



**HAL**  
open science

# Modèles asymptotiques en ferromagnétisme: couches minces et homogénéisation

Housseem Haddar

► **To cite this version:**

Housseem Haddar. Modèles asymptotiques en ferromagnétisme: couches minces et homogénéisation. Mathématiques [math]. Ecole des Ponts ParisTech, 2000. Français. NNT : 2000ENPC0020 . pastel-00002381

**HAL Id: pastel-00002381**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00002381v1>**

Submitted on 24 Apr 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

**L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

pour obtenir le titre de  
DOCTEUR EN SCIENCES

spécialité

Mathématiques appliquées

par

**Housseem HADDAR**

Titre :

**Modèles asymptotiques en ferromagnétisme :  
Couches minces et homogénéisation**

Directeur	<b>Patrick</b>	<b>JOLY</b>
Rapporteurs	<b>Grégoire</b>	<b>ALLAIRE</b>
	<b>Habib</b>	<b>AMMARI</b>
Examineurs	<b>Mikhael</b>	<b>BALABANE</b>
	<b>Anne-Sophie</b>	<b>BONNET-BENDHIA</b>
	<b>Yann</b>	<b>BRENIER</b>
	<b>Gilles</b>	<b>CARBOU</b>
	<b>Guy</b>	<b>METIVIER</b>



# Table des matières

## I Propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu ferromagnétique 15

<b>1</b>	<b>Le modèle du ferromagnétisme</b>	<b>17</b>
1.1	Présentation du modèle physique . . . . .	17
1.1.1	Les équations de Maxwell . . . . .	17
1.1.2	Le modèle de Landau-Lifshitz . . . . .	18
1.1.3	Forme générale du champ effectif . . . . .	19
1.1.4	Modèle retenu pour le champ effectif . . . . .	21
1.1.5	Modèle d'amortissement de Gilbert . . . . .	21
1.2	Propriétés mathématiques élémentaires... . . . .	22
1.2.1	Propriétés de stabilité . . . . .	22
1.3	Modèle linéarisé - phénomène de résonance . . . . .	25
1.3.1	Etude d'un cas particulier . . . . .	25
1.3.2	Tenseur de perméabilité relative directionnelle . . . . .	27
1.4	Phénomènes non linéaires . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Etude mathématique du problème couplé</b>	<b>31</b>
2.1	Introduction . . . . .	31
2.2	Le modèle mathématique . . . . .	32
2.2.1	Les équations du modèle . . . . .	32
2.2.2	Solutions faibles, fortes : définitions. . . . .	34
2.3	Rappels des résultats dans le cas 1D . . . . .	34
2.3.1	Spécificité du cas 1D . . . . .	34
2.3.2	Existence et unicité des solutions fortes . . . . .	35
2.3.3	Existence et unicité des solutions faibles . . . . .	36
2.4	Etude du modèle 2D non-homogène . . . . .	36
2.4.1	Spécificité du cas 2D . . . . .	36
2.4.2	Enoncé des résultats . . . . .	36
2.4.3	Preuves et résultats auxiliaires . . . . .	38
2.4.4	A propos du cas $\Phi \neq 0$ . . . . .	53
2.5	Rappel des résultats dans le cas 3D avec $\varepsilon = \varepsilon_0$ . . . . .	54
2.5.1	Existence des solutions faibles . . . . .	54
2.5.2	Existence et unicité des solutions fortes . . . . .	55

<b>II</b>	<b>Modèles de couches minces</b>	<b>57</b>
<b>3</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction . . . . .	59
3.2	Diffraction par une couche mince ferromagnétique . . . . .	61
3.3	Notion de Condition aux Limites Equivalente (CLE) . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Dérivation des CLE dans le cas d'un matériau linéaire</b>	<b>65</b>
4.1	Description du modèle . . . . .	65
4.2	Le cas d'une frontière plane : construction formelle . . . . .	66
4.2.1	Changement d'échelle . . . . .	66
4.2.2	Développement asymptotique formel . . . . .	68
4.2.3	Principe de la construction des CLE . . . . .	70
4.2.4	CLE d'ordre 2 et 3 . . . . .	71
4.2.5	CLE d'ordre 4 : forme naturelle... mais instable . . . . .	72
4.2.6	CLE d'ordre 4 : forme stable . . . . .	74
4.3	Le cas d'une frontière plane : analyse asymptotique . . . . .	77
4.3.1	Estimations d'erreur . . . . .	77
4.3.2	Consistance du développement asymptotique . . . . .	78
4.3.3	Consistance des CLE d'ordre 2 et 3 . . . . .	79
4.3.4	Consistance de la CLE d'ordre 4 . . . . .	81
4.4	Le cas d'une frontière courbe : construction formelle . . . . .	84
4.4.1	Rappels en géométrie différentielle . . . . .	84
4.4.2	Résultats utiles à la dérivation formelle . . . . .	86
4.4.3	Mise à l'échelle et développement asymptotique . . . . .	89
4.4.4	Condition d'ordre 2 . . . . .	91
4.4.5	Condition d'ordre 3 . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Extension au cas des matériaux ferromagnétiques</b>	<b>95</b>
5.1	Etude du problème 1D . . . . .	96
5.1.1	Présentation . . . . .	96
5.1.2	Développement asymptotique et identification formelle . . . . .	96
5.1.3	Dérivation des CLE . . . . .	100
5.1.4	Vers les CLE d'ordre élevé . . . . .	105
5.1.5	Conditions d'ordre 4 stables . . . . .	108
5.2	Généralisation aux cas 2D et 3D . . . . .	113
5.2.1	Description du modèle . . . . .	113
5.2.2	Etapes préparatoires de la dérivation effective des CLE . . . . .	113
5.2.3	Dérivation et étude de stabilité de la CLE d'ordre 2 . . . . .	116
5.2.4	Dérivation et étude de stabilité de la CLE d'ordre 3 . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Estimations d'erreur pour le modèle 1D</b>	<b>125</b>
6.1	Introduction . . . . .	126
6.2	Transmission problem in a fix domain . . . . .	126
6.3	Asymptotic expansion . . . . .	130
6.3.1	Formal identification . . . . .	130
6.3.2	Study of the identified problems . . . . .	132

6.4	Consistency of the asymptotic expansion . . . . .	135
6.4.1	Error estimates . . . . .	137
6.4.2	Proof of theorem 6.3 for $k = 0$ . . . . .	138
6.4.3	Proof of lemma 6.1 . . . . .	142
6.5	Effective boundary conditions . . . . .	146
6.5.1	Presentation of the approximate model . . . . .	146
6.5.2	Study of the approximate model . . . . .	147
6.5.3	Error estimate . . . . .	150
6.5.4	Asymptotic analysis of the approximate model . . . . .	151
<b>7</b>	<b>Modèles numériques pour les CLE en 1D</b>	<b>157</b>
7.1	Introduction . . . . .	157
7.2	Discrétisation en espace . . . . .	158
7.2.1	Formulation variationnelle du modèle continu . . . . .	158
7.2.2	Semi discrétisation en espace des équations à l'intérieur de $\Omega_v$ . . . . .	159
7.2.3	Approximation spatiale de la condition d'ordre 2 . . . . .	161
7.2.4	Approximation spatiale de la condition d'ordre 4 . . . . .	162
7.3	Etudes de différents schémas numériques en temps . . . . .	163
7.3.1	Discrétisation en temps des équations de Maxwell . . . . .	163
7.3.2	Discrétisation en temps de la CLE d'ordre 2 : schéma explicite . . . . .	164
7.3.3	Stabilité du schéma explicite . . . . .	165
7.3.4	Discrétisation en temps de la CLE d'ordre 2 : schéma implicite . . . . .	168
7.3.5	Stabilité du schéma implicite . . . . .	169
7.3.6	Discrétisation en temps de la condition équivalente d'ordre 4 . . . . .	169
7.4	Preuves de la stabilité . . . . .	170
7.4.1	Preuve du théorème 7.1 (schéma explicite) . . . . .	170
7.4.2	Preuve du théorème 7.4 (schéma implicite) . . . . .	173
7.4.3	Preuve du théorème 7.5 (CLE exacte) . . . . .	175
7.5	Résultats et validation numérique . . . . .	176
7.5.1	Description des expériences . . . . .	176
7.5.2	Validation de la CLE d'ordre 2 . . . . .	177
7.5.3	Apport de la CLE d'ordre 4 . . . . .	185
<b>8</b>	<b>Schémas numériques variationnels stables pour les CLE en 2D et en 3D</b>	<b>189</b>
8.1	Introduction . . . . .	190
8.2	Etude du cas linéaire . . . . .	190
8.2.1	Rappel des équations . . . . .	190
8.2.2	Formulation variationnelle . . . . .	190
8.2.3	Semi discrétisation spatiale . . . . .	192
8.2.4	Exemple d'espaces de discrétisation en 2D . . . . .	193
8.2.5	Exemple d'espaces de discrétisation en 3D . . . . .	195
8.2.6	Semi discrétisation temporelle . . . . .	196
8.2.7	Condition de stabilité du schéma . . . . .	198
8.3	Etude du cas non linéaire : CLE d'ordre 2 . . . . .	199
8.3.1	Formulation variationnelle et discrétisation spatiale . . . . .	199
8.3.2	Schéma en temps et stabilité . . . . .	201
8.4	Etude du cas non linéaire : CLE d'ordre 3 . . . . .	202

8.4.1	Formulation variationnelle et discrétisation spatiale . . . . .	202
8.4.2	Schéma en temps et stabilité . . . . .	206
8.5	Validation numérique pour le problème 2D . . . . .	208
<b>III</b>	<b>Modèles homogénéisés pour des structures ferromagnétiques périodiques</b>	<b>217</b>
<b>9</b>	<b>Obtention et justification du modèle limite</b>	<b>219</b>
9.1	Modèle mathématique de départ . . . . .	220
9.1.1	Le modèle simplifié sans le champ effectif . . . . .	220
9.1.2	Modèle avec champ effectif . . . . .	221
9.2	Ecriture du problème homogénéisé . . . . .	221
9.3	Rappels sur la notion de convergence double échelle . . . . .	224
9.3.1	A propos des fonctions admissibles . . . . .	227
9.4	Justification du problème limite dans le cas laminaire avec $n \leq 2$ . . . . .	228
9.4.1	Enoncé des résultats . . . . .	228
9.4.2	Preuve de l'unicité . . . . .	230
9.4.3	Estimations a priori pour le problème hétérogène . . . . .	232
9.4.4	Preuve de la convergence . . . . .	233
9.4.5	Preuve du lemme 9.2 . . . . .	241
9.4.6	Preuve du lemme 9.3 . . . . .	244
9.5	Justification du problème laminaire dans le cas 3D . . . . .	249
9.6	A propos de la généralisation au cas d'une périodicité quelconque . . . . .	251
<b>10</b>	<b>Etude des propriétés du modèle homogénéisé laminaire</b>	<b>257</b>
10.1	Présentation du modèle physique . . . . .	257
10.2	Modèle homogénéisé . . . . .	259
10.2.1	Présentation et discussion des équations homogénéisées . . . . .	259
10.2.2	Propriétés de stabilité du problème homogénéisé . . . . .	260
10.3	Un premier cas particulier : alternance vide ferromagnétique . . . . .	261
10.3.1	Forme particulière des équations . . . . .	262
10.3.2	Linéarisation du modèle homogénéisé : interprétation en termes de perméabilités . . . . .	262
10.3.3	Validation Numérique . . . . .	267
10.4	Un cas un peu plus général : milieu multi-couches homogènes . . . . .	273
10.4.1	Réécriture de la loi homogénéisé sous la forme d'un système . . . . .	273
10.4.2	Modèle linéarisé dans le cas de deux couches . . . . .	273
10.4.3	Peut-on permuter linéarisation et homogénéisation ? . . . . .	278
<b>11</b>	<b>Modèles pour des couches minces périodiques</b>	<b>281</b>
11.1	Présentation du problème . . . . .	281
11.1.1	Equations du modèle . . . . .	282
11.1.2	Objectif . . . . .	282
11.2	Calcul formel . . . . .	282
11.2.1	Notations . . . . .	283
11.3	Condition d'ordre 2 . . . . .	283

A	Passage de LLG à LL	287
B	A propos des unités	289
C	Estimations relevant du lemme de Gronwall	291





# Introduction

Les matériaux ferromagnétiques, principalement le fer, le cobalt, le nickel et leurs dérivés, ont pour principale caractéristique le fait d'être aimantés : il existe au sein de tels matériaux une aimantation spontanée, y compris en l'absence de champ magnétique extérieur.

Une des propriétés fondamentales de ces matériaux est leur caractère absorbant vis-à-vis des ondes électromagnétiques, ce qui explique leur intérêt stratégique en protections radar. Le présent travail s'intéresse à l'étude mathématique et à la simulation numérique de problèmes relevant de cette application.

L'utilisation des matériaux ferromagnétiques est néanmoins loin d'être limitée à cet aspect d'application. On les retrouve dans de nombreux autres secteurs d'activités industrielles, liés par exemple aux domaines des télécommunications et également à l'enregistrement magnétique pour le stockage d'informations. On y exploite la seconde caractéristique fondamentale d'un matériau ferromagnétique : l'aimantation tend à s'organiser en zones uniformes (domaines de Weiss) ; entre ces domaines, l'aimantation tourne rapidement mais régulièrement sur elle-même au sein de parois (parois de Bloch et parois de Néel). De manière sommaire, cette organisation provient principalement de la compétition entre deux énergies internes du matériau ferromagnétique :

- l'énergie d'anisotropie, liée à la structure cristalline du matériau, qui tend à orienter de l'aimantation suivant des directions privilégiées sans contraindre le sens de cette orientation ; elle favorise plutôt la réduction de l'épaisseur des parois ;
- l'énergie d'échange, d'origine quantique, prenant en compte l'interaction entre les spins voisins, qui tend à régulariser la distribution de l'aimantation et par conséquent d'augmenter l'épaisseur des parois.

L'un des enjeux de la modélisation numérique dans ce domaine (le micromagnétisme) est par exemple la détermination, à partir de la connaissance des caractéristiques physiques d'un matériau (constantes d'échanges, directions d'anisotropies ...), des configurations d'équilibre de l'aimantation au sein de ce matériau.

Pour les applications en furtivité radar, le principal intérêt est de pouvoir mesurer la réponse d'un échantillon ferromagnétique à une excitation électromagnétique. L'expérience montre qu'en général (par exemple dans un film magnétique de faible épaisseur) la taille des domaines (où les interactions d'échanges sont négligeables) est très grande par rapport à l'épaisseur des parois (où ce sont les forces d'échanges qui prédominent). C'est de là qu'est née alors l'idée d'une modélisation simplifiée où l'on négligerait dans une première approche l'effet des parois, et donc du champ d'échange, sur le champ électromagnétique diffracté. Cette approche a été adoptée par exemple dans le travail de thèse d'Olivier Vacus [45] (qui est en quelque sorte à l'origine des développements que nous entreprenons ici). Malgré cette

simplification, le modèle retenu reste assez riche pour permettre de prédire les phénomènes d'absorption, qui constituent l'intérêt principal pour les applications en furtivité (voir [47]).

Cette hypothèse simplificatrice sera en fait adoptée et maintenue tout au long de ce travail, dont les motivations proviennent de la constatation suivante : les revêtements ferromagnétiques utilisés sont constitués de couches de "très faible" épaisseur  $\eta$ , dont les caractéristiques sont généralement constantes suivant l'épaisseur, mais peuvent éventuellement varier de manière périodique dans le plan de la couche ; la taille  $\delta$  de la période étant elle aussi généralement "très petite". Typiquement, si  $\lambda$  désigne la longueur de l'onde radar, alors on a  $\eta \ll \lambda$  et/ou  $\delta \ll \lambda$ . On s'aperçoit alors que dans chaque cas, la saisie numérique du problème de diffraction sera pénalisée par le contraste important entre la longueur de l'onde et les caractéristiques "géométriques" ( $\delta$  ou  $\eta$ ) du domaine ferromagnétique. Notre travail va consister à proposer dans chacune des trois configurations possibles

- (i)  $\eta \ll \delta$  : couche mince dont les caractéristiques varient lentement dans le plan de la couche ;
- (ii)  $\delta \ll \eta$  : milieu ferromagnétique périodique ;
- (iii)  $\delta \sim \eta$  : couche mince dont les caractéristiques varient rapidement de manière périodique dans le plan de la couche ;

une modélisation alternative qui permet de contourner cette difficulté. En vérité le cas (iii) n'est traité que partiellement et fait partie des perspectives d'extensions futurs. Suite à notre hypothèse simplificatrice, la validité des modèles obtenues n'est pleinement justifiée que lorsque les longueurs  $\eta$  et  $\delta$  sont largement supérieures à l'épaisseur des parois.

Avant d'aborder l'étude spécifique des points (i) et (ii), nous nous intéressons dans la première partie de ce travail, divisée en deux chapitres, au modèle de départ décrivant la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ferromagnétique. Le premier chapitre a un caractère tout à fait introductif. On y expose d'abord les équations du modèle physique du ferromagnétisme, en précisant ensuite les simplifications qui en résultent, en négligeant les interactions d'échanges. La formulation du modèle dynamique retenue remonte en fait aux années 30 et est due à Landau et Lifshitz [32]. Une de ses principales caractéristiques est son aspect non linéaire et non local en temps. C'est pour cette raison que le problème de diffraction d'ondes électromagnétiques ne peut se faire que dans le domaine temporel (et non fréquentiel). Le deuxième chapitre s'intéresse plutôt à l'étude mathématique du problème formé par les équations de Maxwell et la loi de Landau-Lifshitz. Après avoir fait un état des lieux de la littérature mathématique relative à cette étude [29, 30, 26, 27], nous complétons les résultats existant par un résultat nouveau à notre connaissance, à savoir un théorème d'existence et unicité des solutions fortes en 2D, dans le cas de coefficients variables. Ce résultat nous sera utile notamment dans l'étude du point (ii).

La deuxième partie est dédiée à l'étude du cas (i). Pour contourner les difficultés liées à la petitesse de l'épaisseur de la couche ferromagnétique, nous faisons recours à une alternative bien connue, qui consiste à dériver des conditions aux limites équivalentes incorporant de manière approximative l'effet de la couche mince. Le chapitre 3 a pour but de préciser l'originalité de notre travail par rapport à une littérature abondante sur le sujet (citons à titre d'exemples [41, 25, 7, 18]). On peut la résumer ici en deux points clés :

- nous traitons le problème de Maxwell instationnaire ;
- nous considérons le couplage de ces équations avec une loi ferromagnétique non linéaire.

Le chapitre 4 traite d'abord le cas où la couche mince est formée par des matériaux diélectriques

linéaires (aimantation nulle) et constitue, en quelque sorte, la généralisation des travaux existants (dans le cas du problème harmonique) au cas instationnaire. Le point fondamental de cette partie est l'étude de stabilité des nouveaux problèmes aux limites obtenus, en tant que problèmes d'évolutions. Dans le chapitre 5, nous généralisons cette construction et étude de stabilité au cas d'un revêtement ferromagnétique. Le chapitre 6 s'intéresse à la question délicate de la justification de l'approche formelle entreprise dans le chapitre 5. Dans le cas linéaire, cette justification est une conséquence (presque) immédiate de l'étude de stabilité. Dans le cas non linéaire, ce n'est pas aussi évident. C'est pourquoi nous nous sommes limités au cas monodimensionnel, qui peut encore se traiter par des techniques relativement élémentaires. Les chapitres 7 et 8 ont pour but la mise en oeuvre numérique des conditions équivalentes établies dans le cas d'un revêtement ferromagnétique. On traite au chapitre 7 le modèle 1D afin d'étudier sur ce cas simple différentes discrétisations en temps des conditions effectives : schéma explicite et schéma implicite. Le chapitre 8 constitue une généralisation du chapitre précédent dans le cas d'une discrétisation en temps implicite sur le bord. On y utilise une méthode variationnelle basée sur l'écriture du problème sous une formulation mixte.

La troisième partie est dédiée à l'étude du cas *(ii)*. On y décrit le problème limite quand la taille de la périodicité  $\delta$  tend vers 0 : il s'agit donc du problème homogénéisé associé aux équations de Maxwell couplé avec la loi non linéaire des matériaux ferromagnétique, sans termes d'échanges. La littérature mathématique sur l'homogénéisation en général et sur l'homogénéisation des équations de Maxwell en particulier, est elle aussi très vaste (voir à titre d'exemples [40, 5, 37] pour les études relatives au système de Maxwell). Comme cela a été précisé, nous ne traitons que le cas périodique, et la particularité de notre travail vient encore une fois du caractère non linéaire de la loi constitutive du matériau. Dans le chapitre 9, qui constitue le coeur de cette partie, nous présentons le modèle homogénéisé dans un cadre général et nous montrons la convergence dans le cas laminaire. Le chapitre 10 est consacré à l'étude des propriétés du modèle homogénéisé laminaire dans quelques cas particuliers. Nous mettrons l'accent en particulier sur la caractérisation des propriétés d'absorption du milieu homogénéisé. Des expériences numériques de validation sont données dans le cas (important en pratique) d'une alternance vide-ferromagnétique.

Le chapitre 11 est une ouverture vers les perspectives traitant du point *(iii)*. Nous ne donnons dans ce chapitre que le résultat de la dérivation formelle des conditions équivalentes obtenues à la manière du point *(i)*. Nous renvoyons à titre d'exemples aux travaux [1, 4, 5] pour l'étude de problèmes similaires dans le cas linéaire harmonique.



### **Avertissement au lecteur**

Afin de permettre une “lecture en diagonale” de la thèse et un “accès rapide” à l’information qui y est contenue, nous avons fait précéder chaque chapitre d’un encadré. Cet encadré constitue un résumé du chapitre en question et pointe les résultats (formules, lemmes, théorèmes, remarques) qui sont selon nous les résultats essentiels.



Première partie

Propagation d'ondes  
électromagnétiques dans un milieu  
ferromagnétique





# Chapitre 1

## Le modèle du ferromagnétisme

**Résumé :** Dans ce premier chapitre à caractère introductif, nous présentons le modèle mathématique que nous retiendrons pour le reste de l'étude afin de modéliser la propagation d'ondes électromagnétiques dans un matériau ferromagnétique : il s'agit du couplage du système de Maxwell (1.1) avec la loi de Landau-Lifshitz-Gilbert (1.17). Nous faisons l'hypothèse, fondamentale pour le reste de l'étude, que le champ d'échange est négligeable; hypothèse communément admise pour les applications en furtivité (nous renvoyons à l'introduction pour une discussion de la validité "physique" d'une telle hypothèse). Au paragraphe 1.2, nous rappelons brièvement les propriétés qualitatives du système (1.1)-(1.17). Nous insistons notamment sur les propriétés d'absorption des matériaux ferromagnétiques (formule (1.30)). Au paragraphe 1.3, nous nous intéressons plus particulièrement au modèle linéarisé (sous l'hypothèse que l'amplitude du champ électromagnétique est petite). Cela nous donne un éclairage plus fin sur les phénomènes d'absorption qui se révèlent "sélectifs en fréquence" (voir figure 1.2). Nous introduisons en particulier les notions de perméabilité apparente et de fréquence de résonance dite de Larmor. Enfin, au paragraphe 1.4, nous illustrons à partir d'un exemple 1D tiré de la thèse d'Olivier Vacus [45] la façon dont les effets non linéaires apparaissent lorsque l'amplitude du champ électromagnétique augmente.

### 1.1 Présentation du modèle physique

#### 1.1.1 Les équations de Maxwell

La propagation d'ondes électromagnétiques dans un matériau quelconque obéit aux équations de Maxwell bien connues

$$(1.1) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{B} + \text{rot } \mathbf{E} = 0, & \text{div } \mathbf{B} = 0, \\ \partial_t \mathbf{D} - \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, & \text{div } \mathbf{D} = q, \end{cases}$$

où  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  désignent respectivement le champ électrique, le champ magnétique, l'induction électrique et l'induction magnétique. Par ailleurs, le scalaire  $q$  et le vecteur  $\mathbf{J}$  désignent respectivement la densité macroscopique de charge électrique et la densité macroscopique de courant de conduction. Dans notre cas, nous supposons toujours que  $q = 0$  et, pour les

courants, que la loi d'Ohm est vérifiée :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

avec  $\sigma$  la conductivité, qui sera presque nulle dans le cas des ferrites. A ces équations, il faut rajouter des relations particulières au milieu considéré ou *relations constitutives*. Dans le vide, on a par exemple,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

où la permittivité électrique  $\varepsilon_0$  et la perméabilité magnétique  $\mu_0$  sont des constantes liées à la vitesse de la lumière dans le vide  $c$  par la relation :  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ .

Dans un matériau diélectrique linéaire,

$$(1.2) \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

où  $\varepsilon_r$  est la permittivité relative et le vecteur  $\mathbf{M}$  désigne moment magnétique (appelé également aimantation) du milieu. Ce vecteur constitue une inconnue supplémentaire au système de Maxwell et nécessite alors une loi constitutive qui caractérise son évolution. Pour les corps diamagnétiques ou paramagnétiques (diélectriques classiques), les choses sont très simples : ce sont des matériaux linéaires, ce qui signifie que aimantation et champ magnétique sont liés par une relation du type

$$(1.3) \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

où  $\chi_m$  est la *susceptibilité magnétique* du milieu, coefficient sans dimension (la susceptibilité magnétique est une grandeur scalaire pour une substance isotrope, tensorielle sinon ...). En d'autres termes, ces milieux ne sont pas aimantés en l'absence de champ appliqué. De plus, la susceptibilité  $\chi_m$  est souvent petite en valeur absolue devant 1, négative la plupart du temps (diamagnétisme), positive quelquefois (paramagnétisme). On notera encore que l'on retrouve en conséquence

$$(1.4) \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad \text{avec} \quad \mu_r = 1 + \chi_m.$$

Le cas des matériaux ferromagnétiques est tout autre. La relation (1.3) est généralement insatisfaisante pour décrire le comportement de ces matériaux et constitue une linéarisation d'un modèle non linéaire plus général qui est le modèle de Landau-Lifshitz.

### 1.1.2 Le modèle de Landau-Lifshitz

Suivant la théorie de Landau-Lifshitz (vers 1935) (voir [32]), l'évolution du moment magnétique dans un matériau ferromagnétique saturé, à température constante, suit la loi non linéaire

$$(1.5) \quad \partial_t \mathbf{M} = \gamma \left( \mathbf{M} \times \mathbf{H}_T + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_T) \right)$$

où le vecteur  $\mathbf{H}_T$  désigne le *champ magnétique total* et est donné par

$$(1.6) \quad \mathbf{H}_T = \mathbf{H} + \mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{M})$$

où  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  est le *champ magnétique effectif*, dont l'expression dérive de l'énergie magnétique effective et sera explicitée plus loin.

Le coefficient  $\gamma$  est une constante négative appelée facteur magnéto-mécanique ou *rapport gyromagnétique*. Il est défini comme le rapport du moment magnétique total d'un électron à

son moment cinétique total. Sa valeur peut légèrement varier suivant les matériaux. Par contre, le facteur  $\alpha$ , désignant une constante positive et appelé facteur d'amortissement, possède des origines plutôt phénoménologiques et est introduit, comme son nom l'indique, pour rendre compte du phénomène d'absorption observé dans les expériences physiques. Dans la pratique, ce coefficient est difficilement mesurable et sera le plus souvent déterminé pour rapprocher au mieux modèle et mesures. Une seconde approche pour rendre compte de ce phénomène d'absorption sera donné plus loin dans le modèle de T. Gilbert.

**Remarque 1.1** *Comme seul le produit vectoriel  $\mathbf{H}_T \times \mathbf{M}$  intervient dans l'équation (1.5), on constate que l'on peut choisir plusieurs autres définitions de  $\mathbf{H}_T$ , équivalentes à (1.6), en y rajoutant tout multiple de  $\mathbf{M}$ .*

### 1.1.3 Forme générale du champ effectif

Le champ magnétique effectif  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  associé à une distribution de moment magnétiques  $\mathbf{M}$ , peut être défini (au moins formellement) par

$$(1.7) \quad \mu_0 \mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) = -\partial_{\mathbf{M}} \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M})$$

où  $\mathcal{E}_{\text{eff}}$  désigne l'énergie magnétique effective, considérée comme fonctionnelle à valeurs réelles du champ de fonctions vectorielles  $\mathbf{M}$  (on note par  $\partial_{\mathbf{M}} \mathcal{E}_{\text{eff}}$  la différentielle de la fonctionnelle  $\mathcal{E}_{\text{eff}}$  par rapport à  $\mathbf{M}$ ). Cette énergie est en fait la somme de plusieurs contributions

$$(1.8) \quad \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) = \mathcal{E}_e(\mathbf{M}) + \mathcal{E}_a(\mathbf{M}) + \mathcal{E}_s(\mathbf{M}) + \mathcal{E}_m(\mathbf{M}),$$

dont voici le détail dans le cas d'un corps ferromagnétique occupant un domaine  $\Omega$  :

#### Energie de Zeeman $\mathcal{E}_s$

Cette énergie décrit l'interaction entre l'aimantation et un champ magnétique  $\mathbf{H}_s$  appliqué. Elle s'écrit

$$(1.9) \quad \mathcal{E}_s(\mathbf{M}) = -\mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{M} \, dx.$$

Ainsi, son action tend à aligner l'aimantation avec  $\mu_0 \mathbf{H}_s = -\partial_{\mathbf{M}} \mathcal{E}_s(\mathbf{M})$ .

#### Energie d'anisotropie $\mathcal{E}_a$

Cette énergie provient des interactions cristallines entre les électrons et la structure atomique du matériau. Elle est traité de manière phénoménologique en écrivant

$$(1.10) \quad \mathcal{E}_a(\mathbf{M}) = \mu_0 \int_{\Omega} e_a(\mathbf{M}) \, dx$$

où  $e_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ , désigne une approximation de la densité des directions  $\mathbf{M}$ . Au voisinage de la température de Curie, on peut supposer en première approximation, que  $e_a$  est quadratique. Pour un cristal uniaxial, où l'axe de facile aimantation est portée par le vecteur unitaire  $\mathbf{p}$ , on a pour tout  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$ ,

$$(1.11) \quad e_a(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} K_a |\mathbf{m} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{p}|^2$$

où  $K_a$  est une constante positive. On observe que dans ce cas, l'action de l'énergie d'anisotropie tend à aligner l'aimantation avec  $\mathbf{p}$ . Le cas  $e_a(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} K_a |\mathbf{p} \cdot \mathbf{m}|^2$  conduit à une anisotropie

planaire qui favorise les directions d'aimantation orthogonale à  $\mathbf{p}$ . Pour des cristaux cubiques, les termes quadratiques sont généralement insuffisants pour bien tenir compte de l'anisotropie. Un exemple de modèle d'anisotropie pour un cristal cubique correspond à

$$(1.12) \quad e_a(\mathbf{m}) = K_1 \left( (m_1 m_2)^2 + (m_2 m_3)^2 + (m_3 m_1)^2 \right) + K_2 (m_1 m_2 m_3)^2,$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont deux constantes positives. La contribution de cette énergie dans l'expression de  $\mu_0 \mathbf{H}_{\text{eff}}$  est

$$\mu_0 \mathbf{H}_a = -\partial_{\mathbf{M}} \mathcal{E}_a(\mathbf{M}) = -\mu_0 \partial_{\mathbf{m}} e_a(\mathbf{M}).$$

Dans le cas d'un cristal uniaxial

$$\mathbf{H}_a = K_a ((\mathbf{p} \cdot \mathbf{M})\mathbf{p} - \mathbf{M}).$$

### Energie d'échange $\mathcal{E}_e$

L'interaction d'échange est un effet d'origine quantique. Elle tient compte de l'interaction d'échange à l'échelle atomique qui existe entre deux spins différents. On montre que pour un échantillon isotrope

$$\mathcal{E}_e(\mathbf{M}) = \mu_0 \frac{1}{2} K_e \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{M}|^2 d\mathbf{x}$$

où  $K_e$  est une constante positive caractéristique du matériau. La contribution de cette énergie dans l'expression du champ effectif correspond au champ d'échange

$$\mathbf{H}_e = K_e \Delta \mathbf{M}.$$

L'expérience montre que le coefficient  $K_e$  est très faible de telle sorte que les effets dus à ce terme ne prennent une dimension significative qu'à l'échelle microscopique (qui reste toutefois largement supérieure à l'échelle de l'atome). La prise en compte de cette énergie est donc essentielle dans les problèmes rencontrés en micromagnétisme, notamment par exemple, dans la recherche des configurations d'équilibres magnétostatiques d'un microfilm magnétique. Dans le cas des applications qui nous intéressent, il est possible de négliger en première approximation les effets dûs à ce terme. C'est ce que nous ferons tout au long de cette thèse.

### L'énergie démagnétisante $\mathcal{E}_m$

Cette énergie est due à la charge magnétostatique volumique donnée par  $-\text{div } \mathbf{M}$ . Cette énergie est définie par

$$\mathcal{E}_m(\mathbf{M}) = -\mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{H}_m(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{M} d\mathbf{x}$$

où  $\mathbf{H}_m$  est appelé champ démagnétisant. L'expression de ce champ en fonction de  $\mathbf{M}$  n'est pas explicite. Il est solution du problème

$$(1.13) \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_m = 0 \\ \text{div } \mathbf{H}_m = -\text{div } \mathbf{M} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega$$

La première de ces deux équations indiquant que  $\mathbf{H}_m$  dérive d'un potentiel, on peut introduire le scalaire  $\varphi$  et réécrire le problème (1.13) sous la forme

$$(1.14) \quad \begin{cases} \mathbf{H}_m = \nabla \varphi & \text{dans } \Omega \\ -\Delta \varphi = \text{div } \mathbf{M} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

où l'on a prolonger  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  par 0 en dehors de  $\Omega$ , dans la deuxième équation. On voit alors que  $\varphi$  est solution d'un problème de type Laplace. Il est certes linéaire mais non local en espace, ce qui en constitue la principale difficulté.

### 1.1.4 Modèle retenu pour le champ effectif

D'après (1.7) et (1.8) la forme générale du champ effectif est donné par

$$(1.15) \quad \mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) = \mathbf{H}_s + K_e \Delta \mathbf{M} + \mathbf{H}_m(\mathbf{M}) - \partial_{\mathbf{m}} e_a(\mathbf{M}).$$

Néanmoins, pour toute la suite, nous allons systématiquement négliger le terme d'échange  $K_e \Delta \mathbf{M}$  compte tenue de la très faible valeur de  $K_e$ . Il s'agit d'une hypothèse simplificatrice à multiples conséquences

1. D'un point de vue physique, on sort complètement du domaine micromagnétique et on se place plutôt à une "échelle macroscopique".
2. D'un point de vue mathématique, on aborde un problème différent où l'hypothèse de régularité sur  $\mathbf{M}$  imposée par le terme d'échange se trouve relâchée.

Par ailleurs, on remarque que les équations définissant  $\mathbf{H}_m$  ne sont autres que le résidu statique des équations de Maxwell. Ainsi, lorsqu'on considère le problème couplé (1.1)-(1.5), il serait redondant, pour les  $t > 0$  de rajouter la contribution  $\mathbf{H}_m$  au champ effectif puisque cette contribution est prise en compte dans le champ magnétique  $\mathbf{H}$ . Ainsi pour le modèle couplé nous poserons

$$(1.16) \quad \mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) = \mathbf{H}_s - \partial_{\mathbf{m}} e_a(\mathbf{M})$$

**Remarque 1.2** *En utilisant (1.16) il faut faire attention, dans les applications pratiques, à l'équilibre magnéto-statique du milieu ferromagnétique en absence d'onde électromagnétique. Cet équilibre est caractérisé par  $\partial_t \mathbf{M}|_{t=0} = 0$ , ce qui revient à assurer  $\mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{M}_0) \times \mathbf{M}_0 = 0$  où  $\mathbf{M}_0$  est la distribution initiale de l'aimantation. Or, le champ d'échange étant négligé, les deux expressions (1.16) et (1.15) de  $\mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{M}_0)$  ne diffèrent que de  $\mathbf{H}_m(\mathbf{M}_0)$ . Deux cas se présentent alors*

1.  $\operatorname{div}(\mathbf{M}_0) = 0$  : dans ce cas  $\mathbf{H}_m(\mathbf{M}_0) = 0$  et des deux expressions sont strictement équivalentes.
2.  $\operatorname{div}(\mathbf{M}_0) \neq 0$  : dans ce cas  $\mathbf{H}_m(\mathbf{M}_0) \neq 0$  et donc l'utilisation de (1.16) n'est pas valide à  $t = 0$ . Pour y remédier il convient de rajouter à l'expression de  $\mathbf{H}_s$  la valeur de  $\mathbf{H}_m(\mathbf{M}_0)$ .

### 1.1.5 Modèle d'amortissement de Gilbert

Pour tenir compte des phénomènes dissipatifs dans les milieux ferromagnétiques, T. Gilbert propose dans [19] une forme alternative au terme de dissipation, proportionnelle au produit vectoriel  $\mathbf{M} \times \partial_t \mathbf{M}$ . Ainsi au lieu de (1.5) on aurait

$$(1.17) \quad \partial_t \mathbf{M} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_T + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M} \times \partial_t \mathbf{M}$$

Une discussion détaillée sur les subtiles distinctions entre les deux approches est donné par Mallinson dans [33]. Notons que les origines du mécanisme de dissipation sont généralement attribuées au courants induits et aux interactions photon-magnon... Cela étant, d'un point de

vue mathématique les deux lois sont strictement équivalentes. Ceci repose sur la propriété vectorielle suivante (dont la démonstration est donnée dans l'annexe A) : si  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{>}$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  alors on a l'équivalence

$$(1.18) \quad \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{>} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{>} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{>}) \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{>}}{1 + |\mathbf{a}|^2}$$

En prenant

$$\mathbf{x} = \partial_t \mathbf{M}, \quad \mathbf{a} = -\frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M}, \quad \mathbf{>} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_T.$$

ce qui entraîne en particulier  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{>} = 0$  et  $|\mathbf{a}| = 1$ , on constate d'après (1.18) que  $\mathbf{M}$  vérifie (1.17) ssi

$$(1.19) \quad \partial_t \mathbf{M} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left( \mathbf{M} \times \mathbf{H}_T + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_T) \right).$$

On retrouve à une constante multiplicative près, en l'occurrence  $\frac{1}{1 + \alpha^2}$ , l'équation (1.5).

**Remarque 1.3** *Par la suite, on privilégiera l'expression (1.5) pour l'étude théorique du problème couplé, et on utilisera plutôt l'expression (1.17) pour la discrétisation et l'étude numérique.*

## 1.2 Propriétés mathématiques élémentaires du système couplé Maxwell-Landau-Lifshitz

### 1.2.1 Propriétés de stabilité

L'étude des propriétés mathématiques du système couplé (1.1)-(1.5), et notamment l'existence de solutions d'énergie finie repose sur deux estimations a priori fondamentales que nous allons détailler ici dans un cadre purement formel. Nous renvoyons au chapitre suivant pour toute justification rigoureuse.

#### Conservation de la norme de l'aimantation

Voici une propriété qui fait partie des postulats de base de la dérivation physique du modèle LL : dans un matériaux ferromagnétique saturé, le module de moment magnétique demeure égal au module de saturation  $M_s$ . Les équations du modèle étant bien établies, cette propriété en devient une conséquence. Considérons par exemple la loi (1.5) ; le produit scalaire du second membre par  $\mathbf{M}$  étant nul, on en déduit

$$(1.20) \quad \frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{M}|^2 = \mathbf{M} \cdot \partial_t \mathbf{M} = 0.$$

Ainsi, si  $\mathbf{M}_0$  désigne la distribution initiale de l'aimantation, nous avons pour tout  $t \geq 0$

$$(1.21) \quad \boxed{|\mathbf{M}(t)| = |\mathbf{M}_0|}$$

On retrouve donc  $|\mathbf{M}(t)| = M_s$  si on suppose qu'initialement le matériaux est saturé. Plus généralement, si on suppose que  $\mathbf{M}_0$  est borné en espace, alors  $\mathbf{M}$  restera uniformément borné pour tout  $t > 0$ .

**Remarque 1.4** *On constate alors qu'il est possible de remplacer l'inconnu  $|\mathbf{M}|$  dans l'équation (1.5) par  $|\mathbf{M}_0|$  qui constitue plutôt une donnée. Il faut cependant faire attention aux endroits où  $|\mathbf{M}_0| = 0$ . Mais lorsque  $|\mathbf{M}_0| = 0$ ,  $|\mathbf{M}(t)| = 0$  pour tout temps  $t > 0$  (... suite au chapitre 2). Autrement dit, le domaine ferromagnétique est délimité par le support de  $\mathbf{M}_0$  : l'aimantation, à l'opposé du champ électrique  $\mathbf{E}$  et du champ magnétique  $\mathbf{H}$ , n'est pas une grandeur propagative.*

### Décroissance de l'énergie électromagnétique

La conservation de la norme de l'aimantation constituant une propriété propre à la loi ferromagnétique, il s'agit ici de la propriété garantissant la stabilité du modèle couplé. Considérons par exemple le système formé par (1.17) et par les deux équations d'évolutions du système (1.1) qu'on peut réécrire sous la forme, en posant  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ,

$$(1.22) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} - \text{rot } \mathbf{H} = 0 \\ \mu_0 \partial_t \mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{M} \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Dans (1.22), on reconnaît les équations de Maxwell avec un terme source. Une démonstration classique de la conservation ou de la décroissance de l'énergie électromagnétique consiste à prendre le produit scalaire  $L^2$  de la première par  $\mathbf{H}$  et celui de la seconde par  $\mathbf{E}$ . On obtient alors par addition, en utilisant la propriété d'intégration par parties :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \text{div } (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

que

$$(1.23) \quad \int_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{H}) \, d\mathbf{x} + \sigma \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 \, d\mathbf{x} + \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{M} \, d\mathbf{x} = 0$$

On reconnaît à travers le premier terme du membre de droite la dérivée de l'énergie associée à l'onde qui se propage

$$(1.24) \quad \int_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{H}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) \, d\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$$

L'équation (1.23) s'écrit donc

$$(1.25) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = -\sigma \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 \, d\mathbf{x} - \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{M} \, d\mathbf{x}$$

On peut voir que, dans un matériau conducteur non aimanté ( $\mathbf{M} = 0$ ), l'énergie est décroissante car sa dérivée au cours du temps est négative. On va montrer que dans un matériau ferromagnétique, il existe une source supplémentaire de dissipation (plus intéressante dans la pratique) caché dans le terme d'interaction :

$$\mathcal{I} = \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{M} \, d\mathbf{x}$$

Par définition (relation (1.6)),  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_T - \mathbf{H}_{\text{eff}}$  et donc

$$(1.26) \quad \mathcal{I} = \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}_T \cdot \partial_t \mathbf{M} \, d\mathbf{x} - \mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}_{\text{eff}} \cdot \partial_t \mathbf{M} \, d\mathbf{x}$$



Nous avons choisi de travailler avec l'expression (1.17) : en mettant  $\mathbf{M}$  en facteur du produit vectoriel, on constate que le produit scalaire de son second membre par  $\gamma \mathbf{H}_T + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \partial_t \mathbf{M}$  est nul. Ainsi

$$\partial_t \mathbf{M} \cdot \left( \gamma \mathbf{H}_T + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \partial_t \mathbf{M} \right) = 0$$

ce qui montre,  $\gamma$  étant une constante négative,

$$(1.27) \quad \partial_t \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_T = \frac{\alpha}{|\gamma| |\mathbf{M}|} |\partial_t \mathbf{M}|^2.$$

Il est à noter que la relation (1.27) constitue une propriété propre à la structure de la loi non linéaire. Elle nous permet d'exprimer le premier terme dans le second membre de (1.26). Pour le deuxième terme, on peut se mettre dans le cadre général (1.7) de l'expression du champ effectif. On constate par différenciation dans  $L^2$ ,

$$(1.28) \quad \mu_0 \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{H}_{\text{eff}} \cdot \partial_t \mathbf{M} \, d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{R}^3} \partial_t \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) \cdot \partial_t \mathbf{M} \, d\mathbf{x} = - \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M}).$$

En utilisant (1.28) et (1.27), l'égalité (1.26) nous donne

$$(1.29) \quad \mu_0 \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{H} \cdot \partial_t \mathbf{M} \, d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) + \frac{\mu_0}{|\gamma|} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} |\partial_t \mathbf{M}|^2 \, d\mathbf{x}$$

D'où, en combinant (1.29) et (1.25),

$$(1.30) \quad \boxed{\frac{d}{dt} (\mathcal{E}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) + \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M})) = -\sigma \int_{\mathbf{R}^3} |\mathbf{E}|^2 \, d\mathbf{x} - \frac{\mu_0}{|\gamma|} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} |\partial_t \mathbf{M}|^2 \, d\mathbf{x}}$$

Cette identité appelle plusieurs commentaires :

1. On constate donc que la dérivée en temps de l'énergie électromagnétique totale

$$\mathcal{E}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) + \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M})$$

est négative et par conséquent cette énergie décroît au cours du temps.

2. En absence, de conductivité, la dissipation est due au terme d'amortissement introduit dans la loi ferromagnétique. L'identité (1.30) justifie en quelque sorte le terme de facteur d'amortissement utilisé pour dénoter  $\alpha$ .
3. Dans les applications pratiques qui nous intéressent, la dissipation la plus significative provient de l'aimantation. C'est pourquoi on négligera souvent la dissipation causée par effet joule (terme en  $\sigma$ ) en prenant  $\sigma = 0$ .
4. Cette identité fournit sous la condition (1.20), une estimation a priori uniforme en temps, de la norme  $L^2$  en espace des champs électriques et magnétiques. Nous allons détailler ceci dans la cas où  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  est donné par (1.16), c.à.d

$$\mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) = \mathcal{E}_s(\mathbf{M}) + \mathcal{E}_a(\mathbf{M})$$

On s'aperçoit facilement qu'étant donné (1.20),

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_s(\mathbf{M}) = \frac{d}{dt} \frac{\mu_0}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\mathbf{H}_s - \mathbf{M}|^2 \, d\mathbf{x}$$

Ainsi, en posant

$$\mathcal{E}'_s(\mathbf{M}) = \frac{\mu_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{H}_s - \mathbf{M}|^2 dx \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_{\text{eff}}(\mathbf{M}) = \mathcal{E}'_s(\mathbf{M}) + \mathcal{E}_a(\mathbf{M})$$

on a  $\mathcal{E}'_{\text{eff}} \geq 0$  et l'identité (1.30) reste valable en substituant  $\mathcal{E}'_{\text{eff}}$  à  $\mathcal{E}_{\text{eff}}$ . On en déduit en particulier que, pour tout  $t \geq 0$

$$\mathcal{E}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \leq \mathcal{E}(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) + \mathcal{E}'_{\text{eff}}(\mathbf{M}_0)$$

ce qui correspond à l'estimation mentionnée.

**Remarque 1.5** *On constate que pour l'étude mathématique du problème, que la bonne expression à prendre pour  $\mathcal{E}_{\text{eff}}$  est celle donnée par  $\mathcal{E}'_{\text{eff}}$ . Le choix d'adopter l'expression  $\mathcal{E}'_{\text{eff}}$  correspond à*

$$(1.31) \quad \mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) = \mathbf{H}_s - \mathbf{M} - \partial_{\mathbf{m}} e_a(\mathbf{M})$$

*ce qui est strictement équivalent au choix de (1.16) pour la loi non linéaire (cf. remarque 1.1).*

## 1.3 Modèle linéarisé - phénomène de résonance

Le problème type qui sera rencontré tout au long de ce travail, est d'étudier l'interaction d'une onde électromagnétique provenant du vide avec un matériau ferromagnétique. Pour caractériser cette interaction, les ingénieurs (voir à titre d'exemple [39]) font souvent recours à une linéarisation de la loi non linéaire, en se plaçant dans l'hypothèse de petites perturbations. Si  $|\mathbf{H}|$  est le module du champ magnétique incident, on suppose

$$(1.32) \quad |\mathbf{H}| \ll |\mathbf{H}_s|.$$

Cette linéarisation permet en effet, de modéliser le comportement harmonique du matériau ferromagnétique par le biais d'un tenseur de susceptibilité (complexe), à l'image d'un diélectrique linéaire classique (1.3). En guise d'exemple, nous allons traiter un cas particulier simple.

### 1.3.1 Etude d'un cas particulier

Nous considérons la loi ferromagnétique sous sa forme (1.17). La linéarisation de cette loi sous l'hypothèse (1.32), revient à poser (formellement)

$$\mathbf{H} = \delta \mathbf{h} + O(\delta^2) \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \delta \mathbf{m} + O(\delta^2)$$

avec  $\delta \ll |\mathbf{H}_s|$  et  $\delta \ll |\mathbf{M}_0|$  et à ne garder que les termes en  $O(\delta)$  dans les équations. On se place pour simplifier dans le cas

$$\mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) = \mathbf{H}_s = H_0 \vec{\mathbf{n}}$$

où  $\vec{\mathbf{n}}$  désigne un vecteur unitaire et  $H_0 = |\mathbf{H}_s|$ . L'équation obtenue après linéarisation de (1.17), s'écrit alors

$$\partial_t \mathbf{m} = \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_s + \gamma \mathbf{M}_0 \times \mathbf{h} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M}_0 \times \partial_t \mathbf{m}$$

Par ailleurs l'équilibre magnétostatique initial nous impose de prendre

$$\mathbf{M}_0 = |\mathbf{M}_0| \vec{\mathbf{n}} \equiv M_0 \vec{\mathbf{n}}$$

par conséquent, notre équation linéarisée s'écrit simplement

$$(1.33) \quad \partial_t \mathbf{m} = \vec{\mathbf{n}} \times (|\gamma| H_0 \mathbf{m} + \alpha \partial_t \mathbf{m} - |\gamma| M_0 \mathbf{h})$$

Le caractère linéaire de cette équation nous permet d'en chercher les solutions sous la forme d'ondes monochromatiques. Fixons donc une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$  dans (1.33),

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}$$

et cherchons  $\hat{\mathbf{m}}$  et  $\hat{\mathbf{h}}$  telles que

$$(1.34) \quad i\omega \hat{\mathbf{m}} - (|\gamma| H_0 + i\omega\alpha) \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{m}} = -|\gamma| M_0 \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{h}}$$

On s'aperçoit, en introduisant  $\omega_0 = |\gamma| H_0$ , appelé *pulsation de Larmor*, et en posant

$$\varpi = \omega_0/\omega \quad \text{et} \quad A = M_0/H_0,$$

que l'équation (1.34) s'écrit, en la divisant par  $i\omega$ ,

$$(1.35) \quad \hat{\mathbf{m}} - (\alpha - i\varpi) \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{m}} = i\varpi A \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{h}}$$

Cette relation montre finalement d'après (A.2, page 287), que lorsque  $1 + (\alpha - i\varpi)^2 \neq 0$  (ce qui sera toujours le cas si  $\alpha \neq 0$ ),

$$(1.36) \quad \hat{\mathbf{m}} = \frac{i\varpi A}{1 + (\alpha - i\varpi)^2} \left( \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{h}} - (\alpha - i\varpi) \left( \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{h}} \right) \times \vec{\mathbf{n}} \right)$$

On vient ainsi de mettre en évidence l'existence d'un tenseur  $\chi(\varpi)$ , appelé tenseur de susceptibilité magnétique, tel que

$$(1.37) \quad \hat{\mathbf{m}} = \chi(\varpi) \cdot \hat{\mathbf{h}}.$$

Ce tenseur est associé à l'application linéaire :  $\hat{\mathbf{h}} \mapsto \hat{\mathbf{m}}$  où  $\hat{\mathbf{m}}$  est défini par (1.36). On retrouve en quelque sorte, la relation constitutive d'un matériau linéaire (1.3), sauf qu'ici le tenseur  $\chi$  dépend de la fréquence de l'onde : on dit dans ce cas que le milieu est dispersif (les fréquences ne se propagent pas à la même vitesse).

1. On remarque que lorsque  $\alpha > 0$  la condition  $1 + (\alpha - i\varpi)^2 \neq 0$  est vérifiée pour tout  $\varpi$  et le tenseur  $\chi$  est donc bien défini.

2. Par contre, dans le cas  $\alpha = 0$  (i.e. sans amortissement), l'expression (1.36) n'est pas définie pour  $\varpi = 1$  soit  $\omega = \omega_0$ . De plus, lorsque  $\omega \rightarrow \omega_0$ ,  $|\hat{\mathbf{m}}|$  tend vers l'infini. Il s'agit bien des caractéristiques d'un phénomène de résonance qui apparaît, dans le milieu ferromagnétique (linéarisé), à la fréquence de Larmor  $\omega_0$ . Le modèle harmonique n'est alors plus justifié pour cette fréquence.

3. Remarquons enfin que lorsque l'onde électromagnétique est polarisée de manière à avoir  $\vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{h}} = 0$ , on a  $\hat{\mathbf{m}} = 0$  et donc  $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}_0$  : le domaine ferromagnétique est transparent pour une telle onde.

**Forme explicite.** Soit  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  une base orthonormale directe de  $\mathbb{R}^3$  et prenons par exemple  $\vec{n} = \vec{e}_y$ . Nous déduisons de (1.36) l'expression suivante de  $\chi$  dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$(1.38) \quad \frac{i\varpi A}{1 + (\alpha - i\varpi)^2} \begin{pmatrix} (i\varpi - \alpha) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & (i\varpi - \alpha) \end{pmatrix}$$

Suivant la remarque précédente, on constate qu'une onde électrique transverse :  $(E_x, H_y, E_z)$  n'interagit pas avec la magnétisation, ou plus exactement cette interaction est en  $O(\delta^2)$ . Par ailleurs, l'expression (1.38) met en évidence le caractère anisotrope (termes extra diagonaux non nuls) d'un milieu ferromagnétique.

### 1.3.2 Tenseur de perméabilité relative directionnelle

#### Mise en évidence

Pour mieux interpréter le tenseur  $\chi$  nous allons étudier le comportement ferromagnétique pour une onde plane. Supposons donc que l'onde électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  soit invariante dans le plan orthogonal à  $\vec{k}$  (ou de façon équivalente, qu'elle ne dépende de  $\mathbf{x}$  que via le produit scalaire  $\vec{k} \cdot \mathbf{x}$ ), où  $\vec{k}$  est un vecteur unitaire donné. D'après (1.1),

$$\text{div}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0.$$

On en déduit :  $\text{div}(\hat{\mathbf{h}} + \hat{\mathbf{m}}) = 0$ , ce qui signifie, d'après l'hypothèse d'onde plane,

$$(1.39) \quad \hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{k} = -\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{k}$$

Pour simplifier, nous allons considérer le cas où  $\vec{k}$  est orthogonal à  $\vec{n}$ . On note  $\vec{\tau} = \vec{k} \times \vec{n}$  (voir figure 1.1).

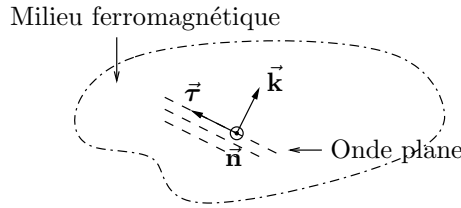


FIG. 1.1 – Configuration type de l'onde plane

n° D'après (1.37), la condition (1.39) montre l'existence d'un complexe  $\chi_d(\varpi)$  appelé *susceptibilité directionnelle* tel que

$$(1.40) \quad (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\tau}) = \chi_d(\varpi)(\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{\tau})$$

Ce complexe peut être exprimé en fonction de  $\chi$  par la formule

$$(1.41) \quad \chi_d(\varpi) = (\vec{\tau} \cdot (\chi \cdot \vec{\tau})) - \frac{(\vec{\tau} \cdot (\chi \cdot \vec{k}))(\vec{\tau} \cdot (\chi \cdot \vec{k}))}{1 + (\vec{k} \cdot (\chi \cdot \vec{k}))}$$

La valeur de  $\chi_d$  dépend a priori de la direction  $\vec{\mathbf{k}}$  de l'onde. Il se trouve que dans le cas particulier du champ effectif qu'on a considéré, l'expression (1.41) est indépendante du choix de  $\vec{\mathbf{k}}$ . Pour la déterminer il est plus commode de repartir de (1.35) et d'utiliser la règle de calcul

$$(\vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{h}}) \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}} = -\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}}.$$

On obtient en prenant le produit scalaire de (1.35) par  $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ ,

$$(1.42) \quad (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}) = -(\alpha - i\varpi(1 + A))(\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}})$$

et en prenant le produit scalaire de (1.35) par  $\vec{\mathbf{k}}$ ,

$$(1.43) \quad (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}}) = (\alpha - i\varpi)(\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}) + i\varpi A(\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}})$$

En substituant (1.43) dans (1.42), on déduit

$$(1.44) \quad \chi_d(\varpi) = -\frac{i\varpi A(\alpha - i\varpi(1 + A))}{1 + (\alpha - i\varpi)(\alpha - i\varpi(1 + A))}$$

La perméabilité relative directionnelle  $\mu_d$  est définie par (cf. équation (1.4))

$$(1.45) \quad \mu_d(\varpi) = 1 + \chi_d(\varpi)$$

### Commentaires et interprétations

Nous rappelons que la partie imaginaire de la perméabilité relative complexe s'interprète comme un terme d'amortissement. Le milieu est dissipatif lorsque

$$-\Im(\mu_d) = -\Im(\chi_d) > 0,$$

plus cette valeur est grande plus la dissipation est importante. D'après (1.44)

$$(1.46) \quad -\Im(\chi_d(\varpi)) = \alpha\varpi A \frac{1 + \alpha^2 + \varpi^2(1 + A)^2}{(1 + \alpha^2 - \varpi^2(1 + A))^2 + (\alpha\varpi(2 + A))^2}$$

ce qui confirme encore une fois la présence d'amortissement dans le milieu ferromagnétique pour  $\alpha > 0$ . La figure suivante montre un exemple de courbes de perméabilités directionnelles.

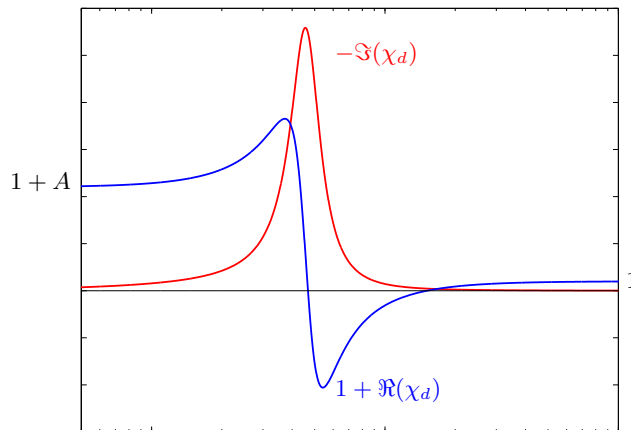


FIG. 1.2 – Exemple de courbes de perméabilités directionnelles ( $\alpha = 0.05$  et  $A = 20$ ). L'axe des abscisses représente  $-\log \varpi$ .

On remarque d'abord que la plage d'absorption significative est très localisée en fréquence. En fait, cette localisation devient de plus en plus marquée d'autant plus que  $\alpha \rightarrow 0...$  et dans la pratique  $\alpha$  est petit.

Par ailleurs, on constate que pour les basses fréquences ( $\varpi \rightarrow \infty$ ),  $\chi_d(\varpi) \sim A$ ; le matériau se caractérise par une perméabilité relative réelle de valeur  $(1 + A)$  et donc par une célérité de propagation  $c = c_0/\sqrt{1 + A}$ . Pour les hautes fréquences au contraire, la susceptibilité s'annule; le matériau devient transparent.

### 1.4 Un exemple important de phénomènes non linéaires : génération d'harmoniques

L'étude monochromatique (relation (1.37)) rendue possible par l'hypothèse de petites perturbations tombe en défaut dès que l'on sort du cadre de cette hypothèse. On montre (voir par exemple [39]) qu'une couche ferromagnétique se comporte comme un générateur d'harmoniques. Ce comportement est donc typiquement non linéaire. Il est possible de mettre en évidence numériquement ce phénomène en comparant le spectre d'un signal incident ( $\mathbf{E}_{inc}, \mathbf{H}_{inc}$ ) au spectre du signal réfléchi ( $\mathbf{E}_r, \mathbf{H}_r$ ) par une couche ferromagnétique ( $\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_s, \alpha$ ), lorsque le module de  $\mathbf{H}_{inc}$  est du même ordre de grandeur que le module de  $\mathbf{H}_s$ .

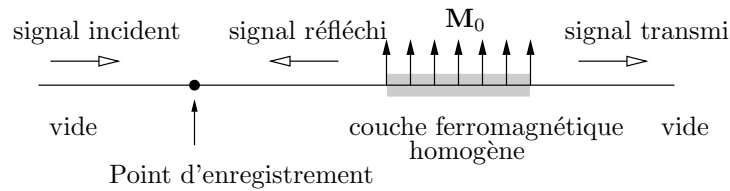
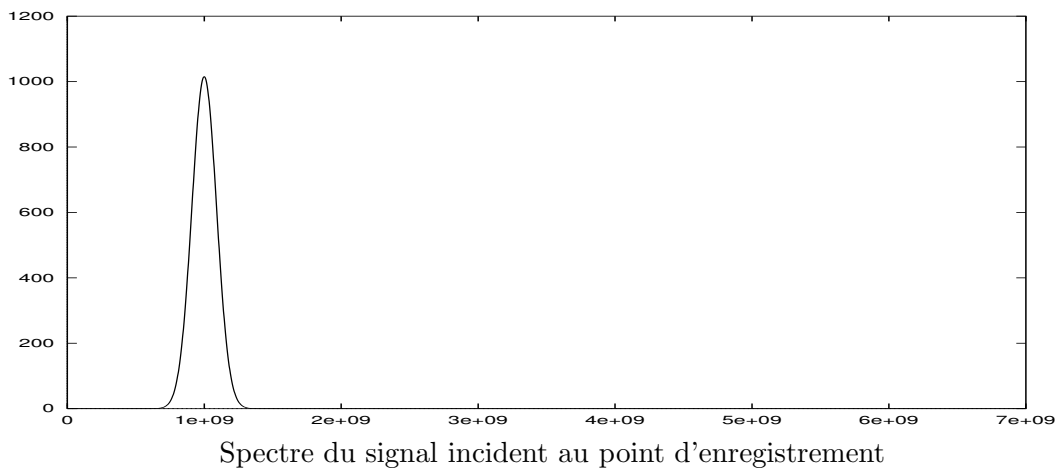
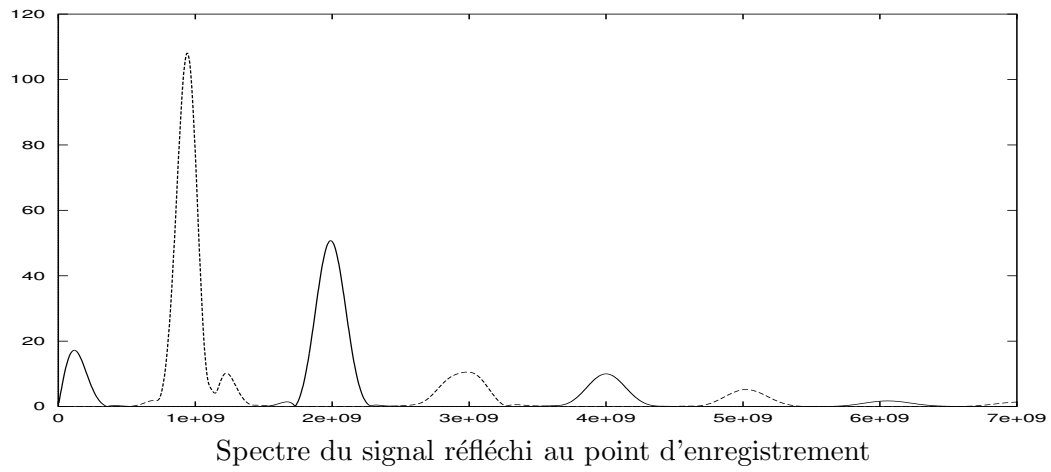


FIG. 1.3 – description de l'expérience 1D

Voici ce qu'on obtient dans le cas de l'expérience 1D de la figure 1.3, en prenant  $|\mathbf{M}_0| = |\mathbf{H}_s| = |\mathbf{H}_{inc}| = 10^5$  et  $\alpha = 0.05$ , ( $\sigma = 0$ ) (Les résultats sont reproduits sur [45])





n° où l'on remarque sur le signal réfléchi l'apparition de fréquences nouvelles, régulièrement organisées autour des multiples de la fréquence du signal incident.

## Chapitre 2

# Etude mathématique du problème couplé

**Résumé :** Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse mathématique du système (1.1)-(1.17), que nous plongeons dans un cadre un peu plus général (voir section 2.2). Nous rappelons les résultats connus au démarrage de cette thèse. Dans le cas 1D, le système relève d'une théorie relativement simple à la Cauchy-Lipschitz-Picard (résultats de P. Joly et O. Vacus) grâce à l'injection de  $H^1$  dans  $L^\infty$  (section 2.3). En dimension 3, J.L. Joly, G. Metivier et J. Rauch ont développé une méthode basée sur la construction de solutions approchées par un procédé de troncature en fréquence (l'opérateur  $S^\lambda$  défini par (2.11)). Leur démonstration repose en particulier sur des propriétés des solutions de l'équation des ondes homogène dans  $\mathbb{R}^3$  ce qui restreint a priori l'étude au cas où la permittivité électrique  $\varepsilon$  est constante (voir section 2.5). Le coeur de ce chapitre est constitué par la section 2.4 : nous y complétons la théorie du système (1.1)-(1.17) en considérant le cas 2D dans le cas (important pour les applications) où la permittivité  $\varepsilon(\mathbf{x})$  est variable (éventuellement discontinue). Notre preuve est une variante de celle développée par Joly-Metivier-Rauch en 3D (le procédé de régularisation en fréquence est un peu différent (voir (2.13), (2.63) et la remarque 2.11)). Nous exploitons le fait que, en dimension 2, l'écart entre  $H^1$  et  $L^\infty$  n'est "pas trop grand" au sens où on a la borne logarithmique (voir lemme 2.7) pour la norme  $L^\infty$  de  $S^\lambda u$  (qui reste vraie en 3D (sous une forme légèrement différente) pour une solution de l'équation des ondes mais pas pour toute fonction  $H^1$  (voir lemme 2.10)). Ceci permet entre autres de simplifier un peu par rapport au cas 3D la preuve du théorème d'existence.

### 2.1 Introduction

Les résultats mathématiques sur le problème de Cauchy, formé par les équations de Maxwell instationnaires et la loi de Landau-Lifshitz pour les matériaux ferromagnétiques, sont encore peu nombreux et récents. Il y a en particulier deux types de travaux et de résultats suivant que l'on néglige ou pas le champ d'échange dans la loi de Landau-Lifshitz.

En présence de termes d'échanges (micromagnétisme), G. Carbou et P. Fabrie montrent dans [12], via un procédé d'approximation de Galerkin, l'existence de solutions faibles au problème instationnaire (voir aussi [46] et également [9] qui traitent le cas de données périodiques).



Ce procédé exploite l'effet régularisant du terme d'échange sur la magnétisation pour passer à la limite faible dans les termes non linéaires. L'unicité reste encore un problème ouvert dans le cas des solutions faibles. Elle a été prouvée pour les solutions régulières du problème quasistatique dans [13].

On va se concentrer dans le présent travail sur le cas sans termes d'échanges, où le problème mathématique est bien différent. La loi de Landau-Lifshitz devient une simple équation différentielle (non linéaire) en temps, et l'on perd tout effet régularisant en espace. On se propose dans ce chapitre de faire un résumé (non exhaustif mais autocontenu) des résultats mathématiques récents sur l'étude du problème couplé sans termes d'échanges [29, 30, 26, 27]. Nous les compléterons par un résultat nouveau à notre connaissance, à savoir un théorème d'existence et unicité des solutions fortes en 2D, dans le cas de coefficients variables. Ces résultats nous seront utiles notamment dans la partie III.

## 2.2 Le modèle mathématique

### 2.2.1 Les équations du modèle

On considère donc les équations de Maxwell dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$

$$(2.1) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E} - \text{rot } \mathbf{H} = 0, & \mu_0 (\partial_t \mathbf{H} + \partial_t \mathbf{M}) + \text{rot } \mathbf{E} = 0, \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H})|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0), \end{cases}$$

où par rapport aux équations (1.1) on a pris  $\sigma = 0$ , car le rajout de ce terme dissipatif dans les équations ne change rien de fondamental aux preuves sinon encombrer les passages techniques. La perméabilité  $\mu_0$  est supposée constante, par contre la permittivité  $\varepsilon$  peut varier en espace. Les termes sources sont pris en compte sous la forme générale d'une condition initiale  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ . Ces équations sont à coupler avec la loi qui décrit l'évolution de  $\mathbf{M}$ . Nous avons choisi de travailler (à l'image de [26]) avec une forme abstraite pour la loi de Landau-Lifshitz, qui reprend les propriétés fondamentales nécessaires pour l'étude mathématique. On l'écrit sous la forme,

$$(2.2) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}_T; \mathbf{x}) & \text{avec } \mathbf{H}_T = \mathbf{H} - \partial_m \Phi(\mathbf{M}; \mathbf{x}), \\ \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0, \end{cases}$$

où  $\mathbf{M}_0$  désigne la distribution initiale de l'aimantation,  $\mathcal{L}$  la loi du matériau et  $\Phi$  la densité d'énergie effective (sans termes d'échanges). L'hypothèse la plus générale qu'on fera pour la fonction  $\mathcal{L}$  est

**Hypothèse 2.1** *Pour presque tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , la fonction  $(\mathbf{m}, \mathbf{h}) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x})$  est continue de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  et vérifie*

$$(2.3) \quad \mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) \cdot \mathbf{m} = 0 \text{ pour tout } (\mathbf{m}, \mathbf{h}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

*De plus, pour tout  $R > 0$  il existe une constante  $C(R)$  telle que pour tout  $\mathbf{m}, \mathbf{m}'$  éléments de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $|\mathbf{m}| \leq R$  et  $|\mathbf{m}'| \leq R$  et pour tout  $\mathbf{h}, \mathbf{h}'$  éléments de  $\mathbb{R}^3$ ,*

$$(2.4) \quad \begin{cases} (i) & |\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x})| \leq C(R) |\mathbf{h}|, \\ (ii) & |\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) - \mathcal{L}(\mathbf{m}', \mathbf{h}'; \mathbf{x})| \leq C(R) (|\mathbf{m} - \mathbf{m}'| |\mathbf{h}| + |\mathbf{h} - \mathbf{h}'|) \end{cases} \quad p.p. \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Et pour  $\Phi$  on fera l'hypothèse

**Hypothèse 2.2** *Pour presque tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , la fonction  $\mathbf{m} \mapsto \Phi(\mathbf{m}; \mathbf{x})$  est de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^+$ . De plus, pour tout  $R > 0$  il existe une constante  $C(R)$  telle que pour tout  $\mathbf{m}, \mathbf{m}'$  éléments de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $|\mathbf{m}| \leq R$  et  $|\mathbf{m}'| \leq R$*

$$(2.5) \quad \begin{cases} |\partial_{\mathbf{m}}\Phi(\mathbf{m}; \mathbf{x})| \leq C(R), \\ |\partial_{\mathbf{m}}\Phi(\mathbf{m}; \mathbf{x}) - \partial_{\mathbf{m}}\Phi(\mathbf{m}'; \mathbf{x})| \leq C(R) |\mathbf{m} - \mathbf{m}'| \end{cases}$$

Enfin si on désire obtenir des estimations a priori uniformes en temps on fera l'hypothèse supplémentaire sur  $\mathcal{L}$ ,

**Hypothèse 2.3** *Pour presque tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  et pour tout  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$  la fonction  $\mathbf{h} \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x})$  vérifie pour tout  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$*

$$(2.6) \quad \mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} \geq 0.$$

Cette hypothèse n'intervient pas par exemple dans la preuve d'existence et d'unicité de solutions fortes pour le problème 2D.

n° Par rapport aux lois (1.5) et (1.17), la loi  $\mathcal{L}$  est de la forme

$$(2.7) \quad \mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}) (\mathbf{h} \times \mathbf{m} + \beta(\mathbf{x}) \mathbf{m} \times (\mathbf{h} \times \mathbf{m}))$$

où on a posé pour presque tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\theta(\mathbf{x}) = |\gamma| \text{ dans le cas de (1.5), } \theta(\mathbf{x}) = \frac{|\gamma|}{1 + \alpha(\mathbf{x})^2} \text{ dans le cas de (1.17),}$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \frac{\alpha(\mathbf{x})}{|\mathbf{M}_0(\mathbf{x})|} \text{ lorsque } |\mathbf{M}_0(\mathbf{x})| \neq 0 \text{ et } \beta(\mathbf{x}) = 0 \text{ sinon.}$$

La propriété (2.3) découle simplement des propriétés du produit vectoriel. Les propriétés (2.4) correspondent à l'hypothèse  $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  : soit en effet  $\beta_0 = \|\beta\|_{L^\infty}$ . Si  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{m}'$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant,  $|\mathbf{m}| \leq R$  et  $|\mathbf{m}'| \leq R$ , alors

$$|\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x})| \leq |\gamma| (R |\mathbf{h}| + \beta_0 R^2 |\mathbf{h}|)$$

D'autre part, et en écrivant

$$\mathbf{m} \times (\mathbf{h} \times \mathbf{m}) - \mathbf{m}' \times (\mathbf{h}' \times \mathbf{m}') = \mathbf{m}' \times (\mathbf{h} \times \mathbf{m} - \mathbf{h}' \times \mathbf{m}') + (\mathbf{m} - \mathbf{m}') \times (\mathbf{h} \times \mathbf{m})$$

on s'aperçoit que

$$|\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) - \mathcal{L}(\mathbf{m}', \mathbf{h}'; \mathbf{x})| \leq |\gamma| (1 + \beta_0 R) |\mathbf{h} \times \mathbf{m} - \mathbf{h}' \times \mathbf{m}'| + |\gamma| \beta_0 R |\mathbf{m} - \mathbf{m}'| |\mathbf{h}|.$$

Ensuite, à partir de l'égalité

$$\mathbf{h} \times \mathbf{m} - \mathbf{h}' \times \mathbf{m}' = \mathbf{h} \times (\mathbf{m} - \mathbf{m}') + (\mathbf{h} - \mathbf{h}') \times \mathbf{m}'$$

on conclut que

$$|\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) - \mathcal{L}(\mathbf{m}', \mathbf{h}'; \mathbf{x})| \leq |\gamma| (1 + 2\beta_0 R) |\mathbf{m} - \mathbf{m}'| |\mathbf{h}| + |\gamma| (1 + \beta_0 R) R |\mathbf{h} - \mathbf{h}'|.$$

En résumé, la propriété (2.4) est bien vérifiée avec

$$C(R) = |\gamma| \max \{(1 + 2\beta_0 R), (1 + \beta_0 R)R\}$$

**Remarque 2.1** *l'hypothèse  $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  est bien raisonnable lorsque le milieu est constitué d'un nombre fini de matériaux ferromagnétiques saturés, puisque pour un matériaux donné  $|\mathbf{M}_0(\mathbf{x})| = M_s$  : le module de saturation.*

n° La loi (2.7) vérifie également l'hypothèse 2.3 si on suppose de plus que  $\alpha \geq 0$ , puisque

$$\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = 0 + \theta(\mathbf{x}) \beta(\mathbf{x}) |\mathbf{h} \times \mathbf{m}|^2$$

Par ailleurs, la fonction  $\Phi$  correspond, dans le cas d'un champ effectif qui comprend la contribution d'un champ statique et d'un champ d'anisotropie uniaxiale, à

$$(2.8) \quad \Phi(\mathbf{m}; \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( |\mathbf{H}_s(\mathbf{x}) - \mathbf{m}|^2 + K_a(\mathbf{x}) |\mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x})) \mathbf{p}(\mathbf{x})|^2 \right)$$

avec  $|\mathbf{p}| = 1$ , et l'hypothèse 2.2 se trouve vérifier une fois les fonctions  $\mathbf{H}_s$  et  $K_a$  sont bornées, puisque

$$\partial_{\mathbf{m}} \Phi(\mathbf{m}; \mathbf{x}) = \mathbf{m} - \mathbf{H}_s(\mathbf{x}) + K_a(\mathbf{x}) (\mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x})) \mathbf{p}(\mathbf{x})).$$

### 2.2.2 Solutions faibles, fortes : définitions.

Pour tout  $T$  réel strictement positif, on note  $\mathcal{Q}_T = \mathbb{R}^n \times [0, T]$  et on pose  $\mathcal{Q}_\infty = \mathbb{R}^n \times [0, \infty[$ .

**Définition 2.1 (Solution faible)** *Nous dirons que  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  est une solution faible de (2.1)-(2.2) dans  $\mathcal{Q}_T$  lorsque chacun des champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  appartienne à  $C^0([0, T[; L^2(\mathbb{R}^n))^3$  et lorsque les équations (2.1)-(2.2) sont vérifiées au sens des distributions.*

**Définition 2.2 (Solution forte)** *Nous dirons que  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  est une solution forte du système (2.1)-(2.2) dans  $\mathcal{Q}_T$  lorsque chacun des champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\partial_t \mathbf{E}$ ,  $\partial_t \mathbf{H}$  et  $\partial_t \mathbf{M}$  appartienne à  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))^3$  et lorsque les équations (2.1)-(2.2) sont vérifiées presque partout dans  $\mathcal{Q}_T$ .*

**Définition 2.3 (Solution globale)** *On dit que la solution (faible ou forte) est globale lorsqu'elle est définie sur  $\mathcal{Q}_\infty$ .*

## 2.3 Rappels des résultats dans le cas 1D

L'étude du cas 1D a été menée dans [45] dans le cas où la loi non linéaire est donnée par (1.17), et où le champs effectif comprend la contribution d'un champs statique  $\mathbf{H}_s$  et d'un champs d'anisotropie uniaxiale (1.11). Autrement dit,

$$(2.9) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \left( |\gamma| \mathbf{H}_T - \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|} \partial_t \mathbf{M} \right) \times \mathbf{M}, & \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{H}_T = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s + K(\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{p} \end{cases}$$

### 2.3.1 Spécificité du cas 1D

L'approximation 1D consiste à supposer que les champs ne dépendent que d'une seule variable d'espace  $x$ . Les inconnues restent néanmoins vectorielles, et à cause de la loi non linéaire  $\mathcal{L}$  le découplage habituel des équations de Maxwell vectorielles en deux problèmes scalaires indépendants n'est plus possible. Ainsi, par rapport aux équations (2.1)-(2.2), rien

n'est à changer à part l'expression de l'opérateur  $\text{rot}$  dans laquelle il ne faut retenir que les dérivations par rapport à  $x$  : pour une fonction  $\mathbf{E}(x) \in \mathbf{R}^3$ ,

$$(2.10) \quad \text{rot } \mathbf{E} = \vec{\mathbf{e}}_x \times \partial_x \mathbf{E} = (0, -\partial_x \mathbf{E}_z, \partial_x \mathbf{E}_y)$$

On constate en particulier que  $\vec{\mathbf{e}}_x \cdot \text{rot} = 0$  et donc en prenant le produit scalaire des équations (2.1) par  $\vec{\mathbf{e}}_x$ ,

$$\partial_t \mathbf{E}_x = \partial_t (\mathbf{H}_x + \mathbf{M}_x) = 0$$

soit

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_{0,x} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_x = -\mathbf{M}_x + \mathbf{H}_{0,x} + \mathbf{M}_{0,x}.$$

Il en résulte que les véritables inconnues du problème sont

$$\mathbf{E}_\perp = \vec{\mathbf{e}}_x \times (\mathbf{E} \times \vec{\mathbf{e}}_x), \quad \mathbf{H}_\perp = \vec{\mathbf{e}}_x \times (\mathbf{H} \times \vec{\mathbf{e}}_x) \quad \text{et} \quad \mathbf{M}.$$

Comme on le verra plus loin, cette propriété admet un équivalent pour les dimensions 2 et 3, mais sa spécificité en 1D est que la définition de  $\mathbf{E}_\perp$  et  $\mathbf{H}_\perp$  est locale en espace. La deuxième spécificité du cas 1D provient du possible contrôle  $L^\infty$  de la solution (forte) de l'équation des ondes, l'espace  $L^\infty$  étant l'espace naturel pour la loi non linéaire (2.2). Ce contrôle est due à l'injection continue de  $H^1$  dans  $L^\infty$  en dimension 1.

### 2.3.2 Existence et unicité des solutions fortes

On se place dans le cadre des hypothèses suivantes

**Hypothèse 2.4** *On suppose que  $\varepsilon \equiv \varepsilon_0 > 0$  et que*

- (1)  $(\alpha, K) \in L^\infty(\mathbf{R})^2$  et  $\mathbf{p}(x)$  est unitaire :  $|\mathbf{p}(x)| = 1$ , p.p.  $x \in \mathbf{R}$ ,
- (2)  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \in H(\text{rot}; \mathbf{R})^2$ ,  $\mathbf{H}_{0,x} \in L^\infty(\mathbf{R})$ ,
- (3)  $\mathbf{M}_0 \in (L^\infty(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}))^3$ ,  $\mathbf{H}_s \in (L^\infty(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}))^3$ .

Nous avons alors le théorème d'existence et d'unicité de solutions fortes suivant,

**Théorème 2.1** *Sous l'hypothèse 2.4, le problème (2.1)-(2.9) admet une unique solution forte globale  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  vérifiant*

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) &\in \{C^0(0, \infty; H(\text{rot}, \mathbf{R})) \cap C^1(0, \infty; L^2(\mathbf{R})^3)\}^2, \\ \mathbf{M} &\in C^1(0, \infty; (L^\infty(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}))^3) \cap C^2(0, \infty; L^2(\mathbf{R})^3). \end{aligned}$$

*De plus, cette solution vérifie les estimations (1.21) et (1.30) (avec  $\sigma = 0$ ).*

Pour la preuve de ce théorème, nous renvoyons le lecteur à [45]. Notons simplement que l'idée de la démonstration est basée sur la recherche d'un point fixe de l'application

$$\mathbf{M} \xrightarrow{(2.1)} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \xrightarrow{(2.9)} \mathbf{M}$$

et se généralise sans difficultés au cas où  $\varepsilon$  est une fonction variable comme dans les cas de l'hypothèse  $\mathcal{H}1$  du cas 2D (cf. section 2.4).

### 2.3.3 Existence et unicité des solutions faibles

On remplace l'hypothèse 2.4 par

**Hypothèse 2.5** *On suppose que  $\varepsilon \equiv \varepsilon_0 > 0$  et que*

- (1)  $(\alpha, K) \in L^\infty(\mathbb{R})^2$  et  $\mathbf{p}(x)$  est unitaire :  $|\mathbf{p}(x)| = 1$ , p.p.  $x \in \mathbb{R}$ ,
- (2) Chacun des champs  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0$  et  $\mathbf{H}_s$  appartient à  $(L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))^3$ .

**Théorème 2.2** *Sous l'hypothèse 2.5, le problème (2.1)-(2.9) admet une unique solution faible globale  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  telle que*

$$\mathbf{E}, \mathbf{H}, \text{ et } \mathbf{M} \in C^0(0, \infty; (L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))^3).$$

La preuve de ce théorème (nous renvoyons également à [45]) repose en particulier sur la représentation explicite de la solution de l'équation des ondes 1D par la formule de D'Alembert. Cette formule permet d'obtenir, à partir d'un contrôle  $L^\infty$  du terme source  $\partial_t \mathbf{M}$  dans les équations de Maxwell (2.1), un contrôle  $L^\infty$  de  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ . Il est à noter cependant, que ce type d'estimations  $L^\infty$  est généralement faux en 2D et 3D, et c'est pourquoi la portée du théorème ne peut dépasser le cadre 1D.

## 2.4 Etude du modèle 2D non-homogène

Nous étudions l'existence et l'unicité de solutions fortes au problème (2.1)-(2.2) dans le cas 2D. L'existence de solutions faibles dans le cas du problème homogène (c.à.d. à coefficient constant) est démontré dans [26] dans le cas 3D, mais en fait la démonstration proposée est indépendante de la dimension d'espace (voir section 2.5) et s'applique donc au cas 2D. L'originalité de ce qui suit vient du fait qu'on considère le cas d'un  $\varepsilon$  variable et qu'on s'intéresse plutôt au cas d'une solution forte avec unicité.

### 2.4.1 Spécificité du cas 2D

L'injection continue de  $H^1$  dans  $L^\infty$  en 1D, qui constitue un ingrédient essentiel à la démonstration du théorème 2.1, n'est plus vraie en dimension 2. Mais en fait  $H^1(\mathbb{R}^2)$  s'injecte dans tous les  $L^p(\mathbb{R}^2)$  avec  $2 \leq p < \infty$ . Donc une fonction de  $H^1(\mathbb{R}^2)$  est presque bornée ... (cf. lemme 2.7). La démarche de notre démonstration s'inspire des travaux [26] dans le cas 3D.

### 2.4.2 Enoncé des résultats

Détaillons d'abord les conditions requises pour les données du problème

**Hypothèse 2.6** ( $\mathcal{H}1$ ) *On suppose que :*

- (1) La fonction  $\mathcal{L}$  vérifie l'hypothèse 2.1 et la fonction  $\Phi$  vérifie l'hypothèse 2.2.
- (2) Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $\varepsilon_1 > 0$  telles que  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_1$ , p.p.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .
- (3)  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \in H(\text{rot}; \mathbb{R}^2)^2$ ,  $\mathbf{M}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)^3$  telles que  $\text{div}(\mathbf{M}_0 + \mathbf{H}_0) = 0$ .
- (4)  $\text{Supp } \mathbf{M}_0 \subset \Omega$  où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ .

Nous avons alors le résultat central suivant

**Théorème 2.3** *Sous les hypothèses  $\mathcal{H}1$ , le problème de Cauchy (2.1)-(2.2) admet une unique solution forte. De plus cette solution est globale.*

En fait, cette solution sera construite comme la limite de solutions de problèmes régularisés à l'aide d'un opérateur de troncature en fréquence. Soit en effet  $\varphi$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$ , de classe  $C^\infty$  vérifiant

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ pour } |\boldsymbol{\xi}| \geq 2, \varphi(\boldsymbol{\xi}) = 1 \text{ pour } |\boldsymbol{\xi}| \leq 1 \text{ et } 0 \leq \varphi \leq 1.$$

Pour  $\lambda > 1$ , on introduit  $S^\lambda$  le multiplicateur de Fourier de symbole  $\varphi_\lambda(\boldsymbol{\xi}) \equiv \varphi(\boldsymbol{\xi}/\lambda)$ .

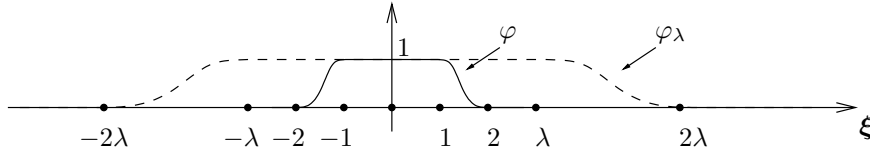


FIG. 2.1 – Représentation 1D des fonctions de troncatures  $\varphi$  et  $\varphi_\lambda$ .

n° Pour toute fonction  $u$  on note  $\hat{u}$  sa transformée de Fourier. Lorsque  $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $\hat{u}$  est définie par

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x}$$

Ainsi pour  $u \in L^p(\mathbb{R}^2)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $S^\lambda u$  est défini par

$$(2.11) \quad (S^\lambda u)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\lambda(\boldsymbol{\xi}) \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}$$

En notant  $\bar{\varphi}_\lambda$  la transformée de Fourier inverse de  $\varphi_\lambda$ , on peut écrire également

$$S^\lambda u = 2\pi \bar{\varphi}_\lambda \star u$$

où  $\star$  désigne le produit de convolution entre une fonction de  $L^1(\mathbb{R}^2)$  et une fonction de  $L^p(\mathbb{R}^2)$ . On conclut alors, par les propriétés de la convolution dans les espaces  $L^p$  (voir par exemple [10]), que  $S^\lambda$  est un opérateur continu de  $L^p$  dans lui même ( $1 \leq p \leq \infty$ ) de norme inférieure à  $2\pi \|\bar{\varphi}_\lambda\|_{L^1}$ . Mais, en utilisant la définition de  $\varphi_\lambda$ ,  $\bar{\varphi}_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda^2 \bar{\varphi}(\lambda\mathbf{x})$ , et donc  $2\pi \|\bar{\varphi}_\lambda\|_{L^1} = 2\pi \|\bar{\varphi}\|_{L^1}$ . On en déduit que la famille  $(S^\lambda)_{\lambda>1}$ , en tant que famille d'opérateurs continus de  $L^p(\mathbb{R}^2)$  dans lui même, est en fait uniformément bornée par rapport à  $\lambda$ .

**Remarque 2.2** *Cette propriété d'uniforme continuité dans les espaces  $L^p$  constitue un des atouts des opérateurs  $S^\lambda$ , qui sera exploité plus tard dans la preuve du théorème 2.3.*

Le véritable intérêt de considérer ces opérateurs  $S^\lambda$  vient d'abord du fait qu'ils constituent une approximation de l'identité de  $L^2$  dans lui même (ce qui se vérifie aisément par l'identité de Plancherel), et ensuite de leur continuité de  $L^2$  dans  $L^\infty$ . En effet, on constate d'après la formule (2.11) que pour  $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ,

$$|(S^\lambda u)(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{2\pi} \|\varphi_\lambda\|_{L^2} \|\hat{u}\|_{L^2} \leq \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \|u\|_{L^2}$$

Ainsi

$$(2.12) \quad \|S^\lambda u\|_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \|u\|_{L^2}$$

**Remarque 2.3** Nous verrons que lorsque  $u$  est dans  $H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $\|S^\lambda u\|_{L^\infty}$  explose beaucoup moins vite que  $\lambda$  lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ . Ce sera un point essentiel.

On considère la famille de problèmes régularisés suivants (indexée par le paramètre  $\lambda$ )

$$(2.13) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{E}^\lambda - \text{rot } S^\lambda \mathbf{H}^\lambda = 0, & \mu_0 (\partial_t \mathbf{H}^\lambda + \partial_t \mathbf{M}^\lambda) + \text{rot } S^\lambda \mathbf{E}^\lambda = 0, \\ (\mathbf{E}^\lambda, \mathbf{H}^\lambda)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0), \end{cases}$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}^\lambda = \mathcal{L}(\mathbf{M}^\lambda, \mathbf{H}_T; \mathbf{x}) \quad \text{avec } \mathbf{H}_T = S^\lambda \mathbf{H}^\lambda - \partial_m \Phi(\mathbf{M}^\lambda; \mathbf{x}), \\ \mathbf{M}^\lambda|_{t=0} = \mathbf{M}_0, \end{cases}$$

**Lemme 2.1** Sous les hypothèses  $\mathcal{H}1$ , le problème de Cauchy (2.13)-(2.14) admet une solution unique

$$(\mathbf{E}^\lambda, \mathbf{H}^\lambda, \mathbf{M}^\lambda) \in C^1(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^2)^3 \times L^2(\mathbb{R}^2)^3 \times L^\infty(\mathbb{R}^2)^3).$$

L'existence de solutions fortes au problème (2.1)-(2.2) sera assurée par le lemme suivant

**Lemme 2.2** Pour tout  $T > 0$ , la suite  $(\mathbf{E}^\lambda, \mathbf{H}^\lambda, \mathbf{M}^\lambda, \partial_t \mathbf{E}^\lambda, \partial_t \mathbf{H}^\lambda, \partial_t \mathbf{M}^\lambda)_\lambda$  admet une sous suite extraite qui converge faible- $\star$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)^3)^6$  vers  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M}, \partial_t \mathbf{E}, \partial_t \mathbf{H}, \partial_t \mathbf{M})$  où  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  est une solution forte de (2.1)-(2.2) dans  $\mathcal{Q}_T$ .

### 2.4.3 Preuves et résultats auxiliaires

Nous présentons dans cette section les preuves des résultats ci-dessus énoncés dans le cas simplifié où

$$\Phi \equiv 0.$$

Le cas général ne nécessite que quelques modifications d'ordre techniques qui seront indiqués dans la section 2.4.4. Nous espérons ainsi mettre l'accent dans un premier temps sur les idées essentielles des démonstrations en évitant de les encombrer par des détails purement techniques.

#### Existence et unicité pour le problème régularisé

Il s'agit de montrer le lemme 2.1. Posons

$$U^\lambda = (\mathbf{E}^\lambda, \mathbf{H}^\lambda, \mathbf{M}^\lambda)$$

Le problème (2.13)-(2.14) peut être écrit sous la forme d'une équation différentielle posée dans l'espace de Banach  $X \equiv L^2(\mathbb{R}^2)^3 \times L^2(\mathbb{R}^2)^3 \times L^\infty(\mathbb{R}^2)^3$

$$(2.15) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} U^\lambda = G^\lambda(U^\lambda), \\ U^\lambda(0) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \text{ dans } X, \end{cases}$$

où  $G^\lambda$  est l'opérateur défini par

$$G^\lambda : X \longrightarrow X, \quad \text{qui à } U = (\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M}) \in X \text{ associe}$$

$$G^\lambda(U) = \left( \frac{1}{\varepsilon} \text{rot } S^\lambda \mathbf{H}, -\frac{1}{\mu_0} \text{rot } S^\lambda \mathbf{E} - \mathcal{L}(\mathbf{M}, S^\lambda \mathbf{H}), \mathcal{L}(\mathbf{M}, S^\lambda \mathbf{H}) \right)$$

**Lemme 2.3** *L'opérateur  $G^\lambda$  est bien défini et est localement lipshitzien.*

*Preuve.* Pour  $\mathbf{E} \in L^2(\mathbb{R}^2)^3$ , on a

$$(\widehat{\text{rot } S^\lambda \mathbf{E}})(\boldsymbol{\xi}) = \varphi_\lambda(\boldsymbol{\xi}) \left( i\boldsymbol{\xi} \times \hat{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) \right)$$

Il en résulte que

$$\left\| \text{rot } S^\lambda \mathbf{E} \right\|_{L^2} \leq 2\lambda \|\mathbf{E}\|_{L^2}$$

Ce qui montre que  $\text{rot } S^\lambda$  est un opérateur linéaire continue de  $L^2(\mathbb{R}^2)^3$  dans lui-même. Il en est donc de même pour  $\frac{1}{\varepsilon} \text{rot } S^\lambda$  et  $\frac{1}{\mu_0} \text{rot } S^\lambda$ . Par ailleurs, d'après (2.12) et la propriété (2.4)(i) de  $\mathcal{L}$ , on constate que pour  $\mathbf{H} \in L^2(\mathbb{R}^2)^3$  et  $\mathbf{M} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)^3$ ,  $\mathcal{L}(\mathbf{M}, S^\lambda \mathbf{H})$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^2)^3 \cap L^2(\mathbb{R}^2)^3$ . Pour terminer la démonstration du lemme il suffit donc de montrer que l'application

$$(\mathbf{M}, \mathbf{H}) \longmapsto \mathcal{L}(\mathbf{M}, S^\lambda \mathbf{H})$$

est localement lipshitzienne de  $L^\infty(\mathbb{R}^2)^3 \times L^2(\mathbb{R}^2)^3$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^2)^3 \cap L^2(\mathbb{R}^2)^3$ . Mais d'après (2.4)(ii), si on considère  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  telles que chacune des quantités  $\|\mathbf{M}_1\|_{L^\infty}$ ,  $\|\mathbf{M}_2\|_{L^\infty}$ ,  $\|\mathbf{H}_1\|_{L^2}$  et  $\|\mathbf{H}_2\|_{L^2}$  soit majoré par un réel  $R$  donné, alors il existe une constante  $C(R)$  telle que

$$\left\| \mathcal{L}(\mathbf{M}_1, S^\lambda \mathbf{H}_1) - \mathcal{L}(\mathbf{M}_2, S^\lambda \mathbf{H}_2) \right\|_{L^2} \leq C(R) (R \|\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\|_{L^\infty} + \|\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2\|_{L^2})$$

du fait que  $S^\lambda$  est de norme  $\leq 1$  de  $L^2$  dans lui-même, et en réutilisant (2.12) nous obtenons également

$$\left\| \mathcal{L}(\mathbf{M}_1, S^\lambda \mathbf{H}_1) - \mathcal{L}(\mathbf{M}_2, S^\lambda \mathbf{H}_2) \right\|_{L^\infty} \leq C(R) \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} (R \|\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\|_{L^\infty} + \|\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2\|_{L^2})$$

Ces deux inégalités correspondent bien avec la propriété recherchée.  $\square$

Le lemme 2.3 et les résultats standards sur les équations différentielles dans un espace de Banach (voir par exemple [24]) montrent l'existence d'un  $T_{max} > 0$  et de  $U^\lambda \in C^1(0, T_{max}; X)$  telle que  $U^\lambda$  est l'unique solution maximale de (2.15) sur  $[0, T_{max}[$ , de plus nous avons l'alternative suivante

$$\{T_{max} = \infty\} \text{ ou } \{T_{max} < \infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow T_{max}} \|U^\lambda(t)\|_X = \infty\}$$

La seconde alternative ne peut pas avoir lieu comme le montre le lemme 2.4 (ci-après) et donc  $T_{max} = \infty$ .  $\square$

### Estimation a priori pour le problème régularisé (I)

On se place dans ce paragraphe dans le cadre d'application du lemme 2.1. On note

$$M_0 \equiv \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$$

et on pose pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  éléments de  $L^2(\mathbb{R}^2)^3$ ,

$$\mathcal{E}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2 \right) d\mathbf{x}$$



**Lemme 2.4** *La solution du lemme 2.1 satisfait pour tout  $t \geq 0$*

$$(2.16) \quad \left| \mathbf{M}^\lambda(\mathbf{x}, t) \right| = |\mathbf{M}_0(\mathbf{x})| \quad p.p. \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

$$(2.17) \quad \mathcal{E} \left( \mathbf{E}^\lambda(t), \mathbf{H}^\lambda(t) \right) \leq e^{2C(M_0)t} \mathcal{E}(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0).$$

où  $C(M_0)$  la constante intervenant dans (2.4).

*Preuve.* L'estimation 2.16 résulte de la propriété (2.3) de  $\mathcal{L}$ , en prenant le produit scalaire de (2.14) par  $\mathbf{M}^\lambda(\mathbf{x}, t)$ . Il en résulte

$$\frac{1}{2} \partial_t \left| \mathbf{M}^\lambda(\mathbf{x}, t) \right|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \mathbf{M}^\lambda(\mathbf{x}, t) \right|^2 = \left| \mathbf{M}^\lambda(\mathbf{x}, 0) \right|^2 = |\mathbf{M}_0(\mathbf{x})|^2$$

La deuxième estimation (2.17) correspond à l'identité d'énergie classique pour le système de Maxwell. Elle résulte d'abord de la formule d'intégration par parties

$$(2.18) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \left( (\text{rot } S^\lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left( \mathbf{E} \cdot (\text{rot } S^\lambda \mathbf{H}) \right) dx$$

pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  éléments de  $L^2(\mathbb{R}^2)^3$ , immédiate à vérifier en utilisant l'identité de Parseval. Ainsi, en multipliant scalairement dans  $L^2(\mathbb{R}^2)^3$ , la première équation de (2.13) par  $\mathbf{E}^\lambda(t)$  et la seconde équation par  $\mathbf{H}^\lambda(t)$ , et en faisant la somme des deux, nous obtenons en utilisant (2.18),

$$(2.19) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E} \left( \mathbf{E}^\lambda(t), \mathbf{H}^\lambda(t) \right) = -\mu_0 \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t \mathbf{M}^\lambda \cdot \mathbf{H}^\lambda dx$$

Par ailleurs, d'après la propriété (2.4)(i) et l'équation (2.14) on a l'existence d'une constante  $C(M_0)$  telle que, p.p.

$$(2.20) \quad \left| \partial_t \mathbf{M}^\lambda(\mathbf{x}, t) \right| \leq C(M_0) \left| (S^\lambda \mathbf{H}^\lambda)(\mathbf{x}, t) \right|$$

(C'est ici que l'hypothèse  $\Phi = 0$  intervient, voir section 2.4.4 pour le cas  $\Phi \neq 0$ ). En utilisant (2.20) dans (2.19) et en appliquant l'inégalité de Schwarz au second membre, on montre

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} \left( \mathbf{E}^\lambda(t), \mathbf{H}^\lambda(t) \right) \leq C(M_0) \mu_0 \left\| \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2}^2 \leq 2C(M_0) \mathcal{E} \left( \mathbf{E}^\lambda(t), \mathbf{H}^\lambda(t) \right).$$

L'estimation (2.17) résulte de l'intégration en temps de cette inégalité. □

**Remarque 2.4** *L'estimation (2.16) montre en particulier que le support de  $\mathbf{M}^\lambda$  est contenu dans  $\Omega \times \mathbb{R}^+$  pour tout  $\lambda$ , ce qui sera exploité par exemple dans la preuve du lemme 2.2. Une autre conséquence de ce fait (utile par exemple dans la preuve du lemme 2.5) est que*

$$\mathbf{M}^\lambda \in C^1(0, \infty; L^p(\mathbb{R}^2)^3) \quad \text{pour tout } 1 \leq p \leq \infty.$$

### **Estimation a priori pour le problème régularisé (II). Les dérivées en temps.**

On se place toujours sous les hypothèses du lemme 2.1. Par contre la constante  $M_0$  sera

$$M_0 \equiv \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty} + \|\mathbf{M}_0\|_{L^2}$$

**Lemme 2.5** *Pour tout  $0 < T < \infty$  il existe une constante  $C_0(T) < +\infty$  indépendante de  $\lambda$  telle que, pour tout  $t \leq T$*

$$(2.21) \quad \mathcal{E} \left( \partial_t \mathbf{E}^\lambda(t), \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t) \right) + \frac{\mu_0}{2} \left\| \partial_t \mathbf{M}^\lambda(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C_0(T).$$

*La constante  $C_0(T)$  dépend continûment de  $T$ ,  $M_0$ ,  $\varepsilon_1$  et de la norme de  $\mathbf{H}_0$  et  $\mathbf{E}_0$  dans  $H(\text{rot}; \mathbb{R}^2)$ .*

*Preuve.* L'idée formelle est d'étudier les équations dérivées en temps. Pour justifier cette idée, il convient de faire une approximation de l'opérateur de dérivation en temps. Soit  $h > 0$  un réel donné. Nous introduisons l'opérateur  $D_h$  défini pour  $u \in C^0(0, \infty; Y)$  où  $Y$  est un espace de Banach, par

$$(D_h u)(t) = \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

et on l'applique aux équations (2.13). Il en résulte, du fait que  $D_h$  commute avec  $\partial_t$ ,  $\text{rot}$  et  $S^\lambda$ ,

$$(2.22) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t (D_h \mathbf{E}^\lambda) - \text{rot } S^\lambda (D_h \mathbf{H}^\lambda) = 0, \\ \mu_0 \partial_t (D_h \mathbf{H}^\lambda) + \text{rot } S^\lambda (D_h \mathbf{E}^\lambda) = -\mu_0 D_h \mathcal{L}(\mathbf{M}^\lambda, S^\lambda \mathbf{H}^\lambda). \end{cases}$$

L'équivalent de l'identité (2.19) pour les équations (2.22) s'écrit

$$(2.23) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E} \left( D_h \mathbf{E}^\lambda(t), D_h \mathbf{H}^\lambda(t) \right) = -\mu_0 \int_{\mathbb{R}^2} D_h \mathcal{L}(\mathbf{M}^\lambda, S^\lambda \mathbf{H}^\lambda) \cdot \mathbf{H}^\lambda \, dx$$

Par ailleurs, d'après la propriété (2.4)(ii) et compte tenu de (2.16), il existe une constante  $C(M_0)$  telle que pour tout  $h$ ,

$$\left| D_h \mathcal{L}(\mathbf{M}^\lambda, S^\lambda \mathbf{H}^\lambda) \right| \leq C(M_0) \left( \left| D_h \mathbf{M}^\lambda \right| \left| S^\lambda \mathbf{H}^\lambda \right| + \left| D_h S^\lambda \mathbf{H}^\lambda \right| \right)$$

On en déduit, grâce à (2.23)

$$(2.24) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E} \left( D_h \mathbf{E}^\lambda(t), D_h \mathbf{H}^\lambda(t) \right) \leq \mu_0 C(M_0) F_h^\lambda(t)$$

avec

$$F_h^\lambda(t) = \left\| D_h \mathbf{M}^\lambda(t) \right\|_{L^4} \left\| S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^4} \left\| D_h \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2} + \left\| D_h \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2}^2.$$

Or, du fait que  $\mathbf{E}^\lambda$  et  $\mathbf{H}^\lambda$  soient dans  $C^1(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^2)^3)$  et que  $\mathbf{M}^\lambda \in C^1(0, T; L^4(\mathbb{R}^2)^3)$  (cf. remarque 2.4) résulte les convergences, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathcal{E} \left( D_h \mathbf{E}^\lambda(t), D_h \mathbf{H}^\lambda(t) \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathcal{E} \left( \partial_t \mathbf{E}^\lambda(t), \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t) \right),$$

et

$$\int_0^t F_h^\lambda(\tau) \, d\tau \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^t F^\lambda(\tau) \, d\tau,$$

où on a posé

$$F^\lambda(t) = \left\| \partial_t \mathbf{M}^\lambda(t) \right\|_{L^4} \left\| S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^4} \left\| \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2} + \left\| \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2}^2.$$

Ainsi en intégrant l'inégalité (2.24) entre 0 et  $t$  et en passant à la limite quand  $h \rightarrow 0$ , nous obtenons

$$(2.25) \quad \mathcal{E} \left( \partial_t \mathbf{E}^\lambda(t), \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t) \right) \leq \mathcal{E} \left( \partial_t \mathbf{E}^\lambda(0), \partial_t \mathbf{H}^\lambda(0) \right) + \mu_0 C(M_0) \int_0^t F^\lambda(\tau) d\tau.$$

D'après (2.20)

$$\left\| \partial_t \mathbf{M}^\lambda(t) \right\|_{L^4} \leq C(M_0) \left\| S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^4}.$$

D'où

$$(2.26) \quad F^\lambda(t) \leq C(M_0) \left\| S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^4}^2 \left\| \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2} + \left\| \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2}^2$$

Pour obtenir l'estimation souhaitée, l'idée est de majorer  $\left\| S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^4}^2$  par la norme  $H^1$  de  $S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)$ , en utilisant les inégalités de Sobolev. Mais à partir des équations de Maxwell, nous avons des informations différentes sur le rotationnel et la divergence des solutions. C'est pour cela que nous considérons d'abord la décomposition orthogonale classique de  $L^2(\mathbb{R}^2)^3$

$$(2.27) \quad L^2(\mathbb{R}^2)^3 = L_{\parallel}^2(\mathbb{R}^2) \oplus L_{\perp}^2(\mathbb{R}^2)$$

avec :  $L_{\parallel}^2(\mathbb{R}^2) = \{\mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}^2)^3 / \text{rot } \mathbf{v} = 0\}$  et  $L_{\perp}^2(\mathbb{R}^2) = \{\mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}^2)^3 / \text{div } \mathbf{v} = 0\}$ .

**Remarque 2.5** Soit  $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^2)^3$ . Par l'identité de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^2} \left( |\boldsymbol{\xi} \times \hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2 + |\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \right) d\boldsymbol{\xi}$$

Puisque  $\widehat{\text{rot } \mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \times \hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})$  et  $\widehat{\text{div } \mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})$ , on déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in L_{\perp}^2(\mathbb{R}^2) &\implies \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} |\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \\ \mathbf{v} \in L_{\parallel}^2(\mathbb{R}^2) &\implies \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} |\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

n° On note  $P_{\parallel}$  (resp.  $P_{\perp}$ ) le projecteur associé à cette décomposition à valeurs dans  $L_{\parallel}^2$  (resp. dans  $L_{\perp}^2$ ).

$$(2.28) \quad P_{\parallel} : L^2(\mathbb{R}^2)^3 \longrightarrow L_{\parallel}^2(\mathbb{R}^2) \text{ et } P_{\perp} : L^2(\mathbb{R}^2)^3 \longrightarrow L_{\perp}^2(\mathbb{R}^2)$$

**Remarque 2.6** Nous rappelons que  $P_{\parallel}$  et  $P_{\perp}$  peuvent être interpréter comme des multiplicateurs de Fourier : pour  $\mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}^2)^3$

$$(2.29) \quad (\widehat{P_{\parallel} \mathbf{v}})(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^2} (\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})) \boldsymbol{\xi} \quad \text{et} \quad (\widehat{P_{\perp} \mathbf{v}})(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \boldsymbol{\xi} \times (\hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi}) \times \boldsymbol{\xi})$$

Il sont unitaires de  $L^2(\mathbb{R}^2)^3$  dans lui même et sont prolongeables en opérateurs continus de  $L^p(\mathbb{R}^2)^3$  dans lui même pour tout  $1 < p < \infty$ . De plus la norme de continuité  $A_p$  relative à l'espace  $L^p(\mathbb{R}^2)^3$  est telle que, il existe une constante  $A > 0$  indépendante de  $p$ , pour laquelle

$$A_p \leq A p \quad \text{pour } 2 \leq p < \infty \quad \text{et} \quad A_p \leq A/(p-1) \quad \text{pour } 1 < p \leq 2.$$

(voir par exemple [42] page 29, pour le théorème concernant les multiplicateurs de Fourier homogènes et page 22 pour les estimations sur les bornes de  $A_p$ ).

**Remarque 2.7** Les opérateurs  $P_{\parallel}$  et  $P_{\perp}$  peuvent également être interprétés via le problème de Poisson. En effet, soit  $\mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}^2)^3$  une fonction donnée. On considère  $\phi$  le potentiel newtonien vectoriel associé à  $\mathbf{v}$ ,

$$\Delta \phi = \mathbf{v} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2)^3.$$

Nous avons alors,

$$P_{\perp} \mathbf{v} = \text{rot rot } \phi \quad \text{et} \quad P_{\parallel} \mathbf{v} = \nabla \text{div } \phi.$$

On retrouve en passant en Fourier, les définitions de (2.29). Le prolongement en opérateurs continues de  $L^p(\mathbb{R}^2)^3$  dans lui même pour  $1 < p < \infty$ , se déduit également du théorème de Calderon-Zygmund : pour tout  $1 < p < \infty$ , il existe une constante  $C_p$  telle que

$$\left\| \partial_{x_i} \partial_{x_j} u \right\|_{L^p} \leq C_p \|\Delta u\|_{L^p} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

(Voir par exemple [34] pour une preuve de cette inégalité).

**Remarque 2.8** Les opérateurs  $P_{\parallel}$  et  $P_{\perp}$  sont non locaux en dimension  $n \geq 2$ . Dans le cas 1D il deviennent locaux comme on peut le lire sur l'expression (2.10) du rotationnel :

$$P_{\parallel} \mathbf{M} = \mathbf{M}_x \vec{e}_x \quad \text{et} \quad P_{\perp} \mathbf{M} = \vec{e}_x \times (\mathbf{M} \times \vec{e}_x).$$

C'est là l'une des différences fondamentales entre le cas 1D et les cas 2D et 3D.

En appliquant l'opérateur div à la deuxième équation de (2.13), on constate que

$$\partial_t \text{div}(\mathbf{H}^\lambda + \mathbf{M}^\lambda) = 0.$$

Or par hypothèse  $\text{div}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_0) = 0$ . On en déduit alors pour tout  $t \geq 0$ ,  $\text{div}(\mathbf{H}^\lambda(t) + \mathbf{M}^\lambda(t)) = 0$ , et par conséquent,  $P_{\parallel}$  commutant avec div,  $\text{div}(P_{\parallel} \mathbf{H}^\lambda(t) + P_{\parallel} \mathbf{M}^\lambda(t)) = 0$ , c.à.d  $(P_{\parallel} \mathbf{H}^\lambda(t) + P_{\parallel} \mathbf{M}^\lambda(t)) \in L^2_{\perp}(\mathbb{R}^2)$ . Comme  $(P_{\parallel} \mathbf{H}^\lambda(t) + P_{\parallel} \mathbf{M}^\lambda(t)) \in L^2_{\parallel}(\mathbb{R}^2)$  par définition de  $P_{\parallel}$ , il s'en suit que  $P_{\parallel} \mathbf{H}^\lambda(t) + P_{\parallel} \mathbf{M}^\lambda(t) = 0$ . Il en découle enfin la décomposition

$$(2.30) \quad \mathbf{H}^\lambda(t) = P_{\perp} \mathbf{H}^\lambda(t) - P_{\parallel} \mathbf{M}^\lambda(t)$$

soit en lui appliquant l'opérateur  $S^\lambda$  (qui commute avec  $P_{\parallel}$  et  $P_{\perp}$ ) :

$$(2.31) \quad S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) = P_{\perp} S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) - P_{\parallel} S^\lambda \mathbf{M}^\lambda(t)$$

La famille  $(P_{\perp} S^\lambda)$ , en tant que famille d'opérateurs continus de  $L^4$  dans lui même, est uniformément bornée par rapport à  $\lambda$  (cf. Remarques 2.2 et 2.6). Il existe alors une constante  $R$  indépendante de  $\lambda$  telle que

$$(2.32) \quad \left\| P_{\perp} S^\lambda \mathbf{M}^\lambda(t) \right\|_{L^4} \leq R \left\| \mathbf{M}^\lambda(t) \right\|_{L^4} \leq R M_0$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (voir [10] page 162) en dimension 2

$$\|u\|_{L^2} \leq c \|\nabla u\|_{L^1} \quad \text{pour tout } u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2),$$

nous déduisons (par l'inégalité de Schwarz)

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2} \leq 2c \|\mathbf{v}\|_{L^4}^2 \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in W^{1,2}(\mathbf{R}^2)^3.$$

L'application de cette dernière inégalité à  $\mathbf{v} = P_\perp S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)$  montre que

$$\begin{aligned} \left\| P_\perp S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^4}^2 &\leq 2c \left\| P_\perp S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2} \left\| \nabla (P_\perp S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)) \right\|_{L^2} \\ &= 2c \left\| P_\perp S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2} \left\| \text{rot} (P_\perp S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)) \right\|_{L^2} \end{aligned}$$

Or,  $P_\perp$  appliqué à la première équation de (2.13), nous donne

$$\text{rot} (P_\perp S^\lambda \mathbf{H}^\lambda) = P_\perp (\varepsilon \partial_t \mathbf{E}^\lambda).$$

D'où ( $P_\perp$  et  $S^\lambda$  étant de norme  $\leq 1$  sur  $L^2$ )

$$\left\| P_\perp S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^4}^2 \leq 2c \left\| \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2} \left\| \varepsilon \partial_t \mathbf{E}^\lambda(t) \right\|_{L^2}$$

Soit  $T$  un réel positif fixé ; on pose

$$C_1(T) = 2c e^{C(M_0)T} \left( \frac{2}{\mu_0} \mathcal{E}(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après l'estimation (2.17), pour  $t \leq T$ ,

$$(2.33) \quad \left\| P_\perp S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^4}^2 \leq C_1(T) \left\| \varepsilon \partial_t \mathbf{E}^\lambda(t) \right\|_{L^2}$$

Nous déduisons enfin la majoration suivante de  $F^\lambda$  en combinant (2.33), (2.32), (2.31) et (2.26), pour  $t \leq T$ ,

$$F^\lambda(t) \leq 2C(M_0) \left( C_1(T) \left\| \varepsilon \partial_t \mathbf{E}^\lambda(t) \right\|_{L^2} \left\| \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2} + (RM_0)^2 \left\| \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2} \right) + \left\| \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2}^2$$

Ainsi en posant  $Z^\lambda(t) = \mathcal{E}(\partial_t \mathbf{E}^\lambda(t), \partial_t \mathbf{H}^\lambda(t))$ , l'estimation (2.25) peut s'écrire de manière synthétique

$$Z^\lambda(t) \leq Z^\lambda(0) + \int_0^t C_2(T) Z^\lambda(\tau) + C_0 \sqrt{Z^\lambda(\tau)} d\tau$$

avec par exemple,  $C_0 = 2\sqrt{2\mu_0}(RM_0C(M_0))^2$  et  $C_1(T) = 2C(M_0)^2(2 + C_1(T)(\varepsilon_1\mu_0 + 1))$ .

Par le lemme de Gronwall (voir annexe C, lemme C.4), on obtient pour  $t \leq T$ ,

$$(2.34) \quad Z^\lambda(t) \leq \left( \left( e^{TC_2(T)} Z^\lambda(0) \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} TC_0 e^{TC_2(T)} \right)^2.$$

D'après les équations (2.13) et par la régularité  $C^1$  en temps de la solution, on a

$$(2.35) \quad \begin{aligned} Z^\lambda(0) &= \mathcal{E} \left( \frac{1}{\varepsilon} \text{rot} S^\lambda \mathbf{H}_0, -\frac{1}{\mu_0} \text{rot} S^\lambda \mathbf{E}_0 - \mathcal{L}(\mathbf{M}_0, S^\lambda \mathbf{H}_0) \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \left\| \text{rot} \mathbf{H}_0 \right\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\mu_0} \left\| \text{rot} \mathbf{E}_0 \right\|_{L^2}^2 + 2\mu_0 C(M_0)^2 \left\| \mathbf{H}_0 \right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Enfin, passant à la norme  $L^2$  en espace dans (2.20) nous donne

$$(2.36) \quad \left\| \partial_t \mathbf{M}^\lambda(t) \right\|_{L^2} \leq C(M_0) \left\| \mathbf{H}^\lambda(t) \right\|_{L^2}^2.$$

La combinaison de (2.34) et (2.35), et l'utilisation de l'estimation (2.17) pour majorer le second membre de (2.36) nous permettent de conclure la preuve de l'estimation (2.21).  $\square$

**Preuve du lemme 2.2**

Nous montrons dans cette section le lemme 2.2. Considérons donc un temps fini  $T > 0$  fixé une fois pour toute. D'après les estimations (2.16), (2.17) et (2.21), on constate que la norme dans  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)^3)$  de chacun des champs  $\mathbf{E}^\lambda$ ,  $\mathbf{H}^\lambda$ ,  $\mathbf{M}^\lambda$ ,  $\partial_t \mathbf{E}^\lambda$ ,  $\partial_t \mathbf{H}^\lambda$  et  $\partial_t \mathbf{M}^\lambda$  est uniformément bornée par rapport à  $\lambda$ . D'où, à une sous suite extraite près, on peut supposer l'existence de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  éléments de  $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)^3)$  telles que

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^\lambda, \partial_t \mathbf{E}^\lambda) &\rightharpoonup (\mathbf{E}, \partial_t \mathbf{E}) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)^3)^2 \text{ faible} - \star \\ (\mathbf{H}^\lambda, \partial_t \mathbf{H}^\lambda) &\rightharpoonup (\mathbf{H}, \partial_t \mathbf{H}) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)^3)^2 \text{ faible} - \star \\ (\mathbf{M}^\lambda, \partial_t \mathbf{M}^\lambda) &\rightharpoonup (\mathbf{M}, \partial_t \mathbf{M}) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)^3)^2 \text{ faible} - \star \end{aligned}$$

$S^\lambda$  étant un opérateur autoadjoint continue de  $L^2$  dans lui même convergent ponctuellement sur  $L^2$  vers l'identité, on en déduit par exemple que

$$(S^\lambda \mathbf{E}^\lambda, S^\lambda \mathbf{H}^\lambda) \rightharpoonup (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)^3)^2 \text{ faible} - \star$$

Nous obtenons de manière immédiate et standard, à partir de (2.13) que  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  vérifient (2.1) sur  $\mathcal{Q}_T$  au sens des distributions. La difficulté essentielle consiste à passer à la limite dans le terme non linéaire  $\mathcal{L}(\mathbf{M}^\lambda, S^\lambda \mathbf{H}^\lambda)$ . Pour la résoudre nous démontrons

**Lemme 2.6** *La (sous) suite  $(\mathbf{M}^\lambda)$  est de Cauchy dans  $C^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2)^3)$ .*

La preuve de ce lemme est reporté à la suite de la présente démonstration. Admettons pour un moment ce résultat. Nous terminons maintenant la preuve du lemme 2.2 en constatant que d'après le lemme 2.6, et d'après la décomposition (2.38), la suite  $(S^\lambda \mathbf{H}^\lambda)$  converge fortement dans  $L^2(\Omega_T)$  vers  $\mathbf{H}$ . Se servant de (2.4)(ii), on en déduit que  $\mathcal{L}(\mathbf{M}^\lambda, S^\lambda \mathbf{H}^\lambda)$  converge fortement dans  $L^1(\Omega_T)$  vers  $\mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H})$ . Par unicité de la limite au sens des distributions, on en conclut l'égalité sur  $\Omega_T$

$$\partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}).$$

□

**Preuve du lemme 2.6**

Pour la démonstration de ce lemme nous avons besoin de deux résultats techniques que nous allons démontrer d'abord. Le premier résultat est spécifique à la dimension 2 et caractérise le défaut d'injection de  $H^1(\mathbb{R}^2)$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

**Lemme 2.7** *Soit  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ , alors pour tout  $\rho > 0$ ,*

$$\|S^\rho u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} \|u\|_{H^1} \ln(1 + 4\rho^2) \text{ et } \|u - S^\rho u\|_{L^2} \leq \frac{\|u\|_{H^1}}{\sqrt{1 + \rho^2}}$$

*Preuve.* D'après (2.11) (avec  $\lambda \equiv \rho$ )

$$\begin{aligned} |(S^\rho u)(\mathbf{x})| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq 2\rho} |\hat{u}(\xi)| \, d\xi \leq \|u\|_{H^1} \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq 2\rho} \frac{1}{1 + |\xi|^2} \, d\xi \\ &= \|u\|_{H^1} \int_0^{2\rho} \frac{r}{1 + r^2} \, dr \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_{H^1} \ln(1 + 4\rho^2). \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'identité de Plancherel et la définition de  $S^\rho$  nous donnent

$$\|u - S^\rho\|_{L^2}^2 = \|\hat{u}(1 - \varphi_\rho)\|_{L^2}^2 \leq \int_{|\xi| \geq \rho} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \|u\|_{H^1}^2 / (1 + \rho^2).$$

(Bien que la première inégalité soit spécifique à la dimension 2, cette seconde inégalité est en fait valable pour toute dimension d'espace).  $\square$

Le deuxième résultat est spécifique aux multiplicateurs de Fourier homogènes. Il caractérise le défaut de leurs continuité de  $L^2$  dans  $L^\infty$ . Le lemme est énoncé pour  $P_{\parallel}$  mais bien entendu reste vrai si on remplace  $P_{\parallel}$  par  $P_{\perp}$  où n'importe quel autre opérateur satisfaisant les propriétés de continuité de la remarque 2.6. La démonstration du lemme est analogue à celle donnée dans [27].

**Lemme 2.8** *Soit  $\rho > e$  et  $M_0 > 0$  deux réels donnés. Alors il existe une application  $P_{\parallel}^\rho$  (qui dépend également de  $M_0$ ) de  $(L^2)^3$  dans  $(L^\infty)^3$  et une constante  $C(M_0) > 0$  telles que, pour toute fonction  $\mathbf{M} \in (L^2)^3 \cap (L^\infty)^3$  vérifiant  $\|\mathbf{M}\|_{L^2} + \|\mathbf{M}\|_{L^\infty} \leq M_0$  on a*

$$\|P_{\parallel}^\rho \mathbf{M}\|_{L^\infty} \leq C(M_0) \ln(\rho) \quad \text{et} \quad \|P_{\parallel} \mathbf{M} - P_{\parallel}^\rho \mathbf{M}\|_{L^2} \leq C(M_0) \ln(\rho) \rho^{-2}$$

*Preuve.* On définit l'application  $P_{\parallel}^\rho$  par

$$(P_{\parallel}^\rho \mathbf{M})(\mathbf{x}) = (P_{\parallel} \mathbf{M})(\mathbf{x}) \quad \text{si} \quad |(P_{\parallel} \mathbf{M})(\mathbf{x})| \leq C \ln(\rho) \quad \text{et} \quad (P_{\parallel}^\rho \mathbf{M})(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sinon}$$

où la constante  $C$  sera choisie plus tard (l'égalité est bien entendue au sens p.p.). Ainsi par construction

$$\|P_{\parallel}^\rho \mathbf{M}\|_{L^\infty} \leq C \ln(\rho).$$

Par ailleurs, pour  $p \geq 2$ ,

$$\|P_{\parallel} \mathbf{M} - P_{\parallel}^\rho \mathbf{M}\|_{L^2}^2 = \int_{|P_{\parallel} \mathbf{M}| \geq C \ln(\rho)} |P_{\parallel} \mathbf{M}|^2 d\mathbf{x} \leq \int_{|P_{\parallel} \mathbf{M}| \geq C \ln(\rho)} |P_{\parallel} \mathbf{M}|^p / (C \ln(\rho))^{p-2}$$

et donc

$$\|P_{\parallel} \mathbf{M} - P_{\parallel}^\rho \mathbf{M}\|_{L^2}^2 \leq \|P_{\parallel} \mathbf{M}\|_{L^p}^p / (C \ln(\rho))^{p-2}$$

Mais comme précisé dans la remarque 2.6, il existe un constante  $A$  indépendante de  $p$  telle que pour  $2 \leq p < \infty$

$$\|P_{\parallel} \mathbf{M}\|_{L^p} \leq A p \|\mathbf{M}\|_{L^p} \leq A p (\|\mathbf{M}\|_{L^2} + \|\mathbf{M}\|_{L^\infty}) \leq A p M_0.$$

Ainsi

$$\|P_{\parallel} \mathbf{M} - P_{\parallel}^\rho \mathbf{M}\|_{L^2}^2 \leq (A M_0 p)^p / (C \ln(\rho))^{p-2}$$

On choisit (voir Remarque 2.9 ci-après)  $C \equiv C(M_0) = 4A M_0 e$  et  $p \equiv 4 \ln \rho$ . Le terme de droite dans la dernière inégalité vaut donc

$$(C \ln(\rho))^p e^{-4 \ln(\rho)} / (C \ln(\rho))^{p-2} = \left( \frac{C \ln(\rho)}{\rho^2} \right)^2.$$

$\square$

**Remarque 2.9** *A  $\rho$  fixé on peut trouver un  $P_{\parallel}^{\rho}$  arbitrairement proche  $P_{\parallel}$ . En effet il suffit de choisir  $C(M_0) \equiv k A M_0 e$  et  $p \equiv k \ln \rho$  pour  $k$  un réel positif arbitraire pour avoir*

$$\|P_{\parallel} \mathbf{M} - P_{\parallel}^{\rho} \mathbf{M}\|_{L^2} \leq \frac{k A M_0 e \ln(\rho)}{\rho^k}.$$

*Preuve du lemme 2.6.* On pose dans cette preuve  $M_0 = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$  et  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ . Nous avons, pour  $\lambda$  et  $\mu$  deux indexes données de la suite,

$$\partial_t (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu) = \mathcal{L}(\mathbf{M}^\lambda, S^\lambda \mathbf{H}^\lambda) - \mathcal{L}(\mathbf{M}^\mu, S^\mu \mathbf{H}^\mu).$$

En prenant le produit scalaire de cette égalité par  $(\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)$ , et en utilisant la propriété (2.4)(ii) de  $\mathcal{L}$  combinée avec l'estimation (2.16), nous obtenons l'inégalité p.p. vérifiée,

$$(2.37) \quad \frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu|^2 \leq C(M_0) \left( |\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu|^2 |S^\lambda \mathbf{H}^\lambda| + |\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu| |S^\lambda \mathbf{H}^\lambda - S^\mu \mathbf{H}^\mu| \right)$$

Etant donné que le reste de la démonstration peut paraître à première lecture peu intuitif, il nous a semblé utile d'exposer d'abord la suite de la preuve sur un cas "idéal" où tout se passerait bien. Ceci permettra, nous l'espérons, une meilleure compréhension des remèdes apportés au vrai cas imparfait.

Dans le cas "idéal" à notre sens, la fonction  $S^\lambda \mathbf{H}^\lambda$  serait uniformément bornée par rapport à  $\lambda$  dans  $L^\infty(\mathcal{Q}_T)$  et la suite  $(S^\lambda \mathbf{H}^\lambda)$  serait de Cauchy dans  $L^2(\Omega_T)$ . Dans ce cas, on s'aperçoit en prenant l'intégrale sur  $\Omega$  de (2.37) et en notant  $C_1(T)$  un majorant indépendant de  $\lambda$  de  $C(M_0) \|S^\lambda \mathbf{H}^\lambda\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_T)}$ , que pour tout  $t \leq T$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{M}^\lambda(t) - \mathbf{M}^\mu(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq C_1(T) \|\mathbf{M}^\lambda(t) - \mathbf{M}^\mu(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\quad + C(M_0) \|\mathbf{M}^\lambda(t) - \mathbf{M}^\mu(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) - S^\mu \mathbf{H}^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que les supports de  $\mathbf{M}^\lambda(t)$  et  $\mathbf{M}^\mu(t)$  restent toujours contenus dans  $\Omega$  (cf. Remarque 2.4). En intégrant en temps cette inégalité, nous déduisons pour  $t \leq T$ ,

$$\|\mathbf{M}^\lambda(t) - \mathbf{M}^\mu(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(M_0) e^{C_1(T)T} T^{\frac{1}{2}} \|S^\lambda \mathbf{H}^\lambda - S^\mu \mathbf{H}^\mu\|_{L^2(\Omega_T)}$$

Ce qui permet de conclure puisque le membre de droite converge vers zéro quand  $\lambda$  et  $\mu$  tendent vers  $+\infty$ .

Mais nous ne possédons aucune des deux propriétés du cas "idéal". Premièrement, il y a peu d'espoir que la majoration uniforme en  $\lambda$  de  $\|S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t)\|_{L^\infty}$  ait lieu en dimension  $\geq 2$ . C'est la qu'interviennent alors les résultats préliminaires des lemmes 2.7 et 2.8 : Posons

$$\boldsymbol{\psi}^\lambda \equiv P_{\perp} S^\lambda \mathbf{H}^\lambda$$

de sorte que (d'après (2.31))

$$(2.38) \quad S^\lambda \mathbf{H}^\lambda = \boldsymbol{\psi}^\lambda - P_{\parallel} S^\lambda \mathbf{M}^\lambda$$

D'après la première équation de 2.13

$$(2.39) \quad \text{rot } \boldsymbol{\psi}^\lambda = P_{\perp} (\varepsilon \partial_t \mathbf{E}^\lambda)$$



Les estimations (2.17) et (2.21) montrent alors que la famille  $\boldsymbol{\psi}^\lambda(t)$  (resp.  $S^\lambda \mathbf{M}^\lambda(t)$ ) est uniformément bornée dans  $H^1(\mathbb{R}^2)^3$  (resp.  $(L^2)^3 \cap (L^\infty)^3$ ) pour presque tout  $t \in [0, T]$  et pour tout  $\lambda$ . On en déduit par l'application des deux lemmes 2.7 et 2.8 l'existence d'une constante  $C$  indépendante de  $\lambda$  et de  $t$  telle que pour tout réel  $\rho$  assez grand

$$(2.40) \quad \left\| S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) - F_\rho^\lambda(t) \right\|_{L^2} \leq C/\rho \quad \text{et} \quad \left\| F_\rho^\lambda(t) \right\|_{L^\infty} \leq C \ln(\rho)$$

où on a posé :  $F_\rho^\lambda = S^\rho \boldsymbol{\psi}^\lambda - P_\parallel^\rho S^\lambda \mathbf{M}^\lambda$ . Ainsi, en écrivant que  $S^\lambda \mathbf{H}^\lambda = (S^\lambda \mathbf{H}^\lambda - F_\rho^\lambda) + F_\rho^\lambda$ , et en utilisant (2.40) il vient

$$(2.41) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \left| \mathbf{M}^\lambda(t) - \mathbf{M}^\mu(t) \right|^2 \left| S^\lambda \mathbf{H}^\lambda(t) \right| dx \leq C \ln(\rho) \left\| (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{2M_0 C}{\rho} \left\| (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)(t) \right\|_{L^2}$$

Notre espoir, en effectuant une telle majoration est que la convergence du terme en  $1/\rho$  vers 0 compensera l'explosion (faible) du terme en  $\ln(\rho)$ , une fois le lemme de Gronwall est appliqué.

La deuxième difficulté concerne la convergence vers 0 du terme  $(S^\lambda \mathbf{H}^\lambda - S^\mu \mathbf{H}^\mu)$ . L'idée est d'utiliser à nouveau la décomposition (2.38). En effet, la relation (2.39) et les estimations (2.17) et (2.21) montrent que la suite  $(\boldsymbol{\psi}^\lambda)$  est bornée dans  $H^1(\mathcal{Q}_T)^3$ . D'où, quitte à changer la sous suite extraite de départ, on peut supposer que

$$(2.42) \quad \text{la suite } (\boldsymbol{\psi}^\lambda) \text{ est de Cauchy dans } L^2(\Omega_T).$$

On constate donc qu'on peut décomposer  $(S^\lambda \mathbf{H}^\lambda - S^\mu \mathbf{H}^\mu)$  en deux morceaux : une partie qui se comporte bien  $(\boldsymbol{\psi}^\lambda - \boldsymbol{\psi}^\mu)$  et une partie moins agréable :  $S^\mu P_\parallel \mathbf{M}^\mu - S^\lambda P_\parallel \mathbf{M}^\lambda$ . Pour traiter ce dernier terme, notre idée consiste à y faire apparaître la différence  $(\mathbf{M}^\mu - \mathbf{M}^\lambda)$  en écrivant

$$S^\mu P_\parallel \mathbf{M}^\mu - S^\lambda P_\parallel \mathbf{M}^\lambda = S^\mu P_\parallel (\mathbf{M}^\mu - \mathbf{M}^\lambda) + (S^\mu - S^\lambda) P_\parallel \mathbf{M}^\lambda.$$

Le premier terme de cette décomposition s'intègre bien (une fois multiplié par  $|\mathbf{M}^\mu - \mathbf{M}^\lambda|$  et intégré sur  $\mathbb{R}^2$ ) avec le terme en  $C \ln(\rho)$  de l'inégalité (2.41). On aurait gagné si le deuxième terme converge vers 0 dans  $L^2(\mathcal{Q}_T)$ . Or,  $\mathbf{M}^\lambda$  ne convergeant pour l'instant que faiblement dans  $L^2(\mathcal{Q}_T)$ , on ne peut déduire la convergence forte de  $(S^\mu - S^\lambda) P_\parallel \mathbf{M}^\lambda$  vers 0 dans  $L^2(\mathcal{Q}_T)$ . On s'en sort en intercalant la limite faible- $\star$   $\mathbf{M}$ ,

$$(S^\mu - S^\lambda) P_\parallel \mathbf{M}^\lambda = (S^\mu - S^\lambda) P_\parallel \mathbf{M} + (S^\mu - S^\lambda) P_\parallel (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}),$$

puisque,  $\mathbf{M}$  étant une fonction fixe de  $L^2(\mathcal{Q}_T)$ , la suite  $(S^\mu - S^\lambda) P_\parallel \mathbf{M}$  converge vers 0 fortement dans  $L^2(\mathcal{Q}_T)$  (passer en Fourier en espace et utiliser Fubini). Le deuxième terme est presque de la forme  $(\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)$ ...

Ces précisions étant faites nous sommes prêt pour redémarrer. On considère donc la décomposition

$$S^\lambda \mathbf{H}^\lambda - S^\mu \mathbf{H}^\mu = (\boldsymbol{\psi}^\lambda - \boldsymbol{\psi}^\mu) - S^\mu P_\parallel (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu) + (S^\mu - S^\lambda) P_\parallel (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}) + (S^\mu - S^\lambda) P_\parallel \mathbf{M}$$

Etant donné que les opérateurs  $S^\mu P_\parallel$  et  $(S^\mu - S^\lambda) P_\parallel$  sont de normes inférieures respectivement à 1 et 2 sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , on déduit que

$$(2.43) \quad \left\| (S^\lambda \mathbf{H}^\lambda - S^\mu \mathbf{H}^\mu)(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| (\boldsymbol{\psi}^\lambda - \boldsymbol{\psi}^\mu)(t) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2 \left\| (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M})(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \left\| (S^\mu - S^\lambda) P_\parallel \mathbf{M}(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Notons

$$X^{\lambda,\mu}(t) = \left\| (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)(t) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}^2 \quad \text{et} \quad X^{\lambda,\infty}(t) = \left\| (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M})(t) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}^2$$

Et posons

$$G^{\lambda,\mu}(t) = \left\| (\psi^\lambda - \psi^\mu)(t) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| (S^\mu - S^\lambda) P_{\parallel} \mathbf{M}(t) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}$$

D'après ce qui précède

$$(2.44) \quad \lim_{\lambda,\mu \rightarrow \infty} \left\| G^{\lambda,\mu} \right\|_{L^2(0,T)} = 0$$

En prenant l'intégrale sur  $\Omega$  de l'inégalité (2.37), et en utilisant le fait que le support de  $(\mathbf{M}^\lambda(t))$  est toujours contenu dans  $\Omega$ , on déduit à partir des estimations (2.41) et (2.43) l'inégalité

$$(2.45) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} X^{\lambda,\mu}(t) \leq (C_1 \ln(\rho)) X^{\lambda,\mu}(t) + C_2 \sqrt{X^{\lambda,\mu}(t)} \left( \sqrt{X^{\lambda,\infty}(t)} + G^{\lambda,\mu}(t) + \frac{C_3}{\rho} \right)$$

où on a posé  $C_3 = 2M_0C$ ,  $C_2 = 2C(M_0)$  et où la constante  $C_1$  est choisie de telle sorte que  $(C_1 \ln(\rho)) \geq C(M_0)(C \ln(\rho) + 1)$  pour  $\rho$  assez grand. En intégrant l'inégalité (2.45) entre  $t_0$  et  $t \in [0, T]$  nous déduisons

$$\rho^{-C_1 t} \sqrt{X^{\lambda,\mu}(t)} \leq \rho^{-C_1 t_0} \sqrt{X^{\lambda,\mu}(t_0)} + C_2 \int_{t_0}^t \rho^{-C_1 \tau} \left( \sqrt{X^{\lambda,\infty}(\tau)} + G^{\lambda,\mu}(\tau) + \frac{C_3}{\rho} \right) d\tau,$$

qui nous donne également

$$(2.46) \quad \begin{aligned} \rho^{-C_1 t} \sqrt{X^{\lambda,\mu}(t)} &\leq \rho^{-C_1 t_0} \sqrt{X^{\lambda,\mu}(t_0)} + C_2 \rho^{-C_1 t_0} \left( T^{\frac{1}{2}} \left\| G^{\lambda,\mu} \right\|_{L^2(0,T)} + \frac{C_3 T}{\rho} \right) + \\ &C_2 \int_{t_0}^t \rho^{-C_1 \tau} \left( \sqrt{X^{\lambda,\infty}(\tau)} \right) d\tau. \end{aligned}$$

L'idée maintenant est de passer à limite inférieure en  $\mu$  pour faire apparaître  $X^{\lambda,\infty}(t)$  au membre de droite. Mais il faut pouvoir le faire à  $t$  fixé! Nous montrons pour cela

**Lemme 2.9** *Pour tout  $t \leq [0, T]$*

$$\sqrt{X^{\lambda,\infty}(t)} \leq \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt{X^{\lambda,\mu}(t)}.$$

La démonstration de ce lemme est reportée à la fin de la preuve et nous allons l'admettre pour le moment. En passant à la  $\liminf$  en  $\mu$  dans (2.46) à  $t$  fixé, nous concluons par le lemme 2.9

$$\begin{aligned} \rho^{-C_1 t} \sqrt{X^{\lambda,\infty}(t)} &\leq \rho^{-C_1 t_0} \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt{X^{\lambda,\mu}(t_0)} + C_2 \rho^{-C_1 t_0} \left( T^{\frac{1}{2}} \left\| G^{\lambda,\infty} \right\|_{L^2(0,T)} + \frac{C_3 T}{\rho} \right) + \\ &C_2 \int_{t_0}^t \rho^{-C_1 \tau} \left( \sqrt{X^{\lambda,\infty}(\tau)} \right) d\tau \end{aligned}$$

où on a posé  $G^{\lambda,\infty}$  la limite dans  $L^2(0, T)$  de  $G^{\lambda,\mu}$  quand  $\mu \rightarrow \infty$ , qui existe d'après (2.44). En appliquant le lemme de Gronwall à cette inégalité, on déduit que

$$\begin{aligned} e^{-C_2 t} \sqrt{X^{\lambda,\infty}(t)} &\leq \rho^{C_1(t-t_0)} \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt{X^{\lambda,\mu}(t_0)} + \\ &C_2 T \rho^{C_1(t-t_0)} \left( T^{\frac{1}{2}} \left\| G^{\lambda,\infty} \right\|_{L^2(0,T)} + \frac{C_3 T}{\rho} \right), \end{aligned}$$

mais aussi, en prenant le sup sur  $[t_0, t]$  de chaque membre

$$e^{-C_2 t} \left\| X^{\lambda, \infty} \right\|_{C^0([t_0, t])}^{\frac{1}{2}} \leq \rho^{C_1(t-t_0)} \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt{X^{\lambda, \mu}(t_0)} + C_2 T \rho^{C_1(t-t_0)} \left( T^{\frac{1}{2}} \left\| G^{\lambda, \infty} \right\|_{L^2(0, T)} + \frac{C_3 T}{\rho} \right),$$

ce qui donne passant à la lim sup en  $\lambda$ , compte tenu de (2.44),

$$(2.47) \quad e^{-C_2 t} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \left\| X^{\lambda, \infty} \right\|_{C^0([t_0, t])}^{\frac{1}{2}} \leq \rho^{C_1(t-t_0)} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt{X^{\lambda, \mu}(t_0)} + C_4 \rho^{C_1(t-t_0)-1}$$

en posant  $C_4 = C_2 C_3 T^2$ . Considérons d'abord  $t_0 = 0$ . Puisque  $X^{\lambda, \mu}(0) = 0$ , l'inégalité (2.47) s'écrit

$$e^{-C_2 t} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \left\| X^{\lambda, \infty} \right\|_{C^0([0, t])}^{\frac{1}{2}} \leq C_4 \rho^{C_1 t - 1}$$

pour tout  $\rho$  assez grand. Soit donc  $T_0 = \min(1/C_1, T)$ . En prenant  $t = T_0$ , ensuite en faisant tendre  $\rho$  vers  $\infty$  on déduit

$$(2.48) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\| X^{\lambda, \infty} \right\|_{C^0([0, T_0])} = 0.$$

Reprenons maintenant l'estimation (2.47) avec  $t_0 = T_0$  et  $t = T_1$  où  $T_1 = \min(2T_0, T)$ . En utilisant (2.48) et en faisant à nouveau tendre  $\rho$  vers  $\infty$ , nous déduisons que la convergence vers 0 de  $X^{\lambda, \infty}$  tient lieu dans  $C^0([0, T_1])$ . Ainsi par une simple récurrence sur  $n$ , on peut facilement montrer que le résultat de convergence est encore vrai sur  $C^0([0, T_n])$  avec  $T_n = \min(nT_0, T)$ , où  $n$  est un entier quelconque. Ceci montre,

$$(2.49) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\| X^{\lambda, \infty} \right\|_{C^0([0, T])} = 0.$$

et termine la preuve du lemme 2.6. □

### Preuve du lemme 2.9

Pour tout  $\mu$ ,  $\mathbf{M}^\mu \in C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2)^3)$  et d'après l'estimation (2.21), la norme de  $\partial_t \mathbf{M}^\mu$  dans  $C^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2)^3)$  est uniformément bornée par rapport à  $\mu$ . D'où l'existence d'une constante  $C$ , indépendante de  $\mu$ , telle que

$$\left\| \mathbf{M}^\mu(t) - \mathbf{M}^\mu(t') \right\|_{L^2} \leq C |t - t'|$$

pour tout  $t, t' \in [0, T]$ .

Si  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)^3$  alors on a que la famille de fonctions  $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \phi \mathbf{M}^\mu(t) d\mathbf{x}$  est bornée (d'après (2.16)) et équicontinue sur  $[0, T]$ . D'après le théorème d'Ascoli, on déduit l'existence d'une sous suite qui converge uniformément sur  $[0, T]$ . Or, on sait que  $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \phi \mathbf{M}^\mu(t) d\mathbf{x}$  converge faible- $\star$  dans  $L^\infty(0, T)$  vers  $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \phi \mathbf{M}(t) d\mathbf{x}$ . Par unicité de la limite, on déduit donc  $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \phi \mathbf{M}^\mu(t) d\mathbf{x}$  converge uniformément sur  $[0, T]$  vers  $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \phi \mathbf{M}(t) d\mathbf{x}$ , ce qui montre que pour tout  $t \in [0, T]$ , la suite  $(\mathbf{M}^\mu(t))$  converge faiblement dans  $L^2$  vers  $\mathbf{M}(t)$ . Il en résulte

que  $\lambda$  étant fixé, pour  $t \in [0, T]$  la suite  $(\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu(t))$  converge faiblement dans  $L^2$  vers  $(\mathbf{M}^\lambda(t) - \mathbf{M}(t))$ . D'où, pour tout  $t \in [0, T]$

$$\left\| \mathbf{M}^\lambda(t) - \mathbf{M}(t) \right\|_{L^2} \leq \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{M}^\lambda(t) - \mathbf{M}^\mu(t) \right\|_{L^2}$$

□

### Unicité de la solution forte

Nous démontrons dans ce qui suit l'unicité de la solution forte sur  $\mathcal{Q}_T$  du problème (2.1)-(2.2). Ce résultat d'unicité clora par la même occasion la démonstration du théorème (2.3), puisqu'on aura démontré l'unicité de la limite et donc la convergence de toute la suite pour tout  $T$  vers la même limite.

Considérons donc pour un temps fini  $T$  donné, deux solutions fortes  $(\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1, \mathbf{M}^1)$  et  $(\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2, \mathbf{M}^2)$  sur  $\mathcal{Q}_T$  du problème (2.1)-(2.2). On remarque d'abord qu'en vertu de la propriété (2.3) nous avons pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(2.50) \quad \left| \mathbf{M}^1(\mathbf{x}, t) \right| = \left| \mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) \right| = |\mathbf{M}_0(\mathbf{x})| \quad p.p.$$

Notons

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}^1 - \mathbf{E}^2, \quad \mathbf{h} = \mathbf{H}^1 - \mathbf{H}^2, \quad \mathbf{m} = \mathbf{M}^1 - \mathbf{M}^2, \quad \delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{M}^1, \mathbf{H}^1) - \mathcal{L}(\mathbf{M}^2, \mathbf{H}^2)$$

il vient que sur  $\mathcal{Q}_T$ ,

$$(2.51) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t \mathbf{e} - \text{rot } \mathbf{h} = 0, \\ \mu_0 \partial_t \mathbf{h} + \text{rot } \mathbf{e} = -\mu_0 \delta\mathcal{L}, \\ \partial_t \mathbf{m} = \delta\mathcal{L} \end{cases}$$

avec

$$(2.52) \quad (\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{m})|_{t=0} = (0, 0, 0).$$

Posons

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^2} \left( \varepsilon |\mathbf{e}(t)|^2 + \mu_0 \left( |\mathbf{h}(t)|^2 + |\mathbf{m}(t)|^2 \right) \right) d\mathbf{x}$$

En multipliant scalairement dans  $L^2$  la première équation de (2.51) par  $\mathbf{e}(t)$ , la deuxième équation par  $\mathbf{h}(t)$ , la troisième équation par  $\mu_0 \mathbf{m}(t)$ , en faisant la somme on trouve après avoir intégré par parties

$$(2.53) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \mu_0 \int_{\mathbf{R}^2} (\mathbf{m}(t) - \mathbf{h}(t)) \cdot \delta\mathcal{L}(t) d\mathbf{x}$$

Par ailleurs, d'après (2.4)(ii), et compte tenu de (2.50), il existe une constante  $C_0$  qui ne dépend que de  $\|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$  telle que, pour p.p.  $t \in [0, T]$ ,

$$(2.54) \quad |\delta\mathcal{L}(t)| \leq C_0 \left( |\mathbf{m}(t)| \left| \mathbf{H}^1(t) \right| + |\mathbf{h}(t)| \right) \quad p.p. \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$$

Or, comme pour la solution du problème régularisé, du fait que  $\text{div}(\mathbf{M}_0 + \mathbf{H}_0) = 0$  on déduit la décomposition,

$$\mathbf{H}^1 = P_\perp \mathbf{H}^1 - P_\parallel \mathbf{M}^1$$

Pour presque tout  $t \in [0, T]$ , on a d'une part

$$\|\mathbf{M}^1(t)\|_{L^\infty \cap L^2} = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty \cap L^2} \equiv M_0$$

et d'autre part,  $\text{rot } P_\perp \mathbf{H}^1(t) = P_\perp \varepsilon \partial_t \mathbf{E}^1(t)$ , donc

$$\|P_\perp \mathbf{H}^1(t)\|_{H^1}^2 \leq \|\varepsilon \partial_t \mathbf{E}^1\|_{L^\infty(O, T; L^2)}^2 + \|\mathbf{H}^1\|_{L^\infty(O, T; L^2)}^2$$

L'application des deux lemmes 2.7 et 2.8 montre donc l'existence d'une constante  $C$  et d'une fonction  $\mathbf{H}_\rho^1 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)^3$  telles que

$$\|\mathbf{H}_\rho^1\|_{L^\infty} \leq C \ln(\rho) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_\rho^1\|_{L^2} \leq C/\rho,$$

pour tout réel  $\rho > 0$  assez grand. Ainsi, puisque  $\|\mathbf{m}(t)\|_{L^\infty} \leq 2M_0$ ,

$$(2.55) \quad \|\|\mathbf{m}(t)\| \mathbf{H}^1(t)\|_{L^2} \leq C \ln(\rho) \|\mathbf{m}(t)\|_{L^2} + \frac{2M_0 C}{\rho}$$

En utilisant les majorations (2.55) et (2.54) dans le second membre de (2.53) on déduit que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) \leq C_1 \ln(\rho) \mathcal{E}(t) + \frac{C_2}{\rho} \sqrt{\mathcal{E}(t)}$$

avec  $C_2 = 2\sqrt{2\mu_0} M_0 C_0 C$  et  $C_1$  choisi de telle sorte que pour  $\rho$  grand  $C_1 \ln(\rho) \geq 4C_0(1 + C \ln(\rho))$ . L'intégration de cette inégalité entre  $t_0$  et  $t$  nous donne

$$(2.56) \quad \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(t_0) + C_2 \rho^{C_1(t-t_0)-1}$$

Soit  $N$  telle que  $T/N < 1/C_1$ , l'inégalité (2.56) et  $\mathcal{E}(0) = 0$  montrent par une simple récurrence sur  $k = 0, \dots, N-1$ , que pour tout  $t \in [kT/N, (k+1)T/N]$

$$\mathcal{E}(t) \leq (k+1) C_2 \rho^{((C_1 T)/N)-1}$$

D'où pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\mathcal{E}(t) \leq N C_2 \rho^{((C_1 T)/N)-1}$$

et donc en faisant tendre  $\rho$  vers  $\infty$ ,  $\mathcal{E}(t) = 0$ . □

### Estimations d'énergies

Nous avons d'abord les estimations (devenues maintenant classiques pour le lecteur)

**Théorème 2.4** *La solution du théorème 2.3 vérifie pour tout  $t \geq 0$*

$$(2.57) \quad |\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)| = |\mathbf{M}_0(\mathbf{x})| \quad p.p. \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

$$(2.58) \quad \mathcal{E}(\mathbf{E}(t), \mathbf{H}(t)) \leq e^{2C(M_0)t} \mathcal{E}(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0).$$

où  $C(M_0)$  est une constante qui ne dépend que de  $M_0$ .

dont la preuve est la même que la preuve du lemme 2.4.

Nous terminons ensuite par des estimations uniformes par rapport aux données, qui nous seront utiles pour la suite. Considérons pour cela une séquence de données  $\varepsilon^\delta, \mathbf{M}_0^\delta, \mathbf{H}_0^\delta, \mathbf{E}_0^\delta$  et  $\mathcal{L}^\delta$  telles que :

**Hypothèse 2.7**  $\varepsilon^\delta$ ,  $\mathbf{M}_0^\delta$ ,  $\mathbf{H}_0^\delta$ ,  $\mathbf{E}_0^\delta$  et  $\mathcal{L}^\delta$  vérifient l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  où de plus

- (1) La constante  $C(R)$  intervenant dans (2.4) est indépendante de  $\delta$ ,
- (2) Les normes respectives de  $\mathbf{E}_0^\delta$ ,  $\mathbf{H}_0^\delta$  et  $\mathbf{M}_0^\delta$  dans  $H(\text{rot}; \mathbb{R}^2)$ ,  $H(\text{rot}; \mathbb{R}^2)$  et  $L^\infty(\mathbb{R}^2)^3$  sont uniformément bornées par rapport à  $\delta$ ,
- (3) les constantes  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$  et le domaine  $\Omega$  sont indépendants de  $\delta$ .

**Théorème 2.5** Sous les conditions de l'hypothèse 2.7, il existe pour tout temps fini  $T > 0$ , une constante  $C(T)$  indépendante de  $\delta$  telle que la solution  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta, \mathbf{M}^\delta)$  au problème (2.1)-(2.2) vérifie

$$(2.59) \quad \mathcal{E} \left( \partial_t \mathbf{E}^\delta(t), \partial_t \mathbf{H}^\delta(t) \right) + \frac{\mu_0}{2} \left\| \partial_t \mathbf{M}^\delta(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C(T).$$

Ce théorème est une conséquence immédiate de (2.21) : il est facile de voir que sous l'hypothèse 2.7 la constante  $C_0(T)$  qui y intervient peut être majorée indépendamment de  $\delta$  et  $\lambda$ .

#### 2.4.4 A propos du cas $\Phi \neq 0$

Par rapport au cas  $\Phi = 0$ , la présence d'un champ effectif  $-\partial_{\mathbf{m}}\Phi$  ne rajoute pas de difficultés substantielles aux démonstrations de la section 2.4.3. En effet en posant

$$\mathcal{L}'(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h} - \partial_{\mathbf{m}}\Phi(\mathbf{m}; \mathbf{x}); \mathbf{x})$$

où  $\Phi$  satisfait (2.5), on voit que l'étude du cas  $\Phi \neq 0$  se ramène à l'étude du cas  $\Phi = 0$  en remplaçant  $\mathcal{L}$  par  $\mathcal{L}'$  et en remplaçant les propriétés (2.4) par

$$(2.60) \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad |\mathcal{L}'(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x})| \leq C(R) (|\mathbf{h}| + |\mathbf{m}|), \\ (ii) \quad |\mathcal{L}'(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) - \mathcal{L}'(\mathbf{m}', \mathbf{h}'; \mathbf{x})| \leq C(R) (|\mathbf{m} - \mathbf{m}'| |\mathbf{h}| + |\mathbf{h} - \mathbf{h}'| + |\mathbf{m} - \mathbf{m}'|) \end{array} \right.$$

Le lecteur se convaincra facilement que la nouvelle forme de la propriété (ii) ne perturbe en rien les démonstrations, quand à la propriété (i), sa seule incidence notable est la modification de l'expression de l'estimation (2.17) qui se transforme en

$$\mathcal{E} \left( \mathbf{E}^\lambda(t), \mathbf{H}^\lambda(t) \right)^{\frac{1}{2}} \leq e^{C(M_0)t} \mathcal{E}(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)^{\frac{1}{2}} + (e^{C(M_0)t} - 1) \sqrt{\frac{\mu_0}{2}} \|\mathbf{M}_0\|_{L^2}.$$

Cette nouvelle estimation est sans incidence sur le déroulement de la preuve puisque le second membre est uniformément borné par rapport à  $\lambda$ .

**Remarque 2.10 (Estimation uniforme en temps)** Elle concerne le cas dissipatif correspondant à l'hypothèse 2.3. Sous cette hypothèse supplémentaire, l'estimation (2.58), qui n'est valable que pour des temps finis  $T$  peut en effet être remplacée par

$$(2.61) \quad \mathcal{E}(\mathbf{E}(t), \mathbf{H}(t)) + \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M}(t)) \leq \mathcal{E}(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) + \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M}_0)$$

où on a posé :  $\mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) = \mu_0 \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{M}; \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ .

## 2.5 Rappel des résultats dans le cas 3D avec $\varepsilon = \varepsilon_0$

L'étude de ce cas a été menée dans [27] dans le cas homogène :  $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$  et  $\mathcal{L}$  indépendante de  $\mathbf{x}$ , et pour  $\Phi = 0$ . Mais autant, à la manière de la section 2.4.4, la généralisation au cas d'une loi non linéaire donnée par (2.2) et satisfaisant les hypothèses 2.1 et 2.2, ne pose pas de difficultés notables, autant la considération du cas  $\varepsilon$  variable, met en défaut les arguments essentiels des preuves, ceci aussi bien pour les solutions faibles que pour les solutions fortes.

Les résultats que nous présentons ici sont montrés dans [27] dans le cas où

$$(2.62) \quad \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}), \quad \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0.$$

où  $\mathcal{L}$  est une fonction vérifiant les hypothèses (2.1) et (2.3).

### 2.5.1 Existence des solutions faibles

**Théorème 2.6** *Supposons que  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$  et  $\mathbf{M}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ , avec  $\mathbf{M}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)^3$  et  $\operatorname{div}(\mathbf{E}_0) = \operatorname{div}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_0) = 0$ , alors le problème de Cauchy (2.1)-(2.62) admet une solution faible  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  qui vérifie en plus, pour tout  $t \geq 0$*

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)| &= |\mathbf{M}_0(\mathbf{x})| \quad p.p. \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{E}(\mathbf{E}(t), \mathbf{H}(t)) &\leq \mathcal{E}(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0). \end{aligned}$$

La preuve de ce théorème est en fait indépendante de la dimension d'espace. Elle repose sur la régularisation du second membre  $\partial_t \mathbf{M}$  intervenant dans les équations de Maxwell à l'aide de (l'équivalent en dimension 3 de) l'opérateur  $S^\lambda$  introduit dans (2.13) (remplacer  $\mathbb{R}^2$  par  $\mathbb{R}^3$ ). Le problème régularisé considéré est le suivant

$$(2.63) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}^\lambda - \operatorname{rot} \mathbf{H}^\lambda = 0, & \mu_0 \partial_t \mathbf{H}^\lambda + \operatorname{rot} \mathbf{E}^\lambda = -\mu_0 S^\lambda(\partial_t \mathbf{M}), \\ (\mathbf{E}^\lambda, \mathbf{H}^\lambda)|_{t=0} = (S^\lambda \mathbf{E}_0, S^\lambda \mathbf{H}_0), \end{cases}$$

$$(2.64) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}^\lambda = \mathcal{L}(\mathbf{M}^\lambda, \mathbf{H}^\lambda) \\ \mathbf{M}^\lambda|_{t=0} = \mathbf{M}_0, \end{cases}$$

pour lequel on montre l'existence d'une solution unique  $(\mathbf{E}^\lambda, \mathbf{H}^\lambda, \mathbf{M}^\lambda) \in C^1([0, \infty[; X_\lambda(\mathbb{R}^3))$  où  $X_\lambda(\mathbb{R}^3)$  est l'espace de Banach défini par

$$X_\lambda(\mathbb{R}^3) = L_\lambda^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L_\lambda^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^\infty(\mathbb{R}^3)^3.$$

en posant  $L_\lambda^2(\mathbb{R}^3) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3) / \operatorname{supp}(\hat{u}) \subset [-2\lambda, 2\lambda]^3\}$ . Remarquer que  $L_\lambda^2(\mathbb{R}^3)$  contient l'image de  $L^2(\mathbb{R}^3)$  par  $S^\lambda$ .

**Remarque 2.11** *Le problème régularisé (2.64)-(2.63) ne convient pas à l'étude du problème 2D que nous avons considéré pour les raisons suivantes : L'existence de solutions pour ce problème régularisé repose sur le caractère localement lipschitzien de l'application*

$$\begin{aligned} X_\lambda(\mathbb{R}^3) &\longrightarrow X_\lambda(\mathbb{R}^3) \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M}) &\longmapsto \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{H}, -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E} - S^\lambda \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}), \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}) \right) \end{aligned}$$

Mais on constate facilement (en considérant le support fréquentiel du terme  $\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}$ ) que cette application n'est même pas définie lorsque  $\varepsilon^{-1}$  est une fonction positive quelconque de  $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ . C'est pour cette raison que nous avons régularisé dans (2.14)-(2.13) plutôt l'opérateur  $\operatorname{rot}$  que le second membre des équations de Maxwell.

Notons enfin que l'unicité des solutions faibles reste encore un problème ouvert.

### 2.5.2 Existence et unicité des solutions fortes

**Théorème 2.7** *Si on suppose de plus (par rapport aux hypothèses du théorème (2.6)) que  $\operatorname{rot} \mathbf{E}_0$  et  $\operatorname{rot} \mathbf{H}_0$  appartiennent à  $L^2(\mathbb{R}^3)^3$  alors le problème (2.1)-(2.62) admet une unique solution forte telle que*

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} \text{ et } \operatorname{rot} \mathbf{H} \in C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3).$$

Comme dans le cas 2D l'unicité repose sur une mesure fine de ce qui empêche  $\mathbf{H}$  d'être une fonction bornée. L'estimation du lemme 2.7 n'est plus valable en dimension 3. Par contre, on démontre dans [27] l'estimation de type inégalité de Strichartz,

**Lemme 2.10** *Soit  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$  et  $f \in L^1(0, \infty, L^2(\mathbb{R}^3))$  trois fonctions donnée, et soit  $u \in C^1([0, \infty[; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^0([0, \infty[; H^1(\mathbb{R}^3))$  la solution de*

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = f \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{et} \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

alors il existe une constante universelle  $c$  indépendante de  $u_0, u_1, f$ , telle que pour tout  $\lambda > 1$ , et pour tout  $T > 0$ ,

$$\left\| S^\lambda u \right\|_{L^2(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq c \sqrt{\ln(1 + \lambda T)} \left( \|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^3))} \right)$$

Notons que la constante  $\sqrt{\ln(1 + \lambda T)}$  ne peut pas être remplacée par une constante indépendante de  $\lambda$  (en d'autres termes le lemme devient faux lorsqu'on remplace  $S^\lambda u$  par  $u$ ). Ce type d'estimation correspond au cas limite interdit pour les inégalités de Strichartz généralisées en dimension 3 (Voir [20] par exemple).





Deuxième partie

Modèles de couches minces



# Chapitre 3

## Présentation du problème

**Résumé :** Dans ce court chapitre introductif (dont la section 3.1 annonce un plan de la deuxième partie de la thèse), nous présentons le problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle revêtu d'une couche mince ferromagnétique (section 3.2). Nous définissons ensuite la notion de condition aux limites équivalente ou effective (section 3.3), en insistant plus particulièrement sur les notions d'ordre et de consistance (formule (3.9)) ainsi que sur la notion de stabilité (cf. (3.15)).

### 3.1 Introduction

L'utilisation des matériaux ferromagnétiques dans les revêtements furtifs est très répandue à cause de leurs propriétés d'absorption vis-à-vis des ondes électromagnétiques et aussi à cause de la modification qu'ils engendrent sur le spectre de l'onde diffractée (voir chapitre 1). La motivation du présent travail vient du fait, que dans beaucoup de cas, l'épaisseur du revêtement est très petite comparée à la longueur de l'onde incidente. Par conséquent, la discrétisation des équations de Maxwell à l'intérieur de ce domaine d'absorption engendre un maillage "trop" fin et peut rendre le problème numérique difficile (voir impossible) à résoudre.

Une alternative bien connue pour contourner cette difficulté, consiste à dériver des Conditions aux Limites Equivalentes (CLE) (Effective Boundary Conditions (EBC's), qui entrent dans le cadre de : General Impedance Boundary Conditions (GIBC's)) sur la frontière de l'obstacle, incorporant de manière approximative l'effet de la couche mince. L'intérêt de cette approche est bien entendu essentiellement numérique. De manière sommaire, comme le modèle approché est posé sur le domaine extérieur (c.à.d. sans comprendre la couche mince) nous éliminons la contrainte géométrique sur le maillage. On réduit ainsi la taille du problème discret et par conséquent le coût du calcul. Notons également que cette méthode pourrait constituer une alternative plus intéressante que le raffinement de maillage autour de l'obstacle.

Ces CLE génèrent des problèmes aux limites particuliers dans le sens où la condition sur le bord fait intervenir des dérivées tangentielles et des dérivées en temps d'ordre supérieur ou égal à l'ordre de l'opérateur intérieur.

La plupart des travaux dédiés aux CLE concernent des revêtements linéaires et sont restreints à l'étude du problème harmonique. Il existe une importante littérature d'ingénierie

sur ce domaine (voir [41] ou [25] pour un petit aperçu). Afin d’obtenir les CLE, une première méthode, généralement restreinte à des géométries très simples, consiste à approcher la condition d’impédance non locale exacte à l’aide d’opérateurs locaux, comme pour les conditions aux limites absorbantes [17]. Une deuxième approche, plus générale, consiste à postuler l’existence d’un comportement particulier (typiquement polynômial) du champ électromagnétique à l’intérieur de la couche fine (ce qui se justifie formellement par un développement de Taylor par exemple). On obtient alors différentes conditions selon le degré du polynôme considéré.

Plus récemment, des mathématiciens appliqués ont dérivé des CLE d’une manière plus rigoureuse appuyée par une justification mathématique, basée essentiellement sur des techniques variationnelles. On distingue dans ces travaux deux approches principales afin d’obtenir ces conditions aux limites. L’approche d’Engquist-Nédélec [18] proche de la seconde méthode qu’on vient d’évoquer et l’approche Bendali-Lemrabet [7] basée sur un changement d’échelle des équations à l’intérieur de la couche mince.

Le cas des matériaux ferromagnétiques semble ne pas avoir été traité ni par les ingénieurs ni par les mathématiciens. Sa principale spécificité (et difficulté) est liée au caractère non linéaire de la loi constitutive du matériau. Ainsi l’étude harmonique ne peut être appliquée et le problème doit être saisi dans le domaine temporel. Les deux aspects : caractère non-linéaire du modèle et étude du problème en temps présentent chacun des difficultés spécifiques. C’est pourquoi nous avons opté pour l’organisation suivante de notre travail.

Nous commençons par étudier le cas d’un revêtement linéaire : chapitre 4. L’objectif visé est double. Premièrement, ce cas simplifié (qui rappelons le, est un cas particulier du cas non-linéaire) nous permet de présenter la technique adoptée pour la dérivation des CLE, qui est similaire à la méthode de “scaling” utilisée dans [7]. Deuxièmement, il nous permet d’étudier les problèmes d’instabilité spécifiques aux problèmes en régime transitoire, qui peuvent apparaître dans le cas de CLE d’ordre élevé. Nous étudions également l’obtention d’estimations d’erreur via une technique énergétique (au moins dans le cas d’une frontière plane).

Au chapitre 5, nous proposons une généralisation au cas des matériaux ferromagnétiques, faite de manière progressive. Nous considérons d’abord le problème 1D (les problèmes liés à la géométrie sont par conséquent évacués). Ce cas simplifié nous permettra en particulier d’aborder les phénomènes d’instabilité qui apparaissent pour les conditions d’ordre élevé. On discutera alors dans quelles mesures est-t-il possible d’appliquer le procédé de stabilisation, entrepris auparavant pour le cas linéaire. Dans ce cas 1D nous travaillerons avec une forme explicite de la loi ferromagnétique afin de donner un aperçu concret des considérations abstraites de la deuxième étape : généralisation de la construction au cas courbe avec une loi ferromagnétique non linéaire générale.

Dans le chapitre 6, nous donnons la justification rigoureuse de la dérivation des conditions équivalentes dans le cas monodimensionnel. Malgré son caractère 1D, cette justification n’est pas aussi évidente que dans le cas linéaire à cause du couplage avec la loi ferromagnétique. Pour justifier l’existence d’un développement asymptotique, nous utilisons une technique récursive (boot-strap) basée sur un argument de “trace-épaisse”... Nous montrons par la même occasion l’existence et l’unicité de solutions au problème couplé Maxwell-CLE d’ordre inférieur ou égal à 3. La généralisation de ces résultats aux dimensions 2 et 3 reste encore un problème ouvert.

Les chapitres 7 et 8 s’intéressent à la mise en œuvre numérique des conditions équivalentes dans le cas des matériaux ferromagnétiques uniaxiaux. On traite dans le chapitre 7 le problème

1D afin d'évacuer dans un premier temps les difficultés liées à la discrétisation surfacique et se concentrer sur les schémas en temps. On y montre alors que l'utilisation d'un schéma dit explicite sur le bord, nécessite une condition de stabilité (condition CFL) qui se comporte asymptotiquement comme  $c\Delta t \leq \sqrt{2h\eta}$ , où  $c$ ,  $\Delta t$ ,  $h$  et  $\eta$  sont respectivement la célérité des ondes dans le vide, le pas de temps, le pas d'espace et l'épaisseur de la couche ferromagnétique. Ce schéma se trouve par conséquent inadapté aux applications pratiques où  $\eta \rightarrow 0$ . D'autre part une discrétisation dite implicite sur le bord, admet une condition de stabilité indépendante de  $\eta$ , qui coïncide avec la CFL classique pour le schéma numérique utilisé en dehors de la frontière. Ce schéma constitue par conséquent une meilleure alternative et sera repris dans le chapitre 8 pour traiter les problèmes 2D et 3D. Le gros de l'effort dans ces derniers cas est de préciser la discrétisation spatiale adéquate de la frontière et du domaine ferromagnétique adimensionnalisé. La méthode utilisée est basée sur une technique variationnelle. Bien que seul le cas d'une frontière droite soit considéré (pour le problème discret), la méthode utilisée est tout à fait générale et s'adapte aux cas de géométries courbes. Chaque chapitre est couronné par des expériences numériques mettant en valeur l'intérêt que présente l'utilisation des conditions équivalentes. Seul le schéma 2D est testé dans le chapitre 8.

### 3.2 Diffraction par une couche mince ferromagnétique

On suppose que le matériau ferromagnétique occupe le domaine  $\Omega_f^\eta$ , formé d'une couche d'épaisseur  $\eta$  autour d'un conducteur parfait, occupant le domaine  $\Omega_0^\eta$ . On note  $\Gamma^\eta$  la frontière de  $\Omega_0^\eta$  et on suppose que la réunion  $(\Omega_f^\eta \cup \Omega_0^\eta)$  reste constante lorsqu'on fait varier  $\eta$ . Le domaine extérieur (le vide) est noté  $\Omega_v$  et on note  $\Gamma$  sa frontière. Tous les deux sont donc indépendants de l'épaisseur  $\eta$  (voir figure 3.2).

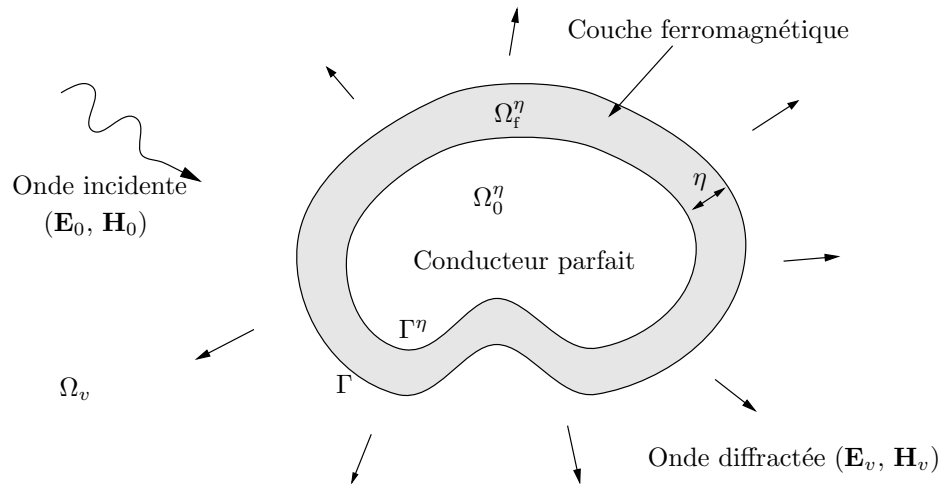


FIG. 3.1 – Présentation du problème

On se place dans cette partie dans le cas où les caractéristiques de la couche ferromagnétique varient lentement (par rapport à  $\eta$ ) suivant la variable tangentielle. La dépendance vis-à-vis de la coordonnée normale est fixée moyennant un scaling en  $1/\eta$  de celle-ci et est choisie de manière arbitraire. Ce scaling nous permettra alors de plonger un problème à  $\eta$  fixé dans une famille de problèmes dépendant de  $\eta$ ... Ce sera l'objet des chapitres 4 et 5.

Soit  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$  une “onde incidente” provenant du vide (c’est à dire une solution correspondant à des données initiales à  $t = 0$  dont le support est contenu dans  $\Omega_v$ ). On note  $(\mathbf{E}_v^\eta(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}_v^\eta(\mathbf{x}, t)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  (resp.  $(\mathbf{E}_f^\eta(\mathbf{x}, t), \mathbf{H}_f^\eta(\mathbf{x}, t)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ) l’onde électromagnétique au point  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_v \times \mathbb{R}^+$  (resp. au point  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_f^\eta \times \mathbb{R}^+$ ).

Ces champs vérifient alors (au moins pour des données régulières) :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_v^\eta - \text{rot } \mathbf{H}_v^\eta = 0, & \mu_0 \partial_t \mathbf{H}_v^\eta + \text{rot } \mathbf{E}_v^\eta = 0 & \text{dans } \Omega_v \times \mathbb{R}^+, \\ (\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) & & \text{dans } \Omega_v. \end{cases}$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_f^\eta \partial_t \mathbf{E}_f^\eta - \text{rot } \mathbf{H}_f^\eta = 0, & \mu_0 \partial_t (\mathbf{H}_f^\eta + \mathbf{M}_f^\eta) + \text{rot } \mathbf{E}_f^\eta = 0 & \text{dans } \Omega_f^\eta \times \mathbb{R}^+, \\ (\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)|_{t=0} = (0, 0) & & \text{dans } \Omega_f^\eta, \end{cases}$$

où  $\varepsilon_f^\eta$  désigne la permittivité électrique du milieu ferromagnétique et où  $\mathbf{M}_f^\eta$  désigne le moment magnétique. Ce moment est lié au champ magnétique  $\mathbf{H}_f^\eta$  via la loi non linéaire :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}_f^\eta = \mathcal{L}^\eta(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_T^\eta; \mathbf{x}) & \text{avec } \mathbf{H}_T^\eta = \mathbf{H}_f^\eta - \partial_m \Phi^\eta(\mathbf{M}_f^\eta; \mathbf{x}) & \text{dans } \Omega_f^\eta \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{M}_f^\eta|_{t=0} = \mathbf{M}_0^\eta & & \text{dans } \Omega_f^\eta, \end{cases}$$

où la fonction  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \Phi^\eta(\mathbf{m}; \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ , est régulière et positive, et où la fonction  $(\mathbf{m}, \mathbf{h}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{L}^\eta(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$  est régulière et vérifie

$$(3.4) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \mathbf{h} \mapsto \mathcal{L}^\eta(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) \text{ est linéaire pour } \mathbf{m} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \in \Omega_f^\eta, \\ (ii) \quad & \mathcal{L}^\eta(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) \cdot \mathbf{m} = 0, \quad \text{pour } \mathbf{m}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \in \Omega_f^\eta, \\ (iii) \quad & \mathcal{L}^\eta(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} \geq 0, \quad \text{pour } \mathbf{m}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \in \Omega_f^\eta. \end{aligned}$$

(Ces propriétés rappellent les propriétés (2.3), (2.4) et (2.6) du chapitre 2). A ces équations s’ajoute la condition de réflexion sur le conducteur parfait : (où  $\mathbf{n}$  désigne une normale à  $\Gamma^\eta$ ),

$$(3.5) \quad \mathbf{E}_f^\eta \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\eta.$$

On considère ici le cas des solutions régulières (par exemple dans  $H(\text{rot}; \Omega_v \cup \Omega_f^\eta)$ ). En d’autres termes, les solutions qui vérifient les conditions de continuités à l’interface  $\Gamma$ ,

$$(3.6) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_v^\eta \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_f^\eta \times \mathbf{n}, & \mathbf{H}_v^\eta \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_f^\eta \times \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où  $\mathbf{n}$  est une normale à  $\Gamma$ .

n° Le problème formé par les équations (3.1), (3.2), (3.3), (3.5) et (3.6) sera désigné par le problème de transmission exact, et l’épaisseur  $\eta$  en constituera le petit paramètre : c.à.d. typiquement, si l’onde incidente est mono-chromatique de longueur d’onde  $\lambda$ , alors  $\eta \ll \lambda$ . On comprend alors pourquoi la résolution numérique du problème de transmission exact sera pénalisée par le calcul de l’inconnue  $(\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)$  (qui nécessite un maillage fin).

### 3.3 Notion de Condition aux Limites Equivalente (CLE)

L'idée pour contourner la détermination exacte de  $(\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)$  est de remplacer les équations (3.2), (3.3), (3.5) et (3.6) par une Condition aux Limites Equivalente posée sur la frontière extérieure  $\Gamma$  telle que : l'onde électromagnétique satisfaisant les équations de Maxwell sur  $\Omega_v$  couplées avec la CLE constitue une bonne approximation du champ diffracté  $(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)$ .

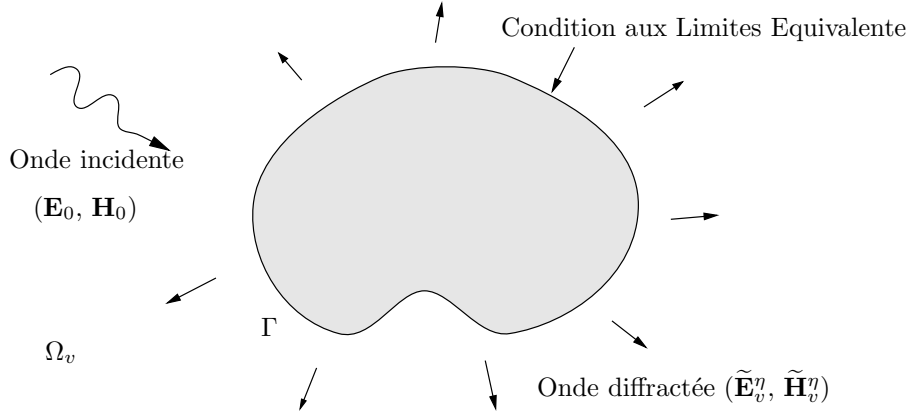


FIG. 3.2 – Problème approché

Plus précisément, notre construction aboutira à une hiérarchie de CLE indexée par un entier  $k$ , de la forme :

$$(3.7) \quad \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta \times \mathbf{n} = \mathcal{B}_k^\eta(\mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{H}}_v^\eta \times \mathbf{n})) \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+,$$

où  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  désigne le champ électromagnétique approché sur  $\Omega_v$  satisfaisant

$$(3.8) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta - \text{rot } \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta = 0, & \mu_0 \partial_t \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta + \text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta = 0 & \text{sur } \Omega_v \times \mathbb{R}^+, \\ (\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) & & \text{sur } \Omega_v, \end{cases}$$

et où  $\mathcal{B}_k^\eta$  est un certain opérateur (probablement non linéaire) s'appliquant à la valeur tangentielle de  $\tilde{\mathbf{H}}^\eta$ . Cet opérateur est tel que (au moins formellement)

$$(3.9) \quad \left\| (\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta) - (\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta) \right\|_{L^2(\Omega_v)} = O(\eta^{k-\frac{1}{2}}).$$

Dans ce cas, la CLE (3.7) est dite d'ordre  $k$ . L'identité (3.9) est requise en tant qu'une **propriété de consistance** de la construction des CLE. Cette propriété est en fait étroitement liée à la notion fondamentale de **stabilité par rapport à  $\eta$** .

Rappelons d'abord les propriétés de stabilité du problème de transmission exact. Pour une onde électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ , on note

$$\mathcal{E}_v(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_v} (\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) \, d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_f^\eta(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f^\eta} (\varepsilon_f^\eta |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) \, d\mathbf{x}.$$

Nous avons alors pour des solutions assez régulières du problème de transmission exact l'estimation d'énergie suivante, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$(3.10) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \mathcal{E}_v(\mathbf{E}_v^\eta(t), \mathbf{H}_v^\eta(t)) + \mathcal{E}_f^\eta(\mathbf{E}_f^\eta(t), \mathbf{H}_f^\eta(t)) + \mu_0 \int_{\Omega_f^\eta} \Phi^\eta(\mathbf{M}_f^\eta(t)) \, d\mathbf{x} \right\} \leq 0.$$



*Preuve.* En utilisant la relation de continuité à l'interface (3.6), nous obtenons :

$$(3.11) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_v(\mathbf{E}_v^\eta(t), \mathbf{H}_v^\eta(t)) + \mathcal{E}_f^\eta(\mathbf{E}_f^\eta(t), \mathbf{H}_f^\eta(t)) = -\mu_0 \int_{\Omega_f^\eta} \partial_t \mathbf{M}_f^\eta \cdot \mathbf{H}_f^\eta \, d\mathbf{x}.$$

D'autre part la propriété (3.4) (iii) implique, pour  $\mathbf{x} \in \Omega_f^\eta$ ,

$$\partial_t \mathbf{M}_f^\eta \cdot \mathbf{H}_f^\eta = \partial_t \mathbf{M}_f^\eta \cdot (\mathbf{H}_T^\eta + \partial_m \Phi^\eta(\mathbf{M}_f^\eta)) \geq \partial_t \Phi^\eta(\mathbf{M}_f^\eta).$$

Par conséquent

$$(3.12) \quad -\mu_0 \int_{\Omega_f^\eta} \partial_t \mathbf{M}_f^\eta \cdot \mathbf{H}_f^\eta \, d\mathbf{x} \leq -\mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f^\eta} \Phi^\eta(\mathbf{M}_f^\eta(t)) \, d\mathbf{x}$$

L'identité (3.10) résulte immédiatement de (3.11) et (3.12).  $\square$

n° On constate en particulier, d'après (3.10) que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$(3.13) \quad \mathcal{E}_v(\mathbf{E}_v^\eta(t), \mathbf{H}_v^\eta(t)) \leq \mathcal{E}_v(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) + \mu_0 \int_{\Omega_f^\eta} \Phi^\eta(\mathbf{M}_0^\eta) \, d\mathbf{x}$$

Ainsi, à partir d'estimations uniformes en  $\eta$  de la donnée initiale :  $\int_{\Omega_f^\eta} \Phi^\eta(\mathbf{M}_0^\eta) \, d\mathbf{x}$ , on récupère une estimation uniforme en temps et uniforme par rapport à  $\eta$  de la norme  $L^2$  du champ électromagnétique diffracté dans  $\Omega_v$ . Il s'agit là d'une propriété de stabilité  $L^2$  uniforme, qu'il est important de retrouver pour la solution approchée  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$ . En effet, une telle estimation est nécessaire pour obtenir un résultat de convergence ou d'estimation d'erreur de type (3.9). On le voit de manière plus claire dans le cas particulier d'un matériau linéaire : c.à.d  $\mathbf{M}_0^\eta = 0$  ( $\Rightarrow \mathbf{M}_f^\eta(t) = 0$ ). Dans ce cas, l'identité (3.10) montre que, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$(3.14) \quad \mathcal{E}_v(\mathbf{E}_v^\eta(t), \mathbf{H}_v^\eta(t)) \leq \mathcal{E}_v(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0).$$

On en déduit par une inégalité triangulaire que l'estimation (3.9) nécessite au moins une identité de stabilité de la forme

$$(3.15) \quad \mathcal{E}_v(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t), \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t)) \leq \mathcal{E}_v(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) + O(\eta^{k-\frac{1}{2}}).$$

En fait, l'estimation (3.15) constituera la propriété de base requise pour la construction des opérateurs  $\mathcal{B}_k^\eta$ .

**Remarque 3.1 (les conventions de notation)** *Etant donnée la technicité du problème, il nous a paru utile d'attirer l'attention du lecteur sur les conventions de notation utilisées dans les chapitres 3, 4, 5 et 6. En effet, l'indice  $v$ , (resp.  $f$ ) désignera systématiquement une grandeur définie dans le domaine du vide (resp. à l'intérieur de la couche mince (ferromagnétique ou pas)). Le signe  $\tilde{\phantom{x}}$  (au dessus d'une variable) est utilisé pour différencier la solution approchée de la solution exacte. L'exposant  $\eta$  est utilisé chaque fois qu'une grandeur dépend de ce paramètre. Nous espérons par ces précisions améliorer la lisibilité de ces chapitres.*

## Chapitre 4

# Dérivation des CLE dans le cas d'un matériau linéaire

**Résumé :** Dans ce chapitre, nous traitons le cas de modèles de couches minces constituées par des matériaux diélectriques linéaires (sans conduction). Par rapport à la littérature déjà existante, la nouveauté est que nous traitons le cas du régime transitoire, ce qui pose des difficultés nouvelles. Nous traitons tout d'abord le cas d'une frontière plane (section 4.2) et construisons formellement les conditions équivalentes d'ordre 2, 3 (qui coïncident dans ce cas particulier de géométrie) et 4 (voir (4.25) puis (4.42)). Nous établissons des résultats fondamentaux de stabilité des conditions aux limites effectives par des techniques énergétiques (théorèmes 4.1 et 4.3). Cette analyse met aussi en évidence que certains phénomènes d'instabilité peuvent apparaître si l'on n'y prend pas garde (voir (4.35) et théorème 4.2) : c'est une différence importante avec le cas fréquentiel. Ces équations étant linéaires, il n'est pas difficile à partir des résultats de stabilité d'obtenir des estimations d'erreur (voir théorème 4.4) : c'est l'objet de la section 4.3. Nous abordons le cas des frontières courbes dans la section 4.4. Bien que la démarche soit conceptuellement la même, la mise en oeuvre nécessite la maîtrise d'outils de géométrie différentielle (voir sections 4.4.1 et 4.4.2) et implique d'importantes difficultés calculatoires. C'est pourquoi nous nous sommes limités aux conditions d'ordre 2 et 3 (voir également remarque 4.9) qui diffèrent dans le cas courbe (voir formules (4.85) et (4.90)) : la condition d'ordre 2 ne "voit pas" la courbure du bord, celle d'ordre 3 oui. Nous complétons ce chapitre par une analyse de stabilité (théorème 4.5) dans le cas courbe.

### 4.1 Description du modèle

On considère dans ce chapitre le cas où la couche mince est formée d'un matériau linéaire :

$$\mathbf{M}_f^\eta = \chi_m^\eta \mathbf{H}_f^\eta$$

où  $\chi_m^\eta$  est la susceptibilité relative du milieu. Ce matériau est donc caractérisé par la donnée de  $\varepsilon_f^\eta$  et de  $\mu_f^\eta \equiv \mu_0(1 + \chi_m^\eta)$ .

On suppose par ailleurs que ces caractéristiques sont indépendantes du petit paramètre

$\eta$ . Il existe alors  $\varepsilon_f$  et  $\mu_f$  telles que

$$\varepsilon_f^\eta = \varepsilon_f \quad \text{et} \quad \mu_f^\eta = \mu_f.$$

L'équation (3.2) s'écrit donc

$$(4.1) \quad \begin{cases} \varepsilon_f \partial_t \mathbf{E}_f^\eta - \text{rot } \mathbf{H}_f^\eta = 0, & \mu_f \partial_t \mathbf{H}_f^\eta + \text{rot } \mathbf{E}_f^\eta = 0 & \text{dans } \Omega_f^\eta \times \mathbf{R}^+, \\ (\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)|_{t=0} = (0, 0) & & \text{dans } \Omega_f^\eta, \end{cases}$$

et le problème de transmission exact est formé par les équations (3.1), (4.1), (3.5) et (3.6).

Notons enfin que par soucis de simplification la construction des CLE sera faite dans le cas d'une seule couche homogène : c.à.d.

$$\varepsilon_f \text{ et } \mu_f \text{ sont indépendants de } \mathbf{x}.$$

Le cas non homogène ne présente pas de difficultés substantielles mais admet plutôt un intérêt pour les applications concrètes. Nous le réservons à l'étude d'un revêtement ferromagnétique (chapitre 5).

Pour faire apparaître les difficultés de façon graduelle, on traite d'abord le cas d'une frontière plane, sur lequel on peut appréhender les problèmes de stabilité, puis celui d'une frontière courbe qui pose des difficultés supplémentaires dues à la prise en compte de la géométrie de l'interface.

## 4.2 Le cas d'une frontière plane : construction formelle

Nous supposons dans cette section que la normale unitaire  $\mathbf{n}$  à l'interface  $\Gamma$ , dirigée vers l'extérieur de  $\Omega_v$  reste constante (voir figure 4.1).

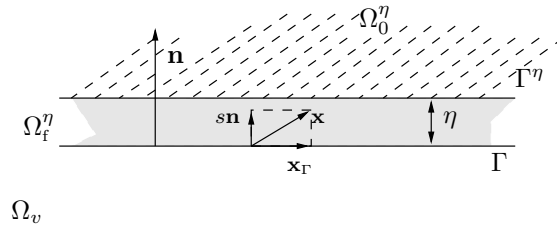


FIG. 4.1 – Le cas d'une interface plane

### 4.2.1 Changement d'échelle

La dérivation des conditions aux limites équivalentes repose d'abord sur un changement d'échelle (scaling) à l'intérieur de la couche fine afin d'enlever la dépendance de la géométrie du problème vis-à-vis du petit paramètre  $\eta$ .

Nous avons choisi de travailler de manière intrinsèque (sans spécifier une base adaptée à la structure particulière de la surface  $\Gamma$ ), de telle sorte que le lien avec le cas d'une frontière courbe, traité par la suite, soit plus clair. Nous utilisons donc les coordonnées paramétriques du domaine  $\Omega_f^\eta$  (figure 4.1).

$$(4.2) \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_f^\eta \longmapsto (\mathbf{x}_\Gamma, s) \in \Gamma \times [0, \eta] \text{ telle que : } \mathbf{x} = \mathbf{x}_\Gamma + s \mathbf{n}.$$

Dans le cas d'une frontière plane, cette application est bien définie pour tout  $\eta$ . Le changement d'échelle consiste simplement dans le changement de variable :

$$(4.3) \quad (\mathbf{x}_\Gamma, s) \in \Gamma \times [0, \eta] \longmapsto (\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \in \Gamma \times [0, 1] \text{ telle que : } s = \eta \nu.$$

**Notations et définitions.** Nous introduisons ici des notations à caractère intrinsèque qui peuvent paraître superflues dans le cas d'une frontière plane, mais ce faisant nous anticipons ce qui se passera dans le cas d'une frontière courbe. On note  $\nabla_\Gamma$  l'opérateur de dérivation par rapport à la variable  $\mathbf{x}_\Gamma$ . Par exemple, si  $(\boldsymbol{\tau}^1, \boldsymbol{\tau}^2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  désigne une base orthonormale du plan  $\Gamma$ , et  $(\xi_1, \xi_2)$  représente le système de coordonnées associé à cette base, alors on a

$$\nabla_\Gamma \equiv (\partial_{\xi_1} \cdot) \boldsymbol{\tau}^1 + (\partial_{\xi_2} \cdot) \boldsymbol{\tau}^2.$$

L'opérateur de dérivation spatiale  $\nabla$  dans  $\mathbb{R}^3$  s'écrit dans le système de coordonnées  $(\mathbf{x}_\Gamma, \nu)$ ,

$$\nabla \longmapsto \nabla_\Gamma + \frac{1}{\eta} \partial_\nu \mathbf{n}$$

Soit  $\mathbf{v}$  un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  tangents à  $\Gamma$ . Nous définissons l'opérateur de divergence surfacique  $\text{div}_\Gamma$  par :

$$\text{div}_\Gamma \mathbf{v} = (\partial_{\xi_1} \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\tau}^1 + (\partial_{\xi_2} \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\tau}^2 \equiv \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{v}.$$

Cet opérateur apparaît donc, comme étant l'adjoint de  $-\nabla_\Gamma$  pour le produit scalaire  $L^2(\Gamma)$ . Nous introduisons également :

$$(4.4) \quad \text{rot}_\Gamma \mathbf{v} = \text{div}_\Gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{n}), \quad \vec{\text{rot}}_\Gamma u = (\nabla_\Gamma u) \times \mathbf{n},$$

où  $\mathbf{v}$  (resp.  $u$ ) est un champ vectoriel (resp. scalaire) défini sur  $\Gamma$ . On s'aperçoit facilement que  $\text{rot}_\Gamma$  et  $\vec{\text{rot}}_\Gamma$  sont également deux opérateurs adjoints pour le produit scalaire  $L^2(\Gamma)$ . De plus,  $\text{div}_\Gamma \vec{\text{rot}}_\Gamma = 0$  et  $\text{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma = 0$ .

Par ailleurs, nous aurons à distinguer, pour un champ de vecteurs  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , la partie normale de la partie tangentielle. On notera :

$$(4.5) \quad \mathbf{v} = \Pi_\parallel \mathbf{v} + \Pi_\perp \mathbf{v}, \quad \text{où } \Pi_\parallel \mathbf{v} = \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \quad \text{et} \quad \Pi_\perp \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}.$$

La variable  $t$  indiquera le temps. La dépendance en temps ne sera pas toujours explicitée (afin d'alléger des notations déjà suffisamment chargées). D'autre part,  $\mathbf{x}_\Gamma \in \mathbb{R}^3$ , indiquera toujours la coordonnée tangentielle appartenant à  $\Gamma$ .

**Système d'équations mises à l'échelle.** Soit  $\mathbf{E}$  un champ de vecteurs définis sur  $\Omega_f^\eta$ . Nous définissons  $\hat{\mathbf{E}}$  sur  $\Gamma \times ]0, 1[$  par

$$(4.6) \quad \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) \text{ où } (\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \text{ et } \mathbf{x} \text{ sont liés par les relations (4.2) et (4.3).}$$

En travaillant dans la base orthonormale  $(\boldsymbol{\tau}^1, \boldsymbol{\tau}^2, \mathbf{n})$ , on vérifie que (voir l'équivalent courbe dans le lemme 4.6)

$$(4.7) \quad \text{rot } \mathbf{E} = \vec{\text{rot}}_\Gamma (\hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n}) + (\text{rot}_\Gamma \hat{\mathbf{E}}) \mathbf{n} - \frac{1}{\eta} \partial_\nu (\hat{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}).$$

Cette identité nous permet alors de réécrire les équations (3.6), (4.1) et (3.5) dans le domaine fixe  $\Gamma \times ]0, 1[$ . Il nous faut pour cela effectuer le changement d'inconnus (similaire à (4.6)) pour le couple  $(\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)$  en introduisant  $(\hat{\mathbf{E}}_f^\eta, \hat{\mathbf{H}}_f^\eta)$  défini sur  $\Gamma \times ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$ , tel que

$$(\hat{\mathbf{E}}_f^\eta, \hat{\mathbf{H}}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu, t) = (\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)(\mathbf{x}, t) \quad \text{où } \mathbf{x} = \mathbf{x}_\Gamma + \eta \nu \mathbf{n}.$$

Cependant, pour simplifier une fois de plus les notations, nous noterons (de manière abusive)  $(\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)$  le champ électromagnétique dans  $\Gamma \times ]0, 1[$ ,

$$(\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)(\mathbf{x}, t) \mapsto (\hat{\mathbf{E}}_f^\eta, \hat{\mathbf{H}}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu, t) \equiv (\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu, t).$$

On passe alors, pour les champs  $(\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)$ , d'une notation à deux variables  $(\mathbf{x}, t)$  à une notation en trois variables  $(\mathbf{x}_\Gamma, \nu, t)$ . Ainsi par exemple, le vecteur  $(\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, 0, t)$  dans la nouvelle notation désigne pour l'ancienne notation le vecteur  $(\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, t)$ . Notons par ailleurs que cet abus de notation reviendra de façon récurrente dans toute la suite.

n° Ces précisions étant faites, les équations (3.6), (4.1) et (3.5) deviennent respectivement,

$$(4.8) \quad \begin{cases} \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, 0, t) \\ \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, 0, t) \end{cases} \quad \text{pour } (\mathbf{x}_\Gamma, t) \in \Gamma \times \mathbf{R}^+,$$

$$(4.9) \quad \begin{cases} \varepsilon_f \partial_t \mathbf{E}_f^\eta - \vec{\text{rot}}_\Gamma (\mathbf{H}_f^\eta \cdot \mathbf{n}) - (\text{rot}_\Gamma \mathbf{H}_f^\eta) \mathbf{n} + \frac{1}{\eta} \partial_\nu (\mathbf{H}_f^\eta \times \mathbf{n}) = 0 & \text{dans } \Gamma \times ]0, 1[ \times \mathbf{R}^+ \\ \mu_f \partial_t \mathbf{H}_f^\eta + \vec{\text{rot}}_\Gamma (\mathbf{E}_f^\eta \cdot \mathbf{n}) + (\text{rot}_\Gamma \mathbf{E}_f^\eta) \mathbf{n} - \frac{1}{\eta} \partial_\nu (\mathbf{E}_f^\eta \times \mathbf{n}) = 0 & \text{dans } \Gamma \times ]0, 1[ \times \mathbf{R}^+ \\ (\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)|_{t=0} = (0, 0), & \text{dans } \Gamma \times ]0, 1[ \end{cases}$$

$$(4.10) \quad \mathbf{E}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, 1, t) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{pour } (\mathbf{x}_\Gamma, t) \in \Gamma \times \mathbf{R}^+,$$

et le système d'équations du problème de diffraction adimensionné, est constitué maintenant des équations (3.1), (4.8), (4.9) et (4.10).

### 4.2.2 Développement asymptotique formel

La deuxième étape de la construction consiste à rechercher des solutions sous la forme

$$(4.11) \quad \begin{cases} (\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta) = (\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0) + \eta (\mathbf{E}_v^1, \mathbf{H}_v^1) + \eta^2 (\mathbf{E}_v^2, \mathbf{H}_v^2) + \dots \\ (\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta) = (\mathbf{E}_f^0, \mathbf{H}_f^0) + \eta (\mathbf{E}_f^1, \mathbf{H}_f^1) + \eta^2 (\mathbf{E}_f^2, \mathbf{H}_f^2) + \dots \end{cases}$$

et effectuer une identification formelle des termes du même ordre en  $\eta$  en substituant le développement (4.11) dans (3.1), (4.8), (4.9) et (4.10). Cette procédure conduit à un système d'équations récurrentes qui nous permettent de déterminer de proche en proche les différents termes du développement (4.11). Nous obtenons à partir de (3.1) et (4.8), pour  $k \geq 0$ ,

$$(4.12) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_v^k - \text{rot } \mathbf{H}_v^k = 0, & \mu_0 \partial_t \mathbf{H}_v^k + \text{rot } \mathbf{E}_v^k = 0, \\ (\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k)|_{t=0} = \begin{cases} (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) & \text{si } k = 0, \\ (0, 0) & \text{si } k > 0, \end{cases} \\ \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_v^k(\mathbf{x}_\Gamma) = \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k(\mathbf{x}_\Gamma, 0) \quad \text{pour } \mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma. \end{cases}$$

qui ne sont autres que les équations de Maxwell sur  $\Omega_v$  couplées avec une condition aux limites non homogène sur le bord  $\Gamma$ . Ils permettent la détermination de  $(\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k)$  pour chaque  $k \geq 0$

à condition de pouvoir déterminer la valeur de la donnée au bord  $\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k(\mathbf{x}_{\Gamma}, 0)$ . Cela va être possible via l'identification formelle dans (4.8), (4.9) et (4.10). Pour  $k = 0$  on obtient

$$(4.13) \quad \begin{cases} \partial_{\nu}(\mathbf{E}_f^0 \times \mathbf{n}) = 0, & \mathbf{E}_f^0(\mathbf{x}_{\Gamma}, 1) \times \mathbf{n} = 0, \\ \partial_{\nu}(\mathbf{H}_f^0 \times \mathbf{n}) = 0, & \mathbf{H}_f^0(\mathbf{x}_{\Gamma}, 0) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_{\Gamma}) \times \mathbf{n}, \end{cases} \quad \text{pour } \mathbf{x}_{\Gamma} \in \Gamma,$$

et pour  $k > 0$  nous avons la relation de récurrence

$$(4.14) \quad \begin{cases} \partial_{\nu}(\mathbf{E}_f^k \times \mathbf{n}) = \mu_f \partial_t \mathbf{H}_f^{k-1} + \vec{\text{rot}}_{\Gamma}(\mathbf{E}_f^{k-1} \cdot \mathbf{n}) + (\text{rot}_{\Gamma} \mathbf{E}_f^{k-1}) \mathbf{n}, \\ \mathbf{E}_f^k(\mathbf{x}_{\Gamma}, 1) \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{pour } \mathbf{x}_{\Gamma} \in \Gamma. \end{cases}$$

et de manière similaire

$$(4.15) \quad \begin{cases} \partial_{\nu}(\mathbf{H}_f^k \times \mathbf{n}) = -\varepsilon_f \partial_t \mathbf{E}_f^{k-1} + \vec{\text{rot}}_{\Gamma}(\mathbf{H}_f^{k-1} \cdot \mathbf{n}) + (\text{rot}_{\Gamma} \mathbf{H}_f^{k-1}) \mathbf{n}, \\ \mathbf{H}_f^k(\mathbf{x}_{\Gamma}, 0) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^k(\mathbf{x}_{\Gamma}) \times \mathbf{n}, \quad \text{pour } \mathbf{x}_{\Gamma} \in \Gamma. \end{cases}$$

Les équations (4.13), (4.14) et (4.15) aux inconnues vectorielles  $(\mathbf{E}_f^k, \mathbf{H}_f^k)_{k \geq 0}$  peuvent être résolues de la manière suivante : pour  $k = 0$ , l'équation (4.13) montre que,

$$(4.16) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_f^0(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \times \mathbf{n} = 0, & (\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[, \\ \mathbf{H}_f^0(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_{\Gamma}) \times \mathbf{n}, & (\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[. \end{cases}$$

Pour les termes d'ordre supérieurs, nous utilisons le lemme suivant

**Lemme 4.1** *Pour  $k > 0$  et  $(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[$ ,*

$$(4.17) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{E}_f^k(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\varepsilon_f} \int_{\nu}^1 (\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma}) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^{k-1}(\mathbf{x}_{\Gamma}, \xi) d\xi, \\ (\mathbf{E}_f^k(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \times \mathbf{n})|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$(4.18) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{H}_f^k(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \times \mathbf{n} = \partial_t \mathbf{H}_v^k(\mathbf{x}_{\Gamma}) \times \mathbf{n} - \frac{1}{\mu_f} \int_0^{\nu} (\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma}) \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^{k-1}(\mathbf{x}_{\Gamma}, \xi) d\xi, \\ (\mathbf{H}_f^k(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \times \mathbf{n})|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

*Preuve.* Prouvons par exemple (4.17). En appliquant  $\Pi_{\parallel}$  à la première équation de (4.14) on constate que

$$(4.19) \quad \partial_{\nu}(\mathbf{E}_f^k \times \mathbf{n}) = \mu_f \partial_t (\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^{k-1}) + \vec{\text{rot}}_{\Gamma}(\mathbf{E}_f^{k-1} \cdot \mathbf{n}).$$

Prenons maintenant le produit scalaire par  $\mathbf{n}$  de l'équation (4.15). Comme  $\mathbf{n} \cdot \vec{\text{rot}}_{\Gamma} = 0$ , il s'en suit

$$(4.20) \quad \varepsilon_f \partial_t (\mathbf{E}_f^{k-1} \cdot \mathbf{n}) = \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{H}_f^{k-1}.$$

En dérivant en temps (4.19) et en utilisant (4.20) nous concluons

$$\partial_{\nu}(\partial_t \mathbf{E}_f^k \times \mathbf{n}) = \left( \mu_f \partial_{tt} + \frac{1}{\varepsilon_f} \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \right) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^{k-1}.$$

L'identité (4.17) s'obtient en intégrant la dernière équation entre  $\nu$  et 1 et en utilisant la dérivée en temps de la condition aux limite de (4.14). L'identité (4.18) s'obtient de manière similaire.  $\square$

**Remarque 4.1** *Le lemme 4.1 ne donne de renseignements que sur la partie tangentielle des champs. Il est facile de voir (équation (4.20)) que la connaissance des composantes tangentielles suffit pour la détermination des composantes normales  $(\mathbf{E}_f^k \cdot \mathbf{n})$  et  $(\mathbf{H}_f^k \cdot \mathbf{n})$ ,  $k \geq 0$ . Nous avons en effet,*

$$(4.21) \quad \begin{cases} \varepsilon_f \partial_t (\mathbf{E}_f^k \cdot \mathbf{n}) = \text{rot}_\Gamma \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k, \\ (\mathbf{E}_f^k \cdot \mathbf{n})|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_f \partial_t (\mathbf{H}_f^k \cdot \mathbf{n}) = -\text{rot}_\Gamma \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k, \\ (\mathbf{H}_f^k \cdot \mathbf{n})|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

*Ces équations nous seront utiles lorsqu'on s'intéressera aux estimations d'erreur.*

**Remarque 4.2** *Par ce système d'équations récurrentes, on voit qu'une première approche possible consisterait à calculer les  $(\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k)$  numériquement de proche de proche, et reconstituer ensuite une approximation de la solution suivant le développement asymptotique 4.11. On constate alors que pour obtenir une précision d'ordre en  $O(\eta^k)$ , il faut effectuer  $k$  résolutions du système de Maxwell. Cette solution risque alors d'être très onéreuse surtout qu'on traite un problème d'évolution en temps. Dans le cas des CLE, la même précision en  $O(\eta^k)$  est obtenue en effectuant un seul calcul.*

### 4.2.3 Principe de la construction des CLE

Afin d'obtenir une approximation d'ordre  $\eta^k$  du champ diffracté  $(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)$  un bon candidat est sans doute la série tronquée

$$(\bar{\mathbf{E}}_v^k, \bar{\mathbf{H}}_v^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \eta^i (\mathbf{E}_v^i, \mathbf{H}_v^i)$$

Cette constatation formelle trouvera sa justification dans le théorème 4.2 page 78. D'après (4.12), le champ  $(\bar{\mathbf{E}}_v^k, \bar{\mathbf{H}}_v^k)$  satisfait bien les équations de Maxwell dans  $\Omega_v$  couplées avec la condition aux limites sur  $\Gamma$

$$(4.22) \quad \Pi_{\parallel} \bar{\mathbf{E}}_v^k(\mathbf{x}_\Gamma) = \sum_{i=0}^{k-1} \eta^i \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^i(\mathbf{x}_\Gamma, 0), \quad \mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma.$$

D'autre part nous remarquons que, une fois  $\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^0$  et  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0$  sont déterminés par (4.16), les équations (4.17) et (4.18) ne sont autres que des équations différentielles du premier ordre en  $t$  qui permettent de calculer de manière récurrente  $\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k$  et  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k$  pour tout ordre  $k$  comme fonctions de la valeur au bord  $\Gamma$  des champs  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^i$ ,  $0 \leq i \leq k$ . Ainsi il est possible d'exprimer le membre de droite de la condition aux limites (4.22) en fonctions de  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^i|_\Gamma$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ .

La question naturelle qui se pose alors est : peut-on exprimer ce second membre comme une fonction de  $(\Pi_{\parallel} \bar{\mathbf{H}}_v^k|_\Gamma)$ ? On verra que la réponse est négative en général. Cependant on constatera l'existence d'un opérateur linéaire tangentiel  $\mathcal{B}_k^\eta$  telle que la relation (4.22) se réécrit formellement

$$(4.23) \quad \bar{\mathbf{E}}_v^k \times \mathbf{n} = \mathcal{B}_k^\eta(\Pi_{\parallel} \bar{\mathbf{H}}_v^k) + O(\eta^k) \quad \text{sur } \Gamma.$$

Pour obtenir la condition effective d'ordre  $k$ , nous choisissons simplement d'omettre  $O(\eta^k)$  dans cette identité. C'est pour cela que la solution approchée notée par  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$ , sera différente de  $(\bar{\mathbf{E}}_v^k, \bar{\mathbf{H}}_v^k)$ . La validité de ce choix sera discutée par l'analyse de stabilité du nouveau problème aux limites. Les détails de cette construction seront données pour  $k = 1, 2, 3, 4$ .

**Remarque 4.3 [Condition d'ordre 1]** Comme les caractéristiques de la couche mince sont supposées être indépendantes de  $\eta$ , le problème limite quand  $\eta$  tend vers 0 s'obtient simplement en omettant la couche d'épaisseur  $\eta$  et en appliquant la condition de réflexion (3.5) sur la frontière  $\Gamma$ . Ceci coïncide avec la condition effective d'ordre 1 : il suffit de combiner la première équation de (4.16) avec le système (4.12) écrit pour  $k = 0$ .

#### 4.2.4 CLE d'ordre 2 et 3

**CLE d'ordre 2.** Selon la condition (4.22) il est possible de dériver la condition effective d'ordre 2 en calculant  $\mathbf{E}_f^0(\mathbf{x}_\Gamma, 0) \times \mathbf{n}$  et  $\mathbf{E}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, 0) \times \mathbf{n}$ . Or  $\mathbf{E}_f^0(\mathbf{x}_\Gamma, 0) \times \mathbf{n} = 0$  d'après (4.16). A partir de (4.17), écrite pour  $k = 1$ , et la seconde équation de (4.16), nous déduisons

$$(4.24) \quad \partial_t \mathbf{E}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\varepsilon_f} (1 - \nu) \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{r} \otimes_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \right) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma).$$

S'en suit alors :  $\partial_t \bar{\mathbf{E}}_v^2(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} = -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{r} \otimes_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \right) \Pi_{\parallel} \bar{\mathbf{H}}_v^2(\mathbf{x}_\Gamma) + O(\eta^2)$ ,

(où  $O(\eta^2) \equiv \frac{\eta^2}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{r} \otimes_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \right) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^1(\mathbf{x}_\Gamma)$ ). Ainsi la CLE d'ordre 2 s'écrit

$$(4.25) \quad \boxed{\partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta \times \mathbf{n} = -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{r} \otimes_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \right) \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta \quad \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^+}.$$

où  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  désigne le champ diffracté approché.

**CLE d'ordre 3.** Dans ce cas simplifié où la frontière est plane et le matériau est linéaire, la CLE d'ordre 2 coïncide avec la condition d'ordre 3 (ceci devient faux dans le cas d'une frontière courbe ou bien lorsque la couche fine est formé par un matériau ferromagnétique : voir section 4.4 et section 5.2). Pour déterminer la condition d'ordre 3 nous avons besoin de calculer  $(\mathbf{E}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, 0) \times \mathbf{n})$  en utilisant (4.17). Or, puisque  $\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^0 = 0$ , l'équation (4.18) montre (après l'avoir intégrée en temps)

$$(4.26) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^1(\mathbf{x}_\Gamma), \quad (\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[.$$

Par suite, l'équation (4.17) écrite pour  $k = 2$ , nous donne

$$(4.27) \quad \partial_t \mathbf{E}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\varepsilon_f} (1 - \nu) \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{r} \otimes_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \right) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^1(\mathbf{x}_\Gamma).$$

On déduit de (4.16), (4.24) et (4.27)

$$\partial_t \bar{\mathbf{E}}_v^3(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} = -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{r} \otimes_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \right) \Pi_{\parallel} \bar{\mathbf{H}}_v^3(\mathbf{x}_\Gamma) + O(\eta^3),$$

qui nous donne, une fois le  $O(\eta^3)$  omis, la même condition effective que (4.25).

#### Stabilité de la CLE d'ordre 2 et 3

Le point fondamental est que le couplage de la condition aux limites (4.25) avec les équations de Maxwell conduit à un système stable.



**Théorème 4.1** *Toute solution suffisamment régulière  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  du système  $\{(3.8), (4.25)\}$  satisfait l'estimation d'énergie :*

$$(4.28) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \mathcal{E}_v(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t), \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t)) + \eta \mathcal{E}_\Gamma^\eta(t) \right\} = 0,$$

où, en posant :  $\varphi^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, t)$ ,  $(\mathbf{x}_\Gamma, t) \in \Gamma \times \mathbf{R}^+$ ,

$$\mathcal{E}_\Gamma^\eta(t) = \frac{\mu_f}{2} \|\varphi^\eta(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_f} \left\| \int_0^t \text{rot}_\Gamma \varphi^\eta(\tau) d\tau \right\|_{L^2}^2.$$

L'identité (3.15) est donc bien vérifiée.

*Preuve.* Dans l'identité d'énergie classique pour le système de Maxwell

$$(4.29) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_v(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t), \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t)) = \int_\Gamma (\tilde{\mathbf{E}}^\eta \times \mathbf{n}) \cdot \varphi^\eta d\mathbf{x}_\Gamma$$

nous allons expliciter le terme de droite en utilisant (4.25). Nous intégrons en temps cette condition, ensuite nous prenons le produit scalaire  $L^2(\Gamma)$  avec  $\varphi^\eta$ . En utilisant la relation de dualité entre les deux opérateurs  $\text{rot}_\Gamma$  et  $\vec{\text{rot}}_\Gamma$  on déduit que :

$$(4.30) \quad \int_\Gamma (\tilde{\mathbf{E}}^\eta \times \mathbf{n}) \cdot \varphi^\eta d\mathbf{x}_\Gamma = -\eta \frac{d}{dt} \mathcal{E}_\Gamma^\eta(t).$$

L'identité (4.28) découle immédiatement de (4.29) et (4.30).  $\square$

#### 4.2.5 CLE d'ordre 4 : forme naturelle... mais instable

La détermination de  $(\mathbf{E}_f^3(\mathbf{x}_\Gamma, 0) \times \mathbf{n})$  par l'équation (4.17), écrite pour  $k = 3$ , nécessite le calcul de  $(\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu))$ . L'équation (4.18), implique pour  $k = 2$

$$(4.31) \quad \partial_t \mathbf{H}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} = \partial_t \mathbf{H}_v^2(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} - \frac{1}{\mu_f} \int_0^\nu \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi.$$

Par (4.24) nous avons,

$$(4.32) \quad \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) = \frac{1}{\varepsilon_f} (1 - \nu) (\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma) (\mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n}).$$

Appliquons l'opérateur  $(\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma)$  à (4.32) (en utilisant la propriété  $\text{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma = 0$ ) et intégrons le résultat une fois en temps. Il en résulte

$$\left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) = (1 - \nu) \mu_f \partial_t \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) (\mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n}).$$

Combinant cette identité avec (4.31) nous donne

$$(4.33) \quad \mathbf{H}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^2(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} - \nu \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right) \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \vec{\Delta}_\Gamma \right) (\mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n}).$$

où  $\vec{\Delta}_\Gamma \equiv \nabla_\Gamma \text{div}_\Gamma - \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma$ , est l'opérateur de Laplace-Beltrami. Des équations (4.33) et (4.17) nous déduisons finalement

$$(4.34) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{E}_f^3(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} &= -\frac{1}{\varepsilon_f} (1 - \nu) \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) \\ &\quad \left( \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^2(\mathbf{x}_\Gamma) - \frac{1}{3} (1 + \nu - \frac{\nu^2}{2}) \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \vec{\Delta}_\Gamma \right) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) \right). \end{aligned}$$

En combinant (4.34), (4.16), (4.24) et (4.27), nous obtenons l'identité formelle

$$\partial_t \bar{\mathbf{E}}_v^4(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} = -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) \left( 1 - \frac{\eta^2}{3} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \bar{\Delta}_\Gamma \right) \right) \Pi_\parallel \bar{\mathbf{H}}_v^4(\mathbf{x}_\Gamma) + O(\eta^4),$$

qui nous donne la condition d'ordre 4 suivante sur  $\Gamma \times \mathbb{R}^+$

$$(4.35) \quad \boxed{\partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta \times \mathbf{n} = -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) \left( 1 - \frac{\eta^2}{3} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \bar{\Delta}_\Gamma \right) \right) \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta.}$$

### Résultat d'instabilité relatif à la condition (4.35)

Contrairement au cas de la CLE d'ordre 2 (et donc 3), la condition (4.35) couplée avec les équations de Maxwell sur  $\Omega_v$  n'aboutit pas à un système stable : en particulier, l'estimation (3.15) ne peut avoir lieu.

Etudions pour cela l'exemple du problème 2D : pour fixer les idées nous notons  $(x, y, z)$  le système de coordonnées spatiales et supposons que tous les champs sont indépendants de la variable  $z$ . Pour simplifier (sans perte de généralité) on prend  $\varepsilon_0 = \varepsilon_f = 1$  et  $\mu_0 = \mu_f = 1$  et le domaine de propagation  $\Omega_v = y < 0$ .

Considérons maintenant  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  solution du système de Maxwell (3.8) couplé avec la condition aux limites (4.35) sur la surface  $\{y = 0\}$ . On observe sans difficulté que la composante  $z$  du champ  $\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta$  (resp.  $\tilde{\mathbf{H}}_v^\eta$ ) notée  $u$  est solution du problème aux limites  $\mathcal{P}_d^\eta$  (resp.  $\mathcal{P}_n^\eta$ ).

$$(4.36) \quad \mathcal{P}_d^\eta \quad \begin{cases} \partial_{tt}u - (\partial_{xx} + \partial_{yy})u = 0, & t > 0, y < 0, \\ u + \eta(1 - \frac{\eta^2}{3}(\partial_{tt} - \partial_{xx}))\partial_n u = 0, & t > 0, y = 0, \\ (u, \partial_t u) = (u_0, u_1), & t = 0, y < 0. \end{cases}$$

$$(4.37) \quad \mathcal{P}_n^\eta \quad \begin{cases} \partial_{tt}u - (\partial_{xx} + \partial_{yy})u = 0, & t > 0, y < 0, \\ \partial_n u + \eta(\partial_{tt} - \partial_{xx})(1 - \frac{\eta^2}{3}(\partial_{tt} - \partial_{xx}))u = 0, & t > 0, y = 0, \\ (u, \partial_t u) = (u_0, u_1), & t = 0, y < 0. \end{cases}$$

Ces deux problèmes correspondent en effet à la décomposition classique des ondes électromagnétiques 2D en deux polarisations indépendantes : onde T.E. (système  $\mathcal{P}_n^\eta$ ) et onde T.M. (système  $\mathcal{P}_d^\eta$ ). Dans le théorème suivant  $\mathcal{P}^\eta$  désignera de manière indifférente l'un des deux problèmes  $\mathcal{P}_d^\eta$  et  $\mathcal{P}_n^\eta$ .

**Théorème 4.2** *Pour  $\eta$  fixé, le problème  $\mathcal{P}^\eta$  est bien posé aux sens de Kreiss [31]. Cependant, il est fortement instable par rapport au paramètre  $\eta$  au sens suivant : il existe une famille de valeurs initiales  $(u_0^\eta(y), u_1^\eta(y))$  et  $u^\eta(y, t)$  la solution correspondante par le problème  $\mathcal{P}^\eta$ , telle que :*

$$\begin{cases} \|u_0^\eta\|_{H^m(-\infty, 0)} + \|u_1^\eta\|_{H^m(-\infty, 0)} \leq C, & \text{où } C \in \mathbb{R}^+ \text{ est indépendante de } \eta, \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \|u^\eta\|_{L^2(\mathbb{R} \times ]-\infty, 0[ \times ]0, T])} = +\infty, & \forall T > 0. \end{cases}$$

*Preuve.* Nous cherchons une solution de  $\mathcal{P}^\eta$  sous la forme :  $u(x, y, t) = \text{Re}(\hat{u}(y) e^{ikx} e^{st})$ , où,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $s = \alpha + i\omega$ ,  $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2$ , et  $\hat{u} \in L^2(-\infty, 0)$ . L'équation des ondes sur  $\{y < 0\}$  montre que notre solution particulière est nécessairement de la forme

$$\hat{u}(y) = A e^{\left((s^2+k^2)^{\frac{1}{2}}y\right)}, \quad A \in \mathbb{R},$$

avec  $\text{Re}((s^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}) > 0$ . Posons  $\kappa = \eta(s^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}$ . On vérifie aisément que la condition aux limites en  $y = 0$  conduit à l'équation caractéristique

$$(4.38) \quad 1 + \kappa \left(1 - \frac{1}{3}\kappa^2\right) = 0.$$

Cette équation admet trois solutions complexes : la première solution est un réel  $\kappa_0 > 0$  et les deux autres admettent une partie réelle négative et donc ne sont pas acceptables. Ainsi, les seules ondes acceptables doivent satisfaire :  $s^2 + k^2 = \frac{\kappa_0^2}{\eta^2}$ , soit

$$(4.39) \quad \left(\omega = 0 \text{ et } \alpha^2 + k^2 = \frac{\kappa_0^2}{\eta^2}\right) \text{ ou } \left(\alpha = 0 \text{ et } k^2 - \omega^2 = \frac{\kappa_0^2}{\eta^2}\right).$$

Soit  $\eta$  un réel positif fixé. La relation (4.39) montre que les ondes planes, solutions du problème  $\mathcal{P}^\eta$ , sont telles que  $\text{Re}(s) \leq \frac{\kappa_0}{\eta}$ . Le problème aux limites  $\mathcal{P}^\eta$  est donc bien posé au sens de Kreiss (voir [31]). En particulier, la norme  $L^2$  de  $e^{-\frac{\kappa_0}{\eta}t}u$ , peut être majorée par la norme  $L^2$  des données initiales.

Cependant, on observe que lorsque  $\eta$  tend vers 0, la borne supérieure de  $\text{Re}(s)$  tend vers  $+\infty$ . Ce qui s'interprète par l'existence d'une onde plane qui pour  $t > 0$  fixé explose lorsque  $\eta \rightarrow 0$ .

Considérons comme exemple, le pire des cas :  $k = 0$  (qui n'est autre que l'approximation 1D) et  $\alpha = \alpha_0^\eta = \frac{\kappa_0}{\eta}$ . On fixe  $m \in \mathbb{N}$  et on pose  $f^\eta(y) = e^{\alpha_0^\eta y}$ ,  $y < 0$ . la suite de valeurs initiales

$$u_0^\eta(y) = \frac{f^\eta(y)}{\alpha_0^\eta \|f^\eta(y)\|_{H^m}}, \quad u_1^\eta(y) = \frac{f^\eta(y)}{\|f^\eta\|_{H^m}},$$

satisfait  $\{\|u_0\|_{H^m} + \|u_1\|_{H^m}\} \leq 1 + \frac{\eta}{\kappa_0} < C$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ . La solution correspondantes est

$$u^\eta(y, t) = \frac{f^\eta(y+t)}{\alpha_0^\eta \|f^\eta\|_{H^m}} = u_0^\eta(y) f^\eta(t)$$

Nous avons :  $\|u^\eta\|_{L^2([-\infty, 0] \times ]0, T])} = \|u_0^\eta\|_{L^2([-\infty, 0])} \|f^\eta\|_{L^2(0, T)}$ .

Lorsque  $\eta \rightarrow 0$  :  $\|u_0^\eta\|_{L^2} \sim \left(\frac{\eta}{\kappa_0}\right)^{m+1}$  alors que  $\|f^\eta\|_{L^2(0, T)} \sim \sqrt{\frac{\eta}{2\kappa_0}} \exp\left(\frac{\kappa_0 T}{\eta}\right)$ .

Par conséquent  $\|u^\eta\|_{L^2([-\infty, 0] \times ]0, T])} \rightarrow +\infty$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ . □

#### 4.2.6 CLE d'ordre 4 : forme stable

Nous allons construire à partir de la condition aux limites instable (4.35), une autre condition aux limites, qui formellement est du même ordre par rapport au petit paramètre  $\eta$ , mais qui admet l'avantage d'être stable. La technique que nous appliquons, s'inspire des techniques utilisées dans le cadre des conditions absorbantes pour l'équation des ondes (voir [17], [15]).

Considérons d'abord le cas simplifié 1D comme modèle introductif : la condition aux limites pour ce cas s'obtient à partir du cas 2D en omettant les dérivations tangentielles. Prenons comme exemple la condition du problème (4.36). Elle s'écrit en lui appliquant la transformé de Fourier en temps :

$$(4.40) \quad \hat{u} + \eta(1 + \frac{1}{3}\eta^2\omega^2)\partial_n \hat{u} = 0$$

où  $\omega$  est la variable de Fourier duale de  $t$ . En comparant cette condition à la condition d'ordre 2 stable :  $\hat{u} + \eta\partial_n \hat{u} = 0$ , on observe que l'instabilité provient de la substitution de  $(1 + \frac{1}{3}\eta^2\omega^2)$  à 1. L'idée naturelle pour remédier à ce défaut serait donc de remplacer  $(1 + \frac{1}{3}\eta^2\omega^2)$  par un autre développement  $g(\eta\omega)$  tel que :  $g(\eta\omega) = 1 + \frac{1}{3}\eta^2\omega^2 + O((\eta\omega)^3)$ . Comme (4.40) est obtenue formellement en négligeant les termes d'ordre supérieur à 4 (par rapport à  $\eta$ ), l'ordre de la condition reste inchangée par cette substitution. Nous choisissons  $g(\eta\omega) = 1/(1 - \frac{1}{3}\eta^2\omega^2)$  (qui n'est autre que le premier terme d'un **développement de Padé** de  $(1 + \frac{1}{3}\eta^2\omega^2)$ ). Par suite, à la place de (4.40), nous suggérons d'utiliser la condition

$$(1 - \frac{1}{3}\eta^2\omega^2)\hat{u} + \eta\partial_n \hat{u} = 0,$$

qui correspond à

$$(1 + \frac{1}{3}\eta^2\partial_{tt})u + \eta\partial_n u = 0.$$

Cette nouvelle condition conduit à un problème aux limites stable. Ce résultat sera démontré plus loin dans un cas 3D général, via la technique d'énergie. Toutefois, on peut déjà constater que la construction précédente d'ondes instables tombe en défaut. L'équation caractéristique (4.38) devient

$$1 + \frac{1}{3}\kappa^2 + \kappa = 0, \quad \kappa = \eta s,$$

et n'admet aucune solution de partie réelle positive (comme on peut facilement le vérifier).

Appliquons maintenant ces considérations aux cas 3D : condition (4.35). Une première façon de faire consiste à utiliser l'identité formelle

$$1 - \frac{\eta^2}{3} (\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \vec{\Delta}_\Gamma) = \left(1 + \frac{\eta^2}{3} (\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \vec{\Delta}_\Gamma)\right)^{-1} + O(\eta^4).$$

Malheureusement, cette façon de faire ne nous a pas permis d'obtenir des estimations énergétiques uniformes en temps. Une façon alternative de procéder consiste d'abord à réécrire la condition (4.35) en développant l'opérateur différentiel du membre de droite. En effet, comme  $\text{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma = 0$ , nous avons

$$(4.41) \quad \begin{aligned} & (\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma) \left(1 - \frac{\eta^2}{3} (\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \vec{\Delta}_\Gamma)\right) = \\ & \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} \left(1 - \frac{\eta^2}{3} (\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \vec{\Delta}_\Gamma + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma)\right) + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \left(1 - \frac{\eta^2}{3} \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma\right) \end{aligned}$$

Soit  $P$  un des deux opérateurs différentiels  $(\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \vec{\Delta}_\Gamma + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma)$  et  $(\vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma)$ . Comme précédemment, nous appliquons l'identité formelle

$$\left(1 - \frac{\eta^2}{3} P\right) = \left(1 + \frac{\eta^2}{3} P\right)^{-1} + O(\eta^4),$$

à l'équation (4.41), ce qui nous conduit à la nouvelle expression (4.42) de la CLE d'ordre 4, où nous avons besoin d'introduire deux variables auxiliaires  $\psi^\eta$  et  $\phi^\eta$  sur la frontière  $\Gamma$  et où nous avons posé  $\varphi^\eta \equiv \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}^\eta|_{\Gamma}$ .

$$(4.42) \quad \boxed{\begin{aligned} \partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta \times \mathbf{n} &= -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} \psi^\eta + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \phi^\eta \right), \\ \left( 1 + \frac{\eta^2}{3} \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) \phi^\eta &= \varphi^\eta, \\ \left( 1 + \frac{\eta^2}{3} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \vec{\Delta}_\Gamma + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) \right) \psi^\eta &= \varphi^\eta, \end{aligned}} \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbf{R}^+.$$

Il convient d'associer à la troisième équation de (4.42) les conditions initiales

$$(4.43) \quad \psi^\eta|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \psi^\eta|_{t=0} = 0.$$

### Stabilité de la CLE (4.42)

La nouvelle condition (4.42) trouve sa justification dans le théorème de stabilité suivant.

**Théorème 4.3** *Toute solution suffisamment régulière  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  des équations  $\{(3.8), (4.42), (4.43)\}$  satisfait l'estimation d'énergie*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \mathcal{E}_v(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t), \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t)) + \eta \mathcal{E}_\Gamma^\eta(t) \right\} &= 0, \quad \text{où,} \\ \mathcal{E}_\Gamma^\eta(t) &= \frac{\mu_f}{2} \|\psi^\eta(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_f} \left\| \int_0^t (\text{rot}_\Gamma \phi^\eta)(\tau) d\tau \right\|_{L^2}^2 + \frac{\eta^2}{3} \left( \frac{\mu_f}{2} \mathcal{E}_1(\psi^\eta(t)) + \frac{1}{2\varepsilon_f} \mathcal{E}_2(\phi^\eta(t)) \right), \\ \mathcal{E}_1(\psi^\eta(t)) &= \varepsilon_f \mu_f \|\partial_t \psi^\eta(t)\|_{L^2}^2 + \|\text{div}_\Gamma \psi^\eta(t)\|_{L^2}^2 + 2 \|\text{rot}_\Gamma \psi^\eta(t)\|_{L^2}^2, \\ \mathcal{E}_2(\phi^\eta(t)) &= \left\| \int_0^t (\vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \phi^\eta)(\tau) d\tau \right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

*Preuve.* Prenons d'abord le produit scalaire  $L^2(\Gamma)$  de la première équation de (4.42) par  $\varphi^\eta$ . On obtient

$$(4.44) \quad \int_\Gamma (\tilde{\mathbf{E}}^\eta \times \mathbf{n}) \cdot \varphi^\eta d\mathbf{x}_\Gamma = -\eta \left( \mu_f \int_\Gamma \varphi^\eta \cdot \partial_t \psi^\eta d\mathbf{x}_\Gamma + \frac{1}{\varepsilon_f} \int_\Gamma \varphi^\eta \cdot \int_0^t \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \phi^\eta d\tau d\mathbf{x}_\Gamma \right).$$

Prenons ensuite le produit scalaire  $L^2(\Gamma)$  de la seconde équation de (4.42) par

$\int_0^t (\vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \phi^\eta)(\tau) d\tau$ , et intégrons par parties sur  $\Gamma$ . Il en découle

$$(4.45) \quad \int_\Gamma \varphi^\eta \cdot \left( \int_0^t \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \phi^\eta d\tau \right) d\mathbf{x}_\Gamma = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \left\| \int_0^t \text{rot}_\Gamma \phi^\eta d\tau \right\|_{L^2}^2 + \frac{\eta^2}{3} \left\| \int_0^t \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \phi^\eta d\tau \right\|_{L^2}^2 \right)$$

Prenons enfin le produit scalaire  $L^2(\Gamma)$  de la troisième équation de (4.42) par  $\partial_t \psi^\eta$ . Il en résulte après avoir intégré par parties sur  $\Gamma$ ,

$$(4.46) \quad \int_\Gamma \varphi^\eta \cdot \partial_t \psi^\eta d\mathbf{x}_\Gamma = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\psi^\eta(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\eta^2}{3} \mathcal{E}_1(\psi^\eta(t)) \right).$$

L'identité d'énergie s'obtient immédiatement en utilisant (4.46) et (4.45) dans (4.44) et en substituant (4.44) dans (4.29).  $\square$

**Remarque 4.4** *De manière analogue à la condition d'ordre 2, la CLE d'ordre 4 (4.35) (et également (4.42)) est en effet d'ordre 5, dans le cas d'une frontière plane. Cette règle propre au cas d'une frontière plane, s'explique par le fait que les corrections apportées par les conditions d'ordre impair sont relatives à la géométrie de la frontière, et s'annulent lorsque celle-ci est plane.*

### 4.3 Le cas d'une frontière plane : analyse asymptotique

Soit  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  un entier donné. Nous rappelons que la CLE d'ordre  $k$  sur la frontière  $\Gamma$  est la condition de réflexion (cf. Remarque 4.3) lorsque  $k = 1$ , la condition (4.25) lorsque  $k = 2, 3$  et la condition (4.42)-(4.43) lorsque  $k = 4$ .

Le but de cette section est la détermination de l'ordre de l'erreur par rapport à  $\eta$  entre le champ diffracté exact  $(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)$  et le champ diffracté effectif  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  obtenu par l'utilisation de la CLE d'ordre  $k$ . Ces estimations d'erreur sont basées sur les résultats de stabilité des théorèmes 4.1 et 4.3.

En fait, au lieu de travailler directement sur les différences  $(\mathbf{E}_v^\eta - \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta - \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$ , nous allons passer par le développement asymptotique (4.11). C'est pourquoi nous considérons une fois pour toute  $(\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k, \mathbf{E}_f^k, \mathbf{H}_f^k)_{k \geq 0}$  la suite de champs suffisamment réguliers satisfaisant (4.12), (4.16), (4.17), (4.18) et (4.21).

**Remarque 4.5** *Du moins lorsque  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$  sont réguliers (disons dans  $\mathcal{D}(\Omega_v)$ ), l'existence de champs réguliers  $(\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k, \mathbf{E}_f^k, \mathbf{H}_f^k)_{k \geq 0}$  peut être facilement vérifiée par le procédé de récurrence expliqué lors de la construction formelle des équations (4.12), (4.16), (4.17), (4.18) et (4.21). De plus, on peut vérifier que les champs  $(\mathbf{E}_f^k, \mathbf{H}_f^k)$  sont des fonctions polynomiales de la variable  $\nu$ , de degré inférieur ou égal à  $k$ .*

#### 4.3.1 Estimations d'erreur

**Théorème 4.4** *Soit  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$  un entier fixé et  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$  une donnée régulière à support contenu dans  $\Omega_v$ . Si  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  désigne une solution assez régulière de (3.8) couplé avec la CLE d'ordre  $(k + 1)$  et si  $(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta, \mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)$  désigne une solution assez régulière du problème de transmission exact, alors il existe pour tout temps  $T; 0 < T < +\infty$  une constante  $C_k(T)$  indépendante de  $\eta$ , mais dépendant de  $\{(\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0, \mathbf{E}_f^0, \mathbf{H}_f^0) \cdots (\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k, \mathbf{E}_f^k, \mathbf{H}_f^k)\}$  et  $T$ , telle que :*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \left\| \mathbf{E}_v^\eta(t) - \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t) \right\|_{L^2(\Omega_v)} + \left\| \mathbf{H}_v^\eta(t) - \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t) \right\|_{L^2(\Omega_v)} \right\} \leq C_k(T) \eta^{k+\frac{1}{2}}.$$

*Preuve.* La preuve de ce théorème est divisée en 3 étapes réparties sur les sections 4.3.2, 4.3.3 et 4.3.4. Le lemme 4.2 de la section 4.3.2 donne une estimation en fonction de  $\eta$  sur la norme  $L^2$  de la différence entre la solution exacte et le développement asymptotique tronqué à l'ordre  $k$ . Les lemmes 4.3, 4.4 et 4.5 des sections 4.3.3 et 4.3.4 donnent de leur part une estimation analogue sur la différence entre la solution effective et la série tronquée.

Admettons pour un moment le résultat de ces lemmes. La preuve du théorème s'obtient comme suit :

- $k = 0$  : appliquer le lemme 4.2 à  $k = 0$ .
- $k = 1, 2, 3$  : combiner le résultat du lemme 4.2 avec les résultats des lemmes 4.3, 4.4 et 4.5 en utilisant une inégalité triangulaire.  $\square$

**Remarque 4.6** *Le théorème 4.4 ne nous donne qu'une information vague sur la dépendance de la constante  $C_k(T)$ . En fait, il nous paraît possible de montrer que si  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  sont dans  $H_0^{3k+2}(\Omega_v)$  avec  $\operatorname{div}(\mathbf{E}_0) = \operatorname{div}(\mathbf{H}_0) = 0$ , alors il est possible de choisir  $C_k(T) \equiv C(T)\{\|\mathbf{E}_0\|_{H^{3k+2}} + \|\mathbf{H}_0\|_{H^{3k+2}}\}$ , où la constante  $C(T)$  est une fonction polynômiale de  $T$ . Ce résultat (même s'il n'est pas optimal) nécessite quelques estimations assez fines sur les solutions régulières du système de Maxwell avec une condition aux limites non homogène, qui sont par ailleurs très techniques. De plus l'intérêt de tel résultat n'est pas substantiel pour le but poursuivi, à savoir la validation de l'ordre par rapport à  $\eta$  des CLE.*

### 4.3.2 Consistance du développement asymptotique

**Lemme 4.2** *Soit  $T$  un temps fixé;  $0 < T < +\infty$  et  $(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)$  une solution assez régulière du problème de transmission exact. Il existe alors une constante  $C_k(T)$  indépendante de  $\eta$  telle que  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,*

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left\| \mathbf{E}_v^\eta(t) - \sum_{i=0}^k \eta^i \mathbf{E}_v^i(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_0}{2} \left\| \mathbf{H}_v^\eta(t) - \sum_{i=0}^k \eta^i \mathbf{H}_v^i(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C_k(T) \eta^{2k+1}.$$

La constante  $C_k(T)$  dépend seulement de  $T$  et  $(\mathbf{E}_f^k, \mathbf{H}_f^k)$ , et peut être choisie comme dans (4.51).

*Preuve.* Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_v^k &= \mathbf{E}_v^\eta - \sum_{i=0}^k \eta^i \mathbf{E}_v^i, & \mathbf{h}_v^k &= \mathbf{H}_v^\eta - \sum_{i=0}^k \eta^i \mathbf{H}_v^i & \text{sur } \Omega_v, \\ \mathbf{e}_f^k &= \mathbf{E}_f^\eta - \sum_{i=0}^k \eta^i \mathbf{E}_f^i, & \mathbf{h}_f^k &= \mathbf{H}_f^\eta - \sum_{i=0}^k \eta^i \mathbf{H}_f^i & \text{sur } \Gamma \times ]0, 1[. \end{aligned}$$

Bien entendu  $\mathbf{e}_v^k, \mathbf{h}_v^k, \mathbf{e}_f^k$  et  $\mathbf{h}_f^k$  dépendent de  $\eta$  (ce qui n'est pas indiqué dans la notation choisie par souci d'allègement). En utilisant (3.1) et (4.12), on observe que

$$(4.47) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{e}_v^k - \operatorname{rot} \mathbf{h}_v^k = 0, & \mu_0 \partial_t \mathbf{h}_v^k + \operatorname{rot} \mathbf{e}_v^k = 0 \\ (\mathbf{e}_v^k, \mathbf{h}_v^k)|_{t=0} = (0, 0) \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_v.$$

D'autre part, les équations (4.9), (4.13), (4.14) et (4.15) montrent que

$$(4.48) \quad \begin{cases} \eta(\varepsilon_f \partial_t \mathbf{e}_f^k - \vec{\operatorname{rot}}_\Gamma(\mathbf{h}_f^k \cdot \mathbf{n}) - (\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{h}_f^k) \mathbf{n}) + \partial_\nu(\mathbf{h}_f^k \times \mathbf{n}) = \eta^{k+1} F^k \\ \eta(\mu_f \partial_t \mathbf{h}_f^k + \vec{\operatorname{rot}}_\Gamma(\mathbf{e}_f^k \cdot \mathbf{n}) + (\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{e}_f^k) \mathbf{n}) - \partial_\nu(\mathbf{e}_f^k \times \mathbf{n}) = \eta^{k+1} G^k \\ (\mathbf{e}_f^k, \mathbf{h}_f^k)|_{t=0} = (0, 0) \end{cases} \quad \text{dans } \Gamma \times ]0, 1[,$$

où on a posé sur  $\Gamma \times ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} F^k &= \varepsilon_f \partial_t \mathbf{E}_f^k - \vec{\operatorname{rot}}_\Gamma(\mathbf{H}_f^k \cdot \mathbf{n}) - (\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{H}_f^k) \mathbf{n}, \\ G^k &= \mu_f \partial_t \mathbf{H}_f^k + \vec{\operatorname{rot}}_\Gamma(\mathbf{E}_f^k \cdot \mathbf{n}) + (\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{E}_f^k) \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Les conditions aux limite dans (4.8), (4.10), (4.12), (4.13), (4.14) et (4.15) nous donnent

$$(4.49) \quad \begin{cases} \mathbf{e}_v^k(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} = \mathbf{e}_f^k(\mathbf{x}_\Gamma, 0) \times \mathbf{n}, & \mathbf{h}_v^k(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} = \mathbf{h}_f^k(\mathbf{x}_\Gamma, 0) \times \mathbf{n}, & \mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma, \\ \mathbf{e}_f^k(\mathbf{x}_\Gamma, 1) \times \mathbf{n} = 0, & \mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma. \end{cases}$$

Posons

$$C_1(T) = \sup_{0 < t < T} \sup_{0 \leq \nu \leq 1} \left( \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_f}} \|F^k(\nu, t)\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{\frac{2}{\mu_f}} \|G^k(\nu, t)\|_{L^2(\Gamma)} \right),$$

et considérons l'identité d'énergie classique suivante, associée aux système d'équations {(4.47), (4.48), (4.49)}

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{\varepsilon_0}{2} \|\mathbf{e}_v^k(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{h}_v^k(t)\|_{L^2}^2 + \eta \left\{ \frac{\varepsilon_f}{2} \|\mathbf{e}_f^k(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_f}{2} \|\mathbf{h}_f^k(t)\|_{L^2}^2 \right\} \\ &= \eta^{k+1} \int_0^t \left\{ \int_\Gamma \int_0^1 F^k \cdot \mathbf{e}_f^k + G^k \cdot \mathbf{h}_f^k \, d\mathbf{x}_\Gamma \, d\nu \right\} d\tau. \end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz au second membre de l'identité précédente implique pour tout  $t \leq T$ ,

$$(4.50) \quad \mathcal{E}(t) \leq \eta^{k+\frac{1}{2}} C_1(T) \int_0^t \sqrt{\mathcal{E}(\tau)} \, d\tau.$$

Par l'application d'un lemme de Gronwall (cf. annexe C) on conclut que

$$\mathcal{E}(t) \leq \left(\frac{1}{2}\eta^{k+\frac{1}{2}} C_1(T) t\right)^2,$$

ce qui prouve le lemme avec

$$(4.51) \quad C_k(T) = \left(\frac{1}{2} C_1(T) T\right)^2.$$

□

### 4.3.3 Consistance des CLE d'ordre 2 et 3

**Lemme 4.3** *Soit  $T$  un temps fixé  $0 < T < +\infty$  et  $(\tilde{\mathbf{E}}_\nu^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_\nu^\eta)$  une solution suffisamment régulière des équations de Maxwell (3.8) couplées avec la CLE d'ordre 2. Alors il existe une constante  $C(T)$  indépendante de  $\eta$  telle que,  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,*

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left\| \tilde{\mathbf{E}}_\nu^\eta(t) - \sum_{i=0}^1 \eta^i \mathbf{E}_\nu^i(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_0}{2} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_\nu^\eta(t) - \sum_{i=0}^1 \eta^i \mathbf{H}_\nu^i(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C(T) \eta^3.$$

La constante  $C(T)$  dépend seulement de  $T$  et  $\mathbf{H}_\nu^1$  et peut être exprimée par (4.55).

*Preuve.* Le principe est le même que pour le lemme 4.2 et la propriété de stabilité du théorème 4.1 intervient de façons essentielle comme nous allons le voir. On introduit les champs  $(\tilde{\mathbf{e}}_\nu^1, \tilde{\mathbf{h}}_\nu^1)$  (qui dépendent de  $\eta$ )

$$\tilde{\mathbf{e}}_\nu^1 = \tilde{\mathbf{E}}_\nu^\eta - (\mathbf{E}_\nu^0 + \eta \mathbf{E}_\nu^1), \quad \tilde{\mathbf{h}}_\nu^1 = \tilde{\mathbf{H}}_\nu^\eta - (\mathbf{H}_\nu^0 + \eta \mathbf{H}_\nu^1) \quad \text{sur } \Omega_\nu,$$

et on pose :  $\tilde{\varphi}^1(\mathbf{x}_\Gamma, t) = \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{h}}_\nu^1(\mathbf{x}_\Gamma, t), \quad \varphi^1(\mathbf{x}_\Gamma, t) = \Pi_\parallel \mathbf{H}_\nu^1(\mathbf{x}_\Gamma, t) \quad (\mathbf{x}_\Gamma, t) \in \Gamma \times [0, \infty[.$

En combinant (4.25) avec (4.16) et (4.24) on remarque que  $(\tilde{\mathbf{e}}_\nu^1, \tilde{\mathbf{h}}_\nu^1)$  satisfait

$$(4.52) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \tilde{\mathbf{e}}_\nu^1 - \text{rot } \tilde{\mathbf{h}}_\nu^1 = 0, & \mu_0 \partial_t \tilde{\mathbf{h}}_\nu^1 + \text{rot } \tilde{\mathbf{e}}_\nu^1 = 0, & \text{sur } \Omega_\nu, \\ (\tilde{\mathbf{e}}_\nu^1, \tilde{\mathbf{h}}_\nu^1)|_{t=0} = (0, 0), & \text{sur } \Omega_\nu, \\ \partial_t \tilde{\mathbf{e}}_\nu^1 \times \mathbf{n} = -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \text{rot}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) (\tilde{\varphi}^1 - \eta \varphi^1), & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$



En suivant les mêmes étapes que la preuve de stabilité du théorème 4.1, on s'aperçoit que le couple  $(\tilde{\mathbf{e}}_v^1, \tilde{\mathbf{h}}_v^1)$  vérifie l'égalité d'énergie

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &\equiv \frac{\varepsilon_0}{2} \|\tilde{\mathbf{e}}_v^1(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_0}{2} \|\tilde{\mathbf{h}}_v^1(t)\|_{L^2}^2 + \eta \left\{ \frac{\mu_f}{2} \|\tilde{\varphi}^1(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_f} \left\| \int_0^t \text{rot}_\Gamma \tilde{\varphi}^1 d\tau \right\|_{L^2}^2 \right\} \\ &= \eta^2 \int_0^t \int_\Gamma \left( \mu_f \partial_t \varphi^1 \cdot \tilde{\varphi}^1 + \frac{1}{\varepsilon_f} \left( \int_0^\tau \text{rot}_\Gamma \varphi^1 d\theta \right) \cdot \text{rot}_\Gamma \tilde{\varphi}^1 \right) d\mathbf{x}_\Gamma d\tau. \end{aligned}$$

Nous obtenons après avoir intégré par parties en temps le second terme du membre de droite

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \eta^2 \int_\Gamma \frac{1}{\varepsilon_f} \left( \int_0^t \text{rot}_\Gamma \varphi^1 d\tau \right) \left( \int_0^t \text{rot}_\Gamma \tilde{\varphi}^1 d\tau \right) d\mathbf{x}_\Gamma \\ (4.53) \quad &+ \eta^2 \int_0^t \int_\Gamma \left( \mu_f \partial_t \varphi^1 \cdot \tilde{\varphi}^1 - \frac{1}{\varepsilon_f} \cdot \text{rot}_\Gamma \varphi^1 \left( \int_0^\tau \text{rot}_\Gamma \tilde{\varphi}^1 d\theta \right) \right) d\mathbf{x}_\Gamma d\tau. \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} C_1(T) &= \sup_{t \leq T} \left( \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_f}} \left\| \int_0^t \text{rot}_\Gamma \varphi^1(\tau) d\tau \right\|_{L^2(\Gamma)} \right), \\ C_2(T) &= \sup_{t \leq T} \left( \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_f}} \left\| \text{rot}_\Gamma \varphi^1(t) \right\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{2\mu_f} \left\| \partial_t \varphi^1(t) \right\|_{L^2(\Gamma)} \right) \end{aligned}$$

et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (4.53). On en déduit pour tout  $t \leq T$ ,

$$(4.54) \quad \mathcal{E}(t) \leq \eta^{\frac{3}{2}} C_1(T) \sqrt{\mathcal{E}(t)} + \eta^{\frac{3}{2}} C_2(T) \int_0^t \sqrt{\mathcal{E}(\tau)} d\tau.$$

Introduisons pour  $t \geq 0$ , la fonction  $X(t) = |\sqrt{\mathcal{E}(t)} - \frac{1}{2}\eta^{\frac{3}{2}} C_1(T)|^2$ . Nous obtenons à partir de (4.54)

$$X(t) \leq \eta^3 C_3(T) + \eta^{\frac{3}{2}} C_2(T) \int_0^t \sqrt{X(\tau)} d\tau,$$

où  $C_3(T) = \frac{1}{4}C_1(T)^2 + T C_1(T)C_2(T)$ . L'application du lemme de Gronwall (cf. annexe C) à cette inégalité montre que

$$X(t) \leq \left( \eta^{\frac{3}{2}} (\sqrt{C_3(T)} + \frac{1}{2} C_2(T) t) \right)^2,$$

ce qui prouve le lemme avec

$$(4.55) \quad C(T) = \left( \sqrt{C_3(T)} + \frac{1}{2} (T C_2(T) + C_1(T)) \right)^2$$

□

**Lemme 4.4** Soit  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  une solution assez régulière de (3.8) couplé avec la CLE d'ordre 3. Il existe alors pour tout  $0 < T < +\infty$ , une constante  $C(T)$  indépendante de  $\eta$  telle que,  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left\| \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t) - \sum_{i=0}^2 \eta^i \mathbf{E}_v^i(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_0}{2} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t) - \sum_{i=0}^2 \eta^i \mathbf{H}_v^i(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C(T) \eta^5.$$

La constante  $C(T)$  dépend uniquement de  $T$  et de  $\mathbf{H}_v^2$ .

*Preuve.* Comme dans la preuve du lemme précédent nous introduisons

$$\tilde{\mathbf{e}}_v^2 = \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta - (\mathbf{E}_v^0 + \eta \mathbf{E}_v^1 + \eta^2 \mathbf{E}_v^2), \quad \tilde{\mathbf{h}}_v^2 = \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta - (\mathbf{H}_v^0 + \eta \mathbf{H}_v^1 + \eta^2 \mathbf{H}_v^2) \quad \text{sur } \Omega_v$$

et nous posons :  $\tilde{\varphi}^2(\mathbf{x}_\Gamma, t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{h}}_v^2(\mathbf{x}_\Gamma, t)$ ,  $\varphi^2(\mathbf{x}_\Gamma, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^2(\mathbf{x}_\Gamma, t)$  ( $\mathbf{x}_\Gamma, t) \in \Gamma \times [0, \infty[$ .

La relation (4.27) montre que le couple  $(\tilde{\mathbf{e}}_v^2, \tilde{\mathbf{h}}_v^2)$  vérifie les équations suivantes (similaires aux équation (4.52)).

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \tilde{\mathbf{e}}_v^2 - \text{rot } \tilde{\mathbf{h}}_v^2 = 0, & \mu_0 \partial_t \tilde{\mathbf{h}}_v^2 + \text{rot } \tilde{\mathbf{e}}_v^2 = 0, \quad \text{sur } \Omega_v, \\ (\tilde{\mathbf{e}}_v^2, \tilde{\mathbf{h}}_v^2)|_{t=0} = (0, 0), & \text{sur } \Omega_v, \\ \partial_t \tilde{\mathbf{e}}_v^2 \times \mathbf{n} = -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) (\tilde{\varphi}^2 - \eta^2 \varphi^2), & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

La preuve du lemme suit exactement les mêmes étapes que la preuve du lemme précédent. Il suffit de substituer dans la preuve  $\eta^3$  (resp.  $\tilde{\varphi}^2, \varphi^2$ ) à  $\eta^2$  (resp.  $\tilde{\varphi}^1, \varphi^1$ ).  $\square$

#### 4.3.4 Consistance de la CLE d'ordre 4

**Lemme 4.5** *Soit  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  une solution assez régulière de (3.8) couplée avec la CLE d'ordre 4. Il existe alors pour tout  $0 < T < +\infty$ , une constante  $C(T)$  indépendante de  $\eta$  telle que,  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,*

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left\| \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t) - \sum_{i=0}^3 \eta^i \mathbf{E}_v^i(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_0}{2} \left\| \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t) - \sum_{i=0}^3 \eta^i \mathbf{H}_v^i(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C(T) \eta^7.$$

La constante  $C(T)$  dépend uniquement de  $T$  et  $(\mathbf{H}_v^1, \mathbf{H}_v^2, \mathbf{H}_v^3)$  et peut être exprimée par (4.62).

*Preuve.* Comme précédemment, on note

$$\tilde{\mathbf{e}}_v^3 = \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta - (\mathbf{E}_v^0 + \eta \mathbf{E}_v^1 + \eta^2 \mathbf{E}_v^2 + \eta^3 \mathbf{E}_v^3), \quad \tilde{\mathbf{h}}_v^3 = \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta - (\mathbf{H}_v^0 + \eta \mathbf{H}_v^1 + \eta^2 \mathbf{H}_v^2 + \eta^3 \mathbf{H}_v^3) \quad \text{sur } \Omega_v.$$

Notons  $\varphi^k$  la trace de  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^k$  sur  $\Gamma$ , pour  $k = 0, \dots, 3$ . Afin de déterminer les équations vérifiées par les champs  $(\tilde{\mathbf{e}}_v^3, \tilde{\mathbf{h}}_v^3)$  nous introduisons

$$\begin{aligned} \psi^0 &= \varphi^0, \quad \psi^1 = \varphi^1, \quad \psi^2 = \varphi^2 - \frac{1}{3} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \vec{\Delta}_\Gamma + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) \varphi^0, \\ \phi^0 &= \varphi^0, \quad \phi^1 = \varphi^1, \quad \phi^2 = \varphi^2 - \frac{1}{3} \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \varphi^0, \end{aligned}$$

et posons,  $\tilde{\psi}^3 = \psi^\eta - (\psi^0 + \eta \psi^1 + \eta^2 \psi^2)$ ,  $\tilde{\phi}^3 = \phi^\eta - (\phi^0 + \eta \phi^1 + \eta^2 \phi^2)$ .

Il est à noter que les  $\psi^i$  (resp.  $\phi^i$ ),  $i = 0, 1, 2$ , sont des champs indépendants de  $\eta$  et ne sont autres que les trois premiers termes du développement asymptotique de  $\psi^\eta$  (resp.  $\phi^\eta$ ) (introduits dans la condition (4.42)). Par contre,  $\tilde{\psi}^3$  et  $\tilde{\phi}^3$  dépendent de  $\eta$ .

On vérifie, par la relation (4.34) et la première équation de (4.42) que

$$(4.56) \quad \partial_t \tilde{\mathbf{e}}_v^3 \times \mathbf{n} = -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} \tilde{\psi}^3 + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \tilde{\phi}^3 \right) \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+.$$

Soit  $\tilde{\varphi}^3$  la trace de  $\Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{h}}_v^3$  sur  $\Gamma$ . On établit, à partir de la seconde équation de (4.42) et la définition du champ  $\tilde{\phi}^3$ , la relation

$$(4.57) \quad \left(1 + \frac{\eta^2}{3} \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma}\right) \tilde{\phi}^3 = \tilde{\varphi}^3 + \eta^3 G_3^{\eta} \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+,$$

et à partir de l'équation (4.42) et la définition du champ  $\tilde{\psi}^3$ , la relation

$$(4.58) \quad \left(1 + \frac{\eta^2}{3} \left(\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \vec{\Delta}_{\Gamma} + \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma}\right)\right) \tilde{\psi}^3 = \tilde{\varphi}^3 + \eta^3 L_3^{\eta} \quad \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}^+,$$

où dans (4.57) :  $G_3^{\eta} = \frac{1}{3} \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} (\varphi^1 + \eta \varphi^2) - \varphi^3$ ,

et dans (4.58) :  $L_3^{\eta} = \frac{1}{3} \left(\varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} - \vec{\Delta}_{\Gamma} + \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma}\right) (\varphi^1 + \eta \varphi^2) - \varphi^3$ .

En conclusion, le couple  $(\tilde{\mathbf{e}}_v^3, \tilde{\mathbf{h}}_v^3)$  satisfait

$$(4.59) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \tilde{\mathbf{e}}_v^3 - \text{rot } \tilde{\mathbf{h}}_v^3 = 0, & \mu_0 \partial_t \tilde{\mathbf{h}}_v^3 + \text{rot } \tilde{\mathbf{e}}_v^3 = 0, \quad \text{sur } \Omega_v \times \mathbb{R}^+, \\ (\tilde{\mathbf{e}}_v^3, \tilde{\mathbf{h}}_v^3)|_{t=0} = (0, 0), \quad \text{sur } \Omega_v, \\ (\tilde{\mathbf{e}}_v^3 \times \mathbf{n}) \text{ et } \tilde{\varphi}^3 \text{ vérifient (4.56), (4.57) et (4.58) sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

La dérivation de l'identité d'énergie (4.59) suit exactement les mêmes étapes que la preuve du théorème 4.3. Si on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & \frac{\varepsilon_0}{2} \|\tilde{\mathbf{e}}_v^3(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_0}{2} \|\tilde{\mathbf{h}}_v^3(t)\|_{L^2}^2 + \eta \left( \frac{\mu_f}{2} \|\tilde{\psi}^3(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_f} \left\| \int_0^t \text{rot}_{\Gamma} \tilde{\phi}^3 d\tau \right\|_{L^2}^2 \right) \\ & + \frac{\eta^3 \mu_f}{6} \left( \varepsilon_f \mu_f \|\partial_t \tilde{\psi}^3(t)\|_{L^2}^2 + \|\text{div}_{\Gamma} \tilde{\psi}^3(t)\|_{L^2}^2 + 2 \|\text{rot}_{\Gamma} \tilde{\psi}^3(t)\|_{L^2}^2 \right) \\ & + \frac{\eta^3}{6\varepsilon_f} \left\| \int_0^t \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \tilde{\phi}^3 d\tau \right\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

alors (puisque  $\mathcal{E}(0) = 0$ )

$$\mathcal{E}(t) = \eta^4 \int_0^t \int_{\Gamma} \left( \text{rot}_{\Gamma} G_3^{\eta}(\tau) \cdot \int_0^{\tau} \text{rot}_{\Gamma} \tilde{\phi}^3 d\kappa + L_3^{\eta}(\tau) \cdot \partial_t \tilde{\psi}^3(\tau) \right) d\mathbf{x}_{\Gamma} d\tau.$$

En intégrant par parties par rapport à la variable  $\tau$ , nous déduisons

$$(4.60) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & \eta^4 \int_{\Gamma} L_3^{\eta}(t) \cdot \tilde{\psi}^3(t) d\mathbf{x}_{\Gamma} \\ & + \eta^4 \int_0^t \int_{\Gamma} \left\{ \text{rot}_{\Gamma} G_3^{\eta}(\tau) \cdot \int_0^{\tau} \text{rot}_{\Gamma} \tilde{\phi}^3 d\kappa - \partial_t L_3^{\eta}(\tau) \cdot \tilde{\psi}^3(\tau) \right\} d\mathbf{x}_{\Gamma} d\tau. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} C_1(T) &= \sup_{\eta \leq 1} \sup_{t \leq T} \left( \sqrt{\frac{2}{\mu_f}} \|\partial_t L_3^{\eta}(t)\|_{L^2(\Gamma)} \right), \\ C_2(T) &= \sup_{\eta \leq 1} \sup_{t \leq T} \left( \sqrt{2\varepsilon_f} \|\text{rot}_{\Gamma} G_3^{\eta}(t)\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{\frac{2}{\mu_f}} \|\partial_t L_3^{\eta}(t)\|_{L^2(\Gamma)} \right). \end{aligned}$$

Par l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz au membre de droite de (4.60) on montre que,  $\forall t > 0$ ,

$$(4.61) \quad \mathcal{E}(t) \leq \eta^{\frac{7}{2}} C_1(T) \sqrt{\mathcal{E}(t)} + \eta^{\frac{7}{2}} C_2(T) \int_0^t \sqrt{\mathcal{E}(\tau)} d\tau.$$

On remarque que l'identité obtenue est similaire à (4.54). La même technique utilisée basée sur le lemme de Gronwall nous permet de conclure avec

$$(4.62) \quad C(T) \equiv \left\{ \sqrt{C_3(T)} + \frac{1}{2}(T C_2(T) + C_1(T)) \right\}^2; \quad C_3(T) = \frac{1}{4}C_1(T)^2 + T C_1(T)C_2(T).$$

□

## 4.4 Le cas d'une frontière courbe : construction formelle

Le principe de dérivation des CLE dans le cas d'une surface courbe est le même que dans le cas d'une surface plane. Cependant, les calculs sont beaucoup plus techniques, et nécessitent d'abord l'introduction de quelques outils relatifs à la géométrie différentielle des surfaces.

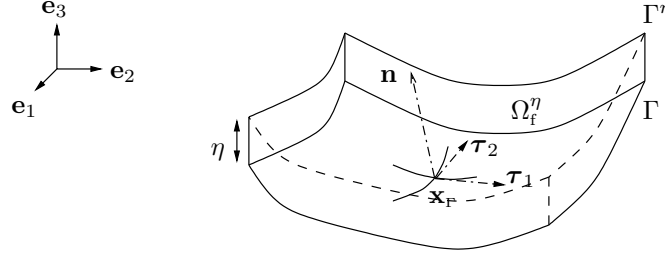


FIG. 4.2 – Description locale d'une surface

n° On suppose que la surface  $\Gamma$  est régulière et on note  $\mathbf{n}$  le champ des normales unitaires à  $\Gamma$  orientées vers l'extérieur de  $\Omega_v$ .

### 4.4.1 Rappels en géométrie différentielle

Commençons par définir quelques opérateurs différentiels surfaciques utiles à la construction des CLE. Ces définitions sont proches de celles utilisées dans [43] (pour des informations complémentaires, voir [14]). Nous avons essayé autant que possible de rendre notre texte auto-contenu.

Pour  $\eta$  assez petit (voir remarque 4.7 ci-dessous), la représentation paramétrique (4.2) du domaine  $\Omega_f^\eta$  reste valide. La seule différence est que le vecteur  $\mathbf{n}$  dépend dorénavant de la coordonnée  $\mathbf{x}_\Gamma$  :

$$(4.63) \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_f^\eta \mapsto (\mathbf{x}_\Gamma, s) \in \Gamma \times [0, \eta], \text{ telle que : } \mathbf{x} = \mathbf{x}_\Gamma + s \mathbf{n}(\mathbf{x}_\Gamma),$$

où  $\mathbf{x}_\Gamma$  est caractérisé par

$$|\mathbf{x}_\Gamma - \mathbf{x}| = \min_{\mathbf{y} \in \Gamma} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|.$$

Pour tout  $\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma$  on note  $T_{\mathbf{x}_\Gamma}$  le plan tangent à  $\Gamma$  au point  $\mathbf{x}_\Gamma$  (qui n'est autre que le plan passant par  $\mathbf{x}_\Gamma$  et orthogonal à  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_\Gamma)$ ).

n° On garde la même définition (4.5) pour les projecteurs  $\Pi_\perp$  et  $\Pi_\parallel$  qui maintenant dépendent eux aussi de  $\mathbf{x}_\Gamma$ .

Soit  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \mapsto \mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma$  une paramétrisation d'un voisinage de  $\mathbf{x}_\Gamma^0$  où  $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On définit la base covariante  $(\boldsymbol{\tau}_\alpha)_{\alpha=1,2}$  du plan  $T_{\mathbf{x}_\Gamma}$  par

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha = \partial_{\xi_\alpha} \mathbf{x}_\Gamma.$$

La base contravariante (ou duale)  $(\boldsymbol{\tau}^\alpha)_{\alpha=1,2}$  est définie par

$$\boldsymbol{\tau}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta = \delta_\beta^\alpha \text{ pour } \beta = 1, 2 \text{ et } \boldsymbol{\tau}^\alpha \cdot \mathbf{n} = 0,$$

où  $\delta_\beta^\alpha$  désigne le symbole de Kronecker. On dénotera par  $(\mathbf{e}_i)_{i=1,2,3}$  ( $=(\mathbf{e}^i)_{i=1,2,3}$ , par convention) une base orthonormale fixe de  $\mathbb{R}^3$ , et on utilisera dans toute la suite la convention de

sommation sur les indices répétés en haut et en bas, où les indices grecs varient entre 1 et 2 et les indices romains varient entre 1 et 3.

n° **Le tenseur de courbure  $\mathcal{C}$**  : On introduit  $\check{\mathbf{n}}$  le champ de vecteurs définis sur le domaine  $\bar{\Omega}_f^\eta$  par :  $\check{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}_\Gamma)$  où  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_f^\eta$  et  $\mathbf{x}_\Gamma$  sont liés par (4.63). On définit les tenseurs de courbure  $\mathcal{C}_s$ ,  $s \in [0, \eta]$ , et  $\mathcal{C}$  par

$$(4.64) \quad \mathcal{C}_s(\mathbf{x}_\Gamma) = (\vec{\nabla} \check{\mathbf{n}})(\mathbf{x}_\Gamma, s), \quad \mathcal{C}(\mathbf{x}_\Gamma) = \mathcal{C}_0(\mathbf{x}_\Gamma).$$

Pour tout  $\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma$ , l'opérateur  $\mathcal{C}(\mathbf{x}_\Gamma)$  est symétrique. Il admet 0 comme valeur propre associé au vecteur propre  $\mathbf{n}$  et admet deux autres valeurs propres ( $c_1, c_2$ ), appelées courbures principales, qui sont associées à des vecteurs propres tangentiels et unitaires ( $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_2$ ).

n° Soit  $H = \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{C}$ , la courbure moyenne de la surface  $\Gamma$ . Nous avons alors la propriété très utile

$$(4.65) \quad \mathcal{C} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) + (\mathcal{C} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{n} = 2H \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

qui se vérifie sans difficulté dans la base orthonormale ( $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_2, \mathbf{n}$ ) de  $\mathbb{R}^3$ .

n° Enfin, en utilisant la paramétrisation  $(\xi_1, \xi_2)$ , et en différenciant  $\mathbf{n}$  par rapport à  $(\xi_1, \xi_2)$ , on obtient l'autre définition possible de  $\mathcal{C}$ ,

$$(4.66) \quad \partial_{\xi_\alpha} \mathbf{n} = \mathcal{C} \boldsymbol{\tau}_\alpha.$$

**Remarque 4.7** Dire que la surface  $\Gamma$  est régulière implique en particulier l'existence d'une borne inférieure  $c > 0$  de l'application  $\mathbf{x}_\Gamma \mapsto \min(|c_1(\mathbf{x}_\Gamma)|, |c_2(\mathbf{x}_\Gamma)|)$ , sur  $\Gamma$ . La correspondance (4.63) est donc un isomorphisme pour toute valeur  $\eta < c^{-1}$ .

n° **L'opérateur gradient surfacique  $\nabla_\Gamma$**  : Soit  $v$  une fonction scalaire définie sur  $\Gamma$ . On introduit le prolongement  $\check{v}$  sur  $\bar{\Omega}_f^\eta$  satisfaisant :  $\check{v}(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}_\Gamma)$ ,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}_\Gamma$  étant reliés par la relation (4.63). L'opérateur  $\nabla_\Gamma$  peut alors être défini par

$$(4.67) \quad (\nabla_\Gamma v)(\mathbf{x}_\Gamma) = (\nabla \check{v})(\mathbf{x}_\Gamma, 0), \quad \mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma$$

C'est un opérateur tangential dont l'expression en fonction de la base contravariante de  $T_{\mathbf{x}_\Gamma}$  s'écrit (localement)

$$(4.68) \quad \nabla_\Gamma v = (\partial_{\xi_\alpha} v) \boldsymbol{\tau}^\alpha.$$

Pour montrer (4.68), il suffit d'utiliser (4.63) et différencier la fonction  $\check{v}$  par rapport aux coordonnées  $(\xi_1, \xi_2, s)$ . On obtient

$$\left| \begin{array}{l} (\partial_{\xi_\alpha} \check{v})(\mathbf{x}_\Gamma, s) = (\nabla \check{v})(\mathbf{x}_\Gamma, s) \cdot (\boldsymbol{\tau}_\alpha + s \mathcal{C} \boldsymbol{\tau}_\alpha), \\ (\partial_s \check{v})(\mathbf{x}_\Gamma, s) = (\nabla \check{v})(\mathbf{x}_\Gamma, s) \cdot \mathbf{n}. \end{array} \right.$$

En prenant  $s = 0$  et en utilisant le fait que  $(\partial_s \check{v}) = 0$  (par définition du prolongement  $\check{v}$ ), on montre que

$$(\nabla_\Gamma v) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = \partial_{\xi_\alpha} v \quad \text{et} \quad (\nabla_\Gamma v) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

L'expression (4.68) s'en déduit immédiatement, puisque  $(\boldsymbol{\tau}^1, \boldsymbol{\tau}^2, \mathbf{n})$  est la base duale de  $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n})$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

n° Considérons maintenant un champ de vecteurs tangentiels  $\mathbf{v}$  défini sur  $\Gamma$ . On définit l'opérateur de divergence surfacique  $\text{div}_\Gamma$  par

$$(4.69) \quad \text{div}_\Gamma \mathbf{v} \equiv \left( \nabla_\Gamma (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^i) \right) \cdot \mathbf{e}_i = (\partial_{\xi_\alpha} \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha$$

n° Comme dans le cas d'une frontière plane, les opérateurs  $\text{rot}_\Gamma$  et  $\vec{\text{rot}}_\Gamma$  sont définis à partir de  $\text{div}_\Gamma$  et  $\nabla_\Gamma$  par la relation (4.4), que nous rappelons ici

$$\text{rot}_\Gamma \mathbf{v} = \text{div}_\Gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{n}), \quad \vec{\text{rot}}_\Gamma u = (\nabla_\Gamma u) \times \mathbf{n},$$

où  $\mathbf{v}$  (resp.  $u$ ) est un champ vectoriel (resp. scalaire) défini sur  $\Gamma$ . Nous avons toujours la propriété :  $\text{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma = \text{div}_\Gamma \vec{\text{rot}}_\Gamma = 0$  et aussi que  $\text{div}_\Gamma$  (resp.  $\text{rot}_\Gamma$ ) est l'adjoint de  $-\nabla_\Gamma$  (resp.  $\vec{\text{rot}}_\Gamma$ ) pour le produit scalaire  $L^2(\Gamma)$  (voir [35]).

n° **Définitions supplémentaires** : Les précédentes définitions sont tout à fait classiques en géométrie différentielle mais se trouvent insuffisantes pour notre propos. Nous aurons besoin de préciser la dérivation par rapport à la coordonnée surfacique d'un champ matriciel. Soit en effet un champ  $\mathcal{R}$  de matrices symétriques de  $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$  définies sur la surface  $\Gamma$  et telles que  $\mathcal{R} \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ .

n° On définit l'opérateur de dérivation surfacique  $\mathcal{R} \nabla_\Gamma$  d'une fonction **scalaire**  $u$  définie sur  $\Gamma$  par

$$(\mathcal{R} \nabla_\Gamma) u = \mathcal{R} (\nabla_\Gamma u).$$

$\mathcal{R} (\nabla_\Gamma u)$  est donc un champ vectoriel tangential. Pour un **champ de vecteurs tangentiels**  $\mathbf{v}$  définis sur  $\Gamma$  on notera par définition

$$(4.70) \quad (\mathcal{R} \nabla_\Gamma) \cdot \mathbf{v} \equiv \left( (\mathcal{R} \nabla_\Gamma) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^i) \right) \cdot \mathbf{e}_i = (\partial_{\xi_\alpha} \mathbf{v}) \cdot (\mathcal{R} \boldsymbol{\tau}^\alpha),$$

où le résultat est une fonction scalaire. Remarquer que la définition de  $\text{div}_\Gamma \mathbf{v}$  coïncide avec la définition de  $\nabla_\Gamma \cdot \mathbf{v}$  (prendre  $\mathcal{R} = \Pi_\parallel$ ). Enfin, nous définissons la divergence surfacique du champ matriciel  $\mathcal{R}$  par

$$(4.71) \quad \text{div}_\Gamma \mathcal{R} \equiv (\nabla_\Gamma \cdot (\mathcal{R} \mathbf{e}^i)) \cdot \mathbf{e}_i = (\partial_{\xi_\alpha} \mathcal{R}) \boldsymbol{\tau}^\alpha,$$

où le résultat est un champ vectoriel a priori quelconque.

#### 4.4.2 Résultats utiles à la dérivation formelle

n° Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat de base utilisé dans le procédé de construction formelle des CLE. Il s'agit de la réécriture de l'opérateur  $\text{rot}$  dans le système de coordonnées paramétriques  $(\mathbf{x}_\Gamma, s)$ . Ce résultat diffère de la représentation classique (voir par exemple [43, 35]) en rendant explicite la dépendance en  $s$ , ce qui facilitera le passage à un domaine fixe par un changement de variable relatif à cette coordonnée.

**Lemme 4.6** *Soit  $\mathbf{v}$  un champ vectoriel défini sur  $\Omega_f^\eta$ . Soit  $(\mathbf{x}_\Gamma, s) \in \Gamma \times ]0, \eta[$  la représentation paramétrique de  $\Omega_f^\eta$ . Alors on a*

$$\text{rot} \mathbf{v} = \mathcal{T}_\Gamma^s \mathbf{v} - \partial_s (\mathbf{v} \times \mathbf{n}),$$

où,  $\mathcal{T}_\Gamma^s \mathbf{v} = [(\mathcal{R}_s \nabla_\Gamma) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n})] \mathbf{n} + [\mathcal{R}_s \nabla_\Gamma (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] \times \mathbf{n} - (\mathcal{R}_s \mathcal{C} \mathbf{v}) \times \mathbf{n}$ ,

et où la matrice  $\mathcal{R}_s$  est définie sur  $\Gamma$  par :  $\mathcal{R}_s (\Pi_\parallel + s \mathcal{C}) = \Pi_\parallel$ ,  $\mathcal{R}_s \mathbf{n} = 0$ .

**Remarque 4.8** *Le champ matriciel  $\mathcal{R}_s$  est bien défini puisque  $(\Pi_{\parallel} + s\mathcal{C})$  est inversible sur le plan tangent pour  $\eta$  assez petit et le vecteur  $\mathbf{n}$  est orthogonal à ce plan. Par ailleurs, en différentiant l'égalité  $\check{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_\Gamma) = \check{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_\Gamma + s\mathbf{n}(\mathbf{x}_\Gamma))$ , on s'aperçoit que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_s + s\mathcal{C}\mathcal{C}_s$  et donc  $\mathcal{C}_s = \mathcal{R}_s\mathcal{C}$ .*

*Preuve.* Pour une fonction scalaire  $u$  définie sur  $\Omega_f^\eta$ , on a (par la relation (4.63)),

$$\begin{cases} \partial_{\xi_\alpha} u = (\nabla u) \cdot (\Pi_{\parallel} + s\mathcal{C})\boldsymbol{\tau}_\alpha, \\ \partial_s u = (\nabla u) \cdot \mathbf{n}. \end{cases}$$

Comme  $\mathcal{R}_s(\Pi_{\parallel} + s\mathcal{C}) = \Pi_{\parallel}$ ,  $\mathcal{R}_s\mathbf{n} = (\Pi_{\parallel} + s\mathcal{C})\mathbf{n} = 0$  et comme  $\mathcal{R}_s$  et  $(\Pi_{\parallel} + s\mathcal{C})$  sont des matrices symétriques, on déduit que  $(\mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^1, \mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^2, \mathbf{n})$  est la base duale de  $((\Pi_{\parallel} + s\mathcal{C})\boldsymbol{\tau}_1, (\Pi_{\parallel} + s\mathcal{C})\boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n})$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi,

$$(4.72) \quad \nabla u = (\partial_{\xi_\alpha} u) \mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^\alpha + (\partial_s u) \mathbf{n}.$$

A partir de la définition :  $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{e}^i \times \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)$ , on obtient par l'utilisation de (4.72),

$$(4.73) \quad \text{rot } \mathbf{v} = (\mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^\alpha) \times (\partial_{\xi_\alpha} \mathbf{v}) - (\partial_s \mathbf{v}) \times \mathbf{n}.$$

Posons

$$\mathcal{B}_\Gamma^s \mathbf{v} = (\mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^\alpha) \times (\partial_{\xi_\alpha} \mathbf{v})$$

et prouvons donc que :  $\mathcal{B}_\Gamma^s = \mathcal{T}_\Gamma^s$ . D'une part

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_\Gamma^s \mathbf{v}) \times \mathbf{n} &= -((\partial_{\xi_\alpha} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) \mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^\alpha = -(\partial_{\xi_\alpha}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - \mathcal{C}\boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \mathbf{v}) \mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^\alpha \\ &= -(\partial_{\xi_\alpha}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^\alpha + (\mathcal{C}\boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \mathbf{v}) \mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^\alpha. \end{aligned}$$

Comme les tenseurs tangentiels symétriques  $\mathcal{R}_s$  et  $\mathcal{C}$  commutent, l'égalité précédente implique

$$(4.74) \quad \Pi_{\parallel}(\mathcal{B}_\Gamma^s \mathbf{v}) = \mathbf{n} \times ((\mathcal{B}_\Gamma^s \mathbf{v}) \times \mathbf{n}) = [\mathcal{R}_s \nabla_\Gamma (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] \times \mathbf{n} - (\mathcal{R}_s \mathcal{C} \mathbf{v}).$$

D'autre part

$$(\mathcal{B}_\Gamma^s \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = ((\partial_{\xi_\alpha} \mathbf{v}) \times \mathbf{n}) \cdot \mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^\alpha = (\partial_{\xi_\alpha}(\mathbf{v} \times \mathbf{n})) \cdot \mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^\alpha + \mathbf{v} \cdot (\mathcal{R}_s\boldsymbol{\tau}^\alpha \times \mathcal{C}\boldsymbol{\tau}_\alpha).$$

En appliquant le lemme 4.7 ci-dessous, à  $\mathcal{A} = \mathcal{C}$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{R}_s$ , nous déduisons que le dernier terme de l'égalité précédente est nul. Par conséquent cette égalité devient, en utilisant l'identification (4.70),

$$(4.75) \quad (\mathcal{B}_\Gamma^s \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (\mathcal{R}_s \nabla_\Gamma) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}).$$

Les identités (4.74) et (4.75) montrent que  $\mathcal{B}_\Gamma^s = \mathcal{T}_\Gamma^s$ . □

Nous avons utilisé dans cette démonstration le résultat d'algèbre linéaire suivant

**Lemme 4.7** *Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux matrices symétriques  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  telles que  $\mathcal{A}\mathbf{n} = \mathcal{B}\mathbf{n} = 0$ . Si on suppose de plus que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  admettent les mêmes vecteurs propres alors,*

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\tau}^\kappa \times \mathcal{B}\boldsymbol{\tau}^\kappa = 0.$$



*Preuve.* Soit  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{n})$  une base orthonormale formée par des vecteurs propres de  $\mathcal{A}$  (ou  $\mathcal{B}$ ). On note  $(a_1, a_2)$  (resp.  $(b_1, b_2)$ ) les valeurs propres de  $\mathcal{A}$  (resp. de  $\mathcal{B}$ ) associées à  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Pour  $\kappa = 1, 2$ , les vecteurs  $\tau_\kappa$  et  $\tau^\kappa$  sont dans le plan  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . On pose

$$\tau_\kappa = \tau_{\kappa,1} \varepsilon_1 + \tau_{\kappa,2} \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad \tau^\kappa = \tau^{\kappa,1} \varepsilon_1 + \tau^{\kappa,2} \varepsilon_2.$$

Par un simple calcul,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\tau_\kappa \times \mathcal{B}\tau^\kappa &= (a_1 \tau_{\kappa,1} \varepsilon_1 + a_2 \tau_{\kappa,2} \varepsilon_2) \times (b_1 \tau^{\kappa,1} \varepsilon_1 + b_2 \tau^{\kappa,2} \varepsilon_2) \\ &= (a_1 b_2 \tau_{\kappa,1} \tau^{\kappa,2} - a_2 b_1 \tau_{\kappa,2} \tau^{\kappa,1}) \varepsilon_1 \times \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Or, par définition de la base duale  $(\tau^1, \tau^2)$ , nous avons en posant :  $\delta = 1/(\tau_{1,1} \tau_{2,2} - \tau_{1,2} \tau_{2,1})$ ,

$$\tau^{1,1} = \delta \tau_{2,2}, \quad \tau^{1,2} = -\delta \tau_{2,1}, \quad \tau^{2,1} = -\delta \tau_{1,2}, \quad \tau^{2,2} = \delta \tau_{1,1}.$$

On vérifie alors que

$$\tau_{\kappa,1} \tau^{\kappa,2} = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{\kappa,2} \tau^{\kappa,1} = 0.$$

□

n° Le dernier résultat de ce paragraphe est purement géométrique et assez original. Il a été motivé par la recherche d'une écriture symétrique (en vue de la démonstration de stabilité) de la CLE d'ordre 3.

**Lemme 4.8** *En supposant la surface  $\Gamma$  suffisamment régulière (de classe  $C^3$ ), nous avons*

$$\operatorname{div}_\Gamma (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C}) = -2G \mathbf{n},$$

où  $G \equiv \det \mathcal{C}$ , est la courbure de Gauss de  $\Gamma$ .

*Preuve.* Suivant la définition (4.71), nous avons

$$\operatorname{div}_\Gamma (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C}) = (\partial_{\xi_\alpha} (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C})) \tau^\alpha.$$

Par suite

$$\operatorname{div}_\Gamma (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C}) \cdot \mathbf{n} = [(\partial_{\xi_\alpha} (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C})) \tau^\alpha] \cdot \mathbf{n} = [(\partial_{\xi_\alpha} (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C})) \mathbf{n}] \cdot \tau^\alpha$$

par symétrie de la matrice  $(2H \Pi_\parallel - \mathcal{C})$ . Or  $(2H \Pi_\parallel - \mathcal{C}) \mathbf{n} = 0$ , donc

$$\operatorname{div}_\Gamma (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C}) \cdot \mathbf{n} = [(\mathcal{C} - 2H \Pi_\parallel) \partial_{\xi_\alpha} \mathbf{n}] \cdot \tau^\alpha$$

En utilisant (4.66) et la définition de  $H$  on conclut que

$$\operatorname{div}_\Gamma (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C}) \cdot \mathbf{n} = [(\mathcal{C} - 2H \Pi_\parallel) \mathcal{C} \tau_\alpha] \cdot \tau^\alpha = \operatorname{tr}(\mathcal{C}^2) - \operatorname{tr}(\mathcal{C})^2 = -2G$$

Pour terminer la preuve nous allons montrer que

$$\operatorname{div}_\Gamma (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C}) \cdot \tau_\beta = 0 \quad \text{pour} \quad \beta \in \{1, 2\},$$

(ce qui se traduit par :  $\Pi_\parallel \operatorname{div}_\Gamma (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C}) = 0$ ). Soit donc  $\beta \in \{1, 2\}$  un entier fixé,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Gamma (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C}) \cdot \tau_\beta &= [(\partial_{\xi_\alpha} (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C})) \tau^\alpha] \cdot \tau_\beta = [(\partial_{\xi_\alpha} (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C})) \tau_\beta] \cdot \tau^\alpha \\ &= \partial_{\xi_\beta} (2H) - [(\partial_{\xi_\alpha} \mathcal{C}) \tau_\beta] \cdot \tau^\alpha \end{aligned}$$

puisque  $\boldsymbol{\tau}_\beta \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha = \delta_\beta^\alpha$ . Calculons le second terme du membre de droite,

$$[(\partial_{\xi_\alpha} \mathcal{C}) \boldsymbol{\tau}_\beta] \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha = [\partial_{\xi_\alpha} (\mathcal{C} \boldsymbol{\tau}_\beta)] \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha - [\mathcal{C} \partial_{\xi_\alpha} \boldsymbol{\tau}_\beta] \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha$$

Mais, pour une surface assez régulière (de classe  $C^3$ ),  $\partial_{\xi_\alpha} \partial_{\xi_\beta} \mathbf{n} = \partial_{\xi_\beta} \partial_{\xi_\alpha} \mathbf{n}$ , ce qui se traduit par

$$\partial_{\xi_\alpha} (\mathcal{C} \boldsymbol{\tau}_\beta) = \partial_{\xi_\beta} (\mathcal{C} \boldsymbol{\tau}_\alpha)$$

et donc

$$\begin{aligned} [(\partial_{\xi_\alpha} \mathcal{C}) \boldsymbol{\tau}_\beta] \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha &= [\partial_{\xi_\beta} (\mathcal{C} \boldsymbol{\tau}_\alpha)] \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha - [\mathcal{C} \partial_{\xi_\alpha} \boldsymbol{\tau}_\beta] \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha \\ &= \partial_{\xi_\beta} (\mathcal{C} \boldsymbol{\tau}_\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha) - (\mathcal{C} \boldsymbol{\tau}_\alpha \partial_{\xi_\beta} \boldsymbol{\tau}^\alpha + \mathcal{C} \boldsymbol{\tau}^\alpha \partial_{\xi_\alpha} \boldsymbol{\tau}_\beta) \\ &= \partial_{\xi_\beta} (2H) - (\mathcal{C} \boldsymbol{\tau}_\alpha \partial_{\xi_\beta} \boldsymbol{\tau}^\alpha + \mathcal{C} \boldsymbol{\tau}^\alpha \partial_{\xi_\alpha} \boldsymbol{\tau}_\beta). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{div}_\Gamma (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C}) \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta = -(\mathcal{C} \boldsymbol{\tau}_\alpha \partial_{\xi_\beta} \boldsymbol{\tau}^\alpha + \mathcal{C} \boldsymbol{\tau}^\alpha \partial_{\xi_\alpha} \boldsymbol{\tau}_\beta) \equiv -B.$$

Posons pour  $\kappa = 1, 2$  :  $a_\kappa^\alpha = (\mathcal{C} \boldsymbol{\tau}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\tau}_\kappa$ . Nous avons alors

$$\mathcal{C} \boldsymbol{\tau}^\alpha = a_\kappa^\alpha \boldsymbol{\tau}^\kappa \quad \text{et} \quad \mathcal{C} \boldsymbol{\tau}_\alpha = a_\alpha^\kappa \boldsymbol{\tau}_\kappa.$$

Par suite

$$B = a_\alpha^\kappa \boldsymbol{\tau}_\kappa \partial_{\xi_\beta} \boldsymbol{\tau}^\alpha + a_\kappa^\alpha \boldsymbol{\tau}^\kappa \partial_{\xi_\alpha} \boldsymbol{\tau}_\beta = -a_\kappa^\alpha \boldsymbol{\tau}^\alpha \partial_{\xi_\beta} \boldsymbol{\tau}_\kappa + a_\kappa^\alpha \boldsymbol{\tau}^\kappa \partial_{\xi_\alpha} \boldsymbol{\tau}_\beta = (-\partial_{\xi_\beta} \boldsymbol{\tau}_\alpha + \partial_{\xi_\alpha} \boldsymbol{\tau}_\beta) a_\kappa^\alpha \boldsymbol{\tau}^\kappa$$

Mais alors, lorsque  $\Gamma$  est de classe  $C^2$ ,

$$\partial_{\xi_\beta} \boldsymbol{\tau}_\alpha = \partial_{\xi_\beta} (\partial_{\xi_\alpha} \mathbf{x}_\Gamma) = \partial_{\xi_\alpha} \boldsymbol{\tau}_\beta.$$

On en déduit que  $B = 0$  et  $\operatorname{div}_\Gamma (2H \Pi_\parallel - \mathcal{C}) \cdot \boldsymbol{\tau}_\beta = 0$ . □

### 4.4.3 Mise à l'échelle et développement asymptotique

#### Mise à l'échelle

Comme dans le cas d'une frontière plane, nous effectuons d'abord le changement de variable (4.3). Selon le lemme 4.6, l'opérateur rot devient dans le nouveau système de coordonnées  $(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[$  :

$$\mathcal{T}_\Gamma^{\eta\nu} + \frac{1}{\eta} (\mathbf{n} \times \partial_\nu).$$

Notons que contrairement au cas plan, l'opérateur tangentiel  $\mathcal{T}_\Gamma^{\eta\nu}$  dépend de  $\eta$ . Néanmoins cette dépendance n'est pas singulière lorsque  $\eta \rightarrow 0$ .

L'équation (4.9) devient

$$(4.76) \quad \begin{cases} \varepsilon_f \partial_t \mathbf{E}_f^\eta - \mathcal{T}_\Gamma^{\eta\nu} \mathbf{H}_f^\eta + \frac{1}{\eta} \partial_\nu (\mathbf{H}_f^\eta \times \mathbf{n}) = 0 \\ \mu_f \partial_t \mathbf{H}_f^\eta + \mathcal{T}_\Gamma^{\eta\nu} \mathbf{E}_f^\eta - \frac{1}{\eta} \partial_\nu (\mathbf{E}_f^\eta \times \mathbf{n}) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, 1[.$$

Notre problème est maintenant constitué par les équations (3.1), (4.8), (4.76) et (4.10).

**Développement asymptotique**

On utilise l'ansatz (4.11). Dans le cas présent nous avons besoin de développer de manière analogue l'opérateur  $\mathcal{T}_\Gamma^{\eta\nu}$ . Nous utilisons par exemple un développement de Taylor de  $\mathcal{R}_{\eta\nu}$  par rapport au paramètre ( $\eta\nu C$ ) :

$$\mathcal{R}_{\eta\nu} = \Pi_{\parallel} + \sum_{i=1}^{\infty} (-\eta\nu C)^i,$$

D'où (d'après l'expression de  $\mathcal{T}_\Gamma^{\eta\nu}$ )

$$(4.77) \quad \mathcal{T}_\Gamma^{\eta\nu} = \sum_{i=0}^{\infty} (-\eta\nu)^i \mathcal{T}_\Gamma^i, \quad \text{où l'opérateur } \mathcal{T}_\Gamma^i \text{ est défini par :}$$

$$\mathcal{T}_\Gamma^i \mathbf{v} = [(\mathcal{C}^i \nabla_\Gamma) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n})] \mathbf{n} + [\mathcal{C}^i \nabla_\Gamma (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] \times \mathbf{n} - (\mathcal{C}^{i+1} \mathbf{v}) \times \mathbf{n}.$$

Le processus d'identification formelle laisse inchangées les équations (4.12) et (4.13). Par contre, les équations (4.14) et (4.15) deviennent, pour  $k \geq 0$ ,

$$(4.78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_\nu (\mathbf{E}_f^{k+1} \times \mathbf{n}) = \mu_f \partial_t \mathbf{H}_f^k + \sum_{i=0}^k (-\nu)^i \mathcal{T}_\Gamma^i \mathbf{E}_f^{k-i} \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, 1[ \\ \mathbf{E}_f^{k+1}(\mathbf{x}_\Gamma, 1) \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{pour } \mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma. \end{array} \right.$$

$$(4.79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_\nu (\mathbf{H}_f^{k+1} \times \mathbf{n}) = -\varepsilon_f \partial_t \mathbf{E}_f^k + \sum_{i=0}^k (-\nu)^i \mathcal{T}_\Gamma^i \mathbf{H}_f^{k-i} \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, 1[ \\ \mathbf{H}_f^{k+1}(\mathbf{x}_\Gamma, 0) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^{k+1}(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n}, \quad \text{pour } \mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma. \end{array} \right.$$

Les termes d'ordre zéro sont déterminés par (4.16). Pour déterminer les termes d'ordre supérieur, nous utilisons la relation de récurrence du lemme 4.9 qui suit : nous y utilisons la notation condensée suivante, où  $i$  désigne un entier quelconque,

$$\vec{\text{rot}}_\Gamma^{(i)} u \equiv (\mathcal{C}^i \nabla_\Gamma u) \times \mathbf{n}, \quad \text{rot}_\Gamma^{(i)} \mathbf{v} \equiv (\mathcal{C}^i \nabla_\Gamma) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}),$$

qui correspond avec les définitions respectives de  $\vec{\text{rot}}_\Gamma$  et  $\text{rot}_\Gamma$  lorsque  $i = 0$ .

**Lemme 4.9** *Pour tout  $k \geq 0$ , nous avons pour  $(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[$ ,*

$$(4.80) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{E}_f^{k+1}(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} &= - \int_\nu^1 \mu_f \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \\ &- \int_\nu^1 \frac{1}{\varepsilon_f} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i (-\xi)^{k-j} \vec{\text{rot}}_\Gamma^{(k-i)} \text{rot}_\Gamma^{(i-j)} \mathbf{H}_f^j(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \\ &+ \int_\nu^1 \sum_{i=0}^k (-\xi)^{k-i} (\mathcal{C}^{k-i+1} \partial_t \mathbf{E}_f^i(\mathbf{x}_\Gamma, \xi)) \times \mathbf{n} d\xi. \end{aligned}$$

$$(4.81) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{H}_f^{k+1}(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} &= \partial_t \mathbf{H}_v^{k+1}(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} - \int_0^\nu \varepsilon_f \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \\ &- \int_0^\nu \frac{1}{\mu_f} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i (-\xi)^{k-j} \vec{\text{rot}}_\Gamma^{(k-i)} \text{rot}_\Gamma^{(i-j)} \mathbf{E}_f^j(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \\ &- \int_0^\nu \sum_{i=0}^k (-\xi)^{k-i} (\mathcal{C}^{k-i+1} \partial_t \mathbf{H}_f^i(\mathbf{x}_\Gamma, \xi)) \times \mathbf{n} d\xi \end{aligned}$$

*Preuve.* Nous allons prouver (4.80) seulement. La preuve de l'identité (4.81) s'obtient par des arguments similaires et est laissée en exercice au lecteur (sinon voir la preuve du lemme 5.1 page 115). En appliquant  $\Pi_{\parallel}$  à la première équation de (4.78), nous obtenons, compte tenu de (4.77) et de la définition de  $\mathcal{T}_{\Gamma}^i$ ,

$$(4.82) \quad \begin{aligned} \partial_{\nu}(\mathbf{E}_f^{k+1} \times \mathbf{n}) &= \mu_f \partial_t(\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k) + \sum_{i=0}^k (-\nu)^{k-i} \vec{\text{rot}}_{\Gamma}^{(k-i)}(\mathbf{E}_f^i \cdot \mathbf{n}) \\ &\quad - \sum_{i=0}^k (-\nu)^{k-i} (\mathcal{C}^{k-i+1} \partial_t \mathbf{E}_f^i) \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

D'autre part, en appliquant  $\Pi_{\perp}$  à la première équation de (4.79) on constate que pour tout  $i \geq 0$ ,

$$(4.83) \quad \varepsilon_f \partial_t(\mathbf{E}_f^i \cdot \mathbf{n}) = \sum_{j=0}^i (-\nu)^{i-j} \text{rot}_{\Gamma}^{(i-j)} \mathbf{H}_f^j.$$

L'équation (4.80) s'obtient alors à partir de :  $\int_{\nu}^1 \partial_t(4.82) d\xi$ , en utilisant l'expression de  $\partial_t(\mathbf{E}_f^i \cdot \mathbf{n})$  fournie par (4.83) et en utilisant la condition aux limites en  $\nu = 1$  donnée dans (4.78).  $\square$

#### 4.4.4 Condition d'ordre 2

Le principe de construction est le même que dans le cas d'une frontière plane. Les champs  $\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^0$  et  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0$  sont donnés par (4.16). En prenant  $k = 0$  dans (4.80) et en utilisant (4.16) on déduit que

$$(4.84) \quad \partial_t \mathbf{E}_f^1(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \times \mathbf{n} = -(1 - \nu) \left( \mu_f \partial_{tt} + \frac{1}{\varepsilon_f} \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \right) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_{\Gamma}).$$

Cette expression coïncide avec la relation (4.24) du cas plan. Par conséquent la condition d'ordre 2 dans le cas d'une frontière courbe est encore donnée par (4.25) :

$$(4.85) \quad \boxed{\partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^{\eta} \times \mathbf{n} = -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \right) \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^{\eta} \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbf{R}^+}.$$

Certes, Le théorème de stabilité 4.1 s'applique encore. Par contre la condition d'ordre 3 n'a plus la même expression.

#### 4.4.5 Condition d'ordre 3

Prenons  $k = 0$  dans (4.81). En utilisant (4.16) nous déduisons

$$(4.86) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^1(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^1(\mathbf{x}_{\Gamma}) - \nu \mathcal{C} \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_{\Gamma}), \quad (\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[.$$

Considérons (4.80) pour  $k = 1$  :

$$(4.87) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{E}_f^2(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu) \times \mathbf{n} &= - \int_{\nu}^1 \mu_f \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^1(\mathbf{x}_{\Gamma}, \xi) d\xi + \int_{\nu}^1 (\mathcal{C} \partial_t \mathbf{E}_f^1(\mathbf{x}_{\Gamma}, \xi)) \times \mathbf{n} d\xi \\ &\quad - \int_{\nu}^1 \frac{1}{\varepsilon_f} \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{H}_f^1(\mathbf{x}_{\Gamma}, \xi) d\xi \\ &\quad + \int_{\nu}^1 \xi \frac{1}{\varepsilon_f} (\vec{\text{rot}}_{\Gamma}^{(1)} \text{rot}_{\Gamma} + \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \text{rot}_{\Gamma}^{(1)}) \mathbf{H}_f^0(\mathbf{x}_{\Gamma}, \xi) d\xi, \end{aligned}$$

$\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0$  est donné par (4.16),  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^1$  est donné par (4.86) et nous avons :  $\mathcal{C} \partial_t \mathbf{E}_f^1 = \mathcal{C} \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^1$ , où  $\partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^1$  est donné par (4.32). Nous obtenons alors, à partir de (4.87) et après simplification en utilisant (4.65),

$$(4.88) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{E}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} &= -\mu_f \partial_{tt} \left( (1 - \nu) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^1(\mathbf{x}_\Gamma) - (1 - \nu^2)(\mathcal{C} - H) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon_f} \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \left( (1 - \nu) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^1(\mathbf{x}_\Gamma) - \frac{1}{2}(1 - \nu^2) \mathcal{C} \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_f} \frac{1}{2} (1 - \nu^2) \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma^{(1)} \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma). \end{aligned}$$

La simplification ultime s'obtient grâce au lemme 4.8 et est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 4.10** *Soit  $\mathbf{v}$  un champ vectoriel tangentiel régulier défini sur  $\Gamma$ . Nous avons alors l'identité :*

$$\text{rot}_\Gamma^{(1)} \mathbf{v} + \text{rot}_\Gamma (\mathcal{C} \mathbf{v}) = 2H \text{rot}_\Gamma \mathbf{v}$$

*Preuve.* Par définition  $\text{rot}_\Gamma^{(1)} \mathbf{v} = (\mathcal{C} \nabla_\Gamma) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n})$ . D'où, en utilisant (4.65),

$$\begin{aligned} \text{rot}_\Gamma^{(1)} \mathbf{v} + \text{rot}_\Gamma (\mathcal{C} \mathbf{v}) &= (\mathcal{C} \nabla_\Gamma) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) + \nabla_\Gamma \cdot ((2H \Pi_{\parallel} - \mathcal{C})(\mathbf{v} \times \mathbf{n})) \\ &= 2H \text{div}_\Gamma (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) + (\text{div}_\Gamma (2H \Pi_{\parallel} - \mathcal{C})) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}), \end{aligned}$$

et d'après le lemme 4.8,  $(\text{div}_\Gamma (2H \Pi_{\parallel} - \mathcal{C})) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) = 0$ . □

n° Appliquons ce lemme à  $\mathbf{v} = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0|_\Gamma$ . La relation (4.88) implique

$$(4.89) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{E}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} &= -\mu_f \partial_{tt} \left( (1 - \nu) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^1(\mathbf{x}_\Gamma) - (1 - \nu^2)(\mathcal{C} - H) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon_f} \left( (1 - \nu) \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^1(\mathbf{x}_\Gamma) - (1 - \nu^2) \vec{\text{rot}}_\Gamma H \text{rot}_\Gamma \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) \right) \end{aligned}$$

Regroupons les relations (4.89), (4.84) et (4.16). On en déduit la CLE d'ordre 3 sur  $\Gamma$  :

$$(4.90) \quad \boxed{\partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta \times \mathbf{n} = -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_f (1 - \eta(\mathcal{C} - H)) \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma (1 - \eta H) \text{rot}_\Gamma \right) \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta}$$

On note que cette condition diffère de la condition d'ordre 2 par des termes correcteurs faisant intervenir uniquement les caractéristiques géométriques  $\mathcal{C}$  et  $H$  de la surface  $\Gamma$ . Dans le cas d'une frontière plane,  $\mathcal{C} = 0$  (et donc  $H = 0$ ), et les deux conditions coïncident. Nous donnons maintenant le résultat de stabilité relatif à cette condition :

**Théorème 4.5** *Toute solution suffisamment régulière  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  du système  $\{(3.8), (4.90)\}$  satisfait l'estimation d'énergie :*

$$\frac{d}{dt} \left\{ \mathcal{E}_v(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t), \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t)) + \eta \mathcal{E}_\Gamma^\eta(t) \right\} = 0,$$

où, si on pose,  $\varphi^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, t)$ ,  $\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma$ ,

$$\mathcal{E}_\Gamma^\eta(t) = \frac{\mu_f}{2} \int_\Gamma ((1 - \eta(\mathcal{C} - H)) \varphi^\eta) \cdot \varphi^\eta \, d\mathbf{x}_\Gamma + \frac{1}{2\varepsilon_f} \int_\Gamma (1 - \eta H) \left| \int_0^t \text{rot}_\Gamma \varphi^\eta \, d\tau \right|^2 \, d\mathbf{x}_\Gamma.$$

La stabilité comme définie par (3.15) est obtenue lorsque

$$\eta \inf_\Gamma (\max(|c_1 + c_2|, |c_1 - c_2|)) \leq 2,$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont les courbures principales de  $\Gamma$ .

*Preuve.* La preuve de l'identité d'énergie est plutôt immédiate. Elle suit les mêmes étapes que la preuve du théorème 4.1 et est basée sur la symétrie de la matrice  $[1 - \eta(\mathcal{C} - H)]$ . La stabilité (définie par (3.15)) est assurée du moment où les valeurs propres de  $1 - \eta(\mathcal{C} - H)$  et le réel  $(1 - \eta H)$  soient positifs ; c.à.d. lorsque

$$\eta \max(|c_1 + c_2|, |c_1 - c_2|) \leq 2 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Dans ce cas,  $\mathcal{E}_1^\eta(t) \geq 0$  pour tout  $t \geq 0$ . □

**Remarque 4.9** *Il est possible, à l'image du cas plan, de poursuivre le calcul formel pour dériver des conditions d'ordres supérieurs à 3. Nous ne l'avons pas fait à cause de sa technicité disproportionnée avec l'intérêt que peut présenter ces conditions dans le cas des matériaux ferromagnétiques (voir chapitre suivant).*

**Remarque 4.10** *L'obtention d'estimations d'erreurs ne présente pas de nouveautés par rapport au cas plan (section 4.3), à part son aspect beaucoup plus technique. On s'est donc contenté dans le cas courbe d'en vérifier les ingrédients essentiels : consistance de la dérivation formelle et stabilité du problème aux limites formé par les équations de Maxwell et la CLE.*



## Chapitre 5

# Extension au cas des matériaux ferromagnétiques

**Résumé :** Ce chapitre constitue en quelque sorte l'extension du chapitre précédent au cas des matériaux ferromagnétiques. Le caractère non linéaire des équations est source de difficultés supplémentaires. Pour séparer les difficultés, nous traitons tout d'abord le cas unidimensionnel (les problèmes de géométrie sont alors évacués) pour des matériaux uniaxiaux (section 5.1). Nous établissons d'abord la condition d'ordre 2 (formule 5.25) : cette condition aux limites relie les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  via un champ d'aimantation  $\mathbf{M}$  vivant dans une "couche adimensionnalisée" et satisfaisant une loi non linéaire modifiée. Cette condition se révèle être d'ordre 3 et stable : dans le théorème 5.1, nous étendons le théorème de stabilité (4.1) au cas non linéaire. Pour la condition d'ordre 4, la démarche la plus naturelle amène comme dans le cas linéaire à une condition aux limites instable (voir section 5.1.4). Curieusement, la généralisation du procédé de stabilisation appliqué dans le cas linéaire conduit à une condition (5.77) qui se révèle, sous forme très cachée, une réécriture du système initial ! Le système (5.77) a néanmoins un intérêt du point de vue numérique (cela apparaîtra au chapitre 7), dans la mesure où il fournit un moyen stable de coupler un schéma de discrétisation implicite dans la couche ferromagnétique (adimensionnalisée) avec un schéma explicite à l'extérieur : ce faisant, la condition de stabilité du schéma est indépendante de l'épaisseur de la couche mince. Il est à noter que dans le cas particulier d'une couche ferromagnétique homogène, nous avons pu deviner une condition d'ordre 4 approchée qui reste "locale" pour le champ électromagnétique (comme pour l'ordre 3) : c'est la condition (5.63) dont la stabilité est prouvée au théorème 5.2. Nous abordons le cas tridimensionnel dans la section 5.2. Nous considérons des matériaux ferromagnétiques généraux (voir (5.79)) et nous couplons, en quelque sorte, les sections 4.4 et 5.1. Nous établissons la condition d'ordre 2 (formule (5.2.3)) dont la stabilité est démontrée au théorème 5.3 et la condition d'ordre 3 (formule (5.110)) dont la stabilité est démontrée au théorème 5.4. A noter que nous avons utilisé (entre autres) une astuce pour l'approximation de certains termes géométriques (voir formule (5.105)) afin de garantir ce dernier résultat de stabilité : c'est une première différence avec le cas linéaire. D'autre part, même dans le cas plan, les conditions d'ordre 2 et 3 diffèrent, contrairement au cas linéaire (nous renvoyons au chapitre 8 pour plus de précisions).



## 5.1 Etude du problème 1D

### 5.1.1 Présentation

Nous rappelons que l'approximation 1D consiste à réduire la dépendance spatiale à une seule variable  $x$ . Les inconnues restent néanmoins vectorielles. On pose  $\Omega_v = ]-\infty, 0[$  et  $\Omega_f^\eta = ]0, \eta[$ . L'interface  $\Gamma$  est réduite au point  $x = 0$ . On pose  $\mathbf{n} \equiv (1, 0, 0)$  le vecteur normal unitaire.

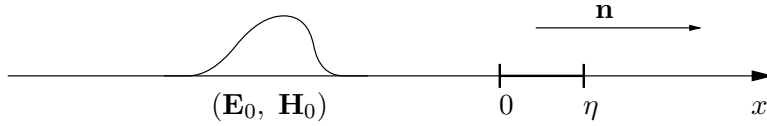


FIG. 5.1 – Le cas monodimensionnel

Par rapport aux équations (3.1), (3.2) rien n'est à changer à part l'expression de l'opérateur :  $\text{rot}$ , dans laquelle il ne faut retenir que les dérivations par rapport à  $x$ . Pour une fonction  $\mathbf{E}(x) \in \mathbb{R}^3$  nous avons tout simplement

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \partial_x \mathbf{E} = (0, -\partial_x \mathbf{E}_z, \partial_x \mathbf{E}_y).$$

En utilisant la notation (4.5) on constate que

$$\text{rot } \Pi_\perp \mathbf{E} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \mathbf{E} = \text{rot } \Pi_\parallel \mathbf{E}.$$

C'est ce qui amène pour les équations de Maxwell à un découplage en 2 systèmes scalaires 1D. Mais ceci tombe en défaut une fois le couplage avec la loi ferromagnétique est considéré. Nous avons choisi de travailler dans un premier temps avec la forme explicite (1.17) de la loi non linéaire. Nous rappelons (voir chapitre 2) qu'elle correspond à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\eta(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) &= \frac{|\gamma|}{1 + \alpha^\eta(\mathbf{x})^2} \left( \mathbf{h} \times \mathbf{m} + \frac{\alpha^\eta(\mathbf{x})}{|\mathbf{M}_0^\eta(\mathbf{x})|} \mathbf{m} \times (\mathbf{h} \times \mathbf{m}) \right), \\ \Phi^\eta(\mathbf{m}; \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} |\mathbf{H}_s^\eta(\mathbf{x}) - \mathbf{m}|^2 + \frac{1}{2} K_a^\eta(\mathbf{x}) |\mathbf{m} - (\mathbf{p}^\eta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}) \mathbf{p}^\eta(\mathbf{x})|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation (3.3) s'écrit aussi

$$(5.1) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}_f^\eta = |\gamma| \mathbf{H}_T^\eta \times \mathbf{M}_f^\eta + \frac{\alpha^\eta}{|\mathbf{M}_0^\eta|} \mathbf{M}_f^\eta \times \partial_t \mathbf{M}_f^\eta & \text{dans } \Omega_f^\eta \times \mathbb{R}^+, \\ \text{avec } \mathbf{H}_T^\eta = \mathbf{H}_f^\eta + \mathbf{H}_s^\eta + K_a^\eta (\mathbf{p}^\eta \cdot \mathbf{M}_f^\eta) \mathbf{p}^\eta & \text{dans } \Omega_f^\eta \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{M}_f^\eta|_{t=0} = \mathbf{M}_0^\eta & \text{dans } \Omega_f^\eta. \end{cases}$$

Le problème de diffraction exact est formé par les équations (3.1), (3.2), (5.1), (3.5) et (3.6).

### 5.1.2 Développement asymptotique et identification formelle

#### Changement d'échelle

En l'absence de coordonnées tangentielles ce changement d'échelle se traduit simplement par le changement de variable :

$$\nu = \frac{x}{\eta} \quad \text{pour } x \in ]0, \eta[.$$

Nous avons besoin, par ailleurs, de préciser la dépendance des caractéristiques du matériau ferromagnétique vis-à-vis du paramètre  $\eta$ . On adopte ici l'hypothèse physique la plus naturelle, à savoir qu'ils sont "indépendants" de  $\eta$  : on suppose l'existence de  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{H}_s$ ,  $\alpha$ ,  $K_a$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\varepsilon_f$ , fonctions définies sur  $]0, 1[$ , telles que :

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{M}_0^\eta(x) &= \mathbf{M}_0(\nu), & \mathbf{H}_s^\eta(x) &= \mathbf{H}_s(\nu), & \alpha^\eta(x) &= \alpha(\nu), \\ \varepsilon_f^\eta(x) &= \varepsilon_f(\nu), & \mathbf{p}^\eta(x) &= \mathbf{p}(\nu), & K_a^\eta(x) &= K_a(\nu). \end{aligned}$$

pour  $x \in ]0, \eta[$  et  $\nu = \frac{x}{\eta}$ .

Comme pour le cas linéaire, on note (de manière abusive)  $(\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta, \mathbf{M}_f^\eta)$  le champ électromagnétique dans  $]0, 1[$ ,

$$(\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta, \mathbf{M}_f^\eta)(x, t) \mapsto (\hat{\mathbf{E}}_f^\eta, \hat{\mathbf{H}}_f^\eta, \hat{\mathbf{M}}_f^\eta)(\nu, t) \equiv (\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta, \mathbf{M}_f^\eta)(\nu, t).$$

Suivant ce changement d'échelle et d'inconnues, les équations (3.6), (3.2) (5.1) et (3.5) nous donnent respectivement :

Les équations de continuité à l'interface

$$(5.3) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_v^\eta(0, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^\eta(0, t) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^\eta(0, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^\eta(0, t) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}^+,$$

les équations de Maxwell adimensionnées

$$(5.4) \quad \begin{cases} \varepsilon_f \partial_t \mathbf{E}_f^\eta + \frac{1}{\eta} \partial_\nu (\mathbf{H}_f^\eta \times \mathbf{n}) = 0 & \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+, \\ \mu_0 (\partial_t \mathbf{H}_f^\eta + \partial_t \mathbf{M}_f^\eta) - \frac{1}{\eta} \partial_\nu (\mathbf{E}_f^\eta \times \mathbf{n}) = 0 & \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+, \\ (\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)|_{t=0} = (0, 0), & \text{dans } ]0, 1[, \end{cases}$$

la loi constitutive adimensionnée

$$(5.5) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}_f^\eta = |\gamma| \mathbf{H}_T^\eta \times \mathbf{M}_f^\eta + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M}_f^\eta \times \partial_t \mathbf{M}_f^\eta & \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+, \\ \text{avec } \mathbf{H}_T^\eta = \mathbf{H}_f^\eta + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_f^\eta) \mathbf{p} & \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{M}_f^\eta|_{t=0} = \mathbf{M}_0 & \text{dans } ]0, 1[, \end{cases}$$

et la condition de réflexion

$$(5.6) \quad \mathbf{E}_f^\eta(1, t) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}^+.$$

Le système d'équations du problème de diffraction est constitué maintenant des équations (3.1), (5.4), (5.3), (5.5) et (5.6).

### Développement asymptotique et identification formelle

Nous utilisons toujours l'ansatz (4.11) auquel nous rajoutons une hypothèse analogue sur le développement du moment magnétique

$$(5.7) \quad \mathbf{M}_f^\eta = \mathbf{M}_f^0 + \eta \mathbf{M}_f^1 + \eta^2 \mathbf{M}_f^2 + \dots$$

L'identification formelle, après injection des expressions (4.11) et (5.7) dans (3.1), (5.4), (5.3), (5.5) et (5.6) nous permet de déterminer de manière récurrente les différents termes du développement asymptotique, comme l'explique la proposition suivante :

**Proposition 5.1** *Les champs  $(\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0)$  sont déterminés par les équations*

$$(5.8) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_v^0 - \text{rot } \mathbf{H}_v^0 = 0, & \mu_0 \partial_t \mathbf{H}_v^0 + \text{rot } \mathbf{E}_v^0 = 0 & \text{dans } \Omega_v \times \mathbb{R}^+, \\ (\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) & & \text{dans } \Omega_v, \\ \mathbf{E}_v^0(0, t) \times \mathbf{n} = 0 & & \text{pour } t \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

Connaissant  $(\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0)$  les champs  $(\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^0, \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0)$  sont donnés par

$$(5.9) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^0(\nu, t) = 0 \quad \text{pour } (\nu, t) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$$

$$(5.10) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0(\nu, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t) \quad \text{pour } (\nu, t) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+,$$

et ensuite  $\mathbf{M}_f^0$  est déterminé par l'équation

$$(5.11) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}_f^0 = |\gamma| \mathbf{H}_T^0 \times \mathbf{M}_f^0 + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M}_f^0 \times \partial_t \mathbf{M}_f^0 & \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+, \\ \text{avec } \mathbf{H}_T^0 = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0 + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_f^0) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_f^0) \mathbf{p} & \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{M}_f^0|_{t=0} = \mathbf{M}_0 & \text{dans } ]0, 1[, \end{cases}$$

Ayant les termes d'ordre 0, la détermination pour les ordres  $k \geq 1$  se fait de manière récurrente comme suit : pour  $(\nu, t) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$ ,  $\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k(\nu, t)$  est donné par

$$(5.12) \quad \mathbf{E}_f^k(\nu, t) \times \mathbf{n} = -\mu_0 \int_{\nu}^1 \left( \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^{k-1}(\xi, t) + \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^{k-1}(\xi, t) \right) d\xi$$

ensuite  $(\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k)$  sont déterminés par les équations

$$(5.13) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_v^k - \text{rot } \mathbf{H}_v^k = 0, & \mu_0 \partial_t \mathbf{H}_v^k + \text{rot } \mathbf{E}_v^k = 0 & \text{dans } \Omega_v \times \mathbb{R}^+, \\ (\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k)|_{t=0} = (0, 0) & & \text{dans } \Omega_v, \\ \mathbf{E}_v^k(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_f^k(0, t) \times \mathbf{n} & & \text{pour } t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Pour  $(\nu, t) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$  le champ  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k(\nu, t)$  s'obtient par

$$(5.14) \quad \mathbf{H}_f^k(\nu, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^k(0, t) \times \mathbf{n} - \int_0^{\nu} \varepsilon_f(\xi) \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^{k-1}(\xi, t) d\xi$$

et le moment  $\mathbf{M}_f^k$  est déterminé par le système

$$(5.15) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}_f^k = \sum_{i=0}^k \left( |\gamma| \mathbf{H}_T^i \times \mathbf{M}_f^{k-i} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M}_f^i \times \partial_t \mathbf{M}_f^{k-i} \right) & \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+, \\ \text{avec } \mathbf{H}_T^k = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k - \Pi_{\perp} \mathbf{M}_f^k + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_f^k) \mathbf{p} & \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{M}_f^k|_{t=0} = 0 & \text{dans } ]0, 1[, \end{cases}$$

*Preuve.* Montrons d'abord l'identité (5.9). L'identification à l'ordre  $-1$  dans la deuxième équation de (5.4) montre que

$$\partial_\nu(\mathbf{E}_f^0 \times \mathbf{n}) = 0 \quad \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+,$$

et l'identification à l'ordre 0 dans la condition aux limites (5.6) montre que  $\mathbf{E}_f^0(1, t) \times \mathbf{n} = 0$ . L'équation (5.9) s'obtient donc par une simple intégration entre  $\nu$  et 1.

- Les systèmes (5.8) et (5.13) : ils s'obtiennent immédiatement à partir de l'identification formelle dans (3.1) et dans la première relation de continuité à l'interface dans (5.3). La condition aux limites du système (5.8) a été explicitée moyennant la relation (5.9).

- Relation (5.10) : l'identification à l'ordre  $-1$  dans la première équation de (5.4) montre que

$$\partial_\nu(\mathbf{H}_f^0 \times \mathbf{n}) = 0 \quad \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+,$$

et l'identification à l'ordre 0 dans la deuxième relation de continuité à l'interface dans (5.3) montre que  $\mathbf{H}_f^0(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^0(0, t) \times \mathbf{n}$ . On conclut donc de manière immédiate.

- Systèmes (5.11) et (5.15) : prenons le produit scalaire par  $\mathbf{n}$  de la deuxième équation du système (5.4). On en déduit que  $\partial_t(\Pi_\parallel \mathbf{H}_f^\eta + \Pi_\parallel \mathbf{M}_f^\eta) = 0$ . Par conséquent, compte tenu des conditions initiales,

$$\Pi_\perp \mathbf{H}_f^\eta = \Pi_\perp \mathbf{M}_0 - \Pi_\perp \mathbf{M}_f^\eta \quad \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+.$$

L'identification formelle dans cette équation montre que

$$\Pi_\perp \mathbf{H}_f^0 = \Pi_\perp \mathbf{M}_0 - \Pi_\perp \mathbf{M}_f^0 \quad \text{et} \quad \Pi_\perp \mathbf{H}_f^k = -\Pi_\perp \mathbf{M}_f^k \quad \text{pour } k \geq 1.$$

En écrivant que  $\mathbf{H}_f^i = \Pi_\parallel \mathbf{H}_f^i + \Pi_\perp \mathbf{H}_f^i$  pour tout  $i \geq 0$ , nous en déduisons

$$(5.16) \quad \mathbf{H}_f^0 = \Pi_\parallel \mathbf{H}_f^0 + \Pi_\perp (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_f^0) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_f^k = \Pi_\parallel \mathbf{H}_f^k - \Pi_\perp \mathbf{M}_f^k \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Les systèmes (5.11) et (5.15) s'obtiennent alors facilement à partir de l'identification formelle dans le système (5.5) et en remplaçant  $\mathbf{H}_f^k$  par son expression (5.16).

- Equation (5.12) : soit  $k \geq 1$ . L'identification à l'ordre  $k-1$  dans la deuxième équation du système (5.4) montre que

$$\partial_\nu(\mathbf{E}_f^k \times \mathbf{n}) = \mu_0 (\partial_t \mathbf{H}_f^{k-1} + \partial_t \mathbf{M}_f^{k-1}).$$

En appliquant  $\Pi_\parallel$  à cette équation on conclut que

$$(5.17) \quad \partial_\nu(\mathbf{E}_f^k \times \mathbf{n}) = \mu_0 (\partial_t \Pi_\parallel \mathbf{H}_f^{k-1} + \partial_t \Pi_\parallel \mathbf{M}_f^{k-1}).$$

Par ailleurs, la condition aux limites (5.6) montre que  $\mathbf{E}_f^k(1, t) \times \mathbf{n} = 0$ . L'équation (5.12) s'obtient donc en intégrant (5.17) entre  $\nu$  et 1.

- Equation (5.14) : soit  $k \geq 1$ . L'identification à l'ordre  $k-1$  dans la première équation du système (5.4) montre que

$$\partial_\nu(\mathbf{H}_f^k \times \mathbf{n}) = -\varepsilon_f \partial_t \mathbf{E}_f^{k-1}.$$

En appliquant  $\Pi_\parallel$  à cette équation on conclut que

$$(5.18) \quad \partial_\nu(\mathbf{H}_f^k \times \mathbf{n}) = -\varepsilon_f \partial_t \Pi_\parallel \mathbf{E}_f^{k-1}.$$

Par ailleurs, la deuxième condition de continuité dans (5.3) montre que  $\mathbf{H}_f^k(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^k(0, t) \times \mathbf{n}$ . L'équation (5.14) s'obtient en intégrant (5.18) entre 0 et  $\nu$ .  $\square$

### 5.1.3 Dérivation des CLE

#### Principe

Le principe de dérivation est le même que dans le cas linéaire (voir section 4.2.3). Pour obtenir une approximation d'ordre  $\eta^k$  du champ diffracté  $(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)$  on calcule la série tronquée

$$(\overline{\mathbf{E}}_v^k, \overline{\mathbf{H}}_v^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \eta^i (\mathbf{E}_v^i, \mathbf{H}_v^i).$$

On établira pour  $k = 1, 2, 3, 4$  l'existence d'une condition au limite de la forme (4.23) sauf que l'opérateur  $\mathcal{B}_k^\eta$  y intervenant sera non linéaire à partir de  $k = 2$ . La CLE d'ordre  $k$  est obtenue en omettant le  $O(\eta^k)$  dans (4.23) et la solution approchée correspondante est notée par  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$ . Cette condition est validée une fois obtenue la stabilité du problème couplé Maxwell-CLE (voir chapitre 3).

#### Condition d'ordre 1

Le travail est déjà fait pour cette condition. On peut la lire dans le système (5.8) et s'écrit tout simplement :

$$(5.19) \quad \boxed{\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = 0}$$

Il s'agit de la seule CLE "exacte" dans le sens où  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta) = (\overline{\mathbf{E}}_v^1, \overline{\mathbf{H}}_v^1)$ . Cette condition est en fait naturelle, du moment où on a supposé les caractéristiques de la couche mince indépendantes de l'épaisseur. Elle est évidemment sans intérêt puisqu'elle ne prend pas en compte l'effet d'absorption du milieu ferromagnétique.

#### Condition d'ordre 2

La condition d'ordre 2 va provenir des approximations :

$$(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta) \approx (\overline{\mathbf{E}}_v^2, \overline{\mathbf{H}}_v^2) = (\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0) + \eta (\mathbf{E}_v^1, \mathbf{H}_v^1) \left\{ = (\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta) + O(\eta^2) \right\}$$

Nous avons pour tout  $t \geq 0$ ,

$$(5.20) \quad \overline{\mathbf{E}}_v^2(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_f^0(0, t) \times \mathbf{n} + \eta \mathbf{E}_f^1(0, t) \times \mathbf{n}.$$

Le terme  $\mathbf{E}_f^0 \times \mathbf{n}$  est déjà calculé par (5.9). Il nous reste à caractériser  $\mathbf{E}_f^1 \times \mathbf{n}$ . On déduit de (5.12), appliqué à  $k = 1$ , tout en utilisant (5.10),

$$(5.21) \quad \mathbf{E}_f^1(\nu, t) \times \mathbf{n} = -\mu_0 (1 - \nu) \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t) - \mu_0 \int_{\nu}^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^0(\zeta, t) \times \mathbf{n} d\zeta$$

Nous constatons alors, en utilisant (5.9) et (5.21) dans (5.20) et en posant (bien que redondante dans le cas présent, cette notation sera utile pour les conditions d'ordre supérieur),

$$(5.22) \quad \overline{\mathbf{M}}_f^1 = \mathbf{M}_f^0$$

que le triplet  $(\overline{\mathbf{E}}_v^2, \overline{\mathbf{H}}_v^2, \overline{\mathbf{M}}_f^1)$  vérifie

$$(5.23) \quad \overline{\mathbf{E}}_v^2(0, t) \times \mathbf{n} = -\mu_0 \eta \left( \partial_t \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{H}}_v^2(0, t) + \int_0^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{M}}_f^1(\nu, t) d\nu \right) + O(\eta^2).$$

Cette relation est du type annoncée (voir (4.23)) à condition de pouvoir exprimer  $\Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{M}}_f^1$  en fonction  $\Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{H}}_v^2(0, t)$ . Or d'après (5.10) et (5.11) et en posant

$$\overline{\mathbf{H}}_T^1 = \mathbf{H}_T^0,$$

le moment  $\overline{\mathbf{M}}_f^1(t)$  vérifie sur  $]0, 1[$

$$(5.24) \quad \begin{cases} \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^1 = |\gamma| \overline{\mathbf{H}}_T^1 \times \overline{\mathbf{M}}_f^1 + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \overline{\mathbf{M}}_f^1 \times \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^1, \\ \overline{\mathbf{H}}_T^1 = \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{H}}_v^2(0, t) + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \overline{\mathbf{M}}_f^1) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \overline{\mathbf{M}}_f^1) \mathbf{p} + O(\eta), \\ \overline{\mathbf{M}}_f^1|_{t=0} = \mathbf{M}_0. \end{cases}$$

La condition d'ordre 2 est obtenue en omettant le  $O(\eta)$  de (5.24) et en omettant le  $O(\eta^2)$  de la relation (5.23). Le raisonnement formel pour valider l'ordre de la condition obtenue est le suivant : en supprimant le  $O(\eta)$  du système (5.24) on commet une erreur d'ordre 1 sur la détermination de  $\overline{\mathbf{M}}_f^1$ . Cette erreur d'ordre 1 génère une erreur d'ordre 2 dans la condition (5.23) que l'on peut rajouter au  $O(\eta^2)$  y figurant. La suppression de  $O(\eta^2)$  dans (5.23) engendrera une erreur globale en  $O(\eta^2)$ . Procédant ainsi, on aboutit à la CLE d'ordre 2 où le triplet  $(\overline{\mathbf{E}}_v^2, \overline{\mathbf{H}}_v^2, \overline{\mathbf{M}}_f^1)$  est remplacé par  $(\widetilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta)$ ,

$$(5.25) \quad \begin{cases} \widetilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = -\mu_0 \eta \left( \partial_t \Pi_{\parallel} \widetilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) + \int_0^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\nu, t) d\nu \right) \\ \text{Avec } \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta(t) \text{ solution sur } ]0, 1[ \text{ de :} \\ \partial_t \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta = |\gamma| \widetilde{\mathbf{H}}_T^\eta \times \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta \times \partial_t \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \\ \widetilde{\mathbf{H}}_T^\eta = \Pi_{\parallel} \widetilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \mathbf{p}, \\ \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta|_{t=0} = \mathbf{M}_0. \end{cases}$$

**Remarque 5.1** Si dans la solution approchée  $(\widetilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta)$  du système de Maxwell dans  $\Omega_v$  couplé avec la CLE (5.25), le couple  $(\widetilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  représente une approximation d'ordre 2 de la solution exacte  $(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)$ , d'après (5.22), le moment  $\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta$  n'est qu'une approximation d'ordre 1 de  $\mathbf{M}_f^\eta$ . Mais la quantité intéressante pour nous est bien  $(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)$ .

**Remarque 5.2** La CLE (5.25) ne tient pas compte de la répartition du moment magnétique à l'intérieur de la couche ferromagnétique, lequel n'est vu qu'en moyenne.

En effet, soit une bijection  $\beta$  de  $]0, 1[$  dans lui même, telle que pour toute fonction  $f$  (intégrable) :

$$(5.26) \quad \int f d\xi = \int f \circ \beta d\xi.$$

On pose  $\mathcal{M}_0(\xi) = \mathbf{M}_0(\beta(\xi))$  (on suppose pour simplifier que les autres caractéristiques de la couche ferromagnétiques sont constantes) et on considère  $\widetilde{\mathcal{M}}_f^\eta$  solution sur  $]0, 1[$  de :

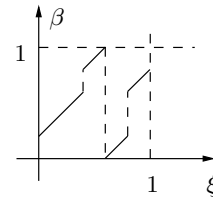


FIG. 5.2 – Exemple de  $\beta$

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{\mathcal{M}}_f^\eta = |\gamma| \widetilde{\mathcal{H}}_T^\eta \times \widetilde{\mathcal{M}}_f^\eta + \frac{\alpha}{|\widetilde{\mathcal{M}}_0|} \widetilde{\mathcal{M}}_f^\eta \times \partial_t \widetilde{\mathcal{M}}_f^\eta, \\ \widetilde{\mathcal{H}}_T^\eta = \Pi_{\parallel} \widetilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) + \Pi_{\perp} (\mathcal{M}_0 - \widetilde{\mathcal{M}}_f^\eta) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \widetilde{\mathcal{M}}_f^\eta) \mathbf{p}, \\ \widetilde{\mathcal{M}}_f^\eta|_{t=0} = \mathcal{M}_0. \end{cases}$$

Une telle solution vérifie également :  $\widetilde{\mathcal{M}}_f^\eta(\xi) = \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\beta(\xi))$ , ce qui prouve (d'après (5.26)) que  $(\widetilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \widetilde{\mathcal{M}}_f^\eta)$  satisfait aussi la condition aux limites (5.25).

La validité de cette condition sera approuvée par l'étude de stabilité menée plus tard. Nous allons motrer d'abord que cette condition est en fait d'ordre 3 (à l'instar du cas linéaire avec un bord droit).

### Condition d'ordre 3

Nous allons démontrer que cette condition coïncide avec la condition d'ordre 2. Ce résultat n'est valable que dans le cas monodimensionnel.

n° Considérons l'approximation d'ordre 3 suivante de  $(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)$  :

$$(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta) \approx (\overline{\mathbf{E}}_v^3, \overline{\mathbf{H}}_v^3) = (\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0) + \eta (\mathbf{E}_v^1, \mathbf{H}_v^1) + \eta^2 (\mathbf{E}_v^2, \mathbf{H}_v^2).$$

On a alors la condition aux limites :

$$(5.27) \quad \overline{\mathbf{E}}_v^3(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_f^0(0, t) \times \mathbf{n} + \eta \mathbf{E}_f^1(0, t) \times \mathbf{n} + \eta^2 \mathbf{E}_f^2(0, t) \times \mathbf{n}.$$

Les termes  $(\mathbf{E}_f^0 \times \mathbf{n})$  et  $(\mathbf{E}_f^1 \times \mathbf{n})$  sont donnés respectivement par (5.9) et (5.21). Caractérisons maintenant le terme  $(\mathbf{E}_f^2 \times \mathbf{n})$ . On remarque d'abord, d'après (5.14) appliqué à  $k = 1$  et en utilisant (5.9), que pour tout  $(\nu, t) \in ]0, 1[ \times \mathbf{R}^+$ ,

$$(5.28) \quad \mathbf{H}_f^1(\nu, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^1(0, t) \times \mathbf{n}$$

La formule (5.12) devient alors pour  $k = 2$  : pour tout  $(\nu, t) \in ]0, 1[ \times \mathbf{R}^+$ ,

$$(5.29) \quad \mathbf{E}_f^2(\nu, t) \times \mathbf{n} = -\mu_0 (1 - \nu) \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^1(0, t) - \mu_0 \int_{\nu}^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^1(\zeta, t) \times \mathbf{n} d\zeta$$

En posant

$$\overline{\mathbf{M}}_f^2 = \mathbf{M}_f^0 + \eta \mathbf{M}_f^1$$

on déduit à partir de (5.9), (5.21) et (5.29) que

$$(5.30) \quad \overline{\mathbf{E}}_v^3(0, t) \times \mathbf{n} = -\mu_0 \eta \left( \partial_t \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{H}}_v^3(0, t) + \int_0^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{M}}_f^2(\nu, t) d\nu \right) + O(\eta^3).$$

Par ailleurs, il est facile de voir (cf. Remarque 5.3), en posant

$$\overline{\mathbf{H}}_T^2 = \mathbf{H}_T^0 + \eta \mathbf{H}_T^1,$$

que  $\overline{\mathbf{M}}_f^2$  vérifie sur  $]0, 1[$

$$(5.31) \quad \begin{cases} \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^2 = |\gamma| \overline{\mathbf{H}}_T^2 \times \overline{\mathbf{M}}_f^2 + \frac{\alpha}{|\overline{\mathbf{M}}_0|} \overline{\mathbf{M}}_f^2 \times \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^2 + O(\eta^2), \\ \overline{\mathbf{M}}_f^2|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \end{cases}$$

et en utilisant (5.28) et (5.10), que

$$(5.32) \quad \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}^2 = \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{H}}_v^3(0, t) + \Pi_{\perp} (\mathbf{M}_0 - \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^2) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^2) \mathbf{p} + O(\eta^2).$$

On constate alors que la CLE d'ordre 3 obtenue en regroupant (5.30), (5.31) et (5.32) tout en omettant respectivement le  $O(\eta^3)$  et le  $O(\eta^2)$ , admet la même expression que la CLE d'ordre 2 (5.25).

**Remarque 5.3** *De manière générale, si on pose*

$$\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k = \sum_{i=0}^{k-1} \eta^i \mathbf{M}_{\mathbf{f}}^i \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}^k = \sum_{i=0}^{k-1} \eta^i \mathbf{H}_{\mathbf{T}}^i,$$

pour un certain  $k \geq 1$ , alors le couple  $(\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k, \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}^k)$  vérifie sur  $]0, 1[$ ,

$$(5.33) \quad \begin{cases} \partial_t \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k = |\gamma| \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}^k \times \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k \times \partial_t \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k + O(\eta^k), \\ \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \end{cases}$$

Il s'agit tout simplement de refaire le calcul inverse de l'identification formelle. En effet :

$$|\gamma| \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}^k \times \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k \times \partial_t \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k = \sum_{0 \leq i, j \leq k-1} \eta^{i+j} \left( |\gamma| \mathbf{H}_{\mathbf{T}}^i \times \mathbf{M}_{\mathbf{f}}^j + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M}_{\mathbf{f}}^i \times \partial_t \mathbf{M}_{\mathbf{f}}^j \right) + O(\eta^k)$$

On peut décomposer la somme qui figure au second membre en deux termes :

$$\sum_{0 \leq i, j \leq k-1} = \sum_{0 \leq i+j \leq k-1} + \sum_{i+j \geq k}$$

et remarquer que  $\eta^k$  se met en facteur de la deuxième somme qui de ce fait est un  $O(\eta^k)$ . Ainsi on obtient en faisant en plus le changement de variable  $(i, j) = (i + j, j)$  dans la première somme :

$$|\gamma| \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}^k \times \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k \times \partial_t \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k = \sum_{i=0}^{k-1} \eta^i \sum_{j=0}^i |\gamma| \mathbf{H}_{\mathbf{T}}^j \times \mathbf{M}_{\mathbf{f}}^{i-j} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M}_{\mathbf{f}}^j \times \partial_t \mathbf{M}_{\mathbf{f}}^{i-j} + O(\eta^k).$$

D'après (5.11) et (5.15), le second membre n'est autre que :

$$\sum_{i=0}^k \eta^i \partial_t \mathbf{M}_{\mathbf{f}}^i + O(\eta^{k+1}) = \partial_t \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{f}}^k + O(\eta^{k+1})$$

ce qui prouve le résultat énoncé.

### Etude de stabilité de la CLE (5.25)

Nous avons pour le système couplé : Maxwell-CLE d'ordre 2 ou 3 le théorème de stabilité  $L^2$  suivant (à comparer avec l'estimation (3.10) pour la solution exacte)



**Théorème 5.1** Soit  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)$  une solution suffisamment régulière des équations de Maxwell (3.8) couplées avec la CLE (5.25). On a alors l'identité suivante, pour tout  $t \geq 0$  :

$$(5.34) \quad \frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}_v^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_f^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_r(t) \} + \eta \frac{\mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \left| \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right|^2 d\nu = 0,$$

où on a posé :

$$(5.35) \quad \mathcal{E}_v^\eta(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_v} \left( \varepsilon_0 \left| \tilde{\mathbf{E}}^\eta \right|^2 + \mu_0 \left| \tilde{\mathbf{H}}^\eta \right|^2 \right) dx$$

$$(5.36) \quad \mathcal{E}_f^\eta(t) = \frac{\mu_0}{2} \int_0^1 \left( \left| \Pi_\perp(\mathbf{M}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \right|^2 + K_a \left| (\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right|^2 + \left| \mathbf{H}_s - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right|^2 \right) d\nu,$$

$$(5.37) \quad \mathcal{E}_r^\eta(t) = \frac{\mu_0}{2} \left| \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) \right|^2.$$

*Preuve.* Posons (pour simplifier les notations) pour tout  $t \geq 0$

$$\boldsymbol{\varphi}^\eta(t) = \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t).$$

En multipliant les deux premières équations de (3.8) respectivement par  $\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta$  et  $\tilde{\mathbf{H}}_v^\eta$ , on obtient, après avoir intégré par parties sur  $\Omega_v$ ,

$$(5.38) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_v^\eta(t) - (\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta(t) = 0.$$

En prenant le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$  de la première équation de (5.25) par  $\boldsymbol{\varphi}^\eta(t)$ , on obtient :

$$(5.39) \quad \eta \frac{\mu_0}{2} \frac{d}{dt} |\boldsymbol{\varphi}^\eta(t)|^2 + \eta \mu_0 \int_0^1 \partial_t \tilde{\mathbf{M}}^\eta(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta(t) d\nu = -(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta(t)$$

D'où, en regroupant (5.38) et (5.39),

$$(5.40) \quad \frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}_v^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_r^\eta(t) \} + \eta \mu_0 \int_0^1 \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta d\nu = 0$$

On pose

$$(5.41) \quad \tilde{\mathbf{H}}_{\text{eff}}^\eta = \Pi_\perp(\mathbf{M}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \mathbf{p}$$

de sorte que

$$\boldsymbol{\varphi}^\eta = \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta - \tilde{\mathbf{H}}_{\text{eff}}^\eta.$$

On a d'une part (propriété de la loi LLG, voir par exemple (1.27)),

$$(5.42) \quad \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta = \frac{\alpha}{\gamma |\mathbf{M}_0|} \left| \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right|^2.$$

et également (puisque  $\partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = 0$ )

$$\left| \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\nu, t) \right| = |\mathbf{M}_0(\nu)| \quad \text{pour } (\nu, t) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+.$$

Cette égalité montre en particulier que

$$(5.43) \quad \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{\text{eff}}^\eta = -\frac{1}{2} \partial_t \left( \left| \Pi_\perp(\mathbf{M}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \right|^2 + K_a \left| (\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right|^2 + \left| \mathbf{H}_s - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right|^2 \right).$$

D'après (5.42) et (5.43)

$$(5.44) \quad \mu_0 \int_0^1 \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta d\nu = \frac{d \mathcal{E}_f^\eta}{dt} + \frac{\mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \left| \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right|^2 d\nu.$$

On obtient finalement (5.34) en regroupant (5.40) et (5.44).

### 5.1.4 Vers les CLE d'ordre élevé

Nous savons d'ores et déjà d'après le cas linéaire (qui rappelons le, est un cas particulier de matériau ferromagnétique) que notre construction aboutira pour la condition d'ordre 4 à une instabilité par rapport au paramètre  $\eta$ . Le but de cette section est de voir, dans quelle mesure la technique de stabilisation appliquée au cas linéaire pourrait-elle se généraliser au cas non linéaire présent. Commençons donc par la...

#### Détermination de la forme instable de la condition d'ordre 4

Pour obtenir cette condition, nous utilisons les approximations :

$$(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta) \approx (\overline{\mathbf{E}}_v^4, \overline{\mathbf{H}}_v^4) = (\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0) + \eta (\mathbf{E}_v^1, \mathbf{H}_v^1) + \eta^2 (\mathbf{E}_v^2, \mathbf{H}_v^2) + \eta^3 (\mathbf{E}_v^3, \mathbf{H}_v^3),$$

$$(\overline{\mathbf{M}}_f^3, \overline{\mathbf{H}}_T^3) \approx (\overline{\mathbf{M}}^\eta, \overline{\mathbf{H}}_T^\eta) = (\mathbf{M}_f^0, \mathbf{H}_T^0) + \eta (\mathbf{M}_f^1, \mathbf{H}_T^1) + \eta^2 (\mathbf{M}_f^2, \mathbf{H}_T^2),$$

et écrivons la condition aux limites

$$(5.45) \quad \overline{\mathbf{E}}_v^4(0, t) \times \mathbf{n} = \sum_{i=0}^3 \eta^i \mathbf{E}_f^i(0, t) \times \mathbf{n},$$

où le seul terme indéterminé est  $(\mathbf{E}_f^3 \times \mathbf{n})$ . L'équation (5.14), appliquée à  $k = 2$ , s'écrit en remplaçant  $(\mathbf{E}_f^1 \times \mathbf{n})$  par son expression (5.21) : pour  $(\nu, t) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$ ,

$$\mathbf{H}_f^2(\nu, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^2(0, t) \times \mathbf{n} - \mu_0 \partial_{tt} \int_0^\nu \varepsilon_f(\zeta) \left( (1 - \zeta) \mathbf{H}_v^0(0, t) + \int_\zeta^1 \mathbf{M}_f^0(\kappa, t) d\kappa \right) \times \mathbf{n} d\zeta$$

que l'on peut écrire encore sous la forme suivante, en faisant une intégration par parties dans la seconde intégrale :

$$(5.46) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^2(\nu, t) \times \mathbf{n} = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^2(0, t) - \mu_0 \partial_{tt} \left( \chi(\nu) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t) + \int_0^1 \theta(\nu, \zeta) \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^0(\zeta, t) d\zeta \right)$$

où on a posé

$$\chi(\nu) = \int_0^\nu (1 - \zeta) \varepsilon(\zeta) d\zeta \quad \text{et} \quad \theta(\nu, \zeta) = \int_0^{\min(\nu, \zeta)} \varepsilon(\nu) d\nu$$

Nous déduisons finalement à partir de (5.12), appliqué à  $k = 3$ , l'expression suivante de  $(\mathbf{E}_f^3 \times \mathbf{n})$  : pour tout  $(\nu, t) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$

$$(5.47) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_f^3(\nu, t) \times \mathbf{n} &= -\mu_0 (1 - \nu) \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^2(0, t) - \mu_0 \int_\nu^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^2(\zeta, t) \times \mathbf{n} d\zeta \\ &+ \mu_0^2 \partial_{ttt} \int_\nu^1 \left( \chi(\zeta) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t) + \left( \int_0^1 \theta(\zeta, \kappa) \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^0(\kappa, t) d\kappa \right) \right) d\zeta \end{aligned}$$

En utilisant (5.30), (5.31), (5.32) et (5.47), nous constatons que la relation (5.45) s'écrit également

$$(5.48) \quad \begin{aligned} \overline{\mathbf{E}}_v^4(0, t) \times \mathbf{n} &= -\mu_0 \eta \left( \partial_t \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{H}}_v^4(0, t) + \int_0^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{M}}_f^3(\nu, t) d\nu \right) \\ &+ \mu_0^2 \eta^3 \partial_{tt} \int_0^1 \chi(\nu) \left( \partial_t \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{H}}_v^4(0, t) + \partial_t \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{M}}_f^3(\nu, t) \right) d\nu + O(\eta^4). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que :  $\int_0^1 \theta(\nu, \zeta) d\zeta = \int_0^1 \theta(\zeta, \nu) d\zeta = \chi(\nu)$  et donc

$$\int_0^1 \int_0^1 \theta(\zeta, \kappa) \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^0(\kappa, t) d\kappa d\zeta = \int_0^1 \chi(\kappa) \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^0(\kappa, t) d\kappa.$$

Par ailleurs, en utilisant (5.28), (5.10) et (5.46) on constate que pour  $(\nu, t) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$ ,

$$(5.49) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}_T^3 &= \Pi_{\parallel} \bar{\mathbf{H}}_v^4(0, t) + \Pi_{\perp} (\mathbf{M}_0 - \bar{\mathbf{M}}_f^3) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{M}}_f^3) \mathbf{p} \\ &\quad - \mu_0 \eta^2 \partial_{tt} \left( \chi(\nu) \Pi_{\parallel} \bar{\mathbf{H}}_v^4(0, t) + \int_0^1 \theta(\nu, \zeta) \Pi_{\parallel} \bar{\mathbf{M}}_f^3(\zeta, t) d\zeta \right) + O(\eta^3) \end{aligned}$$

D'autre part, la remarque 5.3 nous indique que le moment magnétique  $\bar{\mathbf{M}}_f^3$  est solution sur  $]0, 1[$  de :

$$(5.50) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{\mathbf{M}}_f^3 = |\gamma| \bar{\mathbf{H}}_T^3 \times \bar{\mathbf{M}}_f^3 + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \bar{\mathbf{M}}_f^3 \times \partial_t \bar{\mathbf{M}}_f^3 + O(\eta^3), \\ \bar{\mathbf{M}}_f^3|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \end{cases}$$

En éliminant les termes correcteurs dans (5.48), (5.49) et (5.50) on récupère une CLE d'ordre 4 qui portera désormais sur les champs  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta)$  au lieu de  $(\bar{\mathbf{E}}_v^4, \bar{\mathbf{H}}_v^4, \bar{\mathbf{M}}_f^3, \bar{\mathbf{H}}_T^3)$ . On peut l'écrire de manière compacte sous la forme

$$(5.51) \quad \begin{aligned} &\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = \mu_0 \eta \partial_t \int_0^1 \left( \tilde{\Psi}^\eta(\nu, t) - \mu_0 \eta^2 \chi(\nu) \partial_{tt} \tilde{\Psi}^\eta(\nu, t) \right) d\nu \\ &\text{Avec } \tilde{\Psi}^\eta(\nu, t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\nu, t) + \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) \text{ et } \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \text{ solution sur } ]0, 1[ \text{ de :} \\ &\begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = |\gamma| \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta \times \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \times \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \\ \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta = \tilde{\Psi}^\eta - \mu_0 \eta^2 \int_0^1 \theta(\nu, \zeta) \partial_{tt} \tilde{\Psi}^\eta(\zeta, t) d\zeta + \Pi_{\perp} \mathbf{M}_0 + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \mathbf{p}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta|_{t=0} = \mathbf{M}_0. \end{cases} \end{aligned}$$

## Commentaires

### ◇ Aspect non local

Contrairement aux équations du problème initial et aussi de la CLE d'ordre 2, la loi ferromagnétique intervenant dans la CLE (5.51) est non locale en espace. Ceci est due à la présence du terme

$$\mu_0 \int_0^1 \theta(\nu, \zeta) \partial_{tt} \tilde{\Psi}^\eta(\zeta, t) d\zeta$$

dans l'expression de  $\tilde{\mathbf{H}}_T^\eta$ . Regardons à quoi il ressemble : On note  $\Lambda$  l'opérateur défini par

$$(5.52) \quad \Lambda u(\nu) = \mu_0 \int_0^1 \theta(\nu, \zeta) u(\zeta) d\zeta \quad \text{pour } u \in L^2(0, 1).$$

Comme  $\theta(\nu, \zeta) = \int_0^{\min(\nu, \zeta)} \varepsilon_f(\kappa) d\kappa$ , nous avons :

$$(\Lambda u)(\nu) = \int_0^\nu \left( \int_0^\zeta \varepsilon_f(\kappa) d\kappa \right) u(\zeta) d\zeta + \int_\nu^1 \left( \int_0^\nu \varepsilon_f(\kappa) d\kappa \right) u(\zeta) d\zeta,$$

ce qui nous donne après avoir intégré par parties la première intégrale du second membre :

$$(5.53) \quad \Lambda u(\nu) = \int_0^\nu \varepsilon_f(\zeta) \left( \int_\zeta^1 u(\kappa) d\kappa \right) d\zeta.$$

On constate alors de  $\Lambda$  n'est autre que l'inverse de l'opérateur  $-\partial_\nu \varepsilon_f \partial_\nu$  sur  $]0, 1[$  avec une donnée de Dirichlet homogène en  $\nu = 0$  et une donnée de Neumann homogène en  $\nu = 1$ .

On conçoit bien l'aspect pénalisant que peut avoir la présence d'un tel terme pour la résolution numérique du problème.

### ∞ Vers une condition locale dans le cas homogène

Il est clair que dans le cas général, on ne peut pas se débarrasser du terme "génant"  $\Lambda \partial_{tt} \tilde{\Psi}^\eta$ . Nous avons cherché donc du côté de quelques cas particuliers simples. Le seul qui nous est réussi est celui d'une seule couche homogène. Supposons en effet les caractéristiques

$$\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_s, \mathbf{p}, \alpha \text{ et } K_a \text{ indépendants de } \nu.$$

Aussi paradoxal que ça puisse paraître, la simplification annoncée ne peut pas se faire directement sur l'expression de la CLE (5.51). Il nous faut reprendre une partie du processus de dérivation et l'adapter au cas homogène. En somme, nous allons dériver une nouvelle CLE qui, dans le cas homogène, est du même ordre que la condition générale (5.51).

L'idée repose sur la constatation suivante : dans le cas d'une couche homogène le premier terme  $\mathbf{M}_f^0$  du développement asymptotique de  $\mathbf{M}_f^\eta$  est indépendant de  $\nu$ . Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le système (5.11) qui permet de déterminer ce terme. En utilisant (5.10) on a que  $\mathbf{M}_f^0$  est solution de

$$(5.54) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}_f^0 = |\gamma| \mathbf{H}_T^0 \times \mathbf{M}_f^0 + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M}_f^0 \times \partial_t \mathbf{M}_f^0 & \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+, \\ \text{avec } \mathbf{H}_T^0 = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t) + \Pi_{\perp} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_f^0) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_f^0) \mathbf{p} & \text{dans } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{M}_f^0|_{t=0} = \mathbf{M}_0 & \text{dans } ]0, 1[, \end{cases}$$

Du fait que le terme (source)  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t)$  soit indépendant de  $\nu$ , il est possible de chercher une solution au problème (5.54) qui soit indépendante de  $\nu$ . Par unicité de la solution de ce problème (voir par exemple chapitre 6) on en déduit que  $\mathbf{M}_f^0$  est indépendant de  $\nu$ . Par conséquent, l'expression (5.46) s'écrit tout simplement

$$(5.55) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^2(\nu, t) \times \mathbf{n} = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^2(0, t) - \mu_0 \chi(\nu) \partial_{tt} \left( \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t) + \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^0(t) \right).$$

En utilisant (5.28), (5.10) et (5.55) on constate que

$$(5.56) \quad \begin{aligned} \overline{\mathbf{H}}_T^3 &= \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{H}}_v^4(0, t) + \Pi_{\perp} (\mathbf{M}_0 - \overline{\mathbf{M}}_f^3) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \overline{\mathbf{M}}_f^3) \mathbf{p} \\ &\quad - \mu_0 \eta^2 \chi(\nu) \partial_{tt} \left( \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{H}}_v^4(0, t) + \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{M}}_f^3(\nu, t) \right) + O(\eta^3) \end{aligned}$$

La nouvelle condition s'obtient en éliminant les termes correcteurs dans (5.48), (5.56) et (5.50). Elle s'écrit :

$$(5.57) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = \mu_0 \eta \partial_t \int_0^1 \left( \tilde{\Psi}^\eta(\nu, t) - \mu_0 \eta^2 \chi(\nu) \partial_{tt} \tilde{\Psi}^\eta(\nu, t) \right) d\nu \\ \text{Avec } \tilde{\Psi}^\eta(\nu, t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\nu, t) + \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) \text{ et } \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \text{ solution sur } ]0, 1[ \text{ de :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = |\gamma| \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta \times \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \times \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \\ \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta = \tilde{\Psi}^\eta - \mu_0 \eta^2 \chi \partial_{tt} \tilde{\Psi}^\eta + \Pi_{\perp} \mathbf{M}_0 + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \mathbf{p}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta|_{t=0} = \mathbf{M}_0. \end{array} \right. \end{cases}$$

On récupère à nouveau le caractère local en espace de la loi non linéaire dans la condition (5.57).

◇◇◇ **Caractère instable des CLE (5.51) et (5.57)**

Contrairement à la condition d'ordre 2 ou 3, on ne peut pas avoir le même type d'estimation d'énergie lorsqu'on utilise la condition d'ordre 4 (5.51) ou (5.57). Ce résultat découle de l'instabilité de la CLE d'ordre 4 du cas linéaire (théorème 4.2) obtenu en prenant  $\mathbf{M}_0 = 0$  ( $\Rightarrow \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = 0$ ). Cette condition linéaire s'écrit

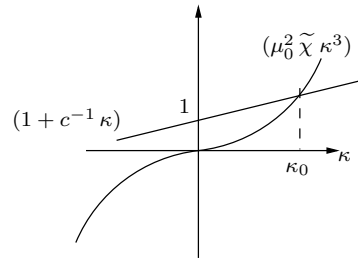
$$(5.58) \quad \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} + \mu_0 \eta \partial_t \left( \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}^\eta(0, t) - \mu_0 \tilde{\chi} \eta^2 \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}^\eta(0, t) \right) = 0$$

où  $\tilde{\chi}$  désigne la moyenne sur  $(0, 1)$  de  $\chi$ . On rappelle que l'instabilité provient de l'existence d'une racine en  $1/\eta$  à l'équation caractéristique qui lui est associée, à savoir (en posant  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ ).

$$1 + \frac{\eta}{c} s(1 - \mu_0 \tilde{\chi} \eta^2 s^2) = 0.$$

Cette équation admet une unique racine dont la partie réelle est positive. Cette racine est :  $s_0 = \kappa_0/\eta$  où  $\kappa_0$  est l'unique (voir dessin ci-contre) solution de

$$1 + \frac{\kappa}{c} (1 - \mu_0 \tilde{\chi} \kappa^2) = 0.$$



n° L'idée pour contourner cette instabilité est de généraliser les considérations de la section 4.2.6 au cas non linéaire.

**5.1.5 Conditions d'ordre 4 stables**

◇ **Rappels sur le cas linéaire**

Nous rappelons que le passage de la condition instable (5.58) à une condition stable du même ordre se fait en appliquant l'identité formelle

$$\left( 1 - \mu_0 \tilde{\chi} \eta^2 \partial_{tt} \right) = \left( I + \mu_0 \tilde{\chi} \eta^2 \partial_{tt} \right)^{-1} + O(\eta^3).$$

qui nous amène donc à la condition suivante (où on préfère l'écrire en introduisant une variable auxiliaire  $\tilde{\Phi}^\eta$ )

$$(5.59) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} + \mu_0 \eta \partial_t \tilde{\Phi}^\eta(t) = 0, \\ \tilde{\Phi}^\eta(t) + \mu_0 \tilde{\chi} \eta^2 \partial_{tt} \tilde{\Phi}^\eta(t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t). \end{cases}$$

◇◇ **Cas de la condition simplifiée (5.57) pour une couche homogène**

Nous allons commencer par la généralisation au cas plus simple de la condition (5.57). Suivant ce qui précède, la modification qui s'impose est d'appliquer pour tout  $\nu$  l'identité formelle

$$(5.60) \quad (1 - \mu_0 \chi(\nu) \eta^2 \partial_{tt}) = (I + \mu_0 \chi(\nu) \eta^2 \partial_{tt})^{-1} + O(\eta^3).$$

Elle nous dit que, si  $\tilde{\Phi}^\eta(\nu, t)$  est telle que

$$(5.61) \quad \tilde{\Phi}^\eta + \mu_0 \chi \eta^2 \partial_{tt} \tilde{\Phi}^\eta = \tilde{\Psi}^\eta \quad \text{sur } ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+,$$

alors (du moins formellement)

$$(5.62) \quad \tilde{\Psi}^\eta - \mu_0 \eta^2 \chi \partial_{tt} \tilde{\Psi}^\eta = \tilde{\Phi}^\eta + O(\eta^3)$$

On vérifie alors aisément, que le remplacement de  $(\tilde{\Psi}^\eta - \mu_0 \eta^2 \chi \partial_{tt} \tilde{\Psi}^\eta)$  par  $\tilde{\Phi}^\eta$  dans (5.57) est compatible avec l'ordre 4 de cette condition. La nouvelle CLE d'ordre 4 est donc :

$$(5.63) \quad \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = -\mu_0 \eta \int_0^1 \partial_t \tilde{\Phi}^\eta(\nu, t) d\nu \\ \text{Avec } \tilde{\Phi}^\eta(\nu, t) \text{ solution de} \\ \tilde{\Phi}^\eta(\nu, t) + \mu_0 \chi(\nu) \eta^2 \partial_{tt} \tilde{\Phi}^\eta(\nu, t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) + \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\nu, t) \\ \text{et } \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \text{ solution sur } ]0, 1[ \text{ de :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = |\gamma| \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta \times \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta + \frac{\alpha}{|\tilde{\mathbf{M}}_0|} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \times \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \\ \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta = \tilde{\Phi}^\eta + \Pi_{\perp} \mathbf{M}_0 + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \mathbf{p}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta|_{t=0} = \mathbf{M}_0. \end{array} \right. \end{array}$$

Cette condition est stable comme l'affirme le théorème suivant

**Théorème 5.2** *Soit  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \tilde{\Phi}^\eta, \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)$  une solution suffisamment régulière des équations de Maxwell (3.8) couplées avec la CLE (5.63). On a alors l'identité suivante, pour tout  $t \geq 0$  :*

$$(5.64) \quad \frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}_v^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_f^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_r(t) \} + \eta \frac{\mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha}{|\tilde{\mathbf{M}}_0|} |\partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta|^2 d\nu = 0,$$

où  $\mathcal{E}_v^\eta$  et  $\mathcal{E}_f^\eta$  sont respectivement données par (5.35) et (5.36) et où

$$\mathcal{E}_r(t) = \frac{\mu_0}{2} \int_0^1 \left( |\tilde{\Phi}^\eta - \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta|^2 + \eta^2 \mu_0 \chi |\partial_t \tilde{\Phi}^\eta|^2 \right) d\nu.$$

*Preuve.* Reprenons l'identité (5.38) qui est toujours valable (nous gardons la notation simplifiée,  $\varphi^\eta(t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t)$ ). En remplaçant  $\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta$  par son expression dans la condition aux limites (5.63), on obtient

$$(5.65) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_v^\eta(t) + \mu_0 \eta \int_0^1 \partial_t \tilde{\Phi}^\eta(\nu, t) \cdot \varphi^\eta(t) d\nu = 0.$$

Prenons le produit scalaire  $L^2(0, 1)$  de la deuxième équation de (5.63) par  $\partial_t \tilde{\Phi}^\eta$ . Il en découle l'identité

$$(5.66) \quad \int_0^1 \partial_t \tilde{\Phi}^\eta \cdot \varphi^\eta d\nu = \int_0^1 (\tilde{\Phi}^\eta - \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}^\eta) \cdot \partial_t \tilde{\Phi}^\eta d\nu + \mu_0 \eta^2 \frac{1}{2} \int_0^1 \chi \left| \partial_t \tilde{\Phi}^\eta \right|^2 d\nu.$$

D'autre part,

$$(5.67) \quad \left( \tilde{\Phi}^\eta - \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right) \cdot \partial_t \tilde{\Phi}^\eta = \frac{1}{2} \partial_t \left| \tilde{\Phi}^\eta - \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}^\eta \right|^2 + \left( \tilde{\Phi}^\eta - \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right) \cdot \partial_t \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}^\eta.$$

Comme  $\partial_t |\tilde{\mathbf{M}}^\eta|^2 = 0$ , on a :  $\partial_t |\Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}^\eta|^2 = -\partial_t |\Pi_{\perp} \tilde{\mathbf{M}}^\eta|^2$ . D'où (en utilisant que  $\Pi_{\perp} \tilde{\Phi}^\eta = 0$ )

$$(5.68) \quad \left( \tilde{\Phi}^\eta - \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right) \cdot \partial_t \tilde{\Phi}^\eta = \frac{1}{2} \partial_t \left| \tilde{\Phi}^\eta - \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}^\eta \right|^2 + \left( \tilde{\Phi}^\eta + \Pi_{\perp} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right) \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta.$$

En utilisant (5.68) dans (5.66), ensuite (5.66) dans (5.65), nous obtenons :

$$(5.69) \quad \frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}_v^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_r^\eta(t) \} + \eta \mu_0 \int_0^1 \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \left( \tilde{\Phi}^\eta + \Pi_{\perp} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right) d\nu = 0.$$

Remarquez maintenant qu'on se trouve dans la même situation que (5.40) puisque  $\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta$  est solution de l'équation LLG avec :

$$(5.70) \quad \tilde{\Phi}^\eta + \Pi_{\perp} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta - \tilde{\mathbf{H}}_{\text{eff}}^\eta,$$

où  $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{eff}}^\eta$  est donné par (5.41). Le même calcul entrepris pour le traitement (5.40) s'applique donc à (5.69) et nous permet de conclure.  $\square$

### ◇◇◇ Le cas général (condition (5.51))

Intéressons nous maintenant au cas de la condition non locale (5.51).

**Première approche (à valider).** La première piste naturelle consiste à vouloir appliquer la même identité formelle (5.60) que dans le cas de la condition locale. On considère donc  $\tilde{\Phi}^\eta$  donnée par (5.61). Nous avons d'une part l'identité formelle (5.62) et il nous faut d'autre part exprimer le terme  $(\tilde{\Psi}^\eta - \mu_0 \eta^2 \Lambda \tilde{\Psi}^\eta)$  figurant dans l'expression de  $\tilde{\mathbf{H}}_T^\eta$ . Puisque  $\int_0^1 \theta(\nu, \zeta) d\zeta = \chi(\nu)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} (1 - \mu_0 \eta^2 \Lambda \partial_{tt}) \tilde{\Psi}^\eta(\nu, t) &= (1 - \mu_0 \eta^2 \chi(\nu) \partial_{tt}) \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) + (1 - \mu_0 \eta^2 \Lambda \partial_{tt}) \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\nu, t) \\ &= (1 - \mu_0 \eta^2 \chi(\nu) \partial_{tt}) \tilde{\Psi}^\eta(\nu, t) + \mu_0 \eta^2 (\chi(\nu) - \Lambda) \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\nu, t). \end{aligned}$$

Donc, d'après (5.62),

$$(5.71) \quad (1 - \mu_0 \eta^2 \Lambda \partial_{tt}) \tilde{\Psi}^\eta = \tilde{\Phi}^\eta + \mu_0 \eta^2 (\chi - \Lambda) \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta + O(\eta^3).$$

La nouvelle condition s'obtient alors en appliquant les substitutions formelles (5.62) et (5.71) respectivement dans la première équation de (5.51) et dans l'expression de  $\tilde{\mathbf{H}}_T^\eta$ . Nous aboutissons ainsi à la condition (5.72) où c'est juste l'expression de  $\tilde{\mathbf{H}}_T^\eta$  qui a changé

$$(5.72) \quad \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = -\mu_0 \eta \int_0^1 \partial_t \tilde{\Phi}^\eta(\nu, t) d\nu \\ \text{Avec } \tilde{\Phi}^\eta(\nu, t) \text{ solution de} \\ \tilde{\Phi}^\eta(\nu, t) + \mu_0 \chi(\nu) \eta^2 \partial_{tt} \tilde{\Phi}^\eta(\nu, t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) + \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\nu, t) \\ \text{et } \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \text{ solution sur } ]0, 1[ \text{ de :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = |\gamma| \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta \times \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \times \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \\ \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta = \tilde{\Phi}^\eta + \mu_0 \eta^2 (\chi - \Lambda) \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta + \Pi_{\perp} \mathbf{M}_0 + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \mathbf{p}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta|_{t=0} = \mathbf{M}_0. \end{array} \right. \end{array}$$

Etudions maintenant la stabilité cette condition, en essayant d'établir un équivalent de l'identité (5.64). Si on reprend la démonstration du théorème 5.2, on constate qu'elle reste valide jusqu'à l'identité (5.69) tandis que (5.70) devient dans le cas présent

$$(5.73) \quad \tilde{\Phi}^\eta + \Pi_{\perp} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta - \tilde{\mathbf{H}}_{\text{eff}}^\eta - \mu_0 \eta^2 (\chi - \Lambda) \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta$$

Par ailleurs d'après l'expression (5.53) de  $\Lambda$ , en intégrant par parties, on déduit que

$$(5.74) \quad \int_0^1 \Lambda \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta d\nu = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varepsilon_f(\nu) \left| \int_{\nu}^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta d\zeta \right|^2 d\nu.$$

Ainsi, par (5.42), (5.43) et (5.74) on montre

$$(5.75) \quad \begin{aligned} \mu_0 \int_0^1 \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot (\tilde{\Phi}^\eta + \Pi_{\perp} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) d\nu &= \frac{d\mathcal{E}_f^\eta}{dt} + \frac{\mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \left| \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right|^2 d\nu \\ &+ \frac{\mu_0^2 \eta^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left( \varepsilon_f(\nu) \left| \int_{\nu}^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta d\zeta \right|^2 - \chi(\nu) \left| \partial_t \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right|^2 \right) d\nu \end{aligned}$$

où  $\mathcal{E}_f$  est donnée par (5.36). L'identité d'énergie qu'on récupère en regroupant (5.69) et (5.75) s'écrit en posant

$$(5.76) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}^\eta(t) &= \frac{\mu_0^2 \eta^2}{2} \int_0^1 \left( \varepsilon_f(\nu) \left| \int_{\nu}^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta d\zeta \right|^2 - \chi(\nu) \left| \partial_t \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right|^2 \right) d\nu, \\ \frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}_v^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_f^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_r(t) + \eta \mathcal{E}^\eta(t) \} &+ \eta \frac{\mu_0}{\gamma} \int_0^1 \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \left| \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \right|^2 d\nu = 0. \end{aligned}$$

Mais cette identité ne peut pas nous permettre de conclure quand à la stabilité du problème puisque la quantité  $\mathcal{E}^\eta(t)$  peut être négative : prenons comme exemple  $\varepsilon_f$  constant, donc  $\chi(\nu) = \varepsilon_f \frac{1}{2} (1 - (1 - \nu)^2)$ , et calculons

$$\mathcal{E}(u) = \int_0^1 \left( \int_{\nu}^1 u(\zeta) d\zeta \right)^2 - \left( \frac{1}{2} (1 - (1 - \nu)^2) \right) u(\nu)^2 d\nu,$$



pour une fonction  $u$  donnée. On remarque que lorsque  $u$  est une constante  $\mathcal{E}(u) = 0$  ce qui est en accord avec le résultat de stabilité du théorème 5.2. Par contre, si on prend par exemple  $u(\nu) = 1 - \nu$ , on trouve

$$\mathcal{E}(u) = \int_0^1 \frac{1}{4}(1 - \nu)^4 - \frac{1}{2}(1 - \nu)^2 + \frac{1}{2}(1 - \nu)^4 d\nu = -\frac{1}{6} + \frac{3}{20} < 0.$$

**n° Deuxième approche (surprenante).** Cette approche s'inspire de la première et repose sur la constatation (facile à vérifier à partir (5.53) en faisant deux intégrations par parties successives)

$$\int_0^1 (\Delta u)(\nu) d\nu = \int_0^1 \chi(\nu)u(\nu) d\nu$$

(cette identité a d'ailleurs été utilisée sous une autre forme dans la dérivation de la CLE d'ordre 4). D'où, la première équation de la CLE (5.51) s'écrit aussi

$$\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = \mu_0 \eta \partial_t \int_0^1 \left( \tilde{\Psi}^\eta(\nu, t) - \mu_0 \eta^2 \Lambda \partial_{tt} \tilde{\Psi}^\eta(\nu, t) \right) d\nu.$$

L'idée est donc : au lieu de (5.60), on va utiliser plutôt

$$\left( 1 - \mu_0 \Lambda \eta^2 \partial_{tt} \right) = \left( I + \mu_0 \eta^2 \Lambda \partial_{tt} \right)^{-1} + O(\eta^3),$$

de telle sorte que, si  $\tilde{\Phi}^\eta$  est telle que

$$\tilde{\Phi}^\eta + \mu_0 \eta^2 \Lambda \partial_{tt} \tilde{\Phi}^\eta = \tilde{\Psi}^\eta \quad \text{sur } ]0, 1[ \times \mathbf{R}^+$$

alors (du moins formellement)

$$\tilde{\Psi}^\eta - \mu_0 \eta^2 \Lambda \partial_{tt} \tilde{\Psi}^\eta = \tilde{\Phi}^\eta + O(\eta^3).$$

On aboutit enfin à la condition

$$\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = -\mu_0 \eta \int_0^1 \partial_t \tilde{\Phi}^\eta(\nu, t) d\nu$$

Avec  $\tilde{\Phi}^\eta(\nu, t)$  solution de

$$\tilde{\Phi}^\eta(\nu, t) + \mu_0 \eta^2 (\Lambda \partial_{tt} \tilde{\Phi}^\eta)(\nu, t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) + \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\nu, t)$$

et  $\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta$  solution sur  $]0, 1[$  de :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = |\gamma| \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta \times \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \times \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \\ \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta = \tilde{\Phi}^\eta + \Pi_{\perp} \mathbf{M}_0 + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \mathbf{p}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta|_{t=0} = \mathbf{M}_0. \end{cases}$$

Ce qui est surprenant dans l'histoire est que, sans que ça soit clair à première vue, nous n'avons fait par ces manipulations que réécrire différemment les équations du problème exact

adimensionné! Autrement dit, la condition (5.77) est une condition exacte. Par rapport aux équations (3.1), (5.4), (5.3), (5.5) et (5.6), on peut vérifier que

$$\tilde{\Phi}^\eta = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^\eta + \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^\eta \text{ et } \mathbf{E}_f^\eta(\nu, t) = -\eta\mu_0 \int_{\nu}^1 \partial_t \tilde{\Phi}^\eta(\zeta, t) d\zeta.$$

Nous avons donc comme l'impression d'avoir tourné en rond! Nous revenons aux équations de départ et on tombe dans la même problématique...

Il se trouve que malgré tout, la condition (5.77) n'est pas totalement inintéressante. Elle présente en quelque sorte une écriture (assez) astucieuse des équations de départ, qui nous permettra plus tard, lorsqu'on s'intéressera à l'étude numérique, de proposer un schéma de discrétisation en temps explicite à l'extérieur de la couche ferromagnétique et implicite dans la couche fine, et dont la condition de stabilité est indépendante de l'épaisseur  $\eta$ . En somme, ce schéma permettra de répondre à la problématique initiale, à savoir, avoir une discrétisation non contrainte par le contraste géométrique entre la couche fine et le domaine extérieur, et ceci de manière exacte. Néanmoins, par son aspect non local la condition (5.77) est légèrement plus coûteuse que les autres conditions locales.

## 5.2 Généralisation aux cas 2D et 3D

### 5.2.1 Description du modèle

Nous nous intéressons maintenant à la généralisation possible de la construction des CLE au cas d'une géométrie quelconque, néanmoins régulière, de la frontière  $\Gamma$ . Cette généralisation sera en quelque sorte une compilation du cas linéaire et le cas non linéaire 1D.

On considère désormais directement le cas d'une surface courbe  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^3$ . Et pour simplifier dans un premier temps, on supposera  $\varepsilon_f$  constant dans la couche. On indiquera vers la fin comment déduire les CLE dans le cas 2D et dans le cas d'un  $\varepsilon_f$  variable (remarque 5.8). Par ailleurs, après avoir traité dans la section précédente le cas d'une loi explicite, nous allons travailler ici avec la forme générale de la loi ferromagnétique (3.3). Notons que l'obtention d'estimations d'erreurs dans le cas 2D et 3D reste encore un problème ouvert. La validation que nous apportons aux CLE vient d'abord de l'étude de stabilité et ensuite des tests numériques effectués sur des cas particuliers.

Comme pour le cas linéaire courbe, notre construction s'intéressera uniquement aux cas des CLE d'ordre 1, 2 et 3. Nous maintenons donc les notations du chapitre 4.

Le problème de diffraction est constitué des équations (3.1), (3.6), (3.2), (3.3) et (3.5).

### 5.2.2 Etapes préparatoires de la dérivation effective des CLE

#### Changement d'échelle

Comme dans le cas linéaire, le changement d'échelle s'effectue en passant à une représentation paramétrique du domaine  $\Omega_f^\eta$ , adimensionnée dans le sens de la normale :

$$\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_f^\eta \longmapsto (\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \in \Gamma \times [0, 1] \text{ telles que } \mathbf{x} = \mathbf{x}_\Gamma + \eta\nu \mathbf{n}.$$

Pour simplifier on continue de noter  $(\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta, \mathbf{M}_f^\eta)$  les inconnues dans le domaine adimensionné  $\Gamma \times ]0, 1[$ . Le système (3.2) s'écrit

$$(5.78) \quad \begin{cases} \varepsilon_f \partial_t \mathbf{E}_f^\eta - \mathcal{T}_\Gamma^{\eta\nu} \mathbf{H}_f^\eta + \frac{1}{\eta} \partial_\nu (\mathbf{H}_f^\eta \times \mathbf{n}) = 0 \\ \mu_0 \partial_t (\mathbf{H}_f^\eta + \mathbf{M}_f^\eta) + \mathcal{T}_\Gamma^{\eta\nu} \mathbf{E}_f^\eta - \frac{1}{\eta} \partial_\nu (\mathbf{E}_f^\eta \times \mathbf{n}) = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Gamma \times ]0, 1[ \times \mathbf{R}^+,$$

où l'opérateur surfacique  $\mathcal{T}_\Gamma^{\eta\nu}$  est défini dans le lemme (4.6).

Afin d'écrire la loi ferromagnétique sur le domaine adimensionné, à l'instar du cas 1D, nous supposons les caractéristiques de la couche ferromagnétique indépendantes de l'épaisseur  $\eta$  de la couche. Il existe alors,  $\mathcal{L}$ ,  $\Phi$  et  $\mathbf{M}_0$ , fonctionnelles et fonctions définies sur  $\Gamma \times ]0, 1[$  et indépendantes de  $\eta$ , telles que, pour  $\mathbf{x} \in \Omega_f^\eta$ ;  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\Gamma + \eta\nu \mathbf{n}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\eta(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}) &= \mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}_\Gamma, \nu), \quad \mathbf{m}, \mathbf{h} \in \mathbf{R}^3, \\ \Phi^\eta(\mathbf{m}; \mathbf{x}) &= \Phi(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}_\Gamma, \nu), \quad m \in \mathbf{R}^3, \\ \mathbf{M}_0^\eta(\mathbf{x}) &= \mathbf{M}_0(\mathbf{x}_\Gamma, \nu). \end{aligned}$$

Cette précision étant faite, nous n'indiquerons plus de manière explicite (par soucis d'allègement des notations) la dépendance de  $\mathcal{L}$  et de  $\Phi$  en la variable  $(\mathbf{x}_\Gamma, \nu)$ . La loi non linéaire (3.3) s'écrit donc

$$(5.79) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}_f^\eta = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_T^\eta) \quad \text{avec } \mathbf{H}_T^\eta = \mathbf{H}_f^\eta - \partial_{\mathbf{m}} \Phi(\mathbf{M}_f^\eta) \quad \text{dans } \Gamma \times ]0, 1[ \times \mathbf{R}^+, \\ \mathbf{M}_f^\eta|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \quad \text{dans } \Gamma \times ]0, 1[. \end{cases}$$

Le problème de diffraction adimensionné est formé par les équations (3.1), (4.8), (5.78), (5.79) et (4.10).

### Développement asymptotique et principe de la construction

Nous supposons l'existence du développement asymptotique (4.11) auquel nous rajoutons l'analogie pour  $\mathbf{M}_f^\eta$  :

$$(5.80) \quad \mathbf{M}_f^\eta = \mathbf{M}_f^0 + \eta \mathbf{M}_f^1 + \eta^2 \mathbf{M}_f^2 + \dots$$

Contrairement à ce qui a été fait jusqu'à maintenant, nous n'allons pas expliciter les problèmes auxiliaires que doivent satisfaire les moments  $\mathbf{M}_f^i$  (pour cela il aurait fallu expliciter le développement de la loi non linéaire  $\mathcal{L}$  (voir par exemple le chapitre (6))). On admet juste l'existence d'un tel développement.

Reprenons maintenant le principe de construction explicité dans la section 4.2.3. Nous notons

$$(\overline{\mathbf{E}}_v^k, \overline{\mathbf{H}}_v^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k, \overline{\mathbf{M}}_f^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \eta^i (\mathbf{E}_v^i, \mathbf{H}_v^i, \mathbf{H}_f^i, \mathbf{M}_f^i).$$

S'inspirant des résultats établis en 1D, l'idée pour dériver les CLE dans le cas présent est de considérer d'abord  $\mathbf{M}_f^\eta$  comme un terme source donné pour les équations de Maxwell, ce terme source s'écrivant sous la forme (5.80). Cela nous permettra d'établir une première relation d'ordre  $k$ , sous la forme,

$$(5.81) \quad \overline{\mathbf{E}}_v^k \times \mathbf{n} = \mathcal{B}_k^\eta(\Pi_\parallel \overline{\mathbf{H}}_v^k) + \eta \mathcal{A}_k^\eta(\overline{\mathbf{M}}_f^{k-1}) + O(\eta^k) \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbf{R}^+,$$

où  $\mathcal{B}_k^\eta$  est le même opérateur linéaire surfacique que dans (4.23) et où  $\mathcal{A}_k^\eta$  est un opérateur linéaire volumique qui reste à déterminer. Nous rappelons les résultats du cas linéaire avec coefficients constants :

$$(5.82) \quad \begin{aligned} \mathcal{B}_1^\eta &= 0 \\ \mathcal{B}_2^\eta &= -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_0 \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right), \\ \mathcal{B}_3^\eta &= -\frac{\eta}{\varepsilon_f} \left( \varepsilon_f \mu_0 [1 - \eta(\mathcal{C} - H)] \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma (1 - \eta H) \text{rot}_\Gamma \right). \end{aligned}$$

Pour déterminer l'opérateur  $\mathcal{A}_k^\eta$ , nous utilisons la même procédure de construction que celle utilisée pour  $\mathcal{B}_k^\eta$  dans le cas linéaire. Nous commençons d'abord par une identification formelle dans les équations du problème à l'intérieur de la couche ferromagnétique. Ensuite, nous calculons progressivement les termes nécessaires à la construction de la CLE.

Une fois la condition (5.81) établie, la deuxième étape consiste à la coupler avec la loi non linéaire permettant la détermination de  $\overline{\mathbf{M}}_f^{k-1}$ . Or, les fonctions  $\mathcal{L}$  et  $\Phi$  étant régulières, on constate que si  $\mathbf{M}_f^\eta$  et  $\mathbf{H}_f^\eta$  sont telles que (5.80) et (4.11) aient lieu, alors

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta - \partial_m \Phi(\mathbf{M}_f^\eta)) = \mathcal{L}(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k - \partial_m \Phi(\overline{\mathbf{M}}_f^k)) + O(\eta^k).$$

D'où, nécessairement (pour  $k \geq 2$ )

$$(5.83) \quad \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^{k-1} = \mathcal{L}(\overline{\mathbf{M}}_f^{k-1}, \overline{\mathbf{H}}_f^{k-1} - \partial_m \Phi(\overline{\mathbf{M}}_f^{k-1})) + O(\eta^{k-1})$$

L'équivalent 1D de cette identité est donnée par la remarque 5.3. Regroupant (5.81) et (5.83), on s'aperçoit que le seul travail qui reste à faire, est d'exprimer (convenablement) le terme  $\overline{\mathbf{H}}_f^{k-1}$  en fonction de  $\overline{\mathbf{M}}_f^{k-1}$  et de la trace de  $\Pi_\parallel \overline{\mathbf{H}}_v^k$  sur  $\Gamma$ .

### Identification formelle

On suppose d'abord que  $\mathbf{M}_f^\eta$  est une donnée (pour le système de Maxwell (3.1)) qui s'écrit sous la forme (5.80). L'identification formelle est à effectuer dans les équations linéaires : (3.1), (4.8), (5.78) et (4.10).

On utilise bien entendu le développement de Taylor (4.77) de l'opérateur  $\mathcal{T}_\Gamma^{\eta\nu}$ .

Par rapport au cas linéaire, dans les équations identifiées (4.12), (4.13), (4.78) et (4.79), seule l'équation (4.78) est à remplacer par :

$$(5.84) \quad \begin{cases} \partial_\nu (\mathbf{E}_f^{k+1} \times \mathbf{n}) = \mu_0 \partial_t (\mathbf{H}_f^k + \mathbf{M}_f^k) + \sum_{i=0}^k (-\nu)^i \mathcal{T}_\Gamma^i \mathbf{E}_f^{k-i} \\ \mathbf{E}_f^{k+1}(\mathbf{x}_\Gamma, 1) \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{for } \mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma. \end{cases}$$

Par conséquent,  $\Pi_\parallel \mathbf{E}_f^0$  et  $\Pi_\parallel \mathbf{H}_f^0$  sont toujours donnés par (4.16), par contre la relation de récurrence donnée par le lemme 4.9 est à remplacer par celle donnée dans le lemme suivant :

**Lemme 5.1** *Pour tout  $k \geq 0$ , nous avons pour  $(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[$ ,*

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{E}_f^{k+1}(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} &= - \int_\nu^1 \mu_0 \partial_{tt} \left( \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k + \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^k \right) (\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \\
 &- \int_\nu^1 \frac{1}{\varepsilon_f} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i (-\xi)^{k-j} \vec{\text{rot}}_\Gamma^{(k-i)} \text{rot}_\Gamma^{(i-j)} \mathbf{H}_f^j(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \\
 &+ \int_\nu^1 \sum_{i=0}^k (-\xi)^{k-i} (\mathcal{C}^{k-i+1} \partial_t \mathbf{E}_f^i(\mathbf{x}_\Gamma, \xi)) \times \mathbf{n} d\xi
 \end{aligned}
 \tag{5.85}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{H}_f^{k+1}(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} &= \partial_t \mathbf{H}_v^{k+1}(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} - \int_0^\nu \varepsilon_f \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \\
 &- \int_0^\nu \frac{1}{\mu_0} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i (-\xi)^{k-j} \vec{\text{rot}}_\Gamma^{(k-i)} \text{rot}_\Gamma^{(i-j)} \mathbf{E}_f^j(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \\
 &- \int_0^\nu \sum_{i=0}^k (-\xi)^{k-i} (\mathcal{C}^{k-i+1} \partial_t \mathbf{H}_f^i(\mathbf{x}_\Gamma, \xi)) \times \mathbf{n} d\xi \\
 &- \int_0^\nu \sum_{i=0}^k (-\xi)^{k-i} \vec{\text{rot}}_\Gamma^{(k-i)} \partial_t (\mathbf{M}_f^i \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{5.86}$$

*Preuve.* Dans la preuve du lemme 4.9, nous avons montré l'équivalent de la relation (5.85) et laissé au lecteur le soin de conclure pour l'autre. Dans le cas présent, nous allons faire l'inverse en démontrant seulement (5.86). L'obtention d'une preuve complète de chaque lemme devient alors un exercice presque immédiat en regroupant les deux preuves!

En appliquant  $\Pi_{\parallel}$  à la première équation de (4.79), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \partial_\nu (\mathbf{H}_f^{k+1} \times \mathbf{n}) &= -\varepsilon_f \partial_t (\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k) + \sum_{i=0}^k (-\nu)^{k-i} \vec{\text{rot}}_\Gamma^{(k-i)} (\mathbf{H}_f^i \cdot \mathbf{n}) \\
 &- \sum_{i=0}^k (-\nu)^{k-i} (\mathcal{C}^{k-i+1} \partial_t \mathbf{H}_f^i) \times \mathbf{n}.
 \end{aligned}
 \tag{5.87}$$

D'autre part, en appliquant  $\Pi_{\perp}$  à la première équation de (5.84) on constate que pour tout  $i \geq 0$ ,

$$\mu_0 \partial_t (\mathbf{H}_f^i \cdot \mathbf{n}) = -\mu_0 \partial_t (\mathbf{M}_f^i \cdot \mathbf{n}) - \sum_{j=0}^i (-\nu)^{i-j} \text{rot}_\Gamma^{(i-j)} \mathbf{E}_f^j.
 \tag{5.88}$$

L'équation (5.86) s'obtient à partir de :  $\int_0^\nu \partial_t (5.87) d\xi$ , en utilisant l'expression de  $\partial_t (\mathbf{H}_f^i \cdot \mathbf{n})$  fourni par (5.88) et en utilisant la condition de continuité en  $\nu = 0$  donnée dans (4.79).  $\square$

### 5.2.3 Dérivation et étude de stabilité de la CLE d'ordre 2

Appliquons (5.85) à  $k = 0$ . Elle implique après la simplification due à (4.16)

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{E}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} &= -(1 - \nu) \left( \mu_0 \partial_{tt} + \frac{1}{\varepsilon_f} \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \right) \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) \\
 &- \int_\nu^1 \mu_0 \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^0(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{5.89}$$

D'après (5.89) et (4.16), on constate que pour  $\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma$ ,

$$(5.90) \quad \partial_t \overline{\mathbf{E}}_v^2(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} = \mathcal{B}_2^\eta(\Pi_\parallel \overline{\mathbf{H}}_v^2(\mathbf{x}_\Gamma)) - \eta \mu_0 \int_0^1 \partial_{tt} \Pi_\parallel \overline{\mathbf{M}}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) d\nu + O(\eta^2),$$

ce qui correspond bien à la relation (5.81) avec  $k = 2$ . Il nous reste à exprimer  $\overline{\mathbf{H}}_f^1$ . D'après (5.88) appliquée à  $k = 0$  et intégrée en temps, tout en utilisant (4.16),

$$(5.91) \quad \Pi_\perp \mathbf{H}_f^0 = \Pi_\perp (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_f^0).$$

Par conséquent, en réutilisant à nouveau (4.16), pour  $(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[$ ,

$$(5.92) \quad \begin{aligned} \overline{\mathbf{H}}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) &= \Pi_\parallel \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) + \Pi_\perp (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_f^0)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \\ &= \Pi_\parallel \overline{\mathbf{H}}_v^2(\mathbf{x}_\Gamma) + \Pi_\perp (\mathbf{M}_0 - \overline{\mathbf{M}}_f^1)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) + O(\eta) \end{aligned}$$

La CLE d'ordre 2 se déduit des équations (5.90), (5.83) pour  $k = 2$  et (5.92) en enlevant les termes correcteurs. Le triplet  $(\overline{\mathbf{E}}_v^2, \overline{\mathbf{H}}_v^2, \overline{\mathbf{M}}_f^1)$  est remplacé par  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)$  et la condition aux limite s'écrit

$$(5.93) \quad \boxed{\begin{aligned} \partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} &= \mathcal{B}_2^\eta(\Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma)) - \eta \mu_0 \int_0^1 \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) d\nu, \\ \text{où } \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) &\text{ satisfait pour } (\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[, \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta), \quad \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu)|_{t=0} = \mathbf{M}_0(\mathbf{x}_\Gamma, \nu), \\ \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) = \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma) + \Pi_\perp (\mathbf{M}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) - \partial_{\mathbf{m}} \Phi(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu). \end{array} \right. \end{aligned}}$$

**Remarque 5.4** *On remarque que l'expression de la CLE d'ordre 2 dans le cas général n'apporte pas de modifications sensibles par rapport au cas 1D (condition (5.25)) : on retrouve la même expression pour la loi non linéaire qui y intervient. Par ailleurs, les remarques 5.1 et 5.2 s'appliquent aussi à (5.93).*

La condition (5.93) est  $L^2$  stable d'après le théorème suivant.

**Théorème 5.3** *Toute solution suffisamment régulière  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)$  de  $\{(3.8), (5.93)\}$  satisfait,  $\forall t \geq 0$ ,*

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(t)| &= |\mathbf{M}_0| \text{ sur } \Gamma \times ]0, 1[ \text{ et} \\ \frac{d}{dt} \left\{ \mathcal{E}_v(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t), \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t)) + \eta \mathcal{E}_\Gamma^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_f^\eta(t) \right\} &\leq 0, \end{aligned}$$

où, si on pose,  $\varphi^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, t) = \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, t)$ ,  $(\mathbf{x}_\Gamma, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+$ ,

$$(5.94) \quad \mathcal{E}_\Gamma^\eta(t) = \frac{\mu_0}{2} \|\varphi^\eta(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_f} \left\| \int_0^t (\text{rot}_\Gamma \varphi^\eta)(\tau) d\tau \right\|_{L^2}^2,$$

$$(5.95) \quad \mathcal{E}_f^\eta(t) = \frac{\mu_0}{2} \|\Pi_\perp (\mathbf{M}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(t))\|_{L^2}^2 + \mu_0 \int_{\Gamma \times ]0, 1[} \Phi(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(t)) d\mathbf{x}_\Gamma d\nu.$$

*Preuve.* La conservation de la norme de l'aimantation découle directement de (3.4)(ii). A partir de (4.28) et en prenant le produit scalaire  $L^2(\Gamma)$  de la première équation de (5.93), on montre

$$(5.96) \quad \frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}_v(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t), \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t)) + \eta \mathcal{E}_\Gamma^\eta(t) \} = -\mu_0 \int_\Gamma \int_0^1 \partial_t \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta(\mathbf{x}_\Gamma) d\nu d\mathbf{x}_\Gamma.$$

Pour  $(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[$ ,

$$\partial_t \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta = \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta = \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \left( \tilde{\mathbf{H}}_\Gamma^\eta + \partial_m \Phi(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) - \Pi_\perp(\mathbf{M}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \right).$$

Puisque  $\partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \tilde{\mathbf{H}}_\Gamma^\eta \geq 0$  par la propriété (3.4)(iii), on déduit

$$\partial_t \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta \geq \partial_t \left\{ \Phi(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) + \frac{1}{2} |\Pi_\perp(\mathbf{M}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)|^2 \right\},$$

et en intégrant sur  $\Gamma \times ]0, 1[$ ,

$$(5.97) \quad -\mu_0 \int_\Gamma \int_0^1 \partial_t \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta(\mathbf{x}_\Gamma) d\nu d\mathbf{x}_\Gamma \leq -\frac{d}{dt} \mathcal{E}_f^\eta(t)$$

L'identité d'énergie du théorème (5.3) se déduit en identifiant le terme de droite dans (5.96) avec le terme de gauche dans (5.97).  $\square$

### 5.2.4 Dérivation et étude de stabilité de la CLE d'ordre 3

L'équation (5.86) appliquée à  $k = 0$  s'écrit, une fois intégrée en temps, en utilisant (4.16),

$$(5.98) \quad \Pi_\parallel \mathbf{H}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) = \Pi_\parallel \mathbf{H}_v^1(\mathbf{x}_\Gamma) - \nu \mathcal{C} \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) - \int_0^\nu \nabla_\Gamma ((\mathbf{M}_f^0 - \mathbf{M}_0) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi.$$

Considérons (5.85) pour  $k = 1$  :

$$(5.99) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{E}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} &= - \int_\nu^1 \mu_f \partial_{tt} \Pi_\parallel (\mathbf{H}_f^1 + \mathbf{M}_f^1)(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi + \int_\nu^1 (\mathcal{C} \partial_t \mathbf{E}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \xi)) \times \mathbf{n} d\xi \\ &- \int_\nu^1 \frac{1}{\varepsilon_f} \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \mathbf{H}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \\ &+ \int_\nu^1 \xi \frac{1}{\varepsilon_f} (\vec{\text{rot}}_\Gamma^{(1)} \text{rot}_\Gamma + \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma^{(1)}) \mathbf{H}_f^0(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

$\Pi_\parallel \mathbf{H}_f^0$  est donné par (4.16),  $\Pi_\parallel \mathbf{H}_f^1$  est donné par (5.98) et nous avons :  $\mathcal{C} \partial_t \mathbf{E}_f^1 = \mathcal{C} \partial_t \Pi_\parallel \mathbf{E}_f^1$ , où  $\partial_t \Pi_\parallel \mathbf{E}_f^1$  est donné par (5.89). Nous obtenons alors, en effectuant sur (5.99) les mêmes simplifications du cas linéaire ((4.87)  $\rightarrow$  (4.89)),

$$(5.100) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{E}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \times \mathbf{n} &= -\mu_0 \partial_{tt} \left( (1 - \nu) \Pi_\parallel \mathbf{H}_v^1(\mathbf{x}_\Gamma) - (1 - \nu^2)(\mathcal{C} - H) \Pi_\parallel \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) \right) \\ &- \frac{1}{\varepsilon_f} \left( (1 - \nu) \vec{\text{rot}}_\Gamma \text{rot}_\Gamma \Pi_\parallel \mathbf{H}_v^1(\mathbf{x}_\Gamma) - (1 - \nu^2) \vec{\text{rot}}_\Gamma H \text{rot}_\Gamma \Pi_\parallel \mathbf{H}_v^0(\mathbf{x}_\Gamma) \right) \\ &- \mu_0 \partial_{tt} \int_\nu^1 \left( \Pi_\parallel \mathbf{M}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) + \int_\xi^1 (2H - \mathcal{C}) \Pi_\parallel \mathbf{M}_f^0(\mathbf{x}_\Gamma, \tau) d\tau \right) d\xi \\ &+ \mu_0 \partial_{tt} \int_\nu^1 \int_0^\xi \nabla_\Gamma (\mathbf{M}_f^0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_\Gamma, \tau) d\tau d\xi. \end{aligned}$$

En regroupant (5.100), (5.89) et (4.16), on constate que

$$(5.101) \quad \begin{aligned} \partial_t \bar{\mathbf{E}}_v^3(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} &= \mathcal{B}_3^\eta(\Pi_\parallel \bar{\mathbf{H}}_v^3(\mathbf{x}_\Gamma)) - \eta \mu_0 \partial_{tt} \int_0^1 (1 + \eta \nu (2H - \mathcal{C})) \Pi_\parallel \bar{\mathbf{M}}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) d\nu \\ &+ \eta^2 \mu_0 \partial_{tt} \int_0^1 (1 - \nu) \nabla_\Gamma (\bar{\mathbf{M}}_f^2 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) d\nu + O(\eta^3) \end{aligned}$$

$$(\text{Nous y avons utilisé : } \int_0^1 f(\xi) \left( \int_\xi^1 g(\nu) d\nu \right) d\xi = \int_0^1 \left( \int_0^\xi f(\nu) d\nu \right) g(\xi) d\xi.)$$

Pour compléter la CLE d'ordre 3, il nous reste à déterminer  $\bar{\mathbf{H}}_f^2$ . L'équation (5.88), écrite pour  $k = 1$  devient, en l'intégrant en temps et en utilisant (5.89) et la simplification  $\text{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma = 0$ ,

$$(5.102) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}_f^1(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \cdot \mathbf{n} &= -(\mathbf{M}_f^1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) + (1 - \nu) \text{div}_\Gamma (\Pi_\parallel \mathbf{H}_v^0)(\mathbf{x}_\Gamma) \\ &- \int_\nu^1 \text{div}_\Gamma (\Pi_\parallel (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_f^0))(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Ainsi, en regroupant (5.92), (5.98) et (5.102)

$$(5.103) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) &= (1 - \eta \nu \mathcal{C}) \Pi_\parallel \bar{\mathbf{H}}_v^3(\mathbf{x}_\Gamma) + \eta \int_0^\nu \nabla_\Gamma ((\mathbf{M}_0 - \bar{\mathbf{M}}_f^2) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi, \\ &+ \Pi_\perp (\mathbf{M}_0 - \bar{\mathbf{M}}_f^2)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) + \eta (1 - \nu) \left( \text{div}_\Gamma \Pi_\parallel \bar{\mathbf{H}}_v^3(\mathbf{x}_\Gamma) \right) \mathbf{n} \\ &- \eta \left( \int_\nu^1 \text{div}_\Gamma (\Pi_\parallel (\mathbf{M}_0 - \bar{\mathbf{M}}_f^2))(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \right) \mathbf{n} + O(\eta^2). \end{aligned}$$

On est maintenant en mesure de dériver une CLE d'ordre 3 en regroupant (5.101), (5.83) pour  $k = 3$  et (5.103), sans les termes correcteurs. Cette condition s'écrit :

$$(5.104) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} = \mathcal{B}_3^\eta(\Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma)) \\ \quad - \eta \mu_0 \partial_{tt} \int_0^1 (1 + \eta \nu (2H - \mathcal{C})) \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) d\nu \\ \quad + \eta^2 \mu_0 \partial_{tt} \int_0^1 (1 - \nu) \nabla_\Gamma (\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) d\nu \\ \text{où } \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \text{ satisfait pour } (\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[, \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_\Gamma^\eta), \quad \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu)|_{t=0} = \mathbf{M}_0(\mathbf{x}_\Gamma, \nu), \\ \tilde{\mathbf{H}}_\Gamma^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) = (1 - \eta \nu \mathcal{C}) \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma) + \eta \int_0^\nu \nabla_\Gamma ((\mathbf{M}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi, \\ \quad + \Pi_\perp (\mathbf{M}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) + \eta (1 - \nu) \left( \text{div}_\Gamma \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma) \right) \mathbf{n} \\ \quad - \eta \left( \int_\nu^1 \text{div}_\Gamma (\Pi_\parallel (\mathbf{M}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta))(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \right) \mathbf{n} - \partial_m \Phi(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu). \end{array} \right. \end{cases}$$

Cependant, contrairement au cas de la condition d'ordre 2, la condition d'ordre 3 ainsi obtenue, semble ne pas avoir de bonnes propriétés de stabilité au regard de la méthode



énergétique. En particulier il nous a été impossible de montrer l'équivalent du théorème 5.3 pour le problème couplé Maxwell-CLE (5.104). Notons tout de même que cette constatation ne permet pas de trancher sur le caractère stable ou pas de la condition (5.104).

Par ailleurs, les difficultés rencontrées lors de nos tentatives infructueuses pour montrer la stabilité, nous ont permis de trouver les bonnes modifications à apporter aux expressions (5.101) et (5.103), afin d'aboutir à la bonne expression de la CLE. Ces modifications devaient bien sûr, être de nature à conserver l'ordre indiqué dans chaque expression. Elles s'opèrent comme suit :

- Dans la relation (5.101), nous remplaçons l'opérateur  $(1 + \eta \nu (2H - C))$  par  $(1 + \eta \nu 2H)(1 - \eta \nu C)$ . Comme

$$(5.105) \quad 1 + \eta \nu (2H - C) = (1 + \eta \nu 2H)(1 - \eta \nu C) + O(\eta^2)$$

on a aussi en posant (pour condenser les formules) :  $r^\eta \stackrel{\text{def}}{=} (1 + \eta \nu 2H)$ ,

$$(5.106) \quad \begin{aligned} \partial_t \bar{\mathbf{E}}_v^3(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} &= \mathcal{B}_3^\eta(\Pi_\parallel \bar{\mathbf{H}}_v^3(\mathbf{x}_\Gamma)) - \eta \mu_0 \partial_{tt} \int_0^1 (1 - \eta \nu C) \Pi_\parallel \bar{\mathbf{M}}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) r^\eta d\nu \\ &+ \eta^2 \mu_0 \partial_{tt} \int_0^1 (1 - \nu) \nabla_\Gamma (\bar{\mathbf{M}}_f^2 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) d\nu + O(\eta^3) \end{aligned}$$

**Remarque 5.5** Remarquons que  $\eta r^\eta d\nu d\mathbf{x}_\Gamma$  n'est autre que le développement d'ordre 3 de l'élément de volume  $d\Omega_f^\eta$ .

- Pour  $\mathbf{M}$  un champ de vecteurs de  $\mathbf{R}^3$ , défini sur  $\Gamma \times ]0, 1[$ , on définit  $\psi^\eta(\mathbf{M})$ , le champ scalaire sur  $\Gamma \times ]0, 1[$  donné par

$$(5.107) \quad \psi^\eta(\mathbf{M})(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) = (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n} - \frac{\eta}{r^\eta} \int_\nu^1 \text{div}_\Gamma (\Pi_\parallel (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}))(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi.$$

Puisque  $\frac{\eta}{r^\eta} = 1 + O(\eta)$ , on remarque que la relation (5.103) s'écrit aussi,

$$(5.108) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}_f^2(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) &= (1 - \eta \nu C) \Pi_\parallel \bar{\mathbf{H}}_v^3(\mathbf{x}_\Gamma) + \frac{\eta}{r^\eta} \int_0^\nu \nabla_\Gamma \psi^\eta(\bar{\mathbf{M}}_f^2)(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \\ &+ \left( \psi^\eta(\bar{\mathbf{M}}_f^2)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) + \frac{\eta(1 - \nu)}{r^\eta} \text{div}_\Gamma \Pi_\parallel \bar{\mathbf{H}}_v^3(\mathbf{x}_\Gamma) \right) \mathbf{n} + O(\eta^2). \end{aligned}$$

La nouvelle condition d'ordre 3 s'obtient en regroupant (5.106), (5.83) pour  $k = 3$  et (5.108) sans les termes correcteurs. En conclusion, si pour un champ de vecteurs  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{R}^3$  défini sur  $\Gamma \times ]0, 1[$ , on définit le champ de vecteurs tangentiels  $\Psi^\eta(\mathbf{M})$  par

$$(5.109) \quad \Psi^\eta(\mathbf{M})(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) = r^\eta (1 - \eta \nu C) \Pi_\parallel \mathbf{M}(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) - \eta (1 - \nu) \nabla_\Gamma (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_\Gamma, \nu),$$

alors la CLE d'ordre 3 s'écrit

$$(5.110) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma) \times \mathbf{n} = \mathcal{B}_3^\eta(\Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma)) - \eta \mu_0 \int_0^1 \Psi^\eta(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) d\nu, \\ \text{où } \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \text{ satisfait pour } (\mathbf{x}_\Gamma, \nu) \in \Gamma \times ]0, 1[, \\ \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta), \quad \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu)|_{t=0} = \mathbf{M}_0(\mathbf{x}_\Gamma, \nu), \\ \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) = (1 - \eta \nu C) \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma) + \frac{\eta}{r^\eta} \int_0^\nu \nabla_\Gamma \psi^\eta(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, \xi) d\xi \\ \quad + \left( \psi^\eta(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu) + \frac{\eta(1 - \nu)}{r^\eta} \text{div}_\Gamma \Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma) \right) \mathbf{n} - \partial_m \Phi(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)(\mathbf{x}_\Gamma, \nu). \end{array} \right.$$

La justification principale de cette condition provient de l'estimation énergétique suivante :

**Théorème 5.4** *On suppose que  $\eta < \frac{1}{|2H|}$ . Alors toute solution suffisamment régulière  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)$  de  $\{(3.8), (5.110)\}$  satisfait,  $\forall t \geq 0$ ,*

$$|\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(t)| = |\mathbf{M}_0| \text{ sur } \Gamma \times ]0, 1[ \text{ et}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \mathcal{E}_v(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t), \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t)) + \eta \mathcal{E}_r^\eta(t) + \eta \mathcal{E}_f^\eta(t) \right\} \leq 0,$$

où, si on pose,  $\varphi^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(\mathbf{x}_\Gamma, t)$ ,  $(\mathbf{x}_\Gamma, t) \in \Gamma \times \mathbf{R}^+$ ,

$$\mathcal{E}_r^\eta(t) = \frac{\mu_0}{2} \int_{\Gamma} ((1 - \eta(\mathcal{C} - H))\varphi^\eta) \cdot \varphi^\eta d\mathbf{x}_\Gamma + \frac{1}{2\varepsilon_f} \int_{\Gamma} (1 - \eta H) \left| \int_0^t (\text{rot}_{\Gamma} \varphi^\eta)(\tau) d\tau \right|^2 d\mathbf{x}_\Gamma,$$

$$\mathcal{E}_f^\eta(t) = \mu_0 \int_{\Gamma \times ]0, 1[} \left( \frac{1}{2} |\psi^\eta(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(t))|^2 + \Phi(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(t)) \right) r^\eta d\mathbf{x}_\Gamma dv.$$

**Remarque 5.6** *Comme pour le théorème 4.5, on retrouve l'équivalent de l'estimation uniforme sur l'énergie dans le vide (3.13), lorsque  $\eta \inf_{\Gamma} (\max(|c_1 + c_2|, |c_1 - c_2|)) \leq 2$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont les courbures principales de  $\Gamma$ . Cette condition sur  $\eta$  est plus forte que la condition requise par le théorème.*

*Preuve.* La conservation de la norme de l'aimantation découle directement de (3.4)(ii). L'identité (5.96) s'écrit dans le cas de la condition (5.110)

$$(5.111) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \mathcal{E}_v(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t), \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t)) + \eta \mathcal{E}_r^\eta(t) \right\} = -\mu_0 \int_{\Gamma} \int_0^1 \partial_t \Psi^\eta(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \cdot \varphi^\eta dv d\mathbf{x}_\Gamma.$$

D'après la définition (5.109) de  $\Psi^\eta$  et par symétrie de  $(1 - \eta\nu\mathcal{C})$ ,

$$(5.112) \quad \partial_t \Psi^\eta(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \cdot \varphi^\eta = r^\eta \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot ((1 - \eta\nu\mathcal{C})\varphi^\eta) - \eta(1 - \nu) \nabla_{\Gamma} (\partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \mathbf{n}) \cdot \varphi^\eta,$$

et on a, par (5.96),

$$(1 - \eta\nu\mathcal{C})\varphi^\eta = \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta + \partial_m \Phi(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) - \frac{\eta}{r^\eta} \int_0^\nu \nabla_{\Gamma} \psi^\eta(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) d\xi$$

$$- \left( \psi^\eta(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) + \frac{\eta(1 - \nu)}{r^\eta} \text{div}_{\Gamma} \varphi^\eta \right) \mathbf{n}$$

Pour  $\eta < \frac{1}{|2H|}$ , le réel  $r^\eta > 0$ . D'où, par la propriété (3.4)(iii),  $r^\eta \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \tilde{\mathbf{H}}_T^\eta \geq 0$ , et par suite

$$(5.113) \quad r^\eta \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot ((1 - \eta\nu\mathcal{C})\varphi^\eta) \geq r^\eta \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \left( \partial_m \Phi(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) - \psi^\eta(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \mathbf{n} \right)$$

$$- \eta \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \left( \int_0^\nu \nabla_{\Gamma} \psi^\eta(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) d\xi + \eta(1 - \nu) (\text{div}_{\Gamma} \varphi^\eta) \mathbf{n} \right).$$

La substitution de (5.113) dans (5.112), implique, après intégration sur  $\Gamma \times [0, 1]$  et multiplication par  $-\mu_0$ ,

$$\begin{aligned}
 (5.114) \quad -\mu_0 \int_{\Gamma} \int_0^1 \partial_t \Psi^\eta(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma &\leq -\mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \int_0^1 \Phi(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta(t)) \, r^\eta \, d\mathbf{x}_\Gamma \, d\nu \\
 &+ \mu_0 \int_{\Gamma} \int_0^1 \boldsymbol{\psi}^\eta(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \partial_t(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \mathbf{n}) \, r^\eta \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma \\
 &+ \eta \mu_0 \int_{\Gamma} \int_0^1 \left( \int_0^\nu \nabla_\Gamma \boldsymbol{\psi}^\eta(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \, d\xi \right) \cdot \partial_t \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma \\
 &+ \eta \mu_0 \int_0^1 (1-\nu) \int_{\Gamma} \nabla_\Gamma (\partial_t \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta \, d\mathbf{x}_\Gamma \, d\nu \\
 &+ \eta \mu_0 \int_0^1 (1-\nu) \int_{\Gamma} (\partial_t \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \mathbf{n}) (\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\varphi}^\eta) \, d\mathbf{x}_\Gamma \, d\nu
 \end{aligned}$$

En intégrant par parties sur  $\Gamma$  on s'aperçoit que la somme des deux derniers termes de (5.114) est nulle. Notons

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{\Gamma} \int_0^1 \boldsymbol{\psi}^\eta(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \cdot \partial_t(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta \cdot \mathbf{n}) \, r^\eta \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma, \\
 I_2 &= \int_{\Gamma} \int_0^1 \left( \int_0^\nu \nabla_\Gamma \boldsymbol{\psi}^\eta(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \, d\xi \right) \cdot \partial_t \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma,
 \end{aligned}$$

de sorte que (5.114) s'écrit

$$-\mu_0 \int_{\Gamma} \int_0^1 \partial_t \Psi^\eta(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma \leq -\mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \int_0^1 \Phi(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta(t)) \, r^\eta \, d\mathbf{x}_\Gamma \, d\nu + \mu_0 (I_1 + \eta I_2).$$

En utilisant la définition (5.107) de  $\boldsymbol{\psi}^\eta$ , on a d'une part

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \int_{\Gamma} \int_0^1 \frac{1}{2} \partial_t \left| \Pi_\perp(\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \right|^2 \, r^\eta \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma \\
 &+ \eta \int_{\Gamma} \int_0^1 \partial_t((\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \cdot \mathbf{n}) \left( \int_\nu^1 \operatorname{div}_\Gamma(\Pi_\parallel(\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta)) \, d\xi \right) \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma
 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\Gamma} \int_0^1 \boldsymbol{\psi}^\eta(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \cdot \partial_t \left( \int_\nu^1 \operatorname{div}_\Gamma(\Pi_\parallel(\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta)) \, d\xi \right) \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma} \int_0^1 ((\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \cdot \mathbf{n}) \partial_t \left( \int_\nu^1 \operatorname{div}_\Gamma(\Pi_\parallel(\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta)) \, d\xi \right) \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma \\
 &\quad - \eta \int_{\Gamma} \int_0^1 \frac{1}{r^\eta} \frac{1}{2} \partial_t \left| \int_\nu^1 \operatorname{div}_\Gamma(\Pi_\parallel(\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta)) \, d\xi \right|^2 \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma.
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mu_0 (I_1 + \eta I_2) = -\mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \int_0^1 \frac{1}{2} \left| \boldsymbol{\psi}^\eta(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta)(t) \right|^2 \, r^\eta \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma,$$

et par suite

$$(5.115) \quad -\mu_0 \int_{\Gamma} \int_0^1 \partial_t \Psi^\eta(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \cdot \boldsymbol{\varphi}^\eta \, d\nu \, d\mathbf{x}_\Gamma \leq -\frac{d}{dt} \mathcal{E}_f(t).$$

Nous obtenons l'estimation d'énergie annoncée en combinant (5.115) et (5.111).  $\square$

**Remarque 5.7** *On remarque que contrairement au cas linéaire, lorsque la frontière  $\Gamma$  est plane :  $C = H = 0$ , l'expression de la condition d'ordre 3 ne coïncide pas avec la condition d'ordre 2 (nous renvoyons au chapitre 8 pour plus de précisions).*

**Remarque 5.8 [Le cas d'un  $\varepsilon_f$  variable].** *En reprenant le processus de dérivation, on remarque que les modifications qui sont à apporter aux CLE d'ordre 2 et 3, dans le cas d'un  $\varepsilon_f$  variable, ne concernent que les parties linéaires  $\mathcal{B}_2^\eta$  et  $\mathcal{B}_3^\eta$ . Ces opérateurs deviennent en posant pour  $\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma$ ,*

$$(5.116) \quad \begin{aligned} \chi_1(\mathbf{x}_\Gamma) &= \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon_f(\mathbf{x}_\Gamma, \nu)} d\nu \quad \text{et} \quad \chi_2(\mathbf{x}_\Gamma) = \int_0^1 \frac{\nu}{\varepsilon_f(\mathbf{x}_\Gamma, \nu)} d\nu, \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_2^\eta = -\eta \left( \mu_0 \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \chi_1 \text{rot}_\Gamma \right), \\ \mathcal{B}_3^\eta = - \left( \mu_0 (1 - \eta(C - H)) \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma (\chi_1 - 2\eta \chi_2 H) \text{rot}_\Gamma \right). \end{array} \right. \end{aligned}$$

**Remarque 5.9 [Expressions dans le cas 2D].** *Le cas 2D peut être considéré comme un cas particulier du cas 3D : pour dériver l'expression de la CLE sur une courbe plane  $\Gamma$ , on applique la CLE 3D au cylindre basée sur la courbe  $\Gamma$  et d'axe d'invariance la normale au plan contenant  $\Gamma$ . On élimine ensuite dans l'expression obtenue, toute dérivation suivant cet axe d'invariance.*



## Chapitre 6

# Analyse asymptotique et estimations d'erreur pour le modèle 1D non linéaire des CLE

**Résumé :** Dans ce chapitre nous abordons le problème de justification mathématique des modèles de couches minces établis au chapitre précédent. La nature non linéaire des modèles rend l'entreprise plus délicate qu'au chapitre 4 (section 4.3). C'est pourquoi nous nous sommes limités au cas monodimensionnel, qui peut encore se traiter par des techniques relativement élémentaires. Nous reportons l'étude des cas 2D et 3D à des travaux ultérieurs (pour lesquels il faudrait probablement faire appel à des techniques analogues à celles déjà utilisées au chapitre 2). Nous établissons tout d'abord que la solution du problème de transmission exact admet un développement de Taylor par rapport à l'épaisseur  $\eta$  du milieu ferromagnétique. C'est l'objet des sections 6.3 et 6.4 et plus précisément des théorèmes 6.2 et 6.3, ce dernier constituant le résultat clé de ce chapitre. A noter que contrairement au cas linéaire, nous n'avons pas pu démontrer les estimations (6.41) de façon directe mais à l'aide d'un argument de boot-strap (c'est le lemme 6.1). Nous nous intéressons ensuite au problème approché (6.68)-(6.71) dont nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution globale en temps à l'aide d'un argument à la Cauchy-Lipschitz-Picard (qui ne serait plus valable en dimension supérieure) ; c'est l'objet de la section 6.5.2. Nous démontrons ensuite le résultat principal de ce chapitre qui exprime que l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée est en  $O(\eta^{5/2})$  : c'est le théorème 6.6. Ce résultat est obtenu en démontrant l'existence d'un développement de Taylor en  $\eta$  pour la solution approchée : la technique utilisée est calquée sur celle utilisée dans la section 6.3 et s'appuie sur les résultats de stabilité établis au chapitre 5. Comme dans le cas linéaire, l'estimation d'erreur est obtenue de façon indirecte : on constate que les trois premiers termes du développement de Taylor des solutions exactes et approchées coïncident et on conclut par l'inégalité triangulaire. A noter que nous avons choisi de reproduire ici le texte d'un article (rédigé en anglais) que venons de soumettre pour publication : les deux premières sections, destinées à introduire le problème et rendre l'article "self-content", doublonnent donc avec les chapitres précédents de la thèse.

## 6.1 Introduction

The use of ferromagnetic materials is of real importance in stealth technology due to their absorbing properties with respect to electromagnetic waves. As the thickness of the ferromagnetic coating is in general very small compared to the radar's wavelengths, the numerical simulation of scattering experiments in such a situation needs very thin meshes, and may lead to very expensive discrete problems. We developed in [22, 23] an alternative approach by deriving Effective Boundary Conditions (EBC's) on the boundary of the thin layer, that permit to retrieve in an approximate way the absorption properties of the coating and to remove the mesh constrains on the discretization. The numerical validation of EBC's for ferromagnetic coatings had been achieved in [22].

The idea of introducing EBC's is now well known and largely used in scattering problems involving thin coatings. It was extensively developed for the time harmonic problems, in order to handle the case of linear dielectric materials, and the reader can found a little survey of this in [7, 41, 25]. The case of ferromagnetic materials is different due to the non linear aspect of the material constitutive law. We consider in the present work a simplified version of this law and study the error estimate with respect to thickness of the coating, between exact and approximate solutions.

This study concerns only the 1D problem and the generalization to 2D or 3D, where even the study of the exact problem is in our knowledge not yet totally achieved, needs certainly further developments. It is divided into two main parts :

**1. The existence of an asymptotic expansion of the exact solution with respect to the width of the thin coating.** This is the fundamental point in the construction of the effective conditions (see [22]). It justifies the use of the truncated series as an approximation of the exact solution. This result is based on a boot-strapping argument, using energy estimates (stability results with respect to time variable and the thickness of the thin layer). Three sections are devoted to this part. In section 2 we present the equations of the model as well as the main features of the 1D approximation. In section 3 we introduce the formal asymptotic development and prove the existence and the uniqueness of the solutions for the identified problems. This result precise as well the optimal conditions required for the initial data in order to pursue the asymptotic development till a given order  $k$ . The main result is given in section 4 which is called consistency result. It gives an estimation, with respect to thickness of the coating, on the difference between the exact solution and the truncated series formed by the solutions of the identified problems.

**2. Order of approximation provided by the effective boundary conditions.** We consider the case of the effective conditions (of order lesser or equal than 3). We prove first the existence and the uniqueness of solutions for the initial boundary value problem formed by Maxwell equations and the effective condition. Then, as in point 1, we prove the existence of an asymptotic expansion for this solution. The error estimate between the solution of point 1 and the solution of point 2 is obtained by comparing theirs respective asymptotic expansions.

## 6.2 Transmission problem in a fix domain

We consider the 1D problem, that is the fields depend on a single space variable. We denote by  $\Omega_v = ]-\infty, 0[$  (resp.  $\Omega_f^{\eta} = ]0, \eta[$ ) the vacuum domain, (resp. the ferromagnetic domain), where  $\eta > 0$  is the thickness of the ferromagnetic layer and will constitute the small

parameter of our problem. To remove the dependence of the geometry on this parameter (which is convenient with regards to the asymptotic study) we make the scaling  $\xi = x/\eta$  and transform  $\Omega_f^\eta$  onto  $\Omega_f = ]0, 1[$  (see figure 6.1).

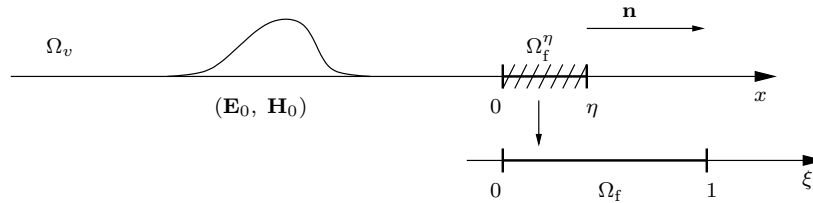


FIG. 6.1 – The 1D problem and the scaling

We denote by  $(\mathbf{E}_v^\eta(x, t), \mathbf{H}_v^\eta(x, t)) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$  (resp.  $(\mathbf{E}_f^\eta(\xi, t), \mathbf{H}_f^\eta(\xi, t)) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ ) the electromagnetic field at  $(x, t) \in \Omega_v \times \mathbf{R}^+$ , (resp. at  $(\xi, t) \in \Omega_f \times \mathbf{R}^+$ ) and we denote by  $\mathbf{M}_f^\eta$  the magnetization field that is defined on  $\Omega_f \times \mathbf{R}^+$  only. We consider now the following transmission problem

$$(6.1) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{E}_v^\eta - \text{rot } \mathbf{H}_v^\eta = 0, & \partial_t \mathbf{H}_v^\eta + \text{rot } \mathbf{E}_v^\eta = 0 & \text{on } \Omega_v \times \mathbf{R}^+, \\ (\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)(x, 0) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)(x), & x \in \Omega_v. \end{cases}$$

$$(6.2) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{E}_f^\eta - \eta^{-1} \text{rot } \mathbf{H}_f^\eta = 0, & \partial_t (\mathbf{H}_f^\eta + \mathbf{M}_f^\eta) + \eta^{-1} \text{rot } \mathbf{E}_f^\eta = 0 & \text{on } \Omega_f \times \mathbf{R}^+, \\ (\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)(\xi, 0) = 0, & \xi \in \Omega_f. \end{cases}$$

where we have the continuity relations, setting  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ ,

$$(6.3) \quad \mathbf{E}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_f^\eta(0, t) \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{H}_v^\eta(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_f^\eta(0, t) \times \mathbf{n},$$

and the condition of reflection

$$(6.4) \quad \mathbf{E}_f^\eta(1, t) \times \mathbf{n} = 0.$$

The magnetization  $\mathbf{M}_f^\eta$  is related to  $\mathbf{H}_f^\eta$  by

$$(6.5) \quad \partial_t \mathbf{M}_f^\eta = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta), \quad \mathbf{M}_f^\eta(\xi, 0) = \mathbf{M}_0(\xi), \quad \text{for a.e. } \xi \in \Omega_f.$$

where the ferromagnetic law  $\mathcal{L}$  is a  $C^\infty$  function from  $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$  into  $\mathbf{R}^3$  such that

$$(6.6) \quad \begin{aligned} (i) \quad & h \mapsto \mathcal{L}(m, h) \text{ is linear, } m \in \mathbf{R}^3, \\ (ii) \quad & \mathcal{L}(m, h) \cdot m = 0, \quad m, h \in \mathbf{R}^3, \\ (iii) \quad & \mathcal{L}(m, h) \cdot h \geq 0, \quad m, h \in \mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

**Remark 6.1** *In fact (6.6) corresponds to the essential properties, in view of the mathematical study, satisfied by the Landau-Lifshitz model*

$$(6.7) \quad \mathcal{L}(m, h) = \lambda_1 h \times m + \lambda_2 m \times (h \times m)$$

where  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are positive constants.



**Remark 6.2** *We only consider the case of homogeneous ferromagnetic law  $\mathcal{L}$ . The generalization to the non-homogeneous case,  $\mathcal{L}(m, h; \xi)$ , is in fact straightforward, if we assume that (6.6) holds for a.e.  $\xi \in \Omega_f$  and that  $\xi \mapsto \mathcal{L}(\cdot, \cdot; \xi)$  acts in  $L^\infty(\Omega_f)^3$ . This corresponds, for example, to (6.7) with  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  some bounded functions of  $\xi$ . Meanwhile, equation (6.5) treats the case of a non-homogeneous ferromagnetic layer as  $\mathbf{M}_0$  depends on  $\xi$ .*

**Remark 6.3** *The case exchange field cannot be put into the framework of present work. It corresponds to*

$$\partial_t \mathbf{M}_f^\eta = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta + \eta^{-2} \partial_{\xi\xi} \mathbf{M}_f^\eta)$$

*rather than (6.5). However, all the following results can be generalized (with minor modifications) to the case*

$$\partial_t \mathbf{M}_f^\eta = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta - (\nabla \Phi)(\mathbf{M}_f^\eta))$$

*where  $\Phi$  is some quadratic and positive function that takes into account the anisotropy terms and the presence of static magnetic fields.*

**Remark 6.4** *We take the physical constants equal to 1 in (6.1)  $\cdots$  (6.5) for the sake of simplicity of the mathematical proofs, and the small parameter  $\eta$  will be taken such that  $\eta < 1$ .*

Let us now precise some properties of the 1D model. The curl operator has a particular form : if we denote by  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  a function of  $(x, t)$  with values in  $\mathbf{R}^3$ , then

$$\text{rot } \mathbf{v} = (0, -\partial_x v_3, \partial_x v_2) = \partial_x (\mathbf{n} \times \mathbf{v}).$$

Using the following orthogonal decomposition  $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = (0, v_2, v_3) + (v_1, 0, 0)$  and introducing the notation

$$\Pi_{\parallel} \mathbf{v} = \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) = (0, v_2, v_3) \quad \text{and} \quad \Pi_{\perp} \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = (v_1, 0, 0),$$

one has in particular  $\mathbf{v} = \Pi_{\parallel} \mathbf{v} + \Pi_{\perp} \mathbf{v}$  and

$$\text{rot}(\Pi_{\perp} \mathbf{v}) = 0 \quad \text{and} \quad \text{rot}(\mathbf{v}) = \text{rot}(\Pi_{\parallel} \mathbf{v}).$$

Therefore by applying  $\Pi_{\perp}$  to the equations (6.1) and (6.2) we observe that

$$\Pi_{\perp} \mathbf{E}_v^\eta = \Pi_{\perp} \mathbf{E}_0, \quad \Pi_{\perp} \mathbf{H}_v^\eta = \Pi_{\perp} \mathbf{H}_0, \quad \Pi_{\perp} \mathbf{E}_f^\eta = 0 \quad \text{and} \quad \Pi_{\perp} \mathbf{H}_f^\eta = \Pi_{\perp} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_f^\eta).$$

We deduce that the effective unknowns of our 1D problem are just  $\{\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_v^\eta, \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^\eta, \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^\eta, \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^\eta, \mathbf{M}_f^\eta\}$ . Let us remark that we will use systematically in what follows the identification of  $\{0\} \times \mathbf{R}^2$  with  $\mathbf{R}^2$ .

The study of the Cauchy problem in  $\mathbf{R}^n$  formed by Maxwell's equations and the Landau-Lifshitz law (6.7) has been done in [45] for  $n = 1$  and generalized in [26] to  $n = 3$ . The class of initial boundary-value problems formed by (6.1)  $\cdots$  (6.5) have not been considered. However for  $n = 1$ , by doing minor modifications of the proofs, one can easily generalize the results of [45] to the problem considered here (However, it would not be so obvious to generalize [26] in

3D). We shall state without any details the result concerning the existence and the uniqueness of strong solutions to (6.1)  $\cdots$  (6.5). For  $m$  a given integer, and  $\Omega$  an open set of  $\mathbf{R}$ ,  $H^m(\Omega)$  denotes the usual Sobolev space and we denote by  $H_0^m(\Omega)$  the closure of  $\mathcal{D}(\Omega)$  in  $H^m(\Omega)$  equipped with its natural norm. We introduce the functional space

$$V^m = \left\{ (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in H_0^m(\Omega_v)^3 \times H_0^m(\Omega_v)^3 \times L^\infty(\Omega_f)^3 / \Pi_\perp \mathbf{E}_0 = \Pi_\perp \mathbf{H}_0 = 0 \right\}$$

that will constitute the space of the initial data  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)$ .

For  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^m$ , we set

$$\|(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)\|_{V^m}^2 = \|\mathbf{E}_0\|_{H^m}^2 + \|\mathbf{H}_0\|_{H^m}^2 + \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}^2$$

**Theorem 6.1** *Assume that  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^1$ . Then there exists a unique “strong” solution of (6.1)  $\cdots$  (6.5) that satisfies*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Pi_\parallel \mathbf{E}_v^\eta, \Pi_\parallel \mathbf{H}_v^\eta) \in \{C^1(0, \infty; L^2(\Omega_v)^2) \cap C^0(0, \infty; H^1(\Omega_v)^2)\}^2, \\ (\Pi_\parallel \mathbf{E}_f^\eta, \Pi_\parallel \mathbf{H}_f^\eta) \in \{C^1(0, \infty; L^2(\Omega_f)^2) \cap C^0(0, \infty; H^1(\Omega_f)^2)\}^2, \\ \mathbf{M}_f^\eta \in C^1(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^3) \cap C^2(0, \infty; L^2(\Omega_f)^3). \end{array} \right.$$

Moreover if we set

$$\mathcal{E}^\eta(t) = \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{E}_v^\eta(t)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{H}_v^\eta(t)\|_{L^2}^2 + \eta \left( \|\mathbf{E}_f^\eta(t)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{H}_f^\eta(t)\|_{L^2}^2 \right) \right)$$

then one has the a priori estimates for  $t \geq 0$

$$|\mathbf{M}_f^\eta(\xi, t)| = |\mathbf{M}_0(\xi)| \text{ for a.e. } \xi \in \Omega_f \quad \text{and} \quad \frac{d\mathcal{E}^\eta}{dt}(t) \leq 0.$$

Let us just explain how to obtain the a priori estimates. The pointwise estimate on  $\mathbf{M}_f^\eta$  is a consequence of the property (ii) in (6.6), while the energy decreasing is derived from the classical energy identity for Maxwell’s equations (6.1)  $\cdots$  (6.4),

$$\frac{d\mathcal{E}^\eta}{dt}(t) = - \int_{\Omega_f} \partial_t \mathbf{M}_f^\eta \cdot \mathbf{H}_f^\eta \, d\xi$$

by using the property (6.6)(iii).

We conclude this section by giving two useful properties of the ferromagnetic law  $\mathcal{L}$  that satisfies (6.6). The  $C^1$  regularity of  $\mathcal{L}$  and the linearity with respect the second variable shows that for all  $R > 0$ , there exists a constant  $C(R)$ , such that,

$$(6.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\mathcal{L}(m', h) - \mathcal{L}(m, h)| \leq C(R) |m' - m| |h|, \quad |m| \leq R, |m'| \leq R, \\ |\mathcal{L}(m, h)| \leq C(R) |h|, \quad |m| \leq R. \end{array} \right.$$

Moreover, since,  $\mathcal{L}(m', h') - \mathcal{L}(m, h) = (\mathcal{L}(m', h') - \mathcal{L}(m, h')) + \mathcal{L}(m, h' - h)$ , we deduce from (6.8), that for all  $R > 0$ , there exists two constants  $C_1(R)$  and  $C_2(R)$ , such that, for  $|m| \leq R, |m'| \leq R$ ,

$$(6.9) \quad |\mathcal{L}(m', h') - \mathcal{L}(m, h)| \leq C_1(R) |m' - m| |h'| + C_2(R) |h' - h|.$$

## 6.3 Asymptotic expansion

### 6.3.1 Formal identification

We assume, in a first step, that the solution has the following asymptotic expansion

$$(6.10) \quad \begin{cases} (\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta) = (\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0) + \eta (\mathbf{E}_v^1, \mathbf{H}_v^1) + \eta^2 (\mathbf{E}_v^2, \mathbf{H}_v^2) + \dots \\ (\mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta, \mathbf{M}_f^\eta) = (\mathbf{E}_f^0, \mathbf{H}_f^0, \mathbf{M}_f^0) + \eta (\mathbf{E}_f^1, \mathbf{H}_f^1, \mathbf{M}_f^1) + \eta^2 (\mathbf{E}_f^2, \mathbf{H}_f^2, \mathbf{M}_f^2) + \dots \end{cases}$$

If a such expansion exists then, by formal identification in  $\{(6.1), (6.2), (6.5), (6.3), (6.4)\}$ , we shall find the equations satisfied by  $(\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k)$  and  $(\mathbf{E}_f^k, \mathbf{H}_f^k, \mathbf{M}_f^k)$  for an arbitrary order  $k$ . We need to specify for that the asymptotic expansion of the ferromagnetic law  $\mathcal{L}(m, h)$  with respect to  $m$ . We formulate this in

**Hypothesis 6.1** *We assume that for all  $0 \leq \eta \leq 1$ , and for all  $(m_0, \dots, m_k) \in (\mathbb{R}^3)^{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (arbitrary), and  $h \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{L}$  admits the following expansion :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m_0 + \eta m_1 + \dots + \eta^k m_k, h) &= \mathcal{L}(m_0, h) + \eta \mathcal{L}_1(m_0, m_1, h) + \dots \\ &+ \eta^k \mathcal{L}_k(m_0, \dots, m_k, h) + \eta^{k+1} R_k^\eta(m_0, \dots, m_k, h), \end{aligned}$$

where  $\mathcal{L}_i : (\mathbb{R}^3)^{i+1} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , is a  $C^\infty$  function, independent of  $\eta$  and linear with respect to  $h$ , and where  $R_k^\eta : (\mathbb{R}^3)^{k+1} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , is also a  $C^\infty$  function, linear with respect to  $h$ , and uniformly bounded with respect to  $\eta$  : there exists, for a given real  $R > 0$ , a constant  $C(R, k)$  independent of  $\eta$ , such that

$$|R_k^\eta(m_0, \dots, m_k, h)| \leq C(R, k) |h|, \quad |m_0| \leq R, \dots, |m_k| \leq R.$$

Moreover, we assume that for a given real  $R > 0$  there exists a constant  $C(R)$  such that for  $|m_0| \leq R, \dots, |m_{i-1}| \leq R$  and  $(m_i, m'_i, h) \in \{\mathbb{R}^3\}^3$ ,

$$(6.11) \quad |\mathcal{L}_i(m_0, \dots, m_{i-1}, m_i, h) - \mathcal{L}_i(m_0, \dots, m_{i-1}, m'_i, h)| \leq C(R) |m_i - m'_i| |h|,$$

**Remark 6.5** *Notice that  $R_0^\eta = 0$  and  $\mathcal{L}_1(m, m_1, h) = \nabla_m \mathcal{L}(m, h) \cdot m_1$ .*

**Remark 6.6** *The Landau-Lifshitz model (6.7) satisfies also assumption (6.1).*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(m_0, \dots, m_k, h) &= \lambda_1 h \times m_k + \lambda_2 \sum_{i=0}^k m_i \times (h \times m_{k-i}) \\ R_k^\eta(m_0, \dots, m_k, h) &= \lambda_2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1-i}^k \eta^{(i+j)-(k+1)} m_i \times (h \times m_j). \end{aligned}$$

For the zero order terms we observe that,  $(\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0)$  should satisfy

$$(6.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{E}_v^0 - \text{rot } \mathbf{H}_v^0 = 0, \quad \partial_t \mathbf{H}_v^0 + \text{rot } \mathbf{E}_v^0 = 0 \quad \text{on } \Omega_v \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{E}_v^0(x, 0) = \mathbf{E}_0(x), \quad \mathbf{H}_v^0(x, 0) = \mathbf{H}_0(x), \quad x \in \Omega_v, \\ \mathbf{E}_v^0(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_f^0(0, t) \times \mathbf{n}, \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$

where  $\mathbf{E}_f^0$  is a solution of  $\text{rot } \mathbf{E}_f^0 = 0$  and  $\mathbf{E}_f^0(1, t) \times \mathbf{n} = 0$ . Hence

$$(6.13) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^0(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \Omega_f \times \mathbb{R}^+.$$

We observe also that  $\text{rot } \mathbf{H}_f^0 = 0$  and  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0(0, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t)$ . Thus

$$(6.14) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0(\xi, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t), \quad (\xi, t) \in \Omega_f \times \mathbb{R}^+.$$

Then  $\mathbf{M}_f^0$  is such that

$$(6.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{M}_f^0 = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^0, \mathbf{H}_f^0), \quad \mathbf{M}_f^0(\xi, 0) = \mathbf{M}_0(\xi), \\ \mathbf{H}_f^0 = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0 + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_f^0). \end{array} \right.$$

Starting from zero order terms, we can continue the identification process for the orders  $k \geq 1$  and observe that  $(\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k)$  satisfy

$$(6.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{E}_v^k - \text{rot } \mathbf{H}_v^k = 0, \quad \partial_t \mathbf{H}_v^k + \text{rot } \mathbf{E}_v^k = 0 \quad \text{on } \Omega_v \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{E}_v^k(x, 0) = 0, \quad \mathbf{H}_v^k(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega_v \\ \mathbf{E}_v^k(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_f^k(0, t) \times \mathbf{n}, \quad t \geq 0. \end{array} \right.,$$

where  $\mathbf{E}_f^k$  is given by

$$(6.17) \quad \text{rot } \mathbf{E}_f^k = -\partial_t (\mathbf{H}_f^{k-1} + \mathbf{M}_f^{k-1}), \quad \mathbf{E}_f^k(1, t) \times \mathbf{n} = 0.$$

Meanwhile,  $\mathbf{H}_f^k$  satisfies :

$$(6.18) \quad \text{rot } \mathbf{H}_f^k = -\partial_t \mathbf{E}_f^{k-1}, \quad \mathbf{H}_f^k(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_v^k(0, t) \times \mathbf{n},$$

and  $\mathbf{M}_f^k$  satisfy

$$(6.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{M}_f^k = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^0, \mathbf{H}_f^k) + \sum_{i=1}^k \mathcal{L}_i(\mathbf{M}_f^0, \dots, \mathbf{M}_f^i, \mathbf{H}_f^{k-i}), \quad \mathbf{M}_f^k(\xi, 0) = 0, \\ \mathbf{H}_f^k = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k - \Pi_{\perp} \mathbf{M}_f^k. \end{array} \right.$$

This identification is the first step that indicates us the way to construct the different terms of the asymptotic expansion. In the second step, theorem 6.2 below ensures the existence and uniqueness of the solutions to (6.12)-(6.19)

### 6.3.2 Study of the identified problems

The effective unknowns of the identified equations are  $\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_v^k$ ,  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^k$ ,  $\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k$ ,  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k$  and  $\mathbf{M}_f^k$ ,  $k \geq 0$ . One has  $\Pi_{\perp} \mathbf{E}_v^0 = \Pi_{\perp} \mathbf{E}_0$ ,  $\Pi_{\perp} \mathbf{H}_v^0 = \Pi_{\perp} \mathbf{H}_0$ ,  $\Pi_{\perp} \mathbf{E}_f^0 = 0$ ,  $\Pi_{\perp} \mathbf{H}_f^0 = \Pi_{\perp} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}^0)$ , and for  $k \geq 1$ ,  $\Pi_{\perp} \mathbf{E}_v^k = \Pi_{\perp} \mathbf{H}_v^k = 0$ ,  $\Pi_{\perp} \mathbf{E}_f^k = 0$  and  $\Pi_{\perp} \mathbf{H}_f^k = -\Pi_{\perp} \mathbf{M}_f^k$ .

Let  $E$  be a Banach space and  $m \geq 1$  a given integer. We introduce

$$H_{0,loc}^m(0, \infty; E) = \{u \in H^m(0, T; E), \forall 0 < T < +\infty / u^{(i)}(0) = 0, \forall 0 \leq i \leq m-1\},$$

and we set  $H_{0,loc}^0(0, \infty; E) = C^0(0, \infty; E)$ .

**Theorem 6.2** *For all  $k$  a given integer, if  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^{k+1+s}$ ,  $s \in \mathbf{N}$ , then there exists  $(\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k)$  and  $(\mathbf{E}_f^k, \mathbf{H}_f^k, \mathbf{M}_f^k)$ , uniquely determined by (6.12),  $\dots$ , (6.19), that satisfy*

$$(6.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_v^k, \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^k) \in \{C^{s+1}(0, \infty; L^2(\Omega_v)^2) \cap C^s(0, \infty; H^1(\Omega_v)^2)\}^2, \\ (\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k, \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k) \in \{H_{0,loc}^{s+1}(0, \infty; H^1(\Omega_f)^2)\}^2, \\ \mathbf{M}_f^k \in C^{s+1}(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^3) \text{ and } \partial_t \mathbf{M}_f^k \in H_{0,loc}^s(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^3). \end{array} \right.$$

*Proof.* The proof uses an induction on  $k$  and we begin by

• **Proof of theorem 6.2 for  $k = 0$ .**

According to (6.13)  $\mathbf{E}_f^0(\xi, t) \times \mathbf{n} = 0$ . Hence, system (6.12) shows that  $(\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_v^0, \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0)$  satisfies Maxwell equations in  $\Omega_v$  with Dirichlet boundary condition at  $x = 0$ . As the initial data,  $\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_0$  and  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_0$ , are both in  $H_0^{s+1}(\Omega_v)^2$ , classical results on Maxwell's equations ensure the existence and the uniqueness of a regular solution that belongs to

$$C^{s+1}(0, \infty; L^2(\Omega_v)^2) \cap C^s(0, \infty; H^1(\Omega_v)^2).$$

By equation (6.14) we can already deduce that  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0 \in C^s(0, \infty; H^1(\Omega_f)^2)$  ( $t \mapsto \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t)$  is in  $C^s(0, \infty)$ ), but this is not as good as predicted by the theorem. To improve this result we use the expression of the solution by using the method of characteristics. Let us set  $\chi^+ = x + t$  and  $\chi^- = x - t$ , and define  $(\tilde{\mathbf{E}}_0, \tilde{\mathbf{H}}_0) \in H^1(\mathbf{R})^3 \times H^1(\mathbf{R})^3$  by

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{E}}_0(x) = \mathbf{E}_0(x), \quad \tilde{\mathbf{H}}_0(x) = \mathbf{H}_0(x), \quad \text{for } x \leq 0, \\ \tilde{\mathbf{E}}_0(x) = -\mathbf{E}_0(-x), \quad \tilde{\mathbf{H}}_0(x) = \mathbf{H}_0(-x), \quad \text{for } x > 0. \end{array} \right.$$

One checks then that the regular solution  $(\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0)$  is given by, for  $x \leq 0$  and  $t \geq 0$ ,

$$(6.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_v^0(x, t) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{E}_0(\chi^-) + \tilde{\mathbf{E}}_0(\chi^+) + \mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{H}}_0(\chi^+) - \mathbf{H}_0(\chi^-)) \right) \\ \mathbf{H}_v^0(x, t) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{H}_0(\chi^-) + \tilde{\mathbf{H}}_0(\chi^+) - \mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{E}}_0(\chi^+) - \mathbf{E}_0(\chi^-)) \right) \end{array} \right.$$

Thus,  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_0(-t) + \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0(-t)$ , which proves that

$$\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, \cdot) \in H_0^{s+1}(0, \infty)^2 \text{ and } \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0 \in H_{0,loc}^{s+1}(0, \infty; H^1(\Omega_f)^2).$$

(In the non homogeneous case, the expression (6.21) is no longer valid and one has to rather use the properties of the Dirichlet to Neumann wave operator in  $\Omega_\nu$ ). Considering now the system (6.15), we see that  $\mathbf{M}_f^0$  is a solution of the Cauchy problem :

$$(6.22) \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = G(\mathbf{M}, t), \quad \mathbf{M}(0) = \mathbf{M}_0 \quad \text{in } L^\infty(\Omega_f),$$

where  $G(\mathbf{M}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0(t) + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}))$ . In space dimension 1, we have continuous injection of  $H^1$  into  $L^\infty$ , so  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0$  belongs to  $C^s(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^2)$ . As  $\mathcal{L}$  is a  $C^\infty$  function,  $(\mathbf{M}, t) \mapsto G(\mathbf{M}, t)$  is continuous on  $L^\infty(\Omega_f) \times \mathbf{R}^+$ . Moreover, using property (6.9), we deduce that for  $\|\mathbf{M}_1\|_{L^\infty(\Omega_f)} \leq R$ , and  $\|\mathbf{M}_2\|_{L^\infty(\Omega_f)} \leq R$ , there exists a constant  $C(R, T)$  such that for all  $t \leq T$

$$\|G(\mathbf{M}_1, t) - G(\mathbf{M}_2, t)\|_{L^\infty(\Omega_f)} \leq C(R, T) \|\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\|_{L^\infty(\Omega_f)}.$$

We can chose  $C(R, T) = C_1(R) \left\{ \sup_{t \leq T} \|\mathbf{H}_f^0(t)\|_{L^\infty(\Omega_f)} + \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty(\Omega_f)} + R \right\} + C_2(R)$ , where  $C_1(R)$  and  $C_2(R)$  are the constants of (6.9).

Cauchy-Lipschitz theorem applies then to (6.22) and yields the existence and the uniqueness of a maximal solution  $\mathbf{M}_f^0 \in C^1(0, T_{max}; L^\infty(\Omega_f)^3)$ ,  $T_{max} \leq \infty$ . According to (6.6),

$$(G(\mathbf{M}_f^0, t))(\xi, t) \cdot \mathbf{M}_f^0(\xi, t) = 0, \quad \text{a.e. in } \Omega_f \text{ and } \forall t \in ]0, T_{max}[.$$

So  $\forall t \in ]0, T_{max}[$ ,

$$\frac{d}{dt} \left| \mathbf{M}_f^0(t) \right|^2 = 0, \quad \text{a.e. in } \Omega_f \Rightarrow \left\| \mathbf{M}_f^0(t) \right\|_{L^\infty(\Omega_f)} = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty(\Omega_f)} < \infty.$$

This proves that the maximal solution is global :  $T_{max} = +\infty$ .

Now, as  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0 \in C^s(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^2)$  and  $\mathcal{L}$  is a  $C^\infty$  function, we deduce that

$$\mathbf{M}_f^0 \in C^{s+1}(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^3).$$

Finally, the fact that  $\partial_t^{(i)} \mathbf{M}_f^0(t=0) = 0$  for  $i \leq s-1$  can be proved by a simple recurrence on  $i$ , using that  $\partial_t^{(i)} \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0(t=0) = 0$  and the linearity of  $\mathcal{L}$  with respect to  $\mathbf{h}$  (property (6.6)(i)). This ends the proof of the case  $k=0$ .

• **Proof of theorem 6.2 for  $k \geq 1$ .**

We assume now that the theorem holds till  $k-1$  for a given  $k \geq 1$  and we shall prove it for the order  $k$ . We consider then  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^{k+1+s}$ .

We start from equation (6.17). As the data belong to  $V^{(k-1)+1+(s+1)}$ , by the application of the theorem at the order  $k-1$ , we have in particular that for all  $t \geq 0$ ,  $\partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^{k-1}(t)$  and  $\partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^{k-1}(t)$  are two functions of  $L^2(\Omega_f)^2$ . Then, equation (6.17) has a unique solution given by

$$(6.23) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k(\xi, t) = - \int_{\xi}^1 \partial_t (\mathbf{H}_f^{k-1} \times \mathbf{n})(\tau, t) + \partial_t (\mathbf{M}_f^{k-1} \times \mathbf{n})(\tau, t) d\tau.$$

In fact,  $\partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^{k-1}$  and  $\partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^{k-1}$  are both in  $H_{0,loc}^{s+1}(0, \infty; L^2(\Omega_f)^2)$ , which proves that  $\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k \in H_{0,loc}^{s+1}(0, \infty; H^1(\Omega_f)^2)$  and also that  $t \rightarrow \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k(0, t)$  is in  $H_{0,loc}^{s+1}(0, \infty)^2$ .

System (6.16) shows that  $(\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_v^k, \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^k)$  satisfies Maxwell's equations with non homogeneous Dirichlet boundary conditions at  $x = 0$ . As shown above, the boundary values belong to  $H_{0,loc}^{s+1}(0, \infty)^2$ , which implies the existence and the uniqueness of a regular solution in

$$C^{s+1}(0, \infty; L^2(\Omega_v)^2) \cap C^s(0, \infty; H^1(\Omega_v))^2.$$

In fact, this can be proved once again, by using the method of characteristics : let us introduce the vector function  $\boldsymbol{\psi}$  defined on  $\mathbb{R}$  by

$$\boldsymbol{\psi}(u) = \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^k(0, u), \text{ for } u < 0 \text{ and } \boldsymbol{\psi}(u) = 0 \text{ for } u \geq 0.$$

The function  $\boldsymbol{\psi}$  is in  $H_{loc}^{s+1}(\mathbb{R})^2$  and the solution  $(\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_v^k, \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^k)$  is given by

$$\Pi_{\parallel} \mathbf{E}_v^k(x, t) = \boldsymbol{\psi}(x + t), \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^k(x, t) = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\psi}(x + t), \quad x \geq 0, t \leq 0.$$

We see on the one hand that  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^k(0, \cdot) \in H_{0,loc}^{s+1}(0, \infty)^2$ . On the other hand, by assumption,  $\partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^{k-1}$  is in  $H_{0,loc}^{s+1}(0, \infty; L^2(\Omega_f)^2)$ . Equation (6.18) has then a unique solution given by

$$(6.24) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k(\xi, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^k(0, t) - \int_0^\xi \mathbf{n} \times \partial_t \mathbf{E}_f^{k-1}(\tau, t) d\tau,$$

and  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k \in H_{0,loc}^{s+1}(0, \infty; H^1(\Omega_f)^2)$ .

Having  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k$  we see, using (6.19), that  $\mathbf{M}_f^k$  is a solution of the Cauchy problem

$$(6.25) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{M} = G_k(\mathbf{M}, t), \quad \mathbf{M}(0) = 0 \text{ in } L^\infty(\Omega_f),$$

where  $G_k(\mathbf{M}, t) = -\mathcal{L}(\mathbf{M}_f^0(t), \Pi_{\perp} \mathbf{M}) + \mathcal{J}_k(\mathbf{M}, t) + F_k(t)$ ,

$$\mathcal{J}_k(\mathbf{M}, t) = \mathcal{L}_k(\mathbf{M}_f^0(t), \dots, \mathbf{M}_f^{k-1}(t), \mathbf{M}, \mathbf{H}_f^0(t)),$$

and  $F_k = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^0, \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k) + \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{L}_i(\mathbf{M}_f^0, \dots, \mathbf{M}_f^i, \mathbf{H}_f^{k-i})$ .

$F_k$  is independent of  $\mathbf{M}$ . Similarly to the case  $k = 0$  we show first, using Cauchy-Lipschitz theorem, the existence of a maximal solution with values in the Banach space  $L^\infty(\Omega_f)^3$ . We prove second that this solution is global by an a priori estimate.

Let  $T > 0$  be a fixed real. We set

$$R_1(T) = \max_{0 \leq i < k} \sup_{t \leq T} \left\| \mathbf{M}_f^i(t) \right\|_{L^\infty(\Omega_f)^3} \text{ and } R_2(T) = \sup_{t \leq T} \left\| \mathbf{H}_f^0 \right\|_{L^\infty(\Omega_f)^3}$$

( $R_1$  and  $R_2$  are finite by assumption). Using the property (6.9) of  $\mathcal{L}$  and the property (6.11) of  $\mathcal{L}_k$  we deduce the existence of two constants  $C_1(R_1(T))$  and  $C_2(R_1(T))$  such that, for all  $\mathbf{M}_1$  and  $\mathbf{M}_2$  in  $L^\infty(\Omega_f)^3$ , we have  $\forall t \leq T$  and for a.e.  $\xi \in \Omega_f$

$$(6.26) \quad |\mathcal{J}_k(\mathbf{M}_1, t)(\xi) - \mathcal{J}_k(\mathbf{M}_2, t)(\xi)| \leq C_1(R_1(T)) R_2(T) |\mathbf{M}_1(\xi) - \mathbf{M}_2(\xi)|$$

$$(6.27) \quad \left| \mathcal{L} \left( \mathbf{M}_f^0(\xi, t), \Pi_{\perp} (\mathbf{M}_2(\xi) - \mathbf{M}_1(\xi)) \right) \right| \leq C_2(R_1(T)) |\mathbf{M}_1(\xi) - \mathbf{M}_2(\xi)|.$$

Now,  $G_k(\mathbf{M}_1, t) - G_k(\mathbf{M}_2, t) = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^0(t), \Pi_{\perp} (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)) + \mathcal{J}_k(\mathbf{M}_1, t) - \mathcal{J}_k(\mathbf{M}_2, t)$ . We get then by a triangular inequality, with  $C(T) = C_1(R_1(T))R_2(T) + C_2(R_1(T))$ ,  $\forall t \leq T$ ,

$$\|G_k(\mathbf{M}_1, t) - G_k(\mathbf{M}_2, t)\|_{L^\infty(\Omega_f)^3} \leq C(T) \|\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\|_{L^\infty(\Omega_f)^3}$$

which shows the local Lipschitz property of  $G_k(\mathbf{M}, t)$  with respect to  $\mathbf{M}$ . From recurrence assumption and the regularity of  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k$  one checks easily the continuity of  $t \mapsto G_k(\mathbf{M}, t)$ . Consequently, Cauchy-Lipschitz theorem applies to (6.25) and proves the existence and the uniqueness of a maximal solution  $\mathbf{M}_f^k \in C^1(0, T_{max}; L^\infty(\Omega_f)^3)$ . Let us prove now that  $T_{max} = \infty$ . We set

$$R_3(T) = \sup_{t \leq T} \left( \|\mathcal{J}_k(0, t)\|_{L^\infty(\Omega_f)^3} + \|F_k(t)\|_{L^\infty(\Omega_f)^3} \right)$$

From (6.26) and (6.27) we deduce that for all  $\mathbf{M} \in L^\infty(\Omega_f)^3$ , we have for a.e.  $\xi \in \Omega_f$  and  $\forall t \leq T$

$$|G_k(\mathbf{M}, t)(\xi)| \leq C(T) |\mathbf{M}(\xi)| + R_3(T)$$

We deduce that the solution of (6.25) satisfies for all  $t \leq T < T_{max}$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \mathbf{M}_f^k(\xi, t) \right|^2 \leq C(T) \left| \mathbf{M}_f^k(\xi) \right|^2 + R_3(T) \left| \mathbf{M}_f^k(\xi) \right|,$$

which yields after integration in time

$$\left| \mathbf{M}_f^k(\xi, t) \right| \leq \frac{R_3(T)}{C(T)} \left( e^{C(T)t} - 1 \right), \quad \text{for a.e. } \xi \in \Omega_f.$$

This shows that if  $T_{max} < \infty$  then  $\lim_{t \rightarrow T_{max}} \left\| \mathbf{M}_f^k(t) \right\|_{L^\infty(\Omega_f)} < \infty$  which is in contradiction with the maximal aspect of the solution. Hence  $T_{max} = \infty$ .

The regularity  $C^{s+1}(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^3)$  of the solution as well as  $\partial_t^{(i)} \mathbf{M}_f^k(t=0) = 0$  for  $i \leq s-1$  can be shown with no difficulties, by differentiating in time (6.25) and using the recurrence assumptions combined with  $\Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^k \in H_{0,loc}^{s+1}(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^2)$ .  $\square$

## 6.4 Consistency of the asymptotic expansion

We now justify the asymptotic expansion (6.10). Let us introduce for that :

$$(6.28) \quad \left( \mathbf{e}_v^k, \mathbf{h}_v^k, \mathbf{e}_f^k, \mathbf{h}_f^k, \mathbf{m}_f^k \right) = \left( \mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta, \mathbf{E}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta, \mathbf{M}_f^\eta \right) - \sum_{j=0}^k \eta^j \left( \mathbf{E}_v^j, \mathbf{H}_v^j, \mathbf{E}_f^j, \mathbf{H}_f^j, \mathbf{M}_f^j \right)$$

Of course the fields  $\mathbf{e}_v^k, \mathbf{h}_v^k, \mathbf{e}_f^k, \mathbf{h}_f^k$  and  $\mathbf{m}_f^k$  depend on  $\eta$ . We chose to simplify the notations and to not indicate this dependence explicitly. By simple calculations, one checks that these fields satisfy the following equations

$$(6.29) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{e}_v^k - \text{rot } \mathbf{h}_v^k = 0, & \partial_t \mathbf{h}_v^k + \text{rot } \mathbf{e}_v^k = 0, & \text{on } \Omega_v \times \mathbf{R}^+, \\ (\mathbf{e}_v^k, \mathbf{h}_v^k)(x, 0) = (0, 0), & x \in \Omega_v. \end{cases}$$

$$(6.30) \quad \begin{cases} \eta \partial_t \mathbf{e}_f^k - \text{rot } \mathbf{h}_f^k = \eta^{k+1} \partial_t \mathbf{E}_f^k & \text{on } \Omega_f \times \mathbf{R}^+, \\ \eta \partial_t \left( \mathbf{h}_f^k + \mathbf{m}_f^k \right) + \text{rot } \mathbf{e}_f^k = \eta^{k+1} \partial_t \left( \mathbf{H}_f^k + \mathbf{M}_f^k \right) & \text{on } \Omega_f \times \mathbf{R}^+, \\ (\mathbf{e}_f^k, \mathbf{h}_f^k)(\xi, 0) = 0, & \xi \in \Omega_f. \end{cases}$$

$$(6.31) \quad \mathbf{e}_v^k(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{e}_f^k(0, t) \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{h}_v^k(0, t) \times \mathbf{n} = \mathbf{h}_f^k(0, t) \times \mathbf{n}.$$

$$(6.32) \quad \mathbf{e}_f^k(1, t) \times \mathbf{n} = 0.$$



$$(6.33) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{m}_f^k = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta) - \mathcal{L}(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) + \eta^{k+1} \mathbf{F}_f^k, \\ \mathbf{m}_f^k(\xi, 0) = 0 \quad \text{for } \xi \in \Omega_f. \end{cases}$$

$$\text{where} \quad \overline{\mathbf{H}}_f^k = \sum_{i=0}^k \eta^i \mathbf{H}_f^i, \quad \overline{\mathbf{M}}_f^k = \sum_{i=0}^k \eta^i \mathbf{M}_f^i,$$

$$(6.34) \quad \mathbf{F}_f^k = R_k^\eta(\mathbf{M}_f^0, \dots, \mathbf{M}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1-i}^k \eta^{(i+j)-(k+1)} \mathcal{L}_i(\mathbf{M}_f^0, \dots, \mathbf{M}_f^i, \mathbf{H}_f^j)$$

**Remark 6.7** We first remark that  $\mathbf{F}_f^0 = 0$  (according to remark 6.5). Second, we prefer writing (6.33) differently, using the linearity of  $\mathcal{L}$  with respect to the second variable :

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta) - \mathcal{L}(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta - \overline{\mathbf{H}}_f^k) + \left( \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \overline{\mathbf{H}}_f^k) - \mathcal{L}(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) \right)$$

So the system (6.33) is equivalent to

$$(6.35) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{m}_f^k = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{h}_f^k) + \left( \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \overline{\mathbf{H}}_f^k) - \mathcal{L}(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) \right) + \eta^{k+1} \mathbf{F}_f^k, \\ \mathbf{m}_f^k(\xi, 0) = 0 \quad \text{for } \xi \in \Omega_f. \end{cases}$$

We conclude this section by expressing the derivative in time of (6.33), which is useful in the sequel. Let us denote by  $\mathbf{M}(\xi, t)$  and  $\mathbf{H}(\xi, t)$  two regular fields defined on  $\Omega_f \times \mathbb{R}$ . Then one has the obvious formula, thanks to (6.6)(i),

$$\partial_t \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}) = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \partial_t \mathbf{H}) + \nabla_m \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}) \partial_t \mathbf{M}.$$

Using the notation of remark 6.5, we have then

$$(6.36) \quad \partial_t \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}) = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \partial_t \mathbf{H}) + \mathcal{L}_1(\mathbf{M}, \partial_t \mathbf{M}, \mathbf{H}).$$

The function  $(m, m', h) \mapsto \mathcal{L}_1(m, m', h)$  is  $C^\infty$  function from  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  into  $\mathbb{R}^3$ , and bilinear with respect to  $(m', h)$ . We deduce then, for all  $R > 0$  the existence of a constant  $C(R)$  such that for  $|m_1| \leq R$  and  $|m_2| \leq R$ ,

$$(6.37) \quad \begin{cases} |\mathcal{L}_1(m_1, m', h)| \leq C(R) |m'| |h|, \\ |\mathcal{L}_1(m_1, m', h) - \mathcal{L}_1(m_2, m', h)| \leq C(R) |m_1 - m_2| |m'| |h|. \end{cases}$$

Using the formula (6.36), we obtain by differentiating in time (6.35) and exploiting the linearity properties of  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{L}_1$ ,

$$(6.38) \quad \begin{aligned} \partial_{tt} \mathbf{m}_f^k &= \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{h}_f^k) + \left( \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \overline{\mathbf{H}}_f^k) - \mathcal{L}(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \partial_t \overline{\mathbf{H}}_f^k) \right) \\ &+ \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{h}_f^k) + \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{m}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) \\ &+ \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) - \mathcal{L}_1(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) + \eta^{k+1} \partial_t \mathbf{F}_f^k. \end{aligned}$$

### 6.4.1 Error estimates

Let us introduce the energies :

$$(6.39) \quad \mathcal{E}_k^\eta(t) = \frac{1}{2} \left( \left\| \mathbf{e}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \mathbf{h}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \eta \left( \left\| \mathbf{e}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \mathbf{h}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \right) \right),$$

$$(6.40) \quad \mathcal{T}_k^\eta(t) = \frac{1}{2} \left( \left\| \partial_t \mathbf{e}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \partial_t \mathbf{h}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \eta \left( \left\| \partial_t \mathbf{e}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \partial_t \mathbf{h}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \right) \right).$$

The main result of this section is :

**Theorem 6.3** *Let  $T > 0$  be a given real,  $k \geq 0$  be a given integer and assume that the initial data  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^{k+2}$ . Then, there exist two constants  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$  independent of  $\eta$  such that,  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,*

$$(6.41) \quad \mathcal{E}_k^\eta(t) \leq C_k(T) \eta^{2k+1} \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_k^\eta(t) \leq C'_k(T) \eta^{2k+1}.$$

The constants  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$  depend only on  $T$ ,  $k$  and  $\|(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)\|_{V^{k+2}}$ .

*Proof.* The proof of this theorem is divided into three steps :

• **Energy estimates :** Consider the equations (6.29), (6.30), (6.31) and (6.32). The classical energy estimate, associated to these equations, can be written

$$\mathcal{E}_k^\eta(t) = -\eta \int_0^t \int_{\Omega_f} \partial_t \mathbf{m}_f^k \cdot \mathbf{h}_f^k \, d\xi \, d\tau + \eta^{k+1} \int_0^t \int_{\Omega_f} \partial_t (\mathbf{H}_f^k + \mathbf{M}_f^k) \cdot \mathbf{h}_f^k + \partial_t \mathbf{E}_f^k \cdot \mathbf{e}_f^k \, d\xi \, d\tau,$$

which yields, by applying Schwarz inequality to the last integral,

$$(6.42) \quad \mathcal{E}_k^\eta(t) \leq -\eta \int_0^t \int_{\Omega_f} \partial_t \mathbf{m}_f^k \cdot \mathbf{h}_f^k \, d\xi \, d\tau + \eta^{k+\frac{1}{2}} \int_0^t f_k(\tau) \sqrt{\mathcal{E}_k^\eta(\tau)} \, d\tau$$

where  $f_k(t) = \sqrt{2} \left( \left\| \partial_t (\mathbf{H}_f^k + \mathbf{M}_f^k)(t) \right\|_{L^2(\Omega_f)} + \left\| \partial_t \mathbf{E}_f^k(t) \right\|_{L^2(\Omega_f)} \right)$ .

We have the analogous for  $\mathcal{T}_k^\eta(t)$ , by considering the derivatives in time of the equations,

$$(6.43) \quad \mathcal{T}_k^\eta(t) \leq -\eta \int_0^t \int_{\Omega_f} \partial_{tt} \mathbf{m}_f^k \cdot \partial_t \mathbf{h}_f^k \, d\xi \, d\tau + \eta^{k+\frac{1}{2}} \int_0^t g_k(\tau) \sqrt{\mathcal{T}_k^\eta(\tau)} \, d\tau$$

where  $g_k(t) = \sqrt{2} \left( \left\| \partial_{tt} (\mathbf{H}_f^k + \mathbf{M}_f^k)(t) \right\|_{L^2(\Omega_f)} + \left\| \partial_{tt} \mathbf{E}_f^k(t) \right\|_{L^2(\Omega_f)} \right)$ .

Using identities (6.42) and (6.43), we prove first :

• **The case  $k = 0$  :** The proof of this case is postponed to the subsection 6.4.2 below. Admitting for a while this result, we conclude by

• **A boot-strap argument :** We prove in subsection 6.4.3 the following result :

**Lemma 6.1** *Let  $k$  be a given integer,  $T > 0$  be a given real and  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^{k+2}$ . Assume that there exists an integer  $\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq 2k$  and two constants  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$ , independent of  $\eta$  such that,  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,*

$$(6.44) \quad \mathcal{E}_k^\eta(t) \leq C_k(T) \eta^\ell \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_k^\eta(t) \leq C'_k(T) \eta^\ell.$$

Then, there exists two other constants, denoted also by  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$ , such that

$$\mathcal{E}_k^\eta(t) \leq C_k(T) \eta^{\ell+1} \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_k^\eta(t) \leq C'_k(T) \eta^{\ell+1}.$$

The constants  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$  depend only on  $T$ ,  $k$  and  $\|(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)\|_{V^{k+2}}$ .

This lemma enables us to conclude the proof of theorem 6.3 as the following : First one remarks that, in fact, we can chose  $\ell = 2k$  in the conclusion of lemma 6.1, which corresponds to the estimate (6.41). Hence, we can end the proof of theorem 6.3 by showing the existence of an integer  $\ell$  such that (6.44) holds. From the case  $k = 0$  we have

$$(6.45) \quad \mathcal{E}_0^\eta(t) \leq C_0(T) \eta \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_0^\eta(t) \leq C'_0(T) \eta$$

For  $k \geq 1$ , by writing

$$(\mathbf{e}_v^k, \mathbf{h}_v^k, \mathbf{e}_f^k, \mathbf{h}_f^k) = (\mathbf{e}_v^0, \mathbf{h}_v^0, \mathbf{e}_f^0, \mathbf{h}_f^0) - \eta \sum_{j=1}^k \eta^{j-1} (\mathbf{e}_v^j, \mathbf{h}_v^j, \mathbf{e}_f^j, \mathbf{h}_f^j)$$

we deduce from (6.45) by using a triangular inequality, the existence for all integer  $k \geq 1$  of two constant  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$  independent of  $\eta$  such that

$$(6.46) \quad \mathcal{E}_k^\eta(t) \leq C_k(T) \eta \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_k^\eta(t) \leq C'_k(T) \eta,$$

The estimates (6.45) and (6.46) prove (6.44) with  $\ell = 1$  and permit to conclude the proof of theorem 6.3 as explained before.  $\square$

**Remark 6.8** For the linear case (i.e. when  $\mathbf{M}_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{m}_f^k = 0$ ), theorem 6.3 is straightforward consequence of (6.42) and (6.43), by using Gronwall's lemma.

**Remark 6.9** Although, the consistency of the asymptotic expansion can be done in the linear case by considering the energy  $\mathcal{E}_k^\eta$  only, the introduction of the energy  $\mathcal{T}_k^\eta$  is necessary for the non linear case and plays a fundamental role in the proof of lemma 6.1.

#### 6.4.2 Proof of theorem 6.3 for $k = 0$

We prove first

**Lemma 6.2** Assume that  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^1$ . For all  $0 < T < \infty$ , there exists a constant  $C_0(T)$  independent of  $\eta$  such that,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\mathcal{E}_0^\eta(t) \leq C_0(T) \eta.$$

The constant  $C_0(T)$  depends on  $T$  and  $\|(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)\|_{V^1}$ .

*Proof.* Let us write first the energy estimate (6.42), for  $k = 0$  :

$$(6.47) \quad \mathcal{E}_0^\eta(t) \leq -\eta \int_0^t \int_{\Omega_f} \partial_t \mathbf{m}_f^0 \cdot \mathbf{h}_f^0 \, d\xi \, d\tau + \eta^{\frac{1}{2}} \int_0^t f_0(\tau) \sqrt{\mathcal{E}_0^\eta(\tau)} \, d\tau$$

When we make  $k = 0$  in equation (6.35), we obtain

$$(6.48) \quad \partial_t \mathbf{m}_f^0 = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{h}_f^0) + (\mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^0) - \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^0, \mathbf{H}_f^0))$$

Hence, according to (6.6), we have the pointwise inequality

$$(6.49) \quad -\partial_t \mathbf{m}_f^0 \cdot \mathbf{h}_f^0 \leq (\mathcal{L}(\mathbf{M}_f^0, \mathbf{H}_f^0) - \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^0)) \cdot \mathbf{h}_f^0$$

Moreover, one has the a priori estimates

$$|\mathbf{M}_f^\eta(\xi, t)| = |\mathbf{M}_f^0(\xi, t)| = |\mathbf{M}_0(\xi)|, \quad \forall t \geq 0 \text{ and a.e. } \xi \in \Omega_f$$

So if we set  $R = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$ , by property (6.8), we deduce the existence of a constant  $C(R)$  such that

$$(6.50) \quad \left\| \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^0, \mathbf{H}_f^0) - \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^0) \right\|_{L^2(\Omega_f)^3} \leq 2C(R) \left\| \mathbf{H}_f^0(t) \right\|_{L^2(\Omega_f)^3}.$$

Consequently, if we set  $\tilde{f}_0(t) = f_0(t) + 2C(R) \|\mathbf{H}_f^0(t)\|_{L^2(\Omega_f)^3}$  then by combining (6.49), (6.48) and (6.47) we get

$$(6.51) \quad \mathcal{E}_0^\eta(t) \leq \eta^{\frac{1}{2}} \int_0^t \tilde{f}_0(\tau) \sqrt{\mathcal{E}_0^\eta(\tau)} d\tau.$$

By Gronwall's lemma we deduce that  $\mathcal{E}_0^\eta(t) \leq \eta \left( \frac{1}{2} \int_0^t \tilde{f}_0(\tau) d\tau \right)^2$ . According to theorem 6.2, when  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^1$  then  $\tilde{f}_0 \in L^2(0, T)$  for all  $T < +\infty$ . This proves the lemma with  $C_0(T) = \frac{T}{4} \|\tilde{f}_0\|_{L^2(0, T)}^2$ .  $\square$

Using lemma 6.2 we prove

**Lemma 6.3** *Assume that  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^1$ . For all  $0 < T < \infty$ , there exists a constant  $R_0(T)$  independent of  $\eta$  such that,  $\forall t \in [0, T]$ ,*

$$\|\partial_t \mathbf{M}_f^\eta(t)\|_{L^\infty(\Omega_f)} \leq R_0(T)$$

*Proof.* By (6.8), one has the pointwise estimate, setting  $R = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty(\Omega_f)}$ ,

$$(6.52) \quad |\partial_t \mathbf{M}_f^\eta(\xi, t)| \leq C(R) |\mathbf{H}_f^\eta(\xi, t)|.$$

Hence, to prove the lemma, it is sufficient to prove that we have a uniform control with respect to  $\eta$  of the  $L^\infty$  norm of  $\mathbf{H}_f^\eta$ . Let us notice first that when the data is in  $V^1$  the solution  $\mathbf{H}_f^\eta$  is in  $H^1(\Omega_f)^3$  and so in  $L^\infty(\Omega_f)^3$  in 1D dimension. We consider the following electromagnetic energy

$$\mathcal{T}^\eta(t) = \frac{1}{2} \left( \|\partial_t \mathbf{E}_v^\eta(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_t \mathbf{H}_v^\eta(t)\|_{L^2}^2 + \eta \left( \|\partial_t \mathbf{E}_f^\eta(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_t \mathbf{H}_f^\eta(t)\|_{L^2}^2 \right) \right)$$

It satisfies the identity

$$(6.53) \quad \mathcal{T}^\eta(t) = \mathcal{T}^\eta(0) - \eta \int_0^t \int_{\Omega_f} \partial_{tt} \mathbf{M}_f^\eta \cdot \partial_t \mathbf{H}_f^\eta d\xi d\tau$$

where  $\mathcal{T}^\eta(0) = \frac{1}{2} \left( \|\partial_t \mathbf{E}_v^\eta(0)\|_{L^2}^2 + \|\partial_t \mathbf{H}_v^\eta(0)\|_{L^2}^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \|\text{rot } \mathbf{H}_0\|_{L^2}^2 + \|\text{rot } \mathbf{E}_0\|_{L^2}^2 \right)$ ,

is independent of  $\eta$ . When differentiating in time (6.5), we get, using (6.36),

$$\partial_{tt}\mathbf{M}_f^\eta = \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t\mathbf{H}_f^\eta) + \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)$$

Therefore, (6.8) (iii) yields

$$\partial_{tt}\mathbf{M}_f^\eta \cdot \partial_t\mathbf{H}_f^\eta \geq \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta) \cdot \partial_t\mathbf{H}_f^\eta$$

From (6.37) and (6.52) we deduce the existence of a constant  $C(R)$  (different from the constant of (6.52)) such that

$$|\mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t\mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{H}_f^\eta)| \leq C(R) |\mathbf{H}_f^\eta|^2$$

Hence (6.53) shows in particular

$$(6.54) \quad \mathcal{T}^\eta(t) \leq \mathcal{T}(0) + \eta C(R) \int_0^t \|\mathbf{H}_f^\eta(\tau)\|_{L^\infty}^2 \|\partial_t\mathbf{H}_f^\eta(\tau)\|_{L^2} d\tau$$

We recall that if  $u$  is a function of  $H^1(-\infty, 1)$  then one has the inequality

$$(6.55) \quad \|u\|_{L^\infty}^2 \leq 2 \|u\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^2}.$$

This inequality can be easily checked for functions in  $\mathcal{D}((-\infty, 1])$  and then can be deduced for functions in  $H^1(-\infty, 1)$  by density. We apply (6.55) to the field  $\mathbf{H}_\perp^\eta$  defined by

$$\mathbf{H}_\perp^\eta = \Pi_\perp \mathbf{H}_v^\eta \quad \text{in } \Omega_v \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_\perp^\eta = \Pi_\perp \mathbf{H}_f^\eta \quad \text{in } \Omega_f,$$

which is in  $H^1(-\infty, 1)^2$  by continuity relations (6.3) and for which, by lemma 6.2, we have, for  $t \leq T$ ,

$$\|\mathbf{H}_\perp^\eta(t)\|_{L^2}^2 \leq (1 + \eta)C_0(T).$$

Hence, for  $\eta < 1$  and for  $t \leq T$ ,

$$(6.56) \quad \|\mathbf{H}_\perp^\eta(t)\|_{L^\infty}^2 \leq 4C_0(T) \|\partial_x \mathbf{H}^\eta(t)\|_{L^2}$$

Otherwise, according to the particular form of the curl operator in 1D dimension, and using equations (6.1) and (6.2),

$$\|\partial_x \mathbf{H}^\eta(t)\|_{L^2} \leq \|\text{rot } \mathbf{H}_v^\eta(t)\|_{L^2} + \|\text{rot } \mathbf{H}_f^\eta(t)\|_{L^2} \leq \|\partial_t \mathbf{E}_v^\eta(t)\|_{L^2} + \eta \|\partial_t \mathbf{E}_f^\eta(t)\|_{L^2}.$$

From (6.56) we get then, for  $\eta < 1$  and for  $t \leq T$ ,

$$\|\Pi_\perp \mathbf{H}_f^\eta(t)\|_{L^\infty}^2 \leq 4C_0(T) (\|\partial_t \mathbf{E}_v^\eta(t)\|_{L^2} + \eta \|\partial_t \mathbf{E}_f^\eta(t)\|_{L^2}) \leq 8C_0(T) \sqrt{\mathcal{T}^\eta(t)}$$

The decomposition  $\mathbf{H}_f^\eta = \Pi_\perp \mathbf{H}_f^\eta + \Pi_\parallel \mathbf{H}_f^\eta = \Pi_\perp \mathbf{H}_f^\eta - \Pi_\parallel \mathbf{M}_f^\eta$  shows then that

$$(6.57) \quad \|\mathbf{H}_f^\eta(t)\|_{L^\infty}^2 \leq 8C_0(T) \sqrt{\mathcal{T}^\eta(t)} + R^2.$$

Using (6.57), the inequality (6.54) shows that for  $\eta < 1$  and for  $t \leq T$ ,

$$\mathcal{T}^\eta(t) \leq \mathcal{T}(0) + C(R) \int_0^t 8C_0(T) \mathcal{T}^\eta(\tau) + R^2 \sqrt{\mathcal{T}^\eta(\tau)} d\tau$$

If we set  $C = C(R)(8C_0(T) + R^2)$  then we can write for example that

$$\mathcal{T}^\eta(t) \leq 1 + \mathcal{T}(0) + C \int_0^t \mathcal{T}^\eta(\tau) d\tau,$$

which yields in particular,  $\mathcal{T}^\eta(t) \leq (1 + \mathcal{T}(0))(1 + Ct) \exp(Ct)$ . As the right hand side is independent of  $\eta$  this shows that  $\mathcal{T}^\eta(t)$  is bounded for  $t \leq T$  uniformly with respect to  $\eta$ . The lemma is then proved by (6.57) and (6.52).  $\square$

Using lemma 6.2 and lemma 6.3 we prove finally the following result that concludes the proof of the case  $k = 0$ .

**Lemma 6.4** *Assume that  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^2$ . For all  $0 < T < \infty$ , there exists a constant  $C'_0(T)$  independent of  $\eta$  such that,  $\forall t \in [0, T]$ ,*

$$\mathcal{T}_0^\eta(t) \leq C'_0(T) \eta.$$

The constant  $C'_0(T)$  depends on  $T$  and  $\|(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)\|_{V^2}$ .

*Proof.* We consider the energy estimate (6.43), when  $k = 0$  :

$$(6.58) \quad \mathcal{T}_0^\eta(t) \leq -\eta \int_0^t \int_{\Omega_f} \partial_{tt} \mathbf{m}_f^0 \cdot \partial_t \mathbf{h}_f^0 d\xi d\tau + \eta^{k+\frac{1}{2}} \int_0^t g_0(\tau) \sqrt{\mathcal{T}_0^\eta(\tau)} d\tau$$

Let us set  $A^\eta(t) = - \int_{\Omega_f} \partial_{tt} \mathbf{m}_f^0(\xi, t) \cdot \partial_t \mathbf{h}_f^0(\xi, t) d\xi$ .

To prove the lemma, we shall prove an estimation of the type

$$(6.59) \quad A(t) \leq \ell(t) \left\| \partial_t \mathbf{h}_f^0 \right\|_{L^2(\Omega_f)}.$$

where  $\ell(t)$  is independent of  $\eta$ . The derivative in time  $\partial_t \mathbf{m}_f^0$  is given by the formula (6.38). We have

$$\begin{aligned} \partial_{tt} \mathbf{m}_f^0 &= \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{h}_f^0) + (\mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{H}_f^0) - \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^0, \partial_t \mathbf{H}_f^0)) \\ &\quad + \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{h}_f^0) + \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{m}_f^0, \mathbf{H}_f^0) \\ &\quad + \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{M}_f^0, \mathbf{H}_f^0) - \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^0, \partial_t \mathbf{M}_f^0, \mathbf{H}_f^0). \end{aligned}$$

The important thing to remark in the previous expression is that, the right hand side depends on  $\partial_t \mathbf{h}_f^0$  only by  $\mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{h}_f^0)$ . But for this term we have the pointwise inequality

$$-\mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{h}_f^0) \cdot \partial_t \mathbf{h}_f^0 \leq 0$$

So, in order to prove (6.59), it suffices to show that the other terms are uniformly bounded with respect to  $\eta$  in the  $L^2(\Omega_f)$  norm. For  $R = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$  we have  $|\mathbf{M}_f^\eta(\xi, t)| \leq R$  and  $|\mathbf{M}_f^0(\xi, t)| \leq R$ . Then by (6.8) we deduce the existence of a constant  $C(R)$  independent of  $\eta$  such that,

$$(i) \quad \left\| \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{H}_f^0) - \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^0, \partial_t \mathbf{H}_f^0) \right\|_{L^2} \leq 2C(R) \left\| \partial_t \mathbf{H}_f^0(t) \right\|_{L^2}.$$

and by (6.37), we deduce the existence of a constant also denoted by  $C(R)$  such that

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad & \left\| \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{h}_f^0) \right\|_{L^2} \leq C(R) \left\| \partial_t \mathbf{M}_f^\eta(t) \right\|_{L^\infty} \left\| \mathbf{h}_f^0(t) \right\|_{L^2} \\
 (iii) \quad & \left\| \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{m}_f^0, \mathbf{H}_f^0) \right\|_{L^2} \leq C(R) \left\| \mathbf{H}_f^0(t) \right\|_{L^\infty} \left\| \partial_t \mathbf{m}_f^0(t) \right\|_{L^2} \\
 (iv) \quad & \left\| \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{M}_f^0, \mathbf{H}_f^0) - \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^0, \partial_t \mathbf{M}_f^0, \mathbf{H}_f^0) \right\|_{L^2} \leq 2C(R) \left\| \partial_t \mathbf{M}_f^0(t) \right\|_{L^\infty} \left\| \mathbf{H}_f^0(t) \right\|_{L^2}
 \end{aligned}$$

Using the expression (6.48) of  $\partial_t \mathbf{m}_f^0$  we deduce

$$\left\| \partial_t \mathbf{m}_f^0(t) \right\|_{L^2} \leq C(R) \left( \left\| \mathbf{h}_f^0(t) \right\|_{L^2} + 2 \left\| \mathbf{H}_f^0(t) \right\|_{L^2} \right).$$

and by lemma 6.2 one has in particular, for  $t \leq T$ ,  $\left\| \mathbf{h}_f^0(t) \right\|_{L^2} \leq C_0(T)$  where by lemma 6.3  $\left\| \partial_t \mathbf{M}_f^\eta(t) \right\|_{L^\infty} \leq R_0(T)$ . Combining these estimations with (i), (ii), (iii) and (iv) we deduce easily the identity (6.59), for  $t \in [0, T]$ , with

$$\begin{aligned}
 \ell(t) &= 2C(R) \left\| \partial_t \mathbf{H}_f^0(t) \right\|_{L^2} + C(R)R_0(T)C_0(T) \\
 &+ C(R)^2 \left\| \mathbf{H}_f^0(t) \right\|_{L^\infty} (C_0(T) + 2 \left\| \mathbf{H}_f^0(t) \right\|_{L^2}) + 2C(R) \left\| \partial_t \mathbf{M}_f^0(t) \right\|_{L^\infty} \left\| \mathbf{H}_f^0(t) \right\|_{L^2}
 \end{aligned}$$

As the initial data is in  $V^2$ , theorem 6.2 asserts that  $\ell \in L^\infty(0, T)$  while  $g_0 \in L^2(0, T)$ . So the function  $\tilde{g}_0 = g_0 + \sqrt{2}\ell$ , is in  $L^2(0, T)$  and according to (6.58) and (6.59) one has

$$\mathcal{T}_0^\eta(t) \leq \eta^{\frac{1}{2}} \int_0^t \tilde{g}_0(\tau) \sqrt{\mathcal{T}_0^\eta(\tau)} d\tau.$$

We conclude then as in the case of (6.51), by using Gronwall's lemma. □

### 6.4.3 Proof of lemma 6.1

Throughout this section, we assume that

$$(6.60) \quad (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^{k+2} \text{ where } k \text{ is a given integer.}$$

We assume also the existence of two constants  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$ , independent of  $\eta$ , and an integer  $\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq 2k$  such that,  $\forall 0 \leq t \leq T (< +\infty)$ ,

$$(6.61) \quad \mathcal{E}_k^\eta(t) \leq C_k(T) \eta^\ell \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_k^\eta(t) \leq C'_k(T) \eta^\ell.$$

From now on, the constants  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$  will indicate a kind of universal constant, which values may vary from one line to another but remain always independent of  $\eta$ . These constants depend only on  $T$ ,  $k$  and  $\|(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)\|_{V^{k+2}}$ .

We split the proof of lemma 6.1 into a sequence of lemmas in order to underline the main steps. The conclusion is obtained thanks to lemma 6.2 and lemma 6.4. We begin by proving a useful result on functions  $H^1(-\infty, 1)$  which looks like a ‘‘thick trace’’ theorem.

**Lemma 6.5** *There exists a constant  $c$  such that  $\forall u \in H^1(-\infty, 1)$*

$$\|u\|_{L^2(0,1)}^2 \leq c \left( \|u\|_{L^2(-\infty,0)}^2 + \|u'\|_{L^2(-\infty,1)}^2 \right)$$

*Proof.* We have in particular  $u \in H^1(-\infty, 0)$ . From the continuous injection of  $H^1(-\infty, 0)$  into  $C^0((-\infty, 0])$  we deduce the existence of a constant  $c$  (independent of  $u$ ) such that

$$|u(0)| \leq c \left( \|u\|_{L^2(-\infty, 0)} + \|u'\|_{L^2(-\infty, 0)} \right)$$

(in fact  $c = 1$ ) Otherwise,  $u \in H^1(0, 1)$  so,  $\forall \xi \in (0, 1)$ ,  $u(\xi) = u(0) + \int_0^\xi u'(\tau) d\tau$ . Taking the square of this identity, then integrating over  $(0, 1)$  leads to (Poincaré-Friedrich inequality)

$$\|u\|_{L^2(0, 1)}^2 \leq 2 \left( |u(0)|^2 + \|u'\|_{L^2(0, 1)}^2 \right)$$

The lemma is proved by combining the two previous inequalities.  $\square$

Using this result we deduce :

**Lemma 6.6** *Under assumptions (6.60) and (6.61) we deduce the existence of a constant  $C_k(T)$  such that,  $\forall 0 \leq t \leq T$*

$$(6.62) \quad \left\| \Pi_\perp \mathbf{h}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C_k(T) \eta^\ell$$

**Remark 6.10** *By the hypothesis 6.61 we have only  $\left\| \Pi_\perp \mathbf{h}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C_k(T) \eta^{\ell-1}$ . So the estimate (6.62) already presents a boot-strap argument.*

*Proof.* We introduce for  $t \geq 0$ , the field  $\mathbf{h}(t) \in L^2(-\infty, 1)^2$  by

$$\mathbf{h}(t) = \Pi_\perp \mathbf{h}_f^k(t) \text{ on } \Omega_f \text{ and } \mathbf{h}(t) = \Pi_\perp \mathbf{h}_v^k(t) \text{ on } \Omega_v.$$

The continuity relations (6.31) show that  $\mathbf{h}(t) \in H^1(-\infty, 1)^2$ . The application of lemma 6.5 to  $\mathbf{h}(t)$  shows the existence of a constant  $c$  independent of  $t$  such that

$$\|\mathbf{h}(t)\|_{L^2(\Omega_f)}^2 \leq c \left( \|\mathbf{h}(t)\|_{L^2(\Omega_v)}^2 + \|\partial_x \mathbf{h}(t)\|_{L^2(\Omega_v)}^2 + \|\partial_\xi \mathbf{h}(t)\|_{L^2(\Omega_f)}^2 \right)$$

Due to the particular form of the 1D curl operator, we can rewrite the previous inequality like

$$(6.63) \quad \left\| \Pi_\perp \mathbf{h}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq c \left( \left\| \Pi_\perp \mathbf{h}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \text{rot } \mathbf{h}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \text{rot } \mathbf{h}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \right)$$

From (6.61) we deduce that,  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,

$$(i) \quad \left\| \Pi_\perp \mathbf{h}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq 2 C_k(T) \eta^\ell, \\ (ii) \quad \left\| \partial_t \mathbf{e}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq 2 C'_k(T) \eta^\ell, \quad (iii) \quad \left\| \partial_t \mathbf{e}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq 2 C'_k(T) \eta^{\ell-1}.$$

Equation (6.29) and (ii) yield

$$(iv) \quad \left\| \text{rot } \mathbf{h}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq 2 C'_k(T) \eta^\ell,$$

while equation (6.30) and (iii) yield

$$(v) \quad \left\| \text{rot } \mathbf{h}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq 4 C'_k(T) \eta^{\ell+1} + 2 \left\| \partial_t \mathbf{E}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \eta^{2k+2}$$

The lemma is proved by using (i), (iv), (v) in the estimation (6.63).  $\square$

We remark that the upper limit on  $\ell$  contained in the hypothesis 6.61 comes from the term in  $O(\eta^{2k+2})$  in the right hand side of (v).



**Corollary 6.1** *Under the assumptions of lemma 6.6 we deduce the existence of two constants  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$  such that  $\forall 0 \leq t \leq T$*

$$\left\| \mathbf{m}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C_k(T) \eta^\ell \text{ and } \left\| \partial_t \mathbf{m}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C'_k(T) \eta^\ell$$

*Proof.* We begin from the equation (6.35). We set

$$R_1 = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}, \quad R_2(T) = \sup_{t \leq T} \left\| \overline{\mathbf{M}}_f^k \right\|_{L^\infty} \quad \text{and} \quad R(T) = \max(R_1, R_2(T)).$$

Applying property (6.8) to (6.35) proves the existence of a constant  $C(T) \equiv C(R(T))$  such that  $\forall 0 \leq t \leq T$  and a.e. in  $\Omega_f$

$$(6.64) \quad \left| \partial_t \mathbf{m}_f^k \right| \leq C(T) \left( \left| \mathbf{h}_f^k \right| + \left| \mathbf{m}_f^k \right| \left| \overline{\mathbf{H}}_f^k \right| \right) + \eta^{k+1} \left| \mathbf{F}_f^k \right|$$

Using the orthogonal decomposition  $\mathbf{h}_f^k = \Pi_\perp \mathbf{h}_f^k + \Pi_\parallel \mathbf{h}_f^k = \Pi_\perp \mathbf{h}_f^k - \Pi_\parallel \mathbf{m}_f^k$ , (6.64) becomes

$$(6.65) \quad \left| \partial_t \mathbf{m}_f^k \right| \leq \left( C(T) + \left| \overline{\mathbf{H}}_f^k \right| \right) \left| \mathbf{m}_f^k \right| + \left( C(T) \left| \Pi_\perp \mathbf{h}_f^k \right| + \eta^{k+1} \left| \mathbf{F}_f^k \right| \right).$$

We set  $R_k(T) = C(T) + \sup_{t \leq T} \left\| \overline{\mathbf{H}}_f^k(t) \right\|_{L^\infty}$ . Inequality (6.65) yields in particular,

$\forall 0 \leq t \leq T$

$$(6.66) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \mathbf{m}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq R_k(T) \left\| \mathbf{m}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \left( C(T) \left\| \Pi_\perp \mathbf{h}_f^k(t) \right\|_{L^2} + \eta^{k+1} \left\| \mathbf{F}_f^k(t) \right\|_{L^2} \right) \left\| \mathbf{m}_f^k(t) \right\|_{L^2}$$

The expression of  $\mathbf{F}_f^k$  is given by (6.34). From hypothesis (6.60) we deduce by theorem 6.2 that  $\mathbf{F}_f^k \in L^\infty(\Omega_f \times (0, T))$ . Moreover, according to assumption 6.1,

$$F_k(T) = \sup_{\eta \leq 1} \sup_{t \leq T} \left\| \mathbf{F}_f^k(t) \right\|_{L^\infty} \text{ is finite .}$$

Combining this fact with lemma 6.6 we deduce from (6.66)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \mathbf{m}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq R_k(T) \left\| \mathbf{m}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \eta^{\frac{\ell}{2}} \left( C(T) \sqrt{C_k(T)} + F_k(T) \right) \left\| \mathbf{m}_f^k(t) \right\|_{L^2}$$

Hence, using Gronwall's lemma, we get  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,

$$(6.67) \quad \left\| \mathbf{m}_f^k(t) \right\|_{L^2} \leq \eta^{\frac{\ell}{2}} \left( C(T) \sqrt{C_k(T)} + F_k(T) \right) \left( \frac{\exp(R_k(T)t) - 1}{R_k(T)} \right)$$

This proves the first estimate of corollary 6.1. The second inequality can be easily deduced from (6.65) by using (6.67) and lemma 6.6.  $\square$

Now, we are able to conclude for one part of lemma 6.1.

**Corollary 6.2** *Under assumptions (6.60) and (6.61) we deduce the existence of a constant  $C_k(T)$  such that,  $\forall 0 \leq t \leq T$*

$$\mathcal{E}_k^\eta(t) \leq C_k(T) \eta^{\ell+1}$$

*Proof.* We start from inequality 6.42 and apply Schwarz inequality to the first integral, which yields

$$\mathcal{E}_k^\eta(t) \leq \eta^{\frac{1}{2}} \int_0^t \left\| \partial_t \mathbf{m}_f^k(\tau) \right\|_{L^2} \sqrt{\mathcal{E}_k^\eta(\tau)} d\tau + \eta^{k+\frac{1}{2}} \int_0^t f_k(\tau) \sqrt{\mathcal{E}_k^\eta(\tau)} d\tau.$$

Using Gronwall's lemma we deduce

$$\mathcal{E}_k^\eta(t) \leq \eta \left( \frac{1}{2} \int_0^t \left( \left\| \partial_t \mathbf{m}_f^k(\tau) \right\|_{L^2} + \eta^k f_k(\tau) \right) d\tau \right)^2.$$

We conclude by using corollary 6.1 and the fact that  $f_k \in L^\infty(0, T)$  under the condition (6.60).  $\square$

We now deduce the following estimate on  $\partial_{tt} \mathbf{m}_f^k$ .

**Corollary 6.3** *We set :  $A_f^\eta = \partial_{tt} \mathbf{m}_f^k - \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{h}_f^k)$ . Under the assumptions of lemma 6.6 we deduce the existence of a constant  $C'_k(T)$  such that  $\forall 0 \leq t \leq T$*

$$\|A_f^\eta(t)\|_{L^2}^2 \leq C'_k(T) \eta^\ell$$

*Proof.* According to the expression (6.38) of  $\partial_{tt} \mathbf{m}_f^k$  we have

$$\begin{aligned} A_f^\eta &= \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \overline{\mathbf{H}}_f^k) - \mathcal{L}(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \partial_t \overline{\mathbf{H}}_f^k) \\ &\quad + \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{h}_f^k) + \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{m}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) \\ &\quad + \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) - \mathcal{L}_1(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) + \eta^{k+1} \partial_t \mathbf{F}_f^k. \end{aligned}$$

We set  $R_1 = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$  and  $R_2(T) = \sup_{t \leq T} \|\overline{\mathbf{M}}_f^k\|_{L^\infty}$  and  $R(T) = \max(R_1, R_2(T))$ . Property (6.8) proves the existence of a constant  $C(T) \equiv C(R(T))$  such that  $\forall 0 \leq t \leq T$  and a.e. in  $\Omega_f$

$$(i) \quad \left| \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \overline{\mathbf{H}}_f^k) - \mathcal{L}(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \partial_t \overline{\mathbf{H}}_f^k) \right| \leq C(T) \left| \mathbf{m}_f^k \right| \left| \partial_t \overline{\mathbf{H}}_f^k \right|.$$

and property (6.37) shows

$$\begin{aligned} (ii) \quad & \left| \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{M}_f^\eta, \mathbf{h}_f^k) \right| \leq C(T) \left| \partial_t \mathbf{M}_f^\eta \right| \left| \mathbf{h}_f^k \right|, \\ (iii) \quad & \left| \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{m}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) \right| \leq C(T) \left| \partial_t \mathbf{m}_f^k \right| \left| \overline{\mathbf{H}}_f^k \right|, \\ (iv) \quad & \left| \mathcal{L}_1(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) - \mathcal{L}_1(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) \right| \leq C(T) \left| \mathbf{m}_f^k \right| \left| \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^k \right| \left| \overline{\mathbf{H}}_f^k \right|. \end{aligned}$$

Let us set

$$\begin{aligned} C_k(T) &= \sup_{\eta \leq 1} \sup_{t \leq T} \left( \left\| \partial_t \overline{\mathbf{H}}_f^k(t) \right\|_{L^\infty} + \left\| \partial_t \mathbf{M}_f^\eta(t) \right\|_{L^\infty} + \left\| \overline{\mathbf{H}}_f^k(t) \right\|_{L^\infty} + \left\| \partial_t \overline{\mathbf{M}}_f^k(t) \right\|_{L^\infty} \right) \\ F_k(T) &= \sup_{\eta \leq 1} \sup_{t \leq T} \left( \left\| \mathbf{F}_f^k(t) \right\|_{L^\infty} \right) \end{aligned}$$

As (6.60) holds, the constant  $C_k(T)$  is finite by theorem 6.2 and lemma 6.3 and the constant  $F_k(T)$  is finite by theorem 6.2 and Assumption 6.1. The estimations (i), (ii), (iii) and (iv) yield, by setting  $C'_k(T) = C(T) \max(C_k(T), C_k(T)^2)$

$$\|A_f^\eta(t)\|_{L^2} \leq C'_k(T) \left( 2 \left\| \mathbf{m}_f^k(t) \right\|_{L^2} + \left\| \partial_t \mathbf{m}_f^k(t) \right\|_{L^2} + \left\| \mathbf{h}_f^k(t) \right\|_{L^2} \right) + \eta^{k+1} F_k(T)$$

We notice then that corollary 6.3 is a direct consequence of corollary 6.1 and corollary 6.2.  $\square$

We conclude by

**Corollary 6.4** *Under assumptions (6.60) and (6.61) we deduce the existence of a constant  $C'_k(T)$  such that,  $\forall 0 \leq t \leq T$*

$$\mathcal{T}_k^\eta(t) \leq C'_k(T) \eta^{\ell+1}$$

*Proof.* The principle is quite similar to the principle of the proof of corollary 6.2. We consider the energy estimation (6.43), that we recall here

$$\mathcal{T}_k^\eta(t) \leq -\eta \int_0^t \int_{\Omega_f} \partial_{tt} \mathbf{m}_f^k \cdot \partial_t \mathbf{h}_f^k d\xi d\tau + \eta^{k+\frac{1}{2}} \int_0^t g_k(\tau) \sqrt{\mathcal{T}_k^\eta(\tau)} d\tau$$

Under the condition (6.60),  $g_k \in L^2(0, T)$  for every  $T < \infty$ . Let us set, like in corollary 6.3,

$$A_f^\eta = \partial_{tt} \mathbf{m}_f^k - \mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{h}_f^k)$$

As we have the pointwise inequality  $\mathcal{L}(\mathbf{M}_f^\eta, \partial_t \mathbf{h}_f^k) \cdot \partial_t \mathbf{h}_f^k \geq 0$ , we deduce the new energy estimation

$$\mathcal{T}_k^\eta(t) \leq -\eta \int_0^t \int_{\Omega_f} A_f^\eta \cdot \partial_t \mathbf{h}_f^k d\xi d\tau + \eta^{k+\frac{1}{2}} \int_0^t g_k(\tau) \sqrt{\mathcal{T}_k^\eta(\tau)} d\tau.$$

Applying Schwarz inequality to the first integral yield

$$\mathcal{T}_k^\eta(t) \leq \eta^{\frac{1}{2}} \int_0^t \left( \|A_f^\eta(\tau)\|_{L^2} + \eta^k g_k(\tau) \right) \sqrt{\mathcal{T}_k^\eta(\tau)} d\tau,$$

which implies, using Gronwall's lemma,

$$\mathcal{T}_k^\eta(t) \leq \eta \left( \int_0^t \left( \|A_f^\eta(\tau)\|_{L^2} + \eta^k g_k(\tau) \right) d\tau \right)^2.$$

We conclude by using the result of corollary 6.3.  $\square$

## 6.5 Effective boundary conditions

The first order condition consists on removing the thin layer and applying the Dirichlet boundary condition (6.4) at  $x = 0$ . We remark then that the approximate solution is nothing but  $(\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0)$  (see (6.12)-(6.13)), and the error estimate is directly given by theorem 6.3 (with  $k = 0$ ). So we shall consider only the approximate model using the effective boundary condition of order 3 that coincides in 1D with the second order one (see [22]).

### 6.5.1 Presentation of the approximate model

We keep the notion of section 6.2. Like the exact transmission problem, the approximate one is posed on the two domains  $\Omega_v$  and  $\Omega_f$ . However, it involves only the approximate

electromagnetic field  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$ , defined on  $\Omega_v \times \mathbf{R}^+$  and the approximate magnetization  $\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta$  defined on  $\Omega_f \times \mathbf{R}^+$ . These fields satisfy

$$(6.68) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta - \text{rot } \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta = 0, & \partial_t \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta + \text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta = 0 & \text{on } \Omega_v \times \mathbf{R}^+, \\ (\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)(x, 0) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)(x), & x \in \Omega_v. \end{cases}$$

coupled with the effective boundary conditions of order 3

$$(6.69) \quad \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(0, t) = \eta \left( \frac{d\tilde{\varphi}^\eta}{dt}(t) \times \mathbf{n} + \int_0^1 \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\xi, t) \times \mathbf{n} d\xi \right)$$

where

$$(6.70) \quad \tilde{\varphi}^\eta(t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t)$$

and  $\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta$  is a solution of

$$(6.71) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta = \mathcal{L} \left( \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \tilde{\varphi}^\eta + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \right) & \text{on } \Omega_f \times \mathbf{R}^+, \\ \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\xi, 0) = \mathbf{M}_0(\xi), & \text{for a.e. } \xi \in \Omega_f. \end{cases}$$

### 6.5.2 Study of the approximate model

This section is dedicated to the study of the existence and uniqueness of solutions satisfying (6.68) ... (6.71). The distinction between exact and approximate solution is not necessary in this section. That is why we make locally (i.e. only for this section) a simplification of the notations. From now on, in this section, the fields  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \tilde{\varphi}^\eta)$  will be denoted by  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M}, \varphi)$ . For  $m$  a given integer, we introduce the functional space

$$W^m(\Omega_v) = \left\{ \mathbf{E} \in C^m \left( 0, \infty; L^2(\Omega_v)^3 \right) \cap C^0 \left( 0, \infty; H^m(\Omega_v)^3 \right) / \Pi_{\perp} \mathbf{E} = 0 \right\}.$$

**Definition 6.1** *If the initial data  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)$  are in  $V^1$ , we said that  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  is a global strong solution of (6.68), (6.69) and (6.71) when*

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\in W^1(\Omega_v), \quad \mathbf{H} \in \{ \mathbf{H} \in W^1(\Omega_v) / \Pi_{\parallel} \mathbf{H}(0, \cdot) \in C^1([0, \infty))^2 \}, \\ \mathbf{M} &\in C^1(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^3), \end{aligned}$$

$(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  satisfies (6.68), (6.69) and (6.71) almost everywhere.

**Theorem 6.4** *If the initial data  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)$  are in  $V^1$ , then there exists a unique global strong solution  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$ , to the system  $\{ (6.68), (6.69), (6.71) \}$ .*

*Proof.* We split the proof into two lemmas that point out the main steps. First, we reduce the system of equations posed on  $\Omega_v$  and  $\Omega_f$  into a system of equations posed on the boundary  $x = 0$  of  $\Omega_v$  and on  $\Omega_f$ . This is done using the explicit construction of the Dirichlet to Neumann operator associated to Maxwell equations in  $\Omega_v$ . We consider  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^1$  and define  $(\tilde{\mathbf{E}}_0, \tilde{\mathbf{H}}_0) \in H^1(\mathbf{R})^3 \times H^1(\mathbf{R})^3$  by

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_0(x) = \mathbf{E}_0(x), \quad \tilde{\mathbf{H}}_0(x) = \mathbf{H}_0(x), & \text{for } x \leq 0, \\ \tilde{\mathbf{E}}_0(x) = \mathbf{E}_0(-x), \quad \tilde{\mathbf{H}}_0(x) = -\mathbf{H}_0(-x), & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

We set  $\chi^+ = x + t$  and  $\chi^- = x - t$  for  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ .

**Lemma 6.7** *Assume that the initial data satisfy  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^1$ . Then  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  is a strong global solution to the system  $\{(6.68), (6.69), (6.71)\}$  if and only if, for almost every  $x \in \Omega_v$  and  $t \geq 0$ ,*

$$(6.72) \quad \begin{cases} \mathbf{E}(x, t) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{E}_0(\chi^-) + \tilde{\mathbf{E}}_0(\chi^+) + \mathbf{n} \times \left( \tilde{\mathbf{H}}_0(\chi^+) - \mathbf{H}_0(\chi^-) + 2\tilde{\varphi}(\chi^+) \right) \right), \\ \mathbf{H}(x, t) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{H}_0(\chi^-) + \tilde{\mathbf{H}}_0(\chi^+) - \mathbf{n} \times \left( \tilde{\mathbf{E}}_0(\chi^+) - \mathbf{E}_0(\chi^-) \right) \right) + \tilde{\varphi}(\chi^+), \end{cases}$$

where  $\tilde{\varphi}$  is a causal function such that  $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$  for  $t \geq 0$  and where  $(\varphi, \mathbf{M})$  are solution of

$$(6.73) \quad \mathcal{P} \quad \begin{cases} (\varphi, \mathbf{M}) \in C^1(0, \infty; \mathbb{R}^2) \times C^1(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^3), \\ \begin{cases} \varphi(t) + \eta \frac{d\varphi}{dt}(t) + \eta \int_0^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M}(\xi, t) d\xi = \mathbf{F}(t), & t \geq 0, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases} \\ \text{and } (\varphi, \mathbf{M}) \text{ satisfies (6.71) :} \\ \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \varphi + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M})) & \text{on } \Omega_f \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{M}(\xi, 0) = \mathbf{M}_0(\xi), & \text{for a.e. } \xi \in \Omega_f. \end{cases} \end{cases}$$

The function  $\mathbf{F}$  is defined by  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{H}_0(-t) + \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0(-t)$  for  $t \geq 0$ .

*Proof.* Assume that  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  is a strong global solution to the system  $\{(6.68), (6.69), (6.71)\}$ . We deduce that the function  $\varphi$  defined by (6.70) :  $\varphi(t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}(0, t)$  satisfies  $\varphi \in C^1(0, \infty; \mathbb{R}^2)$ , and  $\varphi(0) = 0$ . Moreover one checks easily that  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  satisfy (6.72) (explicit construction of the Dirichlet to Neumann operator in 1D). From this expression we extract the boundary value of  $\mathbf{E}$ . One checks that

$$(6.74) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{E}(0, t) = \mathbf{E}(0, t) = \mathbf{n} \times \varphi(t) - \mathbf{n} \times \mathbf{F}(t)$$

We deduce then by the boundary condition (6.69) and the system (6.71) that  $(\varphi, \mathbf{M})$  is a solution of the problem  $\mathcal{P}$ .

Reciprocally, if we consider  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  given by (6.72) then one checks easily that  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  satisfies (6.68) and (6.70). Moreover, relation (6.74) holds. It permits, when combined with (6.73), to retrieve the boundary condition (6.69) and the equation (6.71).  $\square$

This lemma shows that the study of the problem  $\{(6.68), (6.69), (6.71)\}$  is reduced to the study of  $\mathcal{P}$ . The latter one is answered by the following lemma.

**Lemma 6.8** *Assume that the initial data satisfy  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^1$  then the problem  $\mathcal{P}$  has a unique solution. Moreover it satisfies,  $\forall t \geq 0$*

$$(6.75) \quad |\mathbf{M}(\xi, t)| = |\mathbf{M}_0(\xi)| \quad \text{for a.e. } \xi \in \Omega_f \quad \text{and} \quad |\varphi(t)| \leq \frac{1}{\eta} \int_0^t |\mathbf{F}(s)| ds.$$

*Proof.* We begin by proving the existence of maximal solutions by using Cauchy-Lipschitz theorem. We write the problem  $\mathcal{P}$  in an appropriate form : setting  $U = (\varphi, \mathbf{M})$  we see that  $U$  satisfies the Cauchy problem

$$(6.76) \quad \frac{dU}{dt} = G(U, t), \quad U(0) = (0, \mathbf{M}_0) \in \mathbb{R}^2 \times L^\infty(\Omega_f)^3$$

where the function  $G(U, t) = G(\varphi, \mathbf{M}, t)$  is defined on  $\mathbb{R}^2 \times L^\infty(\Omega_f)^3 \times \mathbb{R}^+$  with values in  $\mathbb{R}^2 \times L^\infty(\Omega_f)^3$  and is given by  $G(U, t) = (G_1(U, t), G_2(U, t))$  where

$$\begin{aligned} G_1(U, t) &= \frac{1}{\eta} (\mathbf{F}(t) - \varphi) - \int_0^1 \Pi_{\parallel} \mathcal{L}(\mathbf{M}, \varphi + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M})) \, d\xi, \\ G_2(U, t) &= \mathcal{L}(\mathbf{M}, \varphi + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M})) \end{aligned}$$

Let  $U_1 = (\varphi_1, \mathbf{M}_1)$  and  $U_2 = (\varphi_2, \mathbf{M}_2)$  be two elements of  $\mathbb{R}^2 \times L^\infty(\Omega_f)^3$  such that each of  $|\varphi_1|$ ,  $|\varphi_2|$ ,  $\|\mathbf{M}_1\|_{L^\infty}$  and  $\|\mathbf{M}_2\|_{L^\infty}$  is lesser than a constant  $R$ . Applying property (6.9) of  $\mathcal{L}$  shows that, for all  $t_1, t_2 \geq 0$

$$(6.77) \quad \begin{aligned} \|G_2(U_1, t_1) - G_2(U_2, t_2)\|_{L^\infty(\Omega_f)} &\leq C \left( |\varphi_1 - \varphi_2| + \|\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\|_{L^\infty(\Omega_f)} \right) \\ |G_1(U_1, t_1) - G_1(U_2, t_2)| &\leq \left( C + \frac{1}{\eta} \right) \left( |\varphi_1 - \varphi_2| + \|\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\|_{L^\infty(\Omega_f)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\eta} |F(t_1) - F(t_2)| \end{aligned}$$

where, using the notation of (6.9),  $C = C_1(R)(2R + \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}) + C_2(R)$  and is independent of  $t$ . By the continuous injection of  $H^1$  into  $C^0$  in 1D we deduce that  $F \in C^0(\mathbb{R}^+)$  and so according to (6.77) the function  $G$  is a continuous map from  $\mathbb{R}^2 \times L^\infty(\Omega_f)^3 \times \mathbb{R}^+$  into  $\mathbb{R}^2 \times L^\infty(\Omega_f)^3$ . Moreover, taking  $t_1 = t_2 = t$  we see that this map is locally lipshitzien with respect to  $(\varphi, \mathbf{M})$ . Hence, standard results on differential equations ensure the existence of  $T_{max} > 0$  such that

$$(\varphi, \mathbf{M}) \in C^1\left([0, T_{max}[; \mathbb{R}^2\right) \times C^1\left([0, T_{max}[; L^\infty(\Omega_f)^3\right)$$

is the unique maximal solution to (6.76). But this maximal solution is global ( $T_{max} = \infty$ ) according to the a priori estimates (6.75) that we we shall prove now. The first one is a direct consequence of 6.6(ii) when we take the scalar product in  $\mathbb{R}^3$  of the equality  $\partial_t \mathbf{M} = G_2$  by  $\mathbf{M}$ . For the second one, we take the scalar product of the first equation in (6.73) by  $\varphi$ , hence

$$(6.78) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi(t)|^2 = -\frac{1}{\eta} |\varphi(t)|^2 - \int_0^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M}(\xi, t) \cdot \varphi(t) \, d\xi + \frac{1}{\eta} \mathbf{F}(t) \cdot \varphi(t).$$

One has :  $\partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M} \cdot \varphi = \partial_t \mathbf{M} \cdot \varphi = \partial_t \mathbf{M} \cdot (\varphi + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) - \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}))$ , and according to (6.6)(iii),  $\partial_t \mathbf{M} \cdot (\varphi + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M})) \geq 0$ . Therefore

$$(6.79) \quad \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M} \cdot \varphi \geq -\partial_t \mathbf{M} \cdot \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) = \frac{1}{2} \partial_t |\Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M})|^2$$

Combining (6.79) with (6.78) shows that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( |\varphi(t)|^2 + \|\Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M})(t)\|_{L^2}^2 \right) \leq \frac{1}{\eta} |\mathbf{F}(t)| |\varphi(t)|$$

Integrating in time this identity yields

$$|\varphi(t)| + \|\Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M})(t)\|_{L^2} \leq \frac{1}{\eta} \int_0^t |\mathbf{F}(\tau)| \, d\tau$$

which implies the second a priori estimate of lemma 6.8.  $\square$

Theorem 6.4 is proved by the combination of lemma 6.7 and lemma 6.8.  $\square$

We give now the fundamental stability result involving energy estimate, which constitute the basis of the asymptotic study.

**Theorem 6.5** *Let  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  be the solution of theorem 6.4 and let us introduce*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{E}(t)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{H}(t)\|_{L^2}^2 + \eta \left( |\varphi(t)|^2 + \|\Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M})\|_{L^2}^2 \right) \right).$$

*Then one has for  $t \geq 0$  :  $\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) = \frac{1}{2} \left( \|\mathbf{E}_0\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{H}_0\|_{L^2}^2 \right)$ .*

*Proof.* On the one hand, the classical energy identity associated to (6.68) and (6.70) implies

$$(6.80) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\mathbf{E}(t)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{H}(t)\|_{L^2}^2 \right) = -\Pi_{\parallel} \mathbf{E}(0, t) \cdot \varphi(t) \times \mathbf{n}$$

On the other hand, multiplying the boundary condition (6.69) by  $\varphi(t) \times \mathbf{n}$  yields

$$(6.81) \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{E}(0, t) \cdot \varphi(t) \times \mathbf{n} = \eta \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi(t)|^2 + \eta \int_0^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M}(\xi, t) \cdot \varphi(t) \, d\xi.$$

The theorem is proven by identifying (6.80) and (6.81) then by using (6.79).  $\square$

**Remark 6.11 (Regularity result)** *Let us mention, without giving any proof, that one can obtain a regularity result on the solutions of theorem 6.4 by considering the derivative in time of the equations (6.68)  $\cdots$  (6.71). This result can be formulated by : If the initial data  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)$  are in  $V^m$ ,  $m \geq 1$ , then the solution  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  satisfies*

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\in W^m(\Omega_v), \quad \mathbf{H} \in \{\mathbf{H} \in W^m(\Omega_v) / \Pi_{\parallel} \mathbf{H}(0, \cdot) \in C^m([0, \infty))^2\} \\ \mathbf{M} &\in C^m(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^3). \end{aligned}$$

### 6.5.3 Error estimate

We go back to the original notation introduced in subsection 6.5.1 (i.e. the approximate solution is distinguished from the exact one by adding  $\sim$  over the variables). The main result of this section is the following comparison between exact and approximate solutions.

**Theorem 6.6** *Let  $T > 0$  be a given real,  $k \in \{0, 1, 2\}$  and  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^{k+2}$ . Let  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)$  be the strong solution of (6.68)  $\cdots$  (6.71). Then, there exists a constant  $C_k(T)$  independent of  $\eta$  such that,  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,*

$$\begin{aligned} \left( \left\| \mathbf{E}_v^\eta(t) - \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t) \right\|_{H^1} + \left\| \partial_t \mathbf{E}_v^\eta(t) - \partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^\eta(t) \right\|_{L^2} \right) &\leq C_k(T) \eta^{k+\frac{1}{2}} \\ \left( \left\| \mathbf{H}_v^\eta(t) - \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t) \right\|_{H^1} + \left\| \partial_t \mathbf{H}_v^\eta(t) - \partial_t \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(t) \right\|_{L^2} \right) &\leq C_k(T) \eta^{k+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

*Proof.* To prove this theorem we shall prove first that, like the exact solution, the approximate one  $(\widetilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta)$  admits an asymptotic expansion with respect to  $\eta$ . The justification of this asymptotic expansion is given by theorem 6.8 below. If we admit for while the result of this theorem, then the proof of the error estimate comes simply from remark 6.12, that compares the asymptotic expansions of each solution (the exact and the approximate ones). We conclude from theorems 6.3 and 6.8 by using a triangular inequality.  $\square$

#### 6.5.4 Asymptotic analysis of the approximate model

Like in the case of the exact solution, we shall prove the existence of an asymptotic expansion of  $(\widetilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta)$  of the form

$$(6.82) \quad (\widetilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) = (\widetilde{\mathbf{E}}_v^0, \widetilde{\mathbf{H}}_v^0, \widetilde{\mathbf{M}}_f^0) + \eta (\widetilde{\mathbf{E}}_v^1, \widetilde{\mathbf{H}}_v^1, \widetilde{\mathbf{M}}_f^1) + \eta^2 (\widetilde{\mathbf{E}}_v^2, \widetilde{\mathbf{H}}_v^2, \widetilde{\mathbf{M}}_f^2) + \dots$$

The procedure is exactly the same : The first step is to identify the equations satisfied by  $(\widetilde{\mathbf{E}}_v^k, \widetilde{\mathbf{H}}_v^k, \widetilde{\mathbf{M}}_f^k)_{k \geq 0}$ . Secondly, we look for sufficient conditions on the data to be able to compute the terms of order  $k$ . The last step is to prove that a certain norm of the errors

$$(6.83) \quad (\widetilde{\mathbf{e}}_v^k, \widetilde{\mathbf{h}}_v^k, \widetilde{\mathbf{m}}_f^k) = (\widetilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) - \sum_{j=0}^k \eta^j (\mathbf{E}_v^j, \mathbf{H}_v^j, \mathbf{M}_f^j)$$

tend to zero like  $(\eta^{k+1})$ , under a suitable conditions on the data. As the proofs are very close to what we have done for the exact solution, we shall proceed by analogy and indicate only the key points. Let us introduce

$$(6.84) \quad \widetilde{\mathbf{H}}_f^\eta = \widetilde{\varphi}^\eta + \Pi_\perp(\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta) \quad \text{on } \Omega_f \times \mathbf{R}^+$$

which plays, in equation (6.71) a similar role as  $\mathbf{H}_f^\eta$  in equation (6.5), and let us set

$$(6.85) \quad (\widetilde{\mathbf{H}}_f^\eta, \widetilde{\varphi}^\eta) = (\widetilde{\mathbf{H}}_f^0, \widetilde{\varphi}^0) + \eta (\widetilde{\mathbf{H}}_f^1, \widetilde{\varphi}^1) + \eta^2 (\widetilde{\mathbf{H}}_f^2, \widetilde{\varphi}^2) + \dots$$

#### Formal identification

As expected, when we plug the expansions (6.82) and (6.85) into the equations (6.68)  $\dots$  (6.71) and (6.84), and make a formal identification, we obtain a set of equations that permit to compute step by step the different terms. More precisely, we get for  $k = 0$

$$(6.86) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \widetilde{\mathbf{E}}_v^0 - \text{rot } \widetilde{\mathbf{H}}_v^0 = 0, \quad \partial_t \widetilde{\mathbf{H}}_v^0 + \text{rot } \widetilde{\mathbf{E}}_v^0 = 0, \quad \text{on } \Omega_v, \\ \widetilde{\mathbf{E}}_v^0(x, 0) = \mathbf{E}_0(x), \quad \widetilde{\mathbf{H}}_v^0(x, 0) = \mathbf{H}_0(x), \\ \widetilde{\mathbf{E}}_v^0(0, t) \times \mathbf{n} = 0, \end{array} \right.$$

$$(6.87) \quad \widetilde{\varphi}^0(t) = \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{H}}_v^0(0, t)$$

$$(6.88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\mathbf{H}}_f^0(\xi, t) = \widetilde{\varphi}^0(t) + \Pi_\perp(\mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^0)(\xi, t) \\ \partial_t \widetilde{\mathbf{M}}_f^0 = \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{M}}_f^0, \widetilde{\mathbf{H}}_f^0), \quad \widetilde{\mathbf{M}}_f^0(\xi, 0) = \mathbf{M}_0(\xi). \end{array} \right.$$



and for  $k \geq 1$

$$(6.89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^k - \text{rot } \tilde{\mathbf{H}}_v^k = 0, \quad \partial_t \tilde{\mathbf{H}}_v^k + \text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_v^k = 0, \quad \text{on } \Omega_v, \\ \tilde{\mathbf{E}}_v^k(x, 0) = 0, \quad \tilde{\mathbf{H}}_v^k(x, 0) = 0, \\ \tilde{\mathbf{E}}_v^k(0, t) \times \mathbf{n} = \left( \frac{d}{dt} \tilde{\varphi}^{k-1}(t) \times \mathbf{n} + \int_0^1 \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^{k-1}(\xi, t) \times \mathbf{n} d\xi \right), \end{array} \right.$$

$$(6.90) \quad \tilde{\varphi}^k(t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^k(0, t)$$

$$(6.91) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{H}}_f^k(\xi, t) = \tilde{\varphi}^k(t) - \Pi_{\perp} \tilde{\mathbf{M}}_f^k(\xi, t) \\ \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^k = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{M}}_f^0, \tilde{\mathbf{H}}_f^k) + \sum_{i=1}^k \mathcal{L}_i(\tilde{\mathbf{M}}_f^0, \dots, \tilde{\mathbf{M}}_f^i, \tilde{\mathbf{H}}_f^{k-i}), \quad \tilde{\mathbf{M}}_f^k(\xi, 0) = 0. \end{array} \right.$$

### Study of the identified problems

We have the analogous to theorem 6.2 :

**Theorem 6.7** *For all  $k$  a given integer, if  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^{k+1+s}$ ,  $s \in \mathbf{N}$ , then there exists  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^k, \tilde{\mathbf{H}}_v^k, \tilde{\mathbf{M}}_f^k)$ , uniquely determined by (6.86),  $\dots$ , (6.91), that satisfy*

$$(6.92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{E}}_v^k, \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{H}}_v^k \right) \in \{C^{s+1}(0, \infty; L^2(\Omega_v)^2) \cap C^s(0, \infty; H^1(\Omega_v)^2)\}^2, \\ \tilde{\varphi}^k \in H_{0,loc}^{s+1}(0, \infty; \mathbf{R}^2), \\ \tilde{\mathbf{M}}_f^k \in C^{s+1}(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^3) \text{ and } \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^k \in H_{0,loc}^s(0, \infty; L^\infty(\Omega_f)^3). \end{array} \right.$$

*Proof.* Remark that the equations (6.86),  $\dots$ , (6.91) are a simplified version of equations (6.12)  $\dots$  (6.19) because we have an explicit expression of  $\tilde{\mathbf{H}}_f^k$  and of the boundary value of  $\Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{E}}_v^k$ . So the proof of this theorem can be derived from the proof of theorem 6.2 by doing minor adaptations.  $\square$

**Remark 6.12** *Assume that the data has enough regularity. By application of formulas (6.23) and (6.24) one checks that, for  $\xi \in \Omega_f$ ,*

$$(6.93) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^0(\xi, t) = 0, \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^0(\xi, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t), \quad \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_f^1(\xi, t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^1(0, t), \\ \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^1(\xi, t) = (1 - \xi) \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^0(0, t) \times \mathbf{n} + \int_{\xi}^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^0(\kappa, t) \times \mathbf{n} d\kappa, \\ \Pi_{\parallel} \mathbf{E}_f^2(\xi, t) = (1 - \xi) \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{H}_v^1(0, t) \times \mathbf{n} + \int_{\xi}^1 \partial_t \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_f^1(\kappa, t) \times \mathbf{n} d\kappa, \end{array} \right.$$

Applying these expressions to  $\xi = 0$  and combining with (6.12), (6.15), (6.16), (6.19), then comparing with the equations (6.86)  $\dots$  (6.91), shows that  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^k, \tilde{\mathbf{H}}_v^k)$  satisfies the same equations as  $(\mathbf{E}_v^k, \mathbf{H}_v^k)$  for  $0 \leq k \leq 2$ . We deduce, for instance, by theorems 6.2 and 6.7, that the asymptotic expansions of  $(\mathbf{E}_v^\eta, \mathbf{H}_v^\eta)$  and  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$  coincides till  $k = 2$ . One can check that this becomes false for  $k \geq 3$ .

**Justification of the asymptotic expansion**

We consider the fields  $(\tilde{\mathbf{e}}_v^k, \tilde{\mathbf{h}}_v^k, \tilde{\mathbf{m}}_f^k)$  defined by (6.83) and introduce also

$$(6.94) \quad \tilde{\mathbf{h}}_f^k = \tilde{\mathbf{H}}_f^\eta - \sum_{j=0}^k \eta^j \tilde{\mathbf{H}}_f^j.$$

We observe that these fields satisfy the same equations as  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta)$  with additional second members of order  $\eta^{k+1}$  and with initial values equal to zero. Namely we have

$$(6.95) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{e}}_v^k - \text{rot } \tilde{\mathbf{h}}_v^k = 0, & \partial_t \tilde{\mathbf{h}}_v^k + \text{rot } \tilde{\mathbf{e}}_v^k = 0, & \text{on } \Omega_v, \\ (\tilde{\mathbf{e}}_v^k, \tilde{\mathbf{h}}_v^k)(x, 0) = (0, 0), & x \in \Omega_v. \end{cases}$$

$$(6.96) \quad \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{e}}_v^k(0, t) = \eta \left( \partial_t \tilde{\mathbf{h}}_v^k(0, t) \times \mathbf{n} + \int_0^1 \partial_t \tilde{\mathbf{m}}_f^k(\xi, t) \times \mathbf{n} d\xi \right) + \eta^{k+1} \phi^k(t) \times \mathbf{n}$$

where  $\phi^k(t) = \partial_t \mathbf{H}_v^k(0, t) + \int_0^1 \partial_t \mathbf{M}_f^k(\xi, t) d\xi$ , is independent of  $\eta$ , and where  $\tilde{\mathbf{m}}_f^k$  satisfies the equivalent to equation (6.33)

$$(6.97) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{m}}_f^k = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_f^\eta) - \mathcal{L}(\overline{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) + \eta^{k+1} \tilde{\mathbf{F}}_f^k, \\ \tilde{\mathbf{m}}_f^k(\xi, 0) = 0 \quad \text{for } \xi \in \Omega_f. \end{cases}$$

where

$$\overline{\mathbf{H}}_f^k = \sum_{i=0}^k \eta^i \tilde{\mathbf{H}}_f^i, \quad \overline{\mathbf{M}}_f^k = \sum_{i=0}^k \eta^i \tilde{\mathbf{M}}_f^i,$$

$$(6.98) \quad \tilde{\mathbf{F}}_f^k = R_k^\eta(\tilde{\mathbf{M}}_f^0, \dots, \tilde{\mathbf{M}}_f^k, \overline{\mathbf{H}}_f^k) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1-i}^k \eta^{(i+j)-(k+1)} \mathcal{L}_i(\tilde{\mathbf{M}}_f^0, \dots, \tilde{\mathbf{M}}_f^j, \tilde{\mathbf{H}}_f^j)$$

(Of course the fields  $\overline{\mathbf{H}}_f^k$  and  $\overline{\mathbf{M}}_f^k$  are different from those introduced in equation (6.33), but they play a similar role). We consider the energies

$$(6.99) \quad \tilde{\mathcal{E}}_k^\eta(t) = \frac{1}{2} \left( \|\tilde{\mathbf{e}}_v^k(t)\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\mathbf{h}}_v^k(t)\|_{L^2}^2 + \eta \|\tilde{\mathbf{h}}_f^k(t)\|_{L^2}^2 \right).$$

$$(6.100) \quad \tilde{\mathcal{T}}_k^\eta(t) = \frac{1}{2} \left( \|\partial_t \tilde{\mathbf{e}}_v^k(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_t \tilde{\mathbf{h}}_v^k(t)\|_{L^2}^2 + \eta \|\partial_t \tilde{\mathbf{h}}_f^k(t)\|_{L^2}^2 \right).$$

We have the analogous to theorem 6.3

**Theorem 6.8** *Let  $T > 0$  be a given real,  $k \geq 0$  be a given integer and assume that the initial data  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^{k+2}$ . Then, there exist two constants  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$  independent of  $\eta$  such that,  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,*

$$(6.101) \quad \tilde{\mathcal{E}}_k^\eta(t) \leq C_k(T) \eta^{2k+1} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathcal{T}}_k^\eta(t) \leq C'_k(T) \eta^{2k+1}.$$

The constants  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$  depend only on  $T$ ,  $k$  and  $\|(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)\|_{V^{k+2}}$ .

*Proof.* The proof uses the same technique and similar arguments as the proof of theorem 6.3. We give only the key points. It is useful to keep in mind throughout this proof the structure of the field  $\tilde{\mathbf{h}}_f^k$  introduced by (6.94),

$$(6.102) \quad \tilde{\mathbf{h}}_f^k(\xi, t) = \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{h}}_v^k(0, t) - \Pi_{\perp} \tilde{\mathbf{m}}_f^k(\xi, t)$$

• **Energy estimates :** We consider the Maxwell system formed by (6.95) and (6.96). Following the proof of theorem 6.5, we establish

$$\tilde{\mathcal{E}}_k^\eta(t) = -\eta \int_0^t \int_{\Omega_f} \partial_t \tilde{\mathbf{m}}_f^k \cdot \tilde{\mathbf{h}}_f^k d\xi d\tau - \eta^{k+1} \int_0^t \Pi_{\parallel} \phi^k(\tau) \cdot \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{h}}_v^k(0, \tau) d\tau,$$

which yields, using (6.102),

$$(6.103) \quad \tilde{\mathcal{E}}_k^\eta(t) \leq -\eta \int_0^t \int_{\Omega_f} \partial_t \tilde{\mathbf{m}}_f^k \cdot \tilde{\mathbf{h}}_f^k d\xi d\tau + \eta^{k+\frac{1}{2}} \sqrt{2} \int_0^t |\phi^k(\tau)| \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_k^\eta(\tau)} d\tau.$$

We have the analogous for  $\tilde{\mathcal{T}}_k^\eta(t)$ , by considering the derivatives in time of the equations (6.95) and (6.96),

$$(6.104) \quad \tilde{\mathcal{T}}_k^\eta(t) \leq -\eta \int_0^t \int_{\Omega_f} \partial_{tt} \tilde{\mathbf{m}}_f^k \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{h}}_f^k d\xi d\tau + \eta^{k+\frac{1}{2}} \sqrt{2} \int_0^t \left| \frac{d\phi^k}{dt}(\tau) \right| \sqrt{\tilde{\mathcal{T}}_k^\eta(\tau)} d\tau.$$

Observe the similarities between (6.103), (6.104) and (6.42), (6.43). Using these energy estimates we prove first :

• **The case  $k = 0$  :** The proof of this case follows the same steps as subsection (6.4.2). We begin first by

**Lemma 6.9** *Assume that  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^1$ . For all  $0 < T < \infty$ , there exists a constant  $C_0(T)$  independent of  $\eta$  such that,  $\forall t \in [0, T]$ ,*

$$\tilde{\mathcal{E}}_0^\eta(t) \leq C_0(T) \eta.$$

The constant  $C_0(T)$  depends on  $T$  and  $\|(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)\|_{V^1}$ .

*Proof.* The proof of this lemma is based on the energy identity (6.103) written for  $k = 0$  and the fact that  $\tilde{\mathbf{M}}_f^\eta$  satisfy the a priori estimate

$$\left| \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(\xi, t) \right| = |\mathbf{M}_0(\xi)| \quad \text{for a.e. } \xi \in \Omega_f \quad \text{and } \forall t \geq 0$$

of lemma 6.8. □

This lemma proves in particular, due to (6.102), that  $\left| \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) \right|$  is uniformly bounded with respect to  $\eta$ . As we have

$$\left\| \tilde{\mathbf{H}}_f^\eta(t) \right\|_{L^\infty} \leq \left| \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) \right| + \left\| \Pi_{\perp} \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(t) \right\|_{L^\infty} \leq \left| \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta(0, t) \right| + \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty},$$

we deduce that  $\left\| \tilde{\mathbf{H}}_f^\eta(t) \right\|_{L^\infty}$  is uniformly bounded with respect to  $\eta$ . Like in lemma 6.3, we get the existence on a constant  $R_0(T)$  independent of  $\eta$  such that,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\left\| \partial_t \tilde{\mathbf{M}}_f^\eta(t) \right\|_{L^\infty(\Omega_f)} \leq R_0(T).$$

Using this estimate and the same arguments as in the proof of lemma 6.4 one deduces

**Lemma 6.10** *Assume that  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^2$ . For all  $0 < T < \infty$ , there exists a constant  $C'_0(T)$  independent of  $\eta$  such that,  $\forall t \in [0, T]$ ,*

$$\tilde{\mathcal{T}}_0^\eta(t) \leq C'_0(T) \eta.$$

The constant  $C'_0(T)$  depends on  $T$  and  $\|(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)\|_{V^2}$ .

We conclude the proof of theorem 6.8 by

• **A boot-strap argument** : It is formulated in the following lemma :

**Lemma 6.11** *Let  $k$  be a given integer,  $T > 0$  be a given real and  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0) \in V^{k+2}$ . Assume that there exists an integer  $\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq 2k$  and two constants  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$ , independent of  $\eta$  such that,  $\forall 0 \leq t \leq T$ ,*

$$\tilde{\mathcal{E}}_k^\eta(t) \leq C_k(T) \eta^\ell \quad \text{and} \quad \tilde{\mathcal{T}}_k^\eta(t) \leq C'_k(T) \eta^\ell.$$

Then, there exists two other constants, denoted also by  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$ , such that

$$\tilde{\mathcal{E}}_k^\eta(t) \leq C_k(T) \eta^{\ell+1} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathcal{T}}_k^\eta(t) \leq C'_k(T) \eta^{\ell+1}.$$

The constants  $C_k(T)$  and  $C'_k(T)$  depend only on  $T$ ,  $k$  and  $\|(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0)\|_{V^{k+2}}$ .

The proof of this lemma uses the same arguments as the proof of lemma 6.1 and is based on the following result (which is the analogous to lemma 6.6) :

**Lemma 6.12** *Under the assumptions of lemma 6.11 we deduce the existence of a constant  $C_k(T)$  such that,  $\forall 0 \leq t \leq T$*

$$\left\| \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{h}}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq C_k(T) \eta^\ell$$

*Proof.* The proof of this lemma is nothing but the application of the trace theorem of functions in  $H^1(\Omega_v)$ . In fact, using (6.102) and the continuity of the injection  $H^1(\Omega_v)$  into  $C^0(\overline{\Omega_v})$ , one has the existence of a constant  $c$  such that

$$\left\| \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{h}}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq c \left( \left\| \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{h}}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \text{rot } \tilde{\mathbf{h}}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 \right) = c \left( \left\| \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{h}}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 + \left\| \partial_t \tilde{\mathbf{e}}_v^k(t) \right\|_{L^2}^2 \right).$$

So one has

$$\left\| \Pi_{\parallel} \tilde{\mathbf{h}}_f^k(t) \right\|_{L^2}^2 \leq 2c (\tilde{\mathcal{E}}_k^\eta(t) + \tilde{\mathcal{T}}_k^\eta(t)),$$

and concludes easily.  $\square$



## Chapitre 7

# Modèles numériques pour les CLE en 1D

**Résumé :** Dans ce chapitre, nous proposons et analysons des schémas numériques pour approcher les modèles de couches minces établis au chapitre 5. Nous nous restreignons ici au cas monodimensionnel (voir chapitre 8 pour les dimensions supérieures). Les méthodes que nous étudions dans ce cas s'inspirent de celles proposées par O. Vacus dans sa thèse [45]. La discrétisation en espace (section 7.2) s'appuie sur une formulation mixte du problème d'évolution (on retrouve le classique schéma de Yee pour les équations de Maxwell dans le vide). La discrétisation en temps (section 7.3) des conditions aux limites approchées s'avère plus problématique. Dans le cas de la condition d'ordre 3, nous étudions séparément un schéma explicite (section 7.3.2) et un schéma implicite (au bord) (section 7.3.4). Nous démontrons que le schéma implicite est stable sous la condition CFL usuelle  $c\Delta t \leq h$  (celle du schéma dans le vide) à l'aide de techniques énergétiques (théorème 7.4 et section 7.4.2). En revanche nous établissons que le schéma explicite est stable sous une condition de stabilité qui dépend de l'épaisseur  $\eta$  de la couche, du type  $c\Delta t \leq \min(h, \sqrt{2h\eta})$ . Le caractère suffisant de cette condition est établi par des techniques énergétiques (théorème 7.1 et section 7.4.1). Le caractère nécessaire est établi dans le cas linéaire par des techniques à la Kreiss-Gustafson-Sundström (théorème 7.3). Pour des raisons de robustesse liées à la condition de stabilité, nous préconisons donc l'utilisation du schéma implicite. Nous proposons également un schéma couplé "explicite-implicite" pour le problème de transmission exact via la condition "approchée exacte" et également pour la condition d'ordre 4 approchée (voir chapitre 5). La condition de stabilité de ce schéma est indépendante de  $\eta$  (théorème 7.5 et section 7.4.3). Nous terminons ce chapitre par des résultats numériques (section 7.5). Ces résultats, qui sont en phase avec la théorie, confirment l'intérêt sur le plan pratique de l'utilisation de modèles approchés tout en quantifiant les limites de validité de tels modèles (voir les commentaires de la section 7.5)

### 7.1 Introduction

Nous présentons l'étude numérique du problème couplé Maxwell+CLE dans le cas de l'approximation 1D. L'intérêt de cette étude est double :

Premièrement, elle nous permet d'envisager puis analyser la stabilité en temps de deux discrétisations possibles des CLE. On sera ainsi à même de proposer la meilleure alternative pour le cas des dimensions supérieures (voir chapitre 8).

Deuxièmement, elle nous permet d'avoir une première justification pratique, d'abord de la bonne approximation que fournissent les CLE, et ensuite des avantages que procurent celles-ci par rapport à une résolution exacte.

Nous conservons dans le présent chapitre les notations du chapitre 5.

## 7.2 Discrétisation en espace

### 7.2.1 Formulation variationnelle du modèle continu

La résolution numérique sera effectuée dans un domaine borné. Le domaine  $\Omega_v$  est désormais égal à  $] -L, 0[$ , où  $L$  désigne la longueur du domaine de calcul. La couche ferromagnétique occupe l'intervalle  $]0, \eta[$ . On utilisera en  $x = -L$  une condition de réflexion sur un conducteur parfait.

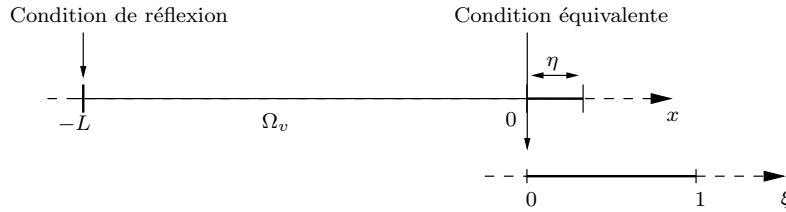


FIG. 7.1 – Le cas monodimensionnel

On considère donc  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ , la solution du système (on abandonne par commodité, la notation  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\eta)$ )

$$(7.1) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} - \text{rot } \mathbf{H} = 0, & \mu_0 \partial_t \mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{E} = 0 & \text{sur } \Omega_v \times [0, +\infty[, \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H})(x, 0) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)(x) & & x \in \Omega_v, \\ \mathbf{E}(0, t) \times \mathbf{n} = \mathcal{B}(\varphi(t)) & & t \in [0, +\infty[, \\ \mathbf{E}(-L, t) \times \mathbf{n} = 0 & & t \in [0, +\infty[, \end{cases}$$

où on a posé

$$(7.2) \quad \varphi(t) = \Pi_{\parallel} \mathbf{H}(0, t) \quad \text{pour } t \in [0, +\infty[$$

et où la condition  $\mathbf{E}(0, t) \times \mathbf{n} = \mathcal{B}(\varphi(t))$  désigne pour l'instant une CLE d'ordre quelconque.

Nous commençons par écrire une formulation faible en espace de ces équations. La formulation la plus appropriée, vue que la CLE exprime de manière forte la valeur  $\mathbf{E}(0, t) \times \mathbf{n}$ , semble être, en posant,

$$H^0(\text{rot}, \Omega_v) = \{\boldsymbol{\psi} \in L^2(\Omega_v)^3 / \text{rot}(\boldsymbol{\psi}) \in L^2(\Omega_v)^3 \text{ et } \boldsymbol{\psi}(-L) \times \mathbf{n} = 0\},$$

de chercher  $(\mathbf{H}(t), \mathbf{E}(t), \varphi(t)) \in L^2(\Omega_v)^3 \times H^0(\text{rot}, \Omega_v) \times \mathbf{R}^3$  tels que, pour tout  $t \geq 0$  et pour

tout  $(\mathbf{H}', \mathbf{E}') \in L^2(\Omega_v)^3 \times H^0(\text{rot}, \Omega_v)$ ,

$$(7.3) \quad \begin{cases} (i) & \int_{\Omega_v} \mu_0 \partial_t \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{H}' + \text{rot } \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{H}' dx = 0, \\ (ii) & \int_{\Omega_v} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}' - \text{rot } \mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}(t) dx = (\mathbf{E}'(0) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t), \\ (iii) & \mathbf{E}(0, t) \times \mathbf{n} = \mathcal{B}(\boldsymbol{\varphi}(t)). \end{cases}$$

Elle est obtenue en multipliant les deux premières équations de (7.1) respectivement par  $\mathbf{E}'$  et  $\mathbf{H}'$  et en faisant une intégration par parties pour obtenir (7.3)(ii). Les équations (ii) et (iii) ont bien un sens par les théorèmes de trace dans  $H(\text{rot}, \Omega_v) \equiv L^2(\Omega_v) \times H^1(\Omega_v) \times H^1(\Omega_v)$  en dimension 1. Aux équations de (7.3) il faut bien entendu rajouter les conditions initiales

$$(\mathbf{H}(0), \mathbf{E}(0)) = (\mathbf{H}_0, \mathbf{E}_0) \quad \text{dans } L^2(\Omega_v)^3 \times H^0(\text{rot}, \Omega_v).$$

Remarquons tout de suite que les solutions du système (7.1) (ou (7.3)) sont telles que :

$$(\mathbf{E}_x, \mathbf{H}_x)(x, t) = (\mathbf{E}_{0,x}, \mathbf{H}_{0,x})(x).$$

Ainsi il nous est possible de faire l'économie du calcul de ces composantes longitudinales. On supposera désormais que :  $(\mathbf{E}_{0,x}, \mathbf{H}_{0,x})(x) = (0, 0)$ .

### 7.2.2 Semi discrétisation en espace des équations à l'intérieur de $\Omega_v$

Dans un premier temps on considère  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  comme une donnée du problème (7.3).

L'approximation que nous considérons est de type éléments finis conformes, qui dans le cas d'une discrétisation régulière nous mène au schéma des différences finis standard de Yee [48]. Notons toutefois que la méthodologie utilisée est assez générale et s'adapte sans difficultés à un autre choix d'éléments finis.

n° Soit un découpage régulier de pas  $h$  du domaine  $\Omega_v$ , et soit  $N$  le nombre de mailles :  $N h = L$ .

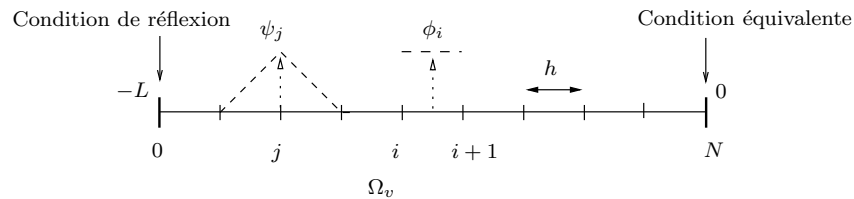


FIG. 7.2 – Maillage du domaine

n° On considère l'espace  $P_1^h(\Omega_v)$  des fonctions scalaires continues, linéaires par maille et nulles en  $x = -L$  et l'espace  $P_0^h(\Omega_v)$  des fonctions scalaires constantes par maille. On pose

$$V_h(\Omega_v) = \{0\} \times P_1^h(\Omega_v) \times P_1^h(\Omega_v) \quad \text{et} \quad X_h(\Omega_v) = \{0\} \times P_0^h(\Omega_v) \times P_0^h(\Omega_v).$$

Il est à présent possible d'écrire une formulation semi-discrète de (7.3), en remplaçant les espaces fonctionnels  $H^0(\text{rot}, \Omega_v)$  et  $L^2(\Omega_v)^3$  par leurs espaces d'approximations respectifs  $V_h(\Omega_v)$  et  $X_h(\Omega_v)$ .



Par ailleurs, il est commode, pour la mise en œuvre informatique, d’avoir une “matrice de masse” diagonale. C’est pourquoi nous utilisons la condensation de masse dans le calcul de l’intégrale d’un produit de deux fonctions de  $V_h(\Omega_v)$ . Cela consiste à utiliser une formule de quadrature de type Gauss-Lobatto qui intègre exactement les polynômes de degré inférieur ou égal à un. Ainsi pour une fonction  $f$  définie sur  $\Omega_v$ , on approche son intégrale sur un pas du maillage par :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx \approx \frac{h}{2} (f(x_{i+1}) + f(x_i)). \quad (x_i = ih)$$

Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux éléments de  $P_1^h(\Omega_v)$ , nous rappelons que le produit  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  défini par :

$$(7.4) \quad \langle f_1 | f_2 \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f_1(x_{i+1})f_2(x_{i+1}) + f_1(x_i)f_2(x_i))$$

est un produit scalaire sur  $P_1^h(\Omega_v)$  dont la norme associée est équivalente, uniformément par rapport à  $h$ , à la norme  $L^2(\Omega_v)$ . On notera  $(\cdot | \cdot)$  le produit scalaire  $L^2(\Omega_v)$ .

On note, pour tout  $t \geq 0$ ,  $(\mathbf{H}_h(t), \mathbf{E}_h(t)) \in (X_h(\Omega_v) \times V_h(\Omega_v))$  la solution du problème discret avec condensation de masse. Elle vérifie donc

$$(7.5) \quad \begin{cases} (i) & \mu_0 (\partial_t \mathbf{H}_h(t) | \boldsymbol{\phi}_h) + (\text{rot } \mathbf{E}_h(t) | \boldsymbol{\phi}_h) = 0 & \forall \boldsymbol{\phi}_h \in X_h(\Omega_v), \\ (ii) & \varepsilon_0 \langle \partial_t \mathbf{E}_h(t) | \boldsymbol{\psi}_h \rangle - (\text{rot } \boldsymbol{\psi}_h | \mathbf{H}_h(t)) = (\boldsymbol{\psi}_h(0) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t) & \forall \boldsymbol{\psi}_h \in V_h(\Omega_v). \end{cases}$$

Ces équations peuvent également s’exprimer sous la forme d’un système d’équations scalaires en choisissant comme fonctions tests les vecteurs de la base canonique de  $X_h(\Omega_v)$  et  $V_h(\Omega_v)$ .

Soit en effet  $\{\psi_i\}_{i=1}^{i=N}$  la base canonique de  $P_1^h(\Omega_v)$  (voir figure 7.2); elle comporte  $N$  éléments et nous permet de définir le champ électrique discret  $\mathbf{E}_h$  par

$$(7.6) \quad \mathbf{E}_h = \sum_{i=1}^N E_y(i) \psi_i(x) \vec{\mathbf{e}}_y + E_z(i) \psi_i(x) \vec{\mathbf{e}}_z,$$

où  $E_y(i)$  et  $E_z(i)$  sont les degrés de liberté. Soit également  $\{\phi_i\}_{i=1}^{i=N}$  la base canonique de  $P_0^h(\Omega_v)$ ; elle comporte également  $N$  éléments et nous permet de définir le champ électrique discret  $\mathbf{H}_h$  par :

$$(7.7) \quad \mathbf{H}_h = \sum_{i=1}^N H_y(i - \frac{1}{2}) \phi_i(x) \vec{\mathbf{e}}_y + H_z(i - \frac{1}{2}) \phi_i(x) \vec{\mathbf{e}}_z,$$

Les degrés de liberté étant  $H_y(i - \frac{1}{2})$  et  $H_z(i - \frac{1}{2})$ . On obtient en injectant les expressions (7.6) et (7.7) dans le système (7.5) :

Pour  $1 \leq i \leq N$  :

$$(7.8) \quad \mu_0 \frac{dH_y}{dt}(i - \frac{1}{2}) = \frac{E_z(i) - E_z(i-1)}{h}; \quad \mu_0 \frac{dH_z}{dt}(i - \frac{1}{2}) = -\frac{E_y(i) - E_y(i-1)}{h}.$$

Pour  $1 \leq i \leq N-1$  :

$$(7.9) \quad \varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt}(i) = -\frac{H_z(i + \frac{1}{2}) - H_z(i - \frac{1}{2})}{h}; \quad \varepsilon_0 \frac{dE_z}{dt}(i) = \frac{H_y(i + \frac{1}{2}) - H_y(i - \frac{1}{2})}{h}.$$

Pour  $i = N$  :

$$(7.10) \quad \varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt}(N) = -\frac{2}{h} \left( \varphi_z - H_z(N - \frac{1}{2}) \right); \quad \varepsilon_0 \frac{dE_z}{dt}(N) = \frac{2}{h} \left( \varphi_y - H_y(N - \frac{1}{2}) \right).$$

## 7.2.3 Approximation spatiale de la condition d'ordre 2

Cette condition est donnée par (5.25) où on notera désormais par  $\mathbf{M}$  le moment magnétique  $\widetilde{\mathbf{M}}_f^\eta$ . Hormis le cas particulier d'une couche ferromagnétique homogène, auquel cas le moment magnétique  $\mathbf{M}$  reste lui même constant, on constate qu'il nécessaire de préciser un espace d'approximation sur  $]0, 1[$  de ce champ. Puisque la loi non linéaire ne fait pas intervenir une dérivation spatiale sur  $\mathbf{M}$ , le choix naturel consiste alors à projeter ce champ, orthogonalement dans  $L^2(0, 1)^3$ , sur l'espace  $Y_k(0, 1) = P_0^k(0, 1)^3$ , où  $k$  désigne le pas de discrétisation de  $]0, 1[$  (voir figure 7.3). Le choix de  $k$  est totalement indépendant du pas  $h$  utilisé dans  $\Omega_v$ .

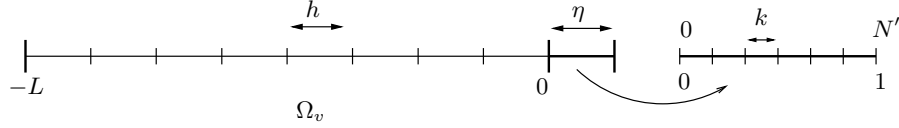


FIG. 7.3 – Discrétisation du milieu ferromagnétique

Nous verrons que ce choix d'espace discrétisation admet l'avantage de préserver constante la norme du moment magnétique : une propriété très importante dans l'étude de stabilité aussi bien du modèle continu que du modèle discret. Nous adoptons par ce fait, la même stratégie que dans [30] pour l'étude des équations du ferromagnétisme.

On note  $N'$  le nombre de mailles du domaine ferromagnétique, et on considère  $\{\phi_i\}_{i=1}^{N'}$  la base canonique associée à  $P_0^k(0, 1)$ . Elle nous permet de définir le champ magnétique discret  $\mathbf{M}_k(t) \in Y_k(0, 1)$  par :

$$\mathbf{M}_k(\xi, t) = \sum_{i=1}^{N'} \phi_i(\xi) \mathbf{M}_k(i-\frac{1}{2})(t),$$

où  $\mathbf{M}_k(i-\frac{1}{2}) = (M_x(i-\frac{1}{2}), M_y(i-\frac{1}{2}), M_z(i-\frac{1}{2}))$  désignent les degrés de liberté.

n° On note  $\mathbf{M}_{0k}$ ,  $\mathbf{H}_{sk}$  et  $\mathbf{p}_k$  les projetés  $L^2$  respectifs de  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{H}_s$  et  $\mathbf{p}$  sur  $Y_k(0, 1)$  et par  $\alpha_k$  et  $K_{ak}$  les projetés  $L^2$  respectifs de  $\alpha$  et  $K_a$  sur  $P_0^k(0, 1)$ .

n° La condition (5.25) s'écrit alors sous forme discrétisée,

$$(7.11) \quad \mathbf{E}_h(0, t) \times \mathbf{n} = -\eta\mu_0 \frac{d}{dt} \left( \varphi(t) + \Pi_{\parallel} \overline{\mathbf{M}}_k(t) \right)$$

avec  $\overline{\mathbf{M}}_k(t) = \int_0^1 \mathbf{M}_k(\xi, t) d\xi = \sum_{i=1}^{N'} k \mathbf{M}_k(i-\frac{1}{2})(t)$ ; la fonction  $\mathbf{M}_k(t)$  étant la solution dans  $Y_k(0, 1)$  de :

$$(7.12) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}_k = |\gamma| \mathbf{H}_{Tk} \times \mathbf{M}_k + \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \mathbf{M}_k \times \partial_t \mathbf{M}_k, \\ \mathbf{H}_{Tk} = \varphi + \Pi_{\perp} (\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k) + \mathbf{H}_{sk} + K_{ak} (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{M}_k) \mathbf{p}_k, \\ \mathbf{M}_k(0) = \mathbf{M}_{0k}. \end{cases}$$

**Remarque 7.1** Du fait que  $\mathbf{M}_k$  et  $\mathbf{H}_{Tk}$  soient tous les deux dans  $Y_k(0, 1)$  et que le produit vectoriel soit local en espace, l'équation (7.12) n'est autre qu'un système de  $N'$  équations découplées les unes des autres et qui portent sur les degrés de libertés par maille. L'équation

(7.12) s'écrit en effet : pour tout  $1 \leq i \leq N'$ ,

$$(7.13) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{M}_k(i-\frac{1}{2}) = |\gamma| \mathbf{H}_{\text{Tk}}(i-\frac{1}{2}) \times \mathbf{M}_k(i-\frac{1}{2}) + \frac{\alpha_k(i-\frac{1}{2})}{|\mathbf{M}_{0k}(i-\frac{1}{2})|} \mathbf{M}_k(i-\frac{1}{2}) \times \frac{d}{dt} \mathbf{M}_k(i-\frac{1}{2})$$

#### 7.2.4 Approximation spatiale de la condition d'ordre 4

La condition d'ordre 4 (5.77) et également la condition du cas homogène (5.63) nécessitent en plus la spécification d'un espace de discrétisation pour la variable auxiliaire  $\Phi (= \tilde{\Phi}^\eta)$ . L'équation qui porte sur  $\Phi$  montre que le choix naturel est d'utiliser pour  $\Phi$  le même espace d'approximation que  $\Pi_{\parallel} \mathbf{M}$ , soit  $L^2(0, 1)$ . La formulation variationnelle de ces équations s'écrit dans le cas de (5.77) : chercher  $\Phi(t) \in \{0\} \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  telle que pour tout  $\Phi' \in \{0\} \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ ,

$$(7.14) \quad \int_0^1 \left( \Phi \cdot \Phi' + \mu_0 \eta^2 \varepsilon_f \left( \int_{\xi}^1 \partial_{tt} \Phi d\nu \right) \cdot \left( \int_{\xi}^1 \Phi' d\nu \right) \right) d\xi = \int_0^1 (\varphi + \Pi_{\parallel} \mathbf{M}) \cdot \Phi' d\xi$$

et dans le cas de la condition (5.63) : chercher  $\Phi(t) \in \{0\} \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  telle que pour tout  $\Phi' \in \{0\} \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ ,

$$(7.15) \quad \int_0^1 \left( \Phi \cdot \Phi' + \mu_0 \eta^2 \chi \partial_{tt} \Phi \cdot \Phi' \right) d\xi = \int_0^1 (\varphi + \Pi_{\parallel} \mathbf{M}) \cdot \Phi' d\xi$$

Considérons donc l'espace d'approximation  $X_k(0, 1) = \{0\} \times P_0^k(0, 1) \times P_0^k(0, 1)$ . La discrétisation de (7.14) ou de (7.15) s'obtient en remplaçant l'espace  $\{0\} \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$  par  $X_k(0, 1)$ . Elle aboutit dans les deux cas à une équation de la forme

$$(7.16) \quad \Phi_k(t) + \mu_0 \eta^2 \partial_{tt} \Lambda_k \Phi_k(t) = \varphi(t) + \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_k(t) \quad \text{dans } X_k(0, 1)$$

où l'opérateur  $\Lambda_k$  correspond à une matrice  $N' \times N'$ , pleine dans le cas de la condition (7.14), mais diagonale dans le cas de la condition (7.15). Plus précisément, si on pose

$$\Phi_k(\xi, t) = \sum_{i=1}^{N'} \phi_i(\xi) \Phi_k(i-\frac{1}{2})(t).$$

avec  $\Phi_k(i-\frac{1}{2}) = (0, \Phi_y(i-\frac{1}{2}), \Phi_z(i-\frac{1}{2}))$  alors

$$(7.17) \quad \Lambda_k \Phi_k(\xi, t) = \sum_{i=1}^{N'} \phi_i(\xi) \sum_{j=1}^{N'} \Lambda_{k\{i,j\}} \Phi_k(j-\frac{1}{2})(t)$$

où dans le cas de la condition (7.15)

$$(7.18) \quad \Lambda_{k\{i,j\}} = \delta_{i,j} \frac{1}{k} \int_{ki}^{k(i+1)} \chi(\xi) d\xi$$

et dans la condition (7.14)

$$(7.19) \quad \Lambda_{k\{i,j\}} = \frac{1}{k} \int_0^1 \varepsilon_f \left( \int_{\xi}^1 \phi_i(\nu) d\nu \right) \left( \int_{\xi}^1 \phi_j(\nu) d\nu \right) d\xi$$

Au final, la condition d'ordre 4 discrète que nous proposons s'écrit :

$$(7.20) \quad \mathbf{E}_h(0, t) \times \mathbf{n} = -\eta\mu_0 \frac{d}{dt} \overline{\Phi}_k(t)$$

avec  $\overline{\Phi}_k(t) = \int_0^1 \Phi_k(\xi, t) d\xi$ ; la fonction  $\Phi_k$  vérifiant (7.16) et la fonction  $\mathbf{M}_k(t)$  est solution dans  $Y_k(0, 1)$  de :

$$(7.21) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}_k = |\gamma| \mathbf{H}_{\text{Tk}} \times \mathbf{M}_k + \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \mathbf{M}_k \times \partial_t \mathbf{M}_k, \\ \mathbf{H}_{\text{Tk}} = \Phi_k + \Pi_{\perp} \mathbf{M}_{0k} + \mathbf{H}_{sk} + K_{ak}(\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{M}_k) \mathbf{p}_k, \\ \mathbf{M}_k(0) = \mathbf{M}_{0k}. \end{cases}$$

**Remarque 7.2** *Les équations (7.13) restent encore vérifiées dans le cas de (7.21). Cependant, si on considère le cas de la condition exacte (7.14), alors ces équations deviennent couplées par l'intermédiaire  $\Phi_k$ . Elles redeviennent découplées si on considère plutôt la condition (7.15).*

## 7.3 Etudes de différents schémas numériques en temps

Nous allons proposer deux schémas de discrétisation possibles de la condition équivalente d'ordre 2 qui amènent à des conditions de stabilité différentes. Nous en déduisons la meilleure alternative qui sera appliquée également à la condition d'ordre 4. Commençons toutefois par rappeler le schéma “saute mouton” classique, communément utilisé pour la discrétisation des équations de Maxwell.

### 7.3.1 Discrétisation en temps des équations de Maxwell

Le schéma “saute mouton” consiste à évaluer les champs non pas au même pas de temps, mais alternativement. Plus précisément, si  $\Delta t$  est le pas de discrétisation en temps, le champ électrique sera calculé aux instants  $t^n = n\Delta t$  (ou instants entiers) :

$$(7.22) \quad \mathbf{E}_h^n \approx \mathbf{E}_h(t = n\Delta t)$$

tandis que le champ magnétique sera calculé aux instants  $t^{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$  (que nous appellerons instants demi entiers) :

$$(7.23) \quad \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \approx \mathbf{H}_h((n + \frac{1}{2})\Delta t)$$

La nouveauté vient du choix de l'instant de calcul de  $\varphi$ . Nous considérons deux cas :

- (a)  $\varphi$  est approché aux instants  $t^{n+\frac{1}{2}} \mapsto \varphi^{n+\frac{1}{2}}$
- (b)  $\varphi$  est approché aux instants  $t^n \mapsto \varphi^n$

Dans ces deux cas, les équations de (7.5) se discrétisent de la manière suivante :

$$(7.24) \quad \begin{cases} \frac{\mu_0}{\Delta t} \left( \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \mid \phi_h \right) + (\text{rot } \mathbf{E}_h^n \mid \phi_h) = 0 & \forall \phi_h \in X_h(\Omega_v), \\ \frac{\varepsilon_0}{\Delta t} \left\langle \mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n \mid \psi_h \right\rangle - \left( \text{rot } \psi_h \mid \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) = (\psi_h(0) \times \mathbf{n}) \cdot \varphi^{n+\frac{1}{2}} & \forall \psi_h \in V_h(\Omega_v). \end{cases}$$

où dans le cas (b),  $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$  est défini par :  $\varphi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi^n + \varphi^{n+1}}{2}$ .

La discrétisation de la CLE dépend par contre du choix qu'on fait pour l'instant de calcul de  $\varphi$ . Nous allons étudier l'incidence de ce choix dans le cas de la CLE d'ordre 2.

### 7.3.2 Discrétisation en temps de la CLE d'ordre 2 : schéma explicite

Nous étudions la condition {(7.11)-(7.12)} et considérons le cas (a). Ce choix de discrétisation semble le plus naturel, puisqu'il consiste à calculer  $\varphi$  aux même instants que le champ magnétique. Nous verrons plus loin qu'il conduit à une résolution explicite dans le cas particulier d'une couche homogène. Il souffre cependant d'une CFL trop restrictive.

#### Ecriture du schéma

Puisque la relation (7.11) fait intervenir le même ordre de dérivation entre  $\varphi$  et  $\mathbf{M}_k$ , il convient alors de choisir le même instant de discrétisation pour les deux champs. Le moment magnétique est donc calculé aux instants demi entiers  $\mapsto \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$ . On propose par conséquent le schéma centré suivant pour (7.11),

$$(7.25) \quad \mathbf{E}_h^n(0) \times \mathbf{n} = \frac{\eta \mu_0}{\Delta t} \left( (\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^{n-\frac{1}{2}}) + \Pi_{\parallel} (\overline{\mathbf{M}}_k^{n+\frac{1}{2}} - \overline{\mathbf{M}}_k^{n-\frac{1}{2}}) \right)$$

où  $\overline{\mathbf{M}}_k^{n+\frac{1}{2}}$  désigne la moyenne sur  $]0, 1[$  de  $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$ . On utilise d'autre part la discrétisation suivante pour le système (7.12) (utilisée également par [29]),

$$(7.26) \quad \begin{cases} \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = |\gamma| \mathbf{H}_{\text{T}k}^n \times \mathbf{M}_k^n + \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \mathbf{M}_k^n \times \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \\ \mathbf{H}_{\text{T}k}^n = \varphi^n + \Pi_{\perp} (\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^n) + \mathbf{H}_{sk} + K_{ak} (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{M}_k^n) \mathbf{p}_k, \end{cases}$$

où on a posé :  $\varphi^n = \frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2}$  et  $\mathbf{M}_k^n = \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{2}$ .

#### Caractère explicite du schéma

Dans le cas particulier d'une couche ferromagnétique homogène, ce schéma admet l'avantage d'une résolution explicite. En effet, si on suppose que les caractéristiques de la couche sont constantes suivant l'épaisseur, alors d'après la remarque 7.1 tous les  $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2})$  vérifient la même équation. On peut supposer donc que  $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$  est lui aussi constant et par suite peut être considéré comme un vecteur de  $\mathbf{R}^3$ . Dans ce cas on a l'égalité :

$$\overline{\mathbf{M}}_k^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}.$$

Si on introduit

$$(7.27) \quad \mathbf{B}_h^{n+\frac{1}{2}} = \varphi^{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}},$$

alors cela nous mène à la résolution explicite suivante :

Supposons déjà calculés  $\mathbf{B}_h^{n-\frac{1}{2}}$ ,  $\mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}$ ,  $\varphi^{n-\frac{1}{2}}$ ,  $\mathbf{E}_h^{n-1}$  et  $\mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}$ , la valeur de ces champs à l'instant suivant est calculée comme suit :

- 1)  $\mathbf{E}_h^{n+1}$  et  $\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}$  sont calculés par (7.24).
- 2)  $\mathbf{B}_h^{n-\frac{1}{2}}$  est calculé par la condition (7.25).
- 3)  $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$  est calculé explicitement par (7.26). Ce calcul passe en pratique par la résolution d'une équation polynômiale de degré 3. Nous renvoyons le lecteur à [29, 30].
- 4)  $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$  est calculé par (7.27).

**Remarque 7.3** *Malheureusement, dès lors que les caractéristiques ne sont plus homogènes, cette résolution explicite tombe en défaut.*

n° Nous remarquons finalement que notre schéma est bien centré en temps ce qui assure une approximation d'ordre 2 en temps.

### 7.3.3 Stabilité du schéma explicite

#### Condition suffisante

Nous allons commencer par chercher une condition suffisante pour laquelle la norme  $L^2$  de la solution discrète n'explose pas quand  $n \rightarrow \infty$ , ce qui garantit la stabilité  $L^2$  du schéma proposé. On utilise pour cela une méthode énergétique semblable à celle utilisée pour le modèle continu. Elle consiste à chercher une condition sur le pas de discrétisation en temps pour qu'une certaine énergie discrète de la solution reste bornée. Cette condition de stabilité est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 7.1** *Le schéma numérique décrit par (7.24), (7.25) et (7.26) est stable dès lors qu'est vérifiée la condition :*

$$(7.28) \quad \boxed{\Delta t^2 < \varepsilon_0 \mu_0 h^2 f\left(\frac{\eta}{h}\right)}$$

avec :  $f(x) = (1 + 2x) - (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}}$ .

*Preuve.* La preuve de ce théorème est donnée dans la section (7.4.1) page 170. □

**Remarque 7.4** *La stabilité évoquée par le théorème signifie que la norme  $L^2$  de  $\mathbf{E}_h^n$ ,  $\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}$  et  $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$  est bornée uniformément par rapport  $n$ .*

#### Condition nécessaire

Comme  $f(x) < 1$  pour tout  $x \geq 0$ , la condition de stabilité (7.28) est en fait plus forte que la CFL classique du schéma de Yee. Il est naturel de se demander alors si cette condition est optimale ou non ? Pour répondre à cette question nous allons établir une condition nécessaire de stabilité en étudiant le cas linéaire ( $\mathbf{M}_0 = 0$ ) par une analyse d'ondes planes. Cette analyse s'appuie sur la théorie de stabilité de Gustafson-Kreiss-Sundstrom [21] (voir aussi [44]).

Dans ce cas linéaire les deux polarisations  $(E_y, H_z)$  et  $(E_z, -H_y)$  sont découplées et vérifient les mêmes équations. L'étude de la stabilité du problème discret complet se ramène donc à l'étude de la stabilité du problème linéaire (7.30)-(7.32) suivant, où les inconnues sont des scalaires et où on a posé

$$(7.29) \quad \beta = \frac{c \Delta t}{h}, \quad c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad \text{et} \quad r = \frac{\eta}{h}.$$

Pour  $1 \leq i \leq N - 1$ ,

$$(7.30) \quad \begin{cases} \left( E^{n+1}(i) - E^n(i) \right) + \beta \nu \left( H^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) - H^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}) \right) = 0, \\ \nu \left( H^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}) - H^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}) \right) + \beta \left( E^n(i) - E^n(i - 1) \right) = 0, \end{cases}$$

avec pour  $i = N$  (voir par exemple (7.10))

$$(7.31) \quad E^{n+1}(N) - E^n(N) = -2\beta\nu(\varphi^{n+\frac{1}{2}} - H^{n+\frac{1}{2}}(N - \frac{1}{2})).$$

Afin de simplifier la présentation du problème, nous utilisons l'astuce classique qui consiste à introduire un noeud fictif en  $N + \frac{1}{2}$  pour  $H^{n+\frac{1}{2}}$ . Dans ce cas, la condition aux limites (7.25) couplée avec (7.31) est équivalente au système

$$(7.32) \quad \begin{cases} \varphi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( H^{n+\frac{1}{2}}(N + \frac{1}{2}) - H^{n+\frac{1}{2}}(N - \frac{1}{2}) \right), \\ r \nu \left( \varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^{n-\frac{1}{2}} \right) = \beta E^n(N), \end{cases}$$

en supposant de plus que le système (7.30) soit encore valide pour  $i = N$ .

L'étude de la stabilité de la condition (7.32) par le critère de GKS consiste à tester l'existence de solutions sous formes d'ondes planes dont la norme explose exponentiellement en temps. Considérons en effet les ondes solutions de la forme :

$$(7.33) \quad E^n(i) = E \cdot z^{2n} \kappa^{2i} \quad \text{et} \quad H^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) = H \cdot z^{2n+1} \kappa^{2i+1},$$

avec  $z$  et  $\kappa$  deux nombres complexes. Le critère nécessaire de stabilité s'énonce (voir [21])

**Théorème 7.2** *Si le schéma (7.30)-(7.32) est stable au sens de GKS alors il n'existe aucune solution de la forme (7.33) avec  $|z| > 1$  et  $|\kappa| > 1$ .*

En effet les ondes (7.33) telles que  $|\kappa| > 1$  sont de normes  $L^2$  finies en espace, et prennent source aux niveau de la condition aux limites. Ils sont donc susceptibles d'être excités par des erreurs numériques. Lorsque  $|z| > 1$  ces ondes subissent un accroissement exponentiel en temps de leurs normes... En se basant sur le critère du théorème 7.2 on montre :

**Théorème 7.3** *Si le schéma (7.30)-(7.32) est stable alors :*

$$(7.34) \quad \boxed{\Delta t^2 \leq \varepsilon_0 \mu_0 h^2 g\left(\frac{\eta}{h}\right)}$$

où la fonction  $g$  est définie par :  $g(x) = \frac{4x(1 + \sqrt{1 + x^2})}{(x + 1 + \sqrt{1 + x^2})^2}$ .

*Preuve.* En injectant les expressions (7.33) dans (7.30) nous obtenons le système d'équations en  $(E, H)$ ,

$$(7.35) \quad \begin{cases} E \cdot (z - z^{-1}) + \beta \nu H \cdot (\kappa - \kappa^{-1}) = 0, \\ \nu H \cdot (z - z^{-1}) + \beta E \cdot (\kappa - \kappa^{-1}) = 0. \end{cases}$$

L'existence de solutions nécessite alors (relation de dispersion)

$$(7.36) \quad (z - z^{-1})^2 = \beta^2 (\kappa - \kappa^{-1})^2.$$

On distingue deux cas :

• Premier cas

$$(7.37) \quad (z - z^{-1}) = -\beta (\kappa - \kappa^{-1}).$$

Les équations de (7.35) implique  $E = \nu H$ . Par conséquent, la condition aux limites (7.32) s'écrit

$$\left\{ \frac{1}{2} (\kappa + \kappa^{-1}) \cdot (z - z^{-1}) - \frac{\beta}{r} \right\} \nu H = 0$$

L'existence de solutions non triviales à cette équation nécessite (en utilisant (7.37)) :

$$(7.38) \quad \kappa^4 + 2r^{-1}\kappa^2 - 1 = 0.$$

Les solutions de (7.38) telles que  $|\kappa| > 1$  sont

$$(7.39) \quad \kappa^2 = -r^{-1}(1 + \sqrt{1 + r^2})$$

D'après le théorème 7.2 s'il y a stabilité, alors les  $z$  telles que (7.39) et (7.37) aient lieu, doivent avoir un module inférieur à 1. Or, si on pose  $z' = \iota z$ , alors (par (7.37) et (7.39))

$$z'^2 \pm \beta(|\kappa| + |\kappa|^{-1}) z' + 1 = 0.$$

Il s'agit d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels, tel que le produit de ces racines vaut 1. Par conséquent, la condition  $|z'| \leq 1$  est équivalente à ce que le discriminant de ce polynôme soit négatif ou nul, ce qui donne

$$\beta^2 (|\kappa| + |\kappa|^{-1})^2 - 4 \leq 0.$$

Cette condition implique (7.34) en réutilisant (7.39).

•• Deuxième cas :

$$(7.40) \quad (z - z^{-1}) = \beta (\kappa - \kappa^{-1})$$

Les équations de (7.35) montrent que  $E = -\nu H$ . On constate alors, en posant  $z' = -z$  et  $H' = -H$ , qu'on est ramené à l'étude du premier cas. Le résultat est donc le même.  $\square$

**Remarque 7.5** *Cette étude de stabilité par le critère de GKS ne s'est pas intéressée aux instabilités faibles du schéma : examen du cas limite  $|z| \rightarrow 1$ . L'étude de ce cas aurait donné une condition suffisante de stabilité mais qui se trouve inintéressante puisqu'elle concerne le cas linéaire seulement. De plus on verra dans le paragraphe qui suit que les deux conditions (7.28) et (7.34) ont le même comportement limite, ce qui permet d'avoir dans ce cas une condition nécessaire et suffisante de stabilité.*



### Comparaison des deux conditions

La condition nécessaire (7.34) :  $\beta^2 \leq g(r)$  est à comparer avec la condition suffisante donnée par (7.28) :  $\beta^2 \leq f(r)$ . En traçant les deux courbes représentatives de  $f$  et  $g$ , on constate que  $g \geq f$ , ce qui concorde bien avec la nature des deux conditions.

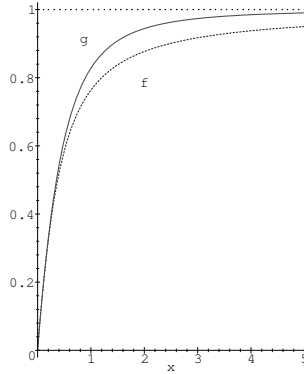


FIG. 7.4 – Comparaison des deux critères.

Mais ces deux conditions sont essentiellement équivalentes. En effet, lorsque

- $\eta \rightarrow 0$  :  $f$  et  $g$  se comportent toutes les deux comme  $2r$ . On peut alors écrire dans ce cas la condition de stabilité nécessaire et suffisante suivante :

$$c \Delta t \leq \sqrt{2 h \eta}.$$

- $\eta \rightarrow +\infty$  : Les deux fonctions tendent vers 1, ce qui nous permet de retrouver la condition classique de stabilité :

$$c \Delta t \leq h.$$

Nous constatons que dans le cas  $\eta \rightarrow 0$ , c.à.d. de manière plus concrète lorsque  $\eta \ll h$ , la condition de stabilité nous oblige à utiliser un pas de temps  $\Delta t \ll h/c$ . Ceci a pour conséquence de détériorer la précision du schéma : rappelons que pour l'équation des ondes 1D, plus on est loin des caractéristiques  $\Delta t = h/c$ , plus le schéma devient dispersif. Malheureusement, le cas  $\eta \rightarrow 0$  est bien le cas intéressant dans la pratique.

L'alternative est fournie par le schéma implicite...

### 7.3.4 Discrétisation en temps de la CLE d'ordre 2 : schéma implicite

Nous étudions le cas de la condition {(7.11)-(7.12)} et considérons plutôt le cas (b). Comme pour le cas explicite, on choisit de calculer le moment magnétique aux mêmes instants que  $\varphi$ , soit dans le cas présent aux instants entiers  $\mapsto \mathbf{M}_k^n$ . On propose par conséquent le schéma centré suivant pour (7.11)

$$(7.41) \quad \frac{1}{2} \left( \mathbf{E}_h^{n+1}(0) + \mathbf{E}_h^n(0) \right) \times \mathbf{n} = -\frac{\eta \mu_0}{\Delta t} \left( (\varphi^{n+1} - \varphi^n) + \Pi_{\parallel} \left( \overline{\mathbf{M}}_k^{n+1} - \overline{\mathbf{M}}_k^n \right) \right).$$

où  $\overline{\mathbf{M}}_k^n$  désigne la moyenne sur  $]0, 1[$  de  $\mathbf{M}_k^n$  qui s'obtient à partir de

$$(7.42) \quad \begin{cases} \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} = |\gamma| \mathbf{H}_{Tk}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \times \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t}, \\ \mathbf{H}_{Tk}^{n+\frac{1}{2}} = \varphi^{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{H}_{sk} + K_{ak}(\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}})\mathbf{p}_k. \end{cases}$$

On a posé :

$$\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} + \mathbf{M}_k^n}{2} \quad \text{et} \quad \varphi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2}.$$

On constate que la possibilité d'une résolution explicite tombe ici en défaut puisque la valeur de  $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$  dépend de la valeur de  $\overline{\mathbf{M}}_k^{n+1}$ . En pratique, on est amené alors à considérer un système non linéaire à  $3N' + 2$  variables qu'une méthode de Newton par exemple s'adapte bien à sa résolution. Bien entendu, la discrétisation du milieu ferromagnétique, qui correspond au nombre de noeuds  $N'$ , conditionne fortement le coût de la méthode. Mais en général  $N'$  est petit ( $N' = 1$  dans le cas d'une seule couche homogène).

### 7.3.5 Stabilité du schéma implicite

**Théorème 7.4** *Le schéma numérique décrit par (7.24), (7.41), et (7.42) est  $L^2$  stable sous la condition :*

$$(7.43) \quad \boxed{\Delta t^2 < \varepsilon_0 \mu_0 h^2}$$

*Preuve.* La preuve de ce théorème est basée sur une méthode énergétique et est donnée dans la section 7.4.2 page 173. □

On constate que contrairement à la discrétisation explicite, nous avons une condition de stabilité indépendante de  $\eta$ . Mieux encore, cette condition coïncide avec la CFL classique du schéma de Yee. Cette façon de faire est par conséquent la mieux adaptée aux applications pratiques. Le seul prix à payer est le coût de résolution d'un système non linéaire... en général de petite taille.

**Remarque 7.6** *Comme c'est généralement le cas, quand on utilise une méthode énergétique, on est incapable de conclure dans le cas limite d'égalité dans (7.43).*

### 7.3.6 Discrétisation en temps de la condition équivalente d'ordre 4

Considérons maintenant le cas de la condition d'ordre 4 donnée par  $\{(7.20)-(7.16)-(7.21)\}$ . Guidé par le travail fait pour la CLE d'ordre 2, on sait que le choix le plus intéressant (du point de vue de la stabilité) consiste à calculer  $\varphi$ ,  $\mathbf{M}_k$  et  $\Phi_k$  aux mêmes instants entiers que le champ électrique  $\mathbf{E}_h$ .

Le schéma centré en temps qu'on propose, nécessite l'introduction d'une variable auxiliaire qui jouera le rôle de la dérivée première en temps de  $\Phi_k$ . Cette variable notée  $\dot{\Phi}_k$ , est également calculée aux instants entiers.

Le schéma centré en temps associé à  $\{(7.20)-(7.16)-(7.21)\}$  s'écrit :

$$(7.44) \quad \frac{1}{2} \left( \mathbf{E}_h^{n+1}(0) + \mathbf{E}_h^n(0) \right) \times \mathbf{n} = -\frac{\eta \mu_0}{\Delta t} \int_0^1 \dot{\Phi}_k^{n+1}(\xi) - \dot{\Phi}_k^n(\xi) d\xi$$

avec  $\Phi_k^{n+1} \in X_k(0, 1)$  et satisfait sur cet espace

$$(7.45) \quad \begin{cases} \frac{\Phi_k^{n+1} + \Phi_k^n}{2} + \mu_0 \eta^2 \Lambda_k \frac{\dot{\Phi}_k^{n+1} - \dot{\Phi}_k^n}{\Delta t} = \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2} + \frac{\Pi_{\parallel} \mathbf{M}_k^{n+1} + \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_k^n}{2} \\ \frac{\dot{\Phi}_k^{n+1} + \dot{\Phi}_k^n}{2} = \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} \end{cases}$$

et  $\mathbf{M}_k^{n+1}$  solution sur  $Y(0, 1)$  de :

$$(7.46) \quad \begin{cases} \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} = |\gamma| \mathbf{H}_{Tk}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \times \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \\ \mathbf{H}_{Tk}^{n+\frac{1}{2}} = \Phi_k^{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{\perp} \mathbf{M}_{0k} + \mathbf{H}_{sk} + K_{ak} (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}) \mathbf{p}_k. \end{cases}$$

où on a posé

$$\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} + \mathbf{M}_k^n}{2} \quad \text{et} \quad \Phi_k^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Phi_k^{n+1} + \Phi_k^n}{2}.$$

De la même manière que pour le schéma (7.41) et (7.42), on aura à résoudre un système non linéaire mais de taille plus grande à cause des inconnues supplémentaires  $\Phi_k$  et  $\dot{\Phi}_k$ . En fait, par un calcul simple on peut se ramener à un système de  $5N'$  inconnues portant sur  $\dot{\Phi}_k^{n+1}$  et  $\mathbf{M}_k^{n+1}$ . La résolution par une méthode de Newton est également bien adaptée à ce schéma. Notons cependant que pour la condition exacte on aura en plus à inverser une matrice pleine  $N' \times N'$  qui fait intervenir  $\Lambda_k$ .

On s'y attendait :

**Théorème 7.5** *Le schéma numérique décrit par (7.24), (7.44), (7.45) et (7.46) est stable sous la condition :*

$$(7.47) \quad \boxed{\Delta t^2 < \varepsilon_0 \mu_0 h^2}$$

*Preuve.* La preuve de stabilité repose encore une fois sur une technique énergétique. Elle est reportée à la section (7.4.3).  $\square$

## 7.4 Preuves de la stabilité

Nous démontrons dans cette section successivement les théorèmes de stabilité 7.1, 7.4 et 7.5. Les démonstrations reposent sur des techniques énergétiques et utilisent des arguments semblables. C'est pour cette raison qu'il nous a paru plus judicieux de les regrouper sous un même paragraphe.

On notera  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  sur  $L^2(\Omega_v)^3$ .  $|\cdot|$  désignera comme d'habitude la norme euclidienne d'un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ .

### 7.4.1 Preuve du théorème 7.1 (schéma explicite)

On considère donc le schéma numérique  $\{(7.24)-(7.25)-(7.26)\}$ . Tout d'abord on constate (comme annoncé) que le schéma (7.26) conserve la norme de l'aimantation : En prenant le produit scalaire (dans  $\mathbb{R}^3$ ) de la première équation de (7.26) par  $\mathbf{M}_k^n$ , on déduit que

$$(7.48) \quad \left| \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) \right|^2 - \left| \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) \right|^2 = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1, \text{ et } 0 \leq i \leq N'.$$

Considérons maintenant l'énergie discrète totale  $\mathcal{E}_T$  donnée par

$$(7.49) \quad \mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2}) = \mathcal{E}_v(n+\frac{1}{2}) + \eta \mathcal{E}_f(n+\frac{1}{2}) + \eta \mathcal{E}_r(n+\frac{1}{2}),$$

où, en posant  $P_k(\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}) = (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}})\mathbf{p}_k - \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$ ,

$$\mathcal{E}_v(n+\frac{1}{2}) = \frac{\mu_0}{2} \left\| \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \langle \mathbf{E}_h^{n+1} | \mathbf{E}_h^n \rangle,$$

$$\mathcal{E}_r(n+\frac{1}{2}) = \frac{\mu_0}{2} \left| \varphi^{n+\frac{1}{2}} \right|^2,$$

$$\mathcal{E}_f(n+\frac{1}{2}) = \frac{\mu_0}{2} \int_0^1 \left| \mathbf{H}_{sk} - \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + K_{ak} \left| P_k(\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}) \right|^2 + \left| \Pi_\perp(\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}) \right|^2 d\xi.$$

La preuve de la stabilité va se diviser en deux étape :

1) **La première étape** consiste à montrer la décroissance  $\mathcal{E}_T$ . On montre

$$(7.50) \quad \frac{\mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2}) - \mathcal{E}_T(n-\frac{1}{2})}{\Delta t} = -\frac{\eta\mu_0}{|\gamma|} \int_0^1 \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right|^2 d\xi.$$

La preuve de (7.50) suit pratiquement les même étapes que son équivalent continue (5.34).

On prend d'abord  $\phi_h = \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}$  dans la première équation de (7.24), ce qui montre

$$(7.51) \quad \mu_0 \left( \left\| \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \left\| \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right\|^2 \right) = -\Delta t \left( \text{rot } \mathbf{E}_h^n | \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right).$$

On fait ensuite la somme des deux équations, obtenues en écrivant la deuxième équation de (7.24) aux instants  $t^{n+\frac{1}{2}}$  et  $t^{n-\frac{1}{2}}$ . En prenant dans cette somme  $\psi_h = \mathbf{E}_h^n$ , nous déduisons

$$(7.52) \quad \varepsilon_0 \left( \langle \mathbf{E}_h^{n+1} | \mathbf{E}_h^n \rangle - \langle \mathbf{E}_h^n | \mathbf{E}_h^{n-1} \rangle \right) = \Delta t \left( \text{rot } \mathbf{E}_h^n | \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) + \Delta t (\mathbf{E}_h^n(0) \times \mathbf{n}) \cdot (\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}}).$$

Par ailleurs, en multipliant (7.25) par  $\frac{1}{2}(\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}})$  on obtient

$$(7.53) \quad \frac{1}{2}(\mathbf{E}_h^n(0) \times \mathbf{n}) \cdot (\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}}) = -\eta \frac{\mathcal{E}_r(n+\frac{1}{2}) - \mathcal{E}_r(n-\frac{1}{2})}{\Delta t} - \eta \mathcal{P}_k(n)$$

où on a posé

$$(7.54) \quad \mathcal{P}_k(n) = \mu_0 \int_0^1 \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2} d\xi$$

La combinaison :  $\frac{1}{2\Delta t} ((7.51) + (7.52)) + (7.53)$ , s'écrit aussi

$$(7.55) \quad \frac{\mathcal{E}_v(n+\frac{1}{2}) - \mathcal{E}_v(n-\frac{1}{2})}{\Delta t} + \eta \frac{\mathcal{E}_r(n+\frac{1}{2}) - \mathcal{E}_r(n-\frac{1}{2})}{\Delta t} = -\eta \mathcal{P}_k(n).$$

D'après la seconde équation de (7.26)

$$(7.56) \quad \frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2} = \mathbf{H}_{Tk}^n - \mathbf{H}_{\text{eff}}^n,$$

où  $\mathbf{H}_{\text{eff}}^n = \Pi_{\perp} (\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^n) + \mathbf{H}_{sk} + K_{ak} (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{M}_k^n) \mathbf{p}_k$ . Or, en utilisant (7.48), on vérifie facilement que

$$(7.57) \quad \mu_0 \int_0^1 \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \cdot \mathbf{H}_{\text{eff}}^n d\xi = -\frac{\mathcal{E}_f(n+\frac{1}{2}) - \mathcal{E}_f(n-\frac{1}{2})}{\Delta t}.$$

De plus, en prenant le produit scalaire de la première équation de (7.26) par le vecteur  $(|\gamma| \mathbf{H}_{\text{Tk}}^n - \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} (\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}))$ , le second membre s'annule, et par suite

$$(7.58) \quad (\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}) \cdot \mathbf{H}_{\text{Tk}}^n = \Delta t \frac{\alpha_k}{|\gamma| |\mathbf{M}_{0k}|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right|^2.$$

On déduit finalement, en regroupant (7.56), (7.57) et (7.58),

$$(7.59) \quad \mathcal{P}_k(n) = \frac{\mathcal{E}_f(n+\frac{1}{2}) - \mathcal{E}_f(n-\frac{1}{2})}{\Delta t} + \frac{\mu_0}{|\gamma|} \int_0^1 \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_k^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right|^2 d\xi.$$

L'identité (7.50) s'obtient immédiatement à partir de (7.59) et (7.55).

n° 2) **La deuxième étape** consiste à chercher sous quelles conditions la quantité  $\mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2})$  majore la norme  $L^2$  de la solution discrète à l'instant  $t^{n+\frac{1}{2}}$ . Plus précisément, nous montrons que sous la condition (7.28) il existe une constante  $C$  indépendante de  $n$  telle que

$$(7.60) \quad \mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2}) \geq C \left( \|\mathbf{E}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + |\varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2 \right).$$

où on a posé,  $\mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n)$ .

Nous aurons à distinguer ce qui se passe à l'intérieur de  $\Omega_v$  de ce qui se passe en  $x = 0$ . C'est pourquoi nous introduisons

$$\mathbf{H}_{\text{int}}^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}) \phi_i, \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_N^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}(N - \frac{1}{2}).$$

Nous avons en particulier,

$$(7.61) \quad \|\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\|^2 = \|\mathbf{H}_{\text{int}}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + h |\mathbf{H}_N^{n+\frac{1}{2}}|^2.$$

D'autre part, nous avons par simple développement du produit scalaire,

$$(7.62) \quad \langle \mathbf{E}_h^{n+1} | \mathbf{E}_h^n \rangle = \langle \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} | \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \rangle - \frac{\Delta t^2}{4} \underbrace{\left\langle \frac{\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n}{\Delta t} \middle| \frac{\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n}{\Delta t} \right\rangle}_{\mathcal{I}}.$$

Afin de calculer le terme  $\mathcal{I}$ , il est plus simple d'utiliser (la forme discrétisée en temps de) (7.8) et (7.10). On constate alors que

$$\mathcal{I} = h \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{(h\varepsilon_0)^2} \left| \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) - \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}) \right|^2 + \frac{h}{2} \frac{4}{(h\varepsilon_0)^2} \left| \varphi^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_N^{n+\frac{1}{2}} \right|^2.$$

En appliquant l'inégalité  $|a - b|^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  au premier terme et en développant le second, cette égalité nous donne

$$(7.63) \quad \mathcal{I} \leq \frac{4}{h^2 \varepsilon_0^2} \left( \|\mathbf{H}_{int}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{h}{2} |\varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2 + h |\mathbf{H}_N^{n+\frac{1}{2}}|^2 - h \varphi^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_N^{n+\frac{1}{2}} \right).$$

En regroupant (7.63), (7.62) et (7.61) nous déduisons la majoration

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2}) &\geq \frac{\varepsilon_0}{2} \langle \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} | \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \rangle + \frac{\mu_0}{2} \|\mathbf{H}_{int}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\mu_0 h}{2} |\mathbf{H}_N^{n+\frac{1}{2}}|^2 + \frac{\mu_0 \eta}{2} |\varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2 \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2h^2 \varepsilon_0} \left( \|\mathbf{H}_{int}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{h}{2} |\varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2 + h |\mathbf{H}_N^{n+\frac{1}{2}}|^2 - h \varphi^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_N^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

qui, en réarrangeant les termes, s'écrit aussi,

$$(7.64) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_T(n+\frac{1}{2}) &\geq \frac{\varepsilon_0}{2} \langle \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} | \mathbf{E}_h^{n+\frac{1}{2}} \rangle + \frac{\mu_0}{2} (1 - \beta^2) \|\mathbf{H}_{int}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\quad + \frac{\mu_0 h}{2} \left( (1 - \beta^2) |\mathbf{H}_N^{n+\frac{1}{2}}|^2 + (r - \frac{1}{2}\beta^2) |\varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2 + \beta^2 \varphi^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_N^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

où on pose  $\beta = \frac{c \Delta t}{h}$  et  $r = \frac{\eta}{h}$ . Le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  étant équivalent au produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ , on constate (ayant en tête la relation (7.61)) que l'identité (7.60) se déduit à partir de (7.64), dès lors que

$$(7.65) \quad \beta^2 < 1 \quad \text{et} \quad \beta^4 - 4(1 - \beta^2)(r - \frac{1}{2}\beta^2) < 0.$$

Les zéros du polynôme (en  $\beta^2$ ) :  $\beta^4 - 4(1 - \beta^2)(r - \frac{1}{2}\beta^2)$  sont :  $\beta_1^2 = (1 + 2r) + \sqrt{1 + 4r^2}$  et  $\beta_2^2 = (1 + 2r) - \sqrt{1 + 4r^2}$ . Mais, comme  $\beta_2^2 < 1 < \beta_1^2$  pour  $r \geq 0$ , la condition (7.65) est équivalente à

$$\beta^2 < \beta_2^2 = f(r),$$

qui correspond bien avec la condition (7.28).

**n° Conclusion de la preuve.** Le schéma est  $L^2$  stable sous la condition (7.28), puisque d'après (7.60), (7.50) et (7.48), la norme  $L^2$  de la solution discrète à l'instant  $t^{n+\frac{1}{2}}$  est majorée par  $\mathcal{E}_T(\frac{1}{2}) + \|\mathbf{M}_{0k}\|$  et ceci uniformément en  $n$ .  $\square$

#### 7.4.2 Preuve du théorème 7.4 (schéma implicite)

On considère maintenant le schéma discret  $\{(7.24)\text{-}(7.41)\text{-}(7.42)\}$ . Nous procédons de manière similaire au cas précédent.

Nous avons d'abord l'équivalent de la propriété (7.48), sur la conservation de la norme de l'aimantation, en prenant le produit scalaire de (7.42) par  $\mathbf{M}_k^{n+\frac{1}{2}}$ ,

$$(7.66) \quad \left| \mathbf{M}_k^{n+1}(i+\frac{1}{2}) \right|^2 - \left| \mathbf{M}_k^n(i+\frac{1}{2}) \right|^2 = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0, \text{ et } 0 \leq i \leq N'.$$

Considérons maintenant l'énergie discrète totale à l'instant  $t^n$  (où par rapport à (7.49) on a inversé le rôle de  $\mathbf{H}_h$  et  $\mathbf{E}_h$ )

$$(7.67) \quad \mathcal{E}_T(n) = \mathcal{E}_v(n) + \eta \mathcal{E}_f(n) + \eta \mathcal{E}_r(n),$$

avec, par définition,

$$(7.68) \quad \mathcal{E}_v(n) = \frac{1}{2} \left( \mu_0 \left( \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \mid \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) + \varepsilon_0 \langle \mathbf{E}_h^n, \mathbf{E}_h^n \rangle \right),$$

$$(7.69) \quad \mathcal{E}_\Gamma(n) = \frac{\mu_0}{2} |\varphi^n|^2,$$

$$(7.70) \quad \mathcal{E}_f(n) = \frac{\mu_0}{2} \int_0^1 |\mathbf{H}_{sk} - \mathbf{M}_k^n|^2 + K_{ak} |(\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{M}_k^n) \mathbf{p}_k - \mathbf{M}_k^n|^2 + |\Pi_\perp(\mathbf{M}_{0k} - \mathbf{M}_k^n)|^2 d\xi.$$

La démarche est maintenant identique au cas précédent. On montre d'abord que  $\mathcal{E}_T$  est une fonction décroissante de  $n$ , en établissant l'identité :

$$(7.71) \quad \frac{\mathcal{E}_T(n+1) - \mathcal{E}_T(n)}{\Delta t} = -\frac{\eta\mu_0}{|\gamma|} \int_0^1 \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \right|^2 d\xi.$$

Prenons  $\psi_h = \mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n$  dans la deuxième équation de (7.24). Il en résulte

$$(7.72) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0 \left( \langle \mathbf{E}_h^{n+1} \mid \mathbf{E}_h^{n+1} \rangle - \langle \mathbf{E}_h^n \mid \mathbf{E}_h^n \rangle \right) &= \Delta t \left( \text{rot}(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n) \mid \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \Delta t \left( (\mathbf{E}_h^{n+1}(0) + \mathbf{E}_h^n(0)) \times \mathbf{n} \right) \cdot \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2}. \end{aligned}$$

Faisons ensuite la somme des deux équations, obtenues en écrivant la première équation de (7.24) aux instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . En prenant dans cette somme  $\phi_h = \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}$ , nous déduisons

$$(7.73) \quad \mu_0 \left( \left( \mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}} \mid \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) - \left( \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \mid \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) \right) = -\Delta t \left( \text{rot}(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n) \mid \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right).$$

En utilisant la condition (7.41) dans la somme (7.72) + (7.73), nous aboutissons à l'identité

$$(7.74) \quad \frac{\mathcal{E}_v(n+1) - \mathcal{E}_v(n)}{\Delta t} + \eta \frac{\mathcal{E}_\Gamma(n+1) - \mathcal{E}_\Gamma(n)}{\Delta t} = -\eta \mathcal{P}_k(n+\frac{1}{2}),$$

avec

$$\mathcal{P}_k(n+\frac{1}{2}) = \mu_0 \int_0^1 \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2} d\xi.$$

Observer maintenant que l'on se trouve dans le même cas de figure que (7.55), si on remplace  $n$  par  $n+\frac{1}{2}$ . Il est par ailleurs facile de voir, que les calculs qui suivent l'identité (7.74) et aboutissent à (7.59), restent encore valable dans le cas présent en substituant  $n$  à  $n+\frac{1}{2}$ . On arrive finalement à l'identité

$$(7.75) \quad \mathcal{P}_k(n+\frac{1}{2}) = \frac{\mathcal{E}_f(n+1) - \mathcal{E}_f(n)}{\Delta t} + \frac{\mu_0}{|\gamma|} \int_0^1 \frac{\alpha_k}{|\mathbf{M}_{0k}|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \right|^2 d\xi.$$

La relation (7.71) se déduit alors de manière immédiate à partir de (7.74) et (7.75).

n° La fin de la preuve s'appuie sur la démarche classique : on écrit que

$$\left( \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \mid \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) = \left\| \frac{1}{2}(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|^2 - \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|^2.$$

Ensuite, à partir de la première équation de (7.24) (ou plus simple encore, à partir de la version discrétisée en temps des équations scalaires (7.8)) on déduit que

$$\left\| \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|^2 \leq \frac{4}{\mu_0 h^2} \langle \mathbf{E}_h^n \mid \mathbf{E}_h^n \rangle$$

et par conséquent

$$(7.76) \mathcal{E}_T(n) \geq \frac{1}{2}\mu_0 \left( \left\| \frac{1}{2}(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|^2 + \eta \mathcal{E}_r(n) \right) + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\Delta t^2}{\varepsilon_0 \mu_0 h^2} \right) \langle \mathbf{E}_h^n, \mathbf{E}_h^n \rangle,$$

On voit alors, que sous la CFL (7.43), l'énergie  $\mathcal{E}_T(n)$  domine la norme  $L^2$  de la solution discrète. Par la décroissance de  $\mathcal{E}_T$  cette norme reste donc dominée par  $\mathcal{E}_T(0)$  pour tout  $n$ , ce qui prouve la stabilité.  $\square$

### 7.4.3 Preuve du théorème 7.5 (CLE exacte)

On considère donc le schéma numérique  $\{(7.24)-(7.44)-(7.45)-(7.46)\}$ . Nous avons pour ce schéma sensiblement la même preuve que le théorème 7.4. En effet les identités (7.66), (7.71) et (7.76) restent encore valables, à condition de remplacer l'expression (7.69) de  $\mathcal{E}_r$  par,

$$\mathcal{E}_r(n) = \frac{1}{2}\mu_0 \int_0^1 \left( |\Phi_k^n - \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_k^n|^2 + \eta^2 \mu_0 \varepsilon_f \left| \int_{\xi}^1 \dot{\Phi}_k^n d\zeta \right|^2 \right) d\xi$$

si on utilise (7.19) comme expression pour  $\Lambda_k$ , et par

$$\mathcal{E}_r(n) = \frac{1}{2}\mu_0 \int_0^1 \left( |\Phi_k^n - \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_k^n|^2 + \eta^2 \mu_0 \chi \left| \dot{\Phi}_k^n \right|^2 \right) d\xi$$

si on utilise (7.18) comme expression pour  $\Lambda_k$ . Les démonstrations de (7.66) et (7.76) sont exactement les mêmes que dans le cas du théorème 7.4. Il ne reste qu'à prouver (7.71). Plaçons nous dans le cas où  $\Lambda_k$  est donnée par (7.19) (l'autre cas s'en déduit sans difficultés). En utilisant la condition (7.44) dans la somme (7.72) + (7.73), nous aboutissons à l'identité

$$(7.77) \quad \frac{\mathcal{E}_v(n+1) - \mathcal{E}_v(n)}{\Delta t} + \eta \mu_0 \int_0^1 \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2} d\xi = 0$$

Multiplions, scalairement dans  $L^2(0,1)$  la première équation de (7.45) par  $\frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t}$ . Il en résulte, en posant  $\Psi_k^n = \Phi_k^n - \Pi_{\parallel} \mathbf{M}_k^n$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2} d\xi &= \int_0^1 \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\Psi_k^{n+1} + \Psi_k^n}{2} d\xi \\ &+ \eta^2 \mu_0 \int_0^1 \varepsilon_f \left( \int_{\xi}^1 \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} d\zeta \right) \cdot \left( \int_{\xi}^1 \frac{\dot{\Phi}_k^{n+1} - \dot{\Phi}_k^n}{\Delta t} d\zeta \right) d\xi \end{aligned}$$

D'où en utilisant la deuxième relation de (7.45)

$$(7.78) \quad \begin{aligned} \int_0^1 \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{2} d\xi &= \int_0^1 \frac{\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\Psi_k^{n+1} + \Psi_k^n}{2} d\xi \\ &+ \frac{\eta^2 \mu_0}{2\Delta t} \int_0^1 \varepsilon_f \left( \left| \int_{\xi}^1 \dot{\Phi}_k^{n+1} d\zeta \right|^2 - \left| \int_{\xi}^1 \dot{\Phi}_k^n d\zeta \right|^2 \right) d\xi \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$(7.79) \quad (\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n) \cdot (\Psi_k^{n+1} + \Psi_k^n) = \left| \Psi_k^{n+1} \right|^2 - \left| \Psi_k^n \right|^2 + \left( \Pi_{\parallel} (\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n) \right) \cdot (\Psi_k^{n+1} + \Psi_k^n),$$



et comme  $|\mathbf{M}_k^{n+1}|^2 = |\mathbf{M}_k^n|^2$ , on vérifie en posant  $\Upsilon_k^n = \Psi_k^n + \mathbf{M}_k^n$  ( $= \Phi_k^n + \Pi_\perp \mathbf{M}_k^n$ ),

$$(7.80) \quad (\Pi_\parallel(\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n)) \cdot (\Psi_k^{n+1} + \Psi_k^n) = (\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n) \cdot (\Upsilon_k^{n+1} + \Upsilon_k^n).$$

En combinant (7.79) et (7.80) on obtient

$$(7.81) \quad (\Phi_k^{n+1} - \Phi_k^n) \cdot (\Psi_k^{n+1} + \Psi_k^n) = |\Psi_k^{n+1}|^2 - |\Psi_k^n|^2 + (\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n) \cdot (\Upsilon_k^{n+1} + \Upsilon_k^n).$$

En utilisant (7.81) dans (7.78) ensuite (7.78) dans (7.77), on obtient

$$(7.82) \quad \frac{\mathcal{E}_v(n+1) - \mathcal{E}_v(n)}{\Delta t} + \eta \frac{\mathcal{E}_\Gamma(n+1) - \mathcal{E}_\Gamma(n)}{\Delta t} = -\eta \mathcal{P}_k(n+\frac{1}{2})$$

avec

$$\mathcal{P}_k(n+\frac{1}{2}) = \mu_0 \int_0^1 \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \cdot \frac{\Upsilon_k^{n+1} + \Upsilon_k^n}{2} d\xi.$$

Nous sommes maintenant dans la même configuration que (7.74), si on substitue dans celle-ci  $\Upsilon_k^n$  à  $\varphi^n$ . Mieux encore, par cette même substitution, les mêmes calculs pour conclure restent valables.  $\square$

## 7.5 Résultats et validation numérique

Nous présentons une comparaison numérique entre la solution exacte ( $\mathbf{E}_h^\eta, \mathbf{H}_h^\eta$ ) de notre problème et la solution approchée ( $\tilde{\mathbf{E}}_h^\eta, \tilde{\mathbf{H}}_h^\eta$ ) calculée à l'aide d'une CLE. Les cas tests ont été choisis pour illustrer les différentes actions d'une couche ferromagnétique sur une onde incidente.

### 7.5.1 Description des expériences

On pose  $\Omega_v = ]-l, L[$  comme domaine du vide, et on prend comme couche ferromagnétique l'intervalle  $]L, L+\eta[$ . Afin de simuler l'onde incidente ( $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ ) nous rajoutons un terme source dans les équations de Maxwell, par exemple en posant

$$(7.83) \quad \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} - \text{rot } \mathbf{H} = A_0 \frac{d^2}{dt^2} \left( \exp(-\pi^2(f t - 1)) \right) \delta_0(x) \vec{\mathbf{e}}_y Y_{(0, 2/f)}(t).$$

Le second membre correspond à la dérivée seconde d'une gaussienne (signal de Ricker). La fréquence  $f$  représente la fréquence centrale du signal et correspond à la longueur d'onde  $\lambda = f/c$ . La fonction  $Y_{(0, 2/f)}(t)$  indique que le terme source s'annule pour les temps  $t > 2/f$  et  $\delta_0$  désigne un Dirac en 0. L'exemple (7.83) sera celui choisi dans toutes les expériences

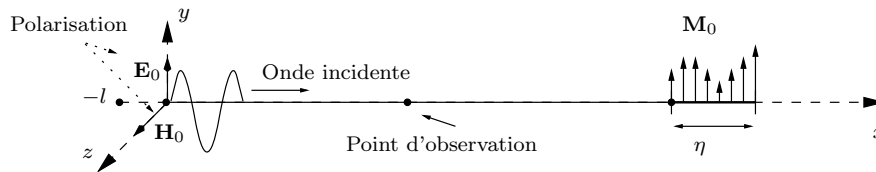


FIG. 7.5 – Description des expériences

numériques présentées. Il permet de générer une onde incidente polarisée suivant  $(E_y, H_z)$  (voir figure 7.5). Pour éliminer toute réflexion parasite nous appliquons en  $x = -l$  une condition transparente. Nous calculons d'abord la solution exacte en discrétisant tout le domaine ( $y$  compris le domaine ferromagnétique). Le schéma numérique utilisé est celui proposé dans [30]. Nous calculons ensuite (pour la même expérience) la solution approchée en appliquant au point  $x = L$  une CLE.

### 7.5.2 Validation de la CLE d'ordre 2

Nous considérons deux types d'expériences pour la validation de la CLE d'ordre 2. La première série concerne le cas d'une couche ferromagnétique homogène. Dans ce cas, l'utilisation de la CLE d'ordre 2 ne nécessite pas la discrétisation du domaine ferromagnétique adimensionné, puisque l'aimantation approchée peut être considérée comme constante le long de la couche (voir page 164). De plus, au regard de la remarque 5.2, ce cas est a priori le plus favorable pour l'utilisation de la CLE d'ordre 2. Le deuxième type d'expériences (page 182) concerne le cas d'une couche non homogène.

#### a - Cas d'une couche homogène

La couche ferromagnétique sera caractérisée par la donnée de (le champ d'anisotropie sera supposé nul) :

- $\mathbf{M}_0(x) = \mathbf{M}_{0,y} \cdot \mathbf{e}_y$  : l'aimantation initiale de la couche ferromagnétique. Elle est dirigée selon l'axe  $\mathbf{e}_y$  afin d'avoir une interaction maximale avec le champ magnétique incident.
- $\mathbf{H}_s(x) = \mathbf{H}_{s,y} \cdot \mathbf{e}_y$  : le champ statique. Il est également dirigé suivant l'axe  $\mathbf{e}_y$  afin de garantir l'équilibre initial du milieu ferromagnétique
- $\alpha$  : le coefficient d'amortissement.

n° Nous avons choisi comme exemple

$$\mathbf{M}_{0,y} = 2 \cdot 10^3, \quad \mathbf{H}_{s,y} = 5 \cdot 10^2, \quad \alpha = 0.2.$$

Il est intéressant de tracer d'abord pour ce choix de paramètres, les courbes de perméabilités directionnelles théoriques (voir chapitre 1). Ces courbes sont données dans la figure 7.6 :

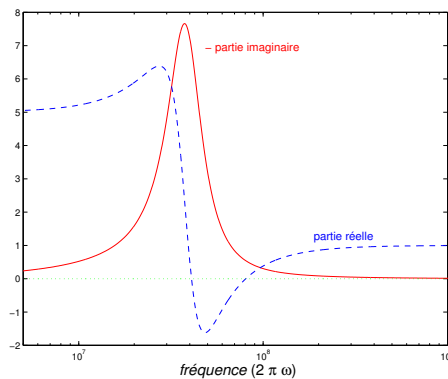


FIG. 7.6 – Perméabilité directionnelle relative

On observe que (du moins dans un régime de comportement linéaire) la plage d'absorption est située entre les fréquences  $10^7 \text{ Hz}$  et  $10^8 \text{ Hz}$ . Nous choisissons dans les expériences à venir  $f = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$ .

### Comparaisons dans le cas d'un régime linéaire (figure 7.7)

Nous commençons par étudier d'abord le comportement linéaire de la couche ferromagnétique. L'amplitude maximale de l'onde incidente est  $|\mathbf{H}_0| = 100$ . Les courbes de la figure 7.7 correspondent à des enregistrements ponctuels de la solution au point d'observation  $x = L/2$  (voir figure 7.5). Nous y représentons les résultats de trois expériences correspondant à des longueurs différentes de la couche ferromagnétique :  $\eta = \lambda/10$ ,  $\lambda/20$ ,  $\lambda/40$ . Pour chaque expérience nous représentons les deux composantes  $\mathbf{E}_y$  et  $\mathbf{E}_z$  du champ électrique. Nous rappelons que l'onde incidente est polarisée suivant  $(\mathbf{E}_y, \mathbf{H}_z)$  et donc  $\mathbf{E}_z = 0$  pour celle-ci. Sur chaque graphique on voit d'abord arriver l'onde incidente, suivie ensuite par l'onde réfléchie. La solution de référence est présentée en trait plein alors que la solution approchée est présentée en trait discontinu. Dans cette première expérience de pure validation, on calcule chacune des solutions exactes et approchées en utilisant le même pas de discrétisation en espace. On utilise pour la CLE d'ordre 2 le schéma implicite en temps.

Nous observons que l'approximation s'améliore quand  $\eta$  diminue, elle devient excellente pour  $\eta = \lambda/40$  (les deux courbes sont presque confondues). En comparant l'amplitude de l'onde qui a tournée (composante  $\mathbf{E}_z$ ) à l'amplitude de l'onde incidente ( $\mathbf{E}_y$ ), on constate que cette dernière est largement supérieure à la première (facteur 10 entre les deux). On est bien dans un régime linéaire dans lequel, la couche devrait être transparente pour la polarisation  $(\mathbf{E}_z, \mathbf{H}_y)$  (cf. fin de la section 1.3). A noter enfin, que le phénomène d'absorption attendu est bien visible sur l'onde réfléchie, et ceci même lorsque la couche est relativement très fine ( $\eta = \lambda/40$ ).

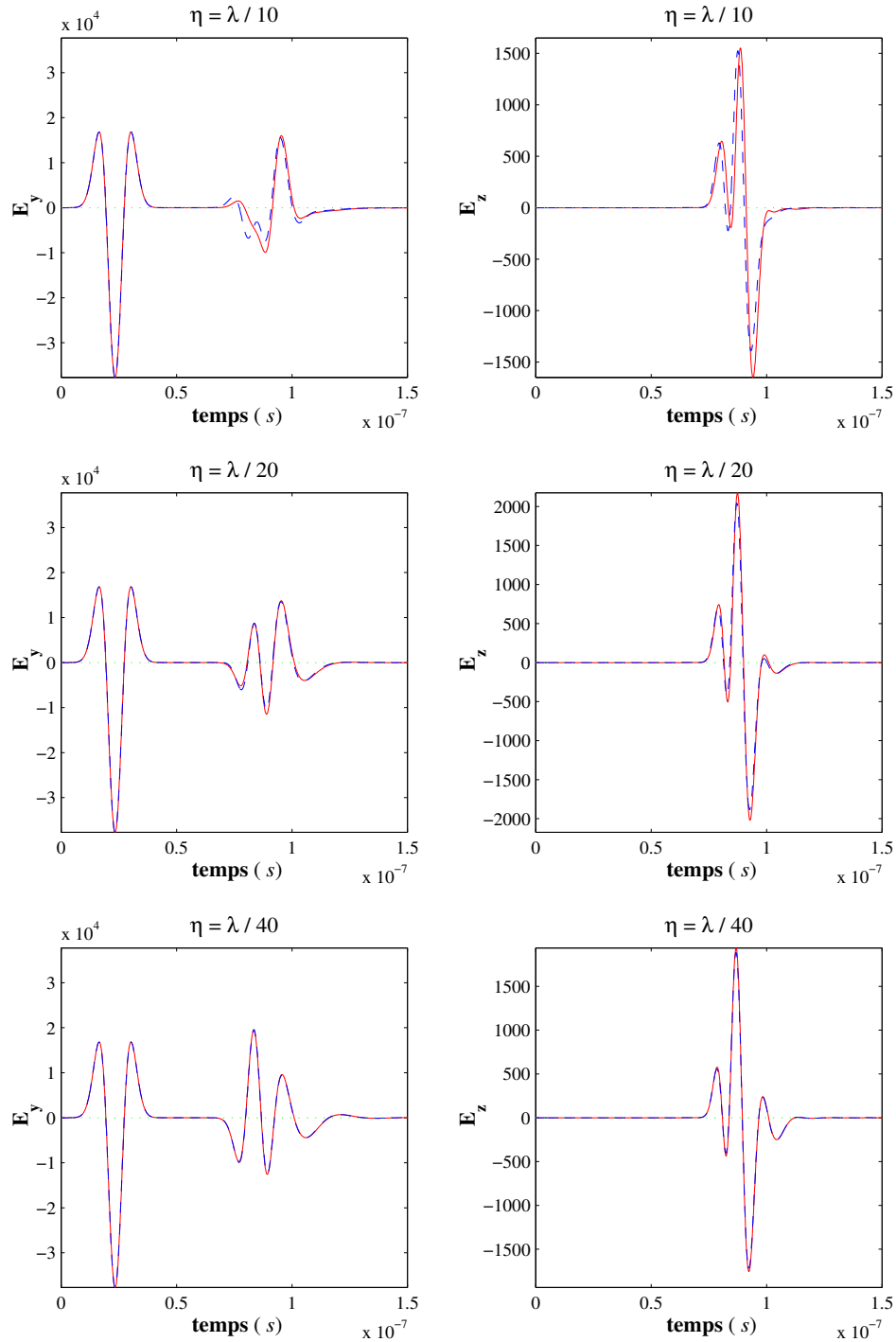
Régime linéaire  $H_0 = 100$ 

FIG. 7.7 – Comparaisons sur un enregistrement ponctuel, entre la solution exacte et la solution approchée (CLE d'ordre 2), pour différentes valeurs de  $\eta$ . Les deux composantes du champ électrique sont représentées. L'onde incidente arrive d'abord, suivie ensuite par l'onde diffractée. **Solution exacte** : trait plein. **Solution approchée** : trait discontinu.

**Intérêt numérique de la méthode approchée (figure 7.8)**

Pour les expériences 1D, le temps d'exécution n'est pas un élément de comparaison pertinent (l'exécution des expériences est très rapide). Ce qui est important par contre, c'est de voir le gain (minimal) en taille du problème discret que peut apporter l'utilisation de la méthode approchée. Nous avons reproduit, pour cela, l'expérience de la figure (7.14) lorsque  $\eta = \lambda/40$ , mais en calculant cette fois ci la solution approchée avec le pas  $h = \lambda/10$  (ce pas étant presque optimal pour avoir une bonne précision sur l'onde incidente). En comparant le résultat obtenu avec la solution de référence, on observe que la précision de l'approximation demeure très bonne. L'utilisation de la CLE nous a permis un gain de facteur  $\geq 4$  sur la taille du problème, puisque théoriquement il nous faut au moins  $h = \lambda/40$ , pour pouvoir calculer la solution via les équations exactes du modèle (dans la pratique nous avons utilisé  $h = \lambda/400$  pour calculer cette solution !)

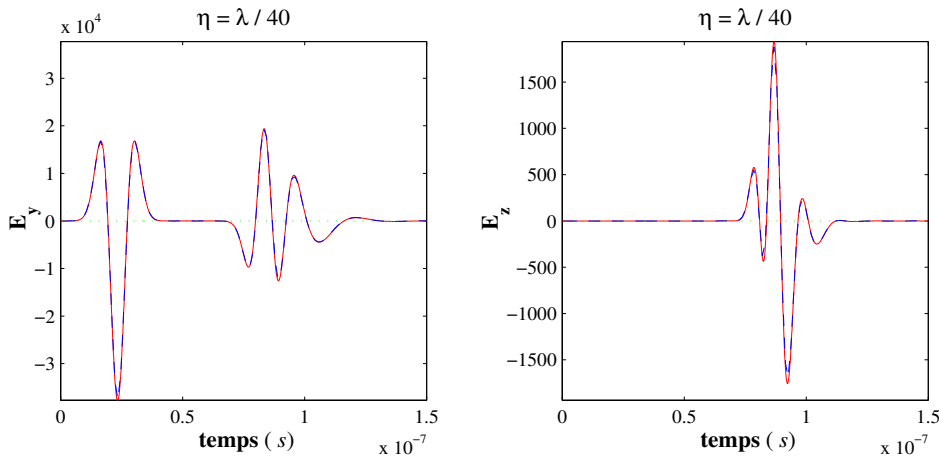


FIG. 7.8 – Reproduction de l'expérience de la figure (7.14) pour  $\eta = \lambda/40$ , en calculant la solution approchée avec  $h = \lambda/10$ .

**Perméabilité directionnelle numérique (figure 7.10)**

Dans le cas d'une couche homogène, il est possible de définir, à partir de la CLE d'ordre 2, la susceptibilité équivalente directionnelle  $\chi_d$  (voir chapitre 1, section 1.3) par

$$\chi_d(\omega) = \hat{\mathbf{M}}_z(\omega) / \hat{\varphi}_z(\omega)$$

où  $\hat{\phantom{x}}$  désigne la transformée de Fourier et  $\omega$  la pulsation. Le calcul théorique est représenté dans la figure 7.6. Il est intéressant de voir si numériquement on est capable de retrouver ce résultat. Considérons encore une fois l'exemple de la figure 7.14 avec  $\eta = \lambda/20$  (pour changer). Nous refaisons la même expérience mais en prenant une fréquence  $f = 2 \cdot 10^8 \text{ Hz}$  au lieu de  $5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$  (afin d'avoir une bonne précision sur la transformée de Fourier discrète dans la bande de fréquence  $10^7 \text{ Hz} - 10^9 \text{ Hz}$ ).

La figure 7.10 montre les valeurs numériques obtenues pour  $1 + \chi_d$ , qui sont identiques aux valeurs théoriques présentées par la figure 7.6. Sur la figure de gauche nous avons tracé le  $|\hat{\mathbf{M}}_z(\omega)|$  en trait discontinu, et  $|\hat{\varphi}_z(\omega)|$  en trait continu.

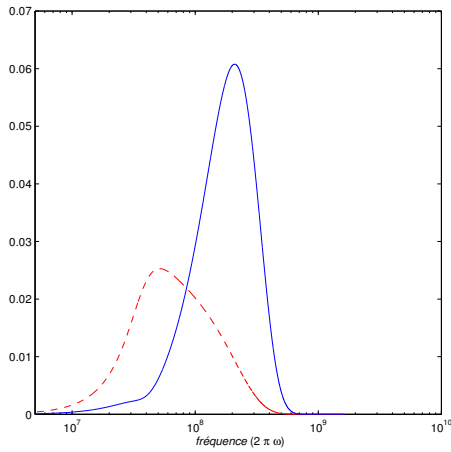


FIG. 7.9 – Spectre de  $M_z$  (trait discontinu) et de  $\varphi_z$  (trait continu).

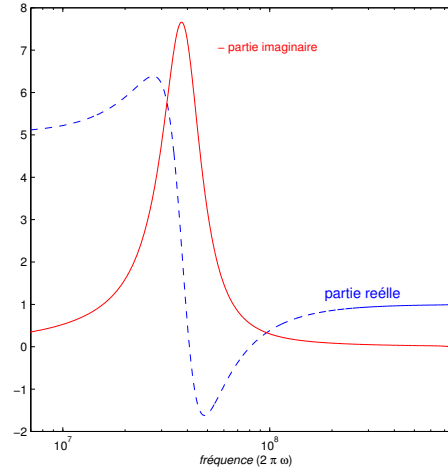


FIG. 7.10 – Perméabilité directionnelle.

### Coefficient de réflexion (figure 7.12)

Il est possible également de déterminer pour l'expérience précédente le coefficient de réflexion en fonction de la fréquence.

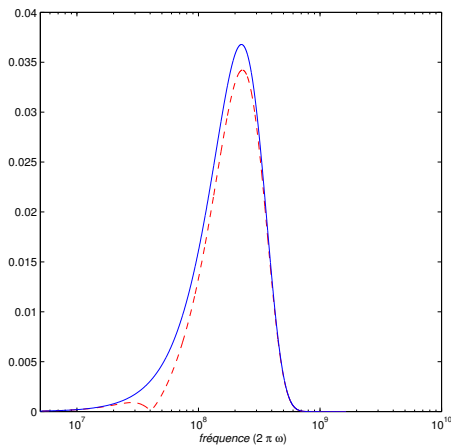


FIG. 7.11 – Spectres de l'onde réfléchie (trait discontinu) et de l'onde incidente (trait continu).

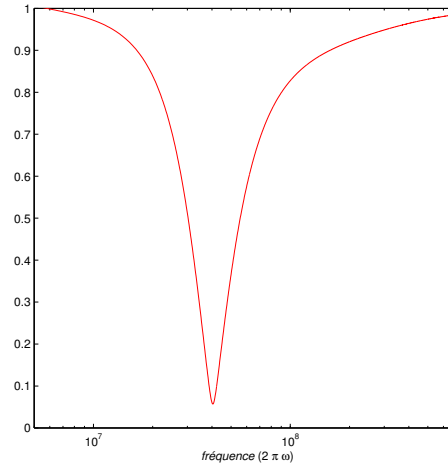


FIG. 7.12 – Coefficient de réflexion

On calcule le rapport du spectre de l'onde réfléchie au point d'observation (figure 7.11, trait discontinu) par le spectre de l'onde incidente au même point (figure 7.11, trait continu). Le résultat est présenté par la figure 7.12, où l'on observe que le minimum de réflexion se produit à la fréquence  $3 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ , qui est bien la fréquence où il y a un maximum d'absorption, selon la figure 7.10.

**Comparaisons dans le cas d'un régime non linéaire (figure 7.14)**

Nous restons toujours dans le cas d'une couche homogène, mais nous changeons cette fois-ci de régime en augmentant la valeur du champ magnétique incident. On prend désormais  $|\mathbf{H}_0| = 1000$ , et nous reproduisons les mêmes expériences que dans le cas de figure 7.7. Le résultat est présenté dans la figure 7.14. On constate d'abord qu'on est bien dans le régime non linéaire, puisque les valeurs prises par la composante  $\mathbf{E}_z$  sont du même ordre de grandeur que celles prises par la composante incidente  $\mathbf{E}_y$ . Bien que la précision est légèrement moins bonne que dans le cas linéaire, on peut conclure que dans les deux cas, la CLE d'ordre 2 permet d'avoir une très bonne approximation de la solution exacte pour  $\eta \leq \lambda/20$ .

**b - Cas d'une couche non homogène (figure 7.15)**

Nous considérons maintenant le cas où les caractéristiques de la couche ferromagnétique dépendent de la variable d'espace. Plus précisément nous prenons, pour  $\xi \in [0, 1]$ ,

$$\mathbf{M}_0(\xi) = |\mathbf{M}_0| (\cos(\frac{\pi}{2} \xi) \vec{e}_y + \sin(\frac{\pi}{2} \xi) \vec{e}_z) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_s(\xi) = |\mathbf{H}_s| (\cos(\frac{\pi}{2} \xi) \vec{e}_y + \sin(\frac{\pi}{2} \xi) \vec{e}_z),$$

c.à.d. le cas où la direction de l'aimantation varie mais son module reste constant (voir figure 7.13). Le coefficient d'amortissement est pris constant.

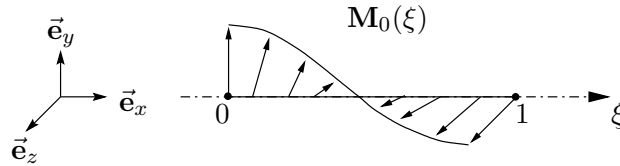


FIG. 7.13 – Répartition de l'aimantation à l'intérieur de la couche ferromagnétique

Nous prenons comme exemple de paramètres, ceux des dernières expériences, soit

$$|\mathbf{M}_0| = 2 \cdot 10^3, \quad |\mathbf{H}_s| = 5 \cdot 10^2, \quad \alpha = 0.2.$$

et nous choisissons un régime non linéaire en prenant  $|\mathbf{H}_0| = 1000$ . La fréquence centrale du signal est à nouveau  $5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$ . Les résultats sont présentés dans la figure 7.15 et correspondent aux même type de simulations que dans le cas des figures 7.7 et 7.14. Comme l'aimantation ne peut être considérée comme constante, il est nécessaire dans le cas de la CLE de choisir une discrétisation du domaine ferromagnétique adimensionnée. Nous avons choisit d'y utiliser le même nombre de points que dans la couche  $[0, \eta]$  pour le calcul de la solution exacte. Rappelons que la différence majeure avec le cas d'une résolution exacte est que le choix du pas de discrétisation dans le vide est indépendant du pas de dicrétisation du domaine ferromagnétique.

On observe que l'approximation à  $\eta$  égal est moins bonne que dans le cas d'une couche homogène (comparer la figure 7.15 à la figure 7.14). Toutefois, elle reste très bonne pour  $\eta = \lambda/40$ .

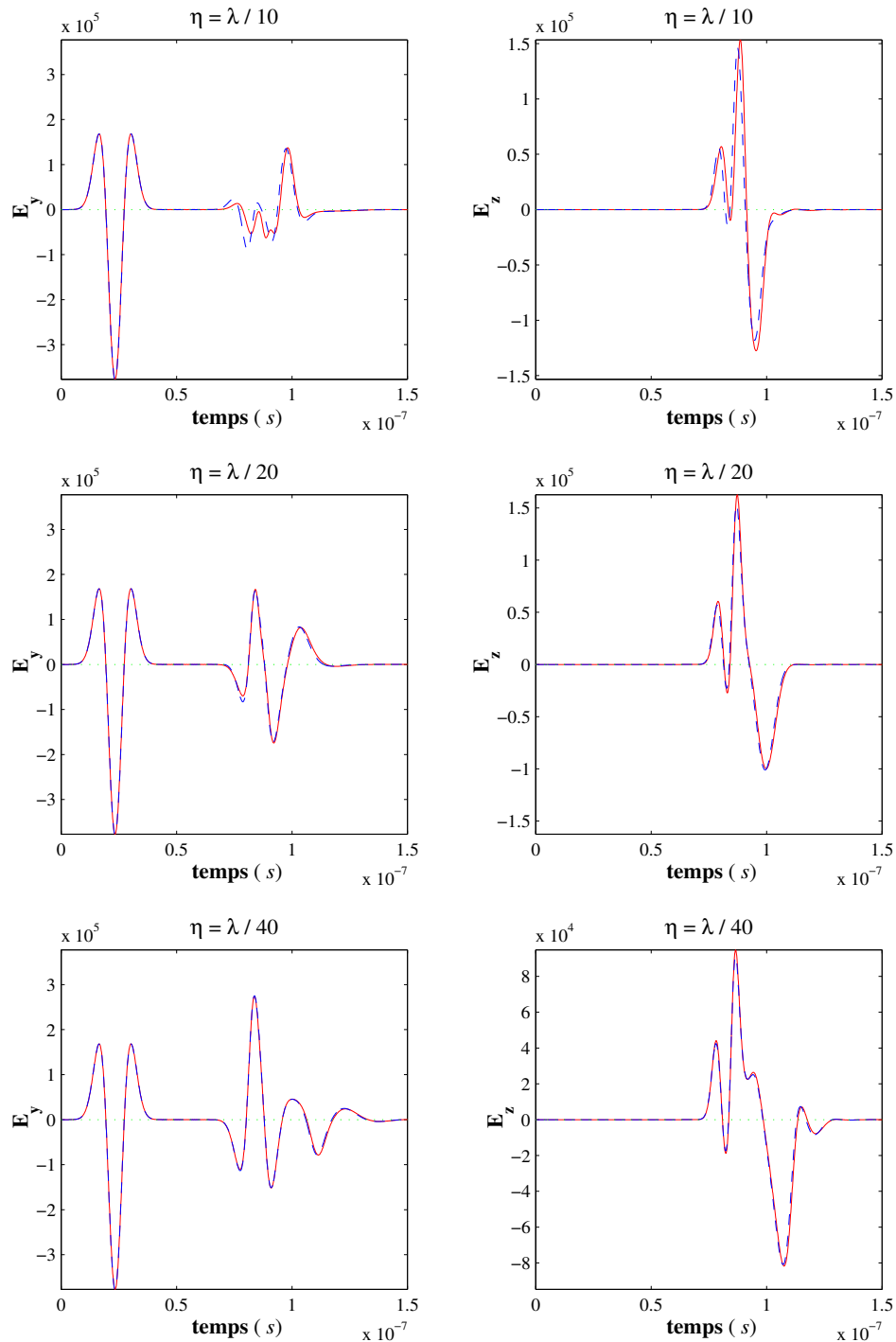
Régime non linéaire  $H_0 = 1000$ 

FIG. 7.14 – Comparaisons sur un enregistrement ponctuel, entre la solution exacte et la solution approchée (CLE d'ordre 2), pour différentes valeurs de  $\eta$ . Les deux composantes du champ électrique sont représentées. L'onde incidente arrive d'abord, suivie ensuite par l'onde diffractée. **Solution exacte** : trait plein. **Solution approchée** : trait discontinu.



Validation dans le cas d'une aimantation tournante  
(régime non linéaire :  $H_0 = 1000$ )

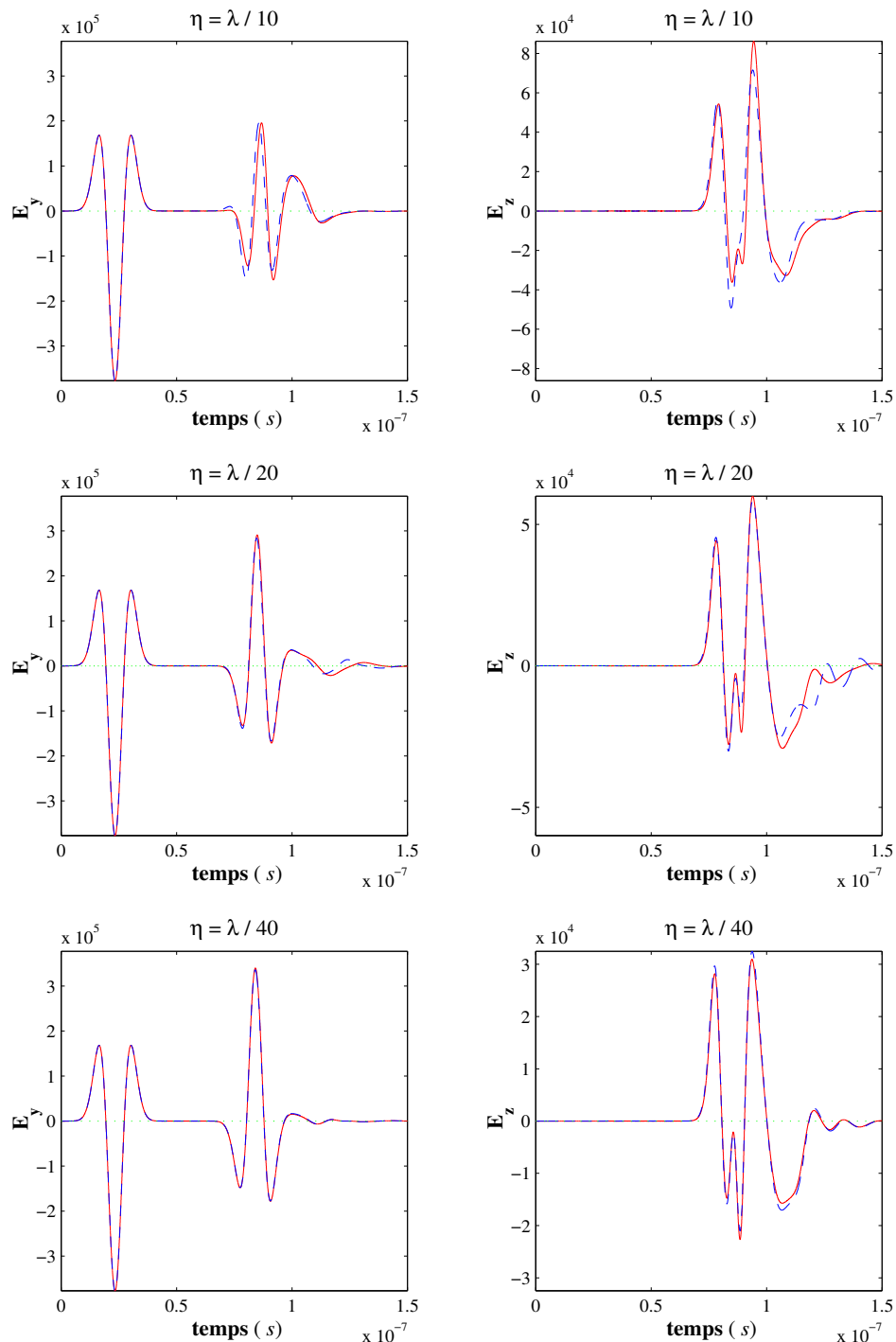


FIG. 7.15 – Nous reproduisons l'expérience de la figure 7.14, sauf que la couche ferromagnétique n'est plus homogène. La répartition de l'aimantation est décrite par la figure 7.13. **Solution exacte** : trait plein. **Solution approchée** : trait discontinu.

### 7.5.3 Apport de la CLE d'ordre 4

#### CLE d'ordre 4 du cas homogène

Il est intéressant de voir l'amélioration que peut apporter la CLE d'ordre 4 spécifique au cas homogène, dans les expériences où la précision de la CLE d'ordre 2 n'est pas tout à fait satisfaisante. Dans le cas d'une couche homogène (figures 7.7 et 7.14) le cas défavorable est  $\eta = \lambda/10$ . La figure 7.16 reproduit la même expérience que la figure 7.14 pour  $\eta = \lambda/10$  sauf que nous utilisons la condition d'ordre 4 (du cas homogène) au lieu de la CLE d'ordre 2, pour le calcul de la solution approchée. L'amélioration apportée par cette condition est très

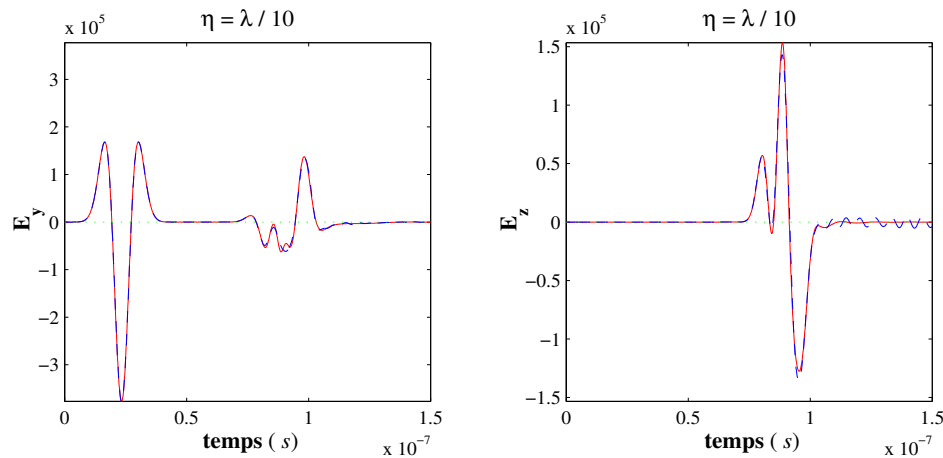


FIG. 7.16 – Amélioration apportée par la CLE d'ordre 4. **Solution exacte** : trait plein. **Solution approchée** : trait discontinu.

nette mais se trouve contrastée par l'apparition d'oscillations parasites. L'amplitude de ces oscillations demeure par contre négligeable devant l'amplitude du signal incident, de plus elle diminue avec  $\eta$  (voir les expériences qui suivent).

Nous nous sommes intéressé dans un deuxième temps, à l'utilisation de cette condition dans le cas d'une couche non homogène. Bien entendu, on sort a priori du cadre "légitime" de son application. Regardons ce que ça donne sur l'expérience de la figure 7.15 pour  $\eta = \lambda/10$ . Le résultat est présenté par la figure 7.17 où on observe, qu'aux oscillations parasites près, la forme du signal réfléchi est mieux représenté. On peut considérer toutefois que la qualité de l'approximation n'est pas satisfaisante. Cela n'est pas le cas de  $\eta = \lambda/20$ , représenté par la figure 7.18, où en comparant avec la figure 7.15, l'approximation se trouve nettement améliorée. De plus les oscillations parasites ont quasiment disparues.

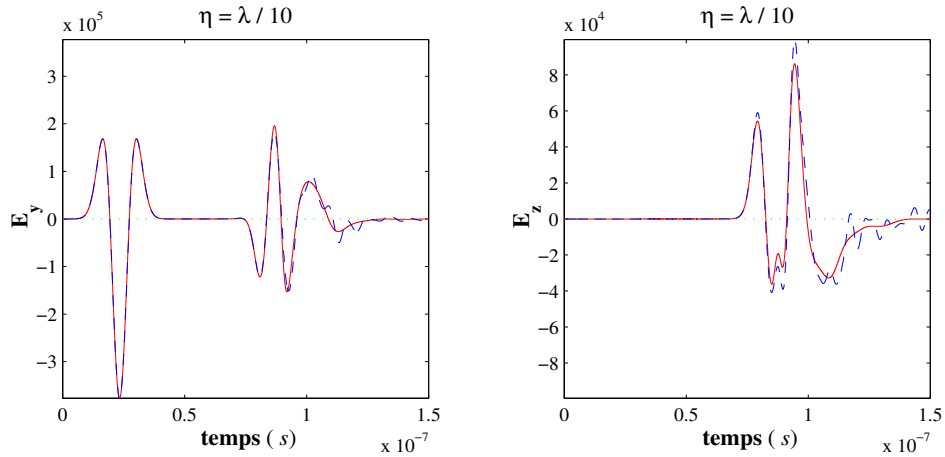


FIG. 7.17 – Amélioration apportée par la CLE d’ordre 4 spécifique au cas homogène. **Solution exacte** : trait plein. **Solution approchée** : trait discontinu.

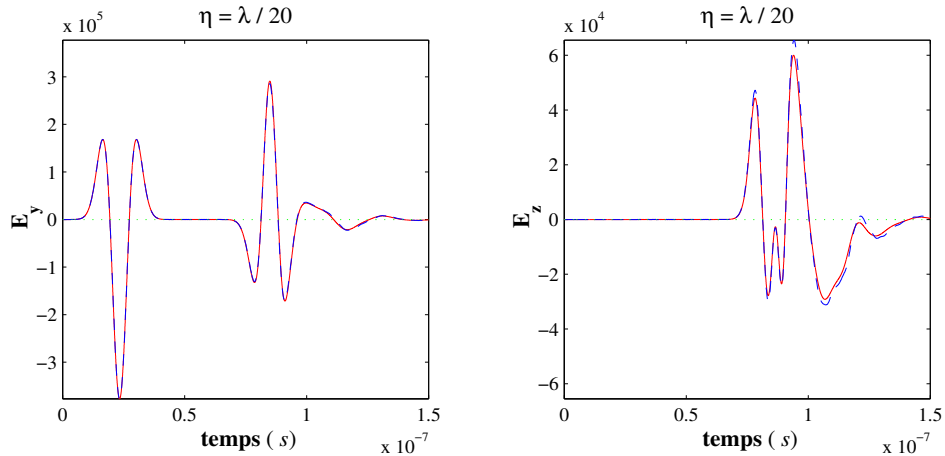


FIG. 7.18 – Amélioration apportée par la CLE d’ordre 4 spécifique au cas homogène. **Solution exacte** : trait plein. **Solution approchée** : trait discontinu.

### A propos de la condition exacte

Nous possédons dans le cas 1D une condition exacte, ou plutôt d’un nouveau schéma numérique qui permet de résoudre de manière exacte les équations adimensionnées du problème. Ce schéma offre la possibilité de prendre un pas de discrétisation à l’extérieur de la couche ferromagnétique, qui soit indépendant de la discrétisation de cette couche.

Prenons l’exemple de la figure 7.17, où les autres conditions ne sont pas totalement satisfaisantes. Nous calculons la solution “exacte” via ce nouveau schéma en prenant un pas  $h = \lambda/10$  à l’extérieur du domaine ferromagnétique. La comparaison avec la solution de référence est donnée dans la figure 7.19 et montre que l’on calcule bien la solution exacte.

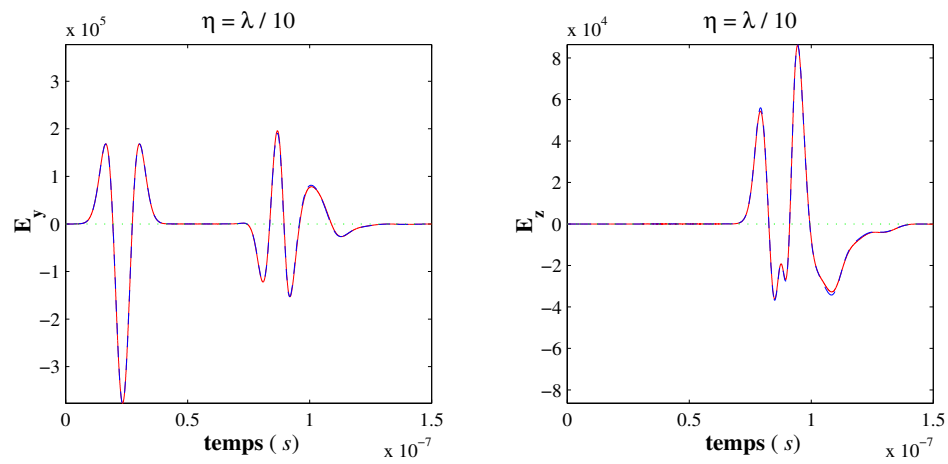


FIG. 7.19 – Amélioration apportée par la CLE d'ordre 4. Solution exacte : trait plein. Solution approchée : trait discontinu.



## Chapitre 8

# Schémas numériques variationnels stables pour les CLE en 2D et en 3D

**Résumé :** Ce chapitre est dédié à la discrétisation des conditions approchées d'ordre 2 et d'ordre 3 (voir formules 5.93 et 5.110) dans le cas de géométries 2D et 3D planes. Les schémas en temps que nous utilisons constituent en quelque sorte une généralisation du schéma implicite (sur le bord) du chapitre 6. La discrétisation du problème est basée sur l'écriture d'une formulation variationnelle mixte du problème d'évolution. Nous avons choisi de présenter le principe général de la méthode en étudiant d'abord le cas linéaire (section 8.2). Nous décrivons pour la formulation variationnelle du problème de départ (formule (8.7)) un choix d'espace de discrétisation possible dans le cas d'une frontière plane (qui amène de manière naturelle au schéma de Yee en dehors de la frontière) (formules 8.9-8.14). Le schéma centré en temps que nous proposons pour cette discrétisation (système (8.15)) est stable sous la condition CFL usuelle (théorème 8.3). Ce théorème est montré via une technique énergétique qui s'inspire du théorème de stabilité du cas continu. La généralisation au cas de la condition non linéaire d'ordre 2 se fait sans difficultés et le schéma implicite est stable sous la même condition CFL que dans le cas linéaire (théorème 8.4). Le cas de la condition d'ordre 3 non linéaire est plus problématique, puisqu'il fait intervenir des dérivées tangentielles du moment magnétique. Ces dérivées sont traitées sous forme faible en intégrant par parties et en introduisant une variable auxiliaire  $\psi$  dans le domaine ferromagnétique (formules (8.55) et (8.57)). Nous démontrons également pour cette condition l'existence d'une discrétisation implicite stable sous la CFL classique (théorème 8.5). Nous terminons ce chapitre par des expériences de validation en 2D, qui confirment les conclusions du cas 1D et montrent en particulier l'amélioration que peut apporter l'utilisation de la condition d'ordre 3 par rapport à la condition d'ordre 2 (ces deux conditions étant confondues dans le cas 1D, voir commentaires 8.5).

## 8.1 Introduction

Nous nous intéressons à la généralisation du procédé de construction de schémas numériques stables, introduit dans le chapitre 7, aux cas de géométries 2D ou 3D. L'étude du cas 1D nous a renseigné sur "la meilleure" alternative pour la discrétisation en temps. Le gros du travail qui reste à faire dans le cas des dimensions supérieures, est de préciser la discrétisation spatiale adéquate relative à la frontière.

Nous commençons d'abord par étudier le cas linéaire. Une fois la construction de schémas stables pour ce cas est bien maîtrisée, nous traitons ensuite le couplage avec la loi ferromagnétique.

Remarquons par ailleurs que, bien que la formulation variationnelle du problème continu sera donnée dans le cas d'une surface régulière quelconque, la discrétisation spatiale ne sera traitée que dans le cas d'une frontière droite.

Nous terminons ce chapitre par une validation des résultats numériques en 2D.

## 8.2 Etude du cas linéaire

### 8.2.1 Rappel des équations

Nous allons considérer directement le cas de la condition équivalente d'ordre 3 avec  $\varepsilon_f$  variable (cf. Remarque 5.8). Cette condition fait intervenir l'opérateur tangentiel  $\mathcal{B}_3^\eta$  dont l'expression est donnée par (5.116). On pose

$$(8.1) \quad \mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_k^\eta = - \left( \mathcal{R}^\eta \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \chi^\eta \text{rot}_\Gamma \right)$$

où on a posé

$$(8.2) \quad \mathcal{R}^\eta = \mu_0 \eta (\Pi_\parallel - \eta (\mathcal{C} - H \Pi_\parallel)) \quad \text{et} \quad \chi^\eta = \eta (\chi_1 - 2 \eta \chi_2 H).$$

Nous rappelons que :  $\chi_1(\mathbf{x}_\Gamma) = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon_f(\mathbf{x}_\Gamma, \nu)} d\nu$  et  $\chi_2(\mathbf{x}_\Gamma) = \int_0^1 \frac{\nu}{\varepsilon_f(\mathbf{x}_\Gamma, \nu)} d\nu$ . Pour  $\eta$  assez petit, la restriction de la matrice  $\mathcal{R}^\eta$  au plan tangent forme une matrice symétrique définie positive, et le réel  $\chi^\eta$  est strictement positif. La CLE d'ordre 2 peut être considérée comme un cas particulier en prenant  $\mathcal{C} = 0$  dans (8.1). Nous rappelons les équations du problèmes

$$(8.3) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} - \text{rot} \mathbf{H} = 0, & \mu_0 \partial_t \mathbf{H} + \text{rot} \mathbf{E} = 0 & \text{sur } \Omega_v \times [0, +\infty[, \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H})|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) & & \text{sur } \Omega_v, \\ \partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathcal{B}(\varphi) & & \text{sur } \Gamma \times [0, +\infty[, \end{cases}$$

où on a posé

$$\varphi = \Pi_\parallel \mathbf{H}|_\Gamma$$

et où  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$  désigne l'onde incidente à support contenu dans  $\Omega_v$ .

### 8.2.2 Formulation variationnelle

On suppose désormais que la surface  $\Gamma$  est régulière et on note  $\mathbf{n}$  le champ des normales unitaires à  $\Gamma$  dirigées vers l'extérieur de  $\Omega_v$ .

Pour écrire la formulation variationnelle du problème, nous avons besoin de faire quelques rappels sur les opérateurs de traces sur  $\Gamma$ . Commençons d'abord par préciser les notations pour les espaces fonctionnels : Pour  $s$  réel quelconque, on pose  $H^s(\Gamma)$  l'espace de Sobolev usuel des fonctions définies sur la surface  $\Gamma$  (par convention, on pose  $H^0(\Gamma) = L^2(\Gamma)$ ). On définit alors

$$(8.4) \quad \begin{cases} \mathcal{T}H^s(\Gamma) = \{\mathbf{v} \in H^s(\Gamma)^3 / \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\}, \\ H^s(\text{div}_\Gamma, \Gamma) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{T}H^s(\Gamma) / \text{div}_\Gamma \mathbf{v} \in H^s(\Gamma)\} \\ H^s(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{T}H^s(\Gamma) / \text{rot}_\Gamma \mathbf{v} \in H^s(\Gamma)\} \end{cases}$$

Nous avons alors que l'espace  $H^s(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et le dual de l'espace  $H^{-s-1}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  pour le produit scalaire prolongeant le produit scalaire  $\mathcal{T}L^2(\Gamma)$  (voir par exemple [43, 35]).

n° Nous introduisons maintenant les opérateurs de traces tangentielles sur  $\Gamma$  :

$$(8.5) \quad \begin{array}{ll} \gamma_t : C^\infty(\bar{\Omega}_v) \longrightarrow \mathcal{T}L^2(\Gamma) & \gamma_\tau : C^\infty(\bar{\Omega}_v) \longrightarrow \mathcal{T}L^2(\Gamma) \\ \mathbf{v} \longmapsto \Pi_{\parallel} \mathbf{v}|_\Gamma & \mathbf{v} \longmapsto (\mathbf{v} \times \mathbf{n})|_\Gamma \end{array}$$

pour lesquels nous avons le théorème (voir [38])

**Théorème 8.1** *Les opérateurs  $\gamma_\tau$  et  $\gamma_t$  sont tels que :*

- L'opérateur  $\gamma_\tau$  se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu surjectif de  $H(\text{rot}, \Omega_v)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Omega_v)$ .

- L'opérateur  $\gamma_t$  se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu surjectif de  $H(\text{rot}, \Omega_v)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Omega_v)$ .

- Pour tout couple  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  dans  $H(\text{rot}, \Omega_v)^2$ , on a la formule de Green

$$(8.6) \quad \int_{\Omega_v} (\text{rot } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \langle \gamma_\tau \mathbf{u}, \gamma_t \mathbf{v} \rangle$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité  $H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Omega_v) - H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Omega_v)$ .

Notre formulation variationnelle du problème (8.3) consiste à faire pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  le choix classique d'espaces fonctionnels respectifs  $H(\text{rot}, \Omega_v)$  et  $H(\text{div}, \Omega_v)$ ; pour la variable auxiliaire  $\varphi$ , nous choisissons de la prendre dans  $H(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ . Elle s'écrit :

Chercher  $(\mathbf{H}(t), \mathbf{E}(t), \varphi(t)) \in H(\text{div}, \Omega_v) \times H(\text{rot}, \Omega_v) \times H(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  tels que, pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $(\mathbf{H}', \mathbf{E}', \varphi') \in H(\text{div}, \Omega_v) \times H(\text{rot}, \Omega_v) \times H(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ ,

$$(8.7) \quad \begin{array}{l} (i) \quad \int_{\Omega_v} (\mu_0 \partial_t \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{H}' + \text{rot } \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{H}') \, d\mathbf{x} = 0, \\ (ii) \quad \int_{\Omega_v} (\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}' - \text{rot } \mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}(t)) \, d\mathbf{x} = \langle \gamma_\tau \mathbf{E}', \varphi(t) \rangle, \\ (iii) \quad \int_{\Gamma} (\mathcal{R}^\eta \partial_{tt} \varphi(t) \cdot \varphi' + \chi^\eta \text{rot}_\Gamma \varphi(t) \text{rot}_\Gamma \varphi') \, d\mathbf{x}_\Gamma = -\partial_t \langle \gamma_\tau \mathbf{E}(t), \varphi' \rangle, \end{array}$$

à laquelle il faut bien entendu rajouter les conditions initiales  $(\mathbf{E}(0), \mathbf{H}(0)) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ , mais aussi les conditions initiales  $\varphi(0) = \partial_t \varphi(0) = 0$ , provenant de l'hypothèse faite sur le support de l'onde incidente. Remarquer que les termes de droites dans les équations (8.7)(ii) et



(8.7)(iii) ont bien un sens grâce à l'inclusion  $H(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  et au théorème 8.1. Il est par ailleurs facile de voir que toute solution régulière de (8.7) vérifie bien les équations du système (8.3).

Remarquons finalement que le problème (8.7) est un problème mixte non standard à cause de la dérivée temporelle qui porte sur le terme de droite de (8.7)(iii).

### 8.2.3 Semi discrétisation spatiale

#### Remarques générales sur le cas courbe

La dérivation du problème discrétisé en espace, passe par les étapes habituelles suivantes : Nous considérons d'abord un maillage du domaine  $\Omega_v$  qui transforme ce dernier en  $\Omega_h$  et la frontière  $\Gamma$  en  $\Gamma_h$ , où  $h$  est une longueur caractéristique du maillage considéré. Nous choisissons ensuite des espaces d'approximations adéquats (de dimensions finis)  $X_h(\Omega_h)$ ,  $V_h(\Omega_h)$  et  $Y_h(\Gamma_h)$  associées aux espaces respectifs  $H(\text{div}, \Omega_h)$ ,  $H(\text{rot}, \Omega_h)$  et  $H(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_h)$ . Il convient alors dans le cas courbe de commencer par préciser la nature de l'espace  $H(\text{rot}_\Gamma, \Gamma_h)$ , puisque  $\Gamma_h$  n'est pas en général une surface régulière (voir dans ce sens [11]).

La formulation discrète en espace s'obtient alors en remplaçant dans (8.7) les domaines et les espaces continus par leurs équivalents discrets. Dans la pratique, il faut en plus préciser l'approximation des termes de courbures contenues dans (8.7)(iii), mais aussi la manière de calculer le produit de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  entre deux éléments de  $\gamma_\tau V_h(\Omega_h)$  et  $Y_h(\Gamma_h)$ .

Nous allons dans toute la suite nous affranchir des difficultés liées à l'aspect courbe en nous plaçant dans le cas d'une frontière droite.

#### Forme générale dans le cas d'une frontière droite

Dans ce cas  $\Omega_h = \Omega_v$  et  $\Gamma_h = \Gamma$ . On note  $(\cdot | \cdot)$  le produit scalaire  $L^2(\Omega_v)$  et  $(\cdot | \cdot)_\Gamma$  le produit scalaire  $L^2(\Gamma)$ . La formulation variationnelle discrète s'écrit sous sa forme la plus générale

Chercher  $(\mathbf{H}_h(t), \mathbf{E}_h(t), \boldsymbol{\varphi}_h(t)) \in X_h(\Omega_v) \times V_h(\Omega_v) \times Y_h(\Gamma)$  tels que, pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $(\mathbf{E}'_h, \mathbf{H}'_h, \boldsymbol{\varphi}'_h) \in X_h(\Omega_v) \times V_h(\Omega_v) \times Y_h(\Gamma)$ ,

$$(8.8) \quad \begin{cases} (i) & \mu_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{H}_h(t) | \mathbf{H}'_h) + (\text{rot } \mathbf{E}_h(t) | \mathbf{H}'_h) = 0, \\ (ii) & \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{E}_h(t) | \mathbf{E}'_h) - (\text{rot } \mathbf{E}'_h | \mathbf{H}_h(t)) = \langle \gamma_\tau \mathbf{E}'_h, \boldsymbol{\varphi}_h(t) \rangle, \\ (iii) & \eta \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} (\boldsymbol{\varphi}_h(t) | \boldsymbol{\varphi}'_h)_\Gamma + \eta (\chi_{1\text{rot}_\Gamma} \boldsymbol{\varphi}_h(t) | \text{rot}_\Gamma \boldsymbol{\varphi}'_h)_\Gamma = -\frac{d}{dt} \langle \gamma_\tau \mathbf{E}_h(t), \boldsymbol{\varphi}'_h \rangle. \end{cases}$$

où  $X_h(\Omega_v) \times V_h(\Omega_v) \times Y_h(\Gamma) \subset H(\text{div}, \Omega_v) \times H(\text{rot}, \Omega_v) \times H(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ . Nous allons préciser maintenant le choix particulier d'espaces discrets nous faisons sur un maillage régulier.

**Remarque 8.1** *On peut d'ores et déjà remarquer sur la formulation (8.8) un intérêt supplémentaire pour l'utilisation des CLE. En effet, le choix des espaces  $X_h(\Omega_v)$ ,  $V_h(\Omega_v)$  peut se faire a priori de manière indépendante de la CLE qu'on prend. Il est possible alors de le faire correspondre avec des méthodes classiques et performantes... Ceci peut ne pas être le cas de la résolution exacte avec un revêtement ferromagnétique (voir discussion dans [45]). Dans notre cas c'est plutôt le choix de l'espace  $Y_h(\Gamma)$  qui sera conditionné par celui de  $X_h(\Omega_v)$  et  $V_h(\Omega_v)$ .*

### 8.2.4 Exemple d'espaces de discrétisation en 2D

L'exemple que l'on va décrire est celui utilisé dans les expériences numériques menées à la fin du chapitre.

Soit  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $(x, y, z)$  un système de coordonnées qui lui est associé. Pour fixer les idées nous prenons  $\Omega_v = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 / z < 0\}$  la frontière  $\Gamma$  désigne par conséquent la droite  $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 / z = 0\}$  du plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ . La normale  $\mathbf{n}$  est tout simplement le vecteur  $\vec{e}_z$ .

On considère  $\mathcal{M}(\Omega_v)$  un maillage régulier de  $\Omega_v$  de pas  $\Delta x$  suivant l'axe  $\vec{e}_x$  et de pas  $\Delta z$  suivant  $\vec{e}_z$ . On note  $\mathcal{M}(\Gamma)$  la trace du maillage  $\mathcal{M}(\Omega_v)$  sur la frontière  $\Gamma$ .

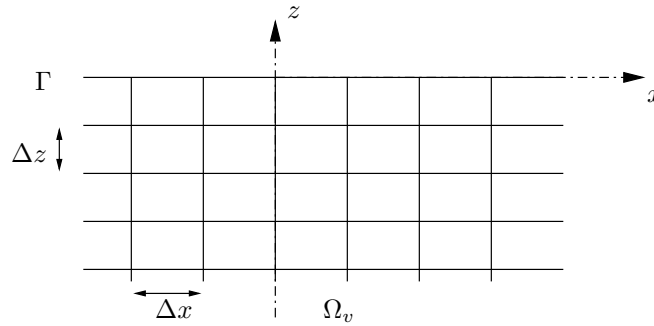


FIG. 8.1 – Maillage du domaine.

On note  $P_k(x)$  l'ensemble des polynômes de la variable  $x$  de degrés  $k$ . On pose  $\mathcal{Q}_{k,\ell} \equiv P_k(x) \otimes P_\ell(z)$ . Les espaces d'approximation pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  seront construits en utilisant les éléments finis (de Nédelec) conformes de plus bas degrés. On pose en effet

$$V_h(\Omega_v) = \left\{ \psi = (\psi_x, \psi_y, \psi_z) \in H(\text{rot}, \Omega_v) / \psi|_K \in \mathcal{Q}_{0,1} \times \mathcal{Q}_{1,1} \times \mathcal{Q}_{1,0}, \forall K \in \mathcal{M}(\Omega_v) \right\}$$

$$X_h(\Omega_v) = \left\{ \phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z) \in H(\text{div}, \Omega_v) / \phi|_K \in \mathcal{Q}_{1,0} \times \mathcal{Q}_{0,0} \times \mathcal{Q}_{0,1}, \forall K \in \mathcal{M}(\Omega_v) \right\}.$$

Nous aurons donc par maille, les degrés de libertés

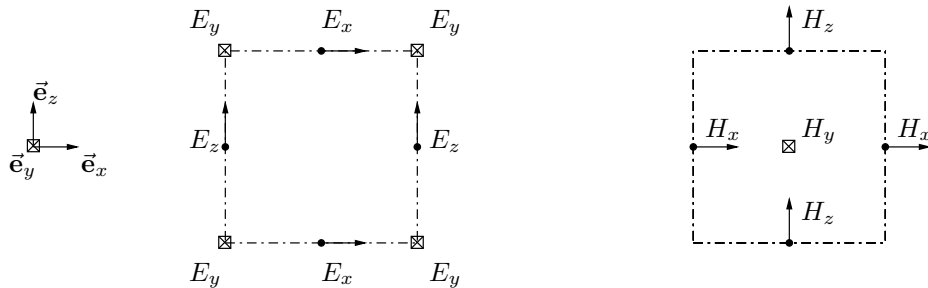


FIG. 8.2 – Degrés de libertés par mailles surfaciques.

Par définition, le vecteur  $\varphi$  est de la forme :  $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, 0)$ . Par ailleurs, suivant la remarque 5.9,

$$\text{div}_\Gamma \varphi = \partial_x \varphi_x \quad \text{et} \quad \text{rot}_\Gamma \varphi = \text{div}_\Gamma (\varphi \times \vec{e}_z) = \partial_x \varphi_y$$

d'où l'identification  $H(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) = L^2(\Gamma) \times H^1(\Gamma) \times \{0\}$ . Le choix de l'espace d'approximation de plus bas degré qui s'impose est donc

$$Y_h(\Gamma) = \left\{ \varphi = (\varphi_x, \varphi_y, 0) \in H(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) / \varphi|_K \in P_0(x) \times P_1(x) \times \{0\}, \forall K \in \mathcal{M}(\Gamma) \right\}.$$

Le choix des espaces  $V_h$  et  $Y_h$  nous donne la répartition suivante des degrés de libertés par mailles linéiques sur la frontière  $\Gamma$  :

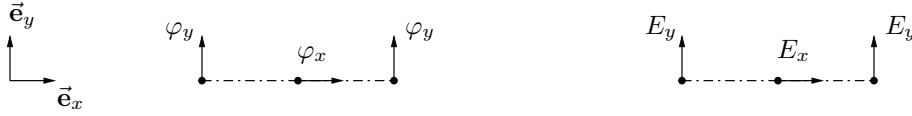


FIG. 8.3 – Degrés de libertés par mailles linéiques.

Remarquons que pour  $\mathbf{E}_h \in V_h(\Omega_v)$ , sa trace  $\gamma_\tau \mathbf{E}_h$  est en fait dans  $H(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \subset \mathcal{T}L^2(\Gamma)$ . Ainsi, les produits de dualités figurant dans les membre de droite de (8.8)(ii) et (8.8)(iii), ne sont autres que des produits scalaires de fonctions dans  $\mathcal{T}L^2(\Gamma)$ .

**Condensation de masse et schéma de Yee :** De manière analogue au cas 1D, afin d'aboutir à des matrices de masse diagonales nous utilisons systématiquement la formule de quadrature (7.4) pour calculer le produit scalaire de deux éléments de  $P_1(x)$  ou de  $P_1(z)$ . En appliquant cette méthode (condensation de masse), nous retrouvons les équations du schéma de Yee classique à l'intérieur du domaine  $\Omega_v$ . Considérons en effet les coordonnées des noeuds du maillage,

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x \quad \text{et} \quad x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})\Delta x \quad \text{pour tout entier relatif } i, \\ z_k &= k\Delta z \quad \text{et} \quad z_{k-\frac{1}{2}} = (k + \frac{1}{2})\Delta z \quad \text{pour tout entier relatif } k \leq 0, \end{aligned}$$

et notons par  $u_{(i+\frac{1}{2}),k(-\frac{1}{2})}$  la valeur en  $(x_{i+\frac{1}{2}}, z_{k(-\frac{1}{2})})$  pour toute fonction  $u$  définie sur  $\bar{\Omega}_v$ . Les équations (8.8)(i) et (8.8)(ii) s'écrivent (en appliquant la condensation de masse), pour  $k \leq -1$  et pour tout  $i$ ,

$$(8.9) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \frac{d}{dt} E_{x(i-\frac{1}{2},k)} + \frac{H_{y(i-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} - H_{y(i-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}}{\Delta z} = 0 \\ \varepsilon_0 \frac{d}{dt} E_{z(i,k-\frac{1}{2})} - \frac{H_{y(i+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})} - H_{y(i-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})}}{\Delta x} = 0 \\ \mu_0 \frac{d}{dt} H_{y(i-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})} + \frac{E_{x(i-\frac{1}{2},k)} - E_{x(i-\frac{1}{2},k-1)}}{\Delta z} - \frac{E_{z(i,k-\frac{1}{2})} - E_{z(i-1,k-\frac{1}{2})}}{\Delta x} = 0 \end{cases}$$

$$(8.10) \quad \begin{cases} \mu_0 \frac{d}{dt} H_{x(i,k-\frac{1}{2})} - \frac{E_{y(i,k)} - E_{y(i,k-1)}}{\Delta z} = 0 \\ \mu_0 \frac{d}{dt} H_{z(i-\frac{1}{2},k)} + \frac{E_{y(i,k)} - E_{y(i-1,k)}}{\Delta x} = 0 \\ \varepsilon_0 \frac{d}{dt} E_{y(i,k)} - \frac{H_{x(i,k+\frac{1}{2})} - H_{x(i,k-\frac{1}{2})}}{\Delta z} + \frac{H_{z(i+\frac{1}{2},k)} - H_{z(i-\frac{1}{2},k)}}{\Delta x} = 0 \end{cases}$$

n° D'autre part si on note par  $u_{(i+\frac{1}{2})}$  la valeur au point  $x_{i+\frac{1}{2}}$  de toute fonction  $u$  définie sur  $\Gamma$ , alors la projection de l'équation (8.8)(ii) sur le bord  $\Gamma$  nous donne, pour tout  $i$ ,

$$(8.11) \quad \varepsilon_0 \frac{d}{dt} E_{x(i-\frac{1}{2},0)} + \frac{2}{\Delta z} \left( \frac{\varphi_{y(i)} + \varphi_{y(i-1)}}{2} - H_{y(i-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} \right) = 0$$

$$(8.12) \quad \varepsilon_0 \frac{d}{dt} E_{y(i,0)} + \frac{H_{z(i+\frac{1}{2},0)} - H_{z(i-\frac{1}{2},0)}}{\Delta x} - \frac{2}{\Delta z} \left( \frac{\varphi_{x(i+\frac{1}{2})} + \varphi_{x(i-\frac{1}{2})}}{2} - H_{x(i,-\frac{1}{2})} \right) = 0$$

n° La condition aux limites (8.8)(iii) nous donne dans le cas simplifié où  $\chi_1 = 1/\varepsilon_0$ , pour tout  $i$ ,

$$(8.13) \quad \eta\mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \varphi_{y(i)} - \frac{\eta}{\varepsilon_0} \frac{\varphi_{y(i+1)} - 2\varphi_{y(i)} + \varphi_{y(i-1)}}{\Delta x^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (E_{x(i+\frac{1}{2},0)} + E_{x(i-\frac{1}{2},0)}) \right)$$

$$(8.14) \quad \eta\mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \varphi_{x(i-\frac{1}{2})} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (E_{y(i,0)} + E_{y(i-1,0)}) \right)$$

On observe bien le découplage qui existe entre le système d'équations (8.9)-(8.11)-(8.13) relatif à la polarisation électrique transverse et le système d'équations (8.9)-(8.11)-(8.13) relatif à la polarisation magnétique transverse. Bien entendu, ce découplage tombe en défaut lorsqu'on s'intéressera au couplage avec la loi non linéaire du matériau ferromagnétique.

### 8.2.5 Exemple d'espaces de discrétisation en 3D

L'exemple que l'on va décrire n'a pas été programmé, mais il constitue le prolongement 3D naturel de la discrétisation 2D exposée au paragraphe précédent.

Le domaine  $\Omega_v$  est maintenant  $\Omega_v = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 / z < 0\}$  et la frontière  $\Gamma$  désigne par conséquent la surface  $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / z = 0\}$ . La normale  $\mathbf{n}$  demeure égale au vecteur  $\vec{\mathbf{e}}_z$ .

Posons  $\mathcal{Q}_{k,\ell,m} \equiv P_k(x) \otimes P_\ell(y) \otimes P_m(z)$ . On considère  $\mathcal{M}(\Omega_v)$  un maillage régulier de  $\Omega_v$  de pas  $\Delta x$  suivant  $\vec{\mathbf{e}}_x$ ,  $\Delta y$  suivant  $\vec{\mathbf{e}}_y$  et  $\Delta z$  suivant  $\vec{\mathbf{e}}_z$ . On note  $\mathcal{M}(\Gamma)$  la trace du maillage  $\mathcal{M}(\Omega_v)$  sur la frontière  $\Gamma$ . Les espaces d'approximation de plus bas degrés pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont en dimension 3,

$$\begin{aligned} V_h(\Omega_v) &= \left\{ \psi \in H(\text{rot}, \Omega_v) / \psi|_K \in \mathcal{Q}_{0,1,1} \times \mathcal{Q}_{1,0,1} \times \mathcal{Q}_{1,1,0}, \forall K \in \mathcal{M}(\Omega_v) \right\} \\ X_h(\Omega_v) &= \left\{ \phi \in H(\text{div}, \Omega_v) / \phi|_K \in \mathcal{Q}_{1,0,0} \times \mathcal{Q}_{0,1,0} \times \mathcal{Q}_{0,0,1}, \forall K \in \mathcal{M}(\Omega_v) \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\varphi$  est toujours de la forme :  $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, 0)$ , mais

$$\text{rot}_\Gamma \varphi = \text{div}_\Gamma (\varphi \times \vec{\mathbf{e}}_z) = \partial_x \varphi_y - \partial_y \varphi_x$$

L'espace d'approximation adéquat s'écrit donc

$$Y_h(\Gamma) = \left\{ \varphi \in H(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) / \varphi|_K \in \mathcal{Q}_{0,1} \times \mathcal{Q}_{1,0} \times \{0\}, \forall K \in \mathcal{M}(\Gamma) \right\}.$$

Cela nous donne la répartition suivante des degrés de libertés par maille surfacique (pour  $\varphi_h$  et  $\mathbf{E}_h$ )

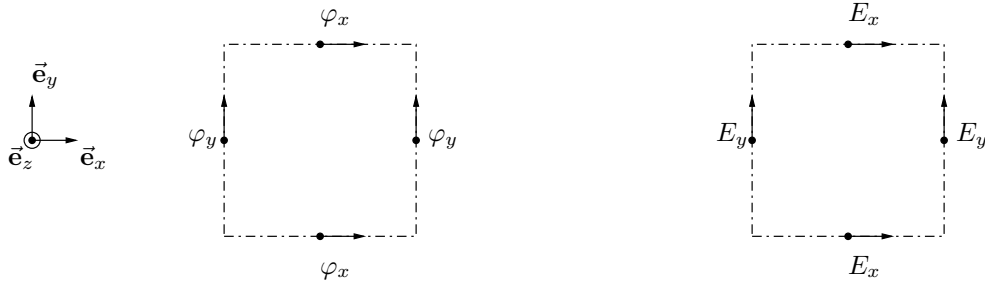


FIG. 8.4 – Degrés de libertés par mailles surfaciques.

### 8.2.6 Semi discrétisation temporelle

De manière classique (schéma “saute mouton”), le champ électrique sera discrétisé aux instants entiers et le champ magnétique aux instants demi entiers. Le renseignement majeur de l’étude 1D nous indique de discrétiser la variable  $\varphi_h$  aux même instants entiers que le champ électrique. On note  $\Delta t$  le pas de temps et on pose  $t^n = n\Delta t$ ,  $t^{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$  pour  $n$  entier. On considère,

$$\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \approx \mathbf{H}_h(t^{n+\frac{1}{2}}), \quad \mathbf{E}_h^n \approx \mathbf{E}_h(t^n) \quad \text{et} \quad \varphi_h^n \approx \varphi_h(t^n).$$

Le schéma centré en temps que nous proposons s’écrit : pour tout  $(\mathbf{E}'_h, \mathbf{H}'_h, \varphi'_h) \in X_h(\Omega_v) \times V_h(\Omega_v) \times Y_h(\Gamma)$ ,

$$(8.15) \quad \begin{cases} (i) & \frac{\mu_0}{\Delta t} \left( \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \mid \mathbf{H}'_h \right) + (\text{rot } \mathbf{E}_h^n \mid \mathbf{H}'_h) = 0, \\ (ii) & \frac{\varepsilon_0}{\Delta t} \left( \mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n \mid \mathbf{E}'_h \right) - \left( \text{rot } \mathbf{E}'_h \mid \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) = \left\langle \gamma_\tau \mathbf{E}'_h, \frac{1}{2}(\varphi_h^{n+1} + \varphi_h^n) \right\rangle, \\ (iii) & \frac{\eta \mu_0}{\Delta t^2} \left( \varphi_h^{n+1} - 2\varphi_h^n + \varphi_h^{n-1} \mid \varphi'_h \right)_\Gamma + \eta \left( \chi_1 \text{rot}_\Gamma \varphi_h^n \mid \text{rot}_\Gamma \varphi'_h \right)_\Gamma \\ & \qquad \qquad \qquad = -\frac{1}{2\Delta t} \left\langle \gamma_\tau (\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^{n-1}), \varphi'_h \right\rangle. \end{cases}$$

auquel nous rajoutons les conditions initiales

$$(\mathbf{E}_{0h}^0, \frac{1}{2}(\mathbf{H}_h^{\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{-\frac{1}{2}})) = (\mathbf{E}_{0h}, \mathbf{H}_{0h}) \quad \text{et} \quad \varphi_h^0 = \varphi_h^1 = 0,$$

où  $(\mathbf{E}_{0h}, \mathbf{H}_{0h})$  sont les projetés  $L^2$  de  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$  sur respectivement  $V_h$  et  $X_h$ . Ce schéma est conservatif comme le prouve le théorème suivant :

**Théorème 8.2** *On suppose que le support de  $(\mathbf{E}_{0h}, \mathbf{H}_{0h})$  n’intersecte pas le bord  $\Gamma$  et on considère l’énergie totale :  $\mathcal{E}_T(n) = \mathcal{E}_v(n) + \eta \mathcal{E}_\Gamma(n)$  avec,*

$$(8.16) \quad \mathcal{E}_v(n) = \frac{1}{2} \left( \mu_0 \left( \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \mid \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) + \varepsilon_0 \left( \mathbf{E}_h^n \mid \mathbf{E}_h^n \right) \right),$$

$$(8.17) \quad \mathcal{E}_\Gamma(n) = \frac{1}{2} \left( \mu_0 \left( \varphi_h^n \mid \varphi_h^n \right)_\Gamma + \left( \chi_1 \text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n+\frac{1}{2}} \mid \text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n-\frac{1}{2}} \right)_\Gamma \right),$$

où on a posé par définition,

$$\overline{\varphi}_h^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t \sum_{k=0}^n \varphi_h^k.$$

Alors on a pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mathcal{E}_T(n+1) = \mathcal{E}_T(n) = \mathcal{E}_T(0).$$

*Preuve.* La preuve de cette identité s'inspire de l'étude de stabilité du problème continu (théorème 4.1). Prenons  $\mathbf{E}'_h = \mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n$  dans (8.15)(ii). Il en résulte

$$(8.18) \quad \begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{\Delta t} \left( (\mathbf{E}_h^{n+1} | \mathbf{E}_h^{n+1}) - (\mathbf{E}_h^n | \mathbf{E}_h^n) \right) &= \left( \text{rot}(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n) | \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \left\langle \gamma_\tau(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n), \frac{1}{2}(\varphi^{n+1} + \varphi^n) \right\rangle. \end{aligned}$$

Faisons ensuite la somme des deux équations, obtenues en écrivant (8.15)(i) aux instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . En prenant dans cette somme  $\mathbf{H}'_h = \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}$ , nous déduisons

$$(8.19) \quad \frac{\mu_0}{\Delta t} \left( (\mathbf{H}_h^{n+\frac{3}{2}} | \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}) - (\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} | \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right) = - \left( \text{rot}(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n) | \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \right).$$

La demi somme de (8.18) et (8.19) montre que

$$(8.20) \quad \frac{\mathcal{E}_v(n+1) - \mathcal{E}_v(n)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left\langle \gamma_\tau(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n), \frac{1}{2}(\varphi^{n+1} + \varphi^n) \right\rangle.$$

Intégrons maintenant en temps (8.15)(iii) entre 0 et  $t^{n+\frac{1}{2}}$  : dans le cas discret, cela revient à lui appliquer l'opérateur :  $\Delta t \sum_{k=1}^{k=n}$ . En remarquant que

$$\sum_{k=1}^n \gamma_\tau(\mathbf{E}_h^{k+1} - \mathbf{E}_h^{k-1}) = \gamma_\tau(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n) - \gamma_\tau(\mathbf{E}_h^1 + \mathbf{E}_h^0) = \gamma_\tau(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n)$$

du fait que le support de  $\mathbf{E}_{0h}$  et  $\mathbf{H}_{0h}$  ne touche pas le bord, et que

$$\sum_{k=1}^n \varphi_h^{k+1} - 2\varphi_h^k + \varphi_h^{k-1} = (\varphi_h^{n+1} - \varphi_h^n) - (\varphi_h^1 - \varphi_h^0) = (\varphi_h^{n+1} - \varphi_h^n)$$

par les conditions initiales, l'équation (8.15)(iii) intégrée en temps s'écrit

$$(8.21) \quad \frac{\eta\mu_0}{\Delta t} \left( \varphi_h^{n+1} - \varphi_h^n | \varphi'_h \right)_\Gamma + \eta \left( \chi_{1\text{rot}_\Gamma} \overline{\varphi}_h^{n+\frac{1}{2}} | \text{rot}_\Gamma \varphi'_h \right)_\Gamma = -\frac{1}{2} \left\langle \gamma_\tau(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n), \varphi'_h \right\rangle.$$

Prenons dans cette identité  $\varphi'_h = \frac{1}{2}(\varphi_h^{n+1} + \varphi_h^n)$ . En appliquant en plus la formule de sommation

$$\frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}) \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) - \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) \right)$$

au terme  $\left( \chi_{1\text{rot}_\Gamma} \overline{\varphi}_h^{n+\frac{1}{2}} | \frac{1}{2}\text{rot}_\Gamma(\varphi_h^{n+1} + \varphi_h^n) \right)_\Gamma$ , l'équation (8.21) montre que

$$(8.22) \quad \frac{\mathcal{E}_\Gamma(n+1) - \mathcal{E}_\Gamma(n)}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left\langle \gamma_\tau(\mathbf{E}_h^{n+1} + \mathbf{E}_h^n), \frac{1}{2}(\varphi^{n+1} + \varphi^n) \right\rangle.$$

On conclut immédiatement à partir de (8.22) et (8.20).  $\square$

### 8.2.7 Condition de stabilité du schéma

Après avoir obtenu la conservation de l'énergie, l'obtention de la condition de stabilité suit le même principe expliqué pour la cas 1D à savoir : chercher sous quelle condition cette énergie domine uniformément en  $n$  la norme  $L^2$  de la solution discrète. On se place dans le cas des discrétisations 2D et 3D introduites dans les sections 8.2.4 et 8.2.4. Pour simplifier on prend  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$ , et  $\chi_1 = 1/\varepsilon_0$ . Nous montrons alors :

**Théorème 8.3** *Sous l'hypothèse du théorème 8.2, le schéma numérique (8.15) est stable sous la condition CFL classique*

$$(8.23) \quad \Delta t^2 \leq \frac{\sqrt{N}}{N} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} h$$

où  $N$  désigne la dimension d'espace.

*Preuve.* Notons par,  $\|\cdot\|$  (resp.  $\|\cdot\|_\Gamma$ ) la norme associée au produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$  (resp.  $(\cdot|\cdot)_\Gamma$ ). Pour la partie Maxwell, nous utilisons la technique classique déjà exposée dans le cas 1D (cf. section 7.4.2). On écrit que

$$(8.24) \quad \left( \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} | \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \right) = \left\| \frac{1}{2} (\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|^2 - \frac{\Delta t^2}{4} \left\| \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|^2.$$

Ensuite, à partir de la première équation de (8.15)(i) et du choix des espaces  $V_h(\Omega_v)$  et  $X_h(\Omega_v)$ , nous avons l'inégalité classique

$$(8.25) \quad \left\| \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|^2 \leq \frac{4N}{(\mu_0 h)^2} \|\mathbf{E}_h^n\|^2$$

Les deux identités (8.24) et (8.25) montrent

$$(8.26) \quad \mathcal{E}_v(n) \geq \frac{\mu_0}{2} \left\| \frac{1}{2} (\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \left( 1 - \frac{N\Delta t}{\varepsilon_0 \mu_0 h^2} \right) \|\mathbf{E}_h^n\|^2$$

Pour les termes de bord, nous utilisons une technique similaire en écrivant

$$(8.27) \quad \left( \text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n+\frac{1}{2}} | \text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n-\frac{1}{2}} \right)_\Gamma = \left\| \frac{1}{2} (\text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|_\Gamma^2 - \left\| \frac{1}{2} (\text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n+\frac{1}{2}} - \text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|_\Gamma^2$$

et en constatant ensuite,

$$(8.28) \quad \left\| \frac{1}{2} (\text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n+\frac{1}{2}} - \text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|_\Gamma^2 = \left\| \frac{\Delta t}{2} \text{rot}_\Gamma \varphi^n \right\|_\Gamma^2 \leq \frac{(N-1)\Delta t^2}{h^2} \|\varphi^n\|_\Gamma^2.$$

La dernière inégalité est due au choix de l'espace  $Y_h(\Gamma)$ . Les identités (8.27) et (8.28) montrent que

$$(8.29) \quad \mathcal{E}_\Gamma(n) \geq \frac{1}{2\varepsilon_0} \left\| \frac{1}{2} (\text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n+\frac{1}{2}} + \text{rot}_\Gamma \overline{\varphi}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|_\Gamma^2 + \frac{\mu_0}{2} \left( 1 - \frac{(N-1)\Delta t^2}{\varepsilon_0 \mu_0 h^2} \right) \|\varphi^n\|_\Gamma^2$$

Les deux identités (8.26) et (8.29) montrent bien que sous la condition (8.23), il existe une constante  $C$  indépendante de  $n$  telle que

$$(8.30) \quad \mathcal{E}_T(0) = \mathcal{E}_T(n) \geq C \left( \left\| \frac{1}{2} (\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}) \right\|^2 + \|\mathbf{E}_h^n\|^2 + \|\varphi^n\|_\Gamma^2 \right)$$

ce qui signifie la stabilité  $L^2$  du schéma . □

## 8.3 Etude du cas non linéaire : CLE d'ordre 2

### 8.3.1 Formulation variationnelle et discrétisation spatiale

#### Rappel des équations

Dans le cas de la CLE d'ordre 2, la loi non linéaire admet la même structure que dans le cas 1D. Par conséquent, les discrétisations numériques dans les deux cas sont très voisines. Nous allons considérer la loi ferromagnétique sous sa forme (1.17) avec un champ d'anisotropie uniaxial comme exemple. La condition (5.93) s'écrit

$$(8.31) \quad \partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathcal{B}(\boldsymbol{\varphi}) - \eta \mu_0 \int_0^1 \partial_{tt} \Pi_{\parallel} \mathbf{M} \, d\nu \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+$$

où  $\mathcal{B}$  est donné par (8.1) sans les termes de courbures et avec  $\mathbf{M}(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu, t)$  vérifiant pour  $(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu, t) \in \Gamma \times ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$ ,

$$(8.32) \quad \partial_t \mathbf{M} = |\gamma| \mathbf{H}_{\text{T}} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M} \times \partial_t \mathbf{M},$$

où  $\mathbf{H}_{\text{T}}(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu, t)$  est défini pour  $(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu, t) \in \Gamma \times ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$ , par

$$(8.33) \quad \mathbf{H}_{\text{T}} = \boldsymbol{\varphi} + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{H}_s + K_a(\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{p}$$

Les équations du problème sont formées par le système (8.3) où la condition au bord est remplacée par (8.31)-(8.32)-(8.33).

#### Formulation variationnelle

L'espace fonctionnel adapté aux solutions de (8.32)-(8.33) est  $L^2(\Gamma \times ]0, 1[)$ . Par conséquent La formulation variationnelle s'écrit :

Chercher  $(\mathbf{H}(t), \mathbf{E}(t), \boldsymbol{\varphi}(t)) \in H(\text{div}, \Omega_v) \times H(\text{rot}, \Omega_v) \times H(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$  et  $\mathbf{M}(t) \in L^2(\Gamma \times ]0, 1[)^3$  tels que, pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $(\mathbf{H}', \mathbf{E}', \boldsymbol{\varphi}', \mathbf{M}') \in H(\text{div}, \Omega_v) \times H(\text{rot}, \Omega_v) \times H(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma) \times L^2(\Gamma \times ]0, 1[)^3$ ,

$$(8.34) \quad \mathbf{E}(t) \text{ et } \mathbf{H}(t) \text{ vérifient (8.7)(i) et (8.7)(ii),}$$

$$(8.35) \quad \eta \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} (\boldsymbol{\varphi}(t) | \boldsymbol{\varphi}')_{\Gamma} + \eta (\chi_1 \text{rot}_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}(t) | \text{rot}_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}')_{\Gamma} = -\frac{d}{dt} \langle \gamma_{\tau} \mathbf{E}(t), \boldsymbol{\varphi}' \rangle - \eta \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} (\overline{\mathbf{M}}(t) | \boldsymbol{\varphi}')_{\Gamma},$$

où  $\overline{\mathbf{M}}(t) = \int_0^1 \mathbf{M}(t) \, d\nu$ ,

$$(8.36) \quad \int_{\Gamma} \int_0^1 \partial_t \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' \, d\nu d\mathbf{x}_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \int_0^1 \left( |\gamma| \mathbf{H}_{\text{T}} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M} \times \partial_t \mathbf{M} \right) \cdot \mathbf{M}' \, d\nu d\mathbf{x}_{\Gamma}$$

où  $\mathbf{H}_{\text{T}}(t) \in L^2(\Gamma \times ]0, 1[)^3$  et vérifie

$$(8.37) \quad \int_{\Gamma} \int_0^1 \mathbf{H}_{\text{T}} \cdot \mathbf{M}' \, d\nu d\mathbf{x}_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \int_0^1 (\boldsymbol{\varphi} + \Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{H}_s + K_a(\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{p}) \cdot \mathbf{M}' \, d\nu d\mathbf{x}_{\Gamma}$$



### Discrétisation spatiale

Considérons les maillages réguliers  $\mathcal{M}(\Omega_v)$  et  $\mathcal{M}(\Gamma)$  du cas linéaire. Nous avons besoin de mailler en plus le domaine ferromagnétique adimensionné. La stratégie de maillage qui admet son prolongement naturel au cas courbe consiste à associer à chaque maille  $K$  du maillage  $\mathcal{M}(\Gamma)$  un maillage  $\mathcal{M}_K(0, 1)$  de l'intervalle  $[0, 1]$ . Le maillage  $\mathcal{M}(\Gamma \times [0, 1])$  du domaine  $\Gamma \times [0, 1]$  s'écrit donc

$$(8.38) \quad \mathcal{M}(\Gamma \times [0, 1]) = \{K \times I_K ; K \in \mathcal{M}(\Gamma) ; I_K \in \mathcal{M}_K(0, 1)\}$$

Lorsque  $\Gamma$  n'est pas courbe et lorsqu'on utilise le même pas de maillage  $\Delta\xi$  pour tous les maillages  $\mathcal{M}_K(0, 1)$ , on retrouve un maillage régulier classique de la couronne  $\Gamma \times [0, 1]$ . La difficulté du cas courbe étant que le domaine  $\Gamma \times [0, 1]$  n'est pas forcément une variété de  $\mathbf{R}^2$  en 2D ou de  $\mathbf{R}^3$  en 3D. L'espace d'approximation naturel  $Z_h(\Gamma \times ]0, 1[)$  de  $L^2(\Gamma \times ]0, 1[)^3$  construit sur le maillage  $\mathcal{M}(\Gamma \times [0, 1])$  s'écrit donc

$$Z_h(\Gamma \times ]0, 1[) = \left\{ \mathbf{M}' \in L^2(\Gamma \times ]0, 1[)^3 / \mathbf{M}'_{|K'} \text{ est un vecteur constant } \forall K' \in \mathcal{M}(\Gamma \times [0, 1]) \right\}$$

La formulation variationnelle du problème discret s'obtient en remplaçant dans les équations (8.34)-(8.35)-(8.36)-(8.37), les espaces  $H(\text{div}, \Omega_v)$ ,  $H(\text{rot}, \Omega_v)$ ,  $H(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  et  $L^2(\Gamma \times ]0, 1[)^3$  par respectivement  $X_h(\Omega_v)$ ,  $V_h(\Omega_v)$ ,  $Y_h(\Gamma)$  et  $Z_h(\Gamma)$ . On note  $\mathbf{E}_h$ ,  $\mathbf{H}_h$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_h$ ,  $\mathbf{M}_h$ ,  $\mathbf{H}_{\text{T}h}$  les champs discrets associés respectivement à  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}_{\text{T}}$ .

### Ecriture explicite des équations en 2D

Il s'agit de montrer comment se modifient les équations (8.13), (8.14) dans cas non linéaire. Pour  $i$  entier relatif, on note pour tout  $\mathbf{M}'_h \in Z_h(\Gamma \times ]0, 1[)$

$$\mathbf{M}'_{(i+\frac{1}{2})}$$
 la restriction de  $\mathbf{M}'_h$  au rectangle  $]i\Delta x, (i+1)\Delta x[ \times ]0, 1[$ .

$\mathbf{M}'_{(i+\frac{1}{2})}$  s'identifie également avec une fonction de  $L^2(0, 1)^3$  constante par maille. On note  $M'_{x(i+\frac{1}{2})}$ ,  $M'_{y(i+\frac{1}{2})}$  et  $M'_{z(i+\frac{1}{2})}$  les composantes de  $\mathbf{M}'_{(i+\frac{1}{2})}$  dans  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

Pour simplifier l'écriture des équations nous allons supposer les caractéristiques  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{H}_s$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\alpha$  et  $K_a$  constantes dans la couche ferromagnétique. Dans le cas non constant il faudra remplacer ces champs par leurs approximations adéquates. Nous prenons également  $\chi_1 = 1/\varepsilon_0$ .

L'équation (8.35) s'écrit, (avec condensation de masse)

$$(8.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \varphi_{y(i)} - \frac{\eta}{\varepsilon_0} \frac{\varphi_{y(i+1)} - 2\varphi_{y(i)} + \varphi_{y(i-1)}}{\Delta x^2} \\ \quad = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (E_{x(i+\frac{1}{2}, 0)} + E_{x(i-\frac{1}{2}, 0)}) \right) - \eta\mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} (\overline{M}_{y(i+\frac{1}{2})} + \overline{M}_{y(i-\frac{1}{2})}) \right) \\ \eta\mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \varphi_{x(i-\frac{1}{2})} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (E_{y(i, 0)} + E_{y(i-1, 0)}) \right) - \eta\mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \overline{M}_{x(i-\frac{1}{2})}. \end{array} \right.$$

où  $\overline{M}_{(i+\frac{1}{2})} = \int_0^1 \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})} d\nu$ . L'équation (8.36) nous donne, pour tout  $i$ ,

$$(8.40) \quad \partial_t \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})} = |\gamma| \mathbf{H}_{\text{T}(i+\frac{1}{2})} \times \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})} \times \partial_t \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})}, \quad \text{dans } L^2(0, 1)^3$$

avec, pour tout  $i$ ,

$$(8.41) \quad \begin{cases} H_{Tx(i+\frac{1}{2})} = \varphi_{x(i+\frac{1}{2})} + H_{s,x} + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})}) p_x \\ H_{Ty(i+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} (\varphi_{y(i+1)} + \varphi_{y(i)}) + H_{s,y} + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})}) p_y \\ H_{Tz(i+\frac{1}{2})} = M_{0,z} - M_{z(i+\frac{1}{2})} + H_{s,z} + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})}) p_z \end{cases}$$

Les équations du problème 2D discrétisé en espace (en utilisant la condensation de masse) sont : (8.9), (8.10), (8.11), (8.12), (8.39), (8.40) et (8.41).

### 8.3.2 Schéma en temps et stabilité

La technique retenue du cas 1D, qui s'adapte à la preuve de stabilité, consiste à discrétiser le moment magnétique  $\mathbf{M}_h$  au mêmes instants entiers que  $\varphi_h$ ,  $\longrightarrow \mathbf{M}_h^n$ . La discrétisation des équations de Maxwell à l'intérieur du domaine ferromagnétique reste inchangée : équations (8.15)(i) et (8.15)(ii). La condition au limite (8.15)(iii) devient

$$(8.42) \quad \begin{aligned} & \frac{\eta\mu_0}{\Delta t^2} (\varphi_h^{n+1} - 2\varphi_h^n + \varphi_h^{n-1} | \varphi_h')_{\Gamma} + \eta (\chi_1 \text{rot}_{\Gamma} \varphi_h^n | \text{rot}_{\Gamma} \varphi_h')_{\Gamma} \\ & = -\frac{1}{2\Delta t} \langle \gamma_{\tau} (\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^{n-1}), \varphi_h' \rangle - \frac{\eta\mu_0}{\Delta t^2} (\overline{\mathbf{M}}_h^{n+1} - 2\overline{\mathbf{M}}_h^n + \overline{\mathbf{M}}_h^{n-1} | \varphi_h')_{\Gamma} \end{aligned}$$

pour tout  $\varphi_h' \in Y_h(\Gamma)$ , où on a posé  $\overline{\mathbf{M}}_h^n = \int_0^1 \mathbf{M}_h^n d\nu$ . Elle correspond à la discrétisation temporelle de (8.35). Posons

$$\mathbf{M}_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{M}_h^{n+1} + \mathbf{M}_h^n}{2} \quad \text{et} \quad \varphi_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi_h^{n+1} + \varphi_h^n}{2}.$$

La discrétisation de la loi non linéaire (8.36) s'effectue de la même manière que dans le cas 1D,

$$(8.43) \quad \frac{\mathbf{M}_h^{n+1} - \mathbf{M}_h^n}{\Delta t} = |\gamma| \mathbf{H}_{Th}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{M}_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M}_h^{n+\frac{1}{2}} \times \frac{\mathbf{M}_h^{n+1} - \mathbf{M}_h^n}{\Delta t},$$

l'égalité étant prise au sens des fonctions de  $Z_h(\Gamma \times ]0, 1])$  (l'équation différentielle conserve cet espace qui est stable par produit). Le champ  $\mathbf{H}_{Th}^{n+\frac{1}{2}}$  est défini sous forme variationnelle par,

$$(8.44) \quad \begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left( \int_0^1 \mathbf{H}_{Th} \cdot \mathbf{M}_h' d\nu \right) dx_{\Gamma} = (\varphi^{n+\frac{1}{2}} | \overline{\mathbf{M}}_h')_{\Gamma} \\ & + \int_{\Gamma} \left( \int_0^1 (\Pi_{\perp}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_h^{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_h^{n+\frac{1}{2}}) \mathbf{p}) \cdot \mathbf{M}_h' d\nu \right) dx_{\Gamma}, \end{aligned}$$

pour toute fonction test  $\mathbf{M}_h' \in Z_h(\Gamma \times ]0, 1])$  et en notant  $\overline{\mathbf{M}}_h' = \int_0^1 \mathbf{M}_h' d\nu$ .

L'intérêt d'écrire la discrétisation en temps sous forme variationnelle est de préparer le terrain pour démontrer la stabilité.

**Théorème 8.4** *Sous l'hypothèse du théorème 8.2, le schéma numérique constitué des équations (8.15)(i), (8.15)(ii), (8.42), (8.43) et (8.44) est  $L^2$  stable sous la condition CFL (8.23).*

*Preuve.* La preuve de ce théorème constitue en quelques sortes une compilation du travail fait dans le cas linéaire (théorèmes 8.3 et 8.2) et dans le cas 1D (théorème 7.4). Nous n'indiquons par conséquent que les grandes lignes de la démonstration. La première propriété de stabilité est bien entendue la conservation du module de  $\mathbf{M}_h^n$ , pour tout  $n$ ,

$$(8.45) \quad |\mathbf{M}_h^n| = |\mathbf{M}_0| \quad p.p. \text{ dans } \Gamma \times ]0, 1[.$$

Nous montrons en second lieu la décroissance de l'énergie totale  $\mathcal{E}_T(n)$  définie par

$$\mathcal{E}_T(n) = \mathcal{E}_v(n) + \eta \mathcal{E}_\Gamma(n) + \eta \mathcal{E}_f(n)$$

où  $\mathcal{E}_v(n)$  et  $\mathcal{E}_\Gamma(n)$  sont respectivement données par (8.16) et (8.17) et où

$$\mathcal{E}_f(n) = \frac{\mu_0}{2} \int_\Gamma \left( \int_0^1 |\mathbf{H}_s - \mathbf{M}_k^n|^2 + K_a |(\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_k^n) \mathbf{p} - \mathbf{M}_k^n|^2 + |\Pi_\perp(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_k^n)|^2 \, d\nu \right) d\mathbf{x}_\Gamma.$$

Plus précisément, nous montrons

$$(8.46) \quad \frac{\mathcal{E}_T(n+1) - \mathcal{E}_T(n)}{\Delta t} = -\frac{\eta\mu_0}{|\gamma|} \int_\Gamma \left( \int_0^1 \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \left| \frac{\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n}{\Delta t} \right|^2 \, d\nu \right) d\mathbf{x}_\Gamma.$$

En effet, en suivant la même démarche que la preuve du théorème 8.2, on montre que

$$(8.47) \quad \frac{\mathcal{E}_v(n+1) - \mathcal{E}_v(n)}{\Delta t} + \eta \frac{\mathcal{E}_\Gamma(n+1) - \mathcal{E}_\Gamma(n)}{\Delta t} = -\frac{\eta\mu_0}{\Delta t} \left( \mathbf{M}_h^{n+1} - \mathbf{M}_h^n \mid \varphi_h^{n+\frac{1}{2}} \right)_\Gamma,$$

D'autre part, en prenant  $\mathbf{M}'_h = (\mathbf{M}_h^{n+1} - \mathbf{M}_h^n)$  dans (8.44), nous déduisons, en utilisant (8.45),

$$(8.48) \quad \begin{aligned} & \mu_0 \left( \overline{\mathbf{M}}_h^{n+1} - \overline{\mathbf{M}}_h^n \mid \varphi_h^{n+\frac{1}{2}} \right)_\Gamma = \\ & (\mathcal{E}_f(n+1) - \mathcal{E}_f(n)) + \mu_0 \int_\Gamma \left( \int_0^1 (\mathbf{M}_h^{n+1} - \mathbf{M}_h^n) \cdot \mathbf{H}_{\text{Th}}^{n+\frac{1}{2}} \, d\nu \right) d\mathbf{x}_\Gamma. \end{aligned}$$

Pour conclure, nous utilisons la propriété (locale) de l'équation (8.43), maintes fois utilisée dans ce travail,

$$(8.49) \quad (\mathbf{M}_h^{n+1} - \mathbf{M}_h^n) \cdot \mathbf{H}_{\text{Th}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t \alpha}{|\gamma| |\mathbf{M}_0|} \left| \frac{\mathbf{M}_h^{n+1} - \mathbf{M}_h^n}{\Delta t} \right|^2 \quad p.p. \text{ dans } \Gamma \times ]0, 1[.$$

L'identité (8.46) résulte immédiatement de (8.47), (8.48) et (8.49). La condition de stabilité (8.23) s'obtient maintenant en reproduisant à l'identique la preuve du théorème 8.3  $\square$

## 8.4 Etude du cas non linéaire : CLE d'ordre 3

### 8.4.1 Formulation variationnelle et discrétisation spatiale

#### Rappel des équations

La particularité de la condition d'ordre 3 est qu'elle fait apparaître des dérivations tangentielles sur l'aimantation. Nous considérons toujours la loi LLG 1.17, pour laquelle la condition (5.110) s'écrit

$$(8.50) \quad \partial_t \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathcal{B}(\boldsymbol{\varphi}) - \eta \mu_0 \int_0^1 \partial_{tt} (\Pi_{\parallel} \mathbf{M} - \eta(1-\nu) \nabla_{\Gamma} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})) \, d\nu \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+$$

où  $\mathcal{B}$  est donnée par (8.1) sans les termes de courbures et avec  $\mathbf{M}(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu, t)$  vérifiant pour  $(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu, t) \in \Gamma \times ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$ ,

$$(8.51) \quad \partial_t \mathbf{M} = |\gamma| \mathbf{H}_{\Gamma} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \mathbf{M} \times \partial_t \mathbf{M},$$

où  $\mathbf{H}_{\Gamma}(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu, t)$  est défini pour  $(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu, t) \in \Gamma \times ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$ , par

$$(8.52) \quad \mathbf{H}_{\Gamma} = \boldsymbol{\varphi} + \eta(1-\nu)(\text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{n} + \boldsymbol{\psi} \mathbf{n} + \eta \int_0^{\nu} \nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\psi} \, d\xi + \mathbf{H}_s + K_a(\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{p}$$

où  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu, t)$  est défini pour  $(\mathbf{x}_{\Gamma}, \nu, t) \in \Gamma \times ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$ , par

$$(8.53) \quad \boldsymbol{\psi} = (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n} - \eta \int_{\nu}^1 \text{div}_{\Gamma} (\Pi_{\parallel} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M})) \, d\xi.$$

Les équations du problème sont formées par le système (8.3) où la condition au bord est remplacée par (8.50)-(8.51)-(8.52)-(8.53).

### Formulation variationnelle

Le point important, dans la perspective d'une résolution numérique rapide, est de garder l'aspect local de l'équation (8.51). C'est pourquoi nous choisissons de chercher toujours  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}_{\Gamma}$  dans  $L^2(\Gamma \times ]0, 1])^3$ . Il convient alors de traiter les dérivations qui porte sur  $\mathbf{M}$  sous l'aspect dérivation faible, en faisons des intégrations par parties. Mais alors, on s'aperçoit que par rapport au cas de la CLE d'ordre 2, l'équation (8.50) et également (8.52) nécessitent une régularité supplémentaire de  $\boldsymbol{\varphi}$ . C'est pour cela qu'au lieu de prendre  $\boldsymbol{\varphi}$  dans  $H(\text{rot}_{\Gamma}, \Gamma)$ , on le prend désormais dans  $\mathcal{T}H^1(\Gamma)$ .

La formulation faible des équations (8.50)-(8.51)-(8.52)-(8.53) s'écrit :

Chercher  $(\mathbf{H}(t), \mathbf{E}(t), \boldsymbol{\varphi}(t)) \in H(\text{div}, \Omega_v) \times H(\text{rot}, \Omega_v) \times \mathcal{T}H^1(\Gamma)$  et  $\mathbf{M}(t) \in L^2(\Gamma \times ]0, 1])^3$  tels que, pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $(\mathbf{H}', \mathbf{E}', \boldsymbol{\varphi}', \mathbf{M}') \in H(\text{div}, \Omega_v) \times H(\text{rot}, \Omega_v) \times \mathcal{T}H^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma \times ]0, 1])^3$ ,

$$(8.54) \quad \mathbf{E}(t) \text{ et } \mathbf{H}(t) \text{ vérifient (8.7)(i) et (8.7)(ii),}$$

$$(8.55) \quad \eta \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} (\boldsymbol{\varphi}(t) | \boldsymbol{\varphi}')_{\Gamma} + \eta (\chi_{1\text{rot}_{\Gamma}} \boldsymbol{\varphi}(t) | \text{rot}_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}')_{\Gamma} = -\frac{d}{dt} \langle \gamma_{\Gamma} \mathbf{E}(t), \boldsymbol{\varphi}' \rangle - \eta \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Gamma} \int_0^1 (\mathbf{M}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}' + \eta(1-\nu)(\mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{n})(\text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}')) \, d\nu d\mathbf{x}_{\Gamma},$$

où  $\mathbf{M}(t)$  vérifie (8.36), dans laquelle  $\mathbf{H}_{\Gamma}(t) \in L^2(\Gamma \times ]0, 1])^3$  et vérifie

$$(8.56) \quad \int_{\Gamma} \int_0^1 \mathbf{H}_{\Gamma} \cdot \mathbf{M}' \, d\nu d\mathbf{x}_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \int_0^1 \left( \boldsymbol{\varphi} + \eta(1-\nu)(\text{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{n} + \boldsymbol{\psi} \mathbf{n} + \eta \int_0^{\nu} \nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\psi} \, d\xi \right) \cdot \mathbf{M}' \, d\nu d\mathbf{x}_{\Gamma} + \int_{\Gamma} \int_0^1 (\mathbf{H}_s + K_a(\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{p}) \cdot \mathbf{M}' \, d\nu d\mathbf{x}_{\Gamma}$$

avec  $\boldsymbol{\psi}(t) \in L^2(0, 1; H^1(\Gamma))$  vérifiant pour tout  $\boldsymbol{\psi}' \in L^2(0, 1; H^1(\Gamma))$ ,

$$(8.57) \quad \int_{\Gamma} \int_0^1 \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}' \, d\nu d\mathbf{x}_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \int_0^1 \left( ((\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\psi}' + \eta (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) \cdot \int_0^{\nu} \nabla_{\Gamma} \boldsymbol{\psi}' \, d\xi \right) \, d\nu d\mathbf{x}_{\Gamma}$$

**Discrétisation spatiale**

Par rapport aux cas précédents, la première chose qui a changé est l'espace fonctionnel choisi pour  $\varphi$  qui est désormais  $\mathcal{T}H^1(\Gamma)$ . Il convient alors de changer l'espace d'approximation  $Y_h(\Gamma)$  en

$$Y_h(\Gamma) = \left\{ \varphi \in \mathcal{T}H^1(\Gamma) / \varphi|_K \in \mathcal{Q}_{1,1} \times \mathcal{Q}_{1,1} \times \{0\}, \forall K \in \mathcal{M}(\Gamma) \right\}.$$

pour le cas 3D, et en

$$Y_h(\Gamma) = \left\{ \varphi \in \mathcal{T}H^1(\Gamma) / \varphi|_K \in P_1(x) \times P_1(x) \times \{0\}, \forall K \in \mathcal{M}(\Gamma) \right\}.$$

pour le cas 2D. La répartition des degrés de libertés pour  $\varphi$  devient

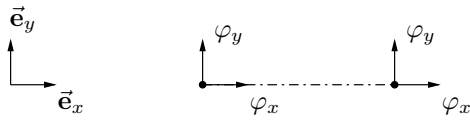


FIG. 8.5 – Degrés de libertés en 2D

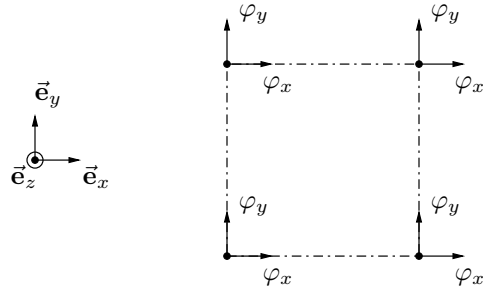
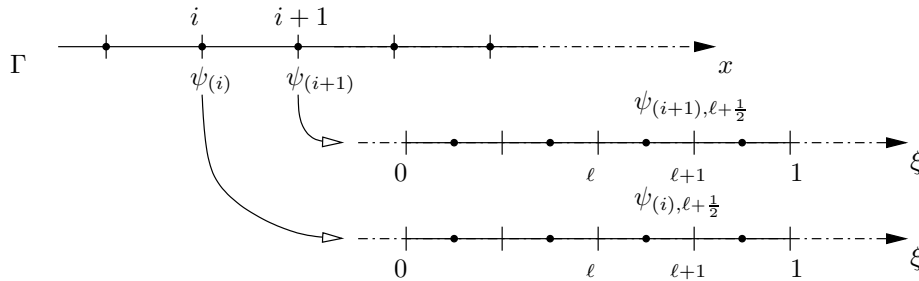


FIG. 8.6 – Degrés de libertés en 3D

Les espaces d'approximations  $X_h(\Omega_v)$ ,  $V_h(\Omega_v)$  et  $Z_h(\Gamma \times ]0, 1[)$  restent quand à eux inchangés. Nous avons besoin par contre de spécifier l'espace d'approximation  $W_h(\Gamma \times ]0, 1[)$  pour la variable  $\psi$ . Cet espace d'approximation va être construit sur le maillage  $\mathcal{M}(\Gamma \times ]0, 1[)$ . Etant donnée la régularité  $H^1(\Gamma)$  de  $\psi(\xi)$  pour presque tout  $\xi \in ]0, 1[$ , il est nécessaire, afin de pouvoir définir convenablement  $W_h(\Gamma \times ]0, 1[)$ , d'utiliser dans la définition (8.38) du maillage  $\mathcal{M}(\Gamma \times ]0, 1[)$  un même maillage  $\mathcal{M}(0, 1)$  pour tout les  $\mathcal{M}_K(0, 1)$ ,  $K \in \mathcal{M}(\Gamma)$ . Nous posons alors,

$$W_h(\Gamma \times ]0, 1[) = \left\{ \psi_h \in L^2(0, 1; H^1(\Gamma)) / \psi_h|_{K'} \in P_1(x) \times P_0(\xi) \forall K' \in \mathcal{M}(\Gamma \times [0, 1]) \right\}$$

Nous pouvons schématiser la répartition des degrés de libertés (en 2D) de la fonction  $\psi_h \in W_h(\Gamma \times ]0, 1[)$  comme expliqué dans le dessin suivant (qui admet l'avantage d'être applicable au cas d'une frontière  $\Gamma$  courbe)



n° où pour tout noeud  $i$  du maillage de  $\Gamma$  on fait correspondre une fonction  $\psi_{(i)}$  de  $L^2(0, 1)$  constante par maille du maillage  $\mathcal{M}(0, 1)$ .

**Ecriture explicite des équations en 2D**

Pour la condition d'ordre 2, le problème 2D discrétisé en espace est décrit par les équations : (8.9), (8.10), (8.11), (8.12), (8.39), (8.40) et (8.41). Nous allons préciser le même type d'équation pour la condition d'ordre 3. A cause de la nouvelle discrétisation de la variable  $\varphi$ , dans les équations (8.9), (8.10), (8.11), (8.12) relatives au système de Maxwell, il n'y a que l'équation (8.12) qui change est devient (en utilisant la condensation de masse)

$$(8.58) \quad \varepsilon_0 \frac{d}{dt} E_{y(i,0)} + \frac{H_{z(i+\frac{1}{2},0)} - H_{z(i-\frac{1}{2},0)}}{\Delta x} - 2 \frac{\varphi_{x(i)} - H_{x(i,-\frac{1}{2})}}{\Delta z} = 0$$

Par ailleurs la condition aux limites (8.55) s'écrit après discrétisation, en appliquant toujours la condensation de masse,

$$(8.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \varphi_{y(i)} - \frac{\eta}{\varepsilon_0} \frac{\varphi_{y(i+1)} - 2\varphi_{y(i)} + \varphi_{y(i-1)}}{\Delta x^2} \\ \quad = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (E_{x(i+\frac{1}{2},0)} + E_{x(i-\frac{1}{2},0)}) \right) - \eta \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} (\overline{M}_{y(i+\frac{1}{2})} + \overline{M}_{y(i-\frac{1}{2})}) \right) \\ \eta \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \varphi_{x(i)} = - \frac{d}{dt} E_{y(i,0)} - \eta \mu_0 \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2} (\overline{M}_{x(i+\frac{1}{2})} + \overline{M}_{x(i-\frac{1}{2})}) \right) \\ \quad + \frac{\eta^2 \mu_0}{\Delta x} \frac{d^2}{dt^2} (\widetilde{M}_{z(i+\frac{1}{2})} - \widetilde{M}_{z(i-\frac{1}{2})}) \end{array} \right.$$

où  $\overline{M}_{(i+\frac{1}{2})} = \int_0^1 \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})} d\nu$  et  $\widetilde{M}_{(i+\frac{1}{2})} = \int_0^1 (1-\nu) \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})} d\nu$ . Considérons  $P_0(0,1)$  l'ensemble des fonctions de  $L^2(0,1)$  constantes par maille de  $\mathcal{M}(0,1)$  et notons  $\Pi$  la projection orthogonale de  $L^2(0,1)$  sur  $P_0(0,1)$ . Afin d'écrire convenablement les relations définissant  $\mathbf{H}_{T(i+\frac{1}{2})}$ , nous avons besoin d'introduire l'opérateur  $\mathcal{I}$  défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : P_0(0,1) &\longrightarrow P_0(0,1) \\ u &\longmapsto \Pi \left( \xi \mapsto \int_0^\xi u(\nu) d\nu \right). \end{aligned}$$

On note  $\mathcal{I}^*$  l'adjoint de  $\mathcal{I}$  pour le produit scalaire sur  $P_0(0,1)$  induit par le produit scalaire  $L^2$ . En fait,

$$\mathcal{I}^* u = \Pi \left( \xi \mapsto \int_\xi^1 u(\nu) d\nu \right)$$

L'écriture locale de la loi non linéaire donnée par (8.40) reste encore valable dans le cas présent (on a tout fait pour), mais l'expression du champ total devient, pour tout  $i$ ,

$$(8.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{Tx(i+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} (\varphi_{x(i+1)} + \varphi_{x(i)}) + \frac{\eta}{\Delta x} \mathcal{I} (\psi_{(i+1)} - \psi_{(i)}) + H_{s,x} + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})}) p_x \\ H_{Ty(i+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} (\varphi_{y(i+1)} + \varphi_{y(i)}) + H_{s,y} + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})}) p_y \\ H_{Tz(i+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} (\psi_{(i+1)} + \psi_{(i)}) + \frac{\eta}{\Delta x} \mathcal{I}^* (\varphi_{x(i+1)} - \varphi_{x(i)}) + H_{s,z} + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_{(i+\frac{1}{2})}) p_z \end{array} \right.$$

où les  $\psi_{(i)}$  sont données par

$$(8.61) \quad \psi_{(i)} = M_{z,0} - \frac{1}{2} (M_{z(i+\frac{1}{2})} + M_{z(i-\frac{1}{2})}) - \frac{\eta}{\Delta x} \mathcal{I}^* (M_{x(i+\frac{1}{2})} - M_{x(i-\frac{1}{2})})$$

Les équations discrétisées du système de Maxwell couplé avec la condition d'ordre 3 sont : (8.9), (8.10), (8.11), (8.58), (8.59), (8.40), (8.60) et (8.61).

### 8.4.2 Schéma en temps et stabilité

La technique de discrétisation en temps est la même que dans le cas de la condition d'ordre 2. Le schéma numérique dans le domaine du vide est toujours donné par (8.15) où seulement l'espace  $Y_h(\Gamma)$  a changé. Pour la condition d'ordre 3, écrite sous sa forme variationnelle (8.55), (8.36), (8.56) et (8.57), en y remplaçant les espaces continues par leur espaces dicrets respectifs, nous proposons le schéma centré suivant,

$$(8.62) \quad \begin{aligned} & \frac{\eta\mu_0}{\Delta t^2} \left( \varphi_h^{n+1} - 2\varphi_h^n + \varphi_h^{n-1} \mid \varphi_h' \right)_\Gamma + \eta \left( \chi_1 \text{rot}_\Gamma \varphi_h^n \mid \text{rot}_\Gamma \varphi_h' \right)_\Gamma = \\ & - \frac{1}{2\Delta t} \left\langle \gamma_\tau (\mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^{n-1}), \varphi_h' \right\rangle - \frac{\eta\mu_0}{\Delta t^2} \left( \overline{\mathbf{M}}_h^{n+1} - 2\overline{\mathbf{M}}_h^n + \overline{\mathbf{M}}_h^{n-1} \mid \varphi_h' \right)_\Gamma \\ & - \frac{\eta^2\mu_0}{\Delta t^2} \left( (\widetilde{\mathbf{M}}_h^{n+1} - 2\widetilde{\mathbf{M}}_h^n + \widetilde{\mathbf{M}}_h^{n-1}) \cdot \mathbf{n} \mid \text{div}_\Gamma \varphi_h' \right)_\Gamma \end{aligned}$$

pour tout  $\varphi_h' \in Y_h(\Gamma)$ , où on a posé  $\overline{\mathbf{M}}_h^n = \int_0^1 \mathbf{M}_h^n d\nu$  et  $\widetilde{\mathbf{M}}_h^n = \int_0^1 (1 - \nu) \mathbf{M}_h^n d\nu$ . Les  $(\mathbf{M}_h^n)$  vérifient (8.43) où le champ  $\mathbf{H}_{Th}^{n+\frac{1}{2}} \in Z_h(\Gamma \times ]0, 1])$  est défini sous forme variationnelle par,

$$(8.63) \quad \begin{aligned} & \int_\Gamma \left( \int_0^1 \mathbf{H}_{Th}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{M}_h' d\nu \right) d\mathbf{x}_\Gamma = \left( \varphi_h^{n+\frac{1}{2}} \mid \overline{\mathbf{M}}_h' \right)_\Gamma + \eta \left( \text{div}_\Gamma \varphi_h^{n+\frac{1}{2}} \mid \widetilde{\mathbf{M}}_h' \cdot \mathbf{n} \right)_\Gamma \\ & + \int_\Gamma \left( \int_0^1 \left( \psi_h^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{n} + \eta \int_0^\nu \nabla_\Gamma \psi_h^{n+\frac{1}{2}} d\xi \right) \cdot \mathbf{M}_h' d\nu \right) d\mathbf{x}_\Gamma \\ & + \int_\Gamma \left( \int_0^1 (\mathbf{H}_s + K_a(\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_h^{n+\frac{1}{2}}) \mathbf{p}) \cdot \mathbf{M}_h' d\nu \right) d\mathbf{x}_\Gamma, \end{aligned}$$

Pour toute fonction  $\mathbf{M}_h'$  dans  $Z_h(\Gamma \times ]0, 1])$ , où nous avons noté  $\overline{\mathbf{M}}_h' = \int_0^1 \mathbf{M}_h' d\nu$  et  $\widetilde{\mathbf{M}}_h' = \int_0^1 (1 - \nu) \mathbf{M}_h' d\nu$  et où nous avons posé

$$\mathbf{M}_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{M}_h^{n+1} + \mathbf{M}_h^n}{2} \quad \varphi_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi_h^{n+1} + \varphi_h^n}{2} \quad \text{et} \quad \psi_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\psi_h^{n+1} + \psi_h^n}{2};$$

la fonction  $\psi_h^n \in W_h(\Gamma \times ]0, 1])$  satisfaisant, pour toute fonction  $\psi_h' \in W_h(\Gamma \times ]0, 1])$ ,

$$(8.64) \quad \begin{aligned} \int_\Gamma \int_0^1 \psi_h^n \psi_h' d\nu d\mathbf{x}_\Gamma &= \int_\Gamma \int_0^1 ((\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_h^n) \cdot \mathbf{n}) \psi_h' d\nu d\mathbf{x}_\Gamma \\ &+ \eta \int_\Gamma \int_0^1 (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_h^n) \cdot \left( \int_0^\nu \nabla_\Gamma \psi_h' d\xi \right) d\nu d\mathbf{x}_\Gamma \end{aligned}$$

Comme pour tous les schémas de ce chapitre,

**Théorème 8.5** *Sous l'hypothèse du théorème 8.2, le schéma constitué des équations (8.15)(i), (8.15)(ii), (8.62), (8.43), (8.63) et (8.64) est  $L^2$  stable sous la condition CFL (8.23).*

*Preuve.* La démarche est tout à fait classique (cf. preuves des théorèmes 8.2 et 8.4...); il suffit de trouver la bonne expression de l'énergie discrete. On pose

$$\mathcal{E}_T(n) = \mathcal{E}_v(n) + \eta \mathcal{E}_\Gamma(n) + \eta \mathcal{E}_f(n)$$

où  $\mathcal{E}_v(n)$  et  $\mathcal{E}_\Gamma(n)$  sont respectivement données par (8.16) et (8.17) et où

$$\mathcal{E}_f(n) = \frac{\mu_0}{2} \int_\Gamma \left( \int_0^1 |\mathbf{H}_s - \mathbf{M}_k^n|^2 + K_a |(\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_k^n) \mathbf{p} - \mathbf{M}_k^n|^2 + |\boldsymbol{\psi}_h^n|^2 d\nu \right) d\mathbf{x}_\Gamma.$$

et on montre la décroissance de  $\mathcal{E}_T(n)$  à travers l'identité (8.46) : en suivant la même démarche que la preuve du théorème 8.2, on s'aperçoit que

$$(8.65) \quad \frac{\mathcal{E}_v(n+1) - \mathcal{E}_v(n)}{\Delta t} + \eta \frac{\mathcal{E}_\Gamma(n+1) - \mathcal{E}_\Gamma(n)}{\Delta t} = -\frac{\eta \mu_0}{\Delta t} \mathcal{P}(n + \frac{1}{2})$$

où on a posé

$$\mathcal{P}(n + \frac{1}{2}) = \left( \overline{\mathbf{M}}_h^{n+1} - \overline{\mathbf{M}}_h^n |\boldsymbol{\varphi}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)_\Gamma + \eta \left( (\widetilde{\mathbf{M}}_h^{n+1} - \widetilde{\mathbf{M}}_h^n) \cdot \mathbf{n} \mid \operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\varphi}_h^{n+\frac{1}{2}} \right)_\Gamma$$

Posons  $\mathcal{E}_{\text{eff}}(n) = \mathcal{E}_f(n) - \frac{\mu_0}{2} \int_\Gamma \int_0^1 |\boldsymbol{\psi}_h^n|^2 d\nu d\mathbf{x}_\Gamma$ . En prenant  $\mathbf{M}'_h = (\mathbf{M}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_h^n)$  dans (8.63), nous constatons, en utilisant la propriété de conservation (8.45) encore valable par construction du schéma,

$$(8.66) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}(n + \frac{1}{2}) &= \int_\Gamma \left( \int_0^1 \mathbf{H}_{\text{Th}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot (\mathbf{M}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{M}_h^n) d\nu \right) d\mathbf{x}_\Gamma + \frac{1}{\mu_0} (\mathcal{E}_{\text{eff}}(n+1) - \mathcal{E}_{\text{eff}}(n)) \\ &\quad + \int_\Gamma \left( \int_0^1 \left( \boldsymbol{\psi}_h^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{n} + \eta \int_0^\nu \nabla_\Gamma \boldsymbol{\psi}_h^{n+\frac{1}{2}} d\xi \right) \cdot (\mathbf{M}_h^{n+1} - \mathbf{M}_h^n) d\nu \right) d\mathbf{x}_\Gamma \end{aligned}$$

D'autre part, en faisant la différence entre l'équation (8.64) et la même équation écrite à l'instant  $t^{n+1}$ , et en prenant ensuite  $\boldsymbol{\psi}'_h = \boldsymbol{\psi}_h^{n+\frac{1}{2}}$  dans cette différence, on trouve

$$(8.67) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \int_\Gamma \int_0^1 \left( |\boldsymbol{\psi}_h^{n+1}|^2 - |\boldsymbol{\psi}_h^n|^2 \right) d\nu d\mathbf{x}_\Gamma \right) = \\ \int_\Gamma \left( \int_0^1 \left( \boldsymbol{\psi}_h^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{n} + \eta \int_0^\nu \nabla_\Gamma \boldsymbol{\psi}_h^{n+\frac{1}{2}} d\xi \right) \cdot (\mathbf{M}_h^{n+1} - \mathbf{M}_h^n) d\nu \right) d\mathbf{x}_\Gamma \end{aligned}$$

A partir de (8.66) et (8.67), nous déduisons en utilisant l'identité désormais classique (8.49),

$$(8.68) \quad (\mathcal{E}_f(n+1) - \mathcal{E}_f(n)) + \frac{\mu_0}{|\gamma| \Delta t} \int_\Gamma \left( \int_0^1 \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} |\mathbf{M}_k^{n+1} - \mathbf{M}_k^n|^2 d\nu \right) d\mathbf{x}_\Gamma = \mu_0 \mathcal{P}(n + \frac{1}{2})$$

Suite à (8.65) et (8.68), la propriété de décroissance (8.46) se déduit de manière immédiate.

L'obtention de la condition de stabilité suit à l'identique la preuve du théorème 8.3, puisque pour le nouveau choix de l'espace  $Y_h(\Gamma)$ , l'inégalité 8.28 reste encore valable.  $\square$



## 8.5 Validation numérique pour le problème 2D

### Description de l'expérience

Le test réalisé concerne seulement le cas d'une couche homogène. Nous allons reproduire l'équivalent 2D de l'expérience 1D de la figure 7.14 pour  $\eta = \lambda/40$  (commentaire, page 182). Le but est de voir comment se modifie la (très bonne) qualité de l'approximation, en passant du 1D au 2D. Nous rappelons qu'en dimension 1, la CLE d'ordre 2 et la CLE d'ordre 3 sont les mêmes. Le schéma de l'expérience 2D est donné par la figure 8.7 suivante :

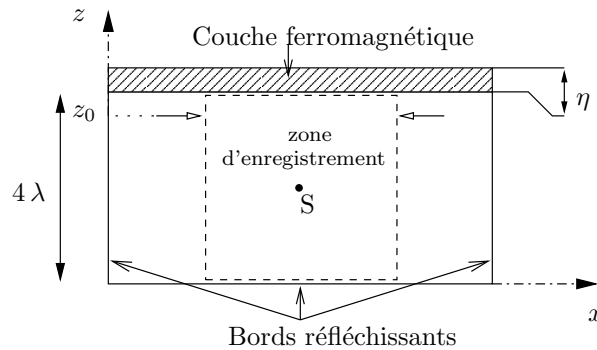


FIG. 8.7 – Description de l'expérience 2D.

On considère donc une couche ferromagnétique homogène caractérisée par (le champ d'anisotropie étant nul)

$$\mathbf{M}_0 = 2 \cdot 10^3 \vec{\mathbf{e}}_y \quad \mathbf{H}_s = 5 \cdot 10^2 \vec{\mathbf{e}}_y \quad \text{et} \quad \alpha = 0.2.$$

On éclaire cette couche par un signal de Ricker qui prend source au point  $S$  (cf. (7.83)) et de fréquence centrale  $f = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$ . Ce signal donne lieu à une onde incidente polarisée en  $(H_x, E_y, H_z)$  (O.M.T.). Nous nous plaçons plutôt dans un régime non linéaire en imposant une amplitude maximale  $|\mathbf{H}_0| = 1000$  pour le champ magnétique.

**Remarque 8.2** *En prenant  $\mathbf{M}_0$  orienté suivant l'axe  $\vec{\mathbf{e}}_y$ , nous vérifions automatiquement la condition  $\text{div } \mathbf{M}_0 = 0$ . Nous évitons ainsi le calcul du champ démagnétisant pour garantir l'équilibre initial de la couche ferromagnétique (cf. Remarque 1.2).*

### Commentaires : figures 8.9, 8.10, 8.11, 8.12 et 8.13.

Les figures 8.9, 8.10, 8.11 et 8.12, montrent des photos de la zone d'enregistrement (voir figure 8.7) pour des temps croissants (en allant de haut en bas). Les figures 8.9 et 8.11 présentent la composante  $E_y$ , non nulle pour l'onde incidente, par contre et les figures 8.10 et 8.12 présentent la composante  $E_x$ , nulle pour l'onde incidente, mais devient non nulle une fois l'onde ait atteint la couche ferromagnétique. Chaque photo permet de comparer la diffraction par un bord ferromagnétique (moitié haute) à la diffraction par un bord réfléchissant (moitié basse). Cela étant, ce qui nous importe le plus, c'est plutôt la comparaison entre la solution de référence (colonne de gauche) et la solution approchée (colonne de droite).

La comparaison fournie par les figures 8.9, 8.10 concerne la CLE d'ordre 2. On constate à première vue que les résultats sont presque identiques. En vérité, il y a une différence fondamentale entre les deux, qui ne se distingue pas clairement sur la composante  $E_y$  (figure

8.9) mais se voit assez bien sur la composante  $E_x$  (figure 8.10). Il s'agit de la dissymétrie de la solution "exacte" de l'onde diffractée par rapport à l'axe vertical central de la figure alors que la solution approchée semble être parfaitement symétrique.

Si on considère maintenant le cas de la CLE d'ordre 3 (figures 8.11, 8.12) on constate que l'on retrouve la dissymétrie au niveau de la solution approchée. Pour mieux illustrer l'amélioration apportée par la CLE d'ordre 3, nous avons tracé dans la figure 8.13 le profil des solutions sur la droite  $z = z_0$  (voir figure 8.7). Les profils représentés correspondent aux dernières photos des figures 8.9, 8.10, 8.11 et 8.12. Ils montrent clairement la très bonne approximation fournie par la condition d'ordre 3. On retrouve à ce niveau les mêmes conclusions que dans le cas 1D en utilisant la CLE d'ordre 2 (rappelons-nous qu'en 1D, la condition d'ordre 2 est en fait d'ordre 3!).

### Intérêt des CLE

Il est indéniable (du moins dans le cas de l'expérience présenté). Le calcul de la solution de référence s'est fait avec un pas  $h = \lambda/120$ . Si on utilise le même pas pour le calcul de la solution approchée, on obtient un temps de calcul comparable (légèrement plus rapide en utilisant l'une ou l'autre des CLE!). Mais chacune des solutions approchées présentées a été calculée avec un pas  $h = \lambda/20$ , pour lequel l'exécution du programme est presque immédiate ( $< 1min$ ). Ceci est due à la division par  $6 \times 4 \times 8 = 192$ , de la taille du problème discret !

### Sur le phénomène de dissymétrie

Puisqu'il est présent dans la condition d'ordre 3 et absent dans la condition d'ordre 2, ce phénomène est donc en  $O(\eta^2)$ . Il provient en fait de la rotation subite par une onde électromagnétique se propageant dans un milieu ferromagnétique. Cette rotation a été observée dans les expériences numériques menées dans [45] et nous allons tenter de la justifier sur un exemple simplifié. Considérons en effet une onde électromagnétique ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ ) se propageant dans le plan  $(x, z)$  à l'intérieur d'un milieu ferromagnétique caractérisé par son aimantation initiale  $\mathbf{M}_0 = M_s \vec{e}_y$  (où  $M_s$  est une constante), et par sa loi constitutive

$$\partial_t \mathbf{M} = \mathbf{H} \times \mathbf{M} + \mathbf{M} \times \partial_t \mathbf{M},$$

et cherchons les groupes de symétries qui laissent invariants les équations du problème (nous avons pris  $|\gamma| = \alpha/M_s = 1$  et  $\mathbf{H}_T = \mathbf{H}$ ). Commençons par écrire ces équations composantes par composantes (on prend  $(\varepsilon_0 = \mu_0 = 1)$ ) :

$$(8.69) \quad \begin{cases} \partial_t E_x + \partial_z H_y = 0 \\ \partial_t E_z - \partial_x H_y = 0 \\ \partial_t (H_y + M_y) + \partial_z E_x - \partial_x E_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t (H_x + M_x) - \partial_z E_y = 0 \\ \partial_t (H_z + M_z) + \partial_x E_y = 0 \\ \partial_t E_y - \partial_z H_x + \partial_x H_z = 0 \end{cases}$$

et

$$(8.70) \quad \begin{cases} \partial_t M_x = (H_y M_z - H_z M_y) + (M_y \partial_t M_z - M_z \partial_t M_y) \\ \partial_t M_y = (H_z M_x - H_x M_z) + (M_z \partial_t M_x - M_x \partial_t M_z) \\ \partial_t M_z = (H_x M_y - H_y M_x) + (M_x \partial_t M_y - M_y \partial_t M_x) \end{cases}$$

Regardons d'abord du côté de la symétrie centrale  $(x, z) \mapsto (-x, -z)$ . Si on définit l'onde  $(\widetilde{\mathbf{E}}, \widetilde{\mathbf{H}}, \widetilde{\mathbf{M}})$  par

$$\begin{aligned} (\widetilde{H}_y, \widetilde{M}_y, \widetilde{E}_y)(x, z, t) &= (H_y, M_y, E_y)(-x, -z, t) \\ (\widetilde{H}_x, \widetilde{M}_x, \widetilde{E}_x, \widetilde{H}_z, \widetilde{M}_z, \widetilde{E}_z)(x, z, t) &= -(H_x, M_x, E_x, H_z, M_z, E_z)(-x, -z, t) \end{aligned}$$

alors il est facile de voir que le triplet  $(\widetilde{\mathbf{E}}, \widetilde{\mathbf{H}}, \widetilde{\mathbf{M}})$  vérifie également les équations (8.69)-(8.70). En d'autres termes, la propagation d'ondes électromagnétiques dans le milieu ferromagnétique considéré préserve la symétrie centrale des composantes  $y$  et l'anti symétrie des autres composantes.

Regardons maintenant du côté de la symétrie axiale, par exemple,  $(x, z) \mapsto (-x, z)$ . Cherchons si l'onde  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M})$  peut avoir des propriétés de symétrie (ou d'antisymétrie) par cette transformation. Si c'est le cas, puisque  $M_y(x, z, 0) = M_y(-x, z, 0)$ , alors nécessairement

$$M_y(x, z, t) = M_y(-x, z, t)$$

Par le premier système de (8.69), on déduit que

$$H_y(x, z, t) = H_y(-x, z, t) \quad \text{et par suite} \quad (E_x, E_z)(x, z, t) = (E_x, -E_z)(-x, z, t).$$

Posons

$$(H_x, H_z, M_x, H_z)(x, z, t) = (\varepsilon_x^h H_x, \varepsilon_z^h H_z, \varepsilon_x^m M_x, \varepsilon_z^m H_z)(-x, z, t)$$

où  $\varepsilon_x^h, \varepsilon_z^h, \varepsilon_x^m$  et  $\varepsilon_z^m$  appartiennent à  $\{1, -1\}$ . D'après les deux premières équations du deuxième système de (8.69), on doit avoir  $\varepsilon_x^h = \varepsilon_x^m$  et  $\varepsilon_z^h = \varepsilon_z^m$ , et d'après la troisième équation de ce même système,  $\varepsilon_x^h = -\varepsilon_z^h$ . En résumé

$$\varepsilon_x^h = \varepsilon_x^m = -\varepsilon_z^h = -\varepsilon_z^m = \varepsilon \in \{1, -1\}.$$

Mais cette relation est en complète contradiction avec chacune des équations du système (8.70) : ces équations impliquent respectivement  $\varepsilon = -\varepsilon$ ,  $1 = -\varepsilon^2$ ,  $-\varepsilon = \varepsilon$ . Bien entendu ce qu'on vient de vérifier pour l'axe de symétrie  $\{x = 0\}$  s'applique à n'importe quel autre axe passant par 0. On conclut en fin de compte que la propagation d'ondes électromagnétiques dans le milieu considéré ne préserve pas les symétries (ou antisymétries) axiales.

Préservant la symétrie centrale mais pas la symétrie axiale, le mouvement de l'onde s'accompagne forcément d'une rotation autour du point de symétrie initial (Figure 8.8).

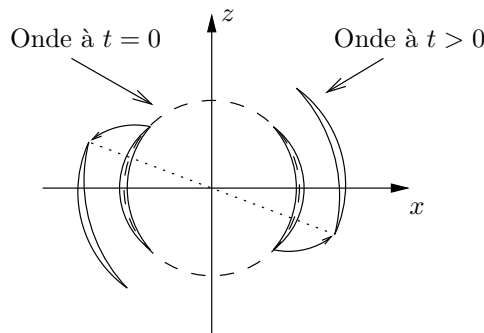


FIG. 8.8 – Schéma du mouvement de rotation qui accompagne la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ferromagnétique.

Composante  $E_y$  de l'onde électromagnétique

Solution "exacte"

Solution approchée, CLE d'ordre 2.

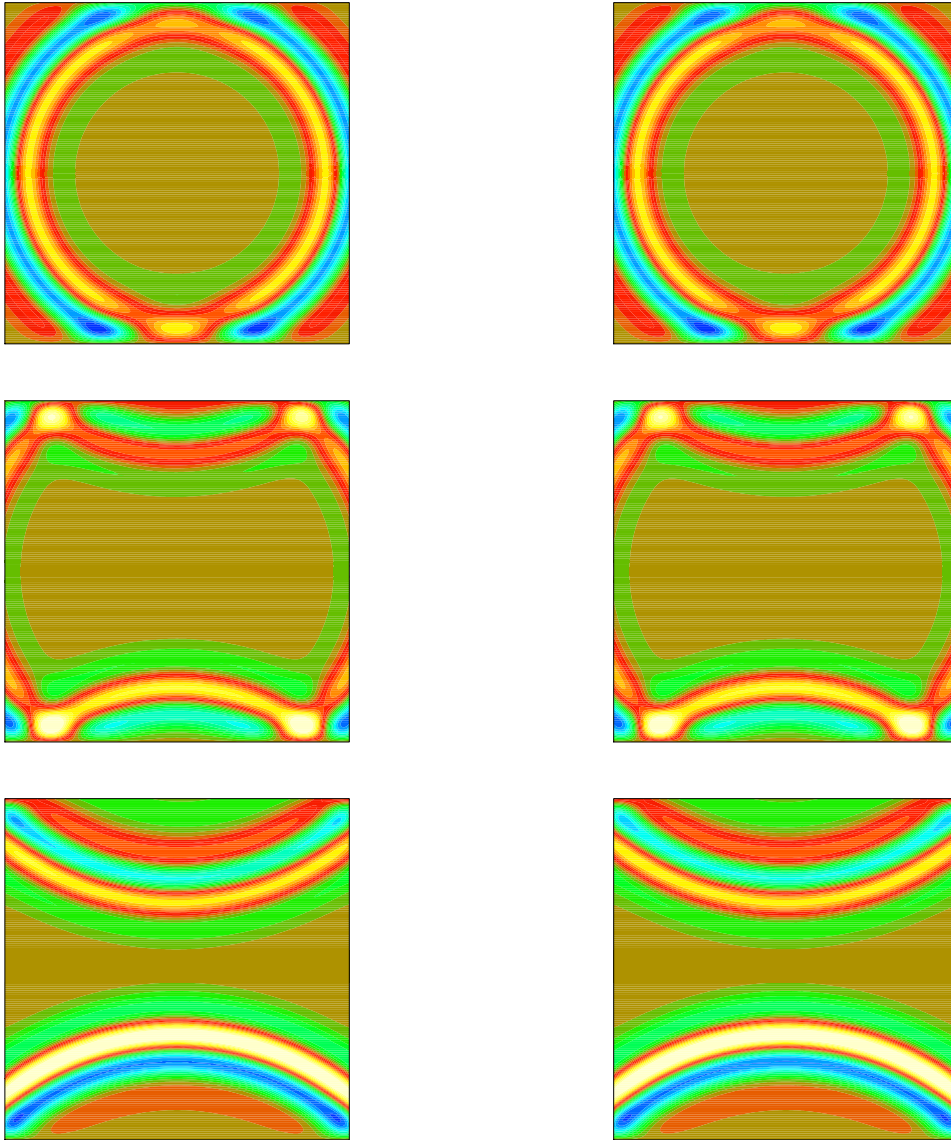


FIG. 8.9 – Comparaisons sur des instantanés entre la solution de référence et la solution approchée, calculée à l'aide de la CLE d'ordre 2.  $\eta = \lambda/40$ .

Composante  $E_x$  de l'onde électromagnétique

Solution "exacte"

Solution approchée, CLE d'ordre 2.

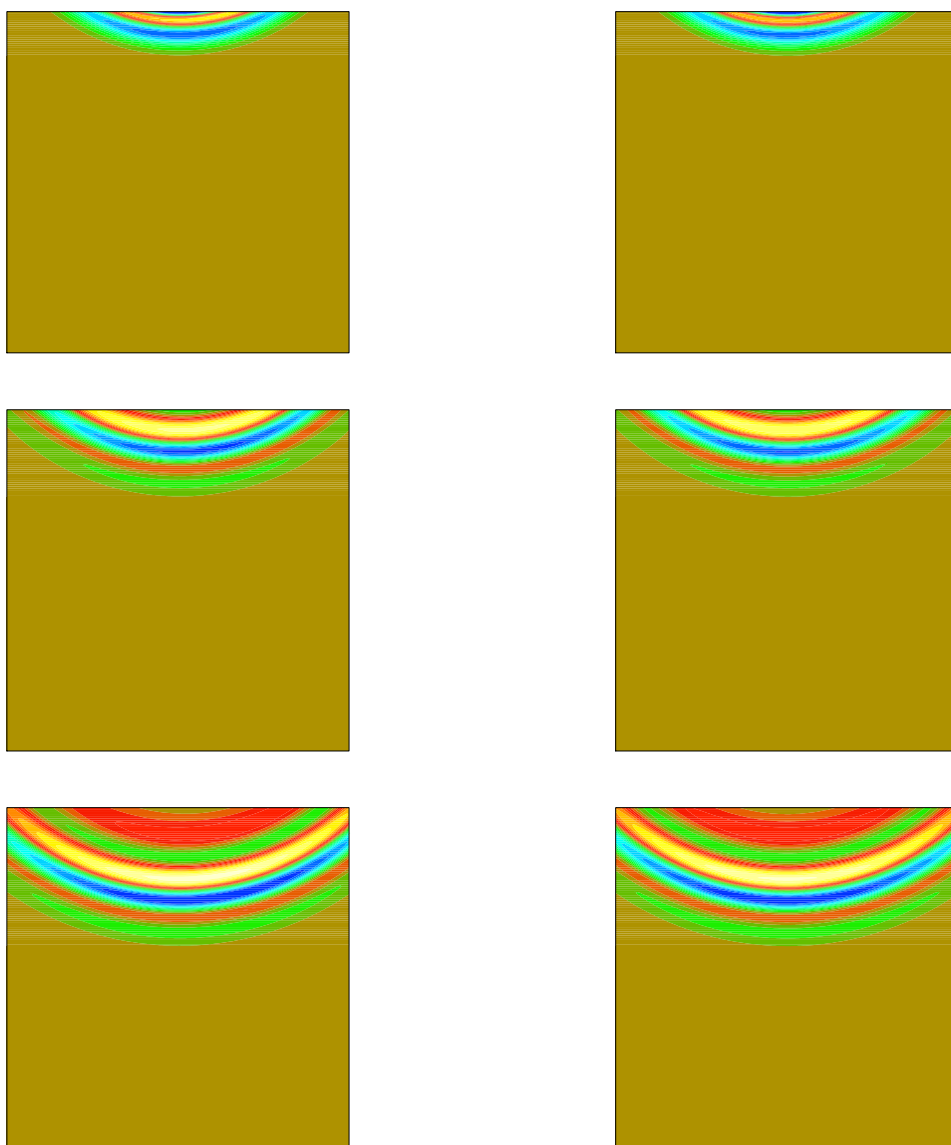


FIG. 8.10 – Comparaisons sur des instantanés entre la solution de référence et la solution approchée, calculée à l'aide de la CLE d'ordre 2.  $\eta = \lambda/40$ .

Composante  $E_y$  de l'onde électromagnétique

Solution "exacte"

Solution approchée, CLE d'ordre 3.

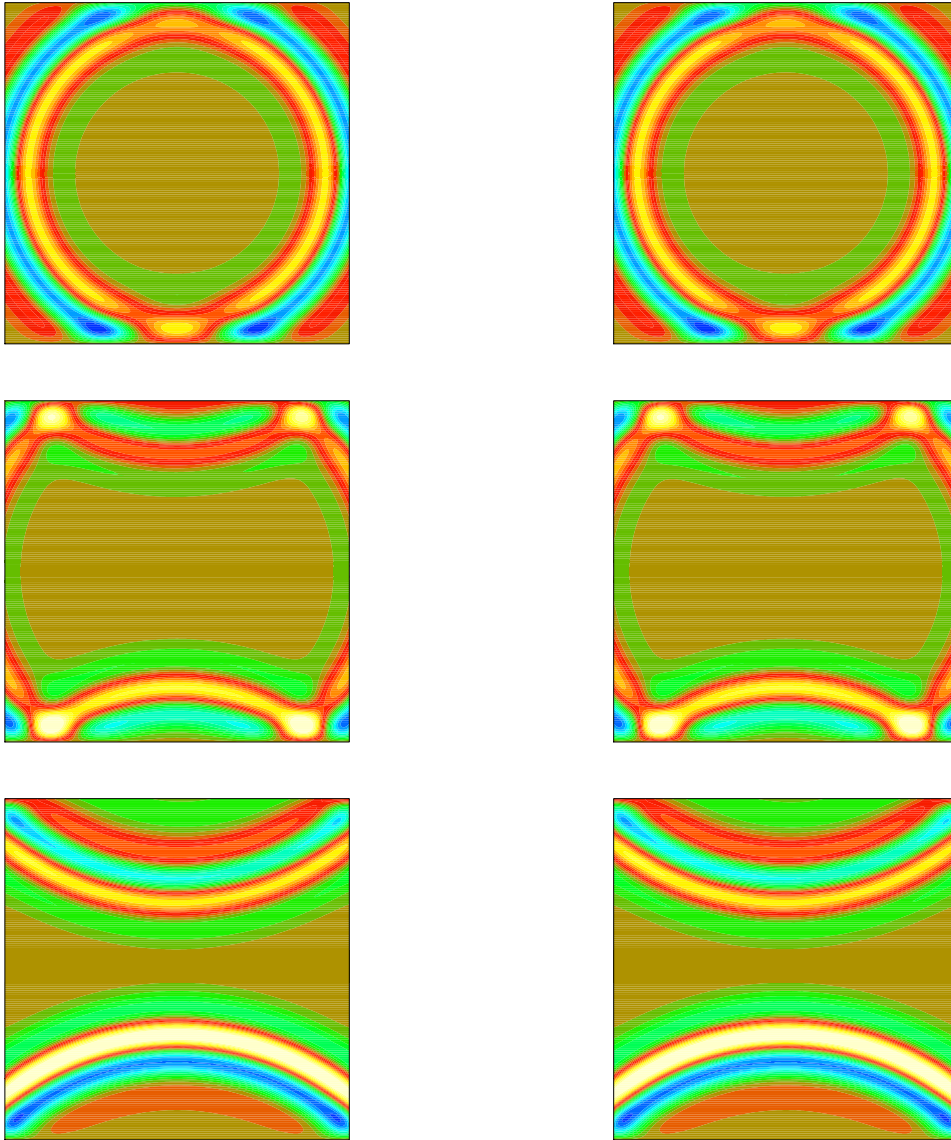


FIG. 8.11 – Comparaisons sur des instantanés entre la solution de référence et la solution approchée, calculée à l'aide de la CLE d'ordre 3.  $\eta = \lambda/40$ .

Composante  $E_x$  de l'onde électromagnétique

Solution "exacte"

Solution approchée, CLE d'ordre 3.

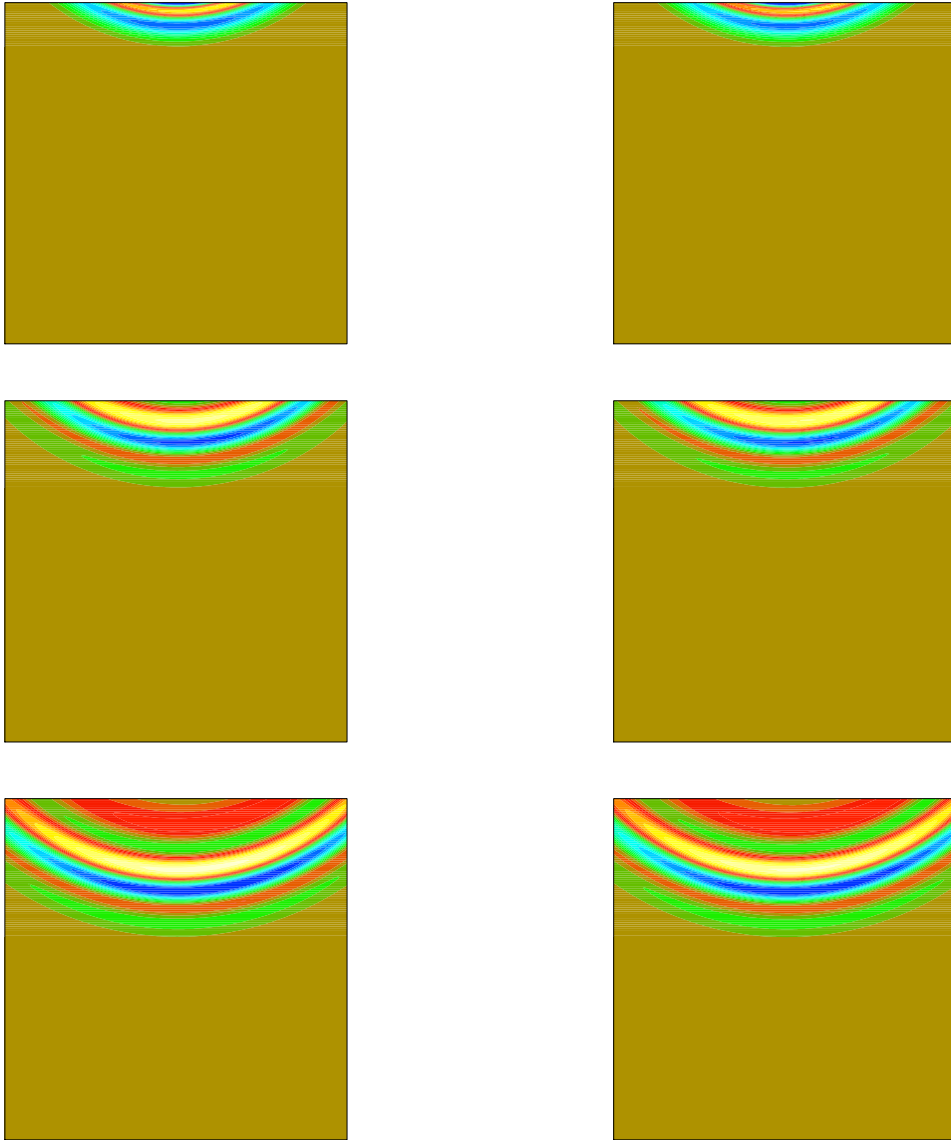
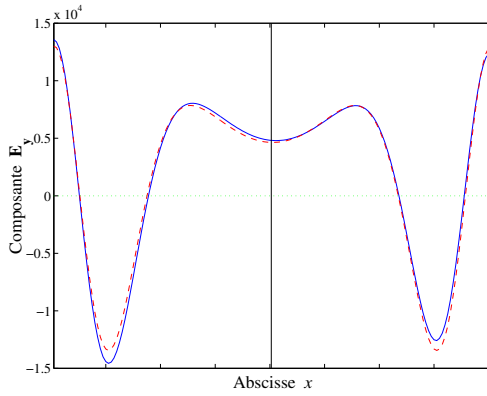
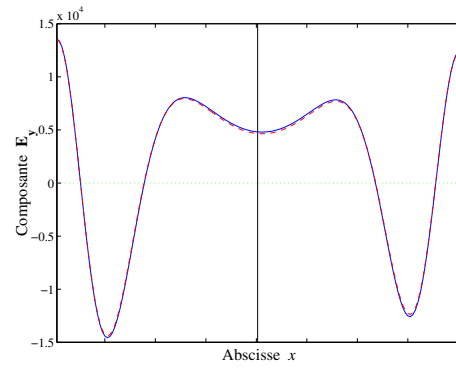


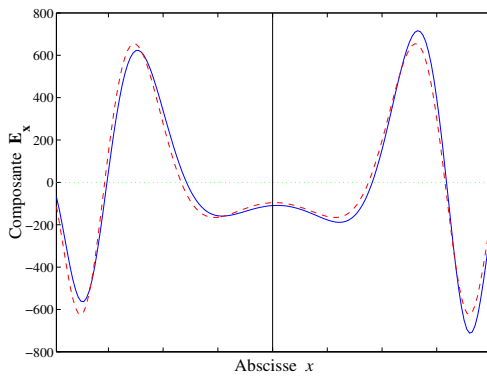
FIG. 8.12 – Comparaisons sur des instantanés entre la solution de référence et la solution approchée, calculée à l'aide de la CLE d'ordre 3.  $\eta = \lambda/40$ .

Composante  $E_y$  de l'onde électromagnétique

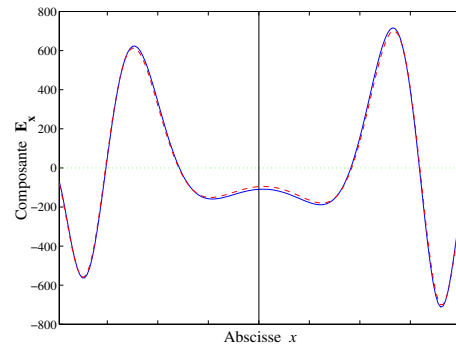
Solution exacte (trait continu)  
CLE d'ordre 2 (trait discontinu).



Solution exacte (trait continu)  
CLE d'ordre 3 (trait discontinu).

Composante  $E_x$  de l'onde électromagnétique

Solution exacte (trait continu)  
CLE d'ordre 2 (trait discontinu).



Solution exacte (trait continu)  
CLE d'ordre 3 (trait discontinu).

FIG. 8.13 – Comparaisons sur une coupe en  $z = z_0$  entre la solution de référence et la solution approchée





Troisième partie

**Modèles homogénéisés pour des  
structures ferromagnétiques  
périodiques**



## Chapitre 9

# Obtention et justification du modèle limite

**Résumé :** Dans ce long chapitre nous traitons l'homogénéisation périodique du système de Maxwell-Landau-Lifshitz. Après avoir introduit les principales notations au paragraphe 9.1 (où nous distinguons le cas sans champ effectif pour lequel nous donnerons les démonstrations complètes, du cas général), nous avons choisi de présenter les modèles limites auxquels aboutiraient l'approche formelle classique (que nous avons choisi de ne pas développer par souci de concision). Pour décrire le modèle limite satisfait par le champ "homogénéisé"  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M}^h)$  il convient, comme c'est souvent le cas, d'introduire un moment magnétique  $\mathbf{M}$  à l'échelle microscopique, qui dépend à la fois de la variable "macroscopique"  $\mathbf{x}$  et de la variable "microscopique"  $\boldsymbol{\xi}$ . Nous présentons le système limite (formules (9.8) et (9.9)) vérifié par les champs  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M})$  ( $\mathbf{M}^h$  étant alors obtenu à partir de  $\mathbf{M}$  par moyenne sur la variable rapide  $\boldsymbol{\xi}$ ). La principale particularité de ce problème limite est de faire intervenir une loi non linéaire (à double échelle) modifiée comportant un opérateur non local en la variable  $\boldsymbol{\xi}$  (formule (9.12) et définition 9.1). Dans le cas d'une périodicité unidimensionnelle, le problème limite prend une forme simplifiée (système (9.9)). Après quelques rappels sur la théorie de la convergence à double échelle (section 9.3) nous traitons en détails le cas des milieux laminaires 1D et 2D (voir hypothèse 9.1). Nous énonçons au paragraphe 9.4.1 les deux principaux résultats de ce chapitre, à savoir un résultat d'existence et unicité pour le problème homogénéisé (théorème 9.5) et le résultat de convergence (théorème 9.6) où nous mettons également en évidence les correcteurs permettant d'énoncer des résultats de convergence (double échelle) forte. Les paragraphes 9.4.2 à 9.4.6 sont consacrés à la preuve des théorèmes 9.5 et 9.6 qui fait largement appel aux techniques développées dans le chapitre 2. La preuve du théorème de convergence utilise la théorie de convergence double échelle qui amène de façon naturelle au problème homogénéisé (Etape 1). Elle repose ensuite sur deux lemmes essentiels, le lemme 9.2 où on voit apparaître l'opérateur non local de moyenne  $S_{\parallel}$  et le lemme 9.3 qui garantit -c'est là une particularité du modèle laminaire- que la solution  $\mathbf{M}$  de la loi non linéaire modifiée est bien une fonction admissible au sens de la convergence double échelle. (...suite à la page suivante)

**Résumé : (suite)**

Au paragraphe 9.5, nous abordons la généralisation au cas laminaire 3D qui fait largement appel aux techniques développées par Joly-Metivier-Rauch dans leurs travaux [27]. Nous expliquerons pourquoi, pour des raisons purement techniques nous devons nous limiter au cas où la fonction  $\varepsilon(\mathbf{x})$  est constante. Dans ce cas on peut faire apparaître à partir des équations de Maxwell l'équation des ondes 3D à coefficients constants et utiliser alors une inégalité de type Strichartz (lemme 9.9). Finalement au paragraphe 9.6 nous tentons d'expliquer les difficultés qui restent à surmonter pour faire la preuve dans la cas non laminaire.

## 9.1 Modèle mathématique de départ

La dimension d'espace sera désignée par  $n$  ( $n \leq 3$ ) et  $Y = [0, 1]^m$  représentera dans tout ce qui suit la cellule de périodicité unité dans  $\mathbb{R}^m$  avec  $m \leq n$ . Pour tout vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  avec  $N \geq m$  on note  $\mathbf{x}_m$  les  $m$  premières composantes du vecteur  $\mathbf{x}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . Pour toute fonction  $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  définie sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m$  périodique par rapport à la variable  $\boldsymbol{\xi}$  de période  $Y$ , on note

$$(9.1) \quad \langle u \rangle : \mathbf{x} \longmapsto \int_Y u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi},$$

sa moyenne sur  $Y$ . Concernant les espaces fonctionnels, pour  $k$  entier ou  $k = \infty$ , on note  $C_{\#}^k(Y)$  l'ensemble des fonctions de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}^m$ , périodiques de période  $Y$ , et pour  $1 \leq p \leq \infty$ , on note  $L_{\#}^p(Y)$  l'ensemble des fonctions de  $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^m)$  périodiques de période  $Y$ . Pour  $k$  entier, l'espace  $H_{\#}^k(Y)$  désignera la fermeture dans  $H^k(Y)$  de l'espace  $C_{\#}^{\infty}(Y)$ .

On considère  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  destiné à contenir le support de l'aimantation et  $\delta > 0$  le petit paramètre caractérisant la taille de la périodicité du domaine. Pour tout temps  $T > 0$  on note  $\mathcal{Q}_T = \mathbb{R}^n \times (0, T)$  et  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ .

### 9.1.1 Le modèle simplifié sans le champ effectif

C'est le modèle pour lequel nous détaillerons l'étude mathématique. Il est formé par les équations

$$(9.2) \quad \begin{cases} \varepsilon^{\delta} \partial_t \mathbf{E}^{\delta} - \text{rot } \mathbf{H}^{\delta} = 0, & \mu_0 \partial_t (\mathbf{H}^{\delta} + \mathbf{M}^{\delta}) + \text{rot } \mathbf{E}^{\delta} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \\ (\mathbf{E}^{\delta}, \mathbf{H}^{\delta})|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$(9.3) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}^{\delta} = \mathcal{L}(\mathbf{M}^{\delta}, \mathbf{H}^{\delta}, \mathbf{x}, \mathbf{x}_m/\delta) \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \\ \mathbf{M}^{\delta}|_{t=0} = \mathbf{M}_0^{\delta} \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où l'on supposera l'existence d'une fonction scalaire positive  $\varepsilon_r(\boldsymbol{\xi})$  définie sur  $\mathbb{R}^m$  et d'une fonction vectorielle  $\mathbf{M}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , et à support contenu dans  $\Omega \times \mathbb{R}^m$ , périodiques par rapport à la variable  $\boldsymbol{\xi}$  de période  $Y$  telles que,

$$\varepsilon^{\delta}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0(1 + \varepsilon_r(\mathbf{x}_m/\delta) \mathbf{1}_{\Omega}(\mathbf{x})) \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_0^{\delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_m/\delta),$$

$\mathbf{1}_\Omega$  désignant la fonction indicatrice du domaine  $\Omega$ , et où  $\mathcal{L}$  est une fonction définie de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $Y$ -périodique par rapport à  $\boldsymbol{\xi}$  et vérifiant, pour presque tout  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,

$$(9.4) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{m}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3, \\ (ii) \quad & \mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{h} \geq 0, \quad \mathbf{m}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

De plus, on suppose que pour tout  $R > 0$ , il existe trois constantes  $C(R)$ ,  $C_1(R)$  et  $C_2(R)$  telles que, pour tout  $|\mathbf{m}| \leq R, |\mathbf{m}'| \leq R$ , pour tout  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{h}' \in \mathbb{R}^3$  et pour presque tout  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,

$$(9.5) \quad |\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| \leq C(R) |\mathbf{h}|,$$

$$(9.6) \quad \text{et} \quad |\mathcal{L}(\mathbf{m}', \mathbf{h}'; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| \leq C_1(R) |\mathbf{m}' - \mathbf{m}| |\mathbf{h}'| + C_2(R) |\mathbf{h}' - \mathbf{h}|.$$

**Remarque 9.1** *Nous traitons ici le cas sans conductivité :  $\sigma = 0$ . Il est bien connu (voir par exemple [40]) que lorsque  $\sigma \neq 0$ , le problème homogénéisé associé aux équations de Maxwell est intégro-différentiel en temps. Son étude ne rentre pas dans le cadre simplifié que nous considérons.*

### 9.1.2 Modèle avec champ effectif

La plupart des résultats que nous établirons sur le modèle simplifié s'étendent moyennant des difficultés purement techniques aux cas d'un modèle "plus physique" avec champ effectif. C'est d'ailleurs un cas particulier de ce type de modèle que nous étudierons plus en détail au chapitre 10.

Pour le modèle avec champ effectif, il suffit de remplacer l'équation (9.3) par

$$(9.7) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}^\delta = \mathcal{L}(\mathbf{M}^\delta, \mathbf{H}^\delta - \partial_{\mathbf{m}} \Phi(\mathbf{M}^\delta; \mathbf{x}, \mathbf{x}_m/\delta); \mathbf{x}, \mathbf{x}_m/\delta), \\ \mathbf{M}^\delta|_{t=0} = \mathbf{M}_0^\delta \end{cases}$$

où  $\Phi$  est une fonction définie de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^+$  avec :

- $\Phi$  est  $Y$  périodique par rapport à  $\boldsymbol{\xi}$ .
- $\Phi$  vérifie l'hypothèse 2.2 du chapitre 2 (en y remplaçant  $\mathbf{x}$  par le couple  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ).

## 9.2 Ecriture du problème homogénéisé

On se propose donc de montrer, lorsque la taille  $\delta$  de la périodicité tend vers 0, que la solution  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta, \mathbf{M}^\delta)$  du problème (9.2)-(9.3) converge dans un certain sens à préciser vers une limite  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M}^h)$ . Les équations vérifiées par cette limite qui sont à identifier constituent ce qu'on appellera le problème homogénéisé associé à (9.2)-(9.3). De façon classique, cette démarche comporte deux étapes.

- (i) Obtention formelle du modèle limite par la technique du développement asymptotique à double échelle.
- (ii) Justification mathématique de la convergence vers le modèle limite.

Comme c'est souvent le cas nous saurons mener à bien l'étape (i) dans des cas assez généraux mais ne saurons faire la justification rigoureuse (étape (ii)) que dans des cas particuliers (ce qui fera l'objet des sections suivantes).

Dans cette section nous nous contentons de donner la forme du problème limite sans détailler le développement à double échelle. Comme pour la phase de justification mathématique nous utiliserons la théorie de convergence à double échelle (voir section suivante) le calcul du développement asymptotique y sera implicitement développé.

La forme générale du problème limite ne peut pas s'écrire en terme des inconnues  $\mathbf{E}^h$ ,  $\mathbf{H}^h$  et  $\mathbf{M}^h$ . Il faut également introduire une inconnue intermédiaire  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi})$  à partir de laquelle on aura

$$\mathbf{M}^h(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{M}(\mathbf{x}, t, \cdot) \rangle.$$

On sait alors écrire un problème limite pour le triplet  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M})$

$$(9.8) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^h \partial_t \mathbf{E}^h - \text{rot } \mathbf{H}^h = 0, & \mu_0 \partial_t (\mathbf{H}^h + \langle \mathbf{M} \rangle) + \text{rot } \mathbf{E}^h = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \\ (\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$(9.9) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}^h - P_{\parallel}^{\#} \mathbf{M} - \partial_m \Phi(\mathbf{M}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}); \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y \\ \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times Y \end{cases}$$

où comme c'est bien connue  $\underline{\underline{\varepsilon}}^h$  n'est plus un scalaire mais une matrice de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , appelée matrice des coefficients homogénéisés (où la H-limite) associée à la suite de matrices  $\varepsilon^\delta Id$ , et où, c'est ce qui est vraiment nouveau ici, l'opérateur  $P_{\parallel}^{\#}$  est de type pseudo-différentiel non local par rapport à la variable  $\boldsymbol{\xi}$  ( $\mathbf{x}$  jouant le rôle d'un paramètre). De manière classique (voir [40]), la détermination de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^h$  nécessite la résolution de  $m$  problèmes cellulaires : si pour  $j = 1, \dots, m$  on considère,  $\varphi_j \in H_{\#}^1(Y)$  solution de

$$(9.10) \quad \begin{cases} \text{div}_{\boldsymbol{\xi}} ((1 + \varepsilon_r) \nabla_{\boldsymbol{\xi}} (\varphi_j - \xi_j)) = 0 \quad \text{dans } Y \\ \langle \varphi_j \rangle = 0 \end{cases}$$

alors, en notant  $\delta_{i,j}$  le symbole de Kronecker,

$$(9.11) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}_{i,j}^h(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \langle (1 + \varepsilon_r) (\delta_{i,j} - \partial_{\xi_i} \varphi_j) \rangle \mathbf{1}_{\Omega}(\mathbf{x}) + \varepsilon_0 (1 - \mathbf{1}_{\Omega}(\mathbf{x})) \quad \text{si } 1 \leq i, j \leq m \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_{i,j}^h(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 (1 + \langle \varepsilon_r \rangle \mathbf{1}_{\Omega}(\mathbf{x})) \delta_{i,j} \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part l'opérateur  $P_{\parallel}^{\#}$  est défini par

$$(9.12) \quad (P_{\parallel}^{\#} \mathbf{M})(\mathbf{x}, \cdot) = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \text{div}_{\boldsymbol{\xi}} (\mathcal{N}_{\#} \mathbf{M}(\mathbf{x}, \cdot))$$

où  $\mathcal{N}_{\#}$  est l'opérateur potentiel newtonien périodique défini par

**Définition 9.1** Pour toute fonction  $\chi \in L^2(Y)$ ,  $\mathcal{N}_{\#} \chi \in H_{\#}^1(Y)$ ,

$$(9.13) \quad \begin{cases} \Delta \mathcal{N}_{\#} \chi = \chi - \langle \chi \rangle \quad \text{dans } Y \\ \langle \mathcal{N}_{\#} \chi \rangle = 0. \end{cases}$$

**Remarque 9.2** On notera que  $P_{\parallel}^{\#}$  n'est autre que la projection orthogonale dans  $L^2(Y)^m$  des fonctions à  $\text{rot}_{\boldsymbol{\xi}}$  nul.

Nous rappelons que, étant donnée que  $\langle \chi - \langle \chi \rangle \rangle = 0$ , le problème (9.13) admet une solution unique dans  $H_{\#}^1(Y)$  et permet donc de définir l'opérateur linéaire  $\mathcal{N}_{\#}$ . Si on pose pour tout multi-indice  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathcal{Z}^m$ ,

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi}) = \exp(i2\pi \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m,$$

alors la famille  $(\mathbf{e}_{\mathbf{k}})$  est une base hilbertienne  $L^2(Y)$ , et nous avons pour  $\chi \in L_{\#}^2(Y)$ ,

$$\chi - \langle \chi \rangle = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} C_{\mathbf{k}}(\chi) \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \quad \text{où } C_{\mathbf{k}}(\chi) = \int_Y (\chi(\boldsymbol{\xi}) - \langle \chi \rangle) \overline{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\xi},$$

d'où la définition équivalente de  $\mathcal{N}_{\#}\chi$

$$(9.14) \quad \mathcal{N}_{\#}\chi = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{C_{\mathbf{k}}(\chi)}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}$$

qui montre en particulier que  $\mathcal{N}_{\#}\chi \in H_{\#}^2(Y)$ .

Par la formule (9.14) on constate également (en utilisant Fubini) que  $P_{\parallel}^{\#}$  est un opérateur continue de  $L^2(\mathbb{R}^n; L_{\#}^2(Y))^3$  dans lui même.

### Le cas laminaire

Nous dirons qu'on a affaire à un problème laminaire lorsque  $m = 1$  et lorsque les caractéristiques de la couche ferromagnétique sont constantes par morceaux par rapport à la variable  $\xi$  (voir définition 9.3). Ce cas particulier est important à double titre.

◇ C'est dans ce cas que nous saurons mener complètement la preuve de convergence.

◇ Le problème homogénéisé prend une forme explicite plus simple. En effet, dans ce cas on constate d'abord que le tenseur  $\underline{\underline{\varepsilon}}^h$  est diagonal et est défini par

$$(9.15) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^h(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \left( \mathbf{1}_{\Omega}(\mathbf{x}) \left( \underline{\underline{\varepsilon}}^h \vec{\mathbf{e}}_x \otimes \vec{\mathbf{e}}_x + \vec{\varepsilon}^h (\vec{\mathbf{e}}_y \otimes \vec{\mathbf{e}}_y + \vec{\mathbf{e}}_z \otimes \vec{\mathbf{e}}_z) \right) + (1 - \mathbf{1}_{\Omega}(\mathbf{x})) \right),$$

où on a posé :  $\underline{\underline{\varepsilon}}^h = \langle (1 + \varepsilon_r)^{-1} \rangle^{-1}$  et  $\vec{\varepsilon}^h = \langle (1 + \varepsilon_r) \rangle$ . D'autre part, pour  $m = 1$ , on vérifie aisément que  $(\boldsymbol{\xi} \equiv \xi \in \mathbb{R})$ ,

$$P_{\parallel}^{\#} \mathbf{M} = \partial_{\xi} (\partial_{\xi} (\mathcal{N}_{\#} \mathbf{M})_x) \vec{\mathbf{e}}_x = \partial_{\xi \xi} (\mathcal{N}_{\#} \mathbf{M}_x) \vec{\mathbf{e}}_x = (\mathbf{M}_x - \langle \mathbf{M}_x \rangle) \vec{\mathbf{e}}_x = -\Pi_x (\langle \mathbf{M} \rangle - \mathbf{M}),$$

où  $\Pi_x$  est l'opérateur de projection dans  $\mathbb{R}^3$  sur la droite vectorielle dirigée par  $\vec{\mathbf{e}}_x$ . On voit donc ici l'effet de l'orientation des couches du milieu laminaire. L'équation (9.9) se réécrit donc,

$$(9.16) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}^h + \Pi_x (\langle \mathbf{M} \rangle - \mathbf{M}) - \partial_{\mathbf{m}} \Phi(\mathbf{M}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}); \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) & \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y \\ \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times Y \end{cases}$$

**Remarque 9.3** Pour  $m \geq 2$  nous ne possédons pas une expression explicite de l'opérateur  $P_{\parallel}^{\#}$  similaire au cas  $m = 1$ . Cependant, si la fonction  $\mathbf{M} \in L^2(\mathbb{R}^n; L_{\#}^2(Y))^3$  (à variables séparées) se met sous la forme :

$$(9.17) \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\ell=1}^L \mathbf{M}^{\ell}(\mathbf{x}) \chi_{\ell}(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{p.p. } (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$



pour un certain entier  $L$ , où pour chaque  $\ell$ ,  $\mathbf{M}^\ell \in L^2(\mathbb{R}^n)^3$  et  $\chi_\ell \in L^2_\#(Y)$ , on constate que

$$(9.18) \quad P_{\parallel}^\# \mathbf{M} = \nabla_\xi \operatorname{div}_\xi \sum_{\ell=1}^L \mathbf{M}^\ell \mathcal{N}_\# \chi_\ell = \sum_{\ell=1}^L \nabla_\xi \left( \mathbf{M}^\ell \cdot \nabla_\xi \mathcal{N}_\# \chi_\ell \right)$$

$P_{\parallel}^\# \mathbf{M}$  est donc également à variables séparées et sa détermination nécessite la résolution de  $L$  problèmes cellulaires du type (9.13).

**Remarque 9.4** Pour  $m \geq 2$ , on remarque par contre que si  $\mathbf{M}$  est constante par morceaux, alors  $P_{\parallel}^\# \mathbf{M}$  n'est pas en général une fonction constante par morceaux... C'est la l'une des difficultés du cas  $m \geq 2$ ...

### 9.3 Rappels sur la notion de convergence double échelle

Cette notion a été introduite par Nguetseng [36] et Allaire [2] afin de donner un cadre mathématique adéquat à la démarche heuristique fréquemment utilisée dans les problèmes d'homogénéisation périodique, basée sur un développement asymptotique à double échelle (voir [8] et également [40] pour une présentation de cette méthode). Bien qu'elle ne constitue pas un ingrédient essentiel pour pouvoir mener à bien notre étude de convergence vers le problème homogénéisé, nous pensons que cette notion permet une meilleure compréhension des idées de la démonstration.

**n° Notation :** Pour toute fonction  $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  défini sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m$  périodique par rapport à la variable  $\boldsymbol{\xi}$  de période  $Y$ , on notera

$$(9.19) \quad (u)^\delta : \mathbf{x} \longmapsto u\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}_m}{\delta}\right)$$

Nous attirons l'attention du lecteur que par la suite les notations  $u^\delta$  et  $(u)^\delta$  n'auront pas généralement les mêmes significations ...

Le théorème au coeur de cet outil s'énonce (voir par exemple [2]) :

**Théorème 9.1** Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq m$ , et  $(u_\delta)$  une suite bornée de  $L^2(\mathcal{O})$ . Il existe alors une fonction  $u_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in L^2(\mathcal{O} \times Y)$ , telle que, à une sous suite extraite près,

$$(9.20) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{O}} u_\delta(\mathbf{x}) (\psi)^\delta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \, d\mathbf{x}$$

pour toute fonction test  $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}; C^\infty_\#(Y))$ . Lorsque (9.20) a lieu, on dit que la suite  $(u_\delta)$  converge à double échelle vers la fonction profil  $u_0$ .

Un exemple de convergence double échelle, qui généralise en quelque sorte le résultat bien connu de convergence faible d'une fonction  $\delta$  périodique vers sa moyenne est fourni par le résultat suivant :

$$(9.21) \quad \text{Si } \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}; C^\infty_\#(Y)) \text{ alors } (\psi)^\delta \longrightarrow \psi \text{ double échelle.}$$

Ce résultat constitue en fait un ingrédient essentiel à la preuve du théorème 9.1.

**Remarque 9.5** Remarquer qu'il y a unicité de la limite double échelle. Le profil  $u_0$  dépend de la suite  $u_\delta$ , de  $m$  et de  $Y$ .

**Remarque 9.6** Dans sa version originale, le théorème 9.1 est énoncé avec  $m = N$ . Mais en prenant dans le cas  $m \leq N$  une fonction test  $\psi$  ne dépendant de  $\xi$  que via  $m$  composantes, on déduit immédiatement l'énoncé adopté ici.

**Remarque 9.7** L'espace  $L^2$  du théorème 9.1 peut être remplacé par  $L^p$  avec  $1 < p \leq \infty$ .

On a alors le lien suivant entre limite faible et limite double échelle

**Théorème 9.2** Soit  $(u_\delta)$  une suite de fonctions de  $L^2(\mathcal{O})$  qui converge double échelle vers la fonction profil  $u_0 \in L^2(\mathcal{O} \times Y)$ . Alors la suite  $(u_\delta)$  converge faiblement dans  $L^2(\mathcal{O})$  vers  $u \equiv \langle u_0 \rangle$ . De plus on a

$$(9.22) \quad \liminf_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\|_{L^2(\mathcal{O})} \geq \|u_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times Y)} \geq \|u\|_{L^2(\mathcal{O})}.$$

L'égalité  $u \equiv \langle u_0 \rangle$  s'obtient facilement en prenant la fonction test  $\psi$  dans (9.20) indépendante de  $\xi$ . L'inégalité  $\|u_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times Y)} \geq \|u\|_{L^2(\mathcal{O})}$  découle immédiatement de la définition de  $\langle u_0 \rangle$ . L'inégalité  $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\|_{L^2(\mathcal{O})} \geq \|u_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times Y)}$  s'obtient en prenant dans (9.20) une suite de fonctions tests  $(\psi_k)$  convergeant dans  $L^2(\mathcal{O} \times Y)$  vers  $u_0$ .

L'inégalité (9.22) montre que la convergence double échelle est intermédiaire entre la convergence forte pour laquelle  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\|_{L^2(\mathcal{O})} = \|u\|_{L^2(\mathcal{O})}$  et la convergence faible pour laquelle  $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\|_{L^2(\mathcal{O})} \geq \|u\|_{L^2(\mathcal{O})}$ .

On peut affiner la notion de convergence double échelle en caractérisant les cas où on a l'égalité  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\|_{L^2(\mathcal{O})} = \|u_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times Y)}$ . Pour cela nous avons besoin d'introduire d'abord le concept de fonction admissible.

**Définition 9.2 (Fonction admissible)** On appelle fonction admissible toute fonction  $\psi \in L^2(\mathcal{O}; L^2_\#(Y))$  telle que  $(\psi)^\delta \in L^2(\mathcal{O})$ ,

$$(\psi)^\delta \longrightarrow \psi \text{ double échelle et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \|(\psi)^\delta\|_{L^2(\mathcal{O})} = \|\psi\|_{L^2(\mathcal{O} \times Y)}.$$

Par exemple le résultat (9.21) nous dit aussi que toute fonction de  $\mathcal{D}(\mathcal{O}; C^\infty_\#(Y))$  est admissible (prendre  $u_\delta = (\psi)^\delta$  dans (9.20)). Typiquement, on montre qu'une fonction  $\psi(\mathbf{x}, \xi)$  est admissible dès qu'elle est continue par rapport à un de ses arguments. Les deux exemples d'espaces de fonctions admissibles que nous retenons pour la suite sont  $L^2(\mathcal{O}; C^0_\#(Y))$  et  $C^0_c(\overline{\mathcal{O}}; L^\infty_\#(Y))$  : ensemble des fonctions continues à supports compacts de  $\mathcal{O}$  dans  $L^\infty_\#(Y)$  (voir [2]). Notons par contre qu'une fonction quelconque de  $L^2(\mathcal{O}; L^2_\#(Y))$  n'est pas admissible en général (voir l'annexe de [2] pour des contres exemples).

Nous montrons alors :

**Théorème 9.3** Soit  $u_\delta$  et  $u_0$  comme dans le théorème 9.1, alors la convergence (9.20) a lieu pour toute fonction admissible  $\psi$  au sens de la définition 9.2.

*Preuve.* Considérons une fonction admissible  $\psi \in L^2(\mathcal{O}; L^2_\#(Y))$  et une suite  $(\psi_k)$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{O}; C^\infty_\#(Y))$  qui converge fortement dans  $L^2(\mathcal{O} \times Y)$  vers  $\psi$ . En utilisant les décompositions

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} u_\delta (\psi)^\delta d\mathbf{x} &= \int_{\mathcal{O}} u_\delta (\psi_k)^\delta d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{O}} u_\delta (\psi - \psi_k)^\delta d\mathbf{x} \\ \text{et } \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 \psi d\xi d\mathbf{x} &= \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 \psi_k d\xi d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 (\psi - \psi_k) d\xi d\mathbf{x} \end{aligned}$$

on constate que

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathcal{O}} u_{\delta} (\psi)^{\delta} d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 \psi d\xi d\mathbf{x} \right| &\leq \left| \int_{\mathcal{O}} u_{\delta} (\psi_k)^{\delta} d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 \psi_k d\xi d\mathbf{x} \right| + \\
 &\quad \left| \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 (\psi - \psi_k) d\xi d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\mathcal{O}} u_{\delta} (\psi - \psi_k)^{\delta} d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \left| \int_{\mathcal{O}} u_{\delta} (\psi_k)^{\delta} d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 \psi_k d\xi d\mathbf{x} \right| + \\
 &\quad \|u_0\|_{L^2} \|\psi - \psi_k\|_{L^2(\mathcal{O} \times Y)} + C \left\| (\psi - \psi_k)^{\delta} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}
 \end{aligned}$$

où  $C$  est un majorant de la suite  $\|u_{\delta}\|_{L^2(\mathcal{O})}$ . Mais en écrivant que

$$\left\| (\psi - \psi_k)^{\delta} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 = \left\| (\psi)^{\delta} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 - 2 \int_{\mathcal{O}} (\psi)^{\delta} (\psi_k)^{\delta} d\mathbf{x} + \left\| (\psi_k)^{\delta} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2$$

nous constatons, du fait que  $\psi$  constitue une fonction admissible, que

$$(9.23) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| (\psi - \psi_k)^{\delta} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 = \|\psi - \psi_k\|_{L^2(\mathcal{O} \times Y)}^2$$

Ainsi, en faisant tendre  $\delta$  vers 0,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{O}} u_{\delta} (\psi)^{\delta} d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 \psi d\xi d\mathbf{x} \right| \leq (\|u_0\|_{L^2} + C) \|\psi - \psi_k\|_{L^2(\mathcal{O} \times Y)}$$

Ce qui permet de conclure en passant à limite en  $k$ . □

Nous avons alors de manière immédiate,

**Théorème 9.4** Soit  $u_0 \in L^2(\mathcal{O}; L^2_{\#}(Y))$  une fonction admissible et  $(u_{\delta})$  une suite de  $L^2(\mathcal{O})$ . Les assertions (a) et (b) sont équivalentes :

$$(a) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| u_{\delta} - (u_0)^{\delta} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} = 0$$

$$(b) \quad u_{\delta} \text{ converge à double échelle vers } u_0 \text{ et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_{\delta}\|_{L^2(\mathcal{O})} = \|u_0\|_{L^2(\mathcal{O} \times Y)}.$$

*Preuve.* (a)  $\Rightarrow$  (b) : Soit une fonction test  $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}; C^{\infty}(Y))$ ,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathcal{O}} u_{\delta} (\psi)^{\delta} d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 \psi d\xi d\mathbf{x} \right| &\leq \left| \int_{\mathcal{O}} (u_{\delta} - (u_0)^{\delta}) (\psi)^{\delta} d\mathbf{x} \right| + \\
 &\quad \left| \int_{\mathcal{O}} (u_0)^{\delta} (\psi)^{\delta} d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 (\psi)^{\delta} d\xi d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \left\| u_{\delta} - (u_0)^{\delta} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} \left\| (\psi)^{\delta} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} + \\
 &\quad \left| \int_{\mathcal{O}} (u_0)^{\delta} (\psi)^{\delta} d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 (\psi)^{\delta} d\xi d\mathbf{x} \right|
 \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 car  $u_0$  est une fonction admissible et donc  $(u_0)^{\delta}$  converge double échelle vers  $u_0$ , et le premier terme converge vers 0 par hypothèse puisque  $\left\| (\psi)^{\delta} \right\|_{L^2(\mathcal{O})}$  est borné.

(b)  $\Rightarrow$  (a) : En développant

$$\|u_\delta - (u_0)^\delta\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 = \|u_\delta\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 - 2 \int_{\mathcal{O}} u_\delta (u_0)^\delta d\mathbf{x} + \|(u_0)^\delta\|_{L^2(\mathcal{O})}^2$$

nous concluons de manière immédiatement puisque d'après le théorème 9.3, on peut utiliser  $u_0$  comme fonction test et donc

$$\int_{\mathcal{O}} u_\delta (u_0)^\delta d\mathbf{x} \rightarrow \int_{\mathcal{O}} \int_Y u_0 u_0 d\xi d\mathbf{x}.$$

□

La convergence (a) est l'équivalent "double échelle" de la convergence forte usuelle, que l'on retrouve dès que  $u_0$  est indépendant de  $\xi$ . Si (a) tient lieu on dit que nous avons une convergence double échelle forte. Réciproquement, si  $u$  converge fortement vers  $u_0$  alors  $u$  converge à double échelle fortement vers  $u_0$ .

### 9.3.1 A propos des fonctions admissibles

Les espaces de fonctions admissibles  $L^2(\mathcal{O}; C_{\#}^0(Y))$  et  $C_c^0(\overline{\mathcal{O}}; L_{\#}^\infty(Y))$  ne sont pas tout à fait adaptés à notre étude, à cause de l'hypothèse de continuité. C'est pour cela que nous allons spécifier d'autres exemples (de fonctions admissibles) où cette hypothèse est relâchée.

**Définition 9.3** Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ ,  $N \geq m$ , et  $u \in L^p(\mathcal{O}, L_{\#}^\infty(Y))$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Nous dirons que  $u$  est à **variables séparées** lorsque  $u$  s'écrit sous la forme

$$(9.24) \quad u(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=0}^K g_i(\mathbf{x}) \chi_i(\xi) \quad p.p. \quad (\mathbf{x}, \xi) \in \mathcal{O} \times Y$$

pour un certain  $K$  entier,  $g_i \in L^p(\mathcal{O})$  et  $\chi_i \in L_{\#}^\infty(Y)$  avec  $\text{supp } \chi_i \cap \text{supp } \chi_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ . La fonction  $u$  est dite **constante par morceaux** lorsque chaque fonction  $\chi_i$  coïncide avec la fonction caractéristique d'un ouvert de  $Y$ .

**Définition 9.4** Toute fonction vectorielle  $\mathbf{u} \in L^p(\mathcal{O}, L_{\#}^\infty(Y))^3$  est dite à **variables séparées** (resp. **constante par morceaux**) lorsque chacune de ses composantes est une fonction à variables séparées (resp. constante par morceaux).

Nous avons alors :

**Lemme 9.1** Toute fonction à variables séparées  $u \in L^2(\mathcal{O}, L_{\#}^\infty(Y))$  est admissible au sens de la définition 9.2.

*Preuve.* On suppose donc que  $u$  est de la forme (9.24) où les fonctions  $g_i \in L^2(\mathcal{O})$  et  $\chi_i \in L_{\#}^\infty(Y)$ . Nous rappelons le résultat classique (voir par exemple l'annexe de [6]), sur les fonctions oscillantes : pour toute fonction  $\chi \in L_{\#}^\infty(Y)$ .

$$(9.25) \quad (\chi)^\delta \rightharpoonup \langle \chi \rangle \quad \text{dans } L^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ faible} - \star.$$

Or, par la définition d'une fonction à variables séparées,  $(u)^\delta$  est mesurable et, comme les supports de  $(\chi_i)^\delta$  sont disjoints,

$$(9.26) \quad \int_{\mathcal{O}} |(u)^\delta|^2 d\mathbf{x} = \sum_{i=0}^K \int_{\mathcal{O}} g_i^2 (\chi_i^2)^\delta d\mathbf{x} \rightarrow \sum_{i=0}^K \int_{\mathcal{O}} g_i^2 \langle \chi_i^2 \rangle d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \int_Y |u|^2 d\xi d\mathbf{x}$$

Il reste à montrer que  $(u)^\delta$  converge double échelle vers  $u$ . Par linéarité de la convergence double échelle on peut se restreindre au cas  $u = g\chi$  où  $g \in L^2(\mathcal{O})$  et  $\chi \in L^\infty_\#(Y)$ . Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}; C^\infty_\#(Y))$ , le produit  $\chi\psi \in C^0_c(\overline{\mathcal{O}}; L^\infty_\#(Y))$  est donc une fonction admissible. Par le lien entre la convergence double échelle et la convergence forte nous avons en particulier que la suite  $(\chi\psi)^\delta$  converge faiblement dans  $L^2(\mathcal{O})$  vers  $\langle \chi\psi \rangle$ . Par conséquent

$$\int_{\mathcal{O}} (u)^\delta (\psi)^\delta d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} g (\chi\psi)^\delta d\mathbf{x} \rightarrow \int_{\mathcal{O}} g \langle \chi\psi \rangle d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \int_Y u \psi d\xi d\mathbf{x}$$

□

## 9.4 Justification du problème limite dans le cas laminaire avec $n \leq 2$

On se place dans cette section dans le cas  $\boxed{n \leq 2 \text{ et } m = 1}$  soit  $Y = [0, 1]$ . Par rapport aux notations de la section 9.3 on désignera  $x \equiv \mathbf{x}_1$  et  $\xi \equiv \xi$ .

Nous nous limiterons pour la preuve au cas simplifié sans le champ effectif mais le lecteur se convaincra aisément que nos résultats s'étendent au cas où  $\Phi \neq 0$  modulo des hypothèses adéquates sur la dépendance de  $\Phi$  par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $\xi$  (cf. remarque 9.15). Par ailleurs dans ce qui suit pour alléger les notations nous ne ferons pas mention explicite de la dépendance de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $\xi$ .

### 9.4.1 Enoncé des résultats

La convergence sera montrée sous les hypothèses suivantes

**Hypothèse 9.1** *On suppose que :*

1. Il existe une fonction scalaire positive  $\varepsilon_r \in L^\infty_\#(Y)$  et une fonction vectorielle  $\mathbf{M}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n; L^\infty_\#(Y))^3$  constante par morceaux (au sens de la définition 9.3) et à support contenu dans  $\Omega \times \mathbb{R}$ , telles que, p.p.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\varepsilon^\delta(\mathbf{x}) = \varepsilon_0(1 + \varepsilon_r(x/\delta) \mathbf{1}_\Omega(\mathbf{x})) \equiv \varepsilon(\mathbf{x}, x/\delta) \text{ et } \mathbf{M}_0^\delta(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_0(\mathbf{x}, x/\delta),$$

où  $\varepsilon_0$  est une constante strictement positive et  $\mathbf{1}_\Omega$  est la fonction caractéristique de  $\Omega$ .

2. Soit  $\{\mathcal{I}_i\}$  l'ensemble des intervalles sur lesquels  $\mathbf{M}_0(\mathbf{x}, \cdot)$  est constant, alors pour chaque  $i$ , il existe une fonction  $\mathcal{L}_i$  telle que  $\mathcal{L}(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x}, \xi) = \mathcal{L}_i(\mathbf{m}, \mathbf{h}; \mathbf{x})$ .

3.  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  sont dans  $H(\text{rot}, \mathbb{R}^n)$  avec :  $\text{div}(\mathbf{M}_0^\delta + \mathbf{H}_0) = 0$  pour tout  $\delta > 0$ .

**Remarque 9.8** *D'après le lemme 9.1, la fonction  $\mathbf{M}_0$  constitue bien une fonction admissible. On déduit en particulier que  $\mathbf{M}_0^\delta$  admet comme fonction profil  $\mathbf{M}_0$  et converge faiblement dans  $L^2(\mathbb{R}^2)^3$  vers  $\langle \mathbf{M}_0 \rangle$ .*

On vérifie de manière immédiate que sous l'hypothèse 9.1, le théorème 2.3 (chapitre 2, page 37), sur l'existence et l'unicité des solutions fortes globales aux problème (9.2)-(9.3), s'applique.

### Le problème homogénéisé

Nous rappelons que les équations du problème homogénéisé portent sur trois inconnues vectorielles  $\mathbf{E}^h$ ,  $\mathbf{H}^h$  et  $\mathbf{M}$  définies respectivement sur  $\mathcal{Q}_T$ ,  $\mathcal{Q}_T$  et  $\mathcal{Q}_T \times Y$ , et s'écrivent :

$$(9.27) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^h \partial_t \mathbf{E}^h - \text{rot } \mathbf{H}^h = 0, & \mu_0 \partial_t (\mathbf{H}^h + \langle \mathbf{M} \rangle) + \text{rot } \mathbf{E}^h = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \\ (\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$(9.28) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}^h + \Pi_x(\langle \mathbf{M} \rangle - \mathbf{M})) \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y \\ \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times Y \end{cases}$$

où  $\underline{\underline{\varepsilon}}^h$  est donnée par (9.15) et où  $\Pi_x$  désigne la projection orthogonale sur la droite vectorielle dirigée par  $\vec{e}_x$ .

**Définition 9.5 (solution forte)** *On appelle solution forte sur  $\mathcal{Q}_T$  du problème homogénéisé (9.27)-(9.28) tout triplet de fonctions  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M})$  vérifiant :*

$$\begin{cases} (\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \partial_t \mathbf{E}^h, \partial_t \mathbf{H}^h) \in \{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)\}^4 \\ (\mathbf{M}, \partial_t \mathbf{M}) \in \{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3)\}^2 \end{cases}$$

et satisfaisant les équations (9.27)-(9.28) p.p.

Nous avons alors le théorème d'unicité

**Théorème 9.5** *Sous l'hypothèse 9.1 il y a unicité de la solution forte du problème homogénéisé (9.27)-(9.28).*

et le théorème de convergence (qui assure par la même occasion l'existence de solutions fortes au problème homogénéisé)

**Théorème 9.6** *Sous les hypothèses 9.1, pour tout  $T > 0$ , la suite  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta, \mathbf{M}^\delta)$  converge dans  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)^3$  faible- $\star$  vers  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M}^h)$  où  $\mathbf{M}^h = \langle \mathbf{M} \rangle$  et où  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M})$  est l'unique solution forte sur  $\mathcal{Q}_T$  de (9.27)-(9.28). De plus*

$$(9.29) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \mathbf{M}^\delta - (\mathbf{M})^\delta \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))} = 0$$

$$(9.30) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \mathbf{H}^\delta - \left( \mathbf{H}^h + \Pi_x(\langle \mathbf{M} \rangle - (\mathbf{M})^\delta) \right) \right\|_{L^2(\mathcal{Q}_T)} = 0$$

**Remarque 9.9** *Nous montrons également que  $\mathbf{M}$  est une fonction constante par morceaux, donc admissible. Par conséquent les convergences (9.29) et (9.30) signifient en particulier qu'on a une convergence à double échelle forte des suites  $(\mathbf{M}^\delta)$  et  $(\mathbf{H}^\delta)$  vers leurs profils respectifs  $\mathbf{M}$  et  $(\mathbf{H}^h + \Pi_x(\langle \mathbf{M} \rangle - \mathbf{M}))$ .*

### 9.4.2 Preuve de l'unicité

Nous montrons le théorème 9.5. La preuve repose sur la démarche utilisée pour prouver l'unicité de la solution forte du problème (9.2)-(9.3) (voir chapitre 2 page 51). Nous aurons besoin en l'occurrence des projecteurs  $P_{\parallel}$  et  $P_{\perp}$  (comme définis page 42) associés à la décomposition orthogonale classique de  $L^2(\mathbb{R}^n)^3$

$$L^2(\mathbb{R}^2)^3 = L_{\parallel}^2(\mathbb{R}^n) \oplus L_{\perp}^2(\mathbb{R}^n)$$

avec :  $L_{\parallel}^2(\mathbb{R}^2) = \{\mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}^2)^3 / \text{rot } \mathbf{v} = 0\}$  et  $L_{\perp}^2(\mathbb{R}^2) = \{\mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}^2)^3 / \text{div } \mathbf{v} = 0\}$ .

$$(9.31) \quad P_{\parallel} : L^2(\mathbb{R}^n)^3 \longrightarrow L_{\parallel}^2(\mathbb{R}^n) \text{ et } P_{\perp} : L^2(\mathbb{R}^n)^3 \longrightarrow L_{\perp}^2(\mathbb{R}^n).$$

Notons par ailleurs que l'hypothèse 9.1 implique en particulier

$$(9.32) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^h \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)^9 \text{ et } \varepsilon_0 |\boldsymbol{\xi}|^2 \leq (\boldsymbol{\xi} \underline{\underline{\varepsilon}}^h \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{M}_0 \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times Y)^3 \cap L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3, \\ \text{div}(\mathbf{H}_0 + \langle \mathbf{M}_0 \rangle) = 0. \end{cases}$$

La dernière relation s'obtient en passant à la limite faible dans  $\text{div}(\mathbf{M}_0^{\delta} + \mathbf{H}_0) = 0$ , compte tenu de la remarque 9.8. Les conditions 9.32 constituent en fait les "véritables" hypothèses pour avoir l'unicité de la solution forte.

Considérons donc pour un temps fini  $T$  donné, deux solutions fortes  $(\mathbf{E}_1^h, \mathbf{H}_1^h, \mathbf{M}^1)$  et  $(\mathbf{E}_1^h, \mathbf{H}_2^h, \mathbf{M}^2)$  du problème (9.27)-(9.28). On remarque d'abord qu'en vertu de la propriété (9.4)(i) nous avons pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(9.33) \quad \left| \mathbf{M}^1(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}) \right| = \left| \mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}) \right| = |\mathbf{M}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| \quad p.p. (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times Y$$

Notons

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{E}_1^h - \mathbf{E}_2^h, \quad \mathbf{h} = \mathbf{H}_1^h - \mathbf{H}_2^h, \quad \mathbf{m} = \mathbf{M}^1 - \mathbf{M}^2, \\ &> = \mathcal{L}(\mathbf{M}^1, \mathbf{H}_1^h + \Pi_x(\langle \mathbf{M}^1 \rangle - \mathbf{M}^1)) - \mathcal{L}(\mathbf{M}^2, \mathbf{H}_2^h + \Pi_x(\langle \mathbf{M}^2 \rangle - \mathbf{M}^2)) \end{aligned}$$

Ces champs vérifient (on remplace  $\langle \partial_t \mathbf{m} \rangle$  par  $\langle > \rangle$ ),

$$(9.34) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^h \partial_t \mathbf{e} - \text{rot } \mathbf{h} = 0, & \text{dans } \mathcal{Q}_T \\ \mu_0 \partial_t \mathbf{h} + \text{rot } \mathbf{e} = -\mu_0 \langle > \rangle, & \text{dans } \mathcal{Q}_T \\ \partial_t \mathbf{m} = > & \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y \end{cases}$$

avec

$$(9.35) \quad (\mathbf{e}, \mathbf{h})|_{t=0} = (0, 0) \text{ dans } \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{m}|_{t=0} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \times Y.$$

Posons

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}^h \mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{e}(t) + \mu_0 \left( |\mathbf{h}(t)|^2 + \langle |\mathbf{m}(t)|^2 \rangle \right) \right) dx$$

En multipliant scalairement dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  la première équation de (9.34) par  $\mathbf{e}(t)$  et la deuxième équation par  $\mathbf{h}(t)$ , et scalairement dans  $L^2(\mathbb{R}^n \times Y)$  la troisième équation par  $\mu_0 \mathbf{m}(t)$ , on trouve en faisant la somme des trois et en appliquant la formule de Green,

$$(9.36) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= \mu_0 \int_{\mathbb{R}^n} (\langle \mathbf{m}(t) \cdot \mathbf{e}(t) \rangle - \mathbf{h}(t) \cdot \langle \mathbf{e}(t) \rangle) dx \\ &= \mu_0 \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y (\mathbf{m}(t) - \mathbf{h}(t)) \cdot \mathbf{e}(t) d\xi dx \end{aligned}$$

car  $\mathbf{h}$  est indépendant de  $\xi$ . Par ailleurs, d'après (9.6), et compte tenu de (9.33), il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  qui ne dépendent que de  $\|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$  telles que, p.p. dans  $\mathcal{Q}_T \times Y$ ,

$$|\mathbf{e}(t)| \leq C_1 |\mathbf{m}| \left| \mathbf{H}_1^h + \Pi_x(\langle \mathbf{M}^1 \rangle - \mathbf{M}^1) \right| + C_2 |\mathbf{h} + \Pi_x(\langle \mathbf{m} \rangle - \mathbf{m})|$$

et donc, en prenant la norme  $L^2(\mathbb{R}^n \times Y)$  tout en réutilisant (9.33) et en posant :

$$C_3 = 2C_1 \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty} + 2C_2,$$

on a p.p.  $t$

$$(9.37) \quad \|\mathbf{e}(t)\|_{L^2} \leq C_1 \left\| |\mathbf{m}(t)| \left| \mathbf{H}_1^h(t) \right| \right\|_{L^2} + C_2 \|\mathbf{h}(t)\|_{L^2} + C_3 \|\mathbf{m}(t)\|_{L^2}$$

Le seul terme gênant pour pouvoir majorer (de manière intéressante) la norme  $L^2$  de  $\mathbf{e}$  est  $|\mathbf{m}| \left| \mathbf{H}_1^h \right|$  du fait que  $\mathbf{H}_1^h$  n'est a priori pas borné en espace. C'est pourquoi nous allons user une fois de plus des deux lemmes 2.7 et 2.8 du chapitre 2. Grâce à la condition  $\operatorname{div}(\langle \mathbf{M}_0 \rangle + \mathbf{H}_0) = 0$  on déduit des équations (9.27) que  $\operatorname{div}(\langle \mathbf{M}^1 \rangle + \mathbf{H}_1^h) = 0$  ce qui nous donne la décomposition

$$\mathbf{H}_1^h = P_\perp \mathbf{H}_1^h - P_\parallel \langle \mathbf{M}^1 \rangle$$

Or pour presque tout  $t \in [0, T]$ , on a d'une part, par (9.33),

$$\|\langle \mathbf{M}^1(t) \rangle\|_{(L^\infty \cap L^2)(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{M}_0\|_{(L^\infty \cap L^2)(\mathbb{R}^n \times Y)} \equiv M_0$$

et d'autre part, en appliquant  $P_\perp$  à la première équation de 9.27 et en utilisant le fait que  $P_\perp$  et  $\operatorname{rot}$  commutent,  $\operatorname{rot} P_\perp \mathbf{H}_1^h(t) = P_\perp(\underline{\underline{\varepsilon}}^h \partial_t \mathbf{E}_1^h(t))$ , donc, comme  $\operatorname{div} P_\perp \mathbf{H}_1^h(t) = 0$ , pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\|P_\perp \mathbf{H}_1^h(t)\|_{H^1}^2 \leq \|\underline{\underline{\varepsilon}}^h \partial_t \mathbf{E}_1^h\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2 + \|\mathbf{H}_1^h\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2$$

L'application des deux lemmes 2.7 et 2.8 du chapitre 2 montre donc l'existence d'une constante  $C$  et d'une fonction  $\mathbf{H}_\rho^1 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)^3$  telles que pour p.p.  $t$ ,

$$\|\mathbf{H}_\rho^1\|_{L^\infty} \leq C \ln(\rho) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{H}_1^h(t) - \mathbf{H}_\rho^1\|_{L^2} \leq C/\rho,$$

pour tout réel  $\rho > 0$  assez grand (prendre  $\mathbf{H}_\rho^1 = S^\rho P_\perp \mathbf{H}_1^h - P_\parallel \langle \mathbf{M}^1 \rangle$ ). Puisqu'en plus  $\|\mathbf{m}(t)\|_{L^\infty} \leq 2M_0$ , on déduit

$$(9.38) \quad \left\| |\mathbf{m}(t)| \left| \mathbf{H}_1^h(t) \right| \right\|_{L^2} \leq C \ln(\rho) \|\mathbf{m}(t)\|_{L^2} + \frac{2M_0 C}{\rho}.$$



En appliquant l'inégalité de Schwarz au second membre de (9.36), nous déduisons en utilisant les majorations (9.38) et (9.37),

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq C_4 \ln(\rho) \mathcal{E}(t) + \frac{C_5}{\rho} \sqrt{\mathcal{E}(t)}$$

avec  $C_5 = 2\sqrt{2\mu_0}M_0C_1C$  et  $C_4$  choisie de telle sorte que pour  $\rho$  grand  $C_4 \ln(\rho) \geq 4C_2(1 + C \ln(\rho)) + 4C_3$ . L'intégration de cette inégalité entre  $t_0$  et  $t$  nous donne

$$(9.39) \quad \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(t_0) + C_5\rho^{C_4(t-t_0)-1}$$

Soit  $N$  tel que  $T/N < 1/C_4$ , l'inégalité (9.39) et  $\mathcal{E}(0) = 0$  montrent par une simple récurrence sur  $k = 0, \dots, N-1$ , que pour tout  $t \in [kT/N, (k+1)T/N]$

$$\mathcal{E}(t) \leq (k+1) C_5 \rho^{((C_4T)/N)-1}$$

D'où pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\mathcal{E}(t) \leq N C_5 \rho^{((C_4T)/N)-1}$$

et donc en faisant tendre  $\rho$  vers  $\infty$ ,  $\mathcal{E}(t) = 0$ . □

### 9.4.3 Estimations a priori pour le problème hétérogène

La preuve de convergence (qui suivra) repose sur les estimations a priori uniformes par rapport à  $\delta$  pour les champs  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta, \mathbf{E}^\delta)$ . Notons  $\mathcal{E}^\delta(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  l'énergie électromagnétique associée à une onde  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  solution de (9.2) :

$$\mathcal{E}^\delta(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \int_{\mathbf{R}^n} \varepsilon^\delta |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2 dx.$$

Nous avons alors les estimations uniformes suivantes

**Théorème 9.7** *Sous l'hypothèse 9.1, pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$(9.40) \quad \mathcal{E}^\delta(\mathbf{E}^\delta(t), \mathbf{H}^\delta(t)) \leq \mathcal{E}^\delta(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \text{ et } \left| \mathbf{M}^\delta(\mathbf{x}, t) \right| = \left| \mathbf{M}_0^\delta(\mathbf{x}) \right| \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2.$$

*De plus,  $\forall T < \infty$ , il existe une constante  $C(T)$  indépendante de  $\delta$  telle que p.p.  $t \leq T$ ,*

$$(9.41) \quad \mathcal{E}^\delta(\partial_t \mathbf{E}^\delta(t), \partial_t \mathbf{H}^\delta(t)) \leq C(T) \text{ et } \left\| \partial_t \mathbf{M}^\delta(t) \right\|_{L^2} \leq C(T).$$

*Preuve.* Nous rappelons que les estimations (9.40) proviennent respectivement des propriétés (9.4)(ii) et (9.4)(i) de la loi non linéaire  $\mathcal{L}$ . Par ailleurs, les estimations (9.41) sont l'application du théorème (2.5) (chapitre 2, page 53), puisqu'en notant  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1 + \|\varepsilon_r\|_{L^\infty})$ , on a pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\varepsilon_0 \leq \varepsilon^\delta \leq \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \left\| \mathbf{M}_0^\delta \right\|_{L^\infty} \leq \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}.$$

□

### 9.4.4 Preuve de la convergence

On se placera pour toute la suite (sauf indication contraire) sous les hypothèses 9.1 et aux instants  $0 \leq t \leq T < \infty$  où  $T$  un est temps fixé. Le résultat d'unicité démontré plus haut montre qu'il suffit de prouver le théorème 9.5 pour une sous suite extraite.

Or le théorème 9.7 montre en particulier que les suites  $(\mathbf{E}^\delta)$ ,  $(\mathbf{H}^\delta)$ ,  $(\mathbf{M}^\delta)$ ,  $(\partial_t \mathbf{E}^\delta)$ ,  $(\partial_t \mathbf{H}^\delta)$  et  $(\partial_t \mathbf{M}^\delta)$  sont bornées dans  $L^\infty((0, T); L^2(\mathbb{R}^n))^3$ . Donc, à une sous suite extraite près, on peut supposer l'existence de  $\mathbf{E}^h$ ,  $\mathbf{H}^h$ ,  $\mathbf{M}^h$  éléments de  $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)$  telles que

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^\delta, \partial_t \mathbf{E}^\delta) &\rightharpoonup (\mathbf{E}^h, \partial_t \mathbf{E}^h) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)^2 \text{ faible} - \star \\ (\mathbf{H}^\delta, \partial_t \mathbf{H}^\delta) &\rightharpoonup (\mathbf{H}^h, \partial_t \mathbf{H}^h) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)^2 \text{ faible} - \star \\ (\mathbf{M}^\delta, \partial_t \mathbf{M}^\delta) &\rightharpoonup (\mathbf{M}^h, \partial_t \mathbf{M}^h) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)^2 \text{ faible} - \star \end{aligned}$$

D'après les conditions initiales  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta, \mathbf{M}^\delta)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{M}_0^\delta)$  et la remarque 9.8 on déduit de ces convergences,

$$(9.42) \quad (\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M}^h)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \langle \mathbf{M}_0 \rangle)$$

Il nous reste maintenant à retrouver les équations du système homogénéisé.

On va procéder en trois étapes. La première étape consiste à passer à la limite d'abord dans le système de Maxwell. La deuxième étape consiste à montrer ensuite le résultat de convergence (9.29). Enfin la troisième étape consiste à dériver l'équation (9.28) et déduire la convergence (9.30).

#### Etape 1 : passage à la limite dans le système de Maxwell

En fait, considérant  $\partial_t \mathbf{M}^\delta$  comme un terme source, l'obtention du système homogénéisé (9.27) constitue un résultat assez classique en homogénéisation et dont une démonstration par la méthode d'énergie peut être trouvée dans [40] par exemple.

Néanmoins nous allons redémontrer ce résultat via la technique de convergence à double échelle ce qui permettra en particulier de guider nos pas à l'étape 2.

La suite  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta, \mathbf{M}^\delta)$  est bornée dans  $\{L^2(\mathcal{Q}_T)^3\}^3$ . D'après le théorème 9.1, quitte à changer de sous suite extraite, on peut supposer que la suite  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta, \mathbf{M}^\delta)$  admet une limite double échelle  $(\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*, \mathbf{M}^*)$  dans  $\{L^2(\mathcal{Q}_T \times Y)^3\}^3$ . Nous avons en particulier pour toute fonction  $\Psi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}_T; C_\#^\infty(Y))^3$ ,

$$(9.43) \quad \int_{\mathcal{Q}_T} \mathbf{B}^\delta(\mathbf{x}, t) \cdot \Psi(\mathbf{x}, t; \frac{\mathbf{x}}{\delta}) d\mathcal{Q}_T \rightarrow \int_{\mathcal{Q}_T \times Y} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t, \xi) \cdot \Psi(\mathbf{x}, t; \xi) d\mathcal{Q}_T d\xi$$

où le couple  $(\mathbf{B}^\delta, \mathbf{B})$  désigne un des trois couples  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{E})$ ,  $(\mathbf{H}^\delta, \mathbf{H})$ ,  $(\mathbf{M}^\delta, \mathbf{M})$ . Par ailleurs, d'après le théorème 9.2,

$$(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M}^h) = (\langle \mathbf{E}^* \rangle, \langle \mathbf{H}^* \rangle, \langle \mathbf{M}^* \rangle).$$

Ces mêmes considérations pour la suite  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta, \mathbf{M}^\delta)$  s'appliquent aussi à la suite des dérivées en temps  $(\partial_t \mathbf{E}^\delta, \partial_t \mathbf{H}^\delta, \partial_t \mathbf{M}^\delta)$  et en prenant  $\Psi \equiv \partial_t \Psi$  dans (9.43) on déduit (après une intégration par parties en temps), par unicité de la limite double échelle, que la fonction

profil associée à la suite  $(\partial_t \mathbf{E}^\delta, \partial_t \mathbf{H}^\delta, \partial_t \mathbf{M}^\delta)$  n'est autre que  $(\partial_t \mathbf{E}^*, \partial_t \mathbf{H}^*, \partial_t \mathbf{M}^*)$  qui appartient donc à  $\{L^2(\mathcal{Q}_T \times Y)^3\}^3$ .

Ces considérations étant faites, passons maintenant à la dérivation proprement dite du système homogénéisé. Pour cela nous partons de la formulation faible de (9.2) : pour tout  $\psi^\delta$  et  $\phi^\delta$  dans  $\mathcal{D}(\mathcal{Q}_T)^3$ ,

$$(9.44) \quad \begin{cases} \int_{\mathcal{Q}_T} \left( (\varepsilon^\delta \psi^\delta) \cdot \partial_t \mathbf{E}^\delta + (\text{rot } \psi^\delta) \cdot \mathbf{H}^\delta \right) d\mathcal{Q}_T = 0 \\ \int_{\mathcal{Q}_T} \left( \mu_0 \phi^\delta \cdot \partial_t (\mathbf{H}^\delta + \mathbf{M}^\delta) - (\text{rot } \phi^\delta) \cdot \mathbf{E}^\delta \right) d\mathcal{Q}_T = 0 \end{cases}$$

et nous choisissons  $\psi^\delta(\mathbf{x}, t) = \Psi(\mathbf{x}, t, \frac{x}{\delta})$  et  $\phi^\delta(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t, \frac{x}{\delta})$ , où  $\Psi$  et  $\Phi$  sont deux fonctions dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times [0, T]; C^\infty_\#(Y))^3$ .

Pour une fonction  $(\mathbf{x}, t, \xi) \mapsto \Psi(\mathbf{x}, t; \xi) \in \mathbb{R}^3$  nous notons  $\text{rot}_\xi \Psi = \partial_\xi(\vec{\mathbf{e}}_x \times \Psi)$  et  $\text{rot } \Psi$  le rotationnel par rapport à la variable  $\mathbf{x}$ .

La première équation de (9.44) devient

$$(9.45) \quad \int_{\mathcal{Q}_T} \left( (\varepsilon \Psi)^\delta \cdot \partial_t \mathbf{E}^\delta + \left( \text{rot } \Psi + \frac{1}{\delta} \text{rot}_\xi \Psi \right)^\delta \cdot \mathbf{H}^\delta \right) d\mathcal{Q}_T = 0$$

Compte tenu de la forme particulière de  $\varepsilon$ , nous avons

$$\int_{\mathcal{Q}_T} (\varepsilon \Psi)^\delta \cdot \partial_t \mathbf{E}^\delta d\mathcal{Q}_T = \varepsilon_0 \int_{\mathcal{Q}_T} (\Psi)^\delta \cdot \partial_t \mathbf{E}^\delta d\mathcal{Q}_T + \varepsilon_0 \int_{\Omega_T} (\varepsilon_r \Psi)^\delta \cdot \partial_t \mathbf{E}^\delta d\Omega_T$$

Mais comme  $\varepsilon_r \in L^\infty_\#(Y)$ ,  $\varepsilon_r \Psi \in C^0(\overline{\Omega_T}; L^\infty_\#(Y))^3$  ce qui montre qu'il s'agit d'une fonction admissible de  $L^2(\Omega_T; L^2_\#(Y))^3$ . En utilisant le théorème (9.3) pour passer à la limite dans la deuxième intégrale du second membre, nous déduisons (après avoir recollé les deux morceaux)

$$\int_{\mathcal{Q}_T} (\varepsilon \Psi)^\delta \cdot \partial_t \mathbf{E}^\delta d\mathcal{Q}_T \rightarrow \int_{\mathcal{Q}_T \times Y} (\varepsilon \Psi) \cdot \partial_t \mathbf{E}^* d\mathcal{Q}_T d\xi$$

Ainsi, en multipliant 9.45 d'abord par  $\delta$  et en faisant ensuite tendre  $\delta$  vers 0 montre que  $\text{rot}_\xi \mathbf{H}^* = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathcal{Q}_T \times Y)$ . D'où

$$(9.46) \quad \mathbf{H}_y^*(\mathbf{x}, t; \xi) = \mathbf{H}_y^h(\mathbf{x}, t) \text{ et } \mathbf{H}_z^*(\mathbf{x}, t; \xi) = \mathbf{H}_z^h(\mathbf{x}, t).$$

De manière similaire, la deuxième équation de (9.44) devient

$$(9.47) \quad \int_{\mathcal{Q}_T} \left( \mu_0 (\Phi)^\delta \cdot \partial_t (\mathbf{H}^\delta + \mathbf{M}^\delta) - \left( \text{rot } \Phi + \frac{1}{\delta} \text{rot}_\xi \Phi \right)^\delta \cdot \mathbf{E}^\delta \right) d\mathcal{Q}_T = 0$$

et aboutit à la caractérisation

$$(9.48) \quad \mathbf{E}_y^*(\mathbf{x}, t; \xi) = \mathbf{E}_y^h(\mathbf{x}, t) \text{ et } \mathbf{E}_z^*(\mathbf{x}, t; \xi) = \mathbf{E}_z^h(\mathbf{x}, t).$$

Il nous reste à maintenant à caractériser la composante  $x$  des fonctions profils. Choisissons pour cela  $\Psi = \Psi_x \vec{\mathbf{e}}_x$  dans (9.45). On a donc  $\text{rot}_\xi \Psi = 0$  et l'équation (9.45) devient

$$(9.49) \quad \int_{\mathcal{Q}_T} \left( (\varepsilon \Psi_x)^\delta \partial_t \mathbf{E}_x^\delta + (\partial_z \Psi_x)^\delta \mathbf{H}_y^\delta \right) d\mathcal{Q}_T = 0$$

Passant à la limite dans (9.49) implique

$$(9.50) \quad \int_{\mathcal{Q}_T \times Y} \left( \varepsilon \Psi_x \partial_t \mathbf{E}_x^* + \partial_z \Psi_x \mathbf{H}_y^* \right) d\mathcal{Q}_T d\xi = 0$$

Choisissons maintenant  $\Psi_x = \phi \partial_\xi \psi$  où  $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}_T)$  et  $\psi \in C_{\#}^\infty(Y)$  dans (9.50). En utilisant (9.46), on déduit

$$\int_{\mathcal{Q}_T} \phi \int_Y \varepsilon \partial_t \mathbf{E}_x^* \partial_\xi \psi d\xi d\mathcal{Q}_T = 0 \text{ soit } \partial_\xi (\varepsilon \partial_t \mathbf{E}_x^*) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathcal{Q}_T \times Y).$$

Introduisons  $f(\mathbf{x}, t; \xi) = \int_0^\xi \partial_t \mathbf{E}_x^*(\mathbf{x}, t; \nu) - \partial_t \mathbf{E}_x^h(\mathbf{x}, t) d\nu$ .  $f \in L^2(\mathcal{Q}_T; H_{\#}^1(Y))^3$  et est solution p.p.  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{Q}_T$  de :

$$\partial_\xi (\varepsilon \partial_\xi f) = \partial_t \mathbf{E}_x^h \partial_\xi \varepsilon, \text{ dans } D'(Y), \quad f|_{\xi=0} = f|_{\xi=1} = 0.$$

Par linéarité de l'équation et unicité de sa solution dans  $H_{\#}^1(Y)$  on déduit que

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}, t; \xi) = \chi(\xi) \partial_t \mathbf{E}_x^h(\mathbf{x}, t) + \text{cte} & p.p. \text{ dans } \Omega \times (0, T) \times Y, \\ f(\mathbf{x}, t; \xi) = 0 & p.p. \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

où  $\chi$  est donnée par (9.10). Il s'en suit

$$(9.51) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{E}_x^*(\mathbf{x}, t; \xi) = (1 - \partial_\xi \chi(\xi)) \partial_t \mathbf{E}_x^h(\mathbf{x}, t) & p.p. \text{ dans } \Omega \times (0, T) \times Y, \\ \partial_t \mathbf{E}_x^*(\mathbf{x}, t; \xi) = \partial_t \mathbf{E}_x^h(\mathbf{x}, t) & p.p. \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Nous sommes maintenant en mesure de déduire les équations homogénéisées (9.27) en prenant

$$(\Psi, \Phi)(\mathbf{x}, t; \xi) \equiv (\Psi, \Phi)(\mathbf{x}, t),$$

et en passant à la limite double échelle dans (9.45) et (9.47) tout en utilisant (9.51) et (9.48). Nous obtenons

$$(9.52) \quad \begin{cases} \int_{\mathcal{Q}_T} \left( \underline{\varepsilon}^h \partial_t \mathbf{E}^h \cdot \Psi + \mathbf{H}^h \cdot \text{rot } \Psi \right) d\mathcal{Q}_T = 0 \\ \int_{\mathcal{Q}_T} \left( \mu_0 \partial_t (\mathbf{H}^h + \mathbf{M}^h) \cdot \Phi - \mathbf{E}^h \cdot \text{rot } \Phi \right) d\mathcal{Q}_T = 0 \end{cases}$$

Le système (9.52) couplé avec (9.42) correspond bien à (9.27).

**Remarque 9.10** *Pour démontrer (9.52) on n'a pas eu besoin de caractériser la composante  $x$  du champ magnétique. Cependant, il est possible de l'obtenir en choisissant  $\Phi = \Phi_x \vec{\mathbf{e}}_x$  dans (9.47) et en passant à la limite quand  $\delta \rightarrow 0$ . On démontre qu'on a alors*

$$(9.53) \quad (\mathbf{H}_x^* + \mathbf{M}_x^*)(\mathbf{x}, t; \xi) = (\mathbf{H}_x^h + \mathbf{M}_x^h)(\mathbf{x}, t), \quad p.p. (\mathbf{x}, t; \xi) \in \mathcal{Q}_T \times Y.$$

*Nous allons retrouver ce résultat d'une autre manière par la suite.*

**Remarque 9.11** *Raisonnons formellement (pour l'instant) en supposant qu'il est possible de passer à la limite double échelle dans le terme  $\mathcal{L}(\mathbf{H}^\delta, \mathbf{M}^\delta)$ , c.à.d. que la fonction profil associée à ce terme est  $\mathcal{L}(\mathbf{H}^*, \mathbf{M}^*)$  (ce qui est bien le cas et sera l'objet de l'étape suivante). On constate alors en utilisant les caractérisations (9.53) et (9.46), que la fonction profil  $\mathbf{M}^*$  vérifie bien la loi non linéaire (9.28).*

**Etape 2 : Convergence à double échelle forte pour  $\mathbf{M}^\delta$**

Plus précisément nous allons montrer que  $\mathbf{M}^*$  est une fonction admissible et

$$(9.54) \quad \left\| \mathbf{M}^\delta - (\mathbf{M}^*)^\delta \right\|_{L^2(\mathcal{Q}_T)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

La démonstration de ce résultat est basée sur le résultat de convergence forte suivant sur le champ magnétique  $\mathbf{H}^\delta$ . En effet d'après l'estimation (9.41) et en utilisant les équations de Maxwell (9.2) nous constatons que la suite  $(\text{rot } \mathbf{H}^\delta)$  est bornée dans  $L^2(\mathcal{Q}_T)$ . En recombinaut ce résultat avec les estimations (9.40) et (9.41) on obtient que la suite  $(P_\perp \mathbf{H}^\delta)$  est bornée dans  $H^1(\mathcal{Q}_T)$  (cf. remarque 2.5, page 42). On déduit alors, quitte à changer la suite extraite de départ, que

$$(9.55) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| P_\perp \mathbf{H}^\delta - P_\perp \mathbf{H}^h \right\|_{L^2(\Omega_T)} = 0$$

Par ailleurs, de manière classique, comme  $\text{div}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_0^\delta) = 0$  et  $\partial_t \text{div}(\mathbf{H}^\delta + \mathbf{M}^\delta) = 0$ , on en conclut que  $\text{div}(\mathbf{H}^\delta + \mathbf{M}^\delta) = 0$  et donc  $P_\parallel(\mathbf{H}^\delta + \mathbf{M}^\delta) = 0$ .

En résumé, nous avons une décomposition de  $\mathbf{H}^\delta$  en la somme deux termes  $P_\perp \mathbf{H}^\delta$  et  $P_\parallel \mathbf{H}^\delta$ , où on a une convergence forte pour le premier (et donc un "bon" comportement dans le passage à la limite dans la loi non linéaire) et où on a une expression explicite en fonction de  $P_\parallel \mathbf{M}^\delta$  pour le deuxième.

Le gros de l'effort va être donc de préciser quel type de convergence peut-on espérer avoir pour  $P_\parallel \mathbf{M}^\delta$ . D'après la forme annoncée pour le modèle limite, on constate qu'il est impossible d'obtenir une convergence forte de  $P_\parallel \mathbf{M}^\delta$  vers  $P_\parallel \mathbf{M}^h$ . C'est pour cela que nous allons à la recherche d'une convergence intermédiaire entre la convergence faible et la convergence forte, il s'agit en l'occurrence du résultat (9.54).

Les choses se passent de manière particulièrement agréable dans le cas 1D et il nous a paru intéressant de présenter d'abord ce cas simple, ce qui facilitera la compréhension du cas 2D qui en constitue une généralisation.

**Démonstration dans le cas 1D.** Dans ce cas,  $P_\parallel$  coïncide avec  $\Pi_x$  (la projection orthogonale sur droite vectorielle dirigée par  $\vec{\mathbf{e}}_x$ ) (cf. remarque 2.8, page 43). Ainsi,  $\mathbf{H}^\delta = P_\perp \mathbf{H}^\delta - \Pi_x \mathbf{M}^\delta$  et  $\mathbf{M}^\delta$  vérifie sur  $\mathcal{Q}_T$ ,

$$\partial_t \mathbf{M}^\delta = \mathcal{L}(\mathbf{M}^\delta, P_\perp \mathbf{H}^\delta - \Pi_x \mathbf{M}^\delta)$$

Dans l'hypothèse où tout se passe bien au niveau de la convergence double échelle, l'équation vérifié par  $\mathbf{M}^\delta$  nous suggère d'introduire  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t; \xi)$  vérifiant :

$$(9.56) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, P_\perp \mathbf{H}^h - \Pi_x \mathbf{M}) & \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y, \\ \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times Y \end{cases}$$

D'après le lemme 9.3 (voir ci-après), sous l'hypothèse 9.1, le système (9.56) admet une (unique) solution  $\mathbf{M} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}; L^\infty_\#(Y)))^3$  constante par morceaux. Considérons donc cette solution (qui constitue une fonction admissible (par le lemme 9.1)) et posons

$$(9.57) \quad \mathbf{m}^\delta = \mathbf{M}^\delta - (\mathbf{M})^\delta.$$

Cette fonction vérifie alors sur  $\mathcal{Q}_T$ , du fait de la commutation  $(\Pi_x \mathbf{M})^\delta = \Pi_x(\mathbf{M})^\delta$  (c'est la que l'égalité  $P_{\parallel} = \Pi_x$  simplifie les choses !)

$$(9.58) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{m}^\delta = \mathcal{L}(\mathbf{M}^\delta, P_{\perp} \mathbf{H}^\delta - \Pi_x \mathbf{M}^\delta) - \mathcal{L}((\mathbf{M})^\delta, P_{\perp} \mathbf{H}^h - \Pi_x(\mathbf{M})^\delta) \\ \mathbf{m}^\delta|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

A partir de (9.4)(i), nous déduisons pour tout  $t \geq 0$  et tout  $\delta > 0$ ,

$$(9.59) \quad \left\| \mathbf{M}^\delta(t) \right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} = \left\| (\mathbf{M})^\delta(t) \right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} = \left\| (\mathbf{M}_0)^\delta \right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \leq \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n \times Y)}$$

Prenons le produit scalaire de la première équation de (9.58) par  $\mathbf{m}^\delta$ ; en posant  $R = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$ , nous déduisons par (9.59) et (9.6) l'existence de deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  (indépendantes de  $\delta$ , mais dépendantes de  $R$ ) telles que,

$$(9.60) \quad \frac{1}{2} \partial_t \left| \mathbf{m}^\delta \right|^2 \leq C_1 \left| \mathbf{m}^\delta \right|^2 \left| P_{\perp} \mathbf{H}^\delta - \Pi_x \mathbf{M}^\delta \right| + C_2 \left( \left| P_{\perp}(\mathbf{H}^\delta - \mathbf{H}^h) \right| + \left| \Pi_x \mathbf{m}^\delta \right| \right) \left| \mathbf{m}^\delta \right|$$

Nous allons tirer profit une deuxième fois de l'hypothèse 1D pour simplifier la démonstration. En effet, par l'injection continue de  $H^1(\mathbf{R})$  dans  $L^\infty(\mathbf{R})$  et par les estimations (9.40) et (9.41), la suite  $(P_{\perp} \mathbf{H}^\delta)$  est bornée dans  $L^\infty(\mathcal{Q}_T)$ . Il existe donc une constante  $C$  indépendante de  $\delta$  telle que

$$C \geq C_1 \left( \left\| P_{\perp} \mathbf{H}^\delta \right\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_T)} + R \right) + C_2,$$

L'estimation (9.60), nous donne, une fois intégrée sur  $\Omega$ ,

$$(9.61) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \mathbf{m}^\delta(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left\| \mathbf{m}^\delta(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \left\| P_{\perp}(\mathbf{H}^\delta - \mathbf{H}^h)(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \mathbf{m}^\delta(t) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par le lemme de Gronwall, l'inégalité (9.61) montre que, pour tout  $t \leq T$ ,

$$(9.62) \quad \left\| \mathbf{m}^\delta(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 e^{Ct} \int_0^t e^{-C\tau} \left\| P_{\perp}(\mathbf{H}^\delta - \mathbf{H}^h)(\tau) \right\|_{L^2(\Omega)} d\tau$$

En faisant tendre  $\delta$  vers tout en utilisant (9.55), nous obtenons

$$(9.63) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \mathbf{m}^\delta \right\|_{C^0([0,T]; L^2(\Omega))} = 0$$

Mais comme  $\mathbf{M}^\delta(t) = 0$  en dehors de  $\Omega$  (le support de  $(\mathbf{M}_0)^\delta$  est contenu dans  $\Omega$ , il en est donc de même pour  $\mathbf{M}^\delta$  et  $(\mathbf{M})^\delta$  par la conservation de la norme), on déduit que la convergence tient lieu sur  $C^0([0, T]; L^2(\mathbf{R}))$ . Par ailleurs, comme  $\mathbf{M}$  est une fonction admissible, on déduit en particulier (cf. théorème 9.4) que  $\mathbf{M}$  est la fonction profil associée à la suite  $\mathbf{M}^\delta$  et donc  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^*$ . Ce qui prouve le résultat recherché.

**Remarque 9.12** Dans le cas 1D, on a tiré avantage du fait que le projecteur  $P_{\parallel}$  admet une expression locale en espace conservée par passage à la limite double échelle : c.à.d. si  $\mathbf{v} \in L^2(\mathbf{R}; L^2(Y))^3$  est la limite double échelle d'une suite  $(\mathbf{v}^\delta)$  de  $L^2(\mathbf{R})^3$  alors  $P_{\parallel} \mathbf{v}$  est la fonction profil associée à la suite  $(P_{\parallel} \mathbf{v}^\delta)$ . Dans les cas 2D et 3D ceci n'est plus vrai et le premier travail à effectuer sera donc de caractériser la limite double échelle de ce projecteur.

**Généralisation au cas 2D.** La démonstration utilise le résultat des deux lemmes suivants dont la démonstration suivra celle du théorème. Le lemme 9.2 donne l'expression de la limite double échelle du projecteur  $P_{\parallel}$ . Quant au lemme 9.3, déjà utilisé pour la démonstration du cas 1D, il donne un résultat d'existence (et d'unicité) de solutions du problème limite associé à la loi non linéaire.

**Lemme 9.2** On définit l'opérateur  $S_{\parallel}$  de  $L^2(\mathcal{Q}_T \times Y)^3$  dans lui même par

$$(9.64) \quad S_{\parallel} \mathbf{M} = P_{\parallel} \langle \mathbf{M} \rangle - \Pi_x(\langle \mathbf{M} \rangle - \mathbf{M}).$$

Nous avons alors pour toute fonction  $\mathbf{M} \in L^2(\mathcal{Q}_T; L^{\infty}_{\#}(Y))^3$  à variables séparés et dont sa restriction à  $\mathcal{Q}_T \times Y$  est à support compact,

$$(9.65) \quad \left\| (S_{\parallel} \mathbf{M})^{\delta} - P_{\parallel}(\mathbf{M})^{\delta} \right\|_{L^2(\mathcal{Q}_T)} \rightarrow 0.$$

Ce lemme est encore vrai en dimension 3.

**Remarque 9.13** Le lemme 9.2 nous dit en particulier que  $S_{\parallel} \mathbf{M}$  est la limite double échelle forte de  $P_{\parallel}(\mathbf{M})^{\delta}$ . Par ailleurs, c'est bien une généralisation de ce qui se passe en 1D. En effet, dans ce cas  $P_{\parallel} = \Pi_x$  et donc  $S_{\parallel} = \Pi_x$ ; le résultat (9.65) est par conséquent une trivialité, puisque  $(S_{\parallel} \mathbf{M})^{\delta} = P_{\parallel}(\mathbf{M})^{\delta}$ .

**Lemme 9.3** Soit  $\mathbf{M}_0 \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times Y) \cap L^2(\mathbb{R}^n \times Y)$ , et soit  $\phi \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3) \cap L^{\infty}(0, T; H^1(\mathbb{R}^n)^3)$  deux fonctions données. Alors l'équation différentielle

$$(9.66) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \phi - S_{\parallel}(\mathbf{M})) & \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y, \\ \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times Y \end{cases}$$

admet une solution unique  $\mathbf{M} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3)$ . Cette solution vérifie pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(9.67) \quad |\mathbf{M}(\mathbf{x}, t, \xi)| = |\mathbf{M}_0(\mathbf{x}, \xi)| \quad p.p. \quad (\mathbf{x}, \xi) \in \mathbb{R}^n \times Y.$$

De plus, si  $\mathbf{M}_0$  et  $\mathcal{L}$  vérifient l'hypothèse 9.1 alors  $\mathbf{M}$  est constante par morceaux.

En admettant pour le moment le résultat de ces deux lemmes, la démonstration du cas 2D suit la même démarche que le cas 1D. On commence par introduire la solution constante par morceaux (qui constitue en particulier une fonction admissible)  $\mathbf{M} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n; L^{\infty}_{\#}(Y))^3)$  de

$$(9.68) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, P_{\perp} \mathbf{H}^h - S_{\parallel}(\mathbf{M})), \\ \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0, \end{cases}$$

qui existe d'après le lemme 9.3 appliqué à  $\phi = P_{\perp} \mathbf{H}^h$ . Nous introduisons  $\mathbf{m}^{\delta}$  défini par (9.57). Elle vérifie sur  $\mathcal{Q}_T$ ,

$$(9.69) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{m}^{\delta} = \mathcal{L}(\mathbf{M}^{\delta}, P_{\perp} \mathbf{H}^{\delta} - P_{\parallel} \mathbf{M}^{\delta}) - \mathcal{L}((\mathbf{M})^{\delta}, P_{\perp} \mathbf{H}^h - (S_{\parallel} \mathbf{M})^{\delta}) \\ \mathbf{m}^{\delta}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Prenons le produit scalaire de de la première équation de (9.69) par  $\mathbf{m}^\delta$ ; en posant  $R = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$ , nous déduisons par l'estimation (9.59) et par la propriété (9.6) l'existence de deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  (indépendantes de  $\delta$ , mais dépendantes de  $R$ ) telles que,

$$(9.70) \quad \frac{1}{2} \partial_t \left| \mathbf{m}^\delta \right|^2 \leq C_1 \left| \mathbf{m}^\delta \right|^2 \left| P_\perp \mathbf{H}^\delta - P_\parallel \mathbf{M}^\delta \right| + C_2 \left( \left| P_\perp (\mathbf{H}^\delta - \mathbf{H}^h) \right| + \left| P_\parallel \mathbf{M}^\delta - (S_\parallel \mathbf{M})^\delta \right| \right) \left| \mathbf{m}^\delta \right|$$

En écrivant que  $P_\parallel \mathbf{M}^\delta - (S_\parallel \mathbf{M})^\delta = P_\parallel \mathbf{m}^\delta + (P_\parallel (\mathbf{M})^\delta - (S_\parallel \mathbf{M})^\delta)$ , l'estimation (9.70) nous donne, en posant,  $\mathcal{F}^\delta = \left| P_\perp (\mathbf{H}^\delta - \mathbf{H}^h) \right| + \left| P_\parallel (\mathbf{M})^\delta - (S_\parallel \mathbf{M})^\delta \right|$ ,

$$(9.71) \quad \frac{1}{2} \partial_t \left| \mathbf{m}^\delta \right|^2 \leq C_1 \left| \mathbf{m}^\delta \right|^2 \left| P_\perp \mathbf{H}^\delta - P_\parallel \mathbf{M}^\delta \right| + C_2 \left( \left| P_\parallel \mathbf{m}^\delta \right| + \mathcal{F}^\delta \right) \left| \mathbf{m}^\delta \right|$$

où d'après (9.55) et le lemme 9.2,  $\mathcal{F}^\delta \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega_T)$  fort. Par rapport au cas 1D on se retrouve maintenant dans une situation analogue à (9.60). Mais la grande différence est que les deux quantités  $P_\perp \mathbf{H}^\delta$  et  $P_\parallel \mathbf{M}^\delta$  ne sont pas a priori dans  $L^\infty(\Omega_T)$ . Néanmoins,

**Lemme 9.4** *Pour tout réel  $\lambda > 0$  assez grand et pour tout  $\delta > 0$ , il existe une fonction  $\Psi_\lambda^\delta \in L^\infty(\mathcal{Q}_T)^3$  telle que*

$$\left\| \Psi_\lambda^\delta \right\|_{L^\infty(\mathcal{Q}_T)} \leq C \log \lambda \text{ et } \left\| \left( P_\perp \mathbf{H}^\delta - P_\parallel \mathbf{M}^\delta \right) - \Psi_\lambda^\delta \right\|_{L^2(\mathcal{Q}_T)} \leq C/\lambda,$$

la constante  $C$  étant indépendante de  $\lambda$  et  $\delta$ .

*Preuve.* D'après (9.40), nous déduisons que pour tout  $t \leq T$ ,

$$\left\| \mathbf{M}^\delta(t) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \left\| \mathbf{M}^\delta(t) \right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} = \left\| \mathbf{M}_0^\delta \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} + \left\| \mathbf{M}_0^\delta \right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \leq C(\Omega) \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n \times Y)}$$

où  $C(\Omega) = 1 + \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}}$ . Nous avons également par les estimations (9.40) et (9.41), l'existence d'une constante  $C(T)$  indépendante de  $\delta$  telle que

$$\left\| P_\perp \mathbf{H}^\delta(t) \right\|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq C(T).$$

Le lemme 9.4 devient alors (une fois encore) une conséquence des deux lemmes 2.7 et 2.8, en prenant  $\Psi_\lambda^\delta = S^\lambda P_\perp \mathbf{H}^\delta - P_\parallel^\lambda \mathbf{M}^\delta$ .  $\square$

Appliquons ce lemme et posons  $\theta_\lambda^\delta = (P_\perp \mathbf{H}^\delta - P_\parallel) - \Psi_\lambda^\delta$ . En majorant  $\left| \theta_\lambda^\delta \right| \left| \mathbf{m}^\delta \right|^2$  par  $2R \left| \theta_\lambda^\delta \right| \left| \mathbf{m}^\delta \right|$ , nous obtenons en intégrant l'inégalité (9.71) sur  $\Omega$ , et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(9.72) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \mathbf{m}^\delta(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_1 C \log(\lambda) \left\| \mathbf{m}^\delta(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2RC_1 \left\| \theta_\lambda^\delta(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \mathbf{m}^\delta(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ C_2 \left( \left\| P_\parallel \mathbf{m}^\delta(t) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \mathcal{F}^\delta(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| \mathbf{m}^\delta(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme le support de  $\mathbf{M}_0$  est contenu dans  $\Omega \times Y$ , on déduit que le support de  $(\mathbf{M}_0^\delta)$  est contenu dans  $\Omega$  et par conséquent, pour tout  $t$ , le support de  $\mathbf{m}^\delta(t)$  est également contenu



dans  $\Omega$ . Aussi, puisque  $P_{\parallel}$  est de norme  $\leq 1$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  on déduit que  $\|P_{\parallel}\mathbf{m}^{\delta}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{m}^{\delta}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ . L'inégalité (9.72) nous donne alors (en notant  $\|\cdot\|_{L^2} = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ )

$$(9.73) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{m}^{\delta}(t)\|_{L^2}^2 \leq C_0 \log(\lambda) \|\mathbf{m}^{\delta}(t)\|_{L^2}^2 + \left( 2RC_1 \|\theta_{\lambda}^{\delta}(t)\|_{L^2} + \|\mathcal{F}^{\delta}(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\mathbf{m}^{\delta}(t)\|_{L^2}$$

où la constante  $C_0$  est choisie de telle sorte que l'on ait, pour  $\lambda$  assez grand,

$$C_1 C \log(\lambda) + C_2 \leq C_0 \log(\lambda).$$

L'intégration de l'inégalité (9.73) sur l'intervalle  $[t_0, t] \subset [0, T]$  implique

$$\|\mathbf{m}^{\delta}(t)\|_{L^2} \leq \lambda^{C_0(t-t_0)} \|\mathbf{m}^{\delta}(t_0)\|_{L^2} + \lambda^{C_0 t} \int_0^t \lambda^{-C_0 \tau} \left( 2RC_1 \|\theta_{\lambda}^{\delta}(\tau)\|_{L^2} + C_2 \|\mathcal{F}^{\delta}(\tau)\|_{L^2} \right) d\tau,$$

soit, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'intégrale en temps dans le second membre et en utilisant le lemme 9.4,

$$(9.74) \quad \|\mathbf{m}^{\delta}(t)\|_{L^2} \leq \lambda^{C_0(t-t_0)} \|\mathbf{m}^{\delta}(t_0)\|_{L^2} + f_{\lambda}(t-t_0) \left( \frac{C_3}{\lambda} + C_2 \|\mathcal{F}^{\delta}\|_{L^2(\Omega_T)} \right),$$

où on a posé,  $f_{\lambda}(t) = (\lambda^{2C_0 t} - 1) / (2C_0 \log \lambda)$  et  $C_3 = 2RC_1 C$ . En prenant le sup sur  $[t_0, t]$ , l'inégalité (9.74) s'écrit aussi

$$(9.75) \quad \|\mathbf{m}^{\delta}\|_{C^0([t_0, t]; L^2)} \leq \lambda^{C_0(t-t_0)} \|\mathbf{m}^{\delta}(t_0)\|_{L^2} + f_{\lambda}(t-t_0) \left( \frac{C_3}{\lambda} + C_2 \|\mathcal{F}^{\delta}\|_{L^2(\Omega_T)} \right),$$

En passant à la lim sup en  $\delta$  dans (9.75), nous déduisons

$$(9.76) \quad \limsup_{\delta \rightarrow 0} \|\mathbf{m}^{\delta}\|_{C^0([t_0, t]; L^2)} \leq \lambda^{C_0(t-t_0)} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \|\mathbf{m}^{\delta}(t_0)\|_{L^2} + \frac{C_3}{\lambda} f_{\lambda}(t-t_0).$$

Prenons d'abord  $t_0 = 0$  dans (9.76). Nous avons par construction  $\mathbf{m}^{\delta}(0) = 0$  et par suite

$$(9.77) \quad \limsup_{\delta \rightarrow 0} \|\mathbf{m}^{\delta}\|_{C^0([0, t]; L^2)} \leq \frac{C_3}{\lambda} f_{\lambda}(t).$$

Soit  $T_0 = \min(1/C_0, T)$ .  $f_{\lambda}(T_0)/\lambda \sim \lambda^{C_0 T_0 - 1} (2C_0 \log \lambda)^{-\frac{1}{2}}$  quand  $\lambda \rightarrow \infty$ . Donc  $f_{\lambda}(T_0)/\lambda$  tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow \infty$ . Ainsi, en prenant  $t = T_0$  dans (9.77) nous déduisons, en faisant tendre  $\lambda$  vers  $+\infty$ ,

$$(9.78) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|\mathbf{m}^{\delta}\|_{C^0([0, T_0]; L^2)} = 0.$$

Reprenons maintenant l'estimation (9.76) avec  $t_0 = T_0$  et  $t = T_1 = \min(2T_0, T)$ . En utilisant (9.78) et le fait que  $f_{\lambda}(T_1 - T_0)/\lambda \rightarrow 0$  quand  $\lambda \rightarrow \infty$  nous déduisons que la convergence vers 0 de  $\mathbf{m}^{\delta}$  tient lieu dans  $C^0([0, T_1]; L^2)$ . Ainsi par une simple récurrence sur  $n$ , on peut facilement montrer que le résultat de convergence est encore vrai sur  $C^0([0, T_n]; L^2)$  avec  $T_n = \min(nT_0, T)$ , où  $n$  est un entier quelconque. Ceci montre,

$$(9.79) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|\mathbf{m}^{\delta}\|_{C^0([0, T]; L^2)} = 0.$$

On conclut comme en dimension 1.

### Etape 3 : Fin de la preuve

L'étape 2 nous dit en fait plus que la convergence double échelle forte de  $\mathbf{M}^\delta$  vers  $\mathbf{M}$ . Elle affirme que cette limite double échelle vérifie (9.68). Il nous reste donc à montrer que ce système coïcide avec (9.28) et d'en déduire le résultat de convergence (9.30). D'après la première étape nous savons que

$$\mu_0 \left( \partial_t \mathbf{H}^h + \partial_t \mathbf{M}^h \right) + \text{rot } \mathbf{E}^h = 0 \text{ dans } \mathcal{Q}_T$$

avec  $\mathbf{H}^h(0) = \mathbf{H}_0$  et  $\mathbf{M}^h(0) = \langle \mathbf{M}_0 \rangle$ . Puisque  $\text{div}(\mathbf{H}_0 + \langle \mathbf{M}_0 \rangle) = 0$  (cf. (9.32)), on déduit par le raisonnement habituel (voir par exemple début de l'étape 2) que

$$(9.80) \quad P_{\parallel} \mathbf{H}^h = -P_{\parallel} \mathbf{M}^h.$$

Par le lien entre la convergence double échelle et la convergence faible nous avons l'égalité  $\mathbf{M}^h = \langle \mathbf{M} \rangle$ . Il en résulte que

$$S_{\parallel} \mathbf{M} = P_{\parallel} \mathbf{M}^h - \Pi_x (\langle \mathbf{M} \rangle - \mathbf{M})$$

et en utilisant (9.80),

$$(9.81) \quad P_{\perp} \mathbf{H}^h - S_{\parallel} \mathbf{M} = \mathbf{H}^h + \Pi_x (\langle \mathbf{M} \rangle - \mathbf{M})$$

En combinant cette inégalité avec le système (9.68), on retrouve bien (9.28). Montrons maintenant (9.30). Nous utilisons la décomposition classique  $\mathbf{H}^\delta = P_{\perp} \mathbf{H}^\delta - P_{\parallel} \mathbf{M}^\delta$ . D'une part

$$\left\| P_{\parallel} \mathbf{M}^\delta - P_{\parallel} (\mathbf{M})^\delta \right\|_{L^2(\mathcal{Q}_T)} \leq \left\| \mathbf{M}^\delta - (\mathbf{M})^\delta \right\|_{L^2(\mathcal{Q}_T)}$$

L'étape 2 nous dit alors que  $\| P_{\parallel} \mathbf{M}^\delta - P_{\parallel} (\mathbf{M})^\delta \|_{L^2(\mathcal{Q}_T)} \rightarrow 0$ . Le lemme (9.2) nous permet de déduire que  $\| P_{\parallel} \mathbf{M}^\delta - (S_{\parallel} \mathbf{M})^\delta \|_{L^2(\mathcal{Q}_T)} \rightarrow 0$ . D'où, en combinant avec la convergence forte (9.55) et en utilisant la décomposition de  $\mathbf{H}^\delta$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \mathbf{H}^\delta - P_{\perp} \mathbf{H}^h + (S_{\parallel} \mathbf{M})^\delta \right\|_{L^2(\mathcal{Q}_T)}$$

On conclut en réutilisant (9.81). □

**Remarque 9.14** *L'étape 2 de la preuve nous indique que le terme nouveau :  $\Pi_x (\langle \mathbf{M} \rangle - \mathbf{M})$ , apparaissant dans la loi non linéaire du modèle homogénéisé provient de la limite double échelle de  $P_{\parallel} \mathbf{H}^\delta$ . Comme  $P_{\parallel} \mathbf{H}^\delta$  n'est autre que le champ démagnétisant (cf. chapitre 1, page 20), ce terme supplémentaire s'interprète donc comme un terme correcteur de l'énergie démagnétisante à l'échelle "microscopique" (relative à la cellule de périodicité  $Y$ ).*

#### 9.4.5 Preuve du lemme 9.2

La preuve de ce lemme repose sur le résultat suivant :

**Lemme 9.5** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \leq 3$ ) et  $f \in L^2(\mathbb{R}^n; L^\infty_\#(Y))$  une fonction à variables séparées (voir définition 9.3) à support contenu dans  $\Omega \times Y$ . On note  $u_\delta$  (resp.  $u$ ) le potentiel newtonien associé à  $(f)^\delta$  (resp. à  $\langle f \rangle$ ). Nous avons alors,*

$$\| \partial_{\alpha\beta} (u_\delta - u) \|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ pour } (\alpha, \beta) \neq (x, x) \text{ et } \left\| \partial_{xx} (u_\delta - u) - (f)^\delta + \langle f \rangle \right\|_{L^2} \rightarrow 0$$

*Preuve.* Quitte à changer  $f$  en  $f - \langle f \rangle$ , il suffit de montrer le lemme lorsque  $\langle f \rangle = 0$  (et donc  $u = 0$ ). De plus, comme  $f$  est à variables séparées, par linéarité, il suffit en fait de montrer le résultat du lemme dans le cas particulier où

$$f(\mathbf{x}, y) = g(\mathbf{x})\chi(y), \quad g \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ et } \chi \in L^\infty(Y) \text{ tq } \langle \chi \rangle = 0,$$

où la fonction  $g$  est à support contenu dans  $\Omega$ . Ainsi en notant  $\chi_\delta = (\chi)^\delta$ , nous avons simplement  $(f)^\delta = g\chi_\delta$ . Pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  on pose  $\mathbf{x} = (x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Nous rappelons que  $u^\delta$  vérifie  $\Delta u^\delta = g\chi_\delta$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, en appliquant la transformée de Fourier par rapport à la variable  $\mathbf{y}$  à cette équation nous obtenons, pour presque tout  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$(9.82) \quad \hat{u}_\delta(x, \boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}} G(x - x', \boldsymbol{\xi}) \hat{g}(x', \boldsymbol{\xi}) \chi_\delta(x') dx'$$

où  $\boldsymbol{\xi}$  désigne la variable de Fourier duale à  $\mathbf{y}$  et où  $G(x, \boldsymbol{\xi}) = -\exp(-|\boldsymbol{\xi}||x|)/(2|\boldsymbol{\xi}|)$  est la solution fondamentale associée à l'opérateur  $\partial_{xx} - |\boldsymbol{\xi}|^2$ . Or, pour  $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ ,  $x' \mapsto G(x-x', \boldsymbol{\xi})\hat{g}(x', \boldsymbol{\xi})$  appartient à  $L^1(\mathbb{R})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $\chi_\delta$  converge vers  $\langle \chi \rangle = 0$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$  faible- $\star$ . Nous déduisons pour presque tout  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$(9.83) \quad \hat{u}_\delta(x, \boldsymbol{\xi}) \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Considérons d'autre part un réel  $A$  positif tel que  $\Omega$  soit contenu dans  $[-A, A] \times \mathbb{R}^{n-1}$ , et notons  $I = ]-A, A[$ . On a alors (puisque  $|x - x'| \geq |x| - |x'|$ ),

$$\begin{aligned} |\hat{u}_\delta(x, \boldsymbol{\xi})| &\leq \exp(-|\boldsymbol{\xi}||x|)/(2|\boldsymbol{\xi}|) \int_I \exp(|\boldsymbol{\xi}||x'|) |\hat{g}(x', \boldsymbol{\xi})| |\chi_\delta(x')| dx' \\ &\leq \exp(-|\boldsymbol{\xi}||x|)/(2|\boldsymbol{\xi}|) (2(\exp(A|\boldsymbol{\xi}|) - 1)/|\boldsymbol{\xi}|)^{\frac{1}{2}} \|(\hat{g})(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2} \|\chi\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Ainsi, pour presque tout  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , il existe  $C(\boldsymbol{\xi}) < \infty$  telle que

$$(9.84) \quad |\hat{u}_\delta(x, \boldsymbol{\xi})| \leq C(\boldsymbol{\xi}) \exp(-|\boldsymbol{\xi}||x|) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{pour } \boldsymbol{\xi} \neq 0.$$

A partir de (9.83) et (9.84) et du théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous déduisons que pour presque tout  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$(9.85) \quad \|\hat{u}_\delta(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0$$

Nous avons également, d'après (9.82),

$$(9.86) \quad |\boldsymbol{\xi}|^2 \|\hat{u}_\delta(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2} \leq \left\| |\boldsymbol{\xi}|^2 G(\boldsymbol{\xi}) \right\|_{L^1} \|(\hat{g}\chi_\delta)(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2} \leq \|\hat{g}(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2} \|\chi\|_{L^\infty},$$

où  $\boldsymbol{\xi} \mapsto \|\hat{g}(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2}^2$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ . A nouveau, le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre, en vertu de (9.85) et (9.86),

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\boldsymbol{\xi}|^4 |\hat{u}_\delta(x, \boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} dx \rightarrow 0$$

Par Parseval, nous en déduisons que  $\|\partial_{\alpha\beta} u_\delta\|_{L^2} \rightarrow 0$  pour  $\alpha \neq x$  et  $\beta \neq x$ . Puisque  $\Delta u_\delta = (f)^\delta$ , nous en déduisons également que  $\left\| \partial_{xx} u_\delta - (f)^\delta \right\|_{L^2} \rightarrow 0$ . Il nous reste donc à démontrer que  $\|\partial_{\alpha x} u_\delta\|_{L^2} \rightarrow 0$  pour  $\alpha \neq x$ . D'après (9.82) nous avons,

$$(9.87) \quad \partial_x \hat{u}_\delta(x, \boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}} G'(x - x', \boldsymbol{\xi}) \hat{g}(x', \boldsymbol{\xi}) \chi_\delta(x') dx'$$

où  $G'(x, \boldsymbol{\xi}) = -\text{sign}(x) \exp(-|\boldsymbol{\xi}| |x|)/2$ . Il est facile de voir que le raisonnement utilisé pour démontrer (9.85) s'applique pour montrer que pour presque tout  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$(9.88) \quad \|\partial_x \hat{u}_\delta(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$$

et de manière similaire à (9.86), nous avons

$$(9.89) \quad \|\boldsymbol{\xi}\| \|\partial_x \hat{u}_\delta(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2} \leq \|\boldsymbol{\xi}\| \|G'(\boldsymbol{\xi})\|_{L^1} \|(\hat{g} \chi_\delta)(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2} \leq \|\hat{g}(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2} \|\chi\|_{L^\infty}.$$

D'après (9.88) et (9.89) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous déduisons

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\partial_x \hat{u}_\delta(x, \boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} dx \longrightarrow 0$$

Ce qui permet de conclure en utilisant l'égalité de Parseval. □

*Preuve du lemme 9.2*

Il s'agit de montrer que pour toute fonction  $\mathbf{M} \in L^2(\mathcal{Q}_T; L^\infty_{\#}(Y))^3$  à variables séparés et dont sa restriction à  $\mathcal{Q}_T \times Y$  est à support compact,

$$\left\| (S_{\parallel} \mathbf{M})^\delta - P_{\parallel}(\mathbf{M})^\delta \right\|_{L^2(\mathcal{Q}_T)} \rightarrow 0.$$

On note par  $\mathbf{M}_x(t)$ ,  $\mathbf{M}_y(t)$  et  $\mathbf{M}_z(t)$  les composantes du vecteur  $\mathbf{M}(t)$ . Pour presque tout  $t \in [0, T]$ , chacune de ces composantes répond donc aux hypothèses du lemme 9.5. La variable  $t$  étant un paramètre, nous introduisons  $\mathbf{u}^\delta(t)$  (resp.  $\mathbf{u}(t)$ ) le potentiel newtonien vecteur associé à  $(\mathbf{M}(t))^\delta$  (resp. à  $\langle \mathbf{M}(t) \rangle$ ) :

$$\vec{\Delta} \mathbf{u}^\delta(t) = (\mathbf{M}(t))^\delta \quad \text{et} \quad \vec{\Delta} \mathbf{u}(t) = \langle \mathbf{M}(t) \rangle.$$

Nous avons par définition,  $P_{\parallel}(\mathbf{M})^\delta = \nabla \text{div} \mathbf{u}^\delta$  et  $P_{\parallel} \langle \mathbf{M} \rangle = \nabla \text{div} \mathbf{u}$  (voir remarque 2.7, page 43), ce qui nous donne en dimension 3 par exemple :

$$P_{\parallel}(\mathbf{M})^\delta = \begin{pmatrix} \partial_{xx} \mathbf{u}_x^\delta + \partial_{xy} \mathbf{u}_y^\delta + \partial_{xz} \mathbf{u}_z^\delta \\ \partial_{yx} \mathbf{u}_x^\delta + \partial_{yy} \mathbf{u}_y^\delta + \partial_{yz} \mathbf{u}_z^\delta \\ \partial_{zx} \mathbf{u}_x^\delta + \partial_{zy} \mathbf{u}_y^\delta + \partial_{zz} \mathbf{u}_z^\delta \end{pmatrix} \quad P_{\parallel} \langle \mathbf{M} \rangle = \begin{pmatrix} \partial_{xx} \mathbf{u}_x + \partial_{xy} \mathbf{u}_y + \partial_{xz} \mathbf{u}_z \\ \partial_{yx} \mathbf{u}_x + \partial_{yy} \mathbf{u}_y + \partial_{yz} \mathbf{u}_z \\ \partial_{zx} \mathbf{u}_x + \partial_{zy} \mathbf{u}_y + \partial_{zz} \mathbf{u}_z \end{pmatrix}$$

D'après le lemme 9.5, pour presque tout  $t$ ,

$$P_{\parallel}(\mathbf{M})^\delta - (\partial_{xx} \mathbf{u}_x^\delta) \vec{\mathbf{e}}_x \text{ converge fortement dans } L^2(\mathbb{R}^n)^3 \text{ vers } P_{\parallel} \langle \mathbf{M} \rangle - (\partial_{xx} \mathbf{u}_x) \vec{\mathbf{e}}_x,$$

$$\text{et } \partial_{xx} \mathbf{u}_x^\delta - (\mathbf{M}_x)^\delta \text{ converge fortement dans } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ vers } \partial_{xx} \mathbf{u}_x - \langle \mathbf{M}_x \rangle.$$

Comme  $(S_{\parallel} \mathbf{M})^\delta = P_{\parallel} \langle \mathbf{M} \rangle - (\langle \mathbf{M}_x \rangle - (\mathbf{M}_x)^\delta) \vec{\mathbf{e}}_x$ , nous en déduisons (en faisant la différence)

$$\left\| (S_{\parallel} \mathbf{M}(t))^\delta - P_{\parallel}(\mathbf{M}(t))^\delta \right\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad p.p. \text{ en } t$$

Par ailleurs, l'opérateur  $P_{\parallel}$  étant unitaire de  $L^2$  dans  $L^2$ ,

$$\begin{aligned} \left\| (S_{\parallel} \mathbf{M}(t))^\delta - P_{\parallel}(\mathbf{M}(t))^\delta \right\|_{L^2} &\leq \left\| (S_{\parallel} \mathbf{M}(t))^\delta \right\|_{L^2} + \left\| (\mathbf{M}(t))^\delta \right\|_{L^2} \\ &\leq \left( 2 \|\langle \mathbf{M}(t) \rangle\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2 \|\mathbf{M}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n, L^\infty(Y))} \right) \in L^2(0, T). \end{aligned}$$

Le lemme 9.2 découle donc de l'application du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

□

### 9.4.6 Preuve du lemme 9.3

Nous rappelons ici l'énoncé de ce lemme où  $n \leq 2$ .

**Lemme 9.3.** *Soit  $\mathbf{M}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times Y) \cap L^2(\mathbb{R}^n \times Y)$ , et soit  $\phi \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3) \cap L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^n)^3)$  deux fonctions données. Alors l'équation différentielle*

$$(9.90) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \phi - S_{\parallel}(\mathbf{M})) & \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y, \\ \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times Y \end{cases}$$

admet une solution unique  $\mathbf{M} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3)$ . Cette solution vérifie pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(9.91) \quad |\mathbf{M}(\mathbf{x}, t, \xi)| = |\mathbf{M}_0(\mathbf{x}, \xi)| \quad p.p. \quad (\mathbf{x}, \xi) \in \mathbb{R}^n \times Y.$$

De plus, si  $\mathbf{M}_0$  est  $\mathcal{L}$  vérifiant l'hypothèse 9.1, alors  $\mathbf{M}$  est constante par morceaux.

La preuve que nous donnons ici concerne le cas le moins évident  $n = 2$ . La démonstration dans le cas 1D s'en déduit facilement.

Pour montrer ce lemme, l'idée naturelle est de vouloir appliquer le théorème de Cauchy-Lipshitz à l'équation différentielle (9.90) posé dans l'espace de Banach  $L^2(\mathbb{R}^n \times Y)$ . Malheureusement, du fait que  $\phi(t)$  et  $S_{\parallel}\mathbf{M}(t) \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , l'application

$$(\mathbf{M}, t) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{M}, \phi(t) - S_{\parallel}(\mathbf{M})).$$

n'est pas localement lipshitzienne par rapport à  $\mathbf{M}$ . C'est pour cela que nous allons considérer d'abord un problème régularisé à l'aide d'un opérateur de troncature continu de  $L^2$  dans  $L^\infty$ . C'est par exemple le cas de l'opérateur de troncature en fréquence  $S^\lambda$  introduit dans le chapitre 2 (voir formule (2.11) page 37). Nous rappelons (propriété 2.12 page 37) que pour  $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\|S^\lambda u\|_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \|u\|_{L^2}$$

On pose  $X = L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times Y)^3$ , qui, muni de la norme d'intersection, est un espace de Banach. Pour  $\mathbf{M} \in X$  on pose

$$S_{\parallel}^\lambda(\mathbf{M}) = S^\lambda P_{\parallel}(\mathbf{M}) - \Pi_x(\langle \mathbf{M} \rangle - \mathbf{M})$$

(où on n'a tronqué que la partie de  $S_{\parallel}\mathbf{M}$  qui n'est pas dans  $L^\infty \dots$ ) et on considère l'application  $G^\lambda$  défini sur  $X \times [0, T]$  par

$$G^\lambda(\mathbf{M}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{M}, S^\lambda \phi(t) - S_{\parallel}^\lambda(\mathbf{M}))$$

On résout d'abord l'équation différentielle sur  $X$

$$(9.92) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{M}^\lambda(t) = G^\lambda(\mathbf{M}^\lambda(t), t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}^\lambda(0) = \mathbf{M}_0.$$

**Lemme 9.6** *L'équation (9.92) admet une unique solution  $\mathbf{M}^\lambda \in C^1([0, T]; X)$  ( $X$  désignant l'espace  $L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times Y)^3$ ).*

*Preuve.* Premièrement,  $\phi \in C^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^2)^3)$  et donc  $S^\lambda \phi \in C^0([0, T]; X)$ . Deuxièmement, l'opérateur  $S_\parallel^\lambda$  est clairement linéaire continu de  $X$  dans lui-même. Or, par la propriété (9.6) de  $\mathcal{L}$ , pour  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  deux éléments de  $X$  tels que  $\|\mathbf{M}_1\|_X \leq R$  et  $\|\mathbf{M}_2\|_X \leq R$  avec  $R$  un réel donné, il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que, pour  $t$  et  $t'$  dans  $[0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \left\| G^\lambda(\mathbf{M}_1, t) - G^\lambda(\mathbf{M}_2, t') \right\|_X &\leq C_1 \|\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\|_X \left\| S^\lambda \phi(t) - S_\parallel^\lambda(\mathbf{M}_1) \right\|_X + \\ &\quad C_2 \left( \left\| S^\lambda \phi(t) - S^\lambda \phi(t') \right\|_X + \left\| S_\parallel^\lambda(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \right\|_X \right) \end{aligned}$$

Il en résulte d'une part la continuité de  $G$  sur  $[0, T] \times X$ , et d'autre part, en prenant  $t' = t$  et en posant

$$C = C_1 \left( \left\| S^\lambda \phi(t) \right\|_{L^\infty(0, T; X)} + c_\lambda R \right) + C_2 c_\lambda$$

où  $c_\lambda$  est le module de continuité de  $S_\parallel^\lambda$  sur  $X$ ,

$$\left\| G^\lambda(\mathbf{M}_1, t) - G^\lambda(\mathbf{M}_2, t) \right\|_X \leq C \|\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\|_X$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Les résultats standards sur les équations différentielles dans un espace de Banach, combinés avec l'estimation a priori 9.93 ci-après, montrent l'existence d'une unique solution globale  $\mathbf{M}^\lambda \in C^1([0, T]; X)$  de l'équation (9.92).  $\square$

#### n° Estimations a priori sur la suite $(\mathbf{M}^\lambda)$

Nous avons d'abord l'estimation classique sur la norme de l'aimantation qui découle de la propriété (9.4)(i), pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(9.93) \quad \left| \mathbf{M}^\lambda(t) \right| = |\mathbf{M}_0| \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^n \times Y.$$

D'autre part, en posant  $R = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times Y)}$ , nous déduisons à partir de (9.93) et de la propriété (9.5), l'existence d'une constante  $C(R)$  indépendante de  $\lambda$  telle que,

$$\left| \partial_t \mathbf{M}^\lambda \right| \leq C(R) \left( \left| S^\lambda \phi \right| + \left| P_\parallel \langle \mathbf{M}^\lambda \rangle \right| + \left| \langle \mathbf{M}^\lambda \rangle \right| + \left| \mathbf{M}^\lambda \right| \right).$$

Mais  $S^\lambda$  et  $P_\parallel$  étant deux opérateurs de normes  $\leq 1$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  nous déduisons pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\left\| \partial_t \mathbf{M}^\lambda(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times Y)} \leq C(R) \left( \|\phi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 3 \left\| \mathbf{M}^\lambda(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times Y)} \right)$$

D'où, d'après (9.93), pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(9.94) \quad \left\| \partial_t \mathbf{M}^\lambda(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times Y)} \leq C(R) \left( \|\phi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))} + 3 \|\mathbf{M}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times Y)} \right)$$

#### n° Convergence de la suite $(\mathbf{M}^\lambda)$ vers une solution de (9.90)

D'après les estimations (9.93) et (9.94) nous déduisons que les suites  $(\mathbf{M}^\lambda)$  et  $(\partial_t \mathbf{M}^\lambda)$  sont bornées dans  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3)$ . Il existe donc  $\mathbf{M} \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n \times Y))$  telle que, à une sous suite extraite près,

$$(9.95) \quad (\mathbf{M}^\lambda, \partial_t \mathbf{M}^\lambda) \rightharpoonup (\mathbf{M}, \partial_t \mathbf{M}) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3)^2 \text{ faible} - \star.$$

De plus, comme (9.93) nous dit aussi que la suite  $(\mathbf{M}^\lambda)$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n \times Y \times [0, T])^3$ , on peut supposer (quitte à changer de sous suite extraite) que la limite  $\mathbf{M}$  est dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n \times Y \times [0, T])^3$ . Par (9.95), nous avons en particulier,  $\mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0$ . Pour prouver que  $\mathbf{M}$  est bien une solution du système (9.90), nous montrons d'abord :

**Lemme 9.7** *La (sous) suite  $(\mathbf{M}^\lambda)$  converge vers  $\mathbf{M}$  dans  $C^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3)$ .*

Une fois ce lemme montré (voir preuve ci-dessous), nous en déduisons en particulier que la suite  $(S^\lambda \phi - S_\parallel^\lambda \mathbf{M}^\lambda)$  converge fortement dans  $L^2(\mathcal{Q}_T \times Y)$  vers  $(\phi - S_\parallel \mathbf{M})$ . Posons

$$\mathcal{A}^\lambda = \mathcal{L}(\mathbf{M}^\lambda, S^\lambda \phi - S_\parallel^\lambda \mathbf{M}^\lambda) - \mathcal{L}(\mathbf{M}, \phi - S_\parallel \mathbf{M}).$$

En prenant une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times Y \times [0, T])$  nous avons par la propriété (9.6), l'existence de deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  ne dépendant que de  $\|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$  et  $\|\mathbf{M}\|_{L^\infty}$  telles que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y \mathcal{A}^\lambda \cdot \varphi \, d\xi dx dt \right| &\leq C_1 \|\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}\|_{L^2} \|\phi - S_\parallel \mathbf{M}\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} \\ &+ C_2 \|(S^\lambda \phi - S_\parallel^\lambda \mathbf{M}^\lambda) - (\phi - S_\parallel \mathbf{M})\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \end{aligned}$$

En passant à la limite quand  $\lambda$  tend vers 0, nous déduisons que  $\mathcal{A}^\lambda$  tend vers 0 dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times Y \times [0, T])$ , ce qui montre, par unicité de la limite, que

$$\partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \phi - S_\parallel \mathbf{M}).$$

La propriété (9.91) est une conséquence immédiate de la propriété 9.4(i).  $\square$

*Preuve du lemme 9.7.* L'idée de la preuve est similaire à la preuve du lemme 2.6. C'est pour cela qu'on se contente de ne donner ici que les détails techniques de la preuve. Nous avons, pour  $\lambda$  et  $\mu$  deux indexes données de la suite,

$$\partial_t (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu) = \mathcal{L}(\mathbf{M}^\lambda, S^\lambda \phi - S_\parallel^\lambda \mathbf{M}^\lambda) - \mathcal{L}(\mathbf{M}^\mu, S^\mu \phi - S_\parallel^\mu \mathbf{M}^\mu)$$

En prenant le produit scalaire de cette égalité par  $(\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)$ , et en utilisant la propriété (9.6), nous déduisons (suite à l'estimation (9.93)) l'existence de deux constantes  $C'_1$  et  $C'_2$  ne dépendant que de  $R = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$  telles que

$$(9.96) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t |\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu|^2 &\leq C'_1 |\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu|^2 \left( |S^\lambda \phi - P_\parallel S^\lambda \langle \mathbf{M}^\lambda \rangle| + |\langle \mathbf{M}^\lambda \rangle - \mathbf{M}^\lambda| \right) \\ &+ C'_2 |\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu| \left( |(S^\lambda - S^\mu) \phi| + |S_\parallel^\lambda \mathbf{M}^\lambda - S_\parallel^\mu \mathbf{M}^\mu| \right) \end{aligned}$$

Puisque  $\phi \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^n))$  et d'après l'estimation (9.93), nous concluons que la famille  $S^\lambda \psi^\lambda(t)$  (resp.  $S^\lambda \langle \mathbf{M}^\lambda(t) \rangle$ ) est uniformément bornée dans  $H^1(\mathbb{R}^2)^3$  (resp. dans  $(L^2)^3 \cap (L^\infty)^3$ ) pour presque tout  $t \in [0, T]$  et pour tout  $\lambda$ . On en déduit par l'application des deux lemmes 2.7 (puisque ici  $(n \leq 2)$ ) et 2.8 l'existence d'une constante  $C$  indépendante de  $\lambda$  et de  $t$  telle que pour tout réel  $\rho$  assez grand

$$(9.97) \quad \left\| S^\lambda \phi(t) - P_\parallel S^\lambda \langle \mathbf{M}^\lambda(t) \rangle - F_\rho^\lambda(t) \right\|_{L^2} \leq C/\rho \quad \text{et} \quad \left\| F_\rho^\lambda(t) \right\|_{L^\infty} \leq C \ln(\rho)$$

où on a posé :  $F_\rho^\lambda = S^\rho S^\lambda \phi^\lambda - P_\parallel^\rho S^\lambda \langle \mathbf{M}^\lambda \rangle$ . Ainsi, en intercalant  $F_\rho^\lambda$  et en utilisant (9.93) il vient

$$(9.98) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \int_Y |\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu|^2 \left( |S^\lambda \phi - P_\parallel S^\lambda \langle \mathbf{M}^\lambda \rangle| + |\langle \mathbf{M}^\lambda \rangle - \mathbf{M}^\lambda| \right) dx d\xi \\ \leq (C \ln(\rho) + 2R) \left\| (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{2RC}{\rho} \left\| (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)(t) \right\|_{L^2}.$$

Par ailleurs, en écrivant

$$S_\parallel^\mu \mathbf{M}^\mu - S_\parallel^\lambda \mathbf{M}^\lambda = S^\mu P_\parallel \langle \mathbf{M}^\mu - \mathbf{M}^\lambda \rangle + (S^\mu - S^\lambda) P_\parallel \langle \mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M} \rangle + (S^\mu - S^\lambda) P_\parallel \langle \mathbf{M} \rangle \\ - \Pi_x \left( \langle \mathbf{M}^\mu - \mathbf{M}^\lambda \rangle - (\mathbf{M}^\mu - \mathbf{M}^\lambda) \right)$$

nous déduisons et prenant la norme  $L^2(\mathbb{R}^n \times Y)$ ,

$$(9.99) \quad \left\| (S_\parallel^\mu \mathbf{M}^\mu - S_\parallel^\lambda \mathbf{M}^\lambda)(t) \right\|_{L^2} \leq 2 \left\| (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M})(t) \right\|_{L^2} + \left\| (S^\mu - S^\lambda) P_\parallel \langle \mathbf{M}(t) \rangle \right\|_{L^2} \\ + 3 \left\| (\mathbf{M}^\mu - \mathbf{M}^\lambda)(t) \right\|_{L^2}$$

Notons

$$X^{\lambda,\mu}(t) = \left\| (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M}^\mu)(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times Y)}^2 \quad \text{et} \quad X^{\lambda,\infty}(t) = \left\| (\mathbf{M}^\lambda - \mathbf{M})(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times Y)}^2,$$

et posons

$$G^{\lambda,\mu}(t) = \left\| (S^\lambda - S^\mu) \phi(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left\| (S^\lambda - S^\mu) P_\parallel \langle \mathbf{M}(t) \rangle \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Puisque  $\phi \in L^2(\mathcal{Q}_T)$  et  $P_\parallel \langle \mathbf{M} \rangle \in L^2(\mathcal{Q}_T)$ , on déduit que

$$(9.100) \quad \lim_{\lambda,\mu \rightarrow \infty} \left\| G^{\lambda,\mu} \right\|_{L^2(0,T)} = 0$$

En prenant l'intégrale sur  $\mathbb{R}^n \times Y$  de (9.96), nous déduisons des estimations (9.98) et (9.99), pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(9.101) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} X^{\lambda,\mu}(t) \leq (C_1 \ln(\rho)) X^{\lambda,\mu}(t) + C_2 \sqrt{X^{\lambda,\mu}(t)} \left( \sqrt{X^{\lambda,\infty}(t)} + G^{\lambda,\mu}(t) + \frac{C_3}{\rho} \right)$$

où on a posé,  $C_3 = 2RC$ ,  $C_2 = \max(2C_2', C_1')$  et où la constante  $C_1$  est choisie de telle sorte que  $(C_1 \ln(\rho)) \geq (C_1'(C \ln(\rho) + 2R) + 3C_2')$ , pour  $\rho$  assez grand. Nous nous retrouvons maintenant exactement dans la même configuration que la preuve du lemme 2.6, équation (2.45) (page 49). Pour conclure il suffit de reproduire à l'identique la dite preuve à partir (2.45) (y compris le lemme 2.9).  $\square$

#### n° Unicité de la solution

L'unicité de la solution s'obtient par une technique analogue à celle utilisée pour montrer l'unicité de la solution forte du problème homogénéisé. Cette technique repose sur l'utilisation du lemme de Gronwall et sur l'obtention d'un contrôle lentement explosif de la norme  $L^\infty$  des solutions par les lemmes 2.7 et 2.8. Les détails de la démonstration sont laissés en exercice pour le lecteur. (Notons que ce résultat d'unicité n'est pas nécessaire pour la démonstration de la convergence).



n° Le cas constant par morceaux

Il s'agit de montrer que lorsque  $\mathbf{M}_0$  et  $\mathcal{L}$  vérifient l'hypothèse 9.1 (constants par morceaux) alors il existe une solution constante par morceaux. Supposons donc qu'il existe  $\ell$  fonctions  $\mathbf{M}_0^1, \dots, \mathbf{M}_0^\ell$  de  $\{L^2(\mathbb{R}^n) \times L^\infty(\mathbb{R}^n)\}^3$  telles que, pour presque tout  $(\mathbf{x}, \xi) \in \mathbb{R}^n \times Y$ ,

$$(9.102) \quad \mathbf{M}_0(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{i=1}^{\ell} \chi_i(\xi) \mathbf{M}_0^i(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\cdot, \cdot; \mathbf{x}, \xi) = \sum_{i=1}^{\ell} \chi_i(\xi) \mathcal{L}_i(\cdot, \cdot; \mathbf{x})$$

où  $\chi_i$  est la fonction indicatrice d'un intervalle  $\mathcal{I}_i$  de  $Y$  et où la famille  $(\mathcal{I}_i)_{1 \leq i \leq \ell}$  constitue une partition de  $Y$ . On pose  $\mathbf{M} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3)$  une solution du problème (9.90). Nous avons alors (l'exposant  $i$  étant fixé)

**Lemme 9.8** *L'équation différentielle*

$$(9.103) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}^i = \mathcal{L}_i(\mathbf{M}^i, \phi - P_{\parallel} \langle \mathbf{M} \rangle + \Pi_x \langle \mathbf{M} \rangle - \Pi_x \mathbf{M}^i) & \text{dans } \mathcal{Q}_T, \\ \mathbf{M}^i|_{t=0} = \mathbf{M}_0^i & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

admet une solution (unique)  $\mathbf{M}^i \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)$ .

*Preuve.* La preuve de ce lemme peut s'obtenir en suivant la même technique que dans la preuve d'existence du lemme 9.3. Une solution plus simple consisterait à prendre plutôt comme problème régularisé

$$(9.104) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}^{i,\lambda} = \mathcal{L}_i(\mathbf{M}^{i,\lambda}, S^\lambda \phi - P_{\parallel}^\lambda \langle \mathbf{M} \rangle + \Pi_x \langle \mathbf{M} \rangle - \Pi_x \mathbf{M}^{i,\lambda}) & \text{dans } \mathcal{Q}_T, \\ \mathbf{M}^{i,\lambda}|_{t=0} = \mathbf{M}_0^i & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où l'application  $P_{\parallel}^\lambda$  est celle du lemme 2.8 (avec  $\rho = \lambda$ ). Dans tous les cas nous laissons au lecteur le soin de conclure.  $\square$

A partir des solutions  $\mathbf{M}^i$  nous construisons la fonction  $\widetilde{\mathbf{M}} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3)$  par la formule,

$$(9.105) \quad \widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, \xi, t) = \sum_{i=1}^{\ell} \chi_i(\xi) \mathbf{M}^i(\mathbf{x}, t) \quad \text{pour presque tout } (\mathbf{x}, \xi, t) \in \mathbb{R}^n \times Y \times [0, T].$$

Cette fonction est bien constante par morceaux. Nous allons montrer que  $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}$ . Il est facile de voir à partir des équations vérifiées par chaque  $\mathbf{M}^i$  que la fonction  $\widetilde{\mathbf{M}}$  vérifie

$$(9.106) \quad \begin{cases} \partial_t \widetilde{\mathbf{M}} = \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{M}}, \phi - P_{\parallel} \langle \mathbf{M} \rangle + \Pi_x \langle \mathbf{M} \rangle - \Pi_x \widetilde{\mathbf{M}}) & \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y, \\ \widetilde{\mathbf{M}}|_{t=0} = \mathbf{M}_0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times Y \end{cases}$$

Grâce à (9.4)(i), pour tout  $t$ ,  $|\widetilde{\mathbf{M}}(t)| = |\mathbf{M}_0|$  p.p. dans  $\mathbb{R}^n \times Y$ . A partir des deux systèmes (9.106) et (9.90), nous constatons que

$$\begin{aligned} \partial_t (\widetilde{\mathbf{M}} - \mathbf{M}) &= \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{M}}, \phi - P_{\parallel} \langle \mathbf{M} \rangle + \Pi_x \langle \mathbf{M} \rangle - \Pi_x \widetilde{\mathbf{M}}) \\ &\quad - \mathcal{L}(\mathbf{M}, \phi - P_{\parallel} \langle \mathbf{M} \rangle + \Pi_x \langle \mathbf{M} \rangle - \Pi_x \mathbf{M}) \end{aligned}$$

En prenant le produit scalaire de cette égalité par  $(\widetilde{\mathbf{M}} - \mathbf{M})$  nous déduisons (en utilisant la propriété (9.6))

$$(9.107) \quad \frac{1}{2} \partial_t |\widetilde{\mathbf{M}} - \mathbf{M}|^2 \leq C_1 |\widetilde{\mathbf{M}} - \mathbf{M}|^2 |\phi - P_{\parallel} \langle \mathbf{M} \rangle + \Pi_x \langle \mathbf{M} \rangle - \Pi_x \mathbf{M}| + C_2 |\widetilde{\mathbf{M}} - \mathbf{M}|^2$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes ne dépendant que de  $R = \|\mathbf{M}_0\|_{L^\infty}$ . Posons

$$f(t) - C_2 t = C_1 \int_0^t |\phi(\tau) - P_{\parallel} \langle \mathbf{M}(\tau) \rangle + \Pi_x \langle \mathbf{M}(\tau) \rangle - \Pi_x \mathbf{M}(\tau)| d\tau \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^n \times Y).$$

L'inéquation (9.107) montre que presque partout dans  $\mathcal{Q}_T \times Y$ ,

$$\frac{1}{2} \partial_t \left( e^{-f} |\widetilde{\mathbf{M}} - \mathbf{M}| \right)^2 \leq 0,$$

et donc compte tenu de la condition initiale  $(\widetilde{\mathbf{M}} - \mathbf{M})|_{t=0} = 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n \times Y)$ ,

$$e^{-f} |\widetilde{\mathbf{M}} - \mathbf{M}| = 0 \quad p.p. \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y.$$

Mais la fonction  $f$  est finie presque partout dans  $\mathcal{Q}_T \times Y$ , donc  $e^{-f}$  est presque partout non nul, et au final

$$\widetilde{\mathbf{M}} - \mathbf{M} = 0 \quad p.p. \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y.$$

□

**Remarque 9.15** *Considérons  $\mathbf{M}_0$  et  $\mathcal{L}$  sous la forme (9.102). Dans le cas avec champ effectif (cf. section 9.1.2), il convient de supposer, afin de montrer l'existence d'une solution constante par morceaux, que  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto \Phi(\cdot; \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  est constante par rapport à  $\xi$  sur chaque intervalle  $\mathcal{I}_i$ .*

## 9.5 Justification du problème laminaire dans le cas 3D

Nous traitons dans ce paragraphe la généralisation possible au cas  $n = 3$  des résultats de la section 9.4. En fait, en se basant sur les résultats de [27] (voir chapitre 2, section 2.5), qui ne sont valables que lorsque la permittivité électrique  $\varepsilon^\delta$  est constante, nous allons indiquer dans quelles mesures est-il possible d'adapter les preuves du cas 2D au cas 3D.

n° On suppose désormais que l'hypothèse 9.1 tient lieu avec  $\varepsilon_r = 0$  et donc  $\varepsilon^\delta = \varepsilon_0$ .

n° On considère  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta, \mathbf{M}^\delta)$  la solution forte du théorème 2.7 associée au problème (9.2)-(9.3).

### a) Estimations a priori

Le théorème 9.7 reste encore valable. Les estimations (9.40) sont indépendantes de la dimension d'espace et proviennent des propriétés (9.4)(i) et (9.4)(ii) sur la loi non linéaire. Pour l'estimation (9.41), voir par exemple [26] (Proposition 3). La constante  $C(T)$  qui y intervient ne dépend que de  $T$ ,  $\mathcal{E}(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ ,  $\|\mathbf{M}_0\|_{L^2 \cap L^\infty}$  et des normes de  $\text{rot } \mathbf{E}_0$  et  $\text{rot } \mathbf{H}_0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ .

**b) Convergence vers le modèle homogénéisé**

Le théorème 9.7 demeurant valide on a donc toujours l'existence de  $\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M}^h$  éléments de  $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)$  telles que, à sous suite extraite près,

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^\delta, \partial_t \mathbf{E}^\delta) &\rightharpoonup (\mathbf{E}^h, \partial_t \mathbf{E}^h) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)^2 \text{ faible} - \star \\ (\mathbf{H}^\delta, \partial_t \mathbf{H}^\delta) &\rightharpoonup (\mathbf{H}^h, \partial_t \mathbf{H}^h) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)^2 \text{ faible} - \star \\ (\mathbf{M}^\delta, \partial_t \mathbf{M}^\delta) &\rightharpoonup (\mathbf{M}^h, \partial_t \mathbf{M}^h) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)^2 \text{ faible} - \star \end{aligned}$$

Ces limites vérifient les conditions initiales (9.42).

**b-1) Passage à la limite dans le système de Maxwell**

Puisque  $\varepsilon^\delta = \varepsilon_0$ , le passage à la limite dans le système de Maxwell (9.2) se fait de manière immédiate et classique au sens des distributions. On obtient que le triplet  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M}^h)$ , vérifie

$$(9.108) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}^h - \text{rot } \mathbf{H}^h = 0, & \mu_0 \partial_t (\mathbf{H}^h + \mathbf{M}^h) + \text{rot } \mathbf{E}^h = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \\ (\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

**b-2) Passage à la limite dans la loi non linéaire**

Il s'agit de montrer l'existence d'une fonction vectorielle  $\mathbf{M} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3)$  telle que

$$\mathbf{M}^h = \langle \mathbf{M} \rangle \text{ et } \mathbf{M} \text{ solution de (9.28)}$$

Suivons la démarche du cas 2D qui consiste à considérer une fonction  $\mathbf{M} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n \times Y)^3)$  vérifiant

$$(9.109) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, P_\perp \mathbf{H}^h - S_\parallel(\mathbf{M})) \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y, \\ \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times Y, \end{cases}$$

où  $P_\perp \mathbf{H}^h$  est considéré comme une donnée et où  $S_\parallel$  est défini par (9.64).

**b-2-i) Existence des solutions de (9.109)**

Il faut montrer d'abord l'existence d'une solution de (9.109) et montrer que cette solution constitue une fonction admissible; par exemple constante par morceaux lorsque la donnée initiale est constante par morceaux. C'était l'objet du lemme 9.3 dans le cas 2D. Le problème est que la démonstration proposée pour ce lemme utilise de manière essentielle le résultat du lemme 2.7 spécifique à la dimension 2.

C'est pour cela que nous classons ce point parmi les tâches délicates. En vérité il est possible de s'en sortir en utilisant le même problème régularisé (9.92). L'existence de solutions s'obtient de la même façon que dans le cas 2D. Pour montrer la convergence de la solution régularisée vers une solution du problème (9.109) on utilise plutôt une démarche similaire à celle utilisée par [27] pour montrer la convergence de la solution de (2.64) vers la solution faible du théorème 2.6. Cette démarche reposera alors sur le résultat suivant : Si  $f \in L^2 \cap L^\infty$  alors le commutateur  $[f, P_\parallel]$  est compact sur les parties bornées de  $L^2 \cap L^\infty$  (voir [27]).

**b-2-ii) Convergence à double échelle forte**

Supposons que la solution de (9.109) existe, la deuxième étape consiste à montrer le résultat de convergence

$$\left\| \mathbf{M}^\delta - (\mathbf{M})^\delta \right\|_{C^0([0,T];L^2(\mathbf{R}^n \times Y))} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

La preuve de ce résultat repose sur trois ingrédients essentiels : premièrement, le résultat de compacité (9.55) mais celui la ne pose pas de problème puisqu'il est indépendant de la dimension d'espace, deuxièmement le lemme 9.2 qui comme précisé est valable aussi en dimension 3 et troisièmement le lemme 9.4 qui est le seul à être spécifique à la dimension 2. Cependant, on peut montrer en utilisant le résultat du lemme 2.10 une version légèrement différente qui permet également de conclure.

**Lemme 9.9** *Pour tout réel  $\lambda > 0$  assez grand et pour tout  $\delta > 0$ , il existe une fonction  $\Psi_\lambda^\delta \in L^2(0, T; L^\infty \mathbf{R}^3)^3$  telle que*

$$\left\| \Psi_\lambda^\delta \right\|_{L^2(0,T;L^\infty \mathbf{R}^3)} \leq C \log \lambda \text{ et } \left\| (P_\perp \mathbf{H}^\delta - P_\parallel \mathbf{M}^\delta) - \Psi_\lambda^\delta \right\|_{L^2(\mathcal{Q}_T)} \leq C/\lambda,$$

la constante  $C$  étant indépendante de  $\lambda$  et  $\delta$ .

*Preuve.* Il suffit de poser  $\Psi_\lambda^\delta = S^\lambda P_\perp \mathbf{H}^\delta - P_\parallel^\lambda \mathbf{M}^\delta$ , d'appliquer à  $P_\parallel^\lambda \mathbf{M}^\delta$  le lemme 2.8 qui est indépendant de la dimension d'espace et d'appliquer à  $S^\lambda P_\perp \mathbf{H}^\delta$  le lemme 2.10 puisque  $P_\perp \mathbf{H}^\delta$  vérifie

$$(9.110) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \mu_0 \partial_{tt} P_\perp \mathbf{H}^\delta - \vec{\Delta} P_\perp \mathbf{H}^\delta = -\varepsilon_0 \mu_0 P_\perp \partial_t \mathcal{L}(\mathbf{M}^\delta, \mathbf{H}^\delta) \\ (P_\perp \mathbf{H}^\delta, \partial_t P_\perp \mathbf{H}^\delta)|_{t=0} = (P_\perp \mathbf{H}_0, -\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \Pi_\perp \mathbf{E}_0 - P_\perp \mathcal{L}(\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_0)), \end{cases}$$

et on a  $P_\perp \mathbf{H}_0 \in H^1(\mathbf{R}^3)^3$ ,  $\text{rot } \Pi_\perp \mathbf{E}_0 \in L^2(\mathbf{R}^3)^3$ ,  $\mathcal{L}(\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_0) \in L^2(\mathbf{R}^3)^3$  (par la propriété 9.5), et grâce à 9.5

$$\left\| \partial_t \mathcal{L}(\mathbf{M}^\delta, \mathbf{H}^\delta) \right\|_{L^1(0,T;L^2)} \leq C \left( \left\| \partial_t \mathbf{H}^\delta \right\|_{L^1(0,T;L^2)} + \left\| \partial_t \mathbf{M}^\delta \right\|_{L^2(0,T;L^4)} \left\| \mathbf{H}^\delta \right\|_{L^2(0,T;L^4)} \right)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\delta$ , soit par la propriété 9.5

$$\left\| \partial_t \mathcal{L}(\mathbf{M}^\delta, \mathbf{H}^\delta) \right\|_{L^1(0,T;L^2)} \leq C' \left( \left\| \partial_t \mathbf{H}^\delta \right\|_{L^1(0,T;L^2)} + \left\| \mathbf{H}^\delta \right\|_{L^2(0,T;L^4)}^2 \right)$$

où  $C'$  est également une constante indépendante de  $\delta$ . Le terme de droite est bornée uniformément en  $\delta$  d'après les estimations a priori sur  $\mathbf{H}^\delta$  et  $\mathbf{M}^\delta$ , en utilisant la décomposition  $\mathbf{H}^\delta = P_\perp \mathbf{H}^\delta - P_\parallel \mathbf{M}^\delta$  et en utilisant l'inclusion continue de  $H^1$  dans  $L^4$  en dimension 3 pour borner la norme  $L^4$  de  $P_\perp \mathbf{H}^\delta$ .  $\square$

## 9.6 A propos de la généralisation au cas d'une périodicité quelconque

Ce paragraphe constitue un premier pas vers la résolution d'un problème encore en progression et qui est la généralisation des résultats précédents au cas d'une périodicité  $Y = [0, 1]^m$  avec  $1 \leq m \leq n$ . Nous rappelons que ces résultats ne traitaient que le cas laminaire :  $m = 1$ .

Notre travail va consister à montrer d'abord un équivalent du lemme 9.2 dans le cas d'une périodicité quelconque : c.à.d, étant donnée une fonction à variables séparées (admissible)  $\mathbf{M}$ , quelle est la limite à double échelle de  $P_{\parallel}(\mathbf{M})^\delta$  ? Ce lemme est en effet le noyau de la preuve de convergence entreprise précédemment.

Une fois qu'on est capable de démontrer un tel résultat, il est alors relativement facile si on s'inspire du cas laminaire, d'intuiter la forme du problème limite telle que nous l'avons présentée dans la section 9.2. C'est ce que nous verrons à la fin de ce paragraphe. Auparavant, nous essaierons d'expliquer les difficultés rencontrées pour faire les démonstrations.

Tout d'abord, nous énonçons le résultat (rigoureux celui-là) qui est à la base de notre conjecture. Soit  $S_{\parallel}$  l'opérateur de  $L^2(\mathbb{R}^n; L^2_{\#}(Y))^3$  dans lui même défini par

$$(9.111) \quad S_{\parallel} \mathbf{M} = P_{\parallel} \langle \mathbf{M} \rangle + P_{\parallel}^{\#} \mathbf{M},$$

alors

**Lemme 9.10** *Pour toute fonction  $\mathbf{M} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n; L^2_{\#}(Y))^3$  se mettant sous la forme (9.17), pour un certain entier  $L$ , où pour chaque  $\ell$ ,  $\mathbf{M}^\ell \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^3$  et  $\chi_\ell \in L^2_{\#}(Y)$ , on a*

$$(9.112) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| (S_{\parallel} \mathbf{M})^\delta - P_{\parallel}(\mathbf{M})^\delta \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Ce résultat est une version plus faible que le lemme 9.2 dans le cas  $m = 1$ , dans le sens où il ne prend en compte que des fonctions régulières en  $\mathbf{x}$  et indépendantes du temps. Une des tâches qui reste à accomplir serait donc de généraliser le résultat de (9.10) à des fonctions  $\mathbf{M}$  telles que dans le lemme 9.2. En fait la principale difficulté de cette généralisation vient du fait que l'opérateur  $P_{\parallel}^{\#}(\mathbf{M})$  n'est pas continu de  $L^2(\mathbb{R}^n; L^{\infty}_{\#}(Y))^3$  dans lui même, pour  $m \geq 2$ .

La preuve du lemme 9.10 repose sur le lemme suivant qu'on va démontrer d'abord. Pour  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  à support compact, on note  $\mathcal{N}g$  le potentiel newtonien associé à  $g$ .

**Lemme 9.11** *Soit  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  et  $\chi \in L^2_{\#}(Y)$  alors*

$$(9.113) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \partial_{\alpha\beta} \mathcal{N} \left( g(\chi)^\delta \right) - \partial_{\alpha\beta} \mathcal{N}(g) \langle \chi \rangle - (\partial_{\alpha\beta} \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

où  $\partial_{\alpha\beta}$  désigne la dérivée seconde par rapport à la  $\alpha^{\text{ième}}$  et la  $\beta^{\text{ième}}$  variables,  $1 \leq \alpha, \beta \leq 3$  (par convention cette dérivée est nulle si  $\beta$  où  $\alpha$  est supérieur au nombre de variables).

*Preuve.* Par linéarité de l'opérateur  $\mathcal{N}$  on constate qu'il suffit de montrer le lemme pour  $\chi \in L^2_{\#}(Y)$  telle que  $\langle \chi \rangle = 0$ . On pose

$$u_\delta = \mathcal{N} \left( g(\chi)^\delta \right) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_\delta = \delta^2 g (\mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta.$$

Nous avons par définition de  $\mathcal{N}$

$$\Delta u_\delta = g(\chi)^\delta$$

et par définition de l'opération  $(\cdot)^\delta$ ,

$$\Delta \tilde{u}_\delta = \delta^2 (\mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta \Delta g + 2\delta (\nabla \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta \cdot \nabla g + (\Delta \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta g.$$

Comme  $\Delta \mathcal{N}_{\#} \chi = \chi - \langle \chi \rangle = \chi$ , on constate que

$$\Delta(u_\delta - \tilde{u}_\delta) = \delta^2 (\mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta \Delta g + 2\delta (\nabla \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta \cdot \nabla g.$$

et par conséquent, si on note  $\Omega$  le support de  $g$

$$(9.114) \quad \|\Delta(u_\delta - \tilde{u}_\delta)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \delta^2 \left\| (\mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta g\|_{L^\infty} + 2\delta \left\| (\nabla \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta \right\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla g\|_{L^\infty}$$

Puisque  $\mathcal{N}_{\#} \chi \in L^2_{\#}(Y)$  et  $\nabla \mathcal{N}_{\#} \chi \in L^2_{\#}(Y)^m$  on déduit que les suites  $(\mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta$  et  $(\nabla \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta$  sont faiblement convergentes, et donc bornées, dans respectivement  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)^m$  (voir par exemple annexe de [6]). Par suite, en faisant tendre  $\delta$  vers 0 dans (9.114),

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\Delta(u_\delta - \tilde{u}_\delta)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 0.$$

On déduit en particulier que pour tous les indices  $\alpha$  et  $\beta \in \{1, 2, 3\}$

$$(9.115) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|\partial_{\alpha\beta}(u_\delta - \tilde{u}_\delta)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 0.$$

Par ailleurs, pour tous les indices  $\alpha$  et  $\beta \in \{1, 2, 3\}$

$$\partial_{\alpha\beta} \tilde{u}_\delta = \delta^2 (\mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta \partial_{\alpha\beta} g + \delta \left( (\partial_\alpha \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta \partial_\beta g + (\partial_\beta \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta \partial_\alpha g \right) + (\partial_{\alpha\beta} \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta g.$$

et donc

$$\left\| \partial_{\alpha\beta} \tilde{u}_\delta - (\partial_{\alpha\beta} \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta g \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \delta^2 \left\| (\mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta g\|_{L^\infty} + 2\delta \left\| (\nabla \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta \right\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla g\|_{L^\infty}$$

où on a le même majorant que dans (9.114). On conclut que

$$(9.116) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \partial_{\alpha\beta} \tilde{u}_\delta - (\partial_{\alpha\beta} \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta g \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 0$$

Le résultat de convergence (9.113) du lemme s'obtient à partir de (9.115) et (9.116) en utilisant une inégalité triangulaire.  $\square$

*Preuve du lemme 9.10.* Par linéarité des opérateurs  $S_{\parallel}$  et  $P_{\parallel}$ , il suffit de montrer le lemme dans le cas où  $\mathbf{M}$  est de la forme  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \chi(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x})$  où  $\tilde{\mathbf{M}} = (\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)^3$  et  $\chi \in L^2_{\#}(Y)$ .

Nous conservons la notation  $\partial_\alpha$  pour désigner la dérivation par rapport à la  $\alpha^{\text{ième}}$  variable avec la convention  $\partial_\alpha = 0$  si  $\alpha$  est supérieur au nombre de variable.

n° Nous rappelons que pour une fonction vectorielle  $\mathbf{v} \in L^2(\mathbf{R}^n)^3$ ,  $P_{\parallel} \mathbf{v} = \nabla \operatorname{div} (\mathcal{N} v_1, \mathcal{N} v_2, \mathcal{N} v_3)$ .

n° Nous avons par définition,  $P_{\parallel}(\mathbf{M})^\delta = P_{\parallel}(\tilde{\mathbf{M}}(\chi)^\delta)$ , et donc en particulier

$$(P_{\parallel}(\mathbf{M})^\delta) \cdot \mathbf{e}_x = \partial_1 \sum_{\alpha=1}^3 \partial_\alpha \left( \mathcal{N} \left( M_\alpha(\chi)^\delta \right) \right)$$

D'autre part,  $(S_{\parallel} \mathbf{M})^\delta = \langle \chi \rangle P_{\parallel} \tilde{\mathbf{M}} + \left( P_{\parallel}^\#(\chi \tilde{\mathbf{M}}) \right)^\delta$ , par conséquent nous avons en particulier

$$(S_{\parallel} \mathbf{M})^\delta \cdot \mathbf{e}_x = \langle \chi \rangle \partial_1 \sum_{\alpha=1}^3 \partial_\alpha (\mathcal{N} M_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^3 (\partial_1 \partial_\alpha \mathcal{N}_{\#} \chi)^\delta M_\alpha$$

Ainsi

$$\left( (P_{\parallel}(\mathbf{M})^{\delta}) - (S_{\parallel}\mathbf{M})^{\delta} \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_x = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \partial_{1\alpha} \mathcal{N} \left( M_{\alpha}(\chi)^{\delta} \right) - \partial_{1\alpha} \mathcal{N}(M_{\alpha}) \langle \chi \rangle - (\partial_{1\alpha} \mathcal{N}_{\#} \chi)^{\delta} M_{\alpha} \right)$$

et en appliquant le lemme 9.11 (en prenant  $g = M_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ) nous déduisons

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \left( (S_{\parallel}\mathbf{M})^{\delta} - P_{\parallel}(\mathbf{M})^{\delta} \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_x \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Nous concluons en procédant de manière similaire pour les deux autres composantes de  $(S_{\parallel}\mathbf{M})^{\delta} - P_{\parallel}(\mathbf{M})^{\delta}$ .  $\square$

### Le modèle homogénéisé

Considérons le cas de l'hypothèse 9.1 où  $Y$  désigne désormais la cellule unité  $[0, 1]^m$  et prenons pour simplifier  $\varepsilon^{\delta} = \varepsilon_0$ . Dans ce cas, grâce aux estimations a priori du théorème 9.7 (valables aussi en dimension 3 comme expliqué plus haut), nous avons l'existence de  $\mathbf{E}^h$ ,  $\mathbf{H}^h$ ,  $\mathbf{M}^h$  éléments de  $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)$  telles que, à sous suite extraite près,

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^{\delta}, \partial_t \mathbf{E}^{\delta}) &\rightharpoonup (\mathbf{E}^h, \partial_t \mathbf{E}^h) \text{ dans } L^{\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)^2 \text{ faible } - \star \\ (\mathbf{H}^{\delta}, \partial_t \mathbf{H}^{\delta}) &\rightharpoonup (\mathbf{H}^h, \partial_t \mathbf{H}^h) \text{ dans } L^{\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)^2 \text{ faible } - \star \\ (\mathbf{M}^{\delta}, \partial_t \mathbf{M}^{\delta}) &\rightharpoonup (\mathbf{M}^h, \partial_t \mathbf{M}^h) \text{ dans } L^{\infty}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)^3)^2 \text{ faible } - \star \end{aligned}$$

et donc par passage à la limite dans le système de Maxwell (9.2) (au sens des distributions) le triplet  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M}^h)$ , vérifie

$$(9.117) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}^h - \operatorname{rot} \mathbf{H}^h = 0, & \mu_0 \partial_t (\mathbf{H}^h + \mathbf{M}^h) + \operatorname{rot} \mathbf{E}^h = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \\ (\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Ce qui suit maintenant est purement formel et constitue une conjecture sur la forme de la loi non linéaire homogénéisée. En effet s'inspirant du travail fait dans le cas laminaire, et au vue d'une comparaison entre le lemme 9.2 et 9.10, la fonction profil  $\mathbf{M} \in W^{1,\infty}(\mathcal{Q}_T; L^2_{\#}(Y))$  associée à la suite  $\mathbf{M}^{\delta}$ , devrait vérifier

$$(9.118) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, P_{\perp} \mathbf{H}^h - S_{\parallel}(\mathbf{M})) \quad \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y, \\ \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times Y, \end{cases}$$

Dans l'approche rigoureuse, il faut montrer d'abord l'existence de solutions au système (9.118) qui répondent au critère de convergence (9.112). Dans le cas laminaire, on s'en ai sortie en considérant les fonctions constantes par morceaux, qui sont conservée par les opérateurs  $\mathcal{L}(\cdot, \operatorname{cot})$  et  $\Pi_x$ . Dans le cas  $m \geq 2$ , ceci n'est plus possible : l'opérateur  $P_{\parallel}^{\#}$  ne conserve pas les fonctions constantes par morceaux (cf. remarque 9.4).

Supposons que l'équation (9.118) tient lieu. Comme à l'étape 3 (page 241) partir des équations de Maxwell nous avons

$$P_{\parallel} \mathbf{H}^h = -P_{\parallel} \mathbf{M}^h.$$

Par le lien entre la convergence double échelle et la convergence faible nous avons l'égalité  $\mathbf{M}^h = \langle \mathbf{M} \rangle$ . Il en résulte que

$$S_{\parallel} \mathbf{M} = P_{\parallel} \mathbf{M}^h + P_{\parallel}^{\#} \mathbf{M} = -P_{\parallel} \mathbf{H}^h + P_{\parallel}^{\#} \mathbf{M}$$

Au final en remplaçant dans (9.118)

$$(9.119) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{H}^h - P_{\parallel}^{\#} \mathbf{M}) & \text{dans } \mathcal{Q}_T \times Y, \\ \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0 & \text{dans } \mathbf{R}^n \times Y, \end{cases}$$

qui correspond bien avec la forme générale (9.9) annoncée au début du chapitre (avec  $\Phi = 0$ ).





## Chapitre 10

# Etude des propriétés du modèle homogénéisé laminaire

**Résumé :** Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés du modèle homogénéisé dans le cas laminaire (section 10.2.1) et ensuite dans quelques cas particuliers où l'on peut simplifier l'écriture du modèle et ainsi mener des calculs analytiques. Nous nous restreignons pour ces calculs aux milieux 2D laminaires et dans le cas où la distribution de l'aimantation  $\mathbf{M}_0$  est constante par morceaux et orthogonale au plan dans lequel s'effectue la propagation des ondes. Notre but est de montrer que l'homogénéisation crée de nouvelles propriétés d'absorption que nous analyserons via le problème linéarisé. Nous traitons d'abord le cas où on alterne des couches de vide et de ferromagnétique homogène (section 10.3). Dans ce cas, la loi homogénéisée prend une forme particulièrement simple : on peut simplifier le moment magnétique à l'échelle microscopique (formule (10.18)). Les effets sur l'absorption ((10.3.2)) nous montrent en particulier un shift sur la "fréquence de résonance" pour les ondes se propageant parallèlement à la direction de stratification (figure 10.4). Pour cet exemple, nous validons sur un plan numérique le procédé d'homogénéisation en comparant des simulations réalisées à partir du modèle hétérogène périodique à des simulations s'appuyant sur le modèle équivalent (section 10.3.3). Le cas multicouches homogène s'avère plus intéressant en terme de propriétés d'absorption (section 10.4). Il permet notamment de faire apparaître des doubles "pics de résonance" (voir par exemple figure 10.13). Ainsi, l'homogénéisation permet de jouer sur les gammes de fréquences dans lesquelles les ondes sont prioritairement absorbées.

### 10.1 Présentation du modèle physique

Nous étudions la diffraction d'une onde électromagnétique par un corps ferromagnétique dont les caractéristiques varient périodiquement suivant une seule direction de l'espace : figure 10.1. Plus précisément, nous présentons d'abord le modèle homogénéisé associé à une telle structure, ensuite nous discutons les propriétés et les applications physiques d'un tel modèle. Nous rappelons (cf. chapitre 9) que ce modèle homogénéisé s'interprète mathématiquement comme le problème limite lorsque la taille de la périodicité tend vers 0.

On note  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \leq 3$ ) le domaine occupé par le matériau ferromagnétique et  $\delta$  la

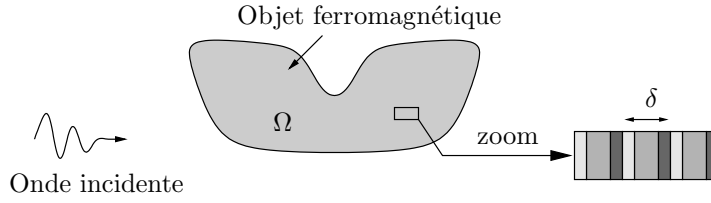


FIG. 10.1 – Présentation du problème laminaire

longueur caractéristique de la périodicité du domaine. On suppose donc que  $\delta$  est très petit devant les dimensions de  $\Omega$  et devant la longueur de l'onde électromagnétique incidente.

Nous allons travailler (aux vues des applications physiques) avec la loi non linéaire sous sa forme “explicite” (1.17) (nous renvoyons au chapitre 2 pour le lien entre forme explicite et forme abstraite). On se donne donc une distribution initiale du moment magnétique  $\mathbf{M}_0^\delta$ , un champ statique  $\mathbf{H}_s^\delta$ , un modèle d'anisotropie uniaxiale (par couche) représenté par le vecteur unitaire  $\mathbf{p}^\delta$  et le coefficient d'anisotropie  $K_a^\delta$ , et enfin un terme d'amortissement  $\alpha^\delta$ . L'aimantation  $\mathbf{M}^\delta$  vérifie alors dans  $\Omega$ ,

$$(10.1) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}^\delta = |\gamma| \mathbf{H}_T^\delta \times \mathbf{M}^\delta + \beta^\delta \mathbf{M}^\delta \times \partial_t \mathbf{M}^\delta, & \mathbf{M}^\delta|_{t=0} = \mathbf{M}_0^\delta, \\ \mathbf{H}_T^\delta = \mathbf{H}^\delta + \mathbf{H}_s^\delta + K_a^\delta (\mathbf{p}^\delta \cdot \mathbf{M}^\delta) \mathbf{p}^\delta \end{cases}$$

où on a posé  $\beta^\delta = \alpha^\delta / |\mathbf{M}_0^\delta|$  et où  $\mathbf{H}^\delta$  désigne le champ magnétique dans tout l'espace. Si on note  $\mathbf{E}^\delta$  le champ électrique, le triplet  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta, \mathbf{M}^\delta)$  satisfait aux équations de Maxwell dans  $\mathbf{R}^n$ ,

$$(10.2) \quad \begin{cases} \varepsilon^\delta \partial_t \mathbf{E}^\delta - \text{rot } \mathbf{H}^\delta = 0, & \mu_0 (\partial_t \mathbf{H}^\delta + \partial_t \mathbf{M}^\delta) + \text{rot } \mathbf{E}^\delta = 0, \\ (\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \end{cases}$$

Dans ce système, le couple  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$  modélise l'onde incidente qui éclaire le corps ferromagnétique  $\Omega$  et la permittivité  $\varepsilon^\delta$  ne dépend de  $\delta$  qu'à l'intérieur de  $\Omega$ . Nous allons préciser maintenant les hypothèses sur la dépendance des paramètres physiques par rapport au petit paramètre  $\delta$ . L'hypothèse la plus générale pour le problème “laminaire” est la suivante : on pose  $Y = [0, 1]$  la cellule de périodicité unité et on note  $\langle \cdot \rangle$  l'opérateur de moyenne sur  $Y$  et pour  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ , on note  $x$  sa première composante dans la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ ,

**Hypothèse 10.1** *Il existe  $\mathbf{M}_0, \beta, \mathbf{H}_s, K_a$  et  $\mathbf{p}$ , définis sur  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$  et à supports contenus dans  $\Omega \times \mathbf{R}$ , et  $\varepsilon_r \geq 0$  défini sur  $\mathbf{R}$ , telles que pour  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,*

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_0^\delta, \beta^\delta, \mathbf{H}_s^\delta, K_a^\delta, \mathbf{p}^\delta)(\mathbf{x}) &= (\mathbf{M}_0, \beta, \mathbf{H}_s, K_a, \mathbf{p})(\mathbf{x}, \frac{x}{\delta}) \\ \varepsilon^\delta(\mathbf{x}) &= \varepsilon_0 (1 + \varepsilon_r(\frac{x}{\delta}) \mathbf{1}_\Omega(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

où  $\mathbf{1}_\Omega$  désigne la fonction indicatrice de  $\Omega$ , et telles que les fonctions

$$\xi \longmapsto (\mathbf{M}_0, \beta, \mathbf{H}_s, K_a, p)(\mathbf{x}, \xi)$$

et  $\varepsilon_r$  sont périodiques de période  $Y$ .

Cette hypothèse précise qu'on va travailler dans le cas d'une périodicité  $1D$  et qu'on suppose les caractéristiques physiques d'un milieu ferromagnétique donné, indépendantes de la géométrie du milieu. Si on reste dans un cadre purement formel, cette hypothèse est en fait suffisante pour pouvoir dériver les équations homogénéisées. Cependant, la justification rigoureuse (qui a fait l'objet du chapitre 9) nécessite des précisions supplémentaires sur la régularité des fonctions périodiques introduites dans l'hypothèse 10.1. Un exemple pour lequel la justification marche est :

**Hypothèse 10.2** (*milieu multi-couches homogènes*). Il existe  $\varepsilon_r, \mathbf{M}_0, \beta, \mathbf{H}_s, K_a$  et  $\mathbf{p}$ , fonctions définies sur  $\mathbf{R}$ , constantes par morceaux, périodiques de période  $Y$  telles que, pour presque tout  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_0^\delta, \beta^\delta, \mathbf{H}_s^\delta, K_a^\delta, \mathbf{p}^\delta)(\mathbf{x}) &= \mathbf{1}_\Omega(\mathbf{x}) (\mathbf{M}_0, \beta, \mathbf{H}_s, K_a, \mathbf{p})\left(\frac{x}{\delta}\right) \text{ et} \\ \varepsilon^\delta(\mathbf{x}) &= \varepsilon_0 \left(1 + \varepsilon_r\left(\frac{x}{\delta}\right) \mathbf{1}_\Omega(\mathbf{x})\right), \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon_0 > 0, \varepsilon_r \geq 0$  et où  $\mathbf{1}_\Omega$  désigne la fonction indicatrice de  $\Omega$ .

## 10.2 Modèle homogénéisé

Il s'agit du système d'équations vérifié par les limites  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M}^h)$ , quand  $\delta \rightarrow 0$ , des solutions  $(\mathbf{E}^\delta, \mathbf{H}^\delta, \mathbf{M}^\delta)$  du système (10.1)-(10.2). Bien entendu, une telle définition présuppose l'existence de ces limites dans un sens à définir (cf. théorème 9.6). L'objectif de ce paragraphe est dans un premier temps, de présenter (ensuite discuter) ce modèle homogénéisé.

### 10.2.1 Présentation et discussion des équations homogénéisées

On suppose que l'on se place dans le cadre général de l'hypothèse 10.1 mais aussi que  $\text{div}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_0^\delta) = 0$  pour tout  $\delta$  (c'est une des conditions requises par le théorème de convergence 9.6). On voit que cette condition implique en particulier que sur  $\Omega$  (puisque  $\mathbf{H}_0 = 0$ ),  $\text{div} \mathbf{M}_0(\mathbf{x}, x/\delta) = 0; \forall \delta$ . Par conséquent, la fonction  $\mathbf{M}_0$  doit satisfaire

$$(10.3) \quad \mathbf{M}_0 \cdot \vec{\mathbf{e}}_x = 0.$$

D'après le chapitre 9 (équations (9.8)-(9.16)), le système homogénéisé associé aux équations (10.2)-(10.1) s'écrit : chercher  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M}^h)$  définis sur  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$  et vérifiant,

$$(10.4) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^h \partial_t \mathbf{E}^h - \text{rot} \mathbf{H}^h = 0, & \mu_0(\partial_t \mathbf{H}^h + \partial_t \mathbf{M}^h) + \text{rot} \mathbf{E}^h = 0, \\ (\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \end{cases} \quad \text{dans } \mathbf{R}^n,$$

où  $\mathbf{M}^h$  est telle que

$$(10.5) \quad p.p. (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+, \quad \mathbf{M}^h(\mathbf{x}, t) = \int_Y \mathbf{M}(\mathbf{x}, t, \xi) d\xi,$$

avec  $\mathbf{M}$ , la fonction profil de l'aimantation, définie sur  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \times Y$  et satisfaisant sur ce domaine

$$(10.6) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M} = |\gamma| \mathbf{H}_T \times \mathbf{M} + \beta \mathbf{M} \times \partial_t \mathbf{M}, & \mathbf{M}|_{t=0} = \mathbf{M}_0, \\ \mathbf{H}_T = \mathbf{H}^h + (\mathbf{M}_x^h - \mathbf{M}_x) \vec{\mathbf{e}}_x + \mathbf{H}_s + K_a(\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{p}. \end{cases}$$

Nous rappelons (cf. expression (9.15)) que tenseur homogénéisé  $\underline{\underline{\varepsilon}}^h$  est diagonal et est défini par

$$(10.7) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^h(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \left( \mathbf{1}_\Omega(\mathbf{x}) \left( \underline{\underline{\varepsilon}}^h \vec{\mathbf{e}}_x \otimes \vec{\mathbf{e}}_x + \bar{\varepsilon}^h (\vec{\mathbf{e}}_y \otimes \vec{\mathbf{e}}_y + \vec{\mathbf{e}}_z \otimes \vec{\mathbf{e}}_z) \right) + (1 - \mathbf{1}_\Omega(\mathbf{x})) \right),$$

où on a posé :  $\underline{\underline{\varepsilon}}^h = \langle (1 + \varepsilon_r)^{-1} \rangle^{-1}$  et  $\bar{\varepsilon}^h = \langle (1 + \varepsilon_r) \rangle$ .

En comparant ce système homogénéisé ((10.4)-(10.5)-(10.6)) avec le système initial ((10.2)-(10.1)), on constate que la principale différence vient de l'introduction d'une variable auxiliaire  $\mathbf{M}$  (qu'on appellera également aimantation à l'échelle microscopique) dans la relation qui lie l'aimantation à l'échelle macroscopique  $\mathbf{M}^h$  au champ magnétique macroscopique  $\mathbf{H}^h$ .

D'autre part on voit apparaître dans l'expression du champ magnétique total  $\mathbf{H}_T$  (système (10.6)) un nouveau terme  $(\mathbf{M}_x^h - \mathbf{M}_x)\vec{\mathbf{e}}_x$ . Ce terme met en valeur la direction  $\vec{\mathbf{e}}_x$  de la périodicité du problème initial. A première vue, il peut s'interpréter comme étant un terme d'anisotropie supplémentaire similaire au terme  $K_a(\mathbf{p} \cdot \mathbf{M})$ . En vérité, et comme cela a été mis en clair dans le chapitre précédent (cf. remarque 9.14 page 241), ce terme provient de la contribution (caché dans la contribution de  $\mathbf{H}^\delta$ ) du champ démagnétisant. Cette contribution admet une expression explicite grâce à l'hypothèse 1D de la périodicité (cela tombe en défaut dans le cas d'une périodicité 2D où 3D (voir chapitre 9)).

On constate aussi, du fait de la présence de  $\mathbf{M}_x^h = \langle \mathbf{M}_x \rangle$  dans l'expression de  $\mathbf{H}_T$ , que la loi (10.6) est non-locale par rapport à la variable  $\xi$ . On perd ainsi l'aspect local en espace de la loi (10.1).

Notons enfin que le caractère non linéaire de la loi ferromagnétique nous empêche a priori de remplacer (10.6) par une loi qui lie directement  $\mathbf{M}^h$  à  $\mathbf{H}^h$ . Cependant, il existe des cas particuliers où il est possible de le faire en exploitant la conservation de la norme de l'aimantation (nous renvoyons au paragraphes 10.3 et 10.4).

### 10.2.2 Propriétés de stabilité du problème homogénéisé

On retrouve pour le problème homogénéisé les propriétés de stabilité qu'on avait pour le problème initial (cf. par exemple chapitre 1, section 1.2, page 22). En prenant le produit scalaire de la première équation de (10.6) par  $\mathbf{M}$  on constate que la dérivée en temps de  $|\mathbf{M}|^2$  est nulle. Ainsi pour tout  $t \geq 0$ ,

$$(10.8) \quad |\mathbf{M}(\mathbf{x}, t, \xi)| = |\mathbf{M}_0(\mathbf{x}, \xi)|, \quad p.p. (\mathbf{x}, \xi) \in \Omega \times Y$$

C'est la conservation de la norme de l'aimantation au cours du temps, sauf qu'il s'agit de l'aimantation à l'échelle microscopique  $\mathbf{M}$  et non l'aimantation à l'échelle macroscopique  $\mathbf{M}^h$ . La relation 10.8 nous dit en particulier que pour tout temps  $t$ , le support de  $\mathbf{M}(t)$  est contenu dans  $\Omega \times Y$ , mais aussi grâce à la relation 10.5 que le support de  $\mathbf{M}^h(t)$  est contenu dans  $\Omega$ .

On a également la décroissance en temps de l'énergie totale : considérons en effet l'énergie associée à l'onde qui se propage

$$(10.9) \quad \mathcal{E}(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^n} \left( \underline{\underline{\varepsilon}}^h \mathbf{E}^h \cdot \mathbf{E}^h + \mu_0 |\mathbf{H}^h|^2 \right) d\mathbf{x}$$

et l'énergie effective associé au milieu ferromagnétique homogénéisé

$$(10.10) \quad \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) = \mu_0 \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^n} \int_Y |\mathbf{H}_s - \mathbf{M}|^2 + K_a |\mathbf{M} \times \mathbf{p}|^2 + \left( |\mathbf{M}_x|^2 - |\mathbf{M}_x^h|^2 \right) d\xi d\mathbf{x},$$

alors (voir preuve ci-après)

$$(10.11) \quad \frac{d}{dt} \left( \mathcal{E}(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h) + \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) \right) = -\frac{\mu_0}{|\gamma|} \int_{\mathbf{R}^n} \int_Y \beta |\partial_t \mathbf{M}|^2 d\xi dx$$

Remarquer que grâce à l'inégalité  $\langle |\mathbf{M}_x|^2 \rangle \geq \langle \mathbf{M}_x \rangle^2$ , on a bien  $\mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M}) \geq 0$ .

*Preuve de (10.11) :* Le principe de la preuve est similaire à toutes les épreuves de stabilité, maintes fois rencontrées le long de ce travail. On part de l'identité d'énergie propre aux équations de Maxwell (10.4), qui s'écrit en utilisant (10.5),

$$(10.12) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h) = -\mu_0 \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{H}^h \cdot \partial_t \mathbf{M}^h dx = -\mu_0 \int_{\mathbf{R}^n} \int_Y \mathbf{H}^h \cdot \partial_t \mathbf{M} d\xi dx$$

En posant sur  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \times Y$ ,

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = (\mathbf{M}_x^h - \mathbf{M}_x) \vec{e}_x + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{M})$$

on a d'après (10.6),

$$(10.13) \quad \mathbf{H}^h = \mathbf{H}_T - \mathbf{H}_{\text{eff}}$$

D'une part (cf. par exemple (1.27), page 24),

$$(10.14) \quad \partial_t \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_T = \frac{\beta}{|\gamma|} |\partial_t \mathbf{M}|^2,$$

et d'autre part, compte tenu de (10.8),

$$\partial_t \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \partial_t \left( |\mathbf{H}_s - \mathbf{M}|^2 + K_a |\mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p}|^2 + |\mathbf{M}_x|^2 \right) + \partial_t \mathbf{M}_x \cdot \mathbf{M}_x^h$$

Ainsi,

$$\int_Y \partial_t \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_{\text{eff}} d\xi = -\frac{1}{2} \partial_t \int_Y \left( |\mathbf{H}_s - \mathbf{M}|^2 + K_a |\mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p}|^2 + |\mathbf{M}_x|^2 - |\mathbf{M}_x^h|^2 \right) d\xi$$

soit

$$(10.15) \quad \mu_0 \int_{\mathbf{R}^n} \int_Y \partial_t \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_{\text{eff}} d\xi dx = -\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{eff}}(\mathbf{M})$$

Nous obtenons l'identité (10.11) en combinant (10.15), (10.14), (10.13) et (10.12).  $\square$

**Remarque 10.1** *C'est en quelque sorte, grâce à cette identité de stabilité nous avons pu démontrons au chapitre 9 l'unicité de la solution forte du problème homogénéisé dans les cas 1D et 2D (cf. théorème 9.5).*

### 10.3 Un premier cas particulier : alternance vide ferromagnétique

On considère dans ce paragraphe le seul cas particulier pour lequel les équations homogénéisés ont une forme similaire aux équations initiales. Il s'agit du cas où la périodicité du milieu ferromagnétique est décrite par une alternance périodique entre le vide et un milieu ferromagnétique homogène. Plus précisément, en considérant  $\mathcal{I}$  un ouvert de  $Y$ , nous faisons l'hypothèse

**Hypothèse 10.3** *On se place dans le cadre de l'hypothèse (10.2) et on suppose de plus l'existence de trois vecteurs constants  $\mathbf{M}_0^h$ ,  $\mathbf{H}_s^h$  et  $\mathbf{p}^h$  de  $\mathbf{R}^3$  et de deux réels positifs  $\beta^h$  et  $K_a^h$  telles que*

$$(\mathbf{M}_0, \beta, \mathbf{H}_s, K_a, \mathbf{p})(\xi) = \mathbf{1}_{\mathcal{I}}(\xi) (\mathbf{M}_0^h, \beta^h, \mathbf{H}_s^h, K_a^h, \mathbf{p}^h) \quad \text{pour } \xi \in Y.$$

### 10.3.1 Forme particulière des équations

On considère donc la configuration correspondant à l'hypothèse 10.3. Nous allons montrer qu'on peut éliminer l'inconnue (à l'échelle microscopique)  $\mathbf{M}$  des équations (10.4)-(10.6).

n° D'une part, on constate à partir de la conservation de la norme de l'aimantation (10.8), que

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t, \xi) = 0 \text{ pour } \xi \notin \mathcal{I}.$$

D'autre part, on remarque que les données de l'équation (10.6) en  $\mathbf{M}$ , en l'occurrence  $\mathbf{H}^h$ ,  $\mathbf{M}^h$  et les données de l'hypothèse 10.3, sont constants par rapport à la variable  $\xi$  sur l'intervalle  $\mathcal{I}$ . Il convient alors de chercher  $\mathbf{M}$  sous la forme

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t, \xi) = \mathbf{M}(\mathbf{x}, t)\mathbf{1}_{\mathcal{I}}(\xi).$$

Pour une telle solution nous avons par (10.5)

$$(10.16) \quad \mathbf{M}^h = \theta \mathbf{M} \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{|\mathcal{I}|}{|Y|}.$$

On peut donc réécrire les équations homogénéisées en éliminant  $\mathbf{M}$ , sous la forme

$$(10.17) \quad \begin{cases} \underline{\varepsilon}^h \partial_t \mathbf{E}^h - \text{rot } \mathbf{H}^h = 0, & \mu_0(\partial_t \mathbf{H}^h + \partial_t \mathbf{M}^h) + \text{rot } \mathbf{E}^h = 0, \\ (\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^n,$$

avec  $\mathbf{M}^h$  vérifiant sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$

$$(10.18) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}^h = |\gamma| \mathbf{H}_T^h \times \mathbf{M}^h + \frac{\beta^h}{\theta} \mathbf{M}^h \times \partial_t \mathbf{M}^h, & \mathbf{M}^h|_{t=0} = \theta \mathbf{1}_{\Omega} \mathbf{M}_0, \\ \mathbf{H}_T^h = \mathbf{H}^h - \frac{1-\theta}{\theta} (\mathbf{M}_x^h) \vec{e}_x + \mathbf{H}_s^h + \frac{K_a^h}{\theta} (\mathbf{p}^h \cdot \mathbf{M}^h) \mathbf{p}^h, \end{cases}$$

On calcule bien la solution du problème homogénéisé puisque la solution de (10.17)-(10.18) est également la solution (10.4)-(10.6) via la relation (10.16). Cette loi est du même type que la loi initiale (10.1), que l'on retrouve bien en faisant  $\theta = 1$  : domaine initialement homogène.

### 10.3.2 Linéarisation du modèle homogénéisé : interprétation en termes de perméabilités

Une première application intéressante (qui constitue également une validation du modèle homogénéisé (cf. section (10.4.3)) est de pouvoir caractériser les propriétés d'absorption du milieu ferromagnétique homogénéisé. Nous avons montré comment, dans l'hypothèse des petites perturbations, on peut linéariser la loi ferromagnétique et la remplacer par un tenseur de susceptibilité équivalent (cf. section 1.3, page 25). Nous allons refaire ce même travail mais en l'appliquant cette fois ci à (10.18). Pour simplifier, on se place dans le cas où le milieu ferromagnétique ne possède pas d'anisotropie ( $K_a^\delta = K_a^h = 0$ ). On pose

$$\mathbf{H}_s^h = H_0 \vec{\mathbf{n}}$$

où  $\vec{\mathbf{n}}$  désigne un vecteur unitaire et  $H_0 = |\mathbf{H}_s^h|$ . L'équilibre magnétostatique initial nous impose alors de prendre

$$\mathbf{M}_0^h = |\mathbf{M}_0^h| \vec{\mathbf{n}} \equiv M_0 \vec{\mathbf{n}}$$

Compte tenu de (10.3) on constate que le vecteur  $\vec{\mathbf{n}}$  doit nécessairement être choisi de telle sorte que

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_x = 0.$$

Nous rappelons que le modèle linéarisé s'obtient en posant

$$\mathbf{H}^h = \eta \mathbf{h} + O(\eta^2) \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^h = \theta \mathbf{M}_0^h + \eta \mathbf{m} + O(\eta^2)$$

avec

$$\eta \ll H_0 \quad \text{et} \quad \eta \ll \theta M_0$$

et en ne gardant dans (10.18) que les termes en  $O(\eta)$ . En revenant aux notations habituelles :  $\beta^h = \frac{\alpha}{M_0}$ , l'équation linéarisée associée à (10.18) s'écrit

$$(10.19) \quad \partial_t \mathbf{m} = \vec{\mathbf{n}} \times (|\gamma| H_0 \mathbf{m} + \alpha \partial_t \mathbf{m} - |\gamma| M_0 (\theta \mathbf{h} - (1 - \theta) \mathbf{m}_x \vec{\mathbf{e}}_x))$$

qui s'écrit en fixant une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$

$$(10.20) \quad i\omega \hat{\mathbf{m}} - (|\gamma| H_0 + i\omega\alpha) \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{m}} - |\gamma| M_0 (1 - \theta) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_x) \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{e}}_x = -|\gamma| M_0 \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{h}}$$

Posons

$$\varpi = \omega_0/\omega \quad \text{et} \quad A = M_0/H_0$$

où  $\omega_0 = |\gamma| H_0$ , la pulsation de Larmor. L'équation (10.20) s'écrit alors, en divisant par  $i\omega$ ,

$$(10.21) \quad \hat{\mathbf{m}} - (\alpha - i\varpi) \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{m}} + i\varpi A (1 - \theta) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_x) \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{e}}_x = i\varpi A \theta \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{h}}$$

**Lemme 10.1** *Soit  $\hat{\mathbf{m}}$  et  $\hat{\mathbf{h}}$  vérifiant (10.21). Alors, sous la condition (toujours vérifiée si  $\alpha \neq 0$ )*

$$D = 1 + (\alpha - i\varpi) (\alpha - i\varpi (1 + (1 - \theta)A)) \neq 0$$

*il existe un tenseur de susceptibilité  $\chi_\theta(\varpi)$  tel que :  $\hat{\mathbf{m}} = \chi_\theta(\varpi) \cdot \hat{\mathbf{h}}$ . De plus dans la base  $(\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{e}}_z)$  avec  $\vec{\mathbf{e}}_z = \vec{\mathbf{e}}_x \times \vec{\mathbf{n}}$  ce tenseur s'exprime par*

$$\chi_\theta(\varpi) = \frac{i\varpi A \theta}{D} \begin{pmatrix} (i\varpi - \alpha) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & (i\varpi(1 + (1 - \theta)A) - \alpha) \end{pmatrix}$$

*Preuve.* Il s'agit simplement d'inverser le système linéaire défini par (10.21) ce qu'on va faire en l'écrivant composante par composante dans la base  $(\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{e}}_z)$ . On voit directement en prenant le produit scalaire de (10.21) par  $\vec{\mathbf{n}}$  que

$$(10.22) \quad \hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$$

Par ailleurs, en utilisant la règle de calcul, pour un vecteur quelconque  $\mathbf{v}$ ,

$$(\vec{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_x = (\mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_z) \quad \text{et} \quad (\vec{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_z = -(\mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_x)$$

on constate que (10.21) s'écrit en prenant son produit scalaire par respectivement  $\vec{\mathbf{e}}_x$  et  $\vec{\mathbf{e}}_z$

$$(10.23) \quad \begin{cases} (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_x) - (\alpha - i\varpi) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_z) = i\varpi A \theta (\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_z) \\ (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_z) + (\alpha - i\varpi(1 + (1 - \theta)A)) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_x) = -i\varpi A \theta (\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_x) \end{cases}$$

Le lemme découle simplement de (10.22) et de l'inversion du système de Cramer 10.23.  $\square$

**Remarque 10.2** *En faisant  $\theta = 1$  on retrouve bien l'expression de  $\chi$  dans le cas homogène (1.38) page 27.*



### Perméabilités directionnelles

Pour interpréter le tenseur  $\chi_\theta$ , il est commode de considérer les susceptibilités directionnelles qui lui sont associées. Nous rappelons que celles-ci correspondent à la forme particulière que prend  $\chi_\theta$  pour le cas d'ondes planes. Soit en effet une onde électromagnétique  $(\mathbf{E}^h, \mathbf{H}^h, \mathbf{M}^h)$  soit invariante dans le plan orthogonal à  $\vec{\mathbf{k}}$ , où  $\vec{\mathbf{k}}$  est un vecteur unitaire donné. Les équations de Maxwell nous imposent

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}^h + \mathbf{M}^h) = 0$$

On en déduit que  $\operatorname{div}(\hat{\mathbf{h}} + \hat{\mathbf{m}}) = 0$ , et par conséquent

$$\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}}$$

Pour simplifier, nous allons considérer le cas où  $\vec{\mathbf{k}}$  est orthogonal à  $\vec{\mathbf{n}}$ . Notons  $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{n}}$  et posons  $\phi$  telle que

$$\vec{\mathbf{e}}_x = \cos \phi \vec{\mathbf{k}} + \sin \phi \vec{\boldsymbol{\tau}}$$

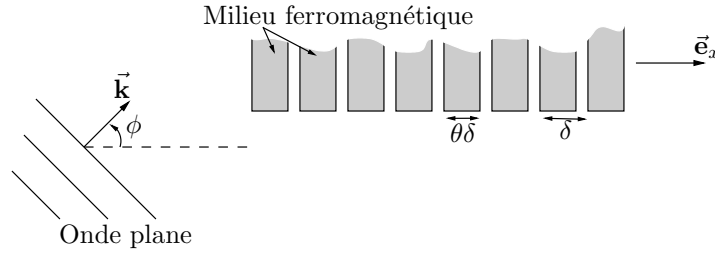


FIG. 10.2 – Interprétation de la perméabilité directionnelle

Sachant que

$$(\vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{h}}) \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}} = -\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}}$$

on obtient, en prenant le produit scalaire de (10.21) par  $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ ,

$$(\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}) + (\alpha - i\varpi)(\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}}) - i\varpi A(1 - \theta) \cos \phi (\cos \phi (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}}) + \sin \phi (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}})) = i\varpi A\theta (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}})$$

soit

$$(10.24) \quad (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}}) = -\frac{(1 - i\varpi A(1 - \theta) \cos \phi \sin \phi)}{(\alpha - i\varpi(1 + (\theta + (1 - \theta) \cos^2 \phi)A))} (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}) = -\mathcal{A}_1 (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}})$$

et en prenant le produit scalaire de (10.21) par  $\vec{\mathbf{k}}$ ,

$$(\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}}) - (\alpha - i\varpi)(\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}) + i\varpi A(1 - \theta) \sin \phi (\cos \phi (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}}) + \sin \phi (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}})) = i\varpi A\theta (\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}})$$

soit

$$(10.25) \quad (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\mathbf{k}}) = \mathcal{A}_2 (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{A}_3 (\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}),$$

avec

$$\mathcal{A}_2 = \frac{(\alpha - i\varpi(1 + (1 - \theta)A \sin^2 \phi))}{(1 + i\varpi A(1 - \theta) \cos \phi \sin \phi)} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_3 = \frac{i\varpi A\theta}{(1 + i\varpi A(1 - \theta) \cos \phi \sin \phi)}.$$

En substituant (10.25) dans (10.24), on en déduit

$$(10.26) \quad (\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\tau}) = \chi_d(\varpi, \phi, \theta)(\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{\tau})$$

où  $\chi_d(\varpi, \phi, \theta)$  est la susceptibilité directionnelle donnée par

$$(10.27) \quad \chi_d(\varpi, \phi, \theta) = -\frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}.$$

On constate que contrairement au cas homogène (cf. section 1.3, page 25) la perméabilité directionnelle dépend de la direction de l'onde (angle  $\phi$ ). L'expression de cette perméabilité se simplifie dans les deux cas particuliers suivant :

1.  $\phi = 0$  : onde se propageant dans le sens de hétérogénéités. Dans ce cas

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{\alpha - i\varpi(1 + A)}, \quad \mathcal{A}_2 = \alpha - i\varpi, \quad \mathcal{A}_3 = i\varpi A\theta$$

par suite

$$\chi_d(\varpi, 0, \theta) = -\frac{i\varpi A\theta(\alpha - i\varpi(1 + A))}{1 + (\alpha - i\varpi)(\alpha - i\varpi(1 + A))} = \theta\chi_d(\varpi)$$

où  $\chi_d(\varpi)$  est la susceptibilité du milieu homogène (cf. (1.44), page 28). Ceci montre que la loi homogénéisée se comporte comme un opérateur de moyenne suivant la direction  $\vec{\mathbf{e}}_x$ . La figure 10.3 montre la dépendance linéaire en  $\theta$  des courbes de perméabilités pour  $\phi = 0$ . Ici rien n'est spectaculaire. Moins il y a de ferromagnétique, moins ça absorbe. Ces courbes serviront d'éléments de comparaison avec le cas  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .

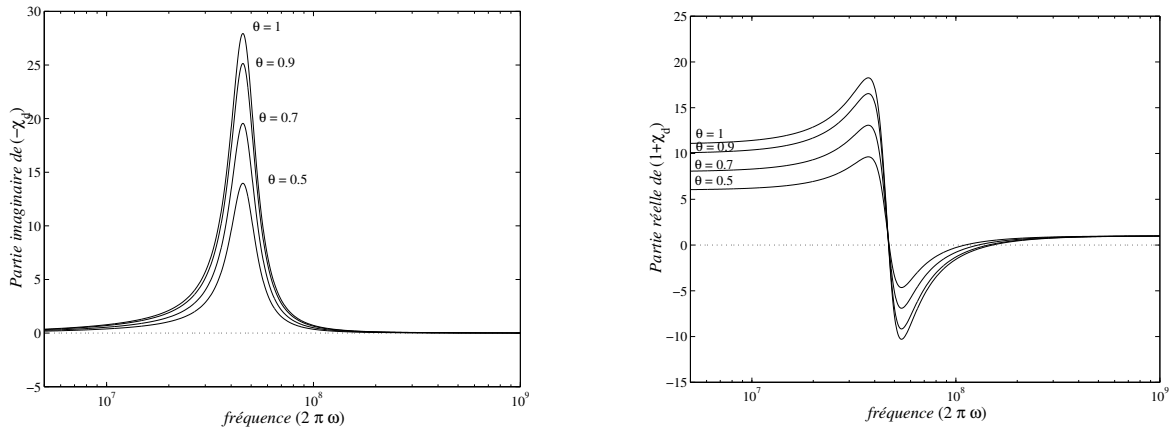


FIG. 10.3 – Courbes de perméabilités  $2\pi\omega \mapsto 1 + \chi_d(\varpi, 0, \theta)$  pour différentes valeurs de  $\theta$ . Les paramètres sont  $M_0 = 4 \cdot 10^3$ ,  $H_0 = 4 \cdot 10^2$ ,  $\alpha = 0.1$ .

2.  $\phi = \frac{\pi}{2}$  : onde se propageant orthogonalement aux hétérogénéités.

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{\alpha - i\varpi(1 + \theta A)}, \quad \mathcal{A}_2 = \alpha - i\varpi(1 + (1 - \theta)A), \quad \mathcal{A}_3 = i\varpi A\theta$$

ce qui nous donne

$$\chi_d(\varpi, \frac{\pi}{2}, \theta) = -\frac{i\varpi A\theta(\alpha - i\varpi(1 + \theta A))}{1 + (\alpha - i\varpi(1 + (1 - \theta)A))(\alpha - i\varpi(1 + \theta A))}$$

On constate que le comportement ferromagnétique suivant cette direction ne correspond plus à un opérateur de moyenne. La figure (10.4) montre la dépendance de cette susceptibilité par rapport à  $\theta$ .

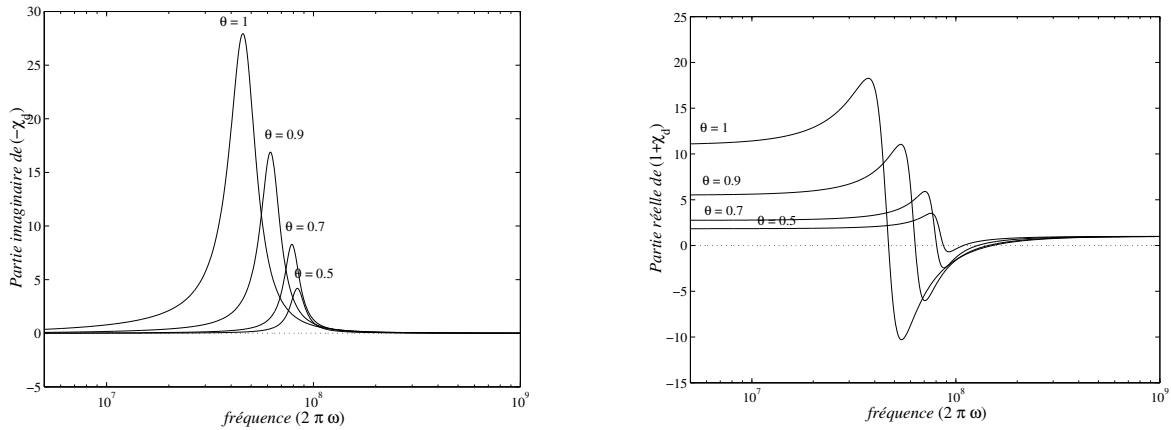


FIG. 10.4 – Courbes de perméabilités  $2\pi\omega \mapsto 1 + \chi_d(\varpi, \frac{\pi}{2}, \theta)$  pour différentes valeurs de  $\theta$ . Les paramètres sont  $M_0 = 4 \cdot 10^3$ ,  $H_0 = 4 \cdot 10^2$ ,  $\alpha = 0.1$ .

Contrairement au cas  $\phi = 0$ , le domaine d'absorption et également la pulsation  $\omega_r$  pour laquelle l'absorption est maximale (c.à.d. pour laquelle  $-\Im(\chi_d(\varpi, \frac{\pi}{2}, \theta))$  atteint son maximum) dépendent de  $\theta$ . Autrement dit, rien qu'en jouant sur la proportion de matériaux ferromagnétique, on peut améliorer ou détériorier l'aspect furtif du milieu vis-à-vis d'une onde électromagnétique dont le spectre est localisé.

On remarque que le maximum décroît en fonction de  $\theta$  et est inférieur au maximum de la courbe  $-\Im(\chi_d(\varpi, 0, \theta))$  pour une même valeur de  $\theta$ . Par ailleurs, comme le montre la figure 10.5, on constate qu'il y a une symétrie par rapport à  $\theta = \frac{1}{2}$  des valeurs prises de  $\omega_r$ .

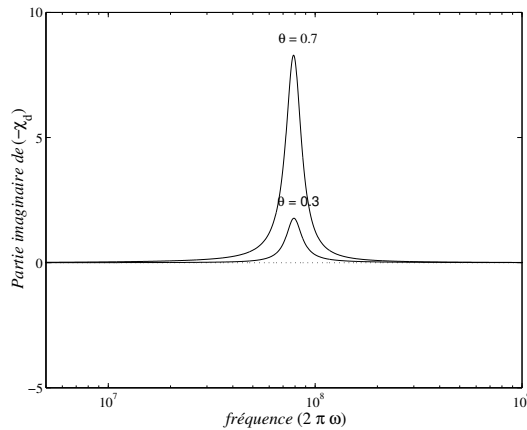


FIG. 10.5 – A une homothétie près, les courbes de perméabilités  $2\pi\omega \mapsto 1 + \chi_d(\varpi, \frac{\pi}{2}, \theta)$  sont symétriques par rapport à  $\theta = \frac{1}{2}$ . Les paramètres sont  $M_0 = 4 \cdot 10^3$ ,  $H_0 = 4 \cdot 10^2$ ,  $\alpha = 0.1$ .

La figure 10.6 nous montre la dépendance de la perméabilité par rapport à l'angle d'incidence  $\phi$ . On remarque également que le domaine d'absorption varie en fonction  $\phi$ . Il y a bien entendu une symétrie des résultats par rapport à  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .

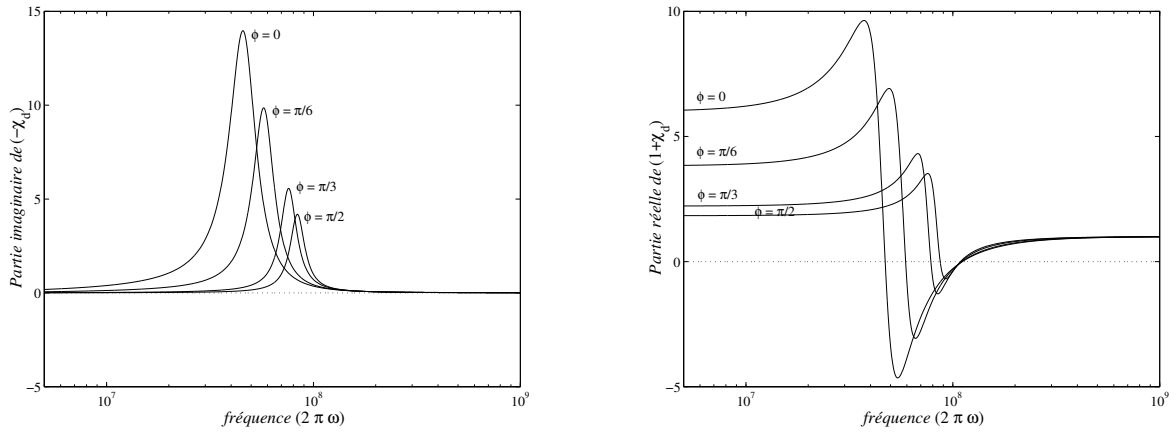


FIG. 10.6 – Courbes de perméabilités  $2\pi\omega \mapsto 1 + \chi_d(\varpi, \phi, \frac{1}{2})$  pour différentes valeurs de  $\phi$ . Les paramètres sont  $M_0 = 4 \cdot 10^3$ ,  $H_0 = 4 \cdot 10^2$ ,  $\alpha = 0.1$ .

### 10.3.3 Validation Numérique

Etant donné que le problème homogénéisé admet dans ce cas particulier une forme similaire à celle du problème hétérogène initial, il nous est possible de se servir d'un même schéma numérique pour approcher la solution de chaque problème. Nous utilisons par exemple le schéma aux différences finies de [45] pour effectuer des simulations numériques de validation en 2D. L'expérience numérique est représenté par la figure 10.7.

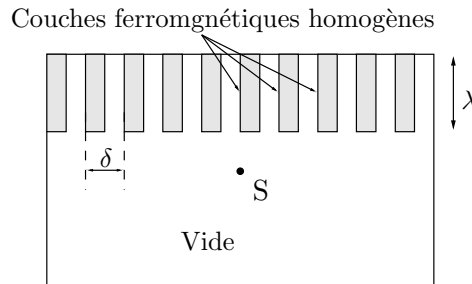


FIG. 10.7 – Description des expériences numériques

Se référant à la section précédente, on se place dans le plan orthogonal à  $\vec{n} \equiv \vec{e}_y$ .

$$\mathbf{H}_s^h = H_0 \vec{e}_y, \quad \mathbf{M}_0^h = M_0 \vec{e}_y, \quad \text{avec } M_0 = 4 \cdot 10^3, H_0 = 4 \cdot 10^2, \alpha = 0.5 \text{ et } K_a^h = 0.$$

#### Cas d'une onde plane

On éclaire le milieu ferromagnétique à l'aide d'une onde plane se propageant orthogonalement à  $\vec{e}_x$ . Cette onde est polarisée suivant un mode transverse magnétique ( $H_x, E_y, H_z$ ). On effectue les simulations pour

$$\delta = \frac{\lambda}{20} \text{ et } \theta = \frac{1}{2}$$

où  $\lambda$  est la fréquence centrale du signal envoyé (il s'agit ici de la dérivée deuxième d'une gaussienne et  $\lambda = 3 \text{ m}$  (cf. formule 7.83)). Deux calculs sont faits : le premier calcul utilise la

géométrie hétérogène et les équations (10.1)-(10.2) pour lequel le pas de maillage est  $\delta/10 = \frac{\lambda}{200}$  et le deuxième calcul utilise le modèle homogénéisé (10.17)-(10.18) pour lequel le pas de maillage est tout simplement  $\lambda/10$  !

La figure (10.8) (page 269) montre des photos (de la partie par un trait plein dans la figure 10.7) prises en trois instants différents de la composante incidente de l'onde, quand à la figure (10.9) (page 10.9), elle montre pour les mêmes instants les photos de la composante non incidente qui devient non nulle par l'effet de la couche ferromagnétique. On constate sur les deux figures que le comportement global de la solution est très bien repris par le modèle homogénéisé.

### Cas d'une onde sphérique

On refait la même expérience que précédemment mais en remplaçant l'onde plane par une onde sphérique placée au point S (voir figure 10.7). Les figures (10.10) et (10.11) sont la version onde sphérique des figures (10.8) et (10.9). On remarque encore une fois que le modèle homogénéisé permet de bien tenir compte du comportement globale de la solution. La déformation de la symétrie de l'onde (cf. chapitre 8, page 209) et le changement de polarisation à l'intérieur du milieu ferromagnétique sont très bien représentés.

Composante  $E_y$  de l'onde électromagnétique

Solution "exacte" pour  $\delta = \lambda/20$

Solution utilisant le modèle  
homogénéisé

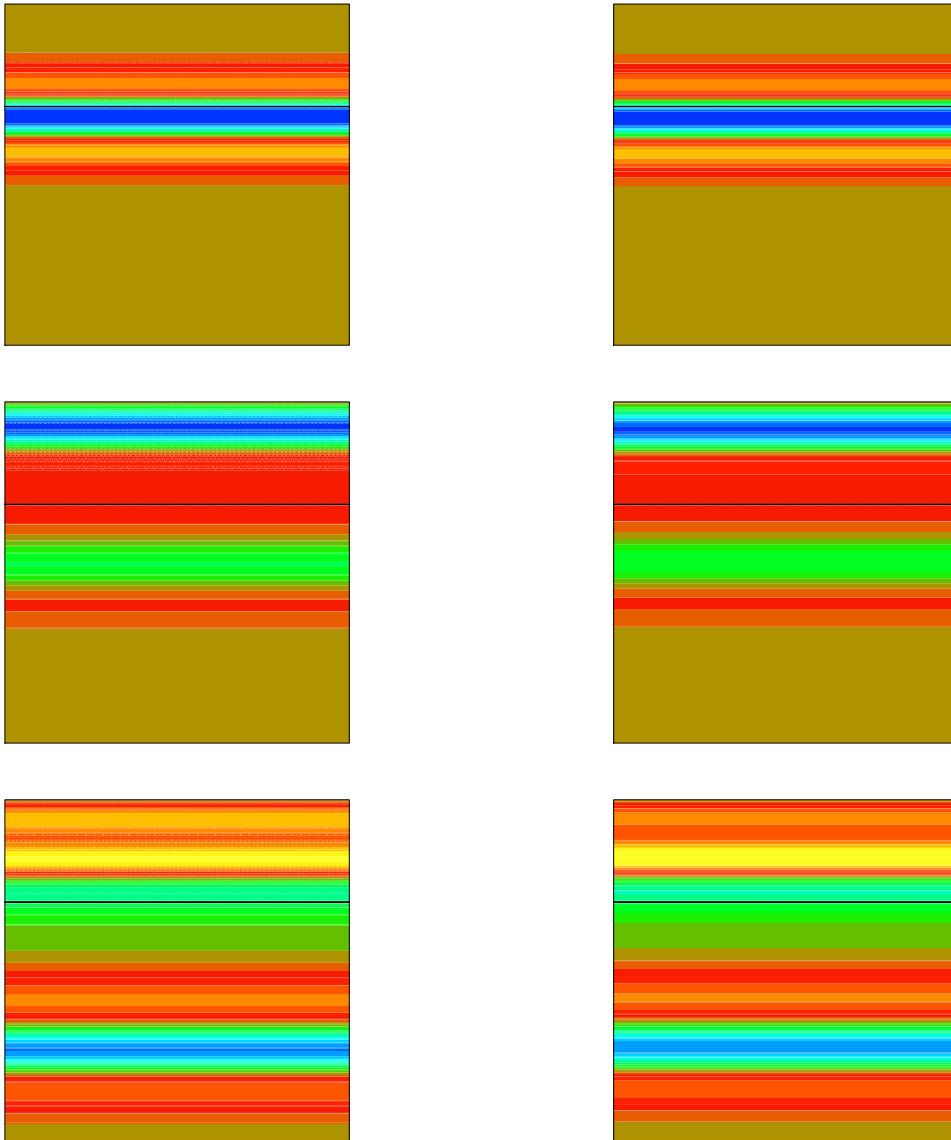


FIG. 10.8 – Comparaisons sur des instantanés entre la solution du modèle exact et le modèle homogénéisé. Le cas d'une onde plane.

Composante  $E_x$  de l'onde électromagnétique

Solution "exacte" pour  $\delta = \lambda/20$

Solution utilisant le modèle  
homogénéisé

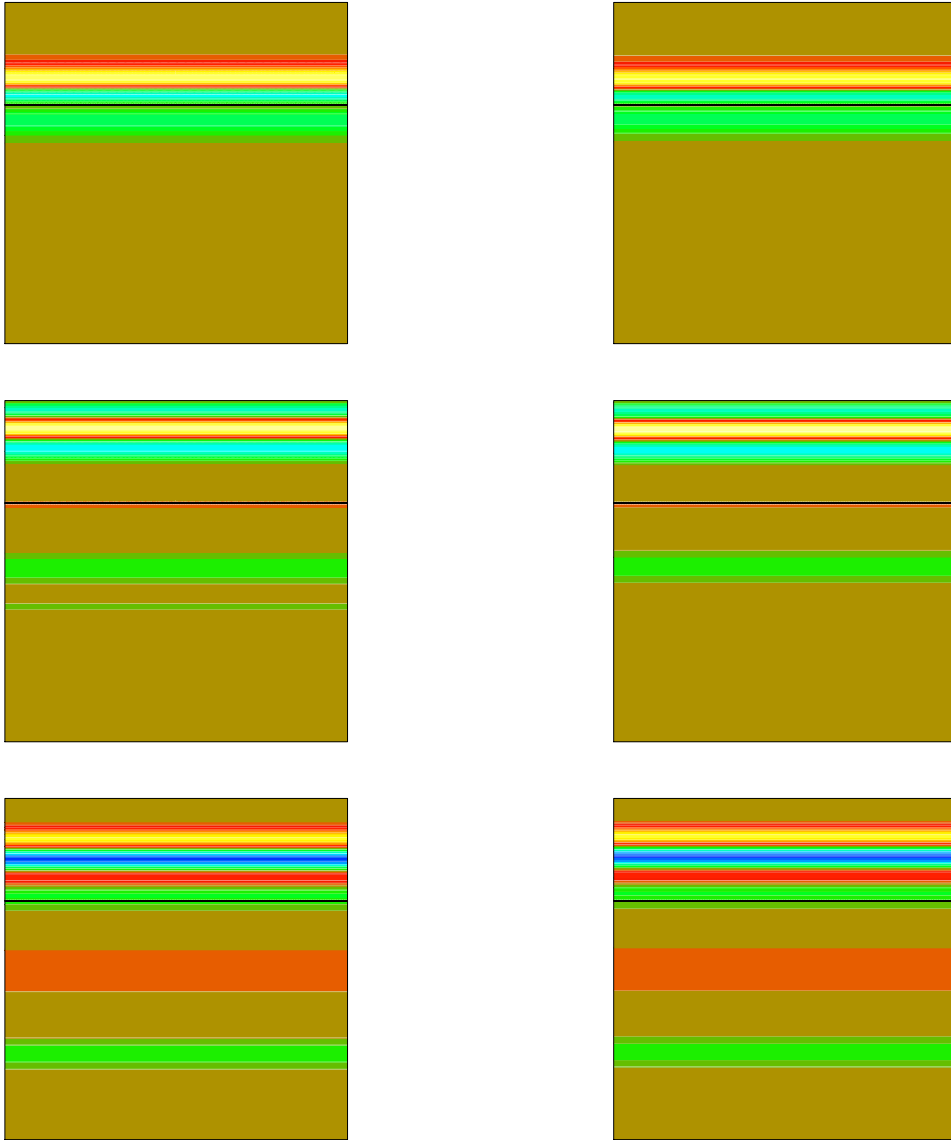


FIG. 10.9 – Comparaisons sur des instantanés entre la solution du modèle exact et le modèle homogénéisé. Le cas d'une onde plane.

Composante  $E_y$  de l'onde électromagnétique

Solution "exacte" pour  $\delta = \lambda/20$

Solution utilisant le modèle  
homogénéisé

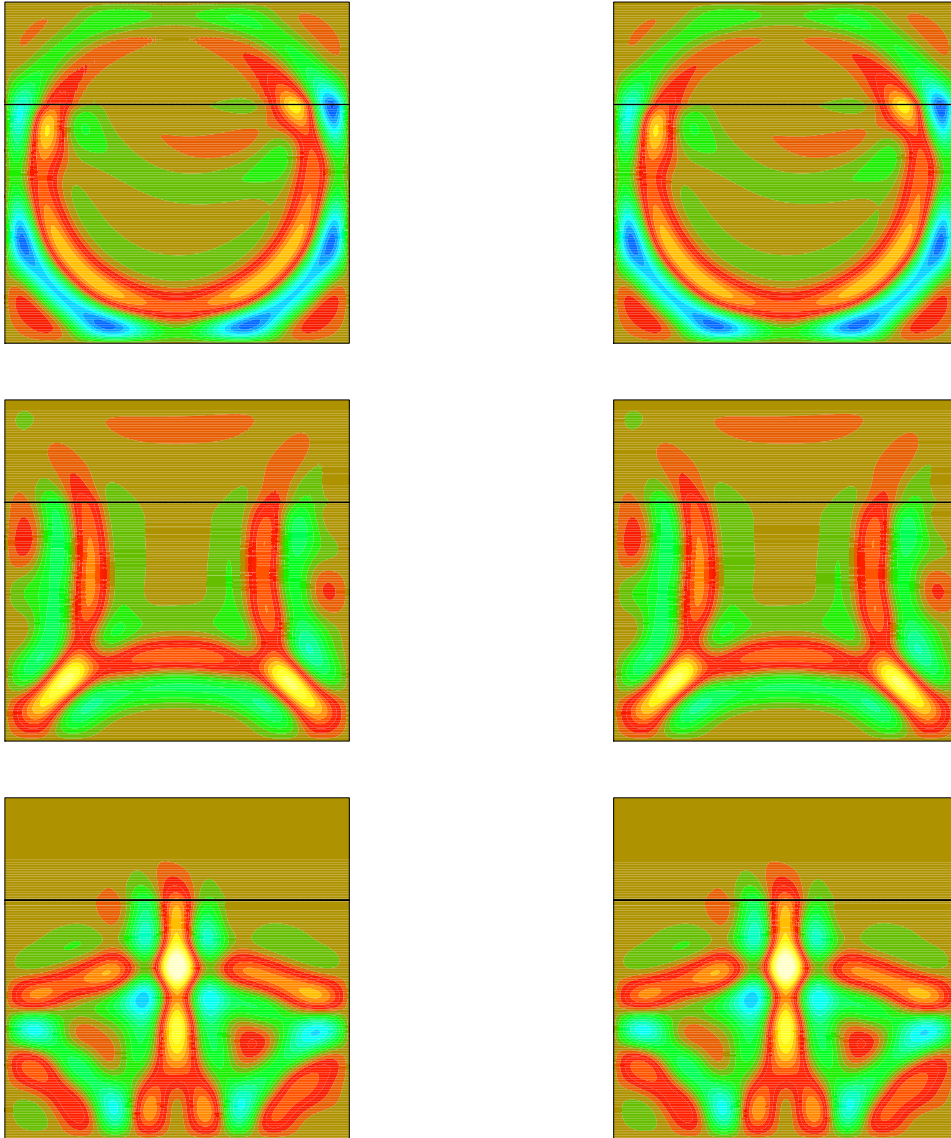


FIG. 10.10 – Comparaisons sur des instantanés entre la solution du modèle exact et le modèle homogénéisé. Le cas d'une onde sphérique.



Composante  $E_x$  de l'onde électromagnétique

Solution "exacte" pour  $\delta = \lambda/20$

Solution utilisant le modèle homogénéisé

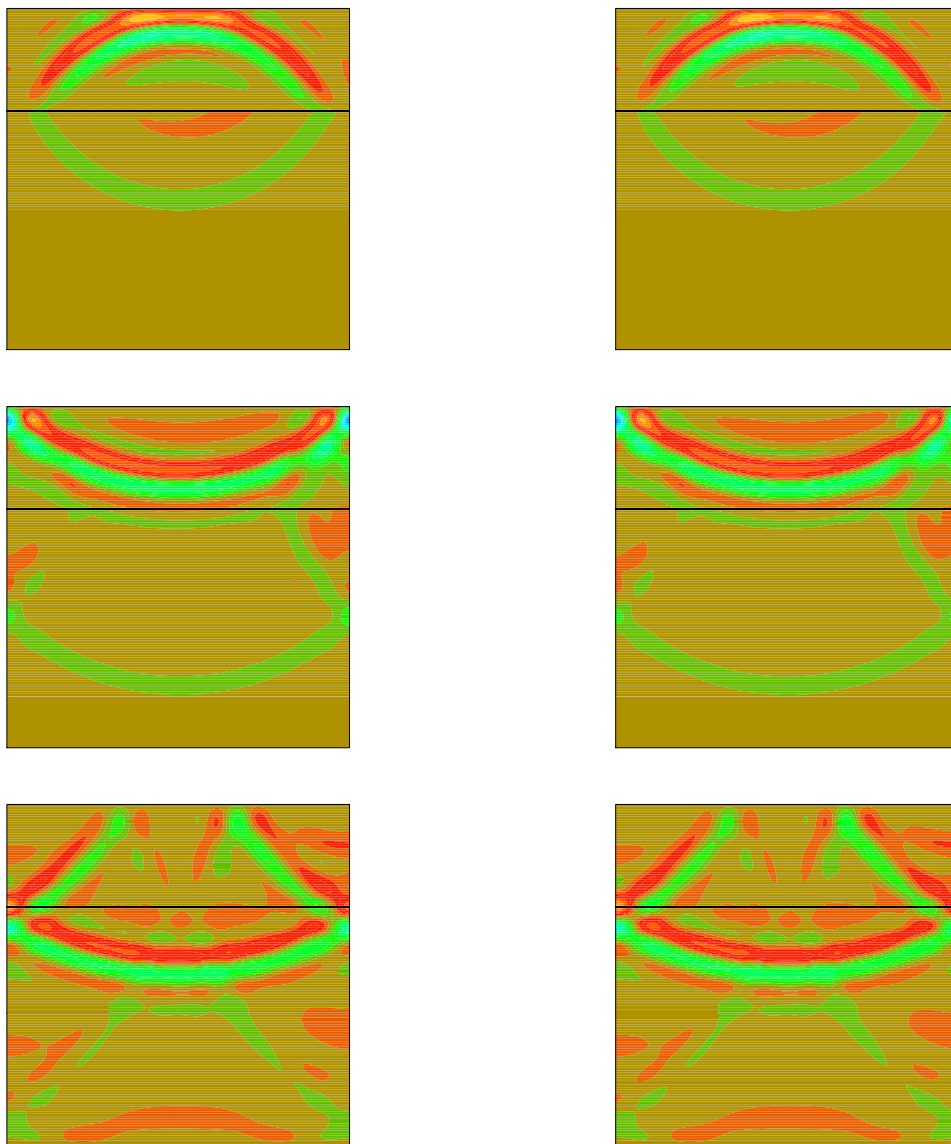


FIG. 10.11 – Comparaisons sur des instantanés entre la solution du modèle exact et le modèle homogénéisé. Le cas d'une onde sphérique.

## 10.4 Un cas un peu plus général : milieu multi-couches homogènes

On considère ici la généralisation du cas précédent en adoptant l'hypothèse (10.2).

### 10.4.1 Réécriture de la loi homogénéisée sous la forme d'un système

Soit  $N$  le nombre de couches, on fait donc l'hypothèse suivante, et  $(\mathcal{I}_j)$ ,  $j = 1 \cdots N$  une partition de la période  $Y$ .

**Hypothèse 10.4** *On suppose l'existence de  $3N$  vecteurs constants  $(\mathbf{M}_0^j, \mathbf{H}_s^j, \mathbf{p}^j)$ ,  $j = 1 \cdots N$  de  $\mathbb{R}^3$  et de  $2N$  réels positifs  $(\beta^j, K_a^j)$ ,  $j = 1 \cdots N$  tels que*

$$(\mathbf{M}_0, \beta, \mathbf{H}_s, K_a, \mathbf{p})(\xi) = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\mathcal{I}_j}(\xi) (\mathbf{M}_0^j, \beta^j, \mathbf{H}_s^j, K_a^j, \mathbf{p}^j) \quad \text{pour } \xi \in Y.$$

Sous cette hypothèse il convient de chercher la solution  $\mathbf{M}$  de (10.6) sous la forme (nous renvoyons au chapitre 9 pour une justification rigoureuse de cette possibilité)

$$(10.28) \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}, t, \xi) = \sum_{j=1}^N \mathbf{M}^j(\mathbf{x}, t) \mathbf{1}_{\mathcal{I}_j}(\xi).$$

Pour une telle solution nous avons d'après (10.5)

$$(10.29) \quad \mathbf{M}^h = \sum_{j=1}^N \theta_j \mathbf{M}^j \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \quad \text{avec } \theta_j = \frac{|\mathcal{I}_j|}{|Y|},$$

et où les  $\mathbf{M}^j$  vérifient sur  $\mathbb{R}^n \mathbb{R}^+$  (d'après (10.6))

$$(10.30) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}^j = |\gamma| \mathbf{H}_T^j \times \mathbf{M}^j + \beta^j \mathbf{M}^j \times \partial_t \mathbf{M}^j, & \mathbf{M}^j|_{t=0} = \mathbf{1}_\Omega \mathbf{M}_0^j, \\ \mathbf{H}_T^j = \mathbf{H}^h + \left( (\theta_j - 1) \mathbf{M}_x^j + \sum_{\ell \neq j} \theta_\ell \mathbf{M}_x^\ell \right) \mathbf{e}_x + \mathbf{H}_s^j + K_a^j (\mathbf{p}^j \cdot \mathbf{M}^j) \mathbf{p}^j, \end{cases}$$

On voit alors que la loi homogénéisée à l'échelle microscopique (variable  $\xi$ ) se transforme en  $N$  lois macroscopiques (indépendantes de  $\xi$ ) couplées. On constate de plus, en prenant le produit scalaire de (10.30) par  $\mathbf{M}^j$  que

$$|\mathbf{M}^j| = |\mathbf{M}_0^j|$$

Ainsi si une couche est formée par le vide, i.e. si  $\mathbf{M}_0^j = 0$  pour un certain  $j$  alors  $\mathbf{M}^j = 0$  et le système (10.30) à  $N$  équations se réduit à un système à  $N - 1$  équations.

### 10.4.2 Modèle linéarisé dans le cas de deux couches

Notre objectif est de généraliser le calcul de perméabilités équivalentes effectué dans la section 10.3.2 au cas de deux couches quelconques. On considère donc le cas de l'hypothèse (10.4) avec  $N = 2$  et on pose  $\theta_1 = \theta$  et  $\theta_2 = 1 - \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ .

### Linéarisation

Le principe est déjà expliqué dans la section 10.3.2. On se place également dans l'hypothèse simplificatrice  $K_g^j = 0$ . On pose pour  $\ell = 1, 2$ ,

$$\mathbf{H}_s^\ell = \left| \mathbf{H}_s^\ell \right| \vec{\mathbf{n}}_\ell \equiv H_\ell \vec{\mathbf{n}}_\ell \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_0^\ell = \left| \mathbf{M}_0^\ell \right| \vec{\mathbf{n}}_\ell \equiv M_\ell \vec{\mathbf{n}}_\ell$$

où  $\vec{\mathbf{n}}_\ell$  désigne un vecteur unitaire orthogonal à  $\vec{\mathbf{e}}_x$ . Le modèle linéarisé s'obtient en posant

$$\mathbf{H}^h = \eta \mathbf{h} + O(\eta^2) \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^\ell = \mathbf{M}_0^\ell + \eta \mathbf{m}^\ell + O(\eta^2), \quad \ell = 1, 2,$$

avec  $\eta \ll \min(H_\ell, M_\ell)$ , et en ne gardant dans le système (10.30) que les termes en  $O(\eta)$ . En fixant une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$  et en posant

$$\alpha_\ell = \beta^\ell M_\ell, \quad \varpi_\ell = \omega_\ell / \omega, \quad A_\ell = M_\ell / H_\ell,$$

avec  $\omega_\ell = |\gamma| H_0$ , la pulsation de Larmor associée à la couche  $\ell$ . La version linéarisée du système (10.30) s'écrit alors (analogie avec (10.21))

$$(10.31) \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{m}}^1 - (\alpha_1 - i\varpi_1) \vec{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{m}}^1 + i\varpi_1 A_1 (1 - \theta) ((\hat{\mathbf{m}}^1 - \hat{\mathbf{m}}^2) \cdot \vec{\mathbf{e}}_x) \vec{\mathbf{n}}_1 \times \vec{\mathbf{e}}_x = i\varpi_1 A_1 \vec{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{h}} \\ \hat{\mathbf{m}}^2 - (\alpha_2 - i\varpi_2) \vec{\mathbf{n}}_2 \times \hat{\mathbf{m}}^2 + i\varpi_2 A_2 \theta ((\hat{\mathbf{m}}^2 - \hat{\mathbf{m}}^1) \cdot \vec{\mathbf{e}}_x) \vec{\mathbf{n}}_2 \times \vec{\mathbf{e}}_x = i\varpi_2 A_2 \vec{\mathbf{n}}_2 \times \hat{\mathbf{h}} \end{cases}$$

Le tenseur de perméabilité est définie par, compte tenu de la relation (10.29),

$$(10.32) \quad \hat{\mathbf{m}} = \chi(\omega, \theta) \cdot \hat{\mathbf{h}} \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{m}} \equiv \theta \hat{\mathbf{m}}^1 + (1 - \theta) \hat{\mathbf{m}}^2.$$

L'existence d'un tel tenseur dépend bien sûr de l'inversibilité du système linéaire (10.31). Malheureusement, il contient trop de paramètre pour permettre une résolution facile ! Il existe néanmoins un cas intéressant pour lequel nous possédons une résolution explicite :

### Structure “up and down”

Elle correspond à la configuration représentée par la figure 10.12,



FIG. 10.12 – Configuration “up and down” d'un microfilm ferromagnétique

connue comme étant l'une des structures de base de l'aimantation rémanente dans un microfilm ferromagnétique. Une telle structure correspond donc à prendre

$$\vec{\mathbf{n}}_1 = -\vec{\mathbf{n}}_2 \equiv \vec{\mathbf{n}}, \quad M_1 = M_2 \equiv M_0, \quad H_1 = H_2 \equiv H_0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$$

Le système (10.31) s'écrit donc en posant  $\varpi = \varpi_1 = \varpi_2$  et  $A = A_1 = A_2$ ,

$$(10.33) \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{m}}^1 - (\alpha - i\varpi) \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{m}}^1 + i\varpi A (1 - \theta) ((\hat{\mathbf{m}}^1 - \hat{\mathbf{m}}^2) \cdot \vec{\mathbf{e}}_x) \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{e}}_x = i\varpi A \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{h}} \\ \hat{\mathbf{m}}^2 + (\alpha - i\varpi) \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{m}}^2 - i\varpi A \theta ((\hat{\mathbf{m}}^2 - \hat{\mathbf{m}}^1) \cdot \vec{\mathbf{e}}_x) \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{e}}_x = -i\varpi A \vec{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{h}} \end{cases}$$

**Lemme 10.2** Soit  $\hat{\mathbf{m}}^1$ ,  $\hat{\mathbf{m}}^2$  et  $\hat{\mathbf{h}}$  vérifiant (10.33). Alors, sous la condition (toujours vérifiée si  $\alpha \neq 0$ )

$$D_1 \equiv 1 + (\alpha - i\varpi)^2 \neq 0 \text{ et } D_2 \equiv 1 + (\alpha - i\varpi)(\alpha - i\varpi(1 + A)) \neq 0$$

il existe un tenseur de susceptibilité  $\chi_\theta(\varpi)$  tel que :  $\hat{\mathbf{m}} = \chi_\theta(\varpi) \cdot \hat{\mathbf{h}}$  où  $\hat{\mathbf{m}} \equiv \theta \hat{\mathbf{m}}^1 + (1 - \theta) \hat{\mathbf{m}}^2$ . De plus dans la base  $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{e}}_z)$  avec  $\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{n}}$  ce tenseur s'exprime par

$$(10.34) \quad \chi_\theta(\varpi) = \frac{i\varpi A}{D_1} \begin{pmatrix} (i\varpi - \alpha) & 0 & (2\theta - 1) \\ 0 & 0 & 0 \\ -(2\theta - 1) & 0 & (i\varpi - \alpha) + \frac{4\theta(1-\theta)A}{D_2} \end{pmatrix}$$

*Preuve.* On voit directement, en prenant le produit scalaire de chaque équation de (10.33) par  $\hat{\mathbf{n}}$  que

$$(10.35) \quad \hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

Ecrivons maintenant les équations vérifiées par les autres composantes, de manière similaire à (10.23). On obtient

$$(10.36) \quad \hat{\mathbf{m}}_x^1 - (\alpha - i\varpi)\hat{\mathbf{m}}_z^1 = i\varpi A \hat{\mathbf{h}}_z$$

$$(10.37) \quad \hat{\mathbf{m}}_z^1 + (\alpha - i\varpi)\hat{\mathbf{m}}_x^1 + i\varpi(1 - \theta)A(\hat{\mathbf{m}}_x^2 - \hat{\mathbf{m}}_x^1) = -i\varpi A \hat{\mathbf{h}}_x$$

$$(10.38) \quad \hat{\mathbf{m}}_x^2 + (\alpha - i\varpi)\hat{\mathbf{m}}_z^2 = -i\varpi A \hat{\mathbf{h}}_z$$

$$(10.39) \quad \hat{\mathbf{m}}_z^2 - (\alpha - i\varpi)\hat{\mathbf{m}}_x^2 - i\varpi\theta A(\hat{\mathbf{m}}_x^1 - \hat{\mathbf{m}}_x^2) = i\varpi A \hat{\mathbf{h}}_x$$

En faisant  $\theta(10.36) + (1 - \theta)(10.38)$  et  $\theta(10.37) - (1 - \theta)(10.39)$  on obtient successivement

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}_x - (\alpha - i\varpi)(\theta \hat{\mathbf{m}}_z^1 - (1 - \theta)\hat{\mathbf{m}}_z^2) &= i\varpi A(2\theta - 1)\hat{\mathbf{h}}_z \\ (\theta \hat{\mathbf{m}}_z^1 - (1 - \theta)\hat{\mathbf{m}}_z^2) + (\alpha - i\varpi)\hat{\mathbf{m}}_x &= -i\varpi A \hat{\mathbf{h}}_x \end{aligned}$$

soit en éliminant  $(\theta \hat{\mathbf{m}}_z^1 - (1 - \theta)\hat{\mathbf{m}}_z^2)$

$$(10.40) \quad (1 + (\alpha - i\varpi)^2)\hat{\mathbf{m}}_x = i\varpi A(2\theta - 1)\hat{\mathbf{h}}_z - i\varpi A(\alpha - i\varpi)\hat{\mathbf{h}}_x$$

En faisant  $\theta(10.37) + (1 - \theta)(10.39)$  et  $\theta(10.36) - (1 - \theta)(10.38)$  on obtient successivement

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}_z + (\alpha - i\varpi)(\theta \hat{\mathbf{m}}_x^1 - (1 - \theta)\hat{\mathbf{m}}_x^2) + i\varpi 2A\theta(1 - \theta)(\hat{\mathbf{m}}_x^2 - \hat{\mathbf{m}}_x^1) &= -i\varpi A(2\theta - 1)\hat{\mathbf{h}}_x \\ (\theta \hat{\mathbf{m}}_x^1 - (1 - \theta)\hat{\mathbf{m}}_x^2) - (\alpha - i\varpi)\hat{\mathbf{m}}_z &= i\varpi A \hat{\mathbf{h}}_z. \end{aligned}$$

Ces deux équations se réécrivent en remplaçant  $((1 - \theta)\hat{\mathbf{m}}_x^2)$  par  $\hat{\mathbf{m}}_x - \theta \hat{\mathbf{m}}_x^1$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}_z - (\alpha - i\varpi(1 + 2\theta A))\hat{\mathbf{m}}_x + 2\theta(\alpha - i\varpi(1 + A))\hat{\mathbf{m}}_x^1 &= -i\varpi A(2\theta - 1)\hat{\mathbf{h}}_x \\ 2\theta \hat{\mathbf{m}}_x^1 - \hat{\mathbf{m}}_x - (\alpha - i\varpi)\hat{\mathbf{m}}_z &= i\varpi A \hat{\mathbf{h}}_z. \end{aligned}$$

soit en éliminant  $\hat{\mathbf{m}}_x^1$

$$(10.41) \quad -D_2 \hat{\mathbf{m}}_z - i\varpi A(2\theta - 1)\hat{\mathbf{m}}_x = i\varpi A(2\theta - 1)\hat{\mathbf{h}}_x + i\varpi A(\alpha - i\varpi(1 + A))\hat{\mathbf{h}}_z$$

et en remplaçant  $D_1 \hat{\mathbf{m}}_x$  par son expression (10.40),

$$(10.42) \quad D_1 D_2 \hat{\mathbf{m}}_z = -i\varpi A(2\theta - 1)D_2 \hat{\mathbf{h}}_x + i\varpi A(4\theta(1 - \theta) - (\alpha - i\varpi)D_2) \hat{\mathbf{h}}_z$$

Le lemme découle immédiatement de (10.35), (10.40) et (10.42).  $\square$

Perméabilités directionnelles

Soit  $\vec{k}$  un vecteur unitaire donné orthogonal à  $\vec{n}$  et  $\vec{\tau} = \vec{k} \times \vec{n}$ . La susceptibilité directionnelle suivant  $\vec{k}$  est défini par

$$\chi_d(\varpi, \phi, \theta) = \frac{(\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{\tau})}{(\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{\tau})}, \text{ sous la condition : } (\hat{\mathbf{h}} \cdot \vec{k}) = -(\hat{\mathbf{m}} \cdot \vec{k})$$

où  $\phi$  désigne l'angle orienté  $(\vec{e}_x, \vec{k})$  (cf. figure 10.2).  $\chi_d$  est bien défini par le lemme (10.2). Concernant l'origine de cette définition nous renvoyons le lecteur à la section 10.3.2 (voir aussi section 1.3.2 page 27).

$\phi = 0$  : c'est à dire  $\vec{k} = \vec{e}_x \Rightarrow \hat{\mathbf{m}}_x = -\hat{\mathbf{h}}_x$  et  $\tau = \vec{e}_z$ . L'équation (10.41) montre que

$$\chi_d(\varpi, 0, \theta) = -\frac{i\varpi A(\alpha - i\varpi(1 + A))}{D_2}$$

qui est indépendant de  $\theta$  et est égale à la susceptibilité directionnelle de chacune des deux couches. C'est bien la moyenne arithmétique des deux perméabilités de chaque couche.

$\phi = \frac{\pi}{2}$  : c'est à dire  $\vec{k} = \vec{e}_z \Rightarrow \hat{\mathbf{m}}_z = -\hat{\mathbf{h}}_z$  et  $\tau = \vec{e}_x$ . Se servant de l'expression (10.34) et de la formule générale (1.41) (page 27) on constate que si on pose

$$A_1 = \frac{i\varpi A}{D_1}(i\varpi - \alpha), \quad A_2 = \frac{i\varpi A}{D_1}(2\theta - 1), \quad A_3 = \frac{i\varpi A}{D_1} \left( (i\varpi - \alpha) + \frac{4\theta(1 - \theta)A}{D_2} \right),$$

alors

$$\chi_d(\varpi, \frac{\pi}{2}, \theta) = A_1 + \frac{(A_2)^2}{1 + A_3}.$$

La figure suivante montre la dépendance par rapport à  $\theta$  de  $\chi_d(\varpi, \frac{\pi}{2}, \theta)$ .

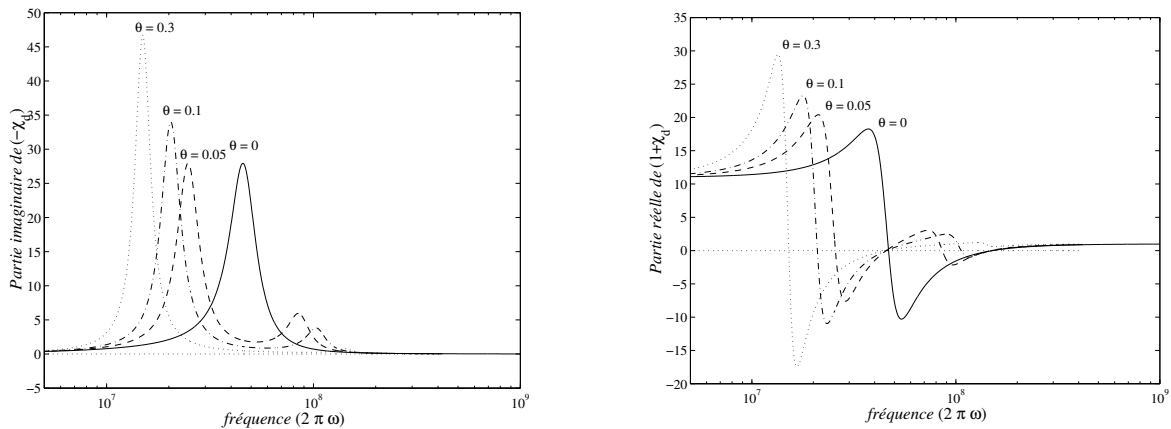


FIG. 10.13 – Courbes de perméabilités  $2\pi\omega \mapsto 1 + \chi_d(\varpi, \frac{\pi}{2}, \theta)$  pour différentes valeurs de  $\theta$ . Les paramètres sont  $M_0 = 4 \cdot 10^3, H_0 = 4 \cdot 10^2, \alpha = 0.1$ .

De manière similaire au cas vide-ferromagnétique, on constate que le spectre d'absorption dépend du paramètre  $\theta$ . Cette dépendance est plus marquée (et assez surprenante) dans le cas présent. Par rapport à une couche homogène ( $\theta = 0$  ou  $\theta = 1$ ) on voit donc dans

le cas périodique l'apparition de deux domaines d'absorptions qui s'écartent du domaine d'absorption initial, à mesure que  $\theta$  se rapproche de  $\frac{1}{2}$ . Le domaine qui se déplace vers les hautes fréquences lui correspond un pic décroissant, contrairement au domaine allant vers les basses fréquences pour lequel le pic d'absorption est croissant. Ce déplacement s'accompagne d'un rétrécissement de la plage d'absorption significative : le matériau devient de plus en plus sélectif. Enfin remarquons que, pour  $\theta = 0.3$  par exemple, les fréquences pour lesquelles chacun des deux matériaux est absorbants, deviennent transparentes dans le cas hétérogène : en jouant simplement sur le paramètre  $\theta$  on peut ainsi modifier (radicalement) les propriétés du milieu.

On peut également tracer la dépendance par rapport à l'angle d'incidence  $\phi$ .

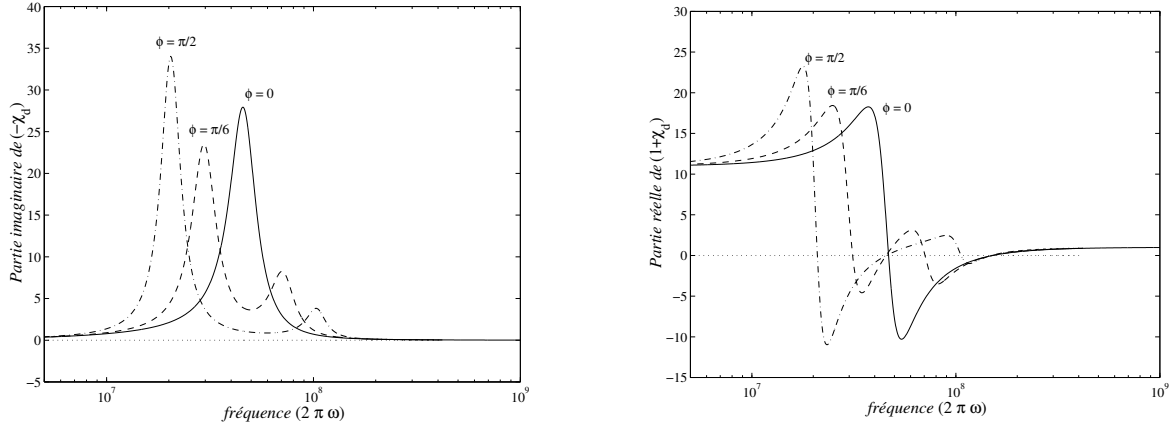


FIG. 10.14 – Courbes de perméabilités  $2\pi\omega \mapsto 1 + \chi_d(\omega, \phi, 0.1)$  pour différentes valeurs de  $\phi$ . Les paramètres sont  $M_0 = 4 \cdot 10^3$ ,  $H_0 = 4 \cdot 10^2$ ,  $\alpha = 0.1$ .

Ces courbes montrent le caractère fortement anisotrope du milieu homogénéisé : Le domaine d'absorption significative change complètement suivant que l'on se place sous incidence normale ( $\phi = \pi/2$ ) ou sous incidence parallèle ( $\phi = 0$ ).

### Quelques cas non explicites

Nous terminons par tracer le résultat d'une résolution analytique à l'aide du logiciel MAPLE du système (10.31) dans le cas général (les formules obtenues sont très complexes et inexploitable analytiquement). Nous comparons la perméabilité pour les deux configurations suivantes

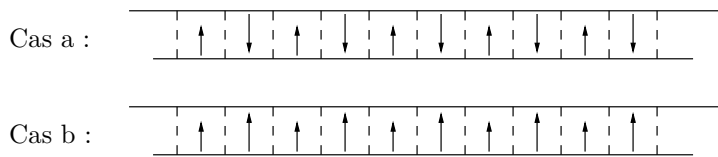


FIG. 10.15 – Configurations types

**Configuration a :** Elle correspond à une situation proche du cas précédent dans le sens où les aimantations des deux couches sont anti-parallèles. Par contre on a changé légèrement les caractéristiques d'une des deux couches afin d'obtenir deux comportements fréquentiels décalés (comparer les courbes de  $\theta = 1$  et  $\theta = 0$  dans la figure 10.16).

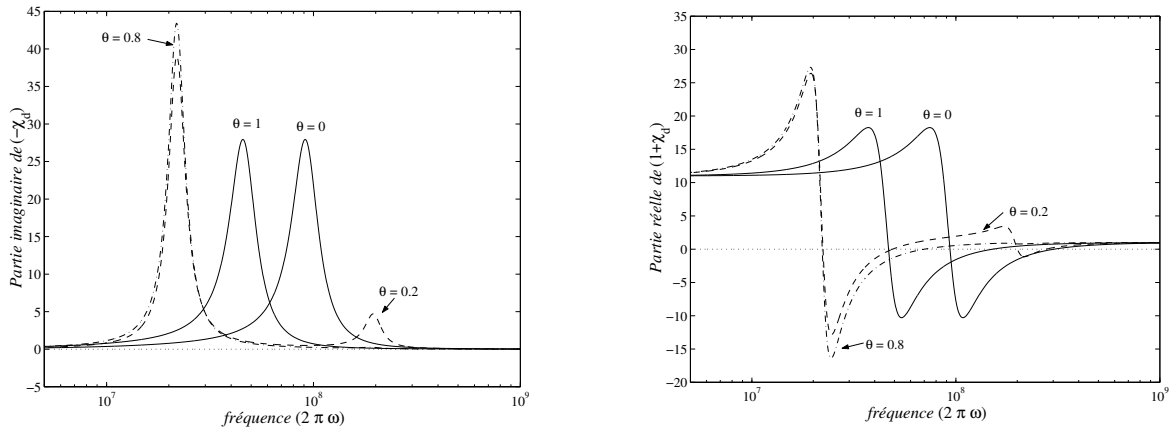


FIG. 10.16 – Courbes de perméabilités  $2\pi\omega \mapsto 1 + \chi_d(\varpi, \frac{\pi}{2}, \theta)$  pour différentes valeurs de  $\theta$ . Cas a de la figure 10.15. Les paramètres sont  $M_1 = 4 \cdot 10^3, H_1 = 4 \cdot 10^2, \alpha_1 = 0.1, M_2 = 8 \cdot 10^3, H_2 = 8 \cdot 10^2, \alpha_2 = 0.1$ .

Les observations du cas précédent trouvent leur confirmation dans le cas plus général présenté par la figure 10.16. La seule différence est que la symétrie des résultats par rapport à  $\theta = \frac{1}{2}$  n'a plus lieu à cause de différence de comportement fréquentiel de chaque couche.

**Configuration b :** Elle correspond aux couches ferromagnétiques du cas a, sauf que les aimatations sont orientées maintenant dans le même sens. Les courbes de la figure 10.17 sont la version b des courbes de la figure 10.16

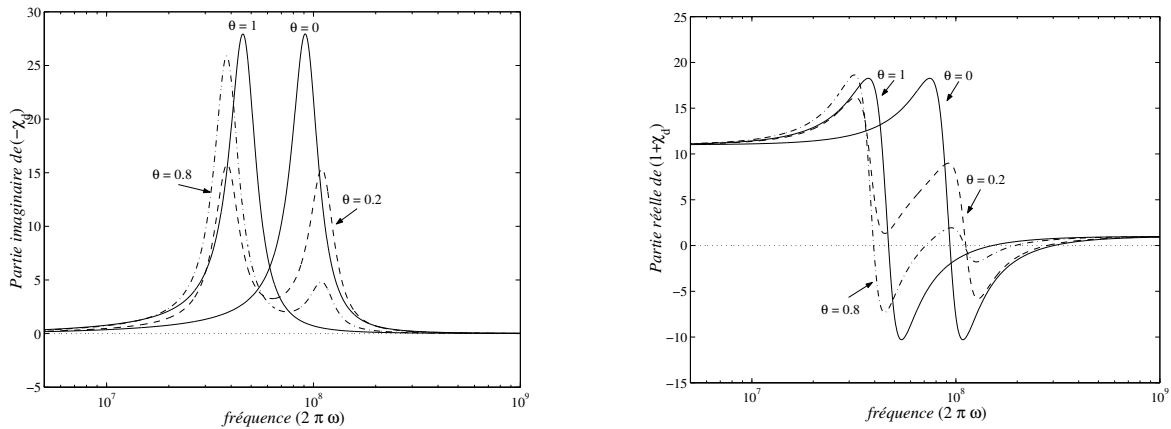


FIG. 10.17 – Courbes de perméabilités  $2\pi\omega \mapsto 1 + \chi_d(\varpi, \frac{\pi}{2}, \theta)$  pour différentes valeurs de  $\theta$ . Cas b de la figure 10.15. Les paramètres sont  $M_1 = 4 \cdot 10^3, H_1 = 4 \cdot 10^2, \alpha_1 = 0.1, M_2 = 8 \cdot 10^3, H_2 = 8 \cdot 10^2, \alpha_2 = 0.1$ .

On constate que même si le changement de comportement fréquentiel est bien présent il est nettement moins marqué que dans la configuration anti-parallèle.

### 10.4.3 Peut-on permuter linéarisation et homogénéisation ?

Est-ce que la linéarisation de la loi homogénéisée non linéaire correspond avec l'homogénéisation du modèle linéarisée hétérogène ? La réponse à cette question est loin d'être

évidente dans le cas général. On peut cependant la vérifier formellement sur les exemples simplifiés qu'on vient de présenter.

Considérons l'exemple vide-ferromagnétique de la section 10.3.2. La perméabilité relative homogénéisée associée à la linéarisation de la loi homogénéisée non linéaire est par définition

$$(10.43) \quad \boldsymbol{\mu}_\theta(\omega) = \mu_0(1 + \boldsymbol{\chi}_\theta(\varpi))$$

où  $\boldsymbol{\chi}_\theta(\varpi)$  est le tenseur de susceptibilité défini par le lemme 10.1.

Considérons maintenant le problème linéarisé hétérogène correspondant. Il s'écrit dans le domaine fréquentiel,

$$(10.44) \quad \begin{cases} i\omega \varepsilon^\delta \hat{\mathbf{e}}^\delta - \text{rot } \hat{\mathbf{h}}^\delta = 0 \\ i\omega \boldsymbol{\mu}^\delta(\omega) \hat{\mathbf{h}}^\delta + \text{rot } \hat{\mathbf{e}}^\delta = 0 \end{cases}$$

où  $\boldsymbol{\mu}^\delta(\omega)$  est défini par

$$(10.45) \quad \boldsymbol{\mu}^\delta(\omega) = \mu_0(1 + \boldsymbol{\chi}(\varpi))\mathbf{1}_I(x/\delta) + \mu_0(1 - \mathbf{1}_I)(x/\delta)$$

où  $\boldsymbol{\chi}(\varpi)$  est la susceptibilité relative du domaine ferromagnétique donnée par (1.38) (page 27). D'après les résultats classiques sur l'homogénéisation du système de Maxwell linéaire (voir par exemple [40]), le problème homogénéisé associé à (10.44) s'écrit (du moins formellement lorsque  $\varepsilon^\delta$  et  $\boldsymbol{\mu}^\delta(\omega)$  n'ont pas les bonnes propriétés de coercivité...)

$$(10.46) \quad \begin{cases} i\omega \underline{\underline{\varepsilon}}^h \hat{\mathbf{e}}^h - \text{rot } \hat{\mathbf{h}}^h = 0 \\ i\omega \boldsymbol{\mu}^h(\omega) \hat{\mathbf{h}}^h + \text{rot } \hat{\mathbf{e}}^h = 0 \end{cases}$$

où  $\underline{\underline{\varepsilon}}^h$  est donnée par 9.15 et où  $\boldsymbol{\mu}^h(\omega)$  désigne la matrice homogénéisée (dite la H-limite) associée à  $\boldsymbol{\mu}^\delta(\omega)$ . Cette matrice peut être définie de manière similaire à  $\underline{\underline{\varepsilon}}^h$  en passant par la résolution d'un problème cellulaire sur  $Y$ . On peut également exploiter la forme particulière de  $\boldsymbol{\mu}^\delta$

$$\boldsymbol{\mu}^\delta(\omega) = \mu_0 (A \mathbf{1}_I(x/\delta) + B(1 - \mathbf{1}_I)(x/\delta))$$

où  $A = 1 + \boldsymbol{\chi}$  et  $B = 1$ , et lui appliquer la formule explicite des matrices homogénéisées associées à cette forme (dite laminaire) ([3]),

$$(10.47) \quad \boldsymbol{\mu}^h(\omega) = \mu_0 \left( \theta A + (1 - \theta) B - \frac{\theta(1 - \theta)}{(1 - \theta)A\vec{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{e}}_x + \theta B\vec{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{e}}_x} (A - B)\vec{\mathbf{e}}_x \otimes (A - B)\vec{\mathbf{e}}_x \right)$$

On vérifie alors (après un calcul simple mais assez fastidieux) que les seconds membres de (10.43) et (10.47) coïncident :

$$\boldsymbol{\mu}^h(\omega) = \boldsymbol{\mu}_\theta(\omega).$$

Notons enfin que cette égalité a également été vérifiée (à l'aide du logiciel MAPLE) dans le cas de deux couches quelconques... Cette vérification constitue en quelque sorte une deuxième validation du modèle homogénéisé non linéaire dans le sens où il permet de retrouver dans des cas simplifiés des résultats classiques en homogénéisation.

La (vraie) validation du modèle non linéaire vient de l'étude mathématique entreprise dans le chapitre précédent.





# Chapitre 11

## Modèles pour des couches minces périodiques

**Résumé :** Dans ce chapitre, nous traitons le cas où la périodicité du domaine est du même ordre de grandeur que son épaisseur. Nous donnons un aperçu introductif de la dérivation formelle des conditions équivalentes (à la manière de partie II), dans le cas 2D et d'une frontière plane. La condition d'ordre 2 (section 11.3) n'admet pas tout à fait la même structure du cas non périodique : elle fait intervenir une aimantation définie sur un domaine adimensionnalisé (formule (11.12)), mais nécessite en plus la résolution d'un problème cellulaire (système (11.14)). Cette résolution peut se faire à la main dans le cas non périodique (formule (11.16)), ce qui nous redonne la condition (5.93), et dans le cas d'une couche homogène dans le sens de l'épaisseur où l'on retrouve une écriture similaire à l'écriture du modèle homogénéisé du chapitre précédent (formule (11.15)).

### 11.1 Présentation du problème

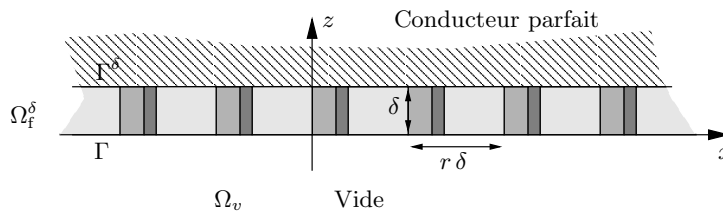


FIG. 11.1 – Présentation du problème

Le vide occupe le demi plan  $\Omega_v \subset \mathbb{R}^2$  de frontière  $\Gamma$ . Le domaine du matériau ferromagnétique est la couronne  $\Omega_f^\delta \equiv \Gamma \times ]0, \delta[$ . On note  $\mathbf{n}$  la normale à  $\Gamma$  :  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ . Pour un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  on note

$$\Pi_{\parallel} \mathbf{v} = \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) = (v_x, v_y, 0) \text{ et } \Pi_{\perp} \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = (0, 0, v_z)$$

## 11.1.1 Equations du modèle

$$(11.1) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_v^\delta - \operatorname{rot} \mathbf{H}_v^\delta = 0, & \mu_0 \partial_t \mathbf{H}_v^\delta + \operatorname{rot} \mathbf{E}_v^\delta = 0, \\ (\mathbf{E}_v^\delta, \mathbf{H}_v^\delta)|_{t=0} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_v,$$

$$(11.2) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_v^\delta \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_f^\delta \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{H}_v^\delta \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_f^\delta \times \mathbf{n} \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$(11.3) \quad \begin{cases} \varepsilon_f^\delta \partial_t \mathbf{E}_f^\delta - \operatorname{rot} \mathbf{H}_f^\delta = 0, & \mu_0 (\partial_t \mathbf{H}_f^\delta + \partial_t \mathbf{M}_f^\delta) + \operatorname{rot} \mathbf{E}_f^\delta = 0, \\ (\mathbf{E}_f^\delta, \mathbf{H}_f^\delta)|_{t=0} = (0, 0) \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_f^\delta.$$

$$(11.4) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{M}_f^\delta = |\gamma| \mathbf{H}_T^\delta \times \mathbf{M}_f^\delta + \frac{\alpha^\delta}{|\mathbf{M}_0^\delta|} \mathbf{M}_f^\delta \times \partial_t \mathbf{M}_f^\delta, \\ \mathbf{H}_T^\delta = \mathbf{H}_f^\delta + \mathbf{H}_s^\delta + K_a^\delta (\mathbf{p}^\delta \cdot \mathbf{M}_f^\delta) \mathbf{p}^\delta \\ \mathbf{M}_f^\delta|_{t=0} = \mathbf{M}_0^\delta \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_f^\delta.$$

$$(11.5) \quad \begin{cases} \mathbf{E}_f^\delta \times \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma^\delta,$$

**Hypothèse 11.1** (*Périodicité 1D dans la direction  $x$* ). Il existe  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{M}_0$ ,  $\alpha$ ,  $\mathbf{H}_s$ ,  $K_a$ ,  $\mathbf{p}$ , définis sur  $\mathbf{R} \times [0, 1]$ , périodiques de période  $r$  par rapport à la première variable, telles que, pour  $(x, z) \in \Omega_f^\delta$

$$(11.6) \quad \begin{aligned} \varepsilon_f^\delta(x, z) &= \varepsilon_f\left(\frac{x}{\delta}, \frac{z}{\delta}\right), & \mathbf{M}_0^\delta(x, z) &= \mathbf{M}_0\left(\frac{x}{\delta}, \frac{z}{\delta}\right), & \alpha^\delta(x, z) &= \alpha\left(\frac{x}{\delta}, \frac{z}{\delta}\right), \\ (\mathbf{H}_s^\delta, K_a^\delta, \mathbf{p}^\delta)(x, z) &= (\mathbf{H}_s, K_a, \mathbf{p})\left(\frac{x}{\delta}, \frac{z}{\delta}\right) \end{aligned}$$

## 11.1.2 Objectif

Trouver un opérateur  $\mathcal{B}_k^\delta$  sur le bord  $\Gamma$  tel que, la solution  $(\tilde{\mathbf{E}}_v^\delta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\delta)$  de

$$(11.7) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t \tilde{\mathbf{E}}_v^\delta - \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}}_v^\delta = 0, & \mu_0 \partial_t \mathbf{H}_v^\delta + \operatorname{rot} \mathbf{E}_v^\delta = 0, \\ (\tilde{\mathbf{E}}_v^\delta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\delta)(t=0) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_v,$$

$$(11.8) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_v^\delta \times \mathbf{n} = \mathcal{B}_k^\delta(\Pi_\parallel \tilde{\mathbf{H}}_v^\delta) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma,$$

vérifie

$$(11.9) \quad \left\| (\mathbf{E}_v^\delta, \mathbf{H}_v^\delta) - (\tilde{\mathbf{E}}_v^\delta, \tilde{\mathbf{H}}_v^\delta) \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_v))} = O(\delta^{k-\frac{1}{2}}).$$

On dira dans ce cas que l'opérateur  $\mathcal{B}_k^\delta$  et la condition effective (11.8) sont d'ordre  $k$ .

## 11.2 Calcul formel

- Changement d'échelle à l'intérieur de la couche ferromagnétique

$$(11.10) \quad \begin{aligned} (\mathbf{E}_f^\delta, \mathbf{H}_f^\delta, \mathbf{M}_f^\delta)(x, z) &\longmapsto (\mathbf{E}_f^\delta, \mathbf{H}_f^\delta, \mathbf{M}_f^\delta)(x, \xi, \zeta), \quad (\xi, \zeta) = \left(\frac{x}{\delta}, \frac{z}{\delta}\right). \\ \operatorname{rot} &\longmapsto \operatorname{rot}_x + \frac{1}{\delta} (\operatorname{rot}_\xi + \operatorname{rot}_\zeta), \end{aligned}$$

où on a posé  $\text{rot}_x \mathbf{v} = \partial_x(\vec{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{v})$ ,  $\text{rot}_\xi \mathbf{v} = \partial_\xi(\vec{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{v})$ ,  $\text{rot}_\zeta \mathbf{v} = \partial_\zeta(\vec{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{v}) = \partial_\zeta(\mathbf{n} \times \mathbf{v})$

• Asymptotiques périodiques

$$(11.11) \quad \begin{aligned} (\mathbf{E}_v^\delta, \mathbf{H}_v^\delta) &= (\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0) + \delta (\mathbf{E}_v^1, \mathbf{H}_v^1) + \dots \\ (\mathbf{E}_f^\delta, \mathbf{H}_f^\delta, \mathbf{M}_f^\delta) &= (\mathbf{E}_f^0, \mathbf{H}_f^0, \mathbf{M}_f^0) + \delta (\mathbf{E}_f^1, \mathbf{H}_f^1, \mathbf{M}_f^1) + \dots \end{aligned}$$

où les  $(\mathbf{E}_f^i, \mathbf{H}_f^i, \mathbf{M}_f^i)$  sont périodiques par rapport à la variable  $\xi$  de période  $r$ .

### 11.2.1 Notations

On note  $Y = ]0, r[ \times ]0, 1[$ . Pour une fonction  $u$  définie sur  $Y$  on pose

$$\langle u(\cdot, \zeta) \rangle = \frac{1}{r} \int_0^r u(\xi, \zeta) d\xi$$

Par ailleurs nous aurons besoin d'introduire l'espace fonctionnel

$$\mathcal{H}_0(Y) = \left\{ u \in H^1(Y) / \xi \mapsto u(\xi, \cdot) \text{ est } r \text{ périodique et } u|_{\zeta=0} = 0 \right\}$$

Pour  $u \in \mathcal{H}_0(Y)$  on note

$$\nabla_\xi u = (\partial_\xi u) \vec{\mathbf{e}}_x + (\partial_\zeta u) \vec{\mathbf{e}}_z = (\partial_\xi u, 0, \partial_\zeta u)$$

## 11.3 Condition d'ordre 2

Elle est obtenue à partir de l'approximation

$$(\mathbf{E}_v^\delta, \mathbf{H}_v^\delta) \approx (\mathbf{E}_v^0, \mathbf{H}_v^0) + \delta (\mathbf{E}_v^1, \mathbf{H}_v^1) + O(\delta^2)$$

et s'écrit dans le cas général en posant  $\chi_1 = \int_0^1 \langle \varepsilon_f(\cdot, \zeta) \rangle^{-1} d\zeta$ ,

$$(11.12) \quad \begin{aligned} \partial_t \widetilde{\mathbf{E}}_v^\delta(x, 0, t) \times \mathbf{n} &= -\delta (\mu_0 \partial_{tt} + \text{rot}_\Gamma \chi_1 \text{rot}_\Gamma) \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{H}}_v^\delta(x, 0, t) \\ &\quad - \mu_0 \delta \int_0^1 \left\langle \partial_{tt} \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta(x, \cdot, \zeta, t) \right\rangle d\zeta \end{aligned}$$

où la fonction  $\widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta$  vérifie sur  $\Gamma \times ]0, r[ \times ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$

$$(11.13) \quad \begin{cases} \partial_t \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta = |\gamma| \widetilde{\mathbf{H}}_T^\delta \times \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta \times \partial_t \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta, \\ \widetilde{\mathbf{H}}_T^\delta = \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{H}}_v^\delta(x, 0, t) + \nabla_\xi \psi^\delta + \Pi_\perp \left\langle \mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta \right\rangle + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta) \mathbf{p} \\ \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \end{cases}$$

où pour presque tout  $(x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+$ ,  $\psi^\delta(x, t) \in \mathcal{H}_0(Y)$  est solution de

$$(11.14) \quad \begin{cases} \int_Y \nabla_\xi \psi^\delta \cdot \nabla_\xi \psi' + \left( (\widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta - \mathbf{M}_0) - \left\langle \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta - \mathbf{M}_0 \right\rangle \right) \nabla_\xi \psi' d\xi d\zeta = 0 \quad \forall \psi' \in \mathcal{H}_0(Y) \\ \left\langle \psi^\delta(\cdot, \zeta) \right\rangle = 0 \quad \text{pour presque tout } \zeta \in ]0, 1[. \end{cases}$$

**Simplification dans le cas d'une couche homogène dans le sens de la normale**

**Hypothèse 11.2** Les caractéristiques  $\mathbf{M}_0$ ,  $\alpha$ ,  $\mathbf{H}_s$ ,  $K_a$ ,  $\mathbf{p}$ , sont indépendantes de la variable  $\zeta$  et  $\mathbf{M}_0 \cdot \vec{\mathbf{e}}_x = 0$ .

La condition  $\mathbf{M}_0 \cdot \vec{\mathbf{e}}_x = 0$  est une conséquence de  $\text{div } \mathbf{M}_0^\delta = 0$  et est rajoutée pour retrouver les mêmes conditions que dans le cas du modèle homogénéisé des chapitres 9 et 10.

Sous l'hypothèse (11.2) il est possible de chercher une solution  $(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta, \psi^\delta)$  du système (11.13)-(11.14) qui soit indépendante de  $\zeta$ . Le système (11.14) implique alors que

$$\nabla_\xi \psi^\delta = \left( (\widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta - \mathbf{M}_0) - \langle \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta - \mathbf{M}_0 \rangle \right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_x = -\Pi_x \left( \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta - \langle \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta \rangle \right)$$

La condition d'ordre 2 s'écrit alors

$$(11.15) \quad \begin{aligned} \partial_t \widetilde{\mathbf{E}}_v^\delta(x, 0, t) \times \mathbf{n} &= -\delta (\mu_0 \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \chi_1 \text{rot}_\Gamma) \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{H}}_v^\delta(x, 0, t) \\ &\quad - \mu_0 \delta \langle \partial_{tt} \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta(x, \cdot, t) \rangle \end{aligned}$$

où la fonction  $\widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta$  vérifie sur  $\Gamma \times ]0, r[ \times \mathbf{R}^+$

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta = |\gamma| \widetilde{\mathbf{H}}_T^\delta \times \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta \times \partial_t \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta, \\ \widetilde{\mathbf{H}}_T^\delta = \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{H}}_v(x, 0, t) + \Pi_x \left( \langle \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta \rangle - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta \right) + \Pi_\perp \left( \mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta \right) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta) \mathbf{p} \\ \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \end{cases}$$

On retrouve dans l'opérateur  $\Pi_x \left( \langle \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta \rangle - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta \right)$  de la loi homogénéisée dans le cas laminaire.

**validation dans le cas non périodique**

**Hypothèse 11.3** Les caractéristiques  $\mathbf{M}_0$ ,  $\alpha$ ,  $\mathbf{H}_s$ ,  $K_a$ ,  $\mathbf{p}$ , sont indépendantes de la variable  $\xi$ .

Sous l'hypothèse (11.3) il est possible de chercher une solution  $(\widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta, \psi^\delta)$  du système (11.13)-(11.14) qui soit indépendante de  $\xi$ . Dans ce cas

$$(11.16) \quad \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta - \mathbf{M}_0 = \langle \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta - \mathbf{M}_0 \rangle \Rightarrow \psi^\delta = 0.$$

La condition d'ordre 2 s'écrit alors

$$(11.17) \quad \begin{aligned} \partial_t \widetilde{\mathbf{E}}_v^\delta(x, 0, t) \times \mathbf{n} &= -\delta (\mu_0 \partial_{tt} + \vec{\text{rot}}_\Gamma \chi_1 \text{rot}_\Gamma) \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{H}}_v^\delta(x, 0, t) \\ &\quad - \mu_0 \delta \int_0^1 \partial_{tt} \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta(x, \zeta, t) d\zeta \end{aligned}$$

où la fonction  $\widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta$  vérifie sur  $\Gamma \times ]0, 1[ \times \mathbf{R}^+$

$$(11.18) \quad \begin{cases} \partial_t \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta = |\gamma| \widetilde{\mathbf{H}}_T^\delta \times \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta + \frac{\alpha}{|\mathbf{M}_0|} \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta \times \partial_t \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta, \\ \widetilde{\mathbf{H}}_T^\delta = \Pi_\parallel \widetilde{\mathbf{H}}_v(x, 0, t) + \Pi_\perp \left( \mathbf{M}_0 - \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta \right) + \mathbf{H}_s + K_a (\mathbf{p} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta) \mathbf{p} \\ \widetilde{\mathbf{M}}_f^\delta|_{t=0} = \mathbf{M}_0 \end{cases}$$

ce qui correspond bien avec la condition équivalente d'ordre 2 du cas non périodique (voir formule (5.93))



# Annexe A

## Passage de LLG à LL

Nous reportons ici la démonstration donnée dans [45] du lemme qui permet de passer de l'équation LLG, écrite sous une forme non résolue en  $\partial_t \mathbf{M}$ , à une équation de type LL.

**Lemme A.1** *Pour tout vecteur  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , l'application  $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{x}$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même tel que*

$$(A.1) \quad A^{-1}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{y})\mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{y}}{1 + |\mathbf{a}|^2}$$

*De plus,  $A^{-1}$  est une contraction.*

*Preuve.* La continuité de  $A$  est évidente. Soient  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$  tels que  $A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ . En prenant le produit scalaire de cette expression par  $\mathbf{a}$ , nous obtenons

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{y})$$

et en prenant le produit vectoriel par  $\mathbf{a}$ ,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} - |\mathbf{a}|^2 \mathbf{x} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{y}$$

Ces deux calculs élémentaires permettent de définir le système suivant

$$\begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ -|\mathbf{a}|^2 \mathbf{x} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{y} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{y})\mathbf{a} \end{cases}$$

Comme il est linéaire en  $(\mathbf{x}, \mathbf{a} \times \mathbf{x})$ , il peut être résolu en  $\mathbf{x}$  ce qui mène à (A.1). Il ne reste plus alors qu'à considérer le produit scalaire de  $A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  par  $\mathbf{x}$ , qui donne  $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ . On obtient ainsi que

$$\forall \mathbf{y}, |A^{-1}(\mathbf{y})| \leq |\mathbf{y}|$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

En voici maintenant une version plus générale qui est utilisée dans le calcul du tenseur de perméabilité et dont la démonstration est similaire à la preuve du lemme (A.1).

**Lemme A.2** *Pour tout vecteur  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  telles que  $1 + \lambda^2 |\mathbf{a}|^2 \neq 0$ , l'application  $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{x}$  est injective et*

$$(A.2) \quad A^{-1}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} + \lambda^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{y})\mathbf{a} - \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{y}}{1 + \lambda^2 |\mathbf{a}|^2}$$

*De plus,  $A^{-1}$  est une contraction.*





## Annexe B

### A propos des unités

En magnétisme coexiste deux systèmes d'unités différents : le système SI, pour "Système International d'Unités", qui est celui que nous utilisons, et le système CGS, pour "centimètre, gramme et seconde". Cette différence est résumée dans le tableau suivant pour les principales grandeurs qui nous concernent (Nous renvoyons [16] pour de plus amples informations).

Grandeurs	Symbole	Unités SI	Equivalent CGS
perméabilité magnétique	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} H/m$	1
rapport gyromagnétique	$\gamma$	$-g \times 1,1 \cdot 10^5 Hz m/A$	$-g \times 1,4 MHz/Oe$
Induction magnétique	<b>B</b>	$T$	$10^4 Gauss$
Champ magnétique	<b>H</b>	$A/m$	$4\pi \cdot 10^{-3} Oe$
Aimantation	<b>M</b>	$A/m$	$4\pi \cdot 10^{-3} Oe$

TAB. B.1 – Principales unités pour le magnétisme dans le système SI, et leurs équivalents en système CGS. Les unités utilisées sont le mètre ( $m$ ), le hertz ( $Hz$ ), le henry ( $H$ ), le tesla ( $T$ ), le gauss ( $Gauss$ ), l'øersted ( $Oe$ ) et l'ampère ( $A$ ). Pour les applications numériques, nous prendrons  $g = 2$ .

Soulignons toutefois que le problème se résume certes à des conversions d'unités, mais parfois non évidentes : certaines constantes peuvent disparaître des définitions en prenant la valeur 1. Ainsi par exemple, nous avons dans le système SI,

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

alors que dans le système CGS, on aurait

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}$$

où  $\mathbf{I}$  est "l'intensité d'aimantation"...



## Annexe C

# Estimations relevant du lemme de Gronwall

Afin d'être complet, nous donnons ici quelques précisions sur les utilisations diverses que nous faisons dans ce rapport du lemme de Gronwall et de ses produits dérivés. La version basique de ce lemme est la suivante (voir par exemple [28]) :

**Lemme C.1** *Soit quatre constantes  $C \geq 0$ ,  $T > 0$ ,  $t_0 \geq 0$  et  $\alpha \in [0, 1[$ , une fonction positive  $F \in L^1(0, T)$  et une fonction positive  $X \in C^0([0, T])$ , telles que, pour tout  $t \in [t_0, T]$ ,*

$$(C.1) \quad X(t) \leq C + \int_{t_0}^t F(\tau) X(\tau)^\alpha d\tau$$

alors pour tout  $t \in [t_0, T]$ ,

$$(C.2) \quad X(t) \leq \left( C^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

La version la plus utilisée dans ce rapport est :

**Lemme C.2** *Soit deux constantes  $C \geq 0$  et  $T > 0$ , une fonction positive  $F \in L^1(0, T)$  et une fonction positive  $X \in H^1(0, T)$ , telles que pour p.p.  $t \in (0, T)$ ,*

$$(C.3) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} X^2(t) \leq C X^2(t) + F(t) X(t)$$

alors, pour tout  $[t_0, t] \in [0, T]$ ,

$$(C.4) \quad e^{-Ct} X(t) \leq e^{-Ct_0} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-C\tau} F(\tau) d\tau.$$

*Preuve.* On pose  $Y(t) = \left( e^{-Ct} X(t) \right)^2$  de telle sorte que p.p.

$$\frac{d}{dt} Y(t) = e^{-2Ct} \frac{d}{dt} X^2(t) - 2C e^{-2Ct} X^2(t)$$

Ainsi, en multipliant (C.3) par  $e^{-2Ct}$  nous déduisons p.p. t,

$$\frac{d}{dt} Y(t) \leq 2e^{Ct} F(t) \sqrt{Y(t)}$$

et en intégrant entre  $t_0$  et  $t$ ,

$$Y(t) \leq Y(t_0) + 2 \int_{t_0}^t F(\tau) \sqrt{Y(\tau)} d\tau$$

L'estimation (C.4) se déduit donc immédiatement du lemme C.1 avec  $\alpha = \frac{1}{2}$ . □

Nous avons utilisé également la version suivante :

**Lemme C.3** Soit trois constantes  $C \geq 0$ ,  $T > 0$  et  $t_0 \geq 0$ , une fonction croissante  $F \in C^0([0, T])$  et une fonction  $X \in C^0([0, T])$ , telles que pour tout  $t \in [t_0, T]$ ,

$$(C.5) \quad X(t) \leq F(t) + C \int_{t_0}^t X(\tau) d\tau$$

alors, pour tout  $t \in [t_0, T]$ ,

$$(C.6) \quad X(t) \leq e^{C(t-t_0)} F(t).$$

*Preuve.* On pose pour  $t \geq t_0$ ,  $Y(t) = e^{-Ct} \int_{t_0}^t X(\tau) d\tau$  ce qui donne en dérivant,

$$\frac{d}{dt} Y(t) = e^{-Ct} X(t) - C e^{-Ct} \int_{t_0}^t X(\tau) d\tau.$$

L'inégalité (C.5) s'écrit après l'avoir multipliée par  $e^{-Ct}$ ,

$$\frac{d}{dt} Y(t) \leq e^{-Ct} F(t) \implies Y(t) \leq \int_{t_0}^t e^{-C\tau} F(\tau) d\tau$$

soit en remplaçant  $Y(t)$  par son expression

$$C \int_{t_0}^t X(\tau) d\tau \leq C e^{Ct} \int_{t_0}^t e^{-C\tau} F(\tau) d\tau \leq F(t) C e^{Ct} \int_{t_0}^t e^{-C\tau} d\tau = F(t) (e^{C(t-t_0)} - 1)$$

En utilisant cette inégalité dans (C.5) nous trouvons bien l'estimation (C.6). □

Nous concluons avec une version plus générale que ce qui précède,

**Lemme C.4** Soit quatre constantes  $C \geq 0$ ,  $T > 0$ ,  $t_0 \geq 0$  et  $\alpha \in [0, 1[$ , une fonction croissante positive  $F \in C^0([0, T])$ , une fonction positive  $G \in L^1([0, T])$  et une fonction positive  $X \in C^0([0, T])$ , telles que pour tout  $t \in [t_0, T]$ ,

$$(C.7) \quad X(t) \leq F(t) + \int_{t_0}^t C X(\tau) + G(\tau) X(\tau)^\alpha d\tau$$

alors, pour tout  $t \in [t_0, T]$ ,

$$(C.8) \quad X(t) \leq \left( (e^{C(t-t_0)} F(t))^{1-\alpha} + (1-\alpha) e^{C(t-t_0)} \int_{t_0}^t G(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

*Preuve.* D'après le lemme C.3, si  $X(t)$  vérifie (C.7) alors

$$X(t) \leq e^{C(t-t_0)} \left( F(t) + \int_{t_0}^t G(\tau) X(\tau)^\alpha d\tau \right)$$

soit pour  $t_0 \leq t \leq t'$ ,

$$X(t) \leq e^{C(t'-t_0)} \left( F(t') + \int_{t_0}^t G(\tau) X(\tau)^\alpha d\tau \right)$$

En appliquant le lemme C.1 nous déduisons pour  $t_0 \leq t \leq t'$

$$X(t) \leq \left( \left( e^{C(t'-t_0)} F(t') \right)^{1-\alpha} + (1-\alpha) e^{C(t'-t_0)} \int_{t_0}^t G(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

ce qui nous donne bien (C.8), en prenant  $t = t'$  dans l'inégalité précédente. □



# Bibliographie

- [1] T. ABBOUD and H. AMMARI. Diffraction at a curved grating. tm and te cases, homogenization. *J. Math. Anal and Appl.*, 202 :995–1026, 1996.
- [2] G. ALLAIRE. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6) :1482–1518, 1992.
- [3] G. ALLAIRE. *Notes de cours*. Université de Paris VI, 1996.
- [4] H. AMMARI and C. LATIRI-GROUZ. Conditions aux limites approchés pour les couches minces périodiques en électromagnétisme. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(4) :673–693, 1999.
- [5] M. ARTOLA and M. CESSENAT. Sur la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu composite (diélectrique conducteur). *C.R. Acad. Sci*, t. 310 :375–380, 1990.
- [6] J. M. BALL and F. MURAT.  $W^{1,p}$ -quasiconvexity and variational problems for multiple integrals. *J. Func. Anal.*, 58 :225–253, 1984.
- [7] A. BENDALI and K. LEMRABET. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the helmholtz equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 58(6) :1664–1693, 1996.
- [8] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, and G. PAPANICOLAOU. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [9] G. BOLING and S. FENGQIU. Global weak solution for the landau-lifshitz-maxwell equation in three space dimensions. *J. Math. Anal. Appl.*, 211(1) :326–346, 1997.
- [10] H. BREZIS. *Analyse Fonctionnelle*. MASSON, 1987.
- [11] A. BUFFA and P. CIARLET Jr. On traces for fonctionnal spaces related to maxwell's equations. *Math. Meth. in Appl. Sci.*, à paraître.
- [12] G. CARBOU and P. FABRIE. Time average in micromagnetism. *J. Diff. Equ.*, 147(2) :383–409, 1998.
- [13] G. CARBOU and P. FABRIE. Regular solutions for landau-lifschitz equation in a bounded domain. *Diff. and Int. Equa.*, 14(2) :213–229, Februray 2001.
- [14] Y. CHOQUET-BRUHAT. *Géométrie différentielle et système extérieur*. DUNOD, Paris, 1968.
- [15] F. COLLINO. Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'ondes dans des domaines rectangulaires. Technical Report 1794, I.N.R.I.A, 1992.
- [16] J. CRANGLE and M. GIBBS. Units and unity in magnetism : a call for consistency. *Physics world*, pages 31–32, 1995.



- [17] B. ENGQUIST and A. MAJDA. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139) :629–651, 1977.
- [18] B. ENGQUIST and J. C. NEDELEC. Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers. Technical Report 278, Ecole Polytechnique-CMAP (France), 1993.
- [19] T. GILBERT. A lagrangian formulation on the gyromagnetic equation of the magnetization field. *Physical Review*, 100 :1243, 1955.
- [20] J. GINIBRE and G. VELO. Generalized strichartz inequalities for the wave equation. *J. Funct. Anal.*, 133(1) :50–68, 1995.
- [21] B. GUSTAFSON, H. KREISS, and A. SUNDSTRÖM. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. *Math. Comp.*, 26(119) :649–686, 1972.
- [22] H. HADDAR and P. JOLY. Effective boundary conditions for thin ferromagnetic layers : the one-dimensional model. *SIAM J. Appl. Math.*, 61(4) :1386–1417, 2000.
- [23] H. HADDAR and P. JOLY. Stability of thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and non linear coatings. *J. Comp. and Appl. Math.*, 2002. (to appear).
- [24] A. HARAUX. *Nonlinear evolution equations – global behavior of solutions*. Springer-Verlag, 1981.
- [25] D.J. HOPPE and Y. RAHMAT-SAMI. *Impedance boundary conditions in electromagnetics*. Taylor & Francis, cop., 1995.
- [26] J.L. JOLY, G. METIVIER, and J. RAUCH. Global solutions to maxwell equations in a ferromagnetic medium. Séminaire EDP, Ecole polytechnique (France), 1996-1997.
- [27] J.L. JOLY, G. METIVIER, and J. RAUCH. Global solutions to maxwell equations in a ferromagnetic medium. *Ann. Henri Poincaré*, 1(2) :307–340, 2000.
- [28] P. JOLY. *Cours de DEA : Introduction à l'analyse mathématique des équations de Maxwell en régime transitoire*. Ecole Polytechnique, 1995.
- [29] P. JOLY and O. VACUS. Mathematical and numerical studies of 1d non linear ferromagnetic materials. In ECCOMAS, editor, *In Numerical Methods in Engineering '96*, 1996.
- [30] P. JOLY and O. VACUS. Mathematical and numerical studies of non linear ferromagnetic materials. *M2AN, Math. Model. Numer. Anal.*, 33(3) :593–626, 1999.
- [31] H. KREISS. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 13 :277–298, 1970.
- [32] L. LANDAU and E. LIFSHITZ. *Electrodynamique des milieux continus. Cours de physique théorique*, volume VIII. Mir, Moscou, 1969.
- [33] J.C. MALLINSON. —. *IEEE Trans. Magn.*, MAG-23 :2003, 1987.
- [34] C. B. MORREY. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, volume 130 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1996.
- [35] J.C. NEDELEC. *Cours de DEA : Ondes acoustiques et électromagnétiques. Equations intégrales*. Ecole Polytechnique, 1996.

- 
- [36] G. NGUETSENG. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3) :608–623, 1989.
- [37] A. OSTER. *Electromagnétisme dans les composites : homogénéisation et propagation d'ondes*. PhD thesis, Univ. Paris 6, 1994.
- [38] L. PAQUET. Problème mixtes pour le système de maxwell. *Ann. Fac. Sci. Toulouse 4*, 1982.
- [39] G. PIRCHER. *Ferrites et grenats, phénomènes non linéaires*. Dunod, 1970.
- [40] E. SANCHEZ-PALENCIA. *Nonhomogeneous media and vibration theory*, volume 127. Lecture notes in Phys. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [41] T.B.A. SENIOR and J.L. VOLAKIS. *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. 41. IEE Electromagnetic waves series, 1995.
- [42] E. M. STEIN. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
- [43] I. TERRASSE. *Résolution mathématique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retardés*. PhD thesis, Ecole polytechnique (France), 1993.
- [44] L. N. TREFETHEN. Group velocity interpretation of the stability theory of gustafsson, kreiss and sundström. *J. Comp. Phys.*, 49 :199–217, 1983.
- [45] O. VACUS. *Modélisation de la propagation d'ondes en milieu ferromagnétique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 1997.
- [46] A. VISINTIN. On landau-lifshitz equations for ferromagnetism. *Japan J. Appl. Math.*, 2 :69–84, 1985.
- [47] N. VUKADINOVIC, J. BEN YOUSSEF, and H. LE GALL. Influence of magnetic parameters on microwave absorption of domain mode ferromagnetic resonance. *J. of Magnetism and Magnetic Materials*, 150 :213–222, 1995.
- [48] K. S. YEE. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations. *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, AP-14 :302–307, 1966.