investi (procédure de monétarisation).
- **le risque actions** : Le FCP peut investir dans des indices ou actions, y compris des actions de petites capitalisations. Si ces actions ou indices, auxquels le FCP est exposé baissent, la valeur liquidative du fonds peut baisser dans la limite de la protection accordée.  
En raison de leurs caractéristiques spécifiques, les actions de petites capitalisations peuvent présenter des risques de liquidité et de volatilité pour les investisseurs.
- **le risque de taux** : Il s'agit du risque de baisse des instruments de taux découlant des variations de taux d'intérêt.  
Ainsi si le FCP investit dans des actifs obligataires, sa valeur liquidative baisse en cas de hausse des taux d'intérêt de la courbe des emprunts d'Etat.
- **le risque de crédit** : Il s'agit du risque de baisse des titres émis par un émetteur privé ou de défaut de ce dernier. La valeur des titres de créance dans lesquels est investi le FCP peut baisser entraînant une baisse de la valeur liquidative dans la limite de la protection.
- **le risque de change** : Si le FCP investit dans des actifs libellés dans une devise autre que l'euro, sa valeur liquidative peut baisser en cas de variations sur les marchés des devises.
- **risque économique** : notons aussi que la garantie porte sur le capital initialement investi (hors commission de souscription) et ne tient pas compte de l'inflation.
- **risques liés au style de gestion** : le style de gestion discrétionnaire appliqué au fonds repose sur l'anticipation de l'évolution des différents marchés (actions, obligations) et/ou sur la sélection des valeurs. Il existe un risque que l'OPCVM ne soit pas investi à tout moment sur les marchés ou les valeurs les plus performantes.

Ainsi, en fonction de la performance du FCP à la date de garantie, la valeur liquidative calculée à la date de garantie (VLDG) peut être supérieure ou égale à la valeur liquidative garantie.

Au cours de la vie du FCP, la valeur liquidative est soumise à l'évolution des marchés financiers et peut donc être inférieure à la valeur liquidative garantie.

Les porteurs, quelle que soit la date de souscription de leurs parts, demandant le

rachat de ces mêmes parts sur la base d'une valeur liquidative autre que la VLDG, ne bénéficient plus de la garantie. Celle-ci est en effet seulement accordée aux porteurs conservant leurs parts jusqu'à l'échéance du fonds. Par ailleurs, seules les parts souscrites avant la fin de la période de commercialisation ont un capital garanti à l'échéance.

## VI.3 Problème d'optimisation de martingale

Nous expliquons d'abord dans la section VI.3.1 les notions de fonction d'utilité et d'aversion pour le risque. Ensuite, nous nous posons dans la section VI.3.2 un problème d'assurance de portefeuille où l'investisseur cherche à maximiser l'espérance de son utilité terminale. Les stratégies admissibles auto-finançantes sont des martingales locales et doivent dominer un certain processus de plancher à toute date intermédiaire jusqu'à l'échéance du fonds. Dans la section VI.3.3, nous reformulons ce problème en termes d'ordre convexe, de manière à ne plus avoir à spécifier les critères d'utilité et nous le résolvons à l'aide des résultats du chapitre V.

### VI.3.1 Fonction d'utilité et aversion pour le risque

Tous les individus n'ont pas le même comportement face au risque et cette différence correspond à des degrés différents d'aversion pour le risque. Comment caractériser cette aversion ?

L'un des enjeux majeurs de la théorie économique est de parvenir à modéliser le comportement des agents face à une situation donnée. Pour ce faire, les économistes ont recours au concept d'*utilité* qui, à l'origine, a été évoqué par Bernouilli au XVII<sup>ème</sup> siècle puis introduit par Léon Walras au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Walras, ingénieur de formation, a voulu appliquer à l'économie les concepts de la physique. Il s'est ainsi inspiré de l'énergie potentielle des physiciens pour définir l'utilité d'un agent économique. L'idée est la même qu'en physique : on représente le degré de satisfaction d'un individu par une fonction réelle, ce qui est plus facile à manipuler.

Vient alors le problème suivant : comment l'agent détermine-t-il ses choix à partir de sa fonction d'utilité ? Ou plutôt au moyen de quel critère l'agent va-t-il prendre ses décisions ?

Le problème est de définir un critère de décision simple qui rende compte le mieux possible du comportement des agents en environnement incertain. Il est clair que le critère retenu doit être une fonction de l'utilité. Les économistes considèrent que la

façon la plus “rationnelle” de se comporter est de recourir à un calcul d'espérance d'utilité. Les fondements axiomatiques de ce modèle ont été proposés pour la première fois par von Neumann et Morgenstern (1947) [MvN47]. Ce modèle présente beaucoup d'avantages pratiques et reste le plus utilisé dans tous les domaines de la théorie économique intégrant le facteur risque (finance, assurance, théorie des enchères, théorie de la firme, économie de l'environnement ou de la santé ...). La théorie de la demande d'assurance s'est notamment développée sur la base du modèle d'espérance d'utilité. Ce dernier a la particularité de séparer les probabilités des utilités des conséquences monétaires correspondantes et d'avoir une fonctionnelle représentant les préférences, alors que celle-ci est linéaire dans les probabilités. A partir d'une axiomatique qui lui est propre, le modèle d'espérance d'utilité permet ainsi de représenter les préférences des agents d'une façon élégante dans un univers risqué.

La fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern  $u$  est strictement croissante, concave (aversion pour le risque), de classe  $\mathcal{C}^2$  (deux fois continûment différentiable), telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u'(x) = 0$ .

Dans la théorie de l'espérance d'utilité, la décroissance de l'utilité marginale et l'aversion pour le risque se traduisent par la concavité de la fonction d'utilité représentant les préférences. Plus précisément, plus  $u$  est concave, plus l'agent est averse au risque. Lorsque  $u$  est linéaire, l'agent est neutre au risque. Nous avons alors :

$$u(\mathbf{E}[X]) = \mathbf{E}[u(X)].$$

Dans ce cas, les choix de l'agent se basent sur l'espérance mathématique de la richesse terminale.

Rappelons ici les définitions des notions d'aversion pour le risque et pour un accroissement de risque.

- **Aversion pour le risque** : un agent a de l'aversion pour le risque (ou est adverse du risque) s'il préfère à toute loterie le gain de son espérance mathématique avec certitude.

Il s'agit donc d'un paramètre mesurant la tendance à éviter la variabilité des rendements. Pour une variabilité des rendements donnée, un investisseur exigera un rendement moyen d'autant plus élevé que son aversion au risque est élevée.

- **Aversion pour un accroissement de risque** : un agent a de l'aversion pour un accroissement de risque si, quelles que soient deux variables aléatoires telles que l'une se déduit de l'autre par un étalement à moyenne constante, il préfère toujours la moins étalée.

Étant données deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , on dira que  $Y$  se déduit de  $X$  par un *étalement à moyenne constante*, si  $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y]$  et  $X$  domine  $Y$  au sens de la

dominance stochastique du second ordre<sup>5</sup>.

Ainsi, la notion d'accroissement de risque est directement associée à la dominance stochastique d'ordre deux. Un agent adverse d'un accroissement du risque sera aussi adverse du risque. La réciproque est fautive.

Dans le cadre du modèle de l'espérance d'utilité, ces deux notions d'aversion pour le risque sont équivalentes à la même propriété de concavité de la fonction d'utilité. La décroissance de l'utilité marginale incite l'investisseur à rechercher le meilleur compromis entre risque et rendement.

Le lecteur intéressé pourra consulter par exemple l'article [Gay04] pour de plus amples détails sur le sujet.

### VI.3.2 Cadre de l'assurance de portefeuille

Tout au long de ce chapitre, l'incertitude est modélisée par un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  satisfaisant les conditions usuelles, c'est-à-dire  $\{\mathcal{F}_t\}$  est une famille de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  croissante, continue à droite et  $\mathcal{F}_0$  contient tous les événements  $\mathbf{P}$ -négligeables dans  $\mathcal{F}$ . Nous supposons également que  $\{\mathcal{F}_t\}$  est quasi-continue à gauche. On pourra considérer une filtration Brownienne dans une première lecture, de façon à ce que toutes les martingales soient continues. Toutefois, ce chapitre propose un cadre plus général qui recouvre aussi bien le cas continu que le cas discontinu (mouvement Brownien géométrique, processus de Lévy, etc.). L'horizon du problème est un temps d'arrêt noté  $\zeta$  et peut être infini. Tous les processus sont supposés définis jusqu'à l'horizon du problème, même si ce dernier n'est pas fini. Comme d'habitude, un temps d'arrêt peut prendre des valeurs infinies.

En finance, le problème de "trouver le plus petit portefeuille" dominant un obstacle  $(X_t)$  (supposé borné ou plus généralement de la classe  $(\mathcal{D})$ , c'est-à-dire, dominé par une martingale uniformément intégrable) est classique et se rapporte en général à un problème d'option de style Américain.

Dans l'environnement risque-neutre, les portefeuilles auto-finançants<sup>6</sup> sont des martingales locales. Comme l'inf de deux martingales est une surmartingale, le problème admet toujours une solution dans la classe des surmartingales, appelée "*enveloppe de Snell*".

---

<sup>5</sup>Nous avons observé au chapitre V que la dominance stochastique du second ordre est équivalente à l'ordre convexe décroissant, et lorsque les espérances sont égales, l'ordre décroissant convexe revient simplement à l'ordre convexe.

<sup>6</sup>Les variations de la valeur d'un portefeuille auto-finançant sont uniquement dues à celles des actifs (autrement dit, sont exclus l'apport extérieur d'argent ou une consommation).

Pour pouvoir sélectionner une “**martingale**” optimale (et non une “**surmartingale**” optimale), nous introduisons un critère d'utilité sur la valeur terminale de la martingale. Notons que toute martingale dominant un processus de plancher  $X$  domine forcément son enveloppe de Snell  $Z$  et il est donc naturel de considérer le problème suivant d'optimisation de martingale avec un plancher surmartingale :

$$\max_{M_t} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \{u(M_\zeta), \text{ avec } M_t \text{ martingale } \geq Z_t \ \forall t \in [0, \zeta] \text{ et } M_0 \text{ donnée}\},$$

où  $u$  désigne une fonction d'utilité générale (concave, strictement croissante, définie sur  $\mathbb{R}^+$ ) et la surmartingale  $Z$  est supposée bornée, ou dominée par une martingale uniformément intégrable.

La solution du problème non-contraint ne dépend pas de la fonction d'utilité. En effet, grâce à la concavité de  $u$ , nous avons

$$\mathbf{E}[u(M_\zeta)] \leq u(\mathbf{E}[M_\zeta]) = u(M_0),$$

pour toute martingale ( $M_t$ ) et par suite, la stratégie optimale est de ne rien faire.

De façon similaire, lorsque les contraintes jouent, nous voudrions trouver une solution qui ne dépend pas de la forme de  $u$ , surtout que le choix de la fonction d'utilité est loin d'être simple. Il n'est pas évident, en effet, de trouver une mesure explicite de la satisfaction d'un investisseur pour ses actifs financiers en fonction de son aversion au risque.

Ces observations nous conduisent à la notion **d'ordre stochastique convexe** (ou concave) (cf. chapitre V). Nous avons en effet besoin d'un ordre plus fort que celui des valeurs espérées pour comparer des distributions entières de probabilité. L'ordre stochastique répond à cet objectif et nous permet d'effectuer les comparaisons stochastiques souhaitées.

### VI.3.3 Formulation et résolution du “nouveau” problème de martingale

Munis de l'ordre stochastique convexe défini au chapitre V, nous sommes en mesure de reformuler le problème d'optimisation sous contraintes en termes d'ordre convexe. Observons d'abord qu'en raison de la propriété de surmartingale de  $Z$ , le capital initial permettant à l'investisseur de dominer le plancher doit être au moins égal à  $Z_0$ .

Introduisons l'ensemble suivant des martingales admissibles :

$$\mathcal{M}^Z = \left\{ (M_t)_{t \geq 0} \text{ martingale uniformément } \mathbf{P}\text{-intégrable} \mid \right. \\ \left. M_0 = Z_0 \text{ et } M_t \geq Z_t \quad \forall t \in [0, \zeta] \right\}.$$

Comme il a déjà été mentionné au chapitre V, cet ensemble n'est pas vide puisqu'il contient déjà la martingale  $M_t^A = Z_t + A_t$  associée à la décomposition de Doob-Meyer de  $Z$  ( $A$  étant un processus croissant prévisible partant de 0).

Nous avons pour objectif de trouver la plus petite martingale  $M^\perp$  dans  $\mathcal{M}^Z$  par rapport à l'ordre stochastique convexe sur la valeur terminale. Autrement dit,  $M_\zeta^\perp \leq_{cx} M_\zeta$  pour toutes les martingales  $(M_t)_{0 \leq t \leq \zeta}$  dans  $\mathcal{M}^Z$ .

Comme nous allons voir dans l'exemple suivant, la solution peut se décrire de manière explicite dans le cadre de Black-Scholes à horizon infini.

### VI.3.3.1 Formules fermées dans le cadre d'un mouvement Brownien géométrique

Supposons que la surmartingale  $Z$  est un mouvement Brownien géométrique de drift négatif :

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = -r dt + \sigma dW_t, \quad Z_0 = x > 0.$$

Supposons que la maturité  $\zeta$  est infinie et introduisons la notation  $Z_{s,t}^* = \sup_{s \leq u \leq t} Z_u$ . Comme les accroissements relatifs de  $Z$  sont indépendants,

$$\mathbf{E}[Z_{t,\infty}^* | \mathcal{F}_t] = Z_t \mathbf{E}\left[\sup_{t \leq u} \frac{Z_u}{Z_t} | \mathcal{F}_t\right] = Z_t \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq u} \frac{Z_{u+t}}{Z_t} | \mathcal{F}_t\right] = \frac{Z_t}{x} \mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*].$$

Il en découle que

$$Z_t = b \mathbf{E}[Z_{t,\infty}^* | \mathcal{F}_t] \quad \text{et} \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{x} \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq u} Z_u\right] = \mathbf{E}\left[\frac{Z_{0,\infty}^*}{x}\right]. \quad (\text{VI.1})$$

#### Théorème VI.1

*La martingale*

$$M_t^\oplus := b \mathbf{E}[Z_{0,\infty}^* | \mathcal{F}_t]$$

*de la décomposition Max-Plus de  $Z$  est la plus petite martingale dans  $\mathcal{M}^Z$  par rapport à l'ordre stochastique convexe sur la valeur terminale.*

**Preuve - VI.1 -**

L'optimalité relève de la preuve générale du théorème VI.3 (qui reprend le théorème V.2 du chapitre V). ■

Comme la loi de  $Z_{0,\infty}^*$  est bien connue (cf. lemme V.4), il existe une formule fermée pour  $M_t^\oplus$  comme fonction de  $(Z_t, Z_{0,t}^*)$ . Nous rappelons ici le résultat de la proposition V.5 qui décrit explicitement la martingale optimale  $M^\oplus$ .

**Proposition VI.2**

1. Le processus de plancher  $Z$  et la solution optimale  $M^\oplus$  sont de la forme

$$Z_t = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \mathbf{E}[Z_{t,\infty}^* | \mathcal{F}_t] \quad \text{et} \quad M_t^\oplus = \frac{\gamma - 1}{\gamma} Z_{0,t}^* \left[ \frac{1}{\gamma - 1} \left( \frac{Z_t}{Z_{0,t}^*} \right)^\gamma + 1 \right] := \phi(Z_t, Z_{0,t}^*).$$

2. En tant que martingale,  $M_t^\oplus$  peut se représenter comme une intégrale stochastique :

$$dM_t^\oplus = \left( \frac{Z_t}{Z_{0,t}^*} \right)^{\gamma-1} \sigma Z_t dW_t = \left( \frac{Z_t}{Z_{0,t}^*} \right)^{\gamma-1} dM_t^A,$$

où  $M^A$  désigne la martingale de la décomposition Doob-Meyer de  $Z$ .

La figure VI.1 représente la martingale  $M^\oplus$  de la décomposition Max-Plus de  $Z$  et la martingale de Doob-Meyer  $M^A$ , sur une trajectoire possible de  $Z$ . Nous pouvons observer en particulier que  $M^A$  est plus volatile que  $M^\oplus$ . Ceci s'explique par le fait que  $M^\oplus$  est la plus petite martingale par rapport à l'ordre convexe sur la valeur terminale. Elle est donc forcément moins risquée et colle plus au plancher  $Z$ .

Ainsi, en cas de forte chute du plancher, la martingale optimale parvient à contrôler sa baisse et à se maintenir à un niveau assez stable.

**VI.3.3.2 Résultat principal**

A présent, nous nous posons la même question dans un cadre plus général où la maturité  $\zeta$  n'est plus nécessairement infinie et le processus de plancher  $Z$  n'évolue plus suivant un mouvement Brownien géométrique. Toutefois, il définit encore une surmartingale.

**Théorème VI.3**

Considérons un horizon  $\zeta$  et une surmartingale càdlàg  $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq \zeta}$  de la classe  $(\mathcal{D})$ , qui admet la décomposition Max-Plus suivante :

$$Z_t = \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq u \leq \zeta} L_u | \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq \zeta, \quad (\text{VI.2})$$

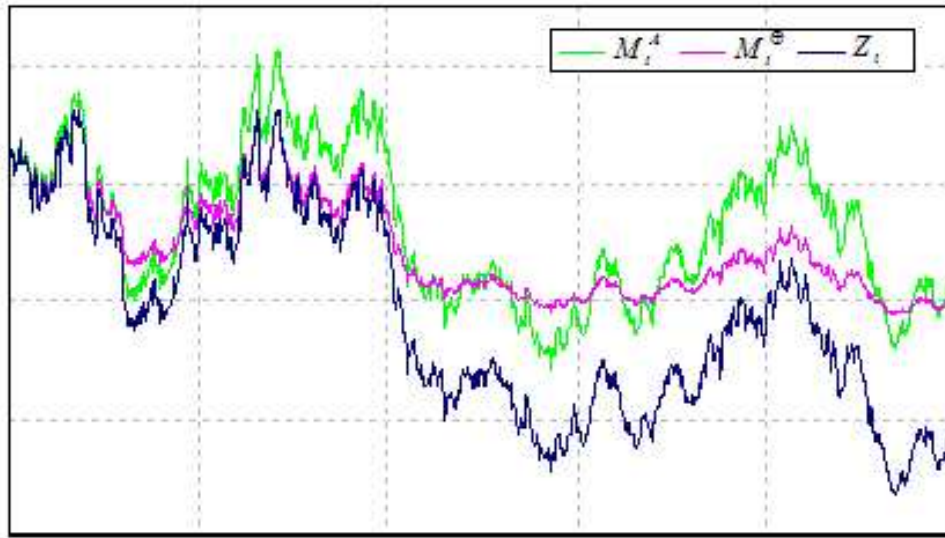


FIG. VI.1 – Comparaison des martingales  $M^\oplus$  et  $M^A$  sur une trajectoire possible de  $Z$ , Brownien géométrique de paramètres  $(-r = -0.04, \sigma = 0.2)$ .

où  $L = (L_t)_{0 \leq t \leq \zeta}$  est un processus optionnel, semi-continu supérieurement à droite. Soit  $M^\oplus$  la martingale associée à la décomposition Max-Plus de  $Z$  définie par

$$M_t^\oplus = \mathbf{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq \zeta} L_u \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq \zeta.$$

Alors,  $M^\oplus$  est la plus petite martingale dans  $\mathcal{M}^Z$  par rapport à l'ordre stochastique convexe. En d'autres termes,

$$\mathbf{E}[g(M_\zeta^\oplus)] \leq \mathbf{E}[g(M_\zeta)]$$

pour toute martingale  $M$  dans  $\mathcal{M}^Z$  ( $M_t \geq Z_t \quad \forall t \in [0, \zeta]$ ,  $M_0 = Z_0$ ) et toute fonction convexe  $g$  pour laquelle les espérances précédentes sont bien définies.

#### Remarque VI.4

Ce théorème a déjà été prouvé au chapitre V (voir théorème V.2). Nous présentons ici une autre preuve de l'optimalité de  $M^\oplus$  basée essentiellement sur l'observation que  $M_\zeta^\oplus$  est égale à la valeur terminale d'un processus croissant. Ce genre d'argument a été introduit pour la première fois par El Karoui et Jeanblanc dans [KJP98].

#### Preuve - VI.4 -

Nous utilisons dans la preuve du théorème la condition de flat-off vérifiée par le



running supremum  $L_{0,t}^* = \sup_{0 \leq u \leq t} L_u$  (voir II.7). Cette propriété est reprécisée dans le lemme suivant :

**Lemme VI.5**

$L_{0,t}^* := \sup_{0 \leq u \leq t} L_u$  est un processus croissant qui vérifie la condition de flat-off

$$\int_{[0,\zeta]} (M_t^\oplus - Z_t) dL_{0,t}^* = 0.$$

Autrement dit, il croît uniquement aux instants  $t \leq \zeta$  tels que  $M_t^\oplus = Z_t$ .

**Preuve - VI.5 -**

$(L_{0,t}^*)$  est bien évidemment un processus croissant. Soit  $t$  un point de croissance de  $(L_{0,t}^*)$ .

Si  $t < \zeta$ , il vérifie forcément  $\sup_{0 \leq s \leq \zeta} L_s = \sup_{t \leq s \leq \zeta} L_s$ , et par suite  $M_t^\oplus = Z_t$ .

Si  $t = \zeta$ , nous avons  $L_{0,\zeta^-}^* < L_\zeta$ , sinon le processus croissant ne sauterait pas en  $\zeta$ . Or  $L_\zeta = Z_\zeta$  par définition de  $Z$  (cf. (VI.2)) et  $M_\zeta^\oplus = L_{0,\zeta^-}^* \vee L_\zeta$ . Il en découle immédiatement que  $M_\zeta^\oplus = Z_\zeta$  et la condition de flat-off est bien vérifiée. ■

**Suite de la preuve du théorème VI.3.**

Soit  $(M_t)$  un élément arbitraire de  $\mathcal{M}^Z$ . Nous allons prouver que  $M_\zeta^\oplus \leq_{cx} M_\zeta$ .

Soit  $g$  une fonction convexe à valeurs réelles, pour laquelle les espérances  $\mathbf{E}[g(M_\zeta)]$  et  $\mathbf{E}[g(M_\zeta^\oplus)]$  sont bien définies. La convexité de  $g$  entraîne

$$\mathbf{E}[g(M_\zeta)] - \mathbf{E}[g(M_\zeta^\oplus)] \geq \mathbf{E}[g'(M_\zeta^\oplus)(M_\zeta - M_\zeta^\oplus)] = \mathbf{E}[g'(L_{0,\zeta}^*)(M_\zeta - M_\zeta^\oplus)].$$

Nous utilisons la règle différentielle classique pour les processus à variation finie ; il est commode d'introduire la dérivée discrète de  $g'$ ,  $g_d''$  définie par

$$\begin{cases} g_d''(x, \delta) = \frac{1}{\delta}(g'(x + \delta) - g'(x)), & \text{si } \delta \neq 0 \\ g_d''(x, 0) = g''(x), & \text{si } \delta = 0. \end{cases}$$

Il vient alors

$$g'(L_{0,\zeta}^*) = g'(L_{0,0}^*) + \int_0^\zeta g_d''(L_{0,s}^*, \Delta L_{0,s}^*) dL_{0,s}^*,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[g'(L_{0,\zeta}^*)(M_\zeta - M_\zeta^\oplus)] &= \mathbf{E}[g'(L_{0,0}^*)(M_\zeta - M_\zeta^\oplus)] \\ &\quad + \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta (M_\zeta - M_\zeta^\oplus) g_d''(L_{0,s}^*, \Delta L_{0,s}^*) dL_{0,s}^*\right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

Notons que  $g''_d(L_{0,s-}^*, \Delta L_{0,s}^*) dL_{0,s}^*$  est  $\mathcal{F}_s$ -adapté à chaque instant  $s$ . Nous pouvons donc remplacer dans l'intégrale (VI.3), la valeur terminale de la martingale  $M - M^\oplus$  par son espérance conditionnelle par rapport à la filtration  $\mathcal{F}_s$ , c'est-à-dire,  $M_s - M_s^\oplus$ . Nous obtenons finalement l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[g'(L_{0,\zeta}^*)(M_\zeta - M_\zeta^\oplus)] &= \mathbf{E}[g'(L_{0,0}^*)(M_\zeta - M_\zeta^\oplus)] \\ &\quad + \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta (M_s - M_s^\oplus) g''_d(L_{0,s-}^*, \Delta L_{0,s}^*) dL_{0,s}^*\right]. \end{aligned}$$

Maintenant comme  $g$  est une fonction convexe,  $g''_d$  est positive. Par ailleurs d'après le lemme VI.5,  $(L_{0,t}^*)$  croît uniquement aux instants  $t \leq \zeta$  où  $M_t^\oplus = Z_t$ . Ainsi,

$$\int_0^\zeta (M_s - M_s^\oplus) g''_d(L_{0,s-}^*, \Delta L_{0,s}^*) dL_{0,s}^* = \int_0^\zeta (M_s - Z_s) g''_d(L_{0,s-}^*, \Delta L_{0,s}^*) dL_{0,s}^* \geq 0.$$

Par conséquent, ces considérations impliquent que

$$\mathbf{E}[g'(L_{0,\zeta}^*)(M_\zeta - M_\zeta^\oplus)] \geq \mathbf{E}[g'(L_{0,0}^*)(M_\zeta - M_\zeta^\oplus)] = \mathbf{E}[g'(L_{0,0}^*)(M_0 - M_0^\oplus)] = 0. \quad (\text{VI.4})$$

Si nous considérons plutôt l'ordre convexe décroissant, nous avons également  $\mathbf{E}[g'(L_{0,\zeta}^*)(M_\zeta - M_\zeta^\oplus)] \geq 0$  puisque  $g'(L_{0,0}^*) \leq 0$  (par la décroissance de  $g$ ) et  $M_0 \geq M_0^\oplus$ <sup>7</sup>.

Ainsi  $\mathbf{E}[g(M_\zeta)] \geq \mathbf{E}[g(M_\zeta^\oplus)]$  et la martingale  $M^\oplus$  est bien optimale.

Il est à noter que les (in)égalités précédentes restent valables pour des fonctions  $g$  non -régulières. Tout ce dont nous avons besoin est de considérer les dérivées au sens des distributions et non au sens strict. ■

## VI.4 Application à l'assurance de portefeuille : problème "général" d'optimisation sous contraintes

Certains produits réels d'assurance promettent un revenu minimum garanti ou une certaine richesse donnée. Ces contraintes de garantie doivent être respectées indépendamment des conditions du marché. Ainsi, les vendeurs de tels produits doivent choisir une bonne stratégie de portefeuille qui performe même dans le pire scénario envisageable.

---

<sup>7</sup>Si nous considérons l'ordre convexe décroissant (ou de manière équivalente l'ordre concave croissant), la valeur initiale d'une martingale admissible quelconque ne doit pas excéder la valeur initiale de toute solution optimale du problème. Elle doit être également supérieure ou égale à  $Z_0$ .

Comme il a déjà été mentionné, les stratégies traditionnelles tentent généralement de maximiser un critère d'utilité espérée concave croissante, liée à des préférences individuelles.

Nous nous intéressons ici à un problème pratique d'optimisation de portefeuille, où le gérant a pour but de dominer un certain plancher ( $K_t$ ) sur toute la durée de vie du fonds.

En pratique,  $K_t$  peut être soit déterminé à l'avance, soit relié à un processus de benchmark donné. Lorsque  $K_t$  ne dépend pas d'un benchmark de marché, il s'agit d'une garantie en capital. Dans le cas contraire, il s'agit plutôt d'une garantie en termes de performance. Dans ce cas, le gérant a pour but de battre la performance du benchmark sur toute la durée de vie du fonds, selon l'aversion au risque de l'investisseur.

Par exemple, un fonds peut garantir une part  $\alpha$  de la performance d'un indice  $I_t$  ( $\alpha$  étant une proportion fixée entre 0 et 100%), et en même temps l'investisseur peut se voir garantir une proportion  $\beta = 90\%$  de son investissement initial, non capitalisé. Autrement dit, la valeur courante  $V_t$  du fonds doit vérifier la contrainte :

$$V_t \geq K_t = \sup \left( \beta V_0, \alpha \frac{I_t}{I_0} \right).$$

Des problèmes similaires apparaissent lorsque des investisseurs institutionnels sont soumis à des contraintes légales, leur imposant que la valeur liquidative du fonds ne descende pas en dessous d'un certain seuil jusqu'à l'échéance.

En pratique, la première étape dans la gestion des fonds d'investissement ou des fonds de pension, est de définir une allocation stratégique liée à un horizon fini. Selon l'aversion au risque de l'investisseur, le gérant fixe la proportion d'indices, actions et obligations à placer dans un portefeuille bien diversifié de valeur courante  $S_t$ .

Dans un cadre mathématique,  $(S_t)$  désigne le portefeuille optimal pour le problème non-contraint associé, avec une fonction d'utilité donnée.

### VI.4.1 Problème "non-contraint" et changement de numéraire

Considérons un marché financier complet, standard au sens de Karatzas-Shreve (cf. les définitions 1.3, 5.1, 6.1 et le théorème 6.6 du premier chapitre de [KS98]). Tout au long de cette section, nous supposons que l'horizon  $\zeta$  est un temps d'arrêt borné :  $0 \leq \zeta \leq T$ . Rappelons ci-dessous les définitions de Karatzas-Shreve concernant les notions de marché financier standard et complet.

• **Rappels :**

**Définition VI.1**

Un marché financier est dit **standard** si

- (i) il est viable, c'est-à-dire sans opportunité d'arbitrage (pas de possibilité de faire des bénéfices sans prendre de risque) ;
- (ii) le nombre  $N$  des actifs risqués ne dépasse pas la dimension  $D$  du mouvement Brownien sous-jacent ;
- (iii) le processus de la prime de risque  $D$ -dimensionnel, progressivement mesurable  $\lambda(\cdot)$  satisfait

$$\int_0^\zeta \|\lambda(t)\|^2 dt < \infty \quad \text{presque sûrement ;}$$

- (iv) la martingale positive locale

$$Z_0(\zeta) := \exp \left\{ - \int_0^t \lambda'(s) dW(s) - \frac{1}{2} \|\lambda(s)\|^2 ds \right\}, \quad 0 \leq t \leq \zeta,$$

est une vraie martingale.

Pour un marché standard, on peut définir une *mesure martingale standard*  $\mathbf{Q}$  sur  $\mathcal{F}_\zeta$  par

$$\mathbf{Q}(A) := \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[Z_0(\zeta)\mathbf{1}_A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_\zeta.$$

Un ensemble de  $\mathcal{F}_\zeta$  est  $\mathbf{Q}$ -négligeable si et seulement si, il est  $\mathbf{P}$ -négligeable. On dit alors que  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{P}$  sont équivalentes sur  $\mathcal{F}_\zeta$ .

**Définition VI.2**

Soient  $S_0(t)$  le prix à l'instant  $t$  de l'actif non risqué (avec  $S_0(0) = 1$ ),  $B$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_\zeta$ -mesurable telle que  $\frac{B}{S_0(\zeta)}$  soit presque sûrement minorée et

$$x := \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \frac{B}{S_0(\zeta)} \right] < \infty. \quad (\text{VI.5})$$

- (i)  $B$  est dit **atteignable** (ou simulable), s'il existe une stratégie de portefeuille auto-finançante  $\pi$ , de valeur initiale  $x$ , dont le processus de richesse associé vérifie  $X(\zeta) = B$  ; c'est-à-dire,

$$\frac{B}{S_0(\zeta)} = x + \int_0^\zeta \frac{1}{S_0(u)} \pi'(u) \sigma(u) dW_0(u) \quad \text{p.s.,}$$

où  $\sigma(\cdot)$  désigne le processus de volatilité.

(ii) Le marché financier est dit **complet** si toute variable aléatoire  $\mathcal{F}_\zeta$ -mesurable, avec  $\frac{B}{S_0(\zeta)}$  minorée et vérifiant (VI.5), est atteignable. Sinon, on dit que le marché est incomplet.

Ainsi dans un marché standard, il existe une probabilité équivalente à la probabilité historique, sous laquelle les processus des prix actualisés des actifs de base sont des martingales.

Dans un marché complet, une telle probabilité est unique, on l'appelle la probabilité *risque neutre* ou *mesure-martingale*.

Par souci de simplicité, nous ne décrivons pas ici en détail le cadre de notre étude. Nous retenons uniquement les éléments essentiels :

- Le processus de densité du prix d'état  $H_t$  définit une semi-martingale continue, strictement positive, telle que  $H_0 = 1$ . Il peut se représenter comme le produit du facteur d'actualisation et de la densité du changement de probabilité risque-neutre. Nous supposons de plus qu'il existe  $\delta > 1$  telle que

$$\mathbf{E}[H_\zeta^{-\delta}] < +\infty. \quad (\text{VI.6})$$

- Un portefeuille admissible auto-finançant de valeur courante  $V_t$  est une semi-martingale continue telle que
  1.  $V_t \geq 0$  pour tout  $t \in [0, \zeta]$ ,
  2.  $H_t V_t$  est une martingale uniformément intégrable sous  $\mathbf{P}$  et non uniquement une martingale locale. Elle vérifie, par conséquent, la contrainte budgétaire  $\mathbf{E}[H_\zeta V_\zeta] = V_0$ .
- Comme le marché est supposé complet, tout actif contingent positif  $\xi \in \mathcal{F}_\zeta$  vérifiant  $\mathbf{E}[\xi^\mu] < +\infty$  pour une certaine constante  $\mu > 1$ , est la valeur terminale d'un portefeuille admissible. Autrement dit, il existe  $V^\xi$  tel que  $V_\zeta^\xi = \xi$  et  $V_0^\xi = \mathbf{E}[\xi H_\zeta]$ .

Considérons maintenant le problème suivant "non-contraint" d'un investisseur qui cherche à maximiser un critère d'utilité espérée

$$\sup_{V_t} \mathbf{E}\{u(V_\zeta), (V_t) \text{ portefeuille admissible auto-finançant et } V_0 = x\}, \quad (\text{VI.7})$$

où l'espérance est calculée sous la probabilité historique  $\mathbf{P}$ . Supposons qu'il existe une stratégie admissible de valeur terminale  $V_\zeta^*$ , telle que

$$u'(V_\zeta^*) = \lambda H_\zeta (\lambda > 0), \quad \mathbf{E}[u(V_\zeta^*)] < +\infty \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[H_\zeta V_\zeta^*] = x,$$

alors cette stratégie est optimale.

En effet, comme  $u$  est une fonction concave,

$$u(y) - u(x) \leq u'(x)(y - x) \quad \text{pour tout couple } (x, y),$$

et par suite

$$\mathbf{E}[u(V_\zeta)] - \mathbf{E}[u(V_\zeta^*)] \leq \lambda \mathbf{E}[H_\zeta(V_\zeta - V_\zeta^*)] \leq \lambda(x - x) = 0.$$

### Remarque VI.6

La théorie de l'optimisation (voir [KS98]) permet de montrer que la solution du problème non-contraint de richesse initiale  $x$ , notée  $V^*$ , doit vérifier la condition d'utilité marginale

$$u'(V_\zeta^*) = \lambda H_\zeta,$$

où  $\lambda$  est un paramètre appelé multiplicateur de Lagrange. Il est complètement déterminé par la contrainte budgétaire  $\mathbf{E}[H_\zeta u'^{-1}(\lambda H_\zeta)] = x$ .

La situation classique, où  $V^*$  est connue pour être une stratégie optimale sous les hypothèses précédentes, est le cas de fonctions d'utilité de type puissance CRRA (aversion relative au risque constante).

Supposons alors que l'agent est muni d'une fonction d'utilité  $u$  de type puissance définie par :

$$u_\alpha(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+,$$

avec  $\frac{1}{1+\delta} < \alpha < 1$  ( $\delta$  introduit dans (VI.6)), de manière à ce que toutes les conditions d'intégrabilité précédentes soient satisfaites.

De plus, l'inégalité  $\mathbf{E}[u_\alpha(V_\zeta)] < +\infty$  est simple à vérifier pour toutes les stratégies admissibles auto-finançantes  $(V_t)$ . Pour cela, posons  $\delta = \frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda$  avec  $\lambda > 1$ . Appliquons ensuite l'inégalité de Hölder. Il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[u_\alpha(V_\zeta)] &= \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[H_\zeta^{-(1-\alpha)} (H_\zeta V_\zeta)^{1-\alpha}] \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[H_\zeta^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda}]^{\frac{\alpha}{\lambda}} \mathbf{E}[(H_\zeta V_\zeta)^{(1-\alpha)\nu_\alpha}]^{\frac{1}{\nu_\alpha}}, \end{aligned}$$

où  $\nu_\alpha$  est définie par  $\frac{1}{\nu_\alpha} + \frac{\alpha}{\lambda} = 1$ , c'est-à-dire  $\nu_\alpha = \frac{\lambda}{\lambda - \alpha}$ . En posant  $\beta := \frac{1-\alpha}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}}$ , nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\mathbf{E}[u_\alpha(V_\zeta)] \leq \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}[H_\zeta^{-\delta}]^{\frac{\alpha}{\lambda}} \mathbf{E}[(H_\zeta V_\zeta)^\beta]^{\frac{\lambda-\alpha}{\lambda}}.$$

Comme  $(H_t V_t)$  est une martingale uniformément intégrable et  $f : x \mapsto x^\beta$  est une fonction concave sur  $\mathbb{R}$ ,  $f(H_t V_t)$  est une surmartingale et par suite

$$\mathbf{E}[f(H_\zeta V_\zeta)] \leq f(H_0 V_0) = 1.$$

Cette dernière inégalité en conjonction avec l'hypothèse (VI.6) implique aisément que  $\mathbf{E}[u_\alpha(V_\zeta)] < \infty$  pour tout portefeuille admissible  $(V_t)$ .

Grâce à la complétude du marché,  $\frac{H_\zeta^{-\frac{1}{\alpha}}}{\mathbf{E}(H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}})}$  est atteignable par un portefeuille admissible auto-finançant  $S_t$ , tel que  $H_t S_t$  est une martingale de valeur initiale 1. Ainsi, la valeur terminale de la stratégie optimale  $V_\zeta^*$  est de la forme

$$V_\zeta^* = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} H_\zeta^{-\frac{1}{\alpha}} = x \frac{H_\zeta^{-\frac{1}{\alpha}}}{\mathbf{E}(H_\zeta^{1-\frac{1}{\alpha}})}.$$

Elle est donc proportionnelle à la valeur initiale investie dans le fonds, et le portefeuille optimal associé à la richesse initiale  $x$  est simplement

$$V_t^* = x S_t.$$

Grâce à la propriété de martingale du processus positif continu  $M_t^S := H_t S_t$ , nous pouvons introduire une nouvelle mesure de probabilité  $\mathbf{Q}^S$  équivalente à  $\mathbf{P}$ .  $\mathbf{Q}^S$  est définie sur  $\mathcal{F}_s$  par sa densité de Radon-Nikodym par rapport à  $\mathbf{P}$  :

$$\frac{d\mathbf{Q}^S}{d\mathbf{P}} = M_\zeta^S = H_\zeta S_\zeta.$$

La famille de tribus  $(\mathcal{F}_s)$  satisfait alors aux conditions habituelles à  $\mathbf{Q}^S$ , aussi bien qu'à  $\mathbf{P}$ . Les ensembles négligeables, les tribus optionnelle et prévisible sont les mêmes pour  $\mathbf{Q}^S$  et pour  $\mathbf{P}$ . Un processus càdlàg  $X$  est une  $\mathbf{Q}^S$ -martingale si et seulement si le processus  $X M^S$  est une  $\mathbf{P}$ -martingale. Il en résulte aussitôt que  $X$  est une  $\mathbf{Q}^S$ -martingale locale si et seulement si  $X M^S$  est une  $\mathbf{P}$ -martingale locale.

En choisissant  $S$  comme nouveau numéraire, nous pouvons observer que pour tout portefeuille admissible  $V_t$ , le processus

$$V_t^S := \frac{V_t}{S_t}$$

est une martingale uniformément intégrable sous  $\mathbf{Q}^S$ . De plus, la forme particulière de la fonction d'utilité  $u_\alpha$  permet de réécrire le critère à maximiser sous la forme

suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[u_{\alpha}(V_{\zeta})] &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} \left[ \frac{1}{H_{\zeta} S_{\zeta}} \frac{V_{\zeta}^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} \left[ \frac{S_{\zeta}^{-\alpha}}{H_{\zeta}} \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{V_{\zeta}}{S_{\zeta}} \right)^{1-\alpha} \right] \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} \left[ \frac{S_{\zeta}^{-\alpha}}{H_{\zeta}} u_{\alpha} \left( \frac{V_{\zeta}}{S_{\zeta}} \right) \right] = \lambda' \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} [u_{\alpha}(V_{\zeta}^S)],\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de la condition de premier ordre  $u'_{\alpha}(S_{\zeta}) = S_{\zeta}^{-\alpha} = \lambda' H_{\zeta}$ .

Sous la nouvelle probabilité  $\mathbf{Q}^S$ , le problème est de trouver un portefeuille optimal dans le numéraire ( $S$ ), qui maximise le critère

$$\max_{V_t^S} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} \{u_{\alpha}(V_{\zeta}^S)\}, \quad V^S \text{ martingale u.i. et } V_0^S = x\}.$$

Comme nous l'avons noté dans la section VI.3.2, une stratégie optimale dans ce cas est de ne rien faire. Ici, le changement de probabilité semble non pertinent. Nous verrons, cependant, dans la prochaine section comment il peut s'avérer extrêmement utile pour transformer le problème classique d'allocation optimale de portefeuille en un problème de martingale sous contraintes. Ceci nous permettra alors d'utiliser nos résultats précédents concernant le problème de martingale, en vue de trouver une solution optimale au problème d'assurance de portefeuille, dans le monde réel où les portefeuilles auto-finançants ne sont plus des martingales.

## VI.4.2 Problème “contraint” : changement de probabilité et caractérisation de la solution optimale

Le but de cette section est de caractériser la solution optimale du problème de maximisation de l'utilité de la richesse terminale d'un agent, sous des contraintes de type Américain. Nous nous restreignons aux fonctions d'utilité de type puissance (CRRA). Nous renvoyons le lecteur à l'article [KJPL05] par El Karoui-Jeanblanc-Lacoste, pour une extension des résultats aux fonctions d'utilité générales.

### VI.4.2.1 Fonctions d'utilité CRRA

Considérons le problème suivant d'optimisation sous contraintes, en supposant que la fonction d'utilité  $u_{\alpha}$  est de type puissance :

$$\max_{V_t} \mathbf{E}\{u_{\alpha}(V_{\zeta})\}, \quad \text{sous les contraintes } V_t \geq K_t \quad \forall t \in [0, \zeta] \quad \text{et } V_0 = x\}$$



parmi tous les portefeuilles auto-finançants admissibles  $V_t$ . Le plancher  $K_t$  est un processus optionnel positif.

Sous la nouvelle probabilité  $\mathbf{Q}^S$ , le problème consiste à trouver un portefeuille optimal dans le numéraire  $(S)$ , qui maximise le critère

$$\max_{V_t^S} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} \{u_\alpha(V_\zeta^S), \text{ avec } V_t^S \text{ martingale u.i. } \geq \frac{K_t}{S_t} = X_t \ \forall t \in [0, \zeta] \text{ et } V_0^S = x\}. \quad (\text{VI.8})$$

Nous supposons raisonnablement que  $X_t := \frac{K_t}{S_t}$  est un processus optionnel de la classe  $(\mathcal{D})$ , continu en espérance par rapport à toute suite de temps d'arrêt, sous la probabilité  $\mathbf{Q}^S$ .

Sous cette forme, le processus de plancher  $X$  n'est pas une surmartingale. Cependant, comme il a déjà été signalé dans la section VI.3.2, toute martingale dominant  $X$  domine forcément son enveloppe de Snell  $Z^X$ , et nous pouvons donc remplacer  $X$  par  $Z^X$  dans la formulation du problème.

De plus, comme le marché est supposé complet, chaque martingale peut être vue comme un portefeuille auto-finançant  $V^S$ . Ainsi, le problème d'optimisation de portefeuille peut se formuler comme un problème de martingale similaire à celui introduit dans la section VI.3.2, avec un obstacle défini par la surmartingale  $Z^X$ .

D'après le chapitre IV,  $Z^X$  peut se décomposer sous forme d'espérance conditionnelle d'un processus de running supremum :

$$Z_t^X = \mathbf{E} \left[ \sup_{t \leq u \leq \zeta} L_u^X | \mathcal{F}_t \right],$$

où  $L^X$  est un processus optionnel semi-continu supérieurement à droite, et la martingale

$$M_t^{X, \oplus} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} [L_{0, \zeta}^{X, *} | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} \left[ \sup_{0 \leq u \leq t} L_u^X | \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq \zeta, \quad (\text{VI.9})$$

vérifie l'inégalité  $\mathbf{E}[g(M_\zeta^{X, \oplus})] \leq \mathbf{E}[g(M_\zeta)]$  pour toute fonction convexe  $g$  et toute martingale admissible  $M$ . Elle résout en particulier le problème d'optimisation associé à la fonction d'utilité  $u_\alpha$ , lorsque  $x = Z_0^X$ . Il suffit pour cela de remarquer que la fonction  $g = -u_\alpha$  est convexe et par conséquent

$$\mathbf{E}[u_\alpha(M_\zeta^{X, \oplus})] \geq \mathbf{E}[u_\alpha(M_\zeta)], \quad \text{pour toute martingale admissible partant de } x = Z_0^X.$$

Si maintenant  $x \geq Z_0^X$ , nous devons remplacer  $L_{0, \zeta}^{X, *}$  par  $L_{0, \zeta}^{X, *} \vee x$  dans (VI.9) et la martingale optimale est dans ce cas donnée par

$$M_t^{X, \oplus}(x) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} [L_{0, \zeta}^{X, *} \vee x | \mathcal{F}_t].$$

Si l'on revient au problème initial, le portefeuille optimal associé s'exprime simplement sous la forme

$$V_t^* = S_t M_t^{X, \oplus}(x).$$

Ainsi, l'influence de la fonction d'utilité a été minimisée ici, puisqu'elle a juste servi à trouver le portefeuille optimal  $S$  qui résout le problème non-contraint.

Pour des fonctions d'utilité générales, la propriété linéaire de la solution optimale du problème (VI.7) n'est plus vraie : la solution optimale ne varie plus linéairement avec la valeur de la richesse initiale. Dans ce cas, l'article [KJPL05] suggère une solution avec des techniques similaires. La représentation des martingales en tant qu'espérance conditionnelle de la valeur terminale d'un processus croissant joue un rôle clé dans la résolution du problème.

### Liens avec l'exemple de la section VI.3.3

Soit  $\mathbf{P}$  la probabilité historique et  $H_t$  le processus du prix d'état défini à partir du taux d'intérêt  $r$  et la prime de risque  $\lambda$  dans un marché complet :

$$\frac{dH_t}{H_t} = -r dt - \lambda d\widehat{W}_t,$$

où  $\widehat{W}_t$  est un mouvement Brownien sous  $\mathbf{P}$ .

Comme d'habitude, nous introduisons la probabilité risque-neutre  $\mathbf{Q}$  de densité  $\exp(-\lambda\widehat{W}_\zeta - \frac{\lambda^2}{2}\zeta)$  par rapport à  $\mathbf{P}$ , de manière à ce que  $W_t = \widehat{W}_t + \lambda t$  définisse un mouvement Brownien sous  $\mathbf{Q}$ .

Avec les notations précédentes, la valeur terminale du portefeuille optimal (sans contraintes) est de la forme

$$S_\zeta = (\lambda' H_\zeta)^{-\frac{1}{\alpha}} = \exp \left[ r\zeta + \frac{\lambda}{\alpha} W_\zeta - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\alpha} \right)^2 \zeta \right].$$

Dans ce cadre, la mesure de probabilité  $\mathbf{Q}^S$  est donnée par

$$\frac{d\mathbf{Q}^S}{d\mathbf{P}} = H_\zeta S_\zeta = e^{-r\zeta} S_\zeta \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}},$$

et  $W_t^S := W_t - \frac{\lambda}{\alpha} t$  est un  $\mathbf{Q}^S$ -mouvement Brownien.

Comme  $e^{-rt} S_t$  est la martingale de densité de  $\mathbf{Q}^S$  par rapport à  $\mathbf{Q}$ ,  $(e^{-rt} S_t)^{-1}$  est une martingale sous  $\mathbf{Q}^S$  de la forme

$$\exp \left[ -\frac{\lambda}{\alpha} W_t^S - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\alpha} \right)^2 t \right].$$

Revenons au problème d'assurance de portefeuille et supposons que  $K_t = K$  et  $\zeta = T$  dans (VI.8). Le processus de plancher  $X_t = \frac{K}{S_t}$  est alors une  $\mathbf{Q}^S$ -surmartingale notée  $Z_t$  :

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = -r dt - \frac{\lambda}{\alpha} dW_t^S, \quad Z_0 = K.$$



FIG. VI.2 – Une trajectoire possible du plancher  $Z$ .

Pour un horizon temporel infini, nous avons montré que  $Z_t = b \mathbf{E}[Z_{t,\infty}^* | \mathcal{F}_t]$  dans l'exemple de la section VI.3.3. Par contre pour un horizon fini, la constante  $b$  est remplacée par une fonction déterministe du temps, pour laquelle nous n'avons pas de formule fermée :

$$Z_t = \mathbf{E}\left[\sup_{t \leq s \leq T} b_s Z_s | \mathcal{F}_t\right] \quad \text{et} \quad M_t^\oplus = \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq T} b_s Z_s | \mathcal{F}_t\right].$$

Le même exemple de la section VI.3.3 donne des formules fermées lorsque la maturité est infinie. Par conséquent, lorsque la maturité  $T$  est suffisamment grande, il est possible de dériver une solution explicite approximative basée sur ces formules fermées. Nous devons juste supposer que la solution ne domine plus le processus du plancher pour tout  $t$  dans  $[0, T]$ , mais pour tout  $t \geq 0$ .

Considérons alors un horizon temporel  $T$  suffisamment grand de façon à pouvoir déterminer une formule fermée approximative pour la solution du problème. D'après

la proposition VI.2 de la section VI.3.3,  $Z_t \simeq \frac{\gamma-1}{\gamma} \mathbf{E}[Z_{t,T}^* | \mathcal{F}_t]$  et la stratégie optimale est approximativement de la forme

$$\begin{aligned} M_t^\oplus &\simeq \frac{\gamma-1}{\gamma} \mathbf{E}[Z_{0,T}^* | \mathcal{F}_t] \simeq \frac{\gamma-1}{\gamma} \sup_{0,t} Z_u \left[ \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{Z_t}{\sup_{0,t} Z_u} \right)^\gamma + 1 \right] \\ &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{K}{\inf_{0,t} S_u} \left[ \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{S_t}{\inf_{0,t} S_u} \right)^\gamma + 1 \right]. \end{aligned}$$

La figure VI.3 représente une approximation de la martingale optimale  $M^\oplus$  associée au plancher  $Z$  de la figure VI.2. Nous pouvons notamment observer que la martingale colle à son plancher dans les phases de croissance et au voisinage de certains maxima locaux. En effet comme il a déjà été signalé au chapitre précédent, la martingale doit revenir au niveau du plancher à chaque fois que ce dernier atteint un nouveau maximum (cf. proposition V.5).

Par contre lorsque le plancher connaît une chute, le niveau de la martingale  $M^\oplus$  baisse également, mais dans une moindre mesure du fait de son optimalité par rapport à l'ordre convexe sur les valeurs terminales.



FIG. VI.3 – Approximation de la Martingale Max-Plus  $M^\oplus$  sur un exemple de trajectoire du processus de plancher  $Z_t = \frac{K}{S_t}$ .

La solution optimale  $V_t^*$  du problème initial est alors donnée par

$$V_t^* = S_t M_t^\oplus \simeq \frac{\gamma-1}{\gamma} K \frac{S_t}{\inf_{0,t} S_u} \left[ \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{S_t}{\inf_{0,t} S_u} \right)^{-\gamma} + 1 \right] = \Psi \left( \frac{S_t}{\inf_{0,t} S_u} \right). \quad (\text{VI.10})$$

La figure VI.4 représente cette stratégie optimale  $V_t^*$  en fonction du temps. Nous pouvons particulièrement observer que  $V_t^*$  reste extrêmement proche du plancher constant  $K$  au voisinage de la zone où  $Z$  a atteint son maximum global (cf. figure VI.3).

Par souci de simplicité, nous posons dans la suite  $s_t^* := \inf_{0,t} S_u$ . Comme  $V_t^*$  est

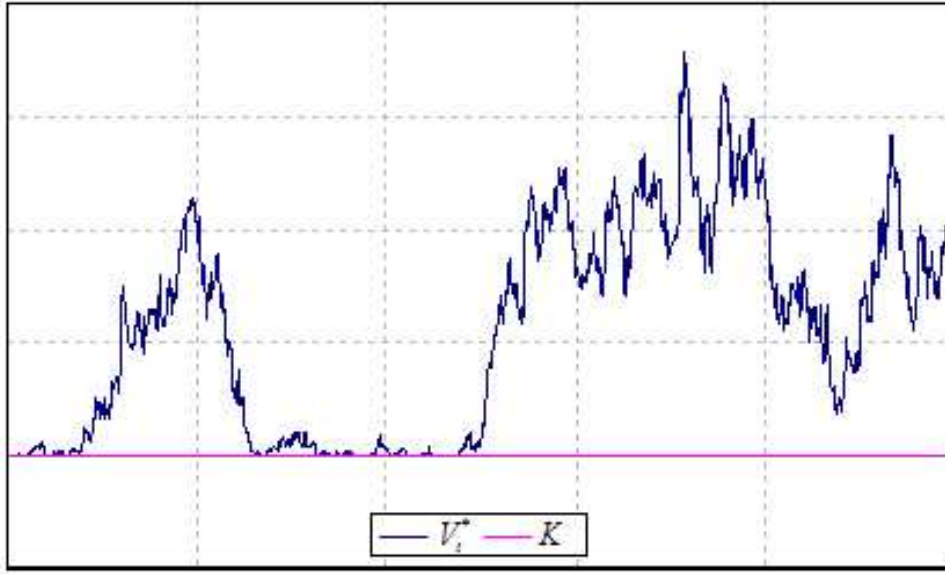


FIG. VI.4 – Représentation de la stratégie optimale  $V_t^*$  en fonction du temps.

un portefeuille auto-finançant, sa partie à variation finie sous la probabilité risque-neutre  $\mathbf{Q}$  est en  $rV_t dt$ . Il reste à identifier sa partie martingale en utilisant la formule d'Itô. La dynamique de  $V_t^*$  est alors donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 dV_t^* &= rV_t^* dt + \Psi' \left( \frac{S_t}{s_t^*} \right) \frac{1}{s_t^*} \left( \frac{\lambda}{\alpha} S_t dW_t \right) \\
 &= rV_t^* dt + \frac{\gamma-1}{\gamma} K \left[ 1 - \left( \frac{S_t}{s_t^*} \right)^{-\gamma} \right] \frac{1}{s_t^*} \left( \frac{\lambda}{\alpha} S_t dW_t \right) \\
 &= rV_t^* dt + \frac{\gamma-1}{\gamma} K \frac{\lambda}{\alpha} \left( \frac{S_t}{\inf_{0,t} S_u} \right) \left[ 1 - \left( \frac{S_t}{\inf_{0,t} S_u} \right)^{-\gamma} \right] dW_t. \quad (\text{VI.11})
 \end{aligned}$$

Notons que dans le cas particulier où  $S_t = \inf_{0,t} S_u$ ,

$$V_t^* = \frac{\gamma-1}{\gamma} K \left[ \frac{1}{\gamma-1} + 1 \right] = K,$$

et la quantité d'actifs risqués est nulle. Ainsi, la stratégie optimale touche le plancher  $K$  à chaque fois que  $S_t$  atteint son minimum, comme le montre la figure VI.5.



FIG. VI.5 –  $V_t^*$  touche le plancher  $K$  à chaque fois que  $S_t$  atteint son minimum sur  $[0, t]$ .

### Comparaison des stratégies de Max-Plus et de Doob-Meyer

La figure VI.6 représente la martingale  $M^\oplus$  et la martingale  $M^{DM}$  de la décomposition de Doob-Meyer de  $Z$ , sur un exemple de trajectoire du plancher  $Z_t = \frac{K}{S_t}$ . Par absence d'opportunité d'arbitrage, nous savons qu'il n'existe pas de stratégie dominante dans tous les états du monde.

Nous pouvons observer que la martingale optimale par rapport à l'ordre convexe sur les valeurs terminales, reste collée au plancher sur la première période. De plus, son maximum sur les intervalles de la forme  $[0, t]$  est toujours le même que celui du plancher :  $\sup_{0,t} M_u^\oplus = \sup_{0,t} Z_u$ , contrairement à la martingale de Doob-Meyer qui est plus variable. Celle-ci colle moins au plancher et n'y revient plus une fois qu'elle a décollé.

La figure VI.7 compare les stratégies de portefeuille  $V_t^* = S_t.M_t^\oplus$  et  $V_t^{DM} = S_t.M_t^{DM}$  dans le monde réel où les portefeuilles auto-finançants ne sont plus des martingales. Nous voyons bien ici que la stratégie optimale la moins risquée  $V_t^*$  a tendance à revenir au plancher, contrairement à celle de Doob-Meyer.

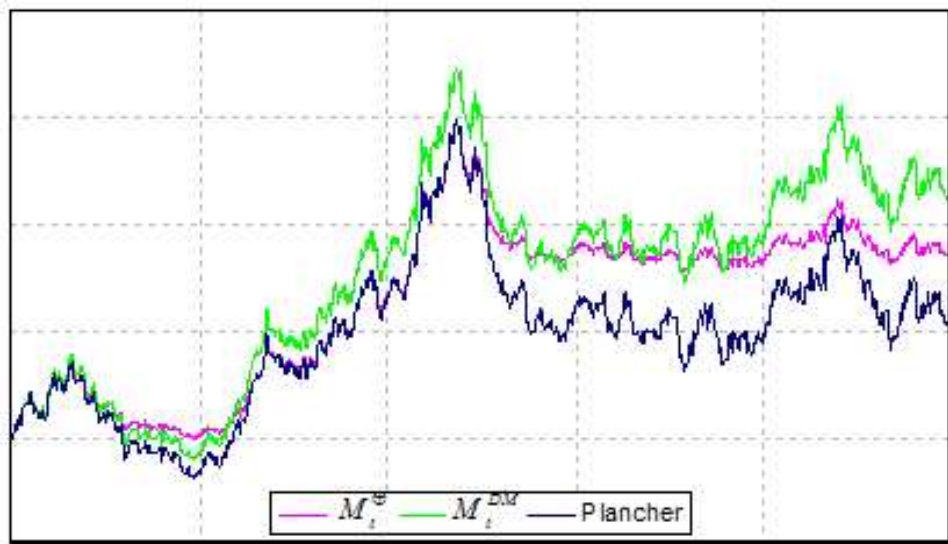


FIG. VI.6 – Comparaison des martingales de Max-Plus et de Doob-Meyer sur une trajectoire possible du plancher.

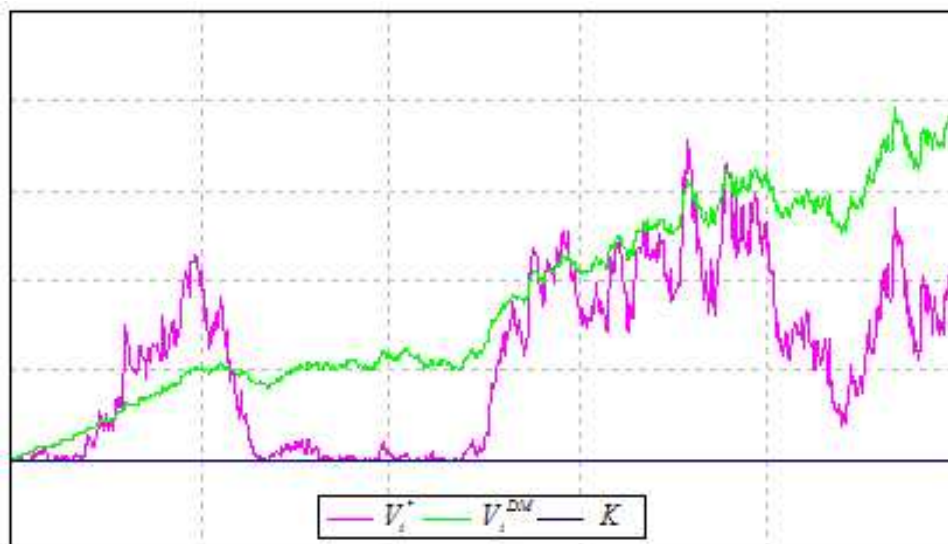


FIG. VI.7 – Comparaison de la stratégie optimale et de la stratégie associée à la martingale de Doob-Meyer.

## VI.5 Conclusion

Ce chapitre propose une nouvelle approche au problème classique de maximisation d'utilité sous des contraintes de type Américain, en se basant sur la notion d'ordre stochastique convexe. Comme il a déjà été souligné, l'attrait principal de la dominance stochastique réside dans le fait qu'elle évite toute hypothèse arbitraire concernant la forme de la fonction d'utilité. Elle n'impose aucune spécification explicite de la fonction d'utilité de l'agent.

Il est à noter que les critères de l'ordre convexe ont pu être employés ici parce que nous avons considéré un nouvel environnement dans lequel les portefeuilles autofinancés sont des martingales.

Le problème posé admet une solution optimale dans le cadre d'un marché complet, puisque tous les actifs contingents sont répliquables. De ce fait, le portefeuille optimal ne définit pas seulement une martingale *locale* mais une vraie martingale.

Signalons enfin que l'optimisation est essentiellement basée sur la décomposition des surmartingales dans l'algèbre Max-Plus, qui permet d'exprimer toute martingale de la classe  $(\mathcal{D})$  sous forme d'espérance conditionnelle d'un certain processus de running supremum.





# Références bibliographiques

## Chapitre VI

- [BJ87] F. Black and R. Jones, “Simplifying portfolio insurance”, *Journal of Portfolio Management* **14** (1987), no. 1, pp. 48–51.
- [BK04] P. Bank and N. El Karoui, “A stochastic representation theorem with applications to optimization and obstacle problems”, *The Annals of Probability* **32** (2004), no. 1B, pp. 1030–1067.
- [Bl03] P. Bank and H. Föllmer, “American options, multi-armed bandits and optimal consumption plans : A unifying view”, *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2002, Lecture Notes in Mathematics* **1814** (2003), pp. 1–42.
- [Gay04] J. P. Gayant, “Rôle de la transformation des probabilités dans la combinaison d’actifs risqués”, *Annales d’économie et de statistique* (2004), no. 73, pp. 141–155.
- [KJP98] N. El Karoui and M. Jeanblanc-Picqué, “Optimization of consumption with labor income”, *Finance and Stochastics* **2** (1998), no. 4, pp. 409–440.
- [KJPL05] N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picqué and V. Lacoste, “Optimal portfolio management with American capital guarantee”, *Journal of Economic Dynamics and Control* **29** (2005), pp. 449–468.
- [KS98] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [MvN47] O. Morgenstern and J. von Neumann, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 2nd Edition, 1947.
- [PS88] A. Perold and W. Sharpe, “Dynamic strategies for asset allocation”, *Financial Analyst Journal* (1988), pp. 16–27.



# Martingales d’Azéma-Yor et Décomposition Max-Plus

---

## Résumé

Les martingales d’Azéma-Yor ont initialement servi à résoudre le problème de Skorohod, et grâce à leurs propriétés remarquables, elles ont suffi dans de nombreux cas à obtenir des résultats d’accès difficile (cf. [Obl05]).

Nous définirons donc tout d’abord les martingales d’Azéma-Yor. Ensuite, nous identifierons ces martingales aux martingales Max-Plus et nous montrerons notamment comment elles permettent de représenter toute surmartingale, fonction concave d’une martingale de référence, sous forme d’espérance conditionnelle d’un certain running supremum.

Cette représentation est extrêmement utile en finance puisqu’elle permet entre autres de décrire de manière précise la frontière d’arrêt optimal pour des Calls Américains écrits sur de tels sous-jacents et de déterminer des formules fermées pour les prix. Nous donnerons dans ce chapitre quelques exemples basés sur des processus de diffusion uni-dimensionnels et grâce à la symétrie Call-Put, nous dériverons une règle universelle de pricing (en fonction du strike) pour des Puts Américains “classiques” dans le cadre d’un modèle de diffusion à volatilité locale.

Nous nous tournerons enfin vers les applications des martingales d’Azéma-Yor en optimisation de portefeuille. Nous verrons par exemple qu’elles permettent de résoudre les problèmes suivants :

- trouver la meilleure martingale dominant un plancher donné par rapport à l’ordre

- convexe sur les valeurs terminales,
- trouver des martingales optimales vérifiant certaines contraintes de drawdown.

## VII.1 Introduction

Les martingales d’Azéma-Yor ont été introduites par les auteurs pour résoudre le problème de Skorohod, qui consiste à trouver un temps d’arrêt intégrable pour lequel le mouvement Brownien arrêté à cet instant a une distribution donnée.

Plus précisément, soient  $(B_t)$  un mouvement Brownien à une dimension issu de l’origine et  $\mu$  une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , centrée et admettant un moment du second ordre. Appelons  $\Psi_\mu(x)$  le barycentre de la restriction de  $\mu$  à  $[x, \infty)$ , et posons  $B_t^* = \sup_{s \leq t} B_s$ . L’objet principal de l’article [AY79] par J. Azéma et M. Yor, était de montrer que le temps d’arrêt

$$T = \inf\{t; B_t^* \geq \Psi_\mu(B_t)\}$$

résout le problème de Skorohod relatif à  $\mu$ . Autrement dit, il satisfait aux conditions suivantes :

- (a) La loi de  $B_T$  est  $\mu$ .
- (b)  $\mathbf{E}[T] = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x)$ .

Pour cela, les auteurs ont utilisé de manière intensive le résultat suivant : si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , le processus

$$f(B_t^*) + (B_t - B_t^*)f'(B_t^*)$$

est une martingale locale, appelée **martingale locale d’Azéma-Yor**. Ce point de vue s’est révélé très efficace dans les problèmes de calibration implicite, et les options sur variance.

Plusieurs solutions ont été proposées. Citons par exemple les articles de Dubins [Dub68], Root [Roo69], Chacon-Walsh [CW76], Lehoczky [Leh77], Bass [Bas83], Vallois [Val83]...

Récemment, Cox et Hobson ont proposé dans [CH05] un point de vue unifié pour ces différentes représentations. Mais le plus important pour nous est la caractérisation de Obloj [Obl05] des martingales d’Azéma-Yor comme étant les seules martingales qui s’écrivent comme une fonction du mouvement Brownien et de son processus du maximum. Plus généralement, toute martingale càdlàg dépendant uniquement d’une martingale donnée  $N$  et de son running supremum  $N_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} N_s$  est une martingale d’Azéma-Yor qui s’écrit sous la forme

$$f(N_t^*) + (N_t - N_t^*)f'(N_t^*).$$

En dépit de leur simplicité, ces martingales locales ont servi à résoudre des problèmes particulièrement épineux.

En ce qui nous concerne, les martingales d’Azéma-Yor s’avèrent très utiles pour représenter toute surmartingale, fonction concave d’une martingale de référence, sous forme d’espérance conditionnelle du running supremum d’un certain indice. Ceci permet de déduire des formules fermées pour les Calls Américains écrits sur de tels sous-jacents, et donne une description précise de la frontière d’arrêt optimal. Des exemples utiles reposant sur des diffusions unidimensionnelles sont proposés dans ce chapitre.

D’autres problèmes d’optimisation peuvent se résoudre par les martingales d’Azéma-Yor, comme par exemple :

- trouver la meilleure martingale dominant un plancher donné par rapport à l’ordre convexe sur les valeurs terminales. Nous avons vu au chapitre VI que les martingales “Max-Plus” sont des solutions optimales. Nous montrons dans ce chapitre que les martingales d’Azéma-Yor fournissent des exemples de décompositions Max-Plus, où nous pouvons faire des calculs explicites sans aucune hypothèse de type accroissements indépendants et stationnaires.
- trouver des martingales optimales vérifiant des contraintes de type “drawdown”. En effet, un fonds garanti (avec des contraintes de type “drawdown”) est sensé offrir la possibilité de tirer le meilleur parti des hausses des marchés actions sans aucun risque pour le capital investi. Dans la plupart des cas, il permet, au terme du fonds, de bénéficier d’une valeur liquidative au moins égale à un certain pourcentage (70 % par exemple) de la plus haute valeur liquidative ou la plus haute performance observée quotidiennement dès la fin de la période de souscription et jusqu’à l’échéance du fonds, et ce quelle que soit l’évolution des marchés financiers.

## VII.2 Définition de la martingale d’Azéma-Yor

### Définition VII.1

Soit  $N$  une martingale locale continue et  $N_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} N_s$  son running supremum. Alors, pour toute fonction à variation finie  $u$ , avec une dérivée à droite  $u'$  localement intégrable, le processus  $M^{AY}$

$$M_t^{AY} = u(N_t^*) + u'(N_t^*)(N_t - N_t^*) \quad (\text{VII.1})$$

est une martingale locale, appelée martingale d’Azéma-Yor.

Cette propriété a été utilisée de manière intensive par Azéma-Yor et a particulièrement servi à résoudre le problème de Skorohod dans [AY79].

Supposons que  $u$  admette une dérivée seconde  $u''^1$  et écrivons (VII.1) sous forme différentielle. Cela donne

$$\begin{aligned} dM_t^{\text{AY}} &= u'(N_t^*)dN_t^* + u'(N_t^*)(dN_t - dN_t^*) + u''(N_t^*)(N_t - N_t^*)dN_t^* \\ &= u'(N_t^*)dN_t, \end{aligned}$$

où la seconde égalité découle du fait que  $N_t^* = N_t$  lorsque  $t$  est un point de croissance de  $N^*$ .

Ainsi, la martingale d'Azéma-Yor de la définition VII.1 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$M_t^{\text{AY}} = M_0^{\text{AY}} + \int_0^t u'(N_s^*)dN_s. \quad (\text{VII.2})$$

Il est aisé de voir que l'identité (VII.2) reste vraie pour tout processus càdlàg  $N_t$  définissant une semi-martingale **dont les sauts sont négatifs**, ou plus généralement **dont le processus de running supremum  $N_t^*$  est continu**.

### VII.3 Martingales Max-Plus et martingales d'Azéma-Yor

Soient  $(N_t)$  une martingale locale qui tend vers 0 à l'infini et  $(Z_t)$  une fonction concave croissante  $u$  de  $(N_t)$ . Nous pouvons supposer que le processus  $(N_t)$  est continu, ou plus généralement càdlàg à sauts négatifs, de façon à ce que le processus de running supremum  $(N_t^*)$  soit continu.

Grâce à la concavité de  $u$ ,  $Z_t = u(N_t)$  est une surmartingale. Nous supposons également que l'horizon  $\zeta$  est infini et  $\mathbf{E}[|u(\sup_{t \geq 0} N_t)|] = \mathbf{E}[|u(N_\infty^*)|] < +\infty$  de manière à ce que  $Z$  soit de la classe  $(\mathcal{D})$ .

Posons ensuite  $N_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} N_s$  et appliquons la formule d'Itô dans le cas où  $u$  est de la classe  $\mathcal{C}^1$ . Nous pouvons alors observer que le processus

$$M_t := u(N_t^*) + (N_t - N_t^*)u'(N_t^*) = u(N_0) + \int_0^t u'(N_s^*)dN_s \quad (\text{VII.3})$$

est une martingale locale d'Azéma-Yor, qui sera notée par  $M_t^{\text{AY}}$  dans la suite.

Comme la fonction  $u$  est concave, il vient

$$u(y) - u(x) \leq u'(x)(y - x)$$

---

<sup>1</sup>Cette hypothèse n'est pas indispensable pour montrer (VII.2). Cette dernière propriété est en fait vraie pour toute fonction  $u$  vérifiant les conditions de la définition VII.1.



pour tous réels  $(x, y)$ , et par suite la martingale  $M_t^{\text{AY}}$  domine  $Z_t = u(N_t)$ .

Nous avons pour objectif d'identifier la martingale  $M^{\text{AY}}$  d'Azéma-Yor à la martingale associée à la décomposition Max-Plus de  $Z$ . Pour cela, nous appliquons ici le théorème d'unicité II.8 du chapitre II; mais nous verrons dans la section VII.4.2 que nous pouvons directement prouver ce résultat, en exploitant uniquement des propriétés liées à la martingale d'Azéma-Yor.

Nous verrons également, dans la suite du chapitre, que la martingale d'Azéma-Yor permet de retrouver, dans des cas particuliers, un certain nombre de résultats des chapitres précédents, sans utiliser la théorie de la décomposition Max-Plus.

Pour pouvoir appliquer le théorème d'unicité II.8,  $M_\infty^{\text{AY}}$  doit être égale à la valeur terminale d'un processus croissant  $L_{0,\cdot}^*$  qui croît uniquement aux instants  $t$  tels que  $L_{0,t}^* = L_t$ .

Comme nous avons supposé que  $N_\infty = 0$ , il en découle immédiatement que  $N_\infty^* \geq 0$  et

$$M_\infty^{\text{AY}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} M_t^{\text{AY}} = u(N_\infty^*) - u'(N_\infty^*)N_\infty^* := v(N_\infty^*),$$

où la fonction  $v$  est définie par  $v(x) := u(x) - xu'(x)$  pour tout réel  $x$ . Si la fonction  $u$  est régulière,  $v'(x) = -xu''(x)$ . Donc, grâce à la concavité de  $u$ ,  $v'(x) \geq 0$  si  $x \geq 0$  et la fonction  $v$  est croissante sur  $[0, +\infty)$ .

De plus,  $N_\infty^* = (N^+)_\infty^*$  car  $N_\infty^* \geq 0$ , mais nous n'avons pas forcément  $N_t^* = (N^+)_t^*$  pour tout  $t$ . Ainsi,  $M_\infty^{\text{AY}}$  est la valeur terminale d'un processus croissant de la forme

$$v((N^+)_t^*) = \sup_{0 \leq s \leq t} L_s \quad \text{où} \quad L_s := u(N_s^+) - u'(N_s^+)N_s^+ = v(N_s^+).$$

Par ailleurs, tant que  $N_t \leq 0$ ,  $(N^+)_t^*$  reste collé à 0 et ne croît pas. Ainsi, le processus croissant  $v((N^+)_t^*)$  croît uniquement lorsque  $(N^+)_t^* = N_t^+ = N_t = N_t^*$ , c'est-à-dire lorsque  $M_t^{\text{AY}} = Z_t$  (d'après l'équation (VII.3)).

La martingale  $M^{\text{AY}}$  satisfait donc à toutes les conditions du théorème II.8, qui assure l'unicité de la martingale  $M^{\text{AY}} = M^\oplus$  associée à la décomposition Max-Plus de  $Z$ .

De plus, grâce à la contrainte de domination  $M_t^\oplus \geq Z_t$  et à la première égalité dans (VII.3), il vient

$$u(N_t) \leq M_t^\oplus \leq u(N_t^*).$$

Par conséquent, les processus de running supremum de  $M^\oplus$  et de  $Z$  sont indistinguables :

$$M_t^{\oplus,*} = Z_t^* = u(N_t^*), \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Nous pouvons récapituler ces résultats dans la proposition suivante :

**Proposition VII.1**

Soit  $Z$  une surmartingale de la forme  $Z_t = u(N_t)$  où  $u$  est une fonction croissante concave et  $N$  une martingale locale continue, ou càdlàg à sauts négatifs telle que  $N_\infty = 0$ .

1.  $Z$  admet alors la décomposition suivante dans l'algèbre Max-Plus :

$$Z_t = \mathbf{E}[L_{t,\infty}^* | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}\left[\sup_{s \geq t} L_s | \mathcal{F}_t\right], \quad \text{où } L_s = v(N_s^+)$$

et  $v$  est une fonction croissante de la forme  $v(x) = u(x) - u'(x)x$ .

2. La martingale de la décomposition Max-Plus de  $Z$  est de la forme

$$M_t^\oplus = u(N_t^*) + (N_t - N_t^*)u'(N_t^*).$$

Elle a en particulier le même running supremum que  $Z$  :  $M_t^{\oplus,*} = Z_t^* = u(N_t^*)$ , pour tout  $t$ .

3. Cette martingale  $M^\oplus$ , solution optimale du problème de martingale sous contrainte de plancher  $M_t^\oplus \geq Z_t$ , satisfait en fait à la contrainte de "draw-down" plus forte :

$$M_t^{\oplus,*} \geq v \circ u^{-1}(Z_t^*) = v \circ u^{-1}(M_t^{\oplus,*}).$$

**Remarque VII.2**

Ces résultats ne sont pas seulement valables sous les hypothèses  $\zeta = \infty$  et  $N_\infty = 0$ . Le processus  $M^{AY}$  est encore la martingale de la décomposition Max-Plus de  $Z$ , pour tout horizon  $\zeta$  tel que  $M_\zeta = v(N_\zeta^*)$ , où  $v$  est une fonction croissante.

**VII.3.1 Exemples précédents revisités**

Revenons sur les exemples de la section V.4.

**Cas de l'horizon infini.**

- Notons que le premier cas où  $Z$  est un mouvement Brownien géométrique de paramètres  $(-r, \sigma)$  rentre dans le cadre de l'exemple plus général des martingales d'Azéma-Yor.

En effet,  $Z^\gamma$  (avec  $\gamma = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}$ ) est une martingale locale et donc  $Z_t = u(N_t)$  où  $u(x) = x^{\frac{1}{\gamma}}$  est une fonction concave croissante et  $N_t = Z_t^\gamma$ . En particulier, nous pouvons aisément montrer le résultat de la proposition V.5 en utilisant simplement l'équation (VII.3).

Plus généralement, soit  $N_t$  une martingale continue exponentielle d'une intégrale stochastique telle que  $\int_0^\infty \sigma^2(N_t)dt = \infty$ . Alors, la martingale associée à la décomposition Max-Plus de  $Z_t = N_t^{\frac{1}{\gamma}}$  a la même forme que celle dans le cas du Brownien géométrique.

- Reconsidérons l'exemple du chapitre V où la surmartingale  $Z$  est un processus de Lévy géométrique de la forme  $Z_t = xe^{Xt}$ , avec  $x > 0$  et  $X$  un processus de Lévy sans sauts positifs (ou encore un processus de Lévy semi-continu supérieurement). Le processus de running supremum  $Z_t^*$  est dans ce cas continu, puisque  $Z$  ne peut avoir que des sauts négatifs.

Si  $(a, \sigma^2, \Pi)$  est le triplet caractéristique de  $X$ , avec  $a$  et  $\sigma \geq 0$  deux constantes réelles et  $\Pi$  une mesure positive de support  $(-\infty, 0)$ , telle que  $\int (1 \wedge y^2)\Pi(dy) < +\infty$ , alors nous pouvons définir, comme expliqué au chapitre III, l'exposant de Laplace  $\kappa = \kappa(\lambda)$  par

$$\kappa(\lambda) = a\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{-\infty}^0 (e^{\lambda y} - 1 - \lambda y \mathbf{1}_{\{-1 < y < 0\}})\Pi(dy), \quad \text{pour } \lambda \geq 0. \quad (\text{VII.4})$$

Cet exposant a pour propriété que  $\mathbf{E}[e^{\lambda X_t}] = e^{t\kappa(\lambda)}$  et tout processus de la forme  $e^{\lambda X_t - t\kappa(\lambda)}$  (avec  $\lambda > 0$ ) est une martingale.

Ainsi, le processus  $Z_t = xe^{Xt}$  peut s'écrire sous la forme

$$Z_t = M_t e^{t\kappa(1)}, \quad \text{où } M_t = xe^{X_t - t\kappa(1)} \text{ est une martingale.}$$

$Z$  ne peut donc être une surmartingale que si le processus  $e^{t\kappa(1)}$  est décroissant, c'est-à-dire  $\kappa(1) \leq 0$ .

Supposons que  $\kappa(1) = a + \frac{1}{2}\sigma^2 + \int_{-\infty}^0 (e^y - 1 - y \mathbf{1}_{\{-1 < y < 0\}})\Pi(dy) < 0$ . Comme  $\kappa(0) = 0$ ,  $\kappa$  est convexe et  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \kappa(\lambda) = +\infty$ , il existe  $\gamma_{\text{Lévy}} > 1$  tel que  $\kappa(\gamma_{\text{Lévy}}) = 0$  (cf. chapitre III).

Le processus  $Z_t^{\gamma_{\text{Lévy}}} = x^{\gamma_{\text{Lévy}}} e^{\gamma_{\text{Lévy}} X_t}$  est alors une martingale que nous désignons par  $N_t$ .

Nous procédons ensuite comme dans le cas précédent en posant  $u(x) = x^{\frac{1}{\gamma_{\text{Lévy}}}}$  et en appliquant l'égalité (VII.3), afin de retrouver l'expression (V.7) de la martingale Max-Plus, donnée dans le chapitre V :

$$M_t^\oplus = (N_t^*)^{\frac{1}{\gamma_{\text{Lévy}}}} + (N_t - N_t^*) \frac{(N_t^*)^{\frac{1}{\gamma_{\text{Lévy}}}-1}}{\gamma_{\text{Lévy}}} = Z_t^* + (Z_t^{\gamma_{\text{Lévy}}} - (Z_t^*)^{\gamma_{\text{Lévy}}}) \frac{(Z_t^*)^{1-\gamma_{\text{Lévy}}}}{\gamma_{\text{Lévy}}}.$$

- Considérons à présent le cas d'un mouvement Brownien drifté  $Z$  de paramètres  $(-\mu, \sigma)$ , où  $\mu = r + \frac{\sigma^2}{2}$ . Nous pouvons facilement voir que le processus  $\exp(\gamma Z_t) = N_t$  est une martingale et par conséquent  $Z_t = u(N_t)$ , où  $u(x) = \frac{1}{\gamma} \log(x)$  est une fonction concave croissante.

Ensuite d'après l'équation (VII.3), la martingale  $M^\oplus$  associée à la décomposition Max-Plus de  $Z$  est de la forme

$$M_t^\oplus = \frac{1}{\gamma} \log(N_t^*) + (N_t - N_t^*) \frac{1}{\gamma N_t^*} = Z_t^* + \frac{1}{\gamma} (\exp \gamma(Z_t - Z_t^*) - 1),$$

et nous pouvons donc déduire la même formule que celle de la proposition V.6. Cette propriété n'est pas typique du mouvement Brownien et reste valable pour des intégrales stochastiques plus générales.

### Cas de l'horizon exponentiel indépendant.

Supposons à présent que

- l'horizon  $\zeta$  est une variable aléatoire indépendante de paramètre  $\beta > 0$ ,
  - la surmartingale  $Z$  est un mouvement Brownien géométrique de paramètres  $(-r, \sigma)$ .
- Nous adoptons les notations de la section III.3.1.2.

Soit  $\delta$  la racine supérieure à  $\gamma$  du trinôme de second degré :  $y^2 - \gamma y - \frac{2\beta}{\sigma^2} = 0$ .

Le processus  $\tilde{Z}_t^\delta = Z_t^\delta \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  est alors une  $\mathcal{G}_t$ -martingale. En effet, pour tous réels  $t, s \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\tilde{Z}_{t+s}^\delta | \mathcal{G}_t] &= \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} \mathbf{E}[Z_{t+s}^\delta \mathbf{1}_{\{t+s < \zeta\}} | \mathcal{G}_t] \\ &= \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} e^{\beta t} \mathbf{E}[Z_{t+s}^\delta \mathbf{1}_{\{t+s < \zeta\}} | \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

d'après l'équation de changement de filtration (III.8) du chapitre III. Il en résulte aussitôt que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\tilde{Z}_{t+s}^\delta | \mathcal{G}_t] &= \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} e^{\beta t} Z_t^\delta \mathbf{E}\left[\left(\frac{Z_{t+s}}{Z_t}\right)^\delta \mathbf{1}_{\{t+s < \zeta\}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}} e^{\beta t} Z_t^\delta \mathbf{E}\left[\left(\frac{Z_{t+s}}{Z_t}\right)^\delta e^{-\beta(t+s)} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \tilde{Z}_t^\delta \mathbf{E}\left[e^{-\beta s} \left(\frac{Z_s}{x}\right)^\delta\right], \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle des propriétés d'indépendance et de stationnarité des accroissements relatifs de  $Z$ . Par ailleurs,

$$\mathbf{E}\left[e^{-\beta s} \left(\frac{Z_s}{x}\right)^\delta\right] = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \gamma \delta s - \beta s + \sigma \delta W_s\right)\right],$$

et comme  $\delta^2 - \gamma\delta - \frac{2\beta}{\sigma^2} = 0$ , il en résulte que

$$\mathbf{E}\left[e^{-\beta s} \left(\frac{Z_s}{x}\right)^\delta\right] = \mathbf{E}\left[\exp\left(\sigma\delta W_s - \frac{\sigma^2\delta^2}{2}s\right)\right] = 1,$$

et  $\mathbf{E}[\tilde{Z}_{t+s}^\delta | \mathcal{G}_t] = \tilde{Z}_t^\delta$  pour tous  $t, s \geq 0$ .

Ainsi la surmartingale  $Z$  est de la forme  $Z_t = u(N_t)$ , où  $u(x) = x^{\frac{1}{\delta}}$  est une fonction concave croissante et  $N_t = \tilde{Z}_t^\delta$  est une martingale locale.

Comme la martingale d'Azéma-Yor  $M^{AY}$  associée à  $u$  et  $N$  n'est rien d'autre que la martingale  $M^\oplus$  de la décomposition Max-Plus de  $Z$ , il suffit d'exploiter la définition (VII.3) de  $M^{AY}$  pour retrouver le résultat de la proposition V.8 concernant la forme explicite de la martingale Max-Plus, pour  $t \leq \zeta$  :

$$\begin{aligned} M_t^\oplus &= (N_t^*)^{\frac{1}{\delta}} + (N_t - N_t^*) \frac{(N_t^*)^{\frac{1}{\delta}-1}}{\delta} = \tilde{Z}_t^* + (\tilde{Z}_t^\delta - (\tilde{Z}_t^*)^\delta) \frac{(\tilde{Z}_t^*)^{1-\delta}}{\delta} \\ &= \frac{\delta-1}{\delta} \tilde{Z}_t^* \left[ \frac{1}{\delta-1} \left(\frac{\tilde{Z}_t^\delta}{\tilde{Z}_t^*}\right)^\delta + 1 \right]. \end{aligned}$$

## VII.4 Options Américaines et martingales d'Azéma-Yor

Le but de cette section est d'exploiter les martingales d'Azéma-Yor afin de résoudre explicitement certains problèmes de Calls Américains perpétuels, sans facteur d'actualisation, écrits sur des sous-jacents fonctions d'une martingale locale de référence. Comme nous avons vu au chapitre III que ces Calls Américains ont exactement les mêmes propriétés que les Puts Américains "classiques" avec facteur d'actualisation, les résultats s'appliqueront également aux Puts. Nous rappelons d'abord cette symétrie Call-Put dans le prochain paragraphe.

### VII.4.1 Symétrie Call-Put

Considérons le processus de densité de prix d'état  $H$  et supposons que pour tout temps d'arrêt borné  $\tau$ ,  $H_{t \wedge \tau} S_{t \wedge \tau}$  est une martingale uniformément intégrable sous la probabilité historique  $\mathbf{P}$ , et non uniquement une martingale locale. Nous pouvons

définir une nouvelle mesure de probabilité  $\mathbf{Q}^S$  sur  $\mathcal{F}_\tau$  par sa densité de Radon-Nikodym par rapport à  $\mathbf{P}$  :

$$\frac{d\mathbf{Q}^S}{d\mathbf{P}} \Big|_{\mathcal{F}_\tau} = H_\tau \frac{S_\tau}{S_0} \quad (\text{VII.5})$$

Ainsi, un Put Européen de maturité  $\tau$  et de strike  $m$  peut encore s'écrire comme

$$\text{Put}_0(m, \tau) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[H_\tau(m - S_\tau)^+] = mS_0 \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S}[(S_\tau^{-1} - m^{-1})^+]. \quad (\text{VII.6})$$

Nous avons aussi pour tout  $t \leq \tau$ ,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S} \left[ \frac{1}{S_\tau} \Big| \mathcal{F}_t \right] = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left[ \frac{1}{S_\tau} \frac{H_\tau S_\tau}{H_t S_t} \Big| \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{H_t S_t} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} [H_\tau | \mathcal{F}_t].$$

Ces égalités montrent que la  $\mathbf{Q}^S$ -semimartingale  $S^{-1}$  a les mêmes propriétés que le processus  $H$  sous la probabilité historique  $\mathbf{P}$  et définit par suite une surmartingale.

Ainsi, l'équation (VII.6) traduit la symétrie entre les Puts Américains "classiques" avec facteur d'actualisation et les Calls Américains sans facteur d'actualisation.

## VII.4.2 Décomposition Max-Plus et enveloppe de Snell

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'enveloppe de Snell  $Z_t(m)$  de  $Z_t \vee m$ , où  $Z$  est de la forme  $Z_t = u(N_t)$ ,  $u$  étant une fonction concave croissante et  $N_t$  une martingale locale positive qui tend vers 0 à l'infini.

Pour cela, nous considérons la martingale d'Azéma-Yor, et nous la faisons démarrer de  $t$  au lieu de 0. L'équation VII.1 devient alors

$$M_{t,h}^{\text{AY}} = u(N_{t,t+h}^*) + (N_{t,t+h} - N_{t,t+h}^*)u'(N_{t,t+h}^*), \quad \forall h \geq 0.$$

Le processus  $M_{t,h}^{\text{AY}}$  est une martingale par rapport à la filtration décalée  $(\mathcal{G}_h)_{h \geq 0}$  (définie par  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{G}_h = \mathcal{F}_{t+h}$  pour tout  $h \geq 0$ ), de valeur initiale  $u(N_t)$  et de valeur terminale  $u(N_{t,\infty}^*) - N_{t,\infty}^* u'(N_{t,\infty}^*) = v(N_{t,\infty}^*)$  (puisque  $N_{t,\infty} = 0$ ).

Comme  $M_{t,0}^{\text{AY}} = \mathbf{E}[M_{t,\infty}^{\text{AY}} | \mathcal{F}_t]$ , nous obtenons immédiatement la décomposition Max-Plus de  $Z$  :

$$u(N_t) = \mathbf{E}[v(N_{t,\infty}^*) | \mathcal{F}_t]. \quad (\text{VII.7})$$

Considérons maintenant l'enveloppe de Snell  $Z_t(m)$  de  $Z_t \vee m$ . D'après la section IV.4,  $Z_t(m)$  est de la forme

$$Z_t(m) = \mathbf{E}[\sup(v, m)(N_{t,\infty}^*) | \mathcal{F}_t]. \quad (\text{VII.8})$$

Par ailleurs d'après l'équation (VII.7),

$$\phi(N_t, m) = \mathbf{E}[\phi(N_{t,\infty}^*, m) - N_{t,\infty}^* \phi'_x(N_{t,\infty}^*, m) | \mathcal{F}_t] \quad (\text{VII.9})$$

pour toute fonction concave croissante  $x \mapsto \phi(x, m)$ . Il suffit donc de trouver une fonction  $\phi$  concave croissante vérifiant

$$\sup(v(x), m) = \phi(x, m) - x \phi'_x(x, m)$$

pour pouvoir écrire au vu des identités (VII.8) et (VII.9) que

$$Z_t(m) = \phi(N_t, m). \quad (\text{VII.10})$$

Il est aisé de voir que la fonction  $\phi$  existe bien et s'exprime sous la forme :  $\phi(x, m) = m$  si  $v(x) < m$  pour tout  $x$ . Sinon,

$$\phi(x, m) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \geq x_m^*, \\ \frac{u(x_m^*) - m}{x_m^*} x + m & \text{si } x < x_m^*, \end{cases} \quad (\text{VII.11})$$

pour un réel  $x_m^*$  vérifiant  $v(x_m^*) = m$  (par continuité de  $\sup(v, m)$ ). Notons que  $x_m^*$  est bien défini grâce à la croissance de  $v$ , et que la fonction  $\phi(x, m)$  n'est rien d'autre que l'**enveloppe concave** de  $u(x) \vee m$  (voir figure VII.1).

### Remarque VII.3

Considérons une martingale locale  $X$  continue partant de 0 ( $X_0 = 0$ ) et un intervalle  $]r_1, r_2[$  avec  $r_1, r_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Posons

$$\tilde{\tau} = \inf\{t \geq 0; X_t \notin ]r_1, r_2[\},$$

et introduisons le domaine

$$\mathcal{M} := \{\tau; \mathbf{E}|X_\tau| < \infty, \quad \mathbf{E}[X_\tau] = 0, \quad \tau < \tilde{\tau} \text{ p.s.}\}.$$

Soit  $G$  une fonction continue vérifiant la condition suivante :

- Il existe au moins une fonction concave  $H$  telle que

$$G(x) \leq H(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{autrement dit, } H \text{ est un majorant concave de } G).$$

Désignons alors par  $\tilde{G}$  le plus petit majorant concave (ou l'enveloppe concave) de  $G$ . En 1995, Galtchouk et Mirochnitchenko (voir [GM95]) se sont posés le problème de trouver un temps d'arrêt  $\tau^* \in \mathcal{M}$  tel que

$$\sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}[G(x + X_\tau)] = \mathbf{E}[G(x + X_{\tau^*})].$$

En posant  $V(x) := \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}[G(x + X_\tau)]$  et  $\mathcal{D}(G) := \{x; G(x) < \tilde{G}(x)\}$ , ils ont montré que

- (i) la fonction  $V$  est l'enveloppe concave de  $G$  (c'est-à-dire  $V = \tilde{G}$ ),  
(ii) si le temps d'arrêt

$$\tau^x := \inf\{t \geq 0; x + X_t \notin \mathcal{D}(G)\}$$

appartient à la famille  $\mathcal{M}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $V(x) = \mathbf{E}[G(x + X_{\tau^x})]$ .  
La fonction  $\tilde{G}$  est linéaire sur chaque composante connexe de  $\mathcal{D}(G)$  (voir [Mir79]). Cette région  $\mathcal{D}(G)$  s'appelle la région de continuation des observations pour la fonction  $g$ .

Si les hypothèses de support précédentes sont vérifiées, ce résultat permet de montrer directement que le processus  $\phi(N_t, m)$ , avec  $\phi$  définie par (VII.11), n'est rien d'autre que l'enveloppe de Snell de  $u(N_t) \vee m = Z_t \vee m$ . Autrement dit,

$$Z_t(m) = \text{Snell}(Z_t \vee m) = \phi(N_t, m).$$

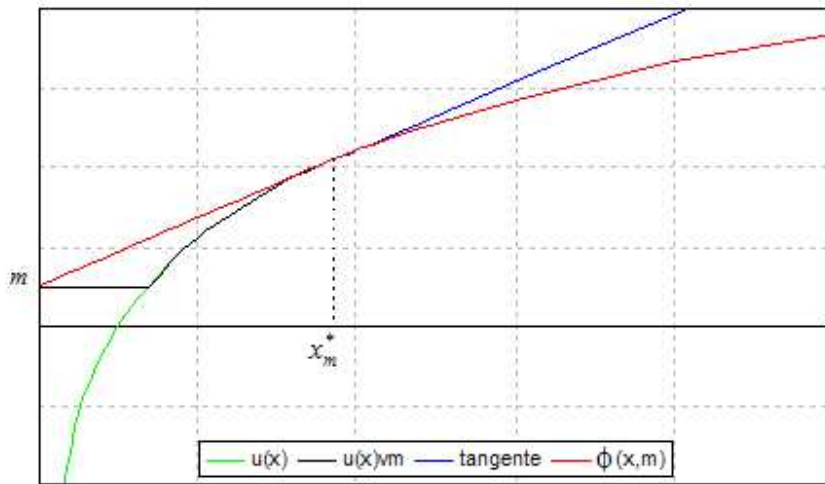


FIG. VII.1 –  $\phi(x, m)$  : enveloppe concave de  $u(x) \vee m$

### VII.4.3 Martingales d'Azéma-Yor et Calls Américains perpétuels

Soit  $(N_t)$  une martingale locale positive qui tend vers 0 à l'infini, et  $g$  une fonction continue croissante sur  $\mathbb{R}^+$  dont l'enveloppe concave croissante  $u$  est finie.  
Alors, le processus  $Z_t = u(N_t)$  est simplement l'enveloppe de Snell de  $Y$ . Considérons un Call Américain écrit sur le sous-jacent  $Y_t = g(N_t)$  et supposons que



$$\mathbf{E}[\sup_{0,\infty} |u(N_t)|] < \infty.$$

La martingale d'Azéma-Yor associée à la fonction  $u$  est de la forme

$$M_t^{\text{AY}} = u(N_t^*) - u'(N_t^*)(N_t^* - N_t).$$

Nous avons vu qu'elle majore  $Z_t = u(N_t)$  grâce à la concavité de  $u$ . Sous les hypothèses précédentes et d'après (VII.7),  $Z$  est l'espérance conditionnelle du running supremum  $v(N_{t,\infty}^*) = \sup_{s \geq t} v(N_s)$ , où  $v(y) = u(y) - yu'(y)$  est une fonction croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

Le théorème suivant caractérise explicitement un temps d'arrêt optimal en fonction de  $v$ , pour le problème de Call Américain perpétuel  $C^{\text{Am}}(Y, m)$ , écrit sur le sous-jacent  $Y$  et de strike  $m$ .

#### Théorème VII.4

- Partant de l'instant  $t$ , le Call Américain  $C^{\text{Am}}(Y, m)$  est optimalement arrêté au temps d'arrêt  $D_t(m)$  défini par

$$D_t(m) := \inf\{s \in [t, \infty]; v(N_s) \geq m\},$$

où  $v(y) = u(y) - yu'(y)$ .

- Le prix du Call Américain perpétuel à l'instant  $t$  est donné par

$$C_t^{\text{Am}}(Y, m) = \mathbf{E}[(v(N_{t,\infty}^*) - m)^+ | \mathcal{F}_t] = \phi(N_t, m) - m := V(N_t, m),$$

où  $V(y, m)$  est l'enveloppe concave de la fonction  $(g(y) - m)^+$ .

#### Preuve - VII.4 -

Nous avons vu à la section IV.5 du chapitre IV qu'un Call Américain écrit sur  $Y$  est équivalent à un Call Américain écrit sur son enveloppe de Snell  $Z$ .

Par ailleurs, le prix du Call Américain  $C_t^{\text{Am}}(Z, m)$  s'écrit simplement en fonction de  $Z_t(m)$  sous la forme

$$C_t^{\text{Am}}(Z, m) = Z_t(m) - m,$$

et donc d'après les équations (VII.8) et (VII.10),

$$C_t^{\text{Am}}(Y, m) = C_t^{\text{Am}}(Z, m) = \mathbf{E}[(v(N_{t,\infty}^*) - m)^+ | \mathcal{F}_t] = \phi(N_t, m) - m,$$

où  $\phi(x, m)$  est l'enveloppe concave de  $u(x) \vee m$  (cf. section VII.4.2, équation (VII.11)). Comme  $u(x)$  est l'enveloppe concave de  $g(x)$ , alors l'enveloppe concave de  $(g(x) - m)^+$  coïncide avec celle de  $(u(x) - m)^+$ , c'est-à-dire avec  $V(x, m) := \phi(x, m) - m$ .

Un temps d'arrêt optimal à partir d'un instant  $t$ , pour le problème de Call Américain  $C^{\text{Am}}(Y, m)$ , ou encore  $C^{\text{Am}}(Z, m)$ , est donné par

$$D_t(m) = \inf\{s \geq t; C_s^{\text{Am}}(Z, m) = Z_s - m\} = \inf\{s \geq t; \phi(N_s, m) = u(N_s)\}.$$

Par ailleurs, d'après l'expression de  $\phi$  (VII.11),  $\phi(x, m) = u(x)$  lorsque  $v(x) \geq m$ . Il en résulte aussitôt que  $D_t(m) = \inf\{s \geq t; v(N_s) \geq m\}$ , et la preuve est achevée. ■

Revenons ici sur les exemples du chapitre III concernant les Calls Américains écrits sur des sous-jacents surmartingales à accroissements indépendants.

## Exemples

### Cas de l'horizon infini.

- Reconsidérons le cas où la surmartingale  $Z$  évolue suivant un mouvement Brownien géométrique de drift négatif :

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = -r dt + \sigma dW_t, \quad Z_0 = z > 0,$$

et posons  $\gamma = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}$ .  $N_t = Z_t^\gamma$  est alors une martingale exponentielle locale de la forme

$$N_t = \exp\left(\sigma\gamma W_t - \frac{\sigma^2\gamma^2}{2}t\right)$$

et  $Z_t = u(N_t)$  où  $u(x) = x^{\frac{1}{\gamma}}$ .

Ainsi, grâce à la martingale d'Azéma-Yor  $M^{\text{AY}}$  associée à  $u$  et  $N$ , nous pouvons retrouver directement l'expression explicite de la frontière d'exercice  $E^c(m) = m\mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*] = \frac{m\gamma}{\gamma-1}$  du Call Américain perpétuel, sans utiliser les résultats du lemme V.4.

En effet, l'expression (VII.3) de  $M^{\text{AY}}$  permet d'écrire à tout instant  $t$  :

$$\mathbf{E}[M_t^{\text{AY}}] = \mathbf{E}\left[\left(N_t^*\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{\gamma}\left(N_t^*\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}(N_t - N_t^*)\right] = M_0^{\text{AY}} = u(N_0) = z.$$

Ensuite, comme  $Z_t = u(N_t)$  est un Brownien géométrique, la loi de son maximum est bien connue (cf. lemme V.4) et l'hypothèse  $\mathbf{E}[\sup_{0,\infty} |u(N_t)|] < \infty$  est parfaitement vérifiée dans ce cas.

Il suffit donc de considérer la limite de l'espérance précédente lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ,

et d'appliquer le théorème de Lebesgue. Comme  $N_\infty = 0$ , il vient finalement :  
 $\mathbf{E}\left[\frac{\gamma-1}{\gamma}(N_\infty^*)^{\frac{1}{\gamma}}\right] = z$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*] = \frac{E^c(m)}{m} = \mathbf{E}\left[\frac{(N_\infty^*)^{\frac{1}{\gamma}}}{z}\right] = \frac{\gamma}{\gamma-1}.$$

Nous pouvons même observer que le théorème VII.4 permet d'obtenir directement la frontière d'exercice optimal sous la forme :  $E^c(m) = u \circ v^{-1}(m)$  (cf. section VII.4.4, équation (VII.12)). En effet,

$$D_t(m) := \inf\{s \in [t, \infty]; N_t \geq v^{-1}(m)\} = \inf\{s \in [t, \infty]; Z_t \geq E^c(m) = u \circ v^{-1}(m)\}.$$

Il reste ensuite à observer que  $v^{-1}(m) = \left(\frac{\gamma m}{\gamma-1}\right)^\gamma$ .

- Dans le cas où  $Z$  est l'exponentielle d'un processus de Lévy à sauts négatifs, le même résultat a lieu, mais avec un coefficient différent  $\gamma_{\text{Lévy}}$  tel que  $\kappa(\gamma_{\text{Lévy}}) = 0$  (cf. section VII.3.1, équation (VII.4)).

En effet,  $N_t = Z_t^{\gamma_{\text{Lévy}}}$  est une martingale locale qui tend vers 0 à l'infini et  $Z_t = u(N_t)$  où  $u(x) = x^{\frac{1}{\gamma_{\text{Lévy}}}}$ . D'après les résultats de l'article de Mordecki [Mor01] sur ce type de processus de Lévy, l'hypothèse d'intégrabilité  $\mathbf{E}[\sup_{0,\infty} |u(N_t)|] < \infty$  est encore vérifiée dans ce cas.

Ensuite, le reste se déroule comme dans le cas précédent et la frontière d'exercice du Call Américain perpétuel écrit sur  $Z$  et de strike  $m$  est de la forme

$$E^c(m) = m \mathbf{E}[Z_{0,\infty}^*] = \frac{m \gamma_{\text{Lévy}}}{\gamma_{\text{Lévy}} - 1}.$$

- Soit  $Z$  un mouvement Brownien de drift négatif  $-(r + \frac{\sigma^2}{2})$  :

$$dZ_t = -\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t, \quad Z_0 = z.$$

Alors  $Z_t = \frac{1}{\gamma} \ln(N_t) = u(N_t)$ , où  $N_t$  est une martingale locale. Dans ce cas,  $v(z) = \frac{1}{\gamma} \ln z - \frac{1}{\gamma}$  et  $v^{-1}(z) = \exp(1 + \gamma z)$ . Ensuite, d'après le théorème VII.4, la frontière d'exercice du Call Américain est simplement donnée par  $E^c(m) = u \circ v^{-1}(m) = m + \frac{1}{\gamma}$ .

**Cas de l'horizon exponentiel indépendant.**

Reprenons l'exemple où l'horizon  $\zeta$  est une variable aléatoire indépendante de paramètre  $\beta > 0$ , et la surmartingale  $Z$  est un mouvement Brownien géométrique de paramètres  $(-r, \sigma)$  (cf. section VII.3.1).

Les notations sont de nouveau celles de la section III.3.1.2.

Nous avons montré dans la section VII.3.1 que le processus  $\tilde{Z}_t^\delta = Z_t^\delta \mathbf{1}_{\{t < \zeta\}}$  est une  $\mathcal{G}_t$ -martingale, que nous pouvons désigner par  $N_t$ . Par conséquent, la surmartingale  $Z$  est de la forme  $Z_t = u(N_t)$ , où  $u(x) = x^{\frac{1}{\delta}}$  et  $N_t = \tilde{Z}_t^\delta$  ( $\delta$  est la plus grande racine du trinôme  $y^2 - \gamma y - \frac{2\beta}{\sigma^2} = 0$ ).

Nous procédons ensuite de la même manière que dans le cas de l'horizon infini et nous écrivons pour tout  $t \leq \zeta$  :

$$\mathbf{E}[M_t^{\text{AY}}] = \mathbf{E}\left[(N_t^*)^{\frac{1}{\delta}} + \frac{1}{\delta}(N_t^*)^{\frac{1}{\delta}-1}(N_t - N_t^*)\right] = M_0^{\text{AY}} = u(N_0) = Z_0.$$

Au vu du lemme V.4, l'hypothèse d'intégrabilité  $\mathbf{E}[\sup_{0, \zeta} |u(N_t)|] < \infty$  est bien satisfaite dans ce cas. Le théorème de Lebesgue s'applique donc et nous pouvons passer à la limite, lorsque  $t \rightarrow \zeta$ , à l'intérieur de l'espérance précédente. Il vient :  $\mathbf{E}\left[\frac{\delta-1}{\delta}(N_\infty^*)^{\frac{1}{\delta}}\right] = Z_0$ .

Ainsi, grâce aux propriétés de la martingale d'Azéma-Yor, nous retrouvons d'une manière élémentaire les résultats de l'exemple III.9, concernant la forme explicite de la frontière d'un Call Américain écrit sur  $\tilde{Z}$  et de maturité  $\zeta$  :

$$E^c(m) = m\mathbf{E}[Z_{0, \zeta}^*] = \frac{m\delta}{\delta-1}.$$

**VII.4.4 Frontière universelle et règle de pricing**

Nous exploitons dans cette partie la symétrie Call-Put, en vue de dériver une règle universelle de pricing d'un Put Américain perpétuel avec un sous-jacent sous-martingale  $S$ , évoluant suivant un modèle unidimensionnel à volatilité locale.

Pour ce faire, nous explicitons d'abord en fonction du strike, la frontière d'arrêt optimal et le prix d'un Call Américain perpétuel sans facteur d'actualisation, écrit sur un sous-jacent surmartingale  $Z$  fonction d'une martingale locale càdlàg  $N$ .

**VII.4.4.1 Call Américain perpétuel**

Soit  $Z$  une fonction concave strictement croissante  $u$  d'une martingale locale càdlàg  $N$  allant vers 0 à l'infini, et dont le running supremum  $N_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} N_s$  est continu :

$Z_t = u(N_t)$ . Supposons en outre que  $\mathbf{E}[|Z_{0,\infty}^*|] < +\infty$ .

Soit  $\Phi$  la fonction inverse de  $u$ . Il s'agit d'une fonction convexe strictement croissante, telle que  $\Phi(Z) = N$  est une martingale locale. La décomposition Max-Plus de  $Z$  est alors donnée par

$$Z_t = \mathbf{E}[v(N_{t,\infty}^*)|\mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[\psi(Z_{t,\infty}^*)|\mathcal{F}_t],$$

où  $v(z) = u(z) - zu'(z)$  et  $\psi(z) = v \circ \Phi(z) = z - \frac{\Phi(z)}{\Phi'(z)}$ . Ainsi au vu du théorème VII.4, le prix du Call Américain perpétuel écrit sur  $Z$  et de strike  $m$  est de la forme

$$C_t^{\text{Am}}(Z, m) = \mathbf{E}[(\psi(Z_{t,\infty}^*) - m)^+|\mathcal{F}_t].$$

La frontière d'arrêt optimal  $y^*(m)$  définie par la relation

$$D_t(m) = \inf\{s \geq t; Z_s \geq y^*(m)\},$$

et le Call Américain  $C_t^{\text{Am}}(Z, m)$  sont caractérisés par la règle universelle suivante :

$$y^*(m) = u \circ v^{-1}(m) = \psi^{-1}(m) = m + \frac{\Phi(y^*(m))}{\Phi'(y^*(m))} \quad (\text{VII.12})$$

$$C_t^{\text{Am}}(Z, m) = \begin{cases} Z_t - m & \text{si } Z_t \geq y^*(m) \\ \frac{y^*(m) - m}{\Phi(y^*(m))} \Phi(Z_t) & \text{si } Z_t < y^*(m). \end{cases} \quad (\text{VII.13})$$

En effet, d'après le théorème VII.4 et l'expression de la fonction  $\phi$  (VII.11), le prix du Call Américain à l'instant  $t$  s'écrit explicitement sous la forme

$$C_t^{\text{Am}}(Z, m) = \phi(N_t, m) - m = \begin{cases} u(N_t) - m = Z_t - m & \text{si } N_t \geq v^{-1}(m), \\ \frac{u \circ v^{-1}(m) - m}{v^{-1}(m)} N_t & \text{si } N_t < v^{-1}(m). \end{cases}$$

Or  $N_t \geq v^{-1}(m)$  si et seulement si  $Z_t \geq \psi^{-1}(m) = y^*(m)$ , et

$$\frac{u \circ v^{-1}(m) - m}{v^{-1}(m)} N_t = \frac{\psi^{-1}(m) - m}{u^{-1}(y^*(m))} u^{-1}(Z_t) = \frac{y^*(m) - m}{\Phi(y^*(m))} \Phi(Z_t).$$

D'où le résultat (VII.13).

#### VII.4.4.2 Put Américain perpétuel

Nous considérons dans ce paragraphe des options Américaines perpétuelles dans le cadre d'un modèle à volatilité locale.

Nous souhaitons en effet trouver une règle de pricing universelle pour un Put Américain perpétuel écrit sur une diffusion unidimensionnelle avec une fonction de volatilité locale  $\sigma$  vérifiant l'hypothèse suivante :

- Hypothèse  $\mathcal{H}_{\text{vol}}$  :  $\sigma$  est continue sur  $(0, +\infty)$ , homogène en temps, et vérifie

$$\underline{\sigma} \leq \sigma(x) \leq \bar{\sigma}, \quad \text{avec } 0 < \underline{\sigma} < \bar{\sigma} < +\infty.$$

Notre démarche est analogue à celle de A. Alfonsi et B. Jourdain [AJ06], qui mettent en évidence une relation de dualité Call-Put permettant d'interpréter le prix d'un Call comme étant le prix d'un Put où le strike et la valeur actuelle du sous-jacent sont intervertis.

Ainsi, grâce à la symétrie Call-Put, nous allons dériver à partir du paragraphe précédent la frontière d'exercice et la formule explicite d'un Put Américain perpétuel dans le cadre d'un modèle à volatilité locale.

Considérons un actif donné  $S_t$  dont le prix évolue suivant un processus de diffusion unidimensionnelle avec une fonction de volatilité  $\sigma$  vérifiant l'hypothèse  $\mathcal{H}_{\text{vol}}$ . Sa dynamique sous la probabilité risque-neutre  $\mathbf{Q}$  (avec un taux d'intérêt  $r$  constant) est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t^x = S_t^x [r dt + \sigma(S_t^x) dW_t], \quad S_0^x = x,$$

où  $W$  est un mouvement Brownien sous  $\mathbf{Q}$ .

Considérons une nouvelle mesure de probabilité  $\mathbf{Q}^S$  dont la densité de Radon-Nikodym par rapport à la probabilité risque-neutre  $\mathbf{Q}$  sur  $\mathcal{F}_\tau$  est donnée par

$$\left. \frac{d\mathbf{Q}^S}{d\mathbf{Q}} \right|_{\mathcal{F}_\tau} = e^{-r\tau} \frac{S_\tau^x}{x}.$$

Il s'agit bien de la même mesure de probabilité que celle introduite dans la section VII.4.1 (voir l'équation (VII.5)), puisque  $H_\tau$  est le produit du facteur d'actualisation  $e^{-r\tau}$  et de la densité de Radon-Nikodym de la probabilité risque-neutre  $\mathbf{Q}$  par rapport à la probabilité subjective  $\mathbf{P}$ .

Le processus  $Z_t = (S_t^x)^{-1}$  est alors une surmartingale sous la probabilité  $\mathbf{Q}^S$  et résout l'équation différentielle suivante :

$$dZ_t^z = Z_t^z [-r dt + \tilde{\sigma}(Z_t^z) dB_t], \quad Z_0^z = z = \frac{1}{x},$$

où  $B$  est un mouvement Brownien sous  $\mathbf{Q}^S$  et  $\tilde{\sigma}(z) = \sigma\left(\frac{1}{z}\right)$ .

Nous avons en effet,

$$\begin{aligned} dZ_t^z &= d\left(\frac{1}{S_t^x}\right) = -\frac{dS_t^x}{(S_t^x)^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(S_t^x)^3} d\langle S^x \rangle_t = -\frac{1}{S_t^x} [r dt + \sigma(S_t^x) dW_t] + \frac{1}{S_t^x} \sigma^2(S_t^x) dt \\ &= Z_t^z [-r dt - \sigma(S_t^x) (dW_t - \sigma(S_t^x) dt)] = Z_t^z \left[ -r dt + \sigma\left(\frac{1}{Z_t^z}\right) dB_t \right]. \end{aligned}$$

La symétrie Call-Put donne la relation suivante entre le prix d'un Put Américain perpétuel écrit sur le sous-jacent  $S_t^x$ , de valeur initiale  $x$  et de strike  $m$ , et le prix d'un Call Américain perpétuel écrit sur  $Z_t^z$ , de valeur initiale  $z = \frac{1}{x}$  et de strike  $\frac{1}{m}$  :

$$P_\sigma^S(x, m) = xm C_{\tilde{\sigma}}^Z\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{m}\right), \quad (\text{VII.14})$$

avec  $P_\sigma^S(x, m) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, \infty}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[e^{-r\tau}(m - S_\tau^x)^+]$  et  $C_{\tilde{\sigma}}^Z\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{m}\right) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, \infty}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}^S}[(Z_\tau^z - \frac{1}{m})^+]$ .

Considérons la fonction

$$\Phi_{\tilde{\sigma}}(z) = \int_0^z \exp\left[\int_1^v \frac{2r}{u\tilde{\sigma}^2(u)} du\right] dv$$

qui a pour propriété que  $\Phi_{\tilde{\sigma}}(Z_t^z)$  est une martingale locale (voir [AJ06]). Soit  $y_{\tilde{\sigma}}^*\left(\frac{1}{m}\right)$  la frontière d'arrêt optimal pour le Call Américain perpétuel (sans facteur d'actualisation)  $C_{\tilde{\sigma}}^Z\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{m}\right)$  écrit sur  $Z$ . D'après la règle de pricing universelle (VII.12) que nous avons vue au paragraphe précédent,  $y_{\tilde{\sigma}}^*\left(\frac{1}{m}\right)$  est solution de

$$y_{\tilde{\sigma}}^*\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} + \frac{\Phi_{\tilde{\sigma}}\left(y_{\tilde{\sigma}}^*\left(\frac{1}{m}\right)\right)}{\Phi'_{\tilde{\sigma}}\left(y_{\tilde{\sigma}}^*\left(\frac{1}{m}\right)\right)}. \quad (\text{VII.15})$$

Par la symétrie Call-Put, la frontière d'exercice du Put Américain perpétuel "classique"  $P_\sigma^S(x, m)$  est donnée par

$$x_\sigma^*(m) = \frac{1}{y_{\tilde{\sigma}}^*\left(\frac{1}{m}\right)}, \quad (\text{VII.16})$$

et nous en déduisons la proposition suivante :

### Proposition VII.5

– La frontière d'exercice du Put Américain perpétuel  $P_\sigma^S(x, m)$  est caractérisée par la règle universelle suivante :

$$x_\sigma^*(m) = m + \frac{\theta_\sigma(x_\sigma^*(m))}{\theta'_\sigma(x_\sigma^*(m))}, \quad \text{avec} \quad \theta_\sigma(x) := x \int_x^{+\infty} \left(\frac{1}{v^2} \exp\left[-\int_1^v \frac{2r}{u\sigma^2(u)} du\right]\right) dv.$$

– Le prix du Put Américain  $P_\sigma^S(x, m)$  est explicitement donné par

$$P_\sigma^S(x, m) = \begin{cases} m - x & \text{si } x < x_\sigma^*(m), \\ \frac{m - x_\sigma^*(m)}{\theta_\sigma(x_\sigma^*(m))} \theta_\sigma(x) & \text{si } x \geq x_\sigma^*(m). \end{cases}$$

**Preuve - VII.5 -**

D'après la symétrie Call-Put,

$$\begin{aligned} x_\sigma^*(m) &= \frac{1}{y_\sigma^*\left(\frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{\Phi_{\bar{\sigma}}\left(y_\sigma^*\left(\frac{1}{m}\right)\right)}{\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(y_\sigma^*\left(\frac{1}{m}\right)\right)}} \\ &= \frac{m\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)}{\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right) + m\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)} = m - \frac{m^2\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)}{\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right) + m\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{VII.17})$$

Or d'après les identités (VII.15) et (VII.16),

$$\frac{1}{x_\sigma^*(m)} = \frac{1}{m} + \frac{\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)}{\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)} = \frac{\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right) + m\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)}{m\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)},$$

et  $m = \frac{x_\sigma^*(m)\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)}{\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right) - x_\sigma^*(m)\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)}$ . Par conséquent, l'équation (VII.17) devient

$$x_\sigma^*(m) = m - \frac{m\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)}{\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)} x_\sigma^*(m) = m - \frac{(x_\sigma^*(m))^2\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)}{\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right) - x_\sigma^*(m)\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)}.$$

Par ailleurs,  $\Phi_{\bar{\sigma}}$  peut s'exprimer en fonction de  $\theta_\sigma$  par un simple changement de variable :

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{z}\right) &= \int_0^{\frac{1}{z}} \exp\left[\int_1^v \frac{2r}{u\tilde{\sigma}^2(u)} du\right] dv = \int_z^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp\left[-\int_1^{\frac{1}{t}} \frac{2r}{u\tilde{\sigma}^2(u)} du\right] dt \\ &= \int_z^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp\left[-\int_1^t \frac{2r}{w\sigma^2(w)} dw\right] dt = \frac{1}{z}\theta_\sigma(z). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $z$ ,

$$\frac{\theta_\sigma(z)}{\theta'_\sigma(z)} = \frac{z\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{z}\right)}{\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}\Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^2\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{z}\right)}{z\Phi_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{z}\right) - \Phi'_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{z}\right)},$$

d'où le résultat souhaité.

La formule du prix du Put Américain s'obtient aisément à partir de celle du prix du Call (VII.12), en utilisant la relation de symétrie Call-Put (VII.14) :



Lorsque  $x \geq x_\sigma^*(m) = \frac{1}{y_\sigma^*\left(\frac{1}{m}\right)}$ ,

$$\begin{aligned} P_\sigma^S(x, m) &= xm C_\sigma^Z\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{m}\right) = xm \left[ \frac{\frac{1}{x_\sigma^*(m)} - \frac{1}{m}}{\Phi_\sigma\left(\frac{1}{x_\sigma^*(m)}\right)} \right] \Phi_\sigma\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{m - x_\sigma^*(m)}{\theta_\sigma(x_\sigma^*(m))} \theta_\sigma(x). \end{aligned}$$

Par contre lorsque  $x < x_\sigma^*(m)$ ,

$$P_\sigma^S(x, m) = xm \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{m} \right] = m - x.$$

■

## VII.5 Stratégies dynamiques sous des contraintes de “drawdown”

Le drawdown d'un portefeuille à un instant  $t$  est la différence entre le maximum courant atteint par la valeur du portefeuille jusqu'à l'instant  $t$  et la valeur actuelle  $V_t$  du portefeuille :

$$DD_{t_0, t} = \sup_{\{t_0 \leq u \leq t\}} V_u - V_t = V_{t_0, t}^* - V_t.$$

Pour se décider d'ouvrir un compte chez un gestionnaire de portefeuilles, les investisseurs se basent en général sur les amplitudes et la durée du drawdown du compte. Ils ne toléreraient pas par exemple un drawdown sur une trop longue période (plus d'une année). Le compte sera automatiquement fermé si le drawdown, même de faible amplitude, dure plus de deux ans. Les niveaux de drawdown acceptables sont généralement fixés à 20%.

Ainsi, l'effet de cliquet<sup>2</sup> introduit des contraintes de type drawdown dans la gestion d'un fonds. Toute hausse de la valeur liquidative du fonds, même sur une seule journée, sera automatiquement répercutée sur la valeur liquidative garantie et ce, quel

---

<sup>2</sup>L'effet de cliquet est un mécanisme qui permet, à échéances régulières (dates du cliquet), d'engranger tout ou partie des hausses d'un indice ou des performances passées de l'OPCVM concerné. Le niveau atteint par le cliquet constitue le nouveau seuil de calcul de la performance ou de la garantie pour l'intervalle suivant.

que soit le comportement des marchés financiers par la suite. Dans un fonds commun de placement (FCP), un système de cliquet peut rehausser le niveau de garantie à hauteur de 85%, par exemple, de la plus haute valeur liquidative. Ce niveau de garantie peut être supérieur à la conservation du capital investi, permettant ainsi de limiter l’impact d’une forte baisse des marchés actions.

De nombreux auteurs ont traité des problèmes d’optimisation de portefeuille soumis à des contraintes de type drawdown. Nous renvoyons le lecteur aux références suivantes [GZ93, CK95, CUZ05, Roc06], pour de plus amples détails sur le sujet.

Nous nous posons ici le problème de trouver une stratégie de portefeuille basée sur un actif de référence et vérifiant une contrainte de drawdown à tout instant.

L’actif de référence est la valeur actualisée  $\widehat{S}_t$  d’un certain portefeuille bien choisi, et définit une martingale locale sous une certaine mesure de probabilité  $\mathbf{Q}$ .

Notons  $\widehat{X}_t^\pi$  la valeur actualisée d’une stratégie admissible de portefeuille  $\pi$ . Sa dynamique est régie par l’équation suivante :

$$d\widehat{X}_t^\pi = \pi_t \frac{d\widehat{S}_t}{\widehat{S}_t}, \quad \widehat{X}_0^\pi = x_0. \quad (\text{VII.18})$$

Nous supposons dans la suite que la valeur actualisée de tout portefeuille autofinçant est positive.

Grossmann-Zhou [GZ93] et Cvitanic-Karatzas [CK95] ont considéré un problème classique d’optimisation de portefeuille sous une contrainte de type drawdown imposant que le processus de richesse actualisée  $\widehat{X}^\pi$  vérifie

$$\widehat{X}_t^\pi > \alpha \max_{0 \leq s \leq t} \widehat{X}_s^\pi = \alpha \widehat{X}_t^{\pi,*}, \quad \forall 0 \leq t < \infty \text{ p.s.},$$

où  $\alpha$  est une constante comprise entre 0 et 1. En d’autres termes, tout processus de richesse actualisée  $\widehat{X}_t^\pi$  associé à une stratégie de portefeuille admissible  $\pi$  ne doit jamais tomber en dessous de  $100 \times \alpha\%$  de son maximum courant.

Nous allons considérer une contrainte de drawdown plus générale :

$$\widehat{X}_t^\pi > \max_{0 \leq s \leq t} w(\widehat{X}_s^\pi) = w(\widehat{X}_t^{\pi,*}), \quad \forall 0 \leq t < \infty \text{ p.s.}, \quad (\text{VII.19})$$

où  $w$  est une fonction positive croissante telle que  $w(x) < x$ .

Le théorème suivant montre que la martingale d’Azéma-Yor  $M^u$  définie par (VII.20) satisfait à une contrainte de drawdown du type (VII.19) avec une fonction  $w$  dépendant de  $u$ .

**Théorème VII.6**

Soit  $u$  une fonction continue strictement croissante définie sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\Phi$  sa fonction inverse.

– Le processus

$$M_t^u = u(\widehat{S}_t^*) + u'(\widehat{S}_t^*)(\widehat{S}_t - \widehat{S}_t^*) \quad (\text{VII.20})$$

est la valeur actualisée d'un portefeuille auto-finançant partant de  $M_0^u = u(\widehat{S}_0)$  et vérifiant la contrainte de drawdown

$$M_t^u \geq w(M_t^{u,*}), \quad \forall t \geq 0, \quad \text{où} \quad w(x) = (u - xu') \circ \Phi(x) = x - \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x)}. \quad (\text{VII.21})$$

–  $w$  est une fonction croissante si et seulement si  $\Phi$  (resp.  $u$ ) est une fonction convexe (resp. concave). Dans ce cas,  $M_t^u \geq u(\widehat{S}_t)$  et  $M_t^{u,*} = u(\widehat{S}_t^*)$ .

**Preuve - VII.6 -**

- La martingale d'Azéma-Yor  $M^u$  définie par (VII.20) est égale à  $v(\widehat{S}_t^*) + u'(\widehat{S}_t^*)\widehat{S}_t$ , où  $v(x) = u(x) - xu'(x)$ . Il en découle immédiatement que  $M_t^u \geq v(\widehat{S}_t^*)$  puisque  $u$  est croissante et  $\widehat{S}_t \geq 0$  pour tout  $t$  (en tant que valeur actualisée d'un portefeuille auto-finançant). De plus, toujours d'après la définition de  $M^u$ ,  $u(\widehat{S}_t^*) \geq M_t^u$ , et par suite  $u(\widehat{S}_t^*) \geq M_t^{u,*}$ , c'est-à-dire  $\widehat{S}_t^* \geq u^{-1}(M_t^{u,*})$ . On en déduit finalement la contrainte de drawdown (VII.21).
- Si la fonction  $\Phi$  est suffisamment régulière,

$$w'(x) = 1 - \frac{\Phi'(x)^2 - \Phi(x)\Phi''(x)}{\Phi'(x)^2} = \frac{\Phi(x)\Phi''(x)}{\Phi'(x)^2}.$$

Comme  $\Phi = u^{-1}$  est une fonction positive (car  $u$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ ),  $w'(x)$  est du signe de  $\Phi''(x)$ . Ainsi  $w$  est croissante ( $w'(x) \geq 0 \forall x$ ) si et seulement si  $\Phi$  est convexe ( $\Phi''(x) \geq 0 \forall x$ ).

Lorsque  $\Phi$  est convexe, ou encore  $u$  est concave, nous avons vu dans la section VII.3 que  $M_t^u \geq u(\widehat{S}_t)$  et  $M_t^{u,*} = u(\widehat{S}_t^*)$ . ■

La propriété de croissance de la fonction  $w$  est naturelle. En effet, plus la richesse de l'investisseur augmente, plus son aversion au risque de drawdown augmente aussi.

Intéressons-nous maintenant à la réciproque du théorème précédent. Autrement dit, étant donnée une fonction de drawdown  $w$ , avec  $w(x) < x$ , existe-t-il une fonction  $u$  telle que la martingale d'Azéma-Yor associée à  $u$  vérifie la contrainte de drawdown  $M_t^u \geq w(M_t^{u,*})$ . Le théorème suivant répond à cette question.

**Théorème VII.7**

Soit  $w$  une fonction telle que  $w(x) < x$ ,  $\Phi$  une solution positive de l'équation différentielle

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{1}{x - w(x)} \quad (\text{VII.22})$$

et sa fonction inverse ( $u = \Phi^{-1}$ ). La martingale d'Azéma-Yor (VII.20) associée à la fonction  $u$  est la valeur actualisée d'un portefeuille auto-finançant vérifiant la contrainte de drawdown  $M_t^u \geq w(M_t^{u,*})$  et évoluant suivant l'équation suivante :

$$dM_t^u = (M_t^u - w(M_t^{u,*})) \frac{d\widehat{S}_t}{\widehat{S}_t}, \quad M_0^u = u(\widehat{S}_0). \quad (\text{VII.23})$$

**Preuve - VII.7 -**

Pour montrer que la martingale  $M^u$  vérifie l'équation (VII.23), il suffit d'observer que

$$\widehat{S}_t u'(\widehat{S}_t^*) = M_t^u - v(\widehat{S}_t^*). \quad (\text{VII.24})$$

Ensuite d'après l'équation (VII.2), il vient

$$dM_t^u = u'(\widehat{S}_t^*) d\widehat{S}_t. \quad (\text{VII.25})$$

Enfin, le résultat final se déduit aisément de la combinaison des égalités (VII.24), (VII.25) et du fait que  $v(\widehat{S}_t^*) = v \circ u^{-1}(M_t^{u,*}) = w(M_t^{u,*})$ . ■

**Remarque VII.8**

1. Notons que la stratégie de portefeuille du théorème précédent est très simple à mettre en place : à chaque instant  $t$ ,
  - le montant investi dans l'actif risqué est la distance au drawdown, c'est-à-dire  $M_t^u - w(M_t^{u,*})$ ,
  - le montant investi en cash est  $w(M_t^{u,*})$ .
2. L'équation différentielle stochastique (VII.18) impose une contrainte de richesse initiale :  $\widehat{X}_0^\pi = x_0$ , pour toutes les stratégies admissibles  $\pi$ . Ainsi, le processus de richesse actualisée  $M^u$ , associé à la stratégie du théorème VII.7, doit impérativement vérifier la condition  $M_0^u = u(\widehat{S}_0) = x_0$  pour être admissible.

La solution  $\Phi$  qui répond à cette contrainte est celle qui vérifie  $\Phi(x_0) = \widehat{S}_0$ .

**Exemple VII.9**

Si  $w$  est une fonction linéaire de la forme  $w(x) = \alpha x$  avec  $\alpha \in (0, 1)$  (voir [CK95]), alors  $\Phi = u^{-1}$  est solution de l'équation différentielle  $\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{1}{(1-\alpha)x}$ . Il s'agit donc d'une fonction puissance de la forme  $\Phi(x) = Ax^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , où  $A$  est une constante et  $u(y) = \left(\frac{y}{A}\right)^{1-\alpha}$ . La martingale  $M^u$  d'Azéma-Yor peut donc s'écrire

$$M_t^u = \left(\frac{\widehat{S}_t^*}{A}\right)^{1-\alpha} + \frac{1-\alpha}{A^{1-\alpha}} (\widehat{S}_t^*)^{-\alpha} (\widehat{S}_t - \widehat{S}_t^*) = \alpha \left(\frac{\widehat{S}_t^*}{A}\right)^{1-\alpha} + \frac{1-\alpha}{A^{1-\alpha}} \widehat{S}_t (\widehat{S}_t^*)^{-\alpha}.$$

Sous certaines hypothèses que nous précisons ci-dessous :

- le taux d'intérêt  $r(\cdot)$ , le vecteur des drifts  $b(\cdot)$  des actifs risqués sous la probabilité historique et la matrice de volatilité  $\sigma(\cdot)$  sont supposés déterministes,
- $r_* := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T r(s) ds$  et  $\|\theta_*\|^2 := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\theta(s)\|^2 ds$  existent et sont finis ( $\theta$  étant le processus de prime de risque),

Grossmann-Zhou [GZ93] et Cvitanic-Karatzas [CK95] ont résolu dans leurs travaux le problème suivant qui vise à maximiser le taux de croissance à long-terme

$$\mathcal{R}(\pi) := \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{E}[(X_T^\pi)^\delta], \quad (\text{VII.26})$$

pour une certaine puissance  $\delta \in (0, 1)$ , parmi toutes les stratégies de portefeuille  $\pi$  partant d'une richesse initiale  $X_0^\pi = x$  et vérifiant la contrainte de drawdown associée à  $w(x) = \alpha x$  :  $X_t^\pi > \alpha X_t^{\pi,*}$  pour tout  $t$ .

Le résultat auquel ils ont abouti peut s'interpréter de la façon suivante :

- Soit  $S_t^\nu$  le portefeuille optimal du problème suivant de maximisation d'utilité espérée sans contraintes :

$$\sup_{V_t} \mathbf{E}\{U(V_T), (V_t) \text{ portefeuille auto-finançant et } V_0 = \nu\}, \quad (\text{VII.27})$$

où la fonction d'utilité  $U$  est de type puissance :  $U(x) = \frac{1}{\beta} x^\beta$ , avec  $\beta := \delta(1-\alpha)$ . La richesse initiale  $\nu$  sera complètement déterminée par la condition initiale du problème (VII.26) :  $X_0^\pi = x$ .

- Considérons ensuite la fonction  $u$  définie par  $u(y) = \left(\frac{y}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$ , et le portefeuille actualisé  $\widehat{S}_t^\nu$ . En choisissant  $\nu = (1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , la martingale d'Azéma-Yor  $M_t^u$  associée à  $u$  et à  $\widehat{S}_t^\nu$  est la valeur actualisée d'un portefeuille auto-finançant optimal pour le critère asymptotique (VII.26).

Le montant initial  $\nu$  investi dans le portefeuille  $S$  est choisi de façon à ce que  $\Phi(M_0^u) = \Phi(x) = \nu$ . On peut donc construire un portefeuille optimal du problème contraint (VII.26) à partir du portefeuille optimal  $S$  du problème non-contraint (VII.27).

Ainsi, le principe consiste à résoudre un problème d'optimisation sans contraintes et à investir une partie  $\nu$  de la richesse initiale dans le portefeuille optimal  $S^\nu$ . La richesse restante  $x - \nu$  est mise de côté pour pouvoir satisfaire à la contrainte de drawdown.

## VII.6 Assurance de Portefeuille dans le cadre d'Azéma-Yor

Nous nous intéressons ici à un problème d'assurance de portefeuille où le gérant cherche à optimiser sa performance tout en maintenant à chaque instant le niveau du fonds au dessus d'un plancher donné (garantie Américaine).

Nous supposons que les portefeuilles auto-finançants sont des martingales et que le plancher  $Z$  est une fonction d'un portefeuille de référence  $\widehat{S}$ . Cette dernière hypothèse prend tout son sens en cas de gestion benchmarkée, qui a pour avantage de pouvoir profiter des évolutions du marché en suivant la performance d'un "benchmark" ou indice de référence.

Par ailleurs, tous les portefeuilles admissibles doivent partir de la même richesse initiale  $Z_0 = u(\widehat{S}_0)$ .

Les notations sont celles de la section précédente.

### Proposition VII.10

Soit  $u$  une fonction concave strictement croissante et  $\Phi$  sa fonction inverse. Supposons que le plancher  $Z$  est de la forme :  $Z_t = u(\widehat{S}_t)$ , où  $\widehat{S}_t$  est un portefeuille de référence donné. Alors,

- Le processus de plancher  $Z$  est une surmartingale dont la partie martingale a pour dynamique

$$dM_t^Z = \widehat{S}_t u'(\widehat{S}_t) \frac{d\widehat{S}_t}{\widehat{S}_t}, \quad M_0^Z = Z_0 = u(\widehat{S}_0).$$

Cette martingale  $M^Z$  satisfait à la contrainte du plancher :  $M_t^Z \geq Z_t = u(\widehat{S}_t)$  pour tout  $t$ .

- La martingale d'Azéma-Yor associée à  $u$  :

$$M_t^u = u(\widehat{S}_t^*) + u'(\widehat{S}_t^*)(\widehat{S}_t - \widehat{S}_t^*), \quad M_0^u = u(\widehat{S}_0), \quad (\text{VII.28})$$

est un portefeuille admissible vérifiant également la contrainte du plancher, avec un investissement risqué donné par

$$\pi_t^{M^u} = \widehat{S}_t u'(\widehat{S}_t^*) \leq \pi_t^{M^Z} = \widehat{S}_t u'(\widehat{S}_t). \quad (\text{VII.29})$$

### Preuve - VII.10 -

- Le plancher  $Z$  est une surmartingale en tant que fonction concave d'une martingale. De plus, la partie martingale  $M^Z$  de  $Z$  n'est autre que la martingale associée à la décomposition Doob-Meyer de  $Z$ . Elle s'écrit donc sous la forme  $M_t^Z = Z_t + A_t$ , où  $A_t$  est un processus croissant partant de 0, et domine le plancher  $Z_t = u(\widehat{S}_t)$ , à tout instant  $t$ .
- Nous avons vu dans la section précédente que la dynamique de la martingale  $M^u$  d'Azéma-Yor est régie par l'équation suivante :

$$dM_t^u = u'(\widehat{S}_t^*) d\widehat{S}_t = \widehat{S}_t u'(\widehat{S}_t^*) \frac{d\widehat{S}_t}{\widehat{S}_t}, \quad M_0^u = u(\widehat{S}_0).$$

La part de richesse investie dans l'actif risqué  $\widehat{S}$  est donc donnée par  $\pi_t^{M^u} = \widehat{S}_t u'(\widehat{S}_t^*)$ . Comme  $u$  est concave croissante,  $u'$  est positive et décroissante. Il en découle par conséquent que  $\pi_t^{M^u} \leq \widehat{S}_t u'(\widehat{S}_t) = \pi_t^{M^Z}$ .

■

L'inégalité (VII.29) de la proposition VII.10 montre que la martingale d'Azéma-Yor est moins risquée que la martingale de Doob-Meyer, puisqu'elle investit moins de richesse dans l'actif risqué.

Par ailleurs, comme  $M_t^{u,*} = u(\widehat{S}_t^*) = Z_t^*$ , le maximum courant  $M_t^{u,*}$  de la martingale  $M^u$  est toujours plus petit que celui de n'importe quelle martingale admissible  $M$  dominant le plancher et partant de la même richesse initiale :

$$\forall t \geq 0, M_t^{u,*} = Z_t^* \leq M_t^* \quad \text{pour toute martingale admissible } M.$$

Il s'agit donc d'un argument pour se convaincre que la martingale d'Azéma-Yor est moins risquée : à chaque fois que  $Z$  atteint son maximum,  $M^u$  colle à son plancher. Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

### Théorème VII.11

Soit  $\mathcal{M}^Z$  l'ensemble des martingales admissibles partant de  $Z_0 = u(\widehat{S}_0)$  et dominant le plancher  $Z$  :

$$\mathcal{M}^Z = \{(M_t)_{t \geq 0} \text{ martingale u.i.} \mid M_0 = Z_0 \text{ et } M_t \geq Z_t = u(\widehat{S}_t), \forall t \geq 0\}.$$

Supposons que l'horizon de gestion est infini et que la martingale de référence  $\widehat{S}_t$  tend vers 0 à l'infini.

La martingale (VII.28) d'Azéma-Yor est optimale pour l'ordre convexe<sup>3</sup> sur la valeur terminale, parmi toutes les martingales admissibles de  $\mathcal{M}^Z$  :

$$M_\infty^u \leq_{cx} M_\infty \quad \forall M \in \mathcal{M}^Z.$$

### Preuve - VII.11 -

• Lorsque l'horizon est infini et le plancher  $Z$  est une fonction concave croissante  $u$  d'une martingale  $\widehat{S}$ , la martingale d'Azéma-Yor (VII.28) coïncide avec la martingale  $M^\oplus$  de la décomposition Max-Plus de  $Z$ . L'optimalité de  $M^\oplus$  par rapport à l'ordre convexe sur la valeur terminale a déjà été montrée au chapitre V.

• Une autre preuve n'utilisant pas la théorie de la décomposition Max-Plus est celle donnée dans le chapitre VI (voir la preuve du théorème VI.3). Ici, la condition de flat-off rappelée au lemme VI.5 est évidente à vérifier.

En effet,  $M_\infty^u = L_{0,\infty}^* = v(\widehat{S}_\infty^*)$  et pour tout  $t$ ,  $L_{0,t}^* = \sup_{0 \leq s \leq t} v(\widehat{S}_s)$ , où  $v(x) = u(x) - xu'(x)$ .

Ensuite, si  $t$  est un point de croissance du processus  $(L_{0,t}^*) = (v(\widehat{S}_t^*))$ , alors  $\widehat{S}_t^* = \widehat{S}_t$  puisque  $v$  est une fonction croissante et

$$M_t^u - Z_t = u(\widehat{S}_t^*) + u'(\widehat{S}_t^*)(\widehat{S}_t - \widehat{S}_t^*) - u(\widehat{S}_t) = 0.$$

■

### Remarque VII.12

Considérons le problème d'un investisseur muni d'une certaine fonction d'utilité  $g$  concave croissante, et qui cherche à maximiser l'espérance d'utilité de sa richesse terminale sous une contrainte de type Américain. Supposons que l'horizon de gestion est suffisamment grand pour être assimilé à un horizon infini.

Nous avons vu au chapitre VI que par un simple changement de probabilité, nous pouvons nous ramener à un monde financier où les portefeuilles auto-finançants sont des martingales. Par ailleurs, toute martingale  $M$  dominant un plancher  $X$  domine forcément son enveloppe de Snell  $Z$ . Le problème d'optimisation peut donc se formuler comme suit :

$$\max_{M_t} \mathbf{E}\{g(M_\infty), \text{ avec } M_t \text{ martingale u.i. } \geq Z_t \forall t \text{ et } M_0 = Z_0\}.$$

<sup>3</sup>De manière équivalente, la martingale d'Azéma-Yor est optimale pour l'ordre concave sur la valeur terminale :

$$M_\infty^u \geq_{cv} M_\infty \quad \forall M \in \mathcal{M}^Z.$$



Si le plancher  $Z$  est une fonction concave  $u$  d'un portefeuille de référence  $\widehat{S}$ , le théorème précédent s'applique et la martingale d'Azéma-Yor  $M^u$  associée à  $u$  est optimale. Autrement dit,

$$\mathbf{E}[g(M_\infty)] \leq \mathbf{E}[g(M_\infty^u)] \leq g(Z_0) = g \circ u(\widehat{S}_0) \quad \text{pour toute martingale admissible } M.$$

Cette dernière inégalité est simplement due à la concavité de  $g$ . Cependant, grâce aux propriétés de la martingale d'Azéma-Yor et à la décomposition Max-Plus (voir l'équation VII.7), nous pouvons obtenir un meilleur majorant pour l'espérance de l'utilité terminale de tout portefeuille admissible  $M$ .

En effet, l'utilité terminale de la martingale d'Azéma-Yor est de la forme  $g(M_\infty^u) = g \circ v(\widehat{S}_\infty^*)$  où  $v(x) = u(x) - xu'(x)$ . Ensuite comme  $g \circ v$  est une fonction croissante,  $g \circ v(\widehat{S}_\infty^*)$  est la valeur terminale d'un processus croissant et c'est également la valeur terminale d'une martingale  $M^{u_g}$  d'Azéma-Yor telle que pour tout  $t$ ,

$$M_t^{u_g} = u_g(\widehat{S}_t^*) + u'_g(\widehat{S}_t^*)(\widehat{S}_t - \widehat{S}_t^*),$$

et la fonction  $u_g$  résout l'équation :  $u_g(x) - xu'_g(x) = g \circ v(x)$ . Nous obtenons finalement la borne supérieure suivante :

$$\mathbf{E}[g(M_\infty)] \leq \mathbf{E}[g \circ v(\widehat{S}_\infty^*)] = u_g(\widehat{S}_0), \quad \text{pour toute martingale admissible } M.$$

Il s'agit bien du plus petit majorant qu'on puisse obtenir puisqu'il est atteint par la martingale optimale  $M^u$  d'Azéma-Yor.

## VII.7 Conclusion

Ce chapitre montre que les martingales d'Azéma-Yor sont bien adaptées pour décomposer explicitement dans l'algèbre Max-Plus toute surmartingale  $Z$ , fonction concave d'une martingale locale. Ceci permet, entre autres, d'obtenir la frontière d'un Call Américain écrit sur un tel sous-jacent  $Z$ , et nous retrouvons en particulier, d'une manière très élémentaire, la plupart des résultats classiques sur les frontières Américaines des processus à accroissements indépendants.

Par ailleurs, les martingales d'Azéma-Yor se révèlent être un outil efficace pour obtenir très simplement des formules explicites de stratégies optimales en assurance de portefeuille. Cependant, plusieurs cas ne sont pas couverts par cette méthode, ce qui fait qu'à chaque fois que le processus de plancher n'est pas fonction d'une martingale locale, nous devons faire appel à des résultats plus généraux :

- décomposition Max-Plus de l'enveloppe de Snell du processus de plancher,
- optimalité de la martingale Max-Plus associée par rapport à l'ordre convexe sur les valeurs terminales.

# Références bibliographiques

## Chapitre VII

- [AJ06] A. Alfonsi and B. Jourdain, “A call-put duality for perpetual American options”, Preprint Cermics 2006-307 (2006).
- [AY79] J. Azéma and M. Yor, “Une solution simple au problème de Skorohod”, Séminaire de probabilités de Strasbourg **13** (1979), pp. 90–115.
- [Bas83] R.F. Bass, “Skorohod embedding via stochastic integrals”, Séminaire de probabilités de Strasbourg **17** (1983), pp. 221–224.
- [CH05] A.M.G. Cox and D.G. Hobson, “A unifying class of Skorohod embeddings : connecting the Azéma-Yor and vallois embeddings”, ArXiv math.PR/0506040 (2005).
- [CK95] J. Cvitanic and I. Karatzas, “On portfolio optimization under drawdown constraints”, IMA in Mathematics and its Applications **65** (1995), pp. 35–46.
- [CUZ05] A. Chekhlov, S. Uryasev and M. Zabarankin, “Drawdown measure in portfolio optimization”, International Journal of Theoretical and Applied Finance **8** (2005), pp. 13–58.
- [CW76] R. Chacon and J.B. Walsh, *One dimensional potential embedding*, Séminaire de Probabilités, X, Lecture Notes in Math., vol. 511, Springer, Berlin, 1976, pp. 19–23.
- [Dub68] L. Dubins, “On a theorem of Skorohod”, Ann. Math. Statist. **39** (1968), pp. 2094–2097.
- [GM95] L. Galtchouk and T.P. Mirochnitchenko, “Optimal stopping problem for continuous local martingales and some sharp inequalities”, Strasbourg : IRMA, Prepubl. IRMA, 1995/25 (1995).
- [GZ93] S.J. Grossmann and Z. Zhou, “Optimal investment strategies for controlling drawdowns”, Mathematical Finance **3** (1993), pp. 241–276.

- [Leh77] J. Lehoczky, “Formulas for stopped diffusion processes, with stopping times based on the maximum”, *Ann. Probability* **5** (1977), pp. 601–608.
- [Mir79] T.P. Mirochnitchenko, “Testing of two simple hypothesis in the presence of delayed observations”, *Th. Proba. App.* **24** (1979).
- [Mor01] E. Mordecki, “Elementary proofs on optimal stopping”, *Prepublicaciones de Matemática de la Universidad de la República* (2001).
- [Obl05] J. Obloj, *The Skorohod embedding problem and some families of Brownian martingales*, Doctoral thesis, University Pierre et Marie Curie Paris 6 and University of Warsaw, 2005.
- [Roc06] H. Roche, “Optimal consumption and investment under a drawdown constraint”, Preprint (2006).
- [Roo69] D.H. Root, “The existence of certain stopping times on Brownian motion”, *Ann. Math. Statist.* **40** (1969), no. 2, pp. 715–718.
- [Val83] P. Vallois, *Le problème de Skorohod sur  $\mathbb{R}$  : une approche avec le temps local*, Séminaire de Probabilités, XVII, Lecture Notes in Math., vol. 986, Springer-Berlin, 1983, pp. 227–239.

# Numerical methods for the pricing of Swing options : a stochastic control approach

---

Ce chapitre reprend un article accepté pour publication dans la revue “*Methodology and Computing in Applied Probability*”. Il a été rédigé en collaboration avec C. Dossal (Université de Bordeaux, précédemment à l’Ecole Polytechnique), E. Gobet (ENSIMAG - INP Grenoble - Laboratoire de Modélisation et Calcul, précédemment à l’Ecole Polytechnique), R. Munos (CMAP, Ecole Polytechnique) et la Direction Recherche Gaz de France - Projet Valoris (C. Barrera-Esteve, F. Bergeret et D. Reboul-Salze).

## Abstract

In the natural gas market, many derivative contracts have a large degree of flexibility. These are known as *Swing* or *Take-Or-Pay* options. They allow their owner to purchase gas daily, at a fixed price and according to a volume of their choice. Daily, monthly and/or annual constraints on the purchased volume are usually incorporated. Thus, the valuation of such contracts is related to a stochastic control problem, which we solve in this paper using new numerical methods. Firstly, we extend the Longstaff-Schwarz methodology (originally used for Bermuda options) to our case. Secondly, we propose two efficient parameterizations of the gas consumption, one is based on neural networks and the other on finite elements. It allows us to derive a local optimal consumption law using a stochastic gradient ascent. Numerical expe-

periments illustrate the efficiency of these approaches. Furthermore, we show that the optimal purchase is of bang-bang type.

**Key words :** Swing options, Monte Carlo simulations, bang-bang control, parametric consumption, stochastic gradient.

**AMS 2000 Subject Classification numbers :** 90C31, 91B02, 93Exx.

## Introduction

Since natural gas is a physical asset, the associated energy market is different indeed from the non-physical equity markets. In fact, the model needs to incorporate specific features, such as seasonality effects : we refer for these aspects to the paper by Jaillet, Ronn and Tompaidis (2004) and references therein. Another difference, on which we focus in this work, comes from the nature of financial contracts written on gas. These latter are aimed at accommodating the uncertain volume of energy purchased by the end user and then, include many flexibilities of delivery. Namely, the owner of such a contract is usually allowed to purchase some amount of gas at some dates. The purchase may be daily, or at a fixed number of dates chosen by the owner. The volume of gas is subject to daily as well as periodic (monthly or annual) constraints. Moreover, the purchase price may be fixed or predetermined according to some factors, such as the past values of the crude oil. These options are known as *Swing* or *Take-or-Pay* options (see the description in Thompson (1995)). They are also traded on other energy markets (e.g. electricity). However, as we will consider in the sequel the case of *storage contracts* that are specific to the gas industry, we will mainly focus on this asset in our discussions. The aim of the paper is to propose new numerical approaches for the pricing of Swing options and to compare them with existing methods.

The valuation of such contracts is known to be a challenging task : their price depends on the price of the underlying asset and the cumulative consumption. Actually, it may be written as a solution of a dynamic programming equation (see Thompson (1995) ; Lari-Lavassani, Simchi and Ware (2001) ; Clewlow, Strickland and Kaminski (2001) ; Raikar and Ilić (2001) ; Jaillet, Ronn and Tompaidis (2004)) with a two-dimensional state variable (see Paragraph VIII.2.1 for a better description). At each date, given a value of the underlying asset and the cumulative consumption, the price is computed by maximizing over the possible consumptions the immediate payoff plus the expected cash flows. In practice, a methodology extending the usual binomial tree method can be performed : it is the so-called *forest tree* approach (see the references above). This can be successfully implemented in the case of a one-factor model on the forward prices. However, this discretizes a continuous dynamics in space and thus incorporates errors in relation to this discretization procedure. Furthermore, for multi-factor models, the computational complexity blows up and the method is not feasible in practice. For these reasons, it may be more efficient to combine the backward dynamic programming equation with a forward simulation of the underlying asset, analogously to what can be done for Bermuda options (where only one exercise date has to be determined in an optimal way). So here, we propose an adaptation of the Longstaff-Schwarz methodology (Longstaff and Schwartz

(2001)) to our case (where optimal volumes at each date have to be computed). This adaptation is discussed in Section VIII.2.

One inherent feature of the dynamic programming equation is that we have an idea of the price today, only when all the intermediate optimal consumptions have been computed, in any state, between the current date and the maturity. As the purchase frequency increases (it is daily in our numerical examples), this iteration takes more and more time and the exact resolution of this nonlinear problem turns out to be too costly. So, instead of computing the optimal consumption, we may prefer to identify a fairly good consumption rule which would provide a price close to the optimal one. This is the so-called *policy search algorithm*, which transforms a stochastic control problem into a parametric optimization one (see Kushner and Yang (1991)). This approach is developed in Section VIII.3. The success of this method depends strongly on our ability to find a nice parameterization of the consumption. Under some assumptions, the Pontryagin principle enables us to prove that the optimal consumption is of *bang-bang* type : this new result is justified in Appendix B. Then, based on this observation, we derive two relevant parameterizations and test them numerically.

## VIII.1 Statement of the problem and notations

Here we give the notation which will be used throughout the paper.

We consider contracts with maturity  $T$ . Since the spot price of the gas does not correspond to a tradable instrument, the valuation and the hedging of contracts on gas are performed through the use of forward contracts with different maturities  $t \in [0, T]$  (see the approach given in Jaillet, Ronn and Tompaidis (2004)) : their prices are denoted by  $(F(s, t))_{0 \leq s \leq t}$ . The interest rates are assumed to be constant, equal to  $r$  and for the sake of simplicity, we consider a one-factor yield, as in Jaillet, Ronn and Tompaidis (2004) :

$$\frac{dF(s, t)}{F(s, t)} = \sigma e^{-\alpha(t-s)} dW_s, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (\text{VIII.1})$$

In the last expression, the initial condition is defined by the forward curve  $(F(0, t))_{0 \leq t \leq T}$  (corresponding to the seasonality, as shown on Figure VIII.1). It would be easy to incorporate extra factors or a convenience yield term, without major modifications to what follows. Within our framework, the spot price at time  $t$  is given by  $F_t = F(t, t)$ . In Equation (VIII.1), the dynamics is given directly under the usual

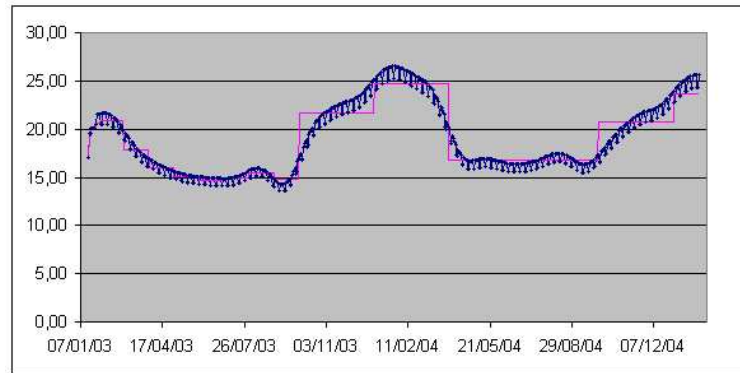


FIG. VIII.1 – Gas Forward Curve

risk-neutral probability measure  $\mathbf{Q}$ .  $W$  defines a linear Brownian motion and so, the probability  $\mathbf{Q}$  transforms the forward contract processes (or equivalently the discounted option prices) into martingales. We recall that the true dynamics of the forward contracts is not under  $\mathbf{Q}$  but under the historical probability; however, arbitrage arguments show that the fair value of a financial contract has to be evaluated as the  $\mathbf{Q}$ -expectation of its discounted cash-flow (see Karatzas (1988) for American options, or Jaillet, Ronn and Tompaidis (2004) for Swing options). Since we focus on pricing issues, we consider the dynamics only under  $\mathbf{Q}$ .

Now, let us describe a general Swing contract. We assume that energy is purchased at some fixed dates  $0 = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_N = T$ . The volume at time  $t_i$  is denoted by  $q_{t_i}$  and subject to the constraint

$$q_{\min} \leq q_{t_i} \leq q_{\max}. \quad (\text{VIII.2})$$

The cumulative volume purchased up to time  $t_i$  is given by  $Q_{t_i} = \sum_{j=0}^{i-1} q_{t_j}$ . It must satisfy the terminal constraint

$$Q_{\min} \leq Q_T \leq Q_{\max}. \quad (\text{VIII.3})$$

To simplify, the purchase price is assumed to be constant, equal to  $K$ . However if necessary, it can be extended to a deterministic time function. Hence, the buyer of the contract gets  $q_{t_i}(F_{t_i} - K)$  at time  $t_i$ . Furthermore, when the global purchase constraints are violated, he may apply some penalties at maturity. These can be proportional to the spot price  $F_T$  at maturity and to the over or under-consumption:  $-A F_T [Q_T - Q_{\min}]_- - B F_T [Q_T - Q_{\max}]_+$ , where  $A$  and  $B$  are positive constants. To be concise, we denote this penalty by  $\mathcal{P}_T(F_T, Q_T)$  in the sequel. For a given



consumption strategy  $q = (q_{t_i})_{0 \leq i \leq N}$ , the fair price is thus given by

$$\mathcal{J}(q) = \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{N-1} e^{-rt_i} q_{t_i} (F_{t_i} - K) + e^{-rT} \mathcal{P}_T(F_T, Q_T) \right) \quad (\text{VIII.4})$$

(the expectation is performed under the risk-neutral probability measure  $\mathbf{Q}$ ).

### Case VIII.1

In the further numerical experiments about Swing contracts, we shall consider the same following set of parameters :  $\sigma = 70\%$ ,  $\alpha = 4$ ,  $r = 0\%$ ,  $q_{\min} = 0$ ,  $q_{\max} = 6$ ,  $Q_{\min} = 1300$ ,  $Q_{\max} = 1900$ ,  $K = 20$ ,  $T = 1$  year with daily exercise ( $N = 365$ ). We will use the forward curve described in Figure VIII.1. To discuss the impact of seasonality in the numerical procedure, we will also consider a flat forward curve  $F(0, t_i) = 20, \forall 0 \leq i \leq N$ .

The preceding description has to be slightly modified for *storage contracts*. In this case, an empty tank is rent to the owner of the contract and allows him to either buy some gas on the market and inject it in the tank, or withdraw it and sell it on the market. At each date, the profit is given by

$$\psi(F_{t_i}, q_{t_i}) = \begin{cases} -q_{t_i}(F_{t_i} + c_I) & \text{if } q_{t_i} \geq 0 \text{ (Injection),} \\ -q_{t_i}(F_{t_i} - c_W) & \text{if } q_{t_i} \leq 0 \text{ (Withdrawal),} \\ 0 & \text{if } q_{t_i} = 0 \text{ (Same level for the storage),} \end{cases}$$

where  $c_I > 0$  (resp.  $c_W > 0$ ) denotes some strictly positive injection (resp. withdrawal) cost. Moreover, the tank capacity has some volume limitations, which imposes constraints like  $0 \leq f_1(t) \leq Q_t \leq f_2(t)$  for some deterministic functions  $f_1$  and  $f_2$ . For the next optimization problem, we can formulate these physical constraints in terms of a smooth penalization :  $-C \sum_{i=0}^N e^{-rt_i} [(Q_{t_i} - f_1(t_i))_-]^2 - C \sum_{i=0}^N e^{-rt_i} [(Q_{t_i} - f_2(t_i))_+]^2$ , with a large constant  $C$ . If we consider this penalization as a financial penalty, the fair price of this *storage contract* is then given by

$$\mathcal{J}(q) = \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^N \Psi_{t_i}(q_{t_i}, F_{t_i}, Q_{t_i}) \right), \quad (\text{VIII.5})$$

where  $\Psi_t(q, F, Q) = e^{-rt} (\psi(F, q) - C[(Q - f_1(t))_-]^2 - C[(Q - f_2(t))_+]^2)$  if  $t < t_N$  and  $\Psi_{t_N}(q, F, Q) = e^{-rt_N} (-C[(Q - f_1(t_N))_-]^2 - C[(Q - f_2(t_N))_+]^2)$ .

### Case VIII.2

The storage contract we will consider in the next numerical experiments is such that the tank is empty at the maturity of the contract ( $Q_{\min} = Q_{\max} = 0$ ) and the tank capacity equals 20 units say (this determines the function  $f_2$ ). The parameters will be set as follows :  $\sigma = 70\%$ ,  $\alpha = 4$ ,  $r = 0\%$ ,  $q_{\min} = -0.2$ ,  $q_{\max} = 0.4$ ,  $f_1 \equiv 0$ ,  $f_2(t_i) = \min(q_{\max}i, 20, q_{\min}(i - N))$ ,  $c_I = 0.6$ ,  $c_W = 0.2$ ,  $K = 20$ ,  $T = 1$  year with daily exercise ( $N = 365$ ). As for the Swing contract, we will use the forward curve on Figure VIII.1, but also the flat forward curve  $F(0, t_i) = 20$ .

These descriptions of Swing options and storage contracts can be unified within the following formulation of the price

$$\mathcal{J}(q) = \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{N-1} \Psi_{t_i}(q_{t_i}, F_{t_i}, Q_{t_i}) + \mathcal{P}_T(F_T, Q_T) \right). \quad (\text{VIII.6})$$

In the above,  $q$  is a given consumption strategy,  $\Psi(\cdot)$  denotes some appropriate instantaneous profit and  $\mathcal{P}_T(\cdot)$  some terminal penalty.

To price these instruments, we make the crucial assumption that the consumption decisions are taken according to the sole evolution of the underlying asset, and not the real needs in gas. So, the price is given by

$$\sup_q \mathcal{J}(q).$$

It is a stochastic optimal control problem. In the next section, we state the associated dynamic programming equation (see Bertsekas and Shreve (1978), Bertsekas (1995)) from which we derive some numerical methods.

## VIII.2 Numerical methods based on dynamic programming equation

First, for both theoretical and numerical purposes, it is better to rewrite  $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$  using an extra state variable  $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$  defined by  $X_t = \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dW_u$ . Note that  $X$  is an Ornstein-Uhlenbeck process, which solves  $dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t$ . Yet, this property will not be really used in the sequel. Moreover, an immediate application of Itô's formula yields  $F(s, t) = F(0, t) \exp[e^{-\alpha(t-s)} X_s - \frac{\sigma^2}{4\alpha}(e^{-2\alpha(t-s)} - e^{-2\alpha t})]$ . We particularly have

$$F_{t_i} = F(0, t_i) \exp \left( X_{t_i} - \frac{\sigma^2}{4\alpha} (1 - e^{-2\alpha t_i}) \right). \quad (\text{VIII.7})$$

### VIII.2.1 Writing the dynamic programming equation

As already mentioned, the valuation of Swing contracts can be embedded into a stochastic control framework. Indeed, the dynamics of the system is described by a discrete-time Markov chain  $(F_{t_i}, Q_{t_i})_{0 \leq i \leq N}$  that is controlled by the local consumption  $(q_{t_i})_{0 \leq i \leq N-1}$ . Given a time  $t_i$  and a state  $(F, Q)$ , the price is given by

$$P(t_i, F, Q) = \sup_{(q_{t_j})_{i \leq j \leq N-1}} \mathbf{E} \left( \sum_{j=i}^{N-1} \Psi_{t_j}(q_{t_j}, F_{t_j}, Q_{t_j}) + \mathcal{P}_T(F_T, Q_T) \mid F_{t_i} = F, Q_{t_i} = Q \right).$$

In the last expression, the sup is taken over all admissible consumptions. A standard result states that, under mild assumptions, there exists an optimal Markovian consumption, given by the dynamic programming equation (also known as Bellman's equation).

#### Proposition VIII.3

Assume that for some positive constants  $p$  and  $C$ , the following inequalities hold for any  $t_i \in [0, T]$ ,  $F > 0$ ,  $q \in [q_{\min}, q_{\max}]$  and  $(Q, Q') \in [-N(q_{\min})_-, N(q_{\max})_+]$  :

$$\begin{aligned} |\Psi_{t_i}(q, F, Q)| + |\mathcal{P}_T(F, Q)| &\leq C(1 + F^p), \\ |\Psi_{t_i}(q, F, Q') - \Psi_{t_i}(q, F, Q)| &\leq C(1 + F^p)|Q' - Q|. \end{aligned}$$

Then, there exists an optimal Markov consumption  $q^*(t, F, Q)$ , which is given by the argmax in the following dynamic programming equation :

$$\begin{aligned} P(t_i, F, Q) &= \max_{q \in [q_{\min}, q_{\max}]} \left[ \Psi_{t_i}(q, F, Q) + \mathbf{E}(P(t_{i+1}, F_{t_{i+1}}, Q + q) \mid F_{t_i} = F) \right], \quad (t_i < T), \\ P(T, F, Q) &= \mathcal{P}_T(F, Q). \end{aligned} \tag{VIII.8}$$

Note that this result holds for both Swing and storage contracts.

PROOF. This is an immediate application of Proposition 8.5. in Bertsekas and Shreve (1978). First, the conditions on the growth of instantaneous and terminal profits together with the classical estimates  $\mathbf{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} F_t^p) < \infty$  enable us to check assumptions  $(F^+)$  and  $(F^-)$  in Proposition 8.5. Then, it remains to prove that the supremum in (VIII.8) is attained. This immediately follows from the continuity of  $P(t_{i+1}, F, Q)$  w.r.t.  $Q$  (which is a easy consequence of our Lipschitz continuity hypothesis). Finally, since the dynamics of the forward contracts does not depend on  $(q_{t_i})_i$ , the usual conditional expectation w.r.t.  $(F_{t_i}, Q_{t_i})$  can be simplified using the relation  $Q_{t_{i+1}} = Q_{t_i} + q_{t_i}$ . It provides the dynamic programming equation as expressed in (VIII.8).

□

Paragraphs VIII.2.2 and VIII.2.3 respectively implement the  $\max_{q \in [q_{\min}, q_{\max}]}$  operation and the computation of  $\mathbf{E}(\cdot | F_{t_i} = F)$  for solving approximately the dynamic programming equation (VIII.8).

## VIII.2.2 Towards an implementation of the dynamic programming equation

As usual, solving the dynamic programming equation (VIII.8) is far from being trivial because of the conditional expectation and the optimization w.r.t.  $q$  at each time. For a numerical resolution, this formulation must be simplified. To do so, we first dis-

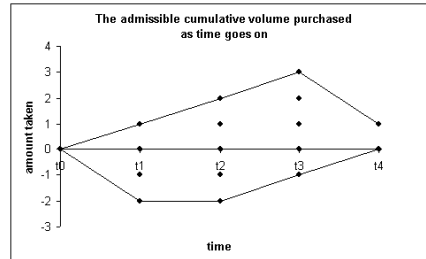


FIG. VIII.2 – Restriction of the set of admissible purchased volumes when the global constraints can not be violated.

cretize the set of admissible values of  $q_{t_i} : q_{t_i} \in \{q_{\min}, q_{\min} + \Delta q, \dots, q_{\max} - \Delta q, q_{\max}\}$  where  $\Delta q$  denotes a positive consumption step. Consequently, the purchased cumulative volume  $Q_{t_i} = \sum_{j=0}^{i-1} q_{t_j}$  belongs to a set of possible values  $\{Q_{t_i}^1, Q_{t_i}^2, \dots, Q_{t_i}^{M_{t_i}}\}$ , where  $M_{t_i}$  denotes the number of possible cumulative volumes that are purchased up to time  $t_i$ . If it is not allowed to break the global purchase constraints  $Q_{\min}$  and  $Q_{\max}$  (i.e. the applied penalties are infinite), the set  $\mathcal{A} = \{(t_i, Q_{t_i}) : 0 \leq i \leq N\}$  of admissible cumulative consumptions can be efficiently limited. This will be extremely useful to speed up the resolution of (VIII.8). For example, let us consider a contract with the characteristics  $Q_{\max} = 1$ ,  $Q_{\min} = 0$ ,  $\Delta q = q_{\max} = 1$  and  $q_{\min} = -2$ , over the period  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_4 = T\}$ . The set  $\mathcal{A}$  is represented on Figure VIII.2. For a given couple  $(t_i, Q_{t_i})$ , denote by  $\text{Adm}(t_i, Q_{t_i})$  the set of discrete admissible values of  $q_{t_i}$ . If the constraints can be broken, then  $\text{Adm}(t_i, Q_{t_i}) = \{q_{\min}, q_{\min} + \Delta q, \dots, q_{\max} - \Delta q, q_{\max}\}$ . Otherwise it can be much smaller (see Figure VIII.2).

Thus, for any  $(t_i, Q_{t_i}) \in \mathcal{A}$ , (VIII.8) becomes

$$P(t_i, F, Q_{t_i}) = \max_{q \in \text{Adm}(t_i, Q_{t_i})} [\Psi_{t_i}(q, F, Q_{t_i}) + \mathbf{E}(P(t_{i+1}, F_{t_{i+1}}, Q_{t_i} + q) | F_{t_i} = F)]. \tag{VIII.9}$$

In light of (VIII.9), we should compute as many functions  $P(t_i, \cdot, Q_{t_i})$  as elements in the set  $\mathcal{A}$ . However, this latter can be quite large (see Example VIII.4), and thus much time consuming. This is an inherent drawback of this approach and as we will later see, we do not meet these issues with the approaches based on parameterized consumptions.

**Example VIII.4**

Consider a storage contract where, the initial level of gas is 17 units, the maximum possible volume is 24 units and the final volume can take any value between 2 units and 17 units. The set  $\mathcal{A}$  represented on Figure VIII.3, gives an idea about the complexity. The daily injection capacity is one unit per exercise whereas the withdrawal capacity is two units. We consider in this example 20 possible exercise dates. Here,  $q_{t_i}$  can take any integer value between -2 and 1. We can yet speed up the resolution if we further assume that the consumption is of bang-bang type (see Theorem VIII.5 below). In this case, we can simply take  $\Delta_q = q_{\max} - q_{\min}$ .

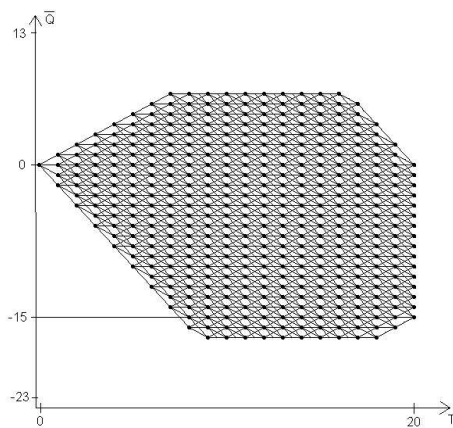


FIG. VIII.3 – States where the price function  $P(t_i, Q_{t_i}, \cdot)$  should be computed

To complete the resolution of the dynamic programming equation (VIII.9), we develop in the sequel two different strategies.

1. Using a trinomial tree to describe the evolution of  $(F_{t_i})_{0 \leq i \leq N}$ . It leads to the so-called forest of trees algorithm (see Lari-Lavassani, Simchi and Ware (2001); Jaillet, Ronn and Tompaidis (2004)).

2. Using Monte Carlo simulations of  $(F_{t_i})_{0 \leq i \leq N}$ , which are much more adapted to multi-factor models. They enable to compute conditional expectations involved in (VIII.9) (with another representation) using regression techniques (analogous to the Longstaff-Schwartz approach (2001) for Bermuda options). This approach has not been used in the existing literature on Swing options.

### VIII.2.3 Forest of trees

#### VIII.2.3.1 Description of the algorithm

In light of (VIII.7), we need to construct a trinomial tree, in order to describe how  $(X_{t_i})_{0 \leq i \leq N}$  (and therefore  $(F_{t_i})_{0 \leq i \leq N}$ ) evolves. We briefly remind the construction of such a tree (for details, see Lari-Lavassani, Simchi and Ware (2001)). Each node can either go up, or go down or even stay in the same physical state. Three kinds of branches are then available to fit the mean-reverting behavior of  $X$ . See Figure VIII.4, where case 2 and 3 correspond respectively to the top and the bottom of the trinomial tree. The spacing between nodes is equal to  $\sigma\sqrt{3\Delta t}$ , where  $\Delta t$  denotes

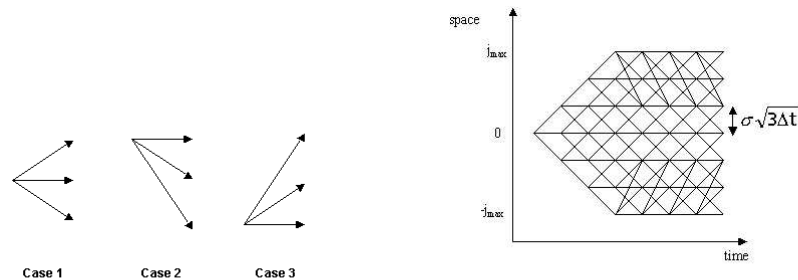


FIG. VIII.4 – On the left, three possible branches. On the right, trinomial tree.

the discretization time step. Table VIII.1 gives the probabilities on each alternative branching. These latter are computed in order to match the first two moments, and their sum is naturally equal to one. As probabilities must not be negative, we deduce that necessarily  $j_{\max} = \left\lceil \frac{0.184}{\alpha\Delta t} \right\rceil$ , and this bounds the tree's width since  $j \in [-j_{\max}, j_{\max}]$ . Denote by  $X_{t_i}^j$  the value of  $X_{t_i}$  on node  $j$  in the trinomial tree, and by  $L_{t_i}$  the number of nodes at time  $t_i$ . To each point  $\left( t_i, Q_{t_i}^{j_{t_i}} \right)_{j_{t_i}=1, \dots, M_{t_i}}$  on the

	Case 1	Case 2 ( $j = j_{\max}$ )	Case 3 ( $j = -j_{\max}$ )
$p_{up}$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\alpha j \Delta_t + \frac{1}{2}[\alpha j \Delta_t]^2$	$\frac{7}{6} - \frac{3}{2}\alpha j \Delta_t + \frac{1}{2}[\alpha j \Delta_t]^2$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\alpha j \Delta_t + \frac{1}{2}[\alpha j \Delta_t]^2$
$p_{middle}$	$\frac{2}{3} - [\alpha j \Delta_t]^2$	$-\frac{1}{3} + 2\alpha j \Delta_t - [\alpha j \Delta_t]^2$	$-\frac{1}{3} - 2\alpha j \Delta_t - [\alpha j \Delta_t]^2$
$p_{down}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\alpha j \Delta_t + \frac{1}{2}[\alpha j \Delta_t]^2$	$\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\alpha j \Delta_t + \frac{1}{2}[\alpha j \Delta_t]^2$	$\frac{7}{6} + \frac{3}{2}\alpha j \Delta_t + \frac{1}{2}[\alpha j \Delta_t]^2$

TAB. VIII.1 – Probabilities depending on the vertical position  $j$  in the tree.

graphic, corresponds a range  $(X_{t_i}^j)_{j=1,\dots,L_{t_i}}$  of nodes in the tree (at time  $t_i$ ). Formula (VIII.7) gives the corresponding spot prices of gas  $(F_{t_i}^j)_{j=1,\dots,L_{t_i}}$ . Consider now the algorithm for the forest of trees. By Equation (VIII.9), the price  $P(t_0, F_{t_0}^1, Q_{t_0}^1)$  of the option is computed backwards in the forest, in the following way.

- **Initialization.** Compute the terminal values  $P(t_N, F_{t_N}^j, Q_{t_N}^k)$  for  $j = 1, \dots, L_{t_N}$  and  $k = 1, \dots, M_{t_N}$ .
- **Iteration.** Assume now that the values  $P(t_{i+1}, F_{t_{i+1}}^j, Q_{t_{i+1}}^k)$  for  $j = 1, \dots, L_{t_{i+1}}$  and  $k = 1, \dots, M_{t_{i+1}}$  are known. Hence, for each possible cumulative volume  $(t_i, Q_{t_i}^k)$  with a spot price equal to  $F_{t_i}^j$ , we compute the value  $\Psi_{t_i}(q, F_{t_i}^j, Q_{t_i}^k) + \mathbf{E}(P(t_{i+1}, F_{t_{i+1}}, Q_{t_i}^k + q) | F_{t_i}^j)$ , for any  $q$  in  $\text{Adm}(t_i, Q_{t_i}^k)$ , using the probabilities in the tree (see Table VIII.1). The maximum over  $q$  gives  $P(t_i, F_{t_i}^j, Q_{t_i}^k)$ .

Then, iterating till time  $t_0$  provides the price of the contract.

### VIII.2.3.2 Numerical results

We give numerical results for the two cases described in Section VIII.1. We also plot the optimal gas consumption with respect to a natural gas sample path. We observe a bang-bang behavior for the optimal consumption, as it is theoretically justified in Section VIII.3.1.

**Example VIII.1 : Swing contract.** The values of parameters are set to those of Case VIII.1. In the table below, both forward curves are considered. To have comparable results with different consumption frequencies, we adjust  $q_{\min}$  and  $q_{\max}$ . For instance, with a weekly consumption, we set  $q_{\min} = 0$  and  $q_{\max} = 6 \times 7$ .

**Example VIII.2 : storage contract.** The values of parameters are set to those of Case VIII.2.

For both cases, the price converge as the consumption frequency increases. The convergence is slower with the real forward curve because of the high seasonality. In

Consumption period	Flat forward curve	Real forward curve
7 days	2700	4439
3 days	2691	4587
2 days	2704	4607
1 day	2717	4611

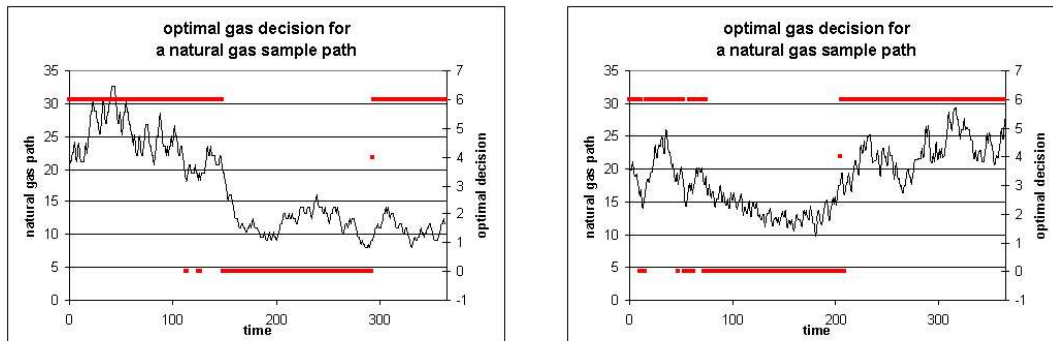


FIG. VIII.5 – Swing contract. Optimal gas decision for a natural gas sample path. On the left, with a flat forward curve. On the right, with the real forward curve of Figure VIII.1.

the sequel, the above values are taken as references for the other numerical methods. We also note that the realized optimal consumption is often of bang-bang type (this is theoretically confirmed by Theorem VIII.5).

## VIII.2.4 Monte Carlo method using Longstaff-Schwartz methodology (2001)

### VIII.2.4.1 Description of the algorithm

We need to simulate  $N_{MC}$  independent realizations of  $F = (F_{t_i})_{0 \leq i \leq N}$ . To do so and in view of (VIII.7), it suffices to simulate  $(X_{t_i})_{0 \leq i \leq N}$ , which can be done by writing  $X_{t_i} = \sigma e^{-at_i} \sum_{j=0}^{i-1} g_j$ , where  $g_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{\alpha u} dW_u$ . Then, since  $(g_j)_j$  are independent Gaussian random variables with a zero mean and a variance equal to  $\int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{2\alpha u} du =$



Consumption period	Flat forward curve	Real forward curve
7 days	66.69	224.9
4 days	67.36	239
2 days	67.75	242.2
1 day	67.92	242.3

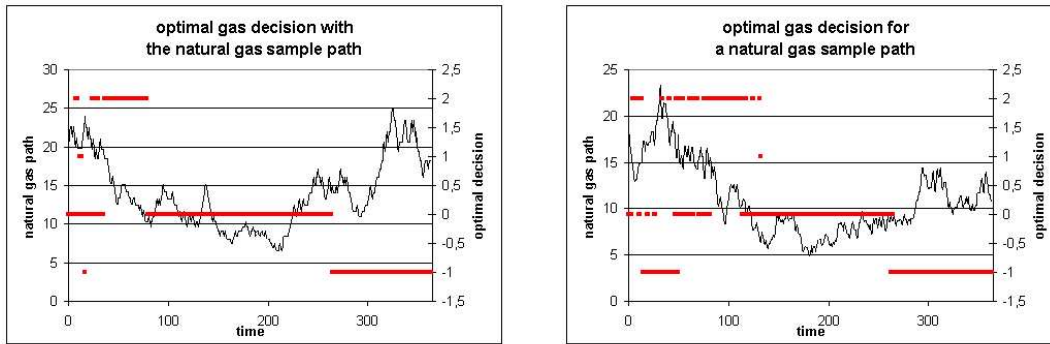


FIG. VIII.6 – Storage contract. Optimal gas decision for a natural gas sample path. On the left, with a flat forward curve. On the right, with the real forward curve of Figure VIII.1.

$\frac{e^{2\alpha t_{j+1}} - e^{2\alpha t_j}}{2\alpha}$ , the simulation of  $(X_{t_i})_{0 \leq i \leq N}$  is standard. Note that an extension to multi-factor models is straightforward with this approach (even if we do not present related results here).

We now explain how the algorithm is devised. Once the optimal consumption  $q_{t_i}^{*,m}$  for the  $m$ -th path determined, the price is computed via a Monte Carlo approximation of the form

$$\frac{1}{N_{MC}} \sum_{m=1}^{N_{MC}} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} \Psi_{t_i}(q_{t_i}^{*,m}, F_{t_i}^m, Q_{t_i}^{*,m}) + \mathcal{P}_T(F_T^m, Q_T^{*,m}) \right].$$

For this, we first have to find at any given date  $t_i$ , the optimal strategy for all simulated paths  $(F^m)_{1 \leq m \leq N_{MC}}$  and all admissible cumulative consumptions  $Q$  (i.e.  $(t_i, Q) \in \mathcal{A}$ ). We therefore need to measure the quantity

$$R(t_i, F, Q + q) = \mathbf{E} \left( \sum_{j=i+1}^{N-1} \Psi_{t_j}(q_{t_j}^*, F_{t_j}, Q_{t_j}^*) + \mathcal{P}_T(F_T, Q_T^*) \mid F_{t_i} = F, Q_{t_{i+1}} = Q + q \right),$$

where  $(q_{t_j}^*)_{j>i}$  denotes the optimal control at time  $t_j$  and  $(Q_{t_j}^*)_{j>i}$  the corresponding cumulated consumption. This is the best expected return from date  $t_{i+1}$  till the end of the contract. Assume, for a while, that  $R(t_i, F, Q + q)$  is numerically approximated by  $\hat{R}(t_i, F, Q + q)$ , using  $N_{MC}$  Monte Carlo simulations. Then the optimal strategy, at time  $t_i$ , for the  $m$ -th path and the admissible cumulative consumption  $Q$  is determined by :

$$q_{t_i}^*(F_{t_i}^m, Q) = \arg \max_{q \in \text{Adm}(t_i, Q)} [\Psi_{t_i}(q, F_{t_i}^m, Q) + \hat{R}(t_i, F_{t_i}^m, Q + q)].$$

Hence, by estimating the conditional expectation  $R(t_i, F, Q + q)$  for each date and each possible cumulative consumption  $Q$ , the optimal exercise strategy is completely specified along each path. Following the Longstaff-Schwartz methodology, we fix  $(t_i, Q)$  and approximate the random variable  $R(t_i, F_{t_i}, Q)$  as the  $\mathbb{L}_2$ -projection of  $\sum_{j=i+1}^{N-1} \Psi_{t_j}(q_{t_j}^*, F_{t_j}, Q_{t_j}^*) + \mathcal{P}_T(F_T, Q_T^*)$ , on the space spanned by a set of selected basis functions  $[\Phi_l(F_{t_i})]_{0 \leq l \leq L}$ . It leads to  $\hat{R}(t_i, F, Q) = \sum_{l=0}^L \hat{\alpha}_l(t_i, Q) \Phi_l(F)$ , where the coefficients  $[\hat{\alpha}_l(t_i, Q)]_{0 \leq l \leq L}$  solve the least-squares problem

$$\arg \min_{(\alpha_l)_l} \sum_{m=1}^{N_{MC}} \left( \sum_{j=i+1}^{N-1} \Psi_{t_j}(q_{t_j}^{*,m}, F_{t_j}^m, Q_{t_j}^{*,m}) + \mathcal{P}_T(F_T^m, Q_T^{*,m}) - \sum_{l=0}^L \alpha_l \Phi_l(F_{t_i}^m) \right)^2$$

with an initial consumption  $Q_{t_{i+1}} = Q + q$ . Various methods are available to solve numerically this problem, depending on the volatility and the exercise frequency. For a general reference on least-squares problems, see Golub and Van Loan (1996). Iterating the procedure, we obtain backwards an approximation  $q_{t_i}^*(F_{t_i}^m, Q)$  along all simulated paths and all possible cumulative consumptions. The price of the contract easily follows.

#### VIII.2.4.2 Numerical results

The pricing has been performed with 5000 simulations (plus antithetic), with the first four canonical polynomials ( $\Phi(x) = x^i$ ,  $0 \leq i \leq 3$ ) and with various consumption frequencies. We have not reported any result for periods smaller than 4 days, since the resolution of the least-squares problems usually generates instabilities for small initial times  $t_i$ .

**Example VIII.1 : Swing contract.** For the following results, the statistical errors due to Monte Carlo simulations are about 100 units at the 95% level. Hence, this approach gives good results.

Consumption period	Flat forward curve	Real forward curve
15 days	2450	4410
10 days	2510	4450
5 days	2560	4480
4 days	2640	4510
Forest of trees (daily purchase)	2717	4611

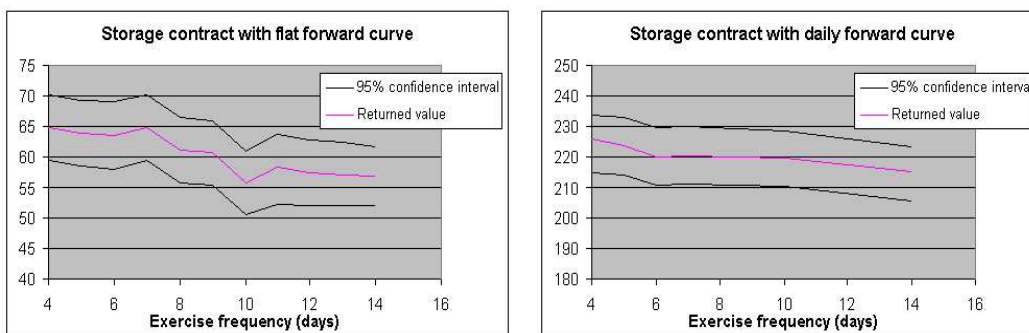


FIG. VIII.7 – Flat forward curve on the left. Real forward curve on the right.

**Example VIII.2 : storage contract.** The values of parameters are set to those of Case VIII.2. We directly plot the results w.r.t. the frequency.

Concerning the functions basis, we have observed that the numerical values are quite insensitive to the number of polynomials from the moment that the degree 3 is achieved. The statistical error due to simulations limits any possible improvement (when we take more basis functions).

Moreover, in our numerical experiments (similarly to the forest method), it appears that the consumption is of bang-bang type. To prepare the connection with the further consumption parameterization approach, we plot on Figure VIII.8 the optimal injection threshold for the storage contract (see Paragraph VIII.3.3.1). Here, we take the flat curve rescaled at level 1 for convenience. The two first axes stand respectively for the time and the volume of stored gas. The surface shows the dependence of the gas price w.r.t the volume and the optimal time for injection. Note that the price for which we have to inject decreases as the volume of the stored gas increases. When the tank is empty, we inject at *any* cost. On the contrary, when the tank is almost full, the price must be much lower to inject some more gas. These observations are intuitively satisfying. Irregularities of the optimal frontier are due

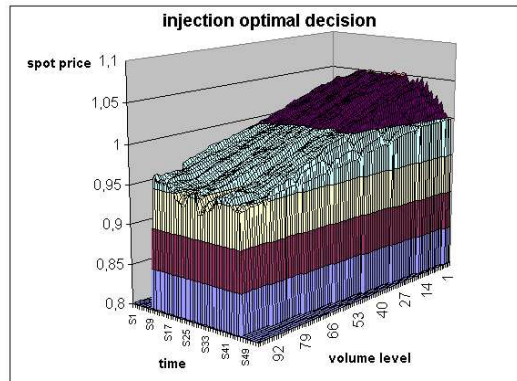


FIG. VIII.8 –

to statistical errors in the Monte Carlo algorithm. However, the overall shape seems quite smooth. Thus, modeling this optimal frontier with a smooth parameterization may lead to efficient procedures. This is developed in the sequel.

## VIII.3 Parametric approximation

In this section, we develop numerical procedures based on parameterized consumptions. The purpose is to avoid using the dynamic programming equation (VIII.8), whose resolution can be much time consuming. The approach below leads to accurate estimations of  $\sup_q \mathcal{J}(q)$ , provided that the parameterization is relevant enough. To this end, we first determine some intrinsic properties of the optimal consumption, which will help in setting the parameterization.

### VIII.3.1 Theoretical results : bang-bang consumption

Hereafter, we state a remarkable theoretical result concerning the necessary optimality conditions satisfied by the optimal consumption, in the Swing contract (with a penalty a little smoother than  $\mathcal{P}_T(F, Q) = -AF [Q - Q_{\min}]_- - BF [Q - Q_{\max}]_+$ ). The proof is relegated to Appendix B. It states that the optimal consumption is of bang-bang type under some assumptions. This has been numerically observed with the procedures presented before.

**Theorem VIII.5**

Consider Problem<sup>1</sup>(VIII.6) with  $\Psi_{t_i}(q, F) = e^{-rt_i}q(F - K)$  and  $\mathcal{P}_T(F, Q) = -e^{-rT}FP(Q)$ ,  $P$  being a continuously differentiable function. If the following condition holds

$$\mathbf{P} [e^{-rt_i} (F_{t_i} - K) + \mathbf{E} (e^{-rT} F_T P'(Q_T^*) | F_{t_i}, Q_{t_i}^*) = 0] = 0, \quad (\text{VIII.10})$$

the optimal consumption at time  $t_i$  is necessarily of bang-bang type and given by

$$q^*(t_i, F_{t_i}, Q_{t_i}^*) = q_{\max} \mathbf{1}_{e^{-rt_i}(F_{t_i} - K) + \mathbf{E}(e^{-rT} F_T P'(Q_T^*) | F_{t_i}, Q_{t_i}^*) > 0} + q_{\min} \mathbf{1}_{e^{-rt_i}(F_{t_i} - K) + \mathbf{E}(e^{-rT} F_T P'(Q_T^*) | F_{t_i}, Q_{t_i}^*) < 0}.$$

Condition (VIII.10) appears to be hard to check since it involves the unknown optimal consumption. However, it can be expected (even if we have not been able to prove it) that for  $t_i < T$ , the law of the random variable  $e^{-rt_i}(F_{t_i} - K) + \mathbf{E}(e^{-rT} F_T P'(Q_T^*) | F_{t_i}, Q_{t_i}^*)$  has a density w.r.t. the Lebesgue measure. Then, 0 will be a null point and Condition (VIII.10) will be satisfied.

Note that Theorem VIII.5 is strongly related to the stochastic maximum principle (Pontryagin principle) for optimal control problems. However, this latter strictly holds in the continuous case (both in time and space). Since the cumulative consumption has a continuous state space, it has been possible to derive optimality conditions in our context.

Moreover, for less smooth penalties of the form  $P(Q) = -A [Q - Q_{\min}]_- - B [Q - Q_{\max}]_+$ , one can easily see that there are certain regions where the derivative of the terminal penalty does not depend any more on the whole consumption. The proposition below explicitly characterizes the consumption threshold in these special cases.

**Proposition VIII.6**

Consider the Swing contract described by (VIII.4).

1. If  $Q_{t_i} \in [Q_{\min} - q_{\min} (N - i), Q_{\max} - q_{\max} (N - i)]$ , the terminal constraints will be satisfied whatever happens ( $Q_T \in [Q_{\min}, Q_{\max}]$ ). The consumption threshold is therefore equal to the strike  $K$  and the optimal consumption takes the following form (see Zone 1 in Figure VIII.12)

$$q_{t_i} = q_{\max} \mathbf{1}_{F_{t_i} > K} + q_{\min} \mathbf{1}_{F_{t_i} \leq K}.$$

---

<sup>1</sup>For the storage contract, we have not been able to derive analogous rigorous results because of the lack of smoothness of  $\Psi_{t_i}(q, F)$  w.r.t.  $q$ . However, formal computations show that the optimal consumption essentially takes three values  $\{q_{\min}, 0, q_{\max}\}$ .

2. If  $Q_{t_i} + q_{\min} (N - i) \geq Q_{\max}$ , we are certain to be in over-consumption at the time horizon and  $P'(Q_T) = -A$ . Then using the relation  $F(t_i, T) = \mathbf{E}(F_T | F_{t_i})$ , the optimal consumption is in the form of (cf. Zone 2 in Figure VIII.12)

$$q_t = q_{\max} \mathbf{1}_{e^{-rt_i}(F_{t_i}-K)-A e^{-rT}F(t_i,T)>0} + q_{\min} \mathbf{1}_{e^{-rt_i}(F_{t_i}-K)-A e^{-rT}F(t_i,T)\leq 0}.$$

3. If  $Q_{t_i} + q_{\max} (N - i) \leq Q_{\min}$ , we are certain to be in under-consumption at the time horizon and  $P'(Q_T) = B$ . The optimal consumption is given by (cf. Zone 3 in Figure VIII.12)

$$q_t = q_{\max} \mathbf{1}_{e^{-rt_i}(F_{t_i}-K)+B e^{-rT}F(t_i,T)>0} + q_{\min} \mathbf{1}_{e^{-rt_i}(F_{t_i}-K)+B e^{-rT}F(t_i,T)\leq 0}.$$

In order to improve optimization procedures, these specific cases have been taken into account in the parameterization of the gas consumption.

## VIII.3.2 Using a neural network

### VIII.3.2.1 Description and motivations

We first propose a nonlinear parameterization of the consumption function  $q_t = q(t, F_t, Q_t)$ , using a neural network (see Haykin (1994) for general references on neural networks). We have selected for our study a one-hidden-layer neural network, whose architecture is described in Figure VIII.9. The input layer  $(x_i)_{1 \leq i \leq 3}$  is connec-

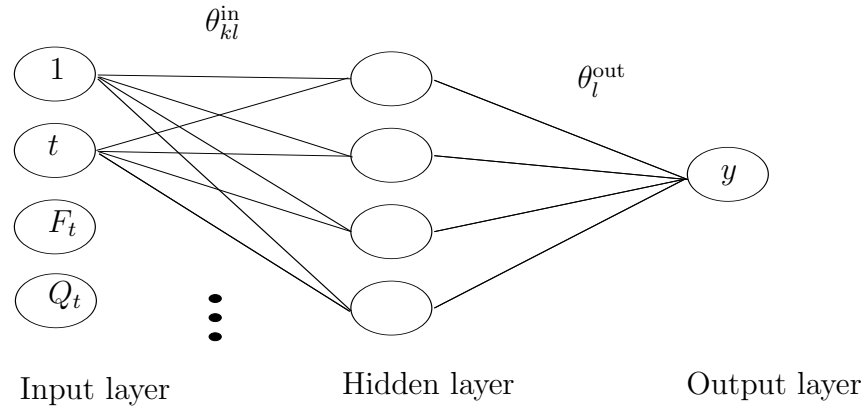


FIG. VIII.9 – Architecture of the neural network.

ted to the state and time variables :  $x_1 = t$ ,  $x_2 = F_t$  and  $x_3 = Q_t$ . There is one hidden layer with  $L$  neurons, and the output layer returns the level of optimal consumption at time  $t$ . Actually, the number of hidden units to use is far from clear. It is related

to the complexity of the underlying function that the network is trying to model. A good starting point is to choose a number of units equal to half the sum of the number of input and output units. We have conducted a certain number of experiments with different configurations and finally selected a network with 4 hidden neurons, in preference to a larger one with a negligible improvement. The network is defined by a matrix and a vector of weights (the parameters) : the input weights  $\{\theta_{kl}^{\text{in}}\}$  and the output weights  $\{\theta_l^{\text{out}}\}$ . The output of the network is given by

$$y = \sum_{l=1}^4 \theta_l^{\text{out}} s \left( \sum_{k=0}^3 \theta_{kl}^{\text{in}} x_k \right),$$

where  $(\theta_{0l}^{\text{in}})_l$  are the bias weights (we set  $x_0 = 1$ ) and  $s$  is the Sigmoid function :  $s(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ . The local consumption is then defined by

$$q = q_{\min} + (q_{\max} - q_{\min}) s(y), \quad (\text{VIII.11})$$

which still belongs to the range  $[q_{\min}, q_{\max}]$ .

The motivation of such a parameterization is the following. First, neural networks are very sophisticated techniques capable of modeling extremely complex functions (in particular, nonlinear ones with large numbers of variables), and at the same time, the level of the user knowledge needed to successfully apply neural networks is much lower than would be the case using, for example, some more traditional nonlinear statistical methods. In addition, the expected payoff  $\mathcal{J}(q)$  defined in (VIII.6) becomes  $\mathcal{J}(\theta)$ , with  $\theta = (\theta_{kl}^{\text{in}}, \theta_l^{\text{out}} ; 0 \leq k \leq 3 ; 1 \leq l \leq 4)$ , and in the sequel the optimization w.r.t.  $\theta$  will be performed using an estimation of the gradient  $\nabla \mathcal{J}(\theta)$ . This justifies why we here consider a smooth parameterization. However, thanks to Theorem VIII.5, we may expect the optimal consumption to be of bang-bang type. This behavior can be seen as a limit case where the output weights tend to infinity. It means that  $y$  represents in a nonlinear way the bang-bang threshold : for large positive values of  $y$ ,  $q \approx q_{\max}$  and for large negatives values of  $y$ ,  $q \approx q_{\min}$ .

### VIII.3.2.2 The gradient algorithm

From an initial random configuration of weights, the stochastic gradient algorithm makes, in expectation, a move towards points of higher values in the search space, in order to locate a local maximum (see Benveniste, Metivier and Priouret (1990), Kushner and Yin (1997) for general references on stochastic approximation algorithms). We thus define a recursive sequence of parameters  $(\theta_n)$  by setting  $\theta_{n+1} = \theta_n + \gamma_n \widehat{\nabla_{\theta} \mathcal{J}(\theta_n)}$ , where  $\widehat{\nabla_{\theta} \mathcal{J}(\theta_n)}$  is a gradient estimator of the mapping  $\theta \mapsto \mathcal{J}(\theta)$

and  $(\gamma_n)$  is a suitable sequence of nonnegative step sizes. We have chosen to fix  $\gamma_n$  to a constant throughout our numerical experiments, but the difficult part is to decide how large the steps should be. Large steps may converge more quickly, but may also overstep the solution or go off in the wrong direction. In contrast, very small steps may go in the correct direction, but they also require a large number of iterations. The correct setting for the step size is application-dependent, and typically chosen by experiments. The algorithm stops in a high point, which is a local maximum. Throughout the numerical experiments we have performed, the values to which the algorithm has converged were all very close to the global optimum (presumably given by the method of Section VIII.2.3). As for  $\nabla_{\theta}\mathcal{J}(\theta)$ , it has been computed by a classic Monte-Carlo approach, using a path-wise method (see Kushner and Yang (1991) and recently Gobet and Munos (2005)). It is thus expressed as an expectation :

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta}\mathcal{J}(\theta) = & \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{N-1} \nabla_{\theta}q(\theta, t_i, F_{t_i}, Q_{t_i}) \partial_q \Psi_{t_i}(q_{t_i}, F_{t_i}, Q_{t_i}) \right. \\ & \left. + \partial_{\theta}Q_{t_i} \partial_Q \Psi_{t_i}(q_{t_i}, F_{t_i}, Q_{t_i}) \right) + \mathbf{E} \left( e^{-rT} \partial_{\theta}Q_T \partial_Q \mathcal{P}_T(F_T, Q_T) \right). \end{aligned} \quad (\text{VIII.12})$$

The quantity  $\nabla_{\theta}q(\theta, t_i, F, Q)$  results in differentiating the parameterization of the consumption defined in (VIII.11), which is straightforward. For the Monte Carlo evaluations of  $\nabla_{\theta}\mathcal{J}(\theta)$ , we need to simulate  $(\partial_{\theta}Q_{t_i})_{0 \leq i \leq N}$ . It is obtained using the equation  $Q_{t_{i+1}} = Q_{t_i} + q_{t_i}$ , from which we deduce

$$\partial_{\theta}Q_{t_{i+1}} = \partial_{\theta}Q_{t_i} + \partial_{\theta}q(\theta, t_i, F_{t_i}, Q_{t_i}) + \partial_Q q(\theta, t_i, F_{t_i}, Q_{t_i}) \partial_{\theta}Q_{t_i},$$

with an initial condition  $\partial_{\theta}Q_0 = 0$ .

### VIII.3.2.3 Numerical results

**Example VIII.1 : Swing contract.** As can be seen in section VIII.3.1, we expect the optimal consumption to be of bang-bang type. Thus in order to take into account this (remarkable) result, a threshold function can be additionally applied to the output unit :

$$q_{\text{threshold}} = q_{\text{max}} \mathbf{1}_{q_{\text{network}} > \frac{q_{\text{max}} + q_{\text{min}}}{2}} + q_{\text{min}} \mathbf{1}_{q_{\text{network}} \leq \frac{q_{\text{max}} + q_{\text{min}}}{2}}.$$

In the above expression,  $q_{\text{network}}$  and  $q_{\text{threshold}}$  stand for the output neuron and the threshold value, respectively. Here, the parameters are the ones given in Case VIII.1. We also consider  $A = B = 1$ . The step size for the stochastic-gradient algorithm is constant and equal to 3. Denote by



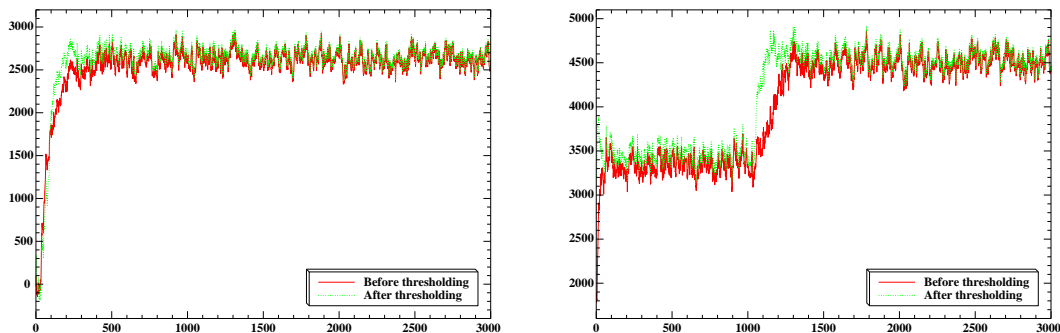


FIG. VIII.10 – Price of the Swing contract w.r.t. the number of iterations. On the left, with a flat forward curve. On the right, with the forward curve of Figure VIII.1.

	Neural network before thresholding	Neural network after thresholding	Forest of trees
Flat forward curve	$2659 \pm 28$	$2681 \pm 28$	2717
Real forward curve	$4555 \pm 31$	$4584 \pm 31$	4611

TAB. VIII.2 – Final price of the Swing contract, before and after thresholding the consumption (the values after  $\pm$  equal the half of the 95% confidence interval width).

- $N_{MC}$  the required number of Monte Carlo simulations to calculate an estimator of the gradient, for a given set of parameters,
- $N_{IT}$  the number of iterations on the parameters in the optimization stage.

The algorithm can therefore be split into two stages :

- 1) a first optimization stage, where we set for example  $N_{MC} = 100$  and a large number of iterations  $N_{IT} = 3000$ , so that the algorithm presumably converges.
- 2) a second pricing stage with the last set of parameters and a much higher  $N_{MC}$  (it can be set equal to 100000 for example), in order to reduce the confidence interval on the price.

Results are reported in Table VIII.2. Note that for both forward curves, the results are far by 1% from the optimal price computed by the tree method, and thresholding at the exit of the neural network seems to be relevant. Furthermore, we can see that these two tests provide powerful insights concerning the type of convergence

that may be observed in the optimization algorithms (independently of the selected parameterization). For the first forward curve, we can see that the algorithm requires only 1000 iterations to converge, and thus it is useless to go until 3000 iterations. On the contrary, for the second forward curve, we have a slower optimization, which is even performed in two steps (as if a local optimum were reached at an intermediate stage). The quality of results and the type of convergence are thus strongly related to the selected forward curve.

**Example VIII.2 : storage contract.** The values of parameters are set to those of Case VIII.2. The step size for the stochastic-gradient algorithm is constant and equal to 0.1. The terminal penalties are always satisfied in this case. In fact, as already mentioned, the constraints in the storage case can be formulated as follows

$$f_1(t) \leq Q_t \leq f_2(t), \forall t \in [0, T].$$

Denote by  $q_{params}(t)$  the output of the neural network at time  $t$ .

□  $Q_t \geq f_1(t)$  for every  $t \in [0, T]$ . Thus as soon as  $|Q_t - f_1(t)| \leq |q_{min}| dt$ , we replace the output of the network by :

$$q_t^1 = \begin{cases} q_{params}(t), & \text{if } q_{params}(t) + Q_t dt \geq f_1(t) \\ \frac{f_1(t) - Q_t}{dt}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

□  $Q_t \leq f_2(t)$  for every  $t \in [0, T]$ . Thus if  $q_t^1 dt + Q_t > f_2(t)$ , we replace  $q_t^1$  by  $\frac{f_2(t) - Q_t}{dt}$ . Finally, the retained control at time  $t$  takes the form of

$$q_t = \min \left[ q_t^1, \frac{f_2(t) - Q_t}{dt} \right] = \min \left[ \max \left( q_{params}(t), \frac{f_1(t) - Q_t}{dt} \right), \frac{f_2(t) - Q_t}{dt} \right].$$

Note that the above consumption is not of class  $\mathcal{C}_1$  any more. However, the stochastic gradient algorithm is still applicable, since there is only a finite set of points where the function is not differentiable.

The results reported in Table VIII.3 are computed with  $N_{IT} = 3000$  (resp.  $N_{IT} = 6000$ ) iterations for the flat forward curve (resp. for the forward curve from Figure VIII.1), still using  $N_{MC} = 100000$  paths for the final value. Note that the neural network gives a less satisfying price in the case of the real forward curve. The strong seasonality component of the curve is undoubtedly an important explaining factor. Adding more hidden neurons certainly improves the quality of the price, but also implies longer computing times.

Let us finally stress that no thresholding at the output of the network has been applied here. Unlike the Swing contract, we have not been able in this case to find a relevant thresholding rule at the output of the network.

	Neural network	Forest of trees
Flat forward curve ( $N_{IT} = 3000$ )	$64.7 \pm 0.4$	67,9
Real forward curve ( $N_{IT} = 6000$ )	$218.7 \pm 0.6$	242.3

TAB. VIII.3 – Final price of the storage contract (the values after  $\pm$  equal the half of the 95% confidence interval width).

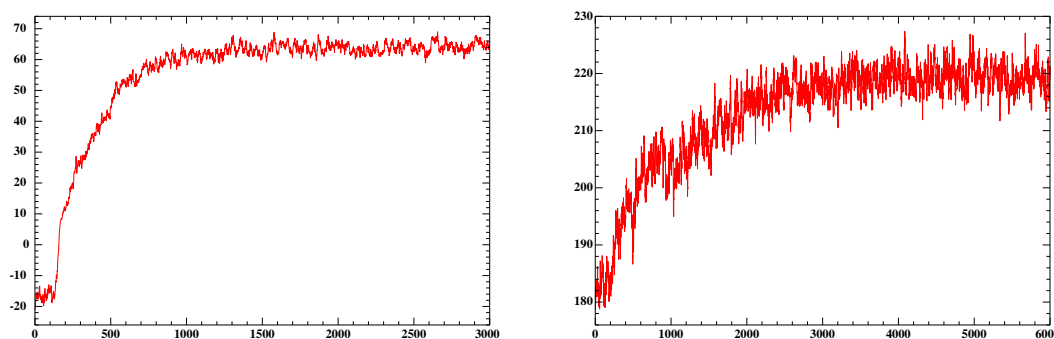


FIG. VIII.11 – Price of the storage contract w.r.t. the number of iterations. On the left, with a flat forward curve. On the right, with the forward curve of Figure VIII.1.

### VIII.3.3 Direct parameterization of the purchase threshold

#### VIII.3.3.1 For the Swing contract

Unlike the previous approach with neural networks, here the parameterization of  $q(t_i, F, Q)$  does not need to be smooth with respect to parameters. We rather focus on the bang-bang behavior which can be expected from Theorem VIII.5. Thus, we here assume that

- $q^*(t_i, F_{t_i}, Q_{t_i})$  takes only two values  $q_{\min}$  and  $q_{\max}$ ,
- $q^*(t_i, F_{t_i}, Q_{t_i})$  is an increasing function w.r.t  $F_{t_i}$ .

The second property is heuristic : we expect that a higher price of gas will lead to a higher consumption at a fixed price  $K$ . Previous algorithms based on the dynamic programming equation (see Section VIII.2) give results that confirm this heuristic.

From these two properties we deduce that if  $q$  is optimal, there exists a threshold  $S^*$  depending on both  $t_i$  and  $Q_{t_i}$  such that

$$q_{t_i} = q_{\max} \mathbf{1}_{\{F_{t_i} > S^*(t_i, Q_{t_i})\}} + q_{\min} \mathbf{1}_{\{F_{t_i} \leq S^*(t_i, Q_{t_i})\}}.$$

Our approach is to model this optimal threshold price as a function of  $t$  and  $Q_t$ . We can divide the set of couples  $(t_i, Q_{t_i})$  into four zones.

- Zone 1 corresponds to a consumption such that the consumer is sure to respect the global constraints. The optimal threshold is equal to the strike  $K$ .
- Zone 2 (resp.3) corresponds to an over (resp. under) consumption. In these two cases the optimal threshold is an explicit function of  $t_i$ . If the global penalties are infinite, these two zones are useless.
- Zone 4 is the only one where the threshold has to be found.

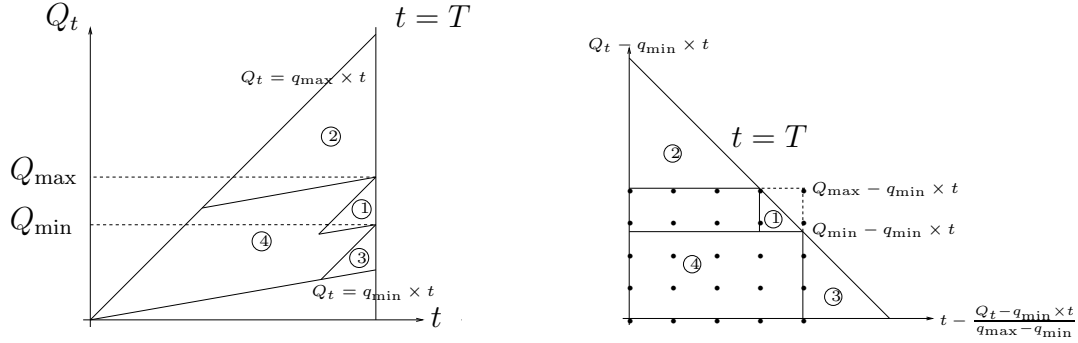


FIG. VIII.12 – Parameterization of the threshold as a function of both  $(t, Q_t)$  and  $(t - \frac{Q_t - q_{\min}}{q_{\max} - q_{\min}}, Q_t - q_{\min} \times t)$ .

Even if  $F_{t_i}$  fluctuates a lot, we expect that the threshold  $S^*$  changes a little with respect to  $t_i$  and  $Q_{t_i}$ . For instance, in the special case where  $F_{t_i}$  is deterministic with  $r = 0$ ,  $S^*$  is constant. Consequently,  $S^*(t_i, Q_{t_i})$  may be approximated by a smooth function of  $(t_i, Q_{t_i})$ . Figure VIII.8 about the injection optimal decision confirms that the threshold surface may be approximated by a smooth one for these contracts. Actually, it is more efficient to express  $S^*$  as a function of

$$\left( i - \frac{Q_{t_i} - q_{\min} \times i}{q_{\max} - q_{\min}}, Q_{t_i} - q_{\min} \times i \right),$$

the support of the function  $S^*$  being now a rectangle. The parameters  $\theta$  of the function  $S^*$  are values of the threshold at a fixed position spread, on a uniform grid with a chosen size ( $5 \times 5$  for example). The value of  $S^*$  outside the grid is equal to the strike if the couple  $(t_i, Q_{t_i})$  is in Zone 1, and to a bilinear interpolation of the four nearest neighbors, otherwise.

### VIII.3.3.2 Optimization of parameters

With this parameterization, the function  $\mathcal{J}(\theta)$  to maximize is not smooth, and a specific optimization procedure has to be carried out.

Since parameters  $\theta$  are threshold values, they can be initialized near the value  $K$ . The idea of the optimization is the following. With a given set of simulations, we can evaluate  $\widehat{\mathcal{J}}(\theta)$  for any value of  $\theta$ . We are looking for the optimal parameter by applying coordinate-wise iterative perturbations of the parameters. The size of the perturbation equals  $\varepsilon$  and parameters are iteratively chosen according to a statistical test based on the empirical mean and variance of the improvement. To get better and better parameters we increase the size of the set of simulations in several stages. We start with  $l = 0$  and  $N_{MC} = 10000$ . We define  $\boldsymbol{\theta}_{j_0}^+ = (\theta_1, \dots, \theta_{j_0} + \varepsilon, \dots, \theta_d)$  and  $\boldsymbol{\theta}_{j_0}^- = (\theta_1, \dots, \theta_{j_0} - \varepsilon, \dots, \theta_d)$ . The algorithm can be described as follows.

- Stage  $l$ 
    - Simulate a set of  $2^l N_{MC}$  independent paths  $(F_{t_i})_i$ .
    - Denote by  $\hat{\sigma}(X)$  the empirical standard deviation of  $X$  computed with this set of paths.
    - While  $\widehat{\mathcal{J}}(\theta)$  is improved
      - Compute the empirical mean of  $\widehat{\mathcal{J}}(\theta)$  using this set of paths.
      - For each parameter coordinate  $\theta_{j_0}$ 
        - if  $\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\theta}_{j_0}^+) - \widehat{\mathcal{J}}(\theta) > 1.65 \times \hat{\sigma}(\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}_{j_0}^+) - \mathcal{J}(\theta))$  or
        - if  $\widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\theta}_{j_0}^-) - \widehat{\mathcal{J}}(\theta) > 1.65 \times \hat{\sigma}(\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}_{j_0}^-) - \mathcal{J}(\theta))$
- change the value of  $\theta_{j_0}$  and continue the optimization with the best of these three sets of parameters.
- $l \rightarrow l + 1$ .

Iterations are stopped when  $2^l N_{MC}$  is too large for computations or when there is no more improvement.

### VIII.3.3.3 Applications to storage contract

A similar strategy can be used for the storage contract, since we expect that the optimal consumption  $q(t, Q_t, F_t)$  takes only three values. In this case we build two surfaces associated to the two thresholds, using the same method. We choose a size of grid and change the values of nodes, one by one, at each optimization step : nodes of the first surface, then nodes of the second one. Since the previous change of variables is useless, we parameterize the two surfaces with  $t_i$  and  $Q_{t_i}$ .

### VIII.3.3.4 Results

**Example VIII.1 : Swing contract.** For different forward curves, the solution and the optimal parameters computed with this algorithm do not depend on the initial set of parameters. Furthermore, no local maximum phenomenon has been noticed. The quality of results mainly depends on the forward curves. With a  $4 \times 4$  grid we can reach, in the best cases, 98% of the performance obtained by a dynamic programming approach. The following results are computed with  $\varepsilon = 0.1$ ,  $l = 5$  steps (corresponding to a maximum set of 320 000 different simulations) and 95% confidence intervals.

Forward curve	Size of grid	$\hat{\mathcal{J}}$	Forest of trees
real	$4 \times 4$	$4565 \pm 25$	4611
real	$10 \times 10$	$4578 \pm 25$	4611
flat	$4 \times 4$	$2696 \pm 23$	2718
flat	$10 \times 10$	$2692 \pm 23$	2718

**Example VIII.2 : storage contract.** These results mainly depend on the choice of  $\varepsilon$  and the size of grids.  $\varepsilon$  needs to be small enough to have reliable results but a too small value of  $\varepsilon$  may also generate heavy computations. In our case grids were too coarse to use a very small value of  $\varepsilon$ . Adaptive grids, which become more precise as  $t$  grows, may be more efficient than uniform ones. In the storage contract, a grid that ensures continuity of the threshold surface at edges of Zone 1, gives good results as well. It appears that initialization and order of parameters  $\theta_j$  in the optimization procedure are not crucial.

Forward curve	Size of grid	$\hat{\mathcal{J}}$	Forest of trees
real	$4 \times 4$	$225.3 \pm 1.2$	242.5
real	$10 \times 10$	$230 \pm 1.2$	242.5

## VIII.4 Conclusion

In the paper, we have presented several numerical methods to price Swing options. The well-known forest of trees method allows to deal efficiently with one factor models. We have extended the Longstaff-Schwartz method (initially used for Bermuda options) to our framework. This authorizes multi-factor models. These two

procedures take advantage of the dynamic programming equation and thus, lead to accurate valuations of the Swing contract. Numerical experiments confirm this feature. We develop alternative algorithms based on relevant parameterizations of the consumption. These new methods can also handle multi-factor models. Moreover, unlike the previous ones, they have the advantage to give intermediate prices throughout the optimization stage.

To guide our choice of parameterization, we have proven that the optimal purchase is of bang-bang type. The first parametric method is based on a neural network, which can asymptotically reproduce the bang-bang behavior. The objective function is smooth w.r.t. parameters and gradient stochastic methods can be used for the optimization. The results are quite satisfying. The second parametric method directly models the bang-bang threshold as a function of the time and the cumulative consumption. This seems to be particularly adapted to the problem and thus leads to better results.

# Références bibliographiques

## Chapitre VIII

- [Ber95] D. P. Bertsekas, *Dynamic programming and optimal control. Vol. 1 and 2.*, Belmont, MA : Athena Scientific, 1995.
- [BMP90] A. Benveniste, M. Metivier and P. Priouret, *Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [BS78] D. P. Bertsekas and S. E. Shreve, “Stochastic optimal control. The discrete time case” in *Mathematics in Science and Engineering*, vol. 139, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [CSK01] L. Clewlow, C. Strickland and V. Kaminski, “Valuation of swing contracts”, Technical report, Energy Power Risk Management, Risk Waters Group (2001).
- [GL96] G. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix computations. 3rd ed*, Baltimore, MD : The Johns Hopkins Univ. Press. xxvii, 694 p., 1996.
- [GM05] E. Gobet and R. Munos, “Sensitivity analysis using itô-malliavin calculus and martingales. application to stochastic control problem”, *SIAM Journal on Control and Optimization* **43(5)** (2005), pp. 1676–1713.
- [Hay94] S. Haykin, *Neural Networks : A Comprehensive Foundation*, McMillan, New York, 1994.
- [JRT04] P. Jaillet, E.I. Ronn and S. Tompaidis, “Valuation of commodity-based swing options”, *Management Science* **50** (2004), pp. 909–921.
- [Kar88] I. Karatzas, “On the pricing of American options”, *Applied Mathematics and Optimization* **17(1)** (1988), pp. 37–60.
- [KY91] H.J. Kushner and J. Yang, “A Monte Carlo method for sensitivity analysis and parametric optimization of nonlinear stochastic systems”, *SIAM J. Control Optim.* **29(5)** (1991), pp. 1216–1249.



- [KY97] H.J. Kushner and G. Yin, *Stochastic Approximation Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1997.
- [LLSW01] A. Lari-Lavassani, M. Simchi and A. Ware, “A discrete valuation of Swing options”, *Canadian Applied Mathematics Quarterly* **9(1)** (2001), pp. 35–74.
- [LS01] F. Longstaff and E.S. Schwartz, “Valuing American options by simulation : A simple least squares approach”, *The Review of Financial Studies* **14** (2001), pp. 113–147.
- [RI01] S. Raïkar and M. Ilić, “Interruptible physical transmission contracts for congestion management”, *Power engineering society summer meeting, IEEE* **3** (2001), pp. 1639–1646.
- [Tho95] A.C. Thompson, “Valuation of path-dependent contingent claims with multiple exercise decisions over time : the case of Take-or-Pay”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **30** (1995), pp. 271–293.

# Frontière optimale d'Allegretto, Barone-Adesi et Elliott

---

Allegretto, Barone-Adesi et Elliott ont mis en place en 1995 un algorithme d'approximation de la frontière d'arrêt optimal, pour un Put Américain. L'approximation est meilleure au voisinage de la frontière ou pour de grandes maturités.

Considérons le Put Américain  $\text{Put}^{\text{Am}}(S, m)$  écrit sur le Brownien géométrique  $S$  et de strike  $m$ . Sa fonction de prix  $P(x, t)$  à l'instant  $t$  peut se mettre sous la forme

$$P(x, t) = p(x, t) + e(x, t),$$

où  $e(x, t)$  désigne la prime d'exercice anticipé et  $p(x, t)$  le prix à l'instant  $t$  du Put Européen correspondant. Elliott et ses co-auteurs ont proposé une approximation de  $e(x, t)$  de la forme

$$e(x, t) = A(t) \left( \frac{x}{s_t^*} \right)^{q(t)},$$

où  $A$  et  $q$  sont des fonctions à déterminer. En posant,

$$g(t) = \frac{1}{A(t)} \frac{\partial p(s_t^*, t)}{\partial t}, \quad M = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad N = \frac{2\mu}{\sigma^2}, \quad G(t) = \frac{2g(t)}{\sigma^2},$$

$\mu$  étant le drift du sous-jacent  $S$  sous la probabilité historique, ils ont abouti au système suivant de 3 équations à 3 inconnues  $A(t)$ ,  $q(t)$  et  $s^*(t)$  :

$$s^*(t) = \frac{(m - p(s^*(t), t))q(t)}{-1 + q(t) + e^{(\mu-r)(T-t)}\mathcal{N}(-d_1(s^*(t), t))}, \quad (\text{A.1})$$

$$A(t) = -p(s^*(t), t) - s^*(t) + m, \quad (\text{A.2})$$

$$q(t)^2 + (N - 1)q(t) - (M + G(t)) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Dans la première équation, la fonction  $d_1$  est donnée par

$$d_1(x, t) = \frac{\log\left(\frac{x}{m}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

Ainsi pour une valeur fixée de  $t$ , ces équations peuvent se résoudre par une procédure itérative :

1. donner une valeur test de  $s^*(t)$  ;
2. calculer  $A(t)$  à partir de (A.2) ;
3. calculer  $q(t)$  à partir de (A.3) ;
4. calculer une nouvelle valeur de  $s^*(t)$  à partir de (A.1).

Utilisant la nouvelle valeur de  $s^*(t)$ , ces 3 dernières étapes sont répétées jusqu'à ce que l'amélioration de  $s^*(t)$  ne soit plus significative.

Afin d'améliorer la qualité de l'approximation, Elliott et ses co-auteurs ont introduit une "constante de relaxation"  $\lambda$ , de manière à remplacer l'équation (A.3) par

$$q(t)^2 + (N - 1)q(t) - (M + \lambda G(t)) = 0.$$

La valeur de  $\lambda$  est choisie de telle façon que  $\epsilon(s^*(t), t) = A(t)$ . Dans le cas où  $r = b$ ,  $\lambda$  est déterminée empiriquement par

$$\lambda = 1.2952 + 4.3338 \times 10^{-2}M - 4.6591 \times 10^{-3}M^2 + 2.1452 \times 10^{-4}M^3,$$

où  $M = 2r/\sigma^2$ .

## Proof of Theorem VIII.5

---

Let  $q(\cdot)$  be an optimal control and  $\bar{q}(\cdot)$  an admissible control in  $[q_{\min}, q_{\max}]$ . For  $\epsilon \in [0, 1]$ , we define a third admissible control

$$q_{t_j}^\epsilon = \begin{cases} q_{t_i} + \epsilon (\bar{q}_{t_i} - q_{t_i}) & j = i, \\ q_{t_j} & j \neq i. \end{cases}$$

The objective function corresponding to  $q^\epsilon$  is given by

$$\mathcal{J}(q^\epsilon) = \mathbf{E} \left( \sum_{j=0}^{N-1} e^{-rt_j} q_{t_j}^\epsilon (F_{t_j} - K) + e^{-rT} F_T P(Q_T^\epsilon) \right).$$

Since  $q$  is optimal, we get  $\mathcal{J}(q^\epsilon) \leq \mathcal{J}(q)$ , for every  $\epsilon \in [0, 1]$ , and therefore  $\frac{\partial \mathcal{J}(q^\epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \leq 0$ . We can easily compute this derivative and obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}(q^\epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\mathcal{J}(q^\epsilon) - \mathcal{J}(q)}{\epsilon} \\ &= \mathbf{E} \left\{ (\bar{q}_{t_i} - q_{t_i}) \left[ e^{-rt_i} (F_{t_i} - K) + e^{-rT} F_T P'(Q_T) \right] \right\} \\ &= \mathbf{E} \left\{ (\bar{q}_{t_i} - q_{t_i}) \left[ e^{-rt_i} (F_{t_i} - K) + \mathbf{E} (e^{-rT} F_T P'(Q_T) | F_{t_i}, Q_{t_i}) \right] \right\} \leq 0. \end{aligned}$$

The above inequality holds true for all admissible control  $(\bar{q}_{t_j})_j$ , thus in particular for  $\bar{q}_{t_j} = q_{t_j} + (q - q_{t_i}) \mathbf{1}_{\lambda_{t_i} > 0} \mathbf{1}_{i=j}$ , where

$$H_{t_i} = e^{-rt_i} (F_{t_i} - K) + \mathbf{E} (e^{-rT} F_T P'(Q_T) | F_{t_i}, Q_{t_i})$$

and  $\lambda_{t_i} = (q - q_{t_i}) H_{t_i}$  ( $q \in [q_{\min}, q_{\max}]$  being fixed). This gives  $\mathbf{E} (\mathbf{1}_{\lambda_{t_i} > 0} \lambda_{t_i}) \leq 0$ . In other words,  $\lambda_{t_i}$  is negative outside some negligible sets. Thus we have proven the

following optimality condition

$$(q - q_{t_i}) \left[ e^{-rt_i} (F_{t_i} - K) + \mathbf{E} \left( e^{-rT} F_T P'(Q_T) | F_{t_i}, Q_{t_i} \right) \right] \leq 0, \forall q \in [q_{\min}, q_{\max}],$$

and the desired result follows at once.

# Références bibliographiques de la thèse

- [AAP04] S. Asmussen, F. Avram and M. Pistorius, “Russian and American put options under exponential phase-type lévy models”, *Stochastic Processes and their Applications* **109** (2004), pp. 79–111.
- [ABAE95] W. Allegretto, G. Barone-Adesi and R.J. Elliott, “Numerical evaluation of the critical price and American options”, *European Journal of Finance* **1** (1995), pp. 69–78.
- [ACG+94] M. Akian, G. Cohen, S. Gaubert, J. P. Quadrat and V. Viot (Max-Plus Working Group), “Max-Plus algebra and applications to system theory and optimal control”, *The Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zurich, Switzerland (1994)*, pp. 1502–1511.
- [AJ06] A. Alfonsi and B. Jourdain, “A call-put duality for perpetual American options”, *Preprint Cermics 2006-307* (2006).
- [AK05] L. Alili and A. E. Kyprianou, “Some remarks on first passage of Lévy processes, the American put and pasting principles”, *Annals of Applied Probability* **15** (2005), no. 3, pp. 2062–2080.
- [Aki99] M. Akian, “Densities of idempotent measures and large deviations”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **109** (1999), pp. 79–111.
- [App04] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, 2004.
- [AQV94] M. Akian, J.-P. Quadrat and M. Viot, “Bellman processes”, *11th International Conference on Analysis and Optimization of Systems : Discrete Event Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences* **199** (1994).

- [AS95] F. Ait-Sahlia, *Optimal stopping and weak convergence methods for some problems in financial economics*, Ph.d. dissertation, Stanford University, 1995.
- [AY79] J. Azéma and M. Yor, “Une solution simple au problème de Skorohod”, Séminaire de probabilités de Strasbourg **13** (1979), pp. 90–115.
- [Bas83] R.F. Bass, “Skorohod embedding via stochastic integrals”, Séminaire de probabilités de Strasbourg **17** (1983), pp. 221–224.
- [BBRS95] G. Barles, J. Burdeau, M. Romano and N. Sansoen, “Critical stock price near expiration”, *Mathematical Finance* **5** (1995), pp. 77–95.
- [BC79] P. Bernhard and G. Cohen, “On the rationality of some decision rules in a stochastic environment”, *IEEE Transactions on Automatical Control* **AC-24** (1979), no. 5.
- [BCJ03] E. N. Barron, P. Cardaliaguet and R. Jensen, “Conditional essential suprema with applications”, *Applied Mathematics and Optimization* **48** (2003), no. 3, pp. 229–253.
- [BCOQ92] F. Baccelli, G. Cohen, G. Olsder and J. Quadrat, *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*, Wiley and Sons, 1992.
- [BEBD<sup>+</sup>06] C. Barrera-Esteve, F. Bergeret, C. Dossal, E. Gobet, A. Meziou, R. Munos, and D. Reboul-Salze, “Numerical methods for the pricing of Swing options : a stochastic control approach”, *Methodology and Computing in Applied Probability* **8** (2006), no. 4, pp. 517–540.
- [Ber95] D. P. Bertsekas, *Dynamic programming and optimal control. Vol. 1 and 2.*, Belmont, MA : Athena Scientific, 1995.
- [BJ87] F. Black and R. Jones, “Simplifying portfolio insurance”, *Journal of Portfolio Management* **14** (1987), no. 1, pp. 48–51.
- [BK04] P. Bank and N. El Karoui, “A stochastic representation theorem with applications to optimization and obstacle problems”, *The Annals of Probability* **32** (2004), no. 1B, pp. 1030–1067.
- [Bl03] P. Bank and H. Föllmer, “American options, multi-armed bandits and optimal consumption plans : A unifying view”, *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2002*, *Lecture Notes in Mathematics* **1814** (2003), pp. 1–42.
- [BMP90] A. Benveniste, M. Metivier and P. Priouret, *Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Bra93] H. Braker, *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*, Phd thesis, Delft University of Technology, 1993.

- [BS78] D. P. Bertsekas and S. E. Shreve, “Stochastic optimal control. The discrete time case” in *Mathematics in Science and Engineering*, vol. 139, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [Car79] B.A. Carré, *Graphs and Networks*, Oxford University Press, 1979.
- [CC03] J. Chadam and X. Chen, “Analytical and numerical approximations for the early exercise boundary for American Put options”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A : Mathematical Analysis* **10** (2003), no. 5, pp. 640–660.
- [CCS01] J. Chadam, X. Chen and R. Stamicar, “The optimal exercise boundary for American Put options : analytical and numerical approximations”, University of Pittsburgh preprint (2001).
- [CDQV83] G. Cohen, D. Dubois, J. Quadrat and M. Viot, “Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des diodes”, Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France (1983).
- [CDQV85] ———, “A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing”, *IEEE Trans. on Automatic Control* **AC-30** (1985), pp. 210–220.
- [CG79] R. Cuninghame-Green, *Minimax Algebra*, Number 166 in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, 1979.
- [CGQ99] G. Cohen, S. Gaubert and J.-P. Quadrat, “Max-Plus algebra and system theory : Where we are and where to go now”, *Annual Reviews in Control* **23** (1999), pp. 207–219.
- [CH05] A.M.G. Cox and D.G. Hobson, “A unifying class of Skorohod embeddings : connecting the Azéma-Yor and vallois embeddings”, *ArXiv math.PR/0506040* (2005).
- [CK95] J. Cvitanic and I. Karatzas, “On portfolio optimization under draw-down constraints”, *IMA in Mathematics and its Applications* **65** (1995), pp. 35–46.
- [CKR84] Z.Q. Cao, K.H. Kim and F.W. Roush, *Incline Algebra and Applications*, Ellis Horwood, 1984.
- [Coh95] G. Cohen, *Théorie algébrique des systèmes à événements discrets*, Polycopié de cours. Centre Automatique et Systèmes, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau & INRIA, Rocquencourt, 1995.
- [CSK01] L. Clewlow, C. Strickland and V. Kaminski, “Valuation of swing contracts”, Technical report, Energy Power Risk Management, Risk Waters Group (2001).



- [CT04] R. Cont and P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2004.
- [CUZ05] A. Chekhlov, S. Uryasev and M. Zabarankin, “Drawdown measure in portfolio optimization”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **8** (2005), pp. 13–58.
- [CW76] R. Chacon and J.B. Walsh, *One dimensional potential embedding*, Séminaire de Probabilités, X, Lecture Notes in Math., vol. 511, Springer, Berlin, 1976, pp. 19–23.
- [Del72] C. Dellacherie, *Capacités et Processus Stochastiques*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1972.
- [Del90] ———, “Théorie des processus de production. modèles simples de la théorie du potentiel non linéaire”, Séminaire de Probabilités XXV, Lecture Notes in Mathematics (1990), no. 1426, pp. 52–104.
- [DLT72] D. A. Darling, T. Liggett and H. M. Taylor, “Optimal stopping for partial sums”, *Annals of Mathematical Statistics* **43** (1972), no. 4, pp. 1363–1368.
- [DM87] C. Dellacherie and P. Meyer, *Probabilités et Potentiel, Chapitre VI : Théorie des Martingales : Martingales en Temps Continu*, Hermann, Paris, 1987.
- [Dub68] L. Dubins, “On a theorem of Skorohod”, *Ann. Math. Statist.* **39** (1968), pp. 2094–2097.
- [EK99] J. Elliott and P. Ekkehard Kopp, *Mathematics of Financial Markets*, Springer Finance, 1999.
- [EKK02] J. D. Evans, R. J. Keller and R. Kuske, “American options on assets with dividends near expiry”, *Math. Finance* **12(3)** (2002), pp. 219–237.
- [Fle04] W. H. Fleming, “Max-Plus stochastic processes”, *Applied Mathematics and Optimization* **49** (2004), no. 2, pp. 159–181.
- [FM03] J. Fajardo and E. Mordecki, *Put-call duality and symmetry*, Finance Lab Working Papers 54, Finance Lab, Ibmecc São Paulo, October 2003.
- [FW84] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems*, Springer-Verlag, 1984.
- [Gau99] S. Gaubert, *Introduction aux systèmes dynamiques à événements discrets*, Polycopié de cours ENSTA–ENSMP–Orsay (DEA ATS), 1992 (révisé en 1999).
- [Gay04] J. P. Gayant, “Rôle de la transformation des probabilités dans la combinaison d’actifs risqués”, *Annales d’économie et de statistique* (2004), no. 73, pp. 141–155.

- [GL96] G. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix computations. 3rd ed*, Baltimore, MD : The Johns Hopkins Univ. Press. xxvii, 694 p., 1996.
- [GM84] M. Gondran and M. Minoux, “Linear algebra in dioids : a survey of recent results”, *Annals of Discrete Mathematics* **19** (1984), pp. 147–164.
- [GM95] L. Galtchouk and T.P. Mirochnitchenko, “Optimal stopping problem for continuous local martingales and some sharp inequalities”, *Strasbourg : IRMA, Prepubl. IRMA, 1995/25* (1995).
- [GM05] E. Gobet and R. Munos, “Sensitivity analysis using itô-malliavin calculus and martingales. application to stochastic control problem”, *SIAM Journal on Control and Optimization* **43(5)** (2005), pp. 1676–1713.
- [GZ93] S.J. Grossmann and Z. Zhou, “Optimal investment strategies for controlling drawdowns”, *Mathematical Finance* **3** (1993), pp. 241–276.
- [Hay94] S. Haykin, *Neural Networks : A Comprehensive Foundation*, McMillan, New York, 1994.
- [Jac78] J. Jacod, “Projection prévisible et décomposition multiplicative d’une semi-martingale positive”, *Université de Strasbourg - Séminaire de Probabilités (1977/78)*.
- [Jam04] F. Jamshidian, “Numeraire-invariant option pricing and American, bermudan and trigger stream rollover”, Working Paper, NIB Capital Bank (July 2004).
- [JH63] G. Johnson and L.L. Helms, “Class (d) supermartingales”, *Bulletin of the AMS* **69** (1963), pp. 59–62.
- [JRT04] P. Jaillet, E.I. Ronn and S. Tompaidis, “Valuation of commodity-based swing options”, *Management Science* **50** (2004), pp. 909–921.
- [Kar81] N. El Karoui, *Les Aspects Probabilistes du Contrôle Stochastique. Ecole d’Eté de Probabilités de Saint-Flour IX-1979*, Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, New-York, 1981.
- [Kar88] I. Karatzas, “On the pricing of American options”, *Applied Mathematics and Optimization* **17(1)** (1988), pp. 37–60.
- [KJP98] N. El Karoui and M. Jeanblanc-Picqué, “Optimization of consumption with labor income”, *Finance and Stochastics* **2** (1998), no. 4, pp. 409–440.
- [KJPL05] N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picqué and V. Lacoste, “Optimal portfolio management with American capital guarantee”, *Journal of Economic Dynamics and Control* **29** (2005), pp. 449–468.

- [KJPS98] N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picqué and S. E. Shreve, “Robustness of the Black-Scholes formula”, *Mathematical Finance* **8** (1998), no. 2, pp. 93–126.
- [KK95] N. El Karoui and I. Karatzas, “The optimal stopping problem for a general American put-option”, *Mathematical Finance* (1995), pp. 63–74.
- [Kl05] N. El Karoui and H. Föllmer, “A non-linear Riesz representation in probabilistic potential theory”, *Ann. Ins. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **41** (2005), no. 3, pp. 269–283.
- [KM06a] N. El Karoui and A. Meziou, “Constrained optimization with respect to stochastic dominance : application to portfolio insurance”, *Mathematical Finance* **16** (2006), no. 1, pp. 103–117.
- [KM06b] ———, “Max-plus decomposition of supermartingales and convex order. application to American options and portfolio insurance”, submitted to *Annals of Probability* (2006).
- [KQ95] N. El Karoui and M. C. Quenez, “Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market”, *SIAM Journal of Control and Optimization* **33(1)** (1995), pp. 29–66.
- [Kra96] D. O. Kramkov, “Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets”, *Probability Theory and Related Fields* **105** (1996), pp. 459–479.
- [KS91] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New-York, 1988, 1991.
- [Ks93] R. P. Kertz and U. Rösler, “Hyperbolic-concave functions and Hardy-Littlewood maximal functions”, *Stochastic Inequalities, IMS Lecture Notes-Monograph Series* **22** (1993), pp. 196–210.
- [KS98] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [KW77] N. El Karoui and G. Weidenfeld, *Théorie générale et changement de temps*, Séminaire de Probabilités de Strasbourg, vol. 11, Springer Verlag, 1977, pp. 79–108.
- [KY91] H.J. Kushner and J. Yang, “A Monte Carlo method for sensitivity analysis and parametric optimization of nonlinear stochastic systems”, *SIAM J. Control Optim.* **29(5)** (1991), pp. 1216–1249.
- [KY97] H.J. Kushner and G. Yin, *Stochastic Approximation Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1997.

- [Lam95] D. Lamberton, *Critical price for an American option near maturity*, Seminar on Stochastic Analysis (E. Bolthausen, M. Dozzi and F. Russo, eds.), vol. 36, Progress in Probability. Birkäuser, Boston, 1995, pp. 353–358.
- [Leh77] J. Lehoczky, “Formulas for stopped diffusion processes, with stopping times based on the maximum”, *Ann. Probability* **5** (1977), pp. 601–608.
- [IK06] H. Föllmer and T. Knispel, “Potentials of a markov process are expected suprema”, to appear in *ESAIM Probability and Statistics, Stochastic Analysis and Mathematical Finance* (in honor of Nicole El Karoui’s 60th birthday) (2006).
- [LLSW01] A. Lari-Lavassani, M. Simchi and A. Ware, “A discrete valuation of Swing options”, *Canadian Applied Mathematics Quarterly* **9(1)** (2001), pp. 35–74.
- [LMQ01] P. Lolito, E. Mancinelli and J.-P. Quadrat, “A minplus derivation of the fundamental car-traffic law”, Report 324, INRIA (2001).
- [lr01] A. Müller and L. Ruschendorf, “On the optimal stopping values induced by general dependence structures”, *Journal of Applied Probability* **38** (2001), no. 3, pp. 672–684.
- [LS01] F. Longstaff and E.S. Schwartz, “Valuing American options by simulation : A simple least squares approach”, *The Review of Financial Studies* **14** (2001), pp. 113–147.
- [IS02] H. Föllmer and A. Schied, *Stochastic Finance*, de Gruyter Studies in Mathematics, Berlin, New York, 2002.
- [LT02] J.-Y. LeBoudec and P. Thiran, *Network Calculus*, Springer Verlag, 2002.
- [LV03] D. Lamberton and S. Villeneuve, “Critical price for an American option on a dividend-paying stock”, *Ann. Appl. Prob.* **13** (2003), pp. 800–815.
- [Mar52] H. Markowitz, “Portfolio selection”, *Journal of Finance* **7** (1952), pp. 77–91.
- [Mar59] ———, *Portfolio selection : Efficient diversification of investment*, John Wiley and Sons, New York, 1959.
- [MD99] P. Del Moral and M. Doisy, “Maslov idempotent probability calculus”, *Theory of Probability and Its Applications* **43** (1999), pp. 562–576.
- [Mem78] J. Memin, “Décompositions multiplicatives de semi-martingales exponentielles et applications”, *Université de Strasbourg - Séminaire de Probabilités* (1977/78).

- [Mey73] P. A. Meyer, “Une représentation de surmartingales”, Université de Strasbourg - Séminaire de Probabilités (1972/73).
- [Mil99] P. Milgrom, *The envelope theorems*, Working Papers 99016, Stanford University, Department of Economics, 1999, available at <http://ideas.repec.org/p/wop/stanec/99016.html>.
- [Mir79] T.P. Mirochnitchenko, “Testing of two simple hypothesis in the presence of delayed observations”, *Th. Proba. App.* **24** (1979).
- [Mor01] E. Mordecki, “Elementary proofs on optimal stopping”, *Prepublicaciones de Matemática de la Universidad de la República* (2001).
- [Mor02] ———, “Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes”, *Finance and Stochastics* **VI** (2002), no. 4, pp. 473–493.
- [MvN44] O. Morgenstern and J. von Neumann, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.
- [MvN47] ———, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 2nd Edition, 1947.
- [Obl05] J. Obloj, *The Skorohod embedding problem and some families of Brownian martingales*, Doctoral thesis, University Pierre et Marie Curie Paris 6 and University of Warsaw, 2005.
- [OSM98] G. Olsder, Subiono and Gettrick M. M., “Course notes : On large scale max-plus algebra model in railway systems”, *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique*, Ecole de printemps d’informatique théorique (1998).
- [PS88] A. Perold and W. Sharpe, “Dynamic strategies for asset allocation”, *Financial Analyst Journal* (1988), pp. 16–27.
- [Puh01] A. Puhalskii, *Large Deviations and Idempotent Probability*, Chapman and Hall CRC Press, May 2001.
- [Qua98] J.-P. Quadrat, “Min-Plus probability calculus”, *Actes 26ème Ecole de Printemps d’Informatique Théorique*, Noirmoutier (1998).
- [RI01] S. Raikar and M. Ilić, “Interruptible physical transmission contracts for congestion management”, *Power engineering society summer meeting*, *IEEE* **3** (2001), pp. 1639–1646.
- [Roc06] H. Roche, “Optimal consumption and investment under a drawdown constraint”, *Preprint* (2006).
- [Rog02] L. C. G. Rogers, “Monte Carlo valuation of American options”, *Mathematical Finance* **12** (2002), pp. 271–286.

- [Roo69] D.H. Root, “The existence of certain stopping times on Brownian motion”, *Ann. Math. Statist.* **40** (1969), no. 2, pp. 715–718.
- [RS70] M. Rothschild and J.E. Stiglitz, “Increasing risk, I : A definition”, *Journal of Economic Theory* **2(3)** (1970), pp. 225–243.
- [RW94] L.C.G. Rogers and D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol.1*, Wiley, Chichester, 1994.
- [Sat99] K. I. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press : Cambridge, UK, 1999.
- [Sch03] W. Schoutens, *Lévy Processes in Finance*, Wiley Series in Probability and Statistics, 2003.
- [SS94] M. Shaked and J. G. Shanthikumar, *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [Tho95] A.C. Thompson, “Valuation of path-dependent contingent claims with multiple exercise decisions over time : the case of Take-or-Pay”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **30** (1995), pp. 271–293.
- [Val83] P. Vallois, *Le problème de Skorohod sur  $\mathbb{R}$  : une approche avec le temps local*, Séminaire de Probabilités, XVII, Lecture Notes in Math., vol. 986, Springer-Berlin, 1983, pp. 227–239.
- [Vil99] S. Villeneuve, *Options Américaines dans un modèle de Black-Scholes multi-dimensionnel*, Doctoral dissertation, Université de Marne-la-Vallée, 1999.
- [Whi80] P. Whittle, “Multi-armed bandits and the Gittins index”, *Journal of the Royal Statistical Society Series B, Methodological* **42(2)** (1980), pp. 143–149.