



**HAL**  
open science

# Bevel gear design: analysis and synthesis of geometry and tolerances

Jérôme Bruyère

## ► To cite this version:

Jérôme Bruyère. Bevel gear design: analysis and synthesis of geometry and tolerances. Engineering Sciences [physics]. Arts et Métiers ParisTech, 2006. English. ⟨NNT : 2006ENAM40⟩. ⟨pastel-00002262⟩

**HAL Id: pastel-00002262**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00002262v1>**

Submitted on 19 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



Ecole doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

# THÈSE

pour obtenir le grade de

## Docteur

de

# L'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité «Mécanique et Génie Mécanique»

*présentée et soutenue publiquement  
par*

**Jérôme BRUYÈRE**

le 27 novembre 2006

**Contribution à l'optimisation de la conception des  
engrenages coniques à denture droite  
Analyse et synthèse de la géométrie et des tolérances**

*Directeur de thèse* : **Patrick MARTIN**

*Codirecteurs de thèse* : **Jean-Yves DANTAN**  
**Régis BIGOT**

Jury :

M. Jean Marc LINARES, Maître de Conférences HDR, <i>EA(MS)<sup>2</sup></i> , U. de la Méditerranée .	Rapporteur
M. Marc SARTOR, Professeur, <i>LGMT</i> , INSA, Toulouse .....	Rapporteur
M. Bernard ANSELMETTI, Professeur, <i>LURPA</i> , U. Paris-Sud XI .....	Président du jury
M. Daniel PLAY, Professeur, INSA, Lyon .....	Examinateur
M. Patrick MARTIN, Professeur, <i>LGIPM</i> , ENSAM, Metz .....	Directeur de thèse
M. Jean-Yves DANTAN, Maître de Conférences, <i>LGIPM</i> , ENSAM, Metz .....	Codirecteur de thèse
M. Régis BIGOT, Maître de Conférences HDR, <i>LGIPM</i> , ENSAM, Metz .....	Codirecteur de thèse

Laboratoire de Génie Industriel et de Production Mécanique EA 3096,  
ENSAM, CER de Metz

L'ENSAM est un Grand Établissement dépendant du Ministère de l'Éducation Nationale, composé de huit  
centres :

AIX-EN-PROVENCE ANGERS BORDEAUX CHÂLONS-EN-CHAMPAGNE CLUNY LILLE METZ PARIS



## Avant propos

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Génie Industriel et de Production Mécanique, au sein de l'équipe Ingénierie de FABrication, basée au CER ENSAM de Metz. Cette équipe est dirigée par Patrick MARTIN, Professeur, et qui est également mon directeur de thèse. Je tiens à lui exprimer ma sincère gratitude pour son accueil, tout d'abord à l'ENSAM de Metz, puis au sein de son équipe de recherche.

Je remercie tout particulièrement Jean-Yves DANTAN, pour l'aide considérable et constante qu'il m'a apportée dans ce travail.

Je remercie très vivement Régis BIGOT, pour la confiance qu'il m'a accordée, son expertise et son franc parler.

Je souhaite également remercier l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers qui m'a accordé une décharge de service durant 3 ans et sans laquelle ce travail n'aurait pu être réalisé.

Je tiens à exprimer ma très vive reconnaissance à B. ANSELMETTI, professeur à l'ENS de Cachan pour avoir accepté d'examiner ce mémoire et de présider le jury.

Mes remerciements s'adressent également à J-M. LINARES, maître de conférence à l'IUT d'Aix en Provence, et M. SARTOR, professeur à l'INSA de Toulouse, pour avoir lu attentivement ce rapport et en avoir rédigé une appréciation argumentée.

Je remercie chaleureusement D. PLAY, professeur à l'INSA de Lyon, pour avoir examiné ce mémoire et nous avoir fait bénéficier de son expérience lors du jury.

Je tiens également à remercier sincèrement tous mes collègues de l'ENSAM, les collègues d'autres établissements qui se sont intéressés à mon travail et les thésards cotoyés durant ces années de préparation.

Je suis très reconnaissant à ma femme et à mes enfants de m'avoir soutenu et d'avoir accepté mon investissement.

Je pense également à J. DUFALLY, qui m'enseigna la théorie des engrenages et qui me communiqua son profond intérêt pour ces systèmes.

Enfin, je remercie I. GRANGER pour son soutien linguistique.



# Table des matières

Notations des principaux paramètres . . . . .	8
<b>1 Introduction</b>	<b>15</b>
<b>2 Géométrie des engrenages coniques à denture droite</b>	<b>21</b>
2.1 Définition cinématique des surfaces actives d'engrenage conique à denture droite en développante de cercle sphérique . . . . .	24
2.1.1 Problématique et préliminaires . . . . .	24
2.1.2 Principe de génération d'une développante de cercle sphérique . . . . .	26
2.1.3 Application de la méthode des roulettes aux engrenages concourants . . . . .	27
2.1.4 Génération des dentures en développante de cercle sphérique par la méthode des roulettes . . . . .	29
2.1.5 Roue plane génératrice . . . . .	35
2.1.6 Coordonnées d'un point de la développante de cercle sphérique . . . . .	36
2.1.7 Denture générée par une roue plane à denture pyramidale . . . . .	40
2.1.8 Surface active de la denture obtenue avec une surface génératrice plane . . . . .	41
2.2 Construction de la surface de la denture . . . . .	45
2.2.1 Généralités et définitions . . . . .	45
2.2.2 Profil et surface actifs . . . . .	47
2.2.3 Epaisseur curviligne de la dent . . . . .	49
2.2.4 Correction de denture . . . . .	54
2.2.5 Les profils et surfaces de raccordement . . . . .	56
2.3 Indices de qualités de l'engrenage . . . . .	59
2.3.1 Interférences de fonctionnement . . . . .	59
2.3.2 Rapport de conduite . . . . .	61
2.3.3 Glissement spécifique . . . . .	61
2.4 Détermination des positions angulaires remarquables lors de l'engrènement . . . . .	64
2.4.1 Détermination de l'angle de rotation $\phi_{1S_2}$ . . . . .	64
2.4.2 Détermination de l'angle de rotation $\phi_{1S_1}$ . . . . .	65
2.4.3 Angle de rotation total et rapport de conduite . . . . .	67
2.4.4 Détermination des positions du pignon où il y a 1 ou 2 points de contact . . . . .	67
2.5 Applications . . . . .	69
2.5.1 Application numérique . . . . .	69
2.5.2 Applications industrielles . . . . .	71
2.6 Conclusion . . . . .	75
<b>3 Analyse de l'engrènement sans charge intégrant des variations géométriques</b>	
<b>Application aux engrenages coniques</b>	<b>77</b>
3.1 Introduction . . . . .	78
3.1.1 Ecart cinématiques d'engrènement . . . . .	78
3.1.2 Modèle géométrique . . . . .	79
3.1.3 Tooth Contact Analysis . . . . .	80
3.2 Modèle géométrique . . . . .	82

3.2.1	Surfaces de substitution avec bombé et défaut de forme . . . . .	84
3.2.2	Modélisation des défauts de position, d'orientation et des jeux . . . . .	91
3.3	Analyse de l'engrènement d'un point de vue cinématique . . . . .	100
3.3.1	Principe . . . . .	100
3.3.2	Etude de l'engrènement . . . . .	103
3.3.3	Relation avec les normes . . . . .	110
3.3.4	Comparaison avec une courbe expérimentale d'engrénométrie . . . . .	111
3.4	Etude de l'impact de quelques écarts sur l'erreur cinématique . . . . .	113
3.5	Conclusion . . . . .	119
<b>4</b>	<b>Analyse et optimisation des tolérances des engrenages</b>	<b>121</b>
4.1	Introduction . . . . .	122
4.1.1	Objectif du tolérancement . . . . .	122
4.1.2	Positionnement de l'activité de tolérancement dans la conception d'un produit . . . . .	122
4.1.3	Position de nos travaux . . . . .	123
4.1.4	Expression des spécifications géométriques . . . . .	123
4.2	Définition et modélisation des spécifications . . . . .	127
4.2.1	Spécifications par dimensions . . . . .	127
4.2.2	Spécifications par zones . . . . .	127
4.2.3	Applications aux engrenages . . . . .	128
4.3	Analyse des tolérances d'un engrenage . . . . .	132
4.3.1	Principe de l'analyse des tolérances . . . . .	133
4.3.2	Simulation de Monte Carlo . . . . .	136
4.3.3	Choix des variables aléatoires et influence . . . . .	137
4.3.4	Analyse de la simulation de Monte Carlo . . . . .	137
4.3.5	Quelques résultats . . . . .	138
4.4	Synthèse et optimisation des tolérances . . . . .	142
4.4.1	Synthèse du tolérancement . . . . .	142
4.4.2	Optimisation des tolérances . . . . .	142
4.4.3	Définition de la fonction objectif . . . . .	144
4.4.4	Présentation et justification du choix de la méthode . . . . .	145
4.4.5	Influence des paramètres de l'algorithme . . . . .	148
4.5	Conclusion . . . . .	148
<b>5</b>	<b>Analyse de l'engrènement sous charge intégrant des variations géométriques</b>	<b>151</b>
5.1	Bibliographie . . . . .	152
5.1.1	Evaluation des déformations et des contraintes dans une dent . . . . .	152
5.1.2	Evaluation de l'écart statique d'engrènement sous charge - raideur d'engrènement équivalente . . . . .	158
5.2	Analyse de l'engrènement sous charge . . . . .	160
5.2.1	Analyse des méthodes de résolution des problèmes mécaniques . . . . .	160
5.2.2	Présentation détaillée de la méthode numérique et interprétation . . . . .	162
5.3	Détermination des coefficients d'influence de flexion . . . . .	171
5.3.1	Utilisation de la méthode des éléments finis . . . . .	174
5.3.2	Type d'élément . . . . .	175
5.3.3	Le maillage . . . . .	175
5.3.4	Conditions aux limites . . . . .	175
5.3.5	Choix du nombre d'éléments . . . . .	177
5.3.6	Exécution, extraction des données et exploitation . . . . .	180
5.3.7	Les contraintes . . . . .	181
5.3.8	Influence de la surface de raccordement . . . . .	181

5.4	Détermination des coefficients de contact . . . . .	181
5.5	Algorithme et résultats . . . . .	183
5.5.1	Algorithme de résolution . . . . .	183
5.5.2	Résultats de l'analyse et optimisation des tolérances pour un engrenage chargé . . . . .	186
5.5.3	Analyse et optimisation des tolérances pour un engrenage chargé . . . . .	189
5.6	Conclusion . . . . .	190
<b>6</b>	<b>Conclusion et discussions</b>	<b>191</b>
6.1	Le travail accompli . . . . .	191
6.2	Discussions . . . . .	193
6.2.1	Analyse des tolérances . . . . .	193
6.2.2	Modèle de spécification géométrique des engrenages . . . . .	193
6.2.3	Evaluation des écarts cinématiques d'engrènement . . . . .	194
6.2.4	Modèle mécanique . . . . .	194
6.3	Ouvertures . . . . .	195
	<b>ANNEXES</b>	<b>196</b>
<b>A</b>	<b>Relations Mathématiques</b>	<b>197</b>
A.1	Relations géométriques dans les triangles sphériques . . . . .	197
A.1.1	Relations fondamentales . . . . .	197
A.1.2	Relations de trigonométrie sphérique pour un triangle rectangle . . . . .	200
A.2	Transformation de coordonnées par matrices homogènes . . . . .	201
A.3	Détermination de points équidistants sur une développante de cercle . . . . .	203
A.4	Détermination de l'abscisse curviligne d'une développante de cercle sphérique . . . . .	204
A.5	Définition des fonctions d'interpolation linéaire à deux paramètres . . . . .	205
A.5.1	Fonctions d'interpolation linéaire à 2 paramètres . . . . .	206
A.5.2	Interpolation linéaire d'une fonction de 2 paramètres . . . . .	206
<b>B</b>	<b>Synthèse de la géométrie et analyse des tolérances des engrenages de WILDHABER-NOVIKOV à axes concourants</b>	<b>207</b>
<b>C</b>	<b>Modèle numérique pour l'analyse de l'influence du bombé dans le cas du contact unique dans l'engrenage</b>	<b>209</b>
C.1	Définition de la surface bombée . . . . .	209
C.2	Le modèle numérique . . . . .	210
C.2.1	Hypothèses : . . . . .	211
C.2.2	Génération des maillages : . . . . .	211
C.2.3	Conditions initiales : . . . . .	212
C.2.4	Conditions aux limites . . . . .	212
C.2.5	Gestion du contact . . . . .	213
C.2.6	Traitement des résultats : . . . . .	213
C.2.7	Validation : . . . . .	214
C.2.8	Résultats du problème du contact . . . . .	214
C.3	Etude de l'influence du maximum de bombé . . . . .	217
C.4	Etude de l'influence de la position du bombé . . . . .	218
C.5	Conclusion pour le dimensionnement du bombé . . . . .	219
	<b>Bibliographie</b>	<b>220</b>

# Notations des principaux paramètres

Notations propres à ces travaux employant certaines notations usuelles

## Exposants

- [ $i$ ] : exprimé dans le repère  $Ri$  au premier chapitre et  $Si$  dans les autres
- fl : relatif à la flexion de la dent
- c : relatif au contact entre dents
- (k) : relatif au point numéro k du ou des plans tangents
- (n) : relatif à la dent numéro n

## Indices

- 0 : indice affecté au repère fixe
- 1 : indice affecté au pignon
- 2 : indice affecté à la roue

## Minuscules

- $a_1$  : lettre désignant  $\sin(\alpha_{b1})$
- $b_1$  : lettre désignant  $\cos(\alpha_{b1})$
- $c_1$  : épaisseur curviligne du creux entre dents sur le cercle primitif de la roue 1
- $c_{mini}$  : épaisseur curviligne minimale du creux entre dents
- $d$  : angle  $\widehat{VO_1A}$
- $e_1$  : épaisseur curviligne de la dent prise sur le cercle primitif de la roue 1
- $e_{mini}$  : valeur minimale de l'épaisseur curviligne des dents
- $f_1$  : angle  $\widehat{S_2O_1I}$
- $f_2$  : angle  $\widehat{S_1O_1I}$
- $g$  : angle  $\widehat{O_1SD}$
- $gs_1$  : glissement spécifique de la roue 1
- $g_{AG}$  : numéro de la population dans l'algorithme génétique
- $h$  : hauteur curviligne effective des dents, mesurée sur un grand cercle de  $k$
- $h_{a1}$  : hauteur curviligne de la saillie des dents de la roue 1, mesurée sur un grand cercle de  $k$
- $h_{f1}$  : hauteur curviligne du creux des dents de la roue 1, mesurée sur un grand cercle de  $k$
- $h_{fe1}$  : hauteur curviligne de la saillie effective des dents de la roue 1, mesurée sur un grand cercle de  $k$
- $h_{ae1}$  : hauteur curviligne du creux effectif des dents de la roue 1, mesurée sur un grand cercle de  $k$
- $i$  : angle  $\widehat{VDA}$
- $j$  : angle  $\widehat{TVO}$
- $k$  : sphère de centre  $S$  et de rayon  $v$
- $l$  : paramètre du glissement spécifique
- $m$  : module primitif de fonctionnement
- $n$  : numéro de la dent
- $\mathbf{n}$  : vecteur normal unitaire à la surface active
- $\mathbf{n}_{pt}$  : vecteur unitaire normal au plan tangent au contact, extérieur au pignon
- $n_1$  : angle  $\widehat{S_1SI}$
- $p$  : le pas ( $p = e_1 + c_1 = e_2 + c_2$ )
- $p_1$  : angle entre les plans  $(S, O_1, F_1)$  et  $(S, O_1, S_2)$
- $p_2$  : angle entre les plans  $(S, O_1, F_1)$  et  $(S, O_1, S_1)$

$p_k$	: pression en $M_{pt}^{(k)}$
$q$	: angle $\widehat{TOV}$
$r_1$	: rayon du cercle primitif $C_1$
$r_{b1}$	: rayon du cercle de base du pignon $C_{b1}$
$s$	: angle $\widehat{VSD}$
$t$	: angle $\widehat{VSA}$
$u$	: angle $\widehat{TOF_1}$ et paramètre de la développante de cercle sphérique
$v$	: rayon de la sphère $k$
$v_B$	: rayon de la sphère qui passe par le maximum du bombé de la dent
$\mathbf{x}_i$	: vecteur directeur unitaire de l'axe $X_i$
$\mathbf{x}_p$	: vecteur directeur de l'axe de rotation du pignon, exprimé dans le repère fixe
$\mathbf{x}_r$	: vecteur directeur de l'axe de rotation de la roue, exprimé dans le repère fixe
$\mathbf{x}_{pt}, \mathbf{y}_{pt}$	: directions principales du contact
$z_1$	: nombre de dents du pignon
$z_2$	: nombre de dents de la roue

### Majuscules

$A_1, A_2, A_3$	: composantes du vecteur translation entre $S_f$ et $S_1$
$A_1, B_1, C_1$	: paramètres du bombé du pignon
$A_{ae1}$	: intersection du profil et du cercle de tête effectif du pignon
$A_{fe1}$	: intersection du profil et du cercle de pied effectif du pignon
$A_{p1}$	: intersection du profil et du cercle primitif du pignon
$B$	: valeur du maximum du bombé
$B_p$	: point appartenant à l'axe de rotation du pignon
$B_r$	: point appartenant à l'axe de rotation de la roue
$C$	: couple
$C_1$	: cercle primitif : intersection de la sphère $k$ et de la surface axoïde liée à 1
$C_{a1}$	: cercle de tête du pignon (qui est tangent aux saillies de la denture)
$C_{ae1}$	: cercle de tête effectif du pignon
$C_{b1}$	: cercle de base du pignon, tracé sur la sphère $k$ et de rayon $r_{b1}$
$C_{f1}$	: cercle de pied du pignon (qui est tangent aux fonds de la denture)
$C_{fe1}$	: cercle de pied effectif du pignon
$C_m$	: couple exercée sur le pignon par l'extérieur
$D_1; D_2$	: petits cercles de la sphère, parallèles à $(P)$
$E$	: intersection des cercles (P) et (N)
$E'$	: intersection des cercles (P) et (N')
$E''$	: intersection des cercles (P) et (N'')
$EC_i$	: écart cinématique d'engrènement
$EC_i^d$	: écart cinématique de déformation sous charge
$F_1$	: pied de la développante de cercle sphérique sur le cercle de base 1
$G_1; G_2$	: intersection du grand cercle tangent à $P_r$ sur $(P)$ avec $D_1$ ou $D_2$
$H$	: point appartenant à $(P)$ tel que $\langle H, I, V'' \rangle$ soit rectangle en $H$
$I$	: point de roulement sans glissement des cercles primitifs
$K_{a1}$	: coefficient de tête du pignon
$K_{ae1}$	: coefficient de tête effectif du pignon
$K_{f1}$	: coefficient de pied du pignon
$K_{fe1}$	: coefficient de pied effectif du pignon
$K_h$	: coefficient de hauteur de dent
$K_i$	: raideur de torsion de l'engrenage à la position $i$

$M$	: point de contact entre des dentures
$M_{ij}$	: matrice de passage du repère $R_j$ vers le repère $R_i$
$M_{pt}^{(k)}$	: point n° $k$ situé au centre d'une surface élémentaire du maillage du plan tangent au contact
$M_1^{(k)}$	: projection de $M_{pt}^{(k)}$ suivant $\mathbf{n}_{pt}$ sur $\Sigma_1$
$M_{1,d}^{(k)}$	: point $M_1^{(k)}$ après déformation
$N$	: surface génératrice de la roue plane $P$ qui permet d'obtenir des surfaces en développante de cercle sphérique
$\mathbf{N}$	: vecteur normal à la surface active
$N'$	: surface génératrice plane rigidement liée à $P'$
$N''$	: surface génératrice plane rigidement liée à $P$
$Nc$	: nombre de surfaces élémentaires dans les zones de contact potentielles discrétisées
$N_{zpas}$	: nombre d'intervalles dans un pas angulaire du pignon
$O_i$	: point intersection de $(S, X_i)$ et de $k$
$O'_{bi}$	: centre du cercle de base $C_{bi}$
$O'_i$	: centre du cercle primitif de la pièce $i$
$P$	: surface (plan) contenant l'axe central $(SI)$ et tangent aux surfaces primitives $(S, C_1)$ et $(S, C_2)$
$(P)$	: grand cercle intersection de $k$ et du plan $P$
$P'$	: plan contenant $(SI)$ et faisant un angle $\alpha$ avec $P$ , tangent au(x) cône(s) de base
$(P')$	: grand cercle intersection de $P'$ et de $k$ : cercle d'engrènement
$P_1$	: profil en développante de cercle sphérique, intersection de $\Upsilon_1$ et $k$
$P_r$	: profil de la surface de la roulette qui génère une surface en développante de cercle sphérique
$P_b$	: plan coupant $P$ suivant $(SI)$ et perpendiculaire à $N$ , rigidement lié à $P$ constamment perpendiculaire à $N''$
$Q_1; Q_2$	: point de rebroussement de la développante de cercle sphérique de la roue plane
$R_g$	: rayon de la sphère qui passe par le talon de la dent
$R_p$	: rayon de la sphère qui passe par la pointe de la dent
$R0$	: repère fixe lié au bâti
$R1$	: repère lié au pignon, dans le quel est définie l'équation de la développante de cercle sphérique
$R2$	: repère lié à la roue
$R3$ à $R7$	: repères
$S$	: sommet des cônes et centre de la sphère $k$
$(SI)$	: axe central du torseur cinématique de $\{C_{1/2}\}$ , aussi noté $\Delta$
$Sf$	: repère commun lié au bâti
$S1$	: repère lié aux surfaces fonctionnelles du bâti permettant de réaliser la liaison pivot avec le pignon
$S2$	: repère lié aux surfaces fonctionnelles du bâti permettant de réaliser la liaison pivot avec la roue
$S3$	: repère lié aux surfaces fonctionnelles du pignon permettant de réaliser la liaison pivot avec le bâti
$S4$	: repère lié aux surfaces fonctionnelles de la roue permettant de réaliser la liaison pivot avec le bâti
$S5$	: repère lié à la première dent du pignon
$S6$	: repère lié à la première dent de la roue
$S7$	: repère lié à la denture du pignon
$S8$	: repère lié à la denture de la roue
$S_1$	: intersection de l'arc d'engrènement avec le cercle de tête effectif du pignon
$S_2$	: intersection de l'arc d'engrènement avec le cercle de tête effectif de la roue

$S_k$	: surface élémentaire du maillage du plan tangent
$u_{35}, v_{35}, w_{35}$	: composante du vecteur déplacement entre les origines des repères $S5$ et $S3$
$u_{46}, v_{46}, w_{46}$	: composante du vecteur déplacement entre les origines des repères $S6$ et $S4$
$T$	: surface engendrée par les normales à $N$ et passant par $(SI)$
$T_1$	: point de tangence de $C_{b1}$ et de $(P')$
$T_2$	: point de tangence de $C_{b2}$ et de $(P')$
$U$	: rapport de transmission
$U_1$	: second point de contact sur l'arc d'engrènement lorsque le premier à lieu en $S_1$
$U_2$	: second point de contact sur l'arc d'engrènement lorsque le premier à lieu en $S_2$
$V$	: point intersection de $N$ et de $(P')$
$V'$	: point intersection de $N'$ et de $(P')$
$V''$	: point intersection de $N''$ et de $(P')$
$W_1; W_2$	: point de tangence entre $(P)$ et $D_1$ ou $D_2$
$W_1^{(k)}$	: déplacement du point $M_1^{(k)}$ , projeté sur la normale au plan tangent
$\mathbf{X}_1$	: vecteur position d'un point appartenant à la surface conique primaire (réglée) du pignon
$\mathbf{X}_{B1}$	: vecteur position d'un point appartenant à la surface conique nominale (bombé) du pignon
$X_i$	: premier axe du repère $Ri$ ou $Si$
$Y_i$	: deuxième axe du repère $Ri$ ou $Si$
$Z_i$	: troisième axe du repère $Ri$ ou $Si$
$X_i^{[j]}$	: axe numéro $i$ du repère $Sj$ ; utilisé pour une notation contractée
$(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$	: coordonnées d'un point d'une surface réglée en développante de cercle sphérique

#### Lettres grecques minuscules

$\alpha$	: angle de pression, angle entre les plans $P$ et $P'$
$\alpha_0$	: angle entre les normales de $N''$ et $P$
$\beta$	: angle $\widehat{T_1SV}$
$\gamma_1$	: angle $\widehat{T_1SI}$
$\gamma_2$	: angle $\widehat{T_2SI}$
$\delta$	: ligne intersection de $N$ et de $T$
$\delta_1$	: demi angle au sommet de $(S, C_1)$
$\delta_{b1}$	: demi angle au sommet de $(S, C_{b1})$
$\epsilon_\alpha$	: rapport de conduite
$\epsilon^{(k)}$	: écart initial au point $M_{pt}^{(k)}$
$\epsilon_1^{(n)}$	: erreur de pas cumulé pour la $n$ ième dent du pignon
$\zeta$	: angle entre $(P_b)$ et $(P)$
$\eta_1$	: angle $\widehat{S_2SO_1}$
$\eta_2$	: angle $\widehat{S_1SO_2}$
$\theta$	: angle $\widehat{ISE}$
$\vartheta$	: vecteur défini par $\mathbf{r}_{pt}^{[f]} - \mathbf{r}_{Br}^{[f]}$
$\lambda_1$	: angle $\widehat{T_1SS_1}$
$\lambda_2$	: angle $\widehat{T_2SS_2}$
$\mu$	: angle $\widehat{ISV''}$
$\nu_m$	: angle du module sur la sphère
$\nu_{ae1}$	: angle de tête effectif du pignon
$\nu_{a1}$	: angle de tête du pignon

$\nu_{fe1}$	: angle de pied effectif du pignon
$\nu_{f1}$	: angle de pied du pignon
$\xi$	: angle $\widehat{O_1SV}$
$\pi$	: angle $\widehat{HSV}$
$\varpi$	: erreur d'orientation entre les axes de rotation ( $\Sigma = \Sigma_0 + \varpi$ )
$\rho$	: paramètre de rotation pour le passage de $R6$ à $R7$
$\sigma_1^{(n)}$	: angle de rotation entre les repères $S7$ et $S5$
$\tau$	: angle $\widehat{T_1SD}$
$\phi_1$	: angle de rotation du pignon par rapport au bâti
$\phi_2$	: angle de rotation de la roue par rapport au bâti
$\phi_1^{ndk}$ ou $\phi_1^{nuk}$	: valeurs discrètes des positions du pignon
$\varphi_1$	: angle entre les plans $(S, O_1, F_1)$ et le plan $(S, O_1, A_p1)$
$\chi_1$	: angle $\widehat{T_1SS_2}$
$\chi_2$	: angle $\widehat{T_2SS_1}$
$\psi_1$	: angle de la demi épaisseur de la dent sur le cercle de tête effectif du pignon
$\omega_{P/R0}$	: vitesse de rotation de la surface $P$ par rapport au repère fixe $R0$

#### Lettres grecques majuscules

$\Gamma$	: zone de contact
$\Gamma_1$	: erreur d'orientation entre les repères $S3$ et $S5$ du pignon
$\Delta$	: axe central du torseur cinématique de $\{C_{1/2}\}$ aussi noté $(SI)$
$\Delta_{\phi_1}$	: valeur de l'incrément de $\phi_1$
$\Theta$	: angle de conduite $\widehat{S_1SS_2}$
$\Lambda$	: rapprochement des corps solides en contact
$\Pi$	: nombre de tirages pour la méthode de Monte Carlo
$\Sigma$	: angle réel entre les axes de rotations
$\Sigma_0$	: angle nominal entre les axes de rotations $(S, X_1)$ et $(S, X_2)$
$\Sigma_1$	: surface active de substitution du pignon
$\Sigma_2$	: surface active de substitution de la roue
$\Upsilon_1$	: surface enveloppe de $N$ par rapport à 1
$\Upsilon_2$	: surface enveloppe de $N$ par rapport à 2
$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$	: fonction d'interpolation linéaire à 2 paramètres
$\Omega$	: fonction rotation pour la création du bombé
$\aleph$	: domaine de recherche de solution de l'algorithme d'optimisation

#### Notations des éléments géométriques

$\langle x, y, z \rangle$	: triangle sphérique de sommet $x, y$ et $z$
$(AB)$	: droite passant par les points $A$ et $B$
$(S, X_1)$	: axe passant par le point $S$ et de direction $X_1$
$(X)$	: intersection de la surface $X$ avec la sphère $k$
$(A, B, C)$	: plan contenant les points $A, B$ et $C$
$\widehat{AB}$	: arc de grand cercle joignant les points $A$ et $B$
$\widehat{ABC}$	: angle entre les arcs de grands cercles $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$
$(S, C_i)$	: cône de sommet $S$ et de directrice $C_i$ ,
$[AB]$	: segment d'extrémités $A$ et $B$

Notation des opérateurs mathématiques

$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$  : produit mixte

$E(.)$  : partie entière de .

$\sec$  :  $= \frac{1}{\cos}$ , fonction *sécante*



# Chapitre 1

## Introduction

Ce travail s'inscrit dans un contexte d'évolution des structures des entreprises et des méthodes de conception. Cette évolution est ainsi définie par l'Union Européenne («Manufuture») et reprise par P. MARTIN : «la nouvelle structure des entreprises européennes résulte de changements dans six domaines principaux : d'une production s'appuyant sur les ressources à une production s'appuyant sur la connaissance, de la linéarité à la complexité, de l'entreprise individuelle à l'entreprise en réseau, de mono-disciplinaire à transdisciplinaire, des dimensions macro à micro puis nano, d'une production de l'offre à une production de la demande. L'analyse faite montre que la connaissance scientifique et technologique incorporée dans les produits manufacturés était de 5% en 1945, elle est actuellement de 16% et l'objectif est de 20% en 2020. Cette évolution conduit à des innovations technologiques et à une modification complète de la chaîne conception - industrialisation s'appuyant de plus en plus sur des outils numériques. La modélisation et la simulation des procédés, des processus, des produits permet de prédire la qualité et la performance des produits réalisés et de moyens de production en mobilisant des connaissances scientifiques et technologiques. Elles nécessitent une approche globale intégrant les aspects technologiques, économiques, logistiques et sociétaux et des validations expérimentales sur des équipements pilotes. C'est cette innovation continue de produits et de processus qui amènera un développement maîtrisé et durable. »

Cette situation impacte directement les processus de conception. Ceux-ci font l'objet de nombreuses réflexions pour les rationaliser et intégrer de plus en plus de paramètres (ensemble du cycle de vie) y compris ceux du point de vue de l'utilisateur final (ergonomie, perception subjective du produit, . . . ) [1, 2, 3]. Cette intégration permet de réduire les coûts pour l'entreprise en concevant des produits mieux adaptés aux processus de fabrication. Dans de nombreux travaux de recherche, le processus de conception est «décortiqué» de diverses façons.

Afin de positionner nos travaux, nous retenons un découpage qui distingue 3 étapes ([2]

chapitre 9) :

- Définition du système (system design)
- Détermination des paramètres (parameter design)
- Détermination des tolérances (tolerance design)

Nos travaux portent principalement sur les 2 dernières étapes, appliquées aux engrenages coniques. La détermination des paramètres principaux d'un engrenage nécessite une bonne connaissance de la géométrie nominale et de ses propriétés. La détermination des tolérances résulte d'un compromis entre les coûts de réalisation et la qualité de fonctionnement : l'absence de problème d'assemblage dans notre cas.

Dans la famille des mécanismes de transmission de puissance, les engrenages occupent une place importante, tant par leur utilisation que par les travaux qui leurs sont consacrés. Jusqu'à ces dernières années, la forme finale et fonctionnelle de la denture était obtenue par usinage (taillage, rasage ou rectification) car les autres procédés de mise en forme ne permettaient pas d'atteindre la précision souhaitée [4, 5]. La géométrie des dents était donc l'image du profil de l'outil et du mouvement relatif pièce-outil généré par la cinématique de la machine à tailler [6, 7, 8]. La maîtrise accrue des matériaux et des procédés de forgeage permet aujourd'hui d'obtenir des dentures de pignons coniques d'une qualité suffisante pour pouvoir les utiliser sans autre procédé de finition (pièces «net shape» [4, 9, 10]) pour des séries importantes de pièces. Depuis quelques années, la société ASCOFORGE SAFE (Hagondange 57) produit des pignons coniques pour différentiels automobiles par forgeage net shape. La collaboration entre cette entreprise et le CER ENSAM de Metz est à l'origine du présent travail.

La forme de la denture étant intimement liée à celle de la matrice de forgeage, elle n'est plus limitée par une cinématique de machine et le profil de l'arête de coupe. Il existe une plus grande liberté pour la définition de la géométrie de la denture. Pour cette raison, il est nécessaire de redéfinir globalement la géométrie des pignons coniques droits ainsi que son paramétrage afin que les professionnels du formage puissent disposer d'un modèle géométrique pertinent, leur permettant d'intégrer facilement les contraintes liées au procédé de fabrication.

Un engrenage étant un mécanisme, il doit vérifier les 4 conditions d'existence et de fonctionnement définies par J. M. LINARES [11]. Elles permettent, lors de la conception, de définir la géométrie de celui-ci. Ces conditions sont les suivantes :

1. L'ensemble des pièces du mécanisme doivent s'assembler.
2. Il existe une relation cinématique qui lie les paramètres d'entrée et de sortie du mécanisme.
3. Le mécanisme doit, lors de son fonctionnement, «résister» aux sollicitations mécaniques, thermiques, ...
4. Le mécanisme doit «résister durablement» aux sollicitations alternées (fatigue, fluage, ...).

Ces conditions devront être prises en compte lors de la redéfinition de la géométrie des engrenages et de leurs tolérances.

Cette nouvelle géométrie doit assurer un fonctionnement avec une erreur cinématique minimale (condition 2) et une durée de vie suffisante (conditions 3 et 4), malgré les défauts et variations de mise en forme, de montage et de propriétés mécaniques. La vérification du dimensionnement pour la durée de vie souhaitée (condition 4) nécessite une connaissance parfaite de la géométrie et un certain nombre de résultats expérimentaux d'essais réalisés dans des conditions relativement proches de la situation de l'engrenage dimensionné. Or, dans le cas de nouvelles techniques d'obtention de la géométrie finale, ces résultats expérimentaux ne sont pas forcément encore connus ; ce point n'est pas abordé dans ces travaux.

Le profil en développante de cercle sphérique est celui qui possède l'ensemble le plus avantageux de caractéristiques. Pour cette raison, seul le modèle géométrique de pignon conique à denture droite et à profil en développante de cercle sphérique est traité.

Les engrenages coniques à denture droite sont certes connus depuis longtemps. Cependant, en raison de l'évolution du procédé d'obtention, il nous est apparu important de réaliser, au chapitre 2, une synthèse de la géométrie nominale et de ses caractéristiques (conditions 2 et 1). Cette synthèse peut paraître un peu longue mais elle constitue cependant le socle des développements suivants. Les nouvelles méthodes de conception proposent de tenir compte au plus tôt de l'influence des écarts géométriques sur le comportement du système. Dans le chapitre 3, nous modélisons les écarts géométriques intervenant dans l'engrenage et nous proposons une méthode d'évaluation des écarts cinématiques lors de l'engrènement sans déformation (conditions 1 et 2). Ce modèle est utilisé au chapitre 4 pour faire l'analyse des tolérances et leur optimisation par des méthodes statistique et génétique. Les engrenages étant généralement relativement chargés, l'effet des déformations sur l'aspect cinématique du fonctionnement de l'engrenage n'est pas négligeable. Aussi, nous proposons au chapitre 5, d'inclure dans l'estimation de l'écart cinématique d'engrènement, l'effet des déformations (engrènement sous charge - condition 3).

Cette analyse et cette synthèse de la géométrie et des tolérances ont nécessité les représentations de la géométrie (modélisation de la géométrie, des déplacements et des défauts), les représentations des tolérances ou des spécifications (modélisation des spécifications et des exigences) et une formalisation du comportement de l'engrènement (modélisation du comportement et outils de transfert). Ces activités d'analyse et de synthèse ont de plus nécessité l'utilisation de stratégies de résolution. Le graphe d'idées (figure 1.1) présente une synthèse non exhaustive de celles que nous avons pu faire à partir de l'analyse de la littérature.

En effet, lors de la définition de la géométrie nominale (chapitre 2), nous avons besoin, pour l'analyse et la synthèse géométrique, d'un modèle paramétrique des surfaces. Ce modèle est construit à l'aide des outils mathématiques élémentaires et en particulier des matrices homogènes. La stratégie de résolution repose simplement sur le raisonnement géométrique. Les différentes équations et inéquations modélisant le comportement mécanique résultent des propriétés cinématiques et des équations (et inéquations) de compatibilité du système mécanique supposé indéformable.

Pour introduire des écarts géométriques (chapitre 3), nous définissons un modèle de substitution qui est issu du modèle nominal et qui intègre des déviations et des variations de paramètres. Il permet de prendre en compte des écarts de dimensions, de position, d'orientation et de forme. La résolution quantitative du problème d'analyse de l'engrènement est réalisée de façon déterministe par un solveur non linéaire. La modélisation du comportement du système passe par la définition du comportement des liaisons, notamment celui du contact glissant *intermittent* entre les dentures. Le modèle mathématique correspondant à ce type de contact est défini par la théorie de l'analyse du contact entre dents (*Tooth Contact Analysis*). Toutes les pièces sont supposées indéformables.

Afin d'analyser les tolérances (chapitre 4), nous adoptons une stratégie de résolution qui repose sur une approche statistique : la simulation de Monte Carlo basée sur l'analyse de l'engrènement. L'optimisation des tolérances intègre l'analyse dans un algorithme génétique qui réalise une recherche d'un optimum.

Au dernier chapitre ((chapitre 5), nous réalisons une analyse de l'engrènement d'un système déformable (*Load Tooth Contact Analysis*). La structure de cette analyse reprend celle utilisée pour un modèle indéformable et permet d'intégrer les déformations. La géométrie non déformée est définie par le modèle de substitution. La déformation locale au niveau du contact est estimée par la théorie de BOUSSINESQ et de CERRUTI. Les déformations des dentures en dehors du contact sont évaluées par la méthode des éléments finis.

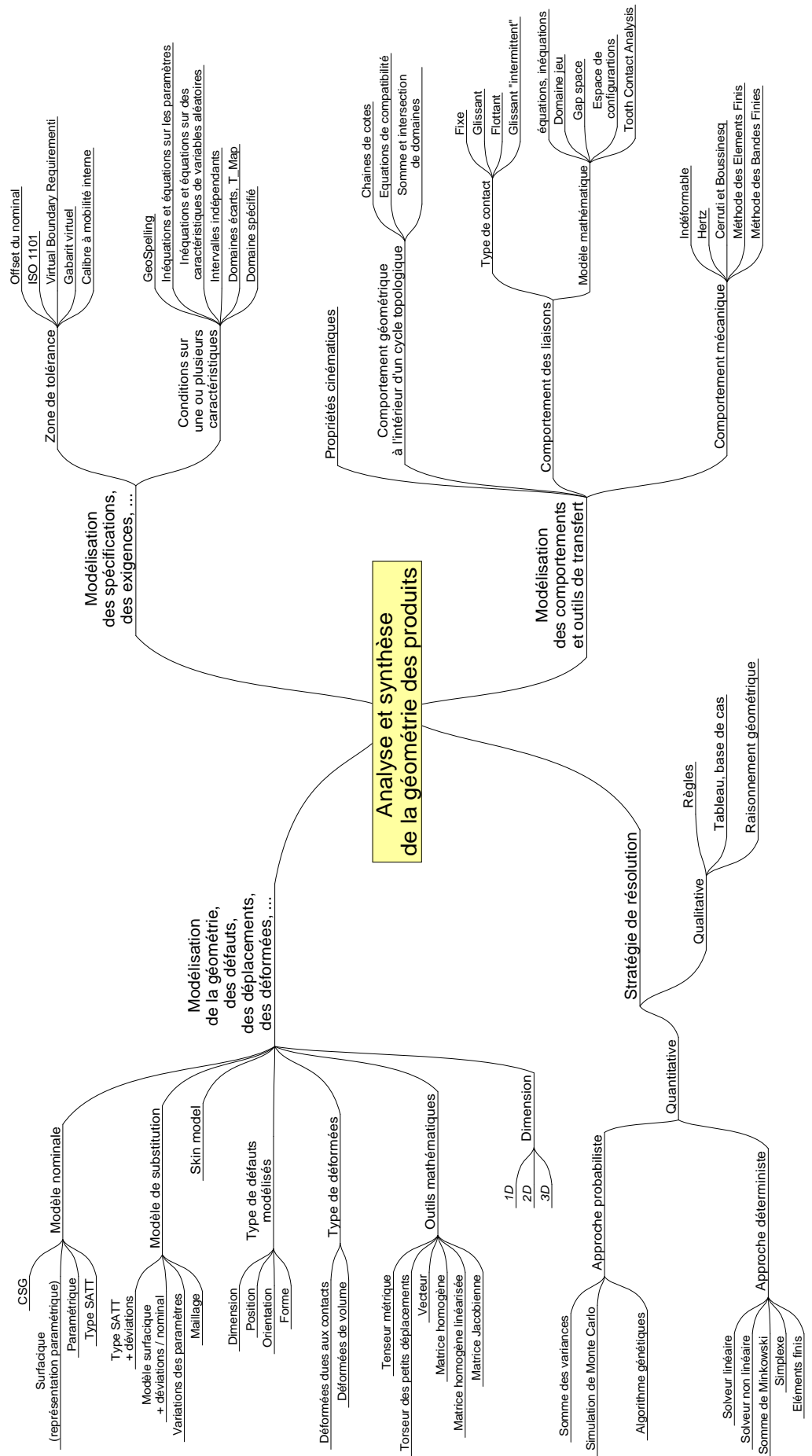


figure 1.1 – Synthèse des modèles et outils utilisés en analyse et synthèse de la géométrie et des tolérances



## Chapitre 2

# Géométrie des engrenages coniques à denture droite

L'élaboration du modèle géométrique nominal de la denture consiste à définir le paramétrage, la forme des surfaces actives et permet la connaissance de l'ensemble des relations qui lient les paramètres et qui caractérisent le comportement de l'engrenage. Notre modèle a pour fondement les propriétés de la développante de cercle sphérique qui sont connues depuis fort longtemps. En 1828, M. LEFEBVRE [12] avait défini la «développante sphérique» et en avait donné une méthode de construction pratique. Il en avait perçu les principales caractéristiques et les avantages que représentent son utilisation par rapport à l'épicycloïde sphérique. En 1847, dans son traité sur *l'Application de la géométrie descriptive aux ombres, à la perspective, à la gnomonique et aux engrenages*, T. OLIVIER [13] définit par la géométrie descriptive, et analyse plus finement les avantages et les inconvénients des engrenages à dentures en développante et à denture épicycloïde pour des roues cylindriques et coniques<sup>1</sup>. Au siècle passé, afin de simplifier le modèle, l'étude des engrenages coniques fut ramenée à celle des engrenages cylindriques par l'approximation de TREGOLD. MM. RAFFY et GODET [14] ont étudié la validité de cette approximation. M. LE BORZEC [15] a transposé la notion de déport de denture, bien définie pour les engrenages cylindriques, aux engrenages coniques et en a déduit une méthode de correction de leur denture. Cette notion de déport et la normalisation associée ont fortement participé à la simplification de la définition géométrique des engrenages cylindriques. Le déport est une longueur concrète puisque ce fut longtemps la seule cote réglée sur les machines de taillage de type MAAG ou ROLLET (procédé SUNDERLAND). Cependant, compte tenu de l'opportunité qu'offre aujourd'hui la précision des procédés de mise en forme (qualité 6 avant traitement thermique, qualité 7 après) et des moyens de calcul, aucune approximation géométrique n'est retenue et nous montrons que

---

<sup>1</sup>Le musée des Arts et Métiers à Paris possède plusieurs réalisations en bois des engrenages définis par T. OLIVIER

la notion de déport n'est pas compatible avec une géométrie en développante de cercle sphérique.

Les propriétés des triangles sphériques et la trigonométrie associée constituent la base mathématique de ce chapitre (voir annexe A.1). Dans la première partie, nous présentons la construction des surfaces coniques en développante de cercle sphérique par la méthode des roulettes. La roue plane génératrice est définie. Dans la seconde partie, à partir de ces surfaces coniques primaires, nous donnons des éléments de construction des dentures de la roue et du pignon. Nous consacrons la troisième partie à la définition des moyens de calcul des indices de qualité de l'engrenage : interférence de fonctionnement, rapport de conduite et glissement spécifique. Enfin, la quatrième partie est dédiée à la détermination de la position angulaire du pignon pour des configurations géométriquement remarquables.

La figure 2.1 indique en noir les modèles et outils utilisés dans ce chapitre par rapport à l'ensemble des possibilités présenté en introduction page 19, figure 1.1.

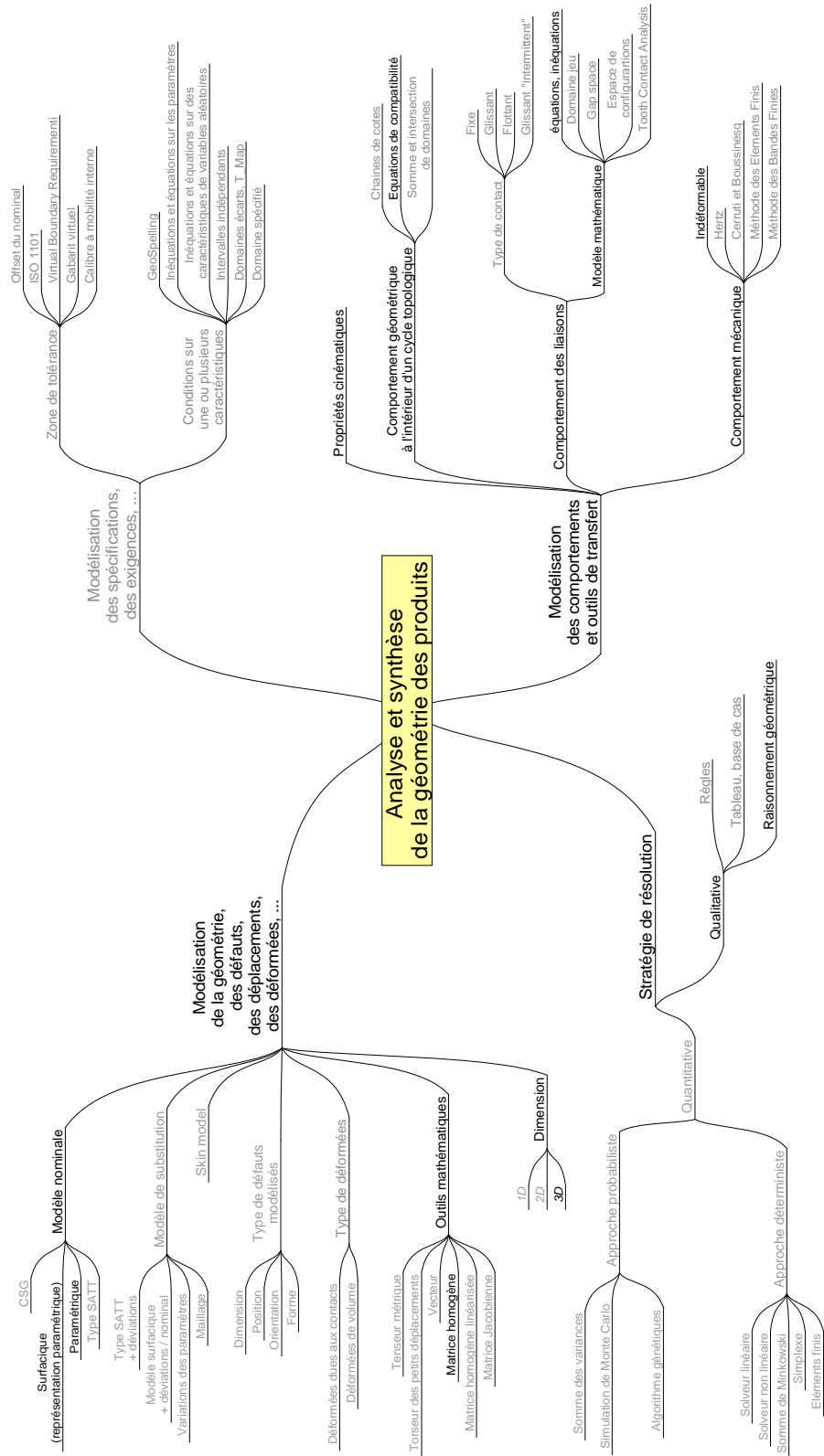


figure 2.1 – Modèles et outils utilisés au chapitre 2

## 2.1 Définition cinématique des surfaces actives d’engrenage conique à denture droite en développante de cercle sphérique

De l’Antiquité à la Renaissance, la conception des engrenages se limitait à une recherche empirique de formes qui engrenaient et pouvaient être réalisées simplement. Les Grecs et les Romains ont réalisé quelques systèmes utilisant des roues dentées cylindriques, le profil des dents étant vraisemblablement obtenu par un précieux savoir-faire et non le résultat d’une théorie de l’engrènement. Les engrenages les plus courants étaient alors les systèmes à lanterne et les roues à doigts que l’on trouvait par exemple dans les moulins. On peut considérer qu’une étude plus rationnelle de ces systèmes débuta avec L. DE VINCI à la fin du XV<sup>ème</sup> siècle. Aujourd’hui, la conception des engrenages peut se faire de différentes façons, mais les méthodes les plus répandues sont celles qui permettent d’intégrer les contraintes de fabrication : l’outil crémaillère qui est le support de la définition de la géométrie et permet sa fabrication. Lors de nos travaux, nous avons utilisé principalement la méthode des roulettes.

Après quelques généralités, nous définissons la développante de cercle sphérique et donnons le principe de la méthode des roulettes. Nous réalisons ensuite une synthèse de ces définitions en donnant la forme de la roue plane théorique. Puis, le modèle mathématique de la développante de cercle sphérique est démontré par deux méthodes différentes. Enfin, nous traitons le cas des surfaces obtenues par une roue plane à denture pyramidale en élaborant les équations du profil et de la surface d’action.

### 2.1.1 Problématique et préliminaires

Afin de minimiser les pertes par frottement au niveau du contact, toutes les méthodes de conception d’engrenage cherchent à localiser les points de contact entre le pignon et la roue à proximité de l’axe central  $\Delta$  du torseur cinématique  $\{\mathcal{C}_{pignon/roue}\}$  [16]. La forme globale des roues dentées est ainsi liée à la surface générée par  $\Delta$  dans son mouvement par rapport à chacune des pièces. Ces surfaces sont appelées *surfaces axoïdes* ou *surfaces primitives*. Dans le cas des engrenages coniques, trois corps sont en liaisons : le bâti, le pignon et la roue. Ces éléments sont respectivement numérotés 0, 1 et 2. Le pignon et la roue sont liés au bâti par une liaison pivot et les axes de rotation  $X_1$  et  $X_2$  sont concourants en  $S$ . Les pièces 1 et 2 sont en contact au niveau de leurs surfaces actives. Le système étant homocinétique, l’axe central  $\Delta$  du torseur cinématique  $\{\mathcal{C}_{1/2}\}$  occupe une position fixe par rapport au bâti. Une analyse cinématique rapide montre que d’une part, cet axe est coplanaire et concourant aux axes  $(S, X_1)$  et  $(S, X_2)$  et d’autre part que la vitesse relative est nulle sur  $\Delta$ . L’angle non orienté entre  $(S, X_1)$  et  $(S, X_2)$  est noté  $\Sigma_0$ , celui entre  $(S, X_1)$  et  $(S, \Delta)$  est noté  $\delta_1$  et  $\delta_2$  est l’angle entre  $(S, X_2)$  et  $(S, \Delta)$  ( $\Sigma_0 = \delta_1 + \delta_2$ ).

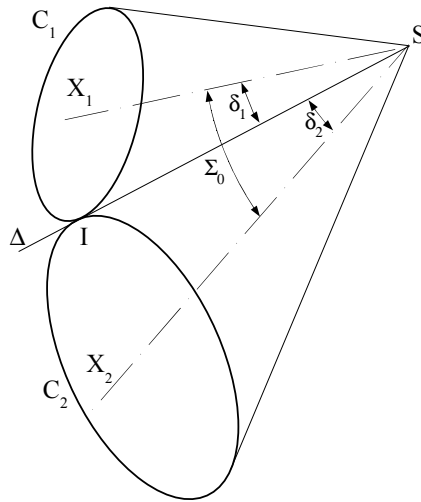


figure 2.2 – Surfaces axoïdes

Les surfaces axoïdes de l’engrenage conique sont des cônes de sommet  $S$  et de demi angle au sommet  $\delta_1$  et  $\delta_2$  (figure 2.2). Ils sont tangents le long de  $\Delta$ . Les intersections des cônes primitifs du pignon et de la roue avec la sphère  $k$  de centre  $S$  et de rayon  $v$  quelconque sont, respectivement, les cercles primitifs  $C_1$  et  $C_2$ . Ces deux petits cercles de la sphère sont tangents en  $I$ .  $C_1$  et  $C_2$  étant des directrices des cônes, les cônes primitifs sont notés  $(S, C_1)$  et  $(S, C_2)$ .

La définition géométrique d’un engrenage peut se faire par différentes méthodes :

- La trajectoire du point de contact est imposée et il est alors possible de construire des familles de surfaces remplissant les conditions d’engrènement.

Exemple : Engrenage du type WILDHABER-NOVIKOV [17]

- La méthode des enveloppes [18] : la géométrie de l’une des roues est connue et on l’utilise pour générer la roue conjuguée.
- La méthode des roulettes [19, 18] : une surface appelée *roulette* roule sans glisser selon  $\Delta$  avec les surfaces primitives. Des surfaces génératrices sont rigidement liées à la roulette et elles ont pour enveloppes dans les repères des roues, des surfaces conjuguées.

Ce mémoire ne traitera que de cette dernière méthode, en raison de son aspect générique.

## 2.1.2 Principe de génération d'une développante de cercle sphérique

Dans le plan, une développante de cercle est la trajectoire d'un point appartenant à une ficelle tendue déroulée d'un cercle. La développante de cercle sphérique procède du même principe, tous les éléments étant sur une sphère.

La construction d'une surface en développante de cercle sphérique est la suivante. Un cône de sommet  $S$ , d'axe  $(S, X_1)$  roule sans glisser sur le plan  $P'$  (figure 2.3). L'intersection du cône et du plan avec la sphère  $k$  sont, respectivement, le petit cercle  $C_{b1}$  appelé *cercle de base* et le grand cercle de la sphère ( $P'$ ). Ces deux cercles roulent sans glisser en  $T_1$ . Le plan  $N'$ , passant par  $S$  et perpendiculaire à  $P'$  est invariablement lié à ce dernier. L'intersection de  $N'$  et  $P'$  est la droite  $(SV')$ ,  $V'$  appartenant à  $k$ .

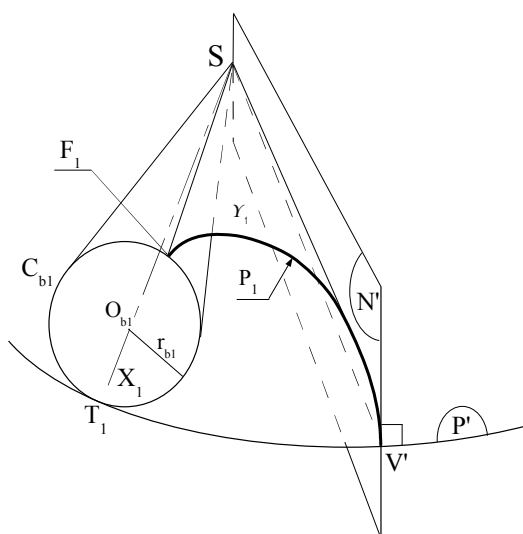


figure 2.3 – Génération de la surface en développante de cercle sphérique

Lors du mouvement du plan  $P'$  roulant sans glisser sur le cône de base  $(S, C_{b1})$ , l'enveloppe des positions du plan  $N'$  dans son mouvement par rapport au cône de base est une surface conique  $\Upsilon_1$ . Le plan  $P'$  étant normal au plan générateur  $N'$  suivant  $(SV')$ , il l'est également par rapport à la surface enveloppe  $\Upsilon_1$ . Celle-ci est balayée par la droite  $(SV')$  du plan  $P'$  lorsque celui-ci roule sans glisser sur le cône. Cette surface est également une surface conique, dont un profil directeur est la ligne  $P_1$ , intersection de la sphère  $k$  avec  $\Upsilon_1$ .

$P_1$  est la courbe décrite par le point  $V'$  lorsque l'arc de grand cercle  $\widehat{T_1V'}$  roule sans glisser sur  $C_{b1}$ . Cette courbe, tracée sur la sphère  $k$ , est similaire à la développante de cercle plane, c'est une *développante sphérique du cercle*  $C_{b1}$ . Elle jouit de propriétés identiques à celle de la développante plane :

- l'arc  $\widehat{T_1V'}$  est normal en  $V'$  au profil  $P_1$
- le point  $F_1$  étant le point où  $P_1$  rencontre  $C_{b1}$ , nous avons à chaque instant :  $\widehat{T_1V'} = \widehat{T_1F_1}$
- la développante de cercle sphérique décrite par un autre point  $V^*$  de la droite  $(SV')$  est une courbe homothétique de  $P_1$  dans le rapport des distances  $SV^*$  et  $SV'$ .

Les surfaces en développantes de cercle sphérique présentent les avantages suivants pour l'engrenage :

- Les surfaces restent conjuguées si l'angle entre les axes de rotation varie.
- Les vecteurs normaux aux surfaces au(x) point(s) de contact(s) sont toujours contenus dans le même plan :  $P'$ .

### 2.1.3 Application de la méthode des roulettes aux engrenages concourants

La méthode des roulettes fut généralisée à tout type d'engrenage par M. CAPELLE [19]. La définition générale qu'il en donne est la suivante :

«Je dirai qu'un engrenage est taillé par la méthode des roulettes si la denture de chacune des roues qui le composent est engendrée de la façon suivante :

*Soit un hyperboloïde de révolution  $\mathcal{H}$  (pouvant être dégénéré) lié et coaxial à la roue considérée,  $\mathcal{A}$  une surface axoïdale à  $\mathcal{H}$  et munie d'une surface  $\mathcal{N}$  qui lui est invariablement liée : la denture de la roue est alors l'enveloppe  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{N}$  dans la viration  $\mathcal{A}/\mathcal{H}$  et l'arête vive de l'outil est telle que dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{A}$  elle taillerait  $\mathcal{N}$ . Les deux roues d'engrenages correspondent à deux ensembles  $[\mathcal{A}_1, \mathcal{N}_1]$  et  $[\mathcal{A}_2, \mathcal{N}_2]$  tels que  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  soient axoïdes et que  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  s'enveloppent dans la viration  $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$ .»*

Appliquée à un engrenage conique, cette définition peut s'exprimer de la façon suivante :

Quelle que soit une surface conique  $P$ , de sommet  $S$  et tangente aux deux cônes primitifs (axoïdes) le long de l'axe  $\Delta$ , lorsque  $P$  roule sans glisser sur ces deux cônes, une surface génératrice  $N$  (figure 2.4), invariablement liée à  $P$ , a pour enveloppes deux surfaces  $\Upsilon_1$  et  $\Upsilon_2$  liées respectivement aux cônes  $(S, C_1)$  et  $(S, C_2)$  (figure 2.5). Comme les trois mouvements ( $P/1$ ,  $P/2$  et  $1/2$ ) ont le même axe instantané de rotation, M. PRUDHOMME [16] montre que  $\Upsilon_1$  et  $\Upsilon_2$  forment un couple de surfaces conjuguées.

Soit  $T$  la surface engendrée par les normales à la surface  $N$  menée par les différents points de  $[SI]$ .  $\delta$  est la ligne intersection de  $N$  et  $T$ .  $\Upsilon_1$  et  $\Upsilon_2$  étant les enveloppes de  $N$  à chaque instant, le contact de  $N$  avec elles s'effectue suivant la ligne  $\delta$  [16]. Ces surfaces sont donc également tangentes suivant la ligne  $\delta$  (figure 2.5) et constituent bien un couple de surfaces conjuguées.

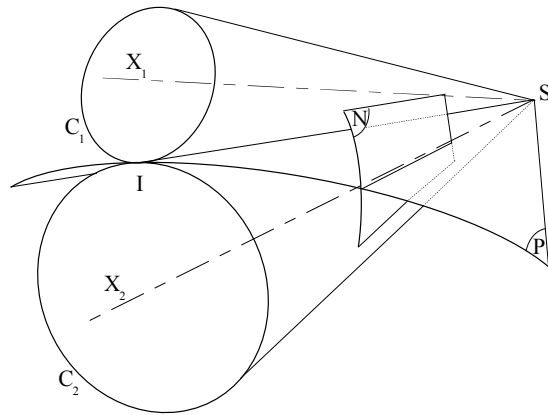


figure 2.4 – Les surfaces axoïdes, la roulette  $P$  et la surface génératrice  $N$

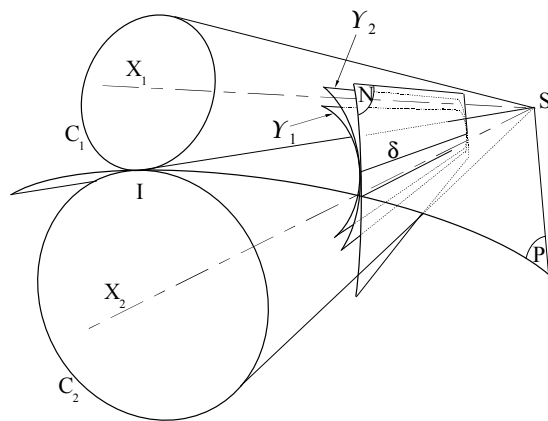


figure 2.5 – Les surfaces conjuguées

### 2.1.4 Génération des dentures en développante de cercle sphérique par la méthode des roulettes

La méthode de construction des surfaces en développante de cercle sphérique est exposée au paragraphe 2.1.2 et le paragraphe précédent présente la méthode des roulettes dans le cas d'un engrenage conique. Bien que pour une denture forgée, cette définition ne soit pas rigoureusement nécessaire, elle permet une meilleure compréhension de la géométrie. L'objectif de ce paragraphe est de montrer comment générer des surfaces en développante de cercle sphérique par la méthode des roulettes et de définir la forme de la surface  $N$  qui le permette.

#### Génération des surfaces conjuguées en développante de cercle sphérique

Un engrenage conique est cinématiquement défini par les cônes primitifs  $(S, C_1)$  et  $(S, C_2)$ . Les rayons des cercles primitifs  $C_1$  et  $C_2$  sont notés respectivement  $r_1$  et  $r_2$ , leurs centres sont  $O'_1$  et  $O'_2$ . Les axes de rotation  $(S, X_1)$  et  $(S, X_2)$  coupent la sphère aux points  $O_1$  et  $O_2$ . La surface conique  $P$ , la roulette, pour des raisons de simplicité, est choisie **plane**. L'intersection de  $P$  avec la sphère  $k$  est donc un grand cercle noté  $(P)$  (figure 2.6).

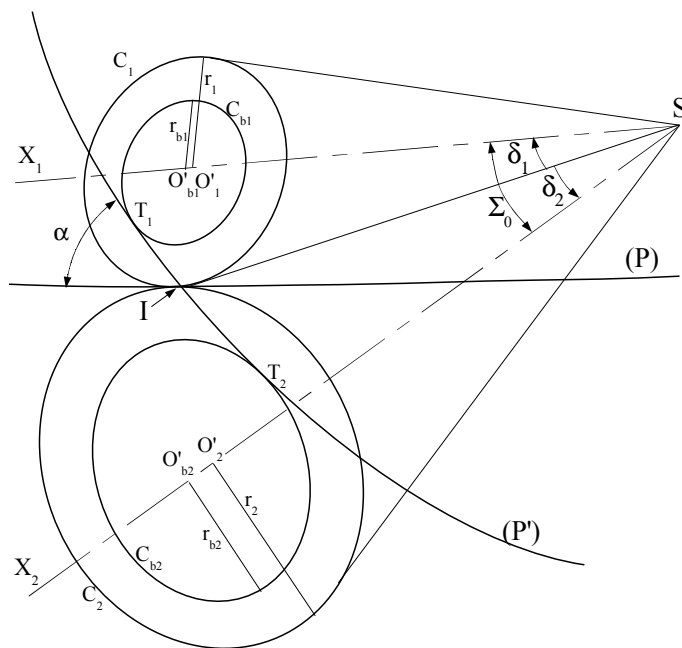


figure 2.6 – Situation des cônes et des plans

Le **plan**  $P'$  est introduit dans la géométrie précédemment définie. Il passe par la génératrice  $(SI)$  et fait un angle  $\alpha$ , l'*angle de pression*, avec  $P$ . Il coupe la sphère suivant le grand cercle

( $P'$ ). Ce cercle est tangent en  $T_1$  et  $T_2$  aux cercles de bases  $C_{b1}$  et  $C_{b2}$ , petits cercles de la sphère et dont les centres  $O'_{b1}$  et  $O'_{b2}$  sont sur  $(S, X_1)$  et  $(S, X_2)$ . Leurs rayons respectifs sont :  $r_{b1}$  et  $r_{b2}$ .

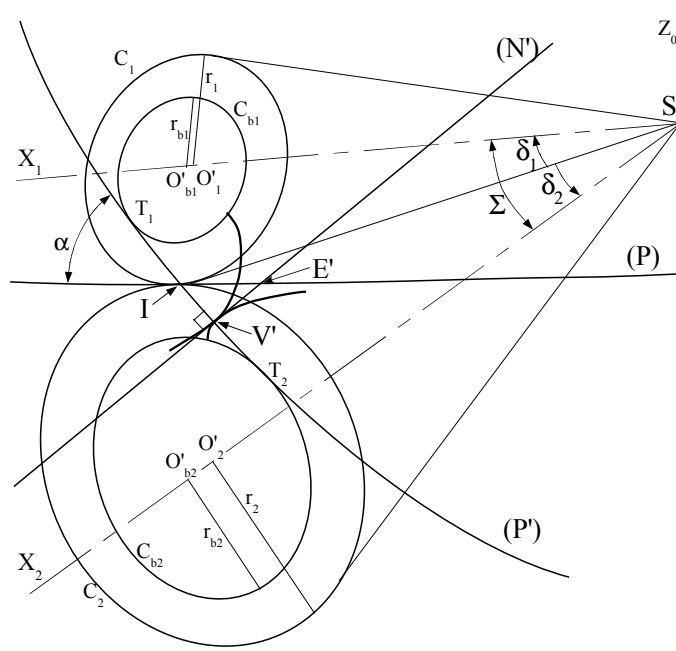


figure 2.7 – Profils conjugués

Le plan  $N'$  est rigidement lié et perpendiculaire au plan  $P'$  et passe par  $S$  (figure 2.7). Il coupe la sphère suivant le grand cercle  $(N')$ , orthogonalement en  $V'$  au grand cercle  $(P')$ . Il est à noter que l'angle formé par l'intersection de  $(N')$  et  $(P)$  (point  $E'$ ) est supérieur à  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  et dépend de la position relative de  $(N')$  et de  $(IS)$  (voir [20] et annexe A.1.1).

L'intersection des plans  $N'$  et  $P$  est la droite  $(SE')$  et l'intersection des plans  $N$  et  $P'$  est la droite  $(SV)$ . La direction  $Z_0$  est définie par la normale du plan  $P$ . Les deux cônes primitifs roulent sans glisser l'un sur l'autre et entraînent de la même façon le plan  $P$  en rotation autour de l'axe  $(S, Z_0)$ . Les deux cônes de bases  $(S, C_{b1})$  et  $(S, C_{b2})$ , rigidement liés aux cônes primitifs, entraînent sans glissement le plan  $P'$  qui pivote sur lui-même autour de  $S$ . Ainsi, le rapport des vitesses de rotation des plans  $P$  et  $P'$  est le rapport des rayons des cercles primitifs et des cercles de base :

$$\frac{\omega_P}{\omega_{P'}} = \frac{r_1}{r_{b1}} = \frac{r_2}{r_{b2}} \quad (2.1)$$

Les surfaces enveloppes du plan  $N'$ , dans son mouvement par rapport aux roues 1 et 2 sont les surfaces conjuguées  $\Upsilon_1$  et  $\Upsilon_2$ . Elles sont balayées par la droite  $(SV')$  du plan  $P'$  lorsque celui-ci roule sans glisser sur les deux cônes  $(S, C_{b1})$  et  $(S, C_{b2})$ .

D'après le paragraphe 2.1.2, les surfaces enveloppes  $\Upsilon_1$  et  $\Upsilon_2$  sont des surfaces coniques de sommet  $S$  dont les profils sur la sphère  $k$  sont des développantes de cercle sphériques. Ces deux profils conjugués ont leur point de contact toujours situé sur le grand cercle  $(P')$ . Celui-ci constitue de fait *la ligne d'engrènement* relative au couple de profils conjugués considérés. Le plan  $P'$  est le *plan d'action* de l'engrènement : il contient les normales au contact, quelle que soit la position d'engrènement.

### Relation entre le rayon du cercle de base et le rayon du cercle primitif

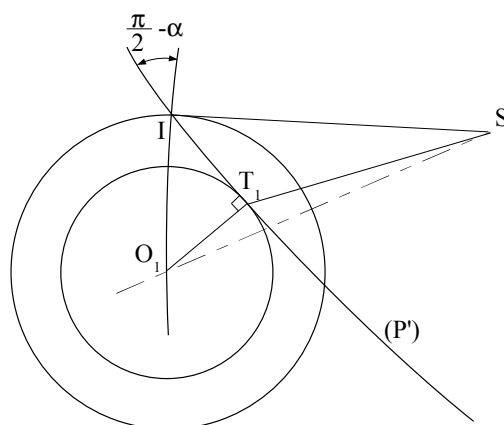


figure 2.8 – Triangle sphérique  $\langle I, O_1, T_1 \rangle$

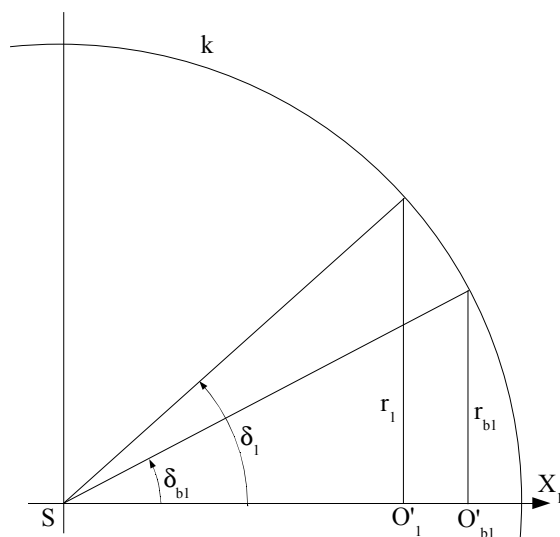


figure 2.9 – Rayon primitif et rayon de base

$v$  étant le rayon de la sphère  $k$ , on peut définir les rayons des cercles  $C_1$  et  $C_{b1}$  de la façon suivante (figure 2.8 et 2.9) :

$$\begin{cases} r_1 &= v \sin \delta_1 \\ r_{b1} &= v \sin \delta_{b1} \end{cases} \quad (2.2)$$

Dans le triangle sphérique  $\langle T_1, O_1, I \rangle$  l'angle formé par les côtés  $\widehat{O_1IT_1}$  vaut  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ .

D'après la relation (A.3) :

$$\sin \delta_{b1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \delta_1 = \cos \alpha \sin \delta_1 \quad (2.3)$$

D'où :

$$r_{b1} = r_1 \cos \alpha \quad (2.4)$$

### Forme de la surface génératrice $N$

En trigonométrie sphérique, les angles de deux triangles semblables (au sens où les longueurs de leurs cotés sont dans le même rapport) ne sont pas nécessairement égaux. Dans le triangle sphérique  $\langle I, V', E' \rangle$  (figure 2.7), l'angle  $\widehat{IV'E'}$  est droit, l'angle  $\widehat{V'IE'}$  est égal à  $\alpha$  et l'angle entre  $N'$  et  $P$  est supérieur à  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , sa valeur n'est pas fixe, elle dépend de la taille du triangle par rapport au rayon de la sphère. En conséquence, la surface génératrice  $N$  de la roulette  $P$  n'est pas un plan !

La figure 2.10 illustre le profil de la surface génératrice ( $N$ ) sur  $k$  dans une position quelconque. Elle situe :

- la sphère  $k$ , de centre  $S$  et de rayon  $v = SI$
- le grand cercle ( $P$ ), trace de la roulette plane  $P$
- la direction perpendiculaire au plan  $P$  est notée  $Z_0$ , fixe
- le grand cercle ( $P'$ ), trace du plan d'action  $P'$
- le grand cercle ( $N'$ ), trace du plan générateur  $N'$  perpendiculaire au plan d'action
- le petit cercle  $C_{b1}$ , sur lequel roule ( $P'$ ). Le point de tangence de ( $P'$ ) et  $C_{b1}$  est  $T_1$ . L'axe du cône de base est fixe.
- les petits cercles  $D_1$  et  $D_2$  de  $k$ , tangent à ( $P'$ ) et tracés dans des plans parallèles à  $P$
- les points d'intersection de ( $N$ ) avec  $D_1$  et  $D_2$ , respectivement  $Q_1$  et  $Q_2$
- les points d'intersection de ( $N'$ ) avec  $D_1$  et  $D_2$ , respectivement  $G_1$  et  $G_2$

Les éléments de la roue 2 ne sont pas représentés.

Toutes les surfaces considérées étant coniques de même sommet, le raisonnement se fait sur

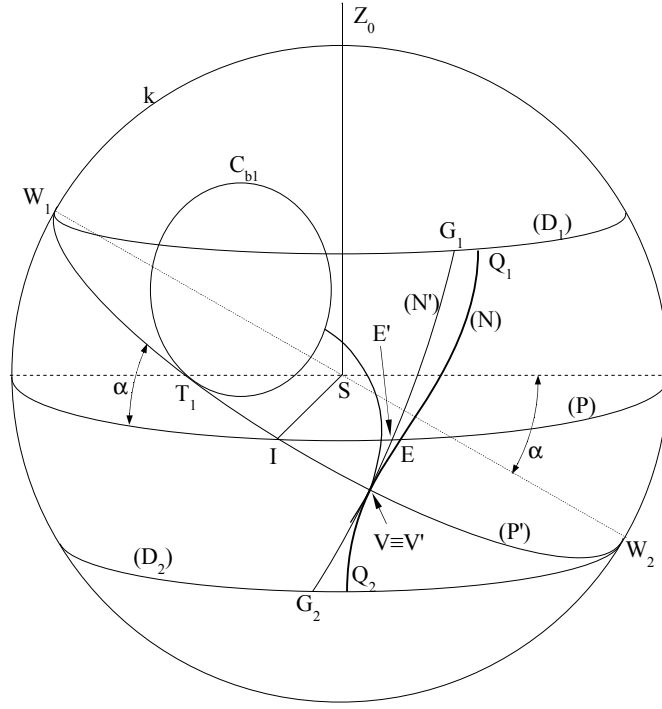


figure 2.10 – Trace de la roue plane génératrice dans une position quelconque

la sphère  $k$ . Le point d'action (point de tangence entre  $N$ ,  $\Upsilon_1$  et  $\Upsilon_2$ ) se trouve à chaque instant sur le cercle  $(P')$ , en  $V \equiv V'$ . Le profil lié à la roue 1 est le lieu de  $V$  par rapport à  $C_{b1}$ , lorsque l'arc de cercle  $\widehat{T_1 I}$  roule sans glisser sur  $C_{b1}$ . Pendant la rotation de la roulette autour de  $(S, Z_0)$ ,  $(P')$  reste tangent aux deux petits cercles  $D_1$  et  $D_2$ , parallèles au cercle équatorial  $(P)$  et dont les rayons sont égaux à  $v \cos(\alpha)$  (figure 2.10).  $D_1$  et  $D_2$  sont rigidement liés au plan  $P$ . Les points de tangence entre  $(P')$  et, respectivement,  $D_1$  et  $D_2$  sont notés  $W_1$  et  $W_2$ . Le module de la vitesse de ce point appartenant à  $D_1$  par rapport au repère fixe  $R0$  est :

$$V_{W_1 \in D_1 / R0} = \omega_{P/R0} v \cos(\alpha)$$

D'après les équations (2.1) et (2.4), la vitesse de rotation de  $P'$  par rapport à  $R0$  est  $\omega_{P'/R0} = \omega_{P/R0} \cos(\alpha)$ . Le module de la vitesse de  $W_1$  appartenant à  $(P')$  par rapport au repère fixe est donc :

$$V_{W_1 \in (P') / R0} = \omega_{P'/R0} v = \omega_{P/R0} v \cos(\alpha)$$

Ainsi, les vecteurs vitesses  $\mathbf{V}_{W_1 \in D_1 / R0}$  et  $\mathbf{V}_{W_1 \in (P') / R0}$  ont la même norme. Il est possible de montrer également qu'ils ont même direction et même sens. Le résultat est identique en  $W_2$ . Il y a donc roulement sans glissement entre le grand cercle  $(P')$  et les petits cercles  $D_1$  et  $D_2$ . Ainsi, le point  $V$  décrit par rapport au petit cercle  $D_1$ , un arc de développante sphérique. Le profil  $(N)$

de la surface génératrice de la roulette est une développante sphérique des petits cercles  $D_1$  et  $D_2$ , elle présente un point d'inflexion au niveau de l'équateur. La surface génératrice  $N$  n'est pas plane.

Le principe des méthodes d'usinage conventionnelles des roues dentées consiste à faire balayer (mouvement de coupe) les surfaces génératrices par les arêtes d'un outil coupant. La denture est alors générée par enveloppe. Pour les engrenages cylindriques à profil en développante de cercle, les surfaces génératrices sont des plans. Avec un mouvement de coupe qui est une simple translation, les arêtes rectilignes de la crémaillère de taillage balaient ces plans et la génération par enveloppe est assez simplement réalisée. Pour les géométries coniques à profil en développante de cercle sphérique, il est impossible d'imaginer que le mouvement de coupe soit une simple translation radiale (facilité de mise en œuvre), car aucune arête d'outil ne pourrait, dans ces conditions, balayer la surface  $N$  précédemment définie.

Pour cette raison, les surfaces génératrices «pratiques» utilisées pour le taillage sont choisies planes et tangentes aux surfaces théoriques sur  $P$  [21, 18] (figure 2.11).

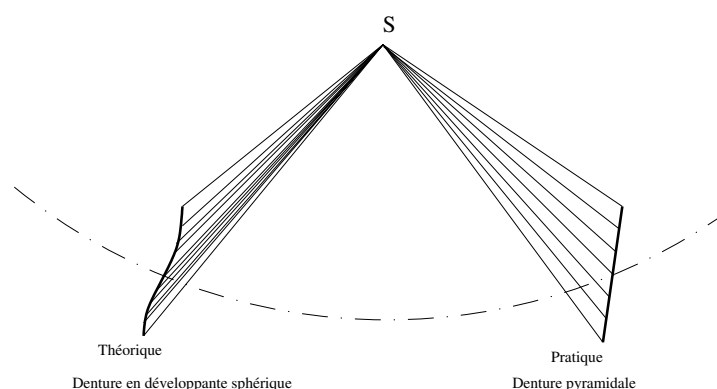


figure 2.11 – Profils théorique et pratique de la surface génératrice de la roulette

**Remarque :**

- Dans son article [22], KANDASWAMY propose de générer des surfaces en développante de cercle sphérique avec un outil dont l'arête est rectiligne. Pour cela, il propose une cinématique de machine plus élaborée.
- Sur ce point précis, nous pouvons souligner les potentialités du forgeage qui permet d'obtenir des surfaces nominales en développante de cercles sphériques sans difficulté particulière s'il n'y a pas de contre-dépouille. La matrice est obtenue par balayage d'une fraise hémisphérique.

## 2.1.5 Roue plane génératrice

### Définition

Une roue plane (ou plate) génératrice est une surface conique virtuelle, de même sommet que les cônes primitifs. La roue plane possède une surface primitive plane confondue avec la roulette  $P$ , qui roule sans glisser avec les cônes primitifs de l'engrenage, le long de leur génératrice commune. Elle est formée de surfaces génératrices homologues et anti-homologues à  $N$  régulièrement réparties et invariablement liées à  $P$ . Elles enveloppent dans leur mouvement par rapport à chacune des roues, des surfaces coniques qui sont conjuguées. Les surfaces enveloppes constituent les surfaces actives du pignon et de la roue. La roue plane qui génère des surfaces en développante de cercle sphérique a l'allure représentée figure 2.12.

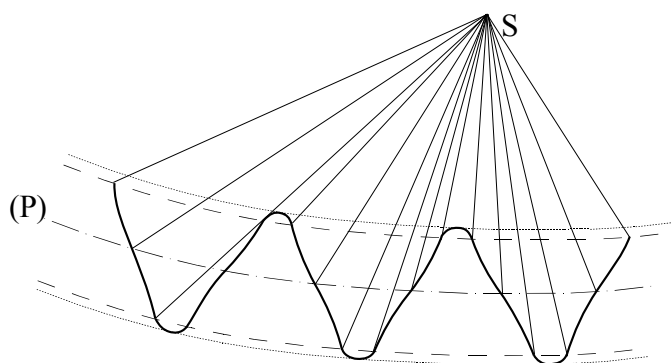


figure 2.12 – Roue plane théorique

Pour le taillage, les surfaces génératrices théoriques  $N$  sont remplacées par des plans  $N''$ . Les dents de la roue plane pour le taillage sont des troncs de pyramides. Les surfaces générées sont conjuguées mais leurs profils ne sont pas des développantes de cercles sphériques. Les surfaces génératrices exactes et pratiques étant tangentes sur la roulette, les écarts entre les profils demeurent faibles (de l'ordre de quelques micromètres [7]).

### Le déport de denture

D'après la définition de la roue plane exacte et la nature des surfaces génératrices, le roulement sans glissement entre le pignon et la roue plane ne peut avoir lieu que sur la surface qui contient les points d'inflexion des profils générateurs. Il n'est donc pas possible de définir un *déport de denture*, au sens des engrenages cylindriques, pour les roues coniques à surfaces en développante de cercle sphérique. Pour les engrenages taillés suivant la méthode de la roulette à dents pyramidales, la notion de déport est exploitable mais lourde si l'on conserve une géométrie exacte. La définition

mathématique de ces profils est donnée au paragraphe 2.1.7 et se trouve être plus difficile à manipuler que celle de la développante de cercle sphérique.

### 2.1.6 Coordonnées d'un point de la développante de cercle sphérique

MM. RAFFY et GODET [23] ont donné les équations de la développante de cercle sphérique en faisant une démonstration basée sur des projections de points et des calculs de distances. M. BOUAZIZ [7] a établi les équations en utilisant les propriétés du produit vectoriel. Deux autres démonstrations sont ici proposées : une première faisant uniquement appel à la trigonométrie sphérique et une seconde basée sur les changements de repères.

La développante de cercle sphérique est la trajectoire du point  $V$ , appartenant au plan  $P'$ , dans son mouvement par rapport au cône de base, lorsqu'il y a roulement sans glissement entre ces deux éléments. Le point  $F_1$  est le pied de la développante de cercle sphérique sur le cercle de base. Les différents angles utilisés sont définis sur les figures 2.13 et 2.14. Afin de simplifier les notations, les indices 1 et 2 référant à la roue et au pignon ne sont pas systématiquement indiqués. Notamment, on utilise la notation suivante  $a = \sin(\delta_b)$  et  $b = \cos(\delta_b)$ .

#### Démonstration par la trigonométrie sphérique

Les coordonnées du point  $V$  dans le repère  $R_1$  lié à la roue dentée sont notées  $X, Y, Z$  (figure 2.13).

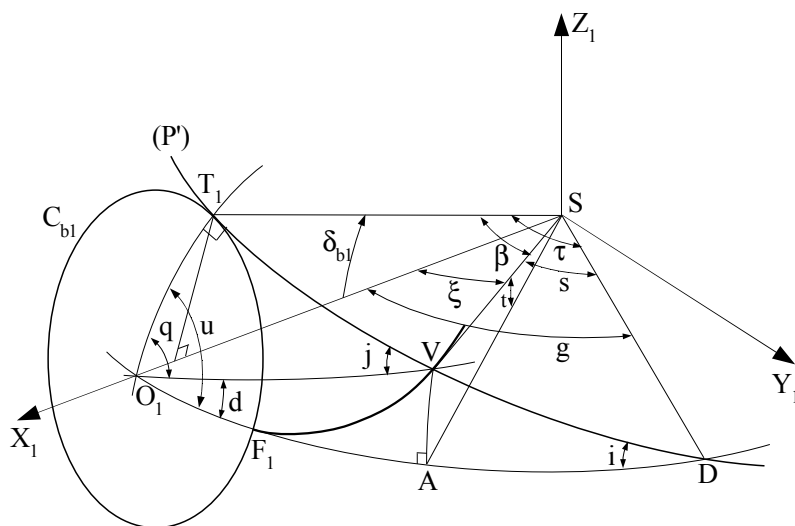


figure 2.13 – Paramétrage géométrique

1. Il y a roulement sans glissement du grand cercle ( $P'$ ) sur le cercle de base, d'où :

$$u.r_b = \beta.v \iff \beta = u \frac{r_b}{v} = a.u \quad (2.5)$$

2. Calcul de la valeur de  $X$  :

$$X = v \cos(\xi)$$

Dans le triangle rectangle  $\langle O_1, V, T_1 \rangle$ , la relation (A.3) donne l'équation

$$\cos(\xi) = \cos(\delta_b) \cos(\beta)$$

D'où, avec (2.5) :

$$X = vb \cos(au) \quad (2.6)$$

3. Calcul de  $Z$  :

$$Z = v \sin(t)$$

Dans le triangle rectangle  $\langle A, D, V \rangle$ , l'équation (A.3) s'écrit

$$\sin(t) = \sin(s) \sin(i) = \sin(\tau - \beta) \sin(i)$$

D'où :

$$Z = v (\sin \tau \cos \beta \sin i - \sin \beta \cos \tau \sin i)$$

Dans le triangle  $\langle O_1, T_1, D \rangle$ , les relations (A.3) et (A.5) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \sin \tau = \sin g \sin u \\ \sin \delta_b = \sin g \sin i \\ \cos u = \cos \tau \sin i \end{cases}$$

On en déduit :

$$Z = v (a \sin u \cos(au) - \sin(au) \cos u) \quad (2.7)$$

4. Calcul de  $Y$  :

$$Y = v \sin \xi \cos d$$

$$Y = v \sin \xi \cos(u - q)$$

$$Y = v \sin \xi (\cos u \cos q + \sin u \sin q)$$

Dans le triangle rectangle  $\langle O_1, V, T_1 \rangle$ , les relations A.3 et A.5 permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \cos q = \cos \beta \sin j \\ \sin \delta_b = \sin j \sin \xi \\ \sin \beta = \sin \xi \sin q \end{cases}$$

On en déduit :

$$Y = v(a \cos u \cos(au) + \sin u \sin(au)) \quad (2.8)$$

Finalement, les équations paramétrées d'une développante de cercle sphérique sont :

$$\begin{cases} X = vb \cos(au) \\ Y = v(a \cos u \cos(au) + \sin u \sin(au)) \\ Z = v(a \sin u \cos(au) - \sin(au) \cos u) \end{cases} \quad (2.9)$$

### Démonstration par les changements de repères

Cette démonstration est basée sur le roulement sans glissement du cône de base sur le plan  $P'$ . Une développante de cercle sphérique est l'équation de la trajectoire d'un point  $V$ , fixe dans le plan, dans le repère lié au cône. Elle s'inspire de la méthode d'obtention de la développante généralisée de LITVIN [8].

Les différents repères utilisés sont les suivants (figure 2.14) :

- $R0$  : repère fixe tel que  $X_0$  soit confondu avec l'axe de rotation du cône,
- $R1$  : repère rigidement lié au cône, l'axe de symétrie du cône étant l'axe  $X_1$ ,
- $R3$  : repère fixe tel que l'axe  $X_3$  soit en permanence confondu avec la ligne de contact,
- $R4$  : repère rigidement lié au plan  $P'$ , l'axe de rotation de ce plan est confondu avec  $Y_3$ .

Les changements de repères se font en utilisant les matrices de coordonnées homogènes (voir annexe A.2) :

$$M_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & \sin u & 0 \\ 0 & -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{03} = \begin{bmatrix} \cos \delta_b & \sin \delta_b & 0 & 0 \\ -\sin \delta_b & \cos \delta_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

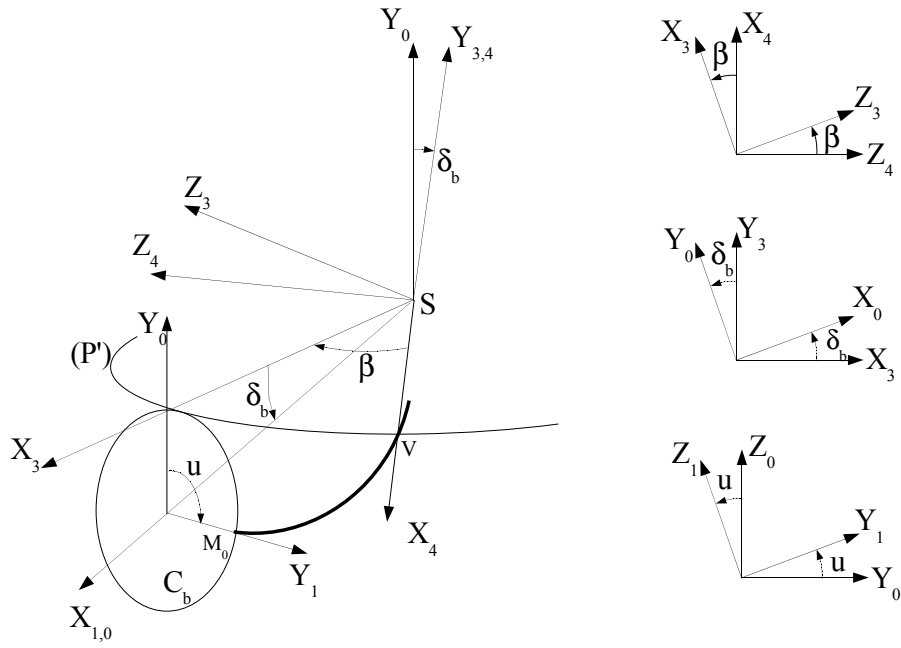


figure 2.14 – Positions relatives des différents repères

$$M_{34} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage de  $R4$  à  $R1$  est donc :

$$\begin{aligned} M_{14} &= M_{10}M_{03}M_{34} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \delta_b \cos \beta & -\sin \delta_b & -\cos \delta_b \sin \beta & 0 \\ \sin \delta_b \cos \beta \cos u + \sin \beta \sin u & \cos u \cos \delta_b & -\cos u \sin \delta_b \sin \beta - \sin u \cos \beta & 0 \\ \sin \delta_b \cos \beta \sin u - \sin \beta \cos u & \sin u \cos \delta_b & -\sin u \sin \delta_b \sin \beta + \cos u \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le roulement sans glissement se traduit par la relation :

$$r_b u = v \beta \Leftrightarrow \beta = u \sin \delta_b = au$$

Dans le repère  $R_4$ , la position du point  $V$  est définie par

$$V^{[4]} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dans le repère  $R_1$ , ce point décrit une développante de cercle sphérique :

$$V^{[1]} = M_{14} \cdot V^{[4]} = \begin{bmatrix} vb \cos(au) \\ v(a \cos u \cos(au) + \sin u \sin(au)) \\ v(a \sin u \cos(au) - \cos u \sin(au)) \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 2.1.7 Denture générée par une roue plane à denture pyramidale

Comme nous l'avons montré précédemment, si les surfaces génératrices liées à la roulette sont des plans, les surfaces enveloppes générées ne sont pas en développante de cercle sphérique. MM. BOUAZIZ [7], HENRIOT [18], KANDASWAMY [22], KOĆ [24] ont caractérisé les surfaces ainsi générées.

#### Surface d'action

La *surface d'action* est l'ensemble des points coïncidant aux points de contact entre les dentures des deux roues, dans le repère fixe. Les surfaces actives des roues étant coniques et de même sommet, la surface d'action est également une surface conique de sommet  $S$ . L'étude de cette surface peut donc se ramener à celle de la courbe qu'elle décrit sur la sphère  $k$ , de rayon  $v$  et centrée en  $S$ . Cette ligne est appelée *ligne d'action*.

Le tracé de la ligne d'action peut se faire en géométrie descriptive, cette méthode est connue sous le nom de «tracé de REULAUX» [18, 24]. M. KANDASWAMY [22] en donne l'équation.

La figure 2.15 situe le point fixe  $I$ , la roulette  $P$  et la surface génératrice plane  $N''$ . Cette surface fait un angle  $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$  avec le plan  $P$ ,  $\alpha_0$  est constant. Le plan  $P_b$  est tangent aux deux cônes de base. Il est en permanence perpendiculaire à  $N''$  et contient la droite  $(SI)$ . L'angle entre  $P_b$  et  $P$  est noté  $\zeta$ ; sa valeur varie avec la position de  $E''$  dans le repère fixe, en conséquence de quoi, les demi angles aux sommets des cônes de base  $\delta_{b1}$  et  $\delta_{b2}$  varient également. Les points  $V''$  et  $E''$  sont, respectivement, les points d'intersection du grand cercle  $(N'')$  avec  $(P_b)$  et  $(P)$ .  $\theta$  est l'angle orienté entre  $(SE'')$  et  $(SI)$  et  $\mu$  est l'angle également orienté entre  $(SV'')$  et  $(SI)$ .

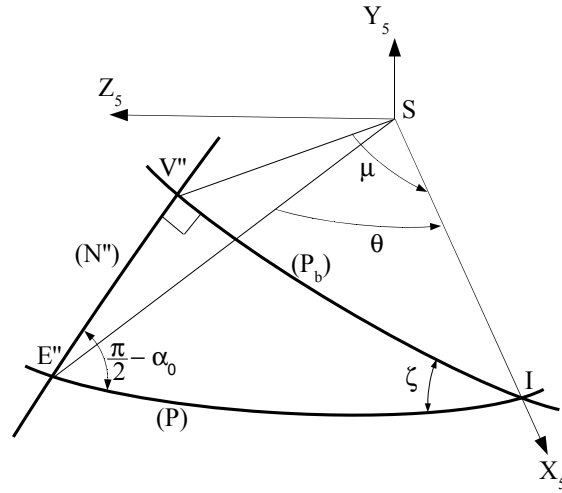


figure 2.15 – Paramétrage pour l'obtention de la ligne d'action

D'après (A.12) :

$$\begin{cases} \tan \zeta = \sec \theta \tan \alpha_0 \\ \sin \mu = \sin \theta \cos \alpha_0 \end{cases}$$

$|\theta|$  est toujours inférieur à  $\frac{\pi}{2}$  et  $\zeta$  étant positif, nous en déduisons que  $\theta$  et  $\mu$  sont du même signe.

Dans le repère  $R_5$  (figure 2.15), l'équation de la ligne d'action est :

$$\begin{cases} x = \cos \mu \\ y = \sin \mu \sin \zeta \\ z = \sin \mu \cos \zeta \end{cases} \quad (2.10)$$

Cette courbe (figure 2.16) en forme de «8» est une *lemniscate sphérique* ou *octoïde*. C'est pour cette raison que les pignons obtenus avec une roue plate à denture pyramidale sont appelés *octoïdes*.

### 2.1.8 Surface active de la denture obtenue avec une surface génératrice plane

Les surfaces obtenues par la méthode des roulettes avec une roue plane à denture pyramidale sont proches des surfaces en développante de cercle. L'expression de leur modèle mathématique est cependant un peu plus lourde à manipuler.

M. BOUAZIZ [7] donne par deux méthodes différentes l'équation du profil de cette surface. La seconde méthode qu'il propose comporte probablement une approximation et rend les équations présentées inexactes.

Une autre démonstration, consiste à exprimer la position du point de contact entre la roue

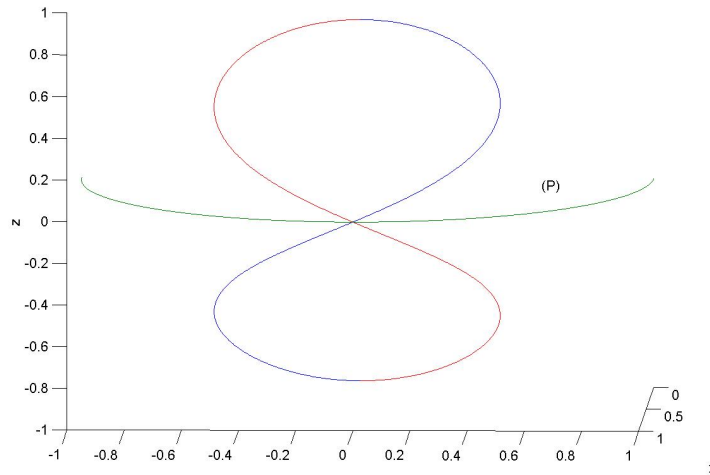


figure 2.16 – Lemniscate sphérique

plane et le profil dans le repère fixe, puis de calculer ses coordonnées dans le repère de la roue dentée. Les notations précédentes sont reprises. Les calculs sont menés pour le profil du pignon.

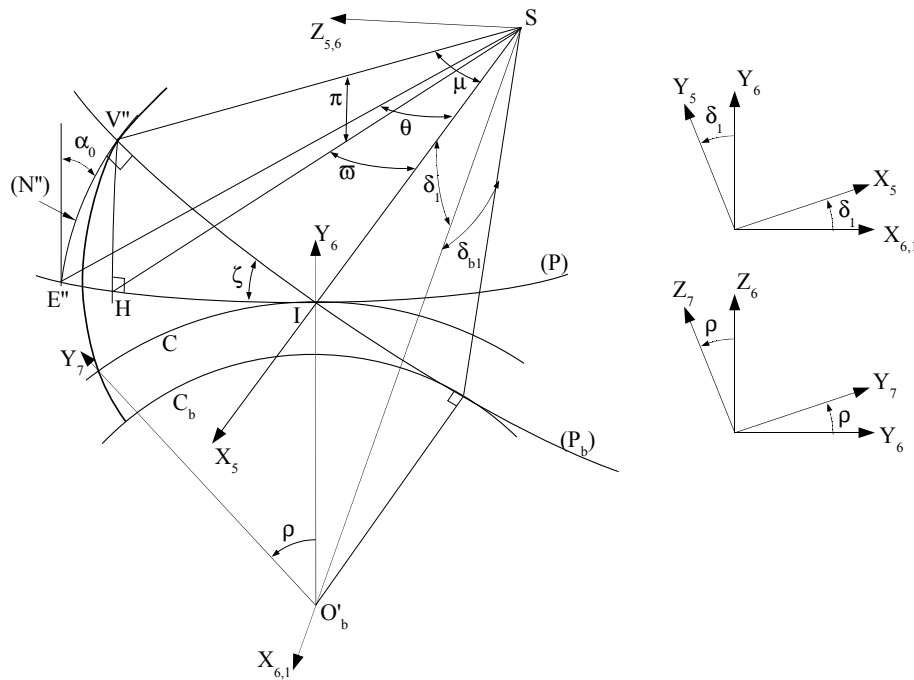


figure 2.17 – Paramétrage pour l'obtention de l'équation de la surface «octoïde»

L'angle algébrique  $\theta = \widehat{E''SI}$  est le paramètre du profil recherché.  $\theta$  est défini positif sur la figure 2.17. Le point  $H$  appartient au cercle  $(P)$  tel que  $\langle H, I, V'' \rangle$  soit rectangle en  $H$ . Le repère  $R_5 = \{S, X_5, Y_5, Z_5\}$  a pour premier axe  $(SI)$  et  $Y_5$  est dans le plan  $(S, O'_b, I)$ . Le repère

$R6 = \{S, X_6, Y_6, Z_6\}$  a pour premier axe  $(SO'_b) \equiv (S, X_1)$ , il se déduit de  $R5$  par une rotation autour de l'axe  $Z_5$  d'un angle  $-\delta$ . Le repère  $R7 = \{S, X_7, Y_7, Z_7\}$  est rigidement lié au pignon, il est obtenu en effectuant une rotation du repère  $R6$  autour de  $X_6$  d'un angle  $\rho$ . L'axe  $Y_7$  appartient au plan qui contient les points  $S, O'_b$  et qui passe par le point d'intersection du profil et du cercle primitif.

Dans le triangle sphérique  $\langle E'', I, V'' \rangle$ , les relations (A.3), (A.5) et (A.12) permettent de calculer :

$$\mu = \arcsin \left( \sin \theta \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right) \right) \quad (2.11)$$

$$\zeta = \arcsin \left( \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right)}{\cos \mu} \right) = \arctan \left( \frac{\tan \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right)}{\cos \theta} \right) \quad (2.12)$$

Dans le triangle sphérique  $\langle H, I, V'' \rangle$ , rectangle en  $H$ , les relations (A.3) et (A.9) permettent de calculer :

$$\pi = \arcsin (\sin \mu \sin \zeta) \quad (2.13)$$

$$\varpi = \arccos \left( \frac{\cos \mu}{\cos \pi} \right) \quad (2.14)$$

Il est maintenant possible de calculer les coordonnées du point  $V''$  dans le repère fixe  $R5$  :

$$\begin{cases} X_{V''}^{[5]} = v \cos \pi \cos \varpi = v \cos \mu \\ Y_{V''}^{[5]} = -v \cos \pi \sin \varpi \\ Z_{V''}^{[5]} = v \sin \pi \end{cases}$$

Remarque : pour que les coordonnées du point  $V''$  soient celles ci-dessus quel que soit le signe de  $\theta$ , il faut que  $\zeta$  soit toujours positif et imposer à  $\varpi$  le signe de  $\theta$ .

La dernière étape consiste à exprimer les coordonnées de  $V''$  dans le repère  $R7$  lié au pignon :

$$\begin{bmatrix} X_{V''}^{[7]} \\ Y_{V''}^{[7]} \\ Z_{V''}^{[7]} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 & -\sin \delta_1 & 0 & 0 \\ \sin \delta_1 \cos \rho & \cos \delta_1 \cos \rho & \sin \rho & 0 \\ -\sin \delta_1 \sin \rho & -\cos \delta_1 \sin \rho & \cos \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{V''}^{[5]} \\ Y_{V''}^{[5]} \\ Z_{V''}^{[5]} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Le roulement sans glissement en  $I$  permet d'établir le lien entre  $\rho$  et  $\theta$  :

$$v\theta = r_1\rho \quad \Rightarrow \quad \theta = \rho \sin \delta_1$$

Le profil est défini par le système (2.15) et il est entièrement paramétrée par  $\theta$ .

La figure 2.18 montre l'évolution de l'écart curviligne entre ce profil et la développante de cercle sphérique sur une sphère de rayon 100 mm.

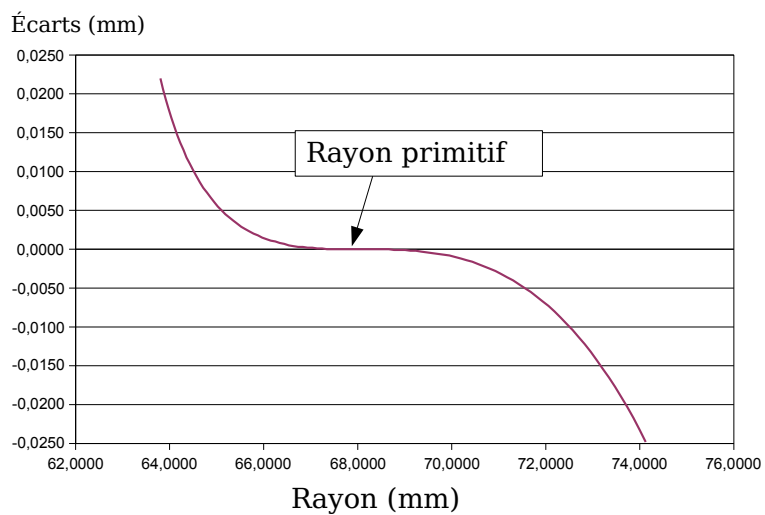


figure 2.18 – Ecart entre l'octoïde et la développante de cercle sphérique

## 2.2 Construction de la surface de la denture

La construction géométrique d'une dent est réalisée en plusieurs étapes et l'algorithme de construction n'est pas unique (quelques exemples dans les rapports [25, 26, 27]). Pour cette raison, il ne sera pas présenté de méthode de construction globale mais des éléments de réalisation de chaque étape. Pour les engrenages cylindriques usuels, les normes ISO 1122-1 et ISO 701-1 définissent les grandeurs primitives de fonctionnement et les grandeurs de référence. Cette distinction n'est pas faite dans ce chapitre puisque la géométrie n'est pas définie par rapport à un «tracé de référence» (normes NF E 23 011 et ISO 53), dans la configuration particulière du taillage. Les caractéristiques géométriques des roues sont indépendantes et une lecture attentive permet de connaître les grandeurs propres à chaque roue et celles définies par la configuration de fonctionnement.

Dans la section précédente, nous avons défini le modèle mathématique des profils en développante de cercle sphérique. La définition des surfaces actives nominales nécessite l'introduction de paramètres technologiques qui vont définir les limites de ces surfaces et leur position relative. Connaissant l'ensemble de ces paramètres, il est possible de calculer les épaisseurs curvilignes extrêmes et intermédiaires des dents et de vérifier la condition de montage. Si les surfaces actives sont réglées, la position de la zone de contact est très sensible aux écarts géométriques de toute nature. L'introduction d'un bombé longitudinal permet une meilleure localisation du contact et nous proposons une méthode pour sa définition qui n'altère pas les profils des surfaces actives. Enfin, nous proposons un type de solution pour la définition du raccord des surfaces actives entre elles.

### 2.2.1 Généralités et définitions

Un certain nombre de paramètres de la denture ont déjà été définis, ils sont rapidement revus. Cette première liste est complétée par les coefficients de hauteur de la dent.

#### Rappels : paramètres fondamentaux

Un engrenage conique est un système qui permet la transmission d'un mouvement de rotation et d'un moment entre deux arbres (celui du pignon 1 et de la roue 2) dont les axes  $(S, X_1)$  et  $(S, X_2)$  sont concourants en  $S$ . Dans le cas où le rapport de transmission souhaité est constant, l'axe central  $\Delta$  du torseur cinématique de 1 par rapport à 2 est une droite coplanaire et concourante aux axes de rotation. La surface balayée par  $\Delta$  dans son mouvement par rapport à 1 est le cône primitif de sommet  $S$  et de demi angle au sommet  $\delta_1$ .

En appelant  $\Sigma_0$  l'angle entre  $(S, X_1)$  et  $(S, X_2)$  et  $U$  le rapport de transmission ( $U = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ),

la valeur de  $\delta_1$  est donnée par la relation <sup>2</sup> :

$$\delta_1 = \arctan\left(\frac{\sin(\Sigma_0)}{U + \cos(\Sigma_0)}\right) \quad (2.16)$$

On en déduit :  $\delta_2 = \Sigma_0 - \delta_1$

L'intersection des cônes primitifs et de la sphère  $k$  (de rayon  $v$ ) sont les cercles primitifs  $C_1$  et  $C_2$ . Ils sont tangents en  $I$  et ont pour rayon :

$$r_1 = v \sin(\delta_1) \quad ; \quad r_2 = v \sin(\delta_2) \quad (2.17)$$

Les cônes de base s'appuient sur les cercles de base  $C_{b1}$  et  $C_{b2}$  et leur sommet est le centre de la sphère. D'après (2.2) et (2.3), les rayons des cercles de base sont :

$$r_{b1} = v \sin(\delta_1) \cos(\alpha) \quad ; \quad r_{b2} = v \sin(\delta_2) \cos(\alpha) \quad (2.18)$$

où  $\alpha$  est l'angle de pression.

Les demi angles au sommet des cônes de base sont :

$$\delta_{b1} = \arcsin\left(\frac{r_{b1}}{v}\right) \quad ; \quad \delta_{b2} = \arcsin\left(\frac{r_{b2}}{v}\right) \quad (2.19)$$

### Paramètres de la denture

**Nombre de dents :** Les nombres de dents des roues sont  $z_1$  et  $z_2$ .

**Module :** Le module primitif de fonctionnement est défini par :

$$m = \frac{2r_1}{z_1} = \frac{2r_2}{z_2} \quad (2.20)$$

La géométrie étant sphérique, il est plus facile de raisonner en angle. Pour cette raison, nous définissons *l'angle du module sur la sphère* :

$$\nu_m = \frac{m}{v} = \frac{\sin\delta_1}{z_1} = \frac{\sin\delta_2}{z_2} \quad (2.21)$$

**Cercles de tête et de pied sur la sphère :** Les cercles de tête et de pied dépendent de la sphère sur laquelle ils sont tracés. Sur une sphère de rayon fixé, pour le pignon, les définitions de

---

<sup>2</sup>Voir [16] page 100

ces cercles sont les suivantes : (figure 2.19)

- *cercle de pied*  $C_{f1}$  : cercle de diamètre minimum tangent aux profils de raccordement en pied de dent.
- *cercle de pied effectif*  $C_{fe1}$  : cercle imaginaire qui passe par les points de raccord entre les profils actifs et les profils de raccordement en pied de dent.
- *cercle de tête*  $C_{a1}$  : cercle de diamètre maximal tangent aux profils de raccordement en tête de dent.
- *cercle de tête effectif*  $C_{ae1}$  : cercle imaginaire qui passe par les points de raccord entre les profils actifs et les profils de raccordement en tête de dent.

De même, pour la roue, sont définis  $C_{f2}$ ,  $C_{fe2}$ ,  $C_{a2}$  et  $C_{ae2}$ .

**Hauteur de dent :** Nous définissons la *hauteur effective de la dent*  $h$  comme la distance curviligne mesurée sur la sphère, entre les cercles de pied effectif et de tête effectif. Cette dimension est supposée identique sur le pignon et sur la roue. Comme cette longueur dépend du rayon de la sphère sur laquelle elle est prise, il est préférable de définir l'*angle de hauteur de dent*  $\nu_h$  et pour retrouver des relations semblables à celles définies pour les dentures des roues cylindriques, on introduit le *coefficient de hauteur de dent*  $K_h$  :

$$K_h = \frac{\nu_h}{\nu_m} = \frac{h}{v\nu_m} \quad (2.22)$$

De même, la différence des demi angles au sommet du cône primitif et du cône de pied effectif est l'*angle de pied effectif* :  $\nu_{ke1}$  pour le pignon et  $\nu_{ke2}$  pour la roue. Ces angles sont paramétrés par les *coefficients de pied effectif* :  $K_{fe1} = \frac{h_{fe1}}{v\nu_m}$  et  $K_{fe2} = \frac{h_{fe2}}{v\nu_m}$

De la même façon, sont définis : (figure 2.19)

- les angles de pied  $\nu_{f1}$  et  $\nu_{f2}$ , paramétrés par les *coefficients de pied* :  $K_{f1} = \frac{h_{f1}}{v\nu_m}$  et  $K_{f2} = \frac{h_{f2}}{v\nu_m}$
- les angles de tête  $\nu_{a1}$  et  $\nu_{a2}$ , paramétrés par les *coefficients de tête* :  $K_{a1} = \frac{h_{a1}}{v\nu_m}$  et  $K_{a2} = \frac{h_{a2}}{v\nu_m}$
- les angles de tête effectifs  $\nu_{ae1}$  et  $\nu_{ae2}$ , paramétrés par les *coefficients de tête effectifs* :  $K_{ae1} = \frac{h_{ae1}}{v\nu_m}$  et  $K_{ae2} = \frac{h_{ae2}}{v\nu_m}$

## 2.2.2 Profil et surface actifs

### Le profil actif

Le *profil* est la ligne d'intersection d'une surface conique de sommet  $S$  et d'une sphère de même centre. Le *profil actif* est un élément du profil qui est susceptible d'être en contact avec un autre profil, en fonctionnement souhaité.

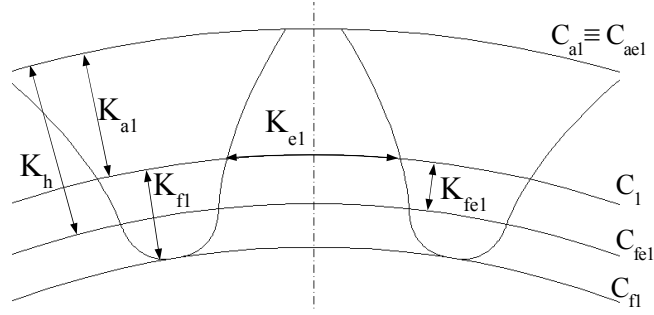


figure 2.19 – Paramétrage adimensionnel de la denture du pignon

Le profil actif est un arc de développante de cercle sphérique compris entre le cercle de pied effectif et le cercle de tête effectif, sur la sphère  $k$ . La représentation paramétrée définissant cette courbe pour le pignon est donnée par la relation (2.9) :

$$\begin{cases} X(u_1) = v(b_1 \cos(a_1 u_1)) \\ Y(u_1) = v(a_1 \cos u_1 \cos(a_1 u_1) + \sin u_1 \sin(a_1 u_1)) \\ Z(u_1) = v(a_1 \sin u_1 \cos(a_1 u_1) - \cos u_1 \sin(a_1 u_1)) \\ u_1 \in [u_{fe1}, u_{ae1}] \end{cases} \quad (2.23)$$

Avec  $a_1 = \sin(\delta_{b_1})$ ,  $b_1 = \cos(\delta_{b_1})$ ,  $u_{fe1}$  et  $u_{ae1}$  les valeurs du paramètre sur le cercle de pied effectif et le cercle de tête effectif.

**Remarque :** Il est possible de déterminer la valeur du paramètre à l'intersection de la développante de cercle sphérique et d'un cercle de rayon  $R$  de la sphère, centrée sur  $(S, X_1)$  : il est tracé sur un cône de demi angle au sommet  $\delta_R = \arcsin\left(\frac{R}{v}\right)$ . L'altitude  $X$  du cercle est  $X = \frac{R}{\tan(\delta_R)}$ . D'après (2.23), la valeur du paramètre  $u_R$  est :

$$u_R = \frac{1}{a_1} \arccos\left(\frac{X}{vb_1}\right) = \frac{1}{a_1} \arccos\left(\frac{R}{vb_1 \tan(\delta_R)}\right) = \frac{1}{a_1} \arccos\left(\frac{R}{vb_1 \tan(\arcsin(\frac{R}{v}))}\right) \quad (2.24)$$

### Surfaces actives primaires

La géométrie des pignons étant conique, une surface active primaire est obtenue en menant par tous les points du profil actif, une droite qui passe par  $S$ . Le modèle mathématique de cette surface est le même que celui de la développante de cercle sphérique, avec le rayon  $v$  de la sphère  $k$  qui devient le second paramètre descripteur de la surface. Cette surface est limitée par différentes contraintes de conception ou de réalisation mais afin de ne pas alourdir le modèle mathématique, on considère que les paramètres  $(u_i, v_i)$  appartiennent à un domaine rectangulaire

$[u_{fei}; u_{aei}] \times [R_p; R_g]$  ( $i \in \{1, 2\}$ ). Les valeurs  $R_p$  et  $R_g$  représentent, respectivement, les rayons de la sphère au talon et à la pointe de la denture.

La représentation paramétrique de la surface active du pignon est :

$$\mathbf{X}_1(u_1, v_1) = \begin{cases} \hat{X} &= v_1 (b_1 \cos(a_1 u_1)) \\ \hat{Y} &= v_1 (a_1 \cos(u_1) \cos(a_1 u_1) + \sin(u_1) \sin(a_1 u_1)) \\ \hat{Z} &= v_1 (a_1 \sin(u_1) \cos(a_1 u_1) - \cos(u_1) \sin(a_1 u_1)) \\ u_1 &\in [u_{fe1}, u_{ae1}] \\ v_1 &\in [R_p, R_g] \end{cases} \quad (2.25)$$

Cette surface conique a une définition purement cinématique et il est possible de lui apporter des corrections (voir paragraphe 2.2.3 sur les corrections de denture) pour améliorer le fonctionnement réel de l'engrenage.

### Normale de la surface primaire en développante de cercle

Le vecteur unitaire normal à la surface de la denture est donné par la relation :

$$\mathbf{n} = \epsilon \cdot \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u_1}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u_1} \right\|}$$

$\epsilon$  est égal à  $\pm 1$ . On choisit généralement  $\epsilon$  pour que  $\mathbf{n}$  soit extérieur à la matière. Après développement des calculs et avec  $\epsilon = 1$ , on obtient :

$$\mathbf{n} \begin{cases} n_{x1} = b \sin(au) \\ n_{y1} = a \cos u \sin(au) - \sin u \cos(au) \\ n_{z1} = a \sin u \sin(au) + \cos u \cos(au) \end{cases} \quad (2.26)$$

### 2.2.3 Epaisseur curviligne de la dent

Pour placer le profil anti homologue, nous devons choisir une valeur de l'épaisseur curviligne « $e_i$ » de la dent sur le cercle primitif de fonctionnement de la roue  $i$  (figure 2.20). Pour adimensionner cette grandeur et la rendre ainsi homogène aux autres paramètres caractérisant la forme de la dent, on définit le *coefficient d'épaisseur curviligne* :

$$K_{e_i} = \frac{e_i}{m}$$

Il faut choisir l'épaisseur de façon à ce que les conditions sur les épaisseurs maximale et minimale soient respectées ainsi que la condition de montage.

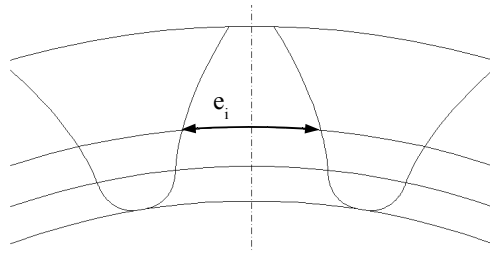


figure 2.20 – Epaisseur d'une dent sur le cercle primitif

### Condition de montage

Pour que le montage soit possible, il faut que la somme des épaisseurs des dents de la roue et du pignon sur leur cercle primitif respectif soit inférieure ou égale au pas  $p$ . Soit :

$$e_1 + e_2 \leq p \quad \Leftrightarrow \quad K_{e_1} + K_{e_2} \leq \pi \quad (2.27)$$

### Epaisseur minimale

Les contraintes de réalisation ou de résistance peuvent imposer une valeur minimale pour l'épaisseur en tête de dent. Cette contrainte définit la valeur minimale du coefficient d'épaisseur  $K_{e_i}$

L'épaisseur minimale de la dent  $e_{i_{mini}}$  est atteinte sur le cercle de tête effectif (lorsque  $e_{i_{mini}} = 0$ , la dent est pointue). Pour le pignon, l'expression de l'épaisseur minimale est (figure 2.21) :

$$e_{1_{mini}} = 2r_1\psi_{1_{mini}} \quad (2.28)$$

et

$$K_{e_{1_{mini}}} = (\psi_{1_{mini}} + \varphi_{ac1} - \varphi_1) z_1 \quad (2.29)$$

Avec les notations définies ci-contre :

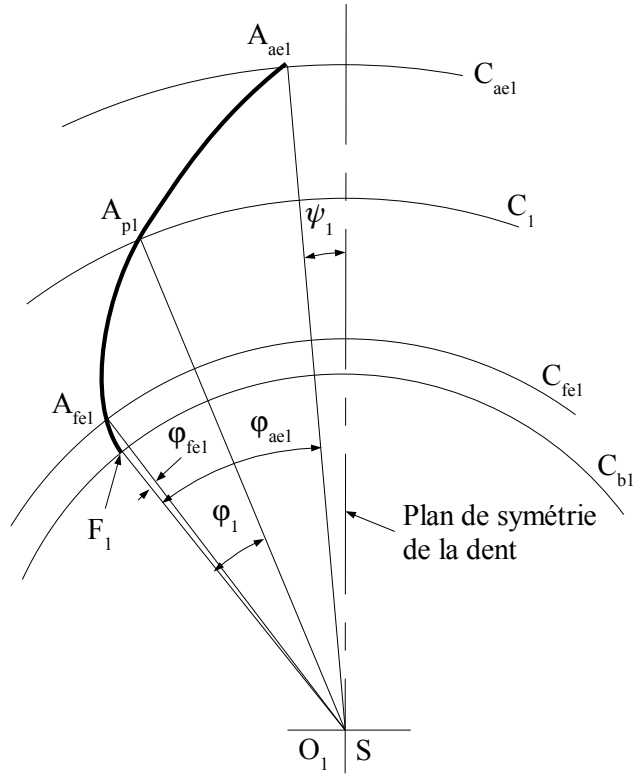


figure 2.21 – Epaisseur de dent

- $r_1$  = rayon du cercle primitif du pignon
- $F_1$  = point de rebroussement de la développante (sur le cercle de base)
- $A_{fe1}$  = point intersection du profil et du cercle de pied effectif
- $A_{p1}$  = point intersection du profil et du cercle primitif
- $A_{ae1}$  = point intersection du profil et du cercle de tête effectif
- $\psi_1$  = angle entre les plans  $(S, O_1, A_{ae1})$  et le plan de symétrie de la dent
- $\varphi_{ae1}$  = angle entre les plans  $(S, O_1, F_1)$  et le plan  $(S, O_1, A_{ae1})$
- $\varphi_{fe1}$  = angle entre les plans  $(S, O_1, F_1)$  et le plan  $(S, O_1, A_{fe1})$
- $\varphi_1$  = angle entre les plans  $(S, O_1, F_1)$  et le plan  $(S, O_1, A_{p1})$

La méthode pour calculer ces angles est la suivante :

1. Calcul des altitudes connaissant les angles définissant la denture :

$$X_{A_{p1}} = v \cos(\delta_1) \quad ; \quad X_{A_{ae1}} = v \cos(\delta_1 + \nu_{ae1})$$

2. Calcul des valeurs du paramètre  $u$  avec la relation (2.24) :

$$u_{A_{p1}} = \frac{1}{a_1} \arccos\left(\frac{X_{A_{p1}}}{vb_1}\right) \quad ; \quad u_{A_{ae1}} = \frac{1}{a_1} \arccos\left(\frac{X_{A_{ae1}}}{vb_1}\right)$$

3. Calcul les deux autres coordonnées des points  $A_{p1}$  et  $A_{ae1}$  :

$$\begin{cases} Y_{A_{p1}} &= v (a_1 \cos(u_{A_{p1}}) \cos(a_1 u_{A_{p1}}) + \sin(u_{A_{p1}}) \sin(a_1 u_{A_{p1}})) \\ Z_{A_{p1}} &= v (a_1 \sin(u_{A_{p1}}) \cos(a_1 u_{A_{p1}}) - \cos(u_{A_{p1}}) \sin(a_1 u_{A_{p1}})) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{A_{ae1}} &= v (a_1 \cos(u_{A_{ae1}}) \cos(a_1 u_{A_{ae1}}) + \sin(u_{A_{ae1}}) \sin(a_1 u_{A_{ae1}})) \\ Z_{A_{ae1}} &= v (a_1 \sin(u_{A_{ae1}}) \cos(a_1 u_{A_{ae1}}) - \cos(u_{A_{ae1}}) \sin(a_1 u_{A_{ae1}})) \end{cases}$$

4. Détermination des angles  $\varphi_1$  et  $\varphi_{ae1}$  :

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{Z_{A_{p1}}}{Y_{A_{p1}}}\right) \quad ; \quad \varphi_{ae1} = \arctan\left(\frac{Z_{A_{ae1}}}{Y_{A_{ae1}}}\right) \quad (2.30)$$

**Remarque :** Il est également possible d'utiliser la relation suivante :

$$r_x \sin(\varphi_x) = Z_x$$

### Épaisseur maximale

Des conditions technologiques (condition de montage, passage d'outil, résistance de la matrice de forgeage, ...) imposent une valeur minimale du creux entre dents  $c_{1mini}$  sur le cercle de pied effectif. La somme de la valeur du creux de dent et celle de l'épaisseur sur le même cercle étant égale au pas, la limite minimale du creux est équivalente à une épaisseur maximale de dent.

Pour un engrenage à denture extérieure, l'épaisseur est maximale sur le cercle de pied effectif. La valeur maximale du coefficient d'épaisseur pour le pignon est donc définie par :

$$\frac{c_{1mini}}{2r_{fe1}} - \varphi_{fe1} + \varphi_1 + \frac{m \cdot K_{e1maxi}}{2r_1} = \frac{\pi}{z_1} \quad \Leftrightarrow \quad K_{e1maxi} = \pi + z_1 \left( \varphi_{fe1} - \varphi_1 - \frac{c_{1mini}}{2r_{fe1}} \right) \quad (2.31)$$

La méthode de calcul de ces angles est identique à celle présentée précédemment :

$$\varphi_1 = \arctan\left\{ \frac{a_1 \sin(u_{A_{p1}}) \cos(a_1 u_{A_{p1}}) - \cos(u_{A_{p1}}) \sin(a_1 u_{A_{p1}})}{a_1 \cos(u_{A_{p1}}) \cos(a_1 u_{A_{p1}}) + \sin(u_{A_{p1}}) \sin(a_1 u_{A_{p1}})} \right\} \quad (2.32)$$

$$\varphi_{fe1} = \arctan\left\{ \frac{a_1 \sin(u_{A_{fe1}}) \cos(a_1 u_{A_{fe1}}) - \cos(u_{A_{fe1}}) \sin(a_1 u_{A_{fe1}})}{a_1 \cos(u_{A_{fe1}}) \cos(a_1 u_{A_{fe1}}) + \sin(u_{A_{fe1}}) \sin(a_1 u_{A_{fe1}})} \right\} \quad (2.33)$$

avec

$$u_{A_{p1}} = \frac{1}{a_1} \arccos\left(\frac{\cos(\delta_1)}{b_1}\right) \quad (2.34)$$

$$u_{A_{fe1}} = \frac{1}{a_1} \arccos\left(\frac{\cos(\delta_1 - \nu_{fe1})}{b_1}\right) \quad (2.35)$$

### Epaisseur de la dent sur un cercle de rayon quelconque

Pour différentes raisons (conception d'un montage d'usinage avec reprise sur la denture, ...), il peut s'avérer utile de connaître l'épaisseur de la dent sur un cercle de rayon quelconque. Connaissant  $K_{e1}$ , on cherche l'épaisseur  $s(R)$  de la dent sur un cercle de rayon  $R \in [r_{fe1}, r_{ae1}]$ . Soit  $M$  un point d'intersection entre le profil et le cercle de rayon  $R$  et  $\phi_R$  l'angle entre le plan de symétrie de la dent et le plan  $(S, O_1, M)$  (figure 2.22).

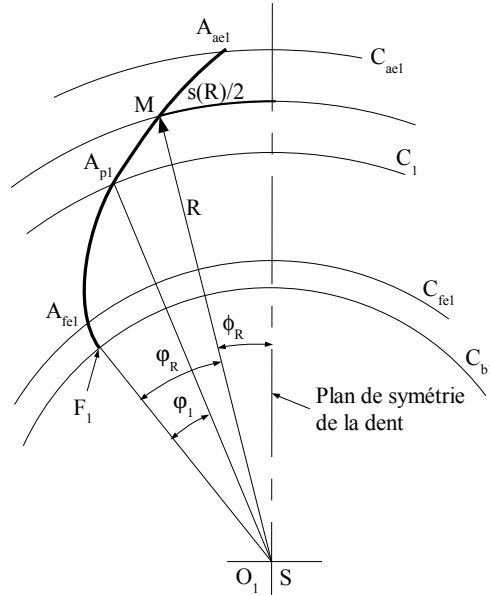


figure 2.22 – Epaisseur de dent sur un cercle de rayon R

$$s(R) = 2R\phi_R \quad \text{et} \quad \phi_R = \frac{K_{e1}}{z_1} + \varphi_1 - \varphi_R \quad (2.36)$$

Avec :

$$\varphi_R = \arctan\left\{\frac{a_1 \sin(u_R) \cos(a_1 u_R) - \cos(u_R) \sin(a_1 u_R)}{a_1 \cos(u_R) \cos(a_1 u_R) + \sin(u_R) \sin(a_1 u_R)}\right\}$$

$$u_R = \frac{1}{a_1} \arccos\left(\frac{\cos(\arcsin(R/v))}{b_1}\right)$$

## 2.2.4 Correction de denture

### Généralités

La surface active primaire des dents, telle qu'elle est définie ci-dessus, est une surface réglée et l'engrènement théorique a lieu sur une génératrice de ces surfaces. Cette situation, favorable à la répartition de la charge, est extrêmement sensible aux défauts de montage et de mise en forme. Par exemple, si les sommets des cônes ne sont pas confondus, le contact aura lieu à l'une des extrémités des dents, au bord des surfaces actives, créant ainsi des zones de fortes contraintes (figure 2.23).

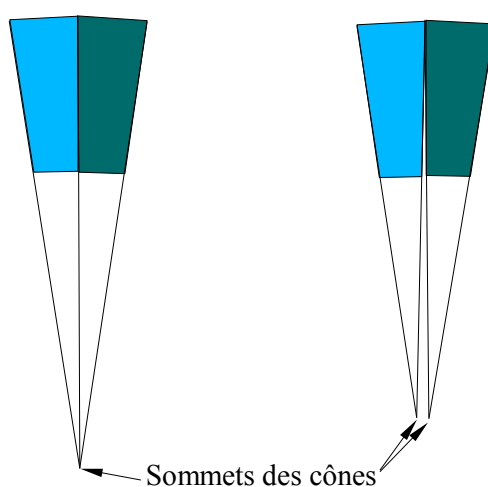


figure 2.23 – Contact linéique (à gauche) pour le positionnement nominal ; Contact ponctuel (à droite) pour un positionnement avec écarts

Afin de localiser le contact dans une zone médiane, entre le talon et la pointe des dents, malgré les défauts de forme, d'orientation et de position relatives des surfaces actives ainsi que des écarts et jeux de montage, les ingénieurs ont depuis longtemps ajouté un bombé sur les surfaces actives des dents (figure 2.24). Celui-ci peut être longitudinal et/ou de profil, concave ou convexe. Le maximum du bombé est toujours très faible devant les dimensions de la surface (quelques centièmes de millimètre pour des engrenages de boîte de vitesses automobile). Il n'est pas forcément nécessaire de créer un bombé sur les dents des deux roues en contact.

Le bombé de profil permet d'adoucir l'impact du premier contact entre les dents. En effet, sous charge, les dents en contact se déforment et induisent un déplacement relatif entre surfaces actives successives. Les profils des dents qui vont entrer en contact ne sont alors plus conjugués.

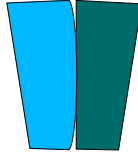


figure 2.24 – Contact ponctuel avec bombé

### Le bombé longitudinal

L'étude de l'influence de la forme du bombé, de sa valeur maximale et de sa position sur l'état de contrainte dans la dent, pour un engrenage conique droit est présentée en annexe C. Il ressort de cette analyse que la forme du bombé et sa hauteur ont peu d'influence sur l'état de contrainte. En revanche, une position optimale du bombé est trouvée, lorsque le maximum de celui-ci est à un tiers de la longueur de la dent à partir du talon.

D'autre part, pour ajouter uniquement un bombé longitudinal, il ne faut pas modifier les profils. Une façon de procéder est de faire pivoter chaque profil en développante de cercle sphérique autour de l'axe de la denture, suivant un angle fonction du rayon de la sphère sur laquelle il est tracé (figure 2.26). La méthode est la suivante :

Soit  $B$  la valeur du maximum du bombé souhaité et  $v_B$  le rayon de la sphère où sera le maximum du bombé :  $v_B = \frac{2R_g + R_p}{3}$  (voir annexe C).

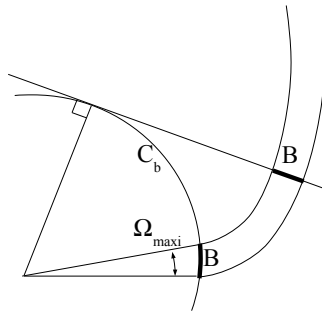


figure 2.25 – Bombé maximum

L'angle de rotation maximal est donc (figure 2.25) :

$$\Omega_{maxi} = \frac{B}{r_{bB}} = \frac{B}{v_B \sin \delta_b}$$

$(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  sont les coordonnées paramétriques des points de la surface du pignon sans bombé

(relation 2.25) et  $\Omega(v_1)$  est la fonction de rotation pour cette roue. La représentation paramétrique de la surface avec bombé longitudinal est définie par :

$$\mathbf{X}_{1B}(u_1, v_1) = \begin{cases} \hat{X}_B = \hat{X} \\ \hat{Y}_B = \hat{Y} \cos(\Omega(v_1)) + \hat{Z} \sin(\Omega(v_1)) \\ \hat{Z}_B = -\hat{Y} \sin(\Omega(v_1)) + \hat{Z} \cos(\Omega(v_1)) \\ u_1 \in [u_{fe1}, u_{ae1}] \\ v_1 \in [R_p, R_g] \end{cases} \quad (2.37)$$

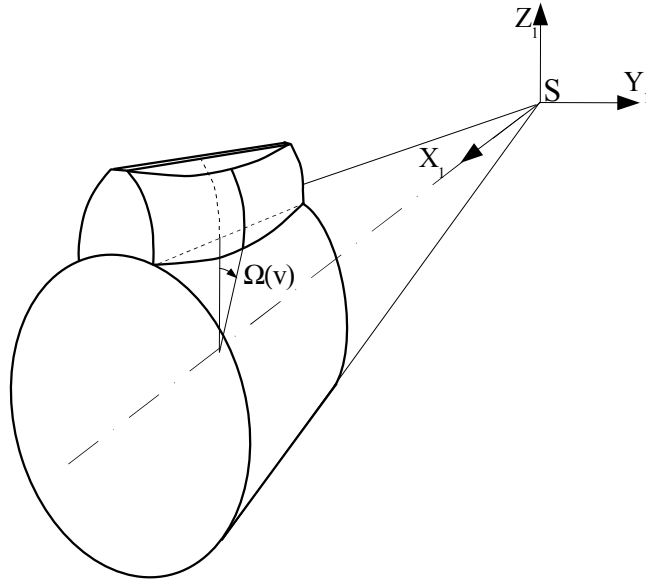


figure 2.26 – Rotation des profils pour former le bombé longitudinal

**Remarque :** On peut créer un bombé sur une surface en ajoutant de la matière ou en enlevant, ou les deux. Cette opération n'est pas sans influence sur l'épaisseur curviligne de la dent et il faut que la condition de montage soit respectée là où les dents sont les plus épaisses.

### 2.2.5 Les profils et surfaces de raccordement

Pour les engrenages cylindriques taillés par une crémaillère normalisée, le profil de raccordement en fond de denture est une tronchoïde [18]. Pour les engrenages coniques, à notre connaissance, il n'existe aucun profil type. Le profil de raccordement est l'enveloppe de l'extrémité de l'outil, dans son mouvement relatif par rapport à la roue dentée. Dans le cas des engrenages obtenus par forgeage, nous pouvons définir cette surface de multiples façons.

## Surface à rayon de courbure constant

Cette géométrie est la plus simple pour l'usinage des matrices de forgeage si le rayon de raccordement est égal au rayon de l'outil à extrémité sphérique qui va l'usiner. Cette géométrie est facilement réalisable en CAO mais elle n'a pas été étudiée.

## Surface à rayon de courbure évolutif

La surface de raccord en tête a pour contrainte fonctionnelle, d'éviter la collision avec l'autre denture et de limiter les concentrations de contraintes. En effet, les pièces ayant subies un traitement thermique superficiel sont plus fragiles au niveau des arêtes et le contact en tête de dent ne doit pas provoquer une dégradation de celle-ci. Il suffit que le raccordement des surfaces soit tangent. Dans le cas des dentures obtenues par forgeage, cette surface se trouve au fond de l'empreinte de la matrice et des contraintes d'usinage et de remplissage de celle-ci peuvent exister.

La surface de raccord en pied de dent influence directement l'état de contrainte dans cette zone. Pour limiter le phénomène de concentration de contrainte, le raccord avec les surfaces actives doit posséder une courbure et un gradient de courbure faibles.

Nous proposons que les raccordements de surface en tête et en pied soient au moins  $G^1$  (type de raccord défini par J.-L. BAUCHAT [28]). Ces surfaces peuvent être modélisées par des carreaux de COONS [29]. Un carreau est une surface polynomiale, généralement d'ordre 3, s'appuyant sur quatre courbes formant un contour fermé. Les conditions de tangence sont respectées.

En tête ou en pied, il est nécessaire de définir un profil de raccordement aux extrémités de la dent. Les profils de raccordement sont des courbes dans l'espace choisies symétriques. Ces profils sont obtenus, par exemple, par des courbes de BÉZIER [29, 30]. Ces courbes sont faciles à manipuler, les conditions de raccord sont simples à respecter et elles sont déformables à volonté. Le seul inconvénient des courbes de BÉZIER est qu'elles ne sont a priori pas tracées sur la sphère. Ce défaut est tout à fait mineur et il est possible de le corriger en utilisant des courbes de BÉZIER sphériques [31].

La courbe de BÉZIER de degré le plus faible qui répond aux conditions de raccord est de degré 2. Cependant, pour pouvoir agir sur la forme de ce raccord, tout en conservant des calculs raisonnables, il est plus judicieux d'utiliser une courbe à 5 pôles. Par exemple, pour le raccord en pied :

- le pôle «0» est sur la ligne de fond, à une distance  $v$  de  $S$
- le pôle «1» est sur la tangente au cercle de pied, du côté étudié
- le pôle «4» est à l'extrémité de l'arc de développante

- le pôle «3» est sur la tangente à la développante au pôle 4
- le pôle «2» est défini par une combinaison linéaire des vecteurs unitaires tangents définis au pôle 0 et 4

Ainsi, par construction, toutes les contraintes géométriques sont respectées. La figure 2.27 montre un raccord en pied réalisé avec une courbe de BÉZIER et un raccord en tête en arc de cercle. La figure 2.28 est un agrandissement de la précédente, au niveau du raccord en pied.

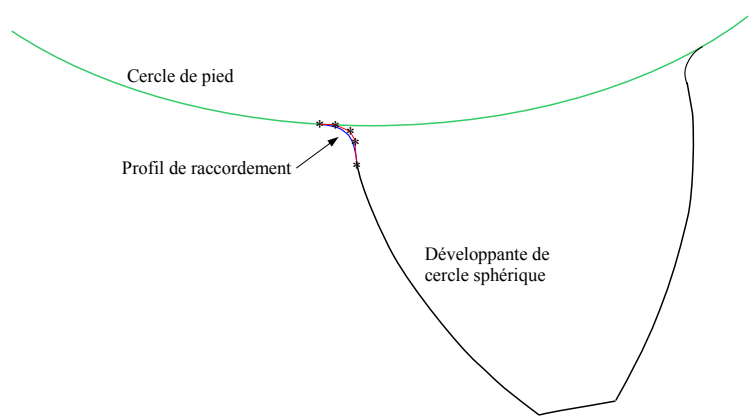


figure 2.27 – Profil de la dent avec raccordement en tête et sur le cercle de pied

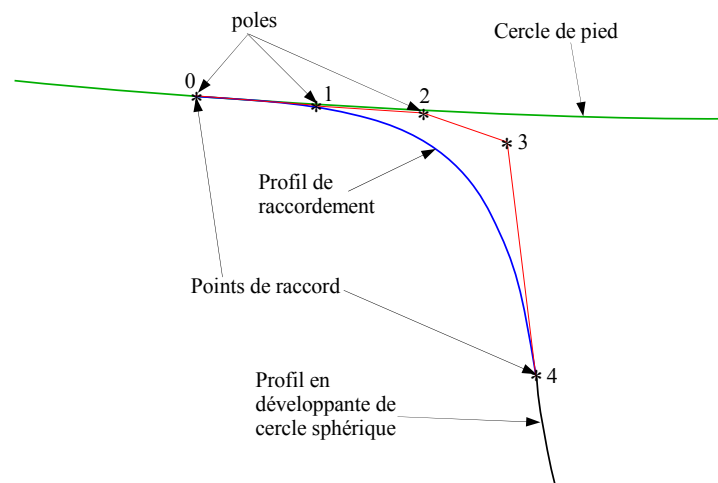


figure 2.28 – Profil de raccordement en pied et pôles de la courbe de BÉZIER

## 2.3 Indices de qualités de l'engrenage

Au paragraphe 2.1, nous avons défini les surfaces conjuguées à profil en développante de cercle sphérique. Ce modèle théorique est complété au paragraphe 2.2 par la définition de la surface nominale des dentures. Dans ce paragraphe, nous détaillons les contraintes à vérifier pour que l'ensemble des points de contact entre les roues appartiennent effectivement aux surfaces actives (condition de non interférence de fonctionnement). Nous définissons également deux autres paramètres qui caractérisent habituellement la qualité de l'engrènement : le rapport de conduite et les valeurs des glissements spécifiques maximums.

### 2.3.1 Interférences de fonctionnement

Pour les engrenages cylindriques, on définit l'interférence de taillage ou *primaire* et l'interférence de fonctionnement. Les roues dentées auxquelles nous nous intéressons ne sont a priori pas taillées, l'interférence de taillage n'a donc pas été développée.

#### Définition

Il y a *interférence de fonctionnement* lorsqu'un point de contact entre les dentures se trouve en dehors des surfaces actives de l'une des roues. Ce type de contact a lieu entre des surfaces qui ne sont pas conjuguées, la transmission n'est pas homocinétique et les contraintes au contact sont plus élevées.

#### Calculs

Nous raisonnons sur des angles entre des points définis sur la sphère  $k$ . Les points sont les suivants (figure 2.29) :

- $T_1$  et  $T_2$  : points de tangence de  $(P')$  avec respectivement  $C_{b1}$  et  $C_{b2}$
- $S_1$  et  $S_2$  : points d'intersection de  $(P')$  avec respectivement  $C_{ae1}$  et  $C_{ae2}$
- $I$  : point d'intersection de  $(P')$  avec  $(P)$

Nous pouvons maintenant définir les paramètres suivants :

- $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  respectivement les angles  $\widehat{T_1SI}$  et  $\widehat{T_2SI}$
- $\chi_1$  et  $\chi_2$  respectivement les angles orientés  $\widehat{T_1SS_2}$  et  $\widehat{T_2SS_1}$
- $\eta_1$  et  $\eta_2$  respectivement les angles  $\widehat{S_2SO_1}$  et  $\widehat{U_1SO_2}$
- $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  respectivement les angles  $\widehat{T_1SS_1}$  et  $\widehat{T_2SS_2}$

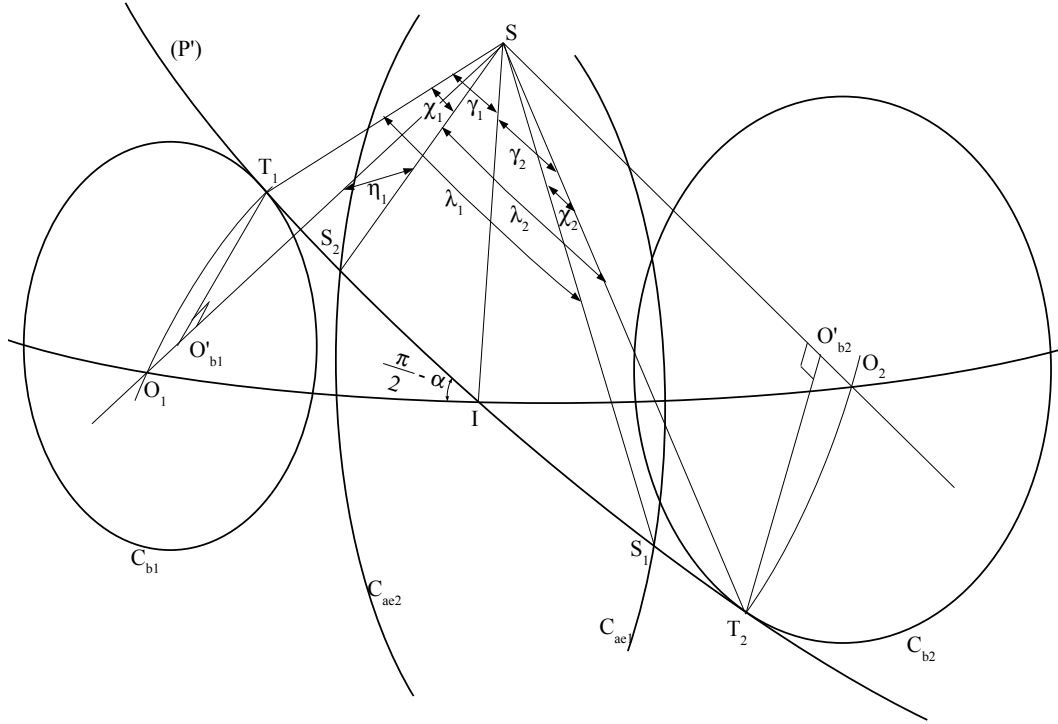


figure 2.29 – Interférences de fonctionnement

Les conditions de non interférence sont :

$$\begin{aligned} \chi_1 > 0 \text{ et } \chi_2 > 0 \\ \eta_1 > \delta_{fe1} \text{ et } \eta_2 > \delta_{fe2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

La relation (A.9) permet de calculer :

$$\lambda_1 = \arccos\left(\frac{\cos(\delta_{ae1})}{\cos(\delta_{b1})}\right) \quad (2.39)$$

$$\lambda_2 = \arccos\left(\frac{\cos(\delta_{ae2})}{\cos(\delta_{b2})}\right) \quad (2.40)$$

$$\gamma_1 = \arccos\left(\frac{\cos(\delta_1)}{\cos(\delta_{b1})}\right) \quad (2.41)$$

$$\gamma_2 = \arccos\left(\frac{\cos(\delta_2)}{\cos(\delta_{b2})}\right) \quad (2.42)$$

$$\chi_1 = \gamma_1 + \gamma_2 - \lambda_2 \quad (2.43)$$

$$\chi_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - \lambda_1 \quad (2.44)$$

$$\eta_1 = \arccos(\cos(\chi_1) \cos(\delta_{b1})) \quad (2.45)$$

$$\eta_2 = \arccos(\cos(\chi_2) \cos(\delta_{b2})) \quad (2.46)$$

### 2.3.2 Rapport de conduite

Le *rapport de conduite* est la longueur de l'arc formé par l'ensemble des points de contact sur la sphère divisé par le pas de base. L'*arc de conduite* est l'arc de cercle passant par  $I$  et ayant pour extrémité  $S_1$  et  $S_2$ , sa longueur est  $v\widehat{S_1SS_2}$  avec  $\widehat{S_1SS_2} = \chi_1 + \chi_2 - \gamma_1 - \gamma_2$ . D'autre part,  $p_b = 2\pi \frac{r_{b1}}{z_1}$ . Le rapport de conduite est donc :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\widehat{S_2S_1}}{p_b} = \frac{(\chi_1 + \chi_2 - \gamma_1 - \gamma_2)vz_1}{2\pi r_{b1}} = \frac{(\chi_1 + \chi_2 - \gamma_1 - \gamma_2)z_1}{2\pi \sin(\delta_{b1})} \quad (2.47)$$

### 2.3.3 Glissement spécifique

La différence des valeurs absolues des glissements spécifiques pour chacune des roues, au point de contact, caractérise l'écart d'usure instantanée sur les flancs des dents [18]. En mécanique générale, le concepteur cherche généralement à égaliser les glissements spécifiques aux limites de l'engrènement pour répartir équitablement l'usure instantanée au contact sur les deux roues. La fréquence de contact des dents du pignon étant plus élevée que celle de la roue, celui-ci s'usera légèrement plus vite. Il est possible d'équilibrer l'usure en tenant compte de la fréquence de contact mais les géométries obtenues ne sont généralement pas satisfaisantes.

Pour les engrenages coniques, la définition des glissements spécifiques est identique à celle donnée pour les engrenages cylindriques ([32] p. 131) :

$$g_{s1} = \frac{ds_1 - ds_2}{ds_1} \quad ; \quad g_{s2} = \frac{ds_2 - ds_1}{ds_2}$$

$ds_i, i \in \{1,2\}$  étant la longueur du chemin parcouru par le point de contact  $M$  dans le repère associé à la roue  $i$ . La longueur du déplacement de ce point dans le repère  $i$  est :

$$ds_i = \|\mathbf{V}_{M \in i/0}\|.dt = \|\omega_{i/0} \wedge \mathbf{SM}\|.dt$$

En prenant pour  $\omega_{i/0}$ , la valeur absolue de la vitesse de rotation :

$$\begin{cases} g_{s1} &= \frac{\omega_{1/0} \sin(\delta_{M1}) - \omega_{2/0} \sin(\delta_{M2})}{\omega_{1/0} \sin(\delta_{M1})} \\ g_{s2} &= \frac{\omega_{2/0} \sin(\delta_{M2}) - \omega_{1/0} \sin(\delta_{M1})}{\omega_{2/0} \sin(\delta_{M2})} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} g_{s1} &= 1 - \frac{\omega_{2/0} \sin(\delta_{M2})}{\omega_{1/0} \sin(\delta_{M1})} \\ g_{s2} &= 1 - \frac{\omega_{1/0} \sin(\delta_{M1})}{\omega_{2/0} \sin(\delta_{M2})} \end{cases} \quad (2.48)$$

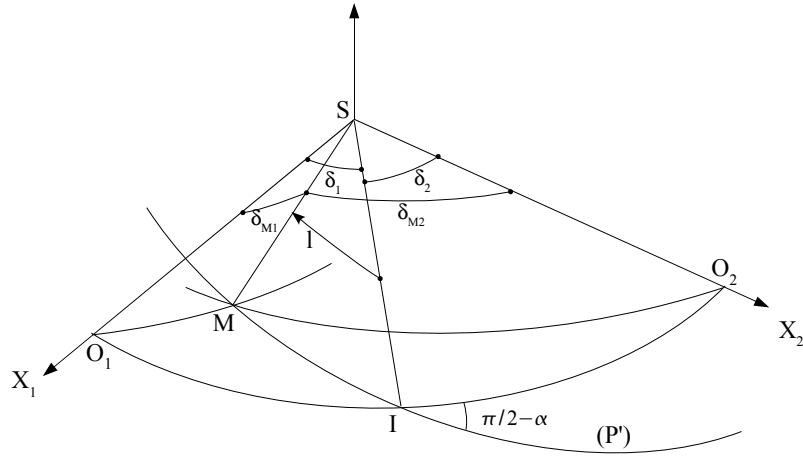


figure 2.30 – Définition des angles pour le calcul des  $gs_i$

Les angles  $\delta_{M1}$  et  $\delta_{M2}$  sont pris entre le rayon ( $SM$ ) et l'axe de rotation de 1 et de 2 (figure 2.30). Pour les déterminer, on applique la relation A.1 des triangles sphériques :

$$\begin{cases} \cos(\delta_{M1}) = \cos(l) \cos(\delta_1) + \sin(l) \sin(\delta_1) \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \cos(\delta_{M2}) = \cos(l) \cos(\delta_2) - \sin(l) \sin(\delta_2) \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{cases} \quad (2.49)$$

$l$  est l'angle orienté entre les rayons  $SI$  et  $SM$ , il paramètre la position du point de contact  $M$  sur l'arc de conduite. On peut définir arbitrairement que  $l$  est positif lorsque  $M$  se trouve entre  $I$  et  $T_1$  et négatif de l'autre côté de l'arc de conduite. Pour utiliser les expressions précédentes directement dans les équations de  $gs_1$  et  $gs_2$ , on peut écrire  $\cos(\delta_{M1}) = +\sqrt{1 - \sin^2(\delta_{M1})}$ ,  $|\delta_{M1}|$  étant généralement inférieure à  $\pi/2$ .

Nous vérifions que, comme pour les engrenages cylindriques, les glissements spécifiques sont nuls sur la ligne de roulement sans glissement ( $SI$ ) et que leur valeur absolue est maximale en pied de dent.

$|gs_1|$  est maximal lorsque  $\delta_{M2} = \delta_{ae2}$ . La relation (2.48) permet alors de définir la valeur du

paramètre  $l$ , celui-ci étant supposé compris entre 0 et  $\pi/2$  :

$$\begin{aligned} \cos(\delta_{ae2}) &= \cos(l) \cos(\delta_2) - \sin(l) \sin(\delta_2) \cos(\pi/2 - \alpha) \\ \Leftrightarrow \cos(\delta_{ae2}) + \sin(l) \sin(\delta_2) \sin(\alpha) &= \sqrt{1 - \sin^2(l)} \cos(\delta_2) \\ \Leftrightarrow \cos^2(\delta_{ae2}) + \sin^2(l) \sin^2(\delta_2) \sin^2(\alpha) + 2 \cos(\delta_{ae2}) \sin(l) \sin(\delta_2) \sin(\alpha) &= \cos^2(\delta_2)(1 - \sin^2(l)) \\ \Leftrightarrow \sin^2(l)(\sin^2(\delta_2) \sin^2(\alpha) + \cos^2(\delta_2)) + 2 \sin(l)(\cos(\delta_{ae2}) \sin(\delta_2) \sin(\alpha)) + \cos^2(\delta_{ae2}) - \cos^2(\delta_2) &= 0 \end{aligned}$$

La seule solution acceptable est :

$$\sin(l) = \frac{-\cos(\delta_{ae2}) \sin(\delta_2) \sin(\alpha)}{\sin^2(\delta_2) \sin^2(\alpha) + \cos^2(\delta_2)} + \frac{\sqrt{(\cos(\delta_{ae2}) \sin(\delta_2) \sin(\alpha))^2 - (\sin^2(\delta_2) \sin^2(\alpha) + \cos^2(\delta_2))(\cos^2(\delta_{ae2}) - \cos^2(\delta_2))}}{\sin^2(\delta_2) \sin^2(\alpha) + \cos^2(\delta_2)} \quad (2.50)$$

L'allure de l'évolution des glissements spécifiques en fonction de la position du point de contact est définie figure 2.31.

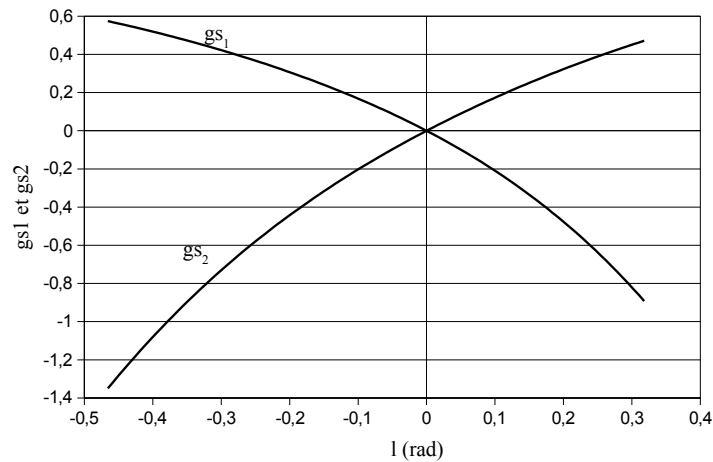


figure 2.31 – Allure des glissements spécifiques

Il est possible d'équilibrer les valeurs des glissements spécifiques ou l'usure en modifiant les valeurs de  $\delta_{ae1}$  et  $\delta_{ae2}$ .

## 2.4 Détermination des positions angulaires remarquables lors de l'engrènement

L'angle de rotation du pignon est défini par l'angle entre les plans  $(O_1, S, F_1)$  et  $(S, O_1, O_2)$ , il est noté  $\phi_1$ .  $F_1$  étant le pied de la développante du pignon sur le cercle de base.

Lorsque le contact a lieu aux extrémités du profil actif, le contact se trouve en  $S_1$  ou en  $S_2$ . Ces deux configurations caractérisent les positions extremums de rotation du pignon pour lesquelles le point de contact reste sur le même profil.

### 2.4.1 Détermination de l'angle de rotation $\phi_{1S_2}$

La position du pignon est définie par  $\phi_{1S_2}$  lorsque le point de contact est en  $S_2$  (figure 2.32).

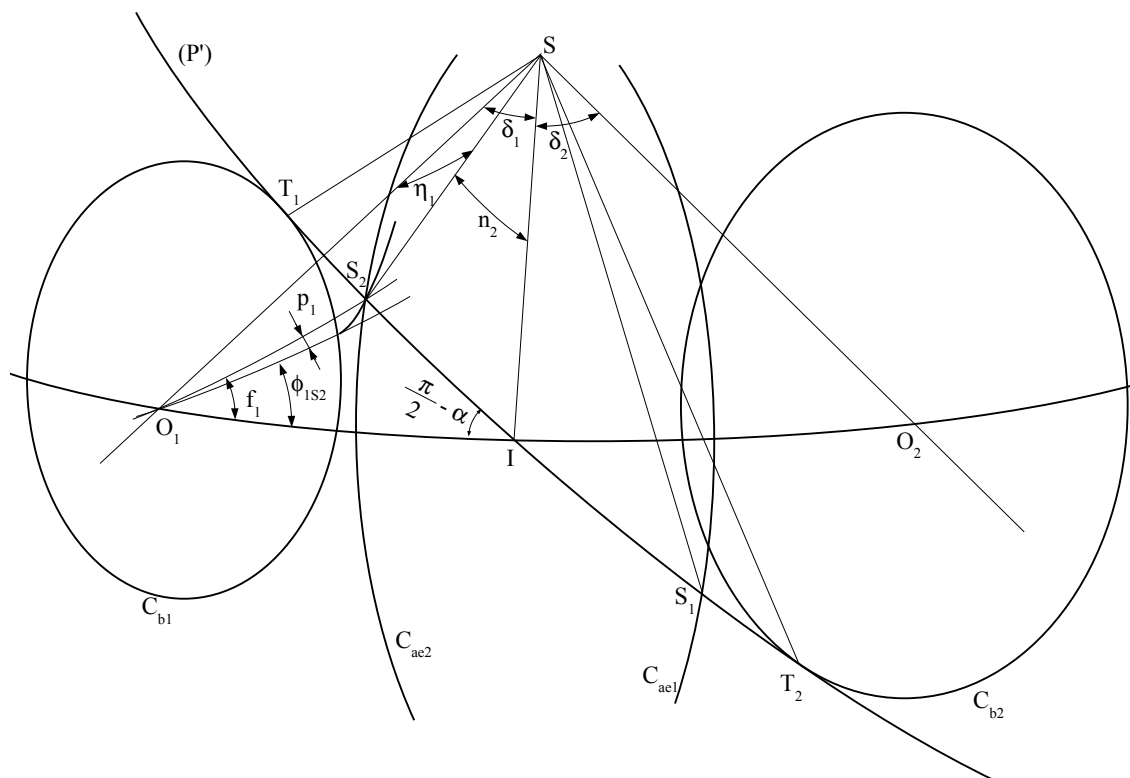


figure 2.32 – Contact en  $S_2$  ; position du pignon définie par  $\phi_{1S_2}$

La détermination de  $\phi_{1S_2}$  s'effectue en trois étapes (voir figure 2.32) :

1. Calcul de l'angle  $f_1$  entre les plans  $(S, O_1, O_2)$  et  $(S, O_1, S_2)$  : la relation (2.45) permet de calculer  $\eta_1$ . Dans le triangle sphérique  $\langle O_1, O_2, S_2 \rangle$ , la relation (A.1) s'écrit :

$$\cos(\delta_{a2}) = \cos(\Sigma_0) \cos(\eta_1) + \sin(\Sigma_0) \sin(\eta_1) \cos(f_1) \quad (2.51)$$

D'où la valeur de l'angle  $f_1$ .

Vérification : l'angle  $f_1$  et l'angle  $n_2 = \widehat{S_2SI}$  doivent vérifier les relations suivantes :

$$n_2 = \gamma_1 - \chi_1 \quad (2.52)$$

$$\cos(n_2) = \cos(\eta_1) \cos(\delta_1) + \sin(\eta_1) \sin(\delta_1) \cos(f_1) \quad (2.53)$$

$$\cos(\delta_{a2}) = \cos(\delta_2) \cos(n_2) + \sin(\delta_2) \sin(n_2) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad (2.54)$$

2. Détermination de l'angle  $p_1$  entre les plans  $(S, O_1, S_2)$  et  $(S, O_1, F_1)$  (voir figure 2.33) avec la technique présentée dans le paragraphe 2.2.3 consacrée aux épaisseurs curvilignes. La formule développée peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_{S_2} = \frac{1}{a_1} \arccos\left(\frac{\cos(\eta_1)}{b_1}\right) \\ p_1 = \arctan\left(\frac{a_1 \sin(u_{S_2}) \cos(a_1 u_{S_2}) - \cos(u_{S_2}) \sin(a_1 u_{S_2})}{a_1 \cos(u_{S_2}) \cos(a_1 u_{S_2}) + \cos(u_{S_2}) \cos(a_1 u_{S_2})}\right) \end{cases}$$

3. Finalement :

$$\phi_{1S_2} = f_1 - p_1 \quad (2.55)$$

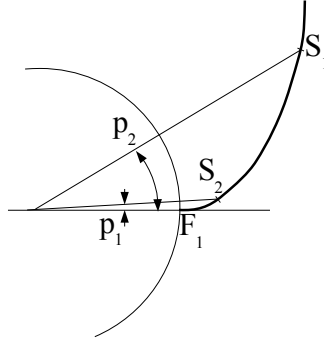


figure 2.33 – Définition des angles  $p_1$  et  $p_2$

La valeur de  $\phi_{1S_2}$  est majorée par une valeur limite  $\phi_{1T_1}$  correspondant au cas où  $S_2$  est confondu avec  $T_1$ . D'après (A.3) et (A.9) :

$$c_{1limite} = \arccos\left(\frac{\cos(\delta_1)}{\cos(\delta_{b1})}\right) = \gamma_1 \quad (2.56)$$

$$\phi_{1T_1} = \arcsin\left(\frac{\sin(c_{1limite})}{\sin(\delta_1)}\right) \quad (2.57)$$

#### 2.4.2 Détermination de l'angle de rotation $\phi_{1S_1}$

La position du pignon est définie par  $\phi_{1S_1}$  lors le point de contact est en  $S_1$  (figure 2.34).

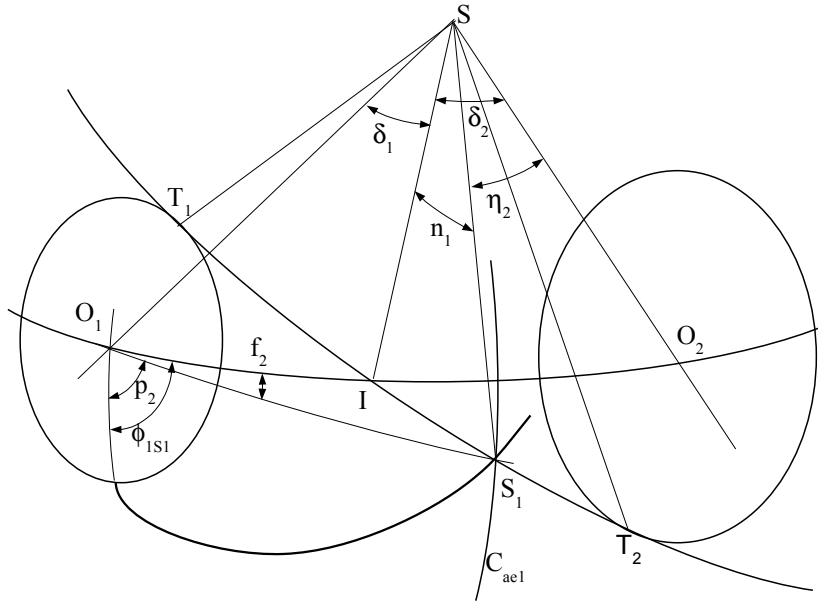


figure 2.34 – Contact en  $S_1$  ; position du pignon définie par  $\phi_{1S_1}$

La démarche de détermination de  $\phi_{1S_1}$  est identique à la précédente :

1. Détermination de l'angle  $f_2$  entre les plans  $(O_1, S, S_1)$  et  $(O_2, S, I)$
2. Détermination de l'angle  $p_2$  entre  $(S, O_1, S_1)$  et  $(S, S_1, F_1)$
3. Calcul de  $\phi_{1S_1}$

Dans le triangle sphérique  $\langle O_1, O_2, S_1 \rangle$ , la relation (A.2) permet de calculer  $f_2$  :

$$\cos(\delta_{b2}) = \cos(\Sigma_0) \cos(\eta_2) + \sin(\Sigma_0) \sin(\eta_2) \cos(f_2) \quad (2.58)$$

Vérification : l'angle  $f_2$  et l'angle  $n_1 = \widehat{S_1 S I}$  doivent vérifier les relations suivantes :

$$n_1 = \gamma_2 - \chi_2 \quad (2.59)$$

$$\cos(n_1) = \cos(\delta_1) \cos(\delta_{a1}) + \sin(\delta_1) \sin(\delta_{a1}) \cos(f_2) \quad (2.60)$$

$$\cos(\delta_{a1}) = \cos(n_1) \cos(\delta_1) + \sin(n_1) \sin(\delta_1) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad (2.61)$$

L'angle  $p_2$  se trouve entre le pied de la développante et le point coïncidant avec  $S_1$ . Il est déterminé

avec les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{S_1} &= \frac{1}{a_1} \arccos\left(\frac{\cos(\delta_{a1})}{b_1}\right) \\ p_2 &= \arctan\left(\frac{a_1 \sin(u_{S_1}) \cos(a_1 u_{S_1}) - \cos(u_{S_1}) \sin(a_1 u_{S_1})}{a_1 \cos(u_{S_1}) \cos(a_1 u_{S_1}) + \cos(u_{S_1}) \sin(a_1 u_{S_1})}\right) \end{cases}$$

D'où :

$$\phi_{1S_1} = -f_2 - p_2 \quad (2.62)$$

$\phi_{1S_1}$  est minorée par une valeur limite  $\phi_{1T_2}$  obtenue lorsque  $S_1$  coïncide avec  $T_2$  :

$$c_{2limite} = \arccos\left(\frac{\cos(\delta_2)}{\cos(\delta_{b2})}\right) = \gamma_2 \quad (2.63)$$

Les formules précédentes permettent de calculer les valeurs limites de  $u_{S_1}$  et  $p_2$ .

$$\phi_{1T_2} = -f_{2limite} - p_{2limite} \quad (2.64)$$

### 2.4.3 Angle de rotation total et rapport de conduite

L'amplitude de la rotation du pignon lorsque le point de contact ne quitte pas un profil est :

$$\Theta = \phi_{1S_2} - \phi_{1S_1}$$

Soit

$$\Theta = f_1 - p_1 + f_2 + p_2 \quad (2.65)$$

D'après la définition du rapport de conduite, celui-ci peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\epsilon_\alpha = \frac{\Theta}{\frac{2\pi}{z_1}} \quad (2.66)$$

Cette relation et (2.47) sont identiques.

### 2.4.4 Détermination des positions du pignon où il y a 1 ou 2 points de contact

Dans le cas où le rapport de conduite est compris entre 1 et 2, il y a 1 ou 2 points de contact entre les dentures. D'après les propriétés des développantes de cercle sphérique, la distance curviligne, mesurée sur le grand cercle d'engrènement entre deux points de contact est égale au pas de base. Lorsqu'un point de contact est au voisinage d'une extrémité de l'arc de conduite, il est certain qu'un second point de contact entre les dentures existe pour assurer la continuité de l'engrènement.

Le point de l'arc d'engrènement coïncidant avec le second point de contact lorsque le premier

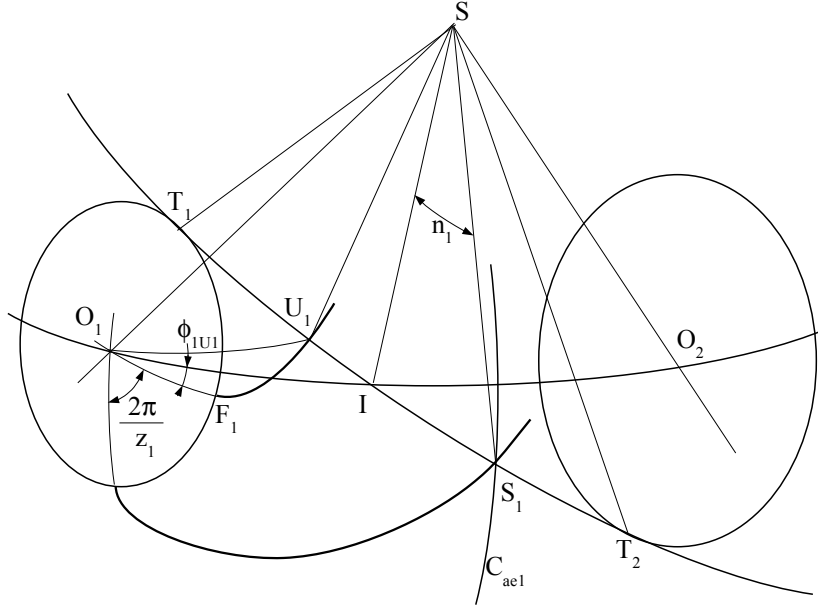


figure 2.35 – Position limite avec 2 points de contact

coïncide avec  $S_1$ , est noté  $U_1$  (figure 2.35).  $S_1$  et  $U_1$  appartiennent à des profils de même orientation et successifs.  $U_1$  définit le plus bas point de contact unique sur un profil du pignon. De même, le point  $U_2$  de l'arc d'engrènement est le point coïncidant avec le second point de contact lorsque le premier coïncide avec  $S_2$ .  $U_2$  définit le plus haut point de contact unique sur un profil du pignon. Sur le grand cercle d'engrènement, les distances entre  $S_1$  et  $U_1$  d'une part et  $S_2$  et  $U_2$  sont toutes deux égales au pas de base en raison du roulement sans glissement entre  $(S, C_{b1})$  et  $(S, C_{b2})$  avec le plan  $P'$ . L'angle de rotation pour passer d'un profil au suivant est  $\frac{2\pi}{z_1}$  sur le pignon. Ainsi, en notant  $\phi_{1U_1}$  l'angle de rotation du pignon lorsque la développante de référence est en  $U_1$  et  $\phi_{1U_2}$  l'angle de rotation du pignon lorsque la développante de référence est en  $U_2$ . Les positions angulaires du pignon à la limite entre 1 et 2 points de contact sont :

$$\phi_{1U_1} = \phi_{1S_1} - \frac{2\pi}{z_1} \quad (2.67)$$

$$\phi_{1U_2} = \phi_{1S_2} + \frac{2\pi}{z_1} \quad (2.68)$$

## 2.5 Applications

Afin d'illustrer les modèles géométriques précédemment définis, nous donnons ici une application numérique, pour une géométrie nominale et indéformable, et une application industrielle.

### 2.5.1 Application numérique

Cette application permet de montrer les ordres de grandeur des différentes caractéristiques de l'engrenage. **Paramètres de l'engrenage**

$$\begin{array}{ll} z_1 & = 43 & z_2 & = 57 \\ \Sigma_0 & = \frac{\pi}{2} & \alpha & = \frac{\pi}{7,5} \\ K_h & = 2 & & \\ K_{e1} & = \frac{\pi}{2} & K_{e2} & = \frac{\pi}{2} \\ K_{fe1} & = 1 & K_{fe2} & = 1 \\ e_{1mimi} & = 0 & e_{2mimi} & = 0 \\ c_{1mimi} & = 0,1.m & c_{2mimi} & = 0,1.m \end{array}$$

Pas de bombé

#### Vérifications du choix des paramètres

– Epaisseur de dent (relations (2.29) et (2.31)) :

$$\text{Epaisseur minimale } K_{e1mimi} = 0,9661$$

$$\text{Epaisseur maximale } K_{e1maxi} = 2,2413$$

$$\text{Epaisseur minimale } K_{e2mimi} = 0,9349$$

$$\text{Epaisseur maximale } K_{e2maxi} = 2,20$$

– Condition de montage (relation(2.27))

$$K_{e1} + K_{e2} = \pi$$

Il y a fonctionnement sans jeu.

– Interférence de fonctionnement :

$$2.39 \rightarrow \lambda_1 = 0,3613$$

$$2.40 \rightarrow \lambda_2 = 0,5601$$

$$2.41 \rightarrow \gamma_1 = 0,2977$$

$$2.42 \rightarrow \gamma_2 = 0,4945$$

$$2.43 \rightarrow \chi_1 = 0,2321$$

$$2.44 \rightarrow \chi_2 = 0,4309$$

$$2.45 \rightarrow \eta_1 = 0,6221$$

$$2.46 \rightarrow \eta_2 = 0,8999$$

Les conditions de non interférence (2.38) sont toutes vérifiées.

### Valeurs remarquables

Epaisseur de la dent de la roue sur le cercle de tête effectif (2.36) : 0,0139.v

Epaisseur de la dent de la roue sur le cercle de pied effectif (2.36) : 0,0330.v

Epaisseur de la dent du pignon sur le cercle de tête effectif (2.36) : 0,0176.v

Epaisseur de la dent du pignon sur le cercle de pied effectif (2.36) : 0,0319.v

Rapport de conduite (2.47) : 1,6075

Glissement spécifique maximum pour le pignon (2.48, 2.49, 2.50) : 0,846

Glissement spécifique maximum pour la roue (2.48, 2.49, 2.50) : 1,467

### Positions angulaires du pignon pour des configurations particulières

$$(2.64) \rightarrow \phi_{1T_2} = -0,9312$$

$$(2.62) \rightarrow \phi_{1S_1} = -0,1480$$

$$(2.68) \rightarrow \phi_{1U_2} = -0,0592$$

$$(2.30) \rightarrow \phi_{1I} = \varphi_1 = -0,0324$$

$$(2.67) \rightarrow \phi_{1U_1} = -0,0019$$

$$(2.55) \rightarrow \phi_{1S_2} = 0,0869$$

$$(2.57) \rightarrow \phi_{1T_1} = 0,5087$$

La relation 2.66 donne pour le rapport de conduite :  $\epsilon_\alpha = 1,6075$

La figure 2.36 représente partiellement l'engrenage correspondant.

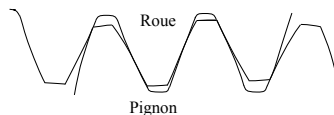


figure 2.36 – Profil des dents

## 2.5.2 Applications industrielles

Les applications industrielles de l'analyse et la synthèse développées dans ce chapitre ont essentiellement été développées par L. BERVILLER dans ses travaux de thèse [33]. Cette collaboration avec à notre partenaire industriel a permis de développer de nouvelles géométries pour les pignons forgés net shape de différentiel pour véhicules particuliers et utilitaires. Après une brève présentation de l'activité «concevoir et fabriquer des pignons net shape de différentiel», nous montrons deux exemples significatifs de l'apport de notre étude sur les pièces fabriquées.

### Localisation de l'apport de notre travail dans un processus industriel

La figure 2.37 décrit l'activité «concevoir et fabriquer des pignons net shape de différentiel». Le processus est décomposé en 5 sous-activités qui interagissent. La *conception* (A1) permet d'établir une géométrie de pignon tolérancée et validée de ce point de vue, à partir du cahier des charges. La seconde activité (A2) consiste à *définir les gammes et méthodes de fabrication* à partir de la définition du produit et des ressources et compétences disponibles. La troisième activité (A3) est la *fabrication des pignons* en série importante qui est lancée après les phases de fabrication des prototypes, puis des échantillons initiaux. Des *contrôles spécifiques* (A4) des pignons ont été développés, notamment pour améliorer la connaissance du produit et des outils de mise en forme pendant le processus de fabrication. L'ensemble des quatre premières activités doit faire l'objet d'une *expertise afin d'améliorer la connaissance du produit* (A5).

Nos travaux sur la géométrie nominale des pignons coniques à denture en développante de cercle sphérique contribuent sensiblement à la conception (A1) et, dans une moindre mesure, à la connaissance du produit (A5).

### Amélioration de la qualité de l'engrènement

Les résultats de nos travaux sur la géométrie nominale ont été appliqués à la re-conception de la denture de pignons de différentiels fabriqués en série par notre partenaire. La qualité de l'engrènement est estimée par des tests visuels et par des relevés d'engrénométrie.

**Tests visuels** : Les surfaces actives d'une partie des dents sont colorées au feutre et lors de l'engrènement, le glissement permet la coloration ou la décoloration des flancs de dent. Les photos 2.38(a) et 2.38(b) montrent la portée des pignons ayant la géométrie initiale. Les décolorations ont lieu sur une longueur importante des dents, signature d'un bombé longitudinal mal conçu et ainsi, d'une sensibilité importante aux écarts de position et d'orientation.

Les photos 2.38(c) et 2.38(d) montrent les portées d'un engrènement re-conçu et possédant un bombé longitudinal. La localisation des zones de contact est effectivement maîtrisée.

## Apport de notre travail sur la géométrie nominale des pignons

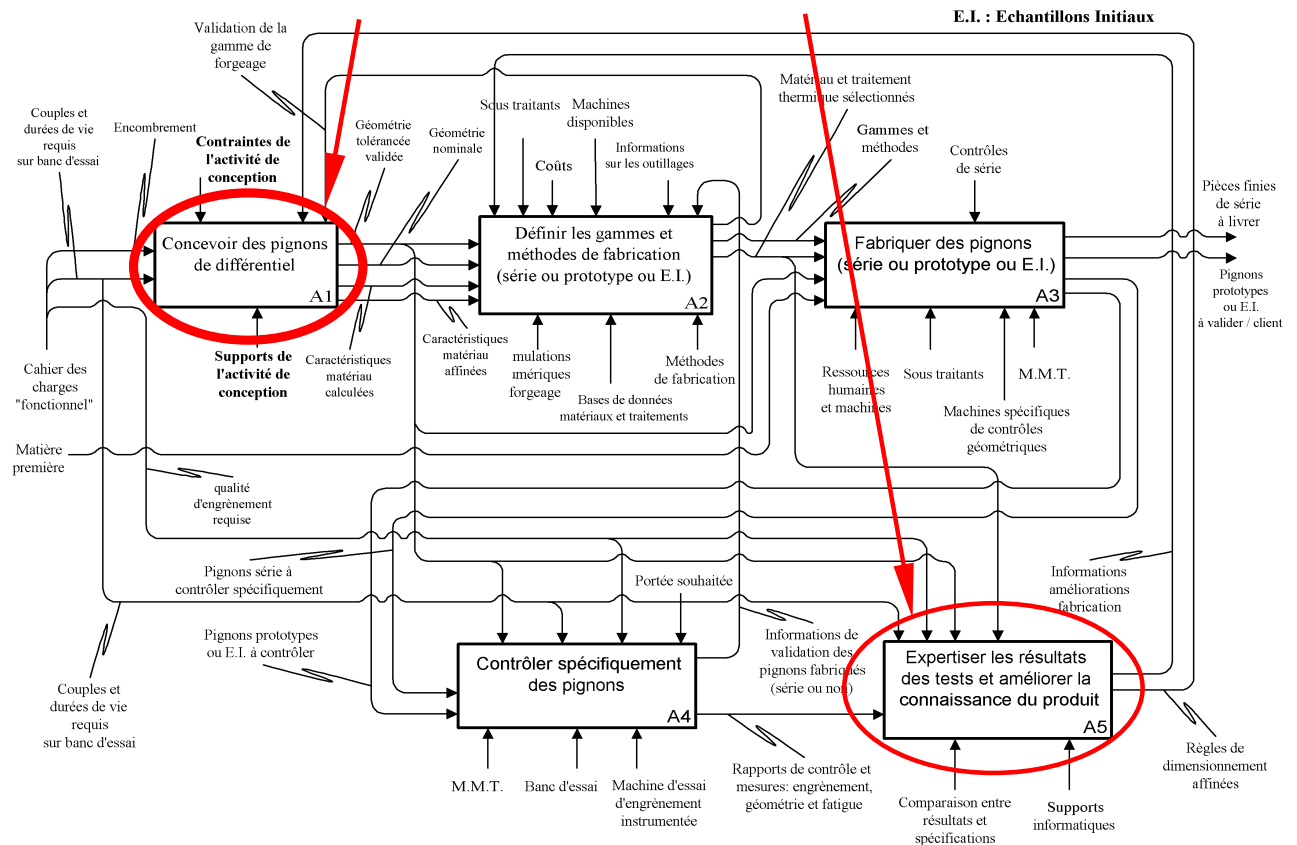


figure 2.37 – Description de l’activité «concevoir et fabriquer des pignons net shape de différentiel»

**Tests d’engrènement :** L. BERVILLER [33] a réalisé des essais d’engrènement. la figure 2.39 présente des enregistrements de ses mesures sur 5 dents. Les écarts cinématiques d’engrènement (voir chapitre 3) sont placés en ordonnée et exprimés en micromètre. Le nombre de tours du satellite est en abscisse.

L’application de notre bombé longitudinal a permis de diviser par deux l’erreur cinématique de changement de dent (figure 2.39).

### Amélioration de la résistance mécanique

Pour un certain nombre d’applications, notre partenaire industriel doit améliorer la résistance mécanique (aux chocs et en durée de vie) tout en conservant le même encombrement. Pour atteindre cet objectif, il travaille sur trois domaines :

1. Amélioration de la qualité des aciers employés et des traitements thermiques (hors de notre préoccupation)

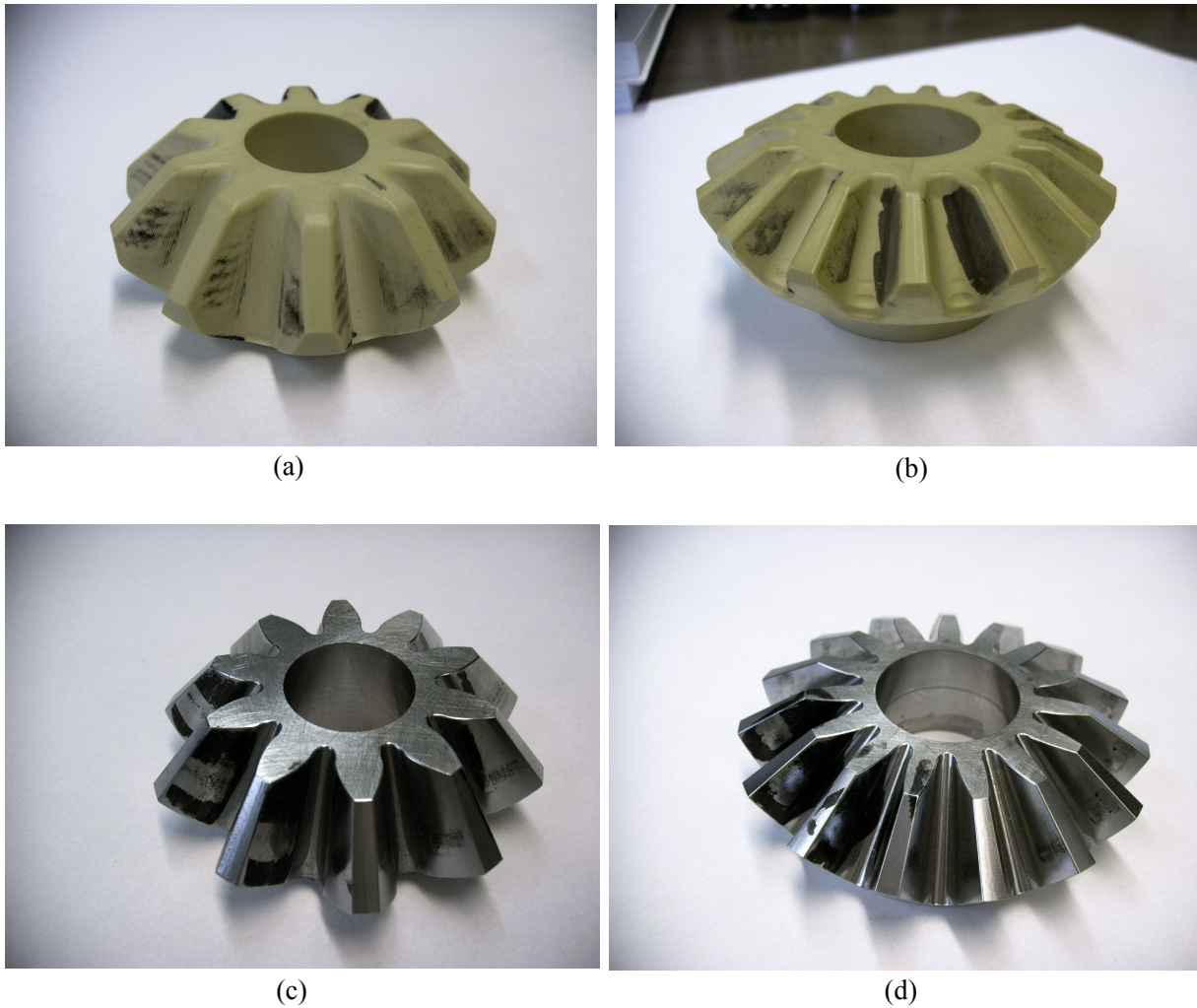


figure 2.38 – Photos des satellites et des planétaires avant et après la re-conception

2. Rechercher une forme de dent qui résiste mieux à la flexion. Pour cela, il est nécessaire d'augmenter l'épaisseur des dents de la denture la plus faible tout en respectant la condition de montage (2.27). La définition de la denture telle que nous l'avons présenté dans ce chapitre, a permis de modifier aisément les épaisseurs des dents (facteur  $K_e$ ) sans changer la forme des surfaces actives. En augmentant l'angle de pression, le pied de dent se renforce mais, pour un couple transmis donné, l'action mécanique de contact augmente également.
3. Modifier la géométrie en dehors des surfaces actives, pour renforcer la denture tout en respectant les contraintes du procédé de forgeage. Cette étude a conduit à placer des renforts au talon et à la pointe des dents, comme le montre la figure 2.40.

Les tests de résistance mécanique sur banc d'essais avec des pièces de nouvelle géométrie ont permis de valider l'ensemble de la démarche. La durée de vie en fatigue est augmentée de 20 à 100% suivant les options métallurgiques choisies et les charges appliquées.

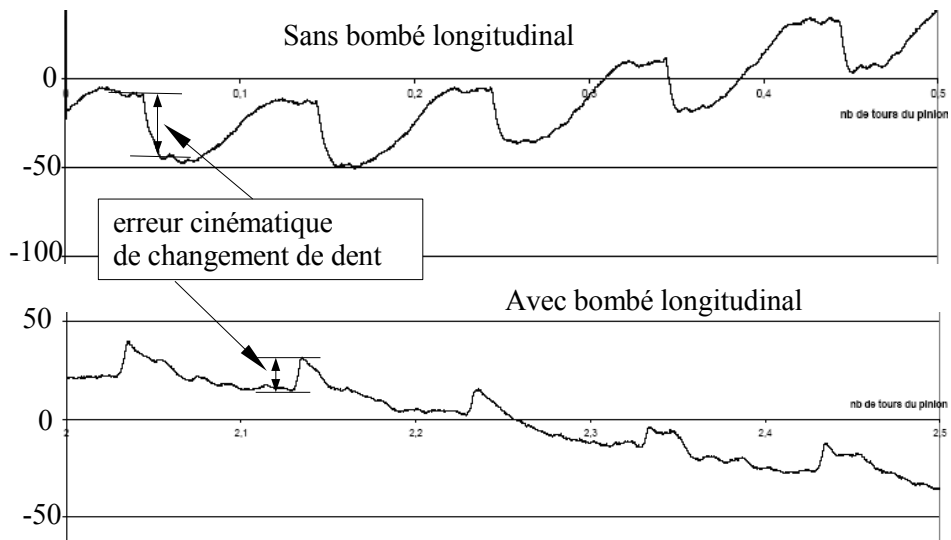


figure 2.39 – Relevé d'engrénométrie avant et après re-conception

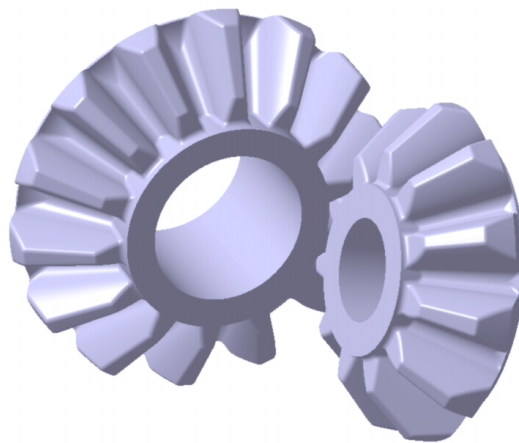


figure 2.40 – Pignon et roue forgés, avec renforts

## 2.6 Conclusion

Ce premier chapitre présente une application de la méthode cinématique des roulettes pour la construction des surfaces actives des engrenages coniques à denture droite (surface conique à directrice en développante de cercle sphérique). Le modèle mathématique est défini pour les surfaces théoriques et les surfaces réalisées en taillage. Des éléments de construction des dentures sont proposés ainsi qu'un paramétrage. Le calcul des principaux indices de qualité de la denture est détaillé ainsi que la détermination de l'angle de rotation du pignon pour quelques positions d'engrènement remarquables. Un exemple de calcul ainsi qu'une application sont présentés.

Cette étude définit la géométrie nominale et constitue les bases pour la première étape de conception détaillée d'un engrenage conique à denture droite.

La définition de la géométrie peut se poursuivre suivant deux voies :

- Tolérancement des grandeurs nominales pour garantir des conditions fonctionnelles (chapitre 3 et 4).
- Elaboration d'un modèle numérique CAO des roues d'un engrenage à axes concourants. Ce modèle pouvant ensuite faire l'objet d'une modélisation mécanique permettant d'estimer par une méthode numérique (MEF, ...) l'état de contrainte dans l'engrenage en fonctionnement. Le passage par la CAO n'est pas nécessaire (voir chapitre 5).



## Chapitre 3

# Analyse de l'engrènement sans charge intégrant des variations géométriques Application aux engrenages coniques

Dans le chapitre 2, à partir des propriétés cinématiques attendues, nous avons explicité la définition de la géométrie nominale des engrenages à développante de cercle sphérique. L'introduction d'un bombé longitudinal permet, dans un certain domaine de fonctionnement, de maintenir les zones de contact éloignées des extrémités longitudinales des dents. La réalité étant complexe, des variations géométriques inhérentes aux procédés et ressources de fabrication existent entre la géométrie théorique et la géométrie réelle. La conception d'engrenage doit donc prendre en compte l'impact des variations géométriques sur les propriétés fonctionnelles attendues.

Nous nous intéressons dans ce chapitre au seul aspect cinématique des caractéristiques fonctionnelles attendues. Nous proposons un outil permettant de mener l'analyse de l'impact des variations géométriques sur l'engrènement sans charge de deux roues dentées. Sur le plan théorique, l'engrenage est généralement conçu pour réaliser une transmission homocinétique. Les paramètres qui nous permettent d'évaluer la qualité de l'engrènement sont les *écarts cinématiques d'engrènement* ( $EC_i$ ) et l'*erreur cinématique d'engrènement* (EC). L'écart cinématique d'engrènement est l'écart angulaire entre la position estimée occupée par la roue menée et sa position théorique. L'erreur cinématique d'engrènement est l'amplitude des écarts cinématiques.

Cette étude pourrait être réalisée de façon expérimentale et nécessiterait une connaissance très approfondie de la géométrie de chacune des pièces fabriquées et de simuler expérimentalement un ensemble de géométries. Dans cette situation, faire varier un ou plusieurs paramètres indépendants serait assez complexe et le temps pour chaque analyse serait important [34]. Nous avons préféré développer un outil de simulation numérique, permettant de traiter de multiples

cas en un temps relativement court. La simulation nécessite une modélisation de la géométrie réelle.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude bibliographique de la modélisation des écarts géométriques et de l'analyse de l'engrènement. La définition des surfaces actives et l'introduction des écarts de formes, d'orientation, de position et le jeu dans les liaisons constituent la seconde partie. La troisième partie est consacrée à l'analyse de l'engrènement, d'un point de vue cinématique. L'étude de l'impact de quelques écarts géométriques forme la dernière partie.

## 3.1 Introduction

### 3.1.1 Ecart cinématiques d'engrènement

Les écarts cinématiques que nous cherchons à estimer constituent une signature de l'engrènement, fonction des paramètres suivants :

- correction des flancs des dents [35, 36]
- écart de forme des surfaces actives ([6] p.136)
- écart de position des surfaces actives
- effet dynamique [34]
- épaisseur du film de lubrifiant entre les dentures [37, 38]
- déformation de contact entre dentures [38]
- flexion et cisaillement de la denture [38]
- déformation du corps des roues dentées, des axes, des éléments de guidage et des carters [39, 40]
- variation de la raideur d'engrènement au cours de l'engrènement [34]
- variation de raideur de chaque dent
- ...

Comme nous souhaitons centrer notre analyse sur l'influence des variations géométriques sur le comportement cinématique de l'engrenage, nous limitons la complexité du problème en posant les hypothèses suivantes :

- Les effets dynamiques sont négligés.
- La lubrification est inexistante.
- Les pièces sont indéformables (chapitre 3 et 4), ce qui revient à considérer que le couple transmis est nul.

Ainsi, nous étudions *l'erreur cinématique quasi statique et sans charge*. Le modèle dont nous avons besoin, doit représenter l'ensemble des surfaces qui sont susceptibles d'être en contact. Le modèle mathématique est ainsi constitué d'un ensemble d'équations de surfaces paramétrées.

### 3.1.2 Modèle géométrique

Dans le domaine du tolérancement et de la métrologie, l'interface entre la matière de la pièce et son environnement est appelée *modèle de la peau de la pièce* ou *Skin Model* et ne possède pas de représentation mathématique. Or, pour pouvoir mener une analyse quantitative, le modèle de représentation doit nécessairement pouvoir se décliner en un modèle mathématique, le seul qui permet de chiffrer l'analyse et d'utiliser la puissance de calcul des ordinateurs.

La géométrie de substitution est une représentation du Skin Model et elle est mathématiquement descriptible. Les écarts géométriques et les jeux caractérisent les variations géométriques entre le modèle nominal et cette géométrie de substitution. L'étape de définition de la géométrie de substitution constitue une opération délicate [41] : le modèle doit être adaptée à l'objectif recherché (l'analyse de l'engrènement dans notre cas), au traitement mathématique et doit rendre compte de la réalité, jusqu'à un certain niveau. Un modèle trop fin peut devenir inexploitable car trop «lourd» ou posant des problèmes de résolution mathématique. Un modèle grossier peut conduire à des résultats erronés.

Dans les outils d'analyse des tolérances, la géométrie de substitution peut prendre différentes formes [42] :

- points projetés [43]
- surfaces idéales associées de même nature que les surfaces nominales [44]
- maillages surfaciques, discrétisation des surfaces en un ensemble de surfaces idéales associées [45]

Dans le cas des engrenages, les surfaces actives des dents ne sont pas des surfaces classiques comme le cylindre ou le plan et nous connaissons les équations paramétriques de la géométrie parfaite (voir chapitre 2). Pour ces raisons, nous proposons un modèle de géométrie de substitution basé sur une *représentation paramétrique des surfaces* qui reprend les équations des surfaces nominales et qui sont complétées afin d'intégrer la modélisation des écarts de forme, d'orientation, de position et les jeux dans les liaisons.

Les outils mathématiques associés usuellement à la modélisation des défauts sont listés dans le tableau (3.1) et leurs domaines principaux d'application apparaissent dans la colonne de droite.

Par rapport à notre problématique, les outils linéarisés ne présentent que peu d'intérêt. Le système étudié ne présente qu'un unique cycle topologique qui intègre un mouvement cinématique ample. Le modèle mathématique le plus pertinent pour notre usage est l'utilisation des matrices homogènes non linéarisées.

Variations des paramètres	Modèle généralement 2D ne permet pas d'introduire directement de rotation
Torseur des petits déplacements [46, 47, 48, 49]	Faibles amplitudes autorisées Approximations venant de la linéarisation
Vecteurs [50]	Modèle généralement 1D pour les chaînes de cotes
Tenseur métrique non linéarisé [51, 52]	Modèle manipulant uniquement les SATT Manque de pertinence pour les surfaces complexes
Matrice homogène linéarisée [53]	Approximations dues à la linéarisation Faibles amplitudes autorisées
Quaternion [54]	Ne permet pas de modéliser des translations
Matrice homogène non linéarisée [55]	pas d'approximation permet de déplacer toutes surfaces

tableau 3.1 – Outils mathématiques de modélisation des écarts géométriques

### 3.1.3 Tooth Contact Analysis

Le modèle géométrique est le support de l'analyse de l'engrènement (*Tooth Contact Analysis* ou TCA). L'objectif de l'analyse de l'engrènement est la détermination, pour un ensemble fini ou non de positions angulaires de l'une des roues, les positions angulaires correspondantes de la seconde, les positions relatives du point de contact, la taille (modèle de HERTZ par exemple) et l'orientation (géométrie différentielle) de la zone de contact. Pour cela, il faut rechercher le ou les points de tangence entre les dentures.

Il est généralement admis [56] que le niveau de bruit d'un engrenage est directement lié à son erreur cinématique de fonctionnement. Pour différentes raisons (confort dans l'automobile, silence pour les engins militaires, ...), les ingénieurs tentent de rendre l'engrènement silencieux, d'où l'intérêt qu'ils portent aux techniques de simulation et d'analyse de celui-ci. Une autre voie pour connaître les fréquences d'émission est la simulation du comportement dynamique de l'engrenage [57].

A l'origine, la méthode TCA fut développée par la société américaine *The Gleason Works* pour mieux connaître le contact entre les dentures des roues coniques spirales et hypoïdes [58]. En 1983, Georges HENRIOT ([6] p.358-364) l'évoque comme une méthode d'analyse de la portée de contact pour les roues coniques à dentures spirales GLEASON. A Lyon, au laboratoire CASM, les chercheurs l'ont utilisée pour déterminer ensuite le comportement de l'engrenage sous charge. Outre Atlantique, en 1967, MM. CLOUTIER et TORDION [17, 59, 60] exposent une technique permettant de déterminer la position du point de contact dans un engrenage de type WILDHABER-NOVIKOV. Ils s'intéressent alors à la nature du contact entre les surfaces (courbures, directions principales, orientation de l'ellipse de contact, ...). A partir des années 1980, Faydor F. LITVIN, [61, 62] et ses collaborateurs ont développé cette technique et l'ont utilisée pour la conception de roues dentées. Elle peut intervenir à différentes étapes, de façon directe ou

couplée à d'autres outils. Une liste non exhaustive de son utilisation est la suivante :

1. Analyser l'influence des corrections apportées aux surfaces actives sur la sensibilité de l'erreur cinématique aux défauts d'orientation et de positionnement [63, 56, 64].
2. Concevoir les engrenages coniques spiraux [65, 66] :
  - (a) Les paramètres de réglage de la machine à tailler pour la roue étant connus, l'analyse locale du contact et TCA sont simultanément employées pour définir la surface du pignon de manière à ce que, de façon nominale (sans écart), la trajectoire du point de contact sur le plan tangent suive une direction donnée.
  - (b) L'objectif de la seconde étape est de transformer la fonction écart cinématique en une fonction parabolique, négative, d'amplitude limitée. Pour cela, le mouvement de génération donné à l'outil de taillage du pignon est modifié. TCA est utilisée notamment pour évaluer l'écart cinématique.
  - (c) La simulation de l'engrènement est reprise avec des écarts de positionnement. L'objectif est de déterminer l'orientation de la trajectoire du point de contact dans le plan tangent de façon à minimiser l'erreur cinématique pour un fonctionnement dans une position imparfaite.
  - (d) Connaissant les positions des points de contact (TCA) pour une situation donnée, une modélisation par la méthode des éléments finis permet d'évaluer l'état de contrainte, le champ des déplacements de la denture et de détecter l'éventuel problème d'interférence des dentures déformées.
3. Analyser l'influence des modifications géométriques apportées aux outils générateurs des dentures sur les positions des points de contact et les écarts cinématiques [67]. En particulier, F. LITVIN et ses collaborateurs ont développé une technique pour que la géométrie générée soit telle que pour certains défauts géométriques (écarts d'orientation et de position des axes des dentures qui sont les axes de rotation), l'erreur cinématique soit sensiblement réduite et qu'elle soit sans saut remarquable [68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75]. Cette technique est également reprise par des chercheurs chinois et employée pour d'autres géométries [76, 77].

Suivant les modes de définitions des surfaces et les caractéristiques qui sont particulièrement recherchées, il existe différentes techniques pour TCA :

1. Les surfaces sont définies par l'enveloppe d'une famille de surface : Par exemple, J. ARGYRIS [78], définit l'analyse de l'engrènement pour un système roue-vis sans fin où la surface de

la vis est définie par l'enveloppe d'une famille de surfaces de l'outil qui la génère et la surface de la roue est l'enveloppe des surfaces actives de la fraise à tailler par génération, elle-même étant définie par l'enveloppe de la famille des surfaces génératrices de la meule de rectification. Dans cette situation, il faut résoudre un système non linéaire de 8 équations à 9 inconnues (un des paramètres est fixé, c'est le paramètre d'entrée).

2. Les polonais J. RYBAK et al. [79] s'intéressent essentiellement à l'aire de contact et, pour cela, ils calculent des distances entre les points d'un maillage des surfaces actives.
3. En Allemagne, VOGEL et al. [80] ont une approche plus théorique de l'engrènement et déterminent les trajectoires du point de contact, les écarts de transmission et les propriétés des courbures au point de contact sans exprimer l'égalité des vecteurs position et la colinéarité des vecteurs normaux.
4. M. DE VAUJANY [81, 64] utilise le programme PRINCE qui, semble-t-il, calcule un ensemble de points du profil pour un certain nombre de tranches de l'engrenage, réalise une interpolation des points par des splines cubiques, calcule les distances entre ces courbes et en déduit le point de contact.
5. En Grèce, SPITAS et ses collaborateurs montrent [82] qu'en deux dimensions et en coordonnées polaires, il est possible d'obtenir une forme explicite de l'écart cinématique et la forme du profil de la roue connaissant la fonction écart cinématique et le profil du pignon.
6. Aux USA, Vadin KIN [83], palpe les surfaces actives réelles avec une machine à mesurer tridimensionnelle ad hoc, reconstruit la surface à l'aide de B-splines et réalise l'analyse de l'engrènement de la surface reconstruite

Dans notre étude, nous utilisons la méthode TCA dans une configuration où les équations des surfaces du pignon et de la roue sont connues. Contrairement aux travaux de LITVIN et al., les expressions des surfaces étant explicites, le problème est simplifié. De plus, aucune approximation n'intervient dans sa définition. Quand aux écarts géométriques, nous tenons compte non seulement des écarts de montage mais en plus, nous modélisons les écarts intrinsèques et de situation de chaque roue.

En résumé, la figure (3.1) situe la position de nos travaux de ce chapitre par rapport aux différents modèles, méthodes et outils couramment rencontrés en analyse et synthèse de la géométrie des produits.

## 3.2 Modèle géométrique

L'objectif de cette section est la définition d'un modèle géométrique paramétrique complet des surfaces actives d'un engrenage, c'est à dire un modèle représentant les surfaces de substitution,

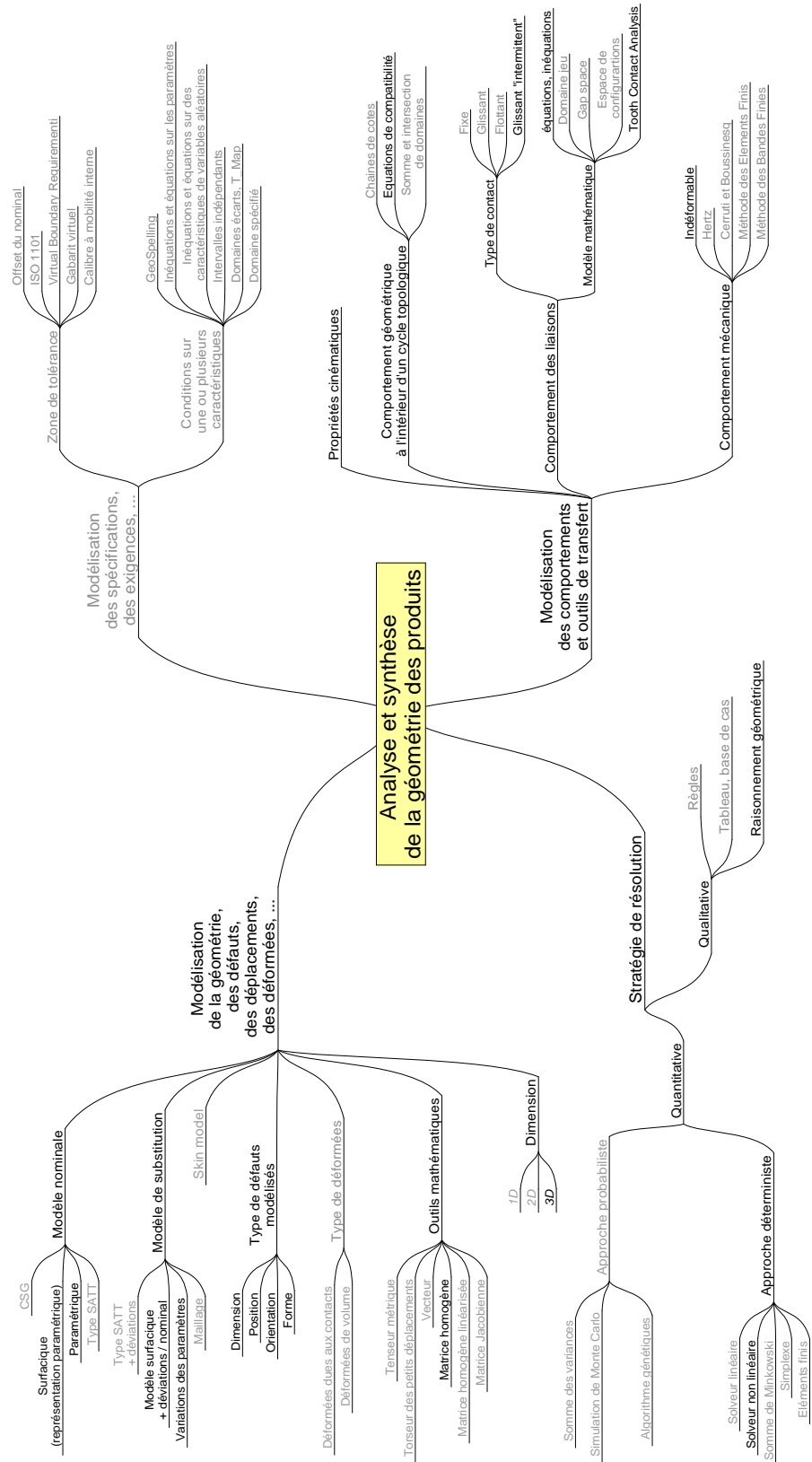


figure 3.1 – Positionnement de nos travaux dans le chapitre 3

les écarts de forme, d'orientation et de position ainsi que les jeux. Ce modèle mathématique doit satisfaire deux contraintes :

- permettre la simulation de l'engrènement (TCA),
- intégrer les *habitudes* et *pratiques* du tolérancement standard des engrenages (définition standardisée des écarts mesurés ou mesurables).

Afin de satisfaire la première contrainte, les expressions paramétriques des surfaces de substitution ( $\Sigma_1$  pour le pignon et  $\Sigma_2$  pour la roue) sont explicitées dans un repère fixe commun. Le passage d'un repère à un autre se fait par l'introduction de matrices de passage en coordonnées homogènes. Afin de satisfaire la seconde contrainte, nous définissons les écarts intrinsèques aux dents (défauts de forme et erreur de pas angulaire cumulé), les écarts de situation pour les roues dentées et le bâti (erreurs de position et d'orientation entre les surfaces fonctionnelles) et les jeux. Ce modèle géométrique des dents est obtenu en enrichissant le modèle mathématique des surfaces actives en développante de cercle sphérique.

### 3.2.1 Surfaces de substitution avec bombé et défaut de forme

Les surfaces de substitution des surfaces actives des roues dentées sont définies en trois étapes. La première consiste à déterminer la surface conique définie par la cinématique (voir chapitre précédent). A cette surface primaire, un bombé est ajouté afin de localiser les zones de contact. Enfin, une ondulation est intégrée pour modéliser des défauts de forme (premier ou second ordre).

#### Surfaces coniques nominales

La surface active d'une dent est décrite par l'expression des coordonnées  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  de ces points dans un repère local ( $S7$  pour la surface de substitution du pignon et  $S8$  pour celle de la roue) comme des fonctions de deux paramètres  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  respectivement, dans un certain intervalle fermé. Le vecteur position et le vecteur unitaire normal de la surface active du pignon et de la roue sont notés  $\mathbf{r}_i^{[k]}$  et  $\mathbf{n}_i^{[k]}$  pour la pièce  $i$  dans le repère  $Sk$ .

L'expression de la surface conique primaire en développante de cercle sphérique a été démontrée au paragraphe 2.1.6 (page 36). Pour le pignon, la surface conique primaire a pour expression :

$$\mathbf{X}_1^{[7]}(u_1, v_1) = \begin{cases} \hat{X}_1 = v_1 b_1 \cos(a_1 u_1) \\ \hat{Y}_1 = v_1 (a_1 \cos(u_1) \cos(a_1 u_1) + \sin(u_1) \sin(a_1 u_1)) \\ \hat{Z}_1 = v_1 (a_1 \sin(u_1) \cos(a_1 u_1) - \sin(a_1 u_1) \cos(u_1)) \\ (u_1, v_1) \in E^{(1)} \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec  $a_1 = \sin(\delta_{b1})$ ,  $b_1 = \cos(\delta_{b1})$  et  $\delta_{b1}$  le demi angle du sommet du cône de base du pignon.

Dans cette équation, la variable  $v_1$  représente le rayon de la sphère sur laquelle est tracée la

développante de cercle de paramètre  $u_1$ .

### Conception du bombé longitudinal

Pour éviter que le point de contact soit systématiquement rejeté à la pointe ou au talon des dents lors du fonctionnement avec des défauts, un bombé longitudinal est ajouté à la surface primaire.

Plusieurs formes peuvent être données au bombé longitudinal (circulaire, parabolique, ...). Comme indiqué au paragraphe 2.2.4, la rotation des profils en fonction de  $v_1$  est employée car elle préserve les profils en développante de cercle sphérique.

Nous choisissons de façon arbitraire que le bombé corresponde à un ajout de matière sur la longueur des dents et que la fonction de rotation respecte les contraintes suivantes :

- nulle en pointe ( $v_1 = R_p$ ) et au talon ( $v_1 = R_g$ );
- la position du maximum se situe à une distance  $v_B$  du sommet des cônes;
- la valeur de la rotation maximum est  $\Omega_{maxi}$  et correspond à une valeur  $B$  pour le maximum du bombé sur le cercle primitif.

La fonction de rotation pour le bombé longitudinal est recherchée sous la forme d'un polynôme de degré 3 :

$$\Omega(v_1) = a + bv_1 + cv_1^2 + dv_1^3$$

Le respect des contraintes permet de déterminer les constantes  $(a, b, c, d)$ . Sous forme matricielle, le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{maxi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_p & R_p^2 & R_p^3 \\ 1 & R_g & R_g^2 & R_g^3 \\ 1 & v_B & v_B^2 & v_B^3 \\ 0 & 1 & 2v_B & 3v_B^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Le bombé est paramétré par  $v_B$  et  $\Omega_{maxi}$ . Sa forme et ses valeurs aux extrémités sont fixées. Une analyse pourrait être menée pour connaître l'influence de ces paramètres sur le comportement de l'engrenage.

La représentation paramétrique définissant la surface nominale du pignon est la suivante :

$$\mathbf{X}_{B1}^{[7]}(u_1, v_1) = \begin{cases} \hat{X}_{B1} = \hat{X}_1 \\ \hat{Y}_{B1} = \hat{Y}_1 \cos(\Omega(v_1)) + \hat{Z}_1 \sin(\Omega(v_1)) \\ \hat{Z}_{B1} = -\hat{Y}_1 \sin(\Omega(v_1)) + \hat{Z}_1 \cos(\Omega(v_1)) \\ (u_1, v_1) \in E^{(1)} \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour la norme ISO/TR 10064-1 [84], le maximum du bombé est appelé  $C_\beta$  (voir figure 3.2).

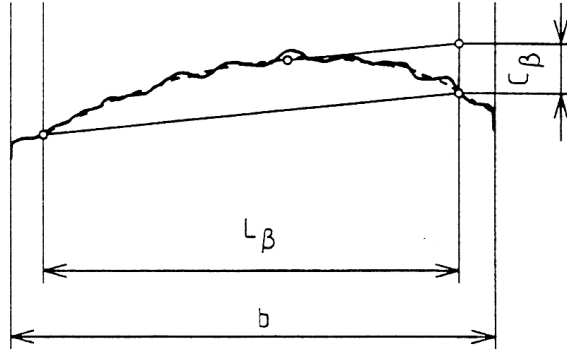


figure 3.2 – Bombé d'hélice  $C_\beta$  (ISO 10064-1)

La détermination des paramètres ( $v_B$  et  $\Omega_{maxi}$ ) de la fonction de rotation pour le bombé font l'objet de l'annexe C. Ils sont recherchés de façon à minimiser l'état de contrainte dans la zone de contact. Pour cela, les dentures sont supposées déformables (comportement élastique) et c'est pour ne pas rompre l'unité de modèle de ce chapitre que cette étude est placée en annexe.

Les conditions fonctionnelles exigent un bombement relatif entre les surfaces actives du pignon et de la roue. Le choix est fait de ne placer qu'un bombé sur le pignon et de ne pas modifier les surfaces primaires de la roue. Aussi, la représentation paramétrique définissant la surface nominale de la roue est la suivante :

$$\mathbf{X}_2^{[8]}(u_2, v_2) = \begin{cases} \hat{X}_2 = v_2 b_2 \cos(a_2 u_2) \\ \hat{Y}_2 = v_2 (a_2 \cos(u_2) \cos(a_2 u_2) + \sin(v_2) \sin(a_2 u_2)) \\ \hat{Z}_2 = v_2 (a_2 \sin(u_2) \cos(a_2 u_2) - \sin(a_2 u_2) \cos(u_2)) \\ (u_2, v_2) \in E^{(2)} \end{cases} \quad (3.3)$$

En conclusion de cette analyse, pour les engrenages coniques à denture droite, la position retenue pour le maximum du bombé correspond à 1/3 de la longueur de la dent, à partir du talon ( $v_B = \frac{2R_g + R_p}{3}$ ). Quand au second paramètre ( $\Omega_{maxi}$ ), l'étude numérique montre une faible corrélation entre l'état de contrainte dans la zone de contact et sa valeur qui n'est pas fixée à ce stade d'élaboration du modèle. La fonction de rotation des profils est :

$$\Omega(v_1) = \frac{27\Omega_{maxi}}{4} \frac{(v_1 - R_p)^2}{(R_g - R_p)^2} \left(1 - \frac{v_1 - R_p}{R_g - R_p}\right) \quad \text{pour } v_1 \in [R_p, R_g] \quad (3.4)$$

La figure 3.3 représente la surface avec un bombé exagéré.

**Remarque :** La méthode décrite ci-dessus pour l'introduction du bombé longitudinal peut également être utilisée pour définir une géométrie d'engrenages coniques à denture hélicoïdale. Il

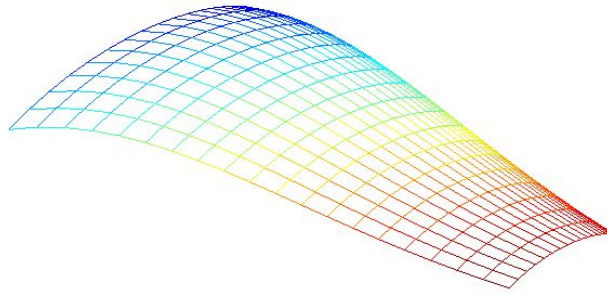


figure 3.3 – Surface bombée

suffit que la fonction de rotation des profils soit monotone (voir la figure 3.4). L'équation de cette surface est connue, ce qui n'est généralement pas le cas des surfaces actives des roues coniques hélicoïdales ou hypoïdes [8].

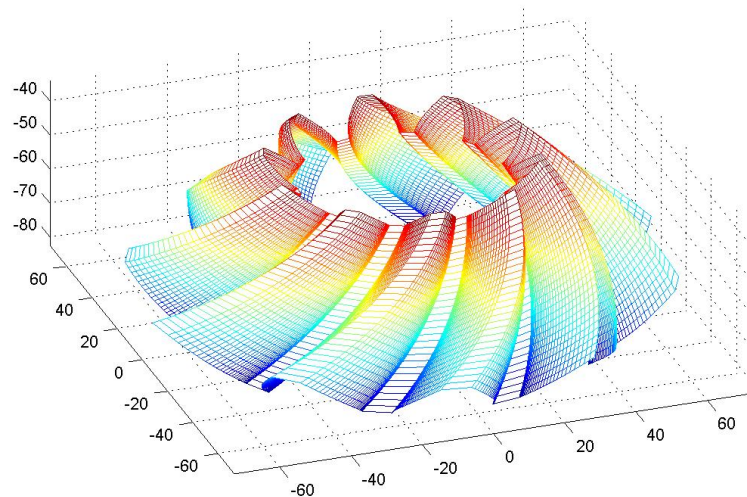


figure 3.4 – Denture conique hélicoïdale

### Les écarts de forme

Pendant les opérations de mise en forme des surfaces actives taillées ou des matrices servant au formage des pignons coniques, les déformations de l'outil et de la machine outil, les écarts de trajectoire, anisotropie du matériau, les défauts outils/machine ... génèrent des défauts de forme qui peuvent être périodiques [85, 86] et [6] p.136. Pour les engrenages forgés, le retrait élastique

peut induire un écart entre la forme de l’empreinte de la matrice et la géométrie obtenue. Le défaut de forme peut avoir d’importantes conséquences en dynamique ou en acoustique (*phénomène de raies fantômes*) et il semble important de l’inclure dans le modèle géométrique, même si sa modélisation est assez rudimentaire. Les surfaces de denture incluant un défaut de forme sont les surfaces de substitution utilisées (figure 3.5).

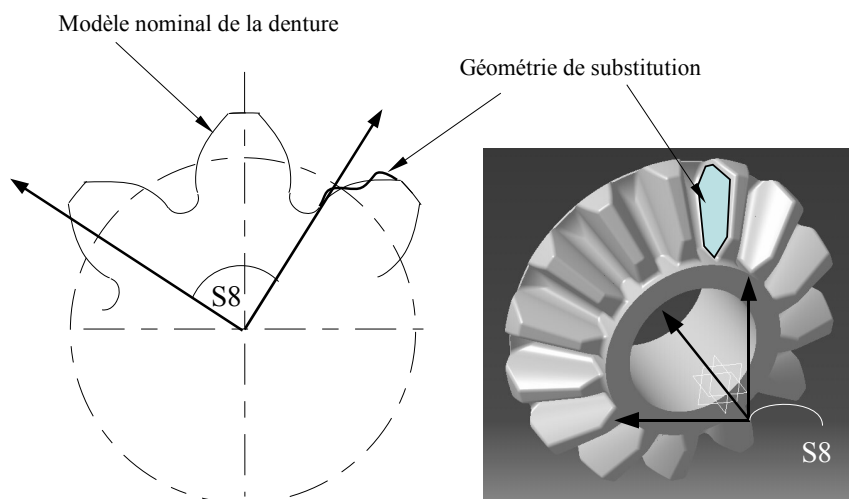


figure 3.5 – Surface (ou profil) nominal et de substitution

Y. UEDA et al. [87] modélisent simultanément les bombés et les écarts de forme pour un engrenage cylindrique hélicoïdal. Ils utilisent une fonction quadratique pour évaluer la distance entre la surface réglée en développante et la surface de substitution. Nous dissocions bombé et écart de forme afin de séparer géométrie nominale et variations géométriques.

Les écarts de forme sont modélisés par des déformations normales à la surface (figure 3.6). Le module local de cet écart est défini par une fonction analytique des paramètres des surfaces :  $w_1(u_1, v_1)$  pour le pignon et  $w_2(u_2, v_2)$  pour la roue. Les équations des surfaces de substitution

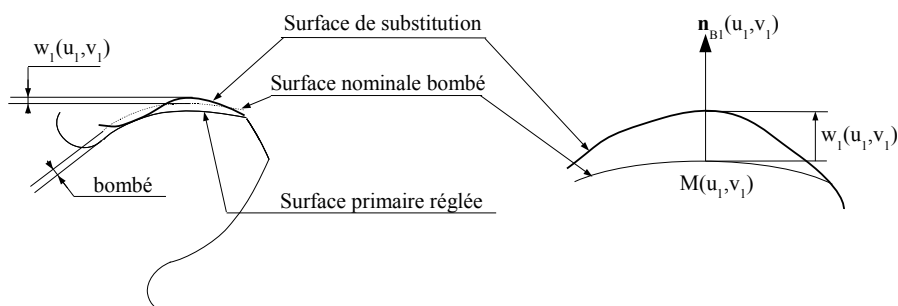


figure 3.6 – Ecart de forme ajoutée à la surface nominale

du pignon et de la roue sont les suivantes :

$$\mathbf{r}_1^{[7]}(u_1, v_1) = \mathbf{X}_{B_1}^{[7]}(u_1, v_1) + w_1(u_1, v_1)\mathbf{n}_{B_1}^{[7]} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{r}_2^{[8]}(u_2, v_2) = \mathbf{X}_2^{[8]}(u_2, v_2) + w_2(u_2, v_2)\mathbf{n}_2^{[8]} \quad (3.6)$$

Pour les fonctions  $w_1$  et  $w_2$ , nous choisissons des fonctions sinusoïdales, d'amplitude, de période et d'orientation paramétrées. Si les périodes sont grandes, les courbures de la surface de substitution sont proches de celle de la surface nominale et gardent un signe constant (défaut de forme du premier ordre). Si les périodes sont courtes, le défaut de forme ressemble à une *tôle ondulée* (défaut de forme de deuxième ordre). D'autres expressions de ses fonctions peuvent être envisagées sans perturber la suite de l'approche développée.

Les défauts de forme sont définis par les fonctions suivantes :

$$w_1(u_1, v_1) = A_1 \cos([B_1.Ac(u_1) + v_1].C_1) \quad \text{et} \quad w_2(u_2, v_2) = A_2 \cos([B_2.Ac(u_2) + v_2].C_2) \quad (3.7)$$

avec  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  des réels.  $A_1$  et  $A_2$  paramètrent les amplitudes des fonctions,  $B_1$  et  $B_2$  paramètrent les orientations et  $C_1$  et  $C_2$  définissent leur période. Les premiers et seconds paramètres des surfaces ont des domaines de variations de tailles très différentes. Les paramètres  $v_1$  et  $v_2$  sont des distances (rayon de sphère, voir 2.2.2) et sont, à une constante près, l'abscisse curviligne des isoparamétriques. Les paramètres  $u_1$  et  $u_2$ , paramètres des développantes de cercle sphériques, ne représentent pas directement des distances curvilignes. Or, pour pouvoir définir simplement l'orientation des nappes d'ondulation par les paramètres  $B_1$  et  $B_2$ , nous utilisons la fonction «Ac» qui est l'abscisse curviligne d'une développante de cercle sphérique. La démonstration de l'expression de cette fonction se trouve en annexe A.4. Pour le pignon, son écriture est la suivante :

$$Ac(u_1) = \frac{b_1 v_1}{a_1} [1 - \cos(a_1 u_1)] \quad (3.8)$$

Il est possible de définir des défauts de forme pour chaque dent mais le nombre de paramètres devient important. Dans le modèle implémenté, le défaut de forme dépend uniquement de la roue considérée. La figure 3.7 en donne une représentation amplifiée.

Les vecteurs unitaires normaux aux surfaces sont définis par la relation (2.26) pour la roue et la relation suivante pour le pignon :

$$\mathbf{n}_{B_1} = \frac{\frac{\partial \mathbf{X}_{B_1}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{X}_{B_1}}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{X}_{B_1}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{X}_{B_1}}{\partial u_2} \right\|}$$

Dans le cadre des normes, les défauts de forme sont identifiables aux *écarts de profil* [88, 89] qui

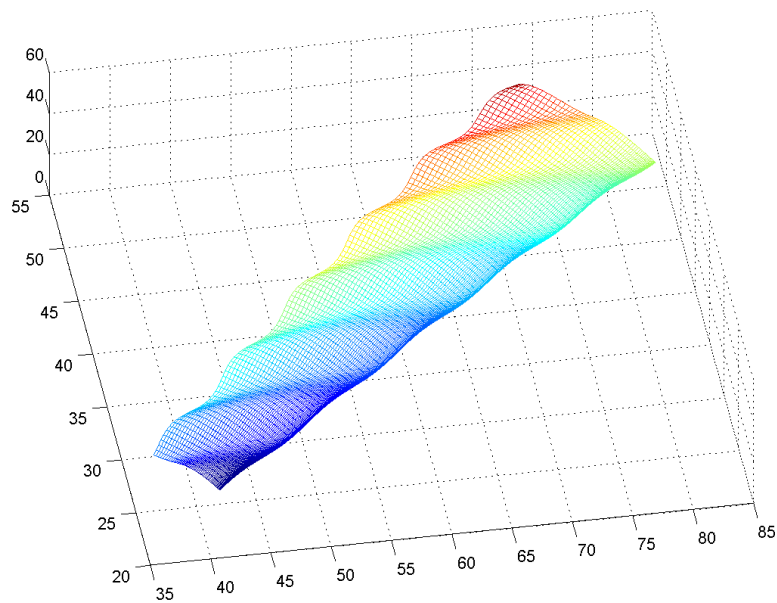


figure 3.7 – Surface de substitution

sont les écarts normaux aux profils apparents, mesurés sur une longueur d'évaluation significative  $L_\alpha$ . Ils sont propres à chaque plan apparent. Les déviations de profil se décomposent de la façon suivante (figure 3.8) :

- Ecart total de profil  $F_\alpha$  : distance entre deux tracés du profil de référence qui encadre le tracé de profil réel, dans la longueur d'évaluation  $L_\alpha$ .
- Ecart de forme du profil  $F_{f\alpha}$  : distance entre deux tracés parallèles semblables au profil moyen et qui encadrent le profil effectif sur une longueur d'évaluation  $L_\alpha$ .
- Ecart d'inclinaison du profil  $F_{H\alpha}$  : distance entre deux profils de référence qui coupent le profil moyen aux extrémités de la longueur d'évaluation  $L_\alpha$ .

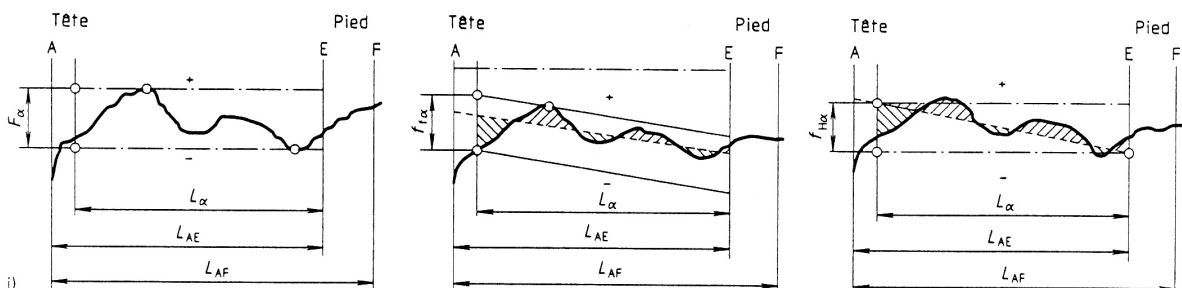


figure 3.8 – Ecart de profil (ISO 1328-1)

### 3.2.2 Modélisation des défauts de position, d'orientation et des jeux

Les défauts de position, d'orientation et les jeux induisent une non coïncidence des repères attachés aux surfaces fonctionnelles du pignon, de la roue et du bâti. Ces repères sont définis dans ce paragraphe ainsi que les matrices de passage en coordonnées homogènes.

La définition de neuf repères est nécessaire à l'introduction de tous les défauts indépendants. Les repères dont le nom comporte un chiffre impair sont relatifs au pignon et les autres à la roue. Ainsi, pour le pignon, on définit les repères suivants :

- $S7$  est rigidement lié à l'une des surfaces actives de substitution de la pièce 1,
- $S5$  est rigidement lié à la première surface active de substitution de la pièce 1,
- $S3$  est rigidement lié à la surface fonctionnelle permettant de réaliser la liaison pivot avec le bâti,
- $S1$  est rigidement lié au bâti. Le premier axe de  $S1$  est confondu avec l'axe de rotation du pignon,
- $Sf$  est rigidement lié au bâti. C'est le repère commun au pignon et à la roue.

De la même manière, les repères  $S8$ ,  $S6$ ,  $S4$  et  $S2$  de la roue sont définis.

#### Erreur de pas angulaire cumulée

Pour simuler l'engrènement sur plus d'une dent, il est nécessaire de connaître les surfaces de substitution de l'ensemble de la denture. Par conséquent, nous dupliquons la définition des surfaces actives en faisant une rotation autour de l'axe de la denture. La surface de substitution de la dent numéro  $n$  du pignon est définie dans repère  $S7$  et la surface active de la dent numéro  $1$  est définie dans le repère  $S5$ . Pour passer du repère  $S7$  au repère  $S5$  la transformation nominale est une rotation d'un angle égale à  $\frac{2\pi n}{z_1}$  autour de l'axe de la denture. Des défauts peuvent être introduits dans cette transformation, c'est l'*écart de pas angulaire cumulé*. Cyrille BAUDOUIN [90, 91, 92] montre que la notion de pas angulaire est plus précise que la définition donnée par la norme (écart cumulé de pas) pour les dentures cylindriques, et qu'elle est bien adaptée aux pignons coniques.

La matrice  $M_{57}$  est une matrice de transformation en coordonnées homogènes de  $S7$  vers  $S5$ . Son expression est la suivante :

$$M_{57}^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\sigma_1^{(n)}) & \sin(\sigma_1^{(n)}) & 0 \\ 0 & -\sin(\sigma_1^{(n)}) & \cos(\sigma_1^{(n)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

L'angle  $\sigma_1^{(n)}$  est égal à  $\frac{2\pi n}{z_1} + \epsilon_1^{(n)}$  avec  $n$ , le numéro de la dent et  $\epsilon_1^{(n)}$  l'écart de pas angulaire cumulé depuis la dent 1. De même pour la roue :  $\sigma_2^{(n)} = \frac{2\pi n}{z_2} + \epsilon_2^{(n)}$  est introduit et la matrice de transformation en coordonnées homogènes pour le passage du repère  $S8$  vers le repère  $S6$  (figure 3.9) est la suivante :

$$M_{68}^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\sigma_2^{(n)}) & \sin(\sigma_2^{(n)}) & 0 \\ 0 & -\sin(\sigma_2^{(n)}) & \cos(\sigma_2^{(n)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Le paramètre qui définit le numéro de la dent est le même pour les deux roues car il y a toujours engrènement entre les  $n$ èmes dents.

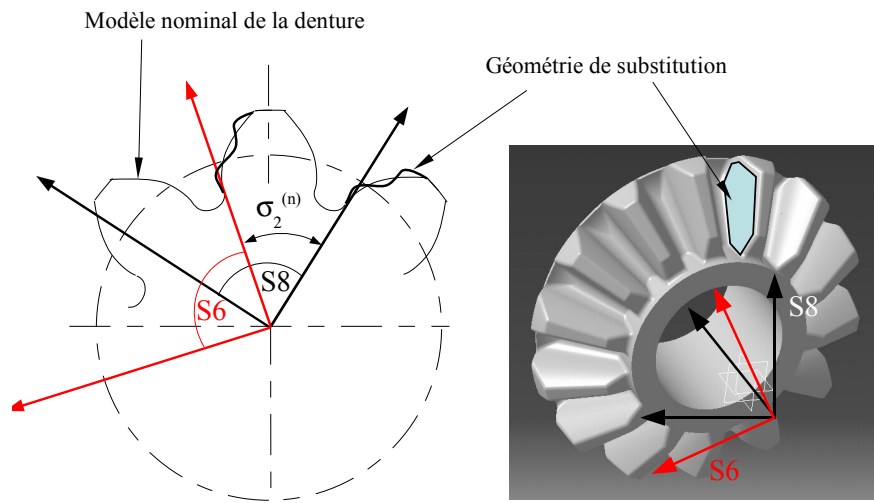


figure 3.9 – Passage du repère S8 à S6

Les normes 1328-1, 1328-2 [88, 89, 93] définissent pour une roue cylindrique, l'*écart individuel de pas*, comme la «différence algébrique entre la valeur effective d'un pas et la valeur correspondante théorique, dans le plan apparent. Elle est définie sur un cercle concentrique à l'axe de la roue, située sensiblement à mi-hauteur de dent». L'*écart cumulé de pas* sur un secteur de  $k$  dents est la différence algébrique entre la longueur de l'arc réel entre le premier profil et le profil homologue sur la dent  $k$  et la longueur théorique de cet arc. Elle est égale, en théorie, à la somme des erreurs individuelles de pas sur ce secteur. La norme allemande [21] définit de façon équivalente, mais explicitement pour les roues coniques, les «déviations élémentaires sur le pas» et les «déviations d'une fourchette de pas». L'encadrement restrictif de cette erreur permet de limiter, dans les conditions de fonctionnement, les accélérations angulaires et les charges dynamiques générées par l'engrènement.

Aucune définition n'est donnée pour les engrenages coniques [90, 92]. L'écart cumulé de pas angulaire est directement lié à l'écart cumulé de pas défini dans la norme par le rayon du cercle considéré et son utilisation est plus adaptée à la géométrie conique. La définition des modèles nominaux paramétriques et des écarts intrinsèques des surfaces actives de chaque dent permet d'exprimer la définition analytique exacte des surfaces de substitution de chaque dent dans les systèmes de coordonnées liés aux dentures :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1^{[5]}(u_1, v_1, n) &= M_{57}^{(n)} \mathbf{r}_1^{[7]}(u_1, v_1) \\ \mathbf{r}_2^{[6]}(u_2, v_2, n) &= M_{68}^{(n)} \mathbf{r}_2^{[8]}(u_2, v_2) \end{cases} \quad (3.11)$$

### Ecarts de position et d'orientation propres à chaque roue

Les défauts de forme et les erreurs de pas angulaire cumulées sont intrinsèques à la denture.  $S5$  est le repère dans lequel est défini l'ensemble des surfaces de substitution du pignon. Le premier axe de ce repère est l'axe des différents cônes de la denture. Cet axe est a priori non identique à l'axe de la surface de guidage en rotation et la mise en position de la pièce 1 par rapport au bâti. Le repère  $S3$  étant rigidement lié à cette dernière, le passage de  $S5$  à  $S3$  permet de modéliser des défauts de positionnement et d'orientation entre les entités *denture* et *surfaces de guidage* du pignon.

Les écarts géométriques sont a priori quelconques et les matrices de passage en coordonnées homogènes sont de la forme suivante :

$$M_{35} = \begin{pmatrix} a_{35} & -\gamma_{35} & \beta_{35} & u_{35} \\ \gamma_{35} & b_{35} & -\alpha_{35} & v_{35} \\ -\beta_{35} & \alpha_{35} & c_{35} & w_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{46} = \begin{pmatrix} a_{46} & -\gamma_{46} & \beta_{46} & u_{46} \\ \gamma_{46} & b_{46} & -\alpha_{46} & v_{46} \\ -\beta_{46} & \alpha_{46} & c_{46} & w_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Où, pour le pignon,  $a_{35}, b_{35}, c_{35}, \alpha_{35}, \beta_{35}$  et  $\gamma_{35}$  sont les termes de la matrice de rotation (écarts d'orientation), dépendants de trois angles de faibles amplitudes (angles d'EULER ou autres).

$u_{35}, v_{35}$  et  $w_{35}$  modélisent l'écart de position et sont les composantes du vecteur position de l'origine du repère  $S5$  dans  $S3$ .

Pour la roue, les mêmes définitions se retrouvent et la figure 3.10 schématise les positions relatives des repères  $S6$  et  $S4$ .

Ces écarts ne sont pas directement identifiés dans les normes. Un faux-rond  $F_r$  est défini pour les roues cylindriques [88, 89] et permet d'estimer la valeur de l'excentricité entre la denture et l'alésage. De plus, l'écart individuel de pas et l'écart cumulé de pas sont définis dans la norme pour une rotation du pignon autour de l'axe de l'alésage. Dans notre approche, nous dissociions

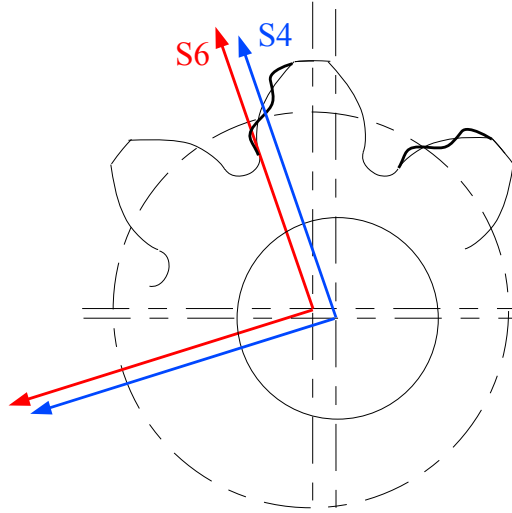


figure 3.10 – Défaut d'orientation et de position de la denture de la roue

l'écart angulaire cumulé sur le cône primitif théorique et les écarts de situation entre la denture et les surfaces fonctionnelles de la pièce réalisant la liaison pivot avec le carter. Cette dissociation est intéressante pour simuler l'impact des défauts d'usinage et de forgeage. En effet, l'écart angulaire cumulé par rapport à l'axe de la denture est dû à l'opération de formage et l'écart de situation est lié aux défauts de reprise en usinage.

L'expression mathématique des modèles des surfaces de substitution dans le repère  $S3$  sont les suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1^{[3]}(u_1, v_1, n) &= M_{35}M_{57}^{(n)} \mathbf{r}_1^{[7]}(u_1, v_1) \\ \mathbf{r}_2^{[4]}(u_2, v_2, n) &= M_{46}M_{68}^{(n)} \mathbf{r}_2^{[8]}(u_2, v_2) \end{cases} \quad (3.12)$$

### Liaisons roues dentées-bâti

Les deux roues dentées sont assemblées au bâti pour former l'engrenage. Nous nous plaçons dans le cas général où les roues sont montées sur un axe lui-même en liaison avec le bâti. Le mouvement principal de chacune des roues par rapport au carter est un mouvement de rotation, de paramètre  $\phi_1$  pour le pignon et  $\phi_2$  pour la roue. Les jeux dans les liaisons roue-arbre et arbre-bâti entraînent des écarts de position et d'orientation relatifs des pièces. Pour modéliser ces déplacements, les repères  $S1$  et  $S2$ , rigidement liés au bâti, sont introduits. Les axes de rotation des pièces 1 et 2 sont définis par, respectivement, les axes  $X_1$  (premier axe de  $S1$ ) et  $X_2$  (premier axe de  $S2$ ).

Le passage d'un repère mobile au repère fixe se fait par une composition de mouvements.

(figure 3.11). Pour le pignon, la matrice de passage en coordonnées homogènes est la suivante :

$$M_{13}(\phi_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_1) & -\sin(\phi_1) & 0 \\ 0 & \sin(\phi_1) & \cos(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{13,CD} & -\gamma_{13,CD} & \beta_{13,CD} & u_{13,CD} \\ \gamma_{13,CD} & b_{13,CD} & -\alpha_{13,CD} & v_{13,CD} \\ -\beta_{13,CD} & \alpha_{13,CD} & c_{13,CD} & w_{13,CD} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} a_{13,P} & -\gamma_{13,P} & \beta_{13,P} & u_{13,P} \\ \gamma_{13,P} & b_{13,P} & -\alpha_{13,P} & v_{13,P} \\ -\beta_{13,P} & \alpha_{13,P} & c_{13,P} & w_{13,P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les paramètres d'indice «13,P» sont relatifs aux rotations et déplacements dus aux jeux entre le pignon et l'arbre et les paramètres d'indices «13,CD» sont relatifs aux rotations et déplacements dus aux jeux entre l'arbre et le carter.

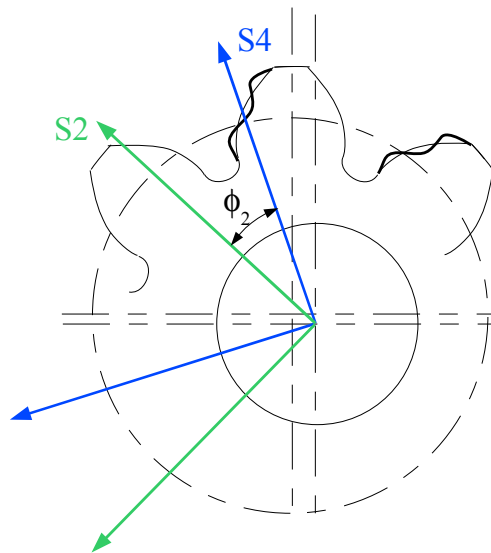


figure 3.11 – Rotation de la roue par rapport au bâti

### Défauts d'assemblage

Les défauts d'assemblage et les défauts du bâti génèrent des écarts d'orientation et de position relatives entre les axes de rotation du pignon et de la roue. Le repère commun où sont définies les positions des roues est noté  $S_f$ , il est rigidement lié au bâti. La transformation permettant le passage de  $S_1$  et  $S_2$  à  $S_f$  permet de modéliser les défauts de positionnement entre l'axe

de rotation du pignon et celui de la roue. Nous choisissons arbitrairement de placer le repère commun dans une position proche de  $S1$  et le passage de ce repère à  $Sf$  modélise les écarts de position. Le passage de  $S2$  vers  $Sf$  permet de positionner la roue 2 et de tenir compte des écarts d'orientation (figure 3.12). Les matrices de passage en coordonnées homogènes sont les suivantes :

$$M_{f1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A1 \\ 0 & 1 & 0 & A2 \\ 0 & 0 & 1 & A3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad M_{f2} = \begin{pmatrix} a_{f2} & -\gamma_{f2} & \beta_{f2} & u_{f2} \\ \gamma_{f2} & b_{f2} & -\alpha_{f2} & v_{f2} \\ -\beta_{f2} & \alpha_{f2} & c_{f2} & w_{f2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

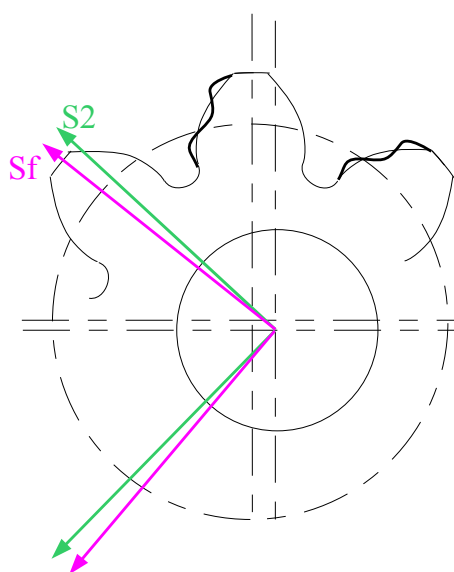


figure 3.12 – Ecart d'orientation entre repères fixes

### Equations des surfaces de substitution dans le repère commun

Les équations des surfaces de substitution dans le repère commun sont définies par la composition des déplacements précédemment définis :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1^{[f]}(u_1, v_1, \phi_1, n) = M_{f1}M_{13}(\phi_1)M_{35}M_{57}^{(n)}\mathbf{r}_1^{[7]}(u_1, v_1) \\ \mathbf{r}_2^{[f]}(u_2, v_2, \phi_2, n) = M_{f2}M_{24}(\phi_2)M_{46}M_{68}^{(n)}\mathbf{r}_2^{[8]}(u_2, v_2) \end{cases} \quad (3.13)$$

Ces équations sont paramétrées par les valeurs des écarts. La liste de ces paramètres est la suivante (ils ne sont pas tous indépendants) :

- Ecart de formes :  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$
- Erreurs de pas angulaires cumulées :  $\epsilon_1^{(2)}$  à  $\epsilon_1^{(z_1)}$  et  $\epsilon_2^{(2)}$  à  $\epsilon_2^{(z_2)}$
- Ecart de position et d'orientation propre à chaque roue :
  - $a_{35}, b_{35}, c_{35}, \alpha_{35}, \beta_{35}, \gamma_{35}, u_{35}, v_{35}, w_{35}$
  - $a_{46}, b_{46}, c_{46}, \alpha_{46}, \beta_{46}, \gamma_{46}, u_{46}, v_{46}, w_{46}$
- Ecart de position et d'orientation entre les roues dentées et le bâti :
  - $a_{13,CD}, b_{13,CD}, c_{13,CD}, \alpha_{13,CD}, \beta_{13,CD}, \gamma_{13,CD}, u_{13,CD}, v_{13,CD}, w_{13,CD}$
  - $a_{13,P}, b_{13,P}, c_{13,P}, \alpha_{13,P}, \beta_{13,P}, \gamma_{13,P}, u_{13,P}, v_{13,P}, w_{13,P}$
  - $a_{24,CD}, b_{24,CD}, c_{24,CD}, \alpha_{24,CD}, \beta_{24,CD}, \gamma_{24,CD}, u_{24,CD}, v_{24,CD}, w_{24,CD}$
  - $a_{24,P}, b_{24,P}, c_{24,P}, \alpha_{24,P}, \beta_{24,P}, \gamma_{24,P}, u_{24,P}, v_{24,P}, w_{24,P}$
- Ecart de position et d'orientation de l'assemblage :
  - $A1, A2, A3, a_{f2}, b_{f2}, c_{f2}, \alpha_{f2}, \beta_{f2}, \gamma_{f2}, u_{f2}, v_{f2}, w_{f2}$

La figure 3.13 représente une synthèse des repères utilisés et des différents écarts de modélisés.

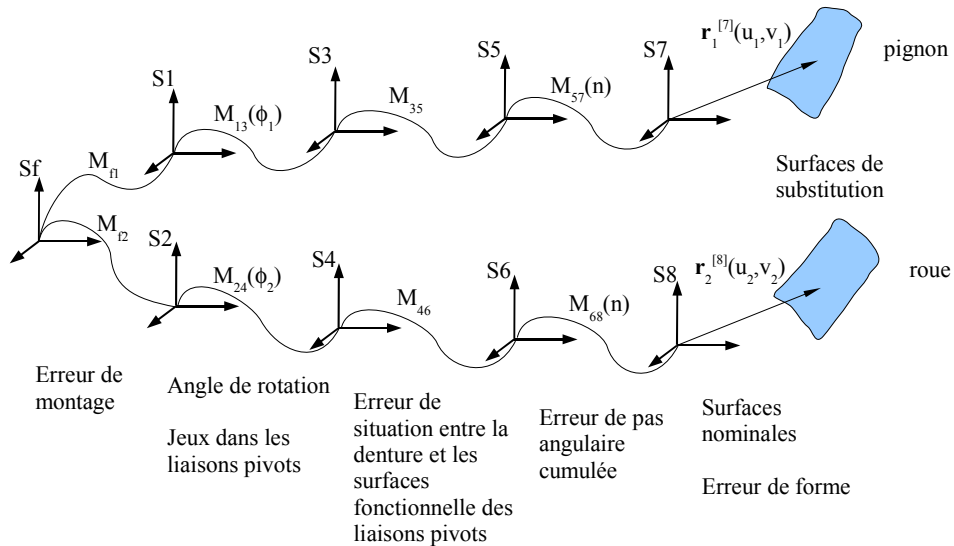


figure 3.13 – Les repères introduits et les écarts modélisés pour la roue et le pignon

**Remarque :** Dans le modèle défini ci-dessus, certains écarts s'additionnent et seule leur somme est significative pour l'analyse de l'engrènement (exemple : écart de position entre  $Sf$ ,  $S1$  et  $S3$ ). Il n'est pas forcément nécessaire de connaître la valeur de chaque écart pour pouvoir réaliser la simulation.

Il faut également remarquer que, le produit matriciel n'étant pas commutatif, les définitions des écarts géométriques sont très importantes pour conserver la représentativité du modèle.

Par ailleurs, malgré le soin apporté à ce modèle géométrique, nous ne pouvons pas tout à fait nier son influence sur les résultats de l'analyse pour laquelle il est construit. A l'heure actuelle, n'ayant pas les moyens de connaître cette influence, nous la négligerons a priori. Ce problème est propre à toute modélisation et justifie la nécessité de la confrontation à l'expérience. Mais l'expérimentation elle-même peut être suspectée de représenter partiellement le phénomène in situ. Malgré tout, il semble que ce soit la façon propre de la science d'avancer [94].

## Modèles implémentés

Le modèle ci-dessus utilise des compositions de déplacements entre des repères appartenant aux mêmes solides. Le système possédant un unique cycle topologique, les compositions de déplacement peuvent être avantageusement remplacées par un déplacement équivalent dans chaque solide.

Les axes  $X_5$  et  $X_6$  sont, respectivement, les axes géométriques des dentures du pignon et de la roue. Les axes cinématiques de rotation sont, respectivement,  $X_3$  et  $X_4$ . Les caractéristiques de l'engrènement dépendent seulement des positions relatives des repères  $S5 - S3$  et  $S6 - S4$  qui définissent les écarts géométriques entre les axes géométriques des dentures et les axes de rotation, et  $S1 - S2$  qui définit les écarts géométriques dans l'assemblage.

1. Pour l'écart de position et d'orientation entre les surfaces fonctionnelles de chaque roue, la numérotation des dents étant arbitraire et le repère  $S3$  étant tournant, il est toujours possible de trouver une configuration où l'écart d'orientation est une rotation suivant  $Y_3$  ou  $Y_4$  pour la roue. Les matrices de passage en coordonnées homogènes pour le pignon et la roue sont :

$$M_{35} = \begin{pmatrix} \cos(\Gamma_1) & 0 & -\sin(\Gamma_1) & u_{35} \\ 0 & 1 & 0 & v_{35} \\ \sin(\Gamma_1) & 0 & \cos(\Gamma_1) & w_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad M_{46} = \begin{pmatrix} \cos(\Gamma_2) & 0 & -\sin(\Gamma_2) & u_{46} \\ 0 & 1 & 0 & v_{46} \\ \sin(\Gamma_2) & 0 & \cos(\Gamma_2) & w_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Gamma_1$  est la valeur du défaut d'orientation, correspondant à une rotation de faible amplitude

suivant  $Y_5$ , et  $(u_{35}, v_{35}, w_{35})$  sont les composantes du vecteur défaut de position, dans le repère  $S3$ .

$\Gamma_2$  est la valeur du défaut d'orientation, correspondant à une rotation de faible amplitude suivant  $Y_6$ , et  $(u_{46}, v_{46}, w_{46})$  sont les composantes du vecteur défaut de position, dans le repère  $S4$ .

2. Les passages de  $S3$  à  $S1$  et de  $S4$  à  $S2$  permettent uniquement d'introduire les paramètres de rotation du pignon et de la roue.

$$M_{13}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_1) & \sin(\phi_1) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi_1) & \cos(\phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

3. Les écarts géométriques dans le bâti entre  $S1$  et  $S2$  sont, comme précédemment, modélisés en introduisant un troisième repère  $Sf$ , le repère commun. Le passage de  $S1$  à  $Sf$  modélise l'écart de position et le passage de  $S2$  à  $Sf$ , modélise l'écart d'orientation entre les axes de rotation des roues dentées. Un seul paramètre suffit donc pour le paramétrer. Pour obtenir une expression simple, nous choisissons que l'axe de rotation du pignon ( $X_3 = X_1$ ) soit parallèle au premier axe de  $Sf$  (figure 3.14). L'axe de rotation de la roue est positionné dans le plan formé par les axes  $X_1$  et  $Y_f$ . Cette mise en position se fait par une rotation de  $S2$  autour de  $Z_f$  (identique à  $Z_2$ ) d'un angle égal  $\Sigma_0$  plus le défaut d'orientation, noté  $\varpi$ .

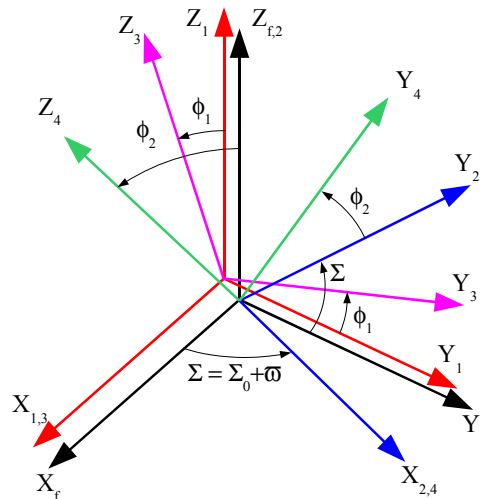


figure 3.14 – Situation des repères  $Sf$ ,  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$  et  $S4$

Aussi, la matrice de passage de  $S_2$  vers  $S_f$  devient :

$$M_{f2} = \begin{pmatrix} \cos(\Sigma_0 + \varpi) & \sin(\Sigma_0 + \varpi) & 0 & 0 \\ -\sin(\Sigma_0 + \varpi) & \cos(\Sigma_0 + \varpi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

### 3.3 Analyse de l'engrènement d'un point de vue cinématique

Un modèle géométrique des surfaces de substitution, incluant les écarts, a été élaboré dans la section précédente. Les représentations paramétriques des surfaces sont exprimées dans le repère commun  $S_f$ . Ce modèle constitue la première étape nécessaire à l'analyse de l'engrènement, objet de ce paragraphe.

Lors de l'engrènement, il existe à chaque instant au moins un point de contact entre les dentures et, en ce point, les normales aux surfaces sont colinéaires. Il peut arriver que le point de contact soit sur la frontière des surfaces actives, la normale à la surface en ce point n'est alors généralement pas définie. L'analyse de l'engrènement consiste à déterminer la position du ou des points de contact entre les dentures à chaque instant et d'en déduire leurs trajectoires sur les surfaces actives du pignon et de la roue ainsi que la relation entre les paramètres  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Les résultats de cette analyse dépendent directement des valeurs des paramètres du modèle géométrique défini précédemment. Si tous les écarts sont nuls, la géométrie est celle définie au chapitre 2 et nous devons constater que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont liés par une relation affine.

Nous détaillons dans le paragraphe 3.3.1, les systèmes d'équations à résoudre pour connaître la position du point de contact dans le repère commun et sur chacune des surfaces. Comme il ne nous est pas possible de définir l'expression explicite de la position du point de contact en fonction de la position du pignon par exemple, nous résolvons le système pour un ensemble discret de positions d'engrènement de chacune des dents. Un traitement de ces données est ensuite nécessaire pour connaître le ou les points de contact et calculer les écarts cinématique d'engrènement. Les stratégies de résolution et de traitement font l'objet du paragraphe 3.3.2. Au paragraphe 3.3.3, nous comparons les résultats de notre algorithme avec les propositions de la norme sur l'erreur d'engrènement. Enfin, une comparaison avec une courbe expérimentale d'engrènement est présentée en 3.3.4.

#### 3.3.1 Principe

L'analyse de l'engrènement d'un point de vue géométrique consiste à définir la relation mathématique entre les paramètres de rotation  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Pour cela, nous avons à notre disposition

les conditions qui traduisent le contact entre une surface active du pignon et une surface active de la roue [8, 95, 17, 96] :

1. Le point de contact appartient aux deux surfaces actives.
2. Si les surfaces sont régulières au point de contact, les normales aux surfaces sont identiques en ce point.
3. Si le vecteur normal n'est pas défini pour l'une des surfaces au point de contact car il se trouve à la frontière de la surface, le vecteur tangent à cette frontière, au point de contact, est orthogonal au vecteur normal à l'autre surface.

La traduction mathématique des conditions de contact en un point régulier des deux surfaces de substitutions définies précédemment sont les suivantes (figure 3.15) :

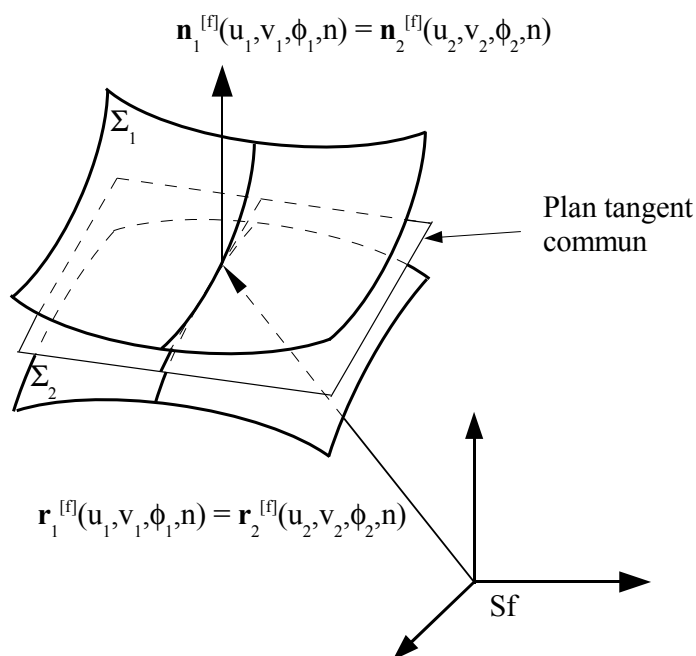


figure 3.15 – Contact en un point régulier

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1^{[f]}(u_1, v_1, \phi_1, n) = \mathbf{r}_2^{[f]}(u_2, v_2, \phi_2, n) \\ \mathbf{n}_1^{[f]}(u_1, v_1, \phi_1, n) = \mathbf{n}_2^{[f]}(u_2, v_2, \phi_2, n) \\ (u_1, v_2) \in E^{(1)} \\ (u_2, v_2) \in E^{(2)} \\ (\phi_1, \phi_2) \in E^{(3)} \\ n \in \mathbb{N} \quad \text{fixé} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Avec  $\mathbf{n}_1^{[f]} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_1^{[f]}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_1^{[f]}}{\partial v_1}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}_1^{[f]}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_1^{[f]}}{\partial v_1} \right\|}$  et  $\mathbf{n}_2^{[f]} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_2^{[f]}}{\partial u_2} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_2^{[f]}}{\partial v_2}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}_2^{[f]}}{\partial u_2} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_2^{[f]}}{\partial v_2} \right\|}$  les vecteurs normaux aux surfaces unitaires. Le système (3.16) possède 5 équations scalaires indépendantes (les vecteurs normaux étant unitaires, la seconde équation vectorielle est équivalente à 2 équations scalaires indépendantes) et 7 inconnues :  $\phi_1, \phi_2, u_1, v_1, u_2, v_2$  et  $n$ . Pour pouvoir résoudre le système, nous faisons l'hypothèse que  $\phi_1$  et  $n$  sont les paramètres d'entrée du système à résoudre. Les solutions sont cherchées sous la forme  $\phi_2(\phi_1, n), u_1(\phi_1, n), v_1(\phi_1, n), u_2(\phi_1, n)$  et  $v_2(\phi_1, n)$ .

Dans le cas où le point de contact se trouve à la frontière de l'une des surfaces actives, la normale n'est pas définie et donc le système (3.16) non plus. Supposons que le point de contact soit sur la frontière de la surface active de substitution du pignon définie par

$$L_1^{[f]}(s, \phi_1, n) = \mathbf{r}_1^{[f]}(u_1(s), v_1(s), \phi_1, n)$$

La seconde condition de contact traduit l'orthogonalité entre le vecteur tangent à  $L_1^{[f]}$  et  $\mathbf{n}_2^{[f]}$  (figure 3.16).

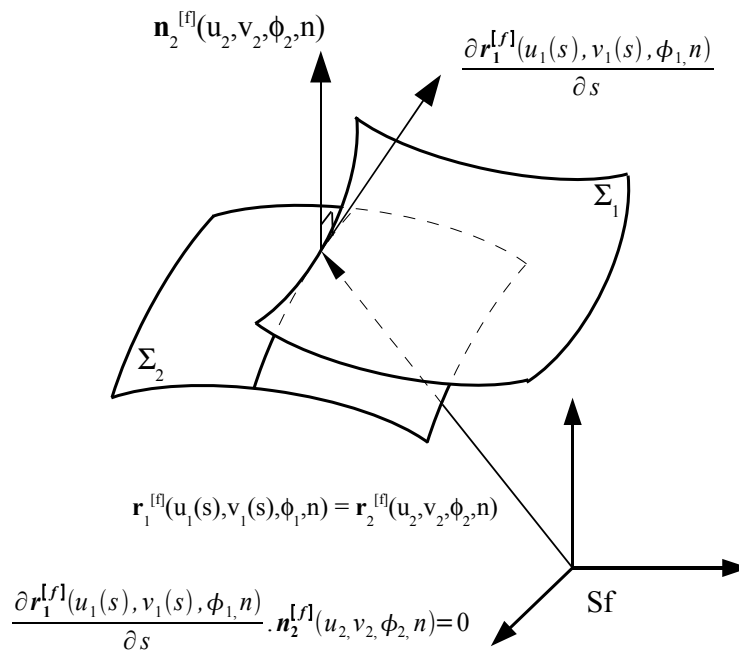


figure 3.16 – Contact sur la frontière de la surface du pignon

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1^{[f]}(u_1, v_1, \phi_1, n) = \mathbf{r}_2^{[f]}(u_2, v_2, \phi_2, n) \\ \frac{\partial \mathbf{r}_1^{[f]}(u_1(s), v_1(s), \phi_1, n)}{\partial s} \cdot \mathbf{n}_2^{[f]}(u_2, v_2, \phi_2, n) = 0 \\ s \in E^4 \\ (u_2, v_2) \in E^2 \\ (\phi_1, \phi_2) \in E^3 \\ n \in \mathbb{N} \quad \text{fixé} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Ce système possède 4 équations scalaires indépendantes et formulant la même hypothèse que précédemment, les solutions sont cherchées sous la forme  $\phi_2(\phi_1, n)$ ,  $s(\phi_1, n)$ ,  $u_2(\phi_1, n)$  et  $v_2(\phi_1, n)$ .

Les systèmes d'équations (3.16) et (3.17) sont trop complexes (non linéarité, système implicite, ...) pour pouvoir en extraire les solutions explicites. La recherche de solutions approchées ne peut se faire que par l'utilisation de méthodes numériques adaptées à la résolution de système non-linéaire, pour des valeurs fixées de  $\phi_1$  et  $n$ . En conséquence, la seule représentation du mouvement de la roue et des trajectoires du point de contact que nous pouvons obtenir est une représentation discrète. Pour cela, il faut définir un ensemble discret de valeur de  $\phi_1$  et  $n$ , et résoudre le système pour chaque combinaison. L'ensemble des solutions obtenues doit être traité pour en extraire la ou les dents en contact pour chaque valeur de  $\phi_1$  et, ensuite, reconstruire les trajectoires et estimer les *écarts cinématiques d'engrènement*. Ce traitement fait l'objet du paragraphe 3.3.2.

### 3.3.2 Etude de l'engrènement

Pour avoir une représentation des caractéristiques de l'engrènement, le système (3.16) ou (3.17) doit être résolu pour un ensemble de valeur du couple  $(\phi_1, n)$ . Or, pour un certain nombre d'intervalles de  $\phi_1$ , il peut y avoir deux couples de dents en contact et se pose alors la question de la détermination du couple effectivement en contact. Pour résoudre ce problème, l'analyse de l'engrènement est réalisée en deux étapes :

1. *Analyse de l'engrènement de chaque dent* : Pour chaque dent, les points de contact sont cherchés pour un ensemble de valeur de  $\phi_1$  compris entre  $\phi_{1\text{mini}} + \frac{2\pi}{z_1}(n-1)$  et  $\phi_{1\text{maxi}} + \frac{2\pi}{z_1}(n-1)$ .
2. *Analyse de l'engrènement de l'ensemble des dents* : Les valeurs de  $\phi_1$  sont classés de façon croissante et, pour chacune d'elle, il faut déterminer quel(s) couple(s) de dents est (sont) en contact.

## Forme définitive des systèmes d'équations résolus

Le système d'équations (3.16) est remplacé par un système équivalent afin d'accélérer sa résolution. L'expression des normales unitaires est très lourde en raison de leur normalisation, cette forme est à éviter. La condition de tangence peut également s'exprimer de la façon suivante : les vecteurs normaux (non unitaires) aux surfaces exprimés au point de contact sont colinéaires. Ainsi, les systèmes (3.16) et (3.17) sont équivalents aux systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1^{[f]}(u_1, v_1, \phi_1, n) = \mathbf{r}_2^{[f]}(u_2, v_2, \phi_2, n) \\ \mathbf{N}_1^{[f]}(u_1, v_1, \phi_1, n) = c \cdot \mathbf{N}_2^{[f]}(u_2, v_2, \phi_2, n) \\ (u_1, v_2) \in E^{(1)} \\ (u_2, v_2) \in E^{(2)} \\ (\phi_1, \phi_2) \in E^{(3)} \\ n \in \mathbb{N} \text{ fixé} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1^{[f]}(u_1, v_1, \phi_1, n) = \mathbf{r}_2^{[f]}(u_2, v_2, \phi_2, n) \\ \frac{\partial \mathbf{r}_1^{[f]}(u_1(s), v_1(s), \phi_1, n)}{\partial s} \cdot \mathbf{N}_2^{[f]}(u_2, v_2, \phi_2, n) = 0 \\ s \in E^4 \\ (u_2, v_2) \in E^2 \\ (\phi_1, \phi_2) \in E^3 \\ n \in \mathbb{N} \text{ fixé} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Où  $\mathbf{N}_1^{[f]}$  et  $\mathbf{N}_2^{[f]}$  sont les normales aux surfaces :

$$\mathbf{N}_1^{[f]} = \frac{\partial \mathbf{r}_1^{[f]}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_1^{[f]}}{\partial v_1} \quad \mathbf{N}_2^{[f]} = \frac{\partial \mathbf{r}_2^{[f]}}{\partial u_2} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_2^{[f]}}{\partial v_2}$$

Les nouveaux systèmes possèdent une inconnue supplémentaire  $c$  et une équation scalaire de plus. Ils sont cependant numériquement plus rapides à résoudre que les précédents.

D'autre part, nous nous plaçons dans le cas où les frontières des surfaces actives sont des *isoparamétriques*. Le traitement mathématique du problème de contact sur une frontière se trouve ainsi simplifié.

## Analyse de l'engrènement de chaque dent

Pour avoir une représentation des caractéristiques de l'engrènement, le système (3.18) ou (3.19) doit être résolu pour un ensemble de valeur du couple  $(\phi_1, n)$ . Pour résoudre un système d'équations non linéaires, la plupart des approches sont itératives et nécessitent un vecteur de départ proche de la solution recherchée.

Pour résoudre ce type de système non-linéaire, CLOUTIER et TORDION [17] utilisent la méthode de NEWTON-RAPHSON. Il existe de nombreuses méthodes itératives plus rapides, comme celles d'AITKEN, de STEFFENSON, des moindres carrés [97], ... Mais ces méthodes nécessitent le calcul des matrices Jacobiennes de  $\mathbf{r}_1^{[f]}$ ,  $\mathbf{r}_2^{[f]}$ ,  $\mathbf{N}_1^{[f]}$  et  $\mathbf{N}_2^{[f]}$ . Pour éviter cette étape, la résolution et le traitement sont développés sous Matlab<sup>®</sup>, l'algorithme de LEVENBERG-MARQUARDT est employé [98, 99, 100].

Dans notre cas, la position du point de contact est très sensible aux variations géométriques, d'où la nécessité de définir une stratégie de définition du vecteur de départ. En appelant  $n_{maxi}$  la valeur maximale de  $n$ , les valeurs du numéro des dents est limitée à l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n_{maxi}\}$ . Les valeurs de  $n_{maxi}$  et  $\phi_1$  ne sont pas totalement indépendantes puisque, en ordre de grandeur,  $\phi_1$  varie de 0 à  $\frac{2\pi}{z_1}(n_{maxi} - 1)$ . Le choix de  $n_{maxi}$  est lié au caractère périodique des écarts cinématiques : pour être sûr de bien appréhender le comportement de l'engrènement, il faut que cette valeur soit suffisamment élevée pour que l'étendue de la simulation en  $\phi_1$  soit supérieure à la période de répétition des écarts cinématiques. Par contre, une valeur de  $n_{maxi}$  trop élevée pénalise le temps de calcul. Les rapports  $n_{maxi}/z_1$  et  $n_{maxi}/z_2$  sont, respectivement, égaux au nombre de tours effectués par le pignon et par la roue lors de la simulation. Dans la plupart des simulations, nous prenons  $n_{maxi} = z_1 + 2$  pour connaître l'engrènement sur un peu plus d'un tour du pignon.

Les valeurs de  $\phi_1$  sont définies pour la première dent puis se répètent modulo  $\frac{2\pi}{z_1}$ . Nous choisissons de prendre  $\phi_1 = 0$  lorsque le point de contact de la première dent du pignon a lieu sur le cercle primitif nominal de celui-ci. Les valeurs extrêmes de  $\phi_1$  dépendent des flancs en contact. En considérant que le pignon est moteur et de  $\phi_1$  croît, nous avons, pour l'engrènement du premier couple de dents, de façon nominale :

$$\begin{cases} \phi_{1maxi} = \phi_{1S_2} + \varphi_1 \\ \phi_{1mini} = -\phi_{1S_1} + \varphi_1 \end{cases} \quad (3.20)$$

Ces angles sont définis aux paragraphes 2.4.1, page 64, 2.4.2, page 65 et 2.2.3 page 50 du chapitre 2). Ce domaine est divisé en deux intervalles  $[\phi_{1mini}; 0]$  et  $[0; \phi_{1maxi}]$ . Sur chacun, respectivement  $Nbd$  et  $Nbu$  valeurs discrètes de  $\phi_1$  sont définies, régulièrement espacées. Ainsi, les valeurs discrètes de  $\phi_1$  pour la première dent sont :

$$\begin{cases} \phi_1^{1dk} = -k \frac{|\phi_{1mini}|}{Nbd} & \text{pour } \phi_1 \in [\phi_{1mini}; 0] \text{ et } k \in \{0, 1, 2, \dots, Nbd\} \\ \phi_1^{1uk} = k \frac{\phi_{1maxi}}{Nbu} & \text{pour } \phi_1 \in [0; \phi_{1maxi}] \text{ et } k \in \{0, 1, 2, \dots, Nbu\} \end{cases} \quad (3.21)$$

C'est la sensibilité de la méthode numérique aux vecteurs de départ (problème de stabilité) qui

nous a conduit à adopter ce découpage. Ainsi, nous préconisons de choisir le vecteur de départ de l'algorithme de LEVENBERG-MARQUARDT pour  $\phi_1 = 0$  proche du contact à mi-hauteur des dents et au sommet du bombé, puis, dans chacun des intervalles lorsque  $k$  croît, le vecteur de départ de la méthode de résolution du système non linéaire est la solution de la résolution précédente. Cette stratégie a montré sa robustesse, notamment avec des écarts de forme relativement importants. Le critère d'arrêt de la méthode itérative est un test sur l'erreur relative (résidu).

Pour les dents suivantes, la même procédure est utilisée avec les valeurs discrètes de  $\phi_1$  suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^{ndk} = \frac{2\pi}{z_1}(n-1) + \phi_1^{1dk} = \frac{2\pi}{z_1}(n-1) - k \frac{|\phi_{1mini}|}{Nbd} \\ \text{pour } \phi \in [\frac{2\pi}{z_1}(n-1) + \phi_{1mini}; \frac{2\pi}{z_1}(n-1)] \text{ et } k \in \{0, 1, 2, \dots, Nbd\} \\ \\ \phi_1^{nuk} = \frac{2\pi}{z_1}(n-1) + \phi_1^{1uk} = \frac{2\pi}{z_1}(n-1) + k \frac{\phi_{1maxi}}{Nbu} \\ \text{pour } \phi \in [\frac{2\pi}{z_1}(n-1); \frac{2\pi}{z_1}(n-1) + \phi_{1maxi}] \text{ et } k \in \{0, 1, 2, \dots, Nbu\} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Le pseudo-algorithme de la recherche de l'ensemble des points de contact potentiels est le suivant :

### Initialisation

$$k=0, j=0; \Delta\phi_1^d = \frac{|\phi_{1mini}|}{Nbd}; \Delta\phi_1^u = \frac{\phi_{1maxi}}{Nbu}; \dots$$

### Recherche des points de contact pour chaque couple de surfaces

for  $n = 1$  to  $n_{maxi}$

#### Recherche du point de contact au milieu des surfaces

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{z_1}(n-1); j=j+1; k=k+1 \dots$$

Résoudre le système 3.18 à partir du vecteur initial nominal

if  $((u_1, v_1) \notin E^1$  or  $(u_2, v_2) \notin E^2)$ , then

Résoudre un système du type 3.19 adapté à la situation

End if

Enregistrer la solution  $(\phi_1, \phi_2, u_1, v_1, u_2, v_2, n)$

#### Recherche des points de contact pour des valeurs de $\phi_1$ croissante

While  $\phi_1 < \frac{2\pi}{z_1}(n-1) + \phi_{1maxi}$ , do :

$$\phi_1 = \phi_1 + \Delta\phi_1^u$$

Résoudre le système 3.18 avec pour vecteur initial la solution précédente

if  $((u_1, v_1) \notin E^1$  or  $(u_2, v_2) \notin E^2)$ , then

Résoudre un système du type 3.19 adapté à la situation

End if

Enregistrer la solution  $(\phi_1, \phi_2, u_1, v_1, u_2, v_2, n)$

End while

Enregistrer la solution  $(\phi_1, \phi_2, u_1, v_1, u_2, v_2, n)$

### Recherche des points de contact pour des valeurs de $\phi_1$ décroissante

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{z-1}(n-1)$$

While  $\phi_1 > \frac{2\pi}{z-1}(n-1) + \phi_{1min}$ , do :

$$\phi_1 = \phi_1 - \Delta\phi_1^d$$

Résoudre le système 3.18 avec pour vecteur initial la solution précédente

if  $((u_1, v_1) \notin E^1$  or  $(u_2, v_2) \notin E^2)$ , then

Résoudre un système du type 3.19 adapté à la situation

End if

Enregistrer la solution  $(\phi_1, \phi_2, u_1, v_1, u_2, v_2, n)$

End While

Valeur suivante de  $n$

## Analyse de l'engrènement de l'ensemble des dents

Connaissant les caractéristiques de l'engrènement de chaque couple de dents considéré indépendamment, tous les points de contact potentiels entre les dents sont connus. L'étape suivante pour l'analyse de l'engrènement est la détermination univoque de la configuration du contact pour chaque valeur de  $\phi_1$ .

Les intervalles de variation de  $\phi_1$  pour 2 valeurs de  $n$  successives, se recouvrent partiellement (figure 3.17).

Dans cette zone, il faut déterminer sur quel(s) couple(s) de dents le contact a effectivement lieu.

La figure 3.18 illustre pour une position de  $\phi_1$  données, les deux possibilités de contact entre les dentures, pour des positions  $\phi_2^n$  et  $\phi_2^{n+1}$ . En raison des écarts, une des configurations conduit à une interpénétration des dentures. Cependant, si l'écart entre  $\phi_2^n$  et  $\phi_2^{n+1}$  est inférieur à une valeur seuil,  $\epsilon_{\phi_2}$ , en raison des incertitudes numériques, nous considérons qu'il y a double contact. Dans le cas contraire, si le pignon est moteur et que le sens de rotation correspond à  $\phi_1$  croissant

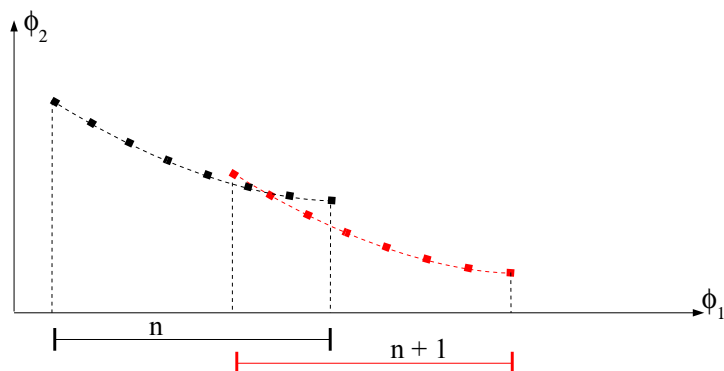


figure 3.17 – Résultats bruts de la simulation pour 2 couples de dents

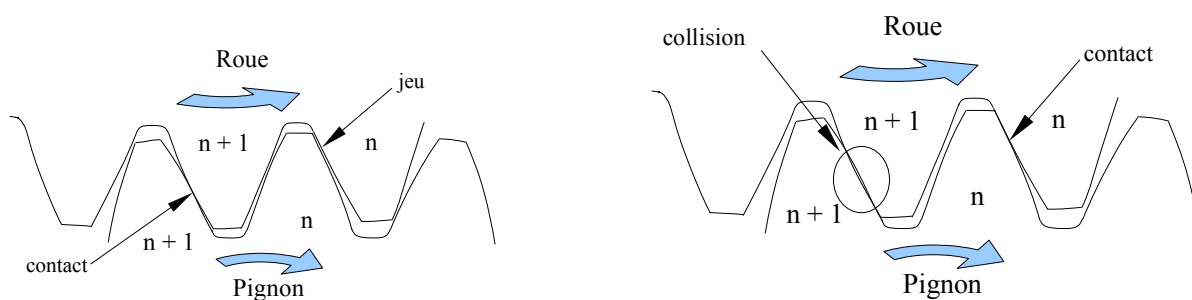


figure 3.18 – Deux configurations de contact pour une valeur de  $\phi_1$

(donc  $\phi_2$  décroissant), la position de la roue à retenir est la plus petite valeur de  $\{\phi_2^n$  et  $\phi_2^{n+1}\}$ , ce qui revient à déterminer l'enveloppe inférieure du nuage de points.

Dans la zone commune des intervalles de variation de  $\phi_1$ , pour 2 valeurs de  $n$  successives, les valeurs discrètes de  $\phi_1$  sont a priori différentes. Pour pouvoir comparer les valeurs de  $\phi_2$  en chacune des valeurs prises par  $\phi_1$  dans cette zone, la valeur de  $\phi_2$  inconnue est obtenue par interpolation linéaire.

Le pseudo-algorithme du traitement est le suivant :

### Initialisation

$$\phi_1^{(0)} = \phi_{1\text{mini}}; n^{(0)} = 0; \dots$$

### Organisation des données

Tri de  $\phi_1$  de façon croissante et construction de la liste  $(\phi_1^{(k)}, \phi_2^{(k)}, u_1^{(k)}, v_1^{(k)}, u_2^{(k)}, v_2^{(k)}, n^{(k)})$  où  $k$  est le rang ( $k > 0$ )

### Initialisation

$$k = 0;$$

## Définition de la relation cinématique durant l'engrènement

While  $\phi_1^{(k)} < \frac{2\pi}{z_1} n_{maxi}$ , do :

$k = k + 1$

if  $n^{(k)} \neq n^{(k-1)}$  then

Calculer  $\phi_{2,n^{(k-1)}}$  par interpolation linéaire.

if  $|\phi_{2,n^{(k-1)}} - \phi_2^{(k)}| < \epsilon_{\phi_2}$ , do

Il y a double contact : enregistrer  $(\phi_1^{(k)}, \phi_2^{(k)})$  ou  $(\phi_1^{(k)}, \phi_{2,n^{(k-1)}})$

else

if  $\phi_{2,n^{(k-1)}} > \phi_2^{(k)}$ , do

Enregistrer  $(\phi_1^{(k)}, \phi_2^{(k)})$

else Enregistrer  $(\phi_1^{(k)}, \phi_{2,n^{(k-1)}})$

End if

End if

else

Enregistrer  $(\phi_1^{(k)}, \phi_2^{(k)})$

End if

End while

A l'issue du traitement, tous les couples de positions d'engrènement  $(\phi_1, \phi_2)$  sont connues. Il est alors possible de calculer *l'écart cinématique d'engrènement*  $EC_i$  pour chacune des positions. L'écart cinématique d'engrènement est la différence entre la position angulaire de la roue estimée et la position que la roue occuperait si la transmission de mouvement était parfaitement homocinétique. L'écart cinématique d'engrènement est défini à une constante près. Nous choisissons que cet écart est nul pour  $\phi_1^{(Nbd+1)} = 0$ .

$$EC_i = \phi_2^{(i)} - \phi_2^{(Nbd+1)} - \frac{z_1}{z_2} \phi_1^{(i)} \quad (3.23)$$

L'analyse géométrique de l'engrènement se fait à partir de l'ensemble des écarts cinématiques. L'*erreur cinématique d'engrènement* est l'amplitude des valeurs de cet écart et une approximation de *l'erreur de saut de dent* est l'amplitude maximale des écarts cinématiques sur un pas angulaire du pignon.

### 3.3.3 Relation avec les normes

Notre méthode d'analyse de l'engrènement étant présentée, il convient maintenant d'établir le lien entre celle-ci et les définitions des normes.

La norme 1328-1 [88] établit deux défauts liés à l'écart cinématique (figure 3.19) :

- **écart total composé tangentiel** ( $F'_i$ ) : Différence maximale entre les déplacements circonférentiels effectifs et théoriques mesurés sur le cercle de référence de la roue contrôlée, lorsque celle-ci engrène au cours d'un tour complet. (Note : Avec une roue étalon durant le contrôle, le contact se produit sur une seule famille de flancs conjugués.)
- **écart de saut de dent tangentiel** ( $f'_i$ ) : valeur de l'écart composé tangentiel pour une rotation de un pas.

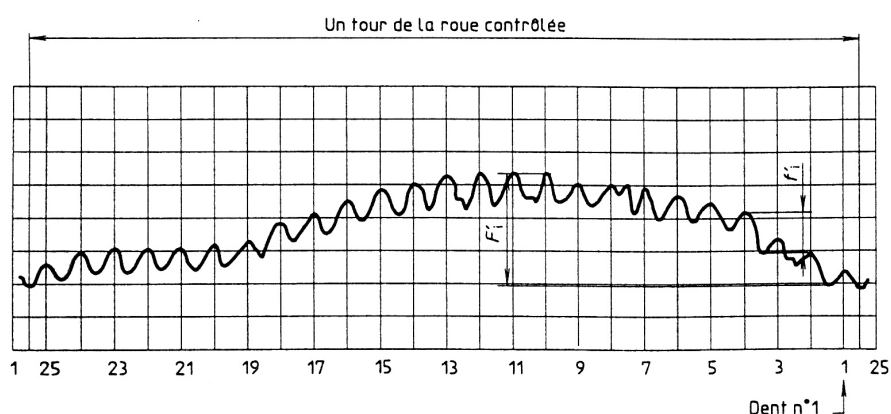


figure 3.19 – Ecarts composés tangentiels (ISO 1328-1)

Ces définitions sont manifestement établies pour des engrenages à axes parallèles. La norme américaine [101] précise que son principe peut être appliquée aux engrenages coniques.

La directive [36] de la société des ingénieurs allemands et la norme AGMA [101] donnent également le type d'écart cinématique engendré par différentes modifications du profil actif, les autres écarts étant vraisemblablement nuls par ailleurs.

En somme, les normes caractérisent l'erreur cinématique par deux grandeurs : l'écart composé tangentiel ( $F'_i$ ) et écart de saut de dent tangentiel ( $f'_i$ ). Ces caractéristiques sont définies par l'engrènement de la roue étudiée avec une roue étalon, et généralement utilisés pour des engrenages cylindriques. Les écarts cinématiques ainsi enregistrés sont en fait la signature de l'ensemble des écarts géométriques que nous avons présentés (implicitement reconnu par les auteurs de la norme américaine citée, annexe C). Ils sont ainsi liés au montage des roues. En conséquence, il n'est pas sûr que le comportement d'un pignon lors d'un test d'engrènement soit cinématiquement identique à son comportement en situation réelle, et cela pour deux raisons :

1. Il y a peu de chance que le comportement cinématique d'un engrenage soit déductible par une combinaison simple des résultats expérimentaux d'engrénométrie de chacune des roues avec une roue étalon.
2. Les assemblages (boîtier, solutions technologiques, caractéristiques des pièces, ...) ou les configurations d'assemblage (positionnement des jeux lors du serrage, ...) sont différents entre les tests d'engrénométrie et la configuration de fonctionnement. Les configurations géométriques étant différentes, le comportement cinématique le sera également.

Les simulations que nous effectuons ne nous rapprochent pas d'avantage de la réalité tant que les écarts géométriques ne sont pas précisément connus. Cependant, une analyse statistique des spécifications géométriques peut nous renseigner sur la probabilité d'un comportement cinématique attendu (voir chapitre suivant).

Les conditions à respecter pour pouvoir comparer les résultats normalisés avec ceux issus de la simulation de l'engrènement ne sont pas clairement connues. L'interprétation que nous faisons des normes et de la directive allemande, nous conduit à considérer qu'il faut imposer dans la simulation que tous les écarts relatifs de la roue correspondant à la roue étalon ainsi que les écarts de position et de situation dans les liaisons, soient nuls. En engrénométrie, pour connaître l'influence d'un écart, l'expérience doit être réalisée dans des conditions où l'écart étudié est grand par rapport aux autres. Il n'est quasiment jamais certain que le résultat obtenu soit significatif. L'outil d'analyse de l'engrènement que nous avons développé permet d'obtenir des résultats dans toutes configurations, celles-ci étant connues. La durée de la simulation est de l'ordre de la minute, ce qui permet d'étudier l'influence d'un ou plusieurs paramètres en utilisant, par exemple, un plan d'expériences.

Cet outil de simulation peut être enrichi pour estimer les jeux entre dents à chaque position simulée, ce qui ne peut être obtenu expérimentalement. Il peut également être une aide à l'analyse des courbes expérimentales d'engrénométrie. En effet, cela fait plus d'une trentaine d'années que les ingénieurs s'efforcent de clarifier l'interprétation de ces courbes [102]. Cependant, S. KUROKAWA [103] montre qu'il n'est pas possible de dissocier l'excentricité des écarts de pas cumulés à partir d'une courbe d'engrénométrie. Un objectif ambitieux serait de pouvoir déterminer les valeurs des écarts à partir d'un ensemble de courbes expérimentales.

### **3.3.4 Comparaison avec une courbe expérimentale d'engrénométrie**

D'après M. DELFOSSE, l'idée du contrôle de l'erreur cinématique des engrenages date de 1920 environ mais ce n'est qu'à la fin des années 1960, avec l'apparition de l'électronique, que les premiers appareils ont été commercialisés. Dans ses travaux de recherche, Laurent BERVILLER

[33] a instrumenté une machine GLEASON N° 6 pour la transformer en engrenométrie. Cette machine permettant de créer un écart de position entre les sommets des cônes, il a réalisé un enregistrement des écarts cinématiques entre deux roues «étalons» avec un écart de position  $v_{46}=0,1\text{mm}$  Les roues dentées utilisées sont entièrement usinées sur une machine UGV à 5 axes, leur précision de réalisation correspond à une qualité ISO 6. Le résultat expérimental est comparé à celui de la simulation. Les principaux paramètres de l'engrenage sont définis dans le tableau 3.2.

Nombre de dents du pignon	$z_1 = 11$
Nombre de dents de la roue	$z_2 = 15$
Angle nominal entre les axes de rotation	$\Sigma_0 = \pi/2$
Rayon de la sphère à la pointe	$R_p = 50\text{mm}$
Rayon de la sphère au talon	$R_g = 100\text{mm}$
Hauteur utile des dents	$h=0,1613 \times (\text{rayon de la sphère})$

tableau 3.2 – Principaux paramètres de l'engrenage pour la comparaison des écarts cinématiques

La superposition des résultats expérimentaux et numériques se trouve sur la figure 3.20.

Nous observons une assez bonne corrélation entre les deux courbes. Leur allure est également

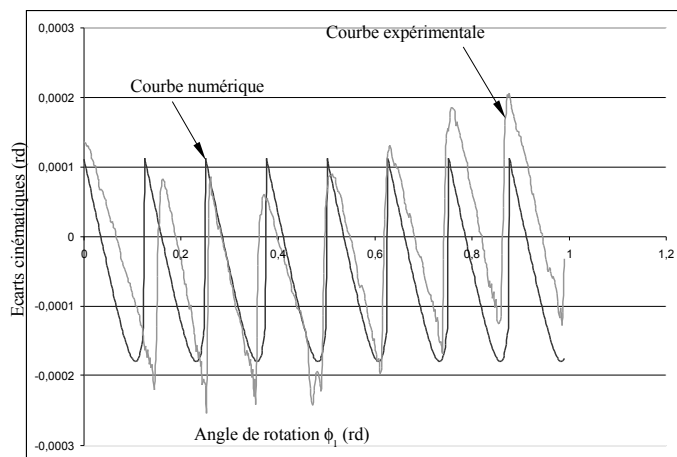


figure 3.20 – Comparaison entre un résultat expérimental et un résultat numérique

conforme aux résultats de la littérature [8, 68, 62]. Les écarts sont les signatures des défauts de forme, d'orientation et de position. Les décalages progressifs suivant les ordonnées de la courbe expérimentale indique une excentration.

### 3.4 Etude de l'impact de quelques écarts sur l'erreur cinématique

L'outil développé d'analyse de l'engrènement avec défauts géométriques permet l'étude des signatures de chaque écart géométrique. Cette étude n'a pas été réalisée d'une manière exhaustive. Nous détaillons l'impact de certains écarts géométriques sur le comportement cinématique.

La liste des variables qui paramètrent les écarts introduits est rappelée dans le tableau 3.3 et les caractéristiques principales de l'engrenage simulé sont définies dans le tableau 3.4.

$A_1, B_1, C_1$	:	paramètres du défaut de forme des surfaces actives de substitution du pignon : amplitude, période et orientation
$A_2, B_2, C_2$	:	paramètres du défaut de forme des surfaces actives de substitution de la roue : amplitude, période et orientation
$\epsilon_1^{(n)}, n \in \{1, 2, \dots, z_1\}$	:	écarts de pas angulaire cumulés de la dent n depuis la dent 1 du pignon
$\epsilon_2^{(n)}, n \in \{1, 2, \dots, z_2\}$	:	écarts de pas angulaire cumulés de la dent n depuis la dent 1 de la roue
$\Gamma_1$	:	écart d'orientation de la denture par rapport aux surfaces de liaison
$u_{35}, v_{35}, w_{35}$	:	écart de position de la denture par rapport aux surfaces de liaison
$\Gamma_2$	:	écart d'orientation de la denture par rapport aux surfaces de liaison
$u_{46}, v_{46}, w_{46}$	:	écart de position de la denture par rapport aux surfaces de liaison
$\varpi$	:	écart d'orientation entre les axes de rotation du pignon et de la roue
A1, A2, A3	:	écart de position entre les sommets des cônes des dentures 1 et 2

tableau 3.3 – Liste des variables paramétrant des écarts géométriques

$z_1$	=	17	;	$z_2$	=	21
$\Sigma_0$	=	$\frac{\pi}{2}$	;	$\alpha$	=	$\frac{\pi}{7,5}$
B	=	1	;	$K_h$	=	2
$K_{e1}$	=	$0,57\frac{\pi}{2}$	;	$K_{e2}$	=	$0,42\frac{\pi}{2}$
$K_{fe1}$	=	0,87	;	$K_{fe2}$	=	1,31
$R_p$	=	50	;	$R_g$	=	100

tableau 3.4 – Caractéristiques principales de l'engrenage intervenant dans les simulations

#### Ecarts cinématiques nuls

Théoriquement, pour un engrènement dont les profils nominaux sont en développante de cercle sphérique, il y a deux configurations où les écarts cinématiques sont nuls :

- lorsque tous les écarts géométriques sont nuls
- lorsque tous les écarts géométriques sont nuls sauf l'écart d'orientation entre les axes de rotation (propriété des profils en développante de cercle sphériques).

Les figures 3.21 et 3.22 montrent les résultats des simulations pour un engrènement sur un tour.

Les valeurs résiduelles des écarts cinématiques sont de l'ordre de grandeur du «zéro» numérique.

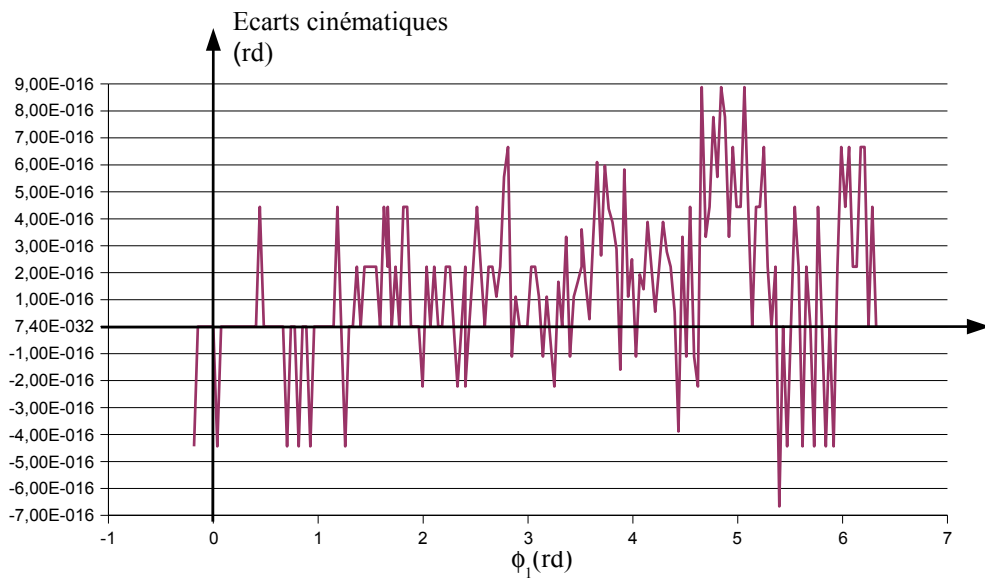


figure 3.21 – Résultats de la simulation sans écart géométrique

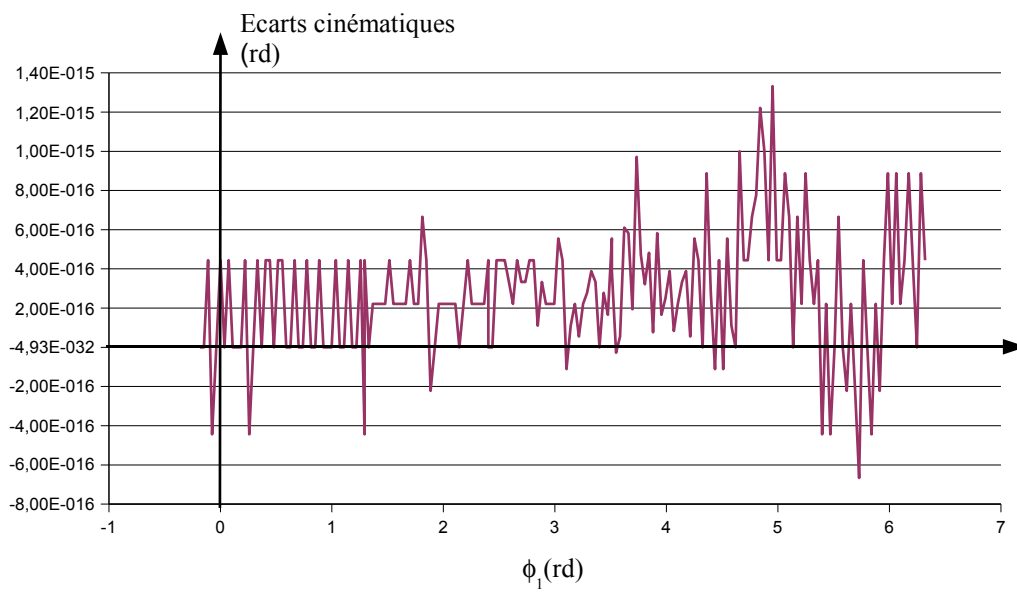


figure 3.22 – Résultats de la simulation pour  $\varpi = 0,01$  rd

L'engrènement homocinéétique dans ces deux cas est donc vérifié, à la précision de la machine près.

## Ecart de forme

Les écarts de forme des surfaces actives de substitution du pignon et de la roue sont définis par la relation (3.7). Le résultat montré figure 3.23 est obtenu avec les valeurs des paramètres définis dans le tableau 3.5.

$A_1$	$B_1$	$C_1$	$A_2$	$B_2$	$C_2$
0,02	2,5	1/20	0,02	2,5	1/5

tableau 3.5 – Valeurs des paramètres des écarts de forme

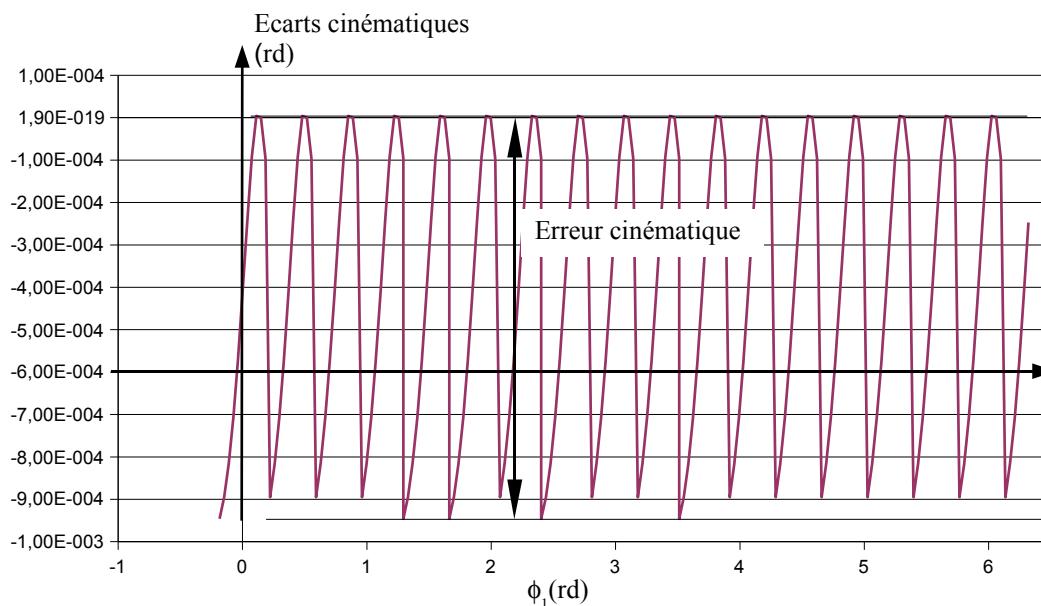


figure 3.23 – Résultats de la simulation avec des défauts de forme

L'erreur cinématique est de l'ordre de  $10^{-3}$  rd. Cette valeur est importante et est liée à l'amplitude des défauts de forme : 0,04 mm pour chacune. Les écarts cinématiques semblent être quasiment tous négatifs mais aucune conclusion sur le fonctionnement de l'engrenage ne peut en être tirée car cet écart est défini à une constante près.

## Ecart de pas et écart de forme

Le défaut de forme est identique au précédent et des écarts de pas angulaire cumulés sont introduits sur les dents 4 et 8 du pignon et les dents 6 et 10 de la roue. Ces valeurs des écarts sont fournis dans le tableau 3.6 et la figure 3.24 illustre le résultat de la simulation.

Un écart de pas angulaire cumulé de même valeur sur le pignon et la roue provoque des écarts cinématiques de signes et d'amplitudes différents. Ce résultat est attendu puisque un même écart

$A_1$	$B_1$	$C_1$	$A_2$	$B_2$	$C_2$	$\epsilon_1^{(4)}$	$\epsilon_2^{(6)}$	$\epsilon_1^{(8)}$	$\epsilon_2^{(10)}$
0,02	2,5	1/20	0,02	2,5	1/5	0,001	0,001	-0,002	-0,002

tableau 3.6 – Valeurs des paramètres des écarts de forme et des écarts de pas angulaire cumulés non nuls

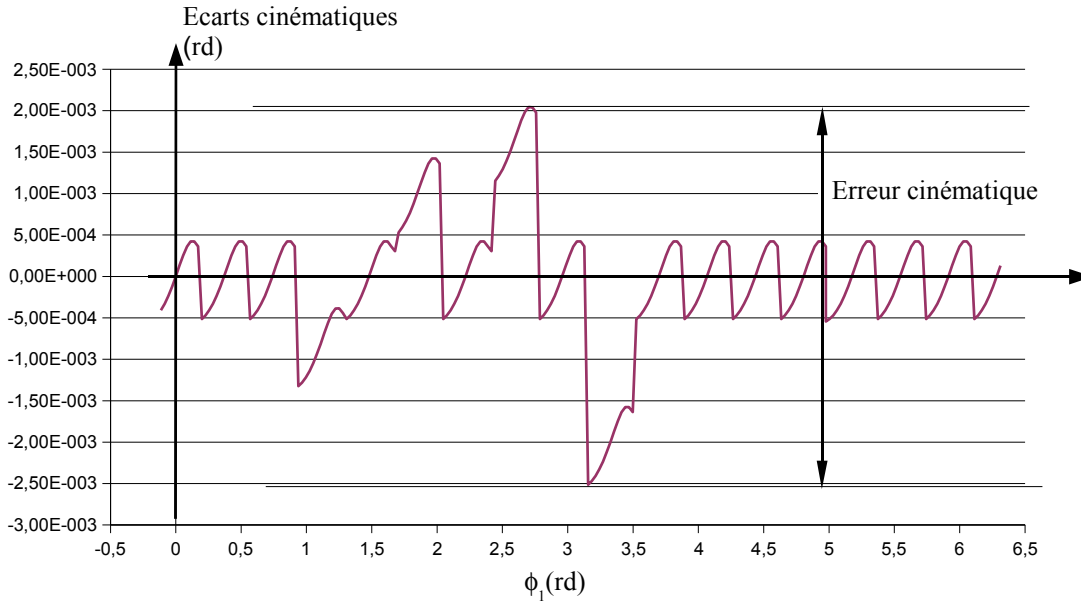


figure 3.24 – Résultats de la simulation avec des défauts de forme et de pas

angulaire provoque un déplacement des surfaces actives plus important sur la roue que sur le pignon. Si le signe de l'écart de pas angulaire cumulé change, les écarts cinématiques résultants changent également de signe.

### Écart de position et d'orientation entre les surfaces fonctionnelles des roues

Les écarts angulaires et de position entre les dentures et les surfaces fonctionnelles de guidage en rotation sont données dans le tableau 3.7.

Les écarts cinématiques évalués par la simulation avec des écarts de position et d'orientation entre les dentures et les surfaces de guidage (figure 3.25) sont sensiblement plus élevés que pour les autres défauts.

$u_{35}$	$v_{35}$	$w_{35}$	$u_{46}$	$v_{46}$	$w_{46}$	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$
0,01	0,02	0	0	0	0,01	0,01	0,005

tableau 3.7 – Valeurs des écarts de positionnement et d'orientation

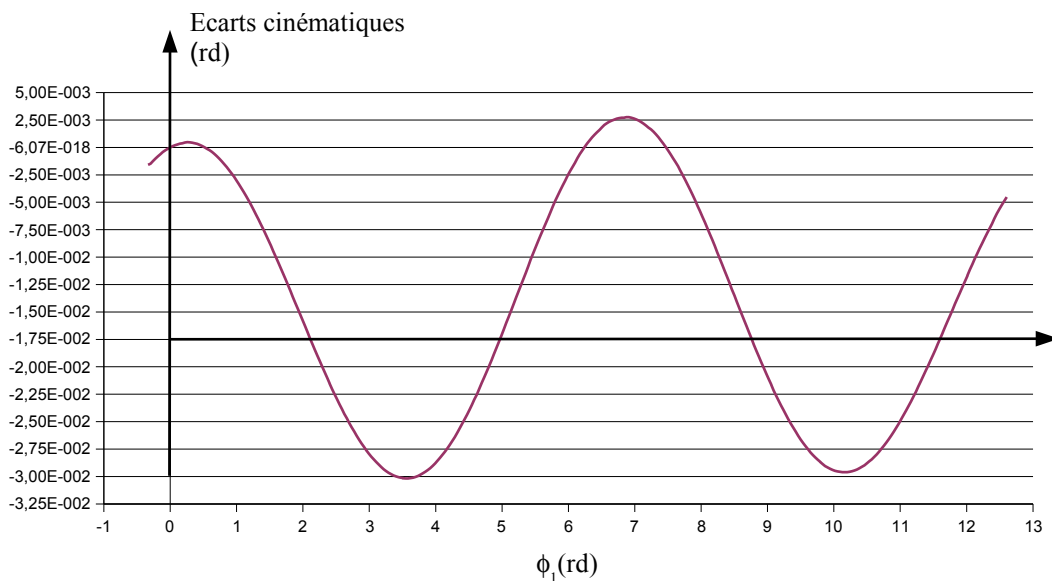


figure 3.25 – Résultats de la simulation avec des défauts dans le positionnement et l’orientation des dents

A1	A2	A3
0,01	0,02	0

tableau 3.8 – Valeur des écarts de position entre les liaisons pivots

### Écart de position et d’orientation dans l’assemblage

L’écart d’orientation dans l’assemblage est déjà traité. La figure 3.26 montre le résultat de la simulation de l’engrènement avec les écarts définis dans la tableau 3.8. Cet écart cinématique quasi linéaire pour chaque dent a déjà été montré par LITVIN et al. [8]. C’est, généralement, l’unique défaut qui est pris en compte dans la littérature.

### Tous les écarts

La simulation suivante reprend tous les écarts précédemment étudiés individuellement. Leurs valeurs sont données dans la tableau 3.9 et le résultat est montré figure 3.27.

$\varpi$	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$A_2$	$B_2$	$C_2$	$\epsilon_1^{(4)}$	$\epsilon_2^{(6)}$	$\epsilon_1^{(8)}$	$\epsilon_2^{(10)}$
0,01	0,01	2,5	1/20	0,01	2,5	1/5	0,001	0,001	-0,002	-0,002
$u_{35}$	$v_{35}$	$w_{35}$	$u_{46}$	$v_{46}$	$w_{46}$	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	A1	A2	A3
0,01	0,02	0	0	0	0,01	0,01	0,005	0,01	0,02	0

tableau 3.9 – Valeurs des écarts et paramètres

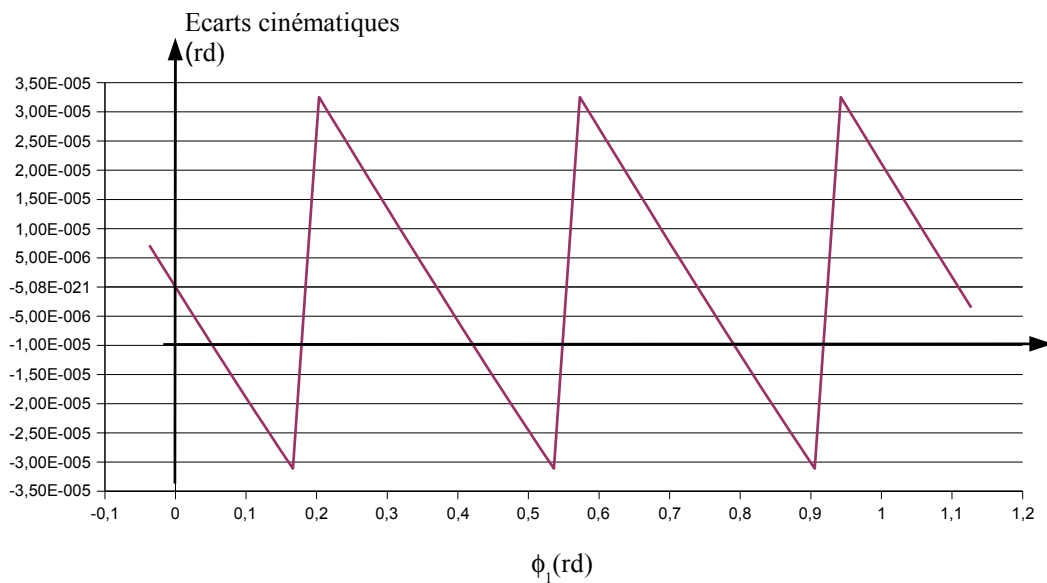


figure 3.26 – Résultat de la simulation avec des écarts de positionnement dans l'assemblage

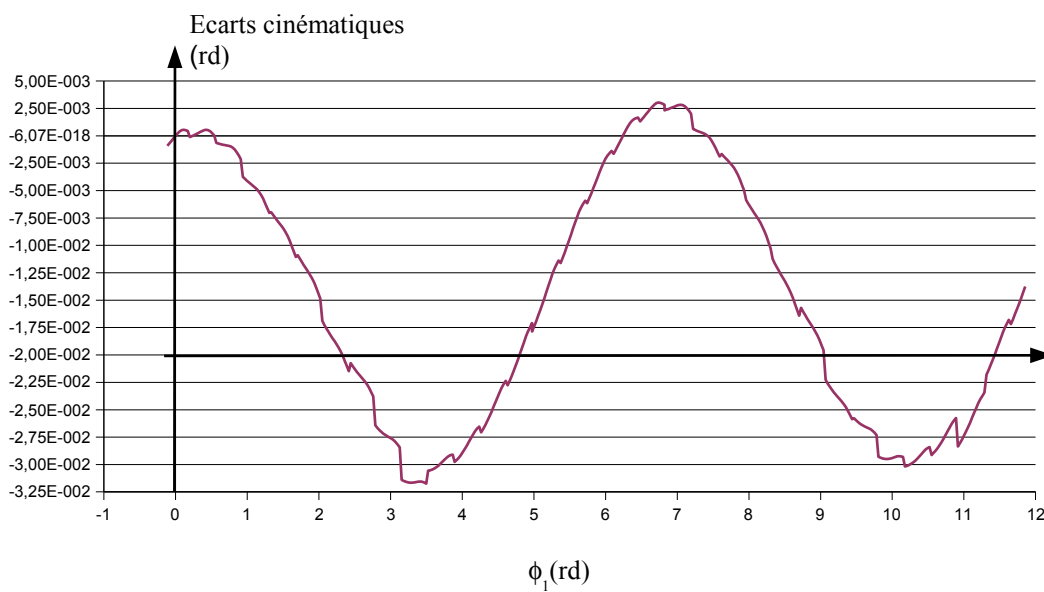


figure 3.27 – Résultat de la simulation avec tous les écarts

Il apparaît nettement d'après la figure 3.27 que l'erreur de positionnement et d'orientation entre les surfaces actives des roues est prédominante.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons détaillé l'élaboration d'un outil d'analyse cinématique de l'engrènement de deux roues dentées, comportant des écarts de forme, de position, d'orientation et des jeux dans les liaisons. Les résultats de la simulation sont la relation cinématique entre le pignon et la roue et les trajectoires des points de contact sur les surfaces actives des roues. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'aspect cinématique de l'engrènement en calculant l'ensemble des écarts cinématiques de la roue. Ces données sont traitées pour connaître l'erreur cinématique de l'engrènement quasi statique et sans charge. Dans le cas où l'une des roues est parfaite, il est possible de déterminer l'écart total composé tangentiel ( $F'_i$ ) et également l'écart de saut de dent tangentiel ( $f'_i$ ) définis par les normes. Cet outil de simulation est entièrement paramétré et il peut devenir le noyau de nouveaux algorithmes permettant de :

- réaliser l'étude des signatures de chaque écart géométrique sur les écarts cinématiques d'engrènement,
- réaliser une analyse des tolérances des écarts géométriques (chapitre 4),
- évaluer les déformations et les contraintes dans les pièces pour chaque position du point de contact (chapitre 5).

Des choix sont faits sur la forme du bombé notamment. Il pourrait également être intéressant d'ajouter à la liste des paramètres la forme du bombé et sa position par rapport à la surface primaire.

Notre modèle prend en compte l'ensemble des écarts géométriques qui influence les écarts cinématiques. Dans la plupart des études [68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 56, 79, 81, 65, 76, 77, 78, 66, 104], les écarts de position et d'orientation des surfaces fonctionnelles des roues dentées ne sont pas modélisés. Or, comme le montre la figure 3.25, ces écarts ont un impact tout à fait significatif sur l'engrènement.

En collaboration avec Jean-Paul VINCENT lors de son projet de fin d'études, [105, 106], cette méthode d'analyse de l'engrènement est implémentée sous Mathematica<sup>®</sup> pour l'analyse de l'engrènement de roue conique de type WILDHABER-NOVIKOV. Ce travail reprend celui de MM. CLOUTIER et TORDION [17, 60]. L'essentiel de ce travail se trouve relaté dans l'article [107], placé en annexe, et montre la robustesse et la flexibilité de l'approche.



## Chapitre 4

# Analyse et optimisation des tolérances des engrenages

Les variations géométriques inhérentes aux procédés et aux processus de fabrication génèrent des écarts entre les caractéristiques fonctionnelles réelles du produit et celles nominalement attendues. Afin de limiter ces écarts, des spécifications géométriques et dimensionnelles sont imposées aux différentes pièces. La nature des spécifications ainsi que les valeurs des intervalles de tolérances conduisent aux choix des procédés de fabrication.

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un outil qui permet d'analyser l'impact d'un ensemble de défauts géométriques des engrenages inhérents à leur réalisation sur les caractéristiques cinématiques de l'engrènement (écarts cinématiques d'engrènement, erreur cinématique, ...).

Malheureusement, l'ensemble des défauts modélisés n'est quasiment jamais évaluable, ce qui limite l'intérêt d'une utilisation directe de cet outil. Cependant, les spécifications géométriques et dimensionnelles permettent de limiter l'étendue des variations géométriques. En faisant un grand nombre de simulations avec des écarts choisis de façon aléatoire ou non dans les domaines spécifiés, il est possible de faire une analyse statistique ou non des tolérances d'un engrenage. Cette analyse définit la probabilité de respect de la ou des conditions fonctionnelles du système. La synthèse et l'optimisation des tolérances permettent de définir les limites des domaines de tolérances.

La première partie de chapitre est consacrée à une présentation du tolérancement et à l'expression mathématique des spécifications géométriques. Dans la seconde partie, nous définissons et présentons des modèles pour les spécifications appliquées aux engrenages. L'analyse des tolérances constitue la troisième partie et enfin, nous aborderons la synthèse et l'optimisation des tolérances.

## 4.1 Introduction

Le tolérancement est une activité de conception qui regroupe différentes problématiques. L'objectif de cette section est de mettre en lumière ces différents aspects et de positionner nos travaux dans cet ensemble.

### 4.1.1 Objectif du tolérancement

Afin de garantir un certain niveau de qualité, les concepteurs définissent des exigences ou contraintes sur les caractéristiques fonctionnelles du système :

- des conditions fonctionnelles
- des conditions de montage
- l'interchangeabilité des pièces
- une certaine qualité de fonctionnement

L'objectif de l'activité de *tolérancement* est de définir les limites acceptables des variations géométriques de chaque pièce permettant de garantir le respect de ces exigences à un coût réaliste. Ces limites sont modélisées par des spécifications géométriques ou des tolérances dimensionnelles.

Avant le tolérancement, les ajusteurs apportaient de petites corrections aux pièces pour réaliser l'assemblage des systèmes mécaniques et pour leur permettre de fonctionner. Le tolérancement a initialement porté sur des dimensions linéaires et angulaires. Puis, cette notion s'est étendue aux positions et orientations des surfaces entre elles.

### 4.1.2 Positionnement de l'activité de tolérancement dans la conception d'un produit

Concevoir un produit consiste à définir une solution technologique qui satisfait son cahier des charges. Pour cela, il faut mettre en correspondance les fonctions et les technologies du système. De nombreux modèles et méthodes existent pour structurer et rationaliser la conception. Les modèles de description structurels tels que le modèle *fonctionno-structurel* proposé par L. ROUCOULES [108] ou le graphe des contacts défini par BALLU, MATHIEU et DANTAN ([109, 110]) mettent en évidence les surfaces fonctionnelles des pièces. Des choix technologiques fixent le type de ces surfaces : plan, surface de révolution, etc. Les dimensions intrinsèques et relatives des surfaces fonctionnelles résultent des contraintes de fonctionnement, de fabrication et de leur dimensionnement aux flux (action mécanique, flux électrique, magnétique, thermique, etc.) qui les traversent. Or, les surfaces réalisées ne sont pas des surfaces géométriquement simples, leur topologie est complexe. Elles sont généralement qualifiées d'*imparfaites* au sens que leur état

ne correspond pas tout à fait ou pas suffisamment (suivant la précision attendue) aux modèles simples qui les caractérisent (plan, cylindre, cône etc).

L'allocation ou la synthèse des tolérances fonctionnelles est une étape importante du processus de conception qui, dans les pratiques courantes, se situe généralement durant les dernières étapes de la conception détaillée [111, 112] et impacte énormément la conception du processus de fabrication, la fabrication et le contrôle du produit [113, 114]. D'où la nécessité, en phase de conception de pouvoir analyser un tolérancement et, si possible, de l'optimiser. En 1996, SALOMONS et al. [115, 116] identifiaient certaines problématiques liées à cette activité :

1. univocité du modèle d'expression des spécifications géométriques et des exigences,
2. passage de l'expression d'une spécification géométrique à sa modélisation mathématique,
3. définition et détermination des exigences et conditions fonctionnelles,
4. détermination qualitative des tolérances,
5. détermination quantitative des tolérances,
  - Analyse des tolérances,
  - Synthèse des tolérances.

### **4.1.3 Position de nos travaux**

Dans nos travaux, le modèle d'expression des spécifications géométriques est défini, sans faire l'objet d'analyse. Notre étude porte sur la détermination des tolérances par l'analyse et la synthèse de celles-ci.

La figure 4.1 situe les outils de notre travail par rapport à un ensemble non exhaustif des modèles et techniques pouvant intervenir en analyse et en synthèse de la géométrie des produits.

### **4.1.4 Expression des spécifications géométriques**

L'objectif du tolérancement est partagé par beaucoup dans notre domaine d'activité mais il y a une réelle diversité dans sa mise en œuvre, tant sur le langage que dans les approches.

#### **Le langage standardisé du tolérancement**

L'expression des spécifications géométriques et leurs modélisations permettent d'exprimer et de représenter les contraintes géométriques. Elles doivent s'exprimer dans un langage technique qui permet de transmettre des informations claires entre la conception, la fabrication et le contrôle [42]. La normalisation a pour objectif essentiel la standardisation des modèles de communication techniques. Les activités de conception et de fabrication étant maintenant largement

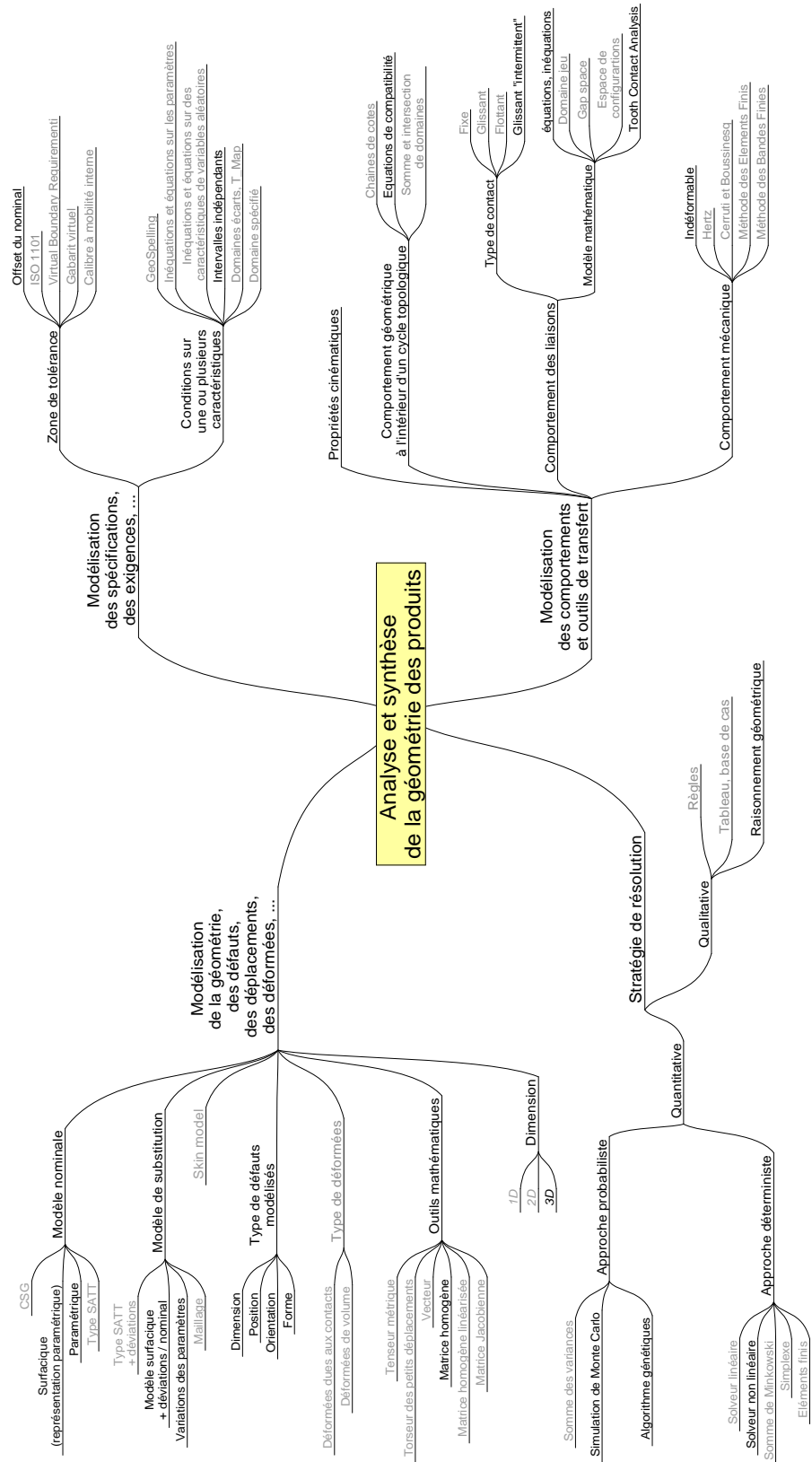


figure 4.1 – Modèles et techniques utilisés dans le chapitre 4

internationales, il est nécessaire que les acteurs puissent se comprendre sur le plan technique, malgré des différences culturelles importantes.

Les principaux documents spécifiques aux représentations normalisées des spécifications géométriques et dimensionnelles sont les suivants :

- Spécification normalisée : ISO 1101, ISO 5459, ...
- GéoSpelling issu des travaux de MM. BALLU et MATHIEU
- Projet de normalisation TC184 (STEP : Standard for Exchange of Product data), TC213 (GPS : Geometrical Product Specification) et TC60 sur les engrenages (pas d'information à ce jour) au sein de l'ISO.

## Différentes approches

Le langage standardisé est peu pratique pour la manipulation des tolérances (simulation pour l'analyse et la synthèse). Aussi, les ingénieurs et chercheurs ont développé de nouvelles approches pour définir, qualifier et quantifier les contraintes géométriques lors du tolérancement. Les différentes modèles de représentation mathématique des spécifications géométriques se veulent équivalentes mais la plupart comportent des limitations.

Dans leurs travaux de recherche, MM. THIEBAUT [117], GAUNET [118] et DANTAN [42] présentent de façon synthétique les différents types d'approches et les modèles les plus significatifs :

- L'approche par zones enveloppes
  - Modèles à base d'offsets (REQUICHA)
  - Exigence sur les frontières virtuelles (JAYARAMAN, SRINIVASAN, ANSELMETTI (CLIC) ...)
  - Pièces au maximum et au minimum de matière (ROBINSON [119] )
- L'approche variationnelle
  - Modèles paramétriques (CLÉMENT, ...)
  - Modèles cinématiques (RIVEST ...)
  - Modèles vectoriels (WIRTZ, GOSSARD, ...)
  - Modèles torsoriels (BALLOT, BOURDET, ...)
  - Modèles matriciels (TURNER, SODHI, ...)
  - Enveloppe limite statistique (LINARES [11], ...)
- L'approche structurelle et variationnelle
  - Le modèle SATT (CLÉMENT, GAUNET [118], ...)

## Analyse, synthèse et optimisation des tolérances

Le tolérancement utilise un langage d'expression des spécifications géométriques et dimensionnelles pour transférer les conditions fonctionnelles, les contraintes de montages, d'interchangeabilité et la qualité de fonctionnement attendue sur chaque pièce. Pour cela, le tolérancement met en œuvre deux activités principales : l'analyse et la synthèse des tolérances. Ces activités sont présentées aux paragraphes 4.3.1 et 4.4.1. Elles permettent de définir un ensemble de combinaisons de tolérances qui assurent le respect des conditions fonctionnelles et des contraintes. Le choix d'une de ces combinaisons peut provenir d'une optimisation des tolérances et fait l'objet du paragraphe 4.4.2.

### Aspect aléatoire

Le tolérancement fait appel à des simulations du comportement du mécanisme lors de l'analyse et de l'optimisation des tolérances. Ces simulations s'appuient sur un modèle géométrique. Les valeurs des paramètres définissant la géométrie tolérancée sont a priori inconnus. En l'absence de méthode pour fixer ces valeurs (aux pires des cas, ...), elles peuvent être fixées de façon aléatoire. Un argument en faveur de cette approche est fourni par J. M. LINARES [11], dont nous reproduisons ici, son texte, dans une version quasi originale.

Dans tous les travaux scientifiques, les chercheurs font deux grands types d'hypothèses :

- soient elles traduisent un manque d'information ou de connaissance sur un phénomène.  
Dans ce cas, on suppose a priori que cette variable n'influe pas car on n'est pas capable de la modéliser,
- soient elles indiquent que le phénomène est connu et négligé car il a un faible effet sur le problème traité.

Ces hypothèses sont à vérifier si possible et à ne pas oublier. Le lien entre ces hypothèses et les statistiques mathématiques est flagrant. La connaissance de l'effet systématique d'un phénomène permet de l'inclure dans le modèle qui cherche à décrire le réel. Par contre, la méconnaissance de ce phénomène peut être modélisée par un effet aléatoire. Les statistiques permettent de «modéliser l'ignorance» [120]. Ces effets participent à la *signature* du résultat fourni par le modèle.

Tout procédé ou processus modifie son milieu environnant par une interaction multiple. La *signature* est la manifestation de cette interaction sous forme d'effets physiques. La signature originelle est propagée par le milieu (amplifiée, atténuée ou perturbée) pour donner la signature disponible sur le phénomène observé.

Dans cet esprit, les écarts géométriques des pièces fabriquées sont modélisés par un vecteur

aléatoire. Il suffit de borner le domaine de variation de ce vecteur de façon à ce que les exigences soient respectées. Ainsi, en considérant un grand nombre de pièces, l'analyse des tolérances peut être réalisée de manière statistique. L'analyse statistique des tolérances repose sur ce concept.

## 4.2 Définition et modélisation des spécifications

Une spécification géométrique est :

- un intervalle ou une condition qui limite un écart ou une caractéristique définie à partir des éléments géométriques.
- un ensemble de contraintes (jeu maxi, ...) qui limitent un ensemble de variations (variations des longueurs des éléments d'une chaîne de cotes, ...)

### 4.2.1 Spécifications par dimensions

L'intérêt de ces spécifications est la simplicité permettant la définition mathématique des spécifications pour éviter toutes les ambiguïtés d'interprétation et pour assurer la cohérence entre tous les acteurs intervenant lors du cycle de vie du produit [121]. Une spécification par dimension est définie comme étant un intervalle dans lequel doit se trouver la valeur d'une dimension. Cette dimension est une caractéristique des éléments géométriques : caractéristique de situation entre éléments idéaux, caractéristique de situation entre éléments idéaux et non idéaux ou caractéristique intrinsèque. La description de la géométrie de la pièce par des caractéristiques peut être dimensionnelle, paramétrique ou vectorielle.

Les spécifications dimensionnelles s'appuient sur une description locale de la géométrie non idéale de la pièce, et une définition d'intervalles limitant les défauts locaux de la pièce.

Les spécifications paramétriques s'appuient sur une description paramétrique de la géométrie nominale de la pièce, et une définition d'intervalles limitant les paramètres de la description.

Les spécifications vectorielles s'appuient sur une description vectorielle de la position des éléments géométriques constitutifs de la pièce dans un repère unique, et une définition d'intervalles limitant les paramètres de la description vectorielle.

### 4.2.2 Spécifications par zones

Une spécification est définie comme étant une zone de tolérance dans laquelle doit se trouver un élément géométrique appelé *élément tolérancé*. Ces spécifications par zone sont très riches en possibilités. En effet, les éléments tolérancés peuvent être des éléments non idéaux, ponctuels, linéiques ou surfaciques, ou des éléments idéaux associés limités. Parmi les éléments tolérancés non idéaux, il y a les éléments non idéaux directement extraits de la surface non idéale de la pièce

et les éléments construits sur ces éléments extraits tels que l'axe réel d'une surface nominale cylindrique.

Une zone de tolérance est un domaine de nature volumique ou surfacique limité par un ou plusieurs éléments géométriques idéaux de nature surfacique ou linéique. Dans le cas de l'exigence au maximum de matière, la zone de tolérance est limitée par une frontière virtuelle qui est définie par un élément idéal. L'élément tolérancé doit appartenir au demi espace limité par cette frontière.

Les zones de tolérance peuvent être positionnées entre elles par des dimensions qui sont des angles et des distances. Ces dimensions sont généralement définies par des dimensions théoriques exactes entre les éléments du modèle nominal correspondant aux éléments tolérancés. De même, elles peuvent être positionnées par rapport à des références spécifiées. Ces références spécifiées sont formées d'un ou plusieurs éléments idéaux qui sont eux mêmes définis à partir d'un ou plusieurs éléments non idéaux extraits appelés *éléments de référence*.

### 4.2.3 Applications aux engrenages

Le premier modèle paramétrique, ayant une application au tolérancement, a été proposé par R. C. HILLYARD [122] ; il permet de tolérer les déplacements des sommets définis par les intersections des surfaces de substitution. Ces déplacements sont paramétrés et exprimés dans une matrice de rigidité. P. HOFFMAN a repris cette approche, il définit la position relative de deux surfaces de substitution par une décomposition axisymétrique, qui forme la description paramétrique [123]. Des tolérances sont associées à chaque paramètre. Il faut noter que cette approche est bidimensionnelle. Les spécifications géométriques propres aux engrenages sont basées sur une approche paramétrique similaire à celle de P. HOFFMAN.

Par rapport à la problématique de spécification géométrique des engrenages, cette approche semble être très pertinente. En effet, la définition de la géométrie nominale nécessite la détermination d'un ensemble important de valeurs de paramètres dont dépend globalement la géométrie. Le concepteur en spécifiant son engrenage définit un ensemble de tolérances qui limitent indépendamment chaque variation d'une géométrie idéale de substitution qui obéit à des modèles mathématiques. Dans cette approche, rien n'est clairement expliqué pour permettre de passer de ce modèle géométrique à l'objet physique.

A. WIRTZ a mis en avant un modèle vectoriel qui définit, pour un élément géométrique de substitution associé selon le critère des moindres carrés, quatre vecteurs représentant la position par rapport à un repère unique, l'orientation, la dimension et la forme [50]. La variation de la géométrie est exprimée par la variation des composantes de ces quatre vecteurs. Cette approche a été étendue aux spécifications géométriques normalisées par D. GAUNET [124]. Cette approche a été reprise par C. BAUDOUIN afin de spécifier et contrôler l'erreur individuelle de pas [125].

Une surface idéale de substitution obéissant au modèle mathématique de la surface nominale est associée au sens des moindres carrés au nuage de points mesurés appartenant à un même flanc de denture, l'erreur individuelle de pas est caractérisée par la variation d'orientation entre deux surfaces de substitution consécutives autour de l'axe de denture (Figure 4.2). Dans cette approche, le passage entre l'objet physique et le modèle géométrique est explicité. Le choix du critère d'association reste un problème, C. BAUDOIN justifie son choix en comparant la surface non idéale du flanc après rodage et la surface idéale de substitution. Cette approche aboutit à une spécification de l'engrenage où des écarts géométriques sont traités indépendamment les uns des autres, ce qui n'est pas forcément l'expression de la fonctionnalité (Tableau 4.1) [18]. En effet, l'étude fonctionnelle ne permet en aucune façon d'affirmer que les paramètres de forme, de position ou d'orientation doivent être systématiquement séparés [126], [127].

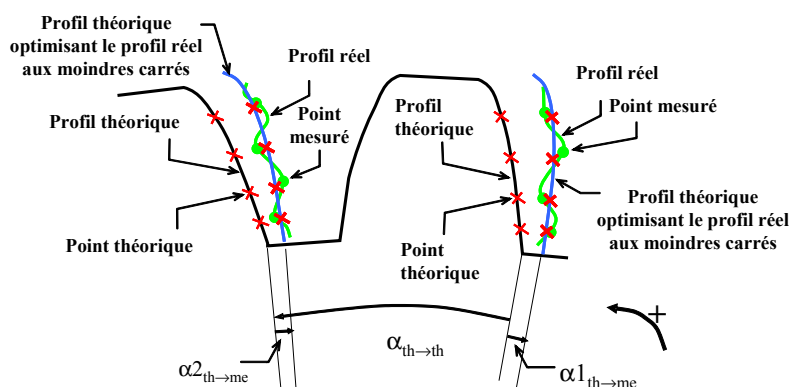


figure 4.2 – Définition de la spécification et de la vérification de l'erreur de pas angulaire, [125]

Qualités de fonctionnement fondamentales	Spécifications les plus importantes
Uniformité de transmission de mouvement	$F'_i, f'_i, F_p, f_r$
Fonctionnement silencieux Capacité de charge dynamique	$f'_i, F_p, f_{pt}, F_\alpha, f_{H\beta}$
Capacité de charge statique	$f_{pt}, f_{H\beta}$

tableau 4.1 – Informations indicatives sur les domaines concernant les différentes classes de précision, [18]

G. REQUICHA a modélisé les tolérances comme un ensemble de contraintes appliquées à une entité de la pièce, sa théorie repose sur la création d'une zone de tolérance par décalage de la géométrie nominale «offset zone» [128]. Les zones décalées sont construites à l'aide d'opérations

de Minkowski et définissent des classes variationnelles [129], [130]. R. JAYARAMAN et V. SRINIVASSAN ont étendu les possibilités proposées par A.A.G. RÉQUICHA en complétant le concept d'offset par celui de balayage [131]. Le principe consiste à définir une zone par déplacement d'une sphère dont le centre est astreint à se trouver sur un élément nominal. L'évolution par rapport aux offsets réside dans le fait que l'élément nominal peut être non seulement surfacique mais également linéique ou ponctuel.

Cette approche par zone basée sur la définition de classes variationnelles est utilisée par E. SACKS et L. JOSKOWICZ pour l'analyse cinématique des tolérances d'un système de transmission de puissance [132]. Il s'agit d'une analyse au pire des cas qui permet de caractériser les limites du comportement géométrique d'un mécanisme. Les pires des cas se trouvent dans les limites de l'espace des configurations des paramètres de la pièce ou de l'assemblage, et sur les singularités liées à la cinématique du mécanisme ou des zones enveloppes des pièces. L'utilisation de l'approche par zone semble très pertinente pour l'analyse cinématique. Par contre, les imperfections géométriques des engrenages génèrent aussi des variations des efforts lors de l'engrènement, des vibrations, des bruits, ... dont les pires des cas ne sont pas forcément sur les singularités liées aux zones enveloppes des pièces.

Nous avons ébauché une réflexion sur l'application des frontières virtuelles au cas des engrenages [133]. La complexité du problème nous a contraint à restreindre cette étude à un cas monodimensionnel : le jeu entre dent.

En synthèse sur l'application aux engrenages des différentes approches de spécification géométrique, nous pouvons souligner la complexité du problème.

Nous utilisons un tolérancement variationnel et vectoriel qui porte sur l'amplitude de la plupart des paramètres qui sont employés pour modéliser les écarts à la géométrie nominale. Les bornes de ces intervalles sont fixées a priori dans l'analyse des tolérances et sont l'objet de l'optimisation (voir paragraphe 4.4).

Naturellement, il y a des correspondances entre les domaines écarts définis sur les paramètres et les spécifications normalisées. Deux exemples montrent les relations entre les deux systèmes de représentation mais cette étude n'est pas étendue à l'ensemble des paramètres.

Pour les dentures, il faut définir un cône de référence. Ce cône de référence n'est pas défini par la configuration de taillage de la denture puisque cette étape a volontairement été occultée (chapitre 2). Aussi, nous proposons la définition suivante : *le cône de référence de la denture est le cône primitif nominal.*

**Exemple 1 : une zone de tolérance qui limite les écarts de forme -  $TF_\alpha$  : tolérance totale de profil**

Pour les normes [88, 89, 101], le modèle mathématique qui représente cette tolérance est :

$$F_\alpha \leq TF_\alpha$$

Dans le cas de notre description (figure 4.3), le modèle mathématique qui représente cette tolérance est :

$$-TF_\alpha \leq w_1(u_1, v_1) \leq TF_\alpha, \quad \forall (u_1, v_1) \in E^{(1)}$$

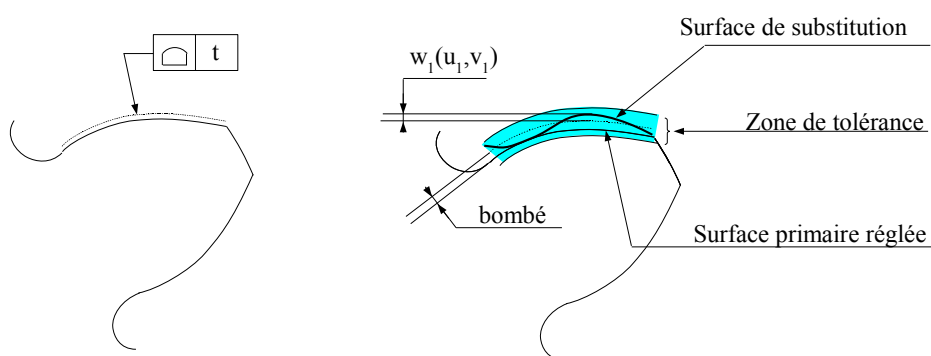


figure 4.3 – Zone de tolérance pour l'écart de forme

**Exemple 2 : une zone de tolérance qui limite l'écart de situation entre la denture et l'alésage de la roue dentée**

Dans les normes ISO 1328, ISO1328 et AGMA [88, 89, 101], une méthode de mesure du faux-rond est détaillée. Mais les mesures de faux-rond incluent les écarts de position et d'orientation entre les surfaces fonctionnelles relatives à la liaison pivot et le cône de référence la denture, les écarts de forme, de pas et d'épaisseur. Les caractéristiques mesurées sont a priori différentes des écarts simulés car les dissociations ne sont pas forcément possibles (voir paragraphe 3.3.3). Nous définissons deux spécifications géométriques semblables (figure 4.4) qui limitent les écarts de situation entre l'axe du cône de référence et l'axe de l'alésage.

La spécification de coaxialité limite le déplacement entre l'axe du cône de référence de la denture et l'axe de l'alésage. MM. GIORDANO, TEISSANDIER, ROY, CHASE, SHAH et DANTAN développent des représentations de ces tolérances géométriques par des domaines écarts [47, 48, 127, 124, 53] T-Map<sup>®</sup> [134, 135, 136] ou par un domaine spécifié [137]. Ces modèles limitent

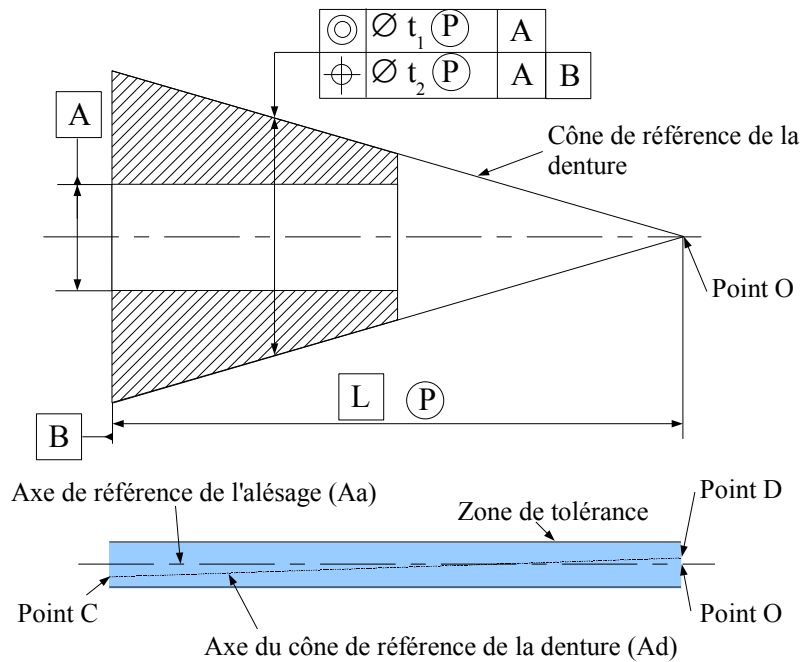


figure 4.4 – Spécifications géométriques

l'écart de situation.

$$|d_{M \in Ad/Aa, M}| \leq \frac{t_1}{2} \quad \forall M \in \{Ad \setminus M \in [C; D]\} \quad (4.1)$$

Où  $Ad$  est l'axe du cône de référence de la denture,  $Aa$  est l'axe de référence de l'alésage,  $M$  est un point de l'axe du cône de référence, appartenant au segment  $[C; D]$  et  $d_{M \in Ad/Aa}$  est la distance du point  $M$  à l'axe de référence  $Aa$  (figure 4.5). Cette distance est limitée par la tolérance.

Nous pouvons exprimer le déplacement du point  $M$  en fonction des écarts de situation  $\{\alpha_{35}, \beta_{35}, \gamma_{35}, u_{35}, v_{35}, w_{35}\}$  entre les repères liés à la denture et celui de l'alésage. Ainsi, il est possible de déduire les contraintes sur les paramètres des écarts de situation. La représentation mathématique en deux dimensions de la spécification géométrique est (figure 4.5) :

### 4.3 Analyse des tolérances d'un engrenage

Au chapitre 3, nous avons élaboré un modèle paramétré des surfaces actives des dentures qui permet de prendre en compte plusieurs écarts géométriques. Ce modèle est implémenté dans un programme qui permet de calculer l'erreur cinématique pour des situations proches du nominal. Cet outil de simulation est utilisé dans ce chapitre pour faire de l'analyse des tolérances.

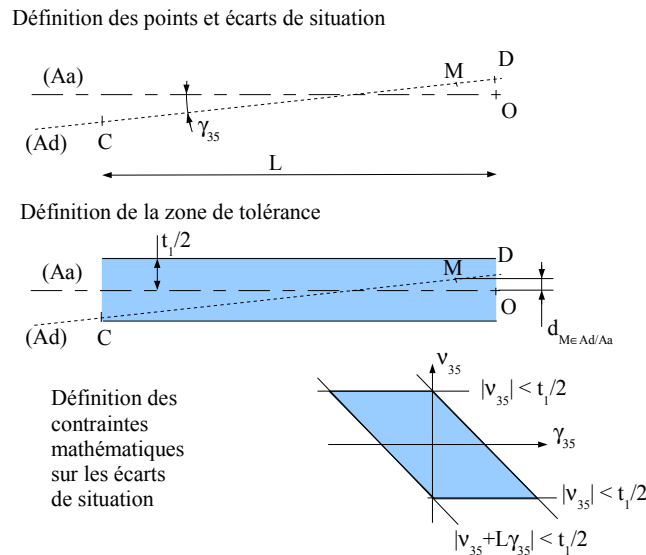


figure 4.5 – Représentation mathématique de la spécification de coaxialité

### 4.3.1 Principe de l'analyse des tolérances

L'analyse des tolérances consiste à simuler l'influence de celles-ci sur le respect des exigences fonctionnelles qui limitent les caractéristiques fonctionnelles. Cette analyse peut être abordée suivant différents points de vue. MM. SACKS, JOSKOWICZ, SRINIVASAN, OSTROVSKY-BERMANN, KYUNG s'intéressent aux zones de fonctionnement du mécanisme et à son éventuel blocage en fonction des tolérances de la géométrie (figures 4.6 et 4.7) [138, 139, 140, 141, 142, 143, 144]. De nombreux chercheurs se sont penchés sur le problème de l'assemblage de pièces mécaniques (voir la synthèse sur ce thème dans [11] pages 24–25) qui peut devenir cruciale pour des systèmes importants [145]. Cette analyse peut parfois être menée en raisonnant sur les configurations les plus défavorables [140, 141, 138, 139, 146] ou, dans tous les cas, de façon statistique. L'aspect générique de cette dernière méthode est séduisant mais ne doit pas faire oublier qu'elle nécessite un temps de calcul important.

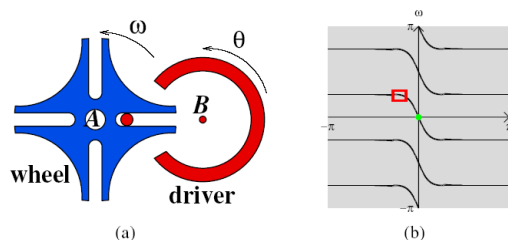


figure 4.6 – Etude du blocage d'un système à croix de Malte

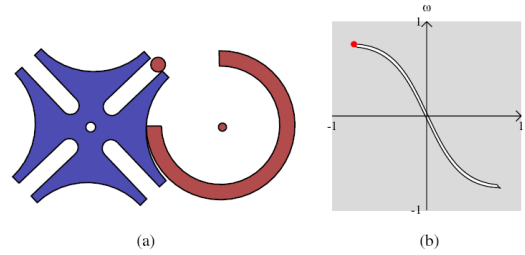


figure 4.7 – Position d'un système à croix de Malte bloqué

### Analyse au pire des cas

L'analyse au pire des cas (aussi appelée déterministe) consiste à établir les dimensions et tolérances qui, pour toutes les configurations, permettent l'assemblage et le fonctionnement du système. La probabilité que l'assemblage soit impossible est nulle. Pour cela, il faut déterminer les pires configurations pour l'assemblage (maximum de matière) et pour le fonctionnement (minimum de matière). Cette méthode conduit à un resserrement des intervalles de tolérances et, par conséquent, à une augmentation du coût de la fabrication. Dans le cas des engrenages, nous ne savons pas déterminer a priori la combinaison la plus défavorable pour l'engrènement et il n'est pas certain que cette situation corresponde à une configuration où les écarts atteignent leurs valeurs extrêmes.

### Analyse statistique

L'analyse statistique est plus pragmatique et plus économique. En permettant à une petite fraction de pièces de ne pas s'assembler ou à quelques systèmes d'être défectueux, le concepteur peut augmenter sensiblement les valeurs des intervalles de tolérance, réduisant ainsi les coûts de fabrication. L'analyse statistique des tolérances estime la probabilité que le système puissent être assemblé et/ou que les contraintes fonctionnelles soient respectées pour des distributions fixées des écarts géométriques dans les zones de tolérance.

Généralement, quel que soit le point de vue, la relation entre les paramètres d'entrées et de sortie d'un mécanisme peut s'exprimer sous la forme :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (4.2)$$

où  $Y$  est la réponse du système (valeur d'un jeu ou d'une caractéristique fonctionnelle) et le vecteur arguments  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  paramètre les caractéristiques géométriques (écarts de position, d'orientation, intrinsèques, ...) de chaque pièce ou de sous-assemblage(s) réalisant

le système [147].

La fonction  $f$  est la fonction réponse ou signature de l'assemblage. Cette relation peut exister sous toutes les formes qui permettent de calculer  $Y$  en fonction d'un vecteur  $\mathbf{X}$ . Cette fonction peut avoir une expression analytique explicite ou implicite, ou impliquer des calculs numériques complexes ou encore être issue d'expérimentations ou de simulations. Les variables d'entrée  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  sont des variables aléatoires continues et, en général, elles ne sont pas toutes indépendantes. Si  $T$  est un domaine de tolérance portant sur les paramètres d'entrée, chaque réalisation  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{X}$  appartient à  $T$ .

Il existe plusieurs méthodes et techniques pour estimer la distribution de probabilité de  $Y$  et la probabilité  $P(T)$  que les exigences géométriques soient respectées. Ces méthodes peuvent être classées en 4 catégories [148, 147] :

- Propagation linéaire (méthode des moindres carrés)
- Propagation non-linéaire (séries de TAYLOR étendues)
- Intégration numérique (technique de quadrature)
- Simulation de Monte Carlo.

Ces méthodes sont détaillées dans [147, 149, 150, 151, 152, 153, 154]. La propagation linéaire peut être employée si la réponse du système est une fonction analytique linéaire. Si la fonction  $f$  n'est pas linéaire, cette méthode conduit à d'importantes erreurs et il est préférable d'utiliser l'approximation en séries de TAYLOR étendues. Pour cette technique, il faut connaître une forme analytique de la fonction réponse  $f$ .

Si la réponse du système n'est pas connue sous forme analytique, la technique de quadrature et la simulation de Monte Carlo peuvent être employées. La technique de quadrature nécessite la définition d'une approximation de la fonction  $f$ . La simulation de Monte Carlo est sans doute la technique statistique la plus utilisée pour les problèmes de tolérancement. Cette simulation est un outil puissant pour l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques où la fonction réponse ne doit pas être forcément linéaire et pour lesquels les distributions des paramètres d'entrées ne sont pas nécessairement normaux. De plus, cette technique est applicable de façon très générale car elle n'est liée à aucune autre contrainte et la précision peut être aussi importante que souhaitée. En particulier, la simulation de Monte Carlo peut être utilisée dans toutes les situations convenants aux trois premières techniques et peut donner des estimations plus précises que les autres méthodes si la fonction analytique  $f$  n'est pas connue explicitement.

Dans notre travail, l'analyse des tolérances de l'engrenage fournit une image de la répartition des erreurs cinématiques. Il est alors possible de calculer la probabilité pour que l'erreur cinématique de pièces géométriquement conformes aux tolérances soit inférieure à un niveau donné

[155, 156].

L'analyse des tolérances réalisée dans ce travail est uniquement axée sur les écarts cinématiques d'engrènement et sur l'erreur cinématique, qui sont les éléments clés du fonctionnement de l'engrenage. Ce travail est d'une consistance intéressante et il ne nous est pas apparu nécessaire de l'élargir à d'autres paramètres fonctionnels (écart de saut de dent, jeu entre dents, ...). De plus, l'analyse des tolérances n'étant pas une opération courante pour les engrenages, nous nous sommes essentiellement attachés à montrer qu'une telle analyse est possible.

### 4.3.2 Simulation de Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo est basée sur la *théorie des grands nombres* [147, 149, 151, 152, 154]. Elle met en œuvre un processus itératif où une estimation est lancée un nombre important de fois. A chaque itération, les variables d'entrée étudiées sont générées de façon aléatoire et suivant une distribution de probabilité. L'utilisateur doit définir le ou les types de distributions suivies par les variables aléatoires (normal, lognormal, uniforme, ...) ainsi que les paramètres liés aux distributions (moyenne et écart type pour la loi normale, intervalle pour la loi uniforme, ...). La précision de cette méthode statistique croît proportionnellement à la racine carrée du nombre de simulations. En conséquence, la précision de l'estimation peut être aussi élevée que l'utilisateur le souhaite [147, 152]. Le résultat de la simulation de Monte Carlo est la probabilité  $P(T)$  du respect des exigences sur les paramètres de sortie ainsi que ses caractéristiques : moyenne arithmétique, médiane, écart type, ...

$$P(T) = \frac{R}{S} \quad (4.3)$$

où  $R$  est le nombre de simulations où les exigences sont respectées et  $S$  est le nombre total de simulations.

Puisque la fonction qui estime les écarts cinématiques en fonction de l'ensemble des variations géométriques n'est pas connue, la seule méthode opérante pour l'analyse des tolérances est une méthode statistique. Nous utilisons la simulation de Monte Carlo car c'est la plus connue et qu'elle répond à notre besoin. Il est cependant possible qu'il existe d'autres alternatives, plus performantes (un plan d'expérience pourrait fournir une surface réponse mais le nombre de paramètres et la non linéarité posent problème). La limitation de cette méthode réside dans le temps de calcul : pour que les statistiques soient représentatives, il faut une population importante et l'évaluation de chaque cas prend entre 5 et 12 secondes environ, suivant la plage d'étude en  $\phi_1$  et le raffinement des pas de calcul. Une analyse des tolérances dure généralement plusieurs heures.

### 4.3.3 Choix des variables aléatoires et influence

Pour l'analyse des tolérances, les variables aléatoires caractérisent une configuration géométrique des pièces et de l'assemblage. Elles sont les écarts implémentés :

$$\begin{aligned} A_1; B_1; C_1; A_2; B_2; C_2; \epsilon_1^{(2)} \text{ à } \epsilon_1^{(n_{maxi})}; \epsilon_2^{(2)} \text{ à } \epsilon_2^{(n_{maxi})} \\ A1; A2; A3; u_{46}; v_{46}; w_{46}; u_{35}; v_{35}; w_{35}; \Gamma_1; \Gamma_2; \varpi \end{aligned} \quad (4.4)$$

Physiquement, ces écarts sont liés au processus et procédés de mise en forme. Très souvent, la distribution statistique des défauts est modélisée par une loi normale [157] en raison des propriétés mathématiques intéressantes de cette dernière (la composition de lois normales est une loi normale). La distribution est alors décrite par sa moyenne et sa variance. Dans notre cas, il y a deux forts inconvénients à utiliser des lois normales pour la distribution des variables aléatoires :

- Le choix arbitraire des moyennes et des variances influence la répartition des erreurs cinématiques et des erreurs de saut de dent, ce qui ajoute un niveau de difficulté dans l'analyse.
- La plupart des valeurs des variables aléatoires sont à proximité de la moyenne. Il y a donc très peu de points aux extrémités des intervalles de tolérance. Or comme il s'agit d'analyser tous les points des domaines de tolérance, il est nécessaire de pousser l'analyse sur un nombre de points très important, où 95% n'apportent pas d'information nouvelle.

En conséquence, nous choisissons une loi de distribution uniforme pour l'ensemble des variables aléatoires. Ainsi, il est certain que tous les domaines de tolérances sont balayés pour un nombre important de points, sans agglutinement autour d'une valeur attractrice. Cette méthode conduit à une vision plutôt pessimiste de la réalité mais semble bien adaptée à l'analyse des tolérances. Cependant, afin de simuler le «process» et non l'analyse des tolérances, le choix des types de variables aléatoires serait effectué à partir des données expérimentales.

### 4.3.4 Analyse de la simulation de Monte Carlo

En choisissant des distributions uniformes pour les variables aléatoires, nous avons affranchi l'analyse de l'influence des paramètres des lois de distribution. Pour que le résultat de cette analyse soit le plus découplé possible de la méthode, il faut encore que le nombre de tirages  $\Pi$  soit important mais sans conduire à des temps de calcul exorbitants. En effet, la précision de cette analyse statistique croît proportionnellement à  $\sqrt{\Pi}$ . Si la valeur de  $\Pi$  est suffisamment grande, le résultat de la méthode, la probabilité  $P(T)$ , atteint une valeur stable, quasi indépendante de  $\Pi$ . D'autre part, si la différence entre deux résultats de simulation avec des tirages différents est supérieure à 5%, alors, le nombre de tirages  $\Pi$  n'est pas suffisant pour que la stabilité soit

atteinte.

La simulation de Monte Carlo utilise des tirages aléatoires et le résultat  $P(T)$  est également une variable aléatoire. La variance de l'estimateur de  $P(T)$  décroît proportionnellement à  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  [45]. Pour caractériser cette variable aléatoire, 20 simulations de Monte Carlo sont lancées pour chaque valeur de  $\Pi$  : 20, 30, 40, 50, 75, 100, 200, 300, 400, 500, 1000 et 2000 (figure 4.8). Cette «expérience» permet de montrer et de connaître l'étendue des variations de l'estimateurs  $P(T)$  et de calculer son écart type (figure 4.9).

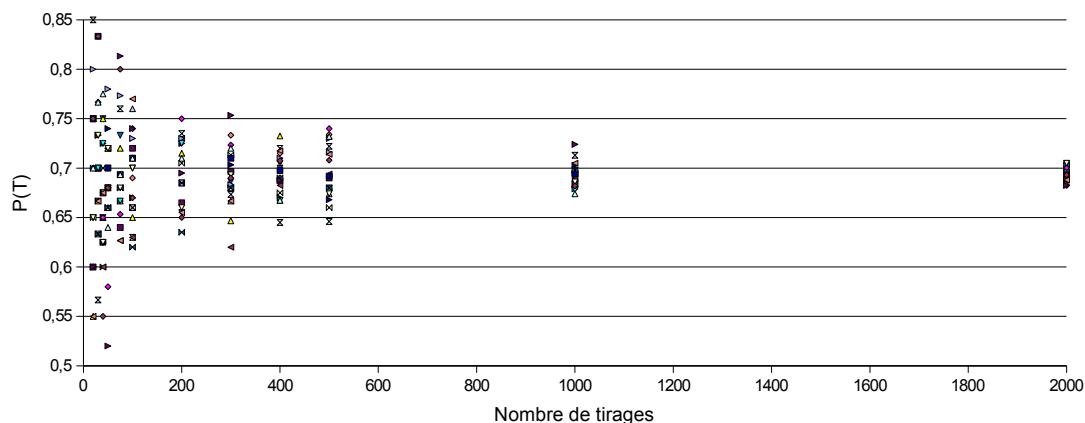


figure 4.8 – Résultat d’un ensemble de simulations de Monte Carlo

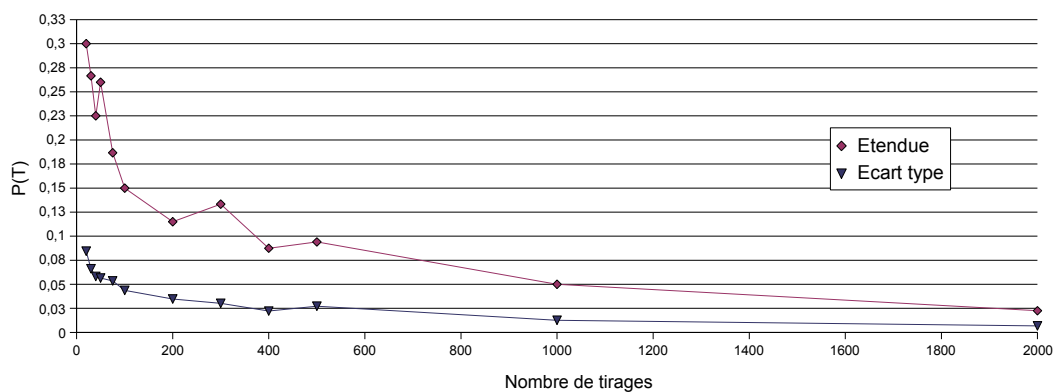


figure 4.9 – Evolution de l’étendue et de l’écart type de l’estimation de  $P(T)$  en fonction du nombre de tirages

A l’issue de ces tests, nous choisissons un nombre de tirages égal à 1000 pour nos simulations.

### 4.3.5 Quelques résultats

Cet outil d’analyse des tolérances est utilisé suivant deux objectifs :

- Evaluer l’erreur cinématique ou l’erreur de saut de dent pour un ensemble de géométries respectant les tolérances données ;
- Evaluer la probabilité du respect du ou des exigences fonctionnelles, pour un ensemble de tolérances données.

Les résultats présentés ci-dessous sont obtenus avec un engrenage dont les principaux paramètres sont définis tableau 4.2.

Nombre de dents du pignon	$z_1 = 11$
Nombre de dents de la roue	$z_2 = 15$
Angle nominal entre les axes de rotation	$\Sigma_0 = \frac{\pi}{2}$
Rayon de la sphère à la pointe	$R_p = 50mm$
Rayon de la sphère au talon	$R_g = 100mm$
Valeur maximale du bombé	$B = 1mm$
Hauteur utile des dents	$h=0,1613 \times \text{rayon de la sphère}$

tableau 4.2 – Valeurs des principaux paramètres de l’engrenage

Pour une bonne lisibilité, les figures 4.10, 4.11 et 4.12 représentent seulement une vingtaine de simulations avec des paramètres dont les valeurs sont définies aléatoirement dans leur domaine de variation.

**Exemple 1 :** Estimation des écarts cinématiques pour des valeurs aléatoires de l’écart de forme des surfaces actives (figure 4.10). Les domaines de variation des paramètres dont la valeur est a priori différente de zéro sont définis dans la table 4.3.

$A_1 \in [0; 0.03]$	$A_2 \in [0; 0.03]$
$B_1 \in [0; 2, 5]$	$B_2 \in [0; 2, 5]$
$C_1 \in [0; 0.25]$	$C_2 \in [0; 0.25]$

tableau 4.3 – Domaines de variation des variables aléatoires pour l’exemple 1

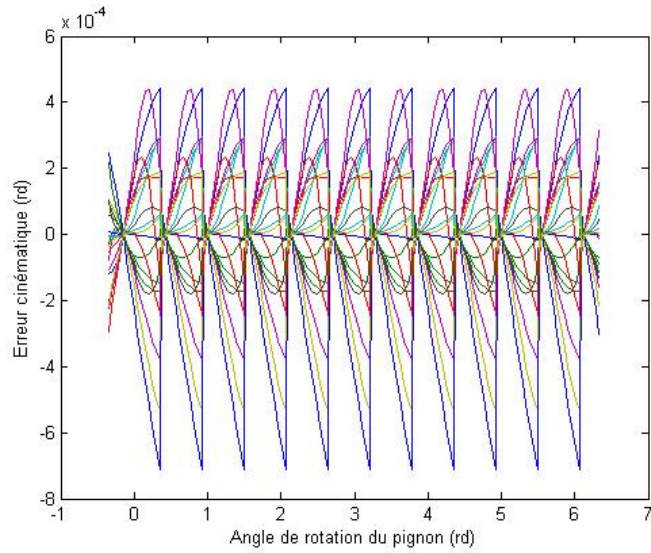


figure 4.10 – Simulations pour des écarts de forme des surfaces actives

**Exemple 2 :** Estimation des écarts cinématiques pour différents écarts de situation entre les dentures et surfaces de liaison du pignon et de la roue, l'erreur de forme n'étant pas nul (figure 4.11). Le tableau 4.4 définit les domaines de variation des variables aléatoires.

$\Gamma_1 \in [-0,02; 0,02]$	$\Gamma_2 \in [-0,02; -0,02]$
$u_{53} \in [-0,02; 0,02]$	$u_{64} \in [-0,02; 0,02]$
$v_{53} \in [-0,02; 0,02]$	$v_{64} \in [-0,02; 0,02]$
$w_{53} \in [-0,02; 0,02]$	$w_{64} \in [-0,02; 0,02]$

tableau 4.4 – Domaines de variation des variables aléatoires pour l'exemple 2

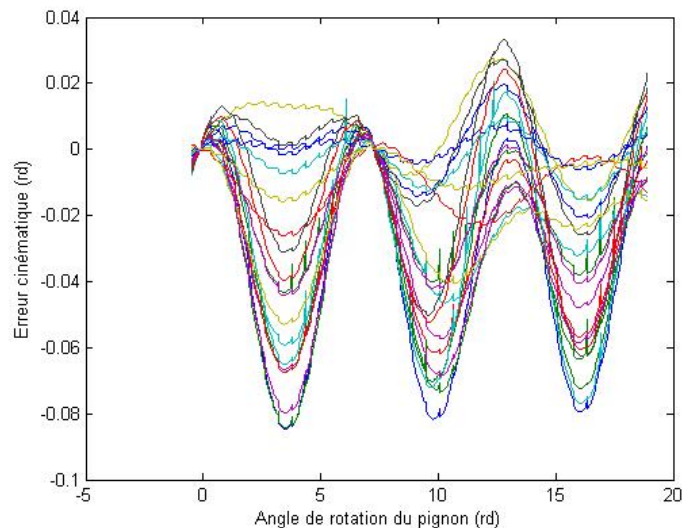


figure 4.11 – Simulation pour des écarts de situation entre les surfaces actives des roues et un défaut de forme

**Exemple 3 :** Estimation des écarts cinématiques avec toutes les variations géométriques (figure 4.12). Le tableau 4.5 définit les domaines de variation des écarts aléatoires.

erreur de pas angulaire cumulé	
$\epsilon_1^{(3)} \in [-0,005; 0,005]$	$\epsilon_1^{(7)} \in [-0,005; 0,005]$
$\epsilon_2^{(5)} \in [-0,005; 0,005]$	$\epsilon_2^{(9)} \in [-0,005; 0,005]$
écart de situation entre les pivots	
$A1 \in [-0,02; 0,02]$	$A2 \in [-0,02; 0,02]$
$A3 \in [-0,02; 0,02]$	$\varpi \in [-0,02; 0,02]$
écart entre les dentures et les pivots	
$\Gamma_1 \in [-0,02; 0,02]$	$\Gamma_2 \in [-0,02; 0,02]$
$u_{53} \in [-0,02; 0,02]$	$v_{53} \in [-0,02; 0,02]$
$w_{53} \in [-0,02; 0,02]$	$u_{64} \in [-0,02; 0,02]$
$v_{64} \in [-0,02; 0,02]$	$w_{64} \in [-0,02; 0,02]$
erreur de forme de la surface	
$A_1 \in [0; 0,03]$	$A_2 \in [0; 0,03]$
$B_1 \in [0; 2,5]$	$B_2 \in [0; 2,5]$
$C_1 \in [0; 0,25]$	$C_2 \in [0; 0,25]$

tableau 4.5 – Domaines de variation des variables aléatoires pour l'exemple 3

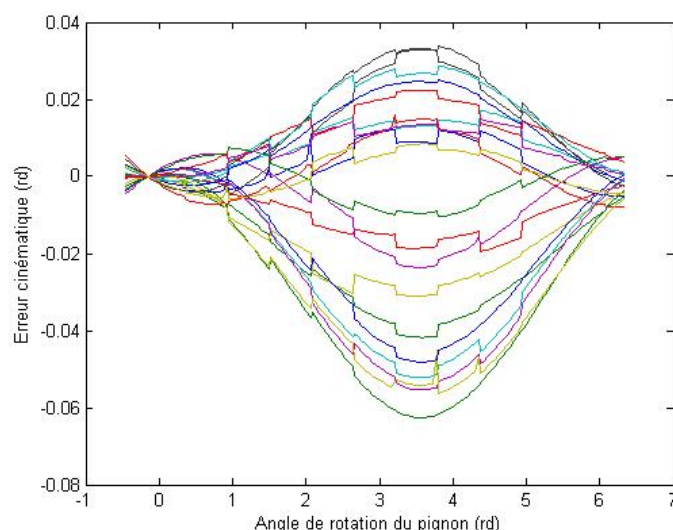


figure 4.12 – Simulations pour tous les écarts

**Exemple 4 :** Estimation de la distribution des erreurs cinématiques dans le cas où l'amplitude de l'écart de forme et l'écart de position entre les sommets des cônes des dentures sont des variables aléatoires (tableau 4.6 et figure 4.13).

Pour tracer la distribution des erreurs cinématiques, elles sont rangées dans des classes d'équivalences suivant leur valeur. Une classe d'équivalence est un intervalle de longueur  $10^{-4}rd$ . Il suffit ensuite de dénombrer les éléments de chaque classe. La figure 4.13 illustre cet exemple où la population totale est de 1010 erreurs cinématiques évaluées.

$A_1 \in [-0,02; 0,02]$	$A_2 \in [-0,02; 0,02]$
$\varpi \in [-0,02; 0,02]$	

tableau 4.6 – Domaines de variation des variables aléatoires pour l'exemple 4

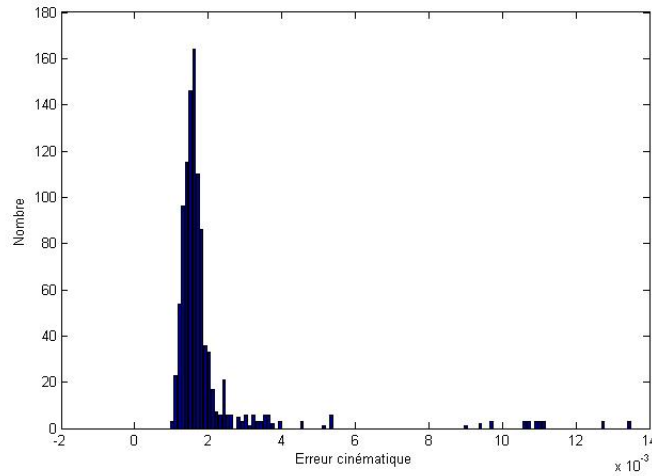


figure 4.13 – Distribution de l'erreur cinématique

## 4.4 Synthèse et optimisation des tolérances

Cette section présente comment l'outil d'analyse statistique des tolérances est à son tour encapsulé pour élaborer un outil de synthèse et d'optimisation des tolérances.

### 4.4.1 Synthèse du tolérancement

La synthèse du tolérancement (ou transfert) est une activité connexe à l'analyse des tolérances [117, 42]. La synthèse est le passage de la géométrie pré-dimensionnée et des conditions fonctionnelles du mécanisme, à la géométrie admissible de chacune des pièces telles que les conditions fonctionnelles soient respectées. Les méthodes de synthèse sont généralement itératives et utilisent l'analyse pour évaluer une configuration. La synthèse est généralement couplée à un algorithme d'optimisation.

### 4.4.2 Optimisation des tolérances

Le concepteur, dans la phase de tolérancement comme pour d'autres phases, est confronté au problème du choix des tolérances, sachant que de nombreuses combinaisons sont admissibles. Le comportement généralement adopté dans cette situation est de rechercher le meilleur, ie de faire une optimisation sur le choix des tolérances. Les critères d'optimisation peuvent être :

- le coût [43, 158]
- la robustesse du fonctionnement [159]

– la durée de vie

Les techniques d’optimisation sont nombreuses et dépendent assez souvent de la nature de la fonction à optimiser. Le problème d’optimisation se résume généralement à la forme suivante :

minimiser  $F(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X}$  appartenant au domaine ouvert  $\mathfrak{N}$

$F$  est la *fonction objectif*.

M. CHEDMAIL [160] présente une synthèse des outils d’optimisation pour la synthèse et l’optimisation de mécanismes. Pour les tolérances, le problème est différent mais l’utilisation de la plupart de ces outils demeure envisageable. Il existe deux grandes familles de méthodes d’optimisation : les *approches déterministes* et les *approches stochastiques*. Les premières utilisent une connaissance explicite de la forme locale de la fonction objectif  $F(\mathbf{X})$  dans le voisinage de  $\mathbf{X}$ , alors que les secondes s’en affranchissent en utilisant des tirages aléatoires sur  $\mathbf{X}$ .

Les méthodes déterministes (gradient conjugué, algorithme de Levenberg-Marquardt, ...) sont caractérisées par une progression itérative vers un optimum. La progression est orientée par le gradient de la fonction objectif ou par une approximation du gradient ou encore par les propriétés topologiques locales de  $F$ . Ces méthodes convergent vers un extremum qui peut être local, la solution obtenue n’est pas forcément la solution sur le domaine  $\mathfrak{N}$ . De plus, il est nécessaire de connaître analytiquement la fonction objectif et qu’elle soit dérivable par rapport à  $\mathbf{X}$ , ce qui n’est pas toujours le cas (paramètre à valeurs discrètes, ...). En revanche, leur convergence est généralement rapide en comparaison avec les méthodes stochastiques.

Les approches stochastiques sont également nombreuses et de plus en plus utilisées en conception de produits mécaniques ou en génie civil [160, 161, 162, 163]. Parmi elles, le *recuit simulé* et les *algorithmes génétiques* sont décrites dans [164, 165, 160, 166, 167, 168, 169]. Suivant les méthodes, les réalisations du vecteur  $\mathbf{X}$  sont calculées de différentes façons mais il y a toujours une part aléatoire dans sa définition et de plus mauvaises solutions peuvent être momentanément acceptées. La fonction  $F$  n’est pas forcément connue, seule une évaluation numérique de  $F(\mathbf{X})$  est nécessaire. On retrouve ici la réflexion de M. LINARES citée ci-dessus (paragraphe 4.1.4) : pour étudier un phénomène inconnu, il est intéressant d’introduire un «effet aléatoire». Cet effet aléatoire est plus ou moins dirigé pour atteindre, mais de façon non absolue, l’objectif fixé. Ces méthodes sont très gourmandes en temps de calcul et une alternative, puisque leur structure s’y prête particulièrement bien, est de les implémenter sur des ordinateurs à architecture parallèle [169].

### 4.4.3 Définition de la fonction objectif

La fonction objectif est construite de façon à ce que son minimum corresponde à l'optimisation du système. Cette fonction objectif peut tenir compte des coûts de fabrication, de la robustesse, de la durée de vie ou d'autres critères. Pour notre application, le seul critère retenu est celui des coûts de fabrication : nous définissons la fonction objectif par :

$$F(\mathbf{T}) = \frac{C(\mathbf{T})}{P(\mathbf{T})} \quad (4.5)$$

où  $C(\mathbf{T})$  est la fonction d'estimation des coûts de fabrication, en fonction des tolérances  $\mathbf{T}$  et  $P(\mathbf{T})$  est la probabilité pour que l'assemblage respecte les conditions fonctionnelles.

L'estimation de  $P(\mathbf{T})$  est obtenue par la simulation de Monte Carlo et fait l'objet du paragraphe 4.3. L'estimation générique des coûts de production est très complexe. Quelques travaux sont consacrés à l'optimisation de l'allocation des tolérances pour réduire les coûts tout en maintenant un niveau de qualité [2, 170]. De fait, la littérature propose des fonctions analytiques ou discrètes pour modéliser la relation coûts-tolérances pour chaque étape des gammes de fabrication [171] généralement de la forme :

$$C_i(T_i) = a_i + \frac{b_i}{T_i^{k_i}} \quad ; \quad C_i(T_i) = a_i + b_i \cdot e^{-k_i T_i}$$

Le coût du système est naturellement la somme des coûts de fabrication plus, éventuellement, des coûts incompressibles de transport, frais administratifs ou autres. Lorsque plusieurs processus alternatifs sont envisageables pour la réalisation d'une ou plusieurs phases des pièces de l'assemblage, la fonction coût est discrète. Cette approche est actuellement développée par Alain ETIENNE dans ses travaux de thèse.

Le modèle que nous utilisons est un modèle simple, analytique et défini par morceau pour chaque tolérance :

$$C_i(T_i) = \begin{cases} val1_i & si \ T_i < seuil_i \\ val2_i + \frac{val3_i}{T_i} & si \ T_i \geq seuil_i \end{cases} \quad (4.6)$$

Ce modèle (figure 4.14 et équation 4.6) traduit le fait que, en dessous d'une certaine valeur ( $seuil_i$ ), la réalisation nécessite l'utilisation de moyens non conventionnels et par conséquent beaucoup plus onéreux. Au dessus de cette valeur, le coût est décroissant avec l'augmentation de l'intervalle de tolérance et tend vers une asymptote  $val2_i$ .

Les valeurs de  $seuil_i$ ,  $val1_i$ ,  $val2_i$  et  $val3_i$  doivent être fournies par le service méthode-industrialisation. Ces données constituent un élément important de la conception-fabrication

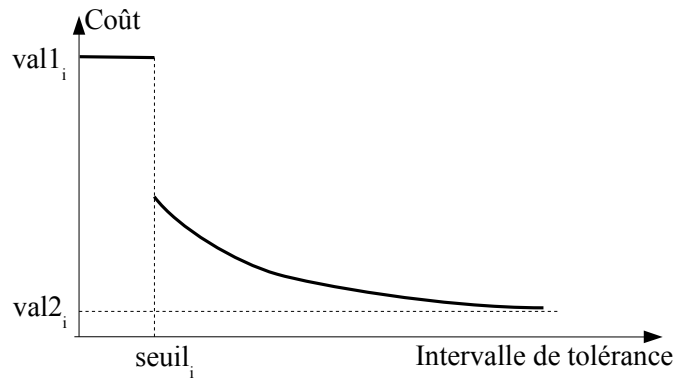


figure 4.14 – Fonction coût d’une tolérance

intégrée puisqu’elles permettent, en phase de conception, de tenir compte de la réalité économique de la phase de fabrication. Pour notre étude, ces valeurs sont reprises de Kenneth CHASE [171].

#### 4.4.4 Présentation et justification du choix de la méthode

Nous avons montré que l’analyse des tolérances ne peut se faire que par une méthode statistique puisque la fonction réponse de l’analyse de l’engrènement n’est pas connue analytiquement et qu’il n’a pas été retenu de reconstruire une surface réponse (nombre de paramètres trop important). En conséquence, l’optimisation est également statistique, nous avons retenu pour cela le principe des *algorithmes génétiques*.

#### Présentation des algorithmes génétiques

L’idée des algorithmes génétiques est une analogie avec le monde du vivant. Une famille de solutions est assimilée à une population d’individus, les composantes d’une solution correspondent aux chromosomes d’un individu et chaque itération correspond à une nouvelle génération de la population considérée. La performance (*fitness*) ou adaptation de chaque individu est mesurée par l’inverse de la fonction objectif. La nouvelle génération est obtenue à partir d’opérations de mutation et de croisement entre les individus, sélectionnés suivant leur performance ou de façon aléatoire, de la (ou éventuellement des) génération(s) précédente(s). L’occurrence de ces opérations est définie par des probabilités caractéristiques  $p_{mut}$  et  $p_{crois}$ . Finalement, après plusieurs itérations (générations), la famille de solutions (la population) converge vers une répartition de solutions (d’individus) possédant des composantes dominantes. La difficulté de mise en œuvre de ces algorithmes réside dans la définition des croisements et des mutations ainsi que de leur probabilité  $p_{mut}$  et  $p_{crois}$ . Ces caractéristiques peuvent évoluer en fonction de l’avancement de l’algorithme. En empruntant à la méthode du recuit simulé la notion de température, les carac-

téristiques des mutations et croisements peuvent être fonction de cette température.

### Application à l'optimisation des tolérances d'engrenage

Dans notre cas, un individu  $\mathbf{T}^{[i,g]}$  est l'ensemble des valeurs des tolérances portées sur les paramètres du modèle géométrique permettant de simuler l'engrènement. Un chromosome est la valeur d'une tolérance :

$$\mathbf{T}^{[i,g]} = \{T_1^{[i,g]}, T_2^{[i,g]}, \dots, T_N^{[i,g]}\}$$

où  $i$  est le rang de l'individu et  $g$  le numéro de la génération.  $T_j^{[i,g]}$  est la tolérance du paramètre  $x_j$

L'évaluation d'un individu nécessite l'utilisation de la simulation de Monte Carlo. Pour chaque tirage, il faut résoudre le système non linéaire (3.18) ou (3.19)  $(Nbu + Nbd) \cdot n_{maxi}$  fois. L'algorithme génétique évalue les performances de tous les individus de toutes les populations. Le nombre de calculs et, par conséquent, le temps de calcul deviennent très important. Dans l'objectif de réduire ce temps, la précision de la simulation de Monte Carlo est faible pour les premières populations lorsqu'elles sont dispersées sur le domaine de recherche, et croît jusqu'à une valeur limite ensuite, lorsque des individus se resserrent autour du ou des minima. Pour cela, le nombre de tirage  $\Pi$  pour la méthode de Monte Carlo est fonction du numéro  $g_{AG}$  de la population en cours. Cette relation est définie par l'équation 4.7.

$$\Pi(g) = \text{Arrondi} \left\{ \Pi_0 + (\Pi_t - \Pi_0) \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[ \tilde{h} \cdot \left( \frac{g}{g_{AGmaxi}} - \nu \right) \right] \right\} \right\} \quad (4.7)$$

où  $g_{AGmaxi}$  est le nombre total de population générée par l'algorithme,  $\Pi_0$  et  $\Pi_t$  sont respectivement les nombres de tirages initiaux et finaux de la simulation de Monte Carlo, déterminés par les précisions attendues au début et à la fin de l'algorithme génétique.  $\tilde{h}$  et  $\nu$  sont des paramètres de contrôle :  $\tilde{h} > 1$  paramètre la pente de la transition de  $\Pi_0$  à  $\Pi_t$  et  $\nu \in [0; 1]$  paramètre la position du changement de  $\Pi_0$  à  $\Pi_t$ . (voir figure 4.15)

### Opérateur de croisement de GUO

M. GUO a proposé un opérateur de croisement linéaire et multi-parents (GTX-m- $\epsilon$ ) [172]. Cet opérateur est utilisé pour les optimisations de fonctions continues non linéaires et avec des contraintes de poids différents. L'opérateur GTX-m- $\epsilon$  génère des individus enfants par combinaison linéaire de  $m$  individus parents. Cet algorithme est le suivant :

1.  $m$  individus parent  $T^{[i,g]}$ ,  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  sont sélectionnés dans la population  $g$

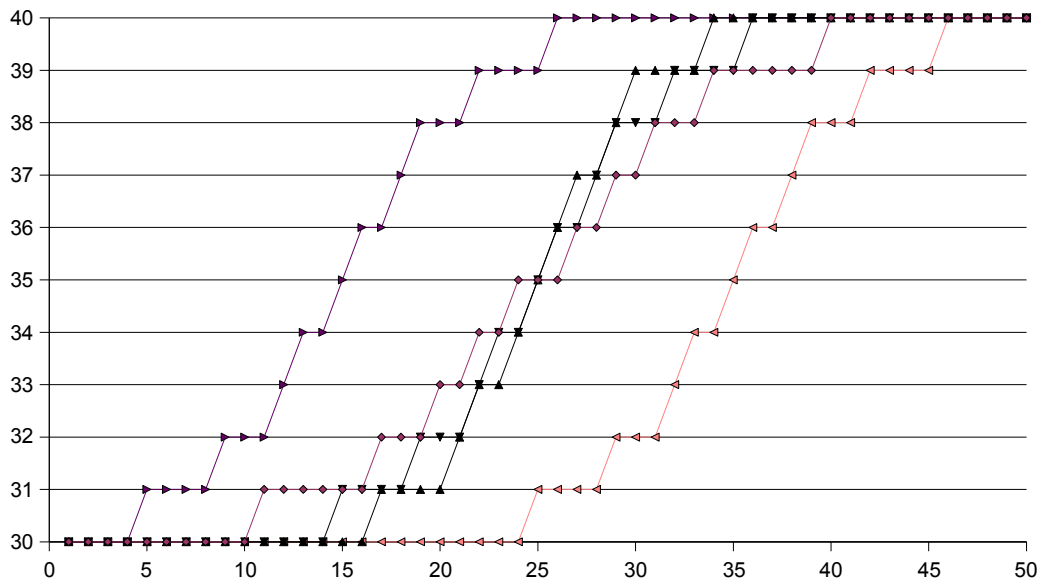


figure 4.15 – Evolution du nombre de tirages en fonction du rang de la population

2.  $m$  nombres réels  $\omega_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  sont générés aléatoirement et tels que

$$\sum_{i=1}^m \omega_i = 1 \quad \text{et} \quad -\epsilon < \omega_i < 1 + \epsilon \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \quad (4.8)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre positif

3. Le nouvel individu enfant est généré par :

$$T^{[*],g+1} = \sum_{i=1}^m \omega_i T^{[i],g} \quad (4.9)$$

Il va remplacer l'individu de la population  $g$  le plus médiocre.

### Pseudo code

Le pseudo code suivant représente l'implémentation détaillée de l'algorithme génétique utilisé pour l'optimisation des tolérances :

#### Début de l'algorithme génétique

$g := 0$  (compteur de génération);

Création de la population initiale  $\Pi_0$  : générer de façon aléatoire  $p$  individus;

Evaluer la performance de chaque individu de la population  $\Pi_0$ ;

While  $g \leq g_{AGmaxi}$  do

Générer individus enfants par l'opérateur croisement de GUO

Evaluation de la performance des individus enfants

Générer la nouvelle population ;  $g=g+1$  ;

End While

Le meilleur individu de la dernière génération est le résultat de l'optimisation.

**Fin de l'algorithme génétique**

#### 4.4.5 Influence des paramètres de l'algorithme

Les paramètres de l'algorithme d'optimisation sont rappelées dans le tableau 4.7.

Analyse de l'engrènement :	nombre de point de calcul pour une dent :	$Nbd + Nbu$
	nombre de dents engrénantes :	$n_{maxi}$
Analyse des tolérances :	nombre de tirages :	$\Pi(g) \in [\Pi_0; \Pi_t]$
Optimisation des tolérances :	nombre de générations :	$g_{AGmaxi}$
	nombre d'individus :	$p$

tableau 4.7 – Ensemble des paramètres de l'algorithme d'optimisation

Le temps de calcul pour l'optimisation est proportionnel au produit de tous les paramètres du tableau 4.7. Pour que ce temps de calcul reste dans des limites acceptables, les optimisations que nous avons menées ne porte que sur une ou deux tolérances.

Par exemple, la figure 4.16 représente l'évolution des valeurs de 10 individus ayant le même chromosome, sur 100 générations. La figure 4.17 montre l'évolution de la moyenne de la fonction objectif sur la population et la valeur de la fonction objectif de l'individu le plus adapté.

Nous constatons la convergence de l'algorithme vers une valeur qui n'est pas une borne de l'intervalle de tolérance. Cela signifie qu'un optimum semble se dégager pour la fonction objectif, sur son domaine de définition. La valeur de la tolérance qui minimise la fonction objectif se situe entre 0,165 et 0,185. Cet intervalle est d'autant plus faible que le nombre de populations est important.

## 4.5 Conclusion

A partir de la méthode de l'analyse de l'engrènement développée au chapitre 3, nous montrons comment l'utiliser pour faire de l'analyse statistique des tolérances en suivant la simulation de Monte Carlo. Or, en tolérancement, la synthèse des tolérances est complémentaire de l'analyse. Dans notre situation, la synthèse est difficile à réaliser en raison du comportement du mécanisme qui n'est pas connu sous forme analytique. Elle s'appuie sur l'application itérative de l'analyse.

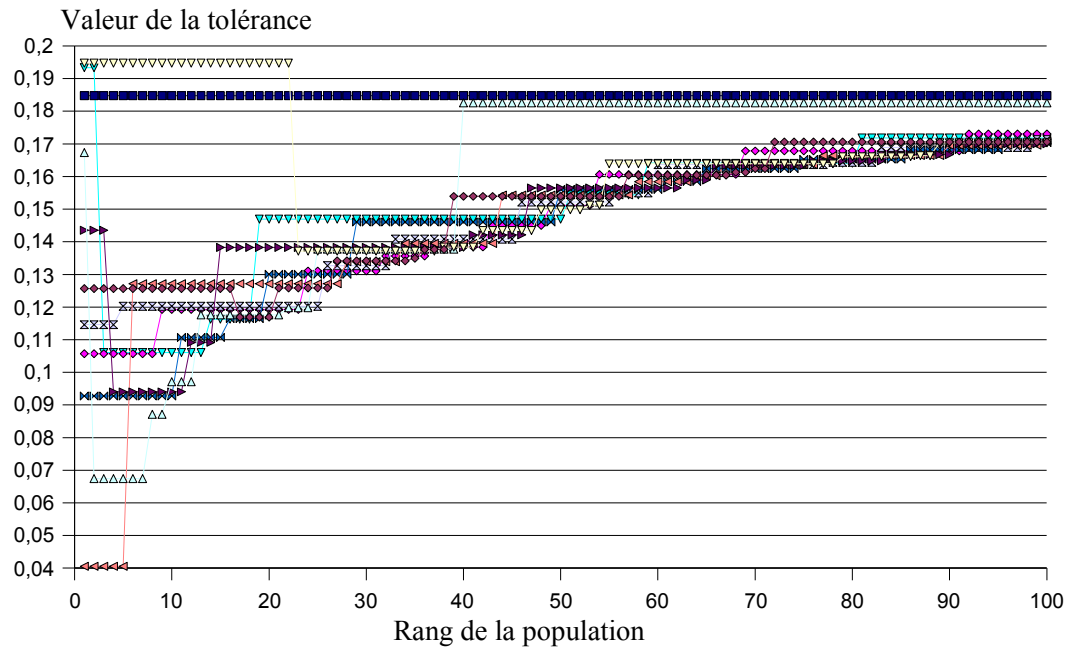


figure 4.16 – Evolution de la valeur de 10 individus sur 100 générations

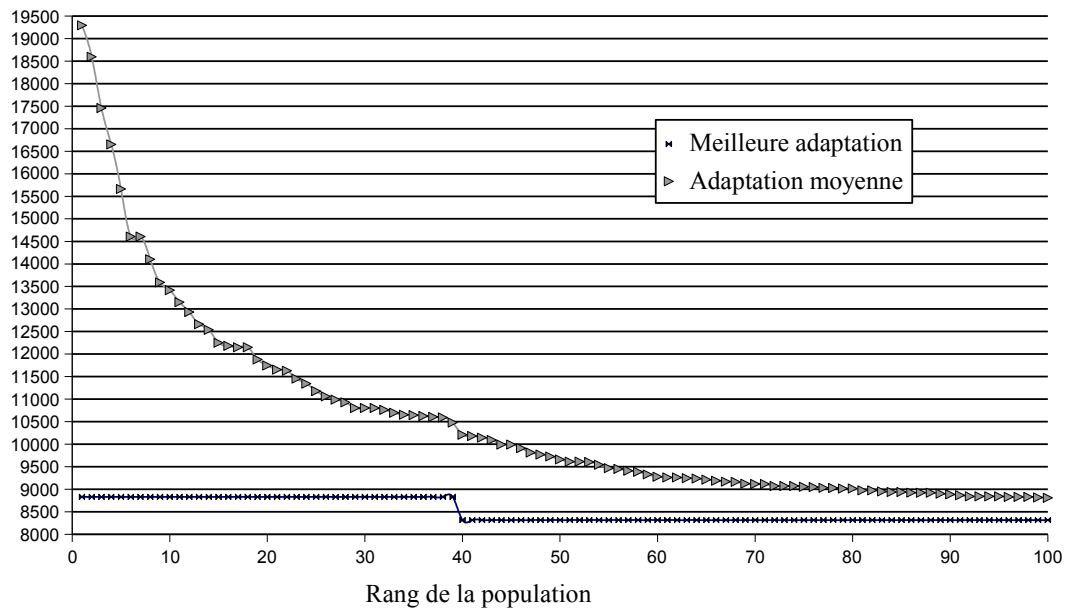


figure 4.17 – Evolution de la fonction objectif

La synthèse est le résultat d'un algorithme génétique qui optimise le rapport coût des tolérances sur probabilité que les conditions fonctionnelles soient respectées.

L'aspect générique des méthodes employées est séduisant mais se heurte à des temps de calcul

très important dès que l'évaluation de la fonction objectif nécessite plusieurs secondes de calcul.

Par ailleurs, les engrenages sont soumis à des actions mécaniques importantes et généralement proches de leur limite de résistance en fatigue. Ces pièces et leur environnement se déforment durant le fonctionnement et le tolérancement ne saurait l'ignorer sciemment. C'est ce que nous tentons d'initier dans le chapitre suivant.

## Chapitre 5

# Analyse de l'engrènement sous charge intégrant des variations géométriques

Pour l'analyse de l'engrènement (chapitre 3), l'analyse et la synthèse des tolérances (chapitre 4), nous avons supposé que les roues dentées étaient indéformables. En faisant cette hypothèse, nous avons négligé l'effet des déformations des dentures sur les écarts cinématiques. Cette hypothèse est lourde de conséquences sur les résultats. Pour obtenir un modèle plus proche de la réalité, il est nécessaire de tenir compte du comportement mécanique des dentures. Le modèle adopté est celui d'un solide purement élastique, homogène et isotrope (pas de prise en compte du durcissement superficiel notamment).

Le but de ce chapitre est d'introduire une méthode permettant d'estimer les écarts cinématiques d'engrènement sous charge (*Load Tooth Contact Analysis* : LTCA), en intégrant des variations géométriques. Le principe de LTCA est d'ajouter aux écarts cinématiques ( $EC_i$ ) obtenus pour un engrènement à vide (sans déformation : TCA), les écarts dus aux déformations des dentures ( $EC_i^d$ ). L'outil d'analyse développé doit nous permettre de faire l'analyse des tolérances sous charge. Le principe est identique à celui développé au chapitre 4, la difficulté de mise en œuvre réside dans la durée de l'estimation des écarts cinématiques sous charge.

Dans un premier temps, nous recensons les différents modèles permettant l'évaluation des déformations élastostatiques des engrenages et des écarts statiques résultants. Après avoir analysé leurs avantages et leurs inconvénients respectifs, nous justifions et détaillons la méthode retenue pour simuler un engrènement sous charge. Elle est basée sur un modèle de contact sans frottement et sur l'utilisation de coefficients d'influence. Les coefficients d'influence de flexion sont évalués à partir de la méthode des éléments finis. Les coefficients d'influence de contact sont issus de la théorie de BOUSSINESQ. Le problème de contact élastique entre les dentures est ensuite résolu lorsqu'il y a 1 ou 2 points de contact. Enfin, ces modèles sont intégrés pour évaluer l'écart

cinématique sous charge.

## 5.1 Bibliographie

L'estimation des écarts cinématiques de transmission sous charge nécessite l'évaluation du déplacement angulaire  $EC_i^d$  de la roue résultant des déformations. De façon élémentaire, ce déplacement angulaire est le rapport du couple  $C$  transmis sur la raideur  $K_i$  d'engrènement :

$$EC_i^d = \frac{C}{K_i} \quad (5.1)$$

où l'indice  $i$  fait référence à la position du pignon. L'évaluation de la raideur équivalente  $K_i$  est complexe car, durant l'engrènement, le nombre et les positions des points de contact évoluent. Ainsi, pour un couple transmis donné, les déformations des dents varient. Autrement dit, la raideur équivalente de l'engrènement dépend de la position du pignon, des écarts géométriques et, en raison de la non linéarité du phénomène de contact, du couple transmis. La raideur équivalente est une combinaison des raideurs de chaque dent en contact. Cette combinaison dépend des positions relatives, de l'action mécanique transmise et des raideurs de chaque couple de dents en contact. Par ailleurs, il est nécessaire d'évaluer les niveaux de contraintes dans les dents pour pouvoir vérifier la validité du modèle de comportement élastique et, éventuellement vérifier une durée de vie.

Aussi, cette étude bibliographique porte sur le thème de l'évaluation des raideurs et des contraintes dans les dents et sur celui de la détermination de la raideur d'engrènement équivalente.

### 5.1.1 Evaluation des déformations et des contraintes dans une dent

L'action mécanique entre les dents provoque des déformations de celles-ci. Ces déformations peuvent être décomposées de la manière suivante :

1. Déformation de la zone de contact et de son voisinage due à la pression entre les dents ;
2. Déformation de la zone de contact et de son voisinage due à l'action tangentielle du contact entre les dents ;
3. Flexion et cisaillement de la dent
4. Rotation du pied de la dent
5. Déformation du corps de la roue

Les méthodes développées pour estimer tout ou partie de ces déformations s'appuient en général sur deux types de modèles : des modèles locaux qui traitent le contact et des modèles linéaires

globaux qui traitent le problème mécanique «loin» de la zone de contact. Ces modèles peuvent être intégrés ou distincts.

### Déformation locale de contact

Le modèle de contact le plus connu est la théorie de HERTZ [173, 174] complétée par les travaux de BELAJEFF [175] sur l'état de contrainte. Ses résultats ont été synthétisés et rendus plus accessibles par FOULON et REY [176, 177, 178, 179]. Ce modèle est utilisé par GOSSELIN [180] et RIGAUD [34] pour évaluer les déformations locales. Cependant, il possède des limitations importantes :

1. Il ne tient pas compte du frottement.
2. Il ne peut pas simuler le contact sur une arête des dents.
3. Les solides sont supposés être semi-infinis, or pour les engrenages, la zone de contact est parfois tronquée par le bord de la surface.
4. Il ne modélise qu'un seul contact.

Pour s'affranchir des deux derniers points, SAINOT [38], fut l'un des premiers à utiliser pour les engrenages les travaux de BOUSSINESQ et CERRUTI [181]. Les zones de contact potentiels sont discrétisées et sur chaque élément de surface, la pression de contact est supposée uniforme. La répartition de pression doit être telle que l'effort résultant soit égal à l'effort presseur et le rapprochement des solides soit la somme des produits des coefficients d'influence par les pressions sur les éléments de surface. Cette méthode a été reprise par DE VAUJANY [81], JACQUIN [96], GUILBAULT [182], SIMON [183], BARBAY [184], ...

L'influence du frottement et de l'adhérence dans les zones de contact est quasiment toujours négligée. Dans ses travaux de thèse, ICARD [185] tente de tenir compte du glissement dans la zone de contact. Pour cela, il utilise les travaux de KALKER [186] sur les contacts secs roulant et glissant entre solides élastiques. La résolution du système d'équations pour des contacts multiples semble poser problème. KALKER a une approche variationnelle du problème de contact et utilise le principe de minimisation de l'énergie complémentaire pour sa résolution.

La méthode des éléments finis est également utilisée, malgré la difficulté à gérer la discontinuité introduite par le contact. BRAUER [187] maille un secteur dentée du pignon et de la roue et raffine le maillage au niveau des contacts. Cela signifie qu'il faut réaliser un nouveau maillage pour chaque configuration de contact. De plus, les conditions qui sont imposées au niveau du contact ne sont pas explicitées. LITVIN et al. réalisent des simulations d'engrènement sous charge à partir de modèles utilisant la méthode des éléments finis, sans raffinement particulier du maillage au

niveau des zones de contacts. Ils ont tout d'abord [188] utilisé une méthode itérative qui détermine le chargement semi elliptique de chaque zone de contact et la rotation induite par les rapprochements. Plus récemment, ils ont réalisé un engrènement direct entre le pignon et la roue [70], en utilisant le modèle de surfaces *Maître* et *Esclave* proposé par le logiciel ABAQUS. Le manque de raffinement au voisinage des zones de contact, notamment en sous-couche, n'est pas sans poser question. ULAGA [189, 190] propose une nouvelle technique pour gérer le contact dans un modèle éléments finis en utilisant des courbes «Overhauser» pour améliorer la précision de la détermination de la zone de contact. D'autres méthodes sont encore citées par RIGAUD [34].

## Déformation globale d'une dent

La déformation globale d'une dent résultant de l'effet de la flexion, du cisaillement, de la rotation de la base de la dent et de la déformation du corps, est, d'une façon approximative, appelé *flexion* de la dent. Les conséquences de ce phénomène sont connues depuis plusieurs décennies : M. WALKER [191] signale en 1938 que les flexions «affectent l'uniformité de la vitesse angulaire de la transmission et la vie de l'engrenage». L'évaluation de la déformation se fait alors par des méthodes expérimentales. Depuis, de nombreux modèles et méthodes ont été développés pour estimer les déformations et les contraintes dans les dents chargées. Nous nous contentons ici d'énumérer celles qui sont actuellement employées pour LTCA.

La *méthode des éléments finis* est une méthode générique et elle est naturellement utilisée pour déterminer les champs de déformations et de contraintes dans les dents chargées. FUENTES, LITVIN, ZHANG [188, 192] aux USA, FANG, CHANG, CHEN [193, 57] en Chine, GOSSELIN, CLOUTIER [180] au Canada, BRAUER [187, 194] en Suède, BÖRNER, HENLICH, LINKE [195, 196, 197] en Allemagne et BARDAY, HILTCHE, GUINGAND, DE VAUJANY, SAINOT, VELEX [184] en France modélisent un secteur du pignon et de la roue et simulent l'application de charges ponctuelles pour estimer des raideurs. FUENTES, LITVIN (USA) et ARGYRIS (Allemagne) simulent depuis quelques années, directement l'engrènement entre les deux secteurs modélisés [8, 198, 69, 70, 72, 63, 65, 66].

LITVIN et ses collaborateurs génèrent le fichier de données (maillages, conditions aux limites, ...) directement à partir du programme qui calcule les positions *exactes* des points à la surface des dentures. L'utilisation d'un outil de CAO est évitée pour limiter les erreurs liées à la chaîne numérique (manipulation des points, approximation des surfaces par des splines, discrétisations de ces surfaces, exportations du maillages, ...). Tout au contraire, les français HILTCHE, GUINGAND, DE VAUJANY construisent la géométrie sous CATIA à partir de sous-programmes et utilisent le module *éléments finis* de ce logiciel pour estimer les raideurs. Quelle que soit sa

mise en œuvre, la méthode des éléments finis réclame des espaces mémoires assez importants et les temps de calculs sont conséquents. L'utilisation du module *éléments finis* de CATIA permet de réduire ces inconvénients car il semble être optimisé pour donner des résultats cohérents en un temps réduit. En contre partie, la précision géométrique et l'exactitude des résultats sont vraisemblablement inférieures à celles obtenues par les autres méthodes EF. Quand à la simulation directe effectuée par FUENTES, LITVIN et ARGYRIS, nous pouvons nous interroger sur la précision de ce modèle au niveau du contact. La plupart des chercheurs qui se sont penchés sur ce problème [187, 189, 190, 177] ont utilisé un maillage raffiné au voisinage de la zone de contact. Dans l'étude de contact que nous avons menée (paragraphe C), nous montrons la sensibilité de la définition de la zone de contact, et par conséquent de la répartition des pressions, au raffinement du maillage. De plus, en sous couche, là où la contrainte de cisaillement est la plus élevée, les gradients de contraintes sont très forts et nécessitent donc une densité de maillage importante. Cette contrainte de cisaillement est la cause de l'écaillage qui est l'un des modes de ruine des engrenages.

Dans l'optique de réduire des coûts induits par l'utilisation d'une méthode des éléments finis (temps de calcul et espace mémoire), d'autres méthodes numériques plus rapides sont utilisées dans le cas des engrenages [199]. Pour les engrenages cylindriques, GUILBAULT et al. [182] combinent la *méthode des bandes finies* (figure 5.1) pour déterminer les déplacements dus à la flexion d'une dent chargée et la *méthode des différences finies* (figure 5.2) pour déterminer les déplacements et les contraintes en pied de dent. La méthode des bandes finies utilise la théorie des plaques de MINDLIN. Elle est applicable à l'analyse de dents d'engrenages cylindriques droits (figure 5.1 (a)) et hélicoïdaux, coniques droits (figure 5.1 (b)) ou spiro-coniques (figure 5.1 (c)) à hauteur constante ou pas.

OLAKOREDE, KIM, DE VAUJANY et GUIGNAND [200, 201, 81, 202] ont adapté la *méthode des prismes finis* développée par CHEUNG [203]. Cette méthode est une forme spéciale de la méthode des éléments finis, s'appliquant à des problèmes où la géométrie est invariante selon une direction (direction z, figure 5.3) qui peut être hélicoïdale. La forme générale de la fonction de déplacement est définie par le produit de fonctions polynomiales  $U_m(x, y)$ , exprimant le déplacement dans une section, et de séries  $F_m(z)$ , satisfaisant aux conditions aux limites dans la direction z.

GOSSSELIN [199] a comparé la méthode des bandes finies et celles des prismes finis. Pour les deux exemples simulés, il montre une très bonne concordance des résultats. Les chercheurs allemands de l'Université Technologique de Dresde ont développé plusieurs méthodes pour évaluer l'engrènement sous charge. Ils utilisent la «différenciation automatique» dans leur code de calcul

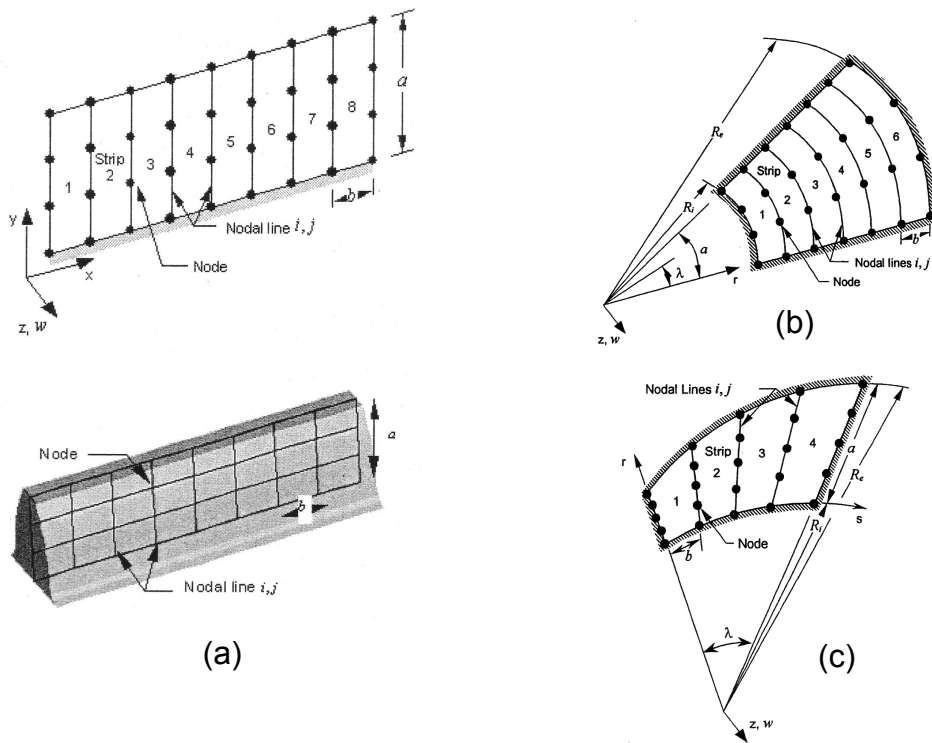


figure 5.1 – Modèle des bandes fines [182, 199]

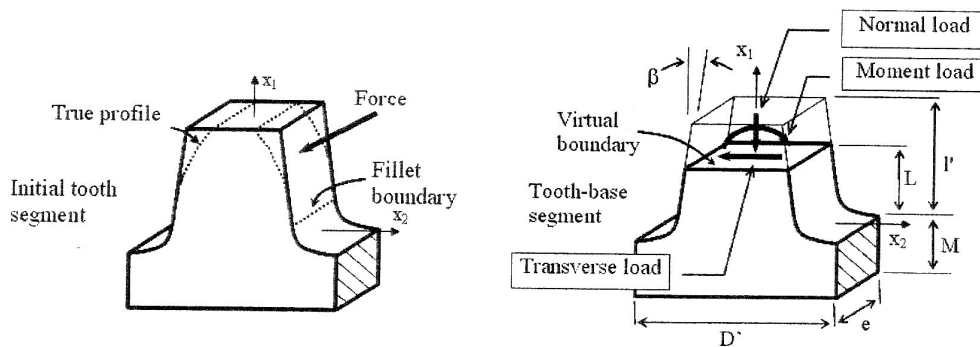


figure 5.2 – Méthode des différences finies [182]

BECAL [40, 196] et une méthode basée sur un modèle de fines tranches dont les rigidités sont couplées dans le code LVR [195].

Afin d'accélérer le calcul de la déformation, il est intéressant d'en rechercher une expression analytique. SAINOT et VELEX [39] utilisent la théorie de MUSKHELISHVILI (solution bidimensionnelle pour un anneau circulaire basée sur une représentation en séries de puissances complexes pour les déplacements, les contraintes et le chargement) pour tenir compte de la déformation de la jante de la denture. De même, WINK et al. [204] utilise le modèle de UMEZAWA, modifié par

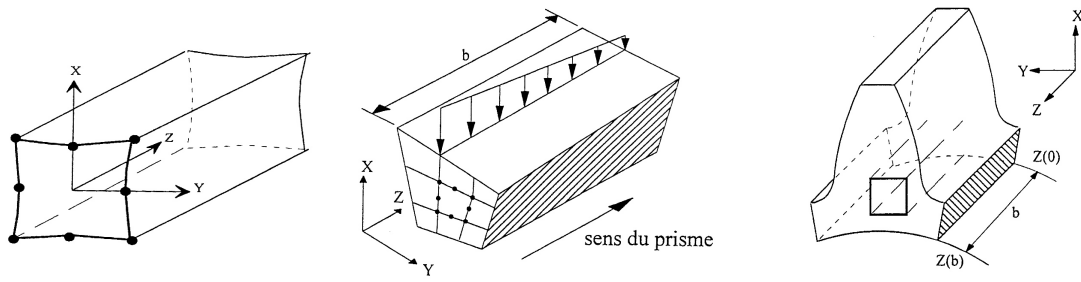


figure 5.3 – Modèle de prisme droit [81]

PARK et LEE. Ces modèles étant 2D, ils ne peuvent s'appliquer qu'à une fraction très réduite des engrenages. Pour étendre l'utilisation des relations analytiques de déformation établies en 2D, ELKHOLY et al. [205] discrétisent un engrenage conique à denture droite en un certain nombre d'engrenages cylindriques selon l'approximation de TREGOLD de fine épaisseur (figure 5.4). L'équation de compatibilité des déplacements et de l'équilibre des roues permettent d'évaluer la déformation et la charge sur chaque «tranche». Les limitations de cette méthode résident dans l'indépendance du comportement de chaque engrenage cylindrique équivalent, dans les approximations géométriques (TREGOLD) et dans l'expression analytique de la déformation qui est définie pour une forme de raccord en pied de dent, en engrenage cylindrique. Nous avons utilisé

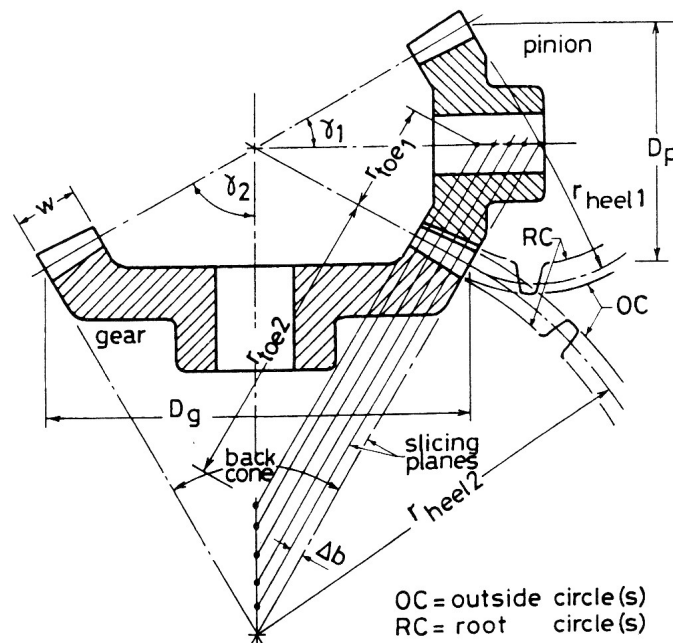


figure 5.4 – Découpage de l'engrenage par ELKHOLY [205]

ce modèle pour avoir une estimation à moindre coût de la déformation [206].

MACLENNAN [207] éduque un réseau de neurones à partir d'un nombre important de simulations réalisées avec la méthode des éléments finis (2D). Une fois la phase d'apprentissage terminée, l'estimation de la déformée par le réseau de neurone est très rapide. Cette technique est intéressante si de nombreuses simulations LTCA doivent être réalisées pour une géométrie unique mais se prête mal à une analyse de la géométrie.

### 5.1.2 Evaluation de l'écart statique d'engrènement sous charge - raideur d'engrènement équivalente

Connaissant les raideurs de chaque dent et pouvant évaluer le rapprochement des domaines solides au contact, la détermination de l'écart statique d'engrènement sous charge ou de la raideur d'engrènement équivalente, nécessite l'évaluation des actions mécaniques à chaque contact. Ce problème est hyperstatique dès que le contact n'est plus unique et ponctuel.

Il existe deux approches pour traiter ce problème :

- la simulation directe par la méthode des éléments finis incluant des éléments de contact. C'est l'approche choisie par FUENTES, LITVIN et ARGYRIS, elle a déjà été commentée ci-dessus,
- les zones de contact potentielles sont discrétisées et la résolution passe par la définition de *coefficients d'influence*. C'est le type de méthode le plus répandu.

Les méthodes à *coefficients d'influence* reposent toutes sur le même schéma :

1. L'objectif est de déterminer simultanément le rapprochement des dentures et la répartition de la charge sur l'ensemble des zones de contact potentielles. Pour cela, la solution doit respecter :
  - la ou les équations d'équilibre,
  - la ou les équations de compatibilité des déplacements et de non-pénétration.
2. Les zones de contact potentiel sont discrétisées dans le plan tangent, soit de façon linéaire si la zone de contact est très allongée, soit de façon bidimensionnelle [96], pour un raffinement plus important.
3. Les points aux centres des éléments de surfaces discrétisés sont numérotés (exposant ( $k$ )) de 1 à  $N_c$  et les équations de compatibilité des déplacements sont écrites en chacun de ces points :

– Dans la zone de contact ( $\Gamma$ ) :

$$\begin{cases} W_1^{(k)} + W_2^{(k)} + \epsilon^{(k)} - \Lambda = 0 \\ p_k \geq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

– Hors de la zone de contact ( $\Gamma$ ) :

$$\begin{cases} W_1^{(k)} + W_2^{(k)} + \epsilon^{(k)} - \Lambda \geq 0 \\ p_k = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

où  $W_1^{(k)}$  et  $W_2^{(k)}$  sont les déplacements suivants la normale avant déformation des corps 1 et 2 au point  $k$ ,  $\epsilon^{(k)}$  est l'écart initial (contact sans déformation) au point  $k$ ,  $\Lambda$  est le rapprochement des corps 1 et 2, et  $p_k$  est la pression au point  $k$ . [96]

4. Sur chaque élément de surface  $S_k$ , les contraintes de contact sont supposées uniformes. L'équation d'équilibre est généralement une équation projetée :

– Equation de la résultante statique projetée sur une normale au contact :[96]

$$\sum_{k=1}^{Nc} p_k S_k = F \quad (5.4)$$

où  $F$  est le module de la projection de la résultante de l'action mécanique entre les dentures, sur la normale au plan tangent.

– Equation du moment statique projetée sur l'axe de rotation du pignon moteur :

$$\sum_{k=1}^{Nc} p_k S_k [\mathbf{r}_k, \mathbf{n}, \mathbf{t}] = C_m \quad (5.5)$$

où  $C_m$  est le module du moment transmis par le pignon, projeté sur l'axe  $\mathbf{t}$  de rotation.  $\mathbf{r}_k$  et  $\mathbf{n}$  sont, respectivement, le vecteur position du point  $k$  (origine appartenant à l'axe de rotation) et le vecteur unitaire normal, sortant.

5. Les principes de la mécanique permettent ainsi d'écrire  $Nc + 1$  équations ( $Nc$  équations de compatibilité et 1 équation d'équilibre). La résolution du problème nécessite la détermination de  $3Nc + 1$  inconnues ( $p_k, W_1^{(k)}$  et  $W_2^{(k)} \forall k \in \{1, 2, \dots, Nc\}$  et  $\Lambda$ ). Comme annoncé, le problème est hyperstatique et les relations supplémentaires sont issues du comportement du matériau et du contact. D'une façon générale, on a :

$$W_1^{(k)} + W_2^{(k)} = \sum_{j=1}^{Nc} C_{kj} p_j \quad (5.6)$$

Cette équation est discutée ci-dessous, au paragraphe 5.2.2.

6. La dernière étape consiste en la résolution du système d'équations. La méthode du point fixe est utilisée avec succès par JACQUIN et ICARD [96, 185].

La figure 5.5 situe les modèles et les outils utilisés dans ce chapitre (en noir) par rapport à l'ensemble des modèles et des outils utilisables.

## 5.2 Analyse de l'engrènement sous charge

Les différentes pièces qui constituent un engrènement et son environnement ayant, dans une première approche, un comportement élastique, leur géométrie varie avec les charges qui leur sont appliquées. Pour cette raison, le comportement sous charge d'un engrènement diffère de celui défini nominalement avec des solides indéformables (chapitres 2, 3, 4). Les déformations résultant du chargement engendrent notamment une augmentation du rapport de conduite [208] et une modification des écarts cinématiques de transmission [209]. Nous présentons dans ce paragraphe la méthode que nous employons pour évaluer les écarts cinématiques de transmission sous charge et qui permettrait d'estimer le rapport de conduite dans cette configuration.

### 5.2.1 Analyse des méthodes de résolution des problèmes mécaniques

La simulation de l'engrènement sans charge (TCA chapitre 3) permet de localiser le ou les points de contact entre les dentures, elle est la première étape de la simulation de l'engrènement sous charge. Pour chaque position du pignon, la seconde étape consiste à évaluer l'angle de rotation de la roue ( $EC_i^d$ ) dû aux déformations de contact et de volume des dentures et de la jante. Nous n'avons pas pris en compte les déformations des voiles, des arbres, des paliers et du carter pour ne pas alourdir le modèle et rester centré sur la denture.

Les deux types de déformations sont liés par la répartition du chargement, leur résolution doit donc être simultanée. L'analyse suivante nous a permis de sélectionner le type de méthode de résolution.

#### Le contact

Les résolutions analytiques du problème de contact (HERTZ, BELAJEFF, FOULON, JOHNSON, KALKER, ...) supposent toujours les conditions suivantes :

1. le contact est unique,
2. la résultante de l'action mécanique, au moins selon la normale, est connue,
3. la géométrie des corps en contact est connue,

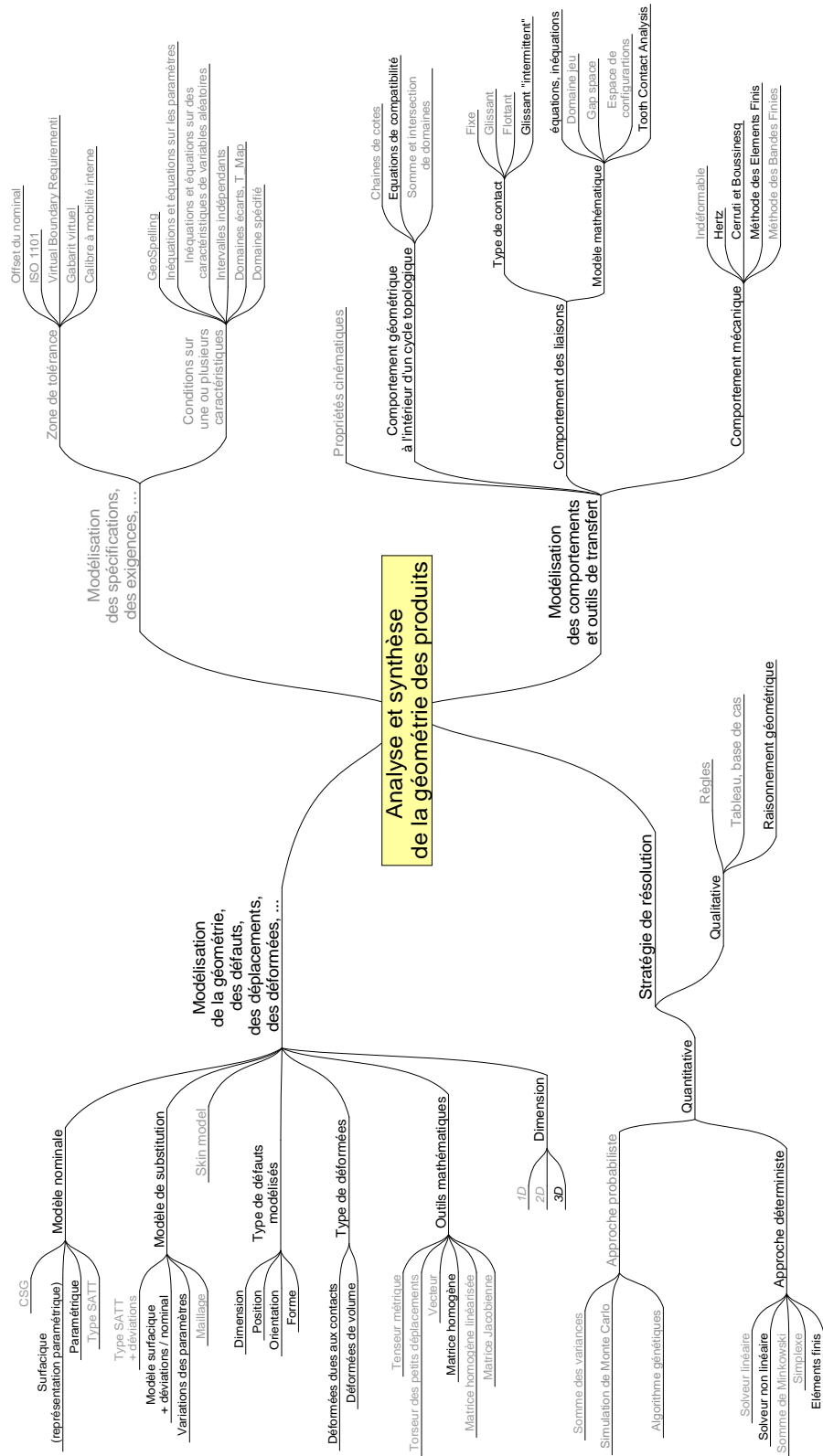


figure 5.5 – Modèles et outils utilisés au chapitre 5

4. les matériaux se déforment de façon purement élastique,
5. les dimensions de la zone de contact sont petites par rapport à la taille des solides, ceux-ci pouvant être assimilés à des corps semi-infinis

Lors de l'engrènement, le contact n'est pas toujours unique, le rapport de conduite total est strictement compris entre 1 et 2. Le contact n'est jamais unique si le rapport de conduite total est supérieur à 2. La première condition est donc assez souvent mise en défaut. Lorsque le contact est multiple, le système étant hyperstatique, les résultantes des actions mécaniques, même sur la normale, ne sont pas connues (la répartition des charges entre les différents contacts est liée aux déformations, elles-mêmes liées aux charges à chaque contact : problème implicite non linéaire). Pour un contact multiple, la seconde condition n'est donc pas respectée. En revanche, le modèle géométrique développé au chapitre 3, nous permet de connaître la géométrie au point de contact et il est toujours possible de faire l'hypothèse que le matériau se comporte de façon purement élastique. La dernière condition est problématique pour trois raisons : (i) la zone de contact peut être tronquée par les limites des surfaces actives des dentures ; (ii) la zone de contact peut s'étendre sur toute la largeur de la denture, qui est généralement supérieure à l'épaisseur des dents ; (iii) sous l'action d'une charge symétrique dans un plan orthogonal à la dent, sa déformation ne l'est pas, la dent a tendance à «pivoter» autour de sa base. Les conditions d'utilisation des méthodes analytiques ne pouvant être respectées, nous avons adopté une approche discrète du problème, utilisant les travaux de BOUSSINESQ et CERRUTI [181].

### **Déformation globale**

Nous appliquons LTCA à des engrenages coniques à denture droite, avec un bombé longitudinal. La déformation globale des dentures ne semble donc pas pouvoir être estimée par la méthode des prismes finis. Les méthodes des différences finies, des bandes finies ou de la différentiation automatique n'ayant jamais été utilisées dans notre équipe de recherche, il nous est apparu plus rationnel, pour ces premiers travaux dans ce domaine, d'utiliser un code de calcul commercial utilisant la méthode des éléments finis (ABAQUS). L'augmentation de la puissance des ordinateurs et de leur capacité de stockage permet aujourd'hui de relativiser les inconvénients de cette méthode.

#### **5.2.2 Présentation détaillée de la méthode numérique et interprétation**

La méthode que nous utilisons pour déterminer les écarts cinématiques de transmission imputables aux déformations est du type à coefficients d'influence. Pour cela, le plan tangent est maillé au voisinage du point de contact estimé par TCA. L'équation de compatibilité des dépla-

cements est écrite pour chaque point situé au centre des surfaces élémentaires du maillage. Le système d'équation est résolu en déterminant les pressions en chacun de ces points.

### Détermination des zones de contact potentiel

Pour chaque position discrète du pignon,  $\phi_1^{ndk}$  ou  $\phi_1^{nuk}$ , l'algorithme TCA (3.3) détermine quel(s) couple(s) de dents est (sont) en contact. L'algorithme (3.3.2) proposé permet une certaine finesse dans l'évaluation des écarts cinématiques à vide en faisant des interpolations sur les valeurs de  $\phi_2$ . Cependant, pour les positions interpolées, la position du point de contact n'est pas précisément connue. Il serait possible de réaliser la même interpolation sur les paramètres  $(u_1, v_1)$  ou  $(u_2, v_2)$  mais cette méthode peut devenir «hasardeuse» pour certains défauts de forme (*ondulation*). Nous avons préféré modifier légèrement la définition des valeurs discrètes prises par  $\phi_1$  pour que dans la zone de recouvrement de  $\phi_1$  pour deux dents successives ( $n$  et  $n+1$ ), les valeurs discrètes de  $\phi_1$  soient identiques (figure 5.6). Nous appelons  $N_{zpas}$  le nombre d'intervalles

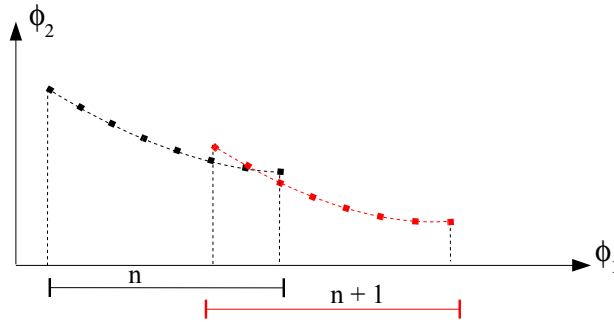


figure 5.6 – Résultats bruts de la simulation TCA pour 2 couples de dents et la nouvelle définition de  $\phi_1$

dans un pas angulaire et  $\Delta\phi_1$  la valeur du pas d'incrément de  $\phi_1$ . La nouvelle définition des positions discrètes du pignon est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi_1 = \frac{2\pi}{z_1 N_{zpas}} \\ Nbu = E\left(\frac{\phi_{1mini} + \varphi_1}{\Delta\phi_1}\right) \\ Nbd = E\left(\frac{\phi_{1maxi} + \varphi_1}{\Delta\phi_1}\right) \\ \phi_1^{ndk} = \frac{2\pi}{z_1}(n-1) - k\Delta\phi_1 \\ \quad \text{pour } \phi_1 \in [\phi_{1mini} + \varphi_1; 0] \quad \text{et } k \in \{0, 1, 2, \dots, Nbd\} \\ \phi_1^{nuk} = \frac{2\pi}{z_1}(n-1) + k\Delta\phi_1 \\ \quad \text{pour } \phi_1 \in [0; \phi_{1maxi} + \varphi_1] \quad \text{et } k \in \{0, 1, 2, \dots, Nbu\} \end{array} \right. \quad (5.7)$$

L'algorithme d'analyse de l'engrènement de l'ensemble des dents (3.3.2) définit le couple de dent en contact pour chaque position. Ce contact est appelé *contact principal*. Si l'algorithme détecte un double contact, l'un des deux sera le contact principal et l'autre, le contact secondaire. Dans les zones de recouvrement de  $\phi_1$  pour deux dents successives, la solution rejetée par l'algorithme constitue néanmoins un contact potentiel pour l'analyse de l'engrènement avec déformation. Ce lieu de contact potentiel est appelé *contact secondaire*. Dans notre étude, appliquée aux engrenages coniques à denture droite, le rapport de conduite est inférieur à 2 et un troisième contact potentiel est exclu.

La définition du plan tangent au contact principal est la définition usuelle. Au contact secondaire, les surfaces n'étant pas en contact avant déformation, le plan tangent n'est pas défini. Cependant, il est nécessaire d'en définir un pour pouvoir analyser le ou les contacts, la répartition des charges, etc. Nous adoptons la définition suivante :

Le plan tangent au contact secondaire est le plan tangent à la surface du pignon au point de contact rejeté par l'algorithme d'analyse de l'engrènement de l'ensemble des dents (figure 5.7). Si la normale n'est pas définie en ce point, le plan tangent au contact secondaire est le plan tangent à la surface de la roue au point de contact rejeté par l'algorithme.

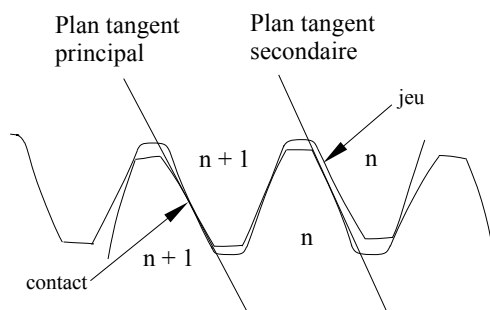


figure 5.7 – Plans tangents principal et secondaire

### Définition du maillage du ou des plans tangents

Le maillage du ou des plans tangents au voisinage du point de contact (estimé ou potentiel) sans déformation est de forme rectangulaire (figure 5.8). Ces dimensions sont déterminées par les dimensions de l'ellipse de contact obtenue avec la théorie de HERTZ si tout le chargement s'applique sur cette zone, multipliées par un coefficient supérieur à 1, généralement compris entre

1,2 et 1,5 (figure 5.9) afin d'être sûr que la zone de contact qui sera estimée, sera intérieure à la surface maillée. Le maillage est orienté par les directions des courbures principales du contact (même orientation que l'ellipse de contact,  $\mathbf{x}_{pt}$  pour la grand axe et  $\mathbf{y}_{pt}$  pour l'autre). Les surfaces de substitution en contact étant analytiquement connues, les directions principales de la courbure relative sont obtenues par la géométrie différentielle [210, 176, 211]. Le maillage sur chaque zone est régulier, ainsi toutes les surfaces élémentaires sont identiques. Le nombre de cellules dans chaque direction est compris entre 10 et 20.

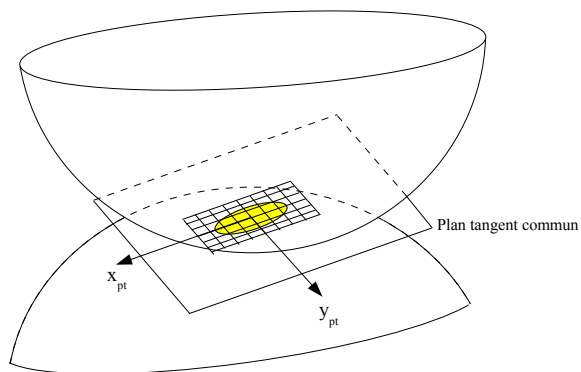


figure 5.8 – Maillage du plan tangent commun autour du point de contact

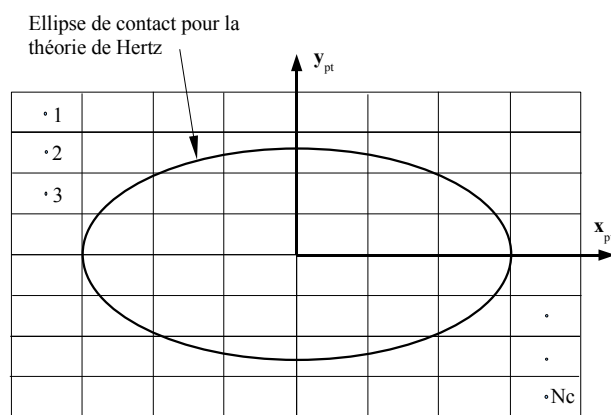


figure 5.9 – Maillage du plan tangent commun

### Equation de compatibilité des déplacements

Les centres des cellules du ou des maillages sont numérotés de 1 à  $N_c$ . Nous appelons «(k)» l'indice générique relatif à l'un de ces points et  $M_{pt}^{(k)}$  l'un d'eux. La normale au plan tangent, extérieure au pignon, est notée  $\mathbf{n}_{pt}$ . Avant déformation, le point  $M_{pt}^{(k)}$  se projette suivant  $\mathbf{n}_{pt}$  sur la surface active  $\Sigma_1$  du pignon en  $M_1^{(k)}$  et, de la même façon,  $M_{pt}^{(k)}$  se projette en  $M_2^{(k)}$  sur

la surface active  $\Sigma_2$  de la roue. La distance entre les points projetés  $\|M_1^{(k)} M_2^{(k)}\|$  est appelée *distance initiale* et elle est notée  $\epsilon^{(k)}$  (figure 5.10).

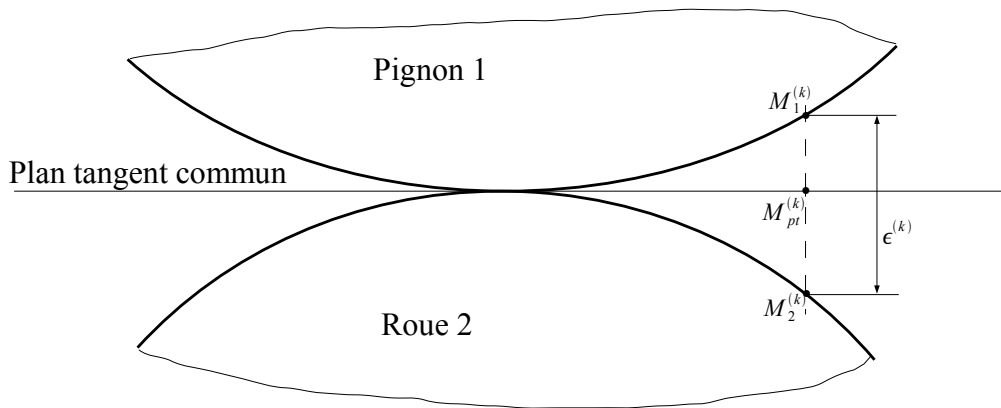


figure 5.10 – Géométrie du contact sans déformation

Après déformations de volume et de contact (figure 5.11), les points  $M_1^{(k)}$  et  $M_2^{(k)}$  se sont déplacés, respectivement en  $M_{1,d}^{(k)}$  et  $M_{2,d}^{(k)}$  (figure 5.11).

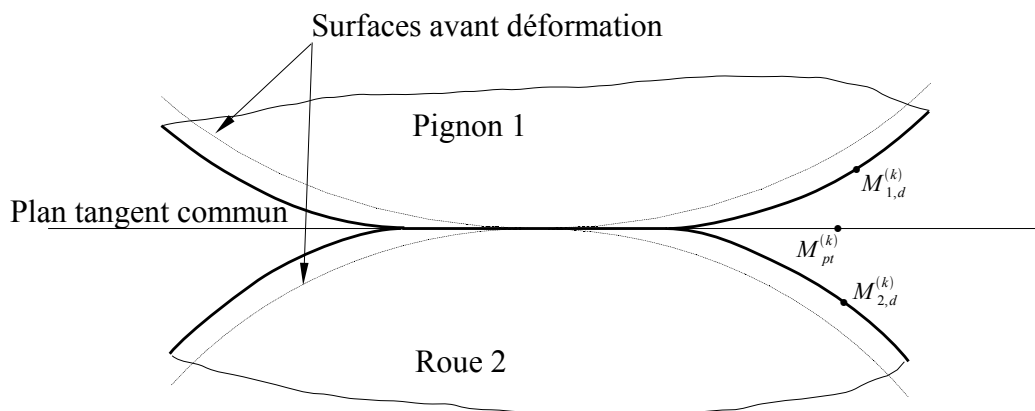


figure 5.11 – Géométrie du contact déformé

L'équation de compatibilité des déplacements est une équation monodimensionnelle. L'aspect tridimensionnel est abandonné pour se focaliser sur les déplacements suivant la normale au plan tangent (figure 5.12).

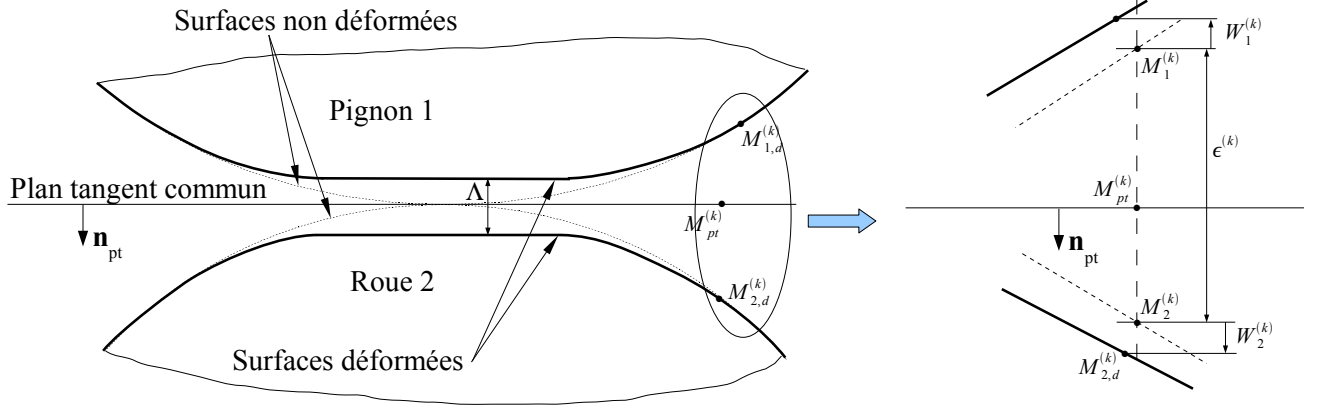


figure 5.12 – Géométries déformées et déplacements des points

Ainsi, on désigne le module des déplacements suivant la normale au contact par :

$$W_1^{(k)} = -\overrightarrow{M_1^{(k)} M_{1,d}^{(k)}} \cdot \mathbf{n}_{pt} \quad (5.8)$$

$$W_2^{(k)} = \overrightarrow{M_2^{(k)} M_{2,d}^{(k)}} \cdot \mathbf{n}_{pt} \quad (5.9)$$

En appelant  $\Lambda$  le rapprochement des deux corps en contact dû à leur déformation, l'équation de compatibilité des déplacements au point (k) s'écrit :

$$W_1^{(k)} + W_2^{(k)} + \epsilon^{(k)} - \Lambda \geq 0 \quad (5.10)$$

Elle traduit la non pénétration des solides. L'égalité est réalisée si le point appartient à la zone de contact. Il y a en tout  $Nc$  équations de compatibilité.

Le principe fondamental de la dynamique fournit la dernière équation mécanique que le système doit respecter. Généralement, l'action mécanique connue appliquée à un engrenage est le couple moteur agissant sur le pignon, noté  $C_m$ . Pour appliquer le principe fondamental de la dynamique, nous isolons l'ensemble tournant avec le pignon. En plus du couple moteur, celui-ci est soumis aux actions mécaniques de la liaison pivot et de la denture de la roue. Les effets dynamiques sont négligés. Nous appelons  $B_p$  un point de l'axe de rotation du pignon et  $\mathbf{r}_{B_p}^f$  le vecteur position de ce point dans le repère fixe  $Sf$ . Par exemple, l'axe  $X_1 = X_3$  étant l'axe de rotation du pignon,  $B_p$  peut être l'origine du repère  $S1$  exprimé dans le repère  $Sf$  :

$$\mathbf{r}_{B_p}^{[f]} = M_{f1} \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

La projection de l'équation des moments dynamiques sur l'axe de rotation du pignon (vecteur

directeur unitaire  $\mathbf{x}_p$ ) s'écrit :

$$C_m + L_{pivot} + L_{poids} + \iint_{S_c} \left( (\mathbf{r}_1^{[f]} - \mathbf{r}_{B_p}^{[f]}) \wedge \mathbf{T} \right) \cdot \mathbf{x}_p ds = 0 \quad (5.11)$$

où :

- $L_{pivot}$  est le moment résistant dans la liaison pivot,
- $L_{poids}$  est le moment de l'action de la pesanteur sur le pignon, exprimé en un point de l'axe de rotation et projeté sur celui-ci,
- $S_c$  est la surface de contact,
- $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est le vecteur contrainte.

Pour simplifier la résolution de cette équation, nous faisons les hypothèses suivantes :

1. La surface de contact est plane.
2. La surface de contact appartient au plan tangent défini par le contact des surfaces non déformées.
3. Le vecteur contrainte sur la surface de contact est réduit à sa composante normale. Les composantes tangentielles sont négligées.
4. La liaison pivot est parfaite.
5. Le poids des pièces est négligé.
6. Sur chaque surface élémentaire du maillage de la zone de contact, la pression est uniforme.

La première hypothèse est difficile à justifier. M. FOULON et REY [176] montrent que, les surfaces non déformées étant approchées par des paraboloides, la théorie de BOUSSINESQ permet d'obtenir l'équation de la surface de contact entre les corps déformés : c'est un paraboloïde tangent au plan tangent (justification de la seconde hypothèse). Considérer que la zone de contact est plane revient à négliger les termes d'ordre 2 de l'équation de cette surface.

La troisième hypothèse peut se justifier par la lubrification du contact entre les dentures. En effet, dans un contact lubrifié, les efforts tangentiels sont aux moins d'un ordre de grandeur inférieur aux efforts normaux [38]. Cependant, les modèles de contact que nous utilisons sont relatifs à des contacts secs. Dans l'analyse de l'engrènement sous charge, l'épaisseur du film de lubrifiant est également négligé (voir hypothèses 3.1.1 page 78). Ces contradictions sont tout de même admises par la plupart des chercheurs qui travaillent sur LTCA.

L'utilisation de palier à éléments roulants permet de justifier la quatrième hypothèse. Le rendement de ce type de solution technologique est très élevé (>99%).

Le poids des roues dentées est généralement négligeable par rapport aux efforts transmis, tant que le diamètre de ces roues n'atteint pas plusieurs mètres (cas des différentiels automobiles).

La dernière hypothèse permet d'utiliser les résultats de BOUSSINESQ et CERRUTI sur le déplacement obtenu en un point en fonction d'un chargement normal uniforme sur une région rectangulaire du plan de contact.

Les hypothèses 1 et 3 permettent de faire une somme algébrique des efforts élémentaires appliqués sur chaque cellule du maillage. Sans elles, il serait nécessaire de faire une somme vectorielle des efforts élémentaires, ce qui augmenterait sensiblement la complexité du problème.

Compte-tenu des hypothèses ci-dessus, la surface de contact étant discrétisée, la relation (5.11) se réduit à l'expression suivante :

$$C_m + \sum_{k=1}^{N_c} \left[ (\{\mathbf{r}_1^{[f]}(M_{1,d}^{(k)}) - \mathbf{r}_{B_p}^{[f]}\} \wedge \mathbf{T}(M_{1,d}^{(k)})) \cdot \mathbf{x}_p S_k \right] = 0 \quad (5.12)$$

D'après les hypothèse,  $\mathbf{T}(M_{1,d}^{(k)}) = -p_k \mathbf{n}_{pt}$  et la pression de contact est nulle en dehors de la zone de contact. Les surfaces élémentaires  $S_k$  étant toutes identiques, l'équation (5.12) devient :

$$C_m + S_k \cdot \sum_{k=1}^{N_c} \left[ [\mathbf{x}_f, \mathbf{n}_{pt}, (\mathbf{r}_{1,k}^f - \mathbf{r}_{B_p}^f)] \cdot p_k \right] = 0 \quad (5.13)$$

Cette équation traduit le principe fondamental de la dynamique appliqué au pignon, elle est la dernière équation du système à résoudre.

La résolution des équations (5.10) et (5.13) passe par la recherche du champ de pression discret. Etant supposé que les pièces ont un comportement purement élastique, le déplacement de la surface s'exprime en fonction du chargement surfacique (fonction de GREEN) :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \iint_{\partial V} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) \mathbf{n} ds \quad (5.14)$$

$$U_i(\mathbf{x}) = \iint_{\partial V} \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_j(\mathbf{y}) ds \quad (5.15)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est le déplacement en  $\mathbf{x}$  dû à un chargement unitaire au point  $\mathbf{y}$ . Cette fonction est appelée *fonction d'influence* [186]. Cette fonction dépend fortement de la forme du solide. Suivant la discrétisation de notre modèle, le déplacement au point (k) peut s'exprimer en fonction des pressions aux points (j) :

$$U_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{N_c} A_{ijk} p_j S_c \quad (5.16)$$

où l'indice «i» désigne les composantes du vecteur déplacement ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ), l'indice «k» est le point où le déplacement est calculé ( $k \in \{1, 2, 3, \dots, N_c\}$ ) et «j» est l'indice de la somme.

D'après les définitions de  $W_1^{(k)}$  et de  $W_2^{(k)}$  (5.8 et 5.9), ces déplacements s'expriment en fonction des coefficients d'influence (le nouvel indice 1 ou 2 faisant référence au pignon ou à la roue) :

$$W_1^{(k)} = -\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_{pt} = -\sum_{i=1}^3 U_{1i} \cdot n_{pt_i} \quad (5.17)$$

$$W_1^{(k)} = -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{Nc} A_{1ijk} p_j S_c \cdot n_{pt_i} \quad (5.18)$$

$$W_1^{(k)} = \sum_{j=1}^{Nc} \left( -\sum_{i=1}^3 A_{1ijk} \cdot n_{pt_i} S_c \right) p_j \quad (5.19)$$

**Remarque :** Les déplacements  $W_1^{(k)}$  et  $W_2^{(k)}$  peuvent changer de signe lorsque le contact est double : une action normale dans la zone du premier contact peut provoquer un déplacement *néгатif* au niveau de la seconde zone de contact.

En posant

$$C_{1jk} = -\sum_{i=1}^3 A_{1ijk} n_{pt_i} S_c \quad (5.20)$$

l'équation (5.17) devient

$$W_1^{(k)} = \sum_{j=1}^{Nc} C_{1jk} p_j \quad (5.21)$$

De même :

$$C_{2jk} = \sum_{i=1}^3 A_{2ijk} n_{pt_i} S_c \quad (5.22)$$

$$W_2^{(k)} = \sum_{j=1}^{Nc} C_{2jk} p_j \quad (5.23)$$

Avec les relations (5.21) et (5.23), l'équation de compatibilité des déplacements (5.10) devient :

$$\sum_{j=1}^{Nc} (C_{1jk} + C_{2jk}) p_j + \epsilon^{(k)} - \Lambda \geq 0 \quad (5.24)$$

L'équation d'équilibre (5.13) et l'équation de compatibilité écrite à chaque point, forment un système de  $Nc+1$  équations où les inconnues sont les pressions  $p_k$  et le rapprochement des deux solides  $\Lambda$ . Avant de résoudre le système, il faut déterminer les valeurs des coefficients d'influence  $C_{1jk}$  et  $C_{2jk}$ . Comme nous l'avons vu précédemment, ces coefficients caractérisent la déformation des dentures, déformations locales de contact et déformation globale due à la flexion de la dent, à son cisaillement et à la déformation de la jante. Pour cette raison, les coefficients sont

décomposés en un coefficient d'influence de flexion ( $C_{1jk}^{fl}$  et  $C_{2jk}^{fl}$ ) et en un coefficient d'influence de contact ( $C_{1jk}^c$  et  $C_{2jk}^c$ ) [96, 185, 81, 182, 212, 202, 196]. En faisant cela, nous supposons que les déformations locales et globales sont indépendantes et s'ajoutent.

$$C_{1jk} + C_{2jk} = C_{1jk}^{fl} + C_{2jk}^{fl} + C_{1jk}^c + C_{2jk}^c \quad (5.25)$$

$$C_{1jk}^{fl} = - \sum_{i=1}^3 A_{1ijk}^{fl} n_{pt_i} S_c \quad (5.26)$$

$$C_{1jk}^c = - \sum_{i=1}^3 A_{1ijk}^c n_{pt_i} S_c \quad (5.27)$$

$$C_{2jk}^{fl} = \sum_{i=1}^3 A_{2ijk}^{fl} n_{pt_i} S_c \quad (5.28)$$

$$C_{2jk}^c = \sum_{i=1}^3 A_{2ijk}^c n_{pt_i} S_c \quad (5.29)$$

Les déterminations de ces coefficients d'influence font l'objet des paragraphes suivants.

### 5.3 Détermination des coefficients d'influence de flexion

D'après leur définition (5.26), les coefficients de flexion  $C_{1jk}^{fl}$  et  $C_{2jk}^{fl}$  se déduisent des coefficients  $A_{1ijk}^{fl}$  et  $A_{2ijk}^{fl}$ . Pour déterminer ces derniers, nous utilisons la relation (5.16) et le cas de chargement suivant :

$$p_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = l, \\ 0 & \text{si } j \neq l. \end{cases} \quad (5.30)$$

D'où :

$$A_{1ilk}^{fl} = \frac{U_i^{fl,(k)}}{S_c} \quad (5.31)$$

Les coefficients d'influence  $A_{1ilk}^{fl}$  correspondent donc au déplacement de flexion du point  $M_1^{(k)}$ , dans la direction  $i$  du repère  $Sf$ , lorsque qu'une charge unitaire s'exerce au point  $M_1^{(l)}$ , divisé par l'aire de la surface élémentaire  $S_c$  (equation 5.31). Cette relation (5.31) montre la bijection entre coefficients d'influence et déplacements. La détermination des coefficients d'influence de flexion nécessite donc la détermination des 3 composantes du déplacement de flexion des  $N_c$  points du maillage projetés sur le pignon et sur la roue, et ceci pour chaque position angulaire du pignon.

Pour limiter le nombre de calculs, nous choisissons d'évaluer ces déplacements pour un certain nombre de points des surfaces actives du pignon et de la roue et de réaliser une interpolation pour connaître les caractéristiques du déplacement aux points  $M_1^{(k)}$  et  $M_2^{(k)}$ . Une interpolation est également réalisée pour le point d'application de la charge.

Les points des surfaces actives où les déplacements de flexion sont évalués sont notés  $M_1^{(K)}$  et  $M_2^{(K)}$ . Les points des surfaces actives où la charge normale et unitaire est appliquée, sont notés  $M_1^{(L)}$  et  $M_2^{(L)}$ . Naturellement, les ensembles de points  $M^{(K)}$  et  $M^{(L)}$  sont identiques. Pour des raisons qui sont détaillées plus loin, ces points sont placés aux intersections des isoparamétriques, dans les deux directions, des surfaces actives (figure 5.13). Dans ce schéma de détermination, se pose le problème des repères : les points projetés  $M_1^{(k)}$  sont définis dans le repère commun fixe  $S_f$  et les points où les déplacements sont évalués sont définis dans les repères des dentures  $S_7$  ou  $S_8$ .

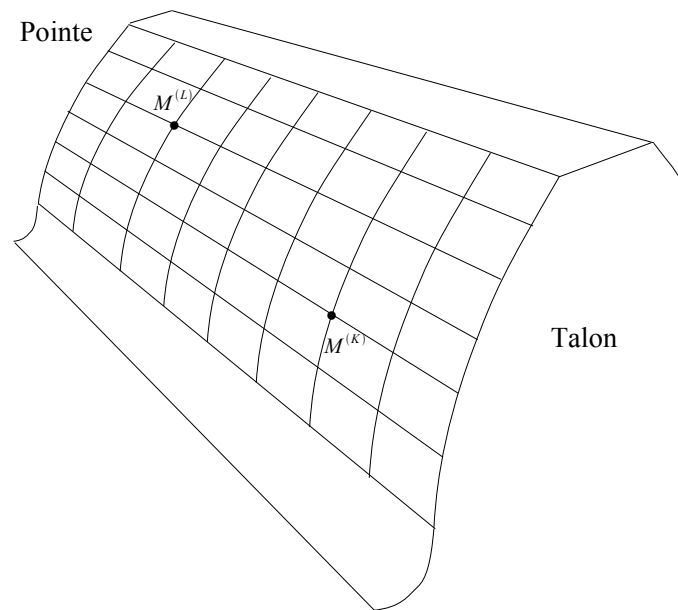


figure 5.13 – Maillage de la surface active

Les deux réseaux d'isoparamétriques forment un maillage des surfaces actives et les surfaces élémentaires ont 4 arêtes.

La méthode de détermination des  $A_{1ilk}^{f_l, [f]}$  que nous proposons est la suivante :

1. Recherche parmi les points  $M_1^{(K)}$ , des 4 sommets de la surface élémentaire du maillage de la surface active, contenant  $M_1^{(k)}$ . Ces 4 points sont nommés  $M_1^{(K_1)}$ ,  $M_1^{(K_2)}$ ,  $M_1^{(K_3)}$  et  $M_1^{(K_4)}$ . Leur numérotation doit correspondre à l'orientation de la figure 5.14. Cette recherche est basée sur les paramètres  $(u_1, v_1)$  de la surface active, indépendante du repère. Les coordonnées  $(u_1, v_1)$  des points  $M_1^{(k)}$  sont déterminées lors de la projection des points du maillage du plan tangent ( $M_{pt}^{(k)}$ ) sur la surface active du pignon (paragraphe 5.2.2). Les

coordonnées  $(u_1, v_1)$  des points  $M_1^{(K)}$  sont déterminées lors de la discrétisation du volume du pignon (voir au paragraphe 5.3.3).

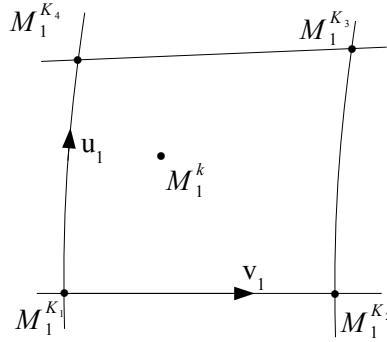


figure 5.14 – Surface élémentaire du maillage où est projeté  $M_1^{(k)}$

2. Recherche parmi les points  $M_1^{(L)}$ , des 4 sommets de la surface élémentaire du maillage de la surface active, contenant  $M_1^{(l)}$ . Ces 4 points sont nommés  $M_1^{(L_1)}$ ,  $M_1^{(L_2)}$ ,  $M_1^{(L_3)}$  et  $M_1^{(L_4)}$ . Leur numérotation doit correspondre à l'orientation de la figure 5.15.

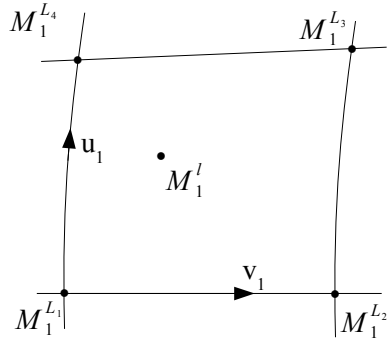


figure 5.15 – Surface élémentaire du maillage où est projeté  $M_1^{(l)}$

3. Calcul des  $A_{1ilk}^{fl,[7]}$  par interpolation linéaire :

Nous appelons  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\Psi_3$  et  $\Psi_4$  les fonctions d'interpolation linéaires à deux paramètres,  $(u_1, v_1)$  ou  $(u_2, v_2)$ . (voir annexe A.5). Elles permettent de définir :

$$\begin{cases} A_{1iLk}^{fl,[7]} = \Psi_1 A_{1iLK_1}^{[7]} + \Psi_2 A_{1iLK_2}^{[7]} + \Psi_3 A_{1iLK_3}^{[7]} + \Psi_4 A_{1iLK_4}^{[7]} = \sum_{\alpha=1}^4 \Psi_{\alpha} A_{1iLK_{\alpha}}^{[5]} \\ A_{1ilK}^{fl,[7]} = \Psi_1 A_{1iL_1K}^{[5]} + \Psi_2 A_{1iL_2K}^{[7]} + \Psi_3 A_{1iL_3K}^{[7]} + \Psi_4 A_{1iL_4K}^{[7]} = \sum_{\beta=1}^4 \Psi_{\beta} A_{1iL_{\beta}K}^{[7]} \end{cases} \quad (5.32)$$

D'où :

$$A_{1ilk}^{fl,[7]} = \sum_{\alpha=1}^4 \Psi_{\alpha} \sum_{\beta=1}^4 \Psi_{\beta} A_{1iL_{\beta}K_{\alpha}}^{[7]} \quad (5.33)$$

Les coefficients  $A_{iLK}^{[7]}$  sont calculés préalablement (voir paragraphe suivant)

4. L'expression de  $A_{ilk}^{fl,[f]}$  est déterminée par un changement de repère :

$${}^T[A_{11lk}^{fl,[f]} \ A_{12lk}^{fl,[f]} \ A_{13lk}^{fl,[f]} \ 0] = M_{f1} \cdot M_{13} \cdot M_{35} \cdot M_{57} \cdot {}^T[A_{11lk}^{fl,[7]} \ A_{12lk}^{fl,[7]} \ A_{13lk}^{fl,[7]} \ 0] \quad (5.34)$$

Finalement, la méthode que nous proposons pour déterminer les coefficients d'influence  $C_{1jk}^{fl}$  repose sur la détermination d'autres coefficients d'influence  $A_{iLK}^{[7]}$ , définis dans le repère de la dent principale en contact et relativement à des points  $M_1^{(K)}$  définissant un maillage des surfaces actives. Les valeurs des coefficients  $A_{iLK}^{[7]}$  sont obtenues par simulation numérique.

### 5.3.1 Utilisation de la méthode des éléments finis

Nous utilisons la méthode des éléments finis pour évaluer les coefficients d'influence. Dans le domaine élastique, il est généralement reconnu que l'erreur de cette méthode par rapport aux valeurs expérimentales est faible, sous couvert que le maillage soit *de bonne qualité*, i.e. que le rapport de forme soit inférieur à 3 et que les déformations angulaires soient inférieures à  $\pi/4$ .

Tout comme LITVIN et ses collaborateurs, nous avons cherché à limiter les erreurs numériques liées au passage par un outil de CAO pour la définition de la géométrie et de son maillage. Nous avons développé un logiciel qui génère automatiquement le fichier de données et d'instruction pour ABAQUS. M. RIGAUD [34] souligne l'importance de décrire la géométrie avec le plus grand soin pour que la prédiction des déformations soit bonne.

La géométrie maillée correspond à un secteur du pignon et de la roue. RIGAUD [34] montre que les déformations des dents adjacentes à celle qui est chargée ne sont pas toujours négligeables. Cela implique, lorsque le plan tangent secondaire existe, de tenir compte du couplage entre les deux contacts pour la flexion. Le contact secondaire pouvant avoir lieu sur la dent suivante ou précédente du contact principal, il est nécessaire de mailler un secteur d'au moins 3 dents. DE VAUJANY ([81] p. 76) montre que si l'épaisseur de la jante est supérieure à 3 fois le module, la localisation des conditions aux limites et le nombre de dents maillées influencent peu le résultat. Les roues dentées coniques que nous modélisons sont munies d'alésages cylindriques. L'épaisseur de la jante varie donc du talon à la pointe. Les rayons des alésages sont choisis pour qu'au milieu de la denture ( $v = (R_p + R_g)/2$ ), les épaisseurs des jantes soient au moins 3 fois supérieures à la valeur du module.

Par ailleurs, afin d'obtenir uniquement les déplacements de flexion, il est nécessaire de retirer des déplacements globaux évalués par la méthode des éléments finis, les déplacements locaux au niveau de l'application de la charge (déformation importante du maillage). Pour cela, SAINSIOT et JACQUIN [38, 96] proposent d'effectuer le calcul en deux étapes successives avec des conditions

aux limites différentes :

1. Calcul avec les flancs antihomologues au contact libre : le déplacement est le résultat de tous les effets. Les déplacements obtenus permettent de déterminer les coefficients d'influence  $A_{1iLK}^{[7]-1}$ .
2. Calcul avec les flancs antihomologues au contact bloqués : le déplacement obtenu est dû à la déformation locale du maillage autour du point chargé et de la compression de la dent chargée. Ce dernier effet est négligé. Les coefficients d'influence évalués à cette étape sont notés  $A_{1iLK}^{[7]-2}$ .

Les coefficients d'influence de la déformation globale sont obtenus en faisant la différence entre les résultats des deux calculs :

$$A_{1iLK}^{fl,[7]} = A_{1iLK}^{[7]-1} - A_{1iLK}^{[7]-2} \quad (5.35)$$

### 5.3.2 Type d'élément

GAGNON [213] a réalisé une comparaison entre différents types d'éléments pour évaluer la flexion d'une dent en deux et en trois dimensions. Il montre que les éléments à interpolation quadratique fournissent un résultat plus précis que les autres. La plupart des calculs éléments finis sur les engrenages sont réalisés avec des éléments briques à 20 nœuds [38, 34, 187, 214, 8]. Nous utilisons les éléments C3D20 d'ABAQUS.

### 5.3.3 Le maillage

Le maillage des domaines utilisés pour la simulation est entièrement automatisé et paramétré. La section sphérique d'une demi-dent est divisée en 3 zones (figure 5.16). Les frontières des domaines sont discrétisées selon des progressions arithmétiques ou géométriques afin de satisfaire au mieux les conditions de forme à respecter pour les éléments. Des opérations d'homothétie, de symétrie et de rotation permettent ensuite d'obtenir l'ensemble du maillage (figures 5.16 et 5.17).

### 5.3.4 Conditions aux limites

Dans notre application, les conditions aux limites sont de 3 types : le nœud chargé, les surfaces libres en déplacement et en effort, et les surfaces où le déplacement nul est imposé. Le chargement a déjà été présenté et nous discutons du choix de la zone encastree.

ÇELIK [215], DE VAUJANY [81] et bien d'autres imposent un déplacement nul sur l'alésage et les deux faces coupées de la roue dentées (5.18). Ce type de condition empêche le déplacement de cisaillement de la jante, dans son épaisseur et ampute la réponse du système. Encastree

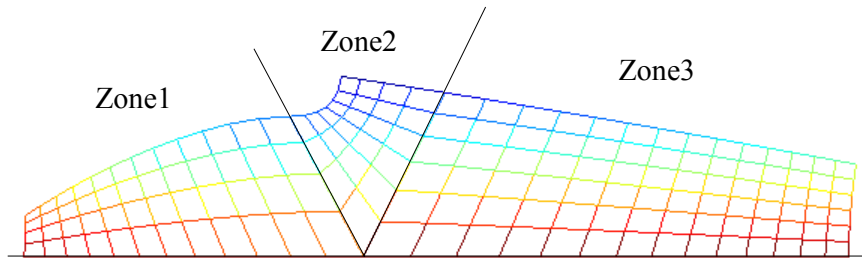


figure 5.16 – Maillage de la demi section d'une dent

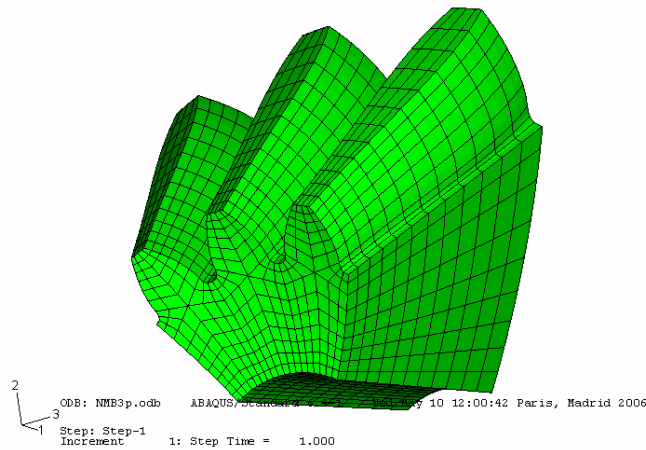


figure 5.17 – Maillage de 3 dents du pignon

uniquement l'alésage conduit à surestimer le déplacement de cisaillement de la jante car le secteur maillé est moins rigide que la couronne entière.

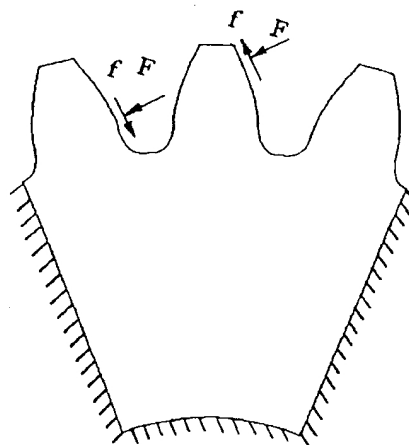


figure 5.18 – Conditions aux limites de ÇELIK [216]

Ayant choisi une jante épaisse (voir paragraphe 5.3.1), nous imposons un encastrement uni-

quement sur les nœuds de la surface de l'alésage (figure 5.19) et nous constatons que les déplacements des nœuds des surfaces limitant le secteur denté sont très faibles : inférieur à  $2.10^{-5}$  mm pour une charge de 1kN.

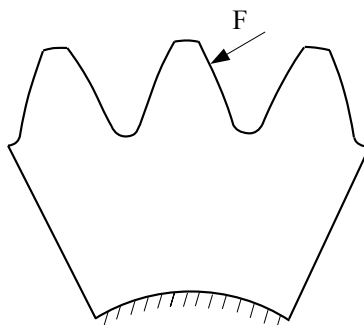


figure 5.19 – Conditions aux limites de notre modèle

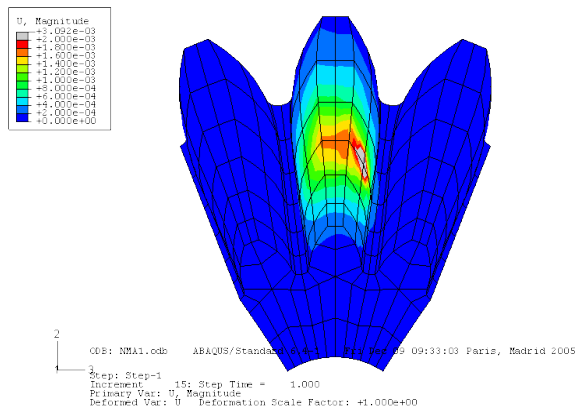
Le chargement est effectué successivement sur tous les nœuds de la surface active de la dent médiane qui sont les sommets des éléments parallélépipédiques. La charge est appliquée suivant l'opposée de la normale extérieure en chaque point. D'après le modèle développé précédemment, la charge devrait être d'1N mais pour obtenir un ordre de grandeur des déformations plus habituel et profitant de la linéarité du problème, la valeur de la charge appliquée est de 1kN.

### 5.3.5 Choix du nombre d'éléments

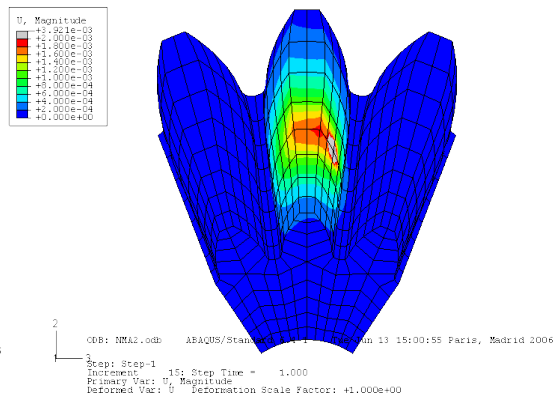
Nombre de dents du pignon	$z_1 = 13$
Nombre de dents de la roue	$z_2 = 21$
Angle nominal entre les axes de rotation	$\Sigma_0 = \pi/2$
Rayon de la sphère à la pointe	$R_p = 50\text{mm}$
Rayon de la sphère au talon	$R_g = 100\text{mm}$
Hauteur utile des dents	$K_h = 2$
Valeur du bombé	$B = 1\text{mm}$

tableau 5.1 – Principaux paramètres de l'engrenage pour les tests sur le maillage

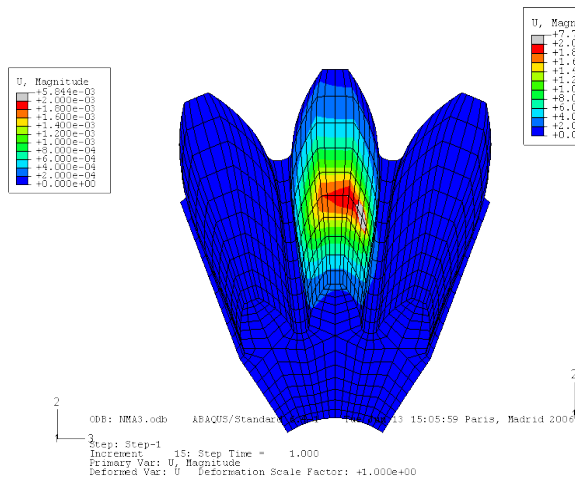
Nous avons fixé les paramètres de la denture (tableau 5.1) et réalisé 5 essais avec des nombres d'éléments différents (tableau 5.2 et figure 5.20) et un chargement au centre du maillage de la surface de la dent médiane. A cause des répartitions non régulière des nœuds du maillage, la position du point chargé varie légèrement. Nous constatons que les calculs convergent sans difficultés. Les modules d'YOUNG sont fixés à 210 000 MPa et le coefficient de POISSON à 0,3.



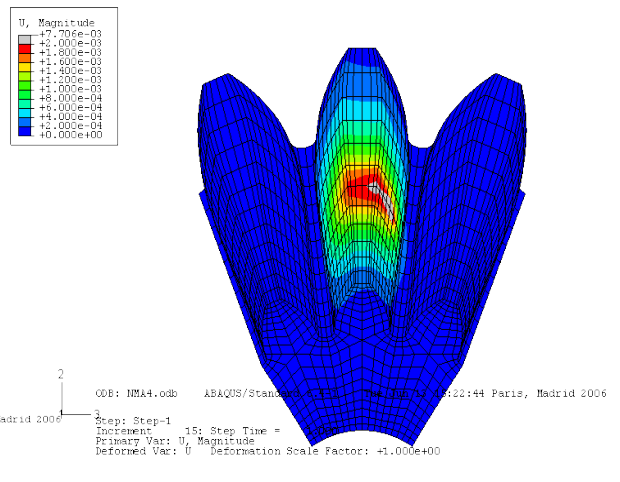
Maillage I



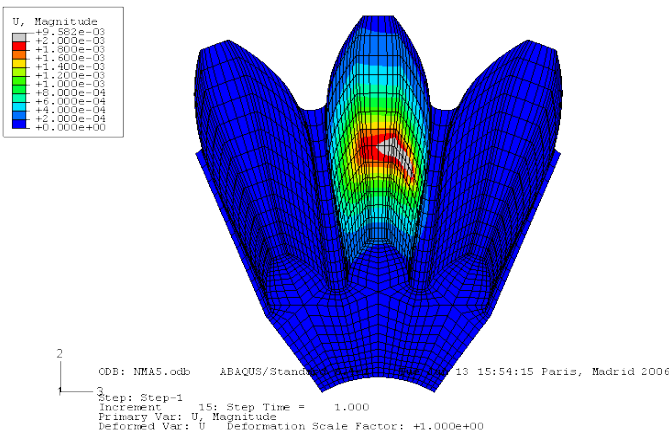
Maillage II



Maillage III



Maillage IV



Maillage V

figure 5.20 – Visualisation des 5 maillages utilisés

	Numéro de maillage				
	I	II	III	IV	V
Nombre d'éléments sur un flanc	6	32	60	96	140
Nombre d'éléments	288	768	2340	4320	8400
Nombre de nœuds	1789	4235	11715	20779	38993
Nombre total de variables	5367	12705	35145	62337	116979
Temps CPU (s)	26,5	90	413,6	977	2969
Durée totale (s)	49	154	742	1725	7348

tableau 5.2 – Caractéristiques des 5 maillages et de la simulation

Les déplacements de 9 nœuds (les coins, les milieux des arrêtes du maillage de la surface active ainsi que son centre; figure 5.21) projetés sur la normale du point de contact ont été relevés (tableau 5.3).

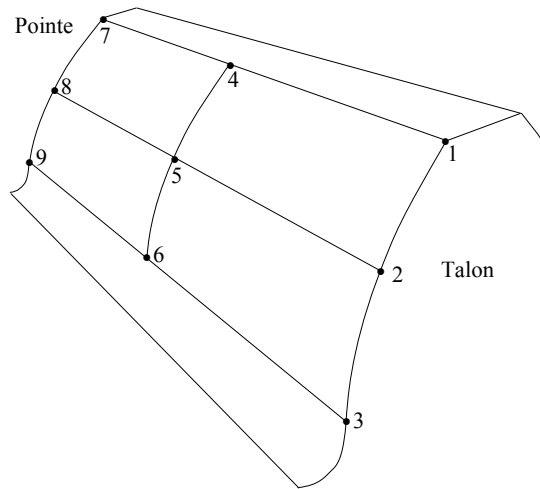


figure 5.21 – Points des maillages où le déplacement est enregistré

N° nœud	Numéro de maillage				
	I	II	III	IV	V
1	-0.1923	-0.1892	-0.1923	-0.1910	-0.1909
2	-0.1513	-0.1658	-0.1652	-0.1697	-0.1719
3	-0.0435	-0.0387	-0.0401	-0.0385	-0.0380
4	-0.0811	-0.0817	-0.0872	-0.0878	-0.0888
5	-0.0355	-0.0455	-0.0472	-0.0513	-0.0539
6	0.0125	0.0177	0.0198	0.0212	0.0219
7	-0.0811	-0.0817	-0.0872	-0.0878	-0.0888
8	-0.0355	-0.0455	-0.0472	-0.0513	-0.0539
9	0.0125	0.0177	0.0198	0.0212	0.0219

tableau 5.3 – Valeurs des déplacements projetés  $\cdot 10^{-3}$ mm, pour les 5 maillages aux 9 nœuds

Relativement au maillage le plus fin, les écarts des déplacements sont donnés dans le tableau 5.4. Compte tenu de ces résultats, nous considérons que le maillage de type III réalise le meilleur

%	I	II	III	IV
1	0.7504	-0.8802	0.7179	0.0320
2	-11.9998	-3.5396	-3.9263	-1.2747
3	14.5888	1.8289	5.5181	1.4858
4	-8.6280	-7.9972	-1.7896	-1.0883
5	-34.1358	-15.5096	-12.3031	-4.7669
6	-42.8384	-19.1398	-9.7027	-3.0093
7	-8.6280	-7.9972	-1.7896	-1.0883
8	-34.1358	-15.5096	-12.3031	-4.7669
9	-42.8384	-19.1398	-9.7027	-3.0093

tableau 5.4 – Valeurs des écarts des déplacements relativement aux résultats du maillage V

compromis entre temps de calcul, espace mémoire utilisé et précision. Afin d'améliorer le rapport de forme, le maillage est raffiné dans la direction des génératrices (72 éléments par flanc ; figure 5.22).

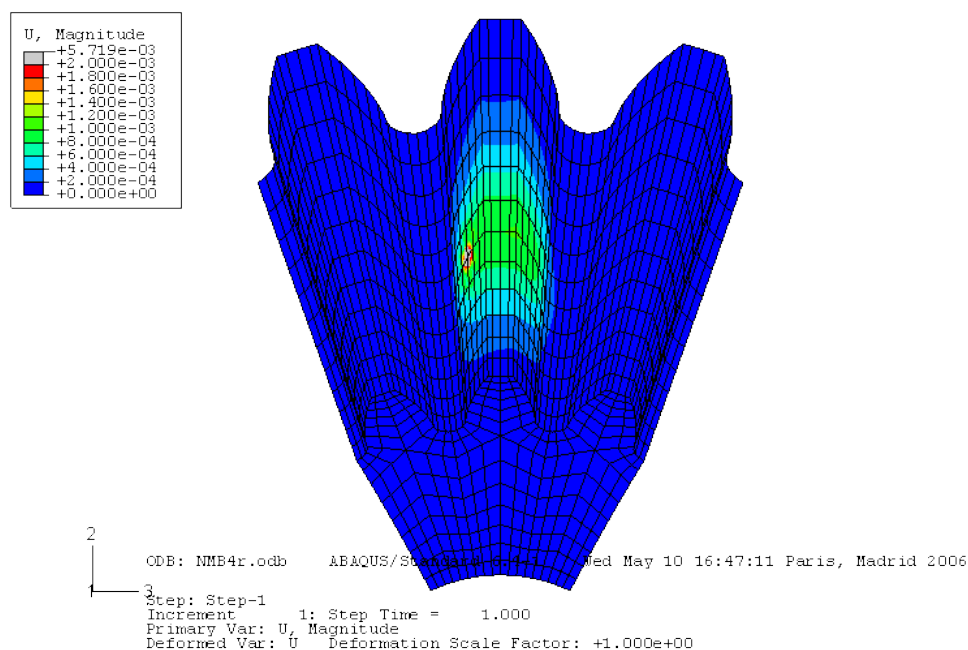


figure 5.22 – Maillage retenu

### 5.3.6 Exécution, extraction des données et exploitation

Afin d'extraire les coefficients d'influence de flexion, tous les nœuds de la surface active de la dent centrale sont chargés successivement. A chaque étape, les déplacements des nœuds des

3 surfaces actives qui peuvent recevoir le contact sont enregistrés dans un format binaire. Un programme en FORTAN permet de récupérer les données et de les enregistrer dans des fichiers au format texte. Ces fichiers sont ouverts avec Matlab<sup>®</sup> et traités pour calculer les coefficients d'influence. Une des difficultés du traitement réside dans les paramétrages multiples pour chaque nœud des surfaces actives : un nœud est repéré par

- son numéro dans le maillage ;
- ses coordonnées dans le repère  $S7$  ou  $S8$  ;
- ses paramètres  $(u_1, v_1)$  ou  $(u_2, v_2)$  des surfaces  $\Sigma_1$  ou  $\Sigma_2$  et  $n$  le numéro de la dent.

### 5.3.7 Les contraintes

La méthode utilisée pour évaluer les écarts cinématiques de déformation ne permet pas la détermination directe de l'état de contrainte lors de l'engrènement. Le matériau des roues dentées étant supposé purement élastique, il est possible de l'évaluer en utilisant le principe de superposition des contraintes. Cela nécessiterait d'enregistrer l'état de contraintes pour chaque chargement unitaire et, une fois la répartition des charges connues, d'en faire une combinaison linéaire, suivant les valeurs des pressions en chaque point.

### 5.3.8 Influence de la surface de raccordement

L'influence de la forme des surfaces de raccordement sur les déformations et sur le niveau de la contrainte maximale en pied de dent est certaine. L'étude de cette relation n'a pas été réalisée.

Or, l'outil que nous avons développé, complété par l'évaluation des contraintes, est entièrement paramétré. Il pourrait permettre l'optimisation de la forme du profil de raccordement pour un niveau de contrainte et une erreur cinématique, pour un fonctionnement avec des écarts géométriques.

## 5.4 Détermination des coefficients de contact

Le second volet de la détermination des coefficients d'influence consiste à déterminer les coefficients d'influence de contact (5.25 et 5.27). Pour établir l'expression de ces coefficients, le plus clair est de repartir de l'expression du déplacement en fonction du chargement. M. JOHNOSON [181] présente la théorie des *fonctions potentielles de BOUSSINESQ et CERRUTI* qui permet d'estimer les contraintes et les déplacements créés dans un domaine semi-infini élastique (limité par le plan  $z = 0$ ), sous l'action de charges normales et tangentielles appliquées sur un domaine fermé  $\Gamma$ . Cette surface  $\Gamma$  est au voisinage de l'origine. Au niveau du voisinage de la zone de contact, le déplacement normal du corps 1 au point  $k$  de coordonnées  $(x,y)$  dans le plan tangent dû au

chargement  $p(x',y')$  au point  $j$  de coordonnées  $(x',y')$  est donnée par la relation :

$$W_1^c(x,y) = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \int_{\Gamma} \frac{p(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy' \quad (5.36)$$

où  $E_1$  et  $\nu_1$  sont, respectivement, le module d'YOUNG et le coefficient de POISSON du corps 1. En dehors de la zone de contact  $\Gamma$ , la charge est nulle. Cette intégrale peut ainsi s'étendre sur tout le plan tangent.

En supposant la pression constante sur chaque carreau du maillage, le déplacement normal de contact au point  $k$  peut s'écrire :

$$W_1^{c,(k)} = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \sum_{j=1}^{Nc} p_j \int_{S_j} \frac{1}{\sqrt{(x_k-x')^2 + (y_k-y')^2}} dx' dy' \quad (5.37)$$

où  $S_j$  est la surface autour du point  $M_{pt}^{(j)}$  définie par  $\{(x',y') \mid |x' - x_j| \leq a; |y' - y_j| \leq b\}$ .

Un changement de repère est effectué pour ramener le chargement autour de l'origine et faciliter le calcul de l'intégrale double :

$$\begin{cases} X &= x' - x_j \\ Y &= y' - y_j \end{cases} \quad (5.38)$$

d'où, pour un chargement uniforme sur une surface rectangulaire de dimension  $2a \times 2b$  :

$$W_1^{c,(k)} = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \sum_{j=1}^{Nc} p_j \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x_k - X - x_j)^2 + (y_k - Y - y_j)^2}} dX dY \quad (5.39)$$

Les coefficients d'influence de contact apparaissent ainsi naturellement :

$$W_1^{c,(k)} = \sum_{j=1}^{Nc} C_{1jk}^c p_j \quad (5.40)$$

avec :

$$C_{1jk}^c = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{(x_k - X - x_j)^2 + (y_k - Y - y_j)^2}} dX dY \quad (5.41)$$

En 1929, LOVE (voir [181]) a établi l'expression du déplacement normal à la surface en un point  $(x,y)$  pour un chargement uniforme ( $p$ ) sur une surface rectangulaire définie par les

dimensions  $|x| \leq a$  et  $|y| \leq b$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi E_1}{1 - \nu_1^2} \frac{U_3^{c,[pt]}}{p} &= (x+a) \ln \left[ \frac{(y+b) + \{(y+b)^2 + (x+a)^2\}^{1/2}}{(y-b) + \{(y-b)^2 + (x+a)^2\}^{1/2}} \right] \\
&+ (y+b) \ln \left[ \frac{(x+a) + \{(y+b)^2 + (x+a)^2\}^{1/2}}{(x-a) + \{(y+b)^2 + (x-a)^2\}^{1/2}} \right] \\
&+ (x-a) \ln \left[ \frac{(y-b) + \{(y-b)^2 + (x-a)^2\}^{1/2}}{(y+b) + \{(y+b)^2 + (x-a)^2\}^{1/2}} \right] \\
&+ (y-b) \ln \left[ \frac{(x-a) + \{(y-b)^2 + (x-a)^2\}^{1/2}}{(x+a) + \{(y-b)^2 + (x+a)^2\}^{1/2}} \right]
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Nous utilisons ce résultat en posant

$$\begin{cases} x = x_k - x_j \\ y = y_k - y_j \end{cases} \tag{5.43}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
C_{1jk}^c &= \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \left\{ (x+a) \ln \left[ \frac{(y+b) + \{(y+b)^2 + (x+a)^2\}^{1/2}}{(y-b) + \{(y-b)^2 + (x+a)^2\}^{1/2}} \right] \right. \\
&+ (y+b) \ln \left[ \frac{(x+a) + \{(y+b)^2 + (x+a)^2\}^{1/2}}{(x-a) + \{(y+b)^2 + (x-a)^2\}^{1/2}} \right] \\
&+ (x-a) \ln \left[ \frac{(y-b) + \{(y-b)^2 + (x-a)^2\}^{1/2}}{(y+b) + \{(y+b)^2 + (x-a)^2\}^{1/2}} \right] \\
&\left. + (y-b) \ln \left[ \frac{(x-a) + \{(y-b)^2 + (x-a)^2\}^{1/2}}{(x+a) + \{(y-b)^2 + (x+a)^2\}^{1/2}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

## 5.5 Algorithmes et résultats

### 5.5.1 Algorithme de résolution

La méthode de résolution adoptée est celle utilisée par JACQUIN [96] et ICARD [185]. Elle s'apparente à une méthode du point fixe. Nous la rappelons brièvement ci-dessous.

D'après ce qui a été présenté plus haut, la traduction mathématique du problème de contact élastique entre les dentures peut se ramener au système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_c} [C_{1kj}^{fl} + C_{1kj}^c + C_{2kj}^{fl} + C_{2kj}^c] p_j + \epsilon^{(k)} - \Lambda = y_k \\ C_m + S_k \cdot \sum_{k=1}^{N_c} [(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{B_p}^{[f]}), \mathbf{n}_{pt}, \mathbf{r}_{1,k}^{[f]}] \cdot p_k = 0 \\ k \in \{1, 2, 3, \dots, N_c\} \end{cases} \tag{5.45}$$

avec

$$\begin{cases} p_k = 0 \\ y_k \geq 0 \\ k \in \{1, 2, 3, \dots, Nc\} \end{cases} \quad (5.46)$$

hors de la zone de contact  $\Gamma$

et

$$\begin{cases} p_k \geq 0 \\ y_k = 0 \\ k \in \{1, 2, 3, \dots, Nc\} \end{cases} \quad (5.47)$$

dans de la zone de contact  $\Gamma$

En posant

$$\begin{cases} z_k = y_k + \Lambda \\ a_k = [\mathbf{x}_p, \mathbf{n}_{pt}, (\mathbf{r}_{1,k}^{[f]} - \mathbf{r}_{B_p}^{[f]})] \\ C_{ik} = C_{1kj}^{fl} + C_{1kj}^c + C_{2kj}^{fl} + C_{2kj}^c \end{cases} \quad (5.48)$$

le système 5.45 devient :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{Nc} C_{kj} p_j + \epsilon^{(k)} = z_k \\ C_m + \sum_{k=1}^{Nc} a_k p_k S_k = 0 \\ p_k (z_k - \Lambda) = 0 \\ k \in \{1, 2, 3, \dots, Nc\} \end{cases} \quad (5.49)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_k \left\{ \sum_{j=1}^{Nc} C_{kj} p_j + \epsilon^{(k)} \right\} = \Lambda p_k \\ C_m + \sum_{k=1}^{Nc} a_k p_k S_k = 0 \end{cases} \quad (5.50)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_k = \frac{\Lambda p_k}{\sum_{j=1}^{Nc} C_{kj} p_j + \epsilon^{(k)}} \\ C_m + \sum_{k=1}^{Nc} a_k p_k S_k = 0 \end{cases} \quad (5.51)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_k = \frac{\Lambda p_k}{\sum_{j=1}^{Nc} C_{kj} p_j + \epsilon^{(k)}} \\ \Lambda \sum_{k=1}^{Nc} \frac{a_k p_k S_k}{\sum_{j=1}^{Nc} C_{kj} p_j + \epsilon^{(k)}} = -C_m \end{cases} \quad (5.52)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_k = \frac{\Lambda p_k}{\sum_{j=1}^{Nc} C_{kj} p_j + \epsilon^{(k)}} \\ \Lambda = \frac{-C_m}{\sum_{k=1}^{Nc} \frac{a_k p_k S_k}{\sum_{j=1}^{Nc} C_{kj} p_j + \epsilon^{(k)}}} \end{cases} \quad (5.53)$$

Il reste un système de  $Nc$  équations à  $Nc$  inconnues :

$$p_k = \frac{-C_m}{\sum_{k=1}^{Nc} \frac{a_k p_k S_k}{\sum_{j=1}^{Nc} C_{kj} p_j + \epsilon^{(k)}}} \frac{p_k}{\sum_{j=1}^{Nc} C_{kj} p_j + \epsilon^{(k)}} \quad k \in \{1, 2, 3, \dots, Nc\} \quad (5.54)$$

Ce système est de la forme  $[P] = G([P])$  où  $[P]$  est le vecteur des  $N_c$  valeurs des pressions. La résolution consiste à construire la suite  $[P_i] = G([P_{i-1}])$ . Le vecteur de départ correspond à une pression uniforme qui vérifie l'équation d'équilibre. Un résidu est construit à partir de la racine carrée de la somme des écarts de pression aux différents points au carré :

$$\text{residu}_i = \sqrt{\sum_{k=1}^{N_c} (p_{k,i} - p_{k-1,i})^2}$$

Pour une centaine d'itérations, les figures 5.23 et 5.24 montrent l'évolution du résidu en fonction du nombre d'itération.

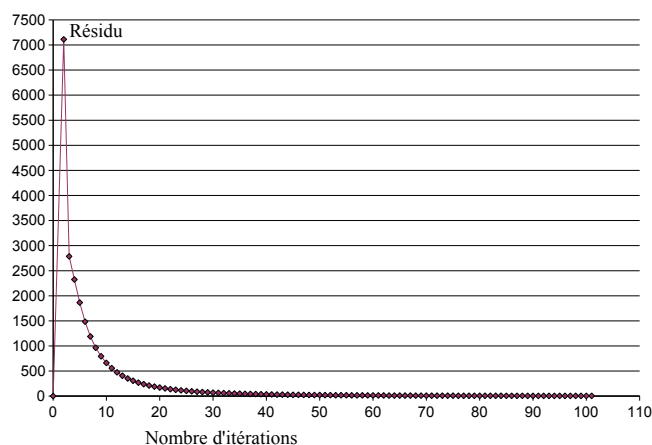


figure 5.23 – Evolution du résidu pour les 100 premières itérations

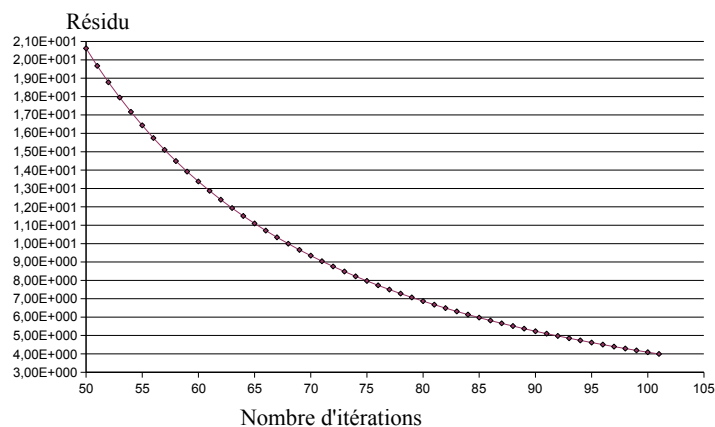


figure 5.24 – Evolution du résidu de l'itération 50 à 100

La figure 5.25 montre un exemple de l'évolution de la valeur du rapprochement.

La détermination du champ de pression  $\{p_k ; k \in \{1, 2, \dots, N_c\}\}$  permet de calculer le rap-

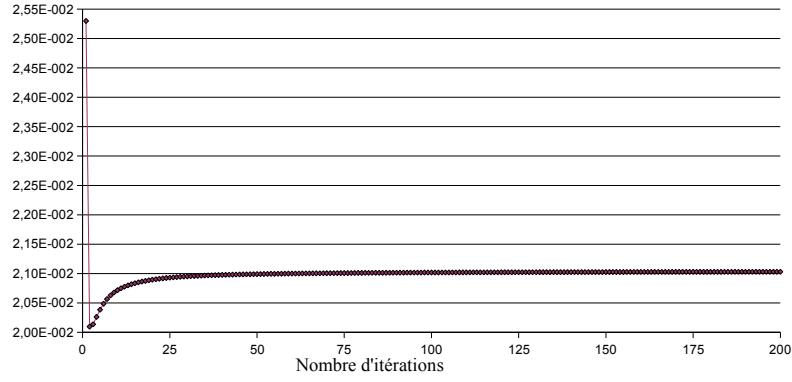


figure 5.25 – Evolution de la valeur du rapprochement

prochement des solides  $\Lambda$  par la relation (5.53). Pour le calcul de la rotation de la roue correspondant à ce rapprochement au niveau du contact, les différentes étapes du calcul sont les suivantes :

1. Calcul de la position d'un point  $\mathbf{r}_{B_r}$  et du vecteur directeur unitaire  $\mathbf{x}_r$  de l'axe de rotation ( $X_2 = X_4$ ) de la roue, dans le repère fixe  $Sf$ .

$$\mathbf{r}_{B_r}^{[f]} = M_{f2} \cdot T [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (5.55)$$

$$\mathbf{x}_r = M_{f2} \cdot T [1 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (5.56)$$

$$(5.57)$$

2. Estimation de l'angle, en valeur absolue, de rotation de la roue  $EC_i^d$  dû à la déformation (figure 5.26)

$$\vartheta = \mathbf{r}_{pt}^{[f]} - \mathbf{r}_{B_r}^{[f]} \quad (5.58)$$

$$EC_i^d = \left| \arctan \left[ \frac{\Lambda \mathbf{n}_{pt}^{[f]} \cdot \mathbf{x}_r \wedge \vartheta}{\|\vartheta\| \cdot \|\mathbf{x}_r \wedge \vartheta\|} \right] \right| \quad (5.59)$$

### 5.5.2 Résultats de l'analyse et optimisation des tolérances pour un engrenage chargé

Les résultats des différents calculs sont nombreux et la vérification de la cohérence de chacun nécessite un certain temps. Nous présentons ici seulement quelques résultats, parmi les plus significatifs.

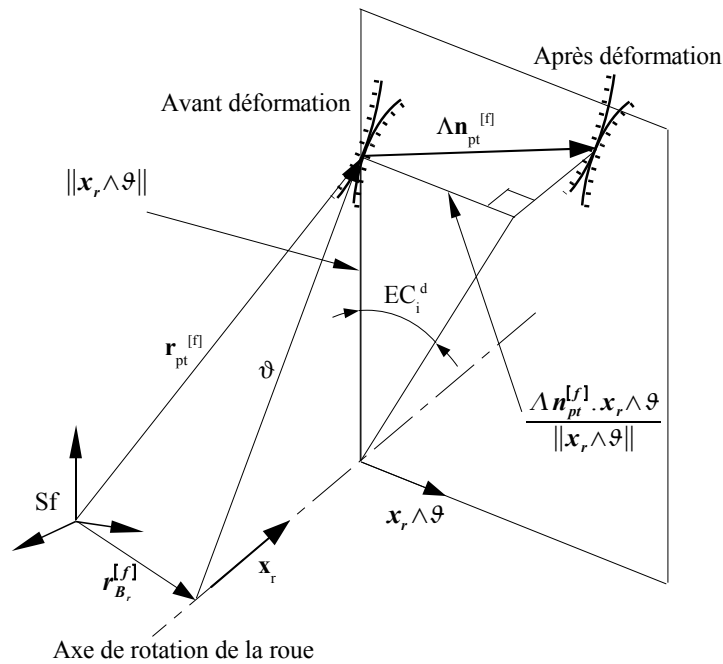


figure 5.26 – Calcul de  $EC_i^d$

## Les champs de pression

Lors qu'il y a un seul contact, le champ de pression estimé est montré figure 5.27 (une erreur d'affichage ne permet pas de visualiser une pression constante par domaine élémentaire). La répartition ressemble à une semi-ellipsoïde. La valeur maximal est proche (moins de 10% constaté) de la valeur estimée par la théorie de HERTZ si la zone de contact n'est pas tronqué. Les écarts entre cette répartition de pression et celle fournie par HERTZ ont 3 origines :

1. pression uniforme sur chaque domaine élémentaire ;
2. le champ des distances entre les surfaces avant déformation n'est pas symétrique ;
3. la *raideur de flexion* varie dans la zone de contact, elle est plus forte en pied et au centre longitudinal de la dent. Cette influence crée une asymétrie au niveau des pressions maximales.

La figure 5.28 illustre le champ de pression dans un cas où il y a double contact. Cette représentation ne permet pas de souligner que les tailles des cellules élémentaires des maillages des 2 zones de contact sont a priori différentes.

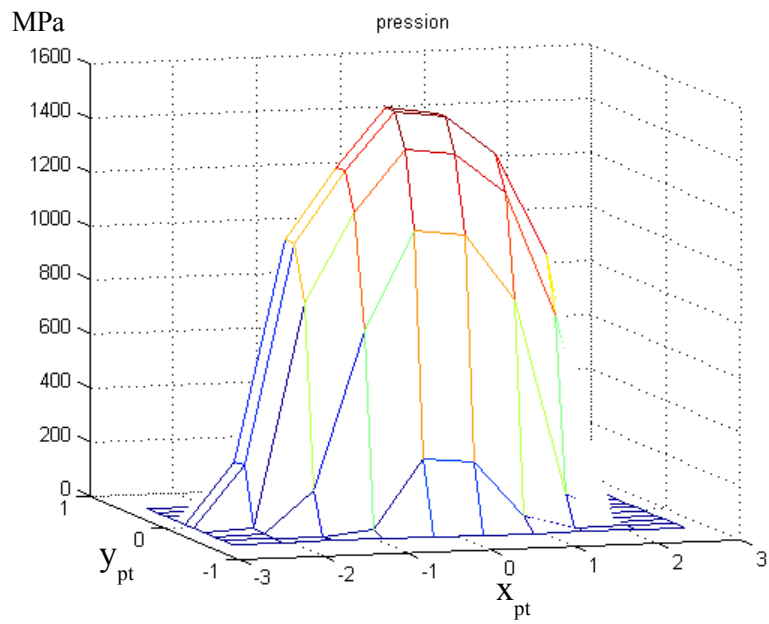


figure 5.27 – Champ de pression pour un contact unique

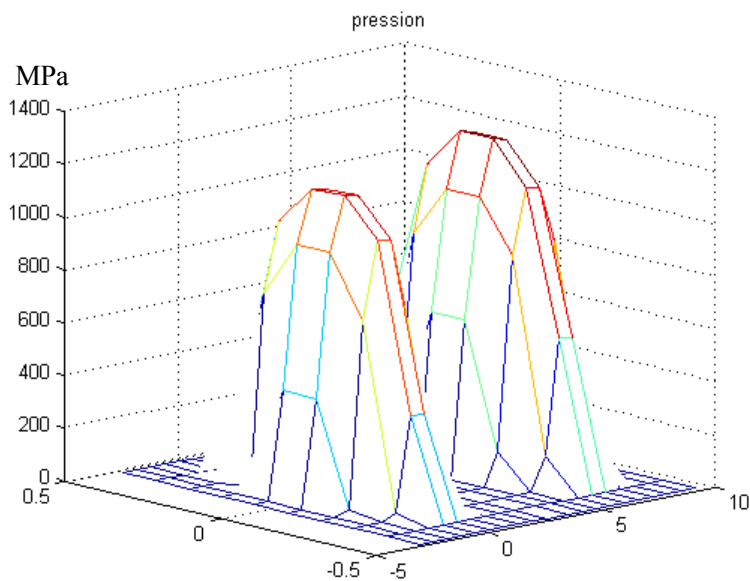


figure 5.28 – Champs de pression pour un double contact

### Ecart cinématique total d'engrènement sous charge

L'analyse de l'engrènement sans déformation (TCA) permet d'estimer l'écart cinématique d'engrènement  $EC_i$  pour chaque position. La simulation mécanique fournit une estimation de l'écart cinématique d'engrènement sous charge (LTCA)  $EC_i^d$ . L'écart cinématique total d'engrè-

nement sous charge est la somme des deux. Globalement, la déformation des pièces accentue le retard de la roue par rapport à sa position théorique et ce retard est plus fort lorsqu'il n'y a qu'un seul contact.

Les figures 5.29 et 5.30 montrent les résultats de TCA et LTCA.

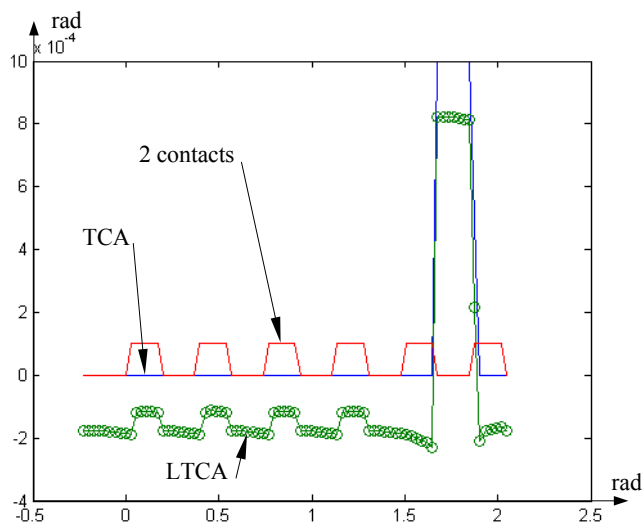


figure 5.29 – Résultats de TCA et LTCA avec une erreur de pas sur la sixième dent de la roue

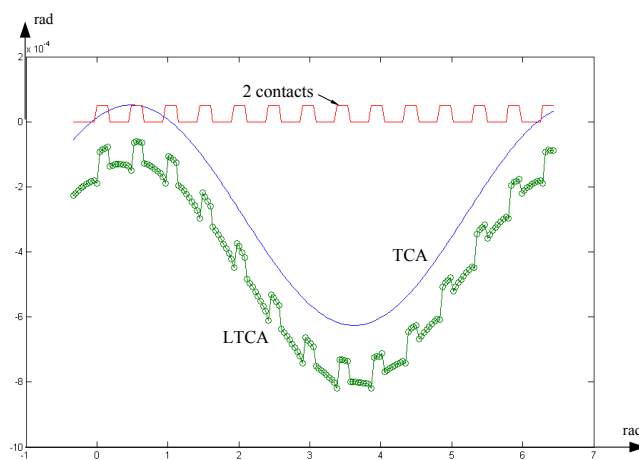


figure 5.30 – Résultats de TCA et LTCA avec un écart d'orientation  $\Gamma_1 = 0,0003$  rad

### 5.5.3 Analyse et optimisation des tolérances pour un engrenage chargé

Le temps nécessaire à l'estimation des écarts cinématiques d'engrènement sous charge est sensiblement plus important (50s par position) que pour un engrènement en géométrie indéformable (0.08 s par position). Aussi, l'analyse des tolérances devient délicate en raison de la durée

nécessaire de calcul. Il serait possible de réaliser une estimation grossière en prenant des raideurs d'engrènement constantes pour une ou deux zones de contacts.

Ces courbes ont une allure proches de celles de la littérature [199, 180, 188]. Elle représentent les écarts cinématiques totaux d'engrènement sous charge et avec la prise en compte des écarts de forme, d'orientation et de position.

## 5.6 Conclusion

En supposant que les matériaux des roues dentées ont un comportement purement élastique (condition(s) de fonctionnement souhaitée), nous avons élaboré un modèle qui permet d'estimer les déformations locales et de volume dues au couple transmis, intégrant les variations géométriques. La résolution de ce problème nous conduit à déterminer la rotation de la roue due aux déformations. De ce résultat, nous en déduisons une estimation des écarts cinématiques d'engrènement sous charge. Une simulation sur plusieurs dents montre clairement l'influence du nombre de dent(s) en contact sur la rigidité.

Il serait encore possible de compléter cette étude selon deux axes :

- Tenir compte de l'influence de l'épaisseur de la jante et de l'effet du voile. Pour cela, il suffirait de redéfinir la géométrie maillée.
- Estimer l'état de contrainte dans les dentures pour chaque position. Cette tâche est plus complexe car elle nécessite la mémorisation de nombreux états de contrainte et la détermination des contraintes dans les zones de contact. Certains chercheurs comme DE VAUJANY [81] ont intégré ces paramètres.

La réalisation de ces deux points permettrait de généraliser notre étude et de l'utiliser pour le dimensionnement des roues dentées.

# Chapitre 6

## Conclusion et discussions

### 6.1 Le travail accompli

L'objectif de cette thèse était de contribuer au développement d'un outil permettant de réaliser l'analyse et la synthèse de la géométrie et des tolérances des engrenages. Nous avons appliqué notre démarche à un engrenage conique à denture droite. Cette problématique, bien qu'ancienne, est aujourd'hui abordée sous un angle nouveau. L'évolution des procédés de fabrication (forgeage) rend nécessaire une réelle synthèse de la géométrie qui n'est plus contrainte par la cinématique de la machine-outil. La pression économique contraint à une réduction des coûts, ce qui est rendu possible par les procédés dits «net shape» et une meilleure maîtrise de l'allocation des tolérances.

La démarche que nous avons mis en œuvre pour atteindre cet objectif se décompose de la façon suivante :

- la synthèse de la géométrie nominale ;
- la modélisation de la géométrie de substitution intégrant les variations géométriques ;
- l'analyse de l'engrènement sans charge (avec écarts géométriques - TCA) ;
- l'analyse de l'engrènement sous charge (avec écarts géométriques - LTCA) ;
- l'analyse et la synthèse des tolérances ;

Elle permet de satisfaire les conditions :

- l'ensemble des pièces du mécanisme doivent s'assembler ;
- il existe une relation cinématique qui lie les paramètres d'entrée et de sortie du mécanisme ;
- le mécanisme doit, lors de son fonctionnement, «résister» aux sollicitations mécaniques, thermiques, . . .

La synthèse de la géométrie des engrenages coniques à denture droite et à développante de cercles sphériques a été proposée dans le chapitre 2. Elle est basée sur des conditions cinématiques d'engrènement attendues et elle s'appuie sur les propriétés géométriques des développantes de

cercles sphériques. La méthode des roulettes est utilisée pour définir les profils actifs des dents ainsi que la forme des surfaces génératrices. Les conditions de montage et de non interférence sont définies ainsi que des caractéristiques telles que le rapport de conduite, les glissements spécifiques et des positions angulaires particulières de l'engrènement. Cette partie a permis de formaliser le modèle mathématique des surfaces actives nominales (avec bombé), des éléments de construction des dentures et un paramétrage, qui sont exploités chez notre partenaire industriel.

A partir de la géométrie nominale, la modélisation de la géométrie de substitution est développée. Le modèle obtenu est un modèle géométrique, paramétrique, complet d'un engrènement, intégrant des écarts de forme, d'orientation, de position ainsi que les jeux (fixes). Il satisfait aux deux contraintes :

- permettre la simulation de l'engrènement (TCA) ;
- intégrer les «habitudes et pratiques» du tolérancement standard des engrènements.

Il est basé sur la description paramétrique des écarts de forme et la description variationnelle ou vectorielle des écarts d'orientation, de position et des jeux.

L'analyse de l'engrènement sans déformation (TCA) est mise en œuvre pour déterminer les écarts cinématiques d'engrènement sans charge. Cette analyse repose sur la détermination du ou des points de contact entre les dentures pour un ensemble de positions du pignon. Pour chaque position, cette détermination nécessite la résolution d'un ou plusieurs systèmes d'équations non linéaires. La connaissance des écarts cinématiques d'engrènement sans charge permet de déterminer, par extension des définitions normalisées (ISO 1328-1), l'écart total composé tangentiel ( $F'_i$ ) et l'écart de saut de dent tangentiel ( $f'_i$ ). La sensibilité des écarts d'engrènement par rapport aux écarts géométriques est clairement montrée.

En considérant le comportement purement élastique des solides, le couple transmis induit des déformations qui perturbent également la régularité de l'entraînement. Pour l'analyse de l'engrènement sous charge (LTCA) et avec des écarts géométriques, les écarts cinématiques engendrés par ces déformations sont estimés pour chaque position. La méthode de résolution est basée sur l'introduction de coefficients d'influence qui permette de caractériser le comportement local au niveau du contact et le comportement global de flexion-cisaillement de la denture. Les coefficients d'influence de contact sont déterminés grâce à la théorie de BOUSSINESQ et CERUTI. Les coefficients d'influence de flexion-cisaillement sont évalués par interpolation d'autres coefficients de même nature, eux-mêmes définis par la méthode des éléments finis. L'analyse de transmission sous charge intégrant les écarts géométriques permet de connaître les écarts cinématiques d'engrènement dans une configuration plus proche de la réalité (écarts géométriques et déformations).

L'analyse et la synthèse des tolérances de l'engrènement sont réalisées de façon statistique en

raison de l'absence de modèle analytique explicite qui décrit le comportement du système. La simulation de Monte Carlo est utilisée pour l'analyse. Le nombre de tirage est optimisé. Une méthode génétique basée sur l'algorithme de GUO pour l'évolution et sur la simulation de Monte Carlo pour l'évaluation de l'adaptation sont les piliers de l'optimisation. La fonction objectif utilisée est le rapport du coût de fabrication estimé de l'ensemble des spécifications géométriques définies, divisé par la probabilité du respect des conditions fonctionnelles pour ces spécifications. Les temps de calcul étant importants, l'optimisation de quelques tolérances est réalisée pour un engrenage indéformable.

## 6.2 Discussions

Un certain nombre de choix, volontaires ou non, jalonnent cette étude, il nous apparaît intéressant de tenter une brève analyse de leurs conséquences.

### 6.2.1 Analyse des tolérances

Pour réaliser l'analyse des tolérances, nous avons supposé que chaque paramètre du modèle géométrique limité est indépendant et peut prendre toute valeur dans son intervalle de variation. Il est peu probable qu'il n'existe aucune corrélation entre les écarts et que les valeurs extrêmes puissent être simultanément prises par tous. D'autre part, n'ayant aucune information sur les pires configurations, nous sommes contraints de réaliser des simulations sur l'ensemble des domaines de variation. Pour accélérer l'analyse et éviter les simulations pour des configurations irréalistes, il serait nécessaire d'introduire de la connaissance théorique et empirique sur les liens entre écarts et comportement. Cette connaissance pourrait être élaborée par la recherche des cas les plus défavorables et la recherche des cas improbables.

### 6.2.2 Modèle de spécification géométrique des engrenages

La représentation mathématique du modèle de spécification proposé est essentiellement basée sur le paramétrage de la géométrie. Il ne tient nullement compte des contraintes liées au contrôle de la géométrie finale ou à celles liées au processus de fabrication. Ces aspects sont étudiés du point de vue du forgeron par C. BAUDOUIN dans ses travaux de thèse, non soutenue à ce jour.

Le modèle proposé repose sur une description paramétrique et vectorielle des écarts, il peut être assimilé à un tolérancement vectoriel où chaque écart est limité indépendamment des autres. Ce modèle devait satisfaire à deux contraintes :

- permettre la simulation de l'engrènement (TCA),
- intégrer les «habitudes» et «pratiques» du tolérancement standard des engrenages.

Ces pratiques peuvent être remises en cause afin de mieux traduire les exigences fonctionnelles. Nous avons ébauché une réflexion sur l'application des frontières virtuelles au cas des engrenages [133]. La complexité du problème nous a contraint à restreindre cette étude à un cas monodimensionnel : le jeu entre dents.

### 6.2.3 Evaluation des écarts cinématiques d'engrènement

La prise en compte de l'effet des déformations des dentures sur les écarts cinématiques permet d'améliorer l'exactitude du modèle. Cependant, ignorer l'influence de la présence d'un fluide lubrifiant restreint notre modèle à des fonctionnements très lents (les contraintes visqueuses sont sensibles aux gradients de vitesse et au nombre de REYNOLDS). D'après SAINOT [38] p. 12, l'épaisseur du film d'huile est comprise entre 0,01 et 1  $\mu m$ . Pour des couples transmis relativement faibles, la séparation des surfaces est du même ordre de grandeur que les déformations de contact et de flexion-cisaillement des dents. La prise en compte de la séparation des surfaces par le film de lubrifiant. Cela nécessiterait de modéliser en plus :

- le comportement du lubrifiant (thermo et piézoviscosité)
- l'écoulement du lubrifiant (équation de REYNOLDS [217] et de continuité)
- le problème thermique (équation de l'énergie)

L'épaisseur du film de lubrifiant tend à écarter les surfaces et va à l'encontre du déplacement résultant des déformations.

Par ailleurs, nous avons implicitement supposé que seules les dentures se déformaient. Or, les actions mécaniques d'engrènement modifient également la géométrie des arbres et carters environnants. Les déplacements résultants au niveau des dentures seraient plus importants, le système plus souple. La prise en compte de l'environnement des roues dentées nécessite sa modélisation (méthode des éléments finis ?) et aura un impact sur les coefficients d'influence de flexion-cisaillement.

Les deux points ci-dessus évoquent des phénomènes antagonistes et seule une modélisation assez précise de chacun d'eux permettrait d'augmenter la précision du modèle.

### 6.2.4 Modèle mécanique

Le modèle mécanique utilisé est celui d'un matériau parfaitement élastique, homogène et isotrope. Or les engrenages subissent généralement un traitement de surface augmentant la dureté superficielle des surfaces actives. Cette hétérogénéité n'est pas prise en compte. Par ailleurs, notre modèle actuel ne permettant pas de connaître l'état de contrainte durant l'engrènement sous charge, il est impossible de vérifier si la limite élastique ou la limite d'endurance sont dépassées.

## 6.3 Ouvertures

Cette contribution apportée à l'analyse et à la synthèse de la géométrie et des tolérances pourrait être développée de différentes façons :

- Modéliser l'influence de la micro-géométrie sur l'état de contrainte [38]
- Simuler l'endommagement par fatigue des dentures [218] (MEF sur Abaqus) : intégrer un modèle de fatigue et réaliser les calculs en parallèle.
- Etendre le tolérancement à l'ensemble des surfaces de l'engrenage et des paramètres matériaux pour analyser et optimiser (conception robuste) leur impact sur les comportements cinématique (écarts cinématiques) et mécanique (état de contrainte) du système.
- Développer des outils d'analyse des courbes expérimentales d'engrénométrie pour estimer les écarts géométriques des roues dentées à partir de ces mesures.
- Optimiser la robustesse du produit et du suivi de son processus de fabrication
- Ajouter au modèle d'analyse des tolérances, de la connaissance théorique et empirique afin d'accélérer son évaluation. L'étude aux pires des cas est envisageable.
- Analyser de nouvelles géométries pour les surfaces actives, définies par des surfaces à pôles [219] et respectant le procédé de fabrication.

Cependant, la puissance de calcul reste une limitation importante pour cette étude. Le temps de calcul peut être réduit sensiblement en utilisant des architectures parallèles puisque l'optimisation par algorithme génétique s'y prête particulièrement bien, en attendant la révolution annoncée des ordinateurs quantiques.



# Annexe A

## Relations Mathématiques

### A.1 Relations géométriques dans les triangles sphériques

Dans l'étude de la géométrie des engrenages coniques, de nombreux raisonnements se font à partir d'éléments géométriques appartenant à une sphère. Avant d'aborder les définitions et démonstrations, ce paragraphe décrit les outils nécessaires pour une manipulation correcte des angles dans les «triangles sphériques».

#### A.1.1 Relations fondamentales

On appelle *triangle sphérique*, un contour fermé, tracé sur une sphère, composé de trois arcs de grands cercles de cette sphère (figure A.1). Il est noté  $\langle x, y, z \rangle$  avec  $x$ ,  $y$  et  $z$  les sommets de celui-ci.

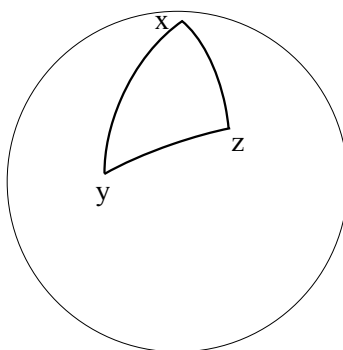


figure A.1 – Triangle sphérique

## Somme des angles

L'angle d'un sommet de triangle sphérique est l'angle entre les vecteurs tangents aux deux arcs à leur point d'intersection (figure A.2).

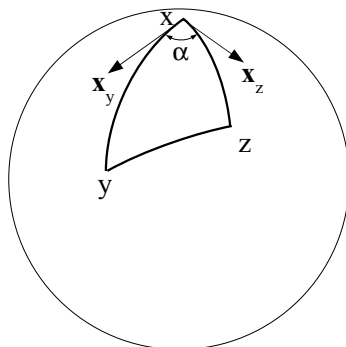


figure A.2 – Angle entre deux arcs de cercle

La première relation remarquable est la suivante :

La somme des angles d'un triangle sphérique est supérieure à  $\pi$  [20].

Exemple : Un huitième de sphère est un triangle sphérique dont chaque sommet est à angle droit.

## Relations entre les angles

La relation fondamentale précédente induit une trigonométrie différente sur la sphère par rapport à celle du plan. Dans cette trigonométrie, interviennent les angles du triangle sphérique ainsi que les angles au centre.

**Angles au centre** Si le triangle sphérique  $\langle x, y, z \rangle$  est tracé sur la sphère unité de centre  $S$ , les longueurs des arcs de grands cercles  $\widehat{xy}$ ,  $\widehat{yz}$ ,  $\widehat{xz}$ , sont également les *angles au centre*  $A = \widehat{ySz}$ ,  $B = \widehat{xSz}$ ,  $C = \widehat{xyS}$  (figure A.3). Ces angles au centre ne sont pas orientés, ils appartiennent à  $]0, \pi[$ .

**Angles du triangle** Les vecteurs tangents aux cotés au sommet  $x$  sont notés  $\mathbf{x}_y$  et  $\mathbf{x}_z$  (figure A.2). Ils s'obtiennent en calculant le second vecteur fourni par l'orthonormalisation de SCHMIDT :

$$\mathbf{x}_y = \frac{\lambda}{\|\lambda\|} \text{ avec } \lambda = \mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{x}$$

$\mathbf{x}_y$  est le vecteur tangent à l'arc de cercle  $\widehat{xy}$  en  $\mathbf{x}$ .

De même :

$$\mathbf{x}_z = \frac{\kappa}{\|\kappa\|} \text{ avec } \kappa = \mathbf{z} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{x}$$

Par définition, les angles du triangle sphérique sont :

$$\alpha = \widehat{\mathbf{x}_y, \mathbf{x}_z}$$

$$\beta = \widehat{\mathbf{y}_x, \mathbf{y}_z}$$

$$\gamma = \widehat{\mathbf{z}_y, \mathbf{z}_x}$$

M. BERGER [20] (p. 399), démontre les deux relations fondamentales de la trigonométrie sphé-

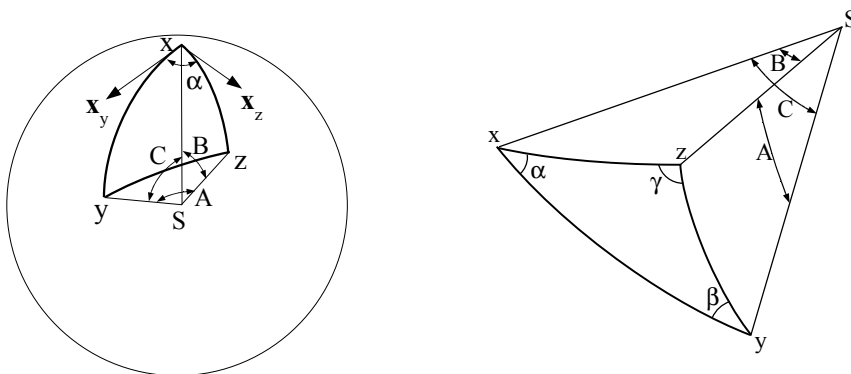


figure A.3 – Triangle sphérique

rique :

$$\boxed{\cos(A) = \cos(B)\cos(C) + \sin(B)\sin(C)\cos(\alpha)} \quad (\text{A.1})$$

$$\boxed{\frac{\sin(A)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(B)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(C)}{\sin(\gamma)}} \quad (\text{A.2})$$

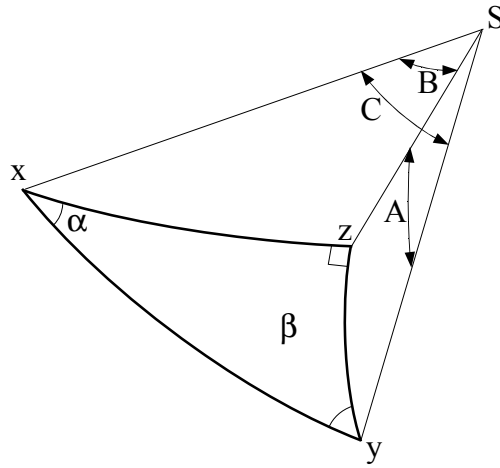


figure A.4 – Triangle sphérique rectangle

### A.1.2 Relations de trigonométrie sphérique pour un triangle rectangle

Dans le cas où le triangle tracé sur une sphère est rectangle en  $z$ , soit  $\gamma = \pi/2$  (figure A.4), les relations trigonométriques usuelles sont les suivantes :

$$\sin(A) = \sin(C)\sin(\alpha) \quad (\text{A.3})$$

$$\sin(B) = \sin(C)\sin(\beta) \quad (\text{A.4})$$

$$\cos(\alpha) = \cos(A)\sin(\beta) \quad (\text{A.5})$$

$$\cos(\beta) = \cos(B)\sin(\alpha) \quad (\text{A.6})$$

$$\operatorname{tg}(A) = \sin(B)\operatorname{tg}(\alpha) \quad (\text{A.7})$$

$$\operatorname{tg}(B) = \sin(A)\operatorname{tg}(\beta) \quad (\text{A.8})$$

$$\cos(C) = \cos(A)\cos(B) \quad (\text{A.9})$$

$$\operatorname{tg}(A) = \operatorname{tg}(C)\cos(\beta) \quad (\text{A.10})$$

$$\operatorname{tg}(B) = \operatorname{tg}(C)\cos(\alpha) \quad (\text{A.11})$$

$$\cos(C) = \operatorname{cotg}(\alpha)\operatorname{cotg}(\beta) \quad (\text{A.12})$$

#### Démonstration des relations précédentes

- Les relations (A.3) et (A.4) s'obtiennent immédiatement à partir de la relation (A.2) avec  $\gamma = \pi/2$ .

- Dans le triangle rectangle en  $\gamma$ , nous pouvons écrire :

$$\cos(A) = \cos(B)\cos(C) + \sin(B)\sin(C)\cos(\alpha)$$

D'où :

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(A) - \cos(B)\cos(C)}{\sin(B)\sin(C)} = \cos(A) \left( \frac{1}{\sin(B)\sin(C)} - \frac{\cos(B)\cos(C)}{\cos(A)\sin(B)\sin(C)} \right)$$

En utilisant (A.2) :

$$\cos(\alpha) = \cos(A) \frac{\sin(\beta)}{\sin^2(B)} \left( 1 - \frac{\cos(B)\cos(C)}{\cos(A)} \right)$$

D'après (A.1) :  $\cos(C) = \cos(A)\cos(B)$  d'où :

$$\cos(\alpha) = \cos(A) \frac{\sin(\beta)}{\sin^2(B)} (1 - \cos^2(B)) = \cos(A)\sin(\beta)$$

- La relation (A.7) s'obtient en multipliant (A.3) et (A.5) et en utilisant (A.4).
- La relation (A.9) est triviale à partir de (A.1).
- (A.10) s'obtient en faisant apparaître  $tg(C)$  avec (A.3) et (A.9), puis en utilisant (A.6).
- La relation (A.12) est une combinaison de (A.5), (A.6) et (A.9).

## A.2 Transformation de coordonnées par matrices homogènes

Considérons deux systèmes de coordonnées à base orthonormale  $S_m(x_m, y_m, z_m)$  et  $S_n(x_n, y_n, z_n)$  (figure A.5). Le point  $M$  est représenté dans le système  $S_m$  par le vecteur position

$$\mathbf{r}_m = {}^T [x_m \ y_m \ z_m \ 1]$$

La position du même point  $M$  peut également être déterminée dans le système  $S_n$  par le vecteur

$$\mathbf{r}_n = {}^T [x_n \ y_n \ z_n \ 1]$$

Il existe une matrice de passage  $M_{nm}$  qui permet d'exprimer la position du point  $M$  dans le repère  $S_n$  à partir de sa position dans  $S_m$  :

$$\mathbf{r}_n = M_{nm}\mathbf{r}_m$$

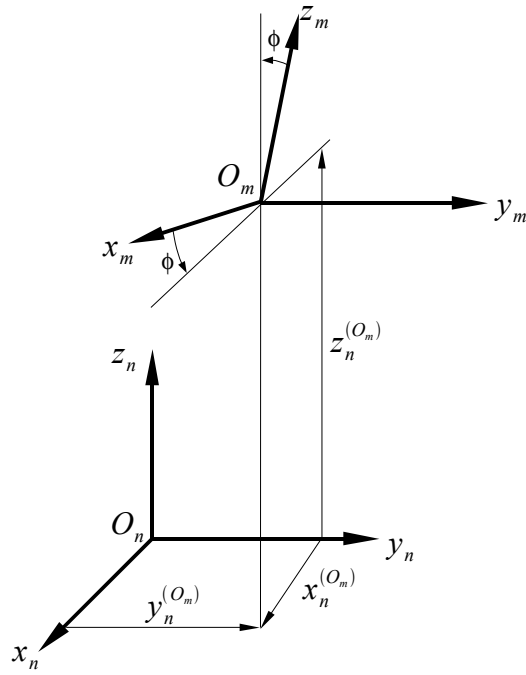


figure A.5 – Position relative des repères  $S_m$  et  $S_n$

La matrice  $M_{nm}$  est représentée par

$$\begin{aligned}
 M_{nm} &= \begin{bmatrix} (i_n \cdot i_m) & (i_n \cdot j_m) & (i_n \cdot k_m) & (\overline{O_n O_m} \cdot i_n) \\ (j_n \cdot i_m) & (j_n \cdot j_m) & (j_n \cdot k_m) & (\overline{O_n O_m} \cdot j_n) \\ (k_n \cdot i_m) & (k_n \cdot j_m) & (k_n \cdot k_m) & (\overline{O_n O_m} \cdot k_n) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\widehat{x_n, x_m}) & \cos(\widehat{x_n, y_m}) & \cos(\widehat{x_n, z_m}) & x_n^{(O_m)} \\ \cos(\widehat{y_n, x_m}) & \cos(\widehat{y_n, y_m}) & \cos(\widehat{y_n, z_m}) & y_n^{(O_m)} \\ \cos(\widehat{z_n, x_m}) & \cos(\widehat{z_n, y_m}) & \cos(\widehat{z_n, z_m}) & z_n^{(O_m)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

$(i_n, j_n, k_n)$  représentent les vecteurs directeurs unitaires des axes du «nouveau» repère et  $(i_m, j_m, k_m)$  sont les vecteurs directeurs unitaires des axes de l'ancien repère.  $O_n$  et  $O_m$  sont les origines des deux systèmes de coordonnées.

### A.3 Détermination de points équidistants sur une développante de cercle

Le problème est le suivant : comment déterminer les coordonnées de points appartenant à une développante de cercle de façon à ce qu'ils soient équidistants.

L'équation paramétrique d'une développante de cercle dans un repère cylindrique est :

$$\begin{cases} \rho = \frac{r_b}{\cos(\alpha)} \\ \theta = \tan(\alpha) - \alpha = \text{inv}(\alpha) \end{cases}$$

Si nous prenons une suite arithmétique de valeurs du paramètre  $\alpha$ , la distance entre les points obtenus sur la développante de cercle est croissante en s'éloignant du cercle de base.

On choisit de construire des points équidistants en abscisse curviligne et non suivant la distance euclidienne.

L'abscisse curviligne  $s$  d'une courbe paramétrée par  $\{\vec{x}(\alpha), \alpha \in D\}$  est définie par :

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{x}'(\tau)\| d\tau$$

**Calculs de  $\|\vec{x}'(\alpha)\|$**  Pour tout  $\alpha \in D$ ,

$$\begin{aligned} \vec{x}(\alpha) &= \rho \vec{e}_r \\ \vec{x}'(\alpha) &= \rho' \vec{e}_r + \rho (\vec{e}_r)' \\ &= \frac{r_b \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^2} \vec{e}_r + \frac{r_b}{\cos(\alpha)} \left( \frac{1}{\cos(\alpha)^2} - 1 \right) \vec{e}_\theta \\ \|\vec{x}'(\alpha)\| &= \sqrt{\frac{r_b}{\cos(\alpha)} \left\{ \left[ \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right]^2 + \left[ \frac{1}{\cos(\alpha)^2} - 1 \right]^2 \right\}} \\ &= r_b \frac{\tan(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \end{aligned}$$

L'abscisse curviligne se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t r_b \frac{\sin(\tau)}{\cos^3(\tau)} d\tau \\ s(t) &= \left[ \frac{r_b}{2 \cos^2(\tau)} \right]_0^t \\ s(t) &= \frac{r_b}{2} \left( \frac{1}{\cos^2(t)} - 1 \right) \end{aligned}$$

Soit  $p$  la distance curviligne entre deux points consécutifs. Les points sur la développante

seront régulièrement espacés si leur abscisse curviligne est de la forme  $s(t_i) = kp$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

$$pk = \frac{r_b}{2} \left( \frac{1}{\cos^2(t_i)} - 1 \right)$$

Ce qui conduit à :

$$t_i = \arccos \left( \sqrt{\frac{r_b}{2kp + r_b}} \right)$$

## A.4 Détermination de l'abscisse curviligne d'une développante de cercle sphérique

Une développante de cercle sphérique est déterminée par le système :

$$\begin{cases} X = v[b \cos(au)] \\ Y = v[a \cos(u) \cos(au) + \sin(au) \sin(u)] \\ Z = v[a \sin(u) \cos(au) - \cos(u) \sin(au)] \end{cases}$$

Avec :  $v$  : le rayon de la sphère sur laquelle est tracée la développante de cercle sphérique

$\delta_b$  : demi angle du cône de base

$$a = \sin(\delta_b)$$

$$b = \cos(\delta_b)$$

L'abscisse curviligne est déterminée par :

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} du$$

Calcul de la vitesse :

$$\begin{cases} X' = -v[ab \cos(au)] \\ Y' = v[-a \sin(u) \cos(au) - a^2 \cos(u) \sin(au) + a \sin(u) \cos(au) + \sin(au) \cos(u)] \\ Z' = v[a \cos(u) \cos(au) - a^2 \sin(u) \sin(au) + \sin(u) \sin(au) - a \cos(u) \cos(au)] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X' = -v[ab \cos(au)] \\ Y' = v[\sin(au) \cos(u) - a^2 \cos(u) \sin(au)] \\ Z' = v[\sin(u) \sin(au) - a^2 \sin(u) \sin(au)] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X' = -abv \cos(au) \\ Y' = v \sin(au) \cos(u) b^2 \\ Z' = v \sin(u) \sin(au) b^2 \end{cases}$$

d'où :

$$\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} = bv \sin(au)$$

L'abscisse curviligne a pour expression :

$$s(t) = \int_0^t bv \sin(au) du = \frac{bv}{a} [1 - \cos(at)]$$

La figure A.6 met en évidence la répartition des points de la développante de cercle sphérique pour une progression régulière du paramètre (à gauche) et selon une progression équidistante en abscisse curviligne (à droite).

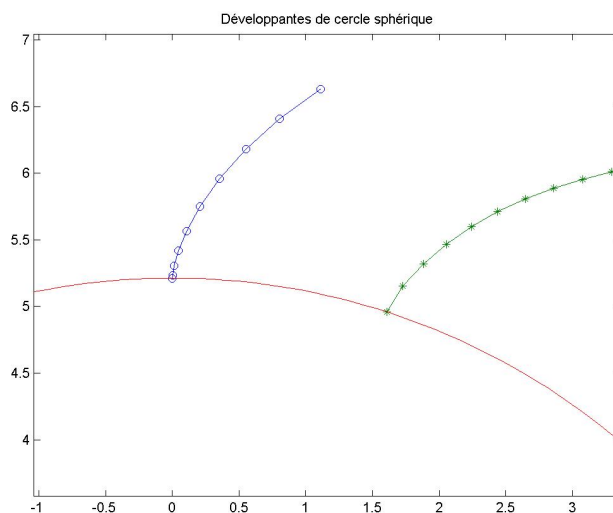


figure A.6 – Points sur la développante de cercle sphérique

## A.5 Définition des fonctions d'interpolation linéaire à deux paramètres

### Fonctions linéaire élémentaires

L'interpolation linéaire est basée sur les fonctions élémentaires  $H_0$  et  $H_1$  :

$$H_0 : \begin{cases} [0; 1] \longrightarrow [0; 1] \\ t \longmapsto t \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

et

$$H_1 : \begin{cases} [0; 1] \longrightarrow [0; 1] \\ t \longmapsto 1 - t \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

### A.5.1 Fonctions d'interpolation linéaire à 2 paramètres

Sur le domaine  $[0; 1] \times [0; 1]$ , les fonctions élémentaires permettent de définir des fonctions de deux paramètres qui valent 0 en trois sommet et l'unité sur le dernier :

$$\begin{aligned}
 - \Psi_1 : & \begin{cases} [0; 1] \times [0; 1] \longrightarrow [0; 1] \\ (u, v) \longmapsto H_1(u)H_1(v) \end{cases} \quad \text{vaut 1 en } (0,0) \text{ et 0 en } (0;1), (1;0) \text{ et } (1;1) \\
 - \Psi_2 : & \begin{cases} [0; 1] \times [0; 1] \longrightarrow [0; 1] \\ (u, v) \longmapsto H_0(u)H_1(v) \end{cases} \quad \text{vaut 1 en } (1,0) \text{ et 0 en } (0;1), (0;0) \text{ et } (1;1) \\
 - \Psi_3 : & \begin{cases} [0; 1] \times [0; 1] \longrightarrow [0; 1] \\ (u, v) \longmapsto H_0(u)H_0(v) \end{cases} \quad \text{vaut 1 en } (1,1) \text{ et 0 en } (0;1), (1;0) \text{ et } (0;0) \\
 - \Psi_4 : & \begin{cases} [0; 1] \times [0; 1] \longrightarrow [0; 1] \\ (u, v) \longmapsto H_1(u)H_0(v) \end{cases} \quad \text{vaut 1 en } (0;1) \text{ et 0 en } (0;0), (1;0) \text{ et } (1;1)
 \end{aligned}$$

### A.5.2 Interpolation linéaire d'une fonction de 2 paramètres

Pour une fonction qui vaut :

$$B_{00} \quad \text{en} \quad (0,0)$$

$$B_{10} \quad \text{en} \quad (1,0)$$

$$B_{11} \quad \text{en} \quad (1,1)$$

$$B_{01} \quad \text{en} \quad (0,1)$$

La fonction interpolante est définie par :

$$\begin{cases} [0; 1] \times [0; 1] \longrightarrow [0; 1] \\ (u, v) \longmapsto B_{00}H_1(u)H_1(v) + B_{10}H_1(u)H_0(v) + B_{11}H_0(u)H_0(v) + B_{01}H_0(u)H_1(v) \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

## Annexe B

# Synthèse de la géométrie et analyse des tolérances des engrenages de WILDHABER-NOVIKOV à axes concourants



## Annexe C

# Modèle numérique pour l'analyse de l'influence du bombé dans le cas du contact unique dans l'engrenage

L'analyse de l'influence des paramètres du bombé (position et valeur du maximum) a été faite de façon numérique, par la méthode des éléments finis. En effet, la théorie des contacts étroits ne permet pas de tenir compte de la troncature de la zone de contact et du mouvement circulaire des surfaces. Cette étude a été réalisée en 2001, ce qui explique quelques différences sur le modèle géométrique.

L'objectif de cette étude est la détermination de la position optimale du maximum du bombé longitudinal et l'estimation de l'influence de la valeur du maximum sur l'état de contrainte à proximité de la zone de contact. Pour cette raison, l'exactitude du modèle numérique n'est pas recherché prioritairement puisque l'analyse porte sur des comparaisons des valeurs de différentes grandeurs.

Le modèle numérique s'inspire largement du travail de MM. SASSI, DESVIGNES et FOULON [177] et la plupart de leurs choix ont été repris : le problème est traité par le logiciel ABAQUS et les éléments de volume qui composent le maillage sont des éléments briques à 8 nœuds et à interpolation linéaire (C3D8).

### C.1 Définition de la surface bombée

Dans cette étude, la forme du bombé est différente de celle présentée au paragraphe 3.2.1. Sa définition est la suivante :

Le bombé est obtenu en en ajoutant la valeur de la fonction  $bombe(v_1)$  suivant la normale à

la position de chaque point de la surface réglée en développante de cercle sphérique (figure C.1) :

$$\mathbf{r}_{1B'}(u_1, v_1) = \mathbf{r}_1(u_1, v_1) + \mathbf{n}_1 \text{bombe}(v_1) \quad (\text{C.1})$$

Avec  $\mathbf{r}_1(u_1, v_1)$  définis par 2.25.

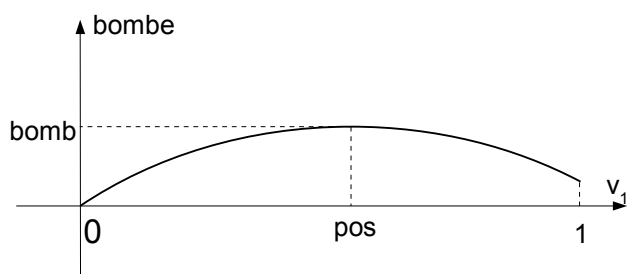


figure C.1 – Forme du bombé pour l'étude de contact

La fonction du bombé  $\text{bombe}(v_1)$  est définie par un arc de cercle dont les propriétés sont détaillées ci-dessous :

- A la pointe, le bombé est nul.
- La valeur maximale du bombé est  $\text{bomb}$ .
- Le maximum du bombé se situe à  $v_1^* = \text{pos}$ .

Pour simplifier le paramétrage, on effectue le changement de variables suivant :

$$v_1 \in [R_p; R_g] \quad \Rightarrow \quad v_1^* \in [0; 1] : v_1^* = \frac{v_1 - R_p}{R_g - R_p}$$

L'équation de ce bombé est :

$$\text{bombe}(v_1^*) = \frac{\text{bomb}^2 - \text{pos}^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\text{bomb}^2 + \text{pos}^2}{2\text{bomb}}\right)^2 - (v_1^* - \text{pos})^2} \quad (\text{C.2})$$

## C.2 Le modèle numérique

Le fichier *Input* est le fichier d'entrée du solveur d'ABAQUS. Il contient la définition complète du modèle (coordonnées des nœuds, éléments, groupes d'éléments, ...) ainsi que les hypothèses et la chronologie du problème (conditions aux limites, conditions initiales, pilotage, ...).

Sa génération est automatisée afin de pouvoir analyser rapidement différentes géométries.

### C.2.1 Hypothèses :

- Les pièces se comportent de façon purement élastique.
- La surface de la roue est une surface conique en développante de cercle sphérique. La surface du pignon est bombée dans le sens longitudinal (voir paragraphe C.1).
- L'étude porte sur le contact entre deux profils de denture. Les dimensions de cette zone de contact et des zones affectées par celui-ci sont relativement faibles par rapport à la taille des roues dentées. Il n'est donc pas nécessaire de modéliser l'ensemble du profil de denture. Les zones modélisées sont représentées sur la figure C.2.

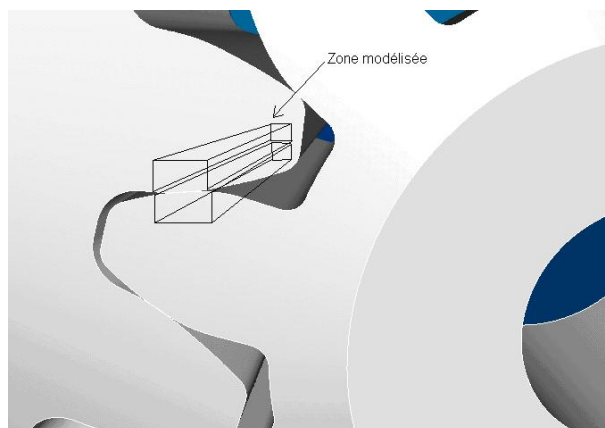


figure C.2 – Zones modélisées pour l'étude numérique du bombé

### C.2.2 Génération des maillages :

Connaissant la forme analytique des surfaces en contact, souhaitant minimiser les erreurs numériques et ne disposant pas de mailleur automatique, nous avons dû créer un programme de génération du maillage.

Les paramètres d'entrée de ce programme permettent de définir :

- les surfaces des dentures ( $z_1, z_2, \Sigma_0, \alpha \dots$ ),
- les limites des zones maillées ( $u_{1mimi}, u_{1maxi}, v_{1mimi}, v_{1maxi}, u_{2mimi}, u_{2maxi}, v_{2mimi}, v_{2maxi},$  *profondeur1* et *profondeur2*),
- les nombres d'éléments dans chaque direction,
- la progression de la taille des éléments dans chaque direction.

Les volumes sont générés par un déplacement suivant la normale à la surface, au point milieu de celle-ci, du côté du centre de courbure.

Les coordonnées des nœuds du maillage sont obtenues en prenant les séries de valeurs pour les 3 paramètres de chacun des volumes définis précédemment.

Concernant le choix du nombre d'éléments, un compromis doit être trouvé entre la taille

du problème (nombre d'éléments qui doit permettre d'obtenir un modèle le plus représentatif possible de la réalité) et le temps de calcul. Dans notre problème, la forme de la surface en contact est très importante, il est donc nécessaire d'avoir un nombre d'éléments important dans la direction de courbure maximale pour éviter une mauvaise discrétisation de cette surface. De plus, pour estimer correctement l'état de contrainte en sous couche, il est également nécessaire d'avoir un raffinement du maillage sous les surfaces. Afin de diminuer le temps de calcul et l'espace mémoire requis, seul le pignon possède un maillage serré et l'analyse du contact se fait sur cette pièce. La surface de la roue, sans bombé, est maillée grossièrement suivant la profondeur (figure C.3).

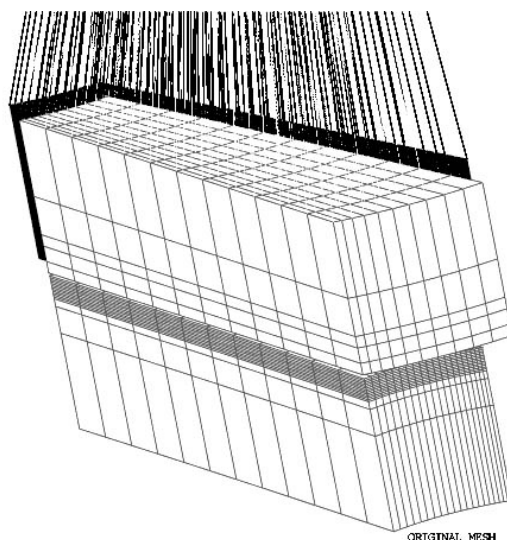


figure C.3 – Maillage de l'élément du pignon et de la roue

### C.2.3 Conditions initiales :

Les surfaces du pignon et de la roue sont disposées de façon à ce que la distance minimale entre elles soit de quelques dixièmes de millimètre de manière à obtenir rapidement le contact.

### C.2.4 Conditions aux limites

L'utilisation de cette méthode numérique permet de considérer les déplacements réels des surfaces (mouvement de rotation) alors que la méthode analytique impose une translation suivant la direction normale aux surfaces au point de contact, avant déformation. Pour cela, les deux volumes discrétisés sont liés par des éléments *poutres indéformables* (RB3D2) à leur axe de rotation respectif. Ce sont les nœuds des faces opposées aux surfaces en contact qui sont reliés

à ces éléments. Cette technique permet d'imposer des déplacements ou des couples aux volumes en contact.

**Evolution temporelle** La convergence des algorithmes d'ABAQUS pour le problème non linéaire du contact est délicate lorsque le pilotage se fait en effort. Or c'est bien un moment ou un effort presseur qui est la donnée connue du problème de contact. La meilleure stratégie pour respecter les causalités tout en s'accommodant des contraintes numériques est de traiter le problème en deux temps :

1. La roue est fixe et une rotation est imposée sur le pignon de façon à ce que les surfaces soient en contact. Ce déplacement doit être mesuré afin que les efforts résultants restent dans un domaine acceptable. Cette première phase permet de réaliser le contact.
2. Le pignon étant fixe, on impose le moment désiré sur la roue.

### C.2.5 Gestion du contact

Le contact dans ABAQUS est traité avec une approche *Maître/Esclave*. Dans ce cas, les nœuds de la surface Esclave viennent en contact avec les segments de la surface Maître (figure C.4).

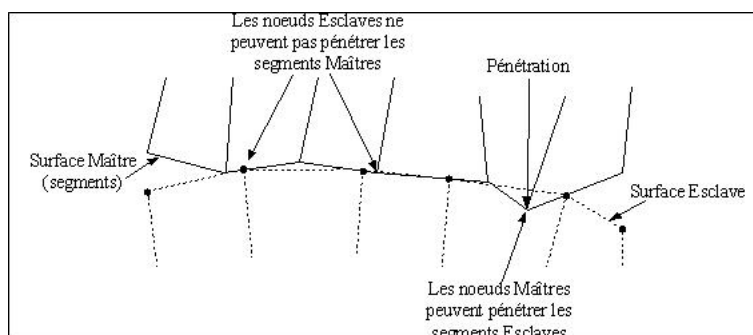


figure C.4 – Principe du contact sous ABAQUS

Dans notre cas, les deux surfaces étant convexes, le choix des surfaces Maître et Esclave a peu d'importance car il n'est pas possible qu'il y ait pénétration d'une surface dans l'autre. La surface du pignon à laquelle un bombé est ajouté est choisie comme surface Esclave et la surface de la roue comme surface Maître.

### C.2.6 Traitement des résultats :

Les variables observées pour caractériser le contact sont les suivantes :

- La largeur et la longueur de la surface de contact (déterminées à vue) ;
- La pression maximale appliquée sur la surface de contact ;

- La position et la profondeur du cisaillement maximal ;
- La position et la profondeur du maximum de la contrainte équivalente de VON MISES.

### C.2.7 Validation :

Une étude de validité de résultats numériques par rapport aux résultats analytiques ([173, 175, 176]) est menée. Pour se rapprocher du modèle simulant le contact entre les dentures, ce modèle est constitué d'un cylindre et d'un tonneau (figure C.5)

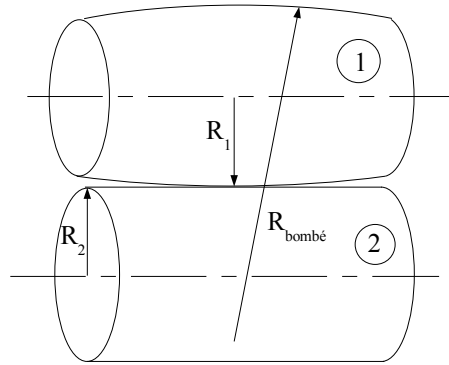


figure C.5 – Modèle du test de référence

Avec ce modèle, toutes les hypothèses du modèle de HERTZ sont respectées à condition d'appliquer un effort presseur  $F$  permettant d'obtenir un contact non conforme et donc des dimensions de zone de contact petites devant les dimensions des solides.

Toujours pour des problèmes de taille du modèle, seules les parties à proximité de la zone de contact sont modélisées pour avoir une taille d'élément relativement faible pour une taille de modèle acceptable (figure C.6).

### C.2.8 Résultats du problème du contact

Le modèle numérique permet de visualiser le champ de pression de contact (figure C.7) et les isocontraintes de VON MISES (figure C.8).

Les résultats obtenus sont les suivants (C.1) :

Lors des deux analyses effectuées, les résultats obtenus avec le modèle analytique et la simulation avec ABAQUS sont relativement proches mis à part pour la largeur de la zone de contact, le rapprochement et la pression maximale de contact.

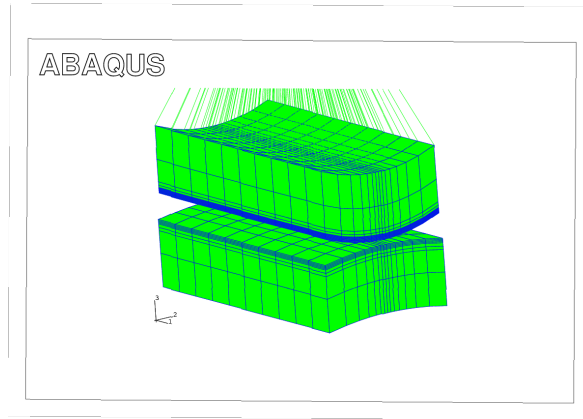


figure C.6 – Maillage du test de référence

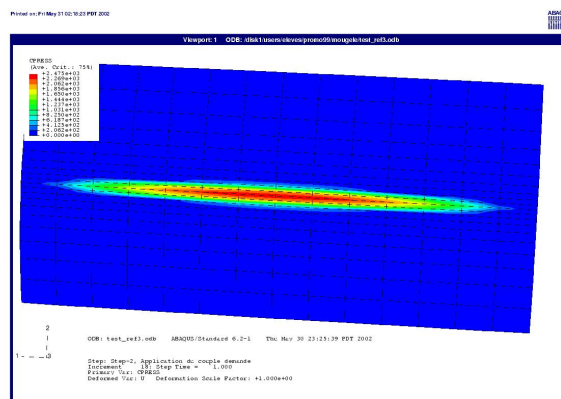


figure C.7 – Pression de contact

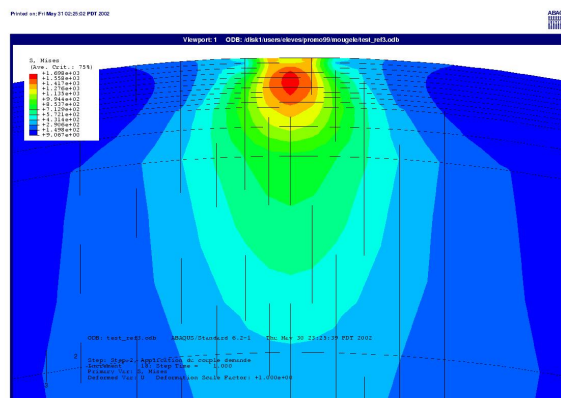


figure C.8 – Isocontraintes de VON MISES

Les écarts sur les rapprochements et les valeurs des pressions de contact sont vraisemblablement la conséquence de l'écart sur la largeur du contact. En effet, la taille de la zone de contact, étant plus importante avec le modèle numérique, la pression est répartie sur une zone

Force imposée : 20 000 N

	Analytique	ABAQUS	Unité	Ecart
Rapprochement	0,0364	0,0302	mm	17,03%
Longueur	10,61	10,75	mm	1,32%
Largeur	0,351	0,65	mm	85,19%
Pression maximale	2560	2110	MPa	17,58%
Cisaillement maximal	789	750	MPa	4,94%
Profondeur du cisaillement maximal	0,27	0,275	mm	1,85%
Contrainte de VON MISES maximale	1444	1420	MPa	1,66%
Altitude de la contrainte de VM maximale	0,249	0,24	mm	3,61%

tableau C.1 – Résultats pour F=20 000 N

Force imposée : 25 000 N (C.2)

	Analytique	ABAQUS	Unité	Ecart
Rapprochement	0,0422	0,0328	mm	22,3%
Longueur	11,43	11,5	mm	0,61%
Largeur	0,38	0,75	mm	97,4%
Pression maximale	2760	2350	MPa	14,9%
Cisaillement maximal	850	845	MPa	0,6%
Profondeur du cisaillement maximal	0,296	0,30	mm	1,4%
Contrainte de VON MISES maximale	1555	1580	MPa	1,6%
Altitude de la contrainte de VM maximale	0,268	0,275	mm	2,6%

tableau C.2 – Résultats pour F=25 000 N

plus importante, le maximum est donc plus faible ainsi que la pression moyenne. La contrainte normale au contact étant moindre, les déplacements le sont également. L'écart sur l'estimation de la largeur de contact peut avoir deux sources :

1. Le déplacement relatif des solides est une translation dans la théorie de HERTZ et dans le modèle numérique, c'est une rotation qui est imposée.
2. La discrétisation des surfaces dans les directions de plus grande courbure induit une facet-tisation et l'apparition d'arrêtes vives qui modifient la déformation des surfaces en contact dans ces directions. Malgré le soin apporté au maillage, le raffinement du maillage dans cette direction est encore insuffisant, i.e. le rapport entre la largeur de la zone de contact et la distance entre les nœuds est trop faible. En effet, on constate que la largeur de la zone de contact diminue lorsque le nombre d'éléments augmente dans cette direction, et qu'elle se rapproche du résultat obtenu avec le modèle de HERTZ.

Cette étude numérique n'a pas été d'avantage développée, malgré ses faiblesses, car elle fut jugée suffisante pour réaliser l'analyse attendue sur l'influence relative des paramètres du bombé.

$z_1$	=	10
$z_2$	=	15
$R_g$	=	62,5
$R_p$	=	37,5
$\alpha$	=	$\pi/9$

tableau C.3 – Paramètres des dents pour l'étude de l'influence du bombé

### C.3 Etude de l'influence du maximum de bombé

Plusieurs simulations sont réalisées pour montrer la variation du maximum de la pression de contact entre les deux profils de denture en fonction du maximum du bombé. Les simulations sont effectuées sur des profils de denture dont les caractéristiques sont présentés dans la tableau C.3 et les résultats figurent dans le tableau C.4 et sont présentés figure C.9.

Le couple appliqué à la roue de 2710 Nm et une position de bombé égale à  $\frac{2R_g+R_p}{3}$ .

Pression maximale obtenue (en MPa)		
Bombé maximum (en mm)	Analytique	ABAQUS
0	3288	3670
0,01	3541	3680
0,02	3726	3670
0,03	3861	3700
0,04	3970	3770
0,05	4062	3840
0,06	4141	3920
0,1	4390	4130

tableau C.4 – Résultats de l'influence du bombé

Au vue de ces résultats (tableau C.4), la valeur du bombé influe sur la pression de contact maximale observée. En effet, celle-ci augmente avec le maximum du bombé. On peut également observer une légère diminution de l'aire de la zone de contact. Les résultats de la méthode de HERTZ ne prennent pas en compte la troncature de la zone de contact pour les faibles bombés et la précision de l'évaluation numérique par la méthode des éléments finis dépend du raffinement du maillage. Par conséquent, pour les faibles valeurs du bombé, les valeurs obtenues par ABAQUS sont jugées plus sûres et pour les valeurs plus importantes, les valeurs de la méthode de HERTZ sont sans doute meilleures.

Mais cette influence a une importance relativement faible sur l'état de contrainte au niveau du contact. En effet, l'augmentation n'est que de 16,4% lorsque la denture passe d'un bombé nul à un bombé maximum de 0,1 mm et donc d'une courbure longitudinale nulle à  $0.0013 \text{ mm}^{-1}$ . Ces

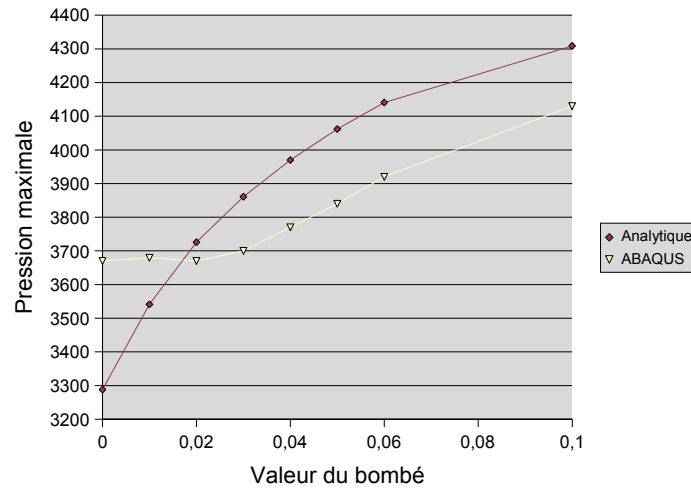


figure C.9 – Résultats de l’influence du bombé

résultats ne sont pas suffisamment significatifs pour permettre le choix de la valeur du maximum du bombé. Celui-ci doit être suffisant pour permettre de localiser la zone de contact à proximité de l’endroit retenu pour un certain domaine des écarts de forme, d’orientation et de position mais juste nécessaire pour ne pas pénaliser la tenue en service.

## C.4 Etude de l’influence de la position du bombé

Les simulations suivantes sont effectuées avec un couple appliqué à la roue de 2710 Nm et un maximum de bombé de 0,04 mm.

La position du maximum de bombé est modifiée, elle est repérée par la valeur du paramètre  $v_B^* = \frac{v_B - R_p}{R_g - R_p}$ . Les résultats pour la pression maximale ( $P_{maxi}$ ) de contact, la contrainte maximale de cisaillement ( $\tau_{max}$ ) et la contrainte équivalente de VON MISES maximale ( $\sigma_{max}$ ) sont données dans le tableau C.5 et représenté figure C.10.

Position	0,50	0,58	0,63	0,67	0,71	0,75	0,83
$Pression_{max}$ (Mpa)	3950	3810	3760	3770	3740	3760	3810
$\tau_{max}$ (Mpa)	3130	3120	3030	3080	3070	3080	3110
$\sigma_{max}$ (Mpa)	2810	2800	2780	2770	2770	2780	2805

tableau C.5 – Résultats pour différentes positions du maximum du bombé

La position du maximum de bombé influe également sur l’état de contrainte du matériau. Si le bombé est positionné vers les extrémités de la denture, la pression de contact augmente fortement à cause d’une diminution de la surface de contact (troncature de cette zone). Le phénomène est plus important à la pointe des dents car les courbures de profil sont plus faibles et, pour un

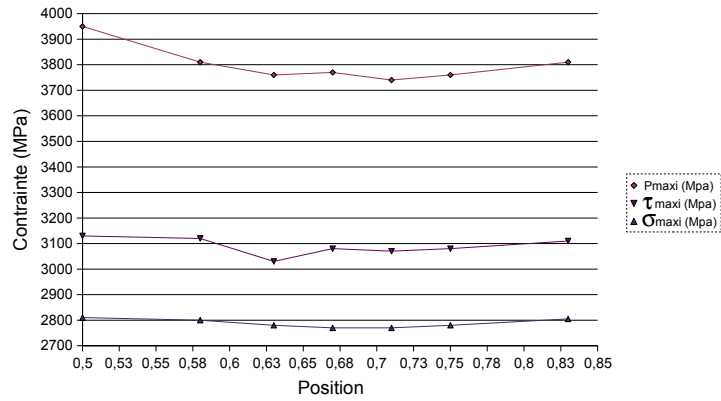


figure C.10 – Résultats pour différentes positions du maximum du bombé

couple donné, l'effort de contact augmente en raison de la diminution du bras de levier.

L'influence de la position du bombé pour  $v_B^*$  comprise entre 0,5 et 0,83 est assez faible sur les paramètres observés. Il est néanmoins possible de définir approximativement un intervalle pour cette position où l'état de contrainte est minimale : l'intervalle choisi est [0,63; 0,75]. En pratique, le bombé est positionné au 2/3 de la longueur de la dent, à partir de la pointe.

## C.5 Conclusion pour le dimensionnement du bombé

Il est clair d'après cette analyse que la position optimale du bombé se situe à environ 2/3 de la longueur de la dent, à partir de la pointe. Ce résultat vient confirmer notre intuition et montre que cet optimum est assez stable, robuste.

Quand à la valeur du maximum du bombé, elle résulte d'un compromis entre le niveau de contrainte admissible au contact et du contrôle de la position de la zone de contact lors du fonctionnement avec les écarts géométriques. A notre connaissance, les règles de dimensionnement du bombé sont, soit empiriques, soit basées sur un modèle qui n'intègre qu'une partie des écarts géométriques envisageables [8].



# Bibliographie

- [1] M. TOLLENAÈRE. *Conception de produits mécaniques*. HERMES, 1998. ISBN : 2-86601-694-7.
- [2] L. ROUCOULES, B. YANNOU, and B. EYNARD. *Ingénierie de la conception et cycle de vie des produits*. Hermes - Lavoisier, 2006.
- [3] J. M. SARTOR. *Assistance à la synthèse des mécanismes générateurs de fonction*. PhD thesis, Université Paul SABATIER, Toulouse, 2001.
- [4] T. A. DEAN. The net-shape forming of gear. *Materials and Design*, pages 271–278, 2000.
- [5] E. DOEGE and R. BOHNASK. Experimental studies on a precision forging process of gears. *Production Engineering*, VII/I :17–20, 2000.
- [6] G. HENRIOT. *Traité théorique et pratique des engrenages*, volume 2. 2d. DUNOD, 1983. ISBN : 2-04-015526-0.
- [7] M. BOUAZIZ. *Contribution au contrôle des engrenages sur machine à mesurer tridimensionnelle*. PhD thesis, Ecole nationale polytechnique algérienne, 1996.
- [8] F. L. LITVIN and A. FUENTES. *Gear Geometry and Applied Theory*. Cambridge University Press, 2004. ISBN : 0 521 81517 7.
- [9] L. BERVILLER, R. BIGOT, and J. BRUYÈRE. Conception intégrée de produits «net shape». *IDMME*, 2002.
- [10] R. BIGOT, L. BERVILLER, J. BRUYÈRE, C. BAUDOUIN, and J.-Y. DANTAN. La conception de produits forgés net shape. In *Congrès Français de Mécanique*, 2005, Troyes, France.
- [11] J.-M. LINARES. *Contribution à l'amélioration de la tenue en service des systèmes mécaniques par une meilleure caractérisation de la géométrie fonctionnelle*. PhD thesis, Université de la Méditerranée, 2004. Habilitation à Diriger les Recherches.
- [12] LEFÈBVRE. *Note sur les engrenages*, volume 2, pages 333–349. Ministère de la guerre, Paris : Fain, 1828.
- [13] T. OLIVIER. *Application de la géométrie descriptive aux ombres, à la perspective, à la gnomonique et aux engrenages*. CARILLAN-GCERY et V<sup>or</sup> DALMONT, 1847.
- [14] J.-C. RAFFY and M. GODET. La validité de l'approximation de tredgold pour les engrenages coniques droits. *Société d'Etude de l'industrie de l'engrenage*, 54, 1967.
- [15] R. LE BORZEC. Correction de dentures en engrenages coniques à denture droite. *Entraînement et systèmes*, 1987.
- [16] R. PRUDHOMME G. LEMASSON. *Cinématique*. Dunod, 1966.
- [17] L.-J. CLOUTIER and G.-V. TORDION. Méthode générale d'analyse du contact des engrenages du type WILDHABER-NOVIKOV aux axes quelconques. *Bulletin de la Société d'Etude de l'industrie de l'engrenage*, 51, 1967.
- [18] G. HENRIOT. *Engrenages : conception, fabrication, mise en œuvre*. éd. DUNOD, 1999. ISBN : 2-10-003903-2.
- [19] J. CAPELLE. Etude de la génération des engrenages par la méthode des roulettes. *Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air*, 1938.

- [20] M. BERGER. *Géométrie*, volume 2. ed. Nathan, 1990. ISBN : 209-191731-1.
- [21] DIN 3 971, editor. *Définitions et grandeurs caractéristiques des roues coniques et des engrenages coniques*. 1980. Traduite par le Centre Français de traduction des normes.
- [22] C.R. KANDASWAMY. Plane-sided basic rack for the generation of skew bevel gears with spherical involute profiles. *Publications scientifiques du deuxième Congrès Mondial des Engrenages*, 1986.
- [23] J.-C. RAFFY and M. GODET. Le calcul des engrenages coniques droits à développante de cercle sphérique. *Société d'Etude de l'industrie de l'engrenage*, 53, 1967.
- [24] A. KOĆ. Theoretically acurrature equations of bevel gears tooth flanks. *Publications scientifiques du quatrième Congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions de puissance*, 1999.
- [25] Q. BALANDIER. Conception géométrique et dimensionnement mécanique de pignons de différentiels automobiles forgés. Master's thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Metz, 2004. Projet de Fin d'Etudes.
- [26] J. GARAVELLI. Etude de l'influence de la forme du pied de dent sur la résistance en flexion des engrenages coniques. Master's thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Metz, 2003. Projet de Fin d'Etudes.
- [27] S. WIDIEZ. Conception de pignons coniques forgés pour différentiels automobiles. Master's thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Metz, 2001. Projet de Fin d'Etudes.
- [28] J.-L. BAUCHAT. *Etude du raccordement géométrique  $G^2$  de surfaces rationnelles mises sous forme (SBR)*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologie de Lille, 1992.
- [29] J.-C. LEON. *Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO*. HERMES, 1991. ISBN : 2-86601-273-9.
- [30] J.-C. FIOROT and P. JEANNIN. *Courbes et surfaces rationnelles*. Masson, 1989. ISBN = 2-225-81738-3.
- [31] T. POPIEL and L. NOAKES.  $C^2$  spherical bézier spline. *Computer aided geometric design*, 23 :261–275, 2006.
- [32] J. DUFAILLY. *Etude Géométrique des engrenages cylindriques de transmission de puissance*, volume 1. Ellipses, 1997. ISBN : 2-7298-5703-6.
- [33] L. BERVILLER. *Conception et fabrication intégrées de produits forgés «net shape» : application aux différentiels forgés*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2005.
- [34] E. RIGAUD. *Interactions dynamiques entre denture, lignes d'arbres, roulements et carter dans les transmissions par engrenages*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1998.
- [35] G. GOCH. Gear metrology. In *Key note paper ; Annals of the CIRP*, 2003.
- [36] VDI/VDE-RICHTLINIEN. *Tangential composite and radial composite inspection of cylindrical gears, bevel gears, worms and worm wheels*. Beuth Verlag, Berlin, March 2001.
- [37] R. LEFEVRE. *Graissage et tribotechnique ; Engrenages et transmissions*. ED. Technip, 1975. ISBN : 2-7108-0271-6.
- [38] P. SAINOT. *Analyse du contact entre denture d'engrenages cylindriques de réducteur*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1989.
- [39] P. SAINOT, P. VELEX, and O. DUVERGER. Contribution of Gear Body to Tooth Deflections - A New Bidimensional Analytical Formula. *Transation of the ASME - J. of Mechanical Design*, 126 :748–452, July, 2004.
- [40] H. LINKE. A new methodology for the calculation of the geometry, the contact pattern and the gear load capacity of bevel gears. In *Publications scientifiques du quatrième congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions de puissance*, Paris, 16-18 mars 1999.

- [41] M. RADOUANI. *Contribution à la validation de modèle des chaînes de cotes*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, janvier 2003.
- [42] J.-Y. DANTAN. *Synthèse des spécifications géométriques : modélisation par Calibre à Mobilité Interne*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1, 2000.
- [43] Z. WU, W. EL MEARAGHY, and H. EL MEARAGHY. Evaluation of cost-tolerance algorithms for design tolerance analysis and synthesis. *Manuf. Rev.*, 1 :168–179, 1988.
- [44] R. SODHI. *Assembly modeling for analysis*. PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, 1995.
- [45] J.U. TURNER. A feasibility space approach for automated tolerancing. *Journal of Engineering for industry*, 115 :341–346, 1993.
- [46] E. BALLOT and P. BOURDET. A computation method for the consequences of geometric errors in mechanisms. *CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, Toronto, Canada, April 1997.
- [47] M. GIORDANO and D. DURET. Clearance space and deviation space, application to three-dimensional chain of dimensions and positions. In *Proceedings of CIRP Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, ENS de Cachan, France, May 1993.
- [48] D. TEISSANDIER, Y. COUÉTARD, and A. GERARD. A computer aided tolerancing model : proportioned assembly clearance volume. *Journal Computer Aided Design*, 31(13) :805–817, 1999.
- [49] B. ANSELMETTI. *Tolérancement . Volume 2 , méthode de cotation fonctionnelle*. Lavoisier, 2003. ISBN : 2-7462-0666-8.
- [50] A. WIRTZ. Vectorial tolerancing for production quality control and functional analysis in design. *Annals of the CIRP, Pennstate, USA*, 1991.
- [51] A. SERRE. *Cohérence de la spécification d'un objet de l'espace euclidien à n dimensions*. PhD thesis, Université de Metz, 13 avril 2000.
- [52] A. CLEMENT. Le calcul tensoriel : un outil d'avenir en technologie. *Technologie et Formations*, 109, 2005.
- [53] J.W. WITTEWER, K.W. CHASE, and L.L. HOWELL. The direct linearization method applied to position error in kinematic linkages. *Mechanism and Machine Theory*, 39 :681–693, 2004.
- [54] D. PERRIN. *Cours d'algèbre*. ELLIPSES, 1988. ISBN : 2-85925-011-7.
- [55] S. GUPTA and J.U. TURNER. Variational solid modeling for tolerance analysis. *IEEE Computer Graphics and Application*, 13(3) :64–74, 1993.
- [56] Y. IWASE and K. MIYASAKA. Proposal of modified tooth surface with minimized transmission error of helical gears. *Society of Automotive Engineers of Japan Review*, pages 191–193, 1996.
- [57] S. CHANG, X.Y. WEN, Y.Q. SHI, Y.S. LI, and C.W. CHEN. Three dimensional correction of tooth flank of helical gears for minimum dynamic load and stress. In *Publications scientifiques du quatrième congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions de puissance*, pages 2029–2038, 16-18 mars 1999.
- [58] Gleason Machine Division, editor. *Tooth Contact Analysis, Formulas and Calculation Procedures*. Rochester, NY, 1964.
- [59] L.-J. CLOUTIER and G.-V. TORDION. Méthode générale d'analyse du contact des engrenages du type wildhaber-novikov aux axes quelconques ; deuxième partie. *Société d'Etude de l'industrie de l'engrenage*, 52, 1967.
- [60] L.-J. CLOUTIER and G.-V. TORDION. Méthode générale d'analyse du contact des engrenages du type wildhaber-novikov aux axes quelconques ; troisième partie. *Société d'Etude de l'industrie de l'engrenage*, 53, 1967.

- [61] F. L. LITVIN. Modern theory of gearing and applications. In *Publications scientifiques du deuxième congrès Mondial des Engrenages*, Paris, 3-5 mars 1986.
- [62] F. L. LITVIN. New developments on theory of gearing. In *Publications scientifiques du troisième congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions*, pages 25–32, Paris, Mars 1992.
- [63] F. L. LITVIN, Q. LIAN, and A.L. KAPELEVICH. Asymmetric modified spur gear drives : reduction of noise, localisation of contact, simulation of meshing and stress analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 :363–390, 2000.
- [64] J.P. DE VAUJANY. Axis misalignments and crowning for helical cylindrical gears. In *Publications scientifiques du quatrième congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions de puissance*, pages 199–212, 1999, Paris, France.
- [65] A. FUENTES, F.L. LITVIN, R.B. MULLINS, R. WOODS, D.G. HANDSCHUH, and D.G. LEWICKI. Design and stress analysis and experimental tests of low-noise adjusted bearing contact spiral bevel gears. In *VDI-BERICHT NR. 1665*, pages 327–340, 2002.
- [66] J. ARGYRIS, A. FUENTES, and F. L. LITVIN. Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 189 :595–612, 2000.
- [67] F. L. LITVIN, J. LU, D.P. TOWNSEND, and M. HOWKINS. Computerized simulation of meshing of conventional helical involute gears and modification of geometry. *Mechanism and Machine Theory*, 34 :123–147, 1999.
- [68] F.L. LITVIN, J. ZHANG, R.F. HANDSCHUH, and J.J. COY. Topology of modified helical gears. In *International power transmission and gearing conference*, Chicago, Illinois, April 25-28, 1989.
- [69] F.L. LITVIN, A. FUENTES, Qi FAN, and R.F. HANDSCHUH. Computerized design, simulation of meshing, and contact and stress analysis of face-miller formate generated spiral bevel gears. *Mechanism and Machine Theory*, pages 441–459, 2002.
- [70] F.L. LITVIN, A. FUENTES, C. ZANZI, and M. PONTIGGIA. Design, generation, and stress analysis of two version of geometry of face-gear drives. *Mechanism and Machine Theory*, pages 1179–1211, 2002.
- [71] F. L. LITVIN, A. G. WANG, and R. F. HANDSCHUH. Computerized generation and simulation of meshing and contact of spiral bevel gears with improved geometry. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158 :35–64, 1998.
- [72] F.L. LITVIN, A. FUENTES, and K. HAYASAKA. Design, manufacture, stress analysis, and experimental tests of low-noise high endurance spiral bevel gears. *Mechanism and Machine Theory*, pages 83–118, 2006.
- [73] F. L. LITVIN, M. DE DONNO, A. PENG, A. VORONTSOV, and R. HANDSCHUH. Integrated computer program for simulation of meshing and contact of gear drives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181 :71–85, 2000.
- [74] F. L. LITVIN, J.J. COY, and C. HEINE. Generation of spiral bevel gears with zero kinematic errors and computer aided tooth contact analysis. In *Publications scientifiques du deuxième Congrès Mondial des Engrenages*, pages 399–408, 3-5 mars 1986.
- [75] F. L. LITVIN and J. LU. Computerized design and generation of double circular-arc helical gears with low transmission errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1127 :57–86, 1995.
- [76] C.-K. LEE and C.-K. CHEN. Mathematical models, meshing analysis and transmission design for a robust cylindrical gear set generated by two blade-discs with parabolic cutting edges. *Proc. IMechE*, 218 Part C : J. Mechanical Engineering Science :1539–1553, 2004.

- [77] J.-L. LI and S.-T. CHIOU. Surface design and tooth contact analysis of an innovative modified spur gear with crowned teeth. *Proc. IMechE*, 219 Part C : J. Mechanical Engineering Science :193–207, 2005.
- [78] J. ARGYRIS, M. DE DONNO, and F. L. LITVIN. Computer program in visual basic language for simulation of meshing and contact of gear drives and its application for design of worm gear drive. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191 :1057–1095, 2002.
- [79] J. RYBAK, A. KAWALEC, and J. WIKTOR. Analysis of tooth contact in involute cylindrical gear transmissions with modified tooth trace. In *Publications scientifiques du quatrième congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions de puissance*, pages 169–181, 16-18 mars 1999.
- [80] O. VOGEL, A. GRIEWANK, and G. BÄR. Direct gear tooth contact analysis for hypoid bevel gears. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191 :3965–3982, 2002.
- [81] J.-P. DE VAUJANY. *Comportement d’engrenage cylindrique intérieur*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2001.
- [82] A. SPITAS, T.N. COSTOPOULOS, and V.A. SPITAS. Calculation of transmission errors, actual path of contact and actual contact ratio of non-conjugate gears. In *VDI-BERICHERE NR. 1665*, pages 981–994, 2002.
- [83] V. KIN. Tooth contact based on inspection. In *Publications scientifiques du troisième congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions*, pages 1107–1114, Paris, Mars 1992.
- [84] ISO 10064. *Engrenages cylindriques - code pratique de réception ; Partie 1 : Contrôle relatif aux flancs homologues de la denture*. 1996. ISSN : 0335-3931 ; Indice de classement : E 23-008-1.
- [85] G. HENRIOT. Influence des ondulations de surface des dentures sur le bruit. *Mec. Ind.*, pages 477–486, 2000.
- [86] M. DUBOIS and J.-L. GRZESIAK. Etude du phénomène des "raies fantômes" lié à la rectification des engrenages. Master’s thesis, Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers de Lille, 1995.
- [87] Y. UEDA and D.R. HOUSER. Optimum design and manufacturing robustness for gear whine of helical gear. In *VDI-BERICHERE NR. 1665*, pages 839–851, 2002.
- [88] NF ISO 1328-1 or E 23-007-1. *Engrenages cylindriques - Système I.S.O. de précision - Partie 1 : Définitions et valeurs admissibles des écarts pour les flancs homologues de la denture*. 1997.
- [89] NF ISO 1328-2 or E 23-007-2. *Engrenages cylindriques - Système I.S.O. de précision - Partie 2 : Définitions et valeurs admissibles des écarts composés radiaux et information sur le faux rond*. 1995.
- [90] C. BAUDOIN, S. LELEU, R. BIGOT, and J.M. DAVID. De la pièce au produit. exemple du contrôle dimensionnel des erreurs de pas d’un pignon forgé. *PRIMECA*, La Plagne, 2001.
- [91] C. BAUDOIN. Caractérisation des incertitudes de mesure sur les pignons forgés mesurés par mmt. Master’s thesis, Université Henri POINCARÉ, 2001.
- [92] C. BAUDOIN. Métrologie des engrenages : application aux pignons coniques. Master’s thesis, Université Henri POINCARÉ, 2001.
- [93] J.M. COEVOET. Modification d’une congrès de métrologie à disque de roulement pour le contrôle du profil et de la distortion des engrenages. *Bulletin de l’Institut de l’Engrenage et de Transmissions*, 89, 1986.
- [94] M. SERRES. La simulation, technique nouvelle, ancienne tradition. *La recherche*, 393, Janvier 2006.
- [95] X.C. WANG and S.K. GHOSH. *Advanced Theories of Hypoid Gears*. Elsevier, 1994. ISBN : 0-444-81705-0.

- [96] C.-Y. JACQUIN. *Modélisation et optimisation du comportement sous charge des engrenages face*. PhD thesis, INSA de Lyon, 1996.
- [97] J. E. J. DENNIS. "Nonlinear Least-Squares" : *State of the Art in Numerical Analysis*, pages 269–312. ed. D. Jacobs, Academic Press.
- [98] MORÉ J. J. The levenberg-marquardt algorithm : Implementation and theory. *Numerical Analysis*, pages 105–116, 1977.
- [99] LEVENBERG K. "A Method for the Solution of Certain Problems in Least-Squares," *Quarterly Applied Mathematics* 2, pages 164–168. 1944.
- [100] MARQUARDT D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 11 :431–441, 1963.
- [101] ANSI/AGMA 2009-B01, editor. *Bevel Gear Classification, Tolerances, and Measuring Methods*. December 1998, Revised October 2001.
- [102] M. DELFOSSE. Contrôle de l'erreur cinématique des engrenages. *Bulletin de la Société d'Etude de l'industrie de l'engrenage*, 69 :35–47, 19??
- [103] S. KUOKAWA and Y. ARIURA. Transmission error analysis of involute cylindrical gears with radial eccentricity - measurement of eccentricity and the influence of cumulative pitch deviation. In *VDI-BERICHERE NR. 1665*, pages 1003–1017, 2002.
- [104] J. ARGYRIS, F. L. LITVIN, A. PENG, and H.J. STADTFELD. Axes of meshing and their application in theory of gearing. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 163 :293–310, 1998.
- [105] J.-P. VINCENT. Etude des engrenages de type WILDHABER-NOVIKOV à axes concourants. Master's thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Metz, 2004. Projet de Fin d'Etudes.
- [106] J.-P. VINCENT. Outils d'estimation de la déformée des dents et de la contrainte maximale en pied de dent d'un engrenage à géométrie variationnelle. Master's thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Metz, 2005. Projet de Master.
- [107] J.P. VINCENT, J. BRUYÈRE, and J.Y. DANTAN. Synthèse de la géométrie et analyse des tolérances des engrenages de WILDHABER-NOVIKOV à axes concourants. In *AIP-PRIMECA*, La Plagne, 2005.
- [108] L. ROUCOULES, B. EYNARD, P. NOWAK, and A. SKANDER. *Ingénierie de la conception et cycle de vie des produits*, chapter 1. Hermes - Lavoisier, 2006.
- [109] A. BALLU and L. MATHIEU. Choice of functional specifications using graphs within the framework of education. In *Proceedings of the 6<sup>th</sup> CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing*, pages 197–206, Enschede, Nederland, 1999.
- [110] J.-Y. DANTAN et al. *Ingénierie de la conception et cycle de vie des produits*, chapter 11. Hermes - Lavoisier, 2006.
- [111] J.-Y. DANTAN, A. NABIL, and L. MATHIEU. Integrated Tolerancing Process for Conceptual Design. In *The annals of CIRP*, volume 52, pages 135–138, 2003.
- [112] U. ROY, N. PRAMANIK, R. SUDARSAN, R.D. SRIRAM, and K.W. LYONS. Function to form mapping : model, representation and application in design synthesis. *Computer Aided Desing*, 33 :699–719, 2001.
- [113] S. FENG, W. NEDERBRAGT, S. KAING, and R. SRIRAM. Incorporating Process Pplanning into Conceptual Design. In *Proceedings of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences*, 1999.
- [114] W. NEDERBRAGT, R. ALLEN, S. FENG, S. KAING, R. SRIRAM, and Y. ZHANG. The NIST Design/Process Planning Integration Project. In *Proceedings of the AI and Manufacturing Research Planning Workshop*, pages 135–139, Albuquerque, New Mexico, USA, 1998.

- [115] O.W. SALOMONS, SH.J. JONGE POERINK, F.J. HAALBOOM, F. VAN SLOOTEN, F.J.A.M. VAN HOUTEN, and H.J.J. KALS. A computer aided tolerancing tool i : Tolerance specification. *Computers in Industry*, 31 :161–174, 1996.
- [116] O.W. SALOMONS, SH.J. JONGE POERINK, F.J. HAALBOOM, F. VAN SLOOTEN, F.J.A.M. VAN HOUTEN, and H.J.J. KALS. A computer aided tolerancing tool i : Tolerance analysis. *Computers in Industry*, 31 :175–186, 1996.
- [117] F. THIEBAUT. *Contribution à la définition d'un moyen unifié de gestion de la géométrie réaliste basé sur le calcul des lois de comportement des mécanismes*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2001.
- [118] D. GAUNET. *Modèle formel de tolérancement de position. Contributions à l'aide au tolérancement des mécanisme en CFAO*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1994.
- [119] D. M. ROBINSON. *Geometric tolerancing for assembly*. PhD thesis, Cornell University, 1998.
- [120] W.T. ESTLER. Measurement as inference : Functional ideas. In *Annals of the CIRP*, volume 48, n° 2, pages 611–632, 1999.
- [121] A. CLEMENT, A. RIVIERE, P. SERRE, and C. VALADE. Global consistency of dimensioning and tolerancing. In *Proc. of CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, University of Twente, Netherlands, March 1999.
- [122] R.C. HILLYARD and I.C. BRAID. Characterizing non-ideal shapes in term of dimensions and tolerances. *Computer Graphics*, 12(3) :234–238, 1978.
- [123] P. HOFFMAN. Analysis of tolerances in process inaccuracies in discrete part manufacturing. *Computer Aided Design*, 14(2) :83–88, 1982.
- [124] D. GAUNET. Vectorial tolerancing model. In *Proceedings of the 3<sup>th</sup> CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, Cachan, France, April 27-28, 1993.
- [125] C. BAUDOIN, R. BIGOT, S. LELEU, N. MULLER, and P. MARTIN. Gear control software : approach by entities. In *36<sup>th</sup> CIRP international seminar on manufacturing systems*, pages 335–340, june 2003.
- [126] G. HENZOLD. Comparison of vectorial tolerancing and conventional tolerancing. In *International Forum on Dimensional Tolerancing and Metrology, CRTD*, volume 27, pages 147–160, 1993.
- [127] U. ROY and B. LI. Representation and interpretation of geometric tolerance for polyhedral objects. *Journal Computer Aided Design*, 31(4) :273–285, 1999.
- [128] A.A.G. REQUICHA. Toward a theory of geometric tolerancing. *The International Journal of Robotics Research*, 2(4) :45–60, 1983.
- [129] F. ETESAMI. A mathematical model for geometric tolerances. *Journal of Mechanical Design*, 115(1) :81–86, 1993.
- [130] A.A.G. REQUICHA. Mathematical meaning and computational representation of tolerance specifications. In *International Forum on Dimensional Tolerancing and Metrology, CRTD*, volume 27, pages 61–68, 1993.
- [131] V. SRINIVASSAN. Recent efforts in mathematization of asme/ansi y14.5m. In *Proceedings of 3rd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, pages 223–232. Eyrolles, 1993.
- [132] E. SACKS and L. JOSKOWICZ. Computer assisted kinematic tolerance analysis of a gear selector mechanism with the configuration space method. In *Design Engineering Technical Conferences, ASME, Las Vegas, USA, September 1999*.
- [133] J.-Y. DANTAN, J. BRUYÈRE, R. BIGOT, and P. MARTIN. Spécification géométrique fonctionnelle des engrenages par frontière virtuelle. In *Proceedings of 3<sup>ème</sup> colloque internationale Conception et Production Intégrées*, octobre 2003, Meknes, Maroc. 16 pages (CD Rom).

- [134] S. BHIDE, J.K. DAVIDSON, and J.J. SHAH. Areal Coordinate : The Basis for a Mathematical Model for Geometric Tolerances. In *Proceedings of the 7<sup>th</sup> CIRP International Seminar on Computed-Aided Tolerancing*, pages 35–44, ENS, Cachan, France, 2001.
- [135] S. BHIDE, G. AMETA, J.K. DAVIDSON, and J.J. SHAH. Tolerance-Map Applied to the Strainghtness and Orientation of an Axis. In *In CDrom Proc., 9<sup>th</sup> CIRP International Seminar on Computed-Aided Tolerancing*, Arizona State University, Tempe, AZ, USA, April10-12, 2005.
- [136] J.K. DAVIDSON, A. MUJEZINOVIĆ, and J.J. SHAH. A New Mathematical Model for Geometric Tolerances as Applied to round Faces. *ASME Transaction, J. of Mechanical Design*, 124 :609–622, 2002.
- [137] J.Y. DANTAN, L. MATHIEU, A. BALLU, and P. MARTIN. Tolerance synthesis : quantifier notion and virtual boundary. *Computer Aided Design*, 37(2) :231–240, 2005.
- [138] E. SACKS and L. JOSKOWICZ. Parametrik kinematic tolerance analysis of general planar systems. *Computer-Aided Design*, 30(9) :707–714, 1998.
- [139] E. SACKS and L. JOSKOWICZ. Parametrik kinematic tolerance analyse of planar mechanisms. *Computer-Aided Design*, 29(5) :333–342, 1997.
- [140] L. JOSKOWICZ and E. SACKS. Kinematic tolerance analysis with configuration spaces. In *7<sup>rd</sup> CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, 2001, Cachan, France.
- [141] L. JOSKOWICZ, E. SACKS, and V. SRIBIVASAN. Kinematic tolerance analysis. *Computer-Aided Design*, 29(2) :147–157, 1997.
- [142] Y. OSTROVSKY-BERMANN and L. JOSKOWICZ. Relative positioning of planar parts in toleranced assemblies. In *9<sup>rd</sup> CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, 2005, Arizona, USA.
- [143] M.-H. KYUNG and E. SACKS. Nonlinear kinematic tolerance analysis of planar mechanical systems. *Computer-Aided Design*, 35 :901–911, 2003.
- [144] M.-H. KYUNG and E. SACKS. Tolerance synthesis of higher kinematic pairs. In *CDrom Proceedings of 9<sup>rd</sup> CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, 2005, Arizona, USA.
- [145] L. MATHIEU and B. MARGUET. Integrated Design method to improve producibility based on product key characteristics and assembly sequences. In *The annals of CIRP*, volume 50, n<sup>o</sup> 1, pages 85–88, 2001.
- [146] E. SACKS and S. M. BARNES. Computer-aided design of a ratcheting actuator. In *In CDrom Proc., 9<sup>th</sup> CIRP International Seminar on Computed-Aided Tolerancing*, Arizona State University, Tempe, AZ, USA, April10-12, 2005.
- [147] S. D. NIGAM and J. U. TURNER. Review of statistical approches to tolerance analysis. *Computer-Aided Design*, 27(1) :6–15, January, 1995.
- [148] O. BJORKE. *Computer-Aided tolerancing*. ASME Press, 1989. 2<sup>nd</sup> edition, New York, USA.
- [149] V.J. SKOWRONSKI and J.U. TURNER. Using Monte Carlo variance reduction in statistical tolerance synthesis. *J. Computer-Aided Design*, 29(1) :63–69, 1997.
- [150] V.J. SKOWRONSKI and J.U. TURNER. Using Estimating gradients for statistical tolerance synthesis. *J. Computer-Aided Design*, 28(12) :933–941, 1996.
- [151] P. VARGHESE and N. BRASWELL. Statistical tolerance synthesis using FRPDF and Numerical Convolution. *J. Computer-Aided Design*, 28(9) :723–732, 1996.
- [152] J. GULFROD and J.U. TURNER. Advanced Tolerance Analysis and Synthesis for Geometric Tolerances. In *Proceedings of International Forum on Dimensional Tolerancing and Metrology*, volume 27, pages 187–198, 1993.
- [153] L. LAPERRIERE and T. KABORE. Monte Carlo simulation of tolerance synthesis equations. *J. Production Research*, 39(11) :2395–2406, 2001.

- [154] C. ZHANG, J. LUO, and B. WANG. Statistical tolerance synthesis using distribution function zones. *J. Production Research*, 34(17) :3995–4006, 1999.
- [155] J. BRUYÈRE, J.-Y. DANTAN, R. BIGOT, and P. MARTIN. Statistical tolerance analysis of gears by tooth contact analysis. In *CDrom Proceedings of 9<sup>th</sup> CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, 2005, Arizona, USA. selected paper.
- [156] J. BRUYÈRE and J.-Y. DANTAN. Analyse statistique des tolérances des engrenages. In *Proceedings of Congrès Français de Mécanique*, 2005, Troyes, France.
- [157] S. TICHADOU. *Modélisation et qualification tridimensionnelle des écarts de fabrication pour la simulation d'usinage*. PhD thesis, Université de Nantes, 2005.
- [158] J. BRUYÈRE, J.-Y. DANTAN, F. WU, and R. BIGOT. Optimization of gear tolerances by statistical tolerances analysis and genetic algorithm. In *6<sup>th</sup> IDMME Seminar*, Grenoble, France, 2006.
- [159] S. CARO, F. BENNIS, and P. WENGER. Tolerance Synthesis of Mechanisms : A Robust Design Approach. *Journal of Mechanical Design*, 127 :86–94, January 2005.
- [160] P. CHEDMAIL. Synthèse de mécanismes ; comportement et dimensionnement. *Université d'automne AIP-PRIMECA*, 1997.
- [161] J. LAMPINEN. Camshape optimisation by genetic algorithm. *Computer-Aided Design*, 35 :727–737, 2003.
- [162] G. RENNER and A. EKÁRT. Genetic algorithms in computer aided design. *Computer-Aided Design*, 35 :709–726, 2003.
- [163] N. TURKKAN. Discrete optimisation of structures using a floating point genetic algorithm. In *congrès annuel de la Société canadienne de génie civil*, Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada, 4-7 juin 2003. GCM-134.
- [164] D. E. GOLDBERG. *Genetic Algorithms in Search, Optimisation, and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989. ISBN : 0-201-15767-5.
- [165] L. DAVIS. *Hanbook of Genetic Alogorithms*. Van Nostrand Reinhold, 1991. ISBN : 0-442-00173-8.
- [166] E.H.L. AARTS and P.J.M. LAARHOVEN. Statistical cooling : A general approach to combinatorial optimization problems. *Philips Journal of Reseach*, 1985.
- [167] D. E. GOLDBERG. Genetic and evolutionary algorithms come of age. *Communication of the ACM*, 37, March 1994.
- [168] D. ADLER. Genetic algorithms and simulated annealing a marriage proposal. *IEEE Int. Conf. on Neuronal Networks*, 1993.
- [169] E. D. TAILLARD. *Recherches itératives dirigées parallèles*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1993.
- [170] A. SKANDER. *Méthode et modèle DFM pour le choix des procédés et l'intégration des contraintes de fabrication vers l'émergence de la solution produit*. PhD thesis, Université de technologie de TROYES, 2006.
- [171] K.W. CHASE and W.K. GREENWOOD. Least Cost Tolerance Allocation for Mechanical Assemblies with Automated Process Selection. *Manufacturing Review*, 3(1) :49–59, March 1990.
- [172] T. GUO. A new evolutionary algorithm for function optimization. *Communication on Applied Mathematics and Computation ; Wuhan University*, 4(4) :409–414, 1999.
- [173] H. HERTZ. Le mémoire de HERTZ sur les contacts ponctuels. Publication scientifique et technique N°20 - ENSAM, 1987.
- [174] B. PENEL. Contact, 1998. polycopié de cours, ENSAM Lille.

- [175] BELAJEFF. Le mémoire de BELAJEFF sur les contacts ponctuels. Publication scientifique et technique N° 32 - ENSAM, 1990.
- [176] M. FOULON and A. REY. Sur les contacts ponctuels. *Revue française de mécanique*, 4 :223–234, 1985.
- [177] M. SASSI, M. DESVIGNES, and M. FOULON. Etude tridimensionnelle des contacts élastiques sans frottement par la méthode des éléments finis. *Mécanique Industrielle et Matériaux*, 49(1) :23–27, Mars 1996.
- [178] A. REY and M. FOULON. Etat contraints majeur sur la normale des contacts ponctuels. *Mécanique Matériaux Electricité*, 445 :12–15, Septembre 1992.
- [179] M. FOULON, A. REY, M. BLANC, and P. LEBERT. Sur les états contraints dans les contacts ponctuels. *Mécanique Matériaux Electricité*, 440 :4–10, Septembre 1991.
- [180] C. GOSSELIN, L. CLOUTIER, and Q.D. NGUYEN. A general formulation for the calculation of the load sharing and transmission error under load of spiral bevel and hypoid gears. *Mechanical and Machines Theory*, 30(3) :433–450, 2000.
- [181] K.L. JOHNSON. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1999 (last reprinted). ISBN : 0-521-34796-3.
- [182] R. GUILBAULT, C. GOSSELIN, and L. CLOUTIER. Express Model for Load Sharing and Stress Analysis in Helical Gears. *Journal of Mechanical Design*, 127 :1161–1172, November 2005.
- [183] V. SIMON. Computer aided loaded tooth contact analysis in cylindrical worm gears. *Journal of Mechanical Design*, 127 :973–981, September 2005.
- [184] D. BARDAY. Meshing of bevel gear sets. In *Publications scientifiques du quatrième congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions de puissance*, pages 651–660, Paris, 1999.
- [185] Y. ICARD. *Engrenage spiro-conique : Modélisation sous charge appliquée au domaine aéronautique*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2005.
- [186] J.J. KALKER. *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Klumer academic publishers, 1990. ISBN : 0-7923-0712-7.
- [187] J. BRAUER. Transmission error in anti-backlash conical involute gear transmission : a global-local fe approach. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41 :431–457, 2005.
- [188] F.L. LITVIN, J.-S. CHEN, J. LU, and R.F. HANDSCHUH. Application of finite element analysis for determination of load share, real contact ratio, precision of motion, and stress analysis. *Journal of Mechanical Design*, 118 :561–567, December 1996.
- [189] S. ULAGA, M. ULBIN, and J. FLAŠKER. Contact problems of gears using overhauser splines. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41 :385–395, 1999.
- [190] S. ULAGA. Contact stress analysis of gears. In *Publications scientifiques du quatrième congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions de puissance*, pages 349–354, Paris, 16-18 mars 1999.
- [191] M. H. WALKER. Flexion des dents et modification du profil. *Bulletin de la Société d’Etude de l’Industrie des Engrenages*, 11 :24–41, 1938.
- [192] Y. ZHANG and Z. FANG. Analysis of Transmission Errors Under Load of Helical Gears with Modified Tooth Surfaces. *Journal of Mechanical Design*, 119 :120–126, March, 1997.
- [193] Z. FANG and H. YANG. Loaded tooth contact analysis with friction on hypoid gears. In *Publications scientifiques du quatrième congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions de puissance*, pages 703–709, Paris, 1999.
- [194] J. BRAUER. A general finite element model of involute gears. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40 :1857–1872, 2004.

- [195] L. BRÖNER, N. KURZ, and F. JOACHIM. Effectice analysis of gears with program lvr (stiffness method). In *VDI-Berichte n° 1665*, 2002.
- [196] T. HENLICH, H. LINKE, D.G. HANDSCHUH, and D.G. LEWICKI. Innovative method for optimising flank modification on toothings. In *VDI-BERICHERE NR. 1665*, pages 167–176, 2002.
- [197] Y. HILTCHER, M. GUINGAND, and J-P. DE VAUJANY. Modélisation du comportement élastique des engrenages - méthode des éléments finis dans CATIA. In *CDrom du 9<sup>ième</sup> Colloque National AIP-PRIMECA*, La Plagne, France, 5-8 Avril 2005.
- [198] A. FUENTES, F. LITVIN, B.R. MULLINS, R. WOODS, and R.F. HANDSCHUH. Design and stress analysis of low-noise adjusted bearing contact spiral bevel gears. *Journal of Mechanical Design*, 124 :524–532, September 2002.
- [199] C. GOSSELIN, J-P. DE VAUJANY, and P. GAGNON. Loaded tooth contact analysis of spur, helical and hypoid gears based on the finite strips and finite prisms models. In *Publications scientifiques du quatrième congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions de puissance*, Paris, 1999.
- [200] A. OLAKOREDE. *Répartition de charges et Résistance en Conception d'engrenages Cylindriques. Application de la méthode des Prismes Finis en C.A.O.* PhD thesis, INSA de Lyon, 1990.
- [201] H.-C. KIM. *Etude des charges et des contraintes dans les engrenages cylindriques avec voile. Simulation numérique par la Méthode des Prismes Finis.* PhD thesis, INSA de Lyon, 2001.
- [202] M. GUINGAND, J.P. DE VAUJANY, and Y. ICARD. Fast Three-Dimensional Quasi-Static Analysis oh Helical Gears using Finite Prism Method. *Journal of Mechanical Design*, 126 :1082–1088, November 2004.
- [203] Y.K. CHEUNG. *Finite Strip Method in Structure Analysis*. Oxford : Perganon Press, 1976. ISBN : 0-08-018308-5.
- [204] C.H. WINK and A.L. SERPA. Investigation of tooth contact deviation from the plane of action and their effect on gear transmission error. *Mechanical Engineering Science*, 219 :501–509, 2005.
- [205] A.H. ELKHOLY, A.A. ELSHARKAWY, and A.S. YIGIT. Effect of Meshing Tooth Stiffness and Manufacturing Error on the Analysis of Strainght Bevel Gears. *MECH. STRUCT. & MACH.*, 26(1) :41–61, 1998.
- [206] J. BRUYÈRE, J.-V VINCENT, J.-Y. DANTAN, and R. BIGOT. Intégration des déformées dans l'analyse des tolérances des engrenages; intégration d'un modèle simple d'estimation des déformées. In *Proceedings of 4<sup>ème</sup> colloque international CPI05*, Novembre 2005, Casablanca, Maroc. 16 pages (CD Rom).
- [207] L.D. MACLENNAN. An analytical method to determine the influence of shape deviation on load distribution and mesh stiffness for spur gears. *Proc Instn Mech Engrs*, 216 Part C : J. Mechanical Engineering Science :1005–1016, 2002.
- [208] B. FALAH, C. GOSSELIN, and L. CLOUTIER. Experimental and numerical investigation of the meshing cycle and contact ratio in spiral bevel gears. *Mechanism and Machine Theory*, 33(1/2) :21–37, 1998.
- [209] J.-P. DE VAUJANY, M. GUINGAND, and C. BORDEGARAY. Misalignment effect on the transmission error of loaded spiral bevel gears. In *CDrom proceedings of IDMME*, Grenoble, France, May 17-18, 2006.
- [210] M. P. DO CARMO. *Differential Geometry of Curves et surfaces*. Prentice-Hall, 1976. ISBN : 0-13-212589-7.
- [211] U. DIERKES, S. HILDEBRANDT, A. KUSTER, and O. WOHLRAB. *Minimal Surfaces I*, volume 1. Springer-Verlag, 1992. ISBN : 0-387-53169-6.

- [212] M. GUINGAND, J.-P. DE VAUJANY, and Y. ICARD. Analysis and optimization of the loaded meshing of face gears. *Journal of Mechanical Design*, 127, January 2005.
- [213] P. GAGNON, C. GOSSELIN, A. CARDOU, and L. CLOUTIER. Assessment of fea calculation of spur gear tooth deflection using electronic speckle pattern interferometry. In *JSME International Conference on Motion and Power Transmissions*, November 23-26, 1991, Hiroshima, Japan.
- [214] L.E. WILCOX. An exact analytical method for calculating stresses in bevel and hypoid gear teeth. In *International Symposium on Gearing and Power Transmissions*, Tokyo, 1981.
- [215] M. CELIK. Application of the different boundary elements of spur gear. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1999.
- [216] M. CELIK. Comparaison of three teeth and whole body models in spur gear analysis. *Mechanism and machine theory*, 34 :1227–1235, 1998.
- [217] J. FRÊNE, M. GODET, D. NICOLAS, and B. DEGUEURCE. *Lubrification hydrodynamique : paliers et butées*. Eyrolles, 1990. ISSN : 0399-4198.
- [218] A. URAL, G. HEBER, P.A. WAWRZYNEK, A.R. INGRAFFEA, D.G. LEWICKI, and J.B.C. NETO. Three-dimensional, parallel, finite element simulation of fatigue crack growth in a spiral bevel pinion gear. *Engineering Fracture Mechanics*, 72(8) :1148–1170, May 2005.
- [219] F. WANG, C. YI, T. WANG, S. YANG, G. ZHAO, and J.B.C. NETO. A generating method for digital gear tooth surfaces. *Int. J. of Advanced Manufacturing Technology*, 28 :474–485, 2006.