



**HAL**  
open science

## Analysis and synthesis of sound fields

Mathieu Guillaume

► **To cite this version:**

Mathieu Guillaume. Analysis and synthesis of sound fields. domain\_other. Télécom ParisTech, 2006. English. NNT : 2006 E 029 . pastel-00002383

**HAL Id: pastel-00002383**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00002383>**

Submitted on 4 May 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ECOLE DOCTORALE  
D'INFORMATIQUE  
TELECOMMUNICATIONS  
ET ELECTRONIQUE  
DE PARIS

# Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur de l'École  
Nationale Supérieure des Télécommunications

Spécialité : **Signal et Images**

**Mathieu GUILLAUME**

**Analyse et synthèse de champs sonores**

soutenue le 2 novembre 2006 devant le jury composé de :

Alexandre Garcia

Philippe Herzog

Martin Vetterli

Gaël Richard

Olivier Warusfel

Yves Grenier

Président

Rapporteurs

Examineurs

Directeur de thèse



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>vii</b>
<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I De l'analyse et de la synthèse des champs sonores</b>	<b>5</b>
<b>1 Analyse</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Domaine infini . . . . .	11
1.2.1 Équation des ondes . . . . .	11
1.2.2 Solutions élémentaires de l'équation des ondes . . . . .	12
1.2.3 Mesure de champs sonores . . . . .	15
1.2.4 Transformées de Fourier généralisées . . . . .	15
1.2.5 Équivalence des représentations harmoniques . . . . .	20
1.3 Domaine fini . . . . .	24
1.3.1 Cas du parallélépipède . . . . .	25
1.3.2 Cas du cylindre . . . . .	28
1.3.3 Cas de la boule . . . . .	34
1.3.4 Problème du domaine fini de géométrie quelconque . . . . .	36
1.4 Conclusion . . . . .	36
<b>2 Synthèse</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction . . . . .	40
2.2 Fonction de Green en espace infini . . . . .	40
2.3 Représentations intégrales des champs sonores . . . . .	42
2.3.1 Équation intégrale de Kirchhoff . . . . .	42
2.3.2 Principe de Huygens . . . . .	44
2.4 Liens avec les représentations harmoniques . . . . .	44
2.4.1 Conversion intégrale - harmonique . . . . .	45
2.4.2 Projection harmonique - intégrale . . . . .	46
2.5 Distribution surfacique . . . . .	48
2.5.1 Cas d'un unique plan d'équation $x = x_0$ . . . . .	48
2.5.2 Cas de deux plans d'équations $x = x_1$ et $x = x_2$ . . . . .	49
2.5.3 Intégrales de Rayleigh . . . . .	50
2.5.4 Cas du parallélépipède . . . . .	51
2.6 Conclusion sur la synthèse de champs sonores . . . . .	53

<b>3</b>	<b>Discrétisation analyse</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	56
3.2	Étude des champs multidimensionnels à support de Fourier fini . . . . .	56
3.2.1	Géométrie cartésienne . . . . .	56
3.2.2	Géométrie cylindrique . . . . .	58
3.2.3	Géométrie sphérique . . . . .	63
3.3	Conditions réelles . . . . .	65
3.3.1	Effets sur la représentation en ondes planes . . . . .	66
3.3.2	Effets sur la représentation en harmoniques sphériques . . . . .	66
3.3.3	Remarques sur l'échantillonnage en conditions réelles . . . . .	66
3.4	Conclusion sur l'analyse de champs sonores discrétisés . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Discrétisation synthèse</b>	<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	70
4.2	Représentations intégrales discrétisées des champs sonores . . . . .	70
4.3	Cas du champ synthétisé par un plan infini discrétisé . . . . .	71
4.4	Conclusion . . . . .	73
	<b>Bilan de la première partie</b>	<b>75</b>
<b>II</b>	<b>Algorithmes pour l'analyse/synthèse de champs sonores</b>	<b>81</b>
<b>5</b>	<b>Algorithmes pour l'analyse de champs sonores</b>	<b>85</b>
5.1	Introduction . . . . .	86
5.2	Vue d'ensemble du traitement . . . . .	87
5.2.1	Décomposition fréquentielle . . . . .	88
5.2.2	Optimisation du vecteur de pondération . . . . .	89
5.2.3	Choix de la norme . . . . .	92
5.2.4	Introduction des traitements proposés . . . . .	94
5.3	Optimisation de la fenêtre d'analyse . . . . .	95
5.3.1	Antennes bidimensionnelles . . . . .	95
5.3.2	Antennes tridimensionnelles . . . . .	107
5.4	Formation de voies, norme $L_2$ volumique . . . . .	110
5.5	Formation de voies, norme $L_2$ surfacique . . . . .	115
5.5.1	Norme discrète . . . . .	115
5.5.2	Norme continue . . . . .	117
5.5.3	Comparaison des deux approches . . . . .	119
5.6	Configurations géométriques pour les antennes . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Algorithmes pour la synthèse de champs sonores</b>	<b>123</b>
6.1	Introduction . . . . .	124
6.2	Contextes des différents algorithmes d'égalisation multicanale . . . . .	125
6.3	Calcul de la réponse en fréquence du réseau de filtres inverses . . . . .	127
6.4	Calcul de la réponse impulsionnelle des filtres inverses . . . . .	129
6.4.1	Algorithme itératif . . . . .	130
6.4.2	Initialisation des filtres inverses . . . . .	131
6.5	Illustration des performances dans le cas de l'annulation d'interférences . . . . .	132
6.6	Conclusion sur les algorithmes de synthèse de champ sonore . . . . .	134

---

<b>III</b>	<b>Solution expérimentale retenue pour l'analyse/synthèse de champs sonores</b>	<b>137</b>
<b>7</b>	<b>Mise au point du dispositif d'analyse/synthèse par simulation</b>	<b>139</b>
7.1	Introduction . . . . .	140
7.2	Module d'analyse du champ sonore par formation de voies . . . . .	140
7.3	Module de synthèse de champs sonores . . . . .	145
7.4	Réflexions et perspectives . . . . .	152
<b>8</b>	<b>Validation expérimentale du dispositif d'analyse de champs sonores</b>	<b>155</b>
8.1	Introduction . . . . .	156
8.2	Mesure de réponses impulsionnelles . . . . .	156
8.2.1	Méthode employée . . . . .	156
8.2.2	Description du protocole expérimental . . . . .	158
8.3	Calibration de la réponse temps-fréquence du canal électro-acoustique . . . . .	159
8.4	Calibration automatisée de la position des microphones . . . . .	160
8.5	Analyse de champs sonores réels . . . . .	161
8.6	Conclusion sur la validation expérimentale du dispositif . . . . .	164
	<b>Conclusion</b>	<b>165</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>



---

# Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse Yves Grenier pour m’avoir fait profiter de son expérience dans le domaine du traitement des signaux. Ces conseils se sont toujours avérés éclairés, même s’il me fallait souvent un peu de temps avant de m’en rendre compte (l’obstination de la jeunesse peut-être...).

Je remercie également les autres membres du jury de m’avoir fait l’honneur de participer à ma soutenance : Alexandre Garcia, président du jury, Martin Vetterli et Philippe Herzog, rapporteurs, Olivier Warusfel et Gaël Richard, examinateurs.

Je remercie toutes les personnes du département TSI : les enseignants-chercheurs, les secrétaires, les responsables informatique, les doctorants, les post-doctorants et les stagiaires. Plus particulièrement, je remercie Miguel pour l’amitié qui s’est liée entre nous au cours de ces trois années ; Christophe, pour m’avoir fait gagné en ouverture d’esprit, et pas seulement dans le domaine musical ; Téodora, pour sa bonne humeur inébranlable ; Maria et Laurence, sans qui je me serais senti bien seul les matins à TSI ; Loïs, pour tous les combats que nous avons menés ensemble ; Simoné, pour avoir pu partager nos visions différentes sur la vie ; Lionel, Sébastien, Fabrice, Slim, Roland, Valentin, Nancy, pour les bons moments que nous avons passé ensemble ; et je n’oublie pas non plus les anciens qui m’ont précédé, Thomas, Cléo, Grégoire, Eduardo et Julie qui ont contribué largement à faire l’ambiance de TSI ce qu’elle a été pour moi tout au long de ces trois années.

Je tiens à remercier mes parents et mon frère pour leur soutien bienveillant tout au long de ces années. Et finalement, je tiens aussi à remercier mon épouse Hélène et ma fille Joséphine, pour leur soutien inconditionnel, qui ont réussi à m’épauler pendant les moments difficiles, notamment cette “dernière ligne droite” interminable.





---

# Résumé

Ce manuscrit est divisé en trois parties :

- la première approfondit le domaine de la représentation des champs sonores ;
- la deuxième expose de nouveaux algorithmes de traitement du signal afin d’effectuer :
  - l’analyse de champs sonores par un réseau de microphones,
  - la synthèse de champs sonores par un réseau d’enceintes ;
- la troisième partie utilise les résultats des deux parties précédentes afin d’envisager, par des simulations et des validations expérimentales, de nouvelles approches pour l’analyse et la synthèse de champs sonores.

La partie I de cette thèse est très théorique et contient des expressions des champs sonores dont l’essence est parfois difficile à saisir au premier coup d’œil pour les lecteurs non familiers avec des domaines tels que ceux des transformées et des séries de Fourier généralisées, des fonctions de Bessel, des harmoniques sphériques, de la théorie de la fonction de Green, et de l’équation intégrale de Kirchhoff. Pour les lecteurs n’étant pas parfaitement à l’aise avec ces équations, je suggère vivement qu’ils en lisent au moins l’introduction et le bilan. Les domaines approfondis dans cette partie sont à l’interconnexion entre l’acoustique et le traitement du signal.

L’objectif de cette partie est de faire la synthèse des différentes modélisations possibles pour le champ sonore. Cette synthèse permettra de prendre du recul par rapport au domaine de l’analyse et de la synthèse des champs sonores, notamment en dressant le bilan des avantages et des inconvénients liés à chaque approche actuelle pour la synthèse de champs sonores par un réseau de transducteurs, telle que la Wave Field Synthesis [7, 10, 14, 25], les méthodes ambisoniques d’ordres élevés [27, 28, 74, 75] ou l’égalisation multicanale traditionnelle [15, 16, 17, 33, 40, 46, 55, 56, 67, 69, 71, 73]. Les chapitres 1 et 3 étudient les représentations harmoniques pour la description des champs multidimensionnels dans les cas suivants : l’analyse/synthèse sur un domaine infini, l’analyse/synthèse sur un domaine fini, et l’analyse/synthèse des champs à “bande limitée”. Ces chapitres permettent de passer en revue des outils d’analyse tels que les transformées ou séries de Fourier généralisées, adaptés à chacun des trois principaux systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques. Les chapitres 2 et 4 détaillent les représentations intégrales des champs sonores, et établissent des résultats telles que l’intégrale de Kirchhoff et la formulation de Kirchhoff du principe de Huygens. Les deux premiers chapitres de la partie s’intéressent à l’analyse et la synthèse de champs sonores en supposant que les champs étudiés sont idéalement connus. Les deux derniers chapitres étudient les effets de la discrétisation des observations sur les différentes représentations introduites dans les deux premiers chapitres, afin de se rapprocher des conditions des dispositifs réels d’analyse et de synthèse, qui ne peuvent utiliser qu’un nombre fini de mesures du champ sonore. Cette partie se termine par un bilan essayant de dresser les avantages et les inconvénients de chaque représentation envisagée : les ondes planes, les harmoniques cylindriques, les harmoniques sphériques, ou la formulation de Kirchhoff du principe de Huygens. Ce bilan s’intéresse notamment à la robustesse de ces représentations vis-à-vis de la discrétisation.

Dans la partie II, l'objectif est de démontrer le potentiel de la représentation du champ sonore en ondes planes à la fois pour l'analyse et la synthèse. Nous étudions l'analyse de champs sonores par un réseau de microphones au chapitre 5 et la synthèse de champs sonores par un réseau de transducteurs au chapitre 6.

Dans le chapitre 5, nous introduisons plusieurs algorithmes permettant de mettre au point des filtres spatiaux performants dont l'objectif est de conserver uniquement la composante du champ sonore provenant du voisinage d'une direction d'incidence donnée. Les techniques employées appartiennent à la catégorie des formations de voies fréquentielles, qui utilisent un vecteur de pondération, affectant un poids différent pour chaque mesure de l'antenne de microphones, pour chaque fréquence d'analyse. Dans un premier temps, nous mettons au point une fenêtre d'analyse spatiale optimale, c'est-à-dire un filtre spatial dont le vecteur de pondération dépend uniquement de la fréquence d'analyse et pas de la direction d'incidence considérée. Nous montrons l'efficacité de cette approche dans le cas de l'étude des antennes bidimensionnelles, pour lesquelles l'analyse des champs sonores peut se restreindre à un sous-domaine du domaine global de Fourier, c'est-à-dire le domaine des fréquences et vecteurs d'onde. Puis, nous proposons un raffinement de ces algorithmes en rendant le vecteur de pondération dépendant de la direction d'incidence, ce qui permet d'avoir des améliorations notables au niveau de la résolution de l'analyse (capacité d'un système à dissocier deux sources proches angulairement). Toutes les approches proposées réalisent une minimisation de l'erreur quadratique entre une réponse de référence et la réponse effective du filtre spatial. Contrairement aux algorithmes traditionnels qui utilisent un ensemble discrets de directions d'incidence pour accomplir l'optimisation du vecteur de pondération, nous utilisons une minimisation de l'erreur quadratique sur tout l'ensemble (ensemble continu) des directions d'incidence. Ainsi, l'algorithme présenté est immunisé contre les conséquences d'un mauvais maillage de l'ensemble des directions d'incidence.

Dans le chapitre 6, nous présentons un algorithme d'égalisation multicanale très flexible : il est capable de réaliser de l'égalisation de longues réponses impulsionnelles étant donné qu'une solution itérative rapidement convergente est utilisée pour calculer la solution ; il utilise une résolution dans le domaine temporel mais accélère le calcul de chaque itération en réalisant les calculs dans le domaine fréquentiel grâce à la FFT, permettant ainsi d'éviter le défaut des algorithmes rapides traditionnels d'égalisation multicanale, qui calculent les convolutions linéaires à l'aide de convolutions circulaires, introduisant de ce fait du recouvrement dans le domaine temporel ; il peut s'appliquer quelle que soit la description spatiale utilisée pour représenter les champs sonores, qu'il s'agisse des impulsions de Dirac multidimensionnelles, comme c'est le cas usuellement, des ondes planes, comme dans la méthode que nous préconisons, ou des harmoniques sphériques, comme dans le cas des méthodes ambisoniques d'ordres élevés.

Dans la partie III, nous exposons la solution expérimentale que nous avons retenue pour effectuer l'analyse et la synthèse de champs sonores. Pour l'analyse, nous constituons une banque de filtres spatiaux, dont chacun permet d'étudier le champ dans le voisinage d'une direction donnée de l'espace et qui permet de calculer des cartographies du champ sonore pour chaque fréquence d'analyse. Cette approche est testée en simulation au chapitre 7, et validée expérimentalement dans le chapitre 8 dans le cas de la mesure du rayonnement d'enceintes réelles mesurées dans une chambre anéchoïque par une antenne bidimensionnelle. Pour la synthèse de champs sonores, nous utilisons l'algorithme d'égalisation multicanale introduit au chapitre 6 utilisant une représentation du champ sonore en ondes planes. Nous montrons la supériorité de cette approche par rapport à l'approche traditionnelle de l'égalisation multicanale pour laquelle le champ est décrit par une représentation en impulsions de Dirac multidimensionnelles. Les critères servant à la comparaison de ces deux approches sont le rapport signal sur bruit de la reconstruction, la réponse en fréquence et la réponse temporelle des champs effectivement reconstruits par ces deux approches.

## *Résumé*

---

Puis nous effectuons la conclusion générale de ces travaux et nous dégageons des perspectives pour l'application et la poursuite de ces travaux.

---

# Introduction

Le premier système ayant permis à la fois l'enregistrement et la reproduction du son fut le phonographe, inventé par Thomas Edison en 1877. Pour faire fonctionner cet appareil, un opérateur chantait dans un cornet terminé par un diaphragme, dont les vibrations déplaçaient un stylet qui entaillait un cylindre de cire molle. L'intensité du champ de pression acoustique était encodée par la profondeur du sillon hélicoïdal. Au moment de la restitution, la cire était durcie et le stylet était remplacé par une pointe mousse, qui imprimait au diaphragme le même mouvement que lors de l'inscription.

Depuis cette invention, l'enregistrement et la reproduction du son n'ont eu de cesse de se perfectionner. Les nombreuses imperfections des premiers dispositifs mécano-acoustiques ont été progressivement corrigées par une série de révolutions technologiques qui se sont déroulées de 1877 à nos jours. Parmi ces révolutions figure l'apparition des supports magnétiques qui ont permis une meilleure flexibilité et reproductibilité des enregistrements effectués en comparaison des enregistrements réalisés sur les premiers cylindres ou par la suite sur les disques. La qualité des supports s'est encore améliorée avec l'utilisation de la technologie numérique, qui assure une pérennité du stockage, et une flexibilité encore accrue : la qualité de la représentation des signaux enregistrés, contrôlée par des paramètres tels que la fréquence d'échantillonnage et le nombre de bits utilisés pour encoder chaque échantillon, est en constante progression. En dehors du support et du traitement des signaux qui peuvent utiliser la technologie numérique, l'essence même du domaine de l'enregistrement et de la reproduction du son est analogique, et les systèmes sous-jacents ne seraient pas ce qu'ils sont aujourd'hui sans l'avènement de l'électro-acoustique, avec l'apparition des microphones et des enceintes, qui ont remplacé progressivement les premiers appareils mécano-acoustiques. L'avantage d'avoir eu recours aux microphones et aux enceintes est d'avoir pu profiter des progrès fulgurants dans le domaine de l'électronique, avec l'utilisation de circuits (pré-amplificateurs, amplificateurs de puissance, convertisseurs analogique-numérique, etc.) ayant toujours de meilleures performances. Ces dispositifs sont caractérisés à la fois quantitativement par des critères tels que la platitude de la réponse en fréquence, la distorsion harmonique totale générée, la distorsion de phase, d'intermodulation, la puissance maximale de sortie, la distorsion en régime transitoire, la plage de dynamique et le rapport signal sur bruit accessible, les fluctuations de la fréquence d'échantillonnage (*jitter* en anglais) mais aussi qualitativement par le biais de tests d'écoutes. Parallèlement, des progrès dans le domaine de l'acoustique ont permis de perfectionner les microphones et les enceintes, en améliorant la sensibilité et la linéarité de ceux-ci.

C'est au cours de ces décennies qu'est né et que s'est fortifié le concept de *haute-fidélité*, que l'on peut définir de la manière suivante : un système haute-fidélité d'enregistrement et de reproduction est idéal s'il est capable de recréer parfaitement une scène sonore, de sorte qu'un auditeur ayant les yeux fermés serait incapable de détecter une quelconque différence entre la scène initiale et la scène reproduite.

La définition du concept de haute-fidélité énoncée ci-avant exige beaucoup plus que le rendu temporel des signaux sonores : elle implique aussi nécessairement une bonne qualité du rendu spatial de la scène sonore initiale, afin d'accroître le réalisme de l'immersion de l'auditeur dans

la scène reproduite. Il a été reconnu très tôt que les possibilités des systèmes haute-fidélité limités à une reproduction monophonique étaient très réduites, et que plusieurs canaux de transmission permettraient d'améliorer grandement le réalisme de la reproduction. Une des premières solutions préconisées était de placer trois enceintes frontales afin d'avoir une représentation réaliste de la séparation entre les différents interprètes d'un orchestre, et d'ajouter deux enceintes supplémentaires soit à l'arrière soit sur les côtés de l'auditeur afin de traiter la réverbération. Malheureusement, la technologie nécessaire n'était pas disponible dans les années 1930. Le compromis adopté fut la stéréophonie, introduite par Alan Blumlein. En effet, la stéréophonie permet de synthétiser à partir de deux canaux gauche et droit un troisième canal de transmission (principe de la source fantôme) situé au centre : les artifices utilisés pour générer cette illusion auditive sont désormais bien connus et maîtrisés ; il s'agit des concepts psychoacoustiques de différences interaurales de temps et d'amplitude. La limitation de l'effet stéréophonique est que l'auditeur doit se situer sur la médiatrice du segment joignant les deux enceintes. L'effet disparaît ou est fortement atténué à mesure que l'auditeur s'en éloigne. Une tentative d'adjonction de deux canaux supplémentaires fut effectuée dans les années 1970 avec les dispositifs quadruphoniques, afin de pouvoir aussi traiter la réverbération, mais ce fut un échec commercial car les consommateurs n'étaient pas prêts à payer le surcoût en argent et en espace pour l'installation d'un tel dispositif qui, au final n'était jugé améliorer le réalisme spatial que de manière très marginale. Ces verrous technologiques et économiques sont désormais levés avec le gain en popularité des systèmes *home-cinema*.

L'intégralité des progrès effectués au cours du siècle précédent a été dédiée à l'amélioration des aspects temporels de l'enregistrement et de la reproduction du son, ayant permis d'atteindre des caractéristiques telles qu'une réponse plate à  $\pm 1$  dB sur toute la bande de fréquences 20 Hz-20 kHz, et une plage de dynamique d'environ 100 dB, caractéristiques qui vont parfois même jusqu'à effleurer les limites de la perception auditive humaine. Les efforts de recherche du siècle présent seront quant à eux consacrés à l'amélioration des aspects spatiaux de l'enregistrement et de la reproduction du son. Alors que l'amélioration des aspects temporels a nécessité des efforts de recherche dans le domaine de l'électronique, de l'acoustique et de la physique, l'amélioration des aspects spatiaux nécessitera de réaliser de grands progrès dans le domaine du traitement du signal appliqué à l'acoustique. En effet, il y a fort à parier que les systèmes qui seront employés dans le futur ne se contenteront plus seulement d'utiliser comme signaux de commande des enregistrements captés par des microphones et retouchés par l'ingénieur du son. De nouveaux traitements automatisés seront effectués sur des mesures de champ sonore récoltées par une antenne de microphones<sup>1</sup> afin de calculer les signaux de consigne des différentes voies du système multicanal qui optimiseront le rendu spatial d'une scène sonore de référence. Les technologies visant à améliorer le réalisme spatial peuvent être répertoriées en deux catégories : les techniques binaurales et les techniques de reconstruction physique du champ sonore. La première catégorie vise une amélioration du réalisme de la reproduction au casque et sort du cadre de cette thèse. Dans la seconde catégorie, il existe plusieurs approches en cours d'élaboration : nous pouvons citer la *Wave Field Synthesis*, les systèmes de reproduction *ambisoniques* d'ordres élevés, plus généralement les systèmes de reconstruction modale et finalement les systèmes de déconvolution multicanale.

Alors que la liste de critères permettant de tester quantitativement la qualité du rendu temporel est longue, il n'existe à notre connaissance pas de critères répandus et unanimement utilisés permettant de juger quantitativement du rendu spatial d'une scène sonore. Cette omission n'est sûrement pas volontaire et est donc lourde de signification : l'évaluation du rendu spatial mobilisant plusieurs canaux de transmission constitue un réel défi scientifique et soulève beaucoup de problèmes encore irrésolus. Le développement des solutions multicanales actuellement employées par l'industrie du cinéma, et plus récemment dans l'industrie du disque a été complètement empirique.

---

<sup>1</sup>ou bien le successeur des antennes de microphones pour mesurer des champs de pression acoustique sur une large zone de l'espace.

Le fait que ces solutions soient empiriques n'est pas en contradiction avec la démarche heuristique adoptée par les adeptes de la philosophie de la haute-fidélité : seules les modifications apportant un réel apport pour le réalisme spatial ont été sélectionnées par l'histoire de l'enregistrement et de la reproduction du son.

Concernant l'amélioration du réalisme spatial, il semble réducteur de continuer à parler de ce domaine comme celui de l'enregistrement et de la reproduction du son. Une formulation plus appropriée serait de parler *d'analyse et de synthèse de champs sonores*, ce qui est en meilleure harmonie avec le concept de haute-fidélité. En effet, le recours au mot "son" dans la dénomination actuelle n'évoque pas le caractère étendu de la reproduction revendiqué dans le concept de haute-fidélité, ce qui est corrigé par le recours à la dénomination champ sonore<sup>2</sup>. De plus, le recours aux dénominations "analyse" et "synthèse" induit implicitement la présence du traitement du signal dans ces dispositifs, alors que celui-ci est absent des dispositifs actuels.

L'amélioration des aspects spatiaux de l'analyse et de la synthèse de champs sonores est donc un domaine de recherche très actif, dans lequel plusieurs solutions sont pour le moment en concurrence. De manière analogue à la démarche employée pour améliorer les aspects temporels de l'analyse/synthèse, il faudra se donner des critères quantitatifs permettant de tester la qualité du rendu spatial afin de venir compléter les tests perceptifs, qui constituent actuellement la seule possibilité. Ces nouveaux critères devront être indépendants de la méthode utilisée pour l'analyse/synthèse de champs sonores. Plusieurs des critères utilisés pour l'appréciation du rendu temporel pourront sûrement se généraliser pour caractériser le rendu spatial : par exemple, il serait bien de pouvoir caractériser la réponse en "fréquences spatiales" du dispositif, ce qui permettrait de connaître la bande passante spatiale du dispositif ; de même, il serait intéressant de généraliser la notion de rapport signal sur bruit et de plage de dynamiques pour les aspects spatiaux de l'analyse/synthèse de champs sonores. Les objectifs principaux de cette thèse sont de donner naissance à un cadre général commun pour l'étude des champs sonores, de donner des critères quantitatifs permettant de juger de la qualité du rendu spatial d'un dispositif haute-fidélité, et d'envisager de nouvelles solutions pour améliorer le rendu spatial d'une scène sonore.

---

<sup>2</sup>L'étude des champs dans le domaine de la physique a pour objectif d'étudier l'évolution d'une grandeur physique à un niveau global, en opposition à une étude à un niveau local.

---





---

**Première partie**

**De l'analyse et de la synthèse des  
champs sonores**



---

La première partie de cette thèse traite de l'analyse et de la synthèse de champs sonores. Ce choix est lié à l'objectif principal qui a été énoncé dans l'introduction : l'amélioration du rendu spatial. Une meilleure compréhension des champs sonores semble un point incontournable pour accéder à cet objectif. Pour cela, nous nous proposons d'effectuer une synthèse des représentations de champs sonores existantes. Les représentations couramment utilisées dans la littérature peuvent être classées en deux catégories : les représentations harmoniques, et les représentations intégrales. Les chapitres 1 et 3 seront dédiés à l'analyse harmonique des champs sonores tandis que les chapitres 2 et 4 seront dédiés aux représentations intégrales.

Les représentations harmoniques, telles que les décompositions en ondes planes, en harmoniques cylindriques ou en harmoniques sphériques, sont des méthodes de représentations de champs multidimensionnels qui ne sont pas spécifiques à l'étude des champs sonores. Ces méthodes de représentations pourraient aussi bien servir à décrire des signaux vidéo par exemple. Les champs sonores possèdent une propriété complémentaire : ils satisfont une loi d'évolution, *l'équation de propagation*, ce qui permet de distinguer l'analyse effectuée sur ces objets par rapport à une analyse sur des champs multidimensionnels quelconques. Une autre caractéristique importante des représentations harmoniques est qu'elles n'exhibent pas directement les liens entre les *causes* (les sources acoustiques) et les *conséquences* (propagation des ondes acoustiques). Ceci est dû au fait que les représentations harmoniques sont des outils très génériques dans le domaine du traitement du signal : elles sont par nature indépendantes des systèmes étudiés.

Les représentations intégrales sont quant à elles des outils dédiés à la représentation de champs satisfaisant l'équation de propagation. Il s'agit donc d'outils plus spécifiques que les représentations harmoniques. Leurs développements se basent sur la résolution de l'équation de propagation, à partir de la connaissance des conditions initiales et des conditions aux limites. Cette méthodologie permet au final de dissocier clairement les causes des conséquences contrairement aux représentations harmoniques.

Chacune de ces catégories possède donc des avantages et des inconvénients. Le fait que des sources acoustiques réelles, monopôles et dipôles, apparaissent clairement dans les formulations intégrales du champ sonore prédispose ces représentations à être utilisées au moment de la synthèse. D'un autre côté, l'analyse de champs sonores est plus aisée à l'aide des représentations harmoniques car les harmoniques constituent des familles de fonctions jouissant d'un ensemble de bonnes propriétés mathématiques, telles que l'orthogonalité par exemple.

La synthèse des différentes représentations de champs sonores possibles va d'abord considérer des conditions idéales dans les chapitres 1 et 2, c'est-à-dire que nous supposerons une connaissance idéale du champ sonore en tout point de l'espace et à tout instant pour l'analyse et nous supposerons que nous disposons d'une distribution continue de sources secondaires pour la synthèse de champs sonores. Puis, dans les chapitres 3 et 4, nous nous rapprocherons de conditions plus réalistes où nous supposerons que nous ne disposons plus que d'une répartition discrète d'échantillons du champ sonore pour l'analyse, et que d'une répartition discrète de sources secondaires pour la synthèse.

Un des objectifs principaux fixé aussi dans l'introduction de la thèse était de nous donner un cadre commun pour l'étude des champs sonores. Ainsi, la synthèse des représentations de champs sonores que nous allons faire dans cette partie ne sera pas constituée par une série de descriptions indépendantes. Chaque fois que cela sera possible, nous essaierons de faire des liens entre les différentes représentations afin de pouvoir prendre du recul et d'expliquer comment les propriétés caractéristiques de tout champ sonore se traduisent selon la représentation employée.

Avant de rentrer dans le vif du sujet et de présenter les différentes descriptions possibles pour les champs sonores, il me semble dès maintenant intéressant de poser les questions suivantes, qui pourront orienter la lecture de cette première partie : devant la pluralité de descriptions, y a-t-il une

---

description qui soit mieux adaptée que les autres, et si tel est le cas, quelles en sont les raisons ?  
Sinon, quels sont les avantages et les inconvénients des différentes représentations, et existe-t-il  
des moyens de passer de l'une à l'autre ?

# Chapitre 1

## Analyse harmonique de champs sonores<sup>1</sup>

### Résumé :

Dans ce chapitre, nous introduisons les représentations harmoniques associées à quatre types d'harmoniques : les impulsions de Dirac multidimensionnelles, les ondes planes, les harmoniques cylindriques et les harmoniques sphériques. Les impulsions de Dirac multidimensionnelles constituent la représentation de référence : l'impulsion de Dirac  $\delta_{\mathbf{r}_0, t_0}$  est la modélisation mathématique pour la mesure du champ sonore au point localisé par le vecteur  $\mathbf{r}_0$  à l'instant  $t_0$ . Les trois autres représentations harmoniques possèdent la propriété de former des familles libres et complètes. De fait, toutes les représentations harmoniques sont équivalentes d'un point de vue théorique.

Les outils permettant d'extraire les paramètres de la décomposition en ondes planes, en harmoniques cylindriques ou en harmoniques sphériques sont des transformées de Fourier généralisées. Tout champ sonore décrit par les paramètres de sa représentation harmonique peut être calculé dans le domaine spatio-temporel à l'aide des transformées inverses des transformées de Fourier généralisées utilisées pour calculer la décomposition. Des opérateurs directs permettant de calculer les paramètres de la décomposition en harmoniques cylindriques à partir des paramètres de la décomposition en ondes planes sont explicités, ainsi que pour la conversion réciproque. Il en est de même entre les ondes planes et les harmoniques sphériques.

Lorsque le domaine d'analyse est fini, et que ses frontières peuvent être décrites dans un système de coordonnées séparables (parallélépipède, cylindre, sphère), le champ sonore peut être complètement décrit à partir d'un sous-ensemble à répartition discrète des harmoniques initialement utilisés<sup>a</sup>. Les outils d'analyse ne sont plus des transformées de Fourier généralisées, mais des séries de Fourier généralisées : séries de Fourier usuelles pour un parallélépipède, séries de Fourier-Bessel cylindriques pour un cylindre, et séries de Fourier-Bessel sphériques pour une sphère.

Le fait que les objets analysés soient des champs sonores se traduit par le fait que les représentations harmoniques possèdent des singularités dans le domaine de Fourier lorsque les relations de dispersion sont vérifiées. Ce dernier résultat est valable pour une analyse sur un domaine infini. Lorsque l'analyse est effectuée sur un domaine fini, les modes propres les plus excités sont ceux situés dans le voisinage du domaine défini par la relation de dispersion. Les propriétés de décroissance des coefficients du développement modal à mesure qu'on s'éloigne de ce voisinage sont aussi discutées, en se remémorant le phénomène de Gibbs.

<sup>a</sup>harmonique est un mot singulier, contrairement à ce qui souvent répandu.

<sup>1</sup>Ce chapitre est basé sur notre travail initial [44].

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, une présentation du domaine de l'analyse harmonique est effectuée dans le but d'analyser une classe bien particulière de signaux multidimensionnels : les champs sonores. L'analyse harmonique est la branche des mathématiques qui s'attache à décomposer une classe de signaux sur un ensemble d'atomes élémentaires. Elle englobe et généralise la notion de séries de Fourier et de transformée de Fourier. Les atomes élémentaires utilisés pour la décomposition sont appelés des harmoniques. Les champs sonores constituent une classe particulière de signaux qui ont la propriété de satisfaire l'équation des ondes. Récemment, Rabenstein *et al.* ont introduit un cadre d'étude pour les champs sonores bidimensionnels dans [82]. L'étude présentée dans ce chapitre et dans le chapitre 2 constitue à la fois une extension au cas tridimensionnel mais aussi un prolongement car elle englobe aussi la représentation du champ sonore à l'aide des équations intégrales.

Différentes décompositions harmoniques vont être envisagées :

- la décomposition du champ sonore en distributions de Dirac, qui agissent comme des mesures du champ sonore en un point de l'espace, à un instant donné ;
- la décomposition du champ sonore en ondes planes, pour laquelle l'outil d'analyse associé est la transformée de Fourier multidimensionnelle ;
- la décomposition du champ sonore en harmoniques cylindriques et en harmoniques sphériques, pour lesquelles les outils d'analyse associés sont des transformées de Fourier généralisées.

Les harmoniques utilisés par ces décompositions apparaissent dans un premier temps, à la section 1.2.1, comme des solutions de l'équation des ondes homogène sur un domaine infini, séparables dans l'un des systèmes de coordonnées suivants : cartésien, cylindrique, ou sphérique. Pour traiter le cas de l'équation des ondes inhomogène, il est nécessaire d'étendre l'ensemble des harmoniques utilisés dans le cas homogène, ce qui conduira à l'analyse de champs sonores par transformées de Fourier généralisées à la section 1.2.4.

Dans un second temps, nous développons le domaine de l'analyse harmonique pour des champs sonores observés dans un domaine fini de l'espace, et vide de sources. Deux solutions pour l'analyse sont alors possibles : l'une est de considérer que le champ sonore est une version tronquée du champ réel, et d'utiliser les outils déjà présentés pour l'étude de champs sonores sur un domaine infini ; l'autre possibilité est de décomposer le champ sonore sur un sous-ensemble discret d'harmoniques par rapport aux harmoniques utilisés sur le domaine infini. Ces harmoniques sont parfois nommés "modes propres", et l'analyse sous-jacente est connue dans la littérature sous l'appellation "décomposition modale". Des exemples d'utilisation de la décomposition modale sont décrits par Betlehem et Abhayapala [11, 12], Poletti [79], Rayess et Wu [85], Wang et Wu [104], Wu [108], Wu et Zhao [111]. Les outils d'analyse étudiés dans le domaine de la décomposition modale ne sont plus les transformées de Fourier généralisées qui utilisent un ensemble continu d'harmoniques, mais les séries de Fourier, usuelles ou généralisées (séries de Fourier-Bessel, cylindriques ou sphériques).

Cette présentation à caractère théorique est suffisamment générale pour englober l'analyse du champ sonore qui est effectuée dans les dispositifs de reproduction du champ sonores basés sur les harmoniques sphériques (consulter par exemple Daniel et Moreau [27], Poletti [79]) ceux basés sur la décomposition modale du champ (voir Betlehem et Abhayapala [11], Poletti [79]), et ceux utilisant des techniques d'égalisation multicanale (voir Guillaume et Grenier [40], Kirkeby et Nelson [55], Kirkeby *et al.* [56], Miyoshi et Kaneda [67]). Elle sera complétée dans le chapitre 2 afin d'englober aussi les systèmes de reproduction utilisant une description du champ sonore par équations intégrales, tels que la Wave Field Synthesis (consulter les articles de Berkhout [7], Berkhout *et al.* [10], Boone *et al.* [14]) ou bien la technique du contrôle des conditions aux limites,

introduites par Ise [50], Takane *et al.* [97]. Ainsi, cette étude théorique construit un cadre commun pour l'analyse de champs sonores, quelle que soit la technique de synthèse employée.

Notre apport personnel dans ce chapitre est de démontrer que toutes les décompositions harmoniques sont équivalentes entre elles. De plus, nous explicitons certains opérateurs qui permettent de passer d'une représentation harmonique à une autre. Cette équivalence entre les différentes représentations harmoniques, ondes planes, harmoniques cylindriques ou sphériques, soulève un problème important : quelle représentation harmonique est la plus appropriée pour l'analyse de champs sonores ? D'un point de vue théorique, celles-ci sont toutes équivalentes mais nécessitent une connaissance idéale du champ. En revanche, des différences de comportement de chacune de ces méthodes d'analyse apparaissent lorsque cette dernière hypothèse n'est plus respectée. Ce sujet sera plus approfondi dans le chapitre 3 où les effets dûs à l'échantillonnage du champ sonore seront étudiés.

## 1.2 Analyse de champs sonores sur un domaine infini

L'oreille, par le biais du tympan, est sensible aux variations de la pression acoustique. L'étude des champs sonores s'intéresse à étudier le champ de pression acoustique. Il est important de noter que l'étude des champs en physique se fait de manière globale, par opposition à une étude à un niveau local. L'objectif de l'étude des champs acoustiques est de modéliser leur évolution sur un certain domaine de l'espace, au cours d'une période donnée. Au niveau local, nous supposons que la pression acoustique satisfait l'équation des ondes élémentaire. Ce n'est pas forcément le modèle qui approche le mieux la réalité, étant donné qu'il ne prend pas en compte les phénomènes d'absorption dans le milieu de propagation. L'utilisation de ce modèle simple permettra déjà de mettre en évidence une multitude de phénomènes. Néanmoins l'étude que nous allons faire dans les prochaines sections est déjà bien assez complexe du point de vue du traitement du signal sans en plus ajouter de la complexité au modèle physique. Rien n'empêchera de raffiner cette étude par la suite.

Du point de vue du traitement du signal, les outils mathématiques permettant d'effectuer l'analyse de champs sonores sur un domaine infini sont les transformées de Fourier généralisées. La présentation que nous en ferons prend directement sa source dans la physique. Nous donnerons quelques solutions élémentaires de l'équation des ondes homogène, séparables dans les systèmes de coordonnées cartésien, cylindrique et sphérique. Puis nous généraliserons ces ensembles de solutions pour traiter le cas plus général de l'équation des ondes inhomogène, ce qui aboutira à l'étude des transformées de Fourier généralisées. Pour chaque représentation harmonique, les harmoniques forment une famille libre, mais aussi génératrice d'une certaine classe de fonctions, sur laquelle nous reviendrons par la suite.

Étant donné que nous pouvons généraliser le théorème de Fourier pour la transformée de Fourier usuelle à chacune des transformées de Fourier généralisées, nous en déduisons que toutes les représentations harmoniques sont équivalentes d'un point de vue théorique, et nous expliciterons la forme d'opérateurs de changement de base, qui permettent de convertir une représentation harmonique donnée en une autre.

### 1.2.1 Équation des ondes

En effectuant une série de simplifications acceptables pour une première approche, nous pouvons supposer que le champ de pression acoustique  $p(\mathbf{r}, t)$ , en tout point de l'espace repéré par le vecteur position  $\mathbf{r}$ , à tout instant  $t$ , satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante, connue sous

le nom d'équation des ondes :

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -q(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

Dans cette équation,  $\nabla^2$  désigne l'opérateur *Laplacien*.  $c$  indique la célérité des ondes acoustiques. Si nous supposons que les transformations thermodynamiques que subit le fluide sont isentropiques, alors la célérité est donnée par la formule  $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ , où  $\gamma$  est le rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants ( $\gamma = 1.4$  pour les gaz parfaits diatomiques),  $R$  la constante des gaz parfaits,  $T$  la température en Kelvins, et  $M$  la masse molaire du fluide. Dans les conditions usuelles, la célérité  $c$  est voisine de  $343 \text{ m.s}^{-1}$ .  $q$  est un terme indiquant la présence de sources. L'équation des ondes sera dite *homogène* si son terme source est nul, et *inhomogène* dans le cas contraire.

Afin de garantir l'existence et l'unicité du champ de pression acoustique à un problème donné, il est nécessaire de rajouter des conditions supplémentaires : les conditions aux limites, et les conditions initiales. Les conditions aux limites doivent être de type *Dirichlet*, *Neumann* ou *Robin*, c'est-à-dire que, respectivement, le profil de la pression acoustique, de la composante normale<sup>2</sup> du gradient de pression acoustique, ou une combinaison linéaire de ces deux derniers doit être connue sur la surface  $\mathcal{S}$  délimitant le domaine de résolution  $\mathcal{V}$ . Les conditions initiales sont de type *Cauchy*, c'est-à-dire que le profil de la pression acoustique ainsi que celui de sa première dérivée par rapport à la variable temporelle doivent être connus à l'instant initial  $t_i$ , dans tout le domaine de résolution  $\mathcal{V}$ .

## 1.2.2 Solutions élémentaires de l'équation des ondes

Étant donné que le domaine de résolution est infini, nous ne spécifions pas de conditions aux limites ni de conditions initiales supplémentaires pour rechercher des solutions de l'équation des ondes homogène. Celles-ci sont directement prises en compte par le terme source de l'équation (1.1). Pour plus de détails sur l'équivalence entre les conditions aux limites et la présence de sources, le lecteur peut se reporter à Morse et Feshbach [68].

Dans la suite, nous utiliserons plusieurs manières de repérer un point dans l'espace : les systèmes de coordonnées cartésien, cylindrique et sphérique. Les notations principales associées à chacun de ces systèmes de coordonnées sont représentés sur la figure 1.1.

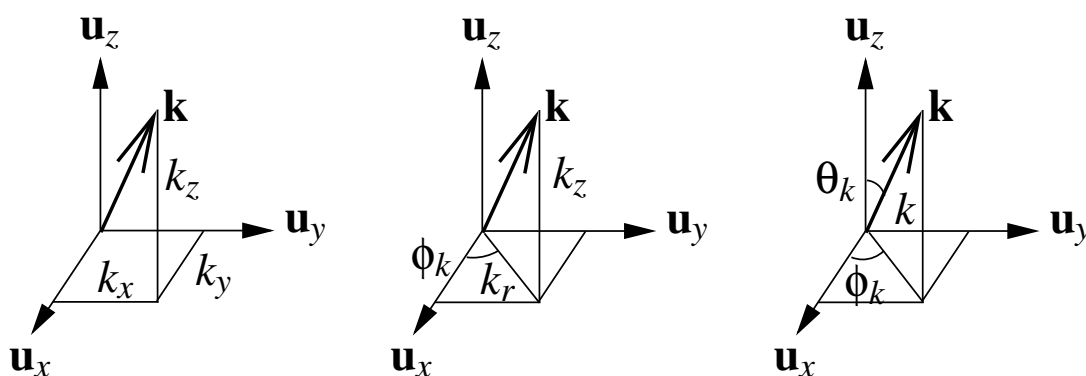


FIG. 1.1 – Principaux systèmes de coordonnées : cartésien à gauche, cylindrique au milieu et sphérique à droite

<sup>2</sup>à la surface  $\mathcal{S}$  délimitant le domaine de résolution  $\mathcal{V}$ .



### Ondes planes

Nous allons rechercher des solutions de l'équation des ondes (1.1), avec un second membre nul, qui soient séparables dans le système de coordonnées cartésien. Nous recherchons donc des solutions de la forme suivante :

$$p(\mathbf{r}, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \quad (1.2)$$

L'introduction de cette forme de solution dans l'équation des ondes conduit au système d'équations différentielles ordinaires suivant [107] :

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 \\ \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \end{cases} \quad (1.3)$$

De plus, la condition suivante, connue sous le nom de *relation de dispersion* doit être respectée :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (1.4)$$

Les solutions de ce système d'équation sont bien connues. Il s'agit des ondes planes  $\Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega}^{\text{op}}$  satisfaisant la relation de dispersion, dont l'expression est donnée par la relation suivante :

$$\Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega}^{\text{op}}(x, y, z, t) = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t)} = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} \quad (1.5)$$

### Harmoniques cylindriques

Nous allons maintenant rechercher des solutions de l'équation des ondes (1.1) homogène qui soient séparables dans le système de coordonnées cylindrique, c'est-à-dire ayant la forme suivante :

$$p(\mathbf{r}, t) = R(r)\Phi(\phi)Z(z)T(t) \quad (1.6)$$

L'introduction de cette forme de solutions conduit au système d'équations différentielles suivant [107] :

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 \\ \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -l^2 \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_r^2 - \frac{l^2}{r^2}\right) R = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Étant donné que la fonction de la variable d'azimut  $\Phi(\phi)$  doit être périodique de période  $2\pi$ , cela impose que  $l$  soit un entier relatif. La dernière équation différentielle de ce système est connue dans la littérature comme l'équation différentielle de Bessel. Ses solutions sont justement les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce  $J_l(k_r r)$  et  $N_l(k_r r)$ . Une différence majeure entre les fonctions de Bessel de première espèce et celles de deuxième espèce est que les premières sont continues à l'origine  $r = 0$ , alors que les deuxièmes possèdent une singularité à l'origine. Les fonctions de Bessel de deuxième espèce sont aussi connues sous le nom de fonctions de Neumann. Lorsque  $l$  est un entier relatif, les fonctions de Bessel  $J_l(k_r r)$  et  $J_{-l}(k_r r)$  ne forment pas un système de solutions indépendantes, c'est pourquoi il est nécessaire de faire intervenir les fonctions de Bessel de deuxième espèce, étant donné que l'équation de Bessel est une équation du second ordre.

Ainsi, la solution de la dernière équation du système est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de première et deuxième espèces. Quant à la solution générale de ce système d'équations, elles sont de deux types, selon l'espèce de fonction de Bessel utilisée :

$$1^{\text{ère}} \text{ espèce : } \Psi_{k_r, l, k_z, \omega}^{\text{hc}}(r, \phi, z, t) = J_l(k_r r) e^{il\phi} e^{i(k_z z + \omega t)} \quad (1.8)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ espèce : } \Upsilon_{k_r, l, k_z, \omega}^{\text{hc}}(r, \phi, z, t) = N_l(k_r r) e^{il\phi} e^{i(k_z z + \omega t)} \quad (1.9)$$

Afin de satisfaire l'équation des ondes, ces harmoniques cylindriques doivent respecter la relation de dispersion qui prend la forme suivante dans le système de coordonnées cylindriques :

$$k_r^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (1.10)$$

### Harmoniques sphériques

Pour finir, nous allons maintenant rechercher des solutions de l'équation des ondes (1.1) homogène qui soient séparables dans le système de coordonnées sphérique, c'est-à-dire ayant la forme suivante :

$$p(\mathbf{r}, t) = R(r)\Phi(\phi)\Theta(\theta)T(t) \quad (1.11)$$

L'introduction de cette forme de solution dans l'équation des ondes conduit, après quelques manipulations, au système d'équations différentielles suivant [107] :

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \\ \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \\ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Dans ces équations, il est nécessaire que  $l$  et  $m$  soient des entiers. Les solutions de la troisième équation sont les fonctions de Legendre associées  $P_l^m(\cos \theta)$ , qui se résument aux polynômes de Legendre lorsque  $m = 0$ . Ces fonctions ont la propriété d'être nulles lorsque  $|m| > l$ . Les solutions de la dernière équation, qui ressemble beaucoup à l'équation de Bessel (à un changement de variable près), sont justement les fonctions de Bessel sphériques de première et deuxième espèce  $j_l(kr)$  et  $n_l(kr)$ . De même que les fonctions de Bessel cylindriques, les fonctions de Bessel sphériques de première espèce sont continues à l'origine alors que celles de deuxième espèce sont discontinues. Les solutions générales de ce système d'équations sont de deux types, selon l'espèce de fonction de Bessel sphérique employée :

$$1^{\text{ère}} \text{ espèce : } \Psi_{k, l, m, \omega}(r, \phi, \theta, t) = j_l(kr) Y_l^m(\phi, \theta) e^{i\omega t} \quad (1.13)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ espèce : } \Upsilon_{k, l, m, \omega}(r, \phi, \theta, t) = n_l(kr) Y_l^m(\phi, \theta) e^{i\omega t} \quad (1.14)$$

Dans cette équation, les fonctions  $Y_l^m(\phi, \theta)$  sont connues sous le nom d'harmoniques sphériques, étant donné qu'elles sont souvent utilisées dans la décomposition d'une fonction sur la sphère. Nous les nommerons par la suite harmoniques sphériques standards alors que nous appellerons harmoniques sphériques les  $\Psi_{k, l, m, \omega}$  de l'équation (1.13). Les harmoniques sphériques standards sont donnés par la relation suivante :

$$Y_l^m(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (1.15)$$

Les fonctions de Bessel sphériques sont reliées aux fonctions de Bessel cylindriques par la relation suivante :

$$j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (1.16)$$

$$n_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} N_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (1.17)$$

Afin de satisfaire l'équation des ondes, il est nécessaire que ces harmoniques sphériques satisfassent la relation de dispersion suivante :

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (1.18)$$

### 1.2.3 Décomposition du champ sonore en impulsions de Dirac multidimensionnelles

La mesure d'un champ sonore au point  $\mathbf{r}_0$ , à l'instant  $t_0$ , peut être modélisée mathématiquement par l'intermédiaire de la distribution de Dirac multidimensionnelle  $\delta_{\mathbf{r}_0, t_0}$ . La notation du produit scalaire est souvent utilisée pour traduire l'effet d'une distribution tempérée sur une fonction appartenant à l'espace dual. La notation physicienne, moins rigoureuse, mais très pratique, permet en quelque sorte d'explicitier ce produit scalaire :

$$p(\mathbf{r}_0, t_0) = \langle p | \delta_{\mathbf{r}_0, t_0} \rangle \quad (1.19)$$

$$= \iiint_{(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^4} p(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0) d^3\mathbf{r} dt \quad (1.20)$$

La distribution de Dirac spatiale prend les formes suivantes selon le système de coordonnées employé :

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (\text{cartésien}) \quad (1.21)$$

$$= \frac{\delta(r - r_0)}{r} \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0) \quad (\text{cylindrique}) \quad (1.22)$$

$$= \frac{\delta(r - r_0)}{r^2} \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) \quad (\text{sphérique}) \quad (1.23)$$

Un ensemble d'harmoniques sera dit complet si une combinaison linéaire de ceux-ci converge vers  $\delta_{\mathbf{r}_0, t_0}$  (il s'agit d'une convergence faible), quel que soit  $(\mathbf{r}_0, t_0)$  appartenant au domaine d'étude.

### 1.2.4 Analyse de champs sonores à l'aide des transformées de Fourier généralisées

Cette section s'intéresse à l'étude de la décomposition d'un champ sonore en ondes planes, en harmoniques cylindriques et en harmoniques sphériques. Les résultats mathématiques qu'elle utilise sont connus depuis plusieurs dizaines d'années pour la plupart. En revanche, la synthèse de ces résultats en une présentation unifiée est originale et, à notre connaissance, nouvelle.

Dans le paragraphe 1.2.2, nous avons trouvé certaines solutions au problème homogène. Dans ce paragraphe, nous allons étendre ces ensembles de solutions afin de traiter le problème inhomogène. Nous verrons que cette stratégie s'inscrit naturellement dans le contexte de l'étude des transformées de Fourier généralisées. En particulier, nous montrerons que la transformée de Fourier multidimensionnelle usuelle est l'outil adapté pour effectuer la décomposition d'un champ sonore en ondes planes (1.5), puis nous verrons que les outils permettant de décomposer le champ

en harmoniques cylindriques (1.8) ou sphériques (1.13) sont des transformées de Fourier généralisées.

Les transformées de Fourier généralisées ont toutes en commun la propriété de permettre la décomposition d'un certain champ<sup>3</sup> en une somme d'harmoniques, qui satisfont les deux propriétés suivantes :

1. cet ensemble de fonctions constitue un ensemble orthogonal pour le pseudo-produit scalaire suivant :

$$\langle f|g \rangle = \iiint_{(\mathbf{r},t) \in \mathbb{R}^4} f(\mathbf{r},t) \bar{g}(\mathbf{r},t) d^3\mathbf{r} dt \quad (1.24)$$

où  $\bar{g}$  désigne conjugué du complexe  $g$ . Il s'agit d'un pseudo-produit scalaire étant donné que l'intégrale n'est définie parfois qu'au sens des distributions (voir section 1.2.3). Les harmoniques sont le plus souvent  $\delta$ -orthogonaux. Dans la suite, nous appellerons la définition (1.24) *produit interne*.

2. cet ensemble d'harmoniques constitue un *ensemble complet*, ce qui signifie que tout champ "bien proportionné"<sup>4</sup> peut être parfaitement reconstruit par la seule connaissance de sa représentation harmonique (voir à ce sujet les remarques qui ont été faites à la section 1.2.3).

### Décomposition en ondes planes

L'ensemble des solutions de l'équation des ondes homogène, séparables dans le système de coordonnées cartésien, est les ondes planes (1.5) satisfaisant la relation de dispersion (1.4). Afin de traiter le problème inhomogène, nous supposons maintenant que la relation de dispersion n'est plus vérifiée, et nous considérons l'ensemble des ondes planes pour tout  $(\mathbf{k}, \omega) \in \mathbb{R}^4$ . Cet ensemble de solutions est orthogonal vis-à-vis du produit interne (1.24). En effet, nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_{k_{x1}, k_{y1}, k_{z1}, \omega_1} | \Psi_{k_{x2}, k_{y2}, k_{z2}, \omega_2} \rangle \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{i(k_{x1}-k_{x2})x} dx \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{i(k_{y1}-k_{y2})y} dy \\ & \int_{z=-\infty}^{+\infty} e^{i(k_{z1}-k_{z2})z} dz \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_1-\omega_2)t} dt \\ &= (2\pi)^4 \delta(k_{x1}-k_{x2}) \delta(k_{y1}-k_{y2}) \delta(k_{z1}-k_{z2}) \delta(\omega_1-\omega_2) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ce résultat est obtenu grâce à l'identité suivante relative à la distribution de Dirac [81] :

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{i(k_1-k_2)x} dx = 2\pi\delta(k_1-k_2) \quad (1.26)$$

De fait, tout champ sonore peut être projeté sur l'ensemble des ondes planes. L'opérateur d'analyse associé à cette projection est la transformée de Fourier multidimensionnelle usuelle, ou *transformée de Fourier cartésienne*, définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{p\}(k_x, k_y, k_z, \omega) &= \langle p | \Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega} \rangle \\ &= \iiint_{(\mathbf{r},t) \in \mathbb{R}^4} p(\mathbf{r},t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)} d^3\mathbf{r} dt \end{aligned} \quad (1.27)$$

<sup>3</sup> finalement, la nature acoustique du champ n'est pas une propriété primordiale pour effectuer la décomposition.

<sup>4</sup> L'étude théorique de la signification de ce terme nécessite une bonne compréhension de la théorie des distributions. En pratique, les physiciens ont souvent la fâcheuse habitude de considérer que les champs étudiés possèdent les bonnes propriétés, et nous ne dérogerons pas à cette règle. Pour les lecteurs intéressés par ce sujet, ils peuvent consulter par exemple les travaux de Smith [90, 91]

De plus, l'ensemble des ondes planes  $(\Psi_{\mathbf{k},\omega}^{\text{op}})$  pour  $(\mathbf{k}, \omega) \in \mathbb{R}^4$  est un ensemble complet, grâce au théorème de Fourier :

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint\limits_{(\mathbf{k}, \omega) \in \mathbb{R}^4} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} \cdot \left[ \iiint\limits_{(\mathbf{r}_1, t_1) \in \mathbb{R}^4} p(\mathbf{r}_1, t_1) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 + \omega t_1)} d^3\mathbf{r}_1 dt_1 \right] d^3\mathbf{k} d\omega \quad (1.28)$$

Le point clé de la démonstration de ce théorème se situe dans l'inversion des deux intégrales. En effet :

$$\int_{k_x=-\infty}^{+\infty} e^{ik_x(x-x_1)} dk_x \int_{k_y=-\infty}^{+\infty} e^{ik_y(y-y_1)} dk_y \int_{k_z=-\infty}^{+\infty} e^{ik_z(z-z_1)} dk_z \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t_1)} d\omega = (2\pi)^4 \delta(x-x_1) \delta(y-y_1) \delta(z-z_1) \delta(\omega-\omega_1) \quad (1.29)$$

L'ensemble le plus grand pour lequel ce théorème est vérifié est celui des distributions tempérées de  $\mathbb{R}^4$ . Tout élément de cet ensemble est "bien proportionné", ce qui corrobore la note 4. Le théorème de Fourier implique que tout champ sonore peut être reconstruit en connaissant uniquement sa représentation dans le domaine de Fourier. L'opérateur de synthèse associée à ce procédé n'est rien d'autre que la transformée de Fourier inverse usuelle :

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint\limits_{\mathbf{r}, t \in \mathbb{R}^4} \mathcal{P}\{p\}(k_x, k_y, k_z, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} d^3\mathbf{k} d\omega \quad (1.30)$$

### Décomposition en harmoniques cylindriques

Les harmoniques cylindriques (1.8) satisfaisant la relation de dispersion (1.10) sont aussi des solutions de l'équation des ondes homogène. De manière analogue au paragraphe précédent, nous supposons maintenant que la relation de dispersion n'est plus vérifiée pour traiter le problème inhomogène, et nous étendons cet ensemble afin de prendre en compte tous les harmoniques cylindriques pour  $[k_r, l, k_z, \omega] \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ . Cet ensemble de fonctions est orthogonal vis-à-vis du produit interne (1.24). En effet, en décrivant le volume élémentaire  $d^3\mathbf{r}$  en coordonnées cylindriques  $d^3\mathbf{r} = r dr d\phi dz$ , le produit interne de deux harmoniques cylindriques est donné par la prochaine équation :

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_{k_{r_1}, l_1, k_{z_1}, \omega_1} | \Psi_{k_{r_2}, l_2, k_{z_2}, \omega_2} \rangle \\ &= \int_{r=0}^{+\infty} J_{l_1}(k_{r_1} r) J_{l_2}(k_{r_2} r) r dr \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i(l_1-l_2)\phi} d\phi \\ & \quad \int_{z=-\infty}^{+\infty} e^{i(k_{z_1}-k_{z_2})z} dz \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_1-\omega_2)t} dt \\ &= (2\pi)^3 \frac{\delta(k_{r_1}-k_{r_2})}{k_{r_1}} \delta_{l_1 l_2} \delta(k_{z_1}-k_{z_2}) \delta(\omega_1-\omega_2) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Le résultat concernant l'intégration sur la variable d'azimut  $\phi$  ne pose pas de problème en utilisant un résultat classique de la théorie des séries de Fourier. Quant à l'intégration selon les variables  $z$  et  $t$ , nous utilisons l'identité (1.26). Pour l'intégration selon la variable radiale  $r$ , le résultat est obtenu grâce à une autre identité impliquant la distribution de Dirac et les fonctions de Bessel de première espèce, appelée parfois *relation de clôture* des fonctions de Bessel [81] :

$$\int_{r=0}^{+\infty} J_l(\alpha r) J_l(\beta r) r dr = \frac{\delta(\alpha-\beta)}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\delta(\alpha-\beta)}{\beta} = \frac{\delta(\alpha-\beta)}{\alpha} \quad (1.32)$$

Tout champ sonore peut être projeté sur l'ensemble des harmoniques cylindriques. L'opérateur d'analyse associé à cette projection est une transformée de Fourier généralisée, à laquelle nous nous référerons par la suite sous le nom de *transformée de Fourier cylindrique*, définie par :

$$\begin{aligned} C\{p\}(k_r, l, k_z, \omega) &= \langle p | \Psi_{k_r, l, k_z, \omega} \rangle \\ &= \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \iint_{(z,t) \in \mathbb{R}^2} p(\mathbf{r}, t) J_l(k_r r) e^{-i(l\phi + k_z z + \omega t)} r \, dr \, d\phi \, dz \, dt \end{aligned} \quad (1.33)$$

Cette transformée de Fourier cylindrique est le produit d'une transformée de Hankel d'ordre  $l$  pour la variable  $r$ , d'une décomposition en séries de Fourier pour la variable d'azimut  $\phi$ , et de deux transformées de Fourier classiques pour les variables  $z$  et  $t$ .

De plus, l'ensemble des harmoniques cylindriques  $\left( \Psi_{k_r, l, k_z, \omega}^{\text{hc}} \right)$  pour  $[k_r, l, k_z, \omega] \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$  est complet, grâce au théorème de Fourier cylindrique :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \iiint_{(k_r, k_z, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2} k_r \, dk_r \, dk_z \, d\omega J_l(k_r r) e^{i(l\phi + k_z z + \omega t)} \\ &\cdot \left[ \int_{r_1=0}^{+\infty} \int_{\phi_1=0}^{2\pi} \int_{z_1=-\infty}^{+\infty} \int_{t_1=-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{r}_1, t_1) J_l(k_r r_1) e^{-i(l\phi_1 + k_z z_1 + \omega t_1)} r_1 \, dr_1 \, d\phi_1 \, dz_1 \, dt_1 \right] \end{aligned} \quad (1.34)$$

Le point clé de la démonstration de ce théorème se situe dans l'inversion des deux intégrales. En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{il(\phi - \phi_1)} \int_{k_r=0}^{+\infty} J_l(k_r r) J_l(k_r r_1) k_r \, dk_r \int_{k_z=-\infty}^{+\infty} e^{ik_z(z - z_1)} dk_z \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - t_1)} d\omega = \\ (2\pi)^3 \delta(\phi - \phi_1) \frac{\delta(r - r_1)}{r_1} \delta(z - z_1) \delta(t - t_1) \end{aligned} \quad (1.35)$$

L'insertion de ce résultat dans l'intégrale sur  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  prouve le théorème de Fourier cylindrique (1.34).

Ce théorème de Fourier généralisé implique que tout champ sonore peut être parfaitement reconstruit uniquement à partir de sa connaissance dans le domaine dual. Cette opération se fait au moyen de l'opérateur de synthèse suivant, qui est la *transformée de Fourier cylindrique inverse* :

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{k_r=0}^{+\infty} \iint_{(k_z, \omega) \in \mathbb{R}^2} C\{p\}(k_r, l, k_z, \omega) J_l(k_r r) e^{i(l\phi + k_z z + \omega t)} k_r \, dk_r \, dk_z \, d\omega \quad (1.36)$$

### Décomposition en harmoniques sphériques

Afin de traiter le problème de l'équation des ondes inhomogène (1.1), l'ensemble des harmoniques sphériques (1.13) pour  $[k, l, m, \omega] \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$  est utilisé au lieu des harmoniques sphériques satisfaisant uniquement la relation de dispersion (1.18). Cet ensemble d'harmoniques constitue un ensemble orthogonal pour le produit interne (1.24). En effet, en décrivant le volume

élémentaire en coordonnées sphériques  $d^3 \mathbf{r} = r^2 dr d\phi \sin \theta d\theta$ , le produit interne de deux harmoniques sphériques est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{k_1, l_1, m_1, \omega_1} | \Psi_{k_2, l_2, m_2, \omega_2} \rangle = & \int_{r=0}^{+\infty} j_{l_1}(k_1 r) j_{l_2}(k_2 r) r^2 dr \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} dt . \\ & \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{l_1}^{m_1}(\phi, \theta) \overline{Y_{l_2}^{m_2}}(\phi, \theta) d\phi \sin \theta d\theta = \\ & \pi^2 \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1 k_2} \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \delta(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons utilisé l'identité relative à la distribution de Dirac (1.26) pour l'intégrale sur la variable temporelle, l'orthogonalité des harmoniques sphériques standards [107] explicitée par l'équation (1.38), et la relation de fermeture des fonctions de Bessel sphériques de première espèce (1.39).

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{l_1}^{m_1}(\phi, \theta) \overline{Y_{l_2}^{m_2}}(\phi, \theta) d\phi \sin \theta d\theta = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (1.38)$$

$$\int_{r=0}^{+\infty} j_l(\alpha r) j_l(\beta r) r^2 dr = \frac{\pi}{2} \frac{\delta(\alpha - \beta)}{\alpha \beta} = \frac{\pi}{2} \frac{\delta(\alpha - \beta)}{\alpha^2} \quad (1.39)$$

Tout champ sonore peut être projeté sur le sous-espace engendré par les harmoniques sphériques. L'opérateur d'analyse associé à cette projection est aussi une transformée de Fourier généralisée, à laquelle nous nous référerons par la suite sous le nom de *transformée de Fourier sphérique*, définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\{p\}(k, l, m, \omega) &= \langle p | \Psi_{k, l, m, \omega} \rangle \\ &= \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{t=-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{r}, t) \\ & \quad j_l(kr) \overline{Y_l^m}(\phi, \theta) e^{-i\omega t} r^2 dr d\phi \sin \theta d\theta dt \end{aligned} \quad (1.40)$$

Cette transformée de Fourier sphérique est le produit d'une transformée de Hankel sphérique d'ordre  $l$  pour la variable radiale  $r$ , d'une décomposition en harmoniques sphériques standards pour l'angle solide (variables  $\phi$  et  $\theta$ ), et d'une transformée de Fourier usuelle pour la variable temporelle  $t$ .

De plus, l'ensemble des harmoniques sphériques  $(\Psi_{k, l, m, \omega})$  pour  $[k, l, m, \omega] \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$  est complet pour l'ensemble des distributions tempérées de  $\mathbb{R}^4$  grâce au théorème de Fourier généralisé suivant :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \iint_{(k, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} k^2 dk d\omega j_l(kr) Y_l^m(\phi, \theta) e^{i\omega t} \\ \left[ \int_{r_1=0}^{+\infty} \int_{\phi_1=0}^{2\pi} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{t_1=-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{r}_1, t_1) j_l(kr_1) \overline{Y_l^m}(\phi_1, \theta_1) e^{-i\omega t_1} r_1^2 dr_1 d\phi_1 \sin \theta_1 d\theta_1 dt_1 \right] \end{aligned} \quad (1.41)$$

Le point clé de la démonstration réside dans l'inversion des deux intégrales-sommes. En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\phi, \theta) \overline{Y_l^m}(\phi_1, \theta_1) \int_{k=0}^{+\infty} j_l(kr) j_l(kr_1) k^2 dk \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t_1)} d\omega \\ = \pi^2 \frac{\delta(r-r_1)}{r_1^2} \delta(\phi-\phi_1) \delta(\cos\theta-\cos\theta_1) \delta(t-t_1) \quad (1.42) \end{aligned}$$

L'insertion du résultat précédent dans l'intégrale portant sur les variables  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  prouve le théorème (1.41).

Ce théorème de Fourier généralisé implique que tout champ sonore peut être parfaitement synthétisé à partir de l'unique connaissance de ses paramètres dans le domaine de Fourier. L'opérateur de synthèse associée est la *transformée de Fourier sphérique inverse* :

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \int_{k=0}^{+\infty} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}\{p\}(k, l, m, \omega) \cdot j_l(kr) Y_l^m(\phi, \theta) e^{i\omega t} k^2 dk d\omega \quad (1.43)$$

## 1.2.5 Équivalence des représentations harmoniques

### Forme théorique

Toutes les représentations harmoniques présentées au paragraphe 1.2.4 sont capables de représenter un même champ quadridimensionnel. En effet, les familles d'harmoniques envisagées jusqu'ici sont complètes dans l'ensemble des distributions tempérées de  $\mathbb{R}^4$ , comme en témoignent les relations de complétude (1.29), (1.35) et (1.42). Si nous connaissons le champ uniquement dans le domaine de Fourier, les opérateurs de synthèse (1.30), (1.36) et (1.43) permettent d'en calculer le profil spatio-temporel.

Bien que toutes les représentations harmoniques présentées précédemment soient équivalentes, certaines représentations sont privilégiées selon les domaines de l'acoustique :

- dans les débuts de l'holographie acoustique en champ proche [64, 101], le champ sonore était décomposé en ondes planes dans un plan de référence afin de permettre l'extrapolation de celui-ci dans un autre plan. L'holographie acoustique en champ proche s'est ensuite généralisée pour englober le cas d'une surface cylindrique ou sphérique, puis des domaines de géométries quelconques [102]. Dans le cas d'une surface cylindrique, l'emploi des harmoniques cylindriques est tout indiqué, et il en est de même pour les harmoniques sphériques dans le cas d'une surface d'analyse sphérique. Pour les domaines de géométries quelconques, la surface délimitant le domaine ne possède pas forcément d'équation dans un système de coordonnées séparables<sup>5</sup>, et le champ sonore est décomposé sur un ensemble de modes propres bien souvent déterminés au moyen de méthodes numériques. La problématique du développement modal du champ sonore sera étudiée à la section 1.3 dont l'objet est l'analyse de champs sonores sur un domaine fini ;
- dans le procédé de codage et de décodage Ambisonics tel qu'introduit initialement par Gerzon [36, 37], l'objectif était uniquement de contrôler le champ sonore ainsi que sa dérivée au premier ordre en un seul point. La solution de ce problème fait intervenir les harmoniques sphériques jusque l'ordre 1, soit 4 composantes. Depuis Gerzon, cette approche a été étendue, prenant en compte les harmoniques d'ordres supérieurs (High Order Ambisonics [27, 28]) afin d'augmenter le réalisme de la reproduction et d'améliorer la finesse de

---

<sup>5</sup>Il n'existe pas que les systèmes de coordonnées cartésien, cylindrique et sphérique. Il y a aussi les systèmes de coordonnées par prolate spheroidal, ellipsoïdiques, etc.



l'analyse. Par rapport à la démarche initiale de Gerzon, ceci revient à vouloir approcher le champ sonore ainsi que ses dérivées successives jusqu'à un certain ordre. De fait, à mesure que l'ordre croît, la zone dans laquelle le développement limité du champ sonore n'introduit pas une erreur trop importante par rapport au champ sonore initial s'agrandit.

Dans la suite de cette partie, nous allons faire le pont entre différentes descriptions harmoniques du champ sonore, en explicitant les opérateurs de changement de base, qui permettent de passer d'une description harmonique à une autre.

### Conversion ondes planes vers harmoniques cylindriques

Dans chacune des conversions que nous expliciterons dans la suite de cette section, la stratégie est identique : nous commençons par utiliser l'opérateur de synthèse associé à la description initiale du champ, afin de calculer le profil spatio-temporel du champ sonore, puis nous appliquons l'opérateur d'analyse associé à la description cible. L'objectif est d'aboutir à une forme directe de l'opérateur de conversion entre deux représentations harmoniques, sans passer par l'intermédiaire du profil spatio-temporel.

Partant de la description harmonique d'un champ sonore en ondes planes  $\mathcal{P}\{p\}(k_x, k_y, k_z, \omega)$ , nous pouvons obtenir sa représentation en harmoniques cylindriques  $\mathcal{C}\{p\}(K_r, L, K_z, \Omega)$  en appliquant l'opérateur d'analyse pour les harmoniques cylindriques (1.33), mais en remplaçant  $p(\mathbf{r}, t)$  par l'équation (1.30). Nous utiliserons les notations suivantes (voir figure 1.1),  $\mathbf{k}_r = k_x \mathbf{u}_x + k_y \mathbf{u}_y$ ,  $k_r = |\mathbf{k}_r|$ ,  $\phi_k = (\mathbf{u}_x, \mathbf{k}_r)$ ,  $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , and  $\phi_r = (\mathbf{u}_x, \mathbf{r})$ . Ceci donne :

$$\mathcal{C}\{p\}(K_r, L, K_z, \Omega) = \iiint_{(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^4} \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \left[ \iiint_{(\mathbf{k}, \omega) \in \mathbb{R}^4} \mathcal{P}\{p\}(k_x, k_y, k_z, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} d^3 \mathbf{k} d\omega \right] J_L(K_r, r) e^{-i(L\phi_r + K_z + \Omega t)} d^3 \mathbf{r} dt$$

L'inversion des deux intégrales conduit à :

$$\mathcal{C}\{p\}(K_r, L, K_z, \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{(\mathbf{k}, \omega) \in \mathbb{R}^4} \mathcal{P}\{p\}(k_x, k_y, k_z, \omega) \langle \Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega}^{\text{op}} | \Psi_{K_r, L, K_z, \Omega}^{\text{hc}} \rangle d^3 \mathbf{k} d\omega \quad (1.44)$$

où les exposants op and hc indiquent s'il s'agit d'ondes planes ou d'harmoniques cylindriques. Le produit interne est maintenant développé en utilisant l'identité de Jacobi-Anger (1.45) :

$$e^{ikr \cos \phi} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i^l J_l(kr) e^{il\phi} \quad (1.45)$$

Cette identité décompose une onde plane en une série infinie faisant intervenir les fonctions de Bessel cylindriques et permet d'aboutir à la relation suivante :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega}^{\text{op}} | \Psi_{K_r, L, K_z, \Omega}^{\text{hc}} \rangle &= \iiint_{(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^4} e^{i(k_r r \cos(\phi_r - \phi_k) + k_z z + \omega t)} J_L(K_r, r) e^{-i(L\phi_r + K_z z + \Omega t)} d^3 \mathbf{r} dt \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i^l \int_{r=0}^{+\infty} J_l(k_r r) J_L(K_r, r) r dr \int_{\phi_r=0}^{2\pi} e^{-il\phi_k} e^{i(l-L)\phi_r} d\phi_r \\ &\quad \cdot \int_{z=-\infty}^{+\infty} e^{i(k_z - K_z)z} dz \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \Omega)t} dt \\ &= (2\pi)^3 i^L e^{-iL\phi_k} \frac{\delta(k_r - K_r)}{k_r} \delta(k_z - K_z) \delta(\omega - \Omega) \end{aligned} \quad (1.46)$$

En insérant l'équation (1.46) dans l'équation (1.44), et en utilisant les variables  $k_r$  et  $\phi_k$  au lieu de  $k_x$  et  $k_y$  pour le modèle utilisant les ondes planes, nous obtenons finalement :

$$C\{p\}(K_r, L, K_z, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_k=0}^{2\pi} i^L \mathcal{P}\{p\}(K_r \cos \phi_k, K_r \sin \phi_k, K_z, \Omega) e^{-iL\phi_k} d\phi_k \quad (1.47)$$

Cette dernière équation permet la conversion directe d'un champ sonore initialement décrit au moyen d'ondes planes en un champ sonore décrit au moyen d'harmoniques cylindriques. Afin d'interpréter cette équation, il suffit de considérer la décomposition en séries de Fourier de la transformée de Fourier  $\mathcal{P}\{p\}(k_x, k_y, k_z, \omega)$  prise sur le cercle défini par l'ensemble d'équations :  $k_x^2 + k_y^2 = K_r^2$ ,  $k_z = K_z$  et  $\omega = \Omega$ . Son  $L^{\text{ème}}$  coefficient est égal à  $C\{p\}(K_r, L, K_z, \Omega)$ , au facteur d'échelle  $i^L$  près.

### Conversion harmoniques cylindriques vers ondes planes

Les mêmes notations que celles du paragraphe précédent s'appliquent toujours dans ce paragraphe. Nous sommes intéressés par la conversion directe d'un champ sonore représenté dans le domaine de Fourier cylindrique  $C\{p\}(k_r, l, k_z, \omega)$  en sa représentation dans le domaine de Fourier usuel  $\mathcal{P}\{p\}(K_x, K_y, K_z, \Omega)$ . En suivant un raisonnement analogue à celui utilisé pour l'obtention de l'opérateur (1.44), nous obtenons le résultat intermédiaire suivant :

$$\mathcal{P}\{p\}(K_x, K_y, K_z, \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{k_r=0}^{+\infty} \iint_{(k_z, \omega) \in \mathbb{R}^2} C\{p\}(k_r, l, k_z, \omega) \langle \Psi_{k_r, l, k_z, \omega}^{\text{hc}} | \Psi_{K_x, K_y, K_z, \Omega}^{\text{op}} \rangle k_r dk_r dk_z d\omega \quad (1.48)$$

En utilisant les notations suivantes,  $\mathbf{K}_r = K_x \mathbf{u}_x + K_y \mathbf{u}_y$ ,  $K_r = |\mathbf{K}_r|$ ,  $\phi_K = (\mathbf{u}_x, \mathbf{K}_r)$ , en actualisant les notations de l'équation (1.46), et en utilisant la propriété supplémentaire de symétrie hermitienne du produit interne  $\langle g | f \rangle = \overline{\langle f | g \rangle}$ , nous obtenons finalement :

$$\mathcal{P}\{p\}(K_x, K_y, K_z, \Omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-i)^l C\{p\}(K_r, l, K_z, \Omega) e^{i l \phi_K} \quad (1.49)$$

Tandis que la conversion de la représentation en ondes planes vers la représentation en harmoniques cylindriques requerrait la décomposition en séries de Fourier de la transformée de Fourier prise sur un cercle au facteur d'échelle  $i^L$  près, la conversion de la représentation en harmoniques cylindriques vers la représentation en ondes planes requière de calculer la série de Fourier associée aux coefficients de la représentation en harmoniques cylindriques  $C\{p\}(K_r, l, K_z, \Omega)$ , toujours au facteur d'échelle  $i^l$  près. Les opérateurs (1.47) et (1.49) sont symétriques au sens de la théorie de Fourier.

### Conversion ondes planes vers harmoniques sphériques

En appliquant la transformée de Fourier sphérique (1.40), mais en remplaçant l'expression de  $p(\mathbf{r}, t)$  par le champ obtenu avec l'opérateur de synthèse cartésien (1.30), un raisonnement analogue à ceux des deux paragraphes précédents mène au résultat intermédiaire suivant :

$$S\{p\}(K, L, M, \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{(\mathbf{k}, \omega) \in \mathbb{R}^4} \mathcal{P}\{p\}(k_x, k_y, k_z, \omega) \cdot \langle \Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega}^{\text{op}} | \Psi_{K, L, M, \Omega}^{\text{hs}} \rangle d^3 \mathbf{k} d\omega \quad (1.50)$$

où l'exposant hs marque les initiales de harmoniques sphériques. Le produit interne est développé en utilisant une identité analogue à celle de Jacobi-Anger, mais impliquant les fonctions de Bessel cylindriques (1.51) :

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) \overline{Y_l^m}(\phi_k, \theta_k) Y_l^m(\phi_r, \theta_r) \quad (1.51)$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega}^{\text{op}} | \Psi_{K, L, M, \Omega}^{\text{hs}} \rangle &= \iiint_{(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^4} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \omega t)} j_L(Kr) \overline{Y_L^M}(\phi_r, \theta_r) e^{-i\Omega t} d^3 \mathbf{r} dt \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l i^l \int_{r=0}^{+\infty} j_l(kr) j_L(Kr) r^2 dr \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \Omega)t} dt \\ &\quad \cdot \int_{\phi_r=0}^{2\pi} \int_{\theta_r=0}^{\pi} \overline{Y_l^m}(\phi_k, \theta_k) Y_l^m(\phi_r, \theta_r) \overline{Y_L^M}(\phi_r, \theta_r) d\phi_r \sin \theta_r d\theta_r \\ &= 4\pi^3 i^L \overline{Y_L^M}(\phi_k, \theta_k) \frac{\delta(k - K)}{k^2} \delta(\omega - \Omega) \delta_{LL} \delta_{mM} \end{aligned} \quad (1.52)$$

où les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{k}$  sont indifféremment écrits en coordonnées cartésiennes  $(k_x, k_y, k_z)$  ou en coordonnées sphériques  $(k, \phi_k, \theta_k)$ . L'insertion de cette dernière équation dans (1.50) donne :

$$S\{p\}(K, L, M, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi_k=0}^{2\pi} \int_{\theta_k=0}^{\pi} \left[ i^L \mathcal{P}\{p\}(K, \phi_k, \theta_k, \Omega) \overline{Y_L^M}(\phi_k, \theta_k) \right] d\phi_k \sin \theta_k d\theta_k \quad (1.53)$$

Afin d'interpréter l'équation précédente, il n'y a qu'à considérer la décomposition en harmoniques sphériques standards de la transformée de Fourier  $\mathcal{P}\{p\}(k_x, k_y, k_z, \omega)$  prise sur la sphère définie par l'ensemble d'équations :  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = K^2$ , et  $\omega = \Omega$ . Le coefficient relatif à cette décomposition indicé doublement par  $L$  and  $M$  est égal à  $S\{p\}(K, L, M, \Omega)$  au facteur d'échelle  $i^L$  près.

### Conversion harmoniques sphériques vers ondes planes

Nous sommes intéressés par la conversion directe d'une description du champ sonore en harmoniques sphériques  $S\{p\}(k, l, m, \omega)$  en une description au moyen d'ondes planes  $\mathcal{P}\{p\}(K_x, K_y, K_z, \Omega)$ . En suivant un raisonnement analogue que celui qui a conduit au résultat intermédiaire (1.44), nous obtenons le résultat suivant :

$$\mathcal{P}\{p\}(K_x, K_y, K_z, \Omega) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \int_{k=0}^{+\infty} \int_{\omega \in \mathbb{R}} S\{p\}(k, l, m, \omega) \cdot \langle \Psi_{k, l, m, \omega}^{\text{hs}} | \Psi_{K_x, K_y, K_z, \Omega}^{\text{op}} \rangle k^2 dk d\omega \quad (1.54)$$

En utilisant indifféremment les coordonnées cartésiennes  $(K_x, K_y, K_z)$  ou les coordonnées sphériques  $(K, \Phi_K, \theta_K)$  pour repérer le vecteur  $\mathbf{K}$ , en mettant à jour les notations de l'équation (1.52), et en utilisant la propriété de symétrie hermitienne  $\langle g|f \rangle = \langle f|g \rangle$ , ceci nous conduit à :

$$\mathcal{P}\{p\}(K_x, K_y, K_z, \Omega) = 4\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l (-i)^l \mathcal{S}\{p\}(K, l, m, \Omega) Y_l^m(\Phi_K, \theta_K) \quad (1.55)$$

Tandis que la conversion des ondes planes vers les harmoniques sphériques requérait la décomposition en harmoniques sphériques de la transformée de Fourier prise sur une sphère au facteur d'échelle  $i^L$ , la conversion des harmoniques sphériques vers les ondes planes requière le calcul de la série d'harmoniques sphériques associés aux coefficients  $\mathcal{S}\{p\}(K, l, m, \Omega)$ , au symétrique du même facteur d'échelle près  $i^l$ . Les opérateurs (1.53) et (1.55) sont parfaitement symétriques au sens de la théorie de Fourier.

Un exemple de mise en œuvre expérimentale de cette stratégie est fourni par Park et Rafaely [76], qui utilise une antenne de microphones sphérique, dont l'outil associé est la décomposition en harmoniques sphériques standards. Les coefficients du développement en harmoniques sphériques sont obtenus dans un premier temps, en supposant que les champs sonores satisfont la relation de dispersion. Puis la décomposition en harmoniques sphériques est convertie en une décomposition en ondes planes grâce à l'opérateur précédent. Nous proposerons des algorithmes d'estimation de la décomposition en ondes planes du champ sonore au chapitre 5.

### Conversion harmoniques cylindriques vers harmoniques sphériques et réciproque

Une présentation du lien entre les harmoniques sphériques et les harmoniques cylindriques a été effectuée par Duffy [31]. Nous choisissons de ne pas approfondir la conversion d'une représentation en harmoniques cylindriques en une représentation en harmoniques sphériques et la conversion réciproque pour les raisons suivantes :

- généralement, la représentation des champs sonores en harmoniques cylindriques n'est utilisée que pour le cas bidimensionnel. Les harmoniques cylindriques constituent alors un sous-ensemble des harmoniques sphériques standards : il s'agit de celui dont les harmoniques sphériques sont indépendants de la colatitude  $\theta$  ;
- les calculs sous-jacents sont assez longs et compliqués.

## 1.3 Analyse de champs sonores sur un domaine fini

Tandis que l'analyse de champs sonores sur un domaine infini utilisait un ensemble indénombrable d'harmoniques, l'analyse sur un domaine fini ne mobilise qu'un ensemble infini mais dénombrable d'harmoniques pour représenter le champ. En d'autres termes, les outils d'analyse sur un domaine fini de l'espace seront les séries de Fourier généralisées au lieu des transformées de Fourier généralisées pour un domaine infini de l'espace. Les harmoniques utilisés pour ces décompositions constituent des sous-ensembles des harmoniques utilisés dans la section 1.2. Ces harmoniques sont aussi appelés parfois "modes propres". Beaucoup de méthodes liées à l'analyse ou la synthèse de champs sonores abordent le problème sous cet angle : citons par exemple pour l'analyse l'holographie acoustique en champ proche [53, 54, 64, 101, 102, 107, 109] et la méthode intitulée *Helmholtz Equation Least-Squares* (HELs) [85, 104, 108, 110, 111], ou pour la synthèse les méthodes de contrôles du champ sonore par moindres carrés, telles que l'égalisation multicanale généralisé [69] ou le contrôle modal du champ sonore [12].

Le développement du champ sonore sur une série de modes tient son origine dans le théorème d'échantillonnage de Shannon pour les signaux à bande limitée. En effet, ces signaux sont à sup-

port de Fourier borné, et il suffit pour les représenter de ne connaître leur valeur qu'en certains points particuliers pour les reconstruire de manière exacte partout ailleurs. Nous étudions la situation duale dans cette section, étant donné que les signaux sont à support borné dans le domaine spatio-temporel : il est donc possible de caractériser complètement leur représentation dans le domaine de Fourier (domaine des vecteurs d'onde et pulsations) en ne connaissant leur représentation harmonique que sur un sous-ensemble des harmoniques initialement utilisés dans le cas des domaines infinis. Le gain de cette opération est le suivant : dans les deux cas, les espaces nécessaires à la représentation des signaux sont de dimension infinie, mais la répartition des harmoniques est continue dans le cas du domaine infini, alors qu'elle est discrète dans le cas des domaines finis. Concrètement, nous n'utilisons plus que des séries pour décrire le champ sonore, et non plus des intégrales.

Dans cette section, nous introduisons donc les séries de Fourier généralisées afin de décrire le champ sonore dans un parallélépipède, dans un cylindre et dans une boule<sup>6</sup>, et nous donnons quelques pistes pour calculer la décomposition modale dans des cas particuliers.

Quelle que soit la géométrie de ce domaine fini, la stratégie demeure la même. Nous définissons tout d'abord le produit scalaire relatif au domaine fini  $\mathcal{V} \times \mathcal{T}$ , où  $\mathcal{V}$  désigne le domaine spatial et  $\mathcal{T}$  l'intervalle d'observation :

$$\langle f || g \rangle = \frac{1}{\mathcal{V}\mathcal{T}} \iiint_{(\mathbf{r},t) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T}} f(\mathbf{r},t) \bar{g}(\mathbf{r},t) d^3\mathbf{r} dt \quad (1.56)$$

Cette notation est différente de celle introduite dans le cas des domaines infinis, afin de bien dissocier ces deux situations. Nous recherchons ensuite un ensemble  $(\Psi_{k,l,m,n})$  pour  $(k,l,m,n) \in \mathbb{Z}^4$  qui soit orthogonal pour le produit scalaire précédemment défini (1.56). Nous sommes alors capables de projeter tout champ sonore analysé sur ce domaine fini en calculant les produits scalaires  $\langle p || \Psi_{l,m,n,q} \rangle$  : il s'agit de la décomposition en séries de Fourier généralisées. Et réciproquement, nous savons que la série de Fourier suivante converge vers le champ sonore initial  $p(\mathbf{r},t)$  au sens des moindres carrés tant que la propriété suivante est vérifiée quel que soit le couple  $(\mathbf{r},t) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T}$  :

$$\sum_{(l,m,n,q) \in \mathbb{Z}^4} \alpha_{lmnq} \Psi_{l,m,n,q}(\mathbf{r},t) = p(\mathbf{r},t) \quad , \forall (\mathbf{r},t) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T} \quad (1.57)$$

En dehors de ce domaine, nous ne pouvons rien affirmer sur la convergence de cette série.

Afin de faire le lien avec la section sur l'analyse de champs sonores sur un domaine infini 1.2, nous pouvons remarquer que les deux produits internes (1.24) et (1.56) sont liés par la relation suivante :

$$\langle f || g \rangle = \frac{1}{\mathcal{V}\mathcal{T}} \langle \Pi_{\mathcal{V},\mathcal{T}} f || g \rangle = \frac{1}{\mathcal{V}\mathcal{T}} \langle f || \Pi_{\mathcal{V},\mathcal{T}} g \rangle \quad (1.58)$$

où  $\Pi_{\mathcal{V},\mathcal{T}}(\mathbf{r},t)$  est la fonction caractéristique du domaine  $\mathcal{V} \times \mathcal{T}$ , qui vaut 1 à l'intérieur du domaine, et 0 sinon. Cette relation peut faciliter la tâche dans le calcul de la décomposition modale, comme nous le montrerons par la suite.

### 1.3.1 Cas du parallélépipède

#### Décomposition modale

Nous supposons dans ce paragraphe que le champ sonore est uniquement observé sur un parallélépipède de taille  $L_x, L_y$  et  $L_z$  respectivement associées aux dimensions  $x, y$  et  $z$ , centré autour

---

<sup>6</sup>Tout autre domaine défini dans un système d'équations séparables est envisageable, telle que l'ellipse par exemple, etc.

de l'origine, et qu'il est observé sur l'intervalle  $[0; T]$  où  $T$  indique la durée d'observation.

Le produit interne relatif à ce domaine est :

$$\langle f || g \rangle = \frac{1}{L_x L_y L_z T} \int_{x=-\frac{L_x}{2}}^{+\frac{L_x}{2}} \int_{y=-\frac{L_y}{2}}^{+\frac{L_y}{2}} \int_{z=-\frac{L_z}{2}}^{+\frac{L_z}{2}} \int_{t=0}^T f(\mathbf{r}, t) \overline{g}(\mathbf{r}, t) dx dy dz dt \quad (1.59)$$

Nous pouvons vérifier que l'ensemble d'harmoniques  $(\Psi_{l,m,n,q})$  pour  $(l, m, n, q) \in \mathbb{Z}^4$  défini par l'équation suivante est orthogonal pour le produit interne (1.59) :

$$\Psi_{l,m,n,q}(x, y, z, t) = e^{i\frac{2\pi l}{L_x}x} e^{i\frac{2\pi m}{L_y}y} e^{i\frac{2\pi n}{L_z}z} e^{i\frac{2\pi q}{T}t} \quad (1.60)$$

Cet ensemble d'harmoniques est bien un sous-ensemble des ondes planes  $\Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega}^{\text{op}}$ . Seuls les vecteurs d'ondes  $k_{x_l} = \frac{2\pi l}{L_x}$ ,  $k_{y_m} = \frac{2\pi m}{L_y}$ ,  $k_{z_n} = \frac{2\pi n}{L_z}$  et  $\omega_q = \frac{2\pi q}{T}$  sont sollicités dans ce développement en série. Il s'agit bien d'une répartition discrète d'harmoniques, ou "modes propres", contrairement au cas du domaine infini.

Tout champ sonore peut être projeté sur cet ensemble d'harmoniques  $(\Psi_{l,m,n,q})$ . Les coefficients associés à cette décomposition sont les suivants :

$$\begin{aligned} \alpha_{lmnq} &= \langle p || \Psi_{l,m,n,q} \rangle \\ &= \frac{1}{L_x L_y L_z T} \int_{x=-\frac{L_x}{2}}^{+\frac{L_x}{2}} \int_{y=-\frac{L_y}{2}}^{+\frac{L_y}{2}} \int_{z=-\frac{L_z}{2}}^{+\frac{L_z}{2}} \int_{t=0}^T p(\mathbf{r}, t) e^{-i\frac{2\pi l}{L_x}x} e^{-i\frac{2\pi m}{L_y}y} e^{-i\frac{2\pi n}{L_z}z} e^{-i\frac{2\pi q}{T}t} dx dy dz dt \end{aligned} \quad (1.61)$$

Si nous interprétons cette intégrale selon la variable  $x$ , les autres variables étant fixées, nous reconnaissons la formule du  $l^{\text{ième}}$  coefficient du développement en série de Fourier de  $p(x, y_0, z_0, t_0)$  :

$$\frac{1}{L_x} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{+\frac{L_x}{2}} p(x, y_0, z_0, t_0) e^{-\frac{2\pi l}{L_x}x} dx$$

Ainsi, l'opérateur d'analyse associé au parallélépipède est juste une décomposition en série de Fourier du champ sonore pour chacune des quatre dimensions  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$ . Dans le cas du domaine cartésien infini, il s'agissait de la transformée de Fourier cartésienne.

De plus, l'ensemble d'harmoniques  $(\Psi_{l,m,n,q})$  pour  $(l, m, n, q) \in \mathbb{Z}^4$  est complet dans  $\mathcal{V} \times \mathcal{T}$ , c'est-à-dire le parallélépipède, comme en témoigne le théorème sur les séries de Fourier :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T},$$

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) &= \sum_{l,m,n,q \in \mathbb{Z}^4} e^{i\left(\frac{2\pi l}{L_x}x + \frac{2\pi m}{L_y}y + \frac{2\pi n}{L_z}z + \frac{2\pi q}{T}t\right)} \cdot \frac{1}{L_x L_y L_z T} \\ &\cdot \int_{x_1=-\frac{L_x}{2}}^{+\frac{L_x}{2}} \int_{y_1=-\frac{L_y}{2}}^{+\frac{L_y}{2}} \int_{z_1=-\frac{L_z}{2}}^{+\frac{L_z}{2}} \int_{t_1=0}^T p(\mathbf{r}_1, t_1) e^{-i\frac{2\pi l}{L_x}x_1} e^{-i\frac{2\pi m}{L_y}y_1} e^{-i\frac{2\pi n}{L_z}z_1} e^{-i\frac{2\pi q}{T}t_1} dx_1 dy_1 dz_1 dt_1 \end{aligned} \quad (1.62)$$

Le point clé de la démonstration de ce théorème réside dans l'inversion de la quadruple somme avec la quadruple intégrale. Une telle opération donne la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_x} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi l}{L_x}(x-x_1)} \frac{1}{L_y} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi m}{L_y}(y-y_1)} \frac{1}{L_z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi n}{L_z}(z-z_1)} \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi q}{T}(t-t_1)} = \\ \delta(x-x_1) \delta(y-y_1) \delta(z-z_1) \delta(t-t_1) \end{aligned} \quad (1.63)$$

L'intégration selon  $(\mathbf{r}_1, t_1) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T}$  dans (1.62) donne alors le résultat souhaité.

Le théorème sur les séries de Fourier (1.62) implique que tout champ sonore peut être correctement synthétisé à l'intérieur du parallélépipède par la connaissance unique des coefficients de sa décomposition modale. L'opérateur de synthèse associé est le développement en série de Fourier :

$$p(x, y, z, t) = \sum_{l, m, n, q \in \mathbb{Z}^4} \alpha_{lmnq} e^{i\left(\frac{2\pi l}{L_x}x + \frac{2\pi m}{L_y}y + \frac{2\pi n}{L_z}z + \frac{2\pi q}{T}t\right)} \quad (1.64)$$

Il est intéressant de regarder le comportement de ce développement en série de Fourier en dehors du parallélépipède : celui-ci est périodique de période  $L_x$  selon la variable  $x$ ,  $L_y$  selon la variable  $y$ ,  $L_z$  selon la variable  $z$  et  $T$  selon la variable  $t$ . Ainsi, nous ne pouvons rien dire du comportement initial du champ de référence en dehors de ce parallélépipède.

### Exemple d'analyse

Nous allons étudier le cas d'ondes planes, satisfaisant la relation de dispersion (1.4), mais observées uniquement sur le parallélépipède. Soit  $\Psi_{k_{0x}, k_{0y}, k_{0z}, \omega_0}$ , l'onde plane analysée. Le coefficient associé à chaque harmonique vaut :

$$\begin{aligned} \alpha_{lmnq} &= \langle \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{op}} || \Psi_{l, m, n, q} \rangle \\ &= \text{sinc}\left(\frac{(k_{xl} - k_{0x})L_x}{2\pi}\right) \text{sinc}\left(\frac{(k_{ym} - k_{0y})L_y}{2\pi}\right) \\ &\quad \cdot \text{sinc}\left(\frac{(k_{zn} - k_{0z})L_z}{2\pi}\right) e^{-i(\omega_q - \omega_0)\frac{T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{(\omega_q - \omega_0)T}{2\pi}\right) \end{aligned} \quad (1.65)$$

Afin d'analyser ce résultat, nous allons utiliser la propriété (1.58). Le produit interne de l'équation précédente est égal à la transformée de Fourier du champ initial tronqué, évalué pour le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{lmn}$  et la pulsation  $\omega_q$ . Or, le champ tronqué est le produit du champ initial non tronqué par la fonction caractéristique du domaine  $\Pi_{\mathcal{V}, \mathcal{T}}$ . Sa transformée de Fourier est donc le produit de convolution entre la transformée de Fourier de l'onde plane initiale, qui vaut  $(2\pi)^4 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \delta(\omega - \omega_0)$ , et la transformée de Fourier de la fonction caractéristique, qui est :

$$\Pi_{\mathcal{V}, \mathcal{T}}(\mathbf{k}, \omega) = L_x L_y L_z T \text{sinc}\left(\frac{k_x L_x}{2\pi}\right) \text{sinc}\left(\frac{k_y L_y}{2\pi}\right) \text{sinc}\left(\frac{k_z L_z}{2\pi}\right) e^{-i\omega \frac{T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

La convolution par une distribution de Dirac se traduit par une translation, et nous retrouvons le résultat précédent (1.65), à savoir  $\alpha_{lmnq} = \frac{1}{q\mathcal{V}T} \Pi_{\mathcal{V}, \mathcal{T}}(\mathbf{k}_{lmn} - \mathbf{k}_0, \omega_q - \omega_0)$ .

A une pulsation  $\omega_0$  donnée, l'ensemble des vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}_0$  satisfaisant la relation de dispersion (1.4) se situe sur la sphère de rayon  $k = \omega_0/c$ . Or, les modes propres du parallélépipède forment un maillage discret de l'espace des vecteurs d'ondes et des pulsations. Ainsi, la décomposition en "modes propres" d'une onde plane tronquée  $\Psi_{k_{0x}, k_{0y}, k_{0z}, \omega_0}$  mobilise des modes qui ne satisfont pas obligatoirement la relation de dispersion. Toutefois, en faisant une approximation grossière, nous pouvons dire que les modes ayant la plus forte amplitude se situent dans le lobe principal du sinus cardinal. Cela fixe la résolution accessible par l'analyse, qui est égale à la moitié de la largeur du lobe principal, soit  $\frac{2\pi}{L_x}$ ,  $\frac{2\pi}{L_y}$ ,  $\frac{2\pi}{L_z}$  et  $\frac{2\pi}{T}$  pour les dimensions respectives  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$ .

Le niveau des lobes secondaires de la fonction sinus cardinal est assez élevé (13 dB en dessous du niveau du lobe principal) et il est bien connu dans le domaine de l'analyse harmonique que la fenêtre rectangulaire n'est pas une bonne fenêtre d'analyse. Pour diminuer fortement l'amplitude des "modes propres" éloignés de cette sphère, il est nécessaire d'atténuer les discontinuités

du champ sonore. Celles-ci se situent principalement au niveau des frontières, étant donné que nous développons en réalité le prolongement périodique du champ sonore visualisé sur le parallélépipède. En effet, il s'agit d'un résultat bien connu : un plus grand nombre d'harmoniques est nécessaire pour modéliser des discontinuités<sup>7</sup>.

Il est donc judicieux de recourir à de meilleures fenêtres d'analyse, telles que la celle de Kaiser-Bessel, ou mieux encore, celle basée sur les fonctions d'ondes sphéroïdales allongées (*prolate spheroidal wave functions*). Nous ne faisons plus alors l'analyse du champ sonore  $\Pi_{\mathcal{V},\mathcal{T}}P$  qui coïncide avec le champ réel sur le parallélépipède, mais celle du champ sonore fenêtré  $W_{\mathcal{V},\mathcal{T}}P$ , où  $W_{\mathcal{V},\mathcal{T}}$  est une fenêtre d'analyse qui améliore l'analyse harmonique.

Ce genre de manipulations n'est pas sans rappeler la transformée de Gabor, qui est une analyse localisée en temps-fréquence. Dans notre cas, nous ferions une analyse localisée dans le plan de l'espace/vecteurs d'onde et temps/pulsations. Pour étendre encore l'analogie avec la transformée de Gabor, nous pouvons voir le problème sous un autre angle, mais identique au précédent : ce n'est pas le champ initial qui est fenêtré, mais le mode propre en question  $\Psi_{l,m,n,q}$ . Mais dans ce cas, la famille de modes propres fenêtrés ( $W_{\mathcal{V},\mathcal{T}}\Psi_{l,m,n,q}$ ) pour  $(l,m,n,q) \in \mathbb{Z}^4$  ne constitue plus une famille orthogonale pour le produit interne (1.59). Si nous voulions que ce soit le cas, il faudrait alors plutôt se tourner vers des transformations en ondelettes, qui utilisent des atomes élémentaires orthogonaux entre eux, et dont on peut optimiser la localisation dans le plan temps-fréquence.

Notre propos n'étant concentré que sur l'analyse, et non pas sur la synthèse associée à ces transformations, nous mettons ce problème de côté. De toute façon, dans la pratique, nous disposons rarement de la connaissance suffisante pour pouvoir envisager une reconstruction exacte du champ sonore. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 3 dédié à l'analyse de champs sonores à partir de mesures discrètes.

## 1.3.2 Cas du cylindre

### Décomposition modale

Nous supposons dans ce paragraphe que le champ sonore est uniquement observé sur un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $L_z$ , et observé pendant une durée  $T$  sur l'intervalle  $[0; T]$ . Le produit interne relatif à ce domaine est :

$$\langle f || g \rangle = \frac{1}{\pi R^2 L_z T} \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{L_z}{2}}^{+\frac{L_z}{2}} \int_{t=0}^T f(\mathbf{r}, t) \bar{g}(\mathbf{r}, t) r dr d\phi dz dt \quad (1.66)$$

L'objectif est de trouver un sous-ensemble d'harmoniques cylindriques ( $\Psi_{k_r, l, k_z, \omega}$ ) qui soient orthogonaux entre eux pour le produit interne défini ci-dessus. De manière analogue à la section 1.2.4, nous allons expliciter le produit interne de deux harmoniques cylindriques, en utilisant (1.66) :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{k_{r_1}, l_1, k_{z_1}, \omega_1} || \Psi_{k_{r_2}, l_2, k_{z_2}, \omega_2} \rangle &= \frac{1}{\pi R^2 L_z T} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i(l_1 - l_2)\phi} d\phi \int_{r=0}^R J_{l_1}(k_{r_1} r) J_{l_2}(k_{r_2} r) r dr \\ &\quad \cdot \int_{z=-\frac{L_z}{2}}^{+\frac{L_z}{2}} e^{i(k_{z_1} - k_{z_2})z} dz \int_{t=0}^T e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} dt \end{aligned} \quad (1.67)$$

---

<sup>7</sup>cf. développement en séries de Fourier d'une fonction créneau, qui est continue par morceau et pour laquelle l'amplitude des coefficients décroît en  $1/n$ , et de la fonction triangulaire, dont la dérivée est continue par morceau, et pour laquelle l'amplitude des coefficients décroît en  $1/n^2$



Lorsque  $l_1 = l_2$ , l'intégrale portant sur la variable  $r$  est un résultat connu : il s'agit de l'intégrale de Lommel [1], qui vaut :

$$\int_{r=0}^R J_l(k_1 r) J_l(k_2 r) r dr = \begin{cases} \frac{R}{k_1^2 - k_2^2} [k_2 J_{l-1}(k_2 R) J_l(k_1 R) - k_1 J_{l-1}(k_1 R) J_l(k_2 R)] & \text{si } k_1 \neq k_2 \\ \frac{R^2}{2} [J_l(k_1 R)]^2 - J_{l-1}(k_1 R) J_{l+1}(k_1 R) & \text{si } k_1 = k_2 \end{cases} \quad (1.68)$$

Si nous choisissons pour  $k_r$ , à  $l$  fixé, les racines de l'équation  $J_l(k_r R) = 0$ , et si nous utilisons la propriété que pour lesdites solutions  $J_{l-1}(k_r R) = -J_{l+1}(k_r R)$ , alors l'intégrale ci-dessus se résume à :

$$\int_{r=0}^R J_l(k_{lm_1} r) J_l(k_{lm_2} r) r dr = \begin{cases} 0 & \text{si } k_{lm_1} \neq k_{lm_2} \\ \frac{R^2}{2} [J_{l+1}(k_{lm_1} R)]^2 & \text{si } k_{lm_1} = k_{lm_2} \end{cases} \quad (1.69)$$

où  $k_{lm}$  est la  $m^{\text{ième}}$  racine de l'équation  $J_l(k_r R) = 0$ .

Finalement, nous considérons le sous-ensemble de la famille des harmoniques cylindriques  $(\Psi_{l,m,n,q})$  pour  $(l, m, n, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}^2$  suivant :

$$\Psi_{l,m,n,q}(r, \phi, z, t) = J_l(k_{lm} r) e^{i l \phi} e^{i \frac{2\pi n}{L_z} z} e^{i \frac{2\pi q}{T} t} \quad (1.70)$$

Nous vérifions que la répartition des modes propres cylindriques (1.70) est bien discrète. Nous pouvons aussi vérifier que ce sous-ensemble est orthogonal pour le produit scalaire (1.66) :

$$\langle \Psi_{l_1, m_1, n_1, q_1} | \Psi_{l_2, m_2, n_2, q_2} \rangle = [J_{l+1}(k_{l_1 m_1} R)]^2 \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{n_1 n_2} \delta_{q_1 q_2} \quad (1.71)$$

Tout champ sonore observé sur le cylindre peut être projeté sur ce sous-ensemble d'harmoniques cylindriques. Les coefficients associés à cette décomposition sont les suivants :

$$\begin{aligned} \alpha_{lmnq} &= \langle p | \Psi_{l,m,n,q} \rangle \\ &= \frac{1}{\pi R^2 L_z T} \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{L_z}{2}}^{+\frac{L_z}{2}} \int_{t=0}^T p(\mathbf{r}, t) J_l(k_{lm} r) e^{-i l \phi} e^{-i \frac{2\pi n}{L_z} z} e^{-i \frac{2\pi q}{T} t} r dr d\phi dz dt \end{aligned} \quad (1.72)$$

Cet opérateur d'analyse sur le cylindre permet de calculer les coefficients de la décomposition modale. Il est constitué d'une décomposition en séries de Fourier usuelles pour les variables  $\phi$ ,  $z$  et  $t$ , et d'une décomposition en séries de Fourier-Bessel d'ordre  $l$  pour la variable  $r$ . Dans le cas du domaine cylindrique infini, il s'agissait du produit entre une décomposition en série de Fourier pour la variable  $\phi$ , deux transformées de Fourier usuelles pour les variables  $z$  et  $t$ , et une transformée de Hankel d'ordre  $l$  pour la variable  $r$ . Lorsque le domaine est fini, nous passons de transformées de Fourier généralisées à des séries de Fourier généralisées.

De plus, comme chacune de ces séries de Fourier prises indépendamment possède son théorème de convergence, nous pouvons dire que l'ensemble d'harmoniques cylindriques  $(\Psi_{l,m,n,q})$  pour  $(l, m, n, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}^2$  est complet dans  $\mathcal{V} \times \mathcal{T}$ . Ce théorème de convergence des séries de Fourier est le suivant :

$\forall (r, \phi, z, t) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T}$ ,

$$p(r, \phi, z, t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{J_l(k_{lm}r)}{[J_{l+1}(k_{lm}R)]^2} e^{i\left(l\phi + \frac{2\pi n}{L_z}z + \frac{2\pi q}{T}t\right)} \cdot \frac{1}{\pi R^2 L_z T} \cdot \int_{r_1=0}^R \int_{\phi_1=0}^{+2\pi} \int_{z_1=-\frac{L_z}{2}}^{+\frac{L_z}{2}} \int_{t_1=0}^T p(\mathbf{r}_1, t_1) J_l(k_{lm}r_1) e^{-il\phi_1} e^{-i\frac{2\pi n}{L_z}z_1} e^{-i\frac{2\pi q}{T}t_1} r_1 dr_1 d\phi_1 dz_1 dt_1 \quad (1.73)$$

Le point clé de la démonstration de ce théorème réside dans l'inversion de la quadruple somme avec la quadruple intégrale. Une telle opération donne la relation suivante :

$$\frac{1}{\pi R^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[ e^{il(\phi - \phi_1)} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{J_l(k_{lm}r) J_l(k_{lm}r_1)}{[J_{l+1}(k_{lm}R)]^2} \right] \frac{1}{L_z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi n}{L_z}(z - z_1)} \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi q}{T}(t - t_1)} = \frac{\delta(r - r_1)}{r} \delta(\phi - \phi_1) \delta(z - z_1) \delta(t - t_1) \quad (1.74)$$

L'intégration selon  $(\mathbf{r}_1, t_1) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T}$  dans (1.73) donne alors le résultat souhaité.

Le théorème sur les séries de Fourier (1.73) implique que tout champ sonore peut être correctement synthétisé à l'intérieur du cylindre par la connaissance unique des coefficients de sa décomposition modale. L'opérateur de synthèse associé est le développement en séries de Fourier généralisées suivant :

$$p(x, y, z, t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{lmnq}}{[J_{l+1}(k_{lm}R)]^2} J_l(k_{lm}r) e^{i\left(l\phi + \frac{2\pi n}{L_z}z + \frac{2\pi q}{T}t\right)} \quad (1.75)$$

### Exemple d'analyse

Nous allons étudier le cas d'harmoniques cylindriques, satisfaisant la relation de dispersion (1.10), mais observés uniquement sur le cylindre. Soit  $\Psi_{k_{0r}, l_0, k_{0z}, \omega_0}^{\text{hc}}$ , l'harmonique cylindrique analysé. Le coefficient associé à chaque harmonique vaut :

$$\begin{aligned} \alpha_{lmnq} &= \langle \Psi_{k_{0r}, l_0, k_{0z}, \omega_0}^{\text{hc}} | | \Psi_{l, m, n, q} \rangle \\ &= \text{sinc} \left( \frac{(k_{zn} - k_{0z}) L_z}{2\pi} \right) e^{-i(\omega_q - \omega_0) \frac{T}{2}} \text{sinc} \left( \frac{(\omega_q - \omega_0) T}{2\pi} \right) \delta_{l_0 l} \\ &\quad \cdot \frac{2}{R^2} \begin{cases} \frac{R}{k_{lm}^2 - k_{0r}^2} [k_{lm} J_{l+1}(k_{lm}R) J_l(k_{0r}R)] & \text{si } k_{0r} \neq k_{lm} \\ \frac{R^2}{2} [J_{l+1}(k_{lm}R)]^2 & \text{si } k_{0r} = k_{lm} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Dans le paragraphe précédent traitant de l'étude d'un champ sonore dans un parallélépipède, nous avons pris comme exemple d'analyse des ondes planes respectant la relation de dispersion. Nous avons interprété la décomposition modale comme l'évaluation de la transformée de Fourier du champ sonore tronqué au parallélépipède pour le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{lmn}$  et la pulsation  $\omega_q$ . Et nous avons pu dissocier l'influence de la fenêtre d'analyse  $W_{\mathcal{V}, \mathcal{T}}$  de celle du champ sonore grâce à la propriété de convolution de la transformée de Fourier multidimensionnelle. La conclusion

de ce développement fut que chaque onde plane était déformée de la même manière, et que ceci dépendait uniquement du profil de la fenêtre d'analyse.

Revenons maintenant au cas du cylindre. Il n'y a pas de propriété de convolution simple pour la transformée de Hankel d'ordre  $l$ , étant donné qu'il n'y pas de "propriété d'addition" simple des fonctions de Bessel, analogue à la relation  $e^{ik_1x} \cdot e^{ik_2x} = e^{i(k_1+k_2)x}$  pour les exponentielles. L'absence de cette propriété d'addition empêche de prédire la transformée de Hankel d'ordre  $l$  du produit de deux fonctions, même lorsque nous connaissons chacune des transformées de Hankel prises séparément. Ceci nous prive d'un moyen de calcul communément utilisé avec la transformée de Fourier. De plus, même si le calcul du produit de convolution n'est pas toujours évident, la connaissance de chacune des transformées de Fourier prises indépendamment nous donne déjà un bon *a priori* sur la forme de la transformée de Fourier finale, grâce à l'intuition développée par le traiteur de signaux sur les effets de la convolution. Ces propriétés sont beaucoup plus camouflées dans la transformée de Hankel.

Ceci a une grave conséquence dans la pratique. En effet, la transformée de Hankel d'ordre  $l$  de  $J_l(k_{0r}r)$  est  $\frac{\delta(k_r - k_{0r})}{k_{0r}}$ . Ainsi, la transformée de Hankel n'est pas symétrique par rapport à  $k_{0r}$ , ce qui est à peu près normal, vu qu'il est difficile de définir des symétries sur  $\mathbb{R}^+$ . La distorsion introduite par la fenêtre d'analyse  $W_{\mathcal{V}, \mathcal{T}}$  est donc dépendante de l'harmonique cylindrique analysé, ce qui ne facilite pas la mise au point d'une bonne fenêtre d'analyse.

Nous allons maintenant donner quelques illustrations concernant les séries de Fourier-Bessel d'harmoniques cylindriques tronqués sur un cylindre de rayon  $R$ . Dans l'équation (1.76), cela correspond à la composante du coefficient de Fourier généralisé dépendant de  $l$  et de  $m$ . Nous avons choisi de tracer les coefficients de Fourier-Bessel normalisés, soit les  $\frac{\alpha_{lm}}{[J_{l+1}(k_{lm}R)]^2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{lm}}{[J_{l+1}(k_{lm}R)]^2} &= \frac{2}{R^2 [J_{l+1}(k_{lm}R)]^2} \int_{r=0}^R J_l(k_{0r}r) J_l(k_{lm}r) r dr \\ &= \begin{cases} \frac{2(k_{lm}R) J_{l+1}(k_{lm}R) J_l(k_{0r}R)}{[(k_{lm}R)^2 - (k_{0r}R)^2] [J_{l+1}(k_{lm}R)]^2} & \text{si } k_{0r} \neq k_{lm} \\ 1 & \text{si } k_{0r} = k_{lm} \end{cases} \quad (1.77) \end{aligned}$$

Dans le cas des séries de Fourier usuelles, l'amplitude des coefficients est tracée en fonction de l'ordre  $m$ . Étant donné que la pulsation de l'harmonique  $\frac{2m\pi}{L_x}$  d'ordre  $m$  est proportionnelle à  $m$ , tracer l'amplitude des coefficients (en module) en fonction de la pulsation des harmoniques ou de l'ordre de l'harmonique conduit à des courbes identiques à l'échelle des abscisses près. Dans le cas des séries de Fourier-Bessel, les racines de l'équation  $J_l(kR) = 0$  ne sont pas réparties uniformément. Ainsi, les courbes représentant l'amplitude des coefficients sont différentes selon qu'elles sont tracées en fonction de  $m$  ou de  $k_{lm}$ . Nous avons choisi de représenter l'amplitude des coefficients (1.77) en fonction de la pulsation réduite  $k_{lm}R$  sur les figures 1.2 et 1.3.

Sur la figure 1.2, nous pouvons voir le spectre associé aux 200 premiers coefficients de Fourier-Bessel d'ordre 0 pour différentes valeurs de  $k_{0r}$  dans (1.77). Les valeurs de la pulsation réduite  $k_{lm}R$  simulées sont [31, 170, 346, 503]. Les observations suivantes peuvent être faites :

- ces spectres ne sont pas symétriques par rapport à  $k_{0r}R$  ;
- la décroissance pour les grands nombres d'onde des coefficients  $\alpha_{lm}$  n'est pas aiguë, et est comparable à la décroissance du sinus cardinal pour les ondes planes tronquées. Cette décroissance tire sa source du même phénomène que celui des séries de Fourier simples : la présence de "discontinuités". En effet, dans le cas d'une décomposition modale pour le parallélépipède, la série de Fourier rend périodique le champ de période  $L_x$  selon  $x$ , etc. alors que le champ initial n'est pas forcément périodique sur cet horizon. Il y a donc introduction d'une discontinuité, sauf si le champ est nul sur la frontière du parallélépipède. Si c'est le

cas, la décroissance des coefficients de Fourier est beaucoup plus rapide. Cette configuration se produit notamment lorsque l'on applique une fenêtre d'analyse au signal, qui rend le signal analysé nul sur la frontière. Dans le cas des séries de Fourier-Bessel, nous avons le même problème. Tous les harmoniques sont nuls pour  $r = R$ , ce qui n'est pas forcément le cas du champ initial ; il y a de nouveau introduction d'une discontinuité et les mêmes problèmes de convergence que ceux des séries de Fourier usuelles se produisent. Ce phénomène est connu depuis le XIX<sup>ème</sup> siècle : il s'agit du phénomène de Gibbs [39] ;

- la largeur du lobe principal est à peu près constante en coordonnées normalisées, quelle que soit la valeur de  $k_{0r}$ . Ainsi, en coordonnées non normalisées, cela veut dire que la largeur du lobe est proportionnelle à  $1/R$  : cela fixe la limite du pouvoir de résolution de l'analyse.

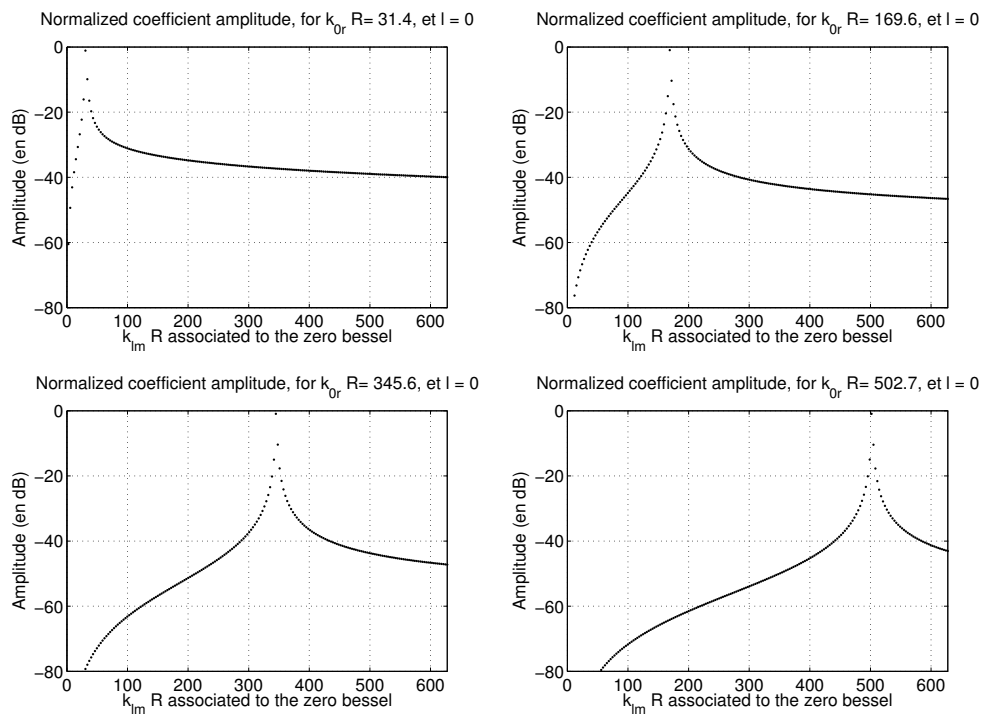


FIG. 1.2 – Décomposition en séries de Fourier-Bessel d'ordre  $l = 0$  d'un harmonique cylindrique  $J_0(k_{0r}r)$  pour différentes valeurs du paramètre  $k_{0r}$ . L'amplitude des coefficients (1.77) est tracée en fonction de  $m$ , mais l'axe des abscisses est gradué en fonction des pulsations réduites  $k_{lm}R$  correspondantes.

La figure 1.3 a été obtenue de la même manière que la figure 1.2, excepté l'ordre  $l$  pour le calcul, qui est égal à 30 au lieu de 0. Le spectre associé aux 186 premières racines de  $J_{30}(kR) = 0$  y est représenté : dans l'intervalle de calcul des pulsations réduites, jusque environ  $k_{lm}R = 620$ , il y a 14 racines de moins par rapport à l'ordre  $l = 0$ .

Cette figure possède un aspect analogue à celui de la figure 1.2. Excepté pour le cadran haut gauche, nous remarquons que :

- la largeur des lobes principaux est identique à ceux obtenus pour l'ordre 0 ;
- la décroissance des coefficients en amplitude est analogue que celle obtenue pour l'ordre 0.

Revenons maintenant sur le cadran gauche et tentons de donner une interprétation au résultat obtenu. Il est important de signaler que les premières racines de l'équation  $J_{30}(kR) = 0$  se situent aux environs de  $kR = 36$ . Ainsi, la valeur de  $k_{0r}R$  de l'harmonique cylindrique analysé, qui vaut

31.4, est inférieure à la valeur de la pulsation réduite correspondante au premier zéro. Nous en déduisons que la fonction à reproduire ne contient pas de passage par zéros : elle reste de signe constant et mobilise de ce fait un grand nombre de modes propres pour être reproduit.

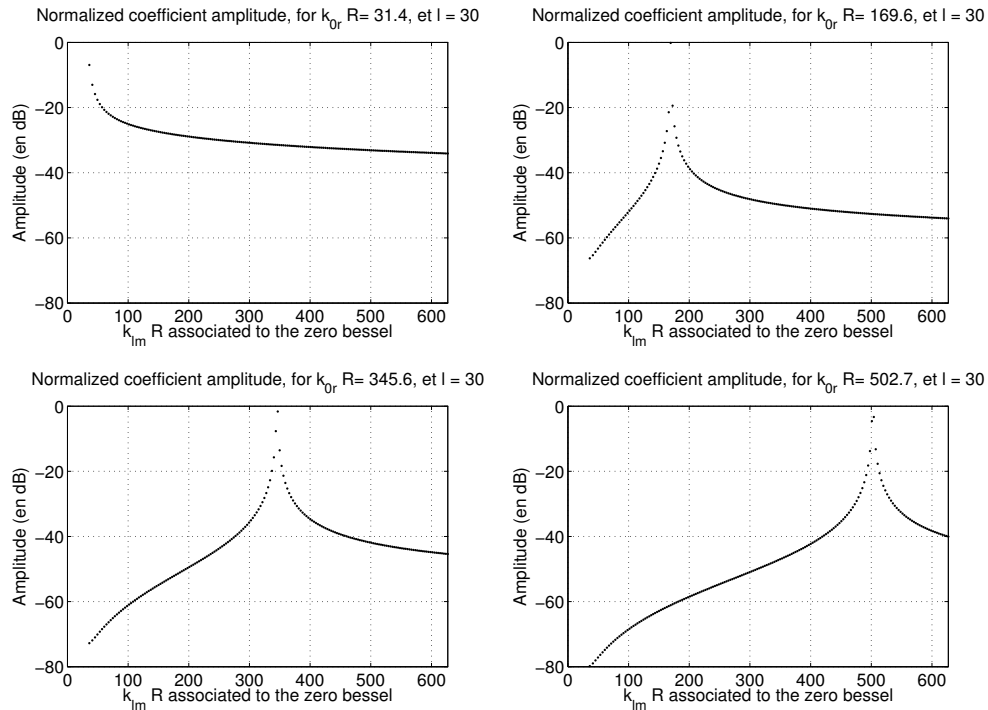


FIG. 1.3 – Décomposition en séries de Fourier-Bessel d’ordre  $l = 30$  d’un harmonique cylindrique  $J_{30}(k_{0r}r)$  pour différentes valeurs du paramètre  $k_{0r}$ . L’amplitude des coefficients (1.77) est tracée en fonction de  $m$ , mais l’axe des abscisses est gradué en fonction des pulsations réduites  $k_{lm}R$  correspondantes.

Il serait judicieux de procéder de la même manière que dans le paragraphe précédent 1.3.1, en appliquant une fenêtre d’analyse au signal avant d’en calculer sa décomposition harmonique. Les résultats attendus seraient alors une rapide décroissance des coefficients du développement de Fourier, étant donné que le phénomène de Gibbs serait neutralisé. Toutefois, nous ne disposons pas d’expressions analytiques permettant d’effectuer cette tâche, et chaque cas est unique étant donné que nous ne disposons pas de la propriété de convolution. L’idée serait donc de calculer la décomposition modale du champ  $w_{\mathcal{V},\mathcal{T}}P$  avec l’hypothèse d’une fenêtre  $w_{\mathcal{V},\mathcal{T}}$  nulle sur les frontières du domaine. N’ayant pas de réponses analytiques à fournir à ce problème, il serait nécessaire de recourir à des méthodes numériques, en l’occurrence la transformée de Hankel à espace discret. Nous ne l’avons pas fait, pour les inconvénients qui seront expliqués au chapitre 3, à savoir qu’une reconstruction parfaite du champ sonore dans la géométrie cylindrique exige une répartition radiale des échantillons reliée aux zéros des fonctions de Bessel, dont la localisation est différente selon l’ordre  $l$  considéré. Or, une analyse complète du champ sonore requérant de faire l’analyse pour des ordres différents, il est déconseillé d’envisager une répartition radiale des échantillons qui satisfasse toutes ces conditions.

### 1.3.3 Cas de la boule

#### Décomposition modale

Nous supposons dans ce paragraphe que le champ sonore est uniquement observé dans une boule de rayon  $R$  et observé pendant une durée  $T$  sur l'intervalle  $[0; T]$ . Le produit interne relatif à ce domaine est :

$$\langle f || g \rangle = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3 T} \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{t=0}^T f(\mathbf{r}, t) \bar{g}(\mathbf{r}, t) r^2 dr d\phi \sin\theta d\theta dt \quad (1.78)$$

L'objectif est de trouver un sous-ensemble d'harmoniques sphériques  $(\Psi_{k,l,m,\omega})$  qui soient orthogonaux entre eux pour le produit interne défini ci-dessus. De manière analogue à la section 1.2.4, nous allons expliciter le produit interne de deux harmoniques sphériques :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{k_1, l_1, m_1, \omega_1} || \Psi_{k_2, l_2, m_2, \omega_2} \rangle &= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3 T} \int_{t=0}^T e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} dt \int_{r=0}^R j_{l_1}(k_1 r) j_{l_2}(k_2 r) r^2 dr \\ &\quad \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{l_1}^{m_1}(\phi, \theta) \overline{Y_{l_2}^{m_2}(\phi, \theta)} d\phi \sin\theta d\theta \end{aligned} \quad (1.79)$$

Lorsque  $l_1 = l_2$ , l'intégrale portant sur la variable  $r$  est un résultat connu : il s'agit de l'intégrale de Lommel, qui vaut :

$$\int_{r=0}^R j_l(k_1 r) j_l(k_2 r) r^2 dr = \begin{cases} \frac{R^2}{k_1^2 - k_2^2} [k_2 j_{l-1}(k_2 R) j_l(k_1 R) - k_1 j_{l-1}(k_1 R) j_l(k_2 R)] & \text{si } k_1 \neq k_2 \\ \frac{R^3}{2} [j_l(k_1 R)]^2 - j_{l-1}(k_1 R) j_{l+1}(k_1 R) & \text{si } k_1 = k_2 \end{cases} \quad (1.80)$$

Si nous choisissons pour  $k$ , à  $l$  fixé, les racines de l'équation  $j_l(kR) = 0$ , et en utilisant la propriété que pour ces équations  $j_{l-1}(kR) = -j_{l+1}(kR)$  alors l'intégrale ci-dessus se résume à :

$$\int_{r=0}^R j_l(k_{l n_1} r) j_l(k_{l n_2} r) r^2 dr = \begin{cases} 0 & \text{if } k_{l n_1} \neq k_{l n_2} \\ \frac{R^3}{2} [j_{l+1}(k_{l n_1} R)]^2 & \text{if } k_{l n_1} = k_{l n_2} \end{cases} \quad (1.81)$$

où  $k_{l n}$  est la  $n^{\text{ième}}$  racine de l'équation  $j_l(kR) = 0$ .

Finalement, nous considérons le sous-ensemble de la famille des harmoniques sphériques  $(\Psi_{l,m,n,q})$  pour  $(l, m, n, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}$  suivant :

$$\Psi_{l,m,n,q}(r, \phi, \theta, t) = j_l(k_{l n} r) Y_l^m(\phi, \theta) e^{i\frac{2\pi q}{T} t} \quad (1.82)$$

Nous vérifions que la répartition des modes propres sphériques (1.82) est bien discrète. Nous pouvons aussi vérifier que ce sous-ensemble est orthogonal pour le produit scalaire (1.78) :

$$\langle \Psi_{l_1, m_1, n_1, q_1} || \Psi_{l_2, m_2, n_2, q_2} \rangle = \frac{3}{8\pi} [j_{l+1}(k_{l n_1} R)]^2 \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{n_1 n_2} \delta_{q_1 q_2} \quad (1.83)$$

Tout champ sonore observé sur la sphère peut être projeté sur ce sous-ensemble d'harmoniques sphériques. Les coefficients associés à cette décomposition sont les suivants :

$$\alpha_{lmnq} = \langle p | \Psi_{l,m,n,q} \rangle = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3 T} \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{t=0}^T p(\mathbf{r}, t) j_l(k_{ln}r) e^{-il\phi} \overline{Y_l^m}(\phi, \theta) e^{-i\frac{2\pi q}{T}t} r^2 dr d\phi \sin\theta d\theta dt \quad (1.84)$$

Cet opérateur d'analyse dans la boule permet de calculer les coefficients de la décomposition modale. Il est constitué d'une décomposition en séries de Fourier usuelles pour la variable  $t$ , d'une décomposition en séries de Fourier-Bessel sphériques d'ordre  $l$  pour la variable  $r$ , et d'une décomposition en harmoniques sphériques standards pour l'angle solide  $\Omega$ . Dans le cas du domaine sphérique infini, l'opérateur d'analyse était le produit de la transformée de Fourier usuelle pour la variable  $t$ , par la décomposition en harmoniques sphériques standards de l'angle solide, puis par la transformée de Hankel sphérique d'ordre  $l$  pour la variable  $r$ . Lorsque le domaine est fini, les transformées de Fourier généralisées sont remplacées par des séries de Fourier généralisées.

De plus, comme chacune de ces séries de Fourier prises indépendamment possède son théorème de convergence, nous pouvons dire que l'ensemble d'harmoniques sphériques  $(\Psi_{l,m,n,q})$  pour  $(l, m, n, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}$  est complet dans  $\mathcal{V} \times \mathcal{T}$ . Ce théorème de convergence des séries de Fourier est le suivant :

$$\forall (r, \phi, \theta, t) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T},$$

$$p(r, \phi, \theta, t) = \frac{4}{3}\pi \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{[j_{l+1}(k_{ln}R)]^2} j_l(k_{ln}r) e^{i\frac{2\pi q}{T}t} Y_l^m(\phi, \theta) \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3 T} \int_{r_1=0}^R \int_{\phi_1=0}^{+2\pi} \int_{\theta_1=0}^{+\pi} \int_{t_1=0}^T p(\mathbf{r}_1, t_1) j_l(k_{ln}r_1) \overline{Y_l^m}(\phi_1, \theta_1) e^{-i\frac{2\pi q}{T}t_1} r_1^2 dr_1 d\phi_1 \sin\theta_1 d\theta_1 dt_1 \quad (1.85)$$

Le point clé de la démonstration de ce théorème réside dans l'inversion de la quadruple somme avec la quadruple intégrale. Une telle opération donne la relation suivante :

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \overline{Y_l^m}(\phi_1, \theta_1) Y_l^m(\phi, \theta) \frac{1}{R^3} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2j_l(k_{ln}r) j_l(k_{ln}r_1)}{[j_{l+1}(k_{ln}R)]^2} \cdot \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{2\pi q}{T}(t-t_1)} = \frac{\delta(r-r_1)}{r^2} \delta(\phi-\phi_1) \delta(\cos\theta-\cos\theta_1) \delta(t-t_1) \quad (1.86)$$

L'intégration selon  $(\mathbf{r}_1, t_1) \in \mathcal{V} \times \mathcal{T}$  dans (1.85) donne alors le résultat souhaité.

Le théorème sur les séries de Fourier (1.85) implique que tout champ sonore peut être correctement synthétisé à l'intérieur de la sphère par la connaissance unique des coefficients de sa décomposition modale. L'opérateur de synthèse associé est le développement en séries de Fourier généralisées suivant :

$$p(x, y, z, t) = \frac{4}{3}\pi \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{[j_{l+1}(k_{ln}R)]^2} \alpha_{lmnq} j_l(k_{ln}r) Y_l^m(\phi, \theta) e^{i\frac{2\pi q}{T}t} \quad (1.87)$$

### Exemple d'analyse

Nous allons étudier le cas d'harmoniques sphériques, satisfaisant la relation de dispersion (1.18), mais observés uniquement dans la boule de rayon  $R$ . Soit  $\Psi_{k_0, l_0, m_0, \omega_0}^{hs}$  l'harmonique

sphérique analysé. Le coefficient  $\alpha_{lmnq}$  associé à la décomposition de cet harmonique sphérique tronqué vaut :

$$\begin{aligned} \alpha_{lmnq} &= \langle \Psi_{k_0, l_0, m_0, \omega_0}^{\text{hs}} | \Psi_{l, m, n, q} \rangle \\ &= \delta_{l_0 l} \delta_{m_0 m} e^{-i(\omega_q - \omega_0) \frac{T}{2}} \text{sinc} \left( \frac{(\omega_q - \omega_0) T}{2\pi} \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \begin{cases} \frac{R^2}{k_{ln}^2 - k_{0r}^2} [k_{ln} j_{l+1}(k_{ln} R) j_l(k_{0r} R)] & \text{if } k_{0r} \neq k_{ln} \\ \frac{R^3}{2} [j_{l+1}(k_{ln} R)]^2 & \text{if } k_{0r} = k_{ln} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.88)$$

De manière analogue aux paragraphes 1.3.1 et 1.3.2, la décomposition modale de l'harmonique sphérique mobilise des modes qui ne satisfont pas obligatoirement la relation de dispersion. De même, comme dans le cas du paragraphe de l'analyse de champs sonores sur un cylindre 1.3.2, il n'existe pas de propriété de convolution pour les fonctions de Bessel sphériques, ces fonctions étant elles mêmes dérivées des fonctions de Bessel cylindriques. Les remarques que nous pourrions formuler à propos de la résolution de l'analyse et de la décroissance de l'amplitude des coefficients sont en tous points identiques à celles ayant été formulées au paragraphe précédent sur la décomposition en séries de Fourier-Bessel cylindriques.

### 1.3.4 Problème du domaine fini de géométrie quelconque

Dans le cas d'un domaine fini dont la géométrie est quelconque, le champ peut toujours être décomposé sur une base de modes, dont la répartition est discrète, de sorte que le champ sonore peut être vu comme un développement en série sur la base des modes propres. L'inconvénient est que nous ne disposons pas de formules analytiques de ceux-ci, ce qui limite l'intérêt de ces développements dans la pratique. Des méthodes numériques permettraient d'établir le profil spatio-temporel de ces modes, mais ces considérations sortent du cadre de cette thèse.

## 1.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, un large éventail de représentations harmoniques a été présenté, et il est maintenant temps de dresser un premier bilan. Un des résultats les plus intéressants de ce chapitre est que les décompositions en ondes planes, harmoniques cylindriques et harmoniques sphériques réalisent la même économie que les représentations holographiques concernant le nombre de paramètres nécessaires pour caractériser complètement le champ. En effet, les représentations holographiques imposent de connaître le profil temporel du champ de pression sur une surface fermée pour le caractériser complètement. Pour les représentations harmoniques, il suffit de connaître le profil fréquentiel (pour toutes les fréquences) des décompositions sur les domaines définis par les relations de dispersion<sup>8</sup>, ce qui permet d'économiser aussi une dimension. Un résultat semblable a été démontré par Ajdler *et al.* [4], qui mentionnent que les champs sonores peuvent être considérés comme à support de Fourier quasi-limité au domaine défini par la relation de dispersion.

Les résultats de ce chapitre permettent d'apporter une critique sur la présentation effectuée dans certains travaux des systèmes de synthèse de champs sonores basés sur les harmoniques sphériques. En effet, une trop grande importance est parfois attachée sur la manière dont ses dispositifs sont capables de synthétiser des ondes planes. Certes, le fait que tout champ sonore peut

<sup>8</sup>Dans le domaine des pulsations et vecteurs d'ondes, la relation de dispersion (1.4) définit un cône.



se décomposer en ondes planes n'est pas faux, mais il en est de même pour les harmoniques sphériques. Les réels paramètres permettant de juger de la qualité de la synthèse de ces dispositifs sont l'erreur de reconstruction en fonction de la taille de la zone de reconstruction souhaitée et de l'ordre de la décomposition.

Toujours concernant les systèmes d'analyse et de synthèse de champs sonores basés sur les harmoniques sphériques, il est intéressant de se demander s'ils utilisent finalement comme outil d'analyse la transformée de Fourier sphérique (1.40), ou s'ils utilisent les séries de Fourier-Bessel sphériques (1.84). Au regard de la littérature (voir par exemple Daniel et Moreau [27], Poletti [79]), il semblerait que ce soit la transformée de Fourier sphérique qui soit utilisée, et que le support de celle-ci soit uniquement limité à la sphère définie par la relation de dispersion  $k = \frac{\omega}{c}$ . Les ambitions pour de tels systèmes de reproduction sont fixées en conséquence : pour que la relation de dispersion soit vérifiée, il faut étudier le champ sonore sur un domaine infini. Si le domaine est infini, il mobilise un nombre infini d'harmoniques sphériques, et le fait de tronquer la série du développement en harmoniques sphériques standard introduit inévitablement un repliement des modes d'ordre supérieur sur les modes d'ordre inférieur. Maintenant, si l'objectif fixé est moins ambitieux et qu'il concerne l'analyse et la synthèse de champs sonores à l'intérieur d'une boule de rayon  $R$ , nous savons grâce à la section 1.3.3 quels sont les modes de la boule qui vont être excités majoritairement. Nous sélectionnons les  $N$  modes susceptibles d'être les plus excités, ou de manière plus générale  $N$  combinaisons linéaires de modes propres, ce qui fixe ce que l'on est en droit d'attendre vis-à-vis de la qualité de reconstruction du champ sonore. Ainsi, la stratégie est la suivante : on sélectionne les harmoniques sphériques jusque l'ordre  $L$ , soit  $N = (L + 1)^2$  modes pour les variables angulaires tandis que pour la variable radiale, on sélectionne une unique combinaison de modes propres, à savoir celle correspondant à  $j_l(kr)$  avec  $k = \frac{\omega}{c}$ . Il est mieux de procéder de cette manière par rapport la solution ne prenant juste que le  $j_l(k_{ln}r)$  correspondant au  $k_{ln}$  le plus proche de  $\frac{\omega}{c}$ .

Concernant les méthodes basées sur les décompositions modales, le paramètre important utilisé dans la littérature en acoustique des salles est la densité modale. L'intégration de celle-ci sur une bande fréquentielle fournit le nombre de modes excités dans cette bande fréquentielle. La bande fréquentielle n'est pas le seul paramètre influant le nombre de modes excités. Celui-ci dépend aussi des effets de la troncature, et donc du volume d'analyse, qui viennent fixer la largeur des lobes principaux des sinus cardinaux par exemple, cf. équation (1.65). Ce paramètre est rarement pris en compte, alors qu'il est souvent le plus limitant.

En introduction de la partie I, nous avons soulevé le problème de la prédominance d'une représentation des champs sonores par rapport aux autres. D'après l'étude des représentations harmoniques qui vient d'être faite, nous pouvons dire que chacune de ces représentations possède des atouts qui lui sont propres. Par exemple, la position des sources et l'intervalle d'émission seront beaucoup plus facilement lus sur la représentation spatio-temporelle. En revanche, les caractéristiques de directivité d'une source ainsi que sa bande passante fréquentielle seront beaucoup plus lisibles dans l'un des domaines de Fourier. Si nous souhaitons de plus appliquer des transformations aux champs sonores, certaines représentations peuvent être plus adaptées. En effet, les ondes planes sont des vecteurs propres des opérateurs de translation, et les harmoniques sphériques sont des vecteurs propres des opérateurs de rotation sur la sphère.

Les transformées et les séries de Fourier généralisées sont très utiles pour l'analyse du champ sonore. Les transformées de Fourier généralisées inverses permettent de synthétiser le champ à partir de sa description dans le domaine de Fourier. Toutefois, elles sont d'un intérêt limité pour la reproduction physique du champ sonore, étant donné qu'il n'existe pas de générateurs d'ondes planes, ni d'harmoniques cylindriques/sphériques dans la nature. Ainsi, il est nécessaire de procéder en deux étapes :

- effectuer l'analyse du rayonnement d'une source initiale à l'aide des transformées/séries de

Fourier généralisées. De même, il faut faire l'analyse de chacune des sources secondaires utilisées pour reproduire le champ initial ;

- il faut ensuite projeter le champ initial sur le sous-espace engendré par le réseau de sources secondaires, afin que les paramètres de la description harmonique du champ reproduit soient les plus proches de ceux de la description harmonique du champ initial.

L'objectif du prochain chapitre est d'aborder le problème de la synthèse de champs sonores à partir de sources réelles. Comme nous le montrerons, les représentations sous-jacentes sont peu utiles pour l'analyse car les atomes élémentaires utilisés pour la description du champ sonore ne sont plus orthogonaux par rapport au produit interne (1.24).

## Chapitre 2

# Aspects théoriques de la synthèse de champs sonores

### Résumé :

Dans ce chapitre, nous introduisons les représentations intégrales des champs sonores. Pour cela, nous faisons une présentation brève de la théorie de la fonction de Green pour l'équation des ondes. Nous introduisons notamment les fonctions de Green *avancée*, *retardée*, et *mixte*. Les différentes formes de l'équation intégrale de Kirchhoff sont ensuite établies. La plus intéressante d'un point de vue théorique est celle qui utilise la fonction de Green qui satisfait des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, car l'intégrale sous-jacente stipule que seule la connaissance du profil temporel du champ de pression acoustique sur une surface fermée est nécessaire pour caractériser complètement le champ dans la zone vide de sources, que ce soit la zone intérieure ou extérieure. La plus intéressante d'un point de vue pratique est le principe de Huygens.

Puis nous faisons le lien entre les représentations harmoniques et les représentations intégrales. La conversion d'une représentation intégrale en une représentation harmonique est toujours possible et se fait sans pertes d'informations. En revanche, la conversion d'une représentation harmonique en représentation intégrale est destructive, car il s'agit d'une projection : partant d'un profil du champ de pression acoustique et de sa dérivée par rapport à la normale en tout point d'une surface fermée exempte de sources, le champ des sources situé initialement à l'intérieur est reproduit à l'extérieur et le champ des sources situées initialement à l'extérieur est correctement reproduit à l'intérieur, à une inversion de phase près selon l'orientation de la distribution de sources dipôlaires choisie.

Finalement, nous essayons de tisser un lien encore plus profond entre les représentations intégrales et les représentations harmoniques. En particulier, nous essayons de redémontrer certains résultats connus et établis grâce aux représentations intégrales par la résolution directe de l'équation des ondes, en appliquant la transformée de Fourier sur celle-ci et en utilisant le théorème des résidus ainsi que les intégrales de Cauchy. Les cas étudiés sont l'émission d'une onde plane par une distribution plane de monopôles et de dipôles, les intégrales de Rayleigh qui n'utilisent plus qu'un seul type de sources, monopôles ou dipôles, puis la synthèse d'ondes planes à l'intérieur d'un parallélépipède dont la frontière contient aussi une distribution continue de monopôles et de dipôles.

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons considérer le problème de l'équation des ondes inhomogène, qui traduit la présence de sources acoustiques à l'intérieur ou sur la frontière du domaine de résolution. Nous allons commencer par le problème d'une inhomogénéité élémentaire, ce qui nous amènera à la théorie de *la fonction de Green*, dont le lecteur pourra trouver des développements complémentaires par Morse et Feshbach [68, chap. 7, pp.838-841], Duffy [31, chap. 3.5] et Bruneau [20, chap. 3, pp.119-124]. Nous développerons en détail la démonstration de l'expression de la fonction de Green en espace infini, étant donné qu'elle nous servira de point de départ pour le problème de la reproduction de champs sonores sur un domaine fini, à partir d'un nombre fini de sources secondaires, au chapitre 4. Puis nous aborderons *l'intégrale de Kirchhoff*, et le *principe de Huygens* qui en est un cas particulier. Ces deux thèmes sont abordés par Morse et Feshbach [68, chap. 7, pp.834-837,847-848], Bruneau [20, chap. 6, pp.284-296,302-304] et Duffy [31, chap. 3.5]. Nous approfondirons plus particulièrement le lien entre les représentations intégrales du champ sonore et les représentations harmoniques abordées au chapitre 1.

## 2.2 Fonction de Green en espace infini

La fonction de Green  $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$  en espace infini est solution du problème suivant :

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0) \quad (2.1)$$

Elle traduit la présence d'une source ponctuelle en  $\mathbf{r}_0$  qui émet une impulsion de Dirac à l'instant  $t_0$ . Je tiens à attirer aussi l'attention sur le fait que la fonction de Green n'est pas exactement le champ de pression acoustique généré par un monopôle acoustique, étant donné que le membre de droite de l'équation (2.1) n'est pas homogène à des  $\text{Pa.m}^{-2}$ . Pour que la solution du problème précédent soit unique, il est nécessaire de lui adjoindre des conditions initiales, ainsi que des conditions aux limites. Nous supposons pour les conditions initiales que la fonction de Green est nulle antérieurement à l'instant  $t_0$ , étant donné que les effets de l'impulsion ne peuvent pas "physiquement" se faire sentir avant la cause. Pour les conditions aux limites, il s'agit des *conditions de Sommerfeld*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de retour de l'onde acoustique à l'infini [voir 20, pp.119-124].

Si nous appliquons la transformée de Fourier usuelle (1.27) à l'équation précédente, nous obtenons :

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) G(\mathbf{k}, \omega | \mathbf{r}_0, t_0) = -4\pi e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} e^{-i\omega t_0} \quad (2.2)$$

Nous allons calculer la transformée de Fourier inverse de l'équation précédente en deux étapes : d'abord sur la variable  $\omega$  puis sur la variable  $\mathbf{k}$ . Nous nous préoccupons d'abord de revenir dans le domaine temporel, en prenant la transformée de Fourier inverse monodimensionnelle :

$$G(\mathbf{k}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 2e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-t_0)}}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)} d\omega \quad (2.3)$$

Cette intégrale peut être vue comme partie d'une intégrale de contour, et évaluée à l'aide de la méthode des résidus. L'intégrande possède deux pôles réels  $\omega = \pm ck$ . Il existe quatre manières de contourner les pôles, représentées sur la figure 2.1 conduisant à quatre expressions différentes de la fonction de Green  $G(\mathbf{k}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$  satisfaisant l'équation (2.1), mais dont une seule satisfait les conditions initiales.

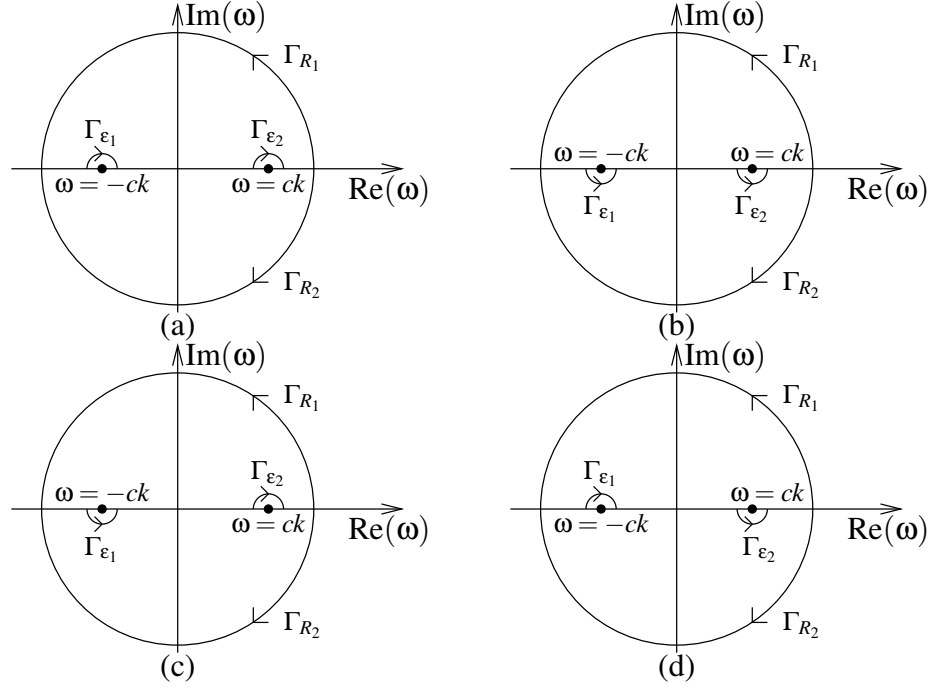


FIG. 2.1 – Les différentes possibilités de contour pour l'évaluation de l'équation (2.3)

Le théorème des résidus [81, chap. 2] stipule que l'intégrale sur un contour fermé parcouru dans le sens trigonométrique d'une fonction analytique  $f$  ayant un nombre fini de pôles simples  $z_p$  à l'intérieur de celui-ci vaut  $2\pi \sum_{p=1}^P \text{Res}_{z_p}(f)$ . L'intégrale existe uniquement si  $t - t_0 > 0$  lorsque le contour choisi est  $\Gamma_{R_1}$  et  $t - t_0 < 0$  lorsque le contour choisi est  $\Gamma_{R_2}$ . En effet, sur  $\Gamma_{R_1}$ ,  $\omega = p + iq$  avec  $q > 0$ , et la partie réelle de l'argument de l'exponentielle  $e^{i\omega(t-t_0)}$ , nécessairement négative pour que l'intégrale existe, vaut  $-q(t-t_0)$ , ce qui correspond bien à la condition annoncée dans la phrase précédente. Lorsque le rayon du demi-cercle  $R$  tend vers l'infini, non seulement l'intégrale existe, mais elle tend aussi vers 0. En ce qui concerne l'intégrale sur les contours  $\Gamma_{\varepsilon_1}$  et  $\Gamma_{\varepsilon_2}$ , l'intégrale tend vers zéro lorsque le rayon des demi-cercles tend vers 0. Finalement, l'intégrale sur le contour complet est égale à l'intégrale recherchée (2.3)

Les résidus de l'intégrande de l'équation (2.3) valent  $\frac{-c}{2k} e^{+ikc(t-t_0)}$  pour le pôle  $\omega = ck$ , et  $\frac{c}{2k} e^{-ikc(t-t_0)}$  pour le pôle  $\omega = -kc$ . Les résultats de l'intégrale (2.3) par la méthode des résidus donne, en fonction des contours indiqués sur la figure 2.1 :

$$G(\mathbf{k}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 4\pi \frac{c}{k} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \sin(t_0 - t) u(t_0 - t) \quad , \text{cas (a)} \quad (2.4)$$

$$G(\mathbf{k}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 4\pi \frac{c}{k} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \sin(t - t_0) u(t - t_0) \quad , \text{cas (b)} \quad (2.5)$$

$$G(\mathbf{k}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 2i\pi \frac{c}{k} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} e^{-ikc(t-t_0)\text{sgn}(t-t_0)} \quad , \text{cas (c)} \quad (2.6)$$

$$G(\mathbf{k}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = -2i\pi \frac{c}{k} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} e^{ikc(t-t_0)\text{sgn}(t-t_0)} \quad , \text{cas (d)} \quad (2.7)$$

Puis nous prenons la transformée de Fourier spatiale inverse afin d'obtenir  $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ . Pour cela, l'astuce consiste à aligner l'axe  $z$  avec le vecteur  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  et à décrire l'intégration en coordonnées sphériques. Le raisonnement est décrit dans les références citées en début de partie. Les résultats pour le cas (a) et (b) sont identiques à condition de changer  $t - t_0$  en  $t_0 - t$ . Nous obtenons ainsi les fonctions de Green retardée (2.9) et avancée (2.8). Les cas (c) et (d) conduisent à la même fonction de Green qui n'est ni causale (par rapport à l'instant  $t_0$ ), ni anticausale, mais mixte (2.10) :

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\delta\left((t-t_0) + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad \text{cas (a)} \quad (2.8)$$

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\delta\left((t-t_0) - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad \text{cas (b)} \quad (2.9)$$

$$G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\delta\left((t-t_0) + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right) + \delta\left((t-t_0) - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)}{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad \text{cas (c) et (d)} \quad (2.10)$$

## 2.3 Représentations intégrales des champs sonores

Dans le chapitre 1, nous avons envisagé le problème de l'analyse de champs sonores par l'intermédiaire des transformées de Fourier généralisées. Nous avons aussi mentionné que les transformées de Fourier généralisées inverses permettaient de reproduire un champ sonore donné à partir de sa description harmonique. Malheureusement, il n'existe pas de synthétiseur d'onde plane, d'harmonique cylindrique ou d'harmonique sphérique dans la réalité. En revanche, le champ généré par un monopôle acoustique, qui est une source acoustique réelle, peut être exprimé à partir de la connaissance de la fonction de Green en espace infini [chap. 3, pp. 119-121][20]. De manière générale, la représentation intégrale d'un champ sonore fait intervenir la fonction de Green associée à un problème donné, et permet de synthétiser un champ sonore quelconque dans un certain domaine.

La représentation intégrale la plus générale est donnée par l'équation intégrale de Kirchhoff, que nous expliciterons dans un premier temps. Puis, nous démontrerons que seule la connaissance de la pression acoustique sur la surface  $\mathcal{S}$  délimitant le volume de reproduction  $\mathcal{V}$  est nécessaire pour caractériser de manière unique le champ acoustique rayonné dans celui-ci. Finalement, nous développerons ensuite un cas particulier de l'équation intégrale de Kirchhoff, le *principe de Huygens*, qui est le principe fondamental sur lequel reposent les dispositifs de reproduction basés sur la Wave Field Synthesis [7, 10, 13, 14, 30, 95].

### 2.3.1 Équation intégrale de Kirchhoff

Les liens vers la bibliographie afférente ont déjà été signalés dans l'introduction générale de ce chapitre. Si les conditions initiales et aux limites d'un problème d'acoustique sont spécifiées, alors le champ sonore peut être exprimé à l'aide de la fonction de Green  $G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ . Ceci conduit à une expression intégrale du champ sonore, connue sous le nom d'équation intégrale de Kirchhoff, dont la forme la plus générale est donnée par :

$$\begin{aligned} & \int_{t_0=t_i}^{t^+} \iint_{\mathbf{r}_0 \in \mathcal{S}} [G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \nabla_0 p(\mathbf{r}_0, t_0) \\ & \quad - p(\mathbf{r}_0, t_0) \nabla_0 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)] \cdot d\mathbf{S}_0 dt_0 \\ & + \frac{1}{c^2} \iiint_{\mathbf{r}_0 \in \mathcal{V}} \left[ G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_i) \frac{\partial p(\mathbf{r}_0, t_i)}{\partial t_0} \right. \\ & \quad \left. - p(\mathbf{r}_0, t_i) \frac{\partial G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_i)}{\partial t_0} \right] d^3\mathbf{r}_0 \\ & + \int_{t_0=t_i}^{t^+} \iiint_{\mathbf{r}_0 \in \mathcal{V}} q(\mathbf{r}_0, t_0) G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) d^3\mathbf{r}_0 dt_0 \\ & = \begin{cases} p(\mathbf{r}, t) & \text{si } \mathbf{r} \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

où  $t_i$  désigne l'instant initial, l'indice 0 dans  $\nabla_0$  indique que le gradient est calculé par rapport à la variable  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathcal{V}$  est le domaine de résolution,  $\mathcal{S}$  est la surface fermée délimitant le volume de résolution, et l'élément de surface élémentaire  $d\mathbf{S}_0$  est un vecteur normal à la surface, pointant vers l'extérieur, au point considéré  $\mathbf{r}_0$ , de norme  $dS_0$ .

Le premier terme du membre de gauche de l'équation précédente est la contribution due à des conditions aux limites inhomogènes, le second terme est la contribution due à des conditions initiales non nulles, et le troisième terme est dû à la présence de sources acoustiques à l'intérieur du domaine de résolution  $\mathcal{V}$ .

Plusieurs simplifications de cette équation intégrale peuvent être effectuées si le choix de la fonction de Green est bien opéré [68]. Par exemple, s'il n'y a pas de sources acoustiques à l'intérieur du domaine de résolution, si les conditions initiales sont nulles, et si la fonction de Green choisie satisfait des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, alors l'équation précédente (2.11) se simplifie de la manière suivante :

$$\int_{t_0=t_i}^{t^+} \iint_{\mathbf{r}_0 \in \mathcal{S}} p(\mathbf{r}_0, t_0) \nabla_0 G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \cdot d\mathbf{S}_0 dt_0$$

$$= \begin{cases} -p(\mathbf{r}, t) & \text{si } \mathbf{r} \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.12)$$

Cette formulation de l'équation intégrale de Kirchhoff est extrêmement intéressante, étant donné qu'elle permet d'affirmer, sous réserve que les hypothèses précédemment mentionnées soient vérifiées, que le champ sonore est complètement caractérisé par la connaissance du profil temporel de la pression acoustique en tout point de la frontière  $\mathcal{S}$  délimitant le volume de restitution. Malheureusement, il n'existe que très peu de cas dans lesquels l'expression de la fonction de Green satisfaisant des conditions aux limites homogènes de Dirichlet est connue de manière analytique, de sorte que ce résultat est d'un intérêt purement théorique et ne nous fournit en aucune manière une méthode permettant de reproduire le champ sonore à l'identique à partir de la connaissance unique du profil du champ de pression acoustique sur une surface fermée.

Lorsque nous travaillons sur l'équation de Kirchhoff-Helmholtz, c'est-à-dire l'équation des ondes en régime monochromatique, il existe des cas où la connaissance seule du profil de la pression acoustique ou de la dérivée par rapport à la normale est insuffisant pour déterminer de manière unique le champ acoustique : cela se produit notamment aux fréquences de résonance de la cavité pour lesquelles il existe des solutions non nulles satisfaisant des conditions homogènes de Dirichlet ou de Neumann. Ainsi, il existe quand même des différences subtiles entre la considération du problème dans le domaine fréquentiel, qui exigerait la connaissance des deux profils de la pression acoustique, et de sa dérivée normale, par rapport au domaine temporel. Ce qui différencie les deux problèmes sont les conditions initiales, présentes pour l'équation des ondes, et absentes pour l'équation de Kirchhoff-Helmholtz. Si nous nous remémorons quelques résultats d'acoustique linéaire, le champ sonore dérive d'un potentiel scalaire, à partir duquel peuvent se déduire la pression acoustique et la vitesse particulaire. Ainsi, les conditions initiales de Cauchy peuvent nous permettre d'accéder au profil initial de la vitesse particulaire, et permettent donc sûrement d'éliminer l'ambiguïté introduite par la connaissance seule du profil de la pression acoustique dans le cas de l'équation de Kirchhoff-Helmholtz.

Du point de vue du contrôle du champ sonore, nous pouvons affirmer qu'il suffit de contrôler le profil temporel de la pression acoustique en tout point de la frontière pour contrôler complètement le champ sonore à l'intérieur du domaine. Cette idée avait été introduite par Ise [50] et Takane *et al.* [97] : le champ sonore à l'intérieur d'un certain domaine peut être contrôlé en ne contrôlant que les conditions aux limites sur ce domaine, sous réserve qu'il n'y ait pas de sources acoustiques à l'intérieur du domaine et que les conditions initiales soient nulles.

### 2.3.2 Principe de Huygens

Lorsque nous ne connaissons pas de fonctions de Green satisfaisant les conditions aux limites d'un problème donné, nous pouvons toujours utiliser l'expression de la fonction de Green en espace infini fournie par l'équation (2.9). De plus, si les conditions initiales sont nulles, et s'il n'y a pas de sources à l'intérieur du domaine de résolution, cela conduit à la formulation de Kirchhoff du principe de Huygens :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{t_0=t_i}^{t^+} \oint_{\mathbf{r}_0 \in S} \left[ \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \nabla_0 p(\mathbf{r}_0, t_0) \right. \\ & \quad \left. - p(\mathbf{r}_0, t_0) \nabla_0 \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right] \cdot d\mathbf{S}_0 dt_0 \\ & = \begin{cases} p(\mathbf{r}, t) & \text{si } \mathbf{r} \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'équation précédente constitue bien un opérateur de synthèse analogue à ceux introduits au chapitre 1 par l'intermédiaire des transformées de Fourier généralisées inverses. En revanche, cette expression fait intervenir des sources physiques : en effet, le premier terme de l'équation précédente marque la contribution d'une distribution continue de monopôles alimentés par la dérivée normale de la pression acoustique générée par la source primaire, tandis que le deuxième terme marque la contribution d'une distribution continue de dipôles acoustiques, alimentés par la pression acoustique générée par la source primaire. Ainsi, l'équation intégrale nous affirme que pour un domaine de résolution donné, tout champ sonore généré par une source acoustique extérieure au domaine peut être recréé par une distribution de sources secondaires, ce qui est bien une généralisation du principe de Huygens<sup>1</sup>.

Dans le chapitre précédent, les atomes élémentaires sur lesquels était décomposé un champ sonore étaient des harmoniques. Il s'agit ici des fonctions de Green et de leurs dérivées par rapport à la normale à la surface. L'opérateur d'analyse associé a pour objectif de nous donner les "coefficients" associés à la décomposition. Comme nous l'avons dit, il s'agit de la pression acoustique et de sa dérivée par rapport à la normale.

Finalement, l'équation intégrale précédente est aussi à la base d'une technique d'analyse du champ sonore : l'holographie acoustique en champ proche. Cette technique est très intéressante car elle permet une réduction très importante du nombre de paramètres nécessaires pour représenter le champ sonore dans un certain volume. En effet, seule la connaissance sur la frontière permet de caractériser le comportement dans un volume complet, ce qui est la caractéristique des systèmes holographiques. Nous avons souligné au chapitre précédent que les descriptions harmoniques réalisaient la même économie étant donné que seule leur connaissance sur les domaines définis par les relations de dispersion suffisait pour caractériser complètement un champ sonore donné.

## 2.4 Liens avec les représentations harmoniques

Les décompositions harmoniques sont plus générales que l'équation intégrale de Kirchhoff, étant donné que les harmoniques forment un ensemble complet, comme en témoignent les théorèmes de Fourier généralisés (1.28), (1.34) et (1.41). Ainsi, la nature du signal 4D analysé au moyen des transformées de Fourier généralisées importe peu. Cependant, le fait de savoir que les objets analysés sont des champs sonores fournit une information *a priori* : la représentation

<sup>1</sup>La distribution de sources secondaire devait être située sur un front d'onde de la source initiale dans le cas du principe de Huygens, de sorte que seule la distribution de monopôles était sollicitée.



harmonique est susceptible d'avoir des singularités dans les zones définies par les relations de dispersion (1.4), (1.10) et (1.18). D'un autre côté, quelles que soient les signatures temporelles appliquées à la distribution de monopôles et de dipôles, le champ sonore synthétisé par l'équation intégrale (2.13) satisfait toujours l'équation des ondes (1.1).

L'espace engendré par l'ensemble des fonctions harmoniques est donc plus étendu que celui engendré par les fonctions de Green intervenant dans la formulation de Kirchhoff du principe de Huygens. La première partie de ce développement traitera de la conversion d'une représentation intégrale du champ sonore en une représentation harmonique. Cette conversion n'est pas destructive : aucune information n'est perdue. La deuxième partie du développement traitera de la transition inverse, à savoir la représentation intégrale d'un champ sonore associée à une représentation harmonique donnée. Nous soulignerons en particulier qu'il s'agit d'une projection, ce qui semble naturel car nous avons mentionné que l'espace engendré par les fonctions de Green était plus réduit que celui des fonctions harmoniques. Nous préciserons en particulier les limites associées à cette projection.

### 2.4.1 Conversion d'une représentation intégrale en représentation harmonique

La formulation de Kirchhoff du principe de Huygens fait intervenir la fonction de Green en espace infini  $\mathbf{G}(\mathbf{r}_0, t_0 | \mathbf{r}, t)$  ainsi que son gradient. Cette représentation peut être convertie en une représentation harmonique en utilisant la même stratégie que celle utilisée à la section 1.2.5. Dans le cas des ondes planes, l'application de la transformée de Fourier cartésienne (1.27) pour le champ sonore  $p(\mathbf{r}, t)$  exprimé par sa représentation intégrale (2.13) conduit après l'inversion des deux intégrales multiples à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{p\}(k_x, k_y, k_z, \omega) = & \int_{t_0=t_i}^{t^+} \iint_{\mathbf{r}_0 \in \mathcal{S}} \left[ \nabla_0 p(\mathbf{r}_0, t_0) \iiint_{(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^4} \mathbf{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} d^3 \mathbf{r} dt \right. \\ & \left. - p(\mathbf{r}_0, t_0) \iiint_{(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^4} \nabla_0 \mathbf{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} d^3 \mathbf{r} dt \right] \cdot d\mathbf{S}_0 dt_0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pour le deuxième terme de l'intégrande, le gradient  $\nabla_0$  et la quadruple intégrale peuvent être inversées, étant donné qu'elles ne s'appliquent pas aux mêmes variables, de sorte que l'équation précédente se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{p\}(k_x, k_y, k_z, \omega) = & \int_{t_0=t_i}^{t^+} \iint_{\mathbf{r}_0 \in \mathcal{S}} \left[ \nabla_0 p(\mathbf{r}_0, t_0) \langle \mathbf{G}_{\mathbf{r}_0, t_0} | \Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega}^{\text{op}} \rangle \right. \\ & \left. - p(\mathbf{r}_0, t_0) \nabla_0 \langle \mathbf{G}_{\mathbf{r}_0, t_0} | \Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega}^{\text{op}} \rangle \right] \cdot d\mathbf{S}_0 dt_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Des expressions analogues seraient obtenues pour les harmoniques cylindriques et les harmoniques sphériques, en remplaçant  $\Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega}^{\text{op}}$  dans l'équation ci-dessus par  $\Psi_{k_r, l, k_z, \omega}^{\text{hc}}$  et  $\Psi_{k, l, m, \omega}^{\text{hs}}$  respectivement.

Finalement, le point déterminant de ce type de conversion se situe dans le calcul des produits internes entre la fonction de Green  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$  et les harmoniques considérés. Ces produits internes sont calculés directement à partir de la définition de la fonction de Green (2.1). Nous appliquons à cette équation l'opérateur d'analyse associé à la représentation harmonique considérée. Plusieurs simplifications s'effectuent, étant donné que les ondes planes, les harmoniques cylindriques et les harmoniques sphériques sont tous des vecteurs propres de l'opérateur Laplacien avec les valeurs propres  $-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$  pour les ondes planes,  $-(k_r^2 + k_z^2)$  pour les harmoniques cylindriques et  $-k^2$  pour les harmoniques sphériques [107]. De plus, ils sont aussi des

vecteurs propres de l'opérateur de la dérivée temporelle seconde, ayant pour valeur propre  $-\omega^2$ . L'application des opérateurs d'analyse pour le membre droit de l'équation  $-\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0)$  est élémentaire en utilisant les propriétés de la distribution de Dirac. Nous obtenons le résultat final suivant pour l'expression des produits internes [107] :

$$\langle \mathbf{G}_{\mathbf{r}_0, t_0} | \Psi_{k_x, k_y, k_z, \omega} \rangle = \frac{e^{-i(k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 + \omega t_0)}}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (2.16)$$

$$\langle \mathbf{G}_{\mathbf{r}_0, t_0} | \Psi_{k_r, l, k_z, \omega} \rangle = \frac{J_l(k_r r_0) e^{-i(l\phi_0 + k_z z_0 + \omega t_0)}}{k_r^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (2.17)$$

$$\langle \mathbf{G}_{\mathbf{r}_0, t_0} | \Psi_{k, l, m, \omega} \rangle = \frac{j_l(k r_0) \overline{Y}_l^m(\phi_0, \theta_0) e^{-i\omega t_0}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (2.18)$$

Ces résultats marquent bien le fait que contrairement aux solutions de l'équation des ondes homogène, les transformées de Fourier généralisées de la fonction de Green en espace infini sont non nulles même si les relations de dispersion ne sont plus vérifiées. Cependant, nous pouvons noter que les singularités dans le domaine de Fourier ne se situent que dans des zones où les relations de dispersion sont vérifiées.

Revenons un peu plus en détails sur la transformée de Fourier de l'équation des ondes homogènes :

$$\left( k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) P(\mathbf{k}, \omega) = 0$$

Nous vérifions bien que pour une onde plane  $\Psi_{k_{0x}, k_{0y}, k_{0z}, \omega_0}^{\text{op}}$ , dont la transformée de Fourier est  $(2\pi)^4 \delta(k_x - k_{0x}) \delta(k_y - k_{0y}) \delta(k_z - k_{0z}) \delta(\omega - \omega_0)$ , le membre de gauche de l'équation précédente est nul uniquement si la relation de dispersion est vérifiée, à savoir  $k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}$ .

Dans le cas général de l'équation des ondes inhomogène, la transformée de Fourier de l'équation (1.1) vaut :

$$\left( k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) P(\mathbf{k}, \omega) = -Q(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.19)$$

L'expression précédente indique bien que pour un terme de source non nul, la transformée de Fourier du champ acoustique est bien susceptible de posséder des singularités pour les zones du domaine de Fourier où les relations de dispersion sont vérifiées, comme en témoignent les équations (2.16), (2.17) et (2.18).

## 2.4.2 Projection d'une représentation harmonique en une représentation intégrale

Si l'une des représentations harmoniques d'un champ sonore est connue, les opérateurs de synthèse (1.30), (1.36) et (1.43) permettent de reconstruire le champ en tout point de l'espace. En particulier, il est possible de calculer le champ sonore et sa dérivée normale sur la frontière du domaine de résolution  $\mathcal{S}$ . Ce sont les paramètres de l'opérateur de synthèse de l'équation intégrale (2.13). Ce mode opératoire nous permet donc de faire la "conversion" d'une représentation harmonique du champ sonore en sa représentation intégrale. Toutefois, plusieurs limitations sont associées à cette "conversion" :

- l'équation intégrale de Kirchhoff est capable de synthétiser uniquement des champs satisfaisant l'équation des ondes (1.1), tandis que les représentations harmoniques permettent de reconstruire des champs ayant des contraintes beaucoup plus légères ;

- pour un domaine de résolution  $\mathcal{V}$  particulier, la formulation de Kirchhoff du principe de Huygens est incapable de reproduire des sources situées à l'intérieur de ce domaine, contrairement aux représentations harmoniques.

Pour ces raisons, cette “conversion” est destructive et il est plus préférable de l'appeler projection. Nous allons maintenant revenir en détails sur chacune de ces deux limitations.

### Première limitation

Les descriptions harmoniques englobent un contexte plus large que celui des descriptions basées sur l'équation intégrale de Kirchhoff. Quel est le comportement de l'intégrale de Kirchhoff (2.13) lorsque la pression et la dérivée normale de la pression sont celles d'un champ ne satisfaisant pas l'équation des ondes (1.1) ?

Un premier exemple où une légère différence apparaît survient lorsqu'il existe un écart entre la vitesse du champ sonore mesuré et celle fixée pour le modèle. Soit  $c$  la célérité du modèle, et  $c'$  la célérité réelle. L'intégrale de Kirchhoff donnerait les résultats attendus si la célérité utilisée dans le modèle était  $c'$ , mais la célérité utilisée est  $c$  : quelle est l'influence de l'erreur sur la célérité sur le champ extrapolé par l'intégrale de Kirchhoff ?

Un autre exemple où des différences très fortes apparaissent entre la description harmonique et l'intégrale de Kirchhoff correspond au champ sonore mesuré par une antenne de microphones. En effet, un champ sonore échantillonné par une antenne de microphones ne satisfait plus du tout l'équation des ondes (1.1), comme cela sera expliqué en détails à la section 5.2. Nous avons vu que les impulsions de Dirac multidimensionnelles constituaient une représentation harmonique à part entière à la section 1.2.3. Or, il s'agit de la représentation harmonique utilisée dès que nous essayons de calculer numériquement l'intégrale de Kirchhoff parce qu'il est nécessaire de discrétiser l'intégrale. Cette première limitation incorpore donc tous les effets dus à la discrétisation de l'intégrale de Kirchhoff, qui font l'objet de l'étude de l'*aliasing spatial* dans le domaine de la Wave Field Synthesis.

### Deuxième limitation

Dans ce paragraphe, nous allons revenir plus en détail sur la formulation de Kirchhoff du principe de Huygens (2.13). À cette fin, nous n'allons plus supposer que les conditions nécessaires à sa démonstration sont encore respectées. À la place, nous considérons une surface fermée  $\mathcal{S}$  délimitant un domaine extérieur  $\mathcal{V}_{\text{ext}}$  et un domaine intérieur  $\mathcal{V}_{\text{int}}$ , et nous supposons de plus qu'il n'y a pas de sources présentes sur cette surface. Cette surface peut être vue comme un capteur spatial continu du champ sonore, enregistrant le profil temporel de la pression acoustique ainsi que de la dérivée de celle-ci par rapport à la normale. Ensuite, cette surface-capteur est remplacée par une distribution continue de dipôles et de monopôles alimentés par la pression et la dérivée normale correspondante respectivement. L'objectif de ce paragraphe est de répondre à la question suivante : quel champ sonore est effectivement reproduit par le dispositif ?

Deux cas vont être étudiés dans ce but :

- le premier cas étudié considère la présence de sources acoustiques uniquement dans le domaine extérieur ;
- le deuxième cas considère la présence de sources uniquement dans le domaine intérieur.

Nous envisagerons ensuite le cas général comme la réunion des deux cas précédents. Dans tout ce développement, le vecteur surface  $d\mathbf{S}_0$  pointe vers l'extérieur de la surface fermée. De plus, nous supposons que le champ sonore satisfait des conditions de Sommerfeld à l'infini.

Dans le cas où seules des sources extérieures sont présentes, le principe de Huygens peut être appliqué au domaine intérieur, où toutes les hypothèses nécessaires à sa démonstration sont respectées. L'équation intégrale stipule alors que le champ sonore est correctement reproduit dans

le volume intérieur  $\mathcal{V}'_{\text{int}}$ , tandis qu'il est nul à l'extérieur dans  $\mathcal{V}'_{\text{ext}}$ . Dans la suite de ce paragraphe, la composante du champ sonore créée par des sources extérieures est notée  $p_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ .

Dans le cas où seules des sources intérieures sont présentes, le même raisonnement peut s'appliquer étant donné que toutes les hypothèses relatives à la démonstration du principe de Huygens sont respectées à l'exception de l'orientation du vecteur surface  $d\mathbf{S}_0$ . La conséquence est que le champ effectivement reproduit est  $-p(\mathbf{r}, t)$  dans  $\mathcal{V}'_{\text{ext}}$  et est nul dans le domaine intérieur  $\mathcal{V}'_{\text{int}}$ . Dans la suite de ce paragraphe, la composante du champ sonore créée par des sources extérieures est notée  $p_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)$ .

Dans le cas général où des sources sont présentes à la fois dans les domaines intérieur et extérieur, mais pas sur la frontière, le champ sonore reproduit par la formulation de Kirchhoff du principe de Huygens, avec  $d\mathbf{S}_0$  pointant vers l'extérieur, est  $p_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$  dans le domaine intérieur  $\mathcal{V}'_{\text{int}}$  et  $-p_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)$  dans le domaine extérieur  $\mathcal{V}'_{\text{ext}}$ . Cette dernière propriété est la principale limitation de la projection d'une représentation harmonique en une représentation intégrale. En effet, si le champ sonore est synthétisé en utilisant les opérateurs de synthèse associés aux représentations harmoniques, c'est-à-dire (1.30), (1.36) ou (1.43) pour fournir les paramètres nécessaires au calcul de l'intégrale de Kirchhoff (2.11), le champ sonore effectivement synthétisé n'est pas le champ initial  $p(\mathbf{r}, t)$ , mais celui qui vient d'être décrit. La représentation harmonique initiale ne distingue pas le domaine intérieur du domaine extérieur.

## 2.5 Synthèse de champs sonores par une distribution surfacique de sources secondaires

### 2.5.1 Cas d'un unique plan d'équation $x = x_0$

L'objectif de cette section est de synthétiser des ondes planes  $\Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{PW}}(\mathbf{r}, t) = p_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} + \omega_0 t)}$ , où  $p_0$  désigne un coefficient de normalisation unitaire dont la dimension est le Pascal  $\text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ . Dans la suite de cette partie, ce coefficient est omis pour des raisons de lisibilité. Pour effectuer la synthèse, nous allons utiliser une distribution surfacique de monopôles et de dipôles, comme le suggère l'intégrale de Kirchhoff. La distribution de monopôles sera alimentée par la composante normale du gradient de pression générée par l'onde plane initiale, et la distribution de dipôles sera alimentée par la pression générée par l'onde plane initiale, dans le plan d'équation  $x = x_0$ . Ainsi, le champ synthétisé par cette distribution plane de sources secondaires est solution de l'équation des ondes avec le second membre suivant :

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \left[ \left( \frac{\partial \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{PW}}(x, y, z, t)}{\partial x} \right)_{x=x_0} \delta(x - x_0) + \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{PW}}(x_0, y, z, t) \delta'(x - x_0) \right] \quad (2.20)$$

Avant tout, nous vérifions que chaque membre de l'équation précédente est homogène à des  $\text{Pa} \cdot \text{m}^{-2}$ , étant donné que la dimension de  $\delta^{(n)}(x - x_0)$  est le  $\text{m}^{-n}$ . Le terme en  $\delta(x - x_0)$  indique la présence de monopôles acoustiques dans le plan d'équation  $x = x_0$  tandis que le terme en  $\delta'(x - x_0)$  indique la présence de doublets acoustiques, c'est-à-dire des dipôles acoustiques.

Le champ synthétisé par cette distribution plane de sources secondaires sera calculé au moyen de la transformée de Fourier opérant à la fois sur l'espace et le temps. L'application de la transformée de Fourier au premier membre de l'équation (2.20) donne  $\left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) P(\mathbf{k}, \omega)$ . Nous allons maintenant détailler le calcul des transformées de Fourier des deux termes du membre droit de

l'équation (2.20). Commençons par le premier terme :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \left( \frac{\partial \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{pw}}(x, y, z, t)}{\partial x} \right)_{x=x_0} \delta(x-x_0) \right\} (\mathbf{k}, \omega) \\ = \iiint_{(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^4} \mathbf{i} k_{0x} e^{i(k_{0x}x_0 + k_{0y}y + k_{0z}z + \omega_0 t)} \delta(x-x_0) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t)} dx dy dz dt \\ = \mathbf{i} k_{0x} e^{i(k_{0x} - k_x)x_0} (2\pi)^3 \delta(k_y - k_{0y}) \delta(k_z - k_{0z}) \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (2.21)$$

La transformée de Fourier du deuxième terme est explicitée par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{pw}}(x_0, y, z, t) \delta'(x-x_0) \right\} (\mathbf{k}, \omega) \\ = \iiint_{(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^4} e^{i(k_{0x}x_0 + k_{0y}y + k_{0z}z + \omega_0 t)} \delta'(x-x_0) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t)} dx dy dz dt \\ = \mathbf{i} k_x e^{i(k_{0x} - k_x)x_0} (2\pi)^3 \delta(k_y - k_{0y}) \delta(k_z - k_{0z}) \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nous avons utilisé la propriété  $\int_{x \in \mathbb{R}} f(x) \delta'(x-x_0) dx = -f'(x_0)$  pour obtenir la formule précédente. La synthèse des deux résultats précédents permet d'aboutir à la transformée de Fourier de la pression acoustique correspondante au problème posé par l'équation (2.20) :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{-\mathbf{i}(k_x + k_{0x}) e^{i(k_{0x} - k_x)x_0} (2\pi)^3 \delta(k_y - k_{0y}) \delta(k_z - k_{0z}) \delta(\omega - \omega_0)}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)} \\ &= \frac{-\mathbf{i}(k_x + k_{0x}) e^{-i(k_x - k_{0x})x_0} (2\pi)^3 \delta(k_y - k_{0y}) \delta(k_z - k_{0z}) \delta(\omega - \omega_0)}{\left(k_x^2 - k_{0x}^2\right) + \left(k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2}\right)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Or, si l'onde plane que nous cherchons à restituer vérifie la relation de dispersion  $k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2} = 0$ , l'équation précédente se simplifie et devient :

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e^{-i(k_x - k_{0x})x_0} (2\pi)^3 \delta(k_y - k_{0y}) \delta(k_z - k_{0z}) \delta(\omega - \omega_0)}{\mathbf{i}(k_x - k_{0x})} \quad (2.24)$$

Sachant que la transformée de Fourier inverse de  $1/(ik_x)$  est  $\text{sgn}(x)/2$ , nous en déduisons que la transformée de  $1/(ik_x - ik_{0x})$  est  $e^{ik_{0x}x} \text{sgn}(x)/2$ . Le facteur restant en  $e^{-i(k_x - k_{0x})x_0}$  introduit un retard égal à  $x_0$  et la multiplication par une exponentielle complexe. Finalement, le champ effectivement synthétisé est :

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{pw}}(x, y, z, t) \text{sgn}(x - x_0) \quad (2.25)$$

## 2.5.2 Cas de deux plans d'équations $x = x_1$ et $x = x_2$

Nous allons maintenant utiliser deux distributions planes de sources secondaires pour synthétiser une onde plane  $\Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{pw}}(\mathbf{r}, t) = p_0 \exp(\mathbf{i}[\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} + \omega_0 t])$ , la première étant située en  $x = x_1$  et la deuxième étant située en  $x = x_2 > x_1$ . Nous cherchons le résultat de l'équation des ondes suivantes :

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = - \left[ \left( \frac{\partial \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{PW}}(x, y, z, t)}{\partial x} \right)_{x=x_1} \delta(x-x_1) + \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{PW}}(x_1, y, z, t) \delta'(x-x_1) \right] + \left[ \left( \frac{\partial \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{PW}}(x, y, z, t)}{\partial x} \right)_{x=x_2} \delta(x-x_2) + \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{PW}}(x_2, y, z, t) \delta'(x-x_2) \right] \quad (2.26)$$

D'après le résultat (2.25) du paragraphe précédent, nous obtenons que le champ globalement synthétisé est :

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{PW}}(x, y, z, t) (\text{sgn}(x-x_1) - \text{sgn}(x-x_2)) \quad (2.27)$$

$$= \begin{cases} \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}^{\text{PW}}(x, y, z, t) & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'onde plane est correctement synthétisée entre les deux plans uniquement.

### 2.5.3 Intégrales de Rayleigh

Que se passe-t-il lorsque nous ne voulons utiliser qu'un seul type de sources, soit les monopôles, soit les dipôles ?

#### Intégrale de Rayleigh de deuxième type

Dans le cas où seule la distribution de sources monopôlares est utilisée, la transformée de Fourier du champ résultant est donnée par la formule suivante :

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \frac{-ik_{0x} e^{-i(k_x - k_{0x})x_0} (2\pi)^3 \delta(k_y - k_{0y}) \delta(k_z - k_{0z}) \delta(\omega - \omega_0)}{k_x^2 - k_{0x}^2} \quad (2.28)$$

La décomposition de la fraction rationnelle en deux pôles simples donne :

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} e^{-i(k_x - k_{0x})x_0} (2\pi)^3 \delta(k_y - k_{0y}) \delta(k_z - k_{0z}) \delta(\omega - \omega_0) \cdot \left[ \frac{1}{i(k_x - k_{0x})} - \frac{1}{i(k_x + k_{0x})} \right] \quad (2.29)$$

#### Intégrale de Rayleigh de premier type

Dans le cas où seule la distribution de sources dipôlares est utilisée, la transformée de Fourier du champ résultant est donnée par la formule suivante :

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \frac{-ik_x e^{-i(k_x - k_{0x})x_0} (2\pi)^3 \delta(k_y - k_{0y}) \delta(k_z - k_{0z}) \delta(\omega - \omega_0)}{k_x^2 - k_{0x}^2} \quad (2.30)$$

La décomposition de la fraction rationnelle en deux pôles simples donne :

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} e^{-i(k_x - k_{0x})x_0} (2\pi)^3 \delta(k_y - k_{0y}) \delta(k_z - k_{0z}) \delta(\omega - \omega_0) \cdot \left[ \frac{1}{i(k_x - k_{0x})} + \frac{1}{i(k_x + k_{0x})} \right] \quad (2.31)$$

Nous vérifions bien au passage que la somme de l'équation (2.29) et de l'équation (2.31) est égale à l'équation (2.24). Il ne nous reste plus maintenant qu'à calculer la transformée de Fourier inverse de  $\frac{e^{-i(k_x - k_{0x})x_0}}{i(k_x + k_{0x})}$ . En suivant un raisonnement analogue à celui du paragraphe 2.5.1, nous trouvons que cette transformée inverse vaut  $1/2 e^{-ik_{0x}(x-x_0)} e^{ik_{0x}x_0} \operatorname{sgn}(x-x_0)$ .

Finalement, la transformée de Fourier inverse globale pour l'intégrale de Rayleigh de deuxième type est :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4} \operatorname{sgn}(x-x_0) \left[ e^{ik_{0x}x} - e^{-ik_{0x}x} e^{2ik_{0x}x_0} \right] e^{i(k_{0y}y + k_{0z}z + \omega_0 t)} \\ &= \frac{i}{2} e^{ik_{0x}x_0} \operatorname{sgn}(x-x_0) \sin(k_{0x}(x-x_0)) e^{i(k_{0y}y + k_{0z}z + \omega_0 t)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Quant à l'intégrale de Rayleigh de premier type, nous obtenons :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4} \operatorname{sgn}(x-x_0) \left[ e^{ik_{0x}x} + e^{-ik_{0x}x} e^{2ik_{0x}x_0} \right] e^{i(k_{0y}y + k_{0z}z + \omega_0 t)} \\ &= \frac{1}{2} e^{ik_{0x}x_0} \operatorname{sgn}(x-x_0) \cos(k_{0x}(x-x_0)) e^{i(k_{0y}y + k_{0z}z + \omega_0 t)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Comment interpréter les deux derniers résultats ? Pour l'intégrale de Rayleigh de deuxième type où les monopôles sont alimentés par le gradient de pression, nous pouvons dire, d'un point de vue dual, que deux ondes planes de vecteurs d'ondes différents sont capables de créer le même profil du gradient de pression dans le plan d'équation  $x = x_0$ . Ces deux ondes planes sont justement  $e^{i(k_{0x}x + k_{0y}y + k_{0z}z + \omega_0 t)}$  et  $-e^{i(-k_{0x}x + k_{0y}y + k_{0z}z + \omega_0 t)} e^{2ik_{0x}x_0}$ . Il y a donc une sorte d'aliasing spatial, qui traduit l'ambiguïté entre les ondes se propageant vers les  $x$  croissants, ou les ondes se propageant vers les  $x$  décroissants lorsqu'elles ne sont observées que dans un plan unique. Au moment de la synthèse, ces deux ondes sont générées. Une conclusion analogue serait établie pour l'intégrale de Rayleigh du premier type.

**Remarques sur la causalité :** L'équation des ondes fait intervenir la dérivée temporelle seconde de la pression acoustique : elle est donc invariante par retournement temporel. Si  $p(\mathbf{r}, t)$  est une solution de l'équation des ondes, alors  $p(\mathbf{r}, -t)$  est aussi une solution. Lors de la démonstration de l'expression de la fonction de Green en espace infini, la transformée de Fourier inverse, qui fait intervenir des intégrales de contour, possède aussi deux solutions  $\delta(t \pm R/c)/R$ , mais nous ne retenons que la solution "causale", ou divergente par rapport à la localisation de la singularité. De la même manière, dans les expressions précédentes, le champ qui serait effectivement synthétisé en utilisant un réseau réel ne contiendrait aussi que des ondes divergentes du point de vue des plans.

#### 2.5.4 Cas du parallélépipède

Nous allons maintenant nous intéresser à la synthèse d'ondes planes à l'intérieur d'un parallélépipède. L'objectif est d'aboutir à la même conclusion que l'intégrale de Kirchhoff, à savoir que le champ est correctement synthétisé à l'intérieur du parallélépipède, et nul à l'extérieur.

Nous connaissons la transformée de Fourier du champ synthétisé : il s'agit du produit de convolution entre la TF de l'onde plane initiale et de la TF de la fonction caractéristique de la zone d'analyse<sup>2</sup>. Le but est de retrouver le même résultat en utilisant directement l'équation des ondes :

$$\begin{aligned} \nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = & -e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} + \omega_0 t)} \\ & \cdot \left[ \Pi_{L_y, L_z}(y, z) \left[ ik_{0x} \left( \delta \left( x - \frac{L_x}{2} \right) - \delta \left( x + \frac{L_x}{2} \right) \right) + \delta' \left( x - \frac{L_x}{2} \right) - \delta' \left( x + \frac{L_x}{2} \right) \right] \right. \\ & + \Pi_{L_x, L_z}(x, z) \left[ ik_{0y} \left( \delta \left( y - \frac{L_y}{2} \right) - \delta \left( y + \frac{L_y}{2} \right) \right) + \delta' \left( y - \frac{L_y}{2} \right) - \delta' \left( y + \frac{L_y}{2} \right) \right] \\ & \left. + \Pi_{L_x, L_y}(x, y) \left[ ik_{0z} \left( \delta \left( z - \frac{L_z}{2} \right) - \delta \left( z + \frac{L_z}{2} \right) \right) + \delta' \left( z - \frac{L_z}{2} \right) - \delta' \left( z + \frac{L_z}{2} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

La transformée de Fourier de cette équation, en suivant une démarche analogue à celle effectuée au paragraphe 2.5.1, vaut :

$$\begin{aligned} \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) P(\mathbf{k}, \omega) = & - \\ & \left[ i(k_{0x} + k_x) \left[ e^{i(k_{0x} - k_x) \frac{L_x}{2}} - e^{-i(k_{0x} - k_x) \frac{L_x}{2}} \right] L_y L_z \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_y - k_{0y}) L_y}{2\pi} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_z - k_{0z}) L_z}{2\pi} \right) 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \right. \\ & + i(k_{0y} + k_y) \left[ e^{i(k_{0y} - k_y) \frac{L_y}{2}} - e^{-i(k_{0y} - k_y) \frac{L_y}{2}} \right] L_x L_z \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_x - k_{0x}) L_x}{2\pi} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_z - k_{0z}) L_z}{2\pi} \right) 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \\ & \left. + i(k_{0z} + k_z) \left[ e^{i(k_{0z} - k_z) \frac{L_z}{2}} - e^{-i(k_{0z} - k_z) \frac{L_z}{2}} \right] L_x L_y \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_x - k_{0x}) L_x}{2\pi} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_y - k_{0y}) L_y}{2\pi} \right) 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

L'expression précédente peut être remaniée afin de faire apparaître les derniers sinus cardinaux manquants :

$$\begin{aligned} \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) P(\mathbf{k}, \omega) = & + \\ & \left[ \left( k_x^2 - k_{0x}^2 \right) L_x L_y L_z \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_x - k_{0x}) L_x}{2\pi} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_y - k_{0y}) L_y}{2\pi} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_z - k_{0z}) L_z}{2\pi} \right) 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \right. \\ & + \left( k_y^2 - k_{0y}^2 \right) L_x L_y L_z \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_x - k_{0x}) L_x}{2\pi} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_y - k_{0y}) L_y}{2\pi} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_z - k_{0z}) L_z}{2\pi} \right) 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \\ & \left. + \left( k_z^2 - k_{0z}^2 \right) L_x L_y L_z \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_x - k_{0x}) L_x}{2\pi} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_y - k_{0y}) L_y}{2\pi} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{(k_z - k_{0z}) L_z}{2\pi} \right) 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Or nous avons la propriété suivante, si l'onde plane que l'on cherche à synthétiser respecte la relation de dispersion :

---

<sup>2</sup>La TF de la fonction caractéristique du parallélépipède est un sinus cardinal pour chacune des trois dimensions de l'espace.



$$\begin{aligned} [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - (k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2)] \delta(\omega - \omega_0) &= \left[ k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2} \right] \delta(\omega - \omega_0) \\ &= \left[ k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

En insérant ce résultat dans l'équation (2.36), nous obtenons finalement que :

$$P(\mathbf{k}, \omega) = L_x L_y L_z \operatorname{sinc}\left(\frac{(k_x - k_{0x})L_x}{2\pi}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{(k_y - k_{0y})L_y}{2\pi}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{(k_z - k_{0z})L_z}{2\pi}\right) 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (2.37)$$

Ceci est bien le résultat attendu, à savoir la transformée d'une onde plane tronquée à un parallélépipède de dimensions  $L_x, L_y$  et  $L_z$ .

## 2.6 Conclusion sur la synthèse de champs sonores

Dans ce chapitre, un des résultats les plus importants que nous avons démontré est que tout champ sonore dans un domaine vide de sources acoustiques est caractérisé complètement par la connaissance du profil temporel de la pression acoustique sur la surface fermée délimitant le domaine. Malheureusement, la reconstruction du champ sonore à partir de la connaissance de ce profil est très compliquée car elle nécessite la connaissance de la fonction de Green satisfaisant des conditions aux limites de Dirichlet homogènes et pour laquelle nous ne disposons jamais de formulation analytique. Ce résultat est quand même utile dans la pratique, car il confirme la démarche employée par Ise [50] et Takane *et al.* [97] : si nous parvenons à imposer le même profil temporel du champ de pression acoustique sur une surface fermée que celui d'une source initiale extérieure au domaine, mais par un dispositif subsidiaire, alors nous sommes assurés d'avoir une reconstruction parfaite à l'intérieur du domaine. Finalement, les considérations du problème dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel ne sont pas équivalentes : dans le domaine fréquentiel, la connaissance du profil de la pression acoustique à une fréquence donnée était parfois insuffisante pour caractériser complètement le champ sonore à l'intérieur, et en particulier aux fréquences de résonance du domaine.

Les représentations intégrales du champ sonore connaissent un réel succès dans le domaine de la synthèse de champs sonores sur une zone étendue de l'espace car leurs formulations font clairement apparaître les sources acoustiques nécessaires pour la reconstruction du champ initial. Ceci nous donne directement le procédé utilisé pour la restitution : discrétisation de l'intégrale et approximation des monopôles et des dipôles par des sources réelles. Le maillon faible reste les effets de la discrétisation de l'intégrale de Kirchhoff pour un tel procédé. Des exemples de dégradation apparaissant avec la discrétisation sont l'*aliasing spatial* et l'apparition d'échos qui peuvent être très préjudiciables pour l'auditeur. En effet, dans l'intégrale de Kirchhoff, une partie des sources sert à synthétiser le champ "direct" tandis qu'une autre partie des sources est mobilisée pour synthétiser un champ "d'interférence" de sorte que le champ globalement synthétisé soit nul à l'extérieur du domaine d'intérêt (une illustration de ce phénomène a été donnée à la section 2.5.2 pour la synthèse d'ondes planes entre deux plans d'abscisses différentes). Au moment de la synthèse utilisant une répartition discrète de sources, il vaut mieux uniquement sélectionner les sources émettant la composante "directe" du champ et éliminer la composante "d'interférence" car la plupart du temps le remède (apparition d'échos) est pire que le mal (coloration du champ reproduit par l'acoustique du lieu d'écoute). Pour cela, il est nécessaire de recourir à un traitement qui dissocie ces deux composantes du champ sonore synthétisé, ce qui n'existe pas encore à l'heure actuelle.

La dernière partie de ce chapitre était consacrée aux liens entre la décomposition en ondes planes et l'intégrale de Kirchhoff. De même que nous avons démontré qu'il existait plusieurs types de fonctions de Green (avancée, retardée, et mixte) nous aurions aimé démontré que ces résultats se transposaient à la synthèse d'ondes planes par l'intermédiaire d'une distribution de sources planes, comme décrit à la section 2.5.1. Nous avons démontré l'équivalent du résultat de la fonction de Green mixte, à la fois causale et anticausale : on remarque la similitude entre les équations (2.10) et (2.25) (facteur  $\frac{1}{2}$  et le fait qu'elles soient mixtes). Les deux autres résultats devraient aussi apparaître avec un autre choix dans le contour des pôles, mais ce n'est pas le cas. Le résultat le plus probant est la synthèse d'ondes planes à l'intérieur d'un parallélépipède par le biais d'une distribution continue de monopôles et de dipôles. Ce résultat a été démontré en utilisant les outils de la transformation de Fourier uniquement, et conduit aux mêmes conclusions que l'intégrale de Kirchhoff.

Nous pouvons nous interroger sur la pertinence d'une telle démarche car les calculs sous-jacents sont beaucoup plus compliqués que dans le cas de l'établissement de l'intégrale de Kirchhoff, dont le résultat a été démontré quel que soit le champ sonore, et pas seulement pour des ondes planes satisfaisant la relation de dispersion. Les enjeux de ces calculs sont importants à notre sens car l'intégrale de Kirchhoff est un résultat élégant mais dont les hypothèses ne sont pas flexibles : il est difficile d'étudier les effets de la discrétisation de l'intégrale dans la pratique. Au contraire, le formalisme de la transformée de Fourier est capable de s'adapter très facilement pour étudier les effets de la discrétisation, (voir à ce propos l'étude réalisée au chapitre 4). Nous pensons que cette voie apparaît comme une bonne perspective pour la poursuite de ces travaux.

## Chapitre 3

# Influence de la discrétisation sur l'analyse des champs sonores

### Résumé :

Dans ce chapitre, nous rappelons le théorème d'échantillonnage des signaux multidimensionnels à bande limitée décrits dans le système de coordonnées cartésiennes. Puis, nous démontrons un théorème similaire lorsque les signaux multidimensionnels sont à bande limitée, mais décrits dans le système de coordonnées cylindriques. L'hypothèse de signaux à bande limitée revêt différentes formes selon que les outils d'analyse employés sont la décomposition en ondes planes, en harmoniques cylindriques ou en harmoniques sphériques. Nous discutons ensuite de la difficulté de la généralisation du théorème d'échantillonnage pour des signaux à bande limitée, mais décrits dans le système de coordonnées sphériques.

Pour décrire le phénomène de repliement lorsque l'échantillonnage se fait en coordonnées cylindriques et que l'outil d'analyse utilisé est la décomposition en harmoniques cylindriques, nous étudions le comportement des séries de Fourier-Bessel cylindriques en dehors de la zone de convergence habituelle, c'est-à-dire un cylindre de rayon  $R$ , ce que nous n'avons vu nulle part ailleurs à notre connaissance. Ce même résultat peut s'étendre dans le cas des séries de Fourier-Bessel sphériques.

Les théorèmes d'échantillonnage peuvent s'appliquer pour des signaux multidimensionnels quelconques et pas uniquement aux champs sonores. Nous mentionnons aussi que l'étude des champs multidimensionnels sur un horizon fini, ou l'étude des champs multidimensionnels à support de Fourier fini (bande limitée) sont des problèmes duaux au sens de la théorie de Fourier.

Puis nous étudions les problèmes de l'analyse de champs sonores apparaissant dans des conditions réelles, où seul un nombre limité d'observations est disponible. En particulier, nous démontrons qu'il n'est pas possible d'envisager une reconstruction exacte des champs sonores à partir d'un nombre limité de mesures, étant donné qu'aucun champ multidimensionnel ne peut satisfaire simultanément les deux hypothèses d'être à horizon fini et à support de Fourier fini. Nous aboutissons alors à la conclusion que seule une analyse approchée est envisageable, et que l'objectif de tout traitement du signal mis en œuvre pour l'analyse de champs sonores se doit de minimiser l'influence du repliement, et ce quelle que soit la description du champ sonore employée (ondes planes, harmoniques cylindriques ou harmoniques sphériques).

### 3.1 Introduction

Le chapitre 1 s'est focalisé sur l'analyse des champs sonores dans des conditions idéales : l'expression du champ était connue quel que soit le point de l'espace et l'instant considérés. L'objectif du présent chapitre est de commencer à restreindre ces conditions, afin de se rapprocher le plus possible des conditions expérimentales, c'est-à-dire un champ sonore échantillonné dans le temps et dans l'espace, par le biais d'un réseau de microphones.

Une première étape nécessaire pour parvenir à cet objectif sera de faire l'étude de champs sonores à partir d'un nombre infini de mesures, à répartition discrète. Dans ce domaine, des travaux très intéressants ont été effectués par Ajdler et Vetterli à propos de l'échantillonnage et de l'interpolation de la fonction plenacoustique [4, 5, 6].

Nous aborderons la thématique de la reconstruction parfaite de champs multidimensionnels, en supposant que ceux-ci sont à "bande limitée". Nous remarquerons notamment que cette hypothèse ne prend pas la même forme selon que nous utilisons des échantillonnages séparables dans les systèmes de coordonnées cartésien, cylindrique et sphérique. Les théorèmes de reconstruction parfaite de champs multidimensionnels à bande limitée seront obtenus pour des schémas d'échantillonnage volumiques, et ne sont pas spécifiques aux champs sonores. Ces techniques sont à rapprocher des techniques mentionnant une décomposition modale du champ sonore [11, 12, 85, 104, 108, 110, 111].

À la fin de ce chapitre, nous initiions une discussion sur l'analogie entre l'étude de champs multidimensionnels observés sur un horizon fini (section 1.3) et l'étude des champs multidimensionnels à "bande limitée", qui sont des problèmes duaux au sens de la théorie de Fourier. Cela nous conduira à faire quelques remarques sur l'étude des signaux réels, lorsque le nombre d'échantillons disponible pour effectuer l'analyse devient fini.

### 3.2 Étude des champs multidimensionnels à support de Fourier fini

Dans le cas des signaux monodimensionnels, il est possible de caractériser complètement le signal à partir d'une répartition discrète des échantillons dans le domaine temporel, sous réserve que ceux-ci soient à bande limitée. Dans ce cas, un échantillonnage uniforme de période au moins inférieure à la période critique permet de caractériser complètement le signal de départ. En effet, le théorème d'échantillonnage, par interpolation en sinus cardinal permet de reconstruire le signal d'origine. L'idée est de généraliser ces propriétés pour des signaux multidimensionnels. Le passage de une à plusieurs dimensions peut se faire de plusieurs manières, car il existe plusieurs manières de repérer un point dans le nouvel espace. Ainsi, pour le cas qui nous intéresse, il existera plusieurs manières d'échantillonner l'espace, chacune adaptée pour une représentation harmonique donnée. De ce fait, un échantillonnage à coordonnées séparables dans le système de coordonnées cartésien semble tout à fait indiqué si nous choisissons les ondes planes comme représentation harmonique, etc.

#### 3.2.1 Géométrie cartésienne

Dans cette section, nous effectuons une présentation du théorème d'échantillonnage des signaux à bande limitée qui peut sembler peu conventionnelle en comparaison de celle effectuée habituellement. Ce choix n'est pas anodin : un raisonnement analogue sera employé pour les géométries cylindrique et sphérique.

Le produit interne dans le domaine continu était défini par la relation suivante :

$$\langle f|g \rangle = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, t) \bar{g}(x, y, z, t) dx dy dz dt \quad (3.1)$$

Lorsque le champ est échantillonné sur le réseau de points  $(x_l, y_m, z_n, t_q)_{(l,m,n,q) \in \mathbb{Z}^4}$ , nous utilisons le produit interne suivant :

$$\langle f || g \rangle = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} TL_x L_y L_z f(x_l, y_m, z_n, t_q) \bar{g}(x_l, y_m, z_n, t_q) \quad (3.2)$$

Dans cette équation apparaît une constante de normalisation  $TL_x L_y L_z$ , nécessaire pour que les produits internes (3.1) et (3.2) aient la même unité. Nous allons supposer que les champs analysés sont à bande limitée dans chacune des dimensions  $k_x, k_y, k_z$  et  $\omega$ , de bandes respectives  $k_{\max} = \omega_{\max}/c$  (limite commune pour  $k_x, k_y$  et  $k_z$ ) et  $\omega_{\max}$ . Le problème de l'échantillonnage étant à géométrie séparable, nous pouvons étudier le problème dans chaque dimension de manière indépendante. Nous le ferons pour la dimension  $x$ . L'objectif est que les harmoniques  $e^{ik_x x}$  pour  $k_x \in [-k_{\max}; k_{\max}]$ , qui étaient orthogonaux pour le produit interne continu (3.1) demeurent orthogonaux pour le produit discret (3.2). Nous cherchons donc une série de points  $(x_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  permettant d'assurer cette hypothèse. Considérons le produit interne de deux harmoniques de nombres d'onde différents  $k_{x_1}$  et  $k_{x_2}$  :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{k_{x_1}} | \Psi_{k_{x_2}} \rangle &= 2\pi \delta(k_{x_1} - k_{x_2}) \\ \langle \Psi_{k_{x_1}} || \Psi_{k_{x_2}} \rangle &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} L_x e^{i(k_{x_1} - k_{x_2})x_l} \end{aligned}$$

Si nous échantillonnons l'axe  $x$  uniformément de période  $L_x$ , cela devient :

$$\langle \Psi_{k_{x_1}} || \Psi_{k_{x_2}} \rangle = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} L_x e^{i(k_{x_1} - k_{x_2})lL_x}$$

Si nous voyons le résultat précédent comme une fonction de  $(k_{x_1} - k_{x_2})$ , alors il s'agit d'un résultat très connu des séries de Fourier, déjà utilisé au chapitre 1 à l'équation (1.63), sauf que nous ne restreignons plus l'intervalle d'étude à  $[-\frac{L_x}{2}; \frac{L_x}{2}]$ , mais que nous étudions son comportement sur  $\mathbb{R}$  tout entier :

$$\langle \Psi_{k_{x_1}} || \Psi_{k_{x_2}} \rangle = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta\left((k_{x_1} - k_{x_2}) - \frac{2\pi l}{L_x}\right)$$

Nous retrouvons ainsi que la période spatiale  $L_x$  devra vérifier l'inéquation (3.3) pour assurer l'orthogonalité des harmoniques pour le produit interne discret si les signaux initiaux sont à bande limitée dans l'intervalle  $[-k_{\max}; k_{\max}]$ . Il s'agit de la *condition de Shannon* pour l'échantillonnage des signaux à bande limitée :

$$\frac{2\pi}{L_x} \geq 2k_{\max} \iff L_x \leq \frac{\pi}{k_{\max}} \quad (3.3)$$

Il en est de même pour les autres dimensions  $y, z$  et  $t$ . Si les conditions permettant d'assurer un bon échantillonnage sont respectées, alors il nous est possible de reconstruire parfaitement le signal à partir de la connaissance unique de ses échantillons. C'est le théorème de reconstruction parfaite des signaux échantillonnés à bande limitée. Nous supposons dans la suite que les signaux sont échantillonnés au taux critique, correspondant à l'égalité dans la relation (3.3). Étant donné que le signal initial est à bande limitée et que les harmoniques sont orthogonaux pour le produit interne discret si la condition précédente est vérifiée, le champ sonore initial se calcule en prenant

la transformée de Fourier inverse du signal échantillonné, mais en ne sélectionnant que la bande d'intérêt. Ainsi, nous obtenons le résultat intermédiaire suivant :

$$p(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{k_x=-k_{\max}}^{+k_{\max}} \int_{k_y=-k_{\max}}^{+k_{\max}} \int_{k_z=-k_{\max}}^{+k_{\max}} \int_{\omega=-\omega_{\max}}^{+\omega_{\max}} \sum_{(l,m,n,q) \in \mathbb{Z}^4} \frac{\pi^4}{k_{\max}^3 \omega_{\max}} p(x_l, y_m, z_n, t_q) e^{ik_x(x-x_l)} e^{ik_y(y-y_m)} e^{ik_z(z-z_n)} e^{i\omega(t-t_q)} dk_x dk_y dk_z d\omega \quad (3.4)$$

En inversant la quadruple somme et la quadruple intégrale, nous obtenons la fameuse formule d'interpolation en sinus cardinal, permettant de reconstruire le signal initial à partir de la connaissance unique de ses échantillons :

$$p(x, y, z, t) = \sum_{(l,m,n,q) \in \mathbb{Z}^4} p(x_l, y_m, z_n, t_q) \operatorname{sinc}\left(\frac{(x-x_l)k_{\max}}{\pi}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{(y-y_m)k_{\max}}{\pi}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{(z-z_n)k_{\max}}{\pi}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{(t-t_q)\omega_{\max}}{\pi}\right) \quad (3.5)$$

Ce théorème de reconstruction parfaite de signaux multidimensionnels à bande limitée n'est pas spécifique aux champs sonores.

### 3.2.2 Géométrie cylindrique

Le produit interne dans le domaine continu pour la géométrie cylindrique était défini par la relation suivante :

$$\langle f|g \rangle = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(r, \phi, z, t) \bar{g}(r, \phi, z, t) r dr d\phi dz dt \quad (3.6)$$

Lorsque le champ est échantillonné sur le réseau de points  $(r_m, \phi_l, z_n, t_q)_{(m,l,n,q) \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}^3}$ , nous utilisons le produit interne suivant :

$$\langle f||g \rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \pi R^2 L_z T f(r_m, \phi_l, z_n, t_q) \bar{g}(r_m, \phi_l, z_n, t_q) \quad (3.7)$$

Le problème de l'échantillonnage pour les dimensions  $z$  et  $t$  reste inchangé par rapport à la section 3.2.1 sur la géométrie cartésienne. Nous allons revenir en détail sur la dimension radiale  $r$  et azimutale  $\phi$ , puis nous effectuerons une synthèse globale de l'analyse en coordonnées cylindriques.

#### Dimension radiale

Le produit interne continu concernant la variable radiale est :

$$\langle f|g \rangle = \int_{r=0}^{+\infty} f(r) \bar{g}(r) r dr \quad (3.8)$$

Nous savons, d'après la section 1.2.4 que les  $\Psi_{k_r, l}(r) = J_l(k_r r)$  forment un système orthogonal pour le produit interne ci-dessus :

$$\langle \Psi_{k_{r_1}} | \Psi_{k_{r_2}} \rangle = \frac{\delta(k_{r_1} - k_{r_2})}{\sqrt{k_{r_1} k_{r_2}}}$$

L'hypothèse de bande limitée se caractérisera ici par  $k_r \leq k_{\max}$ , et nous souhaitons que tous les  $J_l(k_r r)$  pour  $k_r \in [0; k_{\max}]$  soient orthogonaux pour un produit interne discret qui reste encore à

définir. Pour cela, nous allons utiliser la relation de complétude des séries de Fourier-Bessel cylindriques, déjà présentée à l'équation (1.74) de la section 1.3.2, sauf que nous renversons les points de vue : ce n'est plus l'horizon  $R$  qui est fini, mais la bande de Fourier  $K$ . Dans ces conditions, nous choisissons comme échantillons les racines de l'équation  $J_l(Kr) = 0$ , notées par la suite  $r_{lm}$  pour  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Si nous transcrivons directement cette relation, nous obtenons :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{K^2} \frac{J_l(k_{r_1} r_{lm}) J_l(k_{r_2} r_{lm})}{[J_{l+1}(Kr_{lm})]^2} = \frac{\delta(k_{r_1} - k_{r_2})}{\sqrt{k_{r_1} k_{r_2}}}$$

Cette relation est partiellement vraie, car, comme nous l'avons signalé dans la même section, il fallait que  $r$  soit dans l'intervalle  $[0; R]$  pour que le résultat soit vrai. Il est donc nécessaire de s'intéresser au comportement de cette série en dehors de l'intervalle  $[0; K]$ . Nous nous proposons de démontrer au moyen de simulations numériques que la formule générale est :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{K^2} \frac{J_l(k_r r_{lm}) J_l(k_{r_0} r_{lm})}{[J_{l+1}(Kr_{lm})]^2} = \\ \frac{1}{\sqrt{k_r k_{r_0}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[ \delta((k_r - k_{r_0}) - 4nK) - \delta((k_r + k_{r_0}) - (4n + 2)K) \right. \\ \left. + (-1)^{l+1} (\delta'((k_r - k_{r_0}) - (4n + 2)K) - \delta'((k_r + k_{r_0}) - (4n + 4)K)) \right] \quad (3.9) \end{aligned}$$

Nous retrouvons l'expression précédente pour  $n = 0$  en ne considérant que l'intervalle d'étude  $[0; K]$ . A notre connaissance, nous n'avons jamais vu une relation semblable à la relation (3.9) auparavant. Il se pourrait qu'elle ait déjà été démontrée quelque part, étant donné que les théorèmes d'échantillonnage pour les coordonnées cylindriques ne sont pas nouveaux (voir équation (3.12)). Nous ne donnons pas une démonstration rigoureuse de cette formule, qui sortirait du cadre de la thèse. Le lecteur n'a qu'à la considérer comme un résultat prospectif.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'allure de la série précédente tronquée à un ordre  $M$  fini de termes. Ceci est représenté sur la figure 3.1 pour les deux cas  $l$  pair ou impair. Nous avons normalisé la représentation en multipliant par  $\sqrt{k_r}$  l'équation (3.9) afin d'avoir des pics normalisés. La bande de Fourier  $K$  a été supposée limitée ici à  $10 \text{ m}^{-1}$ . La valeur choisie pour  $k_{r_0}$  est  $3 \text{ m}^{-1}$ . Nous voyons clairement apparaître des impulsions en  $k_{r_0}$  et en  $2K - k_{r_0}$ . Ensuite, nous voyons des sortes de d'impulsions bipolaires à moyenne nulle, en  $2K + k_{r_0}$  et  $4K - k_{r_0}$ . De même que les impulsions simples convergent vers une impulsion de Dirac, les impulsions bipolaires convergent vers la dérivée de la distribution de Dirac. Normalement, nous avons la relation pour toute fonction  $f$  dérivable en 0 :

$$\int_{r=-\infty}^{+\infty} f(r) \delta'(r) dr = -f'(0)$$

Ceci peut se voir sur la figure précédente pour  $l = 1$ , l'intégrale tend à faire  $(f(k_{r_0}^-) - f(k_{r_0}^+)) / \Delta k$  pour  $k_r = 2K + k_{r_0}$ , ce qui est bien l'opposé de la dérivée. Nous voyons une différence de comportement selon que  $l$  est pair ou impair.

Le produit interne discret radial est défini par la relation suivante :

$$\langle f || g \rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{K^2} \frac{f(r_{lm}) g(r_{lm})}{[J_{l+1}(Kr_{lm})]^2} \quad (3.10)$$

$K$  reste un paramètre à déterminer, qui fixera les coordonnées des échantillons, étant donné qu'ils sont les racines de l'équation  $J_l(Kr) = 0$ . Si les signaux analysés sont supposés à bande limitée  $k_r \leq k_{\max}$ , alors la condition de non repliement des harmoniques cylindriques ( $\Psi_{k_r, l}$ ) pour  $k_r \in [0; k_{\max}]$  est  $K \geq k_{\max}$  en vertu de l'équation (3.9).

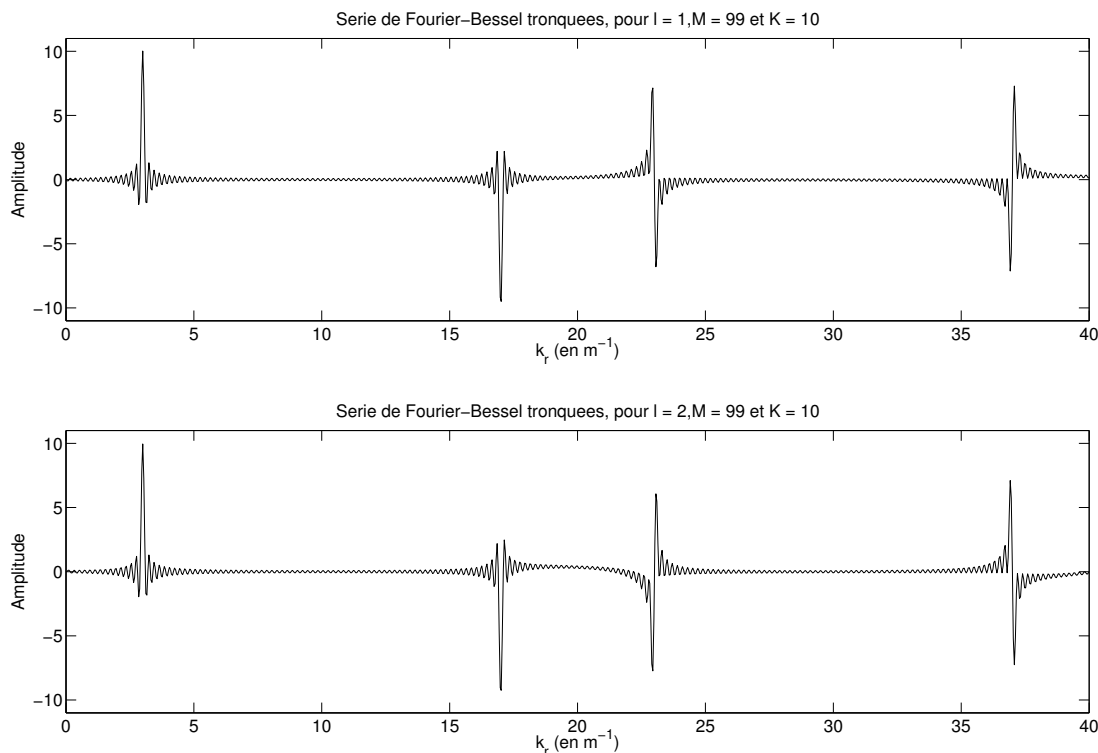


FIG. 3.1 – Série de Fourier-Bessel (3.9) tronquée à  $M = 99$  termes pour une bande de Fourier  $K = 10$  avec  $l = 1$  (en haut) et  $l = 2$  (en bas)

Étant donné que le signal initial est supposé à bande limitée, et que les harmoniques cylindriques échantillonnés sont orthogonaux pour le produit interne (3.10) si la condition  $K \geq k_{\max}$  est vérifiée, le signal initial se calcule en prenant la transformée de Hankel d'ordre  $l$  inverse, mais en ne sélectionnant que la bande d'intérêt. Ainsi, nous obtenons le résultat intermédiaire suivant :

$$f(r) = \int_{k_r=0}^K \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{K^2} \frac{f(r_{lm})}{[J_{l+1}(Kr_{lm})]^2} J_l(k_r r_{lm}) J_l(k_r r) k_r dk_r \quad (3.11)$$

En inversant les deux intégrales précédentes, et en utilisant l'intégrale de Lommel (1.68), nous obtenons le théorème d'échantillonnage pour les fonctions de Bessel cylindriques à bande limitée [22] :

$$f(r) = \frac{2}{K} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{r_{lm} f(r_{lm})}{[J_{l+1}(Kr_{lm})]} \frac{J_l(Kr)}{r_{lm}^2 - r^2} \quad (3.12)$$

Cette formule est à mettre en parallèle à celle de l'interpolation en sinus cardinal dans le cas d'un échantillonnage cartésien uniforme. Ici, l'échantillonnage se fait pour les racines de l'équation  $J_l(Kr) = 0$ , qui n'est donc pas un échantillonnage uniforme.

### Dimension azimutale

Le produit interne pour la variable azimutale est :

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} f(\phi) \bar{g}(\phi) d\phi \quad (3.13)$$



Nous savons, d'après la théorie des séries de Fourier, que les  $\Psi_l(\phi) = e^{il\phi}$  forment un système orthogonal pour le produit interne ci-dessus. En effet :

$$\langle \Psi_{l_1} | \Psi_{l_2} \rangle = \delta_{l_1 l_2}$$

L'hypothèse d'une série de Fourier à bande limitée se caractérise par le fait qu'elle nécessite un nombre fini  $2L$  d'harmoniques  $\Psi_l$ . Si cette hypothèse de bande limitée pour la variable azimutale est vérifiée, alors il suffit d'échantillonner périodiquement le cercle aux angles  $\phi_l = \frac{\pi l}{L}$  pour  $l \in [0; 2L - 1]$ . Le produit interne discret est donc :

$$\langle f || g \rangle = \frac{1}{2L} \sum_{l=0}^{2L-1} f(\phi_l) \bar{g}(\phi_l) \quad (3.14)$$

Nous pouvons vérifier que les harmoniques  $(\Psi_l)_{l \in [-L; L-1]}$  sont orthogonaux pour ce produit interne :

$$\langle \Psi_{l_1} || \Psi_{l_2} \rangle = \delta_{l_1 l_2}$$

Ainsi, pour toute fonction  $f(\phi)$  à bande limitée, nous avons :

$$f(\phi) = \sum_{l=-L}^{L-1} \sum_{n=0}^{2L-1} \frac{1}{2L} f(\phi_n) e^{-il\phi_n} e^{il\phi} \quad (3.15)$$

Étant donné que l'échantillonnage pour la variable azimutale et la variable radiale ne sont pas indépendants en coordonnées cylindriques<sup>1</sup>, il n'est pas nécessaire de reconstruire parfaitement la composante angulaire du signal (équation (3.15)). Si l'objectif est de reconstruire la composante du champ sonore en  $J_l(kr) e^{il\phi}$  où  $l$  désigne un entier entre  $-L$  et  $L - 1$ , alors il suffit uniquement de sélectionner la composante angulaire d'ordre  $l$ . Cette composante s'obtient en restreignant la somme de l'équation (3.15) au terme d'indice  $l$ .

$$f_l(\phi) = \left[ \frac{1}{2L} \sum_{n=0}^{2L-1} f\left(\frac{\pi n}{L}\right) e^{-il\frac{\pi n}{L}} \right] e^{il\phi} \quad (3.16)$$

## Synthèse

En faisant la synthèse des deux paragraphes précédents concernant les variables radiale et azimutale, et en utilisant les résultats concernant l'échantillonnage uniforme pour les variables  $z$  et  $t$ , nous obtenons la formule d'interpolation générale suivante :

$$p(r, \phi, z, t) = \sum_{l=-L}^{L-1} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2L} \sum_{s=1}^{2L-1} p(r_{lm}, \phi_s, z_n, t_q) e^{-il\phi_s} \right] e^{il\phi} \quad (3.17)$$

$$\frac{2}{k_{r_{\max}} J_{l+1}(k_{r_{\max}} r_{lm}) (r_{lm}^2 - r^2)} \operatorname{sinc}\left(\frac{(z - z_n) k_{z_{\max}}}{\pi}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{(t - t_q) \Omega_{\max}}{\pi}\right)$$

Maintenant que le théorème de reconstruction parfaite des signaux à bande limitée dans le système de coordonnées cylindrique est établi, il est bon de revenir sur un certain nombre de points :

<sup>1</sup>Les variables radiale  $r$  et azimutale  $\phi$  ne sont pas indépendantes si nous considérons l'harmonique circulaire  $J_l(kr) e^{il\phi}$ .

- nous avons supposé que les signaux étaient à bande limitée, aussi bien dans le système de coordonnées cartésiennes que dans le système de coordonnées cylindriques, mais force est de constater que cette hypothèse ne revêt pas la même forme pour ces deux systèmes de coordonnées ;
- étant donné que l'analyse des champs sonores en harmoniques cylindriques utilise des transformées de Hankel pour des ordres  $l$  différents, il est bon de revenir sur la répartition des points du maillage nécessaire pour assurer une reconstruction parfaite (équation (3.17)).

**Réflexions sur l'hypothèse de “bande limitée”** La dénomination de signaux à “bande limitée” est communément répandue dans le contexte de la transformée de Fourier à temps continu. Malheureusement, la généralisation de cette dénomination pour le traitement des signaux multidimensionnels ne s'effectue pas sans mal et devient ambiguë. La dénomination est correcte lorsque le domaine de définition de la transformée de Fourier généralisée est un ensemble continu. En revanche, lorsque le domaine de définition de la transformée de Fourier généralisée est discret, l'appellation “signaux à bande limitée” est inappropriée et il vaudrait mieux lui préférer celle de signaux à support fini dans le domaine de Fourier. C'est la dénomination que nous utiliserons dans la suite de ce document.

Ainsi, l'hypothèse que les signaux sont à support fini dans le domaine de Fourier n'est pas la même selon que la transformée de Fourier généralisée utilisée pour l'analyse des champs sonores est la décomposition en ondes planes (1.27) ou la décomposition en harmoniques cylindriques (1.33). Dans le cas de la décomposition en ondes planes, nous invoquons le fait que l'oreille n'est plus sensible aux sons au dessus de 20 kHz pour affirmer que les signaux sonores sont à bande limitée dans le domaine fréquentiel. Il y a une nuance dans la pratique : la bande passante fréquentielle de l'oreille se situe dans la plage fréquentielle 20 Hz-20 kHz, mais la bande passante des capteurs utilisés pour la mesure de la pression acoustique peut différer de celle de l'oreille. Dans la pratique, le plus souvent de nos jours, on utilise une représentation numérique des signaux, et le filtre anti-repliement placé en amont de tout dispositif de conversion analogique-numérique est réalisé de sorte à ce que les signaux entrants puissent être considérés comme à bande limitée. Par la suite, nous invoquons naturellement la relation de dispersion (1.4) pour affirmer que les champs sonores sont aussi à bande limitée dans le domaine des vecteurs d'ondes. Cette hypothèse mérite d'être un peu plus discutée :

- aucune étude n'a été faite pour mesurer la bande passante de l'oreille aux vecteurs d'onde ;
- même si l'oreille avait une bande passante finie pour les vecteurs d'onde, il faudrait donc aussi limiter la bande passante de notre instrument de mesure, c'est-à-dire trouver l'analogie du filtre anti-repliement, mais agissant sur les nombres d'ondes. Ceci nous est fourni par la réponse impulsionnelle spatiale du capteur, le microphone, qui dépend de sa géométrie. Les diagrammes de directivité des microphones fournis par les fabricants sont en quelque sorte une fonction de transfert spatiale du transducteur. En effet, à une fréquence donnée, nous pouvons supposer que le nombre d'onde  $k$  est fixé, et ensuite la variation de la direction d'incidence nous permet d'obtenir la valeur de la fonction de transfert sur un cercle dans l'espace  $(Ok_xk_y)$  en deux dimensions. La répétition de la manipulation pour plusieurs fréquences permet d'obtenir cette réponse sur plusieurs cercles. Il est clair qu'au vu des diagrammes existants, l'hypothèse de bande passante spatiale limitée ne semble pas absurde ;
- d'après ce que nous venons de dire, la fonction de transfert spatiale d'un microphone peut se mesurer si l'outil utilisé est la décomposition en ondes planes. En effet, nous supposons que le champ généré par l'enceinte est une onde plane dont le vecteur d'onde dépend de la fréquence de travail et de la direction d'incidence. Cela est d'autant plus valable que le transducteur et le microphone sont éloignés afin que l'hypothèse de champ lointain soit

respectée. Celle-ci est généralement respectée dans les hautes fréquences. En revanche, elle est plus difficile à satisfaire dans les basses fréquences, mais les dimensions du capteur sont souvent très inférieures à la longueur d'onde dans cette plage de fréquence, de sorte qu'à un niveau local la différence entre une onde plane et une onde sphérique ne doit pas occasionner une erreur énorme.

Il ne nous reste maintenant plus qu'à comparer la forme de l'hypothèse signaux à support de Fourier fini pour les deux transformées de Fourier généralisées envisagées. Pour la décomposition en ondes planes, nous avons déjà explicité la forme de l'hypothèse. Pour la décomposition en harmoniques cylindriques, il faut que le support de la transformée de Fourier généralisée soit  $[0; k_{r_{\max}}]$  pour la transformée de Hankel d'ordre  $l$  agissant sur la variable radiale, que les coefficients de la décomposition en séries de Fourier pour la variable angulaire soient nuls pour  $|l| > L$ , et que les supports des transformées de Fourier usuelles agissant sur les variables  $z$  et  $t$  soient  $[-k_{z_{\max}}; k_{z_{\max}}]$  et  $[-\omega_{\max}; \omega_{\max}]$ . Comme nous l'avons vu au chapitre 1 à la section 1.3.2, la décomposition d'une onde plane de nombre d'onde  $k_r$  à l'intérieur d'un cylindre de rayon  $R$  mobilise un nombre d'harmoniques cylindriques de l'ordre de  $L \approx k_r R$ . Ainsi, pour un domaine d'analyse infini, il faudrait un nombre infini de coefficients de Fourier pour la variable angulaire pour correctement représenter le champ, ce qui contredit l'hypothèse de bande limitée. Si nous envisageons la réciproque, quel que soit l'ordre  $l$  de l'harmonique cylindrique  $J_l(k_r r) e^{il\phi}$ , la décomposition en ondes planes correspondante ne mobilise que les ondes planes satisfaisant l'équation  $k_x^2 + k_y^2 = k_r^2$ .

Finalement, nous pouvons dire qu'un champ à bande limitée pour la décomposition en harmoniques cylindriques sera aussi à bande limitée pour la décomposition en ondes planes, mais que la réciproque n'est pas vraie.

**Réflexions sur le maillage spatial** Concernant le maillage spatial, nous avons dit que l'analyse globale du champ sonore faisait intervenir des transformées de Hankel d'ordres différents. Or les solutions de l'équation  $J_l(k_{r_{\max}} r) = 0$  ne conduisent pas aux mêmes échantillons pour des ordres différents, ce qui augmente la densité des points du maillage pour prendre en compte toutes les transformées de Hankel pour les ordres  $l \in \llbracket -L; L-1 \rrbracket$  si nous supposons que les signaux analysés sont à support de Fourier fini.

Sur la figure 3.2 est illustrée le maillage circulaire nécessaire pour pouvoir reconstruire un champ multidimensionnel à bande limitée ( $k_r < k_{r_{\max}}$ ,  $l \in \llbracket -6; 5 \rrbracket$ ). L'échantillonnage pour les variables  $z$  et  $t$  est ignoré sur cette figure étant donné qu'il est identique à l'échantillonnage effectué dans le système de coordonnées cartésiennes. 12 coefficients de Fourier sont nécessaires à estimer, si bien que les échantillons sont espacés d'un angle de  $\frac{360}{12} = 30$  dg les uns des autres (partie gauche de la figure 3.2). Pour chaque ordre  $l \geq 0$  (les  $l$  négatifs se déduisent des  $l$  positifs, car  $J_{-l}(x) = (-1)^l J_l(x)$ ), les racines  $r_{lm}$  de l'équation  $J_l(k_{r_{\max}} r) = 0$  sont différentes, comme en témoigne la partie droite de la figure 3.2. Ceci explique la répartition radiale non uniforme des échantillons visible sur la partie gauche de la figure.

### 3.2.3 Géométrie sphérique

Le produit interne dans le domaine continu pour la géométrie sphérique était défini par la relation suivante :

$$\langle f | g \rangle = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{t=0}^{\pi} f(r, \phi, \theta, t) \bar{g}(r, \phi, \theta, t) r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi dt \quad (3.18)$$

Lorsque le champ est échantillonné sur le réseau de points  $(r_n, \phi_m, \theta_l, t_q)_{(n,m,l,q) \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}^3}$ , nous

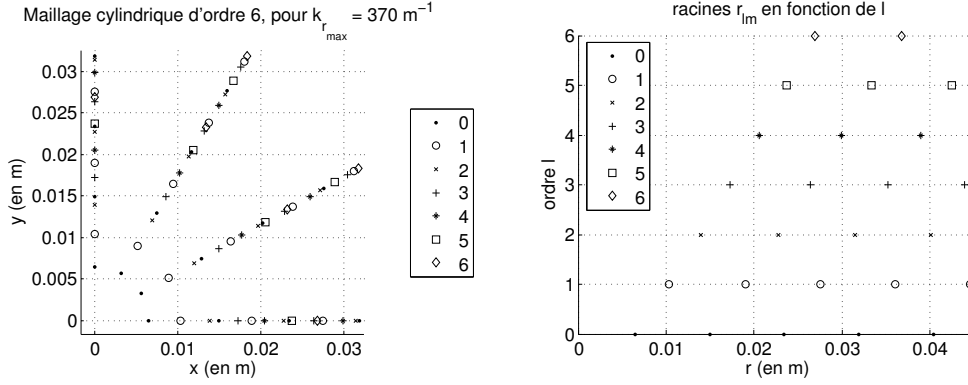


FIG. 3.2 – Maillage circulaire nécessaire pour reconstruire les  $J_l(kr) e^{il\phi}$  pour  $l \in \llbracket -6; 5 \rrbracket$ , pour  $k_{r_{\max}} = 370 \text{ m}^{-1}$ . Sur la partie gauche, les échantillons sont représentés uniquement dans le cadran supérieur droit du plan  $(Oxy)$ , les autres s'obtenant par symétrie par rapport aux axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . Sur la partie droite sont représentées les racines  $r_{lm}$  de l'équation  $J_l(k_{r_{\max}} r) = 0$  pour  $l \in \llbracket 0; 6 \rrbracket$ .

utilisons le produit scalaire suivant :

$$\langle f || g \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} f(r_n, \phi_m, \theta_l, t_q) \bar{g}(r_n, \phi_m, \theta_l, t_q) \quad (3.19)$$

Le problème de l'échantillonnage pour la dimension radiale est analogue à celui étudié pour le système de coordonnées cylindriques. Il fait intervenir les fonctions de Bessel sphériques au lieu des fonctions de Bessel cylindriques :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{K^3} \frac{j_l(k_r r_{ln}) j_l(k_{r_0} r_{ln})}{[j_{l+1}(K r_{ln})]^2} = \\ \frac{1}{k_r k_{r_0}} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s \left[ \delta((k_r - k_{r_0}) - 4sK) - \delta((k_r + k_{r_0}) - (4s + 2)K) \right. \\ \left. + (-1)^{l+1} (\delta'((k_r - k_{r_0}) - (4s + 2)K) - \delta'((k_r + k_{r_0}) - (4s + 4)K)) \right] \quad (3.20) \end{aligned}$$

Le problème de l'échantillonnage de la variable temporelle reste identique à celui étudié dans le cas de la géométrie cartésienne. Il ne nous reste plus qu'à étudier le problème de l'échantillonnage des variables angulaires, soit l'échantillonnage de la sphère

### Variable angle solide

Pour la variable d'angle solide, le signal sera supposé à support de Fourier fini si sa décomposition en harmoniques sphériques standard se limite à l'ordre  $L$ . Ainsi, la décomposition en séries de Fourier sphériques ne fait intervenir qu'un nombre  $(L + 1)^2$  d'harmoniques. Le produit interne défini sur la surface de la sphère est le suivant :

$$\langle f | g \rangle = \int_{\Omega \in S^2} f(\Omega) \bar{g}(\Omega) d^2\Omega \quad (3.21)$$

où  $d^2\Omega = d\phi \sin\theta d\theta$  désigne un angle solide élémentaire, et  $S^2$  désigne la surface de la sphère. La version discrète de ce produit interne est :

$$\langle f || g \rangle = \sum_{s=1}^S f(\Omega_s) \bar{g}(\Omega_s) \quad (3.22)$$

Si les signaux étudiés sont à support de Fourier limité à l'ordre  $L$ , alors une condition nécessaire pour que les harmoniques sphériques échantillonnés sur les angles solides  $\Omega_s$  est  $S \geq (L+1)^2$ . Ensuite, il est nécessaire de trouver la répartition des angles solides pour laquelle il n'existe pas de méthode analytique. Le problème consistant à trouver un ensemble d'angles solides  $\Omega_s$  pour lesquels les harmoniques sphériques standards seraient orthogonaux jusqu'à un certain ordre  $L$  en utilisant un produit interne discret est discuté par Rafaely [84] qui renvoie aux auteurs Hardin et Sloane [48], Lebedev et Skorokhodov [59] pour les détails mathématiques.

Dans la pratique, on préfère utiliser des schémas requérant un nombre de points plus importants que les  $(L+1)^2$ , mais jouissant de meilleures propriétés, tel que l'échantillonnage gaussien [84] pour lequel on peut appliquer des transformées rapides, basées sur des implémentations rapides pour le calcul des séries de Fourier (FFT) et des décompositions de Legendre rapides. Ce problème de l'échantillonnage de la sphère est un problème épineux qui pourrait mériter une thèse complète pour être correctement traité. Afin de ne pas trop nous éloigner du sujet de cette thèse, nous préférons en rester là.

### Conclusion sur la géométrie sphérique

Afin de conclure ce bref développement sur l'échantillonnage en coordonnées sphériques, je tiens à attirer l'attention sur le fait que les mêmes conclusions que celles tirées sur le paragraphe sur l'échantillonnage en coordonnées cylindriques s'appliquent : l'hypothèse de support de Fourier fini ne revêt pas la même forme pour le système de coordonnées cartésiennes et le système de coordonnées sphériques. Ainsi, un champ multidimensionnel à support de Fourier fini dans le système de coordonnées sphériques sera aussi à support de Fourier fini dans le système de coordonnées cartésiennes, car la décomposition d'un harmonique sphérique en onde planes (1.55) ne mobilise que des ondes planes pour lesquelles  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ . En revanche, la réciproque n'est pas vraie, car le nombre d'harmoniques sphériques mobilisés lors d'une décomposition en harmoniques sphériques croît avec le rayon de la sphère d'analyse selon la relation  $L \approx kR$  : ce nombre tend vers l'infini pour un rayon infini.

## 3.3 Analyse de champs multidimensionnels dans des conditions réelles

Lors de la section 1.3 relative à l'analyse des champs multidimensionnels sur un horizon fini, nous étions arrivés à la conclusion que seule une répartition discrète d'harmoniques suffisait pour caractériser complètement le champ dans l'intérieur de la zone d'intérêt. Ce résultat a été obtenu en utilisant les résultats sur les séries de Fourier généralisées. Dans la section 3.2, nous avons étudié le problème dual, c'est-à-dire celui de l'analyse de champs multidimensionnels à support de Fourier fini, et nous sommes arrivés à une conclusion similaire : si les signaux sont à support de Fourier fini, il n'est pas nécessaire de les observer de manière continue pour chacune des dimensions, mais il est possible de caractériser complètement le champ sonore par sa connaissance sur une répartition discrète d'échantillons. Il s'agit des théorèmes de reconstruction parfaite, faisant appel à des formules d'interpolation pour reconstruire le champ initial en dehors de ces échantillons.

Dans la pratique, nous ne disposerons pas d'une infinité d'échantillons, de sorte que le champ observé sera observé sur un horizon fini. S'il est observé sur un horizon fini, alors sa transformée

de Fourier généralisée est à support infini. Pourtant, l'hypothèse que les champs analysés sont à support de Fourier fini est souvent assumée, ce qui n'est le cas que pour les champs sonores intrinsèques, mais ce qui n'est pas vrai pour les champs sonores mesurés : un champ multidimensionnel ne peut pas être à la fois à support de Fourier fini et à horizon limité.

Dans la suite de cette section, les conséquences relatives à la finitude du nombre d'échantillons seront étudiées pour les représentations en ondes planes et en harmoniques sphériques.

Le champ multidimensionnel est supposé être échantillonné sur un ensemble de  $M$  points repérés par  $\mathbf{r}_m$ . Ainsi, de la même manière que les signaux temporels échantillonnés à la cadence  $T_e$  étaient le produit du signal initial par une série d'impulsions de Dirac,

$$s_{\text{ech}}(t) = s(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_e)$$

le champ échantillonné dans le domaine spatial sera modélisé de la manière suivante :

$$p_{\text{ech}}(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) \cdot \sum_{m=1}^M \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \quad (3.23)$$

Nous allons voir que l'échantillonnage introduit une ambiguïté, appelée *repliement spectral* spatial pour la représentation en ondes planes, à la section 3.3.1, et sur la représentation en harmoniques sphériques, à la section 3.3.2.

### 3.3.1 Effets sur la représentation en ondes planes

Lorsque le champ sonore était observé de manière continue, les ondes planes formaient une famille libre. En revanche, ce n'est plus le cas des ondes planes observées uniquement pour un ensemble fini de points. En effet, si nous calculons le produit interne entre une onde plane échantillonnée de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$  et une deuxième onde plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , nous obtenons :

$$\langle \Psi_{\mathbf{k}_0}^{\text{op,ech}} | \Psi_{\mathbf{k}}^{\text{op}} \rangle = \sum_{m=1}^M e^{i[(k_{0x}-k_x)x_m + (k_{0y}-k_y)y_m + (k_{0z}-k_z)z_m]} \quad (3.24)$$

$$\neq \delta(k_x - k_{0x}) \delta(k_y - k_{0y}) \delta(k_z - k_{0z}) \quad (3.25)$$

### 3.3.2 Effets sur la représentation en harmoniques sphériques

De la même manière que dans le paragraphe précédent, si nous calculons le produit interne onde entre un harmonique sphérique échantillonné  $j_{l_0}(k_0 r) Y_{l_0}^{m_0}(\phi, \theta)$  et un deuxième harmonique sphérique  $j_l(kr) Y_l^m(\phi, \theta)$ , nous obtenons :

$$\langle \Psi_{k_0, l_0, m_0}^{\text{hs,ech}} | \Psi_{k, l, m}^{\text{hs}} \rangle = \sum_{m=1}^M j_{l_0}(k_0 r_m) j_l(k r_m) Y_{l_0}^{m_0}(\phi_m, \theta_m) \overline{Y_l^m(\phi_m, \theta_m)} \quad (3.26)$$

$$\neq \frac{\delta(k - k_0)}{k_0 k} \delta_{l_0 l} \delta_{m_0 m} \quad (3.27)$$

### 3.3.3 Remarques sur l'échantillonnage en conditions réelles

Ainsi, les ondes planes échantillonnées (respectivement les harmoniques sphériques échantillonnés) n'ont pas les mêmes propriétés que les ondes planes observées (respectivement les harmoniques sphériques observés) sur un horizon continu infini.

Lorsque les harmoniques sphériques échantillonnés sont projetés sur la base des harmoniques sphériques continus, la valeur de la transformée de Fourier sphérique est le plus généralement non nulle lorsque  $k \neq k_0$ ,  $l \neq l_0$ ,  $m \neq m_0$  (équation (3.26)). De fait, les harmoniques sphériques échantillonnés ne forment plus une famille libre, et il y a introduction d'une ambiguïté liée au processus d'échantillonnage, le repliement spectral (*aliasing* en anglais). Comme la reconstruction parfaite des champs n'est pas envisageable avec un nombre limité d'échantillons, il conviendra d'élaborer un traitement visant à minimiser les effets du repliement spatial. De tels traitements ont déjà été envisagés dans la littérature, visant à orthogonaliser la base des harmoniques sphériques jusqu'à un certain ordre  $L_{\max}$  en prenant soin d'avoir un nombre de microphones  $M_{\text{mic}} \geq (L + 1)^2$ , comme c'est expliqué dans les travaux de Abhayapala et Ward [3], Laborie *et al.* [58], Li *et al.* [62], Meyer et Elko [66], Rafaely [84]. Il conviendrait toutefois de compléter ces travaux en s'inspirant des remarques de fond effectuées à la section 5.5.

De même que pour les harmoniques sphériques, le processus d'échantillonnage des ondes planes introduit obligatoirement du repliement spectral. Toutefois, l'expression (3.24) obtenue dans le cas de la représentation en ondes planes possède un atout par rapport à l'expression (3.26) obtenue dans le cas de la représentation en harmoniques sphériques : elle ne dépend que des différences  $(k_{0x} - k_x)$ ,  $(k_{0y} - k_y)$ ,  $(k_{0z} - k_z)$ . Ceci est lié à la propriété de convolution pour la transformée de Fourier cartésienne, qui est absente pour la transformée de Fourier sphérique. Cet avantage sera utilisé à la section 5.3 afin de mettre au point un traitement pour effectuer l'analyse de champs sonores qui se caractérise par sa faible complexité : il suffit d'introduire un vecteur de pondération des mesures qui sera indépendant des vecteurs d'ondes analysés. Il n'est pas possible d'effectuer ce genre de traitements en utilisant la représentation en harmoniques sphériques, car il est alors nécessaire d'optimiser le traitement pour un harmonique sphérique bien précis, et non pour un ensemble plus vaste d'harmoniques sphériques. Cette possibilité est offerte par la propriété de la transformée de Fourier cartésienne de transformer un produit simple en un produit de convolution dans le domaine dual.

### 3.4 Conclusion sur l'analyse de champs sonores discrétisés

Dans ce chapitre, un des résultats les plus intéressants que nous avons introduit fut l'interprétation du repliement pour le théorème de l'échantillonnage en coordonnées cylindriques, lorsque nous avons étudié le comportement des séries de Fourier-Bessel en dehors de l'intervalle usuel limité au rayon du cylindre d'analyse  $R$ .

Le deuxième résultat le plus important que nous avons indiqué est qu'il n'est pas possible de pouvoir garantir une reconstruction parfaite de champs multidimensionnels à partir d'un nombre limité d'échantillons. Ainsi, dans des conditions réelles, seule une analyse approchée des champs sonores est envisageable. Nous avons montré qu'en l'absence de traitement des mesures, l'échantillonnage introduit une ambiguïté sur la représentation des champs multidimensionnels, le repliement, et qui peut s'interpréter de la manière suivante : une observation donnée sur un ensemble de points de l'espace peut correspondre à une multitude de champs différents lorsque nous les considérons en dehors du réseau de points d'observation.

L'objectif de l'analyse spatiale de champs sonores est de mettre en place un traitement de ces mesures visant à minimiser l'influence de ce repliement. Les traitements effectués seront dépendants de la description choisie pour représenter les champs sonores. Nous essaierons de faire un inventaire des avantages et des inconvénients de chacune des descriptions de champs sonores pour la mise en œuvre de tels traitements dans la conclusion de la partie I de cette thèse, lorsque nous aurons un point de vue global. Nous expliquerons en particulier pourquoi nous avons retenu la description du champ sonore en ondes planes, pour laquelle est consacrée toute la partie II de cette thèse. D'après les premiers résultats que nous avons obtenu à la section 3.3, nous pouvons déjà

mentionner que la description des champs multidimensionnels en ondes planes permet de profiter de la propriété de convolution de la transformée de Fourier multidimensionnelle.

Tous les résultats que nous avons démontrés s'appliquent pour des champs multidimensionnels ayant un support de Fourier fini. Les champs sonores respectent cette condition mais l'économie en termes de stockage qu'elle permet de réaliser est suboptimale : il a été nécessaire de considérer un échantillonnage volumique pour pouvoir garantir des conditions de reconstruction parfaite. Dans le chapitre 2, nous avons mentionné que la majorité des champs sonores pouvaient être caractérisés par le profil de la pression acoustique sur une surface fermée. Cette propriété permettait de réaliser une large économie dans le stockage de l'information étant donné que nous économisons une dimension, ce qui est l'avantage lié à l'utilisation des représentations holographiques. Dans le chapitre 4, nous allons coupler les deux résultats précédents, afin de caractériser complètement le champ sonore en utilisant une répartition surfacique discrète d'échantillons pour caractériser complètement le champ. Pour obtenir ce résultat, il est nécessaire de prendre en compte le fait que les champs analysés sont des champs sonores.



## Chapitre 4

# Influence de la discrétisation sur la synthèse des champs sonores

### Résumé :

Dans ce chapitre, nous utilisons les théorèmes de reconstruction parfaite des champs multidimensionnels à bande limitée non plus à des volumes, comme dans le cas du chapitre 3, mais à des surfaces. Utilisé en conjonction avec les représentations intégrales, nous montrons qu'une répartition surfacique discrète d'échantillons permet ainsi de représenter de manière très efficace le champ sonore. Ce résultat est utile pour l'analyse ou l'extrapolation de champs sonores.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous nous intéressons au champ effectivement synthétisé par une répartition discrète de monopôles et de dipôles. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser la transformée de Fourier multidimensionnelle et le théorème des résidus afin de résoudre l'équation des ondes. A notre connaissance, nous n'avons vu aucun autre travail ayant fait ce choix, de sorte qu'il s'agit d'une approche assez originale. Bien que les calculs sous-jacents à cette approche soient assez compliqués, nous parvenons à préciser les différences entre le champ rayonné par une distribution continue de monopôles et de dipôles et celui rayonné en utilisant une distribution discrète : dans le meilleur des cas, si les sources sont suffisamment rapprochées, le champ rayonné est la superposition du champ souhaité et d'ondes évanescentes. Si les sources utilisées pour la synthèse ne sont pas suffisamment rapprochées, certains pôles de la transformée de Fourier multidimensionnelle ne sont plus réels et deviennent imaginaires purs, de sorte que le champ rayonné est alors la superposition du champ souhaité et d'ondes non plus évanescentes mais propagatives. Il s'agit d'un phénomène dual de celui du repliement lors de l'analyse à partir d'un nombre discret d'échantillons : le repliement lors de la synthèse.

## 4.1 Introduction

Au chapitre 3, nous nous sommes intéressés à la représentation de champs multidimensionnels à support de Fourier fini en utilisant uniquement une répartition discrète d'échantillons. Cette étude n'utilisait pas de manière optimale l'hypothèse que les champs étudiés étaient des champs respectant l'équation de propagation.

Dans ce chapitre, nous associons les avantages des représentations intégrales et des représentations harmoniques afin de pouvoir caractériser le champ sonore à l'intérieur d'un domaine fini en utilisant un nombre limité de mesures tout en conservant une bonne précision sur la connaissance du champ sonore. Des représentations intégrales, nous utilisons l'économie réalisée par les systèmes holographiques, permettant de représenter le champ à l'intérieur d'un domaine à partir de la connaissance de celui-ci uniquement sur la frontière de ce domaine. Des représentations harmoniques, nous utilisons le fait que l'analyse de champs multidimensionnels sur une zone finie de l'espace (en l'occurrence des surfaces) peut être caractérisée par un ensemble discret de paramètres : il s'agit de la décomposition modale. Le but sera donc d'estimer la décomposition modale du champ sur la surface délimitant le domaine d'analyse à partir d'un nombre fini de mesures. Pour cela, il est nécessaire de tronquer le développement modal. Nous précisons comment choisir l'ordre de la décomposition modale.

Cette méthode est envisageable pour l'analyse et la synthèse d'un point de vue théorique car le champ est ensuite reconstruit à partir de la formulation de Kirchhoff du principe de Huygens (2.13). Malheureusement, il n'est pas possible de calculer numériquement cette intégrale pour l'analyse. Pour la synthèse, il n'existe aucun dispositif ressemblant à une distribution continue de monopôles et de dipôles. Ainsi, il semble pertinent d'étudier les effets de la discrétisation directement sur l'intégrale de Kirchhoff, ce qui sera étudié dans la deuxième partie de ce chapitre.

## 4.2 Représentations intégrales discrétisées des champs sonores

Dans le chapitre 2, nous avons démontré qu'une distribution continue de monopôles et de dipôles situés sur une surface fermée exempte de sources acoustiques et alimentée par les consignes adéquates rayonnait correctement le champ des sources intérieures à l'extérieur de la surface fermée et le champ des sources extérieures à l'intérieur de la surface fermée. Pour cela, il était nécessaire de connaître le profil de la pression acoustique, ainsi que de sa dérivée normale, de manière continue, sur toute la surface fermée. Plutôt que de réaliser un échantillonnage volumique des champs sonores, comme au chapitre 3, il serait plus avantageux d'appliquer les théorèmes de reconstruction parfaite non plus sur un maillage volumique, ce qui convenait pour des champs génériques à support de Fourier fini, mais sur un maillage surfacique, ce qui tiendrait en plus compte de la nature propagative des champs sonores. Si cet objectif était atteint, nous n'aurions qu'à utiliser le théorème de reconstruction parfaite pour reconstruire les deux profils de la pression acoustique et de sa dérivée normale sur toute la surface fermée, et nous pourrions ensuite calculer le champ sonore en tout autre point extérieur à cette surface grâce à la formulation intégrale du principe de Huygens (2.13).

Dans le cas où la géométrie de la surface fermée est séparable dans un certain système de coordonnées, comme c'est le cas pour le parallélépipède, le cylindre ou la sphère par exemple, nous avons vu que les champs multidimensionnels pouvaient être décrits au moyen d'un ensemble discret d'harmoniques, à la section 1.3. Lorsque nous voulons uniquement décrire le champ multidimensionnel sur une surface, et non plus dans un volume entier, nous économisons une dimension dans la décomposition modale, ce qui est une économie considérable que seuls les champs multidimensionnels satisfaisant l'équation de propagation sont capables d'offrir.

Quelle que soit la surface fermée utilisée, qu'il s'agisse du parallélépipède, du cylindre ou de

la sphère, l'objectif demeure le même : il s'agit d'estimer les paramètres de la décomposition modale du champ sonore sur la surface. Bien que nous économisons une dimension en ne décrivant le champ sonore que sur une surface et non dans un volume, il n'en demeure pas moins qu'il faut théoriquement une infinité d'harmoniques pour décrire le champ de manière exacte. Étant donné que nous ne disposons dans la pratique que d'un nombre limité d'échantillons, il est impossible d'estimer sans erreur le coefficient affecté à un certain mode de la décomposition modale : il s'agit d'un problème d'estimation sous-déterminé. Il est donc nécessaire de faire quelques simplifications afin de pouvoir résoudre ce problème dans la pratique. Pour ce faire, nous allons diviser le problème global en deux étapes :

- l'énergie affectée à chacun des modes de la décomposition modale dépend uniquement du champ physique, et ne dépend pas du nombre, ni de la position des échantillons. En conséquence, la première étape consiste à éliminer les modes dont l'énergie associée est inférieure à un certain seuil ;
- une fois que le nombre de modes a été déterminé, il s'agit d'estimer correctement le coefficient associé à chaque mode de la décomposition modale à partir des  $N_{\text{mes}}$  mesures disponibles. Si le nombre de modes  $N_{\text{mod}}$  est inférieur au nombre de mesures, il s'agit d'un problème surdéterminé, étant donné que le nombre de de mesures est plus important que le nombre de paramètres à estimer. Dans le cas inverse, il s'agit d'un problème sous-déterminé. Dans les deux cas, une estimation par la méthode des moindres carrés est envisageable. Cette méthode sera utilisée à la section 5.5. Elle vise à orthogonaliser la base de modes propres lorsque ceux-ci sont uniquement observés en  $N_{\text{mes}}$  points de mesure. Dans le cas où le nombre de coefficients du développement modal  $N_{\text{mod}}$  est inférieur, l'estimation se déroule dans de très bonnes conditions. Dans le cas inverse, il n'est pas possible d'orthogonaliser parfaitement la base de modes propres.

Dans la suite de cette section, nous allons revenir sur le nombre de modes à considérer dans le cas où la surface fermée est un parallélépipède. L'extension de ce résultat à d'autres surfaces, telles que le cylindre ou la sphère est envisageable mais n'a pas été considérée ici afin de limiter le discours.

Nous avons démontré à la section 1.3.1, et plus particulièrement dans le paragraphe consacré à l'exemple d'analyse, que la décomposition d'une onde plane sur la base de modes propres du parallélépipède était donné par la formule (1.65), qui fait intervenir des sinus cardinaux dont les paramètres sont les différences  $k_{x_l} - k_{0x}$  et  $k_{y_m} - k_{0y}$ . Si le champ initial est à support de Fourier fini, alors  $k_{0x}$  et  $k_{0y}$  sont inférieurs à  $k_{\text{max}}$ .

Si nous nous concentrons uniquement pour la variable  $k_x$ , l'enveloppe du sinus cardinal est en  $\frac{2\pi}{(k_{x_l} - k_{0x}L_x)}$ , c'est-à-dire l'inverse de l'argument du sinus cardinal. Si nous nous plaçons dans le cas le plus défavorable,  $k_{0x} = k_{\text{max}}$ , et que nous souhaitons considérer tous les modes ayant une énergie supérieure à  $-20$  dB, il faut alors que  $k_{x_l} \leq \frac{20\pi}{L_x} + k_{\text{max}}$ , soit un nombre de modes  $L \leq 10 + \frac{k_{\text{max}}L_x}{2\pi}$ . Pour  $L_x = 1$  m et  $k_{\text{max}} = \frac{2\pi 20000}{340}$ , nous avons  $L = 69$  pour la dimension  $x$ , soit 3460 par  $\text{m}^{-2}$ . Si nous abaissons ce seuil à  $-40$  dB, alors, il faut un nombre de modes égal à  $25225/\text{m}^2$ . Cette forte croissance du nombre de modes lorsque nous voulons améliorer la précision de la représentation est liée à la faible décroissance de l'enveloppe du sinus cardinal. Si nous souhaitons avoir une précision à  $-60$  dB, alors il faudrait considérer  $1.1 \cdot 10^6$  modes par  $\text{m}^2$ .

### 4.3 Cas du champ synthétisé par un plan infini discrétisé

L'objectif de la section 4.2 était de reconstruire le mieux possible le profil de la pression acoustique et de sa dérivée normale sur une surface fermée, afin de pouvoir calculer la formulation de Kirchhoff du principe de Huygens (2.13). Dans la pratique, que ce soit pour l'analyse ou la

synthèse, il n'est pas possible de calculer une intégrale continue, et il est toujours nécessaire de la discrétiser. De plus, lors de la synthèse de champs sonores, nous n'avons pas de transducteurs qui ressemblent à une distribution continue de monopôles et de dipôles. Les transducteurs réels sont en première approximation des sources acoustiques ponctuelles dont la directivité est une combinaison du monopôle et du dipôle. Dans ces conditions, il est intéressant de voir quel est le champ effectivement synthétisé par une distribution discrétisée de monopôles et de dipôles, et d'étudier quelles sont les différences entre le champ effectivement rayonné et le champ souhaité. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette section.

Supposons que nous échantillonnions uniformément un plan infini ( $Oyz$ ) avec des sources monopôlares et dipôlares, avec pour périodes  $L_y$  et  $L_z$  pour les dimensions  $y$  et  $z$ . Cette distribution de sources secondaires est alimentée par le champ qu'aurait généré une onde plane  $\Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}$  respectant la relation de dispersion  $k_0^2 = \omega_0^2/c^2$ .

Le champ synthétisé est alors solution de l'équation des ondes ayant le second membre suivant :

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{cases} ik_{0x} L_y L_z \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}(0, mL_y, nL_z, t) & \delta(x) \delta(y - mL_y) \delta(z - nL_z) \\ + L_y L_z \Psi_{\mathbf{k}_0, \omega_0}(0, mL_y, nL_z, t) & \delta'(x) \delta(y - mL_y) \delta(z - nL_z) \end{cases} \quad (4.1)$$

Le premier terme de l'accolade précédente indique la présence de monopôles, alimentés par la composante normale du gradient de la pression acoustique de l'onde plane initiale, tandis que le deuxième terme indique la présence de dipôles (terme en  $\delta'(x)$ ) alimentés par la pression acoustique qu'aurait généré l'onde plane initiale.

La transformée de Fourier de cette équation est :

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) P(\mathbf{k}, \omega) = -i(k_{0x} + k_x) (2\pi)^3 \delta(\omega - \omega_0) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left((k_y - k_{0y}) - \frac{2m\pi}{L_y}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left((k_z - k_{0z}) - \frac{2n\pi}{L_z}\right) \quad (4.2)$$

Lorsque  $m = n = 0$  dans l'équation précédente, nous obtenons le même terme que celui de l'équation (2.23). Donc l'onde plane souhaitée est effectivement synthétisée par le dispositif. Nous allons maintenant nous intéresser aux différences entre le champ souhaité et le champ effectivement rayonné, c'est-à-dire aux termes correspondants aux indices  $(m, n)$  différents de 0. Si nous étudions la composante du champ sonore rayonné correspondant uniquement à un couple d'indices  $(m, n)$ , nous avons les relations suivantes :

$$P_{m,n}(\mathbf{k}, \omega) = - \frac{i(k_{0x} + k_x) (2\pi)^3 \delta(\omega - \omega_0) \delta\left((k_y - k_{0y}) - \frac{2m\pi}{L_y}\right) \delta\left((k_z - k_{0z}) - \frac{2n\pi}{L_z}\right)}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (4.3)$$

$$= - \frac{i(k_{0x} + k_x) (2\pi)^3 \delta(\omega - \omega_0) \delta\left((k_y - k_{0y}) - \frac{2m\pi}{L_y}\right) \delta\left((k_z - k_{0z}) - \frac{2n\pi}{L_z}\right)}{(k_x^2 - k_{0x}^2) + k_{0x}^2 + \left(k_{0y} + \frac{2m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(k_{0z} + \frac{2n\pi}{L_z}\right)^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2}} \quad (4.4)$$

$$= - \frac{i(k_{0x} + k_x) (2\pi)^3 \delta(\omega - \omega_0) \delta\left((k_y - k_{0y}) - \frac{2m\pi}{L_y}\right) \delta\left((k_z - k_{0z}) - \frac{2n\pi}{L_z}\right)}{k_x^2 - \left(k_{0x}^2 - k_{0y} \frac{2m\pi}{L_y} - \left(\frac{2m\pi}{L_y}\right)^2 - k_{0z} \frac{2m\pi}{L_z} - \left(\frac{2n\pi}{L_z}\right)^2\right)} \quad (4.5)$$

Plusieurs cas sont alors possibles, selon le signe de :

$$k_{0x_{m,n}}^2 = k_{0x}^2 - k_{0y} \frac{2m\pi}{L_y} - \left( \frac{2m\pi}{L_y} \right)^2 - k_{0z} \frac{2m\pi}{L_z} - \left( \frac{2m\pi}{L_z} \right)^2 \quad (4.6)$$

Si  $k_{0x_{m,n}}^2$  est bien positif, la fraction rationnelle possède bien deux pôles réels  $\pm k_{0x_{m,n}}$ , qui vont correspondre à des solutions analogues à celles trouvées au paragraphe 2.5.3. En revanche, si  $k_{0x_{m,n}}^2$  est négatif, la fraction rationnelle possède deux pôles imaginaires purs  $\pm i\sqrt{-k_{0x_{m,n}}^2}$ , qui correspondent à des ondes évanescentes selon l'axe ( $Ox$ ). Les ondes évanescentes ne se propagent pas à longue distance du plan ( $Oyz$ ). Dans l'objectif de la synthèse, il est donc vivement souhaitable que tous les pôles  $k_{0x_{m,n}}$  lorsque  $(m,n) \neq (0,0)$  soient négatifs, conduisant ainsi à des ondes évanescentes, qui ne se propageront pas à longue distance du réseau de sources acoustiques. Si ce n'est pas le cas, cela signifie que des ondes planes autres que celles souhaitées sont synthétisées, ce qui correspond à du repliement, qui est le dual du repliement introduit lors de l'analyse des champs sonores.

Nous allons déterminer les conditions sous lesquelles un tel repliement apparaît. A une pulsation  $\omega_0$  donnée,  $k_{0y}$  ou  $k_{0z}$  de l'équation (4.6) peuvent évoluer dans l'intervalle  $[-\omega_0/c; \omega_0/c]$ , de largeur  $2\omega_0/c$ . Si  $\frac{2\omega_0}{c} > \frac{2\pi}{L}$ , où  $L$  désigne soit  $L_y$ , soit  $L_z$ , alors il existera obligatoirement des couples d'indices  $(m,n)$  différents de  $(0,0)$  conduisant à des  $k_{0x_{m,n}}^2$  dont les solutions correspondantes seront des ondes planes dont le vecteur d'onde serait différent de celui de l'onde plane souhaitée. Cette condition n'est rien d'autre que la condition de non repliement ou d'*anti-aliasing*, introduite dans le cas des systèmes de reproduction basés sur la Wave Field Synthesis :

$$L < \frac{c}{2f_{\max}} \quad (4.7)$$

## 4.4 Conclusion

Afin de conclure ce chapitre sur l'analyse et la synthèse de champs sonores à partir de la discrétisation des équations intégrales, j'aimerais revenir sur deux points.

Le premier concerne l'analyse de champs sonores. Nous avons utilisé les décompositions modales du champ sonore afin de reconstruire le champ en tout point d'une surface à partir d'un nombre limité de mesures. Ces décompositions modales font intervenir un développement en séries de Fourier classique pour le parallélépipède et feraient intervenir des développements en séries de Fourier généralisées dans le cas du cylindre ou de la sphère. Ces développements en séries de Fourier convergent en moyenne quadratique, et très lentement s'il y a des discontinuités aux frontières. Clairement, il doit exister d'autres méthodes d'interpolation permettant d'accélérer la convergence, ou permettant de minimiser l'erreur du champ reconstruit pour d'autres normes que la norme quadratique. Il est fort probable qu'il y ait beaucoup de choses à apprendre des références liées au calcul des FFT dans le cas des échantillonnages non uniformes pour ce sujet, dont des exemples de travaux sont Dutt et Rokhlin [32], Fessler [35], Gumerov et Duraiswami [47], Potts *et al.* [80], Strohmmer [96]. Nous n'avons pas eu le temps d'approfondir cette piste de recherche mais elle apparaît comme une perspective intéressante de cette étude.

Le deuxième point concerne la synthèse de champs sonores à partir d'une distribution discrète de monopôles et de dipôles. Nous avons réussi à montrer l'existence de repliement spectral au moment de la synthèse pour une configuration simple : une distribution plane régulièrement espacée de monopôles et de dipôles. Toutefois, si nous essayons de généraliser cette approche, en essayant par exemple de tronquer cette distribution plane à un rectangle, ou d'essayer de synthétiser des champs sonores beaucoup plus complexes que des ondes planes, il est alors beaucoup plus

difficile de donner l'expression analytique du champ effectivement reconstruit par le dispositif. D'autres efforts de recherche sont donc nécessaires pour approfondir cette approche.

---

# Bilan de la partie I

L'introduction de la partie I de cette thèse s'était soldée par la question suivante : devant la pluralité de descriptions du champ sonore, y a-t-il une description qui soit mieux adaptée que les autres ? À ce stade de l'étude, nous avons détaillé les principes liés à chacune des descriptions des champs sonores que sont les représentations harmoniques et les représentations intégrales. Il est maintenant temps de faire le bilan des avantages et des inconvénients de chacune de ces représentations.

Nous avons démontré au cours des chapitres 1 et 2 que toutes les représentations harmoniques étaient équivalentes et qu'il était possible de faire des correspondances entre les représentations harmoniques et les représentations intégrales. Ainsi, la supériorité d'une description par rapport aux autres ne peut apparaître que lorsque la connaissance du champ sonore n'est plus idéale, c'est pourquoi nous avons étudié les effets de la discrétisation pour l'analyse des champs sonores au chapitre 3 et sur la synthèse des champs sonores au chapitre 4.

Le dénominateur commun à toutes les descriptions sur les effets de la discrétisation est qu'il devient impossible d'envisager une reconstruction parfaite des champs analysés à partir d'un nombre fini de mesures spatiales du champ sonore. Dans toutes les approches, nous avons explicité à chaque fois qu'un nombre limité de mesures était à la source d'un repliement. Intrinsèquement, le repliement se définit par le fait que plusieurs champs sonores physiquement différents conduisent à des observations identiques au niveau du réseau de microphones. Au moment de l'analyse, nous avons montré que les représentations harmoniques étaient particulièrement efficaces pour caractériser le repliement : les harmoniques utilisés pour la décomposition du champ sonore ne constituent plus une famille orthogonale lorsque ceux-ci ne sont observés que sur un ensemble fini de points. Au moment de la synthèse, le repliement se traduit par la synthèse de composantes supplémentaires non désirées par rapport au champ initialement souhaité. Ces composantes supplémentaires dégradent la qualité du rendu spatial.

Que ce soit pour l'analyse ou pour la synthèse de champs sonores, il est possible de mettre en œuvre des traitements visant à minimiser les effets du repliement. Il convient de préciser ce que nous entendons par minimiser dans la phrase précédente. Ce traitement dépend fortement de la description utilisée pour représenter le champ sonore. Nous allons passer en revue chacune des méthodes en expliquant quels sont leurs avantages et leurs inconvénients, et nous expliquerons pourquoi nous avons choisi d'utiliser une représentation analogue du temps-fréquence mais prenant en plus compte de la dimension spatiale, c'est-à-dire une représentation espace-temps/vecteurs d'onde-fréquence.

## Représentations intégrales

Les représentations intégrales sont parfaitement adaptées pour la synthèse de champs sonores car elles font clairement apparaître les sources acoustiques nécessaires pour reproduire correctement le champ initial. Pour l'analyse de champ sonore, elles nécessitent de connaître le profil de la pression acoustique et de la dérivée normale de celle-ci en tout point d'une surface fermée. Le

champ est ensuite reconstruit partout ailleurs à l'aide de la formulation de Kirchhoff du principe de Huygens.

Les avantages de ces représentations supposent donc une connaissance idéale du champ. Malheureusement, lorsque nous sommes dans des conditions réelles, c'est-à-dire que nous avons affaire à une discrétisation de l'intégrale de Kirchhoff, il est très difficile de caractériser le repliement provoqué par cette discrétisation. Nous l'avons fait dans le cas simple d'une surface plane infinie contenant une distribution discrète de monopôles et de dipôles, à la section 4.3, lorsque l'objectif était de synthétiser un champ élémentaire, c'est-à-dire une onde plane. Il est difficile de caractériser les effets du repliement lorsque la géométrie du réseau de sources secondaires devient plus compliquée.

L'objectif de l'analyse/synthèse utilisant une description intégrale du champ sonore est très ambitieux : il s'agit de la reproduction exacte du champ sonore sur une zone étendue de l'espace. Pour atteindre cet objectif, il faut se donner les moyens, tant au niveau du nombre de microphones lors de la prise de sons, que du nombre de sources secondaires utilisées pour reconstruire le champ initial. La description intégrale des champs sonores n'est pas capable de gérer plusieurs niveaux de représentations (*scalability* en anglais). De fait, la dégradation de la qualité du réalisme du champ reproduit, occasionnée par la diminution progressive du nombre de capteurs/transducteurs, ne se fait pas sentir de manière progressive, mais abruptement.

Pour illustrer cette dernière affirmation, commençons par dire que nous pouvons distinguer deux objectifs différents de l'emploi du réseau de sources secondaires pour la synthèse d'un champ donné : le premier est de synthétiser correctement le champ de la source initiale dans le domaine de reproduction et le deuxième est d'annuler les interférences créées par le réseau de sources secondaires et faire en sorte que le champ soit nul à l'extérieur du domaine de reproduction.

L'objectif principal est de synthétiser correctement le champ initial à l'intérieur du domaine de reproduction. Si le champ n'est pas nul à l'extérieur du domaine de reproduction, l'acoustique de la salle hôte du dispositif de reproduction colorera la reproduction, mais les auditeurs sont habitués à ce genre de coloration. Souvent les audiophiles consacrent même une pièce spécialisée pour l'écoute, aux caractéristiques acoustiques assez neutres. Théoriquement, si le nombre de capteurs/transducteurs est très grand, le champ serait nul à l'extérieur du domaine de reproduction et le problème de la coloration de la reproduction par l'acoustique de la salle hôte ne se poserait pas. Mais lorsque ce nombre devient comparable avec le nombre d'enceintes couramment utilisées dans les dispositifs actuels, qu'il s'agisse de systèmes commerciaux (autour de 5 enceintes) ou de systèmes prototypes (pouvant aller jusque plusieurs centaines d'enceintes), ce nombre demeure insuffisant pour accomplir le deuxième objectif de la synthèse, c'est-à-dire l'annulation des interférences. Pire, il contribue à rajouter des interférences dans le domaine de reproduction, sous forme d'échos majoritairement, et dégrade ainsi fortement la qualité du rendu spatial. Ainsi, lorsque le nombre de capteurs/transducteurs diminue, le remède proposé est souvent pire que le mal.

Les chercheurs travaillant sur le système de synthèse de champs sonores actuel basé sur les représentations intégrales, la Wave Field Synthesis, sont bien conscients de cette limitation de leur dispositif. Il est souvent mentionné qu'une source peut être reproduite avec une certaine fenêtre de visualisation, voir par exemple la thèse de Corteel [25]. Ainsi, une seule partie du réseau de sources secondaires est mobilisée dans le cas où ce réseau entoure complètement la zone de reproduction, permettant d'éviter la synthèse d'échos parasites et gênants par la partie restante du réseau. Les sources sélectionnées pour synthétiser le champ souhaité dépendent de la position de la source à restituer. Cette stratégie est envisageable au moment de la synthèse lorsque nous souhaitons reproduire des champs connus idéalement, ce qui est bien le contexte des dispositifs actuels de Wave Field Synthesis : seules des scènes physiquement modélisées sont reproduites.

Le défi qui reste en suspens est de mettre au point une méthode d'analyse qui sache dissocier les deux composantes du champ sonore à partir des mesures récoltées par une antenne de



microphones. Ceci permettrait alors de reproduire non uniquement des scènes physiquement modélisées, mais aussi des scènes réelles, ayant été capturées par un réseau de microphones. Nous ne sélectionnerons que la composante servant à synthétiser le champ initial dans le domaine de reproduction et nous ignorerons la composante visant à annuler les interférences. Toutefois, ce n'est pas parce que nous ignorerons cette composante que toute correction de l'acoustique de la salle hôte est impossible. Il s'agit d'un constat réaliste : il n'est pas possible d'éliminer efficacement les interférences à l'extérieur du domaine de reproduction avec un nombre limité de transducteurs. Mais rien ne nous empêche de corriger les réflexions occasionnées par l'acoustique de la salle hôte non pas globalement, mais à l'intérieur du domaine de reproduction. Pour cela, nous pourrions utiliser la même méthode que celle utilisée pour l'analyse de champs réels à partir d'un réseau de microphones, et effectuer l'analyse du rayonnement de chacune des sources faisant partie du réseau de sources secondaires.

Dans l'état actuel des travaux sur les dispositifs d'analyse/synthèse basés sur les représentations intégrales, une telle méthode d'analyse n'existe pas encore. Ainsi, si nous sommes intéressés par la reproduction de scènes sonores réelles capturées par un réseau de microphones, il convient soit d'utiliser une solution hybride, c'est-à-dire utilisant les représentations harmoniques pour l'analyse de champs sonores et les représentations intégrales au moment de la synthèse, soit d'utiliser une méthode utilisant uniquement les représentations harmoniques. Nous allons maintenant décrire les avantages et les inconvénients de l'analyse et de la synthèse de champs sonores lorsque la description des champs sonores employée est une représentation harmonique.

## **Représentations harmoniques**

Quelle que soit la famille d'harmoniques envisagée, ondes planes, harmoniques cylindriques ou harmoniques sphériques, il s'agit d'une famille libre et génératrice de l'ensemble des distributions tempérées de  $\mathbb{R}^4$ , c'est-à-dire la majorité des champs multidimensionnels que le physicien est amené à devoir traiter. Pour le cas plus restreint des champs sonores, nous avons montré que seule une partie du domaine de Fourier global suffisait à caractériser les champs sonores. Il s'agit du domaine défini par la relation de dispersion  $\omega^2 - c^2 k^2 = 0$ . Ainsi, à une pulsation  $\omega$  donnée, seules les valeurs des transformées de Fourier spatiales généralisées évaluées sur le domaine défini par la relation de dispersion suffisent pour caractériser complètement le champ. En effet, la relation de dispersion est le domaine où se situent les éventuelles singularités de la représentation dans le domaine de Fourier. De ce fait, les représentations harmoniques restreintes au domaine défini par la relation de dispersion réalisent la même économie en terme de stockage de la représentation que les représentations intégrales (holographiques).

Les décompositions harmoniques permettent de caractériser efficacement le repliement introduit par la discrétisation du champ sonore, ce qui est un atout majeur pour la mise en œuvre d'un traitement visant à minimiser les effets du repliement spatial. En effet, les harmoniques observés sur un ensemble fini de points ne forment plus une famille orthogonale. L'objectif du traitement que nous allons détailler dans la partie II sera, à chaque pulsation  $\omega$ , d'orthogonaliser au mieux les ondes planes satisfaisant la relation de dispersion. Étant donné que les ondes planes sont justes des exponentielles complexes, les calculs liés à cette approche seront très simples. Nous pouvons de plus profiter de la propriété de convolution de la transformée de Fourier multidimensionnelle, liée à la propriété d'addition des exponentielles complexes. Cette propriété permet d'affirmer que la distorsion introduite par l'observation du champ sonore uniquement au niveau du réseau de microphones est la même quelle que soit l'onde plane. Il serait aussi possible d'envisager un traitement visant à orthogonaliser la base des harmoniques sphériques, ce qui a déjà fait l'objet de plusieurs travaux de recherche [3, 27, 28, 58, 62, 63, 66, 76, 83, 84]. Un des avantages de la décomposition en harmoniques sphériques est qu'elle fait directement apparaître un développement en séries,

utilisant une répartition discrète d'harmoniques, par rapport à la décomposition en ondes planes, qui utilise une répartition continue d'ondes planes. En revanche, il n'y a pas d'équivalent de la propriété d'addition des exponentielles complexes pour les fonctions de Bessel, de sorte qu'il n'y a pas d'équivalent à la propriété de convolution. De ce fait, la distorsion introduite par la discrétisation du champ sonore déforme de manière unique chacun des harmoniques sphériques utilisés pour la décomposition. De plus, les harmoniques sphériques sont des fonctions faisant intervenir les fonctions de Bessel sphériques, les fonctions de Legendre associées, qui sont des fonctions beaucoup plus complexes à calculer et à manipuler que les exponentielles complexes. Si le choix nous est donné, autant privilégier les ondes planes par rapport aux harmoniques sphériques.

Une des raisons pour laquelle j'ai choisi la décomposition en ondes planes est que je trouve qu'il s'agit d'une représentation qui est assez proche de la manière dont un auditeur perçoit et analyse une scène sonore. En effet, lorsqu'un auditeur veut analyser une scène sonore, il essaie de répondre à une série de questions telles que : quand est-ce que les sources jouent ? Quelles sont les sources acoustiques présentes dans la scène sonore et que sont-elles en train de jouer ? Où les sources sont-elles positionnées ? Évoluent-elles dans un lieu réverbérant ? etc. Afin d'analyser le contenu musical d'une scène sonore, l'auditeur utilise une sorte de décomposition temps-fréquence du point de vue du traitement du signal, étant donné qu'il n'attend pas que la scène soit terminée avant de l'analyser et qu'il analyse le son en termes de hauteur, de timbre, etc. Du point de vue de l'analyse spatiale, l'auditeur n'est pas omniscient et ne connaît pas la valeur du champ de pression acoustique en dehors de ces deux oreilles. À partir de cette connaissance limitée, il essaie de localiser la position des sources présentes dans la scène sonore. Or, dans la décomposition en ondes planes, le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  pointe vers la direction d'incidence de l'onde plane. La direction d'incidence des ondes planes est à rapprocher de la direction d'incidence des fronts d'onde de la source. Ainsi, l'analyse spatiale effectuée par un auditeur est une sorte d'analyse espace-vecteur d'onde, analogue à l'analyse temps-fréquence, excepté que nous considérons cette fois les trois dimensions spatiales au lieu de la dimension temporelle. L'interprétation sur la direction d'incidence à l'aide des harmoniques sphériques est beaucoup moins directe, étant donné qu'elle ne se situe pas dans le module des coefficients, mais dans la phase de ceux-ci. Et encore, il est difficile de parler de direction d'incidence pour un quadripôle. Toutefois, une superposition d'harmoniques sphériques est capable de former des figures de directivité beaucoup plus complexes, telles que celles représentées dans la partie III, au chapitre 7 par exemple. Ainsi, l'information est bien présente même si elle est plus difficilement accessible par rapport à la décomposition en ondes planes. Pour la méthode d'analyse en ondes planes, le principe de l'analyse consiste à filtrer le champ sonore de sorte à ne retenir que ce qui provient d'une direction donnée. Si l'on répète ce procédé pour un ensemble de directions, nous sommes alors capables de construire une réelle cartographie du champ sonore. Pour la méthode d'analyse en harmoniques sphériques, nous aboutissons à la même cartographie du champ sonore, mais par un chemin différent : nous projetons le champ sonore sur un ensemble de directivité élémentaires : monopolaire, dipolaire, quadripolaire, etc.

Au paragraphe précédent, nous avons dit que notre perception réalisait une sorte d'analyse espace-vecteur d'onde. Pourtant, la transformée de Fourier spatiale n'effectue pas une analyse espace-vecteur d'onde, de la même manière que la transformée de Fourier temporelle n'effectue pas une analyse temps-fréquence. En effet, si nous revenons sur l'équation (2.16), qui est la décomposition en ondes planes d'un monopôle acoustique dont la position est repérée par le vecteur  $\mathbf{r}_0$ , nous pouvons observer que les singularités de la transformée de Fourier spatiale à une pulsation  $\omega$  donnée sont présentes sur toute la sphère définie par la relation de dispersion. Si l'analyse était localisée au niveau de l'origine du repère, nous aurions aimé que seule la zone des vecteurs d'ondes dans le voisinage de la direction pointée par  $\mathbf{r}_0$  soit excitée et non la totalité de la sphère. Il s'agit d'un problème lié à la transformée de Fourier spatiale. Heureusement pour nous, la seule analyse que nous sommes capables d'effectuer à l'aide d'un réseau de microphones est

localisée, étant donné que le réseau de microphones se situe dans un domaine délimité de l'espace, si bien que l'analyse effectuée à partir des données récoltées par le réseau de microphones est naturellement et automatiquement une analyse espace-vecteur d'onde. L'objectif de l'analyse espace-vecteur d'onde sera donc de filtrer le champ sonore incident de sorte à ne retenir que la composante qui provient d'une direction donnée, ceci pour une position privilégiée de l'espace.

Comme son nom l'indique, les résultats de l'analyse espace-vecteur d'onde dépendent de la position, de la même manière que la direction d'incidence d'une source varie lorsqu'un auditeur se déplace. Ceci est vérifié sauf si cette source est située en champ très lointain, auquel cas cela correspondrait à la partie stationnaire de l'analyse. Ainsi, l'analyse de champs sonores par une antenne de microphones utilisant une représentation harmonique n'est pas adaptée pour réaliser une analyse du champ sonore sur une zone étendue de l'espace, contrairement à l'analyse de champs sonores basée sur les représentations intégrales. Si l'objectif est de caractériser le champ sonore sur une zone étendue de l'espace à l'aide des représentations harmoniques, il faudra utiliser plusieurs antennes de microphones, chacune analysant le champ pour une certaine région localisée de l'espace. Cette baisse du niveau d'exigences par rapport à l'analyse du champ sonore à l'aide des représentations intégrales permet de lui conférer un avantage important : celui de supporter plusieurs niveaux de représentations. L'analyse du champ sonore peut s'effectuer quel que soit le nombre de capteurs utilisés dans l'antenne de microphones. De manière logique, la finesse de l'analyse est améliorée lorsque l'on considère un plus grand nombre de capteurs dans l'antenne de microphones, qu'il s'agisse des harmoniques sphériques ou des ondes planes.

Au niveau de la synthèse de champs sonores, nous avons mentionné au cours de l'introduction de cette partie que les représentations harmoniques n'étaient pas les plus adaptées étant donné qu'il n'existe pas de générateurs d'ondes planes ni d'harmoniques sphériques dans la nature. Les représentations harmoniques n'affichent pas clairement le lien entre les causes, c'est-à-dire les sources acoustiques, et les effets, c'est-à-dire la propagation. Toutefois, il est tout à fait possible d'envisager le problème de la synthèse de champs sonores en utilisant une représentation harmonique. La première étape consistera à mesurer et caractériser la manière dont rayonne chacune des sources du réseau de transducteurs. Du point de vue du traitement du signal, ce réseau engendre un certain sous-espace de champs sonores. L'objectif de la synthèse sera donc de projeter un champ sonore cible sur le sous-espace des champs sonores engendré par le réseau de transducteurs. Dans la partie II, au chapitre 6, nous décrivons en détail une méthode pour effectuer la projection du champ sonore cible.

Pour conclure le bilan de cette première partie, je souhaiterais attirer l'attention du lecteur sur un point particulier : pourquoi l'utilisation de la décomposition du champ en harmoniques sphériques a rencontré un tel succès, et pourquoi le recours à la décomposition en ondes planes est-il si peu répandu ? Comme tentative de réponse à cette question, je pense que ce succès est dû en partie à des raisons historiques pour les premiers dispositifs ambisoniques introduits par Gerzon [36, 37]. Lors de l'introduction de ce procédé, le lien avec les harmoniques sphériques n'était pas la partie la plus importante de la contribution. Ce lien a été approfondi par la suite par la théorie des systèmes ambisoniques d'ordres élevés [27, 28], qui arrivent à représenter correctement le champ sonore sur une zone de plus en plus étendue à mesure que l'ordre de la représentation croît. La décomposition en ondes planes n'a pas connu un tel succès jusqu'à présent, alors que la théorie sous-jacente est beaucoup moins difficile à appréhender que celle des transformées de Hankel et des décompositions en séries de Fourier sphériques. Dans le domaine de l'acoustique, on se sert généralement de la décomposition en ondes planes pour dire que tout champ peut se décomposer en ondes planes, et l'on en reste là. Cela a conduit à vouloir à tout prix utiliser les ondes planes comme champ sonore de référence pour les systèmes de synthèse de champs sonores. Dans la partie II, nous nous proposons de montrer pleinement le potentiel de la représentation du champ sonore en ondes planes, pour l'analyse et la synthèse de champs sonores.





## **Deuxième partie**

# **Algorithmes pour l'analyse/synthèse de champs sonores**





---

Dans la partie I, nous avons envisagé l'analyse et la synthèse de champs sonores d'un point de vue théorique, et nous avons souligné les liens existants entre la communauté des acousticiens, habitués à travailler directement sur l'équation des ondes, et celle du traitement du signal, habituée à travailler avec des outils tels que la transformée de Fourier. Dans la présente partie, notre objectif est de nous donner des moyens concrets d'effectuer l'analyse et la synthèse de champs sonores réels par le biais d'antennes de microphones et de transducteurs. Pour ce faire, nous avons choisi d'utiliser comme description du champ sonore la représentation en ondes planes, étant donné que celle-ci nous est apparue à la fin de la partie I comme laissée pour compte, alors qu'elle possède une multitude de bonnes propriétés, telles que la faible complexité du calcul et de la manipulation des ondes planes, la propriété de convolution et le fait qu'une analyse temps-espace/fréquence-vecteur d'onde est assez proche de ce qu'effectue les mécanismes de la perception auditive.

Lors de la phase de développement des algorithmes dédiés à l'analyse de champs sonores par un réseau de microphones au chapitre 5, nous avons suivi un cheminement d'idées qui nous était imposé par l'étude physique des champs sonores. Ce n'est qu'*a posteriori* que nous nous sommes rendus compte que les algorithmes que nous avons développés s'intégraient parfaitement dans le contexte général de la formation de voies. Lors de la présentation des algorithmes pour l'analyse de champs sonores, nous essaierons donc de préserver au maximum l'originalité de cette démarche, qui permet d'aboutir à des algorithmes de formation de voies par des chemins détournés, mais nous essaierons aussi de donner des points d'ancrage avec cette discipline propre au traitement du signal. Les deux points de vue se complètent. Il apparaît même que notre contribution au domaine du filtrage spatial, ou de la formation de voies est assez originale et innovante car il existe très peu de travaux à notre connaissance dont l'objectif est de faire du filtrage spatial à partir de données récoltées par une antenne tridimensionnelle dont les microphones peuvent être positionnés arbitrairement.

De la même manière, pour les algorithmes de synthèse de champs sonores à partir d'un réseau de transducteurs, nous avons présenté au début de la thèse un article d'égalisation multicanale Guillaume *et al.* [46] visant à reproduire au mieux un champ de référence sur un ensemble de points de contrôle. L'objectif initial était d'imposer les mêmes conditions aux limites qu'un champ initial sur une surface fermée, idée qui avait été introduite par Ise [50], Takane *et al.* [97]. Comme il n'est pas possible de contrôler le champ sonore en tout point d'une surface fermée, l'idée était d'utiliser un ensemble de points discrétisant cette surface afin d'aboutir à l'objectif désiré. Il s'est avéré que les choses étaient beaucoup plus compliquées que ça dans la pratique, et qu'il aurait fallu une densité trop importante de points de contrôle pour que ce soit le cas (cf. chapitre 4 sur l'influence de la discrétisation pour l'analyse et la synthèse de champs sonores). Si la densité de points de contrôle n'était pas suffisante, l'algorithme d'égalisation multicanale fournit toujours une solution, optimale au sens des moindres carrés, mais physiquement aberrante, ce que nous avons illustré (Guillaume et Grenier [40]) dans le cas où le réseau de points de contrôle était une antenne linéaire. C'est d'ailleurs à cause de cet échec des algorithmes d'égalisation multicanale que nous avons cherché à investiguer les différentes descriptions possibles pour les champs sonores et voir où se situait le problème.

Au cours du chapitre 6, nous présenterons un algorithme pour la synthèse de champs sonores à partir d'un réseau de transducteurs qui s'adapte à toute représentation harmonique choisie pour décrire le champ sonore. Cet algorithme s'inspire beaucoup de l'algorithme d'égalisation multicanale que nous avons mis au point initialement, mais nous l'avons étendu afin qu'il puisse être utilisé de manière beaucoup plus générale.

---

---



## Chapitre 5

# Algorithmes pour l'analyse de champs sonores

### Résumé<sup>a</sup> :

Dans ce chapitre, nous passons en revue rapidement les différentes techniques de filtrage spatial existantes. Notre approche appartient à la catégorie de la formation de voies fréquentielle, car elle nécessite de calculer la représentation fréquentielle des signaux obtenus par l'antenne de microphones préalablement à tout traitement.

Dans un premier temps, nous utilisons la propriété énoncée et discutée dans la première partie de cette thèse, à savoir que la transformée de Fourier cartésienne possède la propriété de convolution, ce qui est équivalent à dire que la distorsion introduite par l'échantillonnage est la même quelle que soit l'onde plane considérée. Dans ces conditions, il n'est pas obligatoire d'effectuer une optimisation du vecteur de pondération pour une direction d'incidence donnée, à une pulsation donnée, comme c'est le cas pour tout algorithme de formation de voies traditionnel. Il suffit d'optimiser le vecteur de pondération à chaque fréquence d'analyse, quelle que soit la direction d'incidence considérée. Ce traitement peut être interprété comme l'optimisation d'une fenêtre d'analyse spatiale à chaque fréquence d'analyse.

Lorsque les antennes servant à l'analyse du champ sonore sont planes, nous montrons qu'il est aussi possible de réduire l'analyse dans le domaine de Fourier à un plan. Pour autant, l'analyse du champ sonore n'est pas une analyse bidimensionnelle mais tridimensionnelle, à l'ambiguïté entre le haut et le bas près.

Le traitement visant à optimiser la fenêtre d'analyse donne de bons résultats pour des antennes bidimensionnelles. En revanche, pour des antennes tridimensionnelles, il est préférable d'optimiser le vecteur de pondération pour chaque fréquence d'analyse et chaque direction d'incidence plutôt que d'optimiser une fenêtre d'analyse. En effet, le fait d'optimiser le vecteur de pondération pour une direction d'incidence donnée permet de recourir à un noyau d'optimisation plus efficace, calculant l'énergie du filtre spatial non plus à l'intérieur d'une sphère, mais à l'intérieur d'une couronne sphérique, de volume largement inférieur.

---

<sup>a</sup>Pour les lecteurs non familiés avec le domaine de la formation de voies, je conseille de passer ce résumé en première lecture et d'y revenir à la fin du chapitre.

L'algorithme de formation de voies utilisé pour optimiser le vecteur de pondération maximise le rapport de l'énergie du filtre spatial dans le voisinage de la direction souhaitée par rapport à l'énergie du filtre spatial pour toutes les directions de l'espace, qui constituent des signaux d'interférence dont on cherche à minimiser l'influence. Pour ce faire, plutôt que d'optimiser le vecteur de pondération en utilisant un ensemble discret de directions d'incidence, la procédure d'optimisation est appliquée sur un ensemble *continu* de directions d'incidences. Les calculs peuvent être conduits analytiquement en utilisant le développement en séries d'une onde plane en harmoniques sphériques. L'originalité de notre approche tient à la fois de cette optimisation qui est effectuée sur un ensemble continu de directions d'incidence mais aussi sur le fait qu'elle soit applicable pour des géométries quelconques d'antennes de microphones.

Les performances de ces traitements sont testées pour deux critères : le pouvoir de focalisation et le gain pour un bruit blanc. Le premier critère quantifie la qualité du filtrage spatial en indiquant quelle est la proportion d'énergie provenant de la direction souhaitée par rapport à l'énergie globale. Le deuxième critère quantifie la robustesse de l'algorithme par rapport au bruit présent au niveau des capteurs.

Le problème de l'optimisation de la géométrie de l'antenne de microphones est aussi investigué. Afin d'obtenir de bonnes performances sur une large plage de fréquences, nous montrons qu'il est judicieux d'utiliser une antenne de microphones qui ait des zones dans lesquelles il y ait une forte densité de microphones, afin de pouvoir analyser les petites longueurs d'ondes, mais qui ait aussi des microphones distants, afin d'améliorer le conditionnement de l'analyse des grandes longueurs d'onde.

## 5.1 Introduction

La formation de voies est une approche du filtrage spatial [65] très flexible. Elle désigne un traitement appliqué aux signaux récoltés par une antenne de capteurs ou de transducteurs afin de fournir une certaine forme de filtrage spatial. Un des objectifs possible de la formation de voies peut être d'isoler le signal provenant d'une direction donnée de l'espace. Parmi les différentes approches liées à la formation de voies, les signaux sont décrits à l'aide de représentations harmoniques, c'est-à-dire en utilisant les ondes planes, comme c'est le cas dans des travaux de Van Veen et Buckley [65], Parra [77, 78], Ward *et al.* [105, 106], Yan [112], en utilisant les harmoniques sphériques, comme c'est le cas dans Li [60], Li et Duraiswami [61], Rafaely [84], ou bien en utilisant une combinaison de ces deux représentations et permettre de compenser les effets dûs à la présence de sources en champ proche comme c'est le cas dans les travaux de Abhayapala *et al.* [2], Kennedy *et al.* [52].

Ces approches de la formation de voies sont des techniques d'estimation non paramétriques. Il existe des méthodes paramétriques qui permettent de dépasser les limites usuelles apparaissant lorsque les décompositions harmoniques sont utilisées. Des exemples d'approches paramétriques sont donnés dans Krim et Viberg [57], telles que l'algorithme MUSIC, l'estimateur de Capon, etc. Ces méthodes appelées méthodes à haute résolution car elles permettent de dépasser les limites de la formation de voies classique en termes de résolution par exemple permettent d'affiner l'estimation des directions d'arrivée. Ces approches peuvent être aussi complétées afin d'estimer aussi la distance des sources. Ce problème est connu sous le nom de l'estimation conjointe des retards et des directions d'arrivée (Joint Estimation of Time Delays and Direction of Arrivals (JADE)) voir par exemple [103]. Bien que ces techniques soient très intéressantes à étudier au niveau théorique, leur propos concerne la localisation de sources. On pourrait aussi leur dédier une thèse à part entière afin qu'elles soient correctement traitées. Notre objectif principal n'est pas la localisation de sources, mais d'effectuer une analyse temps-espace/fréquence-vecteur d'onde du champ

sonore, afin d'aboutir à une cartographie du champ sonore. Nous nous sommes donc limités aux approches liées à la formation de voies, mais ces approches paramétriques apparaissent comme des perspectives intéressantes pour l'application de nos travaux.

Nous allons utiliser la formation de voies comme un procédé permettant d'assurer le filtrage spatial dans le domaine des vecteurs d'ondes. Il ne s'agit pas d'un cadre restrictif car nous avons vu à la partie I que tout champ sonore pouvait être décomposé en ondes planes. Ainsi, que les sources analysées se situent en champ proche ou en champ lointain importe peu, étant donné que leur transformée de Fourier existe. En revanche, il est clair que cette représentation n'incorpore qu'implicitement la notion de distance des sources comparées aux méthodes précédemment citées. Nous illustrerons ce qu'implicitement veut dire dans le chapitre 7 sur la mise au point du dispositif d'analyse par simulations. Les signaux que nous devons traiter appartiennent à la catégorie des signaux à *large bande*, de sorte que la formation de voies est généralement réalisée en appliquant un filtre FIR à chacun des éléments de l'antenne, qu'il s'agisse de l'analyse ou de la synthèse. Une autre technique que nous emploierons est celle de la formation de voies fréquentielle, qui consiste à considérer le problème large bande comme une superposition de problèmes à bande étroite, ce qui est rendu faisable par le recours à la FFT pour réaliser la décomposition fréquentielle. De plus, l'ensemble des filtres FIR est optimisé pour une direction d'incidence donnée, et il est donc nécessaire de constituer une banque de filtres si nous souhaitons analyser le champ sonore pour un ensemble de directions d'incidence. Plusieurs types de formations de voies existent :

- formation de voies indépendante des données. Aucun *a priori* n'est fait sur les données analysées. C'est dans ce cadre que nous nous situons. La seule hypothèse faite est que les signaux analysés sont des champs propagatifs, qui satisfont donc une relation de dispersion, permettant de connaître la zone du spectre excitée dans le domaine de Fourier ;
- formation de voies statistiquement optimale, qui nécessite un *a priori* sur la direction des signaux d'interférence dont on chercherait à minimiser l'influence en jouant sur les coefficients des différents filtres FIR ;
- formation de voies adaptative ou partiellement adaptative, lorsque nous considérons une formation de voies statistiquement optimale, mais dont nous supposons que les statistiques des signaux d'interférence varient dans le temps.

## 5.2 Vue d'ensemble du traitement

Le traitement appliqué aux mesures recueillies par l'antenne de microphones se décompose en plusieurs étapes : la représentation fréquentielle des enregistrements est calculée avant tout, étant donné que notre module de traitement appartient à la catégorie de la formation de voies fréquentielle. Puis, pour chaque fréquence, plusieurs stratégies pour le calcul du vecteur de pondération des mesures peuvent être envisagées, parmi lesquelles :

- le traitement le plus simple consiste à optimiser une fenêtre d'analyse spatiale. Dans ce cas, la procédure de calcul du vecteur de pondération s'affranchit de la direction d'incidence. Si nous appliquons un vecteur de pondération qui est indépendant du vecteur d'onde d'analyse, ceci est équivalent au problème de l'optimisation d'une fenêtre d'analyse spatiale. En effet, si nous effectuons une analogie avec le traitement des signaux temporels, cela reviendrait à pondérer le signal de la même manière quelle que soit la fréquence que nous souhaiterions analyser. Si la pondération est indépendante de la fréquence, il ne s'agit pas d'un filtre, mais juste d'une fenêtre d'analyse. Si nous voulons avoir un traitement différent selon les fréquences analysées, alors la formation de voies consisterait à multiplier le signal d'entrée par une fenêtre variable selon la fréquence d'analyse. La formation de voies n'agit donc pas comme un filtrage linéaire, qui agit de manière convolutive, mais comme un filtre qui agit de manière multiplicative. Il s'agit donc d'une forme de filtrage bien particulière, qu'il

ne faut pas confondre avec le filtrage usuellement enseigné pour les signaux de la variable temporelle. En effet, il est difficile de mettre en place des filtres spatiaux qui agiraient de manière convolutive dans le domaine spatial ;

- un traitement plus poussé consiste à optimiser ce vecteur de pondération pour un vecteur d'onde donné à une fréquence spécifique. Étant donné qu'il est nécessaire de calculer un vecteur de pondération pour un ensemble de directions d'analyse pour effectuer une analyse spatiale du champ sonore complète à une fréquence spécifique, la complexité globale de l'analyse est accrue. Mais le gain en performance de l'analyse contrebalance le coût de calcul nécessaire.

Quel que soit le traitement précédemment envisagé, il existe deux techniques pour le calcul des vecteurs de pondérations. Toutes deux visent à minimiser la norme  $L_2$  entre une réponse de référence et la réponse effective de la formation de voies, la première utilisant une norme continue et la deuxième une norme discrète dans l'espace des vecteurs d'onde. La différence de traitement qui existe entre l'usage des deux différentes normes, discrète ou continue, est que dans le premier cas, le filtre spatial est optimisé pour minimiser l'erreur entre une réponse de référence et la réponse effective de la formation de voies sur un ensemble discret de directions d'incidences, tandis que la même erreur est minimisée pour toutes les directions d'incidence (ensemble continu) dans le deuxième cas. Utiliser une norme continue permet donc d'éviter les problèmes qui peuvent survenir lors du maillage de l'ensemble des directions d'incidences, comme c'est effectué dans les travaux de Parra [77, 78], Yan [112]. En effet, minimiser l'erreur sur un ensemble discret de directions d'incidences n'est pas forcément synonyme d'une minimisation globale pour l'ensemble des directions d'incidence. Nous illustrerons ce problème à la section 5.5.

L'utilisation de la norme continue est écartée par Van Veen et Buckley dès qu'une configuration différente de l'antenne linéaire est envisagée. Nous nous sommes pourtant engagés dans cette voie, qui n'est pas forcément celle de la simplicité. Celle-ci possède néanmoins toute la beauté d'une formulation dans le domaine continu, qui permet de repousser l'usage des méthodes numériques un peu plus en aval, et de mieux appréhender le phénomène étudié.

Nous allons passer en revue chacune des étapes de l'analyse de champs sonores par un réseau de microphones.

### 5.2.1 Décomposition fréquentielle

La première étape du module d'analyse de champs sonores est de calculer la représentation fréquentielle de chacun des signaux recueillis par l'antenne de microphones, constituée de  $M_{\text{mic}}$  microphones. Les différentes étapes du traitement sont représentées sur le diagramme de la figure 5.1.

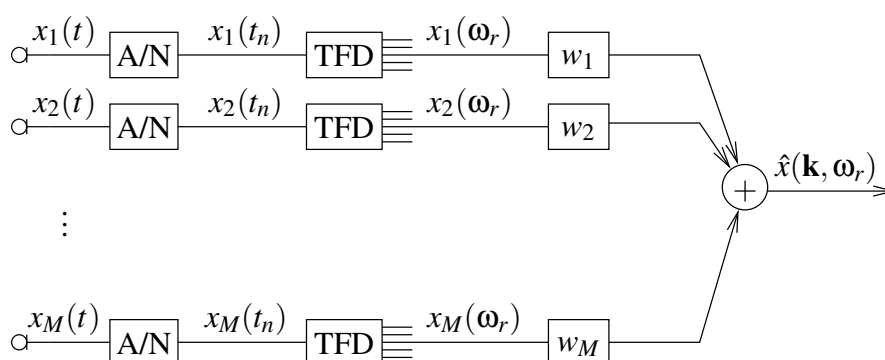


FIG. 5.1 – Module d'analyse de champ sonore

Les signaux enregistrés par les microphones sont amplifiés, puis convertis en signaux numériques par l'intermédiaire d'un convertisseur analogique/numérique. La fréquence d'échantillonnage est  $F_e$ . Afin de se prémunir de repliement dans le domaine fréquentiel, les signaux ont aussi été préalablement filtrés par le filtre anti-repliement coupant toutes les fréquences supérieures à  $F_e/2$ . Ensuite, la transformée de Fourier discrètes (TFD) est utilisée pour effectuer l'analyse temps-fréquence de chacun des enregistrements. Dans la pratique, celle-ci est implémentée à l'aide de la TFD, sous forme de séries de Fourier discrètes, à l'aide de l'algorithme de la FFT. Cela nécessite d'avoir des signaux d'entrée ayant un nombre d'échantillons fini. Lorsque les champs sonores analysés sont des opérateurs de propagations (rayonnement d'une source réelle pour une excitation impulsionnelle) les enregistrements obtenus (réponses impulsionnelles) sont suffisamment courts pour que l'utilisation d'une transformée de Fourier à court terme à fenêtre rectangulaire fournisse des résultats convenables. La durée de la fenêtre rectangulaire est égale à la durée de la réponse impulsionnelle dans ce cas, qui est liée au temps de réverbération de la salle. Ainsi, nous pouvons dire que les opérateurs de propagation mesurés sont des signaux qui peuvent être considérés à la fois comme à bande limitée dans le domaine fréquentiel et de durée finie. Certes, c'est impossible d'un point de vue théorique : si le champ est de durée finie, le support de la transformée de Fourier est infini, et réciproquement. Retenons donc que l'erreur faite en faisant l'hypothèse bande limitée et durée limitée est négligeable.

En revanche, ce n'est pas le cas si nous considérons des enregistrements de champs sonores réels, issus d'une prise de son, qui sont généralement beaucoup plus longs, de l'ordre de la minute. Dans ce cas, il est préférable de segmenter le signal en plusieurs fenêtres afin de réaliser une analyse temps-fréquence sur chacun des segments et d'utiliser d'autres fenêtres que la fenêtre rectangulaire pour obtenir une meilleur image fréquentielle des champs sonores analysés, étant donné que chaque segment pris individuellement ne satisfait pas correctement l'approximation d'être de durée finie (le signal n'est pas toujours négligeable aux frontières du segment) et à bande limitée, contrairement aux réponses impulsionnelles.

Dans le reste de la thèse, nous nous cantonnerons à l'étude d'opérateurs de propagation. Si nous jugeons la durée de ceux-ci trop longue, il est donc nécessaire de les tronquer intelligemment en utilisant une fenêtre de pondération de type Kaiser-Bessel par exemple, afin de ne pas introduire de discontinuités artificiellement : l'étude des signaux temporels par FFT fait implicitement l'hypothèse que les signaux se répètent de manière périodique, ce qui peut provoquer des problèmes aux frontières de l'analyse. Les mêmes remarques que celles effectuées à la section 3.2.1 sur le phénomène de Gibbs sont toujours valables.

## 5.2.2 Optimisation du vecteur de pondération

Avant de discuter de l'optimisation des poids du vecteur de pondération, nous allons faire le lien véritable entre la formation de voies et le modèle physique représentatif de notre chaîne de mesures. Les conditions sur l'échantillonnage des signaux dans le domaine temporel étant maîtrisées pour assurer une reconstruction parfaite, nous choisissons de simplifier l'étude en considérant celle-ci comme acquise, c'est-à-dire que nous supposons la connaissance de la représentation temporelle ou fréquentielle des signaux quels que soit l'instant ou la fréquence considérés.

Ainsi, le champ sonore mesuré par l'antenne de microphones (et donc échantillonné dans le domaine spatial) est correctement représenté par le modèle suivant si nous supposons les microphones ponctuels et omnidirectionnels :

$$\begin{aligned}
p_{\text{ana}}(\mathbf{r}, \omega) &= \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} p(\mathbf{r}_m, \omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \\
&= p(\mathbf{r}, \omega) \cdot \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Dans l'équation précédente,  $p(\mathbf{r}_m, \omega)$  représente la valeur du champ sonore initial  $p$ , à la pulsation  $\omega$ , évaluée au point repéré par le vecteur  $\mathbf{r}_m$ , position du  $m^{\text{ième}}$  microphone. Ainsi, le champ sonore à analyser à la pulsation  $\omega$  est le produit du champ initial par une somme d'impulsions de Dirac. Ces impulsions de Dirac sont le reflet de l'échantillonnage spatial, qui est dans la majorité des cas non uniforme. L'équation (5.1) suppose un certain nombre d'hypothèses sur les microphones. Le lecteur intéressé par un établissement plus rigoureux de la formule établissant le signal réellement mesuré par l'antenne de microphones peut se référer à l'encadré 5.1 pour obtenir un développement complet du processus de mesure.

La conclusion de cette digression est que nous pouvons prendre en compte les caractéristiques de chacun des capteurs dans le module d'analyse de champ sonore si nous le souhaitons. Toutefois dans la suite de ce paragraphe, nous allons supposer les microphones omnidirectionnels. L'expression de référence utilisée sera celle de l'équation (5.1). Nous allons maintenant nous intéresser aux différentes méthodes permettant de focaliser l'antenne dans une direction donnée.

Pour effectuer une analyse correcte du champ sonore, le modèle présenté par l'équation (5.1) ne profite pas de toute la puissance offerte par les méthodes de traitements numériques, car il ne possède pas assez de degrés de liberté, permettant d'affiner l'analyse lorsqu'ils sont bien choisis. Donc, nous allons utiliser un vecteur de pondération, venant pondérer chacune des mesures. Cette équation devient alors :

$$p_{\text{ana}}(\mathbf{r}, \omega) = p(\mathbf{r}, \omega) \cdot \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \tag{5.4}$$

Comment choisir les différents poids du vecteur de pondération  $\underline{w}(\omega) = [w_1, \dots, w_{M_{\text{mic}}}]^T$  ? Si nous calculons la transformée de Fourier de la relation précédente, nous obtenons :

$$p_{\text{ana}}(\mathbf{k}, \omega) = p(\mathbf{k}, \omega) *_3 \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m} \tag{5.5}$$

Dans cette équation,  $*_3$  désigne le triple produit de convolution. Le produit simple dans le domaine spatial est transformé en produit de convolution par la transformée de Fourier spatiale. La transformée de Fourier spatiale du champ initial est donc déformée de manière convolutive par la transformée de Fourier de la fenêtre d'analyse. Dans le domaine de l'analyse harmonique des signaux discrets de la variable temporelle, il est bien connu que le recours à une fenêtre d'analyse uniforme est loin d'être le meilleur choix. On utilise alors d'autres fenêtres de pondération, telles que les fenêtres de Hanning, Hamming, Blackman, et Kaiser-Bessel, qui améliorent sensiblement l'analyse [51, 99]. Une bonne fenêtre d'analyse doit réaliser un bon compromis entre la résolution et le niveau des lobes secondaires par rapport au niveau du lobe principal. Plus la résolution est fine, plus nous parviendrons à dissocier deux sinusoïdes de fréquences proches. Si les lobes secondaires ont un niveau trop important, cela peut masquer des sinusoïdes qui sont situées dans la même plage de fréquence, de sorte que l'amplitude des lobes secondaires limite la dynamique de la représentation calculée.

Le problème auquel nous avons affaire est toujours un problème d'analyse harmonique. Nous allons donc retrouver les mêmes concepts de résolution et de dynamique de la représentation associée que pour l'étude de l'analyse harmonique des signaux temporels. En revanche, il possède

L'hypothèse de capsules de microphones ponctuelles et omnidirectionnelles n'est jamais vérifiée dans la pratique. Il faut donc mettre à jour l'expression (5.1) afin de tenir compte des caractéristiques réelles des microphones, telle que la directivité par exemple. Celle-ci devient :

$$p_{\text{ana}}(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} p_{\text{mes},m}(\omega) \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \quad (5.2)$$

Il ne nous reste maintenant plus qu'à relier le signal mesuré par le  $m^{\text{ième}}$  microphone  $p_{\text{mes},m}(\omega)$  au champ de pression acoustique initial  $p(\mathbf{r}, \omega)$ . Cette relation est très intéressante. En effet, il existe deux types de formation de voies : discrète et continue. La plus répandue est la formation de voies discrète qui utilise toutes les mesures fournies par une antenne de capteurs, et tire avantage de toutes les méthodes de traitement numérique de signaux. Mais il n'en demeure pas moins que le signal fourni par chaque capteur de ce réseau est le résultat d'une formation de voies continue. Nous pouvons prendre pour exemple le cas des antennes paraboliques pour l'étude du rayonnement électromagnétique : les signaux provenant de la direction pointée par l'antenne sont intégrés de manière cohérente sur toute la surface de l'antenne alors que ceux provenant de directions différentes sont des signaux d'interférence qui ne sont pas intégrés de manière cohérente. Un microphone agit de manière similaire par l'intermédiaire de sa membrane. Ainsi, le système global est la combinaison de deux filtrages spatiaux, l'un au niveau local effectué par chacun des microphones de l'antenne, et l'autre effectué de manière numérique par le processeur utilisé pour la formation de voies. Soit  $h_m(\mathbf{r})$  la réponse impulsionnelle spatiale du  $m^{\text{ième}}$  microphone. Le champ initial  $p(\mathbf{r}, \omega)$  et le champ mesuré sont reliés par la relation suivante :

$$\begin{aligned} p_{\text{mes},m}(\omega) &= (h_m * p(\omega))(\mathbf{r}_m) \\ &= \iiint_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} h_m(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}, \omega) d^3\mathbf{r} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Nous n'avons pas l'habitude de traiter des objets tels que des réponses impulsionnelles spatiales. Pour donner une interprétation plus parlante, nous allons considérer le champ global  $(h_m * p(\omega))(\mathbf{r})$  pour tout vecteur  $\mathbf{r}$  et pas seulement pour le vecteur  $\mathbf{r}_m$ . Si nous appliquons la transformée de Fourier spatiale à ce champ, nous obtenons  $H_m(\mathbf{k}) \cdot P(\mathbf{k}, \omega)$ . De cette équation, nous pouvons en déduire que  $h_m(r)$  nous renseigne sur certains aspects :

- l'information sur la directivité est incluse dans  $H_m(\mathbf{k})$ , qui dans le cas général dépend bien du vecteur d'onde analysé. Lorsque nous traçons la valeur de  $H_m(\mathbf{k})$  sur une sphère de rayon  $k$ , cela nous donne le diagramme de directivité du microphone à la pulsation  $\omega = kc$ . Lorsque nous faisons varier le rayon de cette sphère, le diagramme de directivité peut changer et reflète les changements de directivité éventuels du microphone en fonction de la fréquence ;
- le microphone agit aussi comme un filtre passe-bas dans le domaine spatial. Sa bande passante est finie. Elle dépend de la géométrie du microphone. En effet, le champ sonore incident est intégré sur toute la surface de la membrane.

TAB. 5.1 – Digression sur le champ effectivement mesuré par l'antenne de microphones

quelques particularités qu'il me semble important de souligner : il s'agit d'un problème d'analyse harmonique dans le domaine spatial (donc tridimensionnel) à partir d'échantillons non uniformément espacés, et dont la densité est largement inférieure à celle requise pour assurer une reconstruction parfaite des signaux : pour une reconstruction parfaite des signaux, si nous les supposons à bande limitée  $k_{\max} = \omega_{\max}/c$ , alors il faudrait une densité de microphones de l'ordre de  $10^4$  capteurs par  $\text{m}^2$  pour une analyse surfacique et  $10^6$  capteurs par  $\text{m}^3$  pour une analyse volumique (voir à ce sujet les remarques effectuées au chapitre 3 sur l'analyse des champs sonores à partir d'une représentation discrète de mesures). Le nombre de capteurs envisageable dans la pratique est largement inférieur à ces conditions idéales. Cela entraîne donc des conséquences sur la résolution et la dynamique que nous serions en droit d'attendre par rapport à une analyse effectuée sur des signaux temporels.

La première possibilité pour le calcul du vecteur de pondérations  $\underline{w}$  sera donc d'optimiser la fenêtre d'analyse, afin d'obtenir un bon compromis entre la résolution et le niveau des lobes secondaires. L'optimisation de la fenêtre d'analyse sera détaillée à la section 5.3. Elle s'effectue indépendamment du vecteur d'onde analysé, mais est dépendante de la pulsation d'analyse car nous utiliserons la relation de dispersion comme hypothèse *a priori* lors de l'optimisation.

La deuxième possibilité pour le calcul du vecteur de pondérations sera de l'optimiser pour une direction donnée, ou de manière équivalente, pour un vecteur d'onde donné dans le domaine de Fourier. Ainsi, nous cherchons à optimiser un estimateur de la transformée de Fourier, mais pour un vecteur d'onde spécifique  $\mathbf{k}_0$ . Si nous explicitons dans ce cas le produit de convolution de la relation (5.5) :

$$\hat{p}_{\text{ana}}(\mathbf{k}_0, \omega) = \iiint_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} p(\mathbf{k}, \omega) \cdot \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_m} d^3\mathbf{k} \quad (5.6)$$

La technique décrivant cette méthode de calcul du vecteur de pondération sera développée dans les sections 5.4 et 5.5. Afin de terminer la présentation de cette vue d'ensemble de l'analyse de champs sonores, nous allons revenir sur le choix des normes utilisées lors de la minimisation des fonctions de coût.

### 5.2.3 Choix de la norme

Le prochain paramètre important du module d'analyse de champ sonore sera le choix de la norme qui sera utilisée pour l'évaluation de la fonction de coût que nous chercherons à minimiser. Nous allons poursuivre un raisonnement logique à partir de la physique sous-jacente à notre problème. Nous avons vu à la partie I de cette thèse que le support de la transformée de Fourier de champs sonores monochromatiques était une sphère dans le domaine des vecteurs d'onde  $[k_x, k_y, k_z]$  étant donné que ceux-ci vérifient l'équation des ondes. De manière plus rigoureuse, la relation de dispersion indique la zone du domaine des vecteurs d'onde où sont localisées les singularités potentielles de la représentation dans le domaine de Fourier (voir à ce propos le chapitre 2, section 2.4.1). Il s'agit de la zone du domaine des vecteurs d'ondes intéressante à étudier.

Ainsi, à une pulsation  $\omega$  donnée, l'objectif est d'estimer la transformée de Fourier du champ sonore sur la sphère de rayon  $k = \omega/c$ . Nous allons repérer naturellement donc un vecteur d'onde donné  $\mathbf{k}_0$  en coordonnées sphériques  $[\omega/c, \phi_0, \theta_0]$ . L'objectif est d'obtenir un bon estimateur de la transformée de Fourier du champ initial évaluée en  $\mathbf{k}_0$ , soit  $\hat{p}(\mathbf{k}_0, \omega)$ . Pour cela, nous savons que le signal d'intérêt est  $e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$  dont la transformée de Fourier est  $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ . Nous savons de plus que les signaux d'interférence potentiels sont l'ensemble des ondes planes  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ , de transformée de Fourier  $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$ , balayant la sphère de centre  $O$  de rayon  $k_0$  excepté pour la direction d'analyse  $\mathbf{k}_0$ . Ainsi, nous choisissons le vecteur de pondération  $\underline{w}$  qui maximise l'énergie dans



le voisinage de  $\mathbf{k}_0$  au détriment du reste de la sphère, ce qui s'exprime mathématiquement par le critère suivant :

$$\underline{w}(\mathbf{k}_0, \omega) = \max_{[w_1, \dots, w_{M_{\text{mic}}}] \in \mathbb{C}^{M_{\text{mic}}}} \frac{\iint_{\mathbf{k} \in \Omega_{\text{res}}(\mathbf{k}_0)} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k_0^2 d^2\Omega}{\iint_{\mathbf{k} \in S(\mathbf{0}, k_0)} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k_0^2 d^2\Omega} \quad (5.7)$$

Dans cette expression,  $S(\mathbf{0}, k_0)$  désigne la sphère dont le centre est l'origine du repère  $O$ , et de rayon  $k_0$ .  $\Omega_{\text{res}}(\mathbf{k}_0)$  désigne une portion de cette même sphère, donc un certain angle solide, d'où la notation  $\Omega$  centrée autour du vecteur d'onde analysé  $\mathbf{k}_0$ .

Le dénominateur de l'équation (5.7) calcule l'énergie du filtre spatial sur la surface entière de cette sphère, tandis que son numérateur calcule l'énergie du filtre spatial uniquement dans le voisinage  $\Omega_{\text{res}}(\mathbf{k}_0)$  de  $\mathbf{k}_0$ . Il s'agit du meilleur filtrage spatial possible, lorsque nous ne voulons pas faire d'hypothèses sur les statistiques du champ sonore à traiter (formation de voies indépendante des données). Ce filtrage minimise l'effet des signaux d'interférence potentiellement présents et n'utilise pour seule hypothèse que la relation de dispersion de l'équation des ondes.

Ainsi, la norme naturelle qui apparaît est une norme quadratique  $L_2$  surfacique, car évaluée sur une sphère ou une portion de sphère. La maximisation du rapport de l'équation (5.7) est loin d'être triviale même si ce critère semble le plus naturel possible. Nous n'envisagerons un problème similaire que dans la section 5.5.2 de ce chapitre. Cela fait intervenir des développements en harmoniques sphériques standard, dont malheureusement peu de formules sont disponibles d'un point de vue analytique.

Nous pouvons contourner le problème de l'évaluation des intégrales surfaciques de deux manières différentes : la première consiste à utiliser des méthodes numériques, c'est-à-dire d'utiliser une norme  $L_2$  surfacique mais discrète, remplaçant les intégrales sur la sphère de l'équation (5.7) par des sommes sur un ensemble de vecteurs d'ondes réalisant un maillage de ladite sphère. Le critère correspondant est alors le suivant :

$$\underline{w}(\mathbf{k}_0, \omega) = \max_{[w_1, \dots, w_{M_{\text{mic}}}] \in \mathbb{C}^{M_{\text{mic}}}} \frac{\sum_{\mathbf{k}_s \in \Omega_{\text{res}}(\mathbf{k}_0)} \alpha_s \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2}{\sum_{s=1}^S \alpha_s \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2} \quad (5.8)$$

Dans l'équation précédente, les  $S$  vecteurs  $\mathbf{k}_s$  forment un maillage de la sphère de rayon  $k_0$ . Généralement, le nombre de vecteurs  $S$  est beaucoup plus important que le nombre de microphones  $M_{\text{mic}}$ . Les coefficients  $\alpha_s$  servent à pondérer l'énergie de leur vecteur d'onde associé, permettant de pondérer un peu plus les zones du domaine des vecteurs d'onde à privilégier telles que les zones où le maillage est moins dense par exemple. L'idée sous-jacente à l'utilisation de ce critère est toujours la même : le dénominateur calcule toujours l'énergie globale du filtre spatial, tandis que le numérateur calcule l'énergie du filtre spatial uniquement pour les indices  $s$  tels que les vecteurs d'ondes associés se situent dans le voisinage du vecteur d'analyse  $\mathbf{k}_0$ . C'est ce genre de critères qui est utilisé dans les travaux de Parra [77, 78], Yan [112].

La deuxième manière de contourner l'évaluation de l'intégrale surfacique est de considérer des

intégrales volumiques à la place. Le critère (5.7) devient alors :

$$\underline{w}(\mathbf{k}_0, \omega) = \max_{[w_1, \dots, w_{M_{\text{mic}}}] \in \mathcal{C}^{M_{\text{mic}}}} \frac{\iiint_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}(\mathbf{k}_0, k_{\text{res}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k^2 dk d^2\Omega}{\underbrace{\iiint_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}(\mathbf{0}, k_0 - k_{\text{res}}, k_0 + k_{\text{res}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k^2 dk d^2\Omega}_{\text{Pouvoir de focalisation}}} \quad (5.9)$$

Dans cette équation,  $\mathcal{B}(\mathbf{k}_0, k_{\text{res}})$  désigne la boule dont l'origine est repérée par le vecteur  $\mathbf{k}_0$  et dont le rayon est  $k_{\text{res}}$ , et  $\mathcal{C}(\mathbf{0}, k_0 - k_{\text{res}}, k_0 + k_{\text{res}})$  désigne la couronne sphérique de centre  $O$  comprise entre les rayons  $k_0 - k_{\text{res}}$  et  $k_0 + k_{\text{res}}$ . Ainsi, ce critère utilisant des intégrales volumiques est juste une extension du critère utilisant des intégrales surfaciques, mais la philosophie demeure la même : nous maximisons l'énergie du filtre spatial autour de  $\mathbf{k}_0$  et minimisons l'énergie associée aux signaux d'interférence potentiels situés dans la couronne sphérique. Le recours à des intégrales volumiques plutôt que surfaciques peut sembler plus compliqué au premier abord, mais nous verrons que nous pouvons le mener à bien plus facilement, à la section 5.4, étant donné qu'il ne fait pas intervenir de décompositions compliquées en harmoniques sphériques standard. De plus, l'introduction de ce nouveau critère est cautionné par d'autres remarques faites précédemment :

- lorsque nous analysons un champ sonore monochromatique sur une zone limitée de l'espace, le support de la transformée de Fourier ne se limite plus à la sphère de rayon  $\omega/c$  dans le domaine des vecteurs d'ondes. Le recours à des intégrales volumiques permet dans une certaine mesure de prendre cet aspect en compte ;
- si les champs sonores réels que nous analysons par le biais d'une antenne de microphone s'écartent légèrement du modèle idéal de l'équation des ondes (1.1) (présence de dissipation dans le fluide réel, écarts entre la célérité du son réelle et celle du modèle) l'introduction des intégrales volumiques sera plus robuste vis-à-vis de ces légers écarts.

## 5.2.4 Introduction des traitements proposés

Maintenant que nous avons fini d'introduire chacune des parties du module d'analyse de champs sonores, c'est-à-dire la décomposition fréquentielle et le choix de la méthode et de la norme utilisée pour le calcul du vecteur de pondération, nous allons présenter rapidement ce qui va être exposé au cours des prochaines sections. La prochaine section traitera de l'optimisation de la fenêtre d'analyse, pour laquelle la pondération calculée sera indépendante de la direction analysée. Nous traiterons le cas des antennes bidimensionnelles et tridimensionnelles, mais cette méthode devrait être réservée aux antennes bidimensionnelles. En effet, les performances du filtrage spatial pour les antennes tridimensionnelles ne sont pas au rendez-vous, alors que nous pouvons simplifier l'étude dans le cas des antennes bidimensionnelles : étant donné qu'elles sont incapables de différencier les ondes planes provenant du haut, et celles provenant du bas, nous verrons que nous pouvons simplifier l'analyse en ne la considérant que dans le plan  $(Ok_x k_y)$ . Pour obtenir des bonnes performances dans le cas des antennes tridimensionnelles, une première approche sera d'utiliser le critère intégrant l'énergie du filtre spatial dans des volumes, comme explicité par le critère (5.9), ce qui sera exposé à la section 5.4. Mais si nous souhaitons forger des filtres spatiaux de réponse beaucoup plus générale, et qui ne cherchent pas uniquement à isoler une seule direction d'incidence, l'astuce utilisée par le critère (5.9) ne fonctionnera plus, et il faudra utiliser les critères intégrant l'énergie du filtre spatial sur des surfaces directement, soit pour un ensemble

discret de directions d'incidences, en utilisant le critère (5.8), soit pour un ensemble continu de directions d'incidences, en utilisant le critère (5.7). Ceci sera l'objet de la section 5.5. Ce dernier traitement permettant d'effectuer un design du filtre spatial ayant une réponse générique est plus difficile à résoudre d'un point de vue analytique car il requière de maîtriser la décomposition en harmoniques sphériques standard. Il y a malheureusement peu de tables de transformées en harmoniques sphériques standard, et on préfère généralement utiliser des méthodes numériques pour calculer ces décompositions, pour lesquelles on peut de plus utiliser des techniques d'optimisation plus flexibles, permettant d'imposer des contraintes supplémentaires ou d'utiliser une autre norme que la norme  $L^2$ , comme dans Yan [112].

### 5.3 Optimisation de la fenêtre d'analyse

Un module élémentaire d'analyse de champs sonores consisterait à calculer la transformée de Fourier du champ mesuré par l'antenne de microphones et à la représenter pour chaque fréquence, sur la sphère définie par la relation de dispersion. Des exemples de représentation de champs sonores utilisant des fenêtres d'analyse uniformes sont tracés sur la figure 5.16 (plus tard dans ce chapitre). La fenêtre d'analyse est constituée d'un lobe principal, et de lobes secondaires. Nous pouvons améliorer le compromis entre la résolution de l'analyse et la dynamique de la représentation obtenue en pondérant les échantillons spatiaux de manière non uniforme. Des exemples d'analyse utilisant des fenêtres de pondérations non uniformes sont tracés sur la figure 5.17 (plus tard dans le chapitre), présentant une meilleure focalisation de l'énergie dans le lobe principal et améliorant la dynamique de la représentation. Le but de cette section est de s'inspirer de la théorie des fonctions d'ondes sphéroïdales, voir Slepian [89], pour obtenir la meilleure fenêtre d'analyse possible. Il faudra donc adapter les résultats de Slepian à notre cas. L'optimisation de la fenêtre d'analyse a pour but d'améliorer la lisibilité du spectre du champ sonore étudié.

Cette section passera d'abord en revue les antennes bidimensionnelles, pour lesquelles nous pouvons simplifier l'analyse en la restreignant au plan  $(Ok_xk_y)$ . Nous présenterons la méthode de calcul de la fenêtre d'analyse, puis nous étudierons l'influence du bruit, des erreurs de positions des microphones, et de la directivité des capteurs sur l'analyse. Finalement, nous généraliserons l'optimisation de la fenêtre d'analyse pour des antennes tridimensionnelles, et nous expliquerons pourquoi les performances obtenues sont modérées pour ce type d'antennes.

#### 5.3.1 Antennes bidimensionnelles<sup>1</sup>

##### Simplification de l'analyse

Nous supposons que tous les capteurs de l'antenne de microphones sont situés dans le plan  $(Oxy)$ . Pour ce type d'antennes, l'équation modélisant le signal analysé (5.4) devient :

$$p_{\text{ana}}(\mathbf{r}, \omega) = p(\mathbf{r}, \omega) \cdot \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) \delta(x - x_m) \delta(y - y_m) \delta(z) \quad (5.10)$$

Le champ sonore analysé est le produit du champ initial (si les capsules sont supposées omnidirectionnelles) par la fenêtre d'analyse. La transformée de Fourier du champ sonore initial est donc déformée de manière convolutive par la transformée de Fourier de la fenêtre d'analyse, qui est :

$$W(k_x, k_y, k_z, \omega) = \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) e^{-ik_x x_m} e^{-ik_y y_m} \mathbf{1}(z) \quad (5.11)$$

---

<sup>1</sup>Cette présentation est basée sur notre travail initial Guillaume et Grenier [43].

La transformée de Fourier de la fenêtre d'analyse est indépendante de la variable  $k_z$ , nous en déduisons que la transformée de Fourier du champ analysée sera elle aussi indépendante de  $k_z$ . On peut donc limiter l'analyse du champ sonore au plan  $(Ok_xk_y)$ . L'analyse du champ sonore est-elle pour autant limitée à des sources se situant dans le plan horizontal ? La réponse à cette question est non. L'analyse correspondante à ce type d'antennes contient des informations relatives à l'élévation. Toutefois, cette information est ambiguë en se fondant sur l'observation suivante : une source initiale et cette même source située de manière symétrique par rapport au plan  $(Oxy)$  généreraient la même réponse sur l'antenne. En revanche, nous avons bien une information relative à l'élévation, car pour une onde plane  $e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$  avec  $\mathbf{k} = [k_0, \phi_k, \theta_k]$  observée de manière continue sur tout le plan  $(Oxy)$ , sa transformée de Fourier dans le plan  $(Ok_xk_y)$  est :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \} (k_x, k_y) &= \iint_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} e^{i(k_0 \cos \phi_k \sin \theta_k - k_x)x} e^{i(k_0 \sin \phi_k \sin \theta_k - k_y)y} dx dy \\ &= (2\pi)^2 \delta(k_x - k_0 \cos \phi_k \sin \theta_k) \delta(k_y - k_0 \sin \phi_k \sin \theta_k) \end{aligned}$$

Cette formule montre deux choses : la première est que deux ondes planes d'incidences symétriques par rapport au plan  $(Oxy)$ , ayant pour élévation  $\theta_k$  et  $\pi - \theta_k$  ont la même transformée de Fourier bidimensionnelle. Il y a un repliement spectral dans le domaine spatial. La deuxième est que pour une fréquence  $\omega$  donnée, le support de la transformée de Fourier spatiale du champ analysé n'est plus la sphère de rayon  $k = \omega/c$ , mais le cylindre de rayon  $k = \omega/c$ . Ainsi, le support de la transformée de Fourier bidimensionnelle est l'intérieur du cercle  $k = \omega/c$ . Les ondes planes ayant une élévation nulle ( $\theta_k = \pi/2$ ) excitent la périphérie du cercle, tandis que celles ayant une élévation positive ou négative viennent exciter l'intérieur du cercle.

### Calcul de la fenêtre d'analyse optimale

Il est nécessaire de mettre à jour l'équation (5.7), compte tenu des remarques faites dans le paragraphe précédent. Le nouveau critère prend la forme suivante :

$$\underline{w}(\omega) = \max_{[w_1, \dots, w_{M_{\text{mic}}}] \in \mathbb{C}^{M_{\text{mic}}}} \frac{\iint_{\mathbf{k} \in \Gamma(\mathbf{0}, k_{\text{res}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k dk d\phi_k}{\iint_{\mathbf{k} \in \Gamma(\mathbf{0}, k_{\text{opt}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k dk d\phi_k} \quad (5.12)$$

Dans cette équation,  $\Gamma(\mathbf{0}, k_{\text{res}})$  et  $\Gamma(\mathbf{0}, k_{\text{opt}})$  désignent des cercles de centre  $O$  et de rayon  $k_{\text{res}}$  et  $k_{\text{opt}}$ . Il nous reste à déterminer les valeurs à prendre pour ces deux quantités. Pour cela, nous allons nous aider de la figure 5.2. Nous supposons que les champs sonores sont à bande limitée. Leur support dans le domaine de Fourier  $(Ok_xk_y)$  est le cercle de rayon  $k_{\text{max}}(\omega) = \omega/c$ . Nous souhaitons focaliser un maximum d'énergie de la fenêtre d'analyse dans le lobe principal délimité par le cercle de rayon  $k_{\text{res}}$ . Afin de poursuivre le raisonnement, nous allons supposer que cet objectif est atteint : le support de Fourier des signaux analysés par le réseau de microphones devient donc le cercle de rayon  $k_{\text{ana}} = k_{\text{max}} + k_{\text{res}}$ . Nous considérons ensuite le cas le plus défavorable d'une onde plane d'élévation et d'azimut nuls, pour laquelle la transformée de Fourier bidimensionnelle est  $(2\pi)^2 \delta(k_x - k_{\text{max}}) \delta(k_y)$ . Pour l'onde plane visualisée par le réseau de microphones, la transformée de Fourier est celle de la fenêtre d'analyse, translattée autour du point  $k_x = k_{\text{max}}, k_y = 0$ . Ceci est représenté sur la partie droite de la figure 5.2. Ainsi, ce cas extrême montre que pour obtenir une bonne dynamique pour la représentation du champ sonore (pour toutes les ondes planes contenues

dans le cercle de rayon  $k_{\max}$ ) il faut minimiser l'énergie du filtre spatial à l'intérieur du cercle d'optimisation tout en la maximisant à l'intérieur du cercle de résolution, afin de minimiser le niveau des lobes secondaires qui apparaissent dans la cartographie finale du champ sonore (voir par exemple le cadre haut gauche de la figure 5.10). Pour ce faire, il faut que la condition  $k_{\text{opt}} \geq 2k_{\max} + k_{\text{res}}$  soit vérifiée, visible sur la figure 5.2. Dans la suite, nous considérerons l'égalité, ce qui correspond à l'illustration de la figure 5.2.

Concernant le choix de la résolution, nous sommes limités aux basses fréquences par l'étendue spatiale de l'antenne,  $k_{\text{res}} \geq \pi/R$  d'après la section 1.3.2, où  $R$  désignerait ici la moitié de la distance maximale entre deux éléments de l'antenne de microphones. Aux hautes fréquences, la résolution est très fine pour une pondération uniforme, mais les lobes secondaires sont importants. Il convient de diminuer la résolution afin d'avoir un pouvoir de focalisation de l'énergie plus important. Nous avons divisé la zone d'optimisation, de surface  $\pi k_{\text{opt}}^2$  en  $M_{\text{mic}}$  parties d'aires égales. Le paramètre de résolution de l'analyse,  $k_{\text{res}}$ , est alors solution de l'équation :

$$\pi k_{\text{opt}}^2 = M_{\text{mic}} \pi k_{\text{res}}^2 \iff k_{\text{res}} = \frac{1 + \sqrt{M_{\text{mic}}}}{M_{\text{mic}} - 1} \cdot 2k_{\max}$$

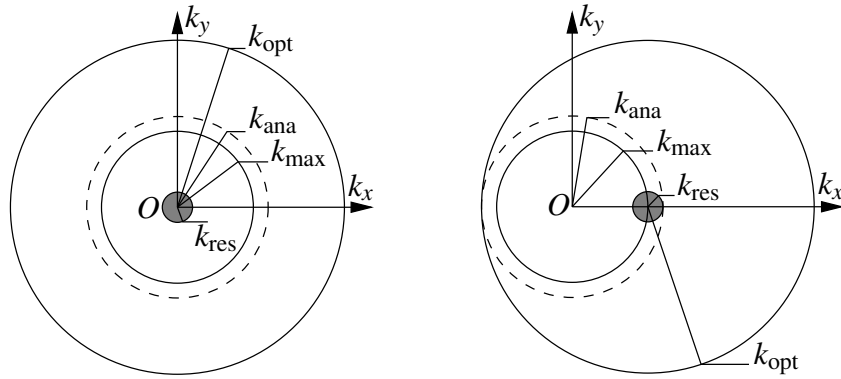


FIG. 5.2 – Illustration concernant les zones de résolution et zone d'optimisation pour la méthode de calcul de la fenêtre d'analyse

Il ne reste plus qu'à calculer la valeur de l'énergie de la fenêtre d'analyse sur un cercle. Pour cela, nous remanions l'intégrale afin de faire apparaître le vecteur  $\underline{w}$ . Soit  $\underline{t} = [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}, \dots, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{M_{\text{mic}}}}]^T$ . Nous avons la relation suivante :

$$\iint_{\mathbf{k} \in \Gamma(\mathbf{0}, k_{\text{res}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m} \right|^2 k \, dk \, d\phi_k = \iint_{\mathbf{k} \in \Gamma(\mathbf{0}, k_{\text{res}})} \underline{w}^H \underline{t} \underline{t}^H \underline{w} k \, dk \, d\phi_k$$

De plus, comme les poids de la fenêtre d'analyse sont indépendants de  $k$  et de  $\phi_k$ , nous pouvons sortir les vecteurs  $\underline{w}$  de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{k} \in \Gamma(\mathbf{0}, k_{\text{res}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m} \right|^2 k \, dk \, d\phi_k &= \underline{w}^H \left[ \iint_{\mathbf{k} \in \Gamma(\mathbf{0}, k_{\text{res}})} \underline{t} \underline{t}^H k \, dk \, d\phi_k \right] \underline{w} \\ &= \underline{w}^H \mathcal{T}_{\text{res}} \underline{w} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nous pouvons réaliser l'intégration sur chacun des éléments de la matrice  $\underline{t} \underline{t}^H$ . Le résultat est

donc la matrice  $\mathcal{T}_{\text{res}}$  dont l'élément  $(m, n)$  vaut :

$$(\mathcal{T}_{\text{res}})_{m,n} = \iint_{\mathbf{k} \in \Gamma(\mathbf{0}, k_{\text{res}})} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)} k \, dk \, d\phi_k \quad (5.14)$$

Nous utilisons l'identité de Jacobi-Anger (1.45) pour développer en série l'onde plane de l'équation précédente, avec les notations  $\mathbf{k} = [k_r, \phi_k, k_z]$  et  $\mathbf{r}_{mn} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n = [r_{mn}, \phi_{r_{mn}}, 0]$  en coordonnées cylindriques :

$$e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i^l J_l(k_r r_{mn}) e^{il(\phi_k - \phi_{r_{mn}})}$$

En injectant ce développement en série dans l'intégrale surfacique précédente, seul le terme correspondant à  $l = 0$  est non nul. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{\text{res}})_{m,n} &= 2\pi \int_{k=0}^{k_{\text{res}}} J_0(k_r r_{mn}) k_r \, dk_r \\ &= \frac{2\pi k_{\text{res}} J_1(k_{\text{res}} r_{mn})}{r_{mn}} \\ &= \pi k_{\text{res}}^2 \text{Jinc}(k_{\text{res}} r_{mn}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Il s'agit d'une transformée de Fourier-Bessel bien connue dans le domaine de l'optique. La fonction  $\text{Jinc}(x) = 2J_1(x)/x$  a pour limite 1 quand  $x$  tend vers zéro. Elle est l'analogue pour les fenêtres circulaires du sinus cardinal pour les fenêtres rectangulaires.

Une expression analogue serait obtenue pour l'intégrale sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $k_{\text{opt}}$  :

$$(\mathcal{T}_{\text{opt}})_{m,n} = \pi k_{\text{opt}}^2 \text{Jinc}(k_{\text{opt}} r_{mn}) \quad (5.16)$$

Si nous mettons à jour le critère (5.12) en utilisant les matrices introduites ci-dessus, nous obtenons :

$$\underline{w}(\omega) = \max_{[w_1, \dots, w_{M_{\text{mic}}}] \in \mathbb{C}^{M_{\text{mic}}}} \frac{\underline{w}^H \mathcal{T}_{\text{res}} \underline{w}}{\underline{w}^H \mathcal{T}_{\text{opt}} \underline{w}} \quad (5.17)$$

Dans son papier sur l'analyse harmonique basée sur les fonctions d'ondes discrètes sphéroïdales aplaties [19], Bronez utilise des noyaux de résolution  $\mathcal{T}_{\text{res}}$  et d'optimisation  $\mathcal{T}_{\text{opt}}$  de forme similaire, en utilisant des signaux à bande limitée dans le système de coordonnées cartésiennes. Notre apport est donc d'avoir généralisé ces séquences en utilisant l'hypothèse de bande limitée en coordonnées cylindriques. Dans le même papier, il est dit que le vecteur de pondération  $\underline{w}$  réalisant le maximum dans (5.17) est aussi solution du problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\mathcal{T}_{\text{res}} \underline{w}_n = \lambda_n \mathcal{T}_{\text{opt}} \underline{w}_n \quad (5.18)$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre la plus importante est le vecteur recherché, satisfaisant (5.12). De plus,  $\lambda^2$  est alors égal au rapport d'énergie de la fenêtre d'analyse entre les zones de résolution et d'optimisation. Finalement, il est nécessaire de normaliser le vecteur propre. Nous le normalisons de sorte à ce que l'énergie dans la zone de résolution soit proportionnelle (égale) à la surface de celle-ci :

$$\underline{w}^H \mathcal{T}_{\text{res}} \underline{w} = \pi k_{\text{res}}^2 \quad (5.19)$$

La procédure de design du vecteur de pondération est résumée dans le tableau 5.2

1.	<p>Calculer le rayon des bandes d'analyse <math>k_{\text{res}}</math> et d'optimisation <math>k_{\text{opt}}</math></p> $k_{\text{res}} = \frac{1 + \sqrt{M_{\text{mic}}}}{M_{\text{mic}} - 1} \cdot 2k_{\text{max}} \quad k_{\text{opt}} = k_{\text{res}} + 2k_{\text{max}}$
2.	<p>Calculer les noyaux de résolutions <math>\mathcal{T}_{\text{res}}</math> et d'optimisation <math>\mathcal{T}_{\text{opt}}</math></p> $\begin{aligned} (\mathcal{T}_{\text{res}})_{m,n} &= \pi k_{\text{res}}^2 \text{Jinc}(k_{\text{res}} r_{mn}) \\ (\mathcal{T}_{\text{opt}})_{m,n} &= \pi k_{\text{opt}}^2 \text{Jinc}(k_{\text{opt}} r_{mn}) \end{aligned}$
3.	<p>Résoudre le problème aux valeurs propres généralisé</p> $\mathcal{T}_{\text{res}} \underline{w}_n = \lambda_n \mathcal{T}_{\text{opt}} \underline{w}_n$
4.	<p>Ne conserver que le vecteur propre associé à la valeur propre la plus énergétique</p>
5.	<p>Normaliser la fenêtre d'analyse de sorte que</p> $\underline{w}^H \mathcal{T}_{\text{res}} \underline{w} = \pi k_{\text{res}}^2$

TAB. 5.2 – Optimisation de la fenêtre d'analyse pour antennes bidimensionnelles

### Performances obtenues

Dans cette partie, nous allons comparer les performances obtenues pour trois différents types de fenêtres d'analyse : une fenêtre d'analyse uniforme, une fenêtre d'analyse obtenue par discrétisation directe d'une fenêtre de Kaiser-Bessel continue circulaire et une fenêtre d'analyse optimale selon le critère introduit au paragraphe précédent, basée sur les fonctions d'ondes sphéroïdales aplaties discrètes. La géométrie de l'antenne de microphones utilisée dans ce paragraphe est représentée sur la figure 5.3. Il s'agit de 4 antennes circulaires ayant chacune 8 éléments, et dont les rayons sont logarithmiquement espacés entre 1cm et 1m (voir Guillaume et Grenier [43] pour les raisons de ce choix).

En premier lieu, le module des transformées de Fourier des différentes fenêtres d'analyse est représenté sur la figure 5.4 pour la fenêtre uniforme, sur la figure 5.5 pour la fenêtre de Kaiser-Bessel et sur la figure 5.6 pour la fenêtre basée sur les fonctions d'ondes sphéroïdales aplaties discrètes. En ce qui concerne la résolution, nous pouvons voir que la largeur du lobe principal est plus petite en utilisant une fenêtre uniforme qu'une fenêtre de Kaiser-Bessel ou sphéroïdale aplatie. En ce qui concerne l'amplitude et le nombre de lobes secondaires, nous voyons qu'ils sont plus nombreux et plus intenses pour la fenêtre uniforme que pour les deux autres. Nous voyons que la meilleure dynamique est obtenue pour la fenêtre sphéroïdale aplatie, pour laquelle les lobes secondaires sont moins fréquents et de plus faible amplitude.

En ce qui concerne le pouvoir de focalisation, nous représentons le pourcentage d'énergie focalisée dans le lobe principal par rapport à l'énergie globale dans la zone d'optimisation en fonction de la fréquence pour chacune des fenêtres d'analyse sur la figure 5.7. Nous voyons que les fenêtres uniformes et de Kaiser ont des performances semblables dans la bande de fréquences inférieure à 5kHz. Dans la bande de fréquences supérieure à cette limite, les performances des

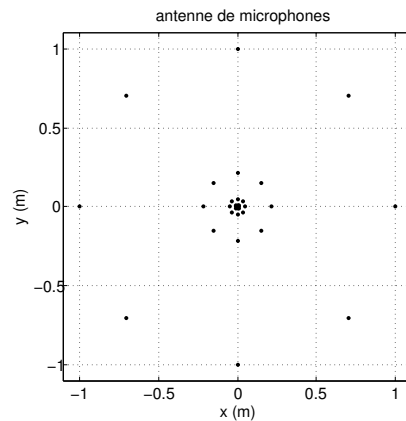


FIG. 5.3 – Géométrie de l'antenne de microphone. Antennes circulaires à rayons logarithmiquement espacés entre 1cm et 1m

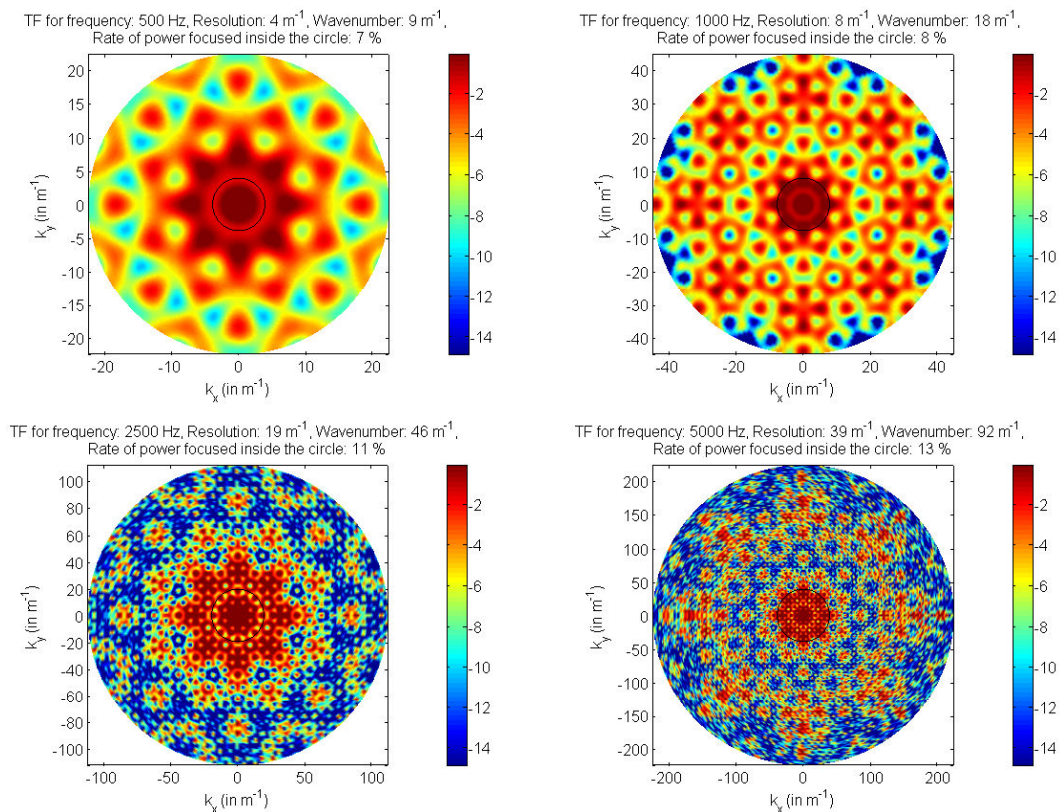


FIG. 5.4 – Modules des transformées de Fourier spatiales pour une fenêtre d'analyse uniforme, représentée pour les fréquences 500Hz (haut gauche), 1000Hz (haut droite), 2500Hz (bas gauche) et 5000Hz (bas droite).



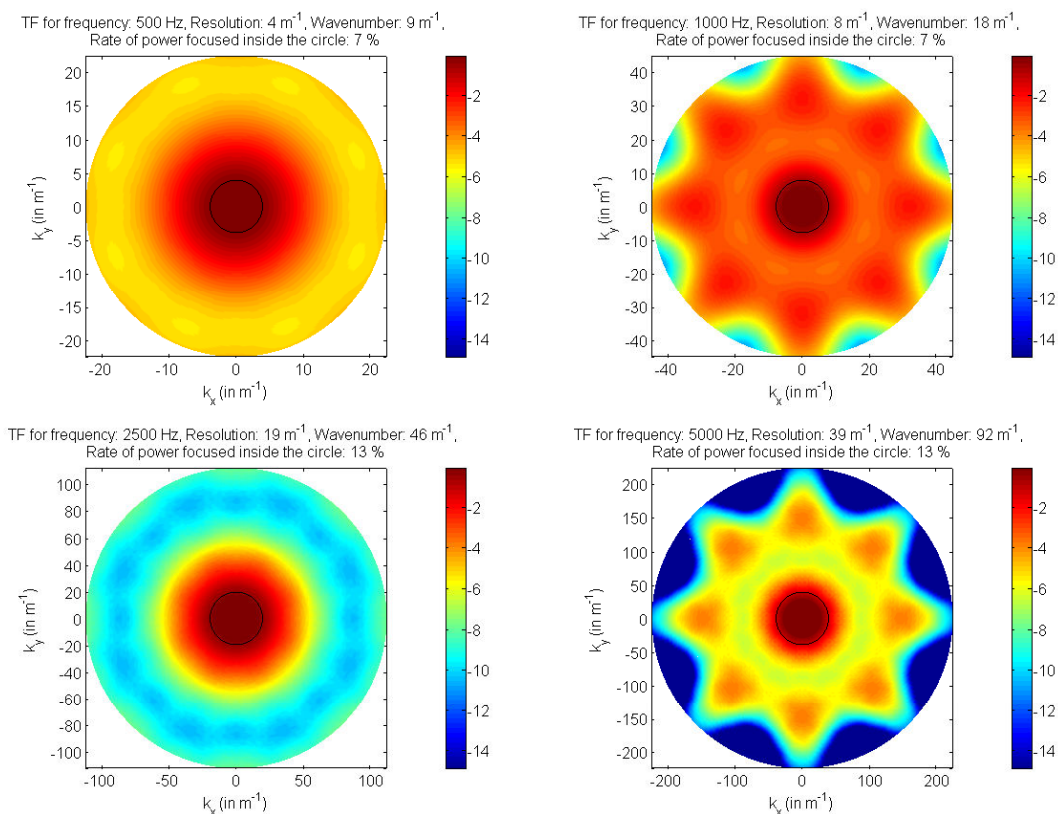


FIG. 5.5 – Modules des transformées de Fourier spatiales pour une fenêtre d'analyse de type Kaiser-Bessel, représentée pour les fréquences 500Hz (haut gauche), 1000Hz (haut droite), 2500Hz (bas gauche) et 5000Hz (bas droite).

fenêtres de Kaiser et sphéroïdale aplatie sont comparables. Ceci peut s'interpréter par le fait que la densité de points devient suffisante pour que la méthode de la discrétisation de la fenêtre continue soit efficace, une fois cette fréquence franchie.

Néanmoins, la fenêtre optimisant le critère (5.12) surpasse toutes les autres fenêtres d'analyse, sur toute la plage de fréquences des signaux audio. Nous pouvons observer que la courbe est constituée de creux et de bosses. Les sommets se situent à 170, 790, 3600 et 13000Hz, ce qui correspond à peu près aux quantités  $c/(2R)$  où les  $R$  sont les différents rayons de l'antenne circulaire logarithmique (voir figure 5.3). Normalement, cela serait rigoureusement 170, 790, 3660 et 17000Hz. Cela concorde assez bien sauf pour la dernière donnée. Cela met en évidence une condition nécessaire pour obtenir des bonnes performances pour l'analyse de champs sonores sur toute la plage des signaux audio : il faut qu'il y ait des zones de l'antenne avec une forte densité de microphones (hautes fréquences) et il faut que l'étendue de l'antenne soit importante (basses fréquences). Tout ceci est à relier directement aux longueurs d'ondes que nous souhaitons analyser qui varient de manière inversement proportionnelle à la fréquence. Comme l'oreille est sensible sur trois décades, trois ordres de grandeurs sont aussi nécessaires pour l'espacement des microphones.

### Influence du bruit

Afin d'examiner l'influence du bruit présent sur les capteurs, un indicateur fréquemment utilisé est le gain de la fenêtre d'analyse lorsque l'entrée du système est un bruit blanc ou *white noise gain*. Si nous adaptions cette notion à notre cas, nous supposons que le bruit est en fait un bruit spatial rose, à densité spectrale constante dans la zone de bruit, définie dans le domaine de Fourier par le

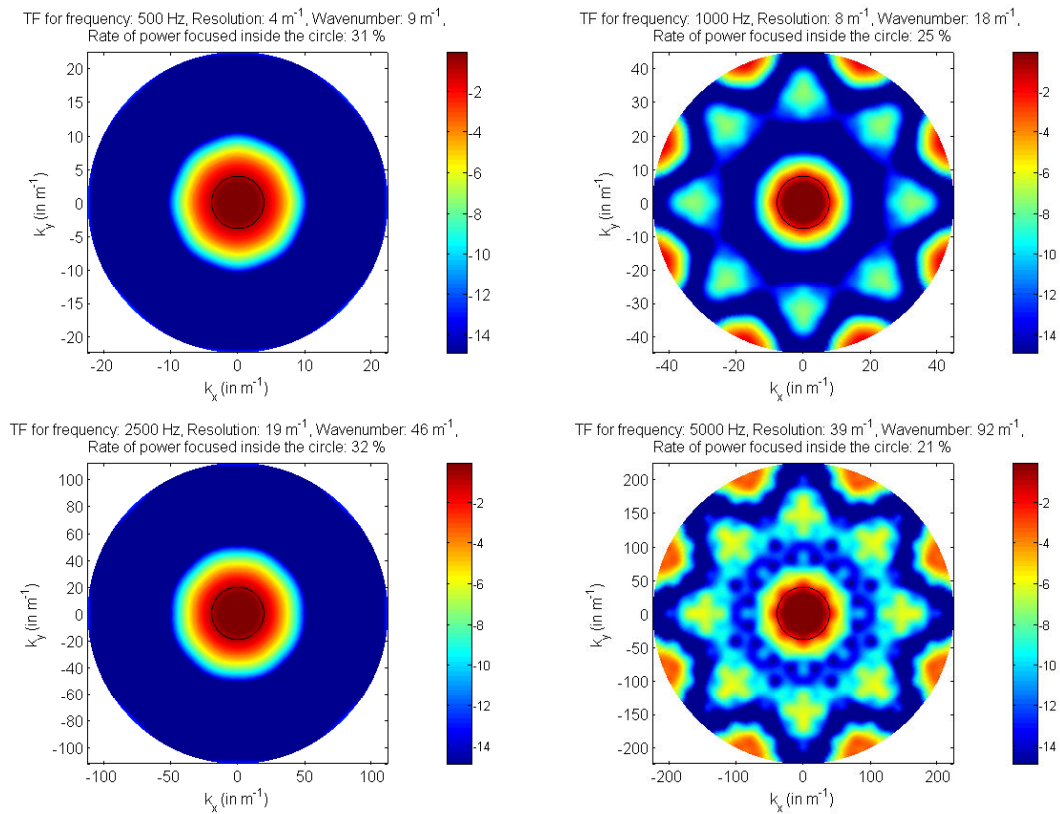


FIG. 5.6 – Modules des transformées de Fourier spatiales pour une fenêtre d'analyse sphéroïdale aplatie, représentée pour les fréquences 500Hz (haut gauche), 1000Hz (haut droite), 2500Hz (bas gauche) et 5000Hz (bas droite).

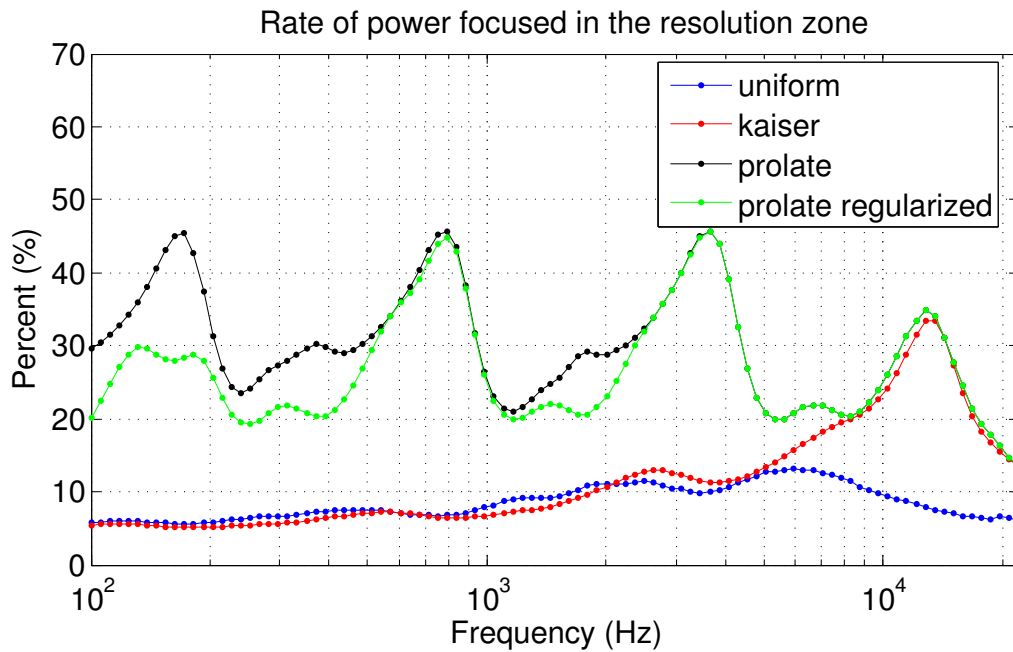


FIG. 5.7 – Pourcentage de l'énergie totale focalisée dans la zone de résolution

cercle de rayon  $k_b = \omega_{\max}/c$ , en supposant que cela soit la bande passante spatiale des capteurs utilisés. L'indicateur que nous utilisons pour étudier l'influence du bruit sur les capteurs consiste à calculer l'énergie dans la zone de bruit, qui est donnée par le calcul matriciel suivant :  $\underline{w}^H \mathcal{T}_b \underline{w}$ , où  $\mathcal{T}_b$  est définie de la même manière que  $\mathcal{T}_{\text{res}}$  en remplaçant  $k_{\text{res}}$  par  $k_b$  dans l'équation (5.15). Cette énergie est comparée avec l'énergie qui aurait été obtenue dans la zone de bruit en utilisant un vecteur de pondération uniforme. Le résultat est affiché en décibels pour les trois types de fenêtre sur la figure 5.8.

Nous pouvons voir que les fenêtres uniforme et de Kaiser-Bessel ont un comportement semblable. En revanche, nous voyons que l'usage de la fenêtre sphéroïdale aplatie a tendance à amplifier le bruit présent sur les capteurs pour un maximum de 35dB, majoritairement dans les zones de creux de performance pour le pouvoir de focalisation (figure 5.7). Ceci peut être préjudiciable car le recours à cette fenêtre détériore alors le rapport signal sur bruit de l'analyse par rapport à la fenêtre uniforme.

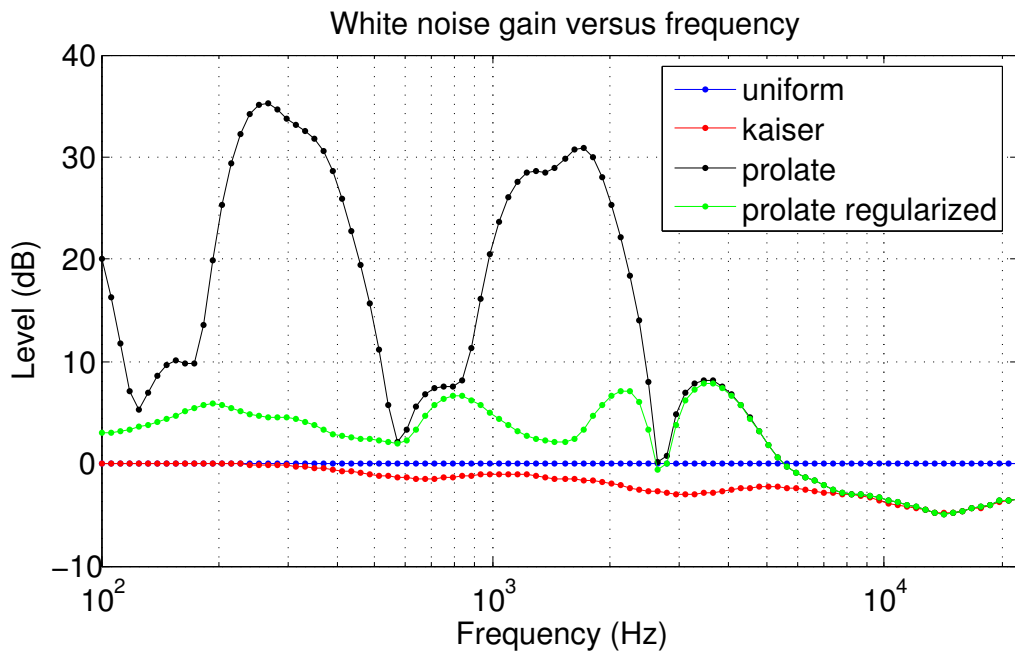


FIG. 5.8 – Gain pour un bruit blanc en fonction de la fréquence pour les trois types de fenêtre, en ayant pris pour référence le gain pour un bruit blanc d'une pondération uniforme.

Afin de limiter cette détérioration du rapport signal sur bruit de l'analyse spatiale, il est nécessaire de mettre en place une régularisation dans notre critère (5.12). Pour cela, il est nécessaire de faire apparaître le gain pour un bruit blanc  $\underline{w}^H \mathcal{T}_b \underline{w}$ . Si nous appelons  $\lambda$  le paramètre de régularisation, le critère est modifié de la manière suivante :

$$\underline{w}(\omega) = \max_{[w_1, \dots, w_{M_{\text{mic}}}] \in \mathbb{C}^{M_{\text{mic}}}} \frac{\underline{w}^H \mathcal{T}_{\text{res}} \underline{w}}{(1 - \lambda) \underline{w}^H \mathcal{T}_{\text{opt}} \underline{w} + \lambda \underline{w}^H \mathcal{T}_b \underline{w}} \quad (5.20)$$

Les améliorations du gain pour un bruit blanc sont visibles en vert toujours sur la figure 5.8 pour une valeur de  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ . Nous voyons sur la figure 5.7 que le pouvoir de focalisation de la fenêtre sphéroïdale aplatie régularisée reste encore très convenable. Les performances sont moins bonnes par rapport à la fenêtre non régularisée surtout dans les zones qui occasionnaient une forte amplification du bruit des capteurs, ce qui est l'objectif initial de la régularisation.

## Influence des erreurs de positions

Nous avons étudié dans le paragraphe précédent l'influence d'un bruit sur les capteurs qui détériore plus ou moins le rapport signal sur bruit spatial de l'analyse selon la fenêtre d'analyse employée. Ce bruit est principalement créé au niveau même des capteurs. Il est principalement d'origine électronique, et son influence se fait surtout sentir dans le domaine des basses fréquences, comme en témoigne la figure 5.8. La deuxième cause de perturbation du module d'analyse de champs sonores est due aux erreurs entre les positions de référence des capteurs (les consignes) et les positions réelles de celle-ci lorsque l'antenne est déployée expérimentalement. Nous allons voir dans ce paragraphe quelle est l'influence de ces erreurs de positions.

Pour cela, nous allons supposer que la position des microphones est connue à une incertitude près, répartie uniformément dans un intervalle donné. Sur la figure 5.9, nous avons calculé le rapport signal sur bruit généré par une incertitude dans le placement des microphones, ceci pour plusieurs valeurs de l'incertitude, variant entre 1mm et 1cm. Le bruit occasionné est calculé comme la différence entre le signal qui devrait être théoriquement reçu si les microphones étaient correctement positionnés et le signal effectivement reçu sur l'antenne réelle. Le rapport signal sur bruit a été calculé pour une seule réalisation du bruit, mais cela permet quand même de dégager les principales tendances. Tant que la puissance du signal est supérieure à celle du bruit ( $SNR > 0\text{dB}$ ), nous pouvons voir que le rapport signal sur bruit est en  $1/f$ . Ainsi, la puissance du bruit dû à une erreur de positionnement des capteurs est plus importante aux hautes fréquences qu'aux basses fréquences. Une fois de plus, ceci est à mettre en rapport avec les longueurs d'ondes mises en jeu. Ainsi, à une fréquence de 8500Hz par exemple, la longueur d'onde associée est de 4cm. Pour une onde plane la distance qui sépare un extremum (ventre de pression) d'un zéro (nœud de pression) est égale au quart d'une longueur d'onde, soit 1cm (courbe du milieu, en rouge, de la figure 5.9). Nous voyons que le rapport signal sur bruit est très médiocre au-dessus de cette fréquence, qui peut être considérée comme la frontière du domaine de validité de la partie en  $1/f$  (linéaire sur la figure).

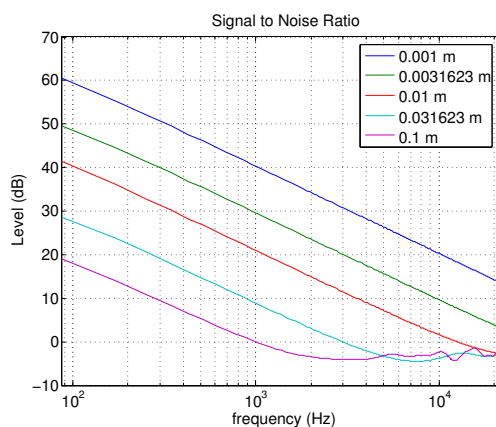


FIG. 5.9 – Rapport signal sur bruit dû à une incertitude dans le placement des microphones, pour plusieurs incertitudes [0.001, 0.003, 0.01, 0.03, 0.1]m. Le signal de référence simulé est celui généré par une source ponctuelle monopolaire de position [0, 0, 1.5] en coordonnées cartésiennes

Le bruit généré par ces erreurs de position vient limiter la dynamique de la représentation spectrale associée. Les figures caractérisant les performances des analyseurs de champs sonores 5.4, 5.5 et 5.6 ont été affichées pour une dynamique de 15dB. Il faudrait au moins conserver ce seuil de rapport signal sur bruit sur toute la plage des signaux audio, même si les capteurs ne sont pas placés aux positions de référence. Sur la courbe, nous pouvons voir qu'un rapport signal sur bruit

minimal de 15dB sur toute la bande de fréquences est obtenu par la courbe bleue, correspondant à une marge d'incertitude de  $\pm 1$ mm dans le positionnement des microphones. Cela donne donc un ordre de grandeur de la précision nécessaire dans le repérage des microphones, mais nous reviendrons sur ce problème dans l'analyse de champs sonores réels, acquis expérimentalement, à la partie III de cette thèse.

Maintenant, nous allons mettre en évidence la nécessité d'appliquer une régularisation au problème lorsque la fenêtre choisie est sphéroïdale aplatie. En effet, si nous observons à nouveau la figure 5.8, nous nous apercevons que la fenêtre sphéroïdale aplatie non régularisée amplifie un bruit blanc d'environ 28dB à la fréquence de 1378 Hz par rapport à une fenêtre d'analyse uniforme. L'utilisation d'une fenêtre régularisée réduit cette amplification à 2dB. Sur la figure 5.10, nous traçons la cartographie du champ sonore associée à une source ponctuelle de coordonnées  $r = 1.5$  m,  $\phi = \pi/8$  et  $\theta = \pi/2$ , en utilisant une fenêtre d'analyse sphéroïdale aplatie régularisée (en haut à gauche) et non régularisée (en bas à gauche). J'attire votre attention sur la différence d'échelle au niveau de ces différents graphes.

Nous voyons que la source est noyée dans le bruit lorsque la fenêtre utilisée n'est pas régularisée. Sur la partie droite de la figure, nous avons tracé la représentation spectrale de la différence entre le champ de référence (sans erreurs de position) et le champ mesuré. Nous voyons que l'échelle de dynamique du bruit passe de 0 dB dans le cas non régularisé, ce qui correspond à la puissance du signal d'entrée, à  $-20$  dB dans le cas régularisé. Ce niveau de  $-20$  dB correspond à la valeur de la courbe rouge à la fréquence d'analyse 1378 Hz sur la figure 5.9. Le bruit dû à l'erreur de position est amplifié de 20 dB dans le cas non régularisé, ce qui est un peu inférieur aux prévisions effectuées par l'analyse de la figure 5.8. Ces prévisions seraient valables si le bruit occasionné par ces erreurs de position était à densité de spectrale blanche, ce qui n'a aucune raison d'être vrai *a priori*. Néanmoins, les ordres de grandeur sont respectés.

### Influence de la directivité des capteurs

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence de la directivité des microphones sur la cartographie du champ sonore, dans la configuration suivante :

- deux sources ponctuelles monopôlaires ont été simulées, l'une située au-dessus de l'antenne, dont les coordonnées sphériques sont  $[1.5, 0, \pi/3]$ , et l'autre en dessous, dont les coordonnées sphériques sont  $[1.5, \pi, 2\pi/3]$  ;
- trois antennes différentes ont été utilisées. Dans tous les cas, la position des microphones demeure identique, seule la directivité des microphones change. Dans le premier cas, l'antenne est constituée de microphones omnidirectionnels. Dans les deux autres, les microphones utilisés sont supposés cardioïdes, orientés soit vers le haut, soit vers le bas.

Les résultats de l'analyse de cette scène sonore sont représentées sur la figure 5.11. La partie basse représente la cartographie du champ sonore à une fréquence de 2842 Hz lorsque les microphones utilisés sont cardioïdes. Dans la partie supérieure gauche est affichée la cartographie pour une antenne composée de microphones omnidirectionnels. Nous voyons que le recours à des microphones cardioïdes permet bien d'isoler les fronts d'onde provenant du haut et ceux provenant du bas. A titre de comparaison, la cartographie du champ sonore obtenue dans le cas où seule la source située au-dessus de l'antenne est présente, est représentée en haut à droite. Elle est à comparer avec la figure en bas à droite. Nous avons déjà mentionné que le recours à des antennes bidimensionnelles permettait de faire une analyse tridimensionnelle du champ sonore à l'ambiguïté entre le haut et le bas près. Le recours à des microphones cardioïdes permet de lever en partie cette ambiguïté en favorisant une direction d'incidence. L'idéal serait même de disposer de deux capsules de microphones coïncidentes, l'une monopolaire, et l'autre dipolaire, permettant d'avoir une flexibilité supplémentaire dans le traitement des données.

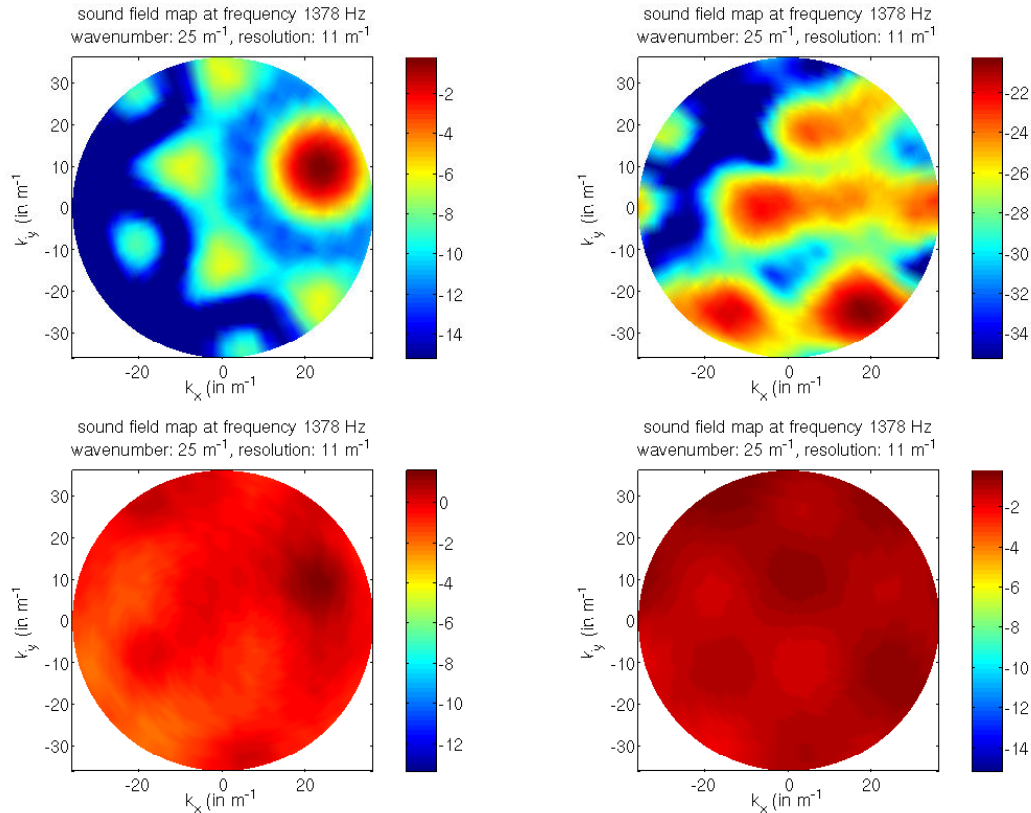


FIG. 5.10 – Étude de l'influence d'erreurs de positionnements des microphones sur la cartographie du champ sonore à la fréquence de 1378Hz pour une source ponctuelle de coordonnées  $r = 1.5\text{m}$ , azimuth = 22.5dg et elevation = 0dg. Cartographie du champ sonore réel en utilisant une fenêtre sphéroïdale aplanar régularisée (haut gauche) et non régularisée (bas gauche). Cartographie du champ d'erreur en utilisant une fenêtre sphéroïdale aplanar régularisée (haut droite) et non régularisée (bas droite)

En conclusion de cette partie sur l'analyse de champs sonores par une antenne bidimensionnelle, nous pouvons dire que le recours aux fenêtres sphéroïdales aplanar permet d'améliorer la dynamique et la clarté de l'analyse des champs sonores en comparaison de la fenêtre uniforme ou de fenêtres obtenues par discrétisation de fenêtres d'analyse continues. Nous avons étudié l'influence du bruit propre des capteurs, et l'influence des erreurs de positionnement des capteurs et le constat suivant peut être tiré : à basses fréquences, le facteur détériorant l'analyse est le bruit propre des capteurs, tandis qu'à hautes fréquences, l'influence des erreurs de position est prépondérante. Afin de rendre l'analyse de champs sonores par fenêtres sphéroïdales aplanar plus robuste à ces deux effets néfastes, une régularisation est nécessaire. Son utilisation a été validée pour le gain pour un bruit blanc, figure 5.8, et pour les erreurs de position, figure 5.10. L'utilisation d'une antenne bidimensionnelle de microphones permet d'obtenir une vision tridimensionnelle du champ sonore analysée, et le recours à des microphones de directivité variable permet même de lever en partie l'ambiguïté entre le haut et le bas inhérente à ce type d'antennes, comme le montre la figure 5.11.

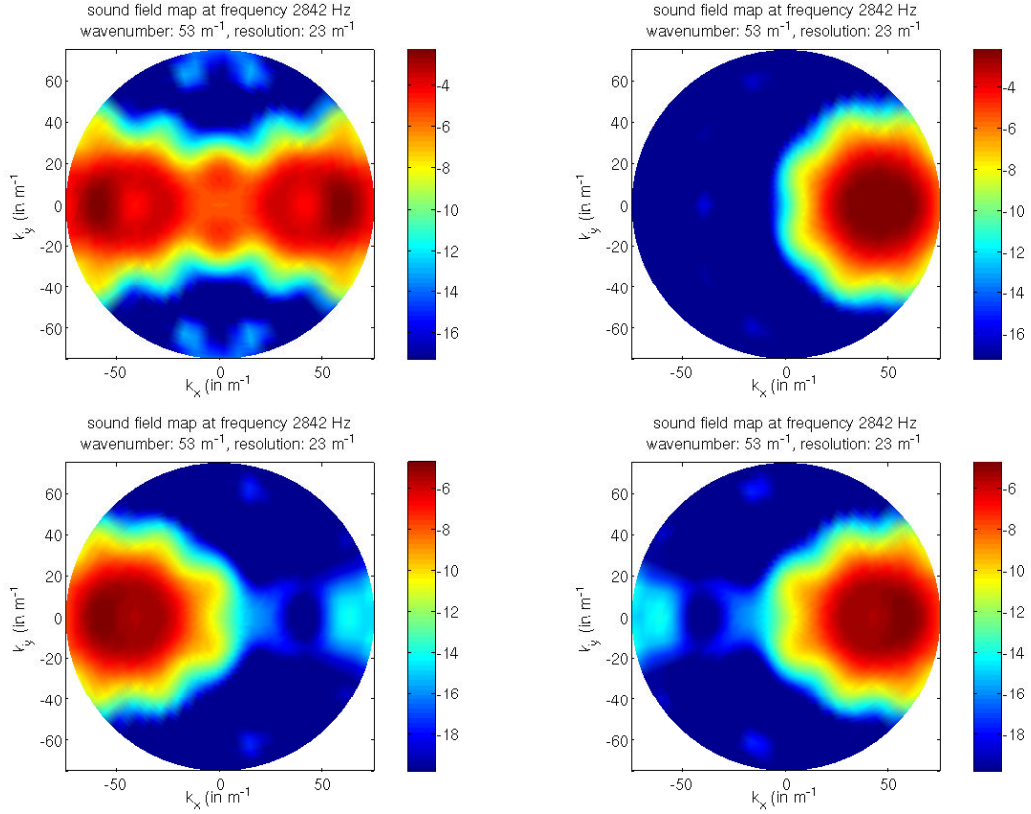


FIG. 5.11 – Étude de l'influence de la directivité des capteurs sur la cartographie du champ sonore pour deux sources ponctuelles de coordonnées sphériques  $[1.5, 0, \pi/3]$  et  $[1.5, 0, 2\pi/3]$ . Antenne omnidirectionnelle (haut gauche). Antenne cardioïde orientée vers le bas (bas gauche) ou vers le haut (droite). Source haute uniquement (haut droite)

### 5.3.2 Antennes tridimensionnelles

#### Calcul du vecteur de pondération optimal

Dans le cas des antennes tridimensionnelles, il n'y a pas de simplification de l'analyse du champ, étant donné que la transformée de Fourier de la fenêtre d'analyse reste dépendante de la variable  $k_z$ . Nous retournons dans le cas général décrit par l'équation (5.5). Toutefois, même dans ce cas, la stratégie de design de la fenêtre d'analyse décrite à la section précédente 5.3.1, notamment par la figure 5.2 reste valable, sauf qu'il s'agit d'une coupe des sphères sous-jacentes au problème des antennes tridimensionnelles. Ainsi, il suffit uniquement de remplacer les cercles par des sphères pour mettre à jour la procédure d'optimisation de la fenêtre d'analyse. Le critère est le suivant :

$$\underline{w}(\omega) = \max_{[w_1, \dots, w_{M_{\text{mic}}}] \in \mathbb{C}^{M_{\text{mic}}}} \frac{\iiint_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, k_{\text{res}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k^2 dk d\phi_k \sin \theta_k d\theta_k}{\iiint_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, k_{\text{opt}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k^2 dk d\phi_k \sin \theta_k d\theta_k} \quad (5.21)$$

Pour les mêmes raisons qu'au paragraphe précédent, il faut toujours que  $k_{\text{opt}} \geq 2k_{\text{max}} + k_{\text{res}}$ .

Afin de fixer le paramètre réglant la résolution de l'analyse  $k_{\text{res}}$ , nous avons choisi de diviser l'intérieur de la sphère d'optimisation en  $M_{\text{mic}}$  parties égales, la résolution ne pouvant pas être inférieure à la limite physique de  $\pi/R$  où  $R$  désigne la moitié de la distance maximale entre deux microphones de l'antenne. Ceci conduit à l'équation suivante :

$$\frac{4}{3}\pi k_{\text{opt}}^3 = \frac{4}{3}\pi M_{\text{mic}} k_{\text{res}}^3 \iff k_{\text{res}} = \frac{1 + M_{\text{mic}}^{1/3} + M_{\text{mic}}^{2/3}}{M_{\text{mic}} - 1} 2k_{\text{max}} \quad (5.22)$$

Il est nécessaire de mettre à jour l'expression des noyaux de résolution et d'optimisation  $\mathcal{T}_{\text{res}}$  et  $\mathcal{T}_{\text{opt}}$ . Les deux calculs sont identiques. Nous ne développons que le calcul pour le noyau de résolution :

$$(\mathcal{T}_{\text{res}})_{m,n} = \iiint_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, k_{\text{res}})} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)} k^2 dk d\phi_k \sin\theta_k d\theta_k \quad (5.23)$$

Nous allons utiliser le développement en séries d'une onde plane en harmoniques sphériques (1.51), en utilisant les notations suivantes  $\mathbf{k} = [k, \phi_k, \theta_k]$  et  $\mathbf{r}_{mn} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n = [r_{mn}, \phi_{r_{mn}}, \theta_{r_{mn}}]$  en coordonnées sphériques :

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{mn}} = 4\pi \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr_{mn}) \overline{Y_l^m}(\phi_k, \theta_k) Y_l^m(\phi_{r_{mn}}, \theta_{r_{mn}})$$

En injectant ce développement en séries dans l'intégrale volumique précédente, seul le terme correspondant à  $l = m = 0$  est non nul. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{\text{res}})_{(m,n)} &= 4\pi \int_{k=0}^{k_{\text{res}}} j_0(kr_{mn}) k^2 dk \\ &= 4\pi \int_{k=0}^{k_{\text{res}}} \frac{\sin(kr_{mn})}{kr_{mn}} k^2 dk \\ &= \frac{4}{3}\pi k_{\text{res}}^3 \cdot 3 \left[ \frac{\sin(k_{\text{res}}r_{mn})}{(k_{\text{res}}r_{mn})^3} - \frac{\cos(k_{\text{res}}r_{mn})}{(k_{\text{res}}r_{mn})^2} \right] \\ &\triangleq \frac{4}{3}\pi k_{\text{res}}^3 \cdot \text{jinc}(k_{\text{res}}r_{mn}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Il s'agit de la transformée de Fourier-Bessel sphérique équivalente à celle d'un cercle. La fonction  $\text{jinc}(x)$  a pour limite 1 quand  $x$  tend vers zéro. Elle est l'analogue pour les fenêtres sphériques du sinus cardinal pour les fenêtres parallélépipédiques. Le reste de la procédure de calcul est identique à celle décrite au paragraphe précédent.

## Performances obtenues

Le pouvoir de focalisation et le gain pour un bruit blanc des différentes fenêtres d'analyse sont représentés sur la figure 5.12. Nous pouvons certes voir que les taux affichés sont assez semblables à ceux obtenus pour les antennes bidimensionnelles, oscillant entre 20% et 35% dans une certaine plage de fréquences. Mais les apparences peuvent être trompeuses, et ces deux types d'antenne ne doivent pas être jugées de la même manière. Le pouvoir de focalisation des fenêtres sphéroïdales aplaties est toujours meilleur que celui des deux autres types d'antenne, tandis que le gain pour un bruit blanc est malheureusement aussi plus important. Il est mieux maîtrisé lorsque l'on a recours à une régularisation (courbe verte), au détriment des performances pour le pouvoir de focalisation. Il s'agit toujours d'un compromis.



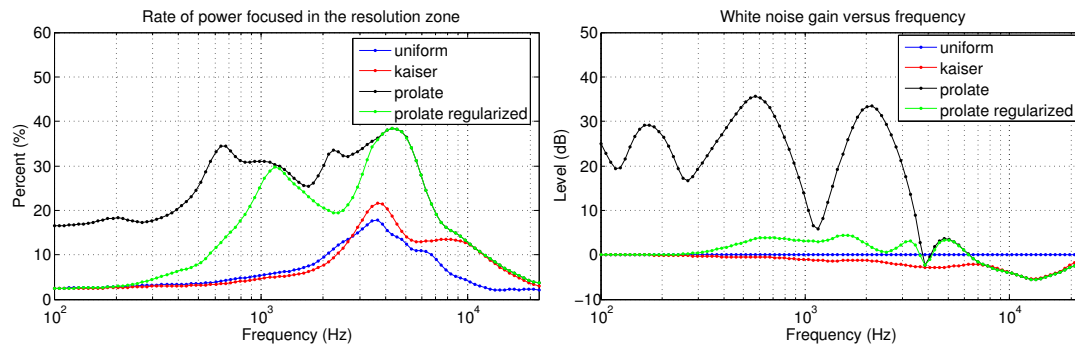


FIG. 5.12 – Pouvoir de focalisation (gauche) et Gain pour un bruit blanc (droite) pour une antenne tridimensionnelle

Pour les antennes tridimensionnelles, la cartographie du champ sonore à une fréquence donnée est obtenue en calculant le module de la transformée de Fourier spatiale sur la sphère définie par la relation de dispersion. Nous la représentons en aplatissant la sphère, en représentant en abscisses l'azimut, en ordonnées l'élévation, et l'amplitude est obtenue par une colorisation variable. Un exemple de cartographie du champ sonore est représentée sur la figure 5.13. Nous voyons que la cartographie utilisant la fenêtre d'analyse sphéroïdale aplatie utilise la totalité de la plage de dynamique de 15 dB. L'étendue du lobe principal est quasiment identique pour les deux fréquences, ce qui peut être un avantage : en effet, en formation de voies, on recherche souvent des réponses spatiales (*beam pattern*) qui soient indépendantes de la fréquence d'analyse, comme expliqué dans les papiers de Ward *et al.* [105] et Yan [112].

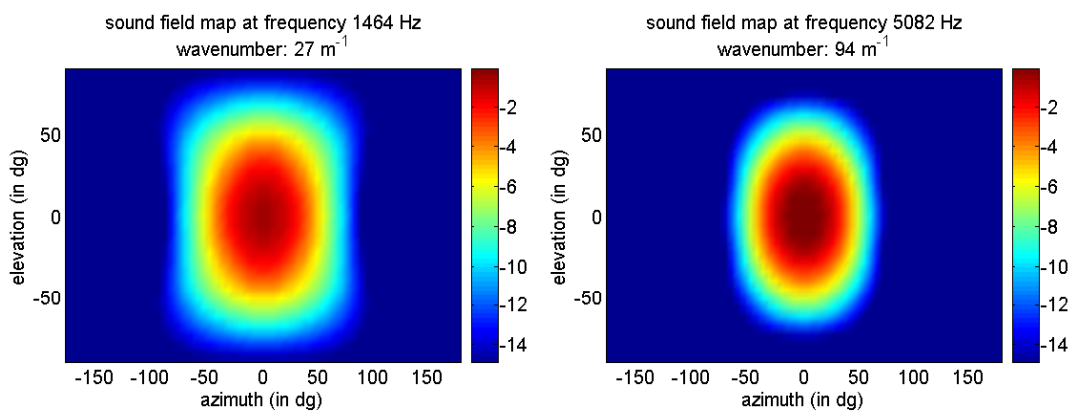


FIG. 5.13 – Cartographie du champ sonore obtenue par une fenêtre d'analyse sphéroïdale aplatie à la fréquence de 1464 Hz (gauche) et 5082 Hz (droite), pour une antenne tridimensionnelle. La source analysée est ponctuelle, de coordonnées sphériques  $[1.5, 0, 0]$ .

En revanche, l'étendue du lobe principal est quand même assez importante : il s'agit d'une image "à basse résolution" (la demi-largeur angulaire du lobe principal à  $-3$  dB vaut quand même 40 dg). Ceci tire son origine du fait que la cartographie du champ sonore est obtenue en évaluant la transformée de Fourier spatiale sur la sphère définie par la relation de dispersion, qui est la zone intéressante du spectre. Or, pour minimiser l'influence des signaux d'interférence, nous avons maximisé l'énergie de la fenêtre d'analyse à l'intérieur de la sphère de résolution par rapport à la sphère d'optimisation. Nous avons choisi ceci afin d'avoir un calcul simple, mais les signaux d'interférence n'occupent pas la totalité de l'intérieur de la sphère d'optimisation, uniquement la surface d'une sphère de rayon  $k = \omega/c$ . L'inconvénient est que le centre de cette sphère varie en

fonction du vecteur d'onde analysé  $\mathbf{k}_0$ , comme nous le verrons plus en détail au prochain paragraphe, voir notamment la figure 5.14. . Afin d'englober tous les cas possibles, le domaine généré par cette sphère de signaux d'interférence est justement la sphère d'optimisation, ce qui explique les raisons de notre choix initial.

L'étendue du lobe principal peut être jugée trop importante. Cela est nécessaire pour obtenir un pouvoir de focalisation décent. Si les performances de l'analyse par fenêtre d'analyse, c'est-à-dire indépendante du vecteur d'onde analysé  $\mathbf{k}_0$ , ne sont pas jugées suffisantes, nous pouvons améliorer cette situation en rendant aussi le vecteur de pondération dépendant du vecteur d'onde analysé, et non plus seulement de la fréquence d'analyse, c'est-à-dire faire de la formation de voies telle que celle décrite dans Van Veen et Buckley [65], ce que nous allons développer au prochain paragraphe.

## 5.4 Formation de voies par minimisation d'une norme $L_2$ continue volumique<sup>2</sup>

À partir de ce paragraphe, nous allons optimiser le vecteur de pondération non seulement pour la pulsation d'analyse  $\omega$ , mais aussi pour un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$  donné. L'objectif est donc de mettre en place un bon estimateur de  $\hat{p}(\mathbf{k}_0, \omega)$  conformément à l'équation (5.6). La philosophie sous-jacente au critère utilisé pour le calcul du vecteur de pondération reste la même : nous cherchons à minimiser l'influence des signaux d'interférence. La partie gauche de la figure 5.14 représente une situation possible. Il s'agit d'une coupe 2D alors que le problème général est 3D, mais il permet de mieux se représenter la situation. Le vecteur d'analyse considéré est  $\mathbf{k}_0$  qui se situe dans cet exemple dans le plan  $(O k_x k_y)$ . Ce vecteur d'onde d'analyse est situé sur la sphère définie par la relation de dispersion de rayon  $k = \omega/c$ . Les signaux d'interférence potentiels sont situés partout ailleurs sur cette même sphère. Ainsi, une possibilité pour calculer le vecteur de pondération correspondant à une bonne estimation de  $\hat{p}(\mathbf{k}_0, \omega)$  consiste à maximiser l'énergie de l'atome élémentaire discrétisé dans une sphère centrée autour de  $\mathbf{k}_0$ , de rayon  $k_{\text{res}}$  par rapport à l'énergie située dans la couronne sphérique représentée en pointillés sur la figure 5.14, de centre  $\mathbf{0}$ , comprise entre les rayons  $k_0 - k_{\text{res}}$  et  $k_0 + k_{\text{res}}$ . La formule correspondante est celle de l'équation (5.9). La partie droite de la figure 5.14 montre pourquoi il est nécessaire de calculer des vecteurs de pondération différents pour chaque vecteur d'onde : si nous renversons notre point de vue et que nous nous plaçons dans le référentiel du vecteur d'onde analysé  $\mathbf{k}_0$ , nous pouvons voir que l'orientation de la couronne sphérique contenant les signaux d'interférence est différente pour deux vecteurs d'onde différents  $\mathbf{k}_0$  et  $\mathbf{k}_0'$ . En effet, dans le référentiel lié au vecteur d'onde analysé, l'origine du repère est obtenue par une translation de vecteur  $-\mathbf{k}_0$ .

Nous enchaînons maintenant avec la recherche de la solution de l'équation (5.9). Le numérateur peut être remis en forme de la manière suivante, en effectuant un changement de variable afin que  $\mathbf{k}_0$  devienne l'origine du nouveau repère ( $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ ) :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}(\mathbf{k}_0, k_{\text{res}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k^2 dk d^2\Omega &= \iiint_{\mathbf{k}' \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, k_{\text{res}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k'^2 dk' d^2\Omega \\ &= \underline{w}^H \mathcal{T}_{\text{res}}^H \underline{w} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Comme  $\mathcal{T}_{\text{res}}$  est une matrice réelle symétrique,  $\mathcal{T}_{\text{res}}^H = \mathcal{T}_{\text{res}}$ . Ainsi le numérateur est le même que pour une fenêtre d'analyse. Il ne dépend pas du vecteur d'onde considéré. Quant au dénominateur, il peut être remis en forme de la manière suivante :

<sup>2</sup>Le travail présenté dans cette section est basé sur les articles [42, 45].

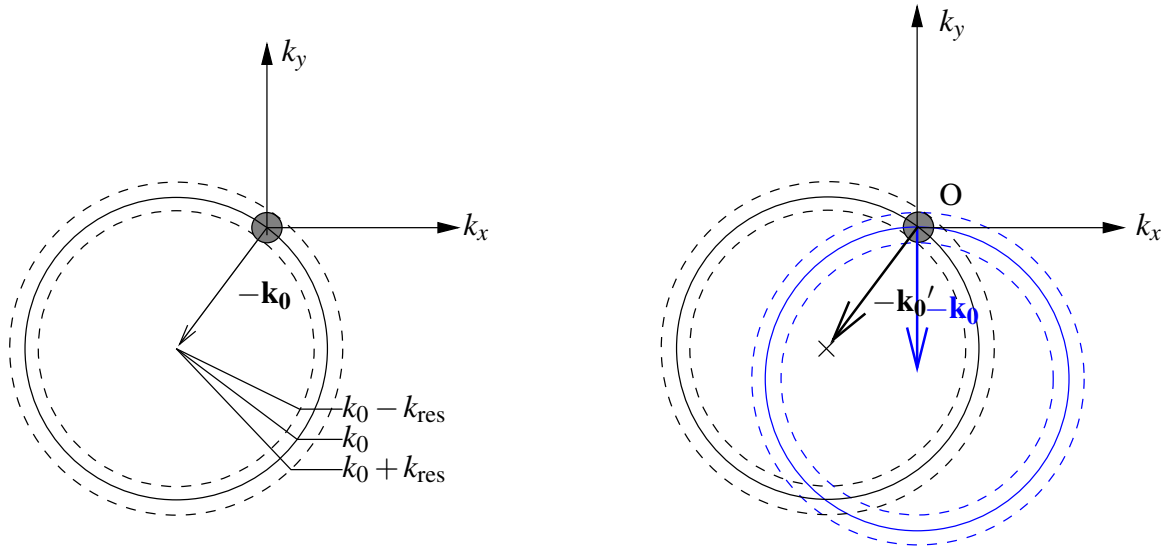


FIG. 5.14 – Illustration concernant les zones de résolution et zone d'optimisation pour la méthode de calcul de la fenêtre d'analyse (gauche). Localisation des signaux d'interférence pour deux vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}_0$  et  $\mathbf{k}_0'$  distincts (droite).

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}(\mathbf{0}, k_0 - k_{\text{res}}, k_0 + k_{\text{res}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k^2 dk d^2\Omega &= \\
 \iiint_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, k_0 + k_{\text{res}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k^2 dk d^2\Omega & \\
 - \iiint_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}(\mathbf{0}, k_0 - k_{\text{res}})} \left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2 k^2 dk d^2\Omega & \\
 &= \underline{w}'^H \mathcal{T}'_{\text{opt}} \underline{w}' \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Dans cette équation,  $\underline{w} = [w_1 e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1}, \dots, w_{M_{\text{mic}}} e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{M_{\text{mic}}}}]^T$  et  $\mathcal{T}'_{\text{opt}} = (\mathcal{T}_{k_0 + k_{\text{res}}} - \mathcal{T}_{k_0 - k_{\text{res}}})^H$ .

Nous pouvons mettre l'expression précédente sous la forme de  $\underline{w}'^H \mathcal{T}_{\text{opt}} \underline{w}$ . Dans ce cas le terme élémentaire du noyau d'optimisation est donné par l'équation suivante :

$$(\mathcal{T}_{\text{opt}})_{(m,n)} = \frac{4}{3} \pi e^{i\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)} \left[ (k_0 + k_{\text{res}})^3 \text{jinc}((k_0 + k_{\text{res}}) r_{mn}) - (k_0 - k_{\text{res}})^3 \text{jinc}_0((k_0 - k_{\text{res}}) r_{mn}) \right] \quad (5.27)$$

Ainsi, l'expression du vecteur de pondération optimal est toujours donnée par l'équation (5.23), où les expressions des noyaux de résolution sont données par les équations (5.23) et (5.27).

D'un point de vue implémentation, nous pouvons voir que le noyau de résolution est indépendant du vecteur d'onde à analyser  $\mathbf{k}_0$ , et ne dépend donc que de la pulsation d'analyse. Ainsi, il n'est pas nécessaire de le recalculer à chaque fois. Quant au noyau d'optimisation, nous pouvons

le récrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{T}_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} & \dots & e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{M_{\text{mic}}}} \end{bmatrix} \mathcal{T}_{\text{opt,ind}} \begin{bmatrix} e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} \\ \vdots \\ e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{M_{\text{mic}}}} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

avec

$$(\mathcal{T}_{\text{opt,ind}})_{(m,n)} = \frac{4}{3}\pi \left[ (k_0 + k_{\text{res}})^3 \text{jinc}((k_0 + k_{\text{res}}) r_{mn}) - (k_0 - k_{\text{res}})^3 \text{jinc}_0((k_0 - k_{\text{res}}) r_{mn}) \right]$$

Ainsi,  $\mathcal{T}_{\text{opt,ind}}$  est indépendant du vecteur d'analyse  $\mathbf{k}_0$ . Au cours du calcul, il n'est donc pas nécessaire de le recalculer à chaque nouvelle valeur de  $\mathbf{k}_0$ . Il suffit de stocker ce noyau intermédiaire à chaque pulsation pour économiser un peu de temps de calcul.

Le vecteur de pondération optimal est toujours le vecteur propre associé à la valeur propre de plus grande magnitude du problème aux valeurs propres généralisé de l'équation (5.18).

Le pouvoir de focalisation de la même antenne que celle utilisée au paragraphe précédent, ainsi que le gain pour un bruit blanc sont représentés sur la figure 5.15 en fonction de la fréquence. Il s'agit de données moyennées sur un ensemble de vecteurs d'onde. Les pouvoirs de focalisation obtenues sont légèrement supérieurs à ceux affichés sur la figure 5.12 pour l'analyse de champs sonores par fenêtre d'analyse. De plus, le gain majeur ne réside pas dans ces pourcentages affichés mais dans le fait que le volume de la zone d'optimisation a considérablement diminué entre les deux approches, passant d'une sphère de rayon  $2k_{\text{max}} + k_{\text{res}}$  à une couronne sphérique comprise entre les rayons  $k_{\text{max}} - k_{\text{res}}$  et  $k_{\text{max}} + k_{\text{res}}$ . De fait, l'étendue du lobe principal est beaucoup moins grande, comme nous pouvons le voir sur la figure 5.17 en comparaison de la figure 5.13, ce qui correspondra à une meilleure résolution de l'analyse globale.

Dans les grandes lignes, les conclusions sont identiques à celles du paragraphe précédent, à savoir que le pouvoir de focalisation est plus fort pour les vecteurs de pondération sphéroïdaux allongés, au détriment d'un gain pour un bruit blanc assez important. L'utilisation de la régularisation permet de diminuer cette sensibilité au bruit tout en conservant un pouvoir de focalisation convenable, ce qui permet dans la pratique d'être robuste au bruit interne des capteurs, ainsi qu'à de légères erreurs de positionnement des microphones.

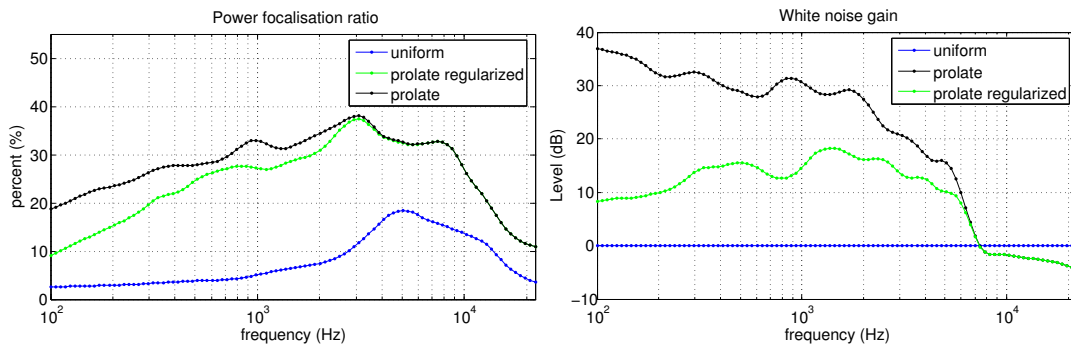


FIG. 5.15 – Pouvoir de focalisation (gauche) et Gain pour un bruit blanc (droite) pour une antenne tridimensionnelle

Toutes les figures de ce paragraphe ont été obtenues pour une antenne tridimensionnelle constituée de solides platoniciens (tétraèdre, octaèdre, cube, icosaèdre et dodécaèdre), seuls maillages sphériques réguliers. Nous avons utilisé un octaèdre inscrit dans une sphère de rayon 1 cm, un dodécaèdre inscrit dans une sphère de rayon 3.16 cm, un icosaèdre dans une sphère de rayon 10 cm, un cube dans une sphère de rayon 31.6 cm et un tétraèdre dans une sphère de rayon 1 m.

Sur les figures 5.16 et 5.17, nous avons représenté la cartographie de l'atome élémentaire, c'est-à-dire l'onde plane discrétisée, et pondérée par un vecteur uniforme (figure 5.16) ou sphéroïdal aplati (figure 5.17), c'est-à-dire que nous avons représenté

$$\left| \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\mathbf{k}_0, \omega) e^{-i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_m} \right|^2$$

pour  $\mathbf{k}$  balayant la sphère de rayon  $k = \omega/c$ .

Nous pouvons voir que le recours à une pondération uniforme ne permet pas de fixer la résolution de l'analyse. Ainsi, à basses fréquences, la résolution est du même ordre de grandeur que le rayon de la sphère définie par la relation de dispersion, de sorte que seul le lobe principal est affiché, ce qui est visible sur la partie supérieure gauche de la figure 5.16. Au fur et à mesure que la fréquence croît, la résolution reste inchangée, et nous voyons que le lobe principal occupe une zone de moins en moins importante : ceci est à relier au fait que le rayon de la sphère analysée croît linéairement avec la fréquence. Ainsi, le lobe principal est quasiment ponctuel pour la fréquence d'analyse de 12785 Hz. En fait, à cette fréquence d'analyse, l'image ne dispose pas d'assez de finesse pour afficher tous les lobes secondaires présents, tellement ceux-ci sont rapprochés. Le vecteur de pondération uniforme focalise raisonnablement bien l'énergie à la fréquence de 5 kHz, soit une longueur d'onde de 6 cm, qui correspond dans l'antenne au diamètre de la sphère dans laquelle est inscrite le dodécaèdre, qui est le solide platonicien réalisant un maillage sphérique régulier, ayant le maximum de sommets, c'est-à-dire 20.

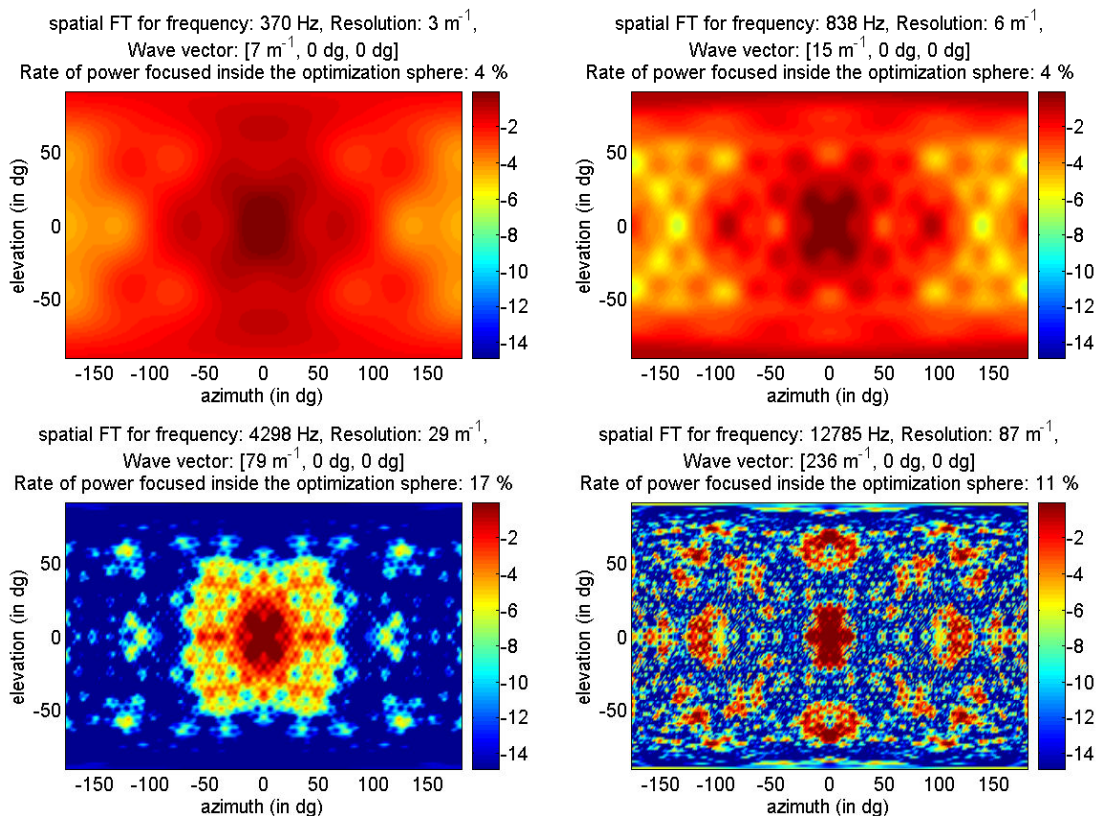


FIG. 5.16 – Cartographie du champ sonore pour une onde plane pondérée par un vecteur de pondération uniforme pour les fréquences de 370 Hz (haut gauche) et 838 Hz (haut droite), 4298 Hz (bas gauche) et 12785 Hz (bas droite), pour une antenne tridimensionnelle.

Concernant la figure 5.17, nous pouvons voir que la totalité de la plage de dynamique de 15 dB

est utilisée quelle que soit la fréquence d'analyse. De plus, nous pouvons voir que la résolution est à peu près constante sur toute la bande de fréquences analysée, comparativement au vecteur de pondération uniforme. À la fréquence de 12785 Hz, nous constatons l'apparition de lobes secondaires ayant un niveau relativement importants, environ  $-6$  dB par rapport au lobe principal. A cette fréquence d'analyse, la longueur d'onde est de 2.6 cm, et il ne reste que les 6 sommets de l'octaèdre qui se situent à l'intérieur de la sphère correspondante à cette longueur, ce qui explique la chute progressive des performances aux hautes fréquences, notamment celles supérieures à 5 kHz.

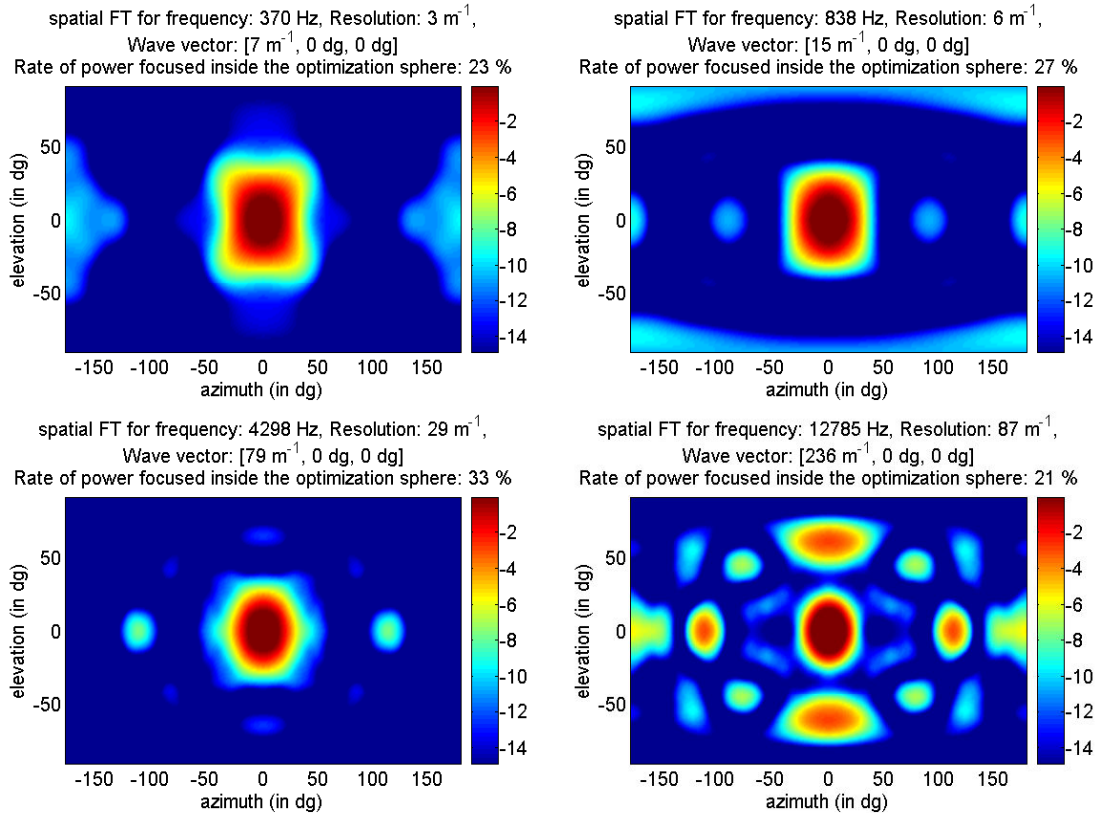


FIG. 5.17 – Cartographie du champ sonore pour une onde plane pondérée par un vecteur de pondération sphéroïdal allongé optimal pour les fréquences de 370 Hz (haut gauche) et 838 Hz (haut droite), 4298 Hz (bas gauche) et 12785 Hz (bas droite), pour une antenne tridimensionnelle.

Pour conclure, nous constatons que l'analyse de champs sonores à hautes fréquences est extrêmement difficile à réaliser, ceci pour trois raisons :

- la présence de lobes secondaires importants perturbe l'estimation de la transformée de Fourier ;
- les erreurs de positionnement induisent un bruit dont la puissance croît de 20 dB par décade si l'on s'en réfère à la figure 5.9 ;
- l'analyse aux hautes fréquences est très localisée. En pratique, pour l'antenne utilisée au cours de ces deux derniers paragraphes, le rayon où l'analyse est valide est inversement proportionnel à la fréquence, ou proportionnel à la longueur d'onde. En fait cette dernière remarque est générale, et peut s'appliquer à tous les types d'antenne.

## 5.5 Formation de voies par minimisation d'une norme $L_2$ surfacique

L'enchaînement logique de notre progression sur l'analyse de champs sonores nous a d'abord fait considérer les fenêtres d'analyse, pour lesquelles nous avons cherché à maximiser l'énergie dans le lobe principal. Pour obtenir une amélioration des performances, notamment en termes de résolution à pouvoir de focalisation à peu près comparable, il nous a fallu rendre les coefficients de pondération dépendants du vecteur d'analyse. Nous avons mentionné qu'il s'agissait d'une formation de voies traditionnelle, comme mentionnée par Van Veen et Buckley [65]. Il est possible de calculer des vecteurs de pondération dont la réponse du filtre spatial est beaucoup plus générale et ne cherche pas uniquement à focaliser la majorité de l'énergie dans la plus petite zone du domaine de Fourier. Par exemple, nous pouvons choisir de mettre au point un filtre spatial qui filtre le signal provenant d'un azimut donné quelle que soit l'élévation. C'est ce problème que nous allons traiter dans cette partie.

Le champ sonore analysé et sa transformée de Fourier spatiale sont données par les équations (5.4) et (5.5). Le produit de convolution a été explicité à l'équation suivante (5.6). À la sortie d'une formation de voies, notre signal ne doit plus dépendre du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Pour cela, il est nécessaire d'évaluer l'équation (5.5) pour un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  à déterminer. Comme l'objectif de la formation de voies dans ce paragraphe est d'obtenir une réponse arbitraire pour le filtre spatial, nous choisissons pour valeur de  $\mathbf{k}$  le vecteur nul. Dans le cas précédent où l'objectif était de focaliser l'énergie provenant d'une direction d'incidence donnée  $(\phi_0, \theta_0)$ , nous avons choisi  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 = (\frac{\omega}{c}, \phi_0, \theta_0)$  pour qu'un vecteur de pondération uniforme corresponde au *matched filter* pour l'onde plane en question. Dans le cas d'une réponse générique du filtre spatial, cela n'a plus de raison d'être. Le signal sortant de la formation de voies  $p_s(\omega)$  est donc défini comme ceci :

$$p_s(\omega) = \iiint_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} p(\mathbf{k}, \omega) \cdot \left[ \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m} \right] d^3\mathbf{k} \quad (5.29)$$

L'expression précédente montre bien que le signal de sortie de la formation de voies est une version filtrée spatialement par rapport au signal initial. La grosse différence est qu'il ne s'agit pas d'un filtrage de type convolutif, comme dans le cas usuel des signaux temporels, mais d'un filtrage de type multiplicatif. La réponse de ce filtre spatial est :

$$h(\mathbf{k}) = \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} w_m(\omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_m} \quad (5.30)$$

Nous allons essayer de sculpter la réponse de ce filtre spatial  $h$  afin qu'elle approche au mieux une réponse de référence  $h_{\text{ref}}$ .

### 5.5.1 Norme discrète

Ce type de formation de voies est le plus répandu. Il consiste à réaliser un maillage discret de la sphère d'analyse, et à faire coller au mieux la réponse effective de la formation de voie à une réponse de référence. Il s'agit donc d'un recours à des méthodes numériques pour résoudre un problème situé initialement dans le domaine continu, que nous poserons plus élégamment à la section 5.5.2. Des méthodes existent pour calculer les vecteurs de pondération, exposées dans les travaux de Parra [77, 78], Yan [112].

Notre propos dans cette section n'est pas d'améliorer ces méthodes existantes, mais d'attirer l'attention sur le fait que le choix du nombre de points pour réaliser le maillage des directions d'incidence est primordial. Trois facteurs influent dans ce choix : le nombre de microphones de l'antenne de capteurs, la disposition de ceux-ci et la fréquence d'analyse.

Étant donné que le nombre de degrés de libertés de la formation de voies fréquentielle est égal au nombre de microphones, il faut obligatoirement que le nombre de points du maillage de la sphère d'analyse dans le domaine de Fourier soit au moins supérieur à ce nombre afin que les problèmes numériques sous-jacents ne soient pas obligatoirement mal conditionnés. Il s'agit d'une condition nécessaire, mais pas suffisante.

À la pulsation  $\omega$  nous fixons le gabarit du filtre spatial sur la sphère définie par la relation de dispersion  $k = \omega/c$ . Il est nécessaire d'échantillonner la réponse du filtre spatial sur cette sphère, mais il est nécessaire de connaître la densité de points du maillage. Le terme de la réponse du filtre spatial (5.30) correspondant à la contribution du  $m^{\text{ième}}$  microphone est  $w_m(\omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m}$ . Nous allons maintenant introduire le concept de rapidité de variation de la phase spatiale. La phase de cette exponentielle complexe est  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m$ . Afin de représenter à un taux d'échantillonnage critique les variations de phase, il est nécessaire d'avoir au moins deux vecteurs d'onde par variation de phase de  $2\pi$ . En désignant ces deux vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ , la variation de phase vaut  $(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}_m$  entre les deux points. Si l'on note  $2\gamma$  l'angle entre les deux vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ , la variation de phase entre les deux points est majorée par  $2kr_m \sin \gamma$ . L'angle  $2\gamma$  séparant les deux vecteurs d'onde ne devrait pas occasionner une variation de phase supérieure à  $\pi$ , ce qui conduit à la restriction :

$$\gamma_{\max} = \arcsin \frac{\pi}{2kr_m} \quad (5.31)$$

L'angle solide d'un cône de demi-angle d'ouverture  $\gamma$  étant égal à  $2\pi(1 - \cos \gamma)$ , nous en déduisons qu'il faut au minimum un nombre de vecteurs d'onde égal à

$$N = \frac{4\pi}{2\pi(1 - \cos \gamma_{\max})} \quad (5.32)$$

Si  $\frac{\pi}{2kr_m} \ll 1$ , alors  $N \approx \frac{64f^2R^2}{c^2}$ , où  $f$  désigne la fréquence d'analyse, et  $R$  désigne la distance maximale d'un microphone par rapport à l'origine. Nous ne donnons pas de méthode pour réaliser un tel maillage critique. Pour l'implémentation, nous utilisons un maillage sphérique séparable en azimut et élévation, dont le pas est un peu inférieur à  $\gamma_{\max}$  dans chacune des deux dimensions pour échantillonner correctement chacune des  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m}$ .

Soit  $(\mathbf{k}_n)_{n \in [1, N]}$  le maillage sphérique correspondant. Nous adoptons les notations suivantes par la suite<sup>3</sup> :

$$\underline{w} = [w_1, \dots, w_{M_{\text{mic}}}]^T \quad (5.33)$$

$$\underline{h}_{\text{ref}} = [h_{\text{ref}}(\mathbf{k}_1), \dots, h_{\text{ref}}(\mathbf{k}_N)]^T \quad (5.34)$$

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} & \dots & e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_{M_{\text{mic}}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i\mathbf{k}_N \cdot \mathbf{r}_1} & \dots & e^{i\mathbf{k}_N \cdot \mathbf{r}_{M_{\text{mic}}}} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \underline{h} &= [h(\mathbf{k}_1), \dots, h(\mathbf{k}_N)]^T \\ &= \underline{\mathcal{E}w} \end{aligned} \quad (5.36)$$

La matrice  $\mathcal{E}$  est de dimension  $N \times M_{\text{mic}}$  avec  $N \geq M_{\text{mic}}$ . Afin de calculer le vecteur de pondération optimal, nous choisissons de minimiser l'erreur quadratique entre la réponse de référence  $\underline{h}_{\text{ref}}$  et la réponse réelle  $\underline{h}$ . Cela conduit au vecteur de pondération suivant :

$$\underline{w} = (\mathcal{E}^H \mathcal{E})^{-1} \mathcal{E}^H \underline{h}_{\text{ref}} \quad (5.37)$$

<sup>3</sup>La dépendance en  $\omega$  est omise par soucis de clarté.



Si la matrice  $(\mathcal{E}^H \mathcal{E})$  est mal conditionnée, il peut être utile de mettre en œuvre une régularisation de sorte à ne considérer que les valeurs propres significatives au moment de l'inversion, afin de ne pas amplifier le bruit.

Lorsque la fréquence d'analyse croît, le nombre de vecteurs d'onde  $N$  nécessaires pour mailler correctement la sphère croît en  $f^2$  et devient vite très important. Afin de ne pas avoir une complexité numérique trop forte, il peut alors être judicieux d'éliminer les microphones situés trop loin de l'origine de sorte à diminuer le  $R$  et garder un nombre de vecteurs d'onde pour le maillage correct.

Pour illustrer les propos précédents, nous allons considérer une antenne de microphones constituée d'un dodécaèdre inscrit dans une sphère de rayon 34 cm. Pour ce rayon, l'équation (5.31) nous indique que l'angle maximal entre deux vecteurs d'onde devrait être égal à 60 dg. L'erreur moyenne par paramètre en respectant cette condition est alors de  $-43.3$  dB, ce qui est très correct. Lorsque nous utilisons un maillage 4 fois plus dense, correspondant à  $\gamma_{\max}/2$ , l'erreur moyenne par paramètre chute à  $-12.7$  dB. Basé sur ce constat, il semblerait mieux d'utiliser un maillage moins dense, mais les performances obtenues sont illusoire. Elles sont représentées sur la figure 5.18. Nous pouvons voir que pour le premier cas, la réponse aux points d'échantillonnage possède un bon profil, mais que la même réponse tracée pour un maillage beaucoup plus dense est très largement différente (attention au changement d'échelle entre les deux représentations). Ce n'est pas le cas lorsque nous prenons  $\gamma_{\max}/2$  au lieu de  $\gamma_{\max}$ . La réponse en dehors des points d'optimisation ne diverge pas contrairement au premier cas (les échelles des deux représentations sont identiques). Dans ce premier cas, le maillage qui a servi au moment de l'optimisation du vecteurs de pondération n'est pas assez dense pour échantillonner correctement les  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m}$  de l'équation (5.30), car les variations de phase sont trop rapides. Dans le deuxième cas, l'échantillonnage est suffisant pour suivre ces variations.

### 5.5.2 Norme continue

La section précédente a décrit la procédure afin de calculer le vecteur de pondération optimal approchant au mieux une réponse de référence discrétisée  $\underline{h}_{\text{ref}}$ . Dans ce paragraphe, nous essaierons de justifier la pertinence de cette approche en essayant de résoudre le problème dans le domaine continu. Nous verrons un parallèle direct entre la formation de voie, et l'analyse de champs sonores par harmoniques sphériques, couramment répandue dans le domaine, voir par exemple Poletti [79]. Nous comparerons dans le paragraphe suivant les performances de ces deux approches.

Le système de coordonnées le plus adapté pour décrire la réponse de référence  $h_{\text{ref}}(\mathbf{k})$  est une fois de plus le système de coordonnées sphériques. En effet, si nous reprenons le cas de l'introduction de ce paragraphe où nous souhaitons filtrer ce qui provient d'un azimut donné quel que soit l'élévation, le gabarit correspondant est :

$$h_{\text{ref}}(k, \phi_k, \theta_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_0 - \delta\phi \leq \phi_k \leq \phi_0 + \delta\phi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.38)$$

L'avantage d'avoir recours aux techniques de formations de voies fréquentielles est toujours le même : à la pulsation  $\omega$ , les singularités potentielles de la transformée de Fourier spatiale sont situées sur la sphère définie par la relation de dispersion, de sorte que nous pouvons restreindre la donnée du gabarit à cette sphère, c'est-à-dire de ne préciser que  $h_{\text{ref}}(\omega/c, \phi_k, \theta_k)$ .

De la même manière, il est donc nécessaire de ne considérer la réponse du filtre réel (5.30) que sur cette même sphère. Il convient de donner une expression de cette réponse séparable dans le système de coordonnées sphériques. Celle-ci est obtenue grâce au développement en séries d'une onde plane (1.51). Nous obtenons alors l'expression :

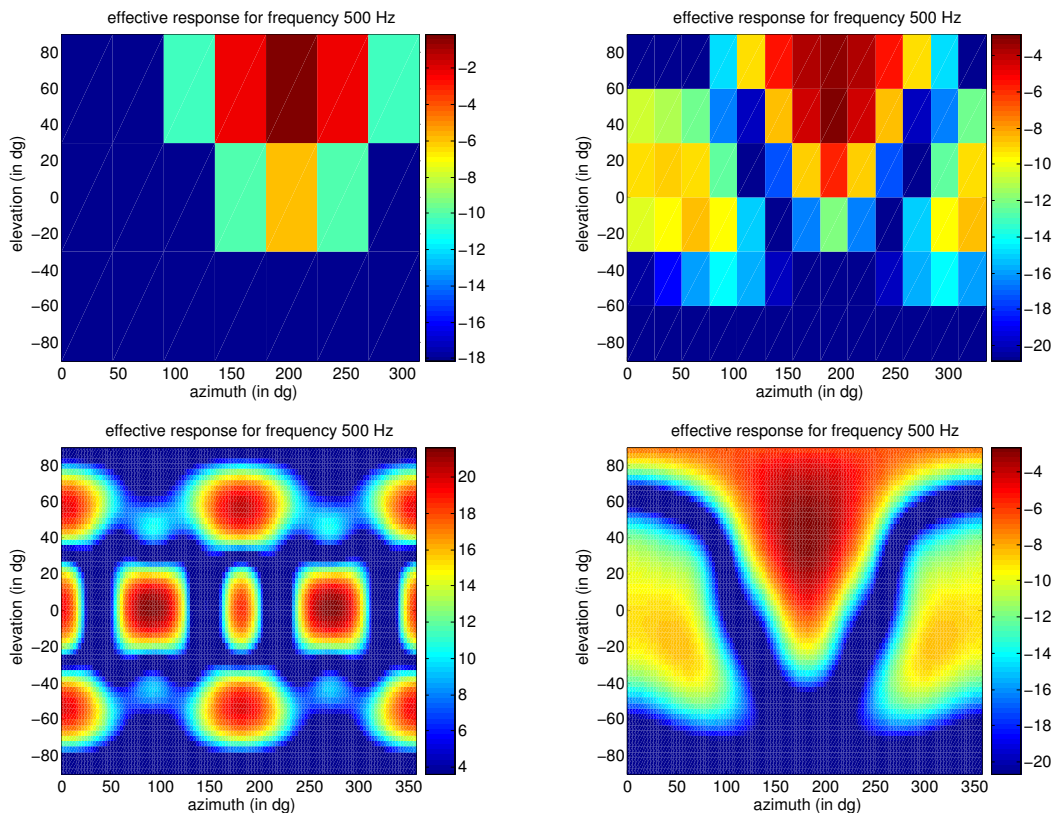


FIG. 5.18 – Influence du nombre de vecteurs d’ondes utilisé lors de la minimisation de la fonction de coût sur la réponse spatiale de la formation de voies en utilisant la minimisation d’une norme discrète. L’objectif est de focaliser l’énergie dans la direction  $[az = 180 \text{ dg}, el = 30 \text{ dg}]$ , avec une résolution de  $60 \text{ dg}$ . En haut à gauche, réponse utilisant une discrétisation satisfaisant l’équation (5.31). En bas à gauche, même réponse tracée sur un maillage plus dense (plage de dynamique différente). En haut à droite, échantillonnage tous les  $\gamma_{\max}/2$ . En bas à droite, même réponse mais tracée sur un maillage plus dense.

$$h\left(\frac{\omega}{c}, \phi_k, \theta_k\right) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \sum_{n=1}^{M_{\text{mic}}} 4\pi i^l w_n(\omega) j_l\left(\frac{\omega}{c} r_n\right) \overline{Y_l^m}(\phi_{r_n}, \theta_{r_n}) \right] Y_l^m(\phi_k, \theta_k) \quad (5.39)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=1}^{M_{\text{mic}}} a_{lmn} w_n(\omega) Y_l^m(\phi_k, \theta_k) \quad (5.40)$$

De même, nous pouvons décomposer  $h_{\text{ref}}(\omega/c, \phi_k, \theta_k)$  en séries de Fourier sur la sphère :

$$h_{\text{ref}}\left(\frac{\omega}{c}, \phi_k, \theta_k\right) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_{lm} Y_l^m(\phi_k, \theta_k) \quad (5.41)$$

Il ne reste plus qu’une étape délicate afin de se ramener au problème du paragraphe précédent : il s’agit de l’ordre  $L$  auquel nous tronquons le développement en séries. Nous reviendrons bientôt sur ce problème. Ensuite, il ne suffit que de mettre à jour les notations du paragraphe précédent :

$$\underline{\alpha} = [\alpha_{00}, \alpha_{1-1}, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{L-L}, \dots, \alpha_{LL}]^T \quad (5.42)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{001} & \dots & a_{00M_{\text{mic}}} \\ a_{1-11} & \dots & a_{1-1M_{\text{mic}}} \\ a_{101} & \dots & a_{10M_{\text{mic}}} \\ a_{111} & \dots & a_{11M_{\text{mic}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{L-L1} & \dots & a_{L-LM_{\text{mic}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{LL1} & \dots & a_{LLM_{\text{mic}}} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\hat{\underline{\alpha}} = \mathcal{A}\underline{w} \quad (5.44)$$

De même que dans le paragraphe précédent, nous cherchons à minimiser la norme quadratique de l'erreur  $\|\underline{\alpha} - \hat{\underline{\alpha}}\|_2$ , ce qui conduit au vecteur de pondération optimal suivant :

$$\underline{w} = (\mathcal{A}^H \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^H \underline{\alpha} \quad (5.45)$$

Pour ce qui concerne l'ordre de troncature  $L$  des séries de Fourier sphérique, nous savons d'une part que les fonctions de Bessel sphériques  $j_l(x)$  possèdent un zéro d'ordre  $l$  à l'origine, et nous avons dit dans la partie I, au chapitre 1 que leur amplitude pouvait être considéré comme négligeable pour  $x \leq L-1$ . Ainsi, si  $R$  représente l'étendue spatiale de l'antenne, c'est-à-dire le  $r_n$  maximal, alors  $L-1 = \frac{2\pi f R}{c}$  et nous retombons sur la tendance obtenue au paragraphe précédent concernant le nombre de coefficients  $(L+1)^2$  à considérer, soit  $\frac{4\pi^2 f^2 R^2}{c^2}$ , ce qui est bien proportionnel à  $\left(\frac{fR}{c}\right)^2$ .

### 5.5.3 Comparaison des deux approches

Les deux approches envisagées aux sections 5.5.1 et 5.5.2 nécessitent le calcul d'une matrice dont les dimensions peuvent devenir assez importantes, à savoir  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{A}$ . La première ne nécessite que le calcul d'exponentielles complexes  $e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_m}$  tandis que la deuxième fait intervenir les coefficients  $a_{lmn}$  dont nous rappelons l'expression :

$$a_{lmn} = 4\pi^l j_l(kr_n) \overline{Y_l^m}(\phi_{r_n}, \theta_{r_n})$$

Elle nécessite donc à la fois le calcul des fonctions de Bessel sphériques mais aussi des harmoniques sphériques standard, ce qui est plus complexe que le simple calcul d'une exponentielle complexe. Ainsi, si les deux méthodes conduisent à des performances analogues, il conviendra de privilégier la première approche.

Dans cette section, nous avons donc fait une connexion entre la formation de voies et l'analyse du champ sonore basée sur les harmoniques sphériques. Cette dernière a fait l'objet de beaucoup de développements dans la littérature, voir par exemple Abhayapala et Ward [3], Li *et al.* [62], Meyer et Elko [66], Park et Rafaely [76], Poletti [79], Rafaely [84]. Nous avons même les outils pour comparer ces deux approches en utilisant un critère commun, à savoir les équations (5.30) et (5.39) qui tracent dans les deux cas la réponse du filtre spatial, la première correspondant à une description en ondes planes et la deuxième à une description en harmoniques sphériques. Je n'ai pas eu le temps de comparer les résultats de ces deux approches, mais cela apparaît comme une perspective intéressante de cette thèse. Il y a quand même de fortes présomptions sur le fait qu'elles doivent conduire à des résultats sensiblement identiques. En effet, les analogies entre les

deux développements sont flagrantes, notamment concernant le nombre de paramètres nécessaires à la description du champ sonore, qui dépend de la géométrie de l'antenne de microphones, l'un par le biais du concept de la rapidité des variations de la phase spatiale, l'autre par le biais de l'ordre de la décomposition nécessaire pour représenter correctement le champ sonore.

## 5.6 Configurations géométriques pour les antennes

Dans cette section, nous allons comparer les performances de plusieurs géométries d'antenne concernant le pouvoir de focalisation de celles-ci et le gain pour un bruit blanc, en utilisant pour l'analyse l'algorithme décrit à la section 5.4. Les antennes utilisées pour effectuer cette comparaison sont les suivantes :

- deux antennes constituées de solides platoniciens inscrits dans 5 sphères dont les rayons sont logarithmiquement espacés entre 1 cm et 1 m. Les solides s'enchaînent soit dans l'ordre tétraèdre, octaèdre, cube, icosaèdre et dodécaèdre (“*tocid*” sur les légendes), soit dans l'ordre inverse (“*dicot*” sur les légendes). Ces antennes disposent toutes deux de 51 éléments ;
- deux antennes circulaires de 51 éléments chacune, la première ayant un rayon de 1 m, et la deuxième un rayon de 10 cm ;
- deux antennes en croix, chacune ayant 53 éléments (4 branches ayant chacune 13 microphones plus 1 microphone au centre) s'étalant de 1 cm à 1 m, l'une ayant un espacement linéaire (“*cross linear*”) et l'autre utilisant une répartition logarithmique pour l'espacement des microphones (“*cross logarithmic*”) ;
- une antenne ayant une répartition de microphones aléatoires de 51 éléments (“*random*”). Les coordonnées de chacun des microphones sont aléatoires mais réparties de manière uniforme entre  $-1$  et  $1$ .

Les résultats sont affichés sur la figure 5.19. Concernant le pouvoir de focalisation de ces différentes antennes, nous pouvons voir que celles qui obtiennent les meilleures performances sur toute la plage fréquentielle des signaux audio sont les antennes constituées de solides platoniciens, et plus particulièrement l'antenne “*dicot*” qui possède une plus forte densité de points au niveau du centre de l'antenne. Pour les deux antennes constituées de solides platoniciens, nous voyons clairement apparaître un pic de performance pour la longueur d'onde correspondant à l'inverse du diamètre de la sphère dans laquelle est inscrite le dodécaèdre, soit normalement 17000 Hz pour l'antenne “*dicot*” et 170 Hz pour l'antenne “*tocid*”. Les pics de performance observés apparaissent à 10000 Hz et 260 Hz, donc il existe un léger écart, mais l'ordre de grandeur est à peu près respecté.

Concernant les antennes en croix, nous pouvons voir qu'il vaut mieux utiliser une répartition logarithmique des échantillons qu'une répartition linéaire, pour laquelle nous observons une chute de performances à partir de environ 2000 Hz. L'espacement des microphones pour cet antenne est de 7 cm. Si nous considérons qu'il faut au moins deux microphones par longueur d'onde, ce la correspond à une longueur d'onde critique de 14 cm, soit une fréquence de 2000 Hz. Le pouvoir de focalisation de l'antenne en croix à répartition logarithmique des échantillons possède un pouvoir de focalisation quasiment constant sur toute la bande de fréquences.

Concernant les antennes circulaires, nous voyons qu'elles sont bien adaptées pour la plage de fréquences correspondant aux longueurs d'onde de l'ordre du diamètre de l'antenne circulaire, soit 170 Hz pour l'antenne circulaire de rayon 1 m, et 1700 Hz pour l'antenne de rayon 10 cm.

Finalement, nous observons que le pouvoir de focalisation de l'antenne aléatoire est très bon à basses fréquences, et très mauvais à hautes fréquences, avec une rapide chute des performances. Il s'agit d'un tirage, nous n'avons pas effectué de millions de tirage afin d'obtenir une antenne qui aurait pu avoir des performances plus optimales.

Concernant la partie droite de la figure 5.19, nous pouvons voir que les antennes constituées de solides platoniciens amplifient plus le bruit blanc par rapport à d'autres antennes. La plage de

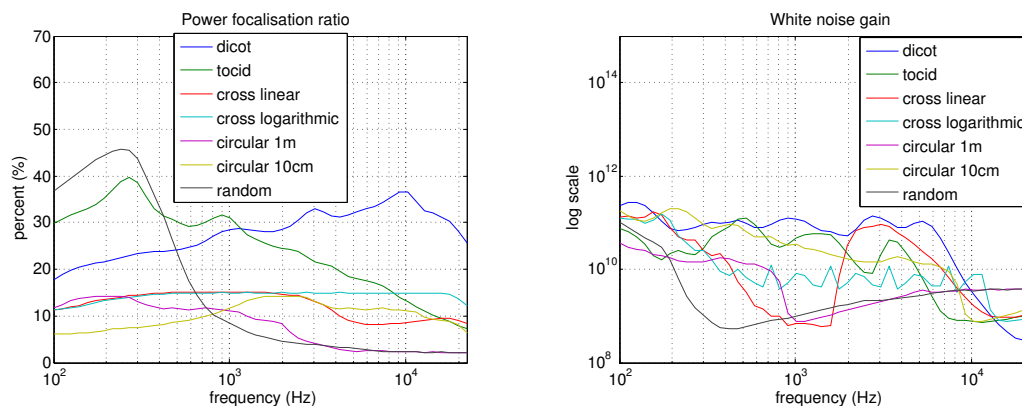


FIG. 5.19 – Étude de l’influence de la géométrie de l’antenne sur le pouvoir de focalisation de l’antenne (gauche) et sur le gain pour un bruit blanc (droite), pour différentes géométries (se reporter au texte).

dynamique d’amplification du bruit blanc est de deux ordres de grandeur environ, de  $10^9$  à  $10^{11}$  environ, soit une plage de 20 dB, ce qui n’est pas très important. De plus, nous n’avons pas utilisé de régularisation pour atténuer l’amplification du bruit.

## Conclusion sur l’analyse de champs sonores par antenne de microphones

Ce chapitre a exposé des méthodes permettant de faire l’analyse de champs sonores à partir des données récoltées par une antenne de microphones. Nous avons particulièrement attaché de l’importance sur les liens entre la physique des champs sonores, et les méthodes de traitement de signal pour le filtrage spatial.

En particulier, cette façon de procéder nous a permis de démontrer que l’analyse de champs sonores était le résultat de deux formations de voies successives : la première est une formation de voies continue effectué au niveau de chaque microphone de l’antenne de capteurs, et la deuxième est une formation de voies discrète pondérant de manière variable les mesures récoltées par chacun des microphones de l’antenne afin de filtrer la composante spatiale d’intérêt du champ sonore. La première formation de voie est imposée par le type de microphones employée dans l’antenne, et il s’agit d’un paramètre à prendre en compte au moment de la conception de l’antenne, tandis que la deuxième n’utilise que du traitement du signal qui peut être effectué postérieurement à l’acquisition des données. Il s’agit donc d’un procédé d’une extrême flexibilité.

L’objectif initial de notre méthode était d’imiter les mécanismes de la perception auditive, qui réalise une sorte d’analyse temps-espace/fréquence-vecteur d’onde. Nous avons mis au point un algorithme de formation de voies permettant de focaliser l’énergie du filtre spatial dans une certaine direction et de minimiser l’énergie du même filtre pour les autres directions. Le critère utilisé réalise cette optimisation en considérant l’ensemble complet (continu) des directions d’incidences possibles, ce qui a été rendu possible en utilisant le développement en série d’une onde plane en harmoniques sphériques. Comme nous l’avons montré, cela permet de s’affranchir de la difficulté relative à la conception du maillage de l’ensemble des directions d’incidence lorsque des algorithmes de formation de voies qui optimisent la réponse du filtre spatial uniquement sur un ensemble discret de directions d’incidence sont utilisés.

Pour les algorithmes réalisant une optimisation sur un ensemble discret d’ondes planes, nous avons introduit le concept de rapidité de variation de la phase spatiale afin de fixer des conditions

sur l'angle maximal devant séparer deux directions d'incidence du maillage utilisé pour l'optimisation. Nous avons procédé de manière analogue lorsque l'optimisation était réalisée sur un ensemble discret d'harmoniques sphériques, où nous avons précisé l'ordre de la décomposition  $L$  nécessaire pour représenter correctement la réponse du filtre spatial. Dans les deux cas, ondes planes ou harmoniques sphériques, ceci dépend de la fréquence d'analyse et de la géométrie de l'antenne de microphones.

Nous avons montré l'efficacité de notre méthode et avons mis en place une régularisation afin de limiter l'influence du bruit (présent sur les capteurs ou occasionné par des erreurs de position) sur notre algorithme.

Nous allons maintenant nous intéresser aux perspectives de ces algorithmes d'analyse de champs sonores. Un des défauts que nous pouvons reprocher à notre méthodes est son manque de flexibilité pour l'addition de contraintes supplémentaires lors de l'optimisation du vecteur de pondération, étant donné que seule une minimisation quadratique est envisageable. La flexibilité du traitement effectué dans les travaux de Yan [112] est un avantage dont nous aimerions profiter aussi pour l'analyse de champs sonores, étant donné qu'il est possible de réaliser une minimisation de l'erreur en norme  $L^\infty$ , d'ajouter des contraintes supplémentaires. Ainsi, une perspective intéressante semble d'envisager une méthode hybride d'analyse de champs sonores, réunissant les avantages des deux approches, discrètes et continues.

L'analyse effectuée par les antennes de microphones que nous avons utilisées au cours de ce chapitre est toujours localisée sur l'origine du repère. Il serait intéressant d'utiliser plusieurs antennes de microphones pour avoir plusieurs points de vue sur la scène sonore enregistrée.

Pour le moment, les algorithmes présentés dans ce chapitre permettent de faire des cartographies de champ sonore à une fréquence d'analyse spécifique. Des exemples de telles cartographies de champ sonore sont disponibles au chapitre 7. Une des autres perspectives est de ne plus envisager une formation de voies fréquentielle, mais globale, permettant de réaliser un filtre spatial sur une large bande de fréquences. Pour cela, il suffit de mettre en place un réseau de filtres sur l'antenne de microphones. Nous disposons de la réponse fréquentielle de ces filtres, et il ne nous reste plus qu'à implémenter un réseau de filtres FIR qui respecte au mieux ce gabarit afin de réaliser cette fonction, et obtenir des représentations du champs sonores telles que celles utilisées par Caulkins *et al.* [23].

Pour le moment, ces algorithmes d'analyse de champs sonores peuvent être appliqués quel que soit l'antenne de microphones, et permettent d'aboutir à des prises de sons directives. La qualité de la représentation obtenue dépend du nombre de microphones utilisés lors de l'enregistrement et de leur répartition dans l'espace. Ces algorithmes peuvent être utilisés aussi bien pour des systèmes de synthèse de champs sonore basés uniquement sur la représentation en ondes planes, mais peuvent être aussi utilisés comme systèmes de prise de son pour les dispositifs de Wave Field Synthesis. En effet, nous avons dit dans le bilan de la partie I qu'il n'existait pas encore de système performant de prise de sons lié à la Wave Field Synthesis, et que seule une solution hybride était envisageable dans l'état actuel des connaissances. Une telle solution hybride pourrait utiliser les algorithmes d'analyse de champs sonores présentés au cours de ce chapitre pour l'analyse de champs sonores réels captés par une antenne de microphones, et la Wave Field Synthesis comme procédé de synthèse de champs sonores.

## Chapitre 6

# Algorithmes pour la synthèse de champs sonores

### Résumé :

Dans la première partie de ce chapitre, nous introduisons les objectifs d'une égalisation multicanale idéale, dans laquelle le champ sonore serait connu idéalement. Nous insistons sur la difficulté théorique d'une telle approche, nécessitant la mise au point d'un opérateur d'inversion. Puis, nous simplifions la démarche de l'égalisation multicanale dans un contexte idéal afin que le calcul du réseau de filtres inverses à placer en amont du réseau de transducteurs soit réalisable en effectuant des calculs matriciels de façon à ce qu'il puisse être implémenté dans la pratique.

Nous introduisons deux structures pour le réseau de filtres inverses, la première ne prenant en compte que l'information récoltée sur le réseau de microphones, et la deuxième essayant d'optimiser le réseau de filtres inverses pour une source acoustique donnée. Bien que la première approche soit plus complexe car elle nécessite  $M_{\text{mic}}$  fois plus de calculs que la deuxième approche pour calculer le réseau de filtres inverses, elle permet de reproduire n'importe quelle source. Ainsi, cette approche devient avantageuse lorsque le nombre de sources que nous souhaitons restituer devient supérieur au nombre de microphones utilisé pour caractériser le réseau de transducteurs.

L'algorithme de synthèse de champs sonore que nous présentons se découpe en deux parties. Dans un premier temps, nous calculons le gabarit optimal des filtres inverses dans le régime fréquentiel. Cette partie ne pose pas de difficulté du point de vue théorique. Dans un deuxième temps, les réponses impulsionnelles des filtres inverses, implémentés sous forme de filtres numériques à réponse impulsionnelle finie, sont calculées à partir de la connaissance de leur gabarit fréquentiel. Il s'agit d'un problème pour lesquelles il y a plus d'équations (nombre de fréquences où le gabarit des filtres inverses est connu) que d'inconnues (nombre de coefficients de chaque filtre inverse). De ce fait, nous calculons le réseau de filtres inverses qui approche au mieux le gabarit de référence au sens des moindres carrés. Étant donné que le calcul du réseau de filtres inverses peut exiger l'inversion d'une matrice dont les dimensions deviennent trop grandes pour être envisageable dans la pratique, nous avons mis en œuvre une procédure de calcul itérative convergeant en un faible nombre d'itérations vers la solution optimale. Il s'agit d'une résolution itérative par un algorithme de Gauss-Newton approché. Le calcul de chaque itération est accéléré en tirant profit de la structure de Toeplitz des matrices mises en jeu, de sorte que la FFT peut être utilisée pour calculer rapidement chaque itération.

## 6.1 Introduction

Le chapitre précédent traitait des algorithmes permettant d'effectuer une analyse de champs sonores à partir d'un réseau de microphones. Le présent chapitre va s'occuper du problème dual, à savoir celui de la synthèse de champs sonores à partir d'un réseau de transducteurs.

Parmi les méthodes de synthèse de champs sonores existantes, nous pouvons citer :

- l'*égalisation multicanale*. Elle s'inspire des méthodes de reproductions binaurales, au casque, qui visent à reproduire la même valeur du champ de pression acoustique au niveau des tympans que le champ initial. L'égalisation multicanale possède les mêmes objectifs, excepté que la reproduction se fait à l'aide d'enceintes et non au casque. De fait, si le canal gauche alimente l'enceinte gauche, et le canal droit l'enceinte droite, il y a naissance d'interférence car l'oreille droite entend une combinaison des deux canaux. Le principe de l'égalisation multicanale peut s'étendre sans problèmes pour un nombre de canaux supérieur à deux. Dans cette méthode, les opérateurs de propagation de chacun des transducteurs du réseau sont connus sur un ensemble de points. On met alors en place un réseau de filtres inverses qui approche un opérateur de propagation cible, en minimisant l'erreur entre le champ de référence et le champ reconstruit. Cette méthode ne fait appel à aucune étape d'analyse du champ sonore intermédiaire. Les algorithmes utilisés sont des algorithmes d'égalisation multicanale. Des exemples de références associés à cette approche sont fournies dans les travaux suivants : Bouchard [15], Bouchard et Feng [16], Bouchard et Quednau [17], Cor-teel *et al.* [26], Elliott *et al.* [33], Guillaume et Grenier [40], Guillaume *et al.* [46], Kirkeby *et al.* [56], Miyoshi et Kaneda [67], Nelson *et al.* [71, 72], Talantzis et Ward [98] ;
- la *Wave Field Synthesis* [8, 9, 10, 13, 14, 21, 26, 28, 29, 30, 49, 92, 93, 95]. Dans la pratique, il existe plusieurs variantes : la première consiste à considérer un réseau de transducteurs virtuel dont les positions coïncident avec celles des transducteurs réels. Généralement, les transducteurs sont alors supposés à directivité monopolaire ou dipolaire, mais ce n'est pas une obligation. Dans tous les cas, il est nécessaire d'adjoindre un modèle sur la directivité des transducteurs réels. La deuxième variante consiste à se ramener au cas de l'égalisation multicanale, mais en plaçant des garde-fous sur ce qui est physiquement réalisable, ce que ne font pas d'eux-mêmes les algorithmes d'égalisation multicanale ;
- des approches utilisant la formation de voies ont aussi été envisagées. Une des méthodes possibles est de filtrer le champ sonore dans chacune des directions où est présent un transducteur, et d'alimenter le transducteur par le signal correspondant. Une méthode analogue était utilisée en utilisant la décomposition du champ sonore en harmoniques sphériques, dans les débuts des procédés ambisonics. Ces approches ne prennent pas en compte non plus le rayonnement réel des transducteurs ni leur interaction avec la salle hôte du dispositif de reproduction.

Dans ce chapitre, nous proposons un raffinement de l'algorithme d'égalisation multicanale que nous avons proposé à ICASSP [46]. Nous montrerons en particulier qu'il peut s'appliquer pour chacune des trois méthodes précédemment mentionnées. Un des points critiques dans le calcul du réseau de filtres inverses, qui est un ensemble de filtres numériques à réponse impulsionnelle finie, est le retour dans le domaine temporel. En effet, toutes les méthodes d'analyse que nous avons présentées dans le chapitre précédent se situaient dans le domaine fréquentiel. Cette présentation dans le domaine fréquentiel est beaucoup plus adaptée pour l'analyse. En revanche, passer directement du domaine fréquentiel au domaine temporel par simple FFT inverse souffre des inconvénients de la convolution circulaire. Il faut réaliser un compromis entre les effets néfastes de la convolution circulaire, qui introduit du repliement dans le domaine temporel, et la complexité de calcul. En effet, dès que le nombre de transducteurs ou de signaux de consigne tend à grimper, tout comme le nombre de coefficients des filtres inverses, une formulation du problème uniquement dans le



domaine temporel devient ingérable. Plusieurs méthodes ont été mises en place pour pallier ce problème en utilisant la FFT, notamment le recours à une régularisation.

Nous utilisons une formulation dans le domaine temporel, et nous proposons un algorithme itératif effectuant les calculs dans le domaine fréquentiel afin d'avoir des bonnes propriétés en terme de complexité. De plus, nous appliquons l'algorithme pour chacune des méthodes envisagées ci-dessus, et non plus uniquement l'égalisation multicanale traditionnelle.

## 6.2 Contextes des différents algorithmes d'égalisation multicanale

Dans l'hypothèse où la connaissance du champ sonore est supposée idéale, le schéma-bloc de la figure 6.1 explique les différentes étapes de l'égalisation multicanale, sur lesquelles nous allons revenir :

- le champ sonore de référence  $p_{\text{ref}}(\mathbf{r}, t)$  peut être obtenu d'une part par la simulation, par la connaissance des signatures temporelles des sources, contenues dans le vecteur  $\underline{g}(t)$ , et de chacun des opérateurs de propagation  $G_{\mathbf{r}_s, t_s}(\mathbf{r}, t)$ , ou d'autre part par la mesure, bien que le procédé d'extrapolation soit d'une très grande difficulté ;
- dans la branche de droite du schéma-bloc, le champ sonore de référence est analysé par le module d'analyse. La sortie de l'analyseur a ici été notée  $p(\mathbf{k}, \omega)$ , supposant donc implicitement que l'analyse sous-jacente était la décomposition en ondes planes. Ce n'est pas obligatoirement le cas. Il aurait pu s'agir aussi de la décomposition en harmoniques sphériques, auquel cas la sortie associée serait les coefficients  $\alpha_{lm}$  de la décomposition (voir équation (5.41)). De plus, ce module d'analyse est facultatif : la méthode sous-jacente à son omission vise à minimiser la norme quadratique de l'erreur sur un ensemble de points de consigne, ce qui est exactement l'objectif de l'égalisation multicanale traditionnelle. La chose importante à noter dans cette notation est que le champ de référence analysé est bien de dimension infinie ;
- l'opérateur d'inversion permet d'élaborer les signaux des consignes des transducteurs  $y_j(t)$  à partir du champ sonore de référence. Comme celui-ci est de dimension infinie, il s'agit bien d'un opérateur, et non d'une matrice ;
- nous utilisons ensuite la matrice de propagation, contenant les opérateurs de propagation de chacun des transducteurs, afin de calculer le champ sonore reconstruit  $p_{\text{rec}}(\mathbf{r}, t)$  ;
- ce champ sonore reconstruit est ensuite analysé par le même module d'analyse que pour le champ sonore de référence. Le champ d'erreur  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$  est défini comme la différence entre le champ de référence analysé et le champ sonore reconstruit analysé.

L'objectif de l'égalisation multicanale est de minimiser la norme du champ d'erreur. Le choix de la norme est un paramètre important de l'égaliseur. Toutes les étapes de cette égalisation multicanale sont d'une grande difficulté : l'opération d'inversion n'est pas une inversion matricielle, étant donné que les signaux à traiter sont de dimension infinie, mais un opérateur d'inversion. Nous ne traiterons pas ce problème dans la suite.

Le plus souvent, il n'y a pas d'étape d'extrapolation du champ sonore, et les deux possibilités restantes sont alors représentées sur la figure 6.2.

Les différences notables qu'il faut souligner par rapport à la figure 6.1 sont que nous utilisons les signaux mesurés par un réseau de microphones pour l'opération d'inversion. Ainsi, le bloc d'inversion ne nécessite pas un opérateur d'inversion pour calculer le réseau de filtres inverses, mais seulement une inversion matricielle, étant donné que les signaux analysés sont de dimension finie.

Dans le cas où nous souhaitons reproduire uniquement des champs sonores virtuels et non réels, nous pouvons différencier le module d'analyse entre le champ de référence et celui effectivement reconstruit par le réseau de transducteurs. En effet, la décomposition du champ sonore

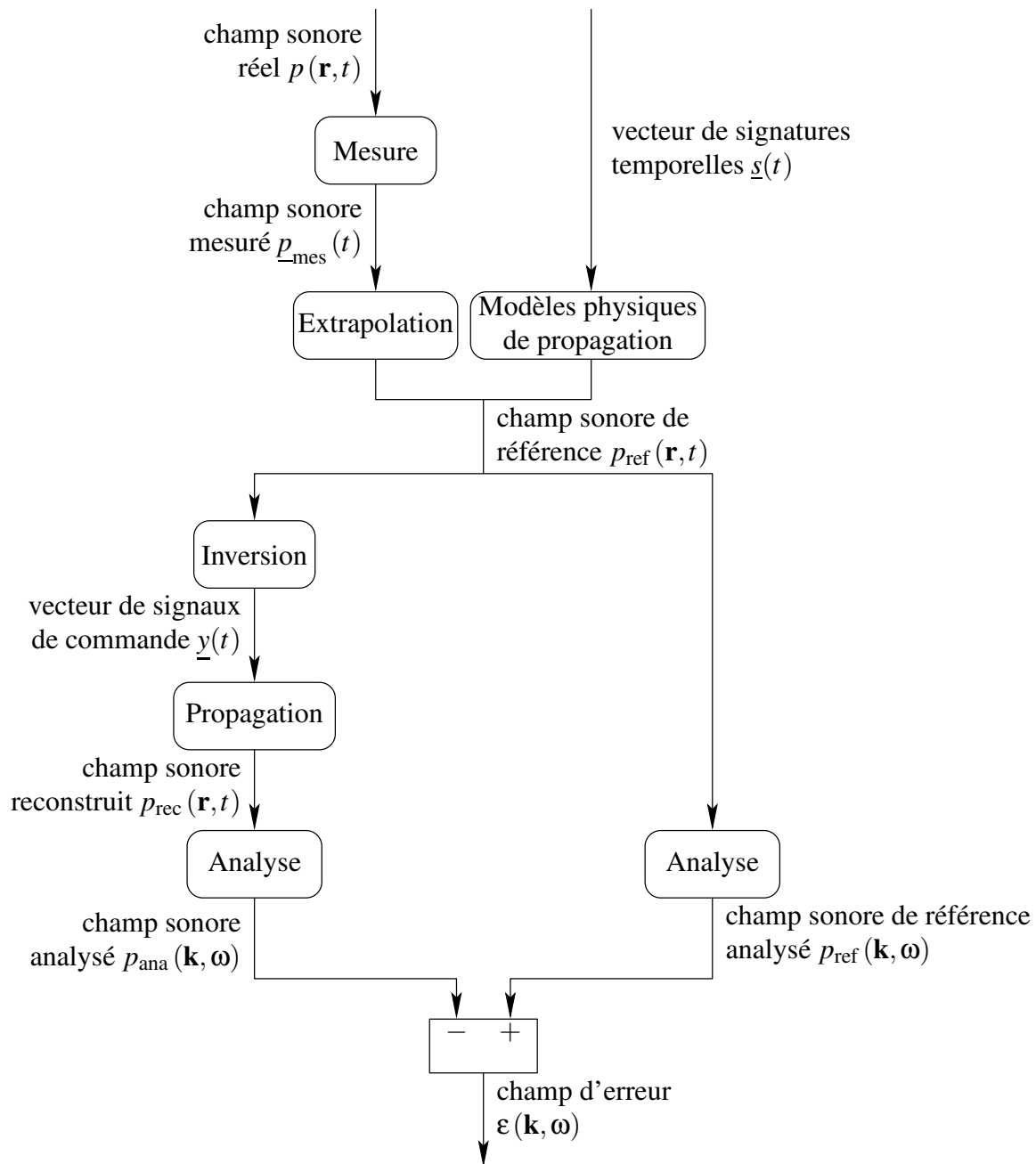


FIG. 6.1 – Égalisation multicanale supposant une connaissance idéale du champ sonore

peut être obtenue directement par le calcul dans ce cas, sans souffrir des inconvénients liés à la discrétisation introduite par la mesure. L'essentiel est que les ensembles de paramètres des deux signaux analysés soient identiques afin de pouvoir calculer le champ d'erreur.

Dans le cas de la figure de gauche, le réseau de filtres inverses est indépendant de la source à reproduire, tandis que l'égaliseur de la figure de droite est adapté pour un ensemble de sources sonores bien spécifiques.

Le schéma de l'égalisation multicanale se décompose naturellement en deux sous-problèmes distincts :

- le calcul de la réponse en fréquence optimale du réseau de filtres inverses ;
- le calcul des réponses impulsionnelles de chacun des filtres inverses respectant au mieux le

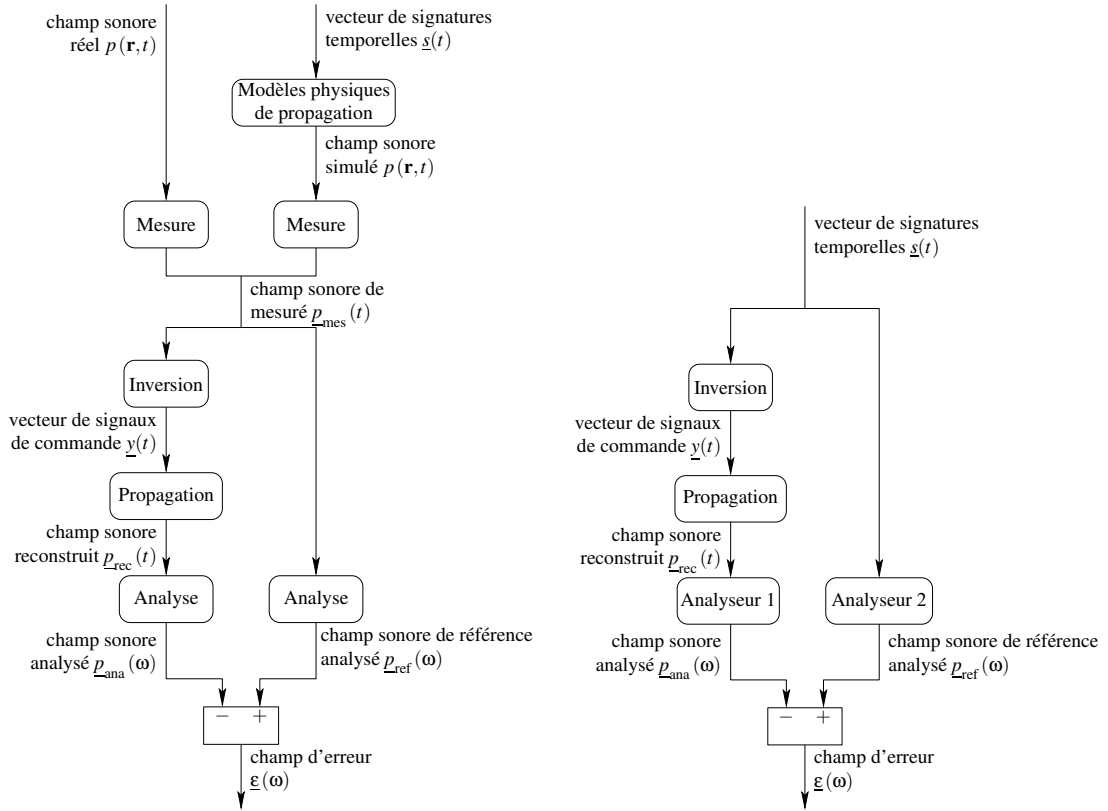


FIG. 6.2 – Égalisation multicanale réalisable dans la pratique. Reproduction de champs sonores réels ou virtuels (gauche), ou seulement virtuels (droite)

gabarit fréquentiel.

### 6.3 Calcul de la réponse en fréquence du réseau de filtres inverses

Nous traiterons le cas de l'analyseur représenté sur la partie gauche de la figure 6.2. Un cheminement analogue est possible pour la deuxième possibilité. Nous partons de la connaissance du champ sonore mesuré :

$$\underline{p}_{\text{mes}}(\omega) = [p_1(\omega), \dots, p_{M_{\text{mic}}}(\omega)]^T \quad (6.1)$$

Les signaux de commande des transducteurs sont reliés aux signaux mesurés par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1(\omega) \\ \vdots \\ y_{N_{\text{trans}}}(\omega) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}(\omega) & \dots & c_{1M_{\text{mic}}}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N_{\text{trans}}1}(\omega) & \dots & c_{N_{\text{trans}}M_{\text{mic}}}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1(\omega) \\ \vdots \\ p_{M_{\text{mic}}}(\omega) \end{pmatrix} = \mathbf{C}\underline{p} \quad (6.2)$$

Le champ sonore reconstruit aux  $M_{\text{mic}}$  points de mesure est relié aux signaux de commande par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_1(\omega) \\ \vdots \\ \hat{p}_{M_{\text{mic}}}(\omega) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(\omega) & \dots & G_{1N_{\text{trans}}}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M_{\text{mic}}1}(\omega) & \dots & G_{M_{\text{mic}}N_{\text{trans}}}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(\omega) \\ \vdots \\ y_{N_{\text{trans}}}(\omega) \end{pmatrix} = \mathbf{G}\underline{y} \quad (6.3)$$

Les champs sonores analysés sont reliés aux champs mesurés par la relation d'analyse suivante, qui décrit le module d'analyse

$$\begin{pmatrix} P_1(\omega) \\ \vdots \\ P_K(\omega) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(\omega, \mathbf{k}_1) & \dots & w_{M_{\text{mic}}}(\omega, \mathbf{k}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1(\omega, \mathbf{k}_K) & \dots & w_{M_{\text{mic}}}(\omega, \mathbf{k}_K) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1(\omega) \\ \vdots \\ p_{M_{\text{mic}}}(\omega) \end{pmatrix} = \mathbf{W}\underline{\mathbf{p}} \quad (6.4)$$

Les poids  $w_m(\omega, \mathbf{k}_k)$  sont ceux qui ont été calculés par l'une des méthodes décrites au chapitre précédent, ou bien par une méthode alternative, telle que la décomposition en harmoniques sphériques.

Ainsi, le champ d'erreur est donné par la relation suivante :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{W}(\text{Id} - \mathbf{G}\mathbf{C})\underline{\mathbf{p}} \quad (6.5)$$

Ainsi, pour minimiser le champ d'erreur à la pulsation  $\omega$  indépendamment du champ sonore en entrée, il faut que  $\mathbf{W}\mathbf{G}\mathbf{C}$  approche au mieux  $\mathbf{W}$ . Ce problème peut être décomposé en  $M_{\text{mic}}$  problèmes indépendants.

$$\begin{bmatrix} w_1(\omega, \mathbf{k}_1) & \dots & w_{M_{\text{mic}}}(\omega, \mathbf{k}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1(\omega, \mathbf{k}_K) & \dots & w_{M_{\text{mic}}}(\omega, \mathbf{k}_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}(\omega) & \dots & G_{1N_{\text{trans}}}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M_{\text{mic}}1}(\omega) & \dots & G_{M_{\text{mic}}N_{\text{trans}}}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1m}(\omega) \\ \vdots \\ c_{N_{\text{trans}}m}(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_m(\omega, \mathbf{k}_1) \\ \vdots \\ w_m(\omega, \mathbf{k}_K) \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$\forall m \in [1, M_{\text{mic}}],$   
 $\mathbf{W}\mathbf{G}\underline{\mathbf{c}}_m = \underline{\mathbf{w}}_m$   
 $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m = \mathbf{W}\mathbf{G}\underline{\mathbf{c}}_m - \underline{\mathbf{w}}_m$

Le vecteur  $\underline{\mathbf{c}}_m$  minimisant la norme quadratique est :

$$\underline{\mathbf{c}}_m = (\mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \underline{\mathbf{w}}_m \quad (6.7)$$

Nous en déduisons que le réseau de filtres inverses minimisant la norme quadratique du vecteur d'erreur à la pulsation  $\omega$  est :

$$\mathbf{C} = (\mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \quad (6.8)$$

Le paramètre décisif est le calcul de l'inverse dans l'équation précédente.  $\mathbf{W}$  est une matrice de dimension  $[K \times M_{\text{mic}}]$ .  $\mathbf{G}$  est une matrice de dimension  $[M_{\text{mic}} \times N_{\text{trans}}]$ . En général, nous choisissons  $K \geq M_{\text{mic}} \geq N_{\text{trans}}$  de sorte que la matrice  $(\mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{G})$ , de dimension  $[N_{\text{trans}} \times N_{\text{trans}}]$  ait toutes les chances d'être inversible. Nous mettons en place une régularisation à l'aide d'un coefficient de régularisation  $\lambda$ , et nous inversons la matrice  $(\mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{G} + \lambda \text{Id})$ .

La qualité de la reproduction est quantifiée par la matrice d'erreur :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{W}(\text{Id} - \mathbf{G}\mathbf{C}) \quad (6.9)$$

Un indicateur global est par exemple la norme de Frobenius de cette matrice d'erreur :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_F = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^{M_{\text{mic}}} |\boldsymbol{\varepsilon}_{km}|^2 \quad (6.10)$$

## 6.4 Calcul de la réponse impulsionnelle des filtres inverses

Le plus souvent, les réponses impulsionnelles qui constituent la matrice de propagation sont modélisées par des filtres à réponse impulsionnelle finie. Il s'agit de la modélisation la plus commode pour effectuer des traitements. Une autre solution aurait pu être de modéliser les réponses impulsionnelles par des filtres à réponse impulsionnelle infinie, et une dernière utiliserait un modèle mixte. C'est cette dernière qui serait la plus proche de l'acoustique, les pôles caractérisant les résonances d'une salle et les zéros étant fortement dépendants de la position de la source et des capteurs. Du point de vue du traitement du signal, ces trois modélisations sont équivalentes, et nous choisissons celle par réponse impulsionnelle finie, car elle permet d'utiliser les algorithmes rapides de convolution circulaire pour calculer des convolutions linéaires.

Il est nécessaire d'introduire un retard dans le champ sonore de référence ou dans la signature afin d'obtenir des bonnes performances, étant donné que les réponses impulsionnelles à inverser ne sont pas à phase minimale, de sorte que le réseau de filtres inverses correspondant est à la fois causal et anticausal. Du point de vue de l'implémentation par RIF, nous ne pouvons pas réaliser de filtres anticausaux, c'est pourquoi l'introduction d'un retard dans le signal de référence permet de prendre en compte dans une certaine mesure la partie anticausale du filtre [69].

De même, nous supposons que le réseau de filtres inverses est constitué de filtres à réponse impulsionnelle finie. Soient  $L_c$  et  $L_g$  le nombre de coefficients de chaque filtre inverse et de chaque réponse impulsionnelle. Le champ sonore reconstruit, qui est le résultat de la convolution entre le réseau de filtres inverses et de la matrice de propagation, possède  $L_g + L_c - 1$  coefficients non nuls. Ainsi, nous pouvons calculer la réponse fréquentielle en  $L = L_g + L_c - 1$  bins à l'aide de la FFT en complétant les réponses impulsionnelles par  $L_c - 1$  zéros, et les filtres inverses par  $L_g - 1$  zéros, de sorte à ne pas introduire de repliement dans le domaine temporel.

Si nous considérons un des  $M_{\text{mic}}$  problèmes indépendants introduits à la section précédente, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\underline{c}_m = [c_{1m}(1), \dots, c_{1m}(L_c), \dots, c_{N_{\text{trans}}m}(1), \dots, c_{N_{\text{trans}}m}(L_c)] \quad (6.11)$$

$$\underline{c}_m(\omega_l) = [c_{1m}(\omega_l), \dots, c_{N_{\text{trans}}m}(\omega_l)] \quad (6.12)$$

$$\underline{c}_m = [\underline{c}_m^T(\omega_1), \dots, \underline{c}_m^T(\omega_L)]^T \quad (6.13)$$

$$\mathbf{G}(\omega_l) = \begin{bmatrix} G_{11}(\omega_l) & \dots & G_{1N_{\text{trans}}}(\omega_l) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M_{\text{mic}}1}(\omega_l) & \dots & G_{M_{\text{mic}}N_{\text{trans}}}(\omega_l) \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\omega_1) & \mathbf{0}_{[M_{\text{mic}} \times N_{\text{trans}}]} & \dots & \mathbf{0}_{[M_{\text{mic}} \times N_{\text{trans}}]} \\ \mathbf{0}_{[M_{\text{mic}} \times N_{\text{trans}}]} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{[M_{\text{mic}} \times N_{\text{trans}}]} \\ \mathbf{0}_{[M_{\text{mic}} \times N_{\text{trans}}]} & \dots & \mathbf{0}_{[M_{\text{mic}} \times N_{\text{trans}}]} & \mathbf{G}(\omega_L) \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$\mathbf{W}(\omega_l) = \begin{bmatrix} w_{11}(\omega_l) & \dots & w_{1M_{\text{mic}}}(\omega_l) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{K1}(\omega_l) & \dots & w_{KM_{\text{mic}}}(\omega_l) \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(\omega_1) & \mathbf{0}_{[K \times M_{\text{mic}}]} & \dots & \mathbf{0}_{[K \times M_{\text{mic}}]} \\ \mathbf{0}_{[K \times M_{\text{mic}}]} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{[K \times M_{\text{mic}}]} \\ \mathbf{0}_{[K \times M_{\text{mic}}]} & \dots & \mathbf{0}_{[K \times M_{\text{mic}}]} & \mathbf{W}(\omega_L) \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$\underline{\mathbf{w}}_m(\omega_l) = [\underline{\mathbf{w}}_{1m}(\omega_l), \dots, \underline{\mathbf{w}}_{Km}(\omega_l)]^T \quad (6.18)$$

$$\underline{\mathbf{w}}_m = [\underline{\mathbf{w}}_m^T(\omega_1), \dots, \underline{\mathbf{w}}_m^T(\omega_L)]^T \quad (6.19)$$

$$\underline{\varepsilon}_m = \mathbf{W}\mathbf{G}\underline{c}_m - \underline{\mathbf{w}}_m \quad (6.20)$$

Il ne reste plus qu'à relier le vecteur exprimé dans le domaine fréquentiel  $\underline{c}_m$  au vecteur exprimé dans le domaine temporel  $\underline{c}_m$ . Soit  $\mathcal{M}_{[L \times L_c]}$  la matrice de bourrage de zéros, ayant des 1 sur la diagonale, et des 0 ailleurs. Soit  $\mathcal{F}$  la matrice calculant la transformée de Fourier discrète, de dimension  $[L \times L]$ . Soit  $\mathcal{C}$  la matrice réordonnant les données de sorte à obtenir  $\underline{c}_m$  fréquence par fréquence. Il s'agit d'une matrice de permutation circulaire. Alors, nous avons :

$$\underline{c}_m = \mathcal{C} \text{diag}_{N_{\text{trans}}}(\mathcal{F} \mathcal{M}_{[L \times L_c]}) \underline{c}_m = \mathbf{T} \underline{c}_m \quad (6.21)$$

Comme d'habitude, le vecteur  $\underline{c}_m$  minimisant la norme de l'erreur quadratique  $\|\varepsilon_m\|_2$  est donné par l'équation suivante :

$$\underline{c}_m = (\mathbf{T}^H \mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{G} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^H \mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \underline{\mathbf{w}}_m \quad (6.22)$$

Le calcul direct d'une colonne du réseau de filtres inverses global tel que décrit par l'équation précédente requière l'inversion d'une matrice dont les dimensions sont  $[LN_{\text{trans}} \times LN_{\text{trans}}]$ . Ces dimensions deviennent vite trop importante pour envisager l'inversion directe de la matrice.

### 6.4.1 Algorithme itératif de calcul des filtres inverses

Au lieu de réaliser une inversion directe de la matrice, nous recourons à un algorithme itératif de type gradient ou Gauss-Newton approché [18, 38, 88]. Dans le cas de l'algorithme de Gauss-Newton approché, nous utilisons pour cela une estimée de l'inverse de la matrice du Hessien :

$$\mathbf{T}^H (\mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{T} \quad (6.23)$$

La matrice ( $\mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{G}$ ) est constituée de blocs de dimension  $[N_{\text{trans}} \times N_{\text{trans}}]$  non nuls uniquement sur la diagonale principale. Ses blocs sont au nombre de  $L$ . Ainsi l'inversion de cette matrice ne requière que l'inversion de  $L$  matrices de dimension  $[N_{\text{trans}} \times N_{\text{trans}}]$ , ce qui est considérablement plus rapide. L'itération est alors donnée par la formule suivante :

$$\underline{\mathbf{c}}_m(n+1) = \underline{\mathbf{c}}_m(n) + \mu(n) \mathbf{T}^H (\mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{T} \mathbf{T}^H \mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m(n) \quad (6.24)$$

Le pas d'itération est choisi de façon à minimiser la norme de l'erreur à la prochaine itération  $\|\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m(n+1)\|_2$  : il s'agit d'un algorithme itératif à pas optimal.

<b>Initialisation</b>	
<b>G</b>	<i>Matrice de propagation</i>
<b>W</b>	<i>Matrice d'analyse</i>
<b>A</b>	<i>Inverse de la matrice d'autocorrélation fréquentielle</i>
$\mathbf{A} = (\mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{G} + \lambda \text{Id})^{-1}$	
<b>Itération</b>	
$\hat{\underline{\mathbf{w}}}_m(n) = \mathbf{W} \mathbf{G} \mathbf{T} \underline{\mathbf{c}}_m(n)$	<i>Vecteur reconstruit</i>
$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m(n) = \underline{\mathbf{w}}_m - \hat{\underline{\mathbf{w}}}_m(n)$	<i>Vecteur d'erreur</i>
$\underline{\mathbf{d}}_m(n) = \mathbf{T}^H \mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m(n)$	<i>Gradient</i>
$\underline{\mathbf{b}}_m(n) = \underline{\mathbf{d}}_m(n)$	<i>Gradient modifié</i>
$\underline{\mathbf{b}}_m(n) = \mathbf{T}^H \mathbf{A} \mathbf{T} \underline{\mathbf{d}}_m(n)$	si gradient si Gauss-Newton
Version normale	Version à pas optimal
<i>Mise à jour</i>	<i>Vecteur pour le pas optimal</i>
$\underline{\mathbf{g}}_m(n+1) = \underline{\mathbf{g}}_m(n) + \mu \underline{\mathbf{b}}_m(n)$	$\underline{\mathbf{c}}_m(n) = \mathbf{W} \mathbf{G} \mathbf{T} \underline{\mathbf{b}}_m(n)$
	<i>Pas d'itération</i>
	$\mu(n) = \frac{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^H(n) \underline{\mathbf{c}}_m(n)}{\underline{\mathbf{c}}_m^H(n) \underline{\mathbf{c}}_m(n)}$
	<i>Mise à jour</i>
	$\underline{\mathbf{g}}_m(n+1) = \underline{\mathbf{g}}_m(n) + \mu(n) \underline{\mathbf{b}}_m(n)$

TAB. 6.1 – Algorithmes de Gauss-Newton approchés

#### 6.4.2 Initialisation des filtres inverses

Il est nécessaire d'initialiser le réseau de filtres inverses. Il existe plusieurs solutions possibles afin d'effectuer celle-ci :

- le réseau de filtres inverses est initialisé à zéro. Il s'agit de l'initialisation la plus naïve et qui nécessitera un plus grand nombre d'itérations par rapport à une initialisation mieux réfléchie ;
- nous pouvons utiliser comme initialisation le vecteur suivant :

$$\underline{\mathbf{c}}_m(0) = \mathbf{T}^H \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{T}^H \mathbf{G}^H \mathbf{W}^H \underline{\mathbf{w}}_m \quad (6.25)$$

Cette initialisation est à mettre en rapport avec les algorithmes d'égalisation multicanale rapide Kirkeby *et al.* [56]. Pour ces méthodes, les convolutions linéaires sont calculées à l'aide de convolutions circulaires rapides, ce qui a pour effet d'introduire du repliement dans le domaine temporel. Afin d'atténuer les effets du repliement, il est nécessaire de recourir à une régularisation ou de considérer des ordres élevés pour les filtres inverses.

## 6.5 Illustration des performances dans le cas de l'annulation d'interférences

Dans le cas des systèmes de reproduction stéréophoniques avec annulation d'interférence, nous cherchons à reproduire deux signaux de référence différents en deux points de l'espace distincts, de façon que l'auditeur puisse entendre le signal gauche d'un mix stéréo sur son oreille gauche, et le signal droit sur son oreille droite. La reproduction stéréo de base ne satisfait pas de critère, comme en témoigne la figure 6.3. En effet, si nous mesurons la réponse impulsionnelle entre les deux sources et les deux points de consigne, nous nous apercevons que la première source reproduit une version déformée du signal de référence au premier point de consigne, déformée par la réponse de la chaîne électro-acoustique et par l'effet de salle, mais aussi au deuxième point de consigne. Le même constat s'applique pour la deuxième source.

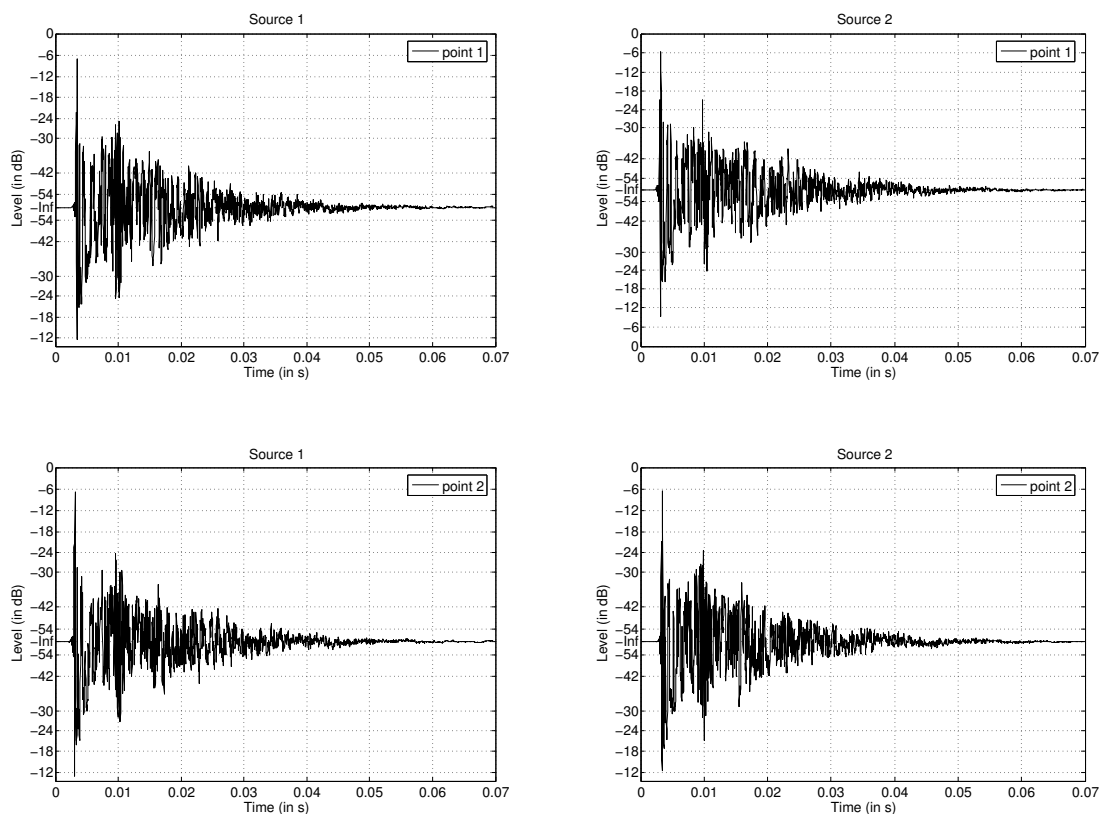


FIG. 6.3 – Réponses impulsionnelles initiales - Matrice de propagation

Idéalement, il faudrait annuler les interférences de la première source sur le deuxième point de consigne, et de la deuxième source sur le premier point de consigne. De plus, si nous souhaitons compenser l'effet de salle (pour ces deux points uniquement) et corriger les défauts de la chaîne électro-acoustique, il faudrait obtenir des impulsions de Dirac filtrées passe-bas sur la diagonale



de cette matrice. Après avoir appliqué le réseau de filtres inverses adéquat, nous obtenons les réponses corrigées de la figure 6.4.

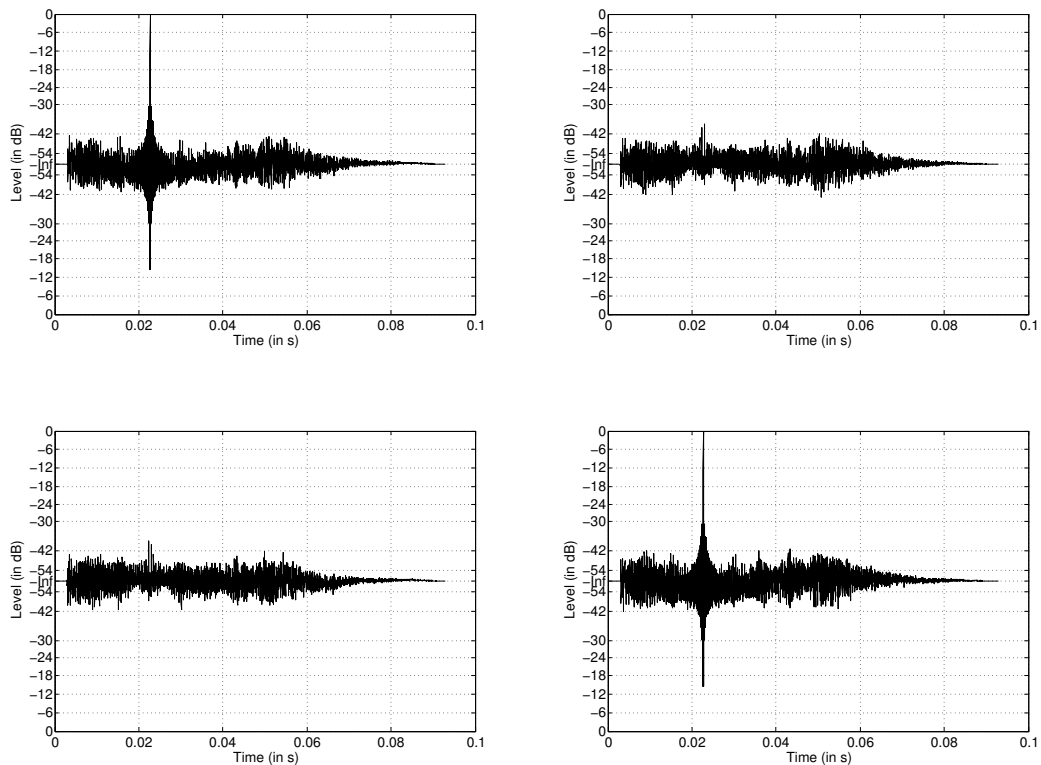


FIG. 6.4 – Résultats de l'annulation d'interférence (*Crosstalk Cancellation*). Idéalement, séquence de Dirac retardée filtrée passe-bas sur la diagonale, et zéro ailleurs.

Nous pouvons voir que les réponses corrigées sont assez conformes à nos attentes pour 2000 coefficients dans le filtre inverse, amenant le bruit résiduel à un niveau de  $-40$  dB, ce qui est en dessous du seuil de masquage de l'oreille. J'attire l'attention du lecteur sur le fait que les représentations utilisées sont en décibels signés. La majorité des articles traitant d'égalisation multicanale affichent ces mêmes réponses en échelle linéaire. Les mêmes réponses affichées en échelle linéaire seraient "parfaites" étant donné que le bruit résiduel est d'un niveau inférieur de 40 dB environ, soit inférieur à 0.01 en échelle linéaire.

La rapidité de convergence de l'algorithme est tracée sur la figure 6.5. Nous pouvons voir que l'algorithme de Gauss-Newton approché utilisant la valeur  $\lambda = 10^{-2}$  pour le paramètre de régularisation (voir tableau 6.1) accélère sensiblement la rapidité de convergence de l'algorithme. L'algorithme converge vers l'expression théorique pour le réseau de filtres inverses (6.22). Si les performances ne sont pas jugées suffisantes, il est nécessaire d'augmenter le nombre de coefficients des filtres inverses.

De plus, notre algorithme possède l'avantage de réduire les phénomènes de pré-échos et de post-échos qui apparaissent naturellement en utilisant seulement une déconvolution dans le domaine fréquentiel du type de celle exposée par Kirkeby *et al.* [56]. Pour cela, nous avons tracé les spectrogrammes de l'élément en bas à droite de la figure 6.4 sur la figure 6.6, pour le signal de référence, celui reconstruit en utilisant les filtres inverses calculés par la déconvolution fréquentielle, et par notre algorithme. Nous pouvons voir sur le spectrogramme correspondant à la déconvolution fréquentielle que des répliques apparaissent avant et après le pic principal. Ils sont réduits en

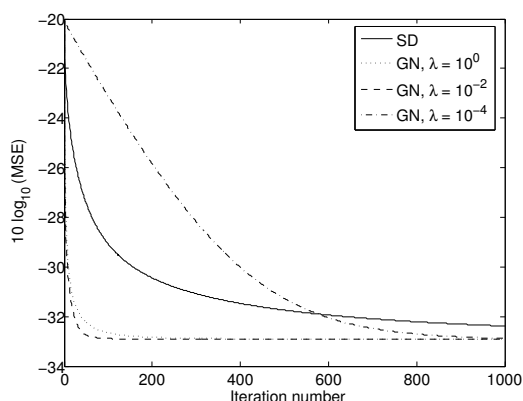


FIG. 6.5 – Norme de l’erreur quadratique (en dB) tracée en fonction du numéro de l’itération, pour l’algorithme du gradient et l’algorithme de Gauss-Newton approché, pour les valeurs de  $\lambda = 10^0, 10^{-2}, 10^{-4}$

utilisant l’algorithme de Gauss-Newton approché présenté dans ce chapitre.

Un derniers points sur lequel je souhaite attirer l’attention est l’absence de régularisation dans le domaine fréquentiel, telle qu’elle est utilisée généralement dans Kirkeby et Nelson [55], Kirkeby *et al.* [56]. Dans notre algorithme, nous ne pénalisons pas certaines fréquences dans la fonction de coût, bien que nous pourrions le faire. Plutôt que d’imposer une régularisation, nous imposons un signal de référence clairement différent. Si nous ne souhaitons pas tenir compte des fréquences supérieures à 20 kHz, alors celles-ci n’ont qu’à ne pas être présentes dans le signal de référence. Ceci est clairement visible sur les spectrogrammes de la figure 6.6, où nous pouvons voir que la bande passante du signal de référence est limitée à environ 18 kHz. Ainsi, nous pouvons voir que les filtres inverses correspondants ne possèdent pas d’énergie en dehors de cette bande passante, figure 6.7. Pour cela, il n’a suffit que de filtrer les impulsions de Dirac par un filtre passe-bas idéal. De manière générale, nous pouvons voir que les filtres inverses accentuent les basses et les hautes fréquences de manière assez significative, compensant les défauts de la chaîne électro-acoustique.

## 6.6 Conclusion sur les algorithmes de synthèse de champ sonore

Les algorithmes de synthèse de champs sonores par un réseau de sources secondaires présentés dans ce chapitre apportent des améliorations significatives par rapport aux solutions existantes :

- dans le cas de l’égalisation multicanale étendue, ils permettent de traiter des longues réponses impulsionnelles (supérieures à 16384 coefficients et plus sans problèmes) grâce à la résolution itérative de l’algorithme, plutôt que l’inversion directe de la matrice préconisée par Miyoshi et Kaneda [67] ;
- contrairement aux algorithmes d’égalisation multicanale basées uniquement dans le domaine fréquentiel [56], ils permettent d’envisager de prendre un nombre limité de coefficients pour chacun des filtres inverses même si l’objectif est d’inverser de longues réponses impulsionnelles ;
- ces algorithmes ne nécessitent pas de recourir à une régularisation pour limiter l’énergie des filtres inverses aux hautes fréquences. Ils utilisent à la place un signal de référence ne contenant pas ces lesdites fréquences ;
- l’algorithme présenté peut s’appliquer à une large diversité de cas, et non uniquement à l’égalisation multicanale traditionnelle. Pour cela, nous avons inséré un module d’analyse visible sur la figure 6.2, capable de prendre en compte toutes les méthodes de représentation

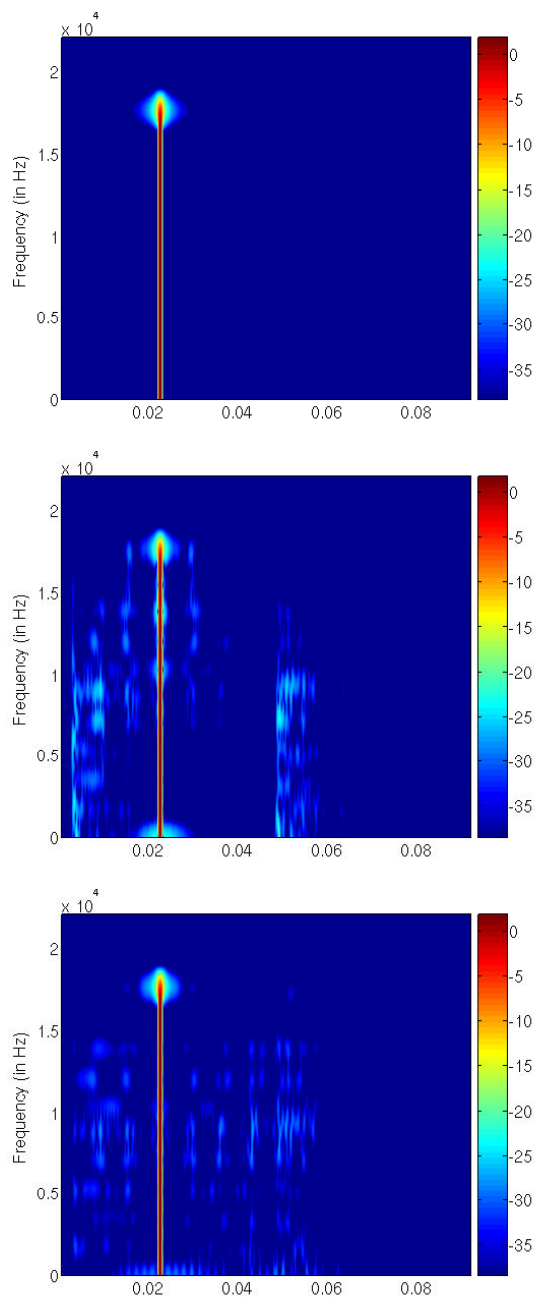


FIG. 6.6 – Spectrogrammes des champs sonores effectivement reconstruits. Champ sonore de référence (haut), champ sonore reconstruit par une déconvolution fréquentielle uniquement (milieu), champ sonore reconstruit avec l’algorithme de Gauss-Newton approché (bas).

- des champs sonores, qu’il s’agisse des impulsions de Dirac multidimensionnelles (égalisation multicanale traditionnelle), des ondes planes (notre méthode), ou des harmoniques sphériques (procédés ambisoniques d’ordres supérieurs) ;
- nous avons introduit deux méthodes d’égalisation différentes. La première calcule un réseau de filtres inverses qui permet de reproduire n’importe quelle source, tandis que la deuxième optimise le réseau de filtres inverses uniquement pour une source précise. La première méthode est plus coûteuse en termes de calculs mais elle devient avantageuse lorsque le nombre de sources que nous souhaitons reproduire est supérieur au nombre de microphones utilisé

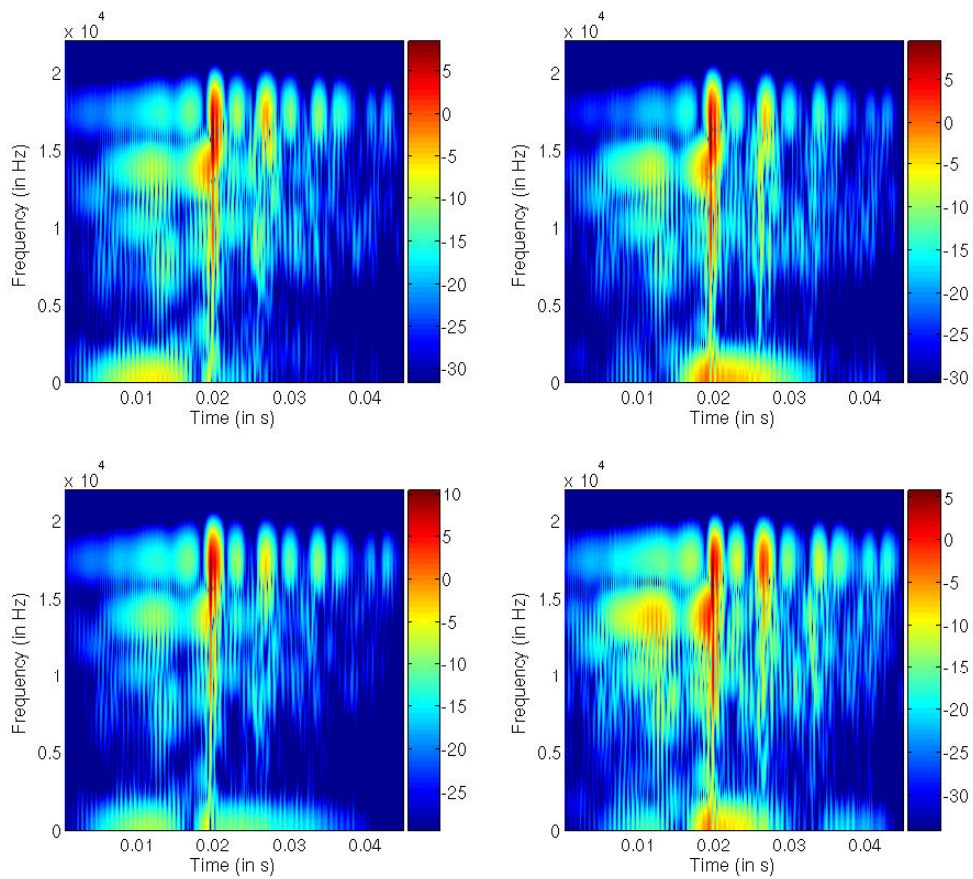


FIG. 6.7 – Spectrogrammes du réseau de filtres inverses pour l’annulation d’interférence

dans l’antenne de microphones.

Nous avons illustré l’efficacité de notre approche dans ce chapitre dans le cas de la reproduction stéréophonique avec annulation d’interférences. Nous appliquerons le même algorithme pour la synthèse lorsque la représentation du champ sonore choisie sera la décomposition en ondes plane, au chapitre 7.

---

**Troisième partie**

**Solution expérimentale retenue pour  
l'analyse/synthèse de champs sonores**



## Chapitre 7

# Mise au point du dispositif d'analyse/synthèse par simulation

### Résumé :

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons les caractéristiques d'un dispositif permettant de faire une analyse complète de champs sonores. L'analyse effectuée en premier lieu une décomposition fréquentielle des opérateurs de propagation des sources que nous souhaitons analyser. Puis, à chaque fréquence d'analyse, nous calculons des filtres spatiaux associés à un ensemble de directions d'incidences réparties sur tout l'angle solide. Ces filtres spatiaux sont calculés à l'aide des algorithmes d'analyse présentés au chapitre 5. Le module d'analyse de champs sonore est validé par une série de simulations qui montrent que les directions d'incidence des sources analysées sont correctement estimées. Nous avons utilisé une antenne de microphones tridimensionnelle ayant environ une centaine de microphones, pour laquelle nous montrons que l'analyse effectuée possède une bonne résolution et est valide sur une large plage fréquentielle.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous montrons qu'il est préférable d'utiliser un module d'analyse du champ sonore dans l'algorithme d'égalisation multicanale présenté au chapitre 6. En effet, l'utilisation de la représentation du champ sonore en ondes planes permet d'améliorer sensiblement la qualité du champ sonore reproduit par rapport au champ reproduit par l'égalisation multicanale traditionnelle, c'est-à-dire lorsque le module d'analyse est omis dans l'algorithme d'égalisation multicanale. La qualité du champ sonore reconstruit est évaluée quantitativement à l'aide du rapport signal sur bruit de reconstruction, évaluée soit dans le domaine spatial, soit dans le domaine des vecteurs d'onde. Les meilleurs rapport signal sur bruit sont obtenus dans les deux cas pour la méthode utilisant la décomposition en ondes planes. A la fin du chapitre, nous montrons que la reproduction du champ sonore est localisée au centre de l'antenne servant pour l'analyse, ce qui confirme le fait que les algorithmes d'analyse du champ sonore présentés au chapitre 5 effectuent une analyse localisée du champ sonore. Ainsi, notre approche d'analyse et de synthèse de champs sonores est validée par les simulations. Elle possède l'avantage de ne pas trop colorer spectralement la reproduction contrairement à l'égalisation multicanale traditionnelle.

## 7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous utilisons les algorithmes d'analyse de champs sonores présentés au chapitre 5 et les algorithmes de synthèse de champs sonores présentés au chapitre 6 comme des constituants élémentaires des modules d'analyse et de synthèse.

L'objectif initial de la thèse présenté dans l'introduction était de caractériser le rendu spatial des scènes sonores. Dans la section 7.2, nous introduisons un module d'analyse de champs sonores permettant de réaliser des prises de sons à forte sélectivité spatiale.

Dans la section 7.3, nous utilisons ce module d'analyse dans l'algorithme permettant de faire la synthèse de champs sonores, et nous montrons l'efficacité de notre approche par rapport à l'égalisation multicanale traditionnelle pour laquelle il n'y a pas de module d'analyse dans l'algorithme d'égalisation multicanale.

Ce chapitre se termine par quelques réflexions et perspectives sur la synthèse de champs sonores utilisant la représentation du champ sonore en ondes planes.

## 7.2 Module d'analyse du champ sonore par formation de voies

Au chapitre 5, nous avons explicité les algorithmes permettant d'optimiser la réponse de filtres spatiaux visant à focaliser l'énergie dans une direction donnée de l'espace. Une vue d'ensemble du module d'analyse de champ sonore a déjà été initiée à la section 5.2, notamment par la figure 5.1. Nous pouvons maintenant préciser les traitements effectués. Tout d'abord, la représentation fréquentielle des champs sonores est calculée, à l'aide de la transformée de Fourier discrète rapide. Puis, à chaque pulsation d'analyse  $\omega_r$ , nous établissons une cartographie du champ sonore utilisant des estimations de la transformée de Fourier spatiale  $\hat{p}(\mathbf{k}_n, \omega_r)$ , les vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}_n$  formant un maillage de la sphère définie par la relation de dispersion  $k = \omega_r/c$ . Pour obtenir ces estimations de la transformée de Fourier spatiale, il est nécessaire pour chaque vecteur d'onde  $\mathbf{k}_n$  et chaque pulsation  $\omega_r$ , de calculer un vecteur de pondération optimal  $\underline{w}(\mathbf{k}_n, \omega_r)$ , ce qui a été développé à la section 5.4. Il faut donc constituer une banque de filtre spatiaux, adaptée pour une certaine antenne de microphones, permettant d'obtenir une analyse optimale. L'ensemble des données  $\hat{p}(\mathbf{k}_n, \omega_r)$ , les vecteurs d'ondes  $(\mathbf{k}_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  constituant un ensemble de directions d'incidence maillant la totalité de l'angle solide, définit une cartographie du champ sonore à la pulsation  $\omega_r$ .

Il n'est pas obligatoire d'utiliser exactement  $\underline{w}(\mathbf{k}_n, \omega_r)$ . Nous pouvons recourir à la place au filtre spatial optimisé pour la même direction, mais à une pulsation voisine, c'est-à-dire d'utiliser le vecteur de pondération  $\underline{w}(\mathbf{k}_n, \omega_r + \delta\omega)$ . Celui-ci a été optimisé à l'intérieur d'une couronne sphérique. Le rayon de la sphère définie par la relation de dispersion n'est pas alors le rayon médian de la couronne sphérique, mais se situe quand même à l'intérieur de celle-ci. Les performances sont certes un peu moins bonnes, mais cela permet d'économiser du stockage pour la banque de filtres, ainsi que le temps de calcul nécessaire pour les calculer.

Dans cette section, nous allons donc analyser le champ de sources acoustiques diverses, telles que des sources ponctuelles, de directivité monopolaire ou plus complexe. Nous allons aussi étudier l'effet de la distance de la source par rapport à l'antenne de microphones.

L'antenne de microphones utilisée est constituée de 5 solides platoniciens : trois icosaèdres (12 sommets), deux dodécaèdres (20 sommets) insérés entre ces derniers, et un dernier microphone situé à l'origine du repère. Les rayons des sphères successives dans lesquelles ces polyèdres réguliers sont inscrits sont [7, 18, 49, 129, 340] mm. Cette antenne possède 77 microphones. La résolution fixée au cours de l'algorithme correspond à un demi-angle d'ouverture de 17 dg. Nous avons choisi d'échantillonner la sphère dans le système de coordonnées séparables de la sphère, 64 et 33 pas d'échantillonnage respectivement pour l'azimut et l'élévation, soit tous les 5.5 dg. Nous avons choisi pour valeur du paramètre de régularisation  $\lambda = 10^{-8}$ , afin d'obtenir un bon compro-



mis entre le pouvoir de focalisation et le gain pour un bruit blanc. Le pouvoir de focalisation, défini à l'équation (5.9), et le gain pour un bruit blanc par rapport à l'utilisation d'un vecteur de pondération uniforme, moyennés sur l'ensemble des vecteurs d'ondes d'analyse  $\mathbf{k}_n$ , sont affichés sur la figure 7.1.

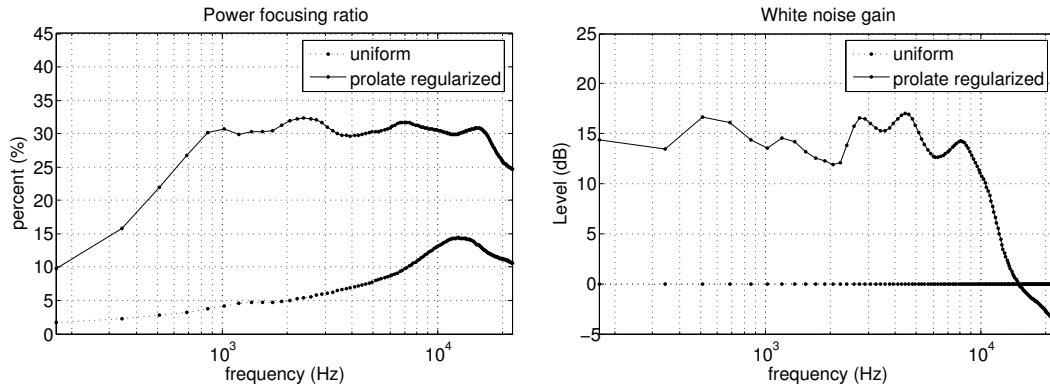


FIG. 7.1 – Pouvoir de focalisation et Gain pour un bruit blanc moyens pour une antenne constituée de trois icosaèdres, deux dodécaèdres insérés entre ces derniers, inscrits dans des sphères de rayons successifs [7, 18, 49, 129, 340] mm.

Comme premier exemple de cartographies de champs sonores, nous allons considérer le cas d'un réseau de transducteurs<sup>1</sup> constitué par un icosaèdre (12 sommets, 20 faces) de monopoles acoustiques inscrits dans une sphère de rayon 1 m. Comme nous l'avons mentionné au début de cette section, les cartographies sont calculées pour une fréquence d'analyse donnée : nous avons choisi de calculer les cartographies à une fréquence d'analyse de 1550 Hz pour ce premier exemple. De plus, nous avons choisi de représenter ces cartographies sous forme de diagrammes de directivité tridimensionnels, extension à trois dimensions des figures de directivité des microphones tracées en courbe polaire.

Sur la figure 7.2, nous pouvons voir 12 cartographies différentes, chacune correspondant au cas où un seul transducteur émet à la fois. Sur chacune de ces cartographies, nous avons surimposé l'icosaèdre de sources monopolaires initiales, que nous avons représenté à l'aide de points bleus, marquant la position des sources, et de segments noirs, indiquant l'axe d'émission de la source<sup>2</sup>. Pour chacune des 12 cartographies représentées, le transducteur émettant est encadré en vert. La cartographie idéale serait d'obtenir un pic pour la direction d'incidence alignée avec celle du transducteur, et une amplitude nulle pour toutes les autres directions d'incidence. Dans la pratique, cela est impossible car les filtres spatiaux utilisés ont une résolution angulaire finie, et qu'ils possèdent aussi des lobes secondaires, introduisant de nouveaux pics dans la représentation.

Nous pouvons constater que la cartographie de chacun des 12 transducteurs du réseau possède bien un maximum d'énergie pour la direction d'incidence alignée avec la position du transducteur analysé. L'analyse spatiale utilisant des filtres spatiaux ayant une résolution finie, ce que nous observons n'est pas un pic, mais un lobe principal aligné dans la direction du transducteur analysé. L'étendue de ce lobe principal est liée à la résolution des filtres spatiaux utilisés au moment du calcul du réseau de filtres spatiaux. Nous avons choisi d'imposer une demi-résolution angulaire de 17 dg, de sorte que l'analyse spatiale sous-jacente est précise : en effet, un cône dont l'angle de

<sup>1</sup> dans cette thèse, nous nommons transducteurs tout dispositif permettant d'assurer la conversion d'énergie électrique en énergie acoustique. Selon cette définition, un microphone n'est pas un transducteur car il réalise la conversion réciproque.

<sup>2</sup> Cette donnée n'est intéressante que pour les sources acoustiques ayant des caractéristiques de directivité plus complexes.

demi-ouverture est 17 dg occupe un angle solide de 0.27 Sr (Stéradians), soit 2% de l'angle solide total.

L'échelle de dynamique utilisée pour la représentation de ces cartographies est une échelle en décibels, ayant une dynamique de 18 dB. Étant donné qu'en dehors du lobe principal, l'énergie provenant des autres directions d'incidences autres que celle alignée avec le transducteur est colorée en bleu foncé, cela signifie que la puissance rayonnée estimée est inférieure à 18 dB par rapport à la puissance maximale. Ainsi, la dynamique associée à notre cartographie de champs sonores est de 18 dB. Il s'agit du niveau maximal des lobes secondaires des filtres spatiaux utilisés pour l'analyse. L'analyse de champs sonores par formation de voies optimale n'a fait que limiter leur amplitude, mais ils demeurent toujours présents néanmoins. Ainsi, la dynamique utile du module d'analyse de champs sonores est de 18 dB.

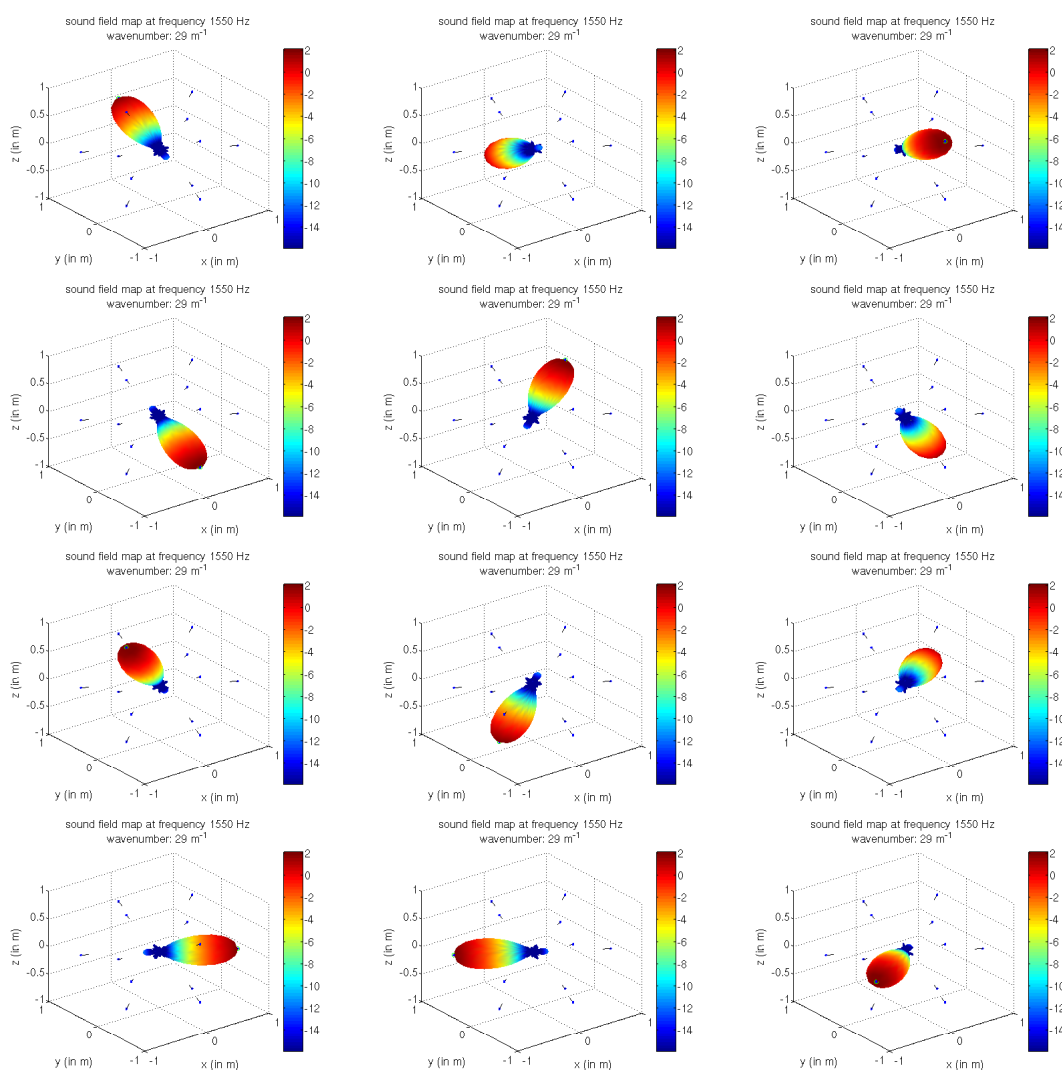


FIG. 7.2 – Cartographie d'un réseau de transducteurs (icosaèdre de sources monopolaires situées à 1 m de l'origine) à la fréquence  $f = 1550$  Hz

Dans le premier exemple de cartographies de champs sonores, nous avons fait varier la position de la source et maintenu constant la fréquence d'analyse. Nous allons maintenant maintenir constante la position de la source, et faire varier la fréquence d'analyse. Nous allons donc observer l'influence de la fréquence d'analyse sur les cartographies de champs sonore. En particulier, lors

du calcul du réseau de filtres inverses servant à l'analyse, les seuls paramètres que nous pouvons ajuster sont la résolution angulaire, fixée par  $k_{\text{res}}$ , et le paramètre de régularisation  $\lambda$ . Nous ne contrôlons donc pas directement l'amplitude maximale des lobes secondaires, qui viennent perturber l'analyse des champs sonores, ni leur localisation. Ainsi, nous pouvons voir à l'aide de simulations comment ceux-ci affectent l'analyse de champs sonores. Comme deuxième exemple, nous avons donc choisi de tracer les cartographies de champs sonores d'un seul transducteur, pour plusieurs fréquences d'analyse (voir figure 7.3).

Sur cette figure, nous pouvons visualiser que le niveau et la localisation des lobes secondaires varie en fonction de la fréquence d'analyse. Il y a des fréquences d'analyses (1378, 2067, 6546, 9647 et 14126 Hz) pour lesquelles l'analyse est de bonne qualité, avec peu de lobes secondaires d'amplitude assez faible, et d'autres fréquences (3101, 4479 Hz) pour lesquelles l'analyse est de moins bonne qualité, avec une présence d'un grand nombre de lobes secondaires, d'amplitude plus élevée. Ces fréquences coïncident bien avec les creux et les bosses du pouvoir de focalisation de l'antenne (figure 7.1). À la fréquence de 20500 Hz, nous observons que l'énergie de la source est moins importante par rapport aux fréquences précédentes, étant donné que la même échelle en dB a été utilisée pour toutes ces représentations : ceci est à relier au fait que la source émet une impulsion de Dirac filtrée passe-bas dont la fréquence de coupure est 20 kHz. D'autre part, dans les basses fréquences, la régularisation appliquée permet certes d'atténuer le bruit présent au niveau des capteurs, mais au détriment des performances en terme de focalisation : ceci est clairement visible pour les fréquences inférieures au kHz, pour lesquelles le lobe principal occupe une région plus importante comparativement aux plus hautes fréquences.

Comme troisième exemple d'analyse de champs sonores, nous souhaitons mettre en évidence les effets de la distance sur l'analyse de champs sonores. L'antenne de microphones utilisée pour l'analyse est toujours la même que précédemment. La source est positionnée en  $az = 180$  dg et  $el = 0$  dg, pour 4 distances différentes : 0.25, 0.5, 1 et 10 m. La cartographie du champ sonore est représentée à la fréquence  $f = 2067$  Hz, sur la figure 7.4. Nous pouvons voir que l'étendue du lobe principal diminue<sup>3</sup> lorsque la distance de la source augmente : celui-ci est plus étroit lorsque la source est à 10 m que lorsque la source se situe à 25 cm du centre de l'antenne. Ceci traduit la courbure du front d'onde dans le domaine espace-temps, qui se manifeste d'autant plus que la source est proche. Une autre chose que nous pouvons remarquer est le niveau de l'échelle de dynamique des différentes cartographies : la source située à 10 m est estimée à une puissance inférieure de 20 dB par rapport à celle située à 1 m, elle-même estimée à une puissance inférieure de 6 dB par rapport à celle située à 50 cm. Ceci respecte bien l'atténuation de l'amplitude de la pression acoustique en  $1/r$  où  $r$  désigne la distance par rapport à la source, soit 6 dB et 20 dB si la distance double ou décuple respectivement. En revanche, nous n'observons qu'une augmentation de 5 dB du niveau entre les deux sources situées à 50 et 25 cm au lieu des 6 dB attendus. Ceci s'explique par le fait que la source se situe à l'intérieur de l'antenne (le rayon maximal de la sphère correspondant à l'icosaèdre externe est de 34 cm) de sorte que la totalité des microphones ne concoure pas à estimer une source sonore située dans la direction d'incidence [ $az = 180$  dg,  $el = 0$  dg].

La dernier exemple de cartographie du champ sonore que nous donnerons est celui d'une source ponctuelle, dont la directivité est celle d'un dipôle, située en [ $r = 1$  m,  $az = 180$  dg,  $el = 0$  dg] et dont l'axe d'émission est ( $Oy$ ) : cette source n'éclaire pas le centre de l'antenne. Cette figure fait apparaître non pas un lobe principal, mais deux lobes localisés en azimut aux angles 157 dg et 203 dg, situés de manière symétrique de part et d'autre de 180 dg, azimut de la source initiale. De plus, alors que le dipôle émet la même impulsion que le monopôle, la puissance estimée par notre module d'analyse de champ sonore se situe environ 30 dB en dessous. Ceci s'explique par le fait que notre module d'analyse de champs sonores pondère de manière beaucoup plus forte les échantillons situés au centre de l'antenne que ceux situés en périphérie. Comme les micro-

---

<sup>3</sup>Il s'agit d'une légère diminution, plus appréciable sur la version électronique que sur la version imprimée.

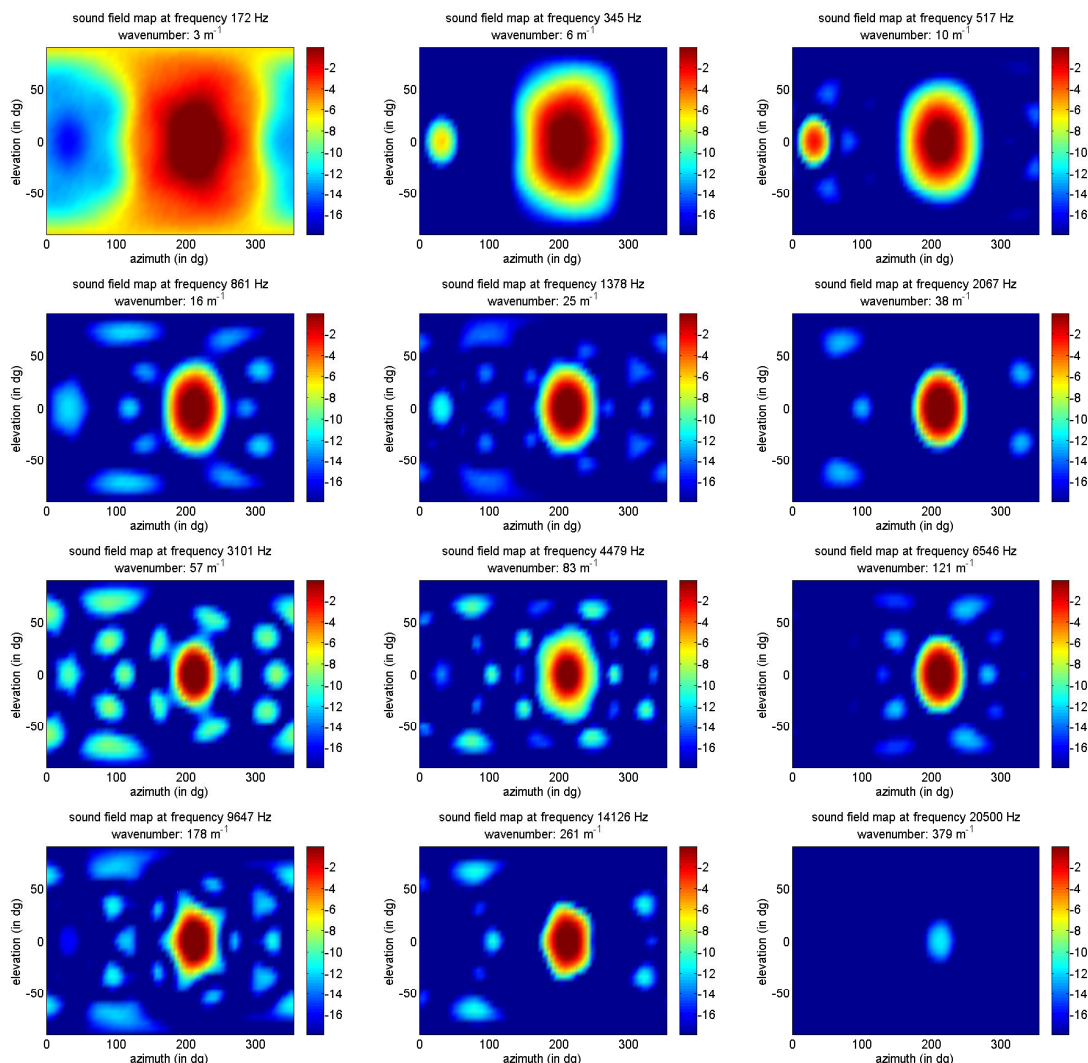


FIG. 7.3 – Cartographie d'un transducteur pour différentes fréquences d'analyse : 172, 345, 517, 861, 1378, 2067, 3101, 4479, 6546, 9647, 14126 et 20500 Hz.

phones situés au centre de l'antenne ne sont pas éclairés par la source dipolaire, il ne reste plus que les microphones situés en périphérie qui contribuent à l'analyse, fournissant deux directions d'incidence différentes, et une puissance estimée beaucoup plus faible.

Les deux figures 7.4 et 7.5 mettent en évidence une des grandes limites de notre module d'analyse de champs sonores : l'analyse privilégie un point de l'espace, le centre de l'antenne. En effet, si l'analyse du champ sonore était valable sur une zone étendue de l'espace, nous devrions détecter la figure de directivité classique pour le dipôle, "en huit", pour la figure 7.5. Pour la figure 7.4, dans le cas de la source située à l'intérieur de l'antenne, pour  $r = 25$  cm, nous devrions théoriquement obtenir la figure de directivité d'un monopole située à l'intérieur de la zone d'analyse, à savoir de module constant sur toute la sphère définie par la relation de dispersion. Or, nous estimons toujours que la direction d'incidence est la même,  $[az = 180 \text{ dg}, el = 0 \text{ dg}]$ . Nous avons déjà mentionné cette limite dans la conclusion du chapitre 5 sur les algorithmes pour l'analyse de champs sonores.

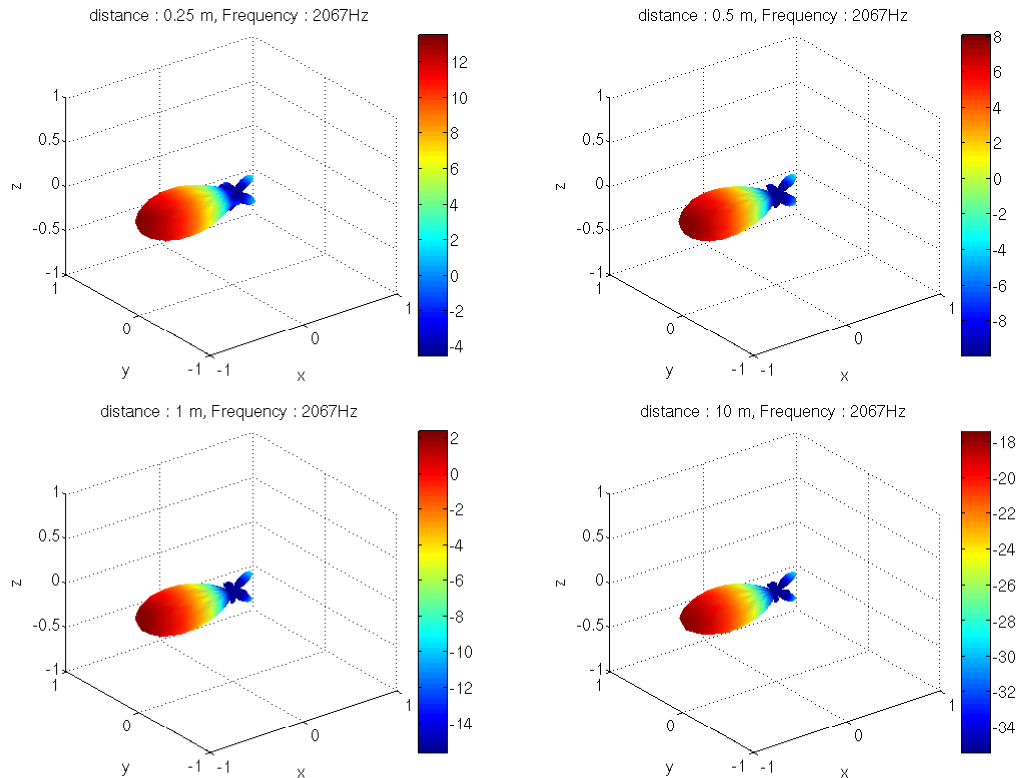


FIG. 7.4 – Influence de la distance sur la cartographie du champ sonore. Source monopolaire située en  $[az = 180 \text{ dg}, el = 0 \text{ dg}]$ , à la fréquence  $f = 2067 \text{ Hz}$ , pour les distances suivantes : 0.25, 0.5, 1 et 10 m. Attention aux différences d'échelles.

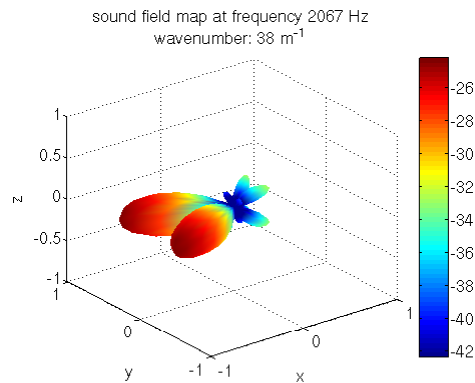


FIG. 7.5 – Cartographie d'une source sonore ponctuelle à directivité dipolaire dont l'axe d'émission n'éclaire pas le centre de l'antenne. Source située en  $[r = 1 \text{ m}, az = 180 \text{ dg}, el = 0 \text{ dg}]$ , d'axe d'émission  $(Oy)$ . Fréquence  $f = 2067 \text{ Hz}$ .

### 7.3 Module de synthèse de champs sonores

Dans cette section, nous nous proposons de comparer deux méthodes pour la synthèse de champs sonores, différant seulement par le module d'analyse apparaissant dans le diagramme gauche de la figure 6.2. La première méthode n'utilisera pas de module d'analyse : le champ sonore effectivement reproduit par le réseau de transducteurs est celui qui minimise l'erreur quadratique dans le domaine temporel au niveau de chacun des microphones (égalisation multicanale tradi-

tionnelle). Notre méthode utilisera le module d'analyse de champs sonores présenté à la section précédente. Le module d'analyse estime les paramètres liés à la décomposition en ondes planes du champ, et le champ effectivement synthétisé par cette méthode minimise l'erreur quadratique entre les deux décompositions en ondes planes estimées.

L'antenne de microphones utilisée pour caractériser le rayonnement de la source à reproduire et de chacun des transducteurs du réseau est celle définie à la section précédente. Le réseau de transducteurs utilisé est toujours un icosaèdre de sources ponctuelles de directivité monopolaire inscrit dans une sphère de rayon 1 m.

Dans un premier temps, la source que nous souhaitons reproduire est un monopôle acoustique, dont la position est  $[r = 2 \text{ m}, az = 150 \text{ dg}, el = 10 \text{ dg}]$ . Nous itérons l'algorithme présenté au chapitre 6 pour les deux méthodes précédemment mentionnées (notre méthode et l'égalisation multicanale traditionnelle). Un point important sur lequel il est nécessaire d'attirer l'attention est que l'erreur quadratique moyenne, de même que le rapport signal sur bruit, dépendent de la représentation utilisée pour le champ sonore. L'égalisation multicanale traditionnelle minimise l'erreur quadratique moyenne du profil temps-espace du champ d'erreur, c'est-à-dire utilisant une modélisation du champ sonore en impulsions de Dirac multidimensionnelles, c'est pourquoi nous utilisons la notation  $MSE_{\delta}$  et  $PSNR_{\delta}$ . Notre méthode minimise l'erreur quadratique moyenne du profil fréquence-vecteur d'onde du champ d'erreur, c'est-à-dire utilisant une modélisation du champ sonore en ondes planes, c'est pourquoi nous utilisons la notation  $MSE_{op}$  et  $PSNR_{op}$ . Dans le tableau 7.1, nous donnons la valeur du rapport signal sur bruit, ainsi que de la norme quadratique moyenne par échantillon, pour chacune des deux méthodes de synthèse envisagées, et pour les deux types d'erreurs quadratiques moyennes.

	$MSE_{op}$	$PSNR_{op}$	$MSE_{\delta}$	$PSNR_{\delta}$
Notre méthode	-27.4	7.5	-6.58	0.01
égalité multicanale traditionnelle	-23.5	1.9	-8.01	-1.45

TAB. 7.1 – Erreur quadratique moyenne (MSE) et rapport signal sur bruit (PSNR) selon la méthode de synthèse employée

Concernant le critère de la norme quadratique, les résultats sont conformes à nos attentes, à savoir que le champ reconstruit par l'égalisation multicanale traditionnelle minimise le  $MSE_{\delta}$ , et que la notre méthode minimise le  $MSE_{op}$ . Les résultats concernant le rapport signal sur bruit sont très intéressants à interpréter : notre méthode de synthèse permet une amélioration de 5.6 dB par rapport à l'égalisation multicanale traditionnelle pour le critère du  $PSNR_{op}$ . Contre toute attente, le recours à l'égalisation multicanale traditionnelle n'améliore pas le rapport signal sur bruit  $PSNR_{\delta}$  par rapport à notre méthode, ce qui est un résultat assez inattendu, qui peut s'interpréter comme ceci : le champ reproduit par l'égalisation multicanale traditionnelle est bien celui qui minimise l'erreur quadratique, mais celui-ci n'est pas très énergétique, conduisant à un mauvais rapport signal à bruit, tandis que même si l'erreur quadratique moyenne est plus forte pour notre méthode, le champ synthétisé est plus énergétique, conduisant à un meilleur rapport signal à bruit. Ainsi, nous en déduisons que *minimiser l'erreur quadratique moyenne n'est pas synonyme de maximiser le rapport signal sur bruit*.

Afin de mieux visualiser ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, nous avons tracé sur la figure 7.6 l'énergie du champ sonore de référence, du champ sonore reconstruit, et du champ d'erreur, en fonction de la fréquence, pour les deux différentes normes : la norme spatiale, correspondant aux deux dernières colonnes du tableau 7.1, et la norme dans le domaine des vecteurs d'ondes, correspondant aux deux premières colonnes du tableau 7.1. Si nous nous intéressons tout d'abord aux courbes relatives au champ sonore de référence (courbes noires), nous observons que l'énergie de celui-ci est constante sur toute la bande des signaux audibles (jusque environ

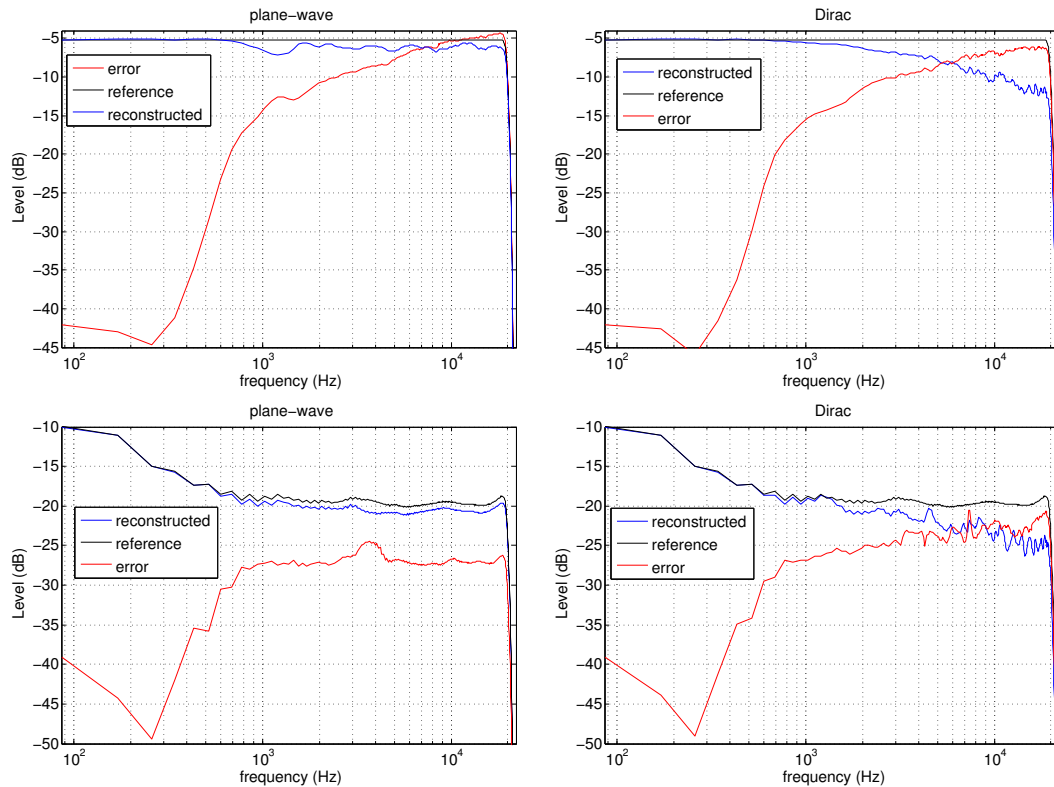


FIG. 7.6 – Représentation graphique de l’énergie des champs sonores de référence, reconstruit, et d’erreur en fonction de la fréquence, pour les deux différentes normes quadratiques : dans l’espace (haut) et dans le domaine des vecteurs d’onde (bas). Coordonnées de la source initiale :  $[r = 2 \text{ m}, a_z = 150 \text{ dg}, \text{el} = 10 \text{ dg}]$ .

20 kHz) pour la première ligne de la figure 7.6 (modélisation par impulsions de Dirac multidimensionnelles) tandis qu’elle est décroissante jusque 800 Hz puis constante pour la deuxième ligne (modélisation du champ sonore par ondes planes). Dans le premier cas, le résultat est conforme à nos attentes, étant donné que la puissance de la source que nous simulons est constante sur toute la plage des signaux audibles. Il est donc surprenant d’observer qu’une source émettant la même puissance à chaque fréquence occasionne une décroissance dans le deuxième cas, pour lequel le champ est modélisé par des ondes planes. La raison de cette décroissance s’explique par le choix effectué pour la normalisation des filtres spatiaux : nous avons choisi que l’énergie du filtre spatial à l’intérieur de la sphère de résolution soit proportionnelle à son volume (cf. étape 5 du tableau récapitulatif de l’algorithme de calcul des filtres spatiaux 5.2). Or, lorsque nous observons les cartographies d’un transducteur donné pour plusieurs fréquences d’analyses (figure 7.3), nous observons que l’énergie du transducteur n’est pas confinée à l’intérieur de la zone de résolution pour les basses fréquences (première ligne de la figure 7.3), ce qui explique les raisons de la croissance de l’énergie du champ sonore de référence aux basses fréquences. Si nous souhaitons obtenir une énergie constante sur toute la plage de fréquence, il aurait fallu normaliser les filtres spatiaux de manière à ce que leur énergie intégrée sur la zone d’optimisation (et non la zone de résolution) soit proportionnelle au volume de celle-ci.

Nous allons maintenant nous intéresser aux courbes relatives à l’énergie du champ reconstruit (courbes bleues- et du champ d’erreur (courbes rouges) de la figure 7.6. Nous allons d’abord préciser quelle est la signification à attacher à chacune de ces deux différentes courbes. Pour la courbe relative à l’énergie du champ sonore reconstruit, il est préférable que ses variations suivent

celles de la courbe de l'énergie du champ de référence. Si ce n'est pas le cas, cela signifie que le dispositif de synthèse déforme le timbre des sources acoustiques reproduites. Ce critère est indépendant de la qualité de la reproduction spatiale associée. Celle-ci est justement quantifiée par l'allure de la courbe de l'énergie du champ d'erreur (courbe rouge). Un bon dispositif de synthèse aurait une courbe de champ d'erreur beaucoup moins énergétique par rapport à celle du champ reproduit. Si les deux courbes ont un niveau comparable, ou que la courbe de l'énergie du champ d'erreur est supérieure à celle du champ reproduit, cela signifie uniquement que la qualité de la reproduction spatiale est défaillante. Ainsi, les deux courbes de l'énergie du champ reproduit et du champ d'erreur sont complémentaires : l'une quantifie la distorsion temporelle tandis que l'autre quantifie la distorsion spatiale.

Nous pouvons voir sur la figure 7.6 que l'énergie du champ sonore reconstruit par notre méthode suit les variations de l'énergie du champ sonore de référence, quelle que soit la norme utilisée pour l'évaluer (colonne gauche de 7.6). En revanche, l'énergie du champ sonore reconstruit par la synthèse utilisant une analyse en impulsions de Dirac (colonne de droite de 7.6) ne suit pas les variations du champ sonore de référence : elle décroît en fonction de la fréquence. Ceci signifie que notre méthode de synthèse modifie moins le timbre des sources acoustiques reproduites que l'égalisation multicanale traditionnelle.

Concernant la qualité de la reproduction spatiale, un bon indicateur est le croisement éventuel entre la courbe rouge de l'énergie du champ d'erreur et la courbe bleue de l'énergie du champ reproduit. Ce croisement, lorsqu'il a lieu, ne se situe pas à la même fréquence selon la modélisation employée pour le champ sonore : pour l'égalisation multicanale traditionnelle, le croisement a lieu entre 5 et 6 kHz pour une modélisation par impulsions de Dirac multidimensionnelles et entre 6 et 7 kHz pour une modélisation en ondes planes ; pour notre méthode, le croisement a lieu entre 7 et 8 kHz pour une modélisation par impulsions de Dirac multidimensionnelles et les courbes ne se croisent pas lorsque le champ est modélisé par des ondes planes. De ce fait, notre méthode améliore la qualité de la reproduction spatiale dans les deux cas, que le champ soit modélisé par des impulsions de Dirac multidimensionnelles ou par des ondes planes.

Dans un deuxième temps, la source que nous souhaitons synthétiser possède les coordonnées suivantes :  $[r = 1 \text{ m}, az = 90 \text{ dg}, el = 70 \text{ dg}]$ . Cette source se situe dans une direction indiquée par le centre de gravité d'un des triangles formant l'icosaèdre : il s'agit donc du pire cas de reproduction. L'erreur quadratique moyenne et le rapport signal sur bruit global sont résumés dans le tableau 7.2.

	MSE <sub>op</sub>	PSNR <sub>op</sub>	MSE <sub>δ</sub>	PSNR <sub>δ</sub>
notre méthode	-17.0	2.11	-2.50	-1.39
égalisation multicanale traditionnelle	-14.6	-4.08	-4.75	-3.53

TAB. 7.2 – Erreur quadratique moyenne (MSE) et rapport signal sur bruit (PSNR) selon la méthode de synthèse employée

Les conclusions générales sont les mêmes que celles faites pour la première source : le rapport signal sur bruit est supérieur pour les filtres inverses calculés en utilisant notre méthode. Si nous comparons les données des tableaux 7.1 et 7.2, nous nous apercevons que les performances sont beaucoup moins bonnes pour la reproduction de cette source sonore : le rapport signal sur bruit chute de plus de 5 dB et l'erreur quadratique moyenne augmente de 10 dB pour la norme évaluée dans le domaine des vecteurs d'onde. Le rapport signal sur bruit chute de 2 dB et la norme quadratique augmente de 4 dB environ pour la norme évaluée dans le domaine spatial.

Nous avons aussi représenté la valeur des deux normes quadratiques (évaluées dans l'espace ou dans le domaine des vecteurs d'ondes) des champs de référence, reconstruit et d'erreur sur la figure 7.7. Les résultats de la table 7.2 semblent cohérents avec ceux qui seraient obtenus par



intégration des différentes courbes représentées en fonction de la fréquence. Nous pouvons comparer cette figure avec la figure 7.6. Alors que les croisements des courbes de la norme du champ d'erreur et celle du champ reconstruit se situaient au dessus de 5 kHz au minimum dans le cas précédent, les croisements s'effectuent cette fois dans une plus basse plage de fréquence, autour de 1 kHz. En revanche, dans le cas de la reproduction utilisant notre méthode, nous observons toujours que le champ sonore effectivement reconstruit suit les variations du champ de référence dans une enveloppe de 4 dB, alors que celle utilisant comme module d'analyse une décomposition en impulsions de Dirac multidimensionnelles s'étale sur environ une quinzaine de dB, le système ayant alors beaucoup de mal à synthétiser les hautes fréquences.

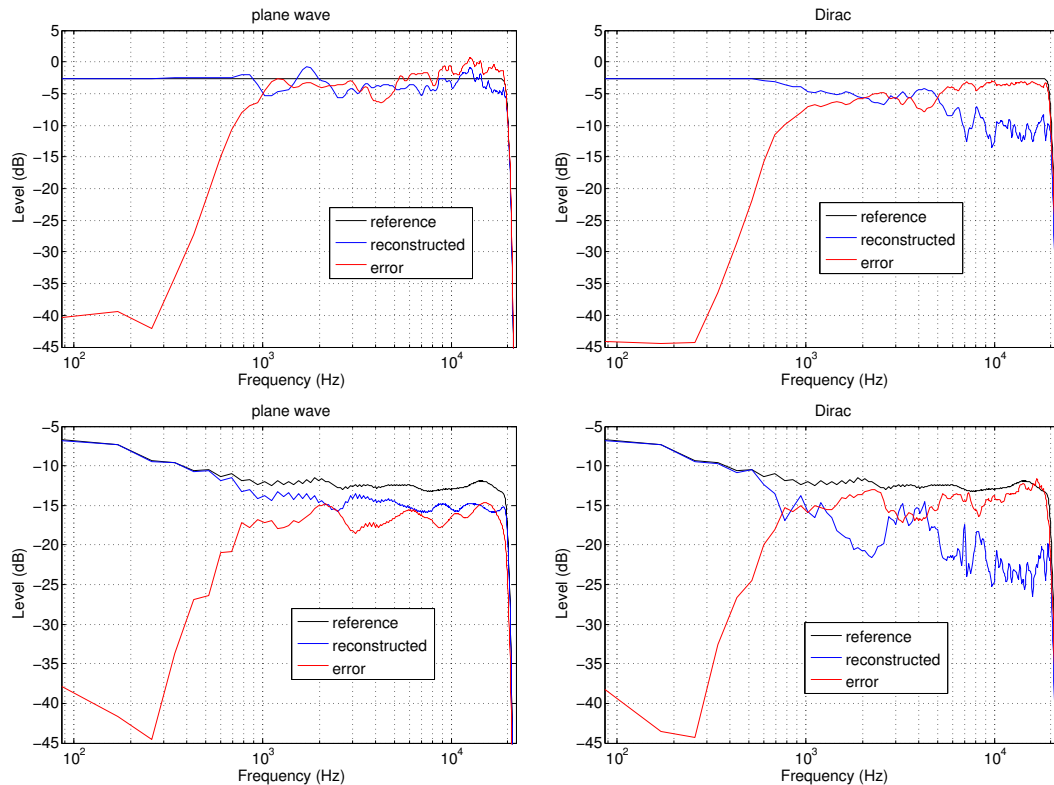


FIG. 7.7 – Représentation graphique de l'énergie des champs sonores de référence, reconstruit, et d'erreur en fonction de la fréquence, pour les deux différentes normes quadratiques : dans l'espace (haut) et dans le domaine des vecteurs d'onde (bas). Coordonnées de la source initiale :  $[r = 1.5 \text{ m}, az = 90 \text{ dg}, el = 70 \text{ dg}]$ .

Dans un dernier temps, nous allons nous placer dans le cas le plus favorable où la source que nous souhaitons synthétiser se situe dans une des directions pointée par un des transducteurs du réseau de sources secondaires, en l'occurrence  $[r = 10 \text{ m}, az = 90 \text{ dg}, el = 32 \text{ dg}]$ . La source est donc dans le même axe que celui d'un des transducteurs, mais plus éloignée que celui-ci. Les résultats relatifs à la qualité de la reproduction sont résumés dans le tableau 7.3 et sur la figure 7.8. Le croisement entre les courbes du champ d'erreur et du champ reconstruit survient cette fois dans une plage de fréquences beaucoup plus élevée que pour la source précédente. Celle-ci est donc très bien restituée.

Nous allons maintenant nous intéresser au profil des champs sonores reproduits par chacune des deux méthodes dans le domaine spatio-temporel. Pour cela, nous utilisons la représentation suivante (déjà utilisée dans [40]) : il s'agit d'une image ayant pour abscisse l'axe ( $Ox$ ) et en ordonnée le temps. L'amplitude du champ acoustique est fournie en dB par un code de couleurs.

	$MSE_{op}$	$PSNR_{op}$	$MSE_{\delta}$	$PSNR_{\delta}$
notre méthode	-54.0	21.3	-22.6	2.92
égalisation multicanale traditionnelle	-41.0	7.03	-24.3	2.78

TAB. 7.3 – Erreur quadratique moyenne (MSE) et rapport signal sur bruit (PSNR) selon la méthode de synthèse employée

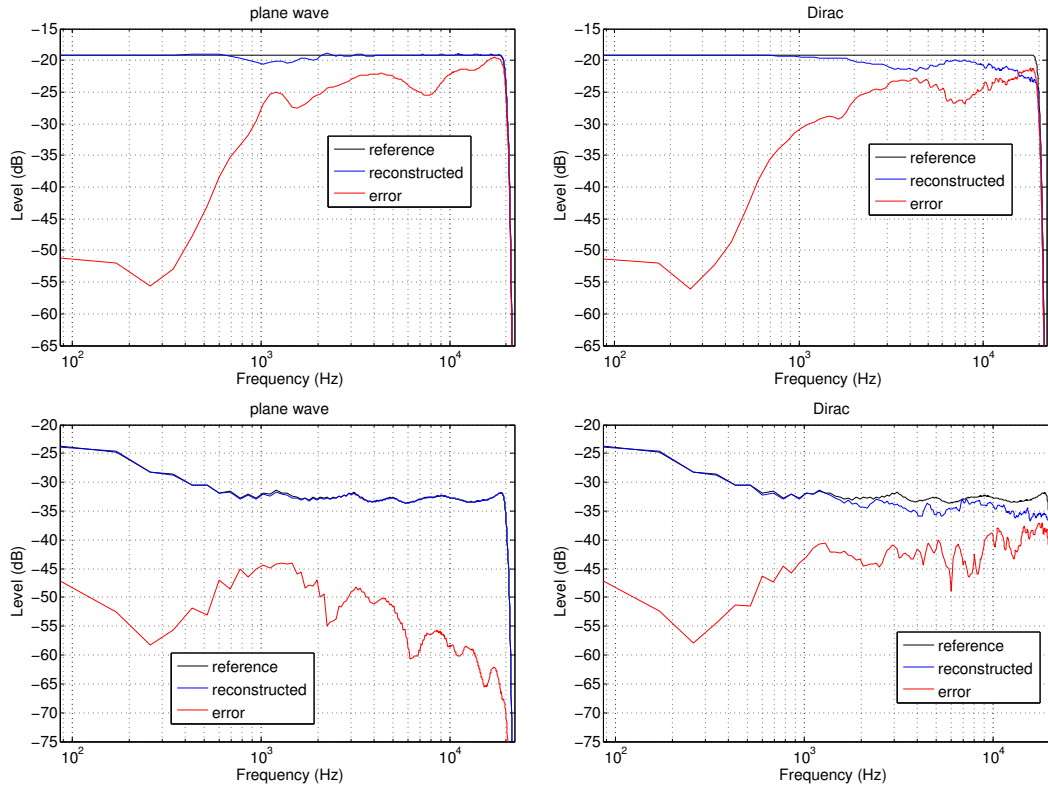


FIG. 7.8 – Représentation graphique de l'énergie des champs sonores de référence, reconstruit, et d'erreur en fonction de la fréquence, pour les deux différentes normes quadratiques : dans l'espace (haut) et dans le domaine des vecteurs d'onde (bas). Coordonnées de la source initiale :  $[r = 10 \text{ m}, az = 90 \text{ dg}, el = 32 \text{ dg}]$ .

Il est à noter que les profils représentés ont été calculés volontairement en dehors des points de l'antenne utilisée pour l'analyse. Ceci n'est faisable qu'à l'aide de la simulation, mais cela nous permettra vraisemblablement de tirer des conclusions qui peuvent s'appliquer aussi aux dispositifs réels. Le profil temporel des trois sources précédemment étudiées est représenté dans la colonne centrale de la figure 7.9. Étant donné que la première source possède un azimut de 150 dg, ce sont les microphones situés sur la gauche qui reçoivent en premier le front d'onde direct. Pour les deux autres sources d'azimut 90 dg, c'est le microphone situé au niveau de l'origine qui reçoit en premier le front d'onde direct de la source. De plus la réponse est alors symétrique de part et d'autre de l'origine.

Le profil de ces champs sonores de référence est à comparer avec la colonne de gauche, où sont représentés les champs reproduits à l'aide de l'égalisation multicanale traditionnelle, et la colonne de droite, où sont représentés les champs reproduits par notre méthode. De manière générale, nous pouvons vérifier que le contraste est plus accentué sur la colonne de droite que sur la colonne de gauche : ceci correspond au fait que les fronts d'ondes émis par les transducteurs du réseau de sources secondaires sont plus courts et énergétiques. Ceci confirme que la bande passante des

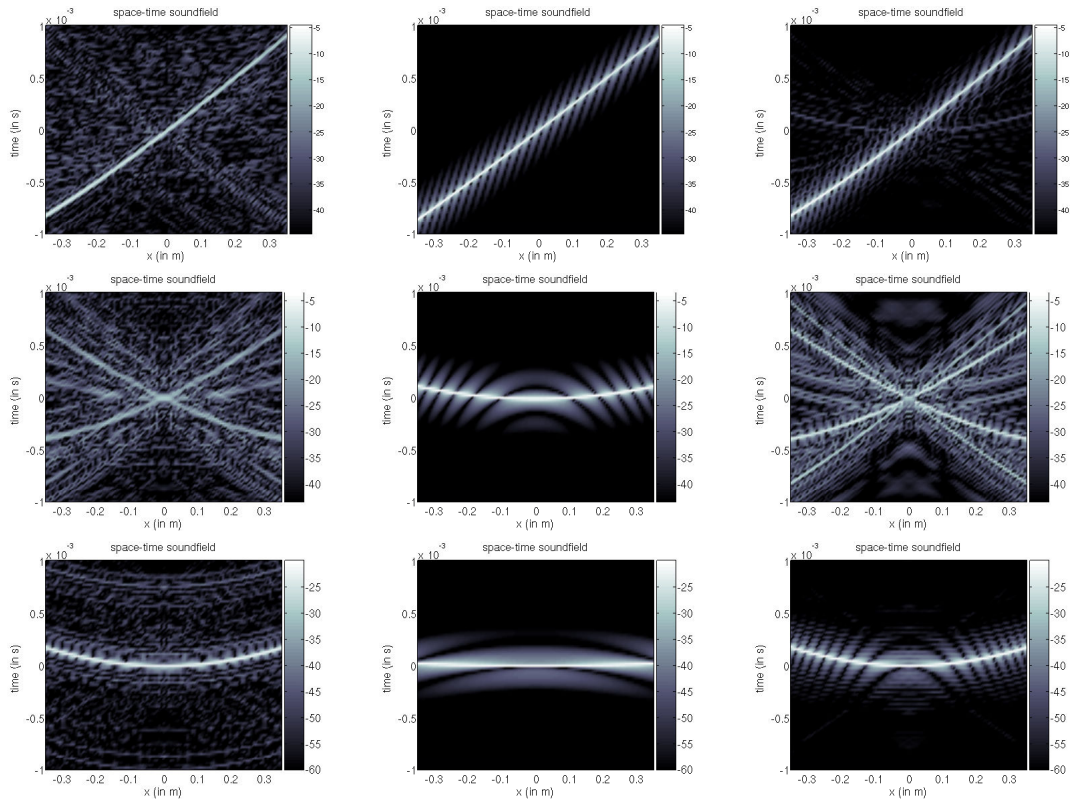


FIG. 7.9 – Représentation dans le domaine spatio-temporel des champs sonores effectivement reconstruits pour chacune des trois sources envisagées. Méthode utilisant un module d’analyse par décomposition en impulsions de Dirac multidimensionnelles (gauche), référence (milieu), méthode utilisant un module d’analyse par décomposition en ondes planes (droite).

dispositifs de synthèse utilisant notre méthode est plus élevée que celle des dispositifs utilisant l’égalisation multicanale traditionnelle.

Si nous étudions maintenant la reproduction ligne par ligne, en commençant par la troisième source, la mieux reproduite, nous pouvons voir que celle-ci est correctement reproduite sur une large zone d’écoute. La seule différence est la différence de courbure du front d’onde entre la source de référence et la source reproduite. En effet, la source à reproduire est située à 10 m de l’origine, le front d’onde associé est quasiment plan à cette distance. Les deux algorithmes de reproduction utilisent principalement le transducteur situé dans la même direction que la source à reproduire. Ce transducteur étant beaucoup plus proche de l’origine, à 1 m, nous commençons à sentir des effets dus à la proximité du transducteur servant à la restitution, pour lequel le front d’onde ne peut pas être considéré comme plan à cette distance. Si nous analysons maintenant la première ligne, où la source à reproduire est assez proche de manière angulaire d’un des transducteurs du réseau, nous voyons que celui-ci est majoritairement sollicité. Nous pouvons aussi distinguer d’autres composantes mais largement plus atténuées par rapport à la précédente. De plus les inclinaisons des deux courbes représentatives du front principal entre le champ de référence et celui reproduit ne sont pas parfaitement identiques. Si nous examinons maintenant le profil dans le domaine spatio-temporel de la dernière source, nous pouvons identifier la contribution d’au moins 4 transducteurs différents pour la synthèse de la source en question. Les deux profils du champ de référence et reproduit sont très différents. En fait, les deux ne sont sensiblement identiques qu’à l’origine. Dès que nous nous en écartons un tout petit peu, les réponses sont largement différentes.

L’étude du profil des champs reconstruits pour ces trois sources confirme une fois de plus ce

que nous disions en conclusion du chapitre 5 sur l'analyse des champs sonores par une antenne de microphones : il s'agit d'une analyse localisée. Nous en voyons la conséquence sur la figure 7.9 : un bon rapport signal sur bruit correspond à un rendu sur une zone beaucoup plus étendue que dans le cas d'un faible rapport signal sur bruit. Il ne reste maintenant plus qu'à tester cette méthode de reproduction afin de savoir si les indices de localisation de sources acoustiques sont reproduits, aussi bien dans les cas favorables que dans les cas défavorables.

## 7.4 Réflexions et perspectives

En guise de conclusion de ce chapitre présentant le dispositif retenu d'analyse et de synthèse de champs sonores, nous allons faire quelques réflexions sur les résultats obtenus, et nous essaierons de dégager des perspectives à partir de ces réflexions.

Pour commencer, nous avons vu que l'analyse effectuée par l'antenne de microphones utilisée tout au long de ce chapitre était de bonne qualité, dans le sens où la résolution des cartographies obtenues était assez fine. Nous avons dit qu'un angle solide engendré par un cône dont l'angle de demi-ouverture vaut 17 dg ne constituait que 2.2% de l'angle solide total. Dans ces conditions, si nous utilisons seulement 12 transducteurs dans notre réseau pour la synthèse, cela ne permet de synthétiser au plus que 26% de l'angle solide. Dans ce cas, le maillon faible de la chaîne d'analyse/synthèse est le nombre insuffisant de sources pour la synthèse de champs sonores. Cela explique pourquoi certaines sources sont très bien reproduites, et d'autres très mal reproduites.

Nous avons vu que la dynamique de l'analyse spatiale offerte par l'utilisation des algorithmes d'analyse du chapitre 5 était d'environ une quinzaine de dB. Cette dynamique spatiale peut s'interpréter de la manière suivante pour la synthèse : une source est considérée comme éteinte si son énergie est d'un niveau inférieur à 15 dB par rapport à l'énergie d'une autre source utilisée dans le réseau. Clairement, un auditeur est encore capable d'entendre des sources dont le niveau se situe à -15 dB par rapport à une source principale. Donc il est nécessaire de trouver encore d'autres astuces afin d'améliorer la dynamique spatiale de l'analyse, afin d'améliorer encore plus le réalisme spatial de la reproduction.

Toutefois, nous pouvons parier que les 15 dB de dynamique pourront certainement encore être améliorés dans l'avenir par l'utilisation de géométries encore plus performantes pour les antennes de microphones. Pour le moment, afin de contourner ce problème, il peut sembler plus adéquat d'estimer la position des sources du réseau de reproduction par des algorithmes d'estimation paramétriques, tels que ceux introduits par Wang *et al.* [103] par exemple. L'utilisation de modèles physiques pour les sources du réseau de transducteurs pourrait permettre d'augmenter largement la dynamique de l'analyse car nous pourrions tirer profit de pouvoir extrapoler le champ sonore en dehors du réseau de microphones, ce qui constitue un avantage considérable.

Au vu des résultats des tableaux 7.1, 7.2 et 7.3, ainsi que des figures 7.6, 7.7 et 7.8, il apparaîtrait intéressant d'utiliser d'autres critères pour le calcul de filtres inverses optimaux que celui de la minimisation de la norme quadratique de l'erreur. Par exemple, il serait intéressant de prendre aussi en compte le rapport signal sur bruit de la reconstruction, afin d'éviter les écueils qui surviennent lorsque la méthode utilisée pour la synthèse est l'égalisation multicanale traditionnelle, à savoir la modification du timbre. L'objectif deviendrait alors de maximiser le rapport signal sur bruit plutôt que de vouloir minimiser la norme quadratique de l'erreur. Il faut étudier comment cela se répercuterait sur les fonctions de coût utilisées au chapitre 6, car l'avantage de la fonction de coût utilisée est qu'elle était simple à évaluer, et qu'elle permettait de développer un algorithme permettant de converger vers le réseau de filtres inverses optimal. Il n'est pas forcément évident que ce soit toujours le cas si nous cherchions à maximiser le rapport signal sur bruit de la reconstruction. Une autre alternative serait de minimiser la norme de l'erreur quadratique sous la contrainte que la puissance du champ reconstruit par le réseau de sources secondaires soit iden-

tique à celle du champ de référence. Ainsi, nous pourrions espérer diminuer la déformation du timbre du dispositif.



## Chapitre 8

# Validation expérimentale du dispositif d'analyse de champs sonores<sup>1</sup>

### Résumé :

Dans ce chapitre, nous effectuons la validation expérimentale de notre approche pour l'analyse spatiale de champs sonores. Dans un premier temps, nous avons mesuré toutes les réponses impulsionnelles entre chaque enceinte d'un réseau de transducteurs et chaque microphone de l'antenne de capteurs. Nous avons utilisé un algorithme de calibrage automatique de la position des microphones afin d'obtenir une meilleure estimation de la position réelle des microphones. Nous avons ensuite appliqué toute une calibration de la chaîne électro-acoustique afin de compenser les différences entre les différents matériels utilisés (microphones, pré-amplificateurs, etc.). Les réponses impulsionnelles calibrées ont ensuite été réorganisées afin d'obtenir l'opérateur de propagation de chacune des sources du réseau de transducteurs. Ce sont sur ces opérateurs de propagation expérimentalement mesurés que nous avons appliqué nos algorithmes d'analyse du champ sonore.

Malgré le bruit présent sur les capteurs et malgré l'incertitude sur la position exacte des microphones, l'analyse est de bonne qualité avec les signaux expérimentaux, ce qui valide notre approche. Il y a adéquation entre l'analyse effectuée sur les opérateurs de propagation mesurés, et ceux simulés en approchant la source réelle par un monopôle acoustique, concernant la direction d'incidence. Dans certains cas, les cartographies des opérateurs de propagation mesurés révèlent même la présence de réflexions précoces, absentes sur les cartographies des sources simulées.

---

<sup>1</sup>Ce chapitre est basé sur notre article [41].

## 8.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de valider par l'expérience notre approche pour l'analyse spatiale des champs sonores. Afin d'y parvenir, nous allons décrire dans un premier temps le protocole expérimental que nous avons suivi afin d'acquérir les données qui ont servi de base pour le calcul des cartographies de champs sonores de ce chapitre.

La méthode de mesures de réponses impulsionnelles est d'abord expliquée à la section 8.2. Puis nous décrivons les procédures de calibrage que nous avons effectuées afin de compenser certains défauts de la chaîne d'acquisition, tels que les différences de gain entre les pré-amplificateurs ou entre les différentes voies d'entrée du séquenceur, les retards d'acquisition pour les différentes voies du séquenceur, les différences entre les microphones, etc. Nous présentons ensuite la procédure de calibrage automatique de la position des microphones que nous avons employée afin de réduire la marge d'incertitude des erreurs de position.

Finalement, nous appliquons les algorithmes d'analyse présentés au chapitre 5, en prenant soin d'appliquer une régularisation, afin d'obtenir la cartographie des opérateurs de propagation mesurés expérimentalement. Nous comparons les cartographies obtenues par les opérateurs de propagation mesurés expérimentalement avec celles obtenues par les opérateurs de propagation simulés en approchant les sources réelles par des monopôles acoustiques.

## 8.2 Mesure de réponses impulsionnelles

### 8.2.1 Méthode employée

Il existe deux grandes familles de méthodes de mesures de réponses impulsionnelles d'une chaîne électro-acoustique : celles utilisant des séquences pseudo-aléatoires [87, 100] (les plus répandues étant les "Maximum-Length Sequences" (MLS)) et celles utilisant des signaux chirp [34, 70] (sinusoïdes balayant une plage de fréquences). Ces deux familles de méthodes possèdent chacune leurs avantages et leurs inconvénients [94] :

- les séquences MLS ont l'avantage d'être robustes au bruit de fond présent au moment de la mesure, que celui-ci soit stationnaire ou impulsionnel. Cette méthode peut donc être employée dans des environnements bruyants. Le fait de répéter la séquence un certain nombre de fois permet d'améliorer à chaque fois le rapport signal sur bruit de la mesure, de sorte que le stimulus excitateur peut même être camouflé afin qu'il ne soit presque pas audible. Ainsi cela peut permettre de mesurer une chaîne électro-acoustique en même temps que celle-ci est utilisée pour un but totalement différent, telle que de la diffusion. En revanche, l'inconvénient des séquences pseudo-aléatoires est leur comportement vis-à-vis des non-linéarités des enceintes [24], dont l'influence, bien que celles-ci restent faibles pour du matériel de qualité, est non négligeable. En effet, elles influent sur la dynamique des réponses impulsionnelles mesurées qui sont alors plus faibles que celles obtenues par des systèmes utilisant la deuxième famille de méthodes ;
- les signaux chirps, qu'ils soient linéaires ou logarithmiques, possèdent un spectre similaire à ceux utilisant des séquences pseudo-aléatoires, naturelles ou bien normalisées en fréquence afin d'optimiser le rapport signal sur bruit de la mesure. La différence entre ces deux signaux se situe au niveau de la phase ou de manière équivalente leur retard de groupe. Dans le cas des séquences pseudo-aléatoires, la phase est aléatoire en fonction de la fréquence, tandis qu'elle est tout à fait déterministe dans le cas des signaux chirps. Cette caractéristique est astucieusement utilisée par les systèmes de mesure basés sur les chirps pour isoler la réponse impulsionnelle linéaire de ces composantes de Volterra d'ordre supérieur [70] (influence des non-linéarités) alors que ces composantes d'ordre supérieur ajoutent un bruit supplémentaire



aux mesures basées sur les MLS, limitant la dynamique obtenue. De plus, en environnement acoustique calme, une seule répétition du signal est suffisante contrairement aux MLS. En revanche, l'inconvénient de ces méthodes est leur manque de robustesse vis-à-vis des bruits impulsionnels, qui détériorent beaucoup les performances du système de mesure.

Ainsi, nous pouvons conclure que les méthodes de mesure de réponse impulsionnelle basées sur les signaux chirps sont plus performantes que celles basées sur les séquences pseudo-aléatoires en environnement de mesure calme. En revanche, les séquences MLS sont mieux adaptées aux environnements bruyants ou bien pour calibrer des systèmes électro-acoustiques tout en étant peu audibles.

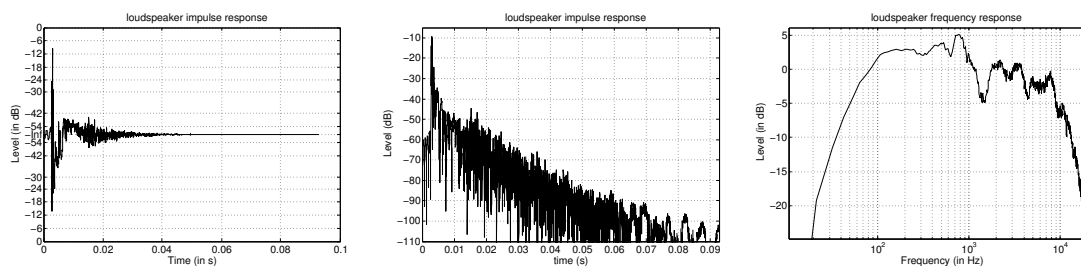


FIG. 8.1 – Représentation d'une réponse impulsionnelle d'enceinte mesurée à l'aide d'un signal chirp, dans le domaine temporel, en dB signés (gauche) ou non signés (centre), et dans le domaine fréquentiel (droite).

Une réponse impulsionnelle d'enceinte, mesurée en chambre anéchoïque, utilisant un signal chirp comme signal d'excitation est représentée sur la figure 8.1. Cette réponse a été représentée dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel, en décibels prenant ou ne prenant pas en compte le signe de la réponse impulsionnelle initiale. Sur la représentation en décibels non signés, nous pouvons voir clairement l'enveloppe de décroissance de la réponse impulsionnelle. Le pic de la réponse impulsionnelle possède un niveau de  $-9$  dB, si bien que la dynamique de la réponse impulsionnelle mesurée est de  $90$  dB environ étant donné que l'enveloppe décroît jusqu'à un niveau inférieur à  $-100$  dB. Nous voyons que la réponse en fréquence de la totalité de la chaîne électro-acoustique (amplificateur de puissance, câbles, enceinte, salle, micro, pré-amplificateur, séquenceur) est plate à  $\pm 5$  dB dans la plage de fréquence  $50 - 9000$  Hz. Pour les fréquences inférieures, l'enceinte est responsable de la croissance rapide de la réponse. Pour les fréquences supérieures, l'enceinte et le microphone utilisés sont responsables conjointement de la décroissance de  $15$  dB/oct observée. La dernière représentation en décibels signés permet de dissocier dans une certaine mesure la réponse impulsionnelle de l'enceinte de ses premières réflexions. Nous pouvons voir que celles-ci apparaissent  $12$  ms après le front direct, temps correspondant à un trajet effectué par l'onde sonore de  $4$  m, soit à peu près la distance avec les premiers obstacles potentiels (parois, enceintes du bâti situés en face de l'enceinte mesurée, voir figure 8.2). Le niveau de ces premières réflexions est inférieur de  $35$  dB par rapport au front direct, ce qui est dû au fait que l'enceinte et le microphone de mesures étaient assez rapprochés, environ  $20$  cm<sup>2</sup>, de sorte que la composante due au front direct sur le signal mesuré est beaucoup plus favorisée par rapport à la composante réverbérée. Deux facteurs sont responsables de l'atténuation de cette dernière : la proximité entre l'enceinte et le microphone, et le fait d'avoir réalisé la mesure en chambre anéchoïque. Nous pouvons dissocier deux parties subtiles dans la décroissance de l'enveloppe : une première due à l'enceinte uniquement, très rapide, et une deuxième due à la salle anéchoïque, légèrement moins rapide. Le temps de réverbération à  $60$  dB est d'environ  $35$  ms, ce qui est très bref.

<sup>2</sup> mesure réalisée en champ proche afin de minimiser l'influence de la salle sur la réponse impulsionnelle.

## 8.2.2 Description du protocole expérimental

Afin de mettre en œuvre le module d'analyse de champs sonores décrit à la section 7.2, le protocole expérimental utilisé a été le suivant :

- dans une chambre anéchoïque, nous avons disposé 12 enceintes sur un bâti circulaire en aluminium, ainsi que 4 enceintes supplémentaires placées au niveau du sol. Plusieurs photographies de la manipulation sont représentées sur la figure 8.2 ;
- 8 microphones omnidirectionnels Schoeps MK 2 ont été utilisés simultanément. Ils ont été arrangés sur une antenne linéaire à espacement quasi-logarithmique, entre 2.5 cm et 95 cm. Nous avons tourné cette antenne linéaire à espacement logarithmique 12 fois afin d'engendrer une 8 antennes circulaires de 12 microphones, à rayons logarithmiquement espacés ;
- les signaux de sortie des microphones sont amplifiés par des pré-amplificateurs Behringer Ultragain Pro à potentiomètres crantés ;
- les signaux de sortie des pré-amplificateurs viennent en entrée du séquenceur multi-pistes Tascam MX-2424 ;
- les signaux de commande envoyés à chacun des transducteurs sont aussi synchronisés par le séquenceur multi-pistes. Ces signaux de commande sont des chirps logarithmiques d'une durée de 3 s environ ( $2^{17}$  échantillons à 44.1 kHz).

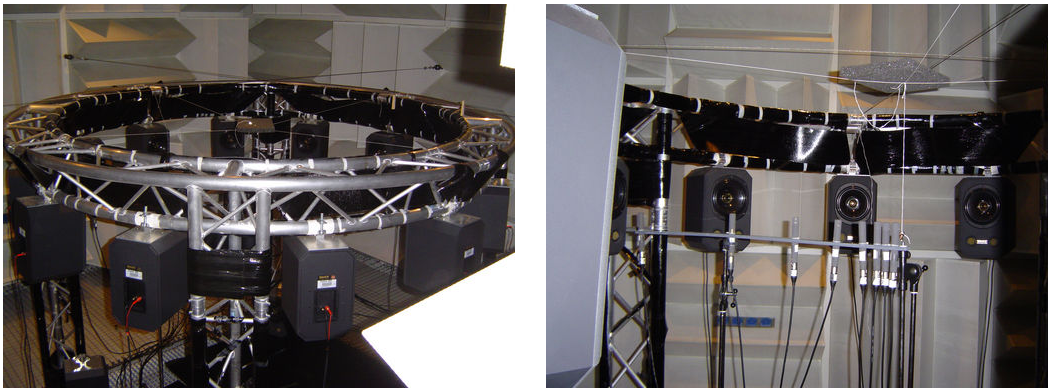


FIG. 8.2 – Photographies de la manipulation effectuée

D'après la description du protocole expérimental qui vient d'être faite, il est clair que nous faisons l'hypothèse de stationnarité pour la mesure des réponses impulsionnelles : en effet, le nombre de microphones disponibles était insuffisant pour enregistrer les 96 réponses impulsionnelles du réseau simultanément. De fait, nous faisons aussi implicitement l'hypothèse que notre système de mesure ne perturbe pas le champ sonore mesuré. Bien entendu, ces deux hypothèses ne sont pas vérifiées dans la pratique, particulièrement celle sur le fait que notre antenne linéaire ne déforme pas le champ sonore : il doit y avoir de la diffraction dans le domaine des petites longueurs d'ondes (hautes fréquences) comparables aux dimensions de l'obstacle. Nous verrons que le module d'analyse de champs sonores est capable de fournir une analyse robuste devant ces conditions imparfaites.

La deuxième remarque que je souhaite faire est qu'il est nécessaire de calibrer les réponses en temps et fréquence de la chaîne électro-acoustique, ce que nous allons développer à la section 8.3. De plus, il existera toujours des différences de position entre le réseau de microphones pris pour référence, et celui effectivement déployé. Comme nous l'avons vu à la section 7.2, les performances du module d'analyse de champs sonores sont très sensibles aux erreurs de positionnement, de sorte qu'une procédure de calibrage automatique de la position des microphones apparaît comme vivement souhaitable. Elle sera développée à la section 8.4.

### **8.3 Calibration de la réponse temps-fréquence du canal électro-acoustique**

Une procédure de calibrage de la chaîne électro-acoustique est vivement souhaitée pour les raisons suivantes :

- bien que les huit microphones utilisés soient du même type, il peut exister de la dispersion dans leurs caractéristiques, telles que la directivité ou la réponse en fréquence,
- les 4 pré-amplificateurs utilisés peuvent avoir des gains différents même si le gain est réglable par des potentiomètres crantés,
- il apparaît pertinent d'étudier les performances de la synchronisation entre les différentes voies du séquenceur multi-pistes.

La méthode de calibrage que nous avons mise en œuvre conduit à une calibration relative. En effet, obtenir une calibration absolue des microphones une opération très difficile, même si elle serait vivement souhaitable. Comme une calibration absolue n'est pas facilement réalisable, nous avons pris comme référence le signal enregistré par un microphone, branché sur un pré-amplificateur, lui-même relié sur une voie du séquenceur multi-pistes. Puis nous avons effectué les essais suivants :

- pour la calibration des microphones, nous avons utilisé à chaque mesure le même pré-amplificateur et la même voie d'entrée du séquenceur, et nous n'avons changé que le microphone servant pour la mesure, en essayant, autant que faire se peut, de le placer au même endroit. Les analyses de cette calibration ont conclu que les réponses impulsionnelles ainsi mesurées étaient identiques dans le domaine des fréquences inférieures à 10 kHz à  $\pm 1$ dB. Pour les hautes fréquences, les réponses commencent à se différencier sensiblement, mais nous attribuons ceci à l'incertitude sur la position du microphone. En effet, la distance entre un ventre et un nœud de pression à cette fréquence est de 9 mm, ce qui correspond à peu près à la précision effective sur la connaissance de la position du microphone. Nous avons donc jugé qu'il n'était pas nécessaire de corriger la réponse en fréquence des microphones (en tout cas pas pour une calibration relative).
- pour la calibration des différents pré-amplificateurs, nous avons utilisé le même microphone et la même voie d'enregistrement du séquenceur, et nous avons comparé chacune des 8 réponses mesurées. Il s'est avéré que les gains étaient sensiblement variables, même pour des positions de potentiomètres identiques. Ils différaient de  $\pm 6$  dB selon le pré-amplificateur utilisé. En revanche, les réponses en fréquences étaient rigoureusement identiques à une translation près.
- pour la calibration des différentes voies du séquenceur, nous avons procédé de manière analogue en fixant le microphone et le pré-amplificateur utilisé, et en ne variant uniquement que la voie d'entrée. Les résultats sont que les différentes réponses mesurées étaient identiques à un gain de  $\pm 0.2$  dB, excepté pour une voie, qui était atténuée de 6 dB. Nous avons aussi fait des essais en boucle fermée, et il s'est avéré que la réponse en fréquence était très plate jusque 20 kHz, de sorte que ce n'est pas le séquenceur qui est responsable de la diminution de la bande passante sur la figure 8.1 par rapport aux 20-20000 Hz. Par contre nous avons aussi testé d'autres voies de sortie pour le signal d'excitation, et il s'est avéré que le pic principal de la réponse n'apparaissait pas toujours au même échantillon. En revanche, les essais étaient reproductibles. Ainsi, la correction mise en œuvre se constitue d'un gain et d'un retard.

Pour conclure sur cette phase de calibrage des réponses du matériel électro-acoustique, nous pouvons dire que les défauts à corriger étaient mineurs, car une simple correction par un gain et un retard est suffisante. Le matériel utilisé est donc globalement de bonne qualité et ses caractéristiques possèdent une faible dispersion.

## 8.4 Calibration automatisée de la position des microphones

Les algorithmes que nous avons développés pour l'analyse de champs sonores sont d'autant plus performants que la marge d'incertitude sur la position des microphones est petite. Dans la pratique, nous avons eu beaucoup de difficultés pour trouver une solution permettant de placer un microphone à une position définie. De fait, nous avons préféré faire de notre mieux pour placer les microphones, mais utiliser une procédure permettant d'obtenir une meilleure estimation de la position des microphones plutôt que d'utiliser les positions de référence. La procédure que nous avons utilisée a été proposée par Raykar et Duraiswami [86]. Les conditions imposées sont de placer au moins 5 enceintes et de leur attacher un microphone dans la proximité de leur pavillon. Les performances sont meilleures si les enceintes servant à l'estimation entourent le réseau de microphones. Ceci est tout à fait compatible avec notre configuration expérimentale. L'algorithme se déroule en deux étapes. Une première estimation de la position des enceintes et des microphones est établie par "Multidimensional Scaling" (MDS). Cette étape nécessite de connaître chacun des temps de trajet entre enceintes/microphones, d'où la nécessité d'avoir placé des microphones dans la proximité des enceintes. Ceci nous permet de construire la matrice contenant les distances entre chacun des éléments du réseau global  $\mathcal{D}$  de dimension  $N \times N$  où  $N = N_{\text{tra}} + N_{\text{mic}}$ , et où  $d_{ij}$  contient la distance calculée à partir du temps de trajet entre le  $i^{\text{ème}}$  et le  $j^{\text{ème}}$  élément du réseau. Il est possible de calculer la matrice des produits scalaires  $\mathcal{B}$ , dont l'élément générateur  $b_{ij}$  vaut  $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$  (le produit scalaire entre les deux vecteurs  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$ ) à partir de la connaissance de la matrice de distance. Si nous prenons comme origine du repère le centre de gravité du réseau global de microphones/transducteurs, alors il peut être montré que [86] :

$$b_{ij} = -\frac{1}{2} \left[ d_{ij}^2 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N d_{il}^2 - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N d_{mj}^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{o=1}^N \sum_{p=1}^N d_{op}^2 \right] \quad (8.1)$$

Or, si  $\mathcal{X}$  est la matrice  $N \times 3$  contenant la position des éléments du réseau, la matrice contenant les produits scalaires  $\mathcal{B}$  peut justement se factoriser sous la forme  $\mathcal{B} = \mathcal{X}\mathcal{X}^T$ . Il suffit alors d'utiliser une décomposition en valeurs singulières de  $\mathcal{B} = U\Sigma U^T$  et de ne retenir que les trois premières colonnes de  $\mathcal{X}' = U\Sigma^{1/2}$  pour obtenir ladite matrice. En effet, seules les 3 premières valeurs propres sont énergétiques et les autres correspondent à du bruit. Ceci nous fournit une première estimation de la position des différents éléments du réseau.

La deuxième étape de la procédure de calibrage automatique nécessite de fixer un nouveau repère, en prenant une nouvelle origine, et en précisant l'orientation des axes de celui-ci. Pour cela, il est nécessaire d'appliquer trois translations, et deux rotations. Finalement, l'estimation est raffinée par une minimisation d'une norme quadratique de l'erreur entre les temps de trajets observés et les temps de trajet réels. Ceci conduit à une fonction de coût non linéaire, qui est minimisée par la méthode de Levenberg-Marquardt. Afin que l'algorithme converge vers la bonne solution, la méthode de Levenberg-Marquardt nécessite d'avoir un bon *a priori* sur la position des différents éléments. Cette initialisation est fournie par l'étape de Multidimensional Scaling.

En utilisant cette procédure, les positions estimées des microphones et des enceintes sont affichées sur la figure 8.3. Dans les grandes lignes, les positions estimées coïncident bien avec celles du réseau de référence. Toutefois, il existe des différences parfois sensibles entre les positions des microphones de référence et celles estimées, surtout au centre de l'antenne, où la densité de microphones est importante. Malheureusement, nous ne disposons pas de moyens pour évaluer la marge d'incertitude entre la position réelle et la position estimée, étant donné que la position réelle est inaccessible. Une étude sur les performances de l'estimateur a été réalisée dans [86], qui nous permet de voir que la configuration des enceintes est optimale pour diminuer la variance de l'estimateur dans ce cas : il faut que les enceintes soient le plus éloignées possibles l'une de l'autre.

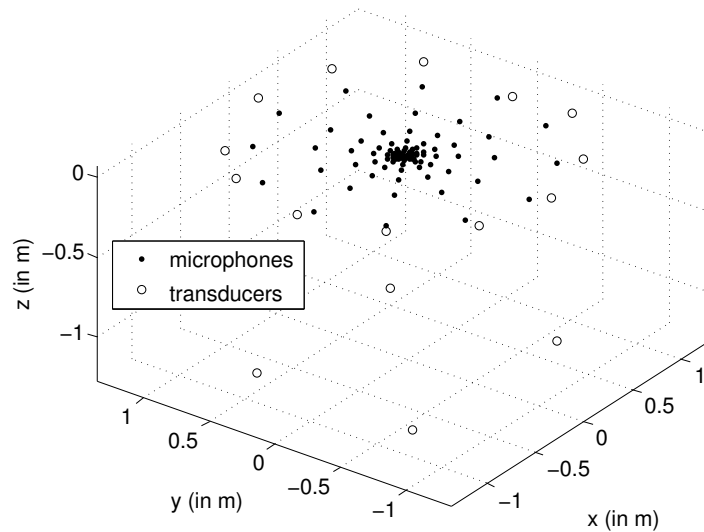


FIG. 8.3 – Position estimée des enceintes et des microphones à l’aide de la procédure de calibration automatique.

## 8.5 Analyse de champs sonores réels

Nous allons maintenant utiliser différents modules d’analyse de champs sonores et comparer les cartographies du champ sonore obtenues pour différentes fréquences d’analyse. Trois modules d’analyse différents ont été utilisés : un module de référence utilisant une pondération uniforme pour le vecteur de pondération, un module utilisant des vecteurs de pondération optimaux non régularisés, et un dernier utilisant des vecteurs de pondération optimaux régularisés ( $\lambda = 10^{-5}$ ). Il s’agit des mêmes modules d’analyse de champs sonores que ceux utilisés lors du chapitre 7 sur la simulation de notre dispositif d’analyse et de synthèse de champs sonores. La description du module d’analyse de champ sonore est disponible au début de la section 7.2.

Les pouvoirs de focalisation, ainsi que les gains pour un bruit blanc, pour les différents modules d’analyse, sont représentés sur la figure 8.4. Les courbes sont en accord avec les remarques effectuées au chapitre 5 décrivant les algorithmes permettant de calculer les filtres spatiaux nécessaires pour le module d’analyse : le pouvoir de focalisation du module d’analyse régularisé est moins performant que celui du module d’analyse non régularisé, compromis nécessaire afin de ne pas trop amplifier le bruit blanc. Le module d’analyse non régularisé amplifie le bruit blanc d’environ 35 dB de plus que par rapport au module d’analyse de référence, tandis que le module d’analyse régularisé ne l’amplifie au plus que de 5 dB, pour les fréquences inférieures à 4 kHz. Nous allons mettre en évidence les bienfaits du recours à la régularisation pour effectuer l’analyse. Les deux modules d’analyse utilisant des filtres spatiaux optimaux possèdent un meilleur pouvoir de focalisation que celui utilisant des vecteurs de pondérations uniformes.

Aux basses fréquences, nous voyons sur la figure 8.4 que le bruit présent sur les capteurs est amplifié de 35 dB. Afin d’illustrer l’influence du bruit présent sur les capteurs, nous avons calculé et représenté les cartographies du champ sonore pour une enceinte dont les coordonnées sont [ $r = 1.13$  m,  $az = 180$  dg,  $el = 3$  dg] sur la figure 8.5 (première ligne), et nous avons aussi représenté la cartographie pour une source ponctuelle de directivité monopolaire placée au même endroit (deuxième ligne). Nous pouvons observer que même la cartographie pour la source simulée, sans adjonction d’un bruit supplémentaire, dans le cas d’un module d’analyse non régularisé (colonne de gauche) est erronée. En revanche, les cartographies utilisant les deux autres modules d’analyse sont conformes à nos attentes : le pic spectral correspond bien à la direction d’incidence de la

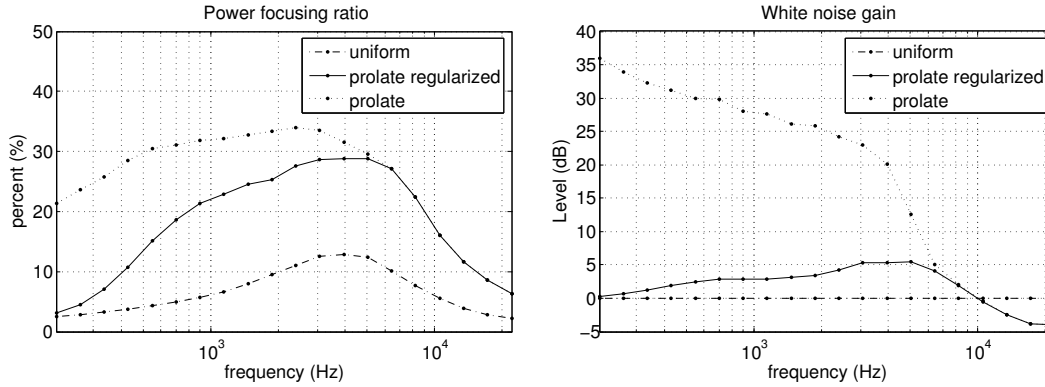


FIG. 8.4 – Pouvoir de focalisation (gauche) et Gain pour un bruit blanc (droite) pour les différents modules d'analyse utilisés.

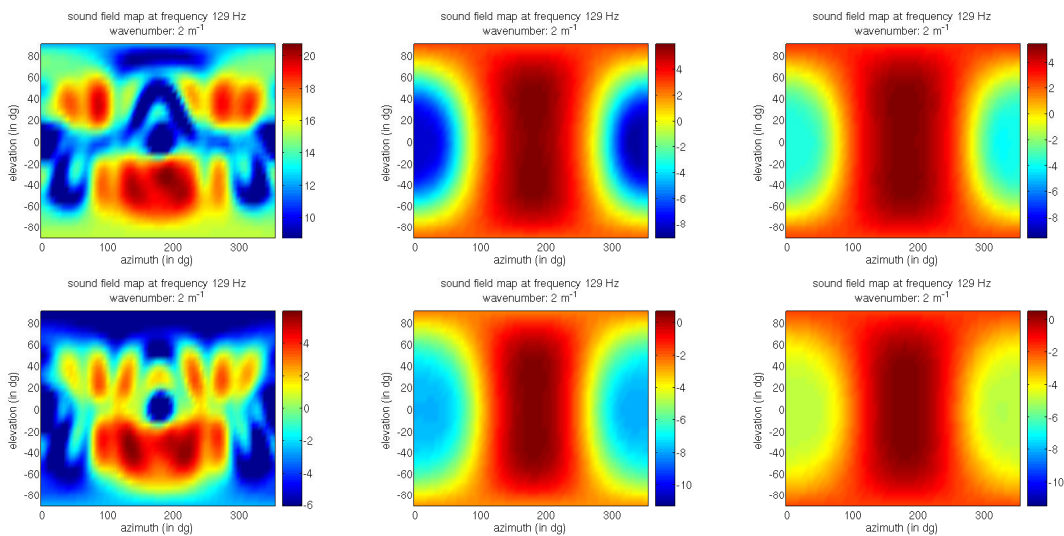


FIG. 8.5 – Cartographie d'une enceinte réelle (haut) de coordonnées sphériques [ $r = 1.13$  m,  $az = 180$  dg,  $el = 3$  dg], à la fréquence de 129 Hz, et d'un monopôle acoustique simulé, occupant la même position (bas). Vecteurs de pondérations optimaux non régularisés (gauche), régularisés (centre), et vecteurs de pondération uniformes (droite).

source. La résolution est faible, ce qui se traduit par un lobe principal étendu, caractéristique de l'analyse aux basses fréquences. La plage de dynamiques de l'analyse est légèrement plus importante dans le cas du module d'analyse régularisé. Si nous comparons maintenant les deux lignes entre elles, nous pouvons voir qu'elles sont assez semblables, avec toutefois de légères différences visibles concernant la dynamique des deux cartographies.

Étudions maintenant la même source, mais à la fréquence de 861 Hz, 7 fois supérieure à la précédente. La cartographie du champ sonore est affichée sur la figure 8.6. Nous pouvons voir que la résolution de l'imagerie est largement meilleure que dans le cas de la figure 8.5. À cette fréquence, l'amélioration obtenue en ayant recours aux modules d'analyse utilisant des vecteurs de pondération optimaux est clairement visible, étant donné que les cartographies correspondantes ne laissent apparaître que très peu de lobes secondaires. Le lobe principal se situe toujours dans la direction d'incidence de la source. Finalement, nous observons que la cartographie utilisant le module d'analyse régularisé est légèrement moins bruitée que celle utilisant le module d'analyse non régularisé. Les cartographies de la source réelle et celles de la source simulée sont aussi très

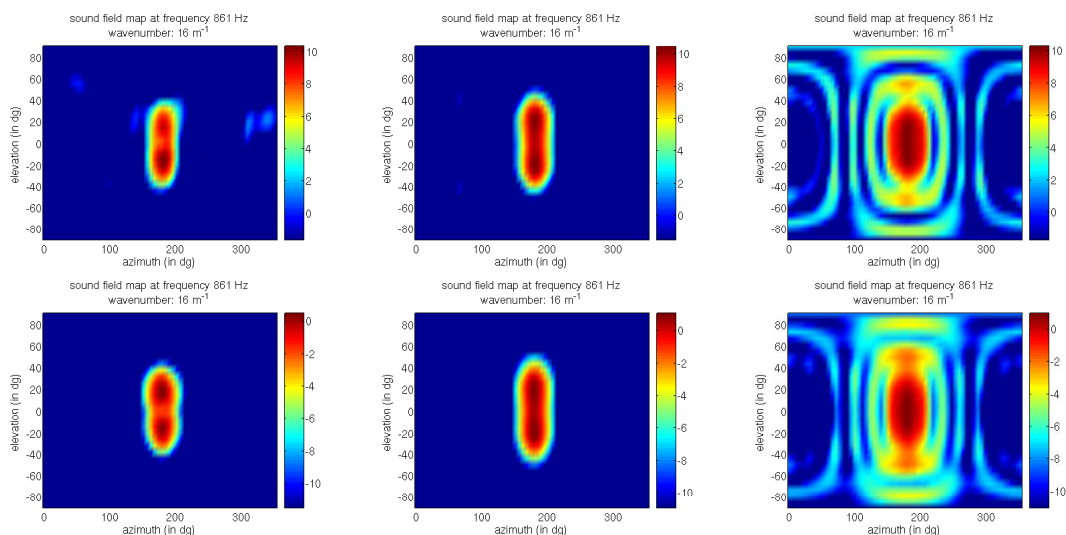


FIG. 8.6 – Cartographie d’une enceinte réelle (haut) de coordonnées sphériques [ $r = 1.13$  m,  $az = 180$  dg,  $el = 3$  dg], à la fréquence de 861Hz, et d’un monopôle acoustique simulé, occupant la même position. Vecteurs de pondérations optimaux non régularisés (gauche), régularisés (centre), et vecteurs de pondération uniformes (droite).

semblables.

Nous allons maintenant étudier une cartographie du champ sonore à une fréquence plus élevée, 6546 Hz. L’estimation des coordonnées de la source étudiée est [ $r = 1.11$  m,  $az = 31$  dg,  $el = 2$  dg]. Les cartographies correspondantes sont représentées sur la figure 8.7. La première chose visible est que les cartographies utilisant le module d’analyse de référence (colonne de droite) ne disposent pas d’une densité de points suffisante pour le maillage de la sphère définie par la relation de dispersion, de sorte que toutes les variations du spectre ne sont pas retranscrites. En revanche, ce n’est pas le cas pour les deux autres modules d’analyse pour lesquels la résolution a été fixée lors de la procédure du calcul des vecteurs de pondération optimaux. La deuxième chose visible est que les cartographies correspondantes aux deux modules d’analyse optimaux sont identiques, ce qui est conforme à nos attentes, étant donné que les pouvoirs de focalisation et le gain pour un bruit blanc sont identiques pour cette fréquence d’analyse. La dernière chose visible est que les cartographies de la source réelle diffèrent de celles de la source simulée : les premières laissent apparaître de nouveaux pics spectraux. La présence de nouveaux pics pour [ $az = 180$  et  $210$  dg,  $el = 0$  dg] traduit la détection de réflexions précoces par ces deux modules d’analyse, alors que celles-ci étaient totalement camouflées sur la cartographie du module de référence. Ainsi, l’analyse de champs sonores utilisant des vecteurs de pondération optimaux surpasse l’analyse de référence. Ces réflexions proviennent de la direction opposée à la direction d’incidence de la source : il s’agit sûrement des réflexions sur les enceintes situées à l’opposé du bâti par rapport à la source analysée, voir figure 8.2. Nous pouvons nous demander pourquoi seules 2 réflexions sont visibles au lieu des 11 attendues, étant donné qu’il y a 12 enceintes sur le bâti circulaire. La réponse à cette question a déjà été mentionnée plusieurs fois dans ce qui précède : l’analyse de champs sonores effectuée est localisée dans la pratique au centre de l’antenne, de sorte que seules ces réflexions secondaires éclairent principalement la zone analysée. Ces réflexions n’apparaissent pas sur les figures 8.5 et 8.6 parce que les longueurs d’onde concernées sont supérieures aux dimensions caractéristiques des enceintes, de sorte que la diffraction occasionnée par celles-ci est encore très limitée.

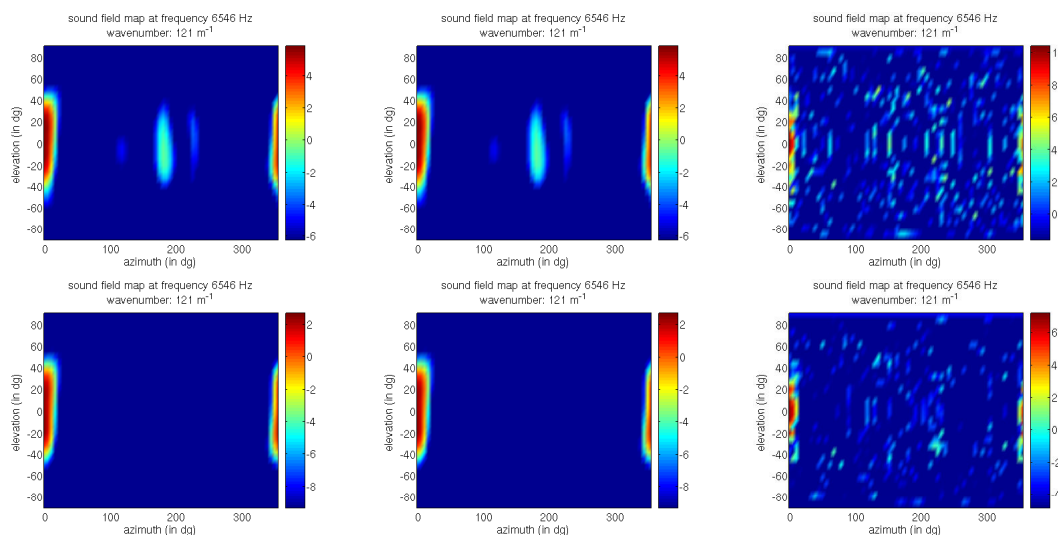


FIG. 8.7 – Cartographie d’une enceinte de coordonnées sphériques [ $r = 1.11$  m,  $az = 31$  dg,  $el = 2$  dg], à la fréquence de 6546Hz, réelle, et simulée numériquement. Vecteurs de pondérations optimaux non régularisés (gauche), régularisés (centre), et vecteurs de pondération uniformes (droite).

## 8.6 Conclusion sur la validation expérimentale du dispositif

Dans ce chapitre, nous avons validé notre stratégie pour l’analyse de champs sonores dans le cas d’une antenne quasi-bidimensionnelle aux erreurs de positionnement près. Il serait intéressant de poursuivre ces tests en utilisant de véritables antennes tridimensionnelles de façon à éliminer l’ambiguïté entre le haut et le bas inhérente aux antennes bidimensionnelles. Puis il serait intéressant de caractériser d’autres lieux qu’une salle anéchoïque, de façon à voir quel est le potentiel de ce système d’analyse de champs sonores dans des conditions réelles. Le fait d’avoir réalisé cette expérience en chambre anéchoïque nous a permis de valider des paramètres telles que la direction d’incidence de la source. Il serait intéressant de pouvoir caractériser aussi les premières réflexions, sachant que ce sont elles généralement qui sont prises en compte par les systèmes d’auralization actuels, et qu’un tout autre traitement est réservé pour le traitement de la réverbération tardive.

En ce qui concerne la synthèse de champs sonores, nous n’avons pas eu le temps de vérifier si la stratégie proposée au cours du chapitre 6 donnait des résultats plus satisfaisants que l’approche de l’égalisation multicanale traditionnelle. Cela apparaît donc être une perspective intéressante de cette thèse, réalisable à court terme.



---

# Conclusion

Le travail mené au cours de cette thèse a permis de jeter un regard nouveau sur le domaine de l'analyse et de la synthèse de champs sonores, réels ou virtuels. Toutes les méthodes de reproduction de champs sonores par un réseau de haut-parleurs s'appuient sur une description du champ sonore qui appartient à l'une des deux familles suivantes : les représentations harmoniques ou les représentations intégrales. Peu de travaux antérieurs existaient dont l'objectif était de relier ces deux différentes approches, et notre contribution a permis d'apporter un certain nombre de nouveaux résultats théoriques.

Nous avons montré que toutes les représentations harmoniques s'appuyant sur la théorie des transformées de Fourier généralisées étaient équivalentes d'un point de vue théorique. Nous avons de plus fait des liens entre les représentations harmoniques et les représentations intégrales. En particulier, nous avons montré que la conversion d'une représentation intégrale en une représentation harmonique est toujours réalisable tandis que la transition inverse s'accompagne de dégradations dans la représentation du champ sonore. Ceci est lié à la limitation principale de la formulation de Kirchoff du principe de Huygens : l'intégrale correspondante synthétise le champs des sources extérieures dans le domaine intérieur et réciproquement.

## Représentations intégrales

Un champ sonore dans un domaine vide de sources acoustiques est complètement caractérisé par la connaissance du profil temporel du champ de pression acoustique sur la frontière du domaine d'intérêt. Ce résultat permet d'envisager une méthode de reconstruction de champs sonores dans laquelle un réseau de sources secondaires essaie d'imposer les mêmes conditions aux limites sur la frontière du domaine d'intérêt que celles générées par les sources initiales.

L'objectif de tout dispositif d'analyse de champs sonores sur une zone étendue de l'espace serait de pouvoir caractériser complètement le champ à partir d'un ensemble discret, et de préférence fini, de paramètres. Nous avons montré en utilisant des résultats de la théorie des séries de Fourier généralisées que seule une répartition discrète d'harmoniques, encore connus sous l'appellation de modes, était suffisante pour caractériser le champ sonore sur une zone finie de l'espace. Si le domaine d'analyse est infini, nous avons eu recours à l'hypothèse que les champs sonores étaient à support de Fourier fini (à "bande limitée") de sorte que seule une répartition discrète d'échantillons suffit pour caractériser complètement le champ sonore. Ainsi, quel que soit le cas, domaine d'analyse fini ou non, seul un ensemble discret de paramètres suffit pour caractériser complètement le champ sonore. L'inconvénient est que cet ensemble de paramètres est encore de dimension infinie pour assurer une connaissance exacte du champ sonore.

Toute la difficulté du défi de l'analyse spatiale est de passer d'un ensemble discret de paramètres de dimension infinie à un ensemble fini de paramètres. Nous avons montré que cela n'était pas réalisable dans la pratique et qu'un nombre fini de paramètres ne permettait pas de pouvoir garantir une reconstruction exacte du champ sonore. De fait, tout dispositif réel (ayant seulement un nombre limité de mesures du champ sonore à leur disposition) ne peut réaliser qu'une ana-

lyse approchée. L'analyse de champs sonores permettant de réaliser le meilleur compromis entre le nombre de paramètres utilisé et la marge d'erreur sur le champ reconstruit utilise une analyse hybride associant le meilleur des représentations harmoniques et des représentations intégrales. Des représentations intégrales, elle utilise l'économie de stockage liée aux dispositifs d'holographie acoustique : seule la connaissance du comportement du champ sur la surface délimitant le domaine d'analyse permet de caractériser complètement le champ en tout point du domaine si celui-ci est vide de sources acoustiques. Des représentations harmoniques, elle utilise le fait que le champ sonore sur cette surface peut être caractérisé par une décomposition modale. Sous réserve que le nombre de modes pris en compte lors de la décomposition modale est assez grand, alors la connaissance du champ en tout autre point de la surface peut être garantie avec une certaine tolérance sur l'erreur.

Si nous faisons le bilan des trois derniers paragraphes, nous pouvons dire que la méthode de synthèse de champs sonores s'appuyant sur le contrôle des conditions aux limites peut s'effectuer sur un ensemble discret, et dans une certaine mesure fini, de points. En effet, si la répartition des points de contrôle est assez dense, alors la marge d'erreur sur la connaissance exacte du champ sonore en tout autre point de la surface peut être rendue arbitrairement basse. La seule restriction à cette approche est d'ordre pratique : le nombre de points requis est gigantesque pour pouvoir garantir une marge d'erreur décente, et aucun système dans l'état actuel de la technologie n'est capable de gérer une telle complexité, autant pour l'analyse (nombre de microphones requis) que pour la synthèse (nombre de points de contrôles et nombre de sources secondaires nécessaires pour avoir un bon contrôle des conditions aux limites). De plus, le principal inconvénient de cette approche majoritairement basée sur la représentation intégrale des champs sonores est son manque de scalabilité : la réduction du nombre de points servant pour l'analyse détériore rapidement la précision avec laquelle nous connaissons le champ sonore initial.

## Représentations harmoniques

Contrairement à l'analyse basée sur une modélisation du champ sonore à l'aide d'une représentation intégrale, l'analyse basée sur une représentation harmonique possède l'avantage de la scalabilité. En effet, un des avantages des représentations harmoniques sur les représentations intégrales est qu'il s'agit de représentations qui permettent d'étudier efficacement les effets de la discrétisation. L'observation du champ sonore sur un nombre fini de points peut dans certains cas introduire des ambiguïtés, étant donné que deux champs physiquement différents peuvent conduire à la même observation sur le réseau de points de mesure. Ce phénomène, intrinsèque à la représentation choisie pour décrire le champ sonore, est connu sous le nom de repliement spectral. L'utilisation des représentations harmoniques permet de caractériser efficacement le repliement spectral : la famille d'harmoniques initialement utilisée ne forme plus une famille libre lorsque ceux-ci ne sont observés que sur le réseau de points de mesure. Ainsi, tout objectif d'un dispositif d'analyse de champs sonores basé sur une représentation harmonique consiste à orthogonaliser au mieux la base d'harmoniques lorsque ceux-ci ne sont observés que sur le réseau de points de mesure. Pour accomplir cet objectif, il existe deux moyens complémentaires : la première consiste à optimiser la géométrie du réseau de microphones, et la deuxième consiste à mettre en œuvre un traitement du signal afin d'améliorer l'orthogonalité de la base d'harmoniques discrétisés.

Concernant le traitement du signal, nous avons employé une méthode qui estime au mieux la décomposition temps-espace/fréquence-vecteur d'onde du champ sonore analysé, représentation qui imite au mieux la manière dont fonctionnent les mécanismes de la perception auditive. Ainsi, l'algorithme décrit permet de filtrer la composante du champ sonore provenant d'une direction d'incidence spécifique en ayant pour référence une position donnée de l'espace, à savoir le centre de l'antenne de microphones. Cet objectif est implémenté en pratique en maximisant l'énergie du

filtre spatial pour le voisinage de la direction d'incidence souhaitée et minimise l'énergie pour toutes les autres directions d'incidence, qui constituent des signaux d'interférence. Pour cela, la seule hypothèse utilisée est que les champs sonores satisfont l'équation de propagation, et donc la relation de dispersion. Cette hypothèse renseigne sur la partie du domaine de Fourier pour laquelle est excitée la décomposition en ondes planes. L'optimisation du filtre spatial se fait en utilisant un ensemble continu de directions d'incidences : il ne s'agit pas de l'approche traditionnelle dans laquelle la réponse du filtre spatial est calculée de façon à minimiser l'erreur entre la réponse désirée et la réponse effective sur un ensemble discret de directions d'incidences. Cette amélioration a été rendue possible en utilisant des résultats d'analyse harmonique sur les fonctions d'ondes sphéroïdales aplaties et en utilisant le développement en série d'une onde plane en harmoniques sphériques. L'algorithme permet donc d'éviter d'avoir à se préoccuper du nombre et de la densité de directions d'incidence à considérer lors de l'optimisation du filtre spatial.

Le deuxième paramètre sur lequel il est possible d'améliorer les performances de l'analyse temps-espace/fréquence-vecteur d'onde est la géométrie de l'antenne de microphones. Nous avons montré qu'une bonne antenne devait comporter une forte densité de microphones au centre de l'antenne (point de référence pour l'analyse espace-vecteur d'onde) mais aussi des microphones assez éloignés, ceci afin d'obtenir des bonnes performances des algorithmes d'analyse sur toute la plage de fréquences des signaux audio. Plus le nombre de microphones utilisé et plus leur répartition est judicieusement choisie, meilleure est la qualité de l'analyse. Ainsi, l'analyse basée sur les représentations harmoniques possède bien l'avantage de la scalabilité, contrairement aux représentations intégrales. Ceci est dû au fait que le repliement spectral devient vite très important lorsqu'on diminue le nombre de points du maillage surfacique.

L'analyse de champs sonores basée sur les représentations intégrales possède l'avantage de caractériser le champ sur une zone étendue, mais l'inconvénient est le manque de scalabilité. Quant à l'analyse de champs sonores basée sur les représentations harmoniques, leur avantage est la scalabilité, mais cette scalabilité est obtenue au prix fort : l'analyse sous-jacente est localisée au centre de l'antenne, bien que la zone dans laquelle cette analyse est correcte s'agrandit à mesure que le nombre de microphones utilisé pour l'analyse croît.

Dans la pratique, les algorithmes d'analyse de champs sonore présentés dans cette thèse peuvent être utilisés comme briques élémentaires d'un système de prise de son directif performant, dont les perspectives d'utilisation sont vastes : elles s'adressent à toutes les méthodes de synthèse possibles, qu'il s'agisse de la Wave Field Synthesis, ou des procédés ambisoniques d'ordres élevés.

## Égalisation multicanale

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons voulu montrer l'efficacité de la représentation du champ sonore en ondes planes pour la synthèse, de la même manière que nous l'avons démontrée pour l'analyse. En particulier, nous avons présenté un algorithme d'égalisation multicanale minimisant l'erreur quadratique entre deux représentations harmoniques de champs sonores, qu'il s'agisse de la représentation du champ en impulsions de Dirac multidimensionnelles, comme dans le cas de l'égalisation multicanale traditionnelle, de la représentation du champ en harmoniques sphériques, ou de la représentation du champ sonore en ondes planes. Nous avons montré que la reconstruction du champ sonore associée à l'algorithme d'égalisation multicanale pour une représentation du champ sonore en ondes planes surpassait le même algorithme lorsque la représentation du champ sonore utilisée était les impulsions de Dirac multidimensionnelles. En particulier, le recours à la représentation en ondes planes ne déforme pas trop la réponse en fréquence du dispositif tandis que la réponse en fréquence des dispositifs d'égalisation multicanale était décroissante aux hautes fréquences. Le même algorithme d'égalisation multicanale peut être utilisé quelle que soit la méthode de synthèse considérée, qu'il s'agisse de la Wave Field Synthe-

---

sis, de l'égalisation multicanale traditionnelle, des procédés ambisoniques, ou des décompositions modales.

## Perspectives

Le travail que nous avons conduit tout au long de cette thèse est par nature interdisciplinaire : les disciplines concernées sont l'acoustique, le traitement du signal, toutes deux s'appuyant fortement sur les mathématiques appliquées. Même si l'objectif de cette thèse était de faire des connexions entre ces différentes disciplines, il n'en demeure pas moins qu'il est difficile d'être spécialiste de chacun de ces domaines. De ce fait, les perspectives de ce travail de thèse ne manquent pas.

Nous allons commencer par détailler les perspectives au niveau de l'analyse. Une perspective à court terme serait de valider notre approche de l'analyse spatiale expérimentalement en utilisant des antennes tridimensionnelles et non plus bidimensionnelles dans le but de faire une analyse spatiale de l'acoustique de plusieurs lieux, et voir si le système est capable de caractériser les premières réflexions par exemple. Une deuxième perspective de notre travail consisterait à essayer d'associer les avantages de notre approche pour l'analyse, utilisant un ensemble continu de directions d'incidences lors de l'optimisation de la fonction de coût pour le calcul du filtre spatial, aux avantages des approches traditionnelles, ayant une meilleure flexibilité. Ainsi, nous pourrions considérer notre approche comme un lot de contraintes supplémentaires pour l'approche introduite par Yan [112]. Nous pourrions alors utiliser d'autres normes que la norme quadratique pour la minimisation de la fonction de coût, etc.

Les algorithmes d'analyse de champs sonores que nous avons introduit utilisent le plus souvent une répartition non uniforme des microphones. Ainsi, le domaine de l'analyse de champs sonores pourrait tirer profit de résultats afférents au domaine de l'échantillonnage non uniforme, que ce soit pour l'interpolation ou que ce soit pour l'utilisation de transformées de Fourier rapides dans le cas non uniforme, sur lesquelles nous pourrions nous appuyer pour améliorer la complexité de calcul de nos filtres spatiaux.

Finalement, nous avons mentionné le caractère localisé de l'analyse effectuée dans le domaine des vecteurs d'onde par le réseau de microphones. Nous pensons qu'il s'agit des prémices de l'analyse temps-espace/fréquence-vecteur d'onde, et que beaucoup de résultats de la théorie concernant la transformée de Gabor ou les transformées en ondelettes pourraient enrichir la discussion sur l'analyse de champs sonores.

Concernant la synthèse de champs sonores, la méthode préconisée est d'analyser aussi bien la scène sonore à reproduire que la manière dont rayonne chacune des sources faisant partie du réseau de reconstruction. L'algorithme de synthèse effectue ensuite la projection orthogonale du champ de référence sur le sous-espace engendré par le réseau de sources secondaires. En agissant de la sorte, nous analysons la scène sonore de manière semi-aveugle : l'analyse sous-jacente du rayonnement des sources du réseau de reconstruction souffrira des limites dues à l'emploi des représentations de Fourier, notamment en termes de résolution et de dynamique par exemple. Étant donné que nous avons accès aux signaux de consigne des sources secondaires, il serait dommage de se priver de cette connaissance, comme c'est le cas actuellement. Il serait mieux ainsi d'utiliser des méthodes d'estimation paramétriques à *haute résolution* permettant de s'affranchir des limites classiques, ce qui est l'objectif des algorithmes introduit par Wang *et al.* [103]. Cela permettrait d'améliorer encore plus le réalisme spatial au niveau de la synthèse.

Pour conclure cette conclusion générale, nous proposons de revenir sur les objectifs principaux de cette thèse tels qu'il ont été précisés au cours de l'introduction, à savoir donner naissance à un cadre général commun pour l'étude des champs sonores, donner des critères quantitatifs permettant de juger la qualité du rendu spatial d'un dispositif haute-fidélité et envisager de nouvelles solutions

pour améliorer le rendu spatial d'une scène sonore. Nous avons bien introduit un cadre commun pour l'étude générale des champs sonores d'un point de vue théorique, car la liaison entre chacune des représentations que nous avons décrites pouvait se faire en passant par un domaine intermédiaire : le domaine spatio-temporel. C'est en utilisant cette méthode que nous avons pu montrer des résultats intéressants sur les liens entre les représentations harmoniques et les représentations intégrales. Malheureusement, ce lien devient beaucoup plus flou lorsque nous ne connaissons plus de manière idéale le champ sonore, de sorte qu'il est très difficile d'introduire des critères quantitatifs pour l'évaluation de l'analyse et de la synthèse du champ sonore qui ne soient pas dépendants de la méthode envisagée. Dans notre approche, nos critères d'évaluation pour l'analyse étaient le pouvoir de focalisation, le gain pour un bruit blanc, la résolution et la dynamique de la représentation. Il s'agit de critères propres au domaine de la formation de voies. Ces critères peuvent donc se généraliser à l'analyse lorsque la représentation employée est la décomposition en harmoniques sphériques, mais il est impossible de trouver d'équivalents si la représentation employée est une représentation intégrale du champ sonore. De la même manière, pour la synthèse de champs sonores, nous avons employé des critères tels que la norme quadratique de l'erreur et le rapport signal sur bruit spatial, mais ces critères dépendent de la représentation employée. Nous l'avons montré pour les cas de la représentation par impulsions de Dirac multidimensionnelles et de la représentation en ondes planes. La question à se poser est quelle est la norme quadratique et quel est le rapport signal sur bruit le plus pertinent. Logiquement, nous pensons qu'il s'agit de celui que nous avons employé, lié à la représentation localisée en ondes planes. En effet, cette représentation possède une multitude d'avantages : les exponentielles complexes sont simples à calculer et bénéficient de la propriété d'addition (propriété de convolution de la transformée de Fourier). De plus, cette représentation essaie d'imiter les mécanismes de la perception auditive pour l'analyse de scènes sonores.



# Bibliographie

- [1] *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* Abramowitz, Milton - Stegun, Irene A., 1964.
- [2] T. D. ABHAYAPALA, R. A. KENNEDY et R. C. WILLIAMSON : Nearfield broadband array design using a radially invariant modal expansion. *Journal of Acoustical Society of America*, 107(1):392–403, January 2000.
- [3] T. D. ABHAYAPALA et D. B. WARD : Theory and design of high-order sound field microphones using spherical microphone array. *ICASSP*, 2002.
- [4] T. AJDLER, L. SBAIZ et M. VETTERLI : The plenacoustic function and its sampling. *accepted to IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005.
- [5] T. AJDLER et M. VETTERLI : The plenacoustic function and its sampling. *IEEE Workshop on Model based Processing and Coding of Audio*, November 2002.
- [6] T. AJDLER et M. VETTERLI : The plenacoustic function, sampling and reconstruction. *ICASSP*, April 2003.
- [7] A. BERKHOUT : A holographic approach to acoustic control. *Journal of The Audio Engineering Society*, 36(12):977–995, December 1988.
- [8] A. BERKHOUT, D. de VRIES, J. BAAN et B. van den OETELAAR : A wave field extrapolation approach to acoustical modeling in enclosed spaces. *Journal of Acoustical Society Of America*, 105(3):1725–1733, March 1999.
- [9] A. BERKHOUT, D. de VRIES et J. SONKE : Array technology for acoustic wave field analysis in enclosures. *Journal of Acoustical Society of America*, 102(5):2757–2770, November 1997.
- [10] A. BERKHOUT, D. de VRIES et P. VOGEL : Acoustic control by wave field synthesis. *Journal of Acoustical Society of America*, 93(5):2764–2778, May 1993.
- [11] T. BETLEHEM et T. D. ABHAYAPALA : A modal approach to soundfield reproduction in reverberant rooms. *ICASSP*, April 2005.
- [12] T. BETLEHEM et T. D. ABHAYAPALA : Theory and design of sound field reproduction in reverberant rooms. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117(4):2100–2111, April 2005.
- [13] M. M. BOONE : Acoustic rendering with wave field synthesis. *ACM Siggraph and Eurographics*, 2001.

- [14] M. M. BOONE, E. N. VERHEIJEN et P. F. van TOL : Spatial sound-field reproduction by wave field synthesis. *Journal of the Audio Engineering Society*, 43(12):1003–1012, December 1995.
- [15] M. BOUCHARD : Multichannel affine and fast affine projection algorithms for active noise control and acoustic equalization systems. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 11(1):54–60, January 2003.
- [16] M. BOUCHARD et Y. FENG : Inverse structure for active noise control and combined active noise control/sound reproduction systems. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 9(2):141–151, February 2001.
- [17] M. BOUCHARD et S. QUEDNAU : Multichannel recursive-least-squares algorithms and fast-transversal-filter algorithms for active noise control and sound reproduction systems. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 8(5):606–618, September 2000.
- [18] C. BREINING, P. DREISEITEL, E. HÄNSLER, A. MARDER, B. NITSCH, H. PUDER, T. SCHERTLER, G. SCHMIDT et J. TILP : Acoustic echo control. an application of very-high-order adaptive filters. *IEEE Signal Processing Magazine*, p. 42–69, July 1999.
- [19] T. P. BRONEZ : Spectral estimation of irregularly sampled multidimensional processes by generalized prolate spheroidal sequences. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36(12):1862–1873, December 1988.
- [20] M. BRUNEAU : *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermes, 1998.
- [21] H. BUCHNER, S. SPORS et W. KELLERMAN : Wave-domain adaptive filtering : Acoustic echo cancellation for full-duplex systems based on wave field synthesis. *Proceedings of ICASSP*, 2004.
- [22] L. L. CAMPBELL : Fourier and hankel bandlimited functions. *Sampling Theory in Signal and Information Processing*, 1:25–32, 2002.
- [23] T. CAULKINS, A. LABORIE, E. CORTEEL, R. BRUNO, S. MONTOYA et O. WARUSFEL : Using a high-resolution microphone array to characterize the early reflections generated by a wfs loudspeaker array. *28th International Conference of the Audio Engineering Society*, Piteå, July 2006.
- [24] D. G. ČIRIĆ et M. A. MILOŠEVIC : Transient noise influence in mls measurement of room impulse response. *Acta Acustica United with Acustica*, 91(1):110–120, 2005.
- [25] E. CORTEEL : *Adaptations de la Wave Field Synthesis aux conditions réelles*. Thèse de doctorat, Université Paris VI Marie Curie, October 2004.
- [26] E. CORTEEL, U. HORBACH et R. S. PELLEGRINI : Multichannel inverse filtering of multiexciter distributed mode loudspeakers for wave field synthesis. *112th Convention of the AES*, May 2002.
- [27] J. DANIEL et S. MOREAU : Further study of sound field coding with high order ambisonics. *116th Convention of The Audio Engineering society*, May 2004.
- [28] J. DANIEL, R. NICOL et S. MOREAU : Further investigations of high order ambisonics and wave field synthesis for holophonic sound imaging. *114th Convention of the Engineering Society*, March 2003.



- [29] D. de VRIES : Sound reinforcement by wavefield synthesis : Adaptation of the synthesis operator to the loudspeaker directivity characteristics. *Journal of the Audio Engineering Society*, 44(12):1120–1131, December 1996.
- [30] D. de VRIES et M. M. BOONE : Wave field synthesis and analysis using array technology. *IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, 1999.
- [31] D. G. DUFFY : *Green's Functions with Applications*. Chapman And Hall/CRC, 2001.
- [32] A. DUTT et V. ROKHLIN : Fast fourier transforms for nonequispaced data, ii. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2:85–100, 1995.
- [33] S. J. ELLIOTT, I. M. STOTHERS et P. A. NELSON : A multiple error lms algorithm and its application to the active noise control of sound and vibration. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-35(10):1423–1434, October 1987.
- [34] A. FARINA : Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique. *108th Convention of the AES*, February 2000.
- [35] J. A. FESSLER : Nonuniform fast fourier transforms using min-max interpolation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(2):560–574, February 2003.
- [36] M. GERZON : Periphony : With-height sound reproduction. *Journal of the Audio Engineering Society*, 21(1):2–10, January/February 1973.
- [37] M. GERZON : Ambisonics in multichannel broadcasting and video. *Journal of the Audio Engineering Society*, 33(11):859–871, November 1985.
- [38] G.-O. GLENTIS, K. BERBERIDIS et S. THEODORIDIS : Efficient least-squares adaptive algorithms for fir transversal filtering. *IEEE Signal Processing Magazine*, p. 13–41, July 1999.
- [39] D. GOTTLIEB et C.-W. SHU : On the Gibbs phenomenon and its resolution. *SIAM Review*, 39(4):644–668, December 1997.
- [40] M. GUILLAUME et Y. GRENIER : Multichannel equalization analysis in sound reproduction systems. *Tonmeistertagung*, 2005.
- [41] M. GUILLAUME et Y. GRENIER : Experimental 3d sound field analysis with a microphone array. *28th International Conference of the Audio Engineering Society*, July 2006.
- [42] M. GUILLAUME et Y. GRENIER : Sound field analysis based on generalized prolate spheroidal wave sequences. *120th Convention of the Audio Engineering Society*, May 2006.
- [43] M. GUILLAUME et Y. GRENIER : Sound field analysis with a two-dimensional microphone array. *ICASSP*, 2006.
- [44] M. GUILLAUME et Y. GRENIER : Theoretical sound field analysis. Technical report, École Nationale Supérieure des Télécommunications, 2006.
- [45] M. GUILLAUME et Y. GRENIER : Sound field analysis based on analytical beamforming. *accepted to Applied Signal Processing*, 2007.
- [46] M. GUILLAUME, Y. GRENIER et G. RICHARD : Iterative algorithms for multichannel equalization in sound reproduction systems. *ICASSP*, 2005.

- [47] N. A. GUMEROV et R. DURAI SWAMI : Fast multipole method based filtering of non-uniformly sampled data. *ICASSP*, 2004.
- [48] R. H. HARDIN et N. J. A. SLOANE : Mclaren's improved snub cube and other new spherical designs in three dimensions. *Discrete Computational Geometry*, 15:429–441, 1995.
- [49] E. HULSEBOS, D. de VRIES et E. BOURDILLAT : Improved microphone array configurations for auralization of sound fields by wave field synthesis. *110th Convention of the AES*, May 2001.
- [50] S. ISE : A principle of sound field control based on the kirchhoff-helmholtz integral equation and the theory of inverse systems. *ACUSTICA acta acoustica*, 85(1):78–87, 1999.
- [51] S. M. KAY et S. L. MARPLE : Spectrum analysis—a modern perspective. *Proceedings of the IEEE*, 69(11):1380–1418, November 1981.
- [52] R. A. KENNEDY, T. D. ABHAYAPALA et D. B. WARD : Broadband nearfield beamforming using a radial beampattern transformation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(8):2147–2156, August 1998.
- [53] B.-K. KIM et J.-G. IH : Design of an optimal wave-vector filter for enhancing the resolution of reconstructed source field by near-field acoustical holography (nah). *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(6):3289–3297, June 2000.
- [54] Y.-J. KIM, J. S. BOLTON et H.-S. KWON : Partial sound field decomposition in multi-reference near-field acoustical holography by using optimally located virtual references. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115(4):1641–1652, April 2004.
- [55] O. KIRKEBY et P. A. NELSON : Digital filter design for inversion problems in sound reproduction. *Journal of the Audio Engineering Society*, 47(7/8):583–595, July/August 1999.
- [56] O. KIRKEBY, P. A. NELSON, H. HAMADA et F. ORDUNA-BUSTAMANTE : Fast deconvolution of multichannel systems using regularization. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 6(2):189–194, March 1998.
- [57] H. KRIM et M. VIBERG : Two decades of array signal processing research. *IEEE Signal Processing Magazine*, p. 67–94, July 1996.
- [58] A. LABORIE, R. BRUNO et S. MONTOYA : A new comprehensive approach of surround sound recording. *114th Convention of The Audio Engineering Society*, March 2003.
- [59] V. I. LEBEDEV et A. L. SKOROKHODOV : Quadrature formulas of orders 41, 47 and 53 for the sphere. *Russ. Acad. Sci. Dokl. Math.*, 45(3):587–592, 1992.
- [60] Z. LI : A robust and self-reconfigurable design of spherical microphone array for multi-resolution beamforming. *Proceedings of ICASSP*, 4:1137–1140, 2005.
- [61] Z. LI et R. DURAI SWAMI : Hemispherical microphone arrays for sound capture and beamforming. *IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, New Paltz:106–109, October 2005.
- [62] Z. LI, R. DURAI SWAMI, E. GRASSI et L. S. DAVIS : Flexible layout and optimal cancellation of the orthonormality error for spherical microphone arrays. *ICASSP*, May 2004.

- [63] Z. LI, R. DURAI SWAMI et N. A. GUMEROV : Capture and recreation of higher order 3d sound fields via reciprocity. *International Conference on Audio Display*, 2004.
- [64] J. D. MAYNARD, E. G. WILLIAMS et Y. LEE : Nearfield acoustic holography : I. theory of generalized holography and the development of nah. *Journal of the Acoustical Society of America*, 78(4):1395–1412, October 1985.
- [65] B. D. VAN VEEN et K. M. BUCKLEY : Beamforming : A versatile approach to spatial filtering. *IEEE ASSP Magazine*, p. 4–24, April 1998.
- [66] J. MEYER et G. ELKO : A highly scalable microphone array based on an orthonormal decomposition of the soundfield. *ICASSP*, May 2002.
- [67] M. MIYOSHI et Y. KANEDA : Inverse control of room acoustics using multiple loudspeakers and/or microphones. *Proceedings of ICASSP*, 1986.
- [68] P. MORSE et H. FESHBACH : *Methods of Theoretical Physics*. Mc Graw-Hill, 1953.
- [69] J. N. MOURJOPOULOS : Digital equalization of room acoustics. *Journal of the Audio Engineering Society*, 42(11):884–900, November 1994.
- [70] S. MÜLLER et P. MASSARANI : Transfer-function measurement with sweeps. *Journal of The Audio Engineering Society*, 49(6):443–471, June 2001.
- [71] P. A. NELSON, H. HAMADA et S. J. ELLIOTT : Adaptive inverse filters for stereophonic sound reproduction. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(7):1621–1632, July 1992.
- [72] P. A. NELSON, F. ORDUNA-BUSTAMANTE et H. HAMADA : Inverse filter design and equalization zones in multichannel sound reproduction. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 3(3):185–192, May 1995.
- [73] P. A. NELSON et J. ROSE : The time domain response of some systems for sound reproduction. *Journal of Sound and Vibration*, 296(3):464–493, September 2006.
- [74] R. NICOL et M. EMERIT : Holophony versus ambisonic : Deriving a hybrid method for 3d-sound reproduction in videoconferencing.
- [75] R. NICOL et M. EMERIT : 3d-sound reproduction over an extensive listening area : a hybrid method derived from holophony and ambisonic. *16th AES International Conference on Spatial Sound Reproduction*, April 1999.
- [76] M. PARK et B. RAFAELY : Sound-field analysis by plane-wave decomposition using spherical microphone array. *Journal of Acoustical Society Of America*, 118(5):3094–3103, November 2005.
- [77] L. C. PARRA : Least-squares frequency-invariant beamforming. *IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, New Paltz:102–105, October 2005.
- [78] L. C. PARRA : Steerable frequency-invariant beamforming for arbitrary arrays. *Journal of Acoustical Society of America*, 119(6):3839–3847, June 2006.
- [79] M. POLETTI : Three-dimensional surround sound systems based on spherical harmonics. *Journal of the Audio Engineering Society*, 53(11):1004–1025, November 2005.
- [80] D. POTTS, G. STEIDL et M. TASCHE : *Fast Fourier Transforms for Nonequispaced Data : a Tutorial*. J.J. Benedetto and P. Ferreira, 2005.

- [81] A. D. POULARIKAS : *The Transforms And Applications Handbook*. CRC Press, 2000.
- [82] R. RABENSTEIN, P. STEFFEN et S. SPORS : Representation of two-dimensional wave fields by multidimensional signals. *Signal Processing*, 86(6):1341–1351, June 2006.
- [83] B. RAFAELY : Plane wave decomposition of the sound field on a sphere by spherical convolution. *Journal of the Acoustical Society of America*, 116(4):2149–2157, October 2004.
- [84] B. RAFAELY : Analysis and design of spherical microphone arrays. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 13(1):135–143, January 2005.
- [85] N. RAYESS et S. F. WU : Experimental validations of the helmholtz method for reconstructing acoustic radiation from a complex vibrating structure. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(6):2955–2964, June 2000.
- [86] V. C. RAYKAR et R. DURAI SWAMI : Automatic position calibration of multiple microphones. *ICASSP*, 2004.
- [87] D. D. RIFE et J. VANDERKOOY : Transfer-function measurement with maximum-length sequences. *Journal of the Audio Engineering Society*, 37(6):419–444, June 1989.
- [88] J. J. SHYNK : Frequency-domain and multirate adaptive filtering. *IEEE Signal Processing Magazine*, p. 14–37, January 1992.
- [89] D. SLEPIAN : Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis, and uncertainty—iv : Extensions to many dimensions ; generalized prolate spheroidal wave functions. *Bell System Technical Journal*, 43(6):3009–3058, November 1964.
- [90] D. C. SMITH : An introduction to distribution theory for signals analysis. *Digital Signal Processing*, 13:201–232, 2003.
- [91] D. C. SMITH : An introduction to distribution theory for signals analysis. part ii. the convolution. *Digital Signal Processing*, 16:419–444, 2006.
- [92] S. SPORS, H. BUCHNER et R. RABENSTEIN : Efficient active listening room compensation for wave field synthesis. *116th Convention of The Audio Engineering society*, May 2004.
- [93] S. SPORS, H. BUCHNER et R. RABENSTEIN : A novel approach to active listening room compensation for wave field synthesis using wave-domain adaptive filtering. *Proceedings of ICASSP*, 2004.
- [94] G.-B. STAN, J.-J. EMBRECHTS et D. ARCHAMBEAU : Comparison of different impulse response measurement techniques. *Journal of the Audio Engineering Society*, 50(4):249–262, April 2002.
- [95] E. W. START, D. de VRIES et A. BERKHOUT : Wave field synthesis operators for bent line arrays in a 3d space. *ACUSTICA acta acoustica*, 85(6):883–892, 1999.
- [96] T. STROHMER : Numerical analysis of the non-uniform sampling problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 122(1-2):297–316, 2000.
- [97] S. TAKANE, Y. SUZUKI et T. SONE : A new method for global sound field reproduction based on kirchhoff’s integral equation. *ACUSTICA acta acoustica*, 85(2):250–257, 1999.

- [98] F. TALANTZIS et D. B. WARD : Robustness of multichannel equalization in an acoustic reverberant environment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114(2):833–841, August 2003.
- [99] D. J. THOMSON : Spectrum estimation and harmonic analysis. *Proceedings of the IEEE*, 70(9):1055–1096, September 1982.
- [100] J. VANDERKOOY : Aspects of mls measuring systems. *Journal of the Audio Engineering Society*, 42(4):219–231, April 1994.
- [101] W. A. VERONESI et J. D. MAYNARD : Nearfield acoustic holography (nah) ii. holographic reconstruction algorithms and computer implementation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 81(5):1307–1322, May 1987.
- [102] W. A. VERONESI et J. D. MAYNARD : Digital holographic reconstruction of sources with arbitrarily shaped surfaces. *Journal of the Acoustical Society of America*, 85(2):588–598, February 1989.
- [103] Y. WANG, J. CHEN et W. FANG : Tst-music for joint doa-delay estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(4):721–729, April 2001.
- [104] Z. WANG et S. F. WU : Helmholtz equation least-squares method for reconstructing the acoustic pressure field. *Journal of The Acoustical Society of America*, 102(4):2020–2032, October 1997.
- [105] D. B. WARD, R. A. KENNEDY et R. C. WILLIAMSON : Theory and design of broadband sensor arrays with frequency invariant far-field beam patterns. *Journal of Acoustical Society of America*, 2(97):1023–1034, February 1995.
- [106] D. B. WARD, R. A. KENNEDY et R. C. WILLIAMSON : Fir filter design for frequency invariant beamformers. *IEEE Signal Processing Letters*, 3(3):69–71, March 1996.
- [107] E. WILLIAMS : *Fourier Acoustics*. Academic Press, 1999.
- [108] S. F. WU : On reconstruction of acoustic pressure fields using the helmholtz equation least-squares method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(5):2511–2522, May 2000.
- [109] S. F. WU : Hybrid near-field acoustic holography. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115(1):207–217, January 2004.
- [110] S. F. WU et J. YU : Reconstructing interior acoustic pressure fields via helmholtz equation least-squares method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104(4):2054–2060, October 1998.
- [111] S. F. WU et X. ZHAO : Combined helmholtz equation least-squares method for reconstructing acoustic radiation from arbitrarily shaped surfaces. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112(1):179–188, July 2002.
- [112] S. YAN : Optimal design of fir beamformer with frequency invariant patterns. *Applied Acoustics*, 67:511–528, 2006.