



Commande des plateformes avancées de simulation de conduite

Hatem Elloumi

► To cite this version:

Hatem Elloumi. Commande des plateformes avancées de simulation de conduite. domain_other. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2006. Français. NNT: . pastel-00002213

HAL Id: pastel-00002213

<https://pastel.hal.science/pastel-00002213>

Submitted on 4 May 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité

ROBOTIQUE, AUTOMATIQUE & INFORMATIQUE TEMPS RÉEL

Commande des plates-formes avancées de simulation de conduite

Présentée par : **Hatem ELLOUMI**

Soutenue le 12/10/2006 devant la Commission d'examen composée de :

Nadia Maïzi	co-directeur de thèse
Marc Bordier	co-directeur de thèse
Mekki Ksouri	rapporteur
Bernard Espiau	rapporteur
Stéphane Espié	examineur

A ma mère, à mon père

Remerciements

J'adresse mes sincères et chaleureux remerciements à ma directrice de thèse, Nadia Maïzi, pour sa disponibilité et tous les conseils qu'elle m'a prodigués tant au niveau professionnel qu'au niveau personnel, ainsi que pour sa sympathie et sa compréhension vis-à-vis de la maladie de ma mère.

Mes remerciements les plus chaleureux sont également destinés à Marc Bordier pour sa disponibilité, ses encouragements, et toutes les critiques constructives dont il m'a fait part.

Je remercie Yves Rouchaleau, mon professeur d'option, pour m'avoir donné le goût de l'Automatique et pour m'avoir facilité l'accès au CMA.

Je remercie également tous les membres du jury d'avoir pris la peine d'évaluer ma thèse. J'en suis très honoré. Je tiens à remercier tout spécialement Messieurs Bernard Espiau et Mekki Ksouri qui ont très volontiers accepté d'être rapporteurs.

Je remercie les autres permanents du CMA, Jean Paul Marmorat pour avoir patiemment répondu à mes questions, Rémi Draï pour les discussions passionnantes sur le débat interreligieux et sur l'avenir de la recherche, Valérie Roy pour ses encouragements, sa bonne humeur et pour m'avoir permis d'encadrer ses TPs, Gilles Guerassimoff, pour sa grande gentillesse et ses nombreuses aides. Enfin, last but not least, je remercie chaleureusement Dominique Micollier pour sa gentillesse, sa grande disponibilité et son excellent couscous aux boulettes.

Je remercie mes collègues pour leur sympathie et leur gentillesse. Je n'oublierai pas les discussions philosophiques d'Edi, les gâteaux italiens et les chocolats de Damiana, les discussions scientifiques engagées de Mehmet, la bonne humeur de Jan et de Lionel.

Je remercie tous mes amis qui m'ont soutenu de près ou de loin durant ces quatre années de thèse et tout spécialement Gaddour.

Je remercie ma famille et plus particulièrement tous mes frères et leurs conjointes pour s'être occupé de ma mère pendant mon absence et pour leur soutien moral indéfectible.

Il m'est bien évidemment impossible de ne pas citer la grande découverte de la fin de ma thèse qui m'a aidé à dépasser le stress de la soutenance et qui je l'espère m'aidera à affronter les difficultés de la vie.

Je termine par un grand remerciement à mes parents auxquels je dédie mon mémoire de thèse.

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	Composition d'un simulateur de conduite	11
1.2	La perception de conduite	12
1.3	La restitution inertielle	14
1.3.1	Le contrôle des simulateurs de conduite	15
1.3.2	Les difficultés de la restitution inertielle	16
1.3.3	Discussions et contributions	17
2	Cadre général de la simulation de conduite	19
2.1	Avantages et applications des simulateurs de conduite	19
2.1.1	L'étude et l'amélioration de la sûreté	19
2.1.2	La recherche	20
2.1.3	L'aide à la conception	20
2.1.4	L'apprentissage	20
2.2	Classification des simulateurs de conduite	20
2.3	Problématiques liés à la mise en oeuvre d'un simulateur	21
2.4	Validation de la simulation	24
2.4.1	Méthodes qualitatives	24
2.4.2	Méthodes quantitatives	24
2.5	Historique : de la simulation de vol à la simulation de conduite	24
2.5.1	La simulation de vol	25
2.5.2	La simulation de conduite	27
2.6	Simuler la conduite versus simuler le vol	31
2.7	Conclusion	32
3	La perception de mouvement propre	33
3.1	Le système vestibulaire	33
3.1.1	Les organes otolithiques : utricule et saccule	33
3.1.1.1	Description anatomique et physiologique	35
3.1.1.2	Spécificités des organes otolithiques	38
3.1.1.3	Modélisation mathématique	38
3.1.2	Les canaux semi-circulaires	42
3.1.2.1	Spécificités des canaux semi-circulaires	43
3.1.2.2	Modélisation mathématique	43
3.2	Les yeux	44
3.3	Modèles d'interaction visio-vestibulaire	46
3.3.1	Motivations	46
3.3.2	Modèle fusionnel de [Van der Steen, 1998]	47
3.3.2.1	Contribution vestibulaire au mouvement propre	48
3.3.2.2	Contribution visuelle au mouvement propre	48

3.3.2.3	Sensation visio-vestibulaire	48
3.3.3	Modèle conflictuel de [Telban et Cardullo, 2001]	48
3.3.4	Modèle conflictuel de [Zacharias et Young, 1981]	49
3.4	Conclusion	50
4	Modélisation du mécanisme de mouvement dans les simulateurs de conduite	52
4.1	Introduction aux robots parallèles	52
4.1.1	Les robots parallèles versus les robots séries	53
4.1.2	Nomenclature et type d'articulations	54
4.2	Architecture d'un robot de type Gough-Stewart	54
4.3	Étude géométrique de l'hexapode	55
4.3.1	Notations	55
4.3.2	Préliminaires	55
4.3.3	Modèle Géométrique Inverse (MGI)	58
4.3.4	Représentation algébrique du vecteur de Plücker	60
4.3.5	Singularités	60
4.3.6	Modèle Géométrique Direct (MGD)	61
4.3.7	Espace de travail	62
4.4	Modélisation dynamique des robots parallèles	62
4.4.1	Principe général de la méthode d'Euler Lagrange	63
4.4.2	Propriétés du modèle dynamique	63
4.4.3	Définition complète du modèle dynamique	64
4.4.4	Linéarité de la méthode de Lagrange	64
4.4.5	Application aux simulateurs de conduite	64
4.4.5.1	Hypothèses générales de modélisation	65
4.4.5.2	Les différents modèles des simulateurs de conduite	65
4.5	Modélisation dynamique de la plate-forme de Gough-Stewart (base fixe)	65
4.5.1	Lagrangien de la plate-forme mobile	65
4.5.2	Lagrangien d'une jambe : représentation ponctuelle	66
4.5.3	Lagrangien d'une jambe : représentation élaborée	67
4.5.4	Synthèse des modèles du robot parallèle	69
4.6	Modélisation dynamique d'un simulateur à base mobile sur rails XY	70
4.6.1	Lagrangien du système de translation	70
4.6.2	Lagrangien de la plate-forme mobile	71
4.6.3	Lagrangien d'une jambe : représentation ponctuelle	71
4.6.4	Lagrangien d'une jambe : représentation élaborée	71
4.6.5	Synthèse des modèles avec rails XY	72
4.7	Modélisation dynamique du simulateur Nads	72
4.7.1	Lagrangien du dôme	73
4.7.2	Modèle général	73
4.8	Conclusion	74
4.9	Annexe 1 : Modèle dynamique	75
4.9.1	Plate-forme mobile	75
4.9.2	Représentation ponctuelle d'une jambe	75
4.9.3	Représentation élaborée d'une jambe	78
4.9.4	Simulateur basé sur des rails XY	80
4.9.4.1	Représentation ponctuelle d'une jambe	80
4.9.4.2	Représentation élaborée d'une jambe	80
4.10	Annexe 2 : Généralités	81
4.10.1	Application antisymétrique	81
4.10.2	Dérivée de la matrice de rotation	81

4.10.3	Modèle dynamique d'un système mécanique	82
5	Algorithmes de Restitution Inertielle	84
5.1	L'approche classique	87
5.1.1	Principe général	87
5.1.2	Analyse	88
5.1.3	Utilisation de la redondance (rails XY,...)	88
5.2	L'approche adaptative coordonnée	89
5.2.1	Principe général	90
5.2.1.1	Le mode longitudinal adaptatif (sans coordination)	90
5.2.1.2	L'approche adaptative coordonnée	90
5.2.1.3	Généralisation et résolution	91
5.2.2	Analyse	92
5.3	L'approche optimale	93
5.3.1	Principe général	93
5.3.2	Résolution	95
5.3.3	Analyse	96
5.4	L'approche prédictive	96
5.4.1	Principe général	97
5.4.1.1	Le problème sur l'horizon glissant	97
5.4.1.2	Analyse du problème à horizon glissant	97
5.4.2	Retour en position neutre	98
5.4.3	Variations de l'approche	98
5.4.4	Analyse	98
5.5	Analyse générale des les ARIs	99
5.6	L'optimisation <i>ex-ante</i>	100
5.6.1	Contraintes de l'optimisation	100
5.6.2	La métrique géométrique	101
5.6.3	La métrique de vol	101
5.6.4	L'homme comme mesure de performance	101
5.7	Les algorithmes de limitation	102
5.7.1	Préliminaires	102
5.7.2	La limitation en position : filtrage adapté	103
5.7.3	Analyse	104
5.8	Conclusion	104
6	Performance optimale d'un simulateur de conduite	105
6.1	Commande optimale continue	105
6.1.1	Principe général	105
6.1.2	Résolution théorique	106
6.1.2.1	Préliminaires	106
6.1.2.2	Formalisation	108
6.1.2.3	Équations d'Euler Lagrange	108
6.1.3	Analyse	109
6.1.4	Simulations	109
6.1.4.1	Scénario	109
6.1.4.2	Résultats de l'ARI Optimal	110
6.1.4.3	Résultats de la commande optimale	110
6.2	Algorithme de Performance Maximale	111
6.2.1	Préliminaires	111
6.2.2	Formalisation	112

6.2.3	Analyse	113
6.2.4	Indicateur de performance	113
6.2.5	Simulations	113
6.2.6	Indicateur d'allure	114
6.2.7	Extension : la redondance des rails	115
6.2.7.1	Simulation	116
6.2.7.2	Analyse	116
6.2.8	Variations de l'APM	116
6.2.8.1	APM causal	116
6.2.8.2	APM allure	117
6.2.9	Conclusion sur les simulations	118
6.3	Applications	119
6.3.1	Discriminateur de redondance	119
6.3.1.1	Simulations pour l'étude de la redondance	119
6.3.2	Calibrage de l'ARI et du robot de simulation	121
6.3.2.1	Optimisation de la structure mécanique du simulateur	121
6.3.2.2	Optimisation des ARIs	122
6.4	Conclusion	122
6.5	Annexe	122
6.5.1	Calcul des équations adjointes	122
6.5.2	Les contraintes des problèmes d'optimisation	123
6.5.3	Les paramètres du robot de simulation	123
6.5.4	Courbes commentées des simulations	124
7	La commande par couple calculé, une formalisation englobante	144
7.1	Le modèle du robot	145
7.1.1	Propriétés du modèle dynamique	145
7.2	Principe général	146
7.2.1	Connaissance parfaite du modèle	146
7.2.2	Connaissance imparfaite du modèle	147
7.2.3	Formalisation du problème	147
7.3	La formalisation englobante	148
7.3.1	Classification préliminaire	148
7.3.2	Formalisation mathématique	148
7.3.2.1	Dérivation de V_1 et V_2	149
7.3.2.2	Exemples	149
7.4	Le choix vivant	150
7.4.1	Résultat originel de robustesse	150
7.4.2	Première extension : utilisation de la caractérisation spectrale	150
7.4.3	Deuxième extension : le théorème du choix vivant	150
7.5	Démonstration du théorème du choix vivant	151
7.5.1	Schéma de la preuve générale	151
7.5.2	Preuve du lemme 1	152
7.5.2.1	Résultat 1 : Coefficients B_{ij} constants	153
7.5.2.2	Résultat 2 : B_{ij} étagées	155
7.5.2.3	Résultat 3 : B_{ij} forme générale	155
7.5.3	Preuve du corollaire 1	155
7.5.4	Preuve du corollaire 2	156
7.5.5	Preuve du lemme 2	156
7.5.6	Observation sur la condition de proportionalité (H2)	157
7.6	Autres exemple	157

7.6.1	Terme de glissement (sliding)	157
7.6.2	Résultat de [Qu et Dawson, 1996]	158
7.6.2.1	Lemme de stabilité	158
7.6.2.2	Le résultat	159
7.7	Conclusion	159
8	ARI Hybride pour les simulateurs redondants	160
8.1	Préliminaires	160
8.1.1	Traitement préliminaire des translations	160
8.1.2	Modèle du robot de simulation	161
8.1.3	Les contraintes de mouvement	161
8.1.4	Le type de freinage	161
8.1.5	Le mouvement de retour	162
8.2	ARI Hybride Symétrique	162
8.2.1	Présentation de l'algorithme	163
8.2.2	Remarques	164
8.2.3	Simulations	166
8.3	ARI Hybride Maître/Esclave	166
8.3.1	Présentation de l'algorithme	170
8.3.2	Remarques	170
8.3.3	Simulations	170
8.4	Conclusion	171
	Bibliographie	180

Liste des tableaux

1.1	Correspondance entre le simulateur (excitation) et l'Homme (réception)	14
2.1	Tableau comparatif des enveloppes de mouvement des robots de simulation basés sur un hexapode (à l'exception de VTI)	22
2.2	Tableau comparatif (suite) des bandes passantes des hexapodes et du système de rails correspondants	22
3.1	Quelques filtres otolithiques	41
3.2	Quelques filtres canaux	44
4.1	Les articulations et leur nomenclature (Nb ddl signifie le nombre de degrés de liberté) .	54
5.1	Tableau comparatif des ARIs (✓ : oui, ~ : incertain et vide : non)	99
6.1	Tableau comparatif des performances	119
6.2	Tableau comparatif des IPs : scénario 1	124
6.3	Tableau comparatif <i>normalisé</i> des IPs : scénario 1	125
6.4	Tableau comparatif des IPs : scénario 2	125
6.5	Tableau comparatif <i>normalisé</i> des IPs : scénario 2	125
6.6	Tableau comparatif des IPs : scénario 3	125
6.7	Tableau comparatif des IPs <i>normalisés</i> : scénario 3	125

Table des figures

1.1	Boucle d'un scénario de conduite	12
1.2	Structure d'un simulateur avancé [Deyo et al., 1988]	13
1.3	La structure du problème de restitution inertielle	14
1.4	Architecture d'un robot de type Gough-Stewart	15
1.5	Les blocs constituant l'algorithme de contrôle du simulateur	15
2.1	Simona - TU Delft	27
2.2	Simulateurs de Renault. (Gauche) 6 d.d.l. simulateur dynamique, (Droite) Simulateur Ultimate (monté sur des rails XY)	30
3.1	Le système vestibulaire (et sa position dans le crâne)	34
3.2	Le système vestibulaire : schéma récapitulatif de la structure des organes otolithiques (droite) et des canaux semi-circulaires (gauche)	34
3.3	Structure d'un organe otolithique	35
3.4	Mécanisme de perception otolithique : du mouvement de la tête à l'influx nerveux (les cas d'une accélération et d'un freinage linéaires)	36
3.5	Mécanisme de mouvement des otolithes	37
3.6	Mécanisme de tilt coordination	37
3.7	Structure et mécanisme canalaire (le cas du canal horizontal, A : tête au repos, B : tête en rotation)	42
3.8	Structure générale de l'interaction visio-vestibulaire	47
3.9	Structure générale du gain conflictuel	49
3.10	Structure générale du gain conflictuel de [Zacharias et Young, 1981]	51
4.1	Les simulateurs basés sur le robot de type Gough-Stewart	52
4.2	Probablement, le premier mécanisme spatial (breveté en 1931 USA)	53
4.3	Plate-forme de Gough, 1947	53
4.4	Architecture de la plate-forme de Gough-Stewart	54
4.5	Exemple d'une plate-forme de Gough-Stewart	55
4.6	Architecture de l'hexapode	56
4.7	Modélisation d'une jambe	66
4.8	Base mobile sur des rails XY (Simulateur Ultimate, Renault)	70
5.1	Localisation de l'ARI dans la chaîne de simulation	85
5.2	Les directions de l'espace	87
5.3	ARI Classique	88
5.4	ARI de la NADS	89
5.5	ARI Optimal	93
5.6	Calibration par le modèle de l'Homme	102
6.1	Accélération de référence réelle et perçue	108

6.2	Résultats de l'ARI optimal	110
6.3	Résultats de la commande optimale	111
6.4	Résultats de l'APM	114
6.5	Résultats de l'APM avec rails	116
6.6	Résultats de l'APM causal (avec rails)	117
6.7	Résultats de l'APM allure (avec rails)	118
6.8	scénario 1, tous les degrés de liberté	126
6.9	scénario 1, hexapode (tilt et translation)	127
6.10	scénario 1, rail X et tilt	128
6.11	scénario 1, Rail X et translation de l'hexapode	129
6.12	scénario 1, rail X	130
6.13	scénario 1, translation de l'hexapode	130
6.14	scénario 1, tilt	131
6.15	scénario 2, tous les degrés de liberté	132
6.16	scénario 2, hexapode (tilt et translation)	133
6.17	scénario 2, rail X et tilt	134
6.18	scénario 2, Rail X et translation de l'hexapode	135
6.19	scénario 2, rail X	136
6.20	scénario 2, translation de l'hexapode	137
6.21	scénario 2, tilt	137
6.22	scénario 3, tous les degrés de liberté	138
6.23	scénario 3, hexapode (tilt et translation)	139
6.24	scénario 3, rail X et tilt	140
6.25	scénario 3, Rail X et translation de l'hexapode	141
6.26	scénario 3, rail X	142
6.27	scénario 3, translation de l'hexapode	142
6.28	scénario 3, tilt	143
8.1	Traitement préliminaire pour chaque degré de liberté : X et x	161
8.2	Zone libre (freinage parabolique) : Hexapode	162
8.3	Zone libre (freinage parabolique) : Rail	162
8.4	Hexapode : Rapport zone libre/zone théorique en fonction de l'accélération de freinage (Pour α_{seuil} le rapport est de 40.82%)	163
8.5	ARI Hybride Symétrique	164
8.6	Le schéma Simulink de l'Algorithme Hybride Symétrique	165
8.7	Les modes propres : rail et hexapode (ARI symétrique)	167
8.8	Haut : Accélération réelle et Accélération du simulateur ; Bas : Angle de tilt (ARI symétrique)	167
8.9	Les accélérations : rail et hexapode (ARI symétrique)	168
8.10	Déplacement et vitesse des rails (ARI symétrique)	168
8.11	Déplacement et vitesse de l'hexapode (ARI symétrique)	169
8.12	ARI Hybride Maître/Esclave	172
8.13	Le schéma Simulink de l'Algorithme Hybride Maître/Esclave	173
8.14	Les modes propres : rail et hexapode (ARI Maître/Esclave)	174
8.15	Haut : Accélération réelle et Accélération du simulateur ; Bas : Angle de tilt (ARI Maître/Esclave)	174
8.16	Les accélérations : rail et hexapode (ARI Maître/Esclave)	175
8.17	Déplacement et vitesse des rails (ARI Maître/Esclave)	175
8.18	Déplacement et vitesse de l'hexapode (ARI Maître/Esclave)	176

Chapitre 1

Introduction

The use of driving simulators is expanding
Introduction de la Driving Simulation Conference, 2004

Un simulateur est un dispositif physique et/ou informatique dont l'objet est de reproduire le plus fidèlement possible le comportement entrée-sortie d'un *système de référence* (réel). Définir un simulateur de conduite revient donc à caractériser son système de référence.

Au volant de son véhicule, le conducteur analyse en permanence des informations extraites de son *environnement de conduite* : scène visuelle, trajectoire, bruits, position du corps, etc. Chaque information est d'abord vécue comme une *stimulation sensorielle* au travers des organes perceptifs (yeux, oreilles, oreille interne, etc.). Ces organes transmettent ensuite ces stimulations au cerveau qui décide, enfin, des actions sur les pédales et le volant (voir Fig. 1.1).

Le système de référence que nous considérons associe aux *actions* du conducteur sur les pédales et le volant (entrées), la *perception psychologique* des changements de l'environnement de conduite (sorties).

Alors que le simulateur de conduite est essentiellement une architecture matérielle, la *simulation* rend compte des phénomènes sensoriels. Ainsi dans les deux sections qui vont suivre, nous répondons aux questions suivantes :

1. De quels outils dispose-t-on aujourd'hui pour simuler l'environnement de conduite ? Autrement dit, quels sont les *excitateurs* sensoriels ?
2. Comment perçoit-on ces excitations ? Ou : quels sont les *récepteurs* sensoriels ?

1.1 Composition d'un simulateur de conduite

De façon générale, les composants d'un simulateur de conduite se répartissent en deux groupes. Un premier groupe ("visible") qui contient les composants avec lesquels le conducteur interagit et qui ont une influence directe sur son comportement. On y distingue :

- *Le cockpit* : un intérieur semblable sinon identique à celui d'une vraie voiture (Fig. 1.2, n°1) incluant les commandes (volant, pédales,...).
- *Le système visuel* qui permet d'afficher les paysages de réalité virtuelle i.e. les scènes 3D, la route, le trafic routier,...
- *La plateforme (ou le mécanisme de mouvement)*¹ qui donne au cockpit son mouvement dans

¹Dans le cadre de la simulation de conduite, des études ont montré que pour les mouvements de hautes fréquences (accélérations et freinage rapides) l'utilisation du système inertiel est cruciale. Par exemple dans [Siegler et al., 2001], on montre que pour le freinage, la restitution inertielle évitait des décélérations non réalistes observées sur un simulateur avec cockpit immobile.

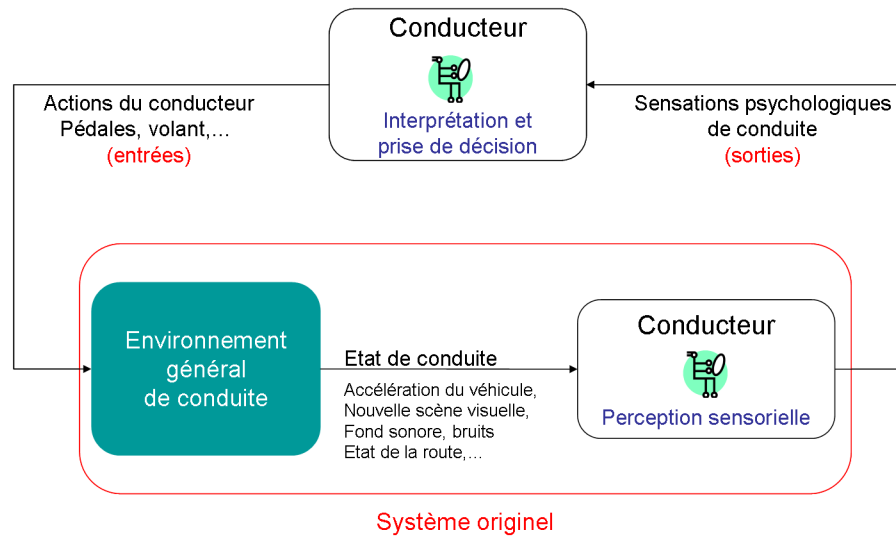


FIG. 1.1 – Boucle d’un scénario de conduite

l’espace. La plateforme de type Gough-Stewart (Fig.1.2, n°2) est le mécanisme le plus utilisé dans le domaine de la simulation².

- *Le système sonore* qui reproduit l’environnement sonore de la conduite : bruit du moteur, klaxons, crash, vent, grincement des roues,...

Le deuxième groupe (“caché”) englobe tous les composants absents de l’environnement de conduite réel. Ce sont :

- *Le modèle dynamique du véhicule* : il permet de calculer la réponse du véhicule suite à l’action du conducteur sur les commandes. Le comportement désiré du véhicule est ensuite traduit par le simulateur grâce aux quatre systèmes précédents. La qualité du modèle est un facteur déterminant du bon fonctionnement du simulateur.
- *Les unités de calculs et de contrôles* : ces unités englobent les algorithmes et les calculateurs.
- *Les appareils de mesure* : il s’agit des différents capteurs utilisés pour les expériences de conduite. Par exemple pour mesurer la concentration, on utilise des capteurs au niveau des yeux. Les indicateurs de l’émotion sont calculés à partir de capteurs du rythme respiratoire, de la tension artérielle, du réflexe psychogalvanique,...

Pour réaliser une bonne immersion du conducteur dans le monde virtuel de la simulation, les composants du deuxième groupe devront alimenter le groupe visible en informations et commandes adéquates (qui permettent de rendre *fidèlement* les sensations de conduite). Ceci nécessite la compréhension du mécanisme de perception.

1.2 La perception de conduite

Selon [Koekebakker, 2001] et [AGARD, 1980], la liste des principaux organes impliqués dans *la détection de mouvement propre* sont :

- *Les yeux*

Ils induisent *une illusion de mouvement propre* du conducteur par le phénomène de *vection*. La

²Les autres architectures sont présentées dans la section 2.2.

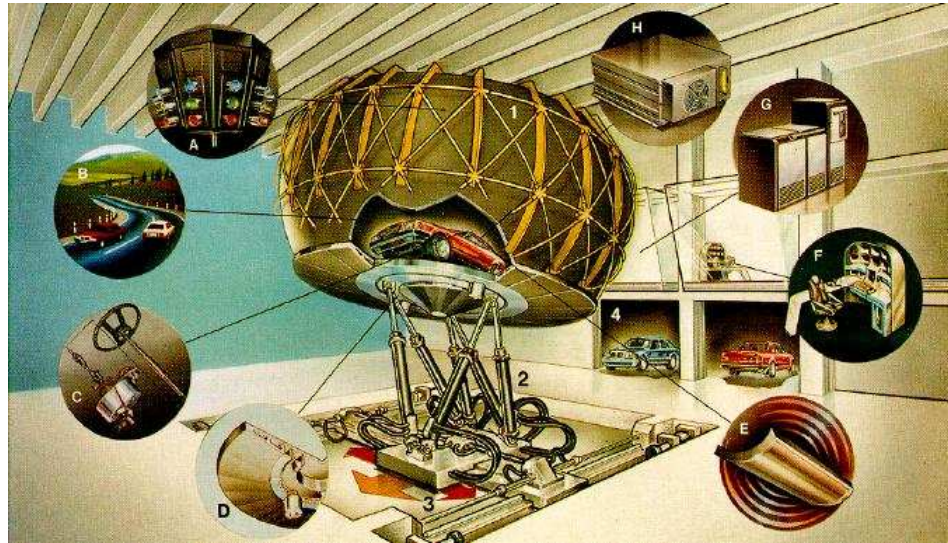


FIG. 1.2 – Structure d'un simulateur avancé [Deyo et al., 1988]

vection est typiquement la réaction qu'un sujet perçoit dans une gare ferroviaire lorsque dans un train arrêté, il observe un autre train qui amorce son mouvement. Dans cette situation, le sujet perçoit l'opposé de la réalité, c'est-à-dire, le mouvement de son propre train et l'arrêt de l'autre. La vection est caractérisée, entre autres, par un temps de latence qui varie fortement selon le sujet, la vitesse des objets et leur densité sur l'écran de réalité virtuelle, etc. Il y a deux types de vection : linéaire et circulaire qui correspondent aux types de mouvements des objets sur l'écran. Le temps de latence de la vection linéaire (1 à 3s) est inférieur au second (5 à 11s). Notons par ailleurs qu'un mouvement du corps confirmant la stimulation visuelle permet de réduire considérablement cette latence. Par ailleurs, on sait que la stimulation visuelle met en jeu d'une part la stimulation centrale (caractérisée par une grande acuité visuelle statique dans la zone fovéale) et d'autre part, la stimulation périphérique (qui correspond à la zone périphérique de la rétine et qui est caractérisée par une grande sensibilité au mouvement). L'étude de [Telban et Cardullo, 2001] montre l'importance de la stimulation périphérique par rapport à la stimulation centrale pour la vection et donc pour la simulation de conduite.

- *L'organe vestibulaire*

Localisé dans l'oreille interne, cet appareil biologique est le capteur de mouvement tridimensionnel (ou capteur inertiel). Il est composé de deux parties : *les canaux semi-circulaires* et *les otolithes*. Les premiers jouent le rôle d'un *gyroscope* qui permet de mesurer les mouvements angulaires. Les seconds mesurent les forces inertielles et la gravité. Ces deux composants sont caractérisés par des seuils de détection en dessous desquels, les mouvements sont imperceptibles. Ce sont typiquement des seuils de (5cm s^{-2}) et (0.3°s^{-2}) pour les otolithes et les canaux semi-circulaires (respectivement). Notons que ces seuils sont mesurés expérimentalement en l'absence d'une stimulation visuelle. Il existe dans la littérature plusieurs modèles linéaires pour ces organes (décrits dans le chapitre Perception de Mouvement).

- *Les organes proprioceptifs et kinesthésiques*

Ils fournissent des informations posturales en mesurant les positions relatives des différentes parties du corps, et en détectant les points de contact entre ces dernières et l'environnement extérieur (sol, mur, chaise, etc.).

- *Les capteurs tactiles ou somatosensoriels*

Ils permettent de mesurer des changements de forces appliquées au corps. Notons qu'ils sont

Simulateur (Excitation)	Homme (Réception)
Scène visuelle	Yeux
Cockpit	Org. proprioceptifs et capteurs tactiles
Système inertiel	Organe vestibulaire
Système sonore	Système auditif

TAB. 1.1 – Correspondance entre le simulateur (excitation) et l’Homme (réception)

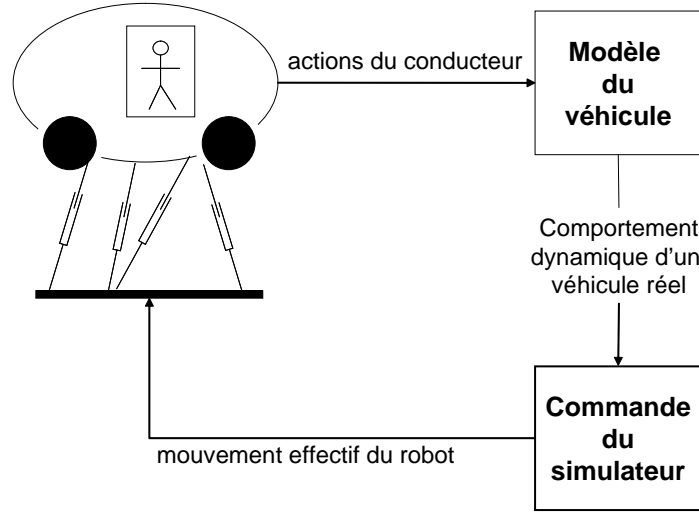


FIG. 1.3 – La structure du problème de restitution inertielle

sensibles aux hautes fréquences (en particulier les bouts de doigts). Le tableau 1.1 met en évidence la correspondance entre les composants visibles d’un simulateur (excitateurs sensoriels) et les récepteurs sensoriels.

1.3 La restitution inertielle

Cette thèse concerne spécifiquement le couple exciteur/récepteur formé du mécanisme de mouvement et de l’organe vestibulaire. Notre but est l’élaboration d’un algorithme de commande des mouvements de la plateforme pour lesquels les réponses subjectives (réponses du systèmes vestibulaires) sont conformes aux attentes du conducteur. Contrairement aux problèmes classiques de contrôle de robot, il s’agit dans notre cas, d’un problème original, plus complexe, de restitution des sensations de mouvement.

Les systèmes de mouvements considérés sont ceux basés sur une architecture parallèle de type Gough-Stewart (voir section 1.1). Il s’agit d’un hexapode possédant la structure mécanique de la figure 1.4. Il est constitué d’un organe mobile (communément appelé plateforme) porté par 6 jambes extensibles. Chaque jambe est connectée à la plateforme par une liaison sphérique et à la base fixe par une liaison universelle (ou sphérique). Ce robot est actionné au niveau des vérins électro-hydrauliques. Le cockpit de simulation (ou le dôme pour certains simulateurs) est posé sur la plateforme. Dans certains simulateurs la base est portée un système de rails X-Y pour augmenter l’enveloppe de mouvements (Fig. 1.2).

Le problème que nous nous posons est celui de la *restitution inertielle* dans les simulateurs de

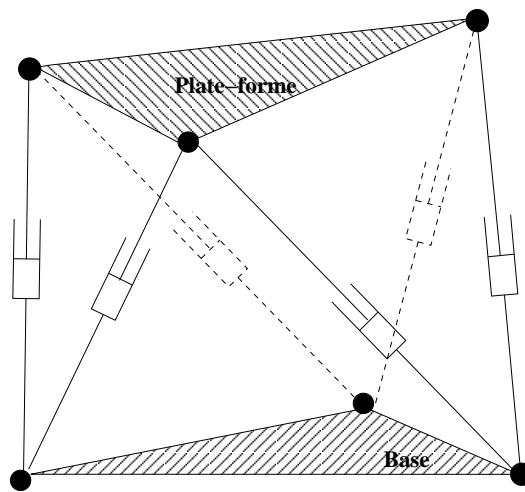


FIG. 1.4 – Architecture d'un robot de type Gough-Stewart

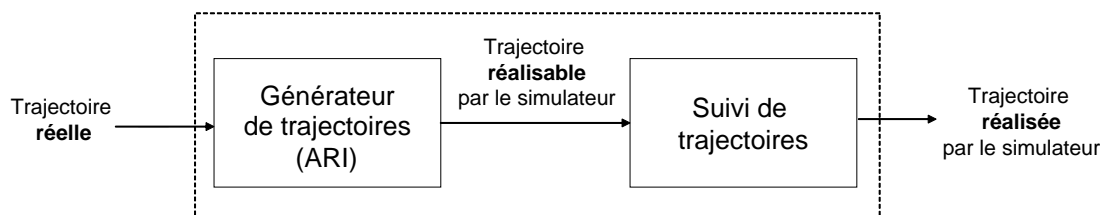


FIG. 1.5 – Les blocs constituant l'algorithme de contrôle du simulateur

conduite. Nous désignons par restitution inertielle, la reproduction au moyen d'une plateforme mobile des *sensations de mouvement* semblables à celles d'une conduite réelle. Ce qui revient à traduire les actions du conducteur au niveau du cockpit de simulation (pédales et volant) par des déplacements adéquats du système de mouvement. En d'autres termes, il s'agit de transformer les actions de l'opérateur humain en loi de commande sur les actionneurs (les vérins en l'occurrence).

La structure générale de cette transformation est représentée dans la figure 1.3. Les actions du conducteur sont transformées au moyen d'un modèle du véhicule en informations sur le comportement dynamique du véhicule réel (trajectoire : vitesse, accélération, etc.) et sont ensuite traitées par l'algorithme de contrôle du simulateur afin de produire le mouvement du robot.

C'est ce dernier algorithme qui va être développé dans le prochain paragraphe.

1.3.1 Le contrôle des simulateurs de conduite

Comme nous venons de le décrire précédemment, nous disposons à l'entrée de l'algorithme de contrôle, de la trajectoire (ensemble de données caractéristiques de son comportement : vitesse, accélération, etc.) d'un vrai véhicule. Le schéma de contrôle est représenté dans la figure 1.5. Il se divise en deux phases :

1. Étant données les capacités de mouvement réduites de la plateforme de simulation, reproduire une trajectoire réelle est généralement impossible. La première étape consiste à fabriquer une trajectoire réalisable par le simulateur. Cette trajectoire doit non seulement tenir compte des contraintes physiques de déplacement mais également, reproduire aussi fidèlement que pos-

sible les sensations subjectives engendrées par la trajectoire réelle. Nous appelons cette phase : génération de trajectoires ou Algorithme de Restitution Inertielle (ARI).

2. La deuxième phase est la phase classique de suivi de trajectoires.

1.3.2 Les difficultés de la restitution inertielle

La restitution inertielle est un problème complexe, pour plusieurs raisons :

1. *Mouvement limité de la plateforme de simulation*

Indépendamment de la structure mécanique du système de mouvement, l'enveloppe des mouvements réalisables par un simulateur de conduite, est considérablement moindre que celle d'un vrai véhicule. Il est en général impossible, dans un simulateur, de reproduire à l'identique les excitations sensorielles que reçoit le récepteur vestibulaire lors d'une conduite sur route. Afin de pouvoir générer des excitations sensorielles, truquées certes, mais dont les interprétations subjectives sont analogues à celles perçues dans la réalité, il est indispensable de comprendre le fonctionnement du mécanisme de perception.

2. *Connaissance imparfaite et limitée de la perception humaine*

Malheureusement les connaissances actuelles dans le domaine de perception sont trop limitées pour remplir les exigences du point précédent. Si en robotique, les notions de trajectoires, d'espace des tâches, etc. sont bien définies et permettent de formaliser le problème de contrôle, dans la simulation de conduite, ces notions sont à redéfinir. En effet, que signifie "reproduire des sensations" ? Comment décrire mathématiquement la notion de sensation ? Comment valider cette modélisation ?

3. *Difficultés liées à l'architecture parallèle du robot*

L'architecture parallèle du robot de simulation introduit trois difficultés supplémentaires (comme indiqué dans section 2.3).

- (a) Considérons par exemple, le simulateur Clio. Ce robot peut effectuer des translations de ± 20 cm et des rotations de $\pm 15^\circ$ dans toutes les directions. Étant donné *le couplage* entre les vérins, afin d'effectuer la rotation maximale de 15 degrés selon une direction donnée, deux vérins doivent être en excursion maximale, deux autres sont dans leurs extensions minimales et les deux restants sont dans des positions approximativement centrales. Le robot ne peut donc réaliser un mouvement dans une autre direction qu'à condition de débloquer les 4 vérins qui sont dans des positions extrémales. En d'autres termes, un déplacement de l'hexapode selon une direction donnée limite considérablement les autres mouvements. Et par conséquent, l'enveloppe des mouvements simultanés dans toutes les directions est très réduite.
- (b) La dynamique d'un tel robot est hautement non linéaire. Cette non linéarité provient non seulement du couplage des actionneurs (la relation entre l'extension des vérins et la configuration - position et orientation - de la plateforme mobile, est effectivement, une relation non linéaire), mais aussi de la dynamique propre à ceux-ci (par exemple, à l'approche des butées, les vérins perdent en résistance).
- (c) Cette structure géométrique présente des configurations géométriques instables. A l'approche de ces singularités, un mouvement infinitésimal des vérins produit un mouvement disproportionné de la plateforme mobile (pouvant même engendrer la destruction du robot). Il faut donc non seulement s'assurer de l'absence de ce type de points dans l'enveloppe de mouvements possibles, mais aussi garantir une certaine distance de sécurité par rapport à ceux ci pour le bon conditionnement du robot.

1.3.3 Discussions et contributions

Le premier problème auquel nous avons été confronté au cours de cette thèse a été l'absence d'une formalisation mathématique commune du problème de restitution inertielle. Notre approche est originale car elle intègre explicitement la perception humaine dans la définition même de la simulation.

Le deuxième problème est relatif au domaine de la perception de mouvement :

- Premièrement, le niveau actuel de compréhension de la perception humaine est limité. En effet, la physiologie de la perception est une spécialité relativement récente : les premiers travaux cités concernant la modélisation remontent à 1949 et les modèles perceptifs qui y sont décrits sont parfois postulés de façon plus ou moins arbitraire afin d'illustrer les observations expérimentales.
- Deuxièmement, il est essentiel de réaliser que nous ne pouvons pas avoir accès (mesurer) à la perception engendrée par un mouvement. De plus, nous ne sommes même pas en mesure de définir mathématiquement la notion même de perception sans risquer d'être inexact. En effet, qu'est ce qu'une perception de mouvement ? Est-il légitime de lui donner une représentation quantitative ? Comment valider les modèles sans mesures expérimentales ? Actuellement, l'absence de réponses à ces importantes questions donne au domaine de la simulation une dimension spéculative : la simulation est-elle une science ? Est-elle un art ? Enfin, pour conclure ce deuxième point, par opposition à cette approche directe de modélisation de la perception, nous pouvons aussi avoir une approche inverse : quelles sont les excitations sensorielles qui engendrent la même sensation ? Inverser l'Homme dans la simulation de conduite peut, par exemple, permettre de sélectionner dans une famille de trajectoires engendrant la "même" sensation de mouvement, la trajectoire du simulateur la moins exigeante en termes de déplacements. Malheureusement, les deux approches : directe et inverse, sont aujourd'hui assez peu développées.
- Troisièmement, l'utilisateur des modèles perceptifs qu'on trouve dans la littérature doit faire preuve d'une attention particulière aux conditions de leur élaboration. En effet certains sont basés sur des expériences réalisées dans des conditions spécifiques : obscurité, mouvements de rotations de la tête suivant des axes particuliers et avec des amplitudes précises, etc. alors que d'autres ont été développés dans le cadre de la simulation de vol. Leur utilisation dans le cadre de la simulation de conduite pose trois questions : L'exportation de ces modèles à la simulation de conduite est-elle justifiée ? Quelles sont les limites d'une telle exportation ? Peut-on mesurer les erreurs d'une telle procédure ? Nous avons eu l'occasion de poser ces questions à F.M. Cardullo, un spécialiste reconnu. Sa réponse est affirmative. En effet, il considère que ces modèles ne font que traduire la charge mentale du sujet. Selon lui, ces modèles ne dépendent pas spécifiquement de l'environnement de simulation (vol ou conduite) mais du niveau d'attention (mental workload ou concentration) du sujet qu'engendre l'interaction avec cet environnement. C'est cette position que nous avons adoptée dans cette thèse en utilisant pour la simulation de conduite, des modèles de perception linéaires utilisés dans les simulateurs de vol. Par ailleurs, pour lever l'ambiguïté liée à la notion abstraite de sensation, nous avons choisi de nous limiter aux modèles afférents, c'est-à-dire, les modèles reliant l'excitation sensorielle (mouvement de la tête) à la réponse neuronale (fréquence des impulsions électriques) du capteur humain (le système vestibulaire). Il s'en suit donc que les modèles perceptifs que nous avons développés ne sont pas des modèles absolus, c'est-à-dire, fournissant une réponse physique (interprétable) à l'excitation, mais des modèles relatifs permettant de comparer les réponses de deux excitations différentes (cette démarche nous a semblé particulièrement adaptée à notre type d'application où l'on cherche à comparer les sensations du simulateur à celles engendrées par une conduite réelle).

Le troisième problème rencontré dans l'élaboration de cette thèse, concerne les algorithmes de génération de trajectoires ou ARIs. Nous avons constaté deux choses. Premièrement, les algorithmes sont

généralement présentés sans grande rigueur mathématique tant au niveau de la formalisation que des calculs (propreté des filtres utilisés, justification des choix des paramètres, etc.). Deuxièmement, un manque de transparence des publications de ce domaine : absence des valeurs numériques des paramètres des filtres utilisés mais aussi des facteurs d'échelle et des saturateurs³. Ceci ne nous a pas permis de tester les performances de ces algorithmes.

Plan de la thèse

- Dans le chapitre 2, nous proposons une description du cadre général de la simulation de conduite, ainsi qu'une comparaison avec la simulation de vol. Nous proposons également une étude historique des deux domaines.
- Dans le chapitre 3, nous étudions la perception de mouvement. Nous insistons sur le système vestibulaire, pour lequel nous développons des modèles linéaires. Nous décrivons également le phénomène de vection et nous introduisons les modèles d'interactions visio-vestibulaires.
- Dans le chapitre 4, nous élaborons les modèles dynamiques des robots de simulation. Ces modèles seront utilisés pour la mise en oeuvre d'un simulateur de simulateur, c'est-à-dire, une plateforme de simulation numérique qui permettra de tester les algorithmes de commande en amont de leur implantation sur un vrai simulateur. Ils seront également utilisés pour le développement d'une commande robuste de suivi de trajectoires.
- Dans le chapitre 5, nous faisons la synthèse des Algorithmes de Restitution Inertielle (ARI) utilisées dans la littérature. Nous insistons sur l'ARI optimal que nous allons étendre et améliorer dans le chapitre 6.
- Dans le chapitre 6, nous nous intéressons au calcul de la performance maximale d'un simulateur de conduite pour un scénario donné (dépassement, freinage, conduite en virage, etc.). Le formalisme de la commande optimale est utilisé pour traduire le compromis (inhérent à la simulation de conduite) entre la restitution complète des sensations et le respect des contraintes de mouvement⁴. Nous définissons également des indices de performance qui serviront comme outil de calibrage des ARIs et des structures mécaniques simulateurs en amont de leurs fabrications ainsi que dans la discrimination de redondance⁵ (dans le cas où la base de l'hexapode est posé sur des rails XY).
- Dans le chapitre 7, le générateur de trajectoire ou ARI étant calibré par les méthodes du chapitre précédent, nous développons une commande robuste de suivi de trajectoire. Il s'agit de la commande par couple calculé pour laquelle nous établissons un théorème⁶ : le théorème du choix vivant. Ce dernier permet d'établir, sous certaines conditions sur le modèle dynamique, un seuil minimal assurant la robustesse du système en boucle fermée.
- Dans le chapitre 8, nous reconsidérons les simulateurs basés sur des rails XY. Nous développons deux ARIs permettant d'exploiter la redondance de ces simulateurs afin d'assurer la continuité des sensations de mouvement (en minimisant les sensations incohérentes dues au freinage et en réduisant les temps d'absence des sensations dues au blocage des actionneurs).

³Ces derniers ont, en effet, une importance capitale pour le bon fonctionnement des ARIs et pour leur validation.

⁴Nous avons publié deux travaux sur l'optimisation des simulateurs de conduite : [Elloumi et al., 2005c] et [Elloumi et al., 2005b].

⁵Nous avons développé en collaboration avec [Neering et al., 2006], un algorithme de discrimination de redondance basé sur la détection des scénarios de conduite par les Chaînes de Markov Cachées (ou Hidden Markov Models).

⁶publié dans [Elloumi et al., 2005a]

Chapitre 2

Cadre général de la simulation de conduite

Dans ce chapitre, nous nous proposons de décrire le cadre général de la simulation de conduite. Une fois listés les avantages et les applications, nous classerons les simulateurs selon leur capacité en termes d'enveloppe de mouvements réalisables et nous décrirons les problématiques liées à leur mise en oeuvre. Enfin, nous situerons la simulation de conduite par rapport à la simulation de vol grâce à l'étude de leurs historiques et à une approche comparative.

2.1 Avantages et applications des simulateurs de conduite

Par rapport à la conduite sur route, les simulateurs de conduite offrent trois avantages majeurs : (a) ils présentent un environnement sans danger pour le conducteur (ex. accidents virtuels) (b) une même expérience peut être répétée aussi souvent que nécessaire dans des conditions identiques (c) ils permettent une économie considérable. Ces avantages ont permis le développement des thèmes suivants¹ :

2.1.1 L'étude et l'amélioration de la sûreté

Différents thèmes ont été abordés :

- Éviter les collisions et les crashes et développer des systèmes d'alerte face à un danger potentiel (ex. l'Adaptive Cruise Control (ACC) qui permet de garder une distance de sécurité entre les voitures [Reymond et al., 2002])
- Étudier les effets sur la performance de conduite (cette performance est mesurée par des indicateurs de la recherche visuelle, de la capacité de discrimination, de la prise de décision, de la vitesse de réaction, etc.) :
 - de la *charge mentale* (mental workload). Un phénomène caractéristique de la charge mentale est le phénomène de "*période réfractaire psychologique*" qui indique la difficulté de traiter simultanément deux tâches mentalement exigeantes. Typiquement il s'agit de faire des tests d'utilisation de gadgets électroniques pendant la conduite : systèmes embarqués, téléphones portables, systèmes d'alerte anticollision, etc. L'étude [Recarte et Nunes, 2003], met en évidence, par exemple, les effets de la charge mentale sur la taille des pupilles, le niveau de concentration visuelle, la fréquence d'inspection du rétroviseur...
 - des conditions naturelles : la nuit, le brouillard, le climat,...

¹ Pour plus de détails sur les applications des simulateurs de conduite, le lecteur est référé aux proceedings de la conférence de simulation de conduite DSC et à l'article [Straus, 2005].

- des paramètres humains : l'âge, le sexe, les handicaps, la fatigue, la somnolence, l'alcool...
- Déterminer l'impact de la conception de la route sur le conducteur
- Étudier la réhabilitation à la conduite des personnes victimes, entre autres, de traumatisme crânien, de blessures à la colonne vertébrale, de maladies des coronaires, ...

2.1.2 La recherche

La possibilité de reproduire identiquement les tests de conduite a permis l'élaboration de modèles cognitifs de l'homme. Nous citons par exemple la thèse [Reymond, 2000b] où un simulateur de conduite a été utilisé dans la construction d'un modèle de fusion multisensorielle (stimuli visuels, vestibulaires et proprioceptifs). D'autres sujets de recherche traitent de l'étude de la dynamique du véhicule, l'interface homme machine, les véhicules intelligents (autoroutes automatiques),...Par rapport à des expériences réelles, la simulation présente l'avantage d'un coût réduit pour la mise en oeuvre et la collecte des données.

2.1.3 L'aide à la conception

Les approches d'aide à la conception peuvent être séparées en deux familles. Dans la première, il s'agit de concevoir le véhicule (système d'éclairage, le tableau de bord, etc.). Dans la seconde, on traite de la conception des routes (position des signalisations, type d'éclairage dans les tunnels, esthétique, paysage). Par exemple, le choix des délimiteurs lumineux dans un tunnel au Japon, a été fait suite à une étude statistique réalisée sur un simulateur [Akamatsu et al., 2004].

2.1.4 L'apprentissage

Pour des raisons économiques, l'apprentissage sur un simulateur de conduite est essentiellement réservé à la conduite d'engins militaire et à la conduite des grands camions. Néanmoins, des simulateurs rudimentaires sont utilisés pour la conduite des véhicules classiques. Dans ce cas, l'objectif est plus une familiarisation avec l'environnement de conduite qu'un apprentissage à proprement parler.

Dans l'avenir, les problèmes de congestion des routes et le changement des standards de sécurité vont prendre une place plus importante. L'apprentissage de la conduite sur simulateur pourrait aussi acquérir plus de notoriété.

2.2 Classification des simulateurs de conduite

On rencontre dans la littérature au moins deux méthodes de classification des simulateurs de conduite : la classification par coût [Jamson et Mouta, 2004] et la classification par niveau de performance technologique [Straus, 2005].

Notre classification est principalement basée sur le potentiel mécanique du système de mouvement et prend en compte les différents types de simulateurs de conduite qu'on rencontre dans l'industrie et la recherche. On distingue :

1. *Les simulateurs rudimentaires : sans cabine de simulation et basés uniquement sur l'environnement de réalité virtuelle.* C'est le cas des premiers simulateurs de conduite. Aujourd'hui, ce type de simulateurs est devenu populaire grâce au développement de jeux électroniques très performants en termes de réalisme. Ces simulateurs sont aussi utilisés dans les écoles et les universités dans un objectif éducatif. Exemples : 'Drivr' de Imago System Inc (logiciel), les simulateurs de Doron Inc (simulateurs de formation avec un petit tableau de bord).

2. *Les simulateurs utilisant une cabine fixe.* Ce sont les simulateurs industriels ou de recherche les plus économiques qui permettent néanmoins de répondre aux besoins de certaines applications (étude de facteurs humains comme la charge mentale). Exemples : HumanFirst (université Minneapolis), TTI (Texas Transport Institute).
3. *Les simulateurs avec cabine vibrante.* L'ajout de la vibration au niveau du cockpit permet une meilleure restitution des sensations dues à l'interaction route/véhicule. Exemple : CISR (Université de Washington).
4. *Les simulateurs basés sur une plateforme de mouvement de type Gough-Stewart.* Nous les appellerons les simulateurs de haute fidélité. Ils sont non seulement les plus coûteux mais les plus exigeants en termes de mise en oeuvre. Dans ce type de simulateur le cockpit est monté sur un hexapode (robot parallèle ayant la structure de la figure 1.4). Nous pouvons les classer en deux sous catégories
 - (a) *La base de l'hexapode est immobile.* C'est le système le plus répandu non seulement dans la simulation de conduite mais aussi pour la simulation de vol. La taille de ce robot est très variable. Dans le simulateur Clio (Renault), l'enveloppe de mouvement est d'à peine $\pm 20\text{cm}$ dans toutes les directions linéaires alors qu'elle atteint les $\pm 1.6\text{m}$ pour le simulateur Virtex (Ford).
 - (b) *La base de l'hexapode est posée sur des rails.* Il s'agit aujourd'hui de la structure mécanique la plus avancée des simulateurs de conduite. On distingue deux familles : les simulateurs à rails unidirectionnelles (ex. rails latérales afin de simuler un changement de couloir) et les simulateurs avec des rails assurant un mouvement dans le plan, qu'on appelle rails X-Y (ex. le simulateur Ultimate (Renault), 2004). Notons que le simulateur NADS (National Advanced Driving Simulator, Iowa University) intègre de plus, un système de rotation selon l'axe vertical au châssis et une table de vibration sous le cockpit du véhicule. Il s'agit du meilleur simulateur du monde en termes de potentiel car il présente les plages de déplacements les plus élevés.
5. *La plateforme de mouvement est composée d'un robot (ayant une structure spécifique) sur un système de rails (unidirectionnels).* Dans cette catégorie, on trouve tous les simulateurs de la VTI (voir section Historique) et le simulateur du Japonais Mazda (voir [Johansson et Nordin, 2002])².

Les simulateurs indiqués par 4.(b) dans le classement précédent, présentent généralement une *redundance* d'au moins 2 degrés de liberté. En termes de capacité de mouvement, il s'agit d'un avantage considérable. Néanmoins, en termes d'utilisation, cette redondance augmente le niveau de complexité de la commande la plateforme. Classiquement, ce problème est résolu grâce à une méthode de séparation fréquentielle : la bande passante de la plateforme de Gough-Stewart est généralement plus haute en fréquence que celles des rails. La validité de ce raisonnement est basée sur la non superposition des bandes passantes de ces deux derniers mécanismes. Comment peut-on utiliser cette redondance de manière *optimale*? C'est l'un des objectifs du chapitre Performance optimale d'un simulateur de conduite.

Les tableaux Tab.2.1 et Tab.2.2³ compare les performances de 6 simulateurs industriels en termes d'enveloppe de mouvement.

2.3 Problématiques liées à la mise en oeuvre d'un simulateur

La mise en oeuvre d'un simulateur de conduite est une tâche délicate. Il faut non seulement s'assurer du bon fonctionnement de chaque compartiment mais aussi de la cohérence globale du système complexe. En général, l'équipe de contrôle du simulateur est confrontée à 4 types de problèmes :

²Notons que contrairement à ce dernier, les premiers possèdent une table de vibration.

³Tableaux inspirés du document [Johansson et Nordin, 2002]

Simulateur	longitudinal	latéral	vertical	tangage	roulis	lacet
VIRTEX	$\pm 1.6 \text{ m}$ 1.2 m s^{-1} $> 0.6 \text{ g}$	$\pm 1.6 \text{ m}$ 1.2 m s^{-1} $> 0.6 \text{ g}$	$\pm 1 \text{ m}$ 1 m s^{-1} 1 g	$\pm 20^\circ$ $> 20^\circ \text{ s}^{-1}$ $> 200^\circ \text{ s}^{-2}$	$\pm 20^\circ$ $> 20^\circ \text{ s}^{-1}$ $> 200^\circ \text{ s}^{-2}$	$\pm 40^\circ$ $> 20^\circ \text{ s}^{-1}$ $> 200^\circ \text{ s}^{-2}$
DaimlerChrysler	$\pm 1.38 \text{ m}, -1.8 \text{ m}$ 1 m s^{-1} 1.2 g	$\pm 1.5 \text{ m}$ 1 m s^{-1} 1.2 g	$\pm 1.7 \text{ m}$ 1 m s^{-1} 1.2 g	$\pm 32^\circ$ $> 25^\circ \text{ s}^{-1}$ $> 200^\circ \text{ s}^{-2}$	$\pm 30^\circ$ $> 25^\circ \text{ s}^{-1}$ $> 200^\circ \text{ s}^{-2}$	$\pm 47.4^\circ$ $> 25^\circ \text{ s}^{-1}$ $> 200^\circ \text{ s}^{-2}$
NADS	$\pm 0.8 \text{ m}$? 1 g	$\pm 0.8 \text{ m}$? 1 g	$\pm 0.6 \text{ m}$ 1.5 m s^{-1} 0.75 g	$\pm 25^\circ$ 45° s^{-1} $> 120^\circ \text{ s}^{-2}$	$\pm 25^\circ$ 45° s^{-1} $> 120^\circ \text{ s}^{-2}$	$\pm 330^\circ$ 60° s^{-1} $> 120^\circ \text{ s}^{-2}$
VTI III				$-9^\circ, +14^\circ$? ?	$\pm 24^\circ$? ?	$90^\circ \pm 12^\circ$
Clio	$\pm 22 \text{ c m}$ 0.4 m s^{-1} 0.5 g	$\pm 22 \text{ c m}$ 0.4 m s^{-1} 0.5 g	$\pm 22 \text{ c m}$ 0.4 m s^{-1} 0.5 g	$\pm 15^\circ$ 30° s^{-1} 300° s^{-2}	$\pm 15^\circ$ 30° s^{-1} 300° s^{-2}	$\pm 15^\circ$ 30° s^{-1} 300° s^{-2}
Ultimate	$\pm 28 \text{ c m}$ 0.7 m s^{-1} 0.75 g	$\pm 26 \text{ c m}$ 0.7 m s^{-1} 0.75 g	$\pm 20 \text{ c m}$ 0.4 m s^{-1} 0.5 g	$\pm 18^\circ$ 40° s^{-1} 300° s^{-2}	$\pm 18^\circ$ 40° s^{-1} 300° s^{-2}	$\pm 23^\circ$ 60° s^{-1} 600° s^{-2}

TAB. 2.1 – Tableau comparatif des enveloppes de mouvement des robots de simulation basés sur un hexapode (à l'exception de VTI)

Simulateur	B.P	n° d.d.l.	T.V.	X	Y
VIRTEX	13Hz	6	.	0	0
DaimlerChrysler	3Hz	7	.	0	$\pm 2.3 \text{ m}$ 4 m s^{-1} 0.7 g
NADS	3-20Hz	9	✓	$\pm 9.75 \text{ m}$ 6 m s^{-1} 0.62 g	$\pm 9.75 \text{ m}$ 6 m s^{-1} 0.62 g
VTI III		4	✓		$\pm 3.75 \text{ m}$ 4 m s^{-1} 0.8 g
Clio		6	no		
Ultimate		8		$\pm 2.5 \text{ m}$ 2.5 m s^{-1} 0.5 g	$\pm 2.5 \text{ m}$ 3 m s^{-1} 0.5 g

B.P : Bande passante, n° d.d.l. nombre de degré de liberté (redondance incluse) , T.V. : Table de vibration, X (longitudinal), Y (latéral) : enveloppe de mouvement des rails

TAB. 2.2 – Tableau comparatif (suite) des bandes passantes des hexapodes et du système de rails correspondants

- *Technologiques* : Il s’agit par exemple, d’assurer la communication entre les différents modules informatiques de contrôle dans des délais de temps raisonnables. On peut être confronté à un problème de déphasage entre le signal visuel et le mouvement du cockpit ou à un retard de réaction du signal visuel à la commande sur les pédales, etc. Ces phénomènes de retard nuisent à la qualité de la simulation et peuvent engendrer des conflits sensoriels chez le conducteur. [Advani et Hosman, 2001] établissent, par exemple, l’existence d’une zone de cohérence, dans laquelle, les vitesses de rotation de la tête et de la scène visuelle sont suffisamment proches pour être perçues comme identiques. D’autres études [Kemeny, 1999, Bloche et al., 1997] montrent que le délai écoulé entre l’action du conducteur et la restitution des stimuli introduit des maux (mal du simulateur) s’il est considérablement différent de ce qui est ressenti lors de la conduite d’un véhicule réel. La recommandation de la *Federal Aviation Administration* pour ce paramètre dans le cas des simulateurs de vol est de 150-300 ms, mais dans le cas des simulateurs de conduite ce temps est beaucoup plus faible : le simulateur devient difficile à conduire au-delà d’un délai de réponse de 50 ms. Cela est dû notamment au contact au sol induisant des variations au niveau des accélérations plus fortes que dans le cas des avions civils”.
- *Physiques (mécaniques)* : Dans les simulateurs avancés, l’utilisation d’une plateforme de type Gough-Stewart induit principalement trois contraintes. Premièrement, le mouvement du cockpit de simulation est limité. Il faut donc intégrer les phénomènes de saturations au niveau des butées des actionneurs hydrauliques. Deuxièmement, ce type de robot peut présenter des configurations géométriques singulières où localement quelques degrés de libertés sont perdus. Ces dernières peuvent être particulièrement dangereuses parce qu’elles peuvent engendrer la destruction du robot. Troisièmement, la dynamique du système est non-linéaire (il existe, notamment un couplage fort entre les 6 bras manipulateurs). L’algorithme de commande doit intégrer cette dynamique pour produire de bonnes performances. Notons qu’étudier les deux premiers points (enveloppe de travail et singularités) en amont de la phase de construction [Advani et Hosman, 2001] permet de développer des simulateurs *optimisés* pour des objectifs prédéfinis de simulation i.e. un espace de travail adapté et libre de tout point singulier (voir chapitre ARI).
- *Problèmes d’utilisation* : C’est le “*mal du simulateur*” (simulator sickness) dont les symptômes sont : nausées, sueurs froides, difficulté de concentration, fatigue des yeux, etc. Pour expliquer ce phénomène, trois théories controversées ont été avancées. La première se base sur le *conflit sensoriel* i.e. les stimulations sont incompatibles avec les attentes du conducteur et entre autres : l’incohérence des stimulations visuelles et vestibulaires. Les autres théories sont : la *théorie du poison* (dont l’idée générale est basée sur le processus d’intoxication graduelle) et la *théorie de l’instabilité posturale* (l’incapacité graduelle de stabiliser la posture)⁴.
- *Problèmes “épistémologique”* : Comment mesurer les *performances* d’un simulateur de conduite ? Quel est son degré de *validité* ? Ceci nous ramène à la question : la simulation est une science ou un art ?

Le traitement de ces problèmes dépend des équipes et des applications prévues. Les problèmes épistémologiques demeurent néanmoins les plus difficiles à maîtriser. La section suivante donne un aperçu succinct sur quelques méthodes de validation.

⁴Pour plus d’informations voir [Straus, 2005].

2.4 Validation de la simulation

Sans prétendre être exhaustif, nous présenterons des méthodes quantitatives et des méthodes qualitatives de validation.

2.4.1 Méthodes qualitatives

En général, il s'agit de l'utilisation de questionnaires post-simulation afin de recueillir les impressions des conducteurs. Nous allons présenter trois exemples. Nous citons d'abord, l'échelle de Cooper-Harper (CHS, Cooper-Harper Scale) utilisée dans [Guo et al., 2003] pour comparer deux méthodes de restitution inertielle. Ce questionnaire permet d'évaluer la performance du simulateur (avec une échelle de 1=excellent à 10=déficiences majeures). Le deuxième exemple est le Nasa-TLX⁵ (Nasa Task Load index). Le Nasa-TLX mesure le niveau de la charge mentale par une somme pondérée de six sous-échelles : exigence mentale, exigence physique, exigence temporelle, performance personnelle, effort et frustration. Un niveau surélevé de charge mentale indiquerait une mauvaise qualité de simulation (en effet, ceci expliquerait un niveau surélevé d'efforts durant la simulation). Finalement, le Simulator Sickness Questionnaire (SSQ) permet de mesurer la gravité de l'exposition du sujet au simulateur. Il peut être considéré comme un indicateur du mauvais fonctionnement de la simulation.

2.4.2 Méthodes quantitatives

Cette catégorie consiste à collecter des indices numériques pertinents pour la simulation. Nous allons illustrer cette catégorie par deux exemples :

- Dans le cadre de la simulation de vol, la Densité de la Puissance Spectrale (DPS) des actions sur commandes (les manches) a été utilisée pour comparer deux méthodes de restitution inertielle [Guo et al., 2003]. Parmi les utilisations possibles de la DPS citons, le calcul de ses intégrales sur des périodes de temps prédéfinies ou la détermination de fréquences-pics. Le DPS, est un indicateur de la charge mentale du pilote. En effet, il s'agit en quelque sorte, d'une mesure de l'énergie qu'emploie ce dernier durant la simulation.
- Dans le cadre de la simulation de conduite, l'article [Boer et al., 2001] compare, pour une conduite en virage, les signatures comportementales de conducteurs dans la réalité et en simulation. Le choix des variables déterminant ces signatures est primordial pour assurer la fiabilité du modèle comportemental du conducteur. Ainsi, il est indiqué que le profil *spatio-temporel* (composé de la distance à l'entrée de la courbe au moment du freinage, de la position dans la courbe quand le minimum de vitesse est atteint, du degré d'augmentation de la vitesse avant la sortie de la courbe, etc.) est plus important que le calcul de l'écart type et de la moyenne des vitesses et accélérations.

Pour terminer ce chapitre et afin de mieux cerner les enjeux et les spécificités de la simulation de conduite par rapport à la simulation de vol, nous proposons les deux sections comparatives suivantes.

2.5 Historique : de la simulation de vol à la simulation de conduite

La simulation de vol, commença en 1906, avec comme motivation principale, l'apprentissage du pilotage. Les progrès scientifiques du siècle dernier, ont jalonné l'évolution des simulateurs. Les guerres mondiales ont été aussi un facteur primordial de leur développement. Près d'un demi-siècle

⁵Voir le site : <http://iac.dtic.mil/>

après l'invention du premier simulateur de vol, la simulation de conduite vit le jour. Elle profita considérablement de la maturité de la première. Mais elle se trouva confrontée à des limitations techniques et n'arriva pas à se faire une réputation mondiale comme celle acquise par la simulation de vol.

Le dernier quart du 20ème siècle, a apporté les clés du succès : augmentation substantielle de la puissance de calcul, nette amélioration de l'environnement de réalité virtuelle, utilisation de plateformes de mouvement synergiques à motorisation hydraulique. Les deux mondes de la simulation (vol et conduite) en profitèrent. Aujourd'hui, la grande majorité des industriels automobiles possèdent des simulateurs de conduite. Beaucoup d'instituts de recherche s'en procurent pour l'étude, entre autres, de la sécurité routière. Néanmoins peu de simulateurs peuvent prétendre être des simulateurs de haute fidélité car ceux ci exigent non seulement un matériel coûteux mais aussi un savoir faire diversifié (informatique temps réel, automatique, mécanique, réalité virtuelle, etc.) et une mise en oeuvre complexe.

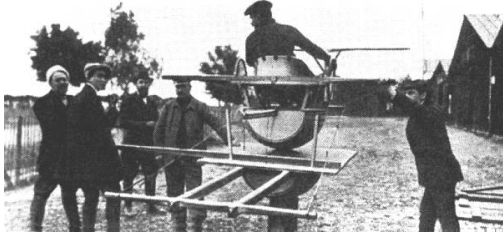
Il est intéressant de remarquer que les premiers simulateurs de vol avaient pour but de reproduire l'aspect inertiel i.e. reproduire les sensations induites par le mouvement de l'avion. Puis au cours de leur développement, l'aspect visuel s'est vu attribuer une place de plus en plus importante. La simulation de conduite a emprunté le chemin inverse en partant de simulateurs basés uniquement sur la stimulation visuelle jusqu'à la fabrication des simulateurs intégrant aussi le mouvement du cockpit. La convergence des deux expériences vers la même conclusion technologique montre l'importance de ces deux aspects (visuel et inertiel) dans le processus de simulation.

2.5.1 La simulation de vol

D'après un document de l'AIAA (American Institute of Aeronautics and Astronautics [De Mattos, 2006]), le célèbre aviateur Alberto Santos-Dumont fut à l'origine du premier simulateur de vol. Ce riche brésilien vivant en France, est considéré comme un pionnier de l'aviation. En effet, en 1906, il établit avec son avion le 14bis le premier record du monde d'aviation (il franchit une distance de 220m en 21 secondes). Pour réussir cet exploit, il conçut la même année le premier simulateur d'entraînement consistant à accrocher son avion à un câble.

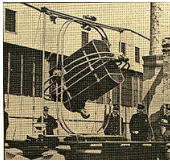


D'autres comme [De Marco, 2003] et [Moore, 2005], pointent 1910 comme l'année de la naissance du premier simulateur de vol. Nous sommes toujours en France, dans les locaux de l'École de Combat. Cette technique de simulation porte le nom de "système pingouin". Elle consiste à utiliser des avions à ailes de faible taille. Ces derniers permettent de produire de petites montées en altitude (des sauts), à la suite d'une prise de vitesse suffisante au sol. Cette idée a été reprise par un groupe américain Breese Penguin 1918 (photo ci contre).



dynamiques.

Également en 1910, une photo du simulateur Antoinette a été publiée (ci-contre). Il s'agit peut-être du premier simulateur de taille réduite formé par deux demitonnes et manipulé manuellement pour simuler des mouvements de roulis et de tangage. L'objectif du pilote est d'aligner une barre de référence avec l'horizon. Notons aussi, le simulateur 'Sanders Teacher' développé en 1910 pour entraîner les pilotes à réagir aux forces aéro-



Avec le déclenchement de la première guerre mondiale, le besoin de concevoir des systèmes permettant de mesurer l'aptitude des futurs pilotes s'est fait ressentir. Ainsi en 1917, on a vu apparaître le premier simulateur avec un système inertiel automatique : Ruggles Orientator. Grâce à une motorisation électrique, le simulateur assurait les trois mouvements de rotation et un mouvement de translation verticale.

Le trainer Link

Mais sans doute le système le plus réussi était le Link trainer [ASME, 2000] développé entre 1927 et 1929 et utilisé jusque dans les années 50. L'inventeur Edwin Link avait obtenu sa licence de pilote en 1927. Il a ensuite mis à profit son expérience dans l'usine de fabrication de pianos de son père pour développer son simulateur. Le transfert du savoir-faire des pianos pneumatiques à l'élaboration des simulateurs eut lieu à un moment très propice puisque l'usine de pianos fit faillite en 1929⁶.

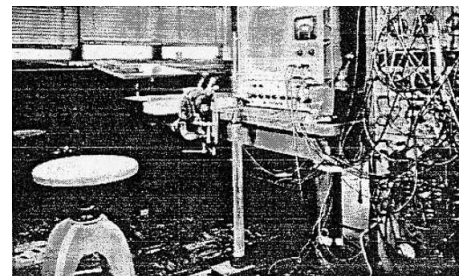


Le simulateur Link permettait des rotations dans les trois directions : roulis, lacet, tangage (L'action du pilote se situait au niveau de trois commandes : le gouvernail, l'aileron et l'élévateur). Les actionneurs étaient des soufflets pneumatiques gérés par un système électrique. Et le calibrage du simulateur se faisait par tests jusqu'à obtenir les sensations souhaitées. Pour plus de détails, on se référera [ASME, 2000].

De 1930 à 1960, l'amélioration du système de mouvement du cockpit est délaissée. L'accent est mis sur les autres aspects du simulateur : cockpit, toucher, etc. Et notamment l'intégration du système visuel dans la simulation vit le jour [Koekebakker, 2001]. Au début de la deuxième guerre mondiale, des centaines de Celestial navigation trainers (développés, entre autres, par Link 1941) ont été construits afin de simuler des opérations de bombardement et la traversée nocturne de l'océan atlantique. Un système de projection est utilisé pour reproduire les images de l'opération. Durant la deuxième guerre mondiale, des calculateurs analogiques furent utilisés pour calculer la réponse de l'avion à des forces aérodynamiques.

Le premier simulateur complet fut mis en place en 1948 par Boeing (377 PanAm) pour l'entraînement de l'équipage. Dépourvu d'un système visuel et d'un système de mouvement, il était néanmoins adapté à l'objectif de sa fabrication.

Parallèlement, le NASA Ames Research Center entama à partir de 1955 le développement d'une série de simulateurs de plus en plus performants. Le premier simulateur 1955 fut un simulateur assez rudimentaire (photo ci-contre) et rapidement le besoin d'un réalisme amélioré en termes de mouvement du cockpit et de la stimulation visuelle s'est fait sentir. C'est ainsi que des simulateurs à 2, 3, 5 et finalement 6 degrés de liberté ont été développés [NASA, 1968]. Le rendu visuel a également fait des progrès considérables⁷. Soulignons qu'en 1964, le premier simulateur 6 axes NASA Ames fut opérationnel. Il permettait des rotations de $\pm 45^\circ$ et des déplacements de $\pm 3\text{m}$ dans toutes les directions. Néanmoins, pour des raisons technologiques, ce simulateur ne pouvait reproduire que des dynamiques basses-fréquences. Vers la fin des années 60 apparurent des systèmes de mouvement parallèles à action hydraulique et entre autres, la plateforme de Gough-Stewart (Simona-Université de Delft Fig.2.1, Swissair, Alitalia, etc.). Depuis, ce mécanisme est devenu la référence de tous les systèmes de simulations : avion, vélo, moto, voiture,...



⁶Ed Link raconte cette anecdote dans son interview dans l'Encyclopedia of automatic musical instruments [Bowers, 1972] : "Well, I started the trainers in 1926, so I was working on a trainer before the piano factory folded up. The first trainers were built there; that's why they have so many piano and organ parts on them. When the piano and organ factory folded in 1929 I was working on trainers in my spare time, after hours and on Saturdays and Sundays. When it folded there was no more business. Meantime I had learned to fly and I had a commercial license, so I had to go out and earn my living by flying. I guess it was a good thing for me that the factory did fold because I did better with trainers than I ever would have with pianos!"

⁷L'article [Anderson et Morrison, 1993] fait la revue des différents simulateurs de ce centre



FIG. 2.1 – Simona - TU Delft

L'utilisation d'ordinateurs digitaux pour la simulation a commenc  e en 1960. Mais c'est dans les années 80 et 90 que les développements majeurs ont eu lieu. Les gains en performance et en réalisme du système visuel lui ont valu une place centrale dans le processus de simulation. Finalement, la croissance de la puissance de calcul permet l'intégration de modèles dynamiques complexes de l'avion et des lois de commande évoluées pour le système de mouvement.

2.5.2 La simulation de conduite

Contrairement à la simulation de vol, la simulation de conduite ne dispose pas d'un historique bien établi. L'étude proposée dans cette section est construite à partir des documents⁸ suivants [Johansson et Nordin, 2002], [Gruening et al., 1998] et [Nordmak et al., 2004]. Soulignons que certains constructeurs automobiles et instituts de recherche ne fournissent pas d'informations sur l'histoire de leurs simulateurs, rendant ainsi la tâche de récapitulation difficile. C'est donc un aperçu historique non exhaustif que nous proposons⁹.

Le premier simulateur de conduite était basé sur le système Sensorama développé par Heilig en 1962. Ce système est considéré comme étant à l'origine des systèmes actuels de réalité virtuelle. En plus d'un système vidéo 3D et d'un son stéréo, Sensorama, produisait aussi des odeurs, du vent et des vibrations pour simuler un trajet de motocyclette dans les rues de New York. Néanmoins, l'utilisateur était passif et n'avait aucun moyen d'interagir avec la machine.

L'article [Deyo et al., 1988], vante les mérites du département américain de la défense pour sa contribution majeure dans le développement de la simulation et du graphisme par ordinateur. En effet, en 1962, l'Air Force, soutint le MIT (Massachusetts Institute of Technology) pour l'utilisation de la technologie CRT (Cathode-Ray Tube) dans la simulation de conduite. Ce fut la première utilisation d'un environnement graphique artificiel avec des perspectives dynamiques. General Motors utilisa ces mêmes techniques à la fin des années 60. Notons qu'en 1961, cette compagnie mit en place, un des premiers simulateurs dynamiques non-interactifs pour l'étude du confort et de la tenue de route. Nous renvoyons le lecteur à [Reymond, 2000b] pour une photo de ce simulateur à film datant de 1966.

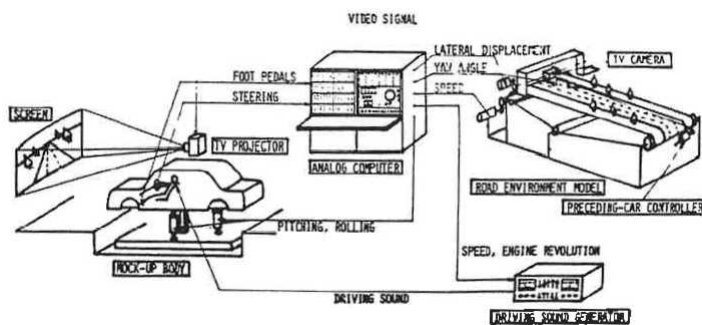


Le concept de simulateur de conduite *dynamique et interactif*, apparut dans les débuts des années 1970. C'est en 1973 que General Motors et le Virginia Polytechnic Institute (VPI) mirent en marche le premier simulateur VPI-su comportant à la fois un système visuel et un mécanisme de mouvement.

⁸et du site de l'Inrets : [http://www.inrets.fr/ur/sara/Pg simus.html](http://www.inrets.fr/ur/sara/Pg%20simus.html)

⁹Notons enfin que le classement adopté est un classement par date de mise en oeuvre et non par date de début de construction du simulateur.

Durant une vingtaine d'années, VPI-su, a subi une constante évolution (dans sa version la plus poussée, un modèle de voiture à 16 degrés de liberté a été utilisé). Parallèlement, Volkswagen et VTI (institut de recherche suédois sur la sécurité routière) entamèrent la construction de simulateurs intégrant aussi des systèmes de mouvement. Cette information est confirmée par un article du VTI publié dans Nordic Road & Transport Research (No.2 2004) *"The concept of a driving simulator was considered as early as the 1970s. Extensive safety research was in progress at that time, with the focus on vehicle dynamics, where stability issues were important. A simulator that was correct from the standpoint of vehicle dynamics could be used to study how the different vehicle parameters affected stability. At that time, simulators were mainly used in aviation, primarily in training pilots to use the cockpit instruments. In a driving simulator, the driver does not depend on the instruments to the same extent. Here, the surroundings and the dynamic forces are more important. It was therefore soon realized that the driving simulator required advanced motion simulation, a detailed model of vehicle dynamics and a detailed visual description of the road environment"*.



Après le simulateur développé par General Motors et le VPI en 1973, citons le simulateur MITI (Japon) qui présentait également une stimulation inertielle et visuelle. Pour le contrôle interactif de la direction *"... une image vidéo pouvait être filmée à partir d'une maquette physique de la route à échelle réduite, la caméra se déplaçant au-dessus de la maquette en fonction de la trajectoire calculée du véhicule. Le conducteur était placé dans une maquette d'ha-*

bitacle de voiture, simplifiée ou réaliste, ses actions sur le volant ou les pédales étant directement liées aux variations de vitesse ou de point de vue" [Reymond, 2000b].

En 1983, le laboratoire : Human Factor Laboratory de la Federal Highway Administration FHWA (États Unis) mit au point le simulateur interactif à base fixe Hysim. Parmi les applications de Hysim, citons l'étude de la perception des risques chez le conducteur, l'élaboration de véhicules intelligents sur autoroutes, l'identification des situations dangereuses, etc. Ce système présentait une structure complexe composée de plusieurs modules parmi lesquels la cabine authentique d'une Ford Fairmont, le module graphique, le module de génération de scénario, le système de projection d'images, le système sonore. Une salle de contrôle permettait de superviser le déroulement de la simulation. Notons que les pédales et le volant interagissaient déjà avec la scène visuelle.

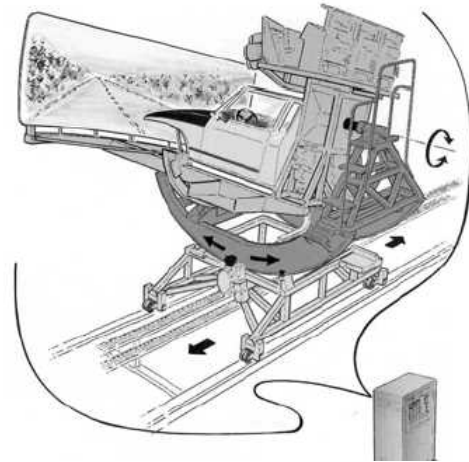


La première génération de Hysim était à la pointe de la technologie de simulation de conduite aux États Unis. Néanmoins le rendu visuel était rudimentaire (une route plate, la nuit, sans trafic ni décors environnants), mais satisfaisant pour l'époque. C'est essentiellement ce dernier point qui fut l'objet de recherches et d'améliorations.



En 1984, VTI (l'institut de recherche suédois sur la sécurité routière), lança son premier simulateur de conduite à 3 degrés de liberté (après 7 ans de fabrication).

Ce simulateur est resté en service jusqu'à 2002. Il présentait la possibilité de larges mouvements transversaux pour mieux traduire les accélérations latérales (importantes pour simuler le changement de couloir). Le roulis et le tangage étaient aussi incorporés. La cabine de simulation reproduisait le cockpit d'une vraie voiture (coupée derrière les sièges avant). Un écran couvrant 120deg d'angle était placé devant celle-ci. L'utilisation du tangage permit d'atteindre des accélérations statiques de 0.4g. Pour reproduire les scénarios de conduite, les accélérations subirent un facteur d'échelle de 1/2 afin d'éviter les phénomènes de saturation. Cependant, l'absence de système de vibrations donnait lieu à une "mauvaise sensation" de route, c'est pourquoi une table de vibration fut utilisée pour reproduire non seulement les vibrations en hauteur mais aussi en roulis et en tangage dues à la route. On observera que le réalisme des images est nettement meilleur que celui de la FHWA. Et on notera que le modèle utilisé pour le véhicule était un modèle élaboré.

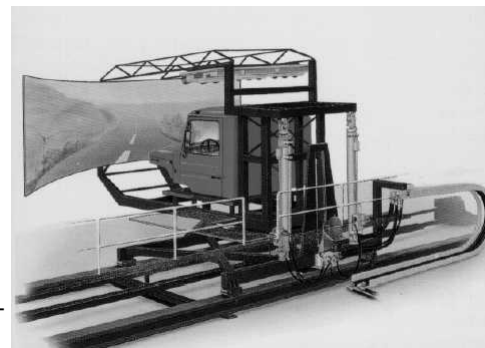


A partir de 1985, Daimler-Benz se pencha sur l'élaboration d'un environnement de réalité virtuelle avancé pour la simulation de conduite. Ils mirent en oeuvre dans leur centre à Berlin Marienfeld, probablement le premier simulateur de conduite 6 axes basé sur une plateforme de Gough-Stewart. Il permit des mouvements précis et lents avec très peu de frottement et intégra des images de haute résolution. Une dizaine d'années plus tard (1994), fut mis en fonction ce que deviendra le premier simulateur de conduite haute fidélité.



C'est un simulateur 6 axes monté sur des rails permettant de grands mouvements latéraux comme ceux produits par le VTI. Désormais il s'appelle DaimlerChrysler simulator.

A la demande d'une compagnie d'assurance, VTI entama, à la fin des années 80, la construction d'un simulateur de camions VTI II avec les mêmes degrés de liberté que VTI I. Étant donnée la différence en termes de taille et d'inertie du cockpit d'un camion par rapport à une voiture, le mécanisme de mouvement fut changé. Deux vérins hydrauliques assuraient le roulis et le tangage. Un moteur hydraulique assurait le mouvement latéral.



Vers la fin des années 80 et le début des années 90, beaucoup de constructeurs automobiles se lancèrent dans l'aventure de la simulation avec le développement de simulateurs à base fixe : Ford, Renault, Chrysler... Le Center of Computer Aided Design (CCAD) a commencé l'utilisation de simulateurs à base dynamique en 1990 pour l'étude des systèmes d'alerte et d'auto-routes automatiques. Un robot hexapode (ou Gough-Stewart) procurait des mouvements larges et des ordinateurs puissants permettaient l'intégration du modèle du véhicule. Au début des années 90, Dynamic Research Inc. désigna un simulateur avec différents types de modèle pour le véhicule.

Le Center for Advanced Transportation Systems Simulation (CATSS) développa un simulateur à 6 degrés de liberté en 1990. L'absence de trafic routier limita sa sphère d'application. En 1999, un projet fut initié pour la génération de trafic avec des voitures autonomes.

Renault entama une série de simulateurs statiques à partir de 1989. Le besoin d'avoir un meilleur réalisme l'amena à construire son premier simulateur mobile en 1999. Celui-ci est basé sur une plate-



FIG. 2.2 – Simulateurs de Renault. (Gauche) 6 d.d.l. simulateur dynamique, (Droite) Simulateur Ultimate (monté sur des rails XY)

forme de Gough-Stewart. Il permet d'atteindre une accélération de 0.5g dans une enveloppe d'environ 40cm et 30deg dans toutes les directions linéaires et angulaires respectivement (Fig.2.2).

Simulateurs haute-fidélité Le premier simulateur avancé est celui développé par DaimlerChrysler en 1994. Comme nous l'avons mentionné auparavant une plateforme de Gough-Stewart est montée sur un système de rails pour reproduire de grands mouvements latéraux. La plateforme peut produire des déplacements latéraux considérables allant jusqu'à 1.5m. De plus les rails latéraux procurent des déplacements jusqu'à ± 3.8 m.

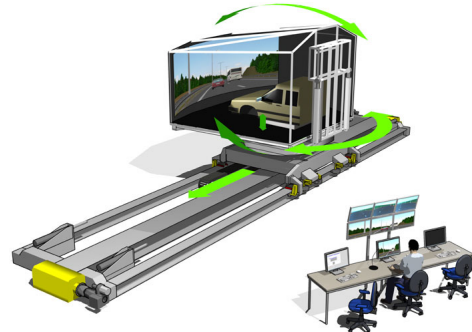
Virttex (VIRtual Test Track EXperiment) développée par Ford Research Laboratory fut opérationnel en 2001. Il utilisa uniquement une plateforme de Gough-Stewart mais qui produisait de grands mouvements (± 1.6 m longitudinal et latéral).

Le projet NADS (National Advanced Driving Simulator) commença en 1992 et fut opérationnel en 2002. NADS est actuellement le simulateur le plus avancé dans le monde. En effet, en plus du système de rails latérales de DaimlerChrysler, il présente des rails longitudinales lui permettant un déplacement dans le plan sur une surface de 400m² environ. De plus il permet une rotation complète de la cabine selon l'axe orthogonal au châssis. Une table produit des vibrations jusqu'à 20Hz avec un déplacement de ± 0.5 cm. En plus de ces capacités mécaniques, ce simulateur est doté d'un système de réalité virtuelle extrêmement performant. Il intègre aussi la possibilité de simuler plusieurs types de véhicules (4 cockpits différents peuvent être installés à l'intérieur du dôme : 2 voitures et 2 camions). L'investissement consenti pour le financement du simulateur Nads s'élève de 50 millions de dollars.



Récemment (en 2004), Renault a mis en marche le simulateur avancé Ultimate. Ce simulateur est né du besoin de fournir une stimulation inertielle que ne pouvait produire la plateforme de Gough-Stewart à base fixe (simulateur Clio). Par conséquent, dans Ultimate, la base du robot parallèle est montée sur un système de rails X-Y permettant des déplacement dans le plan de 6 × 6m (Fig.2.2).

En 2004 également, VTI entama l'utilisation sa troisième génération de simulateur à base mobile VTI III. La structure mécanique est la même que celle de leur précédent simulateur VTI II mais intègre cette fois-ci un mouvement de lacet (rotation verticale) de 90deg qui permet d'avoir deux modes de fonctionnement avec les rails : un mode latéral (c'est le mode classique utilisé dans VTI II) et un mode longitudinal après la rotation de 90deg (c'est le nouveau mode de VTI III). Dans le dernier mode, ce simulateur permet aussi un mouvement de lacet de $\pm 12\text{deg}$. On notera que ces rails sont plus performants que ceux de VTI II (on double les vitesses et les accélérations maximums). Une table de vibration assure des mouvements de 8-9Hz dans 3 directions : verticale, roulis et tangage. Pour plus de précisions sur les caractéristiques de ces plateformes le lecteur est renvoyé aux tableaux comparatifs [2.1](#) et [2.2](#).



2.6 Simuler la conduite versus simuler le vol

On pourrait penser qu'il suffirait de partir d'un simulateur de vol et de remplacer le cockpit de l'avion par un cockpit de voiture pour obtenir un simulateur de conduite. On changerait bien évidemment l'environnement de réalité virtuelle et on utiliserait naturellement les mêmes algorithmes de commande que ceux développés pour les simulateurs de vol. Malheureusement ce raisonnement se révèle insatisfaisant. La simulation de conduite a sans doute profité de la grande expérience de son aînée : la simulation de vol. Par exemple, on retrouve dans la première les mêmes structures mécaniques et les mêmes architectures de conception (hardware et software). Néanmoins, la mise en oeuvre est différente. Les caractéristiques de la conduite par rapport au vol induisent des changements dans les objectifs de simulation ainsi que dans l'accent mis sur les différents compartiments du simulateur. Cette section propose une liste non exhaustive de différences.

1. Alors que la dynamique de vol (hors décollage et atterrissage) est lente (basses fréquences), la dynamique de conduite est rapide (hautes fréquences) : accélérations et freinages rapides. Dans l'article [\[Barbagli et al., 2001\]](#) on lit : *"the dynamics of land vehicle are very different from the ones of an aircraft. Land vehicles are usually much faster if compared to the ones of a large aircraft. This is due to a higher power to mass ratio and to the specific nature of moving on the ground, where higher friction is present"*. La plateforme de Gough-Stewart qui effectue le mouvement du cockpit dans les simulateurs usuels est donc beaucoup plus sollicitée pour la simulation de conduite. Le problème récurrent de l'enveloppe de mouvement réduite pour ce type de plates-formes occupe donc une place plus centrale pour notre type d'application. D'ailleurs, les derniers simulateurs de conduite intègrent un système de rails pour produire des mouvements linéaires. Ce dernier augmente considérablement l'enveloppe de mouvement du cockpit.
2. Un autre point caractéristique de la simulation de conduite est la présence de la route. Cette dernière induit des vibrations auxquelles on peut faire correspondre les vibrations induites par les turbulences de l'air pour la simulation de vol. Néanmoins, ces deux types de vibrations diffèrent en amplitude et en fréquence. De plus, la notion de route en elle-même n'existe pas dans la simulation de vol. Par notion de route est indiqué le fait de se déplacer sur une surface. C'est une difficulté supplémentaire dans le travail de concordance entre le visuel et l'inertiel. De plus, la surface implique l'existence de forces de frottements qu'il faudra reproduire.
3. Nous ajoutons à ce deuxième point (présence de la route), la présence d'un trafic (c'est-à-dire, un ensemble de véhicules dont les comportements sont gérés par l'équipe de commande) et la présence de signalisations sur le bord de la route. Ceci a pour conséquence que le comportement du conducteur est fortement influencé par ces informations visuelles. Dans les simula-

teurs d'avions de grandes lignes, cette interaction est largement moins forte. Néanmoins, nous pouvons retrouver des réactions équivalentes dans les simulations de vols de combat.

4. Pour des raisons économiques, l'objectif principal d'un simulateur de vol est l'apprentissage. Les apprentis pilotes qui entreprennent des cours sur des simulateurs, ne possèdent pas de compétence préalable de pilotage. A l'opposé, les conducteurs de simulateurs de conduite ont en général une expérience minimale dans la conduite réelle. Autrement dit, ces derniers ont développés une *idée de référence* et des *attentes* sur les performances du simulateur. Cette référence inexistante dans le monde du vol, mettra en évidence toutes les imperfections de la simulation de conduite. On observera dans certains cas, des conflits sensoriels engendrés par des réponses du simulateur incohérentes avec les attentes du conducteur. Ces conflits peuvent engendrer des réactions indésirables comme des nausées. Dans le meilleur des cas, le conducteur s'adaptera au simulateur. Néanmoins le temps d'adaptation sera supérieur à celui des simulateurs d'avion.
5. Le cockpit occupe une place plus centrale dans les avions que pour les voitures. En effet le tableau de bord d'un avion est composé de commandes (boutons, actionneurs,) et d'appareils de mesures (altitude, température, pression, radar) en nombre considérable. La disposition de ceux-ci et leur réalisme est d'ailleurs un facteur déterminant de la qualité du simulateur. Le réalisme est non seulement une question de design mais aussi et surtout une question d'interaction de ces outils avec le scénario de vol : mise à jour en temps réel des différents capteurs, calcul de la force de réaction des poignets de commande. La complexité des simulateurs de conduite est considérablement moindre dans ce compartiment.
6. Parmi les spécificités de la simulation de vol : les PIO : Pilot-Induced Oscillations. Ils se produisent quand le pilote d'un avion commande par distraction une série de corrections souvent croissantes dans des directions opposées. A chaque fois une sur-correction est appliquée dans la direction opposée de la sur-correction précédente. La physique du vol rend de telles oscillations plus probables pour des pilotes que pour des automobilistes. En effet, il existe un décalage significatif entre les temps de réponse des instruments de vol et l'état courant de l'avion. Par exemple, une augmentation de puissance n'aura pas comme conséquence une augmentation immédiate de la vitesse de l'avion. Ce phénomène est particulièrement dangereux surtout lors des opérations d'atterrissage. Les PIO indiquent donc que la dynamique de réaction de l'avion est lente. Par conséquent la simulation de vol profite de cette souplesse dans la génération des stimulations visuelles et inertielles. A contrario, la simulation de conduite est plus exigeante en termes d'interaction homme/machine. En effet, la réaction du véhicule est considérablement plus rapide dans ce dernier cadre.
7. [Advani et Hosman, 2001] mettent en évidence que malgré le fait que les accidents de la conduite représentent 95% des accidents dues aux transports, les simulateurs de conduite sont, pour la plupart, dans un état de réalisme rudimentaire. Deux raisons à cela : une raison propre à la simulation de conduite, il s'agit de la complexité de l'interaction homme-véhicule et l'interaction véhicule-route et de la méconnaissance de la perception humaine. La deuxième raison est le coût. Il est rapporté que la simulation de vol possède plus de moyens (un simulateur de vol coûte quelques millions de dollars, alors que la plupart des simulateurs de conduite coûte une petite fraction de ce prix).

2.7 Conclusion

Ce chapitre a mis en évidence l'importance de la simulation de conduite. Bien que très apparenté à la simulation de vol, il s'agit d'un domaine à part entière qui suit une constante évolution afin de répondre aux enjeux de la sécurité routière et des avancées technologiques de l'industrie automobile.

Chapitre 3

La perception de mouvement propre

Dans le contexte de la commande de plates-formes de simulation de conduite, le problème de contrôle se pose de façon originale comme la poursuite de sensations de conduite et non comme le suivi de trajectoire (de robot) classique. Nous devons, par conséquent, donner un sens mathématique à la notion de sensation. Ceci consiste à élaborer des modèles reliant la stimulation sensorielle à sa perception chez le sujet.

Dans la première section, nous présentons le capteur de mouvement : le système vestibulaire à travers une description anatomique de ses deux constituants (les organes otolithiques et les canaux semi-circulaires) et l'introduction de leurs modèles mathématiques linéaires. Ensuite (deuxième section), nous abordons l'étude et la modélisation du phénomène de vection qui traduit l'apparition d'une sensation de mouvement propre suite à une stimulation visuelle. Enfin, la dernière section sera consacrée à la modélisation de l'interaction (fusionnelle ou conflictuelle) de ces deux capteurs sensoriels.

3.1 Le système vestibulaire

Le système vestibulaire est un ensemble d'organes localisé au sein de l'oreille interne, et responsable de la *détection des déplacements inertiels (linéaires et angulaires) de la tête*. Il contribue au maintien de l'équilibre en intervenant dans la coordination des mouvements réflexes de la tête et du cou, du tronc et des yeux ainsi que dans la stabilisation du regard.

La Figure 3.1, montre sa disposition géométrique par rapport au crâne. On y distingue : les *organes otolithiques* (sacculé et utricule) indiqués par *Utr.* et *Sacculus* dans la figure) et les *canaux semi-circulaires*. Ce sont trois canaux approximativement orthogonaux entre eux (supérieur : *sup.* ; postérieur : *post.* ; latéral : *lat.*). Cette section est consacrée à l'étude du système vestibulaire dans le cadre de la *détection des déplacements inertiels*.

3.1.1 Les organes otolithiques : utricule et sacculé

L'utricule et le sacculé sont les deux organes otolithiques¹. Ils permettent de détecter les déplacements linéaires, horizontaux et verticaux (respectivement). Les organes otolithiques possèdent des positions fixes dans le crâne. Plus précisément, l'utricule est situé sur un plan x_{utr} incliné de 20° par rapport au plan horizontal et le sacculé sur un plan z_{sac} incliné du même angle par rapport au plan vertical [Telban et al., 2000].

¹ Attention à ne pas confondre organes otolithiques avec otolithes. En effet, bien que cette dernière dénomination soit courante, elle désignera spécifiquement, dans cette thèse, un des composants de l'utricule et de la sacculé.

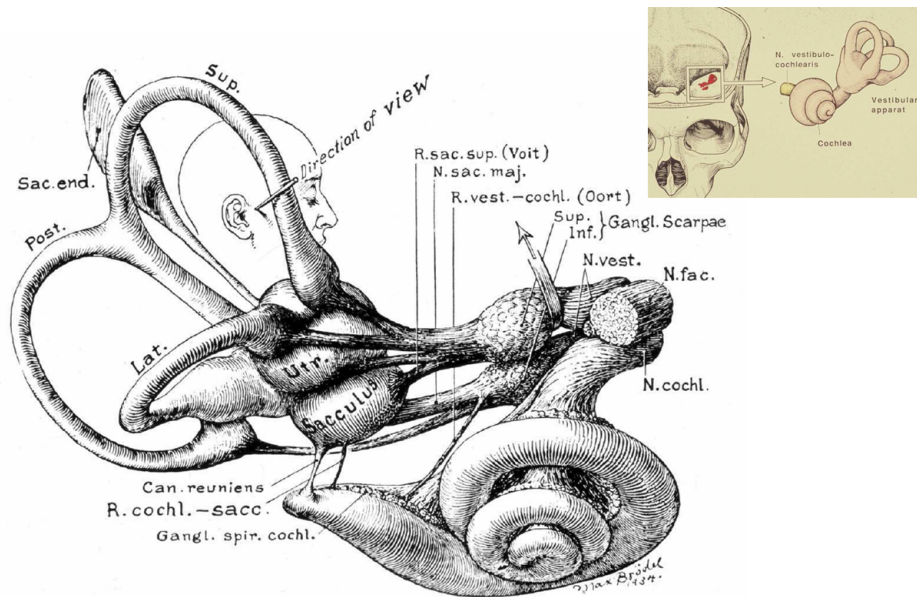


FIG. 3.1 – Le système vestibulaire (et sa position dans le crâne)

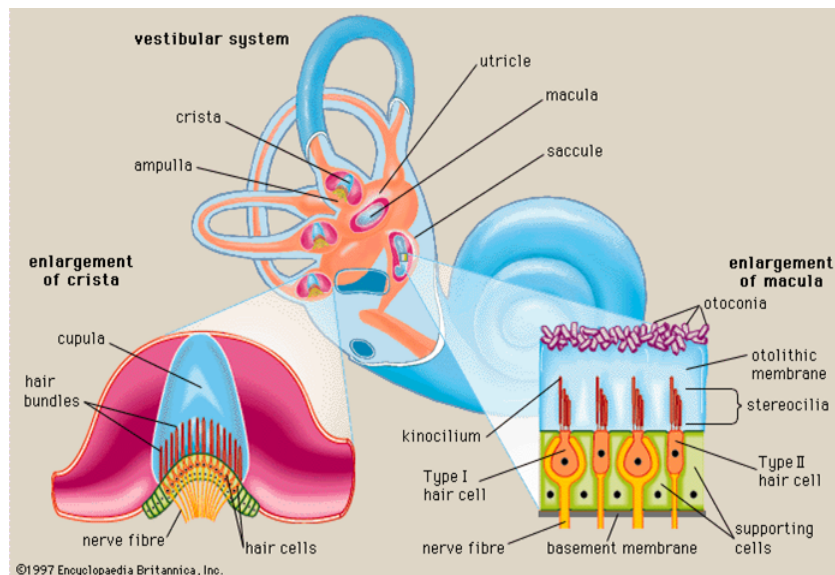


FIG. 3.2 – Le système vestibulaire : schéma récapitulatif de la structure des organes otolithiques (droite) et des canaux semi-circulaires (gauche)

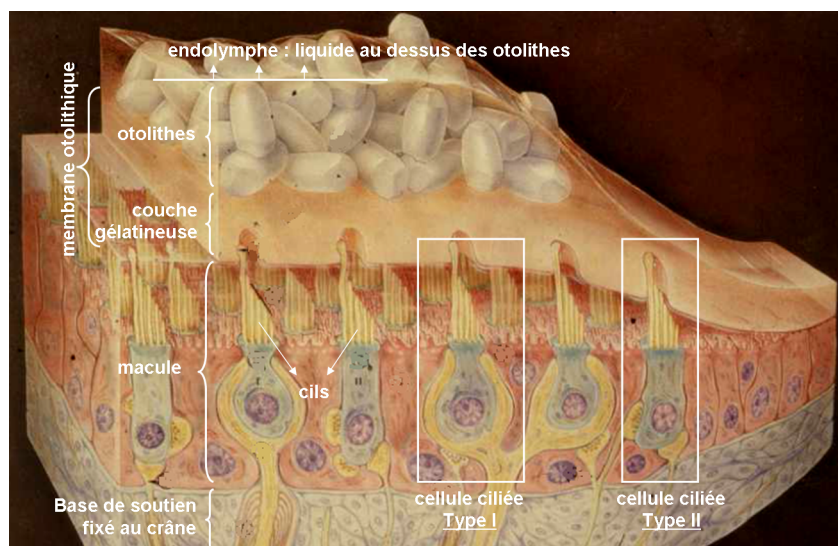


FIG. 3.3 – Structure d'un organe otolithique

3.1.1.1 Description anatomique et physiologique

Les organes otolithiques sont des cavités ovoïdes remplies d'un liquide visqueux : l'endolymphe. Ils possèdent une structure à deux étages (couches) (Fig.3.3) :

1. La *membrane otolithique* est composée d'une couche supérieure d'otolithes (pierre des oreilles qui sont des concrétions de carbonate de calcium entre-collés par un matériau gélatineux) et d'une *couche* inférieure *gélatineuse* peu dense et extrêmement déformable.
2. La *macule*, couche inférieure de cellules sensorielles, est composée de *cellules ciliées* (hair cells) enracinées dans une base de cellules de soutien solidaire au crâne (et se déplaçant ainsi avec la tête) [Fernandez et Goldberg, 1976].

D'après [Berthoz et Droulez, 1980], le stimulus spécifique des organes otolithiques est la force de cisaillement entre les deux couches de la membrane otolithique. La déformation, ainsi provoquée de la couche gélatineuse va induire la flexion des cellules ciliées². L'opération qui transforme le signal biomécanique (flexion des cils) en influx nerveux (activité électrique des cellules ciliées voir Fig.3.4) est le mécanisme de *transduction* [Bohoua-Nassé, 2004]. Lorsque les cils s'inclinent en direction du kinocil cela provoque une dépolarisation. La *fréquence des potentiels d'actions* (impulsions nerveuses notées *AFR* et mesurées en ips : impulse per second) envoyés à l'encéphale augmente. Quand les cils s'inclinent dans le sens opposé, les cellules sensorielles sont hyper-polarisées et la production de potentiel d'actions diminue. Les variations de polarisations (excitation et inhibition) entraînent une variation des fréquences de potentiels d'actions des fibres afférentes³.

Le mouvement de la tête et plus précisément la combinaison des accélérations linéaires et de la gravité sont à l'origine du cisaillement. Une des propriétés remarquables des organes otolithiques, est de ne pas faire la distinction entre l'accélération linéaire et la composante de la gravité dans la direction de l'organe otolithique (provoquée par une inclinaison statique de la tête). Cette ambiguïté va être utilisée dans le monde de simulation pour réaliser ce que l'on appelle : la (tilt) coordination. Afin de bien comprendre ce dernier point, nous allons décrire la mécanique des organes otolithiques.

²On distingue deux types de cellules ciliées. La cellule de type I, qui forme une synapse en calice et dont la fibre nerveuse efférente a un large diamètre; la cellule de type II qui forme une synapse en bouton et dont la fibre nerveuse efférente a un faible diamètre.

³En l'absence de stimulation la fréquence du potentiel d'action est d'environ 100Hz.

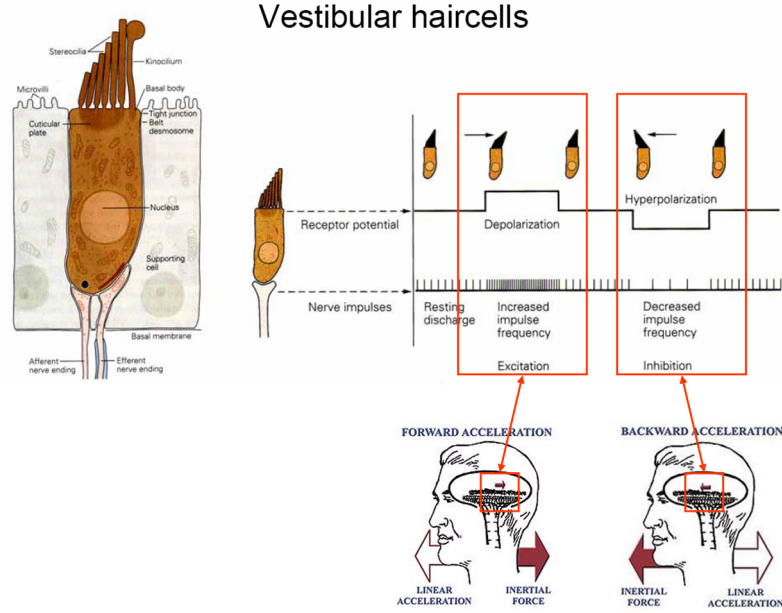


FIG. 3.4 – Mécanisme de perception otolithique : du mouvement de la tête à l'influx nerveux (les cas d'une accélération et d'un freinage linéaires)

Mécanique otolithique

La Fig.3.5 schématise la tête en position statique. On y distingue l'endolymphe et la première couche otolithique (formé par les otolithes et la couche gélatineuse). La variable x représente la direction de *déplacement des otolithes relativement au crâne*. La loi de composition des accélérations permet de décrire l'accélération des otolithes a_{oto} (projetée sur l'axe porteur x) dans un repère absolu sous la forme suivante⁴

$$a_{oto} = \underbrace{a_x}_{\text{accélération de la tête}} + \underbrace{\ddot{x}}_{\text{accélération relative}} \quad (3.1)$$

Le premier principe de la dynamique fournit l'équation suivante (projetée selon x et *normalisée* par la masse des otolithes)

$$a_{oto} = \sum f_{ext} \quad (3.2)$$

où $\sum f_{ext}$ est l'ensemble des forces externes (normalisées). Localement, au niveau des otolithes, l'accélération de la tête est considérée comme une force : la force inertielle. En extrayant la force de gravité g_x de l'ensemble des forces externes, l'équation de la dynamique du *point de vue des otolithes* est $\ddot{x} = (g_x - a_x) + \dots$ mettant en évidence la force gravito-inertielle :

$$f_x = g_x - a_x \quad (3.3)$$

La gravité agit de manière équivalente à une accélération linéaire de la tête. Ce qui prouve qu'en situation statique $a_x = 0$, les otolithes signalent la présence d'une accélération de la tête d'amplitude $-g_x$ ⁵. Néanmoins la sensation psychologique de mouvement $-g_x$ ne sera atteinte que si les autres

⁴La projection de l'accélération de Coriolis sur l'axe de déplacement des otolithes est nulle.

⁵Dans le cas général ($a_x \neq 0$), les otolithes signaleront la présence d'une accélération d'amplitude $a_x - g_x$.

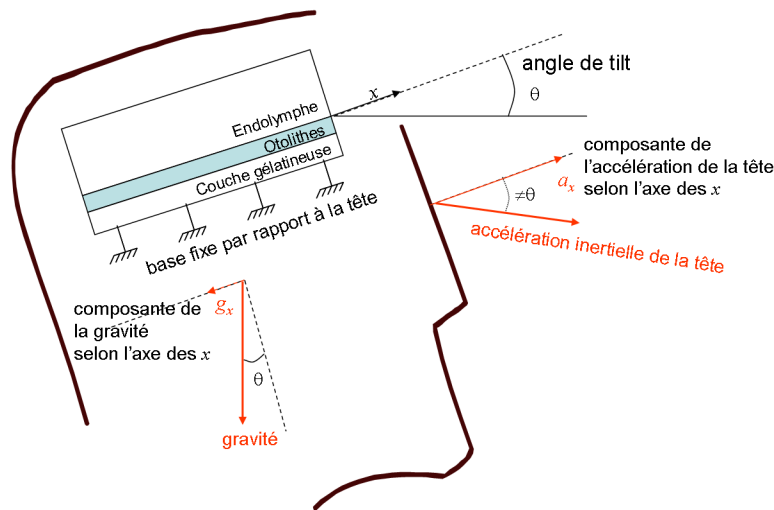


FIG. 3.5 – Mécanisme de mouvement des otolithes

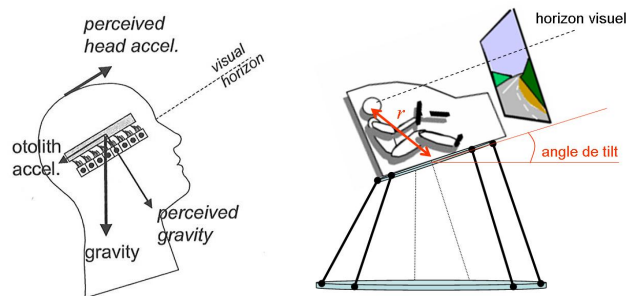


FIG. 3.6 – Mécanisme de tilt coordination

récepteurs sensoriels (yeux, organes proprioceptifs, etc.) fournissent des stimulations cohérentes au cerveau (en tant que générateur de sensations). Cette cohérence a été concrétisée dans le cadre de la (tilt) coordination.

Remarques

- Bien que l'utricule soit biologiquement dans un plan incliné de 20° dans la tête, cet angle est communément négligé dans les représentations schématiques et les modèles usuels. Il s'agit d'une mesure simplificatrice qui permet de considérer directement l'inclinaison de la tête θ comme l'écart angulaire par rapport à l'axe statique. En se référant à Fig.3.5, l'expression de g_x est $g_x = -g \sin \theta$. Dans la littérature, la forme linéarisée est prédominante : $g_x = -g\theta$ (qui suppose une faible variation angulaire).
- Dans le cas d'une rotation dynamique de la tête, l'accélération de la tête a_x comprend non seulement l'accélération linéaire (translation) a_{trans} de la tête mais aussi l'accélération tangentielle $r\ddot{\theta}$ provoquée par la rotation de la tête (r est la distance entre le centre de rotation et la

tête. La Fig.3.6 montre r dans un simulateur de conduite)

$$a_x = a_{\text{trans}} - r\ddot{\theta} \quad (3.4)$$

3.1.1.2 Spécificités des organes otolithiques

– Seuil de détection

De nombreuses expériences ont mis en évidence la présence d'un seuil de détection des accélérations linéaires. Citons par exemple, les expériences d'oscillations linéaires reportées par [Berthoz et Droulez, 1980]. Elles consistent à déplacer horizontalement et dans l'obscurité les sujets sur une chaise avec une force d'amplitude sinusoïdale. On constate différentes valeurs pour ce seuil correspondant à la variation des conditions expérimentales et des directions du mouvement⁶.

De plus, ce seuil de perception semble corrélé à la fréquence et l'amplitude (dépendance quasi-linéaire) de stimulation. Enfin, dans le but de fournir des ordres de grandeurs numériques, les seuils de perception d'échelons d'accélération linéaire et de vitesse⁷ linéaire peuvent être estimés respectivement en moyenne à 5cms^{-2} et 21cms^{-1} .

– La coordination

La (tilt) coordination [Nahon et Reid, 1989] est une méthode inspirée des simulateurs de vol qui exploite l'ambiguïté gravito-inertielle des otolithes. Elle consiste à effectuer une rotation très lente (sous le seuil de détection canalaire⁸) du cockpit de simulation (et donc de la tête du conducteur). Cette rotation est accompagnée par l'inclinaison de l'écran de réalité virtuelle (scène du trafic) afin de garantir une cohérence perceptive (voir Fig.3.6). Ainsi la variation de la force de gravité conséquente à cette rotation sera interprétée comme une accélération linéaire. Cette opération est réalisable dans deux directions spatiales : latérale (en utilisant l'angle de roulis) et longitudinale (angle de tangage ou de tilt) [Parrish et al., 1975].

3.1.1.3 Modélisation mathématique

En synthèse, le phénomène de perception de mouvement est composé de trois phases :

1. Réception otolithique : dans cette phase, l'accélération combinée (gravito-inertielle) est traduite mécaniquement en mouvement de cisaillement interne.
2. Transduction : le mouvement de cisaillement est transformé en influx nerveux mesuré par la fréquence du potentiel d'actions.
3. Interprétation : l'influx nerveux (en combinaison avec les signaux issus des autres capteurs sensoriels) est transformé en sensation par le système nerveux central.

Élaborer un modèle de perception otolithique (fournissant directement les accélérations perçues par rapport aux accélérations réelles de la tête) consiste à décrire mathématiquement les trois étapes précédentes, par le biais de modèles : (a) mécanique (déplacement otolithique par rapport à la force combinée gravito-inertielle) (b) afférent (transduction) (c) psychique (sensations de mouvement engendrée par le flux nerveux).

Modèle mécanique

En étudiant la membrane otolithique, [Grant et Best, 1987] ont effectué une modélisation approximative du mouvement des otolithes par un système masse-ressort-amortisseur. Continuons l'étude mécanique de la section 3.1.1.1. Les forces agissant sur les otolithes (projetées sur l'axe x) sont :

⁶Ce seuil dépend aussi des méthodes d'enregistrements de la réponse subjective.

⁷En effet, bien que les organes otolithiques soient spécifiquement sensibles aux accélérations, des expériences ont montré l'existence d'un seuil de perception lié à la vitesse

⁸Ce seuil de détection des canaux semi-circulaires (voir la section suivante) est supposé suffisamment faible pour permettre de négliger l'accélération tangentielle pendant la rotation de coordination.

- la force gravito-inertielle : $m_o f_x = m_o (g_x - a_x)$ (m_o masse des otolithes)
- la force de cisaillement (exercée par l'endolymphe sur les otolithes) :
 $-m_e f_x = m_e (a_x - g_x)$ (m_e est la masse de l'endolymphe).
- la force de rappel de la couche gélatineuse : $-kx$ (k est la constante de raideur et x est le *déplacement relatif* des otolithes par rapport à la tête)
- l'amortissement propre des otolithes : $-b\dot{x}$ (b est le coefficient d'amortissement supposé être *très grand* par rapport aux autres constantes du système : m_o et k)

Ce qui permet d'écrire dans un repère absolu l'équation de la dynamique :

$$m_o \ddot{x} = m_o (g_x - a_x) + m_e (a_x - g_x) - kx - b\dot{x}$$

ou de manière équivalente (en supposant la conservation des volumes pour faire apparaître les densités ρ) :

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_o} \dot{x} + \frac{k}{m_o} x = \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_o}\right) (g_x - a_x) = \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_o}\right) f_x, \quad \rho_e < \rho_o \quad (3.5)$$

Les otolithes sont donc représentés par un oscillateur sur-amorti forcé. La force appliquée est bien dans le même sens que la force gravito-inertielle f_x . Nous remarquons néanmoins que la présence de l'endolymphe réduit l'amplitude de la force appliquée contrairement à l'intuition que l'on peut avoir. Pour conclure le modèle mécanique est décrit dans la représentation de Laplace, c'est-à-dire :

$$\frac{x(s)}{f_x(s)} = \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_o}\right) \frac{\tau_1 \tau_2}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

avec $\tau_1 \simeq b/k \gg \tau_2 \simeq m_o/b$ (car b est très grand). Les constantes de temps (élevée [5,10] s) et (faible [3,10] ms) ont été déterminées expérimentalement. La procédure consiste à exhiber la réponse impulsionnelle des organes otolithiques grâce à un créneau de vitesse (sans inclinaison de la tête $g_x = 0$) d'amplitude v (donc un Dirac d'accélération $a_x = v \delta \Rightarrow f_x = -v\delta$). Ainsi

$$x(t) = v\tau_2 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_o}\right) \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) \quad (3.6)$$

D'autre part, comme les otolithes atteignent rapidement leur déplacement maximal x_{\max} (25 μm , mesuré expérimentalement), l'équation précédente et le grand écart entre les constantes temporelles permettent d'affirmer

$$x_{\max} \simeq v\tau_2 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_o}\right) \quad (3.7)$$

Finalement, en observant que les mouvement usuels de la tête sont généralement dans une bande de fréquence inférieure à 0.1 Hz (bande de fréquence dans laquelle $|\tau_2 s| \ll 1$), nous pouvons réduire l'ordre du modèle mécanique dans cette région fréquentielle :

$$\frac{x(s)}{f_x(s)} = \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_o}\right) \frac{\tau_1 \tau_2}{(1 + \tau_1 s)} \quad (3.8)$$

Comme décrit dans la section 3.1.1.1, le mouvement x des otolithes induit la flexion des cils, engendrant une dynamique afférente (AFR : AFerent Response) :

Modèle afférent (et afféro-mécanique)

Sans prétendre être exhaustif, il existe dans la littérature deux approches : modélisation analytique et modélisation expérimentale.

1. L'approche expérimentale est basée sur une identification fréquentielle à partir d'études menées sur des singes⁹. L'animal est soumis à une variation sinusoïdale des forces dans toutes les directions de l'espace¹⁰ pour mesurer la réponse neuronale. [Fernandez et Goldberg, 1976] ont identifié une structure *non linéaire* du système afférent commune pour les deux types de cellules ciliées (types I et II) :

$$\frac{AFR(s)}{f_x(s)} = G_s \frac{1 + k_a \tau_a s}{1 + \tau_a s} \frac{1 + k_v (\tau_v s)^{k_v}}{1 + \tau_m s} \quad (3.9)$$

où le coefficient rationnel $k_v < 1$ est primordial pour traduire les observations expérimentales (nous renvoyons le lecteur au document de référence ou à [Telban et al., 2000] pour l'interprétation de cette fonction de transfert).

2. L'approche analytique élaborée par [Ormsby, 1974] se base sur le modèle mécanique du premier ordre (section précédente)

$$\frac{x(s)}{f_x(s)} = \frac{A}{s + A} \quad (3.10)$$

Le modèle proposé est sous la forme suivante (B, C des constantes positives)

$$\frac{AFR(s)}{x(s)} = Bs + (B + C)A \quad (3.11)$$

Ceci sous-entend que la fréquence du potentiel afférent AFR est une combinaison linéaire de la vitesse et de la position relatives des otolithes. Ainsi on obtient le modèle afféro-mécanique :

$$\frac{AFR(s)}{f_x} = \frac{Bs + (B + C)A}{s + A} \quad (3.12)$$

L'utilisation des moyennes d'observations expérimentales a permis de déduire le filtre suivant :

$$\frac{AFR(s)}{f_x} = 45 \frac{10s + 1}{5s + 1} \quad (3.13)$$

Modèle psychique

Le processus de transformation des pulsations afférentes en sensation subjective de mouvement est sans doute la phase la plus difficile à modéliser dans le mécanisme de perception. En effet, nous pouvons distinguer deux difficultés principales :

- Une sensation de mouvement est une notion subjective et donc difficile à caractériser quantitativement¹¹. Les modèles que nous allons voir supposent que nous pouvons décrire la perception des forces f_x comme des "forces perçues" \hat{f}_x de même nature que les premières. Ceci veut dire que l'on fait correspondre à une quantité physique bien définie (les forces), une quantité imaginaire (dont la légitimité reste à prouver) qui permettrait de caractériser le comportement humain.

⁹Il existe des études de la réponse subjective chez l'homme pour l'élaboration des modèles reliant directement l'accélération de la tête à la sensation psychologique de mouvement.

¹⁰Voir [Angelaki et Dickman, 2004] pour la description des simulations.

¹¹En parlant de "Perception vestibulaire du mouvement propre" [Siegle, 2000] affirme : "Aucune méthode ne s'est imposée au fil des années comme étant idéale, ce qui semble témoigner de la difficulté à estimer la perception subjective du mouvement". Toutes les méthodes rencontrées sont approximatives. Parmi lesquelles nous citons : la *cupulométrie* (méthode indirecte basée sur la durée des sensations post-rotatoires), l'*estimation de l'intensité d'une sensation vestibulaire par l'utilisation d'une échelle arbitraire*, le *pointage statique* et le *pointage dynamique*, etc.

Modèles	Référence	Remarques, observations
$\frac{\hat{f}(s)}{f(s)} = 0.4 \frac{13.2s+1}{(5.33s+1)(0.66s+1)}$	[Young et Meiry, 1968]	
$\frac{AFR(s)}{f(s)} = G_s \frac{1+k_a\tau_a s}{1+\tau_a s} \frac{1+k_v(\tau_v s)^{k_v}}{1+\tau_m s}$	[Fernandez et Goldberg, 1976]	Cellules I : $\tau_m = 16\text{ms}$, $\tau_a = 69\text{s}$, $\tau_v = 40\text{s}$, $k_a = 1.12$, $k_v = 0.188$, $G_s = 25.6\text{ips/g}$; Cellules II : $\tau_m = 9\text{ms}$, $\tau_a = 101\text{s}$, $\tau_v = 40\text{s}$, $k_a = 1.9$, $k_v = 0.440$, $G_s = 20.5\text{ips/g}$
$\frac{AFR(s)}{f(s)} = K \frac{1+\tau_1 s}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	[Hosman, 1996]	$K = 3.4\text{ips/ms}^{-2}$, $\tau_1 = 1\text{s}$, $\tau_2 = 0.5\text{s}$, $\tau_2 = 16\text{ms}$
$\frac{x(s)}{f_x(s)} = \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_o}\right) \frac{\tau_1 \tau_2}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	[Grant et Best, 1987]	$\tau_1 \in [5, 10]\text{s}$, $\tau_2 \in [3, 10]\text{ms}$, $\rho_e = 1\text{gr/cm}^3$, $\rho_o = 2.7\text{gr/cm}^3$ (valeurs des densités extraites de [Squires et al., 2004])

TAB. 3.1 – Quelques filtres otolithiques

- La perception de mouvement fait intervenir simultanément toutes les stimulations sensorielles. Isoler la perception de mouvement engendrée par la stimulation vestibulaire seule, suppose la possibilité de découpler le processus d'interprétation sensorielle. C'est-à-dire qu'il serait possible à travers l'étude séparée de la perception des yeux, du système vestibulaire, des organes proprioceptifs, etc. de reconstituer le processus de perception simultanée¹².

Compte tenu des difficultés de modélisation psychique, il est plus raisonnable de se limiter à l'étude du modèle afféro-mécanique. En effet, la réponse afférente des neurones ne représente probablement pas en elle même un bon indicateur (absolu) de la réponse subjective de l'homme. En revanche, elle permet de comparer les réactions afférentes à deux stimulations différentes (un bon indicateur relatif, ou une distance en quelque sorte). Ce qui est particulièrement adapté à la simulation de conduite où l'on cherche à reproduire les stimulations d'un vrai véhicule.

Nous retiendrons pour finir la modélisation de [Ormsby, 1974] où le processus d'interprétation est considéré optimal au sens des filtres stochastiques (Wiener Hopf). En se basant sur le modèle afféro-mécanique (3.12) qu'il a développé, son modèle psychique est :

$$\frac{\hat{f}(s)}{AFR(s)} = H(s) = M \frac{s + A}{(s + F)(s + G)} \quad (3.14)$$

où F, G sont des constantes dépendantes (non linéairement) de A, B, C et où \hat{f} est la sensation subjective de mouvement. Le modèle complet de perception reliant l'accélération de la tête à sa perception par l'homme est donc du second ordre :

$$\frac{\hat{f}(s)}{f(s)} = BM \frac{s + (B + C)AB^{-1}}{(s + F)(s + G)} \quad (3.15)$$

Le tableau 3.1 liste quelques filtres otolithiques

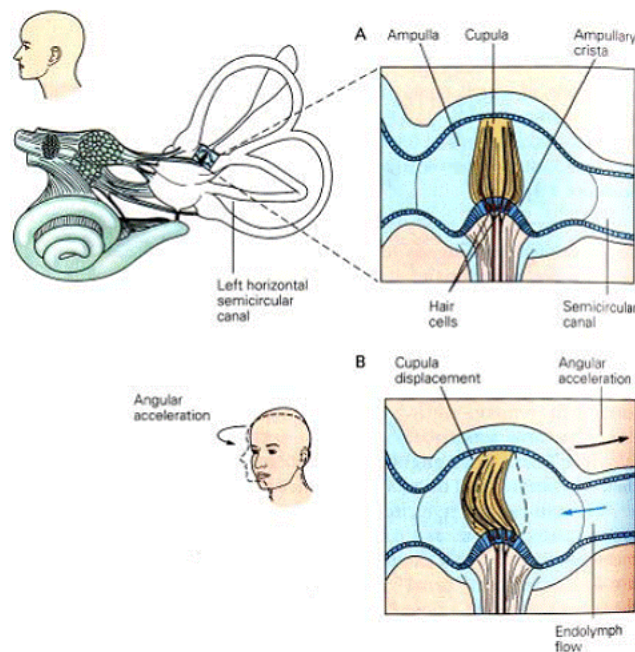


FIG. 3.7 – Structure et mécanisme canalaire (le cas du canal horizontal, A : tête au repos, B : tête en rotation)

3.1.2 Les canaux semi-circulaires

Les trois canaux semi-circulaires peuvent être décrits comme des anneaux remplis d'endolymphe se regroupant au niveau de la surface de l'utricule. Le plan du canal latéral fait approximativement un angle de 35° avec le plan horizontal ; les canaux antérieurs et postérieurs font des angles d'environ 40° et 50° avec le plan sagittal. Le diamètre des canaux est environ de 6mm et leur épaisseur est de 0.24mm. Les canaux semi-circulaires sont sensibles au mouvement de rotation dans l'espace (lacet, roulis, tangage)¹³. Dans une approche de modélisation, ces écarts angulaires sont classiquement absents.

Chaque canal (Fig.3.7) possède une base enflée (ampoule) qui contient des cellules sensorielles et une cupule (membrane élastique gélatineuse plus dense que l'endolymphe). Les ampoules possèdent aussi une zone réceptrice (épithélium sensoriel) appelée crête ampullaire semblable à la macule otolithique. Comme dans le cas des otolithes, cette zone intervient dans la transformation du mouvement de rotation de la tête en un signal neuronal.

La cupule est une membrane gélatineuse, fixée à la base de la crête ampullaire et au sommet de l'ampoule. La crête ampullaire ou ampullary crista (zone épaisse de forme arrondie) contient les cellules ciliées responsables de la transmission neuronale.

Lorsqu'un mouvement de rotation de la tête se produit dans le plan de l'un des canaux, (voir

¹²L'étude isolée du système vestibulaire semble donc une hypothèse très forte. [Siegler, 2000] : "Toutes les zones qui reçoivent des afférences vestibulaires sont impliquées dans le traitement d'autres signaux sensoriels, notamment les signaux visuels et somatosensoriels. En effet, tous les neurones "vestibulaires" répondent à des stimulations optocinétiques de grand champ, et la plupart d'entre eux répondent aussi à des stimulations proprioceptives du cou [...] En fait, ce "cortex vestibulaire" fait sans doute partie d'un ensemble plus vaste dédié au traitement de toutes les informations sensorielles nécessaires à la construction de représentations de l'espace et du mouvement".

¹³Par souci de rigueur, il existe une interaction otolitho-canalaire dans le cas d'une rotation à vitesse constante (voir [Reymond, 2000a]). Cette interaction ne va pas être considérée dans ce document.

Fig.3.7 pour le canal horizontal) l'endolymphe subit une force d'inertie par rapport au labyrinthe et déforme la cupule. Cette déformation de la cupule va provoquer une flexion des cils dans le sens opposé au mouvement (inertie). Ensuite le fluide continue à tourner dans le canal à la même cadence que la rotation. Toutefois, lorsque la rotation se prolonge à vitesse constante la cupule revient à sa position d'équilibre (phénomène non linéaire de saturation en position neutre et accumulation énergétique). Puis à l'arrêt de la rotation le système endolymphe-cupule réagit dans la direction opposée (décharge énergétique) à celle de la rotation qui a pris fin. Enfin la cupule revient à sa position initiale.

3.1.2.1 Spécificités des canaux semi-circulaires

1. Seuil de détection

En considérant le déplacement minimum de la cupule, on estime le seuil de détection de l'accélération angulaire à 0.3°s^{-2} pour le canal horizontal¹⁴. Pour les autres canaux ce seuil est supérieur à 0.4°s^{-2} . La réponse à une rotation est maximale pour un canal lorsque celui-ci est situé dans le plan de rotation. Les seuils de perception dépendent aussi de la durée de la stimulation.

2. Le test nystagmus

“L'étude de la perception vestibulaire est réalisée expérimentalement, à partir d'expériences de psychophysique souvent doublées d'une mesure de mouvement oculaire” [Reymond, 2000a]. En effet, ce dernier résulte d'un phénomène connu dans le monde de la perception : le RVO (réflexe vestibulo-oculaire) qui est un mouvement de rotation des yeux dans le sens opposé à celui de la tête même en l'absence d'informations visuelles. “Le RVO est physiologiquement associé au réflexe optocinétique (ROC) qui produit un mouvement de rotation des yeux dans le sens de défilement de la scène visuelle, de sorte à minimiser le glissement rétinien et faciliter la reconnaissance d'objets en mouvement. Ces mouvements stéréotypés se présentent sous la forme d'un nystagmus optocinétique (NOC), comportant une alternance de phases lentes de suivi et de phases rapides de recentrage de l'oeil dans son orbite” [Reymond, 2000a] (voir section 3.2).

3.1.2.2 Modélisation mathématique

Par analogie aux organes otolithiques, le mécanisme de perception canalaire se décompose en trois phases : mécanique (réaction de la cupule au mouvement de la tête), afférente (traduction du signal mécanique en signal nerveux par le phénomène de transduction) et cérébral ou psychique (transformation du signal nerveux en sensation). Pour les mêmes raisons que précédemment (section 3.1.1.3, Modèle psychique), nous allons nous restreindre aux deux premiers types de modèles.

Modèle mécanique

[Telban, 2000] rapporte dans son article l'évolution de la modélisation de la mécanique canalaire. Le premier modèle cité est un modèle linéaire du second ordre qui a permis d'expliquer la corrélation visio-vestibulaire sur des poissons (brochet). Le modèle mécanique [Van Egmond et al., 1949] que nous présentons ici représente une amélioration de ce dernier. Le comportement du couple cupule-endolymphe est décrit par un pendule de torsion sur-amorti. Notons θ_e la variation angulaire de l'endolymphe par rapport à la tête, alors θ_e est gérée par l'équation

$$J\ddot{\theta}_e + d\dot{\theta}_e + k\theta_e = J\ddot{\theta} = J\Omega \quad (3.16)$$

où $\ddot{\theta} = \Omega$ est l'accélération angulaire de la tête dans le plan du canal considéré, J le moment d'inertie angulaire de l'endolymphe, k l'élasticité de la cupule (la cupule exerce une force sur l'endolymphe

¹⁴Il existe aussi dans la littérature un seuil de détection lié à la vitesse angulaire 2°s^{-1} .

Modèles	Référence	Remarques, observations
$\frac{AFR}{\Omega(s)} = K \frac{\tau_a s}{(1+\tau_a s)} \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	[Fernandez et Goldberg, 1971]	
$\frac{AFR}{\Omega(s)} = K \frac{\tau_a s}{(1+\tau_a s)} \frac{(1+\tau_1 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	[Zacharias, 1978]	$K = 3.44, \tau_a = 80s, \tau_1 = 0.06s, \tau_2 = 5.73s, \tau_2 = 5ms$
$\frac{AFR}{\Omega(s)} = K \frac{1+\tau_1 s}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	[Hosman, 1996]	$K = 2ips/^{\circ}s^{-2}, \tau_L = 0.11s, \tau_1 = 5.9s, \tau_2 = 5ms$

TAB. 3.2 – Quelques filtres canaux

pour revenir à sa position d'équilibre) et d la constante d'amortissement (due à la force de frottement visqueux exercée par les parois du canal lorsque l'endolymphe circule). La représentation de Laplace est donc semblable aux organes otolithiques

$$\frac{\theta_e(s)}{\Omega(s)} = \frac{\tau_1 \tau_2}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \quad (3.17)$$

Par analogie aux organes otolithiques, $\tau_1 = d/k \gg \tau_2 = J/d$ et la réduction de l'ordre du filtre est aussi possible dans ce cas.

[Shmid et al., 1979] ont montré que la déflexion de la cupule est reliée à la rotation de l'endolymphe par $\theta_c = -\alpha\theta_e$ ($\alpha > 0$ constante). [Young et Oman, 1969] ont permis d'affiner ce modèle en introduisant un opérateur d'adaptation de constante τ_a afin de mieux représenter les résultats expérimentaux ($K = \alpha\tau_1\tau_2$) :

$$\frac{\theta_c(s)}{\Omega(s)} = K \frac{\tau_a s}{(1 + \tau_a s)} \frac{1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \quad (3.18)$$

Modèle afférent

[Fernandez et Goldberg, 1971] rapportent que la structure précédente permet de représenter également le mécanisme afférent. Ainsi des expériences menées sur des singes¹⁵ ont permis de mesurer le flux afférent provoqué par des mouvements de rotation :

$$\frac{AFR(s)}{\Omega(s)} = K \frac{\tau_a s}{(1 + \tau_a s)} \frac{1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \quad (3.19)$$

Finalement [Zacharias, 1978] a reporté plusieurs expériences suggérant l'introduction d'un terme d'avance τ_l :

$$\frac{AFR(s)}{\Omega(s)} = K \frac{\tau_a s}{(1 + \tau_a s)} \frac{(1 + \tau_l s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \quad (3.20)$$

Le tableau 3.2 dresse une liste de quelques filtres canaux.

3.2 Les yeux

Nous nous intéressons à une fonction particulière des yeux : leur capacité à induire une sensation de mouvement ou *vection*¹⁶. Lavection est une illusion sensorielle uniquement provoquée par un décor visuel en mouvement. Ce phénomène peut être observé dans la vie courante, grâce à " l'illusion

¹⁵Voir [Angelaki et Dickman, 2004] pour la description des simulations.

¹⁶Cette section est inspirée de [Bohoua-Nassé, 2004].

du train ". En effet un observateur assis dans un train à l'arrêt a parfois l'impression d'être en mouvement lorsqu'un train sur un quai voisin démarre. Ce phénomène implique que le sujet perçoive une *sensation imaginaire de mouvement propre*, bien que sa tête et le reste de son corps soient totalement immobiles. Cette sensation illusoire peut être déclenchée par des images en mouvement sur un écran. Selon le type de mouvement simulé, il existe deux types de vection : (a) La vection circulaire qui peut être obtenue avec un sujet assis à l'intérieur d'un cylindre (souvent peintes de rayures noires et blanches alternées) en rotation (b) La vection linéaire est engendrée en simulant sur un écran des objets qui se rapprochent ou s'éloignent du sujet.

D'après [Young, 1977] : "*La réponse subjective induite par un large champ visuel qui se met subitement en rotation avec une vitesse constante est très surprenante. Au début le mouvement véritable de la scène visuel est perçu, le sujet se sent immobile en face d'un environnement visuel en rotation. Après un délai de deux à cinq secondes, la scène visuelle commence à ralentir, souvent devient immobile et l'observateur se perçoit en mouvement de rotation dans la direction opposée. La sensation de rotation propre atteint son maximum au bout de trois à dix secondes, de façon exponentielle*".

Il est souhaitable pour le réalisme de la simulation que le sujet ressente une vection complète où la scène visuelle doit apparaître immobile par rapport au sol fixe, tandis qu'il se perçoit totalement en mouvement. Pour atteindre cet objectif plusieurs conditions expérimentales doivent être vérifiées :

1. *Importance de la vision périphérique sur la vision centrale*

Le champ de vision de l'homme peut se diviser en deux zones. La zone centrale (ou fovéale) caractérisée par la précision et la netteté de l'image et peu sensible au mouvement des objets ; et la zone périphérique (qui correspond à une stimulation hors de la fovéa) caractérisée par une grande sensibilité aux mouvements et par un rendu flou de l'image¹⁷. Ces résultats justifient l'utilisation d'écrans panoramiques dans les simulateurs de véhicule où la présence de signalements et de décors extérieurs à la route (arbres, montagnes, etc) est très importante. A ce propos, dans le cadre des simulateurs de vol, [Young, 1978] souligne que la présence de nuages et d'étoiles dans la zone périphérique permet de renforcer le réalisme de la vection. L'apparition de la vection est donc conditionnée par la présence d'objets en mouvement dans le champ périphérique de vision. Ce constat permet d'introduire la notion de fréquence spatiale, qui correspond à une densité (nombre d'éléments visuels par unité de surface) dans l'image.

2. *Relation entre la vitesse du champ visuel et la vitesse ressentie*

La vitesse de l'objet par rapport au sol, dans la scène visuelle détermine la vitesse ressentie par le sujet jusqu'à une borne supérieure de vitesse. Cette borne supérieure semble correspondre à l'apparition du flou visuel dans l'image. Lorsque la limite de vitesse visuelle est dépassée, la vitesse perçue par le sujet décroît jusqu'à l'extinction complète de la sensation induite. Cette vitesse ne doit pas excéder en moyenne 60°/s, d'après [Young, 1978] pour la vection circulaire, et 1m/s pour la vection linéaire (horizontal avant), [Berthoz et al., 1975].

Spécificités des yeux

1. *Réflexe optocinétique*

Lorsque tout le décor visuel est en mouvement, la poursuite périphérique involontaire (réflexe optocinétique) se déclenche. En effet des afférences visuelles massives en provenance de toute la surface de la rétine entraînent l'oeil dans le sens du mouvement du décor. C'est un mécanisme qui vise à conserver sur la rétine une image stable durant un laps de temps. A partir d'un certain angle (repéré par la vue et la proprioception) les centres nerveux ordonnent une saccade de rappel. Cette saccade est brève pour empêcher le flou visuel. C'est une phase de *nystagmus* (l'oeil bat rapidement dans le sens inverse du mouvement).

2. *Latence de la vection*

Une des caractéristiques principales de ce phénomène est le délai entre le début du stimulus et

¹⁷Résultats des expériences avec occultation de la zone centrale menées, entre autres, par [Van der Steen, 1998]

le début de la réponse subjective. Ce délai est critique dans le cadre de la simulation en environnement virtuel. Il dépend de plusieurs facteurs :

- (a) Cohérence avec la stimulation vestibulaire : la perte de vection (et donc l'augmentation de la latence), occasionnée par un changement brutal de la vitesse de la scène visuelle est due à une incohérence perceptive. Cette incohérence est provoquée par l'absence de stimulation vestibulaire correspondante. [Young, 1978] remarque que la latence diminue lorsque les accélérations simulées sont en dessous du seuil de perception des organes vestibulaires.
- (b) Facteur humain : Ce délai est variable selon les individus, les critères individuels tels que l'âge, le sexe, le caractère et la santé.
- (c) Fixation : La fixation du regard sur des objets situés au premier plan semble contribuer à la diminution de ce délai.
Enfin dans le but de fournir des ordres de grandeur, [Young et Oman, 1974] rapportent que pour une rotation d'axe vertical à l'intérieur d'une sphère (simulateur de 40 pieds de diamètre), on observe une latence de vection circulaire de 11s pour une vitesse visuelle de 5 deg/s et 6s pour 10 deg/s). [Berthoz et al., 1975], ont mesuré pour la vection linéaire horizontale, une latence de 1 à 1.5s pour une vitesse visuelle de 0.2 à 1m/s. On constate que les ordres de grandeurs des latences de la vection circulaire sont plus élevés que ceux de la vection linéaire.
- (d) La vitesse des objets : Dans leur article, [Telban et Cardullo, 2001] reportent qu'une diminution de ce délai est observable lorsque la vitesse des objets augmente.

3. Réponse fréquentielle

D'après [Young, 1978] (vection circulaire) et [Berthoz et al., 1975] (vection linéaire), la réponse fréquentielle de la vection, s'apparente à un filtre passe-bas du premier ordre avec une fréquence de coupure de l'ordre de 0.1 Hz. Ce résultat est donc caractéristique de la perception des informations d'origine visuelle.

4. Perte de la vection

Durant une stimulation visuelle à vitesse constante, un arrêt occasionnel et brutal de la vection peut se produire, la reprise de l'illusion sensorielle se déroule suivant les mêmes conditions qu'à l'instant initial. La raison de ces pertes inattendues n'est pas connue avec certitude. Néanmoins on peut supposer que les mouvements volontaires des yeux peuvent influencer cet arrêt temporaire de vection.

5. Mécanisme d'adaptation

Dans le cadre de la vection linéaire, un phénomène d'adaptation peut se produire. Ce phénomène pousse le conducteur d'un véhicule roulant à vitesse constante à sous-estimer sa vitesse de déplacement. La vection diminue pour une stimulation constante avec une constante de temps à 30-50s.

3.3 Modèles d'interaction visio-vestibulaire

3.3.1 Motivations

Dans le cadre de la simulation de conduite, le conducteur est soumis à un ensemble de stimulations qui interagissent simultanément pour produire une sensation psychologique. Plus particulièrement, des études ont montré l'existence d'une forte interaction visio-vestibulaire [Zacharias, 1977]. Or, les modèles présentés précédemment supposent par construction la décorrélation des stimulations sensorielles : le système vestibulaire a été étudié dans l'obscurité tandis que la vection a été considérée dans le cadre de l'immobilité du sujet. Comment peut-on alors mettre à profit ces connaissances pour expliquer l'interaction visio-vestibulaire ?

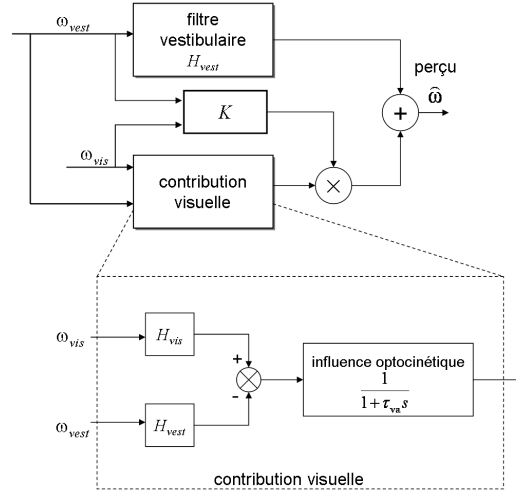


FIG. 3.8 – Structure générale de l'interaction visio-vestibulaire

Les premiers modèles d'interaction sont des *modèles de fusion* visio-vestibulaire. Ils supposent que la sensation subjective de mouvement de la tête est le résultat de la *somme pondérée* des afférences vestibulaires et visuelles. Cependant, certains résultats expérimentaux¹⁸ ont révélé les insuffisances de ce type de modèles linéaires de sommation lorsque les deux stimuli (visuel et vestibulaire) sont présents simultanément. Le signal visuel est favorisé lors de situation cohérente tandis que le signal vestibulaire est privilégié pour les situations de conflits sensoriels¹⁹ (de direction ou intensité). Ceci suggère l'utilisation de *modèles conflictuels* où la pondération des deux contributions visuelle et vestibulaire dépend dynamiquement du conflit sensoriel.

Nous renvoyons le lecteur à [Reymond, 2000a] pour une revue de ces modèles. Dans cette section nous présenterons trois modèles dont deux sont conflictuels. Ces modèles sont des modèles de rotation, mais leur principe peut être facilement étendu aux translations. Soulignons aussi que nous pouvons changer les filtres de perception utilisés sans altérer la pertinence de ce raisonnement.

3.3.2 Modèle fusionnel de [Van der Steen, 1998]

Commençons cette étude par une propriété remarquable de l'interaction visio-vestibulaire. Dans le cas où le sujet est soumis à une stimulation double visuelle et vestibulaire, du fait du réflexe optocinétique, la contribution spécifique des yeux à la sensation de mouvement, *fait également intervenir la stimulation inertielle*. La contribution des canaux semi-circulaires, quant à elle, est exclusivement provoquée par la rotation de la tête.

Définissons les grandeurs qui vont être utilisées dans la suite : ω_{vis} est la vitesse de la scène visuelle et ω_{ves} la vitesse de rotation de la tête²⁰. Les quantités physiques perçues sont notées par des chapeaux²¹.

¹⁸Voir [Zacharias et Young, 1981] et [Young, 1978].

¹⁹La notion de conflit sensoriel (ou par opposition de cohérence sensorielle) est une notion qui va être représentée mathématiquement dans les modèles suivants. Elle signifie que les informations visuelles et les informations vestibulaires transmises au cerveau ne lui permettent pas de fournir une interprétation juste (et peuvent même provoquer un malaise).

²⁰Les deux rotations sont exprimées dans un repère absolu.

²¹Notons qu'à l'instar de [Ormsby, 1974], Van Der Steen utilise la notion de filtre neuronal (psychique) qui permet de traduire la réponse afférente en quantité subjective perçue.

3.3.2.1 Contribution vestibulaire au mouvement propre

La relation entre la vitesse de rotation perçue $\hat{\omega}_{ves}$ et la vitesse de rotation de la tête ω_{ves} s'écrit de manière générique comme :

$$\frac{\hat{\omega}_{ves}}{\omega_{ves}} = H_{ves} \quad (3.21)$$

où H_{ves} est le filtre linéaire de perception.

3.3.2.2 Contribution visuelle au mouvement propre

En l'absence de réflexe optocinétique et en présence de pures stimulations visuelles la sensation visuelle (vection) est reliée à la vitesse de l'écran par

$$H_{vis} = -e^{-\tau_d s} \quad (3.22)$$

signifiant à la fois que l'illusion de mouvement propre est dans le sens opposé à l'excitation visuelle (illusion du train) et la présence d'un temps de latence τ_d . Dans le cas général (présence d'une stimulation inertielle), Van Der Steen, considère que la contribution visuelle est la différence entre les quantités perçues $\hat{\omega}_{vis}$ et $\hat{\omega}_{ves}$. En effet, instinctivement, si l'écran visuel tourne à la même vitesse et dans le même sens que la tête, alors l'information visuelle signalerait l'absence de rotation. En revanche, si les deux rotations se produisent dans des sens opposés, la sensation visuelle est renforcée. Pour modéliser l'influence optocinétique ou la montée graduelle de vitesse propre, cette différence est filtrée par le filtre optocinétique

$$H_{va} = \frac{1}{1 + \tau_{va} s} \quad (3.23)$$

Finalement la contribution visuelle est :

$$\hat{\omega}_{vis} = H_{va} (H_{vis} \omega_{vis} - \hat{\omega}_{ves}) = H_{va} (H_{vis} \omega_{vis} - H_{ves} \omega_{ves}) \quad (3.24)$$

3.3.2.3 Sensation visio-vestibulaire

Van Der Steen propose un modèle de fusion où la sensation de mouvement totale $\hat{\omega}$ est la somme des contributions visuelles et inertielles :

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \hat{\omega}_{vis} + \hat{\omega}_{ves} \\ &= H_{va} H_{vis} \omega_{vis} + H_{ves} (1 - H_{va}) \omega_{ves} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Il s'agit dans le schéma récapitulatif (Fig.3.8) de choisir un gain K unitaire. Ainsi, pour les basses fréquences ($\tau_{va} s \ll 1 \Rightarrow H_{va} \simeq 1$), cette équation montre la domination visuelle sur la stimulation visuelle car : $\hat{\omega} \simeq H_{va} H_{vis} \omega_{vis}$. Alors que pour les hautes fréquences ($\tau_{va} s \gg 1 \Rightarrow H_{va} \simeq 0$), la stimulation vestibulaire est prépondérante.

Ce modèle permet à partir de l'information fréquentielle de discriminer les contributions visuelles et vestibulaires. Les modèles conflictuels suivants présentent une discrimination plus fine basée sur la composante hautes-fréquences du conflit sensoriel.

3.3.3 Modèle conflictuel de [Telban et Cardullo, 2001]

Ce modèle est basé sur le modèle conflictuel de [Zacharias et Young, 1981]. Il s'agit d'introduire un gain dynamique $K(t)$ dans la sensation visio-vestibulaire :

$$\hat{\omega} = K(t) \hat{\omega}_{vis} + \hat{\omega}_{ves} \quad (3.26)$$

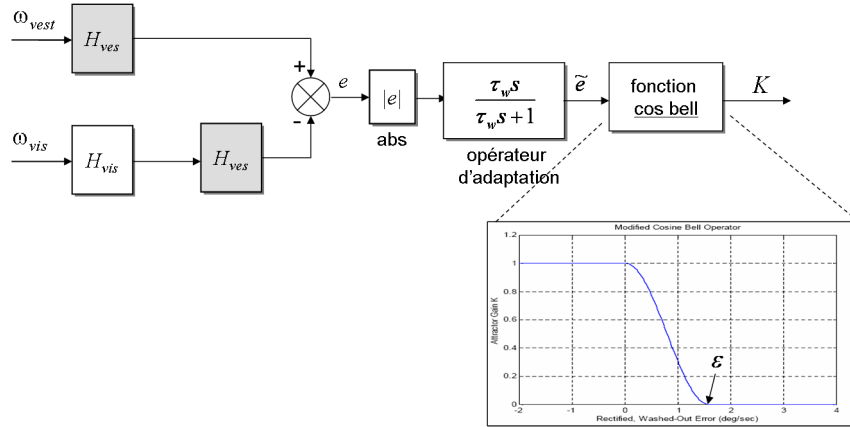


FIG. 3.9 – Structure générale du gain conflictuel

La figure 3.9 représente le calcul du gain conflictuel K . Nous remarquons que la *mesure du conflit* : ' \tilde{e} ' a une forme particulière. Il ne s'agit pas de la différence e entre la stimulation vestibulaire $H_{ves}\omega_{ves}$ et la vection pure $H_{vis}\omega_{vis}$, mais cette dernière est d'abord filtrée par le filtre vestibulaire comme proposé par [Zacharias, 1977]

$$e = H_{ves} (\omega_{ves} - H_{vis}\omega_{vis}) \quad (3.27)$$

La norme de l'erreur e est ensuite filtrée par un filtre d'adaptation (passe-haut) pour aboutir à \tilde{e} . La partie haute fréquence de e est effectivement la quantité discriminante. Finalement, le gain K est calculé par la fonction cosinus bell modifiée proposée par [Borah et al., 1988] :

$$K = \begin{cases} \cos \frac{\pi \tilde{e}}{2\epsilon} & \text{si } 0 \leq \tilde{e} \leq \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.28)$$

où ϵ est le seuil de conflit au delà duquel $K = 0$, c'est-à-dire où le système vestibulaire est dominant. A l'opposé quand \tilde{e} est proche de zéro le signal visuel est dominant ce qui est confirmé par $K = 1$ (voir 3.3.2.3). Il a été suggéré de choisir ϵ comme le seuil de détection vestibulaire.

3.3.4 Modèle conflictuel de [Zacharias et Young, 1981]

Le principe général de ce modèle est différent des deux précédents (voir Fig.3.10). En effet, dans cette approche, on considère uniquement la vection pure (sans interaction vestibulaire et réflexe optocinétique). La sensation de mouvement visio-vestibulaire est donnée par :

$$\hat{\omega} = K(t) \hat{\omega}_{vis} + (1 - K(t)) \hat{\omega}_{ves} \quad (3.29)$$

où (le délai du filtre visuel est considéré nul) :

$$\hat{\omega}_{vis} = -\omega_{vis} \quad \text{et} \quad \hat{\omega}_{ves} = H_{ves}\omega_{ves} \quad (3.30)$$

La mesure du conflit ω_{err} est réalisée, comme précédemment par une mise en valeur absolue et un filtrage passe-haut de l'erreur e :

$$\omega_{err} = \frac{\tau_0 s}{\tau_0 s + 1} |e|, \quad e = \hat{\omega}_{ves} - H_{ves}\hat{\omega}_{vis} \quad (3.31)$$

La méthode de pondération utilise deux fenêtres en cosinus (gaussienne)

$$K = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \lambda\right) \cos \frac{\pi \omega_{err}}{2\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon \leq \omega_{err} \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.32)$$

avec

$$\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{\pi \hat{\omega}_{ves}}{2\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon \leq \hat{\omega}_{ves} \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.33)$$

Ainsi l'influence de ω_{err} se situe dans le choix du point d'application de la gaussienne alors que $\hat{\omega}_{ves}$ détermine l'amplitude λ de celle ci. Cette formulation est une autre façon d'illustrer la prédominance vestibulaire dans les hautes fréquences et la prédominance visuelle dans les basses fréquences.

3.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude des deux récepteurs sensoriels les plus importants dans le processus de création de l'illusion de mouvement propre : les yeux et l'organe vestibulaire. Pour ce dernier, nous avons fourni une description anatomique et des modèles aux niveaux mécanique, afférent et psychologique. Cette banque de modèle sera utilisée pour modéliser le conducteur dans l'élaboration de la commande du simulateur. Nous nous sommes également intéressé aux modèles d'interaction visio-vestibulaire pour les recherches futures.

Afin de compléter la modélisation du simulateur, défini au sens du chapitre Introduction, comme la juxtaposition de réception et de stimulation sensorielle, nous allons donc étudier dans le chapitre suivant l'excitateur sensoriel de l'organe vestibulaire : le robot de simulation.

Observations Dans la littérature de la perception de mouvement (dans le cadre de la simulation de conduite ou de vol), il faut noter les raccourcis suivants :

- Pas de distinction entre force et accélération
- Les filtres canaux relient généralement la vitesse de rotation (et non l'accélération de rotation) à sa perception. Ceci revient à multiplier les filtres précédents par la variable de Laplace s .

Dans les travaux spécifiques à cette thèse, les quantités perçues sont notées par un circonflexe et représenterons la réponse afférente (alors que dans la littérature, le circonflexe est généralement utilisé pour représenter la réponse psychique).

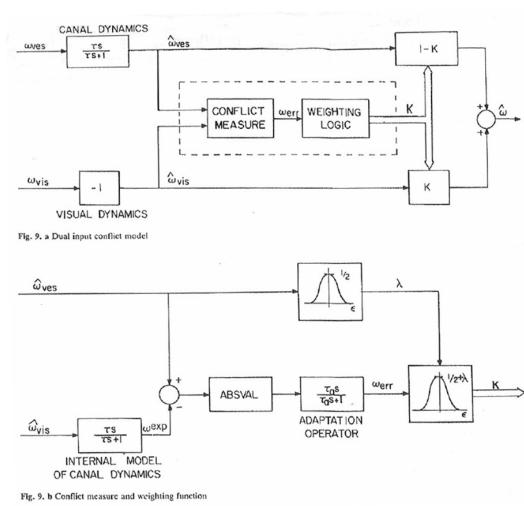


FIG. 3.10 – Structure générale du gain conflictuel de [Zacharias et Young, 1981]

Chapitre 4

Modélisation du mécanisme de mouvement dans les simulateurs de conduite

Nous proposons d'étudier dans cette partie trois mécanismes de mouvement employés dans les simulateurs de conduite. Le point commun à ces trois architectures est l'utilisation d'un robot parallèle particulier : la plate-forme de Gough-Stewart (que nous appellerons également : hexapode). La figure 4.1 présente un exemple de chaque type d'architecture :

1. Le simulateur Clio consiste à fixer un cockpit de voiture sur l'hexapode
2. Le simulateur Ultimate (Renault) permet à la base du robot parallèle des translations dans le plan des rails XY
3. Le simulateur Nads (Iowa University) permet de plus une rotation complète du dôme de simulation perpendiculairement à son châssis

4.1 Introduction aux robots parallèles

L'idée des robots manipulateurs est née du besoin de s'affranchir de travaux mécaniques fastidieux. Dans un premier temps, l'architecture série s'est inspirée du bras humain. L'utilisation de ce type de robots pour la manipulation de grandes charges, pose des problèmes de stabilité (oscillations



(1)



(2)



(3)

FIG. 4.1 – Les simulateurs basés sur le robot de type Gough-Stewart

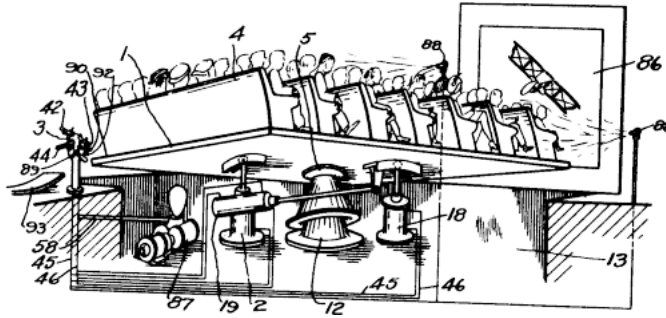


FIG. 4.2 – Probablement, le premier mécanisme spatial (breveté en 1931 USA)

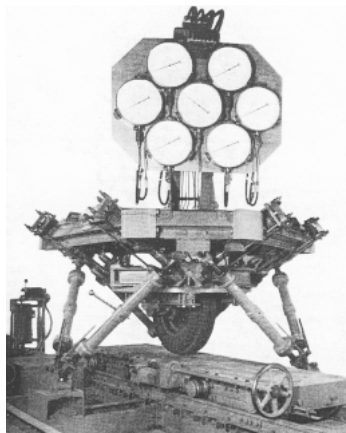


FIG. 4.3 – Plate-forme de Gough, 1947

parasites) et de rigidité importants. Pour pallier ces défauts, une nouvelle architecture dite parallèle¹ (i.e. plusieurs bras manipulateurs attachés à une base fixe et se partageant la charge) a été créée. Le premier robot parallèle remonte à 1928. Le fameux simulateur de Gough (créé pour tester le comportement des roues d'avions dans la phase d'atterrissage avec des charges variables - Figure 4.3) date de 1947. Le lecteur curieux de connaître plus en détails l'histoire de ces robots peut se référer au document Internet [Bonev, 2003].

4.1.1 Les robots parallèles versus les robots séries

Par rapport aux robots séries, les robots parallèles présentent les avantages suivants : (a) poids de la charge mieux réparti (meilleure rigidité des segments en général) ; (b) erreur de mesure (capteurs) moyennée dans le cas parallèle (erreur cumulée dans le cas série) ; (c) précision, vitesse (pour faible charge), rigidité. Cependant, cette architecture introduit principalement deux difficultés :

- Moins de souplesse dans la commande du fait du couplage entre les articulations (dans le cas série, on a la possibilité d'agir sur un segment indépendamment de ceux qui le précèdent)
- L'enveloppe du mouvement de l'organe terminal est réduite. En effet, considérons un hexapode dont l'angle de tangage maximal est de 15 degrés. Pour obtenir cette inclinaison, deux de ses

¹De façon plus précise, un robot parallèle (resp. série) est une chaîne fermée (resp. ouverte) d'articulations et de corps rigides.

Nom	Liaison	Nb d.d.l. (en. d.o.f.)
Prismatique	Glissière	1 translation
Sphérique	Rotule	3 rotations
Révolution	Pivot	1 rotation
Cylindrique	Pivot et glissière	1 rotation + 1 translation
Universel	Cadran	2 rotations

TAB. 4.1 – Les articulations et leur nomenclature (Nb ddl signifie le nombre de degrés de liberté)

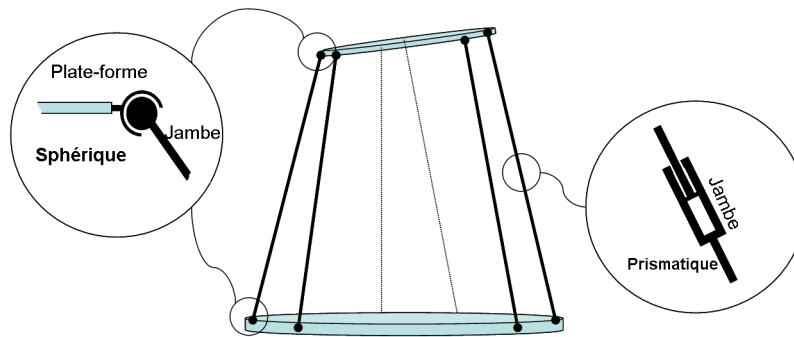


FIG. 4.4 – Architecture de la plate-forme de Gough-Stewart

vérins doivent être en butée maximale, deux autres en butée minimale et les deux restants dans des états intermédiaires. Autrement dit, les autres directions de mouvement sont bloquées² si une rotation dans le sens opposé n'est pas effectuée.

4.1.2 Nomenclature et type d'articulations

Les articulations communément utilisées dans les robots parallèles sont listées dans le tableau Tab.4.1. A partir de la première lettre du nom de la liaison, on construit la nomenclature conventionnelle des différentes architectures parallèles. Par exemple, un 6-UPS, est un robot parallèle avec 6 jambes formées chacune d'un joint universel, prismatique et sphérique (l'ordre est important). Ils sont disposés dans le sens ascendant : de la base à la plate-forme. Pour des exemples d'architecture nous renvoyons le lecteur au document suivant : [Merlet, 2000] et au site Internet : http://www-sop.inria.fr/coprin/equipe/merlet/Archi/archi_robot.html

4.2 Architecture d'un robot de type Gough-Stewart

Un robot de type Gough-Stewart (ou un hexapode) est composé de trois parties : une base fixe, 6 jambes extensibles et un organe terminal mobile : la plate-forme (Le cockpit ou le dôme de simulation est placé sur celle-ci). Les jambes sont formées par des vérins électro-hydrauliques reliés à la base et à la plate-forme par une liaison universelle et sphérique respectivement. Il s'agit donc d'un 6-UPS. Nous allons cependant considérer également l'architecture 6-SPS de la figure Fig.4.4 où l'articulation reliant la base à une jambe est sphérique.

²Ou, au meilleur des cas, très limitées.

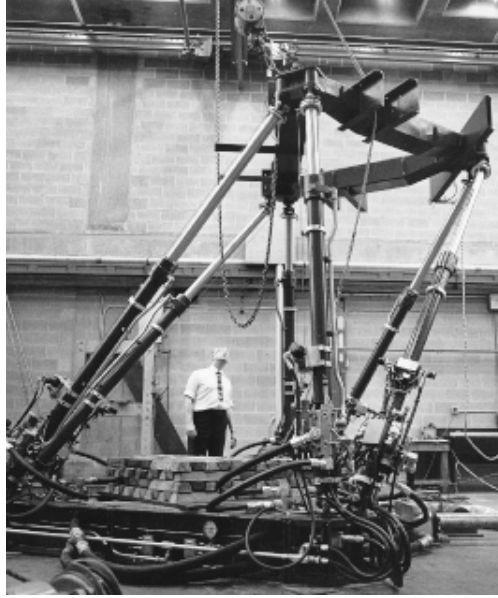


FIG. 4.5 – Exemple d'une plate-forme de Gough-Stewart

4.3 Étude géométrique de l'hexapode

Afin de décrire le mouvement de l'organe mobile (ou du cockpit de simulation qui lui est solidaire) nous devons paramétrer son orientation et son déplacement. C'est le premier objectif de cette section. Nous nous intéresserons aussi à la correspondance géométrique entre les élongations des vérins et la configuration de l'organe terminal (Ce sont les modèles géométriques direct et inverse). Avant de traiter ces deux points, nous allons commencer par les notations et des préliminaires sur les quantités mathématiques qui vont être utilisées dans la suite.

4.3.1 Notations

- M : une matrice carrée est notée par une lettre majuscule en gras
- $I_n, 0_n$ dénotent respectivement les matrices identités et nulles de dimension n
- Les vecteurs mathématiques sont toujours des colonnes
- A, B, \dots des points géométriques
- Les vecteurs géométriques sont notés : AB pour le vecteur orienté allant du point A au point B , \mathbf{n} pour les vecteurs unitaires, \mathbf{v}_A pour la vitesse du point A , ω pour la vitesse de rotation
- Un vecteur géométrique (position ou vitesse) peut être écrit dans plusieurs repères. Si k est l'indice identificateur d'un repère donné alors le vecteur \mathbf{n} écrit dans le k^e repère s'écrit $\mathbf{n}|_k$
- Nous utiliserons le produit scalaire classique sur \mathbb{R}^n noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme euclidienne associée $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$. Pour les vitesses nous allons commettre l'abus de notation : $\mathbf{v}_A^2 = \langle \mathbf{v}_A, \mathbf{v}_A \rangle$.

4.3.2 Préliminaires

Nous définissons les deux repères suivants Fig.4.6 :

- Le repère absolu : repère fixe de la base ($O, \mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$)
- Le repère mobile lié à (ou solidaire de) la plate-forme ($C, \mathbf{n}_{x_p}, \mathbf{n}_{y_p}, \mathbf{n}_{z_p}$)

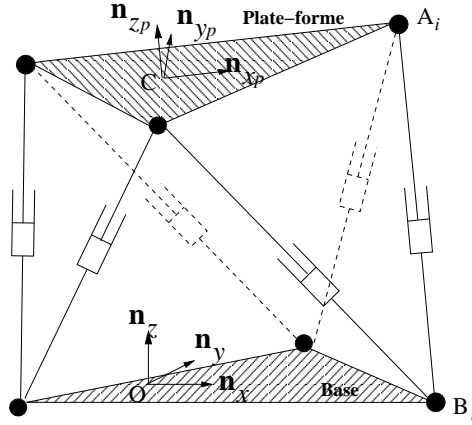


FIG. 4.6 – Architecture de l'hexapode

Construction de la matrice de rotation \mathbf{R} :

On définit les transformations (changements de base) suivantes qui permettent de trouver, pour un vecteur donné, ses coordonnées dans le repère (relatif) de la plate-forme (x_p, y_p, z_p) à partir de ses coordonnées dans le repère (absolu) de la base (x, y, z) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_\phi \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_\theta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\psi \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les matrices \mathbf{R}_ϕ , \mathbf{R}_θ , \mathbf{R}_ψ sont des matrices de rotation selon les vecteurs (axes de rotation) respectifs \mathbf{n}_{z_0} , \mathbf{n}_{y_1} , \mathbf{n}_{x_2} . Nous aboutissons donc à la définition de \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi$$

et nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

La formule de la matrice \mathbf{R} (les fonctions cos et sin sont respectivement notés c et s) est :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta, & s\phi c\theta, & -s\theta \\ -c\psi s\phi + s\psi c\phi s\theta, & c\psi c\phi + s\psi s\phi s\theta, & s\psi c\theta \\ s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta, & -s\psi c\phi + c\psi s\phi s\theta, & c\psi c\theta \end{bmatrix}$$

Notation :

Nous faisons correspondre la base de vecteurs unitaires $\mathbf{n}_{x_i}, \mathbf{n}_{y_i}, \mathbf{n}_{z_i}$ au système de coordonnées (x_i, y_i, z_i) , $i = 0..3$. La longueur et le vecteur unitaire porteur de la jambe $k \in [1..6]$ sont respectivement notés l_k et \mathbf{n}_k de manière à ce que :

$$B_k A_k = l_k \mathbf{n}_k$$

Nous allons aussi noter par l'exposant r (relatif) les coordonnées d'un vecteur écrit dans le repère de la plate-forme : $\mathbf{v}^r = \mathbf{v}|_3$.

Le vecteur configuration géométrique q

Dorénavant, x, y, z désigneront spécifiquement les coordonnées de OC dans le repère absolu :

$$OC|_0 = [x, y, z]^T$$

Nous définissons alors, le vecteur configuration géométrique (position & orientation de la plate-forme mobile) q :

$$q = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T \quad (4.1)$$

Ce dernier permet de définir complètement le mouvement du robot parallèle. Nous appellerons par ailleurs, espace de travail (ou espace des tâches), l'ensemble des configurations q *physiquement réalisables* par le robot (une définition plus précise est proposée dans le paragraphe 4.3.7). Enfin, nous utilisons la notation :

$$q = [q_t^T, q_r^T]^T, \quad q_t = OC|_0 = [x, y, z]^T, \quad q_r = [\phi, \theta, \psi]^T \quad (4.2)$$

mettant en évidence les translations q_t et les rotations q_r ³.

Le vecteur vitesse de rotation ω

Le vecteur vitesse de rotation ω de la plate-forme par rapport à la base est décrit par :

$$\omega = \dot{\phi} \mathbf{n}_{z_0} + \dot{\theta} \mathbf{n}_{y_1} + \dot{\psi} \mathbf{n}_{x_2}$$

En effet, la loi de composition des vitesses de rotation permet d'affirmer :

$$\omega = \omega_{3/0} = \omega_{3/2} + \omega_{2/1} + \omega_{1/0}$$

avec $\omega_{1/0} = \dot{\phi} \mathbf{n}_{z_0}$, $\omega_{2/1} = \dot{\theta} \mathbf{n}_{y_1}$ et $\omega_{3/2} = \dot{\psi} \mathbf{n}_{x_2}$. L'invariance des axes de rotations nous permet d'écrire :

$$\omega = \dot{\phi} \mathbf{n}_{z_1} + \dot{\theta} \mathbf{n}_{y_2} + \dot{\psi} \mathbf{n}_{x_3}$$

D'ailleurs, le vecteur $\mathbf{n}_{y_2}|_3$ écrit dans le repère de la plate-forme est :

$$\mathbf{n}_{y_2}|_3 = \mathbf{R}_\psi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\psi) \\ -\sin(\psi) \end{bmatrix}$$

et le vecteur $\mathbf{n}_{z_1}|_3$ écrit dans le repère de la plate-forme est :

³Ne pas confondre l'indice r signifiant rotation et l'exposant r signifiant relatif.

$$\mathbf{n}_{z_1}|_3 = \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \sin(\psi) \\ \cos(\theta) \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

Ainsi

$$\omega^r = \omega|_3 = \Upsilon(\theta, \psi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \Upsilon(\theta, \psi) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & 0 & 1 \\ \cos(\theta) \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ \cos(\theta) \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Propriétés :

- Υ peut-être écrite sous la forme d'un produit (non commutatif) de deux matrices dépendant chacune d'un angle :

$$\Upsilon = \Upsilon_\psi \Upsilon_\theta, \quad \Upsilon_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_\theta = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

- La matrice Υ est singulière en $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ induisant la même singularité dans la matrice de masse de la plate-forme (voir ci-après). Cette singularité est purement mathématique. Elle est induite par le paramétrage de l'orientation par les angles d'Euler. En effet, $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ correspond à la situation où les axes de rotations \mathbf{n}_{z_0} et \mathbf{n}_{x_2} sont confondus (axes de rotation respectifs de \mathbf{R}_ϕ et \mathbf{R}_ψ).

4.3.3 Modèle Géométrique Inverse (MGI)

Le MGI consiste à exprimer les longueurs $l_i = \|\mathbf{B}_i \mathbf{A}_i\|$ des jambes à partir de la position et l'orientation de la plate-forme (i.e. à partir de q). Commençons par développer le vecteur porteur de la jambe i (dans le repère absolu) :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i &= \mathbf{B}_i \mathbf{O} + \mathbf{OC} + \mathbf{CA}_i \\ &= \mathbf{B}_i \mathbf{O} + \underbrace{\mathbf{OC}}_{= \mathbf{q}_t} + \mathbf{R}^T(q_r) \cdot \mathbf{CA}_i^r \end{aligned} \quad (4.5)$$

comme les vecteurs $\mathbf{B}_i \mathbf{O}$ et \mathbf{CA}_i^r sont des vecteurs constants⁴. Le vecteur $\mathbf{B}_i \mathbf{A}_i$ dépend donc *uniquement* de q et nous pouvons écrire :

$$l = (l_i)_{i=1..6} = (\|\mathbf{B}_i \mathbf{A}_i\|)_{i=1..6} = f(q)$$

où f est une application continûment dérivable de \mathbb{R}^6 dans \mathbb{R}^6 construite à partir de (4.5) et qui contient les données géométriques du robot (à savoir les vecteurs $\mathbf{B}_i \mathbf{O}$ et \mathbf{CA}_i^r). La dérivation de cette équation fait apparaître la matrice jacobienne du modèle inverse $\mathbf{J}(q) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$:

$$dl = \mathbf{J}(q) dq \quad (\mathbf{J})_{i,j} = \frac{\partial l_i}{\partial q_j}$$

Le MGI et la matrice \mathbf{J} sont des constructions très importantes dans l'élaboration de la commande du robot car elles mettent en relation les longueurs des jambes (c'est-à-dire les vérins, les actionneurs) et l'espace des tâches (q) où l'on spécifie le comportement désiré de la plate-forme. Nous allons dériver une interprétation géométrique intéressante de la matrice jacobienne inverse.

⁴Ce sont des données géométriques du robot. En effet le point \mathbf{B}_i est fixe dans le repère de la base et le vecteur \mathbf{CA}_i^r relatif est formé par les coordonnées du point \mathbf{A}_i dans le repère de la plate-forme.

Représentation plückerienne de la matrice jacobienne inverse

Nous repartons de la définition de la longueur l_i de la i^e jambe :

$$l_i^2 = \|B_i A_i\|^2 = \|B_i O + O A_i\|^2$$

La dérivation de cette équation par rapport au temps donne (sachant que $B_i O$ est constant) :

$$l_i \dot{l}_i = \left\langle B_i A_i, \frac{dO A_i}{dt} \right\rangle$$

Par ailleurs, la dérivation de $O A_i$ donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} O A_i &= \underbrace{\frac{d}{dt} O C}_{= \dot{q}_t} + \omega \wedge C A_i \end{aligned}$$

Et donc finalement (après division par l_i) :

$$\dot{l}_i = \langle \dot{q}_t, \mathbf{n}_i \rangle + \langle \omega, (\mathbf{n}_i \wedge A_i C) \rangle$$

Ceci peut être réécrit sous la forme d'un produit scalaire $\dot{l}_i = \langle v, p_i \rangle = p_i^T v$ de deux vecteurs de dimension 6 :

$$v = \begin{bmatrix} \dot{q}_t \\ \omega \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad p_i = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{n}_i \wedge A_i C \end{bmatrix}$$

où le vecteur v est relié à \dot{q} par l'intermédiaire de Υ (eq.(4.3))

$$v = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{R}^T \Upsilon \end{bmatrix} \dot{q}$$

En effet, nous avons

$$\omega = \mathbf{R}^T \Upsilon \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad \text{car} \quad \omega = \mathbf{R}^T \omega^r$$

Par ailleurs p_i est le vecteur de Plücker normalisé de la droite $B_i A_i$, permettant ainsi d'écrire la matrice jacobienne sous la forme plückerienne suivante :

$$\mathbf{J} = \mathbf{P} \mathbf{E} \tag{4.6}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1^T \\ \vdots \\ p_6^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{R}^T \Upsilon \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

où \mathbf{P} définit la matrice de Plücker et \mathbf{E} une transformation géométrique induite par l'utilisation des angles d'Euler.

Un vecteur de Plücker ?

Un vecteur de Plücker (non normalisé) est une représentation particulière d'une droite affine $(M_1 M_2)$ dans l'espace euclidien de dimension 3

$$p = (M_1 M_2, OM_1 \wedge OM_2)$$

avec O un point arbitrairement choisi dans l'espace. La normalisation de ce vecteur consiste à le diviser par la norme de $M_1 M_2$ i.e.

$$p_n = \left(\frac{M_1 M_2}{\|M_1 M_2\|}, \frac{OM_1 \wedge OM_2}{\|M_1 M_2\|} \right)$$

Remarques

- La représentation de Plücker d'une droite est invariante par rapport à la multiplication par un scalaire non nul. En particulier, p et p_n représentent la même droite affine.
- L'utilisation de la forme $\mathbf{J} = \mathbf{P} \mathbf{E}$ pour la matrice jacobienne inverse fait apparaître dans \mathbf{E} le produit : $\mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_\phi^T \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\psi^T \boldsymbol{\gamma}_\psi \boldsymbol{\gamma}_\theta$. Notons que le sous produit $\mathbf{R}_\psi^T \boldsymbol{\gamma}_\psi$ présente la particularité d'être une symétrie :

$$\mathbf{R}_\psi^T \boldsymbol{\gamma}_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La suite des calculs donne

$$\mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\psi^T \boldsymbol{\gamma}_\psi \boldsymbol{\gamma}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

et donc

$$\mathbf{R}^T \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_\phi^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

4.3.4 Représentation algébrique du vecteur de Plücker

Un vecteur de Plücker :

$$p_i = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{n}_i \wedge \mathbf{A}_i \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

peut être réécrit en utilisant l'application : $u \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \tilde{u} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ où \tilde{u} est la matrice antisymétrique vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^3, u \wedge x = \tilde{u}x$ ⁵.

$$p_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & 0_3 \\ 0_3 & \mathbf{R}^T \widetilde{\mathbf{CA}_i^r} \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{n}_i \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Nous pouvons par conséquent réécrire la i^e ligne J_i matrice jacobienne comme :

$$J_i^T = \mathbf{E}^T p_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & 0_3 \\ 0_3 & \boldsymbol{\gamma}^T \widetilde{\mathbf{CA}_i^r} \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{n}_i \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

4.3.5 Singularités

Une *singularité* est une configuration q_s de la plate-forme pour laquelle, la matrice jacobienne inverse \mathbf{J} est non inversible. Concrètement, comme :

$$d\mathbf{l} = \mathbf{J}(q_s) d\mathbf{q} \quad (4.11)$$

ceci signifie qu'il existe un mouvement infinitésimal $d\mathbf{q} \in \ker \mathbf{J}(q_s)$ de la plate-forme mobile pour lequel les jambes ne peuvent pas changer de longueurs car $d\mathbf{l} = 0$. Or l'action sur le robot (la commande) consiste à effectuer un changement de l'élongation des vérins (et donc une variation des longueurs l). Par conséquent, $d\mathbf{q} \in \ker \mathbf{J}(q_s)$ est un mouvement irréalisable par la plate-forme. On dit qu'une singularité provoque une perte des degrés de libertés du robot.

⁵L'expression de \tilde{u} en fonction de u est donnée en annexe.

Une autre interprétation des singularités est basée sur les forces. Notons F les forces généralisées agissant selon les coordonnées q et u l'ensemble des forces articulaires (dans notre cas, les forces appliquées par les vérins). Le principe des travaux virtuels permet d'affirmer que

$$\langle F, dq \rangle = \langle u, dl \rangle \quad (4.12)$$

Comme, $\langle u, dl \rangle = \langle u, J(q) dq \rangle$, nous obtenons la relation suivante :

$$u = J^{-T}(q) F \quad (4.13)$$

Ainsi pour une configuration singulière, un effort fini F produirait une divergence dans les forces articulaires (vérins) u et donc une probable casse du robot. Cette explosion de u pourrait traduire l'incapacité de la plate-forme à produire certains mouvements infinitésimaux.

Les singularités [Merlet, 1998b] sont donc des configurations géométriques critiques qui peuvent, dans le cadre de la simulation de conduite, être dangereuses pour la sécurité du conducteur.

Interprétation plückerienne des singularités La forme $J = PE$ de la matrice jacobienne inverse permet de distinguer deux catégories de singularités. La première catégorie correspond à la matrice E . Il s'agit de singularités purement mathématiques liées au choix du paramétrage de l'orientation : $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Le deuxième type de singularités est provoqué par la dégénérescence de la matrice de Plücker P . Ces singularités correspondent à des dispositions particulières dans l'espace des 6 axes porteurs des jambes. [Dandurand, 1984] établit la liste des configurations géométriques de 6 droites dans l'espace engendrant la non inversibilité de la matrice P . L'existence de singularités dans l'espace de travail est liée à la possibilité d'atteindre ces positions géométriques, étant données les contraintes de déplacement (voir [Merlet, 2000] section 5.4). [Pottman et Wallner, 2001] démontrent qu'un hexapode est en position singulière quand les axes des actionneurs sont dans un complexe linéaire (contenu dans la quadrique de Klein).

4.3.6 Modèle Géométrique Direct (MGD)

Il s'agit de trouver la position et l'orientation de la plate-forme q à partir des longueurs des jambes⁶ l . Ce problème est beaucoup plus complexe que le MGI. En effet, le MGD admet généralement plus d'une solution (l'application f définissant le MGI n'est pas inversible⁷) et le calcul de l'ensemble de ces solutions se révèle être une tâche difficile et très coûteuse en temps de calcul (pour plus de détails voir [Merlet, 2000]). La motivation principale de l'étude du MGD est la suivante.

Dans le cadre de la manipulation (commande du robot), les tâches sont spécifiées dans l'espace de travail : c'est-à-dire dans l'espace des configurations q . Les capteurs de mouvement sont généralement placés au niveau des vérins permettant ainsi de mesurer les longueurs⁸ l . Dans ce cas, le MGD est utilisé pour déterminer numériquement une configuration q à partir de la mesure de l et d'une estimée q_0 de q , à chaque instant⁹. Décrivons brièvement une des méthodes numériques utilisés :

Résolution numérique : Méthode de Newton-Raphson

C'est une méthode de descente où l'on cherche à minimiser en q l'erreur quadratique pour un certain l donné :

$$\|f(q) - l\|^2$$

Cette méthode repose sur la donnée d'une estimée q_0 suffisamment "proche" de la solution et consiste à trouver à partir des longueurs l (et de q_0) une configuration de la plate-forme q . L'algorithme est itératif et se décompose en 4 étapes. (notons k l'indice d'itération commençant à partir de 0) :

⁶Le MGD est donc le problème inverse du MGI

⁷Il existe jusqu'à 40 solutions à ce problème [Merlet, 2004].

⁸Des accéléromètres peuvent être néanmoins, placés au niveau de la plate-forme mobile permettant un accès direct à \ddot{q} .

⁹Le livre [Merlet, 2000] fait la revue de ces méthodes.

1. Initialisation de q_k avec l'estimée initiale q_0
2. Inversion de q_k avec le MGI pour obtenir une estimée l_k des longueurs des jambes
3. Calcul de la différence $dl = l - l_k$:
 - (a) Si $\|dl\| < \varepsilon$, l'algorithme est arrêté et la solution est $q = q_k$
 - (b) Sinon, $q_{k+1} = q_k - J^{-1} dl$
4. Incrémentation et retour en 2

Remarques

- Nous n'avons aucune garantie quant à la convergence de l'algorithme
- L'algorithme dépend de q_0 et de la matrice jacobienne inverse dont il faut garantir l'inversibilité. Par conséquent cette méthode perd sa robustesse à l'approche des singularités
- Nous avons le choix dans 3.(b) entre $J(q_0)$ (i.e. constante) ou $J(q_k)$ (variable)
- L'erreur ε est un facteur important qui dépend du choix de la norme et qui influence la convergence de l'algorithme

4.3.7 Espace de travail

Le mouvement du robot parallèle est un mouvement qui présente trois types de contraintes :

- Contraintes au niveau des articulations actives :
Les courses des vérins sont limitées tant au niveau géométrique (déplacement) qu'au niveau cinétique et dynamique (vitesse et accélération). Pour le premier niveau, l'élongation d'un vérin varie entre une longueur minimale et une longueur maximale. Ainsi, l'ensemble des longueurs l est dans une "boîte" de dimension 6 : \mathfrak{B} (correspondant au produit des plages de déplacement de chaque vérin).
- Contraintes au niveau des articulations passives :
Les angles de rotation des articulations sphériques sont limitées.
- Contraintes au niveau de l'agencement stérique

Nous définirons l'espace de travail (ou de tâches) comme l'ensemble des configurations q *réalisables* par le robot. Une configuration réalisable q vérifiant les trois contraintes :

1. le vecteur longueurs associé $l = f(q)$ est dans \mathfrak{B}
2. il existe une configuration des jambes telle que les contraintes sur les articulations sphériques soient vérifiées

L'espace de travail est un sous ensemble d'une variété de dimension 6 dont la détermination est une tâche difficile [Merlet, 1998a].

4.4 Modélisation dynamique des robots parallèles

Plusieurs méthodes ont été développées pour l'élaboration du modèle dynamique des robots parallèles. Les plus courantes d'entre elles sont : Lagrange-Euler¹⁰, le principe des travaux virtuels¹¹ et Newton-Euler¹². Nous avons choisi la première méthode, car elle offre plus d'avantages en termes de modularité et de maniabilité.

¹⁰Voir [Bhattacharya et al., 1997] et [Lebret et al., 1992].

¹¹Voir [Tsai, 2000] et [Li et Salcudean, 1997].

¹²Voir [Dasgupta et Choudhury, 1999] et [Do et Yang, 1988].

4.4.1 Principe général de la méthode d'Euler Lagrange

Généralement pour un système mécanique (un robot, par exemple)¹³, nous pouvons écrire son énergie cinétique $E_c(q, \dot{q})$ sous une forme quadratique au moyen d'un vecteur q de coordonnées généralisées (ensemble de données géométriques décrivant complètement le mouvement du robot). Ainsi le Lagrangien L s'écrit :

$$L(q, \dot{q}) = E_c(q, \dot{q}) - E_p(q), \quad E_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

où $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice de masse du système, positive et symétrique et $E_p(q)$ est l'énergie potentielle du système. Les équations d'Euler Lagrange permettent ensuite de dériver le modèle dynamique dans sa forme standard :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F, \quad \begin{aligned} G(q) &= \frac{\partial E_p}{\partial q} \in \mathbb{R}^n \\ C(q, \dot{q}) &= (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

où F est le vecteur des forces et moments extérieurs généralisés appliqués au robot, G (est l'opposé de la force de Gravité) et $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur des forces de Coriolis et centripètes. Pour calculer ce dernier, on utilise les symboles de Christoffel γ_{ijk} . Le terme général de la matrice C s'écrit :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} \dot{q}_k, \quad i, j = 1..n$$

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \right), \quad M(q) = (m_{ij})_{i,j=1..n}$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans l'annexe de chapitre.

4.4.2 Propriétés du modèle dynamique

- La matrice de masse M est une matrice symétrique positive semi-définie. M peut être singulière dans le cas d'un vecteur d'état redondant ou pour un certain paramétrage des angles.
- **Passivité** : Par construction, nous avons la propriété de *passivité* : $\dot{M} - 2C$ est une matrice anti-symétrique. Cette propriété est importante car elle permet de réduire le conservatisme dans l'établissement de la robustesse de certaines commandes.
- Les forces non conservatives de frottement peuvent être décrites en ajoutant les termes suivants :

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) &= F \\ N(q, \dot{q}) &= C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \underbrace{F_d \dot{q} + F_s(\dot{q}) + T_d}_{\text{frottements}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

où F_d est une matrice diagonale des coefficients visqueux de frottements, $F_s(\dot{q})$ est le vecteur des forces de frottement non structurées (frottement statique, par exemple) et T_d représente toutes les entrées parasites au système (et/ou la dynamique non incluse dans le modèle) [Qu et Dawson, 1996].

- Les forces de Coriolis présentent une forme quadratique spécifique. Le i^e terme s'écrit

$$(C(q, \dot{q})\dot{q})_i = \dot{q}^T \Gamma_i \dot{q}, \quad (\Gamma_i)_{jk} = \gamma_{ijk} \quad (4.15)$$

où Γ_i est une matrice symétrique¹⁴.

¹³Attention à ne pas confondre le vecteur général q utilisé dans cette section (décrivant le mouvement d'un système mécanique quelconque) avec la définition précédente (4.1).

¹⁴**Aspect pratique du calcul des forces de Coriolis** : Nous nous proposons d'utiliser cette forme quadratique afin de dériver

4.4.3 Définition complète du modèle dynamique

En conclusion des calculs faits précédemment, il apparaît que décrire complètement un modèle dynamique consiste à dériver les quantités suivantes :

$$\text{modèle dynamique} = \left\{ \mathbf{M}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} \right\}$$

Ce sont précisément ces quantités qui vont être fournies, dans la suite, pour la représentation dynamique des simulateurs.

4.4.4 Linéarité de la méthode de Lagrange

Si le système mécanique est composé de N corps (solides), nous pouvons écrire le Lagrangien comme la somme des sous Lagrangiens :

$$L = \sum_{k=1}^N L_k, \quad L_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_k(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - E_p^k$$

Dans ce cas, le schéma de calcul permet de dériver directement le modèle dynamique du système dans sa totalité :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}$$

avec

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^N \mathbf{M}_k \quad \mathbf{C} = \sum_{k=1}^N \mathbf{C}_k \quad \mathbf{G} = \sum_{k=1}^N \mathbf{G}_k$$

où les matrices \mathbf{C}_k (resp. les vecteurs \mathbf{G}_k) sont dérivées de \mathbf{M}_k (resp. de E_p^k) par la dérivation d'Euler Lagrange décrite dans la section 4.4.1.

La méthode de Lagrange présente donc un aspect modulaire intéressant dans l'optique de développer des modèles dynamiques avec plusieurs niveaux de complexité.

4.4.5 Application aux simulateurs de conduite

Avant d'appliquer la méthode de Lagrange à la modélisation dynamique des simulateurs de conduite, nous proposons dans cette section, une revue des hypothèses de modélisation des hexapodes ainsi qu'une introduction aux différents modèles qui vont être élaborés.

une procédure pratique pour calculer ces forces à partir du tenseur $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}$. Commençons par réécrire (4.15) sous la forme d'un produit tensoriel

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \Gamma \dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}})_i = \sum_{j,k=1}^n \dot{q}_j \gamma_{ijk} \dot{q}_k$$

où Γ est un tenseur d'ordre 3 et de dimension n construit en juxtaposant les matrices Γ_i dans le sens de la "profondeur". En d'autres termes, il s'agit d'un tableau tri-dimensionnel où l'indice i représenterait la profondeur, j et k représenteraient indifféremment la longueur et la largeur (du fait de la symétrie $\gamma_{ijk} = \gamma_{ikj}$).

Pour calculer Γ à partir de $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}$, nous utilisons la fonction de permutation de `permute` de Matlab. Nous pouvons donc traduire la relation scalaire :

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \right), \quad \mathbf{M}(\mathbf{q}) = (m_{ij})_{i,j=1..n}$$

en relation tensorielle

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left(\text{permute} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}, [3, 2, 1] \right) + \text{permute} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}}, [1, 3, 2] \right) - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{q}} \right)$$

4.4.5.1 Hypothèses générales de modélisation

Dans la littérature de modélisation des robots parallèles certaines hypothèses sont communément admises. Parmi lesquelles nous citons :

- *Rigidité* des solides composant le robot¹⁵
- *Jambes identiques* tant au niveau géométrique que dynamique
- *Jambes fines* : L'hypothèse des jambes fines permet de considérer que leur moment d'inertie selon l'axe porteur sont nuls
- *Frottements négligés* : en général, les forces de frottement ne sont pas décrites (à l'exception de quelques articles qui proposent une modélisation des actionneurs électro-hydrauliques).
- *Jambe en deux parties* : les jambes¹⁶ sont communément modélisées par deux corps Fig.4.7.

4.4.5.2 Les différents modèles des simulateurs de conduite

Dans les prochaines sections, nous allons d'abord étudier le modèle dynamique de la plate-forme de Gough-Stewart à base fixe. Ensuite, nous traiterons le modèle étendu (Ultimate) qui permet à la base de bouger sur des rails XY. Enfin, nous présenterons le modèle du simulateur Nads. Notons que pour chaque type de simulateur, nous allons élaborer trois modèles dynamiques de niveaux de complexité ascendants :

- modèle du simulateur avec jambes de masses nulles
- modèle du simulateur avec représentation ponctuelle d'une jambe
- modèle du simulateur avec représentation élaborée d'une jambe

Ces trois modèles serviront à l'élaboration de la commande robuste ainsi qu'à la programmation d'une plate-forme logicielle de test (un simulateur de simulateur).

4.5 Modélisation dynamique de la plate-forme de Gough-Stewart (base fixe)

L'objectif de cette section est d'introduire les hypothèses de modélisation de l'hexapode à base fixe et d'en déterminer des modèles dynamiques de complexité croissante en utilisant la linéarité de la méthode de Lagrange. Dans les trois premiers paragraphes, nous exprimerons les Lagrangiens et nous présenterons les expressions des énergies cinétiques (sous formes quadratiques) et des énergies potentielles (les détails des calculs et les dérivations sont proposés dans la section 4.9). Le dernier paragraphe synthétisera le modèle dynamique du robot.

4.5.1 Lagrangien de la plate-forme mobile

Nous nous plaçons dans le cadre général d'une plate-forme mobile (*incorporant le cockpit de simulation*) de masse m_p et de tenseur d'inertie I_p (tenseur calculé dans le repère lié à la plate-forme). Nous supposons que C est le centre de masse de la plate-forme¹⁷.

L'énergie cinétique E_c^p (l'exposant p signifiera plate-forme mobile) est la somme de l'énergie cinétique de rotation et de l'énergie cinétique de translation :

$$E_c^p = \frac{1}{2} \omega^r T I_p \omega^r + \frac{1}{2} m_p \dot{q}_t^T \dot{q}_t \quad (4.16)$$

¹⁵Notons néanmoins l'étude [Hoffman et McKinnon, 1979] sur les modes de vibration des simulateurs de vols.

¹⁶Pour l'étude des modèles des vérins, le lecteur est reporté à : [Geng et Haynes, 1993] (actionneurs magnétiques pour des hexapodes de taille réduite <15cm) et [Li et Salcudean, 1997] (actionneurs électro-hydrauliques).

¹⁷De façon générale, cette condition peut être relaxée à : C fixe par rapport à son centre de gravité

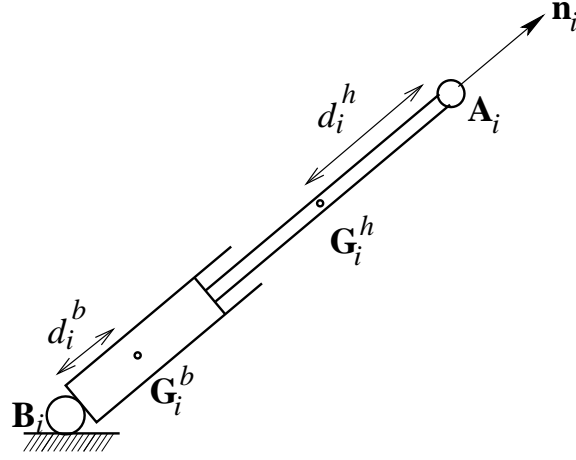


FIG. 4.7 – Modélisation d'une jambe

Nous avons vu dans la première partie que

$$\omega^r = \Upsilon \dot{q}_r \quad (4.17)$$

Et par conséquent l'énergie cinétique s'écrit sous une forme quadratique :

$$E_c^p = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_p \dot{q}, \quad M_p(\theta, \psi) = \begin{bmatrix} m_p \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & M_{\text{rot}} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

où \mathbf{I}_3 , $\mathbf{0}_3$: sont respectivement, la matrice carrée nulle et la matrice identité en dimension 3. M_{rot} est la matrice de masse associée à l'énergie cinétique de rotation :

$$M_{\text{rot}}(\theta, \psi) = \Upsilon^T \mathbf{I}_p \Upsilon \quad (4.19)$$

Quant à l'énergie potentielle, comme C est supposé être le centre de masse, elle s'écrit : $E_p^p = m_p g z$.

4.5.2 Lagrangien d'une jambe : représentation ponctuelle

Dans cette section, nous allons présenter une modélisation ponctuelle d'une jambe. La jambe (figure 4.7) constituée de deux parties : une partie basse (indexée avec b) et une partie haute (indexée avec h), est assimilée à son centre de gravité [Lebret et al., 1992]. Pour calculer la position du centre de gravité G_i d'une jambe $i \in 1..6$, nous utilisons la notation de la figure 4.7.

Le centre de gravité G_i^b de la partie basse (resp. G_i^h de la partie haute) est à une distance fixe d_i^b du point de connexion avec la base B_i (resp. à d_i^h du point de connexion avec la plate-forme A_i). Nous supposons aussi que les masses des parties basses et hautes (respectivement m_i^b et m_i^h) sont constantes et notons $m_i = m_i^b + m_i^h$ la masse totale d'une jambe. Nous rappelons, enfin, que l_i et \mathbf{n}_i désignent respectivement la longueur et le vecteur unitaire associés à la jambe $B_i A_i$. Nous pouvons donc écrire la position du centre de gravité G_i de la jambe :

$$B_i G_i = \frac{1}{m_i} (m_i^b B_i G_i^b + m_i^h B_i G_i^h) \quad (4.20)$$

Le vecteur $B_i G_i$ peut être réécrit en faisant apparaître deux nouvelles constantes :

$$d_i = \frac{m_i^b d_i^b - m_i^h d_i^h}{m_i} \quad \alpha_i = \frac{m_i^h}{m_i} > 0 \quad (4.21)$$

comme :

$$B_i G_i = (d_i + \alpha_i l_i) \mathbf{n}_i \quad (4.22)$$

Nous montrons dans la section 4.9 que l'énergie cinétique d'une jambe s'écrit :

$$E_c^i = \frac{1}{2} m_i (h_i v_{A_i}^2 - k_i \dot{l}_i^2) \quad (4.23)$$

où les paramètres h_i et k_i (non constantes à cause de l_i) sont :

$$h_i = \left(\frac{d_i}{l_i} + \alpha_i\right)^2 \quad k_i = h_i - \alpha_i^2 \leq 0 \quad (4.24)$$

Le développement des expressions de $v_{A_i}^2$ et \dot{l}_i^2 dans (4.23) :

$$\dot{l}_i^2 = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{L}_i \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{L}_i = \mathbf{J}_i^T \mathbf{J}_i \quad (4.25)$$

(où \mathbf{J}_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice jacobienne inverse \mathbf{J}) et

$$v_{A_i}^2 = \dot{\mathbf{q}}^T \Delta_i \dot{\mathbf{q}}, \quad \Delta_i = \mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_i, \quad \mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{R}^T \Sigma_i \end{bmatrix}, \quad \Sigma_i = -\widetilde{\mathbf{CA}_i^r} \gamma \quad (4.26)$$

nous permet d'exprimer l'énergie cinétique sous la forme quadratique suivante :

$$E_c^i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{M}_i = m_i (h_i \Delta_i - k_i \mathbf{L}_i) \quad (4.27)$$

Calculons maintenant l'énergie potentielle de la jambe E_p^i :

$$E_p^i = m_i g < B_i G_i, \mathbf{n}_z > \quad (4.28)$$

Nous réécrivons $B_i G_i$ pour y faire paraître $B_i A_i = l_i \mathbf{n}_i$:

$$B_i G_i = \left(\frac{d_i}{l_i} + \alpha_i\right) B_i A_i \Rightarrow E_p^i = m_i \left(\frac{d_i}{l_i} + \alpha_i\right) g < B_i A_i, \mathbf{n}_z > \quad (4.29)$$

Pour la suite des calculs de l'énergie potentielle et de sa dérivée (ainsi que la dérivation de la matrice \mathbf{M}_i), le lecteur est invité à consulter la section 4.9.

4.5.3 Lagrangien d'une jambe : représentation élaborée

Dans cette approche¹⁸ les deux parties des jambes (haute et basse) sont intégrées dans le modèle dynamique *sans introduire de simplifications* (Fig. 4.7). Nous devons donc calculer les deux vitesses associées et la vitesse de rotation commune¹⁹ à ces deux parties. Nous introduisons un nouveau repère lié au centre de gravité de la partie basse de la jambe. Dans ce nouveau repère nous avons les tenseurs inertiels \mathbf{I}_i^h et \mathbf{I}_i^b des parties haute et basse respectivement.

La vitesse de rotation de la jambe Le vecteur vitesse de rotation de la jambe est :

$$\omega_i = \mathbf{n}_i \wedge \dot{\mathbf{n}}_i = \frac{1}{l_i^2} B_i A_i \wedge \frac{d}{dt} B_i A_i \quad (4.30)$$

Nous montrons dans la section 4.9.3 que :

$$\omega_i = \Omega_i(q) \dot{\mathbf{q}}, \quad \Omega_i = \frac{1}{l_i^2} \begin{bmatrix} \widetilde{B_i A_i} & \widetilde{B_i A_i} & \mathbf{R}^T \Sigma_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \quad (4.31)$$

¹⁸Proposée par [Li et Salcudean, 1997] en utilisant la méthode des travaux virtuels.

¹⁹Car les deux parties sont colinéaires

Énergie cinétique de la partie haute La vitesse du centre d'inertie de la partie haute est :

$$\mathbf{v}_h^i := \mathbf{v}_{G_i^h} = \frac{d}{dt} \mathbf{OG}_i^h = \mathbf{v}_{A_i} - d_h \dot{\mathbf{n}}_i \quad (4.32)$$

Le carré de sa norme est donc²⁰ :

$$(\mathbf{v}_h^i)^2 = h_i^2 \mathbf{v}_{A_i}^2 + (1 - h_i^2) \dot{l}_i^2, \quad h_i = 1 - \frac{d_h}{l_i} \in]0, 1[\quad (4.33)$$

Soit en utilisant les formules quadratiques (4.26) et (4.25) :

$$(\mathbf{v}_h^i)^2 = \dot{\mathbf{q}}^T [h_i^2 \Delta_i + (1 - h_i^2) \mathbf{L}_i] \dot{\mathbf{q}} \quad (4.34)$$

Notons \mathbf{M}_i^h la matrice de masse de la partie haute de la jambe. L'énergie cinétique de la partie mobile s'écrit :

$$E_c^i(\text{haut}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_i^h \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{M}_i^h = m_i^h [h_i^2 \Delta_i + (1 - h_i^2) \mathbf{L}_i + \Omega_i^T \mathbf{I}_i^h \Omega_i] \quad (4.35)$$

faisant apparaître le terme $\Omega_i^T \mathbf{I}_i^h \Omega_i$ dû à l'énergie cinétique de rotation.

Énergie cinétique de la partie basse Par analogie avec la partie haute, calculons la vitesse de son centre de gravité G_i^b

$$\mathbf{v}_b^i := \mathbf{v}_{G_i^b} = d_b \dot{\mathbf{n}} = \frac{d_b}{l_i} [\mathbf{v}_{A_i} - \dot{l}_i \mathbf{n}_i] \quad (4.36)$$

Sa norme élevée au carré donne :

$$(\mathbf{v}_b^i)^2 = b_i^2 (\mathbf{v}_{A_i}^2 - \dot{l}_i^2), \quad b_i = \frac{d_b}{l_i} \quad (4.37)$$

Notons \mathbf{M}_i^b la matrice de masse de la partie mobile de la jambe. L'énergie cinétique de la partie basse s'écrit (en utilisant les formules (4.26) et (4.25)) :

$$E_c^i(\text{bas}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_i^b \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{M}_i^b = m_i^b [b_i^2 (\Delta_i - \mathbf{L}_i) + \Omega_i^T \mathbf{I}_i^b \Omega_i] \quad (4.38)$$

Energie cinétique totale d'une jambe L'énergie cinétique totale de la i^{eme} jambe $E_c^i = E_c^i(\text{bas}) + E_c^i(\text{haut})$ s'écrit donc au moyen de la matrice de masse totale $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_i^b + \mathbf{M}_i^h$: $E_c^i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{q}}$ avec

$$\mathbf{M}_i = (m_i^h h_i^2 + m_i b_i^2) \Delta_i + (m_i^h - (m_i^h h_i^2 + m_i b_i^2)) \mathbf{L}_i + m_i \Omega_i^T \mathbf{I}_i^{\text{eq}} \Omega_i \quad (4.39)$$

où

$$\mathbf{I}_i^{\text{eq}} = \frac{m_i^b \mathbf{I}_i^b + m_i^h \mathbf{I}_i^h}{m_i} \quad (4.40)$$

Énergie potentielle de la partie basse L'énergie potentielle $E_p^i(\text{bas})$ de la partie basse de la i^{e} jambe s'écrit :

$$E_p^i(\text{bas}) = m_i^b g \langle B_i G_i^b, \mathbf{n}_z \rangle = m_i^b b_i g \langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle \quad (4.41)$$

Énergie potentielle de la partie haute L'énergie potentielle $E_p^i(\text{haut})$ de la partie haute de la i^{e} jambe s'écrit :

$$E_p^i(\text{haut}) = m_i^h g \langle B_i G_i^h, \mathbf{n}_z \rangle = m_i^h h_i g \langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle \quad (4.42)$$

²⁰Nous attirons l'attention du lecteur sur les faits suivants (a) la définition de h_i dans cette section est différente de celle donnée pour le modèle simplifié d'une jambe et que (b) h_i n'est pas constante (car l_i dépend de q)

Énergie potentielle totale L'énergie potentielle totale de la $i^{\text{ème}}$ jambe est donc :

$$E_p^i = (m_i^b b_i + m_i^h h_i) g < B_i A_i, \mathbf{n}_z > \quad (4.43)$$

Comme dans le cas d'une représentation ponctuelle (4.29), nous avons exprimé cette énergie en fonction du produit scalaire $< B_i A_i, \mathbf{n}_z >$ et nous renvoyons le lecteur à la fin de la section 4.9.2 pour la suite des calculs.

4.5.4 Synthèse des modèles du robot parallèle

Les calculs précédents nous permettent de construire, pour le simulateur de première catégorie (c'est-à-dire le cockpit attaché à une plate-forme de type Gough-Stewart), trois modèles de précision et de complexité ascendantes dont la structure générale est la suivante :

$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbf{G}(q) = \mathbf{J}^T(q)\mathbf{u} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{M}(q) = \mathbf{M}_p + \sum_{i=1}^6 \mathbf{M}_i, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_p + \sum_{i=1}^6 \mathbf{C}_i, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_p + \sum_{i=1}^6 \mathbf{G}_i \quad (4.45)$$

1. Modèle avec jambes de masse nulle²¹ : $\mathbf{M}_i = 0$, $i = 1..6$
2. Modèle avec jambes ponctuelles : les $(\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{G}_i)$ proviennent de la section 4.5.2
3. Modèle avec jambes élaborées : les $(\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{G}_i)$ proviennent de la section 4.5.3

Malgré sa simplicité²², le premier modèle permet de rendre compte du couplage existant entre les actionneurs grâce à la présence de la matrice \mathbf{J} . Le deuxième modèle est certes plus précis mais nécessite le calcul de 6 nouvelles matrices de masses, et de leurs dérivées (et entre autres le calcul des dérivées premières et secondes de \mathbf{J} par rapport à q) et des forces de gravité. Finalement, le troisième modèle double le nombre de matrices de masse et de forces de gravité liées aux jambes. En conclusion les deux derniers modèles sont plus coûteux en temps de calcul et présentent plus de variables dynamiques à déterminer²³.

²¹Tous calculs faits, nous obtenons les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{aligned} m_p \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + m_p g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \Bigg\} \text{ forces} \\ \mathbf{M}_{\text{rot}} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{q}_r^T \Gamma_\phi & \dot{q}_r^T \\ \dot{q}_r^T \Gamma_\theta & \dot{q}_r^T \\ \dot{q}_r^T \Gamma_\psi & \dot{q}_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_\phi \\ \mathfrak{M}_\theta \\ \mathfrak{M}_\psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_\phi \\ \mathfrak{M}_\theta \\ \mathfrak{M}_\psi \end{bmatrix} \Bigg\} \text{ moments} \end{aligned}$$

où $\mathbf{F} = (f_x, f_y, f_z, \mathfrak{M}_\phi, \mathfrak{M}_\theta, \mathfrak{M}_\psi)^T$ est l'ensemble des forces généralisées. Pour trouver les forces $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_6)^T$ appliquées aux vérins des jambes, on applique le modèle inverse aux forces généralisées \mathbf{F} (4.13) :

$$\mathbf{J}^T(q) [\mathbf{M}_p(q)\ddot{q} + \mathbf{C}_p(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbf{G}_p(q)] = \mathbf{J}^T(q)\mathbf{F} = \mathbf{u} \quad (4.46)$$

Remarques

- Les jambes, étant de masses nulles, n'interviennent pas directement dans le système dynamique. En revanche, elle détermineront les directions des forces des vérins par la matrice \mathbf{J} .
- Les matrices Γ_ϕ , Γ_θ et Γ_ψ dépendent uniquement de θ et ψ .
- Les angles d'Euler induisent une singularité purement mathématique de la matrice de masse en $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ due à la singularité Υ (voir précédemment les propriétés de la matrice Υ). En effet $\det \mathbf{M}_p = m_p^3 \det \mathbf{M}_{\text{rot}} = m_p^3 \det \mathbf{I}_p (\det \Upsilon)^2$.

²²Et donc une bonne vitesse d'exécution

²³ou à calibrer par l'utilisation de l'identification [Koekebakker, 2001].

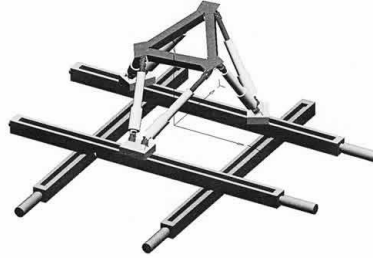


FIG. 4.8 – Base mobile sur des rails XY (Simulateur Ultimate, Renault)

4.6 Modélisation dynamique d'un simulateur à base mobile sur rails XY

Nous supposons dans cette section que la base de l'hexapode (de masse m_{base}) est mobile sur des rails XY (la figure 4.8) et que :

- Les rails X sont immobiles
- Les rails Y (de masse m_Y) sont posés sur les premiers
- La base de la plate-forme de Gough-Stewart est posée sur les rails Y

Le repère absolu n'est plus donc celui relié à la base mais celui que nous définissons comme solidaire des rails X (rails fixes). Notons que le mouvement des rails est un mouvement de translation pur. Par conséquent *les expressions des rotations seront égales à celles préalablement calculées. Les énergies potentielles sont aussi les mêmes*²⁴. En conclusion, l'influence des rails se traduit dans les calculs par l'apparition d'une vitesse d'entraînement dans le plan XY.

Pour tenir compte des rails, nous définissons un nouveau vecteur d'état q_{rails} :

$$q_{rails} = [X, Y, x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T = [X, Y, q^T]^T \quad (4.47)$$

(X, Y) sont les déplacements respectifs des rails²⁵ Y et de la base dans le repère absolu. $q = (x, y, z, \phi, \theta, \psi)$ représente le déplacement de la plate-forme mobile par rapport à la base. Comme dans la partie précédente, nous allons développer trois modèles : sans jambes, jambes ponctuelles et jambes élaborées. Les expressions des énergies potentielles étant les mêmes que celles de la section 4.5, la description des différents Lagrangien se réduit à l'établissement des formes quadratiques des énergies cinétiques.

4.6.1 Lagrangien du système de translation

Nous désignons par système de translation le couple {rails Y, base}. L'écriture de l'énergie cinétique des rails Y est directe : $E_c(\text{rails Y}) = \frac{1}{2}m_Y\dot{X}^2$. La base se déplaçant en plus dans la direction des rails Y, son énergie cinétique est donnée par

$$E_c(\text{base}) = \frac{1}{2}m_{base}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \quad (4.48)$$

Nous définissons la matrice de masse du couple système de translation $M_T \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$

$$M_T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} m_Y + m_{base} & 0 \\ 0 & m_{base} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0_{2 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

²⁴En fait, les énergies potentielles sont égales à une constante près. Nous pouvons les considérer inchangées car nous nous intéressons à leurs dérivées.

²⁵Nous attirons l'attention que le nom des rails Y peut prêter à confusion. Ce sont eux qui coulisent dans la direction des X et non la base (qui est selon Y).

de telle sorte que

$$E_c(\text{rails } Y) + E_c(\text{base}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{\text{rails}}^T \mathbf{M}_T \mathbf{q}_{\text{rails}} \quad (4.50)$$

4.6.2 Lagrangien de la plate-forme mobile

La vitesse de rotation étant inchangée, c'est uniquement la vitesse du centre de gravité C qui change (écrite dans le repère absolu). Selon le principe de composition des vitesses la nouvelle vitesse de C est :

$$\bar{\mathbf{v}}_C = \dot{\mathbf{q}}_t + \mathbf{v}_e, \quad \mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

faisant apparaître la vitesse d'entraînement \mathbf{v}_e . Ainsi l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m_p \bar{\mathbf{v}}_C^2$ de la plate-forme mobile s'écrit :

$$E_c^p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{\text{rails}}^p \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{M}_{\text{rails}}^p(\mathbf{q}_{\text{rails}}) = \begin{bmatrix} m_p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{5 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 5} & \mathbf{M}_{\text{rot}}(\theta, \psi) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

4.6.3 Lagrangien d'une jambe : représentation ponctuelle

La nouvelle vitesse $\bar{\mathbf{v}}_{G_i}$ du centre de gravité G_i de la jambe i , se décompose en deux parties

$$\bar{\mathbf{v}}_{G_i} = \underbrace{\mathbf{v}_e}_{\text{vit. entraînement}} + \underbrace{\mathbf{v}_{G_i}}_{\text{vit. relative}} \quad (4.53)$$

l'expression de la vitesse relative \mathbf{v}_{G_i} a été calculée dans la partie précédente²⁶. Nous montrons dans la section 4.9.4 que \mathbf{v}_{G_i} se réécrit sous la forme :

$$\mathbf{v}_{G_i} = \mathbf{G}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{G}_i(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \quad (4.54)$$

Donc :

$$\bar{\mathbf{v}}_{G_i} = \bar{\mathbf{G}}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_{\text{rails}}, \quad \bar{\mathbf{G}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{G}_i \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

et l'énergie cinétique de la i^{eme} jambe est :

$$E_c^i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{M}}_i \dot{\mathbf{q}}, \quad \bar{\mathbf{M}}_i = \frac{1}{2} m_i \bar{\mathbf{G}}_i^T \bar{\mathbf{G}}_i \quad (4.56)$$

4.6.4 Lagrangien d'une jambe : représentation élaborée

Afin de déterminer les nouvelles énergies cinétiques des parties haute et basse, nous réécrivons leurs vitesses respectives :

$$\bar{\mathbf{v}}_i^h = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_i^h \quad \bar{\mathbf{v}}_i^b = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_i^b \quad (4.57)$$

Les expressions (4.32) et (4.36) de \mathbf{v}_i^h et de \mathbf{v}_i^b se réécrivent sous la forme (voir section 4.9.4) :

$$\mathbf{v}_i^h = \mathbf{G}_i^h(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{v}_i^b = \mathbf{G}_i^b(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.58)$$

²⁶Et reste inchangée car il s'agit d'une vitesse relative. Voir (4.84) : $\mathbf{v}_{G_i} = (\frac{d_i}{l_i} + \alpha_i) \mathbf{v}_{A_i} - \frac{d_i}{l_i} \dot{l}_i \mathbf{n}_i$

permettant d'exprimer les nouvelles vitesses sous la même forme :

$$\bar{\mathbf{v}}_i^\alpha = \bar{\mathbf{G}}_i^\alpha(\mathbf{q}_{\text{rails}})\dot{\mathbf{q}}_{\text{rails}}, \quad \bar{\mathbf{G}}_i^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{G}_i^\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \{\mathbf{b}, \mathbf{h}\} \quad (4.59)$$

D'autre part, les vitesses de rotation des jambes restent inchangées :

$$\bar{\omega}_i = \omega_i = \Omega_i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \bar{\Omega}_i\dot{\mathbf{q}}_{\text{rails}}, \quad \bar{\Omega}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \Omega_i \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Par conséquent, la nouvelle matrice de masse de la i^{e} jambe $\bar{\mathbf{M}}_i$ définissant l'énergie cinétique de la jambe i : $E_c^i = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{M}}_i \dot{\mathbf{q}}$ est :

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \bar{\mathbf{M}}_i^{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{M}}_i^{\mathbf{h}}, \quad \bar{\mathbf{M}}_i^\alpha = \frac{1}{2}m_i (\bar{\mathbf{G}}_i^\alpha)^T \bar{\mathbf{G}}_i^\alpha + \frac{1}{2}\bar{\Omega}_i^T \mathbf{I}_i^\alpha \bar{\Omega}_i, \quad \alpha \in \{\mathbf{b}, \mathbf{h}\} \quad (4.61)$$

4.6.5 Synthèse des modèles avec rails XY

Comme dans le cas de la plate-forme de Gough-Stewart à base fixe (section 4.5.4), nous venons de construire trois modèles de forme générale :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{\text{rails}})\ddot{\mathbf{q}}_{\text{rails}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\text{rails}}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{rails}})\dot{\mathbf{q}}_{\text{rails}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}_{\text{rails}}) = \bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \\ u \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$\bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{\text{rails}}) = \mathbf{M}_{\text{rails}}^{\mathbf{p}} + \mathbf{M}_T + \sum_{i=1}^6 \bar{\mathbf{M}}_i, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_p \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_i \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

où les matrices $\bar{\mathbf{M}}_i$ peuvent provenir du modèle simplifié ou élaboré (section 4.9.4) ou même être nulles pour un modèle sans jambes²⁷. Les forces f_X , f_Y sont les forces agissant respectivement sur les rails Y et X.

4.7 Modélisation dynamique du simulateur Nads

Dans cette partie, nous modélisons la plate-forme de mouvement de la Nads. Elle présente la particularité de permettre une rotation complète du cockpit de simulation perpendiculairement à la plate-forme mobile. Nous partons donc du modèle avec rails XY.

Alors que précédemment, le cockpit de simulation était considéré comme solidaire de la plate-forme mobile, nous allons ici, faire la distinction entre la plate-forme mobile de l'hexapode et le dôme de simulation. Par rapport aux modèles antécédents, nous avons un nouveau solide : le dôme de masse m_d et de tenseur d'inertie \mathbf{I}_d . Ce nouvel élément n'introduit *aucun changement dans les Lagrangiens des autres solides constituant le simulateur*. Il suffit donc de déterminer le Lagrangien du dôme pour compléter les différents modèles dynamique du simulateur Nads.

²⁷La forme générale du modèle sans jambes (jambes de masses nulles) est :

$$\left(m_p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_Y + m_{\text{base}} & 0 \\ 0 & m_{\text{base}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + m_p \mathbf{g} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$$\mathbf{M}_{\text{rot}} \begin{bmatrix} \ddot{\Phi} \\ \ddot{\Theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_r^T \Gamma_\Phi \dot{\mathbf{q}}_r^T \\ \dot{\mathbf{q}}_r^T \Gamma_\Theta \dot{\mathbf{q}}_r^T \\ \dot{\mathbf{q}}_r^T \Gamma_\Psi \dot{\mathbf{q}}_r^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_\Phi \\ \mathfrak{M}_\Theta \\ \mathfrak{M}_\Psi \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

4.7.1 Lagrangien du dôme

Appelons ϕ_z l'angle de rotation du dôme par rapport à la plate-forme mobile. La vitesse totale de rotation du dôme est (l'axe vertical à la plate-forme est z_p) :

$$\omega_d = \omega + \dot{\phi}_z \mathbf{n}_{z_p} \quad (4.67)$$

Le centre de gravité du dôme G_d étant immobile dans le repère lié à la plate-forme mobile, son énergie cinétique est donc :

$$E_c(\text{dôme}) = \frac{1}{2} m_d \mathbf{v}_{G_d}^2 + \frac{1}{2} \omega_d^T \mathbf{I}_d \omega_d \quad (4.68)$$

où la vitesse de G_d est : $\mathbf{v}_{G_d} = \mathbf{v}_C + \omega_d \wedge \mathbf{CG}_d$. Cette énergie cinétique s'exprime moyennant quelques manipulations mathématiques sous la forme quadratique standard :

$$E_c(\text{dôme}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{nads}^T \mathbf{M}_d \mathbf{q}_{nads}$$

où le nouveau vecteur d'état est :

$$\mathbf{q}_{nads} = [\phi_z, X, Y, x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T \quad (4.69)$$

L'énergie potentielle du dôme est :

$$E_p(\text{dôme}) = m_d g \langle \mathbf{OG}_d, \mathbf{n}_z \rangle = m_d g \underbrace{\langle \mathbf{OC}, \mathbf{n}_z \rangle}_z + m_d g \langle \mathbf{CG}_d, \mathbf{n}_z \rangle \quad (4.70)$$

Le vecteur \mathbf{CG}_d étant en rotation de l'angle ϕ_z par rapport à la plate-forme mobile qui est elle même en rotation (angles d'Euler ϕ, θ, ψ) par rapport à la base alors :

$$\mathbf{CG}_d = \mathbf{R}_{\phi_z}^T \mathbf{R}^T \mathbf{CG}_d^r \quad (4.71)$$

où \mathbf{CG}_d^r sont les coordonnées relatives (constantes) de G_d dans le repère de la plate-forme (quand $\phi_z = 0$) et \mathbf{R}_{ϕ_z} est la rotation d'axe z_p et d'angle ϕ_z .

4.7.2 Modèle général

Pour construire les différents modèles de la Nads, nous ajoutons à la forme générale de la section 4.6.5, les termes (\mathbf{M}_d , \mathbf{C}_d , G_d) établis à partir du Lagrangien du dôme :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{nads}) \ddot{\mathbf{q}}_{nads} + \mathbf{C}(\mathbf{q}_{nads}, \dot{\mathbf{q}}_{nads}) \dot{\mathbf{q}}_{nads} + \mathbf{G}(\mathbf{q}_{nads}) = \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_z \\ f_x \\ f_y \\ \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{nads}) = \text{ext} \left(\mathbf{M}_{rails}^p + \mathbf{M}_T + \sum_{i=1}^6 \bar{\mathbf{M}}_i \right) + \mathbf{M}_d \quad (4.73)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}_{nads}, \dot{\mathbf{q}}_{nads}) = \text{ext} \left(\mathbf{C}_{rails}^p + \mathbf{C}_T + \sum_{i=1}^6 \bar{\mathbf{C}}_i \right) + \mathbf{C}_d \quad (4.74)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_p \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_i \end{bmatrix} + \frac{\partial E_p(\text{dôme})}{\partial \mathbf{q}_{nads}} \quad (4.75)$$

avec \mathfrak{M}_z le couple appliqué par le système de rotation vertical et 'ext' une application qui transforme une matrice carrée en une matrice carrée de dimension supérieure, en ajoutant une colonne et une ligne nulles à gauche et en haut respectivement de la matrice de départ. Exemple :

$$\text{ext}(\mathbf{M}_T) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times 8} \\ \mathbf{0}_{8 \times 1} & \mathbf{M}_T \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié trois types de simulateurs basées sur une plate-forme de Gough-Stewart. Pour cette structure parallèle, nous avons fourni une introduction aux problèmes géométriques associés, c'est-à-dire, la relation²⁸ entre les coordonnées de la plate-forme mobile (position et orientation) et les coordonnées articulaires (élongations des vérins), l'espace de travail et les singularités. Les résultats de cette introduction nous ont permis de développer trois modèles dynamiques de niveaux de précisions croissants pour chaque type de simulateur. Ces modèles seront utilisés afin d'élaborer une commande robuste et de développer un logiciel de test (simulateur de simulateur). En conclusion, ce chapitre fournit une banque de modèles dynamiques qui seront exploités dans les chapitres suivants.

²⁸Ce sont les modèles géométriques direct et inverse.

4.9 Annexe 1 : Modèle dynamique

Dans cette section nous allons exprimer les dérivées des énergies potentielles et celles des matrices de masse de la section 4.5 (hexapode à base fixe). Notons que pour les deux types de modèles (ponctuel et élaboré) des jambes, les calculs vont être repris entièrement afin d'explicitier le calcul des matrices de masse.

Quant aux calculs de la section 4.6 (hexapode posé sur des rails XY), nous nous arrêterons au niveau des expressions des matrices de masse et des énergies potentielles. Pour cette dernière section (ainsi que pour la section 4.7 - NADS), notons que l'on peut continuer le calcul des dérivations à partir des expressions que nous aurons développées pour l'hexapode à base fixe.

4.9.1 Plate-forme mobile

Rappelons l'expression de la matrice de masse de la plate-forme mobile

$$\mathbf{M}_p(\theta, \psi) = \begin{bmatrix} m_p \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{M}_{\text{rot}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\text{rot}}(\theta, \psi) = \gamma^\top \mathbf{I}_p \gamma$$

et de son énergie potentielle : $E_p = m_p g z$ (dont la dérivation est directe). Dérivons donc la matrice de masse.

Étant donnée la forme de la matrice de masse \mathbf{M}_p , nous allons nous intéresser à la partie non nulle de $\frac{\partial \mathbf{M}_p}{\partial q}$ c'est-à-dire $\frac{\partial \mathbf{M}_{\text{rot}}}{\partial q}$. Nous utilisons l'équation (4.4) pour définir les matrices suivantes :

$$\Gamma_\phi = \frac{\partial \mathbf{M}_p}{\partial \phi} = 0 \quad \Gamma_\theta = \frac{\partial \mathbf{M}_p}{\partial \theta} \quad \Gamma_\psi = \frac{\partial \mathbf{M}_p}{\partial \psi} \quad (4.77)$$

avec

$$\Gamma_\theta = 2\gamma^\top \mathbf{I}_p \gamma_\psi \frac{d\gamma_\theta}{d\theta} \quad \Gamma_\psi = 2\gamma^\top \mathbf{I}_p \frac{d\gamma_\psi}{d\psi} \gamma_\theta \quad (4.78)$$

$$\frac{d\gamma_\theta}{d\theta} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{d\gamma_\psi}{d\psi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & -\sin(\psi) & -\cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

4.9.2 Représentation ponctuelle d'une jambe

Nous allons reprendre les calculs des énergies cinétique et potentielle d'une jambe. Avant d'entamer les calculs du Lagrangien, voici quelques résultats préliminaires qui vont être utilisés dans la suite.

– Vitesse du point A_i :

$$\mathbf{v}_{A_i} = \frac{d}{dt} \mathbf{OA}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i = \frac{d}{dt} l_i \mathbf{n}_i = \dot{l}_i \mathbf{n}_i + l_i \dot{\mathbf{n}}_i \quad (4.80)$$

– Dérivée de l_i (d'après l'équation précédente et grâce à la normalisation de \mathbf{n}_i) :

$$\dot{l}_i = \langle \mathbf{v}_{A_i}, \mathbf{n}_i \rangle \quad (4.81)$$

– Dérivée de \mathbf{n}_i

$$\dot{\mathbf{n}}_i = \frac{1}{l_i} \left(\mathbf{v}_{A_i} - \dot{l}_i \mathbf{n}_i \right) \quad (4.82)$$

Énergie cinétique L'énergie cinétique E_c^i de la i^e jambe est :

$$E_c^i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{G_i}^2, \quad \mathbf{v}_{G_i} = \frac{d}{dt} \mathbf{B}_i \mathbf{G}_i = d_i \dot{\mathbf{n}}_i + \alpha_i \mathbf{v}_{A_i} \quad (4.83)$$

En utilisant les calculs préliminaires nous obtenons :

$$\mathbf{v}_{G_i} = \left(\frac{d_i}{l_i} + \alpha_i \right) \mathbf{v}_{A_i} - \frac{d_i}{l_i} \dot{l}_i \mathbf{n}_i \quad (4.84)$$

Avant d'élever au carré, introduisons deux nouvelles entités (non constantes à cause de l_i) :

$$h_i = \left(\frac{d_i}{l_i} + \alpha_i \right)^2 \quad k_i = h_i - \alpha_i^2 \leq 0 \quad (4.85)$$

qui permettent d'écrire simplement l'énergie cinétique de la jambe :

$$E_c^i = \frac{1}{2} m_i (h_i \mathbf{v}_{A_i}^2 - k_i \dot{l}_i^2) \quad (4.86)$$

Il suffit de réécrire l'énergie cinétique sous la forme suivante :

$$E_c^i = \frac{1}{2} m_i h_i (\mathbf{v}_{A_i}^2 - \dot{l}_i^2) + \frac{1}{2} m_i (h_i - k_i) \dot{l}_i^2 \quad (4.87)$$

pour faire apparaître l'énergie cinétique de rotation : $\frac{1}{2} m_i h_i (\mathbf{v}_{A_i}^2 - \dot{l}_i^2)$ et l'énergie cinétique d'élongation : $\frac{1}{2} m_i (h_i - k_i) \dot{l}_i^2 = \frac{1}{2} m_i \alpha_i^2 \dot{l}_i^2$ (Remarquons que nous avons bien deux énergies cinétiques positives).

Extraction des formes quadratiques

Nous voulons maintenant réécrire cette énergie cinétique sous une forme quadratique en $\dot{\mathbf{q}}$. Nous allons donc partir de l'équation (4.86), pour réécrire \dot{l}_i^2 et $\mathbf{v}_{A_i}^2$ sous la forme souhaitée.

Calcul de \dot{l}_i^2 :

Nous avons déjà développé le modèle inverse qui permet d'écrire : $\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$ (équation 6-dimensionnelle faisant intervenir toutes les longueurs). Pour la jambe i , nous avons donc :

$$\dot{l}_i = J_i \dot{\mathbf{q}} \quad (4.88)$$

où J_i est la i^e ligne de \mathbf{J} et donc

$$\dot{l}_i^2 = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{L}_i \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{L}_i = J_i^T J_i \quad (4.89)$$

Remarques

- \mathbf{L}_i est une matrice de rang 1 et dont l'unique valeur propre non nulle est $\|\mathbf{J}_i\|_2^2$.
- Le calcul de \mathbf{L}_i peut être approfondi grâce à la forme de Plücker. En effet : $J_i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{E}$ ce qui conduit à la relation

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{E}^T \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{E} \quad (4.90)$$

Calcul de $v_{A_i}^2$:

La vitesse v_{A_i} est obtenue en dérivant la relation géométrique $B_i A_i = B_i O + OC + R^T C A_i^r$:

$$v_{A_i} = v_C + \dot{R}^T C A_i^r = v_C + R^T (\omega^r \wedge C A_i^r) \quad (4.91)$$

Soit en utilisant la forme algébrique antisymétrique :

$$\omega^r \wedge C A_i^r = -C A_i^r \wedge \omega^r = \Sigma_i \dot{q}_r, \quad \Sigma_i = -\widetilde{C A_i^r} \gamma \quad (4.92)$$

Ceci nous permet d'écrire (sachant que $v_C = \dot{q}_t$) :

$$v_{A_i} = V_i \dot{q}, \quad V_i = \begin{bmatrix} I_3 & R^T \Sigma_i \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

et par conséquent :

$$v_{A_i}^2 = \dot{q}^T \Delta_i \dot{q} \quad (4.94)$$

$$\Delta_i = V_i^T V_i = \begin{bmatrix} I_3 & R^T \Sigma_i \\ \Sigma_i^T R & \Sigma_i^T \Sigma_i \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

Calcul de la matrice de masse de la jambe i

Finalement en combinant (4.86), (4.89) et (4.94), nous obtenons la matrice de masse symétrique positive M_i de la jambe i :

$$M_i = m_i (h_i \Delta_i - k_i L_i) \quad (4.96)$$

Calcul de la dérivée en q de la matrice de masse La dérivation de la matrice de masse peut être écrite sous la forme tensorielle suivante

$$\frac{\partial M_i}{\partial q} = m_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial q} \Delta_i + h_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial q} - \frac{\partial k_i}{\partial q} L_i - k_i \frac{\partial L_i}{\partial q} \right) \quad (4.97)$$

Nous devons donc spécifier toutes les dérivées précédentes. Commençons par remarquer Eq.(4.85) que $\frac{\partial h_i}{\partial q} = \frac{\partial k_i}{\partial q}$. Les calculs donnent

$$\frac{\partial h_i}{\partial q} = -2 \frac{d_i}{l_i^2} \left(\frac{d_i}{l_i} + \alpha_i \right) J_i \quad (4.98)$$

où J_i est la i^e ligne de la matrice Jacobienne J . Pour la matrice Δ_i

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial q} = 2 V_i^T \frac{\partial V_i}{\partial q} \quad (4.99)$$

Notons que $\partial V_i / \partial q_t$ est un tenseur nul et que $\partial V_i / \partial q_r$ contient les dérivées de la matrice de rotation $\partial R / \partial q_r$ et de la matrice γ : $\partial \gamma / \partial q_r$ que nous supposons connus. En revanche, pour L_i il faut voir que :

$$\frac{\partial L_i}{\partial q} = 2 E^T p_i \frac{\partial p_i^T E}{\partial q} \quad (4.100)$$

sachant que $\partial E / \partial q$ se calcule à partir de $(\partial R / \partial q_r)$ et de $(\partial \gamma / \partial q_r)$, nous devons spécifier $\partial p_i / \partial q$. En utilisant l'équation (4.9), il suffit de calculer $\frac{\partial n_i}{\partial q}$:

$$\frac{\partial n_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{B_i A_i}{l_i} = \frac{1}{l_i} \frac{\partial}{\partial q_k} B_i A_i - \frac{B_i A_i}{l_i^2} \frac{\partial l_i}{\partial q_k} \quad (4.101)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial q_k} = \frac{1}{l_i} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} B_i A_i - \frac{\partial l_i}{\partial q_k} \mathbf{n}_i \right) \quad (4.102)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial q_k} = \frac{1}{l_i} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} B_i C + \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial q_k} C A_i^T - \frac{\partial l_i}{\partial q_k} \mathbf{n}_i \right) \quad (4.103)$$

Énergie potentielle Calculons maintenant l'énergie potentielle de la jambe E_p^i :

$$E_p^i = m_i g \langle B_i G_i, \mathbf{n}_z \rangle \quad (4.104)$$

Nous réécrivons $B_i G_i$ pour y faire paraître $B_i A_i = l_i \mathbf{n}_i$:

$$B_i G_i = \left(\frac{d_i}{l_i} + \alpha_i \right) B_i A_i \quad (4.105)$$

de telle sorte que $E_p^i = m_i \left(\frac{d_i}{l_i} + \alpha \right) \langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle$. Calculons alors le produit scalaire entre $B_i A_i = B_i O + OC + CA_i$ et \mathbf{n}_z .

$$\langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle = \langle B_i O, \mathbf{n}_z \rangle + z + \langle \mathbf{R}^T C A_i^T, \mathbf{n}_z \rangle \quad (4.106)$$

$$\langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle = \langle B_i O, \mathbf{n}_z \rangle + z + \langle C A_i^T, \mathbf{R} \mathbf{n}_z \rangle \quad (4.107)$$

avec $\langle B_i O, \mathbf{n}_z \rangle$ constant et $\mathbf{R} \mathbf{n}_z = (-\sin \theta, \sin \psi \cos \theta, \cos \psi \cos \theta)^T$

Dérivation de la gravité

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{E_p^i}{m_i g} = -\frac{d_i}{l_i^2} J_i^T \langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle + \left(\frac{d_i}{l_i} + \alpha_i \right) \frac{\partial}{\partial q} \langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle \quad (4.108)$$

où le dernier terme est calculé grâce à la forme explicitée de $\langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle$.

4.9.3 Représentation élaborée d'une jambe

Nous reprenons le calcul de toutes les quantités intervenant dans le Lagrangien d'une jambe. La vitesse du centre d'inertie de la partie haute est :

$$\mathbf{v}_h^i := \mathbf{v}_{G_i^h} = \frac{d}{dt} O G_i^h = \mathbf{v}_{A_i} - d_h \dot{\mathbf{n}}_i \quad (4.109)$$

Soit en remplaçant $\dot{\mathbf{n}}_i$ par son expression de l'équation (4.82) :

$$\mathbf{v}_h^i = h_i \mathbf{v}_{A_i} + (1 - h_i) \dot{l}_i \mathbf{n}_i, \quad h_i = 1 - \frac{d_h}{l_i} \in]0, 1[\quad (4.110)$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur les faits suivants (a) la définition de h_i dans cette section est différente de celle donnée pour le modèle simplifié d'une jambe et que (b) h_i n'est pas constante (car l_i dépend de q). Élevons au carré et utilisons (4.80) et le fait que \mathbf{n}_i soit normalisé :

$$(\mathbf{v}_h^i)^2 = h_i^2 \mathbf{v}_{A_i}^2 + (1 - h_i^2) \dot{l}_i^2 \quad (4.111)$$

Soit en utilisant les formules quadratiques (4.94) et (4.89) :

$$(\mathbf{v}_h^i)^2 = \dot{q}^T [h_i^2 \Delta_i + (1 - h_i^2) \mathbf{L}_i] \dot{q} \quad (4.112)$$

Notons \mathbf{M}_i^h la matrice de masse de la partie haute de la jambe. L'énergie cinétique de la partie mobile s'écrit : $E_c^i = \dot{q}^T \mathbf{M}_i^h \dot{q}$ avec

$$\mathbf{M}_i^h = m_i^h [h_i^2 \Delta_i + (1 - h_i^2) \mathbf{L}_i + \Omega_i^T \mathbf{I}_i^h \Omega_i] \quad (4.113)$$

faisant apparaître le terme $\Omega_i^T \mathbf{I}_i^h \Omega_i$ dû à l'énergie cinétique de rotation.

Énergie cinétique de la partie basse Par analogie avec la partie haute, calculons la vitesse de son centre de gravité G_i^b

$$\mathbf{v}_b^i := \mathbf{v}_{G_i^b} = \mathbf{d}_b \dot{\mathbf{n}} = \frac{d_b}{l_i} [\mathbf{v}_{A_i} - \dot{l}_i \mathbf{n}_i] \quad (4.114)$$

et en élevant au carré :

$$(\mathbf{v}_b^i)^2 = b_i^2 (\mathbf{v}_{A_i}^2 - \dot{l}_i^2), \quad b_i = \frac{d_b}{l_i} \quad (4.115)$$

Notons M_i^b la matrice de masse de la partie mobile de la jambe. L'énergie cinétique de la partie fixe s'écrit (en utilisant les formules (4.94) et (4.89)) :

$$E_c^i = \dot{\mathbf{q}}^T M_i^b \dot{\mathbf{q}}, \quad M_i^b = m_i^b [b_i^2 (\Delta_i - \mathbf{L}_i) + \Omega_i^T \mathbf{I}_i^b \Omega_i] \quad (4.116)$$

Matrice de masse totale d'une jambe La matrice de masse totale de la i^e jambe est :

$$M_i = M_i^b + M_i^h \quad (4.117)$$

Soit en définissant le tenseur équivalent de la jambe comme

$$\mathbf{I}_i^{eq} = \frac{m_i^b \mathbf{I}_i^b + m_i^h \mathbf{I}_i^h}{m_i} \quad (4.118)$$

nous avons

$$M_i = (m_i^h h_i^2 + m_i b_i^2) \Delta_i + (m_i^h - (m_i^h h_i^2 + m_i b_i^2)) \mathbf{L}_i + m_i \Omega_i^T \mathbf{I}_i^{eq} \Omega_i \quad (4.119)$$

Pour la dérivation de cette matrice de masse, nous utilisons les dérivées calculées précédemment.

Énergie potentielle de la partie basse L'énergie potentielle $E_p^i(\text{bas})$ de la partie basse de la i^e jambe s'écrit :

$$E_p^i(\text{bas}) = m_i^b g \langle B_i G_i^b, \mathbf{n}_z \rangle = m_i^b b_i g \langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle \quad (4.120)$$

Les calculs de $\langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle$ et de sa dérivée par rapport q ont été déjà faits (voir section ??). Par conséquent, uniquement la première étape de la dérivation de cette énergie est exposée :

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{E_p^i(\text{bas})}{m_i^b g} = -\frac{d_i^b}{l_i^2} J_i^T \langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle + b_i \frac{\partial}{\partial q} \langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle \quad (4.121)$$

Énergie potentielle de la partie haute L'énergie potentielle $E_p^i(\text{haut})$ de la partie haute de la i^e jambe s'écrit :

$$E_p^i(\text{haut}) = m_i^h g \langle B_i G_i^h, \mathbf{n}_z \rangle = m_i^h h_i g \langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle \quad (4.122)$$

Comme précédemment

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{E_p^i(\text{haut})}{m_i^h g} = \frac{d_i^h}{l_i^2} J_i^T \langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle + h_i \frac{\partial}{\partial q} \langle B_i A_i, \mathbf{n}_z \rangle \quad (4.123)$$

4.9.4 Simulateur basé sur des rails XY

4.9.4.1 Représentation ponctuelle d'une jambe

Avec les rails XY, la nouvelle vitesse $\bar{\mathbf{v}}_{G_i}$ du centre de gravité G_i de la jambe i , se décompose en deux parties

$$\bar{\mathbf{v}}_{G_i} = \underbrace{\mathbf{v}_e}_{\text{vit. entraînement}} + \underbrace{\mathbf{v}_{G_i}}_{\text{vit. relative}} \quad (4.124)$$

l'expression de la vitesse relative \mathbf{v}_{G_i} a été calculée²⁹ dans la partie précédente eq.(4.84) : $\mathbf{v}_{G_i} = (\frac{d_i}{l_i} + \alpha_i) \mathbf{v}_{A_i} - \frac{d_i}{l_i} \dot{l}_i \mathbf{n}_i$. Afin de mettre $\bar{\mathbf{v}}_{G_i}^2$ sous forme quadratique, nous allons reprendre l'expression de \mathbf{v}_{G_i} pour l'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{v}_{G_i} = \mathbf{G}_i(q) \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{G}_i(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \quad (4.125)$$

Dans ce but, rappelons eq.(4.93) : $\mathbf{v}_{A_i} = \mathbf{V}_i \dot{\mathbf{q}}$. Nous devons donc spécifier le deuxième terme $\dot{l}_i \mathbf{n}_i$:

$$\dot{l}_i \mathbf{n}_i = J_i \dot{\mathbf{q}} \mathbf{n}_i = \mathcal{L}_i \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathcal{L}_i = \text{diag}(\mathbf{n}_i) \begin{bmatrix} J_i \\ J_i \\ J_i \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

où J_i est la i^e ligne de la matrice jacobienne inverse \mathbf{J} et diag est un opérateur qui transforme un vecteur en une matrice diagonale de même taille et dont les éléments diagonaux sont les éléments de ce vecteur. Nous avons donc établi que :

$$\mathbf{G}_i(q) = (\frac{d_i}{l_i} + \alpha_i) \mathbf{V}_i - \frac{d_i}{l_i} \mathcal{L}_i \quad (4.127)$$

En conclusion

$$\bar{\mathbf{v}}_{G_i} = \bar{\mathbf{G}}_i(q) \dot{\mathbf{q}}_{\text{rails}}, \quad \bar{\mathbf{G}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{G}_i \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

et la matrice de masse de la jambe i est donc

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \frac{1}{2} m_i \bar{\mathbf{G}}_i^T \bar{\mathbf{G}}_i \quad (4.129)$$

La forme générale de cette matrice est :

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \frac{1}{2} m_i \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{G}_i^T \\ \mathbf{G}_i^T & \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

4.9.4.2 Représentation élaborée d'une jambe

Pour la modélisation élaborée d'une jambe nous allons reprendre les vitesses des parties basses et hautes :

$$\bar{\mathbf{v}}_i^h = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_i^h \quad \bar{\mathbf{v}}_i^b = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_i^b \quad (4.131)$$

Les expressions de \mathbf{v}_i^h et de \mathbf{v}_i^b : (4.110) et (4.114) peuvent se transformer en

$$\mathbf{v}_i^h = \mathbf{G}_i^h(q) \dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{v}_i^b = \mathbf{G}_i^b(q) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.132)$$

$$\mathbf{G}_i^h(q) = h_i \mathbf{V}_i + (1 - h_i) \mathcal{L}_i \quad \mathbf{G}_i^b(q) = b_i (\mathbf{V}_i - \mathcal{L}_i) \quad (4.133)$$

²⁹Et reste inchangée car il s'agit d'une vitesse relative

Ainsi les nouvelles vitesses peuvent s'écrire pour les parties haute et basse :

$$\bar{\mathbf{v}}_i^\alpha = \bar{\mathbf{G}}_i^\alpha(q_{\text{rails}})\dot{q}_{\text{rails}}, \quad \bar{\mathbf{G}}_i^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{G}_i^\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \{\text{b}, \text{h}\} \quad (4.134)$$

D'autre part, les vitesses de rotation des jambes restent inchangées :

$$\bar{\omega}_i = \omega_i = \Omega_i(q)\dot{q} = \bar{\Omega}_i\dot{q}_{\text{rails}}, \quad \bar{\Omega}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \Omega_i \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

Finalement la nouvelle matrice de masse de la i^e jambe est : $\bar{\mathbf{M}}_i = \bar{\mathbf{M}}_i^{\text{b}} + \bar{\mathbf{M}}_i^{\text{h}}$ avec

$$\bar{\mathbf{M}}_i^\alpha = \frac{1}{2}m_i (\bar{\mathbf{G}}_i^\alpha)^\top \bar{\mathbf{G}}_i^\alpha + \frac{1}{2}\bar{\Omega}_i^\top \mathbf{I}_i^\alpha \bar{\Omega}_i, \quad \alpha \in \{\text{b}, \text{h}\} \quad (4.136)$$

4.10 Annexe 2 : Généralités

4.10.1 Application antisymétrique

Soit $\mathbf{u} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ alors la matrice antisymétrique $\tilde{\mathbf{u}}$ vérifiant $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{x}$ est :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \widetilde{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

4.10.2 Dérivée de la matrice de rotation

Dérivons la matrice de rotation par rapport au temps $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi$:

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\psi}(\mathbf{dR}_\psi)\mathbf{R}_\theta\mathbf{R}_\phi + \dot{\theta}\mathbf{R}_\psi(\mathbf{dR}_\theta)\mathbf{R}_\phi + \dot{\phi}\mathbf{R}_\psi\mathbf{R}_\theta(\mathbf{dR}_\phi)$$

faisant apparaître les dérivées partielles de \mathbf{R} par rapport à $\alpha \in \{\phi, \theta, \psi\}$: $\mathbf{dR}_\alpha = \partial\mathbf{R}/\partial\alpha$. La dérivation de la propriété d'orthogonalité de \mathbf{R} : $\mathbf{R}^\top\mathbf{R} = \mathbf{I}_3$ donne $\dot{\mathbf{R}}^\top = -\mathbf{R}^\top\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top$. Remplaçons alors l'expression précédente de $\dot{\mathbf{R}}$ dans cette dernière relation.

$$\mathbf{R}^\top\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top = \dot{\psi}\mathbf{R}^\top(\mathbf{dR}_\psi)\mathbf{R}_\psi^\top + \dot{\theta}\mathbf{R}_\phi^\top\mathbf{R}_\theta^\top(\mathbf{dR}_\theta)\mathbf{R}_\theta^\top\mathbf{R}_\psi^\top + \dot{\phi}\mathbf{R}_\phi^\top(\mathbf{dR}_\phi)\mathbf{R}^\top$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top = \dot{\psi}(\mathbf{dR}_\psi)\mathbf{R}_\psi^\top + \dot{\theta}\mathbf{R}_\psi(\mathbf{dR}_\theta)\mathbf{R}_\theta^\top\mathbf{R}_\psi^\top + \dot{\phi}\mathbf{R}_\psi\mathbf{R}_\theta(\mathbf{dR}_\phi)\mathbf{R}^\top$$

$$\Rightarrow -\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top = \dot{\psi}\mathbf{R}_\psi(\mathbf{dR}_\psi)^\top + \dot{\theta}\mathbf{R}_\psi\mathbf{R}_\theta(\mathbf{dR}_\theta)^\top\mathbf{R}_\psi^\top + \dot{\phi}\mathbf{R}_\psi\mathbf{R}_\theta\mathbf{R}_\phi(\mathbf{dR}_\phi)^\top\mathbf{R}_\theta^\top\mathbf{R}_\psi^\top$$

Or

$$\mathbf{R}_\psi(\mathbf{dR}_\psi)^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

et

$$\mathbf{R}_\theta(\mathbf{dR}_\theta)^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

et

$$\mathbf{R}_\phi(\mathbf{dR}_\phi)^\top = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Il apparaît que $-\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top$ est la dérivée de la matrice de rotation \mathbf{R}^\top écrite dans le repère 3. En effet $-\mathbf{R}^\top\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top = \dot{\mathbf{R}}^\top$ et donc

$$-\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top = \left(\gamma \left[\begin{array}{c} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{array} \right] \right) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{R}}^\top = \mathbf{R}^\top \left(\gamma \left[\begin{array}{c} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{array} \right] \right)$$

4.10.3 Modèle dynamique d'un système mécanique

Nous nous proposons de retrouver le modèle dynamique standard

$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathbf{G}(q) = \mathbf{F}$$

à partir de la forme quadratique de l'énergie cinétique $E_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^\top \mathbf{M}(q)\dot{q}$ et de l'énergie potentielle $E_p(q)$ en utilisant le schéma de dérivation de Lagrange :

$$L = E_c(q, \dot{q}) - E_p(q), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \mathbf{F}$$

1er terme : $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

\mathbf{M} est symétrique \Rightarrow

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L = \mathbf{M}\dot{q} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L = \mathbf{M}\ddot{q} + \dot{\mathbf{M}}\dot{q}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

2ème terme : $\frac{\partial}{\partial q} L$

$$\frac{\partial}{\partial q} L = \frac{1}{2}\Pi\dot{q} - \frac{d}{dq} E_p, \quad \Pi = \begin{pmatrix} \dot{q}^\top \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \dot{q}^\top \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Le terme général de Π est :

$$(\Pi)_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_k$$

Conclusion

En remplaçant les termes calculés dans l'équation de Lagrange, nous obtenons

$$\mathbf{M}\ddot{q} + \left(\dot{\mathbf{M}} - \frac{1}{2}\Pi \right) \dot{q} + \frac{d}{dq} E_p = \mathbf{F}$$

Nous retrouvons donc :

$$\mathbf{C} = \dot{\mathbf{M}} - \frac{1}{2}\Pi \quad \text{et} \quad \mathbf{G}(q) = \frac{d}{dq} E_p \quad (4.137)$$

La matrice \mathbf{C} est de terme général

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k$$

Pour faire apparaître les symboles de Christoffel, il suffit de voir que le i^e élément du vecteur forces de Coriolis : $C\dot{q}$ est une forme quadratique en \dot{q} :

$$(C\dot{q})_i = \dot{q}^T \Gamma_i \dot{q} \quad (4.138)$$

où le terme général

$$(\hat{\Gamma}_i)_{jk} = \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}$$

Par conséquent nous pouvons utiliser (dans l'équation (4.138)) le symétrique de $\hat{\Gamma}_i$:

$$\Gamma_i = \frac{\hat{\Gamma}_i^T + \hat{\Gamma}_i}{2}$$

dont le terme général est le symbole de Christoffel :

$$\gamma_{ijk} = (\Gamma_i)_{jk} = \frac{1}{2} (\hat{\Gamma}_i)_{jk} + \frac{1}{2} (\hat{\Gamma}_i)_{kj}$$

Comme M est symétrique :

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \right)$$

Chapitre 5

Algorithmes de Restitution Inertielle

La restitution des sensations de mouvement (indices inertiels ou vestibulaires) revêt une importance capitale dans la simulation de conduite et plus particulièrement dans la simulation des mouvements rapides comme les accidents et les perturbations liées à la route. Malheureusement, les limitations intrinsèques aux mécanismes de mouvement des simulateurs rendent irréalisable la reproduction à l'identique de ces indices. Néanmoins, une restitution partielle est possible. C'est le rôle des Algorithmes de Restitution Inertielle (ARI). Dans la littérature anglaise, les ARI ont différentes dénominations : "motion drive algorithms", "motion cueing algorithms", "washout algorithms"...

Dans ce chapitre, nous allons faire la revue de ces algorithmes qu'ils soient utilisés dans le cadre de la simulation de vol ou dans celui de la simulation de conduite. En effet, comme nous l'avons précisé dans l'introduction les techniques de simulation, dans ces deux contextes, sont similaires.

Définition de la restitution inertielle Nous définissons la restitution inertielle comme, la reproduction dans le simulateur, des indices¹ vestibulaires qu'engendrerait la conduite d'un vrai véhicule.

Posons le problème La difficulté principale que pose la restitution inertielle est le mouvement très limité du cockpit de simulation. Dans le tableau Tab.2.1 nous pouvons voir que les simulateurs avancés offrent des plages de mouvement allant de $\pm 20\text{cm}$ (simulateur Clio) à $\pm 10\text{m}$ (simulateur NADS). Un simulateur ne peut donc pas reproduire les mouvements d'un vrai véhicule.

Le problème est le suivant :

Comment effectuer la restitution inertielle malgré les limitations de déplacement du cockpit de simulation ?

A notre connaissance, aucune solution exacte à ce problème n'a été donnée. En effet, le niveau actuel de compréhension du système de perception, ne permet pas de reproduire à l'identique les indices vestibulaires. En revanche, plusieurs méthodes *heuristiques* ont été développées. Nous les désignons par : Algorithmes de Restitution Inertielle (ARI)².

Le rôle des ARI est de transformer les trajectoires réelles d'un vrai véhicule en trajectoires restreintes *réalisables* par le simulateur. Cette transformation doit non seulement satisfaire une *validité physique* (respect des limitations physiques de déplacement du simulateur) mais aussi une *validité perceptive* (les sensations de mouvements induites par le simulateur doivent vérifier les notions de *cohérence*³ et de *proximité* avec celles produites dans le cas réel). Enfin, pour compléter la définition

¹Par indice vestibulaire, nous désignons la réponse du système vestibulaire à son excitation (c'est-à-dire la réponse au mouvement de la tête du conducteur).

²Comme les ARI prennent généralement la forme d'un filtre, nous les appellerons aussi Filtres de Restitution Inertielle.

³La cohérence de deux sensations sera entendue comme une notion approximative qui signifie leur nature non conflictuelle. Par exemple, si le conducteur du simulateur souhaite accélérer, une situation incohérente serait qu'il perçoive une sensation de freinage.

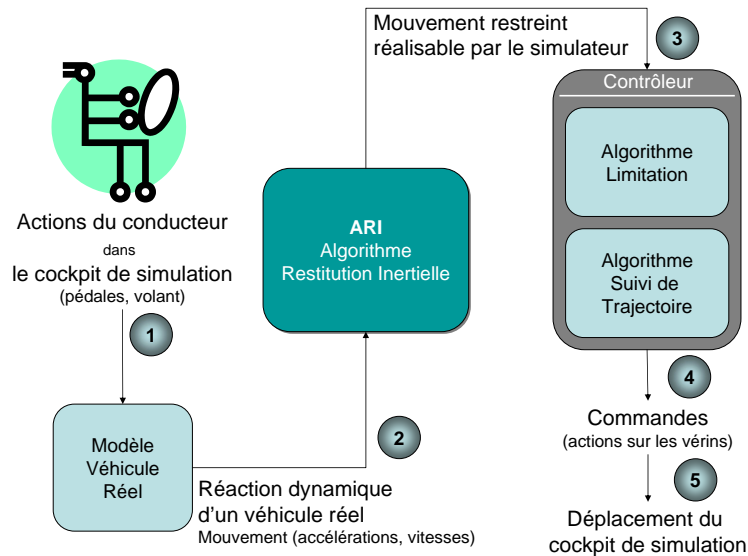


FIG. 5.1 – Localisation de l'ARI dans la chaîne de simulation

des ARI nous devons préciser la notion de *trajectoire*.

Nous avons vu dans le chapitre *Perception de mouvement propre*, que le système vestibulaire est sensible aux *accélérations*⁴ linéaires et aux *vitesse*s angulaires. Ces quantités sont donc les plus pertinentes pour définir une trajectoire, dans le contexte de la restitution inertielle.

Rappelons par ailleurs, que nous supposons que le mouvement de la tête du conducteur (vue comme foyer de l'organe vestibulaire) est négligeable par rapport à celui du cockpit de simulation⁵.

Où se situe l'algorithme de restitution inertielle dans la chaîne de simulation ?

Le schéma Fig.5.1 illustre, dans un simulateur, la succession des étapes de calculs entre (a) l'action du conducteur sur les pédales et le volant et (b) le déplacement effectif du cockpit de simulation. Voici dans l'ordre les différentes étapes mis en oeuvre :

1. *Le modèle d'un véhicule réel* : Il permet de calculer la réaction du vrai véhicule suite aux actions du conducteur. Cette réponse est un ensemble de données dynamiques : accélérations et vitesses caractérisant son mouvement.
2. *L'algorithme de restitution inertielle* : Il transforme *causalement* ces accélérations et vitesses réelles en accélérations et vitesses réalisables par le simulateur (et de façon à satisfaire une validité perceptive).
3. *Le contrôleur* : Il effectue le calcul des forces (actions sur les vérins par exemple) qui permettent de suivre les trajectoires délivrées par l'algorithme de restitution inertielle. Généralement le contrôleur comprend un système de limitation qui maintient le simulateur à une distance de sécurité de ses butées⁶. Cette limitation peut être implicitement incorporée par le fabricant ou

⁴ Ou de manière équivalente : les forces.

⁵ Cette hypothèse classique traduit que la tête est fixe dans le cockpit.

⁶ En fait, comme les ARI sont des méthodes approchées, l'utilisation des algorithmes de limitation est une mesure de sécurité importante.

explicitement intégrée dans le contrôleur⁷. Enfin, le simulateur traduit les forces en déplaçant le cockpit de simulation.

Nous proposons dans ce chapitre une synthèse des différents ARIs utilisés pour les simulateurs de vol ou de conduite. Le paragraphe suivant résume les techniques que nous allons présenter.

Revue succincte des algorithmes de restitution inertielle

Le problème de la restitution inertielle dans les simulateurs de vol ou de conduite a été abordé de façons différentes (classées chronologiquement) :

- L’approche classique [Schmidt et Conrad, 1970] est basée sur la séparation fréquentielle. Le simulateur reproduit les mouvements qui sont à l’intérieur de sa bande passante (c’est le résultat d’un filtrage hautes fréquences) et élimine les autres. La coordination est déjà incorporée dans cet algorithme.
- L’approche adaptative [Parrish et al., 1975] permet de minimiser en temps réel une fonction de coût traduisant le compromis entre un maximum de restitution et le respect des contraintes cinématiques. Cette optimisation est effectuée spécifiquement pour chaque nouvelle trajectoire.
- L’approche optimale [Sivan et al., 1982] s’accorde avec la philosophie de l’approche adaptative. Néanmoins, dans ce cas, il s’agit d’une optimisation globale pour une famille de trajectoires représentée par un bruit blanc filtré. Le résultat de cette approche fournit un filtre linéaire optimal.
- L’approche prédictive [Dagdelen, 2005] permet de maximiser la restitution instantanée d’une trajectoire de référence. Cette méthode intègre directement les contraintes sur le déplacement et un superviseur permettant de décrire le déclenchement du mouvement de retour vers une position neutre (afin d’éviter le blocage du simulateur).

Notons, que les ARIs présentés, ont été originellement développés pour les plates-formes de type Gough-Stewart. Par conséquent, les intuitions de conception se basent sur la structure de ces dernières. Néanmoins, les concepts généraux et les idées fondatrices peuvent être, dans la plupart des cas, généralisés à d’autres types de plates-formes de simulation.

Afin de pouvoir étudier les différentes techniques de restitution inertielle, nous définissons dans Fig.5.2 les différentes directions de mouvement du véhicule (qu’il soit le véhicule réel ou le cockpit de simulation).

Notations

Ci après la liste des variables décrivant le mouvement du cockpit de simulation (ou du conducteur du simulateur) Fig.5.2. Ces mêmes variables indexées par r représenteront les variables décrivant le mouvement du véhicule *réel* (l’indice r peut aussi signifier *référence*).

- x : la translation longitudinale
- y : la translation latérale
- z : la translation verticale
- ϕ : la rotation en roulis
- θ : la rotation en tangage
- ψ : la rotation en lacet

Nous utiliserons aussi a, v et ω pour signifier respectivement \ddot{x}, \dot{x} et $\dot{\theta}$ (afin de décrire le comportement fréquentiel de ces variables). Finalement nous notons $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ la constante de gravité.

⁷Une étude intéressante de la limitation et de son influence sur les performances de simulation est proposée à la fin de ce chapitre.

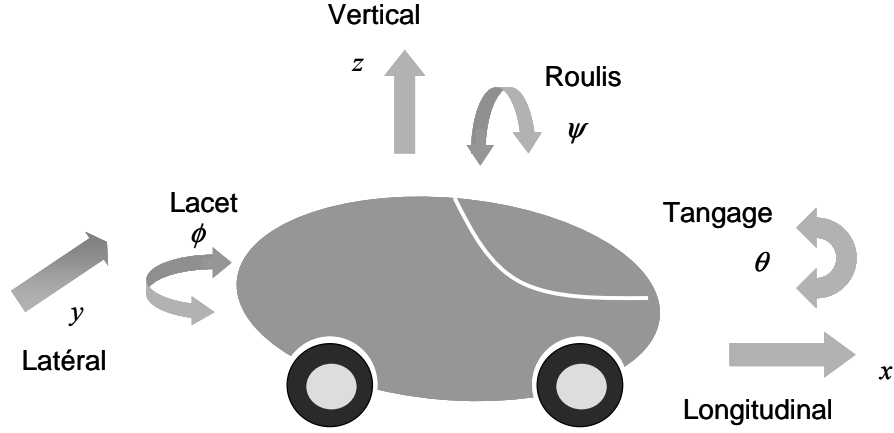


FIG. 5.2 – Les directions de l'espace

5.1 L'approche classique

Cette approche a été proposée par [Schmidt et Conrad, 1970], pour la plate-forme de simulation Gough-Stewart de la NASA. L'article [Parrish et al., 1975], les désigne comme les premiers à avoir utilisé la coordination dans les algorithmes de restitution inertielle.

5.1.1 Principe général

L'approche classique de restitution inertielle est basée sur la méthode de séparation fréquentielle. La *trajectoire* du véhicule réel⁸ est séparée en deux parties : les mouvements lents (ou soutenus) et les mouvements rapides (ou instantanés). Comme la plate-forme de simulation est très contrainte en terme de mouvement, elle ne peut reproduire que les mouvements instantanés. Néanmoins, pour les directions latérales et longitudinales, l'utilisation de la coordination permet de restituer la partie basses fréquences. Pour la direction verticale, l'approche classique n'est autre qu'un filtrage passe-haut le mouvement très limité de la plate-forme. La figure 5.3, montre la structure de cette approche dans le cas particulier du mode longitudinal (direction longitudinale + tangage) :

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{s^2} F_{PH1} \right) a_r \\ \theta &= \left(\frac{1}{s} F_{PH2} \right) \omega_r + \left(\frac{1}{g} F_{PB} \right) a_r \end{aligned} \quad (5.1)$$

où F_{PH1} et F_{PH2} désignent les filtres passe-hauts alors que F_{PB} désigne le filtre passe-bas⁹.

⁸Un traitement préliminaire des accélérations linéaires et des vitesses angulaires délivrées par le modèle du véhicule réel peut être nécessaire suivant les caractéristiques du simulateur. Il s'agit, très fréquemment, d'un facteur d'échelle. Cependant, des filtrages et des limitations supplémentaires peuvent être utilisés. Voir 5.1.3.

⁹Par ailleurs, pour éviter le blocage des vérins au niveau des butées, la plate-forme est constamment en train de revenir à une position neutre avec un mouvement imperceptible (sous le seuil de détection). Ce mouvement porte le nom de "washout" dans quelques articles. Nous éviterons, dans cette thèse, cette appellation qui peut prêter à confusion. Ce mouvement de retour

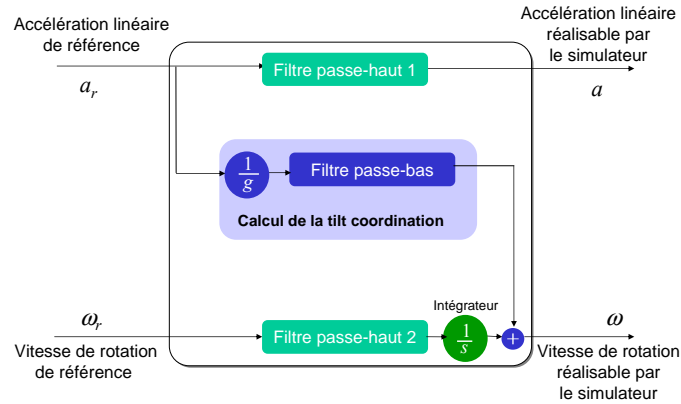


FIG. 5.3 – ARI Classique

5.1.2 Analyse

- Le choix des paramètres (ordres, coefficients, gains) des filtres utilisés dans cet algorithme est crucial pour deux raisons. La première est le respect des contraintes de mouvement (des tests sont réalisés numériquement par le biais de modèles linéaires) et la seconde est la garantie d'une validité perceptive (qualitativement mesurée par les réactions des conducteurs).
- Alors que cet ARI est présenté, dans la littérature, comme étant linéaire, la grande variation des amplitudes des signaux de référence impose l'introduction d'un facteur d'échelle (et/ou d'un saturateur) pour pouvoir garantir la non violation des contraintes. Par ailleurs, l'utilisation de la coordination et du mouvement de retour vers une position neutre (limités par les seuils de détection) montrent la non linéarité de la mise en oeuvre de cette méthode sur un vrai simulateur (voir 5.1.3).
- Cette approche classique est une approche axe par axe destinée à un système non découplé¹⁰. Pour la plate-forme de Gough-Stewart, un déplacement dans un axe particulier limiterait considérablement les autres mouvements (suite au blocage des vérins). Il faudra donc limiter tous les mouvements pour les rendre tous réalisables à tout instant.

5.1.3 Utilisation de la redondance (rails XY,...)

La méthode de séparation fréquentielle est aussi utilisée dans le cas du simulateur de la NADS. Rappelons que NADS utilise une plate-forme de Gough-Stewart montée sur des rails de déplacements dans les plan $z = \text{cst}$ (rails XY) permettant des mouvements conséquents de $\pm 10\text{m}$. Par ailleurs, un système de pivotement (*turntable*) permet une rotation complète du cockpit de simulation suivant l'axe vertical. Nous avons donc géométriquement une *redondance* double¹¹ des degrés de libertés dans les translations longitudinales et latérales et suivant la rotation en roulis (x, y, ϕ). Comment exploiter cette capacité supplémentaire du simulateur NADS ?

La méthode proposée par [Reid et Grant, 1993], traduit le *non recouvrement* des bandes passantes

peut être mis en oeuvre de deux façons : soit directement, en dehors du schéma de filtrage précédent, soit indirectement par un choix adéquat de l'ordre des filtres. En effet, dans le cadre de cette deuxième proposition, il suffit de choisir F_{PH1} de telle sorte que $\frac{1}{s^2} F_{PH1}$ soit un filtre propre contenant un dérivateur pur. Ainsi les accélérations soutenus (constantes) a_r induiront un retour de x vers 0.

¹⁰ Comme le système originel du Vertical Motion Simulator de la Nasa [Advani et al., 2002]

¹¹ Double, dans le sens où il existe deux moyens de produire le mouvement selon le degré de liberté spécifié

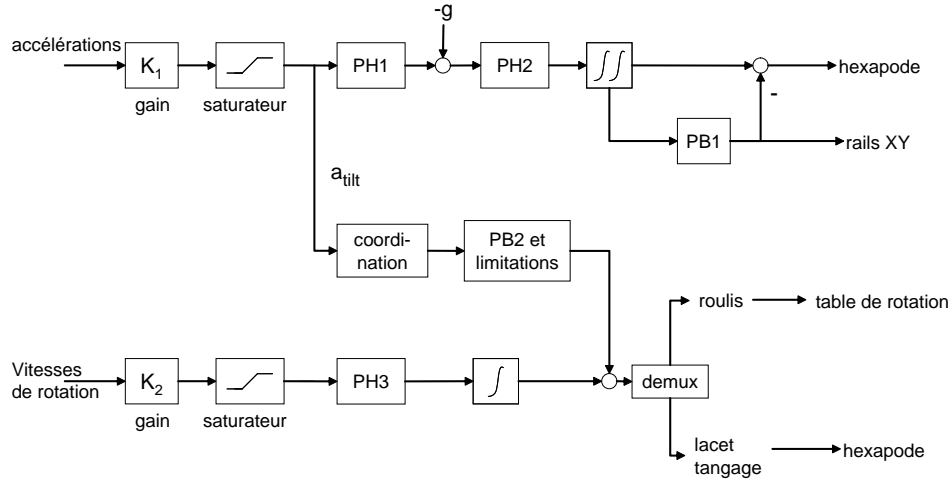


FIG. 5.4 – ARI de la NADS

des vérins de la plate-forme de Gough-Stewart¹² (hautes fréquences) et des rails XY (basses fréquences). Elle intègre aussi l'utilisation du principe de coordination.

La structure générale¹³ (telle présentée dans [Grant et al., 2004]) est reproduite dans le schéma Fig.5.4 (les filtres passe-hauts - resp. passe-bas - sont notés PH - resp. PB - et numérotés)¹⁴.

5.2 L'approche adaptative coordonnée

[Parrish et al., 1975] furent les premiers à utiliser un filtrage non linéaire dans la simulation de vol. Leurs travaux constituent une extension de l'approche coordonnée¹⁵ de [Schmidt et Conrad, 1970] à une approche adaptative coordonnée.

¹²Le système de rotation en roulis est aussi à dynamique rapide (hautes-fréquences)

¹³Cet ARI est destiné à reproduire :

- Les translations (hautes fréquences) :

Les accélérations linéaires subissent d'abord une réduction linéaire de leurs amplitudes (gain) et une limitation non linéaire (saturateur). Ensuite, elles sont filtrées par un premier filtre passe-haut PH1 (la composante destinée à être reproduite par l'astuce de la tilt coordination - l'influence de la gravité $-g$ - est retranchée de cette procédure). Un deuxième filtrage PH2 est ensuite appliqué et une double intégration est effectuée pour calculer le vecteur déplacements linéaires. Ce dernier est séparée en deux parties : les basses fréquences (filtrage PB1) adressées aux rails XY et le reste ($1 - PB1$) destiné à l'hexapode.

- La tilt coordination :

Pour les modes longitudinal et latéral, les angles de tilt coordination sont calculés (à partir de a_{tilt} - voir figure 5.4), ensuite, filtrés par un filtre passe-bas et enfin limités (de façon à rester sous le seuil humain de détection). Ces rotations sont reproduites par la plate-forme de type Gough-Stewart.

- Les rotations (hautes fréquences) :

Les vitesses de rotation subissent (à l'instar des translations) une réduction linéaire de leurs amplitudes (gain) et une limitation non linéaire (saturateur). Ensuite, un filtre passe-haut PH3 est utilisé pour éliminer les basses fréquences. Enfin, une séparation des angles est effectuée (demux) : l'angle de roulis (rotation d'axe vertical) est reproduit par la table de rotation alors que les autres angles sont destinés au robot parallèle.

La structure générale des filtres utilisés est la suivante (malheureusement, les valeurs numériques des paramètres a_i et b_i ne sont pas données) :

$$F_{PB} = \frac{2a_1 s + b_1}{s^2 + 2a_1 s + b_1} \frac{a_2}{s + a_2} \quad F_{PH} = \frac{s^2}{s^2 + 2b_3 s + a_3} \quad (5.2)$$

¹⁴Remarquons que nous avons omis les changements de repères présentés dans l'article de référence.

¹⁵C'est-à-dire, utilisant la tilt coordination.

Notons que les auteurs précisent dans leur article que leur philosophie de conception est de maximiser la restitution des mouvements du véhicule étant données les limites cinématiques du déplacement de la plate-forme de simulation, *sans prendre en considération la perception humaine*.

5.2.1 Principe général

5.2.1.1 Le mode longitudinal adaptatif (sans coordination)

L'article de référence présente l'approche adaptative comme la recherche des trajectoires du simulateur sous la forme paramétrique :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= p_1 \ddot{x}_r - d \dot{x} - c x \\ \dot{\theta} &= p_2 \dot{\theta}_r + p_3 \ddot{x}_r\end{aligned}\quad (5.3)$$

où les $(p_i)_{i=1..3}$ sont des facteurs adaptatifs et (c, d) des constantes strictement positives, minimisant à chaque *pas de temps* un critère quadratique :

$$J = \underbrace{\frac{1}{2} (\ddot{x} - \ddot{x}_r)^2 + \frac{w_1}{2} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_r)^2}_{(1^e)} + \underbrace{\frac{w_2}{2} x^2 + \frac{w_3}{2} \dot{x}^2}_{(2^e)} \quad (5.4)$$

où les poids (*weights*) w_i sont des réels positifs. Ce critère traduit le compromis qui existe entre d'une part, (1^e) la reproduction de la trajectoire d'un vrai véhicule et d'autre part (2^e) le respect du mouvement contraint du robot. Remarquons que le coût sur le mouvement contraint du simulateur (2^e) reflète la volonté des auteurs de garder le cockpit de simulation dans une région autour de la position neutre ($x = 0$ et $\dot{x} = 0$)¹⁶.

On trouve dans [Dagdelen, 2005] une interprétation intéressante de ce paramétrage dans le domaine fréquentiel. En effet, si nous considérons que les facteurs p_i sont constants, nous pouvons dériver à partir des équations (5.3) les filtres reliant les grandeurs du simulateur à celles du véhicule réel. En notant $a = \ddot{x}$ et $\omega = \dot{\theta}$ nous obtenons

$$\frac{a}{a_r} = \frac{p_1 s^2}{s^2 + ds + c} \quad \omega = p_2 \omega_r (+p_3 a_r) \quad (5.5)$$

Par conséquent, l'accélération du simulateur a est reliée à la référence a_r par un filtre passe-haut du second ordre dont la stabilité est assurée par la stricte positivité de c et d . Le facteur p_1 apparaît alors comme le gain du filtre. Pour la vitesse de rotation ω , p_2 joue aussi le rôle de gain (ou plus précisément de facteur d'échelle). L'apparition de $p_3 a_r$ est motivée par l'utilisation de la coordination (voir suite) et peut être négligée dans le cas présent. La résolution de ce problème adaptatif est effectuée par la méthode de descente par gradient ($k_i > 0$, $i = 1..3$) :

$$\dot{p}_i = -k_i \frac{\partial}{\partial p_i} J \quad (5.6)$$

5.2.1.2 L'approche adaptative coordonnée

Tenir compte de l'astuce de coordination revient à inclure dans le schéma précédent, la contribution de l'accélération gravitationnelle : $'g \sin \theta$ '. Le tangage de la plate-forme va permettre de réduire l'effort au niveau de son déplacement linéaire.

Au lieu de suivre l'accélération linéaire \ddot{x}_r via le mouvement linéaire de plate-forme (selon la direction x), c'est uniquement la quantité $\ddot{x}_r - g \sin \theta$ (après soustraction la partie de la contribution de la

¹⁶Remarquons l'absence de contraintes sur l'angle θ qui pourrait refléter la capacité du simulateur à reproduire fidèlement les mouvements angulaires d'un vrai véhicule.

coordination) qui est suivie. En terme de schéma de calcul, il suffit de remplacer dans la section précédente, la quantité \ddot{x}_r par $\ddot{x}_r - g \sin \theta$. Enfin pour retrouver les résultats originaux, nous supposons que les variations angulaires sont petites : $\sin \theta \simeq \theta$. Dans ce cas, nous obtenons la représentation fréquentielle suivante (rappelons que les p_i sont considérés constants pour cette interprétation)

$$a = \frac{p_1 s^2}{s^2 + ds + c} \left(a_r - \frac{g}{s} \omega \right) \quad \omega = \frac{p_2}{s + p_3 g} \omega_r + \frac{p_3}{s + p_3 g} a_r \quad (5.7)$$

Soit (après la fin des calculs)

$$\begin{pmatrix} a \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ \omega_r \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

avec

$$\begin{aligned} H_{11} &= \left(\frac{p_1 s}{s^2 + ds + c} \right) \left(\frac{s^2 + gp_3 s - gp_3}{s + p_3 g} \right) & H_{12} &= - \left(\frac{gp_1 s}{s^2 + ds + c} \right) \left(\frac{p_2}{s + p_3 g} \right) \\ H_{21} &= \frac{p_3}{s + p_3 g} & H_{22} &= \frac{p_2}{s + p_3 g} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ce qui met en évidence que a (resp. ω) est obtenue par un filtrage hautes-fréquences (resp. basses-fréquences) des entrées ω_r et a_r . Les facteurs p_1 et p_2 jouent le rôle de gains. Le coefficient p_3 influe doublement sur les fréquences de coupure et sur les gains. Nous proposons une interprétation globale pour l'ensemble des p_i dans la généralisation qui va suivre.

5.2.1.3 Généralisation et résolution

Nous proposons de généraliser le formalisme et la résolution de cet algorithme, en donnant au problème une forme algébrique compacte. Définissons q comme les intégrales doubles de l'accélération linéaire et de la vitesse angulaire (et par analogie q_r)

$$q = \begin{pmatrix} x \\ \int \theta \end{pmatrix} \quad q_r = \begin{pmatrix} x_r \\ \int \theta_r \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Nous généralisons le critère adaptatif coordonnée (à minimiser) :

$$J = \frac{1}{2} e^T L e + \frac{1}{2} \dot{q}^T Q \dot{q} + \frac{1}{2} q^T R q \quad (5.11)$$

avec des matrices de poids L s.p.d., Q et R s.p.¹⁷d. Nous définissons l'erreur de suivi (incluant la coordination) par :

$$e = \ddot{q} - (\ddot{q}_r - G\dot{q}) = \ddot{q} + G\dot{q} - \ddot{q}_r, \quad G = g \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

La généralisation du paramétrage adaptatif (5.3) est directe :

$$\ddot{q} = P (\ddot{q}_r - G\dot{q}) - D\dot{q} - Cq \quad (5.13)$$

où $P \geq 0$ est la matrice d'adaptation. D et C sont des matrices constantes s.p.d. Une réécriture de l'équation précédente sous la forme :

$$\ddot{q} + (PG + D)\dot{q} + Cq = P\ddot{q}_r$$

permet de voir, de manière approximative, que P intervient à la fois comme un gain et un *coefficient de frottement*. Ainsi pour un *grand* P , la plate-forme de simulation montre plus de résistance pour reproduire la référence (et inversement). La matrice P règle donc le compromis que doit satisfaire la plate-forme entre suivi maximum et respect des limitations cinématiques. Comme précédemment, la méthode de descente du gradient (K s.p.d.) est utilisée :

$$\dot{P} = -K \frac{\partial}{\partial P} J \quad (5.14)$$

¹⁷Symétrie positive semi-définie

Résolution Nous noterons la dérivée partielle d'une variable f par rapport à une variable x : $\frac{\partial}{\partial x} f$ par $\partial_x f$ ¹⁸. Par symétrie des matrices utilisées, nous avons :

$$\partial_P J = e^T L \partial_P e + \dot{q}^T Q \partial_P \dot{q} + q^T R \partial_P q$$

Nous devons donc expliciter les termes soulignés. Commençons par le premier. En partant de (5.12), nous obtenons :

$$\partial_P e = \partial_P (\ddot{q} + G\dot{q} - \ddot{q}_r) = \partial_P \ddot{q} + G \partial_P \dot{q}$$

or en utilisant (5.13),

$$\partial_P \ddot{q} = (\partial_P P)(\ddot{q}_r - G\dot{q}) - PG \partial_P \dot{q} - D \partial_P \dot{q} - C \partial_P q$$

Remarquons que $\partial_P P$ est indépendant de P . Par régularité de q , nous avons $\partial_P \ddot{q} = \dot{\partial}_P \dot{q} = \ddot{\partial}_P q$ et les deux équations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} \partial_P e = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\partial_P q) + G \frac{\partial}{\partial t} (\partial_P q) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\partial_P q) + (D + PG) \frac{\partial}{\partial t} (\partial_P q) + C (\partial_P q) = (\partial_P P)(\ddot{q}_r - G\dot{q}) \end{cases} \quad (5.15)$$

Le problème de filtrage adaptatif peut, par conséquent, être formulé comme l'intégration d'un système différentiel du premier ordre en l'état X :

$$\dot{X} = F(X), \quad X = (q, \dot{q}, \partial_P q, \frac{\partial}{\partial t} \partial_P q, P) \quad (5.16)$$

où F est construite à partir des équations (5.13), (5.14) et (5.15).

5.2.2 Analyse

- Cette méthode est une méthode non linéaire par construction. Comparée à l'approche précédente, l'algorithme adaptatif est plus complexe sur le plan de la mise en oeuvre. En effet, il présente un nombre important de paramètres à régler : en plus des poids w_i utilisés dans la fonction de coût, du gain de l'algorithme de descente K , on doit définir les conditions initiales du système (5.16) : $X(t = 0)$. Parmi celles ci, les variables : $\partial_P q$, $\frac{\partial}{\partial t} \partial_P q$, P sont particulièrement difficiles à initialiser. En effet, alors qu'on ne dispose pas d'intuition physique directe pour la signification des deux premières, le choix de la valeur initiale de P est primordial pour garantir la convergence de l'algorithme.
- Rappelons par ailleurs quelques caractéristiques intrinsèques à la méthode de descente : la non garantie d'abord, d'atteindre un minimum absolu et enfin, d'obtenir la stabilité du filtre adaptatif.
- Certains paramètres doivent satisfaire des contraintes physiques : les facteurs p_i doivent être positifs (pour garantir l'égalité des signes des accélérations du simulateur et de la référence), la rotation doit rester sous le seuil de détection, etc. Ceci augmente la difficulté de calibrage de l'algorithme¹⁹.

¹⁸Notons que pour développer les calculs de l'équation (5.14), les produits sont tensoriels.

¹⁹Nous citons une autre approche adaptative appelée l'approche *hybride* [Nahon et al., 1992]. Cette algorithme reprend la structure de l'approche classique (section 5.1). Elle consiste, entre autres, à faire varier les paramètres des filtres F_{PH1} , F_{PH2} et F_{PB1} dans (5.1). Parmi les autres généralisations proposées :

- L'influence de l'ordre de la fonction de coût J est étudiée : ordre supérieur à 2 (2, 4, 6, etc).
- L'adaptation concerne non seulement les gains mais aussi les fréquences de coupure. Les problèmes de stabilité sont gérés par des tests hors ligne et par l'intégration de fonctions de saturations sur les coefficients adaptatifs.
- Les paramètres des filtres sont calculés en fonction du scénario de vol : atterrissage (l'avion roule sur la piste), vol à altitude et vitesse constantes, etc.

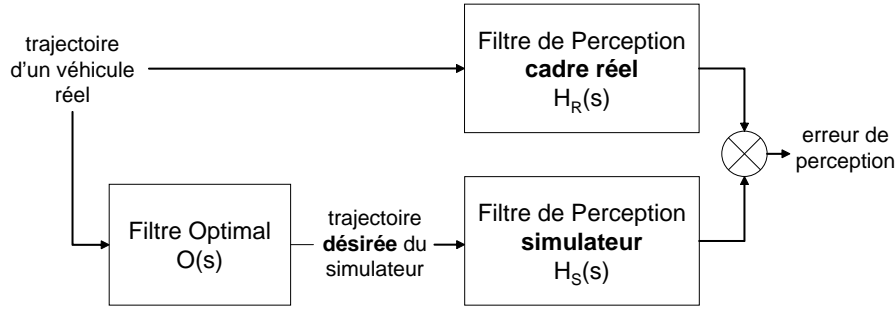


FIG. 5.5 – ARI Optimal

5.3 L'approche optimale

Cette technique fut conçue par [Sivan et al., 1982], suivi de [Ish-Shalom, 1982] et implantée ultérieurement par [Reid et Nahon, 1985]. Des travaux récents de [Cardullo et al., 1999] et [Telban et Cardullo, 2002] ont mis en oeuvre ce type d'approche pour le simulateur de la NASA Langley Institute ainsi que pour le simulateur Simona (Université de Delft). Grâce à la commande optimale, cette approche calcule, hors ligne, un filtre de restitution inertielle.

5.3.1 Principe général

Le principe général de cette approche est de réaliser le *meilleur* compromis entre 1^e la restitution inertielle et 2^e le respect des contraintes physiques liées à la plate-forme de simulation. Autrement dit, il s'agit, en quelque sorte, de maximiser les performances du simulateur. Cette notion de *maximisation* est traduite dans une formalisation relevant de la commande optimale.

Le schéma Fig.5.5 décrit la structure du problème. Si nous empruntons le chemin de la réalité, nous pouvons grâce à l'utilisation des filtres de perception, calculer les sensations réelles de conduite. Alors que si nous utilisons le chemin du simulateur, nous devons d'abord passer par un filtre de restitution inertielle $O(s)$ (O pour Optimal), pour calculer la trajectoire réalisable par le simulateur. Ensuite²⁰, les sensations induites par le simulateur sont délivrées par un filtre de perception. La différence entre les deux sensations définit l'erreur de perception e et mesure la qualité de la restitution inertielle :

$$e(s) = H_S(s) \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} - H_R(s) \begin{pmatrix} \omega_r \\ a_r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} = O(s) \begin{pmatrix} \omega_r \\ a_r \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

[Sivan et al., 1982] supposent l'égalité des deux modèles de perception $H_S(s)$ et $H_R(s)$:

$$H_S = H_R = H_V = \begin{bmatrix} H_{csc} & 0 \\ \frac{1}{g_s} H_{oto} & H_{oto} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

où H_V est le filtre vestibulaire construit à partir de modèles linéaires des organes otolithiques H_{oto} et des canaux semi-circulaires H_{csc} (voir le chapitre Perception). Rappelons que les otolithes sont non seulement sensibles à l'accélération linéaire mais aussi à une variation statique de l'angle de la tête :

$$\hat{a} = H_{oto}(a + g\theta) \quad (5.19)$$

²⁰On suppose que le contrôleur reproduit parfaitement les consignes délivrées par l'ARI.

où g est la constante de gravité. Nous pouvons donc réécrire l'équation (5.17) en utilisant une réalisation du filtre H_S :

$$\begin{aligned}\dot{x}_V &= \mathbf{A}_V x_V + \mathbf{B}_V \begin{pmatrix} \omega - \omega_r \\ a - a_r \end{pmatrix} \\ e &= \mathbf{C}_V x_V + \mathbf{D}_V \begin{pmatrix} \omega - \omega_r \\ a - a_r \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.20)$$

où x_V est l'état interne du système vestibulaire dont la taille dépend du type de réalisation et des filtres otolithiques et canaux choisis. Pour mesurer le déplacement (cinématique et cinétique) de la plate-forme nous disposons d'un modèle linéarisé :

$$\dot{\theta} = \omega \quad \text{et} \quad \ddot{x} = a \quad (5.21)$$

Soit en utilisant le vecteur déplacements $x_d = (\int x, x, \dot{x}, \theta)$:

$$\dot{x}_d = \mathbf{A}_d x_d + \mathbf{B}_d \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

A ce stade, nous avons donc établi les équations linéaires du mécanisme de perception et du mouvement de la plate-forme de simulation. Nous pouvons donc traduire le problème de restitution inertielle comme le compromis optimal entre suivi de sensation (minimisation de e) et respect des contraintes de déplacement (minimisation de x_d , a et ω) :

$$\int_0^\infty (e^T \mathbf{Q} e + x_d^T \mathbf{R}_d x_d + \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix}^T \mathbf{R} \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix}) dt \quad (5.23)$$

\mathbf{Q} , \mathbf{R} et \mathbf{R}_d sont des matrices de pondération s.p.d. qui permettent de calibrer le compromis. Malheureusement, cette approche est *hors ligne* et exige la connaissance *a priori* de la trajectoire réelle du véhicule (a_r et ω_r). Pour contourner ce problème, les auteurs proposent une approche statistique. En effet, la trajectoire de référence prend la forme d'un bruit blanc filtré (représentant la bande de fréquence dans laquelle *vivent* les trajectoires réelles, dans une perspective d'identification) :

$$\begin{aligned}\dot{x}_n &= \mathbf{A}_n x_n + \mathbf{B}_n d \\ \begin{pmatrix} \omega_r \\ a_r \end{pmatrix} &= x_n\end{aligned}\quad (5.24)$$

avec d un bruit blanc et (f_1, f_2) les fréquences de coupures définissant les matrices

$$\mathbf{A}_n = - \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Le problème est donc redéfini comme suit : minimiser par rapport à a et ω , l'espérance mathématique :

$$J = \mathbb{E} \left\{ \int e^T \mathbf{Q} e + x_d^T \mathbf{R}_d x_d + \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix}^T \mathbf{R} \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} \right\} \quad (5.26)$$

Le résultat de cette optimisation fournira $(a, \omega)(s)$. Il suffit de *diviser* ce résultat par l'entrée $(a_r, \omega_r)(s)$ ²¹ pour trouver $\mathbf{O}(s)$. Dans [Sivan et al., 1982] le choix du modèle vestibulaire aboutit à un filtre $\mathbf{O}(s)$ de degré 5. Le filtre est de degré 7 dans [Telban et Cardullo, 2002].

²¹ Rappelons que $(a_r, \omega_r)(s)$ a une forme spécifique, car il s'agit d'un bruit blanc filtré.

5.3.2 Résolution

La première étape consiste à concaténer les systèmes linéaires précédents (5.20), (5.22) et (5.24) en un système global dépendant de la variable d'état $x_g = (x_v, x_d, x_n)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_g &= \mathbf{A}x_g + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} + \mathbf{L}d \\ y &= \begin{bmatrix} e \\ x_d \end{bmatrix} = \mathbf{C}x_g + \mathbf{D} \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.27)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_v & 0 & -\mathbf{B}_v \\ 0 & \mathbf{A}_d & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v \\ \mathbf{B}_d \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_v & 0 & -\mathbf{D}_v \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_v & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Ensuite, dans la deuxième phase le problème optimal (5.26) est transformé dans la forme standard :

$$J = E \left\{ \int x_g^T \mathbf{R}_1 x_g + u^T \mathbf{R}_2 u \right\} \quad (5.29)$$

qui permet une résolution directe du problème : $u = -\mathbf{K}x_g$ où \mathbf{K} est une matrice constante calculée à partir des matrices du système (5.28) et de la solution \mathbf{P} d'une équation de Riccati algébrique. Explicitons donc les termes utilisés dans l'équation précédente :

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{C}^T \mathbf{G} \mathbf{C} - \mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_{12}^T \quad \text{où} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_d \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$u = \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} + \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_{12}^T x \quad (5.31)$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{D}^T \mathbf{G} \mathbf{D} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{12} = \mathbf{C}^T \mathbf{G} \mathbf{D} \quad (5.32)$$

La solution de ce problème de minimisation s'écrit donc

$$\mathbf{K} = -\mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (5.33)$$

où \mathbf{P} est la solution de l'équation :

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}} = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_{12}^T \quad (5.34)$$

Ainsi, à partir de (5.31), la solution optimale est

$$\begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} = -\mathbf{F}x_g, \quad \mathbf{F} = \mathbf{R}_2^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{R}_{12}^T) \quad (5.35)$$

Elle peut réécrite sous une forme étendue :

$$\begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} = -\mathbf{F}_1 x_v - \mathbf{F}_2 x_d - \mathbf{F}_3 x_n \quad (5.36)$$

La dernière étape consiste à transformer cette équation dans le domaine de Laplace. Rappelons que $x_n = (\omega_r, a_r)^T$. Par conséquent, nous devons uniquement expliciter x_v et x_d . Dans cet objectif, isolons des équations (5.27), les variations de x_v et de x_d

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_v & 0 & -\mathbf{B}_v \\ 0 & \mathbf{A}_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ x_d \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v \\ \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

Il suffit ensuite de transformer ces équations dans le domaine fréquentiel et de les combiner avec (5.36) pour obtenir le filtre optimal

$$\begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} = \mathbf{O}(s) \begin{pmatrix} \omega_r \\ a_r \end{pmatrix} = \mathbf{O}(s) x_n \quad (5.38)$$

$$\mathbf{O}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_V + \mathbf{B}_V\mathbf{F}_1 & \mathbf{B}_V\mathbf{F}_2 \\ \mathbf{B}_d\mathbf{F}_1 & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d\mathbf{F}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_V \\ \mathbf{B}_d \end{bmatrix} - \mathbf{F}_3 \quad (5.39)$$

5.3.3 Analyse

- Dans cette méthode, la structure du filtre fait partie du processus d’optimisation contrairement aux approches précédentes où la structure du filtre est complètement prédéfinie (approche classique) ou partiellement définie (approche adaptative).
- Lorsque la trajectoire de référence n’est plus un simple signal déterministe mais une bande de signaux (un bruit blanc filtré), l’optimisation devient certainement moins précise mais en contrepartie on aboutit à un filtre qui peut être utilisé en temps réel. Néanmoins en séparant la conduite en plusieurs modes²² (tel réalisé pour les avions dans [Telban et Cardullo, 2002]), nous pouvons effectuer l’optimisation pour chaque mode et ainsi réaliser une optimalité semi-globale.
- Notons que [Sivan et al., 1982] ont été les premiers à intégrer les filtres de perception dans le processus d’optimisation. Leur article propose également une revue des techniques d’optimisation réalisées pour la simulation de vol.
- L’égalité entre les modèles de perception du système vestibulaire dans le cadre de la simulation et dans le cadre réel représente une hypothèse forte.
- Comme dans le cas adaptatif, la coordination peut être incluse dans l’algorithme moyennant un choix adéquat du poids sur la variation angulaire afin de la maintenir sous le seuil de détection.
- Sur le plan de la mise en oeuvre, nous retrouvons dans cette méthode les difficultés présentes dans le cadre de l’approche adaptative à savoir : le choix des matrices de pondération, le choix des filtres de perception (pour garantir la stabilité de $\mathbf{O}(s)$), etc. Il faudra aussi, comme pour toutes les approches linéaires, prévoir un traitement préliminaire (facteur d’échelle et/ou limitation).
- Les contraintes cinématiques sont implicitement incluses grâce au coût $x_d^T \mathbf{R}_d x_d + (\omega, a) \mathbf{R} (\omega, a)^T$. Cette stratégie privilégie donc une zone centrale de fonctionnement (autour de $x_d = 0$) et ne permet pas l’exploitation de l’espace de mouvement dans sa totalité.

5.4 L’approche prédictive

Cette méthode [Dagdelen, 2005] consiste à utiliser la commande prédictive (ou Model Predictive Control MPC) dans l’élaboration d’un ARI pour la simulation de conduite. D’après [Petit, 2004], la philosophie de la MPC se résume à utiliser le modèle pour prédire le comportement du système et choisir la décision la meilleure au sens d’un certain coût tout en respectant les contraintes. En d’autres termes, nous disposons d’un modèle pour le système contraint (que l’on souhaite commander) et d’une trajectoire dont nous connaissons (à chaque pas d’échantillonnage) une prévision sur un horizon glissant de taille n . La commande prédictive résout à chaque pas de temps, un problème de commande optimale sous contraintes sur cet horizon. De la suite des n commandes qui forment la solution de ce problème optimal, c’est uniquement le premier élément qui est retenu et appliqué. Le même schéma de calcul est appliqué à la prochaine itération. Pour une étude approfondie de la MPC le lecteur peut se reporter à [Goodwin et al., 2004].

²²Exemples : mode dépassement, mode rouler en ligne droite, mode virage à droite,...

5.4.1 Principe général

L'idée de [Dagdelen, 2005] est de maximiser la reproduction instantanée de l'accélération de référence (sortie du modèle du véhicule) sous contrainte. L'algorithme est présenté dans le cadre du mode longitudinal.

Le modèle adopté pour la plate-forme est un modèle linéaire : la position de la plate-forme x est calculée par une double intégration de l'accélération : $\ddot{x} = a$. Un modèle de perception linéaire²³ est adopté permettant de calculer l'accélération perçue $\hat{a} = H_{oto}(s)a$. Dans le cadre d'une approche discrète, ces deux modèles sont combinés pour effectuer la réalisation générale (le pas d'intégration T est implicite : $x(k)$ signifie $x(kT)$) :

$$\begin{cases} x_g(k+1) = Ax_g(k) + Ba \\ y(k) = (\hat{a}(k), x(k), \dot{x}(k)) = Cx_g(k) + Da \end{cases} \quad (5.40)$$

où x_g est l'état interne du système général (déplacement et perception). Notons $n > 1$ l'horizon de prévision et a_r l'accélération de référence.

5.4.1.1 Le problème sur l'horizon glissant

Le critère à minimiser (du problème sur l'horizon glissant) est le carré du suivi de consigne $(a_r - a)^2$ au premier instant $k = 1$:

$$\min(\hat{a}_r(1) - \hat{a}(1))^2 \quad (5.41)$$

sous des contraintes

1. d'égalités : représentant (a) la dynamique linéaire du système général (5.40) pour $k = 1..n$ (b) les conditions initiales (position et vitesse du simulateur), (c) les conditions finales (la plate-forme doit freiner (vitesse nulle) à l'intérieur de son espace de mouvement contraint). Cette condition assure d'ailleurs la stabilité de l'algorithme.
2. d'inégalités : (a) l'ensemble du déplacement (accélérations, vitesses, positions) est inférieur en valeur absolue aux bornes maximales (limites physiques de la plate-forme) : pour $k = 1..n$

$$|\ddot{x}(k)| < a_{\max} \quad |\dot{x}(k)| < v_{\max} \quad |x(k)| < x_{\max} \quad (5.42)$$

(b) à partir du deuxième instant jusqu'à la fin de l'horizon n , l'accélération du simulateur doit être sous le seuil de perception $a_{\text{threshold}}$: pour $k = 2..n$

$$|a(k)| < a_{\text{threshold}} \quad (5.43)$$

La minimisation s'effectue sur l'ensemble des vecteurs d'état $(x_g(k))_{k=1..n}$ et des accélérations de consigne $(a(k))_{k=1..n}$. L'accélération $a(1)$ solution de ce problème est ensuite intégrée deux fois pour calculer les nouvelles position et vitesse initiales qui seront utilisées dans la prochaine itération.

5.4.1.2 Analyse du problème à horizon glissant

La résolution du problème à horizon glissant est possible de façon intuitive. En effet supposons, sans perte de généralité (il suffit d'un changement de signe), que l'accélération de référence au premier instant est positive. Nous sommes donc dans une situation où la plate-forme accélère au premier instant et freine sur le reste de l'horizon n . Or la capacité de freinage maximale du robot est limité à $-a_{\text{threshold}}$ soit une diminution maximale de la vitesse de $(n-1)T a_{\text{threshold}}$. Comme la

²³Dans la thèse [Dagdelen, 2005], deux cas sont présentés $H_{oto} = 1$ (sans modèle de perception) et $H_{oto} = \frac{\hat{a}}{a} = 0.4 \frac{13.2s+1}{(5.33s+1)(0.66s+1)}$ (Modèle de Young et Meiry, voir chapitre perception).

vitesse à l'instant final n doit être nulle, l'accélération maximale que peut reproduire le robot au premier instant est de $(n - 1)a_{\text{threshold}}$ (dans le cas où la vitesse initiale est également nulle). Dans le cas où la vitesse initiale v_0 est positive, cette valeur maximale est diminuée de $-v_0/T$. Notons que les valeurs maximales, que nous venons de décrire, ne tiennent pas compte des autres contraintes (5.42) qui peuvent être un facteur supplémentaire de réduction.

5.4.2 Retour en position neutre

L'approche prédictive permet d'arrêter la plate-forme à l'approche de ses butées. Si l'accélération de consigne ne change pas de signe, le robot sera bloqué au niveau de cette position. Cette observation a justifié l'utilisation d'un module de retour en position neutre qui permet le déblocage de la plate-forme pour une meilleure restitution. Le mécanisme d'enclenchement et de désenclenchement de cette procédure est le suivant :

- Enclenchement : Si la plate-forme est en position maximale et l'accélération de consigne est de signe constant.
- Désenclenchement : Suite à une variation de l'accélération de consigne provoquée par un changement de l'angle de la pédale accélérateur.

5.4.3 Variations de l'approche

Plusieurs variations de cette méthode ont été proposées dans [Dagdelen, 2005] :

- L'utilisation de la coordination a été étudiée en changeant le coût à minimiser

$$\min(a_r(1) - g\theta(1))^2$$

et en contraignant la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ à être sous le seuil de perception : 0.3deg/s. Il a été donc implicitement supposé que l'angle θ et le déplacement x sont décorrélés.

- L'utilisation des contraintes sur les vérins au lieu de celles sur le déplacement x a été étudié grâce à l'utilisation du modèle géométrique inverse. Les contraintes scalaires de l'équation (5.42) ont été remplacées par des contraintes vectorielles de dimension 6 sur les élongations, les vitesses et les accélérations des vérins. Cette optimisation est plus précise dans la mesure où les contraintes sur x sont en réalité des estimations expérimentales et ne tiennent pas compte du couplage entre les différentes directions de mouvement.

5.4.4 Analyse

- L'approche prédictive est la première à inclure explicitement les contraintes dans l'algorithme de restitution inertielle. Par conséquent, elle ne nécessite pas un traitement préliminaire des trajectoires de référence et exploite pleinement la capacité de mouvement du simulateur. Néanmoins une telle approche est certainement plus coûteuse en terme de temps de calcul²⁴.
- La stratégie d'enclenchement et de dés-enclenchement du retour en position neutre n'a pas été bien définie. En effet elle peut provoquer des situations de commutations infinies. C'est par exemple le cas où le robot est en butée avec une accélération positive et que le conducteur agit sans interruption sur la pédale pour provoquer l'accélération.
- Nous avons vu dans la section 5.4.1.2, que la valeur du seuil de détection de l'accélération linéaire multiplié par l'horizon de prédiction est une mesure de la restitution maximale : $(n - 1)a_{\text{threshold}}$. Il faudra donc déterminer la valeur de n pour laquelle le produit précédent est proche de la capacité maximale d'accélération du robot.

²⁴C'est probablement la raison pour laquelle la version officielle de l'algorithme n'est pas celle intégrant les limitations sur les vérins.

Caractéristique ARI	Classique	Adaptative	Optimale	Prédictive
linéaire	✓		✓	
mouvement de retour intégré	~	~	~	✓
modèle de perception inclus			✓	✓
contraintes explicitement incorporées				✓

TAB. 5.1 – Tableau comparatif des ARIs (✓ : oui, ~ : incertain et vide : non)

- Bien que l’horizon glissant soit de taille $n > 1$, l’algorithme ne nécessite pas la connaissance du futur de la trajectoire de référence. Comme la variation du comportement de conducteur est généralement lente par rapport au temps d’échantillonnage, il serait intéressant d’analyser l’augmentation du sous horizon de suivi de 1 à $m < n$.

5.5 Analyse générale des les ARIs

Les observations communes à tous les ARIs sont :

- Les ARIs sont des méthodes heuristiques basées sur des modèles linéaires de la perception et du robot de simulation (voir Tableau comparatif 5.1).
- Le calibrage et la validation des ARIs sont des tâches difficiles. Parmi les approches de validation proposées, la méthode de [Ares et al., 2001] est basée sur l’utilisation des filtres de perception vestibulaire afin de comparer les performances du simulateur par rapport à la réalité. Néanmoins ces filtres ont été originellement développés pour les simulateurs de vols. L’utilisation directe de ces derniers dans le cadre de la simulation de conduite montre quelques incompatibilités. En effet, [Ares et al., 2001] rapportent que les résultats obtenus montrent l’insuffisance, dans le cadre de la simulation de conduite, de la composante hautes-fréquences des modèles vestibulaires usuels. [Barbagli et al., 2001] insistent sur la particularité de la simulation de conduite par rapport au vol : *“the dynamics of land vehicle are very different from the ones of an aircraft. Land vehicles are usually much faster if compared to the ones of a large aircraft. This is due to a higher power to mass ratio and to the specific nature of moving on the ground, where higher friction is present”*

Une autre méthode d’évaluation est l’utilisation des filtres visio-vestibulaires qui traduisent le couplage inhérent entre ces deux types de stimulation.

- Les approches précédentes sont destinées à mesurer la fidélité des simulations (validité perceptive). En amont de cette validation, le respect des contraintes de mouvement du robot de simulation doit être vérifié. Généralement, soit un modèle cinématique, soit un modèle linéarisé (intégrateurs) est utilisé pour cet objectif. Or ces modèles ne permettent pas de vérifier tous les types de contraintes physiques liées au simulateur. Un modèle dynamique est plus adapté pour représenter le robot et pour permettre un accès direct aux forces et aux autres grandeurs de mouvement. De plus, étant donné le couplage qui existe entre les vérins une attention particulière doit être portée aux valeurs limites de déplacement du robot dans les 6 directions de l’espace. En effet, ces valeurs sont généralement des valeurs axe par axe, c’est-à-dire des valeurs nominales qui ne tiennent pas compte du couplage des actionneurs.
- Les contraintes sur le déplacement du robot sont souvent incorporées implicitement et tendent à favoriser une zone centrale autour d’une position neutre sans permettre l’exploitation totale de la capacité de mouvement du simulateur.

La structure mécanique du simulateur est souvent considérée comme fiable et bien adaptée à la simulation de conduite. Dès lors, le calibrage de l’ARI est effectué de façon à exploiter cette capacité mécanique de la meilleure des façons. Dans la section suivante, nous allons remettre l’architecture du

robot en question. Les travaux de [Advani et al., 2002] montrent que l'on peut augmenter considérablement l'efficacité du simulateur grâce à un changement des paramètres dynamiques de l'hexapode.

5.6 L'optimisation *ex-ante*

Le principe général de cette méthode consiste à optimiser la structure mécanique (configuration géométrique, comportement dynamique des actionneurs,...) du robot de simulation afin d'atteindre des objectifs prédéfinis. Ainsi le simulateur est pré-ajusté pour satisfaire les besoins de l'acquéreur. A notre connaissance [Advani et al., 2002] ont produit des travaux pionniers dans le cas de la simulation de vol [Hosman et al., 2002] et de conduite [Advani et Hosman, 2001]²⁵. Nous pouvons séparer les objectifs développés dans ces travaux en trois catégories :

1. optimiser la structure mécanique pour garantir une enveloppe de mouvement prédéterminée. Dans cet objectif, une métrique géométrique a été développée pour mesurer la taille de cette enveloppe.
2. optimiser la structure mécanique pour garantir une fidélité perceptive donnée. Pour mesurer cette fidélité une métrique de vol a été élaborée (dans une perspective de généralisation à la simulation de conduite, nous l'appellerons métrique de simulation).
3. optimiser conjointement la structure mécanique et l'ARI pour réaliser un simulateur de haute fidélité destiné à l'apprentissage de la conduite.

Dans l'objectif de réaliser une optimisation en amont de la mise en oeuvre des simulateurs, la difficulté principale est d'élaborer un critère de performance. C'est le rôle des métriques citées. Notons que le mot métrique n'est pas utilisé avec sa signification mathématique rigoureuse. Dans la suite, nous allons donner quelques idées générales sur l'optimisation *ex-ante*.

5.6.1 Contraintes de l'optimisation

Dans cette section, nous allons nous intéresser au paramétrage du robot sans traiter du processus d'optimisation. L'établissement des intervalles de variation des paramètres cinématiques et dynamiques de l'hexapode [Advani et al., 2002] n'est pas une tâche facile. En effet, d'une part, certaines variables sont critiques (elles engendrent une grande variation de la performance), et d'autre part, la stabilité et le bon conditionnement de la structure mécanique doivent être vérifiés.

Déterminer l'espace de travail (positions et orientations de la plate-forme mobile) par exemple, est basé sur la donnée des extensions minimales et maximales des vérins. Or, augmenter la taille de ces actionneurs (pour obtenir une plus grande excursion) diminue leur raideur et leur capacité de support hydrostatique. Par ailleurs, ces vérins sont généralement équipés d'un système de freinage à l'approche des butées. Dans un souci de rigueur, ce freinage de sécurité doit être intégré dans la mesure de performance.

Le robot parallèle doit être bien conditionné, c'est-à-dire, avoir un comportement déterministe et produire des mouvements précis. En d'autres termes, nous devons assurer non seulement l'absence de singularités de l'espace de travail mais aussi une certaine robustesse de la matrice jacobienne inverse par rapport à l'inversibilité. Nous citons par exemple, la dextérité (rapport des valeurs propres minimale et maximale) comme mesure de cette robustesse. Généralement la dextérité minimale d'une plate-forme industrielle de type Gough-Stewart est supérieure à 0.2.

Une fois les contraintes de l'optimisation fixées, nous devons spécifier un critère de performance. Dans les trois paragraphes suivants, nous proposons trois méthodes d'évaluation des performances.

²⁵D'autres approches d'optimisation et de mesure de performance sont présentées dans [Gouverneur et al., 2003] et [Chung, 2000].

5.6.2 La métrique géométrique

La métrique géométrique est une mesure de l'enveloppe des mouvements réalisables par le simulateur (sa performance en terme de capacité de mouvement). Alors qu'usuellement l'étude de cette dernière est faite axe par axe, le couplage entre les actionneurs dans la structure parallèle, réduit considérablement la validité de cette approche. Par conséquent, afin de mesurer plus finement 'la taille' de cette enveloppe, nous devons considérer l'espace de travail de dimension 6, contenant à la fois l'ensemble des positions et des angles de la plate-forme mobile.

Cependant une interprétation physique de ce dernier est difficile pour deux raisons : sa dimension (pas de représentation graphique complète) et la présence d'angles géométriques. [Advani et Hosman, 2001] proposent deux approches qui consistent à considérer des sous-espace plans ou tridimensionnels afin de pouvoir les analyser visuellement. La mesure de la taille de ces espaces n'est pas décrite explicitement. Pour l'espace des translations (orientation constante) par exemple, il s'agit de mesurer le volume de la plus grande ellipsoïde contenue dans celui-ci.

5.6.3 La métrique de vol

La métrique de vol (ou de simulation dans un contexte plus général), est une mesure de la qualité du simulateur. Le mot qualité signifie la performance en terme de restitution de sensations subjectives. Il s'agit plus particulièrement, dans cette étude, des sensations liées au mouvement ou indices vestibulaires.

Dans la perspective d'un calibrage en amont de la construction du simulateur, il est impossible de recueillir des réponses subjectives mesurées sur un opérateur humain. [Advani et al., 2002] proposent d'utiliser une méthode basée sur la modélisation de la perception humaine. Il s'agit d'une approche sur deux étapes. Dans la première phase, un ensemble de trajectoires d'un avion réel²⁶ (calculées par un modèle de ce dernier) subissent une réduction cinématique sans pour autant altérer leur qualité, c'est-à-dire, sans une détérioration significative des *sensations* de mouvement. Dans la deuxième phase, ces trajectoires sont multipliées par un facteur constant selon tous les axes de mouvement afin de convenir aux limites de mouvement du robot. C'est ce facteur qui définit la métrique de vol.

5.6.4 L'homme comme mesure de performance

Dans cette dernière approche, un modèle de l'homme est intégré pour mesurer la performance d'une tâche particulière. D'après [Rasmussen, 1983], le comportement de l'homme peut être séparé en trois niveaux hiérarchisés. Le niveau le plus bas est le niveau du savoir-faire de la conduite : c'est la manipulation des commandes (volant, pédales) suite aux changements de l'information perçue (visuelle et vestibulaire, etc.). Le deuxième niveau est l'ensemble des opérations (ou scénarios) de conduite (changement de voie, maintenir une vitesse et une direction constante de conduite, freinage confortable, conduite en virage, etc.). Le troisième niveau est le niveau de l'expertise ou de décision : quel scénario de conduite choisir en conséquence des observations ?

L'approche adoptée par [Hosman et al., 2002], traite spécifiquement le plus bas niveau, celui du savoir-faire de la conduite. Un modèle linéaire est proposé pour traduire les informations externes agissant sur le conducteur. Il s'agit de la somme pondérée des réponses des récepteurs sensoriels (yeux et système vestibulaire) multipliée par un facteur de retard dû au traitement de l'information par le cerveau (Fig.5.6).

La méthode [Hosman et al., 2002] est basée sur la donnée d'un ensemble de scénarios de référence. Elle est composée de trois étapes :

1. La première étape consiste à calibrer le modèle de l'homme pour qu'il puisse reproduire le comportement humain dans le cadre des scénarios de référence. Afin d'atteindre cet objectif, un

²⁶ Ces trajectoires sont supposées être suffisamment riche en information pour décrire le comportement général de l'avion.

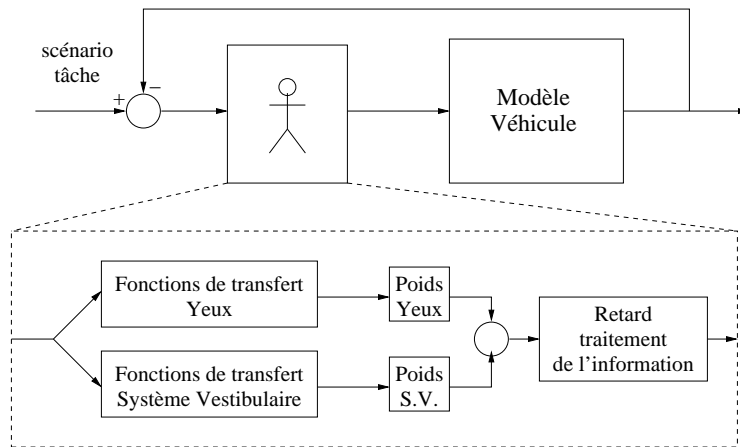


FIG. 5.6 – Calibration par le modèle de l'Homme

modèle du véhicule est utilisé pour traduire les actions délivrées par le modèle humain sur la trajectoire du véhicule.

2. Dans une deuxième phase, le modèle ajusté de l'homme est utilisé pour le réglage des paramètres de l'ARI.
3. Enfin, un ensemble de trajectoires caractéristiques est traité par l'ARI ajusté afin de produire les trajectoires du simulateur. Le robot de simulation est calibré de façon à pouvoir reproduire ces dernières.

5.7 Les algorithmes de limitation

Étant donnée, la nature heuristique des ARIs, ces derniers peuvent engendrer occasionnellement la violation des contraintes²⁷ du simulateur. Le rôle des algorithmes de limitation est donc de prévenir ces cas extrêmes en effectuant un freinage des actionneurs à l'approche de leurs butées. La dynamique de freinage va donc interférer avec les opérations de simulations. [McFarland, 2001] développe dans son article, le concept de *Adjustable Limiting Algorithms for Robust Motion Simulation* (ALARMS), c'est-à-dire une limitation qui *ajuste* le compromis entre efficacité de la simulation et le confort de freinage.

5.7.1 Préliminaires

Afin de définir de façon plus précise le compromis précédent, nous allons étudier le cas particulier de la plate-forme de Gough-Stewart. Nous définissons (suivant le schéma de [McFarland, 2001]), deux régions de fonctionnement pour ce robot. La première région est celle où l'excursion des vérins est libre (le freinage est désactivé). C'est celle destinée à reproduire les trajectoires délivrées par l'ARI. La deuxième région est la zone de limitation (activation du freinage). C'est donc une région où les consignes de l'ARI ne sont plus respectées. Par conséquent, des sensations incohérentes seront probablement engendrées.

Il apparaît donc que réduire cette région permet d'augmenter la zone libre et par conséquent améliorer les performances du simulateur. Néanmoins, dans ce cas, des freinages brusques seront

²⁷Contraintes cinématiques, cinétiques et dynamiques. Rappelons que les contraintes sur les actionneurs ne sont généralement pas explicitement incorporées dans les ARI

nécessaires et donc le confort de freinage est réduit. Ceci illustre le compromis entre, d'une part l'efficacité du simulateur (définie comme la maximisation de la taille de la zone libre sans prendre en considération la façon dont l'ARI exploite celle-ci) et le confort de freinage (défini comme la maximisation de la zone de freinage).

L'auteur propose deux types de limitation (en position et en vitesse) qui dépendent d'un seul paramètre $P \in [0, 1]$. P mesure l'agressivité du freinage et par conséquent, c'est en quelque sorte une mesure de l'efficacité (ou de la zone libre). Dans le but de développer un algorithme facile à calibrer, les auteurs ont mis en place des stratégies de freinage dépendant du seul paramètre P .

Le volume théorique de la zone libre

Nous considérons un axe particulier de mouvement : l'axe des x par exemple. Pour cette direction, les contraintes de déplacement sont représentées par des bornes maximales (en valeur absolue) $x_L, \dot{x}_L, \ddot{x}_L$. Par conséquent, les valeurs admissibles des positions, vitesses et accélérations du robot de simulation forment un cube de volume :

$$V_{\text{theo}} = 8 x_L \dot{x}_L \ddot{x}_L \quad (5.44)$$

En pratique ce volume est inatteignable, car il faut prendre en considération les distances nécessaires pour effectuer le freinage.

Nous allons présenter dans la suite les algorithmes de limitation en position. Notons que les limitations au niveau de l'accélération et de sa dérivée sont présentes sous forme de saturateurs.

La limitation parabolique en position

La limitation parabolique est la limitation la plus agressive. Il s'agit de déclencher une décélération maximale d'amplitude \ddot{x}_L quand la plate-forme atteint un ensemble de positions et de vitesses de déclenchement x_d, \dot{x}_d définis par :

$$\dot{x}_d^2 = 2\ddot{x}_L (x_L - |x_d|) \quad (5.45)$$

Cette relation provient de l'intégration du système $\ddot{x} = -\ddot{x}_L$ avec les conditions initiales (x_d, \dot{x}_d) et les conditions finales $(x_L, 0)$, c'est-à-dire, en position limite x_L avec une vitesse nulle. La durée de freinage $|\dot{x}_d|/\ddot{x}_L$ est bornée par

$$t_L = \frac{\dot{x}_L}{\ddot{x}_L} \quad (5.46)$$

La limitation parabolique définit la zone libre la plus grande en pratique (efficacité maximale) :

$$V_{\text{max}} = V_{\text{para}} = V_{\text{theo}} \left(1 - \frac{\dot{x}_L^2}{12x_L\ddot{x}_L}\right) \quad (5.47)$$

C'est donc V_{max} qui sera considéré comme le volume référence par rapport auquel nous allons comparer les autres méthodes.

5.7.2 La limitation en position : filtrage adapté

Afin d'adoucir l'opération de freinage, l'auteur propose une dynamique particulière (plus lente que la dynamique parabolique) du second ordre pour attirer l'hexapode vers sa position maximale x_L à vitesse nulle²⁸ (à l'image de l'utilisation d'un ressort et d'un frottement). Il s'agit d'un système *critique* (sans oscillations)

$$x(s) = \frac{x_L}{(1 + \tau s)^2} \quad (5.48)$$

²⁸Nous avons choisi de traiter la limite supérieur x_L . L'étude de la limite inférieur suit exactement la même structure en remplaçant x_L par son opposé.

où le temps caractéristique τ du filtre dépend du paramètre de pondération $P \in [0, 1]$

$$\tau = \frac{2}{(1 + P)} t_L \quad (5.49)$$

Le freinage est donc d'autant plus rapide que P est grand. Notons que ce choix permet de borner l'accélération :

$$|\ddot{x}| \leq \frac{1}{2}(1 + P) \ddot{x}_L \leq \ddot{x}_L \quad (5.50)$$

Les points de déclenchements de la limitation

Le freinage est déclenché quand $|\alpha| \geq x_L$:

$$\alpha = \begin{cases} \gamma + \beta & \text{si } |\gamma| \leq x_L \text{ ou } \dot{x}\beta \geq 0 \\ \gamma + \beta \left(1 - \exp\left(\frac{\tau\dot{x}}{\beta}\right)\right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.51)$$

où

$$\gamma = x + \tau\dot{x} \quad \beta = \tau\dot{x} + \tau^2\ddot{x} \quad (5.52)$$

5.7.3 Analyse

- Pour $P = 0$ (freinage doux), le volume de la zone libre obtenu est de 81,3% V_{\max} , alors que $P = 1$ (freinage brusque), il s'agit de 93,3% V_{\max} .
- En partant d'un volume théorique cubique, on suppose implicitement un découplage entre les profils de position, vitesse et accélérations maximaux. Cette hypothèse est fautive en pratique à cause du déplacement limité (on ne peut pas être en butée et avoir une vitesse positive). Il est néanmoins possible d'utiliser cette méthode si l'on considère que ce volume cubique est à l'intérieur du volume réel (exhibant les corrélations). Dans ce cas, les valeurs maximales x_L , \dot{x}_L , \ddot{x}_L doivent être suffisamment réduites pour être à l'intérieur de ce volume réel.

5.8 Conclusion

Les ARI permettent de transformer les trajectoires non contraintes d'un vrai véhicule en trajectoires réalisables par le simulateur (à l'intérieur des limites physiques du simulateur). La qualité de cette transformation est mesurée par la *perception* du conducteur. Plus la perception des trajectoires transformées est proche des trajectoires originelles, meilleure est la qualité de la restitution. La perception humaine se trouve donc au centre du processus d'élaboration de ces algorithmes. Cependant, à cause de la connaissance imparfaite et limitée de ce domaine, ce critère de performance est délicat à établir.

Une des caractéristiques importantes des ARI est leur caractère heuristique. En effet, certaines trajectoires générées par les ARI peuvent contenir des violations des contraintes de mouvement. Par conséquent, des limiteurs (et/ou saturateurs) doivent être utilisés afin de garantir la sécurité du matériel et de l'opérateur. De plus, les ARI linéaires utilisent des facteurs d'échelle en amont du filtrage afin réduire les amplitudes de référence et garder l'information sur l'allure des profils d'accélérations réels.

Comment choisir ces saturateurs et ces facteurs d'échelle afin d'exploiter au mieux l'espace de travail réduit du simulateur ? Dans un objectif de calibrage, quelle est la marge de progression d'un ARI ? Quelle est la performance maximale d'un simulateur de conduite pour un scénario de conduite donné ? C'est le but du chapitre suivant que de donner des réponses à ces questions.

Chapitre 6

Performance optimale d'un simulateur de conduite

Le but de chapitre est d'étudier la performance maximale d'un simulateur de conduite dans le cadre de la restitution inertielle. Ceci revient à élaborer un algorithme de commande (générateur et suivi de trajectoires simultanément) optimal permettant de rendre les meilleures sensations de mouvement étant données les contraintes de déplacement du simulateur. Nous avons vu dans le chapitre ARI trois méthodes approchées d'optimisation des générateurs de trajectoire : il s'agit des approches prédictive, adaptative et optimale.

Dans ce chapitre, nous partons de cette dernière (l'ARI optimal) afin de réaliser une optimisation complète de l'algorithme de commande vu comme une unité (incluant le générateur de trajectoires). Nous proposons deux extensions : la *commande optimale* et l'*algorithme de performance maximale*.

6.1 Commande optimale continue

Nous proposons une approche basée sur une optimisation globale [Elloumi et al., 2005c]. Nous supposons connue la trajectoire de référence sur l'horizon temporel de simulation. Il s'agit donc de déterminer l'ensemble des forces articulaires optimales par rapport à un coût qui reflète le compromis entre la restitution inertielle maximale et le respect des contraintes de mouvement.

6.1.1 Principe général

Nous redéfinissons le vecteur déplacements utilisé par l'ARI optimal comme suit :

$$\mathbf{x}_d = (\mathbf{x}, \theta)^T \quad (6.1)$$

\mathbf{x}_d est, dans notre approche, régi par le modèle dynamique¹ :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{u} \quad (6.2)$$

Par ailleurs, nous disposons d'une trajectoire de référence (ω_r, α_r) supposée connue sur tout l'horizon d'optimisation. Le modèle linéaire de la perception (6.4) permet donc de calculer les quantités perçues. Le nouveau vecteur erreur \mathbf{e} (où $\omega = \dot{\theta}$ et $\alpha = \ddot{x}$ sont calculés à partir de \mathbf{x}_d) est défini

¹Ce modèle dynamique décrit la plate-forme de Gough-Stewart à base fixe. Rappelons que sa structure permet également de représenter les simulateurs Nads et Ultimate.

comme² :

$$e = (\hat{\omega}, \hat{a})^T - (\hat{\omega}_r, \hat{a}_r)^T \quad (6.5)$$

Nous nous proposons de résoudre le problème de commande optimale à horizon fini :

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} (e^T Q e + x_d^T R_d x_d + u^T R u) dt \quad (6.6)$$

où par rapport à l'ARI optimal :

- L'erreur de perception e est définie comme la différence entre la perception effective liée au mouvement du simulateur et la perception de référence (d'un vrai véhicule).
- Le vecteur déplacements x_d est gouverné par le modèle *non-linéaire* du robot.
- Dans la fonction de coût, le terme $(\omega, a) R (\omega, a)^T$ (de l'ARI optimal) a été remplacé par le terme $u^T R u$. Par conséquent, les forces articulaires sont directement incluses dans le critère d'optimalité. Le poids R permet une action directe sur leur norme.

Remarques :

- Il s'agit d'une approche déterministe dont l'objectif n'est pas l'élaboration d'un ARI mais le calcul direct des forces articulaires optimales. En d'autres termes, cet algorithme joue le rôle d'un générateur de trajectoire et d'une commande de suivi, simultanément.
- Le calibrage des matrices de poids dépend de la trajectoire de référence.
- Le choix du vecteur déplacement peut être étendu aux vitesses (et à tous les éléments de (q, \dot{q})) : $x_d = (x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})^T$

6.1.2 Résolution théorique

Le système global (mécanique et perceptif) présente la particularité d'être linéaire en u permettant ainsi de déduire une expression simple pour la commande optimale. A partir de celle ci, ce problème est reformulé en un problème aux deux bords.

6.1.2.1 Préliminaires

Séparons, d'abord, la commande u en la commande effective u_e et en la commande de compensation de la gravité u_g :

$$u = u_e + u_g, \quad u_g = J^{-T}(q)G(q) \quad (6.7)$$

Alors grâce à (6.2) le nouveau système dynamique du second ordre figurant u_e est :

$$J^{-T}(q)M(q)\ddot{q} + J^{-T}(q)C(q, \dot{q})\dot{q} = u_e \quad (6.8)$$

C'est ce système qui va être adopté dans la suite dans lequel n'intervient plus que la partie responsable du mouvement soit : u_e . Le système (6.8) est équivalent au système du premier ordre :

$$(x_1, x_2) = (q, \dot{q}) \quad (6.9)$$

²Rappelons que la relation entre les quantités réelles (ω, a) et celles perçues est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \hat{\omega} \\ \hat{a} \end{pmatrix} = H_{ves} \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

où H_{ves} est un filtre linéaire construit à partir des filtres otolithiques H_{csc} et canaux H_{oto} et qui permet de tenir compte de la coordination grâce au terme $\frac{1}{g_s} H_{oto}$:

$$H_{ves} = \begin{bmatrix} H_{csc} & 0 \\ \frac{1}{g_s} H_{oto} & H_{oto} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ a(x_1, x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{B}(x_1) \end{pmatrix} u_e \quad (6.10)$$

où a et B sont respectivement un vecteur et une matrice carré de dimension 6 :

$$a(x_1, x_2) = -\mathbf{M}^{-1}(x_1) \mathbf{C}(x_1, x_2) x_2 \quad (6.11)$$

$$\mathbf{B}(x_1) = \mathbf{M}^{-1}(x_1) \mathbf{J}^T(x_1) \quad (6.12)$$

D'autre part, à partir du système linéaire de perception (6.4)³, nous écrivons le système sous forme de la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \mathbf{A}_{ves} x_3 + \mathbf{B}_{ves} (\dot{x}, \dot{\theta})^T \\ (\hat{a}, \hat{\omega})^T = \mathbf{C}_{ves} x_3 + \mathbf{D}_{ves} (\dot{x}, \dot{\theta})^T \end{cases} \quad (6.13)$$

où x_3 est l'état interne du système vestibulaire (de dimension n_{ves} ⁴). Nous réécrivons (6.13) sous une forme plus compacte :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \mathbf{A}_{ves} x_3 + \bar{\mathbf{B}}_{ves} x_2 \\ (\hat{a}, \hat{\omega})^T = \mathbf{C}_{ves} x_3 + \bar{\mathbf{D}}_{ves} x_2 \end{cases} \quad (6.14)$$

où $\bar{\mathbf{B}}_{ves} = \mathbf{B}_{ves} \mathbf{S}$, $\bar{\mathbf{C}}_{ves} = \mathbf{C}_{ves} \mathbf{S}$ et \mathbf{S} la matrice qui sélectionne \dot{x} et $\dot{\theta}$ dans $x_2 = \dot{q}$:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

En synthèse, nous venons de construire un modèle complet pour le simulateur (incluant la dynamique de mouvement et le mécanisme de perception) dont le vecteur d'état X est défini par :

$$X = (x_1^T, x_2^T, x_3^T)^T \in \mathbb{N}^{12+n_{ves}} \quad (6.16)$$

est gouverné par le système du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) + \mathbf{G}(X) u_e \\ Y = (\hat{a}, \hat{\omega})^T = P(X) \end{cases} \quad (6.17)$$

où le vecteur $f(X) \in \mathbb{N}^{12+n_{ves}}$ est défini par :

$$f(X) = f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 \\ a(x_1, x_2) \\ \mathbf{A}_{ves} x_3 + \bar{\mathbf{B}}_{ves} x_2 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

la matrice \mathbf{G} et l'application linéaire $P(X)$ sont définies par :

$$\mathbf{G}(X) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \mathbf{B}(x_1) \\ \mathbf{0}_{n_{ves} \times 6} \end{pmatrix} \quad P(X) = \mathbf{C}_{ves} x_3 + \bar{\mathbf{D}}_{ves} x_2 \quad (6.19)$$

La dépendance linéaire du système (6.17) en u_e nous permettra de déterminer une expression théorique simple pour le contrôle optimal u_e^* .

³Nous considérons $(\dot{x}, \dot{\theta})$ comme entrée du système vestibulaire et non $(\ddot{x}, \ddot{\theta})$. Il s'agit d'une manipulation mathématique qui permet de poser le problème de commande optimale sous sa forme standard : $\int L(x, t) dt$ sous la contrainte : $\dot{x} = f(x, t)$.

⁴La dimension du système vestibulaire dépend du choix des filtres vestibulaires et du type de réalisation.

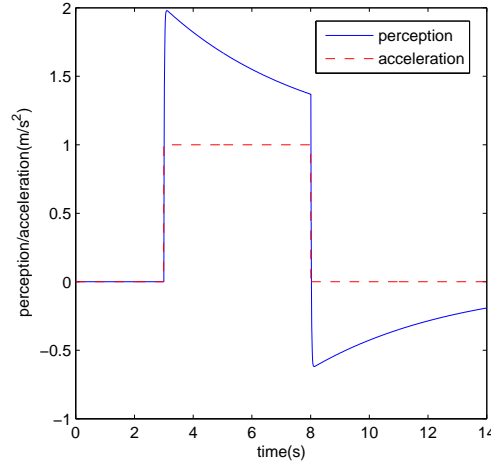


FIG. 6.1 – Accélération de référence réelle et perçue

6.1.2.2 Formalisation

Nous nous intéressons au problème de commande optimale à horizon de temps fini suivant :

$$\min_{u_e} \left(J = \left\{ \int_{t_0}^{t_f} J_t(X, u_e) dt \right\} \right), \quad J_t(X, u_e) = e^T Q e + x_d^T R_d x_d + u_e^T R u_e \quad (6.20)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) + G(X) u_e \\ e = (\hat{a}, \hat{\omega})^T - (\hat{a}_r, \hat{\omega}_r)^T = P(X) - (\hat{a}_r, \hat{\omega}_r)^T \\ x_d = \begin{pmatrix} S & 0_{2 \times 6} & 0_{2 \times n_{ves}} \end{pmatrix} X \end{cases} \quad (6.21)$$

La *cible* de ce problème de commande optimale est le temps final t_f .

6.1.2.3 Équations d'Euler Lagrange

Pour résoudre ce problème, nous allons écrire les équations d'Euler Lagrange associées. Commençons par écrire l'Hamiltonien du système :

$$H = J_t(X, u_e) + \lambda^T f(X) + \lambda^T G(X) u_e \quad (6.22)$$

où λ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. H dépend quadratiquement de u_e et par conséquent la commande optimale (minimisant H) est :

$$u_e^* = -\frac{1}{2} R^{-1} G^T \lambda \quad (6.23)$$

Les équations canoniques s'écrivent donc⁵ :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(X, \lambda, u_e^*, t) = f(X) + G(X) u_e^*, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X}(X, \lambda, u_e^*, t) \quad (6.24)$$

⁵Nous sommes dans le cas où la commande n'est pas sous contrainte d'inégalité du type : $g(u_e, x, t) < 0$ et donc la dérivation de l'Hamiltonien se fait indépendamment du point d'application : (X, λ, u_e^*, t) .

Les conditions aux bords sont formées par les conditions initiales et les conditions de transversalité (absence de coût final) :

$$X(t_0) = X_0, \quad \lambda(t_f) = 0 \quad (6.25)$$

Nous détaillons le calcul de l'équation d'évolution des multiplicateurs de Lagrange dans la section 6.5.

6.1.3 Analyse

- Le coût $x_d^T R_d x_d$ contraint le robot de simulation à rester autour d'une position moyenne $x_d = 0$. Cette position centrale est supposée être une bonne estimée du centre de l'espace de travail. Nous pouvons également considérer cette position comme un paramètre de la commande (afin d'améliorer l'exploitation de l'enveloppe des mouvements possibles).
- La condition de transversalité $\lambda(t_f) = 0$ implique l'annulation des forces articulaires (équation (6.23)) $u_e^*(t_f) = 0$ à l'instant final.
- Malgré l'apparition des forces articulaires $u_e^T R_u u_e$ dans la fonction de coût, le respect des contraintes sur les forces dépend du calibrage des matrices de poids. De plus la combinaison des matrices de poids R , R_d et Q devra assurer le respect des autres contraintes (cinématiques et cinétiques). La complexité du calibrage pourrait pousser le concepteur à choisir ces poids de manière conservative.
- La commande optimale u_e^* est obtenue théoriquement de façon unique, assurant ainsi l'atteinte du minimum global. Néanmoins, la résolution numérique de ce problème induira des erreurs : il faudra choisir le temps d'échantillonnage des simulations avec soin afin d'éviter un grand écart entre la théorie et la simulation. Les choix des matrices de poids et de l'estimée initiale de la solution sont également très importants. D'autre part le solveur `bvp4c` (Matlab), du problème aux deux bords utilise des solutions intermédiaires qui peuvent dépasser les limites de l'espace de travail et s'approcher des singularités altérant ainsi la robustesse de l'algorithme et pouvant même engendrer son arrêt.
- Cette approche optimale peut être facilement étendue aux simulateurs redondants par simple substitution du modèle (6.2) par le modèle souhaité (voir chapitre 4). En effet tous ces modèles présentent la particularité d'être linéaire par rapport à la commande.

6.1.4 Simulations

6.1.4.1 Scénario

Dans le monde virtuel de simulation, le conducteur a été soumis à des excitations inertielles et visuelles antérieures afin de lui donner la sensation de conduire à une vitesse constante. Par conséquent, au début de notre scénario, le robot est immobile dans sa position neutre (la scène visuelle procure la totalité de l'illusion de mouvement propre). A partir de cette situation le conducteur accélère afin d'effectuer un dépassement. Nous nous intéressons spécifiquement au profil d'accélération du véhicule. La position de la voiture sur la route (changement de voies) ne sera pas étudiée. Le conducteur déclenche une accélération constante de 1ms^{-2} durant 5s ce qui a pour conséquence d'accroître sa vitesse de 18km/h. La figure 6.1 montre l'accélération réelle de référence et sa perception par le conducteur calculée à partir du filtre vestibulaire [Telban et al., 2000] :

$$\frac{\hat{a}}{a} = H_{\text{oto}} = \frac{1 + 10s}{(1 + 5s)(1 + 0.016s)} \quad (6.26)$$

Les paramètres de l'hexapode sont ceux du simulateur Clio (voir section 6.5 pour les valeurs numériques).

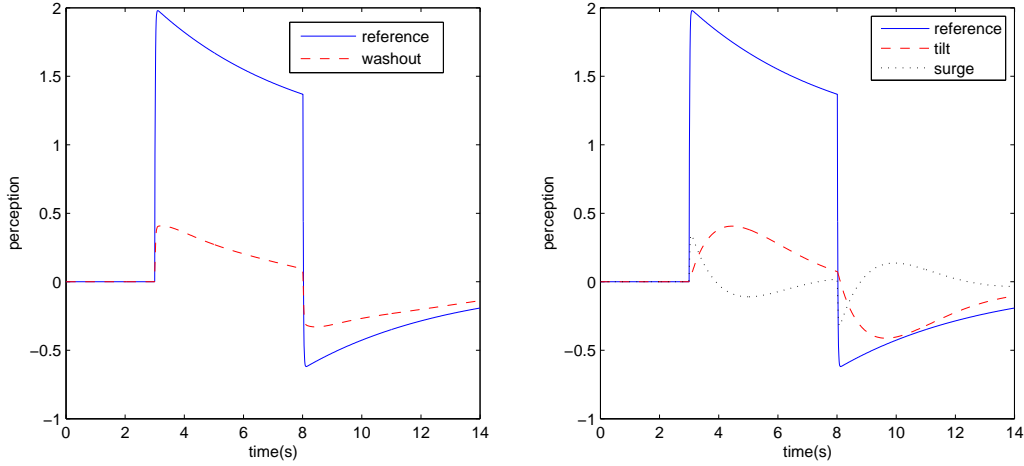


FIG. 6.2 – Résultats de l'ARI optimal

6.1.4.2 Résultats de l'ARI Optimal

Les filtres de perception utilisés pour le calcul de $O(s)$ sont le filtre otolithique précédent et le filtre des canaux semi-circulaires [Fernandez et Goldberg, 1971] :

$$\frac{\hat{\omega}}{\omega} = H_{scc} = \frac{456s^2}{(1 + 5.7s)(1 + 80s)} \quad (6.27)$$

La figure 6.2 montre le résultat du filtrage par le filtre de l'ARI optimal $O(s)$. Nous remarquons donc un grand écart entre la référence et la réponse du simulateur (néanmoins l'allure de la courbe est similaire). Par ailleurs, en examinant les contributions spécifiques de la coordination et de la translation, nous observons les caractères respectifs basses et hautes fréquences de celles-ci.

6.1.4.3 Résultats de la commande optimale

La figure 6.3 montre le résultat de la commande optimale et les contributions spécifiques de la translation de la plate-forme et de la tilt coordination. Observations :

- Le signal de référence dépasse les limites du simulateur. Le mouvement de translation permet de suivre les mouvements rapides alors que la tilt coordination permet de rendre les mouvements lents. Cependant étant donné le seuil de détectabilité (vitesse de rotation inférieure à $2^\circ s^{-1}$) de la rotation pour assurer l'illusion de coordination, les mouvements de basses fréquences sont faiblement reproduits.
- Une caractéristique remarquable de notre algorithme est le mouvement de recul de la plate-forme de simulation (entre 0 et 3s) qui permet de mieux restituer l'échelon d'accélération (reculer pour mieux avancer!). Cette observation peut être expliquée par le caractère non causal de l'algorithme. En effet, la minimisation du coût intégral sur tout l'horizon de simulation permet à cette méthode d'avoir accès au futur. Ajoutée à ce caractère prédictif, l'utilisation du coût $x_d^T R_d x_d$ privilégie une zone centrale de fonctionnement en agissant à la manière d'un ressort de rappel.

Ces mouvements de retour peuvent engendrer des sensations incohérentes de mouvement, car ils sont opposés à la direction du mouvement souhaité (et d'amplitude supérieure au seuil de détection). L'action sur les matrices de poids ne permet pas de les éliminer mais simplement

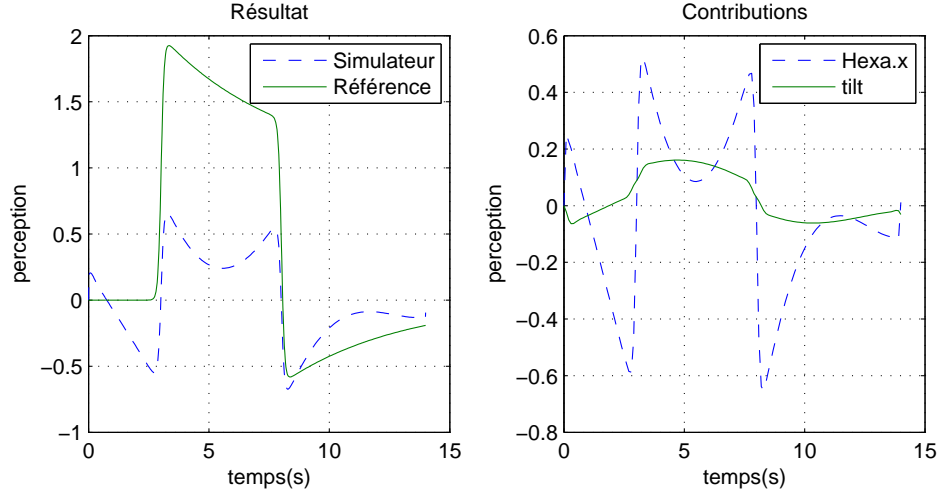


FIG. 6.3 – Résultats de la commande optimale

de les réduire. Cette réduction est malheureusement indissociable de l'atténuation de la partie cohérente du mouvement.

- La qualité du suivi des sensations dépend fortement du choix des matrices de gains. Ce choix se révèle compliqué dans notre cas, à cause de la présence de trois niveaux de contraintes : cinématiques, cinétiques et dynamiques.

6.2 Algorithme de Performance Maximale

Nous proposons un algorithme dit : Algorithme de Performance Maximale (APM) afin de traiter le problème d'optimisation de la restitution inertielle de manière plus précise que précédemment [Elloumi et al., 2005b]. Dans cette approche, nous utilisons la programmation non linéaire afin d'intégrer toutes les limitations (cinématiques, cinétiques et dynamiques) de façon *explicite*. Par conséquent, nous garantissons le respect de ces contraintes et nous allégeons le coût à minimiser des poids sur l'espace de travail $x_d^T R_d x_d$ et sur la commande $u^T R u$ (allégeant, par conséquent, l'algorithme du processus délicat de calibrage). Ainsi nous assurons l'exploitation complète de toute l'enveloppe de mouvements possibles. L'APM est, à l'instar de l'approche précédente, responsable de la génération et du suivi de trajectoires.

6.2.1 Préliminaires

Nous commençons par discrétiser les quantités intervenant dans les systèmes (6.3) et (6.2). Soit T la période d'échantillonnage et $N \in \mathbb{N}$ l'horizon temporel de simulation (l'intervalle de simulation est $[0, N T]$).

Notations :

$$\begin{cases} q_k = q(kT), l_k = l(kT) = f(q_k) \\ \dot{q}_k = (q_{k+1} - q_k)/T, \ddot{q}_k = (q_{k+2} - 2q_{k+1} + q_k)/T^2 \\ u_k = u(kT) \\ \hat{a}_k = \hat{a}(kT), \hat{\omega}_k = \hat{\omega}(kT) \\ e_k = (\hat{a}_k, \hat{\omega}_k) - r_k \end{cases} \quad (6.28)$$

où r_k est la perception de référence calculée à partir du filtrage par (6.3) d'une accélération linéaire et d'une vitesse de rotation de référence. A partir du filtre vestibulaire (6.4) nous déduisons une réalisation discrète de la dynamique de perception :

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} = \mathbf{A}_{ves} \zeta_k + \mathbf{B}_{ves}(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k) \\ (\hat{a}_k, \hat{\omega}_k) = \mathbf{C}_{ves} \zeta_k + \mathbf{D}_{ves}(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k) \end{cases} \quad (6.29)$$

faisant intervenir l'état discret du système vestibulaire ζ_k ⁶. Finalement nous définissons le vecteur total de minimisation ϑ comme

$$\vartheta = [(u_{k=0..N}), (q_{k=0..N+2}), (\zeta_{k=0..N+1})] \quad (6.30)$$

6.2.2 Formalisation

Le but de l'APM est de trouver la meilleure trajectoire au sens de l'erreur quadratique d'erreur de perception, c'est-à-dire trouver ϑ^* minimisant

$$\min_{\vartheta} \left(\sum_{k=0}^N e_k^2 \right) \quad (6.31)$$

sous les contraintes d'*égalité* suivantes :

- Les conditions initiales sur la position et vitesse : q_0 et \dot{q}_0
- La dynamique non linéaire du robot de simulation ($k = 0..N$) :

$$\mathbf{J}^T(q_k) u_k = \mathbf{M}(q_k) \ddot{q}_k + \mathbf{C}(q_k, \dot{q}_k) \dot{q}_k + \mathbf{G}(q_k)$$

- Le mécanisme linéaire de perception ($k = 0..N$) :

$$\zeta_{k+1} = \mathbf{A}_{ves} \zeta_k + \mathbf{B}_{ves}(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k)$$

et les contraintes d'*inégalité* :

- Courses des vérins bornés⁷ (6 inégalités), $k = 0..N + 2$:

$$l_{\min} < l_k < l_{\max}$$

- Vitesses limitées de la plate-forme (6 inégalités), $k = 0..N + 1$:

$$|\dot{q}_k| < \dot{q}_{\max}$$

- Accélérations limitées de la plate-forme (6 inégalités), $k = 0..N$:

$$|\ddot{q}_k| < \ddot{q}_{\max}$$

et des contraintes additionnelles pour des *opérations spécifiques* :

- Pour une opération de tilt coordination, le mouvement de rotation doit être sous le seuil de détection : $\dot{\theta}_k < \dot{\theta}_{\text{threshold}}$ et $\ddot{\theta}_k < \ddot{\theta}_{\text{threshold}}$, $k = 0..N$.
- Les contraintes sur les forces articulaires u_k et de leur dérivées $\dot{u}_k = (u_{k+1} - u_k) / T$ peuvent être facilement incorporées.

⁶Les matrices \mathbf{A}_{ves} , \mathbf{B}_{ves} , \mathbf{C}_{ves} et \mathbf{D}_{ves} intervenant dans cette équation ne sont pas confondues avec celles de l'équation (6.14). L'entrée du filtre vestibulaire fait intervenir q_k à travers l'angle de tilt θ , \dot{q}_k à travers la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ et \ddot{q}_k à travers l'accélération $\ddot{\theta}$.

⁷Le modèle géométrique qui permet de calculer les longueurs l_k à partir de q_k a été présenté dans le chapitre 4.

6.2.3 Analyse

- Nous pouvons remplacer les contraintes sur la vitesse \dot{q}_k et l'accélération \ddot{q}_k par des contraintes sur \dot{l}_k et \ddot{l}_k grâce à l'utilisation du modèle géométrique inverse :

$$\dot{l}_k = \mathbf{J}(q_k) \dot{q}_k \quad \ddot{l}_k = \mathbf{J}(q_k) \ddot{q}_k + \dot{q}_k \frac{d\mathbf{J}}{dq}(q_k) \dot{q}_k$$

où le terme $\dot{q}_k \frac{d\mathbf{J}}{dq}(q_k) \dot{q}_k$ est un produit tensoriel faisant intervenir les dérivées partielles de \mathbf{J} (calculées auparavant dans le chapitre 4).

- A l'instar de l'approche optimale précédente, l'APM peut être facilement étendu aux simulateurs redondants par simple substitution du modèle mécanique.
- La programmation non linéaire permet de manipuler des quantités auparavant inaccessibles dans la méthode optimale (comme les dérivés d'ordre supérieur à 2).

6.2.4 Indicateur de performance

Afin de mesurer la fidélité de la restitution inertielle du simulateur, nous définissons l'indicateur de performance IP

$$IP = 1 - \frac{\|e\|}{\|r\|} \quad (6.32)$$

où le rapport des normes de l'erreur et de la référence $\|e\| / \|r\|$ mesure la discordance de la simulation⁸. Si la norme adoptée est la norme quadratique, c'est-à-dire, $\|x\|_2 = (\sum_{k=0}^N x_k^2)^{\frac{1}{2}}$ alors l'APM permet de calculer (par construction) les trajectoires à indicateur de performance IP maximal (d'où son appellation). Par conséquent, nous pouvons utiliser les résultats de l'APM comme des signaux de référence pour l'évaluation d'autres techniques de commande.

6.2.5 Simulations

Nous reprenons le même scénario que précédemment (section 6.1.4.1). La figure 6.4 montre le résultat de l'APM et les contributions spécifiques de la translation de la plate-forme et de la tilt coordination. L'IP est de 32.09%.

Pour cette scénario nous introduisons deux contraintes supplémentaires afin d'éviter l'incohérence du mouvement. En effet comme le profil d'accélération est positif :

- L'accélération de translation du simulateur doit être positive ou indétectablement négative, c'est-à-dire : $\ddot{x}_k \geq -a_{\text{threshold}} = -5\text{cms}^{-2}$, $k = 0..N$
- Le mouvement de tilt doit être positif : $\theta_k \geq 0$, $k = 0..N + 2$

Nous observons alors que :

- En interdisant les mouvements de recul incohérents, nous obtenons un résultat très différent de celui délivré par la commande optimale (attention les courbes présentent le niveau de perception par conséquent leur négativité n'implique pas celle des courbes réelles les générant).
- La performance de cet algorithme (IP=32.09%) est supérieure à la commande optimale (IP=23.58%) et de l'ARI optimal (IP=17.33%).
- Nous observons aussi la non causalité de l'algorithme qui favorise la fin du créneau d'accélération (vers 8s) à son début (vers 3s).
- La prise en compte explicite des contraintes de mouvement permet d'améliorer considérablement le rendement de la tilt coordination et de réduire les efforts au niveau de la translation. Par ailleurs, c'est le mouvement très lent de la rotation qui introduit de l'inertie dans la phase de descente (à partir de 8s) par rapport au signal de référence.

⁸Mathématiquement, IP n'est pas a fortiori entre 0 et 1.

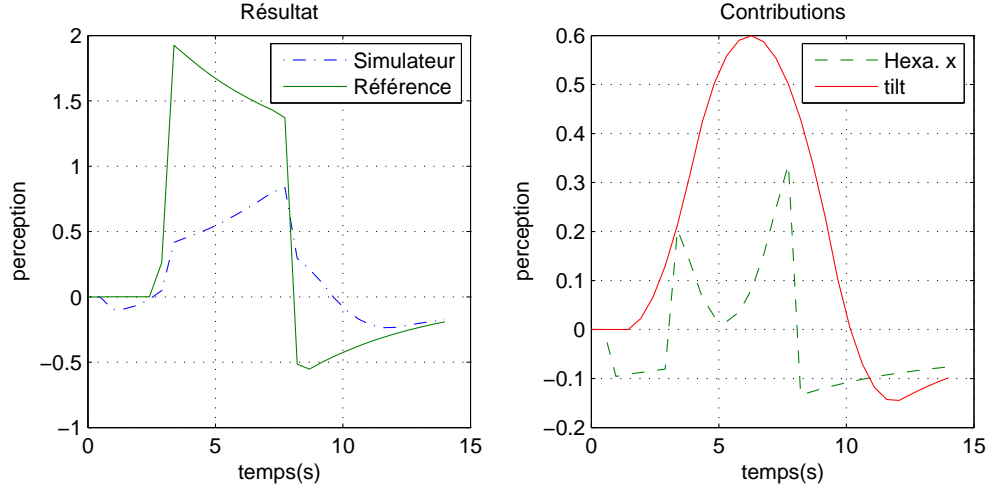


FIG. 6.4 – Résultats de l'APM

- Nous distinguons très clairement le caractère basses fréquences de la tilt et celui hautes fréquences de la translation confirmant les attentes.

6.2.6 Indicateur d'allure

Les trois scénarios précédentes (ARI optimal, commande optimale et APM) montrent que la capacité du simulateur à restituer des accélérations longitudinales est très limitée (la valeur maximale de l'accélération de référence peut être 4 à 5 fois plus grande que celle de l'exemple). C'est pourquoi classiquement, les ARIs sont précédés par un système de mise à l'échelle permettant de réduire l'amplitude de la trajectoire de référence. Cette réduction signifie l'importance de conserver des informations sur le profil (ou l'allure) de la référence, dans le cadre de la simulation. Nous proposons donc un indicateur permettant de mesurer la qualité du suivi d'allure.

Nous nous plaçons dans le cadre du mode longitudinal. Nous construisons deux vecteurs $s = (\hat{a}_k)_{k=0..N}$ des perceptions des accélérations induites par le simulateur et $r = (r_k)_{k=0..N}$ des perceptions des accélérations de référence (avec cette nouvelle notation le vecteur erreur défini précédemment s'écrit $e = s - r$). Les signaux de référence étant généralement supérieurs à ceux du simulateur, nous définissons dans un premier temps le facteur d'agrandissement optimal α^* . C'est un scalaire positif supérieur à l'unité minimisant la norme quadratique de la différence entre le mouvement agrandi du simulateur αs et la référence r :

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \geq 1} \|\alpha s - r\|_2$$

Ainsi grâce à α^* nous définissons l'indicateur d'allure comme :

$$IP_{all} = 1 - \frac{\|\alpha^* s - r\|_2}{\|r\|_2}$$

Pour le scénario de simulation adoptée, nous avons les valeurs suivantes : l'ARI optimal $IP_{all} = 44.08\%$ et $\alpha^* = 3.76$; la commande optimale $IP_{all} = 36.65\%$ et $\alpha^* = 2.23$; l'APM, $IP_{all} = 51.88\%$ et $\alpha^* = 2.2$. Par conséquent pour cette courbe de référence, l'APM fournit le meilleur résultat car il présente le meilleur suivi d'allure pour le moindre facteur d'agrandissement.

6.2.7 Extension : la redondance des rails

Nous allons étendre l'APM aux simulateurs à rails XY permettant le déplacement de la base de l'hexapode dans le plan correspondant. Différents modèles dynamiques de ce robot ont été développés dans le chapitre *Modélisation dynamique* et dont la forme générale est la suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{\text{rails}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\text{rails}}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{rails}})\dot{\mathbf{q}}_{\text{rails}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}_{\text{rails}}) = \bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \\ u \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

où $\mathbf{q}_{\text{rails}} = (X, Y, x, y, z, \phi, \theta, \psi)$ et (f_X, f_Y) représentent les nouvelles forces appliquées sur les rails⁹. Pour le mode longitudinal, le déplacement des rails dans la direction longitudinale est une nouvelle redondance qui vient s'ajouter à la translation propre de l'hexapode et au mouvement de tilt coordination. Grâce au modèle dynamique qui gère le déplacement du mécanisme de mouvement, nous souhaitons calculer une combinaison optimale de ces trois degrés de liberté pour la restitution inertielle¹⁰. Le filtre de perception H_{oto} (6.26) est donc alimenté par la somme des accélérations $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{X}} + \ddot{\mathbf{x}}$.

La réalisation discrète de la dynamique de perception fait donc intervenir un nouvel élément $\ddot{\mathbf{X}}_k$ ¹¹ :

$$\begin{cases} \zeta_{k+1} = \mathbf{A}_{\text{ves}}\zeta_k + \mathbf{B}_{\text{ves}}(\theta_k, \dot{\theta}_k, \ddot{\theta}_k, \ddot{\mathbf{X}}_k) \\ (\hat{\mathbf{a}}_k, \hat{\mathbf{u}}_k) = \mathbf{C}_{\text{ves}}\zeta_k + \mathbf{D}_{\text{ves}}(\theta_k, \dot{\theta}_k, \ddot{\theta}_k, \ddot{\mathbf{X}}_k) \end{cases} \quad (6.34)$$

Le nouveau vecteur de minimisation est

$$\bar{\mathbf{\vartheta}} = [(f_X, f_Y, u_{k=0..N}), (\mathbf{q}_{\text{rails}})_{k=0..N+2}, (\zeta_{k=0..N+1})] \quad (6.35)$$

L'APM redondant se pose comme la minimisation de

$$\min_{\bar{\mathbf{\vartheta}}} \left(\sum_{k=0}^N e_k^2 \right) \quad (6.36)$$

Sous les contraintes préalablement citées sur le mouvement de l'hexapode (voir 6.2.2) en effectuant les changements suivants :

- La dynamique non linéaire du robot de simulation intègre les rails ($k = 0..N$) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{\text{rails}}(kT) + \mathbf{C}(\mathbf{q}_{\text{rails}}(kT), \dot{\mathbf{q}}_{\text{rails}}(kT))\dot{\mathbf{q}}_{\text{rails}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}_{\text{rails}}(kT)) = \bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}_{\text{rails}}(kT)) \begin{bmatrix} f_X(kT) \\ f_Y(kT) \\ u(kT) \end{bmatrix}$$

- Le mécanisme linéaire de perception intègre l'accélération des rails ($k = 0..N$) :

$$\zeta_{k+1} = \mathbf{A}_{\text{ves}}\zeta_k + \mathbf{B}_{\text{ves}}(\theta_k, \dot{\theta}_k, \ddot{\theta}_k, \ddot{\mathbf{X}}_k)$$

Par ailleurs de nouvelles contraintes apparaissent :

- Les conditions initiales sur la position et la vitesse des rails
- Déplacement limité des rails, $k = 0..N$

$$X_{\min} < X_k < X_{\max} \quad Y_{\min} < Y_k < Y_{\max}$$

- Vitesse limitée des rails, $k = 0..N$

$$|\dot{X}_k| < \dot{X}_{\max}, \quad |\dot{Y}_k| < \dot{Y}_{\max}$$

⁹Ne pas confondre X qui est le déplacement dû aux rails selon la direction longitudinale avec le vecteur \mathbf{X} défini précédemment dans (6.16).

¹⁰Il n'existe pas une seule façon optimale a fortiori.

¹¹Les matrices impliquées dans le système vestibulaire de cette section ne sont pas confondues avec celles de la section précédente.

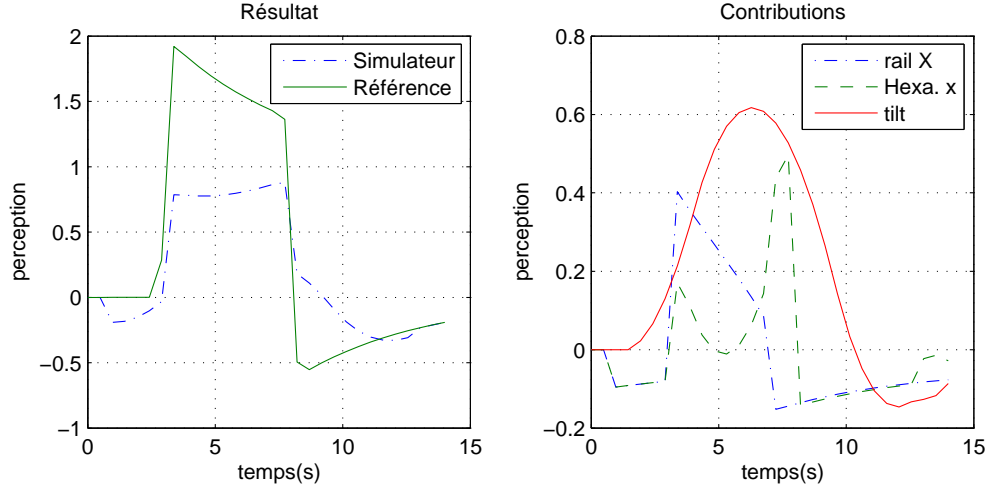


FIG. 6.5 – Résultats de l'APM avec rails

- Accélération limitée de la plate-forme, $k = 0..N$:

$$\left| \ddot{X}_k \right| < \ddot{X}_{\max}, \quad \left| \ddot{Y}_k \right| < \ddot{Y}_{\max}$$

6.2.7.1 Simulation

Nous sommes dans le cadre du scénario de référence (section 6.1.4.1). Nous rajoutons la contrainte de cohérence pour les rails : l'accélération de translation des rails doit être positive ou très légèrement négative (sous le seuil de détection), c'est-à-dire : $\ddot{X}_k \geq -a_{\text{threshold}}$. Les valeurs numériques des paramètres et des contraintes sur les rails sont celles du simulateur Ultimate (voir section 6.5).

6.2.7.2 Analyse

La présence des rails a amélioré l'efficacité de la simulation tant au niveau de $IP=45.08$ que de l'allure : $IP_{\text{all}} = 66.13\%$ et $\alpha^* = 1.8$. Les résultats montrent le caractère haute fréquence des rails. Les rails reproduisent le début du créneau alors que le mouvement de translation de l'hexapode restitue sa fin. Ces deux mouvements suggèrent le recouvrement de leurs bandes passantes. La méthode de séparation fréquentielle (ARI classique) ne permet pas d'exploiter ce phénomène (la bande de fréquence de recouvrement sera allouée à l'un des deux degrés de liberté, c'est-à-dire, soit aux rails soit à la translation de l'hexapode). Il est naturellement plus profitable d'utiliser une combinaison de ces deux mouvements dans cette bande de recouvrement car nous retarderons le blocage des deux et nous étendrons les capacités de restitution (voir chapitre ??).

6.2.8 Variations de l'APM

6.2.8.1 APM causal

L'APM consiste à minimiser un coût intégral sans le respect de la causalité temporelle. La solution de l'APM peut donc privilégier le suivi des sensations durant les instants finaux de la simulation. Néanmoins, en général, la trajectoire optimale est *dispersée* sur l'horizon de simulation, c'est-à-dire, sans privilégier aucune zone localement dans le temps. Ainsi malgré la réalisation d'un IP maximal avec cette trajectoire, celle-ci n'a pas toujours un sens physique (c'est-à-dire correspondant à la réalité

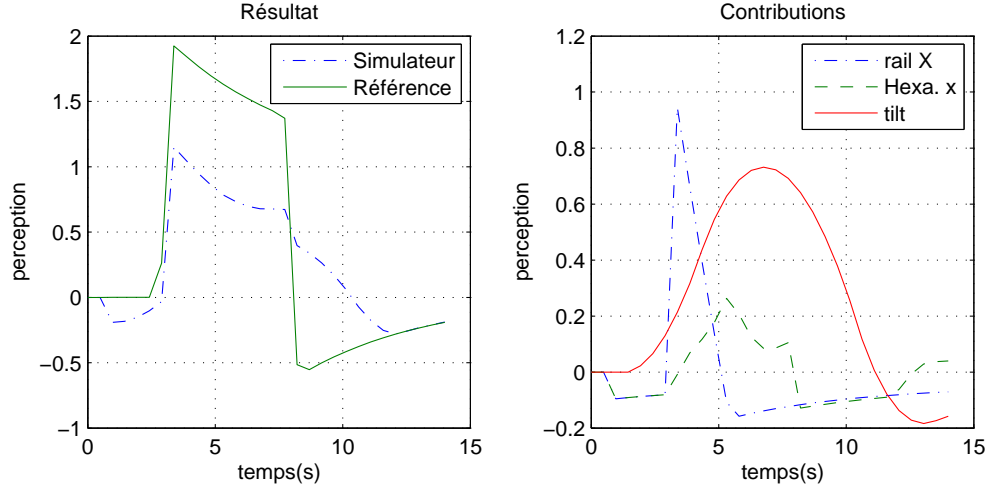


FIG. 6.6 – Résultats de l'APM causal (avec rails)

où l'algorithme de commande est temps réel et donc a fortiori causal). Pour remédier à cet inconvénient, nous introduisons une légère variation au coût à minimiser :

$$\min_{\theta} \left(\sum_{k=0}^N e^{-2\beta kT} e_k^2 \right) \quad (6.37)$$

où $\beta > 0$ est un paramètre constant. Le facteur exponentiel $e^{-2\beta kT}$ joue le rôle d'un poids décroissant en fonction du temps.

Simulation et analyse Les résultats des simulations ($\beta = 0.1s^{-1}$) avec les rails sont donnés dans la figure 6.6. Nous observons une amélioration au niveau de la causalité accompagnée (comme prévu) par la diminution des performances $IP_{all} = 55.53\%$ et $\alpha^* = 1.7$, $IP=42.22\%$.

Malgré l'altération des performances par rapport à l'APM classique, les trajectoires optimales de l'APM causal sont plus significatives pour une analyse des variations locales du comportement du simulateur.

6.2.8.2 APM allure

Nous nous intéressons dans cette approche à la minimisation de l'erreur de suivi d'allure (définie comme la maximisation de IP_{all}) :

$$\min_{\theta} \min_{\alpha \geq 1} \|\alpha s - r\|_2 \quad (6.38)$$

permettant de calculer, entre autres, le facteur d'agrandissement optimal α_{opt}^* pour effectuer le meilleur suivi d'allure. Nous avons donc établi un intervalle de variation de α entre 1 et α_{opt}^* . En augmentant α de 1 à α_{opt}^* nous passons d'un problème de minimisation des sensations (en terme d'amplitude) APM à un problème de minimisation du suivi d'allure (l'allure contenant des informations pertinentes pour la perception), APM allure.

Dans le cadre de la mise en oeuvre d'un algorithme de commande en ligne, la donnée de α_{opt}^* apparaît donc comme une information importante indiquant la limite inférieure ($1/\alpha_{opt}^*$) du facteur d'échelle appliqué en amont de l'ARI. Le facteur d'échelle ($1/\alpha$) qui sera choisi par le concepteur devra illustrer le compromis entre le suivi d'allure et le suivi d'amplitude.

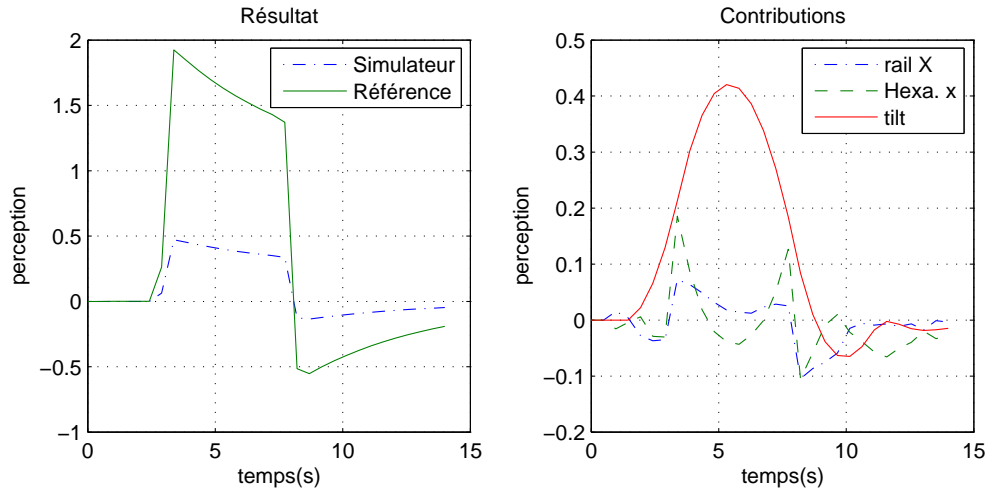


FIG. 6.7 – Résultats de l'APM allure (avec rails)

Simulation et analyse Comme attendu, le suivi d'allure permet de “réduire” suffisamment la référence pour qu'elle puisse être reproduite par le simulateur $IP_{all} = 99.86\%$. Le facteur $\alpha_{opt}^* = 4.0$ est naturellement plus grand que les scénarios précédentes. La performance en terme d'amplitude est très basse $IP=24.48\%$ par rapport à l'APM classique.

6.2.9 Conclusion sur les simulations

Le tableau comparatif des performances Tab.6.1 dresse la liste des IP des simulations précédentes. Les observations générales sont :

- Le mouvement de tilt coordination reproduit les basses fréquences. Les rails et la translation de l'hexapode reproduisent les hautes fréquences. Les bandes passantes des derniers degrés de libertés sont redondantes.
- Malgré l'utilisation des rails, la performance du simulateur reste très limitée, motivant l'utilisation d'un facteur d'échelle afin de préserver les informations sur l'allure.
- Les algorithmes présentés sont hors ligne. Ils permettent de dériver une combinaison optimale des différents degrés de liberté pour reproduire un profil de référence donné.

L'utilisation de ces scénarios comme moyen d'analyse se résume en :

- La *commande optimale* : produit une solution unique au problème de minimisation qui peut servir d'initialisation pour les APMs.
- L'*IP* : fournit une mesure de la performance de restitution inertielle.
- L'*APM* : permet de calculer la performance (IP) maximale.
- L'*APM causal* : produit des trajectoires quasi-optimales du simulateur pour une trajectoire de référence donnée, en respectant dans un certain sens, la causalité.
- L'*IP allure* : fournit une mesure de la qualité de suivi de l'allure de référence.
- $1/\alpha^*$: est le facteur d'échelle appliqué à la référence utilisé pour calculer l'IP allure (c'est-à-dire : le meilleur facteur de réduction dans le sens d'IP allure).
- *APM allure* : fournit le meilleur suivi d'allure en terme de mouvement du simulateur et en terme de facteur d'échelle ($1/\alpha_{opt}^*$).
- $1/\alpha_{opt}^*$: représente une limite inférieure du facteur d'échelle que devrait appliquer le concepteur en amont de l'ARI, dans le cadre d'une approche classique et causale.

scénario	IP	IP _{all}	α^*
ARI Optimal	17.33	44.08	3.76
Commande optimale	23.58	36.65	2.23
APM	32.09	51.88	2.2
APM rails	45.08	66.13	1.8
APM causal (rails)	42.22	55.53	1.7
APM allure (rails)	24.48	99.86	4.0

TAB. 6.1 – Tableau comparatif des performances

6.3 Applications

6.3.1 Discriminateur de redondance

Les algorithmes hors ligne que nous venons de présenter peuvent être utilisés comme discriminateurs de redondance. Considérons, par exemple, le simulateur Clio. Pour restituer les accélérations longitudinales, on effectue soit une translation soit une rotation de la plate-forme pour utiliser la tilt coordination. En utilisant notre approche, nous pouvons trouver (hors ligne) le meilleur moyen d'exploiter cette redondance pour un profil d'accélération de référence donné. Répéter cette opération sur l'ensemble des trajectoires spécifiques représentant le mode longitudinal (pour une multitude de profils et d'amplitudes) permet de construire statistiquement une idée sur le meilleur moyen d'utilisation de cette redondance. Cette information pourra ensuite être utilisée en ligne dans un ARI.

Le problème de la redondance devient plus difficile pour les simulateurs avancés : Ultimate et NADS qui présentent un nombre supplémentaire des degrés de liberté. Dans ces simulateurs, une plate-forme de type Gough-Stewart est montée sur des rails XY permettant un déplacement de $\pm 9.75\text{m}$ et $\pm 2.5\text{m}$ (NADS et Renault respectivement) dans les deux directions du plan. Si nous revenons au mode longitudinal, les rails offrent un degré de redondance supplémentaire (en plus des deux degrés procurés par le simulateur Clio). Pour exploiter cette redondance, la méthode généralement utilisée est basée sur la séparation fréquentielle (voir Chapitre 5) : en partant du fait que la dynamique des rails est généralement moins rapide que celle de l'hexapode¹², la première est destinée à reproduire les basses fréquences alors que la deuxième permettra de poursuivre les hautes fréquences.

La méthode de séparation fréquentielle n'intègre pas directement le problème des contraintes. Elle ne permet pas non plus d'intégrer le cas où les deux bandes passantes (hexapode et rails) se recouvrent¹³. L'APM permet d'intégrer ces points. D'une part, le modèle dynamique du robot de simulation (chapitre Modélisation dynamique), caractérise complètement le comportement fréquentiel du simulateur. D'autre part, les contraintes physiques sont explicitement incluses. La réalisation d'une série de simulations hors ligne permettra d'enrichir le discriminateur fréquentiel. Nous avons développé une méthode d'analyse de la redondance dans la section suivante.

6.3.1.1 Simulations pour l'étude de la redondance

Nous présentons dans cette section, une méthode d'analyse destinée à déterminer le meilleur moyen de restituer les sensations de mouvement pour le mode longitudinal¹⁴ (dans le cadre d'un hexapode posé sur des rails). Nous disposons de trois degrés de liberté pour ce mode : la translation des rails X, la translation de l'hexapode x et la rotation de tilt coordination θ . Par conséquent, il existe 7 modes de fonctionnement pour le simulateur basés sur :

¹²En excluant la tilt coordination

¹³Le recouvrement des bandes passantes est une limite de validité de cet algorithme

¹⁴Il s'agit de l'illustration de l'application : discrimination de redondance (présentée dans la section 6.3.1)

- l'utilisation des trois des degrés de liberté simultanément : 1 mode (X, x, θ)
- l'utilisation de deux degrés de liberté parmi les trois disponibles¹⁵ : 3 modes (X, x) , (X, θ) et (x, θ)
- l'utilisation d'un seul degré de liberté parmi les trois : 3 modes X , x et θ

Notre approche consiste, pour un scénario de référence donné, à calculer les performances maximales de chaque mode de fonctionnement (grâce à l'APM). Ces modes sont ensuite classés par ordre d'efficacité (mesurée par l'Indicateur de Performance IP). Enfin, pour le mode le plus efficace, les courbes de simulations permettent de déterminer la contribution spécifique de chaque degré de liberté.

Les scénarios de simulation

- Scénario 1 : il s'agit du scénario de dépassement précédemment utilisé dans ce chapitre (voir section 6.1.4.1). Consulter les figures 6.8 à 6.14.
- Scénario 2 : il s'agit d'un scénario de changement de vitesse où le conducteur effectue deux échelons d'accélération (d'amplitude 1 ms^{-2} et de 2s de durée) séparées par 5s. Consulter les figures 6.15 à 6.21.
- Scénario 3 : il s'agit d'un scénario d'accélération saccadées : 4 échelons d'accélération de durées différentes et irrégulièrement espacés. Consulter les figures 6.22 à 6.28.

Présentation des résultats Pour chaque scénario, nous avons résolu le problème APM des 7 modes de fonctionnement. Les résultats des 7 simulations sont présentés sous deux formes :

- des tableaux comparatifs des Indicateurs de Performance : il s'agit de deux tableaux résumant tous les IPs des 7 simulations (Tab.6.2 et Tab.6.3 pour scénario 1, Tab.6.4 et Tab.6.5 pour scénario 2, Tab.6.6 et Tab.6.7 pour scénario 3)¹⁶.
- des courbes de variation : il s'agit pour chaque mode de fonctionnement d'une figure englobant :
 - un dessin comparatif de la courbe de référence et le résultat de l'APM dans le monde de la perception (après filtrage par les filtres de perception)
 - d'un dessin comparatif de la courbe de référence et le résultat de l'APM dans le monde réel (les vraies valeurs des accélérations)
 - pour chaque degré de liberté actif, d'un dessin présentant son accélération, sa vitesse et sa position sur l'horizon temporel de simulation

Ces figures sont classés dans l'ordre suivant des modes : tous, hexa.x et tilt, hexa.x et rail, rail et tilt, rail, tilt, hexa.x.

Observations générales

- Pour les trois scénarios, nous observons que le mouvement de tilt coordination est indépendant¹⁷ du mode de fonctionnement $((X, x, \theta), (X, \theta), (x, \theta)$ et θ). Pour les trois scénarios, les IPs de la tilt coordination sont respectivement de 23.5%, 12% et 16% pour tous ces modes. Ce phénomène est certainement dû aux seuils très bas de détectabilité en terme de vitesse et d'accélération de rotation. Par conséquent, la tilt coordination reproduit les mouvements très lents. Elle est, d'ailleurs, essentielle pour ce type de mouvements.
Cette indépendance de la performance de la tilt coordination par rapport au mode de fonctionnement signifie la décorrélation de ce degré de liberté par rapport aux deux autres : X et x . Ce sont donc ces deux derniers qui vont déterminer la qualité de la simulation.
- Nous avons également observé l'importance des rails et l'apport de ces derniers par rapport à un hexapode à base fixe. Le mode (θ, x) est limité aux niveaux de 71%, 60.58% et 70.59% (res-

¹⁵Le troisième degré de liberté est désactivé.

¹⁶Pour chaque scénario de simulation, nous proposons deux tableaux des IPs des simulations : un tableau présentant les vraies valeurs des IPs et un deuxième normalisé par le plus grand IP.

¹⁷Indépendance au niveau des variations et de l'IP.

pectivement pour les trois scénarios) par rapport à la performance du mode utilisant les rails (X, x, θ)

- En nous basant sur les tableaux comparatifs des IPs (annexe) nous allons établir un ordre hiérarchique des différents modes de fonctionnement. Nous remarquons que nous avons approximativement le même ordre pour le scénario 1 :

$$(X, x, \theta) > (X, \theta) > (x, \theta) > (\theta) > (X, x) > (X) > (x)$$

et pour le scénario 3 (on échange les positions de (X, x) avec (θ)) :

$$(X, x, \theta) > (X, \theta) > (x, \theta) > (X, x) > (\theta) > (X) > (x)$$

Enfin le scénario 2 introduit de nouveaux changements :

$$(X, x, \theta) > (X, x) > (X, \theta) > (x, \theta) > (X) > (x) > (\theta)$$

Nous avons donc construit une hiérarchie des modes de fonctionnement basée sur l'indicateur de performance IP. Cette hiérarchie a été mis à profit pour construire un algorithme hybride dont l'état initial est l'état le plus performant et qui effectue le saut vers l'état directement moins performant à l'approche des butées (voir [Neering et al., 2006] et chapitre ARI Hybride).

6.3.2 Calibrage de l'ARI et du robot de simulation

6.3.2.1 Optimisation de la structure mécanique du simulateur

Nous nous intéressons au calibrage du robot de simulation en amont de sa construction. Quels sont les paramètres dynamiques et géométriques (entre autres, l'hexapode) qui maximisent les performances du simulateur ? Afin de répondre à cette question, nous devons d'abord définir le terme : performance.

Ce problème a déjà été traité par [Advani et Hosman, 2001] et [Hosman et al., 2002], les auteurs proposant deux moyens de mesurer la performance (voir Chapitre ARI pour un approfondissement). La première méthode consiste à développer une métrique¹⁸ géométrique qui permet de mesurer le volume de l'espace de travail (c'est-à-dire, la taille de l'enveloppe de mouvements réalisables par le simulateur). En effet plus ce volume est grand plus est la capacité de la plate-forme à reproduire les mouvements d'un vrai véhicule. La deuxième méthode développe une métrique de vol afin d'intégrer la perception humaine. Cette métrique est calculée grâce à un ensemble de trajectoires de haute fidélité (c'est-à-dire, des trajectoires de référence hautement significative pour le réalisme de la simulation). Dans un premier temps, un algorithme est utilisé pour effectuer une réduction maximale de ces trajectoires sans altérer la qualité des sensations correspondantes. Ensuite, ces données sont multipliées par un facteur scalaire $k \in [0, 1]$ (uniformément pour tous les axes de mouvements) afin que ces trajectoires soient à l'intérieur de l'enveloppe de mouvements du mécanisme de simulation. C'est la valeur maximale de k qui définit la métrique de vol.

L'APM permet de concevoir une métrique de performance plus précise. En effet, la métrique APM utilise l'efficacité du simulateur (Indice de Performance, IP) pour tenir compte non seulement des contraintes physiques mais aussi de la fidélité de restitution des sensations inertielles. Nous définissons la métrique APM comme la moyenne des IP calculés pour un ensemble de trajectoires de conduite de haute fidélité. Par rapport à la métrique de vol, notre approche offre donc deux améliorations : (a) notre métrique est indépendante d'un algorithme de réduction préliminaire. En revanche, nous permettons l'exploitation de l'espace de travail dans sa totalité (b) La métrique APM est optimale par construction.

Enfin, la famille de trajectoires de référence peut être choisie comme représentative de la totalité des opérations de conduite ou bien comme décrivant un mode particulier (tel que des scénarios de dépassement, freinage d'urgence, vitesse et direction de croisière constantes, etc.) pour une optimisation spécifique.

¹⁸Remarquons que les métriques définies dans ce chapitre ne sont pas conforme à la définition mathématique rigoureuse.

6.3.2.2 Optimisation des ARIs

Nous avons vu dans le chapitre 5, que la procédure de calibrage de ces algorithmes est une procédure complexe. En effet, la difficulté première est l'élaboration d'un critère de performance qui intègre simultanément les limitations physiques et la fidélité de perception.

L'APM est un excellent moyen de calibrage hors ligne des ARIs. L'efficacité de l'ARI est calculée grâce aux IPs d'un ensemble de trajectoires hautes fidélités, comme dans le cas de la conception du robot. La comparaison de ces IPs avec les IPs maximaux (calculés grâce à l'APM) permettra de changer les paramètres de l'ARI afin d'améliorer son efficacité. L'optimisation jointe du mécanisme de simulation et de l'ARI est également possible comme suggéré par [Advani et al., 2002]. Dans ce cas les paramètres du robot et de l'ARI sont tous deux optimisés grâce au calcul des IPs d'une famille de trajectoires de haute fidélité.

6.4 Conclusion

Les algorithmes optimaux que nous présentons nécessitent la connaissance préliminaire des trajectoires de référence sur l'horizon temporel de simulation. Néanmoins, malgré le caractère hors ligne de notre approche, nous montrons dans la section application l'importance de notre étude.

6.5 Annexe

6.5.1 Calcul des équations adjointes

Revenons sur les équations gouvernant la variation des multiplicateurs de Lagrange :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X}(X, \lambda, u_e^*, t)$$

Afin de calculer

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} (J_t(X, u_e) + \lambda^T f(X) + \lambda^T G(X)u_e)$$

nous allons commencer par réécrire la fonction de coût J_t :

$$J_t = X^T K_2 X + K_1 X + u_e^T R u_e$$

où à partir de (6.19) et de (6.21) nous avons

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{D}_{ves} \\ C_{ves} \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{D}_{ves} \\ C_{ves} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} S & S & 0_{n_{ves} \times 4} \end{pmatrix}^T R_d \begin{pmatrix} S & S & 0_{n_{ves} \times 4} \end{pmatrix}$$

$$K_1 = -2(\hat{a}_r, \hat{\omega}_r) Q \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{D}_{ves} \\ C_{ves} \end{bmatrix}$$

Ainsi par symétrie de K_2 :

$$\frac{\partial J_t}{\partial X} = 2K_2 X + K_1^T$$

Nous nous intéressons maintenant au second terme : $\lambda^T f(X)$. Commençons par séparer λ en $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ pour écrire (à partir de (6.18)) :

$$\lambda^T f(X) = (\lambda_1^T + \lambda_3^T \bar{B}_{ves}) x_2 + \lambda_2^T a(x_1, x_2) + \lambda_3^T A_{ves} x_3$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda^T f}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{a}^T(x_1, x_2) \lambda_2 & \frac{\partial \lambda^T f}{\partial x_2} &= (\lambda_1^T + \lambda_3^T \mathbf{B}_{ves})^T + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{a}^T(x_1, x_2) \lambda_2 \\ \frac{\partial \lambda^T f}{\partial x_3} &= (\lambda_3^T \mathbf{A}_{ves})^T\end{aligned}$$

Explicitons donc les deux dérivées de $\mathbf{a} = -\mathbf{M}^{-1}(x_1) \mathbf{C}(x_1, x_2) x_2$. Commençons par dériver : \mathbf{M}^{-1} . La dérivation de l'équation de $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} = \mathbf{I}$ permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{M}^{-1} = -\mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_1} \mathbf{M}^{-1}$$

où le tenseur $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_1}$ a déjà été explicité dans le chapitre modélisation dynamique. Pour $\mathbf{C}(x_1, x_2) x_2$, nous avons vu que les termes de ce vecteur sont des quadratiques en x_2 :

$$(\mathbf{C}(x_1, x_2) x_2)_i = x_2^T \Gamma_i(x_1) x_2, \quad (\Gamma_i)_{jk} = \gamma_{ijk}$$

avec γ_{ijk} les termes de Christoffel : $\gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \right)$, $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = (m_{ij})_{i,j=1..n}$. Par conséquent la dérivation de $\mathbf{C}(x_1, x_2) x_2$ par rapport à x_2 est simple :

$$\frac{\partial \mathbf{C}(x_1, x_2) x_2}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} x_2^T \Gamma_1(x_1) \\ \vdots \\ x_2^T \Gamma_6(x_1) \end{pmatrix}$$

En revanche la dérivation par rapport à x_1 fait intervenir les dérivées secondes de la matrice de masse (et entre autres les dérivées secondes de la matrice jacobienne) favorisant une méthode de dérivation numérique.

Enfin la dérivation de $\lambda^T \mathbf{G}(\mathbf{X}) \mathbf{u}_e$ fait intervenir la dérivation de \mathbf{M}^{-1} (voir plus haut) et de \mathbf{J} (voir chapitre Mécanique).

6.5.2 Les contraintes des problèmes d'optimisation

Le tableau des contraintes est extrait des données des simulateurs de Renault (Clio et Ultimate)

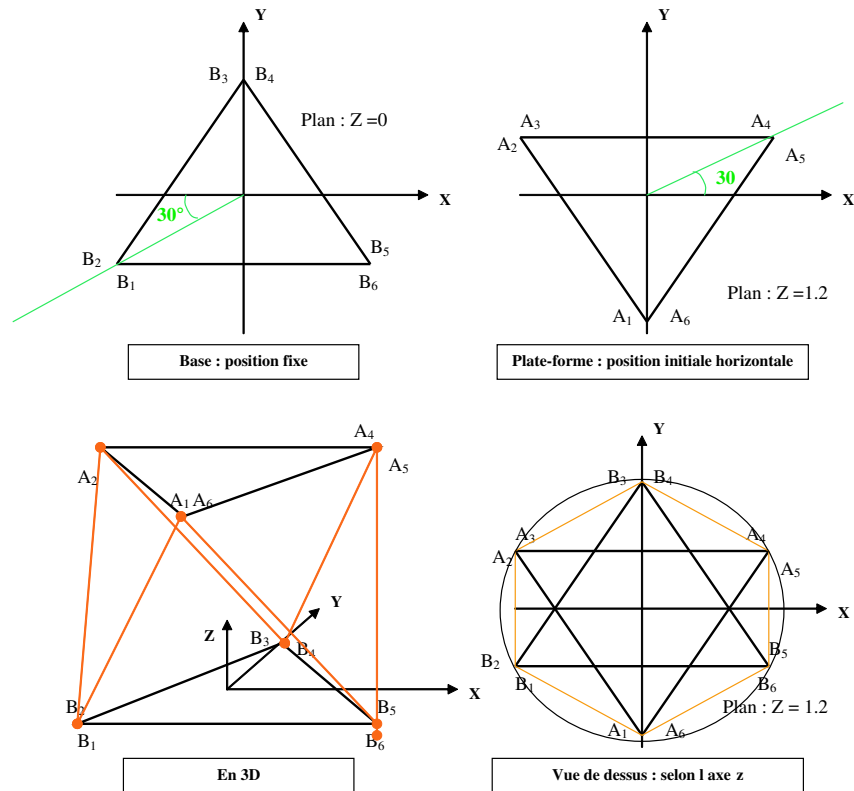
Description	Contrainte
Seuil d'accélération indétectable	$a_{\text{threshold}} = 5 \text{ cm s}^{-2}$
Seuils de la tilt coordination	$\dot{\theta}_{\text{threshold}} = 2^\circ \text{ s}^{-1}$, $\ddot{\theta}_{\text{threshold}} = 0.3^\circ \text{ s}^{-2}$
Données initiales	$\mathbf{q}_0 = (0, 0, 1.2, 0, 0, 0)^T$, $\dot{\mathbf{q}}_0 = 0$, $\xi_0 = 0$, $X_0 = 0$,
Accélérations maximales	$\ddot{x}_k = 5 \text{ m s}^{-2}$, $\ddot{X}_k = 2.5 \text{ m s}^{-2}$
Élongations extrémales des vérins	$l_{\min} = 1.3 \text{ m}$, $l_{\max} = 1.7 \text{ m}$

6.5.3 Les paramètres du robot de simulation

La structure générale de l'hexapode est décrite par le schéma suivant :

	tous	hexa.x et tilt	hexa.x et rail	rail et tilt	rail	tilt	hexa.x
rail	11.46	0	12.58	12.96	13.80	0	0
hexa.x	8.48	8.40	8.21	0	0	0	8.69
tilt	23.46	23.51	0	23.51	0	23.51	0
résultat	45.08	32.09	21.47	37.03	13.80	23.51	8.69

TAB. 6.2 – Tableau comparatif des IPs : scénario 1



Les rayons de la base et de la plate-forme mobile sont choisis identiques et égaux à 86.6cm (valeurs du simulateur Clio). La hauteur initiale (neutre) de la plate-forme mobile par rapport à la base est de 1.2m.

Pour les données dynamiques, la masse de la plate-forme mobile (incluant le cockpit) est de 300Kg, la masse d'une jambe 60Kg (partie fixe 36 et partie mobile 24). Dans le cas d'une base montée sur des rails XY, la masse de la base 200Kg et la masse des rails Y est de 800Kg.

6.5.4 Courbes commentées des simulations

	tous	hexa.x et tilt	hexa.x et rail	rail et tilt	rail	tilt	hexa.x
rail	25.42	0	27.91	28.75	29.02	0	0
hexa.x	18.81	18.63	18.21	0	0	0	19.28
tilt	52.04	52.15	0	52.15	0	52.15	0
résultat	100	71.18	47.63	82.14	29.02	52.15	19.28

TAB. 6.3 – Tableau comparatif *normalisé* des IPs : scénario 1

	tous	hexa.x et tilt	hexa.x et rail	rail et tilt	rail	tilt	hexa.x
rail	18.43	0	21.37	21.97	22.70	0	0
hexa.x	16.46	17.14	15.97	0	0	0	17.14
tilt	11.65	11.93	0	11.87	0	12.08	0
résultat	47.36	28.69	35.79	33.56	22.70	12.08	17.14

TAB. 6.4 – Tableau comparatif des IPs : scénario 2

	tous	hexa.x et tilt	hexa.x et rail	rail et tilt	rail	tilt	hexa.x
rail	38.91	0	45.12	46.39	47.93	0	0
hexa.x	34.76	36.19	33.72	0	0	0	36.19
tilt	24.6	25.19	0	25.06	0	25.51	0
résultat	100	60.58	75.57	70.86	47.93	25.51	36.19

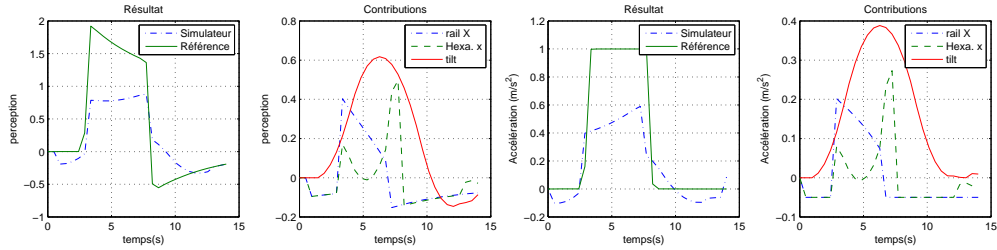
TAB. 6.5 – Tableau comparatif *normalisé* des IPs : scénario 2

	tous	hexa.x et tilt	hexa.x et rail	rail et tilt	rail	tilt	hexa.x
rail	10.31	0	12.02	11.37	13.23	0	0
hexa.x	9.05	9.34	9.34	0	0	0	9.70
tilt	16.09	16.23	0	16.23	0	16.38	0
résultat	37.50	26.47	20.85	29.04	13.23	16.38	9.70

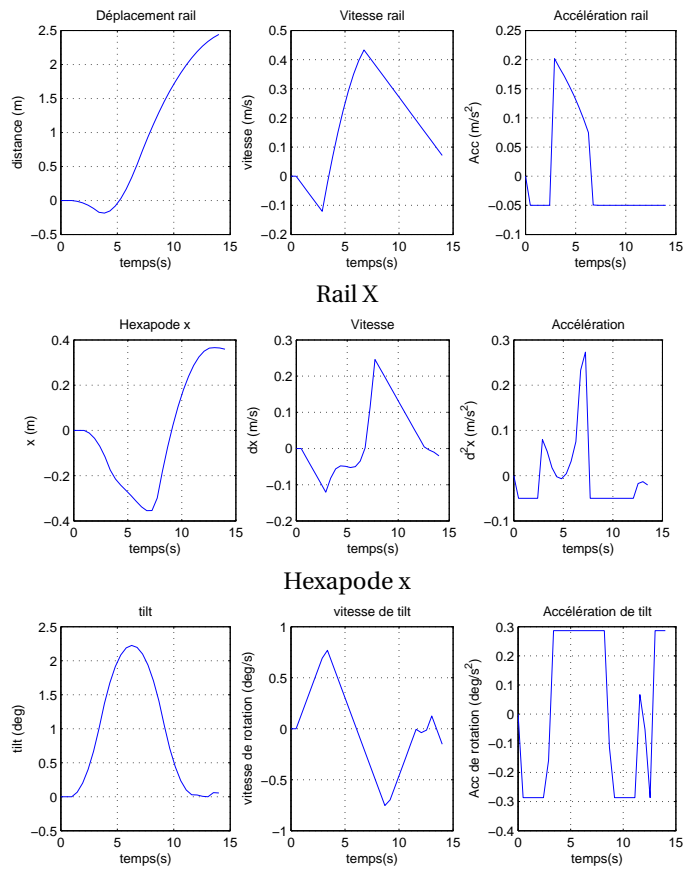
TAB. 6.6 – Tableau comparatif des IPs : scénario 3

	tous	hexa.x et tilt	hexa.x et rail	rail et tilt	rail	tilt	hexa.x
rail	27.49	0	32.05	30.32	35.28	0	0
hexa.x	24.13	24.91	24.91	0	0	0	25.87
tilt	42.91	43.28	0	43.28	0	43.68	0
résultat	100	70.59	55.60	77.44	35.28	43.68	25.87

TAB. 6.7 – Tableau comparatif des IPs *normalisés* : scénario 3



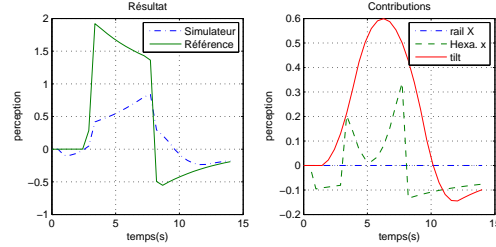
Domaine de la perception/Domaine réel



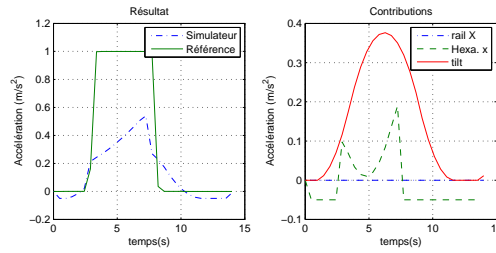
Hexapode tilt

Commentaires : IP=45.08. Nous observons la nature “hautes fréquences” des rails et de l’hexapode. La tilt coordination est “basses fréquences”. Le début de l’échelon est reproduit par les rails alors que sa fin est reproduite par l’hexapode. Un léger mouvement de retour imperceptible est effectué avant le créneau pour mieux reproduire les accélérations.

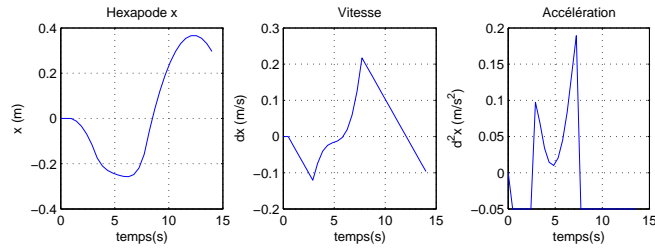
FIG. 6.8 – scénario 1, tous les degrés de liberté



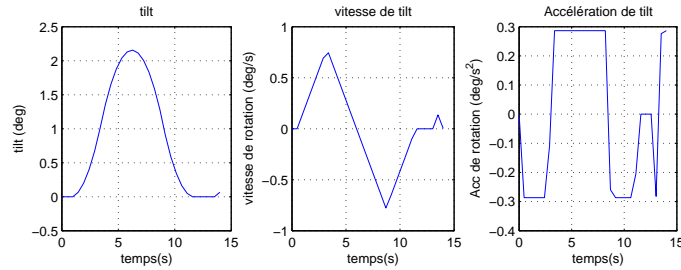
Domaine de la perception



Domaine réel



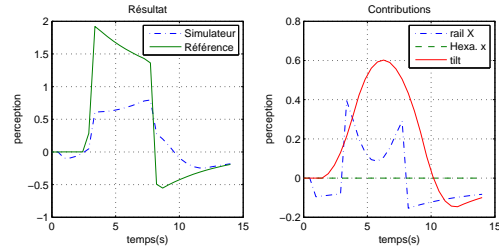
Hexapode x



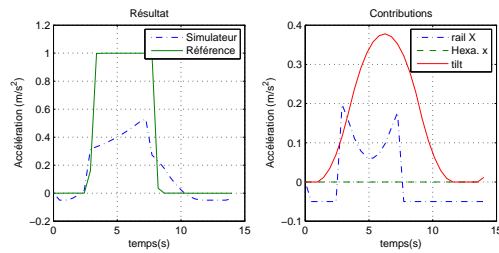
Hexapode tilt

Commentaires : IP=32.09. Par rapport à l'expérience précédente : (a) Le profil de la tilt coordination ne change pas. (b) La translation de l'hexapode est plus riche en basses fréquences. (c) La reproduction du début de l'échelon est altérée. La tilt coordination produit toujours des erreurs résiduelles à la fin de l'échelon (à partir de 8s) à cause de sa lenteur.

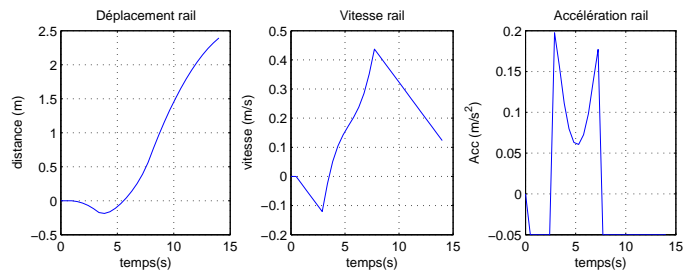
FIG. 6.9 – scénario 1, hexapode (tilt et translation)



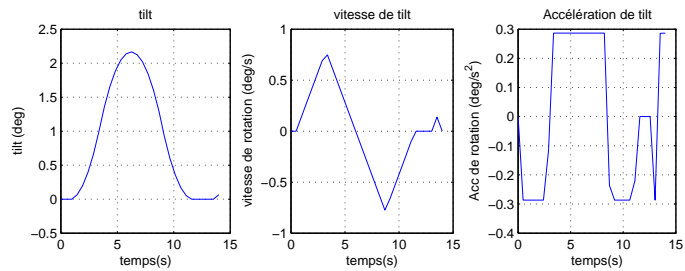
Domaine de la perception



Domaine réel



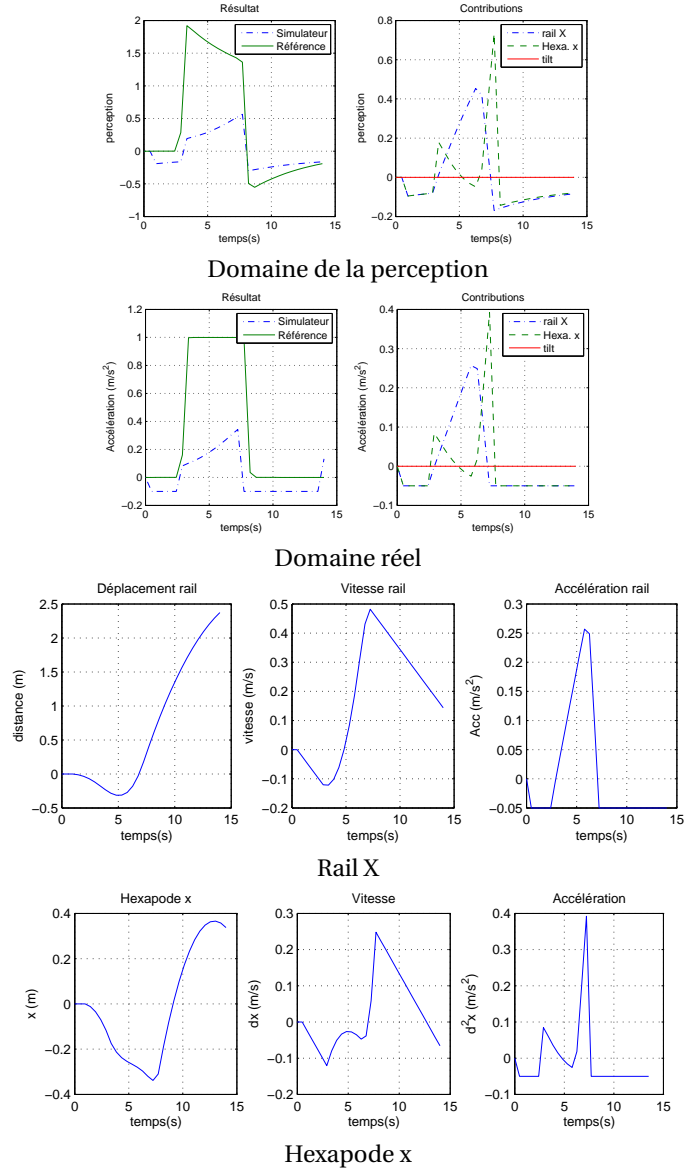
Rail X



Hexapode tilt

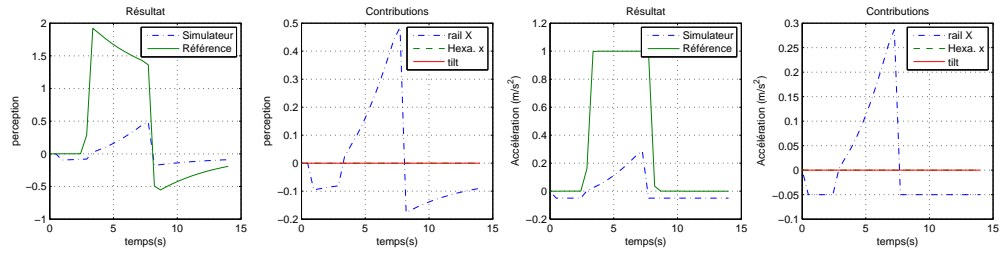
Commentaires : IP=37.07. Par rapport au mode complet, le profil des rails s'est beaucoup rapproché du profil de l'hexapode en procurant une meilleure reproduction des basses fréquences. On observe dans l'accélération des rails, une forme de cloche renversée compensée par la tilt coordination.

FIG. 6.10 – scénario 1, rail X et tilt

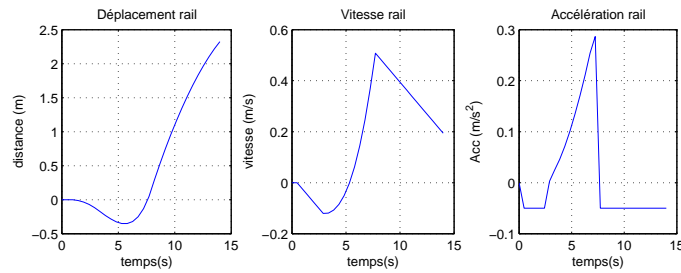


Commentaires : IP=21.47. On observe un phénomène important. Alors que l'hexapode (très limité en mouvement) garde la même allure que précédemment, les rails (qui ont plus de capacité de translation) jouent le rôle de la tilt coordination en reproduisant les basses fréquences. La reproduction des hautes fréquences se trouve donc altérée (plus particulièrement au début de l'échelon).

FIG. 6.11 – scénario 1, Rail X et translation de l'hexapode



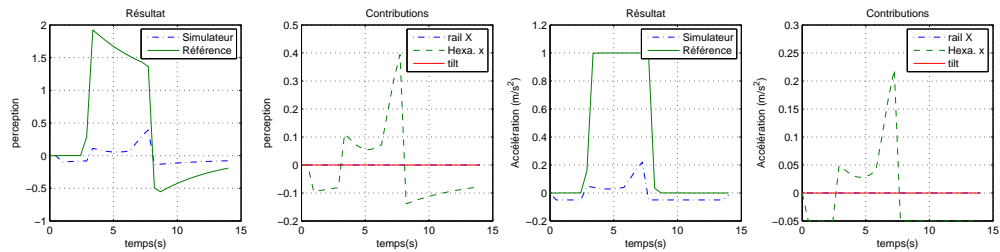
Domaine de la perception/Domaine réel



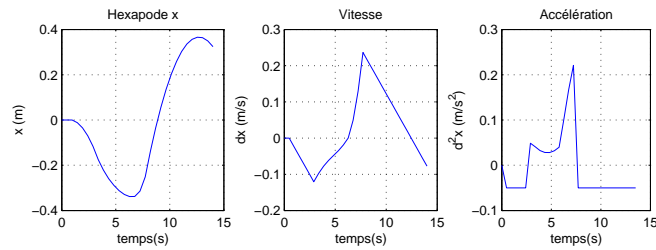
Rail X

Commentaires : IP=13.80. Notons qu'étant donnée la non causalité de l'algorithme, le rendu des rails favorise la fin de l'échelon. On observe également l'apparition d'une contribution moyenne des rails dans les basses fréquences.

FIG. 6.12 – scénario 1, rail X



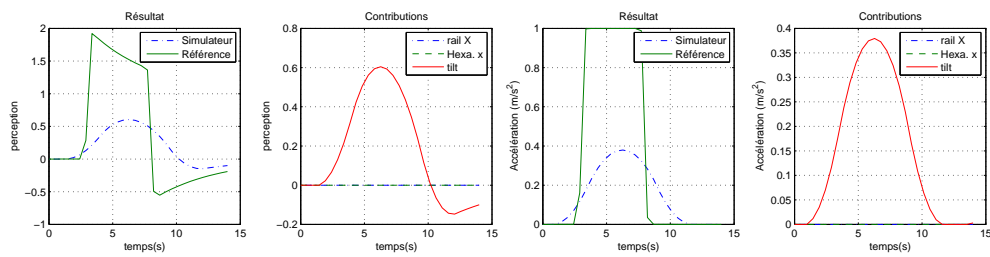
Domaine de la perception/Domaine réel



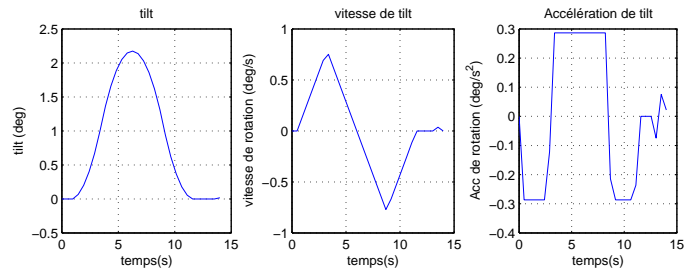
Hexapode x

Commentaires : IP=8.69. La translation de l'hexapode est fidèle à son profil type. Notons que l'apparition d'une légère contribution dans les basses fréquences a altéré sa partie rapide.

FIG. 6.13 – scénario 1, translation de l'hexapode



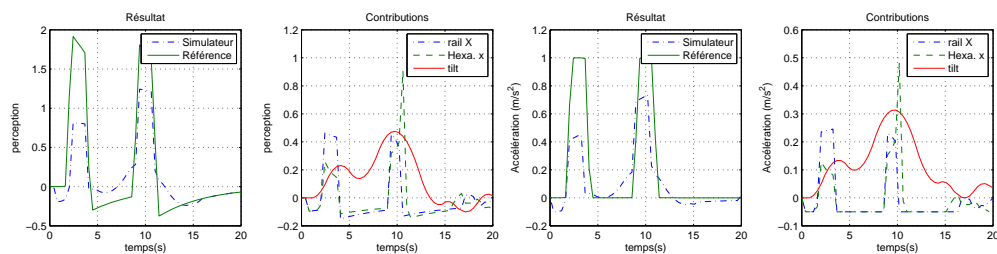
Domaine de la perception/Domaine réel



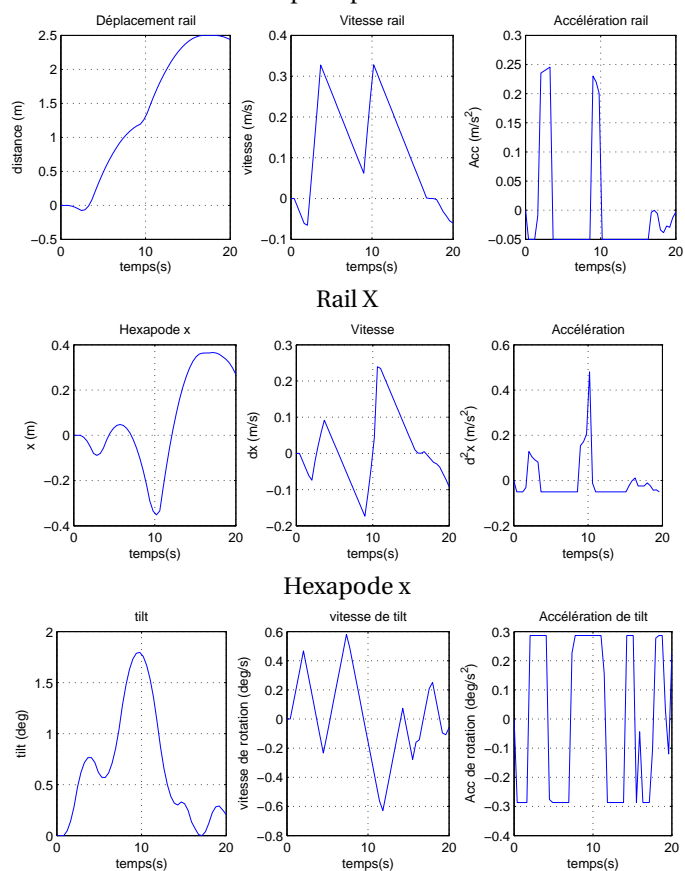
Hexapode tilt

Commentaires : IP=23.51. Le profil de la tilt coordination est quasiment inchangé. Il est très important pour la reproduction des basses fréquences mais induit des erreurs considérables à partir de 8s à cause de la lenteur du mouvement de retour.

FIG. 6.14 – scénario 1, tilt



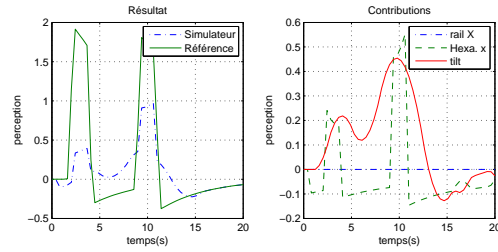
Domaine de la perception/Domaine réel



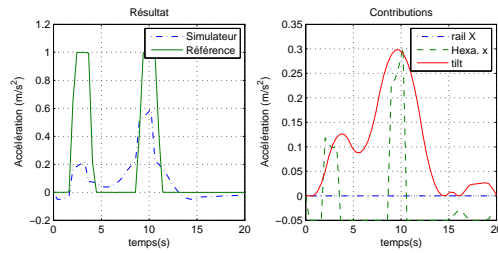
Hexapode tilt

Commentaires : IP=47.36. On préserve les caractéristiques fréquentielles des trois mouvements. La lenteur de la tilt coordination induit des erreurs sur les parties hors pics (surtout entre 4 et 9s).

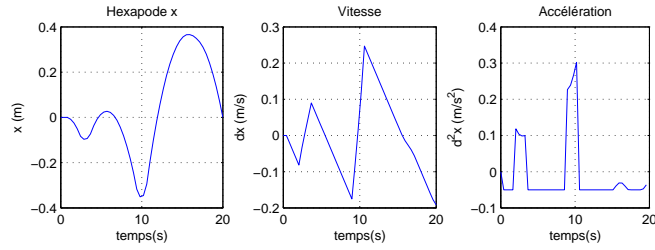
FIG. 6.15 – scénario 2, tous les degrés de liberté



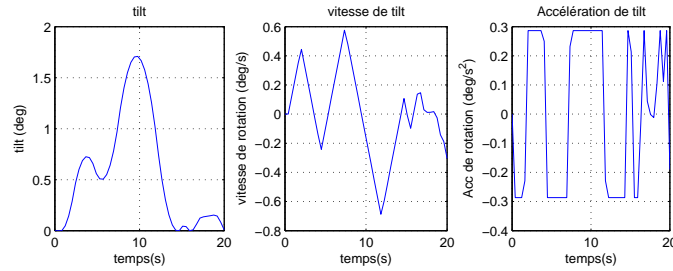
Domaine de la perception



Domaine réel



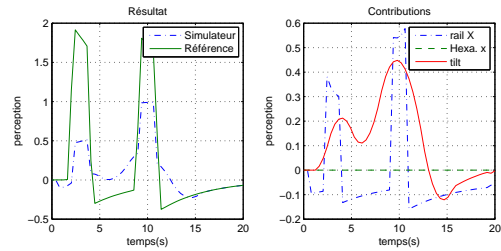
Hexapode x



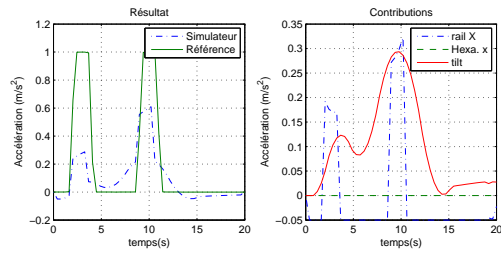
Hexapode tilt

Commentaires : IP=28.69. Cette expérience est très similaire à l'expérience précédente avec une légère altération au niveau des amplitudes. Le profil de l'hexapode se rapproche du profil des rails dans le cas précédent.

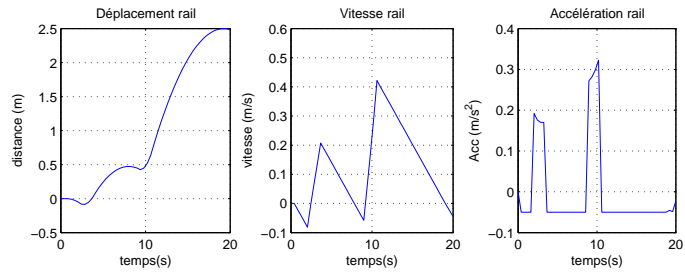
FIG. 6.16 – scénario 2, hexapode (tilt et translation)



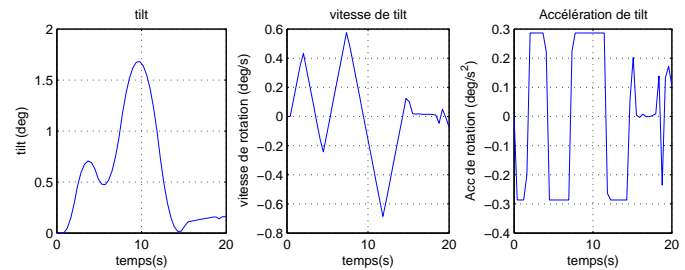
Domaine de la perception



Domaine réel



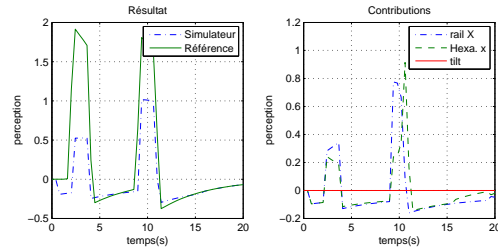
Rail X



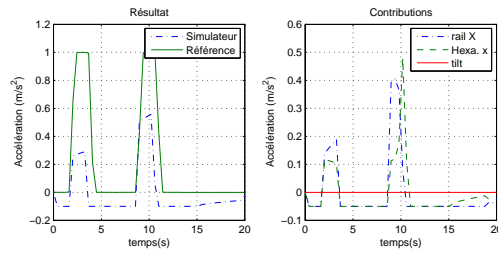
Hexapode tilt

Commentaires : IP=33.56. Par rapport au cas précédent, la capacité supérieure de mouvement des rails améliore la restitution au niveau des amplitudes.

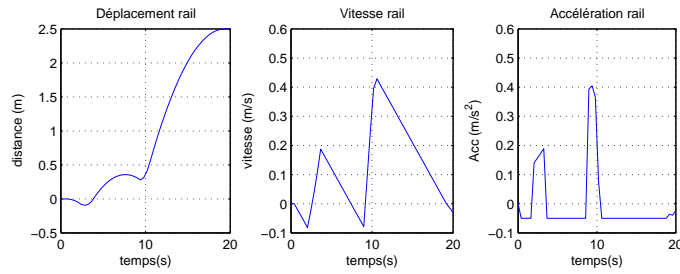
FIG. 6.17 – scénario 2, rail X et tilt



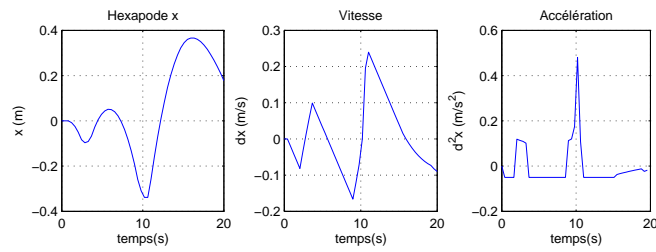
Domaine de la perception



Domaine réel



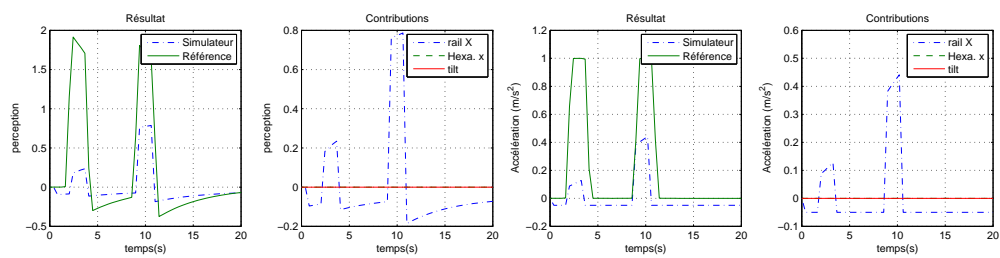
Rail X



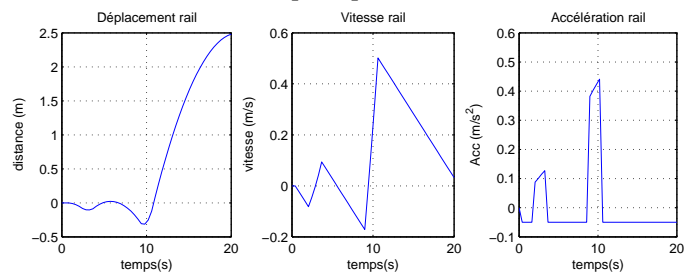
Hexapode x

Commentaires : IP=35.79. Nous observons avec intérêt que l'élimination de la coordination fournit un meilleur résultat que dans les deux cas précédents. Ceci est du à la nature haute fréquence du signal de référence.

FIG. 6.18 – scénario 2, Rail X et translation de l'hexapode



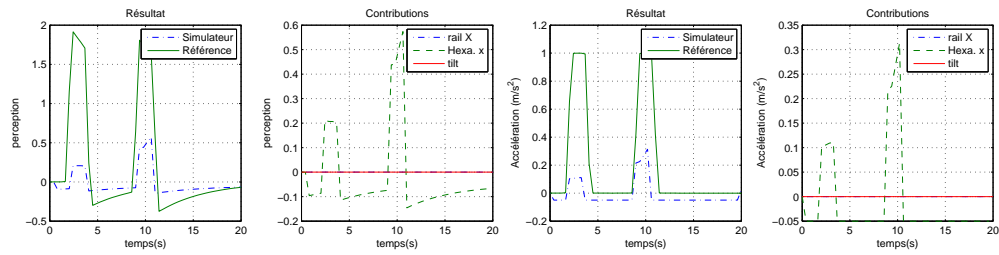
Domaine de la perception/Domaine réel



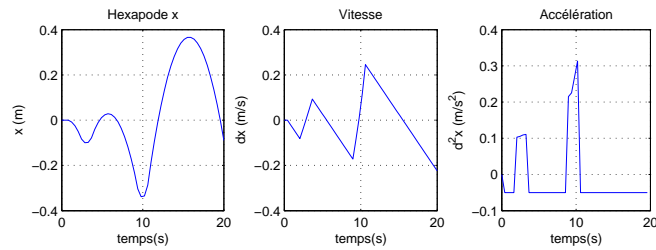
Rail X

Commentaires : IP=22.7. La translation des rails permet de reproduire un profil de “hautes fréquences” .

FIG. 6.19 – scénario 2, rail X



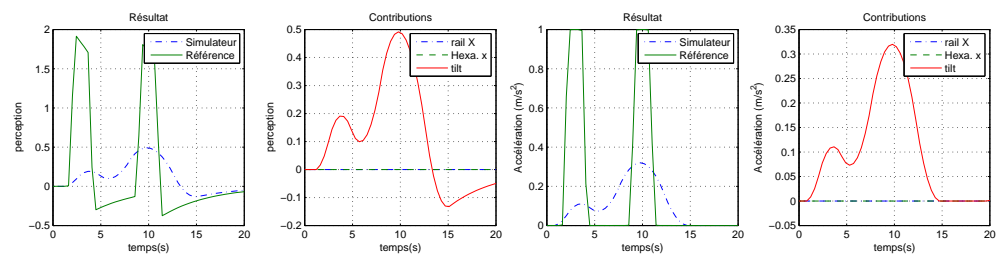
Domaine de la perception/Domaine réel



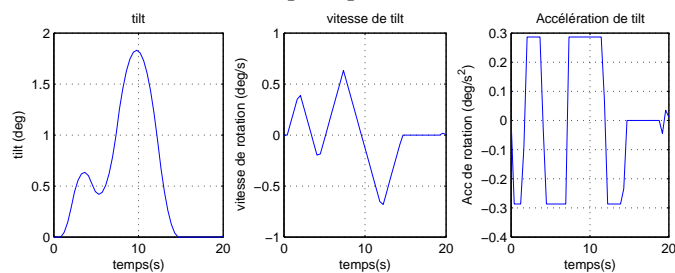
Hexapode x

Commentaires : IP=17.04. La translation de l'hexapode est quasiment identique avec l'expérience précédente avec un léger avantage pour les rails au niveau des amplitudes.

FIG. 6.20 – scénario 2, translation de l'hexapode



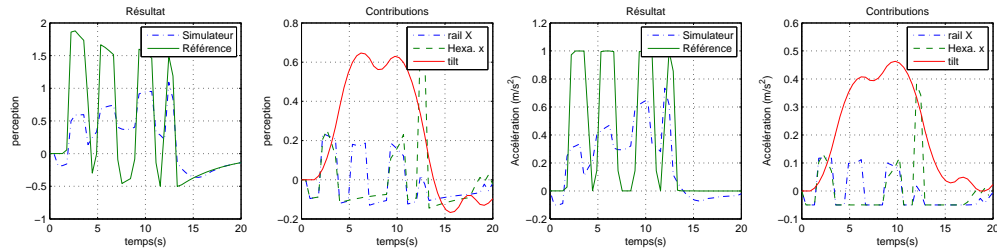
Domaine de la perception/Domaine réel



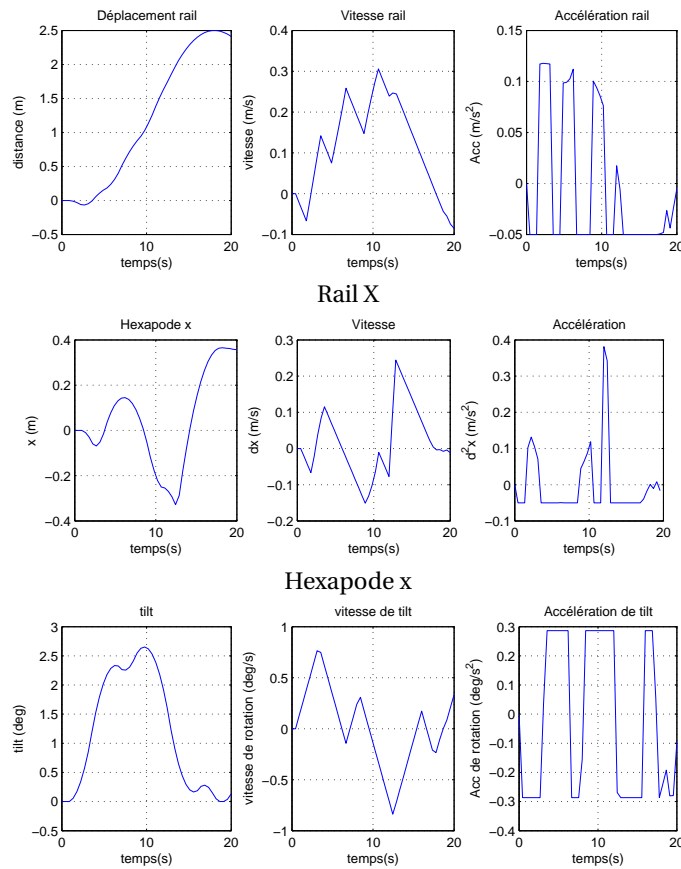
Hexapode tilt

Commentaires : IP=12.08. Le mouvement lent de la tilt coordination effectue une reproduction assez médiocre de la référence (hautes fréquences).

FIG. 6.21 – scénario 2, tilt



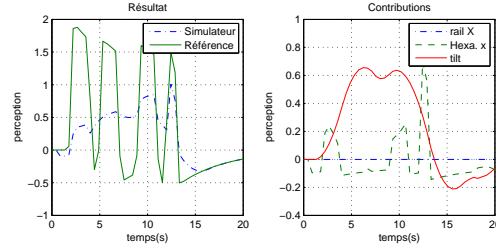
Domaine de la perception/Domaine réel



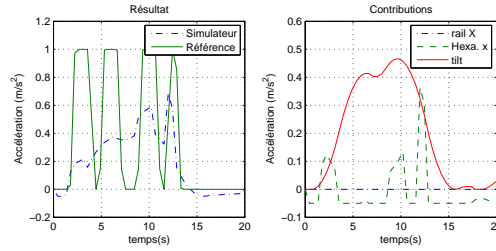
Hexapode tilt

Commentaires : IP=37.50. Malgré que ce résultat soit le meilleur au niveau de l'IP, nous observons un suivi très médiocre au niveau de l'allure à cause la lenteur de la tilt coordination. Nous observons par ailleurs que la capacité de restitution des rails est supérieure à celle de l'hexapode (le deuxième pic n'apparaît pas).

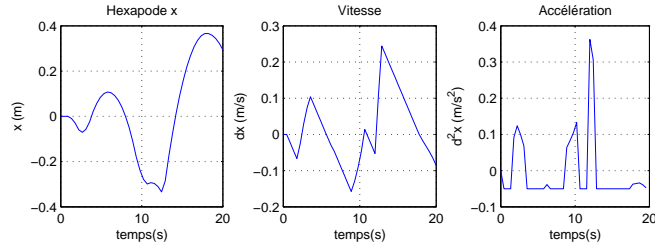
FIG. 6.22 – scénario 3, tous les degrés de liberté



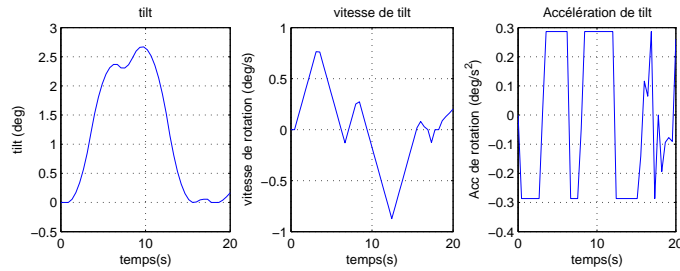
Domaine de la perception



Domaine réel



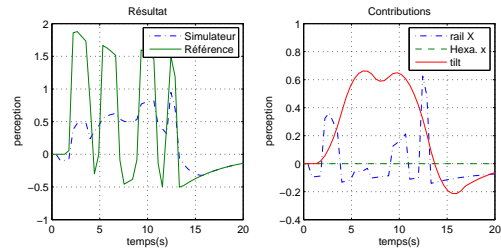
Hexapode x



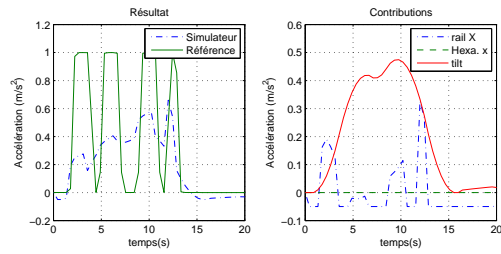
Hexapode tilt

Commentaires : IP=26.47. L'accélération de l'hexapode est similaire au cas précédent. La tilt coordination permet d'augmenter l'IP mais détériore considérablement l'allure.

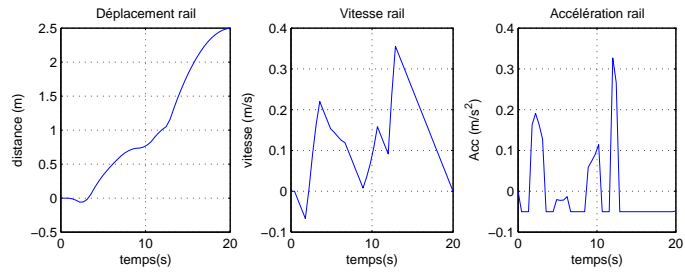
FIG. 6.23 – scénario 3, hexapode (tilt et translation)



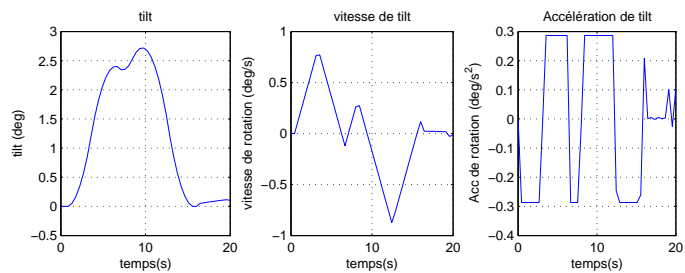
Domaine de la perception



Domaine réel



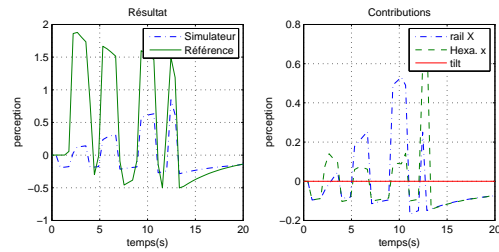
Rail X



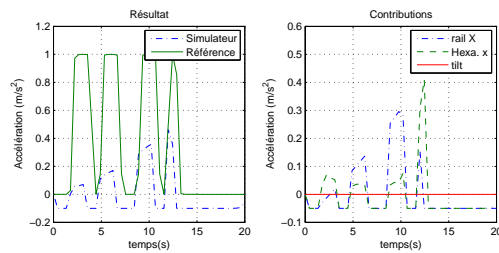
Hexapode tilt

Commentaires : IP=29.04. Mêmes observations que pour le cas précédent.

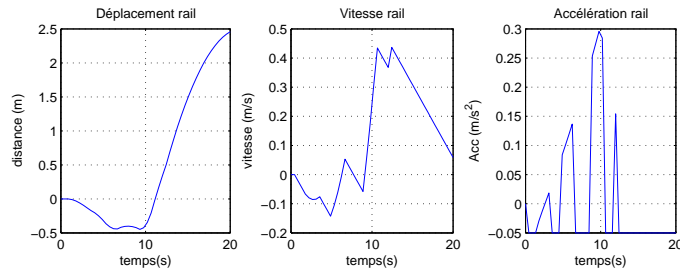
FIG. 6.24 – scénario 3, rail X et tilt



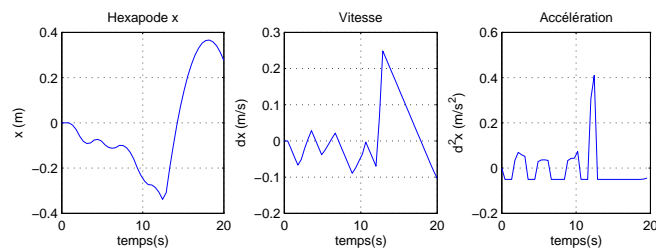
Domaine de la perception



Domaine réel



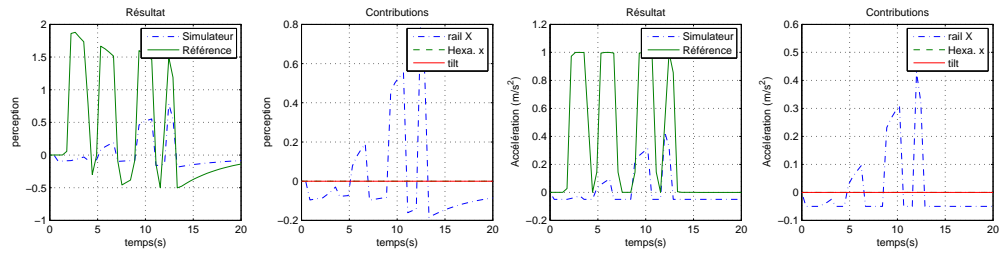
Rail X



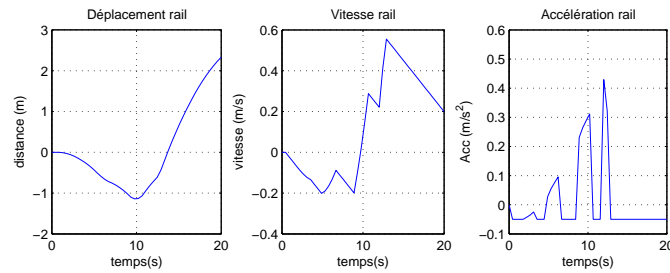
Hexapode x

Commentaires : IP=20.85. Comme prévu, l'élimination de la coordination apporte une nette progression au niveau du suivi d'allure. Les 4 pics sont reproduits aussi bien par les rails que par l'hexapode (dans une moindre mesure).

FIG. 6.25 – scénario 3, Rail X et translation de l'hexapode



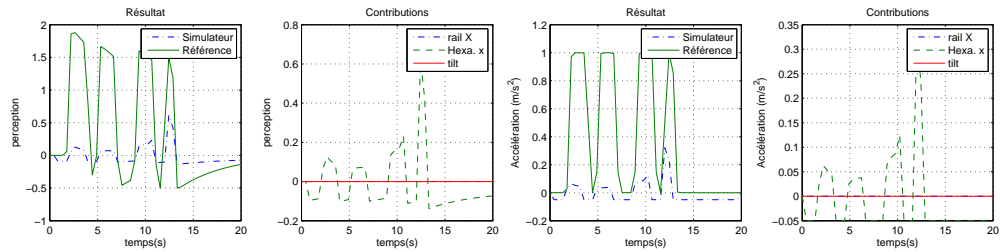
Domaine de la perception/Domaine réel



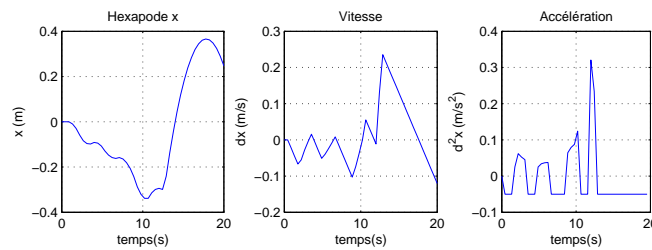
Rail X

Commentaires : IP=13.23. On observe la nature “hautes fréquences” de la translation des rails ainsi que la non causalité de l’algorithme qui a favorisé les temps finaux.

FIG. 6.26 – scénario 3, rail X



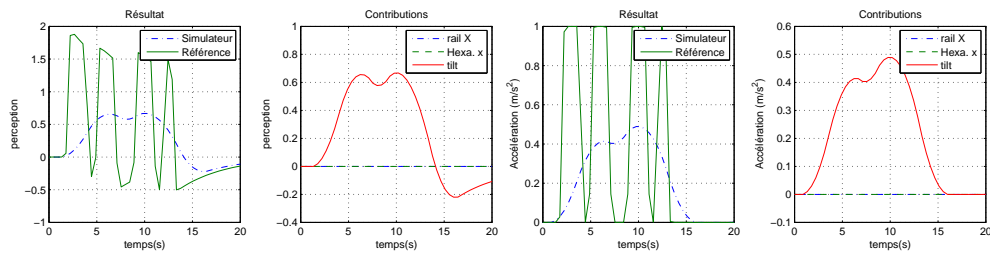
Domaine de la perception/Domaine réel



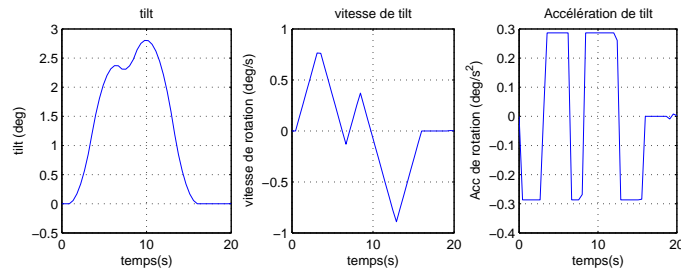
Hexapode x

Commentaires : IP=9.7. Mêmes observations que pour l’expérience précédente.

FIG. 6.27 – scénario 3, translation de l’hexapode



Domaine de la perception/Domaine réel



Hexapode tilt

Commentaires : IP=16.38. Malgré que l'IP de la tilt coordination seule est supérieur à celui des deux translations précédentes, la nature basse fréquence de cette rotation altère considérablement l'allure de la courbe de référence.

FIG. 6.28 – scénario 3, tilt

Chapitre 7

La commande par couple calculé, une formalisation englobante

Ce chapitre s'inscrit dans le cadre de la commande robuste¹ des plates-formes de simulation de conduite. Il s'agit d'un travail théorique de synthèse et de recherche sur la commande par couple calculé (computed torque). Notre première contribution consiste à développer une formalisation englobante basée sur une approche énergétique (Lyapunov) des différentes méthodes robustes. Nous nous intéressons aussi à un algorithme particulier (le choix vivant²) pour lequel nous avons développé, grâce à la formalisation englobante, un résultat fin.

Notation

Tous les termes utilisés dans ce chapitre sont des matrices (au sens large i.e. matrices carrées, vecteurs, scalaires) à coefficients réels. Les matrices carrées sont notées avec une lettre majuscule en gras.

q Configuration du robot (ensemble des données géométriques nécessaires pour définir son énergie cinétique). q est un vecteur de taille n

q_d Trajectoire désirée (consigne à suivre)

e Erreur de suivi de trajectoire $e = q_d - q$

M Matrice de masse du robot s.p.d.

$C(q, \dot{q})\dot{q}$ Forces de Coriolis et centripètes

g Forces de gravité et de frottement

N Somme des deux grandeurs précédentes $N = C(q, \dot{q})\dot{q} + g$

A_c Estimée "calculée" (se rapportant à la commande par couple calculé) de A où A est une lettre dans $\{M, C, g, N\}$

ΔA Erreur d'estimation $\Delta A = A - A_c$, A est une lettre dans $\{M, C, g, N\}$

τ Commande du robot (ou couple)

K_v Poids sur la dérivée de l'erreur, matrice symétrique positive définie

K_p Poids sur l'erreur, matrice symétrique positive définie

I ou I_n La matrice identité de taille n

V_i $i = 1, 2$ fonctions de Lyapunov candidates

¹Par rapport aux erreurs de modélisation et des forces de perturbations

²Dans la publication [Elloumi et al., 2005a], ce théorème porte le nom anglais : the living choice theorem.

Préliminaires mathématiques

La norme matricielle utilisée dans ce document est :

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \lambda_{\max}^{1/2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \quad (7.1)$$

Notons que si \mathbf{A} est symétrique positive définie alors $\|\mathbf{A}\|$ est sa valeur propre maximale.

* * *

Propriétés Si \mathbf{A} est une matrice symétrique positive définie $\|\mathbf{A}\|^{-1} \mathbf{A} \leq \mathbf{I}$ et $\|\mathbf{A}^{-1}\| \mathbf{A} \geq \mathbf{I}$.

Racine d'une matrice symétrique positive définie Les matrices symétriques positives définies sont diagonalisables dans des bases orthogonales et leurs valeurs propres sont strictement positives. Soit \mathbf{M} une matrice s.p.d.. Il existe une matrice orthogonale \mathbf{O} et une matrice diagonale \mathbf{T} strictement positive ($\mathbf{T} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})$, $\lambda_i > 0$ sont les valeurs propres de \mathbf{M}) telles que :

$$\mathbf{M} = \mathbf{O}^T \mathbf{T}^2 \mathbf{O} \quad (7.2)$$

La racine symétrique positive définie de \mathbf{M} est définie par $\mathbf{U} = \mathbf{O}^T \mathbf{T} \mathbf{O}$, et nous avons bien $\mathbf{M} = \mathbf{U}^2$. De plus $\|\mathbf{U}\| = \sqrt{\|\mathbf{M}\|}$.

Bornitude ultime uniforme Étant donné un système dynamique général : $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ et un temps initial t_0 . Une solution $\mathbf{x}(t)$ est dite uniformément ultimement bornée par rapport à la boule $B(0, d)$, si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et un temps fini T (en général fonction de ε et de \mathbf{x}_0), tels que $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ implique

$$\|\mathbf{x}(t)\| < d + \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0 + T, \infty[\quad (7.3)$$

7.1 Le modèle du robot

Comme décrit dans le chapitre *Modélisation des simulateurs de conduite*, le modèle dynamique d'un robot (ou d'un système mécanique en général) est présenté dans sa forme standard :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (7.4)$$

où $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur caractérisant de façon complète le mouvement du robot (par exemple l'ensemble des coordonnées articulaires), $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice de masse du système, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ (avec $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$) l'ensemble des forces de Coriolis et centripète, $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ l'ensemble des forces de gravité et de frottement et $\boldsymbol{\tau}$ l'ensemble des forces et moments extérieurs agissant sur le robot.

7.1.1 Propriétés du modèle dynamique

- $\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j=1..n}$ est une matrice symétrique positive définie. En pratique, il existe certains cas pour lesquels \mathbf{M} peut exhiber des points singuliers (redondance de \mathbf{q} , paramétrage de l'orientation par les angles d'Euler, etc.). Ces cas sont écartés dans le cadre de ce chapitre.
- La matrice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ s'exprime en fonction des coefficients de Christoffel γ_{ijk} :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} \dot{q}_k, \quad i, j = 1..n \quad (7.5)$$

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \right) \quad (7.6)$$

- Les forces de Coriolis présentent, par conséquent, une forme quadratique spécifique. Le i^e terme s'écrit

$$(\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q})_i = \dot{q}^T \Gamma_i \dot{q}, \quad (\Gamma_i)_{jk} = \gamma_{ijk} \quad (7.7)$$

où Γ_i est une matrice symétrique.

- **Passivité :**

Par construction, nous avons la propriété de *passivité* : $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$ est une matrice anti-symétrique. Cette propriété est importante car elle permet de réduire le conservatisme dans l'établissement de la robustesse de certaines commandes.

- Les forces de gravité et de frottement

$$g(q, \dot{q}, t) = \frac{dE_p}{dq} + \underbrace{\mathbf{F}_d \dot{q} + \mathbf{F}_s(\dot{q}) + \mathbf{T}_d}_{\text{frottements}} \quad (7.8)$$

où E_p est l'énergie potentielle du système, \mathbf{F}_d est une matrice diagonale des coefficients visqueux de frottements, $\mathbf{F}_s(\dot{q})$ est le vecteur des forces de frottement non structurées (frottement statique, par exemple) et \mathbf{T}_d représente toutes les entrées parasites au système (et/ou la dynamique non incluse dans le modèle) [Qu et Dawson, 1996].

7.2 Principe général

La commande par couple calculé a été développée dans le début des années 70. Elle consiste à calculer le couple nécessaire pour contrecarrer les perturbations dues aux charges et au couplage entre les articulations. Le système en boucle fermée obtenu est un système linéaire parfaitement découplé permettant la mise en oeuvre des techniques de commande des systèmes LTI (Linéaires Temps Invariants).

7.2.1 Connaissance parfaite du modèle

La commande par couple calculé est un algorithme de suivi de trajectoire basé sur linéarisation par retour d'état. Soit $q_d(t)$ la trajectoire régulière désirée (de référence), alors cette commande consiste en :

$$\tau = \mathbf{M}(q)(\ddot{q}_d + \mathbf{K}_v \dot{e} + \mathbf{K}_p e) + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + g(q, \dot{q}, t). \quad (7.9)$$

où l'erreur de suivi (en position) est défini par

$$e = q_d - q. \quad (7.10)$$

et $(\mathbf{K}_v, \mathbf{K}_p)$ étant des matrices symétriques positives définies. Par conséquent la boucle fermée (7.4) et (7.9) est un système du second ordre en e exponentiellement stable

$$\ddot{e} + \mathbf{K}_v \dot{e} + \mathbf{K}_p e = 0. \quad (7.11)$$

Remarquons qu'il existe des variations de cette formalisation. Il serait, par exemple possible d'ajouter un terme intégral pour transformer le Proportionnel Dérivé en une commande Proportionnel Intégrateur Dérivé.

7.2.2 Connaissance imparfaite du modèle

Malheureusement le résultat précédent nécessite de connaître parfaitement le modèle dynamique, c'est-à-dire : M , C et g . En général, les modèles dynamiques utilisés dans la commande sont différents des modèles réels. Nous distinguons deux raisons principalement : d'une part (a) les *difficultés de modélisation* (il s'agit par exemple du cas où le robot est complexe, certains paramètres dynamiques sont difficiles à estimer,...) et d'autre part (b) les *exigences de mise en oeuvre* comme des contraintes de vitesse d'exécution pour des applications en temps réel. La commande par couple calculée *standard* permet de tenir compte des deux derniers points et garde la structure de la commande classique (7.9). Cette commande est définie par :

$$\tau_c = M_c(q)(\ddot{q}_d + K_v\dot{e} + K_p e) + N_c(q, \dot{q}, t), \quad (7.12)$$

où M_c et N_c sont dorénavant des nouveaux paramètres en plus des gains K_v et K_p . Le terme N_c peut s'écrire (sans perte de généralité) :

$$N_c(q, \dot{q}, t) = C_c(q, \dot{q})\dot{q} + g_c(q, \dot{q}, t) + u_c. \quad (7.13)$$

En effet, le concepteur du contrôle pourrait exprimer sa connaissance partielle du modèle dynamique grâce à (M_c, C_c, g_c) par la méthode d'Euler Lagrange. Les termes *calculés* (indexés par 'c') pourraient en effet être interprétés comme des estimations des quantités réelles correspondantes³. De plus, u_c est une commande "de latitude" qui pourrait aider le concepteur à agir librement (de manière non structurée) et directement sur le robot. Le système en boucle fermée général (7.4) et (7.12) s'écrit donc :

$$\ddot{e} + D\dot{e} + Fe + w = 0, \quad (7.14)$$

faisant intervenir les termes suivants

$$\begin{cases} F = M^{-1}M_cK_p \\ D = M^{-1}[M_cK_v + \Delta C] \\ w = M^{-1}[\Delta M\ddot{q}_d + \Delta C\dot{q}_d + \Delta g - u_c] \end{cases} \quad (7.15)$$

Avec $\Delta A = A - A_c$ où A est une lettre dans $\{M, C, g\}$.

7.2.3 Formalisation du problème

Dans la suite de chapitre, nous allons nous intéresser au problème de robustesse du système (7.14). Nous nous posons la question suivante :

Sous quelles conditions sur les paramètres (M_c, C_c, g_c, u_c, K_p et K_v) le système (7.14) est-il robuste, ou de manière plus précise : uniformément ultimement borné (c'est-à-dire, le vecteur erreur (e, \dot{e}) converge vers un voisinage de l'origine au bout d'un temps fini) ?

Malheureusement, les erreurs de modélisation induisent dans le système (7.14) des termes *non linéaires* F , D et w . Ces derniers ne nous permettent pas de prouver des résultats de stabilité pour ce système dans sa forme générale. Des sous-classes de (7.14) ont été extraites pour lesquelles on a pu montré des résultats de stabilité. Pour ces sous classes, la commande par couple calculé standard est dite robuste. Dans la section suivante, nous proposons une formalisation englobante de ces sous classes et une méthode générale qui permet de prouver leur robustesse.

³(M_c, C_c, g_c) pourrait représenter un modèle simplifié du robot.

7.3 La formalisation englobante

7.3.1 Classification préliminaire

Les résultats de robustesse pour la commande par couple calculé standard ont pour but de prouver l'idée intuitive suivante : si les gains K_p et K_v sont suffisamment élevés⁴, les non-linéarités induites par les erreurs de modélisation sont partiellement compensées et le système commandé (boucle fermée) est uniformément ultimement borné.

Par conséquent, les algorithmes que nous allons présenter se basent sur des conditions sur les modèles réel et estimé afin de dériver des *bornes minimales* sur les gains assurant la robustesse du système bouclé. Nous avons remarqué que l'étude de la stabilité du système (7.14) se fait généralement grâce à un changement préalable de l'état du système : l'erreur de suivi (e, \dot{e}) est transformée en

$$(e, \dot{e}) \rightarrow (e, s), \quad (7.16)$$

où

$$s = \dot{e} + \mathbf{L}e, \quad \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n} \geq 0 \quad (7.17)$$

A notre connaissance, selon le choix de la matrice \mathbf{L} , nous pouvons classer les méthodes robustes comme suit :

- La matrice $\mathbf{L} > 0$ est strictement positive⁵ :
 - $\mathbf{L}(t)$ varie en fonction du temps. Nous appellerons ce choix : le *choix vivant*. En effet, nous allons voir que, dans ce cas, \mathbf{L} est naturellement déterminée par la dynamique du système.
 - \mathbf{L} est une matrice constante arbitrairement choisie.
- La transformation est l'identité $s = \dot{e}$.

Le premier cas $\mathbf{L} > 0$ (et précisément, le choix vivant), sera étudié de manière approfondie dans ce chapitre. Observons en effet les conséquences de ce changement d'état :

$$\begin{cases} \dot{s} = (\mathbf{L} - \mathbf{D})s + [\dot{\mathbf{L}} + \Pi] e - w \\ \dot{e} + \mathbf{L}e = s \end{cases} \quad (7.18)$$

avec

$$\Pi = -\mathbf{F} - (\mathbf{L} - \mathbf{D})\mathbf{L} \quad (7.19)$$

Le *choix vivant* consiste à rechercher une solution strictement positive \mathbf{L} de l'équation de Riccati $\dot{\mathbf{L}} + \Pi = 0$. En conséquence, le système (7.18) est un système triangulaire. Cette transformation peut être donc considérée comme une stratégie de *backstepping* [Sepulchre et al., 1997] où l'action sur le système (7.18) se fait en deux étapes. La première étape est la minimisation de $\|s\|$ (première équation du système). En effet tous les paramètres de la commande et, entre autres, les gains K_p et K_v sont présents uniquement dans cette première équation. Dans un deuxième temps s agit (de manière analogue à une commande) sur e par l'intermédiaire de la seconde équation. Comme $\mathbf{L} > 0$, si s converge vers 0 alors e convergera aussi vers 0. En général, si s converge vers un voisinage de l'origine alors il en sera de même pour e .

7.3.2 Formalisation mathématique

Afin d'utiliser ce changement de coordonnées dans l'étude de la robustesse, nous avons besoin d'une méthode mathématique englobant la classification précédente. Dans cet objectif, nous avons adopté et étendu la méthode directe de Lyapunov développée par [Qu et Dawson, 1996]. Nous affirmons qu'il est généralement possible d'étudier la stabilité du système bouclé (7.14) grâce à deux

⁴Ou d'une façon plus rigoureuse : la valeur propre minimale est suffisamment élevée.

⁵Pas nécessairement symétrique

fonctions candidates de Lyapunov V_1 and V_2 (sous la condition d'un choix adéquat des matrices \mathbf{P} et \mathbf{K})

$$V_1 = \frac{1}{2} s^T \mathbf{P} s, \quad V_2 = \frac{1}{2} e^T \mathbf{K} e \quad (7.20)$$

Ces deux fonctions dépendent des paramètres \mathbf{P} et \mathbf{K} qui sont des matrices symétriques positives définies (pouvant dépendre du temps). Nous allons utiliser V_1 et V_2 afin de construire une fonction de Lyapunov dont la dérivée est strictement négative sauf à l'approche de l'origine. Ce résultat implique la bornitude ultime et uniforme du système, c'est-à-dire que l'erreur (e, \dot{e}) soit bornée à partir d'un temps fini ([Khalil, 2002], théorème 4.18).

7.3.2.1 Dérivation de V_1 et V_2

Grâce à la formule de dérivation de s (7.18) et à la symétrie de \mathbf{P} nous avons :

$$\dot{V}_1 = s^T \left[\mathbf{P}(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{P}} \right] s + s^T \mathbf{P} \left[\dot{\mathbf{L}} + \Pi \right] e - s^T \mathbf{P} w \quad (7.21)$$

Pour V_2 le calcul est direct :

$$\dot{V}_2 = e^T \mathbf{K} \dot{e} + \frac{1}{2} e^T \dot{\mathbf{K}} e \quad (7.22)$$

7.3.2.2 Exemples

Grâce à ce formalisme englobant, nous allons retrouver plusieurs formulations particulières :

- L'algorithme [Samson, 1983] est notre exemple de départ pour le choix vivant de \mathbf{L} . En choisissant $V = V_1$ avec $\mathbf{P} = \mathbf{M}_c$ comme fonction de Lyapunov du système, nous pouvons retrouver les calculs originaux (basés sur une méthode analytique et non sur une approche énergétique). L'idée générale de cet algorithme, placé dans le cadre de notre formalisme, est l'annulation du terme croisé $s^T \mathbf{M}_c \left[\dot{\mathbf{L}} + \Pi \right] e$ dans la dérivée de V :

$$\dot{V} = s^T \left[\mathbf{M}_c(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}_c \right] s + s^T \mathbf{M}_c \left[\dot{\mathbf{L}} + \Pi \right] e - s^T \mathbf{M}_c w, \quad (7.23)$$

en choisissant \mathbf{L} comme la solution positive définie de l'équation de Riccati non autonome et non symétrique [Abou-Kandil et al., 2003] :

$$\dot{\mathbf{L}} = -\Pi = \mathbf{F} + (\mathbf{L} - \mathbf{D})\mathbf{L}. \quad (7.24)$$

Ainsi la dérivée de V devient

$$\dot{V} = s^T \left[\mathbf{M}_c(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}_c \right] s - s^T \mathbf{M}_c w \quad (7.25)$$

c'est-à-dire, que dans le cas où $\|\mathbf{M}_c w\|$ est borné, une condition suffisante sur \mathbf{L} pour obtenir la robustesse du système est :

$$\mathbf{M}_c(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}_c < 0 \quad (7.26)$$

- Dans [Qu et Dawson, 1996], le choix de $\mathbf{L} > 0$ est constant.
- Dans [Lewis et al., 2004], des exemples pour le cas où la transformation est l'identité.
- La méthode par sliding mode choisit aussi $\mathbf{L} > 0$ constante mais rajoute un terme de latitude u_c non linéaire permettant d'assurer la stabilité asymptotique du système.

Notre contribution se situe précisément dans l'amélioration du premier choix. Nous avons développé une borne minimale plus fine pour les gains (grâce à l'utilisation de la passivité et de la définition spectrale de la norme quadratique).

7.4 Le choix vivant

7.4.1 Résultat originel de robustesse

- Le résultat de [Samson, 1983] s'énonce sous la forme d'un théorème dont voici les hypothèses :
- **H1** : Continuité de tous les termes intervenant dans (7.14) par rapport à q et \dot{q} et bornitude uniforme par rapport au temps. M et M_c sont symétriques positives définies.
 - **H2** : Les matrices de gains sont des homothéties (pouvant dépendre du temps) $K_p = k_p I$, $K_v = k_v I$ reliées par une constante de proportionnalité $\mu > 0$:

$$k_p(t) = \mu k_v(t) \quad (7.27)$$

- **H3** : Robustesse (par rapport à l'inversibilité) de la matrice de masse et de son estimée : il existe deux constantes σ et σ_c telles que

$$0 < \sigma < \|M\| \quad 0 < \sigma_c < \|M_c\| \quad (7.28)$$

- **H4** : M_c est continûment dérivable. \dot{M}_c , ΔC et w sont bornés.

Énoncé du théorème [Samson, 1983]

Sous les hypothèses énoncées précédemment (H1, H2, H3 et H4) si $k_v > k$ avec :

$$k = \kappa \left(\sqrt{\frac{\|M_c\|}{\sigma_c}} (n+1) (\|\Delta C\| \|M^{-1}\| + \mu) + \frac{1}{2} \|\dot{M}_c\| \|M_c^{-1}\| + 2\mu + \alpha \|w\| \sqrt{\|M_c\|} \right) \quad (7.29)$$

$$\kappa = \left\| M_c^{-\frac{1}{2}} M M_c^{-\frac{1}{2}} \right\| \quad (7.30)$$

et $\alpha > 0$ étant un paramètre, alors le système (7.14) est uniformément ultimement borné.

7.4.2 Première extension : utilisation de la caractérisation spectrale

Nous avons utilisé la caractérisation spectrale de la norme quadratique afin d'effectuer une majoration plus fine des erreurs de modélisation. Nous avons abouti à un résultat intéressant où la taille du système n est éliminée du gain minimal :

Énoncé du théorème

Sous les hypothèses énoncées précédemment (H1, H2, H3 et H4) si $k_v > k_s$ avec :

$$k_s = \kappa \left(\sqrt{\frac{\|M_c\|}{\sigma_c}} (2 \|\Delta C\| \|M^{-1}\| + \mu) + \frac{1}{2} \|\dot{M}_c\| \|M_c^{-1}\| + 3\mu + \alpha \|w\| \sqrt{\|M_c\|} \right) \quad (7.31)$$

et $\alpha > 0$ étant un paramètre, alors le système (7.14) est uniformément ultimement borné.

7.4.3 Deuxième extension : le théorème du choix vivant

Cette deuxième extension vient s'ajouter à la première et consiste à utiliser la propriété de passivité. Avant de présenter le théorème, nous avons besoin de changer la propriété H4 en

H4cv : M est continûment dérivable. C_c , ΔC et w sont bornés.

Par rapport à l'hypothèse H4, cette nouvelle hypothèse effectue deux substitutions. La première consiste à remplacer la dérivabilité continue de \dot{M}_c par celle de M . Comme la matrice de masse M est une quantité physique, elle possède des propriétés intrinsèques de régularité. A contrario, \dot{M}_c est une quantité artificielle qui peut être choisie arbitrairement par le concepteur. La condition de dérivabilité de M est donc moins conservative.

La deuxième substitution consiste à changer la bornitude de \dot{M}_c par celle de C_c . Dans le cas où le modèle utilisé dans la commande est un modèle physique, (c'est-à-dire, construit à partir d'une abstraction du modèle réel), la propriété de passivité pour le modèle calculé est vérifiée : $\dot{M}_c - 2C_c$ est une matrice anti-symétrique. Par conséquent, les hypothèses H4 et H4cv seraient équivalentes sur ce point. Néanmoins, dans le cas contraire ces deux matrices ne sont pas corrélées. L'hypothèse H4cv est donc moins conservatrice dans le sens où C_c est un paramètre de la commande (sur lequel on peut directement agir) alors que \dot{M}_c fait intervenir \dot{q} qui n'est accessible que par la simulation du système en boucle fermée (7.14).

Énoncé du théorème

Sous les hypothèses énoncées précédemment (H1, H2, H3 et H4cv) si $k_v > k_{cv}$ avec :

$$k_{cv} = \kappa_{cv} \left(\|C_c\| \|M^{-1}\| + \|\Delta C\| + 3\mu + \mu \sqrt{\frac{\|M\|}{\sigma}} + \alpha \sqrt{\|M\|} \|w\| \right) \quad (7.32)$$

$$\kappa_{cv} = \|\dot{M}_c^{-1}\| \|M\|, \quad (7.33)$$

et $\alpha > 0$ étant un paramètre alors le système (7.14) est uniformément ultimement borné.

7.5 Démonstration du théorème du choix vivant

La démonstration que nous proposons est une amélioration de celle proposée par [Samson, 1983]. La difficulté principale de ce résultat consiste en l'étude de la solution d'une équation de Riccati non autonome, non symétrique et non périodique (7.24). En effet, les résultats classiques [Bittanti et al., 1991] pour ce type d'équations sont des résultats asymptotiques. Or, pour notre problème, il est nécessaire de prouver des résultats de bornitude sur tout l'horizon temporel. La caractérisation spectrale de la norme quadratique nous fournira un résultat plus fin que la preuve originale.

7.5.1 Schéma de la preuve générale

Dans le cadre de la formalisation englobante, nous allons étudier la fonction de Lyapunov $V = V_1$ avec $P = M$ (à la place de $P = M_c$ dans la section 7.3.2.2⁶). La dérivée de V est donc

$$\dot{V} = s^T \left[M(L - D) + \frac{1}{2} \dot{M} \right] s + s^T M \left[\dot{L} + \Pi \right] e - s^T M w, \quad (7.34)$$

A la lumière de l'idée exposée précédemment (section 7.3.2.2), le principe général de cette méthode est de sélectionner L de telle façon à ce qu'elle annule le terme croisé $s^T M \left[\dot{L} + \Pi \right] e$ et qu'elle assure la négativité de la matrice $M(L - D) + \frac{1}{2} \dot{M}$. Ces deux résultats sont prouvés dans le premier lemme :

⁶Ce choix de P permettra d'exploiter la propriété de passivité

Lemme 1

Sous les hypothèses H1, H2, H3 et H4cv, si $k_v > k_{cv}$ avec $\alpha = 0$ alors, il existe une solution $\mathbf{L}(t)$ sur $[0, \infty[$ du système $\dot{\mathbf{L}} + \Pi = 0$, $\mathbf{L}(0) = \mu\mathbf{I}$ qui satisfait l'inégalité suivante

$$\|\mathbf{L}(t) - \mu\mathbf{I}\| < \mu, \forall t \geq 0$$

Corollaire 1

$$\forall t \geq 0, \quad 0 < \mathbf{L}(t) < 2\mu\mathbf{I}$$

Corollaire 2

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{M}(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}} < 0$$

Le corollaire 2 implique que \dot{V} est négative sauf dans un voisinage de 0. La taille de ce voisinage dépend de M_w . Par conséquent, la dernière étape consiste à contrôler et borner la taille de ce voisinage :

Lemme 2

$\forall \alpha > 0$, si $k_v > k_{cv}$ alors le système est uniformément ultimement borné : $\forall t > T_b$, $\|s(t)\| \leq 1/\alpha\sqrt{\sigma}$, avec $T_b = \|\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}(0)s(0)\|/\mu\alpha^2$.

7.5.2 Preuve du lemme 1

Posons $\mathbf{Q} = \mathbf{L} - \mu\mathbf{I}$. Réécrivons l'équation $\dot{\mathbf{L}} + \Pi = 0$ au moyen de \mathbf{Q} :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{D}\mathbf{Q} + (\mathbf{F} - \mu\mathbf{D}) + (\mathbf{Q} + \mu\mathbf{I})^2 \\ \mathbf{Q}(0) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (7.35)$$

Compte tenu de (7.27) et des expressions de \mathbf{D} et \mathbf{F} dans (7.15), nous obtenons l'équation

$$\dot{\mathbf{Q}} = -k_v\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}_c\mathbf{Q} - \mathbf{M}^{-1}\Delta\mathbf{C}(\mathbf{Q} + \mu\mathbf{I}) + (\mathbf{Q} + \mu\mathbf{I})^2, \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{0} \quad (7.36)$$

dans laquelle le gain k_p a disparu.

Remarquons que le gain k_v est présent uniquement au niveau de son premier terme. Supposons momentanément qu'il s'agit d'une équation scalaire $n = 1$ et que la quantité $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}_c$ impliquée dans le premier terme est strictement positive. Par conséquent, k_v peut être choisi suffisamment élevé de telle sorte que $\dot{\mathbf{Q}}$ soit strictement négative (et d'amplitude contrôlable par k_v). Ainsi nous pouvons, grâce à un choix adéquat de k_v assurer la bornitude de \mathbf{Q} . C'est l'idée générale de cette démonstration.

Nous introduisons d'abord un dernier changement de variable :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}, \quad (7.37)$$

où $\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$ est la matrice racine de \mathbf{M} . Nous allons montrer la condition suivante

$$\|\mathbf{Y}\| \leq \sqrt{\sigma}\mu, \quad (7.38)$$

qui permet de prouver le lemme 1⁷. Comme \mathbf{Q} , la variable \mathbf{Y} est gouvernée par une équation de Riccati non symétrique non autonome que nous exposons dans sa forme standard :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}_{21}(t) + \mathbf{B}_{22}(t)\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{B}_{11}(t) - \mathbf{Y}\mathbf{B}_{12}(t)\mathbf{Y} \quad (7.39)$$

⁷En effet, $\mathbf{Q} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y}$ et compte tenu de (7.28) : $\|\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\| < \sqrt{\sigma}^{-1}$.

où les coefficients B_{ij} sont :

$$\begin{aligned} B_{11} &= 0 & B_{12} &= -k_v M^{-\frac{1}{2}} M_c M^{-\frac{1}{2}} - M^{-\frac{1}{2}} \Delta C M^{-\frac{1}{2}} + 2\mu I \\ B_{21} &= -\mu M^{-\frac{1}{2}} \Delta C + \mu^2 M^{\frac{1}{2}} & B_{22} &= -M^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7.40)$$

Variation spectrale

Pour montrer la bornitude de $\|Y\|$, nous allons utiliser la caractérisation spectrale de la norme. La preuve est composée de trois résultats consécutifs.

7.5.2.1 Résultat 1 : Coefficients B_{ij} constants

Supposons momentanément que les matrices B_{ij} soient constantes. Sous les hypothèses H1, H2, H3 et H4cv, si le gain constant k_v vérifie $k_v > k_{cv}$ avec $\alpha = 0$, montrons que si $\|Y(0)\| < \sqrt{\sigma}\mu$ alors l'équation de Riccati (7.39) admet une solution $\forall t \in [0, \infty[$ vérifiant $\|Y(t)\| < \sqrt{\sigma}\mu$.

Preuve du résultat 1

Puisque $\|Y(0)\| < \sqrt{\sigma}\mu$, il existe $T > 0$ tel que l'équation de Riccati (7.39) admet localement sur l'intervalle $[0, T[$ une solution qui préserve par continuité l'inégalité : $\|Y(t)\| < \sqrt{\sigma}\mu$. Nous allons montrer que cette solution est holomorphe. Dans ce but, nous rappelons la relation entre les équations de Riccati et les équations différentielles. En effet si W est la solution de l'équation différentielle :

$$\dot{W} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} W, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}, \quad W(t=0) = \begin{pmatrix} I \\ Y(t=0) \end{pmatrix}$$

alors $Y = W_2 W_1^{-1}$ est solution de (7.39) tant que W_1^{-1} existe. Dans le cas présent (matrices constantes), sur $[0, T[$, la matrice Y est borné et donc holomorphe.

Etape 1 : Partant de cette propriété d'holomorphie, d'après [Kato, 1966] (théorème 6.8), il existe un champ de valeurs propres et de vecteurs propres normés continûment dérivables par rapport au temps $(\lambda_i, x_i)_{i=1..n}$ de $Y^T Y$, c'est-à-dire, pour $i \in \{1, \dots, n\}$

$$(Y^T Y)x_i = \lambda_i x_i, \quad x_i^T x_i = 1, \quad (7.41)$$

Par conséquent

$$\lambda_i = x_i^T (Y^T Y)x_i, \quad x_i^T \dot{x}_i = 0. \quad (7.42)$$

et

$$\dot{\lambda}_i = x_i^T \left(\frac{d}{dt} Y^T Y \right) x_i + 2x_i^T Y^T Y \dot{x}_i. \quad (7.43)$$

Comme par ailleurs, $x_i^T Y^T Y = \lambda_i x_i^T$ et $x_i^T \dot{x}_i = 0$, le second terme $2x_i^T Y^T Y \dot{x}_i$ est nul. De plus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y^T Y &= \frac{d}{dt} Q^T M Q \\ &= 2Q^T \dot{M} Q + Q^T \dot{M} Q. \end{aligned} \quad (7.44)$$

En synthèse, l'équation d'évolution de λ_i se résume en

$$\dot{\lambda}_i = -2k_v v_i + \omega_i, \quad (7.45)$$

avec

$$v_i = x_i^T Q^T M_c Q x_i \geq 0, \quad (7.46)$$

et

$$\omega_i = 2x_i^T \mathbf{Q}^T (-\Delta \mathbf{C}(\mathbf{Q} + \mu \mathbf{I}) + \mathbf{M}(\mathbf{Q} + \mu \mathbf{I})^2) x_i + x_i^T (\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{M}} \mathbf{Q}) x_i \quad (7.47)$$

La propriété de passivité permet de simplifier l'expression de ω_i :

$$\omega_i = 2x_i^T \mathbf{Q}^T (\mathbf{C}_c \mathbf{Q} - \mu \Delta \mathbf{C} + \mathbf{M}(\mathbf{Q} + \mu \mathbf{I})^2) x_i, \quad (7.48)$$

qui satisfait l'inégalité suivante (après la substitution de \mathbf{Q} par $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Y}$ et l'utilisation de la majoration triangulaire classique)

$$|\omega_i| \leq 2W, \quad (7.49)$$

avec

$$W = \|\mathbf{Y}\|^2 (\|\mathbf{C}_c\| \|\mathbf{M}^{-1}\| + 2\mu + \|\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\| \|\mathbf{Y}\|) + \|\mathbf{Y}\| (\mu \|\Delta \mathbf{C}\| \|\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\| + \mu^2 \|\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\|) \quad (7.50)$$

De plus v_i respecte l'inégalité suivante

$$v_i \geq \|\mathbf{M}_c^{-1}\|^{-1} \|\mathbf{M}\|^{-1} x_i^T \mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{Q} x_i = \lambda_i / \kappa_{cv}, \quad (7.51)$$

avec

$$\kappa_{cv} = \|\mathbf{M}_c^{-1}\| \|\mathbf{M}\|. \quad (7.52)$$

Etape 2 : Supposons l'existence d'un temps $t_c \in [0, T[$ pour lequel $\|\mathbf{Y}(t)\|$ atteigne *pour la première fois* la borne maximale $\sqrt{\sigma}\mu$ c'est-à-dire

$$\text{pour } 0 \leq t < t_c, \|\mathbf{Y}(t)\| < \sqrt{\sigma}\mu \text{ et } \|\mathbf{Y}(t_c)\| = \sqrt{\sigma}\mu. \quad (7.53)$$

Nous montrerons qu'en choisissant $k_v > k_{cv}$ avec $\alpha = 0$, la dérivée $\frac{d}{dt} \|\mathbf{Y}\|$ à l'instant $t = t_c$ est strictement négative. Cette affirmation contredit le fait que $\|\mathbf{Y}(t)\|$ atteigne *pour la première fois* (signifiant a fortiori une variation positive de $\|\mathbf{Y}(t)\|$ à $t = t_c$) sa borne maximale. Par conséquent, un tel instant t_c n'existe pas et la condition (7.38) est remplie pour $t \in [0, T[$.

Soit $t = t_c$ et λ_j une des valeurs propres maximales de $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ à cet instant, alors

$$\|\mathbf{Y}(t_c)\|^2 = \lambda_j(t_c) = \sigma\mu^2, \quad (7.54)$$

et partant de (7.45), (7.51), (7.49), nous avons

$$\dot{\lambda}_j \leq -2(k_v \frac{\lambda_j}{\kappa_{cv}} + 2W). \quad (7.55)$$

Il suffit donc d'avoir :

$$k_v > k_1 = 2W \frac{\kappa_{cv}}{2\lambda_j(t_c)}, \quad (7.56)$$

avec

$$k_1 = \kappa_{cv} \left(\|\mathbf{C}_c\| \|\mathbf{M}^{-1}\| + \|\Delta \mathbf{C}\| + 3\mu + \mu \sqrt{\frac{\|\mathbf{M}\|}{\sigma}} \right) = \kappa_{cv}(\alpha = 0), \quad (7.57)$$

pour obtenir

$$\dot{\lambda}_j(t_c) < 0, \quad (7.58)$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{Y}\| \Big|_{t=t_c} = \frac{1}{2} \dot{\lambda}_j(t_c) \lambda_j^{-1}(t_c) < 0. \quad (7.59)$$

Remarque : Existence de $Y(t)$ sur $[0, \infty[$

La non existence d'un tel instant t_c permet de préserver l'holomorphie et d'étendre l'intervalle d'existence de Y de $[0, T[$ à $[0, \infty[$. De plus le résultat escompté reste valable $\forall t \in [0, \infty[, \|Y(t)\| < \sqrt{\sigma}\mu$.

7.5.2.2 Résultat 2 : B_{ij} étagées

Dans le cas où les B_{ij} sont des fonctions étagées, le résultat 1 permet d'affirmer que si $k_v > k_{cv}$ où k_{cv} est définie par (7.56) de façon étagée et si $\|Y(0)\| < \sqrt{\sigma}\mu$ alors $\|Y(t)\| < \sqrt{\sigma}\mu$ pour $t \geq 0$.

Preuve du résultat 2

C'est une application direct du premier résultat sur chaque palier des termes B_{ij} .

7.5.2.3 Résultat 3 : B_{ij} forme générale

Dans le cas général, si premièrement $k_v > k_{cv}$ avec $\alpha = 0$, et deuxièmement $\|Y(0)\| < \sqrt{\sigma}\mu$ alors l'équation de Riccati (7.39) admet une solution sur tout l'horizon temporel vérifiant : $\|Y(t)\| \leq \sqrt{\sigma}\mu$.

Preuve du résultat 3 Il existe une suite de fonctions étagées B_{ij}^n qui convergent uniformément vers les B_{ij} et dont les solutions $Y_n(t)$ des équations de Riccati associées existent sur tout l'horizon temporel et vérifient :

$$\forall n, \forall t \geq 0, \|Y_n(t)\| < \sqrt{\sigma}\mu$$

Grâce à la représentation linéaire de l'équation de Riccati (7.39), le théorème I.1.7 [Reinhard, 1982], assure la continuité sur tout compact des solutions de cette équation par rapport aux paramètres B_{ij} . En particulier, il existe une solution Y pour l'équation (7.39) dans sa forme générale. De plus, la suite $(Y_n)_n$ converge uniformément sur tout compact vers Y et

$$\forall t \geq 0, \|Y(t)\| \leq \sqrt{\sigma}\mu$$

7.5.3 Preuve du corollaire 1

Effectuons la décomposition de Q en valeurs singulières : $Q = U\Sigma V^T$ (U et V des matrices orthogonale et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières). Nous avons alors $Q^T Q = V\Sigma^2 V^T$. Comme Σ^2 est la matrice diagonale des valeurs propres de $Q^T Q$, nous venons de montrer (lemme 1) que Σ^2 est bornée par μ^2 . Par conséquent (comme U et V sont unitaires), nous avons $\forall x$,

$$|x^T Q x| = |x^T U \Sigma V^T x| < \mu \|x\|_2^2. \quad (7.60)$$

soit de manière équivalente

$$-\mu x^T x < x^T Q x < \mu x^T x, \quad (7.61)$$

et donc

$$0 < x^T L x < 2\mu x^T x, \quad (7.62)$$

Cette inégalité étant valable $\forall x$, nous pouvons conclure que :

$$0 < L < 2\mu I. \quad (7.63)$$

7.5.4 Preuve du corollaire 2

Pour montrer : $\mathbf{M}(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}} < 0$, développons l'expression de cette matrice :

$$\mathbf{M}(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}} = -k_v \mathbf{M}_c - \Delta \mathbf{C} + \mathbf{M}\mathbf{L} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}. \quad (7.64)$$

Il est donc équivalent de montrer (grâce à la passivité) la négativité de la matrice

$$\mathbf{M}(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}} = -k_v \mathbf{M}_c + \mathbf{M}(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_c + \mathbf{L}). \quad (7.65)$$

Par simple inégalité triangulaire nous montrons qu'il suffit, pour obtenir le résultat désiré, de choisir k_v tel que :

$$k_v > k_{cor2} = \kappa_{cv}(\|\mathbf{M}^{-1}\| \|\mathbf{C}_c\| + 2\mu). \quad (7.66)$$

Comme par ailleurs, $\kappa_{cv}(\alpha = 0)$ inclut k_{cor2} , alors le corollaire est démontré. De plus, nous avons

$$\kappa_{cv}(\alpha \neq 0) > \kappa_{cv}\alpha\sqrt{\|\mathbf{M}\|} + \kappa_{cv}\mu + k_{cor2}. \quad (7.67)$$

et par conséquent :

$$\mathbf{M}(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}} = -\kappa_{cv}(\alpha\sqrt{\|\mathbf{M}\|} + \mu) \mathbf{M}_c + \underbrace{\left(-k_{cor2}\mathbf{M}_c - \Delta \mathbf{C} + \mathbf{M}\mathbf{L} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}\right)}_{< 0} \quad (7.68)$$

D'autre part comme $\kappa_{cv}\mathbf{M}_c = \|\mathbf{M}\| \|\mathbf{M}_c^{-1}\| \mathbf{M}_c \geq \|\mathbf{M}\| \mathbf{I}$ alors

$$\mathbf{M}(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}} < -(\alpha\sqrt{\|\mathbf{M}\|} + \mu) \|\mathbf{M}\| \mathbf{I} \quad (7.69)$$

7.5.5 Preuve du lemme 2

Les corollaires précédents permettent de réécrire l'équation (7.34) de dérivation de V sous la forme :

$$\dot{V} = s^T \left[\mathbf{M}(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}} \right] s - s^T \mathbf{M}w \quad (7.70)$$

avec un premier terme négatif (corollaire 2). Si le dernier terme $\mathbf{M}w$ est borné alors le système (7.14) est uniformément ultimement borné ([Khalil, 2002], théorème 4.18). Le cas échéant, un terme de correction doit être ajouté au gain minimal pour assurer la bornitude du rayon de convergence. Nous montrons, qu'il est suffisant de rétablir le terme dépendant de α dans le gain minimal k_{cv} pour atteindre cet objectif. Dans la suite $\alpha > 0$. La dérivée de V satisfait grâce à (7.69) :

$$\dot{V} < \|\mathbf{M}\| \|w\| \left\| \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} s \right\| (-\alpha \left\| \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} s \right\| + 1) - \mu \left\| \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} s \right\|^2. \quad (7.71)$$

Par conséquent si $\left\| \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} s \right\| \geq \alpha^{-1}$ alors $\dot{V} < 0$ et

$$\dot{V} < -\mu\alpha^2, \quad (7.72)$$

Ceci signifie que $\left\| \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} s \right\|$ converge vers une boule de rayon α^{-1} au bout d'un temps inférieur à

$$\left\| (\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} s)(t=0) \right\| / \mu\alpha^2. \quad (7.73)$$

7.5.6 Observation sur la condition de proportionalité (H2)

Relâchons la contrainte de proportionalité entre k_p et k_v . Que se passe-t-il dans ce cas? Nous allons reproduire le raisonnement précédent, c'est-à-dire, borner $\mathbf{L} - \mu\mathbf{I}$ par une borne strictement inférieure à μ afin de pouvoir assurer en même temps sa bornitude (par 2μ) et la positivité de \mathbf{L} . Avec les mêmes notations que précédemment étudions les variations des valeurs propres de

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{L} - \mu\mathbf{I} \quad (7.74)$$

La dérivée temporelle d'une valeur propre λ de $\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$ (calculée grâce à son vecteur propre unitaire \mathbf{x}) est :

$$\dot{\lambda} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{M} [(\mathbf{Q} + \mu\mathbf{I})^2 + k_p \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_c - (k_v \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_c + \mathbf{M}^{-1} \Delta \mathbf{C})(\mathbf{Q} + \mu\mathbf{I})] \mathbf{x} \quad (7.75)$$

Soit en faisant un ré-arrangement des termes

$$\dot{\lambda} = \mathbf{x}^T \left[-k_v \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_c \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{M} (\mathbf{Q} + \mu\mathbf{I})^2 + (k_p - \mu k_v) \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_c - \mathbf{Q}^T \Delta \mathbf{C} (\mathbf{Q} + \mu\mathbf{I}) \right] \mathbf{x} \quad (7.76)$$

Nous retrouvons donc que si $k_p = \mu k_v$ avec μ constant, le résultat précédent : k_v apparaît uniquement au niveau du premier terme négatif dans $\dot{\lambda}$. Nous pouvons effectuer une légère extension de la contrainte de proportionalité (tout en gardant l'esprit de la démonstration précédente) : $k_p - \mu k_v = \text{constante}$ et μ constante.

7.6 Autres exemple

7.6.1 Terme de glissement (sliding)

La méthode de glissement [Slotine et Li, 1991] utilise la commande de latitude :

$$u_c = -\beta \operatorname{sgn}(s) \quad (7.77)$$

afin de rendre le système asymptotiquement stable. En effet, nous allons voir qu'en choisissant β suffisamment élevé, ce terme de rappel permet de ramener l'état vers la surface $s = 0$, achevant ainsi la convergence exponentielle (grâce à \mathbf{L} , de ϵ vers 0). Nous nous plaçons dans le cadre où $k > k_{cv}$ ($\alpha = 0$). Par conséquent le lemme 1 et ses deux corollaires sont vérifiés et la dérivée de V s'exprime :

$$\dot{V} = s^T \left[\mathbf{M}(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}} \right] s - s^T \mathbf{M} w, \quad (7.78)$$

et présente un premier terme négatif. Remplaçons w par son expression :

$$\dot{V} = s^T \left[\mathbf{M}(\mathbf{L} - \mathbf{D}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}} \right] s - s^T (\Delta \mathbf{M} \ddot{q}_d + \Delta \mathbf{C} \dot{q}_d + \Delta \mathbf{g} + \beta \operatorname{sgn}(s)), \quad (7.79)$$

Pour assurer la stricte négativité de \dot{V} , il suffit donc que β vérifie :

$$\beta > \|\Delta \mathbf{M} \ddot{q}_d + \Delta \mathbf{C} \dot{q}_d + \Delta \mathbf{g}\| \quad (7.80)$$

et dans ce cas, le système est asymptotiquement stable.

7.6.2 Résultat de [Qu et Dawson, 1996]

L'approche proposée par [Qu et Dawson, 1996] est basée sur la séparation des termes intervenant dans les équations dynamiques en deux parties : les termes connus (indexés par k : known) et les termes inconnus (dus à la connaissance imparfaite du modèle, indexés par u unknown) :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_k + \mathbf{M}_u, \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}_k + \mathbf{N}_u, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_k + \mathbf{C}_u, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_k + \mathbf{g}_u \quad (7.81)$$

Ces termes connus ne sont pas obligatoirement les termes utilisés dans la commande (les indices k et c ne sont pas confondus en général). D'autre part, les termes inconnus vérifient des propriétés de bornitude :

1. La matrice de masse vérifie :

$$\underline{m}\mathbf{I}_n \leq \mathbf{M}_u(q) \leq \overline{m}(q)\mathbf{I}_n, \forall q \quad (7.82)$$

\underline{m} est une constante positive et $\overline{m}(q)$ est une fonction positive définie.

2. Les forces de Coriolis et centripètes vérifient (la norme utilisée est la norme quadratique) :

$$\|\mathbf{C}_u(q, \dot{q})\| \leq \xi_c(q) \|\dot{q}\|, \forall q, \dot{q} \quad (7.83)$$

3. La force de gravité est bornée (les frottements sont négligés) :

$$\|\mathbf{g}_u(q)\| \leq \xi_g(q), \forall q \quad (7.84)$$

Nous vous présentons dans la suite un résultat extrait de [Qu et Dawson, 1996]. Ce résultat est basé sur le lemme de stabilité suivant.

7.6.2.1 Lemme de stabilité

Nous partons de la donnée d'une fonction de Lyapunov candidate V , c'est-à-dire, il existe par définition $\underline{\lambda} \geq 0$ et une fonction $\bar{\lambda}(\cdot)$ tels que :

$$\underline{\lambda} \|x(t)\|^2 \leq V(x) \leq \bar{\lambda}(x) \|x(t)\|^2 \quad (7.85)$$

Lemme

Avec $\bar{\lambda} \geq \underline{\lambda} > 0$, s'il existe $\phi_{i=0..2}$ constants tels que :

$$\dot{V}(x) \leq \|x\| \left(\phi_0 - \phi_1 \|x\| + \phi_2 \|x\|^2 \right) \quad \forall x \quad (7.86)$$

alors le système est uniformément borné par rapport à $B(0, d)$ et ultimement uniformément borné par rapport à $B(0, d')$ si les conditions suivantes sont remplies :

Conditions	Rayons de convergence
$\begin{aligned} &\phi_1 > 2\sqrt{\phi_0\phi_2} \\ &\phi_1^2 + \phi_1\sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_0\phi_2} > 2\phi_0\phi_2 \left(1 + \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}}} \right) \\ &\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_0\phi_2} > 2\phi_2 \ x_0\ \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} d &= \max \left\{ \frac{2\phi_0}{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_0\phi_2}}, \ x_0\ \right\} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}}} \\ d' &= \frac{2\phi_0}{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_0\phi_2}} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}}} \end{aligned}$

En plus l'état converge vers sa borne ultime exponentiellement avec le taux :

$$\frac{\sqrt{\phi_1^2 - 4\phi_0\phi_2}}{\bar{\lambda}} \quad (7.87)$$

Remarquons l'influence particulière de ϕ_1 dans ces équations : ce terme est toujours placé du côté du majorant dans les conditions (voir tableau précédemment). Il suffit donc de le choisir suffisamment élevé par rapport aux autres constantes du problème pour obtenir ce résultat de stabilité.

7.6.2.2 Le résultat

Le paramètre $L = \mathbf{I}$ est une matrice constante : $s = \dot{e} + le$ et la fonction de Lyapunov choisie est $V = V_1$ avec $P = M$. Les termes calculés (intervenant dans la définition de la commande par couple calculé (7.12)) sont :

$$M_c = M_k, N_c = N_k + l M_k \dot{e} + l C_k s \quad (7.88)$$

Les auteurs montrent que si l'on choisit M_c , K_p et K_v tels que : $M_c K_p = k_p I_n$ et $M_c K_v = k_v I_n$ avec k_p et k_v positifs, alors la fonction de Lyapunov $V = V_1 + V_2$

$$V = \frac{1}{2} s^T M s + \frac{k}{2} e^T e$$

avec $k = k_p + l k_v$ vérifie :

$$\dot{V}(x) \leq \|x\| \left(\xi_0 - \xi_1 \|x\| + \xi_2 \|x\|^2 \right) \quad (7.89)$$

où les ξ_i sont définis par :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{lk_p, k_v\} - \xi_3 & \xi_2 &= (1 + l^2) \xi_c + \sqrt{1 + l^2} \xi_c \\ \xi_3 &= \left[(1 + l^2) + 2\sqrt{1 + l^2} \right] \xi_c \sup \|\dot{q}_d\| + \frac{l}{2} (1 + \sqrt{1 + l^2}) \overline{m} \\ \xi_0 &= \sqrt{1 + l^2} (\xi_c \sup \|\dot{q}_d\| + \xi_g + \overline{m} \sup \|\ddot{q}_d\|) \end{aligned}$$

Les gains k_p et k_v étant présents uniquement au niveau de ξ_1 , ce dernier peut être choisi suffisamment élevé pour que l'inégalité (7.89) entre dans le cadre du lemme de stabilité précédent.

7.7 Conclusion

Nous avons apporté deux contributions dans ce chapitre. Premièrement une formalisation englobante des commandes par couple calculé robustes (illustrée par trois exemples). Deuxièmement, un résultat fin : le théorème du choix vivant dont la démonstration est basée sur la majoration de la solution d'une équation de Riccati non symétrique et non autonome sur tout l'horizon de simulation.

Chapitre 8

ARI Hybride pour les simulateurs redondants

Motivations Les simulateurs avancés redondants (utilisant des rails) offrent une capacité de restitution supplémentaire des sensations de mouvement. L'exploitation de cette capacité se fait actuellement par des méthodes de séparation fréquentielle sans tenir compte du recouvrement fréquentiel des translations des rails et de l'hexapode. Dans cette bande d'entrecouplement, ces deux degrés de liberté peuvent être utilisés de manière équivalente. Le but de notre approche est d'utiliser cette équivalence afin de gérer le problème de blocage des actionneurs¹.

Nous proposons dans ce chapitre, deux algorithmes hybrides² dont le but est d'exploiter la redondance des degrés de liberté pour assurer la continuité des sensations de mouvement (ou en d'autres termes minimiser les sensations incohérentes dues au freinage et amoindrir l'absence de sensations dues au blocage des actionneurs).

Nos ARIs Hybrides permettent de gérer explicitement toutes les étapes de la restitution inertielle : suivi des mouvement, freinage à l'approche des butées et enclenchement et désenclenchement du retour à l'origine.

Cadre général Nous allons présenter les algorithmes hybrides dans le cadre du mode longitudinal. Nous rappelons que pour ce mode, nous avons une redondance triple : la translation X des rails, la translation x de l'hexapode et la tilt coordination θ . Nous avons vu dans le chapitre 6, que cette dernière étant un mouvement très lent, présente une allure indépendante des deux autres degrés de liberté. Cette décorrélation montre que pour améliorer le rendu des sensations de mouvement, il faudra agir sur la paire (X, x) . Par conséquent, notre algorithme hybride ne fera apparaître que les translations (le mouvement de rotation sera utilisé mais ne figurera pas dans les états).

8.1 Préliminaires

8.1.1 Traitement préliminaire des translations

Pour les deux types de translation X ou x , nous utilisons, à la manière d'un ARI classique, un traitement préliminaire des accélérations de référence. Il s'agit de trois étapes : mise à l'échelle, filtrage et saturation (Fig. 8.1). Nous avons vu, dans le chapitre 6, que pour un scénario donné, l'Algorithme de Performance Maximale permet de déterminer les paramètres de ces trois étapes.

¹Le blocage des actionneurs se produit quand ils sont en butée et la consigne de l'ARI est de signe constant.

²Pour une introduction sur les systèmes dynamiques hybrides, le lecteur est renvoyé aux documents suivants : [Zaytoon, 2001] et [Van der Shaft et Schumacher, 1999]



FIG. 8.1 – Traitement préliminaire pour chaque degré de liberté : X et x

8.1.2 Modèle du robot de simulation

Comme il s'agit d'une première approche, le modèle utilisé est un modèle linéaire découplé (comme c'est le cas de tous les ARIs présentés dans le chapitre 5) dont la consigne est l'accélération :

$$\ddot{\xi} = u_{\xi}, \quad \xi \in \{x, X\} \quad (8.1)$$

8.1.3 Les contraintes de mouvement

Nous reprenons l'hypothèse classique de décorrélation entre les contraintes (section 4.7) : la position, la vitesse et l'accélération sont bornés (en valeur absolue) par les quantités respectives suivantes $\xi_L, \dot{\xi}_L, \ddot{\xi}_L$ ($\xi \in \{x, X\}$). Le tableau suivant liste les valeurs numériques utilisées pour les simulations.

Valeurs maximales	Hexapode x	Rails X
Position	0.3m	2.5m
Vitesse	0.4ms^{-1}	2.5ms^{-1}
Accélération	5ms^{-2}	5ms^{-2}

8.1.4 Le type de freinage

Le freinage parabolique (accélération de freinage constante $\ddot{\xi}_f$) sera utilisé afin d'arrêter le déplacement au niveau de sa course maximale $\pm \xi_L$ ($\xi \in \{x, X\}$) avec une vitesse nulle. La condition de déclenchement du freinage est (pour plus de détails voir section 4.7) :

$$\dot{\xi}^2 - 2\ddot{\xi}_f(\xi_L - |\xi|) \geq 0, \quad \xi \in \{x, X\} \quad (8.2)$$

L'accélération $\ddot{\xi}_f$ est un paramètre important car il permet de définir le volume de la zone libre (absence de freinage). Plus l'accélération de freinage est élevée plus cette zone est grande. Néanmoins, dans ce cas, les sensations incohérentes provoquées par le freinage sont plus marquées. Les figures 8.2 et 8.3 représentent les volumes des zones libres dans le plan des phases (position, vitesse) pour différentes accélérations de freinage (cette forme est indépendante de la valeur de l'accélération $\ddot{\xi}$). Nous remarquons que choisir $\ddot{\xi}_f = a_{\text{seuil}}$ (seuil de détection) permettrait d'adoucir considérablement les sensations de freinage mais réduirait sensiblement la zone libre.

Influence de l'accélération de freinage sur la taille de la zone libre Nous proposons de mesurer cette influence par le rapport entre le volume de la zone libre et celle théoriquement accessible (freinage instantané). Comme le profil de phase (Fig.8.2 et Fig.8.3) est indépendant de la valeur de l'accélération, ce rapport est égal au rapport surfacique. La surface théorique est de : $S_{\text{theo}} = 4\xi_L \dot{\xi}_L$. La surface de la zone libre est :

$$S_{\text{zl}} = \begin{cases} \frac{16}{3} \xi_L^{\frac{3}{2}} \sqrt{\ddot{\xi}_f} & \text{si } 0 \leq \ddot{\xi}_f < \frac{1}{4} \frac{\dot{\xi}_L^2}{\xi_L} \\ 4 \left[\xi_L - \frac{1}{4} \frac{\dot{\xi}_L^2}{\ddot{\xi}_f} \right] \dot{\xi}_L + \frac{2}{3} \xi_L^3 \ddot{\xi}_f^{-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

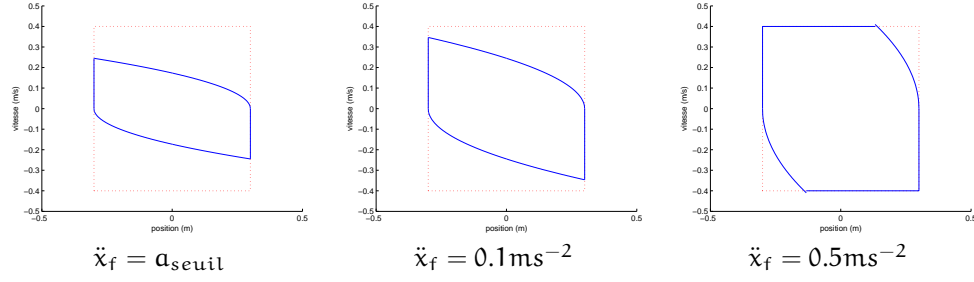


FIG. 8.2 – Zone libre (freinage parabolique) : Hexapode

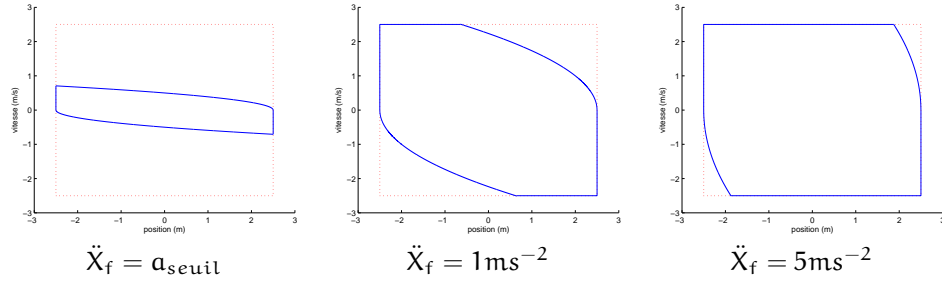


FIG. 8.3 – Zone libre (freinage parabolique) : Rail

La figure 8.4 montre l'évolution du rapport S_{zl}/S_{theo} en fonction de l'accélération de freinage. Cette courbe met en évidence l'existence d'un phénomène de saturation. Par conséquent, à partir d'un certain seuil, l'augmentation de \ddot{x}_f n'aura pas de conséquence significative sur la taille de la zone libre. En revanche, la durée de freinage subira toujours une réduction (la durée du freinage parabolique est de : $\frac{\dot{x}_L}{\ddot{x}_f}$ et donc majorée par $\frac{\dot{x}_L}{\ddot{x}_f}$.)

8.1.5 Le mouvement de retour

Le mouvement de retour s'effectue à partir du point $\xi = \pm \xi_L$ et $\dot{\xi} = 0$ (conséquence du freinage). Cette stratégie consiste à utiliser l'accélération de retour a_r :

$$u_\xi = -\text{sign}(\xi) \begin{cases} a_r & \text{si } \frac{\xi_L}{2} \leq |\xi| \leq \xi_L \\ -a_r & \text{si } 0 \leq |\xi| \leq \frac{\xi_L}{2} \end{cases} \quad (8.3)$$

Dans le cas où $a_r = a_{seuil} = 0.05 \text{ ms}^{-2}$, ce mouvement de retour est imperceptible. La durée de l'opération de retour est de : $2\sqrt{\frac{\xi_L}{a_r}}$.

8.2 ARI Hybride Symétrique

L'idée générale de l'ARI Hybride Symétrique est d'utiliser l'une ou l'autre des translations (X ou x) de manière alternée (le changement de mode s'effectuant lors des blocages). Dans un simulateur non redondant (hexapode uniquement), le blocage de la translation provoque les opérations successives de freinage et de retour en position neutre. Durant ces deux étapes, la réponse du robot aux

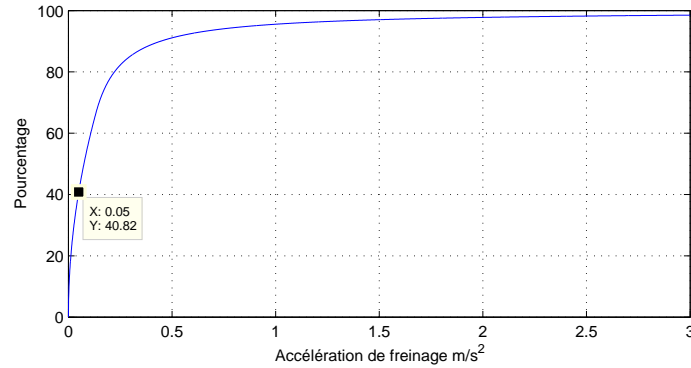


FIG. 8.4 – Hexapode : Rapport zone libre/zone théorique en fonction de l'accélération de freinage (Pour a_{seuil} le rapport est de 40.82%)

actions du conducteur est successivement incohérente et absente. L'objectif de notre approche redondante est de réactiver plus rapidement les réponses du simulateur en utilisant le degré de liberté supplémentaire pendant la phase où l'effet du premier est neutralisé : retour.

Nous appelons cet algorithme symétrique, car les deux degrés de liberté jouent le même rôle dans la restitution des sensations. Pour chaque degré de liberté nous distinguons 4 modes de fonctionnement propres (désignés par un entier : 1 à 4) :

- Actif (1) : le degré de liberté ξ reproduit l'accélération de référence (accélération réelle traitée par les blocs de mise à l'échelle, filtrage et saturation - voir Fig. 8.1)
- Frein (2) : Freinage parabolique à l'approche des butées (voir 8.1.4)
- Retour (3) : retour en position neutre avec un mouvement imperceptible (sous le seuil de détection). Voir 8.1.5
- Neutre (4) : accélération nulle

Règles de bon fonctionnement Pour la construction de l'algorithme hybride symétrique, nous avons établi une série de règles qui permettent de garantir son bon fonctionnement (causalité, évitement du phénomène de blocage de l'automate ou de sauts infinis) :

- A la fin du freinage, le degré de liberté arrive à sa butée avec une vitesse nulle
- Le freinage est immédiatement suivi d'un retour en position neutre
- Le retour en position neutre ramène le degré de liberté à l'origine avec une vitesse nulle
- La (ré)activation d'un degré de liberté ne se fait qu'à partir du point neutre : $\xi = 0$ et $\dot{\xi} = 0$
- Dans le cas où l'un des degrés de liberté est en mode freinage, nous interdisons le mode actif au deuxième. En effet, les sensations incohérentes de freinage risquent d'altérer la qualité de restitution de la translation libre.

8.2.1 Présentation de l'algorithme

Présentation générale La figure 8.5 représente l'automate hybride symétrique. Plaçons nous momentanément dans le cadre d'un freinage instantané. Dans ce cas, l'automate consiste uniquement dans les 4 états qui sont à l'extérieur de la zone encadrée, c'est-à-dire, une alternance entre l'activation des rails et celle de l'hexapode quand les limites des mouvements sont atteintes. Le changement du degré de liberté actif est accompagné par un retour à l'origine de celui bloqué. Quand le retour de la translation bloquée est achevé, celle ci se stabilise en position neutre et devient "prête à être activée" de nouveau.

8.2.3 Simulations

Pour les simulations, nous avons choisi un profil d'accélération réel extrait de la thèse [Dagdelen, 2005] effectuée à Renault : (Fig. 8.8). L'état initial de l'automate hybride est (**Rail** : actif, **Hexapode** : neutre). Les valeurs numériques des accélérations de freinage sont : $\ddot{X}_f = 1\text{ms}^{-2}$ et $\ddot{x}_f = 0.2\text{ms}^{-2}$. Les deux mouvements de retour pour les rails et l'hexapode sont imperceptibles : $a_r = a_{\text{seuil}} = 0.05\text{ms}^{-2}$.

La figure 8.7 représente le changement de modes propres des deux translations : Rail et Hexapode. Nous constatons l'existence de 5 instants de permutation d'états (notés t_1 à t_5). Ces instants seront indiqués sur les autres figures par des traits verticaux. Grâce à cette figure, nous pouvons distinguer 6 phases dans l'évolution de l'automate hybride :

- De $t = 0\text{s}$ à $t = t_1$: (**Rail** : actif, **Hexapode** : neutre) : c'est l'état initial de l'automate. A l'instant t_1 la condition de déclenchement du freinage des rails est vérifiée engendrant la première permutation.
- De $t = t_1$ à $t = t_2$: (**Rail** : frein, **Hexapode** : neutre). Les rails freinent. Pendant cette phase, l'hexapode est immobile. Quand les rails arrivent en position limite, l'état suivant est enclenché.
- De $t = t_2$ à $t = t_3$: (**Rail** : retour, **Hexapode** : actif). Tandis que les rails suivent le mouvement de retour imperceptible, l'hexapode devient actif. A l'instant t_3 la condition de déclenchement du freinage de l'hexapode est vérifiée.
- De $t = t_3$ à $t = t_4$: (**Rail** : retour, **Hexapode** : frein). Les rails continuent leur retour, mais l'hexapode est contraint de freiner.
- De $t = t_4$ à $t = t_5$: (**Rail** : retour, **Hexapode** : retour). Le freinage de l'hexapode est terminé et son retour est entamé. Les rails s'approchent de la position neutre.
- De $t = t_5$ à $t = 20\text{s}$: (**Rail** : actif, **Hexapode** : retour). Les rails sont redevenus "actif" après l'atteinte de la position neutre. L'hexapode continue son retour.

L'impact de ces changements de modes sur les accélérations des rails et de l'hexapode est représenté dans la figure 8.9. Le haut de figure 8.8 construit la réponse du simulateur à partir des trois contribution (X , x et θ) : $\ddot{X} + \ddot{x} + g\theta$ (où g est la force de gravité) et la compare par rapport au profil de référence. Notons que l'angle de tilt (bas de la figure Fig.8.8) est indépendant du mode comme indiqué dans le schéma Simulink Fig.8.6). Les figures 8.11 et 8.10 permettent de voir l'évolution des vitesses et des positions des deux degrés de liberté X et x .

Observations générales

- On observe dans la figure 8.8 que cet algorithme permet une bonne restitution initiale grâce à l'utilisation des rails au début de la simulation.
- La phase de retour des rails est casi-entièrement "couverte" par la phase active de l'hexapode.
- La lenteur de mouvement de l'angle de tilt induit des erreurs dans la dernière phase de simulation (à partir de 9s).

8.3 ARI Hybride Maître/Esclave

La philosophie de cet algorithme différencie le rôle des deux degrés de libertés X et x . L'un est choisi comme Maître, c'est-à-dire, responsable de restituer les sensations de mouvement. L'autre (l'Esclave), compense les mauvais comportements de son Maître en produisant des accélérations opposées à celles du freinage. Il permet également d'accélérer le retour du Maître en position neutre, par la même technique de compensation.

Par conséquent, la symétrie des degrés de liberté n'est plus vérifiée et les modes propres des deux translations sont différents. Pour le Maître, ces modes sont (identifiés par leurs numéros) :

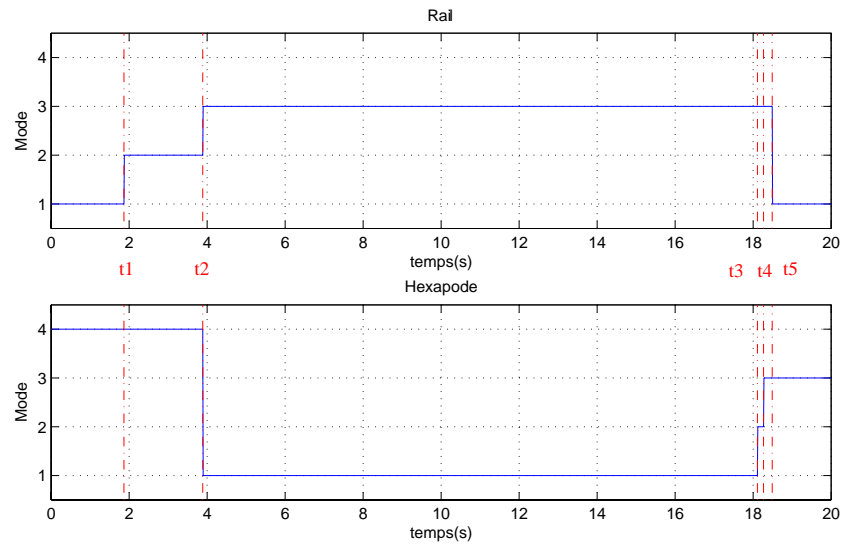


FIG. 8.7 – Les modes propres : rail et hexapode (ARI symétrique)

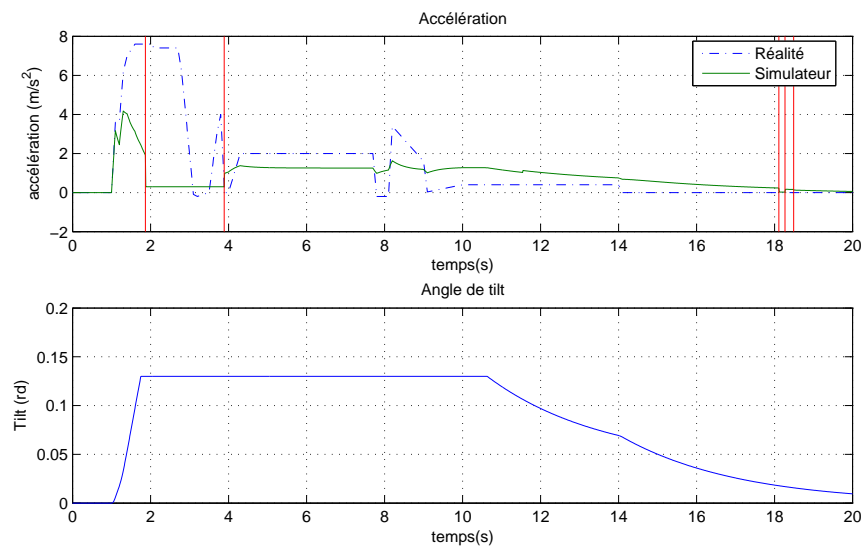


FIG. 8.8 – Haut : Accélération réelle et Accélération du simulateur ; Bas : Angle de tilt (ARI symétrique)

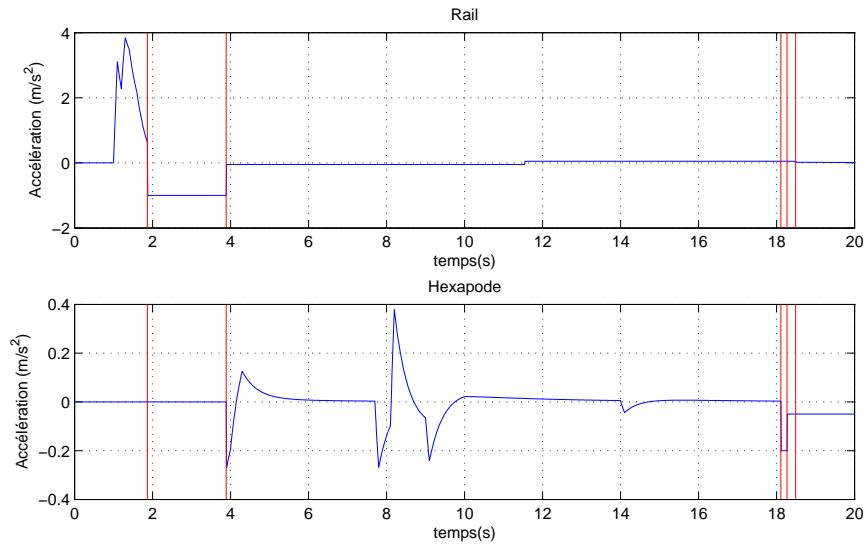


FIG. 8.9 – Les accélérations : rail et hexapode (ARI symétrique)

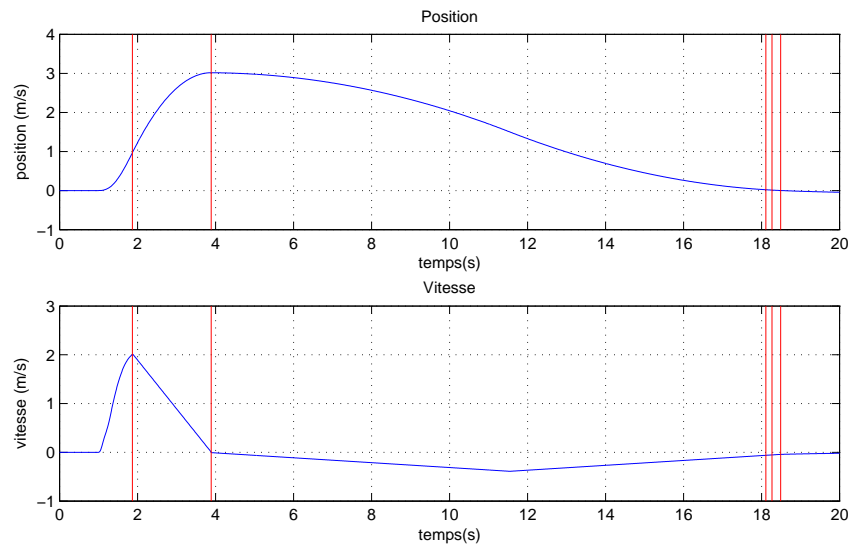


FIG. 8.10 – Déplacement et vitesse des rails (ARI symétrique)

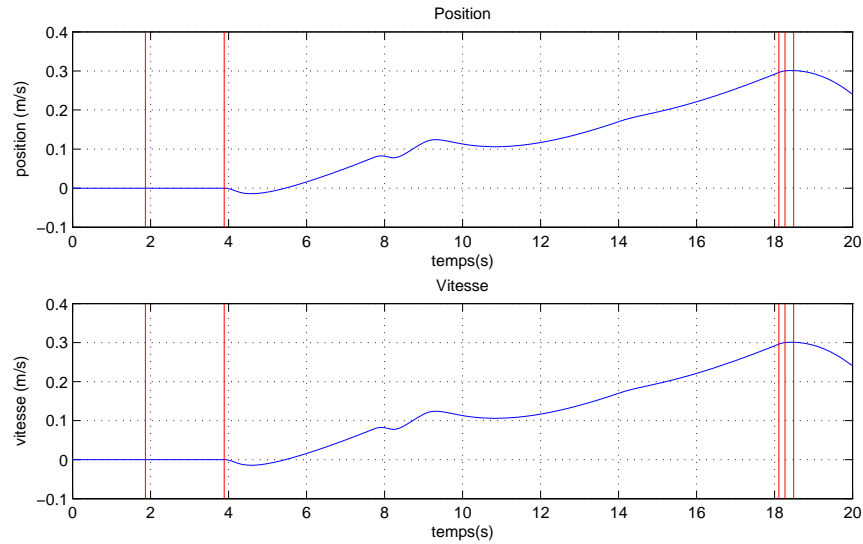


FIG. 8.11 – Déplacement et vitesse de l'hexapode (ARI symétrique)

- Actif (1) : reproduction de l'accélération de consigne
- Frein (2) : freinage parabolique à l'approche des butées
- Retour (rapide) (3) : retour effectué avec une accélération $a_r > a_{seuil}$
- Retour lent (imperceptible) (4) : retour avec $a_r = a_{seuil}$
- Neutre (5) : accélération nulle

Les modes de l'Esclave sont :

- Contre freinage (1) : mode associé au mode Frein du Maître consistant à produire l'opposé de la première accélération afin d'annuler l'accélération totale du cockpit
- Contre retour (rapide) (2) : mode analogue au contre freinage associé au retour rapide du Maître
- Freinage (3) : freinage parabolique à l'approche des butées
- Retour (4) : retour en position neutre
- Neutre (5) : accélération nulle

Règles de bon fonctionnement

- Le freinage permet d'arriver aux limites $\xi = \pm \xi_L$ et $\dot{\xi} = 0$
- Le freinage est immédiatement suivi d'un mouvement de retour. Si l'Esclave est dans sa zone libre, ce retour est un retour rapide. Sinon, il s'agit d'un retour lent.
- La (ré)activation du Maître ne se fait qu'à partir de sa position neutre (l'Esclave ne doit pas être en mode frein).
- Après le contre-retour, l'Esclave subit le mouvement de retour en position neutre. Contrairement à l'ARI hybride symétrique où le retour se fait à partir des points $\xi = \pm \xi_L$ et $\dot{\xi} = 0$, le point de déclenchement du retour est a priori inconnu dans cette approche. La stratégie de retour devra garantir la convergence de l'état $(\xi, \dot{\xi})$ à l'origine, indépendamment du point de déclenchement.

A partir de la dernière remarque nous redéfinissons la méthode de retour pour l'Esclave :

Le retour de l'Esclave La technique de retour de l'Esclave doit être capable de ramener un point quelconque $(\xi, \dot{\xi})$ à l'origine sans dépasser une accélération limite a_{lim} . Nous avons choisi un rappel

par un bouclage d'état proportionnel dérivé :

$$\ddot{\xi} = -\mu\dot{\xi} - k\xi \quad (8.4)$$

8.3.1 Présentation de l'algorithme

Présentation générale La figure 8.12 représente l'automate hybride Maître/Esclave. Étant donné la capacité supérieure de déplacement des rails par rapport à l'hexapode, nous avons choisi, dans cet automate, le premier comme Esclave et le dernier comme maître.

Comme dans le cas précédent, si nous nous plaçons momentanément dans le cadre d'un freinage instantané, alors cet automate consiste uniquement dans les 4 états qui sont à l'extérieur de la zone encadrée, c'est-à-dire, la succession des états suivants :

- État initial (**Hexapode** : actif, **Rail** : neutre) : Le Maître est actif, l'Esclave est immobile
- (**Hexapode** : frein, **Rail** : contre-frein) : Le Maître freine à l'approche des butées, l'Esclave accompagne ce freinage par une accélération opposée à celle du premier afin d'annuler l'accélération totale
- (**Hexapode** : retour, **Rail** : contre-retour) : A partir des limites du Maître, un mouvement de retour rapide est entamé (accompagné par un contre retour de l'Esclave)
- (**Hexapode** : actif, **Rail** : retour) : Arrivé à sa position neutre, le maître est réactivé. Pendant ce temps l'Esclave entame son retour en position neutre afin d'améliorer sa disponibilité pour son Maître. A partir de cet état deux permutations sont possibles : le retour à l'état initial (**Hexapode** : actif, **Rail** : neutre) si le retour des rails est terminé ou le retour à (**Hexapode** : frein, **Rail** : contre-frein) si l'hexapode approche de ses limites.

La zone encadrée est formée des états qui permettent de gérer les cas où pendant les opérations de contre-freinage ou de contre-retour, l'Esclave arrivant aux butées, est contraint de freiner. Dans cette zone l'Esclave ne joue plus son rôle de compensation et l'algorithme hybride produit des sensations incohérentes. Les transitions utilisées dans Fig.8.12 sont identiques à celles présentées pour l'algorithme symétrique.

8.3.2 Remarques

- Cet algorithme permet de réduire les sensations de freinage et l'accélération du retour en position neutre du Maître.
- La capacité de restitution de mouvement de l'hexapode (Maître) étant inférieure à celle des rails, l'amplitude des accélérations reproduites par cet ARI est inférieure à celle de l'ARI symétrique.
- Dans certains cas, le retour de l'Esclave peut être perçu par le conducteur.

8.3.3 Simulations

Le même profil d'accélération a été choisi (multiplié par un facteur d'échelle de 1/2 pour une meilleure visualisation des résultats). Les valeurs numériques des accélérations sont :

- freinage (ou contre-freinage) : 0.3ms^{-2}
- retour (ou contre-retour) : 0.5ms^{-2}
- frein Esclave : 0.6ms^{-2}

Pour le retour des rails (Esclave), les constantes μ et k ont été respectivement fixées à : $1/\tau$ et $1/\tau^2$ avec $\tau = 1.45\text{s}$.

La figure 8.14 représente le changement de modes propres des deux translations : Rail et Hexapode. Nous constatons l'existence de 4 instants de permutation d'états (notés t_1 à t_4). Ces instants seront indiqués sur les autres figures par des traits verticaux. Grâce à cette figure, nous pouvons distinguer 5 phases dans l'évolution de l'automate hybride :

- De $t = 0s$ à $t = t_1$: (**Hexapode** : actif, **Rail** : neutre) : c'est l'état initial de l'automate. A l'instant t_1 la condition de déclenchement du freinage de l'hexapode est vérifiée engendrant la première permutation.
- De $t = t_1$ à $t = t_2$: (**Hexapode** : frein, **Rail** : contre-frein) : le freinage de l'hexapode est contre balancé par une accélération opposée des rails (de telle sorte que l'accélération totale ressentie par le conducteur soit nulle).
- De $t = t_2$ à $t = t_3$: (**Hexapode** : retour, **Rail** : contre-retour) : le retour de l'hexapode s'effectue avec une accélération supérieure au seuil de perception a_{seuil} compensée par les rails.
- De $t = t_3$ à $t = t_4$: (**Hexapode** : actif, **Rail** : retour). A l'instant t_3 le retour de l'hexapode étant achevé ce degré de liberté est réactivé. Pendant ce temps, les rails subissent un mouvement de retour pour améliorer leur capacité à réagir aux futures opérations.
- De $t = t_4$ à $t = 20s$: (**Hexapode** : actif, **Rail** : neutre). Le retour des rails est terminé. Celles ci se stabilisent en position neutre. L'hexapode est toujours actif.

L'impact de ces changements de modes sur les accélérations des rails et de l'hexapode est représenté dans la figure 8.16. Le haut de figure 8.15 construit la réponse du simulateur à partir des trois contributions (X , x et θ) : $\ddot{X} + \ddot{x} + g\theta$ (où g est la force de gravité) et la compare par rapport au profil de référence. Notons que l'angle de tilt (bas de la figure Fig.8.15) est indépendant du mode comme indiqué dans le schéma Simulink Fig.8.13). Les figures 8.18 et 8.17 permettent de voir l'évolution des vitesses et des positions des deux degrés de liberté X et x .

Observations générales

- Comme la capacité de mouvement de l'hexapode est inférieure à celle des rails, la restitution initiale est inférieure à celle de l'algorithme symétrique.
- Le retour de l'Esclave à $t = 4s$ introduit localement une accélération opposée à la référence.
- La deuxième phase (de 4 à 13s) d'activation du Maître permet une meilleure reproduction des hautes fréquences.
- La lenteur de mouvement de l'angle de tilt induit, également dans ce cas, des erreurs dans la dernière phase de simulation (à partir de 9s).

8.4 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre deux méthodes heuristiques de restitutions inertielles basées sur les automates hybrides. Ces deux automates permettent d'éviter l'arrêt de reproduction des stimulations inertielles en utilisant la redondance des simulateurs basés sur des rails.

L'ARI hybride symétrique permet une bonne restitution initiale, mais engendre des sensations incohérentes dues au freinage. L'ARI Hybride Maître/Esclave, possède une moindre capacité de restitution mais réduit considérablement les mauvaises sensations en compensant les freinages et en accélérant les retours en positions neutres.

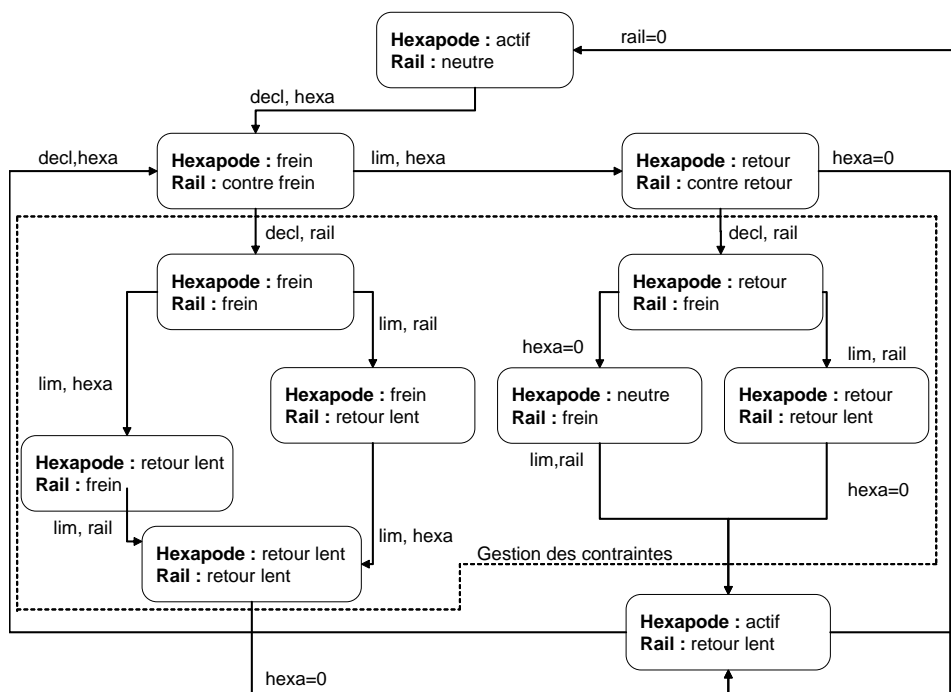


FIG. 8.12 – ARI Hybride Maître/Esclave

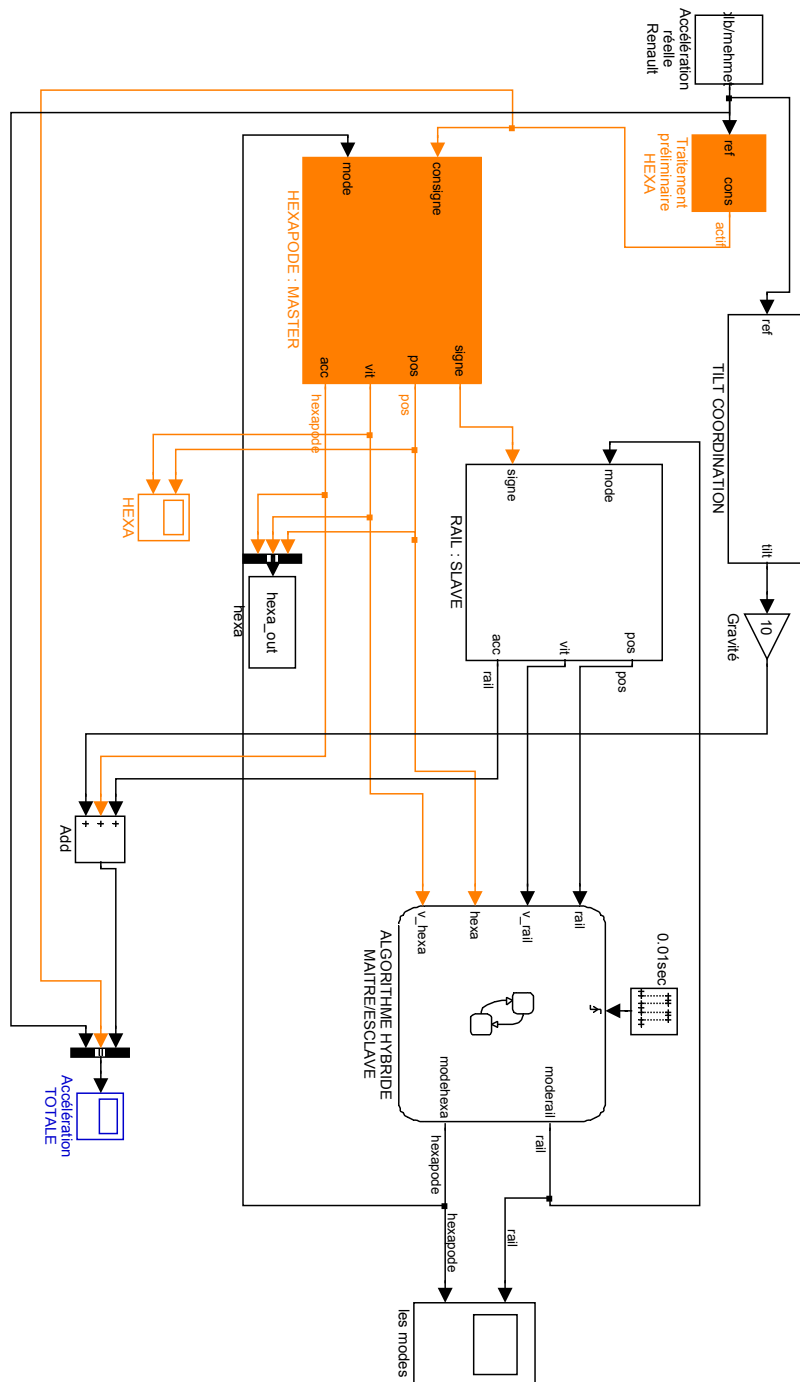


FIG. 8.13 – Le schéma Simulink de l’Algorithme Hybride Maître/Esclave

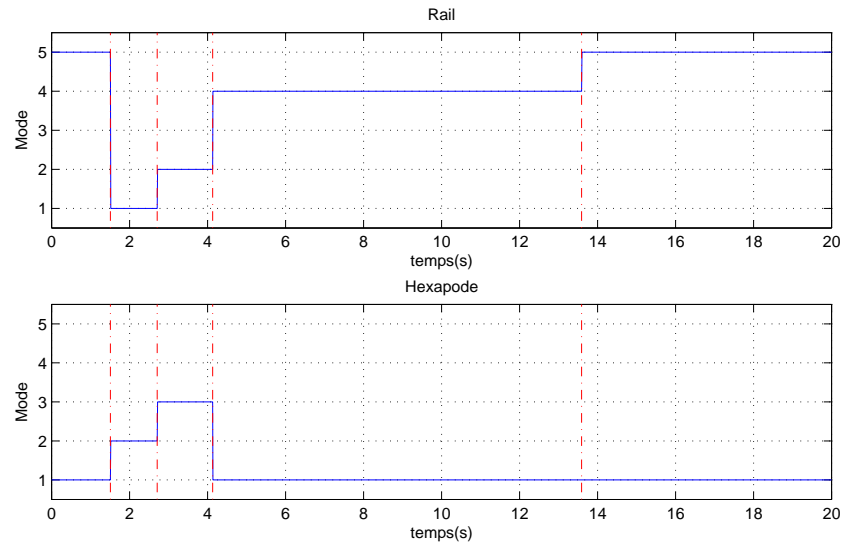


FIG. 8.14 – Les modes propres : rail et hexapode (ARI Maître/Esclave)

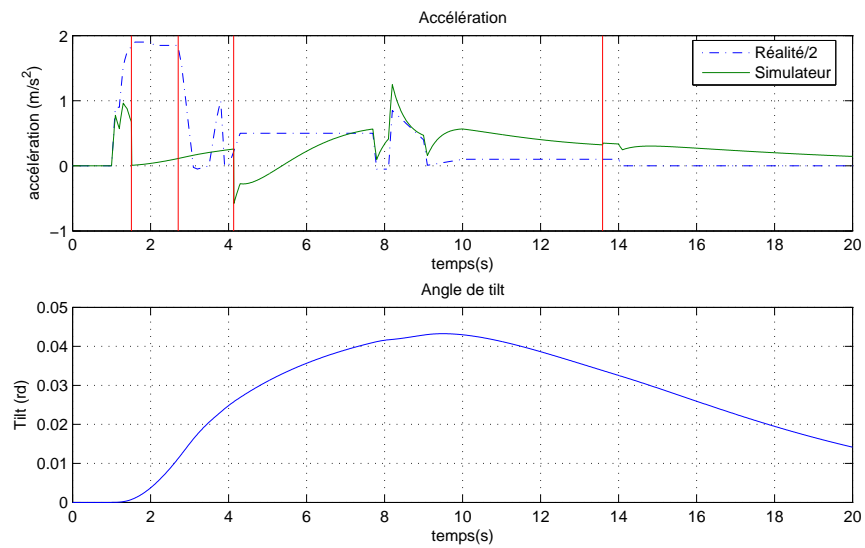


FIG. 8.15 – Haut : Accélération réelle et Accélération du simulateur; Bas : Angle de tilt (ARI Maître/Esclave)

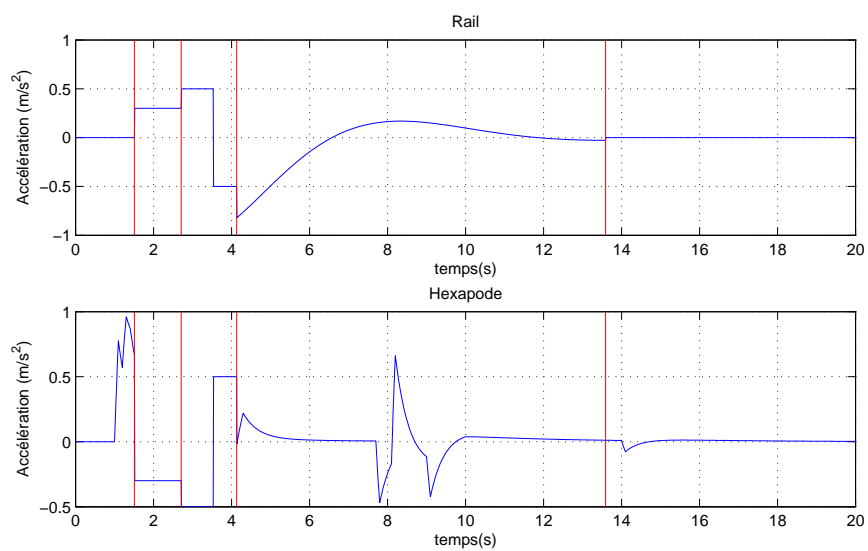


FIG. 8.16 – Les accélérations : rail et hexapode (ARI Maître/Esclave)

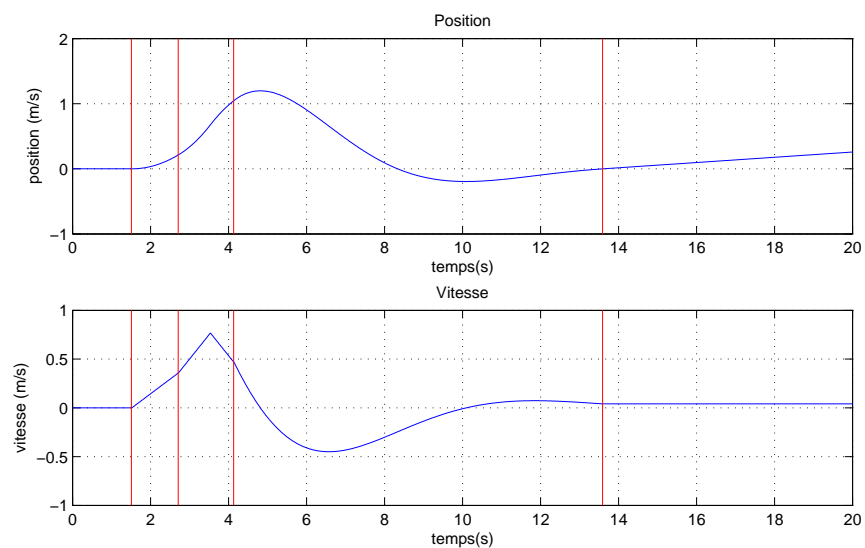


FIG. 8.17 – Déplacement et vitesse des rails (ARI Maître/Esclave)

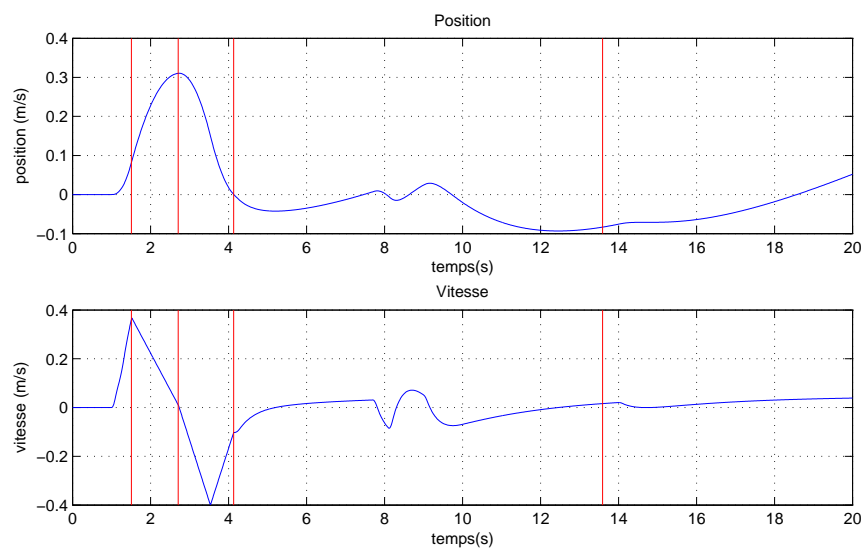


FIG. 8.18 – Déplacement et vitesse de l'hexapode (ARI Maître/Esclave)

Conclusion

L'objectif de cette thèse est d'améliorer le rendu des sensations de mouvement propre sur un simulateur de conduite. Cette illusion de déplacement se construit, chez le conducteur, à partir de la fusion d'informations (ou excitations sensorielles) capturées par son système de perception. Il s'agit, dans un vrai véhicule ou dans un simulateur, des informations visuelles (mouvement de la scène visuelle), proprioceptives (positions relatives des organes du corps), tactiles (détection des vibrations), vestibulaires (détection du mouvement de la tête dans l'espace), etc. Parmi ces éléments, nous avons approfondi l'étude de la contribution vestibulaire afin de l'améliorer dans le cadre de la simulation. En d'autres termes, nous nous sommes proposé de générer avec le mécanisme de mouvement des trajectoires du cockpit de simulation dont la perception par le conducteur est proche de celle d'un vrai véhicule.

Le mécanisme de mouvement d'un simulateur de conduite présente une enveloppe de mouvement considérablement réduite par rapport à une conduite réelle. Les intervalles de déplacement des actionneurs sont de quelques dizaines de centimètres pour les plateformes de type Gough-Stewart à base fixe et atteignent des déplacements d'une dizaine de mètre pour des simulateurs redondants où la base de l'hexapode est posée sur des rails.

Comment alors reproduire les sensations de mouvement dans un simulateur de conduite malgré la taille réduite de son enveloppe de mouvement ? C'est le problème de la restitution inertielle.

La réponse que nous avons proposée est basée sur la construction d'un modèle complet de la simulation formé par le couple "excitateur/récepteur" : plateforme de simulation/système vestibulaire. Ce modèle permet de relier la commande des actionneurs du robot à la sensation de mouvement engendrée par le mouvement de celui-ci. Ainsi commander le système précédent consiste à suivre des profils de perception (sensations vestibulaires) et non des vraies trajectoires.

Alors que le modèle dynamique du robot de simulation représente une des contributions de cette thèse, le modèle vestibulaire est un modèle linéaire choisi parmi les modèles proposés dans la littérature. La validité du deuxième modèle est essentielle afin de garantir la cohérence et le bon fondement de notre approche. Dans cette perspective, nous avons fourni (chapitre 3) une description anatomique du système vestibulaire et une synthèse de sa modélisation, conclues par le choix d'écarter l'étude de la réponse subjective de l'individu (notion abstraite mal définie) au profit de la réponse afférente des neurones vestibulaires (quantité réelle). Nous avons également étayé (chapitre 4) notre étude de la plateforme de simulation en introduisant des spécificités importantes à la robotique parallèle : les singularités, l'espace de travail, les modèles géométriques direct et inverse. Notons que la construction des modèles dynamiques dans le cadre de la simulation de conduite est un travail original. En effet, dans la littérature du domaine, les modèles sont souvent linéaires (doubles intégrateurs) et ne permettent pas de rendre compte des phénomènes de couplage, de retard et d'inertie inhérents au robot.

La méthode classique de commande des simulateurs de conduite est basée sur une structure à deux étapes. Premièrement une Algorithme de Restitution Inertielle (ARI) permet de projeter la trajectoire d'un véhicule réel en une trajectoire réalisable par le robot de simulation tout en préservant de manière approchée la qualité des sensations. Deuxièmement, un algorithme de suivi permet de poursuivre la trajectoire projetée. Nous avons effectué (chapitre 5), une synthèse des ARIs utilisés dans le cadre de la simulation de vol ou de conduite. Parmi ces algorithmes, l'ARI optimal

maximise heuristiquement et statistiquement le rendu des sensations de mouvement étant donné les contraintes de mouvement du robot.

Partant de l'idée de l'ARI optimal et munis du modèle complet de simulation, nous nous sommes intéressés à l'étude précise et déterministe de la performance maximale d'un simulateur de conduite. Pour un scénario de référence donné (défini par un profil de perception), nous avons utilisé, dans un premier temps, le formalisme de la commande optimale afin de calculer (hors ligne) le meilleur compromis entre un suivi parfait des sensations de mouvement et le respect des contraintes de déplacement. Les résultats obtenus sont conservatifs à cause, entre autres, de la difficulté de calibrage des matrices de poids. Ainsi, nous avons adopté dans une seconde approche, la programmation non linéaire (Algorithme de Performance Maximale, APM) afin d'éliminer le problème du calibrage en intégrant explicitement les limitations du robot. Les résultats obtenus sont considérablement supérieurs à ceux de la méthode précédente grâce à l'exploitation complète de l'enveloppe de mouvement. En effet notre méthode permet non seulement de tenir compte de la dynamique du robot, mais aussi de lui donner la possibilité de s'approcher des limites de son mouvement contrairement aux méthodes classiques où une zone centrale (autour d'une position neutre) de fonctionnement est privilégiée.

Afin d'évaluer les performances de nos algorithmes et de les comparer avec les algorithmes classiques, nous avons établi un ensemble d'indicateurs. Ces derniers se partagent en deux catégories : l'IP indicateur de suivi permettant d'évaluer la qualité en terme d'erreur d'amplitude et (IP_{allure}, α^*) indicateurs mesurant la qualité du suivi en terme d'allure. Ces derniers permettent de mettre en évidence la supériorité de l'APM sur les autres méthodes, et notamment l'APM utilisant la redondance des rails (meilleur IP et meilleur suivi d'allure pour quasiment le plus petit facteur d'agrandissement). Nous avons également observé que la tilt coordination, très importante pour la reproduction des basses fréquences, est caractérisée par un mouvement de rotation très lent pouvant induire des erreurs résiduelles. Enfin les bandes passantes des rails et de l'hexapode se recoupent au niveau des hautes fréquences suggérant l'exploitation de cette redondance fréquentielle.

Malgré le caractère hors ligne de l'étude de la performance maximale, ses applications sont importantes. La première est l'aide au calibrage des algorithmes de restitution inertielle (ARI) et/ou des robots de simulation en amont de leurs constructions, partant d'un paramétrage de ces derniers et en considérant les indicateurs de performance comme mesure de la qualité (devant se rapprocher le plus possible de la qualité maximale, résultat de l'APM). La deuxième est la résolution du problème de redondance dans les simulateurs à rails XY par l'établissement d'une hiérarchie des modes de fonctionnement du robot, basée sur le calcul des performances maximales.

Le problème de la redondance a été également traité dans le chapitre 8 en utilisant le formalisme des systèmes dynamiques hybrides. Nous avons proposé deux méthodes heuristiques : l'algorithme symétrique et l'algorithme maître/esclave qui permettent d'activer et de désactiver l'utilisation d'un degré de liberté (un seul d.d.l. est utilisé à la fois) selon sa proximité avec ses limites de mouvement. L'algorithme symétrique est basé sur une logique de relais. Les deux d.d.l. reproduisent les accélérations de référence à tour de rôle et la permutation s'effectue quand le d.d.l. actif a terminé le freinage et entame le retour imperceptible en position neutre. L'algorithme maître/esclave différencie le rôle des deux d.d.l. : c'est uniquement le d.d.l. maître qui reproduit les accélérations de référence tandis que l'esclave compense les mauvais comportements (freinage et retour en position neutre) du maître. Par conséquent, les phases de freinages et de retour sont perçues par le conducteur comme des phases où les sensations sont absentes. Les simulations réalisées sur ces deux algorithmes montrent que l'ARI maître/esclave est plus adapté à la simulation de conduite. La validation de ces méthodes hybrides par le biais de méthodes formelles nous permettra d'assurer leur bon fonctionnement indépendamment du scénario de test. Notons néanmoins que la vérification formelle atteint ses limites quand l'automate hybride est dans sa forme générale (équations dynamiques non linéaires). Les méthodes exactes se révèlent limitées même au niveau des automates appelés " linéaires " où la dérivée des variables dynamiques est constante. En effet, pour ce type de systèmes, le problème d'atteignabilité est indécidable (hormis quelques cas théoriques bien connus). Dans le cas général, des outils de calcul approchés permettent de traiter les dynamiques linéaires par morceaux (description), comme l'outil

d/dt .

Dans la perspective d'utiliser les trajectoires délivrées par ces algorithmes hybrides, nous avons développé un algorithme robuste de suivi. En réalité, il s'agit d'une étude théorique générale (et non spécifique aux robots de simulation) dans laquelle nous avons élaboré une revue générale de la commande par couple calculé. Il s'agit de l'établissement d'une formalisation englobante basée une étude énergétique et sur un changement d'état. Nous avons également développé un résultat fin : le théorème du choix vivant qui affirme (sous certaines conditions sur le modèle dynamique et sur les paramètres de la commande) l'existence d'une borne minimale sur les gains qui garantit la robustesse de la commande. La difficulté principale dans l'établissement de ce théorème est la majoration de la solution d'une équation de Riccati non symétrique non autonome sur tout l'horizon temporel. En effet les résultats de majoration pour ce type d'équations sont généralement asymptotiques. L'utilisation de la caractérisation spectrale jointe à l'holomorphie des solutions nous a permis d'améliorer un résultat existant en éliminant la taille du système du gain minimal.

Perspectives

L'algorithme de Performance Maximale (APM) est une approche hors ligne qui permet de générer les meilleures trajectoires (au sens de l'erreur quadratique des sensations) pour un scénario de référence donné et connu a priori. Par ailleurs, des techniques de détection de scénario en temps réel ont vu le jour grâce à l'utilisation des Chaînes de Markov Cachées. Certaines de ces techniques testées sur un vrai véhicule ou dans un simulateur ont montré des résultats intéressants : les scénarios peuvent être détectés au bout d'une durée de 1 à 2 secondes avec un taux de succès de reconnaissance de 95%. Comment peut-on alors combiner notre APM avec les algorithmes de détection de scénario pour optimiser le comportement du simulateur en temps réel ? Une première réponse peut être donnée par la construction, en amont de la mise en oeuvre du simulateur, d'une banque de trajectoires optimisées pour chaque scénario de conduite. Ainsi " en ligne ", une fois le scénario détecté, la trajectoire optimale correspondante est poursuivie par l'algorithme de suivi. Malheureusement ce raisonnement dépend de la définition du terme " scénario ". Pour les algorithmes de reconnaissance, ce terme signifie généralement l'intention du conducteur : tourner à droite, dépasser, freiner, accélérer, etc. Il s'agit donc d'une notion dénuée d'informations sur l'évolution temporelle et donc a priori inutilisable par l'APM. Comment pouvons-nous alors utiliser cette intention ? Peut-on associer à cette dernière un profil de perception moyen ? Quels en seraient les conséquences sur la simulation ?

Afin de gérer le problème de l'enveloppe de mouvement réduite du cockpit de simulation, nous avons pensé à utiliser l'information visuelle comme un élément de la commande. Plus particulièrement, il s'agit de générer un trafic (c'est-à-dire, les trajectoires des autres véhicules) qui permet d'éviter le blocage du cockpit en butée. A titre d'exemple, si le conducteur exige une accélération au-delà des capacités du simulateur, on fera apparaître un véhicule au devant de sa voiture afin de lui imposer de baisser sa vitesse. Une attention très particulière doit être portée à ce genre d'intervention par le signal visuel. En effet, il faudra préserver un degré suffisant de liberté des actions du conducteur. En fait il est très important de souligner que le but de la simulation n'est pas de commander le comportement du sujet (afin qu'il soit adapté aux limites du simulateur) mais de commander son environnement de conduite afin qu'il reproduise ses réactions dans un contexte d'une vraie conduite. Cette nouvelle conception de la scène visuelle est une idée originale pour laquelle nous avons initié les premiers développements. Elle est spécifique aux simulateurs de conduite, car dans un simulateur de vol classique, le pilote est libre de se déplacer dans toutes les directions de l'espace.

Bibliographie

- [Abou-Kandil et al., 2003] Abou-Kandil, H., Freiling, G., Ionescu, V., et Jank, G. (2003). *Matrix Riccati equations in control and system theory*. Birkhauser.
- [Advani et al., 2002] Advani, S., Giovannetti, D., et Blum, M. (2002). Design of a hexapod motion cueing system for nasa ames vertical motion simulator. In *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit*.
- [Advani et Hosman, 2001] Advani, S. et Hosman, R. (2001). Integrated motion cueing algorithm and motion base design for effective road vehicle simulation. *Driving Simulation Conference*.
- [AGARD, 1980] AGARD (1980). Agard advisory report no. 159. fidelity of simulation for pilot training. Rapport technique, OTAN.
- [Akamatsu et al., 2004] Akamatsu, M., Yamaya, A., Imachou, N., Ushiro-Oka, H., et Hamanaka, T. (2004). Driving simulator study for designing light emitting delineators for tunnels. *Driving Simulation Conference*.
- [Anderson et Morrison, 1993] Anderson, S. B. et Morrison, R. H. (1993). Lessons learned from a historical review of piloted aircraft simulations. *AIAA Flight simulation and technologies conference*.
- [Angelaki et Dickman, 2004] Angelaki, D. E. et Dickman, J. D. (2004). Gravity or translation : Central processing of vestibular signals to detect motion. *Journal of Vestibular Research*.
- [Ares et al., 2001] Ares, J., Brazalez, A., et Busturia, J. M. (2001). Tuning and validation of the motion platform washout filter parameters for a driving simulator. In *Driving Simulation Conference*.
- [ASME, 2000] ASME (2000). The link flight trainer, a historic mechanical engineering landmark, roberston museum and science center. *ASME International*.
- [Barbagli et al., 2001] Barbagli, F., Ferrazzin, D., Avizzano, C., et Bergamosco, M. (2001). Washout filter design for a motorcycle simulator. In *IEEE-VR2001*, Yokohama, Tokyo.
- [Berthoz et Droulez, 1980] Berthoz, A. et Droulez, J. (1980). Tutorial on linear motion perception. *Laboratoire de physiologie neurosensorielle du CNRS*.
- [Berthoz et al., 1975] Berthoz, A., Pavard, B., et Young, L. R. (1975). Perception of linear horizontal self-motion induced by peripheral vision (linearvection). *Experimental Brain Research*, 23 :471–489.
- [Bhattacharya et al., 1997] Bhattacharya, S., Hatwal, H., et Ghosh, A. (1997). An on-line parameter estimation scheme for generalized stewart platform type parallel manipulators. *Mechanics and Machine Theory*.
- [Bittanti et al., 1991] Bittanti, S., Laub, A., et Willems, J. (1991). *The Riccati equation*. Berlin : Springer-Verlag.
- [Bloche et al., 1997] Bloche, S., Kemeny, A., et Reymond, G. (1997). Transport delay analysis in driving simulators with head mounted displays. In *Driving Simulation Conference*.
- [Boer et al., 2001] Boer, E., Yamamura, T., et Kuge, N. (2001). Model based analysis of driver curve negotiation behavior : comparing simulation and reality. *Driving Simulation Conference*.

- [Bohoua-Nassé, 2004] Bohoua-Nassé, F.-O. (2004). Compréhension et modélisation du comportement conducteur et de sa perception. Mémoire de Master, Centre de Mathématiques Appliquées, École des Mines de Paris, Juillet.
- [Bonev, 2003] Bonev, I. (2003). The true origins of parallel robots. <http://www.parallemic.org/Reviews/Review007.html>.
- [Borah et al., 1988] Borah, J., Young, L. R., et Curry, R. E. (1988). Optimal estimator model for human spatial orientation. *Annals of the New York Academy of Sciences*.
- [Bowers, 1972] Bowers, D. (1972). *Encyclopedia of automatic musical instruments*. Vestal press, New York.
- [Cardullo et al., 1999] Cardullo, F. M., Telban, R. J., et Houck, J. A. (1999). Motion cueing algorithms : A human centered approach. In *5th International Symposium on Aeronautical Sciences*.
- [Chung, 2000] Chung, W. W. Y. (2000). A review of approaches to determine the effectiveness of ground-based flight simulations. *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*.
- [Dagdelen, 2005] Dagdelen, M. (2005). *Restitution des stimuli inertiels en simulation de conduite*. Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.
- [Dandurand, 1984] Dandurand, A. (1984). La rigidité des réseaux spatiaux composés. *Topologie structurale*.
- [Dasgupta et Choudhury, 1999] Dasgupta, B. et Choudhury, P. (1999). A general strategy based on the newton-euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators. In *Mechanism and Machine Theory*.
- [De Marco, 2003] De Marco, A. (2003). A brief history of aircraft flight simulation. *Apunti di tecniche di simulazione di volo*.
- [De Mattos, 2006] De Mattos, B. S. (2006). Alberto santos-dumont (web page) (1873-1932). <http://www.aiaa.org/content.cfm?pageid=428>.
- [Deyo et al., 1988] Deyo, R., Briggs, J., et Doenges, P. (1988). Getting graphics in gear : graphics and dynamics in driving simulation. *Computer Graphics*, 22(4) :317–326.
- [Do et Yang, 1988] Do, W. Q. D. et Yang, D. C. H. (1988). Inverse dynamic analysis and simulation of a platform type of robot. *Journal of Robotic Systems*.
- [Elloumi et al., 2005a] Elloumi, H., Bordier, M., et Maizi, N. (2005a). An encompassing formalization of robust computed torque schemes of robot systems. In *44th IEEE Conference on Decision and Control CDC and European Control Conference ECC*, Sevilla, Spain.
- [Elloumi et al., 2005b] Elloumi, H., Bordier, M., et Maizi, N. (2005b). Integrated model-based control with human perception models in driving simulation. In *17th IMACS World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation*.
- [Elloumi et al., 2005c] Elloumi, H., Bordier, M., et Maizi, N. (2005c). An optimal control scheme for a driving simulator. In *2nd International Conference on Informatics in Control*, Barcelona, Spain.
- [Fernandez et Goldberg, 1971] Fernandez, C. et Goldberg, J. M. (1971). Physiology of peripheral neurons innervating semicircular canals of the squirrel monkey . ii. response to sinusoidal stimulation and dynamics of peripheral vestibular system. *Journal of Neurophysiology*, 34(4) :661–675.
- [Fernandez et Goldberg, 1976] Fernandez, C. et Goldberg, J. M. (1976). Physiology of peripheral neurons innervating otolith organs of the squirrel units, iii : Response dynamics. *Journal of Neurophysiology*, 39(5) :996–1008.
- [Geng et Haynes, 1993] Geng, Z. et Haynes, L. S. (1993). Six-degree-of-freedom active vibration isolation using a stewart platform mechanism. *Journal of Robotic Systems*.
- [Goodwin et al., 2004] Goodwin, G., Seron, M., et Dona, J. D. (2004). *Constrained control and estimation, an optimization approach*. Springer.

- [Gouverneur et al., 2003] Gouverneur, B., Mulder, J., van Paassen, M., Stroosma, O., et Field, E. (2003). Optimisation of the simona research simulator's motion filter settings for handling qualities experiments. *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit*.
- [Grant et al., 2004] Grant, P., Papelis, Y., Schwartz, C., et Clark, A. (2004). Enhancements to the nads motion drive algorithm for low-speed urban driving. In *Driving Simulation Conference*.
- [Grant et Best, 1987] Grant, W. et Best, W. (1987). Otolith–organ mechanics : Lumped parameter model and dynamic response. *Aviation Space and Environmental Medicine*, pages 970–976.
- [Gruening et al., 1998] Gruening, J., Bernard, J., Colver, C., et Hoffmeister, K. (1998). Driving simulation. *Society of Automotive Engineers, Inc.*
- [Guo et al., 2003] Guo, L., Cardullo, F., et Telban, R. (2003). The results of a simulator study to determine the effects on pilot performance of two different motion cueing algorithms and various delays, compensated and uncompensated. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*.
- [Hoffman et McKinnon, 1979] Hoffman, R. et McKinnon, M. (1979). Vibrational modes of an aircraft simulator motion system. In *5th World Congress on Theory of Machines and Mechanism*, pages 603–606, Montréal.
- [Hosman et al., 2002] Hosman, R., Advani, S., et Haeck, N. (2002). Integrated design of flight simulator motion cueing systems. In *Royal Aeronautical Society Conference on Flight Simulation*.
- [Hosman, 1996] Hosman, R. J. A. W. (1996). *Pilot perception and control of aircraft motions*. Thèse de Doctorat, Delft University of Technology.
- [Ish–Shalom, 1982] Ish–Shalom, J. (1982). *The design of optimal control motion for flight simulators*. Thèse de Doctorat, MIT.
- [Jamson et Mouta, 2004] Jamson, H. et Mouta, S. (2004). More bang for your buck? a cross-cost simulator evaluation study. *Driving Simulation Conference*.
- [Johansson et Nordin, 2002] Johansson, M. et Nordin, J. (2002). A survey of driving simulators and their suitability for testing volvo cars. Mémoire de Master, Chalmers University of Technology.
- [Kato, 1966] Kato, T. (1966). *Perturbation theory for linear operator*. Springer–Verlag.
- [Kemeny, 1999] Kemeny, A. (1999). Simulation et perception. In *Introduction de la Conférence sur la Simulation de Conduite*.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall.
- [Koekebakker, 2001] Koekebakker, S. (2001). *Model based control of a flight simulator motion system. Chapter 1 : Introduction*. Thèse de Doctorat, Technische Universiteit Delft.
- [Lebret et al., 1992] Lebret, G., Liu, K., et Lewis, F. (1992). Dynamic analysis and control of a stewart platform manipulator. *Journal of Robotics Systems*.
- [Lewis et al., 2004] Lewis, F., Dawson, D., et Abdallah, C. (2004). *Robot manipulator control*. Marcel Dekker.
- [Li et Salcudean, 1997] Li, D. et Salcudean, S. E. (1997). Modeling simulation and control of a hydraulic stewart platform. In *International Conference on Robotics and Automation*.
- [McFarland, 2001] McFarland, R. (2001). Adjustable limiting algorithms for robust motion simulation. In *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit*.
- [Merlet, 1998a] Merlet, J. (1998a). Determination of 6D–workspaces of Gough–type parallel manipulator and comparaison between different geometries. In *12th RoManSy*, pages 261–268, Paris, France.
- [Merlet, 2004] Merlet, J. (2004). Solving the forward kinematics of a gough–type parallel manipulator with interval analysis. *International Journal of Robotics Research*, 23(3) :221–235.

- [Merlet, 1998b] Merlet, J.-P. (1998b). Determination of the presence of singularities in 6d workspace of a gough parallel manipulator. *ARK*.
- [Merlet, 2000] Merlet, J.-P. (2000). *Parallel Robots*, volume 74 of *Solid mechanics and its applications*. Kluwer Academic Publishers.
- [Moore, 2005] Moore, K. (2005). A brief history of aircraft flight simulation (web page). <http://home-page.ntlworld.com/bleep/SimHist1.html>.
- [Nahon et Reid, 1989] Nahon, M. A. et Reid, L. D. (1989). Simulator motion-drive algorithms : a designer perspective. *Journal of guidance*, 3(2) :356–362.
- [Nahon et al., 1992] Nahon, M. A., Reid, L. D., et Kirdeikis, J. (1992). Adaptive simulator motion software with supervisory control. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*.
- [NASA, 1968] NASA (1968). Adventures in research : A history of ames research center 1940–1965, NASA Ames resarch center. <http://history.nasa.gov/SP-4302/contents.htm>.
- [Neering et al., 2006] Neering, J., Elloumi, H., et Daniel, L. (2006). On possibilities of driver behavior prediction for driving simulator control. In *Driving Simulation Conference*, Paris.
- [Nordmak et al., 2004] Nordmak, S., Jansson, H., Palmkvist, G., et Sehammar, H. (2004). The new vti driving simulator. multi purpose moving base with high performance linear motion. *Driving Simulation Conference*.
- [Ormsby, 1974] Ormsby, C. C. (1974). *Model of Human Dynamic Orientation*. Thèse de Doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge MA.
- [Parrish et al., 1975] Parrish, R. V., Dieudone, J. E., Bowles, R. L., et Martin, D. J. (1975). Coordinated adaptive washout for motion simulators. *Journal of aircraft*, 12(1) :44–50.
- [Petit, 2004] Petit, N. (2004). Commande prédictive. Notes de cours, Ecole Centrale Paris. <http://cas.ensmp.fr/petit/>.
- [Pottman et Wallner, 2001] Pottman, H. et Wallner, J. (2001). *Computational Line Geometry*. Springer-Verlag.
- [Qu et Dawson, 1996] Qu, Z. et Dawson, D. (1996). *Robust tracking control of robot manipulators*. IEEE Press.
- [Rasmussen, 1983] Rasmussen, J. (1983). Skills, rules, and knowledge ; signals, signs, and symbols, and other distinctions in human performance models. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*.
- [Recarte et Nunes, 2003] Recarte, M. et Nunes, L. (2003). Mental workload while driving : effects on visual search, discrimination and decision making. *Journal of experimental psychology*.
- [Reid et Grant, 1993] Reid, L. et Grant, P. (1993). Motion algorithm for large-displacement driving simulator. *Transportation Research Record*.
- [Reid et Nahon, 1985] Reid, L. D. et Nahon, M. A. (1985). Flight simulation motion-base drive algorithms : Part 1 – developing and testing the equations. CN ISSN 0082–5255 296, UTIAS.
- [Reinhard, 1982] Reinhard, H. (1982). *Equations différentielles, Fondements et applications*. Gauthier-Villars.
- [Reymond, 2000a] Reymond, G. (2000a). *Contribution des stimuli visuels, vestibulaires et proprioceptifs dans la perception du mouvement du conducteur*. Thèse de Doctorat, Collège de France Renault.
- [Reymond, 2000b] Reymond, G. (2000b). *Contribution respectives des stimuli visuels, vestibulaires et proprioceptifs dans la perception du mouvement du conducteur*. Thèse de Doctorat, Paris VI.
- [Reymond et al., 2002] Reymond, G., Heidet, A., Canry, M., et Kemeny, A. (2002). Validation of re-nault’s dynamic simulator for adaptive cruise control experiments. *Driving Simulation Conference*.

- [Samson, 1983] Samson, C. (1983). Commande non lineaire robuste des robots manipulateurs. *Rapport de recherche INRIA*.
- [Sepulchre et al., 1997] Sepulchre, R., Jankovic, M., et Kokotovic, P. (1997). *Constructive nonlinear control*. Springer.
- [Shmid et al., 1979] Shmid, R., Buizza, A., et Zambarbieri, D. (1979). Modelling of the vestibulo-ocular reflex and its use in clinical vestibular analysis. In Amsterdam, O., editor, *Applied Physiological Mechanics*, pages 779–893.
- [Shmidt et Conrad, 1970] Shmidt, S. F. et Conrad, B. (1970). Motion drive signals for piloted flight simulators. Rapport technique, NASA.
- [Siegler, 2000] Siegler, I. (2000). *Contribution à l'étude de la perception vestibulaire du mouvement propre et ses relations avec la stabilisation du regard et l'orientation spatiale*. Thèse de Doctorat, LPPA, CNRS Collège de France.
- [Siegler et al., 2001] Siegler, I., Reymond, G., Kemeny, A., et Berthoz, A. (2001). Sensorimotor integration in a driving simulator : contributions of motion cueing in elementary driving tasks. *Driving Simulation Conference*.
- [Sivan et al., 1982] Sivan, R., Ish-Shalom, J., et Huang, J. K. (1982). An optimal control approach to the design of moving flight simulators. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*.
- [Slotine et Li, 1991] Slotine, J.-J. et Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. Prentice Hall.
- [Squires et al., 2004] Squires, T. M., Weidman, M. S., Hain, T. C., et Stone, H. A. (2004). A mathematical model for top-shelf vertigo : the role of sedimenting otoconia in bppv. *Journal of Biomechanics*.
- [Straus, 2005] Straus, S. (2005). New, improved, comprehensive and automated driver's license test and vision screening system. *Arizona Departement of Transportation*.
- [Telban, 2000] Telban, R. J. (2000). A non-linear motion cueing algorithm with a human perception model. In *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*, Denver CO.
- [Telban et Cardullo, 2001] Telban, R. J. et Cardullo, F. M. (2001). An integrated model of human motion perception with visual vestibular interaction. In *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit*, Montreal, Canada.
- [Telban et Cardullo, 2002] Telban, R. J. et Cardullo, F. M. (2002). A nonlinear, human-centered approach to motion cueing with a neurocomputing solver. *AIAA-2002-4692*.
- [Telban et al., 2000] Telban, R. J., Cardullo, F. M., et Guo, L. (2000). Investigation of mathematical models of otolith organs for human centered motion cueing algorithms. In *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*, Denver CO.
- [Tsai, 2000] Tsai, L.-W. (2000). Solving the inverse dynamics of a stewart-gough manipulator by the principle of virtual work. *Journal of Mechanical Design*.
- [Van der Shaft et Schumacher, 1999] Van der Shaft, A. et Schumacher, H. (1999). *An introduction to hybrid dynamical systems*. Springer-Verlag, Lecture Notes in Control, 251.
- [Van der Steen, 1998] Van der Steen, H. (1998). *Self-Motion Perception*. Thèse de Doctorat, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
- [Van Egmond et al., 1949] Van Egmond, A. A., Groen, J. J., et Jongkees, L. B. W. (1949). The mechanics of the semicircular canals. *Journal of physiology*, 110 :1–17.
- [Young, 1977] Young, L. R. (1977). Visual-vestibular interaction. In *Sixth International Symposium on Biocybernetics*, Leipzig, East Germany.
- [Young, 1978] Young, L. R. (1978). Visually induced motion in flight simulation... In *AGARD Symposium on Flight Simulation*, Brussels, Belgium.
- [Young et Meiry, 1968] Young, L. R. et Meiry, J. L. (1968). A revised dynamic otolith model. *Aerospace Medicine*, 39(6) :606–608.

- [Young et Oman, 1969] Young, L. R. et Oman, C. M. (1969). Model for vestibular adaptation to horizontal rotation. *Aerospacé médecine*, 40(10) :1076–1080.
- [Young et Oman, 1974] Young, L. R. et Oman, C. M. (1974). Influence of head position and field on visually induced motion effects in three axes of rotation. In *Proceedings of the 10th Annual Conference on Manual Control*.
- [Zacharias, 1977] Zacharias, G. L. (1977). *Motion sensation dependence on visual and vestibular cues*. Thèse de Doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- [Zacharias, 1978] Zacharias, G. L. (1978). Motion cue models for pilot-vehicule analysis. AMRL–TR–78–2, Department of Defense Report.
- [Zacharias et Young, 1981] Zacharias, G. L. et Young, L. R. (1981). Influence of combined visual and vestibular cues on human perception and control of horizontal rotation. *Experimental brain research*, 41(2) :159–171.
- [Zaytoon, 2001] Zaytoon, J. (2001). *Systèmes dynamiques hybrides*. Hermes Sciences Publicat.