



HAL
open science

Traitement statistique des distorsions non-linéaires pour la restauration des enregistrements sonores.

Guillaume Picard

► **To cite this version:**

Guillaume Picard. Traitement statistique des distorsions non-linéaires pour la restauration des enregistrements sonores.. domain_other. Télécom ParisTech, 2006. English. NNT : . pastel-00002315

HAL Id: pastel-00002315

<https://pastel.hal.science/pastel-00002315>

Submitted on 4 May 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Nationale
Supérieure des
Télécommunications

Ecole Doctorale
d'Informatique,
Télécommunications
et Electronique
de Paris

Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur
de l'école nationale supérieure des télécommunications.

Spécialité : **Signal et Images**

Guillaume Picard

Traitement statistique des distorsions non-linéaires
pour la restauration des enregistrements sonores

Soutenue le 15 décembre 2006 devant le jury composé de

Jean-Yves Tourneret Rapporteurs

Laurent Daudet

Bertand David Examineurs

Xavier Rodet

Jean-Hugues Chenot Invité

Olivier Cappé Directeur de thèse

RESUME :

La restauration des enregistrements sonores est l'une des étapes indispensables pour la conservation et la mise en valeur des archives audiovisuelles. La technologie disponible aujourd'hui offre d'ores et déjà la possibilité d'atténuer certaines dégradations audibles induites par les divers processus survenant lors de l'enregistrement et de l'archivage des supports analogiques. Des résultats appréciables ont par exemple été obtenus pour la réduction des bruits de fonds, l'élimination de défauts impulsionsnels ("clicks " et "scratches ") et la localisation des pertes locales du signal ("dropouts ").

L'objet de la thèse est l'étude, la modélisation et le traitement des distorsions non linéaires, pour lesquelles les techniques actuelles s'avèrent impuissantes. L'approche retenue consiste à représenter, globalement, à la fois le signal audio à restaurer et le processus de distorsion, dans le cadre d'un modèle statistique. Cette approche présente un bon compromis entre une souhaitable généralité -possibilité de traiter à l'aide d'une méthode globale plusieurs types de distorsions- et l'utilisation de connaissances spécifiques, notamment concernant les sources de distorsions.

Les phénomènes de saturation ou de sur-modulation qui induisent de graves distorsions du signal peuvent avoir pour origine différents éléments de la chaîne d'enregistrement-lecture. Les phénomènes les plus courants sont la saturation des enregistrements magnétiques, les distorsions d'inscription des enregistrements gramophones ou les distorsions dans les amplificateurs de puissance. Une caractéristique importante du domaine de la restauration et de la conservation des archives sonores est le fait que le matériel d'origine (d'enregistrement et de lecture) est souvent inconnu ou perdu. La caractérisation des sources de distorsion est donc, malheureusement, le plus souvent impossible ou tout au moins très partielle. La ligne directrice de ce projet consiste à appréhender de manière robuste les effets non-linéaires directement à partir de la donnée du signal numérisé, en intégrant l'ensemble des connaissances disponibles, tant sur le signal que sur les processus de distorsion.

La première étape de la thèse consiste en une analyse des mécanismes de la distorsion basée sur une série de mesures où plusieurs séquences audio sont enregistrées en entrée et en sortie d'appareils audiofréquences standards (amplificateurs de puissance, convertisseurs numérique-analogique, enregistreurs sur bandes magnétiques). Les éléments d'analyse retenus conduisent à la présentation des hypothèses principales du traitement. La méthode est basée sur un modèle de transmission non-linéaire choisi parmi ceux étudiés dans la littérature (modèles en cascades de Hammerstein simple), ainsi qu'un modèle des signaux à restaurer (modélisation autorégressive et modèle gaussien à écart-type variable). La seconde étape définit d'une part, la méthode d'identification "autodidacte" (à partir de la donnée seule du signal distordu) du modèle de distorsion et d'autre part, la technique de reconstruction de l'extrait sonore associée aux modèles de distorsion et de signal.

Les exemples récents de travaux analogues montrent que la complexité des situations à modéliser implique nécessairement l'utilisation de modèles statistiques avancés, et notamment de modèles "à variables latentes" ou partiellement observés [Godsill and Rayner, 1998b], [Godsill et al., 1998]. Les outils d'analyse numérique Bayésienne par échantillonnage MCMC (Markov Chain Monte-Carlo) constituent à ce jour l'approche la plus générique pour aborder ce type de problèmes. Leur utilisation dans un cadre réaliste de restauration, sans même parler de temps réel nécessite toutefois un important travail sur les questions de convergence et d'efficacité d'implémentation.

Plusieurs simulations sont présentées pour illustrer le comportement des algorithmes proposés en fonction de la prépondérance des effets de la dégradation du signal enregistré. Le cas particulier des écrêtages numériques est traité séparément, suivant une formulation simplifiée des algorithmes de simulation.

ABSTRACT :

Restoration of sound recordings is one of the essential stages for the conservation and the redistribution of audiovisual archives. Technology available today makes it possible to attenuate audible degradations induced by various processes occurring at the recording and archiving stages of the analogical supports. Appreciable results have been obtained for the reduction of the background noise, the elimination of impulsive defects (clicks and scratches) and the localization of the local losses (dropouts) of the signal.

The object of the thesis is the study, the modeling and the enhancement of nonlinearly distorted signals. The proposed approach consists in representing, the audio signal to be restored and the distortion process, within the framework of a statistical model. This approach presents a good compromise between desirable generics - possibility of treating several types of distortions using a single method - and the use of specific knowledge, in particular concerning the causes of distortions.

Saturation or overmodulation phenomena which induces serious distortions of the signal may originate from various elements of the recording-reading chain. The most usual phenomena are saturations of tape recordings, tracing distortion in gramophones or distortion in power amplifiers. An important characteristic in the field of restoration and conservation of sound archives is the fact that the original material (of recording and reading) is often unknown or lost. The characterization of the sources of distortion is thus, unfortunately, generally impossible or at least very partial. The line of this project consists in characterizing in a robust way non-linear effects directly starting from the digitized signal, by integrating the available knowledge on the signal as well as on the distortion process.

The first part of the thesis contains an analysis of the distortion mechanisms based on series of measurements where several audio sequences are recorded at the input and output of audio devices (power amplifier, analogic-digital converter, magnetic tapes recorder). Characterization results lead to the presentation of the principal assumptions of the proposed method. The method is based on a non-linear model of transmission choosed among those studied in the literature (Hammerstein cascade model), as well as a model of the signal to be restored (autoregression modeling and Gaussian model with adaptive variance). The second part defines on the one hand, the blind identification (when only the distorted signal is known) of the distortion model and, on the other hand, the technique of sound compensation adapted to the distortion and signal models.

Recent examples of similar works show that the complexity of the situations to be modeled implies the use of advanced statistical models, and in particular of models with "latent" or partially observed variables. Bayesian numerical analysis using sampling MCMC (Markov Chain Monte-Carlo) constitutes a generic approach to solve this type of problems. The use of MCMC within a realistic framework of restoration requires however an important work on the convergence control and effectiveness of implementation.

Several simulations are presented to illustrate the behavior of the proposed algorithms. The particular case of the numerical clipping is treated separately, according to a simplified formulation of the restoration algorithm.

REMERCIEMENTS :

Tout d'abord, je tiens à remercier tous les membres du jury de thèse et plus particulièrement, M. Jean-Yves Tourneret, professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse et M. Laurent Daudet, maître de conférence à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), pour avoir accepté d'en être rapporteur. Je tiens également à adresser mes plus vifs remerciements à M. Jean-Hugues Chenot, chef de projet à la Direction de la Recherche et Expérimentation de l'Institut National de l'Audiovisuel (INA), à M. Emmanuel Favreau du Groupe de Recherches Musicales, à M. Daniel Teruggi, directeur de la Recherche et Expérimentation et à M. Jean-François Pontefract des studios de restauration de la phonothèque de l'Institut National de l'Audiovisuel.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma gratitude à l'égard de mon directeur de thèse, M. Olivier Cappé, chercheur au Centre National de la Recherche Scientifique et professeur à l'Ecole Nationale des Télécommunications de Paris pour m'avoir guidé durant ces années d'études.

Je remercie également Louis Laborelli, Raphaël Bornard, Nicolas Rasamimanana, Alexis Joly, Loïs Rigouste pour leurs conseils et leurs interventions scientifiques durant ces années de recherche.

Enfin, merci à Catherine et Olivier, à toute ma famille et mes proches, Louis-Emmanuel, Pierre-Antoine, Alexandra pour leur affection et leur soutien toujours renouvelé.

Table des matières

1	Contexte et objectifs	13
1.1	Introduction	13
1.2	Contexte	15
1.2.1	Le fond d'archives radiophoniques de l'INA	15
1.2.2	Les opérations de restauration	16
1.2.3	Les problèmes qui restent posés à la restauration numérique	17
1.3	Définitions et mesures de la distorsion sonore	18
1.3.1	Origines de la distorsion non-linéaire	18
1.3.2	Mesure de la dégradation	21
1.4	Modélisation de la distorsion non-linéaire	24
1.4.1	Les séries de Volterra	24
1.4.2	Les modèles structurés en cascade	25
1.5	Etat de l'art	27
1.5.1	Estimation et compensation d'une non-linéarité instantanée	27
1.5.1.1	Méthode d'égalisation des fonctions de répartition	27
1.5.1.2	Méthode robuste d'inversion	28
1.5.2	Traitements des distorsions pour la restauration audio	30
1.5.2.1	Approche par modélisation AR-MNL	30
1.5.2.2	Approche par modélisation AR-NAR	31
1.6	Expérimentations préliminaires	33
1.6.1	Enregistrements utilisés	33
1.6.1.1	Exemples d'archives de l'INA	33
1.6.1.2	Enregistrements en entrée et en sortie des dispositifs	33
1.6.2	Mesures entrée/sortie sur des appareils audio	35
1.6.2.1	Distorsion non-linéaire d'amplification de puissance	35
1.6.2.2	Ecrêtage numérique	38
1.6.2.3	Saturation magnétique	38
2	Choix du modèle de distorsion	43
2.1	Introduction	43
2.2	Paramétrisation du modèle de Hammerstein	44
2.2.1	Paramétrisation du filtre linéaire	45
2.2.2	Modélisation de la non-linéarité ϕ	46
2.3	Méthodes d'identification entrée/sortie	49
2.3.1	Estimation des paramètres par la méthode des moments	50
2.3.2	Méthodes des moindres carrés	51
2.4	Expériences et résultats d'identification	53
2.4.1	Résultats obtenus par la méthode des moments	53
2.4.2	Résultats obtenus par la méthode des moindres carrés	58

2.4.3	Conclusion	65
3	Estimation autodidacte de la distorsion	67
3.1	Introduction	67
3.2	Modèle et hypothèses	68
3.2.1	Fonction de vraisemblance associée au modèle	69
3.2.2	Conditions d'identifiabilité	70
3.2.3	Discussion du modèle	72
3.3	Estimation du filtre linéaire	73
3.3.1	Étude de la DSP des signaux intermédiaires	73
3.3.2	Critère de Whittle	74
3.3.3	Illustration de la méthode	75
3.4	Estimation de la fonction ϕ	77
3.4.1	Statistique des observations triées	77
3.4.2	La méthode d'égalisation des quantiles	80
3.4.3	Illustration de la méthode des quantiles	82
3.5	Algorithme complet d'estimation	84
3.5.1	Détermination de la fonction $f(\omega)$	85
3.5.2	Illustration de la méthode	86
3.5.3	Comparaisons avec les résultats entrée-sortie	88
4	Compensation de la distorsion non-linéaire	91
4.1	Introduction	91
4.2	Traitement des écrêtages numériques	93
4.2.1	Hypothèses et modélisation	93
4.2.2	Échantillonnage bayésien	95
4.2.3	Echantillonnage avec contrainte de seuillage	96
4.3	Illustration de la méthode de correction des écrêtages	98
4.3.1	Découpage du signal et initialisation des algorithmes	99
4.3.2	Illustration sur un signal synthétique	99
4.3.3	Application aux enregistrements audio	102
4.3.4	Conclusion	103
4.4	Compensation dans le modèle de Hammerstein	103
4.4.1	Équation d'observation	104
4.4.2	Modèle bayésien hiérarchique	104
4.4.3	Méthode MCMC de compensation	105
4.4.4	Échantillonnage avec partitionnement de \mathbf{z}	107
4.5	Illustrations sur des signaux synthétiques	108
4.5.1	Comportement du MH-RW en bloc	109
4.5.2	Comportement du MH-RW avec partitionnement	111
4.5.3	Robustesse de la méthode d'échantillonnage avec partitionnement de \mathbf{z}	114
5	Conclusion générale	117
	Annexes	118
A	Les moindres carrés non-linéaires	119
A.1	Modèle avec partie linéaire tout pôles et ϕ polynomiale	119
A.2	Modèle avec partie linéaire tout pôles et ϕ hyperbolique	120
A.3	Modèle avec partie linéaire RIF et ϕ polynomiale	121

A.4	Modèle avec partie linéaire RIF et ϕ hyperbolique	122
B	La base des polynômes d’Hermite	125
B.1	Définition	125
B.2	Formule de Mehler	126
B.3	Coefficients d’Hermite d’un polynôme simple	127
C	Traitement bayésien du modèle AR gaussien	129
C.1	Fonction de vraisemblance	129
C.2	Loi conditionnelle de \mathbf{z}_I	131
C.3	Lois conditionnelles de θ et σ_e^2	133
D	Les méthodes d’échantillonnage par chaînes de Markov	137
D.1	Principe des algorithmes MCMC	138
D.2	Algorithme de Hastings-Metropolis	139
D.3	Typologie des algorithmes MCMC	142
	Bibliographie	145

Chapitre 1

Contexte et objectifs

1.1 Introduction

Les enjeux de la préservation et de la revalorisation des documents d'archives audiovisuels sont encore aujourd'hui très imbriqués. On observe une sollicitation des collections d'archives à fort contenu culturel et historique dans un contexte où les solutions techniques offertes par les standards internationaux de compression et de diffusion des contenus audiovisuels sont très performantes.

L'utilisation des extraits d'archives pour situer des faits d'actualité dans leur contexte historique est une pratique fréquente des chaînes de production, de diffusion télévisuelle et radiophonique. De même, le marché des ventes de disques compacts CD et de disques vidéo digitaux DVD propose un bon nombre de rééditions complètes de collections où paraissent les oeuvres anciennes diffusées avec les interventions médiatisées d'époque des auteurs. De plus, ces enregistrements anciens de plus de 50 ans réapparaissent avec une qualité sonore correctement adaptée aux exigences de production des documents audiovisuels actuels.

Dans ce contexte, les détenteurs de fonds d'archives adoptent alors une politique de copie systématique des supports analogiques anciens aux formats de compression et de diffusion numériques. Ce chantier est devenu presque indispensable tant du point de vue de la préservation des supports anciens que de celui de leur revalorisation car la numérisation des documents permet d'une part, de résoudre les problèmes liés à l'obsolescence des supports (détérioration physico-chimique des supports) et des équipements (disponibilité ou maintenance des appareils), et d'autre part, d'adapter les conditions de stockage, de montage et de diffusion des archives aux équipements standards des chaînes de production audiovisuelles. Cependant, cette étape a un coût et ne résout pas nécessairement tous les problèmes de la revalorisation d'un fond de documents, ni ceux de la préservation du point de vue de la question de la pérennité des supports de stockage.

La thèse que je présente a été réalisée au sein de l'Institut National de l'Audiovisuel (INA). C'est l'établissement chargé de la mission de sauvegarde et de conservation du patrimoine audiovisuel diffusé par les chaînes de télévision et de radio publique [Delcros and Vodan, 1986]. Le fond d'archives que détient l'institut est gigantesque et représente plus de 60 ans de radio et 50 ans de télévision, soit 1.77 millions d'heures enregistrées ou 2.5 millions de documents sur 80 km de rayonnage. Ceci représente aujourd'hui environ 650000 heures de radiodiffusion et 575000 heures d'émissions télévisées qui peuvent être considérées comme menacées [Frémeaux, 2004-2005]. Dans ces conditions, un plan de numérisation et de sauvegarde fut mis en place depuis l'année 1999 par l'institut. Aujourd'hui, plus de 100000 heures de documents d'archives sont déjà numérisées et la cadence des opérations est de l'ordre de 1200 heures de programmes traités par mois.

Le développement des outils techniques de restauration des documents audiovisuels fait partie des projets importants mis en place par l'institut pour accompagner le plan de numérisation et de sauvegarde du patrimoine. En première instance, l'objectif est de compléter les solutions techniques de restauration existantes dont l'INA dispose. En principe, il s'agit aussi de proposer une meilleure "automatisation" des opérations de restauration qui sont encore en grande partie caractérisées par des interventions assez artisanales ou plus simplement au cas par cas.

Plus généralement, le plan de numérisation se présente comme une solution globale. Cependant, la question de l'hétérogénéité du fond audiovisuel tant du point de vue de la diversité des supports anciens que de celui des contenus conservés, soulève plusieurs problématiques parallèles à la restauration :

- Les coûts et investissements nécessaires relatifs à la cadence du plan de sauvegarde et au type de stockage des documents.
- Le choix des sauvegardes prioritaires, c'est-à-dire l'ordre des fonds à traiter prioritairement compte tenu de leur valeur historique et culturel ou de l'état technique de dégradation du document.
- Les méthodes d'indexation et de documentation du fond numérisé.

La complexité de ces problèmes à résoudre est relative aux politiques et aux choix techniques d'époque pour la conservation et la sauvegarde des fonds d'archives. Prenons un exemple qui concerne le fond d'archives radiophonique de l'institut. On sait que le volume horaire des enregistrements anciens sur disques de laques $78\text{tours}/mn$ est relativement faible par rapport à celui des bandes magnétiques analogiques qui couvre environ toute la radio depuis les années 1950 à 1980. Cependant, les difficultés techniques liées à la relecture des disques nécessitent un temps considérable de traitement pour chaque exemplaire par rapport à celui nécessaire pour numériser les bandes films. Les collections de disques ont néanmoins une forte valeur historique et culturelle car elles représentent toute la radio avant 1950 et de ce fait, ne peuvent être sacrifiées.

Cette thèse a pour objet de répondre à l'une des problématiques rencontrées à l'INA dans le cadre de la restauration des enregistrements sonores anciens. Dans ce contexte, la technologie disponible aujourd'hui offre d'ores et déjà la possibilité d'atténuer certaines dégradations induites par les divers processus survenant lors de l'enregistrement et de l'archivage des supports analogiques. Des résultats appréciables ont par exemple été obtenus pour la réduction des bruits de fond, l'élimination des bruits impulsions ("crackles" et "clicks") et la détection des pertes locales de signal ("dropout").

L'objet de cette thèse est l'étude, la modélisation et le traitement des distorsions non-linéaires, pour lesquelles les techniques actuelles s'avèrent impuissantes. L'approche retenue consiste à représenter globalement, à la fois le signal audio à restaurer et le processus de distorsion, dans le cadre d'un modèle statistique. Cette approche présente un bon compromis entre une souhaitable généralité (possibilité de traiter à l'aide d'une méthode globale plusieurs types de distorsions) et l'utilisation de connaissances spécifiques, notamment concernant les sources de distorsions.

Les phénomènes de saturation ou de sur-modulation qui induisent de graves distorsions du signal peuvent avoir pour origine plusieurs éléments de la chaîne d'enregistrement/lecture. Les phénomènes les plus courants sont la saturation des enregistrements sur bandes magnétiques, les distorsions d'inscription des enregistrements gramophones ou les distorsions non-linéaires d'amplification de puissance. Une caractéristique importante du domaine de la restauration et de la conservation des archives sonores est le fait que le matériel d'origine (d'enregistrement et de restitution) est souvent inconnu ou perdu. La caractérisation des sources de distorsion est donc malheureusement, le plus souvent impossible ou tout au moins très partielle.

La ligne directrice de ce travail consiste à appréhender de manière robuste les propriétés de la non-linéarité directement à partir de la donnée du signal numérisé, en intégrant l'ensemble

des connaissances disponibles, tant sur le signal que sur les processus de distorsion. La première étape consiste à définir une modélisation paramétrique du processus de distorsion (chapitre 1) et à vérifier l'adéquation de ce modèle sur un ensemble de mesures de caractérisation représentant les exemples principaux de distorsions couramment rencontrées (chapitre 2). La seconde étape consiste à définir la méthode d'identification de la distorsion (chapitre 3) et de reconstruction (chapitre 4) du signal associée à ce modèle en prenant en compte, le nécessaire compromis entre les performances d'estimation et la complexité des algorithmes développés.

1.2 Contexte

Nous proposons un exposé rapide de l'état du fond d'archives radiophoniques de l'INA. Ceci présente les problématiques importantes rencontrées et les difficultés traitées par les opérations de restauration dans le contexte de la numérisation et de la revalorisation de ces documents. Ainsi, nous montrons quels sont les exemples de dégradations, les solutions existantes et les cas difficiles, sujets à des développements modernes dans le domaine du traitement du signal et parmi lesquels figure la correction des distorsions non-linéaires.

1.2.1 Le fond d'archives radiophoniques de l'INA

La particularité du fond d'archives radiophoniques par rapport à celui des archives télévisées dont dispose l'INA est qu'environ 90% des documents sont disponibles sur support unique. Les documents conservés représentent plus de soixante années d'émissions hertziennes. Les principaux supports d'enregistrements qui furent utilisés sont,

- Le 78 tours/min à gravure verticale, dit "disque à saphir".
- Les bandes magnétiques analogiques de format 6,35 *mm*.
- Les cassettes à bandes magnétiques audio-numériques DAT.
- Les disques compacts CD.

Les bandes magnétiques 6.35 *mm* furent utilisées depuis 1949 pour les enregistrements de concerts de musiques puis de façon systématique à partir de 1947 pour l'ensemble des émissions radiophoniques. Au fur et à mesure que les appareils ont été perfectionnés, les enregistrements furent réalisés avec des vitesses d'entraînement des bandes allant de 76, 38, 19 et 9.5 *cm/s* en configuration monophonique puis stéréophonique. Les politiques de sauvegarde de l'époque consistaient à conserver la totalité des émissions. De ce fait, un problème important lié à ce type de support est celui de l'identification des sujets et thèmes représentés par les documents. De plus, la constitution chimique à base de tri-acétate des bandes utilisées pendant la période 1954 à 1957 n'a pas résisté aux conditions de la conservation. Celles-ci ont donné lieu à des réactions d'hydrolyses catalytiques des films. Ces bandes sont aujourd'hui fragiles, très cassantes et demandent quelques précautions pendant les relectures avant numérisation. La majorité des bandes enregistrées pendant la période 1956 à 1957 furent conçues sur une base de chlorure de vinyle. De même, cela pose aujourd'hui des problèmes de décollement d'oxydes sur le support à l'étape de relecture de ces documents.

Concernant les enregistrements sur disques 78 tours/min à gravure directe, la phonothèque de l'INA dispose de plus de 30000 disques d'avant la seconde guerre mondiale correspondants à des postes privés ou d'état. Ces supports sont constitués par un disque de métal sur lequel est posé un vernis cellulosique. En pratique, les deux matières résistent de façon différente aux conditions de conservation thermique et hygrométrique. De ce fait, les supports sont fortement endommagés car les vernis desséchés se décollent et se craquellent. Aujourd'hui, l'étape de relecture est confrontée à plusieurs problèmes de nature différente : obsolescence des diamants des têtes de lecture de platines d'époques, correction des courbes d'accentuation RIAA et prin-

cipalement, l'état physico-chimique du support. On trouve donc plusieurs procédés ingénieux pour extraire le son enregistré sur ces supports tels que les dispositifs de nettoyage à ultrasons, les équipements de lecture optique qui permettent de traiter sans endommager le support. En pratique, les performances obtenues sont généralement moins intéressantes que les techniques de lecture humide qui consistent à appliquer une eau déminéralisée et savonneuse directement sur le support avant de le traiter. Cela permet de réduire considérablement le bruit de fond. En revanche, la numérisation doit être immédiate car la relecture à sec devient impossible et le procédé est irréversible.

Les premières archives sonores sur cassettes magnétiques DAT utilisées à la phonothèque datent de 1987. Ce type de support ainsi que les disques compacts font partie des technologies d'enregistrement et de lecture à haute fidélité du signal. Aujourd'hui, les capacités de stockage sur disques CD ont largement augmenté depuis l'apparition des standards de compression MPEG. La pérennité du support sur disque laser est confortable. En revanche, certains lots récents de cassettes DAT, en particulier ceux utilisés de 1988 à 1989, sont déjà fortement menacés par les effets de la dégradation physico-chimiques 15 années plus tard. De plus, on retrouve en ce qui concerne le fond sur support DAT, des problèmes d'identification des documents, c'est-à-dire d'indexation des enregistrements.

1.2.2 Les opérations de restauration

La numérisation du fond radiophonique implique donc un certain nombre de préparations ou de traitements artisanaux du support et des films avant la relecture et le recopie. Ceux-ci sont considérés comme faisant partie des tâches accomplies lors des opérations de restauration. En pratique, on effectue une expertise sonore du document une fois numérisé afin d'évaluer la qualité de la recopie. Cette étape désigne plusieurs types de dégradation (bruits de fond, pertes de niveau sonore etc...) de l'enregistrement. On appellera restauration numérique et plus simplement, restauration dans la suite de notre étude, le traitement de ces dégradations détectées après l'étape de la numérisation du document sonore.

La restauration est alors définie par les processus qui accompagnent la recopie des documents et consiste principalement à replacer un document conservé dans ses conditions initiales par un ensemble de travaux de réparations, de reconstructions et de corrections visant à restituer dans la mesure du possible le matériel original. On distingue alors deux catégories de traitements suivants leurs motivations [Schüller, 1991] :

- Traitements arbitraires.
- Traitements objectifs.

Pour le premier type de traitement, c'est principalement le jugement de l'opérateur du système de restauration qui guide les opérations. On cite dans ce cas, les opérations de post-égalisation en fréquence (filtrages), la pseudo-stéréophonie (obtention d'un signal sur deux canaux à partir d'un enregistrement original monophonique) et les réglages des alignements de niveaux sonores ou de compression de dynamiques. Les techniques mises en oeuvre ne sont pas spécifiques au problème de restauration et correspondent à des manipulations courantes dans le domaine audio.

Pour le second type de traitement, la restauration est restreinte à la compensation de défauts mesurables, ou tout au moins, caractérisables par une procédure objective. Pour cela, on distingue deux classes d'opérations objectives selon le type de procédure qui permet de caractériser les défauts à traiter [Cappé, 1993] :

- Utilisation de connaissances externes à l'enregistrement.
- Caractérisation des défauts uniquement à partir de l'enregistrement.

L'exemple le plus représentatif des conditions de la première situation est celui qui concerne le standard RIAA qui spécifie la réponse fréquentielle des systèmes de lecture des disques microsillons. Il existe de nombreux standards similaires concernant la lecture des disques 78

tours [Schüller, 1991]. En pratique, il est difficile de faire la part entre les effets de la courbe de réponse considérée comme standard et les imperfections éventuelles du système d'enregistrement. De ce fait, le recours à des connaissances sur le système d'époque s'avère indispensable.

Dans certains cas, le recours à des connaissances externes sur le dispositif d'enregistrement d'époque apporte une explication à l'apparition de l'artefact mais n'ajoute pas d'information supplémentaire pour le traitement. C'est le cas pour le traitement des fréquences parasites qui interfèrent dans le spectre audio. Ces effets apparaissent fréquemment dans le cas des bandes audio associées aux enregistrements vidéo. Ces interférences aussi appelées "hum" ou "rumble" sont le plus souvent produites par les fréquences harmoniques de la vitesse de rotation des têtes d'enregistrement vidéo. Le microphone du système d'enregistrement audio capte le bruit mécanique de la caméra 6,35 mm ou le bourdonnement de la table d'entraînement de la platine disque. La localisation dans le spectre audio de ces fréquences parasites est cependant assez simple et on corrige ces effets par des opérations de filtrage à bande étroite.

Depuis les années 1990, plusieurs techniques de restauration très performantes permettant de corriger les exemples de dégradations les plus couramment rencontrées à savoir, les bruits de fonds et les bruits impulsifs ("crackle", "clicks") ont été élaborés [Godsill et al., 1998]. Les approches développées utilisent une caractérisation des défauts uniquement à partir du signal. Aujourd'hui, ces solutions apportées font partie des outils indispensables installés dans les studios de restauration. Parmi les exemples les plus performants, il faut considérer le logiciel Audio Cube développé en Allemagne par la société *Houper Digital Audio (HDA)* et le système CEDAR développé en Grande Bretagne par *CEDAR Audio Ltd.* L'intérêt de ces solutions est qu'elles permettent de traiter n'importe quel type d'enregistrement sans considération ou information sur la provenance du document ou le type de support.

1.2.3 Les problèmes qui restent posés à la restauration numérique

Il subsiste plusieurs exemples de dégradation (bandes mal effacées, oppositions de phases en stéréo, etc...) que les opérations de restauration ne peuvent corriger objectivement. L'exemple le plus difficile est celui des pertes locales de signal qui apparaissent après la numérisation des disques 78 tours/min. Les craquellements du support produisent des plages de silence sur des durées de plusieurs secondes et on ne voit pas comment restituer une information complètement perdue. Parallèlement, les perspectives avancées par les techniques de relecture optiques des disques à saphir paraissent très attractives mais sont aujourd'hui assez peu robustes à la présence de poussières sur le support.

Cette thèse aborde l'un des trois types de dégradation du signal audio couramment rencontrés par les techniciens de la restauration à l'INA, à savoir :

- Les effets de pleurage.
- Les distorsions non-linéaires.
- Les problèmes de synchronisation images et sons.

Actuellement, la seule façon de re-synchroniser la bande son sur un document audiovisuel consiste à utiliser un logiciel d'édition et de montage synchronisé avec un lecteur de cassette vidéo. L'opération est effectuée en déplaçant "manuellement" la piste sonore selon un contrôle visuel du document à l'image. La re-synchronisation à un point de montage nécessite de pouvoir étirer localement le signal sonore pour réajuster la transition au montage image/son. Pour cela, des traitements consistant à ajuster légèrement les vitesses de lecture permettraient de retrouver une meilleure synchronisation.

De façon générale, les effets de pleurage sont produits par des variations anormales de la vitesse de lecture/enregistrement des bandes films, des cassettes magnétiques ou du mouvement de rotation d'entraînement des disques vinyles. Plus rarement, ceux-ci sont aussi produits par une déformation du disque microsillon ou de la bande d'enregistrement. En anglais, ces effets

sont appelés “wow” ou “flutter” si la durée de cette déformation du signal est plus courte. Actuellement, il n’existe pas d’outil capable d’asservir une vitesse de lecture aux effets de pleurage. Idéalement, l’objectif serait ensuite de compenser le pleurage en corrigeant de façon inversée les variations de vitesses de lecture détectées. Actuellement, les seuls exemples de techniques de correction adaptées aux problèmes du pleurage sonore s’appliquent aux signaux pour lesquels il est possible de définir une fréquence fondamentale. Globalement, le traitement consiste à détecter les variations de cette fréquence dans le spectre audio suivant l’hypothèse que celles-ci correspondent aux variations de vitesse des mécanismes d’entraînement [Godsill and Rayner, 1998a].

D’après l’expertise des techniciens de la restauration, les effets de pleurage apparaissent heureusement relativement rarement. En revanche, les exemples de saturation ou plus généralement de distorsions non-linéaires sont plus courants. Or, il n’existe actuellement pas de moyens de retrouver une bonne qualité sonore à partir d’un signal distordu. Les seuls procédés utilisés consistent à appliquer des opérations de filtrage afin d’atténuer localement la perception de la dégradation. D’un autre côté, déjà plusieurs prototypes de méthode de traitement adaptés au contexte de la restauration audio ont été proposés et seront discutés dans la section 1.5 de ce chapitre [Mercer, 1993], [Troughton, 1999]. On considère donc dans cette thèse ce troisième type de distorsion sonore. L’objectif est de développer une méthode originale de restauration en analysant plusieurs enregistrements (archives INA, mesures de caractérisation) des effets de la distorsion non-linéaire et en développant les approches par modélisation statistique proposées dans le domaine du traitement du signal audio.

1.3 Définitions et mesures de la distorsion sonore

1.3.1 Origines de la distorsion non-linéaire

De façon courante, le terme distorsion est employé pour désigner une différence détectée entre une source sonore et sa version transmise, enregistrée et reproduite par un dispositif audiofréquence. La distorsion est un phénomène facile à déclencher, mais beaucoup plus délicat à expliquer et *a fortiori* à contrôler. Une distorsion détectée indique la présence d’une perturbation ou d’un dysfonctionnement qui intervient entre une source et le signal sonore finalement reproduit.

Cependant, on peut donner une terminologie plus précise qui désigne des exemples de distorsion non-linéaire (saturation, écrêtages, distorsion d’amplification) couramment rencontrés dans les dispositifs d’enregistrement/lecture. Ceux-ci traduisent l’apparition des trois mécanismes fondamentaux qui décrivent la déformation produite sur le signal audio, à savoir :

- La distorsion linéaire en amplitude et en phase [Preis, 1982].
- La distorsion harmonique.
- La distorsion d’inter-modulation de fréquences.

Les distorsions linéaires modifient le contenu fréquentiel du signal et ainsi, la forme temporelle du signal. On considère que l’opération de transmission du système est cependant une convolution linéaire du signal incident [Delmas, 1991]. La distorsion harmonique et les intermodulations de fréquences ajoutent des composantes spectrales supplémentaires dans le contenu en fréquence du signal transmis. Cette proposition est basée sur les définitions standard des mécanismes mis en jeu, à savoir :

Distorsion harmonique : La déformation du signal entraîne l’apparition de plusieurs raies spectrales supplémentaires dans le spectre transmis, dont les fréquences sont des multiples des fréquences incidentes. Si on considère un signal sinusoïdal de fréquence f et tel que les variations

de l'amplitude temporelle sont de la forme $A \sin(2\pi ft)$, le phénomène de distorsion harmonique génère un signal dont les variations d'amplitudes sont décrites par la somme,

$$A_1 \sin(2\pi ft + \varphi_1) + A_2 \sin(4\pi ft + \varphi_2) + \dots + A_n \sin(2\pi nft + \varphi_n)$$

avec, A_1, \dots, A_n et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont respectivement les valeurs des amplitudes et des phases des produits de la distorsion harmonique.

Distorsion d'inter-modulation : La déformation entraîne l'apparition de plusieurs raies spectrales dans le signal transmis dont les fréquences sont égales aux sommes et aux différences des fréquences incidentes. Si le signal sinusoïdal incident comporte deux raies spectrales stationnaires de fréquences distinctes, notées f_1 et f_2 , le signal transmis comporte plusieurs composantes supplémentaires, dites,

- Composantes d'inter-modulation primaires aux fréquences ;

$$(f_1 \pm f_2), (f_1 \pm 2f_2), (f_2 \pm 2f_1), (f_2 \pm 3f_1), (f_1 \pm 3f_2), \dots$$

- Composantes d'inter-modulation secondaires aux fréquences ;

$$2(f_1 \pm f_2), 2(f_1 \pm 2f_2), \dots, 3(f_1 \pm 2f_2), 3(f_2 \pm 2f_1) \dots$$

avec des niveaux d'amplitudes et des rapports de phase différents.

La distorsion harmonique et les distorsions d'inter-modulation désignent plus spécifiquement les mécanismes de la distorsion non-linéaire. Cependant, ces deux définitions ne précisent pas les relations de phase entre les raies spectrales produites par les effets de la distorsion harmonique et des produits d'inter-modulation. Du fait de l'apparition des harmoniques et des produits d'inter-modulation, ces deux dernières définitions indiquent implicitement qu'il se produit aussi des effets de la distorsion de phase dans le spectre du signal incident. Ainsi, on considère que ces trois types d'effets c'est-à-dire, distorsion harmonique, distorsion d'inter-modulation et distorsion linéaire, apparaissent conjointement avec les effets de la distorsion non-linéaire.

Le spectre du signal distordu dépend donc de la position des fréquences du signal incident. Une caractéristique importante de la distorsion est que les effets perçus dépendent fortement des propriétés du signal audio original. En revanche, les bruits parasites (bruits de fond, bruits impulsifs, etc...) produisent des artefacts sonores indépendants du signal enregistré. Dans les deux cas - distorsion ou bruits parasites - les effets audibles sont plus ou moins masqués par le signal audio correctement transmis. Cependant, les bruits parasites persistent ou disparaissent indépendamment du signal sonore et sont seulement liés au fonctionnement des appareils utilisés.

En pratique, la qualité de la reproduction du phénomène acoustique original dépend de l'ajustement des caractéristiques de fonctionnement des appareils d'enregistrement/lecture vis à vis des propriétés du signal audiofréquence. La distorsion est déclenchée le plus souvent quand le système est placé dans un régime de fonctionnement non-admissible. L'exemple le plus courant est celui de la sur-modulation des appareils. On parle de la sur-modulation, si la distorsion du signal est causée par un niveau d'intensité sonore trop élevé au passage d'un des éléments de la chaîne de transmission. Parmi les exemples les plus courants, on peut distinguer les cinq cas suivants :

Saturation magnétique : Le niveau d'enregistrement du magnétophone à bande magnétique n'est pas réglé suffisamment bas par rapport à l'intensité du courant transmis à la tête de lecture. C'est la bande magnétique qui sature sous l'effet d'un champ d'induction surfacique trop intense. Du point de vue physique, on sait que l'aimantation du support - portée par les corps ferromagnétiques sur le film - est proportionnelle (couplée) au champ présent à l'entrefer de

la tête d'enregistrement. Si l'intensité de ce champ devient intense, tous les dipôles magnétiques sont polarisés et statistiquement parallèles entre eux à partir d'un certain seuil. Les contributions additives des dipôles magnétiques atteignent une valeur maximale et le signal enregistré ne représente pas les variations au-delà de ce seuil d'intensité.

Saturation microphone : La sensibilité du microphone est trop grande et le mécanisme de transduction électro-acoustique transmet un signal distordu parce que le signal acoustique incident a une intensité trop élevée.

Ecrêtage numérique : La quantification numérique avec 8, 16 ou 24 bits des variations de l'amplitude du signal audio produit deux types de distorsion caractéristiques. On distingue d'une part la distorsion de quantification qui introduit un bruit de quantification, lié aux erreurs d'arrondis numériques sur les valeurs du signal analogique et, d'autre part, l'écrtage numérique.

Les écrtages numériques -ou "clipping" - se produisent quand la dynamique - écart en décibels entre la valeur la plus faible *pianissimi* et la plus forte *fortissimi* - du signal analogique est trop élevée. Généralement, dans le cas du "clipping", le convertisseur conserve la valeur maximal de code (11...1) tant que la valeur instantanée de l'amplitude du signal incident n'est pas redescendue au-dessous du seuil d'écrtage.

Distorsion non-linéaire d'amplification de puissance : Les propriétés de transmission des quadripôles d'amplification ne sont jamais tout à fait linéaires. Certains le sont cependant assez pour que l'on puisse négliger leur non-linéarité tant que l'amplitude des signaux audiofréquences ne dépasse pas un niveau de seuillage au-delà duquel la distorsion apparaît de façon brutale.

Ecrêtage optique : Dans les dispositifs d'enregistrement du son optique sur les pellicules de film au nitrate (bandes vidéos 2 pouces), si les oscillations transversales du signal lumineux dépassent la largeur admissible de la bande sonore, l'information est perdue. Le signal est brutalement écrté.

Dans les exemples cités, la non-linéarité est une dégradation de la qualité du signal qui est déclenchée par la sur-modulation du système de transmission considéré. Cependant, la non-linéarité peut être une propriété indépendante de la sur-modulation. Dans ce cas, c'est une propriété contrôlée du système qui produit une déformation globale du signal transmis. Les exemples les plus courants sont représentés par les deux cas suivants :

Distorsion d'inscription : C'est un type de déformation non-linéaire qui intervient au moment de la gravure directe sur le support (disque de cire 78 tours/min) des enregistrements. On considère généralement que la déformation est due à la géométrie du mécanisme (micro-sillons et pointe d'inscription) et couplée aux effets de frottements sur la surface du support [Shiga, 1966].

Distorsion d'amplification à lampes : Certains amplificateurs de conception moderne (pré-amplificateurs, convertisseurs A/N) utilisent des technologies à lampes à la place des amplificateurs à transistors (semi-conducteurs) à effets solides. En théorie, les avantages de ces technologies sont que les circuits sont moins complexes car les valeurs des gains obtenus sont plus grandes. D'un autre côté, les branches d'amplification des transistors à effets semi-conducteurs ne sont pas assez stables et pour cela nécessitent plusieurs boucles de rétro-action pour éviter les saturations trop brutales. Du point de vue de la qualité de la reproduction du signal sonore,

ces amplificateurs créent une distorsion globale même pour un faible niveau d'intensité du signal. Ces effets sont appréciés par les musiciens (guitaristes, chanteurs) qui tentent d'obtenir des textures sonores proches de celles des amplificateurs (VOX AC30/4, Marshall JTM 45) de conception plus ancienne ([Zölzer, 2002], chap. 5). De façon générale pour la prise de son, la distorsion des amplifications à lampes permet d'enrichir spectralement le signal numérique et de simuler des sonorités plus *naturelles*.

L'utilisation des amplificateurs à lampes suppose que le dispositif d'enregistrement/lecture introduise une distorsion caractéristique *voulue* par l'utilisateur. Il n'en reste pas moins que ces appareils lorsqu'ils sont soumis aux effets de la sur-modulation, créent aussi une distorsion non-linéaire qui nuit à la qualité sonore du signal traité. De même, les disques à saphir sont capables d'enregistrer une dynamique du signal de moins de 40 dB alors que les plus grandes variations en intensité des sons naturels s'étendent sur plus de 100 dB. Les effets de la sur-modulation sont donc généralement inévitables et s'ajoutent aux effets de la distorsion d'inscription.

L'apparition brutale de la distorsion non-linéaire, déclenchée le plus souvent par les effets de la sur-modulation des appareils de transmission est donc généralement une question d'alignement des niveaux de sensibilité des dispositifs. Compte tenu des limitations des appareils audiofréquences d'époque, les moyens supplémentaires pour limiter ces effets sont les compresseurs ou les limiteurs, placés en amont ou en aval des dispositifs susceptible de produire la distorsion :

Compresseurs, expandeurs et limiteurs : Ce sont des appareils qui ont pour but de contrôler les écarts de dynamique du signal acoustique incident afin d'optimiser le rapport signal à bruit dans les dispositifs d'enregistrement/lecture et réduire ainsi le risque de sur-modulation. Le principe de fonctionnement est celui des amplificateurs à gain variable. Le gain est ajusté dynamiquement en fonction du niveau de puissance instantanée du signal incident [McNally, 1984].

Enfin, il est peu réaliste de croire que les exemples de distorsions précisés apparaissent seuls. En pratique, les traitements successifs (capture, amplification, transmission, conversion analogique/numérique, compression) du signal audio modifient les caractéristiques de la non-linéarité intervenant en un point du dispositif et ajoutent (éventuellement) des artefacts supplémentaires dans l'enregistrement.

1.3.2 Mesure de la dégradation

La mesure du rapport signal à bruit (RSB) qui est très utile quand les artefacts de la dégradation audio sont des bruits parasites, n'est pas adaptée aux effets de la distorsion harmonique et aux produits des inter-modulations de fréquences. La mesure standard consiste à évaluer le taux de distorsion harmonique. La procédure consiste à envoyer un signal sinusoïdal à l'entrée des équipements testés puis à analyser le signal transmis en sortie. Le taux de distorsion harmonique, généralement exprimé en pourcentage est le rapport entre la valeur efficace de la puissance des composantes harmoniques et de celle de la fréquence fondamentale incidente. Suivant les notations utilisées pour la définition de la distorsion harmonique, on a une relation de la forme,

$$Td = 100 \frac{\sqrt{A_2^2 + \dots + A_n^2}}{A} \quad (\%) \quad (1.1)$$

Du point de vue pratique, la composante fondamentale est filtrée dans le signal transmis. On détermine alors une valeur efficace, qui est par définition, la racine carrée de la puissance de la somme des valeurs en amplitude des fréquences harmoniques, mesurées à l'aide d'un analyseur de spectre.

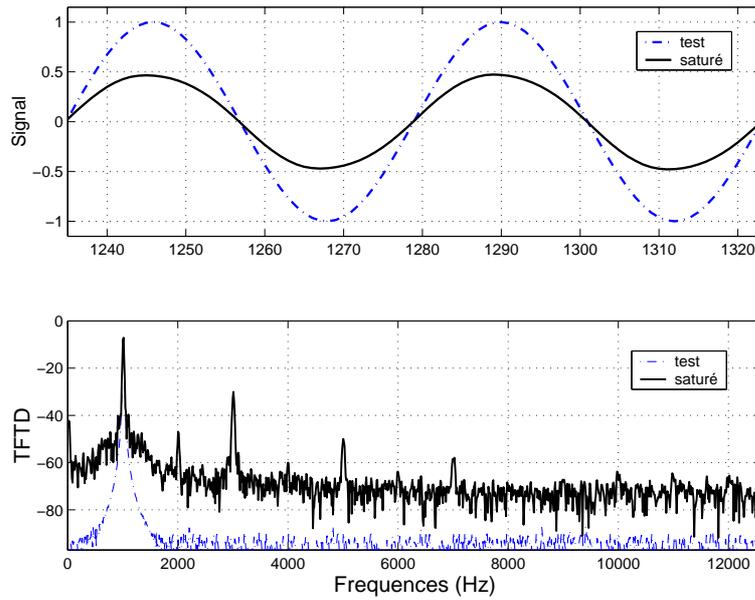


FIG. 1.1 – Saturation magnétique d'un signal sinusoïdal de fréquence pure égale à 1000Hz . On observe les variations temporelles (en haut), en fréquences (bas) du signal test et du signal enregistré sur un magnétophone de type *STUDER* modèle *A80* (19cm/s).

Sur la figure 1.1 par exemple, nous représentons les artefacts produits par la saturation d'un magnétophone à bandes analogiques $6,35\text{mm}$ avec un signal test sinusoïdal de fréquence égale à $f = 1000\text{Hz}$. On observe sur la partie haute de cette figure, l'effet d'écrasement de l'enveloppe temporelle avec une légère asymétrie entre les oscillations montantes et descendantes du signal enregistré par rapport au signal incident. En représentation de Fourier (sur la partie basse de la figure), on observe les effets de la distorsion harmonique avec l'apparition de plusieurs raies spectrales aux fréquences multiples de f , soit les fréquences $2f, 3f, 5f, 7f$.

Sur l'exemple de la figure 1.1, les harmoniques paires $4f$ et $6f$ sont masquées par les effets de l'augmentation du niveau de bruit de fond. De ce fait, la mesure du taux de distorsion (1.1) est parfois remplacée par un taux de distorsion harmonique total qui est défini par la formule suivante,

$$THD = 100 \sqrt{\frac{A_2^2 + \dots + A_n^2}{A_1^2 + \dots + A_n^2}} \quad (\%) \quad (1.2)$$

Le taux THD représente la valeur numérique du pourcentage de la puissance efficace des composantes harmoniques par rapport à la puissance totale du signal enregistré. En pratique, la fréquence fondamentale incidente est filtrée dans le signal après distorsion et on détermine ensuite la puissance efficace du signal obtenu. Si la puissance est calculée en moyennant sur l'ensemble des raies spectrales, on obtient le taux (1.2). Quand le taux de distorsion harmonique est faible ou si certaines composantes ne sont pas correctement résolues, on détermine un pourcentage semblable à (1.2), notée $THD + N$ -avec N pour *Noise* - à partir du rapport entre la puissance efficace totale des composantes harmoniques et des bruits parasites et la puissance totale du signal enregistré après distorsion.

Cependant, les protocoles de mesure les plus couramment utilisés historiquement sont ceux visant à déterminer le taux de distorsion d'inter-modulation qui furent proposés et recommandés par le Comité Consultatif International de téléphonie CCIF¹ et par la société SMPTE (Society

¹Actuellement, le comité CCIF est représenté par l'Union International des Télécommunications (ITU).

of Motion picture and Television Engineers) [Czerwinski et al., 2001a]. Ces mesures utilisent des signaux tests comportant deux fréquences éloignées dans le spectre audio et déterminent comme pour le taux de distorsion harmonique, le rapport de la puissance relative aux composantes spectrales produites par les inter-modulations par rapport à celle du signal test incident [Scott, 1946], [Hilliard, 1946]. Ces mesures apparurent avec les progrès de l'industrie du disque vinyle et des générateurs de signaux harmoniques hautes fréquences. A l'époque, l'écoute du signal test après distorsion, permettait encore d'évaluer la qualité des équipements. La mesure du taux de distorsion harmonique était cependant peu fiable car les effets de masquage des composantes harmoniques étaient trop importants. En effet, la distorsion harmonique produite par les gramophones, représentait approximativement quelques pourcents alors que les rapports signal-bruit caractéristiques étaient de l'ordre de 10% [Scott, 1953]. Les mesures tests comportant deux fréquences stationnaires étaient considérées plus robustes aux effets de masquage et surtout, plus sensibles aux modulations de fréquences dues aux variations de vitesses des mécanismes d'entraînement des disques.

Actuellement, les solutions pour la mesure des non-linéarités dans les équipements audio ne sont pas plus évoluées malgré les progrès sur la précision des équipements audiofréquences. Plusieurs variantes de la mesure d'inter-modulation et des effets d'interférences (DIM, CCIF, THD-IM etc...) ont été ajoutées aux protocoles standards. La cohérence entre les mesures obtenues et les effets perceptibles de la distorsion reste néanmoins un problème. Dans ces conditions, certaines approches proposent d'utiliser plusieurs protocoles de mesure standards pour étudier la qualité d'un seul équipement [Leinonen and Ojala, 1978], [Cabot, 1992]. Cependant, la distorsion sonore est toujours considérée dans le contexte de la distorsion harmonique ou des inter-modulations entre deux fréquences d'un signal test.

Plus récemment, une mesure performante utilisant des signaux tests comportant plusieurs dizaines de composantes spectrales a été proposée. La mesure de la puissance relative est effectuée en sous-bandes du spectre audio de façon à reproduire les mécanismes fondamentaux de la perception auditive humaine. La répartition des composantes spectrales du signal test, dit signal multitone, est de type logarithmique. Les rapports des phases des raies sont définis au sens du minimum du rapport de crête -rapport du niveau crête à crête à la valeur efficace- du signal multitone [Czerwinski et al., 2001b], [Voishvillo et al., 2004]. La répartition des composantes spectrales incidentes est telle qu'il n'existe pas deux composantes qui soient harmoniques l'une de l'autre. L'objectif est de déclencher le plus globalement possible tous les aspects de la distorsion produit dans le dispositif sans qu'il y ait d'effet de masquage entre les composantes harmoniques.

Dans [Tan et al., 2003] et [Tan et al., 2004], les auteurs étudient la cohérence entre les mesures effectuées avec des signaux multitones et les effets audibles sur plusieurs exemples de distorsion. Plusieurs séries de tests sur des enregistrements audio sont écoutées puis notées. Les résultats de sondage sont alors comparés avec la mesure. La mesure à proprement dite est une mesure de la corrélation entre le signal multitone incident et sa version après distorsion. Les conclusions de ces travaux montrent que l'utilisation de ces signaux tests permet d'obtenir des mesures objectives assez cohérentes par rapport aux effets sonores détectés tant que les exemples de distorsion étudiés, sont simulés synthétiquement. Si les exemples de distorsion utilisés pour les tests sont produits par des équipements réels (amplifications de puissance, haut-parleurs acoustiques, etc...) la cohérence entre les mesures et les impressions subjectives est moins bien établie.

Dans le cadre de cette étude, on ne voit pas comment appliquer les protocoles de mesures proposés compte tenu des contraintes de la restauration. Il est en effet impossible d'extraire à partir d'un enregistrement distordu seul, les propriétés d'un signal test et de déterminer une mesure quantitative. De plus, aucun résultat établi dans ce domaine ne permet de contrôler l'apparition ou d'expliquer les mécanismes du processus de distorsion en rapport avec des effets

audibles. Cela indique donc *a fortiori* qu'on ne pourra pas développer une méthode de traitement des distorsions non-linéaires qui soit basée uniquement sur des critères d'audibilité de la dégradation.

1.4 Modélisation de la distorsion non-linéaire

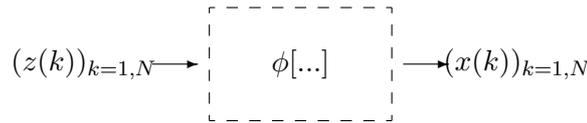
Dans cette section, nous présentons certains éléments de la théorie des systèmes non-linéaires, développés pour les applications sur le contrôle et l'identification des processus de transmission [Volterra, 1959], [Rugh, 1981], [Schetzen, 1980].

1.4.1 Les séries de Volterra

Suivant les notations du diagramme 1.1, la distorsion est représentée et identifiée par les propriétés de l'opérateur de transmission noté ϕ , supposé causal, stable, invariant dans le temps et tel que,

$$x(k) = \phi[z(k), \dots, z(k-i), \dots, z(1)] \quad (1.3)$$

où, $z(k)$ désigne le signal d'entrée et $x(k)$ le signal de sortie, supposé à temps discret.



DIAG. 1.1 – *Le modèle de transmission non-linéaire.*

Si les effets non-linéaires dépendent instantanément de l'amplitude du signal à l'entrée du système de transmission, l'opérateur de transmission ϕ associé, est une fonction non-linéaire à une seule variable, à valeur réelle. D'après le théorème de Weierstrass, on peut toujours approximer une fonction continue par un polynôme de degré d avec $d \rightarrow \infty$ et donc approximer ϕ sous une forme polynomiale à une seule variable.

Quand les effets de la non-linéarité sont non-instantanés, l'opérateur est représenté par une fonction à plusieurs variables et on utilise le modèle de Volterra/Wiener qui est la formulation la plus générale en théorie des systèmes non-linéaires. Ces modèles sont basés sur le théorème de Stone-Weierstrass qui donne les conditions de développement en série du noyau de transmission $\phi[\dots]$. La série de Volterra associée à l'opérateur de transmission est définie par la relation entrée-sortie suivante :

$$x(k) = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1[z(k)] + \mathbf{V}_2[z(k)] + \dots + \mathbf{V}_n[z(k)] + \dots \quad (1.4)$$

où, \mathbf{V}_n est l'opérateur polynomial de Volterra de degré n et tel que

$$\mathbf{V}_n[z(k)] = \sum_{i_1=0}^{\tau} \dots \sum_{i_n=0}^{\tau} h_n(i_1, \dots, i_n) z(k-i_1) \dots z(k-i_n) \quad (1.5)$$

où la fonction à n variables $h_n(i_1, \dots, i_n)$ est le noyau de degré n associé au système (S) . Les opérateurs $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ sont homogènes, c'est à dire que $\forall \gamma \in \mathbb{R}^+$, on a $\mathbf{V}_j(\gamma z(k)) = \gamma^j \mathbf{V}_j[z(k)]$. Si la série comporte un seul terme, on dit que (S) est non-linéaire homogène, si la série comporte n termes, on dit que (S) est polynomial et enfin dans le cas le plus général ($n \rightarrow \infty$), on obtient un système de Volterra.

Il existe un nombre considérable d'exemples d'utilisation des séries de Volterra dans des domaines d'applications différents [Giannakis and Serpedin, 2001]. Dans le domaine du traitement du signal audio, cette représentation est adoptée pour le traitement des non-linéarités dans les haut-parleurs acoustiques [Schurer et al., 1997], [Reed and Hawksford, 1996], [Klippel, 1996]. Les méthodes d'identification proposées utilisent des signaux tests enregistrés en entrée et en sortie de l'amplification acoustique. Le degré du système polynomial est généralement faible avec $n = 2, 3$. Après estimation des paramètres des noyaux, le modèle est ensuite utilisé pour construire une pré-égalisation du signal avant amplification pour atténuer les effets sonores produits par les termes non-linéaires de la série.

En pratique, quelles que soient les hypothèses simplificatrices utilisées pour paramétrer les noyaux de la série, on montre que la sortie $x(k)$ est une combinaison linéaire des composantes du vecteur généralisé

$$[z(k), \dots, z(\tau), z(k)^2, z(k)z(k-1), \dots, z(k)z(k-\tau), z(k-1)^2, z(k-1)z(k-2), \dots, z(k-1)z(k-\tau), \dots, z(k)^3, \dots, z(k)z(k-1)z(k-2), \dots]$$

construit avec les échantillons du signal incident. Les méthodes d'identification des noyaux h_1, \dots, h_n utilisent cette propriété pour construire les estimateurs des moindres carrés linéaires des paramètres de la modélisation [Raz and Veen, 2000]. Cependant, l'utilisation du modèle (1.4) est très coûteux en terme d'implémentation numérique des opérations de transmission du signal et d'identification des paramètres. Pour illustrer cette remarque, considérons le cas quadratique où $n = 2$. L'équation de transmission du signal est limitée au terme suivant,

$$x(k) = \sum_{i_1=0}^{\tau} \sum_{i_2=0}^{\tau} h_2(i_1, i_2) z(k-i_1) z(k-i_2)$$

Si on suppose que la fonction noyau est symétrique, il faut effectuer $\frac{\tau(\tau-1)}{2}$ opérations de filtrage pour calculer la valeur discrète à l'instant k du signal de sortie. On obtient un total de $f_e \frac{\tau(\tau-1)}{2}$ opérations effectuées pour une seconde de signal où f_e est la fréquence d'échantillonnage considérée. Plus généralement, une série de Volterra triangularisée de degré n avec un paramètre de retard τ comporte au total $(n+\tau)!/n!\tau!$ termes.

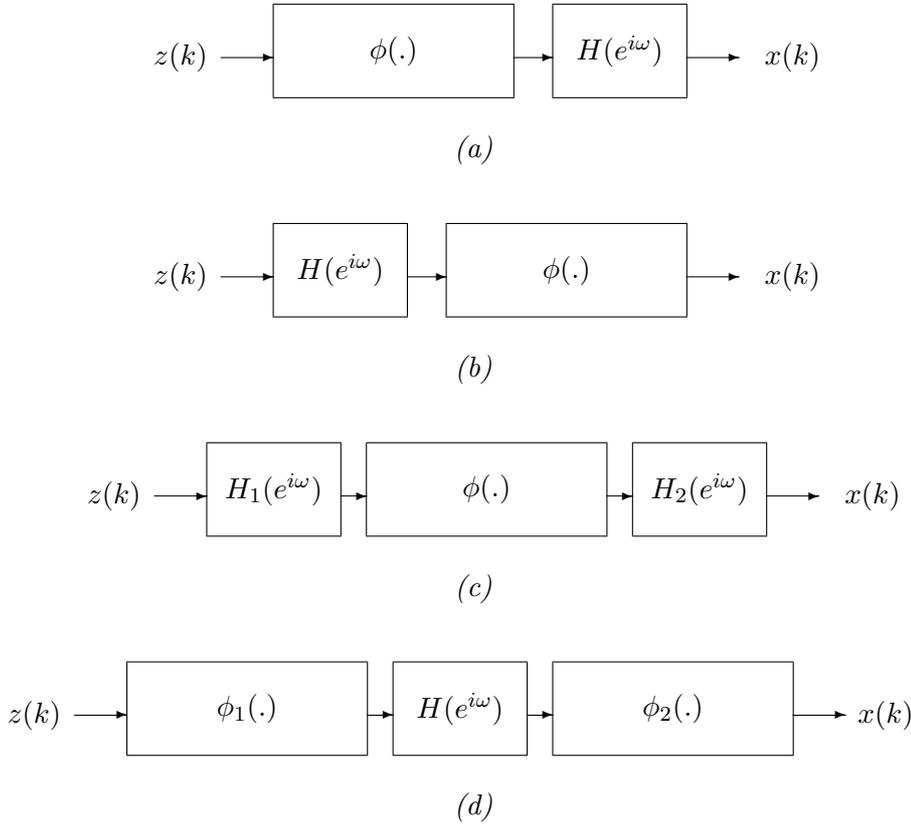
De ce fait, l'utilisation du modèle de Volterra pose le problème de la sélection des ordres n, τ de la décomposition en série. Ceux-ci modifieront les performances de la décomposition polynomiale à plusieurs variables tant du point de vue de l'identification du processus que de l'inversion des effets de la distorsion non-linéaire.

1.4.2 Les modèles structurés en cascade

Une approche différente de la modélisation consiste à utiliser des structures par blocs de transmission. Les modèles en cascade sont des exemples de structures par bloc, composés de plusieurs inter-connexions en séries, sans effet de couplage entre les sous-systèmes ([Ljung, 1999], [Haber and Unbehauen, 1990]). Les traitements successifs sont séparés et on peut définir l'état des signaux intermédiaires entre chaque point d'interconnexion de la structure. Les modèles de structure en cascade les plus couramment employés sont représentés sur la figure 1.2. Dans ces cas, les sous-systèmes sont soit des filtres linéaires causaux et invariants dans le temps, définis par leur réponse en fréquence, notée $H(e^{i\omega})$, soit des transmissions instantanées non-linéaires, représentées par des fonctions notées ϕ .

Il existe une terminologie précise qui dépend de l'ordre dans lequel les sous-blocs interviennent dans la structure en cascade. Le modèle de Hammerstein simple comporte une fonction de transmission instantanée non-linéaire placée à l'entrée d'un filtre linéaire. Dans le cas

du modèle de Wiener simple, les deux opérations sont commutées. Si on considère une alternance de trois sous-blocs distincts, on trouve le modèle de Hammerstein-Wiener comportant deux transmissions non-linéaires instantanées, placées en entrée et en sortie du filtrage linéaire. Réciproquement, dans le modèle de Wiener-Hammerstein, on considère deux sous-blocs linéaires, placés à l'entrée et à la sortie d'une fonction de transmission non-linéaire instantanée.



DIAG. 1.2 – Modèles en cascades standards (a) Hammerstein simple (b) Wiener simple (c) Wiener-Hammerstein (d) Hammerstein-Wiener.

Pour établir les relations d'équivalence entre ces structures standards et les séries de Volterra, il faut supposer que les fonctions non-linéaires considérées sont continues et utiliser une approximation polynomiale pour identifier les fonctions noyaux de degrés homogènes. Il n'existe pas de règles d'équivalence qui déterminent un modèle structuré à partir de la connaissance des opérateurs homogènes de la série de Volterra. Mais réciproquement, on peut toujours obtenir les noyaux de la série de Volterra associée à un modèle de structure en cascade. Il suffit pour cela d'explicitier successivement chaque opération de convolution ou de transformation polynomiale qui opère sur les signaux intermédiaires. En effet, soient $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ les coefficients réels du polynôme de degré d tel que

$$\phi(z) = \sum_{i=0}^d \alpha_i z^i(k) \quad (1.6)$$

et soient b_0, \dots, b_τ les coefficients à valeurs réels de la réponse impulsionnelle du filtre linéaire $H(\exp i\omega)$. Dans le cas du modèle Hammerstein simple, les noyaux homogènes de la série de Volterra associée sont diagonaux. Le degré de la série est exactement celui du polynôme corres-

pendant au transfert instantané. On établit directement à l'ordre n la propriété,

$$h_n(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} \alpha_n b_{i_1} & \text{si, } 0 \leq i_1 = \dots = i_n \leq \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas du modèle de Wiener, on établit de même que le degré de la série de Volterra est exactement d et que le noyau d'ordre n vérifie la relation,

$$h_n(i_1, \dots, i_n) = \alpha_n b_{i_1} \dots b_{i_n}$$

L'utilisation d'un modèle non-linéaire constitué de plusieurs sous-blocs de transmission pose le problème du choix de la structure à partir d'un ensemble d'enregistrements en entrée et en sortie de la distorsion. Quand les caractéristiques (réponses impulsionnelles, coefficients polynomiaux) de tous les sous-blocs en cascades sont correctement identifiées, il est possible de proposer la modélisation équivalente sous la forme d'une série de Volterra en identifiant les noyaux homogènes de la série. Cependant, dans le cadre de notre étude, il est aussi question d'inverser les effets de transmission pour atténuer les effets sonores de la distorsion. De ce fait, l'utilisation des modèles structurés en cascade permettrait de contourner les questions de stabilité des séries de Volterra inverses et de traiter l'opération inverse en corrigeant chaque contribution des sous-systèmes connectés en cascade.

1.5 Etat de l'art

1.5.1 Estimation et compensation d'une non-linéarité instantanée

Nous étudions tout d'abord un cas plus simple où la distorsion est représentée par une transmission non-linéaire instantanée, caractérisée par une fonction ϕ non-linéaire à valeurs réelles. Soit $z(1), \dots, z(N)$ le signal à temps discret avant distorsion et $x(1), \dots, x(N)$ le signal transmis tel que $x(t) = \phi(z(t))$.

Nous présentons deux exemples de méthodes standards pour le traitement des non-linéarités instantanées dans le domaine audio, à savoir,

- Estimation de la non-linéarité par la méthode d'égalisation des fonctions de répartition [Balchandran and Mammone, 1998].
- Méthode d'inversion d'une non-linéarité [Bako et al., 2001], [Bako and Daboczi, 2002].

Les conditions d'application de ces méthodes ne correspondent pas exactement aux hypothèses de la restauration. Dans le premier cas, on suppose que la fonction de répartition statistique du signal avant distorsion est connue. Dans le second, on suppose que la non-linéarité est connue et la méthode propose une solution robuste pour inverser la fonction non-linéaire.

1.5.1.1 Méthode d'égalisation des fonctions de répartition

Le domaine d'application proposé dans l'article [Balchandran and Mammone, 1998] est celui du traitement de la parole. L'objectif consiste à améliorer les performances des logiciels de reconnaissance automatique du locuteur, généralement peu robustes aux effets de la distorsion non-linéaire. La problématique correspondante est assez proche de celle de la restauration. Il ne s'agit pas de modifier la qualité sonore du signal mais de corriger une non-linéarité de transmission pour mieux identifier ensuite un locuteur c'est-à-dire, un signal test parmi un nombre fini d'enregistrements.

Le modèle de distorsion est défini par l'application ϕ . Le signal original avant la non-linéarité de transmission est non-observé. Dans l'article [White, 1982] puis plus récemment [Balchandran and Mammone, 1998], les auteurs proposent une méthode d'estimation non-paramétrique auto-didacte de la fonction ϕ aussi appelée, méthode d'égalisation des fonctions de répartition.

Plus précisément, les auteurs supposent que la fonction de répartition du signal avant distorsion est connue. En pratique, une base d'enregistrements est utilisée pour apprendre la distribution statistique de l'amplitude des signaux à traiter. L'identification de la fonction $x = \phi(z)$ est alors réalisée par égalisation des fonctions de répartition empiriques respectivement des signaux d'apprentissage et du signal distordu à identifier, appelé signal test. La justification théorique de cette méthode est basée sur le fait que la densité de probabilité $f_X(x^o)$ du signal test au point x^o est définie par l'égalité,

$$f_X(x^o) = \frac{f_Z(z_1^o)}{|\dot{\phi}(z_1^o)|} + \dots + \frac{f_Z(z_m^o)}{|\dot{\phi}(z_m^o)|} \quad (1.7)$$

où z_1^o, \dots, z_m^o sont les m solutions de l'équation $x^o = \phi(z^o)$. On note $\dot{\phi}$ la dérivée de la fonction ϕ et $f_Z(\cdot)$ la densité de probabilité du signal incident [Papoulis and Pillai, 2002]. Si la fonction ϕ est bijective, il existe une racine unique z^o . Après intégration de la relation, on obtient la condition d'égalisation des fonctions de répartition suivante,

$$F_X(x^o) = \int_{-\infty}^{x^o} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{z^o} f_Z(z) dz = F_Z(z^o) \quad (1.8)$$

Autrement dit, ϕ est l'application bijective qui à un point z^o associe la valeur x^o définies par la condition (1.8) d'égalisation des fonctions $F_X(x^o) = F_Z(z^o)$.

En pratique, si le signal test et les signaux d'apprentissage proviennent exactement du même extrait de la même source sonore, on obtient une estimation correcte de la non-linéarité. Cependant, on ne connaît pas exactement la fonction de répartition $F_Z(z)$ du signal avant distorsion puisque l'objectif est justement d'identifier un extrait sonore correspondant. Par hypothèse, $F_Z(z)$ caractérise la distribution statistique correspondant à un ensemble d'enregistrements. Dans le cas du problème de la reconnaissance, ceux-ci représentent plusieurs exemples de locuteurs parmi lesquels figure éventuellement celui du signal test. [White, 1982] utilise une interpolation polynomiale de la fonction de répartition construite à partir des signaux d'apprentissage tandis que [Balchandran and Mammone, 1998] proposent d'utiliser la fonction de distribution paramétrique correspondant à la loi Gamma.

1.5.1.2 Méthode robuste d'inversion

Une autre étape importante du traitement d'une non-linéarité est celui de la correction de la dégradation, c'est-à-dire l'inversion des effets de la transmission non-linéaire. Par hypothèse, la distorsion est modélisée par une fonction non-linéaire instantanée, notée ϕ qui est connue sous une forme analytique.

La restitution du signal est un problème inverse mal posé notamment dans le cas de la saturation et des écrêtages numériques. Mathématiquement, on dit que le problème inverse est mal posé si, au moins une des trois conditions de Hadamard suivantes n'est pas vérifiée par l'application ϕ , [Tikhonov and Arsenin, 1977];

1. Existence : à tout signal en entrée, il correspond un signal de sortie.
2. Unicité : à un signal en entrée, il correspond un signal de sortie unique.
3. Continuité : à une faible perturbation des valeurs du signal d'entrée, il correspond une faible perturbation de celles du signal de sortie.

La première condition est toujours vérifiée car les systèmes de transmission sont stables. Les deux conditions suivantes ne sont pas vérifiées dès que la dérivée de la fonction $\dot{\phi}$ admet des valeurs proches de zéro i.e., quand les effets de la distorsion sont comparables à ceux d'écrêtage numérique. Supposons que l'on place en entrée d'une fonction non-linéaire de type tangente hyperbolique $\phi(z) = \tanh(4z)$, un signal en créneaux z_1, \dots, z_N d'amplitude A où A est telle que

$A > 0.65$. On obtient alors en sortie un signal en créneaux x_1, \dots, x_N d'amplitude $\tanh(4A) \simeq 1$. Mathématiquement, le problème d'inversion de la fonction ϕ est dit mal posé car on peut construire un autre signal qui transformé par ϕ , est identique à la sortie x_1, \dots, x_N . Si on étend cette remarque au cas des enregistrements audio, on comprend par cet exemple que la restitution des valeurs d'amplitude élevée du signal est très sensible à la présence d'un bruit additif en sortie de la distorsion dès que les effets de la saturation apparaissent.

Dans les articles [Bako et al., 2001] et [Bako and Daboczi, 2002], les auteurs proposent une approche variationnelle pour déterminer la fonction inverse réciproque, que nous notons ψ , permettant de reconstruire de façon robuste le signal d'entrée à partir de l'enregistrement distordu. La fonction ϕ est connue et il n'y a pas d'hypothèse supplémentaire sur le signal audio. La méthode de détermination de ψ est construite autour de la condition de continuité de la transformation directe. En effet, soit z_o la valeur numérique d'un échantillon du signal d'entrée, il correspond la valeur transmise $x_o = \phi(z_o)$. Soit Δz une perturbation additive de la valeur de l'échantillon que l'on note $z = z_o + \Delta z$. D'après la troisième condition sur la transmission directe, la perturbation Δx sur le signal de sortie x tel que $x = x_o + \Delta x$ dépend continuellement de Δz . Les auteurs supposent que Δx est exactement le développement de Taylor au premier ordre de la fonction ϕ que l'on note,

$$\Delta x = \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=z_o} \Delta z$$

La fonction inverse réciproque ψ est l'application qui détermine le signal $\hat{z} = \psi(x)$ compensé. Suivant la condition de continuité, on garantit qu'à une petite perturbation $\Delta \hat{z}$ autour de \hat{z} , il correspond par l'application ϕ , une variation $\Delta \hat{x}$ qui minimise la distance quadratique suivante,

$$\|\Delta x - \Delta \hat{x}\|^2 + \lambda \|\Delta \hat{z}\|^2 \quad (1.9)$$

où le paramètre λ est un nombre réel positif.

Le calcul analytique du gradient de la fonction (1.9) pour une perturbation $\Delta \hat{z}$ conduit simplement à la solution optimale,

$$\frac{\Delta \hat{z}}{\Delta x} = \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=x_o} = \frac{\left. \frac{d\phi(\hat{z})}{dz} \right|_{\hat{z}=\hat{z}_o}}{\left(\left. \frac{d\phi(\hat{z})}{dz} \right|_{\hat{z}=\hat{z}_o} \right)^2 + \lambda} \quad (1.10)$$

qui définit en tout point x_o les valeurs de dérivée de ψ . La fonction ψ est donc une primitive de l'équation (1.10) et les constantes d'intégration sont déterminées en supposant que la moyenne du signal compensé \hat{z} est exactement celle, empirique, du signal distordu [Bako et al., 2001].

Le second terme du critère (1.9), pondéré par le paramètre λ , est un terme de régularisation de la solution permettant de stabiliser l'application inverse [Tikhonov and Arsenin, 1977]. En effet, si $\lambda = 0$ dans l'expression de la solution (1.10), la dérivée de la fonction ψ en tout point est exactement l'inverse de la dérivée de la fonction de distorsion ϕ . Dans ce cas, l'application réciproque est peu robuste à la présence d'un bruit additif en sortie dès que la dérivée de la fonction ϕ s'annule. Si on enregistre $x = x_o + e$ pour un signal incident z_o , le signal restitué \hat{z} est tel que :

$$\hat{z} = \psi(x_o + e) = z_o + \frac{1}{\left. \frac{d\phi(\hat{z})}{dz} \right|_{\hat{z}=\hat{z}_o}} . e$$

Ainsi, dès que les effets de la saturation apparaissent, on observe une sur-amplification du bruit e car ϕ^{-1} prend des valeurs très importantes. D'un autre côté, dès que λ est non nul, la dérivée de la fonction réciproque n'admet plus de tangente verticale et la fonction ψ est régulière.

1.5.2 Traitements des distorsions pour la restauration audio

Le premier exemple remarquable de traitement numérique du signal pour la restauration audio date du début du XX-ème siècle et concerne la distorsion linéaire due aux systèmes d'enregistrements sur disques de cire [Stockham et al., 1975]. La réponse du système - le pavillon principalement - est modélisée par une opération de filtrage linéaire. Le traitement suppose qu'une caractéristique du signal original avant distorsion est connue pour estimer la réponse en fréquence du filtre. C'est le spectre moyen de l'enregistrement non-distordu qui est utilisé en faisant appel à une interprétation moderne de l'enregistrement à restaurer. La méthode proposée pour la restauration est intéressante car elle permet de faire une post-égalisation du spectre du signal mais elle repose sur l'hypothèse que deux enregistrements d'un même partition musicale possèdent en moyenne, les mêmes caractéristiques spectrales, indépendamment de l'influence des interprètes et/ou des conditions d'enregistrements.

Dans cette section, nous présentons deux exemples de traitement des distorsions non-linéaires pour la restauration des enregistrements audio. Les méthodes de traitement correspondantes, proposent des solutions basées seulement sur l'observation du signal distordu. Elles comportent donc :

- La spécification d'un modèle paramétrique de la distorsion non-linéaire des signaux audio.
- Une technique d'estimation des paramètres de la modélisation à partir de la donnée d'un signal audio distordu.
- Une méthode de restitution du signal audio quand les paramètres du modèle sont connus.

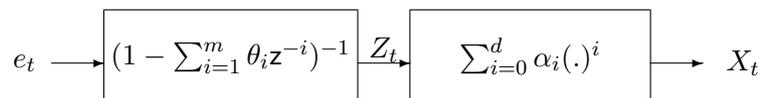
Dans ces travaux, [Mercer, 1993] et [Troughton, 1999], le choix de la modélisation n'est pas justifié par une approche expérimentale pour la caractérisation des effets non-linéaires d'enregistrement/lecture. La question du choix de la modélisation n'est pas résolue. En revanche, les techniques proposées permettent d'extraire de façon autodidacte les paramètres de la modélisation d'une part, puis d'autre part, de reconstruire un signal audio original.

1.5.2.1 Approche par modélisation AR-MNL

Suivant les notations du diagramme 1.3, le processus de distorsion d'un signal audio est caractérisé par une non-linéarité instantanée, dite en anglais *Memoryless NonLinearity* (MNL). Celle-ci est représentée par un polynôme de degré d , défini par la forme (1.6). Par hypothèse, le signal audio avant distorsion est supposée stationnaire auto-régressif d'ordre m :

$$Z_k = \sum_{i=1}^m \theta_i Z_{k-i} + e_k \quad (1.11)$$

où e_1, \dots, e_t sont des variables indépendantes, identiquement distribuées, de loi gaussienne centrée et de variance notée σ_e^2 [Mercer, 1993].



DIAG. 1.3 – Transmission d'un signal auto-régressif AR(m) à travers une non-linéarité polynomiale de degré d .

L'hypothèse AR(m) sur le signal Z_1, \dots, Z_N à reconstruire est utilisée dans le contexte de la restauration audio pour la localisation des défauts impulsifs [Godsill and Rayner, 1998a] et

pour l'interpolation des valeurs manquantes [O'Ruanaidh and Fitzgerald, 1996]. En pratique, ce modèle est seulement acceptable si on considère des séquences de signal audio de longueur suffisamment courte pour supposer que les coefficients linéaires $\theta_1, \dots, \theta_m$ de la modélisation AR(m) sont constants.

La méthode de traitement proposée dans [Mercer, 1993] utilise directement un développement de la fonction polynomiale inverse réciproque de la non-linéarité (1.6). La relation entre le signal Z_t avant distorsion et le signal distordu est exprimée sous la forme

$$Z_k = \sum_{j=1}^r \tilde{\alpha}_j X_k^j \quad k = 1, \dots, N$$

où $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_r$ sont les coefficients du polynôme inverse de degré fini r . Dans ces conditions, la restitution du signal original Z_t à partir de l'enregistrement distordu X_t est directement déterminée par l'estimation des r coefficients $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_r$ inverses de la non-linéarité.

Plusieurs techniques d'estimation des paramètres $\theta_1, \dots, \theta_m$ et des coefficients $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_r$ sont étudiées, à savoir, la méthode des moindres carrés et la solution du maximum de vraisemblance. D'un côté, la méthode des moindres carrés est basée sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne $J(\theta_1, \dots, \theta_m, \tilde{\alpha})$ définie par,

$$\begin{aligned} J(\theta_1, \dots, \theta_m, \tilde{\alpha}) &= \frac{1}{(N-p)} \sum_{k=p+1}^N e_k^2 \\ &= \frac{1}{(N-p)} \sum_{k=p+1}^N \left((\mathbf{X}_k - \sum_{i=1}^m \theta_i \mathbf{X}_{k-i})^\top \tilde{\alpha}^\top \tilde{\alpha} (\mathbf{X}_k - \sum_{i=1}^m \theta_i \mathbf{X}_{k-i}) \right) \end{aligned}$$

où $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_r)$ et $\mathbf{X}_k = (X_k X_k^2 \dots X_k^r)^\top$. D'un autre côté, la solution du maximum de vraisemblance est construite autour de l'expression de la densité de probabilité conditionnelle $p(X_{p+1}, \dots, X_N | \tilde{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \sigma_e^2)$ des observations X_{p+1}, \dots, X_N sachant les coefficients $\tilde{\alpha}$ de la non-linéarité inverse et les paramètres $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)^\top$ et σ_e^2 de la modélisation AR(m). Plus précisément, la vraisemblance $p(X_{p+1}, \dots, X_N | \tilde{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \sigma_e^2)$ se met sous la forme

$$p_e(e_{p+1}, \dots, e_N) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_e^2})^{(N-p)}} \exp -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left(\sum_{k=p+1}^N e_k^2 \right)$$

La recherche des solutions est effectuée par des algorithmes itératifs de minimisation du critère $J(\theta_1, \dots, \theta_m, \tilde{\alpha})$ ou de la fonction de vraisemblance.

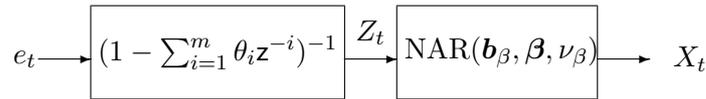
En pratique, les performances d'estimation obtenues par la méthode du maximum de vraisemblance du modèle AR-MNL permettent d'améliorer la qualité perçue sur des exemples simulés de non-linéarités instantanées. Cependant malgré ces résultats, cette approche est trop restrictive car la caractérisation du processus de transmission comme une non-linéarité instantanée de type polynomiale est trop simple pour représenter des exemples réalistes de la distorsion non-linéaire sonore.

1.5.2.2 Approche par modélisation AR-NAR

Dans l'approche par modélisation AR-NAR, développée par [Mercer, 1993] puis [Troughton, 1999], le signal X_t est représenté par l'égalité

$$\begin{aligned} X_t = Z_t + \sum_{i=1}^{\nu_\beta} \sum_{j=1}^i \beta_{i,j} b_{ij} X_{t-i} X_{t-j} + \sum_{i=1}^{\nu_\beta} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j \beta_{i,j,k} b_{ijk} X_{t-i} X_{t-j} X_{t-k} + \\ \dots + \text{termes d'ordre plus élevé} \quad (1.12) \end{aligned}$$

où la variable ν_β est le retard maximum des effets de mémoire de la non-linéarité du modèle. Les coefficients $\mathbf{b}_\beta = \{b_{ijk}\}$, sont les paramètres du modèle NAR, dit en anglais *Nonlinear autoregressif* et $\beta = \{\beta_{i,j,k}\}$ sont des variables indicatrices des termes dans la série. L'utilisation des variables indicatrices β permet d'éviter un sur-paramétrage du processus et de sélectionner un sous-ensemble parmi tous les termes polynomiaux de la série. Chaque $\beta_{i,j,k}$ prend une valeur discrète 0 ou 1 selon que le terme d'indice i, j, k apparait ou non dans la somme (1.12).



DIAG. 1.4 – *Le modèle AR-NAR.*

Le signal Z_t en entrée est supposé autorégressif d'ordre m et vérifie une égalité de la forme (1.11). Le modèle d'observation du signal distordu X_t est représenté par le diagramme 1.4. Le modèle NAR est un cas particulier du modèle paramétrique NARMAX (*Nonlinear Autoregressif Moving Average with eXogeneous input*) qui représente la formulation la plus générale des modèles paramétrés de transmission non-linéaire bruitée [Leontaritis and Billings, 1985a], [Leontaritis and Billings, 1985b]. L'avantage principal du modèle NAR dans le contexte de la restauration est que l'inverse de la transmission non-linéaire est directement déduite des paramètres de la transmission (1.12). De ce fait, le traitement est ramené à un problème d'estimation des paramètres \mathbf{b}_β, β et ν_β de la modélisation NAR. La restitution du signal Z_t quand les paramètres sont connus, est simplement réalisée par le calcul et la soustraction des termes non-linéaires à partir du signal X_t .

La vraisemblance du modèle représenté par le schéma 1.4, est déduite de la densité de probabilité jointe de la séquence d'innovation gaussienne. [Mercer, 1993] propose une procédure de régression par étape pour choisir et déterminer les paramètres de la modélisation. La formulation du modèle NAR est un peu différente et n'utilise pas les variables indicatrices β de la série (1.12). Plus précisément, la technique détermine le maximum de vraisemblance quand le nombre de terme de la série, les ordres ν_β et m sont connus. Le choix final du meilleur ensemble de paramètres estimés, est ensuite déterminé selon un critère de maximum d'entropie, de type AIC entre les différents ordres de paramétrage possible. En revanche, [Troughton, 1999] propose une approche bayésienne hiérarchique, implémentée avec les méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC). Chaque paramètre du modèle AR, y compris l'ordre m de la régression, et de la série NAR(\mathbf{b}_β, β) est alors, muni d'une loi *a priori* (loi gaussienne, de bernoulli ou inverse gamma). Dans ces conditions, on peut expliciter la densité de probabilité *a posteriori* jointe des paramètres du modèle AR-NAR sachant les observations X_1, \dots, X_N . L'estimation des paramètres est alors effectuée par un algorithme MCMC de Gibbs hybride à sauts réversibles qui simule conjointement les transitions entre les valeurs de l'ordre m du modèle AR [Troughton and Godsill, 2001], [Green, 1995].

L'approche bayésienne pour l'estimation du modèle AR-NAR permet d'améliorer significativement la qualité des effets perçus sur des exemples simulés de distorsions non-linéaires caractérisées par la relation (1.12). La technique nécessite cependant la mise en oeuvre d'algorithmes stochastiques coûteux en temps de calcul. De plus, [Troughton, 1999] indique que les performances sont insuffisantes pour traiter des effets sonores sur des enregistrements réels et de ce fait, aucun exemple d'application de la méthode ne permet de valider la modélisation de type NAR proposée.

1.6 Expérimentations préliminaires

Dans cette section, nous précisons la provenance des exemples d'archives utilisés ainsi que les procédés que nous avons suivi pour réaliser des mesures de la distorsion sonore produite par certains appareils d'enregistrement/lecture (amplificateurs de puissance, magnétophones, convertisseurs A/N) couramment utilisés. Dans un second temps, nous illustrons les principales observations concernant les effets (déclenchement de la distorsion, propriétés de la non-linéarité instantanée, distorsions linéaires etc...) enregistrés.

1.6.1 Enregistrements utilisés

Les résultats des traitements audio que nous présentons sont basés d'une part, sur des exemples courants de distorsion, extraits des archives sonores télévisées ou radiophoniques et d'autre part, sur des mesures de distorsion que nous avons réalisé sur plusieurs appareils audiofréquences. Les exemples d'archives illustrent les conditions exactes de dégradations des enregistrements audio dont on ne connaît ni la version originale (non distordue), ni l'origine de la distorsion. En revanche, les mesures effectuées sur les dispositifs nous permettront de disposer des signaux enregistrés en entrée et en sortie de chaque appareil étudié.

1.6.1.1 Exemples d'archives de l'INA

La majorité des exemples de distorsions sonores extraits des archives télévisées de l'INA sont des copies sur cassettes beta-numériques d'enregistrements d'émissions (jeux de variétés, interviews, émissions pour enfants) des années 1960 à 1975. Ces copies ont fait l'objet d'expertises sonores au cours desquelles la qualité perçue est évaluée par rapport aux conditions actuelles de rediffusion de l'archive. Les dégradations du signal sonore dépendent principalement de l'état des supports (bobines magnétiques analogiques au format 2 pouces ou 1 pouce B) d'origine. Les artefacts détectés sont soit des bruits parasites (pertes de signal, grésillements, clics produits par les effets de collures des bandes d'origines) et soit des saturations de niveau sonore.

Par ailleurs, nous avons réuni plusieurs exemples de distorsion sonore extraits des archives radiophoniques. La majorité des exemples de distorsion sont des exemples de sur-modulation du signal acoustique ayant eut lieu soit au niveau du microphone, soit à l'entrée de la console de prise de son. Les distorsions de support sont exclusivement des exemples d'enregistrement sur disques micro-sillons usés ou des exemples de saturation magnétique de bandes 6.35 mm. Dans ces cas, nous disposons du support d'origine qui est conservé par la phonothèque.

1.6.1.2 Enregistrements en entrée et en sortie des dispositifs

Pour compléter les exemples disponibles et se placer dans des conditions plus objectives pour caractériser les processus mis en jeu, nous avons effectué plusieurs séries d'enregistrements en entrée et en sortie d'appareils audiofréquences d'enregistrement/lecture. Nous avons ciblé cette étude sur le fonctionnement d'un amplificateur de puissance, de deux enregistreurs à bandes magnétiques et d'un exemple de convertisseur numérique/analogique. Ces appareils et les réglages de fonctionnement possibles sont décrits comme suit :

- STUDER D19 séries Micvalve

C'est un pré-amplificateur à deux canaux avec un étage commutable de transistors à lampes. Cet appareil a un convertisseur 20 bits intégré, une sortie AES, une sortie DAT et un module de traitement *Noise Shapping* 16 bits.

Certains appareils d'amplification sont entièrement construits avec des transistors dits à tubes. D'autres modèles, dont le STUDER D19 de conception plus récente, n'emploient qu'un étage à lampes au sein d'un schéma intégré de plusieurs circuits d'amplification.

Cette technique permet à l'utilisateur de modifier volontairement la qualité sonore lorsque l'étage d'amplification à lampes est utilisé.

Pour la prise de son, cet appareil est connecté sur une entrée ligne de la console d'enregistrement et permet de pré-amplifier le signal transmis par le microphone.

– Magnétophones STUDER

C'est un appareil d'enregistrement et de lecture du signal audiofréquence sur bandes magnétiques de format 1/4 pouce. Ces magnétophones furent utilisés pour les émissions musicales et les concerts depuis 1949 et, de manière systématique, depuis 1957. Nous avons testé deux modèles de la même marque de fabrication STUDER : le modèle A80 et A816 Master record. Ces deux enregistreurs fonctionnent en mode stéréophonie avec une vitesse de défilement de bande de 19cm/s unique pour le modèle A80 et modulable pour le modèle A816 qui fonctionne avec les deux vitesses 19cm/s ou 38 cm/s.

A partir du magnétophone, l'utilisateur peut contrôler le positionnement de la bande et déclencher les opérations d'enregistrement/reproduction. Le niveau sonore des canaux stéréophoniques, les niveaux d'enregistrement, de reproduction de ces magnétophones sont ajustables sur le magnétophone A80 mais pas sur le A816. En revanche, l'utilisateur peut basculer sur les deux positions de la vitesse de défilement de la bande pour le A816 mais pas sur l'A80.

– Enregistreur SONY PCM 7040

Cet appareil est un enregistreur numérique sur cassette à bande magnétique et dispose d'un convertisseur analogue-numérique intégré (16 bits, 44.1 kHz) avec un canal de synchronisation.

– Convertisseur WEISS ADC1-MK2

C'est un convertisseur analogue/numérique avec 16 ou 24 bits de quantification et une fréquence d'échantillonnage maximum de 96 kHz. Cet appareil dispose de deux canaux d'entrée; une entrée ligne et une entrée microphone. Chaque canal est réglé de façon indépendante ou solidaire, via deux encodeurs plus un poussoir d'atténuation commun aux deux canaux.

L'objectif est de déclencher pour chacun des ces appareils des effets de distorsion au passage d'un enregistrement de notre choix. Nous avons donc sélectionné plusieurs extraits (interviews, musiques) d'enregistrements originaux de bonne qualité et plusieurs types de signaux numériques, synthétisés spécialement pour nos tests. Ces signaux tests sont :

- Des séquences de bruits blancs gaussiens centrées avec plusieurs niveaux de variance.
- Des impulsions courtes, des signaux en crêteaux et des signaux triangulaires d'amplitude variable.
- Des sinusoïdes d'amplitude constante, de fréquence f_0 constante ou linéairement variable (*chirp*) avec le temps telle que $f_0 = at + b$. Nous avons choisi les constantes a et b de sorte que f_0 varie linéairement sur tout le spectre de fréquences $20 Hz - 20 kHz$.
- Des signaux à enveloppe temporelle linéairement variable comportant deux raies spectrales.

Ces signaux tests ainsi que les extraits d'enregistrements ont été envoyés depuis une console numérique² vers chacun des appareils étudiés. Pour chaque appareil, nous avons effectué plusieurs enregistrements en utilisant des réglages différents pour observer des distorsions plus ou moins importantes des signaux audio.

²Console Pro-tools 24 MIX : C'est une station d'enregistrement, de montage, de mixage audionumérique qui intègre optionnellement des logiciels *plug-ins* multi-effets.

1.6.2 Mesures entrée/sortie sur des appareils audio

Nous présentons des analyses sur les effets de la distorsion non-linéaire enregistrés en entrée et en sortie des appareils audio. Les exemples d'archives de l'INA (dont on ne dispose que de la version distordue) seront plus utiles pour valider la méthode de restauration qui sera élaborée dans la suite de la thèse. Le problème est que de ce fait, la caractérisation des processus de distorsion porte sur les distorsions d'amplification, les écrêtages et les saturations magnétiques. Ainsi, les distorsions des disques 78 tours/mn ou celles des bandes sonores utilisées pour les émissions télévisées n'ont pas été caractérisées car nous ne disposons pas de dispositif permettant d'effectuer des mesures de type entrée-sortie, pour ces formats anciens d'enregistrement.

1.6.2.1 Distorsion non-linéaire d'amplification de puissance

Pour enregistrer des distorsions d'amplification, nous avons testé le fonctionnement de l'appareil STUDER D19. Pour cela, les signaux tests sont envoyés depuis la station de montage Pro tools sur l'entrée ligne du pré-amplificateur D19 puis transmis à l'entrée de l'enregistreur DAT. Les signaux en entrée, lus par la console et ceux en sortie, après amplification et enregistrement sur le DAT, sont synchronisés sur une horloge contrôlée par le DAT.

Pour déclencher les effets de la sur-modulation, le gain d'amplification en entrée de l'appareil est réglé à un niveau volontairement trop élevé. Le gain de sortie de l'amplificateur est en revanche, laissé à un niveau raisonnable pour éviter de sur-moduler le DAT. Nous avons réalisé 4 séries d'enregistrement considérant deux niveaux de surmodulation de l'appareil, utilisant les deux modes de fonctionnements - fonctionnement avec ou sans technologies à lampes - disponibles. Tout d'abord, le gain d'entrée est réglé à un niveau tel que le signal est transmis jusqu'au DAT sans ajouter de distorsions non-linéaires. Puis le gain a été augmenté successivement de $+5\text{ dB}$ puis, $+15\text{ dB}$ pour produire des distorsions clairement audibles.

Sur les figures 1.2 et 1.3, on observe les effets de la distorsion harmonique produite sur une sinusoïde de fréquence $f_0 = 1000\text{ Hz}$, par l'amplificateur, utilisé en fonctionnement normal ou avec la technologie à lampes. Dans les deux cas, la sur-modulation de l'appareil crée une limitation brutale de l'amplitude de la sinusoïde mais n'entraîne pas d'augmentation du niveau de bruit de fond. Dans le cas du fonctionnement normal, la limitation en amplitude dépend du signe des oscillations du signal incident. Si ce signe est négatif, il paraît que le signal est tout d'abord écrêté puis on observe un second seuil sensiblement plus élevé si la sur-modulation persiste. Sur la représentation en fréquence de la figure 1.2, on observe toutes les harmoniques paires et impaires de la fréquence incidente f_0 . Sur la figure 1.3, on observe une limitation en amplitude symétrique. Cet effet correspond à une distorsion non-linéaire instantanée continue vis à vis de la valeur du signal incident. De même, on observe sur la figure 1.3, toutes les harmoniques paires et impaires de la fréquence incidente f_0 . A plus haute résolution, on observe quelques dédoublements sur certaines raies harmoniques produites par la distorsion. Ceci indique l'apparition de produits d'intermodulation secondaires étant donné la sur-modulation violente produite par les conditions de ces tests.

Sur la figure 1.4, on observe les signaux *chirps* avant et après la distorsion d'amplification du D19 en fonctionnement à lampes. Ce test permet de vérifier si on détecte une atténuation en fréquence importante qui vient s'ajouter aux effets de la distorsion non-linéaire. Comme indiqué précédemment, la fréquence f_0 de la sinusoïde incidente augmente linéairement avec le temps mais en revanche le signal est créé à amplitude constante. Sur la figure correspondante au signal enregistré après distorsion, on observe que cette amplitude est variable en fonction du temps. On constate ainsi que le gain en fréquence de l'appareil est relativement constant sur tout le spectre avec cependant une variation plus marquée quand la fréquence f_0 passe à 8000 Hz . Cette observation est aussi vérifiée si on n'utilise pas la technologie à lampes de l'appareil.

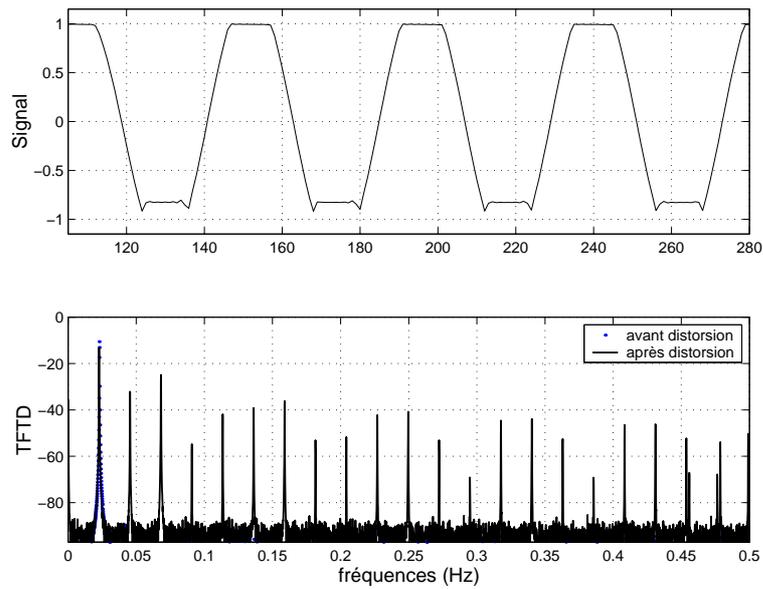


FIG. 1.2 – *Distorsion non-linéaire de l'amplificateur D19 d'une sinusoïde de fréquence $f_0 = 1000\text{Hz}$. En haut signal après sur-modulation (+15dB) et en bas, transformée de Fourier à temps discret correspondante.*

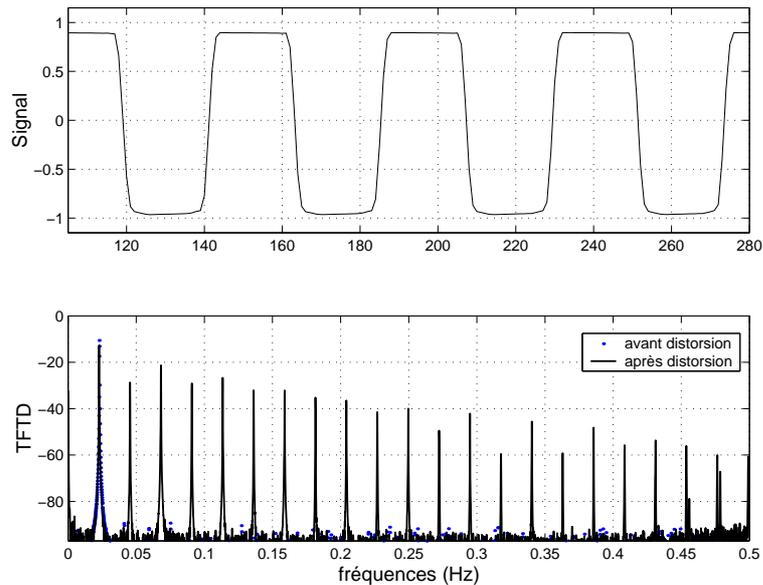


FIG. 1.3 – *Distorsion non-linéaire de l'amplificateur D19 utilisé avec la technologie à lampes, d'une sinusoïde de fréquence $f_0 = 1000\text{Hz}$. En haut signal après sur-modulation (+15dB) et en bas, transformée de Fourier à temps discret correspondante.*

Les enregistrements effectués à partir des impulsions courtes et des signaux en crêteaux indiquent de manière cohérente que la distorsion du STUDER D19 produit essentiellement une distorsion non-linéaire brutale type écrêtage, avec quelques effets de filtrage linéaire (écrasement très faible des impulsions, coupure des composantes continues) relativement négligeables. Le niveau de seuillage est donc constant et les effets de mémoire sont négligeables. La figure 1.5 représente les variations de la sinusoïde à 1000Hz incidente en fonction de celles de ses versions

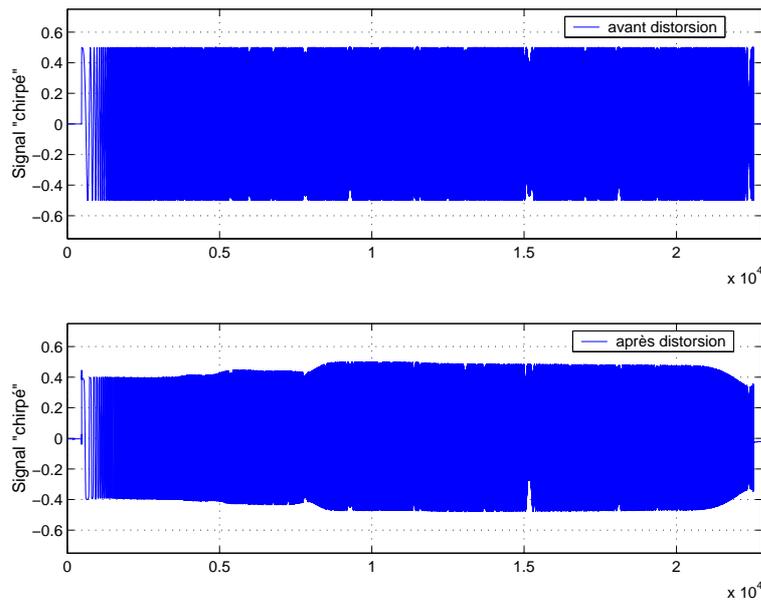


FIG. 1.4 – Distorsion non-linéaire de l'amplificateur D19 utilisé avec la technologie à lampes, d'une sinusoïde de fréquence variant linéairement dans le temps. En haut signal avant distorsion et en bas, après distorsion (+15dB) d'amplification.

enregistrées après distorsion d'amplification. Dans le cas du fonctionnement normal (à gauche), on observe l'effet du seuillage brutal et asymétrique avec un léger écartement des parties montantes et descendantes correspondant aux oscillations des sinusoïdes. Dans le cas du fonctionnement avec la technologie à lampes, la fonction de transfert présente un profil de saturation plus continu qui correspond bien aux remarques précédentes.

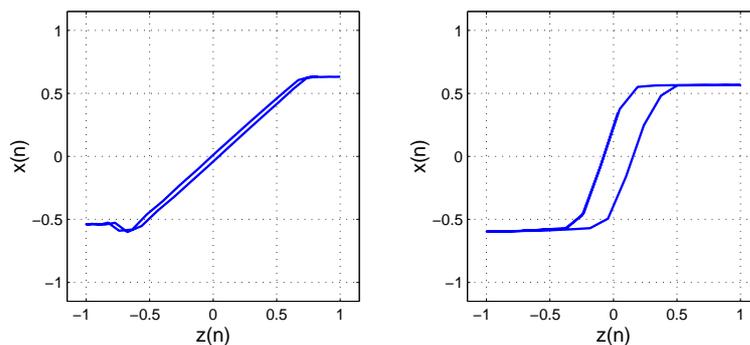


FIG. 1.5 – Représentation de la non-linéarité instantanée (+15dB de l'amplificateur STUDER D19. A gauche, représentation pour une sur-modulation en fonctionnement normal et à droite, pour un fonctionnement avec la technologie à lampes.

La possibilité d'observer ainsi les profils de la fonction non-linéaire du transfert instantané indique que les effets de mémoire sont relativement négligeables. Les écartements de ces fonctions représentent néanmoins des effets de déphasage à court-terme entre les signaux en entrée et en sortie. Plus précisément, si on note $z_t = \sin(2\pi f_0 t)$ les variations d'une sinusoïde incidente de fréquence f_0 et $x_t = \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$ la même sinusoïde avec un déphasage de φ , alors la

représentation graphique (z_t, x_t) correspond à une ellipse puisque on a la relation

$$(x_t/A)^2 + (z_t/B)^2 = \sin^2(\varphi) \quad \text{où, } A = \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{1 + \cos(\varphi)}} \quad \text{et, } B = \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{1 - \cos(\varphi)}} \quad (1.13)$$

En appliquant une déformation non-linéaire instantanée sur la sinusoïde x_t , la forme de l'ellipse (z_t, x_t) est déformée et semble comparable aux observations de la figure 1.5. A partir de ces enregistrements entrée-sortie, on observe des écartements toujours assez petits et faiblement variables selon la fréquence f_0 de la sinusoïde incidente. L'écartement correspondant à la figure 1.5 représente un demi-échantillon de déphasage entre les deux signaux. En revanche, les niveaux de seuillage en amplitude sont constants quelque soit la fréquence du signal.

1.6.2.2 Ecrêtage numérique

Le procédé pour déclencher et enregistrer des écrêtages numériques consiste à mesurer des signaux pré-amplifiés par le STUDER D19 puis transmis vers l'enregistreur SONY DAT. Tous les signaux sont synchronisés par l'horloge du DAT. Plus le gain de sortie de l'amplificateur D19 est élevé, plus la dynamique du signal est grande et plus les écrêtages numériques du signal par le DAT sont importants.

Toutes les observations faites sur le DAT et aussi sur le convertisseur WEISS, indiquent qu'il n'y a pas de déformation des oscillations temporelles des signaux pendant les conversions analogiques/numériques. Les oscillations sont exactement reproduites tant que le niveau d'amplitude reste inférieur au niveau d'écrêtage. L'amplitude du signal transmis est alors constante, égale au niveau de seuillage, tant que l'amplitude incidente n'est pas repassée à un niveau inférieur à ce seuil.

1.6.2.3 Saturation magnétique

Pour observer les effets sonores de la saturation magnétique, nous avons testé les deux enregistreurs (STUDER A80 et A816) sur bandes analogiques. Les signaux sont transmis depuis la console vers l'entrée du convertisseur WEISS, puis transmis et enregistrés sur le magnétophone. Par la suite, les signaux saturés sont relus par le magnétophone, convertis dans un format numérique et captés par la station Pro-tools.

Les réglages techniques du magnétophone A80 (niveau d'enregistrement et de reproduction) sont volontairement modifiés de façon à créer les effets de la saturation magnétique. Le niveau d'enregistrement du magnétophone est volontairement bas, trop bas par rapport au niveau de l'appareil utilisé pour un fonctionnement correct. Par précaution, le niveau de reproduction du magnétophone est également abaissé au moment de la copie de manière à ne pas ajouter d'autres sur-modulations pendant la transmission vers la console numérique.

Sur la figure 1.6, on observe un signal comportant deux raies spectrales $f_1 = 200Hz$ et $f_2 = 7000Hz$, enregistrée après saturation du STUDER A80. Sur la représentation spectrale de la figure 1.6, on observe les distorsions d'intermodulations des fréquences f_1 et f_2 , et une élévation du niveau de bruit de fond d'environ $+15dB$. Les conditions d'enregistrement de ce signal sont exactement les mêmes que pour la sinusoïde représentée sur la figure 1.1. L'effet d'écrasement asymétrique selon la partie montante ou descendante des oscillations est plus marqué que pour la distorsion harmonique. Contrairement aux effets enregistrés pour les amplifications, la représentation (z_t, x_t) est difficile à interpréter et ressemble à des courbes fermées très variables selon le niveau de saturation de l'amplificateur et la fréquence fondamentale du signal incident.

D'après ces observations, les effets de la distorsion linéaire (distorsion de groupe, distorsion d'interception de phase) qui accompagnent les processus de la saturation magnétique analo-

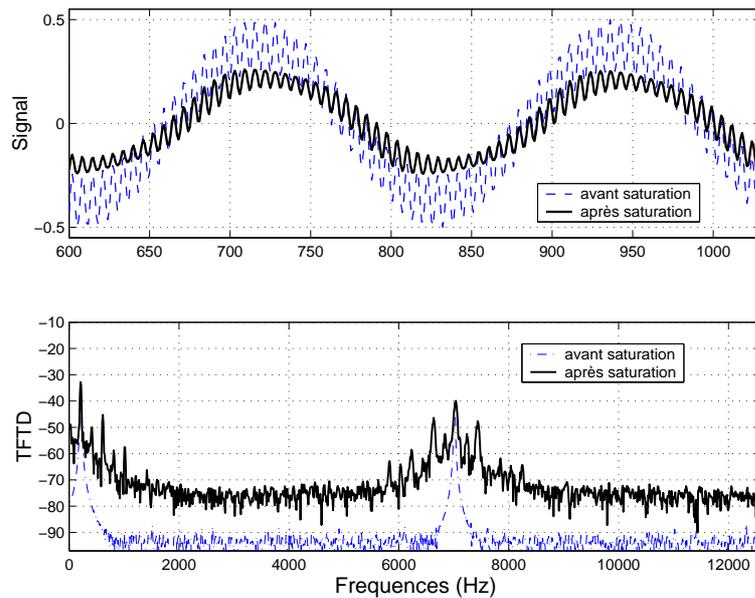


FIG. 1.6 – Distorsion d’intermodulation du magnétophone STUDER série A80 (19cm/s). Distorsion d’inter-modulation du signal comportant deux raies spectrales $f_1 = 200\text{Hz}$ et $f_2 = 7000\text{Hz}$ d’amplitudes dans un rapport 1/4. En haut, forme d’onde et en bas, transformée à temps discret correspondante.

gique sont significatifs. [Preis, 1982] puis [Totzek and Preis, 1987] résument les processus qui interviennent avec les effets de saturation et indiquent les quatres éléments de modélisation à considérer :

- Réponse en fréquence non-idéale.
- Saturation d’amplitude.
- Variation de la vitesse d’entraînement des bandes.
- Bruit système.

La saturation d’amplitude et l’apparition des bruits d’enregistrement sont manifestées sur les figures 1.6 et 1.1 par les raies correspondants aux harmoniques et aux produits d’intermodulation et par l’élévation du niveau de bruit de fond. Pour illustrer les effets de la réponse en fréquence non-idéale des magnétophones, nous présentons simplement sur la figure 1.7, le signal *chirp* enregistré avant et après la saturation du STUDER A80. L’amplitude de la sinusoïde est très fortement atténuée et cette atténuation dépend de la valeur instantanée de la fréquence incidente. Cette atténuation est créée par la réponse en fréquence de l’appareil (tête de lecture/enregistrement, bande passante des circuits) analogiques. D’après l’analyse des séries d’enregistrements des signaux *chirp*, la distorsion linéaire d’amplitude dépend du niveau d’enregistrement/lecture, de la vitesse d’entraînement (19cm/s, 38cm/s) et du type de magnétophone mais conserve toujours un profil de filtrage large bande, non plate type passe-bas.

Pour illustrer les effets de la variation de vitesse d’entraînement des bandes, nous présentons sur la figure 1.8, une estimation empirique de la fonction d’inter-corrélation entrée-sortie correspondante à un enregistrement saturé d’une séquence de bruit blanc échantillonné à la fréquence $f_e = 44100\text{Hz}$. Plus précisément, soient z_1, \dots, z_N les échantillons d’une séquence de bruit blanc gaussienne de moyenne nulle et x_1, \dots, x_N ceux de la version saturée par le magnétophone, on détermine la fonction d’inter-corrélation des séquences en entrée et en sortie, par le calcul de la

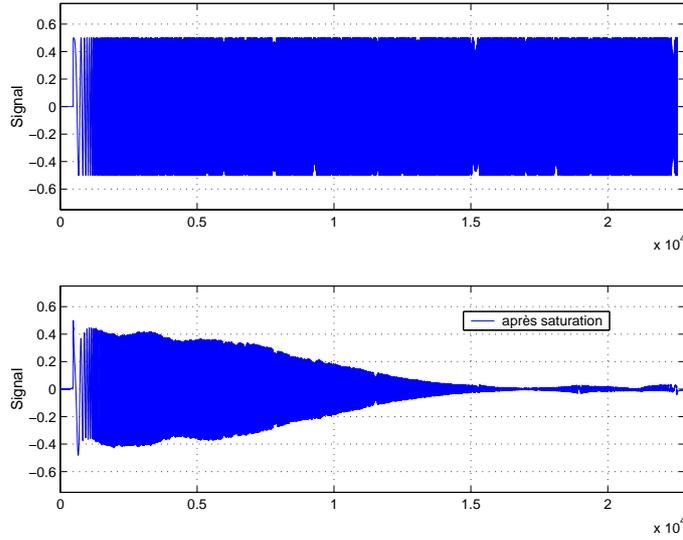


FIG. 1.7 – Saturation magnétique du STUDER A80 d’une sinusoïde de fréquence variant linéairement dans le temps. En haut signal avant saturation et en bas, après saturation.

somme

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{N} \left(\sum_{t=1}^{N-\tau} x_{t+\tau} z_t \right) / (\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z)$$

où $\hat{\sigma}_z^2 = 1/N \sum_{t=1}^N z_t^2$ et $\hat{\sigma}_x^2 = 1/N \sum_{t=1}^N x_t^2$ sont les variances empiriques respectivement, des séquences entrée et sortie correspondantes. Ces séquences comportent chacune $N = 1000$ échantillons. Ce calcul est effectué pour 90 sous-trames de même longueur N . Les sous-trames se succèdent et se chevauchent sur 50 échantillons. La figure 1.8 illustre les 90 fonctions d’inter-corrélation obtenues à partir des sous-trames successives. On observe que les maxima de corrélation $\max_{\tau}(\gamma(\tau))$ varient entre -2 et $+2$ échantillons selon la trame considérée.

Les variations du décalage temporel entre le signal d’entrée et le signal de sortie, produites par le mécanisme de défilement de la bande magnétique, sont plus ou moins importantes selon le magnétophone (STUDER A80 et A816) utilisé et persistent même si aucune saturation ne se produit pendant l’enregistrement. D’après les observations faites sur les différentes séries de signaux tests, ces variations sont négligeables si $N \leq 1000$, qui correspond à des durées très brèves de l’ordre de $20ms$. De ce fait, dans le cadre de l’analyse des signaux tests entrée-sortie du magnétophone, nous utiliserons des enregistrements de durée très courte de manière à :

- garantir que la vitesse de défilement soit constante,
- traiter la saturation magnétique comme résultant de la transmission d’un système non-linéaire causal.

En effet, on voit que la transmission est non-causale (quand $\max_{\tau}(\gamma(\tau)) < 0$) car d’une part, les mesures ont été réalisées sans moyens de garantir la synchronisation entrée-sortie et d’autre part, car il faut tenir compte des effets de la rémanence magnétique qui ont lieu pendant les enregistrements. Dans le cadre de l’analyse des saturations sur bandes, les signaux entrée-sortie seront synchronisés de façon à observer $\max_{\tau}(\gamma(\tau)) = 0$ et garantir la causalité du modèle de transmission.

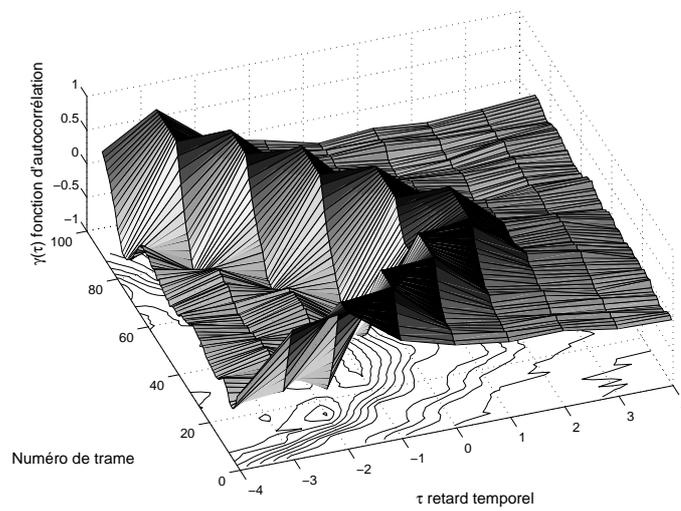
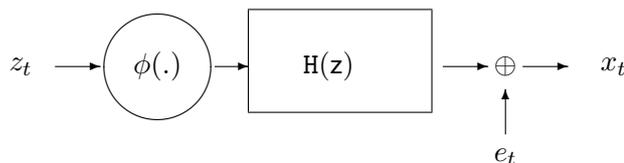


FIG. 1.8 – Représentation des variations du décalage temporel produites par le mécanisme d'entraînement de la bande du magnétophone *STUDER A80* (19cm/s). On observe les fonctions d'intercorrélations $\gamma(\tau)$ relatives à 90 sous-frames successives avec ($N = 1000$) du même enregistrement de signal test de type bruit blanc.

Chapitre 2

Choix du modèle de distorsion

Ce chapitre est consacré à l'étude et à l'identification du modèle paramétrique de distorsion de type Hammerstein, représenté par le diagramme de transmission 2.1. L'objectif est de sélectionner les paramétrisations des deux sous-systèmes $H(z)$ et ϕ , connectés en cascade.



DIAG. 2.1 – *Choix du modèle de la distorsion non-linéaire basée sur un modèle en cascade de type Hammerstein simple.*

Nous proposons dans la section suivante, plusieurs variantes du modèle de Hammerstein, basées sur des représentations paramétriques différentes de la non-linéarité instantanée et du filtrage linéaire. Ensuite, nous présentons les méthodes d'identification (méthodes corrélatives, méthodes des moindres carrés) adaptées aux variantes de la modélisation proposée et aux hypothèses faites sur les signaux enregistrés en entrée et en sortie (c.f. section 1.6.1.2) du système à identifier. Les résultats obtenus (choix et dimension des modèles) seront utilisés dans les chapitres 3 et 4, consacrés à la présentation de la méthode complète de restauration.

2.1 Introduction

Parmi les exemples de transmission non-linéaire présentés dans la section 1.4, nous utilisons dans cette étude une modélisation en cascade de type Hammerstein simple, schématisé par le diagramme 2.1. Ce choix permet d'expliquer qualitativement les effets principaux de la distorsion non-linéaire, observés sur les séries d'enregistrements. L'application ϕ est une fonction non-linéaire réelle. Elle possède globalement un profil de saturation permettant de déclencher les effets de la distorsion harmonique et des inter-modulations de fréquences. Le filtrage linéaire caractérisé par la fonction de transfert $H(z)$ et la séquence de bruit blanc additive e_t représentent, respectivement, la contribution de la distorsion linéaire et, éventuellement, celle d'un bruit système accompagnant les non-linéarités instantanées.

Dans le cadre d'une étude complète sur la caractérisation et le contrôle des processus de la distorsion sonore, on utiliserait des modèles différents et éventuellement, plus complexes suivant

la cause de déclenchement des non-linéarités. Dans le cadre de la restauration, le choix est cependant dicté par les conditions d'identifiabilité du modèle. Le modèle de distorsion sera estimé de façon *aveugle* ou *autodidacte* uniquement à partir de la donnée de l'enregistrement à traiter car nous ne disposons pas d'informations complémentaires (causes de la distorsion ou signal original) concernant le document.

En particulier, nous excluons de notre choix les modèles non-linéaires de types Wiener ou de Wiener-Hammerstein. Ces modèles supposent que des effets de filtrages linéaires supplémentaires, interviennent en entrée de la non-linéarité ϕ . Cette décision découle des deux remarques suivantes :

- Le modèle NAR, proposée par [Troughton, 1999], admet une formulation équivalente sous la forme d'un modèle polynomial en cascade de type Wiener. Or, l'auteur indique que ce choix de modélisation ne conduit pas nécessairement à des méthodes performantes du point de vue de l'atténuation des artefacts de la distorsion.
- On sait que même le traitement d'une distorsion linéaire nécessite d'introduire des hypothèses complémentaires sur le signal pour estimer de façon *autodidacte* une fonction de transfert linéaire. Ces hypothèses *a priori* interviennent pour lever une indétermination fondamentale du problème d'identification d'un filtre linéaire à partir de la donnée d'un signal audio seul.

En revanche, le modèle de Hammerstein simple considère que le déclenchement des distorsions est directement produit par les effets de ϕ sur l'amplitude instantanée du signal incident, ce qui est compatible avec les effets de seuillage des amplificateurs ou des écrêtages des appareils. Nous proposons donc un traitement complet, basé sur la modélisation en cascade 2.1. Dans le cadre de la compensation des distorsions, le signal \hat{Z}_t restitué, pourra (si nécessaire) subir une étape supplémentaire de post-égalisation après correction des effets non-linéaires.

2.2 Paramétrisation du modèle de Hammerstein

Soit Z_1, \dots, Z_n le signal d'entrée. On suppose que l'équation générale d'observation du signal distordu X_1, \dots, X_n est définie par une égalité de la forme

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \sum_{j=0}^q b_j \phi(Z_{t-j}) + e_t \quad (2.1)$$

où e_1, \dots, e_n est une séquence de bruit blanc, indépendante des signaux mesurés respectivement avant et après la distorsion non-linéaire. (a_1, \dots, a_p) et (b_0, \dots, b_q) sont des coefficients réels et ϕ est une fonction non-linéaire à valeurs réelles qui sera définie par la suite.

Prise sous cette forme, l'équation (2.1) définit un cas particulier du modèle non-linéaire paramétrique NARMAX [Leontaritis and Billings, 1985b]. La fonction ϕ représente les effets de la non-linéarité (distorsions harmoniques et produits d'inter-modulations) et les opérations de filtrage représentent ceux de la distorsion linéaire. Implicitement, la fonction de transfert en z , notée $H(z)$, du filtrage est définie par la fraction rationnelle

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^q b_j z^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \quad (2.2)$$

Nous supposons donc que les effets linéaires ne sont pas couplés avec ceux de la non-linéarité ϕ et qu'ils interviennent en sortie de la non-linéarité.

La stabilité de la transmission dépend séparément de celles des deux sous-systèmes (ϕ et $H(z)$) connectés en série. Pour une dynamique du signal d'entrée finie, celle du signal en sortie est aussi finie si ϕ et H vérifient les deux conditions suivantes :

- La fonction ϕ est bornée, c'est-à-dire $\sup_{z \in I} |\phi(z)| < \infty$ où, l'intervalle I représente la dynamique du signal d'entrée $I = [\min(Z_t), \max(Z_t)]$.
- La fonction de transfert $H(z)$ prise sous la forme (2.2) n'admet pas de pôles placés sur le cercle unité du plan complexe.

Le système de transmission est alors stable EBSB (Entrée-Bornée, Sortie-Bornée) car la dynamique instantanée du signal intermédiaire défini par $Y_t = \phi(Z_t)$ est finie et le gain du filtre linéaire l'est également.

2.2.1 Paramétrisation du filtre linéaire

On distingue deux variantes de paramétrisation du modèle de distorsion basées sur deux représentations différentes de la fonction de transfert (2.2) du filtre linéaire :

- Modèle de Hammerstein à partie linéaire à réponse impulsionnelle finie (RIF). Dans ce cas, l'équation d'observation est définie par

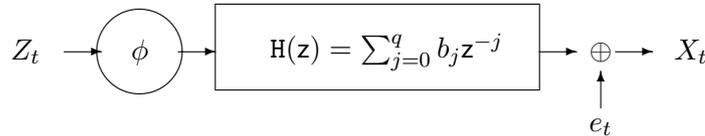
$$X_t = \sum_{j=0}^q b_j \phi(Z_{t-j}) + e_t \quad (2.3)$$

qui est déduite de (2.1) quand $a_i = 0$ avec $i = 1, \dots, p$.

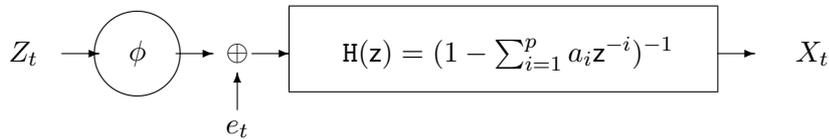
- Modèle de Hammerstein à partie linéaire purement récursif (filtre tout pôles). Dans ce cas, l'équation d'observation est définie par

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \phi(Z_t) + e_t \quad (2.4)$$

qui est déduite de (2.1) quand $b_0 = 1$ et $b_j = 0$ pour $j = 1, \dots, q$.



DIAG. 2.2 – Modèle de Hammerstein représenté avec un filtre linéaire à réponse impulsionnelle finie et défini par l'équation de transmission (2.3).



DIAG. 2.3 – Modèle de Hammerstein représenté avec un filtre linéaire tout pôles et défini par l'équation de transmission (2.4).

Les filtres RIF sont toujours causaux et stables. Le modèle (2.4) est causal si les pôles la fonction de transfert se trouvent à l'intérieur du cercle unité du plan complexe. Sous les hypothèses de la modélisation (2.3), la contribution de la séquence e_1, \dots, e_n correspond à celle d'un bruit blanc additif, enregistré en sortie du modèle. Sous les hypothèses de la modélisation (2.4), elle

correspond à la contribution d'un bruit blanc additif en sortie de la non-linéarité ϕ puis filtrée et enregistrée en sortie du modèle. En pratique, ces deux situations se traduisent par des effets sonores (différence entre bruits blancs/ bruits roses) distincts.

Un procédé simple pour étudier les propriétés du bruit additif consiste à analyser le signal de sortie quand, à l'entrée $Z_t = 0$. Nous ne disposons pas de tels exemples ou plus précisément, les plages de silences placées entre les séquences de signaux tests sont traitées automatiquement par le dispositif d'enregistrement numérique que nous avons utilisé. On voit cependant sur les exemples de caractérisation présentés dans le chapitre 1, que les effets de la saturation magnétique des bandes analogiques s'accompagnent d'une augmentation de plus de $15dB$ du niveau de bruit de fond sur les signaux enregistrés. Dans le cas des effets des amplificateurs de puissance, la contribution du bruit est négligeable. La séquence e_1, \dots, e_n intervenant dans les équations de transmission représente alors l'erreur résiduelle de la modélisation paramétrique de type Hammerstein.

Du point de vue de l'identifiabilité du modèle paramétrique à partir de mesures entrée-sortie, la modélisation (2.3) crée une indétermination entre le gain instantané du sous-système non-linéaire d'une part, et celui du filtrage linéaire d'autre part. Nous montrons dans la section 2.3 que cela se traduit par une indétermination entre les valeurs des coefficients b_0, \dots, b_q et celles des paramètres (précisés dans la section suivante) de la fonction ϕ . Cette indétermination n'existe pas en revanche dans le cas de la modélisation (2.4) car le filtre linéaire est normalisé de par la propriété

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log(|1 - \sum_{l=1}^p a_l e^{-j\omega l}|^2) d\omega = 0 \quad (2.5)$$

Dans ce cas, le sous-système non-linéaire seul permet de créer une amplification du signal d'entrée.

Du point de vue de la compensation de la distorsion, la variante du modèle définie par (2.4) présente plusieurs avantages par rapport à celle caractérisée par l'équation (2.3). En effet, si le filtre tout-pôles est stable, il est à phase minimale et est donc inversible. Ainsi, on déterminera les valeurs du signal intermédiaire placé à la sortie de ϕ , directement à partir des coefficients de filtrage a_1, \dots, a_p et ce sans amplifier la contribution du bruit additif. En revanche, dans le cadre de la modélisation (2.3), il est nécessaire de proposer une nouvelle paramétrisation utilisant un nombre de coefficient éventuellement plus grand que q pour inverser le filtrage linéaire. De plus, la déconvolution du signal de sortie s'accompagne d'une amplification des valeurs du bruit additif.

2.2.2 Modélisation de la non-linéarité ϕ

L'objet de cette section est d'étudier plusieurs variantes du modèle de distorsion basées sur des approximations différentes de la non-linéarité instantanée ϕ . Plus précisément, on suppose que ϕ est continue, dérivable à valeurs réelles et est correctement représentée par l'une des alternatives suivantes :

- La fonction ϕ admet une décomposition polynomiale de degré d telle que

$$\phi(Z_t) = \sum_{k=0}^d \alpha_k Z_t^k / k! \quad (2.6)$$

où, $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont des coefficients à valeurs réelles.

- La fonction ϕ admet une décomposition sur la base des polynômes d'Hermite de la forme

$$\phi(Z_t) = \sum_{k=0}^d \alpha_k H_k^{\sigma z}(Z_t) / k! \quad (2.7)$$

- où, $H_k^{\sigma_z}$ est le polynôme d'Hermite d'ordre k (pour une variance σ_z^2 du signal d'entrée - voir ci-dessous) et α_k est le k -ème coefficient d'Hermite de la décomposition.
- La fonction ϕ est une somme de d fonctions tangente hyperbolique telle que

$$\phi(Z_t) = \sum_{k=1}^d \alpha_k \tanh(\beta_k Z_t) \quad (2.8)$$

où, $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et β_1, \dots, β_d sont les paramètres à valeurs réelles.

Les modèles d'approximations (2.6) et (2.7) sont des exemples de représentation de type polynomiale de degré d . Dans les deux cas, les fonctions représentées sont impaires (resp. paires) si les coefficients α_k quand k est un entier pair (resp. impair) sont identiquement nuls. Cela reste vrai pour la représentation (2.7) car la parité des polynômes d'Hermite $H_k^{\sigma_z}$ est déterminée par celle du degré k considéré (voir annexe B). Cependant, plutôt que d'utiliser l'expansion en puissance de Z_t , il peut être judicieux de décomposer (2.6) sur une base de polynômes orthogonaux. En effet, les polynômes d'Hermite forment une famille de fonctions orthogonales par rapport à la mesure gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma_z^2; z) = 1/\sqrt{2\pi\sigma_z^2} \exp(-z^2/2\sigma_z^2)$ définie sur \mathbb{R} . Ils vérifient la relation d'orthogonalité,

$$E_{Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2)}[H_k^{\sigma_z}(Z)H_l^{\sigma_z}(Z)] = k! \delta(k-l)$$

et constituent une base de l'espace de Hilbert des fonctions de carrés intégrables sous la loi normale centrée, de variance σ_z^2 . Les propriétés du modèle (2.7) sont donc intéressantes dans le cas où la distribution statistique du signal d'entrée est supposée gaussienne.

Dans le cas de l'approximation (2.8), ϕ est une somme de fonctions paramétriques impaires. C'est un cas particulier de fonction appelée sigmoïdale, aussi utilisée dans le cadre des réseaux de neurones et dont les propriétés d'approximations sont présentées dans [Barron, 1993] et [Cybenko, 1989]. Les paramètres de la non-linéarité sont déterminés par les valeurs des coefficients linéaires $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et des pentes à l'origine β_1, \dots, β_d la décomposition. Ce modèle d'approximation diffère des deux exemples de décomposition polynomiale par le comportement asymptotique observé quand Z_t est grand. On obtient toujours des limites asymptotiques à valeurs finies alors que les décompositions polynomiales divergent quand Z_t est grand. Dans ces conditions, la modélisation (2.8) permet de limiter le nombre d de termes par rapport à ce qui est nécessaire avec une décomposition polynomiale pour ajuster le comportement de ϕ aux effets de seuillage en amplitude du signal. D'un autre côté, la dépendance de ϕ est non-linéaire par rapport aux paramètres β_1, \dots, β_d , ceci rendant éventuellement plus difficile l'identification des paramètres de la modélisation.

Nous proposons d'illustrer les performances d'estimation des paramètres de ces différents modèles d'approximation à partir d'un exemple de simulation numérique de la distorsion non-linéaire instantanée, appliquée à des signaux audio. La simulation numérique de la non-linéarité est définie par l'application

$$y = \begin{cases} 1/2 \sin(\pi z) & \text{si } |z| \leq 0.5 \\ 0.5 \text{ sign}(z) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.9)$$

où **sign** est la fonction signe. Le signal audio est un extrait musical (clarinette, saxophone et boîte à rythme) court de moins d'une seconde. Le signal en sortie, transformé par (2.9) est bruité (bruit blanc gaussien additif) et le rapport signal-bruit est inférieur à $10dB$. Le pourcentage total des échantillons du signal audio en entrée dont l'amplitude est au-dessus du seuil $|Z_t| \geq 0.5$ de la fonction (2.9) est égal à 20%.

L'estimation des paramètres de la non-linéarité est réalisée en minimisant le critère des moindres carrés J_ϕ définis par,

$$J_\phi = \frac{1}{n} (\mathbf{y} - \phi(\mathbf{z}))^\top (\mathbf{y} - \phi(\mathbf{z}))$$

où on note $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^\top$ le vecteur en entrée et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ le vecteur en sortie de la non-linéarité. Si on utilise l'approximation (2.6) ou (2.7), la modélisation est linéaire par rapport aux coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et de ce fait, le minimum du critère est déterminé par la solution des moindres carrés linéaire de la forme

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{M}_\phi^\top \mathbf{M}_\phi)^{-1} \mathbf{M}_\phi^\top \mathbf{y} \quad (2.10)$$

avec $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^\top$ et \mathbf{M}_ϕ est la matrice de régression linéaire définie par

$$\mathbf{M}_\phi = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_1^d/d! \\ z_2 & \dots & z_2^d/d! \\ \vdots & & \vdots \\ z_n & \dots & z_n^d/d! \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{M}_\phi = \begin{pmatrix} H_1^{\sigma z}(z_1) & \dots & H_d^{\sigma z}(z_1)/d! \\ H_1^{\sigma z}(z_2) & \dots & H_d^{\sigma z}(z_2)/d! \\ \vdots & & \vdots \\ H_1^{\sigma z}(z_n) & \dots & H_d^{\sigma z}(z_n)/d! \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

selon le modèle d'approximation polynomiale choisi.

Dans le cas du modèle d'approximation (2.8), la minimisation du critère quadratique est réalisée par la méthode des moindres carrés à variables séparées [Golub and Pereyra, 1973]. Pour cela, on effectue d'abord la minimisation du critère réduit J_ϕ^r défini par

$$J_\phi^r = \frac{1}{n} (\mathbf{y} - \mathbf{M}_\phi (\mathbf{M}_\phi^\top \mathbf{M}_\phi)^{-1} \mathbf{M}_\phi^\top \mathbf{y})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{M}_\phi (\mathbf{M}_\phi^\top \mathbf{M}_\phi)^{-1} \mathbf{M}_\phi^\top \mathbf{y}) \quad (2.12)$$

par rapport aux coefficients non-linéaires β_1, \dots, β_d où, dans ce cas, la matrice de régression \mathbf{M}_ϕ est définie par

$$\mathbf{M}_\phi = \begin{pmatrix} \tanh(\beta_1 z_1) & \dots & \tanh(\beta_d z_1) \\ \tanh(\beta_1 z_2) & \dots & \tanh(\beta_d z_2) \\ \vdots & & \vdots \\ \tanh(\beta_1 z_n) & \dots & \tanh(\beta_d z_n) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

L'optimisation du critère réduit J_ϕ^r par rapport aux paramètres non-linéaires est effectuée en utilisant une méthode itérative standard du type Quasi-Newton. Ensuite, quand β_1, \dots, β_d sont déterminés, les paramètres linéaires $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont déterminés à nouveau, par la solution des moindres carrés linéaire (2.10) avec \mathbf{M}_ϕ définie en (2.13).

Sur la figure 2.1, nous présentons les fonctions estimées quand $n = 1200$ par la méthode des moindres carrés. La décomposition polynomiale (2.6) est de degré $d = 9$ et la fonction paramétrique (2.8) comporte $d = 4$ termes. Ici, on n'a pas forcé la symétrie impaire pour la représentation polynomiale. Par ailleurs, les résultats obtenus avec la décomposition sur la famille des polynômes d'Hermite sont identiques à ceux utilisant la décomposition polynomiale simple car la relation coefficients monomiaux/ coefficients d'Hermite est linéaire (voir annexe B) et de ce fait, la solution des moindres carrés (2.10) est indépendante de la représentation polynomiale utilisée. La valeur minimale du critère J_ϕ des moindres carrés obtenue avec la représentation (2.8) est comparable à celle obtenue avec (2.6). Cependant, le comportement de la fonction polynomiale à partir du niveau de seuillage est très différent de celui de la fonction à identifier définie par (2.9).

On constate sur la courbe de gauche que les coefficients pairs $\hat{\alpha}_k$ du polynôme estimé sont non nuls. Le pourcentage de saturation en-dessous du seuil $Z_t \leq -0.5$ est égal à 8% et celui au-dessus du seuil $Z_t \geq 0.5$ est égal à 12% pour le signal considéré. De ce fait, les coefficients pairs $\hat{\alpha}_{2k}$ estimés sont non nuls et la solution (2.10) utilise tous les ordres pairs et impairs pour représenter la non-linéarité. En revanche, la fonction paramétrique impaire (2.8) permet d'obtenir un meilleur ajustement des caractéristiques alors que d est moitié plus petit que le degré maximum de la décomposition (2.6). On note donc qu'il est préférable d'enlever les coefficients

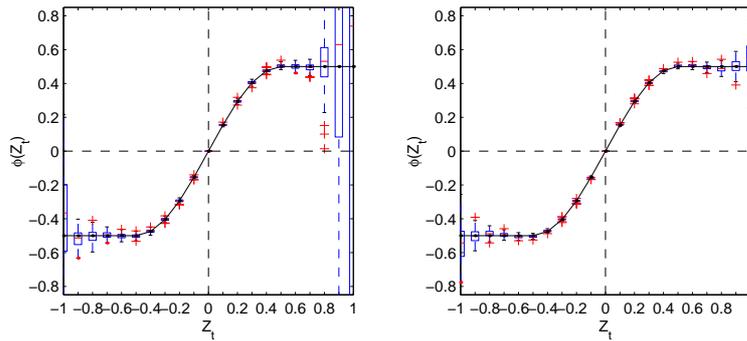


FIG. 2.1 – Estimation de la non-linéarité (2.9) (en trait plein) par la méthode des moindres carrés quand le modèle d’approximation est la fonction polynomiale (2.6) (à gauche) et est la fonction paramétrique (2.8) (à droite). Le signal $Y_t = \phi(Z_t)$ distordu est bruité ($RSB \leq 10dB$) et nous avons présenté par des box-plots le comportement empirique des courbes estimées en fonction des réalisations du bruit additif (200 tirages du bruit).

pairs de la décomposition polynomiale si la non-linéarité est effectivement symétrique. De plus, les différences entre les courbes estimées sont importantes lorsque $|Z_t| > 0.65$. En fait, le pourcentage des échantillons audio tels que $|Z_t| > 0.65$ est inférieur à 1% et de ce fait, les fonctions (2.6) et (2.8) effectuent une extrapolation du comportement de ϕ pour des valeurs d’amplitude du signal $|Z_t| \approx 1$. On observe donc déjà le comportement divergent du polynôme tandis que la fonction hyperbolique estimée est plus stable aux bornes de l’intervalle des amplitudes observées.

Les moyens d’améliorer les performances d’estimation consistent à augmenter la taille n des fenêtres de signal et/ou le degré d des modèles d’approximation. En moyenne, augmenter n permet d’uniformiser le pourcentage de saturation par rapport au signe de l’amplitude du signal au-dessus du seuil $|Z_t| > 0.5$. Augmenter d permet d’améliorer l’ajustement des courbes estimées autour des paliers du seuillage, cependant cela n’améliore pas le comportement asymptotique des courbes pour les forts niveaux d’amplitude. Si la non-linéarité est une fonction impaire de l’amplitude du signal incident, présentant globalement un profil de saturation, le modèle d’approximation (2.8) est plus performant que la décomposition polynomiale même si le nombre de termes d est relativement plus petit que le degré du polynôme (2.6).

2.3 Méthodes d’identification entrée/sortie

Dans cette section, nous présentons les méthodes d’estimation des paramètres du modèle non-linéaire quand les signaux Z_1, \dots, Z_n avant et X_1, \dots, X_n après la distorsion sont connus. Les méthodes développées dépendent d’une part, du choix de la représentation des caractéristiques du modèle en cascade et d’autre part, des propriétés du signal incident. En effet, il existe deux ensembles de méthodes d’identification du modèle de Hammerstein, à savoir [Haber and Keviczky, 1999],

1. Méthodes des moments basées sur les corrélations empiriques [Greblicki and Pawlak, 1989] [Krzyzak, 1989] [Pawlak, 1991] [Lang, 1997].
2. Méthodes des moindres carrés [Narendra and Gallman, 1966], [Rangan et al., 1995], [Boutayeb et al., 1996], [Bai, 2002].

Les méthodes des moments reposent sur l’estimation des propriétés d’inter-corrélation des deux séquences quand le signal incident Z_1, \dots, Z_n est un bruit blanc gaussien. Dans ce cas, on estime séparément les deux caractéristiques $-\phi$ et $H(z)$ - à partir des observations. Dans les

exemples [Greblicki and Pawlak, 1989], [Krzyzak, 1989] et [Pawlak, 1991], aucune hypothèse sur la représentation de ϕ n'est spécifiée et la fonction est déterminée au sens de la régression non-paramétrique utilisant les estimateurs de Nadaraya-Watson [Härdle, 1990], [Coulomb, 1981]. Les coefficients de la réponse impulsionnelle associés à $H(z)$ sont déterminés à partir des estimateurs empiriques de la fonction d'inter-corrélation $E[X_{t+\tau}Z_t]$ [Brillinger, 1977].

Dans cette section, nous utiliserons en partie les méthodes des moments pour l'estimation des fonctions du modèle. Celles-ci permettent d'étudier les variantes de la modélisation à partir des mesures entrée-sortie des dispositifs, effectuées avec des séquences de bruit blanc gaussien. Cependant, nous souhaitons aussi évaluer les performances de la modélisation sur des exemples audio sans hypothèse spécifique supplémentaire sur les propriétés statistiques du signal d'entrée. Pour cela, nous présentons les performances des méthodes d'estimation par moindres carrés (décrites plus en détail dans l'annexe A). Les algorithmes d'estimation proposés sont adaptés aux quatre variantes du modèle de Hammerstein discutées précédemment, à savoir l'utilisation des représentations (2.3) -cas d'un filtre RIF- ou (2.4) -cas d'un filtre tout-pôles- pour la fonction de transfert, définies avec les approximations (2.6) -cas fonction polynôme- ou (2.8) -cas d'une fonction hyperbolique- de la fonction ϕ . Les résultats d'identification sont évalués tout d'abord sur des simulations numériques de la distorsion sonore pour comparer les variantes entre elles et analyser la sensibilité de la méthode au bruit additif et aux effets de perte de synchronisation des séquences.

2.3.1 Estimation des paramètres par la méthode des moments

Considérons le cas où le modèle de la distorsion non-linéaire est défini par l'équation (2.3) utilisant un filtre RIF. Le signal Z_1, \dots, Z_n est une séquence de variables gaussiennes indépendantes identiquement distribuées, centrées et de variance σ_z^2 . Dans ces conditions, on utilise le modèle d'approximation (2.7) pour représenter la non-linéarité avec la famille des polynômes d'Hermite. On montre alors que l'espérance mathématique $E_{Z_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2)}[X_{t+\tau} H_k^{\sigma_z}(Z_t)]$ vérifie l'égalité suivante,

$$E_{Z_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2)}[X_{t+\tau} H_k^{\sigma_z}(Z_t)] = b_\tau \alpha_k \quad (2.14)$$

où les entiers τ et k sont tels que $0 \leq \tau \leq q$ et $1 \leq k \leq d$. Pour obtenir ce résultat, on utilise la linéarité de l'espérance, l'indépendance de la séquence de bruit blanc e_1, \dots, e_n avec les signaux et l'orthogonalité de la famille des polynômes d'Hermite $\{H_k^{\sigma_z}(z)\}_{k \geq 0}$ par rapport à la mesure gaussienne centrée de variance σ_z^2 .

Du point de vue de l'identification des propriétés de la non-linéarité, l'espérance (2.14) considérée avec τ fixé est une fonction de k et donne, à un facteur multiplicatif près, les valeurs des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ d'Hermite de la fonction ϕ . Réciproquement, du point de vue de l'identification du sous-système linéaire, l'espérance (2.14) considérée avec $k = 1$ donne à un facteur multiplicatif près, les valeurs des coefficients b_0, \dots, b_q , et donc, la forme de la réponse impulsionnelle du filtre RIF. Ceci démontre explicitement, qu'il existe une indétermination d'échelle entre les paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et b_0, \dots, b_q des deux sous-systèmes du modèle en cascade (2.3).

Considérons maintenant le cas différent où le modèle de la distorsion est défini par l'équation de transmission (2.4) avec un filtre linéaire tout-pôles. Si Z_t est une séquence de bruit blanc gaussien stationnaire au second ordre alors, la séquence X_1, \dots, X_n mesurée est un signal auto-régressif d'ordre p qui vérifie l'équation

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

où $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ est une séquence de variables indépendantes, définies par $\varepsilon_t = \phi(Z_t) + e_t$. Dans ces conditions, pour étudier la validité des hypothèses de la modélisation tout-pôles du filtre

linéaire, nous proposons d'étudier la fonction d'auto-corrélation partielle (dite PACF pour *Partial AutoCorrelation Function*) notée $\rho_{pacf}(\tau)$, définie par

$$\rho_{pacf}(\tau) = \frac{\mathbb{E}[(X_{\tau+1} - \mathbb{P}_{\bar{s}p\{1, X_2, \dots, X_\tau\}}(X_{\tau+1})) (X_1 - \mathbb{P}_{\bar{s}p\{1, X_2, \dots, X_\tau\}}(X_1))]}{\sigma_x^2} \quad (2.15)$$

où X_1, \dots, X_n est le signal mesuré après la distorsion quand Z_1, \dots, Z_n est une séquence de bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ_z^2 . Les opérateurs $\mathbb{P}_{\bar{s}p\{1, X_2, \dots, X_\tau\}}(X_{\tau+1})$ et $\mathbb{P}_{\bar{s}p\{1, X_2, \dots, X_\tau\}}(X_1)$ définissent respectivement le meilleur prédicteur linéaire des variables $X_{\tau+1}$ et X_1 pris sous la forme

$$\mathbb{P}_{\bar{s}p\{1, X_2, \dots, X_\tau\}}(X_{\tau+1}) = \hat{a}_{\tau,0} + \sum_{i=1}^{\tau-1} \hat{a}_{\tau,i} X_{i+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\bar{s}p\{1, X_2, \dots, X_\tau\}}(X_1) = \hat{a}_{1,0} + \sum_{i=1}^{\tau-1} \hat{a}_{1,i} X_{i+1}$$

où $\hat{a}_{\tau,0}, \dots, \hat{a}_{\tau,\tau-1}$ et $\hat{a}_{1,0}, \dots, \hat{a}_{1,\tau-1}$ sont des ensembles de τ coefficients à valeurs sur \mathbb{R} . Ces coefficients sont déterminés en minimisant les erreurs quadratiques moyennes de prédiction avant et rétrograde

$$\mathbb{E}[(X_{\tau+1} - \mathbb{P}_{\bar{s}p\{1, X_2, \dots, X_\tau\}}(X_{\tau+1}))^2] \quad \text{ou respectivement,} \quad \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{P}_{\bar{s}p\{1, X_2, \dots, X_\tau\}}(X_1))^2]$$

On montre en particulier que si X_1, \dots, X_n est une séquence AR(p) alors, la fonction d'auto-corrélation partielle s'annule aux indices de retard $\tau > p$ [Brockwell and Davis, 1990]. De ce fait, pour estimer l'ordre p de la régression à partir des observations, on détermine généralement la valeur de τ maximale pour laquelle $\rho_{pacf}(\tau)$ est significativement différente de 0.

2.3.2 Méthodes des moindres carrés

Les méthodes des moindres carrés et les algorithmes numériques adaptés aux variantes de la modélisation type Hammerstein proposées, sont décrites en détail dans l'annexe A :

- La solution des moindres carrés linéaire (A.3) détermine les paramètres du modèle de Hammerstein défini avec un filtre tout-pôles et une fonction ϕ polynomiale.
- L'algorithme A.1 permet d'estimer les paramètres du modèle défini avec un filtre linéaire tout-pôles et une fonction ϕ hyperbolique.
- L'algorithme A.2 permet d'estimer les paramètres du modèle défini avec un filtre linéaire RIF et une fonction ϕ polynomiale.
- L'algorithme A.3 permet d'estimer les paramètres du modèle défini avec un filtre linéaire RIF et une fonction ϕ hyperbolique.

Nous présentons ici les explications complémentaires pour initialiser les algorithmes et quelques précisions concernant la robustesse au bruit et les performances obtenues vis-à-vis des problèmes de synchronisation entre les enregistrements en entrée et en sortie.

Si on simule numériquement une distorsion non-linéaire sous un modèle de Hammerstein simple avec un signal d'entrée Z_1, \dots, Z_n généré comme un bruit blanc gaussien, on observe que la sensibilité aux conditions initiales des algorithmes d'identification entrée-sortie A.1, A.2 et A.3 reste négligeable. En revanche, si Z_1, \dots, Z_n est un signal audio, les algorithmes se bloquent ou convergent le plus souvent vers des minima locaux des variations du critère des moindres carrés. De ce fait, nous initialisons les algorithmes itératifs de la manière suivante :

- La solution déterministe (A.3) est utilisée pour initialiser les coefficients de la décomposition polynomiale (2.6) de l'algorithme A.2.
- Dans l'algorithme A.1, les paramètres non-linéaires β_1, \dots, β_d de la fonction (2.8) sont initialement déterminés par le minimum du critère réduit (2.12). Pour cela, les signaux intermédiaires sont par hypothèse, supposés identiquement égaux aux signaux de sortie.
- De même, pour initialiser l'algorithme A.3, les paramètres β_1, \dots, β_d de la fonction sont déterminés par la minimisation du critère réduit (2.12) et les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont déterminés par (2.10). Les signaux intermédiaires sont aussi par hypothèse, supposés identiquement égaux aux signaux de sortie.

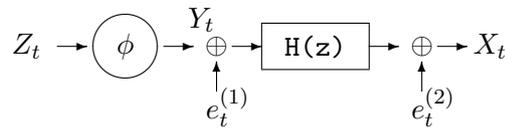
Une étape importante qui conditionne les résultats des méthodes d'estimation est celle qui consiste à synchroniser correctement les signaux Z_1, \dots, Z_n en entrée et X_1, \dots, X_n en sortie du modèle. C'est un problème si on ne dispose pas d'un dispositif d'enregistrement permettant de synchroniser (canal de synchronisation) correctement les enregistrements en entrée et en sortie. On peut alors synchroniser au préalable les signaux par l'utilisation de la fonction d'intercorrélation temporelle avant d'initialiser les algorithmes d'estimation. C'est une opération cependant toujours arbitraire à cause des effets éventuels de la distorsion linéaire de phase qui crée déjà un retard temporel entre le signal de sortie et son entrée correspondante.

Les performances des moindres carrés dépendent de la valeur du décalage τ , entre les signaux entrée et sortie. Si on effectue un recalage anti-causal ($\tau < 0$) des signaux c'est-à-dire, quand on avance le signal de sortie X_t par rapport à l'entrée Z_t , aucune des méthodes d'identification ne détermine correctement les solutions. Dans le cas où on effectue un recalage causal ($\tau > 0$) c'est-à-dire, si on retarde la sortie par rapport à l'entrée, seules les méthodes des moindres carrés associées aux modèles utilisant un filtre linéaire tout-pôles, identifient correctement les caractéristiques de la non-linéarité et du filtre linéaire. Les méthodes itératives adaptées aux modèles utilisant un filtre RIF ne convergent pas vers la solution correcte. Cette distinction provient du fait que l'opération de filtrage du modèle (2.4) est purement récursive et ne dépend que du signal de sortie. De ce fait, les modèles à filtres tout-pôles sont donc plus robustes aux effets de de-synchronisation ou variation de vitesses de mécanismes d'entraînement (pour les exemples de saturation) des bandes des enregistrements entrée-sortie.

De plus, la robustesse des méthodes au bruit additif dépend de la paramétrisation du filtre linéaire choisi. En effet, nous avons simulé la distorsion non-linéaire selon le modèle de Hammerstein bruité, représenté par le diagramme 2.4 où deux séquences de bruit blanc gaussien distinctes $e_1^{(1)}, \dots, e_n^{(1)}$ et $e_1^{(2)}, \dots, e_n^{(2)}$ sont placées respectivement en sortie de la non-linéarité ϕ et en sortie du filtre linéaire $H(z)$. Le signal audio est un extrait d'enregistrement d'orchestre de musique comportant $n = 3000$ échantillons. La non-linéarité ϕ est déterminée par la fonction (2.9). Le pourcentage des échantillons effectivement saturés est égal à 30%. On utilise un filtre RIF avec 3 coefficients. Les zéros du filtre sont déterminés par $q_1 = -0.862$ et $q_{2,3} = 0.059 \exp(\pm i0.3238)$. On obtient un filtre passe-bas avec une réponse en phase linéaire tant que $f \leq fe/4$ où fe est la fréquence d'échantillonnage des signaux audio. Les rapports signal-bruit $RSB1$ et $RSB2$ des séquences correspondantes sont déterminés par

$$RSB1 = \log_{10} \left(\frac{\sum_{t=1}^n Y_t^2}{n\sigma_1^2} \right) \quad RSB2 = \log_{10} \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_t^2}{n\sigma_2^2} \right)$$

où σ_1^2 et σ_2^2 sont les variances respectives des séquences $e_1^{(1)}, \dots, e_n^{(1)}$ et $e_1^{(2)}, \dots, e_n^{(2)}$.



DIAG. 2.4 – *Modèle de distorsion type Hammerstein bruité, utilisé pour tester les méthodes d'estimation par moindres carrés non-linéaires.*

Sur la figure 2.2, nous comparons les valeurs obtenues en fonction des variations des niveaux $RSB1$ et $RSB2$, du critère des moindres carrés $J_1(a_1, \dots, a_p; \alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de la solution A.3 avec celles minimales du critère $J_3(\mathbf{b}; \boldsymbol{\alpha})$ déterminées par l'algorithme A.2. Dans les deux cas, ϕ est choisie sous la forme (2.6) et on distingue les performances obtenues selon la paramétrisation de $H(z)$. Sur la figure 2.2 à gauche, on observe que les minimas des critères correspondant aux

modèles (2.4) et (2.3) sont semblables quel que soit le niveau du rapport signal-bruit $RSB2 = 10, \dots, 40 \text{ dB}$ avec $RSB1 = 100 \text{ dB}$ constant. En revanche, sur la figure 2.2 à droite, on observe que les valeurs du critère déterminées par l'algorithme A.2, sont plus grandes que celles de la solution (A.3), dès que le rapport $RSB1$ diminue avec $RSB2 = 100 \text{ dB}$ constant.

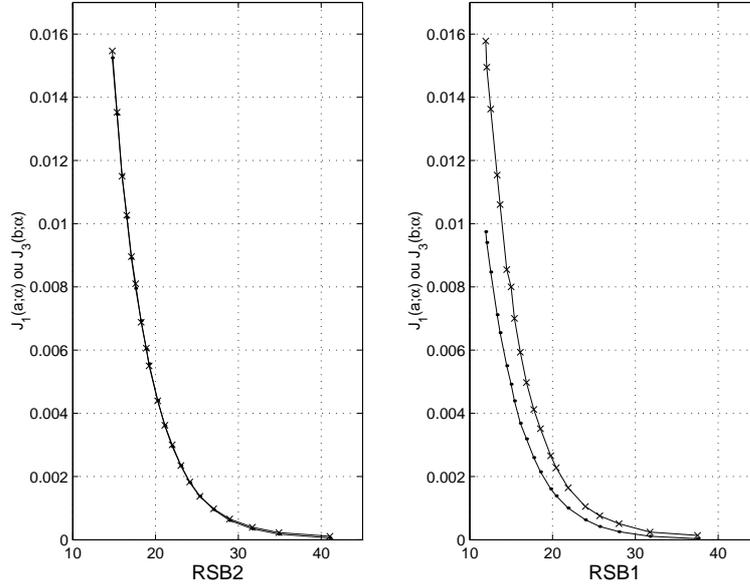


FIG. 2.2 – Minimas obtenus des critères des moindres carrés $J_1(a_1, \dots, a_p; \alpha_1, \dots, \alpha_d)$ et $J_3(\mathbf{b}; \alpha)$ en fonction des rapports $RSB1$ et $RSB2$. A gauche, $RSB1 = 100 \text{ dB}$. A droite, $RSB2 = 100 \text{ dB}$. ($d = 12$, $q = 10$, $p = 6$, $n = 3000$)

On observe les mêmes différences si on compare les performances de l'algorithme A.1 avec celles de l'algorithme A.3 qui utilisent les deux paramétrisations différentes de $H(z)$ alors que ϕ est définie sous la forme (2.8). Plus précisément, les réponses en fréquences $\hat{H}(z)$ estimées dépendent fortement du rapport $RSB1$ quand on choisit une paramétrisation RIF. Dès que $RSB1 \leq 20 \text{ dB}$, le comportement de $\hat{H}(z)$ dans la zone des fréquences hautes est complètement biaisé par la diminution du rapport signal-bruit. L'estimation des coefficients de filtrage b_0, \dots, b_q du modèle (2.3) est peu robuste si les signaux intermédiaires Y_1, \dots, Y_n sont bruités.

2.4 Expériences et résultats d'identification

Nous présentons les performances des méthodes d'identification des paramètres du modèle obtenues à partir des séries de mesures entrée-sortie des appareils d'enregistrement/lecture. Nous présentons tout d'abord une estimation empirique des fonctions (2.14) et (2.15) à partir des mesures effectuées en utilisant un bruit blanc gaussien en entrée. Ensuite, nous étudions les résultats de la méthode d'identification des paramètres du modèle par les moindres carrés appliquées aux mesures entrée-sortie.

2.4.1 Résultats obtenus par la méthode des moments

Le signal Z_1, \dots, Z_n avant distorsion est une séquence générée numériquement de variables gaussiennes, indépendantes, centrées et de variance σ_z^2 .

Estimation de $E[X_{t+\tau} Z_t]$

L'espérance mathématique (2.14) avec $k = 1$ est par définition proportionnelle à la fonction d'inter-corrélation des signaux en entrée et en sortie du modèle, définie par

$$\rho_{xz}(\tau) = E[X_{t+\tau} Z_t] / (\sigma_x \sigma_z) \quad (2.16)$$

où σ_x^2 est la variance de la séquence en sortie X_1, \dots, X_n . Sous les hypothèses du modèle (2.3) avec un filtre linéaire RIF, les valeurs de la fonction d'intercorrélacion sont égales à un facteur multiplicatif près à celles des coefficients de filtrage linéaire. Nous proposons de représenter les variations de la fonction d'inter-corrélation associées aux mesures sur les dispositifs d'amplification de puissance et à celles des magnétophones à bandes analogiques. Pour cela, on calcule les valeurs de l'estimateur empirique

$$\hat{\rho}_{xz}(\tau) = \hat{\gamma}_{xz}(\tau) / (\hat{\gamma}_x(0) \hat{\gamma}_z(0))^{1/2} \quad (2.17)$$

où $\hat{\gamma}_{xz}(\tau)$ et $\hat{\gamma}_x(0)$ sont déterminées par

$$\hat{\gamma}_{xz}(\tau) = \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} X_{t+\tau} Z_t \right) \quad \hat{\gamma}_x(0) = \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n X_t^2 \right)$$

et de même pour $\hat{\gamma}_z(0)$.

Sur la figure 2.3, on observe deux exemples de fonction d'inter-corrélation entrée-sortie associées à l'amplificateur Studer D19 MicValves, considéré à deux niveaux de puissance différents du signal Z_t en entrée. Sur la figure du haut, la variance σ_z^2 est suffisamment petite pour supposer qu'il n'y a pas de sur-modulation de l'appareil. Sur la figure du bas en revanche, la distorsion non-linéaire du signal en sortie est importante. De plus, nous faisons apparaître en trait continu l'intervalle de confiance à 95% du bruit blanc c'est-à-dire, les seuils $|\hat{\rho}_{xz}(\tau)| \leq 1.96/n^{1/2}$ à partir desquels les valeurs estimées de $\hat{\rho}_{xz}$ ne sont plus significatives [Brockwell and Davis, 1990]. L'étalement de la fonction d'inter-corrélation est donc faible car on observe que les valeurs de $\hat{\rho}_{xz}(\tau)$ restent significatives uniquement lorsque $|\tau| \leq 1$. Nous obtenons les mêmes résultats à partir des mesures entrée-sortie du même amplificateur utilisé avec la technologie à lampes. A ce niveau de caractérisation, on ne peut pas préciser si les effets observés de corrélation linéaire sont strictement dus à l'appareil d'amplification de puissance seul ou s'il intervient aussi des effets de transmission supplémentaires dans le dispositif (console d'enregistrement, conversion numérique/analogique) de captation des séquences entrée-sortie.

Dans le cas des enregistrements sur bandes magnétiques analogiques, l'estimation de la fonction d'inter-corrélation est problématique. La difficulté provient des variations de vitesse du mécanisme de défilement de la bande magnétique devant la tête de lecture de l'enregistreur qui créent des décalages temporels entre les signaux (voir section 1.6.2). De ce fait, nous proposons de calculer une fonction d'inter-corrélation $\hat{\rho}_{xz}(\tau)$ moyennée. Plus précisément, on calcule n_l fonctions d'inter-corrélation à court-terme $\hat{\rho}_{xz}^1, \dots, \hat{\rho}_{xz}^{n_l}$ associées à n_l sous-signaux Z_1^i, \dots, Z_L^i en entrée et X_1^i, \dots, X_L^i en sortie successifs de longueur $L \sim 600$. Cette longueur est supposée suffisamment petite pour garantir qu'il n'y pas de perte de synchronisme entre les sous-signaux. La fonction d'inter-corrélation moyennée est obtenue en calculant la somme

$$\hat{\rho}_{xz} = 1/n_l \sum_{i=1}^{n_l} \hat{\rho}_{xz}^i$$

où toutes les fonctions sous le signe somme sont recalées temporellement de sorte que les maximas d'inter-corrélation à court-terme des fonctions $\hat{\rho}_{xz}^1, \dots, \hat{\rho}_{xz}^{n_l}$ correspondent au même indice de retard $\tau = 0$ de la fonction moyennée. Autrement dit, tous les sous-signaux sont recalés pour que le maximum d'intercorrélacion à court-terme soit obtenu quand $\tau = 0$.

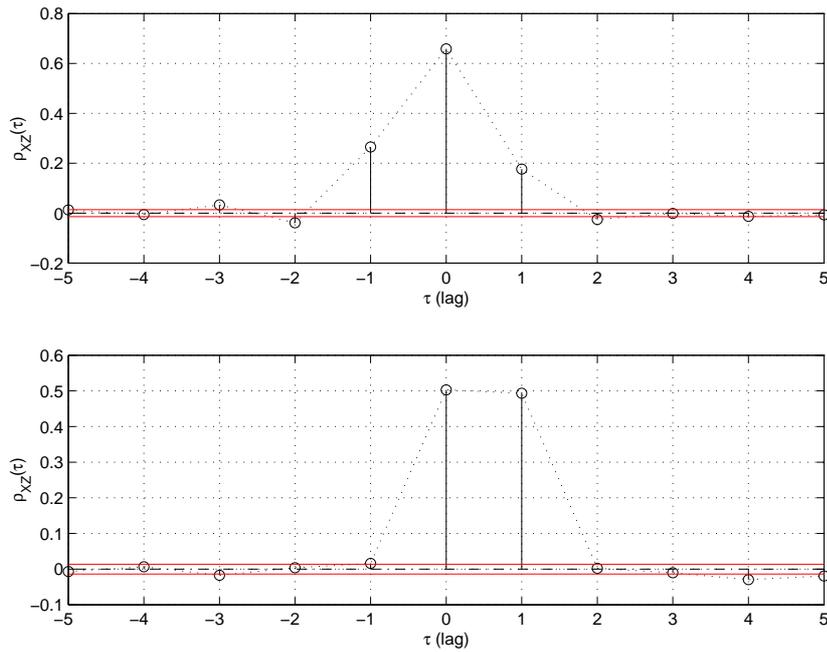


FIG. 2.3 – Fonction d'inter-corrélation de l'amplificateur de puissance du Studer D19 MicValves en fonctionnement à lampes. En haut ; sans sur-modulation de l'appareil. En bas ; avec distorsion non-linéaire importante.

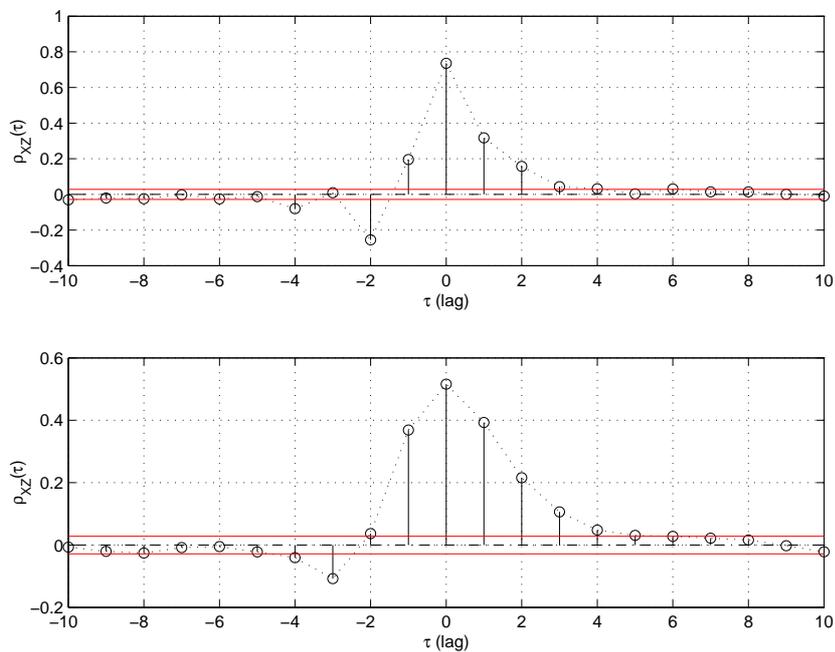


FIG. 2.4 – Fonction d'inter-corrélation d'une séquence de bruit blanc après saturation magnétique de l'enregistreur Studer A80 sur bandes magnétiques analogiques (19cm/s). En haut ; saturation modérée (+5dB). En bas ; saturation forte (+10dB).

Sur la figure 2.4, nous présentons deux exemples de fonction d'inter-corrélation moyennée correspondant au fonctionnement de l'enregistreur Studer A80. La variance σ_z^2 de la séquence en entrée est identique dans les deux cas. Cependant, la saturation est réglée par le niveau d'enregistrement du magnétophone, volontairement surélevé de $5dB$ (en haut) et $10dB$ (en bas) par rapport au niveau de réglage pour un fonctionnement correct, c'est-à-dire, sans saturation audible de l'appareil.

On observe que l'étalement de la fonction d'inter-corrélation moyennée est plus grand quand la saturation est plus importante si on compare les deux courbes de la figure 2.4. Il y a une asymétrie de la fonction d'inter-corrélation autour de sa valeur maximale, placée à l'indice de retard τ égal à zéro. Ceci traduit une propriété de non-linéarité de phase (distorsion linéaire) du filtre RIF. La saturation amplifie cette asymétrie créant un étalement de $\hat{\rho}_{xz}(\tau)$ du côté des indices de retard à valeurs positives et négatives. Cette propriété de non-causalité des effets linéaires est probablement due aux effets de la rémanence magnétique qui sont plus prépondérants en présence de la saturation forte sur la bande d'enregistrement et éventuellement à la procédure de recalage des signaux. Nous conservons cependant dans notre étude l'hypothèse de causalité du modèle de distorsion. D'après le niveau du seuil des valeurs significatives, l'ordre q des filtres linéaires RIF utilisées sous les hypothèses de la modélisation (2.3) sera choisi tel que $q \leq 10$.

Estimation de $E[X_t H_k^{\sigma_z}(Z_t)]$

Sur la figure 2.5, nous présentons les valeurs de l'estimateur empirique de $E[X_t H_k^{\sigma_z}(Z_t)]$, défini par

$$\tilde{\alpha}_k = 1/n \sum_{t=1}^n X_t H_k^{\sigma_z}(Z_t) \quad (2.18)$$

Dans le cas de la modélisation (2.3) du filtre linéaire RIF, $\tilde{\alpha}_k$ est à une constante multiplicative près, le coefficient d'Hermite d'ordre k de la décomposition (2.7).

La figure 2.5 représente les variations de $\tilde{\alpha}_k$ aux ordres $k = 0, \dots, 7$ de la décomposition polynomiale; en haut, les variations de (2.18) associées aux mesures de l'amplificateur Studer D19 MicValves en fonctionnement à lampes et en bas, celles associées aux mesures de l'enregistreur à bandes Studer A816 (19cm/s). Ces estimations indiquent que le profil des non-linéarités intervenant dans le modèle de distorsion est, aux ordres $d < 7$, celui d'une fonction impaire car on observe que les coefficients impairs $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_5, \tilde{\alpha}_7$ sont toujours plus grands numériquement, que les coefficients pairs $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_4$.

Pour préciser cette propriété aux ordres $d = 6, \dots, 9$, nous proposons d'évaluer l'importance relative du terme d'ordre 3 du modèle d'approximation (2.7) par rapport aux termes d'ordre supérieur. Pour cela, nous déterminons le rapport

$$r_d = \left(\frac{\tilde{\alpha}_3}{3!} H_3^{\sigma_z}(Z) \right) / \left(\frac{\tilde{\alpha}_d}{d!} H_d^{\sigma_z}(Z) \right)$$

à la valeur d'amplitude Z telle que 5% des échantillons de la séquence de bruit blanc en entrée, ont une amplitude Z_t supérieure à Z . On obtient les résultats suivants :

	r_6	r_7	r_8	r_9
D19 à lampes	128.0	-4.2	-164.0	-19.1
A816 (19cm/s)	-53.7	5.2	7.0	16.8

De ce fait, on peut considérer que la non-linéarité de l'amplificateur en fonctionnement à lampes, conserve la propriété de symétrie impaire. Les termes pairs sont plus de 120 fois plus faibles que

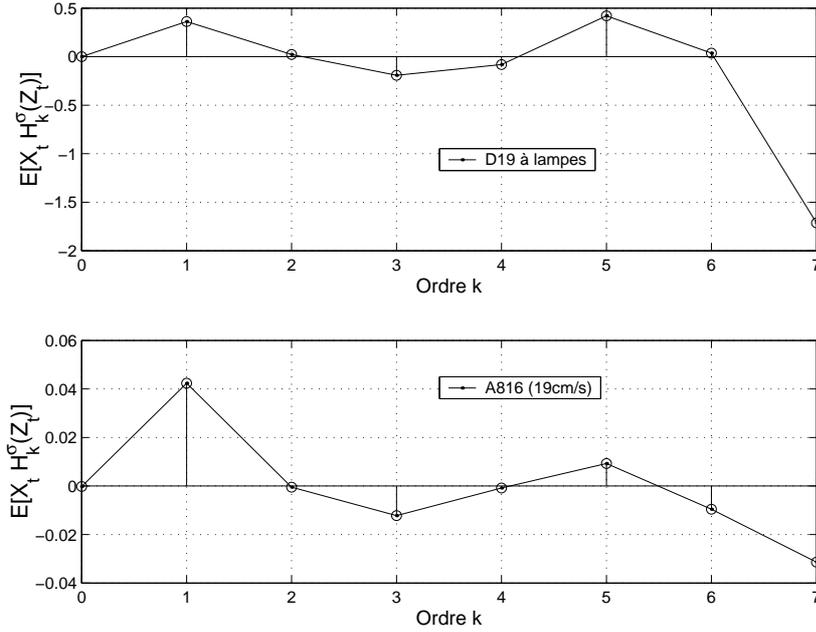


FIG. 2.5 – Estimateur empirique de $E_{Z_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2)}[X_t, H_k^{\sigma_z}(Z_t)]$ par le calcul (2.18), en fonction de l'ordre k . En haut, distorsion non-linéaire d'amplification de puissance du Studer D19 Mic Valves à lampes. En bas, saturation magnétique du Studer A816 (19cm/s).

le terme d'ordre 3 et ceux d'ordre impair, seulement 5 à 12 fois plus petits. Nous avons effectué les mêmes calculs avec les mesures de bruit blanc en entrée et en sortie de l'amplificateur Studer D19 mais en fonctionnement normal. Les résultats indiquent que la propriété de symétrie impaire n'est pas vérifiée car les termes d'ordre 4, 6, 8 ne sont plus négligeables. Cela s'explique par les effets de repliements asymétriques déjà détectés sur la figure 1.5.

En revanche, la symétrie impaire des effets non-linéaires de la saturation magnétique n'est pas aussi clairement détectée. Le rapport calculé r_8 prend une valeur proche de r_7 et supérieure à r_9 . On note cependant, trois raisons pour lesquelles nous supposons dans la suite de notre étude, que le modèle d'approximation de la nonlinéarité est dans ce cas, celui d'une fonction impaire :

- Le calcul de $\tilde{\alpha}_k$ est effectuée sur 30 sous-trames de la séquence de bruit blanc comportant $L = 700$ échantillons. Ces sous-trames en entrée et en sortie sont resynchronisées à partir du calcul de la fonction de corrélation temporelle puis on détermine $\tilde{\alpha}_k$ correspondant à chaque sous-trame. La figure 2.5 illustre les valeurs moyennes de $\tilde{\alpha}_k$.
- Les non-linéarités correspondantes aux saturations magnétiques enregistrées en sortie du Studer A816 ou du Studer A80, ne sont pas suffisamment brutales pour déclencher les effets non-linéaires aux ordres $d \geq 6$ plus élevés.
- Les analyses spectrales des sinusôides de fréquence f_0 enregistrées en sortie du Studer A80 ou du Studer A816, indiquent toujours que les harmoniques d'ordre impair $3f_0, 5f_0$ sont prépondérantes par rapport aux harmoniques paires (voir figure 1.1).

Estimation des coefficients d'auto-corrélation partielle (2.15)

Sur la figure 2.6, nous présentons deux exemples d'estimation de la fonction d'auto-corrélation partielle enregistrée en sortie de l'amplificateur de puissance ou avec le magnétophone à bandes analogiques. Ces estimations sont associées à l'utilisation du modèle de distorsion (2.4) du

filtre linéaire tout-pôles. Les valeurs $\rho_{pacf}(0), \rho_{pacf}(1), \dots, \rho_{pacf}(\tau)$ sont déterminées à partir d'un algorithme de Levinson-Durbin [Brockwell and Davis, 1990]. La distorsion d'amplification (respectivement la saturation magnétique) enregistrée est très brutale. Sur cette figure, nous illustrons en trait continu, l'intervalle de confiance à 95% du bruit blanc c'est-à-dire, les seuils $|\hat{\rho}_{pacf}(\tau)| \leq 1.96/n^{1/2}$ à partir desquels les valeurs estimées de $\hat{\rho}_{pacf}$ ne sont plus significatives.

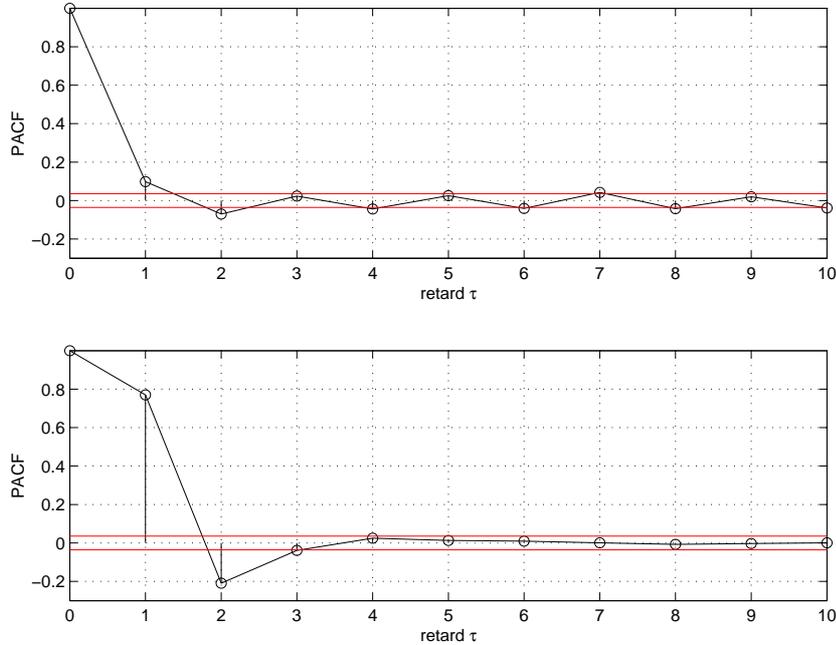


FIG. 2.6 – Fonction d'auto-corrélation partielle $\rho_{pacf}(\tau)$. En haut ; distorsion non-linéaire d'amplification de puissance du D19 à lampes. En bas ; saturation magnétique du Studer A80.

On observe donc que sous les hypothèses de la modélisation tout-pôles et si on utilise un signal gaussien en entrée, la fonction d'auto-corrélation partielle estimée prend des valeurs significatives pour $\tau < 4$ dans tous les cas. Ces résultats sont aussi validés sur l'ensemble des mesures avec des signaux gaussiens. Dans ces conditions, on conclut que l'ordre p de la modélisation (2.4) pourra être choisi *a priori* à une valeur telle que $p \leq 10$.

2.4.2 Résultats obtenus par la méthode des moindres carrés

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés pour l'identification des modèles (2.4) et (2.3) de la distorsion d'amplification de puissance et pour les saturations magnétiques. Ces méthodes d'identification sont appliquées tout d'abord, sur les mesures de bruits blancs, puis sur des extraits audio (enregistrements musicaux ou signaux de la parole) enregistrés en entrée et en sortie des appareils correspondants.

Distorsions d'amplification de puissance

Sur les deux figures 2.7 et 2.8, on observe les courbes de ϕ (à gauche) et celles de $|H(e^{i\omega})|^2$ (à droite) estimées par la méthode des moindres carrés à partir des mesures de bruits blancs comportant $n = 4500$ échantillons. Les mesures sont celles réalisées en entrée et en sortie de l'amplificateur de puissance Studer D19 à lampes. Les courbes de la figure 2.7 correspondent au modèle de Hammerstein (2.4) avec $p = 5$, et ϕ modélisée, soit par une fonction polynomiale

d'ordre $d = 7$ ou soit, par la fonction tangente hyperbolique (2.8) choisie avec $d = 3$. Les courbes de la figure 2.8 correspondent au modèle (2.3) avec $q = 10$, en utilisant pour ϕ les deux mêmes modèles (2.6) ou (2.8).

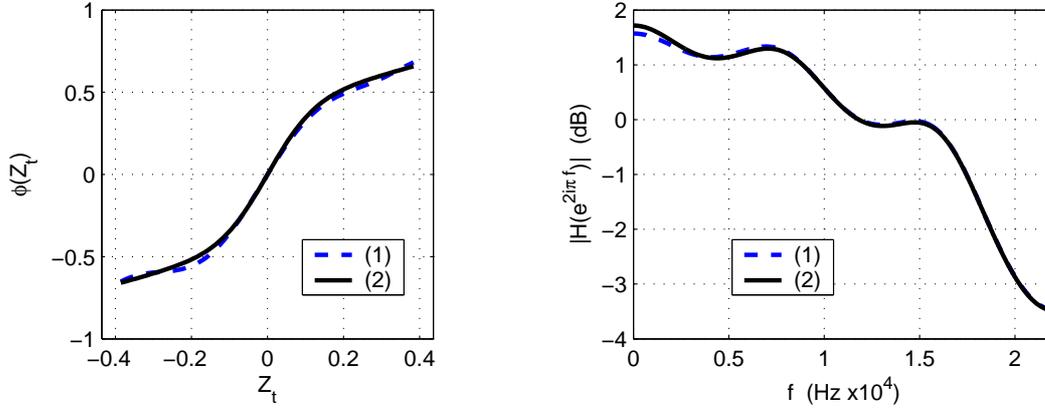


FIG. 2.7 – Modèle de Hammerstein (2.4) à filtre linéaire tout-pôles, estimé par la méthode des moindres carrés sur les mesures de bruits blancs gaussien en entrée et en sortie de l'amplificateur Studer D19 à lampes. A gauche, $\phi(z)$. A droite $|H(e^{2i\pi f})|$ ($n = 4500$, $p = 5$) : (1) Modèle (2.4) avec ϕ polynomiale ($d = 7$). (2) Modèle (2.4) avec ϕ approximée par la fonction tangente hyperbolique (2.8) ($d = 3$).

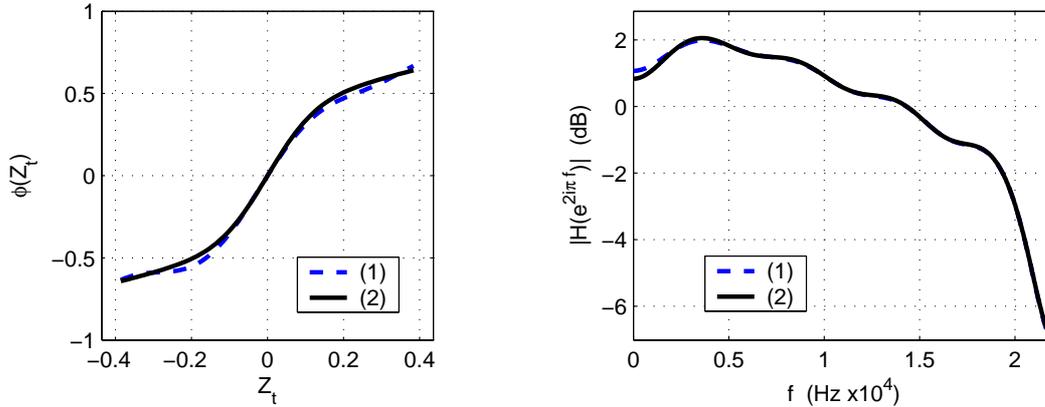


FIG. 2.8 – Modèle de Hammerstein (2.3) à filtre RIF, estimé par la méthode des moindres carrés sur les mesures de bruits blancs gaussien en entrée et en sortie de l'amplificateur Studer D19 à lampes. A gauche, $\phi(z)$. A droite $|H(e^{2i\pi f})|$ ($n = 4500$, $q = 10$) : (1) Modèle (2.3) avec ϕ polynomiale ($d = 7$). (2) Modèle (2.3) avec ϕ approximée par la fonction tangente hyperbolique (2.8) ($d = 3$).

Si on utilise une représentation tout-pôles, la réponse des filtres est approximativement plate sur tout le domaine spectral. On observe plus clairement, le comportement d'un filtre passe-bas large bande si on utilise le modèle RIF. Les courbes $\hat{\phi}$ estimées dépendent peu de la représentation utilisée pour le filtre linéaire. Dans les deux cas correspondants aux approximations (2.6) et (2.8), si on compare la courbe $\hat{\phi}$ de la figure 2.7 avec celle de 2.8, on conclut que les non-linéarités sont très semblables. Cependant, le modèle polynomial (2.6) conduit à un comportement divergent incorrect (divergent et asymétrique) au-delà de la plage d'amplitude observée tandis que le modèle (2.8) représente bien la limitation des amplitudes très fortes du signal incident.

La figure 2.9 illustre les caractéristiques du modèle de Hammerstein (2.3) ($q = 10$) estimées à partir des mesures de bruits blancs sur le même amplificateur Studer D19 mais en fonctionnement normal. On a utilisé comme auparavant pour ϕ , soit une approximation (2.6) à l'ordre $d = 7$, soit une approximation (2.8) comportant $d = 3$ termes. Quel que soit le modèle d'approximation de la non-linéarité ϕ , les réponses en fréquence du filtre linéaire RIF de la figure 2.9 sont quasiment indistinctes et on retrouve le comportement d'un filtre large bande. En revanche, on observe que le profil de la non-linéarité estimé par la méthode, est très différent selon le mode de fonctionnement (normal ou à lampes) de l'amplificateur Studer D19. Dans le cas d'un fonctionnement normal, on observe que le comportement de $\hat{\phi}$ est linéaire jusqu'à un certain seuil à partir duquel, on observe une inflexion de la courbe correspondant à une limitation de type écrêtage en amplitude. La distorsion des lampes produit un profil de saturation moins brutal, mais la propriété de non-linéarité apparait pour des niveaux d'amplitude Z_t plus petits. Ces observations sont cohérentes par rapport aux analyses de la figure 1.5.

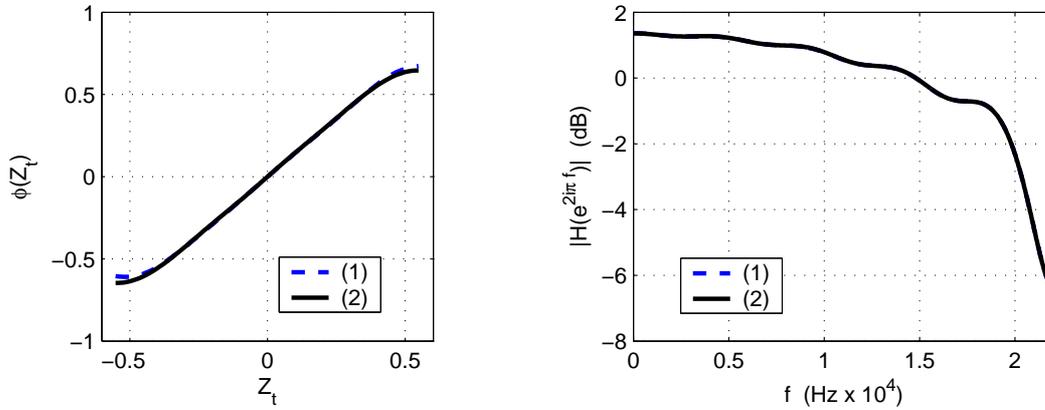


FIG. 2.9 – *Modèle de Hammerstein (2.3) à filtre linéaire RIF, estimé par la méthode des moindres carrés sur les mesures de bruits blancs gaussien en entrée et en sortie de l'amplificateur Studer D19. A gauche, $\phi(z)$. A droite $|H(e^{2i\pi f})|$ ($n = 4500$, $q = 10$) : (1) Modèle (2.3) avec ϕ polynomiale ($d = 7$). (2) Modèle (2.3) avec ϕ approximée par la fonction tangente hyperbolique (2.8) ($d = 3$).*

Pour illustrer les performances des méthodes des moindres carrés sur des extraits audio, nous avons sélectionné un enregistrement musical (piano) en entrée et en sortie de l'amplificateur Studer D19 utilisé avec la technologie à lampes. Cet extrait audio comporte $n = 5000$ échantillons et correspond à un passage où le signal est fortement distordu. Sur la figure 2.10, nous illustrons les caractéristiques identifiées du modèle (2.4) quand $p = 10$ avec la fonction polynomiale (2.6) à l'ordre $d = 10$ et celles identifiées du modèle (2.3) quand $q = 10$ avec la fonction polynomiale (2.6), de même à l'ordre $d = 10$.

On retrouve sur la figure 2.10 à gauche, un profil de non-linéarité comparable à ceux présentés sur les figures 2.7 et 2.8 obtenues avec les mesures de bruits blancs. Les deux modèles conduisent cependant à des fonctions $\hat{\phi}$ ayant un gain linéaire différent : Sur la bande de fréquence 20 – 4000 Hz, les deux réponses en fréquence estimées sont comparables entre elles et compatibles avec les estimations obtenues sur les mesures de bruits blancs. Dans cette bande de fréquence, les réponses estimées sont approximativement plates. Par contre, sur la bande 4000 – 6500 Hz, les filtres estimés créent une atténuation sur l'amplitude des composantes spectrales du signal en sortie de ϕ qui est non négligeable.

Les résultats sur l'identification du modèle à partir des mesures entrée-sortie quand le signal

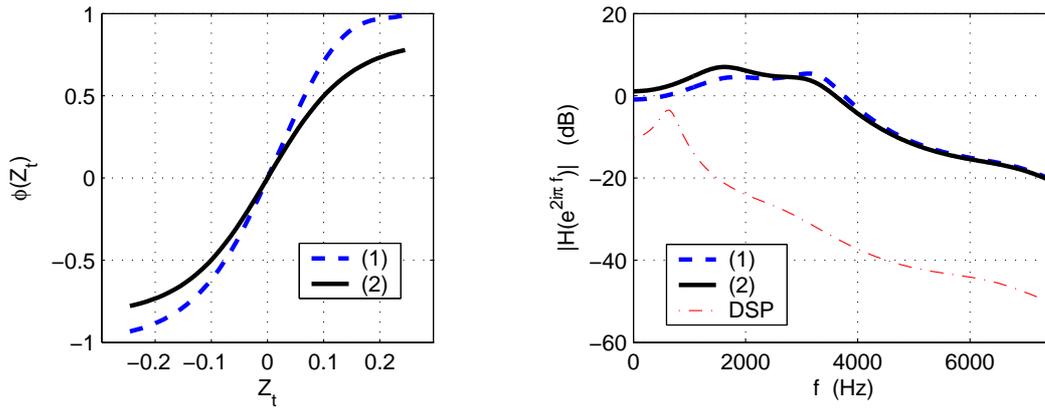


FIG. 2.10 – *Modèle de Hammerstein estimé par la méthode des moindres carrés sur un extrait audio enregistré en entrée et en sortie de l'amplificateur Studer D19 à lampes. A droite, $\phi(z)$ polynôme d'ordre $d = 9$. A gauche, $|H(e^{2i\pi f})|$: (1) Modèle (2.4) avec $p = 10$. (2) Modèle (2.3) avec $q = 10$ ($n = 5000$).*

en entrée est un enregistrement audio, sont problématiques car les caractéristiques estimées ne sont pas toujours compatibles avec les mesures de bruits blancs. Plus précisément, on observe sur la figure 2.10, que $|H(e^{2i\pi f})|$ décroît rapidement dès que $f \geq 4000\text{Hz}$ tandis que les réponses en fréquence sont approximativement plates sur les figures 2.8 et 2.7. De façon évidente, les différences entre les résultats d'identification obtenues avec les mesures audio et celles de bruits blancs, sont créées par les conditions de déclenchement des effets de la distorsion. Pour le cas de l'extrait audio correspondant aux résultats de la figure 2.10, approximativement 95% de l'énergie du signal en entrée, est contenue dans les composantes spectrales situées dans la bande $20-5000\text{Hz}$. Cette estimation est basée sur les variations de la DSP de l'extrait audio représentée sur la figure 2.10 à gauche, avec les courbes estimées des filtres linéaires.

Pour illustrer la dépendance de la méthode d'estimation par moindres carrés vis-à-vis du contenu spectral du signal en entrée, nous présentons un exemple de simulation numérique. Le signal en entrée Z_1, \dots, Z_n est un bruit blanc filtré, dont l'enveloppe spectrale est identique à celle du signal audio et représentée sur la figure 2.10 à gauche. A nouveau, 95% de l'énergie de la séquence de bruit blanc est contenue dans les composantes spectrales situées dans la bande $20 - 5000\text{Hz}$ tandis que 5% de l'énergie est répartie dans la bande haute $5000 - 22050\text{Hz}$ ($f_e = 44100\text{Hz}$). Le signal de sortie X_1, \dots, X_n correspondant, est défini par $X_t = \tanh(4Z_t)$ et l'amplitude du signal d'entrée est telle que plus de 20% des échantillons vérifient $Z_t \geq 0.4$. On utilise le modèle (2.4) avec $p = 10$ et ϕ modélisée par (2.6) avec $d = 10$ et l'estimation est déterminée par (A.3). On veut observer le comportement de la réponse en fréquence estimé sur la bande de fréquence où $f \geq 5000\text{Hz}$ quand la distorsion du signal est instantanée.

Sur la figure 2.11, nous présentons la représentation *boxplot* de $N = 50$ estimations de ϕ (à gauche) et de $|H(e^{2i\pi f})|$ (à droite) déterminées par (A.3) quand la longueur de la séquence de bruit blanc Z_1, \dots, Z_n en entrée est $n = 5000$. Sur la figure 2.11 à droite, on observe la DSP du bruit blanc filtré, qui correspond à la répartition spectrale du signal audio étudié précédemment.

Sur la figure 2.11, on observe :

- A droite, les courbes $|\hat{H}(e^{2i\pi f})|$ estimées ne sont manifestement pas plates alors qu'aucun effet de filtrage linéaire du signal $\phi(Z_1), \dots, \phi(Z_n)$ n'est simulé numériquement. L'écart-type d'estimation est approximativement constant sur toute la bande de fréquence $20 - 21000\text{Hz}$.

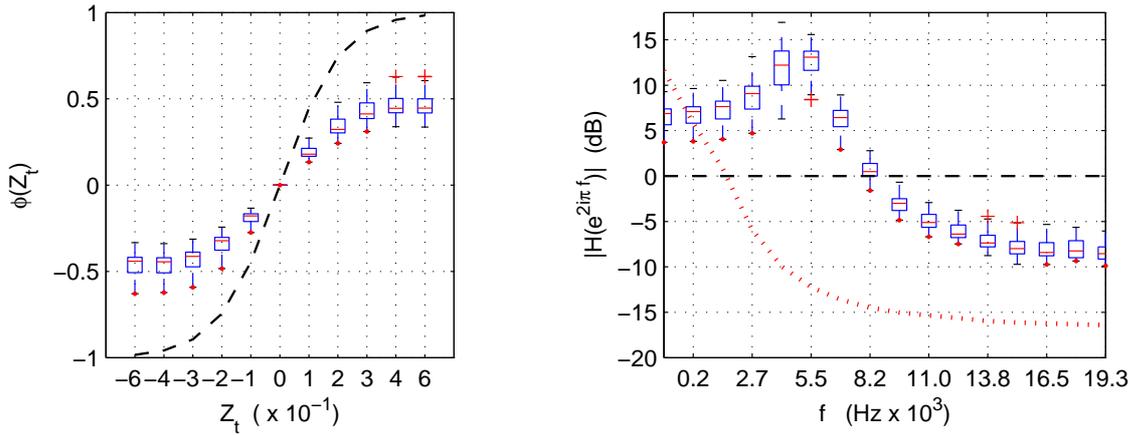


FIG. 2.11 – Estimations de ϕ (à gauche en traits pointillés) et $|H(e^{i\omega})|$ (à droite en traits pointillés) du modèle de Hammerstein obtenues avec (A.3) quand Z_1, \dots, Z_N est une séquence de bruit blanc filtrée de longueur $n = 5000$ dont la dsp est illustrée sur la figure de droite par des traits en pointillés verticaux. On effectue $N = 50$ tirages de la séquence de bruit et on a représenté les résultats des N estimations par les boxplots ($p = 10$, $d = 10$, $n = 5000$).

- A gauche, le gain linéaire des N courbes $\hat{\phi}$ est toujours plus petit que celui $\dot{\phi}(0)$ de $\phi(z) = \tanh(4z)$. L'écart-type des courbes n'est pas constant. On observe un élargissement de la variance d'estimation dans les parties de la fonction où les effets de la saturation sont proches des écrêtages.

Ces observations permettent d'expliquer le défaut de cohérence entre les résultats de la figure 2.10 avec ceux des figures 2.8 et 2.7. En effet, comme le contenu spectral du signal en entrée est négligeable dans la région des hautes fréquences, la contrainte de normalisation (2.5) du modèle de filtrage tout-pôles conditionne le comportement de $|\hat{H}(e^{i\omega})|$ estimé par (A.3). Cette propriété impose que le gain du filtre linéaire estimé soit unitaire et de ce fait, elle conditionne le gain en fréquence dans la région $f \geq 5000\text{Hz}$ de manière à compenser celui estimé pour $f \leq 5000\text{Hz}$. De plus, il apparaît que cela diminue le gain linéaire des distorsions instantanées $\hat{\phi}$ estimées.

Dans ces conditions, nous avons représenté sur la figure 2.10, le comportement de $|\hat{H}(e^{2i\pi f})|$ seulement sur la bande de fréquence significative $20 - 5000\text{Hz}$ pour cet extrait audio. Dans la bande des hautes fréquences, l'estimation de la réponse en fréquence est conditionnée par la propriété de normalisation du filtre tout-pôles. Sur cette figure, les gains linéaires des fonctions $\hat{\phi}$ sont différents car ; d'une part, les paramètres du modèle (2.3) sont estimés à un facteur multiplicatif près. Nous avons donc abaissé de 20dB la réponse en fréquence du filtre FIR pour l'aligner à celle du filtre tout-pôles. Nous avons multiplié par un facteur 10 le gain linéaire de $\hat{\phi}$ du modèle (2.3) ce qui ne permet cependant pas d'observer des pentes à l'origine égales. D'autre part, compte tenu des conditions de déclenchement de la distorsion et des résultats du test de la figure 2.11, la propriété de normalisation du filtre dans le modèle (2.4) se traduit sur la valeur de $\dot{\phi}(0)$, par un biais destiné à compenser la variabilité du modèle.

Saturations magnétiques

Sur la figure 2.12, nous illustrons le modèle de Hammerstein (2.4) quand $p = 5$ utilisé avec le modèle (2.6) à l'ordre $d = 11$ ou (2.8) comportant $d = 3$ termes. Ces modèles sont estimés par les méthodes des moindres carrés à partir des mesures entrée-sortie de bruit blanc de longueur $n = 700$ du magnétophone Studer A80. La longueur n des séquences est supposée suffisamment

courte pour conserver la propriété de synchronisation des séquences en entrée et en sortie. De plus, nous utilisons un modèle polynomial (2.6) pour ϕ , qui respecte la condition de symétrie impaire supplémentaire. La non-linéarité est représentée sous la forme d'un polynôme impair

$$\phi(Z_t) = \sum_{k=1}^d \alpha_{2k-1} Z_t^{2k-1} / (2k-1)! \quad (2.19)$$

Cette hypothèse est déduite des résultats obtenus par la méthode des moments. C'est une condition supplémentaire qui permet de compenser la restriction à un faible nombre d'échantillons et améliore les performances de la méthode d'identification des saturations magnétiques.

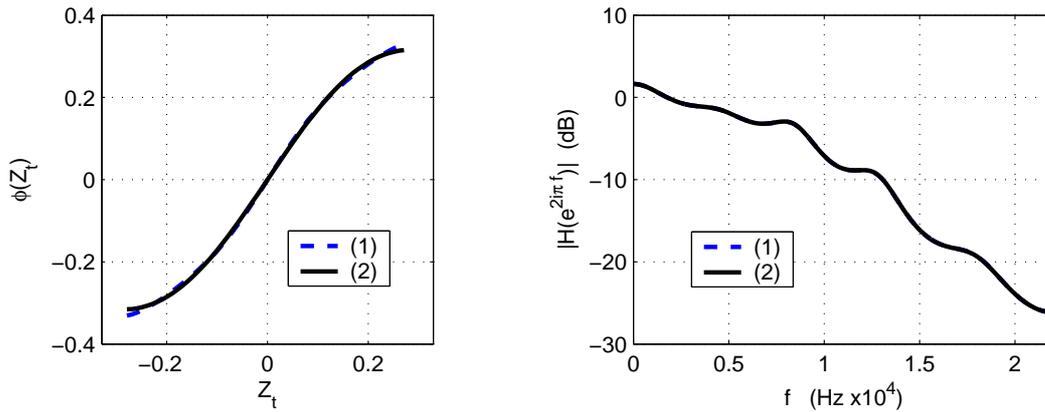


FIG. 2.12 – Modèle de Hammerstein (2.4) à filtre linéaire tout-pôles, estimé par la méthode des moindres carrés sur les mesures de bruits blancs gaussien en entrée et en sortie du magnétophone Studer A80 ($n = 700$, $p = 10$) : (1) Modèle (2.4) utilisé avec (2.19), polynôme impair de degré $d = 13$. (2) Modèle (2.4) utilisé avec (2.8) comportant $d = 3$ termes.

Un test simple pour valider les propriétés des caractéristiques représentées sur la figure 2.12, consiste à resynthétiser les effets de la distorsion d'intermodulation avec $\hat{\phi}$ de type polynomial et le filtre tout-pôles $\hat{H}(z)$ obtenus. Pour cela, nous reproduisons les effets de la transmission du modèle de Hammerstein sur le signal test comportant deux raies spectrales $f_1 = 200 \text{ Hz}$ et $f_2 = 7000 \text{ Hz}$. C'est exactement le signal enregistré en entrée du magnétophone, utilisé dans la section 1.6.1.2 et représenté sur la figure 1.6. Le signal synthétique en sortie correspondant est déterminé par l'équation de transmission (2.4) en utilisant les coefficients estimés pour $\hat{\phi}$ polynôme impair, les coefficients du filtre tout-pôles $\hat{H}(z)$ avec $p = 5$ et la variance du bruit additif σ_e^2 est déterminée par la valeur minimale obtenue du critère J_1 .

Le signal numériquement distordu et son spectre sont présentés sur la figure 2.13. Nous représentons aussi le signal et le spectre correspondant, enregistrés en sortie du magnétophone et déjà représentés sur 1.6. L'amplitude du signal test en entrée, est re-ajustée pour attaquer la fonction ϕ seulement sur la partie où la fonction polynomiale n'est pas divergente c'est-à-dire, $-0.3 \leq Z_t \leq 0.3$. Nous avons également aligné l'amplitude du signal de sortie synthétique obtenu avec celle du signal enregistré en sortie du magnétophone afin de faciliter la comparaison.

L'application de la méthode d'estimation à des signaux audio réels est confrontée au problème de la taille des signaux $n \leq 1000$. Cette longueur nous empêche de trouver un extrait de signal parmi les mesures où la saturation magnétique est correctement observée. Dans ces conditions, nous proposons d'appliquer la méthode d'estimation sur N trames Z_1^i, \dots, Z_L^i en entrée avec X_1^i, \dots, X_L^i en sortie, successives de longueur $L = 1000$ et chaque couple entrée/sortie numéroté

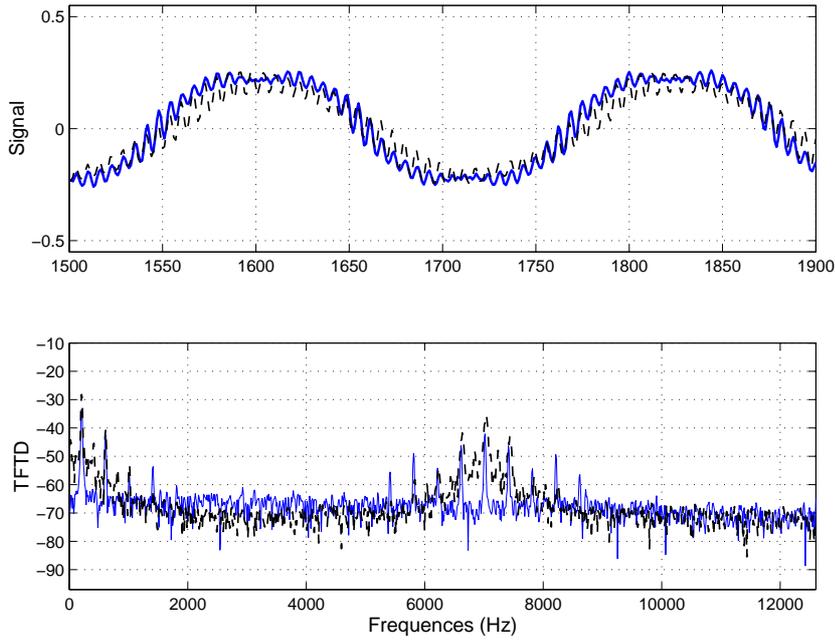


FIG. 2.13 – Comparaison de la distorsion d’intermodulation du modèle de Hammerstein (2.4) estimée par la méthode entrée/sortie avec celle enregistrée en sortie du magnétophone Studer A80. La sinusoïde enregistrée en sortie de la saturation magnétique est illustrée par des traits pleins et le signal de sortie simulé numériquement à partir du modèle de Hammerstein est illustrée par des traits en pointillés.

par i , est re-synchronisé. A chaque couple de signaux entrée/sortie, nous déterminons le minimum du critère quadratique et les paramètres associés au modèle de Hammerstein. La solution retenue est celle consistant à calculer la moyenne empirique des paramètres estimés dans chaque trame. Considérons le cas de la modélisation (2.4) avec ϕ prise sous la forme (2.6), les coefficients des solutions retenues sont déterminés par

$$\hat{\alpha}_k = 1/N \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_k^i \quad \hat{a}_j = 1/N \sum_{i=1}^N \hat{a}_j^i$$

avec $k = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, p$ et $i = 1, \dots, N$.

Sur la figure 2.14, on représente l’estimation du modèle (2.4) avec $p = 6$ (à droite) et ϕ (à gauche) prise sous la forme polynomiale (2.6). Nous avons conservé la condition de symétrie impaire (2.19) de la non-linéarité et on n’estime donc que les coefficients impairs jusqu’à l’ordre $d = 11$. Nous avons sélectionné $N = 6$ trames successives de mesure en entrée et en sortie du magnétophone Studer A80. Ce sont des signaux de parole. Cet extrait $NL = 6000$ assez court, permet d’observer une saturation sur une partie de signal (phonème complet) où les propriétés spectrales sont relativement stationnaires.

Les résultats de l’identification de $|\hat{H}(e^{2i\pi f})|$ sont illustrés sur la bande $20 \leq f \leq 8000Hz$ qui correspond à la bande où 97% de l’énergie de l’extrait du signal d’entrée est présente. Cette estimation est basée sur le comportement de la DSP représentée avec $|\hat{H}(e^{2i\pi f})|$ sur la figure 2.14 à gauche. Sur ces illustrations, nous avons abaissé de 20 dB (à droite) les variations de $|\hat{H}(e^{2i\pi f})|$ et multiplié par un facteur 10, la fonction $\hat{\phi}$ (à gauche) de la non-linéarité. On voit que le signal $\hat{\phi}(Z_t)$ a cependant une dynamique très faible. Ce fait est expliqué par les effets étudiés précédemment sur la variabilité du modèle dans le cadre de l’estimation par moindres

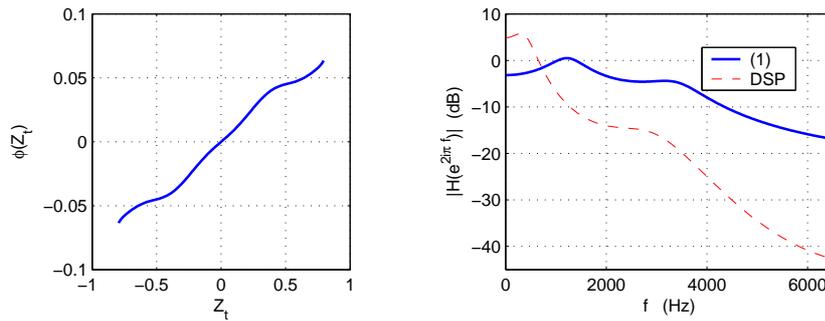


FIG. 2.14 – Identification du modèle de Hammerstein (2.4) à partir des enregistrements en entrée et en sortie du magnétophone Studer A80 sur un signal de la parole ($L = 1000, N = 6, p = 8, d = 11$).

carrés.

Le modèle de Hammerstein (2.4) avec ϕ polynomial est le seul qui permette de déterminer une distorsion non-linéaire qui soit assez cohérente avec les résultats obtenus sur les mesures entrée/sortie de bruits blancs gaussiens. En particulier, les modèles de Hammerstein (2.3) utilisant un filtre linéaire FIR ne sont pas suffisamment robustes soit aux pertes de synchronisation des mesures, soit à la présence d'un bruit additif en sortie de la non-linéarité ϕ . Dans ces conditions, la seule façon d'améliorer les performances des algorithmes itératifs A.2 et A.3 consiste à initialiser les paramètres avec les coefficients auparavant estimés sur les mesures de bruit blanc gaussien. De plus, les modèles utilisant une fonction ϕ sous la forme (2.8) ne sont pas compatibles avec la stratégie de découpage/moyennage utilisée pour éviter la contrainte sur les longueurs d'observation $n \leq 1000$. Les solutions obtenues dépendent fortement du nombre de termes d de la combinaison linéaire (2.8) ce qui indique que soit les conditions d'initialisation de l'algorithme A.1 ne sont pas suffisantes, soit que cette variante du modèle de Hammerstein est trop contraignante vis-à-vis des effets de la saturation magnétique.

2.4.3 Conclusion

Les résultats obtenus à partir des mesures de bruits blancs donnent peu d'indications déterminant le meilleur choix à faire parmi les variantes du modèle de Hammerstein. Dans l'étude de la distorsion non-linéaire d'amplification de puissance, tous les modèles proposés, conduisent à des courbes estimées comparables entre elles. Dans le cas de l'étude des saturations magnétiques, les modèles (2.4) plus robustes aux problèmes de synchronisation des signaux et à la présence de bruit additifs, seront privilégiés par rapport aux modèles avec un filtre RIF. Les mesures de bruits blancs apportent cependant des arguments utiles sur la validité de ce modèle en cascade et sur les dimensionnements des modèles.

Les identifications à partir des extraits d'enregistrement audio, sont en revanche, plus déterminantes du point de vue du choix de la variante du modèle. Nous avons cependant mis en évidence les limitations des performances de la méthode par moindres carrés vis-à-vis des conditions de déclenchement des effets de la non-linéarité et du filtre linéaire des deux sous-systèmes du modèle (voir figure 2.11) avec un filtre tout-pôles. Du fait de cette limitation, la cohérence entre les courbes obtenues pour chacun des appareils est assez difficile à établir.

Cependant, nous privilégions le modèle (2.4) à filtre linéaire tout-pôles avec ϕ définie comme une fonction polynomiale. Les modèles (2.3) à filtre linéaire RIF conduisent à des algorithmes d'identification trop sensibles aux conditions d'initialisation pour proposer des résultats pro-

bants. Les modèles avec ϕ définie par la fonction (2.8), sont préférables seulement pour représenter des effets instantanés proches des écrêtages symétriques mais en revanche, ne sont pas compatibles avec la stratégie de découpage en sous-trames courtes qui est utilisée pour estimer les effets de la saturation magnétique.

Chapitre 3

Estimation autodidacte de la distorsion

Dans le chapitre qui précède, nous avons présenté un modèle paramétrique de la distorsion non-linéaire du signal audio. Plusieurs séries d'enregistrements ont permis de tester l'adéquation de ce modèle aux effets produits par certains systèmes de lecture/enregistrement et de transmission audiofréquence.

Dans la suite de cette étude, nous allons présenter un procédé de restauration composé de deux étapes distinctes où l'opérateur contrôle successivement les traitements suivants :

1. Estimation du modèle de distorsion (type Hammerstein).
2. Compensation de la dégradation.

L'étape de compensation qui permet de traiter la distorsion sera présentée séparément dans le chapitre suivant. Ce chapitre est consacrée à la première étape c'est-à-dire, au problème de l'estimation paramétrique du modèle quand les seules données du problème sont les échantillons du signal audio distordu.

3.1 Introduction

Généralement, on utilise des traitements par compensation lorsque les équipements sont disponibles ou si les caractéristiques et les limites de fonctionnement admissibles du système sont connues avec suffisamment de précision. On parle de pré ou de post-compensation si le dispositif de traitement intervient avant ou après le module du système qui produit la dégradation. Dans le cadre spécifique de la restauration, on a besoin d'établir des règles de post-compensation de la distorsion du signal alors que l'on ne connaît pas les caractéristiques de fonctionnement du système d'enregistrement. Ceci étant, dans les études présentées aux chapitres précédents, nous avons établi les propriétés d'un modèle paramétrique de la distorsion non-linéaire. Nous cherchons maintenant à estimer les paramètres de ce modèle directement à partir du signal.

L'estimation autodidacte des paramètres du modèle est une étape déterminante qui permet d'obtenir les caractéristiques - ϕ et $H(z)$ - de la distorsion pour ensuite établir les règles de compensation et restituer la qualité originale du signal. La difficulté est que la restitution du signal est un problème inverse mal posé (voir explications au chapitre 1). D'après les exemples de caractérisation, la fonction ϕ associée au modèle de Hammerstein admet des variations brutales (type saturation), parfois assez proches de celles de l'écrêtage numérique et qu'il faut contrôler afin d'obtenir un procédé d'inversion robuste au bruit et une reconstruction non-équivoque. Dans le cadre de la compensation, un moyen standard consiste à utiliser un *a priori* de type

autorégressif sur le signal à restituer qui permet d'imposer une certaine régularité au signal reconstruit [Godsill and Rayner, 1998a], [Godsill et al., 1998]. D'un autre côté, déterminer la fonction non-linéaire instantanée est un problème d'estimation plus simple car il suffit de connaître la fonction de répartition marginale des signaux avant et après la distorsion. Cependant, il faut enregistrer un signal de durée suffisamment longue pour observer la saturation et construire les fonctions d'histogrammes de la répartition de l'amplitude du signal. De ce fait, la taille de la fenêtre d'analyse est un facteur important qu'il faut cependant choisir de manière à conserver l'hypothèse de quasi-stationnarité des propriétés spectrales des signaux audio.

Nous proposons donc de séparer les deux étapes de la restauration (estimation et compensation) afin d'utiliser des hypothèses de modélisation sur le signal qui soient plus simples que celles de la spécification autorégressive standard mais qui soient suffisantes pour garantir l'identifiabilité des paramètres du modèle de Hammerstein. Nous présentons une approche intermédiaire où le signal admet une loi de répartition statistique gaussienne à moyenne nulle. Le signal est stationnaire au second ordre sur des intervalles de temps de l'ordre de plusieurs millisecondes et les fonctions de densités spectrales associées à chaque intervalle sont connues, déterminées à un facteur multiplicatif près, proportionnelles à une même fonction de densité spectrale dite *globale* et notée $f(\omega)$. Les paramètres de la variance à court-terme qui sont les facteurs d'échelles, seront estimés conjointement dans l'algorithme d'estimation avec ceux du modèle de la distorsion. Ainsi, la forme de l'enveloppe spectrale du signal d'entrée sur une durée longue (plusieurs secondes) est conservée mais pondérée par ces facteurs. Seule la dispersion moyenne est variable et ce degré de liberté du modèle représente le facteur principal de déclenchement de la distorsion non-linéaire.

Ces hypothèses ne permettent pas de représenter précisément les signaux sonores en général même si certains signaux musicaux dont l'enveloppe spectrale varie lentement, sont compatibles avec ce modèle sur des durées de l'ordre de la seconde. Mais les hypothèses sont suffisantes pour estimer ϕ et $H(z)$. Le biais d'estimation associée au défaut de modélisation des propriétés spectrales à court-terme du signal est atténué par le fait que les caractéristiques de la distorsion sont invariantes dans le temps. La méthode est sous-optimale et itérative. Les paramètres de la fonction ϕ sont déterminés par optimisation numérique avec les facteurs d'échelle quand les coefficients du filtre linéaire sont connus. La fonction critère est quadratique par rapport aux paramètres mais pas par rapport aux facteurs d'échelle. D'un autre côté, les coefficients du filtre $H(z)$ sont estimés à partir du critère de Whittle quand la fonction non-linéaire et les facteurs d'échelle sont connus [Whittle, 1953].

Dans la section suivante, nous présentons les hypothèses de la modélisation et les étapes de la méthode d'estimation. Dans les sections 3.3 et 3.4, nous étudions séparément les performances d'estimation du filtre linéaire puis celles de la fonction non-linéaire estimée conjointement avec les facteurs d'échelles. Dans la section 3.5, nous étudions le procédé d'estimation complet pour valider la méthode avec des tests d'identification réalisés à partir d'enregistrements audio ou de mesures entrée-sortie de la distorsion.

3.2 Modèle et hypothèses

Le signal audio enregistré est partitionné en n trames successives de longueur t . On note X_1^i, \dots, X_t^i les observations de la trame numérotée i (avec $i = 1, \dots, n$). On définit $Y_k^i = \phi(Z_k^i)$ le signal intermédiaire associé aux variables Z_1^i, \dots, Z_t^i de la trame i en entrée du modèle.

Suivant les notations du diagramme 3.1, le filtre linéaire est supposé purement récursif et la fonction de transfert $H(z)$ est paramétrée par les coefficients réels a_1, \dots, a_p . La fonction de

$$\begin{array}{ccc} Z_1^1, \dots, Z_t^1 & & X_1^1, \dots, X_t^1 \\ \vdots & & \vdots \\ Z_1^n, \dots, Z_t^n & \longrightarrow \left[\phi \right] \longrightarrow \left[H(z) = \left(1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i} \right)^{-1} \right] \longrightarrow & X_1^n, \dots, X_t^n \end{array}$$

DIAG. 3.1 – Représentation du modèle de transmission non-linéaire utilisé pour l'estimation autodidacte de la distorsion.

distorsion est un polynôme d'ordre d fini et les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont définis par la relation

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^d \alpha_k z^k / k! \quad (3.1)$$

Compte tenu des résultats obtenus pour l'identification entrée-sortie, on sait que des valeurs de $p < 15$ et $d < 12$ suffisent pour modéliser les effets de la distorsion.

Le signal d'indice i est défini par l'équation récurrente suivante

$$X_k^i = \sum_{j=1}^p a_j X_{k-j}^i + \phi(Z_k^i) \quad (3.2)$$

Les signaux $(Z_1^i, \dots, Z_t^i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des séquences indépendantes de variables stationnaires. Les lois associées sont modélisées par des fonctions gaussiennes, centrées. Les fonctions de densité spectrale de puissance $f_{Z^i}(\omega) = f(\omega)\sigma_i^2$ sont connues à une constante multiplicative près, déterminées par la fonction $f(\omega)$ globale. De plus, on utilise une fonction $f(\omega)$ normalisée telle que,

$$\int f(\omega) d\omega = 1 \quad (3.3)$$

pour que la constante σ_i^2 d'indice i soit exactement la variance associée à la séquence $(Z_k^i)_{1 \leq k \leq t}$.

L'objectif de la méthode est d'estimer les paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et a_1, \dots, a_p du modèle de distorsion ainsi que les facteurs d'échelle $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ des n signaux transmis à l'entrée.

3.2.1 Fonction de vraisemblance associée au modèle

On peut envisager une approche directe consistant à optimiser la fonction de vraisemblance des observations. En effet, la densité de probabilité marginale de la séquence $(Z_{p+1}^i, \dots, Z_t^i)$ est déterminée par la loi standard gaussienne

$$p_{Z_{p+1}, \dots, Z_t}(z_{p+1}, \dots, z_t) = \mathcal{N}(0, \Sigma^{-1} \sigma_i^2)$$

où Σ^{-1} est la matrice de variance-covariance associée à la DSP $f(\omega)$ globale du signal. Le jacobien associé à l'opération de filtrage linéaire inverse est égal au déterminant de la matrice triangulaire

$$J \left(\begin{array}{c} y_{p+1}, \dots, y_t \\ x_{p+1}, \dots, x_t \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 1 & & \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_p & & & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \dots & -a_p & \dots & -a_1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est identiquement égal à 1. D'autre part, le jacobien associé à la transformation non-linéaire est déterminé par le produit

$$|J\left(\frac{z_{p+1}, \dots, z_t}{y_{p+1}, \dots, y_t}\right)| = \left| \prod_{k=p+1}^t \dot{\phi}^{-1}(y_k) \right|$$

qui est bien défini dès que ϕ^{-1} est dérivable et ne s'annule pas aux points y_k considérés. Dans ce cas, la vraisemblance du modèle pour les observations de la trame i , conditionnée aux p premières valeurs, est déterminée par

$$p(x_{p+1}, \dots, x_t | x_1, \dots, x_p) = \left| \prod_{k=p+1}^t \dot{\phi}^{-1}(y_k) \right| p_{z_{p+1}, \dots, z_t}(\phi^{-1}(y_{p+1}), \dots, \phi^{-1}(y_t))$$

où $y_k = x_k - \sum_{i=1}^p a_i x_{k-i}$ sont les valeurs du signal intermédiaire de la i -ème trame.

L'optimisation numérique du produit des n fonctions de vraisemblance est probablement faisable. Il est préférable dans cette approche de paramétrer la fonction inverse ϕ^{-1} associée à la distorsion. Cependant, l'évaluation de la fonction de vraisemblance est coûteuse en terme du nombre d'opérations à effectuer à chaque itération. De plus, les effets de la courbe de saturation sont souvent proches de ceux de l'écrêtage sur les valeurs extrêmes du signal. Dans ce cas, les facteurs $\dot{\phi}^{-1}(y)$ divergent et on ne voit pas comment régulariser pratiquement la fonction de vraisemblance.

Nous proposons donc une approche différente, basée sur une méthode sous-optimale, itérative. L'idée consiste à définir deux critères d'identification pour le filtre linéaire et la fonction non-linéaire ϕ . D'un côté, les coefficients du filtre sont estimés au sens de l'ajustement spectral quand ϕ et les paramètres de variance $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont fixés. D'un autre côté, les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont estimés conjointement avec les paramètres de variance quand les coefficients du filtre sont fixés. La méthode d'estimation est basée sur les propriétés de la distribution des quantiles associés aux fonctions de répartition des signaux intermédiaires. L'algorithme complet est itératif et alterne entre ces deux étapes jusqu'à ce qu'on obtienne des solutions numériques stables.

3.2.2 Conditions d'identifiabilité

Les conditions d'identifiabilité du modèle sont obtenues si les propriétés suivantes sont vérifiées ;

- (i) Les coefficients $(a_j)_{1 \leq j \leq p}$ sont identifiables au second ordre si le filtre linéaire est causal, stable et si $f(\omega)$ est connue.
- (ii) La fonction de distorsion est identifiable [à un facteur d'échelle près] à partir de la fonction de distribution marginale des signaux, si et seulement si ϕ est monotone.

En effet, soit (Z_1^i, \dots, Z_t^i) une séquence de variables stationnaires au second ordre, de distribution gaussienne et de DSP notée $\sigma_i f(\omega)$. On note $\rho_Z(\tau)$, la fonction d'auto-corrélation connue du modèle de signal associée à la DSP $f(\omega)$ globale. Implicitement, ρ_Z est une fonction paire et définie positive. On suppose que ϕ est une fonction définie sur \mathbb{R} , continue et dérivable.

Les variables aléatoires intermédiaires définies par $Y_k^i = \phi(Z_k^i)$ sont stationnaires au second ordre et admettent une DSP que l'on note $f_{Y^i}(\omega)$. Si la fonction globale $f(\omega)$ est connue, alors on peut déterminer de manière univoque les DSP $f_{Y^i}(\omega)$ des signaux intermédiaires en utilisant les trois étapes de calcul suivantes ;

1. La fonction ϕ représentée sous la forme (3.1), admet un développement sur la base des polynômes d'Hermite. Les coefficients d'Hermite $(c_1^{\sigma_i}, \dots, c_d^{\sigma_i})$ associés à la mesure gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ de la i -ème séquence, sont directement déterminés en appliquant la transformation linéaire (B.7) sur le vecteur des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ du polynôme simple.

2. La formule de Mehler (B.2) permet de calculer directement les fonctions d'auto-covariance des signaux intermédiaires à partir des valeurs des coefficients d'Hermite car on a

$$\mathbb{E}(Y_l^i Y_{l+\tau}^i) = \sum_{k=0}^d \frac{(c_k^{\sigma_i})^2}{k!} \rho_Z(\tau)^k \quad (3.4)$$

avec $\tau = 0, \pm 1, \dots, \pm t$.

3. Les DSP $f_{Y^i}(\omega)$ des signaux intermédiaires sont

$$f_{Y^i}(\omega) = 1/t \sum_{|\tau| < t} (t - |\tau|) \mathbb{E}(Y_l^i Y_{l+\tau}^i) e^{-j\omega\tau} \quad (3.5)$$

où le fenêtrage triangulaire est destiné à garantir la positivité des fonctions $f_{Y^i}(\omega)$ sur l'intervalle $\omega \in [0, \pi]$.

Si le filtre linéaire est causal stable alors, les DSP des signaux d'observations sont les fonctions définies positives qui vérifient la formule de filtrage

$$f_{X^i}(\omega) = \frac{1}{|1 - \sum_{k=1}^p a_k e^{-jk\omega}|^2} f_{Y^i}(\omega). \quad (3.6)$$

Ainsi, sous la condition (i), le filtre est identifiable à partir de l'information sur la DSP $f_{X^i}(\omega)$ enregistrée.

Remarque. Il existe une difficulté mathématique liée à la formule (3.4) qui fait l'objet d'une condition d'identifiabilité supplémentaire. En effet, la fonction d'auto-covariance est obtenue à partir d'une transformation de type polynomiale de degré d , définie par les coefficients d'Hermite de la fonction ϕ . Il est donc indispensable de s'assurer que toutes les valeurs de la fonction d'auto-corrélation $\rho_Z(\tau)$ du modèle de signal ne correspondent pas aux zéros de la transformation polynomiale (3.4) pour tous les signaux. Dans un tel cas, toutes les DSP $f_{Y^i}(\omega)$ sont identiquement nulles. Pour éviter ce risque, on peut poser l'une des deux conditions supplémentaires :

Quand ϕ est une fonction polynomiale d'ordre d fini, les coefficients du filtre linéaire sont identifiables quelques soient les coefficients polynomiaux,

- Si au moins $(d + 1)$ signaux de variance σ_i^2 différentes sont disponibles.
- Si la fonction d'auto-corrélation $\rho_Z(\tau)$ du modèle de signal admet au moins $(d + 1)$ valeurs non nulles.

La première condition supplémentaire est mieux adaptée au problème d'estimation car les portions d'enregistrement comportent plusieurs centaines de sous-signaux, alors que le degré polynomial d est généralement de l'ordre de dix.

La condition (ii) indique que la fonction de distorsion instantanée est identifiable si ϕ est monotone. En effet, la fonction de distribution marginale des signaux (Z_1^i, \dots, Z_t^i) est connue, déterminée par la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$. De plus, puisque le filtre linéaire est causal stable, il est inversible. De ce fait, on peut calculer les valeurs des échantillons intermédiaires simplement en appliquant la formule de filtrage

$$\hat{y}_k^i = x_k^i - \sum_{j=1}^p a_j x_{k-j}^i \quad (3.7)$$

à partir des observations puis en déduire un estimateur empirique $\hat{F}_{Y^i}(y)$ de la fonction de répartition des signaux intermédiaires. En général, la fonction ϕ est identifiable si la fonction de distribution marginale des signaux intermédiaires est biunivoque [Papoulis and Pillai, 2002]. On montre alors qu'il suffit pour cela que ϕ soit monotone.

En effet, ϕ vérifie la condition d'égalisation

$$P_{z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)}(\{z; \phi(z) \leq u\}) = P_{w \sim \mathcal{U}(0, 1)}(\{w; \phi(Q_\sigma(w)) \leq u\})$$

où, Q_σ est l'application inverse de la fonction de répartition gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Par équivalence, l'identification de la fonction de distorsion est un problème d'identification de la fonction composée $\psi = \phi \circ Q_\sigma$ quand la loi de distribution statistique du modèle de signal est une loi de type uniforme $\mathcal{U}(0, 1)$.

Soit $w \sim \mathcal{U}(0, 1)$ une variable uniforme. Si ψ est une fonction en escalier non monotone, alors on ne peut pas identifier ψ de manière unique à partir de la répartition des variables observées $v = \psi(w)$. L'application est identifiable si seulement si $\phi \circ Q_\sigma$ est la limite d'une fonction en marche d'escalier monotone. Ce qui est vrai pour la fonction composée ψ est vrai pour ϕ car la fonction Q_σ est bijective. Dans ces conditions, si les densités de probabilité marginales des signaux intermédiaires transformés par ψ ou ϕ vérifient la relation d'égalisation

$$\psi^{-1}(v) \exp\left(-\frac{\psi^{-1}(v)^2}{2\sigma^2}\right) = \dot{\phi}^{-1}(v) \exp\left(-\frac{\phi^{-1}(v)^2}{2\sigma^2}\right)$$

alors, on déduit en intégrant par rapport à v , que les deux fonctions sont identiques, $\phi = \psi$.

Remarque. Si la variance σ^2 n'est pas connue, l'application $\psi = \phi \circ Q_{\sigma_o}$ est identifiable à une constante multiplicative près à partir de la répartition des variables $v = \psi(w)$ quand $\phi \circ Q_{\sigma_o}$ est la limite d'une fonction monotone. En effet, la condition d'égalisation se met sous la forme suivante,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_o^2}} \psi^{-1}(v) \exp\left(-\frac{\psi^{-1}(v)^2}{2\sigma_o^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \dot{\phi}^{-1}(v) \exp\left(-\frac{\phi^{-1}(v)^2}{2\sigma^2}\right)$$

où σ_o est l'écart-type équivalent. On en déduit en intégrant par rapport à v que les deux fonctions sont égales à une constante multiplicative près telles que, $\phi = \psi \frac{\sigma}{\sigma_o}$

3.2.3 Discussion du modèle

Ces éléments d'explications indiquent comment la formulation du problème permet d'effectuer certaines opérations indispensables pour identifier le modèle de Hammerstein :

- La fonction de distorsion ϕ est un polynôme de degré d . De cette manière, le calcul (B.7) des coefficients d'Hermite est obtenu assez simplement à partir des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et aussi de la valeur de la variance σ_i^2 associée au i -ème signal. En dehors de cet exemple, on ne connaît pas de moyen simple pour déterminer la DSP des signaux intermédiaires, quelle que soit la représentation de la fonction non-linéaire. Il est possible d'utiliser un autre modèle paramétrique pour la fonction de distorsion mais il sera utile de revenir sur la base de représentation des polynômes d'Hermite pour déterminer les propriétés de la DSP $f_{Y^i}(\omega)$ après distorsion.
- ϕ est monotone. C'est la seconde condition d'identifiabilité du modèle. Les cas où la distorsion instantanée correspond aux effets de l'écrêtage numérique seront traités dans le chapitre suivant, dans le cadre de la reconstruction des signaux à valeurs manquantes (sec. 4.2).
- On utilise un modèle de filtre tout-pôle. Ce choix permet d'obtenir des performances d'identification entrée-sortie (voir chapitre 3) correctes avec un petit nombre de paramètre ($p < 15$). Le défaut est que l'on ne contrôle pas la linéarité de la phase. D'un autre côté, la condition de stabilité permet d'obtenir l'inversibilité du filtre qui est une propriété indispensable pour calculer les estimateurs empiriques des fonctions de répartition associées aux signaux intermédiaires.

3.3 Estimation du filtre linéaire

Cette partie est consacrée à l'estimation des coefficients a_1, \dots, a_p du filtre linéaire. On suppose que les DSP $f_{Z^1}(\omega), \dots, f_{Z^n}(\omega)$ des séquences gaussiennes ainsi que les coefficients de ϕ sont connus.

3.3.1 Étude de la DSP des signaux intermédiaires

L'objet de cette étude est d'étudier les trois relations permettant de représenter la DSP des signaux intermédiaires quand les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et les variances $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ sont connus. On utilise (B.7) pour calculer les coefficients d'Hermite. On utilise la formule de Mehler (3.4) pour déterminer les fonctions d'auto-covariance et enfin, la définition (3.5) pour estimer les n DSP $f_{Y^1}(\omega), \dots, f_{Y^n}(\omega)$. Pour simplifier les notations, on supprime les indices i de numérotation de trame. On étudie les propriétés du second ordre des variables $Y_k = \phi(Z_k)$ où Z_1, \dots, Z_t est une séquence de variables aléatoires stationnaires centrées et de DSP connues $f_Z(\omega) = \sigma^2 f(\omega)$.

Pour illustrer les effets de la non-linéarité, on effectue une simulation consistant à générer un signal fortement saturé puis à comparer le périodogramme correspondant

$$I_Y(\omega) = 1/t \sum_{k=1}^t |Y_k e^{-j\omega k}|^2$$

où $\omega \in [0, \pi]$, avec le résultat de la formule (3.5). La fonction ϕ utilisée est une approximation à l'ordre 7 de la fonction tangente hyperbolique $\phi(z) = \tanh(\beta z)$ avec $\beta = 4$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Les coefficients $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$ d'indices pairs sont identiquement nuls car c'est une fonction impaire et on a utilisé les valeurs numériques

$$\alpha_1 = 4.0 \quad \alpha_3 = -58 \quad \alpha_5 = 1565 \quad \alpha_7 = -30902 \quad (3.8)$$

avec la formule réduite (B.8) pour calculer les coefficients d'Hermite associés. La séquence Z_1, \dots, Z_t en entrée est générée à partir d'un modèle autorégressif d'ordre 6 et la séquence d'innovation est composée de variables gaussiennes. On a choisi un signal AR(6) très résonant de façon à observer la génération d'harmoniques. Les pôles p_1, \dots, p_6 du modèle AR sont déterminés par

$$p_{1,2} = 0.98 \exp(\pm i0.36) \quad p_{3,4} = 0.99 \exp(\pm i0.14) \quad p_{5,6} = 0.43 \exp(\pm i2.7)$$

La variance de la séquence d'innovation est telle que plus de 40% des échantillons en entrée sont effectivement au-dessus du seuil de la non-linéarité ϕ .

La DSP $\sigma^2 f(\omega)$ du signal AR(6) est illustrée sur la figure 3.1 en haut. La fonction d'auto-corrélation $\rho_Z(\tau)$ est la solution du système de Yule-Walker, définie quand les coefficients du modèle AR(6) sont connus [Brockwell and Davis, 1990]. On s'intéresse aux propriétés spectrales d'une portion comportant $t = 1024$ échantillons après saturation. Le facteur d'échelle σ de la portion est identifié à la valeur empirique de l'écart-type correspondante aux t échantillons. Sur la figure 3.1 en bas, nous présentons le périodogramme $I_Y(\omega)$ de la portion du signal transformé et la DSP $f_Y(\omega)$ obtenue en appliquant successivement la formule (3.4) et le calcul (3.5).

On observe un ajustement satisfaisant entre les pics correspondants aux harmoniques 1, 3 et 5 du périodogramme et de la DSP $f_Y(\omega)$. Les harmoniques d'ordre supérieur sont tronquées car on utilise une approximation à l'ordre $d = 7$ de la fonction tangente ou masquées à cause des effets du lissage triangulaire dans le calcul de la dsp. Nous avons effectué plusieurs fois ce test pour des taux de saturation différents et on n'observe que de faibles écarts entre les répartitions spectrales représentées. On a donc une bonne représentation de la densité spectrale en terme des coefficients de ϕ et du paramètre d'échelle σ .

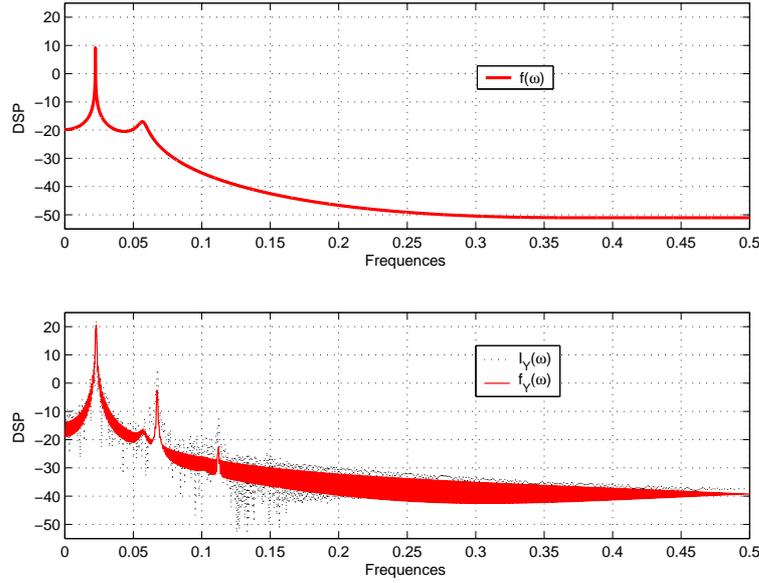


FIG. 3.1 – Représentation de la DSP des signaux intermédiaires. En haut, densité spectrale $f(\omega)$ du signal AR(6). En bas ; Périodogramme $I_Y(\omega)$ du signal AR(6) après la non-linéarité et densité spectrale obtenue à partir de la formule de Mehler.

3.3.2 Critère de Whittle

Les n séquences X_1^i, \dots, X_t^i sont stationnaires au second ordre car le filtre est causal stable et les signaux en entrée sont supposés stationnaires. On propose de déterminer les coefficients de filtrage qui minimisent la somme des n critères de Whittle empiriques

$$J_W(t; a_1, \dots, a_p) = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^t \frac{I_{X^i}(\omega_k)}{f_{Y^i}(\omega_k)} \left| 1 - \sum_{l=1}^p a_l e^{-j\omega_k l} \right|^2 \quad (3.9)$$

où, $w_k = 2\pi k/t$ et $I_{X^i}(\omega)$ est le périodogramme de la i -ème séquence d'observation du signal de sortie [Whittle, 1953].

Le critère $J(t; a_1, \dots, a_p)$ est équivalent à la fonction de log-vraisemblance quand les n signaux X_1^i, \dots, X_t^i sont gaussiens, de DSP $f_X^1(\omega), \dots, f_X^n(\omega)$. Dans ce cas, la limite quand $t \rightarrow \infty$ est égale à

$$n \log(2\pi) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{f_{X^i}(\omega)}{f_{Y^i}(\omega)} |H(e^{-i\omega})|^2 + \log\left(\frac{f_{Y^i}(\omega)}{|H(e^{-i\omega})|^2}\right) \right] d\omega \right)$$

où, la fonction $|H(e^{-i\omega})|^2 f_{Y^i}(\omega)$ est une paramétrisation de la DSP commune des n processus gaussiens [Porat, 1994], [Brockwell and Davis, 1990]. Ici, les signaux intermédiaires ne sont pas gaussiens à cause de la fonction non-linéaire, mais l'utilisation du critère de Whittle reste raisonnable. Du point de vue de l'estimation des coefficients du filtre linéaire, le critère $J(t; a_1, \dots, a_p)$ est une approximation empirique basée sur l'utilisation des fonctions périodogrammes $I_X^i(\omega)$ et sur la propriété $\int_{-\pi}^{\pi} \log(|1 - \sum_{l=1}^p a_l e^{-j\omega l}|^2) d\omega = 0$.

Les coefficients a_1, \dots, a_p qui annulent les p composantes du gradient $\frac{\partial J}{\partial a_i}(t; a_1, \dots, a_p)$ sont les solutions du système à p équations telles que,

$$\sum_{m=1}^p a_m \sum_{k=1}^t \sum_{i=1}^n \left(\frac{I_{X^i}(\omega_k)}{f_{Y^i}(\omega_k)} \right) e^{j\omega_k(l-m)} = \sum_{k=1}^t \sum_{i=1}^n \left(\frac{I_{X^i}(\omega_k)}{f_{Y^i}(\omega_k)} \right) e^{j\omega_k l}$$

où, $l = 1, \dots, p$. Dans le domaine temporel, on obtient une équation matricielle de la forme

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} r^i(0) & r^i(1) & \cdots & r^i(p-1) \\ r^i(1) & r^i(0) & \cdots & r^i(p-2) \\ \vdots & & & \\ r^i(p-1) & r^i(p-2) & \cdots & r^i(0) \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}_\Sigma} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} r^i(1) \\ r^i(2) \\ \vdots \\ r^i(p) \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}_\Sigma} \quad (3.10)$$

où les composantes r^i sont les coefficients de la transformée de Fourier des rapports $I_X^i(\omega)/f_Y^i(\omega)$ définis aux t fréquences. Comme dans le cas des équations de Yule-Walker usuelles, si la matrice \mathbf{R}_Σ est définie positive alors le système a une solution unique et le filtre associé est stable [Brockwell and Davis, 1990]. En pratique, la matrice principale du système (3.10) est carrée symétrique et les rapports $I_X^i(\omega)/f_Y^i(\omega)$ sont positifs en tous points $\omega \in [0, \pi]$. De ce fait, le coefficient diagonal $r^i(0) = \sum_k I_X^i(\omega_k)/f_Y^i(\omega_k) > 0$ est strictement positif et la matrice \mathbf{R}_Σ est inversible.

La dimension du système est déterminée par p . Il faut effectuer trois opérations (deux pour obtenir $f_{Y^i}(\omega)$ et $I_{X^i}(\omega)$ et une opération inverse pour les coefficients r^i) de transformée de Fourier à temps discret pour chaque séquence. Il est donc important de réduire le temps de calcul associé aux $3n$ opérations intermédiaires effectuées sur des séquences de dimension t . Le meilleur moyen consiste à utiliser les algorithmes de FFT. Pour cela, on a donc tout intérêt à garder les mêmes résolutions spectrales entre les DSP $f_{Y^i}(\omega)$ et les périodogrammes $I_{X^i}(\omega)$. En pratique, il suffit d'utiliser une fenêtre de lissage triangulaire de dimension t (non plus $2t$ comme en (3.5)) et de calculer la DSP à partir de la formule,

$$f_{Y^i}(\omega_k) = 1/t \sum_{|\tau| < t/2} (t - 2|\tau|) E(Y_k^i Y_{k+\tau}^i) e^{-j\omega_k \tau} \quad (3.11)$$

définie aux fréquences $\omega_k = 2\pi k/t$ où, $k = 0, \dots, (t/2 - 1)$.

3.3.3 Illustration de la méthode

Nous proposons tout d'abord, d'évaluer les performances d'estimation dans le cadre d'une simulation respectant les hypothèses de la modélisation pour ce qui concerne les signaux sources. Les signaux Z_1^i, \dots, Z_t^i sont du type AR(1) avec $\theta_1 = 0.95$. Les écarts-types des séquences d'innovation associées à chaque signal d'indice i sont différents et tels que les facteurs d'échelle sont répartis entre

$$0.05 \leq \sigma_1 < \cdots < \sigma_n \leq 0.3$$

Les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont connus et nous proposons de reprendre la même fonction d'ordre $d = 7$ que celle définie par les coefficients (3.8).

La fonction de transfert du filtre linéaire est une fonction rationnelle telle que,

$$H(z) = \frac{(z - q_h)}{(z - p_h)(z - \bar{p}_h)}$$

où $q_h = -1.5$ et $p_h = 0.92 \exp(j1.061)$ sont respectivement le zéro et le pôle associés. Le filtre est résonant autour de la fréquence réduite $f = \pi/3$ et atténue les amplitudes dans la région des hautes fréquences (filtrage passe-bas). Notons sur cet exemple, qu'il ne s'agit pas d'un filtre purement récursif et qu'on va l'approximer par un filtre tout-pôle d'ordre p plus élevé. On calcule les DSP $f_{Y^1}(\omega), \dots, f_{Y^n}(\omega)$ avec la formule de Mehler en fonction des niveaux de variance et connaissant celles des signaux AR(1). D'un autre côté, les signaux intermédiaires sont filtrés. On

calcule les n périodogrammes des signaux filtrés puis on résout le système (3.10) pour estimer les coefficients a_1, \dots, a_p du filtre linéaire.

On utilise un ordre $p = 20$ pour estimer la réponse en fréquence de la fraction rationnelle et le taux de saturation calculé sur toute la durée du signal est égal à 35%. On a répété vingt fois la même simulation en générant plusieurs séquences en entrée du filtre $H(z)$ pour se faire une idée précise. La figure 3.2 représente la fonction de gain en fréquence associée au filtre $H(z)$ (en trait continu) et la DSP $f(\omega)$ (avec des tirets) associée aux signaux d'entrée AR(1). Les résultats des vingt simulations sont regroupés sous la forme de *boxplots*. Les courbes correspondent aux fonctions estimées pour un découpage du signal en n trames de dimension $t = 512$ sur la figure en haut et $t = 4096$ sur le figure en bas. La durée totale du signal enregistré est la même et correspond à deux secondes d'enregistrement avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 44100Hz$. Le nombre de trames est donc de $n = 160$ et $n = 20$ respectivement. Les performances d'estimation sont satisfaisantes quand $t = 4096$ et moins bonnes si $t = 512$. Dans la région des basses fréquences, la DSP est correctement estimée. Dans la région des hautes fréquences, la réponse du filtre estimée est trop haute quand $t = 512$ du fait des effets de lissage de la fenêtre triangulaire.

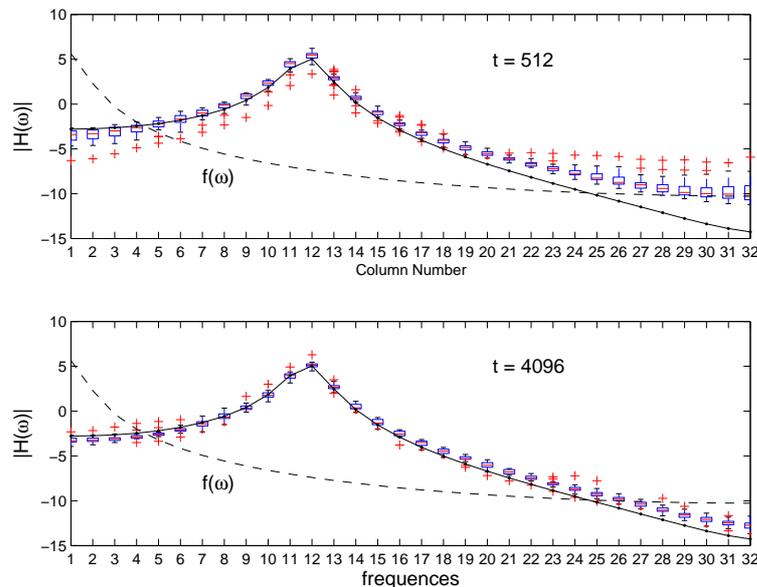


FIG. 3.2 – Estimation des coefficients de filtrage a_1, \dots, a_p du modèle de Hammerstein si $t = 512$ (en haut) et si $t = 4096$ (en bas). On utilise un signal AR(1) gaussien et la DSP correspondante $f(\omega)$ est représentée par des tirets.

Nous avons également réalisé d'autres simulations dont nous résumons les conclusions ci-dessous :

1. Nous avons testé la robustesse de la méthode vis à vis de l'hypothèse gaussienne sur les signaux. Pour cela, nous avons repris les mêmes paramètres (p , n , t et le pourcentage de saturation) de la simulation mais avec un signal AR(1) généré à partir de séquences de variables iid uniformes, centrées. Les performances d'estimation du filtre linéaire sont inchangées.
2. La robustesse de la méthode au bruit additif s'accroît quand la durée totale du signal nt augmente. En effet, dans le cadre de cette simulation, nous avons ajouté aux valeurs du signal un bruit blanc gaussien additif tel que $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$. Dans ces tests, le bruit

e_1, \dots, e_{nt} est placé soit en sortie du filtrage linéaire ou soit en sortie de la non-linéarité. Tout d'abord, nous observons que la méthode d'estimation est plus sensible au bruit additif placé en sortie du filtre. En effet, pour une durée $nt \leq 44100$, l'estimation des coefficients du filtrage est fortement biaisée (écart de plus de $3dB$ entre les courbes) dès que le rapport signal-bruit est inférieur à $15dB$ dans le cas où le bruit additif ajouté en sortie du filtre linéaire et dès que le rapport est inférieur à $10dB$ dans le cas où le bruit est ajouté en sortie de la non-linéarité. Sinon, lorsque le rapport signal-bruit est plus élevé, le gain en fréquence du filtrage est correctement déterminé. On observe cependant, quelques simulations (parmi les vingt simulations répétées dans les mêmes conditions) où la détermination des coefficients est incorrecte. Ces cas se produisent quand la durée totale nt est trop courte, inférieure à une demi-seconde (toujours considérées pour $fe = 44100Hz$) et pour des rapports signal-bruit de l'ordre de $15 - 20dB$. La fonction de gain estimée comporte plusieurs points de résonance et des effets d'atténuation brutaux en plusieurs points du spectre. Le meilleur moyen de contrôler ces effets, consiste à augmenter la durée totale du signal à traiter réduisant ainsi la variance d'estimation du gain en fréquence. En pratique, ces cas isolés disparaissent dès que la durée totale dépasse une seconde d'enregistrement ($nt \geq 44100$) et on retrouve des estimations acceptables.

La première remarque indique que la méthode d'estimation, est acceptable même si les lois des signaux intermédiaires sont non-gaussiennes (ce qui est le cas dans notre modèle compte-tenu de l'action de la fonction non-linéaire ϕ). La seconde remarque indique que la méthode est d'autant plus robuste au bruit que la durée totale nt du signal traité est longue.

3.4 Estimation de la fonction ϕ

Cette partie est consacrée à la détermination des coefficients $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de la décomposition (3.1) de la fonction de distorsion instantanée. Les coefficients de filtrage sont supposés être connus. Le filtre est inversible et les n signaux enregistrés (X_1^i, \dots, X_t^i) sont filtrés de manière à éliminer (si les coefficients du filtre sont exacts) ou atténuer les effets de corrélation linéaire. On identifie les séquences d'observations des n signaux intermédiaires (Y_1^i, \dots, Y_t^i) avec les signaux obtenus par les n opérations de filtrage (3.7). Pratiquement, les p premiers échantillons de chaque trame sont évalués à partir des p derniers de la trame précédente.

Nous proposons une méthode d'identification inspirée par la technique d'égalisation des fonctions de répartition utilisée par [White, 1982], [Balchandran and Mammone, 1998] dans un cadre non-paramétrique. Pour cela, nous étudions la répartition statistique des observations triées des signaux intermédiaires

$$Y_{(1)} \leq \dots \leq Y_{(k)} \leq \dots \leq Y_{(t)}$$

Les indices entre parenthèses indiquent que l'on a re-numéroté les échantillons pour satisfaire la condition d'ordonnement. Les variables $Y_{(1)}, \dots, Y_{(t)}$ sont aussi appelées "statistiques d'ordre" de Y_1, \dots, Y_t . La méthode d'estimation proposée détermine les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et les paramètres de variance $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ pour que les statistiques d'ordre des signaux intermédiaires soient consistantes avec les observations empiriques. L'objectif est donc d'étudier le comportement asymptotique des observations triées, puis d'en déduire le critère permettant de déterminer les paramètres du modèle par optimisation numérique.

3.4.1 Statistique des observations triées

Pour résoudre le problème, on considère le cas simple où les séquences d'entrée sont des bruits blancs. Dans ce cas, on peut donner une expression de la fonction de répartition des observations triées $Z_{(1)}^i \leq \dots \leq Z_{(t)}^i$. En effet, la probabilité $P_{\mathcal{N}(0, \sigma_i^2)}(z_{(k)} \in [z - dz/2, z + dz/2])$

est exactement la probabilité que parmi t observations iid, $(k - 1)$ échantillons soient plus petits que z , un échantillon soit égal à $z \pm dz/2$ et $(t - k)$ soient supérieurs à z . La fonction de répartition de la statistique d'ordre k est donc directement donnée par

$$P_{\mathcal{N}(0, \sigma_i^2)}(\{Z_{(k)} \leq z\}) = \int_{-\infty}^z \frac{t!}{(k-1)!(t-k)!} (F_{Z^i}(u))^{k-1} f_{Z^i}(u) (1 - F_{Z^i}(u))^{t-k} du \quad (3.12)$$

et dépend seulement de la fonction de répartition F_{Z^i} et de la densité de probabilité marginale f_{Z^i} correspondante [Stuart and Ord, 1987].

Sur la figure 3.3, nous avons représenté la densité de probabilité de la statistique d'ordre k de t observations gaussiennes centrées iid. On s'intéresse au comportement de la statistique d'ordre quand t et k augmentent alors que le rapport $\theta = k/t$ est constant, dans cet exemple $\theta = 1.56 \cdot 10^{-2}$. Sur cette figure, on observe que la variance associée à la loi diminue à mesure que t augmente ($t = 128, 256, 1024$). C'est une propriété classique de la statistique d'ordre k pour des variables aléatoires iid dont la fonction de répartition est continuellement dérivable.

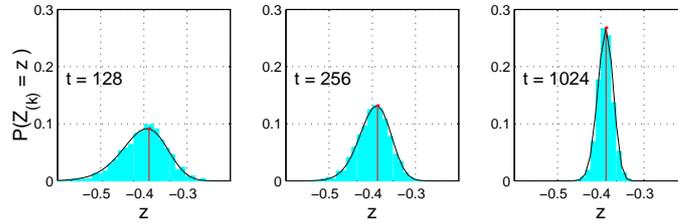


FIG. 3.3 – Densité de probabilité de la statistique d'ordre k de t observations quand $t = 128, 256, 1024$ pour un rapport constant $\theta = k/t = 1.56 \cdot 10^{-2}$.

En effet, quand le nombre d'observations t considéré est grand et si l'ordre considéré k augmente tel que le rapport $k/t \rightarrow \theta \in [0, 1]$, on montre que la distribution de la statistique d'ordre k de t observations triées est asymptotiquement normale et on a

$$Z_{(k)}^i \sim \mathcal{AN}(q_{z^i}(\theta), (\dot{q}_{z^i}(\theta))^2 \theta(1 - \theta)/t) \quad (3.13)$$

où, $q_{z^i}(\theta)$ et $\dot{q}_{z^i}(\theta)$ sont respectivement la fonction et la dérivée de la fonction du quantile d'ordre k définie par la relation $F_{Z^i}(q_{z^i}) = \theta$ ([Stuart and Ord, 1987], chap. 14). La moyenne asymptotique de la statistique d'ordre k est exactement la valeur de la fonction quantile quand $\theta = k/t$. Dans notre modèle, c'est la valeur de l'application inverse de la fonction de répartition gaussienne, centrée de variance σ_i^2 telle que,

$$q_{z^i}(\theta) = \sigma_i Q(\theta) \quad (3.14)$$

où, Q est la fonction des quantiles de la loi gaussienne centrée et unitaire, définie par l'application $(0, 1) \rightarrow (-\infty, \infty)$ telle que,

$$\int_{-\infty}^{Q(\theta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) dz = \theta \quad (3.15)$$

Ainsi, ce résultat indique que quand θ est fixé, la valeur de l'écart-type décroît vers zéro à la vitesse $1/\sqrt{t}$. De plus, sur les trois exemples simulés, on observe que le point des courbes où la dérivée s'annule correspond à la moyenne asymptotique q_{z^i} calculée pour $\theta = 1.56 \cdot 10^{-2}$ et représentée sur la figure 3.3 par la ligne verticale. En même temps, si t est fixe, la variance asymptotique se comporte en fonction de $\theta \in [0, 1]$ comme le produit de la fonction concave

$\theta(1-\theta)/t$ par la dérivée de la fonction du quantile $(\dot{q}_{z^i}(\theta))^2 = 1/f_{Z^i}^2(q_{z^i}(\theta))$. Si les signaux sont gaussiens, la variance asymptotique de la statistique d'ordre est approximativement constante sauf aux bornes de l'intervalle où les variations de la fonction des quantiles $q_{z^i}(\theta)$ divergent. La variance asymptotique de la statistique d'ordre admet deux tangentes verticales quand $\theta \rightarrow 0$ et $\theta \rightarrow 1$ dans le cas gaussien.

Ainsi, la statistique d'ordre k des signaux avant la distorsion instantanée est complètement déterminée par la fonction $Q(\theta)$ et les valeurs des paramètres $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. D'un autre côté, en se limitant aux propriétés de la loi marginale des signaux, les séquences intermédiaires Y_1^i, \dots, Y_t^i sont des variables indépendantes, identiquement distribuées et les fonctions quantiles $q_{y^i}(\theta)$ associées sont définies par l'application

$$\theta = \int_{-\infty}^{q_{y^i}(\theta)} \dot{\phi}^{-1}(y) p_{\mathcal{N}(0, \sigma_i^2)}(\phi^{-1}(y)) dy$$

où ϕ^{-1} existe car ϕ est supposée monotone. La dispersion des signaux intermédiaires dépend donc des facteurs d'échelle, de la fonction $Q(\theta)$ associée à la répartition statistique du signal et de la non-linéarité ϕ . Dans le cas de la saturation ($\phi \approx \tanh$) par exemple, lorsque le niveau de variance des signaux d'entrée augmente, les effets de la fonction ϕ sur les valeurs extrêmes du signal modifient la dynamique des signaux intermédiaires. On s'attend à ce que la statistique d'ordre du signal soit plus concentrée après la distorsion dans la zone où la limitation en amplitude est brutale. Nous allons donc étudier les propriétés de la statistique d'ordre du signal intermédiaire à partir du résultat suivant ;

Lemme 1. *Soit une séquence d'échantillons Z_1, \dots, Z_t gaussiens, de moyenne nulle et de variance unitaire. La distribution statistique des observations triées $Y_{(1)}, \dots, Y_{(t)}$ du signal transformé par ϕ tel que $Y_j = \phi(Z_j)$ vérifie, quand $t, k \nearrow \infty$ avec $k/t \rightarrow \theta \in [0, 1]$ constant,*

$$\sqrt{t}(Y_{(k)} - \phi(Q(\theta))) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \dot{\phi}(Q(\theta))^2 \dot{Q}(\theta)^2 \theta(1-\theta)\right)$$

où, le symbole \mathcal{L} désigne la convergence en loi et Q la fonction des quantiles gaussienne.

Preuve : D'après le résultat (3.13), la loi de répartition des statistiques d'ordre $Z_{(1)}, \dots, Z_{(t)}$, tend quand $t, k \nearrow \infty$ avec $k/t \rightarrow \theta \in [0, 1]$ constant, est asymptotiquement normale, de moyenne $Q(\theta)$ et de variance $\dot{Q}(\theta)^2 \theta(1-\theta)/t$ (on suppose ici que $\sigma = 1$).

La variance asymptotique de $Z_{(k)}$ décroît vers zéro en $1/t$ et par hypothèse, la fonction ϕ est continue, dérivable. En appliquant la δ -méthode ([Brockwell and Davis, 1990], prop 6.4.1), la distribution asymptotique des statistiques d'ordre $Y_{(1)}, \dots, Y_{(t)}$ vérifie la propriété suivante,

$$Y_{(k)} \sim \mathcal{AN}\left(\phi(Q(\theta)), \dot{\phi}(Q(\theta))^2 \dot{Q}(\theta)^2 \theta(1-\theta)\right)$$

quand $t, k \nearrow \infty$ avec $k/t \rightarrow \theta \in [0, 1]$ constant. (On établit le même résultat si $\sigma \neq 1$ en remplaçant $Q(\theta) \rightarrow \sigma Q(\theta)$).

En d'autres termes, la distribution asymptotique de la statistique d'ordre k du signal intermédiaire $Y_{(k)}^i$ est de type gaussienne. La moyenne asymptotique $\phi(q_{z^i}(\theta))$ est exactement la transformée de la valeur du quantile d'ordre k . La variance asymptotique est déterminée par le produit de celle des signaux gaussiens décrite par (3.13), avec le carré de la fonction dérivée $\dot{\phi}$, évalué au point de maximum de probabilité.

3.4.2 La méthode d'égalisation des quantiles

La méthode d'égalisation des quantiles consiste à ajuster les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ de la fonction ϕ et les paramètres $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ pour que les valeurs des quantiles empiriques associées aux observations $\hat{y}_1^i, \dots, \hat{y}_t^i$ définis par,

$$\hat{q}_{y^i}(k/(t+1)) = \hat{y}_{(k)}^i$$

soient ajustées par rapport à la moyenne asymptotique $q_{y^i}(\theta) = \phi(\sigma_i Q(\theta))$ en tous points $\theta = (1/(t+1) \dots t/(t+1))$. On utilise les points d'égalisation de la forme $(k/(t+1))_{k=1, \dots, t}$ au lieu de $(k/t)_{k=1, \dots, t}$ pour éviter les quantiles extrêmes associés à $\theta = 0$ et $\theta = 1$. La difficulté est que les propriétés de la variance asymptotique dépendent d'une part des points d'égalisation θ considérés et d'autre part, des propriétés de la dérivée de la fonction de distorsion du modèle. On néglige ces effets en utilisant pour chaque trame i , un critère de moindres carrés simple (sans pondération) ;

$$J_Q^i(\boldsymbol{\alpha}; \sigma_i) = \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{y}_{(1)}^i \\ \hat{y}_{(2)}^i \\ \vdots \\ \hat{y}_{(t)}^i \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{Y}}^i} - \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_1^d/d! \\ q_2 & \dots & q_2^d/d! \\ \vdots & & \vdots \\ q_t & \dots & q_t^d/d! \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\text{diag} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \sigma_i^2 \\ \vdots \\ \sigma_i^d \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}(\sigma_i)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} \right\|^2$$

où $q_k = Q(k/(t+1))$ et la notation diag représente une matrice diagonale dont les éléments sont donnés en argument. Le problème consiste à déterminer les solutions qui minimisent la fonction $J_Q(\boldsymbol{\alpha}; \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=1}^n J_Q^i(\boldsymbol{\alpha}; \sigma_i)$, c'est-à-dire

$$J_Q(\boldsymbol{\alpha}; \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=1}^n \left\| \hat{\mathbf{Y}}^i - \mathbf{Q}\mathbf{D}(\sigma_i)\boldsymbol{\alpha} \right\|^2 \quad (3.16)$$

où le vecteur des coefficients $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ et les écarts-types des signaux, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, sont réels positifs.

Le critère J_Q est quadratique par rapport à $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ mais non-linéaire par rapport aux paramètres d'échelle $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Lorsque les paramètres $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont fixés, le vecteur des coefficients $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ qui annule le gradient du critère (3.16) est la solution des moindres carrés linéaires, définie par l'égalité

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{D}(\sigma_i) \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \mathbf{D}(\sigma_i) \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{D}(\sigma_j) \mathbf{Q}^\top \hat{\mathbf{Y}}^j \right) \quad (3.17)$$

D'un autre côté, la fonction J_Q est la somme de n polynômes de degré $2d$ par rapport à chaque paramètre d'échelle. Les composantes du gradient du critère sont données par,

$$\frac{\partial J_Q(\boldsymbol{\alpha}, \sigma_1, \dots, \sigma_n)}{\partial \sigma_i} = -2(\hat{\mathbf{Y}}^i - \mathbf{Q}\mathbf{D}(\sigma_i)\boldsymbol{\alpha})^\top \frac{d(\mathbf{Q}\mathbf{D}(\sigma_i))}{d\sigma_i} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.18)$$

avec la notation suivante,

$$\frac{d(\mathbf{Q}\mathbf{D}(\sigma_i))}{d\sigma_i} = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_1^d/(d-1)! \\ q_2 & \dots & q_2^d/(d-1)! \\ \vdots & & \vdots \\ q_t & \dots & q_t^d/(d-1)! \end{pmatrix} \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_i \\ \vdots \\ \sigma_i^{d-1} \end{pmatrix}$$

Chaque composante du gradient est une fonction polynomiale de la variable σ_i admettant au moins $(2d - 1)$ racines sur \mathbb{R} . Elle ne sont pas indépendantes entre elles à cause des coefficients α qui dépendent des variances des n signaux.

Nous proposons d'utiliser la méthode des moindres carrés à variables séparées [Golub and Pereyra, 1973] pour trouver les solutions qui minimisent la fonction critère J_Q . Les étapes de la méthode sont représentées dans l'algorithme 3.1. A l'étape 1, les paramètres $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont déterminés séparément par optimisation numérique du critère réduit

$$J_Q^{(r)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = J_Q(\tilde{\alpha}(\sigma_1, \dots, \sigma_n); \sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

où le vecteur des coefficients $\alpha = \tilde{\alpha}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ est remplacé par son expression (3.17) dans le calcul du critère J_Q .

Algorithme 3.1 *Méthode des moindres carrés à variables séparées pour la détermination des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ de la fonction ϕ et des facteurs d'échelle $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ du modèle de signal.*

0. Initialisation des paramètres $\sigma_1^0, \dots, \sigma_n^0$
 1. Optimisation numérique :
 - $\hat{\sigma}_1 = \sigma_1^0$
 - $(\hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_n) = \arg \min_{\mathbb{R}^{(n-1)}} \left(J_Q^{(r)}(\hat{\sigma}_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \right)$
 2. Détermination des coefficients de ϕ :
 - $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha}(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n)$
-

L'optimisation est réalisée à l'aide d'un algorithme de relaxation standard, type Quasi-Newton qui utilise la formule BFGS pour effectuer l'approximation itérative du Hessian du critère [Press et al., 1992]. Le critère est directement évalué à partir des relations (3.17) et (3.16). L'expression analytique des composantes du gradient du critère réduit est donnée par celle de J_Q définie par la relation (3.18), calculée avec $\alpha = \tilde{\alpha}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Pour l'initialisation à l'étape 0, on propose d'identifier simplement $\sigma_1^0, \dots, \sigma_n^0$ avec les valeurs numériques

$$\sigma_i^0 = \left(1/t \sum_{k=1}^t (\hat{y}_k^i)^2 \right)^{1/2}$$

qui sont les niveaux empiriques des écarts-types des signaux intermédiaires. De plus, d'après les conditions d'identifiabilité de ϕ énoncées dans la section 3.2.2, nous avons montré que ϕ est identifiable à un facteur multiplicatif près. L'optimisation numérique des facteurs d'échelle est donc effectuée sur $(n-1)$ variables avec le paramètre $\hat{\sigma}_1$ fixé à la valeur σ_1^0 à l'initialisation. Quand la solution $\hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_n$ est obtenue à l'étape 2, les coefficients de la fonction ϕ sont directement identifiés avec les valeurs des composantes du vecteur $\tilde{\alpha}(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n)$.

Du point de vue de l'implémentation numérique des calculs, l'inversion de la matrice $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}$ pour le calcul de la solution des moindres carrés $\tilde{\alpha}$ est problématique. En effet, sur la figure 3.4, nous avons représenté les variations du nombre de conditionnement de la matrice $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}$ en fonction de la valeur de la dimension t de la largeur des fenêtres d'analyse et pour plusieurs degrés d'approximation $d = 5, 7, \dots, 13$ impairs de la fonction ϕ . Le nombre de conditionnement est défini par le rapport $N_Q(t) = |\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}|$ entre la valeur propre la plus grande λ_{\max} et la plus faible λ_{\min} de la matrice carrée, symétrique considérée. Sur la figure 3.4, nous avons représenté les variations du logarithme du nombre de conditionnement $\log_{10}(N_Q(t))$ pour réduire les écarts entre les courbes. Or, par définition, quand le nombre de conditionnement est très grand, la matrice correspondante est quasi-singulière et d'après ces observations, il est préférable

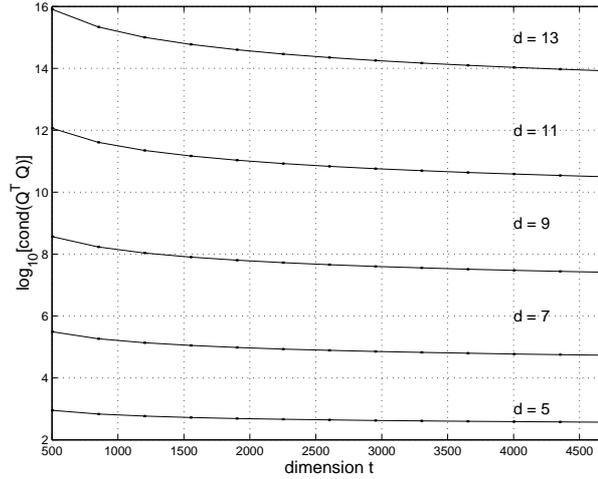


FIG. 3.4 – Variation du nombre de conditionnement de la matrice $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}$ en fonction de la dimension des signaux t et pour plusieurs degrés d'approximation $d = 5, 7, \dots, 13$ de la fonction non-linéaire.

de réduire le degré d d'approximation ou/et d'augmenter la valeur de la dimension t pour calculer la solution des moindres carrés (3.17).

Remarque. Les éléments de la matrice $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}$ sont déterminés par les produits

$$\left(\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^t q_k^{2(i+j)-2} / i! j!$$

avec $1 \leq i \leq (d+1)/2$ et $1 \leq j \leq (d+1)/2$. Elle est donc carrée, symétrique et tous ses éléments sont positifs. L'élément dont la valeur numérique est la plus faible et celui dont la valeur est la plus grande correspondent aux termes diagonaux extrêmes, c-a-d à $(\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q})_{ii}$ avec respectivement $i = (d-1)/2$ et $i = 1$.

Les fortes valeurs du nombre de conditionnement de la matrice $(\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q})$ sont dues aux écarts importants entre la valeur la plus petite et la plus grande de ses éléments diagonaux. En pratique, on observe que pour abaisser efficacement le nombre de conditionnement, on peut supprimer les premières et les dernières lignes de \mathbf{Q} correspondant aux valeurs des quantiles extrêmes d'ordres $k = 1, 2, \dots$ et $k = t, (t-1), \dots$ de la distribution gaussienne.

3.4.3 Illustration de la méthode des quantiles

Dans cette section, nous présentons les performances de la méthode d'égalisation des quantiles sur des signaux simulés. Les signaux Z_1^i, \dots, Z_t^i sont autorégressifs d'ordre 6, définis par les mêmes coefficients que ceux utilisés dans la section 3.3.1. Les séquences d'innovation du modèle AR(6) sont des variables gaussiennes de variances distinctes et telles que les facteurs d'échelles $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ des signaux soient répartis entre les deux valeurs extrêmes $0.01 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_n \leq 1.5$. Les signaux comportent $t = 2048$ échantillons. La durée totale est égale 1.16 secondes si $f_e = 44.1 \text{ kHz}$ et correspond à $n = 25$ fenêtres de dimension t . La non-linéarité ϕ est représentée par la fonction $\tanh(\beta z)$ avec $\beta = 4$. On a effectué 20 fois les mêmes simulations pour tester la robustesse de la méthode. Le pourcentage des échantillons du signal d'entrée dont l'amplitude est telle que $|Z_t| \geq 0.4$ est compris entre 15% et 40%. Le pourcentage des échantillons du signal

d'entrée dont l'amplitude est telle que $|Z_t| \geq 0.6$ est compris entre 5% et 30% à chaque simulation. La courbe estimée est représentée par la fonction polynomiale définie par (3.1) de degré $d = 15$ et on n'estime que les coefficients d'ordre impair α_{2k+1} avec $k = 0, \dots, 7$.

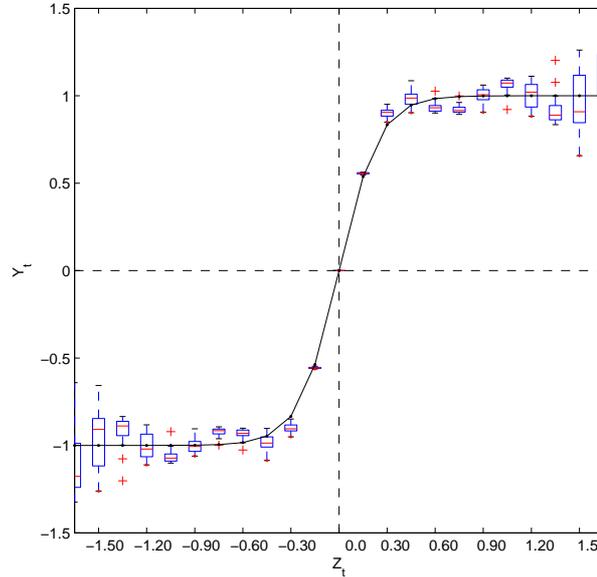


FIG. 3.5 – Estimation de la fonction $\phi = \tanh(\beta z)$ par la méthode d'égalisation des quantiles. Les signaux d'entrée sont des séquences gaussiennes de type AR(6) comportant $t = 2048$ échantillons. On a effectué 20 simulations dans les mêmes conditions et on observe la représentation *boxplot* des courbes estimées.

Sur la figure 3.5, on a représenté le *boxplot* des 20 courbes estimées. On observe que l'ajustement de la fonction polynomiale avec la non-linéarité est satisfaisant dans le régime linéaire de transformation du signal. En revanche, les seuils de saturation sont moins bien représentés et on observe un comportement oscillant des fonctions estimées autour du seuillage à la valeur 1.0. Ce défaut d'estimation est principalement dû à la modélisation polynomiale utilisée pour représenter une non-linéarité ayant un profil de saturation brutale. Enfin, on observe que les écartements des quartiles de la représentation *boxplot* autour de la valeur médiane deviennent très grands quand $|Z_t| \geq 1$. En pratique, cet effet dépend du pourcentage d'échantillons écartés, tels que $|Z_t| \geq 1$ du signal d'entrée. La méthode d'égalisation des quantiles permet d'extrapoler le comportement de la fonction ϕ jusqu'à une certaine limite à partir de laquelle la fonction estimée devient divergente.

Dans ces simulations, les signaux ne sont pas des variables indépendantes puisqu'ils sont générés à partir du modèle AR(6). Dans ces conditions, les hypothèses sur le signal utilisées dans le lemme sur le comportement asymptotique de la statistique d'ordre, ne sont pas exactement vérifiées et pourtant, les estimations de ϕ obtenues sont satisfaisantes. Ces simulations indiquent que la méthode d'égalisation des quantiles reste performante même lorsque les échantillons des trames de signaux sont corrélés.

La figure 3.6 représente les facteurs d'échelle $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ des 25 signaux en entrée et ceux estimés par la méthode d'égalisation des quantiles. Les paramètres $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n$ estimés sont ceux figurés par des lignes verticales. On obtient des performances d'estimation correctes en ce qui concerne la détermination des facteurs d'échelle à valeurs plus petites. En revanche, on observe que les valeurs hautes $\sigma_i \geq 0.6$, sont sous-estimées. Cette propriété est une manifestation différente du même phénomène créé par le profil de saturation brutale de la non-linéarité ϕ .

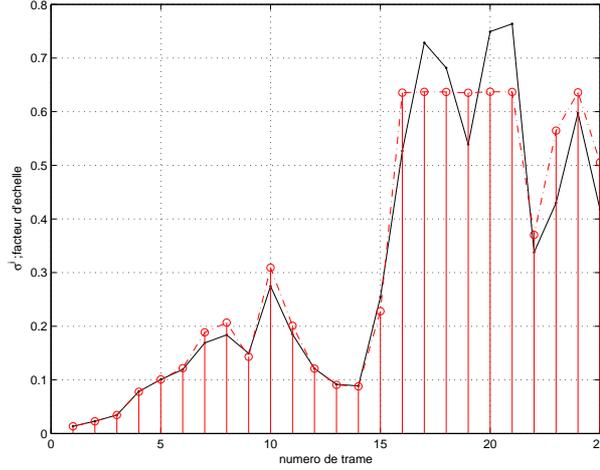


FIG. 3.6 – Estimation des facteurs d'échelle $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ du modèle par la méthode d'égalisation des quantiles ($n = 25$, $t = 2048$).

3.5 Algorithme complet d'estimation

Pour estimer de façon autodidacte le modèle complet de distorsion, nous proposons une approche itérative. L'algorithme 3.2 permet d'obtenir conjointement les valeurs des coefficients $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_d)^\top$ de la fonction non-linéaire instantanée ϕ , les facteurs d'échelle $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n$ et le vecteur des coefficients $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)^\top$ du filtrage linéaire du modèle de Hammerstein.

Algorithme 3.2 *Algorithme d'estimation autodidacte du modèle de Hammerstein.*

1. Initialisation : pour $k \in [1; nt]$, on pose $\hat{y}_k = x_k$.
 $(\alpha; \sigma_1, \dots, \sigma_n)^0 = \arg \min (J_Q(\alpha; \sigma_1, \dots, \sigma_n))$
 2. Algorithme itératif :
 Pour $j = 1, \dots, N_{ite}$
 - Estimation du filtre linéaire :
 $(\alpha; \sigma_1, \dots, \sigma_n)^{j-1} \rightarrow (f_Y^1(\omega), \dots, f_Y^n(\omega))$
 $\mathbf{a}^j = \mathbf{R}_\Sigma^{-1} \mathbf{r}_\Sigma$
 - Estimation de ϕ :
 $\mathbf{a}^j \rightarrow (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{nt})$
 $(\alpha; \sigma_1, \dots, \sigma_n)^j = \arg \min_{\mathbb{R}^{d+n}} (J_Q(\alpha; \sigma_1, \dots, \sigma_n))$
 fin.
 3. Identification :
 $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{N_{ite}}$
 $\hat{\alpha} = \alpha^{N_{ite}}$
 $(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)^{N_{ite}}$
-

A l'étape 1, on propose d'initialiser seulement les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et les facteurs d'échelle. Pour cela, les signaux intermédiaires sont identifiés avec les signaux enregistrés. Dans l'algorithme 3.2, on note

$$(\alpha; \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \arg \min_{\mathbb{R}^{d+n}} (J_Q(\alpha; \sigma_1, \dots, \sigma_n))$$

pour rappeler les trois étapes successives de la méthode de moindres carrés à variables séparées,

décrite par l'algorithme 3.1. On effectue une seule itération de l'algorithme de Quasi-Newton pour optimiser le critère $J_Q(\tilde{\alpha}(\sigma_1, \dots, \sigma_n); \sigma_1, \dots, \sigma_n)$. L'étape 2 comporte 2 étapes d'estimation correspondantes aux méthodes présentées précédemment dans les sections (3.3) et (3.4). On itère ces opérations avec les mises à jour nécessaires des paramètres puis on identifie à l'étape 3, les solutions avec les valeurs obtenues à l'itération N_{ite} .

Dans cette section, nous étudions les performances de l'algorithme proposé à partir d'enregistrements audio et dans les dispositions suivantes :

- Estimation autodidacte à partir d'un signal audio dégradé par une distorsion numérique simulée.
- Estimation autodidacte d'une distorsion produite par un appareil audiofréquence.

La première partie est un cas de simulation à partir de signaux audio qui illustre les performances de l'algorithme 3.2 en fonction des paramètres de la modélisation. La seconde partie est consacrée à l'estimation des distorsions d'enregistrement/lecture des dispositifs à partir des mesures entrée-sortie déjà utilisées dans les chapitres 1 et 2 précédents. L'objectif est donc celui de comparer l'estimation aveugle du modèle de la distorsion non-linéaire avec les résultats sur l'identification entrée-sortie du modèle. Cependant, nous présentons tout d'abord quelques indications supplémentaires concernant la détermination de la densité spectrale de puissance *globale* $f(\omega)$ du signal audio enregistré.

3.5.1 Détermination de la fonction $f(\omega)$

La DSP $f(\omega)$ *globale* doit être déterminée par l'utilisateur. Il s'agit d'une idéalisation des propriétés spectrales du signal à restaurer. A titre d'exemple, nous proposons d'utiliser la moyenne empirique à long terme des propriétés spectrales à basse résolution des n signaux audio enregistrés. Plus précisément, la DSP $f(\omega)$ est déduite des coefficients cepstraux moyens définis par

$$\bar{c}(\tau) = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} f_{\log}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

où la fonction $f_{\log}(\omega)$ est la transformée de Fourier à temps discret (TFTD), calculée sur une échelle logarithmique,

$$f_{\log}(\omega) = 1/n \sum_{i=1}^n \log_{10}(|X^i(\omega)|)$$

C'est une densité spectrale moyenne associée aux n TFTD notées $X^i(\omega)$ des signaux (X_1^i, \dots, X_t^i) . La fonction d'auto-corrélation $\rho_Z(\tau)$ *globale* est alors déterminée à partir d'un nombre restreint ($20 \leq l_c \leq 200$) de coefficients cepstraux $\bar{c}(1), \dots, \bar{c}(l_c)$. On applique en plus, un lissage triangulaire avec une fenêtre glissante de dimension l_t telle que $l_c = l_t/2$ pour garantir la positivité de la densité spectrale correspondante. Enfin, la DSP *globale* $f(\omega)$ est déduite de $\rho_Z(\tau)$ (avec $\rho_Z(0) = 1$ pour respecter la convention (3.3)).

L'avantage de ce procédé de détermination de $f(\omega)$ est que l'utilisation des coefficients cepstraux moyennés est compatible avec le modèle d'échelle car les propriétés spectrales sont indépendantes des valeurs des facteurs d'échelle $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ des signaux en entrée. Sur la figure 3.7, on observe la DSP $f(\omega)$ *globale* ainsi calculée, pour un signal audio (voix, piano et bruits d'ambiance), comparée avec trois exemples de périodogrammes de trois fenêtres (Z_1^i, \dots, Z_t^i) non consécutives, extraites du même enregistrement. Pour construire $f(\omega)$, on a utilisé $l_c = 150$ coefficients cepstraux et une fenêtre de lissage de dimension $l_t = 300$. La moyenne empirique est calculée à partir de $n = 40$ segments du même enregistrement, comportant chacun $t = 1024$ échantillons. On obtient une représentation grossière des caractéristiques spectrales du signal.

Remarque. Les caractéristiques spectrales ne sont pas mieux ajustées si le calcul de la DSP *globale* est effectué à partir du signal audio sans distorsion. En effet, nous avons comparé les

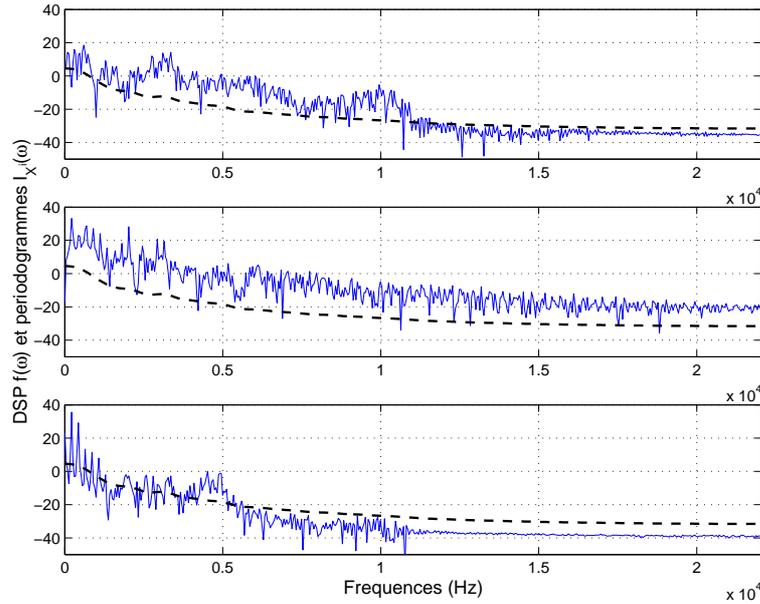


FIG. 3.7 – Fonction de DSP $f(\omega)$ globale d'un enregistrement saturé avec un amplificateur de puissance (---) comparée avec trois exemples de fonctions de périodogrammes (—) associées à des extraits comportant $t = 1024$ échantillons consécutifs du même signal.

fonctions $f(\omega)$ calculées d'un côté, avec une version non distordue et d'autre part, avec une version distordue pour un même enregistrement. Ces calculs sont effectués à partir des extraits d'enregistrements entrée-sortie des distorsions (voir chapitre 1). Le fait est que l'on observe le plus souvent, que les fonctions obtenues sont quasiment identiques ou qu'il apparaît des écarts inférieurs à ± 5 dB entre les DSP globales.

3.5.2 Illustration de la méthode

Nous considérons un extrait sonore composé de sons voisés, des notes de piano, et de bruits d'ambiance. Cet extrait représente environ deux secondes d'enregistrement échantillonné à une fréquence $f_e = 44.1$ kHz. Il est découpé en $n = 70$ trames de $t = 2048$ échantillons. La non-linéarité est définie par la fonction $\phi(z) = \tanh(2z)$. Les pôles de la fonction de transfert du filtre linéaire

$$H(z) = \left(1 - \sum_{k=1}^5 a_k z^{-k}\right)^{-1}$$

sont déterminés par les points du plan complexe

$$p_0 = 0.67 \quad p_{1,2} = 0.89 \exp(\pm i0.36) \quad p_{3,4} = 0.74 \exp(\pm i0.22)$$

On obtient un filtre passe-bas avec une réponse en fréquence plate jusqu'à 2250 Hz. Le pourcentage d'échantillons d'amplitude $|Z_t| \geq 0.5$ est supérieur à 20%. Le pourcentage d'échantillons tels que $|Z_t| \geq 1$ est égale à 7% et les effets sonores générés par le modèle de distorsion sont très audibles.

Sur la figure 3.8, nous illustrons les caractéristiques exactes du modèle de Hammerstein - fonction ϕ et réponse en fréquences $|H(\omega)|^2$ - avec les courbes déterminées par l'algorithme 3.2. On utilise les coefficients impairs pour estimer la fonction tangente $\tanh(2z)$ avec une approximation polynomiale de degré d . On a choisi $d = 13$ et $p = 12$. La DSP globale $f(\omega)$ est déterminée

suivant la méthode proposée précédemment quand $l_c = 40$ et $l_t = 80$ et est représentée sur la figure 3.8 à droite avec les réponses en fréquences du filtre linéaire. Le profil de la nonlinéarité est correctement représenté par le polynôme estimé tant qu'on considère cette application pour des amplitudes $|Z_t| \leq 1.5$. La réponse du filtre linéaire est aussi correctement estimée par la méthode si on considère le comportement pour $f \leq 7500Hz$. Il apparaît pour $f = 7500Hz$, un effet de résonance assez faible au-dessus de la réponse du modèle.

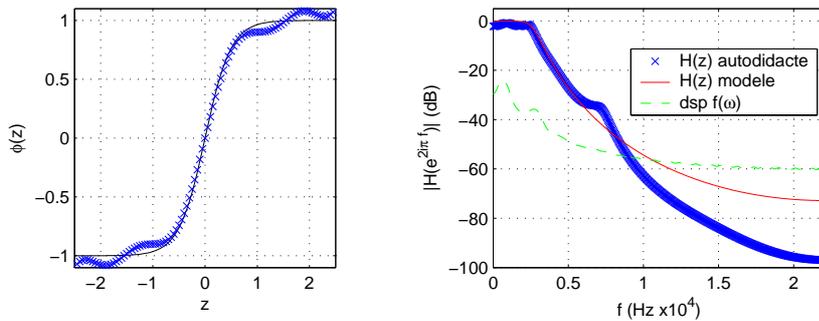


FIG. 3.8 – Estimation autodidacte du modèle de Hammerstein à partir d'un signal audio distordu numériquement.

En pratique, on détecte une sensibilité de la méthode d'estimation de $H(z)$ au profil de la DSP $f(\omega)$ choisie. Les performances d'estimation du filtre linéaire sont meilleures si on applique des fenêtres de type hanning sur les n signaux avant d'effectuer le calcul des n périodogrammes $I_{X^i}(\omega)$. En revanche, les performances d'estimation de ϕ dépendent davantage du niveau du rapport signal à bruit (RSB) des observations.

Compte tenu du modèle d'approximation de la non-linéarité et des hypothèses sur le signal, la méthode ne permet pas d'estimer des profils de nonlinéarité ayant un profil de saturation brutale de type écrêtage. Dans ces conditions, les performances de la méthode d'estimation sont toujours meilleures si on utilise un sur-paramétrage de la partie linéaire du modèle. Sur l'exemple illustré, on a utilisé un ordre $p = 12$ pour déterminer le filtre linéaire comportant 5 pôles.

L'algorithme 3.2 effectue peu d'itérations avant de converger. En pratique, l'étape d'optimisation partielle des facteurs d'échelle continue d'évoluer sans que les mises à jour ne modifient significativement les solutions pour les coefficients de $H(z)$ et de ϕ . On choisit donc $N_{ite} = 10$. Ce comportement est dû au fait que la méthode d'estimation du filtre par ajustement spectral utilise les propriétés au second ordre tandis que la méthode d'égalisation des quantiles utilise les propriétés de la distribution marginale des n signaux. Il y a *quasi-séparabilité* des propriétés des estimateurs de ϕ et de H .

Les performances d'estimation de $H(z)$ et de ϕ sont meilleures si la durée totale nt du signal observée est plus grande et si t est plus grand. Pour des fréquences d'échantillonnage de $44100Hz$, on choisit $t = 2048$ avec $n = 20$ trames. Choisir $t = 2048$ permet d'éviter des problèmes de conditionnement de la matrice $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ et d'atténuer les effets de lissage des n densités spectrales des signaux intermédiaires. De plus, pour n suffisamment grand, la moyenne empirique de la fonction $\tilde{X}_{\log}(\omega)$ permet de pondérer les comportements singuliers des quelques signaux à court-terme. L'effet de faible résonance pour les fréquences voisines de $f \sim 7500Hz$ du filtrage de la figure 3.8 par exemple, s'explique par la présence de quelques signaux parmi les n qui comportent trop d'énergie dans cette partie du domaine spectral.

3.5.3 Comparaisons avec les résultats entrée-sortie

Dans cette section, nous évaluons les performances de la méthode d'estimation autodidacte à partir de plusieurs signaux audio quand la distorsion est produite par des appareils d'amplification ou d'enregistrement/lecture. L'objectif est de comparer les résultats autodidactes avec ceux obtenus avec les méthodes d'identification entrée/sortie par moindres carrés non-linéaires présentés dans la section 2.4.2.

Les premiers tests de comparaison consistent à appliquer l'algorithme 3.2 sur les signaux de bruit blanc gaussien enregistrés en sortie des appareils (magnétophones A80, amplificateur D19) puis de comparer les solutions $-\hat{\phi}$ et $\hat{H}(z)$ obtenues avec celles illustrées par les figures 2.12 ou 2.9, 2.8 et 2.7. Ces signaux sont tout à fait compatibles avec les hypothèses statistiques sur le signal d'entrée (non observé) de la méthode d'estimation autodidacte et la DSP $f(\omega)$ globale est une fonction constante.

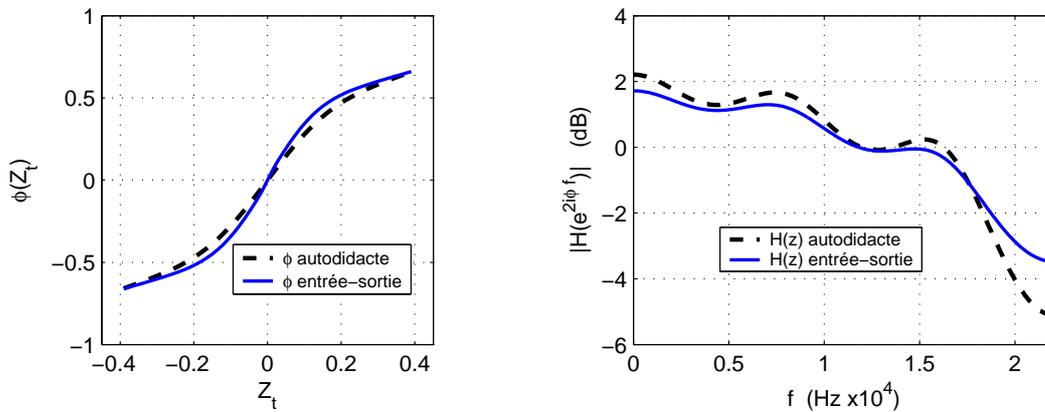


FIG. 3.9 – Estimation autodidacte du modèle de Hammerstein à partir des enregistrements en entrée et en sortie de l'amplificateur D19 à lampes : A gauche, $\hat{\phi}$ déterminée par la méthode d'estimation autodidacte et $\hat{\phi}$ déterminée par la méthode d'identification entrée/sortie par moindres carrés. A droite, $|\hat{H}(e^{2i\pi f})|^2$ déterminée par la méthode d'estimation autodidacte et $|\hat{H}(e^{2i\pi f})|^2$ déterminée par la méthode d'identification entrée/sortie par moindres carrés.

Sur la figure 3.9, nous présentons les caractéristiques du modèle de Hammerstein estimées soit par la méthode d'estimation autodidacte, soit par la méthode des moindres carrés. Les mesures de bruit blanc sont celles enregistrées avec l'amplificateur D19 en fonctionnement à lampes. Le modèle utilisé pour représenter l'estimation entrée/sortie est défini par l'équation de transmission (2.4) ($p = 5$) avec ϕ sous la forme paramétrique (2.8) et comportant $d = 3$ termes. Les solutions présentées ici sont exactement celles de la figure 2.7. Sous les hypothèses de la méthode d'estimation autodidacte, on utilise un filtre tout-pôle avec $p = 5$ coefficients et un polynôme impair d'ordre $d = 13$. Sur la figure 3.9, on observe que les courbes sont très proches. Ce test de comparaison sur les mesures de bruit blanc est aussi concluant quel que soit l'appareil utilisé (Studer A80, A816, amplificateur D19) pour déclencher les effets de la distorsion.

Sur la figure 3.10, nous présentons les résultats obtenus avec l'algorithme 3.2 ($d = 11$, $p = 5, n = 10, t = 1024, N_{ite} = 5$) avec ceux déjà représentés sur la figure 2.14 de la section 2.4.2. La dsp $f(\omega)$ est déterminée par le calcul proposé dans la section 3.5.1 avec $l_c = 60$ et appliqué au signal audio enregistré en sortie du magnétophone STUDER A80 (19cm/s). La portion du signal utilisée pour l'apprentissage autodidacte est approximativement la même que celle extraite pour l'identification entrée/sortie. Dans le cas autodidacte, on a $nt = 10240$ échantillons alors que l'on en avait $NL = 6000$ pour l'identification avec les mesures entrée-sortie.

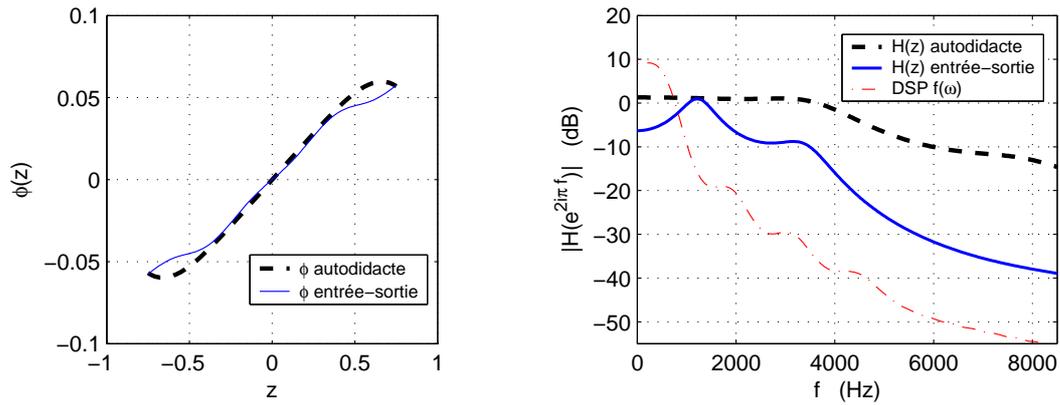


FIG. 3.10 – Estimation autodidacte du modèle de Hammerstein à partir des enregistrements en entrée et en sortie du magnétophone Studer A80 : A gauche, $\hat{\phi}$ déterminée par la méthode d'estimation autodidacte et $\hat{\phi}$ déterminée par la méthode d'identification entrée/sortie par estimation des moindres carrés. A droite, $|\hat{H}(e^{2i\pi f})|^2$ déterminée par la méthode d'estimation autodidacte et $|\hat{H}(e^{2i\pi f})|^2$ déterminée par la méthode d'identification entrée/sortie par estimation des moindres carrés.

La courbe $\hat{\phi}$ estimée par la méthode autodidacte est déterminée à une constante multiplicative près et la pente à l'origine est ajustée sur la figure 3.10 par rapport à celle identifiée par la méthode des moindres carrés. A nouveau, les variations de $|\hat{H}(e^{2i\pi f})|^2$ sont illustrées sur la bande de fréquence où 97% de l'énergie de l'extrait audio est présente. On observe une non-linéarité plus brutale tandis que la réponse en fréquence du filtre tout-pôle est moins résonante et approximativement plate quand $20 \leq f \leq 4000$. Les courbes estimées avec la méthode autodidacte paraissent plus cohérentes vis-à-vis des résultats de l'identification entrée/sortie effectuée avec les mesures de bruits blanc et représentées sur la figure 2.12. Un avantage de l'estimation autodidacte est qu'elle n'est pas affectée par le problème de synchronisation entrée/sortie. De plus, malgré les limitations évidentes de la méthode, les résultats obtenus sont plutôt encourageants dans la mesure où la méthode d'estimation autodidacte utilise un simple modèle gaussien sur les amplitudes du signal alors que sur cet exemple, l'extrait audio est un signal de parole.

Chapitre 4

Compensation de la distorsion non-linéaire

Ce chapitre est consacré à la restitution du signal quand les paramètres de la distorsion sont connus. Plus précisément, nous présentons,

1. Une méthode de compensation dans le modèle de Hammerstein par une approche bayésienne intégrant un *a priori* sur le signal à reconstruire.
2. L'utilisation des méthodes d'échantillonnage MCMC.
3. En 4.2, un cas particulier un peu plus simple de la méthode, mais important en pratique, qui permet de corriger les écrêtages numériques.

Les paramètres de la distorsion sont supposés connus, la fonction non-linéaire ϕ et les coefficients a_1, \dots, a_p du filtrage linéaire étant déterminés avec la méthode d'estimation autodidacte du modèle de Hammerstein, présentée dans le chapitre 3. Pour le cas particulier des écrêtages, la distorsion est instantanée, caractérisée par une fonction de seuillage éventuellement asymétrique et indépendante du signal d'entrée. L'utilisateur estime directement la valeur de seuillage à partir de l'observation de l'enveloppe temporelle du signal transmis. L'objectif de ce chapitre est d'établir des règles de compensation adaptées aux deux modèles et permettant d'atténuer les artefacts sonores caractéristiques.

4.1 Introduction

La correction des écrêtages numériques est un problème de restitution des échantillons du signal dont les valeurs en entrée sont supérieures à celle du niveau de seuillage. On considère généralement que le signal enregistré en-dehors des zones détectées est non-bruité et qu'il n'y a pas de distorsion d'amplitude en-dessous de la valeur de seuil. L'objectif est donc d'effectuer une interpolation dans les zones de saturation.

En revanche, la compensation dans le modèle de Hammerstein est ramenée à un problème d'inversion de la distorsion non-linéaire instantanée, caractérisée par ϕ . En effet, le filtre linéaire estimé est purement récursif à phase minimale et donc inversible (voir chapitres 2 et 3). On propose alors de résoudre directement une partie du problème de la compensation en calculant les valeurs du signal intermédiaire Y_t avec les coefficients de filtrage a_1, \dots, a_p . On effectue ainsi une post-égalisation du spectre du signal pour corriger la distorsion linéaire. Cette façon de procéder est basée sur le fait qu'il n'y a pas de couplage entre les deux sous-systèmes linéaires et non-linéaires (voir diagramme 3.1). De plus, les courbes de gain en amplitude des filtres estimés sont généralement peu résonantes.

Cependant, cette opération d'atténuation des effets linéaires de la distorsion est effectuée sans tenir compte de la présence d'un bruit additif - bruit système ou biais du modèle de distorsion - dans le signal. Or, nous avons expliqué dans le chapitre 1 que la compensation de la distorsion non-linéaire est un problème inverse mal-posé dès que les effets de la saturation ou de la limitation en amplitude deviennent importants. Du point de vue modélisation, on a une hypersensibilité au bruit dès que la dérivée de la fonction ϕ s'annule. La difficulté de la méthode de compensation consiste donc à proposer une technique de restitution du signal, robuste au bruit.

L'approche classique pour inverser la distorsion non-linéaire d'amplitude consiste à représenter l'application ϕ^{-1} par un modèle paramétrique. La fonction ϕ étant connue, on peut construire une grille de points de correspondance, puis estimer les paramètres de la modélisation. Mais sans hypothèse supplémentaire, l'utilisation de la fonction réciproque ϕ^{-1} pour calculer les valeurs du signal d'entrée Z_t conduit à une reconstruction non satisfaisante du signal à cause de la sensibilité au bruit du problème d'inversion. Une approche plus robuste consiste à déterminer une application inverse régularisée suivant la méthode proposée dans les articles [Bako et al., 2001], [Bako and Daboczi, 2002] et décrite au chapitre 1. Cette approche utilise une représentation paramétrique de la fonction ϕ^{-1} régularisée. Le paramètre noté λ est exactement celui qui permet de contrôler les effets de la régularisation. Cependant, il n'y a pas de règle simple pour calibrer λ et la méthode de reconstruction n'est pas adaptative au sens où la valeur de λ est indépendante du signal d'entrée. Or, c'est le signal qui déclenche les effets de la distorsion et on s'attend à pouvoir ajuster la valeur du paramètre de régularisation en fonction de la trame de signal qui est restaurée.

Une manière de construire une solution plus robuste au bruit consiste à utiliser un modèle *a priori* du signal à restituer. La première alternative permet de traiter les raies spectrales du signal audio sous la forme

$$z_t = \sum_{i=1}^m A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad t = \{1, \dots, N\} \quad (4.1)$$

Suivant une approche déterministe, la solution est obtenue par optimisation numérique du critère des moindres carrés $J(\mathbf{A}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi})$ défini par

$$\begin{aligned} J(\mathbf{A}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}) &= \sum_{t=1}^N \|y_t - \phi(z_t)\|^2 \\ &= \sum_{t=1}^N \|y_t - F_\phi(t; \mathbf{A}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi})\|^2 \end{aligned}$$

où, on note $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m)$ les amplitudes et $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ les phases associées aux m pulsations du signal $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m)$. La fonction définie par $F_\phi(t; \mathbf{A}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}) = \phi(z_t)$ où z_t est défini par (4.1) est une représentation paramétrique possible du signal intermédiaire à l'instant t . C'est une fonction continue des paramètres si ϕ est continue et de ce fait, on peut calculer analytiquement les composantes du gradient de la fonction $J(\mathbf{A}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi})$. En pratique, les performances de cette méthode sont assez décevantes. Même les résultats avec $m = 2$ ou 3 et les simulations réalisées avec un rapport signal-bruit élevé, dépendent fortement des conditions d'initialisation utilisées sur les paramètres. Les algorithmes d'optimisation standards (type Quasi-Newton) ne permettent pas de déterminer une solution robuste car la fonction critère J est fortement non-linéaire par rapport aux trois ensembles de paramètres. De plus, dans le cadre du traitement des signaux audio, le modèle (4.1) est trop restrictif. Le lecteur se reportera aux exemples publiés dans [Preis and Polchlopek, 1984] pour évaluer les performances de cette méthode appliquée

au traitement de signaux numériques (harmoniques, créneaux) et pour une fonction faiblement non-linéaire ($\phi(z) = z - z^3/3$ $z \in [-1, 1]$).

La seconde alternative que nous proposons est basée sur une modélisation différente et est inspirée par les résultats obtenus avec les méthodes bayésiennes de traitement des signaux autorégressifs [Troughton and Godsill, 2001], [Godsill and Rayner, 1998b], [O’Ruanaidh and Fitzgerald, 1996]. On suppose que les propriétés statistiques à court-terme du signal audio sont stationnaires au second ordre et admettent une modélisation paramétrique autorégressive d’ordre m fixé. Ces hypothèses et le modèle d’observation du signal permettent d’explicitier la forme de la densité de probabilité *a posteriori* jointe des paramètres $AR(m)$ et des échantillons du signal. Dans le cas de la distorsion de type Hammerstein comme pour le cas plus simple des écrêtages numériques, la difficulté principale est qu’on ne peut pas explicitier la forme de la densité de probabilité *a posteriori* marginale du signal d’entrée (ou des données manquantes) sachant les observations. Dans cette étude, on propose d’utiliser une approche de type Monte-Carlo pour effectuer la marginalisation des paramètres $AR(m)$. La compensation des effets de ϕ et la correction des écrêtages sont ramenées à un problème de simulation d’un échantillon dont la loi est déterminée par la densité de probabilité du signal d’entrée conditionnellement aux valeurs observées du signal. L’objectif est de construire la solution du minimum de l’erreur quadratique moyenne associée à la loi de densité *a posteriori* en calculant la moyenne empirique des échantillons obtenus par simulation.

4.2 Traitement des écrêtages numériques

Dans cette section, nous présentons une méthode de traitement bayésien du modèle $AR(m)$ gaussien pour la correction des écrêtages numériques. Le lecteur se reportera aux travaux publiés dans [Janssen et al., 1986], [Vaseghi and Rayner, 1988], [Veldhuis, 1990] pour étudier les performances des approches déterministes et aux ouvrages de [Godsill and Rayner, 1998a], [O’Ruanaidh and Fitzgerald, 1996] pour comparer les approches déterministes avec celles des méthodes utilisant les techniques de Monte-Carlo par chaînes de Markov dans le cadre de l’interpolation des signaux audio.

La première partie de cette section est consacrée à la présentation des résultats de la méthode d’échantillonnage bayésien classique [Godsill and Rayner, 1998a], [O’Ruanaidh and Fitzgerald, 1996]. Nous proposons ensuite une contribution originale permettant d’inclure une contrainte supplémentaire définie par la valeur du seuillage S dans la méthode de reconstruction du signal.

4.2.1 Hypothèses et modélisation

On enregistre un signal audio échantillonné Y_1, \dots, Y_N . Par hypothèse, on suppose que la séquence d’entrée (Z_1, \dots, Z_N) est stationnaire au second ordre, autorégressive d’ordre m telle que

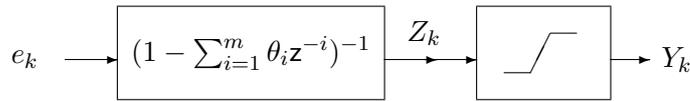
$$Z_k = \sum_{i=1}^m \theta_i Z_{k-i} + e_k \quad k \in \{m, \dots, N\} \quad (4.2)$$

et les variables e_1, \dots, e_N de la séquence d’innovation sont indépendantes, identiquement distribuées, de loi gaussienne centrée et de variance σ_e^2 . On note $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ les coefficients linéaires de la régression. En pratique, la dimension de la fenêtre d’analyse est choisie telle que $N \leq 1000$ pour garantir que le signal puisse être considéré comme stationnaire. Le traitement complet de l’enregistrement sera réalisé en utilisant les mêmes hypothèses sur toutes les trames de dimension N disponibles dans l’intervalle d’observation (voir section 4.3).

Le modèle d'observation est représenté par le diagramme 4.1. Le signal autorégressif est transmis à travers un fonction d'écrêtage symétrique. On observe en sortie le signal Y_k tel que

$$Y_k = \begin{cases} Z_k & \text{si, } |Z_k| \leq S \\ S & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la fonction d'écrêtage est non-symétrique, il faut séparer la condition selon la polarité instantanée du signal. Cette modification pratique est tout à fait compatible avec la méthode proposée. Il est cependant nécessaire d'indexer précisément les échantillons supposés perdus et ceux qui représentent les observations. Le niveau S de seuillage est fixé *a priori* par l'utilisateur, généralement déterminé à la valeur numérique la plus basse à partir de laquelle on observe l'effet de la limitation en amplitude.



DIAG. 4.1 – *Modèle d'observation des écrêtages numériques. Le signal d'entrée est autorégressif d'ordre m et les coefficients de la régression sont notés $\theta_1, \dots, \theta_m$.*

On note alors $I_k = \{i_{k1}, i_{k1+1}, \dots, i_{k2}\}$ une séquence d'indices entiers successifs d'échantillons manquants. Si n est le nombre total de portions de signal manquants de la trame Z_1, \dots, Z_N , alors $I = \prod_{k=1}^n \bigcup I_k$ représente l'ensemble de tous les intervalles d'indices des échantillons manquants. Dans ces conditions, on note \mathbf{z}_{I_k} le vecteur des échantillons manquants dont les indices appartiennent à l'intervalle I_k et \mathbf{z}_I la concaténation de toutes les valeurs manquantes consécutives de la trame. Réciproquement, \mathbf{z}_{-I} (resp. \mathbf{z}_{-I_k}) est le signal correspondant aux indices qui n'appartiennent pas à I (resp. I_k). Par conséquent, les composantes du vecteur \mathbf{z}_{-I} sont égales à celles du vecteur d'observation \mathbf{y}_{-I} , tandis que \mathbf{z}_I sont les valeurs perdues.

La forme explicite de la vraisemblance du modèle AR(m), notée $p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2)$ est présentée dans l'annexe C. La séquence Z_1, \dots, Z_N est gaussienne de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance $\sigma_e^2 \Sigma_\theta$. En vertu du théorème de Bayes, la densité de probabilité jointe du signal et des paramètres est déterminée par la relation suivante

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}_I, \theta, \sigma_e^2 | \mathbf{z}_{-I}) &= \frac{p(\mathbf{z}_I, \mathbf{z}_{-I} | \theta, \sigma_e^2) p(\theta) p(\sigma_e^2)}{p(\mathbf{z}_{-I})} \\ &\propto \underbrace{p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2)}_{\text{vraisemblance}} \underbrace{p(\theta) p(\sigma_e^2)}_{\text{a priori}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Les choix appropriés des lois *a priori* sur les paramètres AR(m) sont discutés dans l'annexe C. Les expressions des densités $p(\theta)$ et $p(\sigma_e^2)$ sont représentées par les formules (C.18) et (C.19). On suppose que la loi *a priori* du paramètre θ est une loi impropre non informative, "uniforme" en θ et celle de la variance de la séquence d'innovation est de type inverse gamma.

L'approche privilégiée pour l'inférence bayésienne repose sur la détermination de la loi des échantillons manquants conditionnellement à la valeur des observations. Les paramètres θ et σ_e sont des variables latentes - on parle aussi de variables de nuisance - qui ne sont pas directement d'intérêt dans le cadre de la restitution des valeurs manquantes. Ces remarques conduisent à l'étude de la densité de probabilité *a posteriori* marginale qui est déterminée par l'intégrale

$$p(\mathbf{z}_I | \mathbf{z}_{-I}) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^+} p(\mathbf{z}_I, \theta, \sigma_e^2 | \mathbf{z}_{-I}) d\theta d\sigma_e^2 \quad (4.4)$$

Pour reconstruire les données manquantes, on cherche à déterminer l'espérance conditionnelle définie par

$$E[\mathbf{z}_I | \mathbf{z}_{-I}] = \int \mathbf{z}_I p(\mathbf{z}_I | \mathbf{z}_{-I}) d\mathbf{z}_I \quad (4.5)$$

qui correspond au minimum de l'erreur quadratique moyenne associée à la loi de densité $p(\mathbf{z}_I | \mathbf{z}_{-I})$.

La difficulté principale de cette approche est que la marginalisation des paramètres de nuisance est problématique. La densité de probabilité *a posteriori* jointe qui apparaît en (4.4) est d'après la relation (4.3), proportionnelle à la densité de probabilité jointe du modèle AR(m) qui est de la forme suivante

$$p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2) \propto \frac{\beta_e^{\alpha_e} (\sigma_e^2)^{-\frac{N}{2} - (1 + \alpha_e)}}{(2\pi)^{N/2} \Gamma(\alpha_e) |\Sigma_0|^{1/2}} \exp \left\{ - \left(\frac{\mathbf{z}^\top \Sigma_\theta^{-1} \mathbf{z}}{2\sigma_e^2} + \frac{\beta_e}{\sigma_e^2} \right) \right\} 1_{]0, \infty[}(\sigma_e^2) \quad (4.6)$$

Cette expression est directement déduite des hypothèses précisées dans l'annexe C.

4.2.2 Échantillonnage bayésien

Un moyen d'effectuer implicitement la marginalisation des paramètres et de résoudre le problème d'inférence statistique consiste à construire un algorithme d'échantillonnage qui génère une suite de variables $\mathbf{z}_I^{(1)}, \dots, \mathbf{z}_I^{(n_{mc})}$, distribuées approximativement sous la loi d'intérêt $p(\mathbf{z}_I | \mathbf{z}_{-I})$. Dans ces conditions, la valeur de l'espérance conditionnelle (4.5) sera approximée par la moyenne empirique définie par

$$\bar{\mathbf{z}}_{I, n_{mc}} = 1/n_{mc} \sum_{t=1}^{n_{mc}} \mathbf{z}_I^{(t)} \quad (4.7)$$

Pour cela, nous proposons d'utiliser les méthodes d'échantillonnage par chaînes de Markov présentées dans l'annexe D du document. On montre dans l'annexe C, que les lois conditionnelles associées respectivement aux échantillons manquants $p(\mathbf{z}_I | \mathbf{z}_{-I}, \theta, \sigma_e^2)$, aux coefficients de la régression $p(\theta | \mathbf{z}, \sigma_e^2)$ et à la variance de la séquence d'innovation $p(\sigma_e^2 | \theta, \mathbf{z})$ sont connues et simulables car elles ont chacune une forme standard de type loi gaussienne multivariée ou loi inverse gamma. Dans ces conditions, on utilise la méthode d'échantillonnage de Gibbs.

La construction de l'échantillon $\mathbf{z}_I^{(1)}, \dots, \mathbf{z}_I^{(n_{mc})}$ est réalisée par la méthode itérative représentée par l'algorithme 4.1. On note \mathbf{z}_{-I_k} le vecteur partitionné en deux sous-vecteurs complémentaires $\mathbf{z}_{-I_{k<}}$ et $\mathbf{z}_{-I_{k>}}$ pour faire apparaître les mises à jour progressives des variables à chaque itération t de l'algorithme. Pour cela, on note $-I_{k>}$ (resp. $-I_{k<}$) l'ensemble des indices qui n'appartiennent pas à I_k dont les valeurs sont supérieures (resp. inférieures) à celles contenues dans l'intervalle I_k .

Algorithme 4.1 Méthode d'échantillonnage de Gibbs pour la restitution des données manquantes d'un signal AR(m) gaussien.

Initialisation : $\mathbf{z}^{(0)}, \theta^{(0)}$
Simuler pour, $t = \{0, \dots, n_{mc}\}$,
 • $(\sigma_e^2)^{(t+1)} \sim p(\sigma_e^2 | \theta^{(t)}, \mathbf{z}^{(t)})$
 • $\theta^{(t+1)} \sim p(\theta | \mathbf{z}^{(t)}, (\sigma_e^2)^{(t+1)})$
 • Pour, $k = \{1, \dots, n\}$
 $\mathbf{z}_{I_k}^{(t+1)} \sim p(\mathbf{z}_{I_k} | \mathbf{z}_{-I_{k>}^{(t+1)}}, \mathbf{z}_{-I_{k<}^{(t+1)}}, \theta^{(t+1)}, (\sigma_e^2)^{(t+1)})$

La chaîne de Markov représentée par la suite des triplets $(\mathbf{z}_I^{(t)}, \theta^{(t)}, (\sigma_e^2)^{(t)})$ converge en distribution vers la loi *a posteriori* $p(\mathbf{z}_I, \theta, \sigma_e^2 | \mathbf{z}_{-I})$. La moyenne empirique (4.7) est directement

calculée à partir des valeurs des échantillons $\mathbf{z}_I^{(1)}, \dots, \mathbf{z}_I^{(n_{mc})}$ extraits de la chaîne. L'algorithme 4.1 réalise de manière implicite la marginalisation des paramètres de la modélisation AR(m) [Smiths and Roberts, 1993].

4.2.3 Echantillonnage avec contrainte de seuillage

La méthode de restitution, mise en oeuvre par l'algorithme 4.1, utilise seulement les hypothèses de la modélisation autorégressive sur les données manquantes. Cependant, les composantes des vecteurs $\mathbf{z}_{I_1}, \dots, \mathbf{z}_{I_n}$ en entrée sont nécessairement au-dessus (ou en-dessous) de la valeur de seuillage S d'après notre modélisation du principe de déclenchement des écrêtages. Nous proposons donc d'inclure la condition de seuillage suivante

$$|z_i| \geq S \quad \forall i \in I \quad (4.8)$$

dans l'étape de simulation des échantillons manquants. Cette condition garantit explicitement que les valeurs des composantes des signaux interpolés sont toujours au-dessus (ou en-dessous) de la valeur de seuillage S .

Avec la condition (4.8), les composantes du vecteur des échantillons manquants sont conditionnellement distribuées sous une loi normale tronquée de densité de probabilité¹

$$p(z_{i_k} \mid |z_{i_k}| \geq S, \mathbf{z}_{-i_k}, \theta, \sigma_e^2) \propto p(z_{i_k} \mid \mathbf{z}_{-i_k}, \theta, \sigma_e^2) 1_{[S, \infty[}(|z_{i_k}|) \quad (4.9)$$

où, la densité de probabilité $p(z_{i_k} \mid \mathbf{z}_{-i_k}, \theta, \sigma_e^2)$ correspond à la loi de l'élément z_{i_k} du vecteur \mathbf{z}_{I_k} conditionnellement au vecteur complémentaire $\mathbf{z}_{-i_k} = (z_1, \dots, z_{i_k-1}, z_{i_k+1}, \dots, z_N)^\top$. D'après les résultats présentés dans l'annexe C, la distribution de la composante z_{i_k} est gaussienne de moyenne m_{i_k} et de variances $\sigma_{i_k}^2$ où, m_{i_k} et $\sigma_{i_k}^2$ sont déterminées par les expressions (C.15) et (C.14).

L'utilisation de la condition (4.8) nécessite d'effectuer un partitionnement des vecteurs d'échantillons manquants \mathbf{z}_{I_k} en leurs composantes scalaires. A chaque itération t de l'algorithme 4.1 et pour tous $k \in \{1, \dots, n\}$, l'étape d'échantillonnage en blocs du vecteur \mathbf{z}_{I_k} est remplacée par les étapes successives d'échantillonnage de toutes les composantes scalaires $z_{i_{k1}}, z_{i_{k1}+1}, \dots, z_{i_{k2}}$ sous les lois conditionnelles correspondantes. Le balayage complet des composantes est effectué en tenant compte des mises à jour progressives effectuées dans la stratégie de Gibbs. La restitution du signal est alors réalisée par l'algorithme d'échantillonnage 4.2 où on note, $\mathbf{z}_{-i_k <} = (z_1, \dots, z_{i_k-1})^\top$ et $\mathbf{z}_{-i_k >} = (z_{i_k+1}, \dots, z_N)^\top$.

L'initialisation et les deux étapes d'échantillonnage des paramètres de la modélisation AR(m) sont identiques dans les algorithmes 4.1 et 4.2 et seront précisées dans la section 4.3. Le balayage complet des composantes est une stratégie que l'on peut adopter, indépendamment de l'utilisation de la contrainte de seuillage. Dans le cadre spécifique de l'utilisation de la condition de seuillage, c'est une alternative pratique qui permet de réduire la dimension du problème d'échantillonnage des valeurs de \mathbf{z}_I sous des lois normales tronquées.

En effet, la difficulté liée à la mise en oeuvre de l'algorithme 4.2 provient de l'utilisation de la loi normale tronquée (4.9). La méthode directe pour simuler un échantillon distribué sous la loi de $p(z_{i_k} \mid |z_{i_k}| \geq S, \mathbf{z}_{-i_k}, \theta, \sigma_e^2)$ consiste à simuler un échantillon candidat sous la loi normale $\mathcal{N}(m_{i_k}, \sigma_{i_k}^2)$ puis de retenir la valeur obtenue si et seulement si elle vérifie la condition de seuillage (4.8). On montre que cette technique demande en moyenne $1/F_{\mathcal{N}(m_{i_k}, \sigma_{i_k}^2)}(S)$ simulations

¹De façon plus précise, la loi normale tronquée se met sous la forme

$$p(z_{i_k} \mid |z_{i_k}| \geq S, \mathbf{z}_{-i_k}, \theta, \sigma_e^2) \propto p(z_{i_k} \mid \mathbf{z}_{-i_k}, \theta, \sigma_e^2) \delta_{z_{i_k}}(y_{i_k}/|y_{i_k}| - z_{i_k}/|z_{i_k}|) 1_{[S, \infty[}(|z_{i_k}|)$$

Cette expression indique que le signe de z_{i_k} est déterminé par $y_{i_k}/|y_{i_k}|$, le signe de la composante au point de seuillage correspondant.

Algorithme 4.2 Méthode d'échantillonnage de Gibbs hybride pour la restitution des données manquantes d'un signal $AR(m)$ gaussien, respectant la contrainte (4.8) de seuillage en amplitude.

Initialisation : $\mathbf{z}^{(0)}, \theta^{(0)}$
 Simuler pour, $t = \{0, \dots, n_{mc}\}$,
 • $(\sigma_e^2)^{(t+1)} \sim p(\sigma_e^2 \mid \theta^{(t)}, \mathbf{z}^{(t)})$
 • $\theta^{(t+1)} \sim p(\theta \mid \mathbf{z}^{(t)}, (\sigma_e^2)^{(t+1)})$
 • Pour, $k = \{1, \dots, n\}$
 • Pour, $i_k \in I_k$
 $z_{i_k}^{(t+1)} \sim p(z_{i_k} \mid \mathbf{z}_{-i_k}^{(t+1)}, \mathbf{z}_{-i_k}^{(t)}, \theta^{(t+1)}, (\sigma_e^2)^{(t+1)}, S)$

de $\mathcal{N}(m_{i_k}, \sigma_{i_k}^2)$ pour accepter un échantillon. C'est donc une méthode d'échantillonnage peu efficace si $|m_{i_k} - S|$ est très supérieur à σ_{i_k} . Dans ce cas, la plupart des échantillons candidats sont rejetés et l'algorithme 4.2 est bloqué.

Nous proposons une version hybride de l'algorithme de Gibbs où chaque étape de simulation sous la loi normale tronquée est réalisée par un algorithme de Hastings-Metropolis indépendant [Robert, 1996]. La loi instrumentale notée g_μ est définie par la densité de probabilité de la distribution exponentielle translatée $\mathcal{Exp}(\mu)$, exprimée sous la forme suivante

$$g_\mu(w) \propto \frac{1}{\mu} \exp - \frac{(w - S)}{\mu} 1_{[S, \infty[}(w) \quad (4.10)$$

A chaque itération, pour chaque composante $i \in I$, la simulation sous la loi conditionnelle (4.9) est réalisée par les étapes de l'algorithme 4.3. La probabilité d'acceptation-rejet ρ_s est définie par,

$$\rho_s(z_i^{(t)}, w) = \min \left(1, \frac{p(w \mid \mathbf{z}_{-i}, \theta, \sigma_e^2) g_\mu(|z_i^{(t)}|)}{p(z_i^{(t)} \mid \mathbf{z}_{-i}, \theta, \sigma_e^2) g_\mu(|w|)} \right) \quad (4.11)$$

La loi instrumentale g_μ est facilement simulable mais ne génère que des échantillons à valeurs positives. De ce fait, d'une part, il est nécessaire d'allouer à la valeur de l'échantillon candidat w , la polarité instantanée du signal d'entrée (étape 1 bis). En pratique, le signe associé à chaque composante z_i est déterminé pendant l'opération de détection des données manquantes car la polarité instantanée du signal d'entrée est la même que celle du signal écrété, déterminée par les rapport $y_i/|y_i|$. D'autre part, à l'étape 2 dans le calcul de la probabilité d'acceptation-rejet, on évalue toujours les valeurs de la densité de la loi instrumentale g_μ à partir des valeurs absolues des composantes et de l'échantillon candidat.

Algorithme 4.3 Algorithme de Hastings-Metropolis indépendant pour simuler des échantillons sous une loi normale $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ tronquée au seuil S correspondant à la densité de probabilité conditionnelle (4.9).

Etant donnée $z_i^{(t)}$
 1 – Simuler, $w \sim g_\mu(w)$ et $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$
 1 bis – Poser, $w \leftarrow w y_i / |y_i|$
 2 – Prendre,
 $z_i^{(t+1)} = \begin{cases} w & \text{si } u \leq \rho_s(z_i^{(t)}, w) \\ z_i^{(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour déterminer la valeur numérique du paramètre $\mu > 0$ de la loi (4.10), on utilise la condition d'optimalité suivante

$$\mu^* = \arg \min_{\mu \in \mathbb{R}^+} \left\{ \sup_{z_i \in [S, \infty[} \left(\frac{p(z_i | \mathbf{z}_{-i}, \theta, \sigma_e^2)}{g_\mu(z_i)} \right) \right\}$$

qui, par simplification, est exprimée seulement dans le cas où la polarité instantanée de l'échantillon z_i est positive. Cette relation permet d'ajuster la forme de la densité de la loi instrumentale avec celle de la loi conditionnelle. Le taux d'acceptation moyen de l'algorithme (D.3) de Hastings-Metropolis indépendant est plus grand, au sens où l'espérance moyenne d'effectuer une transition à l'étape 2 est plus grande, quand la majoration uniforme de la loi conditionnelle par g_μ est maximisée [Robert, 1995].

La condition de majoration est donc définie sur le rapport des densités de probabilité qui est proportionnelle à la fonction R_μ définie par

$$\forall z_i \in [S, \infty[\quad R_\mu(z_i) = \mu \exp \frac{(z_i - S)}{\mu} \exp - \frac{(z_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}$$

Après une étude analytique simple de la fonction R_μ , on distingue deux cas de majoration

$$\sup_{z_i \in [S, \infty[} (R_\mu(z_i)) = \begin{cases} \mu \exp - \frac{(S - m_i)}{\mu} \exp \frac{\sigma_i^2}{2\mu^2} & \text{si } S < m_i + \sigma_i^2/\mu \\ \mu \exp - \frac{(S - m_i)^2}{2\sigma_i^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

selon que le maximum de R_μ se trouve en-dedans ou en-dehors de l'intervalle $[S, \infty[$. Par la suite, la première borne de majoration est minimale quand

$$\frac{1}{\mu} = \frac{(S - m_i) + \sqrt{(S - m_i)^2 + 4\sigma_i^2}}{2\sigma_i^2}$$

tandis que la seconde borne est minimale quand $\mu^{-1} = (S - m_i)/\sigma_i^2$. On conclut que la valeur du paramètre μ^* est celle minimale associée à la première borne de majoration du rapport R_μ . Plus précisément, à chaque itération et pour tout $i \in I$ dans l'algorithme de restitution 4.2, le paramètre de g_μ est déterminée par le calcul suivant

$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{(S - |m_i|) + \sqrt{(S - |m_i|)^2 + 4\sigma_i^2}}{2\sigma_i^2} \quad (4.12)$$

valide quelque soit le signe $y_i/|y_i|$ de l'échantillon z_i écrêté.

4.3 Illustration de la méthode de correction des écrêtages

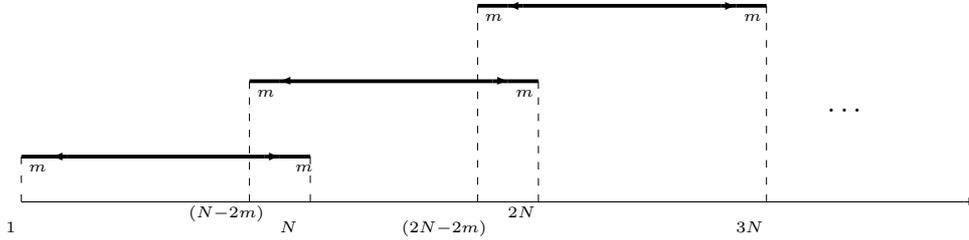
Dans cette section, nous présentons les conditions d'initialisation et de mise en oeuvre des algorithmes 4.1 et 4.2. Nous illustrons les performances de reconstruction des signaux écrêtés tout d'abord sur des exemples de simulation. Ensuite, nous commentons les résultats obtenus avec cette méthode appliquée au traitement des distorsions dont les caractéristiques non-linéaires sont proches de celles des écrêtages.

4.3.1 Découpage du signal et initialisation des algorithmes

L'initialisation des deux algorithmes d'échantillonnage est déterminée par les valeurs de $\theta^{(0)}$ et des composantes du vecteur $\mathbf{z}_I^{(0)}$. Nous proposons d'identifier $\theta^{(0)}$ à l'aide de l'estimateur des moindres carrés linéaire des paramètres du modèle $\text{AR}(m)$, calculé quand les composantes du vecteur $\mathbf{z}_I^{(0)}$ vérifient $z_i^{(0)} = 0$ avec $i \in I$. Les coefficients linéaires sont initialement déterminés par

$$\theta^{(0)} = (\mathbf{L}_0^\top \mathbf{L}_0)^{-1} \mathbf{L}_0^\top \mathbf{z}_1^{(0)}$$

où on note \mathbf{L}_0 la matrice de régression \mathbf{L} définie par (C.21), construite avec les composantes du vecteur $\mathbf{z}^{(0)}$. Une autre alternative pour initialiser $\mathbf{z}^{(0)}$, consiste à identifier le signal transmis $\mathbf{z}_{-I}^{(0)} = \mathbf{y}_{-I}$ avec le signal enregistré en dehors des zones écrêtées et identifier les données manquantes $z_i^{(0)} = S y_i / |y_i|$ ($i \in I$) avec la valeur (au signe près) du seuil S .



DIAG. 4.2 – Méthode de découpage du signal audio complet avec recouvrement sur m échantillons des trames successives.

On choisit des tailles de fenêtre $750 \leq N \leq 1000$. Le traitement complet d'un enregistrement est effectué en découpant régulièrement le signal audio en trames successives se recouvrant comme représenté sur le schéma 4.2. Chaque couple de fenêtres successives se recouvre sur une longueur de $2m$ échantillons. De plus, nous proposons de ne détecter à l'intérieur de chaque fenêtre d'analyse que les données manquantes qui ne sont pas localisées, ni dans les m premiers, ni dans les m derniers échantillons de chaque trame. Ainsi, les données manquantes situées parmi les m derniers échantillons de la fenêtre courante seront traitées avec celles de la fenêtre suivante. Cette condition de détection des données manquantes permet de remplacer l'expression de la matrice Σ_θ par celle de $(\mathbf{K}^\top \mathbf{K})^{-1}$ lors du calcul de la moyenne \mathbf{m}_I et de la matrice de covariance Σ_I de la loi conditionnelle du vecteur des échantillons manquants (voir annexe C).

4.3.2 Illustration sur un signal synthétique

Nous présentons les performances des algorithmes de restitution tout d'abord sur une simulation des écrêtages numériques. Le signal écrêté est autorégressif d'ordre $p = 12$ et comporte $N = 950$ échantillons. La séquence d'innovation utilisée est de type gaussienne centrée, de variance $\sigma_e^2 = 0.015$. L'amplitude du signal est écrêtée à une valeur seuil $S = 0.58$ telle que plus de 10% des échantillons sont des données manquantes. Le filtre tout-pôle du modèle autorégressif est résonant et les positions des pôles p_1, \dots, p_{12} du modèle sont déterminées par

$$\begin{aligned} p_1 = -0.724, \quad p_{2:3} = 0.996 \exp^{\pm j0.077}, \quad p_{4:5} = 0.866 \exp^{\pm j1.887}, \quad p_{6:7} = 0.970 \exp^{\pm j1.570}, \\ p_{8:9} = 0.978 \exp^{\pm j0.920}, \quad p_{10:11} = 0.861 \exp^{\pm j1.253}, \quad p_{12} = 0.123 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Les deux algorithmes 4.1 et 4.2 sont initialisés en fixant les données manquantes à la valeur de seuil observée. Les deux algorithmes effectuent $n_{mc} = 7500$ itérations et on détermine à

chaque itération, l'erreur quadratique

$$r^{(t)} = 1/N \sum_{i=1}^N \left(z_i - z_i^{(t)} \right)^2$$

où z_i sont les composantes du signal AR(12) avant seuillage et $z_i^{(t)}$ sont les échantillons produits par les algorithmes de Gibbs à l'itération t . La valeur $r^{(t)}$ mesure l'erreur de restitution à chaque itération t , produite par les échantillonneurs. Sur la figure 4.1, nous présentons les variations de l'erreur de restitution en fonction de t correspondantes à l'algorithme standard 4.1 sur la courbe (1), et à l'algorithme de gibbs hybride 4.2 sur la courbe (2).

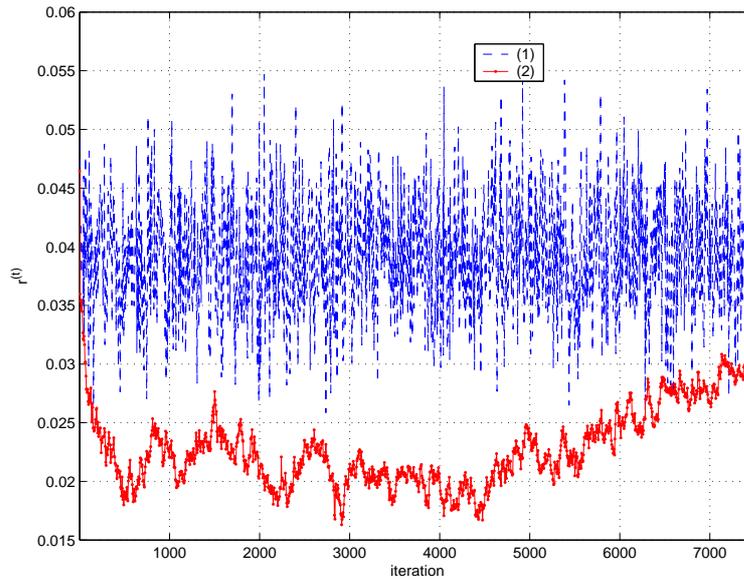


FIG. 4.1 – Variation de l'erreur de restitution $r^{(t)}$ associée à l'algorithme d'échantillonnage de Gibbs 4.1 (courbe (1)) et associée à l'algorithme d'échantillonnage de Gibbs hybride 4.2 (courbe (2)).

Sur la figure 4.1, on voit que l'algorithme 4.1 ne crée pas de période transitoire pendant laquelle l'erreur de restitution diminue sensiblement. La courbe (1) varie fortement entre chaque itération ce qui indique qu'il y a une faible corrélation entre les tirages successifs des échantillons. En revanche, on voit que l'algorithme 4.2 (courbe (2)) produit une période transitoire quand $1 \leq t \leq 750$ pendant laquelle l'erreur de restitution $r^{(t)}$ s'éloigne significativement des conditions initiales et décroît rapidement. La corrélation entre les valeurs successives de $r^{(t)}$ sur la courbe (2), est plus importante ce qui est sûrement dû à la mise à jour échantillon par échantillon dans la stratégie d'échantillonnage avec partitionnement de \mathbf{z}_I . De plus, la courbe (2) passe sous la courbe (1) dès que $t \geq 1000$. L'erreur résiduelle de la courbe (2) atteint des valeurs qui sont presque 2 fois plus faibles que celle de la courbe (1) grâce à la contrainte de seuillage imposée dans l'algorithme de restitution 4.2.

Sur la figure 4.2, on observe les représentations *boxplot* des signaux $\mathbf{z}^{(t)}$ produits par l'algorithme 4.1 en haut et ceux produits par l'algorithme 4.2 en bas. Dans le calcul des statistiques des *boxplot*, les composantes $z_i^{(t)}$ produites par l'algorithme 4.2 pendant la période de chauffage (*burn in period*) $t = 1, \dots, 750$, ne sont pas utilisées. Sur la figure 4.2 en haut, on voit que l'algorithme standard produit des échantillons relativement éloignés du signal original Z_t et même parfois sous la valeur du seuil S . Sur la figure 4.2 en bas, on voit que l'algorithme

hybride 4.2 réduit considérablement l'écart-type des échantillons produits autour du signal Z_t et leurs amplitudes respectent toujours la condition de seuillage.

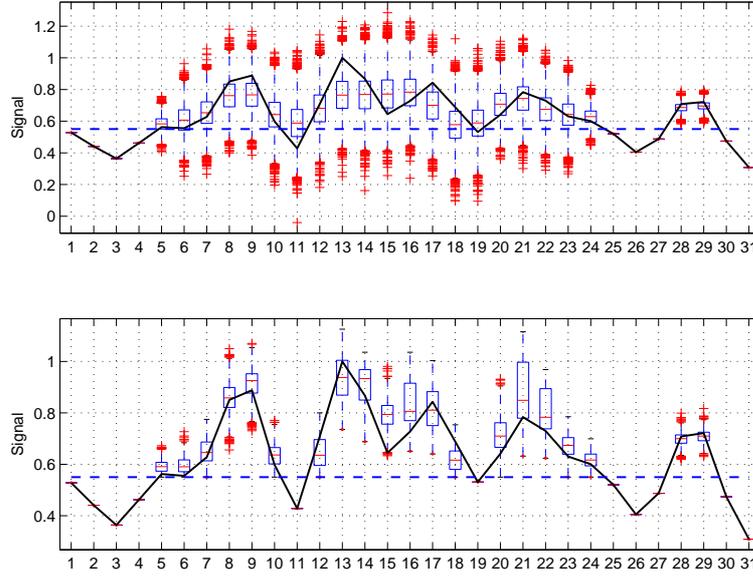


FIG. 4.2 – Résultat des échantillonnages réalisés par l'algorithme de Gibbs 4.1 (en haut) et de Gibbs hybride 4.2 (en bas) ($S = 0.58, p = 12, n_{mc} = 7500$).

Les estimations spectrales associées aux valeurs des coefficients autorégressifs $\theta_1, \dots, \theta_m$ produits par les deux algorithmes, sont très proches. En effet, sur la figure 4.3 en haut, nous présentons l'enveloppe spectrale du modèle AR(12) définie par

$$|f(\exp^{-i\omega})|^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^m \theta_i \exp^{-i\omega}\right)^{-2}$$

et celles déterminées avec les coefficients $\hat{\theta}_i$ moyens définis par,

$$\hat{\theta}_i = 1/n_{mc} \sum_{t=1}^{n_{mc}} \theta_i^{(t)}$$

où $i = 1, \dots, m$. Sur la figure 4.3 (figure du bas), nous présentons les fonctions d'autocorrélations correspondantes. Les deux enveloppes spectrales des courbes (2) et (3) sont quasiment indistinctes tandis que les différences sont plus visibles bien que restant très faibles, si on observe les fonctions d'autocorrélations $\hat{\rho}_z(\tau)$ estimées. Ceci s'explique par le fait que les deux algorithmes utilisent exactement les mêmes étapes pour échantillonner les coefficients $\theta_1, \dots, \theta_m$ et la variance σ_e^2 . Les densités de probabilités $p(\theta | \mathbf{z}^{(t)}, \sigma_e^{(t)})$ et $p(\sigma_e | \theta^{(t)}, \mathbf{z}^{(t)})$, dépendent de la valeur des échantillons non écrêtés et manquants du signal $\mathbf{z}^{(t)}$. Même si la condition de seuillage améliore les conditions de reconstruction des 10% des échantillons manquants dans la trame, ses répercussions sur l'estimation spectrale du signal AR(m) restent faibles.

La complexité de l'algorithme de Gibbs hybride 4.2 est plus importante que celle de l'algorithme 4.1. Pour un intervalle I comportant n échantillons manquants, l'algorithme de Gibbs standard 4.1 détermine à chaque itération t , le vecteur moyen \mathbf{m}_I , la matrice de variance-covariance Σ_I puis produit tout d'un bloc, un vecteur gaussien $\mathbf{z}_I^{(t)}$. L'échantillonnage gaussien nécessite de calculer une décomposition de Cholesky de Σ_I (complexité $o(n^3)$) puis une inversion (complexité $o(n^2)$) avant d'effectuer un tirage gaussien, une multiplication et une addition

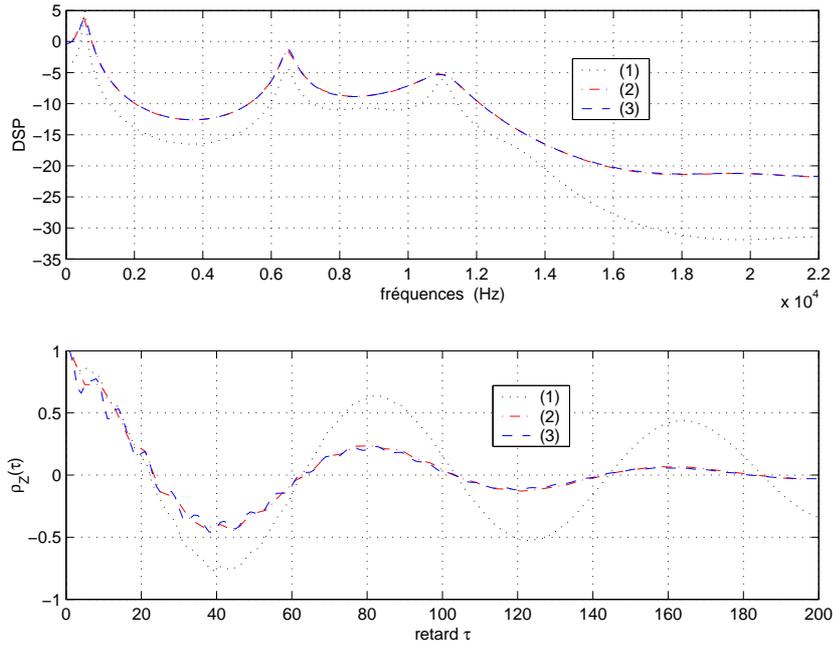


FIG. 4.3 – Enveloppe spectrale et fonction d’auto-corrélation du signal AR(12) : courbes (1) avant écrêtage, courbes (2) reconstruite par l’algorithme de Gibbs 4.1, courbe (3) reconstruite par l’algorithme de Gibbs hybride 4.2.

pour un vecteur de dimension n . L’algorithme hybride 4.2 échantillonne $\mathbf{z}_j^{(t)}$ composante après composante. Pour cela, il détermine à chaque itération t , une variance σ_i^2 et n moyennes m_{i_k} en respectant les mises à jour progressives de la stratégie de Gibbs. De plus, suivant le procédé de l’algorithme 4.3, il faut calculer n fois le paramètre μ^* optimal définie par (4.12) de la loi instrumentale g_μ car μ^* dépend de la moyenne m_{i_k} qui est mise à jour à chaque tirage. Puis, pour chaque itération t , il faut effectuer n tirages sous la loi exponentielle et évaluer n probabilités d’acceptation.

4.3.3 Application aux enregistrements audio

Nous avons utilisé les deux algorithmes d’échantillonnage pour traiter plusieurs exemples de distorsions d’origine différente à savoir,

- écrêtage numérique du signal,
- distorsion non-linéaire d’amplification de puissance,
- écrêtage des enregistrements sur bandes optiques (film 16mm).

Dans le cas du traitement des écrêtages numériques, la valeur de seuil est la valeur maximale de l’amplitude $S = \max_t(|Z_t|)$ du signal audio observé. Dans les autres cas cités, il est nécessaire d’ajuster la valeur de seuil à un niveau plus faible tel que $S = 0.9 \max_t(|Z_t|)$ par exemple, pour obtenir une atténuation des effets sonores des distorsions par reconstruction des amplitudes hautes du signal. Ainsi, le pourcentage des échantillons manquants devient considérable mais les performances d’interpolation sont en pratique, suffisantes pour reconstruire des intervalles comportant m échantillons manquants successivement [Godsill and Rayner, 1998a], [O’Ruanaidh and Fitzgerald, 1996], [Janssen et al., 1986].

L’ordre m du modèle autorégressif est déterminé à une valeur telle que $50 \leq m \leq 80$. Un exemple de traitement, présenté dans les travaux [Troughton and Godsill, 2001], [Troughton,

1999], utilise aussi une approche par échantillonnage bayésien et permet d'estimer l'ordre m conjointement avec les paramètres θ et σ_e^2 de la modélisation autorégressive. Cette possibilité ne semble pas conduire à une amélioration des performances de traitement bien qu'augmentant de façon considérable la complexité des algorithmes de simulation.

Pour utiliser les deux méthodes par modélisation autorégressive présentées dans cette section, il faut fixer $N \approx 20ms$, l'ordre m , le seuil S , et le nombre d'itération n_{mc} des algorithmes d'échantillonnage. En pratique, si le pourcentage d'échantillons manquants est de l'ordre de 5%, il faut choisir $500 \leq n_{mc} \leq 1000$ pour garantir la convergence des chaînes produites par l'algorithme standard 4.1 et $n_{mc} \geq 2000$ pour celles produites par l'algorithme hybride avec partitionnement 4.2. Cette contrainte permet de dépasser la période transitoire pendant laquelle les composantes échantillonnées s'éloignent des conditions initiales (voir figure 4.2) .

Comme indiqué dans la section précédente, l'utilisation de la condition de seuillage améliore les performances d'interpolation par rapport à la méthode standard mais ne modifie, en réalité, que très peu l'estimation de l'enveloppe spectrale des fenêtres de signal. Dans ces conditions, la différences des effets sonores, du point de vue de l'atténuation de la distorsion, sont peu appréciables si on compare les enregistrements traités par l'un ou l'autre des deux algorithmes.

4.3.4 Conclusion

Compte tenu des résultats du chapitre 2 sur la modélisation de la distorsion sonore, il n'est pas étonnant de noter que la méthode de traitement des écrêtages numériques présentée dans cette section, permette aussi de traiter certaines distorsions non-linéaires de puissance. En effet, nous avons observé pour celles-ci - distorsions du STUDER D19 en fonctionnement normal ou à lampes - que les effets non-linéaires instantanés étaient prédominants par rapport aux effets du filtre linéaire. Le cas du traitement des saturations magnétiques, en revanche, nécessite de corriger des effets de mémoire de la distorsion (distorsion linéaire d'amplitude et de phase) et pour cela, il faut utiliser la méthode d'estimation autodidacte du modèle de Hammerstein. Nous proposons donc dans cette seconde partie du chapitre sur la compensation, une méthode de reconstruction du signal qui utilise la modélisation Hammerstein.

4.4 Compensation dans le modèle de Hammerstein

L'écrêtage numérique est un modèle très simple où les effets non-linéaires sont instantanés. Si la distorsion linéaire est non négligeable dans l'enregistrement, nous proposons d'utiliser le modèle en cascade de type Hammerstein pour représenter la distorsion. Suivant les notations du chapitre 3, les coefficients de la non-linéarité ϕ et ceux du filtrage linéaire a_1, \dots, a_p sont déterminés par la méthode d'estimation autodidacte. Cette section est consacrée à la compensation de la distorsion dans le modèle de Hammerstein quand les paramètres sont connus.

Soient x_{t_1}, \dots, x_{t_2} les échantillons du signal audio enregistré. D'après le diagramme 4.3, les échantillons du signal intermédiaire sont déterminés directement à partir des coefficients du filtre linéaire estimé. On a donc

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^p a_i x_{k-i} \quad \forall k \in \{t_1 + p, \dots, t_2\} \quad (4.14)$$

où a_1, \dots, a_p sont les coefficients du filtre linéaire du modèle de Hammerstein.

$$x_k \longrightarrow \boxed{H^{-1}(\mathbf{z}) = (1 - \sum_{i=1}^p a_i \mathbf{z}^{-i})} \longrightarrow y_k$$

DIAG. 4.3 – Post-égalisation du signal audio pour la détermination des valeurs du signal intermédiaire. Les coefficients a_1, \dots, a_p de filtrage sont connus, déterminés par la méthode d'estimation autodidacte de la distorsion.

4.4.1 Équation d'observation

On suppose que le signal intermédiaire suit le modèle suivant

$$Y_k = \phi(Z_k) + \sigma_v \varepsilon_k \quad k \in \{1, \dots, N\} \quad (4.15)$$

Par hypothèse, le N -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ est une séquence gaussienne de variance unitaire. Ce bruit d'observation additif n'est pas un élément du modèle de Hammerstein mais un terme de pénalisation. Le niveau de variance σ_v^2 est un paramètre de réglage, ajusté par l'utilisateur. Le terme est ajouté aux effets non-linéaires pour régulariser les signaux reconstruits. Nous présenterons une interprétation du terme de pénalisation dans la section suivante.

La fonction de vraisemblance $p(\mathbf{y}|\mathbf{z})$ associée au modèle (4.15) s'écrit alors

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_v^2)^{N/2}} \exp - \frac{(\mathbf{y} - \phi(\mathbf{z}))^\top (\mathbf{y} - \phi(\mathbf{z}))}{2\sigma_v^2} \quad (4.16)$$

où $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_N]^\top$ et $\mathbf{z} = [z_1 \dots z_N]^\top$. A la limite quand $\sigma_v \rightarrow 0$, l'étalement de la fonction devient infinitésimal et on retrouve une relation déterministe entre les échantillons avant et après la distorsion.

4.4.2 Modèle bayésien hiérarchique

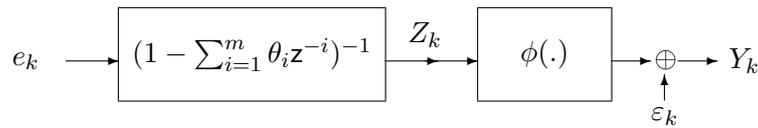
Nous reprenons exactement les mêmes notations et hypothèses de modélisation du signal d'entrée que celles utilisées pour le traitement des écrêtages. On suppose que le signal (Z_1, \dots, Z_N) est stationnaire au second ordre, autorégressif d'ordre m et vérifie l'équation (4.2). On note $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ les coefficients autorégressifs. Les variables e_1, \dots, e_N de la séquence d'innovation sont indépendantes, identiquement distribuées, de loi gaussienne centrée et de variance σ_e^2 . L'expression analytique de la densité de probabilité jointe $p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2)$ est déduite des hypothèses *a priori* présentées dans l'annexe C en écrivant

$$p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2) = p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2) p(\theta) p(\sigma_e^2)$$

L'expression analytique de la vraisemblance $p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2)$ du modèle AR(m) est donnée par la formule (C.4). On suppose que la loi *a priori* du paramètre θ est une loi impropre non informative "uniforme" en θ et celle de la variance de la séquence d'innovation est de type inverse gamma.

En vertu du théorème de Bayes, la densité de probabilité jointe du signal et des paramètres conditionnellement aux observations est déterminée par le produit des densités de probabilité suivant

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2 | \mathbf{y}) &= \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{z}) p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2)}{p(\mathbf{y})} \\ &\propto \underbrace{p(\mathbf{y}|\mathbf{z})}_{\text{Vraisemblance}} \underbrace{p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2)}_{1^{\text{er}} \text{ niveau}} \underbrace{p(\theta) p(\sigma_e^2)}_{2^{\text{nd}} \text{ niveau}} \end{aligned} \quad (4.17)$$



DIAG. 4.4 – Modèle d’observation des signaux intermédiaires après la non-linéarité du modèle de Hammerstein. La fonction non-linéaire ϕ est connue. Par hypothèse, le signal Z_k est autorégressif d’ordre m et les paramètres sont notés $\theta_1, \dots, \theta_m$.

où dans la seconde relation, on omet le dénominateur $p(\mathbf{y})$ qui est un facteur de normalisation déterminé par les valeurs du signal d’observation. Dans un premier temps, on peut préciser à un facteur multiplicatif près, l’expression analytique de la densité jointe *a posteriori* du modèle complet - modèle d’observation et spécification auto-régressive - représenté par le diagramme 4.4. Les paramètres θ et σ_e sont des variables latentes qui ne sont pas directement d’intérêt dans le cadre de la restitution du signal avant distorsion.

La densité *a posteriori* marginale $p(\mathbf{z} | \mathbf{y})$ est définie par

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z} | \mathbf{y}) &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^+} p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2 | \mathbf{y}) d\theta d\sigma_e^2 \\ &\propto p(\mathbf{y} | \mathbf{z}) \left(\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^+} p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2) d\theta d\sigma_e^2 \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

L’objectif est de restituer le signal d’entrée \mathbf{z} en calculant l’espérance conditionnelle

$$E[\mathbf{z} | \mathbf{y}] = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{z} p(\mathbf{z} | \mathbf{y}) d\mathbf{z} \quad (4.19)$$

qui est aussi le minimum de l’erreur quadratique moyenne associée à la loi de $p(\mathbf{z} | \mathbf{y})$.

Nous sommes donc confrontés à la même difficulté que dans le cadre du traitement des écrêtages numériques. La marginalisation des paramètres de nuisance est problématique. La densité de probabilité jointe qui apparaît sous le double signe somme dans la relation (4.18) est une fonction complexe, définie à un facteur de normalisation près par l’expression (4.6), déduite des hypothèses de la modélisation AR(m).

Remarque. On peut désormais donner une interprétation plus claire du terme de pénalisation qui apparaît dans l’équation d’observation. Soit la fonction $J^b(\mathbf{z}) = -2\sigma_v^2 \log(p(\mathbf{z} | \mathbf{y}))$. D’après la relation (4.18), cette fonction comporte deux termes tels que

$$J^b(\mathbf{z}) = \|\mathbf{y} - \phi(\mathbf{z})\|^2 - 2\sigma_v^2 \log \left(\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^+} p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2) d\theta d\sigma_e^2 \right) \quad (\text{à des constantes près})$$

En remarquant que la recherche du maximum *a posteriori* de la densité de probabilité $p(\mathbf{z} | \mathbf{y})$ est équivalente à celle du minimum de la fonction J^b , le rôle du paramètre σ_v est donc de contrôler l’importance relative du terme de régularisation par rapport au terme d’attache aux données, défini par la norme quadratique.

4.4.3 Méthode MCMC de compensation

Nous proposons d’utiliser un algorithme d’échantillonnage bayésien permettant de générer une suite de variables $\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(n_{mc})}$ distribuées approximativement sous la loi d’intérêt $p(\mathbf{z} | \mathbf{y})$. L’espérance conditionnelle $E[\mathbf{z} | \mathbf{y}]$, définie par (4.19) sera approximée par la moyenne empirique

$$\bar{\mathbf{z}}_{n_{mc}} = 1/n_{mc} \sum_{t=1}^{n_{mc}} \mathbf{z}^{(t)} \quad (4.20)$$

Dans le cadre de la modélisation proposée, on ne peut pas expliciter directement la forme de la densité $p(\mathbf{z} \mid \mathbf{y})$ mais seulement celles de la loi *a posteriori* jointe $p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2 \mid \mathbf{y})$, des lois conditionnelles du signal et des paramètres. En revanche, les expressions des lois conditionnelles pour les paramètres $p(\theta \mid \sigma_e^2, \mathbf{z}, \mathbf{y})$ et $p(\sigma_e^2 \mid \theta, \mathbf{z}, \mathbf{y})$ sont données par les formules (C.22) et (C.23) et on peut expliciter la loi conditionnelle du vecteur-signal \mathbf{z} . En effet, en vertu du théorème de Bayes, on a,

$$p(\mathbf{z} \mid \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} \mid \mathbf{z})p(\mathbf{z} \mid \theta, \sigma_e^2)}{p(\mathbf{y})}$$

qui est directement proportionnelle au produit de la fonction de vraisemblance du modèle AR(m) avec celle de l'équation d'observation (4.15) et est déterminée par

$$p(\mathbf{z} \mid \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y}) \propto \frac{(\sigma_e^2)^{-N/2}}{(2\pi\sigma_v)^N |\boldsymbol{\Sigma}_0|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{y} - \phi(\mathbf{z}))^\top (\mathbf{y} - \phi(\mathbf{z}))}{2\sigma_v^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{z}^\top \boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1} \mathbf{z}}{2\sigma_e^2} \right\} \quad (4.21)$$

Nous proposons donc un échantillonnage bayésien basé sur l'algorithme de Gibbs D.5. La construction de l'échantillon est réalisée par la méthode itérative, définie par les trois étapes de simulation suivantes.

Algorithme 4.4 *Méthode d'échantillonnage de Gibbs hybride permettant de simuler sous la loi définie par (4.18) et utilisé pour l'inversion de la non-linéarité du modèle de Hammerstein.*

Initialisation : $\mathbf{z}^{(0)}, \theta^{(0)}$
Simuler pour, $t = \{0, \dots, n_{mc}\}$,
 • $(\sigma_e^2)^{(t+1)} \sim p(\sigma_e^2 \mid \theta^{(t)}, \mathbf{z}^{(t)}, \mathbf{y})$
 • $\theta^{(t+1)} \sim p(\theta \mid \mathbf{z}^{(t)}, (\sigma_e^2)^{(t+1)}, \mathbf{y})$
 • $\mathbf{z}^{(t+1)} \sim p(\mathbf{z} \mid \theta^{(t+1)}, (\sigma_e^2)^{(t+1)}, \mathbf{y})$

La chaîne de Markov représentée par la suite des triplets $(\mathbf{z}^{(t)}, \theta^{(t)}, (\sigma_e^2)^{(t)})$ converge en distribution vers la loi *a posteriori* $p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2 \mid \mathbf{y})$ et l'algorithme 4.4 réalise de manière implicite la marginalisation des paramètres de la modélisation AR(m).

La mise en oeuvre de l'algorithme de compensation 4.4 et donc également, les propriétés de convergence de la chaîne de Markov produite, dépendent de la méthode utilisée pour générer des échantillons sous la loi conditionnelle (4.21). Compte-tenu de la structure de l'algorithme de compensation, il paraît naturel d'utiliser à nouveau une version hybride où cette étape de simulation est remplacée par un algorithme d'échantillonnage en bloc, de type Hastings-Metropolis à marche aléatoire, en anglais *Metropolis-Hastings Random Walk* (MH-RW). A chaque itération t de l'algorithme 4.4, la simulation de \mathbf{z} notée

$$\mathbf{z}^{(t+1)} \sim p(\mathbf{z} \mid \theta^{(t+1)}, (\sigma_e^2)^{(t+1)}, \mathbf{y})$$

est effectuée par l'algorithme de simulation 4.5.

Une seule transition de type marche aléatoire est effectuée à chaque itération de l'algorithme de compensation. La probabilité d'acceptation est définie par le rapport

$$\rho(\mathbf{z}^{(t)}, \mathbf{w}) = \min \left\{ 1, \frac{p(\mathbf{w} \mid \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})}{p(\mathbf{z}^{(t)} \mid \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})} \right\} \quad (4.22)$$

La loi instrumentale g_{rw} est choisie de type gaussienne telle que pour chaque transition, à l'étape 1 de l'algorithme 4.5, l'échantillon candidat \mathbf{w} est produit par

$$\mathbf{w} = \mathbf{z}^{(t)} + \epsilon \quad (4.23)$$

avec $\epsilon \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_{rw}^2 \mathbf{1}_N)$. L'écart-type σ_{rw} associé à la distribution de ϵ est aussi appelée l'échelle de la loi instrumentale.

Algorithme 4.5 *Algorithme de Hastings-Metropolis à marche aléatoire (MH-RW) utilisé pour simuler des échantillons sous la loi conditionnelle définie par (4.21).*

Etant donnée $\mathbf{z}^{(t)}$
 1 – Simuler, $\mathbf{w} \sim g_{rw}(|\mathbf{w} - \mathbf{z}^{(t)}|)$ et $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$
 2 – Prendre ,
 $\mathbf{z}^{(t+1)} = \begin{cases} \mathbf{w} & \text{si, } u \leq \rho(\mathbf{z}^{(t)}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{z}^{(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$

Remarque. Plusieurs stratégies d'échantillonnage ont été testées avant de choisir l'algorithme à marche aléatoire. En particulier, une approche plus évidente qui utilise les propriétés de la densité conditionnelle $p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})$ à un degré plus avancé, est basée sur un échantillonnage de Hastings-Metropolis indépendant dont la structure est représentée par l'algorithme D.3. Dans cette approche, la loi instrumentale, notée g est construite autour d'une expression simplifiée de la densité conditionnelle déduite de l'approximation linéaire

$$\phi(\mathbf{z}) \approx \alpha_1 \mathbf{z} + o(\mathbf{z})$$

Cette approximation permet d'approximer $p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})$ par une pseudo densité conditionnelle qui est une densité de probabilité standard telle que

$$g(\mathbf{z}) = \mathcal{N}(\mathbf{m}_g, \sigma_v^2 \mathbf{U}_g)$$

de vecteur moyen \mathbf{m}_g et de matrice de variance-covariance $\sigma_v^2 \mathbf{U}_g$ définis par

$$\mathbf{U}_g^{-1} = \left(\alpha_1^2 \mathbf{1} + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_e^2} \boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1} \right) \quad \mathbf{m}_g = \alpha_1 \mathbf{U}_g \mathbf{y}$$

L'avantage est que la densité g est facilement simulable car en particulier, la matrice de variance-covariance est symétrique, définie positive. Cependant, la loi instrumentale g ne permet pas d'obtenir un recouvrement satisfaisant de la densité d'intérêt dès que les effets non-linéaires de la fonction ϕ sont importants. De ce fait, les propriétés d'ergodicité de la chaîne produite sont insuffisantes pour garantir la convergence de l'estimateur empirique (4.20).

4.4.4 Échantillonnage avec partitionnement de \mathbf{z}

Les tests d'évaluation de l'algorithme 4.5 nous ont permis d'établir une stratégie plus élaborée d'échantillonnage sous la loi conditionnelle $p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})$. L'idée consiste à utiliser un partitionnement du vecteur \mathbf{z} en ses composantes (z_1, \dots, z_N) et d'effectuer pour cela, N étapes de type Hastings-Metropolis à marche aléatoire construites selon le même schéma que l'algorithme 4.5 d'échantillonnage en bloc. Plus précisément, on utilise la densité de probabilité de la composante z_k avec $k = 1, \dots, N$ conditionnellement aux paramètres, aux observations \mathbf{y} et aux valeurs des composantes du vecteur-signal complémentaire \mathbf{z}_{-k} avec

$$\mathbf{z}_{-k} = (z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_N)^\top$$

D'après les règles de marginalisation, on déduit simplement que cette densité est définie par la relation

$$p(z_k | \mathbf{z}_{-k}, \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y}) = \frac{p(y_k | z_k) p(z_k | \mathbf{z}_{-k}, \theta, \sigma_e^2)}{\int_{\mathbb{R}} p(y_k | z_k) p(z | \mathbf{z}_{-k}, \theta, \sigma_e^2) dz_k}$$

où on a utilisé les factorisations $p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2) = p(z_k | \mathbf{z}_{-k}, \theta, \sigma_e^2)p(\mathbf{z}_{-k} | \theta, \sigma_e^2)$ et $p(\mathbf{y} | \mathbf{z}) = p(z_k | y_k)p(\mathbf{y}_{-k} | \mathbf{z}_{-k})$ avec la notation, $\mathbf{y}_{-k} = (y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_N)^\top$. La loi conditionnelle $p(z_k | \mathbf{z}_{-k}, \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})$ est donc proportionnelle aux produits des vraisemblances conditionnelles de l'équation d'observation et du modèle AR(m) et donc, vérifie

$$p(z_k | \mathbf{z}_{-k}, \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y}) \propto \exp \left\{ -\frac{(y_k - \phi(z_k))^2}{2\sigma_v^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{(z_k - m_k)^2}{2\sigma_k^2} \right\} \quad (4.24)$$

où la moyenne m_k et la variance σ_k^2 sont données par les formules (C.15) et (C.14).

La décomposition proposée ne modifie pas fondamentalement la structure des algorithmes MCMC de compensation 4.4 et 4.5. Celle-ci nécessite d'introduire un balayage complet des composantes de \mathbf{z} avec une mise à jour progressive à chaque étape de l'algorithme de Gibbs. On obtient une méthode de simulation définie par l'algorithme 4.6. Les notations, $\mathbf{z}_{-k<} = (z_1, \dots, z_{k-1})^\top$ et $\mathbf{z}_{-k>} = (z_{k+1}, \dots, z_N)^\top$ représentent le partitionnement du vecteur complémentaire \mathbf{z}_{-k} , utilisé pour expliciter les mises à jour à chaque étape des valeurs des composantes suivant la stratégie de l'algorithme de Gibbs.

Algorithme 4.6 *Méthode d'échantillonnage de Gibbs hybride permettant de simuler sous la loi définie par (4.21), utilisant un conditionnement sur les valeurs du signal AR(m).*

Initialisation : $\mathbf{z}^{(0)}, \sigma_e^{(0)}$
Simuler pour, $t = \{0, \dots, n_{mc}\}$,
 • $\theta^{(t+1)} \sim p(\theta | \mathbf{z}^{(t)}, (\sigma_e^2)^{(t)}, \mathbf{y})$
 • $(\sigma_e^2)^{(t+1)} \sim p(\sigma_e^2 | \theta^{(t+1)}, \mathbf{z}^{(t)}, \mathbf{y})$
 • **Pour,** $k = \{t', \dots, t' + N - 1\}$
 $z_k^{(t+1)} \sim p(z_k | \mathbf{z}_{-k<}^{(t+1)}, \mathbf{z}_{-k>}^{(t)}, \theta^{(t+1)}, (\sigma_e^2)^{(t+1)}, \mathbf{y})$

Les deux premières étapes sont identiques à celles de l'algorithme 4.4. La méthode de simulation sous la loi conditionnelle des composantes du signal est basée sur un échantillonnage de Hastings-Metropolis à marche aléatoire et définie par l'algorithme 4.7 où la probabilité d'acceptation individuelle est définie par le rapport

$$\rho_k(z_k^{(t)}, w) = \min \left\{ 1, \frac{p(w | \mathbf{z}_{-k}, \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})}{p(z_k^{(t)} | \mathbf{z}_{-k}, \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})} \right\} \quad (4.25)$$

La loi instrumentale g_{rw} est choisie de type gaussienne telle que pour chaque transition, à l'étape 1 de l'algorithme 4.7, l'échantillon candidat w est produit par

$$w = z_k^{(t)} + \epsilon \quad (4.26)$$

avec, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{rw}^2)$.

4.5 Illustrations sur des signaux synthétiques

Dans cette section, nous illustrons les performances de la méthode de compensation tout d'abord sur des signaux de simulation de type autorégressif. Nous nous intéressons surtout aux réglages des algorithmes de Hastings-Metropolis à marche aléatoire 4.5 et 4.7. L'objet de cette étude préliminaire est d'une part, d'évaluer le nombre d'itération n_{mc} suffisant pour observer la convergence des chaînes de Markov et d'autre part, d'expliquer comment ajuster les paramètres σ_v et σ_{rw} pour améliorer la restitution du signal. Nous présenterons dans la fin de cette section, les performances de la méthode d'inversion de la non-linéarité sur des signaux AR(m) bruités.

Algorithme 4.7 *Algorithme de Hastings-Metropolis à marche aléatoire (MH-RW) utilisé pour simuler des échantillons sous la loi définie par (4.24).*

Etant donnée, $z_k^{(t)}$
 1 – Simuler, $w \sim g_{rw}(|w - z_k^{(t)}|)$ et $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$
 2 – Prendre,
 $z_k^{(t+1)} = \begin{cases} w & \text{si } u \leq \rho_k(z_k^{(t)}, w) \\ z_k^{(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$

4.5.1 Comportement du MH-RW en bloc

Les paramètres de contrôle σ_v et σ_{rw} modifient les propriétés de convergence de la marche aléatoire 4.5 par l'intermédiaire de la probabilité d'acceptation. En effet, à l'itération t , le rapport de vraisemblance du vecteur candidat \mathbf{w} par rapport à $\mathbf{z}^{(t)}$ qui détermine la probabilité d'acceptation (4.22) est égale à

$$\frac{p(\mathbf{w} \mid \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})}{p(\mathbf{z}^{(t)} \mid \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})} = \exp - \frac{1}{2\sigma_v^2} \left(\phi(\mathbf{w})^\top \phi(\mathbf{w}) - \phi(\mathbf{z}^{(t)})^\top \phi(\mathbf{z}^{(t)}) - 2\mathbf{y}^\top (\phi(\mathbf{w}) - \phi(\mathbf{z}^{(t)})) \right) \exp - \frac{1}{2\sigma_e^2} \left((\mathbf{w} - \mathbf{z}^{(t)})^\top \Sigma_\theta^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{z}^{(t)}) \right) \quad (4.27)$$

Si $p(\mathbf{w} \mid \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y}) \geq p(\mathbf{z}^{(t)} \mid \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})$, l'algorithme effectue une transition, sinon il effectue la transition avec une probabilité égale au rapport d'acceptation (4.27). Le paramètre de pénalisation σ_v modifie directement la forme de la densité de probabilité conditionnelle et par conséquent l'importance relative des deux fonctions exponentielles qui apparaissent dans le rapport d'acceptation. En pratique, plus l'étalement de la fonction de vraisemblance des observations est petit, plus les variables générées par l'algorithme sont attirées vers un mode optimal. Le paramètre σ_{rw} contrôle l'échelle des déplacements proposés pendant l'échantillonnage, sur le support de la densité conditionnelle. Ainsi, l'échelle de la loi instrumentale σ_{rw} doit être ajustée par rapport à la valeur du paramètre de pénalisation σ_v .

Nous avons testé les performances de l'algorithme de compensation de la distorsion non-linéaire d'un signal autorégressif AR(12) dont les coefficients sont ceux définis dans la section 4.3.2. La fonction ϕ est une approximation à l'ordre 7 de la fonction tangente hyperbolique. Le signal AR(12) en sortie est bruité et le rapport signal-bruit est égal à 28dB. La variance σ_e^2 de la séquence d'innovation est réglée pour que le taux de saturation - mesuré par la probabilité $P(\mathbf{z} \geq 0.4)$ que l'amplitude du signal soit supérieure au niveau à partir duquel la non-linéarité est brutale - représente 20% des échantillons transmis.

Dans cette étude, les coefficients de la modélisation AR(m) ie, θ et σ_e sont *a priori* connus et nous testons d'abord les performances de la marche aléatoire qui échantillonne en bloc le signal sous la loi conditionnelle (4.24). Sur la figure 4.4 à gauche, nous présentons les variations de l'erreur résiduelle de restitution

$$r_{\mathbf{z}}^{(t)} = \frac{1}{N} (\mathbf{z} - \mathbf{z}^{(t)})^\top (\mathbf{z} - \mathbf{z}^{(t)}) \quad (4.28)$$

en fonction des étapes de l'échantillonnage quand le paramètre de pénalisation est fixé et pour une série de valeur de l'échelle σ_{rw} de la marche aléatoire. Pratiquement, $r_{\mathbf{z}}^{(t)}$ mesure la distance quadratique entre le signal avant distorsion et celui produit par la chaîne de Markov à l'itération t . Sur la même figure à droite, nous présentons les variations en fonction de σ_{rw} de la probabilité

d'acceptation moyenne

$$\bar{\rho} = \frac{1}{n_{mc}} \sum_{t=1}^{n_{mc}} \rho^{(t)} \quad (4.29)$$

où $\rho^{(t)}$ représente la valeur numérique de la probabilité d'acceptation (4.22) à l'itération t . Elle mesure le nombre moyen de transitions effectuées au cours des n_{mc} itérations.

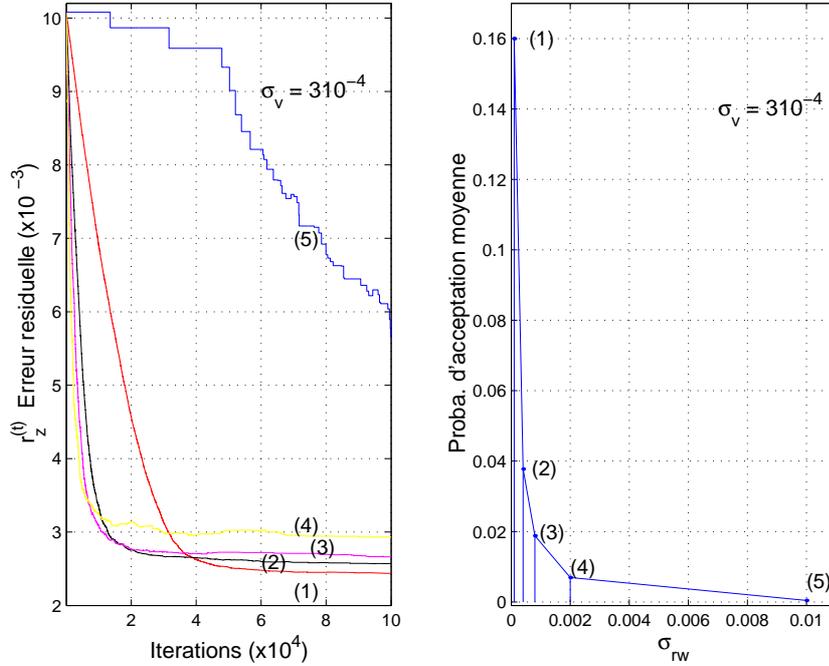


FIG. 4.4 – Réglage des paramètres de l'algorithme 4.5. Gauche; Convergence de l'erreur résiduelle $r_z^{(t)}$ en fonction du paramètre d'échelle σ_{rw} ((1) : $\sigma_{rw} = 10^{-4}$, (2) : $\sigma_{rw} = 410^{-4}$, (3) : $\sigma_{rw} = 810^{-4}$, (4) : $\sigma_{rw} = 210^{-3}$, (5) : $\sigma_{rw} = 10^{-2}$). Droite; Probabilité d'acceptation moyenne $\bar{\rho}$ correspondante. ($\sigma_v = 310^{-4}$, $RSB = 28dB$, $P(\mathbf{z} > 0.4) = 20\%$)

D'après les variations de $r_z^{(t)}$ et $\bar{\rho}$ présentées sur la figure 4.4, on conclut que les performances de la méthode d'échantillonnage en bloc sont en pratique, insuffisantes. En effet, le problème principal est lié à la vitesse de convergence de l'algorithme car il faut réaliser plus de $n_{mc} \geq 50000$ itérations de la marche aléatoire pour sortir du régime transitoire. Le second problème est que l'algorithme est trop sélectif par rapport au réglage des paramètres. Ces remarques se traduisent sur la figure de droite, par des valeurs trop faibles de $\bar{\rho}$ (voir cas (4) et (5)). En abaissant la valeur de l'échelle σ_{rw} , la vitesse de convergence augmente mais le taux d'acceptation moyen devient rapidement trop grand. Les performances paraissent les plus intéressantes quand la valeur de l'échelle se rapproche de celle du paramètre de pénalisation σ_v qui contrôle la forme de la loi conditionnelle échantillonnée (voir cas (2) et (3)). Quand σ_{rw} se trouve dans la région des valeurs inférieures à celle de σ_v , la probabilité d'acceptation moyenne croît brutalement (cas (1)). L'algorithme effectue régulièrement des transitions mais le pas de la marche aléatoire est faible, abaissant encore la vitesse de convergence de l'erreur résiduelle de restitution.

Nous avons testé deux stratégies d'initialisation du vecteur $\mathbf{z}^{(0)}$ telles que,

- Initialisation simple;

$$\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{y}/\alpha_1$$

où α_1 est le coefficient au premier ordre de la fonction non-linéaire.

- Initialisation utilisant une approximation de l'application inverse associée à la non-linéarité ϕ ;

$$\mathbf{z}^{(0)} = P_{\phi^{-1}}(\mathbf{y})$$

où les coefficients du polynôme noté, $P_{\phi^{-1}}$ sont déterminés à partir des points de correspondance (z, y) où z est une variable auxiliaire qui parcourt la dynamique des valeurs des amplitudes des signaux donc, $z \in [-1, 1]$ et dont on détermine l'image $y = \phi(z)$. Ces coefficients sont estimés au sens de la solution des moindres carrés linéaires du critère de la forme

$$\|P_{\phi^{-1}}(y) - z\|^2$$

La seconde alternative semble mieux adaptée aux hypothèses du problème. Cependant, en pratique et à cause de la sensibilité au bruit, si les effets de la saturation sont trop importants, la détermination des coefficients $P_{\phi^{-1}}$ est problématique car la matrice de régression associée au critère quadratique est mal-conditionnée.

Sur notre exemple de simulation de la marche aléatoire, la seconde stratégie d'initialisation est moins intéressante que l'initialisation simple car la saturation du signal est brutale et l'approximation de ϕ^{-1} proposée est mal conditionnée. Ceci a une conséquence directe sur la convergence des marches aléatoires. Les résultats présentés sur la figure 4.4 sont ceux obtenus avec la stratégie d'initialisation simple.

4.5.2 Comportement du MH-RW avec partitionnement

Dans le cas de l'algorithme 4.7, il faut évaluer un rapport d'acceptation pour chaque composante du signal. A l'itération t , le rapport d'acceptation de w étant donné la valeur courante de la composante $z_k^{(t)}$ est égale à

$$\frac{p(w | \mathbf{z}_{-k}, \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})}{p(z_k^{(t)} | \mathbf{z}_{-k}, \theta, \sigma_e^2, \mathbf{y})} = \exp - \frac{1}{2\sigma_v^2} \left(\phi(w)^2 - \phi(z_k^{(t)})^2 - 2y_k(\phi(w) - \phi(z_k^{(t)})) \right) \exp - \frac{1}{2\sigma_k^2} \left(w^2 - (z_k^{(t)})^2 - 2m_k(w - z_k^{(t)}) \right) \quad (4.30)$$

D'après la formule (C.14), le calcul de la variance σ_k ne dépend que des paramètres autorégressifs $\theta_1, \dots, \theta_m$ et est donc effectué une seule fois par itération. Mais, la moyenne m_k , dépend d'après la formule (C.15), de la valeur des composantes dans le voisinage de z_k et est donc calculée à chaque fois qu'une transition est effectivement réalisée. En dehors des simplifications possibles (utiliser l'approximation $\Sigma_{\theta}^{-1} \approx \mathbf{K}^T \mathbf{K}$, évaluer m_k si et seulement si une transition est effectuée par l'une des $2m$ composantes voisines de \mathbf{z}) pour réduire le nombre d'opérations par itération, l'implémentation numérique de la marche aléatoire avec partitionnement est plus coûteuse que celle de la stratégie d'échantillonnage en blocs. Cependant, on observe que la technique avec partitionnement augmente de façon considérable la vitesse de convergence de l'algorithme d'échantillonnage du signal.

Nous avons testé les performances de l'algorithme 4.7 dans les mêmes conditions de simulation que précédemment avec exactement le même signal AR(12) enregistré en sortie de la fonction ϕ polynomiale d'ordre 7. La figure 4.5 présente les variations de l'erreur résiduelle (4.28) en fonction des étapes d'échantillonnage pour plusieurs réglages de l'échelle σ_{rw} et quand le paramètre de pénalisation est égal à $\sigma_v = 810^{-3}$. On observe principalement que la vitesse de convergence ($n_{mc} \leq 7000$) est approximativement dix fois plus grande que celles des chaînes de Markov produites par l'algorithme 4.5. De plus, $r_{\mathbf{z}}^{(t)}$ atteint des valeurs minimales ($r_{\mathbf{z}}^{(t) \geq 4000} \leq 210^{-3}$) également plus faibles et ceci, quelles que soient les valeurs de l'échelle utilisées.

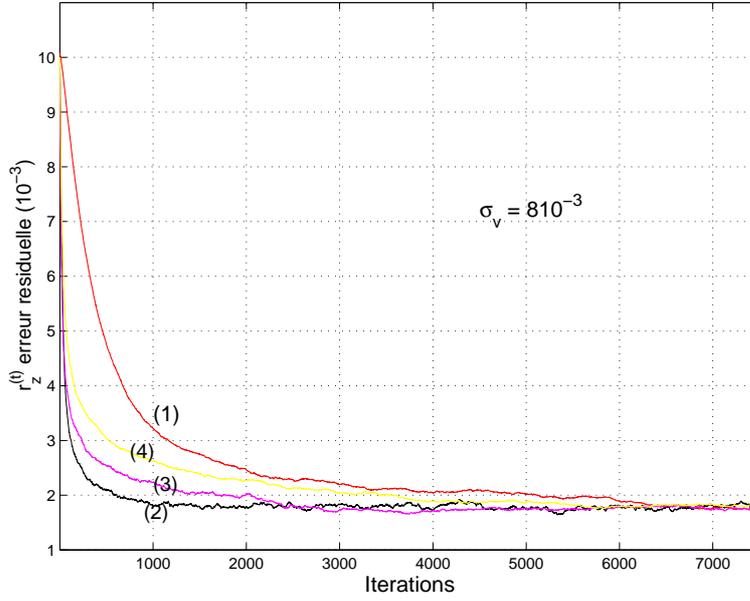


FIG. 4.5 – Réglage du paramètre σ_{rw} de l’algorithme 4.7. Convergence de l’erreur résiduelle $r_{\mathbf{z}}^{(t)}$ en fonction du paramètre d’échelle σ_{rw} ((1) : $\sigma_{rw} = 510^{-4}$, (2) : $\sigma_{rw} = 710^{-3}$, (3) : $\sigma_{rw} = 210^{-2}$, (4) : $\sigma_{rw} = 510^{-2}$) ($\sigma_v = 810^{-3}$, $RSB = 28dB$, $P(\mathbf{z} > 0.4) = 20\%$).

Une autre représentation des effets de réglage des paramètres σ_v et σ_{rw} sur la convergence de l’algorithme MCMC, est caractérisée par les valeurs obtenues de la probabilité d’acceptation individuelle moyenne

$$\bar{\rho}_k = \frac{1}{n_{mc}} \sum_{t=1}^{n_{mc}} \rho_k^{(t)}$$

où $\rho_k^{(t)}$ représente la probabilité d’acceptation calculée en (4.25) à chaque itération t pour la composante z_k du signal. L’indice k est choisi parmi ceux pour lesquels les valeurs en entrée des composantes sont fortement saturées. Sur la figure 4.6, on observe que l’algorithme est moins sélectif par rapport au paramètre d’échelle car $\bar{\rho}$ conserve des valeurs de 10% à 40% d’acceptation en moyenne quand σ_{rw} varie d’un facteur dix, entre 10^{-3} et 10^{-2} . En particulier, on remarque que la vitesse de convergence est comparativement meilleure dans le cas (2) quand le taux d’acceptation est de l’ordre de 30% et la valeur de l’échelle de la marche aléatoire approximativement égale à celle de la pénalisation σ_v .

Sur la figure 4.7, nous illustrons plusieurs séries de simulation pour montrer l’étendue des réglages permettant d’obtenir des résultats de restitution satisfaisants. Nous représentons trois exemples de variation de l’erreur résiduelle quadratique

$$R_z = \frac{1}{N} (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_{n_{mc}})^\top (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_{n_{mc}})$$

en fonction du paramètre de pénalisation σ_v . A chaque courbe correspond un rapport déterminé entre σ_v et l’échelle de la marche aléatoire σ_{rw} . Les valeurs des rapports utilisées sont telles que $\sigma_v/\sigma_{rw} = 5, 1$ et $1/5$. Les valeurs de σ_v sont représentées sur une échelle logarithmique et comparées à celle de l’écart-type σ_ε du bruit d’observation² placé à la sortie de la non-linéarité ϕ .

²On distingue effectivement σ_ε^2 la variance du bruit d’observation utilisé pour simuler les signaux intermédiaires et le paramètre σ_v qui contrôle en revanche, la régularisation du problème d’inversion.

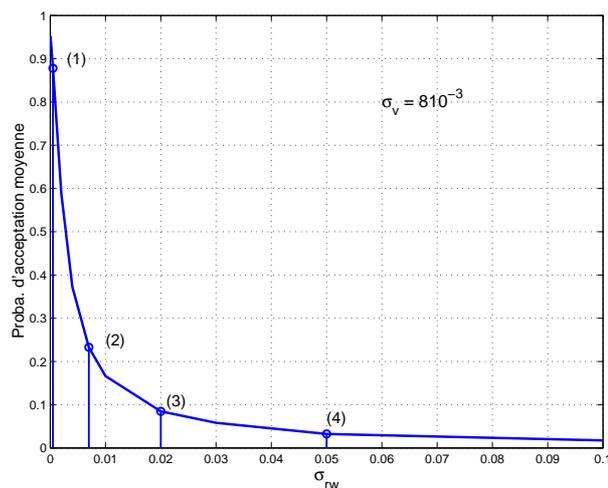


FIG. 4.6 – Probabilité d'acceptation individuelle moyenne ($\sigma_v = 810^{-3}$, $RSB = 28dB$, $P(\mathbf{z} > 0.4) = 20\%$).

Sur la même figure à droite, nous présentons les variations de l'erreur résiduelle R_z en fonction de l'échelle de la marche aléatoire et pour trois valeurs des paramètres de pénalisation. Les valeurs de σ_{rw} sont représentées sur une échelle logarithmique et comparées à celles des paramètres de pénalisation, fixées pendant les simulations.

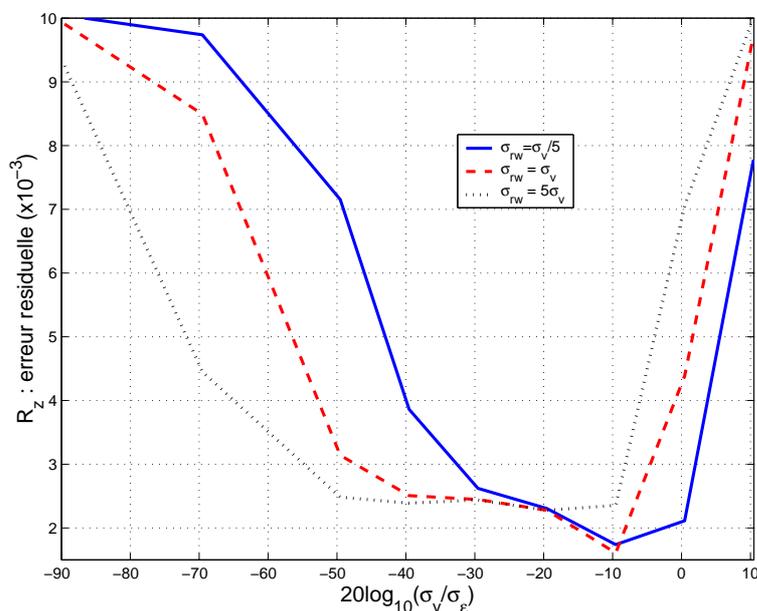


FIG. 4.7 – Simulation de l'algorithme 4.7 : Erreur de restitution R_z en fonction du paramètre de pénalisation σ_v . ($RSB = 28dB$, $P(\mathbf{z} > 0.4) = 20\%$, $n_{mc} = 7500$).

Sur la figure 4.7, on observe un intervalle de valeurs du paramètre de pénalisation représentant approximativement plus de trois décades du rapport $20 \log_{10}(\sigma_v/\sigma_\epsilon)$ pour lesquelles on obtient une minimisation satisfaisante de l'erreur résiduelle de restitution. En particulier, l'erreur résiduelle est minimale pour des valeurs de $-50dB$ à $-10dB$ du rapport bruit-pénalisation

($\sigma_{rw}/\sigma_v = 1$ ou 5). Si σ_v est fixée à une valeur trop petite, la relation entre les signaux avant et après la distorsion, est approximativement déterministe d'après l'équation de modélisation (4.15). La méthode d'inversion de la non-linéarité est alors mal-conditionnée et l'erreur résiduelle moyenne de restitution augmente à mesure que $\sigma_v/\sigma_\varepsilon$ diminue. Réciproquement, dès que la valeur du paramètre de pénalisation s'approche de celle de σ_ε , donc pour un écart relatif en décibels équivalent à moins de $20 \log_{10}(\sigma_v/\sigma_\varepsilon) \approx 0 \text{ dB}$, l'erreur de restitution n'est à nouveau, plus négligeable. Dans ces conditions, le terme d'attache aux données est trop petit par rapport à celui de la pénalisation.

4.5.3 Robustesse de la méthode d'échantillonnage avec partitionnement de \mathbf{z}

Nous présentons les performances de l'algorithme de compensation 4.6 de la non-linéarité ϕ du signal AR(12) en fonction du niveau du rapport signal-bruit déterminé par la valeur de σ_ε . Les coefficients $\theta_1, \dots, \theta_m$ de la modélisation, sont initialisés et échantillonnés conjointement avec les composantes du signal \mathbf{z} . On utilise les conditions simples d'initialisation telle que,

$$\theta^{(0)} = (\mathbf{L}_0^\top \mathbf{L}_0)^{-1} \mathbf{L}_0^\top \mathbf{z}_1^{(0)}$$

où la matrice \mathbf{L}_0 est la matrice de régression \mathbf{L} définie par (C.21), construite avec les composantes du vecteur $\mathbf{z}^{(0)}$. Les paramètres AR sont donc les solutions des moindres carrés linéaires (également maximum de la vraisemblance conditionnelle du modèle AR) en supposant que $\mathbf{z} = \mathbf{z}^{(0)}$. Le nombre d'itération est égale à $n_{mc} = 7500$.

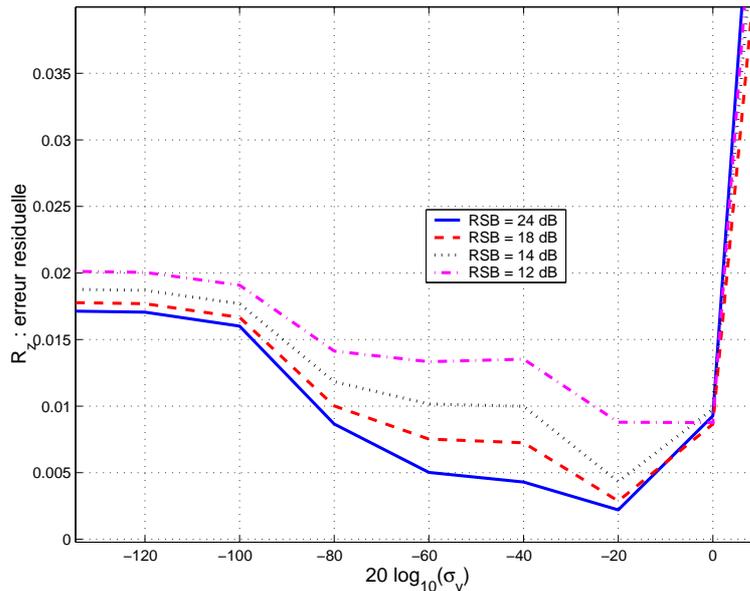


FIG. 4.8 – Simulation de l'algorithme de compensation (4.6). Erreur de résiduelle R_z en fonction du paramètre de pénalisation ($\sigma_{rw} = \sigma_v$) étant données plusieurs valeurs du rapport signal-bruit.

Sur la figure 4.8, nous illustrons les variations de l'erreur résiduelle de restitution R_z en fonction du réglage du paramètre de pénalisation quand le rapport échelle-pénalisation est égale à 1. Nous avons déterminé quatre niveaux du rapport signal-bruit tels que $RSB = 24, 18, 14, 12 \text{ dB}$.

L'intervalle des valeurs de σ_v pour lesquelles les performances de la restitution sont optimales représentent approximativement 30 à 40dB d'étendue, situé entre -60dB et -10dB . Les ordres

de grandeur concernant les valeurs de la pénalisation varient peu avec le niveau du RSB tant que $RSB \leq 14dB$. Si $20 \log_{10}(\sigma_v) = -20dB$, on observe que le minimum atteint de l'erreur résiduelle R_z est approximativement indépendant du niveau RSB . Si $RSB \geq 14dB$, les minimas de l'erreur résiduelle se déplacent vers les valeurs les plus grandes du réglage de la pénalisation, indiquant que le problème nécessite une plus forte régularisation de l'opération d'inversion de la non-linéarité.

Chapitre 5

Conclusion générale

La méthode de réduction des effets de la distorsion sonore proposée dans cette étude, utilise une modélisation paramétrique de type Hammerstein simple. Le chapitre 2 propose plusieurs expériences d'identification afin de distinguer la meilleure représentation des caractéristiques (fonction non-linéaire ϕ , fonction de transfert $H(e^{i\omega})$) du modèle en cascade choisi. Les éléments de discussion qui conduisent à l'utilisation de ce modèle, sont regroupés dans le chapitre 1. Le procédé complet de traitement d'un enregistrement comporte deux étapes distinctes :

1. Estimation autodidacte des paramètres du modèle de la distorsion à partir de la seule donnée de l'enregistrement distordu (chap. 3).
2. Compensation de la distorsion sonore à partir de la donnée de l'enregistrement et de celle des paramètres du modèle non-linéaire (chap. 4).

Les meilleurs résultats présentés dans cette étude, sont ceux où la distorsion non-linéaire est simulée numériquement. La difficulté majeure intervient dès que l'on applique le traitement sur des exemples de distorsions enregistrées. En particulier, les performances de la méthode d'estimation autodidacte sont très différentes selon que la distorsion sonore est simulée numériquement ou enregistrée sur des appareils audiofréquences. La faiblesse des estimations provient de la variabilité des caractéristiques du modèle représentant les effets de transmission. En effet, la fonction non-linéaire instantanée ϕ est choisie sous une forme polynomiale simple ce qui nous permet de déterminer la DSP du signal intermédiaire par application de la formule de Mehler. Mais sous cette forme, si le pourcentage d'échantillons saturés est trop petit, la fonction $\hat{\phi}$ estimée ne représentera pas correctement les effets brutaux de la limitation des amplitudes hautes du signal (cf. fig. 3.5). De même, la fonction de transfert $H(e^{i\omega})$ est un filtre linéaire tout-pôles ce qui permet d'inverser (suivant la condition de stabilité) simplement les effets linéaires du modèle de Hammerstein. Mais, de ce fait, la réponse en fréquence $\hat{H}(e^{i\omega})$ estimée pour les régions du spectre du signal où ses composantes spectrales sont très petites, sera peu satisfaisantes et fixée principalement par la condition de normalisation (2.5) du modèle (cf. fig. 2.11).

Les améliorations à apporter à la méthode d'estimation autodidacte portent sur, d'une part, la méthodes d'égalisation des quantiles (sec. 3.4.2) et d'autre part, sur le modèle de DSP *globale* (sec. 3.5.1). En effet, la méthode d'égalisation utilise un critère des moindres carrés uniforme alors que le lemme 1 démontre que la variance asymptotique des quantiles dépend de la dérivée $\dot{\phi}$ de la non-linéarité. Il serait donc nécessaire d'utiliser une fonction critère pondérée ou du moins, spécifiquement construite pour le cas des non-linéarités comparables aux écrêtages numériques. Aussi, le modèle de la DSP *globale* du signal désigne une enveloppe spectrale unique pour une succession de plusieurs dizaines de sous-signaux et la minimisation du critère de Whittle passe par le calcul du rapport entre les périodogrammes des signaux saturés et la DSP des signaux intermédiaires correspondants. Aucune méthode de détection d'effets de signaux transitoires

ou d'inadéquation du modèle de DSP *globale* n'est appliquée dans cette étude pour initialiser l'algorithme d'estimation autodidacte.

Par la suite, les difficultés liées à l'estimation des paramètres du modèle réduisent les chances d'obtenir des résultats démonstratifs de la méthode de compensation à partir d'enregistrements audio. La plupart des tests de traitement des saturations magnétiques que j'ai effectué à partir de la donnée des paramètres estimés dans les chapitres 2 et 3, ne sont pas satisfaisants. En pratique, si les valeurs des paramètres de $\hat{\phi}$ données à l'algorithme MCMC d'inversion ne sont pas correctes, le paramètre de couplage σ_v est ajusté de façon à favoriser les effets de la modélisation AR(m) gaussien du signal audio (régularisation du problème inverse) pendant sa reconstruction. Dans ces conditions, les signaux reconstruits sont généralement assez loin de la version originale.

Cependant, l'algorithme MCMC d'inversion reste un outil de modification du signal intéressant dans la mesure où il ne désigne pas de paramétrisation ou d'expression spécifique pour la non-linéarité $\hat{\phi}$. Contrairement à l'étape d'estimation autodidacte, $\hat{\phi}$ peut être définie sous une autre forme que polynomiale. Il est seulement nécessaire de pouvoir effectuer numériquement l'application $y = \hat{\phi}(z)$ et pour cela, utiliser une représentation mieux adaptée (fonctions à seuil, fonctions hyperboliques) aux problèmes des saturations brutales du signal audio. Dans le cadre d'une utilisation *ad-hoc* de la méthode de restauration, les caractéristiques de $\hat{\phi}$ et $\hat{H}(e^{i\omega})$ pourraient être déterminées empiriquement ou choisies sous des formes plus ou moins bien ajustées aux résultats de l'estimation autodidacte.

De même, l'algorithme MCMC pour le traitement des écrêtages incluant la condition de seuillage (c.f. sec. 4.2.3), n'apporte pas de performance audible plus intéressante que celle de l'algorithme de Gibbs standard. Cependant, cette étude montre comment conditionner la densité de probabilité *a posteriori* des échantillons manquants et apporte une amélioration du point de vue de l'interpolation du signal. Par ailleurs, certains problèmes à valeurs manquantes existent où les amplitudes perdues du signal audio, ne sont pas situées aux valeurs crêtes (distorsions de croisement dans les amplificateurs de classe A ou B) mais plutôt, au niveau d'amplitude nulle $Z_t = 0$. Pour ces cas, l'application requiert plus une condition de réduction à un intervalle fermé d'amplitude qu'une condition de seuillage dans la méthode de reconstruction.

Les distorsions sonores enregistrées pour cette étude sont relatives aux effets de la surmodulation d'un amplificateur de puissance (STUDER D19 micvalves) et aux saturations magnétiques des enregistreurs à bandes (STUDER A80 et STUDER A816). D'un point de vue modélisation, les effets non-linéaires d'amplification sont quasiment instantanés tandis que les variations de vitesse d'entraînement des enregistreurs à bandes magnétiques créent une difficulté supplémentaire qui n'est pas représentée par le modèle paramétrique choisi. Dans le cadre de l'évaluation des méthodes d'identification, il est intéressant de réunir d'autres exemples de caractérisation (effets hauts-parleurs, saturations microphones, enregistrements sur bandes optiques ou distorsions d'inscriptions sur disques de cires) de la distorsion non-linéaire sonore.

Annexe A

Les moindres carrés non-linéaires

Cette annexe présente les méthodes des moindres carrés adaptées aux variantes du modèle de Hammerstein décrites dans le chapitre 2. Nous explicitons les formulations matricielles associées aux paramétrisations (2.4) et (2.3) du filtre linéaire et aux représentations (2.6) et (2.8) de la non-linéarité ϕ . Ainsi, à chaque paramétrisation du modèle de distorsion correspond une expression du critère des moindres carrés. L'estimation entrée-sortie des paramètres est déterminée par la minimisation de ces critères. Nous dérivons donc ci-dessous les algorithmes adaptés aux formulations utilisées dans le chapitre 2 pour l'identification du modèle de distorsion à partir des signaux enregistrés en entrée (Z_1, \dots, Z_n) et en sortie (X_1, \dots, X_n) des appareils testés.

A.1 Modèle avec partie linéaire tout pôles et ϕ polynomiale

La modélisation (2.4) combinée avec l'approximation (2.6) de ϕ est linéaire par rapport aux coefficients ($\alpha_1, \dots, \alpha_d$) du polynôme et (a_1, \dots, a_p) du filtrage linéaire. Elle admet la formulation matricielle équivalente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_{p+1} \\ X_{p+2} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_{-p}} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_p & \dots & X_1 & Z_{p+1} & \dots & Z_{p+1}^d/d! \\ X_{p+1} & \dots & X_2 & Z_{p+2} & \dots & Z_{p+2}^d/d! \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n-1} & \dots & X_{n-p} & Z_n & \dots & Z_n^d/d! \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}_{xz}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_{a,\alpha}} + \begin{pmatrix} e_{p+1} \\ e_{p+2} \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Les coefficients a_1, \dots, a_p du filtre tout pôles et ceux $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ de la décomposition polynomiale sont déterminés par la solution $\hat{\mathbf{c}}_{a,\alpha}$ des moindres carrés linéaires du critère J_1 avec

$$J_1(a_1, \dots, a_p, \alpha_1, \dots, \alpha_d) = \frac{1}{(n-p)} (\mathbf{X}_{-p} - \mathbf{M}_{xz} \mathbf{c}_{a,\alpha})^\top (\mathbf{X}_{-p} - \mathbf{M}_{xz} \mathbf{c}_{a,\alpha}) \quad (\text{A.2})$$

et est définie par

$$\hat{\mathbf{c}}_{a,\alpha} = \mathbf{M}_{xz}^\dagger \mathbf{X}_{-p} \quad (\text{A.3})$$

où $\mathbf{M}_{xz}^\dagger = (\mathbf{M}_{xz}^\top \mathbf{M}_{xz})^{-1} \mathbf{M}_{xz}^\top$ désigne la matrice pseudo-inverse de \mathbf{M}_{xz} . Pour une décomposition polynomiale comportant que les termes d'ordre impair, on notera $\mathbf{M}_{xz}^{(2d'+1)}$, la matrice de régression obtenue à partir de \mathbf{M}_{xz} en supprimant les colonnes de puissance paire. La solution des moindres carrés linéaire du modèle avec une décomposition impaire sera notée de même

$$\hat{\mathbf{c}}_{a,\alpha}^{(2d'+1)} = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_3, \dots, \hat{\alpha}_{2d'+1}]^\top$$

avec $2d' + 1 = d$, où d est le degré impair maximum choisi pour la décomposition (2.6).

A.2 Modèle avec partie linéaire tout pôles et ϕ hyperbolique

La modélisation (2.4) utilisée avec l'approximation (2.8) de ϕ admet la formulation matricielle équivalente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_{p+1} \\ X_{p+2} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_{-p}} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_p & \dots & X_1 & \tanh(\beta_1 Z_{p+1}) & \dots & \tanh(\beta_d Z_{p+1}) \\ X_{p+1} & \dots & X_2 & \tanh(\beta_1 Z_{p+2}) & \dots & \tanh(\beta_d Z_{p+2}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n-1} & \dots & X_{n-p} & \tanh(\beta_1 Z_n) & \dots & \tanh(\beta_d Z_n) \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_{xz}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_{a,\alpha}} + \begin{pmatrix} e_{p+1} \\ e_{p+2} \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

et le critère des moindres carrés associé est défini par l'égalité

$$J_2(\mathbf{c}_{a,\alpha}, \beta_1, \dots, \beta_d) = \frac{1}{(n-p)} (\mathbf{X}_{-p} - \mathbf{K}_{xz} \mathbf{c}_{a,\alpha})^\top (\mathbf{X}_{-p} - \mathbf{K}_{xz} \mathbf{c}_{a,\alpha}) \quad (\text{A.4})$$

Le critère J_2 est quadratique par rapport aux coefficients a_1, \dots, a_p et $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et de ce fait, on peut déterminer à nouveau la solution des moindres carrés linéaire $\hat{\mathbf{c}}_{a\alpha}$ telle que

$$\hat{\mathbf{c}}_{a\alpha} = \mathbf{K}_{xz}^\dagger \mathbf{X}_{-p}$$

où $\mathbf{K}_{xz}^\dagger = (\mathbf{K}_{xz}^\top \mathbf{K}_{xz})^{-1} \mathbf{K}_{xz}^\top$ est la matrice pseudo-inverse de \mathbf{K}_{xz} . Cependant, J_2 est non quadratique par rapport aux paramètres β_1, \dots, β_d et de ce fait, la minimisation de J_2 passe par l'utilisation d'un algorithme itératif d'optimisation des paramètres de la modélisation. Pour cela, nous proposons d'utiliser la méthode des moindres carrés à variables séparées [Golub and Pereyra, 1973]. On définit le critère réduit $J_2^{(r)}(\beta_1, \dots, \beta_d)$ à partir de (A.4) en remplaçant $\mathbf{c}_{a,\alpha}$ par la solution des moindres carrés linéaires $\mathbf{K}_{xz}^\dagger \mathbf{X}_{-p}$ dans le critère global et tel que

$$\begin{aligned} J_2^{(r)}(\beta_1, \dots, \beta_d) &= \frac{1}{(n-p)} (\mathbf{X}_{-p} - \mathbf{K}_{xz} \mathbf{K}_{xz}^\dagger \mathbf{X}_{-p})^\top (\mathbf{X}_{-p} - \mathbf{K}_{xz} \mathbf{K}_{xz}^\dagger \mathbf{X}_{-p}) \\ &= \frac{1}{(n-p)} \|\mathbf{P}_{\mathbf{K}_{xz}}^\perp \mathbf{X}_{-p}\|^2 \end{aligned}$$

où par définition, $\mathbf{P}_{\mathbf{K}_{xz}} = \mathbf{K}_{xz} \mathbf{K}_{xz}^\dagger$ et $\mathbf{P}_{\mathbf{K}_{xz}}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{K}_{xz}}$ sont respectivement l'opérateur de projection orthogonale et celui complémentaire associés aux colonnes de la matrice \mathbf{K}_{xz} .

Algorithme A.1 Méthode des moindres carrés pour l'identification entrée-sortie du modèle Hammerstein représenté avec une non-linéarité instantanée de type tangente hyperbolique et un filtre linéaire tout-pôles.

1. Optimisation numérique du critère réduit $J_2^{(r)}$
 $(\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_d) = \arg \min_{\mathbb{R}^d} (J_2^{(r)}(\beta_1, \dots, \beta_d))$
 2. Déterminer $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p$ et $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_d$ sachant, $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_d$
 $\hat{\mathbf{c}}_{a\alpha} = \mathbf{K}_{xz}^\dagger \mathbf{X}_{-p}$
-

La méthode proposée consiste à effectuer les deux étapes décrites par A.1. L'étape de minimisation du critère réduit $J_2^{(r)}$ est réalisée par une méthode de relaxation standard de type

Quasi-Newton. Les composantes du gradient de $J_2^{(r)}$ par rapport aux paramètres β_1, \dots, β_d sont déterminées par

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left(J_2^{(r)}(\beta_1, \dots, \beta_d) \right) = \frac{1}{(n-p)} \mathbf{X}_{-p}^\top \mathbf{P}_{\mathbf{K}_{xz}}^\perp \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{xz}}{\partial \beta_k} \right) \mathbf{K}_{xz}^\dagger \mathbf{X}_{-p}$$

où $\partial \mathbf{K}_{xz} / \partial \beta_k$ est la matrice obtenue à partir de \mathbf{K}_{xz} après différentiation de ses éléments par rapport à la variable β_k .

A.3 Modèle avec partie linéaire RIF et ϕ polynomiale

Dans le cas de la modélisation (2.3) utilisée avec l'approximation polynomiale (2.6), les coefficients sont aussi linéaires par rapport aux observations mais il existe une indétermination entre le coefficient α_1 d'ordre 1 de ϕ et les coefficients b_0, \dots, b_q du filtrage à RIF, d'après la relation (2.14). Nous proposons donc de fixer le premier coefficient du filtrage tel que $b_0 = 1$. Nous obtenons deux formulations équivalentes de l'équation de transmission

$$\mathbf{X}_{-q} = \phi(\mathbf{Z}_{-q}) + \mathbf{M}_\alpha \mathbf{b} + \mathbf{e} \quad (\text{A.5})$$

$$= \mathbf{H}_b \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e} \quad (\text{A.6})$$

où on note $\mathbf{e} = (e_{q+1}, \dots, e_n)^\top$ le vecteur de bruit blanc additif, $\mathbf{X}_{-q} = (X_{q+1}, \dots, X_n)^\top$ le vecteur signal de sortie

$$\phi(\mathbf{Z}_{-q}) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d \frac{\alpha_k}{k!} Z_{q+1}^k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^d \frac{\alpha_k}{k!} Z_n^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_\alpha = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d \frac{\alpha_k}{k!} Z_q^k & \cdots & \sum_{k=1}^d \frac{\alpha_k}{k!} Z_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^d \frac{\alpha_k}{k!} Z_{n-1}^k & \cdots & \sum_{k=1}^d \frac{\alpha_k}{k!} Z_{n-q}^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$\mathbf{H}_b = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^q b_j Z_{q+1-j} & \cdots & \sum_{j=0}^q b_j Z_{q+1-j}^d / d! \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=0}^q b_j Z_{n-j} & \cdots & \sum_{j=0}^q b_j Z_{n-j}^d / d! \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$$

La minimisation du critère des moindres carrés

$$\begin{aligned} J_3(\mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{(n-q)} (\mathbf{X}_{-q} - \phi(\mathbf{Z}_{-q}) - \mathbf{M}_\alpha \mathbf{b})^\top (\mathbf{X}_{-q} - \phi(\mathbf{Z}_{-q}) - \mathbf{M}_\alpha \mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{(n-q)} (\mathbf{X}_{-q} - \mathbf{H}_b \boldsymbol{\alpha})^\top (\mathbf{X}_{-q} - \mathbf{H}_b \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned}$$

associé aux deux formulations équivalentes est réalisée par l'algorithme itératif A.2 de relaxation du critère J_3 suivant ($n_{ite} \in \mathbb{N}$), où on a défini respectivement par $\mathbf{M}_\alpha^\dagger = (\mathbf{M}_\alpha^\top \mathbf{M}_\alpha)^{-1} \mathbf{M}_\alpha^\top$ et $\mathbf{H}_b^\dagger = (\mathbf{H}_b^\top \mathbf{H}_b)^{-1} \mathbf{H}_b^\top$ les matrices pseudo-inverses associées à \mathbf{M}_α et \mathbf{H}_b .

À l'étape 0, ϕ est supposée linéaire pour initialiser l'algorithme. On pourra aussi utiliser les solutions déterminées par (A.3). Dans l'étape 1, on effectue n_{ite} itérations qui déterminent alternativement les solutions qui annulent les composantes du gradient de J_3 relatives aux coefficients \mathbf{b} et $\boldsymbol{\alpha}$. On calcule d'une part, la solution des moindres carrés linéaires pour les coefficients $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)^\top$ du filtrage quand les coefficients du polynôme sont connus

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{M}_\alpha^\dagger (\mathbf{X}_{-q} - \phi(\mathbf{Z}_{-q}))$$

Algorithme A.2 Méthode des moindres carrés pour l'identification entrée-sortie du modèle de Hammerstein, représenté avec une non-linéarité de type polynomiale et un filtre linéaire RIF

0. Initialisation : $\hat{\alpha}_1 = 1$ et $\hat{\alpha}_k = 0$ ($k = 2, \dots, d$).
 1. Pour, $i = 1, \dots, n_{ite}$
 - . Déterminer, $\hat{\mathbf{b}}^{(i)}$ avec $\boldsymbol{\alpha} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(i-1)}$:

$$\hat{\mathbf{b}}^{(i)} = \mathbf{M}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}^{\dagger} (\mathbf{X}_{-q} - \phi(\mathbf{Z}_{-q}))$$
 - . Déterminer, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)}$ avec $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}^{(i)}$:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)} = \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{b}}}^{\dagger} \mathbf{X}_{-q}$$
 2. Identifier, $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}^{(n_{ite})}$ et $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(n_{ite})}$
-

Puis, d'autre part, la solution des moindres carrés linéaire pour les coefficients $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^{\top}$ du polynôme quand les coefficients du filtrage sont connus

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{b}}}^{\dagger} \mathbf{X}_{-q}$$

A l'étape 3, on identifie les caractéristiques du modèle à partir des solutions obtenues à l'itération n_{ite} .

A.4 Modèle avec partie linéaire RIF et ϕ hyperbolique

La modélisation (2.3) avec l'approximation (2.8) de ϕ admet une formulation matricielle équivalente

$$\mathbf{X}_{-q} = \phi(\mathbf{Z}_{-q}) + \mathbf{M}_{\alpha, \beta} \mathbf{b} + \mathbf{e}$$

où on fixe comme précédemment $b_0 = 1$ pour lever l'indétermination entre les caractéristiques des deux sous-systèmes et avec les définitions suivantes

$$\phi(\mathbf{Z}_{-q}) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d \alpha_k \tanh(\beta_k Z_{q+1}) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^d \alpha_k \tanh(\beta_k Z_n) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d \alpha_k \tanh(\beta_k Z_q) & \dots & \sum_{k=1}^d \alpha_k \tanh(\beta_k Z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^d \alpha_k \tanh(\beta_k Z_{n-1}) & \dots & \sum_{k=1}^d \alpha_k \tanh(\beta_k Z_{n-q}) \end{pmatrix}$$

La minimisation du critère des moindres carrés correspondant

$$J_4(\mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{(n-q)} (\mathbf{X}_{-q} - \phi(\mathbf{Z}_{-q}) - \mathbf{M}_{\alpha, \beta} \mathbf{b})^{\top} (\mathbf{X}_{-q} - \phi(\mathbf{Z}_{-q}) - \mathbf{M}_{\alpha, \beta} \mathbf{b}) \quad (\text{A.7})$$

où on note $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^{\top}$ et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_d)^{\top}$, est réalisée par l'algorithme itératif A.3.

A l'étape 0, on initialise les paramètres de ϕ en considérant un seul un terme dans la combinaison (2.8). A l'étape 1, on effectue n_{ite} itérations qui alternent entre la solution des moindres carrés linéaire pour les coefficients \mathbf{b} :

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{M}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}}^{\dagger} \mathbf{X}_{-q}$$

où, la matrice $\mathbf{M}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}}^{\dagger} = (\mathbf{M}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}}^{\top} \mathbf{M}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}})^{-1} \mathbf{M}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}}^{\top}$ est appelée pseudo-inverse de $\mathbf{M}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}}$ et l'optimisation numérique du critère J_4 par rapport à $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ quand les coefficients de filtrage sont fixés. Enfin,

Algorithme A.3 Méthodes des moindres carrés pour l'identification entrée-sortie du modèle de Hammerstein représenté avec une non-linéarité instantanée de type tangente hyperbolique et un filtre linéaire RIF.

0. Initialisation $\hat{\alpha}_1^{(0)} = 1$ et $\hat{\beta}_1^{(0)} = 2$ et $(\hat{\alpha}_k^{(0)}, \hat{\beta}_k^{(0)}) = (0, 0)$ $k = 2, \dots, d$
 1. Pour, $i = 1, \dots, n_{ite}$
 - . Déterminer $\hat{\mathbf{b}}^{(i)}$ quand $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}^{(i-1)}, \boldsymbol{\beta}^{(i-1)})$
 $\hat{\mathbf{b}}^{(i)} = \mathbf{M}_{\alpha, \beta}^\dagger (\mathbf{X}_{-q} - \phi(\mathbf{Z}_{-q}))$
 - . Optimisation partielle de J_4 quand $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(i)}$
 $(\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}) = \arg \min_{\mathbb{R}^{2d}} (J_4(\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))$
 2. Identifier
 $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}^{(n_{ite})}$
 $(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(n_{ite})}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(n_{ite})})$
-

on identifie à l'étape 2, les caractéristiques du modèle à partir des solutions obtenues après convergence de l'étape 1 à l'itération n_{ite} .

L'optimisation numérique du critère par rapport à $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ est réalisée par un algorithme de relaxation de type Quasi-Newton pour lequel on peut préciser l'expression des composantes du gradient de J_4 :

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} J_4 = \frac{1}{(n-q)} \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{Z}_{-q})}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \mathbf{M}_{\alpha, \beta}}{\partial \alpha_k} \mathbf{b} \right)^\top (\mathbf{X}_{-q} - \phi(\mathbf{Z}_{-q}) - \mathbf{M}_{\alpha, \beta} \mathbf{b})$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_k} J_4 = \frac{1}{(n-q)} \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{Z}_{-q})}{\partial \beta_k} + \frac{\partial \mathbf{M}_{\alpha, \beta}}{\partial \beta_k} \mathbf{b} \right)^\top (\mathbf{X}_{-q} - \phi(\mathbf{Z}_{-q}) - \mathbf{M}_{\alpha, \beta} \mathbf{b})$$

où $\partial \phi(\mathbf{Z}_{-q}) / \partial \alpha_k$ et $\partial \mathbf{M}_{\alpha, \beta} / \partial \alpha_k$ sont respectivement le vecteur et la matrice obtenus après différentiation des composantes de $\phi(\mathbf{Z}_{-q})$ (et resp. de $\mathbf{M}_{\alpha, \beta}$) par rapport aux paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_d$. On définit de même $\partial \phi(\mathbf{Z}_{-q}) / \partial \beta_k$ et $\partial \mathbf{M}_{\alpha, \beta} / \partial \beta_k$ obtenus après différentiation des composantes de $\phi(\mathbf{Z}_{-q})$ et de $\mathbf{M}_{\alpha, \beta}$ par rapport aux paramètres β_1, \dots, β_d .

Annexe B

La base des polynômes d'Hermite

Dans cette annexe, nous présentons quelques propriétés importantes vérifiées par les polynômes d'Hermite [Abramovitz and Stegun, 1965]. Ces propriétés sont utilisées dans le cadre de notre application pour représenter les effets de la fonction non-linéaire ϕ du modèle de distorsion et déterminer le comportement de la variable transformée $Y_t = \phi(Z_t)$ quand Z_t est une variable aléatoire distribuée sous une loi gaussienne centrée, de variance connue.

Dans la première partie de cette annexe, nous présentons la définition des polynômes d'Hermite et la propriété d'orthogonalité par rapport à la mesure gaussienne. Dans la seconde partie, nous établissons la formule de Mehler (B.2) qui sera utile pour déterminer les propriétés du second ordre (fonction d'auto-corrélation) de la séquence Y_1, \dots, Y_N en fonction de celles de la séquence Z_1, \dots, Z_N . Enfin dans la dernière partie, nous établissons la relation (B.7) qui permet de déterminer les coefficients d'Hermite quand la fonction ϕ admet un développement en puissances à un ordre limité.

B.1 Définition

Les polynômes d'Hermite $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont définis par

$$H_0 = 1, \quad H_k(z) = (-1)^k e^{z^2/2} \frac{d^k}{dz^k} (e^{-z^2/2}), \quad k \geq 1.$$

qui permet d'obtenir itérativement l'expression des fonctions polynomiales à tous les ordres $k > 1$. On obtient les expressions suivantes pour $k = 1, \dots, 9$;

$$\begin{aligned} H_0(z) &= 1, & H_1(z) &= z, & H_2(z) &= -1 + z^2, & H_3(z) &= -3z + z^3 \\ H_4(z) &= 3 - 6z^2 + z^4, & H_5(z) &= 15z - 10z^3 + z^5 \\ H_6(z) &= -15 + 45z^2 - 15z^4 + z^6, & H_7(z) &= -105z + 105z^3 - 21z^5 + z^7 \\ H_8(z) &= 105 - 420z^2 + 210z^4 - 28z^6 + z^8, & H_9(z) &= 945z - 1260z^3 + 378z^5 - 36z^7 + z^9 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Les polynômes d'Hermite forment une famille de fonctions orthogonales par rapport à la mesure gaussienne $\mathcal{N}(0, 1; z) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-z^2/2)$ définie sur \mathbb{R} . Ils vérifient la relation d'orthogonalité

$$\mathbb{E}_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)} [H_k(Z)H_l(Z)] = k! \delta(k - l)$$

et constituent une base de Hilbert de l'espace des fonctions de carrés intégrables sous la loi normale centrée, réduite. Par exemple, si la fonction ψ est définie sur \mathbb{R} et vérifie la condition

$E_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}[\psi(Z)^2] < \infty$, alors elle admet une décomposition linéaire de la forme

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} H_k$$

où, c_k est le k -ème coefficient d'Hermite associé à la fonction de ψ tel que

$$c_k = E_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)}[H_k(Z)\psi(Z)].$$

On appelle rang d'Hermite de ψ , le plus petit entier k tel que $c_k(\psi) \neq 0$.

B.2 Formule de Mehler

La formule de Mehler est un résultat utile dans le cadre de l'étude des moments statistiques des fonctions de variables gaussiennes. Ce résultat indique que si Z_1 et Z_2 sont deux variables gaussiennes conjointes centrées, réduites et de corrélation $\rho \in [-1, 1]$ alors, on a la relation

$$E \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right) [H_k(Z_1)H_l(Z_2)] = k! \rho^k \delta(k-l) \quad (\text{B.2})$$

où H_k et H_l sont les polynômes d'Hermite respectivement d'ordre k et l .

preuve : Soit $k \geq l$. La valeur de l'espérance mathématique (B.2) est définie par l'intégrale suivante,

$$\begin{aligned} E[H_k(Z_1)H_l(Z_2)] &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int \int H_k(z_1)H_l(z_2) e^{-\frac{z_1^2+z_2^2-2\rho z_1 z_2}{2(1-\rho^2)}} dz_1 dz_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int \int H_k(u)H_l(\rho u + v) e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2(1-\rho^2)}} du dv \end{aligned}$$

où, on a effectué le changement de variables $z_1 = u$ et $z_2 = \rho u + v$ pour établir la seconde égalité.

D'après la formule d'addition vérifiée par les polynômes d'Hermite, on a la propriété

$$H_l(\rho u + v) = \sum_{i=0}^l \frac{1}{2^{l/2}} \binom{l}{i} H_i(\rho u \sqrt{2}) H_{l-i}(v \sqrt{2}) \quad (\text{B.3})$$

ainsi, en utilisant cette égalité puis en ordonnant les termes sous le double signe d'intégration, de manière à faire sortir la somme discrète, on obtient

$$\begin{aligned} E[H_k(Z_1)H_l(Z_2)] &= \frac{2^{-l/2}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{i=0}^l \left(\int H_k(u)H_i(\rho u \sqrt{2}) e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \left(\int H_{l-i}(v \sqrt{2}) e^{-\frac{v^2}{2(1-\rho^2)}} dv \right) \\ &= \frac{2^{-l/2}}{2\pi} \sum_{i=0}^l \left(\int H_k(u)H_i(\rho u \sqrt{2}) e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \left(\int H_{l-i}(w \sqrt{2(1-\rho^2)}) e^{-\frac{w^2}{2}} dw \right) \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue en faisant le changement de variable $w = v/\sqrt{(1-\rho^2)}$ sous le second signe d'intégration.

Pour évaluer l'intégrale associée à la variable w , nous appliquons exactement la formule ([Gradshteyn and Ryzhik, 1965], p.837 7.373-2)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int H_{l-i}(w \sqrt{2(1-\rho^2)}) e^{-\frac{w^2}{2}} dw = 2^{-(l-i)/2} \frac{(l-i)!}{\left(\frac{l-i}{2}\right)!} (2\rho^2 - 1)^{(l-i)/2}$$

Pour évaluer la seconde intégrale associée à la variable u , nous utilisons les deux formules fondamentales ([Gradshteyn and Ryzhik, 1965], p.837 7.374-3,4)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int H_k(u) H_i(\rho u \sqrt{2}) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \begin{cases} 0 & \text{si } i < k \\ k!(\rho\sqrt{2})^k & \text{si } i = k \end{cases}$$

Ainsi, tant que $l < k$, l'espérance mathématique (B.2) est identiquement nulle à cause de l'intégrale associée à la variable u . Si $k = l$, on a exactement

$$E[H_k(Z_1)H_l(Z_2)] = k!\rho^k$$

Enfin, si on suppose que $k < l$, on peut établir de la même manière que l'espérance mathématique est identiquement nulle en échangeant les indices de sommation dans la relation d'addition (B.3).

B.3 Coefficients d'Hermite d'un polynôme simple

Dans cette section, nous considérons le cas plus général où la mesure n'est plus à variance unitaire. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. On déduit simplement des résultats précédents que les polynômes notés $(H_k^\sigma)_{k \in \mathbb{N}}$ définis par l'égalité $H_k^\sigma(z) = H_k(z/\sigma)$ forment une famille de fonctions orthogonales par rapport à la mesure gaussienne centrée, de variance σ^2 et vérifient la relation d'orthogonalité

$$E_{Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)}[H_k^\sigma(Z)H_l^\sigma(Z)] = k!\delta(k - l).$$

Soit ϕ une fonction de carré intégrable par rapport à la mesure gaussienne centrée, de variance σ^2 . ϕ admet une décomposition polynomiale

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^\sigma}{k!} H_k^\sigma \tag{B.4}$$

où, $c_k^\sigma = E_{Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)}[H_k^\sigma(Z)\phi(Z)]$ est le coefficient d'Hermite d'ordre k de ϕ pour la mesure spécifiée.

La difficulté est que l'on ne sait pas évaluer de façon générale l'intégrale

$$c_k^\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int H_k(z)\phi(\sigma z)e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

qui détermine les coefficients d'Hermite d'ordre k en fonction du niveau de variance σ^2 et éventuellement en fonction des paramètres de la fonction ϕ .

Cependant, nous proposons de résoudre cette difficulté en supposant que la fonction est correctement approximée par un développement en série d'ordre fini d de la forme

$$\phi(z) = \sum_{i=0}^d \alpha_i z^i / i!$$

où, $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont les coefficients réels de la décomposition linéaire polynomiale. Dans ces conditions, les coefficients $c_1^\sigma, \dots, c_d^\sigma$ sont déterminés par l'égalité suivante

$$c_0^\sigma H_0(z) + \dots + c_d^\sigma / d! H_d(z) = \alpha_0 + \dots + \alpha_d / d! (\sigma z)^d \tag{B.5}$$

qui permet d'identifier les fonctions (B.4) et (B.3) en tous points $z \in \mathbb{R}$.

Supposons la variance σ^2 et les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ de la fonction ϕ connus. La condition (B.5) prise sous une forme matricielle s'écrit de la manière suivante

$$(H_0(z), H_1(z), \dots, H_d(z)) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 1/d! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^\sigma \\ c_1^\sigma \\ \vdots \\ c_d^\sigma \end{pmatrix} = (1, z, \dots, z^d) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & \sigma^d/d! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

De plus, la famille des polynômes d'Hermite est définie par la matrice des coefficients de H_0, \dots, H_d sur la base des monômes $1, Z, \dots, Z^d$ telle que

$$(H_0(z), H_1(z), \dots, H_d(z)) = (1, z, \dots, z^d) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{H_d} \end{pmatrix}$$

où, \mathbf{P}_{H_d} est la matrice de changement de base qui représente en colonne les coefficients (B.1) des polynômes d'Hermite. On obtient par exemple si $k = 3, 4, 5$ les matrices triangulaires

$$\mathbf{P}_{H_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}_{H_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}_{H_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, en remplaçant le vecteur $(H_0(z), \dots, H_d(z))$ dans la relation (B.6) par son expression polynomiale simple, on établit la condition d'identification qui détermine les coefficients d'Hermite $c_0^\sigma, \dots, c_d^\sigma$ de ϕ en fonction de la variance σ de la mesure associée et des coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ telle que

$$\begin{pmatrix} c_0^\sigma \\ c_1^\sigma \\ \vdots \\ c_d^\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & d! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{H_d}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & \sigma^d/d! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Dans le cas particulier où la fonction ϕ est impaire, les coefficients d'Hermite d'ordre pair sont identiquement nuls ($c_{2k}^\sigma = 0$) et on détermine directement à partir de la relation (B.7), les expressions suivantes pour $d = 3, 5, 7$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1^\sigma \\ c_3^\sigma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma & 1/2\sigma^3 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_1^\sigma \\ c_3^\sigma \\ c_5^\sigma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma & 1/2\sigma^3 & 1/8\sigma^5 \\ 0 & \sigma^3 & 1/2\sigma^5 \\ 0 & 0 & \sigma^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_1^\sigma \\ c_3^\sigma \\ c_5^\sigma \\ c_7^\sigma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma & 1/2\sigma^3 & 1/8\sigma^5 & 1/48\sigma^7 \\ 0 & \sigma^3 & 1/2\sigma^5 & 1/8\sigma^7 \\ 0 & 0 & \sigma^5 & 1/2\sigma^7 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_7 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Annexe C

Traitement bayésien du modèle AR gaussien

Cette section est consacrée à l'étude des densités de probabilités du modèle autorégressif (AR) gaussien. Plus précisément, nous présentons les hypothèses sur les lois *a priori* des paramètres et les calculs utiles permettant de dériver la forme explicite des fonctions suivantes,

- $p(\mathbf{z} \mid \theta, \sigma_e^2)$: La fonction de vraisemblance du modèle AR(m).
 - $p(\theta \mid \mathbf{z}, \sigma_e^2)$: La densité de probabilité conditionnelle des coefficients linéaires.
 - $p(\sigma_e^2 \mid \theta, \mathbf{z})$: La densité de probabilité conditionnelle de la variance de la séquence d'innovation gaussienne.
 - $p(\mathbf{z}_I \mid \theta, \sigma_e^2, \mathbf{z}_{-I})$: La densité de probabilité conditionnelles des observations manquantes.
- avec les notations correspondantes.

Les techniques de compensation de la distorsion proposées dans le chapitre 4 sont basées sur la modélisation AR(m) des signaux d'entrées. Les lois conditionnelles sont utilisées dans l'algorithme 4.1 pour la correction des écrêtages et dans l'algorithme 4.4 pour la compensation de la distorsion quand la caractéristique de la fonction non-linéaire est connue.

Nous rappelons ici les notations principales de la modélisation AR(m) qui sont celles utilisées dans le chapitre 4 sur les méthodes de compensation des distorsions : Soient $\theta_1, \dots, \theta_m$ les coefficients du modèle linéaire. On dit que la séquence de variables aléatoires Z_1, \dots, Z_N suit un modèle auto-régressif d'ordre m si $\forall k \in [(m+1), N]$, on a

$$Z_k = \sum_{i=1}^m \theta_i Z_{k-i} + e_k$$

où $e_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$ et la séquence (Z_1, \dots, Z_m) étant distribuée sous la loi stationnaire du modèle. Soit l'intervalle $I = [i_1, i_2]$ défini par les deux indices entiers tels que $(m+1) \leq i_1 \leq i_2 \leq (N-m)$. Les échantillons successifs $(z_{i_1}, \dots, z_{i_2})$ du signal sont supposés perdus ou manquants. Le vecteur-signal $\mathbf{z}_{-I} = [z_1 \dots z_{i_1-1} z_{i_2+1} \dots z_N]^\top$ représente les observations enregistrées partout ailleurs sur l'intervalle $[1, N]$ et $\mathbf{z}_I = [z_{i_1} \dots z_{i_2}]^\top$ sont les valeurs manquantes. De plus, on note $\theta = [\theta_1 \dots \theta_m]^\top$ le vecteur des coefficients du modèle. Enfin, le vecteur des observations $\mathbf{z} = [z_1 \dots z_N]^\top$ est séparé en deux sous-vecteurs ; $\mathbf{z}_1 = [z_{m+1} \dots z_N]^\top$ et $\mathbf{z}_0 = [z_1 \dots z_m]^\top$ qui représente les m premiers échantillons.

C.1 Fonction de vraisemblance

La forme explicite de la densité de probabilité conditionnelle $p(\mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e)$ est déduite de l'hypothèse que la séquence d'innovation est gaussienne [Janssen et al., 1986]. En effet, la

densité de probabilité jointe des variables (e_{m+1}, \dots, e_N) est donnée par le produit des densités marginales

$$p_{\mathbf{e}}(e_{m+1}, \dots, e_N) = \prod_{k=m+1}^N p_{\mathcal{N}(0, \sigma_e^2)}(e_k)$$

D'un autre côté, l'observation est une combinaison linéaire des m échantillons qui précèdent. On montre simplement que le jacobien de la transformation linéaire, défini par le déterminant de la matrice

$$\mathbf{J} \left(\begin{array}{c} e_{m+1}, \dots, e_N \\ z_{m+1}, \dots, z_N \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ -\theta_1 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ -\theta_m & & & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & -\theta_m & \dots & -\theta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

est identiquement égal à 1. De ce fait, on explicite la forme de la densité $p(\mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e)$ en effectuant le changement de variable $e_k = z_k - \sum_{i=1}^m \theta_i z_{k-i}$ dans l'expression de la densité jointe de la séquence iid. Ainsi, la densité de probabilité des observations conditionnellement aux m premiers échantillons de la trame est déterminée par la densité de probabilité

$$p(\mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2) = \prod_{k=m+1}^N p_{\mathcal{N}(0, \sigma_e^2)}(z_k - \sum_{i=1}^m \theta_i z_{k-i}) \quad (\text{C.1})$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma_e^2)^{(N-m)/2}} \exp \left\{ -\frac{Q(\theta, \mathbf{z})}{2\sigma_e^2} \right\} \quad (\text{C.2})$$

où l'erreur quadratique résiduelle du modèle est définie par

$$Q(\theta, \mathbf{z}) = \sum_{k=m+1}^N e_k^2 = \sum_{k=m+1}^N \left| z_k - \sum_{i=1}^m \theta_i z_{k-i} \right|^2 \quad (\text{C.3})$$

qui est quadratique par rapport aux valeurs des échantillons du signal et par rapport aux coefficients du modèle. Ce résultat s'interprète en disant que (Z_{m+1}, \dots, Z_N) est une séquence de variables gaussiennes et que la fonction de vraisemblance conditionnelle du modèle est de la forme (C.2).

Pour obtenir la loi jointe des N échantillons observés, on écrit

$$p(\mathbf{z} \mid \theta, \sigma_e^2) = p(\mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2) p(\mathbf{z}_0 \mid \theta, \sigma_e^2)$$

où $p(\mathbf{z}_0 \mid \theta, \sigma_e^2)$ est la densité marginale des m premiers échantillons de la trame de signal. Si on suppose que \mathbf{z}_0 est distribué sous la loi stationnaire, alors on a

$$p(\mathbf{z}_0 \mid \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma_e^2)^{m/2} |\boldsymbol{\Sigma}_0|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \mathbf{z}_0^\top \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{z}_0 \right\}$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}$ est la matrice de variance-covariance de m échantillons successifs du processus AR(m) défini par les coefficients θ dans le cas où la séquence d'innovation est de variance unitaire ($\sigma_e^2 = 1$). La fonction de vraisemblance exacte du modèle se met donc sous la forme suivante

$$p(\mathbf{z} \mid \theta, \sigma_e^2) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\sigma_e^2)^{N/2} |\boldsymbol{\Sigma}_0|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \mathbf{z}^\top \boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1} \mathbf{z} \right\} \quad (\text{C.4})$$

avec les notations

$$\Sigma_\theta^{-1} = \mathbf{K}^\top \mathbf{K} + \begin{pmatrix} \Sigma_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où le vecteur d'excitation $\mathbf{e} = [e_{m+1} \dots e_N]^\top$ vérifie la transformation linéaire

$$\mathbf{e} = \mathbf{K}\mathbf{z} \quad (\text{C.5})$$

avec la matrice \mathbf{K} de dimension $(N - p) \times N$ telle que

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\theta_m & \dots & -\theta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta_m & \dots & -\theta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & -\theta_m & \dots & -\theta_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -\theta_m & \dots & -\theta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\theta_m & \dots & -\theta_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

D'après la relation (C.4), la vraisemblance exacte du modèle AR(m) est une densité de probabilité gaussienne multivariée. Le vecteur-moyen est le vecteur nul et la matrice de variance-covariance est déterminée par $\sigma_e^2 \Sigma_\theta$. De plus, si on reprend les notations matricielles (C.5) et (C.6), on vérifie simplement que l'erreur quadratique résiduelle (C.3) se met sous la forme

$$Q(\theta, \mathbf{z}) = \mathbf{z}^\top \mathbf{K}^\top \mathbf{K} \mathbf{z}$$

et de ce fait, la fonction de vraisemblance conditionnelle s'écrit

$$p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2) = \mathcal{N} \left(\mathbf{0}, \sigma_e^2 (\mathbf{K}^\top \mathbf{K})^{-1} \right) \quad (\text{C.7})$$

qui est une densité gaussienne multivariée de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance $\sigma_e^2 (\mathbf{K}^\top \mathbf{K})^{-1}$.

C.2 Loi conditionnelle de \mathbf{z}_I

Par marginalisation, la densité des observations manquantes conditionnées aux échantillons effectivement observés est définie par les relations suivantes,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}_I | \mathbf{z}_{-I}, \theta, \sigma_e^2) &= \frac{p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2)}{\int p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2) d\mathbf{z}_I} \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2)}{\int p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2) d\mathbf{z}_I} \end{aligned}$$

où la seconde égalité découle de l'hypothèse que $i_1 \geq m + 1$, ceci permettant de simplifier le produit par la densité des m premiers échantillons $p(\mathbf{z}_0 | \theta)$ dans les expressions de la fonction de vraisemblance. On en déduit que la densité $p(\mathbf{z}_I | \mathbf{z}_{-I}, \theta, \sigma_e^2)$ est une fonction gaussienne et que le conditionnement est directement effectué sur la fonction de vraisemblance conditionnelle $p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2)$. Pour cela, nous utilisons le résultat standard suivant :

Proposition 2. [Porat, 1994] *Supposons que le vecteur aléatoire \mathbf{Z} soit gaussien de moyenne \mathbf{m} et de matrice de variance-covariance \mathbf{M} . Si \mathbf{Z} est partitionné en deux sous-vecteurs \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 , avec les notations suivantes*

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}$$

Alors, la densité de probabilité conditionnelle de \mathbf{z}_1 sachant \mathbf{z}_2 est aussi une distribution normale multivariée. Le vecteur moyen et la matrice de variance-covariance sont définis par

$$E[\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_2] = \mathbf{m}_1 + \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{m}_2) \quad (\text{C.8})$$

$$\text{var}[\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_2] = \mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} \quad (\text{C.9})$$

Dans notre étude, l'indice (1) est relatif à l'ensemble des indices manquants I et, inversement, l'indice (2) à ceux complémentaires de l'ensemble I , noté $-I$. En appliquant directement la proposition précédente, on trouve que

$$p(\mathbf{z}_I | \mathbf{z}_{-I}, \theta, \sigma_e^2) = \mathcal{N}(\mathbf{m}_I, \Sigma_I) \quad (\text{C.10})$$

où le vecteur moyen est déterminé par $\mathbf{m}_I = \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{z}_{-I}$ et la matrice de variance-covariance par $\Sigma_I = \mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21}$. D'un autre côté, d'après la propriété (C.7), on a $\mathbf{M} = \sigma_e^2(\tilde{\mathbf{K}}^\top \tilde{\mathbf{K}})^{-1}$ avec la définition suivante

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^\top \mathbf{K} \mathbf{P} \quad (\text{C.11})$$

où \mathbf{P} est la matrice de permutation, carrée de dimension $N \times N$ qui permet de réordonner le vecteur-signal \mathbf{z} selon l'ordre des indices $(i_1, \dots, i_2, 1, \dots, (i_1 - 1), (i_2 + 1), \dots, N)$ telle que $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}$. On a ainsi l'égalité

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{P}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_I \\ \mathbf{z}_{-I} \end{bmatrix}$$

On peut construire la matrice inverse de variance-covariance à partir des éléments de la matrice des coefficients $\tilde{\mathbf{K}}$ car

$$\mathbf{M}^{-1} = 1/\sigma_e^2 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_I^\top \tilde{\mathbf{K}}_I & \tilde{\mathbf{K}}_I^\top \tilde{\mathbf{K}}_{-I} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{-I}^\top \tilde{\mathbf{K}}_I & \tilde{\mathbf{K}}_{-I}^\top \tilde{\mathbf{K}}_{-I} \end{pmatrix}$$

où $\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{\mathbf{K}}_I \tilde{\mathbf{K}}_{-I}]$ est le partitionnement vertical en deux colonnes de la matrice de $\tilde{\mathbf{K}}$ selon les indices de l'intervalle I . De ce fait, on a les identités suivantes

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_I^\top \tilde{\mathbf{K}}_I / \sigma_e^2 &= (\mathbf{M}^{-1})_{11} = (\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21})^{-1} \\ \tilde{\mathbf{K}}_I^\top \tilde{\mathbf{K}}_{-I} / \sigma_e^2 &= (\mathbf{M}^{-1})_{12} = -(\mathbf{M}^{-1})_{11}\mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1} \end{aligned}$$

d'après les formules fondamentales d'inversion des matrices carrées partitionnées [Porat, 1994]. Ainsi, on en déduit finalement que le vecteur moyen \mathbf{m}_I et la matrice de variance-covariance Σ_I sont déterminées par les expressions suivantes

$$\Sigma_I = \sigma_e^2 (\tilde{\mathbf{K}}_I^\top \tilde{\mathbf{K}}_I)^{-1} \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{m}_I = -(\tilde{\mathbf{K}}_I^\top \tilde{\mathbf{K}}_I)^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_I^\top \tilde{\mathbf{K}}_{-I} \mathbf{z}_{-I} \quad (\text{C.13})$$

La matrice de variance-covariance Σ_I de la densité conditionnelle est indépendante de la valeur des échantillons observés \mathbf{z}_{-I} . La moyenne \mathbf{m}_I dépend linéairement de \mathbf{z}_{-I} . C'est le minimum de l'erreur quadratique moyenne exprimée sous la forme $Q(\theta, \mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{K}}^\top \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{z}}$. C'est également, la solution du maximum de vraisemblance associée à la densité de probabilité conditionnelle $p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2)$. De plus, si on explicite le produit matriciel $\tilde{\mathbf{K}}_I^\top \tilde{\mathbf{K}}_{-I}$, on obtient un vecteur ligne dont les composantes sont identiquement nulles sauf aux indices correspondants à ceux des $2m$ points entourant l'intervalle I , d'indices $(i_1 - m, \dots, i_1 - 1)$ et $(i_2 + 1, \dots, i_2 + m)$.

Dans le cas particulier où $m + 1 \leq i_1 = i_2 \leq N - m$, ces résultats s'appliquent également. La notation I ne représente plus un intervalle mais un indice entier ($I = i_1 = i_2$). On déduit simplement des relations (C.12) et (C.13) que la densité de probabilité $p(z_I | \mathbf{z}_{-I}, \theta, \sigma_e^2)$ de la

composante z_I conditionnellement aux vecteurs \mathbf{z}_{-I} est une fonction gaussienne dont la moyenne et la variance sont déterminées par

$$\sigma_I^2 = \frac{\sigma_e^2}{(1 + \sum_{i=1}^m \theta_i^2)} \quad (\text{C.14})$$

$$m_I = -\frac{\sum_{k=1}^m \gamma_\theta(k)(z_{I-k} + z_{I+k})}{(1 + \sum_{i=1}^m \theta_i^2)} \quad (\text{C.15})$$

où la fonction γ_θ est définie par l'opération de convolution suivante,

$$\gamma_\theta(k) = \sum_{j=0}^m \bar{\theta}_j \bar{\theta}_{j+k} \quad (\text{C.16})$$

avec $\bar{\theta}_j = -\theta_j$ si $j = 1, \dots, m$ et $\bar{\theta}_0 = 1$. On remarque d'après l'expression (C.15), que la moyenne ne dépend que des $2m$ valeurs du signal situées autour de z_I .

C.3 Lois conditionnelles de θ et σ_e^2

Dans le cadre des approches bayésiennes, les paramètres de la modélisation sont traités comme des variables aléatoires et de ce fait, admettent des densités de probabilité [Robert, 1992]. L'estimation statistique des paramètres passe par l'étude de la densité *a posteriori* des paramètres du modèle AR(m). Cette densité est définie par

$$p(\theta, \sigma_e^2 | \mathbf{z}) \propto p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2) = p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2) p(\theta) p(\sigma_e^2) \quad (\text{C.17})$$

où les expressions des densités *a priori* $p(\theta)$ et $p(\sigma_e^2)$ doivent être spécifiées.

Dans les études sur le traitement bayésien du modèle AR(m) gaussien, les densités $p(\theta)$ et $p(\sigma_e^2)$ sont généralement, des lois *a priori* conjuguées [Troughton and Godsill, 2001], [Godsill and Rayner, 1995], ou bien des lois *a priori* non informatives [O'Ruanaidh and Fitzgerald, 1996]. L'avantage des lois conjuguées est que les lois *a posteriori* correspondantes appartiennent également à des familles de distributions standards. Ainsi, la majorité des applications citées, l'information *a priori* sur la variance σ_e^2 est représentée par une densité de probabilité de type inverse gamma, déterminée par les hyperparamètres (α_e, β_e) . On note $p(\sigma_e^2) = \mathcal{IG}(\alpha_e, \beta_e)$ avec la définition suivante

$$p(\sigma_e^2) = \frac{\beta_e^{\alpha_e}}{\Gamma(\alpha_e)} \frac{e^{-\beta_e/\sigma_e^2}}{\sigma_e^{2(\alpha_e+1)}} \mathbb{I}_{[0, \infty[}(\sigma_e^2) \quad (\text{C.18})$$

où $\alpha_e, \beta_e > 0$. D'un autre côté, la loi *a priori* du vecteur des paramètres θ est choisie selon un modèle bayésien hiérarchique à deux niveaux de spécification. Au premier niveau, le paramètre est distribué suivant une loi gaussienne à moyenne nulle telle que la densité correspondante est prise sous la forme

$$p(\theta | \sigma_\theta^2) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_\theta^2 \mathbf{1}_m)$$

où le paramètre de variance σ_θ^2 est traité comme une variable latente à laquelle on associe dans un second niveau de spécification, une densité de probabilité de type inverse gamma, déterminée par les hyperparamètres $\alpha_\theta, \beta_\theta > 0$ telle que

$$p(\sigma_\theta^2) = \mathcal{IG}(\alpha_\theta, \beta_\theta)$$

Dans ces conditions, la densité marginale de θ c'est-à-dire, la loi *a priori* du paramètre se déduit des égalités suivantes

$$\begin{aligned} p(\theta) &= \int_{\mathbb{R}^+} p(\theta | \sigma_\theta^2) p(\sigma_\theta^2 | \alpha_\theta, \beta_\theta) d\sigma_\theta^2 \\ &= \mathcal{St}(\theta | 0, \alpha_\theta/\beta_\theta, 2\alpha_\theta) \end{aligned}$$

qui est une loi de Student multidimensionnelle [Devroye, 1985].

En pratique, les valeurs des hyperparamètres $(\alpha_\theta, \beta_\theta)$ et (α_e, β_e) sont choisies de façon à obtenir des lois *a priori* suffisamment diffuses. [O'Ruanaidh and Fitzgerald, 1996] propose d'utiliser des lois *a priori* non-informatives telles que

$$p(\theta) = cste \quad p(\sigma_e^2) = cste$$

considérant ainsi qu'aucune information n'est disponible. Formellement, les paramètres θ et σ_e^2 ne sont pas bornés et de ce fait, on ne peut pas normaliser ces lois *a priori*. On dit que les lois *a priori* sont généralisées ou impropres.

Dans le cadre de la compensation de la distorsion, on suppose que l'ordre de la modélisation AR(m) est fixé. Nous proposons d'utiliser les spécifications suivantes

$$p(\theta) = cste \quad p(\sigma_e^2) = \mathcal{IG}(\alpha_e, \beta_e) \quad (\text{C.19})$$

La loi *a priori* des coefficients linéaires est non-informative uniforme tandis que celle de la variance de la séquence d'innovation est de type inverse gamma déterminée par les hyperparamètres α_e, β_e . La densité de probabilité jointe du signal et des paramètres du modèle AR(m) est définie par

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2) &= p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2) p(\theta) p(\sigma_e^2) \\ &\propto p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2) p(\mathbf{z}_0 | \theta) p(\sigma_e^2) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Pour les coefficients linéaires, on obtient la loi conditionnelle suivante

$$\begin{aligned} p(\theta | \mathbf{z}, \sigma_e^2) &= \frac{p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2)}{\int_{\mathbb{R}^m} p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2) d\theta} \\ &= \frac{p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2)}{\int_{\mathbb{R}^m} p(\mathbf{z} | \theta, \sigma_e^2) d\theta} \\ &\approx \frac{p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2)}{\int_{\mathbb{R}^m} p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2) d\theta} \end{aligned}$$

Dans la seconde égalité, on a simplifié l'expression de la densité *a priori* du paramètre σ_e^2 . La dernière relation est une approximation. On considère que l'estimation des coefficients linéaires $\theta_1, \dots, \theta_m$ dépend peu de la valeur des m premiers échantillons du vecteur-signal \mathbf{z}_0 de la trame. En pratique, $N \gg p$ et l'effet de conditionnement en début de trame est négligeable.

On en déduit que la densité *a posteriori* des paramètres θ est proportionnelle à la vraisemblance conditionnelle $p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2)$. De plus, en définissant la matrice \mathbf{L} de dimension $(N - m) \times m$ par

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} z_m & z_{m-1} & & z_2 & z_1 \\ z_{m+1} & z_m & & z_3 & z_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ z_{N-2} & z_{N-1} & & z_{N-m} & z_{N-m-1} \\ z_{N-1} & z_{N-2} & & z_{N-m+1} & z_{N-m} \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

on vérifie simplement que la fonction d'erreur quadratique $Q(\theta, \mathbf{z})$ se met aussi sous la forme alternative

$$\begin{aligned} Q(\theta, \mathbf{z}) &= (\mathbf{z}_1 - \mathbf{L}\theta)^\top (\mathbf{z}_1 - \mathbf{L}\theta) \\ &= (\theta - \theta_m)^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{L} (\theta - \theta_m) \end{aligned}$$

avec $\theta_m = (\mathbf{L}^\top \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^\top \mathbf{z}_1$ qui est aussi exactement la solution des moindres carrés linéaires. On déduit que la loi conditionnelle des coefficients linéaires est proportionnelle à la densité gaussienne multivariée de vecteur moyen θ_m et de matrice de variance-covariance, $\sigma_e^2 (\mathbf{L}^\top \mathbf{L})^{-1}$ et on note ,

$$p(\theta | \mathbf{z}, \sigma_e^2) \propto \mathcal{N}(\theta_m, \sigma_e^2 (\mathbf{L}^\top \mathbf{L})^{-1}) \quad (\text{C.22})$$

De même, la densité conditionnelle du paramètre de variance σ_e^2 est donnée par

$$\begin{aligned} p(\sigma_e^2 | \mathbf{z}, \theta) &= \frac{p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2)}{\int_{\mathbb{R}^+} p(\mathbf{z}, \theta, \sigma_e^2) d\sigma_e^2} \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2) p(\sigma_e^2)}{\int_{\mathbb{R}^+} p(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_0, \theta, \sigma_e^2) p(\sigma_e^2) d\sigma_e^2} \end{aligned}$$

La loi conditionnelle est donc proportionnelle à la fonction de vraisemblance conditionnelle multipliée par la densité *a priori* de type inverse gamma définie par (C.19). On en déduit donc que

$$\begin{aligned} p(\sigma_e^2 | \mathbf{z}, \theta) &\propto \sigma_e^{-N} \exp - \left(\frac{\mathbf{e}^\top \mathbf{e}}{2\sigma_e^2} \right) \sigma_e^{-2(1+\alpha_e)} \exp - \frac{\beta_e}{\sigma_e^2} \\ &\propto \sigma_e^{-N+2\alpha_e+2} \exp - \left(\frac{\beta_e + \mathbf{e}^\top \mathbf{e}/2}{\sigma_e^2} \right) \\ &= \mathcal{IG}(\alpha_{se}, \beta_{se}) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

avec $\alpha_{se} = \alpha_e + N/2$ et $\beta_{se} = \beta_e + \mathbf{e}^\top \mathbf{e}/2$.

Annexe D

Les méthodes d'échantillonnage par chaînes de Markov

Cette partie est consacrée à la présentation des méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (pour *Markov Chain Monte-Carlo* en anglais). L'objectif principal est d'expliquer le fonctionnement des algorithmes d'échantillonnage de Hastings-Metropolis et de Gibbs qui sont utilisés dans le chapitre 4, pour la compensation de la distorsion non-linéaire. Ce document reste une introduction aux méthodes MCMC. Cependant, certains résultats importants sont énoncés. Le lecteur pourra se reporter aux références suivantes pour retrouver les arguments fondamentaux de la théorie des méthodes de simulation par chaînes de Markov ; [Robert, 1996], [Meyn and Tweedie, 1993], [Tierney, 1994].

Soit π une densité de probabilité définie sous la forme

$$\pi(x) = f(x)/K \tag{D.1}$$

où $f(x)$ est la densité de probabilité non normalisée et la constante K est le facteur de normalisation. Dans la suite, on note χ l'espace d'observation de la variable aléatoire associée. On peut seulement évaluer les valeurs de la fonction f en tous points $x \in \mathcal{D}_f$. Le problème proposé est celui d'évaluer des intégrales de la forme

$$\mathbb{E}_\pi[h(x)] = \int_\chi h(x) \pi(x) dx \tag{D.2}$$

On se propose pour cela, d'utiliser une approche de Monte-Carlo et de générer un échantillon $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ iid sous la loi π afin d'approximer (D.2) avec la moyenne empirique

$$\bar{h}_n = 1/n \sum_{i=1}^n h(x^{(i)}) \tag{D.3}$$

D'après la loi des grand nombres, la moyenne empirique converge presque sûrement quand $n \rightarrow \infty$ vers l'intégrale (D.2). La difficulté est de construire un générateur aléatoire permettant d'obtenir un échantillon $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ si possible iid.

La méthode d'acceptation-rejet est un algorithme qui permet effectivement d'obtenir des échantillons sous une loi non standard en simulant sous une autre densité de probabilité plus simple à manipuler numériquement. Cette méthode standard d'échantillonnage est basée sur le schéma itératif suivant ; Supposons qu'il existe une constante M et une fonction g telle que,

$$f(x) \leq Mg(x)$$

Algorithme D.1 Méthode d'acceptation-rejet pour la simulation d'un échantillon x représentatif de la loi d'intérêt $\pi(x) = f(x)/K$.

1 – Simuler $y \sim g(\cdot)$ et $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
 2 – Prendre,
 $x = y$ si $u \leq f(y)/Mg(y)$
 sinon retour à 1–

alors, on obtient un échantillon x représentatif de la loi d'intérêt f en itérant les deux étapes de l'algorithme D.1.

On montre simplement que la valeur x obtenue est un échantillon distribué suivant f car on a les égalités suivantes [Robert, 1996]

$$\begin{aligned} P(x \leq x_0) &= \sum_{i=0}^{\infty} P_g(y \leq x_0, u \leq f(y)/Mg(y)) P_g(u \geq f(y)/Mg(y))^i \\ &= P_f(y \leq x_0) \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{\infty} (1 - 1/M)^i \end{aligned}$$

L'algorithme D.1 est une méthode générique de simulation pour toute densité connue à un facteur multiplicatif près puisque on obtient des échantillons distribués suivant f . Il est nécessaire de pouvoir évaluer la fonction et surtout, de choisir une fonction g facilement simulable qui vérifie la majoration sur \mathcal{D}_f .

La capacité de l'algorithme à accepter les variables candidates y dépend de l'adéquation entre f et g . En effet, si f est normalisée, la probabilité d'acceptation moyenne en un passage $E_g[f(y)/Mg(y)]$ est égale à $1/M$. De ce fait, le choix de g est basé sur une minimisation de la constante de majoration M . Sinon, la plupart des variables sont rejetées et on obtient difficilement un échantillon de taille suffisante pour garantir la convergence des estimateurs empiriques.

D.1 Principe des algorithmes MCMC

En pratique, les algorithmes MCMC permettent de construire une suite de variables aléatoires que l'on note $x^{(0)}, \dots, x^{(n)}$ telles que si n est suffisamment grand, la distribution marginale de la variable $x^{(n)}$ soit proche de π . La suite des variables aléatoires est construite comme une chaîne de Markov qui est définie de la manière suivante ;

Définition 3. Une suite $x^{(0)}, \dots, x^{(n)}$ de variables aléatoires forme une chaîne de Markov si la loi conditionnelle de $x^{(t)}$ sachant $x^{(t-1)}, x^{(t-2)}, \dots$ est la même que celle de $x^{(t)}$ sachant $x^{(t-1)}$ [Robert, 1996].

Si la distribution de la variable $x^{(0)}$ est connue ou si la variable $x^{(0)}$ est fixée, la construction de la chaîne est entièrement déterminée par l'opérateur de transition c'est-à-dire, la loi de $x^{(n)}$ conditionnelle à $x^{(n-1)}$ définie de la façon suivante ;

Définition 4. On appelle noyau de transition toute fonction P définie sur un ensemble $\chi \times \mathcal{B}(\chi)$ telle que,

- (i) $\forall x \in \chi, P(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité.
- (ii) $\forall A \subset \mathcal{B}(\chi), P(\cdot, A)$ est mesurable.

où χ représente l'espace d'observation de x et $\mathcal{B}(\chi)$ désigne la tribu de Borélienne définie sur l'espace χ [Robert, 1996].

Le noyau de transition est une distribution de probabilité conditionnelle. La fonction $P(x, A)$ représente la probabilité que se trouvant dans un état x c'est-à-dire, un point de χ , la chaîne évolue vers un autre état, élément de l'ensemble A . Puisque c'est une loi de probabilité, on a la propriété de normalisation, $P(x, \chi) = 1$ et d'autre part, on a éventuellement la possibilité de ne pas faire de transition dès que $P(x, \{x\}) \neq 0$. Par définition, la n -ème transition de l'état est décrite par le noyau $P^n(., .)$ défini par la probabilité de transition

$$P^n(x, A) = \int_{\chi} P^{n-1}(x, dy)P(y, A)$$

avec la notation $P^1(x, dy) = P(x, dy)$.

Le principe des algorithmes MCMC est de déterminer un noyau de transition qui garantit la stabilité et la convergence de la chaîne de Markov vers la loi d'intérêt de notre problème c'est-à-dire, π . Par définition, on dit que la chaîne admet une densité invariante π invariante par P si

$$\pi(y) dy = \int_{\chi} P(x, dy)\pi(x) dx$$

Dans ce cas, si $x^{(n)} \sim \pi(x)$, alors $x^{(n+1)} \sim \pi(x)$ et on dit aussi que π est la densité stationnaire de la chaîne car si $x^{(0)} \sim \pi(x)$, alors toutes les variables sont distribuées selon la loi invariante.

En pratique, les algorithmes de MCMC utilisent une valeur arbitraire $x^{(0)}$ comme état initial puis génèrent une chaîne $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ à partir d'un noyau de transition qui garantit la convergence en loi des échantillons vers la distribution stationnaire. Soit n' est assez grand, on peut considérer la variable $x^{(n')}$ comme distribuée suivant π et obtenir ainsi des échantillons $x^{(n')}, x^{(n'+1)}, \dots, x^{(n)}$ qui sont effectivement distribués suivant la loi invariante.

Définition 5. On appelle *algorithme MCMC* toute méthode produisant une chaîne de Markov $(x^{(t)})$ ergodique de loi stationnaire la distribution d'intérêt [Robert, 1996].

Typiquement, $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ est ergodique si la chaîne de Markov construite avec le noyau de transition P de loi invariante π est *irréductible* et *apériodique*. Plus précisément, sous ces conditions, on a les propriétés suivantes [Meyn and Tweedie, 1993],[Brooks and Roberts, 1999],

1. Convergence en loi de la distribution des échantillons de la chaîne

$$\|P^n(x, .) - \pi\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

2. Convergence des estimateurs empiriques

$$\bar{h}_n \rightarrow E_{\pi}[h(x)] \quad n \rightarrow \infty$$

Dans notre cas, on connaît la forme de la densité π . On veut construire un algorithme MCMC pour obtenir des échantillons distribués sous la loi définie par cette densité. Pour cela, nous présentons dans les sections suivantes les algorithmes d'échantillonnage standards de Hastings-Metropolis et de Gibbs. Ces méthodes sont basées sur des schémas itératifs qui utilisent soit une loi instrumentale comme dans le cas de l'algorithme d'acceptation-rejet D.1, soit les propriétés connues (lois conditionnelles) de π .

D.2 Algorithme de Hastings-Metropolis

L'algorithme de Hastings-Metropolis repose sur l'utilisation d'une densité conditionnelle $q(y | x)$. Il ne peut être mis en oeuvre efficacement que si $q(. | x)$ est simulable rapidement et disponible sous une forme analytique. La méthode d'échantillonnage de Hastings-Metropolis associée à

la loi d'intérêt $\pi(\cdot) = f(\cdot)/K$ et à la loi instrumentale q , est définie par les transitions de l'algorithme D.2 où ρ est la probabilité d'acceptation associée telle que

$$\rho(x^{(t)}, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(y) q(x^{(t)} | y)}{\pi(x^{(t)}) q(y | x^{(t)})} \right\}$$

Algorithme D.2 *Méthode d'échantillonnage de Hastings-Metropolis associée à la loi d'intérêt $\pi(x) = f(x)/K$ [Hastings, 1970].*

Etant donné, $x^{(t)}$
 1 – Simuler $y \sim q(y | x^{(t)})$ et $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$
 2 – Prendre,
 $x^{(t+1)} = \begin{cases} y & \text{si } u \leq \rho(x^{(t)}, y) \\ x^{(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$

La loi instrumentale q est une densité de probabilité et de ce fait, elle vérifie la propriété de normalisation,

$$\int_{\mathcal{X}} q(x | y) dy = 1$$

Comme dans le cas de la méthode d'acceptation-rejet, l'algorithme de Hastings-Metropolis dépend des rapports $\pi(y)/\pi(x^{(t)})$ et $q(x^{(t)} | y)/q(y | x^{(t)})$. De ce fait, l'algorithme ne dépend pas des constantes de normalisation et il suffit de connaître la densité d'intérêt définie par π et q à une constante multiplicative près. Cependant, la différence majeure entre la méthode d'acceptation-rejet et cet algorithme, est qu'à chaque itération on obtient effectivement une nouvelle simulation (il n'y a pas de rejet). En revanche, il faut effectuer un certain nombre d'itération avant de considérer que les variables obtenues sont distribuées sous la loi stationnaire.

Le noyau de transition de la chaîne de Markov générée par l'algorithme D.2 se décompose donc de la manière suivante,

$$P_{HM}(x, dy) = p_{HM}(x, y) dy + r(x)\delta_x(dy)$$

où $p_{HM}(x, y)$ est la fonction de densité du noyau de transition telle que $p_{HM}(x, x) = 0$. La notation δ_x désigne la masse de Dirac telle que $\delta_x(\{y\}) = 1$ et la fonction $r(x)$ est définie par

$$r(x) = 1 - \int_{\mathcal{X}} p_{HM}(x, y) dy$$

qui représente la probabilité que la chaîne reste sur le même état x . La densité π est la loi stationnaire de la chaîne $x^{(t)}$ produite par l'algorithme de Hastings-Metropolis. En effet, il suffit de montrer que la fonction de densité p_{HM} du noyau de transition vérifie la condition de réversibilité définie par

$$\pi(x)p_{HM}(x, y) = \pi(y)p_{HM}(y, x) \tag{D.4}$$

car si (D.4) est vérifiée, alors on a les égalités suivantes [Tierney, 1994]

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} P_{HM}(x, A)\pi(x) dx &= \int_{\mathcal{X}} \int_A p_{HM}(x, y) dy \pi(x) dx + \int_{\mathcal{X}} r(x)\delta_x(A)\pi(x) dx \\
&= \int_A \int_{\mathcal{X}} p_{HM}(x, y)\pi(x) dx dy + \int_A r(x)\pi(x) dx \\
&= \int_A \int_{\mathcal{X}} p_{HM}(y, x)\pi(y) dx dy + \int_A r(x)\pi(x) dx \\
&= \int_A (1 - r(y))\pi(y) dy + \int_A r(x)\pi(x) dx \\
&= \int_A \pi(y) dy
\end{aligned}$$

où on a utilisé la condition de réversibilité à la troisième égalité. Il reste donc à montrer que la fonction de densité de transition p_{HM} des algorithmes de Hastings-Metropolis est construite de manière à satisfaire la condition de réversibilité (D.4) avec la densité d'intérêt π .

Par construction, la transition de $x^{(t)}$ vers y est déterminée par la densité du noyau de transition $p_{MH}(x^{(t)}, y)$ telle que

$$p_{MH}(x^{(t)}, y) = q(y | x^{(t)})\rho(x^{(t)}, y) \quad x^{(t)} \neq y$$

et quand l'état y est rejeté, l'algorithme retourne la valeur de l'état $x^{(t+1)} = x^{(t)}$ avec une probabilité de rester en place telle que,

$$r(x^{(t)}) = 1 - \int_{\mathcal{X}} q(y | x^{(t)})\rho(x^{(t)}, y) dy$$

On note que $r(x^{(t)})$ est non nulle tant que la loi instrumentale ne vérifie pas exactement la condition de réversibilité(D.4). Soit alors $x^{(t)}$ l'état courant. Supposons tout d'abord que

$$\pi(x^{(t)})q(y | x^{(t)}) > \pi(y)q(x^{(t)} | y)$$

qui s'interprète en disant que la transition de $x^{(t)}$ vers l'état y est plus probable que la transition réciproque. Dans ce cas, la probabilité d'acceptation en un passage est telle que

$$\rho(x^{(t)}, y) = \frac{\pi(y)q(x^{(t)} | y)}{\pi(x^{(t)})q(y | x^{(t)})}$$

et on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\pi(x^{(t)})p_{MH}(x^{(t)}, y) &= \pi(x^{(t)})q(y | x^{(t)})\rho(x^{(t)}, y) \\
&= \pi(y)q(x^{(t)} | y) \\
&= \pi(y)p_{MH}(y, x^{(t)})
\end{aligned}$$

car à la troisième égalité, $\rho(y, x^{(t)}) = 1$ et donc, $p_{MH}(y, x^{(t)}) = q(x^{(t)} | y)$. On peut refaire le même raisonnement en partant de l'hypothèse inverse que $\pi(x^{(t)})q(y | x^{(t)}) < \pi(y)q(x^{(t)} | y)$ et établir de même la condition de réversibilité.

Enfin, d'après la définition 5, pour établir que l'algorithme de Hastings-Metropolis D.2 est un algorithme MCMC, il faut montrer que la chaîne est ergodique. Pour cela, il suffit de montrer la π -irréductibilité et l'apériodicité de la chaîne [Robert, 1996], [Tierney, 1994].

D.3 Typologie des algorithmes MCMC

L'algorithme de Hastings-Metropolis est complètement déterminé par les propriétés de la loi instrumentale. Dans cette section, on distingue deux types d'algorithmes de Hastings-Metropolis standards l'un, basé sur une loi instrumentale $q(y | x) = g(y)$ indépendante de l'état précédent de la chaîne et l'autre, basé sur une loi $q(y | x) = g(y - x)$ symétrique mais dépendant explicitement de la valeur de l'état précédent. Enfin, nous avons inclus dans cette section la présentation de l'algorithme de Gibbs qui est une variante plus particulière de l'algorithme D.2.

Algorithme de Hastings-Metropolis indépendant

La méthode d'échantillonnage de Hastings-Metropolis indépendant associée à la loi d'intérêt $\pi(\cdot)$ et à la loi conditionnelle $q(y | x) = g(y)$ est définie par l'algorithme D.3 avec,

$$\rho(x^{(t)}, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(y) g(x^{(t)})}{\pi(x^{(t)}) g(y)} \right\}$$

Algorithme D.3 *Méthode d'échantillonnage de Hastings-Metropolis indépendant.*

Etant donné $x^{(t)}$,
 1 – Simuler $y \sim g(y)$ et $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$
 2 – Prendre,

$$x^{(t+1)} = \begin{cases} y & \text{si } u \leq \rho(x^{(t)}, y) \\ x^{(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les propriétés de la chaîne sont directement fonction de g au sens où $(x^{(t)})$ est irréductible et apériodique si et seulement si g est positive sur le support de la densité f . Les propriétés d'ergodicité de la chaîne produite par l'algorithme D.3 sont décrites par le théorème suivant ;

Théorème 6. *L'algorithme de Hastings-Metropolis indépendant produit une chaîne uniformément ergodique si il existe une constante M telle que,*

$$f(x) \leq Mg(x) \tag{D.5}$$

Dans ce cas,

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} \|P^n(x, \cdot) - \pi\| \leq (1 - 1/M)^n$$

([Robert, 1996], page 134-135)

La convergence uniformément ergodique est la propriété la plus forte établie concernant la convergence des chaînes de Markov. Par définition, on dit que la chaîne est uniformément ergodique si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathcal{X}} \|P^n(x, \cdot) - \pi\| = 0$$

Dans le cas où la loi instrumentale vérifie l'inégalité déjà énoncée dans le cas de l'algorithme d'acceptation-rejet D.1, on obtient de plus une majoration à l'itération n .

Le choix de la loi instrumentale est crucial pour obtenir une bonne efficacité de la méthode d'échantillonnage. Quand la condition de majoration de la fonction f est vérifiée avec g , on est naturellement amené à comparer la méthode d'acceptation-rejet par rapport à l'algorithme de Hastings-Metropolis indépendant. Dans les deux cas, le critère qui vient naturellement consiste

à déterminer la forme de la densité g de façon à maximiser le taux d'acceptation moyen de transition des algorithmes. Pour l'algorithme D.3, on note $\bar{\rho}$ le taux d'acceptation moyen qui représente l'espérance moyenne de réaliser une transition. On montre que $\bar{\rho}$ vérifie l'inégalité suivante,

$$\bar{\rho} \geq 1/M$$

En effet, il vient en situation de stationnarité si $y \sim g$ et $x \sim f$ [Robert, 1996],

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \mathbb{E} \left[\min \left\{ 1, \frac{\pi(y)}{\pi(x^{(t)})} \frac{g(x^{(t)})}{g(y)} \right\} \right] \\ &= \int \mathbb{I}_{\frac{f(y)g(x)}{g(y)f(x)} > 1} f(x)g(y) \, dx \, dy \\ &\quad + \int \frac{f(y)g(x)}{f(x)g(y)} \mathbb{I}_{\frac{f(y)g(x)}{g(y)f(x)} \leq 1} f(x)g(y) \, dx \, dy \\ &= 2 \int \mathbb{I}_{\frac{f(y)g(x)}{g(y)f(x)} \geq 1} f(x)g(y) \, dx \, dy \\ &\geq 2 \int \mathbb{I}_{\frac{f(y)}{g(y)} \geq \frac{f(x)}{g(x)}} f(x) \frac{f(y)}{M} \, dx \, dy \\ &= \frac{2}{M} \mathbb{P} \left(\frac{f(y)}{g(y)} \geq \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{1}{M} \end{aligned}$$

De ce fait, on s'attend à obtenir une meilleure efficacité avec l'algorithme D.3. Cependant, pour que la densité g reproduise aussi fidèlement que possible la densité f , il faut maximiser $\bar{\rho}$ ou le rapport $1/M$. En particulier, une densité trop ou trop peu concentrée par rapport à f produit un rapport,

$$\min \left\{ \frac{f(y)}{g(y)} \frac{g(x)}{f(x)}, 1 \right\}$$

qui varie beaucoup et donc conduit à un taux d'acceptation moyen faible. Le taux d'acceptation étant généralement impossible à calculer, on peut utiliser la minoration $\bar{\rho} \geq 1/M$ pour minimiser M exactement comme dans le cas de l'algorithme d'acceptation-rejet. L'approche empirique consiste à choisir une forme paramétrée de la loi instrumentale g et à ajuster ses paramètres en fonction du taux d'acceptation estimé [Robert, 1996].

Algorithme de Hastings-Metropolis à marche aléatoire

Une seconde variante de l'algorithme de Hastings-Metropolis consiste à prendre en compte la valeur précédemment simulée pour générer la valeur courante. La méthode d'échantillonnage de Hastings-Metropolis à marche aléatoire associé à la loi d'intérêt $\pi(\cdot)$ et à la loi conditionnelle $g(y | x) = g(|y - x|)$ est définie par l'algorithme de simulation D.4 avec,

$$\rho(x^{(t)}, y) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(y)}{\pi(x^{(t)})} \right\}$$

L'algorithme D.4 autorise une dépendance symétrique entre les valeurs y simulées par rapport à la valeur courante de la chaîne. Dans cet exemple, la valeur de y s'écrit sous la forme $x^{(t)} + \varepsilon$ où ε est une perturbation aléatoire de loi symétrique g indépendante de $x^{(t)}$. En pratique, on choisit g parmi les lois standards : loi uniforme, loi normale multivariée et loi dite de t -Student. Le choix de la loi instrumentale est crucial pour obtenir un meilleur contrôle de l'algorithme d'échantillonnage. Le lecteur pourra se reporter aux études publiées par [Robert, 1996] et [Roberts and Tweedie, 1996] pour trouver des outils pratiques déterminant le choix de

Algorithme D.4 *Méthode d'échantillonnage de Hastings-Metropolis à marche aléatoire.*

Etant donné $x^{(t)}$
 1 – Simuler $y \sim g(|y - x^{(t)}|)$ et $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$
 2 – Prendre,

$$x^{(t+1)} = \begin{cases} y & \text{si } u \leq \rho(x^{(t)}, y) \\ x^{(t)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

g en fonction de la forme de la densité cible π . On note cependant que les résultats sur la vitesse de convergence de la chaîne produite par l'algorithme D.4 sont plus difficiles à établir que dans le cas D.3. En particulier, les contours de la densité d'intérêt doivent avoir une décroissance rapide de type exponentielle si on veut éviter des excursions de la chaîne dans les queues de la distribution.

En général, la version marche aléatoire de l'algorithme de Hastings-Metropolis requiert une analyse différente du taux d'acceptation moyen du fait de la dépendance à la valeur de l'état courant considéré. En effet, un taux d'acceptation élevé n'indique pas nécessairement que l'algorithme évolue correctement car il peut signifier que la marche aléatoire se déplace trop lentement sur la surface de la densité f . Si $x^{(t)}$ et y sont proches, au sens où $f(x^{(t)})$ et $f(y)$ sont voisins, l'algorithme (D.4) conduit à une acceptation de y avec la probabilité,

$$\min \left(\frac{f(y)}{f(x^{(t)})} \right) \simeq 1$$

A l'inverse, si le taux d'acceptation moyen $\bar{\rho}$ est faible, les états proposés sont tels que les valeurs successives de $f(y)$ sont fréquemment petites relativement à $f(x^{(t)})$, ce qui signifie que la marche aléatoire se déplace rapidement sur la surface de f . Pour l'algorithme à marche aléatoire, un taux d'acceptation moyen plus élevé peut correspondre à une vitesse de convergence plus faible car le déplacement sur le support de f est plus lent [Robert, 1996].

Algorithme de Gibbs

Les algorithmes de Hastings-Metropolis demandent une connaissance limitée de la fonction cible $\pi(x) = f(x)/K$. Ils atteignent une plus grande efficacité en adaptant le taux d'acceptation moyen avec le choix de la densité instrumentale. L'algorithme de Gibbs utilise les propriétés de la forme de la densité f à un degré beaucoup plus avancé. La structure de l'algorithme de Gibbs est définie comme suit [Casella and George, 1992], [Smiths and Roberts, 1993] : Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que la variable x se décompose en (x_1, \dots, x_d) composantes. Si les densités conditionnelles correspondantes aux composantes de x sont simulables, la méthode d'échantillonnage de Gibbs associée à cette décomposition est définie par l'algorithme D.5.

Algorithme D.5 *Méthode d'échantillonnage de Gibbs.*

1– $x_1^{(t+1)} \sim f_1(x_1 | x_2^{(t)}, \dots, x_d^{(t)})$
 2– $x_2^{(t+1)} \sim f_2(x_2 | x_1^{(t+1)}, x_3^{(t)}, \dots, x_d^{(t)})$
 ...
 d– $x_d^{(t+1)} \sim f_d(x_d | x_1^{(t+1)}, \dots, x_{d-1}^{(t+1)})$

L'algorithme D.5 admet f comme loi invariante de la chaîne de Markov $(x^{(t)})$. En effet, soit $f^i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d)$ la fonction de densité marginale des composantes x_j avec $j \neq i$.

Les lois conditionnelles sont définies par la relation de marginalisation écrite sous la forme,

$$f_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) = \frac{f(x_1, \dots, x_d)}{\int f(x_1, \dots, x_d) dx_i}$$

On trouve directement que le noyau de la chaîne P_G s'écrit comme le produit,

$$P_G(x, x') = f_1(x'_1 | x_2, \dots, x_d) f_2(x'_2 | x'_1, x_3, \dots, x_d) \dots f_d(x'_d | x'_1, \dots, x'_{d-1})$$

Ainsi, si $y \sim f$ il vient pour A mesurable suivant la mesure dominante [Robert, 1996],

$$\begin{aligned} P(x' \in A) &= \int \mathbb{I}_A(x') P_G(x, x') f(x) dx dx' \\ &= \int \mathbb{I}_A(x') f_1(x'_1 | x_2, \dots, x_d) \dots f_d(x'_d | x'_1, \dots, x'_{d-1}) \\ &\quad f_1(x_1 | x_2, \dots, x_d) f^1(x_2, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d dx'_1 \dots dx'_d \\ &= \int \mathbb{I}_A(x') f_2(x'_2 | x'_1, x_3, \dots, x_d) \dots f_d(x'_d | x'_1, \dots, x'_{d-1}) \\ &\quad f(x'_1, x_2, \dots, x_d) dx_2 \dots dx_d dx'_1 \dots dx'_d \\ &= \int \mathbb{I}_A(x') f_2(x'_2 | x'_1, x_3, \dots, x_d) \dots f_d(x'_d | x'_1, \dots, x'_{d-1}) \\ &\quad f_2(x_2 | x'_1, x_3, \dots, x_d) f^2(x'_1, x_3, \dots, x_d) dx_2 \dots dx'_d \\ &= \int \mathbb{I}_A(x') f_3(x'_3 | x'_1, x'_2, \dots, x_d) \dots f_d(x'_d | x'_1, \dots, x'_{d-1}) \\ &\quad f(x'_1, x'_2, x_3, \dots, x_d) dx_3 \dots dx_d dx'_1 \dots dx'_d \end{aligned}$$

En répétant les intégrations successives des x_i , on aboutit finalement à,

$$P(x' \in A) = \int_A f(x'_1, \dots, x'_d) dx'$$

c'est à dire, la densité f est la loi stationnaire de la chaîne produite par l'algorithme D.5.

On montre que la méthode d'échantillonnage de Gibbs correspond à la composition de d algorithmes de Hastings-Metropolis, de probabilité d'acceptation uniformément égale à 1 [Robert, 1996]. Chacune des d étapes est un algorithme de type Hastings-Metropolis défini avec une probabilité d'acceptation à l'étape i telle que,

$$\frac{q_i(x^{(t)} | x) \pi(x)}{q_i(x | x^{(t)}) \pi(x^{(t)})} = 1$$

Généralement, l'expression analytique des lois conditionnelles est plus simple et souvent simulable, particulièrement dans le contexte bayésien avec un choix approprié des densités de probabilité *a priori*. Lorsque la simulation sous les lois conditionnelles n'est pas faisable, on utilise une méthode d'échantillonnage de Gibbs dite hybride (ou mixte). L'idée consiste à développer un algorithme d'échantillonnage construit suivant le schéma itératif D.5 en intercalant à la place de l'étape correspondante un algorithme de type Hastings-Metropolis.

Bibliographie

- M. Abramovitz and I. A. Stegun. *Nat. Bur. Stand. Applied Math series 55*, U.S. Dept Commerce, 1965.
- E. W. Bai. Identification of linear systems with hard input nonlinearities of known structure. *Automatica*, 38 :853–860, 2002.
- T. Bako, B. Bank, and T. Daboczi. Restoration of non linearly distorted audio with application to old motion pictures. In *A.E.S 20th Int. Conf., Budapest, Hungary*, 2001.
- T. B. Bako and T. Daboczi. Unbiased reconstruction of nonlinear distortions. In *IEEE Instrumentation and measurement Technology conf., Anchorage, AK, USA*, 2002.
- R. Balchandran and R. J. Mammone. Non-parametric estimation and correction of non-linear distortion in speech systems. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Proc.*, pages 12–15, 1998.
- A. R. Barron. Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 39 :930–945, 1993.
- M. Boutayeb, H. Rafaralahy, and M. Darouach. A robust and recursive identification method for Hammerstein model. In *IFAC World Congress'96, San Fransisco*, pages 447–452, 1996.
- D. R. Brillinger. The identification of a particular nonlinear time series system. *Biometrika*, 64 (3) :509–515, 1977.
- P. J. Brockwell and R. A. Davis. *Time Series : Theory and Methods*. Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, London, 1990.
- S. P. Brooks and G. O. Roberts. Assessing convergence of markov chain monte carlo algorithms. *Statistics and Computing*, 8(4) :319–335, 1999.
- R. C. Cabot. Comparison of nonlinear distortion measurement methods. In *Proc. AES 11th Int. Conf.*, 1992.
- O. Cappé. *Techniques de Réduction de Bruit pour la Restauration d'Enregistrements Musicaux*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, France, 1993.
- G. Casella and E. I. George. An introduction to gibbs sampling. *The American Statistician*, 46 :167–174, 1992.
- G. Coulomb. Estimation non-paramétrique de la régression : Revue bibliographique. *Int. Statistical Rev.*, 49 :75–93, 1981.
- G. Cybenko. Approximations by superpositions of a sigmoidal function. *Math. Contr. Signals, Syst.*, 2 :303–314, 1989.

- E. Czerwinski, A. Voishvillo, S. Alexandrov, and A. Terekhov. Multitone testing of sound system components - some results and conclusions, part i : History and theory. *J. Audio Eng. Soc.*, 49(11), November 2001a.
- E. Czerwinski, A. Voishvillo, S. Alexandrov, and A. Terekhov. Multitone testing of sound system components - some results and conclusions, part ii : Modelling and applications. *J. Audio Eng. Soc.*, 49(11), December 2001b.
- B. Delcros and B. Vodan. La liberté de communication - loi n.86-1067 du 30 septembre 1986. Commission Nationale de la Communication et des Libertés, 1986.
- J. P. Delmas. *Éléments de théorie du Signal : les signaux déterministes*. Ellipse, Paris, 1991.
- L. Devroye. *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, New-York, 1985.
- Frémeaux. Mémoire mauve sur le patrimoine sonore. Dossier des éditions Frémeaux et Associés, 20 rue Robert Giraudineau, 94300 Vincennes, 2004-2005.
- G. B. Giannakis and E. Serpedin. A bibliography on nonlinear system identification. *Signal Processing*, 81(3) :533–580, 2001.
- S. Godsill, P. J. W. Rayner, and O. Cappé. *Applications of digital signal processing to audio and acoustics - Digital Audio Restoration*. In M. Kahrs and K. Brandenburg, editors. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- S. J. Godsill and P. J. W. Rayner. A bayesian approach to the restoration of degraded audio signals. *IEEE Trans. Speech and Audio Proc.*, 3 :267–278, July 1995.
- S. J. Godsill and P. J. W. Rayner. *Digital Audio Restoration - A Statistical Model-Based Approach*. Springer-Verlag, 1998a.
- S. J. Godsill and P. J. W. Rayner. Statistical reconstruction and analysis of autoregressive signals in impulsive noise using the gibbs sampler. *IEEE Trans. Speech and Audio Proc.*, 6 :352–372, July 1998b.
- G. H. Golub and V. Pereyra. The differentiation of pseudo-inverses and nonlinear least squares problems whos variables separate. *SIAM J. Num. Anal.*, 10(2), 1973.
- I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New-York, London, 1965.
- W. Greblicki and M. Pawlak. Nonparametric identification of Hammerstein systems. *IEEE Trans. Information Theory*, 35 :409–418, 1989.
- P. Green. Reversible jump markov chain monte carlo computation and bayesian model determination. *Biometrika*, 82(4) :711–732, 1995.
- R. Haber and L. Keviczky. *Nonlinear System Identification - Input-Output Modelling Approaches*. Klumers Publishing, 1999.
- R. Haber and H. Unbehauen. Structure identification of nonlinear dynamic systems - a survey on input/output approaches. *Automatica*, 26(4) :651–677, 1990.
- W. K. Hastings. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57 :97–109, 1970.

- J. Hilliard. Intermodulation testing. In *Electronics*, volume 19, pages 123–127, July 1946.
- W. Härdle. *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- A. J. E. M. Janssen, R. Veldhuis, and L. B. Vries. Adaptive interpolation of discrete-time signals that can be modeled as AR processes. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Proc.*, 34(2) : 317–330, April 1986.
- W. Klippel. System identification for horn loudspeakers. *J. Audio Eng. Soc.*, 10 :811–820, October 1966.
- M. Krzyzak. On identification of nonstationary Hammerstein systems by the fourier series regression estimate. In *Proc. of the 28th Conf. on Decision and Control, Tampa, Florida*, December 1989.
- Z.-Q. Lang. A nonparametric polynomial identification algorithm for the Hammerstein system. *IEEE trans. Automat. Contr.*, 42(10) :1435–1441, October 1997.
- E. Leinonen and M. Otala. Correlation audio distortion measurements. *J. Audio Eng. Soc.*, 26 (1/2), January/February 1978.
- I. J. Leontaritis and S. A. Billings. Input-output parametric models for non-linear systems. part i : deterministic non-linear systems. *int. J. Control*, 41(2) :303–328, 1985a.
- I. J. Leontaritis and S. A. Billings. Input-output parametric models for non-linear systems. part ii : stochastic non-linear systems. *int. J. Control*, 41(2) :329–344, 1985b.
- L. Ljung. *Systems Identification- Theory for the User*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.
- G. W. McNally. Dynamic range control of digital audio signals. *J. Audio Eng. Soc.*, 32(5), May 1984.
- K. J. Mercer. *Identification of Signal Distortion Models*. PhD thesis, University of Cambridge, Departement of Engineering, England, 1993.
- S. P. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer, London, 1993.
- K. S. Narendra and P. G. Gallman. An iterative method for the identification of nonlinear systems using Hammerstein model. *IEEE trans. on Automat. Contr.*, 11(7) :546–550, July 1966.
- J. J. K. O’Ruanaidh and W. J. Fitzgerald. *Numerical Bayesian Methods Applied to Signal Processing*. Springer-Verlag, New-York, 1996.
- A. Papoulis and S. U. Pillai. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. Mc Graw-Hill Company, 4th Int. edition, 2002.
- M. Pawlak. On the series expansion approach to the identification of Hammerstein systems. *IEEE trans. Automat. Contr.*, 36(6) :763–767, June 1991.
- B. Porat. *Digital Processing of Random Signals : Theory and Methods*. Prentice-Hall, 1994.
- D. Preis. Phase distortion and phase equalization in audio signal processing - a tutorial review. *J. Audio Eng. Soc.*, 30(11), November 1982.
- D. Preis and H. Polchlopek. Restoration of nonlinearly distorted magnetic recordings. *J. Audio Eng. Soc.*, 32(12), January/February 1984.

- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- S. Rangan, G. Wolodkin, and K. Poola. New results for Hammerstein system identification. In *Proc. of the 34th Conf. on Decision and Control, New Orleans, LA*, December 1995.
- G. M. Raz and B. D. V. Veen. Blind equalization and identification of nonlinear and iir systems - a least squares approach. *IEEE trans. Signal Processing*, 48 :192–200, January 2000.
- M. J. Reed and M. O. J. Hawksford. Identification of discrete volterra series using maximum length sequences. *IEE Proc. Circuits Devices Sys.*, 143(5), October 1996.
- C. Robert. *L'Analyse Statistique Bayésienne*. Economica, Paris, 1992.
- C. Robert. Simulation of truncated normal variables. *Statistics and Computing*, 5(2) :121–125, 1995.
- C. Robert. *Méthodes de Monte-Carlo par Chaînes de Markov*. Economica, Paris, 1996.
- G. O. Roberts and R. L. Tweedie. Geometric convergence and central limit theorems for multidimensional hastings and metropolis algorithms. *Biometrika*, 83(1) :95–110, 1996.
- W. J. Rugh. *Nonlinear System Theory*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1981.
- M. Schetzen. *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. Wiley, New-York, 1980.
- D. Schüller. The ethics of preservation, restoration and re-issues of historical sound recording. *J. Audio Eng. soc.*, 39(12), 1991.
- H. Schurer, A. G. J. Nijmeijer, M. A. Boer, C. H. Slump, and O. E. Herrmann. Identification and compensation of the electrodynamic transducer nonlinearities. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Proc.*, pages 2381–2384, 1997.
- H. Scott. The measurement of audio distortion. In *Communications*, volume april, pages 25–56, 1946.
- H. Scott. Intermodulation measurements. *J. Audio Eng. Soc.*, 1 :56–61, January 1953.
- T. Shiga. Deformation distortion in disc records. *J. Audio Eng. Soc.*, 14(3), July 1966.
- A. F. M. Smiths and G. O. Roberts. Bayesian computation via the gibbs sampler and related markov chain monte carlo methods. *J. Royal Statist. Soc. Ser. B*, 55(1) :3–23, 1993.
- T. G. Stockham, T. M. Canon, and R. B. Ingebretsen. Blind deconvolution through digital signal processing. *Proc. IEEE*, 63(4) :678–692, 1975.
- A. Stuart and J. K. Ord, editors. *Kendall's advanced theory of statistics*, volume 1 (distribution theory). Charles Griffin & Co, London, fifth edition, 1987.
- C. T. Tan, B. C. J. Moore, and N. Zacharov. The effect of nonlinear distortion on the perceived quality of music and speech signals. *J. Audio Eng. Soc.*, 51(11), November 2003.
- C. T. Tan, B. C. J. Moore, N. Zacharov, and V. Mattila. Predicting the perceived quality of nonlinearity distorted music and speech signals. *J. Audio Eng. Soc.*, 52(7), July 2004.

- L. Tierney. Markov chains for exploring posteriori distributions. *Annals of Statistics*, 22 : 1701–1762, 1994.
- A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. *Solutions of Ill-posed Problems*. John Wiley and Sons inc., New-York, 1977.
- U. Totzek and D. Preis. How to measure and interpret coherence loss in magnetic recording. *J. Audio Eng. Soc.*, 35(11), November 1987.
- P. T. Troughton. *Simulation Methods for Linear and Nonlinear Time Series Models with Application to Distorted Audio Signals*. PhD thesis, University of Cambridge, Departement of Engineering, England, 1999.
- P. T. Troughton and S. J. Godsill. MCMC methods for restoration of nonlinearly distorted autoregressive signals. *Signal Processing*, 81(1) :83–97, 2001.
- S. V. Vaseghi and P. J. W. Rayner. A new application of adaptive filters for restoration of archived gramophone recordings. In *Proc. of IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 2548–2551, 1988.
- R. Veldhuis. *Restoration of Lost Samples in Digital Signals*. Prentice-Hall, 1990.
- A. Voishvillo, A. Terekhov, E. Czerwinski, and S. Alexandrov. Graphing, interpretation, and comparison of results of loudspeaker nonlinear distortion measurements. *J. Audio Eng. Soc.*, 52(4), April 2004.
- V. Volterra. *Theory of Functionals*. Dover, New-York, 1959.
- S. A. White. Restoration of non-linearly distorted audio by histogram equalization. *J. Audio Eng. Soc.*, 30(11), November 1982.
- P. Whittle. Estimation and information in stationary time series. *Ark. Math.*, 2 :423–434, 1953.
- U. Zölzer. *DAFX : Digital Audio Effects*. John Wiley and Sons, 2002.