HAL open science

Systèmes locaux rigides et transformation de Fourier.

Adelino Paiva

To cite this version:

Adelino Paiva. Systèmes locaux rigides et transformation de Fourier.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2006. Français. NNT : . pastel-00002259

HAL Id: pastel-00002259

https://pastel.hal.science/pastel-00002259v1

Submitted on 29 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Adelino Paiva

SYSTÈMES LOCAUX RIGIDES ET TRANSFORMATION DE FOURIER SUR LA SPHÈRE DE RIEMANN

A. Paiva

Le travail décrit dans cette thèse a été soutenu par PRAXIS XXI, un programme de recherche de la Fondation Portugaise pour la Science et la Technologie (FTC), sous le contrat SFRH/BD/1383/2000.

SYSTÈMES LOCAUX RIGIDES ET TRANSFORMATION DE FOURIER SUR LA SPHÈRE DE RIEMANN

Adelino Paiva

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

1. Modules sur les anneaux d'opérateurs différentiels 3
1.1. Anneaux d'opérateurs différentiels 3
1.2. Idéaux à gauche d'opérateurs différentiels 6
1.3. Modules holonomes 10
1.4. Localisation et connexions méromorphes 15
1.5. Irréductibilité 16
1.6. Modules tordus 17
1.7. Dualité 19
1.8. Régularité et irrégularité 20
1.9. Décomposition de Turrittin 28

2. Le faisceau $\mathcal{D}_X$ et ses modules 37
2.1. Le faisceau $\mathcal{D}_X$ 37
2.2. Transformation droite-gauche 38
2.3. $\mathcal{D}_X$-modules sur une surface de Riemann 39
2.4. Couples d'espaces vectoriels 44
2.5. La V-filtration 55
2.6. Opérations sur les $A_n(\mathcal{D}_X)$-modules 60
2.7. Extension minimale 74

3. Rigidité 81
3.1. Notion d'indice de rigidité 81
3.2. Préservation de l'indice de rigidité 86

Bibliographie 93

INTRODUCTION

En 1857, en traduisant dans une langage moderne, Riemann a montré que l'équation hypergéométrique peut être reconstruite, à isomorphisme près, à partir de la connaissance de ses monodromies aux points 0, 1 et ∞. Dans une langage moderne, on dit que l'équation hypergéométrique est rigide et que son système local est physiquement rigide. Katz, dans son livre *Rigid Local Systems* [**11**], donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système local $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{P}^1$ soit physiquement rigide (Théorème 1.1.2 page 14). Dans la section 3.1 on étend cette définition au cadre des $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-modules en utilisant la notion d'extension minimale, laquelle est présentée dans le chapitre 2.

Katz montre, cf. [**11**] Théorème 3.0.2 page 91, que la transformation de Fourier, en caractéristique positive, préserve l'indice de rigidité des faisceaux pervers irréductibles, pourvu que ni le faisceau ni sont transformé de Fourier soient à support ponctuel. D'autre part Katz pense aussi que la transformation de Fourier dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules doit préserver l'indice de rigidité, cf. [**11**] page 10. En utilisant ces conditions comme guide, on infère l'énoncé du théorème 3.2.1, cf. section 3.2, et on le démontre dans le cas où le module de départ est régulier sur $\mathbb{P}^1$. Pendant la préparation de cette thèse, S. Bloch et H. Esnault ont montré ce résultat en toute généralité dans [**2**]. Nous proposons ici une démonstration différente lorsque le module de départ est à singularités régulières sur $\mathbb{P}^1$.

La démonstration est faite en comparant l'indice de rigidité d'un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module, cf. Théorème 3.1.1, et de son transformé de Fourier, cf. Théorème 3.1.7. L'expression de l'indice de rigidité du $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module de départ fait appel à la connaissance de la monodromie sur chacun de ses points singuliers et l'expression de l'indice de rigidité de son transformé de Fourier fait appel à la connaissance de la monodromie en 0 et des monodromies de la décomposition de Turrittin à l'infini. Les notions de transformation de Fourier et de décomposition de Turrittin sont présentées dans le chapitre 1. Dans son livre *Équations différentielles à coefficients polynomiaux* Malgrange montre, d'une façon analytique, que ces monodromies ne sont pas indépendantes, cf. [**16**] Théorème XII.2.9 page 203. Dans le chapitre 3 on le démontre d'une façon algébrique en utilisant aussi la notion de couples d'espaces vectoriels, notion présenté dans le chapitre 2.

CHAPITRE 1

MODULES SUR LES ANNEAUX D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Le but de ce chapitre introductif est de rappeler, tantôt au niveau des germes tantôt au niveau de l'algèbre de Weyl, les notions d'holonomie, de localisation, de connexion méromorphe, de régularité / irrégularité, de transformation de Fourier, d'inversion, de dualité et la notion de irréductibilité, (laquelle va jouer un rôle important dans la préservation de l'indice de rigidité par transformation de Fourier notion qui sera présentée dans le chapitre 3).

Le résultat important de ce chapitre est le Théorème 1.9.5 (décomposition de Turrittin à l'infini du transformé de Fourier d'un A_1-module holonome régulier, y compris l'infini), lequel est un cas particulier d'un résultat déjà connu — le Théorème 1.9.1, mais ici on donne une démonstration directe, sans avoir besoin de ramifier, car la pente à l'infini du polygone de Newton est égale à 1.

Dans ce chapitre on s'intéresse aux anneaux d'opérateurs différentiels à coefficients sur un des trois anneaux suivants : $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ (polynômes à n variables), $\mathbb{C}\{x\}$ (séries convergentes), $\mathbb{C}[\![x]\!]$ (séries formelles) et aux modules sur ces anneaux.

1.1. Anneaux d'opérateurs différentiels

Dans cette section on présente la définition de l'algèbre de Weyl de dimension n et la définition des algèbres $\mathcal{D}$ et $\widehat{\mathcal{D}}$. Ensuite on présente des algorithmes de division, en dimension 1, pour ces trois algèbres, grâce auxquels on peut caractériser les idéaux de ces trois anneaux (A_1, $\mathcal{D}$ et $\widehat{\mathcal{D}}$) cf. section 1.2.

1.1.1. L'algèbre de Weyl

On va définir l'algèbre de Weyl comme un anneau d'opérateurs dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie. Pour cela, on commence par fixer quelques notations. Dans ce mémoire $\mathbb{C}[X]$ désigne l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Son algèbre d'opérateurs linéaires est notée $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ et ses opérations sont l'addition et la composition des opérateurs. L'algèbre de Weyl sera définie comme une sous-algèbre de $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$.

Définition 1.1.1 (Algèbre de Weyl). Soient $\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n$ les opérateurs de $\mathbb{C}[X]$ définis par les formules $\widehat{x}_i(f) \doteq x_i f$, pour chaque $f \in \mathbb{C}[X]$ et ∂_{x_i} les opérateurs définis par $\partial_{x_i}(f) \doteq \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}$, pour chaque $f \in \mathbb{C}[X]$. On note A_n la sous-algèbre de $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ engendrée par les $\widehat{x}_i$ et les ∂_{x_i} et on l'appelle l'algèbre de Weyl d'ordre n.

Seulement dans la section 2.6 on aura besoin de travailler avec des algèbres de Weyl d'ordre plus grand que 1. Dorénavant, dans ce chapitre, on va étudier, avec plus de détail, l'algèbre de Weyl A_1.

Proposition 1.1.2. *Tout élément $P \in A_1 \setminus \{0\}$ peut être écrit, de façon unique, sous la forme $\sum_{i=0}^{d} a_i(x)\partial_x^i$, où $a_i(x) \in \mathbb{C}[x]$ et $a_d \not\equiv 0$.*

Démonstration. Cf. Proposition 1.2.3 [**13**] page 3. □

Définition 1.1.3. Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i(x)\partial_x^i$ un élément de A_1. On appelle exposant de P, et on note $\exp(P)$, le couple $(d \doteq \deg_{\partial_x} P, \delta(P) \doteq \deg a_d(x))$.

Cet exposant est additif par rapport au produit :

$$\exp(PQ) = \exp(P) + \exp(Q)$$

(somme en $\mathbb{N}^2$.) En effet, si $Q = b_m(x)\partial_x^m + \cdots + b_0(x)$, on peut écrire $PQ = a_d(x)b_m(x)\partial_x^{d+m} + R$, $R = c_n(x)\partial_x^n + \cdots + c_0(x)$, où $n < d + m$. On en déduit de cela une "assertion de division" :

Théorème 1.1.4. *Soient $A, P \in A_1$ tels que $\exp(P) = (d, \delta)$. Il existe un seul couple (Q, R) d'éléments de A_1 tel que :*

1. $A = QP + R$,
2. $R = \displaystyle\sum_{l=d}^{\deg A} \sum_{k=0}^{\delta-1} r_{kl} x^k \partial_x^l + S$, *où* $\deg S < d$ *et* $r_{kl} \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Existence) Soit $(n, m) = \exp(A)$. Dans ce cas on peut écrire

- $A = \alpha x^m \partial_x^n + a(x)\partial_x^n + A'$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\deg a(x) < m$ et $\deg A' < n$,
- $P = \beta x^\delta \partial_x^d + b(x)\partial_x^d + B'$, où $\beta \in \mathbb{C}^*$, $\deg b(x) < \delta$ et $\deg B' < d$.

Si $\exp(P) + \mathbb{N}^2 \ni \exp(A)$ alors :

$$A_1 = A - \left(\frac{\alpha}{\beta} x^{m-\delta} \partial_x^{n-d}\right) P = c_n(x)\partial_x^n + \cdots + c_0(x),$$

où $c_n(x), \ldots, c_0(x) \in \mathbb{C}[x]$ et $\deg c_n(x) < m$ ou $c_n(x) \equiv 0$. En particulier on a $\exp(A_1) + \mathbb{N}^2 \ni \exp(A)$. Par récurrence on montre qu'il existe un seul couple (Q, R) qui vérifie les propriétés 1 et 2. Les couples (k, l) qui apparaissent dans l'expression de R sont ceux qui sont contenus dans la partie pointée de la figure 1.

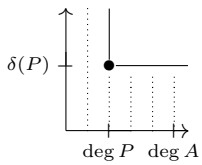


FIGURE 1

Unicité) Soient (Q_1, R_1), (Q_2, R_2) deux couples qui vérifient les propriétés 1 et 2. Étant donné que $A = Q_1P + R_1 = Q_2P + R_2$, $(Q_1 - Q_2)P + (R_1 - R_2) = 0$. Si $Q_1 - Q_2 \neq 0$ alors $\exp((Q_1 - Q_2)P) \in \exp(P) + \mathbb{N}^2$. Vu qu'aucun "monôme" de $R_1 - R_2$ appartient à $\exp(P) + \mathbb{N}^2$, le "monôme" associé à $\exp((Q_1 - Q_2)P)$ ne peut pas être annulé par aucun "monôme" de $R_1 - R_2$ et pourtant $(Q_1 - Q_2)P + (R_1 - R_2) \neq 0$, alors $Q_1 = Q_2$ et donc $R_1 = R_2$. □

1.1.2. Les algèbres $\mathcal{D}$ et $\widehat{\mathcal{D}}$

De façon analogue à l'algèbre de Weyl, on va définir les algèbres $\mathcal{D}$ et $\widehat{\mathcal{D}}$ comme des anneaux d'opérateurs sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Définition 1.1.5. Soit x l'opérateur de $\mathbb{C}\{x\}$ (resp. $\mathbb{C}[\![x]\!]$) défini par la formule $x(f) \doteq xf$, pour chaque $f \in \mathbb{C}\{x\}$ (resp. $f \in \mathbb{C}[\![x]\!]$) et ∂_x l'opérateur défini par $\partial_x(f) \doteq \frac{\partial f}{\partial_x}$, pour chaque $f \in \mathbb{C}\{x\}$ (resp. $f \in \mathbb{C}[\![x]\!]$). On note $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$) la sous-algèbre de $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{x\})$ (resp. $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\![x]\!])$) engendrée par $\mathbb{C}\{x\}$ et ∂_x (respectivement $\mathbb{C}[\![x]\!]$ et ∂_x).

Proposition 1.1.6. *Tout élément $P \in \mathcal{D}$ (resp. $P \in \widehat{\mathcal{D}}$) peut être écrit, de façon unique, sous la forme $\sum_{i=0}^{d} a_i(x)\partial_x^i$, où $a_i(x) \in \mathcal{D}$ (resp. $a_i(x) \in \widehat{\mathcal{D}}$) et $a_d \neq 0$ en tant qu'opérateur.*

Démonstration. Cf. Proposition 1.2.3 [**13**] page 3. □

Définition 1.1.7. Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i(x)\partial_x^i$ un élément de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$). On appelle exposant de P, et on note $\exp(P)$, le couple $(d \doteq \deg_{\partial_x} P, \mathrm{val}(P) \doteq \mathrm{val}\,(a_d))$.

Cet exposant est additif par rapport au produit :

$$\exp(PQ) = \exp(P) + \exp(Q)$$

(somme en $\mathbb{N}^2$.) En effet, si $Q = b_m(x)\partial_x^m + \cdots + b_0(x)$, on peut écrire $PQ = a_d(x)b_m(x)\partial_x^{d+m} + R$, $R = c_n(x)\partial_x^n + \cdots + c_0(x)$, où $n < d + m$. On en déduit de cela une "assertion de division" :

Théorème 1.1.8. *Soient $A, P \in \mathcal{D}$ (resp. $A, P \in \widehat{\mathcal{D}}$) tels que $\exp(P) = (d, v)$. Il existe un seul couple (Q, R) d'éléments de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$) tels que :*

1. $A = QP + R$,
2. $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{v-1} \sum_{l=d}^{\deg A} r_{kl}(x)x^k\partial_x^l + S$, *où $\deg S < d$ et les $r_{kl}(x)$ sont des unités ou nulles.*

Démonstration. Cf. Proposition 2.1.1 [**13**] page 5. □

1.2. Idéaux à gauche d'opérateurs différentiels

Dans cette section on va étudier en détail la structure des idéaux à gauche de A_1, $\mathcal{D}$ et $\widehat{\mathcal{D}}$. On montre que tous ces idéaux sont engendrés par deux éléments.

1.2.1. Structure des idéaux de A_1

Étant donné un idéal I, l'ensemble $\mathrm{Exp}(I)$ est, par définition, le sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ formé par tous les $\exp(P)$, $P \in I \setminus \{0\}$. En particulier

$$\mathrm{Exp}(I) + \mathbb{N}^2 = \mathrm{Exp}(I)$$

car I est un idéal de A_1. Cet ensemble a la forme indiquée dans la figure 2. La partie pointée du bord de $\mathrm{Exp}(I)$ est dénotée par $\mathrm{ES}(I)$ et on l'appellera *l'escalier* de I. On utilisera la notation suivante :

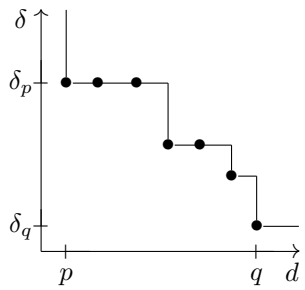


Figure 2

$$\mathrm{ES}(I) = \{(p, \delta_p), (p+1, \delta_{p+1}), \ldots, (q, \delta_q)\}$$

où $p = \min\{\deg P \mid P \in I \setminus \{0\}\}$ et pour chaque j $\delta_j = \min\{\delta(P) \mid \ j = \deg(P)$ et $P \in I \setminus \{0\}\}$. En plus (comme on peut voir dans la figure 2)

$$\mathrm{Exp}(I) = \bigcup_{p \le j < q} \{(j, \delta_j) + \{0\} \times \mathbb{N}\} \cup \left\{(q, \delta_q) + \mathbb{N}^2\right\}$$

Définition 1.2.1. Une base de division de I consiste de la donnée pour chaque $(j, \delta_j) \in \mathrm{ES}(I)$ d'un élément $P_j \in I$ tel que $\exp(P_j) = (j, \delta_j)$.

Proposition 1.2.2. *Soit I un idéal propre de A_1 et $\{P_p, \ldots, P_q\}$ une base de division de I. Alors :*

1. *Pour chaque élément $A \in A_1$ il existe une famille unique d'éléments $Q_p, \ldots, Q_{q-1} \in \mathbb{C}[x]$, $Q_q \in A_1$ et $R \in A_1$ tels que*

$$A = Q_p P_p + \cdots Q_q P_q + R$$

où

$$R = \sum_{l=p}^{\min\{q, \deg A\}} \sum_{k=0}^{\delta_l - 1} c_{kl} x^k \partial_x^l + \sum_{l=q+1}^{\deg A} \sum_{k=0}^{\delta_q - 1} c_{kl} x^k \partial_x^l + S$$

et $\deg S < p$ *et les* $c_{kl} \in \mathbb{C}$.

2. *Avec ces notations on a $A \in I$ si et seulement si $R = 0$.*

Démonstration. L'existence de la famille décrite en 1 est une conséquence de l'assertion de division -Théorème 1.1.4. Pour commencer on divise A par P_q. Après on divise le reste par P_{q-1}. Vu que les monômes du reste touchés par la division par P_{q-1} sont de degré inférieur ou égale à $q-1$, $Q_{q-1} \in \mathbb{C}[x]$. En itérant cette procédure on montre l'existence des opérateurs $P_p, \ldots, P_q, R$ vérifiant les conditions imposées par 1.

Pour montrer l'unicité de $P_p, \dots, P_q, R$ il suffit de montrer que si $Q_pP_p + \cdots + Q_qP_q + R = 0$, où $Q_p, \dots, Q_q, R$ vérifient les conditions imposées par 1, alors tous ces opérateurs sont 0. On montre cela en examinant les exposants des Q_iP_i qui seraint non nuls.

Montrons maintenant la condition 2. $A \in I$ si et seulement si $R \in I$. Si $R \neq 0$, alors, par construction, $\exp(R) \notin \mathrm{Exp}(I)$ et donc $R \in I$ si et seulement si $R = 0$. □

Remarque 1.2.3. Soit $\mathrm{ES}(I) = \{(p, \delta_p), (p+1, \delta_{p+1}), \dots, (q, \delta_q)\}$ l'escalier de I. Prenons un système minimal $\{(j_1, \delta_{j_1}), \dots, (j_r, \delta_{j_r})\}$ d'éléments de $\mathrm{ES}(I)$ tel que $\mathrm{Exp}(I) = \bigcup_{k=1}^{r} \left\{(j_k, \delta_{j_k}) + \mathbb{N}^2\right\}$ (ceux-ci sont les sommets où l'angle est dirigé vers l'origine). On appelle ce système l'*escalier minimal* de I et on le note $\mathrm{ESM}(I)$. On peut reconstruire une base de division de I en connaissant $\mathrm{ESM}(I)$ de la façon suivante :

$$P_{j_1}, \partial_x P_{j_1}, \dots, \partial_x^{j_2 - j_1 - 1} P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}, \partial_x P_{j_{r-1}}, \dots, \partial_x^{j_r - j_{r-1} - 1} P_{j_{r-1}}, P_{j_r}$$

(bien sûr, on doit avoir $j_1 = p$ et $j_r = q$). On appelle $P_{j_1}, \dots, P_{j_r}$ *base de division minimale* de I.

Remarque 1.2.4. D'après la figure 2, l'escalier minimal $\mathrm{ESM}(I)$ est le sous-ensemble maximal de $\mathrm{Exp}(I)$ qui vérifie les conditions suivantes de minimalité :

(1) $j_i = \min\{\deg P \mid \delta_{j_i} = \delta(P) \text{ et } P \in I \setminus \{0\}\}$,
(2) $\delta_{j_i} = \min\{\delta(P) \mid j_i = \deg P \text{ et } P \in I \setminus \{0\}\}$,
(3) $p = \min\{\deg P \mid P \in I \setminus \{0\}\}$,
(4) $q = \min\{\delta(P) \mid P \in I \setminus \{0\}\}$.

Définition 1.2.5. Une base de division minimale de I consiste de la donnée pour chaque $(j, \delta_j) \in \mathrm{ESM}(I)$ d'un élément $P_j \in I$ tel que $\exp(P_j) = (j, \delta_j)$.

Dans la section 1.6, cf. Corollaire 1.8.26 , on verra que la transformation de Fourier, pour les idéaux réguliers, envoie escaliers minimaux dans escaliers minimaux.

1.2.1.1. Les idéaux sont engendrés par deux éléments

Définition 1.2.6. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_i(x)\partial_x^k \in A_1$, avec $a_k(x) \in \mathbb{C}[x]$ et $a_d \not\equiv 0$. On appelle points singuliers de l'opérateur P les zéros de a_d.

Si on admet des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbb{C}[x, a_d^{-1}(x)]$, on a l'assertion de division suivante :

Lemme 1.2.7. *Soit $A \in A_1$. A admet les écritures uniques suivantes :*

$$A = PQ + R = Q'P + R'$$

où $(Q, R), (Q', R') \in \mathbb{C}[x, a_d^{-1}(x)]\langle \partial_x \rangle$ et $\deg R < \deg P$, $\deg R' < \deg P$.

Démonstration. Cf. Lemme 1.1.2 page 68 [**13**] □

Corollaire 1.2.8. *Soit I un idéal de A_1 et soit $P_p \in I$ obtenu selon la Définition 1.2.1. Alors chaque élément $A \in I$ admet l'écriture suivante : $A = QP_p$, où $Q \in \mathbb{C}[x, a_d^{-1}(x)]\langle\partial_x\rangle$. En particulier il existe $a(x) \in \mathbb{C}[x]$, $Q' \in A_1$ tels que $a(x)A = Q'P_p$.*

Démonstration. Soit $A \in I$. D'après le Lemme 1.2.7, A admet l'écriture suivante : $A = QP_p + R$, où $Q, R \in \mathbb{C}[x, a_d^{-1}(x)]\langle\partial_x\rangle$. Vu que $R \in I$ et $\deg R < \deg P_p$, $R = 0$, donc il existe $Q \in \mathbb{C}[x, a_d^{-1}(x)]\langle\partial_x\rangle$ tel que $A = QP_p$. En particulier, après la multiplication par des puissances convenables de $a_d(x)$, on montre qu'il existe $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ tel que $a(x)A = Q'P_p$, où $Q' \in A_1$. □

Les idéaux de A_1 sont relativement simples, au sens qu'ils sont engendrés par deux éléments. Ce résultat est déjà connu d'après les travaux de Dixmier, cf. **[6]** Proposition 1.6.i page 291, et de Stafford, **[25]** Théorème 3.1 page 434. On présente maintenant une démonstration alternative qui nous permet obtenir ces deux éléments, d'une façon directe, quand on prend une base de division de l'idéal.

Proposition 1.2.9. *Si $P_p, P_{p+1}, \ldots, P_q$ est une base de division de I alors P_p et P_q engendrent I.*

Démonstration. Soit $J = A_1.P_p + A_1.P_q \subset I$ et considérons le A_1 -module I/J. Lequel est de type fini sur A_1 et sur $\mathbb{C}[x]$, car il est engendré par les classes de $P_{q+1}, \ldots, P_{q-1}$ grâce à 1.2.2.
Étant donné que I/J est libre et de dimension finie sur $\mathbb{C}[x]$, cf. Lemme 1.2.10, et que pour chaque $m \in I/J$ il existe $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ tel que $a(x).m = 0$, cf. Lemme 1.2.7, $I/J = 0$ et donc $I = J$. □

Lemme 1.2.10. *Soit M un A_1-module de type fini. Si M est aussi de type fini sur $\mathbb{C}[x]$, alors M est un $\mathbb{C}[x]$-module libre de dimension finie.*

Démonstration. Si M est de type fini sur $\mathbb{C}[x]$, alors $\mathcal{M}_{x-\alpha} \doteq M \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}\{x-\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ est de type fini sur $\mathbb{C}\{x-\alpha\}$. On va montrer maintenant que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_x$ est libre sur $\mathbb{C}\{x\}$ (la démonstration pour $\alpha \neq 0$ est identique). Vu que $\mathcal{M}_x$ est de type fini sur $\mathbb{C}\{x\}$, $\mathcal{M}/(x)\mathcal{M}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $[e_1], \ldots, [e_n]$ une base de cet espace vectoriel, où $e_1, \ldots, e_n$ sont des représentants en $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{N} = \mathbb{C}\{x\}.e_1 + \cdots + \mathbb{C}\{x\}.e_n \subset \mathcal{M}$ et $\varphi : \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{M}/(x)\mathcal{M}$ le morphisme composition. Vu que φ est un épimorphisme, $\mathcal{N} + (x)\mathcal{M} = \mathcal{M}$. Par le Lemme de Nakayama $\mathcal{N} = \mathcal{M}$, ce qui entraîne l'existence d'un morphisme surjectif :

$$\mathbb{C}\{x\}^n \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Soit K le noyau de ce morphisme et $(\varepsilon_i)_{i=1,\ldots,n}$ la base canonique de $\mathbb{C}\{x\}^n$. Un élément de K admet alors l'écriture $\sum a_i\varepsilon_i$, avec $a_i \in \mathbb{C}\{x\}$ et par construction $\sum a_ie_i = 0$ en $\mathcal{M}$. Étant donné que $\mathcal{M}$ est aussi un A_1-module $\partial_x(\sum a_ie_i) = 0$. Vu que $e_1, \ldots, e_n$ est un système de générateurs de $\mathcal{M}$ on peut écrire $\partial_x e_j = \sum_i b_{ji}e_i$, ce qui entraîne que $\sum_i(\partial a_i/\partial x + \sum_j a_jb_{ji})e_i = 0$ et donc $\sum_i(\partial a_i/\partial x + \sum_j a_jb_{ji})\varepsilon_i \in K$.

Étant donné que $val(\partial a_i/\partial x + \sum_j a_j b_{ji}) < val(a_i)$, où val est la valuation en $x = 0$, l'itération du procédé précédent nous amène au cas où il existe i tel que $val(a_i) = 0$ (i.e. a_i unité). Dans ce cas là le passage au quotient permet de construire une combinaison linéaire nulle non triviale de la base $\{[e_1], \ldots, [e_n]\}$ ce qui est une contradiction, si $K \neq 0$, donc $\mathcal{M} \simeq \mathbb{C}\{x\}^n$. Ceci entraîne que $M \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ est localement libre, le Corollaire [**23**] 4.9 page 76 entraîne que M est libre (il suffit prendre $\Sigma = \{\infty\}$). $\square$

1.2.2. Structure des idéaux de $\mathcal{D}$ et de $\widehat{\mathcal{D}}$

Dans cette sous-section on rappele quelques résultats de J. Briançon et Ph. Maisonobe (voir [**4**]).

Étant donné un idéal I de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$), l'ensemble $\mathrm{Exp}(I)$ est, par définition, le sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ formé par tous les $\exp(P)$, $P \in I \setminus \{0\}$. En particulier

$$\mathrm{Exp}(I) + \mathbb{N}^2 = \mathrm{Exp}(I)$$

car I est un idéal de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$). Cet ensemble a la forme indiquée dans la figure 3. La partie pointée du bord de $\mathrm{Exp}(I)$ est dénotée par $\mathrm{ES}(I)$ et on l'appellera *l'escalier* de I. On utilisera la notation suivante :

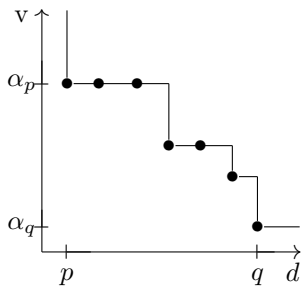


FIGURE 3.

$$\mathrm{ES}(I) = \{(p, \alpha_p), (p+1, \alpha_{p+1}), \ldots, (q, \alpha_q)\}$$

où $p = \min\{\deg P \mid P \in I \setminus \{0\}\}$ et pour chaque j $\alpha_j = \min\{\mathrm{val}(P) \mid j = \deg(P)$ et $P \in I \setminus \{0\}\}$. En plus (comme on peut voir dans la figure 3)

$$\mathrm{Exp}(I) = \bigcup_{p \leq j < q} \{(j, \alpha_j) + \{0\} \times \mathbb{N}\} \cup \left\{(q, \alpha_q) + \mathbb{N}^2\right\}$$

Définition 1.2.11. Une base de division d'un idéal I de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$), consiste de la donnée pour chaque $(j, \alpha_j) \in \mathrm{ES}(I)$ d'un élément $P_j \in I$ tel que $\exp(P_j) = (j, \alpha_j)$.

P_p est défini à unité près (par division).

Proposition 1.2.12. *Soit I un idéal propre de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$) et $\{P_p, \ldots, P_q\}$ une base de division de I. Alors :*

1. *Pour chaque élément $A \in \mathcal{D}$ (resp. $A \in \widehat{\mathcal{D}}$) il existe une famille unique d'éléments $Q_p, \ldots, Q_{q-1} \in \mathbb{C}\{x\}$ (resp. $\mathbb{C}[\![x]\!]$), $Q_q \in \mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$) et $R \in \mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$) tel que*

$$A = Q_p P_p + \cdots Q_q P_q + R$$

où

$$R = \sum_{l=p}^{\min\{q, \deg A\}} \sum_{k=0}^{\alpha_l - 1} u_{kl} x^k \partial_x^l + \sum_{l=q+1}^{\deg A} \sum_{k=0}^{\alpha_q - 1} c_{kl} x^k \partial_x^l + S$$

et $\deg S < p$ et u_{kl} sont des constantes dont certaines peuvent être nulles.

2. *Avec ces notations on a $A \in I$ si et seulement si $R = 0$.*

Démonstration. Cf. Proposition 2.2.2 page 6 [**13**]. □

Théorème 1.2.13. *Si $P_p, P_{p+1}, \ldots, P_q$ est une base de division d'un idéal propre I de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$), alors P_p et P_q engendrent I.*

Démonstration. Cf. Proposition 2.3.1 page 7 [**13**]. □

Définition 1.2.14. Soit $I \subset \mathcal{D}_x$ un idéal à gauche non nul. Pour cet idéal on défini les entiers :

$$m_0(I) \doteq \inf\{\deg_{\partial_x}(P) \mid P \in I \setminus \{0\}\},$$
$$m_1(I) \doteq \inf\{\mathrm{val}(P) \mid P \in I \setminus \{0\}\}.$$

1.3. Modules holonomes

Dans cette section on présente la notion d'holonomie et on montre que les A_1 (resp. $\mathcal{D}$ ou $\widehat{\mathcal{D}}$)-modules holonomes non nuls sont isomorphes au quotient de l'anneau A_1 (resp. $\mathcal{D}$ ou $\widehat{\mathcal{D}}$) par un idéal propre.

1.3.1. A_1-modules holonomes

La notion d'holonomie d'un A_1-module M finiment engendré est construite à l'aide du polynôme de Hilbert d'une bonne filtration du module M. On rappelle tout de suite les notions nécessaires pour la définir.

1.3.1.1. Degré d'un opérateur de A_1.

Le degré Deg d'un opérateur de A_1 se comporte de façon analogue au degré d'un polynôme. Les différences sont dues à la non commutativité de A_1.

Définition 1.3.1. Soit $P \in A_1$. On appelle degré de P, et on note Deg P, l'entier

$$\mathrm{Deg}\Big(P = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x^i \partial_x^j\Big) \doteq \max\{i + j \mid \alpha_{ij} \neq 0\}.$$

Proposition 1.3.2. *Le degré* Deg*, pour chaque $P, P' \in A_1$, vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $\mathrm{Deg}(P + P') \leq \max\{\mathrm{Deg}(P), \mathrm{Deg}(P')\}$,
(2) $\mathrm{Deg}(PP') = \mathrm{Deg}(P) + \mathrm{Deg}(P')$,
(3) $\mathrm{Deg}[P, P'] \leq \mathrm{Deg}(P) + \mathrm{Deg}(P') - 2$.

Démonstration. Cf. Théorème 1.1 page 14 [**5**]. □

1.3.1.2. Bonnes filtrations

Grâce au degré Deg on peut construire la famille $\mathcal{B} = (B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de A_1, où

$$B_k \doteq \{P \in A_1 \mid \mathrm{Deg}(P) \leq k\}.$$

Cette famille est en effet une filtration de A_1 (cf. les détails dans [**5**] page 56) et on l'appelle *filtration de Bernstein.*

Théorème 1.3.3. *L'anneau gradué* $\mathrm{gr}^{\mathcal{B}}(A_1)$ *est isomorphe à* $\mathbb{C}[x, y]$.

Démonstration. Cf. [**5**] Théorème 3.1 page 58. □

Définition 1.3.4 (Bonne filtration). Soit M un A_1-module et Γ une filtration de M croissante, exhaustive et compatible à la filtration $\mathcal{B}$. On dit que la filtration Γ est bonne s'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Gamma_{i+k} = B_i\Gamma_k$, pour chaque $k \geq k_0$ et pour chaque $i \geq 0$.

Proposition 1.3.5. *Tous les* A_1*-modules finiment engendrés admettent une bonne filtration.*

Démonstration. Pour chaque A_1-module M finiment engendré, il suffit prendre la filtration $\Gamma_k M \doteq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{B}_k u_i$ (laquelle est bonne), où $u_1, \ldots, u_n$ sont des générateurs de M. □

Proposition 1.3.6. *Si* Γ *et* Ω *sont deux bonnes filtrations du* A_1*-module* M *compatibles à la filtration* $\mathcal{B}$*, alors il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\Omega_{j-i} \subseteq \Gamma_j \subseteq \Omega_{j+i},$$

pour chaque $j \geq k$.

Démonstration. Cf. [**5**] Proposition 3.2 page 72. □

Proposition 1.3.7. *Une filtration* Γ *croissante, exhaustive et compatible à la filtration* $\mathcal{B}$ *d'un* A_1*-module* M *est bonne si et seulement si*

$$\mathrm{gr}^{\Gamma} M \doteq \bigoplus_{i\geq 0} \Gamma_{i+1}/\Gamma_i$$

est finiment engendré sur $\mathrm{gr}^{\mathcal{B}} A_1$.

Démonstration. Cf. [**5**] Proposition 3.1 page 71. On remarque que Coutinho prends pour définition de bonne filtration d'un A_1-module M, une filtration Γ telle que $\mathrm{gr}^{\Gamma} M$ est finiment engendré. □

1.3.1.3. Dimension

Proposition 1.3.8. *Si $M = \oplus_{i\geq 0} M_i$ est un module gradué finiment engendré sur l'anneau $\mathbb{C}[X]$, alors il existe un polynôme $\chi(t) \in \mathbb{Q}[t]$ et un entier positif N tel que*

$$\sum_{i=0}^{s} \dim_{\mathbb{C}} M_i = \chi(s),$$

pour chaque $s \geq N$.

Démonstration. Cf. [**5**] Théorème 1.1 page 74. □

Si M est un A_1-module finiment engendré, alors il admet une bonne filtration Γ relativement à $\mathcal{B}$ et son gradué est finiment engendré sur l'anneau $\mathrm{gr}^{\mathcal{B}} A_1 \simeq \mathbb{C}[x, y]$ (cf. Théorème 1.3.3). Le polynôme $\chi(t, \Gamma, M)$ est appelé le polynôme de Hilbert de M.

Définition 1.3.9 (Dimension). Soit M un A_1-module finiment engendré et Γ une bonne filtration de M. On appelle degré de M à $\deg \chi(t, \Gamma, M)$ et on le note $\mathrm{d}(M)$.

Proposition 1.3.10. *Si M est un A_1-module finiment engendré le degré $\mathrm{d}(M)$ ne dépend pas du choix de la bonne filtration de M.*

Démonstration. Soient Γ et Ω deux bonnes filtrations de M. Par la Proposition 1.3.6 il existe k tel que $\Omega_{j-k} \subset \Gamma_j \subset \Omega_{j+k}$. En particulier $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_{j-k} \leq \dim_{\mathbb{C}} \Gamma_j \leq \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{j+k}$. Grâce à la Proposition 1.3.8 on a pour $j \gg 0$

$$\chi(j-k, \Omega, M) \leq \chi(j, \Gamma, M) \leq \chi(j+k, \Omega, M).$$

Vu que le comportement de ce polynôme à l'infini est déterminé par le monôme de plus grand degré, $\chi(t, \Omega, M)$ et $\chi(t, \Gamma, M)$ ont le même degré et donc $\mathrm{d}(M)$ ne dépend pas du choix de la bonne filtration de M. □

1.3.1.4. Holonomie

Définition 1.3.11 (Holonomie). Un A_1-module finiment engendré M est dit holonome si $M = 0$ ou si $\mathrm{d}(M) = 1$.

Proposition 1.3.12. *Les A_1-modules holonomes sont isomorphes à A_1/I où I est un idéal non nul de A_1.*

Démonstration. Cf. [**5**] Proposition 1.3 et Corollaire 1.2 page 87. □

1.3.2. $\mathcal{D}$ et $\widehat{\mathcal{D}}$-modules holonomes

La notion d'holonomie d'un $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module $\mathcal{M}$ finiment engendré est construite à l'aide du polynôme de Hilbert d'une bonne filtration du module $\mathcal{M}$. On rappelle tout de suite les notions nécessaires pour la définir.

1.3.2.1. Degré d'un opérateur de $\mathcal{D}$ ou de $\widehat{\mathcal{D}}$

Le degré $\deg_{\partial_x}$ d'un opérateur de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$) se comporte de façon analogue au degré d'un polynôme. Les différences sont dues à la non commutativité de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$).

Définition 1.3.13. Soit $P \in \mathcal{D}$ (resp. $P \in \widehat{\mathcal{D}}$). On appelle degré de P, et on note $\deg_{\partial_x} P$, l'entier

$$\deg_{\partial_x}\left(P = \sum_{i=0}^{d} a_i(x)\partial_x^i\right) \doteq d,$$

où $a_d(x) \neq 0$ en tant qu'élément de $\mathbb{C}\{x\}$ (resp. $\mathbb{C}[\![x]\!]$.)

Proposition 1.3.14. *Le degré* $\deg_{\partial_x}$*, pour chaque $P, P' \in \mathcal{D}$ (resp. $P, P' \in \widehat{\mathcal{D}}$) vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $\deg_{\partial_x}(P + P') \leq \max\{\deg_{\partial_x}(P), \deg_{\partial_x}(P')\}$,
(2) $\deg_{\partial_x}(PP') = \deg_{\partial_x}(P) + \deg_{\partial_x}(P')$,
(3) $\deg_{\partial_x}[P, P'] \leq \deg_{\partial_x}(P) + \deg_{\partial_x}(P') - 1$.

Démonstration. Analogue à la Proposition 1.3.2. □

1.3.2.2. Bonnes filtrations

Grâce au degré $\deg_{\partial_x}$ on peut construire la famille $(F_k\mathcal{D})_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(F_k\widehat{\mathcal{D}})_{k\in\mathbb{N}}$) de sous-ensembles de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$), où

$$F_k \doteq \{P \mid \deg_{\partial_x}(P) \leq k\}.$$

Cette famille est en effet une filtration de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$) (cf. les détails dans [**13**] paragraphe 1.3.1 page 3).

Définition 1.3.15 (Bonne filtration). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module et $F_k\mathcal{M}$ une filtration de $\mathcal{M}$ croissante, exhaustive et compatible à la filtration $(F_k\mathcal{D})_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(F_k\widehat{\mathcal{D}})_{k\in\mathbb{N}}$). On dit que la filtration $F_k\mathcal{M}$ est bonne s'il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F_i\mathcal{D}F_j\mathcal{M} = F_{i+j}\mathcal{M}$ (resp. $F_i\widehat{\mathcal{D}}F_j\mathcal{M} = F_{i+j}\mathcal{M}$) pour chaque $i \geq 0$ et chaque $j \geq j_0$.

Proposition 1.3.16. *Tous les $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-modules finiment engendrés admettent une bonne filtration.*

Démonstration. Cf. [**13**] Proposition 3.2.2 page 10. □

Proposition 1.3.17. *Si $(F_k\mathcal{M})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(G_k\mathcal{M})_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux bonnes filtrations du $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module $\mathcal{M}$ compatibles à la filtration $(F_k\mathcal{D})_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(F_k\widehat{\mathcal{D}})_{k\in\mathbb{N}}$), alors il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$G_{j-i}\mathcal{M} \subseteq F_j\mathcal{M} \subseteq G_{j+i}\mathcal{M},$$

pour chaque $j \geq j_0$.

Démonstration. Cf. [**13**] Proposition 3.2.3 page 11. □

Proposition 1.3.18. *Une filtration $(F_k\mathcal{M})_{k\in\mathbb{N}}$ croissante, exhaustive et compatible à la filtration $(F_k\mathcal{D})_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(F_k\widehat{\mathcal{D}})_{k\in\mathbb{N}}$)d'un $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module $\mathcal{M}$ est bonne si et seulement si*

$$\mathrm{gr}^F\mathcal{M} \doteq \bigoplus_{i\geq 0} F_{i+1}\mathcal{M}/F_i\mathcal{M}$$

est finiment engendré.

Démonstration. Cf. [**13**] Proposition 3.2.2 page 10. □

1.3.2.3. Dimension

Comme dans le cas de l'algèbre de Weyl, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module noethérien, alors il admet une bonne filtration $(F_k\mathcal{M})_{k\in\mathbb{N}}$ et son gradué M est noethérien sur l'anneau $\mathbb{C}\{x\}[\xi] \doteq \mathrm{gr}^F\mathcal{D}$ (resp. $\mathbb{C}[\![x]\!][\xi] \doteq \mathrm{gr}^F\widehat{\mathcal{D}}$). La notion de dimension est définie à partir de la fonction d'Hilbert :

$$\mathrm{H}_{\mathcal{M}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{C}}[(x,\xi)^n M/(x,\xi)^{n+1}M]t^n.$$

Celle-ci vérifie la Proposition suivante :

Proposition 1.3.19. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module noethérien et $\mathrm{H}_{\mathcal{M}}(t)$ sa fonction d'Hilbert. Il existe $d \in \mathbb{N}$ et $R \in \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ tels que*

$$\mathrm{H}_{\mathcal{M}}(t) = \frac{R(t)}{(1-t)^d}$$

et que $R(1) > 0$.

Démonstration. Cf. [**13**] Proposition 3.4.1 page 16. □

Définition 1.3.20 (Dimension). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module noethérien, $(F_k\mathcal{M})_{k\in\mathbb{N}}$ une bonne filtration de $\mathcal{M}$ et $\mathrm{H}_{\mathcal{M}}(t) = \frac{R(t)}{(1-t)^d}$ sa fonction d'Hilbert. On appelle degré de $\mathcal{M}$ à d et on le note $\mathrm{d}(\mathcal{M})$.

Proposition 1.3.21. *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module noethérien le degré $\mathrm{d}(\mathcal{M})$ ne dépend pas du choix de la bonne filtration de $\mathcal{M}$.*

Démonstration. Cf. [**13**] Proposition 3.3.7 page 15. □

1.3.2.4. Holonomie

Définition 1.3.22 (Holonomie). Un $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module finiment engendré $\mathcal{M}$ est dit holonome si $\mathcal{M} = 0$ ou si $\mathrm{d}(\mathcal{M}) = 1$.

Proposition 1.3.23. *Les $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-modules holonomes sont isomorphes à $\mathcal{D}/I$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}/I$) où I est un idéal non nul de $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$).*

Démonstration. Cf. [**13**] Corollaire 3.3.5 page 14. □

Proposition 1.3.24. *Soit $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}/I$ un $\mathcal{D}$-module holonome tel que $m_0(I) = 0$ (cf. Définition 1.2.14). Alors $\mathcal{M} \simeq (\mathcal{D}/\mathcal{D}x)^{m_1(I)}$.*

Démonstration. Cf. [**26**] Proposition 4.11 page 69. □

1.4. Localisation et connexions méromorphes

Dans cette section on introduit les notions de localisation et de connexion méromorphe et on montre l'équivalence de ces deux notions dans le cadre des $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-modules holonomes. On montre aussi que les A_1 (resp. $\mathcal{D}$ ou $\widehat{\mathcal{D}}$)-modules holonomes localisés sont isomorphes à A_1/I (resp. $\mathcal{D}/I$ ou $\widehat{\mathcal{D}}/I$), où I est un idéal principal non nul de A_1 (resp. $\mathcal{D}$ ou $\widehat{\mathcal{D}}$).

1.4.1. Localisation sur $\mathbb{C}[x][*\Sigma]$

Notation 1.4.1. Soit $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{C}[x][*\Sigma]$ l'anneau $\mathbb{C}[x, (x-\alpha_1)^{-1}, \dots, (x-\alpha_n)^{-1}]$.

Définition 1.4.2 (Localisation). Soit $\Sigma \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble fini et soit M un A_1-module holonome. On appelle localisé de M le long Σ le A_1-module $M \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x][*\Sigma]$ et on le note $M[*\Sigma]$.

Définition 1.4.3. Soit $M = A_1/I$ un A_1-module holonome et soit $P_p = a_d(x)\partial_x^d + \cdots + a_0(x) \in I$ obtenu selon la Définition 1.2.1. On appelle points singuliers de M les racines de $a_d(x)$.

Proposition 1.4.4. *Si M un A_1-module holonome, il existe un opérateur $P \in A_1 \setminus \{0\}$ et un morphisme surjectif*

$$A_1/A_1 \cdot P \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

tel que son noyau, $\ker \varphi$, est à support sur l'ensemble $\Sigma = \{\alpha_1 \cdots, \alpha_n\}$ des points singuliers de M (i.e. il est une somme directe de modules de torsion sur $\mathbb{C}[x-\alpha_i]$).

Démonstration. Cf. [**13**] Corollaire 1.1.4 page 68. □

Corollaire 1.4.5. *Si Σ est l'ensemble des points singuliers d'un A_1-module holonome M, son localisé sur Σ est un A_1-module holonome isomorphe à $A_1/(P)$, pour un certain $P \in A_1 \setminus \{0\}$.*

Démonstration. Immédiate car $\ker \varphi$, cf. Proposition 1.4.4, est à support dans Σ. □

1.4.2. Localisation sur $\mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ ou $\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$

Définition 1.4.6 (Localisation). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module. On appelle localisé de $\mathcal{M}$ le $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module $\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ (resp. $\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}[\![x]\!]} \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$) et on le note $\mathcal{M}[x^{-1}]$.

Proposition 1.4.7. *Le localisé d'un $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module holonome est isomorphe à $\mathcal{D}/(P)$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}/(P)$) pour un certain $P \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ (resp. $P \in \widehat{\mathcal{D}} \setminus \{0\}$) et donc holonome.*

Démonstration. Cf. [**13**] Corollaire 4.2.8 page 21. □

1.4.3. Connexions méromorphes

Définition 1.4.8. Une connexion méromorphe $\mathcal{M}_K$, où $K = \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ ou $\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$, est un K-espace vectoriel de dimension finie munie d'une dérivation ∂_x vérifiant les propriétés :

(1) $\partial_x \colon \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
(2) Pour chaque $f \in K$ et $m \in \mathcal{M}_K$ $\partial_x(fm) = \frac{\partial f}{\partial x} m + f\partial_x m$.

Proposition 1.4.9. *Une connexion méromorphe sur $\mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ (resp. $\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$) détermine un $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$)-module holonome localisé et vice versa.*

Démonstration. Cf. [**13**] Corollaire 4.3.2 page 22. □

1.5. Irréductibilité

Dans cette section on présente la notion d'irréductibilité et on présente une condition nécessaire vérifiée par les A_1-modules holonomes irréductibles.

Définition 1.5.1. Soit R un anneau avec unité. On dit qu'un R-module M est irréductible si 0 et M sont les seuls sous-modules de M.

Proposition 1.5.2. *Soit $M = A_1/(P = P_p, Q = P_q)$, cf. Proposition 1.2.9, un A_1-module holonome irréductible. Alors :*

1) *si $P \neq Q$, P et Q n'ont pas de facteur commun (à gauche et à droite),*
2) *si $P = Q$, P est irréductible.*

Démonstration. 1) Si P, Q ne sont pas relativement primes, on a deux cas à étudier : soit $(P, Q) = (P'R, Q'R)$, soit $(P, Q) = (RP'', RQ'')$ pour un certain $R \in A_1 \setminus \mathbb{C}$. Dans le premier cas on a $(P, Q) \subsetneq (R) \neq A_1$ et on a la surjection :

$$M = A_1/(P, Q) \twoheadrightarrow A_1/(R),$$

dans le deuxième cas on a $(P, Q) \subsetneq (P'', Q'') \neq A_1$ et on a la surjection :

$$M = A_1/(P, Q) \twoheadrightarrow A_1/(P'', Q'').$$

Dans les deux cas on conclut que M n'est pas irréductible, donc P et Q sont relativement primes.
La démonstration de 2) est, *mutatis mutandis*, la même. □

Lemme 1.5.3. *Soit* $\mathrm{M} \neq 0$ *un* A_1*-module holonome irréductible. Si* M *est de* x *-torsion, c'est-à-dire pour chaque* $m \in \mathrm{M}$ *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x^n m = 0$*, alors* $\mathrm{M} = A_1/A_1.x$.

Démonstration. Vu que M est holonome, il existe un idéal I non nul de A_1 tel que $\mathrm{M} = A_1/I$. Étant donné que M est de x -torsion, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n[1] = 0$, c'est-à-dire $x^n \in I$, donc $I \subset (x^n) \subset (x)$. En particulier on a le morphisme surjectif canonique $\pi : A_1/I \to A_1/A_1.x$. Vu que $\pi([1]) = [1] \neq 0$, $\ker \pi \neq \mathrm{M}$. Par l'irréductibilité de M, $\ker \pi = 0$, alors π est un isomorphisme. □

Corollaire 1.5.4. *Soit* $\mathrm{M} \neq 0$ *un* A_1*-module holonome irréductible. Si* $\mathrm{M} \neq A_1/A_1.x$*, alors* M *est un sous* A_1*-module de* $\mathrm{M}[x^{-1}]$.

Démonstration. Prenons le morphisme de localisation :

$$\begin{array}{rcl} \lambda : \mathrm{M} & \longrightarrow & \mathrm{M}[x^{-1}]. \\ m & \longmapsto & m \otimes 1 \end{array}$$

Étant donné que M est irréductible $\ker \lambda = 0$ ou $\ker \lambda = \mathrm{M}$. Si $\ker \lambda = \mathrm{M}$, M est de x -torsion et alors $\mathrm{M} = A_1/A_1.x$. Par hypothèse $\mathrm{M} \neq A_1/A_1.x$, alors $\ker \lambda = 0$ et donc M est un sous A_1-module de $\mathrm{M}[x^{-1}]$. □

1.6. Modules tordus

On présente maintenant la notion de *torsion*, laquelle nous permet unifier les notions de transformation de Fourier, inversion et de dualité. Pour cela on commence avec une construction générale. Soit R un anneau, M un R-module à gauche (resp. à droite) et σ un automorphisme (resp. un antiautomorphisme) de R. On définit un nouveau module, noté M_σ et appelé *torsion* de M par σ, le R-module à gauche défini de la façon suivante :

(1) $M_\sigma = M$ comme groupe abélien,

(2) pour chaque $a \in R$ et $m \in M$ l'action de a sur m est donnée par l'expression $a \bullet m \doteq \sigma(a)m$ (resp. $a \bullet m \doteq m\sigma(a)$.)

Des calculs élémentaires montrent que M_σ est un R-module à gauche et que la torsion par σ définit un foncteur de la catégorie des R-modules à gauche dans elle-même.

Proposition 1.6.1. *Si* R *est un anneau,* M *un* R*-module à gauche (resp. à droite) et* σ *un automorphisme (resp. un antiautomorphisme) de* R *alors :*

(1) M_σ *est irréductible si et seulement si* M *est irréductible.*

(2) M_σ *est un module de torsion si et seulement si* M *est un module de torsion.*

(3) *Si N est un sous-module de M alors $(M/N)_\sigma \simeq M_\sigma/N_\sigma$.*

(4) *Si J est un idéal à gauche (respectivement à droite) de R et $\sigma(J) \doteq \{\sigma(r)|r \in J\}$ alors $\sigma(J)$ est un idéal à gauche de R et $(R/J)_\sigma \simeq R/\sigma^{-1}(J)$.*

Démonstration. Cf. **[5]** Proposition 2.1 page 38, pour le cas où σ est un automorphisme. Si σ est un antiautomorphisme la démonstration est similaire. □

1.6.0.1. Exemples d'application :

Appliquons cette construction à A_1 (resp. $A_1[x^{-1}]$ ou $\mathcal{D}$ ou $\widehat{\mathcal{D}}$) afin de définir la transformation de Fourier (resp. l'inversion ou la transformation droite-gauche).

Définition 1.6.2. La transformation de Fourrier et l'inversion sont, resp. les automorphismes suivants :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : \mathbb{C}[x]\langle\partial_x\rangle & \longrightarrow & \mathbb{C}[x]\langle\partial_x\rangle, \\ x & \longmapsto & -\partial_x \\ \partial_x & \longmapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} : \mathbb{C}[x,x^{-1}]\langle\partial_x\rangle & \longrightarrow & \mathbb{C}[x,x^{-1}]\langle\partial_x\rangle, \\ x & \longmapsto & x^{-1} \\ \partial_x & \longmapsto & -x^2\partial_x \end{array}$$

La transformation droite-gauche en $\mathcal{D}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}$) est l'antiautomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}-\mathcal{G} : \mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle & \longrightarrow & \mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle, \\ x & \longmapsto & x \\ \partial_x & \longmapsto & -\partial_x \end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}-\mathcal{G} : \mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle & \longrightarrow & \mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle. \\ x & \longmapsto & x \\ \partial_x & \longmapsto & -\partial_x \end{array}$$

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{I}$ sont des morphismes de $\mathbb{C}$ -algèbres car les relations entre les générateurs sont préservées. On remarque aussi que $\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}$. $\mathcal{D}-\mathcal{G}$ est un antiautomorphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres car les relations entre les générateurs sont anti-préservées.

Définition 1.6.3. Soit M un A_1-module (resp. un $A_1[x^{-1}]$)-module. On appelle transformation de Fourier (resp. inversion) le A_1-module $M_{\mathcal{F}}$ (resp. le $A_1[x^{-1}]$-module $M_{\mathcal{I}}$.)

1.7. Dualité

Le but de cette section est de calculer l'expression explicite du dual, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{D})$, d'un $\mathcal{D}$-module holonome $\mathcal{M}$. Pour cela on commence par présenter la notion de résolution libre afin de pouvoir définir la notion de complexe de cohomologie des $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{D})$.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module de type fini alors il admet une *résolution* par $\mathcal{D}$-modules libres :

$$\cdots \overset{\varphi_i}{\to} \mathcal{D}^{p_i} \overset{\varphi_{i-1}}{\to} \mathcal{D}^{p_{i-1}} \cdots \overset{\varphi_0}{\to} \mathcal{D}^{p_0} \to \mathcal{M} \to 0$$

où les φ_i sont des morphismes $\mathcal{D}$-linéaires à gauche et satisfont la relation $\varphi_{i+1}\circ\varphi_i = 0$ et aussi $\mathrm{Ker}\varphi_i = \mathrm{Im}\varphi_{i+1}$. On rappelle que cette résolution est construite récursivement en prenant des générateurs de $\mathrm{Ker}\varphi_i$ dans chaque pas. Grâce à ce complexe on peut construire un nouveau complexe :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{p_0},\mathcal{N}) \overset{\psi_0}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{p_1},\mathcal{N}) \overset{\psi_1}{\to} \cdots \overset{\psi_{i-1}}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{p_i},\mathcal{N}) \overset{\psi_i}{\to} \cdots$$

où $\psi_i(f) = f\circ\psi_i$ et $\mathrm{Ker}\psi_0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$. La cohomologie de ce dernier complexe est notée $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ et donc on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \\ \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \mathrm{Ker}\psi_i/\mathrm{Im}\psi_{i-1} \quad \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

Cette cohomologie entraîne que la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$$

donne naissance à la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}'',\mathcal{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}',\mathcal{N}) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}'',\mathcal{N}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}',\mathcal{N}) \to \cdots \end{aligned}$$

Proposition 1.7.1. *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module de type fini alors $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = 0$ pour chaque $i \geq 2$ et pour chaque $\mathcal{D}$-module à gauche $\mathcal{N}$.*

Démonstration. Cf. [**13**] Proposition 1.3.5 page 50. □

Définition 1.7.2. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module holonome. On appelle dual de $\mathcal{M}$, et on note $\mathcal{M}^*$, le module $(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{D}))_{\mathcal{D}-\mathcal{G}}$.

1.8. Régularité et irrégularité

Dans cette section on présente les notions de singularité régulière, de singularité irrégulière d'une connexion méromorphe et comment nous pouvons le lire sur le polygone de Newton.

1.8.1. Régularité

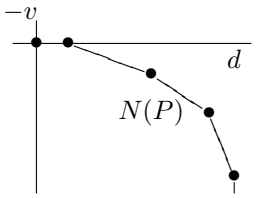
1.8.1.1. Régularité d'un opérateur de $\mathcal{D}$ ou $\widehat{\mathcal{D}}$

Dans la section 1.4 on a vu que la connexion méromorphe $\mathcal{M}_K$, $K = \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ (resp. $\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$), est isomorphe à $\mathcal{D}/(P)$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}/(P)$) où $P = \sum a_i(x)(x\partial_x)^i$, $a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}$ (resp. $\mathbb{C}[\![x]\!]$) cf. Proposition 1.4.7.

Définition 1.8.1. Soit $\mathcal{M}_K = \mathcal{D}/(P)$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}/(P)$) une connexion méromorphe, où $P = \sum a_i(x)(x\partial_x)^i$ est le développement de P. En multipliant P par un élément convénient de $\mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ (resp. $\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$), on peut supposer qu'au moins un des $a_i(x)$ est une unité. Pour chaque "monôme" $a_i(x)(x\partial_x)^i$ on associe le point $(i, -\mathrm{val}(a_i))$ de $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ et on appelle polygone de Newton, noté $N(P)$, l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$\bigcup_i \left\{(i, -\mathrm{val}\,(a_i)) - \mathbb{N}^2\right\}.$$

Ce polygone ne dépend pas de la façon d'écrire P et il a la forme générique de la figure suivante :



Définition 1.8.2. On dit que P est régulier (ou qu'il a une singularité régulière en 0) si $N(P)$ est un quadrant. On dit que la connexion méromorphe $\mathcal{M}_K$ est régulière si elle est isomorphe à $\mathcal{D}/(P)$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}/(P)$) avec P régulier.

1.8.1.2. Régularité d'un opérateur de A_1

Considérons $P \in A_1$, P admet les écritures suivantes :

$$P = \sum_{k=0}^{d} b_k(x)\partial_x^k$$

Définition 1.8.3. Soit $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ l'ensemble des points singuliers de P. On appelle composante homogène de poids λ en $x - \alpha$, $\alpha \in \Sigma$, de P, et on la note P_λ, l'opérateur

$$P_\lambda \doteq \sum_{k=0}^{p} a_{k,k-\lambda}(x-\alpha)^{k-\lambda}\partial_x^k.$$

Lemme 1.8.4. *Le poids de P en α vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $p_\alpha(P_1P_2) = p_\alpha(P_1) + p_\alpha(P_2)$,
(2) *si* $p_\alpha(P_1) > p_\alpha(P_2)$ *alors* $p_\alpha(P_1 + P_2) = p_\alpha(P_1)$.

Démonstration. Soient $P, Q \in A_1$ et $p_\alpha(P)$, $p_\alpha(Q)$ leurs poids respectifs en α. L'idée de la démonstration consiste à décomposer P et Q en composantes homogènes selon le poids :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{\mu=p_\alpha(P)-m}^{p_\alpha(P)} P_\mu, \\ Q &= \sum_{\mu=p_\alpha(Q)-m'}^{p_\alpha(Q)} Q_\mu, \end{aligned}$$

où $P_\mu \doteq \sum b_{k,k-\mu}(x-\alpha)^{k-\mu}\partial_x^k$, $b_{k,k-\mu} \in \mathbb{C}$ et $Q_\mu \doteq \sum c_{k,k-\mu}(x-\alpha)^{k-\mu}\partial_x^k$, $c_{k,k-\mu} \in \mathbb{C}$. Quand on travaille avec des opérateurs homogènes P_{μ_1} et Q_{μ_2} de poids μ_1 et μ_2 respectivement, on a l'identité suivante : $p_\alpha(P_{\mu_1}Q_{\mu_2}) = \mu_1 + \mu_2$. Pour la montrer il suffit de le faire au niveau des "monômes". Si $(x-\alpha)^l\partial_x^k$, $(x-\alpha)^{l'}\partial_x^{k'}$ sont des "monômes" de poids μ_1 et μ_2 respectivement, on a :

$$\begin{aligned} (x-\alpha)^l\partial_x^k(x-\alpha)^{l'}\partial_x^{k'} &= (x-\alpha)^l\left[\sum_{n=0}^{k}\frac{l'!k!}{(l'-n)!(k-n)!n!}(x-\alpha)^{l'-n}\partial_x^{k-n}\right]\partial_x^{k'} \\ &= \sum_{n=0}^{k}\frac{l'!k!}{(l'-n)!(k-n)!n!}(x-\alpha)^{l+l'-n}\partial_x^{k+k'-n} \end{aligned}$$

et donc $p_\alpha(P_{\mu_1}Q_{\mu_2}) = \mu_1 + \mu_2$. L'égalité précédente entraîne aussi que :

$$PQ = \sum_{l=0}^{m+m'} \sum_{\mu+\mu'=p_\alpha(P)+p_\alpha(Q)-l} P_\mu Q_{\mu'},$$

donc $p_\alpha(PQ) = p_\alpha(P) + p_\alpha(Q)$.

La propriété (2) est démontrée d'une façon similaire, en prenant la décomposition en composantes homogènes selon le poids. □

Définition 1.8.5. On appelle poids à l'infini de P et on note $p_\infty(P)$ l'entier défini par :

$$\begin{aligned} p_\infty(P) &= \min\{k-l \mid a_{kl} \neq 0\} \\ &= \min\{k - \deg(a_k(x)) \mid k \in \{0,1,\ldots,d\}\} \end{aligned}$$

Le poids à l'infini de P vérifie les propriétés suivantes :

(1) $p_\infty(P_1P_2) = p_\infty(P_1) + p_\infty(P_2)$,
(2) si $p_\infty(P_1) < p_\infty(P_2)$ alors $p_\infty(P_1 + P_2) = p_\infty(P_1)$.

Définition 1.8.6. P est dit à singularité régulière en α si $\deg_{\partial_x}(P) - \mathrm{val}_\alpha(P) = p_\alpha(P)$. P est dit à singularité régulière à l'infini si $\deg_{\partial_x}(P) - \delta(P) = p_\infty(P)$.

Remarque 1.8.7. Quand $\alpha = 0$, la notion de régularité de $P \in A_1 \subset \mathcal{D} \subset \widehat{\mathcal{D}}$, en $x = 0$, de la Définition 1.8.6 coïncide avec na notion de régularité de la Définition 1.8.2.

Lemme 1.8.8. *Soit $P, Q \in A_1$. PQ est à singularité régulière en α si et seulement si P et Q sont à singularité régulière en α.*

Démonstration. Si P, Q sont à singularité régulière, $p_\alpha(P) = \deg(P) - \mathrm{val}_\alpha(P)$ et $p_\alpha(Q) = \deg(Q) - \mathrm{val}_\alpha(Q)$ alors $p_\alpha(PQ) = \deg(PQ) - \mathrm{val}_\alpha(PQ)$ et donc PQ est à singularité régulière.

Si PQ est à singularité régulière, $p_\alpha(PQ) = \deg(PQ) - \mathrm{val}_\alpha(PQ)$, alors $(p_\alpha(P) - (\deg(P) - \mathrm{val}_\alpha(P))) + (p_0(Q) - (\deg(Q) - \mathrm{val}_\alpha(Q)))) = 0$. Vu que pour chaque $A \in A_1$, $p_\alpha(A) - (\deg(A) - \mathrm{val}_\alpha(A)) \geq 0$, P et Q sont à singularités régulières. □

Lemme 1.8.9. *Soit $P, Q \in A_1$. PQ est à singularité régulière à l'infini si et seulement si P et Q sont à singularité régulière à l'infini.*

Démonstration. Analogue à la démonstration du Lemme 1.8.8. □

1.8.1.3. Régularité d'un idéal de A_1.

Proposition et Définition 1.8.10. *Soit I un idéal non nul de A_1. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe $P \in I$ tel que P est à singularité régulière en α,*
(2) *L'un des opérateurs d'une base de division est à singularité régulière en α,*
(3) *Tous les opérateurs d'une base de division de I son à singularité régulière en α.*

On dit qu'un idéal I est a singularité régulière (en α) si l'une des conditions précédentes est vérifiée.

Démonstration. $3 \Rightarrow 1$ Immédiate.
$1 \Rightarrow 2$ D'après le Corollaire 1.2.8 il existe un polynôme $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ tel que $a(x)P = QP_p$. Vu que P et $a(x)$ sont à singularité régulière, le Lemme 1.8.8 entraîne que P_p est à singularité régulière.
$2 \Rightarrow 3$ Résulte du Lemme 1.8.22. □

1.8.2. Irrégularité

1.8.2.1. Irrégularité d'un $\mathcal{D}$-module

Définition 1.8.11. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle$-module holonome à gauche de type finie et $\mathcal{N}$ un $\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle$-module holonome à gauche. Si les espaces des solutions $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ sont de dimension finie sur $\mathbb{C}$, on dit que l'indice de $\mathcal{M}$ relativement à $\mathcal{N}$ est défini et on pose :

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle}(\mathcal{M}, \mathcal{N}).$$

Proposition 1.8.12. *Soit* $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ *une suite exacte courte de* $\mathcal{D}$*-modules de type fini et* $\mathcal{N}$ *un* $\mathcal{D}$*-module de type fini. Si* $\chi(\mathcal{M}', \mathcal{N})$*,* $\chi(\mathcal{M}'', \mathcal{N})$ *sont définis alors* $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ *est défini et on a :*

$$\chi(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \chi(\mathcal{M}', \mathcal{N}) + \chi(\mathcal{M}'', \mathcal{N}).$$

Démonstration. Cf. [**13**] Proposition 1.3.9 page 52. □

Notation 1.8.13. K, $\widehat{K}$ désignent, resp. $\mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$, $\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$.

Théorème 1.8.14. *Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{D}$*-module holonome. Les indices de* $\mathcal{M}$ *relativement à* $\mathbb{C}\{x\}$*,* $\mathbb{C}[\![x]\!]$*,* $\mathbb{C}[\![x]\!]/\mathbb{C}\{x\}$*,* K*,* $\widehat{K}$ *et* $\widehat{K}/K$ *sont bien définis.*

Démonstration. Cf. [**13**] Théorème 1.3.10 page 53. Ce Thórème est dû en dimension supérieure à Kashiwara [**10**]. □

Définition 1.8.15 (Irrégularité). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle$-module holonome à gauche. On appelle **irrégularité** de $\mathcal{M}$ l'invariant :

$$i(\mathcal{M}) = \chi\left(\mathcal{M}, \mathbb{C}[\![x]\!]\right) - \chi(\mathcal{M}, \mathbb{C}\{x\}).$$

Lemme 1.8.16. *Si* $\mathcal{M}$ *est un* $\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle$*-module holonome à gauche, alors :* $i(\mathcal{M}) = i(\mathcal{M}[x^{-1}])$.

Démonstration. Appelons α le morphisme canonique $\mathcal{M} \to \mathcal{M}[x^{-1}]$, $m \mapsto m \otimes 1$. A partir de ce morphisme on peut construire la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}[x^{-1}] \longrightarrow \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow 0,$$

où $\ker\alpha$, $\operatorname{coker}\alpha$ sont des $\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle$-modules de torsion sur $\mathcal{O}_x$. Cette suite exacte peut être décomposée en deux suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \operatorname{im}\alpha \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{im}\alpha \longrightarrow \mathcal{M}[x^{-1}] \longrightarrow \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow 0,$$

celles ci entraînent que

$$\begin{gathered}
\chi(\ker\alpha, \mathbb{C}[\![x]\!]) - \chi(\mathcal{M}, \mathbb{C}[\![x]\!]) + \chi(\operatorname{im}\alpha, \mathbb{C}[\![x]\!]) = 0,\\
\chi(\ker\alpha, \mathbb{C}\{x\}) - \chi(\mathcal{M}, \mathbb{C}\{x\}) + \chi(\operatorname{im}\alpha, \mathbb{C}\{x\}) = 0,\\
\chi(\operatorname{im}\alpha, \mathbb{C}[\![x]\!]) - \chi(\mathcal{M}[x^{-1}], \mathbb{C}[\![x]\!]) + \chi(\operatorname{coker}\alpha, \mathbb{C}[\![x]\!]) = 0,\\
\chi(\operatorname{im}\alpha, \mathbb{C}\{x\}) - \chi(\mathcal{M}[x^{-1}], \mathbb{C}\{x\}) + \chi(\operatorname{coker}\alpha, \mathbb{C}\{x\}) = 0,
\end{gathered}$$

donc $i(\ker\alpha) - i(\mathcal{M}) + i(\mathcal{M}[x^{-1}]) - i(\operatorname{coker}\alpha) = 0$. Si $\mathcal{L}$ est un $\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle$-module holonome de torsion sur $\mathbb{C}\{x\}$ alors il existe $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $\mathcal{L} \simeq \mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle/(x^k)$, cf. Proposition 1.3.24. On calcule maintenant $\operatorname{Ext}^i_{\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle}(\mathcal{L}, \mathbb{C}[\![x]\!])$, $\operatorname{Ext}^i_{\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle}(\mathcal{L}, \mathbb{C}\{x\})$,

$i = 0, 1$ à partir de leurs complexes de solutions respectifs :

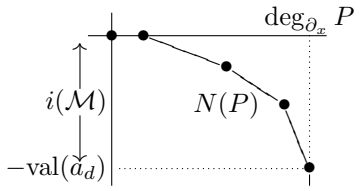
$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle}(\mathcal{L}, \mathbb{C}[\![x]\!]) &= \ker\left[x^k : \mathbb{C}[\![x]\!] \longrightarrow \mathbb{C}[\![x]\!]\right] = \langle 0\rangle \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle}(\mathcal{L}, \mathbb{C}[\![x]\!]) &= \mathrm{coker}\left[x^k : \mathbb{C}[\![x]\!] \longrightarrow \mathbb{C}[\![x]\!]\right] = \mathbb{C}[\![x]\!]/(x^k) \\
\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle}(\mathcal{L}, \mathbb{C}\{x\}) &= \ker\left[x^k : \mathbb{C}\{x\} \longrightarrow \mathbb{C}\{x\}\right] = \langle 0\rangle \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle}(\mathcal{L}, \mathbb{C}\{x\}) &= \mathrm{coker}\left[x^k : \mathbb{C}\{x\} \longrightarrow \mathbb{C}\{x\}\right] = \mathbb{C}\{x\}/(x^k)
\end{aligned}$$

donc $i(\mathcal{L}) = 0$. Étant donné que $\ker\alpha$ et $\mathrm{coker}\,\alpha$ sont des modules de torsion sur $\mathbb{C}\{x\}$, $\mathbb{C}[\![x]\!]$ respectivement, $i(\mathcal{M}) = i(\mathcal{M}[x^{-1}])$. □

Lemme 1.8.17. *Si $\mathcal{M} = \mathcal{D}/(P)$ est une connexion méromorphe, où $P = \sum_{i=0}^{d} a_i(x)(x\partial_x)^i$, $a_d \neq 0$ et au moins un des a_i est une unité, alors $i(\mathcal{M}) = \mathrm{val}(a_d)$.*

Démonstration. Cf. [**13**] démonstration du Théorème 1.3.10 page 53. □

Grâce à ce Lemme on peut interpréter géométriquement $i(\mathcal{M})$ comme étant la distance sur le polygone de Newton de P :



1.8.2.2. Irrégularité d'un opérateur de A_1

Définition 1.8.18. Soit $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ l'ensemble des points singuliers de $P \in A_1$. On appelle irrégularité en $\alpha \in \Sigma$ (au sens de B. Malgrange) de P, le nombre : $i_\alpha(P) \doteq p_\alpha(P) - (\deg_{\partial_x}(P) - \mathrm{val}_\alpha(P))$. On appelle irrégularité à l'infini de P, le nombre : $i_\infty(P) \doteq (\deg \partial_x(P) - \delta(P)) - p_\infty(P)$.

Proposition 1.8.19. *Si $P_1, P_2 \in A_1$, Σ_1, Σ_2 désignent les ensembles respectifs de points singuliers de P_1 et P_2 et $\Sigma \doteq \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, alors $i_\alpha(P_1P_2) = i_\alpha(P_1) + i_\alpha(P_2)$, pour chaque $\alpha \in \Sigma$.*

Démonstration. Si $\alpha \neq \infty$ alors

$$\begin{aligned}
i_\alpha(P_1P_2) &= p_\alpha(P_1P_2) - (\deg_{\partial_x}(P_1P_2) - \mathrm{val}_\alpha(P_1P_2)) \\
&= p_\alpha(P_1) + p_\alpha(P_2) - (\deg_{\partial_x}(P_1) + \deg_{\partial_x}(P_2) - \mathrm{val}_\alpha(P_1) - \mathrm{val}_\alpha(P_2)) \\
&= i_\alpha(P_1) + i_\alpha(P_2).
\end{aligned}$$

La démonstration dans le cas $\alpha = \infty$ est similaire. □

1.8.2.3. Irrégularité d'un idéal de A_1.

Définition 1.8.20. Soit I un idéal de A_1. On appelle irrégularité en α de I l'entier positif ou nul

$$i_\alpha(I) \doteq \min\{i_\alpha(P) \mid P \in I \setminus \{0\}\}.$$

Proposition 1.8.21. *Si $(P_p, \dots, P_q)$ une base de division de l'idéal I, où $P_j = a_j(x)\partial_x^j + b_{j-1}^{(j)}(x)\partial_x^{j-1} + \cdots + b_0^{(j)}(x)$, $j = p, \dots, q$ et $a_j(x), b_{j-1}^{(j)}(x), \dots, b_0^{(j)}(x) \in \mathbb{C}[x]$, alors il existe des éléments uniques $\lambda_i^{(j)}(x)$ de $\mathbb{C}[x]$, où $i, j \in \{p, p+1, \dots, q\}$, tels que :*

$$\begin{aligned}
\partial_x P_p &= \lambda_p^{(p)}(x)P_p + a_p(x)/a_{p+1}(x)P_{p+1}, \\
\partial_x P_{p+1} &= \lambda_p^{(p+1)}(x)P_p + \lambda_{p+1}^{(p+1)}(x)P_{p+1} + a_{p+1}(x)/a_{p+2}(x)P_{p+2}, \\
&\vdots \\
\partial_x P_{q-1} &= \lambda_p^{(q-1)}(x)P_p + \lambda_{p+1}^{(q-1)}(x)P_{p+1} + \cdots + a_{q-1}(x)/a_q(x)P_q.
\end{aligned}$$

Démonstration. Étant donné que $P_j \in I$, $\partial_x P_j \in I$, alors par la Proposition 1.2.2 $\partial_x P_j$, $j < q$, admet l'écriture suivante :

$$\partial_x P_j = c_{j+1}(x)P_{j+1} + \lambda_j^{(j)}(x)P_j + \cdots + \lambda_p^{(j)}(x)P_p$$

où $c_{j+1}(x), \lambda_j^{(j)}(x), \dots, \lambda_p^{(j)}(x) \in \mathbb{C}[x]$, en particulier on a l'égalité :

$$a_j(x) = c_{j+1}(x)a_{j+1}(x) \tag{1}$$

laquelle entraîne que $c_{j+1}(x) = a_j(x)/a_{j+1}(x) \in \mathbb{C}[x]$. □

Lemme 1.8.22. *Les éléments d'une base de division de I ont même irrégularité.*

Démonstration. Pour le démontrer, il suffit montrer que pour chaque $j \in \{p, \dots, q-1\}$, $i_\alpha(P_j) = i_\alpha(P_{j+1})$. Par la définition d'irrégularité cette égalité est équivalente à :

$$p_\alpha(P_{j+1}) - \mathrm{val}_\alpha(a_j(x)/a_{j+1}(x)) = p_\alpha(P_j) + 1. \tag{2}$$

Dans la Proposition 1.8.21 nous avons montré que :

$$(a_j(x)/a_{j+1}(x))P_{j+1} = (\partial_x - \lambda_j^{(j)}(x))P_j - \lambda_{j-1}^{(j)}(x)P_{j-1} - \cdots - \lambda_p^{(j)}(x)P_p, \tag{3}$$

cette égalité semble indiquer que $p_\alpha(\lambda_{j-1}^{(j)}(x)P_{j-1}), \dots, p_\alpha(\lambda_p^{(j)}(x)P_p) \leq p_\alpha(P_j)$. En effet l'égalité 2 est conséquence immédiate des formules sur le poids, appliquées à l'égalité 3, et du résultat plus fort : $p_\alpha(P_j) < p_\alpha(P_{j+1})$. Montrons le :
Pour $j = p$ on a $(a_p(x)/a_{p+1}(x))P_{p+1} = (\partial_x - \lambda_j^{(p)}(x))P_p$, par des formules sur le poids on montre que $p_\alpha(P_p) < p_\alpha(P_{p+1})$.
Supposons le résultat vrai pour $j = i$. Par l'égalité 3 pour $j = i$ et par les formules sur le poids, on a $p_\alpha(P_{i+1}) \geq p_\alpha((a_i(x)/a_{i+1}(x))P_{i+1}) = 1 + p_\alpha(P_i)$, donc $p_\alpha(P_i) < p_\alpha(P_{i+1})$. □

Proposition 1.8.23. *Si $\{P_p, \dots, P_q\}$ est une base de division de I alors*

$$i_\alpha(I) = i_\alpha(P_p) = i_\alpha(P_{p+1}) = \cdots = i_\alpha(P_q),$$

où $\alpha \in \Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et Σ est l'ensemble des points singuliers de P_p.

Démonstration. D'après le Corollaire 1.2.8 pour chaque $P \in I$ il existe $Q \in A_1$ et $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ tel que $a(x)P = QP_p$. Vu que $i_\alpha(a(x)) = 0$, et comme $i_\alpha(P_1P_2) = i_\alpha(P_1) + i_\alpha(P_2)$, on déduit $i_\alpha(P) \geq i_\alpha(P_p)$, donc $i_\alpha(I) = i_\alpha(P_p)$. Les autres égalités sont conséquence immédiate du Lemme 1.8.22. □

1.8.3. Exemple

Une fois définie la notion de transformation de Fourier (cf. la sous-section 1.6.0.1) et la notion de régularité, on étudie comment les exposants d'un opérateur, ou d'un idéal, de A_1 se comportent par transformation de Fourier.

Remarque 1.8.24. Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i(x)\partial_x^i \in A_1$, avec $a_d \not\equiv 0$. Si P est à singularité régulière à l'infini alors $\delta(P) = \deg_x(P)$. Cela est une conséquence immédiate de la condition de singularité régulière à l'infini : $d - \deg(a_d(x)) \leq i - \deg(a_i(x))$. La condition de singularité régulière à l'infini entraîne aussi que $P = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{\delta} \alpha_{ij}x^j\partial_x^i$, où $\delta = \delta(P)$, autrement dit $P = \alpha_{d\delta}x^\delta\partial_x^d + P'$, où $\mathrm{Deg}(P') < d + \delta$. Vu que le transformé de Fourier d'un monôme préserve le degré Deg on a bien la Proposition suivante :

Proposition 1.8.25. *Soit $P \in A_1$ un opérateur différentiel à singularité régulière à l'infini. Si $(d, \delta) = \exp(P)$, alors $(\delta, d) = \exp(\mathcal{F}P)$.*

Corollaire 1.8.26. *Soit I un idéal de A_1 à singularité régulière à l'infini. Si $P_{j_1}, \dots, P_{j_r}$ est une base de division minimale de I, alors $\mathcal{F}^{-1}(P_{j_r}), \dots, \mathcal{F}^{-1}(P_{j_1})$ est une base de division minimale de $\mathcal{F}^{-1}(I)$, où $\mathcal{F}$ désigne le transformé de Fourier.*

Corollaire 1.8.27. *Soit I un idéal de A_1 et $(P_p, \dots, P_q)$ une base de division de I. Si I est à singularité régulière à l'infini, alors il existe $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ et $l \in \mathbb{N}$ tels que $a(x)P_q = \partial_x^l P_p$.*

Démonstration. D'après le Corollaire 1.2.8 on sait qu'il existe $a(x) \in \mathbb{C}[x]$, $l \in \mathbb{N}$ et $Q, Q' \in A_1$ tels que

$$a(x)P_q = QP_p \qquad \text{et} \qquad x^l\mathcal{F}^{-1}(P_p) = Q'\mathcal{F}^{-1}(P_q). \tag{4}$$

La deuxième égalité est conséquence de la régularité à l'infini de I qui entraîne que 0 est la seule singulatité de $\mathcal{F}^{-1}(I)$. Sans perte de généralité, le degré de $a(x)$ et de x^l sont minimales. Si on travaille en $A_1[*\Sigma] \supset A_1$, où Σ est l'ensemble des singularités en $\mathbb{C}$, alors $P_q = a(x)^{-1}QP_p$, par application de la transformation de Fourier à la deuxième égalité de 4 on a $\partial_x^l P_p = \mathcal{F}(Q')P_q$, donc

$$\partial_x^l P_p = \mathcal{F}(Q')a^{-1}(x)QP_p,$$

alors $\partial_x^l = \mathcal{F}(Q')a^{-1}(x)Q$.

Soit $P_1P_2 = \partial_x^l$ une factorisation dans A_1. Vu que $(l,0) = \mathrm{Exp}(\partial_x^l) = \mathrm{Exp}(P_1) + \mathrm{Exp}(P_2)$, $P_1 = \alpha_1\partial_x^{l_1}$ et $P_2 = \alpha_2\partial_x^{l_2}$, avec $\alpha_1\alpha_2 = 1$ et $l = l_1 + l_2$. Étant donné cela $Q = b_1(x)\partial_x^{l_1}$ et $\mathcal{F}(Q') = \partial_x^{l_2}b_2(x)$, avec $l = l_1 + l_2$ et $a(x) = b_1(x)b_2(x)$. La substitution dans 4 donne

$$a(x)P_q = b_1(x)\partial_x^{l_1}P_p \qquad \text{et} \qquad x^l\mathcal{F}^{-1}(P_p) = x^{l_2}b_2(-\partial_x)\mathcal{F}^{-1}(P_q).$$

Grâce à la minimalité du degré de $a(x)$, $b_1(x) = 1$. Vu que x^l est de degré minimale, $l_2 = 0$, alors $l_1 = l$ et $b_2(x) = a(x)$ et donc $a(x)P_q = \partial_x^l P_p$. □

Grâce à ce Corollaire on arrive à obtenir une caractérisation des A_1-modules holonomes irréductibles à singularités régulières, y compris l'infini qui complète la Proposition 1.5.2, comme le montre la Proposition suivante :

Proposition 1.8.28. *Soit $M = A_1/(P = P_p, Q = P_q)$, cf. Proposition 1.2.9, un module holonome régulier à l'infini, irréductible, non nul et à singularités sur $\Sigma\cup\{\infty\}$. Alors P et Q sont irréductibles.*

Démonstration. Vu que M est à singularité régulière à l'infini, on sait qu'il existe $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ et $l \in \mathbb{N}$ tels que

$$a(x)Q = \partial_x^l P, \tag{5}$$

grâce au Corollaire 1.8.27. Ce Corollaire, par Fourier inverse, montre aussi que

$$x^l\mathcal{F}^{-1}(P) = a(-\partial_x)\mathcal{F}^{-1}(Q), \tag{6}$$

malgré le fait que $\widehat{\mathrm{M}}$ ne soit pas, en général, régulier.
i) Si $P = P_1P_2$, avec $P_1, P_2 \notin \mathbb{C}$, alors, par questions de degré en ∂_x, $P_2 \notin (P,Q)$. L'irréductibilité de M entraîne que le sous-module $P_2/(P,Q) \subset M$ n'est pas nul, donc il est égal à M, et par suite il existe $S, U, V \in A_1$ tels que

$$SP_2 = 1 + UQ + VP.$$

Si on travaille en $A_1[*\Sigma]$ et vu que $A_1 \subset A_1[*\Sigma]$, l'équation 5 peut être écrite de la façon suivante :

$$Q = a(x)^{-1}\partial_x^l P$$

donc

$$SP_2 = 1 + Ua(x)^{-1}\partial_x^l P_1P_2 + VP_1P_2$$

et alors

$$(S - Ua(x)^{-1}\partial_x^l P_1 - VP_1)P_2 = 1.$$

Cette égalité entraîne que $\deg_{\partial_x}(S - Ua(x)^{-1}\partial_x^l P_1 - VP_1) = 0 = \deg_{\partial_x} P_2$. Vu que $P_2 \in A_1$, $P_2 \in \mathbb{C}[x]$.
Par dualité on a $M^* = A_1/(P_2^*P_1^*, Q^*)$. L'application du même raisonnement au dual montre que $P_1^* \in \mathbb{C}[x]$, cet à dire $P_1 \in \mathbb{C}[x]$ et donc $P \in \mathbb{C}[x]\setminus\mathbb{C}$. Vu que $P \in \mathbb{C}[x]\setminus\mathbb{C}$, $0 \neq H_{[\Sigma]}(M) \subset M$. L'irréductibilité de M entraîne que $H_{[\Sigma]}(M) = M$. S'il existe

$\alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma$ tels que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ et $H_{[\{\alpha_1\}]}(M), H_{[\{\alpha_2\}]}(M) \neq 0$, l'irréductibilité de M entraîne que $H_{[\{\alpha_1\}]}(M) = H_{[\{\alpha_2\}]}(M) = H_{[\Sigma]}(M) = M$ et donc $M \simeq A_1/(x - \alpha_1)$.
ii) Vu que la transformation de Fourier, dans le cas régulier à l'infini, change le rôle entre P et Q, cf. Corollaire 1.8.26, l'application d'un raisonnement similaire à l'utilisé pour l'équation 5 (dans ce cas appliqué à l'équation 6 reécrite de la façon $\mathcal{F}^{-1}(P) = x^{-l}a(-\partial_x)\mathcal{F}^{-1}(Q)$) montre que $\widehat{M} \simeq A_1/(x)$ et donc $M \simeq A_1/(\partial_x)$, si Q n'est pas irréductible. □

1.9. Décomposition de Turrittin

Le but de cette section est de présenter les propriétés vérifiées par la décomposition de Turrittin centrée à l'infini du formalisé du transformé de Fourier d'un A_1-module holonome régulier y compris l'infini.

On commence par rappeler le théorème de structure des connexions formelles ; tout d'abord, une connexion L de rang un s'écrit, dans une base e sous la forme $\partial e = -\bar{\alpha}e$, $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$; et on a un isomorphisme $L' \simeq L \otimes M$, M est régulier si et seulement si $\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}$ a un pôle simple. Pour chaque classe α de $\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$ modulo pôles simples, on choisit un représentant $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}dx$, et on appelle L_ω la connexion correspondant à $\bar{\alpha}$ (le passage aux formes est destiné à rendre les formules invariants par changement de coordonnées et ramification). On note encore $I_{\mathbb{C}[\![t]\!]}$ l'ensemble des $\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]dx$ (mod pôle simple).

Théorème 1.9.1 (Décomposition de Turrittin). *Soit M une connexion méromorphe sur $\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$; après éventuellement une ramification, i.e. le remplacement de de $\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$ par $\mathbb{C}[\![t]\!]$, $t^p = x$, et celui de M par $\tilde{M} = \mathbb{C}[\![t]\!] \otimes_{\mathbb{C}[\![x]\!]} M$, il existe une décomposition $M = \oplus L_\omega \otimes M_\omega$, $\omega \in I_{\mathbb{C}[\![t]\!]}$, M_ω est régulier. Si l'on suppose les ω distincts, la décomposition est unique.*

Démonstration. Cf. [**16**] Théorème 1.2 page 43 ou [**13**] Théorème 5.4.7 page 35 □

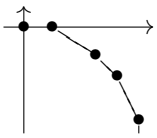
Théorème 1.9.2. *Soit $M = \mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle/(P)$ un $\mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle$-module holonome localisé et soit $\{L^{(1)}, \ldots, L^{(r)}\}$ l'ensemble des pentes ordonné par ordre croissante. Alors*

i) *P se factorise en $P_1 \cdots P_r$ où $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle$ et les pentes sont resp. $\{L^{(1)}, \ldots, L^{(r)}\}$.*
ii) *$M = \oplus_{i=1}^r \mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle/(P_i)$ et la décomposition est unique.*

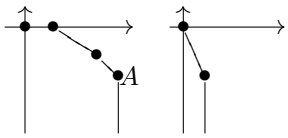
Démonstration. Cf. [**13**] Théorème 5.3.1 page 30. □

Afin de présenter les propriétés vérifiées par la décomposition de Turrittin centrée à l'infini du formalisé du transformé de Fourier d'un A_1-module holonome régulier y compris l'infini, on rappelle les résultats suivants :

Lemme 1.9.3. *Soit $P \in \mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle$ tel que $\mathcal{N}(P)$ a au moins deux pentes non verticales. Décomposons $N(P)$*



en deux parties N_1 et N_2



il existe une décomposition $P = P_1P_2$ tel que

1. *$N(P_1) \subset N_1$ et $N(P_2) \subset N_2$,*
2. *A est un sommet de $N(P_1)$ et l'origine est un sommet de $N(P_2)$.*

Démonstration. Cf. [**13**] Lemme 5.3.2 page 30. □

Lemme 1.9.4. *Soit $P \in A_1$ et $Q(x,\partial_x) \doteq \mathcal{I} \circ \mathcal{F}^{-1}P(x,\partial_x) \in A_1[x^{-1}]$, alors $\mathcal{I} \circ \mathcal{F}^{-1}P(x+\alpha,\partial_x) = Q(x,\partial_x - \frac{\alpha}{x^2})$.*

Démonstration. Immédiate, car $\mathcal{F}$ et $\mathcal{I}$ sont des morphismes de $\mathbb{C}$ -algèbres. □

On a maintenant tout ce qu'il faut pour donner la décomposition de Turrittin à l'infini. On donne tout de suite une démonstration directe de ce résultat déjà connu :

Théorème 1.9.5. *Soit $M = \mathbb{C}[x]\langle\partial_x\rangle/(P)$ un $\mathbb{C}[x]\langle\partial_x\rangle$-module holonome à singularités régulières y compris l'infini. Si $\mu(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}$ est le coefficient du terme de plus grand degré en ∂_x de P alors :*

i) *$\widehat{P} \doteq \mathcal{I} \circ \mathcal{F}^{-1}(P)$ se factorise en $\widehat{P}_1 \cdots \widehat{P}_m$, où $\widehat{P}_1,\ldots,\widehat{P}_m \in \widehat{\mathcal{D}}_x$, $deg_{\partial_x}(\widehat{P}_1) = k_1,\ldots,deg_{\partial_x}(\widehat{P}_m) = k_m$,*

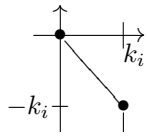
ii) *$(\widehat{M_{\mathcal{F}}[x^{-1}]})_{\mathcal{I}} = \oplus\widehat{\mathcal{D}}_x.e^{\alpha_i/x} \otimes \widehat{\mathcal{D}}_x/(\widehat{P}_i(x,\partial_x + \frac{\alpha_i}{x^2}))$,*

où $(\widehat{M_{\mathcal{F}}[x^{-1}]})_{\mathcal{I}}$ désigne le formalisé de $(M_{\mathcal{F}}[x^{-1}])_{\mathcal{I}}$.

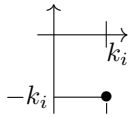
Démonstration. i) Voir Lemme 1.9.6 qui est le résultat principal de ces notes, ii) conséquence de i), du Théorème 1.9.2 et du fait qu'une transformation de coordonnées convenables, i.e. les translations qui envoient, à la fois, chacune des racines de $a_d(x)$ en 0, rendre chacun des éléments de la somme régulier en 0. □

Lemme 1.9.6. *Soit $P \in \mathbb{C}[x]\langle\partial_x\rangle$ un opérateur à singularités régulières y compris l'infini, $\Sigma = \{\infty,\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ l'ensemble de ses points singuliers et $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\} \doteq (\Sigma \cap \mathbb{C}) \cup \{0\}$, où $\alpha_1 = 0$. Si $\mu(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}$ est le coefficient du terme de*

plus grand degré en ∂_x de P (k_1 peut être égal à 0) alors, $\widehat{P} \doteq \mathcal{I} \circ \mathcal{F}^{-1}(P)$ se factorise en $\widehat{P}_1 \cdots \widehat{P}_m$, où $\widehat{P}_1 \cdots \widehat{P}_m \in \widehat{\mathcal{D}}_x$, $\deg_{\partial_x} \widehat{P}_1 = k_1, \ldots, \deg_{\partial_x} \widehat{P}_m = k_m$, $\widehat{P}_1(x, \partial_x)$ est régulier et ou à singularité régulière en 0, $\widehat{P}_i(x, \partial_x)$, $i = 2, \ldots, m$ a le polygone de Newton comme suit :



et $P_i(x, \partial_x + \frac{\alpha_i}{x^2})$, $i = 1, \ldots, m$ a le polygone de Newton comme suit :



On peut associer à chaque pente du polygône de Newton une filtration de $\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle$. Pour cela on prend l'application linéaire de deux variables $L(s_0, s_1) \doteq \lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$, où $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{N}$, λ_0' et λ_1 sont relativement primes et λ_1/λ_0 est la pente correspondante dans le polygône de Newton et on définit cette filtration de la façon suivante :

Définition 1.9.7. Soit $P \in \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle$. Si P est un 'monome' $x^a \partial_x^b$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ on écrive

$$\mathrm{ord}_L(P) = L(b, b - a)$$

et si $P = \sum_{i=0}^{d} b_i(x)\partial_x^i$ avec $b_i(x) \in \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]$ on écrive

$$\mathrm{ord}_L(P) = \max\{L(i, i - val(b_i) \mid i = 0, \cdots, d\}.$$

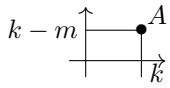
On défine maintenant la filtration ${}^L V\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle$ indexée par $\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

$${}^L V_k\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle = \{P \in \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle \mid \mathrm{ord}_L(P) \leq k\}.$$

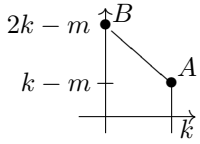
Notation 1.9.8. $L_{(1,1)}$ note l'application linéaire $L_{(1,1)}(s_0, s_1) \doteq s_0 + s_1$ et L_1 note l'application linéaire $L_1(s_0, s_1) \doteq s_1$.

Avant de démontrer le Lemme 1.9.6, on présente deux Lemmes qui décrivent le comportement tantôt des opérateurs $\widehat{P}_i(x, \partial_x)$ par translation (i.e. $\widehat{P}_i(x - \alpha, \partial_x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$), tantôt des opérateurs $P_i(x, \partial_x)$ par translation.

Lemme 1.9.9. *Soit* $P(x,\partial_x)=\sum_{i=0}^{k} a_i(x)\partial_x^i \in \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle$ *singulier régulier en 0 tel que* $val(a_k(x))=m$, *i.e. tel que son polygone de Newton est :*



alors $P(x,\partial_x+\frac{\alpha}{x^2}), \alpha\neq 0$, *a le polygone de Newton :*



Démonstration. On commence par remarquer que

$$P(x,\partial_x)=x^m\partial_x^k+Q(x,\partial_x), \qquad Q(x,\partial_x)\in {}^{L_{(1,1)}}V_{2k-m-1}\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle.$$

En réécrivant cette égalité d'une façon plus adéquate a nos calculs on a

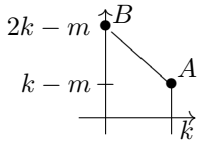
$$P(x,\partial_x)=x^{m-2k}(x^2\partial_x)^k+Q'(x,\partial_x), \qquad Q'(x,\partial_x)\in {}^{L_{(1,1)}}V_{2k-m-1}\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle,$$

où $Q'(x,\partial_x)=\sum b_l(x)(x^2\partial_x)^l$, donc

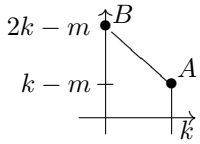
$$P(x,\partial_x+\frac{\alpha}{x^2})=x^{m-2k}(x^2\partial_x+\alpha)^k+Q'(x,\partial_x+\frac{\alpha}{x^2}).$$

Étant donné que $x^i(x^2\partial_x)^j \in {}^{L_{(1,1)}}V_{2k-m-1}\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle$, $L_{(1,1)}(i+j,j)\leq k-1$, i.e. $i+2j\leq k-1$, alors $x^i(x^2\partial_x+\alpha)^j \in {}^{L_{(1,1)}}V_{2k-m-1}\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle$ et donc A, B appartiennent au polygone de Newton, car $\alpha\neq 0$. □

Lemme 1.9.10. *Soit* $P(x,\partial_x)\in\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle$ *tel que son polygone de Newton est :*



alors $\mathcal{N}(P(x,\partial_x+\frac{\alpha}{x^2}))$ *est contenu dans le polygone :*



et A *appartient à* $\mathcal{N}(P(x,\partial_x+\frac{\alpha}{x^2}))$.

Démonstration. On commence par remarquer que

$$P(x,\partial_x)=\sum_{i=0}^{k} b_i x^{m-2k+i}\partial_x^i + Q(x,\partial_x), \qquad Q(x,\partial_x)\in {}^{L_{(1,1)}}V_{2k-m-1}\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle,$$

où $b_0,\dots,b_k\in\mathbb{C}$ et $b_k=1$. En réécrivant l'égalité d'une façon plus adéquate a nos calculs on a

$$P(x,\partial_x)=\sum_{i=0}^{k} b'_i x^{m-2k-i}(x^2\partial_x)^i + Q'(x,\partial_x), \quad Q'(x,\partial_x)\in {}^{L_{(1,1)}}V_{2k-m-1}\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle$$

où $Q'(x,\partial_x)=\sum c_l(x)(x^2\partial_x)^l$, et $b'_k=1$, alors

$$P(x,\partial_x+\frac{\alpha}{x^2})=\sum_{i=0}^{k} b'_i x^{m-2k-i}(x^2\partial_x+\alpha)^i + Q'(x,\partial_x+\frac{\alpha}{x^2})$$

Vu que $x^i(x^2\partial_x)^j\in {}^{L_{(1,1)}}V_{2k-m-1}\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle$, $L_{(1,1)}(i+j,j)\le k-1$, i.e. $i+2j\le k-1$, alors $x^i(x^2\partial_x+\alpha)^j\in {}^{L_{(1,1)}}V_{2k-m-1}\mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle$. Comme pour chaque $0\le j\le i$, $L_{(1,1)}(j,j-(m-2k-i+j))=L_{(1,1)}(j,-m+2k-i)=2k-m-i+j\le 2k-m$ et $b'=1$, on a le résultat voulu. On remarque l'impossibilité de montrer que le 'monôme' associé au point B a un coefficient non nul, car il y a plusieurs 'monômes' dans la droite AB qui contribuent pour ce point. □

Remarque 1.9.11. Soit $P\in\mathbb{C}[x]\langle\partial_x\rangle$ un opérateur vérifiant les conditions du Lemme 1.9.6. $P=\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\partial_x^k$, où $a_k(x)\in\mathbb{C}[x]$, $\{\alpha_2,\dots,\alpha_m\}$ sont les racines de $a_n(x)$ et $\alpha_1=0$ est éventuellement une racine de $a_n(x)$ (cet à dire sa multiplicité, k_1, peut être 0) avec les multiplicités convenables, autrement dit $a_n(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}$. Dire que α_i $i\ge 1$ est une singularité régulière de P (ou régulier en α_1, si α_1 n'est pas racine de $a_n(x)$) équivaut a dire que

$$\forall j=0,\dots,n \qquad j-v_{(x-\alpha_i)}(a_j(x))\le n-\underbrace{v_{(x-\alpha_i)}(a_n(x))}_{=k_i.}$$

En particulier, si $k_i>m$ on a :

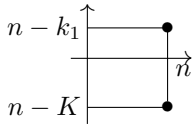
$$\forall j=0,\dots,n \qquad v_{(x-\alpha_i)}(a_j(x))\ge k_i+j-n=(k_i-n)+j\ge k_i-n,$$

cela veut dire que nous pouvons factoriser P de la façon suivante :

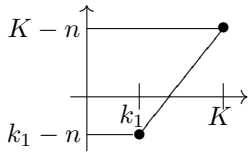
$$P=(x-\alpha_i)^{k_i-n}\tilde{P}, \qquad \tilde{P}\in\mathbb{C}[x]\langle\partial_x\rangle,$$

où $\tilde{P}$ est aussi a singularités régulières en $\{\alpha_0,\dots,\alpha_m\}$ et $\tilde{P}=\sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k(x)\partial_x^k$, où $\tilde{a}_k(x)=a_k(x)/(x-\alpha_i)^{k_i-n}\in\mathbb{C}[x]$. Vu que la transformation de Fourier et l'inversion sont des morphismes de $\mathbb{C}$ -algèbres on peut supposer sans perte de généralité que $k_1,\dots,k_m\le n$.

Si P est a singularités régulières en $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\}$, son polygone de Newton a la forme suivant :

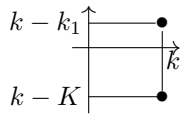


où $K = k_1 + \cdots + k_m$. La condition de singularité régulière à l'infini entraîne que $\mathcal{F}^{-1}P$ a au plus deux pentes a l'infini et la forme général de son polygone de Newton est :

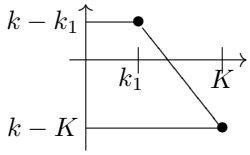


Montrons maintenant le Lemme 1.9.6.

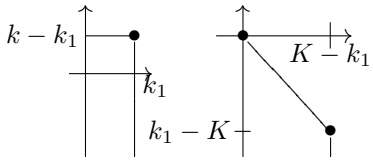
Démonstration. Vu que P a le polygone de Newton suivant :



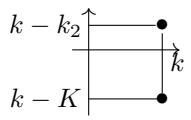
où $K = k_1 + \cdots + k_n$ et $k = deg_{\partial_x} P$. D'autre part $\widehat{P}$ a le polygone de Newton suivant :



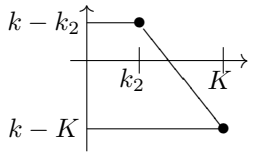
En utilisant le Lemme 1.9.3, on peut factoriser $\widehat{P}$ dans le produit de deux opérateurs $\widehat{P} = \widehat{P}_1 \tilde{\tilde{P}}$, où $\widehat{P}_1$ est l'opérateur associé à la pente 0 et $\tilde{\tilde{P}}$ est le polynôme associé à la pente 1. En plus $\widehat{P}_1, \tilde{\tilde{P}}$ ont, respectivement, les polygones de Newton suivants :



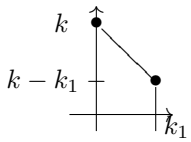
Si on prend maintenant $P(x+\alpha_2, \partial_x)$, sont polygone de Newton est :



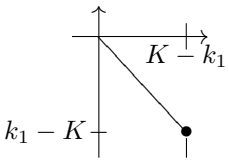
alors $\widehat{P}(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2})$ a, par le Lemme 1.9.4, le polygone de Newton suivant :



Par le Lemme 1.9.9 on sait que $\mathcal{N}\left(\widehat{P}_1(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2})\right)$ est :



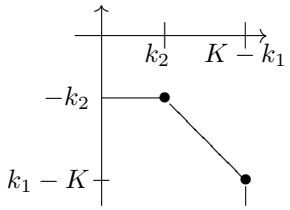
et par le Lemme 1.9.10 on sait que $\mathcal{N}\left(\tilde{\widehat{P}}(x, \partial_x + \frac{\alpha 2}{x^2})\right)$ est contenu dans



mais $\widehat{P}(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2}) = \widehat{P}_1(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2})\tilde{\widehat{P}}(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2})$. Si on prend la pente $L_1(s_0, s_1) = s_1$, on a en particulier que $ord_{L_1}(\widehat{P}(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2})) = ord_{L_1}(\widehat{P}_1(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2})) + ord_{L_1}(\tilde{\widehat{P}}(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2}))$, alors :

$$\begin{aligned} ord_{L_1}\left(\widehat{P}(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2})\right) &= L_1(k_2, k-k_2) - L_1(0, k) \\ &= k - k_2 + k \\ &= L_1(k_2, -k_2) \end{aligned}$$

donc le polygone de Newton de $\tilde{\tilde{P}}(x, x^2\partial_x + \alpha_2)$ est comme suit :



alors $\tilde{\tilde{P}}(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2}) = P_2(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2})\tilde{\tilde{\tilde{P}}}(x, \partial_x + \frac{\alpha_2}{x^2})$. En applicand recursivement cet argument, le nombre de racines différentes baisse d'une unité dans chaque étape, alors cet argument termine dans un nombre finit de pas et donc on a le résultat voulu. $\square$

CHAPITRE 2

LE FAISCEAU $\mathcal{D}_X$ ET SES MODULES

Le but de ce chapitre est de rappeler les dualités de catégories sur une surface de Riemann X :

$\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers / faisceaux pervers,

Germes de faisceaux pervers / couples d'espaces vectoriels,

et l'équivalence de catégories

germes de $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers / couples d'espaces vectoriels,

car, comme on va voir dans le chapitre 3, on peut exprimer les indices de rigidité à partir des couples d'espaces vectoriels sur les points singuliers et à partir de la décomposition de Turrittin à l'infini. On présente aussi la notion de V-filtration canonique qui fournit une autre façon de calculer les couples d'espaces vectoriels associés aux germes de $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers.

Dans ce chapitre on présente aussi les notions d'image inverse et directe, grâce auxquelles on obtient le rapport entre le couple d'espaces vectoriels associé à M' en $t' = 0$ et le couple d'espaces vectoriels associé à $M[t^{-1}]_{\mathcal{F}}$ en $\tau = 0$. La préservation de la V-filtration canonique par une application analytique propre, pour chaque degré de cohomologie, joue un rôle crucial dans l'obtention du rapport précédent.

Finalement on présente la notion d'extension minimale qui joue un rôle fondamentale dans la définition de l'indice de rigidité.

Dans les deux sections suivantes on se place sur une variété analytique complexe, mais ces résultats sont aussi valables pour une variété algébrique non singulière sur $\mathbb{C}$, en remplaçant les polycylindres par des ouverts affines.

2.1. Le faisceau $\mathcal{D}_X$

Notation 2.1.1. Dans cette section X désigne une variété analytique complexe de dimension fini, $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X, et $H(\mathcal{O}_X)$ le faisceau :

$$\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X).$$

La multiplication dans $\mathcal{O}_X$ induit le morphisme $\mathbb{C}_X$-linéaire injectif $i : \mathcal{O}_X \to H(\mathcal{O}_X)$ et on définis $\mathcal{D}_X(0) \doteq i(\mathcal{O}_X)$.

Définition 2.1.2. Soient X une variété analytique complexe de dimension fini et $n \in \mathbb{N}$. Si $n \geq 1$ on définis :

$$\mathcal{D}_X(n) \doteq \{P \in H(\mathcal{O}_X) | [P, \mathcal{D}_X(0)] \subset \mathcal{D}_X(n-1)\}.$$

Proposition 2.1.3. *Si X est une variété analytique complexe de dimension fini, alors $(\mathcal{D}_X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration, cet à dire pour chaque $m, n \in \mathbb{N}$ on a :*

i) $\mathcal{D}_X(n) \subset \mathcal{D}_X(n+1)$,
ii) $\mathcal{D}_X(m)\mathcal{D}_X(n) \subset \mathcal{D}_X(m+n)$.

Démonstration. Cf. [**1**] Proposition 1.1.2 page 7. □

Définition 2.1.4. Soit X une variété analytique complexe de dimension fini. On appelle faisceau des **opérateurs différentiels holomorphes** le sous-faisceau d'anneaux de $H(\mathcal{O}_X)$ noté par :

$$\mathcal{D}_X \doteq \cup \mathcal{D}_X(n).$$

Proposition 2.1.5. *Si X est une variété analytique complexe de dimension fini, alors $\mathcal{D}_X$ est un faisceau d'anneaux cohérent et noethérien.*

Démonstration. Cf. [**1**] Théorème 1.2.5 page 18. □

2.2. Transformation droite-gauche

On présente maintenant la notion de transformation droite-gauche. On s'y intéresse car dans la section 2.6.3 on va introduire la notion d'image directe d'un $\mathcal{D}$-module holonome à gauche et celle ci est plus facile de donner pour les $\mathcal{D}$-modules holonomes à droite. Dans cette section les $\mathcal{D}$-modules sont pris sur une variété analytique complexe X de dimension fini.

Notation 2.2.1. $\mathcal{M}^g$ (respectivement $\mathcal{M}^d$) note un $\mathcal{D}_X$-module à gauche (respectivement à droite). $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)^g$ (respectivement $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)^d$) désigne la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules à gauche (respectivement à droite).

Lemme 2.2.2. *Soient $\mathcal{N}^d$ un $\mathcal{D}_X$-module à droite et $\mathcal{M}^g$ un $\mathcal{D}_X$-module à gauche. Alors $\mathcal{N}^d \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^g$ admet une structure canonique de $\mathcal{D}_X$-module à droite avec les actions :*

$$(n \otimes m) \cdot f \doteq n \cdot f \otimes m = n \otimes f \cdot m \qquad (n \otimes m) \cdot \xi \doteq n \cdot \xi \otimes m - n \otimes \xi \cdot m,$$

pour chaque $\xi \in \Theta_X$, $f \in \mathcal{O}_X$, $n \in \mathcal{N}^d$ et $m \in \mathcal{M}^g$.

Démonstration. Cf. [**14**] Corollaire 1.1.3 page 17. □

Lemme 2.2.3. *Si $\mathcal{N}^d$ un $\mathcal{D}_X$-module à droite, alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \mathcal{N}^d)$ admet une structure de $\mathcal{D}_X$-module à gauche avec les actions :*

$$(f \cdot \varphi)(\omega) \doteq \varphi(f \cdot \omega), \qquad (\xi \cdot \varphi)(\omega) \doteq \varphi(\omega \cdot \xi) - \varphi(\omega) \cdot \xi,$$

pour chaque $\xi \in \Theta_X$, $f \in \mathcal{O}_X$, $\varphi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \mathcal{N}^d)$ et $\omega \in \omega_X$.

Démonstration. Cf. [**14**] Corollaire 1.1.4 page 17. □

Définition 2.2.4 (Transformation droite-gauche). Tout $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}^g$ à gauche donne naissance à un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}^d$ à droite en posant $\mathcal{M}^d \doteq \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^g$ avec les actions définies dans le Lemme 2.2.2. Réciproquement on pose $\mathcal{M}^g \doteq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \mathcal{M}^d)$ avec les actions définies dans le Lemme 2.2.3.

Proposition 2.2.5 (Compatibilité des transformations droite-gauche)
Les morphismes naturels :

$$\mathcal{M}^g \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^g), \qquad \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \mathcal{M}^d) \to \mathcal{M}^d,$$

sont des isomorphismes de $\mathcal{D}_X$-modules.

Démonstration. En traduisant pour la langage des faisceaux, la démonstration est, *mutatis mutandis*, la démonstration du Théorème 2.11 [**21**] page 37. □

2.3. $\mathcal{D}_X$-modules sur une surface de Riemann

2.3.1. Localisation et connexions méromorphes

Notation 2.3.1. Dans cette section X désigne une surface de Riemann et Σ un sous-ensemble discret de X.

Définition 2.3.2. On appelle faisceau des **fonctions méromorphes sur X à pôles sur** Σ et on le note $\mathcal{O}_X[*\Sigma]$ le faisceau définit de la façon suivante :

i) $\mathcal{O}_X[*\Sigma]|_{X\setminus\Sigma} \doteq \mathcal{O}_X|_{X\setminus\Sigma}$,
ii) pour chaque $p \in \Sigma$, $\mathcal{O}_X[*\Sigma]_p \doteq \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$.

Définition 2.3.3 (Holonomie). Un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est dit **holonome** si pour chaque $p \in X$, $\mathcal{M}_p$ est un $\mathcal{D}_p$-module holonome (cf. Déf. 1.3.22).

Définition 2.3.4 (Localisation). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. On appelle localisé de $\mathcal{M}$ le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[*\Sigma]$.

Définition 2.3.5 (Connexion méromorphe). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X[*\Sigma]$-module holonome localement libre de rang d. On dit que $(\mathcal{M}, \nabla)$ est une **connexion méromorphe** si $\nabla : \mathcal{M} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ est $\underline{\mathbb{C}}_X$-linéaire et satisfait la règle de Leibniz :

$$\nabla(f \cdot m) = f \cdot \nabla(m) + df \otimes m \in \Gamma(U, \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}),$$

pour chaque ouvert U de X, chaque section $m \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ et chaque fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Proposition 2.3.6. *La catégorie des modules holonomes localisés et des connexions méromorphes sont équivalentes.*

2.3.2. Dualité

On présente maintenant la notion de dualité. On s'y intéresse car avec cette notion on peut calculer explicitement l'extension minimale des $\mathcal{D}_X$ modules holonomes sur une surface de Riemann X, comme on le va voir dans la section 2.7.1.

Soient X une surface de Riemann et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module localement libre de rang $p_0 \in \mathbb{N}$. Dans ce cas là $\mathcal{M}$ admet une résolution libre :

$$\cdots \overset{\varphi_i}{\to} \mathcal{D}_X^{p_i} \overset{\varphi_{i-1}}{\to} \mathcal{D}_X^{p_{i-1}} \overset{\varphi_{i-2}}{\to} \cdots \overset{\varphi_0}{\to} \mathcal{D}_X^{p_0} \overset{\varphi}{\to} \mathcal{M} \to 0$$

où les φ_i sont des morphismes $\mathcal{D}_X$-linéaires satisfaisant les conditions $\varphi_{i+1} \circ \varphi_i = 0$ et $\mathrm{Ker}\varphi_i = \mathrm{Im}\ \varphi_{i+1}$. En particulier pour chaque $x \in X$ on peut choisir une carte connexe (U, x) tel que $\Gamma(U, \varphi)$ soit une matrice avec des entrées dans $\Gamma(U, \mathcal{D}_X)$ et de même pour chaque $\Gamma(U, \varphi_i)$. Les morphismes φ_i sont construits récursivement en prenant les générateurs de $\mathrm{Ker}\varphi_i$ dans chaque pas. Grâce à ce complexe on peut construire un nouveau complexe :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^{p_0}, \mathcal{N}) \overset{\psi_0}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^{p_1}, \mathcal{N}) \overset{\psi_1}{\to} \cdots \overset{\psi_{i-1}}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^{p_i}, \mathcal{N}) \overset{\psi_i}{\to} \cdots$$

où $\psi_{ix}(f_x) = f_x \circ \psi_{ix}$ et $\mathrm{Ker}\psi_{0x} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_x}(\mathcal{M}_x, \mathcal{N}_x)$. La cohomologie de ce dernier complexe est notée $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ et donc on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \\ \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathrm{Ker}\psi_i / \mathrm{Im}\psi_{i-1} \quad \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

Cette cohomologie entraîne que la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$$

donne naissance à la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}'', \mathcal{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}', \mathcal{N}) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}'', \mathcal{N}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}', \mathcal{N}) \to \cdots \end{aligned}$$

Proposition 2.3.7. *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module de type fini, alors $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$, pour chaque $i \geq 2$ et pour chaque $\mathcal{D}_X$-module à gauche $\mathcal{N}$.*

Démonstration. Grâce à la cohérence du $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$, il suffit montrer ce résultat au niveau des germes. Lequel est en effet vrai, cf. Proposition 1.7.1. □

Définition 2.3.8. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. On appelle dual de $\mathcal{M}$, et on note $\mathcal{M}^*$, le module $(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X))^g$.

2.3.3. Faisceaux pervers et leurs germes

Définition 2.3.9. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. On appelle solutions holomorphes de $\mathcal{M}$ le faisceau $\mathrm{sol}(\mathcal{M}) \doteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$.

On dispose maintenant d'un foncteur contravariant "sol" définit sur la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes, $\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X)_h$, à valeurs dans la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathcal{M}od(\mathbb{C}_X)$. On peut dériver le foncteur "sol" pour obtenir un foncteur :

$$\mathrm{Sol} \doteq \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(*, \mathcal{O}_X) : \mathrm{D}^b(\mathcal{D}_X)_h \to \mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X),$$

où $\mathrm{D}^b(\mathcal{D}_X)_h$ (resp. $\mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X)$) désigne la catégorie dérivée des complexes bornés des $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologie holonome (resp. des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels).

Notation 2.3.10. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ on note $\mathrm{Sol}^i(\mathcal{M}) \doteq h^i(\mathrm{Sol}(\mathcal{M})) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$.

Proposition 2.3.11. *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome et $\mathcal{M}_x = \mathcal{D}_x/I$, où I est un idéal non nul de $\mathcal{D}_x$, les germes respectifs pour chaque $x \in X$. Alors $m_0(\mathcal{M}_x) \doteq m_0(I)$ et $m_1(\mathcal{M}_x) \doteq m_1(I)$ (cf. Définition 1.2.14) ne dépendent que de $\mathcal{M}_x$.*

Démonstration. Cf. **[26]** Exemple 4.5 page 67 et l'alinea c) $\Rightarrow$ a) de la démonstration de la Proposition 4.9 page 68. □

Définition 2.3.12. Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome et x un point de X. On dit que x est un **point singulier** de $\mathcal{M}$, si $m_1(\mathcal{M}_x) > 0$. On appelle **support singulier** de $\mathcal{M}$ l'ensemble de ses points singuliers et on le note $\Sigma(\mathcal{M})$.

Définition 2.3.13 (Faisceau constructible). Soit $\mathcal{L}$ un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur une surface de Riemann X. On dit que $\mathcal{L}$ est un faisceau constructible s'il existe un sous-ensemble discret Σ de X tel que :

1) $\mathcal{L}|_{X\setminus\Sigma}$ est un système local,
2) pour chaque $x \in \Sigma$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_x \in \mathbb{N}$.

Définition 2.3.14 (Support singulier). Soit $\mathcal{L}$ un faisceau constructible sur une surface de Riemann X. On appelle support singulier de $\mathcal{L}$ l'ensemble Σ minimal qui vérifie les conditions 1) et 2) de la définition précédente et on le note $\Sigma(\mathcal{L})$.

Proposition 2.3.15 (Perversité du complexe $\mathrm{Sol}^\bullet$). *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome alors :*

1. $\mathrm{Sol}^0(\mathcal{M})|_{X\setminus\Sigma(\mathcal{M})}$ *est un système local de rang $m_0(\mathcal{M}_x)$ pour chaque $x \in X \setminus \Sigma(\mathcal{M})$,*
2. $\mathrm{supp}(\mathrm{Sol}^1(\mathcal{M})) \subset \Sigma(\mathcal{M})$,
3. $\mathrm{Sol}^0(\mathcal{M})_x$ *et* $\mathrm{Sol}^1(\mathcal{M})_x$ *sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie pour chaque $x \in X \setminus \Sigma(\mathcal{M})$,*
4. $\Gamma_{\Sigma(\mathcal{M})}(\mathrm{Sol}^0(\mathcal{M})) = 0$,

5. $\mathrm{Sol}^i(\mathcal{M}) = 0$ *pour tout* $i \neq 0, 1$,
6. $\Sigma(\mathcal{M}) = \Sigma(\mathrm{Sol}^0(\mathcal{M})) \cup \Sigma(\mathrm{Sol}^1(\mathcal{M}))$.

Remarque 2.3.16. Ce résultat est dû à Kashiwara [**9**] en dimension supérieure.

Démonstration. Cf. [**26**] Théorème 5.6 page 75. □

Corollaire 2.3.17. *Le foncteur* Sol *envoie la catégorie dérivée des complexes bornés de* $\mathcal{D}_X$*-modules à cohomologie holonome,* $\mathrm{D}^b(\mathcal{D}_X)_h$*, dans la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels à cohomologie constructible,* $\mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X)_c$.

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 2.3.15 et de [**8**] Proposition 7.3 page 49. □

Définition 2.3.18 (Complexes pervers). On dit qu'un complexe $\mathrm{K}^\bullet$ de la catégorie dérivée $\mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X)_c$ est **pervers**, si :

1. $h^i(\mathrm{K}^\bullet) = 0$ pour tout $i \neq 0, 1$,
2. $\Gamma_{\{x\}}(h^0(\mathrm{K}^\bullet)) = 0$ pour chaque point $x \in X$ et
3. $\mathrm{supp}(h^1(\mathrm{K}^\bullet))$ est discret.

Remarque 2.3.19. La términologie provient de celle des "perversités" en (co)homologie d'intersection ([**7**]) et de l'interprétation des complexes d'intersection comme des solutions de certains systèmes holonomes.

Définition 2.3.20 (Régularité). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module holonome. On dit que $\mathcal{M}$ est **régulier** si $i(\mathcal{M}_x) = 0$ pour chaque $x \in X$.

Notation 2.3.21. La sous-catégorie pleine de $\mathrm{D}^b(\mathbb{C}_X)_c$, dont les objets sont les complexes pervers est notée $\mathcal{P}erv(X)$. De même, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X)$ (resp. de $\mathrm{D}^b(\mathcal{D}_X)$) dont les objets sont des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers (resp. des complexes à cohomologie holonome régulière) est notée $\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X)_{hr}$ (resp. $\mathrm{D}^b(\mathcal{D}_X)_{hr}$).

Théorème 2.3.22. *Le foncteur* Sol : $\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X)_{hr} \to \mathcal{P}erv(X)$ *est une anti-équivalence de catégories.*

Démonstration. Cf. [**26**] Théorème 3.3 page 95. La structure de la preuve est essentiellement la même que celle de [**17**], [**18**], [**19**] et [**20**]. □

2.3.3.1. Germes de faisceaux pervers

Dans la Proposition 2.4.4 de la section suivante, on va voir que la catégorie des germes de faisceaux pervers est équivalente à la catégorie des couples d'espaces vectoriels. Étant donné cela, on commence par définir la catégorie $\mathcal{P}erv^{\{0\}}(\mathbb{C})$ des faisceaux pervers relativement à l'origine afin d'y aboutir.

Définition 2.3.23. Un élément $\mathcal{F}^\bullet$ de $\mathrm{D}^b(\mathbb{C})$ est dit pervers relativement à $\{0\}$ s'il vérifie les conditions :

i. $h^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ pour tout $i \neq 0, 1$,
ii. $h^0(\mathcal{F}^\bullet)|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ est un système local,
iii. $h^0(\mathcal{F}^\bullet)_0$ et $h^1(\mathcal{F}^\bullet)_0$ sont des espaces vectoriels de dimension finie,
iv. $h^1(\mathcal{F}^\bullet)|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} = 0$ et
v. $\Gamma_{\{0\}}(h^0(\mathcal{F}^\bullet)) = 0$.

La description de ces objets est faite en utilisant l'idée de B. Malgrange qui consiste à décrire précisément le triangle :

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{K}}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathrm{R}i_* i^{-1}\mathcal{F}^\bullet, \tag{7}$$

où $\mathrm{K} = \mathbb{R}_0^+$ et $i : \mathbb{C} \setminus \mathrm{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ est l'inclusion.

Proposition 2.3.24. *Si $\mathcal{F}^\bullet$ est un faisceau pervers relativement à $\{0\}$ et $i : \mathbb{C}\setminus K \hookrightarrow \mathbb{C}$ est l'inclusion, alors $\mathrm{R}i_* i^{-1}\mathcal{F}^\bullet \simeq i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F}^\bullet)$.*

Démonstration. Cf. [**26**] II.1 et II.1.1 3.3 page 138. □

Notation 2.3.25. $E \doteq h^0(\mathcal{F}^\bullet(\mathbb{C} \setminus \mathrm{K}))$.

Vu que $h^0(\mathcal{F}^\bullet)(\mathbb{C} \setminus K)$ est localement constant, le faisceau $i^{-1}h^0(\mathcal{F}^\bullet)$ est constant et on a le Corollaire suivant :

Corollaire 2.3.26. *Si $\underline{E}_{\mathbb{C}\setminus K}$ désigne le faisceau constant sur $\mathbb{C} \setminus K$ de fibre E, alors $i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F}^\bullet) \simeq i_*(\underline{E}_{\mathbb{C}\setminus K})$.*

Vu que $h^0(\mathcal{F}^\bullet)|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ est un système local (cf. *ii.*), tous les sections dont le support est contenu dans $\mathrm{K} \setminus \{0\}$ sont nuls. Donc

$$\Gamma_{\mathrm{K}}(h^0(\mathcal{F}^\bullet)) = \Gamma_{\{0\}}(h^0(\mathcal{F}^\bullet)) = 0 \quad (\text{cf. } v.).$$

Grâce aux deux conditions précédentes et à la condition *iv*, le triangle 7 donne naissance à la suite exacte longue de cohomologie :

$$0 \longrightarrow h^0(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\rho} i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{U} \mathrm{R}^1\Gamma_{\mathrm{K}}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow h^1(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow 0. \tag{8}$$

Notation 2.3.27. $F \doteq (\mathrm{R}^1\Gamma_{\mathrm{K}}\mathcal{F}^\bullet)_0$.

Lemme 2.3.28. *Si $\mathcal{F}^\bullet$ est un faisceau pervers relativement à $\{0\}$, alors $\mathrm{R}^1\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbb{C}\setminus K} = 0$.*

Lemme 2.3.29. *Si $\mathcal{F}^\bullet$ est un faisceau pervers relativement à $\{0\}$, alors $\mathrm{R}^1\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet|_{K\setminus\{0\}}$ est un faisceau constant de fibre E.*

Démonstration. Grâce à la condition *iv*) de la Définition 2.3.23, la suite exacte 8 se réduit à la suite suivante :

$$0 \longrightarrow h^0(\mathcal{F}^\bullet)|_{\mathrm{K}\setminus 0} \longrightarrow i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F}^\bullet)|_{\mathrm{K}\setminus 0} \longrightarrow \mathrm{R}^1\Gamma_{\mathrm{K}}\mathcal{F}^\bullet|_{\mathrm{K}\setminus 0} \longrightarrow 0$$

en prenant le germe en $x \in \mathrm{K} \setminus \{0\}$, la suite précédente donne naissance à la suite exacte courte suivante :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & h^0(\mathcal{F}^\bullet)_x \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F}^\bullet)_x \arrow[r, "U_x"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{R}^1\Gamma_{\mathrm{K}}\mathcal{F}^\bullet_x \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "e \mapsto (e, T^{-1}e)"'] & E \oplus E \arrow[r, "(e,f) \mapsto (Tf - e)"'] & E \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

De la commutativité du premier carré du diagramme précédent, on en déduit l'existence d'un isomorphisme qui complète le diagramme et en particulier on a $\mathrm{R}^1\Gamma_{\mathrm{K}}\mathcal{F}^\bullet_x \simeq E$, pour chaque $x \in \mathrm{K} \setminus \{0\}$. □

Notation 2.3.30. En prenant le germe en 0 de la suite 8 on note :

1. $u \doteq U_0 : (i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F}^\bullet))_0 \to (\mathrm{R}^1\Gamma_{\mathrm{K}}\mathcal{F}^\bullet)_0$ et
2. $v : F \to E = \rho_{\mathrm{K}\setminus\{0\},\mathrm{K}} : \mathrm{R}^1\Gamma_{\mathrm{K}}\mathcal{F}^\bullet|_{\mathrm{K}}(\mathrm{K}) \to \mathrm{R}^1\Gamma_{\mathrm{K}}\mathcal{F}^\bullet|_{\mathrm{K}}(\mathrm{K} \setminus \{0\})$ l'application linéaire qui permet recoller les deux faisceaux constants sur $\mathrm{K} \setminus \{0\}$ et $\{0\}$ ayant, respectivement, fibre E et F dans un faisceau isomorphe à $\mathrm{R}^1\Gamma_{\mathrm{K}}\mathcal{F}^\bullet$.

Proposition 2.3.31. *Si $\mathcal{F}^\bullet$ est un objet de $\mathcal{P}erv^{\{0\}}(\mathbb{C})$, alors $v \circ u = T - \mathbb{1}_E$.*

Démonstration. Grâce au Corollaire 2.3.26 et aux identifications trouvées dans la démonstration du Lemme 2.3.29 on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
i_*(\underline{E}_{\mathbb{C}\setminus K})(\mathbb{C}) = E \arrow[r, "U(\mathbb{C}) = U_0 \doteq u"'] \arrow[d, "\rho_x"'] & F = \mathrm{R}^1\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet(\mathbb{C}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{R}^1\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet|_K(K) \arrow[d, "v"] \\
i_*(\underline{E}_{\mathbb{C}\setminus K})_x = E \oplus E \arrow[r, "(e,f) \longmapsto (Tf - e)"'] & E = (\mathrm{R}^1\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet)_x \arrow[r, equal] & \mathrm{R}^1\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet|_K(K \setminus \{0\})
\end{tikzcd}$$

où ρ_x est le morphisme qui envoie e dans (e, e). $v \circ u = T - \mathbb{1}_E$ est conséquence de la commutativité du diagramme précédent. □

2.4. Couples d'espaces vectoriels

On présente maintenant la catégorie des couples d'espaces vectoriels. On s'y intéresse car cette catégorie est équivalente (resp. anti-équivalente) à la catégorie des $\mathcal{D}_x$-modules holonomes réguliers (resp. à la catégorie des germes de complexes de faisceaux pervers).

Définition 2.4.1 (Catégorie de couples d'espaces vectoriels)

On appelle **couple d'espaces vectoriels** la donnée de deux espaces vectoriels de dimension fini E, F et de deux morphismes d'espaces vectoriels u, v

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E} \arrow[r, bend left, "u"] & \mathrm{F} \arrow[l, bend left, "v"]
\end{tikzcd}$$

assujettis à la relation $\mathbb{1} + v \circ u$ inversible. On appelle **morphisme de couples d'espaces vectoriels** la donnée d'un couple (a, b) de morphismes d'espaces vectoriels :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "a"] \arrow[d, bend right, "v"'] & \mathrm{E}' \arrow[d, bend right, "v'"'] \\ \mathrm{F} \arrow[r, "b"'] \arrow[u, bend right, "u"'] & \mathrm{F}' \arrow[u, bend right, "u'"'] \end{tikzcd} \qquad \text{tel que} \qquad \begin{array}{rcl} v' \circ a & = & b \circ v, \\ a \circ u & = & u' \circ b. \end{array}$$

On note Θ la catégorie dont les objets et morphismes sont définis de la façon précédente et on l'appelle **catégorie de couples d'espaces vectoriels**.

Proposition 2.4.2. *Θ est une catégorie abélienne.*

Définition 2.4.3. Avec les notations de la sous-section 2.3.3.1 on définit le foncteur suivant :

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathcal{P}erv^{\{0\}}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \Theta \\ \mathcal{F}^\bullet & \longmapsto & \mathrm{E} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathrm{F} \end{array}$$

Proposition 2.4.4. *Le foncteur $\alpha : \mathcal{P}erv^{\{0\}}(\mathbb{C}) \longrightarrow \Theta$ de la Définition précédente est une anti-équivalence de catégories.*

Démonstration. Cf. [**26**] Proposition III.3 page 141. □

Proposition 2.4.5. *Soit $\mathcal{F}^\bullet$ un complexe de faisceaux pervers sur $D = B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $j : D^* \hookrightarrow D$, $E = h^0(\mathcal{F}^\bullet(D \setminus \mathbb{R}^+))$, $F = (\mathrm{R}^1\Gamma_{\mathbb{R}^+ \cap D}\mathcal{F}^\bullet)_0$ et T la monodromie du système local $h^0(\mathcal{F}^\bullet|_{D^*})$, alors :*

i *Si $\mathcal{F}^\bullet = j_!(h^0(\mathcal{F}^\bullet|_{D^*}))$, alors $\mathcal{F}^\bullet$ est représenté par le couple d'espaces vectoriels* $E \underset{T - \mathbb{1}_E}{\overset{\mathbb{1}_E}{\rightleftarrows}} E$, *où $E = F$.*

ii *Si $\mathcal{F}^\bullet = j_*(h^0(\mathcal{F}^\bullet|_{D^*}))$, alors $\mathcal{F}^\bullet$ est représenté par le couple d'espaces vectoriels* $E \underset{inc}{\overset{T - \mathbb{1}_E}{\rightleftarrows}} F$, *où $F \subset E$.*

iii *Si $\mathcal{F}^\bullet = Rj_*(h^0(\mathcal{F}^\bullet|_{D^*}))$, alors $\mathcal{F}^\bullet$ est représenté par le couple d'espaces vectoriels* $E \underset{\mathbb{1}_E}{\overset{T - \mathbb{1}_E}{\rightleftarrows}} E$, *où $E = F$.*

Démonstration. La démonstration de ces trois résultats est basée dans le triangle :

$$\mathrm{R}\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathrm{R}i_*i^{-1}\mathcal{F}^\bullet, \tag{9}$$

où $K = \mathbb{R}^+ \cap D$ et $i : D \setminus K \hookrightarrow D$ l'inclusion et dans la suite exacte longue de cohomologie associée :

$$0 \longrightarrow h^0(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\rho} i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{U} \mathrm{R}^1\Gamma_K \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow h^1(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow 0. \tag{10}$$

Cas : $\mathcal{F}^\bullet = j_!(h^0(\mathcal{F}^\bullet|_{D^*}))$

Vu que $\mathcal{F}^\bullet$ n'a que la cohomologie en degré 0 et que le germe à l'origine de $h^0(\mathcal{F}^\bullet|_{D^*})_0 = 0$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow (i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F}^\bullet))_0 \xrightarrow{u} (\mathrm{R}^1\Gamma_K \mathcal{F}^\bullet)_0 \longrightarrow 0,$$

où $u = U_0$, donc u est un isomorphisme et en particulier on peut prendre $u = \mathbb{1}_E$, en particulier on a $v = T - \mathbb{1}_E$, car $\mathbb{1}_E + vu = T$.

Cas : $\mathcal{F}^\bullet = j_*(h^0(\mathcal{F}^\bullet|_{D^*}))$

Étant donné que $\mathcal{F}^\bullet$ n'a de la cohomologie qu'en degré 0, on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow h^0(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\rho} i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{U} \mathrm{R}^1\Gamma_K \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow 0.$$

En prenant le germe à l'origine on a le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (h^0(\mathcal{F}^\bullet))_0 \arrow[r, "\rho_0"] \arrow[d, equal] & (i_* i^{-1} h^0(\mathcal{F}^\bullet))_0 \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & (\mathrm{R}^1\Gamma_K \mathcal{F}^\bullet)_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \{e \in E \mid Te = e\} \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads] & E/ker(T - \mathbb{1}_E) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

mais on a aussi la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \{e \in E \mid Te = e\} \hookrightarrow E \xrightarrow{T - \mathbb{1}_E} im(T - \mathbb{1}_E) \longrightarrow 0,$$

donc $u = T - \mathbb{1}_E$. Vu que $\mathbb{1}_E + vu = T$, on a $v \circ (T - \mathbb{1}_E) = T - \mathbb{1}_E$, alors $v : F \hookrightarrow E$ est l'inclusion et en particulier on peut prendre $F \subset E$.

Cas : $\mathcal{F}^\bullet = Rj_*(h^0(\mathcal{F}^\bullet|_{D^*}))$

Soit $k : D \setminus K \hookrightarrow D^*$ l'inclusion et $\mathcal{L} = h^0(\mathcal{F}^\bullet|_{D^*})$. $\mathcal{L}$ est un faisceaux localement constant, lequel peut être regardé comme un complexe de faisceaux pervers. Ce complexe donne naissance au triangle :

$$\mathrm{R}\Gamma_{K^*}\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{R}k_* k^{-1}\mathcal{L}.$$

Associé à ce triangle on a la suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & h^0(\mathrm{R}\Gamma_{K^*}\mathcal{L}) \arrow[r] & h^0(\mathcal{L}) \arrow[r] & h^0(\mathrm{R}k_* k^{-1}\mathcal{L}) \arrow[dll, rounded corners] \\
& h^1(\mathrm{R}\Gamma_{K^*}\mathcal{L}) \arrow[r] & h^1(\mathcal{L}) \arrow[r] & h^1(\mathrm{R}k_* k^{-1}\mathcal{L}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Vu que $h^0(\mathcal{L})|_{D^*}$ est un système local, $h^i(\mathcal{L})|_{D^*} = 0$, pour chaque $i > 0$. Étant $h^0(\mathcal{L})|_{D^*}$ un système local, leurs sections dont le support est contenu dans $K \setminus \{0\}$

sont nulles, donc $h^0(\mathrm{R}\Gamma_{K^*}\mathcal{L}) = 0$. On peut aussi montrer que $\mathrm{R}^i k_* k^{-1}\mathcal{L} = 0$, pour chaque $i > 0$:

• si $x \in D^* \setminus K$, on prends une base d'ouverts $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \subset D^* \mid B_\varepsilon(x) \cap K = \emptyset\}$. Grâce à laquelle on a :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{R}^i k_* k^{-1}\mathcal{L})_x &= \varinjlim_{B\in\mathcal{B}} \mathrm{H}^i(B \setminus K, \mathcal{L}) \\
&= \varinjlim_{B\in\mathcal{B}} \mathrm{H}^i(B, \mathcal{L}) \\
&= \oplus_1^{rg\mathcal{L}} \varinjlim_{B\in\mathcal{B}} \mathrm{H}^i(B, \underline{\mathbb{C}}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

• si $x \in K^*$, on prends une base d'ouverts $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \subset D^* \mid \varepsilon < x\}$. Grâce à cette base on a :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{R}^i k_* k^{-1}\mathcal{L})_x &= \varinjlim_{B\in\mathcal{B}} \mathrm{H}^i(B \setminus K, \mathcal{L}) \\
&= \varinjlim_{B\in\mathcal{B}} \mathrm{H}^i(B^+ \cup B^-, \mathcal{L}) \\
&= \varinjlim_{B\in\mathcal{B}} \mathrm{H}^i(B^+, \mathcal{L}) \oplus \mathrm{H}^i(B^-, \mathcal{L}) \\
&= \oplus_1^{rg\mathcal{L}} \varinjlim_{B\in\mathcal{B}} \mathrm{H}^i(B^+, \underline{\mathbb{C}}) \oplus \oplus_1^{rg\mathcal{L}} \varinjlim_{B\in\mathcal{B}} \mathrm{H}^i(B^-, \underline{\mathbb{C}}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

où $B^+ = B \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \Im m(x) > 0\}$, $B^- = B \cap \{x \in \mathbb{C} \mid \Im m(x) < 0\}$.

Mais la suite exacte longue 11 entraîne que $\mathrm{R}^i\Gamma_{K^*}\mathcal{L} = 0$, pour $i \geq 2$, donc $\mathrm{R}\Gamma_{K^*}\mathcal{L}$ est concentré en degré 1, cet à dire :

$$\mathrm{R}\Gamma_{K^*}\mathcal{L} = \mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L}[+1], \tag{12}$$

en particulier on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow k_* k^{-1}\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L} \longrightarrow 0, \tag{13}$$

laquelle donne naissance au triangle :

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{R}k_* k^{-1}\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_{K^*}\mathcal{L}[+1].$$

Par l'application du foncteur $\mathrm{R}j_*$ on obtient le triangle :

$$\mathrm{R}j_*\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{R}j_*\mathrm{R}k_* k^{-1}\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{R}j_*\mathrm{R}\Gamma_{K^*}\mathcal{L}[+1].$$

Vu que $\mathcal{F}^\bullet = \mathrm{R}j_*\mathcal{L}$, $\mathrm{R}j_*\mathrm{R}k_*k^{-1}\mathcal{L} = \mathrm{R}i_*k^{-1}(j^{-1}\mathcal{F}^\bullet) = \mathrm{R}i_*i^{-1}\mathcal{F}^\bullet$, alors par le triangle 9 et le Lemme des 5 on a

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}j_*\mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{R}j_*\mathrm{R}k_*k^{-1}\mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{R}j_*\mathrm{R}\Gamma_{K^*}\mathcal{L}[+1] \arrow[d, dotted, "\simeq"] \\
\mathcal{F}^\bullet \arrow[r] & \mathrm{R}i_*i^{-1}\mathcal{F}^\bullet \arrow[r] & \mathrm{R}\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet[+1]
\end{tikzcd}$$

donc $\mathrm{R}\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet \simeq \mathrm{R}j_*\mathrm{R}\Gamma_{K^*}\mathcal{L}$. Grâce à l'équation 12 on a

$$\mathrm{R}\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet \simeq \mathrm{R}j_*\mathrm{R}\Gamma_{K^*}\mathcal{L} = \mathrm{R}j_*\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L}[+1],$$

et en particulier la cohomologie en degré 1 est :

$$\mathrm{R}^1\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet = \mathrm{H}^1(\mathrm{R}\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet) = \mathrm{H}^0(\mathrm{R}j_*\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L})[+1] = j_*\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L}.$$

Le faisceau $\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L}$ est constant de fibre E, car pour tout $x \in K^*$ la suite exacte courte 13 donne naissance à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_x \longrightarrow (k_*k^{-1}\mathcal{L})_x \longrightarrow (\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L})_x \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{L}_x = E$, et $(k_*k^{-1}\mathcal{L})_x = E \oplus E$, alors $(\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L})_x = E$. Vu que K^* est simplement connexe, $\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L}$ est un faisceau constant de fibre E.
Son image directe $j_*\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L}$ est aussi un faisceau constant de fibre E, car K est simplement connexe et

$$\begin{aligned}
(j_*\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L})_0 &= \varinjlim_{\substack{[0,\varepsilon) \\ 0<\varepsilon\ll 1}} j_*\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L}\left([0,\varepsilon)\right) \\
&= \varinjlim_{\substack{[0,\varepsilon) \\ 0<\varepsilon\ll 1}} \mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L}\left(j^{-1}\left([0,\varepsilon)\right)\right) \\
&= \varinjlim_{\substack{[0,\varepsilon) \\ 0<\varepsilon\ll 1}} \mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L}((0,\varepsilon)) \\
&= E.
\end{aligned}$$

En particulier $F = (\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{F}^\bullet)_0 = (j_*\mathrm{R}^1\Gamma_{K^*}\mathcal{L})_0 = E$.

En prenant le germe à l'origine de la suite exacte 10 on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (h^0(\mathcal{F}^\bullet))_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & (i_*i^{-1}h^0(\mathcal{F}^\bullet))_0 \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & (\mathrm{R}^1\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet)_0 \arrow[r] & (h^1(\mathcal{F}^\bullet))_0 \\
0 \arrow[r] & ker(T-\mathbb{1}_E) \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads, "T-\mathbb{1}_E"] & im(T-\mathbb{1}_E) \arrow[u, hook, "\eta"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

car $im(T-\mathbb{1}_E)$, $im(u)$ sont des conoyaux. Donc on peut identifier $u : E \to E$ à $T - \mathbb{1}_E : E \to E$. La commutation dans le diagramme de recollement pour U des fibres en 0 et en $x \in K$ entraîne que $v = \mathbb{1}_E$. $\square$

Proposition 2.4.6. *Tout objet* $\mathrm{E} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathrm{F} \neq 0 \rightleftarrows 0$ *de* Θ *se décompose en somme directe d'objets indécomposables :*

$$\mathrm{E} \supset \mathrm{E}_{\lambda,l} \underset{v_{\lambda,l}}{\overset{u_{\lambda,l}}{\rightleftarrows}} \mathrm{F}_{\lambda,l} \subset \mathrm{F}$$

munis des morphismes de restriction où $\mathrm{E}_{\lambda,l}$ *(resp.*$\mathrm{F}_{\lambda,l}$*) correspond à un bloc de Jordan pour l'opérateur* $v \circ u$ *(resp.* $u \circ v$*) associé à la valeur propre* λ*. De plus si*

$\lambda \neq 0$: $u_{\lambda,l}$ *et* $v|_{\lambda,l}$ *sont des isomorphismes*
$\lambda = 0$: $u_{\lambda,l}$ *ou* $v_{\lambda,l}$ *est surjectif.*

Il existe donc un vecteur, que l'on notera $\theta_{\lambda,l}$*, de* $\mathrm{E}_{\lambda,l}$ *ou* $\mathrm{F}_{\lambda,l}$ *qui engendre* $\mathrm{E}_{\lambda,l}$ *et* $\mathrm{F}_{\lambda,l}$ *sous l'action itérée de* u *et* v*.*

Démonstration. Soit E_λ le sous espace vectoriel de E correspondant à la valeur propre λ. Si $\mathrm{e} \in \mathrm{E}_\lambda$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(v \circ u - \lambda \mathbb{1})^n \mathrm{e} = 0$ et alors $u \circ (v \circ u - \lambda \mathbb{1})^n \mathrm{e} = (u \circ v - \lambda \mathbb{1})^n \circ u\mathrm{e} = 0$, donc $u\mathrm{e} \in \mathrm{F}_\lambda$. Réciproquement on a $v(\mathrm{F}_\lambda) \subset \mathrm{E}_\lambda$. Cela implique que l'on peut décomposer le couple $\mathrm{E} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathrm{F}$ en somme directe d'objets :

$$\mathrm{E} \supset \mathrm{E}_\lambda \rightleftarrows \mathrm{F}_\lambda \subset \mathrm{F}.$$

Si $\lambda \neq 0$, $v|_{\mathrm{F}_\lambda} \circ u|_{\mathrm{E}_\lambda} = \mathrm{J}_{\mathrm{E}_\lambda}$ et $u|_{\mathrm{E}_\lambda} \circ v|_{\mathrm{F}_\lambda} = \mathrm{J}_{\mathrm{F}_\lambda}$ pour des bons choix de base en E_λ et en F_λ. Cela entraîne en particulier que $v|_{\mathrm{F}_\lambda} \circ u|_{\mathrm{E}_\lambda}$ et $u|_{\mathrm{E}_\lambda} \circ v|_{\mathrm{F}_\lambda}$ sont des isomorphismes, donc $u|_{\mathrm{E}_\lambda}$ et $v|_{\mathrm{F}_\lambda}$ sont aussi des isomorphismes. Si $\mathrm{e} \in \mathrm{E}_{\lambda,l}$ et e engendre $\mathrm{E}_{\lambda,l}$ sous l'action itérée de $v \circ u$, alors $u(\mathrm{e}) \in \mathrm{F}_{\lambda,l}$ et $u(\mathrm{e})$ engendre $\mathrm{F}_{\lambda,l}$ sous l'action itérée de $u \circ v$, donc on peut décomposer $\mathrm{E}_\lambda \underset{v|_{\mathrm{F}_\lambda}}{\overset{u|_{\mathrm{E}_\lambda}}{\rightleftarrows}} \mathrm{F}_\lambda$ en somme directe d'objets indécomposables :

$$\mathrm{E}_\lambda \supset \mathrm{E}_{\lambda,l} \rightleftarrows \mathrm{F}_{\lambda,l} \subset \mathrm{F}_\lambda,$$

en plus il existe un vecteur de $\mathrm{E}_{\lambda,l}$ qui engendre $\mathrm{E}_{\lambda,l}$ et $\mathrm{F}_{\lambda,l}$ sous l'action itérée de u et v.

Dans le cas $\lambda = 0$ on prend une décomposition $E = \oplus_i \mathrm{E}_i$ en sous-espaces de Jordan de $v \circ u$. On commence par remarquer que pour chaque i, j, $i \neq j$, $u(\mathrm{E}_i) \cap u(\mathrm{E}_j) \subset \ker v$, car :

$$\begin{aligned} v^{-1}(0) &= v^{-1}(\mathrm{E}_i \cap \mathrm{E}_j) \\ &= v^{-1}(v \circ u(\mathrm{E}_i) \cap v \circ u(\mathrm{E}_j)) \\ &= v^{-1}(v \circ u(\mathrm{E}_i)) \cap v^{-1}(v \circ u(\mathrm{E}_j)) \\ &\supset u(\mathrm{E}_i) \cap u(\mathrm{E}_j). \end{aligned}$$

De plus pour chaque j, $\dim u(\mathrm{E}_j) \cap \ker v \leq 1$, car :

$$u(\mathrm{E}_j) \cap \ker v = u(\mathrm{E}_j) \cap v^{-1}(0) = (v \circ i_{u(\mathrm{E}_j)})^{-1}(0),$$

où $i_{u(\mathrm{E}_j)} : u(\mathrm{E}_j) \hookrightarrow \mathrm{F}$ désigne l'inclusion. En particulier pour chaque i, j, $i \neq j$, $\dim u(\mathrm{E}_j) \cap u(\mathrm{E}_j) \leq 1$. Désormais on note $\mathrm{G} = \ker v$.

Sans perte de généralité on peut supposer que les dimensions (n_i) de la famille (E_i) sont ordonnées par ordre décroissante.

Prenons $u(\mathrm{E}_1)$. Deux choses peuvent arriver : soit $u(\mathrm{E}_1) \cap \mathrm{G} = \langle 0 \rangle$, soit $u(\mathrm{E}_1) \cap \mathrm{G} \neq \langle 0 \rangle$. Si $u(\mathrm{E}_1) \cap \mathrm{G} = \langle 0 \rangle$ alors pour chaque $i > 1$ $u(\mathrm{E}_1) \cap u(\mathrm{E}_i) = \langle 0 \rangle$. Si $u(\mathrm{E}_1) \cap \mathrm{G} \neq \langle 0 \rangle$ et si on désigne par e_i le vecteur cyclique qui engendre E_i sous l'action de $v \circ u$ alors $(u \circ v)^{n_1 - 1} \circ u(\mathrm{e}_1) \neq 0$ et de plus $u(\mathrm{E}_1) \cap G = \langle (u \circ v)^{n_1 - 1} \circ u(\mathrm{e}_1) \rangle$. Après une choix convenable de vecteurs linéairement indépendants $\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_k \in \mathrm{G}$ on peut compléter la base $\{(u \circ v)^{n_1 - 1} \circ u(\mathrm{e}_1)\}$ de $u(\mathrm{E}_1) \cap G$ à une base de $\mathrm{G} = \langle (u \circ v)^{n_1 - 1} \circ u(\mathrm{e}_1) \rangle \oplus \mathrm{G}'$, où $\mathrm{G}' = \langle \mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_k \rangle$. Étant donné que pour chaque $i > 1$, $\mathrm{e}'_i \doteq \mathrm{e}_i - (v \circ u)^{n_1 - n_i}(\mathrm{e}_1)$ est aussi un vecteur cyclique de $v \circ u$, on peut construire une nouvelle décomposition de E en sous espaces de Jordan de $v \circ u$. Celle ci est donnée par $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus (\oplus_{i>1} \mathrm{E}'_i)$, où $\mathrm{E}'_i = \langle \mathrm{e}'_i, v \circ u(\mathrm{e}'_i), \ldots, (v \circ u)^{n_i - 1}(\mathrm{e}'_i) \rangle$. De plus $u \circ (v \circ u)^{n_i - 1}(\mathrm{e}_i) \in \mathrm{G}$ et par construction $u \circ (v \circ u)^{n_i - 1}(\mathrm{e}_i)$ n'a pas de composantes selon $\langle (u \circ v)^{n_1 - 1} \circ u(\mathrm{e}_1) \rangle$, donc, pour chaque $i > 1$, $u(\mathrm{E}_1) \cap u(\mathrm{E}'_i) = \langle 0 \rangle$. En appliquant récursivement cet argument on trouve une décomposition de $\mathrm{E} = \oplus_{i \geq 1} \mathrm{E}_i$, en sous espaces de Jordan de $v \circ u$, tel que pour chaque i, j, $i \neq j$, $u(\mathrm{E}_i) \cap u(\mathrm{E}_j) = \langle 0 \rangle$.

Soit $\mathrm{F}_i \doteq \langle u(\mathrm{E}_i), \mathrm{f}_i \rangle$ tel que $\mathrm{f}_i = 0$, si $v^{-1}(\mathrm{e}_i) = \varnothing$, et $\mathrm{f}_i \in v^{-1}(\mathrm{e}_i)$, si $v^{-1}(\mathrm{e}_i) \neq \varnothing$, où e_i est un vecteur cyclique qui engendre E_i sous l'action de $v \circ u$. Les F_i sont des sous-espaces de Jordan de $u \circ v$. Vu que pour chaque i, j, $i \neq j$, $v(v^{-1}(\mathrm{e}_i) \cap \mathrm{F}_j) \subset v(\mathrm{F}_j) \subset \mathrm{E}_j$ et $v(v^{-1}(\mathrm{e}_i) \cap \mathrm{F}_j) \subset v(v^{-1}(\mathrm{e}_i)) = \{\mathrm{e}_i\}$, $v(v^{-1}(\mathrm{e}_i) \cap \mathrm{F}_j) \subset \varnothing$, alors $v^{-1}(\mathrm{e}_i) \cap \mathrm{F}_j = \varnothing$, donc $\mathrm{F}_i \cap \mathrm{F}_j = \langle 0 \rangle$.

La construction précédente montre que soit $u_i : \mathrm{E}_i \to \mathrm{F}_i$, $\mathrm{e} \mapsto u(\mathrm{e})$, soit $v_i : \mathrm{F}_i \to \mathrm{E}_i$, $\mathrm{f} \mapsto v(\mathrm{f})$, est surjectif. De plus u_i, v_i ne peuvent pas être surjectifs en même temps. En effet, si u_i, v_i sont surjectifs $v_i \circ u_i$ est surjectif, donc un isomorphisme, et pourtant $\mathrm{E}_i \neq \langle 0 \rangle$ et $v_i \circ u_i$ est nilpotent. $\lightning$

Soit $\{\mathrm{e}_i, v \circ u(\mathrm{e}_i), \ldots, (v \circ u)^{\mu_i - 1}(\mathrm{e}_i)\}$, $\mu_i = \dim \mathrm{E}_i$, une base de Jordan de E_i et $\{\mathrm{f}_i, u \circ v(\mathrm{f}_i), \ldots, (u \circ v)^{\nu_i - 1}(\mathrm{f}_i)\}$, $\nu_i = \dim \mathrm{F}_i$, une base de Jordan de F_i, où $\mathrm{f}_i = u(\mathrm{e}_i)$, si u_i est surjectif, et $\mathrm{e}_i = u(\mathrm{f}_i)$, si v_i est surjectif. Après une choix convenable de vecteurs $h_1, \ldots, h_l \in \mathrm{F}$, on peut compléter la base $B = \{\mathrm{f}_1, u \circ v(\mathrm{f}_1), \ldots, (u \circ v)^{\nu_1 - 1}(\mathrm{f}_1), \ldots, \mathrm{f}_k, u \circ v(\mathrm{f}_k), \ldots, (u \circ v)^{\nu_k - 1}(\mathrm{f}_k)\}$ de $\mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_k$ à une base de F.

Soit $\mathrm{h}_m \in \{\mathrm{h}_1, \dots, \mathrm{h}_l\}$

$$\begin{aligned}
v(\mathrm{h}_m) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i-1} \alpha_{ij} (v \circ u)^j (\mathrm{e}_i) \\
&= \sum_{\substack{u_i \text{ surjectif} \\ i \in \{1,\dots,k\}}} \left(\alpha_{i0} \mathrm{e}_i + \sum_{j=1}^{n_i-1} \alpha_{ij} (v \circ u)^{j-1} ((v \circ u)(\mathrm{e}_i)) \right) + \\
&\quad + \sum_{\substack{v_i \text{ surjectif} \\ i \in \{1,\dots,k\}}} \sum_{j=0}^{n_i-1} \alpha_{ij} (v \circ u)^j (v(\mathrm{f}_i)) \\
&= v \left(\sum_{\substack{u_i \text{ surjectif} \\ i \in \{1,\dots,k\}}} \sum_{j=1}^{n_i-1} \alpha_{ij} (u \circ v)^{j-1} (\mathrm{f}_i) + \sum_{\substack{v_i \text{ surjectif} \\ i \in \{1,\dots,k\}}} \sum_{j=0}^{n_i-1} \alpha_{ij} (u \circ v)^j (\mathrm{f}_i) \right).
\end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$\mathrm{h}'_m \doteq \mathrm{h}_m - \sum_{\substack{u_i \text{ surjectif} \\ i \in \{1,\dots,k\}}} \sum_{j=1}^{n_i-1} \alpha_{ij} (u \circ v)^{j-1} (\mathrm{f}_i) - \sum_{\substack{v_i \text{ surjectif} \\ i \in \{1,\dots,k\}}} \sum_{j=0}^{n_i-1} \alpha_{ij} (u \circ v)^j (\mathrm{f}_i) \in \ker v.$$

Étant donné que $B \cup \{\mathrm{h}'_1, \dots, \mathrm{h}'_l\}$ est aussi une base de F on a $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_k \oplus \langle \mathrm{h}'_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathrm{h}'_l \rangle$. Par construction on a

$$\mathrm{E} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathrm{F} \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{E}_i \underset{v_i}{\overset{u_i}{\rightleftarrows}} \mathrm{F}_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} 0 \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} \langle \mathrm{h}'_j \rangle,$$

d'où le résultat voulu. □

Corollaire 2.4.7. *Soit* $\mathrm{E} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathrm{F} \neq 0 \rightleftarrows 0$ *un objet indécomposable de* Θ *tel que la valeur propre de* $v \circ u$ *(et donc aussi la de* $u \circ v$*) est 0. Soient* $d : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$, $inc : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^n$ *les morphismes suivants :*

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n-1}, \\ \mathrm{e}_i & \longmapsto & \mathrm{e}_{i-1} \\ \mathrm{e}_1 & \longmapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} inc : \mathbb{C}^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n, \\ \mathrm{e}_i & \longmapsto & \mathrm{e}_i \end{array}$$

où $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n\}$ *est la base canonique de* $\mathbb{C}^n$.

Selon le cas où u *est surjectif ou* v *est surjectif* $\mathrm{E} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathrm{F}$ *est isomorphe à un des deux objets suivants :*

u est surjective) $\mathbb{C}^n \underset{inc \circ d}{\overset{\mathbb{1}}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n \underset{inc}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}^{n-1}$,

v est surjective) $\mathbb{C}^n \underset{\mathbb{1}}{\overset{inc \circ d}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{n-1} \underset{d}{\overset{inc}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}^n$.

Démonstration. Immédiate. Il suffit de prendre en E, F les bases de Jordan respectives que l'on a construit dans la démonstration de la Proposition 2.4.6 et prendre les isomorphismes linéaires :

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{C}^m, \\ (v \circ u)^i \mathrm{e} & \longmapsto & \mathrm{e}_{m-i} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \beta : \mathrm{F} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m'}, \\ (u \circ v)^i \mathrm{f} & \longmapsto & \mathrm{e}_{m'-i} \end{array}$$

où $\mathrm{e} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{f} \in \mathrm{F}$ sont des vecteurs cycliques qui engendrent E (respectivement F) sous l'action itérée de $v \circ u$ (respectivement $u \circ v$). □

Notation 2.4.8. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application linéaire. On note Z(T) l'espace vectoriel suivant : $\{A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}) | \mathrm{AT} = \mathrm{TA}\}$.

Lemme 2.4.9. *Soit* $\mathrm{E} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathrm{F} \neq 0 \circlearrowleft 0$ *un objet de* Θ *tel que* $v \circ u$ *et* $u \circ v$ *sont nilpotents. Alors :*

i) $\mathrm{T}_{\mathrm{E}} \doteq \mathbb{1} + v \circ u$ *et* $\mathrm{T}_{\mathrm{F}} \doteq \mathbb{1} + u \circ v$ *ont seulement la valeur propre 1.*

ii) *Si* $\mathrm{E}_{0,l} \circlearrowleft \mathrm{F}_{0,l}$ *est un objet de la décomposition du couple* $\mathrm{E} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathrm{F}$ *en somme directe d'objets indécomposables alors*

1) $\dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_{\mathrm{E}_{0,l}}) = \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_{\mathrm{F}_{0,l}}) + 1$, *si* $\dim \mathrm{E}_{0,l} > \dim \mathrm{F}_{0,l}$,
2) $\dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_{\mathrm{E}_{0,l}}) = \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_{\mathrm{F}_{0,l}})$, *si* $\dim \mathrm{E}_{0,l} = \dim \mathrm{F}_{0,l}$,
3) $\dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_{\mathrm{E}_{0,l}}) = \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_{\mathrm{F}_{0,l}}) - 1$, *si* $\dim \mathrm{E}_{0,l} < \dim \mathrm{F}_{0,l}$.

Démonstration. i) Soit $0 \neq \mathrm{e} \in \mathrm{E}$ un vecteur propre de $v \circ u$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ sa valeur propre. Étant donné que $v \circ u$ est nilpotent il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(v \circ u)^n = 0$, alors $0 = (v \circ u)^n \mathrm{e} = \lambda^n \mathrm{e}$. Vu que $\mathrm{e} \neq 0$, $\lambda = 0$, donc si on écrit $v \circ u$ dans la base de Jordan, $v \circ u$ est triangulaire supérieur et sa diagonale est 0, ceci entraîne que T_{E} a seulement la valeur propre 1. De la même façon on montre ce résultat pour T_{F}.
ii) Conséquence immédiate du Corollaire 2.4.7. □

Proposition 2.4.10. *Si le couple* $\mathrm{E} \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \mathrm{F} \neq 0 \circlearrowleft 0$ *est isomorphe au couple* $\mathrm{E} \underset{inc}{\overset{v \circ u}{\rightleftarrows}} \mathrm{im}(v \circ u)$ *(extension minimale), alors*

$$\dim \mathrm{Z}(v \circ u) - \dim \mathrm{Z}(u \circ v) = \dim^2 \ker(v \circ u).$$

Démonstration. On prend les notations $\mathrm{E}_{\lambda_i,j}$ $(v \circ u)$, $\mathrm{F}_{\lambda_i,j}$ $(u \circ v)$ de 2.4.11. On suppose que tous les blocs $\mathrm{E}_{\lambda_i,j}$ sont de dimension ≥ 1, mais on admet que certains $\mathrm{F}_{\lambda_i,j}$ soient

nuls. L'hypothèse implique que

$$\dim \mathrm{F}_{\lambda_i,j} = \begin{cases} \dim \mathrm{E}_{\lambda_i,j} & \text{si } \lambda_i \neq 1, \\ \dim \mathrm{E}_{\lambda_i,j} - 1 & \text{si } \lambda_i = 1. \end{cases}$$

d'après le Lemme 2.4.11, on a alors

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Z}(v \circ u) - \dim \mathrm{Z}(u \circ v) &= \sum_{j,k} \min\{\dim \mathrm{E}_{1,j}, \dim \mathrm{E}_{1,k}\} - \\ &\quad - \sum_{j,k} \min\{\dim \mathrm{F}_{1,j}, \dim \mathrm{F}_{1,k}\} \\ &= \sum_{jk} 1 = d^2, \end{aligned}$$

si d est le nombre de blocs $\mathrm{E}_{1,j}$ de taille ≥ 1, c'est-à-dire $d = \dim \ker(v \circ u)$. □

Lemme 2.4.11. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

i) *Si on prend une décomposition de* M *:*

$$\begin{bmatrix} \mathrm{J}_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{J}_{\alpha_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{J}_{\alpha_k} \end{bmatrix}$$

en blocs de Jordan, où J_{α_i} *désigne la diagonale de blocs de Jordan associée à la valeur propre* α_i *(*$\alpha_i \neq \alpha_j$ *si* $i \neq j$*), alors :*

$$\dim \mathrm{Z}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Z}(\mathrm{J}_{\alpha_i}).$$

ii) *Si on prend une décomposition de la matrice* J_{λ_i} *:*

$$\begin{bmatrix} \mathrm{J}_{\lambda_i,0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{J}_{\lambda_i,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{J}_{\lambda_i,l_i} \end{bmatrix}$$

en sous blocs de Jordan indécomposables, où on suppose, sans perte de généralité, que la taille des $\mathrm{J}_{\lambda_i,0}, \mathrm{J}_{\lambda_i,1}, \ldots, \mathrm{J}_{\lambda_i,l_i}$ *est ordonnée par ordre croissante, alors :*

$$\dim \mathrm{Z}(\mathrm{J}_{\lambda_i}) = \sum_{j,k} \min\{\dim \mathrm{E}_{\lambda_i,j}, \dim \mathrm{E}_{\lambda_i,k}\}.$$

où $\mathrm{E}_{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{E}_{\lambda_k}$ *est la décomposition de* $\mathbb{C}^n$ *en sous espaces de Jordan associés à* $\mathrm{J}_{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{J}_{\lambda_k}$ *respectivement et* $\mathrm{E}_{\lambda_i,0}, \ldots, \mathrm{E}_{\lambda_i,l_i}$ *est la décomposition de* E_{λ_i} *en sous espaces de Jordan associés à la décomposition* $\mathrm{J}_{\lambda_i,0}, \ldots, \mathrm{J}_{\lambda_i,l_i}$ *de* J_{λ_i} *en sous blocs de Jordan indécomposables. Cette formule a un sens même si on admet que certains des* $\mathrm{E}_{\lambda_i,j}$ *soient nuls.*

Démonstration. i) Soit $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{NM} = \mathrm{MN}$ et

$$\begin{bmatrix} \mathrm{N}_{11} & \mathrm{N}_{12} & \cdots & \mathrm{N}_{1k} \\ \mathrm{N}_{21} & \mathrm{N}_{22} & \cdots & \mathrm{N}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{N}_{k1} & \mathrm{N}_{k2} & \cdots & \mathrm{N}_{kk} \end{bmatrix}$$

sa décomposition en blocs associés à la décomposition $\mathbb{C}^n = \mathrm{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_{\lambda_k}$. La relation de commutation $\mathrm{NM} = \mathrm{MN}$ entraîne que pour chaque $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ $\mathrm{N}_{ij}\mathrm{J}_{\lambda_j} = \mathrm{J}_{\lambda_i}\mathrm{N}_{ij}$ et alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ $\mathrm{N}_{ij}(\mathrm{J}_{\lambda_j} - \lambda_j \mathbb{1})^n = (\mathrm{J}_{\lambda_i} - \lambda_j \mathbb{1})^n \mathrm{N}_{ij}$. Vu que pour chaque $e \in \mathrm{E}_{\lambda_j}$ $(\mathrm{J}_{\lambda_j} - \lambda_j \mathbb{1})^{\dim \mathrm{E}_{\lambda_j}} e = 0$ et que $(\mathrm{J}_{\lambda_i} - \lambda_j \mathbb{1})^{\dim \mathrm{E}_{\lambda_j}}$ est un isomorphisme si $i \neq j$, alors $\mathrm{N}_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et donc

$$\dim \mathrm{Z}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Z}(\mathrm{J}_{\lambda_i}).$$

ii) Soit $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$, $m = \dim \mathrm{E}_{\lambda_i}$, tel que $\mathrm{NJ}_{\lambda_i} = \mathrm{J}_{\lambda_i}\mathrm{N}$ et

$$\begin{bmatrix} \mathrm{N}_{00} & \mathrm{N}_{01} & \cdots & \mathrm{N}_{0l_i} \\ \mathrm{N}_{10} & \mathrm{N}_{11} & \cdots & \mathrm{N}_{1l_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{N}_{l_i 0} & \mathrm{N}_{l_i 1} & \cdots & \mathrm{N}_{l_i l_i} \end{bmatrix}$$

sa décomposition en sous blocs associés aux sous espaces vectoriels $\mathrm{E}_{\lambda_i l}$, $l \in \{0, \ldots, l_i\}$. Étant donné cela :

$$\dim \mathrm{Z}(\mathrm{J}_{\lambda_i}) = \sum_{j,k} \dim \mathrm{Z}(\mathrm{J}_{\lambda_i,j}, \mathrm{J}_{\lambda_i,k}), \tag{14}$$

où $\mathrm{Z}(\mathrm{J}_{\lambda_i,j}, \mathrm{J}_{\lambda_i,k})$ désigne l'espace vectoriel $\{\mathrm{N} \in \mathcal{M}_{\dim \mathrm{E}_{\lambda_i,j} \times \dim \mathrm{E}_{\lambda_i,k}}(\mathbb{C}) | N\mathrm{J}_{\lambda_i,k} = \mathrm{J}_{\lambda_i,j}N\}$. Afin de simplifier la notation, on note J_j la matrice $\mathrm{J}_{\lambda_i,j}$. La relation de commutation $\mathrm{NJ} = \mathrm{JN}$ entraîne que pour chaque $j, k \in \{0, \ldots, l_i\}$ $\mathrm{N}_{jk}\mathrm{J}_k = \mathrm{J}_j\mathrm{N}_{jk}$ et alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{N}_{jk}(\mathrm{J}_k - \lambda_i \mathbb{1})^n = (\mathrm{J}_j - \lambda_i \mathbb{1})^n \mathrm{N}_{jk}. \tag{15}$$

Soit $e_{\lambda_i,k} \in \mathrm{E}_{\lambda_i,k}$, $k \in \{0, \ldots, l_i\}$, un vecteur cyclique qui engendre $\mathrm{E}_{\lambda_i,k}$ sous l'action itérée de $(\mathrm{J}_k - \lambda_i \mathbb{1})$. Grâce à l'équation 15 on a

$$(\mathrm{J}_j - \lambda_i \mathbb{1})^{\dim \mathrm{E}_{\lambda_i,k}} \mathrm{N}_{jk} e_{\lambda_i,k} = \mathrm{N}_{jk}(\mathrm{J}_k - \lambda_i \mathbb{1})^{\dim \mathrm{E}_{\lambda_i,k}} e_{\lambda_i,k},$$

et alors

$$(\mathrm{J}_j - \lambda_i \mathbb{1})^{\dim \mathrm{E}_{\lambda_i,k}} \mathrm{N}_{jk} e_{\lambda_i,k} = 0. \tag{16}$$

Si on note $\{f_p = (\mathrm{J}_j - \lambda_i \mathbb{1})^{\dim \mathrm{E}_{\lambda_i,j} - p} | p = 0, \ldots, k\}$, l'équation 16 entraîne que

$$\mathrm{N}_{jk} e_{\lambda_i,k} = \sum_{p=0}^{k} \lambda_p f_p, \tag{17}$$

alors pour chaque $l \in \{0, \cdots, k\}$

$$\mathrm{N}_{jk}(\mathrm{J}_k - \lambda_i \mathbb{1})^l e_{\lambda_i,k} = \sum_{p=0}^{k-l} \lambda_{p+l} f_p.$$

Cette égalité entraîne que $\dim \mathrm{Z}(\mathrm{J}_j) = \dim \mathrm{Z}(\mathrm{J}_j, \mathrm{J}_k) = \dim \mathrm{E}_{\lambda_i,j}$ si $j \leq k$ et $\dim \mathrm{Z}(\mathrm{J}_k) = \dim \mathrm{Z}(\mathrm{J}_j, \mathrm{J}_k) = \dim \mathrm{E}_{\lambda_i,k}$ si $j \geq k$, donc l'équation 14 se réduit à la suivante :

$$\dim \mathrm{Z}(\mathrm{J}_{\lambda_i}) = \sum_{j,k} \min\{\dim \mathrm{E}_{\lambda_i,j}, \dim \mathrm{E}_{\lambda_i,k}\}.$$

□

La Proposition 2.3.22 fait croire qu'au niveau des germes les catégories des germes de $\mathcal{D}_x$-modules holonomes réguliers et la catégorie des couples d'espaces vectoriels sont équivalentes. On peut trouver une démonstration de cette assertion dans [**26**] tantôt dans la Proposition iv.2.2 page 144, tantôt dans la Proposition iii.4.5 page 132. Dans ce dernier exposé on trouve une démonstration de la Proposition suivante :

Proposition 2.4.12. *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_x$-module holonome tel que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_x/\mathcal{D}_x.P$ et (E, F, u, v) est le couple d'espaces vectoriels associé, alors :*

1. $\dim E = \deg_{\partial_x}(P)$ *et*
2. $\dim F = \mathrm{val}(P)$.

Démonstration. Cf. [**26**] Théorème I.1.1 page 104 et Théorème I.1.2 page 105. □

2.5. La V-filtration

Il existe encore une autre façon de calculer le couple d'espaces vectoriels associé à un germe de $\mathcal{D}$-module holonome (et aussi de donner une équivalence de catégories dans le cas régulier). L'outil à utiliser c'est la V-filtration. Dans cette section on se place sur une variété analytique complexe X, mais ces résultats sont aussi valables pour une variété algébrique non singulière sur le corps $\mathbb{C}$, en remplaçant les polycylindres par des ouverts affines.

2.5.1. La V-filtration du faisceaux $\mathcal{D}_X$

Soit $Y \subset X$ une hypersurface non singulière. On note $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal des fonctions holomorphes qui s'annulent sur Y. Pour tout $k \leq 0$ entier, on pose $\mathcal{I}_Y^k \doteq \mathcal{O}_X$.

Définition 2.5.1. On définit la V-filtration du faisceau $\mathcal{D}_X$, indexée par $\mathbb{Z}$, comme étant la filtration dont le terme d'ordre k est $V_k(\mathcal{D}_X)$ -le sous-faisceau de $\mathcal{D}_X$ définit par :

$$\forall x \in X \quad V_k(\mathcal{D}_X)_x \doteq \{P \in (\mathcal{D}_X)_x | \forall l \in \mathbb{Z} \quad P(\mathcal{I}_Y^{k+l})_x \subset (\mathcal{I}_Y^l)_x\}.$$

Cette filtration vérifie les propriétés suivantes :

1) $\forall k \in \mathbb{Z} \quad V_k(\mathcal{D}_X) \subset V_{k+1}(\mathcal{D}_X)$,

2) $\mathcal{D}_X = \cup_{k\in\mathbb{Z}} V_k(\mathcal{D}_X)$,
3) $\forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \quad V_k(\mathcal{D}_X)V_l(\mathcal{D}_X) \subset V_{k+l}(\mathcal{D}_X)$,
4) $\forall k \in \mathbb{Z} \quad V_k(\mathcal{D}_X)_{|X\setminus Y} = (\mathcal{D}_X)_{|X\setminus Y}$.

Notation 2.5.2. On note $\mathrm{Gr}^V(\mathcal{D}_X) \doteq \oplus_{k\in\mathbb{Z}} V_k(\mathcal{D}_X)/V_{k-1}(\mathcal{D}_X)$ le gradué de $\mathcal{D}_X$ pour cette filtration et $\mathrm{Gr}^V_k(\mathcal{D}_X) \doteq V_k(\mathcal{D}_X)/V_{k-1}(\mathcal{D}_X)$ sa composante en degré k.

Soit (x,t) un système de coordonnés locales tel que $t=0$ soit une équation locale de Y. On constate que pour tout $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, l'opérateur $t^k\partial_t^l$ appartient à $V_{l-k}(\mathcal{D}_X)$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, un opérateur P de $V_{-k}(\mathcal{D}_X)$ (resp. de $V_k(\mathcal{D}_X)$) s'écrit localement de façon unique :

$$P = t^k \sum a_{\alpha,j}\partial_x^\alpha (t\partial_t)^j, \quad a_{\alpha,j} \in \mathcal{O}_X$$

(resp. $P = \sum_{l=0}^k \sum a_{\alpha,j,l}\partial_x^\alpha \partial_t^l (t\partial_t)^j, \quad a_{\alpha,j,l} \in \mathcal{O}_X$). En particulier, pour tout entier relatif k, $V_k(\mathcal{D}_X)$ est un $V_0(\mathcal{D}_X)$-module localement libre.

Définition 2.5.3 (V-filtration). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module. On appelle V-filtration de $\mathcal{M}$ à une filtration de $\mathcal{M}$ par des $V_0(\mathcal{D}_X)$-modules $U_k(\mathcal{M})$, $k \in \mathbb{Z}$, croissante, exhaustive et compatible à la filtration $V_k(\mathcal{D}_X)$, $k \in \mathbb{Z}$ de $\mathcal{D}_X$.

Proposition 2.5.4. *Soit $U_k(\mathcal{M})$, $k \in \mathbb{Z}$, une V-filtration de $\mathcal{M}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Les $V_0(\mathcal{D}_X)$-modules sont cohérents et localement il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \in \mathbb{N}$:*

$$V_k(\mathcal{D}_X)U_{k_0}(\mathcal{M}) = U_{k+k_0}(\mathcal{M}) \quad \text{et} \quad V_{-k}(\mathcal{D}_X)U_{-k_0}(\mathcal{M}) = U_{-k-k_0}(\mathcal{M}),$$

2) *Au voisinage de tout point il existe localement un morphisme surjectif :*

$$\mathcal{D}_X^p \to \mathcal{M} \to 0$$

tel que la filtration $U_k(\mathcal{M})$, $k \in \mathbb{Z}$, soit l'image d'une filtration convenablement décalée (par un $\underline{n} \in \mathbb{Z}^n$).

Démonstration. Cf. [**12**] Proposition 4.1-9 page 332. □

Définition 2.5.5 (filtration V -bonne). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent. Une V-filtration de $\mathcal{M}$ est dite V -bonne si elle vérifie une des deux propretés équivalentes de la proposition précédente.

On termine cette section en donnant une interprétation des éléments de $\mathrm{Gr}^V(\mathcal{D}_X)$ en termes d'opérateurs différentiels sur le fibré normal à Y. On note T_YX le fibré normal à Y et π sa projection canonique sur Y.

Lemme 2.5.6. *Le faisceau $\mathrm{Gr}^V(\mathcal{D}_X)_{|Y}$ s'identifie naturellement au sous-faisceau de l'image directe $\pi_*(\mathcal{D}_{T_YX})$ constitué par des opérateurs polynomiaux par rapport aux fibres de π. De plus, si Y possède une équation globale réduite $\tau = 0$, $\mathrm{Gr}^V_0(\mathcal{D}_X)_{|Y}$ s'identifie alors au $\mathcal{D}_Y$-module $\mathcal{D}_Y[\tau\partial_\tau]$.*

Démonstration. Cf. [**12**] Lemme 4.1-12 page 334. □

2.5.2. Les $\mathcal{D}_X$-modules spécialisables le long de Y

Le Lemme précédent montre que la classe E dans $\mathrm{Gr}_0^V(\mathcal{D}_X)$ du champ de vecteurs $t\partial_t$, où $t = 0$ est une équation locale réduite de Y, ne dépend pas de cette équation. Elle définit, donc, une section canonique du faisceau $\mathrm{Gr}_0^V(\mathcal{D}_X)$. Quand il n'y a pas de risque de confusion, on note encore E un relèvement dans $V_0(\mathcal{D}_X)$ de cette section.

Lemme 2.5.7. *Soit $U_\bullet(\mathcal{M})$ et $U'_\bullet(\mathcal{M})$ deux bonnes V-filtrations d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$. Localement il existe deux entiers k_1, k_2 tels que :*

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad U_{k_1+k}(\mathcal{M}) \subset U'_k(\mathcal{M}) \subset U_{k_2+k}(\mathcal{M}).$$

Démonstration. Cf. [**12**] Lemme 4.2-1 page 336. □

Proposition 2.5.8. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe une bonne V-filtration $U_\bullet(\mathcal{M})$ et, localement sur X, un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ non nul vérifiant $b(E+k)U_k(\mathcal{M}) \subset U_{k-1}(\mathcal{M})$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

2) *Pour toute bonne V-filtration $U_\bullet(\mathcal{M})$, il existe localement sur X un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ non nul tel que $b(E+k)U_k(\mathcal{M}) \subset U_{k-1}(\mathcal{M})$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

3) *Pour tout système fini de générateurs locaux $(m_i)_{i=1,\dots,l}$ de $\mathcal{M}$, il existe un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ non nul tel que $b(E)m_i \in \sum_{j=1}^{l} V_{-1}(\mathcal{D}_X)m_j$.*

Démonstration. Cf. [**12**] Proposition 4.2-2 page 336. □

Définition 2.5.9. Un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ est dit spécialisable le long de Y s'il possède l'une des trois propriétés équivalentes de la Proposition 2.5.8. Soit alors $U_\bullet(\mathcal{M})$ une bonne V-filtration de $\mathcal{M}$. On appelle polynôme de Bernstein-Sato (local) de la bonne V-filtration $U_\bullet(\mathcal{M})$ le polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ unitaire de plus petit degré tel que localement :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad b(E+k)U_k(\mathcal{M}) \subset U_{k-1}(\mathcal{M}).$$

Proposition 2.5.10. *Les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes sont spécialisables le long de toute hypersurface lisse.*

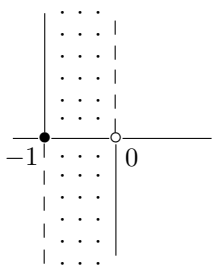
Démonstration. Cf. [**12**] Proposition 4.4-2 page 344. □

Proposition 2.5.11. *Soit $\sigma : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une section de la projection naturelle $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent spécialisable. Il existe une unique bonne V-filtration, notée $V_\bullet^\sigma(\mathcal{M})$, dont le polynôme de Bernstein-Sato $b^\sigma(s) \in \mathbb{C}[s]$ a ses racines dans l'image de σ.*

Démonstration. Cf. [**12**] Proposition 4.2-6 page 337. □

Désormais on prendra la section σ tel que son image est égal à l'ensemble (voir fig. suivante) :

$$\Sigma = \{\alpha \in \mathbb{C} | -1 \leq \operatorname{Re}\alpha \leq 0,\ \ \operatorname{Im}\alpha \geq 0 \ \ si \ \ \operatorname{Re}\alpha = -1,\ \ \operatorname{Im}\alpha < 0 \ \ si \ \ \operatorname{Re}\alpha = 0\}.$$



Définition 2.5.12 (V-filtration canonique). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent spécialisable. On appelle V-filtration canonique de $\mathcal{M}$ l'unique bonne V-filtration $V^\sigma_\bullet(\mathcal{M})$, où σ est la section dont son image est Σ.

Remarque 2.5.13. Quand on travaille sur une variété algébrique affine $\mathbb{A}^n$, de dimension n, le travail avec un $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$-module $\mathcal{M}$ (et par conséquent pour les $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^n}$-modules) se simplifie considérablement, car la connaissance de $\Gamma(\mathbb{A}^n, \mathcal{M})$ détermine la connaissance de $\Gamma(U, \mathcal{M})$ pour chaque ouvert affine $U = \mathbb{A}^n \setminus f^{-1}(0)$, puisque $\Gamma(U, \mathcal{M}) \simeq \Gamma(\mathbb{A}^n, \mathcal{M})[*f^{-1}(0)]$. Grâce à cette propriété nous nous restreindrons à calculer la V-filtration pour l'ouvert affine correspondant.

On présente maintenant quelques propriétés locales de la V-filtration canonique qui seront très utiles dans la suite.

Lemme 2.5.14. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module spécialisable le long $Y = 0$ et soit (x, t) un système de coordonnées locales tel que $t = 0$ soit une équation locale de $Y = 0$. Soit $V_k\mathcal{M}$, $k \in \mathbb{Z}$, la V-filtration canonique de $\mathcal{M}$. Cette filtration vérifie les propriétés suivantes :*

1 *Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{gr}^V_k \mathcal{M} \doteq V_k\mathcal{M}/V_{k-1}\mathcal{M}$ est un module de type finit sur l'anneau $\operatorname{gr}^V_0 \mathcal{D}_{(x,t)} \doteq \mathcal{D}_x \boxtimes \operatorname{gr}^{V_0}\mathcal{D}_t$, où $\mathcal{D}_x \doteq \mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle$ et $\mathcal{D}_t \doteq \mathbb{C}\{t\}\langle\partial_t\rangle$. Dans cet espace l'endomorphisme $t\partial_t$ admet un polynôme caractéristique $p(t\partial_t + k)$, où $p(s) \in \mathbb{C}[s]$, ce qui entraîne que $\operatorname{gr}^V_k \mathcal{M}$ est de type finit sur $\mathcal{D}_x$.*

2 *La multiplication à gauche par $t : V_k\mathcal{M} \to V_{k-1}\mathcal{M}$ (on remarque que $t \in V_{-1}\mathcal{D}_X$) induit un morphisme $\mathcal{D}_x$-linéaire :*

$$t : \operatorname{gr}^V_k \mathcal{M} \longrightarrow \operatorname{gr}^V_{k-1}\mathcal{M}.$$

De la même façon, $\partial_t : V_k\mathcal{M} \to V_{k-1}\mathcal{M}$ induit un morphisme $\mathcal{D}_x$-linéaire :

$$\partial_t : \operatorname{gr}^V_k \mathcal{M} \longrightarrow \operatorname{gr}^V_{k+1}\mathcal{M}.$$

La première application est inversible pourvu que $k \neq 0$ et la deuxième est inversible pourvu que $k \neq -1$. En particulier, si $k \neq 0$, on a l'isomorphisme de $\mathcal{D}_x$-modules :

$$\mathrm{gr}_k^V \mathcal{M} \simeq \mathrm{gr}_{k-1}^V \mathcal{M}.$$

Démonstration. 1) Vu que pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, $V_k\mathcal{M}$ est un $V_0\mathcal{D}_X \doteq \mathcal{D}_x \boxtimes V_0\mathcal{D}_t$-module, $\mathrm{gr}_k^V \mathcal{M}$ est un $V_0\mathcal{D}_X$-module. En plus la cohérence de $V_k\mathcal{M}$ sur $V_0\mathcal{D}_X$ entraîne qu'il existe $e_1, \ldots, e_n$ tels que :

$$V_k\mathcal{M} = V_0\mathcal{D}_X e_1 + \cdots + V_0\mathcal{D}_X e_n.$$

Étant donné que $V_0\mathcal{D}_t = \mathbb{C}[t\partial_t] + V_{-1}\mathcal{D}_t$:

$$V_k\mathcal{M} + V_{k-1}\mathcal{M} = \mathcal{D}_x \boxtimes \mathbb{C}[t\partial_t]e_1 + \cdots + \mathcal{D}_x \boxtimes \mathbb{C}[t\partial_t]e_n + V_{k-1}\mathcal{M},$$

donc $\mathrm{gr}_k^V \mathcal{M}$ est de type finit sur l'anneau $\mathrm{gr}_0^V \mathcal{D}_X$.
L'existence du polynôme de Bernstein, $b(t) \in \mathbb{C}[t]$, de $V_k\mathcal{M}$ entraîne que :

$$b(t\partial_t + k)\mathrm{gr}_k^V \mathcal{M} = 0,$$

donc l'endomorphisme $t\partial_t$ admet un polynôme caractéristique $p(t\partial_t + k)$ qui divise $b(t\partial_t + k)$. Vu que $e_1, \ldots, (t\partial_t)^{m-1}e_1, \ldots, e_n, \ldots, (t\partial_t)^{m-1}e_n$, où $m = \deg b(t) \in \mathbb{C}[t]$, engendrent $\mathrm{gr}_k^V \mathcal{M}$ sur $\mathcal{D}_x$, $\mathrm{gr}_k^V \mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_x$ -module de type finit.
2) Pour $k \neq 0$, l'application composé $\partial_t t$: $\mathrm{gr}_k^V \mathcal{M} \to \mathrm{gr}_k^V \mathcal{M}$ est inversible car son polynôme caractéristique $\beta(s)$ est égal à $p(s + k - 1)$ et par conséquence $\beta(0) = p(k - 1) \neq 0$, grâce au choix de Σ. De la même façon l'application composé $t\partial_t$: $\mathrm{gr}_k^V \mathcal{M} \to \mathrm{gr}_k^V \mathcal{M}$ est inversible quand $k \neq -1$. □

Remarque 2.5.15. La V -filtration fournit une façon alternative de calculer le couple d'espaces vectoriels $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$ associé à un $\mathcal{D}_t$ holonome régulier. Cela est une conséquence de l'équivalence de catégories entre la catégorie des germes de $\mathcal{D}_t$ -modules holonomes réguliers et la catégorie des germes de $\widehat{\mathcal{D}}_t$ -modules holonomes réguliers et du Théorème suivant :

Théorème 2.5.16. *La correspondance qui associe à chaque $\widehat{\mathcal{D}}_t$ -holonome $\mathcal{M}$ l'object $\mathrm{gr}_{-1}^V \mathcal{M} \underset{var}{\overset{can}{\rightleftarrows}} \mathrm{gr}_0^V \mathcal{M}$ de la catégorie Θ, cf. Définition 2.4.1, où $can \doteq \partial_t$ et $var \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2i\pi)^n}{n!}(t\partial_t)^{n-1} \cdot t$, est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Cf. [**13**] Téorème 6.2.5 page 41. □

Remarque 2.5.17. Grâce au Théorème 2.3.22 on sait qu'au niveau des germes il existe une anti-équivalence de catégories entre $\mathcal{M}od(\mathcal{D}_x)_{hr}$ et la catégorie $\mathcal{P}erv^{\{0\}}(\mathbb{C})$. Soit alors $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_x$-module holonome régulier qui induit le complexe $\mathcal{F}^\bullet$. D'autre part le Théorème précédent permet de donner une interprétation dans la catégorie $\mathcal{M}od(\mathcal{D}_x)_{hr}$ des conditions imposées au complexe $\mathcal{F}^\bullet$ dans la Proposition 2.4.5. Quand

$\mathcal{M} = \mathcal{M}[x^{-1}]$ les pas détaillés dans [**13**] Exercice 6.1.6 3 page 40 et Exercice 6.2.4 2 page 41 montrent que $\mathcal{M}$ est représenté par le couple de l'alinéa iii de la Proposition 2.4.5.

2.6. Opérations sur les $A_n(\mathcal{D}_X)$-modules

Dans cette section on présente les notions d'image inverse d'un A_n-module par une fonction polynomiale et d'image directe d'un $\mathcal{D}_X$-module (resp. A_n-module) par une fonction analytique (resp. une fonction polynomiale). L'intérêt de ces deux constructions est l'obtention du rapport entre la V-filtration canonique de M' (le $\mathbb{A}'^1$-module holonome construit à partir de M par le changement de coordonnées $t' = t^{-1}$), le long $t' = 0$ et la V-filtration de $M[t^{-1}]_{\mathcal{F}}$ le long $\tau = 0$ et donc le rapport entre les couples respectifs d'espaces vectoriels.

Afin d'y arriver on utilise l'identité suivante, trouvée dans l'article écrit par Claude Sabbah -*Monodromy at infinity and Fourier Transform* (cf. [**22**]) :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{F}} = \mathrm{H}^0(\widehat{\mathbb{A}}^1, \widehat{p}_+(p^+\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1} e^{-t\tau})), \tag{18}$$

où p, $\widehat{p}$ sont les projections $\mathbb{A}^1 \xleftarrow{p} \mathbb{A}^1 \times \widehat{\mathbb{A}}^1 \xrightarrow{\widehat{p}} \widehat{\mathbb{A}}^1$, $\mathbb{A}^1$ est la droite affine avec coordonné t, $\widehat{\mathbb{A}}^1$ est la droite affine avec coordonné τ, $\mathcal{M}$ est le $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$-module holonome algébrique déterminé par M i.e. $\Gamma(\mathbb{A}^1 \setminus \Sigma, \mathcal{M}) = M[*\Sigma]$, où $\Sigma \subset \mathbb{A}^1$ est un ensemble fini. Cette égalité est démontrée dans le Lemme 2.6.18.

Dans cette section on montre aussi que

$$\mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}} = \mathrm{H}^0(\widehat{\mathbb{A}}^1, \widehat{q}_+(q^+\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}'^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1} e^{-\tau/t'})), \tag{19}$$

où q, $\widehat{q}$ sont les projections $\mathbb{A}'^1 \xleftarrow{q} \mathbb{A}'^1 \times \widehat{\mathbb{A}}^1 \xrightarrow{\widehat{q}} \widehat{\mathbb{A}}^1$, $\mathbb{A}'^1$ est la droite affine avec coordonnée t' et $\mathcal{M}'$ est le $\mathcal{D}_{\mathbb{A}'^1}$-module holonome algébrique déterminé par M' i.e. $\Gamma(\mathbb{A}'^1 \setminus \Sigma, \mathcal{M}') = M'[*\Sigma]$, où $\Sigma \subset \mathbb{A}'^1$ est un ensemble fini. Cette égalité est démontrée dans le Lemme 2.6.20.

Le calcul des images inverses se simplifie considérablement car p, q sont des projections et grâce au Lemme 2.6.8 on a

$$\Gamma(\mathbb{A}^1 \times \widehat{\mathbb{A}}^1, p^+\mathcal{M}) = M[\tau],$$
$$\Gamma(\mathbb{A}'^1 \times \widehat{\mathbb{A}}^1, q^+\mathcal{M}') = M'[\tau].$$

L'utilisation respective des Lemmes 2.6.10 et 2.6.11 permet l'écriture

$$\Gamma(\mathbb{A}^1 \times \widehat{\mathbb{A}}^1, p^+\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1} e^{-t\tau}) = M[\tau],$$
$$\Gamma(\mathbb{A}'^1 \times \widehat{\mathbb{A}}^1, q^+\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}'^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}'^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1} e^{-\tau/t'}) = M'[\tau],$$

où $M[\tau]$ (respectivement $M'[\tau]$) est munis maintenant des actions tordues de $\partial_\tau \cdot$ et $\partial_t \cdot$ (respectivement $\partial_\tau \cdot$ et $\partial_{t'} \cdot$).

De façon analogue le calcul des images directes se simplifie considérablement car $\widehat{p}, \widehat{q}$ sont aussi des projections et grâce a la Proposition 2.6.17 on a

$$\Gamma(\widehat{\mathbb{A}}^1, \widehat{p}_+(p^+\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1} e^{-t\tau})) = M[\tau] \xrightarrow{\partial_t\cdot} M[\tau],$$
$$\Gamma(\widehat{\mathbb{A}}^1, \widehat{q}_+(q^+\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}'^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}'^1\times\widehat{\mathbb{A}}^1} e^{-\tau/t'})) = M'[\tau] \xrightarrow{\partial_{t'}\cdot} M'[\tau].$$

Grâce aux Lemmes 2.6.18 et 2.6.20 ces deux complexes donnent naissance aux suites exactes courtes :

$$0 \to \mathrm{M}[\tau] \xrightarrow{\partial_t\cdot} \mathrm{M}[\tau] \xrightarrow{\pi} \mathrm{M}_{\mathcal{F}} \to 0, \tag{20}$$

$$0 \to \mathrm{M}'[\tau] \xrightarrow{\partial_{t'}\cdot} \mathrm{M}'[\tau] \xrightarrow{\pi'} \mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}} \to 0. \tag{21}$$

En suite on prend la compactification $\mathbb{P}^1 \xleftarrow{\pi_{\mathbb{P}^1}} \mathbb{P}^1 \times \widehat{\mathbb{A}}^1 \xrightarrow{\pi_{\widehat{\mathbb{A}}^1}} \widehat{\mathbb{A}}^1$. $\pi_{\widehat{\mathbb{A}}^1}$ est propre et alors son image directe préserve la V-filtration pour chaque degré de cohomologie (cf. Théorème 2.6.21). On applique ce Théorème à l'image directe $\pi_{\widehat{\mathbb{A}}^1+}(\pi^+_{\mathbb{P}^1}(j_+\mathcal{M}[t^{-1}]))$, où $j : U_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ et $U_0 \doteq \mathbb{C}(= \mathbb{A}^1)$.

$j_+\mathcal{M}[t^{-1}]$ est le faisceau ayant les sections suivantes :

$\Gamma(U_0, j_+\mathcal{M}[t^{-1}]) = \mathrm{M}[t^{-1}]$,
$\Gamma(U_\infty, j_+\mathcal{M}[t^{-1}]) = \mathrm{M}[t^{-1}]$ (avec l'action de t', $\partial_{t'}$) et
$\Gamma(U_0 \cap U_\infty, j_+\mathcal{M}[t^{-1}]) = \mathrm{M}[t^{-1}]$,

où $U_\infty \doteq \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$.

$\pi^+_{\mathbb{P}^1}(j_+\mathcal{M}')$ est le faisceau ayant les sections suivantes :

$\Gamma(U_0, \pi^+_{\mathbb{P}^1}(j_+\mathcal{M}[t^{-1}])) = \mathrm{M}[t^{-1}][\tau]$,
$\Gamma(U_\infty, \pi^+_{\mathbb{P}^1}(j_+\mathcal{M}[t^{-1}])) = \mathrm{M}[t^{-1}][\tau]$ (avec l'action de $t'\cdot$, $\partial_{t'}\cdot$) et
$\Gamma(U_0 \cap U_\infty, \pi^+_{\mathbb{P}^1}(j_+\mathcal{M}[t^{-1}])) = \mathrm{M}[t^{-1}][\tau]$.

$\pi_{\widehat{\mathbb{A}}^1+}(\pi^+_{\mathbb{P}^1}(j_+\mathcal{M}'))$ donne naissance au complex double

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{M}[t^{-1}][\tau] \oplus \mathrm{M}[t^{-1}][\tau] & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{M}[t^{-1}][\tau] \\
\partial_t\cdot \big\downarrow \quad \big\downarrow \partial_{t'}\cdot & & \partial_t\cdot \big\downarrow \\
\mathrm{M}[t^{-1}][\tau] \oplus \mathrm{M}[t^{-1}][\tau] & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{M}[t^{-1}][\tau]
\end{array}$$

où les lignes sont des complexes de Čech et les colones sont des complexes de de Rham rélatifs. δ est l'application $(m_1, m_2) \mapsto m_1 - m_2$, laquelle est surjective et $\ker\delta \simeq \mathrm{M}[t^{-1}][\tau]$ (avec l'action de $t'\cdot$, $\partial_{t'}\cdot$). Ce complex est quasi-isomorphe au complex

$$\begin{array}{ccc}
\ker\delta & & \mathrm{M}[t^{-1}][\tau] \\
\big\downarrow \partial_{t'}\cdot & \simeq & \big\downarrow \partial_{t'}\cdot \\
\ker\delta & & \mathrm{M}[t^{-1}][\tau]
\end{array}$$

lequel donne naissance à la suite exacte courte 21. La préservation de la V-filtration pour chaque degré de cohomologie (cf. Théorème 2.6.21) entraîne que pour chaque $k \in \mathbb{Z}$:

$$\pi'[{}^{\tau}V_k(\mathrm{M}'[\tau])] = V_k(\mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}}),$$

cf. les détails de la V-filtration ${}^{\tau}V_k(\mathrm{M}'[\tau])$, que nous pouvons exprimer en fonction de $V_k\mathrm{M}'$, dans la sous-section 2.6.2 et les détails de la préservation de la V-filtration dans la sous-section 2.6.3.

2.6.1. Produit externe de $\mathbb{C}$-algèbres

On présente maintenant la notion de produit externe, laquelle simplifiera significativement l'écriture des formules dans les sous-sections suivantes, notamment dans la sous-section de l'image inverse.

Notation 2.6.1 (Produit externe de $\mathbb{C}$ -algèbres). Soient A et B $\mathbb{C}$ -algèbres. Le produit tensoriel $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel sur lequel on définit une multiplication : pour chaque $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ $(a \otimes b)(a' \otimes b') \doteq aa' \otimes bb'$. Il est trivial vérifier que $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ avec ce produit est une $\mathbb{C}$ -algèbre. Ce produit est appelé le **produit externe**. Désormais on utilisera la notation $A \boxtimes B$ pour ce produit.

Théorème 2.6.2. *Soit R une $\mathbb{C}$ -algèbre et soient A et B des sous algèbres de R tels que*

1 $R = AB$,
2 $[A, B] = 0$,
3 *Il existe des $\mathbb{C}$ -bases $\{a_i | i \in \mathbb{N}\}$ et $\{b_j | j \in \mathbb{N}\}$ de A et B respectivement, tels que $\{a_i b_j | i, j \in \mathbb{N}\}$ est une $\mathbb{C}$ -base de R,*

Alors $R \simeq A \boxtimes B$.

Démonstration. Cf. [C.] Théorème 1.1 page 121. □

Définition 2.6.3. A_n désigne la sous $\mathbb{C}$ -algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X] \doteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$ engendré par les opérateurs $x_1\cdot, \ldots, x_n\cdot$ et $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}$, où $x_i \cdot f \doteq x_i f$ et $\partial_{x_i} f \doteq \frac{\partial f}{\partial_{x_i}}$, pour chaque $f \in \mathbb{C}[X]$ et chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Corollaire 2.6.4. *La multiplication induit les isomorphismes suivants :*

1 $\mathbb{C}[X] \boxtimes \mathbb{C}[Y] \simeq \mathbb{C}[X, Y]$,
2 $A_m \boxtimes A_n \simeq A_{m+n}$.

Démonstration. Cf. [C.] Corollaire 1.2 page 122. □

Notation 2.6.5 (Produit externe de modules). Soient A, B des $\mathbb{C}$ -algèbres. Supposons que M est un A-module à gauche et que N est B-module à gauche. Dans ce cas le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $M \otimes_{\mathbb{C}} N$ a une structure de $A \boxtimes B$ -module à gauche, où l'action de $a \otimes b \in A \boxtimes B$ sur $u \otimes v \in M \otimes_{\mathbb{C}} N$ est donnée par la

formule : $(a \otimes b)(u \otimes v) \doteq au \otimes bv$. Désormais on utilisera la notation $M \boxtimes N$ pour ce $A \boxtimes B$-module.

2.6.2. L'image inverse

Afin de présenter la notion de changement d'anneaux, on commence avec une construction général pour des anneaux et des modules. Soient donc R, S des anneaux et $\phi : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Si M est un R-module à gauche alors on peut utiliser ϕ pour induire en $S \otimes_R M$ une structure de S-module à gauche appelé le *changement d'anneaux de base*. Le point fondamentale est que S admet la structure de R-module à droite définie de la façon suivante :

$$s * r \doteq s\phi(r),$$

pour chaque $r \in R$ et $s \in S$.

Grâce à cette structure on peut considérer S comme un $S - R$ -bimodule et donc on peut prendre le produit tensoriel $S \otimes_R M$, lequel est un S-module à gauche.

Notation 2.6.6. X désigne $\mathbb{C}^n$. L'anneau des polynômes $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est noté $\mathbb{C}[X]$ et l'algèbre de Weyl engendré par les x's et les ∂_x's est notée A_n. De façon analogue on note $Y = \mathbb{C}^m$ et $Z = \mathbb{C}^r$, $\mathbb{C}[Y]$ et $\mathbb{C}[Z]$ les anneaux de polynômes respectifs et A_m et A_r les algèbres de Weyl respectives.

Définition 2.6.7 (Image inverse). Soit M un A_m-module, $F : X \to Y$ une application polynomial et $F^\# : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X], P \mapsto P \circ F$ son comorphisme (lequel est un homomorphisme d'algèbres). On appelle **image inverse** de M par F le $\mathbb{C}[X]$-module :

$$F^+M \doteq \mathbb{C}[X] \otimes_{\mathbb{C}[Y]} M,$$

avec la structure de A_n-module donnée par les actions :

$$\partial_{x_i}(q \otimes u) = \partial_{x_i}(q) \otimes u + \sum_{k=1}^{m} q\partial_{x_i}(F_k) \otimes \partial_{y_k} u$$

pour chaque $i = 1, \ldots, n$ où $q \otimes u \in F^+M$, $q \in \mathbb{C}[X]$, $u \in M$ et $F_1, \ldots, F_m$ sont les fonctions coordonnés de F.

Dans le cas où F est la projection canonique $\pi : X \times Y \to Y$, le comorphisme $\pi^\# : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X, Y]$ envoie $p \in \mathbb{C}[Y]$ dans lui même, mais considéré comme un élément de $\mathbb{C}[X, Y]$ et l'image inverse se simplifie considérablement.

Lemme 2.6.8. *Soit M un A_m-module et $\pi : X \times Y \to Y$ la projection canonique alors*

$$\pi^+M \doteq \mathbb{C}[X, Y] \otimes_{\mathbb{C}[Y]} M \simeq \mathbb{C}[X] \boxtimes M$$

en tant que $A_n \boxtimes A_m$-modules.

Démonstration. Un monôme de $\mathbb{C}[X,Y]$ peut être écrit sous la forme pq, où $p \in \mathbb{C}[X]$ et $q \in \mathbb{C}[Y]$. Si $u \in M$ alors $pq \otimes u = p \otimes qu$ comme éléments de $\pi^+ M$. En utilisant cette identité on peut construire un isomorphisme

$$\pi^+ M \simeq \mathbb{C}[X] \boxtimes M$$

de $\mathbb{C}[X,Y]$-modules qui envoie $q_\alpha x^\alpha \otimes u$ dans $x^\alpha \otimes q_\alpha u$, où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $q_\alpha \in \mathbb{C}[Y]$ et $u \in M$.
Vu que $\mathbb{C}[X]$ est un A_n-module et M est un A_m -module, $\mathbb{C}[X] \boxtimes M$ est un $A_n \boxtimes A_m$-module. Il reste à montrer que cette structure coïncide avec la structure de la définition 2.6.7. D'après cette définition l'action de ∂_{y_j} est donnée par :

$$\partial_{y_j}(q_\alpha x^\alpha \otimes u) = \partial_{y_j}(q_\alpha x^\alpha) \otimes u + \sum_{k=1}^{m} (\partial_{y_j}(y_k) q_\alpha x^\alpha \otimes \partial_{y_k} u).$$

Vu que $\partial_{y_j}(x^\alpha) = 0$ et $\partial_{y_j}(y_k) = \delta_{jk}$, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_{y_j}(q_\alpha x^\alpha \otimes u) &= x^\alpha \partial_{y_j}(q_\alpha) \otimes u + q_\alpha x^\alpha \otimes \partial_{y_j} u \\ &= x^\alpha \otimes \partial_{y_j}(q_\alpha u). \end{aligned}$$

Autrement dit, si on identifie $\pi^+ M$ avec $\mathbb{C}[X] \boxtimes M$, ∂_{y_j} agit seulement dans M de la façon usuelle. Considérons maintenant l'action de ∂_{x_i}. Par définition on a :

$$\partial_{x_i}(q_\alpha x^\alpha \otimes u) = \partial_{x_i}(q_\alpha x^\alpha \otimes u) + \sum_{k=1}^{m} \partial_{x_i}(y_k) q_\alpha x^\alpha \otimes \partial_{x_k} u.$$

Vu que $\partial_{x_i}(y_k) = \partial_{x_i}(q_\alpha) = 0$, pour chaque k et chaque α, on a

$$\begin{aligned} \partial_{x_i}(q_\alpha x^\alpha \otimes u) &= q_\alpha \partial_{x_i}(x^\alpha) \otimes u \\ &= \partial_{x_i}(x^\alpha) \otimes q_\alpha u. \end{aligned}$$

Donc les deux structures de $A_n \boxtimes A_m$-modules coïncident. □

Notation 2.6.9. On note $M[X] \doteq \mathbb{C}[X] \boxtimes M$, afin de simplifier les notations.

2.6.2.1. Exemple

Afin de préparer la démonstration des égalités 18 et 19, cf. respectivement les Lemmes 2.6.18 et 2.6.20, on remarque que

Lemme 2.6.10. *Le $A_1 \boxtimes \widehat{A}_1$ -module* $\mathrm{M}[\tau] \otimes_{\mathbb{C}[t,\tau]} \mathbb{C}[t,\tau]e^{-t\tau}$ *peut être identifié au* $\mathbb{C}[t]\langle \partial_t \cdot \rangle \boxtimes \mathbb{C}[\tau]\langle \partial_\tau \cdot \rangle$ *-module* $\mathrm{M}[\tau]$*, avec les actions 'tordues' de $\partial_t \cdot$, $\partial_\tau \cdot$ et les actions de t et τ définies de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} t\cdot &\doteq 1 \otimes t, \\ \partial_t \cdot &\doteq 1 \otimes \partial_t - \tau \otimes 1, \\ \tau \cdot &\doteq \tau \otimes 1, \\ \partial_\tau \cdot &\doteq \partial_\tau \otimes 1 - 1 \otimes t. \end{aligned}$$

Démonstration. Grâce au morphisme suivant :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{M}[\tau] \otimes_{\mathbb{C}[t,\tau]} \mathbb{C}[t,\tau]e^{-t\tau} & \longrightarrow & \mathrm{M}[\tau]. \\ m \otimes P(t,\tau)e^{-t\tau} & \longmapsto & P(t,\tau)m \end{array}$$

$\mathrm{M}[\tau]$ a bien une structure de $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\cdot\rangle\boxtimes\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\cdot\rangle$ -module, car $[\partial_t\cdot, t] = 1$ et $[\partial_\tau\cdot, \tau] = 1$, comme le montre, respectivement, les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} [\partial_t\cdot, t] & = & [\partial_t - \tau, t] \\ & = & [\partial_t, t] - [\tau, t] \\ & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} [\partial_\tau\cdot, \tau] & = & [\partial_\tau - t, \tau] \\ & = & [\partial_\tau, \tau] - [t, \tau] \\ & = & 1. \end{array}$$

□

D'autre part on a aussi

Lemme 2.6.11. *Le $A_1' \boxtimes \widehat{A}_1$-module $(\mathrm{M}'[\tau]) \otimes_{\mathbb{C}[t',t'^{-1},\tau]} \mathbb{C}[t',t'^{-1},\tau]e^{-\tau/t'}$ peut être identifié au $A_1' \boxtimes \widehat{A}_1$-module $\mathrm{M}'[\tau]$, avec les actions 'tordues' de $\partial_{t'}\cdot$, $\partial_\tau\cdot$ et les actions de t', t'^{-1} et τ définies de la façon suivante :*

$$\begin{array}{rcl} t'\cdot & \doteq & 1 \otimes t', \\ \partial_{t'}\cdot & \doteq & 1 \otimes \partial_{t'} + \tau \otimes t'^{-2}, \\ \tau\cdot & \doteq & \tau \otimes 1, \\ \partial_\tau\cdot & \doteq & \partial_\tau \otimes 1 - 1 \otimes t'^{-1}. \end{array}$$

Démonstration. Grâce au morphisme suivant :

$$\begin{array}{rcl} \psi : (\mathrm{M}'[\tau]) \otimes_{\mathbb{C}[t',t'^{-1},\tau]} \mathbb{C}[t',t'^{-1},\tau]e^{-\tau/t'} & \longrightarrow & \mathrm{M}'[\tau]. \\ m \otimes P(t',t'^{-1},\tau)e^{-\tau/t'} & \longmapsto & P(t',t'^{-1},\tau)m \end{array}$$

$\mathrm{M}'[\tau]$ a bien une structure de $\mathbb{C}[t',t'^{-1}]\langle\partial_{t'}\cdot\rangle \boxtimes \mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\cdot\rangle$ -module car $[\partial_{t'}\cdot, t'] = 1$, $[\partial_{t'}\cdot, t'^{-1}] = -t'^{-2}$, et $[\partial_\tau\cdot, \tau] = 1$, comme le montre, respectivement, les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} [\partial_{t'}\cdot, t'] & = & [\partial_{t'} + \tau/t'^2, t'] \\ & = & [\partial_{t'}, t'] + [\tau/t'^2, t'] \\ & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} [\partial_{t'}\cdot, t'^{-1}] & = & [\partial_{t'} + \tau/t'^2, t'^{-1}] \\ & = & [\partial_{t'}, t'^{-1}] + [\tau/t'^2, t'] \\ & = & -t'^{-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} [\partial_\tau\cdot, \tau] & = & [\partial_\tau - t'^{-1}, \tau] \\ & = & [\partial_\tau, \tau] - [t'^{-1}, \tau] \\ & = & 1. \end{array}$$

□

Lemme 2.6.12. *Si M' un A_1'-module holonome localisé en $t' = 0$, alors $\mathrm{M}'[\tau]$ est microlocalisé en $\tau = 0$, i.e. la multiplication par $\partial_\tau\cdot$ est bijective.*

Démonstration. Par la construction de $\mathrm{M}'[\tau]$ il est évident que la multiplication à gauche par $\partial_\tau\cdot$ est injective. Vu que pour chaque $i \in \mathbb{N}$ et chaque $m \in \mathrm{M}'$, $\partial_\tau \cdot \left(\sum_{j=0}^{i} \frac{i!}{(i-j)!}\tau^{i-j} \otimes (-t'^{j+1}m)\right) = \tau^i \otimes m$, la multiplication par $\partial_\tau\cdot$ est surjective, donc bijective. □

Une fois obtenue l'interprétation du $A_1' \boxtimes \widehat{A}_1$ -module $(\mathrm{M}'[\tau]) \otimes_{\mathbb{C}[t',t'^{-1},\tau]} \mathbb{C}[t',t'^{-1},\tau]e^{-\tau/t'}$ comme étant $\mathrm{M}'[\tau]$ avec les actions tordues de $\partial_{t'}\cdot$ et $\partial_\tau\cdot$, nous montrons que nous pouvons utiliser la V -filtration canonique de M' le long $t'=0$, pour induire la V -filtration canonique de ${}^\tau V_k(\mathrm{M}'[\tau])$ le long $\tau=0$, comme le montre le Lemme suivant :

Lemme 2.6.13. *Soit V_kM' la V-filtration canonique de M' le long $t'=0$ et $b'(s)\in\mathbb{C}[s]$ son polynôme de Bernstein. La V-filtration canonique, ${}^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau])$, de $\mathrm{M}'[\tau]$ le long $\tau=0$ est défini par la formule*

$$ {}^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) = \begin{cases} \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes V_{k+1}M') & si\ k\geq 0,\\ \tau^k{}^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau]) & si\ k<0. \end{cases} $$

De plus, on a, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, ${}^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) = (\partial_\tau\cdot)^k{}^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau])$.

Démonstration. On commence par montrer que $\sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes V_1\mathrm{M}')$ est en effet un $A_1'\boxtimes V_0\widehat{A}_1$-module de type fini. Il est immédiat que ${}^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau])$ est fermé pour l'action de $\partial_{t'}\cdot$ et pour l'action de t', car $t'V_kM'\subset V_{k-1}M'$. D'autre part ${}^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau])$ est fermé pour l'action de τ, car $\tau(1\otimes V_1\mathrm{M}') = (\partial_{t'}\cdot -\partial_{t'})t'^2(1\otimes V_1\mathrm{M}')$ et ${}^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau])$ est fermé pour l'action de $\tau\partial_\tau\cdot$, car $\tau\partial_\tau\cdot(1\otimes V_1\mathrm{M}') = (\partial_{t'}\cdot -\partial_{t'})t'(1\otimes V_1\mathrm{M}')$.

Étant donné que la filtration $V_k\mathrm{M}'$ est bonne, il existe un morphisme de A_1'-modules $(\varphi_1,\dots,\varphi_n) : \oplus_{i=1}^n A_1' \to \mathrm{M}'$ et $k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}$ tels que $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(V_k(\oplus_{i=1}^n A_1') \doteq \oplus_{i=1}^n V_{k+k_i}A_1') = V_k\mathrm{M}'$. La condition que la filtration $V_k\mathrm{M}'$ soit bonne entraîne que $V_1\mathrm{M}'$ est de type fini sur V_0A_1'. Soient donc $e_1,\dots,e_s$ un ensemble fini de générateurs de $V_1\mathrm{M}'$ sur V_0A_1'. On va montrer maintenant que $1\otimes e_1,\dots,1\otimes e_s$ engendrent ${}^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau])$ sous l'action de $A_1'\boxtimes V_0\widehat{A}_1$. Pour cela on remarque que pour chaque $m\in\mathrm{M}'$ et chaque $i\in\mathbb{N}$ on a l'identité suivante :

$$ [\tau\partial_\tau\cdot +\partial_{t'}\cdot t'+i](\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes m) = (\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes\partial_{t'}t'm) $$

laquelle entraîne que

$$ \mathbb{C}[\tau\partial_\tau\cdot +\partial_{t'}\cdot t'+i](\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes m) = (\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes\mathbb{C}[\partial_{t'}t']m) $$

et donc

$$ \mathbb{C}[\tau\partial_\tau\cdot +\partial_{t'}\cdot t'](\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes m) = (\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes\mathbb{C}[t'\partial_{t'}]m). $$

Grâce à cette identité on peut écrire :

$$ \begin{aligned} \sum_{j=1}^s \mathbb{C}[\tau\partial_\tau\cdot +\partial_{t'}\cdot t']\mathbb{C}[\partial_{t'}\cdot]\mathbb{C}[t']1\otimes e_j &= \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes\sum_{j=1}^s\mathbb{C}[t'\partial_{t'}]\mathbb{C}[t']e_j)\\ &= \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes V_1\mathrm{M}'). \end{aligned} $$

Vu que ${}^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau])$ est fermé sous l'action de $\mathbb{C}[\tau]$ et que pour chaque $m\in\mathrm{M}'$ les actions de $A_1'\boxtimes V_0\widehat{A}_1$ et de $\mathbb{C}[\tau]\mathbb{C}[\tau\partial_\tau\cdot +\partial_{t'}\cdot t']\mathbb{C}[\partial_{t'}\cdot]\mathbb{C}[t']$ sur $1\otimes m$, engendrent le

même espace, pour s'en convaincre on remarque que pour chaque $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}(\tau\partial_\tau\cdot)^i &= (\tau\partial_\tau\cdot + \partial_{t'}\cdot t' - \partial_{t'}t'\cdot)^i \\ &= \sum_{j=0}^{i}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}(-1)^j(\tau\partial_\tau\cdot + \partial_{t'}\cdot t)^j(\partial_{t'}t'\cdot)^{i-j},\end{aligned}$$

$1\otimes e_1, \ldots, 1\otimes e_s$ engendrent ${}^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau])$ sous l'action de $A_1' \boxtimes V_0\widehat{A}_1$ et donc la filtration est bonne.

2.6.14. Maintenant on montre que ${}^\tau U_{k+1}(\mathrm{M}'[\tau]) = \partial_\tau\cdot{}^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) + {}^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau])$, pour chaque $k \geq 0$. Cela est une conséquence de l'identité $t'^{-k}V_0\mathrm{M}' = V_k\mathrm{M}'$, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$. Pour s'en convaincre, on remarque que $\{0\} = \cap_{k\in\mathbb{Z}}V_k\mathrm{M}'$ et que nous pouvons construire la partition $(W_k(\mathrm{M}'\setminus\{0\}))_{k\in\mathbb{Z}} \doteq (V_k\mathrm{M}'\setminus V_{k-1}\mathrm{M}')_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathrm{M}'\setminus\{0\}$, laquelle vérifie les propriétés suivantes :

i) $\cup_{k\in\mathbb{Z}}W_k(\mathrm{M}'\setminus\{0\}) = \mathrm{M}'\setminus\{0\}$,
ii) pour chaque $i, j \in \mathbb{Z}$, si $i \neq j$ alors $W_i(\mathrm{M}'\setminus\{0\}) \cap W_j(\mathrm{M}'\setminus\{0\}) = \varnothing$.

Soit $m \in W_k(\mathrm{M}'\setminus\{0\})$, par construction $m \neq 0$, alors $t'^{-1}m \in \mathrm{M}'\setminus\{0\}$, car M' est un A_1'-module holonome localisé. Par la propriété $i)$ il existe un seul $i \in \mathbb{Z}$ tel que $t'^{-1}m \in W_i(\mathrm{M}'\setminus\{0\})$, alors $m \in W_{i-1}(\mathrm{M}'\setminus\{0\})$ en plus, par la propriété $ii)$ $i-1 = k$, donc pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, $t'^{-1}V_k\mathrm{M}' \subset V_{k+1}\mathrm{M}'$, ce qui entraîne que $t'^{-1}V_k\mathrm{M}' = V_{k+1}\mathrm{M}'$. Grâce à cette égalité on peut écrire :

$$\partial_\tau\cdot\sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes V_k\mathrm{M}') = \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes V_{k+1}\mathrm{M}'),$$

car $\partial_\tau\cdot(1\otimes V_kM') = (1\otimes t'^{-1}V_kM')$ et donc ${}^\tau U_{k+1}(\mathrm{M}'[\tau]) = \partial_\tau\cdot{}^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) + {}^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) = (\partial_\tau\cdot)^{k+1}U_0(\mathrm{M}'[\tau])$, pour chaque $k \geq 0$.

Il reste à montrer que ${}^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) = (\partial_\tau\cdot)^kU_0(\mathrm{M}'[\tau])$, pour chaque $k \leq 0$. Pour cela on prend la partition $(W_i(\mathrm{M}'[\tau]\setminus\{0\}))_{i\in\mathbb{Z}} \doteq {}^\tau U_i(\mathrm{M}'[\tau])\setminus{}^\tau U_{i-1}(\mathrm{M}'[\tau])$, laquelle vérifie les propriétés suivantes :

i) $\cup_{i\in\mathbb{Z}}W_i(\mathrm{M}'[\tau]\setminus\{0\}) = \mathrm{M}'[\tau]\setminus\{0\}$,
ii) pour chaque $i, j \in \mathbb{Z}$ si $i \neq j$ alors $W_i(\mathrm{M}'[\tau]\setminus\{0\}) \cap W_j(\mathrm{M}'[\tau]\setminus\{0\}) = \varnothing$.

Soit $m \in W_i(\mathrm{M}'[\tau]\setminus\{0\})$, par construction $m \neq 0$, alors $(\partial_\tau\cdot)^{-1}m \in \mathrm{M}'[\tau]\setminus\{0\}$, car $\mathrm{M}'[\tau]$ est un $\widehat{A}_1$-module holonome microlocalisé en $\tau = 0$ cf. Lemme 2.6.12. Par la propriété $i)$ il existe un seul $i \in \mathbb{Z}$ tel que $(\partial_\tau\cdot)^{-1}m \in W_i(\mathrm{M}'[\tau]\setminus\{0\})$, alors $m \in W_{i+1}(\mathrm{M}'[\tau]\setminus\{0\})$ en plus, par la propriété $ii)$ $i+1 = k$, donc pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, $(\partial_\tau\cdot)^{-1}{}^\tau U_k\mathrm{M}'[\tau] \subset {}^\tau U_{k-1}\mathrm{M}'[\tau]$, ce qui entraîne que $(\partial_\tau\cdot)^{-1}{}^\tau U_k\mathrm{M}'[\tau] = {}^\tau U_{k-1}\mathrm{M}'[\tau]$ et en particulier pour chaque $k \in \mathbb{N}$, ${}^\tau U_{-k}\mathrm{M}'[\tau] = (\partial_\tau\cdot)^{-k}{}^\tau U_0\mathrm{M}'[\tau]$.

Par construction la filtration ${}^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) = (A_1' \boxtimes V_k\widehat{A}_1)^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau])$ est croissante et compatible à l'action de $A_1' \boxtimes V_k\widehat{A}_1$, en plus elle est exhaustive car :

$$\begin{aligned}
\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} {}^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) &= A_1' \boxtimes \widehat{A}_1 \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes V_1\mathrm{M}') \\
&= A_1'\mathbb{C}[\tau]\sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes \mathrm{M}') \\
&\supset \mathbb{C}[\tau]\otimes \mathrm{M}'.
\end{aligned}$$

Afin de calculer polynôme de Bernstein, on remarque que pour chaque $k \geq 1$ on a la congruence modulo ${}^\tau U_{k-1}(\mathrm{M}'[\tau])$:

$$\begin{aligned}
\tau\partial_\tau \cdot {}^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) &= \tau\partial_\tau \cdot \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes V_{k+1}\mathrm{M}') \\
&= \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i\tau\partial_\tau\cdot(1\otimes V_{k+1}\mathrm{M}') \\
&= \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i\tau(1\otimes(-t'^{-1})V_{k+1}\mathrm{M}') \\
&= \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(\partial_{t'}\cdot -\partial_{t'})t'^2(1\otimes(-t'^{-1})V_{k+1}\mathrm{M}') \\
&\subset \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes(\partial_{t'}t')V_{k+1}\mathrm{M}') + \\
&\quad \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^{i+1}(1\otimes t'V_{k+1}\mathrm{M}') \\
&\equiv \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes(t'\partial_{t'}+1)V_{k+1}\mathrm{M}'),
\end{aligned}$$

ce qui entraîne que pour chaque $a(s) \in \mathbb{C}[s]$ on a la congruence modulo ${}^\tau U_{k-1}(\mathrm{M}'[\tau])$:

$$a(\tau\partial_\tau\cdot)^\tau U_k(\mathbb{C}[\tau]\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{M}') \equiv \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes a(t'\partial_{t'}+1)V_{k+1}\mathrm{M}')$$

en particulier si on prend $a(s) = b'(s)$, où $b'(s)$ est le polynôme de Bernstein de la filtration de $V_k\mathrm{M}'$, on a la congruence modulo ${}^\tau U_{k-1}(\mathrm{M}'[\tau])$:

$$\begin{aligned}
b'(\tau\partial_\tau\cdot +k)^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) &\equiv \sum_{i\geq 0}(\partial_{t'}\cdot)^i(1\otimes b'(t'\partial_{t'}+k+1)V_{k+1}\mathrm{M}') \\
&\equiv 0
\end{aligned}$$

laquelle entraîne que $b'(\tau\partial_\tau\cdot +k)^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) \subset {}^\tau U_{k-1}(\mathrm{M}'[\tau])$. En particulier on a $b'(\tau\partial_\tau\cdot +1)^\tau U_1(\mathrm{M}'[\tau]) \subset {}^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau])$, alors $(\partial_\tau\cdot)^{-1}b'(\tau\partial_\tau\cdot +1)^\tau U_1(\mathrm{M}'[\tau]) \subset (\partial_\tau\cdot)^{-1}{}^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau])$, i.e. $b'(\tau\partial_\tau\cdot)(\partial_\tau\cdot)^{-1}{}^\tau U_1(\mathrm{M}'[\tau]) \subset (\partial_\tau\cdot)^{-1}{}^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau])$, donc

$b'(\tau\partial_\tau\cdot)^\tau U_0(\mathrm{M}'[\tau]) \subset {}^\tau U_{-1}(\mathrm{M}'[\tau])$. En appliquant récursivement le même argument on a pour chaque $k \in \mathbb{Z}^-$:

$$b'(\tau\partial_\tau \cdot +k)^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) \subset {}^\tau U_{k-1}(\mathrm{M}'[\tau]).$$

On sait donc que le polynôme de Bernstein, $\beta(s) \in \mathbb{C}[s]$, divise $b'(s) \in \mathbb{C}[s]$. Vu que pour chaque $k \geq 1$, $\beta(\tau\partial_\tau \cdot +k)[1 \otimes V_{k+1}\mathrm{M}'] \subset [1 \otimes V_k\mathrm{M}']$,

$$\beta(t'\partial_{t'} + k + 1)V_{k+1}\mathrm{M}' \subset V_k\mathrm{M}',$$

alors pour chaque $l \geq 0$, $t'^l\beta(t'\partial_{t'} + k + 1)V_{k+1}\mathrm{M}' \subset t'^lV_k\mathrm{M}'$, autrement dit, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ $\beta(t'\partial_{t'} + k - l + 1)V_{k-l+1}\mathrm{M}' \subset V_{k-l}\mathrm{M}'$, donc, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, :

$$\beta(t'\partial_{t'} + k + 1)V_{k+1}\mathrm{M}' \subset V_k\mathrm{M}'.$$

Étant donné que $b'(s) \in \mathbb{C}[s]$ est le polynôme unitaire de plus petit degré qui vérifie la condition précédente, $\beta(s) = b'(s)$. Vu que les racines du polynôme $\beta(s)$ sont contenues dans Σ et que $\beta(s)$ est le polynôme unitaire de plus petit degré qui vérifie la condition $\beta(\tau\partial_\tau \cdot +k)^\tau U_k(\mathrm{M}'[\tau]) \subset {}^\tau U_{k-1}(\mathrm{M}'[\tau])$, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, $\beta(s)$ est le polynôme de Bernstein de cette filtration et cette filtration est la V-filtration canonique. □

Soit ${}^\tau V_k(\mathrm{M}'[\tau])$ la V-filtration canonique de $\mathrm{M}'[\tau]$, le long $\tau = 0$. Alors le quotient ${}^\tau V_1(\mathrm{M}'[\tau])/{}^\tau V_0(\mathrm{M}'[\tau])$ est un $\mathbb{C}[t']\langle\partial_{t'}\rangle$-module muni d'un endomorphisme induit par $\partial_\tau\tau$. D'autre part, $F' \doteq V_{-1}\mathrm{M}'/V_{-2}\mathrm{M}'$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un endomorphisme induit par l'action de $t'\partial_{t'}$. Par suite, $F' \boxtimes A'_1/A'_1.t'$ est un $\mathbb{C}[t']\langle\partial_{t'}\rangle$-module muni d'un endomorphisme induit par l'action de $t'\partial_{t'}$ sur F'.

Lemme 2.6.15. *Les deux $\mathbb{C}[t']\langle\partial_{t'}\rangle$-modules ci-dessus, munis de leurs endomorphismes respectifs, sont isomorphes.*

Démonstration. Voir le point (ii)(6) de la démonstration de la proposition 4.1 dans [**24**]. □

2.6.3. L'image directe

La définition d'image directe est plus facile de donner pour les $\mathcal{D}$-modules à droite, donc on commence par ceux-ci.

Définition 2.6.16 (Image directe d'un $\mathcal{D}$-module). Soit $f : X \to Y$ une fonction holomorphe. On appelle image directe le foncteur $f_+ : \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)^d \to \mathrm{C}^+(\mathcal{D}_Y)^d$ définit par l'image directe de la résolution de Godement (on prend le complexe simple associé au complexe double, cf. [**3**] définition II.2 page 98) :

$$f_+\mathcal{M} \doteq f_*\mathrm{God}^\bullet(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathrm{Sp}^\bullet_{X\to Y}(\mathcal{D}_X)),$$

où $\mathrm{Sp}^\bullet_{X\to Y}(\mathcal{D}_X)$ est le complexe $\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}$, $\mathrm{Sp}^\bullet(\mathcal{D}_X)$ est le complexe de Spencer de $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_{X\to Y} \doteq \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$.

Ce complexe est une réalisation de $\mathrm{R}f_*(\mathcal{M} \otimes^L_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y})$.

Grâce à la définition 2.2.4 l'image directe d'un $\mathcal{D}$-module à gauche $\mathcal{M}^g$ est définie de la façon suivante :

$$f_+(\mathcal{M}^g) \doteq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, f_+(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^g)).$$

2.6.3.1. Complexe de de Rham relatif

Dans le cas où f est la projection $\pi_X : X \times Y \to X$ et π_Y note la projection $X \times Y \to Y$, $\pi_Y^{-1}\mathcal{D}_Y$ est un sous anneau de $\mathcal{D}_{X\times Y}$, alors tout $\mathcal{D}_{X\times Y}$-module $\mathcal{M}$ a une structure sous-jacente de $\pi_Y^{-1}\mathcal{D}_Y$-module. Celle-ci donne le complexe de de Rham relatif :

$$\pi_Y^{-1}\Omega_Y^\bullet(\mathcal{M}),$$

lequel sera noté $\mathrm{DR}_{X\times Y|X}(\mathcal{M})$ et appelé le complexe de de Rham relatif le long Y. Le $\mathcal{D}_{X\times Y}$-module $\mathcal{M}$ a aussi une structure sous-jacente de $\pi_X^{-1}\mathcal{D}_X$-module. Vu que $\pi_X^{-1}\mathcal{D}_X$ et $\pi_Y^{-1}\mathcal{D}_Y$ commutent dans $\mathcal{D}_{X\times Y}$, $\mathrm{DR}_{X\times Y|X}(\mathcal{M})$ est un complexe de $\pi_X^{-1}\mathcal{D}_X$-modules. Le passage aux catégories dérivées entraîne que :

$$\mathcal{M} \to \mathrm{R}\pi_{X*}(\mathrm{DR}_{X\times Y|X}(\mathcal{M}))$$

est un foncteur de $\mathrm{C}^b(\mathcal{D}_{X\times Y})$ dans $\mathrm{C}^b(\mathcal{D}_X)$ et il n'est autre que le foncteur π_{X+} à décalage près, comme le montre la Proposition suivante :

Proposition 2.6.17. *On a* $\pi_{X+}(\mathcal{M}) = \mathrm{R}\pi_{X*}(\mathrm{DR}_{X\times Y|X}(\mathcal{M}))[\dim Y]$.

Démonstration. Cf. [**1**] Proposition 2.4.8 page 71. □

2.6.3.2. Exemple

Grâce à cette Proposition on peut maintenant montrer les égalités 18, cf. Lemme 2.6.18, et 19, cf. Lemme 2.6.20.

Lemme 2.6.18. *Soit* M *un* A_1*-module et considérons le morphisme :*

$$\begin{array}{rcl} \partial_t\cdot = \partial_t - \tau \colon \mathrm{M}[\tau] & \longrightarrow & \mathrm{M}[\tau]. \\ \displaystyle\sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^n \tau^i \otimes \partial_t m_i - \sum_{i=0}^n \tau^{i+1} \otimes m_i \end{array}$$

Ce morphisme vérifie les propriétés suivantes :

1) *est un morphisme de* $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\cdot\rangle$*-modules,*
2) *est injective,*
3) coker $(\partial_t - \tau) = \mathrm{M}_{\mathcal{F}}$ *(et donc* $\partial_t = \tau$ *en* $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}$*).*

Démonstration. 1) Il est immédiat que τ commute avec $(\partial_t - \tau)$, car les variables sont différentes. L'égalité :

$$\begin{aligned}(\partial_t - \tau)\partial_\tau\cdot &= (\partial_t - \tau)(\partial_\tau - t)\\ &= \partial_t\partial_\tau - \partial_t t - \tau\partial_\tau + \tau t\\ &= \partial_\tau\partial_t - t\partial_t - 1 - \partial_\tau\tau + 1 + t\tau\\ &= \partial_\tau\partial_t - t\partial_t - \partial_\tau\tau + t\tau\\ &= (\partial_\tau - t)(\partial_t - \tau)\\ &= \partial_\tau \cdot (\partial_t - \tau),\end{aligned}$$

entraîne que $(\partial_t - \tau)$ est un morphisme de $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\cdot\rangle$-modules. En particulier coker $(\partial_t - \tau)$ est un $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\cdot\rangle$-module.
2) Soit $p = \sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i \in \mathrm{M}[\tau]$ tel que $(\partial_t - \tau)p = 0$, alors :

$$0 = (\partial_t - \tau)p = 1 \otimes \partial_t m_0 + \sum_{i=1}^n \tau^i \otimes (\partial_t m_i - m_{i-1}) - \tau^{n+1} \otimes m_n.$$

Par le Lemme 2.6.19 on a :

$$0 = \partial_t m_0 = \partial_t m_1 - m_0 = \cdots = \partial_t m_n - m_{n-1} = -m_n$$

alors $0 = m_0 = \cdots = m_n$ et donc $\partial_t - \tau$ est injective.
3) On va montrer que l'on a l'isomorphisme de $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\rangle$-modules suivant (où $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}$ désigne le transformé de Fourier de M) :

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathrm{M}_{\mathcal{F}} &\longrightarrow \mathrm{M}[\tau]/\mathrm{Im}\,(\partial_t - \tau).\\ m &\longmapsto [1 \otimes m]\end{aligned}$$

Cette application a du sens car $\mathrm{M}_{\mathcal{F}} = \mathrm{M}$ en tant que groupes abéliens, en plus il est immédiat que φ est un morphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Par construction on a $0 = [(\partial_t - \tau)(1 \otimes m)] = [1 \otimes \partial_t m] - [\tau \otimes m]$, donc $\varphi(\tau m) = \varphi(\partial_t m) = [1 \otimes \partial_t m] = \tau[1 \otimes m] = \tau\varphi(m)$. D'autre part $\varphi(\partial_\tau m) = \varphi(-tm) = -[1 \otimes tm] = \partial_\tau.[1 \otimes m] = \partial_\tau.\varphi(m)$, donc φ est un morphisme de $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\cdot\rangle$-modules.
• Surjectivité : Soit $[\sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i] \in \mathrm{M}[\tau]/\mathrm{Im}\,(\partial_t - \tau)$. Vu que $(\partial_t - \tau)\,(-\tau^{n-1} \otimes m_n) = \tau^n \otimes m_n - \tau^{n-1} \otimes \partial_t m_n$, $n > 0$, alors $[\sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i] = [\sum_{i=0}^{n-1} \tau^i \otimes m_i']$. Par récurrence on montre qu'il existe $m \in \mathrm{M}$ tel que $[\sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i] = [1 \otimes m]$ et donc φ est surjective.
• Injectivité : Soit $m \in \mathrm{M}$ tel que $[1 \otimes m] = 0$, alors il existe $p = \sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i \in \mathbb{C}[\tau] \otimes \mathrm{M}$ tel que $(\partial_t - \tau)p = 1 \otimes m$, alors :

$$0 = (\partial_t - \tau)p - 1 \otimes m = 1 \otimes (\partial_t m_0 - m) + \sum_{i=1}^n \tau^i \otimes (\partial_t m_i - m_{i-1}) - \tau^{n+1} \otimes m_n.$$

Par le Lemme 2.6.19 on a :

$$0 = \partial_t m_0 - m = \partial_t m_1 - m_0 = \cdots = \partial_t m_n - m_{n-1} = -m_n,$$

alors $0 = m = m_0 = \cdots = m_n$, ce qui entraîne que $p = 0$ et donc φ est injective. $\square$

Lemme 2.6.19. *Soit* M *un* A_1*-module et* $p = \sum_{i=0}^{n} \tau^i \otimes m_i \in \mathrm{M}[\tau]$*, alors* $p = 0$ *si et seulement si* $m_i = 0$*,* $i = 0, \ldots, n$*.*

Démonstration. $\Rightarrow$) On commence par remarquer que :

$$p \in \langle 1, \ldots, \tau^n \rangle_{\mathbb{C}[\tau]} \otimes_{\mathbb{C}} \langle m_0, \ldots, m_n \rangle_{\mathrm{M}} \subset \mathrm{M}[\tau]$$

et que $\{1, \ldots, \tau^n\}$ est une base de $\langle 1, \ldots, \tau^n \rangle$. Vu que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\langle m_0, \ldots, m_n \rangle$ est finiment engendré et donc de dimension finie, il existe une base $\{e_0, \ldots, e_k\}$ de $\langle m_0, \ldots, m_n \rangle$. Dans cette base p admet l'écriture :

$$p = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \alpha_{ij} \tau^i \otimes e_j.$$

Vu que $p = 0$, alors $\alpha_{ij} = 0$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, k$ et donc $m_i = 0$, $i = 0, \ldots, n$.
$\Leftarrow$) est immédiate. □

Lemme 2.6.20. *Soit* M' *un* A_1'*-module et considérons le morphisme :*

$$\begin{array}{rcl} \partial_{t'} \cdot = \partial_{t'} + \tau/t'^2 \colon \mathrm{M}'[\tau] & \longrightarrow & \mathrm{M}'[\tau]. \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \tau^i \otimes m_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \tau^i \otimes \partial_{t'} m_i + \sum_{i=0}^{n} \tau^{i+1} \otimes t'^{-2} m_i \end{array}$$

Ce morphisme vérifie les propriétés suivantes :

1) *est un morphisme de* $\mathbb{C}[\tau]\langle \partial_\tau \cdot \rangle$*-modules,*
2) *est injective,*
3) coker $(\partial_{t'} + \tau/t'^2) = (\mathrm{M}')'_{\mathcal{F}} = \mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}}$.

Démonstration. 1) Il est immédiat que $\tau.$ commute avec $(\partial_{t'} + \tau/t'^2)$, car les variables sont différentes. L'égalité :

$$\begin{array}{rcl} (\partial_{t'} + \tau/t'^2)\partial_\tau \cdot & = & (\partial_{t'} + \tau/t'^2)(\partial_\tau - t'^{-1}) \\ & = & \partial_{t'}\partial_\tau - \partial_{t'} t'^{-1} + \tau/t'^2 \partial_\tau - \tau/t'^3 \\ & = & \partial_\tau \partial_{t'} - t'^{-1}\partial_{t'} + 1/t'^2 + \partial_\tau \tau/t'^2 - 1/t'^2 - \tau/t'^3 \\ & = & \partial_\tau \partial_{t'} - t'^{-1}\partial_{t'} + \partial_\tau \tau/t'^2 - \tau/t'^3 \\ & = & (\partial_\tau - t'^{-1})(\partial_{t'} + \tau/t'^2) \\ & = & \partial_\tau \cdot (\partial_{t'} + \tau/t'^2), \end{array}$$

entraîne que $(\partial_{t'} + \tau/t'^2)$ est un morphisme de $\mathbb{C}[\tau]\langle \partial_\tau \cdot \rangle$-modules. En particulier coker $(\partial_{t'} + \tau/t'^2)$ est un $\mathbb{C}[\tau]\langle \partial_\tau \cdot \rangle$-module.
2) Soit $p = \sum_{i=0}^{n} \tau^i \otimes m_i \in \mathrm{M}'[\tau]$ tel que $(\partial_{t'} + \tau/t'^2)p = 0$, alors :

$$0 = (\partial_{t'} + \tau/t'^2)p = 1 \otimes \partial_{t'} m_0 + \sum_{i=1}^{n} \tau^i \otimes (\partial_{t'} m_i + t'^{-2} m_{i-1}) + \tau^{n+1} \otimes t'^{-2} m_n.$$

Par le Lemme 2.6.19 on a :

$$0 = \partial_{t'} m_0 = \partial_{t'} m_1 + t'^{-2} m_0 = \cdots = \partial_{t'} m_n + t'^{-2} m_{n-1} = t'^{-2} m_n$$

alors $0 = m_0 = \cdots = m_n$ et donc $\partial_{t'} + \tau/t'^2$ est injective.
3) On commence par remarquer que chaque élément de coker $(\partial_{t'} + \tau/t'^2)$ admet un représentant de la forme $[1 \otimes m]$, où $m \in \mathrm{M}'$. Soit $[\sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i] \in \mathrm{M}'[\tau]/\mathrm{Im}\ (\partial_{t'} + \tau/t'^2)$. Vu que $(\partial_{t'} + \tau/t'^2)\ (\tau^{n-1} \otimes t'^2 m_n) = \tau^n \otimes m_n + \tau^{n-1} \otimes \partial_{t'} t'^2 m_n$, $n > 0$, alors il existe $m'_0, \ldots, m'_{n-1} \in \mathrm{M}'$ tels que $[\sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i] = [\sum_{i=0}^{n-1} \tau^i \otimes m'_i]$. Par récurrence on montre qu'il existe $m \in \mathrm{M}'$ tel que $[\sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i] = [1 \otimes m]$.
En suite on montre que l'on a l'isomorphisme de $\widehat{A}_1$-modules suivant :

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon (\mathrm{M}')'_{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \text{coker } \partial_{t'} \cdot . \\ m & \longmapsto & [1 \otimes m] \end{array}$$

Cette application a du sens car $(\mathrm{M}')'_{\mathcal{F}} = (\mathrm{M}')' = \mathrm{M}[t^{-1}]$ en tant que groupes abéliens, en plus il est immédiat que φ est un morphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Par construction on a $0 = [t'^2 \partial_{t'} \cdot (1 \otimes m)] = [1 \otimes t'^2 \partial_{t'} m] - \tau[1 \otimes m]$, donc $\varphi(\tau m \doteq \partial_t m \doteq t'^2 \partial_{t'} m) = [1 \otimes t'^2 \partial_{t'} m] = \tau[1 \otimes m] = \tau\varphi(m)$. D'autre part $\varphi(\partial_\tau m \doteq -tm \doteq -t'^{-1} m) = -[1 \otimes t'^{-1} m] = \partial_\tau.[1 \otimes m] = \partial_\tau.\varphi(m)$, donc φ est un morphisme de $\widehat{A}_1$-modules.
• Surjectivité : Soit $[\sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i] \in \text{coker } \partial_{t'}\cdot$. Vu que $\partial_{t'} \cdot (\tau^{n-1} \otimes t'^2 m_n) = \tau^n \otimes m_n + \tau^{n-1} \otimes \partial_{t'} t'^2 m_n$, $n > 0$, alors $[\sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i] = [\sum_{i=0}^{n-1} \tau^i \otimes m'_i]$. Par récurrence on montre qu'il existe $m \in \mathrm{M}'$ tel que $[\sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i] = [1 \otimes m]$ et donc φ est surjective.
• Injectivité : Soit $m \in \mathrm{M}'$ tel que $[1 \otimes m] = 0$, alors il existe $p = \sum_{i=0}^n \tau^i \otimes m_i \in \mathrm{M}'[\tau]$ tel que $\partial_{t'} \cdot p = 1 \otimes m$, alors :

$$0 = \partial_{t'} \cdot p - 1 \otimes m = 1 \otimes (\partial_{t'} m_0 - m) + \sum_{i=1}^n \tau^i \otimes (\partial_{t'} m_i + t'^{-2} m_{i-1}) + \tau^{n+1} \otimes t'^{-2} m_n.$$

Par la Lemme 2.6.19 on a :

$$0 = \partial_{t'} m_0 - m = \partial_{t'} m_1 + t'^{-2} m_0 = \cdots = \partial_{t'} m_n + t'^{-2} m_{n-1} = t'^{-2} m_n,$$

alors $0 = m = m_0 = \cdots = m_n$, ce qui entraîne que $p = 0$ et donc φ est injective. □

2.6.3.3. Préservation de la V-filtration

Le but de cette section est d'exprimer le rapport entre le couple d'espaces vectoriels (E', F') de M' en $t' = 0$ et le couple $(\widehat{E}, \widehat{F})$ de $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}$ en $\tau = 0$. Cela va être possible grâce à la préservation de la V-filtration, pour chaque degré de cohomologie, par l'image directe d'une fonction propre, cf. Théorème 2.6.21.

Théorème 2.6.21. *Soit $f : X \to X'$ une fonction holomorphe et soit $t \in \mathbb{C}$ une nouvelle variable. Posons $F = f \times \mathbb{1}_{\mathbb{C}} : X \times \mathbb{C} \to X' \times \mathbb{C}$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}}$ -module munit de la V-filtration canonique $V_\bullet \mathcal{M}$ (relative à l'hypersurface $Y = X \times \{0\}$. $V_\bullet \mathcal{M}$ définit canoniquement et fonctoriellement une V -filtration $\mathrm{U}_\bullet \mathcal{H}^i(F_+ \mathcal{M})$, en plus si F est propre dans le support de $\mathcal{M}$ $\mathrm{U}_\bullet \mathcal{H}^i(F_+ \mathcal{M})$ est la V -filtration.*

Démonstration. Cf. [**15**] Théorème 5.5.2 page 70 □

Lemme 2.6.22. *Soit* M *un* $\mathbb{A}^1$*-module holonome régulier,* M' *le* $\mathbb{A}'^1$*-module holonome déterminé par le changement de coordonnées* $t' = t^{-1}$*,* $\mathcal{M}$ *le* $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$*-module holonome obtenu par le recollement du* $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$*-module déterminé par* M *et du* $\mathcal{D}_{\mathbb{A}'^1}$*-module déterminé par* M' *et* $\mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}}$ *le transformé de Fourier de* $\mathrm{M}[t^{-1}]$*. Si* (E', F') *désigne le couple d'espaces vectoriels déterminé par* M' *le long* $t' = 0$ *et* $(\widehat{E}, \widehat{F})$ *le couple d'espaces vectoriels déterminé par* $\mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}}$ *le long* $\tau = 0$*, alors* $\widehat{F} = F'$ *et* $\mathrm{T}_{\widehat{F}} = \mathrm{T}_{F'}$*.*

Démonstration. Si on prend $X' = \{0\}$ dans le Théorème précédent $\{0\} \times \widehat{\mathbb{A}}^1$ peut être identifié à $\widehat{\mathbb{A}}^1$ et F peut être identifié à $\pi_{\widehat{\mathbb{A}}^1} : \mathbb{P}^1 \times \widehat{\mathbb{A}}^1 \to \widehat{\mathbb{A}}^1$. Vu que $\pi_{\widehat{\mathbb{A}}^1}$ est propre, le Théorème précédent entraîne que $\pi'({}^{\tau}V_k(\mathrm{M}'[\tau])) = V_k(\mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}})$, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, (cf. les notations introduites dans la page 61). Grâce à cette égalité on a :

$$\pi'({}^{\tau}V_k(\mathrm{M}'[\tau])) = [1 \otimes V_{K+1}\mathrm{M}'] = V_k(\mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}}),$$

pour chaque $k \in \mathbb{N}$. En particulier on a :

$$V_1(\mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}}) = [1 \otimes V_2\mathrm{M}'] \quad et \quad V_0(\mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}}) = [1 \otimes V_1\mathrm{M}'].$$

Grâce au Lemme 2.5.14 et à la Remarque 2.5.15 on a $\widehat{F} = V_1(\mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}})/V_0(\mathrm{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}})$ alors $\widehat{F} = F'$ et donc $T_{\widehat{F}} = T_{F'}$. □

2.7. Extension minimale

2.7.1. Extension minimale d'un $\mathcal{D}_X$-module

Définition 2.7.1. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module holonome sur une surface de Riemann X et Σ un ensemble fini de points de X. On dit qu'un $\mathcal{D}$-module holonome $\mathcal{N}$ sur X est une **extension minimale** de $\mathcal{M}$ le longue de Σ et on la note $\mathcal{M}_{min}$ si :

i) $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}[*\Sigma] \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}[*\Sigma] \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{N}$,

ii) pour tout $\mathcal{L}$ sous $\mathcal{D}$-module holonome de $\mathcal{N}$, tel que supp $(\mathcal{L}) \subset \Sigma$, on a $\mathcal{L} = 0$,

iii) pour tout $\mathcal{D}$-module holonome $\mathcal{L}$ quotient de $\mathcal{N}$, tel que supp $(\mathcal{L}) \subset \Sigma$, on a $\mathcal{L} = 0$.

Remarque 2.7.2. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module holonome sur une surface de Riemann X et Σ un ensemble fini de points de X, la condition i de la Définition 2.7.1 entraîne que $\mathcal{M}_{min}[*\Sigma] = \mathcal{M}[*\Sigma]$.

Théorème 2.7.3. *Soit* $\mathcal{M}$ *est un* $\mathcal{D}$*-module holonome sur une surface de Riemann* X *et* Σ *un sous ensemble fini de* X*. Si l'extension minimale,* $\mathcal{M}_{min}$*, le long de* Σ *existe, est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Soient $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, deux extensions minimales de $\mathcal{M}$ le long de X. On peut leur associer les suites exactes :

$$0 \longrightarrow \ker \varphi_i \longrightarrow \mathcal{N}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{N}_i[*\Sigma] \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi_i \longrightarrow 0, \qquad i = 1, 2.$$

Étant donné que $\mathcal{N}_i|_{\mathrm{X}\setminus\Sigma} = \mathcal{N}_i[*\Sigma]|_{\mathrm{X}\setminus\Sigma}$, $i = 1, 2$, on a $\operatorname{supp}(\ker\varphi_i) \subset \Sigma$. Vu que $\ker\varphi_i = 0$, alors φ_1, φ_2 sont des monomorphismes. On peut supposer, à isomorphisme près, que $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{M}[*\Sigma] = \mathcal{N}_i[*\Sigma]$, $i = 1, 2$. Cela entraîne que l'on peut construire les suites exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 \longrightarrow \mathcal{N}_i \longrightarrow \mathcal{N}_i/\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 \longrightarrow 0.$$

Étant donné que $\mathcal{N}_i|_{\mathrm{X}\setminus\Sigma} = \mathcal{M}|_{\mathrm{X}\setminus\Sigma}$ on a $\operatorname{supp}(\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2) \subset \Sigma$ et alors $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_i$, $i = 1, 2$, car $\mathcal{N}_i$ est extension minimale, donc $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$. □

Corollaire 2.7.4. *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module holonome sur une surface de Riemann X et Σ un sous ensemble fini de X, alors les $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}[*\Sigma]$ ont la même extension minimal le long Σ, i.e. : $\mathcal{M}_{min} = \mathcal{M}[*\Sigma]_{min}$.*

Démonstration. Soient $\mathcal{M}_{min}$, $\mathcal{M}[*\Sigma]_{min}$ les extensions minimales de $\mathcal{M}$, respectivement $\mathcal{M}[*\Sigma]$ le long de Σ. $\mathcal{M}[*\Sigma]_{min}$ vérifie naturellement les conditions ii, iii de la Définition 2.7.1, en plus on a l'isomorphisme :

$$(\mathcal{M}[*\Sigma]_{min})[*\Sigma] = (\mathcal{M}[*\Sigma])[*\Sigma] = \mathcal{M}[*\Sigma],$$

alors $\mathcal{M}[*\Sigma]_{min}$ est aussi une extension minimale de $\mathcal{M}$ le long de Σ donc $\mathcal{M}_{min} = \mathcal{M}[*\Sigma]_{min}$. □

Théorème 2.7.5. *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{D}$-modules holonomes sur une surface de Riemann X et Σ un sous-ensemble de points de X. Si $\mathcal{N}$ est un sous $\mathcal{D}$-module de $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{N}_{min}$ est un sous $\mathcal{D}$-module de $\mathcal{M}_{min}$.*

Démonstration. D'après la démonstration du Théorème 2.7.3 on peut supposer, à isomorphisme près, que $\mathcal{N}_{min} \subset \mathcal{N}[*\Sigma]$ et $\mathcal{M}_{min} \subset \mathcal{M}[*\Sigma]$. On peut supposer que $\mathcal{N}[*\Sigma] \subset \mathcal{M}[*\Sigma]$. Prenons le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}_{min} \cap \mathcal{N}[*\Sigma]$. On a bien que $(\mathcal{M}_{min} \cap \mathcal{N}[*\Sigma])\,[*\Sigma] = \mathcal{N}[*\Sigma]$. Vu que $\mathcal{M}_{min} \cap \mathcal{N}[*\Sigma] \subset \mathcal{M}_{min}$, les conditions ii et iii de la Définition 2.7.1 sont aussi satisfaites, alors $\mathcal{M}_{min} \cap \mathcal{N}[*\Sigma] = \mathcal{N}_{min}$, donc $\mathcal{N}_{min} \subset \mathcal{M}_{min}$. □

Théorème 2.7.6. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module holonome sur une surface de Riemann compacte X et Σ un sous-ensemble fini de points de X, alors l'extension minimale de $\mathcal{M}$ le long Σ existe et est donnée par l'expression :*

$$\mathcal{M}_{min} = \left(\left(\mathcal{M}/\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{M})\right)^* \Big/ \mathrm{H}_{[\Sigma]}\left(\left(\mathcal{M}/\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{M})\right)^*\right)\right)^*.$$

Démonstration. i) Dans la démonstration du Théorème 2.7.3 on a vu qu'il existe un plongement $i : \mathcal{M}_{min} \hookrightarrow \mathcal{M}[*\Sigma]$, lequel nous permet construire la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_{min} \xrightarrow{i} \mathcal{M}[*\Sigma] \longrightarrow \operatorname{coker} i \longrightarrow 0.$$

Étant donné que $\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{M})\,|_{X\setminus\Sigma} = 0$ on a $\mathcal{M}|_{X\setminus\Sigma} = \mathcal{M}_{min}|_{X\setminus\Sigma}$. Cela entraîne que $\operatorname{supp}(\operatorname{coker} i) \subset \Sigma$ et que pour chaque $x \in \Sigma$, $(\operatorname{coker} i)_x$ est de torsion sur $\mathcal{O}_x$. Comme $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}[*\Sigma]$ est plat on a $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}[*\Sigma] \otimes \mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}[*\Sigma] \otimes \mathcal{M}_{min}$.

ii) On commence par remarquer que la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_{[\Sigma]}\left(\left(\mathcal{M}/_{\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{M})}\right)^*\right) \longrightarrow \left(\mathcal{M}/_{\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{M})}\right)^* \longrightarrow (\mathcal{M}_{min})^* \longrightarrow 0$$

entraîne, par dualité, que $\mathcal{M}_{min} \hookrightarrow \mathcal{M}/\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{M})$. Grâce à cette inclusion on montre que $\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{M}_{min}) = 0$, car le foncteur $\mathrm{H}_{[\Sigma]}(.)$ est exact à gauche et $\mathrm{H}_{[\Sigma]}\left(\mathcal{M}/\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{M})\right) = 0$.

Soit $\mathcal{L}$ un sous $\mathcal{D}$-module holonome de $\mathcal{M}_{min}$ tel que $\mathrm{supp}\,(\mathcal{L}) \subset \Sigma$. Pour chaque point $x \in \Sigma$ on peut trouver un ouvert U de X tel que $x \in U$ et $U \cap \Sigma = \{x\}$ puisque X est compact. Étant donné que $\mathrm{supp}\,(\mathcal{L}) \subset \Sigma$ on a $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{D}|_U/(x^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Le plongement $\mathcal{L}|_U \hookrightarrow \mathcal{M}_{min}|_U$ entraîne que $\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{L}|_U) = 0$, car le foncteur $\mathrm{H}_{[\Sigma]}(.)$ est exact à gauche et $\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{M}_{min}) = 0$, donc $\mathcal{L}|_U = 0$ et alors $\mathcal{L} = 0$.

iii) Soit $\mathcal{L}$ un quotient de $\mathcal{M}_{min}$ tel que $\mathrm{supp}\,(\mathcal{L}) \subset \Sigma$. Prenons pour chaque point $x \in \Sigma$ un ouvert U construit de la même façon qu'en ii). Par le même argument on a $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{D}|_U/(x^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Le quotient $\mathcal{M}_{min}|_U \twoheadrightarrow \mathcal{L}|_U$ entraîne, par dualité, le plongement $\mathcal{L}^*|_U \hookrightarrow (\mathcal{M}_{min})^*|_U$. Étant donné que le foncteur $\mathrm{H}_{[\Sigma]}(.)$ est exact à gauche on a $\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{L}^*|_U) = 0$, car $\mathrm{H}_{[\Sigma]}\left((\mathcal{M}_{min})^*\right) = 0$. Comme $\mathcal{L}|_U$ est auto dual on a $\mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{L}|_U) = 0$, donc $\mathcal{L}|_U = 0$ et alors $\mathcal{L} = 0$. □

Remarque 2.7.7. Dans ce mémoire nous sommes intéressés en calculer l'extension minimale d'un $\mathcal{D}$-module holonome sur une surface de Riemann X le long Σ, quand Σ est l'ensemble des points singuliers. Dans ce cas là, il existe une notion équivalente de support qui a du sens au niveau des germes :

Lemme 2.7.8. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module holonome sur une surface de Riemann X et Σ l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{M}$, alors* $\mathrm{supp}\,\mathcal{M} \subset \Sigma$ *si et seulement si* $\mathcal{M} = \mathrm{H}_{[\Sigma]}(\mathcal{M})$.

Démonstration. $\Rightarrow$) Si $\mathrm{supp}\,\mathcal{M} \subset \Sigma$ alors $\mathcal{M}|_\Sigma = 0$ et donc $\mathcal{M} \simeq \oplus_{x\in\Sigma}\mathcal{M}_x$, où $\mathcal{M}_x$ est le faisceau gratte-ciel qui a le germe $\mathcal{M}_x$ en x et qui est égale à 0 en $X \setminus \{x\}$. Vu que Σ est fini $\Sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$, ce qui entraîne qu'on peut écrire, pour chaque $x_i \in \Sigma$, la suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}_{x_i} \longrightarrow \mathcal{M}_{x_i}[*\{x_i\}] \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0.$$

Vu que $\mathcal{M}_{x_i} \simeq \mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle/\mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle\cdot P$, $P \in \mathbb{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle$. Étant donné que $\mathcal{M}_{x_i}|_{X\setminus\{x_i\}} = 0$, $\deg_{\partial_x} P = 0$, ce qui entraîne $P = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{M}_{x_i}[*\{x_i\}] = 0$ et donc $\mathcal{M}_{x_i} \simeq \mathcal{K} = \mathrm{H}_{[x_i]}(\mathcal{M}_{x_i})$.

$\Leftarrow$) Évident. □

2.7.2. Extension minimale pour les germes formels et analytiques

Vu que nous sommes intéressés à prendre l'extension minimale dans le cas où Σ est l'ensemble des points singuliers d'un $\mathcal{D}$-module holonome $\mathcal{M}$ sur une surface de Riemann X, le Lemme 2.7.8 permet de donner une définition alternative d'extension minimale, qui fait aussi du sens au niveau des germes :

Définition 2.7.9. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_x$-module holonome. On dit que $\mathcal{N}$ est une **extension minimale** de $\mathcal{M}$ et on la note $\mathcal{M}_{min}$ si :

i) $\mathcal{O}_x[x^{-1}] \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{M} = \mathcal{O}_x[x^{-1}] \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{N}$,

ii) pour tout $\mathcal{L}$ sous $\mathcal{D}_x$-module holonome de $\mathcal{N}$, tel que $\mathrm{H}_{[0]}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$, on a $\mathcal{L} = 0$,

iii) pour tout $\mathcal{D}_x$-module holonome $\mathcal{L}$ quotient de $\mathcal{N}$, tel que $\mathrm{H}_{[0]}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$, on a $\mathcal{L} = 0$.

Définition 2.7.10. Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{D}}_x$-module holonome. On dit que $\mathcal{N}$ est une **extension minimale** de $\mathcal{M}$ et on la note $\mathcal{M}_{min}$ si :

i) $\widehat{\mathcal{O}}_x[x^{-1}] \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_x} \mathcal{M} = \widehat{\mathcal{O}}_x[x^{-1}] \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_x} \mathcal{N}$,

ii) pour tout $\mathcal{L}$ sous $\widehat{\mathcal{D}}_x$-module holonome de $\mathcal{N}$, tel que $\mathrm{H}_{[0]}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$, on a $\mathcal{L} = 0$,

iii) pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_x$-module holonome $\mathcal{L}$ quotient de $\mathcal{N}$, tel que $\mathrm{H}_{[0]}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$, on a $\mathcal{L} = 0$.

Théorème 2.7.11. *Si $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_x$-module holonome alors $\widehat{\mathcal{M}_{min}} \simeq (\widehat{\mathcal{M}})_{min}$.*

Démonstration. i) $\widehat{\mathcal{M}}$ et $\widehat{\mathcal{M}_{min}}$ ont la même localisation. Argument : les foncteurs $_ \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x[x^{-1}]$ (localisé) et $_ \otimes_{\mathcal{O}_x} \widehat{\mathcal{O}}_x$ (formalisé) commutent.
ii) $\widehat{\mathcal{M}_{min}}$ n'a pas de sous objets à support purement algébrique. Argument :

a1) si $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{M}_{min}$ et $\mathrm{H}_{[0]}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$, alors $\mathcal{L} = 0$,

a2) $\varphi : \mathcal{M}_{min} \to \mathcal{M}_{min}[x^{-1}]$, $m \mapsto m \otimes 1$ est injective,

sont équivalents et

a'1) si $\widehat{\mathcal{L}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{M}_{min}}$ et $\mathrm{H}_{[0]}(\widehat{\mathcal{L}}) = \widehat{\mathcal{L}}$, alors $\widehat{\mathcal{L}} = 0$,

a'2) $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathcal{M}_{min}} \to \widehat{\mathcal{M}_{min}}[x^{-1}]$, $m \mapsto m \otimes 1$ est injective,

sont équivalents et en plus a2) entraîne a'2) par la platitude de $_ \otimes_{\mathcal{O}_x} \widehat{\mathcal{O}}_x$ sur $\mathcal{O}_x$ et par la commutation des foncteurs $_ \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x[x^{-1}]$ et $_ \otimes_{\mathcal{O}_x} \widehat{\mathcal{O}}_x$.
iii) $\widehat{\mathcal{M}_{min}}$ n'a pas des quotients à support purement algébrique. Argument : grâce à ii) et à la commutation des foncteurs dual et localisé et vu que $\mathrm{H}_{[0]}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ entraîne $\mathcal{L}^* \simeq \mathcal{L}$ on a

b1) si $\mathcal{L}^* \hookrightarrow (\mathcal{M}^*)_{min}$ et $\mathrm{H}_{[0]}(\mathcal{L}^*) = \mathcal{L}^*$, alors $\mathcal{L}^* = 0$,

b2) $\varphi : (\mathcal{M}^*)_{min} \to (\mathcal{M}^*)_{min}[x^{-1}]$, $m \mapsto m \otimes 1$ est injective,

sont équivalents et

b'1) si $\widehat{\mathcal{L}^*} \hookrightarrow \widehat{(\mathcal{M}^*)_{min}}$ et $\mathrm{H}_{[0]}(\widehat{\mathcal{L}^*}) = \widehat{\mathcal{L}^*}$, alors $\widehat{\mathcal{L}^*} = 0$,

b'2) $\widehat{\varphi} : \widehat{(\mathcal{M})^*_{min}} \to \widehat{(\mathcal{M}^*)_{min}}[x^{-1}]$, $m \mapsto m \otimes 1$ est injective,

sont équivalents et b2) entraîne b'2). □

2.7.3. Extension minimale d'un couple d'espaces vectoriels

Définition 2.7.12 (Extension minimale). Soit D un disque centré à l'origine, $j : D^* \hookrightarrow D$ l'inclusion, $\mathcal{F}^\bullet$ un complexe de faisceaux pervers sur D et $\mathcal{L} = h^0(\mathcal{F}^\bullet|_{D^*})$. On appelle **extension minimale** de $\mathcal{F}^\bullet$ au complexe $j_*\mathcal{L}$.

Proposition 2.7.13. *Soit D un disque centré à l'origine, $j : D^* \hookrightarrow D$ l'inclusion et $\mathcal{L}$ un faisceau localement constant sur D^*. Si $\mathcal{F}^\bullet$ un complexe de faisceaux pervers sur D tel que $\mathcal{F}^\bullet|_{D^*} = \mathcal{L}$, alors :*

i) *il existe $\eta : j_*\mathcal{L} \to \mathcal{F}^\bullet$ morphisme de complexes de faisceaux pervers tel que $\eta|_{D^*} = id_{\mathcal{L}}$,*

ii) *$j_*\mathcal{L}$ n'a pas des conoyaux a support l'origine,*

iii) *$j_*\mathcal{L}$ n'a pas des noyaux a support l'origine.*

Les noyaux, conoyaux sont pris au sens de la catégorie des complexes de faisceaux pervers.

Démonstration. i) Étant donné que la catégorie des germes de complexes de faisceaux pervers est équivalente à la catégorie des couples $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$, il suffit de le prouver dans la deuxième catégorie. Vu que $j_*\mathcal{L}$, $\mathcal{F}^\bullet$ sont représentés par les couples $E \underset{inc}{\overset{T-\mathbb{1}_E}{\rightleftarrows}} \mathrm{Im}(T-\mathbb{1}_E)$, cf. la Proposition 2.4.5, et $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$ respectivement, la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T-\mathbb{1}_E"] \arrow[d, shift right, "T-\mathbb{1}_E"'] & E \arrow[d, shift right, "u"'] \\
\mathrm{Im}(T-\mathbb{1}_E) \arrow[r, "u|_{\mathrm{Im}(T-\mathbb{1}_E)}"'] \arrow[u, shift right, "inc"'] & F \arrow[u, shift right, "v"']
\end{tikzcd}$$

entraîne l'existence du morphisme η.

ii) Soit $\mathcal{F}^\bullet$ un conoyaux de $j_*\mathcal{L}$. Vu que dans la catégorie des couples $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$, $j_*\mathcal{L}$, $\mathcal{F}^\bullet$ sont représentés par les couples $E \underset{inc}{\overset{T-\mathbb{1}_E}{\rightleftarrows}} \mathrm{Im}(T-\mathbb{1}_E)$, et $0 \rightleftarrows F$ respectivement, la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, two heads, "0"] \arrow[d, shift right, "T-\mathbb{1}_E"'] & 0 \arrow[d, shift right, "0"'] \\
\mathrm{Im}(T-\mathbb{1}_E) \arrow[r, two heads, "g"'] \arrow[u, shift right, "inc"'] & F \arrow[u, shift right, "0"']
\end{tikzcd}$$

entraîne que $g \circ (T-\mathbb{1}_E) = 0$, vu que g et $T-\mathbb{1}_E$ sont surjectifs on a $g = 0$ et alors $F = 0$, donc $\mathcal{F}^\bullet = 0$.

iii) Soit $\mathcal{F}^\bullet$ un noyaux de $j_*\mathcal{L}$. Vu que dans la catégorie des couples $\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "u"] & F \arrow[l, bend left, "v"] \end{tikzcd}$, $j_*\mathcal{L}$, $\mathcal{F}^\bullet$ sont représentés par les couples $\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "T-\mathbb{1}_E"] & \mathrm{Im}(T-\mathbb{1}_E) \arrow[l, bend left, "inc"] \end{tikzcd}$, et $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left] & F \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$ respectivement, la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, hook, "0"] \arrow[d, bend right, "0"'] & & E \arrow[d, bend right, "T-\mathbb{1}_E"'] \\
F \arrow[rr, hook, "f"'] \arrow[u, bend right, "0"'] & & \mathrm{Im}(T-\mathbb{1}_E) \arrow[u, bend right, "inc"']
\end{tikzcd}$$

entraîne que $inc \circ f(F) = 0$, étant donné que inc, f sont injectives $F = 0$ et donc $\mathcal{F}^\bullet = 0$. $\square$

CHAPITRE 3

RIGIDITÉ

Le but de ce chapitre est de définir la notion d'indice de rigidité d'un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ -module holonome et de démontrer que cet indice est préservé par transformation de Fourier, au moins dans le cas où le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module de départ est régulier partout, irréductible et localisé à l'infini, cf section 3.2 . Pour cela, dans la section 3.1, on introduit la notion d'indice de rigidité et on calcule cet indice pour le transformé de Fourier d'un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module régulier partout.

3.1. Notion d'indice de rigidité

En 1857, en traduisant dans une langage moderne, Riemann a montré que l'équation hypergéométrique peut être reconstruite, à isomorphisme près, à partir de la connaissance de ses monodromies aux points 0, 1 et ∞. Dans une langage moderne, on dit que l'équation hypergéométrique est rigide et que son système local est physiquement rigide. Katz, dans son livre *Rigid Local Systems* donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système local $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{P}^1$ soit physiquement rigide :

Théorème 3.1.1. *Soit Σ un sous ensemble fini de $\mathbb{P}^1$, $U \doteq \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$, $j : U^{an} \hookrightarrow (\mathbb{P}^1)^{an}$ l'inclusion ouverte et $\mathcal{L}$ un systèmes local irréductible sur U^{an} de rang $n \geq 1$. $\mathcal{L}$ est physiquement rigide si et seulement si : $\chi((\mathbb{P}^1)^{an}, j_*\mathcal{E}nd(\mathcal{L})) = (2-k)n^2 + \sum_i \dim \mathrm{Z}(\mathrm{A}_i) = 2$, cf. Notation 2.4.8, où $k+1 = \#\Sigma$ et A_i est la monodromie de $\mathcal{L}$ autour du point $s_i \in \Sigma$.*

Démonstration. Cf. [**11**] Théorème 1.1.2 page 14. □

Notation 3.1.2. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module holonome et Σ l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{M}$.

- $\mathscr{L}_\Sigma$ désigne le foncteur (localisé) qui à $\mathcal{M}$ associe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}[*\Sigma] \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{M}$.
- $\mathscr{M}_\Sigma$ désigne l'équivalence de catégories, qui à un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}[*\Sigma]$-module holonome $\mathcal{M}$ associe une connexion méromorphe $(\mathcal{E}, \nabla)$, à singularités sur Σ, déterminée par $\mathcal{M}$.

• $\mathscr{E}nd$ désigne le foncteur qui à une connexion méromorphe $(\mathcal{E}, \nabla)$ associe $(\mathscr{E}nd(\mathcal{E}), \nabla)$, la connexion méromorphe des endomorphismes de $\mathcal{E}$.

• $\mathscr{O}_\Sigma$ désigne le foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}[*\Sigma]$-modules dans la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-modules.

On présente maintenant une motivation pour la définition de l'indice de rigidité pour les $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-modules holonomes.

i D'une part un système local irréductible $\mathcal{L}$ sur $U = \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$, Σ finie, est rigide si et seulement si

$$\chi\left(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{E}nd\,(\mathcal{L})\right) = 2, \tag{22}$$

où $j : U \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ est l'inclusion, cf. Théorème 3.1.1.

ii D'autre part si on prend un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module holonome régulier $\mathcal{M}$, ayant $\mathcal{L}$ comme système locale, on a

$$\mathrm{DR}\left(\left(\mathscr{O}_\Sigma \circ \mathscr{M}_\Sigma^{-1} \circ \mathscr{E}nd \circ \mathscr{M}_\Sigma \circ \mathscr{L}_\Sigma(\mathcal{M})\right)_{min}\right) = j_*\mathcal{E}nd\,(\mathcal{L})\,. \tag{23}$$

A cause des égalités 22 et 23 nous sommes amenés à donner la définition suivante :

Définition 3.1.3 (Indice de rigidité). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module holonome irréductible et Σ l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{M}$. On appelle **indice de rigidité** de $\mathcal{M}$ et on le note $\mathrm{rig}(\mathcal{M})$ l'invariant :

$$\chi\left(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\left(\left(\mathscr{O}_\Sigma \circ \mathscr{M}_\Sigma^{-1} \circ \mathscr{E}nd \circ \mathscr{M}_\Sigma \circ \mathscr{L}_\Sigma(\mathcal{M})\right)_{min}\right)\right).$$

Notation 3.1.4. $\mathcal{A}_r$ désigne l'ensemble des germes de fonctions holomorphes multiformes de la classe de Nilsson sur un point p :

$$\mathcal{A}_r = \bigoplus_{\substack{-1 \leq \Re e\, \alpha < 0 \\ k \in \mathbb{N}}} \mathcal{K} x^\alpha (\log x)^k,$$

où $\mathcal{K}$ est le corps des fractions de $\mathcal{O}$ en p.

Notation 3.1.5. Soient M un A_1-module holonome régulier à singularités sur $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{\infty\}$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{C}$, M' l'$A_1'$-module holonome (régulier) localisé à l'infini induit par M. $\mathcal{M}^{\mathrm{alg}}$ désigne le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}^{\mathrm{alg}}$-module holonome déterminé par M et M' et $\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}$ le module $\mathcal{M}^{\mathrm{alg}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\mathrm{alg}}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\mathrm{ana}}$.

Notation 3.1.6. Soit M un A_1-module holonome régulier à singularités sur $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{\infty\}$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{C}$. Le transformé de Fourier de M, noté $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}$, est à singularité régulière en 0, car M est a singularités régulières sur Σ. Soient $(\mathrm{M}_{\mathcal{F}})'$ l'A_1'-module holonome localisé à l'infini induit par $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{alg}}$ le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}^{\mathrm{alg}}$-module holonome déterminé par $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}$ et $(\mathrm{M}_{\mathcal{F}})'$. On note $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{ana}} \doteq \mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{alg}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\mathrm{alg}}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\mathrm{ana}}$.

Théorème 3.1.7. *Soit $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{I}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module holonome régulier à singularités sur $\{\gamma_0 = \infty, \gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$, où $k \geq 1$. Si*

i $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ *désigne le transformé de Fourier de* $\mathcal{M}$*, lequel a seulement deux singularités, une régulière en zéro et l'autre éventuellement irrégulière à l'infini ;*

ii $(\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{\nabla})$ *désigne le formalisé à l'infini de la connexion méromorphe* $(\mathcal{N}, \nabla) = \mathscr{M}_{\{0,\infty\}} \circ \mathscr{L}_{\{0,\infty\}}(\mathcal{M}_{\mathcal{F}})$*, laquelle à la décomposition de Turrittin :*

$$(\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{\nabla}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \widehat{\mathcal{E}}^{\varphi_i} \otimes \left(\widehat{\mathrm{R}}_i, \widehat{\nabla}_i\right),$$

où les $\left(\widehat{\mathrm{R}}_i, \widehat{\nabla}_i\right)$ *sont des connexions méromorphes régulières ;*

iii T_i *désigne la monodromie de* $\left(\widehat{\mathrm{R}}_i, \widehat{\nabla}_i\right)$ *et* n_i *la dimension de* $\widehat{\mathrm{R}}_i$;

iv $\mathcal{L}$ *désigne le système local* $\mathcal{H}om_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}, \mathcal{A}_r)|_{\mathbb{C}^*}$ *et* T *la monodromie de* $\mathcal{L}$ *en 0 ; alors la rigidité de* $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ *est donnée par l'expression :*

$$rig(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}) = \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}) + \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_i) + \sum_{i=1}^{k} n_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2. \tag{24}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ -module $\mathscr{O}_\Sigma \circ \mathscr{M}_\Sigma^{-1} \circ \mathscr{E}nd \circ \mathscr{M}_\Sigma \circ \mathscr{L}_\Sigma(\mathcal{M}_{\mathcal{F}})$, où $\Sigma = \{0, \infty\}$, $\mathcal{F}^\bullet$ le complexe de de Rham $\mathrm{DR}\,(\mathcal{E}_{min})$ sur $\mathbb{P}^1$ et $j\colon \mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ l'inclusion. Le morphisme j permet de construire la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow j_! j^{-1}\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\eta} \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \operatorname{coker} \eta \longrightarrow 0, \tag{25}$$

laquelle entraîne l'identité suivante :

$$\chi(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}^\bullet) = \chi(\mathbb{P}^1, j_! j^{-1}\mathcal{F}^\bullet) + \chi(\mathbb{P}^1, \operatorname{coker} \eta).$$

Si on désigne $\mathcal{L}' = h^0(j^{-1}\mathcal{F}^\bullet)$ on a :

$$\chi(\mathbb{P}^1, j_! j^{-1}\mathcal{F}^\bullet) = (2-2)\mathrm{rang}\, \mathcal{L}' = 0,$$
$$\chi(\mathbb{P}^1, \operatorname{coker} \eta) = \chi(\mathbb{P}^1, (\operatorname{coker} \eta)_0) + \chi(\mathbb{P}^1, (\operatorname{coker} \eta)_\infty),$$

car $\{0, \infty\}$ sont les seules singularités de $\mathcal{F}^\bullet$, donc :

$$\chi(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}^\bullet) = \chi(\mathbb{P}^1, (\operatorname{coker} \eta)_0) + \chi(\mathbb{P}^1, (\operatorname{coker} \eta)_\infty). \tag{26}$$

Afin de calculer $\chi(\mathbb{P}^1, (\mathrm{coker}\eta)_0)$ on prend un disque $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ centré en 0 et l'inclusion $i : \mathrm{D}^* \hookrightarrow \mathrm{D}$. Soit $\mathcal{G}^\bullet = \mathrm{DR}\,(\mathcal{E}_{min}|_{\mathrm{D}})$. Comme $\mathcal{E}_{min}|_{\mathrm{D}}$ est un $\mathcal{D}_{\mathrm{D}}$ -module holonome régulier en D, $\mathrm{DR}\,(\mathcal{E}_{min}|_{\mathrm{D}}) = i_* \mathcal{E}nd(\mathcal{L}'')$, où $\mathcal{L}'' = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}}(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}, \mathcal{A}_r)\,|_{\mathrm{D}^*}$. $\mathcal{G}^\bullet$ est un complexe pervers sur D et on peut lui associer la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow i_! i^{-1}\mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{\eta|_{\mathrm{D}}} \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow (\operatorname{coker} \eta)\,|_{\mathrm{D}} \longrightarrow 0. \tag{27}$$

Cette suite entraîne l'identité :

$$\chi(\mathrm{D}, \mathcal{G}^\bullet) = \chi(\mathrm{D}, i_! i^{-1}\mathcal{G}^\bullet) + \chi(\mathrm{D}, \operatorname{coker} \eta|_{\mathrm{D}}).$$

Vu que $h^0(i^{-1}\mathcal{G}^\bullet) = \mathcal{E}nd(\mathcal{L}'')$, on a $\chi(\mathrm{D}, i_! i^{-1}\mathcal{G}^\bullet) = (2-2)\mathrm{rang}\, \mathcal{E}\mathrm{nd}(\mathcal{L}'') = 0$, car D^* est homotope à S^1, donc $\chi(\mathrm{D}, \mathcal{G}^\bullet) = \chi(\mathrm{D}, (\operatorname{coker} \eta)_0)$. La suite exacte 27 entraîne que $(\mathcal{G}^\bullet)_0 = (\operatorname{coker} \eta)_0$, mais $(\mathcal{G}^\bullet)_0 = \{\mathrm{M} \in \mathrm{End}(\mathrm{E}) \mid \mathrm{T}_{\mathcal{E}nd(\mathcal{L}'')}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}\}$, où $\mathrm{E} =$

$h^0(\mathrm{D}\setminus\mathbb{R}^+,\mathcal{L}'')$, $\mathrm{T}_{\mathcal{E}nd(\mathcal{L}'')}=ad_{\mathrm{T}}$ et T est la monodromie de $\mathcal{L}''$ autour de 0, alors $(\mathcal{G}^\bullet)_0=\{\mathrm{M}\in\mathrm{End(E)}\mid \mathrm{TM}=\mathrm{MT}\}\doteq \mathrm{Z(T)}$. Par Mayer Vietoris on montre que $\chi(\mathbb{P}^1,(\operatorname{coker}\eta)_0)=\chi(\mathrm{D},\operatorname{coker}\eta|_{\mathrm{D}})$, donc :

$$\chi(\mathbb{P}^1,(\operatorname{coker}\eta)_0)=\dim \mathrm{Z(T)}. \tag{28}$$

On calcule maintenant $\chi(\mathbb{P}^1,(\operatorname{coker}\eta)_\infty)$. Vu que $\left(j_!j^{-1}\mathcal{F}^\bullet\right)_\infty=0$, la suite exacte 25 entraîne que $(\mathcal{F}^\bullet)_\infty\simeq(\operatorname{coker}\eta)_\infty$. Mais $\chi\left(\mathbb{P}^1,(\mathrm{DR}\,(\mathcal{E}_{min}))_\infty\right)=\chi\left((\mathcal{E}_{min})_\infty,(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})_\infty\right)$, alors par la définition d'irrégularité :

$$\chi\left(\mathbb{P}^1,(\mathrm{DR}\,(\mathcal{E}_{min}))_\infty\right)=\chi(\widehat{(\mathcal{E}_{min})}_\infty,(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^1})_\infty)-i\left((\mathcal{E}_{min})_\infty\right). \tag{29}$$

Par le Lemme 3.1.8 et le Théorème 2.7.11 on a :

$$\chi\left(\widehat{(\mathcal{E}_{min})}_\infty,(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^1})_\infty\right)=\sum_{i=1}^k\dim \mathrm{Z(T}_i), \tag{30}$$

en plus, grâce au Lemme 3.1.8 on a :

$$i((\mathcal{E}_{min})_\infty)=\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)^2-\sum_{i=1}^k n_i^2. \tag{31}$$

L'identité 24 est une conséquence immédiate des égalités 26, 28, 29, 30 et 31. □

Lemme 3.1.8. *Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}_x$-module holonome et $(\mathcal{N},\nabla)$ la connexion méromorphe associée à $\mathcal{N}[x^{-1}]$. Supposons que la décomposition de Turrittin du formalisé et localisé de $(\mathcal{N},\nabla)$ est de la forme :*

$$(\widehat{\mathcal{N}},\widehat{\nabla})\simeq\bigoplus_{i=1}^k\widehat{\mathcal{E}}^{\varphi_i}\otimes\left(\widehat{\mathrm{R}}_i,\widehat{\nabla}_i\right). \tag{32}$$

Si on désigne par T_i la monodromie de $(\widehat{\mathrm{R}}_i,\widehat{\nabla}_i)$ et on suppose que $\varphi_1=0$, $(\widehat{\mathrm{R}}_1,\widehat{\nabla}_1)$ peut être 0, alors :

i $\chi\left(\widehat{\mathcal{N}}_{min},\mathbb{C}[\![x]\!]\right)=\dim\{\mathrm{e}\mid \mathrm{T}_1\mathrm{e}=\mathrm{e}\}$,

ii $\chi\left(\mathcal{E}nd_{\widehat{\mathcal{O}}_x}(\widehat{\mathcal{N}})_{min},\mathbb{C}[\![x]\!]\right)=\sum_{i=1}^k\dim \mathrm{Z(T}_i)$,

iii $i\left(\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{N})\right)=\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)^2-\sum_{i=1}^k n_i^2$, *où* $n_i=\dim\widehat{\mathrm{R}}_i$.

Démonstration. i) Considérons chaque terme de la décomposition 32. Deux choses peuvent arriver, soit $\varphi_i=\gamma_i/x=0$, soit $\varphi_i\neq 0$.

Si $\varphi_i\neq 0$, le $\widehat{\mathcal{D}}_x$-module holonome $\widehat{\mathcal{N}}_i\doteq\widehat{\mathcal{E}}^{\varphi_i}\otimes(\widehat{\mathrm{R}}_i,\widehat{\nabla}_i)$ n'a pas de composante régulière par construction, alors $\widehat{\mathcal{N}}_i\simeq\widehat{\mathcal{N}}_i[x^{-1}]$ (cf. **[13]** Théorème 6.3.1 page 44). Ceci entraîne que la multiplication par x est bijective et alors $\mathrm{H}_{[0]}(\widehat{\mathcal{N}}_i)=0$ et $\mathrm{H}_{[0]}(\widehat{\mathcal{N}}_i^*)=0$, donc $(\widehat{\mathcal{N}}_i)_{min}=\widehat{\mathcal{N}}_i[x^{-1}]$, cf. Théorème 2.7.6. Grâce à ces isomorphismes on a $\chi(\widehat{\mathcal{N}}_{min},\mathbb{C}[\![x]\!])=\chi((\widehat{\mathcal{N}}_1)_{min},\mathbb{C}[\![x]\!])$, car $\chi(\widehat{\mathcal{N}}_i[x^{-1}],\mathbb{C}[\![x]\!])=0$ pour chaque $i>1$.

Si $\varphi_i = 0$, on est dans le cas régulier. Pourvu le choix d'une base et d'un système de coordonnés on a l'isomorphisme :

$$(\widehat{\mathrm{R}}_1, \widehat{\nabla}_1) \simeq \left(\mathbb{C}[\![x]\!]^n, x\frac{d}{dx} - \mathrm{A}_1\right),$$

où $n = \dim \widehat{\mathrm{R}}_1$. Étant donné que $\widehat{\mathcal{N}}_1$ et $\widehat{\mathcal{N}}_1[x^{-1}]$ ont la même extension minimale, cf. Corollaire 2.7.4 on calcule l'extension minimale de ce dernier. Cela est fait en prenant un changement de base méromorphe qui transforme la matrice A_1 dans une matrice constante, J, dans la forme canonique de Jordan :

$$(\widehat{\mathrm{R}}_1[x^{-1}], \widehat{\nabla}_1) \simeq \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\mathbb{C}[\![x]\!]^{n_j}, x\frac{d}{dx} - \mathrm{J}_j\right),$$

où $n_1 + \cdots + n_m = n$, et J_j sont les blocs de Jordan de J. Cet isomorphisme entraîne que :

$$\widehat{\mathcal{N}}_1[x^{-1}] \simeq \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle \Big/ \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]\langle\partial_x\rangle.(x\partial_x - \alpha_j)^{n_j},$$

où α_j est la valeur propre du bloc de Jordan J_j.

Si $\alpha_j \notin \mathbb{Z}$, le polynôme de Bernstein, $b(x)$, de $\widehat{\mathcal{N}}_{1j} \doteq \mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle/(x\partial_x - \alpha_j)^{n_j}$ est $(x - \alpha_j)^{n_j}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b(k) \neq 0$, donc la multiplication par x :

$$\mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle/(x\partial_x - \alpha_j)^{n_j} \xrightarrow{x.} \mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle/(x\partial_x - \alpha_j)^{n_j}$$

est une application bijective (cf. [**13**] Lemme 4.2.7 page 20), c'est-à-dire $\widehat{\mathcal{N}}_{1j}$ est une connexion méromorphe, en particulier on a $\mathrm{H}_{[0]}(\widehat{\mathcal{N}}_{1j}) = 0$ et $\mathrm{H}_{[0]}((\widehat{\mathcal{N}}_{1j})^*) = 0$, donc $(\widehat{\mathcal{N}}_{1j})_{min} = \widehat{\mathcal{N}}_{1j}$. Grâce à ces égalités on a :

$$\chi(\widehat{\mathcal{N}}_{min}, \mathbb{C}[\![x]\!]) = \sum_{\alpha_j \in \mathbb{Z}} \chi((\widehat{\mathcal{N}}_{1j})_{min}, \mathbb{C}[\![x]\!]),$$

car $\chi(\widehat{\mathcal{N}}_{1j}[x^{-1}], \mathbb{C}[\![x]\!]) = 0$ pour chaque $\alpha_j \notin \mathbb{Z}$.

On remarque que si $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, on peut supposer que $\alpha_j = 0$, puisque après le changement de base $\mathrm{B} = x^{-\alpha_j}\mathbb{1}$, la matrice J_j est transformée en

$$\mathrm{B}\mathrm{J}_j\mathrm{B}^{-1} + x\partial\mathrm{B}/\partial x\mathrm{B}^{-1} = \mathrm{J}_j - \alpha_j\mathbb{1}.$$

Dans ce cas là $\widehat{\mathcal{N}}_j = \mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle/(x\partial_x)^{n_j}$ et alors $(\widehat{\mathcal{N}}_j)_{min} = \mathbb{C}[\![x]\!]\langle\partial_x\rangle/R_j$, où $R_j = \partial_x(x\partial_x)^{n_j-1}$. Étant donné que $\{1, \log x, \ldots, \log^{n_j-1} x\}$ est une base de solutions de l'équation différentielle $\partial_x(x\partial_x)^{n_j-1}y = 0$, le noyau de $R_j(x, \partial_x)$ en $\mathbb{C}[\![x]\!]$ est $\langle 1\rangle$, donc $\dim\ker R_j(x, \partial_x) = 1$. Étant donné que $\frac{1}{(l+1)^{n_j}}x^{l+1}$ est une solution de l'équation différentielle $\partial_x(x\partial_x)^{n_j-1}y = x^l$, $\dim\operatorname{coker} R_j(x, \partial_x) = 0$.

Tout compte fait $\chi(\widehat{\mathcal{N}}_{min}, \mathbb{C}[\![x]\!]) = \#\{\mathrm{J}_j \mid \alpha_j \in \mathbb{Z}\}$, autrement dit $\chi(\widehat{\mathcal{N}}_{min}, \mathbb{C}[\![x]\!]) = \dim\{\mathrm{e} \mid \mathrm{T}_1\mathrm{e} = \mathrm{e}\}$.

ii) Reprenons la décomposition de Turrittin 32 $(\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{\nabla}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \widehat{\mathcal{E}}^{\varphi_i} \otimes \widehat{\mathrm{R}}_i$. Vu que :

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}_x}\left(\bigoplus_{i=1}^{k} \widehat{\mathcal{E}}^{\varphi_i} \otimes \widehat{\mathrm{R}}_i,\ \bigoplus_{i=1}^{k} \widehat{\mathcal{E}}^{\varphi_i} \otimes \widehat{\mathrm{R}}_i\right), \widehat{\nabla}\right) &\simeq \\
&\simeq \bigoplus_{i=1}^{k}\bigoplus_{j=1}^{k}\left(\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}_x}\left(\widehat{\mathcal{E}}^{\varphi_i} \otimes \widehat{\mathrm{R}}_i, \widehat{\mathcal{E}}^{\varphi_j} \otimes \widehat{\mathrm{R}}_j\right), \widehat{\nabla}\right) \\
&\simeq \bigoplus_{i=1}^{k}\bigoplus_{j=1}^{k}\left(\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}_x}\left(\widehat{\mathrm{R}}_i, \widehat{\mathcal{E}}^{\varphi_j-\varphi_i} \otimes \widehat{\mathrm{R}}_j\right), \widehat{\nabla}\right) \\
&\simeq \bigoplus_{i=1}^{k}\bigoplus_{j=1}^{k}\left(\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}_x}\left(\widehat{\mathrm{R}}_i, \widehat{\mathrm{R}}_j\right) \otimes \widehat{\mathcal{E}}^{\varphi_j-\varphi_i}, \widehat{\nabla}\right), \qquad (33)
\end{aligned}$$

l'assertion i) entraîne que :

$$\begin{aligned}
\chi(\mathrm{End}(\widehat{\mathcal{N}})_{min}, \mathbb{C}[\![x]\!]) &= \dim\{\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_k \mid \mathrm{ad}_{\mathrm{T}_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{ad}_{\mathrm{T}_k}\mathrm{M} = \mathrm{M}\} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_i).
\end{aligned}$$

iii) Étant donné que $(\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{\nabla})$ admet la décomposition de Turrittin 32, où les $(\widehat{\mathrm{R}}_i, \widehat{\nabla}_i)$ sont des connexions méromorphes régulières, l'irrégularité de chaque composante est soit 0, si $\varphi_i = 0$, soit $n_i = \mathrm{rang}(\widehat{\mathrm{R}}_i)$, si $\varphi \neq 0$. L'application du même raisonnement à la décomposition de Turrittin des endomorphismes de $\widehat{\mathcal{N}}$, i.e. à l'identité 33, entraîne que :

$$i\left(\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}}(\mathcal{N})_{min}\right) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathrm{rang}\left(\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}_x}(\widehat{\mathrm{R}}_i, \widehat{\mathrm{R}}_j)\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i^2,$$

où $n_i = \mathrm{rang}(\mathrm{T}_i) = \mathrm{rang}(\widehat{\mathrm{R}}_i)$. □

3.2. Préservation de l'indice de rigidité

Dans son livre *Rigid Local Systems*, Katz montre dans le chapitre 3, cf. Théorème 3.0.2 page 91, que la transformation de Fourier, en caractéristique positive, préserve l'indice de rigidité des faisceaux pervers irréductibles, pourvu que ni le faisceau ni sont transformé de Fourier soient à support ponctuel. D'autre part Katz pense aussi que la transformation de Fourier dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules doit préserver l'indice de rigidité, cf. **[11]** page 10. En utilisant ces conditions comme guide, nous sommes amenés à penser que l'énoncé correspondant dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules doit être (dans le cas particulier, où le $\mathcal{D}$-module de départ est régulier) le suivant :

Théorème 3.2.1. *La transformation de Fourier préserve l'indice de rigidité pour les $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-modules holonomes irréductibles, localisés à l'infini et réguliers par tout.*

On démontrera cette proposition à la fin de cette section. Afin de préparer la démonstration, on commence par rappeler les objets utilisés dans le calcul de l'indice de rigidité.

D'une part, au niveau des germes, il y a une équivalence de catégories entre les $\mathcal{D}_x^{\mathrm{ana}}$-modules holonomes réguliers, $x \in \mathbb{P}^1$, et la catégorie des couples $\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, bend left, "u"] & \mathrm{F} \arrow[l, bend left, "v"] \end{tikzcd}$, où E et F sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\mathbb{1} + uv$ est inversible. Cette équivalence de catégories entraîne que nous pouvons associer à chaque $\mathcal{M}_{x_i}^{\mathrm{ana}}$, $x_i \in \Sigma$, le couple d'espaces vectoriels :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_i - \mathbb{1} \arrow[loop left] & \mathrm{E}_i \arrow[r, bend left, "u_i"] & \mathrm{F}_i, \arrow[l, bend left, "v_i"] \arrow[loop right] & \mathrm{T}_{\mathrm{F}_i} - \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

grâce à la minimalité de M, propriété entraînée par l'irréductibilité de M, pour chaque $x_i \in \Sigma \cap \mathbb{C}$, le couple précédent est équivalent au couple suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_i - \mathbb{1} \arrow[loop left] & \mathrm{E}_i \arrow[r, bend left, "\mathrm{T}_i - \mathbb{1}"] & \mathrm{F}_i \arrow[l, bend left, "inc"] \arrow[loop right] & \mathrm{T}_{\mathrm{F}_i} - \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

cf. la sous-section 2.7.3. Étant donné que M est holonome, $\mathrm{M} = A_1/I$. En particulier si on prend une base de division $(P_p, \ldots, P_q)$ de I on a $\dim \mathrm{E}_i = \deg_{\partial_x} P_p$, cf. Proposition 2.4.12. Sens perte de généralité on peut prendre $\mathrm{E}_i = \mathrm{E}$. Dans ce cas là, les couples peuvent être réécrits de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_i - \mathbb{1} \arrow[loop left] & \mathrm{E} \arrow[r, bend left, "\mathrm{T}_i - \mathbb{1}"] & \mathrm{F}_i. \arrow[l, bend left, "inc"] \arrow[loop right] & \mathrm{T}_{\mathrm{F}_i} - \mathbb{1} \end{tikzcd} \tag{34}$$

D'autre part, grâce à la régularité de $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}$ en 0, $(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{ana}})_0$ est équivalent au couple suivant :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{T}} - \mathbb{1} \arrow[loop left] & \widehat{\mathrm{E}} \arrow[r, bend left, "u"] & \widehat{\mathrm{F}}, \arrow[l, bend left, "v"] \arrow[loop right] & \mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}} - \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

où $\mathbb{1} + uv$ est inversible. Grâce à la minimalité de $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}$, propriété entraîné par l'irréductibilité de $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}$, laquelle est conséquence de la préservation de l'irréductibilité par transformation de Fourier, le couple précédent est équivalent au couple suivant :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{T}} - \mathbb{1} \arrow[loop left] & \widehat{\mathrm{E}} \arrow[r, bend left, "\widehat{\mathrm{T}} - \mathbb{1}"] & \widehat{\mathrm{F}} \arrow[l, bend left, "inc"] \arrow[loop right] & \mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}} - \mathbb{1} \end{tikzcd} \tag{35}$$

cf. la sous-section 2.7.3.

De plus, la décomposition de Turrittin est aussi utilisée dans le calcul de l'indice de rigidité. Pour simplifier on note $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \doteq \mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{ana}}$ et $(\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{\nabla})$ le formalisé à l'infini

de la connexion méromorphe $(\mathcal{N}, \nabla) \doteq \mathcal{M}_{\mathcal{F}}[*\{\infty\}]$, laquelle à la décomposition de Turrittin :

$$(\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{\nabla}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \widehat{\mathcal{E}}^{\varphi_i} \otimes (\widehat{\mathrm{R}}_i, \widehat{\nabla}_i),$$

où les $(\widehat{\mathrm{R}}_i, \widehat{\nabla}_i)$ sont des connexions méromorphes régulières. Chacune de ces connexions induit un couple d'espaces vectoriels :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{F}}_i \arrow[r, bend left, "\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}_i} - \mathbb{1}"] \arrow[r, bend right, "\mathbb{1}"'] & \widehat{\mathrm{F}}_i, \end{tikzcd}$$

cf. Remarque 2.5.17.

Dans son livre *Équations différentielles à coefficients polynomiaux* Malgrange montre, d'une façon analytique, que $\mathrm{F}_i = \widehat{\mathrm{F}}_i$ et que $\widehat{\mathrm{F}} = \mathrm{E}_\infty$, cf. [**16**] Théorème XII.2.9 page 203. Étant donné cela nous sommes amenés à penser que les deux Lemmes suivants sont vrais et on les démontre d'une façon algébrique.

Lemme 3.2.2. *Si* $(\mathcal{M}^{\mathrm{ana}})_{\min} = \mathcal{M}^{\mathrm{ana}}$*, alors pour chaque* $x_i \in \Sigma \cap \mathbb{C}$ *les monodromies* $\mathrm{T}_{\mathrm{F}_i} : \mathrm{F}_i \to \mathrm{F}_i$ *et* $\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}_i} : \widehat{\mathrm{F}}_i \to \widehat{\mathrm{F}}_i$ *sont conjuguées, cet à dire* $\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}_{x_i}$ *est équivalent au couple suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_i - \mathbb{1} \arrow[loop left] & \mathrm{E} \arrow[r, shift left, "\mathrm{T}_i - \mathbb{1}"] & \mathrm{F}_i. \arrow[l, shift left, "inc"] \arrow[loop right, "\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}_i} - \mathbb{1}"] \end{tikzcd}$$

Lemme 3.2.3. *Si* $(\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}_{\mathcal{F}})_{\min} = \mathcal{M}^{\mathrm{ana}}_{\mathcal{F}}$ *alors les monodromies en* $\tau = 0$ $\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{E}}} : \widehat{\mathrm{E}} \to \widehat{\mathrm{E}}$ *et* $\mathrm{T}_\infty : \mathrm{F}_\infty \to \mathrm{F}_\infty$ *sont conjuguées, cet à dire* $(\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}_{\mathcal{F}})_0$ *est équivalent au couple suivant :*

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1} \arrow[loop left] & \widehat{\mathrm{E}} \arrow[r, shift left, "\mathrm{T}_0 - \mathbb{1}"] & \widehat{\mathrm{F}}. \arrow[l, shift left, "inc"] \arrow[loop right, "\mathrm{T}_\infty - \mathbb{1}"] \end{tikzcd}$$

Afin de démontrer le Lemme 3.2.2, on commence par remarquer que Claude Sabbah, dans son livre *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius - une introduction*, présente une façon alternative de calculer la décomposition de Turrittin de $(\widehat{\mathcal{N}}, \widehat{\nabla})$, grâce à laquelle on peut montrer facilement le Lemme 3.2.2. On présente tout de suite les trois énoncés pertinents. Vu que les notations utilisées sont différentes, on les présente aussi, lesquelles seront utilisées seulement dans les trois énoncés suivants.

Notation 3.2.4. La transformation de Fourier est l'isomorphisme d'algèbres :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[t]\langle \partial_t \rangle & \longrightarrow & \mathbb{C}[\tau']\langle \partial_{\tau'} \rangle \\ t & \longmapsto & -\partial_{\tau'} \\ \partial_t & \longmapsto & \tau' \end{array}$$

noté $P \mapsto \widehat{P}$. Tout module M sur $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ devient, de cette façon, un module sur $\mathbb{C}[\tau']\langle\partial_{\tau'}\rangle$; celui -ci est noté $\widehat{\mathrm{M}}$ et appelé le transformé de Fourier de M. Dans la suite M est supposé holonome et à singularités régulières, y compris à l'infini. Nous savons alors que $\widehat{\mathrm{M}}$ n'a de singularité qu'en $\tau' = 0$ (singularité régulière) et en $\tau' = \infty$ (singularité éventuellement régulière). Le localisé $\widehat{\mathrm{M}}[\tau']$ est encore holonome et c'est un $\mathbb{C}[\tau', \tau'^{-1}]$-module libre de rang fini. Nous pouvons le considérer comme un fibré méromorphe sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$, recouverte par les cartes de coordonnées respectives τ et τ' reliées par $\tau = \tau'^{-1}$ sur leur intersection. C'est donc aussi un $\mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}]$-module libre. Enfin on note $\mathcal{M}$ le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-module $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \otimes_{\mathbb{C}[t]} \mathrm{M}$.

Lemme 3.2.5. *Le microlocalisé $\mathcal{M}^\mu$ est à support dans l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{M}$.*

Démonstration. Cf. [**23**] Lemme 3.3 page 191. □

Vu que $\mathcal{M}^\mu$ est à support aux points singuliers c de $\mathcal{M}$, on peut écrire $\Gamma(\mathbb{C}, \mathcal{M}^\mu) = \oplus_c \mathcal{M}^\mu_c$.

Proposition 3.2.6. *En tout point singulier c de $\mathcal{M}$, le germe $\mathcal{E}^{c/\tau} \otimes \mathcal{M}^\mu_c$ est un $(\widehat{k} \doteq \mathbb{C}[\![\tau]\!][\tau^{-1}], \widehat{\nabla})$-espace vectoriel à singularité régulière.*

Démonstration. Cf. [**23**] Proposition 3.4 page 192. □

Proposition 3.2.7. *L'application $\mathbb{C}[\![\tau]\!]$-linéaire composée*

$$\widehat{\mathbb{G}} \doteq \widehat{k} \otimes_{\mathbb{C}[\tau^{-1}]} \widehat{\mathrm{M}} \to \Gamma(\mathbb{C}, \widehat{k} \otimes_{\mathbb{C}[\partial_t]} \mathcal{M}) \to \Gamma(\mathbb{C}, \mathcal{M}^\mu)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Cf. [**23**] Proposition 3.6 page 193. □

Démonstration du Lemme 3.2.2. Pour chaque $x_i \in \Sigma \cap \mathbb{C}$, le morphisme microlocalisation permet de construire, grâce au Lemme 3.2.5, la suite exacte de $(\mathcal{D}^{\mathrm{ana}}_{\mathbb{P}^1})_{x_i}$-modules holonomes :

$$0 \longrightarrow \ker\mu \hookrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{ana}}_{x_i} \xrightarrow{\mu} (\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}_{x_i})^\mu \longrightarrow \mathrm{coker}\mu \longrightarrow 0. \tag{36}$$

Étant donné que $\ker\mu \simeq \mathcal{D}_{x_i}/\mathcal{D}_{x_i}.(\partial_{x_i})^k$ (resp. $\mathrm{coker}\mu \simeq \mathcal{D}_{x_i}/\mathcal{D}_{x_i}.(\partial_{x_i})^{k'}$), pour un certain $k \in \mathbb{N}$ (resp. $k' \in \mathbb{N}$), $\ker\mu$ (resp. $\mathrm{coker}\mu$) est équivalent au couple $\begin{tikzcd} \mathbb{C}^k \arrow[r, bend left] & 0 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$ (resp. $\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{k'} \arrow[r, bend left] & 0 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$). Vu que $(\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}_{x_i})^\mu$ est une connexion méromorphe régulière, cf. Proposition 3.2.6, $(\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}_{x_i})^\mu$ est équivalent au couple :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{F}}_i \arrow[r, bend left, "\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}_i} - \mathbb{1}"] \arrow[r, bend right, "\mathbb{1}"'] & \widehat{\mathrm{F}}_i. \end{tikzcd}$$

Cf. Remarque 2.5.17. Muni de ces équivalences et du fait que 36 est une suite exacte de $\mathcal{D}_{x_i}$-modules holonomes réguliers, celle ci est équivalente à la suite exacte de couples :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C}^k \arrow[r, hook] \arrow[d, bend left] & \mathrm{E} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, bend left, "\mathrm{T}_i - \mathbb{1}"] & \widehat{\mathrm{F}}_i \arrow[r] \arrow[d, bend left, "\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}_i} - \mathbb{1}"] & \mathbb{C}^{k'} \arrow[r] \arrow[d, bend left] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u, bend left] & \mathrm{F}_i \arrow[r, "\sim", "\beta"'] \arrow[u, bend left, "j"] & \widehat{\mathrm{F}}_i \arrow[r] \arrow[u, bend left, "\mathbb{1}"] & 0 \arrow[r] \arrow[u, bend left] & 0.
\end{tikzcd}$$

Vu que ce diagramme est à lignes exactes β est un isomorphisme, en plus la commutativité de ce diagramme entraîne que $\alpha \circ j = \beta$ et que $\beta \circ (\mathrm{T}_i - \mathbb{1}) = (\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}_i} - \mathbb{1}) \circ \alpha$, alors $\beta \circ (\mathrm{T}_i - \mathbb{1}) \circ j = (\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}_i} - \mathbb{1}) \circ \alpha \circ j$, donc $\beta \circ (\mathrm{T}_i - \mathbb{1}) = (\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}_i} - \mathbb{1}) \circ \beta$, cet à dire $\beta \circ \mathrm{T}_i = \mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}_i} \circ \beta$. □

Corollaire 3.2.8. $\dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_i) - \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}_i}) = \dim^2 \ker(\mathrm{T}_i - \mathbb{1}) = (\dim \mathrm{E} - \dim \widehat{\mathrm{F}}_i)^2$

Démonstration. Étant donné que le couple $(\mathrm{E}, \mathrm{F}_i, \mathrm{T}_i - \mathbb{1}, j)$ est minimale, la Proposition 2.4.10 entraîne que $\dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_i) - \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}}_i}) = \dim^2 \ker(\mathrm{T}_i - \mathbb{1})$. D'autre part $\dim \ker(\mathrm{T}_i - \mathbb{1}) + \dim \mathrm{im}(\mathrm{T}_i - \mathbb{1}) = \dim \mathrm{E}$. Vu que $\mathrm{T}_i - \mathbb{1} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}_i$ est surjective $\dim \mathrm{F}_i = \dim \mathrm{im}(\mathrm{T}_i - \mathbb{1})$, donc $\dim^2 \ker(\mathrm{T}_i - \mathbb{1}) = (\dim \mathrm{E} - \dim \widehat{\mathrm{F}}_i)^2$. □

Démonstration du Lemme 3.2.3. Prenons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker \lambda \hookrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathrm{ana}} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{M}_\infty^{\mathrm{ana}}[*\{\infty\}] \longrightarrow \operatorname{coker} \lambda \longrightarrow 0.$$

Vu que $\ker \lambda \simeq \mathcal{D}_{t'}/\mathcal{D}_{t'}t'^k$ (resp. $\ker \lambda \simeq \mathcal{D}_{t'}/\mathcal{D}_{t'}t'^{k'}$), pour un certain $k \in \mathbb{N}$ (resp. $k' \in \mathbb{N}$), la suite exacte précédente donne naissance à la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_\tau/\mathcal{D}_\tau(\partial_\tau)^k \hookrightarrow (\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{ana}})_0 \longrightarrow (\mathcal{M}[t^{-1}]_{\mathcal{F}}^{\mathrm{ana}})_0 \longrightarrow \mathcal{D}_\tau/\mathcal{D}_\tau(\partial_\tau)^{k'} \longrightarrow 0.$$

Cette suite est équivalente à la suite exacte de couples :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C}^k \arrow[r, hook] \arrow[d, bend left] & \widehat{\mathrm{E}} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, bend left, "\widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1}"] & \widehat{\mathrm{E}'} \arrow[r] \arrow[d, bend left, "u'"] & \mathbb{C}^{k'} \arrow[r] \arrow[d, bend left] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u, bend left] & \widehat{\mathrm{F}} \arrow[r, "\sim", "\beta"'] \arrow[u, bend left, "j"] & \widehat{\mathrm{F}'} \arrow[r] \arrow[u, bend left, "v'"] & 0 \arrow[r] \arrow[u, bend left] & 0.
\end{tikzcd}$$

Vu que ce diagramme est à lignes exactes β est un isomorphisme, en plus la commutativité de ce diagramme entraîne que $u' \circ \alpha = \beta \circ (\widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1})$ et que $v' \circ \beta = \alpha \circ j$, alors $u' \circ \alpha \circ j = \beta \circ (\widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1}) \circ j$, donc $u' \circ v' \circ \beta = \beta \circ (\widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1})$, i.e. $(\mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}'}} - \mathbb{1}) \circ \beta = \beta \circ (\widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1})$, $\beta \circ \widehat{\mathrm{T}}_0 = \mathrm{T}_{\widehat{\mathrm{F}'}} \circ \beta$. Grâce au Lemme 2.6.22 $\widehat{\mathrm{T}}_0$ et T_∞ sont conjugués. □

Corollaire 3.2.9. $\dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_\infty) - \dim \mathrm{Z}(\widehat{\mathrm{T}}_0) = -\dim^2 \ker(\widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1}) = -(\dim \widehat{\mathrm{F}} - \dim \mathrm{F}_\infty)^2$

Démonstration. Analogue au Corollaire 3.2.8. □

Corollaire 3.2.10. $\dim \ker(\widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1}) = \dim \widehat{\mathrm{E}} - \dim \mathrm{E} = \sum_{i=1}^k \dim \widehat{\mathrm{F}}_i - \dim \mathrm{E}$.

Démonstration. Grâce au Lemme 3.2.3 $\widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1} : \widehat{\mathrm{E}} \to \widehat{\mathrm{F}}$ est surjective, alors $\dim\ker(\widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1}) = \dim\widehat{\mathrm{E}} - \dim\widehat{\mathrm{F}}$. Ce Lemme entraîne aussi que $\dim\widehat{\mathrm{F}} = \dim F_\infty = \dim E$, car $\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}$ est régulier et localisé à l'infini. La Proposition 3.2.7 entraîne que $\dim\ker(\widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1}) = \sum_{i=1}^k \dim\widehat{\mathrm{F}}_i - \dim\widehat{\mathrm{F}}$. □

Démonstration du Théorème 3.2.1. Par le Théorème 3.1.7 on sait que :

$$\mathrm{rig}(\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}_{\mathcal{F}}) = \dim \mathrm{Z}(\widehat{\mathrm{T}}_0) + \sum_{i=1}^k \dim \mathrm{Z}(\widehat{\mathrm{T}}_i) + \sum_{i=1}^k \dim^2 \widehat{\mathrm{F}}_i - \dim^2 \widehat{\mathrm{E}}.$$

Grâce aux Corollaires 3.2.8 et 3.2.9, l'égalité précédente peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rig}(\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}_{\mathcal{F}}) \quad = \quad & \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_\infty) + \dim^2 \ker(\widehat{\mathrm{T}}_0 - \mathbb{1}) + \\
& + \sum_{i=1}^k [\dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_i) - \dim^2 \ker(\mathrm{T}_i - \mathbb{1})] + \\
& + \sum_{i=1}^k \dim^2 \widehat{\mathrm{F}}_i - \dim^2 \widehat{\mathrm{E}},
\end{aligned}$$

en plus les Corollaires 3.2.10 et 3.2.8 entraînent que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rig}(\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}_{\mathcal{F}}) &= \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_\infty) + (\dim\widehat{\mathrm{E}} - \dim \mathrm{E})^2 + \\
&+ \sum_{i=1}^k [\dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_i) - (\dim \mathrm{E} - \dim\widehat{\mathrm{F}}_i)^2] + \sum_{i=1}^k \dim^2 \widehat{\mathrm{F}}_i - \dim^2 \widehat{\mathrm{E}} \\
&= \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_\infty) + \sum_{i=1}^k \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_i) + (\dim\widehat{\mathrm{E}} - \dim \mathrm{E})^2 - \\
&- \sum_{i=1}^k (\dim^2 \mathrm{E} - 2\dim \mathrm{E} \dim\widehat{\mathrm{F}}_i + \dim^2 \widehat{\mathrm{F}}_i) + \sum_{i=1}^k \dim^2 \widehat{\mathrm{F}}_i - \dim^2 \widehat{\mathrm{E}} \\
&= \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_\infty) + \sum_{i=1}^k \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_i) + (\dim\widehat{\mathrm{E}} - \dim \mathrm{E})^2 - \\
&- k \dim^2 \mathrm{E} + 2\dim \mathrm{E} \sum_{i=1}^k \dim\widehat{\mathrm{F}}_i - \dim^2 \widehat{\mathrm{E}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_\infty) + \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_i) + \dim^2 \widehat{\mathrm{E}} - 2 \dim \widehat{\mathrm{E}} \dim \mathrm{E} + \\
&+ \dim^2 \mathrm{E} - k \dim^2 \mathrm{E} + 2 \dim \mathrm{E} \dim \widehat{\mathrm{E}} - \dim^2 \widehat{\mathrm{E}} \\
&= (2 - (k+1)) \dim^2 \mathrm{E} + \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_\infty) + \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Z}(\mathrm{T}_i) \\
&= \mathrm{rig}(\mathcal{M}^{\mathrm{ana}}),
\end{aligned}
$$

donc la transformation de Fourier préserve l'indice de rigidité. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] **J. Björk**, *Analytic $\mathcal{D}$-modules and applications*, Mathematics and its applications, vol. 247, Kluwer, (1993).

[2] **S. Bloch & H. Esnault**, *Local Fourier transforms and rigidity for $\mathcal{D}$-Modules*, Asian Math. J. 8(4) (2004).

[3] **A. Borel** (Ed.), *Algebraic $\mathcal{D}$-modules*, Perspectives in Math., vol. 2, Academic Press, (1987).

[4] **J. Briançon & P. Maisonobe**, *Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable*, Enseign. Math., XXX, 7-38 (1970).

[5] **S. C. Coutinho**, *A primer of algebraic $\mathcal{D}$-modules*, London Math. Soc. Student Texts 33, Cambridge University Press (1995).

[6] **J. Dixmier**, *Sur les algèbres de Weyl II*, Bull. Sci. Math., Ser. 94, 289-301 (1970).

[7] **M. Goresky & R. MacPherson**, *Intersection homology II*, Invent. Math., 71, 77-129, (1983).

[8] **R. Hartshorne**, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Mathematics, vol. 52, Springer (1977).

[9] **M. Kashiwara**, *On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I*, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 10, 563-579 (1975).

[10] **M. Kashiwara**, *Systems of microdifferential equations*, Progress in Math., vol. 34, Birkhäuser (1983).

[11] **N. Katz**, *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies 139, Princeton University Press (1996).

[12] **P. Maisonobe & Z. Mebkhout**, *Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents*, Société Mathématique de France, 8, 311-389 (2004).

[13] **P. Maisonobe & C. Sabbah** (Ed.), *$\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 45, Hermann (1993).

[14] **P. Maisonobe & C. Sabbah** (Ed.), *Images directes et constructibilité*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 46, Hermann (1993).

[15] **P. Maisonobe & C. Sabbah**, *Aspects of the theory of $\mathcal{D}$-modules*, Kaiserslautern (2002).

[16] **B. Malgrange**, *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math., vol. 96, Birkhäuser (1991).

[17] **Z. Mebkhout**, *Sur le problème de Riemann-Hilbert*, Proc. Les Houches 1979, Lect. Notes in Phys., vol. 126, Springer (1980).

[18] **Z. Mebkhout**, *Sur le problème de Riemann-Hilbert*, Note au C.R.A.S. Paris, Sér. A-B, t. 290, 415-417 (1980).

[19] **Z. Mebkhout**, *The Riemann-Hilbert problem in higher dimension*, Proc. Conf. Generalized Functions Appl. in Math. Phys. (Moscow, 1980), Steklov Inst., 334-341 (1981).

[20] **Z. Mebkhout**, *Une équivalence de catégories* et *Une aute équivalence de catégories*, Comp. Math., 51, 51-62 et 63-88 (1984).

[21] **J. Rotman**, *An introduction to homological algebra*, Pure and Applied Mathematics, vol. 45, Academic Press (1979).

[22] **C. Sabbah**, *Monodromy at infinity and Fourier transform*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 33, 643-685 (1997).

[23] **C. Sabbah** *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, CNRS Editions & EDP Sciences (2002).

[24] **C. Sabbah**, *Monodromy at infinity and Fourier transform II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 42, 803-835 (2006).

[25] **J. T. Stafford**, *Module structure of Weyl algebras*, Journal of the London Mathematical Society, 18, 429-442 (1978).

[26] **Lê D. T.** (Ed.), *Introduction à la théorie algébrique des systèmes différentiels : colloque Plans-sur-Bex I.* Hermann (1988).