



**HAL**  
open science

# Etude de l'asymétrie cyclone-anticyclone dans les sillages de grande échelle

Gaële Perret

► **To cite this version:**

Gaële Perret. Etude de l'asymétrie cyclone-anticyclone dans les sillages de grande échelle. Planète et Univers [physics]. ENSTA ParisTech, 2005. Français. NNT : 2005PA066453 . pastel-00002367

**HAL Id: pastel-00002367**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00002367v1>**

Submitted on 18 Apr 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE PARIS VI**  
Laboratoire de Météorologie Dynamique

**THESE**  
présentée pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS VI**  
*Spécialité : Mécanique des fluides*

par **Gaële PERRET**

le 1er décembre 2005

**ETUDE DE L'ASYMETRIE CYCLONE-ANTICYCLONE  
DANS LES SILLAGES DE GRANDE ECHELLE**

devant le jury composé de :

Mme FARGE Marie	Directeur de thèse
M. STEGNER Alexandre	Co-directeur de thèse
M. CARTON Xavier	Rapporteur
M. SOMMERIA Joël	Rapporteur
M. ZEITLIN Vladimir	Président du jury
M. BROSSARD Jérôme	Examineur
M. CHOMAZ Jean-Marc	Examineur
M. CLERCX Hermann	Examineur



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Ecoulements de grande échelle . . . . .	7
1.2	Asymétrie cyclone-anticyclone . . . . .	11
1.3	Sillages . . . . .	15
1.4	Présentation de l'étude . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Modèle numérique d'une couche mince en rotation</b>	<b>21</b>
2.1	Modèle de Saint-Venant . . . . .	21
2.2	Modèles asymptotiques . . . . .	23
2.2.1	Equilibre géostrophique . . . . .	23
2.2.2	Modèle quasi-géostrophique . . . . .	25
2.2.3	Modèle frontal . . . . .	25
2.3	Schéma numérique . . . . .	26
2.3.1	Configuration du domaine . . . . .	27
2.3.2	Intégration spatiale . . . . .	27
2.3.3	Intégration temporelle . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Modélisation physique de sillages de grande échelle</b>	<b>33</b>
3.1	Dispositif expérimental . . . . .	33
3.1.1	Pourquoi utiliser un dispositif bi-couches ? . . . . .	33
3.1.2	Dispositif expérimental . . . . .	34
3.2	Méthodes de mesure . . . . .	37
3.2.1	Vélocimétrie par Image de Particules (PIV) . . . . .	37
3.2.2	Fluorescence Induite par Laser (LIF) . . . . .	40
3.2.3	Mesure instantanée de vorticité potentielle . . . . .	40
3.3	Paramètres et validité du modèle de Saint-Venant dans un dispositif bi-couches . . . . .	44
3.3.1	Paramètres . . . . .	44
3.3.2	Validité du modèle shallow-water . . . . .	46
3.4	Correspondance entre un obstacle mobile et un courant frappant un obstacle fixe . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Asymétrie cyclone-anticyclone dans les sillages de grande échelle</b>	<b>51</b>
4.1	Résumé . . . . .	51
4.2	Article : Cyclone-anticyclone asymmetry of large scale wakes in laboratory	53
4.2.1	Introduction . . . . .	53
4.2.2	Laboratory experiments . . . . .	55
4.2.3	Dynamical structure of the wakes . . . . .	58
4.2.4	Shear layer . . . . .	60

4.2.5	Vortices . . . . .	62
4.2.6	Wave activity . . . . .	65
4.2.7	Strouhal number . . . . .	66
4.2.8	Discussion . . . . .	67
4.2.9	Conclusion . . . . .	71
4.3	Compléments . . . . .	73
4.3.1	Emission d'un traceur passif . . . . .	73
4.3.2	Grand nombre de Reynolds . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Stabilité de sillages parallèles</b>	<b>79</b>
5.1	Résumé . . . . .	79
5.2	Article : Stability of parallel wake flows in quasi-geostrophic and frontal regime . . . . .	81
5.2.1	Introduction . . . . .	81
5.2.2	Problem formulation . . . . .	82
5.2.3	Linear stability analysis . . . . .	83
5.2.4	Non-linear evolution . . . . .	84
5.2.5	Absolute/convective instability . . . . .	90
5.2.6	Conclusion . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Sélection des tourbillons dans les jets, cisaillements et sillages océaniques</b>	<b>97</b>
6.1	Résumé . . . . .	97
6.2	Article : Do large scale barotropic instabilities favour the formation of anticyclonic vortices in the ocean? . . . . .	98
6.2.1	Introduction . . . . .	98
6.2.2	Model . . . . .	98
6.2.3	Bickley jet . . . . .	100
6.2.4	Parallel shear flow . . . . .	103
6.2.5	Parallel wake flow . . . . .	109
6.2.6	Conclusion . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Modélisation numérique de l'écoulement derrière un obstacle</b>	<b>115</b>
7.1	Formulation du problème . . . . .	115
7.2	Méthode de pénalisation . . . . .	117
7.2.1	Principe et origine . . . . .	117
7.2.2	Equations de Saint-Venant pénalisées . . . . .	118
7.2.3	Implémentation numérique . . . . .	121
7.3	Convergence . . . . .	125
7.3.1	Résolution . . . . .	125
7.3.2	Paramètre de pénalisation . . . . .	126
7.4	Validation de l'éponge . . . . .	126
7.5	Comparaison avec les expériences . . . . .	128
7.5.1	cas quasi-géostrophique . . . . .	128
7.5.2	cas frontal . . . . .	130
7.6	Proceeding : Rotating shallow-water flow past an obstacle : numerical and laboratory experiments . . . . .	132
7.6.1	Introduction . . . . .	132
7.6.2	Model . . . . .	133
7.6.3	Results . . . . .	136

---

7.6.4 Conclusion . . . . .	140
<b>8 Conclusion et perspectives</b>	<b>143</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>146</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Ecoulements de grande échelle

La plupart des écoulements géophysiques, qu'ils soient atmosphériques ou océaniques sont stratifiés et soumis à la rotation de la Terre. Pour ce type d'écoulement, on introduit une échelle caractéristique qui dépend de la stratification et de la rotation : le rayon de déformation  $R_d$  ou rayon de Rossby. Lorsque l'échelle caractéristique  $L$  de l'écoulement ou des structures, est plus petite que le rayon de déformation, on considère la dynamique peu sensible à la rotation terrestre. Ceci est généralement vrai hormis certaines instabilités spécifiques. Ainsi, pour décrire la dynamique de petite échelle  $L \ll R_d$ , on prend généralement en compte la stratification mais on néglige souvent la rotation. Par contre, pour les écoulements de grande échelle,  $L \geq R_d$ , on tient compte des effets combinés de la rotation et de la stratification.

A chaque écoulement peut être associé un rayon de déformation qui dépend de sa structure verticale, de son épaisseur, et de la composante locale de la rotation terrestre (*i.e* paramètre de Coriolis) à la latitude considérée. A un courant de surface océanique, par exemple, est associé le premier rayon de déformation barocline fonction du gradient de densité à la thermocline, de l'épaisseur du courant et du paramètre de Coriolis. La Figure 1.1 représente les variations de cette échelle dans l'ensemble des océans. Le rayon de déformation est maximal à l'équateur, où la composante locale de la rotation est très faible, et minimal aux pôles. Aux structures situées à quelques centaines de mètres de profondeur, comme les Submesoscale Coherent Vortices (SCV), est associé un rayon de déformation beaucoup plus petit.

Des exemples de structures de grande échelle sont observables dans l'atmosphère des planètes géantes ou l'océan terrestre. Citons, par exemple, la Grande Tâche Rouge ou l'Ovale Blanc dans l'atmosphère de Jupiter. Ce sont de grosses structures anticycloniques de  $10000\text{ km}$  et  $4000\text{ km}$  de diamètre respectivement (Fig. 1.2) alors que le rayon de déformation associé est estimé à  $R_d \approx 2500\text{ km}$  [65]. Sur Terre, la majorité des grands courants de surface océaniques comme le Gulf Stream, le courant des Açores ou le courant Nord Atlantique sont des exemples d'écoulements de grande échelle. La largeur de ces courants est de l'ordre de  $70$  à  $100\text{ km}$  alors que le rayon de déformation associé à leur structure varie entre  $30$  et  $60\text{ km}$ . De nombreux tourbillons de grande échelle sont également observés, des tourbillons de surface comme les anneaux formés par déstabilisation du Gulf Stream ou les mesoscale eddies, et des tourbillons de sub-surface comme les meddies, swoddies et SCV. Les SCV sont des tourbillons anticycloniques observés à  $750\text{ m}$  de profondeur. Dans le cadre d'une étude approfondie sur ces tourbillons, Mc Williams



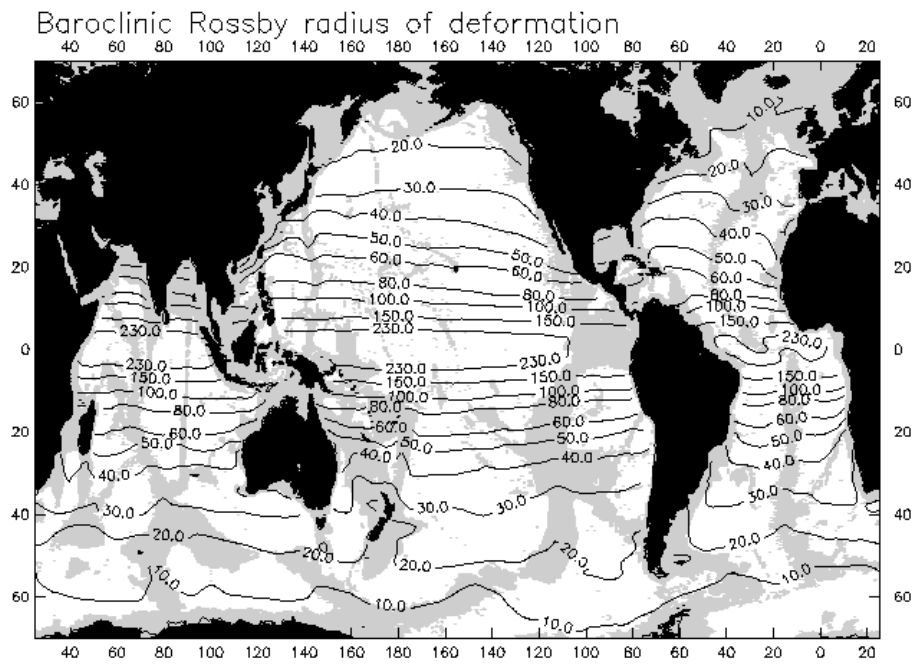


FIG. 1.1 – Valeurs du premier rayon de déformation barocline dans les océans.



FIG. 1.2 – Grande Tâche Rouge et Ovale Blanc de Jupiter,  $L = 10000 - 4000 \text{ km} \gg R_d = 2500 \text{ km}$

[50] évalue leur rayon à  $12 - 15 \text{ km}$  et le rayon de déformation associé à leur structure à  $6.5 - 13 \text{ km}$ . Comme les swoddies, les meddies sont des lentilles d'eau méditerranéennes, anticycloniques, se propageant dans l'Atlantique Nord. Elles sont plus larges que les SCV et centrées autour de  $1000 \text{ m}$ , leur rayon varie de  $40$  à  $60 \text{ km}$  pour un rayon de déformation associé au deuxième ou troisième mode barocline,  $R_d \approx 12 \text{ km}$ .

Ces tourbillons peuvent être créés par plusieurs mécanismes. Un processus de formation couramment observé est la déstabilisation des courants et des jets. En se déstabilisant, les jets forment des méandres qui se pincent pour former des structures cohérentes tourbillonnaires, c'est le processus de formation des anneaux du Gulf Stream (Fig. 1.3(a)). Un courant peut également être déstabilisé par le relief côtier ou sous-marin. Derrière

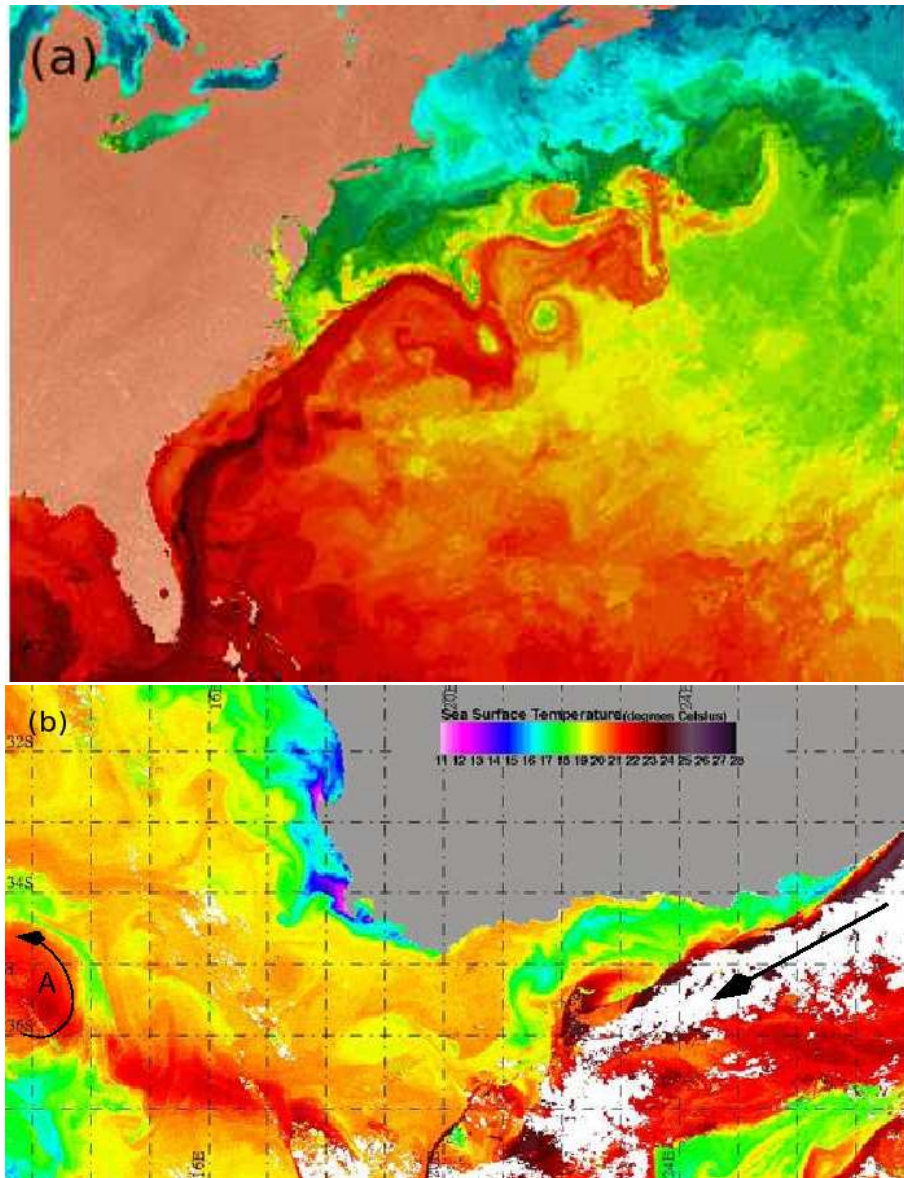


FIG. 1.3 – (a) Image satellite des tourbillons créés par déstabilisation du Gulf Stream. (b) Formation d'un tourbillon anticyclonique par déstabilisation du courant des Aiguilles au passage du Cap de Bonne Espérance.

un cap, par exemple, un courant se détachant de la côte peut s'enrouler pour former des

tourbillons. Pour un cap donné, suivant le sens du courant, ce processus générera des tourbillons cycloniques ou anticycloniques. La Figure 1.3(b) montre la formation d'une structure anticyclonique créée par la déstabilisation du courant des Aiguilles derrière le cap de Bonne Espérance. Si le relief est une île, le courant arrivant sur l'île peut se séparer et former une allée tourbillonnaire de cyclones et d'anticyclones. Ces allées tourbillonnaires sont couramment observées dans l'atmosphère grâce à la signature des nuages. La Figure 1.4(a) en montre un exemple derrière l'île de Guadalupe au large de la Californie. Les allées tourbillonnaires atmosphériques sont de petite échelle, car la taille de l'île et des tourbillons est très inférieure au rayon de déformation local estimé à  $R_d \approx 1000 \text{ km}$ . Dans

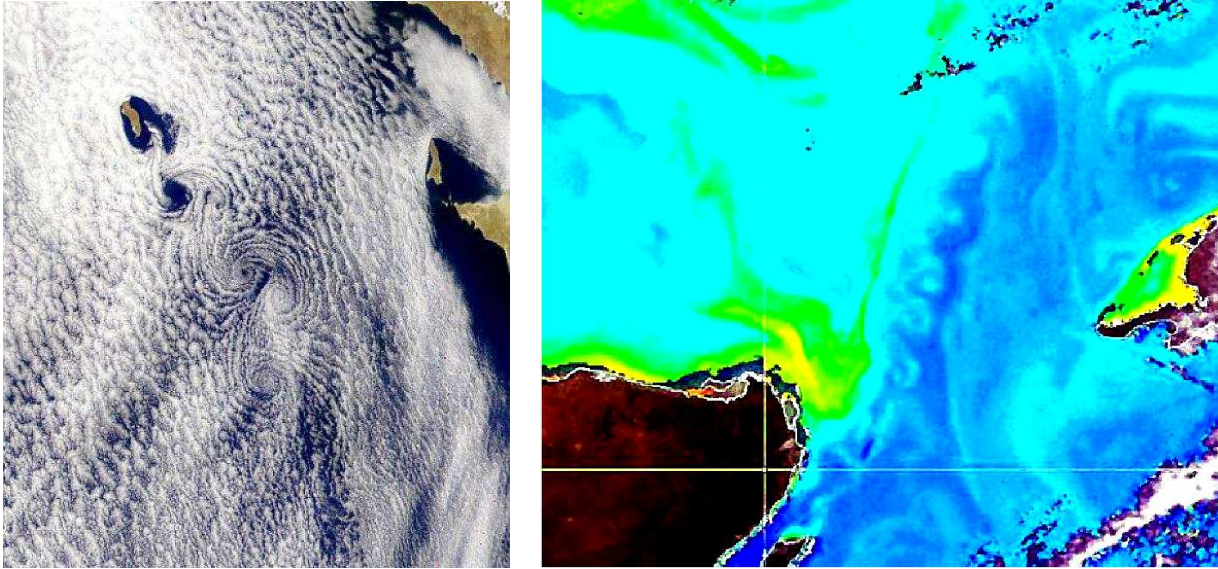


FIG. 1.4 – (a) Allée de von Karman observée dans la couche nuageuse, dans le sillage de l'île de la Guadalupe au large de la Californie. (b) Image satellite d'une allée de tourbillons au large du cap du Yucatan, derrière l'île de Cozumel. Les couleurs représentent la concentration en phytoplancton.

l'océan, ces structures tourbillonnaires doivent également exister même si elles sont moins faciles à observer par satellite, à cause d'une part de la couverture nuageuse, et d'autre part du manque de traceur facilement visible comme les nuages dans l'atmosphère. Ces sillages océaniques seront de grande échelle car beaucoup d'îles sont plus grandes que le rayon de déformation local. Les allées tourbillonnaires dans l'océan ne seront donc pas soumises à la même dynamique que les sillages atmosphériques.

La Figure 1.4(b) est une image satellite d'une allée de tourbillons observée dans l'océan, derrière l'île Cozumel, au large du Yucatan (Mexique). Le traceur est du phytoplancton et les couleurs marquent la différence de concentration. Il est difficile de dire si les tourbillons observés sont liés à la présence du cap ou de l'île, cependant ils sont générés par déstabilisation d'un fort cisaillement et sont tous anticycloniques.

De manière plus générale, il semble, d'après les observations, que les anticyclones de grande échelle soient plus nombreux, plus gros et plus cohérents que les cyclones. Cette sélection des anticyclones dans les écoulements de grande échelle a été confirmée par de nombreuses études dynamiques avec des modèles simples.

## 1.2 Asymétrie cyclone-anticyclone

Les écoulements géophysiques que l'on considère sont lents par rapport à la vitesse de rotation de la Terre. Ce rapport est caractérisé par le nombre de Rossby :

$$Ro = \frac{V_0}{fL}$$

où  $V_0$  et  $L$  sont la vitesse et l'échelle caractéristiques de l'écoulement,  $V_0/L$  le temps d'advection de l'écoulement, et  $f = 2\Omega \sin\varphi$  le paramètre de Coriolis avec  $\Omega$  la vitesse de rotation de la Terre et  $\varphi$  la latitude. On considère donc des écoulements à petit nombre de Rossby,  $Ro \ll 1$ , appelés écoulements géostrophiques car ils satisfont au premier ordre l'équilibre géostrophique entre la force de Coriolis et la force de pression :

$$2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

où  $\vec{V} = (u, v)$  est la vitesse horizontale du fluide,  $\rho$  la masse volumique et  $p$  la pression. Cet équilibre peut aussi s'écrire :

$$f\omega = \frac{1}{\rho}\nabla^2 p$$

où  $\omega = \partial_x v - \partial_y u$  est la vorticité relative. A l'équilibre géostrophique, les cyclones, de vorticité positive, correspondent à une basse pression et les anticyclones, de vorticité négative, à une haute pression (Fig. 1.5). Dans ce contexte, le modèle le plus couramment utilisé pour

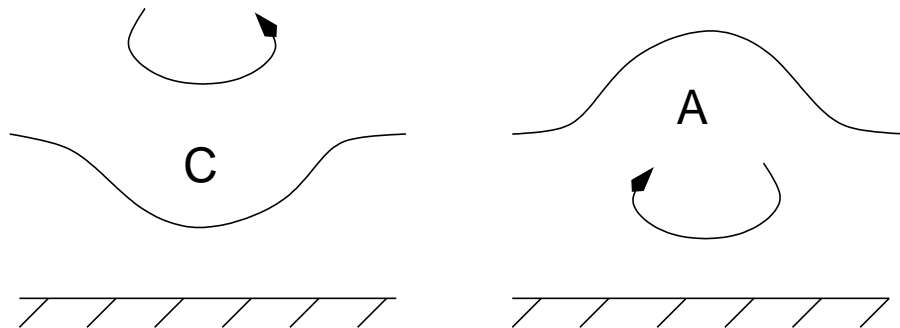


FIG. 1.5 – Représentation schématique de l'équilibre géostrophique.

modéliser les écoulements géostrophiques est le modèle quasi-géostrophique. Il décrit la dynamique d'une couche mince de densité constante qui vérifie l'équilibre géostrophique, l'équilibre hydrostatique  $p = \rho gh$  et une faible déviation du géopotential  $\phi = gh$  par rapport à l'état de repos [54]. Ces hypothèses impliquent que la taille caractéristique de l'écoulement  $L$  soit du même ordre que le rayon de déformation  $R_d$  (cf. chapitre 2). Dans ce modèle, les cyclones et les anticyclones suivent la même dynamique. Le modèle le plus simple qui puisse alors représenter une évolution asymétrique de l'écoulement et qui ne soit pas restreint à  $L \geq R_d$ , est le modèle de Saint-Venant en rotation (ou couche mince en rotation).

Dans le cadre de ce modèle, de nombreuses études ont mis en évidence une asymétrie cyclone-anticyclone dans différentes configurations. Parmi les premiers à avoir mis en évidence cette asymétrie, Farge [25], puis Polvani *et. al* [57] et Arai et Yamagata [4], ont

montré que les cyclones émergeant spontanément lors de l'évolution d'un champ turbulent homogène sont plus étirés et moins nombreux que les anticyclones. La Figure 1.6 montre un champ final où une asymétrie cyclone-anticyclone est visible, non pas dans un régime grande échelle, mais dans un régime agéostrophique pour des nombres de Rossby finis. Polvani *et. al* ont balayé une large gamme de paramètres, allant d'un régime de

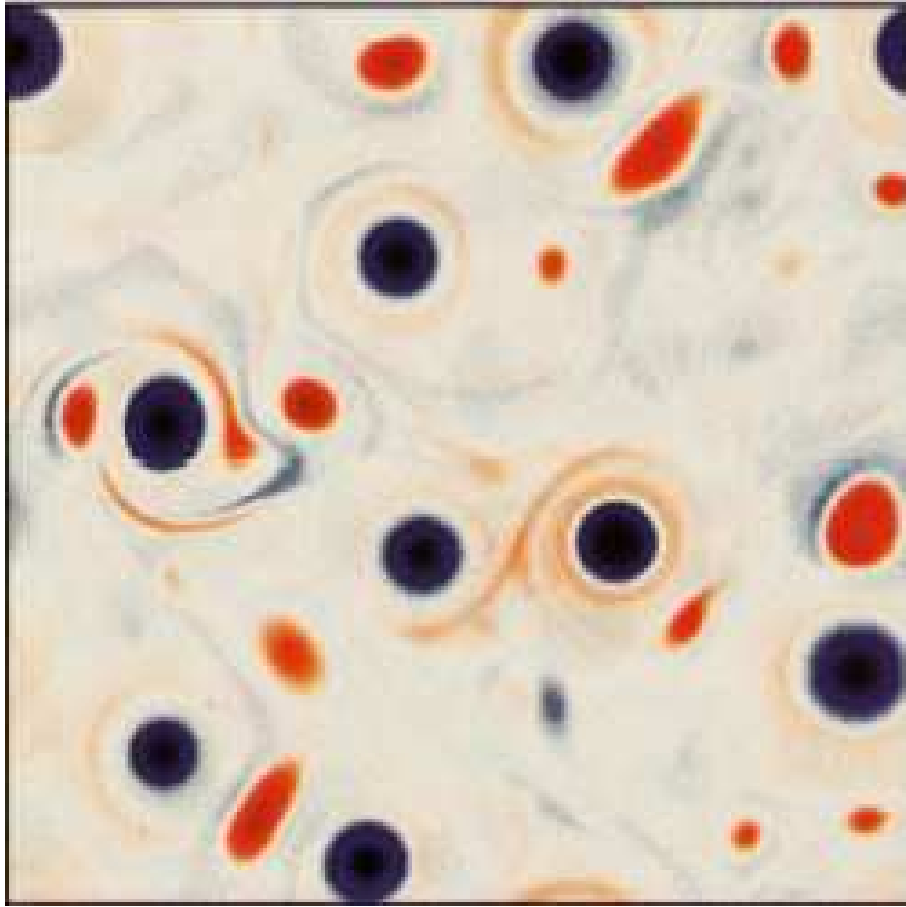


FIG. 1.6 – Vorticité d'un champ turbulent homogène en décroissance libre pour  $Ro = 1.0$  et  $R_d = 3L$ . L'état initial est aléatoire et ajusté. Les anticyclones sont en bleus et les cyclones en rouge, tiré de Polvani *et. al* [57].

petite échelle à un régime de grande échelle, et ont montré que l'étirement des cyclones est favorisé pour de grands nombres de Froude, rapport entre la vitesse caractéristique de l'écoulement et la vitesse des ondes. Arai et Yamagata, quant à eux, trouvent que l'asymétrie augmente avec la déviation de la surface libre.

Kuo et Polvani [44] ont également observé une asymétrie lors de l'ajustement géostrophique d'une anomalie de masse ou de quantité de mouvement. Une anomalie de quantité de mouvement de signe opposé évolue, dans un régime géostrophique, vers des anticyclones plus larges et avec de plus grandes déviations du géopotential que les cyclones lorsque la largeur initiale de l'anomalie est plus grande que le rayon de déformation.

Concernant l'étude de stabilité de tourbillons isolés, Stegner et Dritschel [66] ont montré que les effets grande échelle comme les effets agéostrophiques, nombres de Rossby finis, ont tendance à stabiliser les anticyclones et déstabiliser les cyclones (Fig. 1.7).

Arai et Yamagata [4] ont étudié la stabilité d'un tourbillon elliptique pour différentes

$$\text{Bu} = 1/9$$

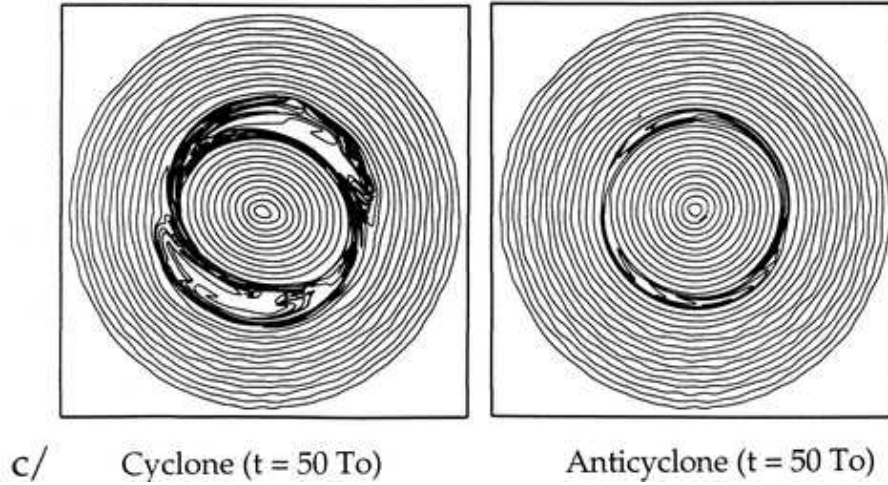


FIG. 1.7 – Contours de vorticité potentielle pour des tourbillons cycloniques et anticycloniques gaussiens de raideur 4, pour  $R_d = 0.33R$  où  $R$  est le rayon initial du vortex, et  $Ro = 0.1$ , tiré de Stegner et Dritschel [66].

déviation initiale de la surface. Les tourbillons anticycloniques se réaxisymétrisent dans tous les cas alors que trois régimes différents sont identifiés pour l'évolution dynamique des cyclones en fonction de la déviation initiale maximale de la surface. La Figure 1.8 présente deux cas extrêmes pour les cyclones et les anticyclones. Pour de faibles déviations de la surface, les cyclones deviennent axisymétriques, et pour des déviations importantes, les cyclones se séparent en deux tourbillons plus petits.

Une asymétrie cyclone-anticyclone a également été observée lors de phénomènes de déstabilisation de jets. Poulin et Flierl [58] ont ainsi montré que la déstabilisation d'un jet dans un régime agéostrophique, nombres de Rossby finis, produit des cyclones très déformés, alors que les anticyclones sont plus circulaires.

Dans un système bi-couches, Matsuura [48] a montré que la dynamique des anticyclones est différente de celle des cyclones lorsque la déviation de l'interface entre les deux couches augmente. Egalement dans le cadre de l'instabilité barocline, Baey et Carton [7] ont étudié la stabilité de tourbillons isolés gaussiens (Fig. 1.9). Dans un régime grande échelle, les cyclones sont plus instables que les anticyclones. Dans ce même cadre, Baey, Rivière et Carton [8] ont également étudié la stabilité de jets zonaux. Les anticyclones formés par déstabilisation des jets sont plus gros que les cyclones, et plus nombreux dans le cas où l'instabilité barocline est le mécanisme prédominant de déstabilisation.

Cependant, à notre connaissance, aucune étude n'a été effectuée sur la dynamique du sillage dans un écoulement géostrophique de grande échelle. Nous nous sommes donc intéressés à cette dynamique, pour essayer d'expliquer notamment les structures observées sur l'image 1.4(b), derrière l'île Cozumel. Le cas du sillage est particulièrement intéressant car il présente deux types d'écoulement, des couches cisailées juste derrière l'obstacle, et des tourbillons isolés plus loin dans le sillage. Il est intéressant de se demander si l'un, l'autre ou ces deux types d'écoulement seront affectés par une éventuelle asymétrie et comment le seront-ils? Nous avons choisi de nous placer dans le modèle de Saint-Venant pour étudier cette configuration dans un modèle simple. Nous rappelons, dans le paragraphe suivant, la structure générale du sillage derrière un obstacle dans une configuration

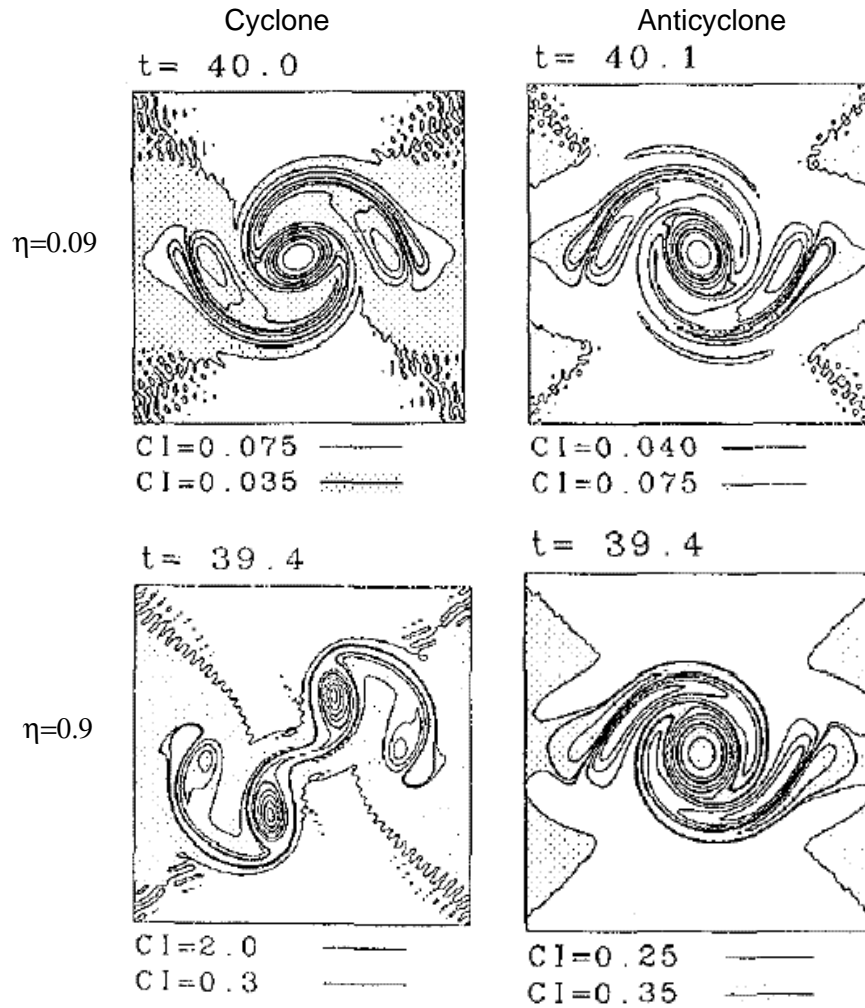


FIG. 1.8 – Stabilité d'un tourbillon elliptique cyclonique et anticyclonique pour une déviation de la surface initiale au centre du tourbillon  $\eta_{max} = 0.09$ , rangée du haut et  $\eta_{max} = 0.9$  rangée du bas, tiré de Arai et Yamagata [4].

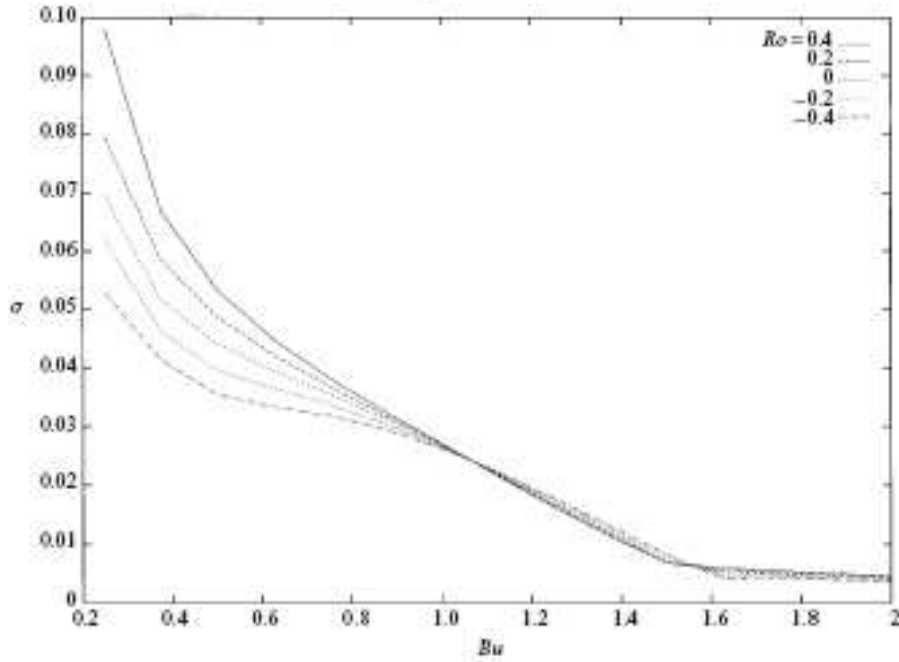


FIG. 1.9 – Taux de croissance de développement de l’instabilité pour un tourbillon circulaire elliptiquement déstabilisé en fonction du rapport  $(R_a/R)^2$  où  $R$  est le rayon initial du vortex dans un système à deux couches minces, tiré de Baey et Carton [7].

homogène et incompressible avec et sans rotation.

### 1.3 Sillages

Dans une configuration incompressible et homogène, sans rotation, le sillage derrière un obstacle est contrôlé uniquement par le nombre de Reynolds  $Re$ . Ce paramètre sans dimension caractérise le rapport entre le terme d’advection représentant les effets non-linéaires de l’écoulement et la dissipation visqueuse :

$$Re = \frac{V_0 D}{\nu}$$

où  $V_0$  est la vitesse caractéristique de l’écoulement arrivant sur l’obstacle,  $D$  la taille de l’obstacle et  $\nu$  la viscosité cinématique. La grande majorité des études sur le sillage d’obstacle non profilé ont considéré le cas du cylindre (cf. Williamson 1996 [77] pour une revue sur les instabilités de sillage). Pour  $Re \ll 1$ , la diffusion visqueuse domine l’écoulement qui reste complètement symétrique amont/aval : aucune structure ne se forme dans le sillage. Pour  $5 - 6 \leq Re \leq 47 - 50$ , l’écoulement reste stationnaire, mais la couche limite formée sur le cylindre décroche en aval et une cellule de recirculation composée de deux tourbillons contra-rotatifs se forme derrière l’obstacle. La longueur de cette cellule de recirculation augmente avec le nombre de Reynolds. Lorsque le nombre de Reynolds devient supérieur à sa valeur critique  $Re_c \approx 48$ , l’écoulement devient instationnaire et une allée tourbillonnaire de von Karman se forme dans le sillage de l’obstacle (Fig. 1.10). Ces allées sont formées de tourbillons de signes opposés, émis alternativement au niveau du cylindre et advectés par l’écoulement. Les tourbillons sont émis à une fréquence propre  $F$



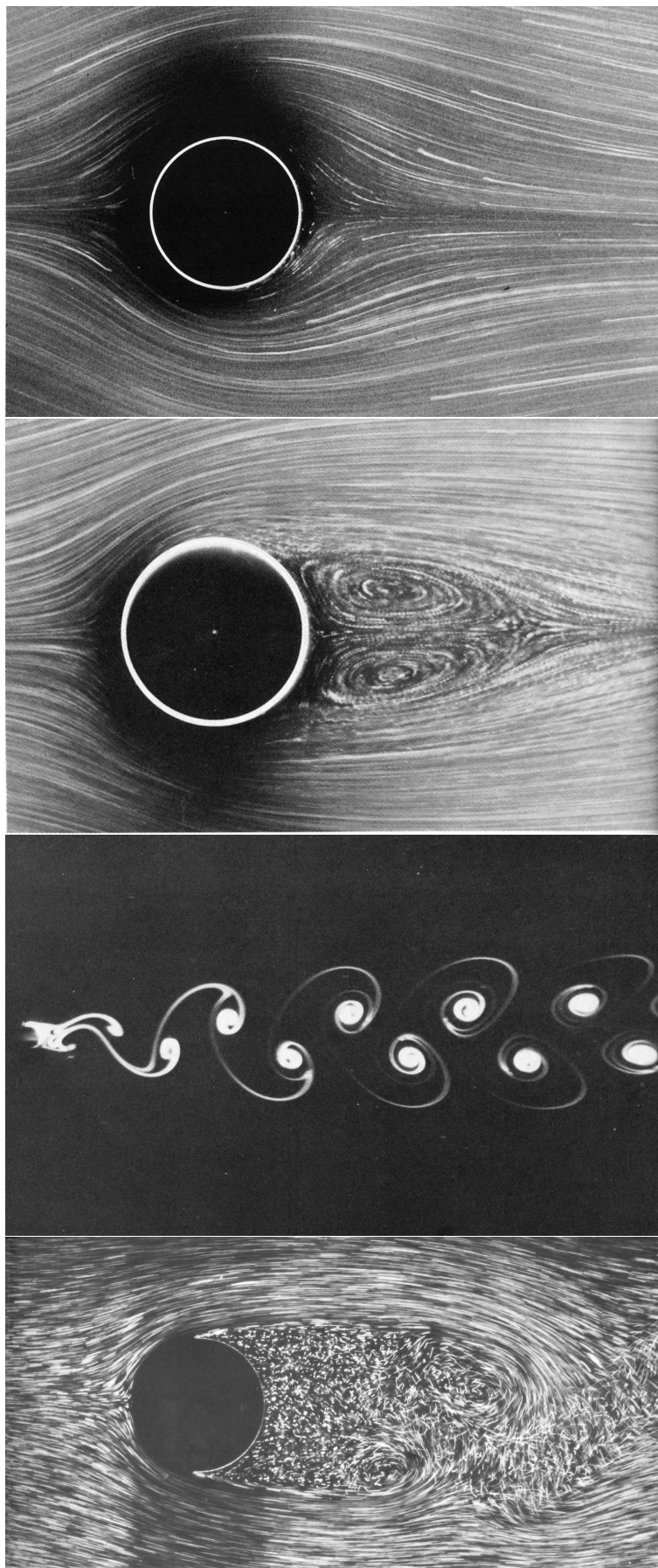


FIG. 1.10 – Sillage derrière un cylindre pour  $Re = 1.54$ ,  $Re = 26$ ,  $Re = 140$  et  $Re = 2000$  tiré de von Dyke 1982 [71]

qui ne dépend que du nombre de Reynolds. Adimensionnée par le diamètre du cylindre  $D$  et la vitesse caractéristique de l'écoulement  $V_0$ , cette fréquence est appelée nombre de Strouhal :

$$St = \frac{FD}{V_0}$$

Le nombre de Strouhal augmente rapidement pour des nombres de Reynolds proches du seuil, et atteint une valeur quasiment constante de  $St = 0.2$  pour  $Re \geq 100$  (Fig. 1.11). Lorsque le nombre de Reynolds augmente encore, au delà de 2000, le sillage devient

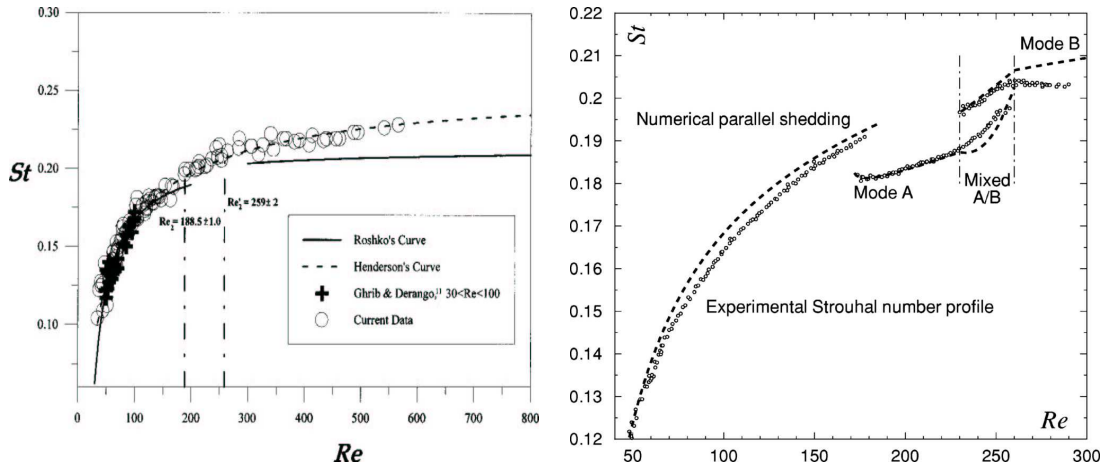


FIG. 1.11 – Relation  $(Re, St)$  dans une configuration 2D (a), tiré de Wen and Lin [74], et 3D (b), tiré de Sheard *et. al* [62].

turbulent, des tourbillons de petite échelle se créent et l'on ne peut plus définir une fréquence de Strouhal.

Les allées de von Kármán peuvent être décrites comme un oscillateur auto-entretenu, correspondant à un mode global d'instabilité, ou mode intrinsèque à l'écoulement (Huerre et Rossi [34]). L'apparition des allées de von Kármán est associée à une bifurcation de Hopf (Provensale *et. al.* 1987). Le taux de croissance de l'instabilité de sillage est proportionnel à  $(Re - Re_c)$ . Dans une configuration à trois dimensions, des instabilités tridimensionnelles apparaissent à  $Re = 180 - 220$  qui déstabilisent les tourbillons selon la verticale. Cependant, le nombre de Strouhal, perturbé dans cette gamme de Reynolds, reste proche de 0.2 (Fig. 1.11(b)).

Dans un référentiel tournant, les allées de von Kármán sont influencées par la force de Coriolis. Le nombre de Strouhal ne dépend plus du seul nombre de Reynolds, il varie également en fonction du nombre de Rossby. Lorsque le nombre de Rossby diminue, le nombre de Strouhal augmente. Cependant, cette variation reste modérée et le nombre de Strouhal ne dépasse pas 0.28 pour  $Ro = 2$  (Boyer *et. al* [12]). Pour des nombres de Rossby finis,  $1 \leq Ro \leq 10$ , les structures anticycloniques sont instables dès que leur vorticité absolue  $\omega + f$  devient négative,  $\omega$  étant la vorticité relative et  $f$  le paramètre de Coriolis (Stegner *et. al* [67], Leblanc et Cambon [24]). Une classe d'instabilités tridimensionnelles, instabilité centrifuge ou elliptique-inertielle, peut ainsi provoquer une asymétrie dans l'allée tourbillonnaire en déstabilisant de façon transitoire les anticyclones (Fig. 1.12). Cependant cette asymétrie affecte peu le nombre de Strouhal. Pour des nombres de Rossby  $Ro < 1$  et  $Ro > 10$ , l'allée tourbillonnaire reste stable pour les instabilités tridimensionnelles tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à 180. Cependant, les sillages n'ont

jamais été étudiés dans une configuration grande échelle, pour des tailles d'obstacles plus grandes que le rayon de déformation.

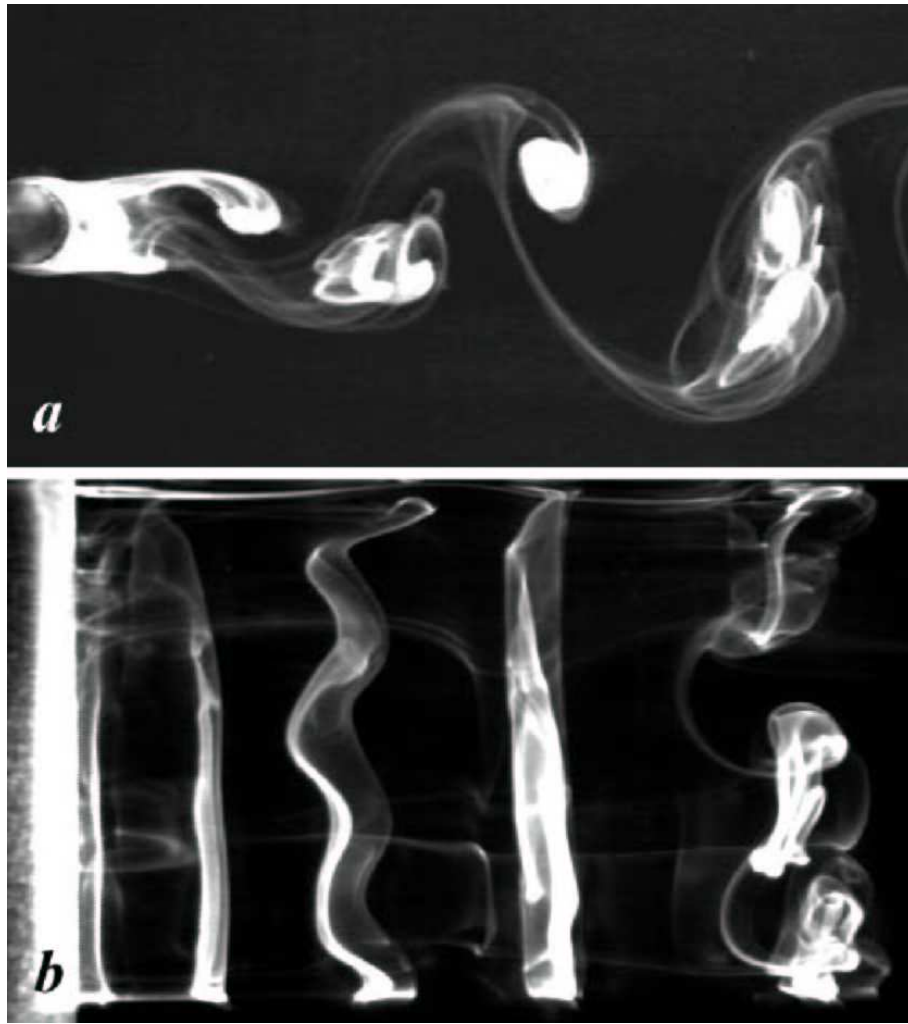


FIG. 1.12 – (a) Vue de dessus et (b) vue de côté, des perturbations tridimensionnelles affectant les anticyclones d'une allée de von Karman dans une configuration 3D pour  $Ro = 2.2$  et  $Re = 140$ , tiré de Stegner *et. al* [67].

## 1.4 Présentation de l'étude

L'objectif de cette thèse est de caractériser les sillages de grande échelle dans une configuration couche-mince en rotation. Plus particulièrement, on s'intéresse à la façon dont l'asymétrie cyclone-anticyclone observée dans les écoulements de grande échelle, affecte l'allée de tourbillons classiquement formée derrière un obstacle. Nous avons utilisé trois approches complémentaires pour l'étude des sillages de grande échelle : expérimentale, théorique et numérique.

Le modèle de Saint-Venant et sa modélisation numérique sont présentés dans le chapitre 2.

Le chapitre 3 présente le dispositif expérimental utilisé pour réaliser des sillages de grande échelle en laboratoire, ainsi que les méthodes de mesure et les paramètres.

Le chapitre 4, présente les résultats de l'étude expérimentale de sillages dans une large gamme de paramètres, du régime 2D au régime grande échelle. La caractérisation expérimentale des sillages de grande échelle a mis en évidence une structure de l'écoulement derrière l'obstacle jamais observée, à notre connaissance. En aval du cylindre, un sillage parallèle s'étire sur une distance de plusieurs diamètres. Au delà, les couches de cisaillement parallèles se déstabilisent et une allée de tourbillons se forme. Dans un régime limite, on voit apparaître uniquement une allée de tourbillons anticycloniques. L'allée de von Karman à grande échelle ( $D \geq R_d$ ) présente ainsi une forte asymétrie cyclone-anticyclone.

Cette observation a motivé l'analyse de stabilité linéaire et non-linéaire d'écoulements de sillages parallèles pour identifier les mécanismes responsables de l'asymétrie dans l'allée de tourbillons. Cette analyse est présentée au chapitre 5. La démarche consiste à étudier la stabilité, dans les régimes quasi-géostrophique et frontal, de profils expérimentaux symétriques et asymétriques mesurés dans les couches de cisaillement derrière l'obstacle.

Les résultats du chapitre précédent montrent la production préférentielle d'anticyclones dans des sillages expérimentaux, nous nous intéressons dans ce chapitre à d'autres écoulements susceptibles de produire des tourbillons, des écoulements de jets et de cisaillements. Le chapitre 6 présente l'analyse de stabilité linéaire et non-linéaire de jets, cisaillements simples et doubles cisaillements.

Enfin, nous présentons dans le dernier chapitre, une méthode pour la modélisation numérique de sillages de grande échelle. Nous utilisons une méthode de pénalisation en volume avec un code pseudo-spectral pour intégrer les équations de Saint-Venant. Cette méthode n'ayant jamais été utilisée dans le modèle de Saint-Venant, les simulations numériques sont comparées aux expériences de laboratoire pour valider la méthode. Nous présentons donc l'étude comparative de la méthode numérique et des expériences de laboratoire.



# Chapitre 2

## Modélisation numérique d'une couche mince en rotation

Notre démarche consiste à caractériser les sillages de grande échelle dans un modèle simple d'écoulements géophysiques qui puisse prendre en compte une asymétrie entre les cyclones et les anticyclones. On considère le modèle de Saint-Venant, dit en eau peu profonde, qui décrit la dynamique d'une mince couche fluide en rotation, avec une surface libre.

### 2.1 Modèle de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant sont obtenues en intégrant les équations de Navier-Stokes sur l'épaisseur de la couche fluide, avec les approximations suivantes :

- le fluide est homogène de densité constante  $\rho$ ,
- la couche fluide est mince  $h_0/L \ll 1$ , où  $h_0$  est l'épaisseur de la couche fluide au repos et  $L$  l'échelle caractéristique des mouvements horizontaux,
- l'équilibre hydrostatique est vérifié,  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ ,  $p$  est la pression du fluide et  $g$  l'accélération de la gravité,

On suppose le fond plat. On fait de plus l'approximation du plan- $f$ , qui suppose que la courbure de la Terre est négligeable. En effet l'échelle caractéristique des mouvements que l'on considère  $L$ , est de l'ordre de quelques centaines de kilomètres, alors que l'échelle planétaire, à partir de laquelle les effets dûs à la sphéricité de la Terre ne sont plus négligeables, est estimé à  $L_\beta = f/(\beta) \approx 3500km$  où  $\beta = (2\Omega/R_T)\cos\theta_0$  et  $f = 2\Omega\sin\varphi_0$ ,  $R_T$  étant le rayon de la Terre,  $\varphi_0$  la latitude considérée et  $\Omega$  la vitesse de rotation. On considère donc l'écoulement sur un plan tournant à vitesse constante  $\Omega = f/2$  autour d'un axe de rotation perpendiculaire au plan, situé à la latitude  $\varphi_0$ .

Sous ces hypothèses, les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse s'écrivent :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + f \vec{n} \times \vec{V} = -g \nabla h + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla h + h \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.2)$$

$h$  est la hauteur de la couche fluide,  $\vec{V} = (u, v)$  la vitesse horizontale d'une colonne de fluide,  $f = 2\Omega$  le paramètre de Coriolis,  $g$  l'accélération de la gravité et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. Les différentes grandeurs sont représentées sur le schéma

Fig.2.1. On se place dans l'hémisphère sud pour confronter les simulations numériques aux expériences de laboratoire. En effet, la cuve tournante des expériences tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, donc par définition les cyclones tournent dans le même sens. Ceci correspond au repère défini dans l'hémisphère sud.

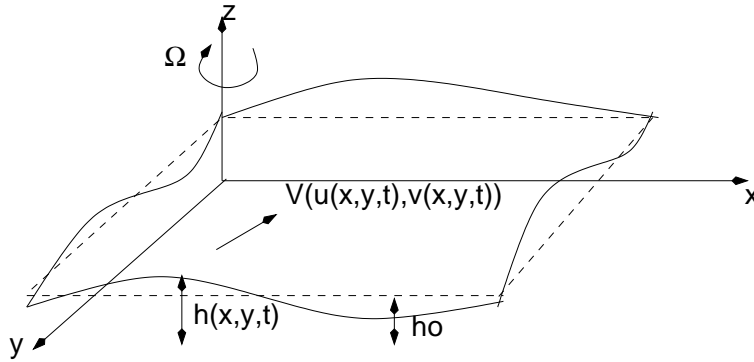


FIG. 2.1 – Schéma du modèle de Saint-Venant.

### Conservation de la vorticité potentielle

Dans le cas non visqueux on obtient par combinaison des équations (2.1)-(2.2), l'équation de conservation Lagrangienne de la vorticité potentielle  $q$  :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla q = 0$$

avec

$$q = \frac{\omega + f}{h} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

La conservation de cette quantité pour chaque colonne de fluide implique une diminution de sa vorticité absolue,  $\omega + f$ , si la colonne est comprimée et une augmentation si elle est étirée.

### Modes propres des équations de Saint-Venant

Pour des mouvements de faible amplitude, l'étude des équations linéarisées permet de mettre en évidence les modes propres du système. Les équations de Saint-Venant non visqueuses, linéarisées autour de l'état de base  $\bar{u} = \bar{v} = 0$  et  $\bar{h} = h_0$ , s'écrivent :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + f \vec{n} \times \vec{V} = -g \nabla h \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.4)$$

En supposant le domaine infini dans les directions horizontales, les solutions peuvent être écrites sous forme d'une superposition d'ondes planes :

$$X = \text{Re}(\widehat{X}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{x} - |\vec{K}|ct)})$$

où  $c$  est la vitesse de phase des ondes et  $\vec{K}$  le nombre d'onde.

Avec cette décomposition la relation de dispersion du système (2.3)-(2.4) est

$$c(|\vec{K}|^2 c^2 - gh_0 |\vec{K}|^2 - f^2) = 0$$

et elle admet trois solutions.

Le mode propre correspondant à la première valeur propre  $c = 0$  est une solution stationnaire qui vérifie l'équilibre géostrophique :

$$f\vec{n} \times \vec{V} = -g\nabla h \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.6)$$

On verra que cet équilibre est vérifié par des écoulements dont l'échelle de temps est beaucoup plus grande que la période de rotation de la Terre, et dont la dynamique est affectée par cette rotation. C'est pourquoi ce mode est appelé mode lent, ou aussi mode vortical.

Pour les valeurs propres  $c = \pm \sqrt{gh_0 + f^2/|\vec{K}|^2}$ , les modes propres sont deux trains d'ondes d'inertie-gravité se propageant en sens contraire à la vitesse  $c$  et avec la pulsation  $\tilde{\omega} = c|\vec{K}| = \sqrt{gh_0 |\vec{K}|^2 + f^2}$ . En absence de rotation, les ondes ont toutes la même vitesse de phase  $c = \sqrt{gh_0}$ , qui varie uniquement avec la hauteur du fluide, on les appelle alors ondes de gravité. Par contre, la vitesse de rotation accélère la vitesse de phase des ondes et quelque soit  $\vec{K}$ , le temps de propagation des ondes est inférieur à la demi-période de rotation  $\pi/\Omega$ . Ces modes propres sont donc appelés modes rapides, ou encore modes agéostrophiques.

## 2.2 Modèles asymptotiques

### 2.2.1 Equilibre géostrophique

Avec l'adimensionnement suivant :

- $(x^*, y^*) = L(x, y)$ ,
- $t^* = Tt$ ,
- $\vec{V}^* = V_0 \vec{V}$ ,
- $h^*(x, y, t) = h_0 + \eta^*(x, y, t) = h_0(1 + \eta_0 \eta)$ ,

où  $\eta_0 = \Delta h/h_0$  ordre de grandeur des variations relatives de la surface. Le modèle de Saint-Venant sans dimension s'écrit :

$$\frac{1}{fT} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + Ro(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{n} \times \vec{V} = -\frac{\eta_0 Bu}{Ro} \nabla \eta + \frac{Ro}{Re} \nabla^2 \vec{V} \quad (2.7)$$

$$\frac{\eta_0}{Ro f T} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta_0 \vec{V} \cdot \nabla \eta + (1 + \eta_0 \eta) \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.8)$$

Plusieurs nombres sans dimension apparaissent alors :

- le nombre de Rossby,

$$Ro = \frac{V_0}{fL}$$

représente le rapport entre les termes d'advection et la force de Coriolis. Il peut également être interprété comme le rapport entre le temps d'advection  $L/V_0$  de



l'écoulement et la période de rotation de la Terre  $T_0$  proportionnelle à  $1/f$ . Les écoulements qui ont un temps d'advection beaucoup plus grand que  $T_0$  sont caractérisés par un petit nombre de Rossby  $Ro \ll 1$ .

- le nombre de Reynolds,

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu}$$

représente le rapport entre les termes d'advection et les termes de dissipation avec  $\nu$  la viscosité cinématique. Dans les écoulements géophysiques, le nombre de Reynolds basé sur la diffusion moléculaire est de l'ordre de  $1.10^8$  dans l'océan, le terme de dissipation visqueuse est donc négligeable. Par contre, la dissipation par diffusion turbulente peut être non négligeable. Un nombre de Reynolds basé sur la diffusion turbulente est beaucoup plus petit. Pourtant, à cause de contraintes numériques et expérimentales, on restreint notre étude à des nombres de Reynolds modérés,  $Re \leq 1000$ . Dans une configuration incompressible et homogène, le nombre de Reynolds est le seul paramètre de contrôle des instabilités de sillage.

- la déviation relative de l'interface,

$$\eta_0 = \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{\Delta \phi}{\phi_0}$$

représente le rapport entre la déviation de la surface libre et l'épaisseur de la couche fluide au repos. Ce paramètre est aussi égal au rapport de la déviation de géopotential  $\phi$  sur le géopotential moyen  $\phi_0$  avec  $\phi = gh$ ,  $g$  étant l'accélération de la gravité.

- le nombre de Burger,

$$Bu = \left( \frac{R_d}{L} \right)^2$$

représente le rapport entre le rayon de déformation

$$R_d = \frac{\sqrt{gh_0}}{f}$$

et l'échelle caractéristique de l'écoulement. Le régime dit de grande échelle correspond à  $Bu \ll 1$ .

Pour  $Ro \ll 1$ , on peut négliger les termes  $\mathcal{O}(Ro)$  ou moins dans l'équation (2.7). En supposant que l'échelle de temps des variations locales  $T$  est plus grande que le temps d'advection  $\tau = L/V_0$ , on obtient l'équilibre géostrophique :

$$\vec{n} \times \vec{V}_g = -\nabla \eta_g$$

qui implique la relation suivante :

$$\eta_0 \propto \lambda = \frac{Ro}{Bu}$$

On retrouve le mode propre stationnaire, pour  $c = 0$ , des équations linéarisées (2.3)-(2.4).

Pour les petits nombres de Rossby, on suppose que la vitesse peut être développée en série asymptotique de  $Ro$ ,

$$\vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_a \tag{2.9}$$

$$\eta = \eta_g + \eta_a \tag{2.10}$$

où  $(\vec{V}_g, \eta_g)$  représentent les variables géostrophiques, et  $(\vec{V}_a, \eta_a) = \mathcal{O}(Ro)$  les variables de second ordre, dites agéostrophiques. Pour considérer les termes à l'ordre Rossby, il faut tenir compte de l'ordre de grandeur du nombre de Burger. Le modèle quasi-géostrophique est obtenu pour  $Bu = \mathcal{O}(1)$  et  $\lambda = \mathcal{O}(Ro)$  [54] et le modèle frontal pour  $Bu = \mathcal{O}(Ro)$  et  $\lambda = \mathcal{O}(1)$  [16].

## 2.2.2 Modèle quasi-géostrophique

En effectuant un développement asymptotique en  $Ro$  et en supposant que  $T \geq L/V_0$ , ce qui revient à filtrer la dynamique rapide des ondes, on obtient, à l'ordre zéro, l'équilibre géostrophique Eq.(2.2.1). Pour obtenir l'évolution temporelle des champs, il faut regarder les ordres supérieurs. On obtient, à l'ordre  $\mathcal{O}(Ro)$ , avec  $\nabla \cdot \vec{V}_g = 0$  :

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g \cdot \nabla) \vec{V}_g + \vec{n} \times \vec{V}_a = -\nabla \eta_a \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{Bu} \left( \frac{\partial \eta_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla \eta_g \right) + \nabla \cdot \vec{V}_a = 0 \quad (2.12)$$

En prenant le rotationnel de la première équation combiné à l'équation de conservation de la masse et en utilisant la relation  $\omega = \nabla \times \vec{V}_g = \nabla^2 \eta_g$ , on obtient l'équation du modèle quasi-géostrophique :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \eta_g - \frac{1}{Bu} \eta_g) + J(\eta_g, \nabla^2 \eta_g - \frac{1}{Bu} \eta_g) = 0 \quad (2.13)$$

avec  $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$ , l'opérateur Jacobien. Cette équation est une équation de conservation de la quantité  $\nabla^2 \eta_g - (1/Bu) \eta_g$ . Considérons la vorticité potentielle dimensionnée :

$$Q^* = \frac{\omega^* + f}{h_0 + \eta^*} = \frac{f}{h_0} \frac{Ro \omega + 1}{1 + \lambda \eta} \quad (2.14)$$

Pour des petits nombres de Rossby, on obtient

$$Q^* \approx \frac{f}{h_0} (1 + Ro \omega)(1 - \lambda \eta) \approx \frac{f}{h_0} [1 + Ro(\omega - \frac{1}{Bu} \eta)] \quad (2.15)$$

La quantité conservée dans le modèle quasi-géostrophique est l'anomalie de vorticité potentielle adimensionnée,  $Q_{QG} = \frac{1}{Ro} (Q^* - \frac{f}{h_0}) = \nabla^2 \eta - \frac{1}{Bu} \eta$ . Cependant ce modèle ne peut pas représenter une évolution asymétrique de l'écoulement. En effet, l'équation est identique si  $\eta$  est remplacée par  $-\eta$  et  $\vec{x} = (x, y)$  par  $-\vec{x}$ . Donc, un cyclone, correspondant à une déviation de la surface négative, et un anticyclone qui correspondrait à la même déviation de la surface mais positive, suivent la même dynamique dans le modèle quasi-géostrophique.

## 2.2.3 Modèle frontal

Si on considère maintenant que  $Bu = \mathcal{O}(Ro)$  et  $\lambda = \mathcal{O}(1)$ , on obtient en remplaçant l'expression de la vitesse (2.9) dans l'équation de conservation de la masse (Eq. 2.8) :

$$\frac{1}{fT} \frac{\partial \eta}{\partial t} + Ro \left[ u_a \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_a \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\lambda} (1 + \lambda \eta) \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (2.16)$$

Comme le système choisit son échelle temporelle d'évolution lorsqu'il est hors équilibre, on doit avoir  $1/(fT) = \mathcal{O}(Ro^2)$ . La dérivée temporelle dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement Eq.2.7 est alors négligeable par rapport aux termes d'ordre Rossby. On peut ainsi écrire :

$$u = -\frac{\partial\eta}{\partial y} - Ro\left(u_g\frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g\frac{\partial v_g}{\partial y}\right) + \mathcal{O}(Ro^2) \quad (2.17)$$

$$= -\frac{\partial\eta}{\partial y} - RoJ\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \mathcal{O}(Ro^2) \quad (2.18)$$

$$v = \frac{\partial\eta}{\partial x} - Ro\left(u_g\frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g\frac{\partial u_g}{\partial y}\right) + \mathcal{O}(Ro^2) \quad (2.19)$$

$$= \frac{\partial\eta}{\partial x} - RoJ\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + \mathcal{O}(Ro^2) \quad (2.20)$$

avec  $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}$ , l'opérateur Jacobien.

En remplaçant dans l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{1}{fT}\frac{\partial\eta}{\partial t} - Ro^2\left[J\left(\eta, \frac{1}{2}(\nabla\eta)^2 + \frac{1}{\lambda}(1 + \lambda\eta)\Delta\eta\right)\right] = 0 \quad (2.21)$$

Sachant que  $1/(fT) = \mathcal{O}(Ro^2)$  et  $\lambda = \mathcal{O}(1)$ , on obtient finalement l'équation du modèle frontal :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - J\left(\eta, \frac{1}{2}(\nabla\eta)^2 + (1 + \eta)\Delta\eta\right) = 0 \quad (2.22)$$

Contrairement au modèle quasi-géostrophique, l'équation (2.22) n'est pas identique si on remplace  $\eta$  par  $-\eta$  et  $\vec{x}$  par  $-\vec{x}$ . Les cyclones et les anticyclones peuvent suivre un dynamique différente et ce modèle peut représenter une évolution asymétrique de l'écoulement.

Cependant, chacun de ces modèles restreint la représentation de l'écoulement à une certaine gamme de paramètres,  $\lambda \ll 1$  pour le modèle QG et  $Bu \ll 1$  pour le modèle frontal. Pour balayer une large gamme de paramètre en n'utilisant qu'un seul modèle, nous avons donc choisi de considérer le système complet des équations de Saint-Venant.

## 2.3 Schéma numérique

Pour la résolution numérique des équations de Saint-Venant, nous utilisons un code développé par Marie Farge ([26]), modifié et actualisé par Alexandre Azzalini [6]. Une méthode pseudo-spectrale est implémentée pour l'intégration spatiale des équations et un schéma à deux niveaux en temps de type saute-mouton (ou leapfrog) pour l'intégration temporelle. Les méthodes spectrales sont couramment utilisées pour des simulations numériques directes (DNS) car elles sont rapides, peu coûteuses et donnent des approximations d'ordre élevé des solutions, ce qui évite, en particulier, la diffusion numérique. Le choix du schéma d'intégration temporelle est motivé par le fait que l'on veut modéliser la partie lente et les ondes de gravité en respectant leur caractère dispersif. Ce code a été utilisé pour des études de stabilité non-linéaire d'écoulements de sillages parallèles et la modélisation d'écoulements derrière un obstacle. Ce deuxième cas est détaillé dans le chapitre 7.

### 2.3.1 Configuration du domaine

Pour réduire le nombre de transformées de Fourier nécessaire à l'intégration, on écrit les équations de Saint-Venant en faisant apparaître la vorticité relative  $\omega = \nabla \times \vec{V}$  et le potentiel de Bernoulli  $\phi + \frac{|\vec{V}|^2}{2}$ , où  $\phi = gh$  est le géopotentiel et  $\vec{V} = (u, v)$  la vitesse horizontale dans la couche fluide. Les équations de Saint-Venant s'écrivent alors, de manière dimensionnée, sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\omega + f)\vec{n} \times \vec{V} + \nabla \left( \phi + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) = \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{V}) = 0 \quad (2.24)$$

où  $f = 2\Omega$  est le paramètre de Coriolis,  $\phi = gh$  le géopotentiel et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide.

On utilise un domaine rectangulaire, de résolution  $N_x \times N_y = 2048 \times 128$  correspondant à un domaine de dimension  $L_x \times L_y = 96L \times 6L$ , où  $L$  est la taille caractéristique de l'écoulement étudié. Les conditions aux limites sont périodiques. Le rapport d'aspect du domaine est noté  $\alpha = N_x/N_y$ . On choisit une grille cartésienne dans l'espace physique, donc  $\Delta x = \Delta y = \frac{L_x}{N_x} = \frac{L_y}{N_y}$ .

### 2.3.2 Intégration spatiale

Les variables du problème sont décomposées en série de Fourier bidimensionnelles :

$$X(\vec{x}) = \sum_{k=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{h=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \hat{X}(\vec{K}) e^{2i\pi \left( \frac{kx}{L_x} + \frac{hy}{L_y} \right)} \quad (2.25)$$

$$= \sum_{k=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{h=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \hat{X}(\vec{K}) e^{\frac{2i\pi}{L_x} (kx + \alpha hy)} \quad (2.26)$$

$N_x$  et  $N_y$  sont les nombres de points de grille dans la direction  $Ox$  et  $Oy$ . Les longueurs  $L_x$  et  $L_y$  correspondent aux dimensions du domaine de calcul.

On obtient les coefficients de Fourier par la relation :

$$\hat{X}(\vec{K}) = \frac{1}{(N_x N_y)} \sum_{I=-(N_x-1)}^{N_x-1} \sum_{J=-(N_y-1)}^{N_y-1} X(\vec{x}) e^{-\frac{2i\pi}{L_x} (I + \alpha J)} \quad (2.27)$$

Cette méthode de décomposition permet de calculer facilement les dérivées spatiales qui deviennent des produits dans l'espace spectral :

$$\frac{d\hat{X}}{d\vec{x}} = -i \frac{2\pi}{L_x} \vec{K} \hat{X}(\vec{K}) \quad (2.28)$$

Cependant, avec une méthode purement spectrale, les termes non-linéaires, correspondant à des produits dans l'espace physique, deviennent des produits de convolution dans l'espace spectral et sont très coûteux en temps de calcul. C'est la raison pour laquelle nous utilisons une méthode pseudo-spectrale qui consiste à calculer les produits dans l'espace physique à partir des valeurs aux points de grille  $X_{ij}$ , et les dérivées dans l'espace spectral.

## Calcul des transformées de Fourier

Pour optimiser le calcul des transformées de Fourier sur la machine Cray1 pour laquelle le code avait été écrit, on calcule tout d'abord  $N_y$  transformées de Fourier à une dimension dans la direction  $Ox$ , puis  $N_x$  transformées de Fourier complexes dans la direction  $Oy$ . Lors du calcul de la première transformée de Fourier, on obtient  $N_x$  coefficients complexes. Seulement la moitié d'entre eux sont stockés, l'autre moitié étant obtenue facilement en prenant le complexe conjugué. Le calcul et le rangement des coefficients de Fourier est résumé dans le tableau suivant :

	J - 1	J	↓ $N_y$ transformées de longueur $N_x$
I - 1	A(I-1,J-1)	A(I-1,J)	
I	A(I,J-1)	A(I,J)	

Les coefficients sont alors rangés comme suit dans un tableau de taille  $N_x \times N_y$  :

	J - 1	J
K - 1	$Re(\widehat{A}(K, J - 1))$	$Re(\widehat{A}(K, J))$
K	$Im(\widehat{A}(K, J - 1))$	$Im(\widehat{A}(K, J))$

→

$N_x$  transformées de longueur  $N_y$

On obtient finalement, un tableau de  $N_x \times N_y$  coefficients réels :

	H - 1	H
K - 1	$Re(Re(\widehat{A}(K, H)))$	$Im(Re(\widehat{A}(K, H)))$
K	$Re(Im(\widehat{A}(K, H)))$	$Im(Im(\widehat{A}(K, H)))$

De plus, la partie imaginaire de la moyenne étant nulle, la ligne  $A(2, 1 : N_y)$  est vide à la première étape, on y écrit alors la fréquence de Nyquist,  $F = N_x/2$ . Après la transformée de Fourier dans la direction  $Oy$ , celle-ci est replacée en dernière ligne.

On utilise un algorithme développé par Clive Temperton, pour calculer les transformées de Fourier. Un des inconvénients des méthodes spectrales est l'accumulation d'énergie à petite échelle due aux interactions non-linéaires. Cette accumulation d'énergie, si elle n'est pas dissipée, provoque rapidement la divergence du code numérique. Pour éviter ce phénomène, dit phénomène d'aliasage, on applique un masque circulaire aux coefficients de Fourier, qui remet à zéro, à chaque calcul de transformée de Fourier, les nombres d'onde au delà du nombre d'onde de coupure, choisit arbitrairement à  $k_c = N_x/3$  (Fig. 2.2).

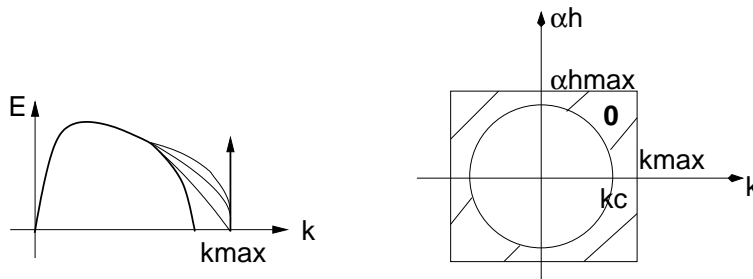


FIG. 2.2 – Schéma du phénomène d'aliasage et du masque appliqué aux coefficients de Fourier pour annuler les grands nombres d'onde.

## Déroutement du calcul de l'intégration spatiale

Au début de la boucle temporelle, on a en mémoire les champs spectraux  $\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{\phi}$  aux instants  $n - 1$  et  $n$ .

- Sauvegarde des champs aux instants  $n - 1$  et  $n$  pour l'intégration temporelle.

Calcul de la vorticité relative :

$$\widehat{\omega}^n = \frac{\partial \widehat{v}^n}{\partial x} - \frac{\partial \widehat{u}^n}{\partial y} = ik\widehat{v}^n - i\alpha h\widehat{u}^n$$

- Passage dans l'espace physique, on dispose alors de quatre champs physiques  $\omega^n, u^n, v^n, \phi^n$
- Calcul des termes non-linéaires :  $((\omega + f)u)^n, ((\omega + f)v)^n, (\phi + \frac{u^2+v^2}{2})^n, ((\phi + \phi_0)u)^n, ((\phi + \phi_0)v)^n$ .
- Retour dans l'espace spectral, on obtient les cinq champs spectraux suivants :  $((\omega + f)v)^n, ((\omega + f)u)^n, (\phi + \frac{u^2+v^2}{2})^n, ((\phi + \phi_0)u)^n, ((\phi + \phi_0)v)^n$ .
- Calcul des d riv es spatiales :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) &= -i \frac{2\pi}{L_x} k \left( \phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) &= -i \frac{2\pi}{L_x} \alpha h \left( \phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \\ \frac{\partial(\phi + \phi_0)u}{\partial x} + \frac{\partial(\phi + \phi_0)v}{\partial y} &= -i \frac{2\pi}{L_x} k \widehat{\phi} u - i \frac{2\pi}{L_x} \alpha h \widehat{\phi} v \end{aligned}$$

On dispose donc des termes non-linéaires suivants :

$$NL(u) = (\omega + f)v - \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad (2.29)$$

$$NL(v) = (\omega + f)u + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad (2.30)$$

$$NL(\phi) = \frac{\partial(\phi + \phi_0)u}{\partial x} + \frac{\partial(\phi + \phi_0)v}{\partial y} \quad (2.31)$$

et les équations s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u + NL(u) \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \nabla^2 v - NL(v) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -NL(\phi) \quad (2.34)$$

### 2.3.3 Intégration temporelle

Le schéma saute-mouton, ou leapfrog, s'écrit :

$$\frac{\partial X^n}{\partial t} = \frac{X^{n+1} - X^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

$\Delta t$  est le pas de temps.

Ce schéma présente l'avantage d'être sans diffusion numérique dans le cas linéaire et suit le comportement des ondes d'inertie-gravité sans les dissiper. Cependant, il n'est pas stable pour les termes linéaires et donne lieu à un découplage des solutions aux pas de temps pairs et impairs, appelé instabilité leapfrog.

Pour remédier à l'instabilité du schéma concernant les termes linéaires, ceux-ci sont intégrés de manière exacte. Pour l'équation de Saint-Venant, le seul terme linéaire qui intervient dans les équations est le terme de dissipation visqueuse dans l'espace spectral :

$$\frac{\partial \hat{X}}{\partial t} + \nu \frac{4\pi^2}{L_x^2} (k^2 + \alpha^2 h^2) \hat{X} = NL(\hat{X})$$

Considérons une équation générale du type :

$$\frac{\partial X}{\partial t} + AX(t) = NL(X(t))$$

Une solution de cette équation s'écrit :

$$X(t_2) = X(t_1)e^{-A(t_2-t_1)} + \int_{t_1}^{t_2} NL(X(\tau))e^{-A(t_2-\tau)} d\tau$$

Soit, en prenant  $t_1 = (n-1)\Delta t$  et  $t_2 = (n+1)\Delta t$ , et en approximant l'intégrale par un rectangle entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , on a :

$$X^{n+1} = X^{n-1}e^{-2A\Delta t} + 2\Delta t \quad NL(X^n)e^{-A\Delta t}$$

Les équations de Saint-Venant sont intégrées suivant cette formule, avec  $A = \nu \frac{4\pi^2}{L_x^2} (k^2 + \alpha^2 h^2)$  et  $(k, \alpha h) \in [1, k_c]$ .

### Choix du pas de temps

Le pas de temps doit être suffisamment petit pour résoudre la dynamique rapide des ondes d'inertie-gravité sur la grille cartésienne de pas d'espace  $\Delta x$ . Le pas de temps critique est donné par la relation :

$$\Delta t_c = \frac{\Delta x}{\sqrt{gh_0 + \frac{f^2}{K_{max}^2} + V_{0max}}}$$

où  $\sqrt{gh_0 + f^2/K_{max}^2}$  est la vitesse des ondes d'inertie-gravité pour le plus grand nombre d'onde  $K_{max} = 2\pi/2\Delta x$ , et  $V_{0max}$  est la vitesse maximale de l'écoulement à l'instant initial. Le pas de temps est alors déterminé avec un coefficient de sécurité  $CFL = 0.2$  :

$$\Delta t = CFL\Delta t_c$$

### Initialisation

Le schéma temporel est à deux niveaux en temps, il faut donc l'initialiser pour les deux instants initiaux  $X^1$  et  $X^0$ . On peut raisonnablement supposer que l'évolution du système reste linéaire pendant le premier pas de temps, ce qui permet de calculer directement la solution  $X^1$  à partir de  $X^0$  en intégrant les équations linéarisées projetées sur les modes propres du système :

$$\frac{dX^1}{dt} = i\xi X^0 \quad \text{avec}$$

$$X^0 = \begin{cases} X_{geo} & \text{mode géostrophique tel que } \xi = 0 \\ X_{IG+} & \text{mode inertio-gravitationnel tel que } \xi = +\sqrt{(\bar{\phi}\|k\|^2 + f^2)} \\ X_{IG-} & \text{mode inertio-gravitationnel tel que } \xi = -\sqrt{(\bar{\phi}\|k\|^2 + f^2)} \end{cases}$$

Le schéma saute-mouton possède deux modes propres : le mode physique  $e^+$  et le mode numérique  $e^-$  qui est instable. Si on décompose l'état initial sur ces deux modes, on obtient, en intégrant l'équation précédente :

$$X^1 = Ae^{i\xi\Delta t}e^+ - Be^{-i\xi\Delta t}e^- \quad (2.35)$$

Pour supprimer tout risque d'instabilité saute-mouton, on annule au pas de temps initial le terme correspondant au mode numérique, ce qui nous donne :

$$X^1 = Ae^{i\xi\Delta t}e^+ = X^0e^{i\xi\Delta t} \quad (2.36)$$

Cette méthode permet d'annuler l'instabilité saute-mouton à l'instant initial.

### Ressérage

Malgré cette initialisation, l'instabilité saute-mouton, c'est-à-dire la séparation des solutions paires et impaires, se développe au cours du calcul sous l'effet des non-linéarités. Nous effectuons donc un *ressérage* des solutions dès que la différence d'énergie ou d'énstrophie entre les solutions paires et impaires est supérieure à 10% de l'énergie ou de l'énstrophie d'une des deux solutions. Le ressérage est réalisé en ne gardant qu'une des deux solutions à partir de laquelle on effectue une initialisation en modes propres pour reprendre ensuite l'intégration leapfrog.





# Chapitre 3

## Modélisation physique de sillages de grande échelle

Ce chapitre est consacré au dispositif expérimental qui nous a permis de modéliser des sillages de grande échelle en laboratoire, c'est-à-dire d'obtenir des rayons de déformation plus petits que le diamètre de l'obstacle.

### 3.1 Dispositif expérimental

#### 3.1.1 Pourquoi utiliser un dispositif bi-couches ?

Obtenir, en laboratoire, de petits rayons de déformation dans une configuration couche mince n'est pas évident à priori. En effet, le rayon de déformation dans ce cas s'écrit  $R_d = \sqrt{gh}/2\Omega$  où  $g$  est l'accélération de la gravité,  $h$  l'épaisseur de la couche et  $\Omega$  la vitesse de rotation de la cuve. Le rayon de déformation peut donc être diminué en diminuant  $h$  et en augmentant  $\Omega$ . Cependant, l'épaisseur de la couche est limitée par l'épaisseur de la couche d'Ekman  $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$  et l'échelle à partir de laquelle la tension de surface n'est plus négligeable, de l'ordre du millimètre pour l'eau. La vitesse de rotation, quant à elle, est limitée par la déformation parabolique de la surface libre  $h(r) = \Omega^2 r^2 / 2g$  qui augmente avec  $\Omega$ . Considérons une épaisseur de fluide de  $h = 1 \text{ cm}$  qui soit dix fois supérieure à l'épaisseur de la couche d'Ekman  $\delta = 1 \text{ mm}$ . La vitesse de rotation vaut alors  $\Omega = \nu/\delta^2 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ , la déviation de la surface libre est de  $1 \text{ cm}$  à  $45 \text{ cm}$  du centre et le temps d'Ekman est de  $T_{Ek} = \frac{h}{2\sqrt{\nu\Omega}} = 5 \text{ s}$ . Avec ces paramètres, les tourbillons seraient donc très rapidement dissipés. Le rayon de déformation associé à ce système vaut alors  $R_d \approx 16 \text{ cm}$  et un obstacle de rayon deux ou trois fois plus grand aurait un diamètre de  $D \approx 1 \text{ m}$  ! Pour éviter les effets de bord, un tel obstacle nécessite une cuve de largeur  $L_y \approx 6D = 6 \text{ m}$  et de longueur  $L_x \gg L_t$  où  $L_t$  est la distance entre deux tourbillons de même signe pour voir un minimum d'échappement tourbillonnaire. Dans le cas d'une allée de von Karman classique en 2D, par exemple,  $L_t \approx D/St \approx 5D$  où  $St$  est la fréquence d'émission des tourbillons. Donc pour voir le détachement de quatre tourbillons, il faut au moins une cuve de  $20 \text{ m}$  de longueur. Il existe une seule cuve au monde qui approche ces dimensions : la plate-forme Coriolis au LEGI à Grenoble qui est une cuve circulaire de  $13 \text{ m}$  de diamètre.

En utilisant un système bi-couche, on peut générer un écoulement barocline auquel on associe un rayon de déformation interne défini par  $R_d^* = \sqrt{g^* \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}} / 2\Omega$  où  $g^* = g(\rho_2 - \rho_1) / \rho_2$  est la gravité réduite,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les densités des couches supérieure et inférieure

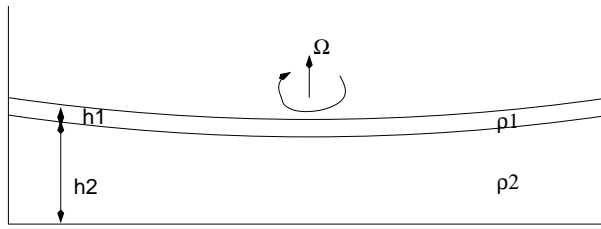


FIG. 3.1 – Schéma de la déviation parabolique due à la rotation dans un système à deux couches.

respectivement,  $h_1$  et  $h_2$  leur épaisseur. On peut alors diminuer le rayon de déformation en réduisant la différence de densité entre les couches. Considérons par exemple une différence de densité de  $3g/L$ , une vitesse de rotation de  $\Omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et des couches d'épaisseur  $h_1 = 2 \text{ cm}$  et  $h_2 = 15 \text{ cm}$ , on obtient un rayon de déformation de  $R_d^* \approx 1 \text{ cm}$ . De plus, dans un tel système, la dissipation d'Ekman s'effectue dans la couche du fond et n'affecte pas l'écoulement dans la couche supérieure et la déformation parabolique de la surface due à la rotation de la cuve est subie identiquement par la surface libre et l'interface, l'épaisseur de la couche supérieure est donc constante (Fig. 3.1). Pour modéliser la dynamique d'un sillage dans une couche mince, l'obstacle est placé dans la couche supérieure uniquement et l'épaisseur du cylindre est égale à l'épaisseur de la couche. Nous montrerons dans la dernière section dans quelle gamme de paramètres la dynamique de la couche supérieure peut être décrite par le modèle de Saint-Venant.

### 3.1.2 Dispositif expérimental

#### Dimensions :

Les expériences de laboratoire ont été réalisées à l'Unité de Mécanique de l'ENSTA, Palaiseau. Une cuve en verre rectangulaire de  $L = 128 \text{ cm}$  de long sur  $l = 48 \text{ cm}$  de large et  $H_{cuve} = 50 \text{ cm}$  de haut, est fixée sur une table tournante à coussin d'air de  $1.5 \text{ m}$  de diamètre (Fig. 3.2). La table tourne dans le sens des aiguilles d'une montre ce qui correspond à un sens de rotation positif dans l'hémisphère sud. La table est constituée de deux disques de granite séparés par une mince couche d'air comprimé qui permet d'isoler l'installation des vibrations mécaniques et d'éviter que les frottements ne perturbent l'expérience. Le fluide est stratifié en deux couches d'épaisseur,  $H = 15 \text{ cm}$  pour la couche inférieure et  $h_0 = 2 \text{ cm}$  pour la couche supérieure. Un fluide peut être stratifié de deux manières, en température ou en salinité. Cependant, la diffusivité thermique étant de  $\kappa_T = 1.10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ , le temps nécessaire pour homogénéiser la température entre les deux couches, sur une distance de  $h_0 = 2 \text{ cm}$ , est  $h_0^2/\kappa_T \approx 1h$ . Or une expérience dure plusieurs heures, une stratification en température n'est donc pas adaptée. En revanche, la diffusivité du sel est beaucoup plus lente, pour  $\kappa_S = 1.10^{-9} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ , il faut 110 heures pour homogénéiser la densité sur une distance de  $2 \text{ cm}$ . Sur la durée de l'expérience, environ trois heures, le sel s'est diffusé sur une distance de  $\sqrt{\kappa_S T} \approx 3 \text{ mm}$  à l'interface. On choisit donc une stratification en salinité.

La masse volumique de la couche supérieure est maintenue constante dans l'ensemble des expériences, égale à la masse volumique des particules utilisées pour la visualisation des mouvements horizontaux,  $\rho_1 = 1023g/L$ . Pour faire varier le rayon de déformation, nous avons fait varier la masse volumique de la couche inférieure de  $\rho_2 = 1025$  à  $1137g/L$ . La gamme de vitesse de rotation accessible pour la cuve utilisée est  $\Omega = 1$  à  $12 \text{ tr/min}$ ,

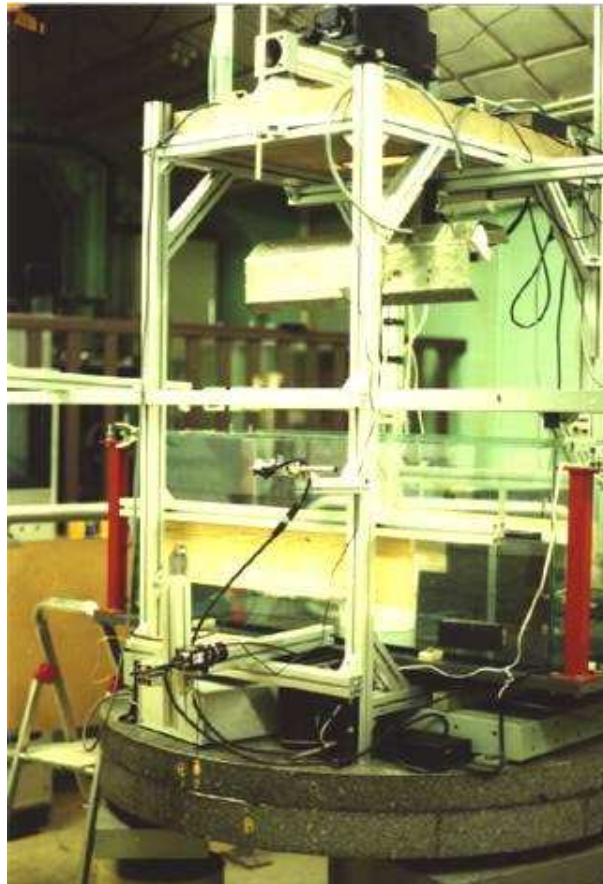


FIG. 3.2 – Photo du dispositif expérimental.

mais un bon compromis entre un petit rayon de déformation et une déviation parabolique de la surface raisonnable donne des vitesses de rotation variant entre  $\Omega = 6$  et  $8 \text{ tr/min} = 0.63 - 0.84 \text{ rad.s}^{-1}$ . La déviation parabolique de la surface vaut alors au maximum  $h(r) = \Omega^2 r^2 / 2g = 8 \text{ mm}$  aux extrémités de la cuve. Le cylindre sort donc légèrement de la couche supérieure pendant la phase transitoire et à la fin de l'expérience. Cependant cette déviation est inférieure à  $h_0/10$  dans une zone correspondant à la moitié de la cuve.

**Protocole :**

- Préparation des deux couches. La cuve est remplie avec la première couche, eau et sel en quantité suffisante pour atteindre la densité  $\rho_2$ . La couche supérieure, de densité  $\rho_1$ , est stockée dans un réservoir placé sur une plate-forme au dessus de la cuve et relié à une cellule de Hele-Shaw flottant sur la première couche. La cellule de Hele-Shaw est composée de deux plaques en plexiglass espacées de quelques millimètres et fixées sur un flotteur en polystyrène (Fig. 3.3). Une plaque de plexiglass est dipsoée

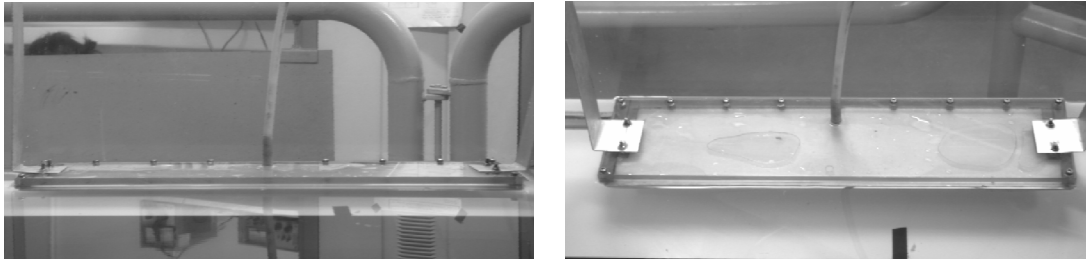


FIG. 3.3 – Photographies de la cellule de Hele-Shaw, vue de face et de dessus.

sur la cuve, à une dizaine de centimètres au dessus de la première couche de manière à atténuer les frottements de l'air sur la surface libre. La plaque laisse juste passer le tuyeau d'alimentation de la cellule de Hele-Shaw et le bras de translation du cylindre.

- Mise en rotation de la cuve à vitesse constante  $\Omega$ .
- Injection de la couche supérieure lorsque la première est en rotation solide. Claire Donnadieu et Alexandre Pereira [22] ont mesuré la vorticité résiduelle de la première couche à différents instants, pour  $T = 30 \text{ min} \approx 30T_{Ek}$ , la vorticité résiduelle est de l'ordre de  $0.05 f$ , où  $T_{Ek} = H/2\sqrt{\nu\Omega}$  est le temps d'Ekman et  $f = 2\Omega$  le paramètre de Coriolis. On considère donc que la première couche est en rotation solide au bout du temps  $T$ , la couche supérieure est alors injectée très lentement à la surface de la première avec la cellule de Hele-Shaw. Le flotteur en polystyrène de la cellule permet d'injecter la couche supérieure toujours à la surface libre (Fig. 3.4) afin d'éviter tout mouvement vertical du fluide qui pourrait mélanger les deux couches. De plus le débit d'injection est lent,  $\approx 2 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ , ce qui donne un temps d'injection d'environ 2 heures. Il faut attendre encore deux heures pour que les mouvements résiduels duss aux frottements de l'air et à l'injection soient devenus négligeables dans la seconde couche.
- Réalisation de l'expérience. Mise en route du dispositif de mesure et d'acquisition. Le cylindre est alors translat e dans la couche du dessus uniquement, à vitesse constante  $V_0 = 0.28 - 1.14 \text{ cm.s}^{-1}$ . Le temps nécessaire au cylindre pour traverser la cuve est au maximum de  $6 - 7 \text{ min}$ .

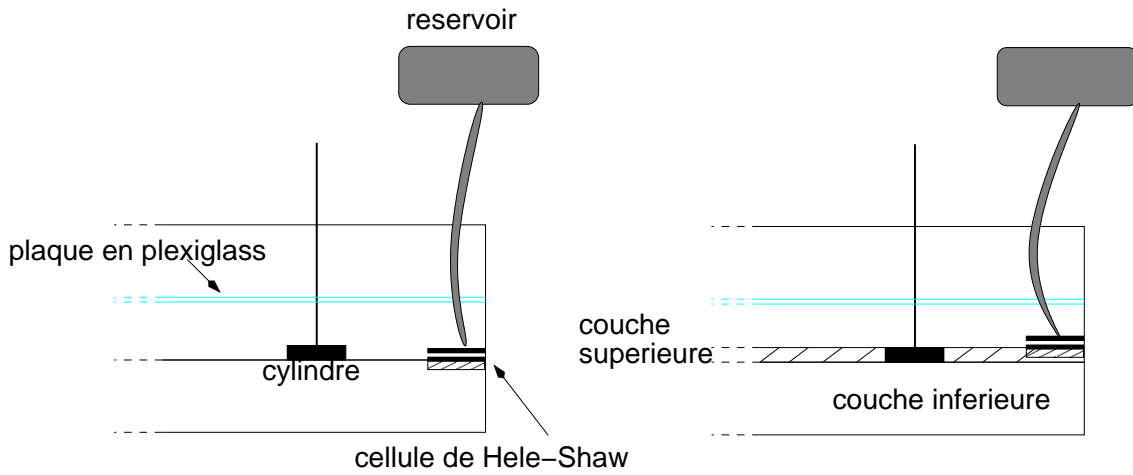


FIG. 3.4 – Schéma du dispositif d'injection de la seconde couche.

L'expérience en elle-même, translation du cylindre et mesure, ne dure donc que quelques minutes alors qu'elle exige cinq ou six heures de préparation ! On ne pouvait donc réaliser qu'une seule expérience par jour.

## 3.2 Méthodes de mesure

Deux grandeurs sont mesurées : le champ de vitesse horizontal dans la couche supérieure par une méthode de velocimétrie par image de particules (PIV), et la déviation de l'interface avec une méthode de fluorescence induite par laser (LIF).

### 3.2.1 Vélocimétrie par Image de Particules (PIV)

Pour la mesure du champ de vitesse horizontal, la couche supérieure estensemencée de particules Orgasol ESNAT 3 de taille  $60\ \mu\text{m}$  et de masse volumique  $1023\ \text{g/L}$ , égale à la masse volumique de la couche supérieure pour éviter que celles-ci sédimentent ou remontent à la surface. On utilise un laser compact et continu, de longueur d'onde  $670\ \text{nm}$  émettant à  $300\ \text{mW}$ . Cette puissance est suffisante pour les écoulements considérés et le choix d'un laser continu évite de régler la fréquence de pulsation sur la fréquence d'acquisition de la caméra. Le faisceau laser passe à travers une lentille optique pour former une nappe laser de  $2\ \text{mm}$  d'épaisseur, qui excite les particules dans un plan situé à  $1\ \text{cm}$  au dessous de la surface libre. Le mouvement des particules est enregistré, à une fréquence de  $25\ \text{Hz}$ , par deux caméras analogiques de  $768 \times 576$ -pixels fixées au dessus de la cuve. Les images sont alors numérisées sur 8 bits, avec une carte d'acquisition Scion LG3 de  $768 \times 512$ -pixels. Une des caméras a une focale grand-angle de résolution  $17\ \text{pixels/cm}$ , représentant une zone d'observation de  $6.5 \times 4.3D$ , pour visualiser l'aspect général du sillage. L'autre caméra est zoomée à une résolution de  $45\ \text{pixels/cm}$ , la zone d'observation est alors de  $2.4 \times 1.6D$  et permet d'avoir une bonne résolution de l'écoulement autour et derrière l'obstacle (Fig. 3.5).

On utilise un logiciel commercial de PIV, Davis de la marque La Vision, pour calculer le champ de vitesse associé au mouvement des particules. Le principe général de la PIV consiste à déterminer le vecteur déplacement des particules en calculant la corrélation d'intensité entre deux images successives. L'image est discrétisée en boîtes carrées qui

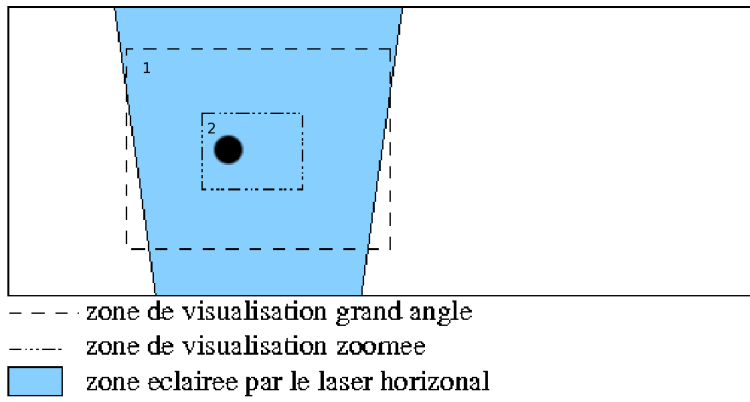


FIG. 3.5 – Schéma du champ éclairé par le laser et des zones de visualisation grand-angle (zone 1), de  $6.5 \times 4.3D = 45.5 \times 30 \text{ cm}^2$  avec une résolution de  $17 \text{ pixels/cm}$ , et zoomée (zone 2), de  $2.4 \times 1.6D = 16.8 \times 11.2 \text{ cm}^2$  avec une résolution de  $45 \text{ pixels/cm}$ .

sont chacune corrélées avec la boîte correspondante dans la seconde image. Donc, pour chaque boîte, est calculé un vecteur déplacement des particules en pixels. Connaissant le temps  $\Delta t$  séparant deux images et la résolution, on obtient un champ de vecteurs vitesses instantanés. Pour accroître la précision du calcul, deux paramètres sont à ajuster : le temps séparant deux images  $\Delta t$  et la taille des boîtes. Le déplacement minimum que le logiciel peut calculer est de l'ordre de  $\delta x = 0.1$  pixel. Cependant, un déplacement des particules de l'ordre de  $\Delta x$  de 1 à 3 pixels entre deux images est nécessaire pour avoir une erreur sur le calcul du vecteur déplacement inférieur à  $\delta x / \Delta x = 10\%$ . Ceci permet de limiter les déplacements fictifs dûs au fait que les particules scintillent suivant leur position dans la nappe laser ou disparaissent, si elles sortent de la nappe. On choisit alors comme taille de boîtes, trois ou quatre fois ce déplacement pour éviter que des particules sortent de la boîte. En considérant que les particules se déplacent en moyenne à la vitesse de translation du cylindre  $V_0$ , on calcule le temps optimum entre deux images,  $\Delta t = \Delta x / (rV_0)$  où  $r = 17$  ou  $45 \text{ pixels/cm}$  est la résolution. Nous avons utilisé différents instants entre deux images successives en fonction de la résolution et de la vitesse : pour une résolution  $r = 17 \text{ pixels/cm}$  et  $V_0 = 0.28, 0.57, 1.14 \text{ cm.s}^{-1}$ ,  $\Delta t = 0.72, 0.24, 0.12 \text{ s}$  et pour  $r = 45 \text{ pixels/cm}$ ,  $\Delta t = 0.24, 0.12 \text{ s}$ . Pour plus de précision, nous utilisons une méthode itérative, qui consiste à calculer plusieurs fois la corrélation entre deux mêmes images avec des boîtes de taille décroissante. À chaque passage, la taille de la boîte est divisée par deux et le vecteur déplacement calculé au passage précédent est utilisé pour le décalage spatial des boîtes. Cette technique permet de descendre à des tailles de boîte plus petites, et donc un plus grand nombre de vecteurs vitesse, car moins de particules sortent de la boîte. Dans le traitement de nos données, la taille des boîtes est variée de 64 à 16 ou 12 pixels, suivant la vitesse de translation du cylindre. Le nombre de vecteurs vitesse est encore augmenté par une méthode d'overlap qui autorise le chevauchement des boîtes les plus petites. Nous avons utilisé un overlap de 20% et on obtient finalement des champs de  $64 \times 43$  ou  $85 \times 57$  vecteurs vitesses (Fig. 3.6). Pour lisser le bruit expérimental et traiter les champs de vitesse, ceux-ci sont moyennés sur cinq instants consécutifs, correspondant à un dixième du temps de retournement des tourbillons,  $\tau = D/V_0$ . Les champs de vorticité et divergence sont ensuite dérivés des champs de vitesse moyennés. La figure 3.7 montre les champs de vitesse et de vorticité de la Figure 3.6 non moyennés. La vorticité étant la dérivée de la vitesse, le bruit sur le champ de vitesse est amplifié sur le champ de

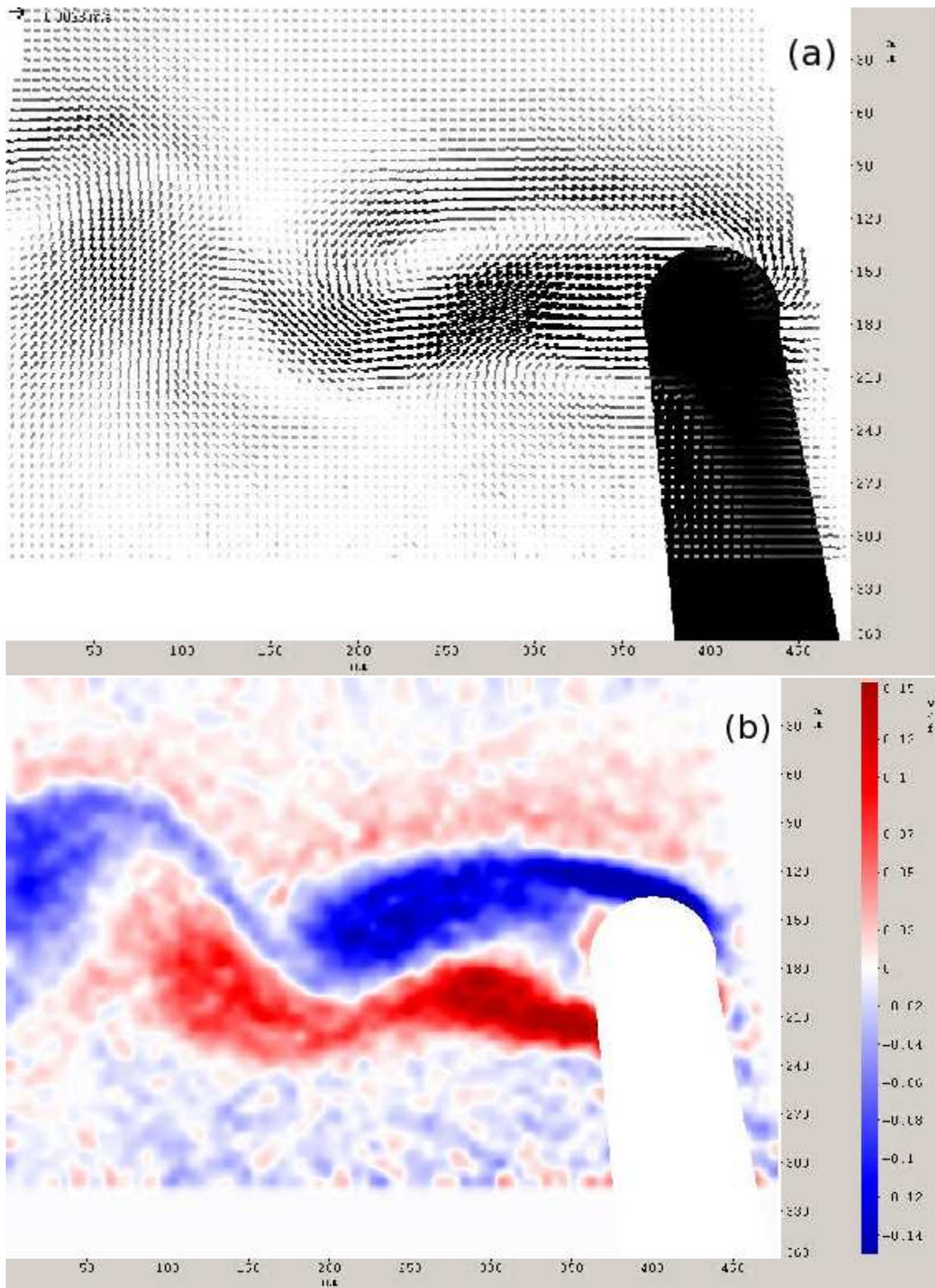


FIG. 3.6 – (a) Champ de vitesses obtenu par une méthode PIV et champ de vorticité dérivé (b). La zone noire/blanche représente le cylindre et l'ombre de celui-ci dans la nappe laser, la flèche noire en haut à gauche de l'image (a) indique la vitesse du cylindre.



vorticité. Ce bruit est accentué au bas de l'image car la nappe laser a tendance à plonger vers le fond de la cuve à cause de la stratification, la qualité de l'image est donc moins bonne dans cette zone et le logiciel calcul plus de vecteurs aberrants. Nous avons mesuré la différence de vorticité pour différente résolution du champ de vitesse,  $64 \times 42$  ou de  $85 \times 57$  vecteurs vitesse, en calculant la moyenne de vorticité dans des zones situées juste derrière le cylindre et dans les tourbillons. Cette différence est relativement faible, de l'ordre de 1 à 10%. Par contre, la différence de vorticité entre les champs grand-angle ou zoomés, au niveau de la couche limite peut atteindre jusqu'à 80%, les visualisations de la structure générale de l'écoulement ne nous permettent, pas de faire des mesures quantitatives précises de la vorticité, au moins dans le sillage proche de l'obstacle.

### 3.2.2 Fluorescence Induite par Laser (LIF)

Pour la mesure de la déviation verticale de l'interface, de la Rhodamine 6G est mélangée à la couche supérieure. On utilise un laser compact continu, de puissance de sortie  $100mW$  et de longueur d'onde  $532nm$ , proche de la longueur d'onde maximale d'absorption de la Rhodamine 6G à  $530nm$ . Une lentille optique à la sortie du laser crée une nappe laser de 2mm d'épaisseur. Les variations de l'interface sont enregistrées à une fréquence de  $25Hz$  et une résolution de  $40\text{ pixels/cm}$  avec une caméra CCD analogique de  $768 \times 512$ -pixels fixée sur le coté de la cuve. Le signal est numérisé sur 8 bit avec une carte d'acquisition Scion LG3 de résolution CCIR de  $768 \times 512$ -pixels, on obtient donc des champs de  $2.75D \times 6.4h_0 = 19.25 \times 12.8\text{ cm}$ . Ce dispositif est utilisé simultanément avec les mesures de mouvements horizontaux du fluide, on place alors sur la caméra fixée au sommet de la cuve, un filtre optique qui atténue la raie du laser vertical sur les images des mouvements horizontaux.

A partir des images en niveau de gris (Fig. 3.8(a)), on détermine un seuil qui correspond au milieu de la zone de transition entre la partie lumineuse, couche supérieure, et la partie noire, couche inférieure (Fig. 3.8(c)). Les images sont alors binarisées en noir et blanc (Fig. 3.8(b)), l'épaisseur de la couche supérieure correspond alors à l'épaisseur de la zone blanche.

Ce dispositif est utilisé dans trois configurations différentes : la nappe laser verticale est placée soit dans la direction transverse à l'écoulement (configuration 1 dans Fig. 3.9), soit dans la même direction que l'écoulement dans la partie anticyclonique (configuration 2), ou cyclonique (configuration 3). La première configuration permet de mesurer la déviation de la surface dans les couches de cisaillement juste derrière le cylindre. En revanche, elle ne permet pas la mesure des déviations au centre des tourbillons. En effet, une fois formés, les tourbillons ont une vitesse de dérive très faible, il y a donc très peu de chance que le centre d'un tourbillon passe par la nappe laser. C'est pourquoi, nous avons réalisé aussi des expériences dans les configurations 2 et 3. La nappe laser passe alors par le centre des tourbillons, anticycloniques ou cycloniques et permet une mesure de la déviation verticale de l'interface à ce niveau. Un exemple de déviation verticale dans la partie cyclonique de l'écoulement est représentée sur la figure 3.8(a). Le schéma des plans lasers horizontaux et verticaux est représenté Figure 3.10.

### 3.2.3 Mesure instantanée de vorticité potentielle

Les mesures de déviations verticales, utilisées simultanément avec la mesure des champs de vitesses horizontaux, permet d'obtenir des mesures instantanées de la vorticité poten-

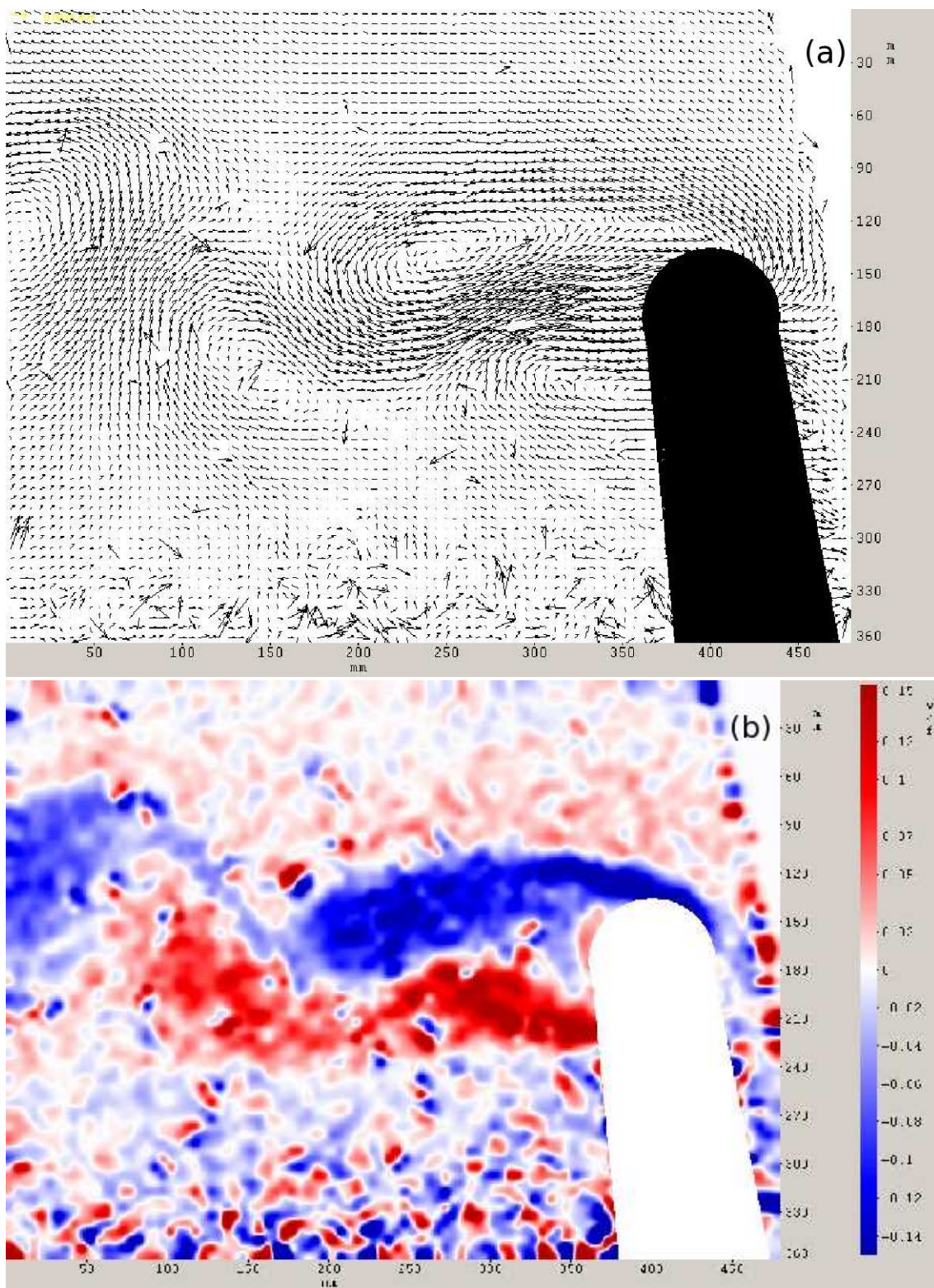


FIG. 3.7 – Champ de vitesse non moyenné (a) et champ de vorticité dérivé du champ de vitesse non moyenné (b).

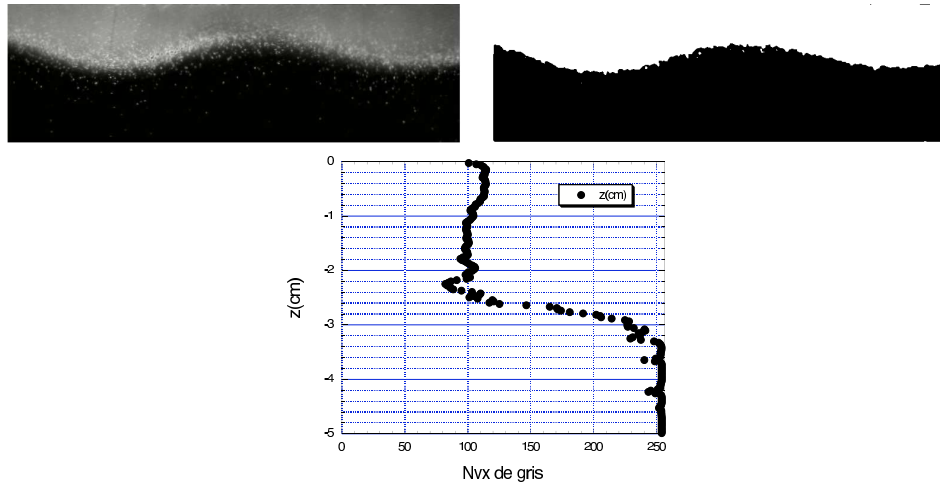


FIG. 3.8 – (a) Photographie des deux couches sur un plan vertical, la couche supérieure apparaît en brillant et la couche inférieure en noir. (b) La même image binarisée pour déterminer un seuil. (c) Profil d'intensité en niveau de gris obtenu sur une coupe verticale.

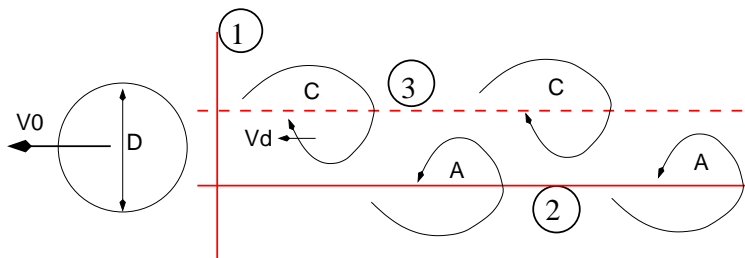


FIG. 3.9 – Schéma de la disposition du laser vertical pour les mesures de déviation de l'interface par LIF dans les configurations 1, 2 et 3.  $V_0$  est la vitesse de translation du cylindre et  $V_d \ll V_0$  la vitesse de dérive des tourbillons.

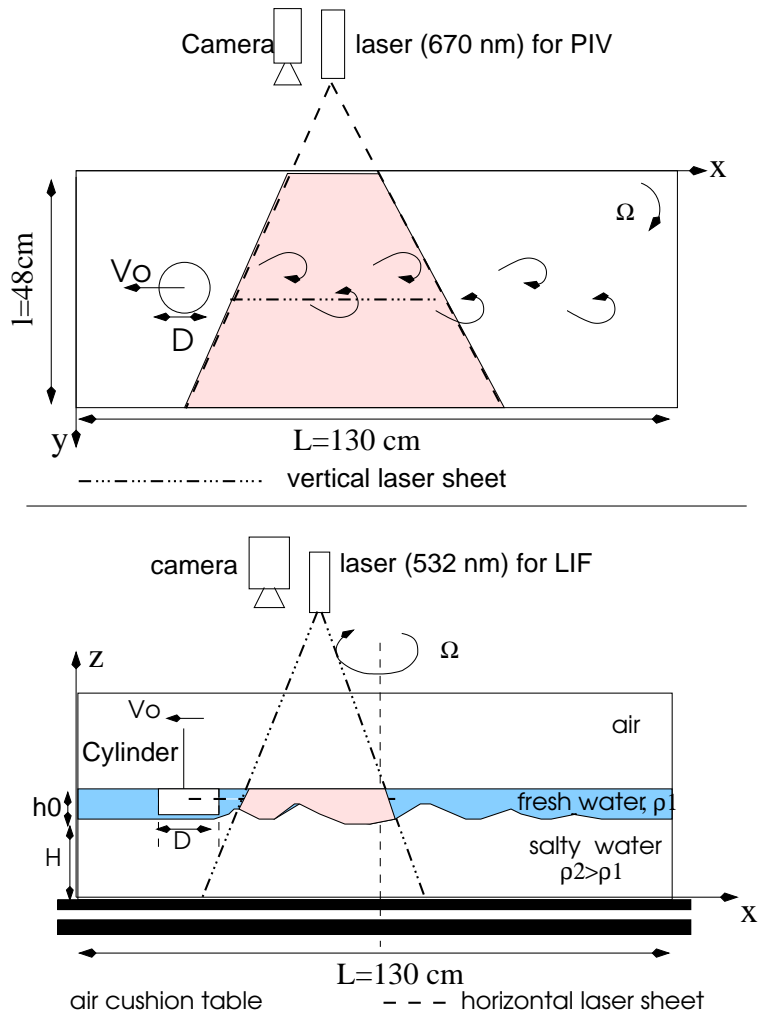


FIG. 3.10 – Schéma du dispositif expérimental.

tielle sur une coupe verticale,

$$q = \frac{\omega + f}{h}$$

où  $\omega$  est la vorticité relative, dérivée du champ de vitesse,  $f = 2\Omega$  est le paramètre de Coriolis et  $h = h_0 + \eta$  est la hauteur de la couche supérieure mesurée par méthode LIF,  $\eta$  étant la déviation de l'interface. La mesure de la déviation de l'interface  $\eta$  permet également d'étudier l'écart à l'équilibre géostrophique :

$$f\vec{n} \times \vec{V} = -g^*\nabla\eta$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire vertical,  $\vec{V} = (u, v)$  la vitesse horizontale et  $g^*$  la gravité réduite. Dans certaines expériences, en régime frontal, le sillage présente de longues couches de cisaillement derrière le cylindre. Dans cette zone, l'écoulement peut être considéré comme unidirectionnel, l'équilibre géostrophique s'écrit alors  $f u_{geo} = -g^* \partial \eta_{geo} / \partial y$ . La mesure de  $\eta$  sur une coupe transverse à l'écoulement (configuration 1, Fig.3.9), permet de calculer la vitesse géostrophique  $u_{geo}(y)$  et de la comparer à la vitesse mesurée  $u_{mes}$  au même endroit. On peut ainsi déterminer l'écart au géostrophisme de l'écoulement.

### 3.3 Paramètres et validité du modèle de Saint-Venant dans un dispositif bi-couches

Un système à deux couches supporte des mouvements barotropes et baroclines. Le mode barotrope est caractérisé par une vitesse et une perturbation de pression identique dans les deux couches. Le mode barocline, au contraire est caractérisé par une variation verticale du champ de vitesse  $V_2 = -h_2/h_1 V_1$  et de pression [54] (cf. Fig. 3.11). En trans-

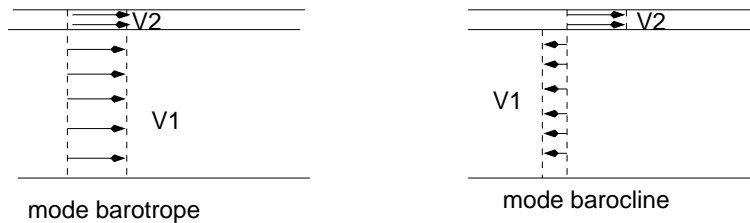


FIG. 3.11 – Modes barotropes et baroclines.

latant le cylindre dans la couche supérieure, on excite surtout le premier mode barocline. On présente dans cette section les paramètres qui décrivent ce système et dans quelle mesure le modèle de Saint-Venant est consistant pour décrire la dynamique de la couche supérieure.

#### 3.3.1 Paramètres

On dispose de dix grandeurs physiques pour caractériser l'écoulement :

- $l = 48 \text{ cm}$  la largeur la cuve,
- $h_0 = 2 \text{ cm}$  et  $H = 15 \text{ cm}$ , épaisseurs des couches supérieure et inférieure,
- $\rho_1$  et  $\rho_2$  la masse volumique des couches supérieure et inférieure de dimension  $M.L^{-3}$ ,
- $g$  l'accélération de la gravité, de dimension  $L.T^{-2}$ ,

- $\Omega = 0.638 - 0.838 \text{ rad.s}^{-1}$  la vitesse de rotation de la cuve de dimension  $T^{-1}$ ,
- $\nu = 1.10^{-2} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$  la viscosité du fluide de dimension  $L^2.T^{-1}$ ,
- une échelle de longueur horizontale,  $D = 2R = 7 \text{ cm}$  le diamètre du cylindre,
- une échelle de vitesse,  $V_0 = 0.28 - 1.14 \text{ cm.s}^{-1}$  la vitesse de translation du cylindre.

A partir des deux masses volumiques et de la gravité, on construit deux échelles de longueur qui caractérisent la dynamique du système. Le rayon de déformation barotrope  $R_d = \sqrt{g(h_0 + H)}/(2\Omega) \approx 1 \text{ m}$  et le rayon de déformation barocline  $R_d^* = \sqrt{g^* \frac{h_0 H}{h_0 + H}}/2\Omega$  où  $g^* = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$  est l'accélération de la gravité réduite. Dans notre système, le rapport  $h_0/H = 0.13$  est petit devant 1, le rayon de déformation barocline peut donc s'écrire  $R_d^* = \sqrt{g^* h_0}/(2\Omega) = 1.2 - 26 \text{ cm}$ . En translatant le cylindre dans la couche supérieure uniquement, on excite principalement le premier mode barocline. Le rayon de déformation barocline est donc l'échelle caractéristique de la dynamique et atteint des valeurs inférieures à  $D$ . L'échelle de longueur des mouvements horizontaux,  $D$ , est très petite devant le rayon de déformation barotrope,  $D/R_d \approx 0.07$ , on peut donc négliger la déviation de la surface libre et faire l'approximation du toit rigide. Le rapport des échelles horizontales est de  $D/l = 0.15$ , on est dans un écoulement faiblement confiné, on négligera, par la suite, les effets de bords de la cuve. Il reste donc quatre échelles de longueur  $h_0$ ,  $H$ ,  $R_d^*$ ,  $D$ , une échelle de vitesse  $V_0$ , l'inverse d'un temps  $\Omega$  et la viscosité du fluide  $\nu$ . A partir de ces échelles, on définit un temps caractéristique du mouvement du fluide, le temps d'advection  $D/V_0$  et une échelle de diffusion visqueuse  $\sqrt{\nu D/V_0}$  pour ce temps d'évolution. La définition de nombres adimensionnés permet de déterminer l'importance relative des différents phénomènes physiques et de caractériser la dynamique de l'écoulement. A partir des grandeurs dimensionnelles, on définit cinq paramètres adimensionnés. Deux sont fixés :

- le rapport des échelles verticales du système,

$$\delta = \frac{h_0}{h_0 + H} = 0.12$$

- et le rapport des échelles horizontale et verticale de l'écoulement,

$$\alpha = \frac{h_0}{D} = 0.28$$

$\alpha \leq 1$ , on est dans une configuration du type couche mince.

Cinq sont variables :

- le rapport du temps d'advection et du temps de rotation, le nombre de Rossby

$$Ro = \frac{V_0}{D\Omega} = 0.06 - 0.35$$

Pour des petits nombres de Rossby,  $Ro \ll 1$ , l'écoulement satisfait l'équilibre géostrophique entre la force de Coriolis et le gradient de pression horizontal.

- le carré du rapport du rayon de déformation barocline et de l'échelle horizontale de l'écoulement, le nombre de Burger

$$Bu = \left(\frac{R_d^*}{R}\right)^2 = 0.11 - 46$$

Pour des petits nombres de Rossby, le régime frontal est défini pour  $Bu \ll 1$  et le régime quasi-géostrophique pour  $Bu \approx 1$ . Pour  $Bu \gg 1$ , la dynamique de l'écoulement est celle d'un écoulement 2D incompressible.

- le rapport du carré de l'échelle horizontale de l'écoulement et de l'échelle de dissipation visqueuse, le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{V_0 D}{\nu} = 200 - 1000$$

Le nombre de Reynolds détermine l'importance des effets visqueux. Dans un système sans rotation, le nombre de Reynolds est l'unique paramètre qui caractérise le sillage. Dans cette gamme de nombre de Reynolds, une allée de von Karman régulière se forme derrière l'obstacle.

On introduit deux autres paramètres fréquemment rencontrés dans la littérature et qui ont une signification physique importante :

- le rapport de la vitesse des ondes sur la vitesse d'évolution de l'écoulement, le nombre de Froude

$$Fr = \frac{\sqrt{g^* h_0}}{V_0} = \frac{Ro}{\sqrt{Bu}} = 0.02 - 0.58$$

Le nombre de Froude n'est jamais supérieur à 1, valeur au delà de laquelle des ressauts hydrauliques peuvent se former dans l'écoulement.

- la déviation relative de l'interface

$$\lambda = \frac{Ro}{Bu} = 0.003 - 1.7$$

L'équilibre géostrophique force le paramètre  $\lambda$  à être relié à la déviation relative de l'interface entre les deux fluides,  $\lambda \propto \Delta h/h_0$  où  $\Delta h$  est l'échelle des variations verticales de l'interface. Lorsque le paramètre  $\lambda$  est petit,  $\lambda \approx Ro \ll 1$ , le régime dynamique est quasi-géostrophique, pour de larges déviations de l'interface,  $\lambda \approx \mathcal{O}(1)$ , le régime dynamique est dit frontal. En réalité le paramètre  $\lambda$  tel que nous le définissons est plus grand que la déviation effective de l'interface  $\eta/h_0$ , surtout dans des régimes frontaux, mais les deux restent proportionnels. Des valeurs du paramètre  $\lambda$  supérieures à 1 ne correspondent donc pas à des phénomènes d'outcropping, *i.e* lorsque l'interface intersecte la surface libre, mais à des déviations de l'interface de l'ordre de 40 à 60%.

### 3.3.2 Validité du modèle shallow-water

D'après Pedlosky, le rapport de l'accélération de la vitesse verticale du fluide dans chacune des couches  $dw_i/dt$  et du gradient vertical de pression  $(1/\rho)\partial p_i/\partial z$  est donné par la relation :

$$\rho \frac{dw_i/dt}{\partial p_i/\partial z} = O(\alpha_i^2 Ro_i)$$

où  $d/dt = \partial/\partial t + \vec{V}_i \cdot \nabla$  est la dérivée particulaire,  $\vec{V}_i = (u_i, v_i, w_i)$  et  $p_i$  les vitesses et pression de la  $i$ ème couche. Le paramètre  $\alpha_i = h_i/D$  est le rapport de l'épaisseur de la  $i$ ème couche sur l'échelle horizontale de l'écoulement et  $Ro_i = V_i/D\Omega$  le nombre de Rossby correspondant à chaque couche. Pour la couche supérieure,  $\alpha_1^2 Ro_1 = 0.005 - 0.03$  au maximum, l'accélération de la vitesse verticale est donc négligeable et l'équilibre hydrostatique est assuré. Nous avons mesuré, par méthode PIV la vitesse horizontale de la couche inférieure en plaçant la nappe laser à 7 cm sous l'interface. Nous avons vérifié que la vitesse horizontale dans cette couche était dix fois inférieure à celle dans la couche

supérieure,  $Ro_2 = Ro_1/10$ . Donc, même si le rapport  $\alpha_2$  n'est pas petit,  $\alpha_2 = 2.1$ , le produit  $\alpha_2^2 Ro_2 = 0.03 - 0.16$  reste très inférieur à 1. L'accélération verticale est donc également négligeable dans la couche inférieure. En supposant, qu'à l'instant initial, les vitesses horizontales de chacune des couches ne dépendent pas de la coordonnée verticale, la dynamique de chaque couche peut être décrite par les équations de Saint-Venant.

La configuration expérimentale peut donc être considéré comme un système à deux couches minces avec un toit rigide. Cushman-Roisin *et al* [17], ont étudié la validité du modèle à gravité réduite, *i.e* une couche mince sur une couche infiniment profonde, pour décrire la dynamique de la couche supérieure. Ils déterminent le critère suivant pour lequel les mouvements dans la couche inférieure n'affectent pas la dynamique de la couche supérieure :

$$\delta \ll \min(1, Bu^2)$$

où  $\delta = h_0/(h_0 + H)$  et  $Bu$  est le nombre de Burger. Un tel critère signifie que pour des écoulements de petite échelle,  $Bu \geq 1$ , il suffit juste que l'épaisseur de la couche supérieure soit très inférieure à l'épaisseur totale des deux couches. Par contre, lorsque la taille caractéristique de l'écoulement devient plus grand que le rayon de déformation, le modèle de Saint-Venant perd rapidement sa validité. En ce qui concerne nos expériences, ce critère n'est pas parfaitement vérifié pour des nombres de Burger inférieurs à 0.34. De plus, pour des nombres de Burger très petits,  $Bu \approx 0.1$ , le fluide de la couche supérieure passe sous le cylindre et remonte derrière provoquant de forts mouvements verticaux et des ondes de sillage (Fig. 3.12). Dans cette gamme de paramètre, la validité du modèle

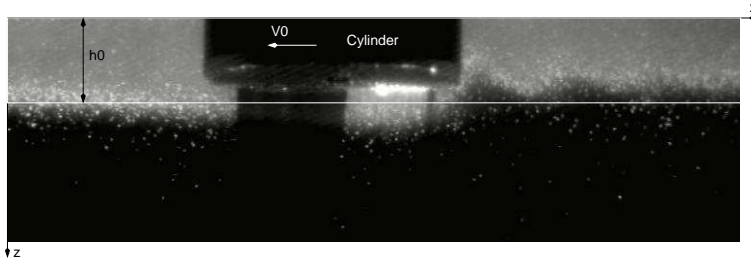


FIG. 3.12 – Photo de l'écoulement dans le plan vertical pour  $Bu = 0.11$ ,  $Ro = 0.19$  et  $Re = 800$ .

à gravité réduite pour décrire la dynamique de la couche du dessus est donc discutable. Il est probable que la couche du dessous ait une influence sur la dynamique rapide des ondes à l'interface.

### 3.4 Correspondance entre un obstacle mobile et un courant frappant un obstacle fixe

De nombreux phénomènes rendent la situation océanique plus complexe que la modélisation expérimentale que nous décrivons dans ce chapitre. Il nous paraît important de discuter l'équivalence ou non entre la configuration d'un obstacle avançant dans un fluide au repos et un courant géostrophique qui rencontre un obstacle fixe. En effet, à cause de contraintes expérimentales, nous avons considéré le cas d'un obstacle mobile dans le référentiel tournant, plutôt qu'un courant arrivant sur un obstacle fixe. Or, le référentiel en rotation n'étant pas galiléen, ces deux situations sont différentes.



Considérons le modèle de Saint-Venant dans le référentiel en rotation et dans le repère de l'obstacle. Pour un obstacle en translation uniforme à la vitesse  $\vec{V}_0 = -V_0\vec{e}_x$  dans le référentiel en rotation, le changement de repère s'écrit :

$$\begin{aligned}x' &= x + V_0t \\y' &= y \\ \vec{V}'(x', y', t) &= \vec{V}(x, y, t) - \vec{V}_0 \\ \phi'(x', y', t) &= \phi(x, y, t)\end{aligned}$$

Les équations adimensionnées dans ce nouveau repère s'écrivent :

$$Ro\left(\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t} + (\vec{V}' \cdot \nabla')\vec{V}'\right) + \vec{n} \times (\vec{V}' + \vec{V}_0) = -\nabla\phi \quad (3.1)$$

$$\lambda\left(\frac{\partial\phi'}{\partial t} + \vec{V}' \cdot \nabla'\phi'\right) + (1 + \lambda\phi')\nabla' \cdot \vec{V}' = 0 \quad (3.2)$$

et les conditions à l'infini sont :

$$\vec{V}' \rightarrow -\vec{V}_0 \quad (3.3)$$

$$\phi \rightarrow \phi_0 = \text{cste} \quad (3.4)$$

Pour un obstacle fixe dans le référentiel en rotation, les équations sans dimension s'écrivent :

$$Ro\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}\right) + \vec{n} \times \vec{V} = -\nabla\phi \quad (3.5)$$

$$\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\phi\right) + (1 + \lambda\phi)\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.6)$$

et à l'infini l'écoulement est géostrophique :

$$\vec{V} \rightarrow \vec{V}_g(y) \quad (3.7)$$

$$\phi \rightarrow \phi_g(y) \quad (3.8)$$

où  $f$  est le paramètre de Coriolis,  $\vec{V}$  la vitesse horizontale,  $\vec{n}$  la normale au plan de l'écoulement et  $\phi$  le géopotential. Dans les deux cas, l'écoulement arrivant en amont de l'obstacle, à la vitesse  $\vec{V}_0$ , satisfait au premier ordre l'équilibre géostrophique. Dans le cas de l'obstacle mobile, cet équilibre s'écrit :

$$\vec{n} \times (\vec{V}_0 - \vec{V}_0) = 0 = -\nabla'\phi',$$

la déviation du géopotential est donc nulle.

Dans le cas de l'obstacle fixe, l'équilibre du courant en amont s'écrit :

$$\vec{n} \times \vec{V}_0 = -\nabla\phi$$

et la déviation du géopotential n'est pas nulle.

Cependant, la déviation du géopotential étant du même ordre que le paramètre  $\lambda = Ro/Bu$ , elle est très faible dans un régime grande échelle ( $Ro \ll 1$  et  $Bu \geq 1$ ). Dans ce cas, les deux configurations peuvent être considérées comme semblables. En revanche, pour un régime grande échelle ( $Ro \ll 1$  et  $Bu \ll 1$ ) la déviation du géopotential n'est plus négligeable et les deux situations diffèrent. Cette différence est schématisée sur la figure 3.13.

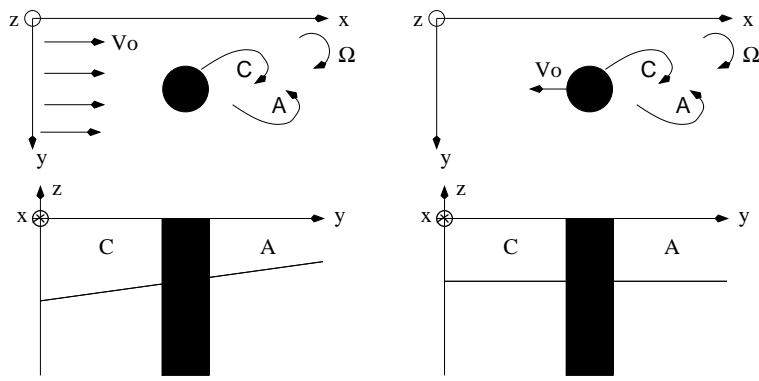


FIG. 3.13 – Schéma d'un courant à l'équilibre géostrophique frappant un obstacle fixe dans le référentiel en rotation (a) et d'un obstacle en translation uniforme dans un référentiel tournant (b).



# Chapitre 4

## Asymétrie cyclone-anticyclone dans les sillages de grande-échelle

Cette étude a fait l'objet d'un article soumis à *Physics of Fluids*, présenté ici dans la section 4.2.

### 4.1 Résumé

Pour caractériser les sillages de grande échelle, nous avons réalisé une série d'expériences de laboratoire sur une large gamme de paramètres, du régime grande échelle au régime quasi-géostrophique. Le dispositif expérimental et les paramètres sont détaillés dans le chapitre 3.

Dans un régime quasi-géostrophique, le sillage a une structure d'allée de tourbillons de type von Karman. Les couches limites formées sur le cylindre se détachent et s'enroulent pour former alternativement des tourbillons cycloniques et anticycloniques qui sont advectés au loin. Par contre, lorsque le rayon de déformation  $R_d^*$  devient inférieur au diamètre du cylindre  $D$ , une forte asymétrie cyclone-anticyclone apparaît dans l'allée de tourbillons. Les cyclones sont déformés et elliptiques alors que les anticyclones restent bien circulaires. Plus surprenant, pour de très petits rayons de déformation,  $R_d^* = 0.16D$ , seuls des tourbillons anticycloniques apparaissent dans le sillage. De plus, les couches limites formées sur le cylindre, se détachent mais ne s'enroulent pas, elles forment au contraire deux couches de cisaillement quasi-parallèles, qui restent stables sur une distance de deux à trois diamètres. L'allure du sillage ressemble davantage à deux couches de cisaillements instables qu'à une allée de von Karman.

Pour caractériser ces couches de cisaillement, nous avons mesuré le profil de vitesse longitudinale et la déviation de l'interface sur une coupe perpendiculaire à l'écoulement, juste derrière le cylindre. Ces profils sont moyennés en temps pour filtrer les ondes. Il apparaît d'une part que le profil de vitesse dans la zone de cisaillement est fortement asymétrique. D'autre part, l'écoulement dans les couches cisillées est à l'équilibre géostrophique.

Une conséquence de l'asymétrie dans l'allée de tourbillons est l'augmentation importante du nombre de Strouhal, jusqu'à 0.6 lorsque l'allée n'est formée que d'anticyclones. Les valeurs du nombre de Strouhal sont bien supérieures aux valeurs rencontrées dans la littérature pour les nombres de Reynolds considérés. De plus, le nombre de Strouhal augmente très nettement avec la déviation relative de l'interface  $\lambda$ , alors qu'il n'y a aucune relation évidente avec le nombre de Burger. Le nombre de Reynolds, ni le nombre de Rossby ne contrôlent la fréquence d'émission des tourbillons. L'augmentation du Strou-

---

hal est directement liée à l'asymétrie cyclone-anticyclone, donc le paramètre  $\lambda$  semble être le paramètre de contrôle de cette asymétrie. Le régime dans lequel est observé cette asymétrie correspond au régime frontal, petits nombres de Rossby et larges déviations de l'interface.

Les expériences de laboratoire nous ont permis de caractériser la structure des sillages de grande échelle, d'identifier le régime dynamique dans lequel l'asymétrie cyclone-anticyclone est observée. Cette étude soulève aussi plusieurs interrogations sur l'origine de l'asymétrie dans l'allée tourbillonnaire. En effet, d'une part, les cyclones et les anticyclones peuvent suivre une dynamique différente en régime frontal (présenté au chapitre 2), d'autre part, le sillage quasi-parallèle qui s'étend derrière le cylindre est asymétrique. Il n'est donc pas évident de déterminer le ou les mécanismes responsables de l'asymétrie des allées de tourbillons.

## 4.2 Article : Cyclone-anticyclone asymmetry of large scale wakes in laboratory

**G. Perret, A. Stegner, M. Farge**

*Laboratoire de Météorologie Dynamique, CNRS, ENS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France.*

**T. Pichon**

*UME, ENSTA Centre de l'Yvette, Chemin de la Humière, 91120 Palaiseau Cedex, France.*

### Abstract

We performed an experimental study of large-scale wakes in a rotating shallow-water layer. Standard Particle Image Velocimetry (PIV) was used to measure the horizontal velocity field while a laser-induced fluorescence (LIF) technique was used to measure the geopotential deviation (*i.e.* the interface deviation). According to these measurements we were able to quantify the dynamics in a wide region of parameter space beyond the quasi-geostrophic regime. For obstacles larger than the deformation radius and small Rossby numbers, a significant asymmetry occurs in the wake between cyclonic and anticyclonic vortices. These parameters correspond to a frontal geostrophic regime with the relative interface deviation being larger than 0.1-0.2. In this case, anticyclones remain coherent and circular whereas cyclones tend to be elongated and distorted. More surprisingly, for some extreme cases, coherent cyclones do not emerge at all and only an anticyclonic vortex street appears several diameters behind the obstacle. The transition from a quasi-geostrophic to a frontal geostrophic regime is characterized by a strong increase in the Strouhal number which could reach a value up to 0.6. Hence, we found that a large-scale wake could strongly differ from the classical Karman street when the relative geopotential deviation becomes larger than the Rossby number.

### 4.2.1 Introduction

Several coherent structures encountered in the oceans or in the atmosphere of giant planets have characteristic scales larger than the local deformation radius. The latter, also called Rossby radius, is an intrinsic scale which controls the dynamics of rotating and stratified flows. The deformation radius depends on the vertical structure of the flows and may vary from a few tens of kilometers in the ocean to a few thousand of kilometers in the Earth's atmosphere or in that of giant planets. Large-scale flows correspond to a wide variety of geophysical flows having their characteristic scale larger than the local deformation radius. In such cases, an asymmetry is often observed in the dynamics and in the morphology of cyclonic and anticyclonic structures. For instance, the famous long-lived eddies formed in the zonal circulation of outer planets such as Jupiter (Great Red Spot, White oval [65, 75]), Saturn (Great Dark Spot [64]) or Uranus [63] are anticyclones, whereas cyclones are generally smaller and more elongated. In the Earth's ocean, large-scale eddies such as Submesoscale Coherent Vortex (SCV) [50], meddies and swoddies [14] are mostly anticyclonic.

In geophysical flows, several mechanisms could induce a dynamical selection between cyclones and anticyclones. For instance, the predominance of anticyclones could be due to a nonlinear  $\beta$  effect [49, 56, 51, 52, 68]. However, in the ocean the influence of  $\beta$  on the submesoscale vortices is weak and some nonlinear mechanism should act on the  $f$ -plane.

Several studies have considered the simplest model that can take into account ageostrophic or large-scale effects : the rotating shallow-water model in the  $f$ -plane. As far as shallow-water decaying turbulence is concerned, Polvani *et al.* [57] and Arai and Yamagata [4] have shown that the departure from quasigeostrophy leads to a significant asymmetry for which anticyclonic vortices are circular and robust while cyclones are more distorted and elongated. The parameter which governs this asymmetry is not clearly determined, whether it is the Froude number [57] or the surface displacement [4]. However, in decaying turbulence, several mechanisms could act together (vortex merging, stability, wave vortex interaction), but few studies have been devoted to either homogeneous isotropic turbulence [26] or the stability of large-scale jets or vortices. Arai and Yamagata [4] studied numerically the stability and the elongation of an elliptical Gaussian vortex. They found that the cyclonic vortex splits into two vortices, whereas anticyclones always reach axisymmetrization for maximum relative surface deviation  $\eta_{max}$  larger than 0.5 – 0.6. Stegner and Dritschel [66] investigated the stability of a generalized isolated shallow-water vortex using a contour-advective semi-Lagrangian algorithm. They show that ageostrophic effects tend to stabilize anticyclones and destabilize cyclones. Besides, they also found, like Arai and Yamagata [4], that the stability of a coherent structure increases when the deformation radius is reduced. A recent study by Poulin and Flierl [58] has investigated the asymmetry in the destabilization of a Bickley jet. They show that cyclones become more elongated than anticyclones as the Rossby number increases. For stable vortices, a recent work of Graves *et al.* [29] have shown that an impulsive strain perturbation induces a greater weakening for cyclones than for anticyclones. Such asymmetry appears for finite Rossby and deformation radius. Furthermore, when the external strain flow is sustained, the axisymmetric component of anticyclones is strengthened systematically when the deformation radius is comparable to the vortex radius.

The cyclone-anticyclone asymmetry has also been investigated in a stratified configuration. In such a case, the baroclinic instability could induce a selection between structures of opposite vorticity. Linden *et al.* [47] performed laboratory experiments on three-dimensional rotating stratified turbulence and observed a predominance of coherent anticyclones when the deformation radius is smaller than the size of the tank. A cyclone-anticyclone asymmetry was also observed in a numerical study of three-dimensional stratified turbulence for finite Rossby number, [79] vorticity skewness becomes negative indicating a dominance of anticyclones. Few numerical studies have addressed the stability of localized vortices in a two-layer model beyond the quasi-geostrophic regime. Matsuura shows the influence of the surface deviation [48]. Indeed, large interface displacement is found to stabilize anticyclones and destabilize cyclones. Another study, by Baey and Carton [7], on a two-layer shallow-water model shows that cyclones were linearly more unstable than anticyclones when the vortex size becomes larger than the deformation radius.

According to these studies, large-scale flows increase the stability of anticyclonic structures compared to their cyclonic counterpart. Cyclones tend to be more distorted and unstable when their size exceeds the deformation radius. However, this large-scale asymmetry was never studied for a Karman wake. In such a case, both global (the wake) and local (the vortices) structures could be affected.

Hence, the aim of this paper is to study :

- the changes in the Karman wake when it reaches the large-scale regime,
- the influence of an expected cyclone-anticyclone asymmetry on the vortex size and the Strouhal number,

- the region of the parameter space where cyclone-anticyclone asymmetry occurs.

We performed laboratory experiments under different regimes. The ratio of the deformation radius with the characteristic scale of the obstacle (here a cylinder of radius  $R$ ) was varied from 0.17 up to 3.5. The Rossby number was maintained small,  $Ro = 0.06 - 0.2$ , and the Reynolds number was varied from 200 to 1000. Hence, we investigated the small-scale regime ( $R/Rd \leq 1$ ), the quasi-geostrophic regime ( $R/Rd = 1$ ) and the transition to large-scale flows ( $R/Rd > 1$ ).

The experimental set-up is described in section 4.2.2. We present a qualitative characterization of a large-scale wake in section 4.2.3. Sections 4.2.4, 4.2.5 and 4.2.6 are devoted to a more quantitative analysis of the different regions of the wake : the shear layer near the obstacle, the detached vortices and the lee-waves, respectively. The influence of large-scale effects on the Strouhal number is discussed in section 4.2.7. We discuss and summarize the results in sections 4.2.8 and 4.2.9.

## 4.2.2 Laboratory experiments

### Experimental set-up

The experiments were performed at the department of mechanics UME, ENSTA, in Palaiseau, on a 1.5 m-diameter rotating table (Fig. 4.1). The upper plate of a turntable rotates on a thin air layer in order to reduce friction and mechanical vibrations. We used a rectangular tank  $l = 48\text{ cm}$  wide and  $L = 130\text{ cm}$  long. The angular velocity of the turntable,  $\Omega$ , was varied from 1 to 12 rpm and the corresponding Coriolis parameter  $f = 2\Omega$  ranges between  $0.1\text{ rad.s}^{-1}$  and  $1.25\text{ rad.s}^{-1}$ .

We used a two-layer salt stratification which could support either barotropic or baroclinic motions. However, for a total fluid depth  $H+h_0 = 17\text{ cm}$  with  $H$  and  $h_0$  the bottom and upper layer depth respectively, the barotropic deformation radius  $R_d = \sqrt{g(H+h_0)}/f$  is as large as the tank,  $R_d \geq 1.2\text{ m}$ . Moreover, we adjusted the density difference between the two layers to get a small baroclinic deformation radius  $R_d^* = \sqrt{g^* \frac{h_0 H}{h_0 + H}}/f$ , where  $h_0 = 2\text{ cm}$  is the upper layer depth and  $g^* = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ , the reduced gravity with  $\rho_1$  and  $\rho_2$  the density of the upper and bottom layers respectively. In our case ( $h_0$  small in comparison to  $H$ ), the baroclinic deformation radius can be approximated by  $R_d^* \approx \sqrt{g^* h_0}/f$  and varied from 1 to 24 cm. We towed a cylinder of diameter  $D = 7\text{ cm}$  and height  $h_C = 2\text{ cm}$  in the upper layer. Hence, we transfer momentum and kinetic energy mainly in the upper layer. The motion in the wake has therefore a strong baroclinic component : intense velocities in the thin layer while the deep lower layer remains almost at rest. The deformation of the free surface can be neglected in comparison with the deviation of the internal interface between the two layers. The cylinder diameter may then be equal to or larger than the baroclinic deformation radius  $R_d^*$ . Therefore, this experimental set-up allows us to study the dynamics of large-scale wakes.

To avoid mixing between the two layers, we proceeded as follows. We first filled the tank with salty water to a depth of  $H = 15\text{ cm}$ . When the solid-body rotation was reached we slowly injected the light upper layer at the surface of the bottom layer. Then we waited until the residual motion of the second layer became negligible and we towed the obstacle in the upper layer at a constant velocity  $V_0$ , for values varying from  $0.28\text{ cm.s}^{-1}$  to  $1.5\text{ cm.s}^{-1}$ .

Standard Particle Image Velocimetry (PIV) was used to measure the horizontal velocity field. Small buoyant particles were put in the upper layer and lightened with a



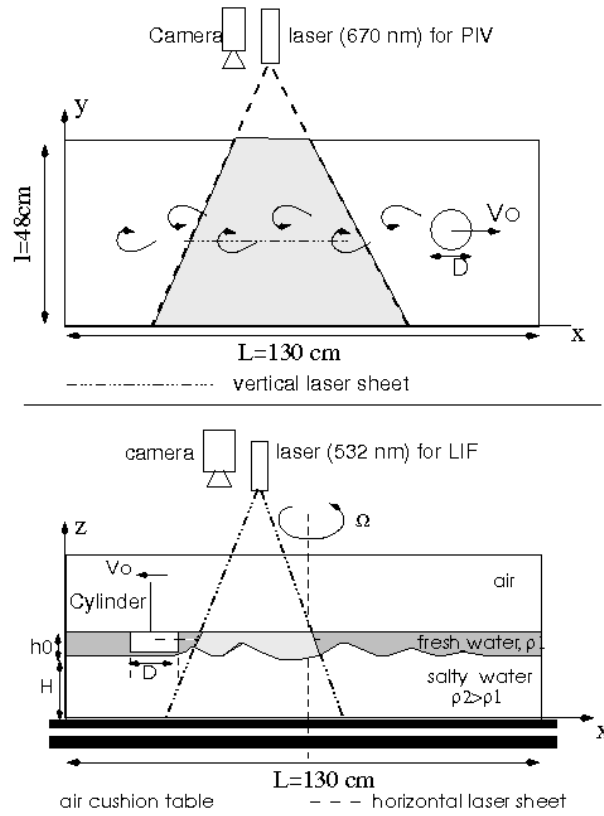


FIG. 4.1 – Top and side view of the experiment. The fluid is stratified in two layers of depth  $H = 15 \text{ cm}$  and  $h_0 = 2 \text{ cm}$ . The cylinder is towed in the thin upper layer. The dynamics are observed and recorded by means of a horizontal and a vertical laser sheet.

horizontal laser sheet of wavelength  $670\text{ nm}$ , located  $1\text{ cm}$  below the upper free surface. The particles' motion was recorded by two  $768 \times 576$ -pixel CCD cameras rotating with the tank. One used a wide-angle to analyse the global structure of the wake with a resolution of  $17\text{ pixels/cm}$ . The other one is zoomed at a resolution of  $45\text{ pixels/cm}$  to obtain an accurate resolution of the detached boundary layer just behind the cylinder. The particles' velocity was analysed using LaVision PIV software with successive cross-correlation boxes yielding a final  $64 \times 48$  vector field for both resolutions. Vorticity fields were derived from velocity fields averaged over a period corresponding to one tenth of a typical turnover time  $\tau = D/V_0$ .

The fluctuations of the internal interface between the upper and the lower layer are measured using a laser-induced fluorescence (LIF) technique. The fluorescent dye (Rhodamine 6G) put in the upper layer was illuminated by a vertical laser sheet. To optimize the fluorescent emission of the Rhodamine 6G, we used a  $532\text{ nm}$  green laser, whose wavelength is close to  $530\text{ nm}$ , the ray of maximal absorption of dye. The fluorescent upper layer appeared bright while the deep lower layer, transparent to the laser sheet, remained dark. A  $768 \times 576$  pixel CCD camera is fixed on one side of the tank, perpendicular to the laser sheet. Hence, with this original non-intrusive technique we were able to measure along a line the displacement of the interface between the light and dense water with an accuracy of  $0.5\text{ mm}$  at an acquisition rate of  $25\text{ Hz}$ .

For a few experiments, horizontal PIV measurements and vertical LIF visualizations were used simultaneously. In this case, specific optical filters were fixed on each camera to only detect the dye emission in the vertical plane and the particles in the horizontal plane. We were then able to measure at the same time the horizontal velocity and the upper-layer thickness along one profile. Hence, we could obtain direct measurements of the flow balance and the potential vorticity just behind the cylinder when the flow remained unidirectional.

## Parameters

The forcing conditions were fixed by seven physical parameters : the upper layer height  $h_0$ , the reduced gravity  $g^*$ , the cylinder diameter  $D = 2R$ , the Coriolis parameter  $f$ , the cylinder velocity  $V_0$ , the fluid viscosity  $\nu$  and the bottom-layer depth  $H$ . Taking  $1/f$  as the reference time-scale, we get only six independent length-scales. Then, according to dimensional analysis, the dynamical evolution of the wake is governed by five dimensionless parameters. We introduce the Reynolds number  $Re$ , the Rossby number  $Ro$ , the Burger number  $Bu$ , the aspect ratio between vertical and horizontal scales  $\alpha$  and the layer-thickness ratio  $\delta$  :

$$Ro = \frac{2V_0}{fD}, \quad Re = \frac{V_0D}{\nu}, \quad Bu = \left(\frac{2R_d^*}{D}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{h_0}{D}, \quad \delta = \frac{h_0}{H + h_0}.$$

In order to satisfy the geostrophic balance, the Rossby number was kept small  $Ro = 0.06 - 0.35$  for all experiments. Besides, due to the small aspect ratio  $\alpha = 0.28$  and according to the condition  $\alpha^2 Ro \ll 1$ , [54] the hydrostatic balance is verified in the upper layer. Moreover, we checked that the lower layer velocity  $V_{bottom} \simeq \alpha V_0$  remained small compared to the upper layer velocity  $V_0$ . Hence, even if the lower layer aspect ratio  $\alpha_{bottom} = H/D = 2.14$  is not negligible, the relation  $\alpha_{bottom}^2 Ro_{bottom} \ll 1$ , where  $Ro_{bottom} = V_{bottom}/fR$ , guarantees that the hydrostatic approximation is also respected in the bottom

layer. Therefore, the vertical variations of horizontal velocities remain small and we could expect shallow-water dynamics in both layers. The layer-thickness ratio  $\delta$  controls the dynamical interactions between the two layers. According to Cushman-Roisin[17], the upper layer is not affected (to the first order of approximation) by the lower layer dynamics if  $\delta \ll \min(1, Bu^2)$ . This criterion was respected in most of our experiments, as long as the Burger number was not too small. Hence, the upper layer motion could be described by the shallow-water reduced-gravity model [54]. In that context, the dynamical evolution of the wake is mainly governed by the Reynolds  $Re$ , the Rossby  $Ro$  and the Burger  $Bu$  numbers.

We performed experiments for four different Reynolds numbers,  $Re = 200, 400, 800$  and  $1000$ . For these values, periodic vortex shedding always occurred in two-dimensional wakes [74, 39]. Besides, in the absence of rotation a secondary three-dimensional instability occurs when  $Re$  exceeds 180 [77, 9]. Nevertheless, in our case, due to the rotation and the shallow-water configuration, we did not see any evidence of such three-dimensional instabilities.

The Burger number was varied over a wide range of values  $Bu = 0.11 - 46$ . Small Burger numbers  $Bu = 0.11 - 1$  characterize large-scale flows ( $R_d^* \leq R$ ) while  $Bu \gg 1$  correspond to small-scale flows in which the influence of rotation could be neglected in the limit of small Rossby number. The use of the Burger number is not generalised in the literature and one could choose other dimensionless number to characterize the flow regime. Hence, we introduced the relative interface deviation  $\lambda$  and the Froude number  $Fr$  :

$$\lambda = \frac{Ro}{Bu}, \quad Fr = \frac{V_0}{\sqrt{g^* h_0}} = \frac{Ro}{\sqrt{Bu}}.$$

For small Rossby numbers, the flow satisfies the geostrophic balance at first order. This balance forced the parameter  $\lambda$  to be related to the relative interface deviation  $\lambda \propto \eta = \Delta h_0/h_0$ . In what follows,  $Bu$ ,  $Fr$  or  $\lambda$  is used to quantify the transition from a small- to large-scale regime.

### 4.2.3 Dynamical structure of the wakes

To make a qualitative comparison between small-scale and large-scale wakes, we show in Fig. 4.2 the evolution of vorticity fields in two extreme cases. The first case, Figs. 4.2(a), 4.2(b) and 4.2(c), corresponds to a quasi-geostrophic regime :  $Ro = 0.06$ ,  $Bu = 1.97$  and  $Re = 196$ . In this case, the deformation radius is comparable to the cylinder radius. According to Fig. 4.2(a), strong velocity gradients occur in the boundary layers around the cylinder. Then the boundary layers roll up alternatively on each side of the cylinder generating a periodic succession of elliptical vortices. Further down the wake, these vortices become more circular. Cyclones and anticyclones present the same dynamical evolution. This scenario is identical to the formation of a classical two-dimensional Karman street [77]. The second case, Figs. 4.2(d), 4.2(e) and 4.2(f), corresponds to a large-scale wake :  $Ro = 0.19$ ,  $Bu = 0.11$  and  $Re = 798$ . According to Fig. 4.2(d), the boundary layers formed on the cylinder detach but do not roll up immediately. Instead, the wake behind the cylinder exhibits cyclonic (in red) and anticyclonic (in blue) shear layers which remain stable up to a distance of two to three diameters. Further down, the wake becomes unstable, anticyclonic vortices are formed but no coherent cyclonic structures emerged. The instability mechanism in that case is not easy to identify : either wake instability or shear instability? In this configuration the wake exhibits a strong asymmetry between

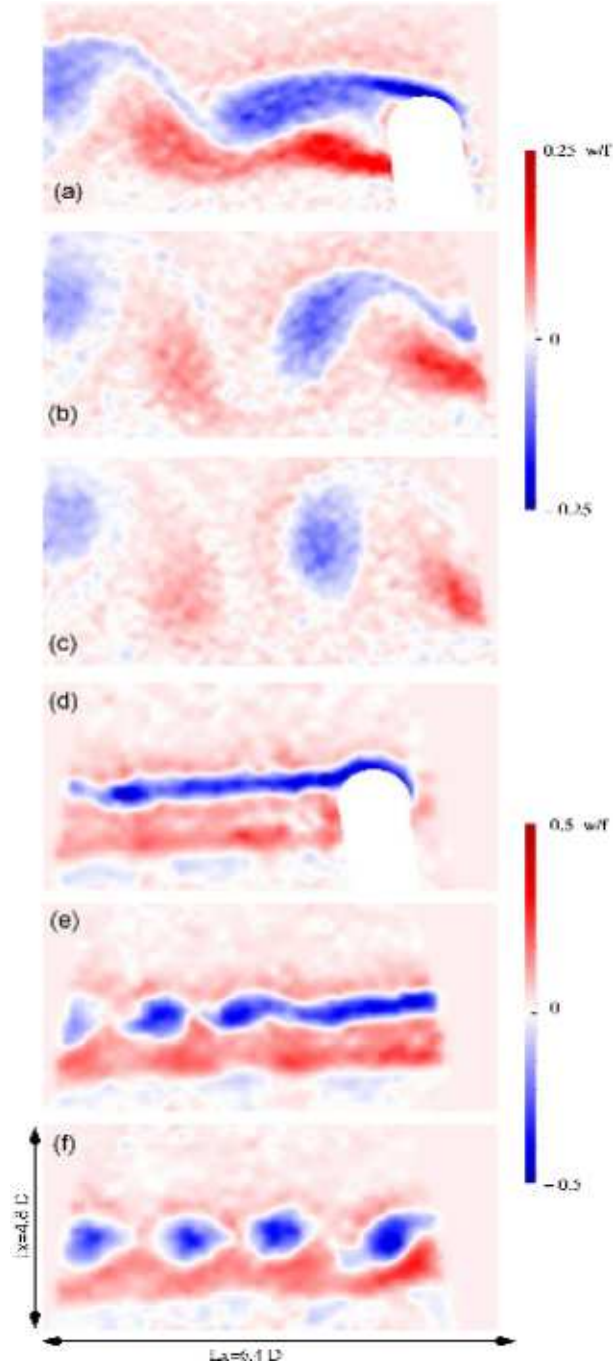


FIG. 4.2 – Vorticity fields for a small-scale configuration (expt.  $n^{\circ}$  4) at  $T=0\tau$  (a),  $3\tau$  (b) and  $5.2\tau$  (c), and a large-scale configuration (expt.  $n^{\circ}$  23) at  $T=0\tau$  (d),  $2.4\tau$  (e) and  $5.5\tau$  (f), where  $\tau = D/V_0$  is the vortex turnover time. The cylinder and its shadow in the laser sheet are put in white on images (a) and (d). Blue corresponds to anticyclonic and red to cyclonic vorticity.

the cyclonic and anticyclonic regions. Due to the absence of coherent cyclones, the distance separating anticyclones is reduced in the large-scale regime. While four anticyclones are observed in the large-scale wake (Fig. 4.2(f)), only two appear in quasi-geostrophic wake (Fig.4.2(c)) for the same resolution. Therefore, the shedding frequency is twice as important in the large-scale configuration as in the quasi-geostrophic regime. Such an increase in the shedding frequency is much more important than the variations observed for non-rotating and rotating Karman streets when varying the Reynolds and Rossby numbers [20]. Hence, the wake in the large-scale configuration is strongly asymmetric and the frequency vortex shedding is significantly increased.

#### 4.2.4 Shear layer

To characterize more accurately the flow around the obstacle, we looked at the streamwise velocity profile just behind the cylinder. We plotted the profiles for three different cases in Fig. 4.3. The first one ( $Ro = 0.06$ ,  $Bu = 0.68$ ,  $Re = 196$ ,  $\lambda = 0.09$ ) corresponds to a quasi-geostrophic regime and the other two ( $Ro = 0.08$ ,  $Re = 400$ ,  $Bu = 0.11$ ,  $\lambda = 0.71$  and  $Ro = 0.19$ ,  $Re = 798$ ,  $Bu = 0.11$ ,  $\lambda = 1.71$ ) correspond to large-scale configurations. The horizontal velocity profiles, measured along a spanwise section, are averaged over time to filter out wave motions (see section 4.2.6). The quasi-geostrophic profile shows a symmetrical wake. Then, as the interface deviation increases, the intensity of the cyclonic shear layer decreases, leading to a highly asymmetric velocity profile (Fig. 4.3 for  $\lambda = 1.7$ ). Hence, in a large-scale configuration, the flow around the obstacle loses its symmetry.

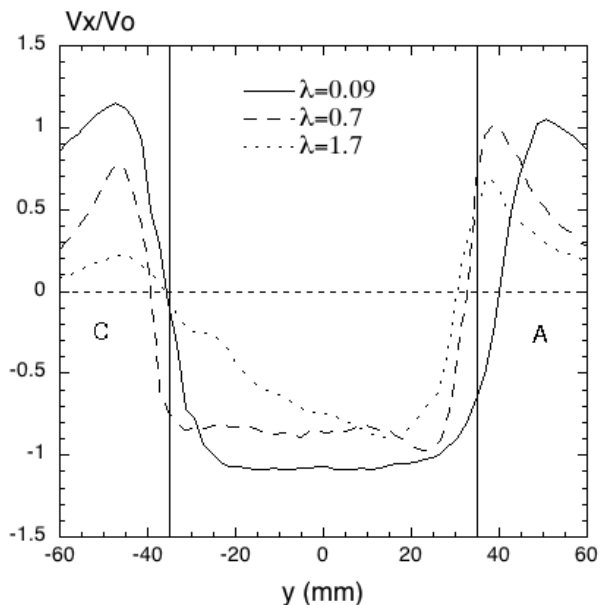


FIG. 4.3 – Dimensionless streamwise velocity profiles behind the cylinder for different parameters (the solid line corresponds to expt. $n^{\circ}$  10, the dashed line to expt. $n^{\circ}$  22 and dot line to expt. $n^{\circ}$  23). Letters  $\lambda$  and  $\lambda$  refer to the cyclonic and anticyclonic part of the shear layer. The vertical lines indicate the diameter of the cylinder.

To quantify this asymmetry, we looked at the vorticity difference between the anticyclonic and cyclonic shear layers just behind the cylinder. According to Fig. 4.4 this vorticity difference increases with the interface deviation, independently of the Reynolds

number. For a small surface displacement, vorticity has the same value in each shear layer, which corresponds to a symmetric flow. For an interface deviation larger than 0.3, cyclonic vorticity becomes smaller than the anticyclonic vorticity. Although the vorticity difference seems to be independent of the Reynolds number, shear layer vorticity increases with the Reynolds number. For Reynolds numbers about 800, the vorticity  $\omega$  in the anticyclonic shear layer is about  $-0.8f$ , where  $f$  is the Coriolis parameter, and could reach values down to  $-1.2f$ . Hence, according to the Rayleigh criteria for inertial instability, [38, 78]  $\omega \leq -f$ , the anticyclonic parallel shear flow could be unstable. Yet, we do not observe any evidence of three dimensional instabilities in this region. This could be due to the shallow water configuration which restricts vertical motions. However, for much larger Reynolds numbers, inertial instability could affect the region of negative vorticity.

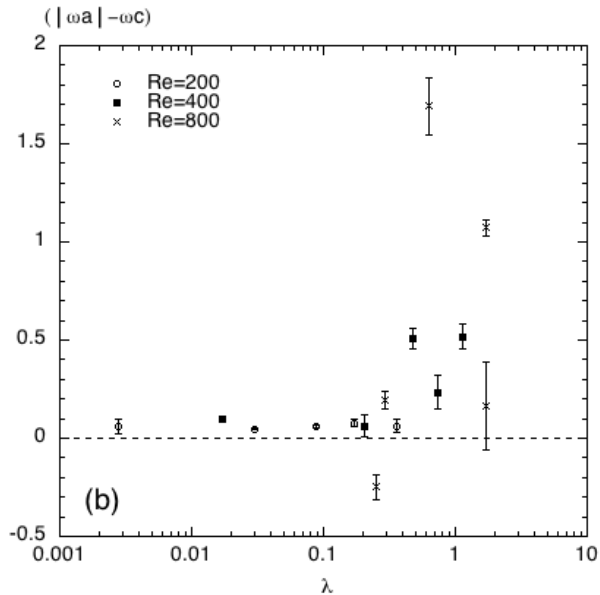


FIG. 4.4 – Vorticity difference between anticyclonic and cyclonic shear layers for all experiments as a function of the relative interface deviation.

Kuo and Polvani showed that the geostrophic adjustment of an unbalanced velocity field could induce an asymmetry between cyclonic and anticyclonic vorticity regions [44]. Such asymmetry is found to be enhanced for large-scale flows. Hence, one could ask whether the mean flow is in geostrophic balance. We then measured simultaneously the velocity and the interface displacement behind the obstacle for a large-scale wake configuration :  $\lambda = 1$ ,  $Bu = 0.24$ ,  $Ro = 0.24$  and  $Re = 1000$ . The double laser sheet set-up described above was necessary to obtain quantitative measurements of the horizontal velocity and interface deviation profiles plotted in Fig. 4.5 (dots). As in Fig. 4.3 the velocity profile is averaged with time to filter out the fast wave motion (see section 4.2.6). To estimate the derivative or the integral of the mean measured velocity profile, we fitted the discrete measurements with a smoothed profile using a Fourier lowpass filter. Using this continuous velocity fit, we calculated the mean geostrophic geopotential height using equation :

$$f u_{fit} = g^* \frac{\partial \eta_{geo}}{\partial y}.$$

For this range of parameters the mean interface deviation has finite amplitude values

(Fig. 4.5(b)) and the anticyclonic high pressure ( $\Delta p = 0.4\rho g^* h_0$ ) is twice the cyclonic low pressure ( $\Delta p = -0.2\rho g^* h_0$ ). Besides, according to Fig. 4.5(b), the mean geopotential is in geostrophic balance with the mean velocity in the whole central region. Nevertheless, one observes some discrepancies between  $h_{geo}$  and  $h_{mes}$  at the periphery. Therefore, we cannot exclude a low fraction of unbalanced motion behind the cylinder. The mean geostrophic vorticity and potential vorticity profiles are then derived from the following relation :

$$q_{geo} = \frac{\omega_{geo} + 1}{\eta_{geo} + 1} - 1,$$

where  $\omega_{geo} = g^*/f \partial^2 \eta_{geo} / \partial y^2$ . These profiles are compared to the mean measured profiles of vorticity and interface deviation. Experimental mean potential vorticity is then deduced from :

$$q_{exp} = \frac{\omega_{exp} + 1}{\eta_{exp} + 1} - 1.$$

Figure 4.5 shows that the geostrophic fit is in good agreement with the mean measured potential vorticity. Hence, according to these simultaneous measurements of the horizontal velocity and the interface deviation, the time-averaged unidirectional shear just behind the cylinder remains close to geostrophic balance. Besides, in the large-scale regime all dynamical fields ( $h, \omega, q$ ) for this mean shear flow present a significant asymmetry between cyclonic and anticyclonic vorticity regions.

## 4.2.5 Vortices

The size and the intensity of coherent vortices formed in standard Karman streets are controlled by the obstacle diameter and the flow velocity. In the large-scale regime one could ask how the deformation radius impacts on the vortices formed in the wake. We first studied the intensity, *i.e.* the vorticity, of these vortices. We plotted in Fig. 4.6 the vorticity difference between the first detached anticyclone and cyclone, averaged over a small area in the center of the vortex. When no coherent cyclone appeared, we considered the vorticity, although not coherent, in the cyclonic counterpart of the first coherent anticyclone. The relative interface deviation was used here to characterize the transition from small-scale to large-scale parameters. For a small interface deviation, the vortex intensity difference remained almost constant and close to zero. For an interface deviation larger than about 0.2, the vorticity intensity difference increased. However, vorticity difference is either positive or negative and the maximum vorticity difference in the detached vortices is three times less than in the shear layer. The dissipation tends to attenuate the intensity of the asymmetry in the vortices.

We then studied the impact of the deformation radius on the vortex size. We used the transverse velocity profile to estimate the size of the vortices. We then averaged the half distance between the minimum and maximum velocity for each structure. One could expect the size of the vortices to scale with the deformation radius  $R_d$  when it becomes smaller than  $R$ , the radius of the cylinder. While for small scale cylinders  $R \leq R_d$ , geopotential deviation should not affect the wake and the vortices will then scale only with  $R$ . Indeed, according to Fig. 4.7, we found that at small scales ( $R \leq R_d$ ), the radius of the vortices remained constant. Vortices scale with the size of the obstacle, as for the classical 2- $D$  case. For a deformation radius smaller than the size of the cylinder ( $R \geq R_d$ ), nearly all vortical radii become smaller than the obstacle, but remain larger than the deformation radius. When the wake enters in the large-scale regime, the vortex size is reduced but does not exactly scale with  $R_d$ .

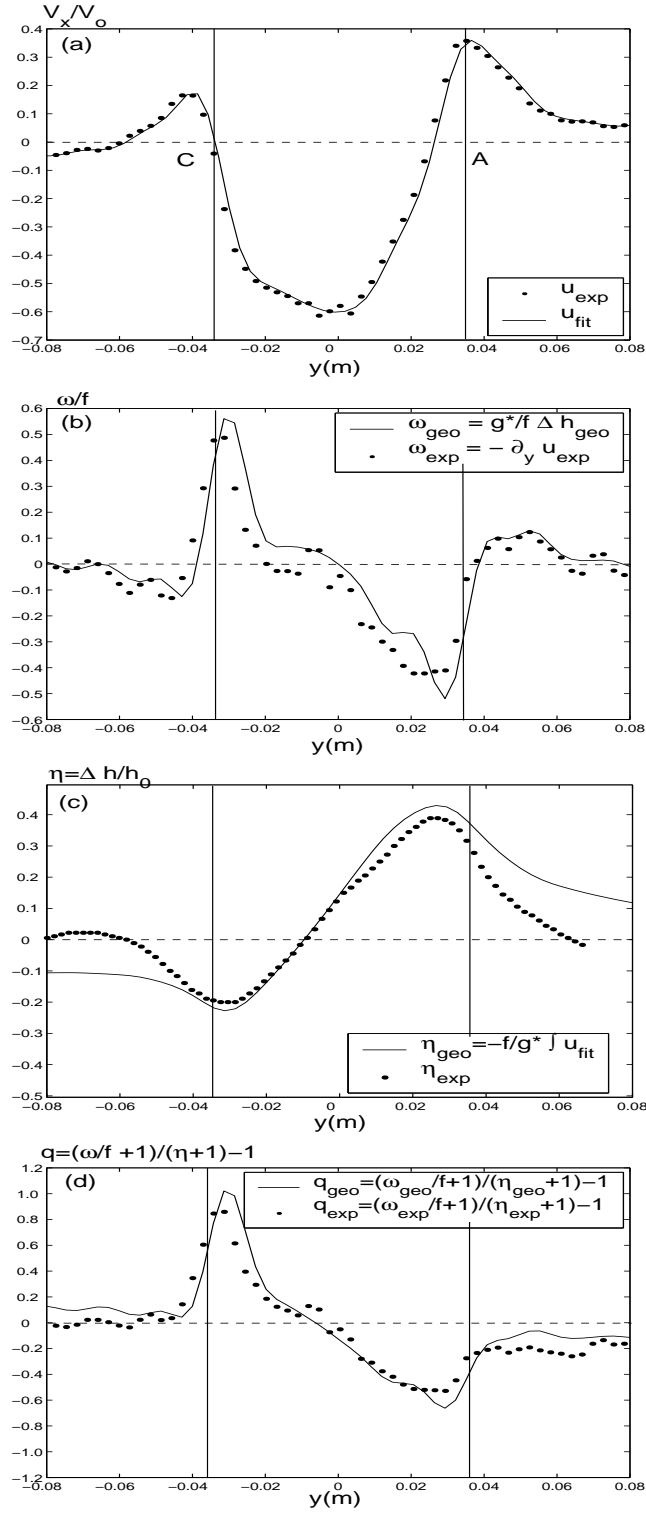


FIG. 4.5 – (a) Measured (dots) and fitted (solid line) profiles of velocity; (b) profiles of vorticity derived from experimental (dots) and fitted (solid line) velocity profile; (c) measured (dots) relative interface deviation and in geostrophic balance with the fitted velocity profile (solid line); (d) potential vorticity profiles calculated from experimental profiles of vorticity and interface deviation (dots) and profiles of vorticity and interface deviation in geostrophic balance (solid line) for expt. $n^o$  20.



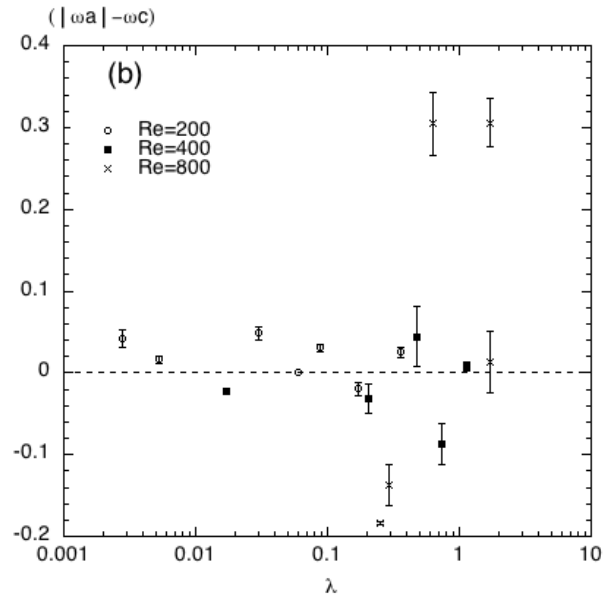


FIG. 4.6 – Difference of vorticity between the first detached anticyclone and the first detached cyclone, averaged over a small area around the center of vortices, as a function of the relative interface deviation.

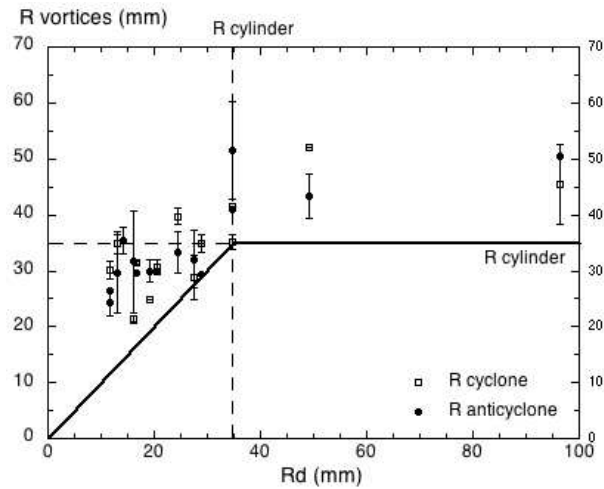


FIG. 4.7 – Radius of anticyclones (●) and cyclones (□) in the vortex street as a function of the deformation radius. The dashed lines indicate the radius of the cylinder  $R$ . The solid line shows the separation between radii larger or smaller than the deformation radius.

$Fr$	$\lambda$	$T_w$ (s)	$V_0/c$	$A/h_0$	$\lambda_w$ (cm)	$R_d$ (cm)
0.41	0.90	2.16	1.00	0.24	2.25	1.60
0.44	1.06	2.16	1.02	0.40	2.36	1.43
0.58	1.71	3.84	0.90	0.40	3.00	1.17

TAB. 4.1 – Characteristics of the waves observed behind the cylinder for expt. $n^{\circ}19$ ,  $n^{\circ}20$  and  $n^{\circ}23$ . The parameter  $\lambda$  is the interface deviation,  $Fr$  the Froude number and  $R_d$  the deformation radius;  $\lambda_w$ , the wavelength;  $T_w$ , the wave period;  $V_0$ , the obstacle velocity;  $c$ , the wave velocity;  $A$ , the wave amplitude; and  $h_0$ , the layer depth.

#### 4.2.6 Wave activity

The rotating two-layer system may support both internal gravity waves and inertial waves. Hence, in our experiments for a sub-critical regime the rigid obstacle could be strongly coupled to non-hydrostatic wave components. In the non-rotating case, the generation of internal waves in the lee of an obstacle is maximum when the Froude number is close to but smaller than unity. In the rotating case the situation could be more complex.

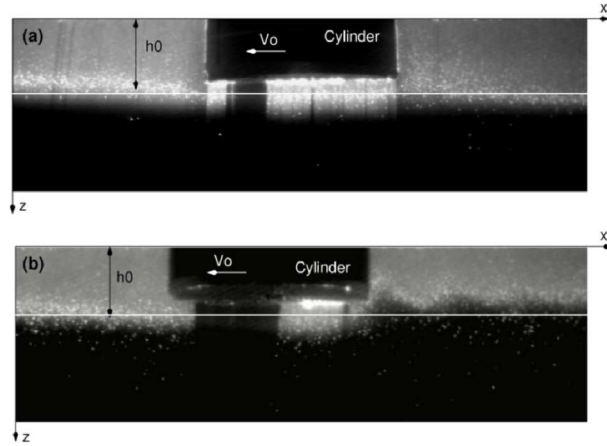


FIG. 4.8 – Side view of the upper layer, in light grey on the images. The slice is oriented streamwise in the anticyclonic part of the wake for expt. $n^{\circ}9$ , corresponding to a quasi-geostrophic regime (a) and in the cyclonic part of the wake for expt. $n^{\circ}23$ , corresponding to a frontal geostrophic regime (b).

We detected significant wave motion only in the large-scale regime when the Froude number increases up to 0.58. Showing a side view of the upper layer (Fig. 4.8) we observe that the interface remained flat in the quasi-geostrophic regime ( $R = R_d$ ) while small-wavelength disturbances appeared in the large-scale regime ( $R = 5R_d$ ). We do not observe any parametrically sudden apparition of the waves, but their amplitude increases with the Froude number and were difficult to detect for small Froude. Those waves correspond to non-hydrostatic motion which strong vertical velocities just behind the cylinder, when the fluid flows under it. Their wavelengths  $\lambda_w$  is of the same order than the layer thickness  $h_0$  (Tab. 4.1). Therefore, the shallow-water approximation is no more consistent in that part of the flow. Further down in the wake, the waves are rapidly smoothed and vortices are formed. The waves were attached to the moving obstacle and they could reach a strong amplitude up to 40% of the upper-layer thickness. However, this wave activity

remained confined just behind the cylinder and we could hardly detect more than three or four oscillations in this region. We plotted in Fig. 4.9, the vorticity and the divergence profile along the streamwise direction behind the cylinder, for  $Bu = 0.11$ ,  $Ro = 0.19$  and  $Re = 798$ . These profiles were spatially averaged along the spanwise direction in the cyclonic vorticity region. The wave motion was confirmed by the observation of a significant divergence field which tend to be in phase quadrature with the vorticity field. The characteristics of these waves are given in Tab. 4.1 for three cases. According to our measurements the wave period (observed in the frame of the rotating tank) was close to the inertial period,  $T_f = 2\pi/f = 3.75$  s. Hence, in the large-scale regime the rigid obstacle tended to generate inertial waves. This wave field also presented a cyclone-anticyclone asymmetry. Indeed, the layer thickness was smaller in the cyclonic part of the wake compared to its anticyclonic part. For a large-scale regime, this difference became significant. Therefore, the local Froude number was higher in the cyclonic shear layer. This could explain the stronger wave activity, observed in this region.

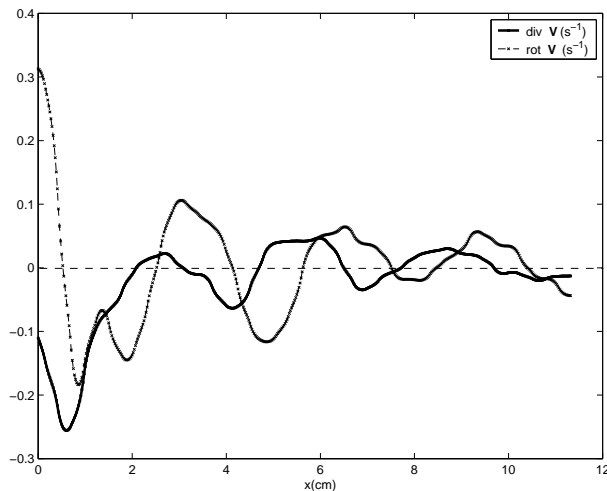


FIG. 4.9 – Spanwise averaged slice of divergence (solid line) and vorticity (dashed line) fields of expt. $n^{\circ}23$ .

### 4.2.7 Strouhal number

We used the overhead view and PIV measurements to estimate the influence of the cyclone-anticyclone asymmetry on the Strouhal number. The Strouhal number is usually defined as the dimensionless shedding frequency :  $St = FD/V_0$  where  $F$  is the shedding frequency of one sign vortices,  $D$  is the size of the obstacle and  $V_0$  its velocity. We used a geometrical method considering a small number of vortices to estimate  $St = (1 - V_d/V_0)D/L$  where  $V_d$  is the drift velocity of the Karman street and  $L$  the average distance between successive vortices of the same sign.

For the cases where no cyclones appear, the Strouhal number was calculated considering only the shedding frequency of anticyclones. Figure 4.10 shows the dimensionless shedding frequency for different Reynolds numbers, as function of Burger number, Froude number and interface deviation. The most striking result is that the Strouhal number reaches very large values compared to common values found in the literature for non rotating as well as rotating flows [77, 21]. In non rotating dynamics, the Strouhal number is

function of Reynolds number only and never exceeds 0.24 [77, 74]. The range of Strouhal numbers for Reynolds between 200 and 1000 is indicated by the dashed zone on Fig. 4.10, it varies between 0.2 and 0.24 [74]. In rotating flow, the shedding frequency increases weakly for strong rotation, *i.e.* for small Rossby number. This trend was observed by Boyer *et al.* [11, 12] for large Reynolds numbers and by Stegner *et al.* [67] for moderate Reynolds numbers, but nevertheless in both studies the measured values remain very close to the two dimensional non-rotating case.

Hence, the strong increase in the Strouhal number is mainly due to the large-scale configuration. According to Fig. 4.2 when the size of the obstacle becomes larger than the deformation radius, the distance between anticyclones is reduced due to the disappearance of coherent cyclones. This simple fact explains the strong increase in the shedding frequency. Thus, the Strouhal number appears to be an efficient parameter to quantify the cyclone-anticyclone asymmetry of the wake. On one hand, we plotted the Strouhal number as function of Burger number (Fig. 4.10(a)). The values are very scattered and no clear trend emerged in the large-scale region  $Bu \leq 1$ . Hence, the ratio between the deformation radius and the size of the obstacle is not the accurate parameter to quantify the cyclone-anticyclone asymmetry. On the other hand, we plotted the Strouhal number as function of Froude or interface deviation parameter (Figs. 4.10(b),4.10(c)), all points seem to collapse on the same curve, for various values of the Reynolds or the Rossby number. Figure 4.11 shows the Strouhal number as a function of Reynolds number for different values of the surface deviation  $\lambda$ . In that range of Reynolds number, for a fixed value of  $\lambda$  the Strouhal number remains almost constant while Reynolds number varies from 200 to 1000. For  $\lambda \approx 0.2 - 0.3$ ,  $St$  is about 0.3, whereas for  $\lambda \approx 0.6 - 0.7$ ,  $St$  is about 0.4. Hence, the Reynolds number seems to have a very weak influence on the shedding frequency and the vortex asymmetry. Indeed, for a given Reynolds number, the vortex street may be symmetric (for  $\lambda = 0.1$ ) as well as asymmetric (for  $\lambda = 1.0$ ). However, for much smaller Reynolds number, one could dissipative effects to have an influence on the Strouhal number. Hence, in that range of Reynolds and Rossby number, either the Froude or the interface deviation appears to be the accurate controlling parameter of the shedding frequency. To make a clear distinction between these two parameters data are needed for a wider range of parameter. This would imply variations in the Burger number between 0.01 up to 1.

## 4.2.8 Discussion

We have determined that a single parameter controls the cyclone-anticyclone asymmetry of the wake. This asymmetry occurs when the relative interface deviation, parameter  $\lambda$ , exceeds 0.2 – 0.3. According to Fig. 4.12, showing the relation between the effective surface deviation  $\eta = \Delta h/h_0$  and the parameter  $\lambda = Ro/Bu$ , this threshold corresponds to relative geopotential deviations of 30%.

Considering a rotating shallow-water model, we could understand the influence of the finite geopotential deviation. According to the geostrophic balance, cyclones correspond to troughs in the fluid layer, whereas anticyclones correspond to crests. Therefore, when the size of the vortices increases the geopotential deviation also increases. Hence, cyclones are limited by the mean geopotential height, whereas anticyclones are not. Large-scale cyclones corresponding to a negative geopotential height cannot exist in this model.

Nevertheless, the asymmetry occurs for intermediate values of  $\eta$  which remain below unity (Fig. 4.12). We should then understand how the stability of the flow may change

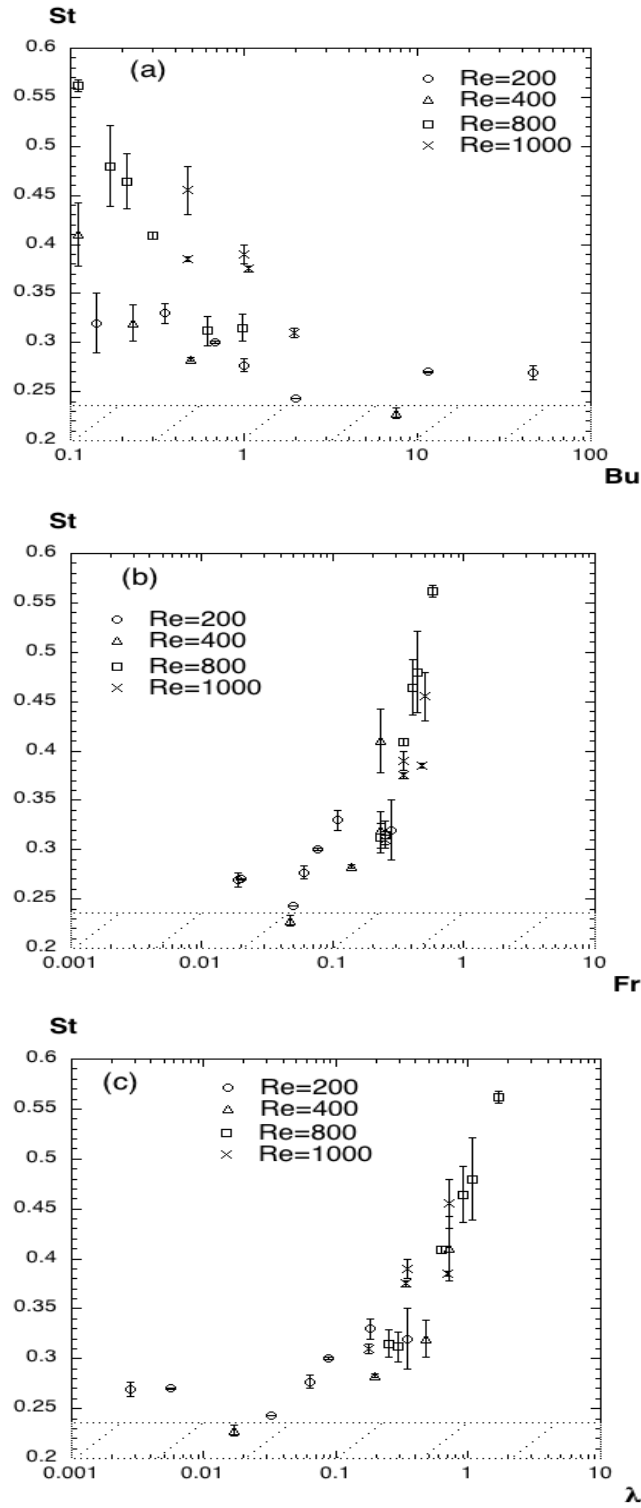


FIG. 4.10 – Strouhal number as a function of the Burger number (a), the Froude number (b) and the relative interface deviation (c), plot for different Reynolds numbers. The dashed zone indicates the range of the Strouhal number for a three-dimensional wake at these Reynolds numbers.

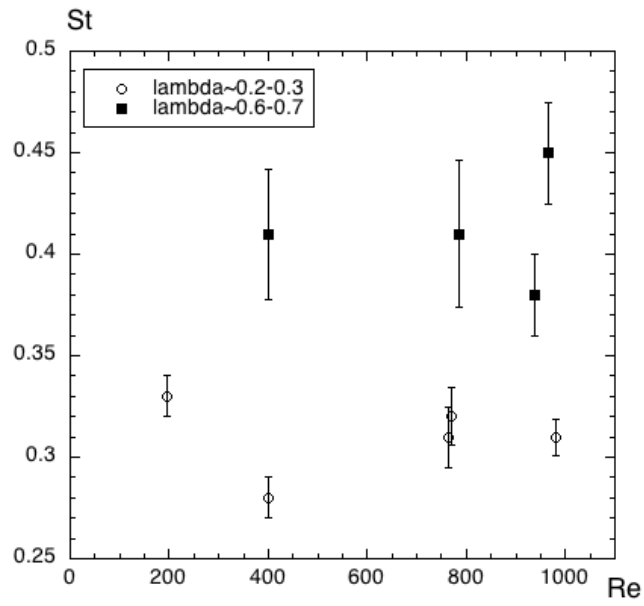


FIG. 4.11 – Strouhal number as a function of the Reynolds numbers for various relative surface deviation  $\lambda$ .

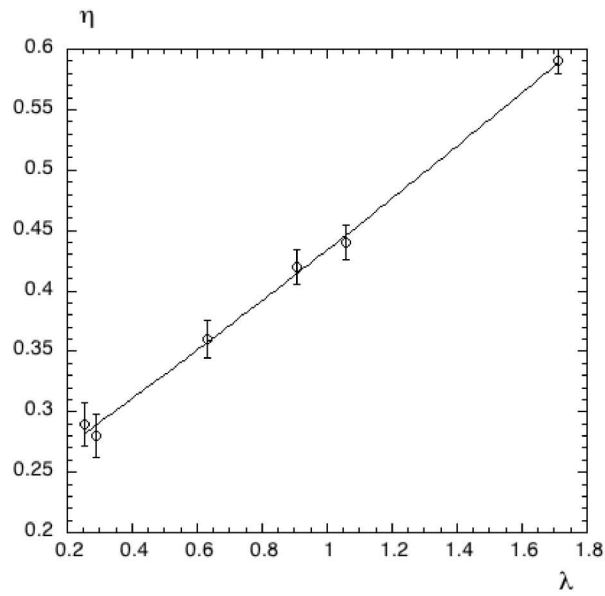


FIG. 4.12 – Maximum geopotential deviation  $\eta = \Delta h_0/h_0$ , measured from the side view, as a function of the interface deviation parameter  $\lambda = Ro/Bu$ .

when the geopotential deviation increases and if selective destabilization may occur. As explained in section 4.2.2.2, the reduced-gravity model describes the dynamics of the upper layer consistently. For the range of parameters we explored, *i.e.* small Rossby numbers, we filter out the fast wave motions assuming that they have a weak influence on the wake destabilization. In this case, we could use asymptotic intermediate models to study the wake stability. The first model correspond to the classical quasigeostrophic (QG) model [54] :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\eta - \eta) + J(\eta, \nabla^2\eta - \eta) = 0,$$

where  $J(a, b) = \partial_x a \partial_y b - \partial_y a \partial_x b$  is the Jacobian operator. The QG regime is valid for Burger numbers of order one, which means small surface deviations,  $\lambda = Ro/Bu \ll 1$  since  $Ro \ll 1$ . In this regime, due to the symmetry of the equations, no cyclone-anticyclone asymmetry occurs.

The second model correspond to the frontal geostrophic (FG) model established by Cushman-Roisin [16] :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - J(\eta, (1 + \lambda\eta)\nabla^2\eta + \frac{1}{2}(\nabla\eta)^2) = 0,$$

which holds for length scales much larger than the deformation radius, *i.e.*  $Bu \leq Ro$  and  $\lambda \approx \mathcal{O}(1)$ . The cubic terms  $J(\eta, (1 + \lambda\eta)\nabla^2\eta + 1/2(\nabla\eta)^2)$  induce necessarily an asymmetric wake.

Therefore, the shear layer may be destabilized differently in its cyclonic and anticyclonic parts. According to the Rayleigh criterion extended to a FG regime, the flow is linearly stable for a monotonic geopotential profile. Nonlinear stability has also been studied with a Hamiltonian formulation by Holm *et al.* [33] and Ben Jelloul and Zeitlin [37] for localized vortices. Nevertheless, according to this criterion the shear layers of both signs could be unstable (Figs. 4.5(c),4.5(d)). To detect an asymmetric destabilization between the cyclonic and anticyclonic parts of the wake, a complete linear stability analysis is then needed.

However, according to our experiments, the anticyclonic shear region leads to stronger vortices. Hence, the anticyclonic shear seems to be more unstable than the cyclonic one, for strong geopotential deviation. In such case, the wake instability would favour the formation of large-scale anticyclonic vortices. Once they are formed these anticyclones are expected to be more robust than their cyclonic counterparts. Indeed, for localized vortices, Arai and Yamagata [4] and Stegner and Dritschel [66] found that the unstable growth rate decreases when the vortex size becomes larger than the deformation radius. Besides, the anticyclones are favored in this restabilization process. For stable vortices having monotonic vorticity profiles, Graves, McWilliams and Montgomery [29] reveal a new mechanism for dominance of strong anticyclones. They have shown that cyclones, submitted to an external strain field, weaken strongly while anticyclones strengthen systematically when the deformation radius is comparable to the vortex radius. Hence, in a large-scale regime, the strong distortion of cyclones observed in our experiments, could be due to the strain induced by the anticyclones.

Therefore, several effects could induce a selection of anticyclonic structures in the vortex street : the asymmetric flow splitting around large-scale obstacles, a selective destabilization of parallel wake flows in the frontal regime and vortex-strain interaction. In order to quantify the relative influence of these mechanisms, numerical studies are under progress and will be presented in a forthcoming paper.

## 4.2.9 Conclusion

We investigated the dynamics of large-scale Karman streets in the wake of a cylinder towed in a rotating shallow-water layer. According to our measurements the wake downstream the obstacle satisfies first-order geostrophic balance with small Rossby numbers, while the relative interface deviation reaches values up to 60% of the layer thickness. Hence, we studied the vortex street formation over a large range of parameter values varying from quasi-geostrophic [54] to frontal geostrophic regimes [16]. When the relative geopotential deviation exceeds 30% a significant asymmetry occurs between cyclonic and anticyclonic vortices in the wake. Large-scale anticyclones remain coherent and circular, whereas cyclones tend to be more elongated and distorted. More surprisingly, for the extreme case of strong interface deviation, only an anticyclonic vortex street emerged in the lee of the obstacle. In this dynamical regime, the wake looks more like an unstable shear layer rather than a Karman street. Another characteristic of this large-scale regime is the formation of an extended double shear layer which remains stable for several diameters downstream the cylinder. The vortex street then develops away from the obstacle and the shedding occurs far downstream. We recover in this case some properties of the frontal geostrophic regime : the stabilization of the barotropic shear instability and the asymmetry between cyclones and anticyclones. The main consequence of the distortion or the disappearance of the cyclonic street is a strong increase in the Strouhal number. Indeed, the latter could be three times larger than the standard value reached for the same Reynolds number in a classical Karman street. We found that this variation of the Strouhal number and the cyclone-anticyclone asymmetry is governed by a single parameter : the relative interface deviation  $\lambda$ . For small values of  $\lambda$  the shedding frequency is identical to its classical value in two dimensional flows [74]. The increase in Strouhal starts when the relative surface deviation,  $\lambda$ , exceeds 0.1.

This paper may contribute to a better understanding of the formation of large-scale vortices in the ocean behind an island or off a cape. For instance, we could expect an efficient generation of anticyclonic vortices when an oceanic or coastal current encounters a large-scale island near the coast. Nevertheless, other phenomena should be taken into account for a more realistic modelisation of oceanic wakes. For instance, the velocity and the geopotential deviation of the upstream flow are generally non uniform along the spanwise direction. Moreover, the bottom slope topography cannot be neglected in coastal regions. Besides, the vertical stratification is often more complex than a simple two layers configuration. All these effects could influence the cyclone-anticyclone asymmetry of the vortex street.

### ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to acknowledge Claire Donnadieu and Alexandre Pereira for their valuable work.



## Appendix : list of experiments

expt.	$R_d(\text{cm})$	Bu	Ro	Re	Fr	$\lambda$	St
1	23.8	46.2	0.13	196	0.02	0.003	0.27
2	11.9	11.5	0.06	196	0.02	0.006	0.27
3	9.63	7.6	0.13	400	0.05	0.02	0.23
4	4.91	1.97	0.06	196	0.04	0.03	0.24
5	4.90	1.96	0.35	980	0.25	0.18	0.31
6	3.60	1.06	0.36	1015	0.35	0.34	0.37
7	3.50	1.00	0.35	1078	0.35	0.35	0.39
8	3.48	1.00	0.06	196	0.06	0.06	0.28
9	3.48	0.99	0.25	771	0.25	0.25	0.32
10	2.89	0.68	0.06	196	0.07	0.09	0.30
11	2.76	0.62	0.18	763	0.23	0.29	0.31
12	2.44	0.49	0.10	400	0.14	0.20	0.28
13	2.40	0.47	0.33	938	0.48	0.70	0.38
14	2.40	0.47	0.34	966	0.50	0.72	0.45
15	2.06	0.35	0.06	196	0.10	0.18	0.33
16	1.92	0.30	0.19	785	0.35	0.63	0.41
17	1.70	0.24	0.24	1000	0.49	1.00	
18	1.67	0.23	0.11	400	0.23	0.48	0.32
19	1.60	0.21	0.19	771	0.42	0.9	0.46
20	1.43	0.17	0.18	763	0.44	1.06	0.48
21	1.31	0.14	0.05	196	0.13	0.34	0.32
22	1.17	0.11	0.08	400	0.24	0.71	0.41
23	1.17	0.11	0.19	798	0.57	1.71	0.56

TAB. 4.2 – List of experiments.

## 4.3 Compléments

### 4.3.1 Emission d'un traceur passif

Quelques expériences ont été réalisées par Mathieu Beunier sur l'émission d'un traceur passif dans un sillage de grande échelle [10]. Le cylindre est entouré de scotch préalablement plongé dans la fluoresceine. Cette méthode permet de visualiser la répartition du colorant émis dans la couche limite du cylindre. Le dispositif expérimental est le même que celui présenté au chapitre 3. Les épaisseurs de la couche inférieure et supérieure sont respectivement :  $H = 19.5\text{ cm}$  et  $h_0 = 2.5\text{ cm}$ . Le cylindre est le même,  $D = 7\text{ cm}$  et la vitesse de rotation de la cuve  $\Omega = 0.628\text{ rad.s}^{-1}$ . La cuve est éclairée avec une lampe UV pour exciter la fluoresceine.

La Figure 4.13 montre une allée de tourbillons qui se forme derrière le cylindre pour  $Ro = 0.36$ ,  $\lambda = 1.17$ ,  $Bu = 0.31$  et  $Re = 1100$ . Cette structure de sillage est parti-

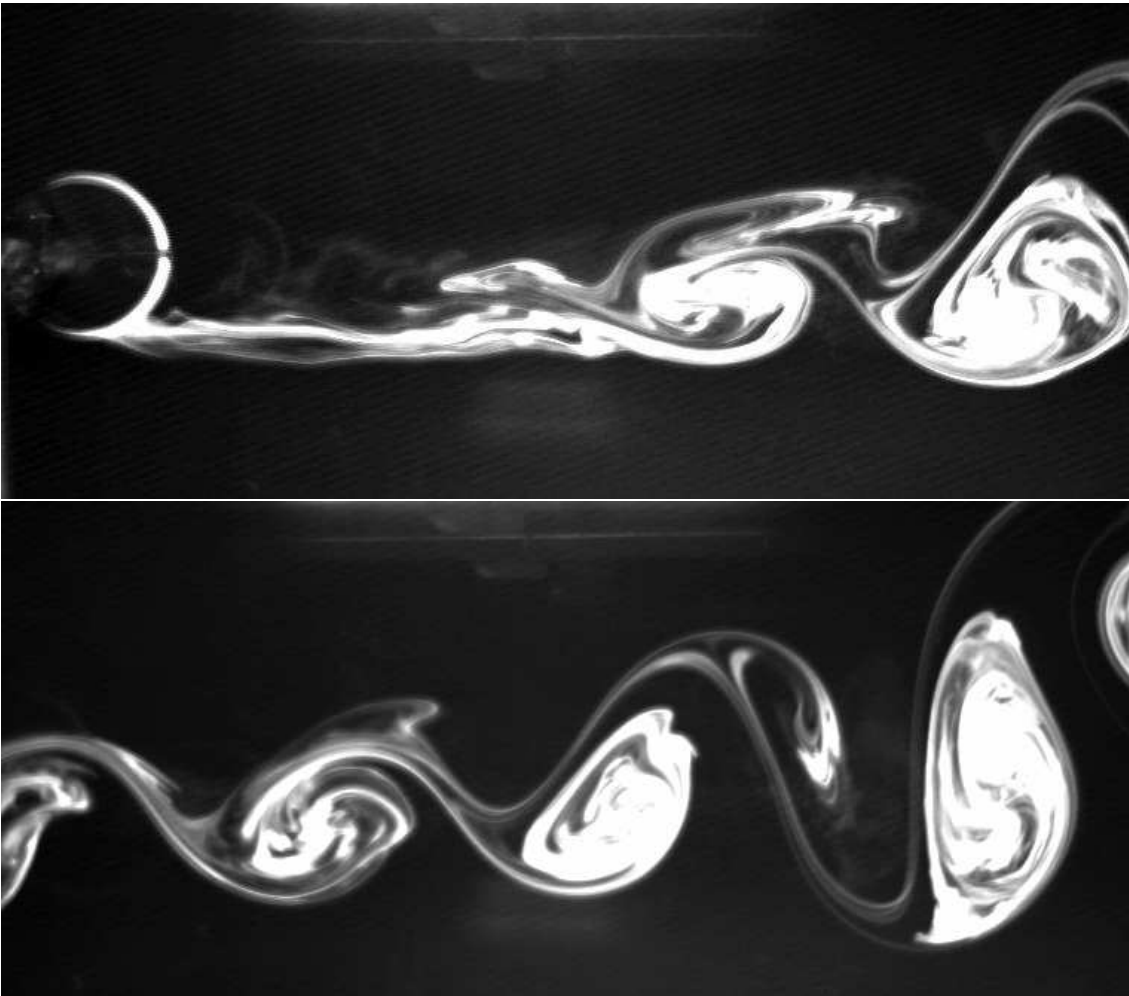


FIG. 4.13 – Evolution de l'allée d'anticyclones formée derrière un cylindre pour  $Ro = 0.36$ ,  $\lambda = 1.17$ ,  $Bu = 0.31$  et  $Re = 1100$ .

culièrement surprenante et peu commune si l'on pense aux allées de von Karman classique. Elle est cependant sans surprise dans un régime frontal comme c'est le cas ici. On retrouve en effet, la structure générale des sillages observée dans nos expériences pour

une large déviation de l'interface  $\lambda$  : une couche de cisaillement s'étire sur une distance d'environ deux fois le diamètre du cylindre puis une allée d'anticyclones seulement se forme. Il est cependant frappant de voir que la fluoresceine qui est présente tout autour du cylindre n'apparaît que du côté anticyclonique. Ceci s'explique par une circulation asymétrique de l'écoulement autour du cylindre. La Figure 4.14 montre les lignes de courant de l'écoulement autour du cylindre dans un régime quasi-géostrophique (QG) en (a) et un régime frontal en (b). Elle est obtenue en moyennant les images prises par la caméra du dessus sur un trentaine d'images, dans le référentiel du cylindre. Dans le

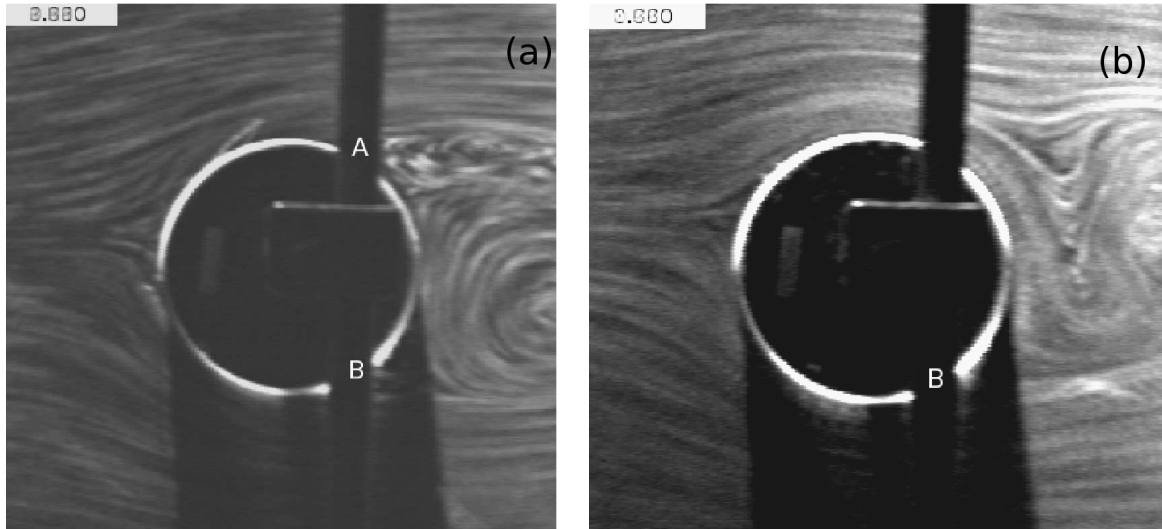


FIG. 4.14 – Lignes de courant de l'écoulement autour du cylindre dans un régime quasi-géostrophique (a) et frontal (b).

cas QG, les couches limites se formant sur l'obstacle se détachent aux points A pour la couche cyclonique et B pour la couche anticyclonique. Ces deux points sont symétriques par rapport à l'écoulement amont. Dans un régime frontal la couche limite cyclonique reste attachée au cylindre sur une grande partie de sa périphérie. Elle se sépare au même point de détachement que la couche limite anticyclonique, les points A et B sont confondus. Dans le cas des visualisations avec de la fluoresceine, celle-ci reste collée au cylindre dans la partie cyclonique de l'écoulement et ne se détache que du côté anticyclonique. C'est pourquoi l'asymétrie cyclone-anticyclone apparaît de manière aussi frappante. Pour voir la partie cyclonique de l'écoulement, la fluoresceine devrait être émise au delà de la couche limite cyclonique. Cette répartition très asymétrique d'un traceur passif comme la fluoresceine, dans un sillage de grande échelle, peut avoir une implication océanique importante. Si, par exemple, un polluant est largué à proximité des côtes d'une île, on peut imaginer qu'il restera bloqué plus longtemps le long du rivage s'il est largué du côté cyclonique qu'anticyclonique. Ce polluant, comme tout traceur passif, phytoplancton ou autre espèce de biologie marine, pourrait ensuite être advecté que d'un côté du sillage de l'île.

### 4.3.2 Grand nombre de Reynolds

Dans l'océan le nombre de Reynolds des écoulements considérés est bien plus grands que ceux que nous pouvons atteindre avec la cuve tournante de l'ENSTA. C'est pourquoi

nous avons réalisé une série d'expériences sur la plaque Coriolis, au LEGI à Grenoble. La plateforme de Coriolis est un dispositif unique en Europe par ses dimensions : une cuve circulaire de 13 mètres de diamètres est montée sur 23 galets dont 10 sont motorisés. La vitesse de rotation peut varier de  $\Omega = 0.06 - 3.33tr/min$ . Contrairement à la cuve de l'ENSTA, le sens de rotation est celui de l'hémisphère nord. De telles dimensions permettent d'atteindre des paramètres impossibles à atteindre autrement.

### Dispositif expérimental

Le fluide est stratifié à deux couches d'épaisseur  $H = 55\text{ cm}$  pour la couche inférieure et  $h_0 = 5\text{ cm}$  pour la couche supérieure. La deuxième couche est injectée à l'aide de flotteurs disposés tout autour de la cuve. Il faut environ 6 heures pour injecter la deuxième couche et encore 12 heures pour que les deux couches soient en rotation solide. Le cylindre est monté sur un chariot tracté le long d'un diamètre de la cuve. Deux cylindres de diamètre  $D = 50\text{ cm}$  et  $D = 1\text{ m}$  ont été utilisés. Le rayon de déformation barocline  $R_d^*$  varie entre  $16\text{ cm}$  et  $71\text{ cm}$ . Les paramètres adimensionnés sont résumés dans le tableau 4.3. Nous avons réalisé des expériences avec du colorant pour visualiser l'aspect général de

manip	$Ro = \frac{V_0}{D\Omega}$	$Bu = \left(\frac{2R_d^*}{D}\right)^2$	$\lambda = \frac{Ro}{Bu}$	$Re = \frac{V_0 D}{\nu}$
1	0.4	8	0.05	5 000
2	0.24	1	0.24	8 500
3	0.24	0.8	0.30	17 000
4	0.07	0.18	0.39	10 000
5	0.07	0.09	0.78	10 000
6	0.14	0.09	1.56	20 000
7	0.21	0.09	2.33	30 000
8	0.35	0.09	3.89	50 000

TAB. 4.3 – Paramètres des expériences réalisées sur la plateforme Coriolis.

l'écoulement. Deux injecteurs sont installés à  $30^\circ$  en amont du cylindre, le colorant injecté du côté cyclonique est rouge et celui du côté anticyclonique est bleu, on a ainsi le même code couleur que celui utilisé pour l'analyse PIV. Pour une même stratification et vitesse de rotation, plusieurs expériences ont été réalisées en variant la vitesse de translation du cylindre pour faire varier le nombre de Rossby. Entre chaque expérience, le colorant est dissous avec de l'eau de javel pour éviter de vidanger la cuve qui contient 260 tonnes d'eau (Fig. 4.15(b)).

### Observations

La Figure 4.16 montre l'écoulement juste derrière le cylindre et plus loin dans le sillage pour l'expérience  $n^{\circ}5$  dans un régime frontal. On retrouve l'aspect général des sillages en régime frontal : une couche de cisaillement assez longue derrière le cylindre et les tourbillons anticycloniques sont plus circulaires et plus gros que les tourbillons cycloniques. Cependant le nombre de Reynolds étant très grand, la couche limite est turbulente et la couche de cisaillement est affecté par une instabilité de type Kelvin-Helmoltz. La Figure 4.17 montre la couche limite cyclonique pour l'expérience  $n^{\circ}7$  et la couche de cisaillement derrière le cylindre. De plus, les cisaillements étant très forts, il est possible

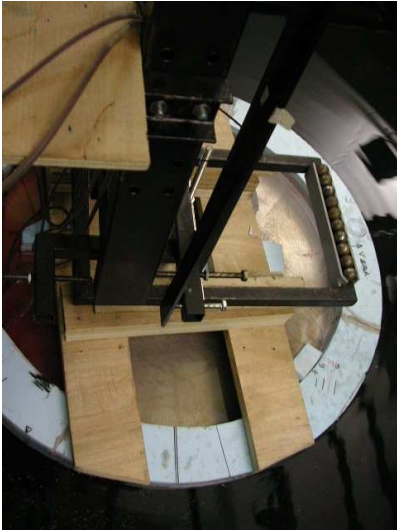


FIG. 4.15 – (a) Photo du cylindre. (b) Dissipation du colorant. A droite de l'image on peut observer le chariot qui permet de tirer le cylindre.



FIG. 4.16 – Couche de cisaillement (a) et allée tourbillonnaire (b) derrière le cylindre pour l'expérience n° 5,  $Bu = 0.09$  et  $Ro = 0.07$ .

que la partie anticyclonique soit affectée par des instabilités 3D de type inertielle qui déstabilise l'écoulement lorsque la vorticité absolue  $\omega + f$  devient négative. Le cisaillement de l'écoulement anticyclonique peut devenir plus faible et affecter la production d'anticyclones.



FIG. 4.17 – Couche limite cyclonique (a) et couche de cisaillement derrière le cylindre (b) pour l'expérience n°7,  $Bu = 0.09$  et  $Ro = 0.21$ .



# Chapitre 5

## Stabilité de sillages parallèles

### 5.1 Résumé

Les expériences de laboratoire présentées au chapitre précédent ont permis de mettre en évidence une structure peu commune de sillages, en régime frontal, *i. e.* petit nombre de Rossby et large déviation de la surface de la couche fluide. En aval du cylindre, deux couches de cisaillement parallèles s'étendent sur une distance de deux à trois fois le diamètre. Au delà, apparaît une allée de tourbillons composée uniquement d'anticyclones. Cette structure de sillage ressemble davantage à une instabilité de type couche de mélange qu'à une instabilité de type von Karman. Cette observation a motivé l'étude de stabilité présentée ici et qui fait l'objet d'un papier en préparation pour *Physics of Fluids*. De plus nous avons observé que le profil de vitesse dans les couches de cisaillement est asymétrique. Comme nous savons également que les cyclones et les anticyclones ne suivent pas la même dynamique en régime frontal, aussi bien l'asymétrie du sillage parallèle en amont que le régime dynamique pourrait être responsable, *a priori*, de la prédominance des anticyclones.

Pour déterminer quels sont les mécanismes responsables de l'asymétrie cyclone anticyclone dans l'allée de tourbillons, nous étudions la stabilité linéaire et la dynamique non linéaire d'écoulements parallèles correspondant à deux profils de sillages mesurés en laboratoire juste en aval de l'obstacle. On effectue ainsi une analyse de stabilité locale de l'écoulement de sillage à une distance fixe du cylindre. Cette approche est pertinente lorsque le sillage derrière l'obstacle varie lentement dans la direction longitudinale (approximation WKB). Le premier profil est symétrique et mesuré juste derrière le cylindre, pour une expérience réalisée en régime quasi-géostrophique. Le sillage dans ce régime est une allée de tourbillons de type von Karman. Le deuxième profil est asymétrique et mesuré dans la zone de cisaillement parallèle, en régime frontal. Pour chacun de ces profils, la stabilité des écoulements parallèles correspondant est étudiée en régime quasi-géostrophique et frontal.

Un deuxième objectif est de déterminer la nature de l'instabilité du sillage en régime frontal. La perturbation ajoutée à l'écoulement étant une perturbation très localisée, une analyse spatio-temporelle nous permet de décrire son évolution et de déterminer le caractère absolu ou convectif de l'instabilité. Cette analyse spatio-temporelle est réalisée sur les cas correspondant à des expériences de laboratoire, à savoir l'écoulement symétrique dans un régime quasi-géostrophique et l'écoulement asymétrique dans un régime frontal.

L'analyse de stabilité temporelle linéaire, fait apparaître deux principaux modes instables. Le mode le plus instable se développe principalement dans la partie anticyclonique



de l'écoulement et le second dans la partie cyclonique. Pour le profil de sillage symétrique, on montre qu'en régime quasi-géostrophique les deux modes ont des taux de croissance très proches. Par contre, le taux de croissance du mode cyclonique est très fortement diminué en régime frontal. De plus, dans ce régime, les deux modes sont localisés uniquement dans la partie anticyclonique pour l'un et cyclonique pour l'autre. Donc le régime frontal tend à sélectionner le mode anticyclonique. Pour le profil de sillage asymétrique, les taux de croissances des deux modes sont déjà très différents en régime quasi-géostrophique. Cependant, cette différence est accrue en régime frontal. L'évolution non linéaire du sillage asymétrique montre une asymétrie cyclone-anticyclone en régime QG et FG. Cependant, les cyclones sont très elliptiques et étirés en régime frontal uniquement. De plus, on retrouve dans ce régime la même structure d'allée tourbillonnaire que celle observée dans l'expérience de laboratoire, et un nombre de Strouhal très proche.

L'analyse spatio-temporelle du développement linéaire d'un paquet d'onde localisé montre que les profils sont instables convectifs, c'est-à-dire que les perturbations ne remontent pas l'écoulement mais se propagent en aval du cylindre. Cette analyse est cohérente avec l'observation des sillages en régime frontal dans les expériences de laboratoire. En effet, derrière le cylindre, l'écoulement de sillage parallèle reste stable sur une zone relativement grande. Les tourbillons se forment à une distance de plusieurs diamètres en aval du cylindre, ce qui indique que les perturbations ne remontent pas vers celui-ci. Par conséquent, ce résultat met en évidence une transition dans la nature de l'instabilité des sillages. Dans le cas bi-dimensionnel classique, une allée de von Karman est la manifestation d'un mode global d'instabilité provoqué par la présence d'une zone d'instabilité absolue dans l'écoulement moyen derrière l'obstacle. En régime frontal, l'écoulement de sillage en aval du cylindre est instable convectif. Ainsi une perturbation formée au voisinage de l'obstacle va croître exponentiellement tout en étant advectée par l'écoulement. Lorsque son amplitude sera suffisamment grande, des méandres ou tourbillons vont se former. L'instabilité de mode global a disparu et une analyse de stabilité locale donne une prédiction correcte du nombre de Strouhal observé.

## 5.2 Article : Stability of parallel wake flows in quasi-geostrophic and frontal regime

**G. Perret, A. Stegner, T. Dubos, J. M. Chomaz and M. Farge**

*Laboratoire de Météorologie Dynamique, CNRS, ENS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France.*

### Abstract

Laboratory experiments of cylinder wake in a frontal regime show a strong cyclone-anticyclone asymmetry in the vortex street. To complement the experimental observations, we study the local linear and non-linear stability of wake flows in rotating shallow-water model in the limit of a quasi-geostrophic and a frontal regime. We choose two parallel basic states measured just behind the cylinder in laboratory experiments. One basic state is obtained in a QG regime and is symmetrical, the second one is measured in a long parallel double shear zone developing behind the cylinder in a frontal regime, and is asymmetrical. The linear stability analysis shows that the instability develops mainly in the anticyclonic part of the flow in a frontal regime. In non-linear evolution of perturbed basic state this leads to a vortex street with strong coherent anticyclonic vortices whereas cyclones are totally deformed. We recover with local stability analysis of the asymmetrical wake flow in a frontal regime, the pattern of the cylinder wake observed in the experiment and the shedding frequency of vortices. Moreover, it is shown that the asymmetrical double shear layer in a frontal regime is convectively unstable. Therefore, the instability of a wake in a frontal regime is similar to a shear instability and the vortex street formed in the wake is a local mode of instability. Whereas, a classical von Karman street is a global mode of instability with an intrinsic frequency. Hence, we show the evidence of a transition in the nature of wake instability from 2D dynamics to frontal regime.

### 5.2.1 Introduction

In contrast to the classical two-dimensional von Karman streets, wakes encountered in geophysical flows are affected by the Earth's rotation and the vertical stratification. In such case, different types of cyclone-anticyclone asymmetry may occur in the vortex street. On the one hand, for small-scale wakes, when the size of the obstacle is much smaller than the local deformation radius, a non-hydrostatic and three-dimensional inertial-elliptical instability can induce a transient destabilisation of anticyclonic structures in the wake [67]. On the other hand, for large-scale wake, when the characteristic length scale of the flow is larger than the local deformation radius, anticyclones tend to be more robust than their cyclonic counterparts. Even more surprising, for a specific range of parameters, the wake can be constituted only by an anticyclonic vortex street [55]. Other studies have already shown that the dynamics of cyclonic and anticyclonic vorticity regions differ when the geopotential fluctuation becomes significant. The general tendency for large-scale flows is that anticyclonic structures tend to be more robust [44, 57] or stable [7, 66, 4] than cyclonic ones.

A principal motivation behind the present study is to identify some dynamical mechanisms responsible for the cyclone-anticyclone asymmetry recently observed for large-scale vortex street experiments [55]. According to these latter, cyclones are shown to become

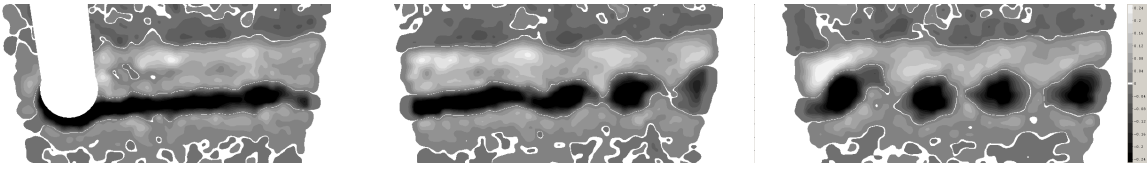


FIG. 5.1 – Vorticity field of a large-scale cylinder wake observed in laboratory experiments at  $T = 1.3T_f$  (a),  $T = 5T_f$  (b) and  $T = 10T_f$  (c).

stretched and deformed when the relative geopotential deviation increases. In the same time, the distance between equal sign vortices is reduced and the Strouhal number strongly increases. Moreover, a uniform parallel flow extends behind the obstacle over a distance of several diameters and vortices are formed far downstream in the wake. Then, the pattern of large-scale wakes looks more like an unstable shear layer than a classical von Karman street (Fig.??exp). These quantitative observations suggest a change in the nature of the wake instability when the flow enters in a large-scale regime. The stability analysis of various parallel wake flows which follow is a first attempt to understand this transition.

## 5.2.2 Problem formulation

We use the rotating shallow-water (RSW) model on the  $f$ -plane, described in dimensionless form by the following system :

$$Ro \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) + \vec{n} \times \vec{V} = -\frac{\lambda Bu}{Ro} \nabla \eta + \frac{Ro}{Re} \nabla^2 \vec{V} \quad (5.1)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \eta \right) + (1 + \lambda \eta) \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (5.2)$$

where  $\vec{V} = (u, v)$  is the horizontal velocity,  $\eta$  the surface deviation,  $\vec{n}$  the vertical unit vector of the  $f$ -plane,  $f = 2\Omega$  the Coriolis parameter and  $g$  the gravity acceleration. We define the Rossby number  $Ro$ , the relative surface deviation  $\lambda$  and the Reynolds number  $Re$  as follows :

$$Ro = \frac{V_0}{fL}, \quad \lambda = \frac{Ro}{Bu}, \quad Re = \frac{V_0 L}{\nu}$$

where  $V_0$  and  $L$  are the characteristic scales of velocity and length,  $\nu$  the kinematic viscosity and  $Bu$  the Burger number

$$Bu = \left( \frac{R_d}{L} \right)^2 \quad \text{and} \quad R_d = \frac{\sqrt{gH_0}}{f}.$$

In this study we fixed the value of the Rossby number at  $Ro = 0.1$ . Therefore, the geostrophic balance is satisfied at the first order and we get  $\lambda \propto \Delta h/H_0$  with  $\Delta h$  the characteristic surface deviation and  $H_0$  the mean layer depth. According to the value of the Burger number, one distinguishes various dynamical regimes. The classical quasi-geostrophic regime is defined when  $Bu = \mathcal{O}(1)$  and  $\lambda = \mathcal{O}(Ro) \ll 1$ . Even if the Rossby number is not asymptotically small ( $Ro = 0.1$ ) cyclones and anticyclones are expected to follow roughly the same dynamical evolution. On the other hand, large-scale flows dynamics,  $Bu = \mathcal{O}(Ro) \ll 1$  and  $\lambda = \mathcal{O}(1)$ , correspond to the frontal regime. In this regime, the evolution of cyclonic and anticyclonic structures will differ strongly and their

dynamics are expected to follow at the first order the frontal geostrophic asymptotic model [16, 18]. According to laboratory experiments, a strong cyclone-anticyclone asymmetry in the vortex street occurs when the wake flow enters in a frontal regime (Fig. 5.1). However, in this regime the flow around the obstacle is already asymmetric and the streamwise velocity profile of the wake behind the cylinder exhibit a stronger anticyclonic shear. Therefore, the selection of anticyclonic structures in the vortex street can be due to the asymmetric flow splitting around a large-scale obstacle or by a selective destabilisation of the parallel wake flow in the frontal regime. To estimate the relative influence of these two effects on the vortex street, we study the stability of a symmetrical and asymmetrical parallel wake flow both in a frontal regime ( $\lambda = 1.0$ ) and quasi-geostrophic regime ( $\lambda = 0.1$ ). These two basic states correspond to a local velocity profile measured in the wake just behind the cylinder. We first perform a linear stability analysis of these parallel wake flows. This approach will be accurate when the real wake behind the cylinder remain parallel over a sufficiently long distance. Then we study the non-linear evolution of the wake instability using a pseudo-spectral code to solve the rotating shallow-water equations. To destabilize the basic state flows, we use a small amplitude perturbation localised in the streamwise direction instead of a white noise or harmonic perturbation. Thus, we are able to follow the growth and the advection speed of an initial localised wave-packet and to estimate the convective or absolute nature of the instability.

### 5.2.3 Linear stability analysis

To compute the linear stability problem, we consider the non viscous rotating shallow-water system as the instability mechanism is supposed to be inviscid. The governing equations are linearized around a parallel basic state  $(\bar{U}(y), \bar{\eta}(y))$  and a perturbation field  $(\tilde{u}(x, y, t), \tilde{v}(x, y, t), \tilde{\eta}(x, y, t))$ . The basic state surface deviation  $\bar{\eta}$  is calculated from geostrophic balance relation :  $\bar{U} = -d\bar{\eta}/dy$ . The perturbation field  $\tilde{x}$  is decomposed as follows :  $\tilde{x} = \hat{x}(y)e^{i(kx-\omega t)}$ , with  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  the complex eigenvalue and  $k$  the wavenumber. We then obtain the following matrix system :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Ro(\omega + k\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}) & -i(Ro\frac{\partial^2\bar{\eta}}{\partial y^2} + 1) & -k \\ i & Ro(\omega + k\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}) & i\frac{\partial}{\partial y} \\ -(1 + \lambda\bar{\eta})k & i\left(\lambda\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y} + (1 + \lambda\bar{\eta})\frac{\partial}{\partial y}\right) & \lambda(\omega + k\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y}) \end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

The linear operator  $L$  is computed in a spectral basis with periodic boundary conditions and inverted by a direct method. The norm  $L^2$  of the error on the growthrate for a resolution of 512 and 256 is  $err = \sum(\sigma_{512} - \sigma_{256})^2 / \sum(\sigma_{512}^2) = 9.2 \cdot 10^{-5}$ . Therefore, the simulations are performed with a resolution of 256 collocation points in the transverse direction.

The symmetrical wake profile is measured for laboratory experiments performed in a quasi-geostrophic regime, at  $\lambda = 0.09$  and  $Ro = 0.06$  (circles on Fig. 5.2). The experimental profile is filtered with a lowpass Fourier filter and interpolated on  $Ny = 256$  points to get the basic state velocity  $\bar{U}(y)$  (continuous line on Fig. 5.2). The basic state surface deviation, vorticity and potential vorticity are calculated from geostrophic balance with basic state velocity. The two most unstable branches of the perturbed basic state are computed. The most unstable eigenmode, called mode A, mainly develops in the anticyclonic part of the flow whereas the second one, called mode C, develops essentially in the

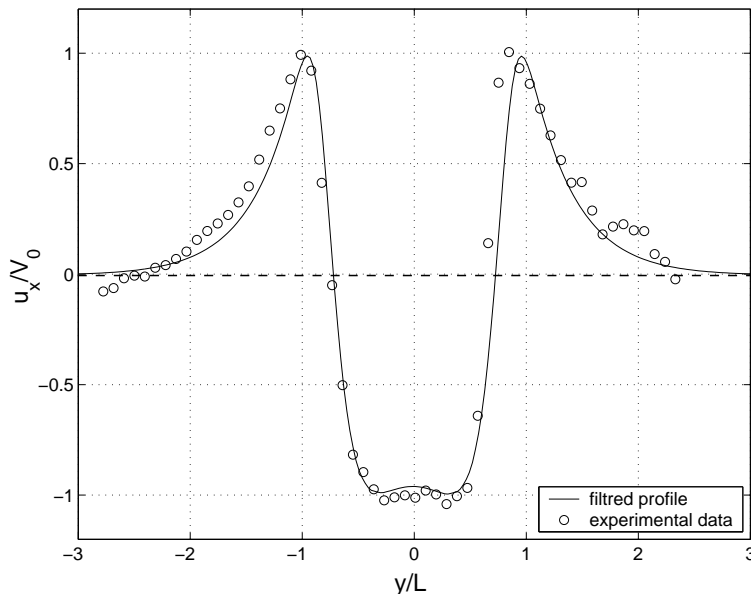


FIG. 5.2 – Symmetrical velocity profile (solid line) filtered and interpolated from experimental profile (dots).

cyclonic part ( Figure 5.3(e),(f)). In a quasi-geostrophic regime, at  $\lambda = 0.1$ , cyclonic and anticyclonic modes growthrates are very close (Fig.5.3(a)). The slight difference is due to small ageostrophic effects since the Rossby number in our simulations, is not so small,  $Ro = 0.1$ . Simulations performed in quasi-geostrophic asymptotic model showed that both growthrates mixed together. In a frontal regime, at  $\lambda = 1.0$ , the two most unstable modes growthrates greatly differ. Whereas anticyclonic growthrate remains close to its value in QG, growthrate of cyclonic mode drops. Moreover, anticyclonic and cyclonic mode are decorrelated and localised only in the anticyclonic and cyclonic shear (Fig. 5.3(f)).

However, asymmetrical vortex streets in laboratory experiments were observed for velocity profiles behind the cylinder already asymmetrical. Therefore, we study the linear stability of an asymmetrical wake profile measured in a frontal geostrophic regime, at  $\lambda = 1.7$  and  $Ro = 0.19$  (Fig. 5.4). Figure 5.5(a),(b) shows the growthrates of two most unstable modes for  $\lambda = 0.1$  and  $\lambda = 1.0$ . In a quasi-geostrophic regime, the growthrate of anticyclonic branch is already much larger than cyclonic one. Indeed, the shear  $\Delta U/L$  is three times more important in the anticyclonic part of the flow  $\Delta U/L_{shear} = 2.22$  than in the cyclonic part  $\Delta U/L_{shear} = 0.77$ , where  $L_{shear}$  is the distance between maximum and minimum velocity. Each mode develops only in one part of the flow, so that the instability mainly develops in the anticyclonic shear, even in a quasi-geostrophic model (Fig. 5.5(e)). However, the growthrate difference increases in frontal regime, growthrate maximum decreased of 20% for anticyclonic mode and 80% for cyclonic mode. Then, the frontal regime tends to favour the development of instability in the anticyclonic shear. Maximum growthrates and corresponding wavenumbers for the four cases of study are summarized in Tab.5.1.

## 5.2.4 Non-linear evolution

In order to study the formation of vortices and the nature of instability, we compute the non-linear evolution of instability for the symmetrical and asymmetrical wake in a

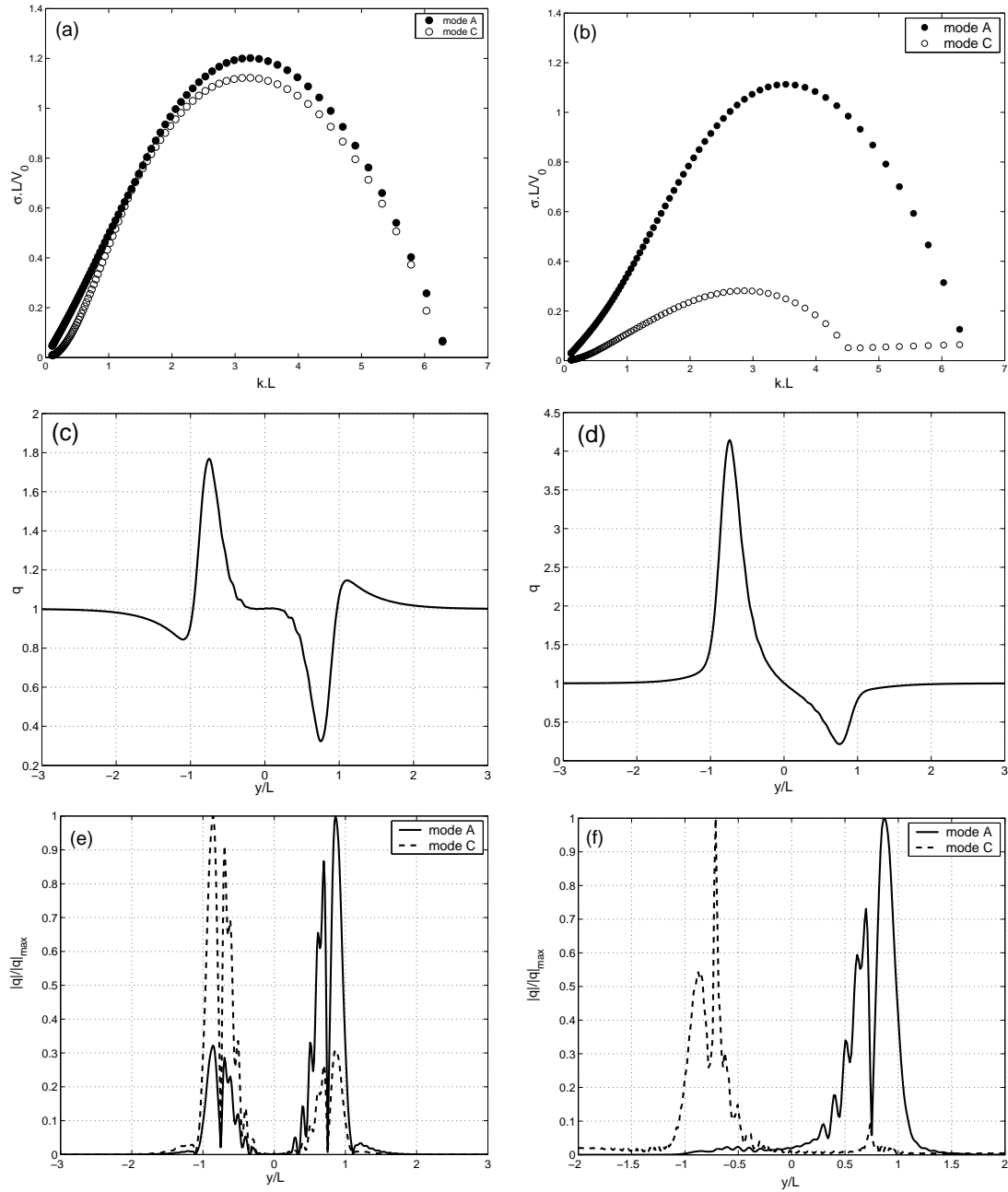


FIG. 5.3 – Growthrate of the two most unstable branches for the symmetrical wake profile in a quasi-geostrophic regime (a) and frontal regime (b). Potential vorticity of the unperturbed wake flow in a quasi-geostrophic regime (c) and frontal regime (d). Spatial localisation of the most unstable anticyclonic mode (solid line) and cyclonic mode (dashed line) in a QG regime (e) and FG regime (f).

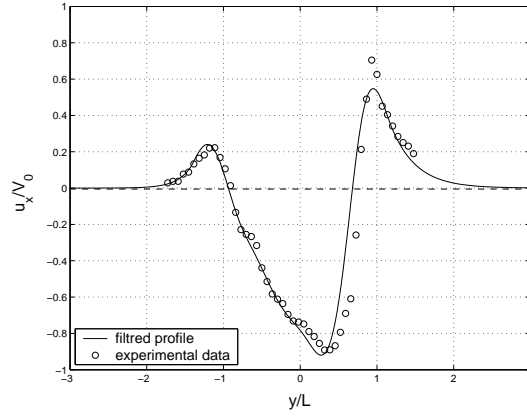


FIG. 5.4 – Asymmetrical velocity profile (solid line) interpolated from laboratory experiments (dots).

		symmetrical wake		asymmetrical wake	
		$\lambda = 0.1$	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 1.0$
$\sigma_{max}$	mode A	1.20	1.11	0.69	0.57
	mode C	1.12	0.28	0.19	0.08
$k_{max}$	mode A	3.24	3.52	2.48	2.82
	mode C	3.24	2.86	2.18	2.40

TAB. 5.1 – Summary of the maximum growthrate and the corresponding wavenumber for the different cases.

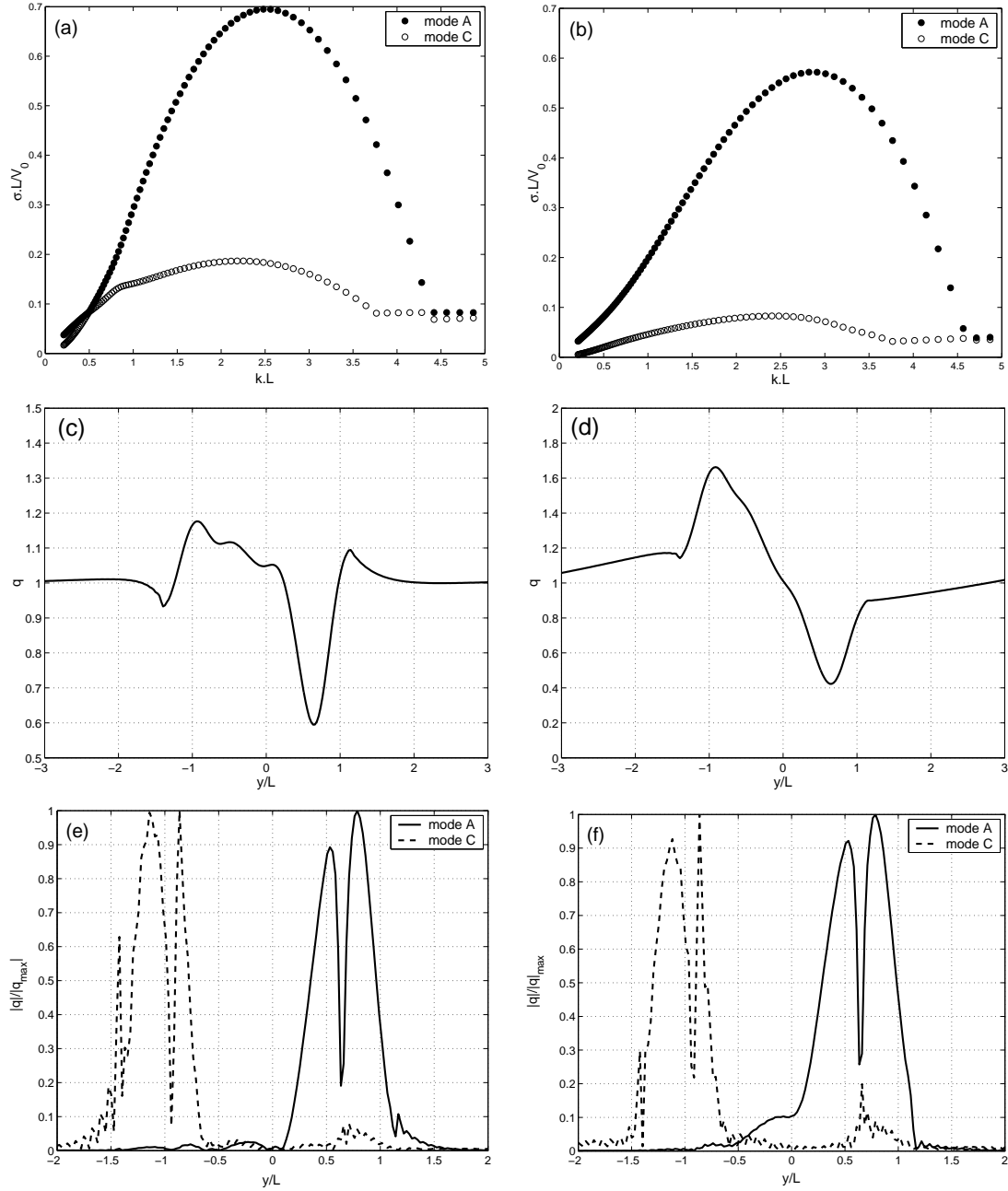


FIG. 5.5 – Growthrate of the two most unstable branches for the asymmetrical wake profile in a quasi-geostrophic regime (a) and frontal regime (b). Potential vorticity of the unperturbed wake flow in a quasi-geostrophic regime (c) and frontal regime (d). Spatial localisation of the most unstable anticyclonic mode (solid line) and cyclonic mode (dashed line) in a QG regime (e) and FG regime (f).



quasi-geostrophic and frontal regime. The full non-linear rotating shallow-water equations are integrated in space with a pseudo-spectral method and in time with a second-order Leapfrog scheme. In order to follow the propagation of wavepacket fronts, we use a long box of resolution  $128 \times 2048 \approx 6L \times 96L$  where  $L$  is the half width of the wake profile. The basic state profile is extended to the whole domain and boundary conditions are periodic. Therefore, the basic state is dissipated by viscosity equivalently in the whole domain and remains parallel during the linear development of perturbation. Moreover, to reduce viscous effects, the Reynolds number in non-linear simulations is fixed at 5000. The basic state is perturbed with a small, localised perturbation. We choose two symmetrical geopotential dipoles parallel to the  $y$ -axis with a Gaussian envelope, located at the maximum of vorticity. This perturbation is similar to the perturbation used by Chomaz [15],  $\phi = g\tilde{\eta} = (1.10^{-6}\phi_0)\sin(\frac{x-x_0}{\delta_x})\left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\delta_x^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\delta_y^2}} + e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\delta_x^2} + \frac{(y-y_1)^2}{\delta_y^2}}\right)$ , with  $x_0 = 36L$  the centre of the dipoles in the streamwise direction,  $y_0 = L$  and  $y_1 = -L$  the centre of each dipole in the spanwise direction, and  $\delta_x = \delta_y = 3\Delta x = 0.14L$  the initial size of the perturbation in  $x$  and  $y$ -direction. The perturbation is adjusted at geostrophic balance so that all fields are perturbed. The perturbation is added to the basic state at  $t = 0$  only and then the flow evolves freely.

Figure 5.6(a)-(d) shows the vorticity fields of the non-linear evolution of a perturbed basic state, Figure 5.6(e)-5.6(f) shows the vorticity field in a cylinder wake obtained in laboratory experiments performed in a quasi-geostrophic regime (e) and frontal regime (f). Continuous and dashed contours represent positive and negative vorticity respectively. The first case corresponds to the non-linear evolution of the perturbed symmetrical wake in a quasi-geostrophic regime. The vortex street, in this case, is symmetrical, cyclones and anticyclones have similar circular shape and the same strength  $\xi_{max} = -\xi_{min} = 0.45f$ , where  $\xi$  is the relative vorticity and  $f$  the Coriolis parameter (Fig. 5.6(a)). However, the pattern of the vortex street is very different from the classical von Karman street observed in the laboratory experiment (Fig.5.6(e)), the size of vortices and the distance between same sign vortices are much smaller in the stability analysis. The distance between vortices, equivalent to the wavelength of instability,  $L_x$  may be quantify by a Strouhal number estimated geometrically with the width of the wake profile  $2L : St = 2L/L_x * (1 - V_d/V_0)$ , where  $V_d$  is the drift velocity of vortices. The wavelength  $L_x$  is given by linear stability analysis,  $L_x = 2\pi/k_{max} = 1.94L$  where  $k_{max}$  is the wavenumber corresponding to the maximum growthrate. This leads a Strouhal number of  $St = 0.96$  whereas it is only  $St = 0.3$  in laboratory experiment. This difference is explained by the fact that we study the stability of a local profile taken just behind the cylinder. Actually, at Reynolds number  $Re = 200$ , as it is the case in the experiment, the mean flow behind the cylinder is not parallel. So that one has to consider the global flow to predict the Strouhal number.

However, we choose to study the stability of a parallel basic state as the cylinder wake in a frontal regime presents a long parallel double shear layer behind the obstacle (Fig. 5.1). Moreover, our approach was first to compare the relative effect of the profile geometry and the regime on cyclone-anticyclone asymmetry. We then compute the non-linear evolution of the perturbed symmetrical basic state in a frontal geostrophic regime (Fig.5.6(b)). The vortex street presents a strong asymmetry, anticyclones keep the same circular shape than in the quasi-geostrophic regime, whereas cyclones are greatly deformed and strengthened. Therefore, in a frontal regime, the instability mainly develops in the anticyclonic part of the flow leading to a strong asymmetry in the vortex street. However, the configuration of a symmetrical double shear in a frontal regime would not occur in the wake of bluff

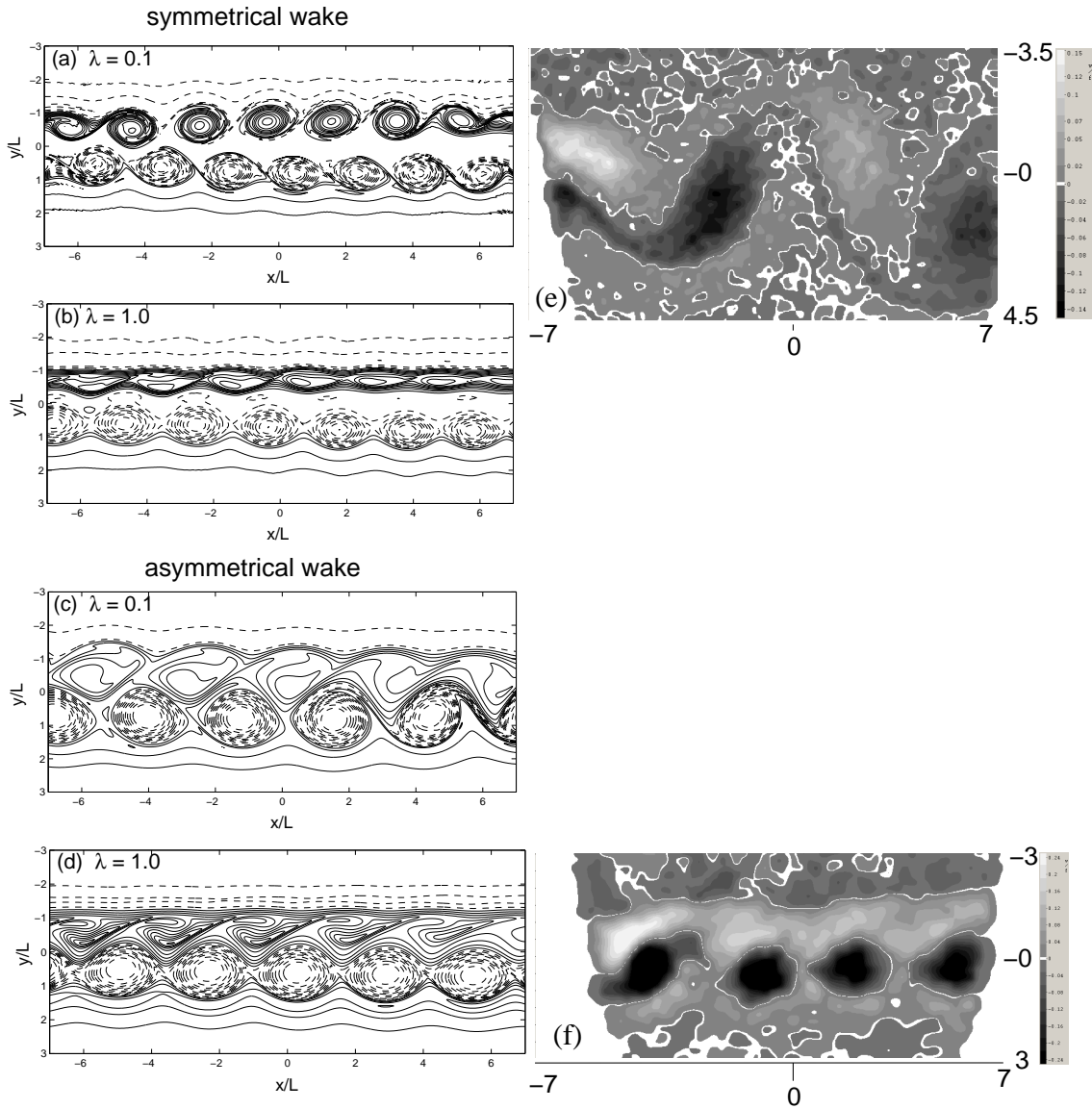


FIG. 5.6 – Non-linear evolution of vorticity field for the symmetrical wake at  $T = 12\tau$  for  $\lambda = 0.1$  (a), at  $T = 30\tau$  for  $\lambda = 1.0$  (b) and for the asymmetrical wake at  $T = 20\tau$  for  $\lambda = 0.1$  (c) and  $T = 64\tau$  for  $\lambda = 1.0$  (d), where  $\tau = D/V_0$ . Solid line contours correspond to positive vorticity (cyclones) and dashed line contours to negative vorticity (anticyclones). Vorticity field obtained by PIV in laboratory experiments for  $Ro = 0.06$  and  $\lambda = 0.09$  (e) and  $Ro = 0.19$  and  $\lambda = 1.7$  (f).

body as the flow around obstacle becomes asymmetrical as soon as the surface deviation increases.

Likewise, the asymmetrical wake profile in a quasi-geostrophic regime would not be encountered in the wake of an obstacle. However, it enables to determine the asymmetry induced by the wake flow geometry alone. Thus cyclones and anticyclones are different in shape and strength (Fig. 5.6(c)). Cyclones have a triangular shape whereas anticyclones are more circular, however, their ellipticity is similar.

In a frontal regime, anticyclones are not affected, but cyclones are much more deformed than in a QG regime (Fig. 5.6(d)). The cyclonic part of the flow presents boomerang shape structures, similar to the structures observed by Poulin and Flierl [58] for Rossby number of order one. Hence, the destabilisation of an asymmetrical wake flow produces a cyclone-anticyclone asymmetry, but this asymmetry is greatly enhanced by the frontal regime. A wake with single sign vortices was observed, in the context of non rotating two dimensional dynamics, by Hammond and Redekopp [31] in the wake of a rectangular body when the upstream flow is asymmetric. By considering the global evolution of the wake, only one sign vortices emerge when the two layers of opposite sign vorticity merge, leading to only one critical layer and to a transition from a wake to a shear layer. This is not the case in our simulations since we consider the local stability of a double shear layer and since only anticyclones are formed. Surprisingly we recover, in the local stability analysis, the general pattern of vortex street observed in a large-scale cylinder wake. Figure 5.6(f) shows vorticity field of the vortex street developping far behind the cylinder, in the laboratory experiment in which the asymmetrical profile was measured. As in destabilization of the parallel basic state, anticyclones are circular whereas cyclones look more like vorticity filaments. The Strouhal number estimated in stability analysis,  $St = 0.71$ , is close to the one calculated in laboratory experiments,  $St = 0.56$ . We also computed the non-linear evolution of the pertubed asymmetrical basic state with the same parameters than the laboratory experiment,  $Re = 800$ ,  $Ro = 0.19$  and  $\lambda = 1.7$ . We obtained a Strouhal number of  $St = 0.66$ , which is even closer to the experimental value. The fact that the mean flow behind the obstacle in a frontal regime is mainly parallel, may be the reason why we recover the same flow pattern.

### 5.2.5 Absolute/convective instability

In order to determine absolute/convective characteristic of instability we study the linear spatio-temporal development of the wavepacket for the symmetrical wake in a quasi-geostrophic regime and the asymmetrical wake in a frontal regime.

Those two cases correspond to laboratory experiments. In the experiments, the cylinder was towed in a rotating tank with a constant velocity  $\vec{V}_0$ . Therefore, the whole analysis in what follows is performed in the cylinder frame. Figure 5.7 shows the spatio-temporal evolution of the wavepacket initially localised at  $x_0 = 0$ . The cylinder is indicated on the left. The impulse response along each ray  $v_g = x/t$ , where  $v_g$  is the group velocity of the wavepacket is expected to evolve as :

$$\xi(x, y, t) \propto \hat{\xi}(y)t^{-1/2}e^{(k(v_g)(x-x_0)-\omega(v_g)t)}, \quad t \rightarrow \infty$$

where  $\xi$  is the vorticity perturbation,  $k(v_g)$  and  $\omega(v_g)$  the complex streamwise wavenumber and complex frequency and  $x_0$  is the initial position of perturbation. Then, the spatio-temporal growthrate along a particular velocity  $v_g = x/t$  is given by the relation :

$$\sigma(v_g) = \omega_i(v_g) - k(v_g)v_g$$

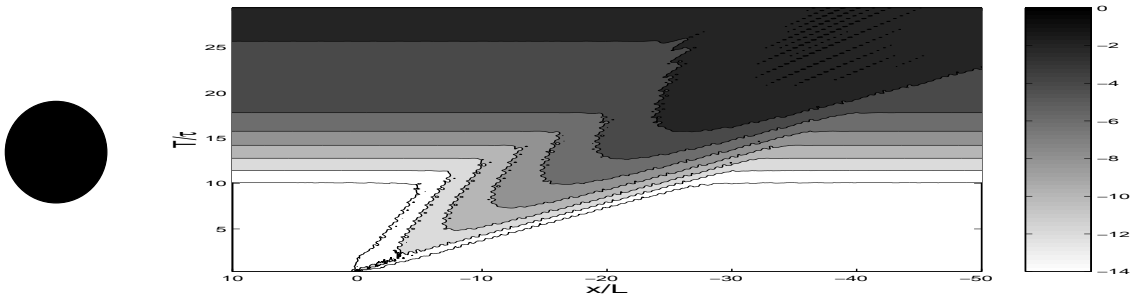


FIG. 5.7 – Spatio-temporal graph of the wavepacket linear development of the asymmetric basic state in a frontal regime.

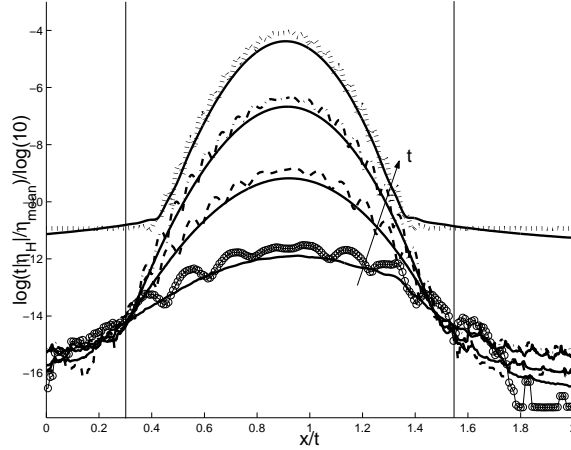


FIG. 5.8 – Enstrophy of the wavepacket and its modulation using a Hilbert transform (solid line at each time) as a function of group velocity and at different times.

Let  $\tilde{\xi}(x, y, t)$  be the perturbation vorticity, in order to consider only the envelop of the wavepacket, we compute the Hilbert transform of perturbation vorticity which consists in putting to zero the coefficients of vorticity Fourier transform corresponding to positive wavenumber. A modulation of enstrophy is then calculating from the inverse Hilbert transform of vorticity  $\tilde{\xi}_H(x, y, t)$  :

$$\eta_H(x, t) = \int_{-L_y/2}^{L_y/2} |\tilde{\xi}_H(x, y, t)|^2 dy$$

with  $L_y$  the size of the domain in spanwise direction.

The real enstrophy of the wavepacket and its modulation using a Hilbert transform is shown in figure 5.8 as a fonction of the group velocity at different times in the cylinder frame. The two vertical lines indicate the group velocity of the trailing (left) and leading (right) edges of the wavepacket respectively.

A numerical approximation of the spatio-temporal growthrate  $\sigma$  is then

$$\sigma(v_g) \approx \frac{\ln[\eta_H(x_0 + v_g t_2, t_2)/\eta_H(x_0 + v_g t_1, t_1)]}{2 * (t_2 - t_1)} + \frac{\ln(t_2 - t_1)}{2 * (t_2 - t_1)} \quad (5.3)$$

The definitions and numerical approximations are explained and summarized in Delbende *et. al* [19] and Gallaire and Chomaz [28]. The spatio-temporal growthrate is plotted as a

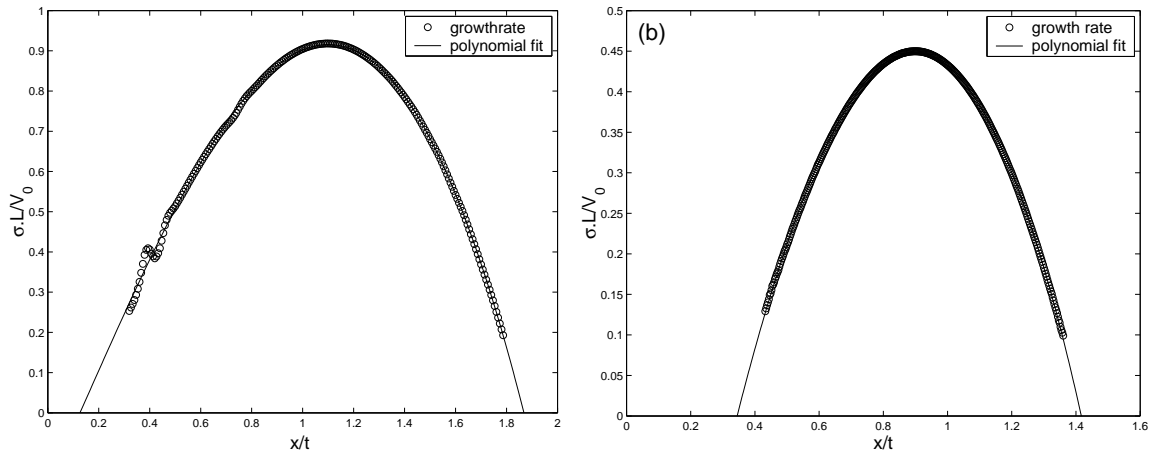


FIG. 5.9 – Growthrate of wavepacket as a function of the group velocity for the symmetrical wake profile in a quasi-geostrophic regime (a) and for the asymmetrical wake profile in a frontal regime (b).

function of the group velocity  $v_g$  for symmetrical wake in a QG regime and the asymmetrical wake in a FG regime (Fig. 5.9).

Dots indicate growthrate calculated from relation (5.3). The curve is incomplete as the ambient noise grows as well as the wavepacket, and make it difficult to get the growthrate near the trailing and leading edges. Therefore, the curve is fit using a fourth order polynome (solid line of Fig. 5.9). The sign of the growthrate at  $v_g = 0$  determine the nature of instability, if  $\sigma(v_g = 0) \geq 0$  the wavepacket grows in place and the instability is absolute whereas if  $\sigma(v_g = 0) \leq 0$ , the wavepacket is advected away from the initial position of the perturbation and the instability is convective.

We found for both cases that the instability of the wake profile is convective. However, the convective nature of instability may be quantify by the value of the trailing edge group velocity. In a frontal regime, the wavepacket goes away from the cylinder with a velocity of  $0.34m.s^{-1}$ , whereas in a quasi-geostrophic regime it goes much more slowly at  $0.14m.s^{-1}$ . The wake profile behind the cylinder is then less convective in a QG regime than in a frontal regime. For the frontal regime, the configuration of the wake is different as no vortex shedding occurs and a double shear extends on a long distance behind the cylinder. Figure 5.10 shows time-averaged velocity profiles measured in the cylinder frame at several locations in the extended double shear layer. Two diameters behind the cylinder, the velocity profile is still very similar to the one just behind, therefore one can reasonably considers that the double shear is quasi-parallel. Therefore, we show that the double shear layer is convectively unstable and the wavepacket does not go upstream to the cylinder but propagates downstream. Then, the vortex street in the wake of the cylinder in a frontal regime is not a global mode of instability as it is the case in two dimensional dynamics but is formed by an instability similar to a shear layer. Moreover, the convective nature of instability in a quasi-geostrophic regime is rather in opposition with stability analysis of wake in two dimensional dynamics. Indeed, absolute instability occurs for near wake profiles corresponding to von Karman shedding [70, 42]. Chomaz, Huerre and Redekopp [35] show that this was a necessary condition, but not sufficient, for a global mode to become self-excited, such as von Karman vortex street. However, we analysis a local wake profile measured at one streamwise location within the parallel-flow

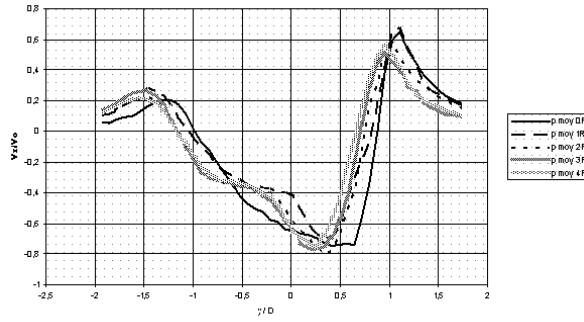


FIG. 5.10 – Time-averaged velocity profiles measured in the cylinder frame, at several locations in the extended double shear layer for the frontal regime wake : just behind the cylinder and at one, two, three and four radii behind.

approximation, the global mean flow is non parallel and may have a zone of absolute instability a bit further in the wake. It may also be possible that transition from a locally absolute to locally convective instability already occurs in the quasi-geostrophic regime.

## 5.2.6 Conclusion

We studied the linear and non linear stability of parallel wake flows in a quasi-geostrophic and a frontal regime. Wake profiles are obtained from laboratory experiments of cylinder wakes and measured in the near-wake of the cylinder. The first objective of that study was to determine the influence of the wake flow geometry and the regime on a cyclone-anticyclone asymmetry in the non linear development of the flow. The second was to determine the nature of instability of a double shear layer in a frontal regime. The two most unstable branches are computed, they correspond to eigenmodes developing mainly on the anticyclonic and cyclonic part of the flow. According to linear stability analysis, the instability develops mainly in the anticyclonic part of the flow in a frontal regime. Moreover, the non linear evolution shows the emergence of coherent circular anti-cyclones, whereas cyclones are totally deformed. A weak cyclone-anticyclone asymmetry is also observed in non linear development of instability for the asymmetrical wake flow in a quasi-geostrophic regime, but this asymmetry is really enhanced in a frontal regime. More surprisingly, we recover, in a frontal regime, the flow pattern of the vortex street observed behind the cylinder in laboratory experiments. Thus, the local stability analysis with a parallel-flow approximation manages to reproduce the vortex street pattern in the wake of the cylinder which is not the case for the symmetric wake flow in a quasi-geostrophic regime as the global flow in such case is non parallel.

Furthermore, we performed a spatio-temporal analysis of the development of instability for the asymmetric basic state in a frontal regime. We found that the asymmetric wake profile is convectively unstable which means that the wavepacket propagate downstream from the cylinder. In the experiments, the double shear layer formed behind the cylinder is quasi-parallel, we can thus expect that the flow is locally convectively unstable in the whole shear zone. In two dimensional dynamics, a necessary condition for the occurrence

---

of a self-sustained global mode such as von Karman street is the presence of an absolute unstable zone in the near-wake. This result may explain why the cylinder wake in a frontal regime does not look like a classical von Karman street.







# Chapitre 6

## Sélection des tourbillons dans les jets, cisaillements et sillages océaniques

Cette partie est rédigée en anglais car elle fera l'objet d'un article en préparation.

### 6.1 Résumé

L'observation dans l'océan des écoulements et des structures de grande échelle montre une prédominance des anticyclones. Un des processus de production de ces structures est la déstabilisation de jets, de cisaillements ou de sillages. Nous avons montré au chapitre précédent que la déstabilisation de sillages expérimentaux parallèles favorisent la production d'anticyclones. Cependant, le sillage présente un double cisaillement et les mécanismes de couplage entre les deux peuvent être très complexes. Pour déterminer l'influence du régime frontal sur des cisaillements simples et des jets, nous présentons dans ce chapitre une étude de stabilité de jets, de cisaillements et de sillages parallèles dans le modèle de Saint-Venant.

L'étude de stabilité linéaire du jet montre que le régime frontal tend à stabiliser très fortement l'écoulement. Par contre, lorsque la partie cyclonique ou anticyclonique de l'écoulement sont distinctes, cisaillement ou sillage, le régime frontal stabilise fortement la partie cyclonique de l'écoulement. L'étude de stabilité et l'évolution non linéaire du cisaillement anticyclonique montre que sa dynamique varie peu entre le régime QG et FG. La formation d'anticyclones est donc beaucoup plus rapide que celle des cyclones. Pourtant, sur des temps longs, la déstabilisation des deux cisaillements produisent tous les deux des tourbillons axisymétriques. En revanche, lorsque les deux cisaillements sont couplés, dans le cas du sillage, le régime frontal sélectionne le mode anticyclonique de l'écoulement. Lors de l'évolution non-linéaire, les anticyclones se forment en premier et leur champ d'étirement déforme la partie cyclonique. Les cyclones qui émergent alors sont très étirés et déformés. Donc, l'instabilité barotrope d'écoulements parallèles en régime frontal favorise la formation d'anticyclones, ceci peut être un des mécanismes qui explique la prédominance des anticyclones dans l'océan.

## 6.2 Article : Do large scale barotropic instabilities favour the formation of anticyclonic vortices in the ocean ?

### 6.2.1 Introduction

In a large scale regime corresponding to strong geopotential fluctuations, we found that experimental wake flows tend to favour the formation of large-scale anticyclonic vortices. We propose to study how jets, shear or wake flows induce a selective destabilisation of anticyclonic vorticity region. In the present paper we perform a comparative study of the stability of jets, shears and wake flows in frontal regime. We expect to better understand how large-scale flow favour the formation of anticyclonic vortices.

### 6.2.2 Model

#### Model equations

In order to investigate the barotropic instability of parallel flows we choose the simplest model that can take into account cyclone-anticyclone asymmetry, the rotating shallow water model. The dimensionless equations are written :

$$Ro \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) + \vec{n} \times \vec{V} = -\frac{Ro\lambda}{Bu} \nabla \eta + \frac{Ro}{Re} \nabla^2 \vec{V} \quad (6.1)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \eta \right) + (1 + \lambda \eta) \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (6.2)$$

where  $\vec{V} = (u, v)$  is the horizontal velocity and  $\eta$  the surface deviation. We define the following dimensionless number, the Rossby number  $Ro$ , the relative surface deviation  $\lambda$ , the Burger number  $Bu$  and the Reynolds number  $Re$  :

$$Ro = \frac{V_0}{fL}, \quad \lambda = \frac{Ro}{Bu}, \quad Bu = \left( \frac{R_d}{L} \right)^2, \quad Re = \frac{V_0 L}{\nu}$$

with  $V_0$  and  $L$  the characteristic velocity and length scale,  $f = 2\Omega$  the Coriolis parameter,  $\Delta H$  the surface deviation scale,  $H_0$  the layer mean depth,  $R_d = \sqrt{gH_0/f}$  the deformation radius with  $g$  the gravity acceleration, and  $\nu$  the kinematics viscosity.

The Rossby number is kept small,  $Ro \ll 1$  in order to remain close to geostrophic balance. The parameter  $\lambda$  is then proportionnal to the relative surface deviation  $\Delta h/H_0$ . We distinguish two dynamical regimes for geostrophic flows. The first one is the classical quasi-geostrophic regime, defined for small surface deviation  $\lambda \approx Ro \ll 1$  and a characteristic length scale of the flow of the same order than the deformation radius,  $L \approx R_d$  leading to a Burger number of order one. In this regime cyclones and anticyclones follow the same dynamics. The second one is the frontal regime, defined for large surface deviation  $\lambda \approx 1$  and a characteristic scale larger than the deformation radius  $L \ll R_d$ . In this regime, cyclones and anticyclones may follow a different dynamics. In order to study the stability in a wide range of parameters from quasi-geostrophic to frontal regime, the relative surface deviation is varied from  $\lambda = 0.1$  to  $\lambda = 1.0$  and the Rossby number is kept small at  $Ro = 0.1$ .

## Numerical resolution

**Linear stability analysis** To solve the linear stability problem, the shallow water equations are linearized around a parallel flow in geostrophic balance :

$$\begin{aligned} u &= \bar{U}(y) + \tilde{u}(x, y, t) \\ v &= \tilde{v}(x, y, t) \\ \eta &= \bar{\eta}(y) + \tilde{\eta}(x, y, t) \\ \text{with } \bar{U} &= -\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} \end{aligned}$$

The perturbations are decomposed into normal modes  $\tilde{x} = \hat{x}(y)e^{i(kx-\omega t)}$  where  $\tilde{x} = \tilde{u}, \tilde{v}$  or  $\tilde{\eta}$ ,  $\hat{x}(y)$  is the complex eigenfoncion,  $k$  the wavenumber in the streamwise direction and  $\omega = \omega_r + i\sigma$  the complex eigenvalue.

We consider the inviscid case. Hence the linearized equations are written :

$$\epsilon \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) - \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \quad (6.3)$$

$$\epsilon \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \tilde{u} = -\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} + (1 + \lambda \bar{\eta}) \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.5)$$

The linear system operator is computed using a spectral method on  $N_y/2$  wavenumbers and inversed by a direct method. The convergence of solutions is obtained for a resolution varying between  $N_y = 256$  and  $N_y = 2048$ , depending of the basic state. The boundary conditions are periodic.

**Non-linear evolution** To compute the full non-linear shallow water equations we use a pseudo-spectral code with a second-order Leapfrog scheme for time integration. The resolution is 256 and boundary conditions are periodic. The Reynolds number is  $Re = 4000$  to reduce viscous effects. The flow is perturbed with a small localised perturbation localised at the maximum vorticity. For the wake flow and the Bickley jet, two perturbations are added to the basic state, at the two extremum of vorticity. These two perturbations are symmetrical from the  $Ox$  axis. The perturbation is an adjusted dipole so that all initial fields,  $u, v$  and  $\eta$  are perturbed,

$$\tilde{X} = \sin\left(\frac{x - x_0}{\delta_x}\right) e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\delta_x^2}} \left( e^{-\frac{(y-y_0)^2}{\delta_y^2}} + e^{-\frac{(y-y_1)^2}{\delta_y^2}} \right)$$

where  $x_0 = L_x/2$  is the streamwise coordinate of the dipole,  $L_x$  being the streamwise dimension,  $\delta_x = \delta_y = 3\Delta_x$  the size of the dipole in the streamwise and spamwise direction,  $y_0$  and  $y_1$  are the spamwise of coordinate of each dipole when both are present. The amplitude of the perturbation is about  $1.e^{-6}$  times the amplitude of the basic state.

### 6.2.3 Bickley jet

In order to compare with previous studies, we choose the widely studied geostrophic Bickley jet, as the basic state (fig. 6.1) :

$$\bar{\eta}(y) = \frac{f}{g} \tanh\left(\frac{y}{L}\right)$$

$$\bar{U}(y) = \frac{1}{L} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{y}{L}\right)}$$

where  $L = 1.0$  is the width of the jet and the total streamwise dimension is  $20L$ . As the boundary conditions are periodic, we put to zero the mean velocity so that the surface deviation is zero at the boundaries. The velocity and potential vorticity basic state for  $\lambda = 0.1$  and  $\lambda = 0.33$  are plotted on figure 6.1.

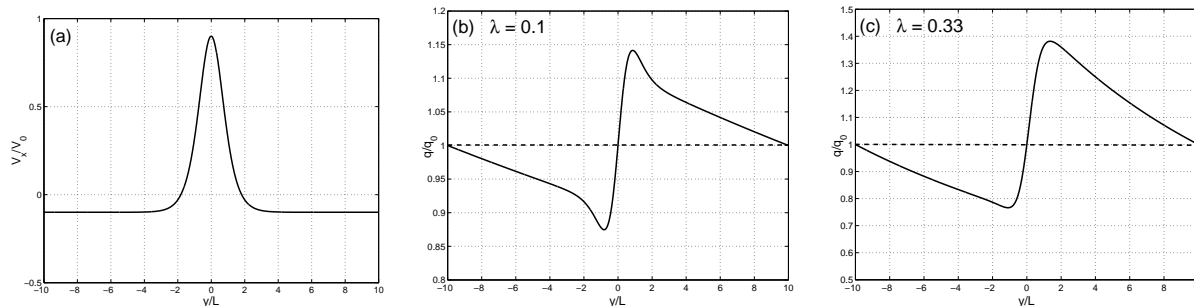


FIG. 6.1 – Bickley jet basic state velocity (a) and potential vorticity for a weak relative surface deviation  $\lambda = 0.1$  (b) and for a more important surface deviation  $\lambda = 0.33$  (c).

In order to get convergence of the solutions, we compute the growthrate for different resolutions in the classical quasi-geostrophic regime  $Bu = 1.0$  and  $Ro = 0.1$  (fig. 6.2). For  $N_y = 256$  collocation points, we recover the curve obtained by Poulin and Flierl [58] in the same regime (see their Fig. 3). A first bump is observed at dimensionless wavenumber  $k.L = 1.5$  and a second one at  $k.L = 1.8$ . The maximum dimensionless growthrate  $\sigma.L/V_0$  is slightly different,  $\sigma_{max}L/V_0 = 0.062$  in our simulations and  $\sigma_{max}L/V_0 = 0.05$  in their computations. This difference may be explained by the different boundary conditions, our conditions are periodic whereas Poulin and Flierl impose no-slip conditions. Indeed, decreasing the total streamwise dimension, from  $20L$  to  $10L$ , was found to increase the growthrate. Therefore the confinement of the jet as well as the boundary conditions may have an influence on the growthrate. However, the bumps observed for  $N_y = 256$  collocation points, disappear when increasing the resolution. Therefore, we assume that these bumps do not have a physical signification, but are due to a lack of resolution. In what follows the simulations are performed with  $N_y = 1024$  collocation points.

We compute the growthrate for different values of the surface deviation  $\lambda$ . As the surface deviation increases the growthrate strongly decreases and the most unstable mode develops at larger scale (Fig. 6.3(a)). Therefore a frontal regime (large geopotential deviations) tends to stabilize the flow. However, in that regime as well as in quasi-geostrophic regime, the flow could be unstable according to Rayleigh criterion. Indeed, the criterion defined by Rayleigh for parallel flows in two-dimensional dynamics ([23]) may be extended to the quasi-geostrophic and frontal model (see Appendix). In both models this criterion gives the following necessary condition for instability :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0$$

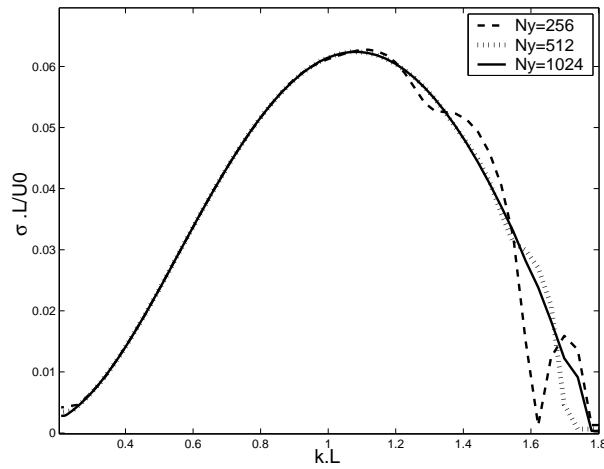


FIG. 6.2 – Growthrate of the bickley jet at different resolution for  $Bu=1.0$  and  $Ro = 0.1$

where  $\bar{q}$  is the basic state potential vorticity (PV). This means that to be unstable a flow has to present an extremum in its potential vorticity, which is the case for QG and FG regime (Fig. 6.1(b)-6.1(c)). Thus the necessary condition for instability is satisfied but this is not sufficient.

The most unstable mode is mainly localised in the center of the jet and despite a small shifting of the secondary PV peak, it does not vary much (Fig. 6.3(b)). Hence, the spatial structure of the most unstable mode remain similar from the quasi-geostrophic regime to the frontal regime. As far as linear stability is concerned there is no signature of a selective destabilisation of anticyclonic vorticity region.

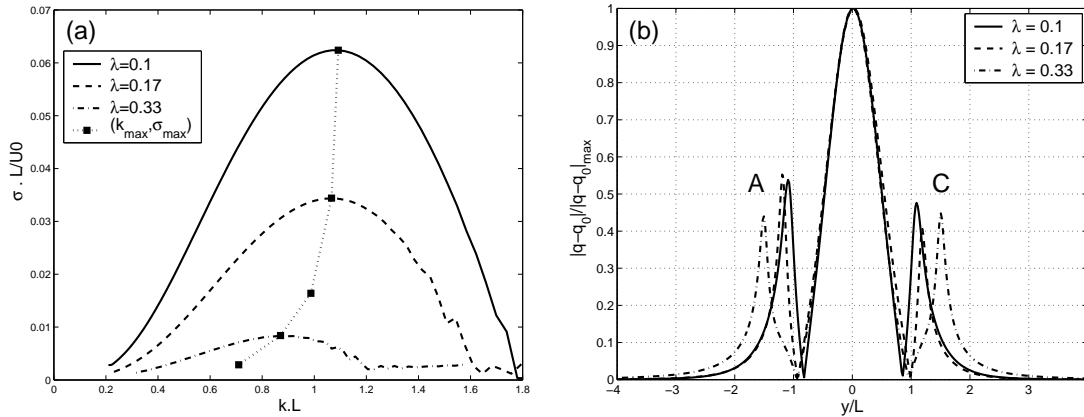


FIG. 6.3 – (a) Growthrate of the bickley jet for various deviation of the free surface  $\lambda$  at  $Ro = 0.1$ . The dashed line with square spots indicate  $(k_{max}, \sigma_{max})$  for intermediate values of  $\lambda$ . (b) Potential vorticity anomaly of the most unstable mode.

The non-linear development of instability is also very similar, despite the different time of evolution, for  $\lambda = 0.1$  and  $\lambda = 0.33$ , the shape of structures and the strength of vorticity is the same (Fig. 6.4). This is quite surprising as previous studies of Bickley jet instability in various configurations showed a cyclone-anticyclone asymmetry. Poulin and Flierl [58] observed deformed cyclones and circular anticyclones for large Burger and Rossby number in a rotating shallow-water model. As for baroclinic instability, Baey *et al*

[8] found larger and more robust anticyclones than their cyclonic counterpart in a frontal regime. Although, the linear stability analysis they conducted did not reveal any cyclone-anticyclone asymmetry. Therefore we could expect a similar asymmetry. However, we did not get the complete formation of vortices because the evolution of the perturbation is very long and we were limited by the time integration of simulations which reached several weeks.

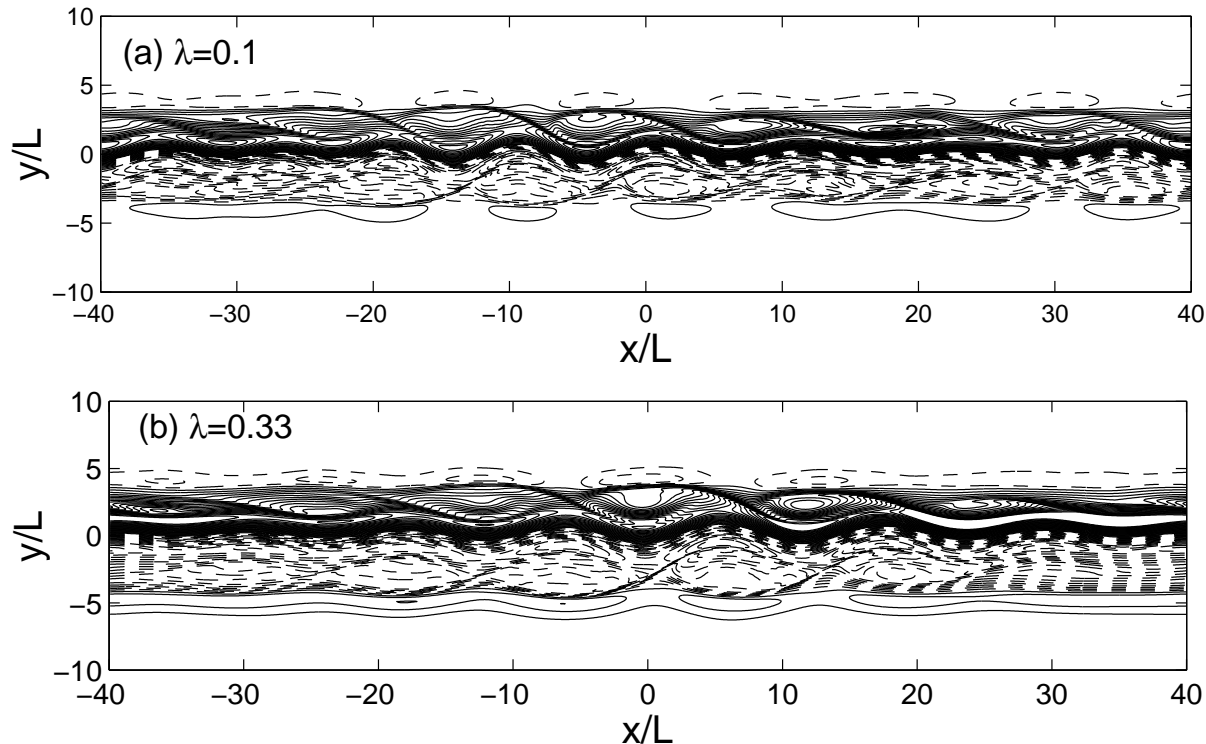


FIG. 6.4 – Non linear evolution of vorticity field for bickley jet in a quasi-geostrophic and frontal regime. Max of cyclonic potential vorticity is 0.02 and min of anticyclonic vorticity is  $-0.02$ , contour interval is  $1.10^{-3}$ .

In order to compare our results with observations, we plot the maximum  $e$ -folding time  $1/\sigma_{max}$  and the corresponding wavelength adimensionned by the deformation radius  $R_d$ , as a fonction of the relative surface deviation  $\lambda$  (Fig. 6.5). The  $e$ -folding time and the wavelength of the most unstable mode clearly increase as the surface deviation increases. Therefore, as the dynamical regime becomes frontal, a barotropic jet is more stable than in a quasi-geostrophic regime and the structures formed by destabilisation of the jet are larger. Observations of a large scale jet such as the Gulf Stream, show a short  $e$ -folding time between 3-6 days ([73, 43]) and a longer one about 12-25 days [46]. These evolution times are smaller than those we get for large-scale jet varying between 20 and 350 days. However, oceanic flows are strongly sensitive to baroclinic instability and Baey, Riviere and Carton [8] show that this instability was more efficient to create vortices than barotropic instability. Anyway the frontal regime tends to stabilize the flow as far as barotropic instability is concerned.

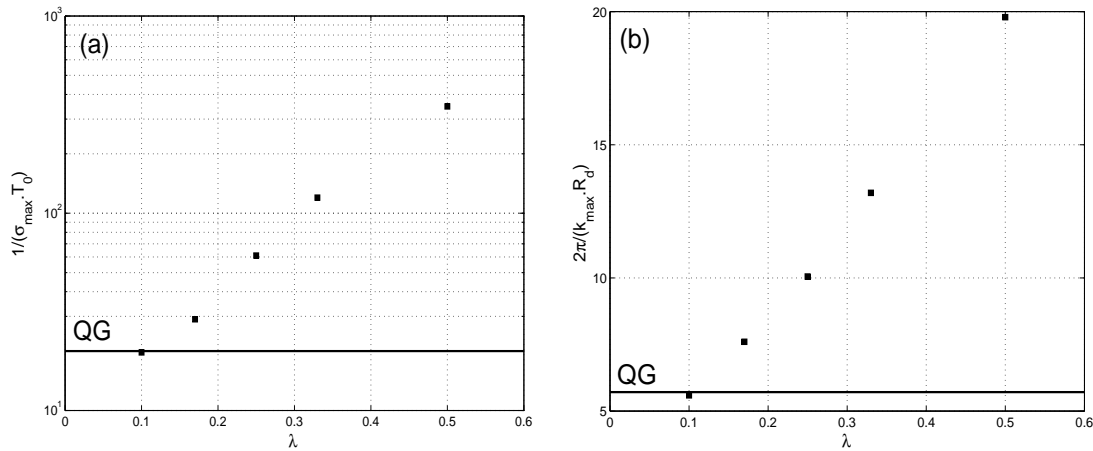


FIG. 6.5 – (a) Semi-log plot of the most unstable mode  $e$ -folding time and the corresponding wavelength adimensionned by the deformation radius  $R_d$ , for the Bickley jet as a fonction of the relative surface deviation  $\lambda$ .

### 6.2.4 Parallel shear flow

We choose a localised shear basic state to avoid discontinuities at the boundaries. Therefore the parallel basic state is defined as follows :

$$\bar{U}(y) = \frac{g}{f} \frac{2y}{L^2} e^{-\frac{y^2}{L^2}}$$

$$\bar{\eta}(y) = e^{-\frac{y^2}{L^2}}$$

where  $L = 0.5$  is the half-width of the shear. The cyclonic shear basic state is defined by the opposite. A resolution of  $N_y = 256$  was shown to be sufficient to get convergence, the  $L^2$  norm of the error on the growthrate for  $N_y = 256$  and  $N_y = 512$  is  $\sum(\sigma_{512} - \sigma_{256})^2 / \sum(\sigma_{512}^2) = 1.6 \cdot 10^{-4}$ . However, as the cyclonic mode presents strong discontinuities in a frontal regime (Fig. 6.7(d)), it was necessary to increase the number of collocation points for these simulations, up to  $N_y = 2048$ . Velocity and potential vorticity basic state are plotted on Fig. 6.6 for a quasi-geostrophic  $\lambda = 0.1$  and a frontal regime  $\lambda = 1.0$ .

The growthrate of anticyclonic and cyclonic shear is shown on figure 6.7 for various relative surface deviation  $\lambda$ . In a quasi-geostrophic regime, cyclonic and anticyclonic shear growthrates are similar. However, in our simulations, the Rossby number is not so small,  $Ro = 0.1$ , so that the dynamics at  $\lambda = 0.1$  is slightly different from a quasi-geostrophic asymptotic model ( $Ro \rightarrow 0$ ). Indeed, we computed the growthrate for the cyclonic and anticyclonic shear flow in the QG model and the two growthrates were perfectly superposed. Therefore, the difference observed between cyclonic and anticyclonic shear flow for a quasi-geostrophic regime is explained by slight ageostrophic effects. In a frontal regime, the growthrate of cyclonic shear strongly decreased,  $\sigma_{maxFG} = 6\% \sigma_{maxQG}$  whereas the anticyclonic growthrate is only varied by 30%. Moreover, as the surface deviation increases, the wavelength of the most unstable wave becomes smaller for anticyclonic shear and larger for cyclonic one. The cyclonic and anticyclonic mode slightly differ in a frontal regime whereas they were similar in quasi-geostrophic regime (Fig. 6.7(b)-6.7(d)). The potential vorticity of the cyclonic mode presents a strong discontinuity at  $y = 0$ , corresponding to an extremum of basic state PV  $\partial_y q = 0$ . Hence, for the frontal regime, unstable perturba-



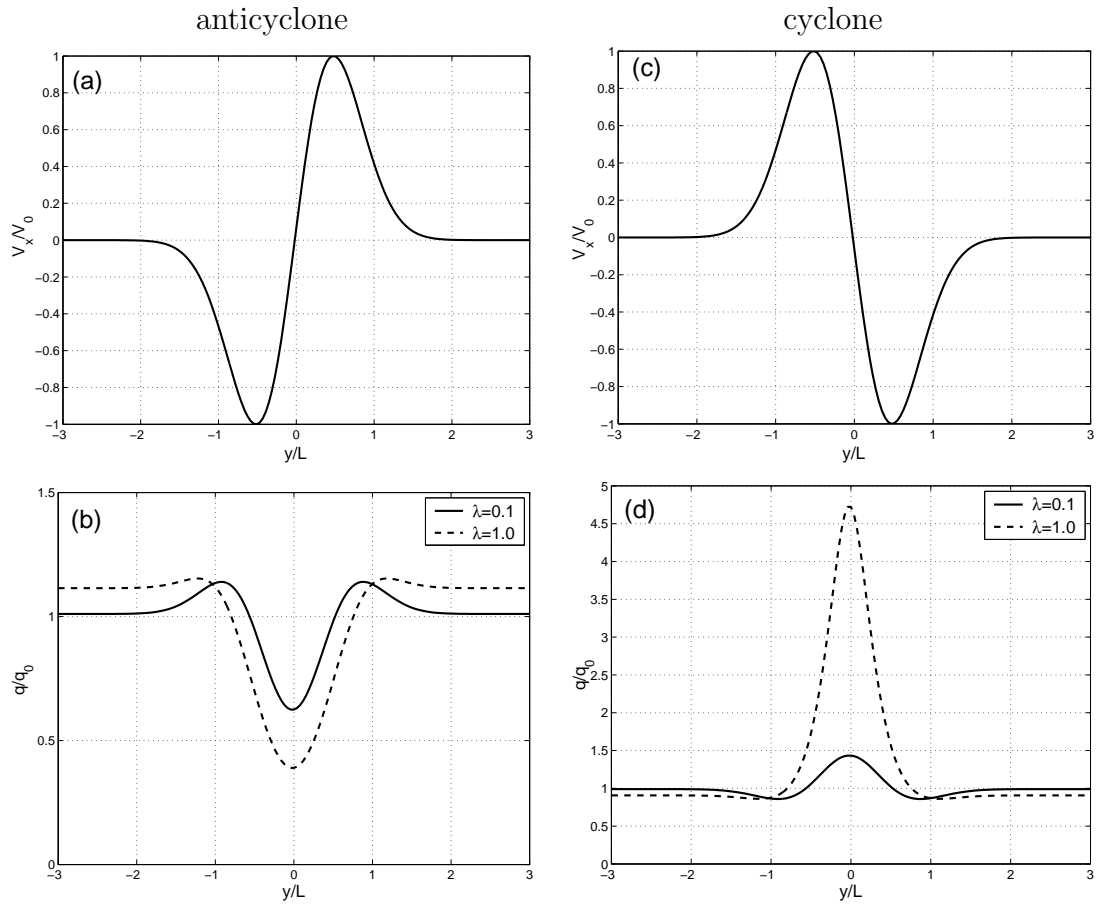


FIG. 6.6 – Anticyclonic (a)-(b) and cyclonic (c)-(d) velocity and potential vorticity in a quasi-geostrophic and frontal regime.

tions grow faster in the anticyclonic shear. Therefore, we would expect, due to non-linear saturation, a rapid formation of anticyclonic vortices.

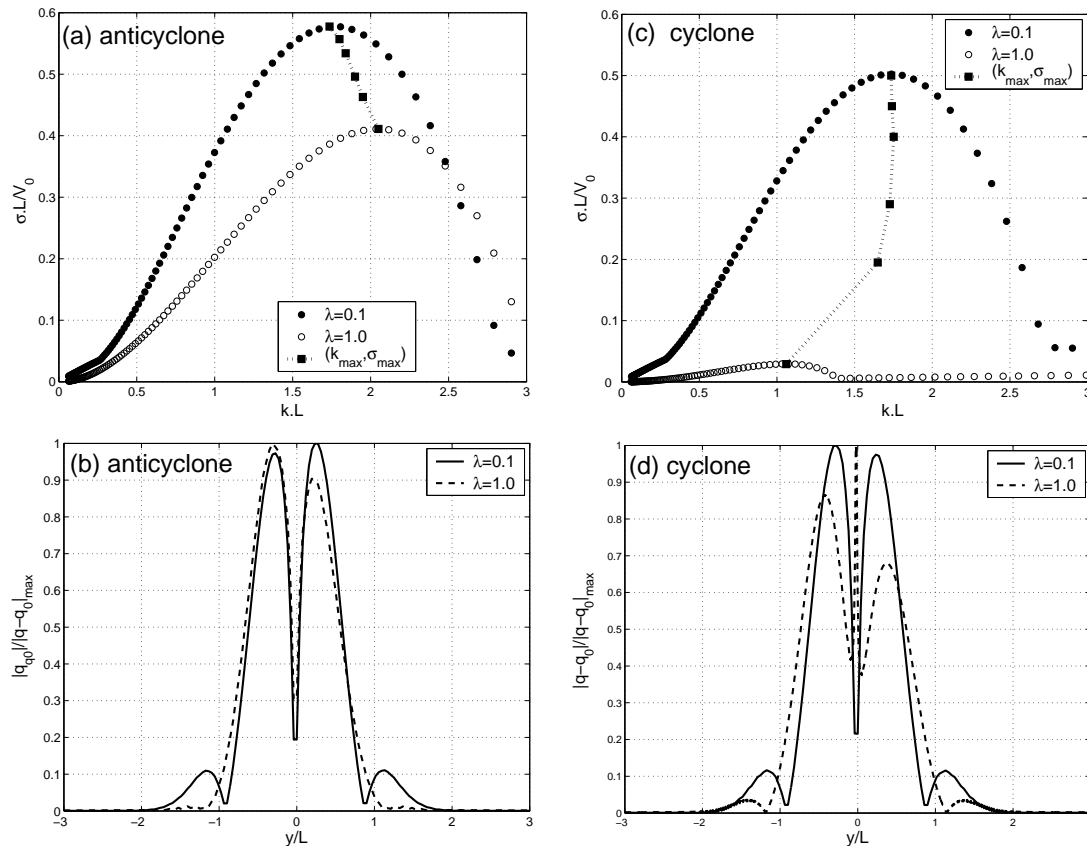


FIG. 6.7 – Growthrate and potential vorticity of the most unstable mode for the anticyclonic (a)-(b) and cyclonic (c)-(d) shear flow in a quasi-geostrophic and frontal regime.

In the non-linear evolution of the flow, in a quasi-geostrophic regime, anticyclonic and cyclonic shear have similar evolution (Fig. 6.8). In agreement with the linear analysis, the time evolution of the instability in the cyclonic shear is longer than the anticyclonic one, but the wavelength and strength of structures are similar. On longer times, the vortex row formed by the development of instability becomes unstable and vortices merge and form dipoles.

In a frontal regime, the time evolution is very different between cyclonic and anticyclonic shear (Fig. 6.9). Vortices appear in the anticyclonic shear at  $T = 50\tau$  whereas the emergence of cyclonic vortices only occurs at  $T = 250\tau$ , where  $\tau = L/V_0$  is the eddy reversal time. Cyclones are also wider than anticyclones as expected from linear stability analysis. When non-linear saturation occurs, both cyclones and anticyclones are axisymmetric according to potential vorticity field (Fig. 6.9).

However, if we study the vorticity and divergence field, we can detect significant differences between the non-linear stage of cyclonic and anticyclonic shear instability (Fig. 6.10). Vorticity is strongly perturbed in the core of cyclonic vortices and much smaller than anticyclonic one (Fig. 6.10(c)). Concerning the divergence, the cyclonic shear flow has negative divergence, *i. e.* convergence, in the core of vortices whereas the divergence of anticyclonic shear flow is much more desorganised. Geopotential field is very similar to potential vorticity field as expected in a frontal regime.

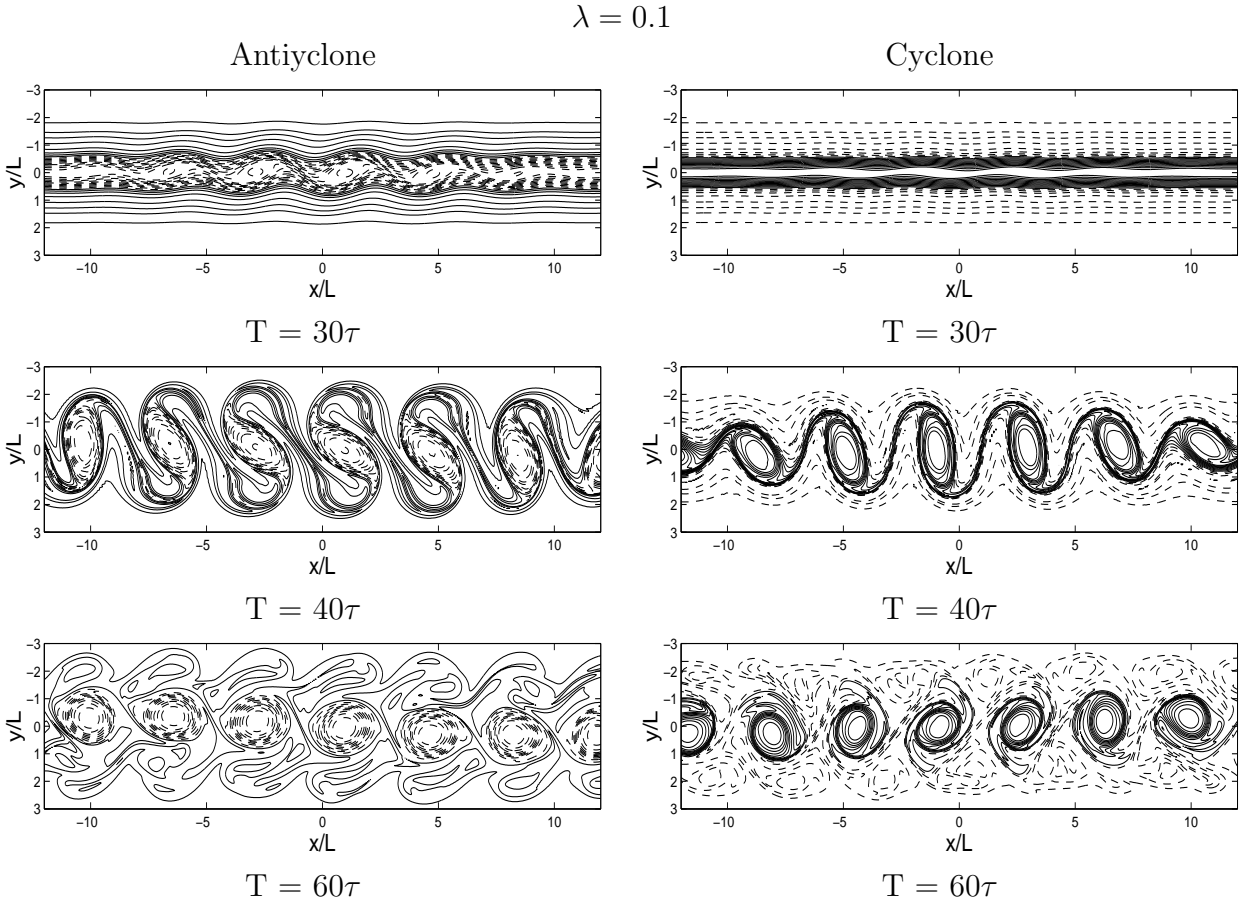


FIG. 6.8 – Non linear evolution of potential vorticity for the cyclonic and anticyclonic shear at  $\lambda = 0.1$  and  $Ro = 0.1$ . The maximum and minimum of potential vorticity anomaly is  $0.3f/(gh_0)$  and  $-0.3f/(gh_0)$  and the contour interval is  $3 \cdot 10^{-3}f/(gh_0)$  where  $f$  is the Coriolis parameter and  $gh_0$  the mean geopotential.

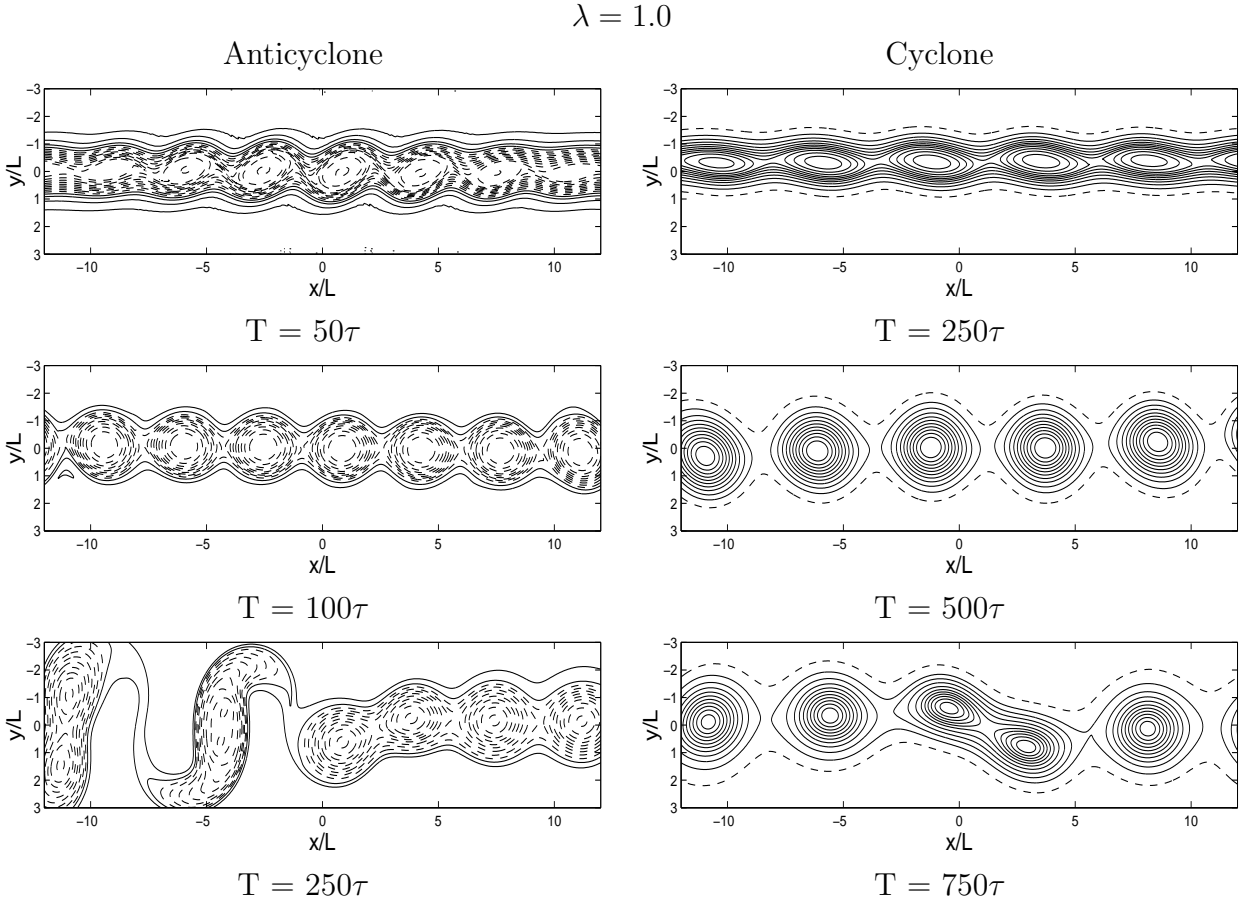


FIG. 6.9 – Non-linear evolution of potential vorticity (PV) for the anticyclonic and cyclonic shear at  $\lambda = 1.0$  and  $Ro = 0.1$ . The maximum cyclonic PV anomaly is  $1.4f/(gh_0)$  and minimum of anticyclonic PV anomaly is  $-0.6f/(gh_0)$ . The contour interval is  $6.10^{-2}f/(gh_0)$  for anticyclonic shear and  $0.14f/(gh_0)$  for cyclonic shear where  $f$  is the Coriolis parameter and  $gh_0$  the mean geopotential.

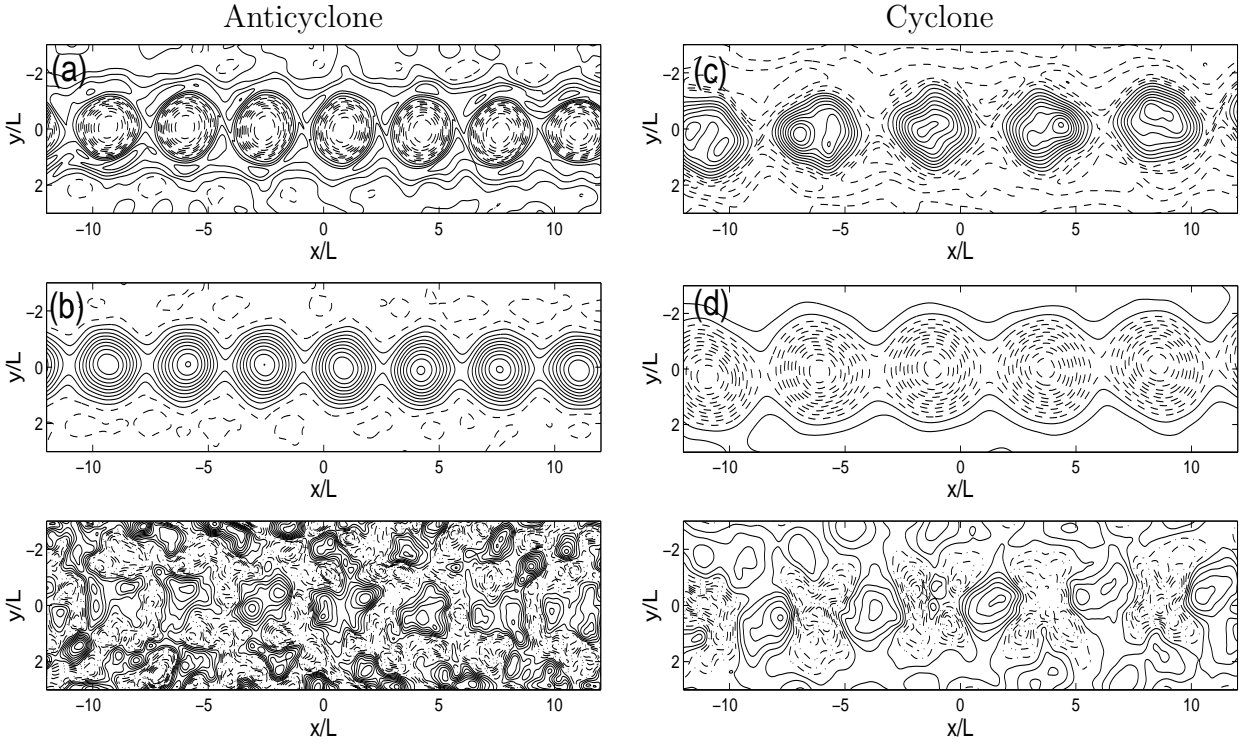


FIG. 6.10 – Vorticity and geopotential for anticyclonic shear at  $T = 100\tau$  and cyclonic shear at  $T = 500\tau$  for  $\lambda = 0.1$  and  $Ro = 0.1$ . The minimum of anticyclonic vorticity is  $-0.3f$ , contour interval is  $0.03$ , the maximum of cyclonic vorticity is  $0.17f$ , contour interval is  $0.017$ . The maximum of anticyclonic geopotential is  $0.6\phi_0$  and minimum of cyclonic geopotential is  $-0.6\phi_0$ , the contour interval for both is  $0.06$ . Maximum and minimum of divergence for both is  $\pm 0.08$  with contour intervals  $8 \cdot 10^{-3}$ .

As a conclusion, the frontal regime tends to stabilize cyclonic parallel shear flows whereas stability of anticyclonic shear is not very different from quasi-geostrophic regime. The destabilization of an anticyclonic shear would lead more rapidly to the formation of vortices. However, the long time evolution shows the formation of axisymmetric vortices. Cyclones are larger than anticyclones. Yet, once emerged, anticyclones should be more robust to external strain than cyclones, according to the recent study of Graves *et. al.* [29].

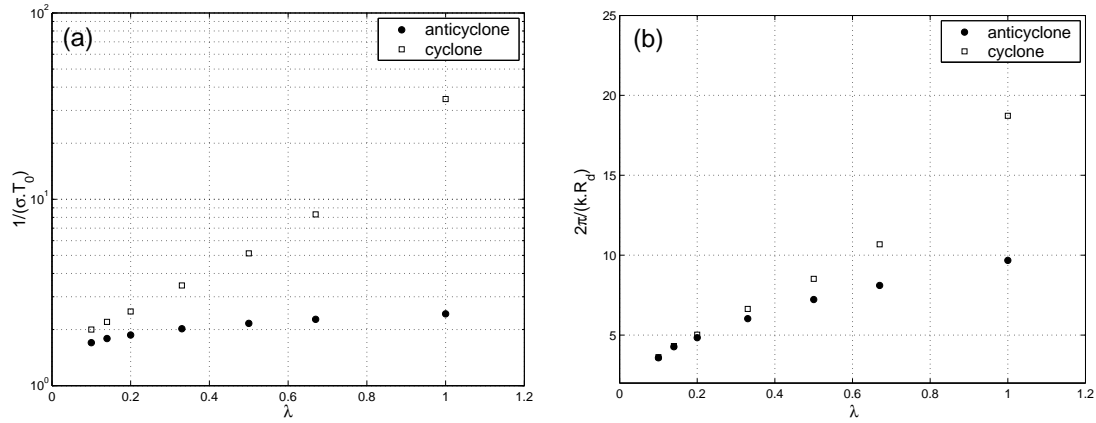


FIG. 6.11– (a) Most unstable mode  $e$ -folding time and the corresponding wavelength adimensionned by the deformation radius  $R_d$ , for anticyclonic ( $\bullet$ ) and cyclonic ( $\square$ ) shear as a fonction of the interface deviation  $\lambda$ .

### 6.2.5 Parallel wake flow

In order to study the interaction between cyclonic and anticyclonic shear, we perform a stability analysis of a parallel wake flow. The basic state is a combination of two shears of opposite sign (Fig. 6.12).

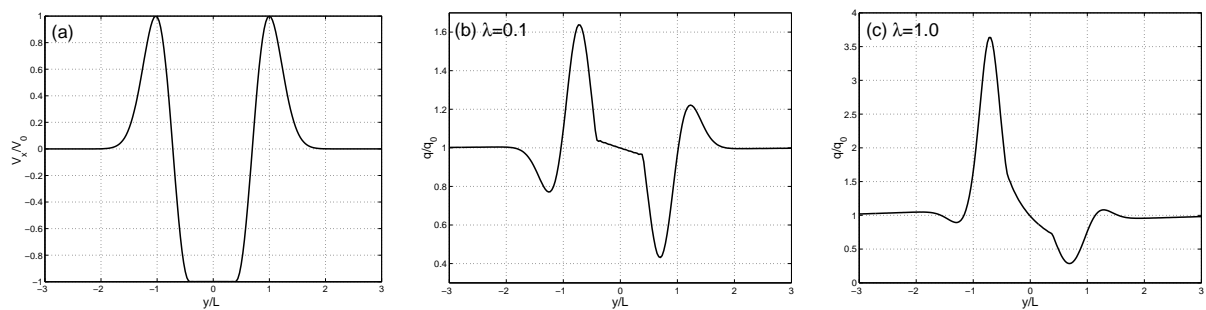


FIG. 6.12 – Wake flow basic state velocity (a) and potential vorticity in quasi-geostrophic regime (b) and in frontal regime (c).

We plot the growthrate of the two most unstable branches. The most unstable one is called anticyclonic mode, or mode A, as it is predominant in the anticyclonic part of the flow (Fig. 6.13(c)), whereas the second mode, mode C, develops mainly in the cyclonic part. In a quasi-geostrophic regime the two modes coexist. As for the shear, the

difference between A and C mode growthrate is due to small ageostrophic effects. In a frontal regime, however, cyclonic mode growthrate strongly decreases whereas anticyclonic mode growthrate does not vary much. Moreover, the two modes are localised, their spatial extension are limited around one shear (Fig. 6.13). Therefore, the frontal regime tends to select the anticyclonic mode.

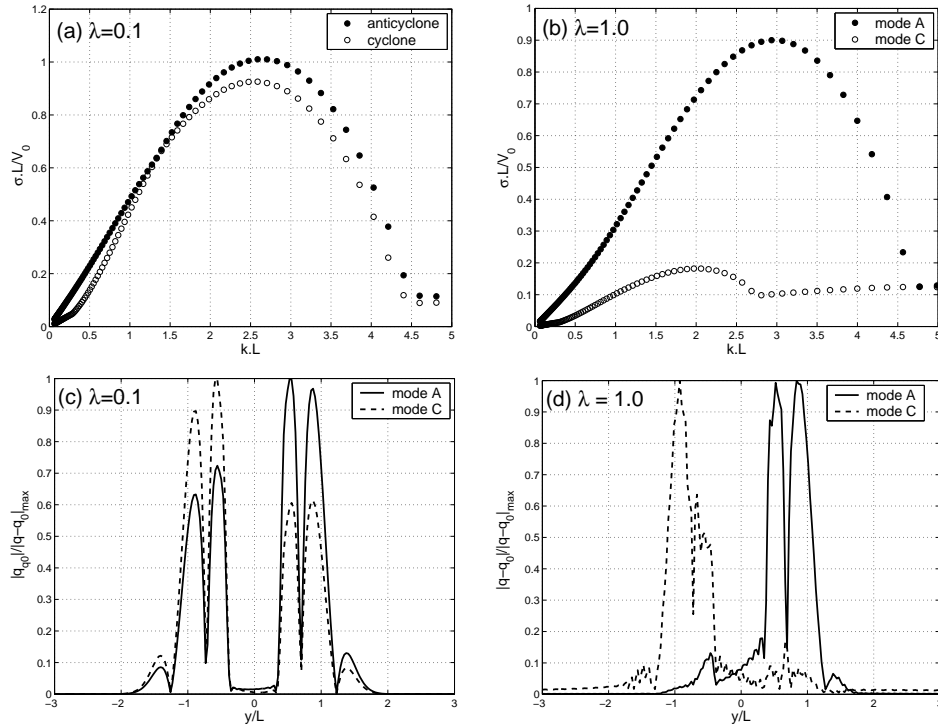


FIG. 6.13 – The two most unstable branches growthrate of wake flow in a quasi-geostrophic regime (a) and frontal regime (b) and PV of the most unstable mode for QG (c) and FG (d) regime.

As a consequence, according to non-linear simulations, anticyclones are formed first in a frontal regime. Therefore, the strain induced by anticyclonic vortices tend to stretch the cyclones once they begin to form. Once they are formed, cyclones strengthened while anticyclones are weakened. Due to the stretching of cyclones, the wake present a strong cyclone-anticyclone asymmetry. When cyclonic and anticyclonic shear are present in the flow, anticyclones are preferentially formed.

## 6.2.6 Conclusion

In order to better understand the predominance of anticyclones in large scale flows, we studied the stability of a jet, shear and wake flows in a quasi-geostrophic and frontal regime. According to the stability analysis of a Bickley jet, the frontal regime stabilizes the flow. We recover the results of Poulin and Flierl [58] and more generally those of isolated vortices stability [7, 66]. The  $e$ -folding time of the instability development is larger than the time evolution observed for Gulf-Stream meanders. Nevertheless, we did not take into account the baroclinic instability which is more efficient to destabilize a jet than barotropic instability [27]. The stability analysis of a cyclonic and an anticyclonic shear flow, on the other hand, shows that each shear behave differently. In a frontal regime, the

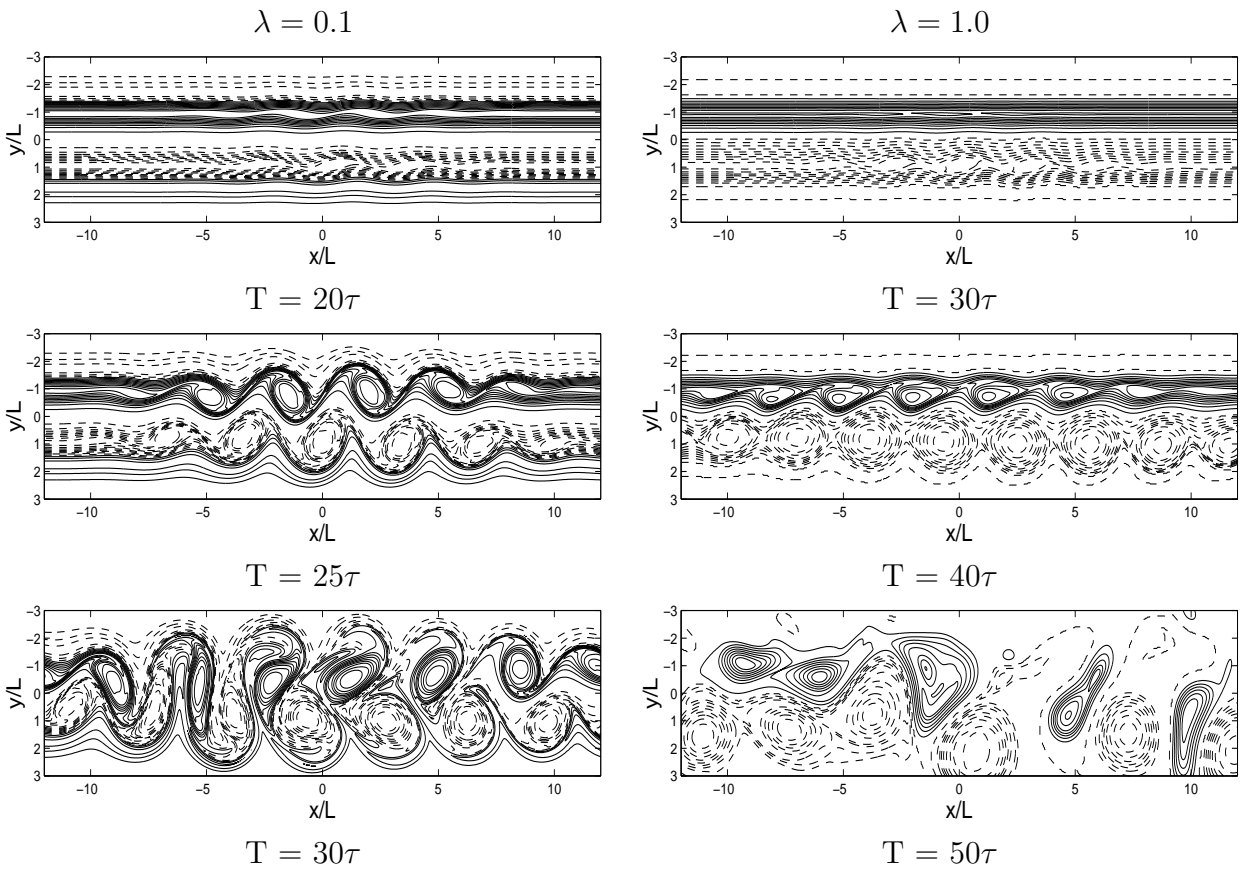


FIG. 6.14 – Non linear evolution of potential vorticity field for the wake profile at  $\lambda = 0.1$  and  $\lambda = 1.0$  and  $Ro=0.1$ . Maximum of cyclonic vorticity is 0.4 and minimum of anticyclonic vorticity is  $-0.4$ , contour interval is  $4.e^{-2}$ .



anticyclonic shear is much more unstable than the cyclonic one, and lead more rapidly to the formation of anticyclones. Yet, according to the non-linear evolution of perturbed shear flows, both lead to the formation of axisymmetric vortices at the end. Then, we studied the stability of a wake flow for which cyclonic and anticyclonic shear are correlated. We show that the frontal regime select the development of instability in the anticyclonic part of the flow. Therefore, anticyclones are formed first and create a strain that stretches the cyclonic shear. When cyclones appear, they are then deformed and the wake present a strong cyclone-anticyclone asymmetry. Therefore, barotropic instability of parallel shear flows, in a frontal regime, favours the production of strong circular anticyclones. This mechanism may be a cause of the predominance of large-scale anticyclones in the ocean.

## Appendix : Rayleigh criterion for the frontal geostrophic model

The classical Rayleigh criterion for instability of parallel incompressible two-dimensional flows may be extended to the frontal geostrophic model [16]. The dimensionless frontal model is written :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - J(\eta, (1 + \eta)\Delta\eta) + \frac{1}{2}(\nabla\eta)^2 = 0 \quad (6.6)$$

with  $\eta$  the surface deviation and  $J(a, b) = \partial_x a \partial_y b - \partial_y a \partial_x b$  is the Jacobian operator. Considering a parallel basic flow  $\eta_0(y)$ , to study the stability of that flow, we decomposed the surface deviation  $\eta$  as follows :

$$\eta = \eta_0(y) + \tilde{\eta}(x, y, t)$$

where  $\tilde{\eta}$  is a small perturbation. Considering that  $J(\eta_0, \Delta\eta_0) = 0$  and  $J(\eta_0, \frac{1}{2}(\nabla\eta_0)^2) = 0$ , the linearized frontal equation is then written :

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} - (1 + \eta_0)[J(\eta_0, \Delta\tilde{\eta}) + J(\tilde{\eta}, \Delta\eta_0)] - J(\eta_0, \nabla\eta_0 \cdot \nabla\tilde{\eta}) - \frac{1}{2}J(\tilde{\eta}, (\nabla\eta_0)^2) = 0 \quad (6.7)$$

The perturbation  $\tilde{\eta}$  may be decomposed into normal modes :

$$\tilde{\eta}(x, y, t) = \hat{\eta}(y)e^{i(kx - \omega t)} \quad (6.8)$$

with  $\hat{\eta} \in \mathbb{C}$  and  $\omega \in \mathcal{C}$ . The solution as to be bounded as  $x \rightarrow \infty$ , this implies  $k \in \mathcal{R}$ . Introducing 6.8 into eq.6.7 yields :

$$\omega \hat{\eta} + k(1 + \eta_0) \left[ \frac{d\eta_0}{dy} \left( k^2 \hat{\eta} - \frac{d^2 \hat{\eta}}{dy^2} \right) + \hat{\eta} \frac{d^3 \eta_0}{dy^3} \right] - k \left[ \left( \frac{d\eta_0}{dy} \right)^2 \frac{d\hat{\eta}}{dy} + \hat{\eta} \frac{d^2 \eta_0}{dy^2} \frac{d\eta_0}{dy} \right] = 0 \quad (6.9)$$

Setting the phase velocity  $c = \omega/k = c_r + ic_i$ , one can write :

$$(1 + \eta_0) \frac{d\eta_0}{dy} \frac{d^2 \hat{\eta}}{dy^2} + \left( \frac{d\eta_0}{dy} \right)^2 \frac{d\hat{\eta}}{dy} - \left[ c + (1 + \eta_0) \left( \frac{d\eta_0}{dy} k^2 + \frac{d^3 \eta_0}{dy^3} \right) - \frac{d^2 \eta_0}{dy^2} \frac{d\eta_0}{dy} \right] \hat{\eta} = 0 \quad (6.10)$$

Assuming that the basic state profile is monotonic,  $d\eta_0/dy \neq 0$ , then one can divide the previous equation by  $d\eta_0/dy$  :

$$\begin{aligned} & (1 + \eta_0) \frac{d^2 \hat{\eta}}{dy^2} + \frac{d\eta_0}{dy} \frac{d\hat{\eta}}{dy} - \left[ \frac{c}{d\eta_0/dy} + (1 + \eta_0) \left( k^2 + \frac{d^3 \eta_0/dy^3}{d\eta_0/dy} \right) - \frac{d^2 \eta_0}{dy^2} \right] \hat{\eta} \\ & = \frac{d}{dy} \left[ (1 + \eta_0) \frac{d\hat{\eta}}{dy} \right] - \left[ \frac{c}{d\eta_0/dy} + (1 + \eta_0) \left( k^2 + \frac{d^3 \eta_0/dy^3}{d\eta_0/dy} \right) - \frac{d^2 \eta_0}{dy^2} \right] \hat{\eta} = 0 \end{aligned}$$

Assuming, moreover, that  $\hat{\eta}$  is a localised perturbation, then  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\eta}|^2 dy$  exists and  $\lim_{y \rightarrow \infty} |\hat{\eta}| = 0$ . Multiplying the equation by the conjugate of the perturbation  $\hat{\eta}^*$  and integrating between  $-\infty$  and  $\infty$ , we get :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\eta}^* \frac{d}{dy} \left[ (1 + \eta_0) \frac{d\hat{\eta}}{dy} \right] dy - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{c}{d\eta_0/dy} + (1 + \eta_0) \left( k^2 + \frac{d^3\eta_0/dy^3}{d\eta_0/dy} \right) - \frac{d^2\eta_0}{dy^2} \right] |\hat{\eta}|^2 dy = 0 \quad (6.11)$$

The first term may be integrated by parts :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\eta}^* \frac{d}{dy} \left[ (1 + \eta_0) \frac{d\hat{\eta}}{dy} \right] dy = \left[ (1 + \eta_0) \hat{\eta}^* \frac{d\hat{\eta}}{dy} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \eta_0) \left| \frac{d\hat{\eta}}{dy} \right|^2 dy \quad (6.12)$$

The first term in the right hand side tends to zero at infinity, the equation 6.11 then becomes :

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\eta}|^2}{d\eta_0/dy} dy + \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \eta_0) \left| \frac{d\hat{\eta}}{dy} \right|^2 dy + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (1 + \eta_0) \left( k^2 + \frac{d^3\eta_0/dy^3}{d\eta_0/dy} \right) - \frac{d^2\eta_0}{dy^2} \right] |\hat{\eta}|^2 dy = 0 \quad (6.13)$$

There is only one imaginary term in this equation, which must then vanish :

$$c_i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\eta}|^2}{d\eta_0/dy} dy = 0 \quad (6.14)$$

Therefore, to be unstable ( $c_i \neq 0$ ), the flow has to have a non monotonic basic state surface deviation :

$$\exists y_0 \quad / \quad \frac{d\eta_0}{dy}(y_0) = 0.$$



# Chapitre 7

## Modélisation numérique de l'écoulement derrière un obstacle

Nous présentons dans ce chapitre la méthode numérique utilisée pour modéliser l'écoulement derrière un obstacle dans le modèle de Saint-Venant. La base du code numérique est la même que celle décrite dans le chapitre 2. Cependant, l'originalité de la méthode présentée ici consiste à implémenter une méthode de pénalisation pour prendre en compte l'obstacle dans un modèle de Saint-Venant pseudo-spectral. D'une part, c'est la première fois, à notre connaissance, qu'une méthode de pénalisation est intégrée dans un modèle de Saint-Venant avec une surface libre. D'autre part, cette méthode a été peu utilisée avec des méthodes spectrales. Un des objectifs de cette thèse a été de valider cette méthode, en s'appuyant notamment sur les expériences de laboratoire présentées aux chapitres 3 et 4.

### 7.1 Formulation du problème

Nous considérons un domaine rectangulaire de dimension  $L_x \times L_y$ . L'obstacle est cylindrique de diamètre  $D = L_y/6$ , ceci pour respecter le rapport d'aspect de l'expérience de laboratoire. De manière à comparer les simulations numériques avec les expériences de laboratoire, l'obstacle est translaté à vitesse constante  $V_0$  et le sens de rotation est celui de l'hémisphère sud. La méthode numérique nous permet d'envisager facilement deux configurations.

- Dans la première configuration, on se place dans le référentiel de la cuve tournante, le cylindre avance à la vitesse  $V_0$ . Cependant, cette configuration ne permet pas d'étudier la dynamique sur des temps plus longs que le temps nécessaire au cylindre pour traverser le domaine.
- C'est pourquoi nous considérons également la deuxième configuration, pour laquelle les équations sont intégrées dans le référentiel du cylindre. L'obstacle reste donc fixe au cours du calcul et une éponge numérique est implémentée à l'extrémité du domaine pour, d'une part absorber l'écoulement, et d'autre part imposer les conditions d'entrée de vitesse et de géopotential.

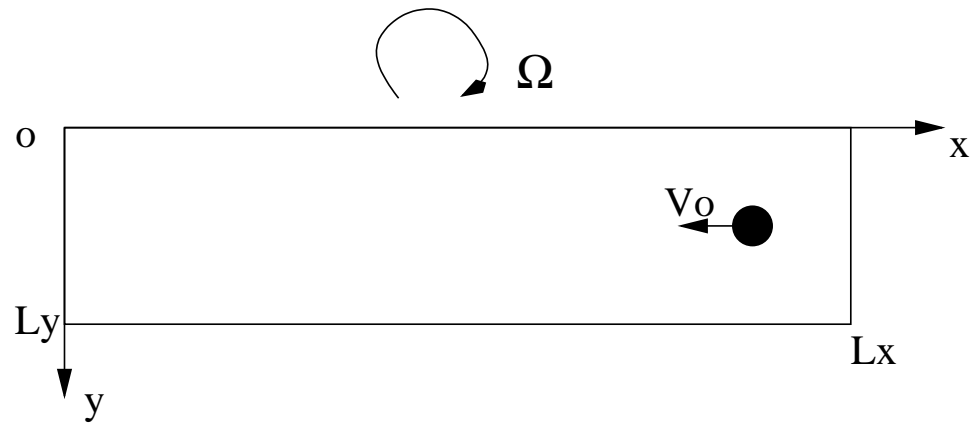


FIG. 7.1 – Schéma du domaine dans le référentiel de la cuve.

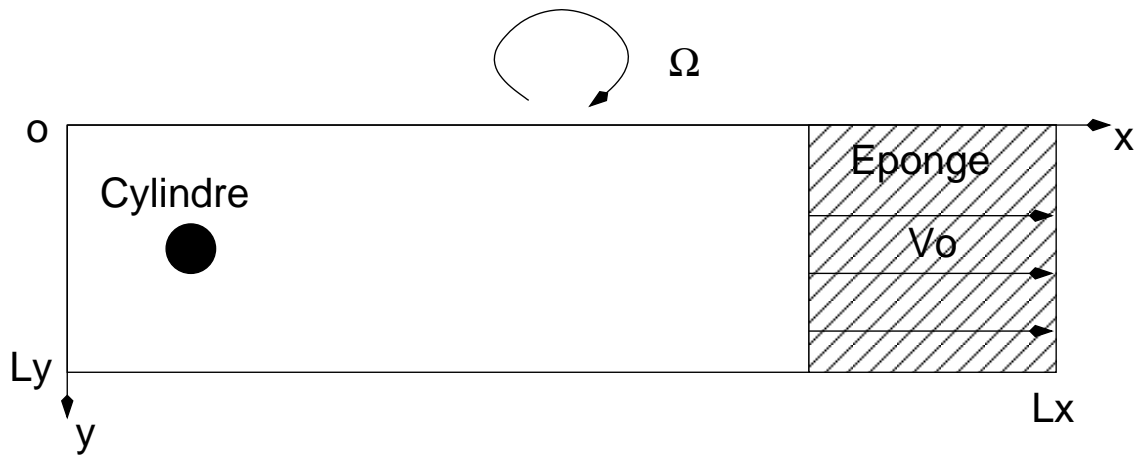


FIG. 7.2 – Schéma du domaine dans le référentiel du cylindre.

## 7.2 Méthode de pénalisation

### 7.2.1 Principe et origine

Le principe général de la méthode de pénalisation consiste à considérer tout le domaine, fluide et obstacle, comme un même milieu de porosité variable, zéro dans le domaine fluide et un dans le domaine solide. Cette méthode offre l'avantage de ne pas nécessiter l'adaptation du maillage aux géométries des obstacles et d'utiliser des méthodes numériques rapides et précises telles les méthodes spectrales, sur des maillages cartésiens. En pratique un terme de la forme  $(\chi/\epsilon) \vec{V}$  est ajouté aux équations du mouvement, où  $\chi$  est la fonction caractéristique du ou des obstacles,  $\epsilon$  est un petit paramètre tel que la perméabilité du milieu solide  $K \propto \epsilon \ll 1$ . Ce terme est nul dans la partie fluide, les équations qui décrivent le mouvement du fluide sont alors inchangées. Par contre, dans la partie solide correspondant à l'obstacle, ce terme de pénalisation domine les autres termes et force la vitesse à s'annuler dans l'obstacle. Cette méthode revient à imposer des conditions de non pénétration et de non glissement aux frontières de l'obstacle.

La méthode de pénalisation en volume a été tout d'abord introduite par Arquís et Caltagirone [5] pour modéliser des phénomènes de convection naturelle au voisinage d'une paroi poreuse. Leur modèle consiste à décrire par une équation unique le passage d'un milieu fluide, décrit par les équations de Navier-Stokes, à un milieu poreux, décrit par la loi de Darcy. Ce modèle a été généralisé aux milieux fluides, poreux et solides par Angot et Caltagirone [3]. En 1994, Caltagirone [13] a proposé une formulation simple pour déterminer la force exercée par le fluide sur l'obstacle solide en utilisant la méthode de pénalisation. Cette force s'écrit comme l'intégrale sur le volume de l'obstacle du terme de pénalisation. Cette méthode a été utilisée pour des écoulements autour d'obstacles solides avec un code aux différences finies par Khadra *et. al* [41]. Ils ont utilisé comme cas test de validation l'écoulement bi-dimensionnel derrière un cylindre, ainsi que l'écoulement derrière une marche. Ils retrouvent la courbe  $(St, Re)$  pour  $50 \leq Re \leq 200$  obtenue dans les expériences de laboratoire réalisées par Williamson [76] (cf. Fig 7.3). La convergence

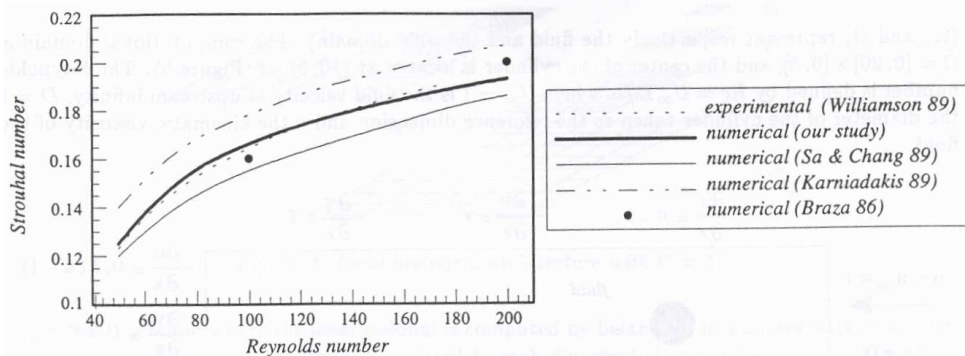


FIG. 7.3 – Relation Strouhal, Reynolds obtenue par Khadra *et. al* [41], comparée avec d'autres simulations numériques et avec les expériences de Williamson.

des solutions des équations de Navier-Stokes pénalisées vers les équations non-pénalisées pour un système fluide-solide, a été prouvée grâce à une analyse asymptotique, par Angot, Bruneau et Fabrie [2]. L'erreur théorique entre la solution exacte  $\vec{V}$  et la solution pénalisée  $\vec{V}_\epsilon$ , pour  $\epsilon \rightarrow 0$ , est  $\mathcal{O}(\epsilon^{3/4})$  dans le domaine solide et  $\mathcal{O}(\epsilon^{1/4})$  dans le domaine fluide lorsque le paramètre  $\epsilon$  tend vers zéro. Cependant, une validation numérique, réalisée en

comparant la méthode de pénalisation avec une méthode qui impose des conditions aux limites non glissantes de type Dirichlet sur l'obstacle, donne des erreurs plus petites que la théorie. Sur un cas test d'écoulement stationnaire dans un canal autour d'un obstacle carré, l'erreur sur la vitesse dans la partie solide est  $\|u\|_{L^2(\Omega_s)} = \mathcal{O}(\epsilon^1)$  et dans la partie fluide  $\|u - u_{ref}\|_{L^2(\Omega_f)} = \mathcal{O}(\epsilon^{0.96})$  pour  $\epsilon = 10^{-5}$ . Angot [1] détermine l'erreur faite sur la force de traînée lorsqu'elle est calculée par la méthode introduite par Caltagirone [13],  $\|F_{Caltagirone} - F\| = \mathcal{O}(\epsilon^{1/4})$ .

Kevlahan and Ghidaglia [40] ont montré que l'utilisation d'une méthode de pénalisation avec un code spectral donnait des résultats satisfaisants, même si les méthodes spectrales ne paraissent pas bien adaptées pour prendre en compte des fonctions discontinues comme la fonction caractéristique  $\chi$ . La simulation numérique de l'écoulement derrière un cylindre à un nombre de Reynolds de 200 donne, par rapport aux données expérimentales de Williamson [76], une erreur de 10% sur le nombre de Strouhal. Cependant, le schéma d'intégration temporelle qu'ils utilisent force une relation entre le paramètre  $\epsilon$  et le pas de temps  $\Delta t$ ,  $\epsilon \approx \Delta t$ , ce qui limite l'avantage de la pénalisation. Ils étudient également, de manière analytique, la propriété des écoulements pénalisés en considérant le cas d'un écoulement unidirectionnel sur une plaque plane (problème de Stokes). Ils déterminent une erreur sur les conditions aux limites de l'ordre de  $\mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$  et une erreur sur la force exercée par le fluide sur l'obstacle  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . La méthode de pénalisation a également été implémentée dans un code tri-dimensionnel aux différences finies par Parnaudeau *et al* [53] pour modéliser l'écoulement derrière un cylindre.

Schneider et Farge [60, 61] et Vasilyev et Kevlahan [72] ont implémenté la méthode de pénalisation dans un code en ondelettes adaptatives qui permet d'adapter la grille aux régions où les gradients sont forts. Cette méthode a été testée sur le cas d'un écoulement derrière un cylindre pour un nombre de Reynolds de 3000 [60] et dans le cas d'un dipole impactant une paroi [61].

Cependant toutes ces études ont appliqué la méthode de pénalisation à la modélisation des équations de Navier-Stokes. A notre connaissance, cette thèse présente pour la première fois cette méthode appliquée aux équations de Saint-Venant donc en présence d'une surface libre et avec à la fois des solutions de type tourbillons et des solutions de type ondes.

## 7.2.2 Equations de Saint-Venant pénalisées

Nous avons fait le choix de ne pas pénaliser le géopotential dans les équations 2.1-2.2, qui évolue alors librement dans l'obstacle, de même que la pression dans les équations de Navier-Stokes [2]. En imposant des conditions sur le volume total de l'obstacle, la pénalisation revient à imposer ces conditions sur ses limites. En obligeant la vitesse à s'annuler, on force des conditions aux limites de non pénétration. Dans un problème d'écoulement autour d'un obstacle solide, aucune condition n'est imposée au géopotential, c'est la raison pour laquelle on le laisse librement évoluer aux parois, mais également dans l'obstacle, ce qui est un modèle discutable mais que nous avons choisi comme étant le plus simple à envisager pour commencer.

De manière générale, les équations de Saint-Venant pénalisées s'écrivent sur le domaine total  $\mathcal{D} = \Omega_s \cup \Omega_f$ , où  $\Omega_s$  est le domaine solide et  $\Omega_f$  le domaine fluide :

$$\frac{\partial \vec{V}_\epsilon}{\partial t} + (\omega_\epsilon + f)\vec{n} \times \vec{V}_\epsilon + \nabla \left( \phi_\epsilon + \frac{|\vec{V}_\epsilon|^2}{2} \right) = \nu \nabla^2 \vec{V}_\epsilon - \frac{\chi_c}{\epsilon} (\vec{V}_\epsilon - \vec{V}_0) \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial \phi_\epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi_\epsilon \vec{V}_\epsilon) = 0 \quad (7.2)$$

$\vec{V}(u, v)$  est la vitesse du fluide,  $\omega = \partial_y u - \partial_x v$  la vorticité relative,  $f = 2\Omega$  le paramètre de Coriolis,  $\phi = gh$  le géopotentiel avec  $g$  est l'accélération de la gravité et  $h$  la hauteur du fluide,  $\nu$  la viscosité cinématique. La fonction  $\chi(x, y, t)$  est la fonction caractéristique définissant le domaine solide  $\Omega_s$  qui s'écrit à chaque instant :

$$\chi = \begin{cases} 1 & \forall x, y \in \Omega_s, \\ 0 & \text{partout ailleurs,} \end{cases}$$

$\epsilon$  est un petit paramètre, appelé paramètre de pénalisation, et  $\vec{V}_0$  est la vitesse de déplacement de l'obstacle dans le référentiel tournant.

Ce système d'équations correspond à la première configuration. La fonction caractéristique donnant la position du cylindre,  $\chi$ , varie alors au cours du temps. Pour les vitesses considérées, elle avance d'un pas d'espace tous les 200 à 1000 pas de temps.

Dans le référentiel du cylindre en mouvement par rapport à la cuve, les équations sont modifiées. Le changement de référentiel s'effectue en faisant la transformation suivante :  $\vec{x}_{cyl} = \vec{x}_{labo} - V_0 t$  et  $\vec{V}_{cyl} = \vec{V}_{labo} - \vec{V}_0$ . Le référentiel de la cuve en rotation n'étant pas Galiléen, ce changement de référentiel implique de soustraire aux équations de Saint-Venant le terme correspondant à la force de Coriolis exercée sur le cylindre avançant à la vitesse  $\vec{V}_0$ , soit le terme  $f\vec{n} \times \vec{V}_0$ . L'éponge est modélisée par un terme de pénalisation similaire à celui du cylindre, mais avec une porosité variant moins brutalement. De plus l'éponge permet aussi d'imposer les conditions d'entrée au système : une vitesse unidirectionnelle et uniforme  $\vec{V}_0$  et un géopotentiel constant  $\phi_0$ . Pour imposer une condition sur le géopotentiel, celui-ci est pénalisé uniquement dans l'éponge car nous avons choisi précédemment de laisser le géopotentiel évoluer librement dans l'obstacle solide. Un terme est alors ajouté à l'équation de continuité. Les équations de Saint-Venant pénalisées s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\omega + f) \times \vec{V} - f \times \vec{V}_0 + \nabla \left( \phi + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) &= \nu \nabla^2 \vec{V} - \frac{\chi_c}{\epsilon} \vec{V} - \frac{\chi_e}{\epsilon} (\vec{V} - \vec{V}_0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{V}) &= -\frac{\chi_e}{\epsilon} (\phi - \phi_0) \end{aligned}$$

où  $\chi_c$  est la fonction caractéristique du cylindre et  $\chi_e$  celle de l'éponge. L'éponge est de type Henningson [32], utilisée également par Chomaz [15] (cf. Fig 7.4), sa fonction masque s'écrit :

$$\chi_e(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\delta_1}{x - x_s} + \frac{\delta_1}{x - (x_s + \delta_1)}\right)} & \text{pour } x_s < x < x_s + \delta_1, \\ 1 & \text{pour } x_s + \delta_1 \leq x \leq L_x - \delta_2, \\ \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\delta_2}{L_x - \delta_2 - x} + \frac{\delta_2}{L_x - x}\right)} & \text{pour } L_x - \delta_2 < x < L_x, \\ 0 & \text{partout ailleurs,} \end{cases}$$

$x_s = N_x/2$  est l'abscisse du début de l'éponge,  $\delta_1 = N_x/4$  et  $\delta_2 = 10\Delta x$ . La première partie de l'éponge permet d'absorber les tourbillons et les ondes de gravité produites par le modèle de Saint-Venant.

En suivant le raisonnement d'Angot *et. al.*, on pose  $\vec{V}_\epsilon = \vec{V} + \epsilon \vec{V}'$  et  $\phi_\epsilon = \phi + \epsilon \phi'$ . On



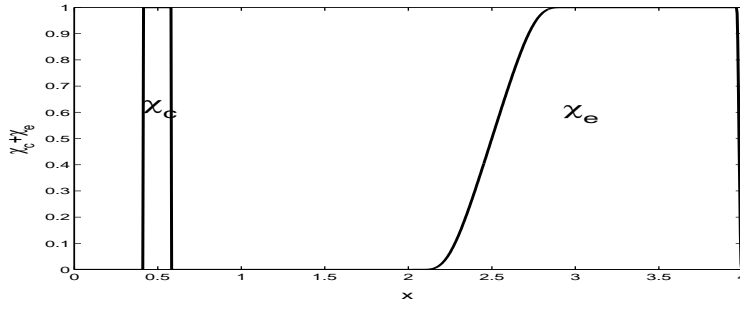


FIG. 7.4 – Fonction caractéristique du cylindre et de l'éponge dans le domaine.

obtient, à partir de l'équation (7.1)-(7.2), en identifiant les termes de même ordre :

$$1 \bullet \quad \mathcal{O}(\epsilon^{-1}) \quad \chi(\vec{V} - \vec{V}_0) = 0 \quad (7.3)$$

$$\text{dans } \Omega_s \Rightarrow \vec{V}_s = \vec{V}_0. \quad (7.4)$$

$$2 \bullet \quad \mathcal{O}(\epsilon^0) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\omega + f)\vec{n} \times \vec{V} + \nabla \left( \phi + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) = \nu \nabla^2 \vec{V} - \chi \vec{V}' \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{V}) = 0 \quad (7.6)$$

$$\text{dans } \Omega_s \Rightarrow f\vec{n} \times \vec{V}_0 + \nabla \phi_s + \vec{V}'_s = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \vec{V}_0 \cdot \nabla \phi_s = 0 \quad (7.8)$$

$$\text{dans } \Omega_f \Rightarrow \vec{V}'_f \text{ et } \phi_f \text{ vérifient les équations de Saint-Venant.} \quad (7.9)$$

$$3 \bullet \quad \mathcal{O}(\epsilon^1) \quad \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} + \omega' \vec{n} \times \vec{V} + (\omega + f) \times \vec{V}' + \nabla \left( \phi' + \frac{|\vec{V}'|^2}{2} \right) = \nu \nabla^2 \vec{V}' \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{V}' + \phi' \vec{V}) = 0 \quad (7.11)$$

Le géopotential dans l'obstacle  $\phi_s$  est déterminé par la relation (7.8) et la relation de continuité  $\phi_s = \phi_f$ . A partir de  $\phi_s$ ,  $\vec{V}'_s$  est obtenu grâce à la relation (7.7). Les équations (7.10)-(7.11) donnent l'évolution de  $\vec{V}'_f$  et  $\phi'_f$  dans le fluide. Dans le référentiel du cylindre,  $\vec{V}_0 = 0$  et les champs de vitesse et de géopotential suivent une loi d'évolution de type Darcy dans le cylindre (Eq. (7.7)).

## Paramètres

Nous rappelons dans ce paragraphe les paramètres du modèle de Saint-Venant (déjà introduits dans le chapitre 2), qui permettent de décrire l'écoulement :

- le nombre de Rossby,

$$Ro = \frac{V_0}{fD},$$

où  $V_0$  est la vitesse de l'obstacle,  $f = 2\Omega$  est la paramètre de Coriolis et  $D$  le diamètre de l'obstacle.

- le nombre de Reynolds,

$$Re = \frac{V_0 D}{\nu},$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique.

- la déviation relative de l'interface,

$$\lambda = \frac{Ro}{Bu}$$

- le nombre de Burger,

$$Bu = \left( \frac{2R_d}{D} \right)^2 \quad \text{avec} \quad R_d = \frac{\sqrt{\phi_0}}{f}$$

où  $\phi_0$  est le géopotentiel moyen.

### 7.2.3 Implémentation numérique

Le terme de pénalisation est un terme linéaire ajouté aux équations de Saint-Venant, le schéma `leapfrog` utilisé pour l'intégration temporelle est instable si on traite ce terme de manière explicite. L'idée originale proposée par Alexandre Azzalini dans sa thèse [6] a été d'intégrer ce terme de manière exacte, comme cela a déjà été fait pour le terme de dissipation visqueuse (cf. chapitre 2). Pour décrire l'implémentation numérique du terme de pénalisation, nous considérons dans un premier temps les équations de Saint-Venant sans dissipation ceci pour simplifier la compréhension du schéma numérique :

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\chi}{\epsilon} X = F(X) \quad (7.12)$$

où  $X = (\vec{V}$  et/ou  $\phi)$  suivant la configuration et  $F(X)$  représente les termes non-linéaires et les termes de pénalisation constants. Le terme  $F(X)$  s'écrit dans le référentiel de la cuve tournante :

$$F(\vec{V}) = -(\omega + f) \times \vec{V} - \nabla(\phi + \frac{|\vec{V}|^2}{2}) + \frac{\chi_c}{\epsilon} \vec{V}_0 = NL(\vec{V}) + P(\vec{V}_0),$$

et dans le référentiel du cylindre :

$$\begin{aligned} F(\vec{V}) &= -(\omega + f) \times \vec{V} + f\vec{n} \times \vec{V}_0 - \nabla(\phi + \frac{|\vec{V}|^2}{2}) + \frac{\chi_e}{\epsilon} \vec{V}_0 = NL(\vec{V}) + P(\vec{V}_0) \\ F(\phi) &= -\nabla(\phi\vec{V}) + \frac{\chi_e}{\epsilon} \phi_0 = NL(\phi) + P(\phi_0), \end{aligned}$$

où  $NL$  désigne les termes non-linéaires et  $P$  les termes liés à la pénalisation.

Une solution de l'équation (7.12) s'écrit :

$$X(t_2) = X(t_1)e^{-\frac{\chi}{\epsilon}(t_2-t_1)} + \int_{t_1}^{t_2} F(X(\tau))e^{-\frac{\chi}{\epsilon}(t_2-\tau)} d\tau. \quad (7.13)$$

Soit en prenant  $t_1 = (n-1)\Delta t$  et  $t_2 = (n+1)\Delta t$ , et en approximant l'intégrale par un rectangle, on a :

$$X^{n+1} = X^{n-1}e^{-2\frac{\chi}{\epsilon}\Delta t} + 2\Delta t F(X^n)e^{-\frac{\chi}{\epsilon}\Delta t} \quad (7.14)$$

$$X^{n+1} = X^{n-1}e^{-2\frac{\chi}{\epsilon}\Delta t} + 2\Delta t (NL(X^n) + P(X_0))e^{-\frac{\chi}{\epsilon}\Delta t}. \quad (7.15)$$

Cette technique remédie au problème de stabilité lié à l'intégration des termes linéaires par le schéma  $\text{leapfrog}$ . Cependant, le terme  $2\Delta t P(X_0)e^{-\frac{\chi}{\epsilon}\Delta t}$  est de la forme  $2\Delta t/\epsilon$  et impose que  $\epsilon \geq 2\Delta t$ , pour des raisons de stabilité. Pour obtenir la solution avec un paramètre de pénalisation très petit, il faut donc un temps d'intégration très long.

De plus, les premières simulations réalisées avec  $\epsilon = 2\Delta t$  nous donnaient une erreur sur la vitesse imposée à l'obstacle de 4%. Pour augmenter la précision du calcul, nous avons calculé exactement l'intégrale  $\int_{t_1}^{t_2} P(X(\tau))e^{-\frac{\chi}{\epsilon}(t_2-\tau)}d\tau$ . En supposant que pendant  $t_2 - t_1 = 2\Delta t$  le masque  $\chi$  n'a pas bougé, l'intégrale s'écrit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\chi}{\epsilon} X_0 e^{-\frac{\chi}{\epsilon}(t_2-\tau)} d\tau \quad (7.16)$$

$$= \frac{\chi}{\epsilon} X_0 \int_{(n-1)\Delta t}^{(n+1)\Delta t} e^{-\frac{\chi}{\epsilon}(t_2-\tau)} d\tau \quad (7.17)$$

$$= \chi X_0 (1 - e^{-\frac{2\Delta t \chi}{\epsilon}}). \quad (7.18)$$

L'erreur faite sur l'approximation de cette intégrale par un rectangle, pour l'écoulement dans l'obstacle où  $\chi = 1$ , est :

$$erreur = \left| X_0 (1 - e^{-\frac{2\Delta t}{\epsilon}}) - X_0 \frac{2\Delta t}{\epsilon} e^{-\frac{\Delta t}{\epsilon}} \right|$$

Donc  $erreur \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty$  et pour  $\epsilon = 2\Delta t$  on retrouve l'erreur de 4% que nous avons dans nos simulations. De plus, en intégrant directement l'intégrale de  $P$ , on lève la contrainte liant  $\Delta t$  et  $\epsilon$  ce qui permet de choisir  $\epsilon$  très petit. La Figure 7.5 montre la comparaison d'une coupe transverse d'un écoulement entre deux parois solides avançant à la vitesse  $V_0$ . Les traits pointillés correspondent au calcul approché de l'intégrale du terme de pénalisation constant. La vitesse dans le mur est 4% inférieure à la vitesse théoriquement imposée  $V_0$ . Le trait continu correspond au calcul exact de l'intégrale, il n'y a plus d'erreur dans la vitesse imposée à l'obstacle.

Finalement, l'intégration temporelle du terme de pénalisation s'écrit :

$$X^{n+1} = X^{n-1} e^{-2\frac{\chi}{\epsilon}\Delta t} + 2\Delta t NL(X^n) e^{-\frac{\chi}{\epsilon}\Delta t} + \chi X_0 (1 - e^{-\frac{2\Delta t \chi}{\epsilon}})$$

## Déroulement du calcul

Le principe de la méthode pseudo-spectrale est de calculer les dérivées dans l'espace spectrale et les produits dans l'espace physique. L'intégration spatiale est la même que celle présentée au chapitre 2. Au début de la boucle temporelle, on dispose des champs spectraux  $\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{\phi}$  aux instants  $n-1$  et  $n$ . Le déroulement du calcul se fait selon les étapes suivantes :

- Sauvegarde des champs aux instants  $n-1$  et  $n$  pour l'intégration temporelle.
- Calcul de la vorticité relative :

$$\widehat{\omega}^n = \frac{\partial v^n}{\partial x} - \frac{\partial u^n}{\partial y} = ik\widehat{v}^n - i\alpha h\widehat{u}^n.$$

- Passage dans l'espace physique, on dispose de quatre champs physiques  $\omega^n, u^n, v^n, \phi^n$

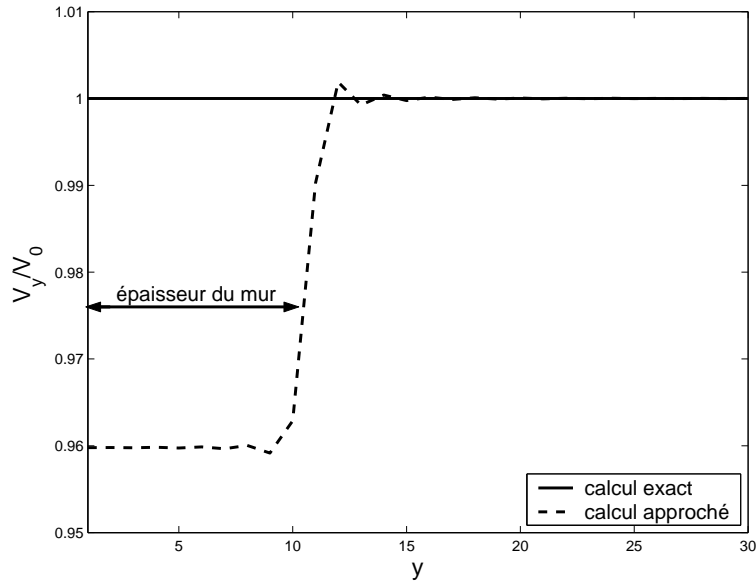


FIG. 7.5 – Coupe transverse, à  $t = 10\Delta t$ , d'un écoulement dans un canal dont les murs avancent à la même vitesse  $V_0$  que l'écoulement.

- Calcul des termes non-linéaires :  $((\omega + f)u)^n$  ou  $((\omega + f)u)^n - fu_0$  suivant la configuration,  $((\omega + f)v)^n$ ,  $(\phi + \frac{u^2+v^2}{2})^n$ ,  $((\phi + \phi_0)u)^n$ ,  $((\phi + \phi_0)v)^n$ .
- Retour dans l'espace spectral, on obtient les cinq champs spectraux suivants :  $((\omega + f)v)^n$ ,  $((\omega + f)u)^n$ ,  $(\phi + \frac{u^2+v^2}{2})^n$ ,  $((\phi + \phi_0)u)^n$ ,  $((\phi + \phi_0)v)^n$ .
- Calcul des dérivées spatiales :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \widehat{\phi + \frac{u^2+v^2}{2}} \right) &= -i \frac{2\pi}{L_x} k \left( \widehat{\phi + \frac{u^2+v^2}{2}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \widehat{\phi + \frac{u^2+v^2}{2}} \right) &= -i \frac{2\pi}{L_x} \alpha h \left( \widehat{\phi + \frac{u^2+v^2}{2}} \right) \\ \frac{\partial(\widehat{(\phi + \phi_0)u})}{\partial x} + \frac{\partial(\widehat{(\phi + \phi_0)v})}{\partial y} &= -i \frac{2\pi}{L_x} k \widehat{\phi u} - i \frac{2\pi}{L_x} \alpha h \widehat{\phi v}. \end{aligned}$$

On dispose alors des termes non-linéaires dans l'espace spectral  $\widehat{NL(\vec{V})}$  et  $\widehat{NL(\phi)}$  définis plus haut.

Pour l'intégration temporelle des équations, on suit la procédure suivante :

- On repasse dans l'espace physique pour calculer les termes  $X^{n-1}e^{-2\Delta t \frac{\chi}{\epsilon}}$ ,  $NL(X^n)e^{-\Delta t \frac{\chi}{\epsilon}}$  et  $\chi X_0(1 - e^{-\frac{2\Delta t \chi}{\epsilon}})$  pour  $X = u, v, \phi$ .
- Retour dans l'espace spectral pour calculer l'intégration du terme de dissipation :

$$\widehat{X^{n+1}} = X^{n-1} \widehat{e^{-\frac{2\Delta t \chi}{\epsilon}}} e^{-2\nu|\vec{K}|^2 \Delta t} + 2\Delta t \widehat{NL(X^n)} e^{-\Delta t \frac{\chi}{\epsilon}} e^{-\nu|\vec{K}|^2 \Delta t} + \chi X_0 \widehat{(1 - e^{-\frac{2\Delta t \chi}{\epsilon}})}$$

avec  $\nu$  la viscosité cinématique et  $\vec{K}$  le nombre d'onde.

## Coefficients de Lanczos

Une limitation importante à l'utilisation d'une méthode de pénalisation avec un code spectral est la représentation avec les coefficients de Fourier de la fonction caractéristique  $\chi$ . En effet, l'approximation d'une fonction discontinue par un nombre fini de sinus et cosinus présente nécessairement des oscillations de Gibbs, observées sur la figure 7.6 en trait vert, dont l'amplitude est constante. Pour éliminer ce phénomène lors de la visualisation

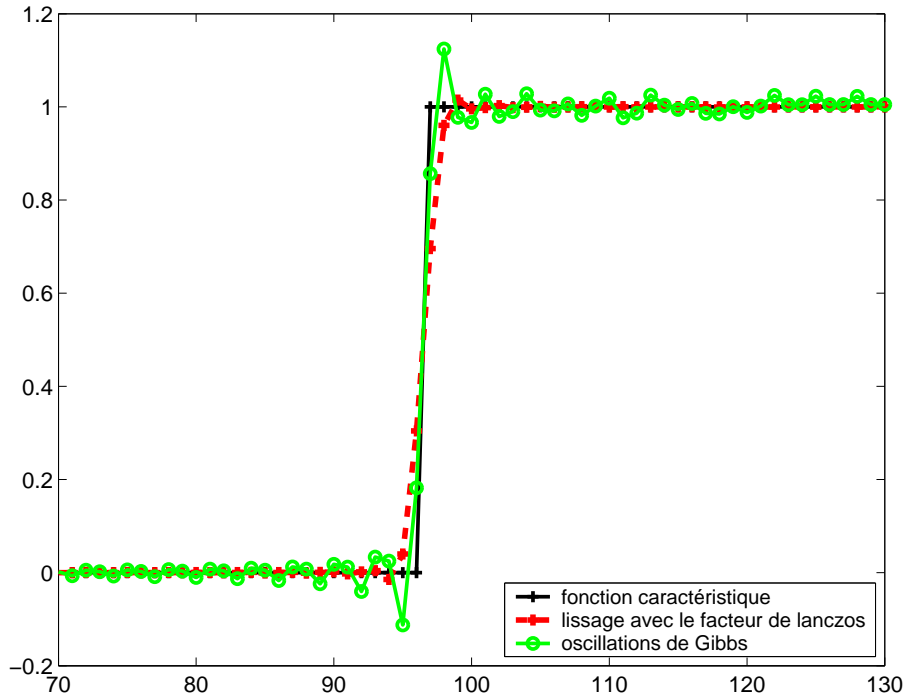


FIG. 7.6 – Comparaison d'une fonction caractéristique (+ noir) approchée par une série de Fourier (o vert), et approchée par une série de Fourier dont les coefficients ont été lissés avec le facteur de Lanczos.

des résultats (mais non lors du calcul des solutions), on utilise la technique des facteurs sigma de Lanczos [45, 30]. Cette technique consiste à multiplier les coefficients de Fourier par  $\text{sinc}(k\pi/N_x) \text{sinc}(h\pi/N_y)$  où  $(k, h)$  sont les nombres d'onde dans les directions  $x$  et  $y$ , et  $N_x, N_y$  le nombre total de coefficients. La décomposition en série de Fourier s'écrit alors :

$$X(\vec{x}) = \sum_{k=-\frac{N_x}{2}-1}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{h=-\frac{N_y}{2}-1}^{\frac{N_y}{2}-1} \frac{\text{sin}\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{\frac{k\pi}{N}} \frac{\text{sin}\left(\frac{h\pi}{N}\right)}{\frac{h\pi}{N}} \hat{X}(\vec{K}) e^{2i\pi\left(\frac{kx}{L_x} + \frac{hy}{L_y}\right)}$$

L'approximation de la fonction caractéristique avec les facteurs  $\sigma$  de Lanczos est représentée sur la figure 7.6 en trait rouge. Cette technique permet d'atténuer particulièrement bien les oscillations de Gibbs. Cependant, la discontinuité est étalée dans le sens où elle est représentée sur quatre points de grille avec la technique de Lanczos et sur deux avec une série de Fourier classique (pour un signal échantillonné sur 256 points). Pour cette raison, nous avons utilisé cette technique uniquement pour la visualisation des champs, en sortie du code, et non pour le calcul.

La figure 7.7 montre deux champs de vorticité aux mêmes instants pour une même gamme de paramètres, l'un est brut, l'autre est filtré.

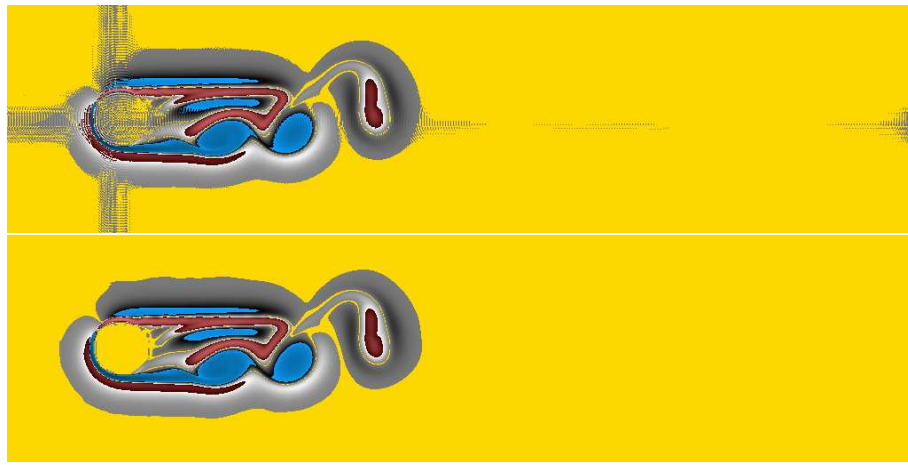


FIG. 7.7 – Champ de vorticité brut (haut) et filtré avec les coefficients de Lanczos (bas) pour le même cas,  $Re = 400$ ,  $Bu = 0.1$  et  $Ro = 0.1$ .

## 7.3 Convergence

### 7.3.1 Résolution

Pour tester la convergence du code, nous avons réalisé deux simulations à des résolutions différentes pour  $Re = 400$ ,  $Ro = 0.24$  et  $Bu = 1$ . Le domaine est rectangulaire et le référentiel est celui du laboratoire. La première résolution est  $1024 \times 256$  pour une taille de boîte  $2\pi \times \pi/2$ , le pas de grille est donc  $\Delta x = 2\pi/1024 = 6.1 \cdot 10^{-3}$ . La deuxième résolution est  $2048 \times 512$  pour la même taille de boîte, le pas de grille est alors  $\Delta x = 3.1 \cdot 10^{-3}$ . La Figure 7.8 présente les fluctuations de vitesse en un point, un diamètre derrière le cylindre pour les deux résolutions.

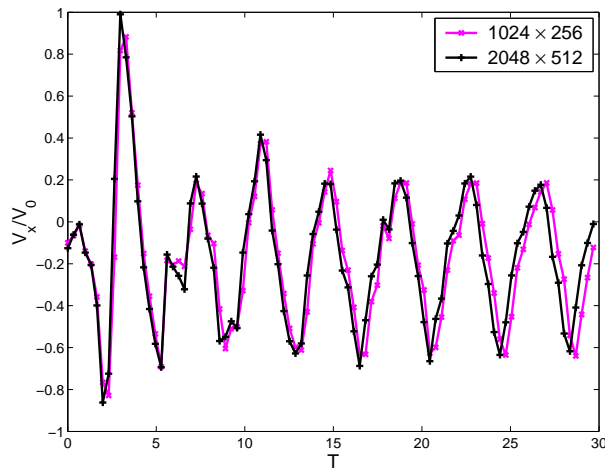


FIG. 7.8 – Vitesse longitudinale en un point, situé un diamètre derrière le cylindre, pour une résolution de  $1024 \times 256$  et  $2048 \times 512$ .

En diminuant par deux la résolution, on obtient une erreur en norme  $L^2$ ,  $err = \sum_{n=1,N} (Vx_{1024 \times 256}(n) - Vx_{2048 \times 512}(n))^2 / \sum_{n=1,N} (Vx_{2048 \times 512}(n))^2 = 0.09$ .

### 7.3.2 Paramètre de pénalisation

Pour tester l'efficacité de la méthode de pénalisation et la convergence de la vitesse dans l'obstacle, nous avons fait varier le paramètre  $\epsilon$  et le pas de temps  $\Delta t$  dans le cas d'un écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre dans un canal (Fig. 7.9). La résolution est de  $1400 \times 256$  pour une taille de boîte de  $2.24 \times 0.41$ . Une éponge est implémentée en bout de domaine pour imposer une vitesse unidirectionnelle parabolique à l'entrée. Le nombre de Reynolds est  $Re = 20$  et l'écoulement est donc stationnaire. Le régime est incompressible.

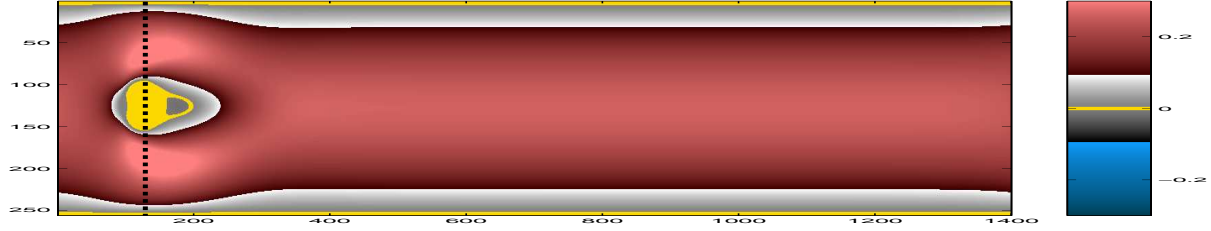


FIG. 7.9 – Champ de vitesse longitudinale du cas test pour  $Re = 20$ .

Pour  $\Delta t$  fixé la vitesse tend vers zéro quand le paramètre  $\epsilon$  devient de plus en plus petit (Fig. 7.10(a)). Pour  $\epsilon = 2.7 \cdot 10^{-4}$ , la vitesse dans l'obstacle vaut 2% seulement de la vitesse maximale. Cependant, pour un paramètre  $\epsilon$  fixé et différents pas de temps  $\Delta t$ , la vitesse n'est pas constante dans l'obstacle, mais diminue également lorsque le pas de temps  $\Delta t$  diminue. La vitesse dans l'obstacle ne dépend donc pas uniquement du paramètre  $\epsilon$ ,

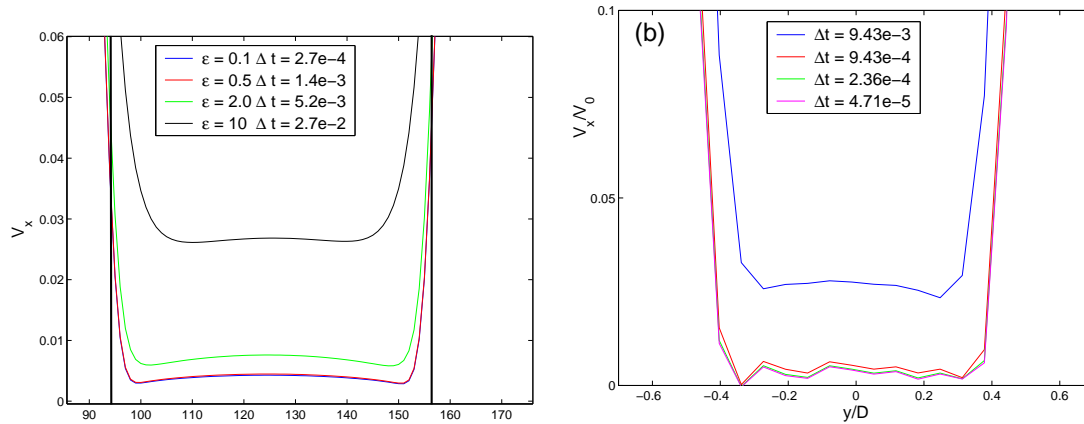


FIG. 7.10 – Champ de vitesse longitudinale du cas test.

mais est proportionnelle au rapport  $\epsilon/(\Delta t/2)$  pour  $\epsilon$  plus grand que  $\Delta t/2$ . Lorsque le paramètre  $\epsilon$  est plus petit que  $\Delta t/2$ , la vitesse dans l'obstacle est limitée par le pas de temps  $\Delta t$ . Cette relation est illustrée par la figure 7.11 qui représente la vitesse moyenne dans l'obstacle en fonction du rapport  $\epsilon/(\Delta t/2)$ .

## 7.4 Validation de l'éponge

Nous présentons deux simulations réalisées pour  $Re = 400$ ,  $Ro = 0.24$  et  $Bu = 1$ . On se place dans le référentiel du cylindre, une simulation est réalisée avec éponge, l'autre sans.

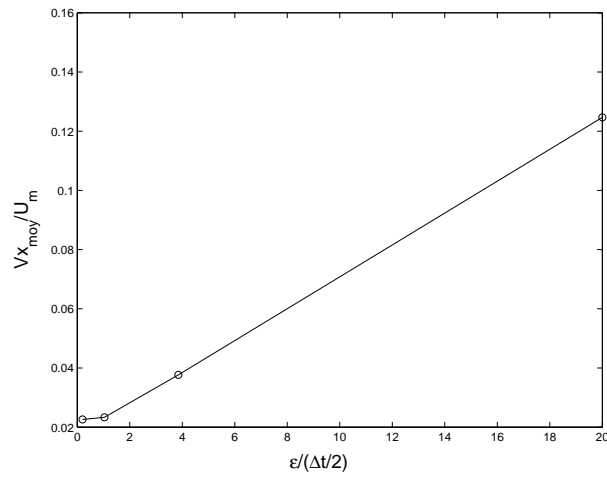


FIG. 7.11 – Vitesse moyenne dans l’obstacle en fonction du rapport  $\epsilon/(\Delta t/2)$ .

La résolution est  $1024 \times 256$ , la taille du domaine  $2\pi \times \pi/2$  et les conditions aux limites sont périodiques. La deuxième simulation est identique, mais une éponge est implémentée sur toute la deuxième moitié du domaine,  $x_s = L_x/2$ ,  $\delta_1 = L_x/4$  et  $\delta_2 = 10\Delta x$ . Les champs de vorticité au même instant  $t$  sont représentés sur la figure 7.12. Les champs sont très proches. L’éponge, en absorbant les tourbillons, crée de la vorticité de signe opposé de manière à annuler la circulation. Cependant cette création de vorticité ne semble pas affecter l’écoulement en amont. La norme  $L^2$  de l’erreur sur le champ de vorticité dans la zone sans éponge,  $\sum_{i,j}(vort(i,j) - vort_{\text{éponge}}(i,j))^2 / \sum_{i,j}(vort(i,j))^2$  est de 0.14.

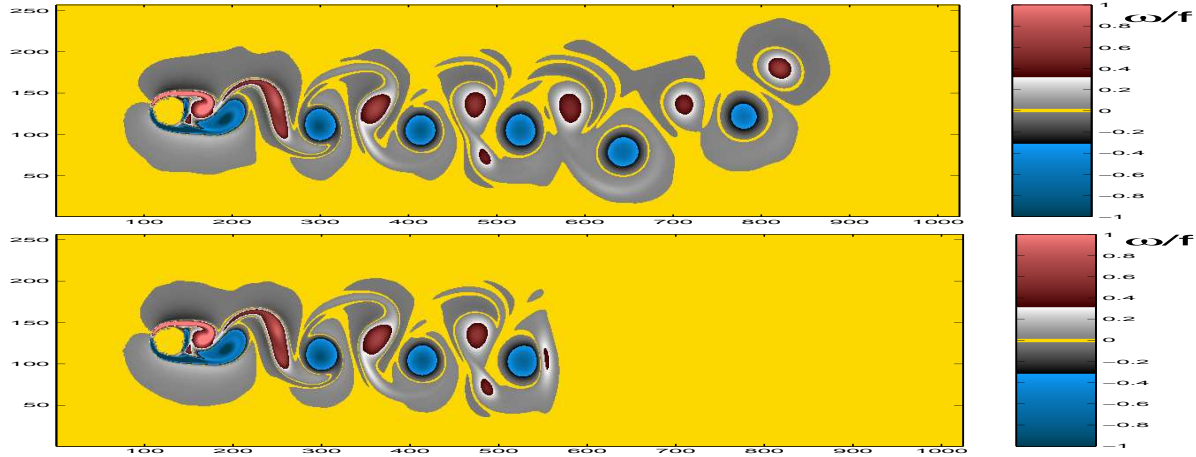


FIG. 7.12 – Champ de vorticité au même instant  $t$  pour  $Re = 400$ ,  $Bu = 1.0$  et  $Ro = 0.24$ , sans éponge en bout de domaine (haut) et avec éponge (bas).

L’éponge pourtant, tend à décaler les structures de 3 à  $5\Delta x$ .



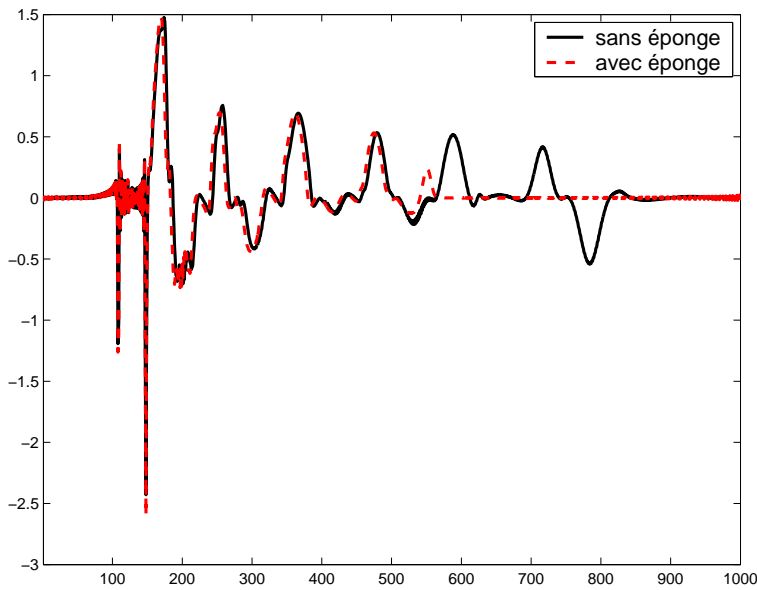


FIG. 7.13 – Coupe longitudinale dans le champ de vorticité pour le cas avec et sans éponge.

## 7.5 Comparaison avec les expériences

### 7.5.1 cas quasi-géostrophique

Nous avons réalisé une simulation dans les mêmes conditions que les expériences décrites au chapitre 3, dans un régime quasi-géostrophique. On se place dans le référentiel de la cuve. Le domaine est rectangulaire de dimensions  $128 \times 48\text{cm}$ , identiques à celles de la cuve. Le cylindre, de diamètre  $D = 7\text{cm}$ , est translaté à vitesse constante  $\vec{V}_0$ . Les conditions aux limites sont des conditions de non pénétration sur les quatre côtés de la cuve, imposées avec la méthode de pénalisation.

Dans l'expérience, les champs de vitesse sont obtenus par une méthode de Particle Image Velocimetry (PIV). Les champs de vorticité sont dérivés des champs de vitesse.

La première simulation est réalisée dans un régime quasi-géostrophique,  $Bu = 2$ ,  $Ro = 0.06$  et  $Re = 200$ . La figure 7.14 représente l'évolution temporelle du champ de vorticité. Après une phase transitoire au cours de laquelle une cellule de recirculation se forme et s'étire, cette cellule se déstabilise et une allée de tourbillons de type von Karman apparaît. Les cyclones et les anticyclones sont émis alternativement de chaque côté du cylindre.

La figure 7.15 montre l'évolution du champ de vorticité dans les simulations numériques et l'expérience de laboratoire, dans une zone de la cuve qui correspond à la zone d'observation de la caméra dans l'expérience. La palette de couleur et la taille de la zone sont identiques. Le temps d'évolution, la taille des structures, la distance entre chaque structure et l'ordre de grandeur de la vorticité sont très proches dans les simulations numériques et dans les expériences de laboratoire. Cependant, les tourbillons formés juste derrière l'obstacle sont plus allongés dans l'expérience que dans les simulations. Cette différence peut être expliquée par le fait que l'interface passe en dessous du cylindre dans les expériences et peut modifier l'écoulement proche du cylindre.

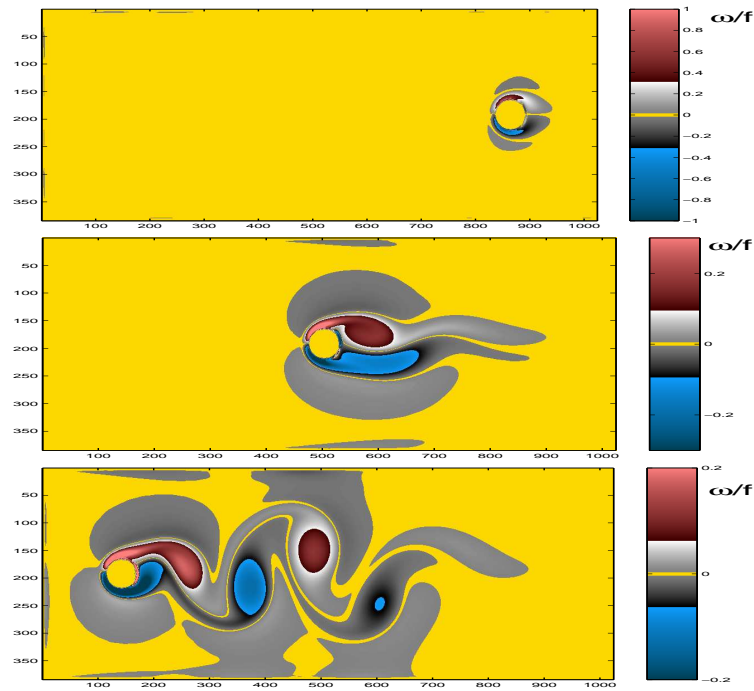


FIG. 7.14 – Evolution temporelle de la vorticité pour  $Re = 200$ ,  $Ro = 0.06$  et  $Bu = 2$ , aux temps  $T = 0\tau$ ,  $T = 14\tau$  et  $T = 29\tau$ .

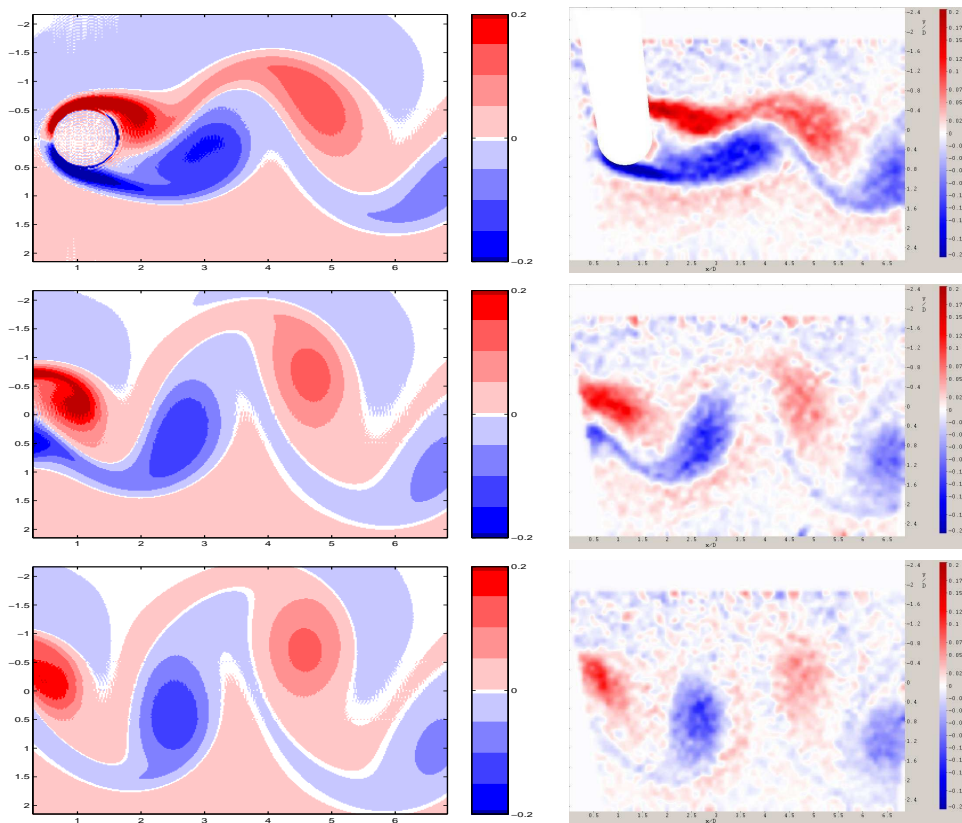


FIG. 7.15 – Comparaison des simulations numériques et expériences de laboratoire pour  $Re = 200$ ,  $Ro = 0.06$  et  $Bu = 2$  à  $T = 0\tau$ ,  $T = 3\tau$  et  $T = 5.2\tau$ .

## 7.5.2 cas frontal

Nous avons également réalisé des simulations numériques dans des régimes frontaux. La résolution est de  $1024 \times 256$  pour une taille de boîte de  $2\pi \times \pi/2$ . On se place dans le référentiel de la cuve et l'obstacle est translaté à vitesse constante  $V_0$ . Les conditions aux limites sont périodiques.

On observe également, dans les simulations numériques, une forte asymétrie cyclone-anticyclone dans le sillage. Lorsque la déviation de l'interface augmente, les cyclones deviennent plus étirés et plus déformés que les anticyclones et les tourbillons se détachent plus en aval du cylindre. Cependant pour observer une allure de sillage très proche de celle présentée sur la figure 7.16, on est obligé de considérer des déviations de l'interface plus importantes encore.

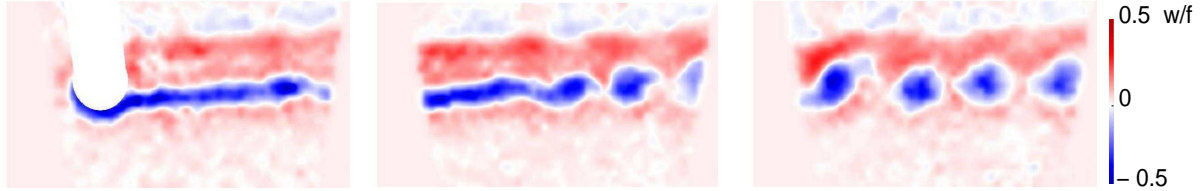


FIG. 7.16 – Champ de vorticité mesuré par PIV pour  $Bu = 0.11$ ,  $Ro = 0.19$  et  $Re = 800$ .

La figure 7.17 montre le champ de vorticité d'une simulation réalisée à  $Bu = 0.1$ ,  $Ro = 0.24$  et  $Re = 250$ , donc la déviation de la surface  $\lambda = Ro/Bu = 2.4$ . Une forte asymétrie cyclone-anticyclone apparaît dans le sillage, les anticyclones sont bien circulaires alors que les cyclones sont très déformés. Comme dans les expériences, les tourbillons se détachent à une distance d'environ deux diamètres du cylindre et des ondes se forment dans la zone de cisaillement. En considérant la distance entre les anticyclones,  $L_x$ , on estime un nombre de Strouhal :

$$St = \frac{D}{L_x} \left(1 - \frac{V_d}{V_0}\right) = 0.65$$

où  $D$  est le diamètre du cylindre et  $V_d$  la vitesse de dérive des tourbillons. La période de formation des tourbillons est donc du même ordre que celle mesurée dans les expériences,  $St = 0.6$  pour une déviation de la surface  $\lambda = Ro/Bu = 1.7$ .

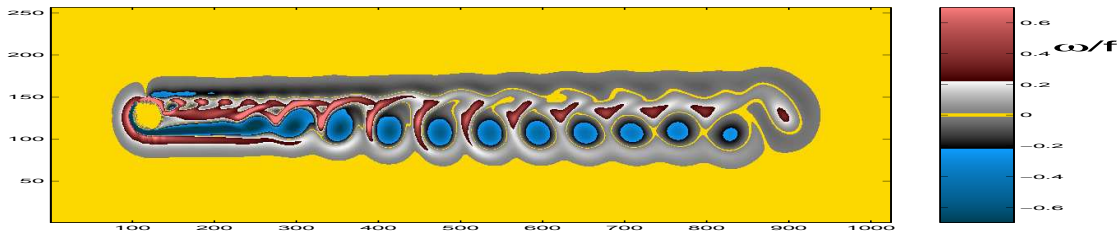


FIG. 7.17 – Champ de vorticité d'une simulation numérique pour  $Bu = 0.1$ ,  $Ro = 0.24$  et  $Re = 250$ .

Par contre, le profil de vitesse derrière l'obstacle diffère. La figure 7.18 présente le profil de vitesse derrière le cylindre, filtré en temps pour éliminer les ondes, pour la simulation

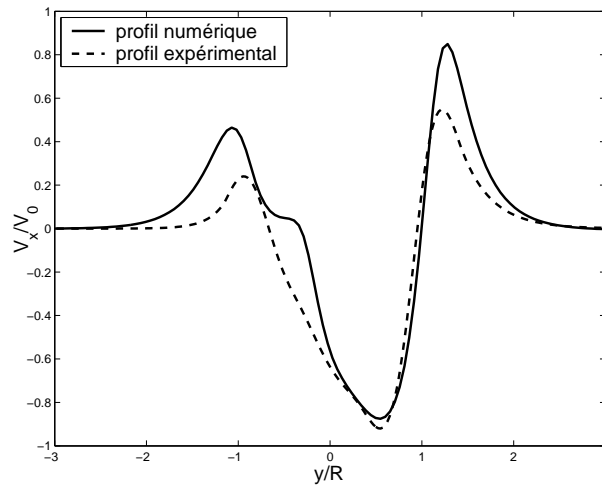


FIG. 7.18 – Comparaison des profils de vitesse derrière l’obstacle pour une simulation numérique réalisée à  $Bu = 0.1$ ,  $Ro = 0.24$  et  $Re = 250$  et une expérience de laboratoire à  $Bu = 0.11$ ,  $Ro = 0.19$  et  $Re = 800$ .

numérique et les expériences de laboratoire. Le cisaillement est plus important dans les simulations numériques et la partie cyclonique de l’écoulement est différente.

Le fait de ne pas retrouver exactement la même structure de sillage pour des paramètres identiques peut être expliqué par la configuration bi-couche de l’expérience. En effet, dans des régimes frontaux, on a vu au chapitre 4 que l’interface entre la couche supérieure et inférieure, dans l’expérience, passe sous le cylindre et provoque de fortes vitesses verticales. L’écoulement n’est plus hydrostatique dans cette zone. D’autre part le modèle de Saint-Venant est consistant pour décrire la dynamique de la couche du dessus dans une certaine gamme de paramètres donnée par le critère de Cushman-Roisin (Chap. 4). Or dans les paramètres que l’on considère, il est possible que ce critère ne soit pas complètement satisfait.

Cependant, on retrouve avec les simulations numériques l’évolution du nombre de Strouhal observée dans les expériences de laboratoire. La figure 7.19 montre les valeurs du nombre de Strouhal pour différentes simulations numériques réalisées à des nombres de Reynolds variant entre 200 et 300, comparées aux valeurs expérimentales. Dans un régime quasi-géostrophique, le nombre de Strouhal est proche des valeurs observées en écoulement 2D pour ces nombres de Reynolds. Par contre, lorsque la déviation relative de la surface augmente, le nombre de Strouhal augmente très fortement en suivant la même évolution.

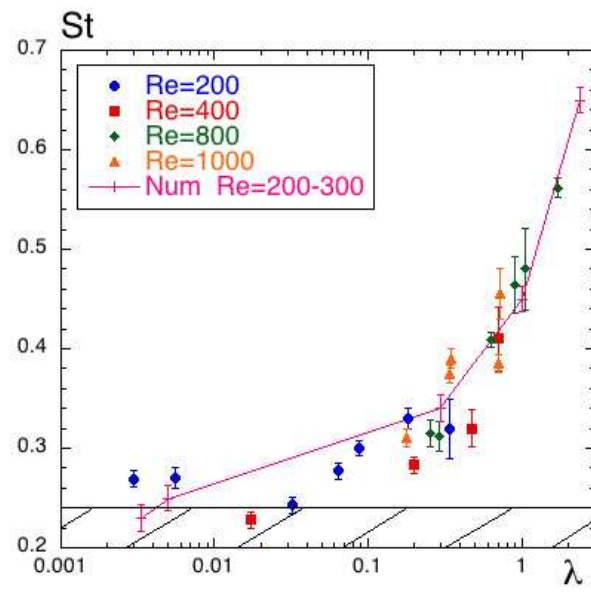


FIG. 7.19 – Evolution du nombre de Strouhal en fonction du paramètre  $\lambda$ . Comparaison entre les valeurs mesurées dans les expériences de laboratoire et les simulations numériques.

s Nous présentons dans cette section un résumé sur la méthode numérique, publié à l'occasion de la Troisième conférence Internationale sur les écoulements peu profonds à Delft en juin 2003.

## 7.6 Proceeding : Rotating shallow water flow past an obstacle : numerical and laboratory experiments

**G. Perret, M. Farge, A. Stegner, A. Azzalini**

*Laboratoire de Météorologie Dynamique, CNRS, ENS, 24, rue Lhomond, 75005 Paris, France.*

**K. Schneider**

*Laboratoire de modélisation et de simulation numérique, CNRS, Marseille.*

### Abstract

We present a new numerical method to compute the rotating shallow water equations past a cylindrical obstacle which is impulsively started. It combines a pseudo-spectral scheme and a volume penalization method to take into account the no-slip boundary conditions on the obstacle. We present here several experiments to study the effect of rotation on the von Karman street which develops in the wake of the obstacle. In order to check the numerical results, we also perform several laboratory experiments using a two-layer stratified flow on a turn-table where a cylindrical obstacle is translated. We qualitatively compare the vorticity fields obtained by particle image velocimetry (PIV) with those computed by the numerical experiments for the same set of parameters.

### 7.6.1 Introduction

In contrast to the incompressible two-dimensional von Karman street, wakes encountered in geophysical flows are affected by the Earth's rotation and the vertical stratification. We use the rotating shallow-water model as the simplest model to account for the influence of the Coriolis force and allow divergent motions.

Previous studies have shown that an asymmetry could occur between vortices of opposite signs when the characteristic scale is larger than the Rossby deformation radius, the scale above which the effect of the Earth's rotation becomes significant. Numerical simulations of decaying shallow water turbulence have shown significant differences in shape and strength between cyclonic and anticyclonic vortices [26, 57]. Namely, at scales larger than the Rossby deformation radius, anticyclones tend to be more circular and less distorted than their cyclonic counterparts. Moreover, the same cyclonic-anticyclonic asymmetry has also been observed in other rotating shallow water flows for isolated vortices [66] and jets [58]. Such effect can also be observed in the ocean in the wake of islands whose size is larger than the Rossby deformation radius (Figure 1).

The numerical experiments presented in this paper are based on a new method which combines a pseudo-spectral scheme with a volume penalization to take into account the presence of an obstacle in the flow. It has already been used to compute a two-dimensional incompressible flow past an impulsively started cylinder [60]. We extend this method to the case of two-dimensional compressible flows in the context of the shallow water approximation. The laboratory experiments are performed with a two-layers stratified

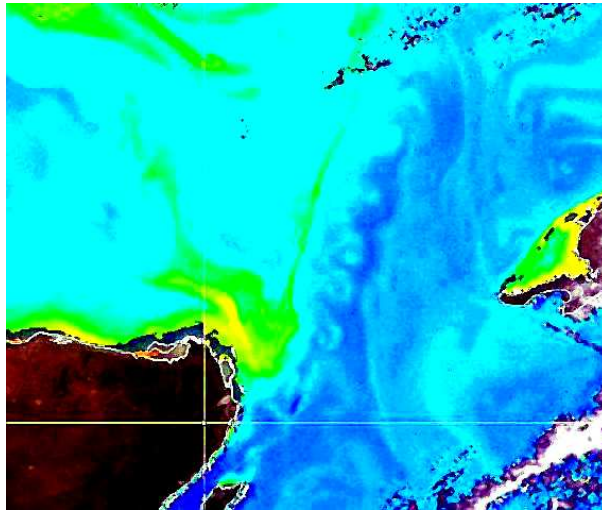


Figure 1. Oceanic wake past Isla Mujeres, an island off the peninsula of Yucatan (Mexico). The color corresponds to the phytoplankton concentration which is passively advected by the flow. We observe that the anticyclonic vortices are quasi-circular while the cyclones are elongated.

flow and the obstacle is translated in the upper layer only, while the bottom layer remains almost at rest in the rotating frame.

## 7.6.2 Model

### *Theoretical model*

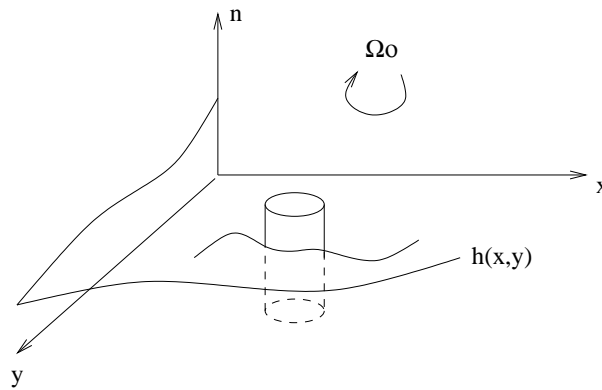


Figure 2. Shallow water model

We use the shallow water equations in a rotating frame which rotates clockwise to correspond to the Earth's rotation in the Southern hemisphere. These equations modelize the flow past an obstacle, taken here as a cylinder :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + f \vec{n} \times \vec{V} + \nabla \phi = \nu \nabla^2 \vec{V}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{V}) = 0$$

where  $\vec{V}(x, y)$  is the velocity,  $\phi(x, y) = gh(x, y)$  the geopotential with  $h$  the free surface height and  $g$  the Earth's gravity,  $f = 2\Omega_0$  the coriolis parameter with  $\Omega_0$  the Earth's

rotation,  $\nu$  the kinematic viscosity and  $\vec{n}$  the normal to the plane (x,y).

Taking the diameter  $D$  of the cylinder as the reference length scale and the velocity of the obstacle  $\vec{U}$  as the reference velocity scale, we consider the three adimensional parameters :

- the Reynolds number, which is the ratio of the advective and viscous terms,  $Re = \frac{UD}{\nu}$ ,
- the Rossby number, which is the ratio of the advective and Coriolis terms,  $Ro = \frac{U}{D\Omega_0}$ ,
- the Burger number, which is the ratio of the gravity and rotation effects,  $Bu = \left(\frac{2R_d}{D}\right)^2$ , where  $R_d$  is the deformation radius  $R_d = \sqrt{\phi}/f$ .

### ***Numerical model***

The shallow water equations are solved with a pseudo-spectral scheme for the space integration and a leapfrog scheme for the time integration [26]. The presence of the obstacle is imposed by using a volume penalisation method [5, 40, 60], which considers both the fluid and the solid as the same porous medium, whose permeability tends to zero in the solid domain  $\Omega_s$ , and to infinity in the fluid domain  $\Omega_f$ . For this a Darcy's force term is added to the momentum equation, which is solved in the whole domain  $\Omega = \Omega_s + \Omega_f$ , considering periodic boundary conditions :

$$\vec{F} = -\frac{\chi}{\epsilon}(\vec{V} - \vec{U})$$

where  $\epsilon \ll 1$  the penalization parameter and  $\chi$  is the characteristic function of the obstacle such that :

$$\chi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } \vec{x} \in \bar{\Omega}_s, \\ 0 & \text{for } \vec{x} \in \bar{\Omega}_f. \end{cases}$$

Therefore  $\vec{V}$  verifies the shallow water equations in  $\Omega_f$  and is forced to  $\vec{U}$  in  $\Omega_s$ . The effect of the penalized term is similar to having no-slip boundary conditions on the obstacle, which results in the formation of boundary layers and production of vorticity there. The penalized shallow water equations in the rotating frame are :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + f \vec{n} \times \vec{V} + \nabla \phi = \nu \nabla^2 \vec{V} - \frac{\chi}{\epsilon}(\vec{V} - \vec{U})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{V}) = 0$$

where  $\vec{U}$  is the velocity of the obstacle relative to the rotating frame. The initial conditions are  $\vec{V}(t = 0) = \vec{U}$  in the obstacle and zero elsewhere, and the free surface height is constant  $\phi(t = 0) = \phi_0 = 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ , which gives a velocity of the gravity waves  $c = \sqrt{\phi_0} = 316 \text{ m s}^{-1}$ .

The space discretization is  $\Delta x = \frac{L_x}{1024} = \frac{\pi}{128}$  in the spanwise direction and  $\Delta y = \frac{L_y}{256} = \frac{\pi}{128}$  in the streamwise direction with the domain length  $L_x, L_y$  such that  $L_y = 2\pi$  and  $L_x = 4L_y$ . The time step is chosen to be smaller than the characteristic time of the fastest inertio-gravity waves  $\Delta t = 0.25(1/\sqrt{(\frac{2\pi}{\Delta x})^2 \phi_0 + f^2})$ . The penalisation parameter is very small and such that  $\epsilon = 2\Delta t$ .



The convergence of the solutions of the penalized equations towards the solutions of the non-penalized equations has been proven for the Navier-Stokes equations [2], but not yet for the rotating shallow water equations. This is the reason why we have chosen to compare the numerical results with those of laboratory experiments, in order to validate the penalization method in this new context where both vortices and waves are dynamically important. The volume penalization presents the advantage of taking into account obstacles or complex geometries while keeping a Cartesian mesh and using a high-order pseudo-spectral scheme.

### **Laboratory model**

The experiments are performed in a  $48\text{ cm} \times 130\text{ cm}$  tank mounted on a  $1.5\text{ m}$  diameter turn-table which is located at the Department of Mechanics (UME) of ENSTA, Palaiseau. The upper plate rotates clockwise, which corresponds to the rotation in the Southern hemisphere, and is supported by a thin air layer in order to reduce friction and avoid mechanical vibrations at the inertial frequency.

To satisfy the shallow water conditions the fluid is stratified with two layers : a thin upper layer of density  $\rho_1$  and a thick lower layer of higher density  $\rho_2 > \rho_1$  (cf. Figure 3). The difference of density between the upper layer and the air above enables us to neglect the deformation of the free surface compared to the deformation of the interface between the two layers. As the upper layer is thinner ( $h = 2.5\text{ cm}$ ) than the bottom layer ( $H = 20\text{ cm}$ ), the dynamics in the latter can be neglected in first approximation. To guaranty that horizontal scales dominate vertical scales, as required by the shallow water approximation, we use a cylinder whose diameter ( $D = 7\text{ cm}$ ) is larger than the upper layer thickness. Since the cylinder is translated in the upper layer only, the resulting dynamics is similar to a rotating shallow flow with one free interface.

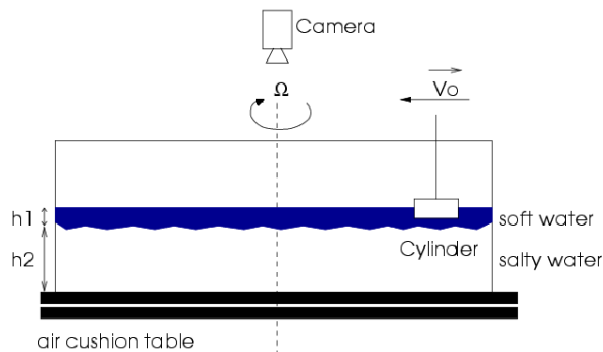


Figure 3. Laboratory experiment

When the bottom layer has reached solid rotation, we slowly inject the upper layer. We wait until the upper layer attains solid rotation and we then impulsively translate the cylinder in the upper layer at velocity  $\vec{U}$ . Buoyant particles are added for visualization and a CCD camera, fixed above the tank and rotating with it, captures the motion of particles which are lightened by a horizontal laser sheet. A standard PIV software is used to compute the velocity field and deduce the vorticity and the streamfunction fields.

### 7.6.3 Results

#### *Numerical results*

In this paper we study the shallow water flow past an impulsively started cylinder in a rotating frame. We consider the following parameters : Reynolds number 400, Rossby number 0.24 and three different Burger numbers, 1, 0.25 and 0.1. In all cases the effect of rotation is significant since the radius of deformation is comparable or smaller to the cylinder radius. We compute the evolution of the following fields : vorticity  $\omega = \nabla \times \vec{V}$ , potential vorticity  $(\omega + f)/\phi$ , geopotential  $\phi$ , stream function  $\psi = \nabla^{-2}\omega$  and modulus of velocity  $|\vec{V}|$ . We integrate the shallow water equations during 30 periods of the rotating frame,  $\tau_f = 2\pi/f = \pi/\Omega_0$ .

We observe that during the flow evolution vorticity is produced in the boundary layers which is formed on the obstacle and a von Karman street develops in the wake. Both vorticity (Figure 4A) and potential vorticity (Figure 4B) exhibit an asymmetry of the wake : cyclones ( $\omega > 0$ ) are elongated while anticyclones ( $\omega < 0$ ) remain quasi-circular. This asymmetry is similar to what is observed in the Atlantic ocean in the wake of Isla Mujeres Island (cf. figure 1).

Figures 3C and 3D show that the flow is in geostrophic balance, since the surface height  $h = \phi/g$  is similar to the stream function. Indeed, geostrophic balance is a stationary solution of the inviscid rotating shallow water equations in the limit of small Rossby numbers. For  $Ro \ll 1$ , the advective term is negligible compared to the Coriolis force and there is a balance between the gradient of geopotential and the Coriolis force :

$$f\vec{n} \times \vec{V} = -\nabla\phi$$

Velocity  $\vec{V} = \nabla \times \psi\vec{n}$ , therefore  $\nabla(f\psi + \phi) = 0$  and geostrophic balance gives therefore :

$$\psi = -\frac{\phi}{f} + cte$$

The modulus of velocity (Figure 4E) shows the formation of a background jet in the recirculation zone behind the cylinder. We also observe that the vortices are slowly damped by viscous dissipation and thus become more circular when they are far away down the wake.

The effect of rotation on the von Karman street is shown in Figure 5. As the Burger number decreases, *i.e.* the deformation radius becomes smaller than the radius of the cylinder, the cyclone-anticyclone asymmetry increases, *i.e.* cyclones become more elongated and deformed whereas anticyclones remain axisymmetric. We also observe that as the Burger number decreases the vortex shedding occurs further down in the wake and the distance between vortices decreases. Therefore the Strouhal frequency, which is the characteristic frequency of the vortex shedding for a flow past an obstacle, increases as the Burger number decreases.

#### *Laboratory results*

The horizontal extension of the laser sheet restricts the visualization window. Unlike the numerical experiment, the laboratory experiment does not allow to observe the whole wake at once. Taking into account this experimental restriction, we visualize the wake at two different locations. The first visualization (window A) is located just behind the

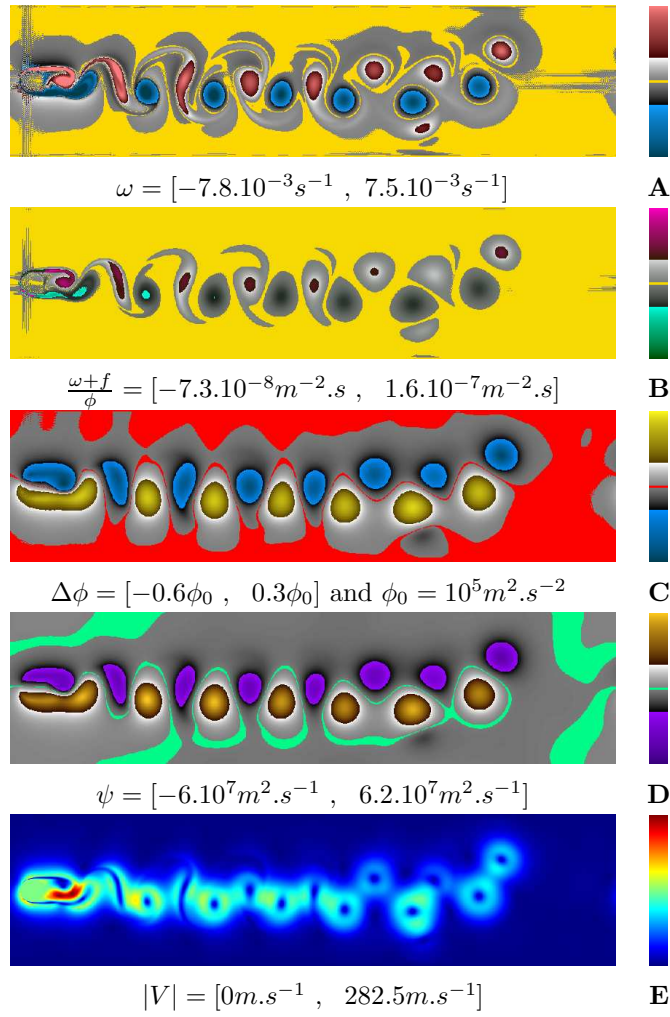


Figure 4. From top to bottom : vorticity, potential vorticity, geopotential, stream function and modulus of velocity fields at  $t = 30 \tau_f$

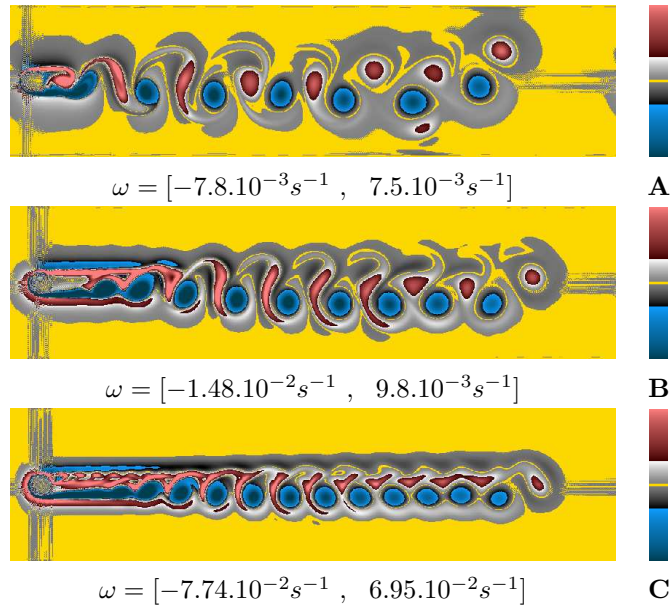


Figure 5. From top to bottom : vorticity fields at  $Bu=1$ ,  $Bu=0.25$ ,  $Bu=0.1$  at  $t = 30 \tau_f$

cylinder (at 3 diameters distance), where the vortices are formed. While the second visualization (window B) is located further down the obstacle (at 8 diameters distance), where the vortex shedding occurs. We show here two experiments, which correspond to two sets of parameters :  $Bu = 1$ ,  $Ro = 0.25$ ,  $Re = 371$  (Figure 6) and  $Bu = 0.25$ ,  $Ro = 0.31$ ,  $Re = 1050$  (Figure 7). The main difference between these two sets of parameters is the Burger number, since we have observed that the change in  $Re$  is not significant in this case. We see that the size of the vortices formed just behind the cylinder depends on the Burger number (Figures 6A and 7A), because the deformation radius inhibits the spreading of the shear layer which is formed at the wall. Further down (Figures 6B and 7B) vortices increase in size, becoming larger than  $R_d$ , and anticyclones become axisymmetric while cyclones keep their elliptical shape for a long time.

Quantitative analysis of the velocity and the corresponding vorticity are obtained from PIV. According to Figure 8A the value of the local relative vorticity  $\omega/f$  measured during the formation of the vortices is roughly three times the Rossby number. Later on (Figure 8B) when the vortices are no more attached to the obstacle, the relative vorticity becomes twice the Rossby number. Hence, next to the obstacle where the shedding process occurs and downstream in the vortex street, the relative vorticity has a finite value ( $\omega/f \simeq 0.5 - 0.8$ ), even if the Rossby number is small  $Ro \simeq 0.25 - 0.31$ .

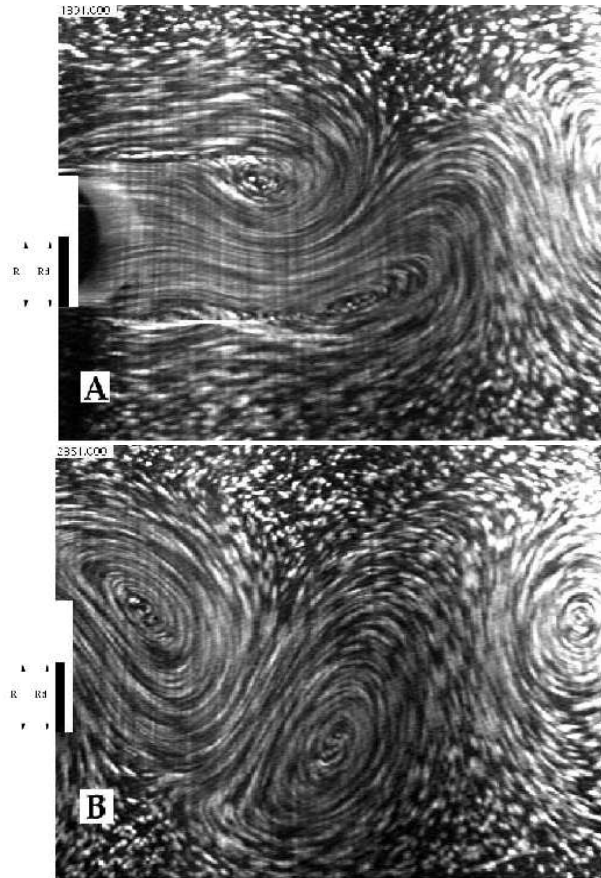


Figure 6. Visualization of particles motion just behind the cylinder, at  $t = 0$  (A), and at  $t = 4\tau_f$  (B), for  $Re \simeq 400$ ,  $Bu \simeq 1$ ,  $Ro \simeq 0.25$ . The white (black) marker indicates the cylinder diameter  $D$  (deformation radius  $R_d$ ).

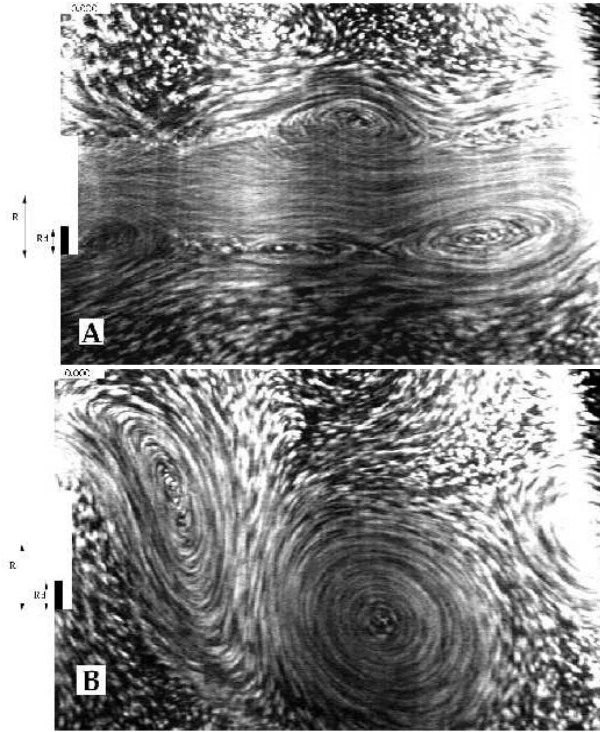


Figure 7. Visualization of the particles trajectories (streaklines) just behind the cylinder, at  $t = 0$  (A), and at  $t = 4\tau_f$  (B), for  $Re \simeq 1050$ ,  $Bu \simeq 0.25$ ,  $Ro \simeq 0.3$ . The white marker on the left corresponds to the cylinder radius  $R$ , and the black marker indicates the deformation radius  $R_d$ .

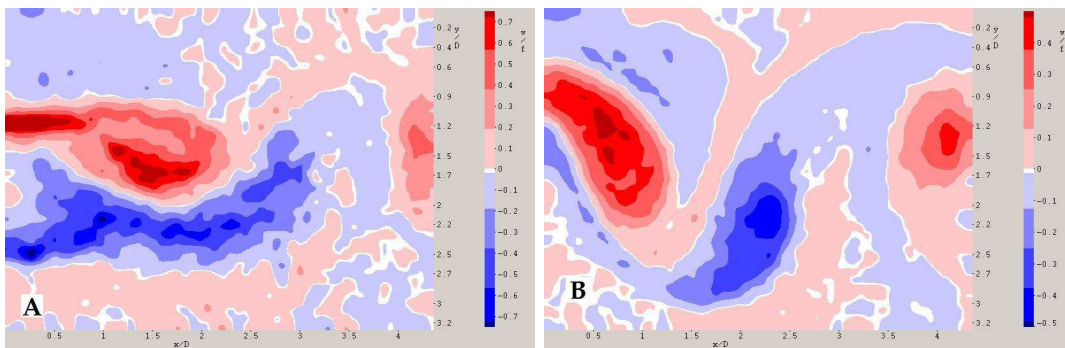


Figure 8. Vorticity field for  $Re \simeq 400$ ,  $Bu \simeq 1$ ,  $Ro \simeq 0.25$  at  $t = 9.3\tau_f$  (A) and  $t = 12\tau_f$  (B).

## *Interpretation*

The cyclone-anticyclone asymmetry (elongated cyclones compared to quasi-circular anticyclones) observed both in numerical and laboratory experiments is not yet fully understood. However, according to previous works [57, 66, 58], this asymmetry occurs when the relative deviation of the free surface  $\lambda = \Delta h/h$  becomes non negligible.

In rotating shallow water flows, the slow component of motion (*i.e.* the vortical motion but not the wave motion) satisfies, at the leading order, the geostrophic balance. Therefore the relative deviation of the free surface  $\lambda$  scales as  $Ro/Bu$ . Hence, both large scale-effects, namely small Burger number, and finite Rossby number tend to increase the free surface deformation. In a regime where  $\lambda$  becomes large, cyclonic and anticyclonic structures will not have the same dynamical behaviour. Indeed, anticyclones can locally satisfy  $\lambda \geq 1$  while cyclones are bounded by  $\lambda = -1$ . Hence, this condition restricts the size of the cyclones satisfying the geostrophic balance and lead to their elongation.

According to the numerical simulations (Figure 4), the vorticity of detached cyclones and anticyclones have roughly the same amplitude, while the free surface deviation is stronger for cyclones. This is due to the centrifugal force which is no more negligible compared to the Coriolis force when the relative vorticity has a finite value. In such case, the centrifugal terms induce a depression in the core of vortical structures of both signs. Hence, this cyclostrophic effect added to the geostrophic balance reduces (increases) the free surface elevation (depression) of anticyclones (cyclones).

### **7.6.4 Conclusion**

We have performed both numerical and laboratory experiments, for Burger numbers equal to 1 and 0.25. Although in the laboratory experiments the Reynolds number differs significantly for both cases, we assume that rotation effects dominate inertial effects in the regime considered here and therefore the variation of the Reynolds number does not affect the results. We have found that the von Karman street formed in the wake presents an asymmetry between cyclones and anticyclones. Both numerical and laboratory experiments qualitatively agree on this and show that this asymmetry increases when the Burger number decreases, *i.e.* the effect of rotation increases. These results are preliminary and in further work we will perform more quantitative comparisons. We also plan to compute the lift and drag, and study the production of vorticity in the boundary layers which develop on the obstacle.



# Chapitre 8

## Conclusion et perspectives

Nous avons présenté une étude numérique, expérimentale et théorique de la dynamique et de la stabilité des sillages de grande échelle. Dans un cadre plus large, nous avons étudié les mécanismes responsables de la formation préférentielle des anticyclones dans les instabilités de cisaillement horizontaux. Pour comprendre et caractériser ces phénomènes dans un modèle simple, l'ensemble de cette étude a été réalisée dans une configuration couche-mince en rotation.

### Caractérisation des sillages de grande échelle

La dynamique des sillages a été caractérisé expérimentalement et numériquement dans une large gamme de paramètres. Nous nous sommes intéressés à des écoulements géostrophiques, le nombre de Rossby est donc maintenu petit,  $Ro \ll 1$ , dans l'ensemble des expériences. Par contre, nous avons fait varier la déviation relative de surface libre,  $\lambda$ , de manière à étudier la transition entre les régimes 2D ( $\lambda \leq Ro$ ), quasi-géostrophique ( $\lambda \approx Ro$ ) et frontal ( $\lambda \geq Ro$ ). Dans les régimes 2D et quasi-géostrophique, le sillage est formé d'une allée de tourbillons alternés de type von Karman (Fig. 8.1(a)).

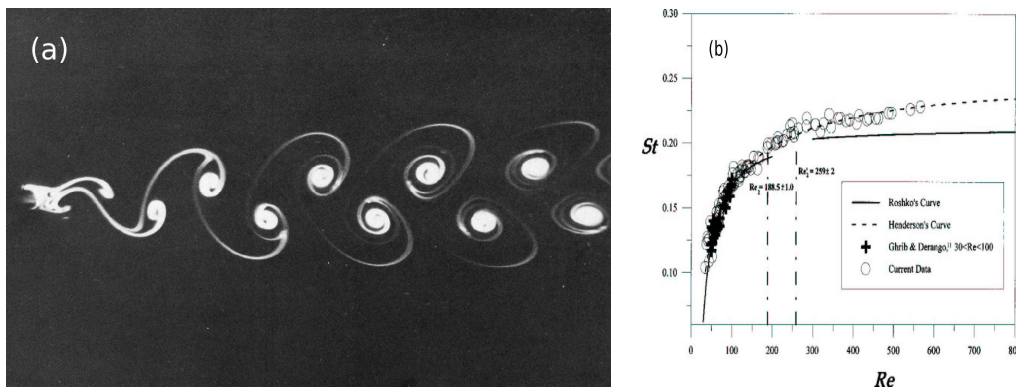


FIG. 8.1 – Caractéristiques d'un sillage pour un écoulement 2D sans rotation : Allées de von Karman pour  $Re=140$  (a) et évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds (b).

Dans un régime frontal, une première caractéristique des sillages est la déformation et l'élongation des cyclones alors que les anticyclones sont circulaires. Pour de très fortes déviations de la surface libre, l'allée tourbillonnaire est formée uniquement d'anticyclones (Fig. 8.2(a)). Une seconde caractéristique est la forte augmentation du nombre de Strouhal



(Fig. 8.2(b)). De plus, cette augmentation est contrôlée par le paramètre  $\lambda$  qui quantifie les déviations relatives de la surface libre, et non plus par le nombre de Reynolds, comme c'est le cas pour des écoulements 2D classiques (Fig. 8.1(b)). Une troisième caractéristique est l'extension d'un sillage quasi-parallèle sur une distance de deux à trois diamètres en aval de l'obstacle. Les tourbillons se forment donc relativement loin derrière le cylindre. Une dernière caractéristique est l'asymétrie de l'écoulement autour de l'obstacle et donc du sillage quasi-parallèle. La morphologie et la dynamique du sillage en régime frontal est alors très différente des allées classiques de von Karman et ressemble davantage à une instabilité de type couche de mélange.

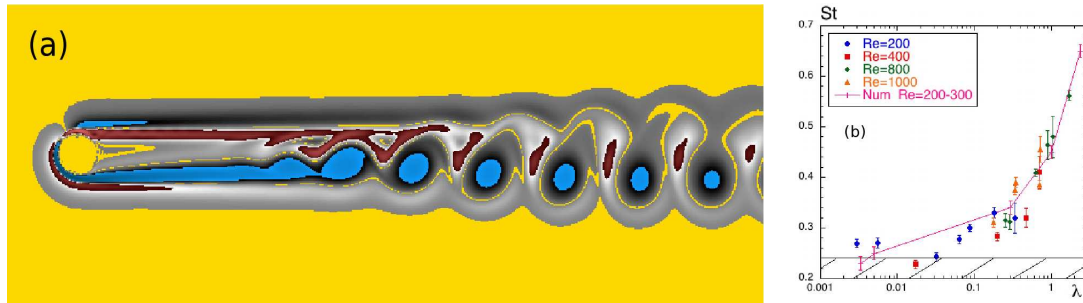


FIG. 8.2 – Caractéristiques d'un sillage en régime frontal : champ de vorticité de simulations numériques (anticyclones en bleu et cyclones en rouge), l'allée tourbillonnaire est form e principalement d'anticyclones (a) et évolution du nombre de Strouhal en fonction de la déviation relative de l'interface  $\lambda$  pour différents nombres de Reynolds, mesures expérimentales et numériques (b).

### Analyse de stabilité de sillages

Cette caractérisation a motivé une analyse de stabilité locale de sillages parallèles pour déterminer d'une part les mécanismes responsables de l'asymétrie cyclone-anticyclone de l'allée tourbillonnaire (asymétrie du sillage quasi-parallèle ou régime dynamique frontal) et d'autre part la nature de l'instabilité. L' tat de base des sillages a été déterminé partir de profils expérimentaux mesurés à une distance fixe du cylindre en régime quasi-géostrophique et frontal. Le profil mesuré en régime quasi-géostrophique est symétrique, celui mesuré dans les deux longues couches de cisaillement qui s'étirent en aval du cylindre dans le cas frontal est asymétrique. L'analyse de stabilité linéaire montre que le régime frontal sélectionne le développement de l'instabilité dans la partie anticyclonique principalement. L'asymétrie de l'écoulement autour de l'obstacle conduit déjà à développement plus rapide de la perturbation dans la partie anticyclonique de l'écoulement que dans la partie cyclonique, en régime quasi-géostrophique. Cependant, en régime frontal cette différence est fortement accrue. De plus, l'analyse de stabilité linéaire a révélé que le régime frontal sélectionne le mode localisé dans la partie anticyclonique de l'écoulement pour les deux  tats de base. Le développement non-linéaire de la perturbation pour le profil asymétrique en régime QG induit une différence entre l'intensité des tourbillons cycloniques et anticycloniques, mais n'explique pas à elle seule, la forte élongation, voire la disparition des tourbillons cycloniques observ e expérimentalement et numériquement. Par contre, en régime frontal, on retrouve avec une analyse locale de stabilité, la structure des sillages de grande échelle observ e dans les expériences de laboratoire et les simulations numériques. Etant donné que le sillage en aval du cylindre est quasi-parallèle,

l'analyse locale est consistante pour décrire le développement non-linéaire de la perturbation. D'autre part, une étude spatio-temporelle du développement linéaire d'un paquet d'ondes nous a permis de déterminer la nature convective ou absolue de l'instabilité. Cette étude montre que le profil asymétrique est instable convectif, contrairement au cas classique du sillage de von Karman qui est instable absolu en régime 2D. C'est-à-dire qu'une perturbation localisée va croître exponentiellement mais sera advectée en aval du cylindre par l'écoulement et ne remontera pas vers l'amont. C'est pourquoi les tourbillons se forment loin en aval du cylindre et le nombre de Strouhal ne correspond plus à une fréquence propre à l'écoulement.

## Analyse de stabilité de jets, cisaillements et sillages

Nous avons donc montré que le régime frontal favorise la formation d'anticyclones dans les sillages. Pour déterminer si ce mécanisme est générique à d'autres types d'écoulements de grande échelle, nous avons étendu l'analyse de stabilité précédente à des jets, cisaillements et sillages parallèles. D'après l'analyse linéaire du jet, le régime frontal tend à stabiliser très fortement l'écoulement. Pourtant, lorsque les parties cycloniques et anticycloniques de l'écoulement sont distinctes, *i. e.* cisaillements ou sillages, seule la partie cyclonique est fortement stabilisée en régime frontal. Les cyclones se développent plus lentement et à des longueurs d'ondes plus grandes. Cependant, le développement non-linéaire des écoulements tend à axisymétriser les tourbillons cycloniques et anticycloniques. Par contre, lorsque les deux cisaillements sont couplés, comme c'est le cas dans un écoulement de sillage, l'apparition des anticyclones en premier déforme la couche de cisaillement cyclonique et inhibe la formation de cyclones. Nous avons donc mis en évidence un mécanisme générique de formation privilégiée des anticyclones par déstabilisation de cisaillement horizontal en régime frontal.

## Applications océaniques

Nous espérons que cette thèse permettra de mieux comprendre les caractéristiques des instabilités de cisaillement de grande échelle. La formation préférentielle des anticyclones par déstabilisation de cisaillements horizontaux de grande échelle, peut être un des mécanismes responsables de la prédominance des anticyclones dans les écoulements et structures océaniques de grande échelle. De plus, la prédominance et la robustesse des anticyclones peut avoir un impact important sur le mélange et le transport de traceurs passifs tels que le phytoplancton ou des polluants émis le long des côtes. En effet, ces traceurs peuvent être «bloqués» dans un anticyclone, ou au contraire transportés loin derrière une île ou un cap par un cisaillement cyclonique relativement stable.

## Perspectives

Nous avons considéré, dans cette étude, la dynamique d'une seule couche mince en rotation, comme première étape de la modélisation d'écoulements océaniques. Or, dans l'océan, les écoulements sont stratifiés sur la verticale et l'instabilité barocline est un des principaux mécanismes de formation de méandres et de tourbillons. Une première perspective pour se rapprocher d'une modélisation plus réaliste, serait donc de considérer la dynamique d'un modèle à deux couches. Ceci afin de combiner les instabilités de nature barotropes (cisaillements horizontaux) et baroclines (cisaillements verticaux). Les

quelques études qui explorent l'instabilité barocline en régime frontal semblent montrer que, ici encore, il y a formation préférentielle d'anticyclones.

Une deuxième perspective pour se rapprocher d'une modélisation plus réaliste des écoulements océaniques serait de considérer un courant à l'équilibre géostrophique qui rencontre l'obstacle et non plus l'obstacle qui avance. Cette configuration (Fig. 8.3) peut avoir des conséquences importantes sur les phénomènes que nous avons étudiés. En effet, le rayon de déformation local, lié à l'épaisseur de la couche sera différent d'un côté et de l'autre de l'écoulement. De plus, le rapport  $\Delta h/h_0$  sera différent des deux côtés et nous avons montré l'importance de ce rapport sur l'asymétrie cyclone-anticyclone et la dynamique des sillages de grande échelle. Il serait intéressant également de considérer

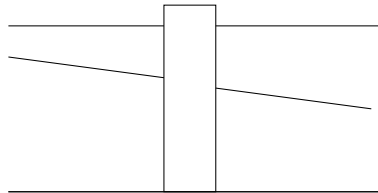


FIG. 8.3 – Schéma d'un courant à l'équilibre géostrophique frappant l'obstacle.

des courants non uniformes. Dans l'océan, en effet, il est fort probable que les courants rencontrant une île présentent déjà un cisaillement qui peut modifier la dynamique du sillage de l'île.

Se pose aussi la question de l'effet  $\beta$ -topographique. Le relief sous-marin, plateau continental, relief de l'île ou paroi verticale près des côtes, peut influencer la dynamique du sillage. Poulin et Flierl [59] ont récemment étudié la stabilité d'un jet de Bickley dans une couche mince en rotation avec une topographie. Ils ont montré que le jet était toujours stabilisé si la couche fluide est plus mince du côté anticyclonique, si elle est plus mince du côté cyclonique, la stabilisation du jet dépend du nombre de Rossby et de l'amplitude de la topographie. De plus, ces reliefs peuvent créer des ondes de Rossby ou de Kelvin qui peuvent se coupler avec les tourbillons formés derrière l'île et influencer la dissipation des tourbillons [36, 69]. On peut imaginer différentes configurations pour prendre en compte ces effets 8.4.

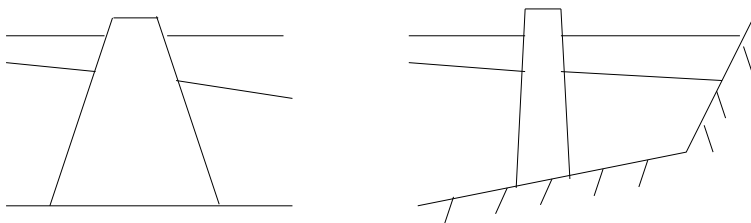


FIG. 8.4 – Schéma d'un courant à l'équilibre géostrophique frappant l'obstacle.

Une autre perspective serait l'étude du mélange et du transport de traceurs passifs à proximité des côtes. Nous avons évoqué l'influence que pourrait avoir l'asymétrie cyclone-anticyclone sur ces phénomènes.

Il serait aussi intéressant de prendre en compte une géométrie d'île ou de côtes plus réaliste. Dans l'océan, les courants ne sont certainement pas uniformes, mais les îles ne sont pas non plus symétriques et la prise en compte de géométries plus complexes est

---

nécessaire. D'un point de vue expérimental, une structure telle que la Plateforme Coriolis à Grenoble offre la possibilité d'étudier l'écoulement autour d'une côte particulière. D'un point de vue numérique, un des principaux avantages de la méthode de pénalisation est de permettre l'étude d'écoulements autour de géométries complexes avec des méthodes de résolution rapides comme les méthodes spectrales.



# Bibliographie

- [1] P. Angot. Analysis of singular perturbation on the brinkman problem for fictitious domain models of viscous flows. *Math. Meth. App. Sci.*, 22 :1395–1412, 1999.
- [2] P. Angot, C.-H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in viscous flows. *Num. Math.*, 81 :497–520, 1999.
- [3] P. Angot and J. P. Caltagirone. New graphical and computational architecture concept for numerical simulation on supercomputers. volume 1, pages 973–976. 2nd World Congress on Computational Mechanics., 1990.
- [4] M. Arai and T. Yamagata. Asymmetric evolution of eddies in rotating shallow water. *Chaos*, 4 (2) :163–175, 1994.
- [5] E. Arquis and J. P. Caltagirone. Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d’une interface milieu fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle. *C. R. Acad. Sci. Paris II*, 299 :1–4, 1984.
- [6] A. Azzalini. *Etude des écoulements barotropes en rotation en présence ou non d’obstacles : simulations pseudo-spectrales et filtrages en ondelette*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2004.
- [7] J. M. Baey and X. Carton. Vortex multipoles in two-layer rotating shallow-water flows. *J. Fluid Mech.*, 460 :151–175, 2002.
- [8] J. M. Baey, P. Riviere, and X. Carton. Oceanic jet instability : a model comparison. volume 7, pages 12–23. Third International Workshop on Vortex Flows and Related Numerical Methods., 1999.
- [9] D. Barkley and R. D. Henderson. Three-dimensional floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 322 :215, 1996.
- [10] M. Beunier. Experimental study of von karman streets in a rotating and stratified fluid. Technical report, ENSTA, 2001.
- [11] D. L. Boyer and M. L. Kmetz. Vortex shedding in rotating flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 26 :51–83, 1983.
- [12] D. L. Boyer, M. L. Kmetz, and L. Smathers. Rotating open channel flow past right circular cylinders. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 30 :271–304, 1984.
- [13] J. P. Caltagirone. Sur l’interaction fluide-milieu poreux ; application au calcul des efforts exercés sur un obstacle par un fluide visqueux. *C. R. Acad. Sci.*, 318 :571–577, 1994.
- [14] X. Carton. Hydrodynamical modeling of oceanic vortices. *Surveys in Geophys.*, 22 :179–263, 2001.
- [15] J. M. Chomaz. Fully nonlinear dynamics of parallel wakes. *J. Fluid Mech.*, 495 :57–75, 2003.

- [16] B. Cushman-Roisin. Frontal geostrophic dynamics. *J. Phys. Ocean.*, 16 :132–143, 1986.
- [17] B. Cushman-Roisin, G. G. Sutyrin, and B. Tang. Two-layer geostrophic dynamics. part i : Governing equations. *J. Phys. Ocean.*, 22 :117–127, 1992.
- [18] B. Cushman-Roisin and B. Tang. Geostrophic turbulence and emergence of eddies beyond the radius of deformation. *J. Phys. Ocean.*, 20 :97–113, 1990.
- [19] I. Delbende, J. M. Chomaz, and P. Huerre. Absolute/convective instabilities in the batchelor vortex : a numerical study of the linear impulse response. *J. Fluid Mech.*, 355 :229–254, 1998.
- [20] G. Chabert D’Hieres, P. A. Davies, and H. Didelle. A laboratory study of the lift forces on a moving solid obstacle in a rotating fluid. *Dyn. Atm. Oceans*, 13 :47–75, 1989.
- [21] G. Chabert D’Hieres, P. A. Davies, and H. Didelle. Experimental studies of lift and drag forces upon cylindrical obstacles in homogeneous rapidly rotating fluids. *Dyn. Atm. Oceans*, 15 :87–116, 1990.
- [22] C. Donnadiou and A. Pereira. Sillage de grande échelle en laboratoire. Technical report, ENSTA, 2002.
- [23] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamique stability*. Cambridge Univ. Press, 1997.
- [24] S. Leblanc et C. Cambon. On the three-dimensional instabilities of plane flows subject to coriolis force. *Phys. Fluid*, 9(5) :1307–1316, 1997.
- [25] M. Farge. Private communication. 1987.
- [26] M. Farge and R. Sadourny. Wave-vortex dynamics in rotating shallow water. *J. Fluid Mech.*, 206 :433–462, 1989.
- [27] G. R. Flierl, X. Carton, and C. Messenger. Vortex formation by unstable oceanic jets. volume 7, pages 137–150. Third International Workshop on Vortex Flows and Related Numerical Methods., 1999.
- [28] F. Gallaire and J. M. Chomaz. Mode selection in swirling jet experiments : a linear stability analysis. *J. Fluid Mech.*, 494 :223–253, 2003.
- [29] L. P. Graves, J. C. McWilliams, and M. T. Montgomery. Vortex evolution due to straining : a mechanism for dominance of strong, interior anticyclones. *submitted to Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 2005.
- [30] R. W. Hamming. Lanczos  $\sigma$  factors, the  $\sigma$  factors in the general case. In *Numerical Methods for Scientists and Engineers, 2nd ed.* Dover, 1986.
- [31] D. A. Hammond and L. G. Redekopp. Global dynamics of symmetric and asymmetric wakes. *J. Fluid Mech.*, 331 :231–260, 1997.
- [32] M. Högberg and D. Henningson. Secondary instability of cross-flow vortices in falkner-skane-cooke boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 368 :339–357, 1998.
- [33] D. D. Holm, J. E. Mardsen, T. Ratiou, and A. Weinstein. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. *Phys. Rep.*, 123 :1–116, 1985.
- [34] P. Huerre and M. Rossi. Hydrodynamic instabilities in open flows. In C. Godrèche and P. Manneville, editors, *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, pages 81–294. Cambridge University Press, 1998.

- [35] P. Huerre J. M. Chomaz and L. G. Redekopp. Bifurcations to local and global modes in spatially developing flows. *Phys. Rev. Lett.*, 60 :25–28, 1988.
- [36] J. P. Jacob, E. P. Chassignet, and W. K. Dewar. Influence of topography on the propagation of isolated eddies. *J. Phys. Ocean.*, 32 :2848–2869, 2002.
- [37] M. Ben Jelloul and V. Zeitlin. Remarks on stability of the rotating shallow-water vortices in the frontal dynamics regime. *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. C*, 22 :931–941, 1999.
- [38] J.A. Johnson. Stability of shearing motion in rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 17 :337–352, 1963.
- [39] G. EM. Karniadakis and G. S. Triantafyllou. Frequency selection and asymptotic states in laminar wakes. *J. Fluid Mech.*, 199 :441–469, 1988.
- [40] N. Kevlahan and J. M. Ghidaglia. Computation of turbulent flow past an array of cylinders using a spectral method with brickman penalization. *Eur. J. Mech.*, 20 :333–350, 2001.
- [41] K. Khadra, S. Parnaix, P. Angot, and J. P. Caltagirone. Fictitious domain approach for numerical modelling of navier-stokes equations. *Modélisation Mathématique et Simulation Numérique dans les Sciences de l’Ingénieur.*, 1997.
- [42] W. Koch. Local instability characteristics and frequency determination of self-excited wake flows. *J. Sound Vib.*, 99 :53–83, 1985.
- [43] H. Kontoyiannis and D. R. Watts. Observations on the variability of the gulf stream path between 74°w and 70°w. *J. Phys. Ocean.*, 24 :1999–2013, 1994.
- [44] A. C. Kuo and L. M. Polvani. Nonlinear geostrophic adjustment, cyclone/anticyclone asymmetry, and potential vorticity rearrangement. *Phys. Fluid*, 12 :1087–1100, 2000.
- [45] C. Lanczos. *Applied Analysis*. Van Nostrand, 1956.
- [46] T. Lee and P. Cornillon. Propagation and growth of the gulf-stream meanders between 75° and 45°w. *J. Phys. Ocean.*, 26 :225–241, 1996.
- [47] P. F. Linden, B. M. Boubnov, and S. B. Dalziel. Source-sink turbulence in a rotating stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 298 :81–112, 1995.
- [48] T. Matsuura. The evolution of frontal-geostrophic vortices in a two-layer ocean. *J. Phys. Ocean.*, 25 :2298–2318, 1995.
- [49] T. Matsuura and T. Yamagata. On the evolution of nonlinear planetary eddies larger than the radius of deformation. *J. Phys. Ocean.*, 12 :440–456, 1982.
- [50] J. C. McWilliams. Submesoscale, coherent vortices in the ocean. *Rev. of Geophys.*, 23(2) :165–182, 1985.
- [51] S. D. Meyers, J. Sommeria, and H. L. Swinney. Laboratory study of the dynamics of jovian-type vortices. *Physica D*, 37 :515–530, 1989.
- [52] J. Nycander and G. G. Sutyrin. Stationary translating anticyclones on the beta-plane. *Dyn. Atm. Ocean.*, 16 :473–498, 1992.
- [53] P. Parnaudeau, E. Lamballais, D. Heitz, and J. H. Silvestrini. Combination of the immersed boundary method with compact schemes for dns of flows in complex geometry. *DLES* 5, 2003.
- [54] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, 1987.
- [55] G. Perret, A. Stegner, M. Farge, and T. Pichon. Cyclone-anticyclone asymmetry of large-scale wakes in the laboratory. *submitted to Phys. Fluids*, ..



- [56] V. I. Petviashvili. Red spot of jupiter and the drift soliton in a plasma. *JETP Letters*, 32 :632–635, 1980.
- [57] L. M. Polvani, J. C. McWilliams, M. A. Spall, and R. Ford. The coherent structures of shallow-water turbulence : deformation-radius effects, cyclone/anticyclone asymmetry and gravity-wave generation. *Chaos*, 4(2) :177–186, 1994.
- [58] F. J. Poulin and G. R. Flierl. The nonlinear evolution of barotropically unstable jets. *J. Phys. Ocean.*, 33 :2173–2192, 2003.
- [59] F. J. Poulin and G. R. Flierl. The influence of topography on the stability of jets. *J. Phys. Ocean.*, 35 :811–825, 2005.
- [60] K. Schneider and M. Farge. Adaptive wavelet simulation of a flow around an impulsively started cylinder using penalisation. *Appl. Comput. Harm. Anal.*, 12 :374–380, 2002.
- [61] K. Schneider and M. Farge. Coherent vortex simulation (cvs) of dipole-wall interaction using volume penalisation. Trondheim, Norway, 2004. 10th European Turbulence Conference.
- [62] G. J. Sheard, M. C. Thompson, and K. Hourigan. A coupled landau model describing the strouhal-reynolds number profile of a three-dimensional circular cylinder wake. *Phys. Fluids*, 15(9) :L68–L71, 2003.
- [63] B. A. Smith, L. A. Soderblom, and D. Banfield. Voyager-2 at neptune : Imaging science results. *Science*, 246 :1422–1449, 1989.
- [64] B. A. Smith, L. A. Soderblom, and R. Batson. A new look at the saturn system : The voyager-2 images. *Science*, 215 :504–536, 1982.
- [65] B. A. Smith, L. A. Soderblom, and T. V. Johnson. Jupiter system through the eyes of voyager-1. *Science*, 204 :951–972, 1979.
- [66] A. Stegner and D. G. Dritschel. A numerical investigation of the stability of isolated shallow water vortices. *J. Phys. Ocean.*, 30 :2562–2573, 2000.
- [67] A. Stegner, T. Pichon, and M. Beunier. Elliptical-inertial instability of rotating karman streets. *to appear in Phys. Fluids*, 2005.
- [68] A. Stegner and V. Zeitlin. Asymptotic expansions and monopolar solitary rossby vortices in barotropic and two-layer models. *Geophys. Astro. Fluid Dyn.*, 83(3-4) :159–194, 1996.
- [69] V. Thierry and Y. Morel. Influence of a strong bottom slope on the evolution of a surface-intensified vortex. *J. Phys. Ocean.*, 29 :911–924, 1999.
- [70] G. Triantafyllou, M. Triantafyllou, and C. Chryssostomidis. On the formation of vortex streets behind stationary cylinders. *J. Fluid Mech.*, 170 :461–477, 1986.
- [71] M. van Dyke. *An album of Fluid Motion*. Parabolic Press, 1982.
- [72] O. V. Vasilyev and N. K. R Kevlahan. Hybrid wavelet collocation-brinkman penalization method for complex geometry flows. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 30 :531–538, 2002.
- [73] D ; R. Watts and W. E. Johns. Gulf stream meanders : Observations on propagation and growth. *J. Geophys. Res.*, 87 :9467–9475, 1982.
- [74] C. Y. Wen and C. Y. Lin. Two dimensionnal vortex shedding of a circular cylinder. *Phys. Fluids*, 13 :557–560, 2001.

- 
- [75] G. P. Williams and T. Yamagata. Geostrophic regimes, intermediate solitary vortices and jovian eddies. *J. Atm. Sciences*, 41(4) :453–478, 1984.
- [76] C. H. K. Williamson. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 206 :579–627, 1989.
- [77] C. H. K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 28 :477–539, 1996.
- [78] S. Yanase, C. Flores, O. Metais, and J. Riley. Rotating free-shear flows. i. linear stability analysis. *Phys. Fluids*, A5(11) :2725–2737, 1993.
- [79] I. Yavneh, A. F. Shchepetkin, J. C. McWilliams, and L. P. Graves. Multigrid solution of rotating, stably stratified flows : the balance equations and their turbulent dynamics. *J. Comp. Physics*, 136 :245–262, 1997.