



HAL
open science

Méthodes numériques de couplage pour la vibroacoustique instationnaire : éléments finis spectraux d'ordre élevé et potentiels retardés

Pascal Grob

► **To cite this version:**

Pascal Grob. Méthodes numériques de couplage pour la vibroacoustique instationnaire : éléments finis spectraux d'ordre élevé et potentiels retardés. Mathématiques [math]. ENSTA ParisTech, 2006. Français. NNT : . pastel-00002492

HAL Id: pastel-00002492

<https://pastel.hal.science/pastel-00002492v1>

Submitted on 5 Jun 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS IX

Spécialité

Mathématiques Appliquées

présentée par

Pascal GROB

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS IX Dauphine

Sujet de la thèse :

Méthodes numériques de couplage
pour la vibroacoustique instationnaire :
Eléments finis spectraux d'ordre élevé et potentiels retardés.

soutenue le 5 Mai 2006 devant le Jury composé de

A. Bachelot	Suffragant (Université Bordeaux-1)
A. Buffa et T. Ha Duong	Rapporteurs (I.M.A.T.I. Pavia , U.T.C. Compiègne)
G. Cohen et P. Joly	Directeurs de thèse (I.N.R.I.A. Rocquencourt)
G. Turinici	Suffragant (Université Paris IX Dauphine)
I. Terrasse	Invitée d'honneur (E.A.D.S. C.C.R.)

Sommaire

Introduction	5
I Couplage non conforme d'éléments finis mixtes spectraux avec condensation de masse pour la vibroacoustique instationnaire	17
1 Analyse d'une méthode d'éléments finis mixtes spectraux avec condensation de masse sur un cas modèle.	19
1.1 Présentation de la méthode	21
1.2 Approximation par éléments finis spectraux quadrangulaires standard.	21
1.3 Reformulation de la méthode comme une approximation par éléments finis mixtes.	27
1.4 Analyse de la méthode des éléments finis isoparamétriques spectraux avec condensation de masse	38
1.5 Quelques schémas pour la discrétisation en temps	56
2 Application de la méthode des éléments finis mixtes spectraux au modèle de plaque de Reissner-Mindlin en régime transitoire.	59
2.1 Le modèle de plaque de Reissner-Mindlin	61
2.2 Discrétisation par éléments finis spectraux en espace et différences finies en temps.	72
2.3 Analyse du schéma	81
2.4 Un mot sur la discrétisation en temps	88
2.5 Analyse par ondes planes	89
2.6 Résultats numériques	95
3 Couplage éléments finis spectraux 2D-3D pour la vibroacoustique instationnaire	107
3.1 Les équations de la vibroacoustique instationnaire	109
3.2 Caractère bien posé du problème	112
3.3 Une méthode numérique non conforme sur maillage conforme	115
3.4 Résultats numériques	127

II Couplage éléments finis-potentiels retardés: Application à la vibroacoustique instationnaire et aux conditions aux limites transparentes. 135

4 Couplage éléments finis-potentiels retardés pour la vibroacoustique instationnaire	137
4.1 Introduction	139
4.2 Un problème modèle	140
4.3 Un opérateur Dirichlet-Neumann et ses propriétés	142
4.4 Formulation surfacique pour le système vibroacoustique	152
4.5 Le schéma d'approximation espace-temps naturel	156
4.6 Un schéma de couplage éléments finis/potentiels retardés utilisant des grilles décalées	173
4.7 Extension aux vibrations d'une plaque	186
4.8 Résultats numériques	189

Introduction

I. La problématique industrielle

La vibroacoustique est le domaine de la science qui s'intéresse aux sons émis par les vibrations d'une structure mince (de type plaque ou coque). Ce type de phénomène physique est présent dans plusieurs milieux industriels comme l'automobile et l'aéronautique. Ce travail de thèse, effectué en collaboration avec le groupe industriel aéronautique E.A.D.S., a pour origine deux axes principaux de recherche industrielle :

- l'insonorisation des cockpits d'AIRBUS : Les sources acoustiques externes tels que les bruits aérodynamiques, les bruits de jets... mettent en vibration le cockpit de l'avion et transmettent, à l'intérieur de l'habitacle, des ondes acoustiques qui altèrent le confort des passagers.
- la protection des composants électronique embarqués : Les lanceurs ARIANE-5 transportent des satellites qui comportent des systèmes électroniques particulièrement sensibles... et accessoirement onéreux. Au décollage du lanceur, les carreaux situés au sol dévient partiellement l'onde sonore générée par le moteur central VULCAIN mettant ainsi la structure de la coiffe où se trouve le satellite en vibration.



FIG. 1: Cockpit d'un A380

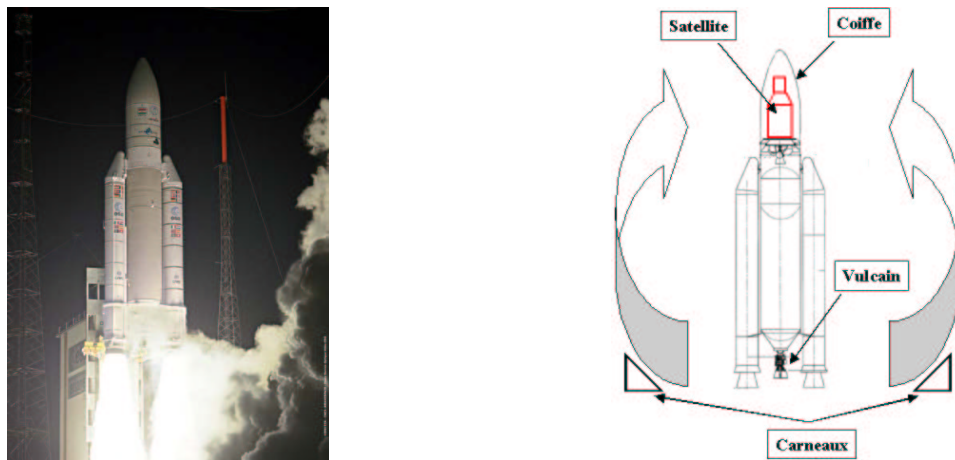


FIG. 2: Lanceur Ariane-5

Ces deux exemples illustrent bien que le phénomène auquel on s'intéresse est un phénomène de couplage entre le fluide environnant et une structure mince (l'habitacle de l'Airbus ou la coiffe du lanceur). Sous l'hypothèse de petites déformations, la modélisation standard consiste à coupler l'équation des ondes acoustiques avec un modèle de structure mince de type membrane, plaque et plus généralement coque [Lesueur, 1988]. Nous focaliserons nos développements mathématiques et numériques sur l'aspect couplé du problème en insistant plus particulièrement sur le couplage en temps de méthodes numériques. Dans cette optique, et par souci de clarté, nous nous limiterons aux cas des plaques ce qui, avouons le, est une approximation brutale des Airbus proche de la faute de goût. Cependant le formalisme et les méthodes de couplage développées dans cette thèse s'étendent sans aucune difficulté aux cas des coques. Du reste, nous avons choisi le modèle de plaque de Reissner-Mindlin, suffisamment général pour modéliser les structures composites épaisses et dont l'extension naturelle, lorsque l'on courbe la géométrie, est précisément un modèle de coque mince.

La diversité et la nature des sources d'excitation acoustiques requièrent, pour simuler numériquement ce type de problème de couplage, de faire des calculs numériques sur une large bande de moyennes fréquences (cf. Fig. 3).

La plupart des méthodes numériques existantes pour la simulation numérique des phénomènes vibroacoustiques basses fréquences, ont ceci de commun qu'elles utilisent essentiellement des méthodes de type décomposition modales sur la partie structure [Lesueur, 1988], [Morand et Ohayon, 1992]. Ce type d'approche, bien adaptée au cas des géométries simples, montre rapidement ses limites lorsque l'on cherche à simuler des cas réalistes et surtout lorsque l'on souhaite monter en fréquence. En effet, le nombre de modes numériques à calculer croît avec la fréquence et le stockage de ces modes devient alors particulièrement lourd. Les phénomènes hautes fréquences (HF) sont quant à eux souvent traités par des méthodes statistiques de types S.E.A. (Statistical Energy Analysis) qui permettent, grâce à l'utilisation du concept d'énergie et à l'approche statistique des couplages entre modes de sous-systèmes, de modéliser la vibroacoustique des structures industrielles complexes HF [Kishimoto *et al.*, 1995]. Les méthodes d'éléments finis et d'équations

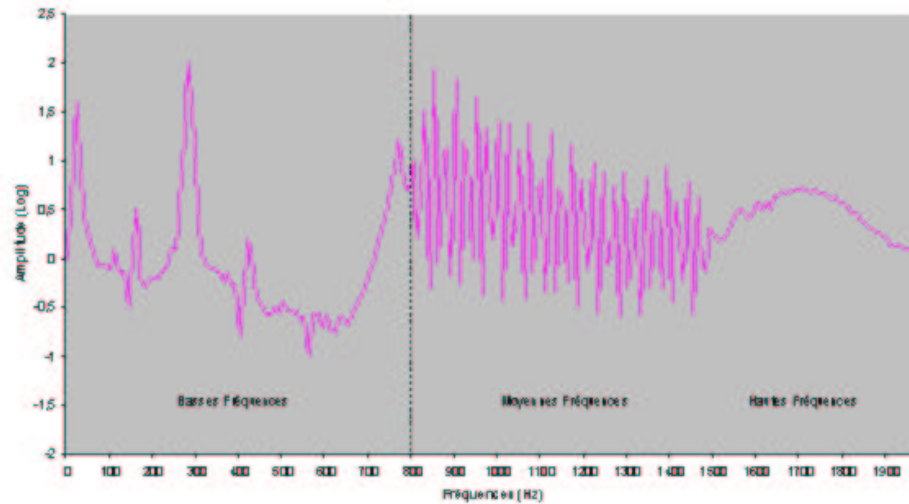


FIG. 3: Signal basses/moyennes/hautes fréquences

intégrales sont particulièrement bien adapté à la gamme des moyennes fréquences, c'est à dire celle qui nous intéresse. Dans ce type de problème de couplage, la géométrie et les zones d'hétérogénéité sont fixées par la partie structure. Il est alors naturel de contruire une méthode de couplage basée sur une approximation spatiale de l'inconnue mécanique par éléments finis. A cet effet nous proposerons deux méthodes de couplage :

1. Une première méthode couplant des éléments finis mixtes spectraux, 2D pour la structure mince, et 3D pour le fluide environnant.
2. Sous l'hypothèse (réaliste) d'un fluide homogène, une seconde méthode couplant toujours des éléments finis 2D (pour la structure mince) avec une méthode d'éléments finis de frontière basée sur une représentation intégrale de l'inconnue fluide.

A notre connaissance, la plupart des méthodes numériques existantes pour la résolution des systèmes vibroacoustiques sont construites à partir de modèles physiques décrits en régime harmonique. Une spécificité déjà mentionnée de notre problématique industrielle, est celle qui consiste à faire de la simulation numérique sur une large bande de fréquence. En régime harmonique, les méthodes numériques de type éléments finis imposent alors, pour chaque fréquence, l'inversion d'un système linéaire potentiellement de grande taille, ce qui se révèle souvent bien trop coûteux en temps de calcul. Une alternative efficace est alors d'effectuer les calculs numériques en régime transitoire afin d'obtenir, si besoin est, les résultats en régime harmonique sur la bande de fréquence considérée par des postraitement rapides de type FFT. Cependant l'aspect transitoire induit, de part la discrétisation en temps, une problématique majeure et délicate : la stabilité du couplage des schémas traditionnellement utilisés pour l'approximation des inconnues de chaque milieu (fluide et structure).

La problématique de cette thèse est donc la suivante : savoir trouver des schémas de discrétisation espace-temps pour le problème couplé :

- performants (en de temps de calcul mais également en terme de stockage mémoire) et précis,
- garantis stable : c'est à dire démontrés inconditionnellement stables ou dont on sait théoriquement contrôler la condition de stabilité.

L'outil principal pour satisfaire le premier point sera l'utilisation d'éléments finis mixtes spectraux utilisant le principe de condensation de masse, notamment pour la discrétisation en espace de l'inconnue mécanique. Pour satisfaire le deuxième point, nous nous fixons comme impératif de construire des schémas en temps qui conservent une énergie discrète pour le système couplé.

II. Première partie : couplage non conforme entre éléments finis mixtes spectraux d'ordres élevés 2D et 3D

Puisque l'on s'est fixé comme contrainte, pour les raisons mentionnées précédemment, d'utiliser une méthode d'éléments finis sur la partie structure, une première approche naturelle pour le traitement du couplage consiste à coupler des éléments 2D avec des éléments finis 3D pour la partie fluide. C'est la première approche que nous allons développer. Cependant les méthodes d'éléments finis standards, requièrent, pour les gros cas de calcul (notamment en 3D), des ressources informatiques rapidement (trop) importantes. Nous nous fixons par conséquent comme objectif de satisfaire autant que possible les deux contraintes informatiques majeures que sont :

- la minimisation du temps de calcul.
- la minimisation du stockage mémoire des matrices de masse et de rigidité provenant de la semi-discrétisation par éléments finis.

Les éléments couramment utilisés, comme les éléments \mathbb{P}^1 , nécessitent pour les cas hautes fréquences ou les géométries de grande taille, un maillage très fin qui induit la gestion de grosses matrices pénalisant ainsi le temps de calcul. A l'inverse, une méthode d'éléments finis d'ordre élevé conjuguée à des formules de quadrature suffisamment précises permet alors une convergence spectrale [Cohen, 2002] (extrêmement rapide) de la solution approchée vers la solution théorique lorsque le pas de maillage tend vers 0, et ce, en limitant sensiblement la taille des cas de calcul envisagés.

Cette remarque est à la base de la méthode d'éléments finis mixtes spectraux que nous allons présenter et analyser dans cette première partie. Cependant, l'utilisation d'ordres élevés et de formules d'intégration précises ne suffit pas à satisfaire au mieux les deux contraintes informatiques mentionnées. C'est pourquoi notre méthode s'appuiera en outre sur une formulation mixte et le principe de condensation de masse.

II.1. La minimisation du temps de calcul : Une méthode d'approximation espace-temps standard pour l'équation des ondes acoustiques dans le fluide ou pour le système dynamique de structure, consiste à utiliser une méthode de Galerkin en espace et un schéma aux différences finies en temps. Dans le cas où la méthode de Galerkin s'appuie sur des éléments finis de Lagrange, l'interpolation polynomiale utilisée induit une matrice

de masse (généralement multi-diagonale) qu'il convient alors d'inverser à chaque pas de temps lorsqu'on itère le schéma aux différences finies. Selon la taille du cas de calcul, cette inversion peut pénaliser énormément le temps de calcul et donc la performance de la méthode. En pratique, la matrice de masse est calculée successivement à partir de l'approximation polynomiale et d'une seconde approximation définie par le choix d'une formule d'intégration numérique. Le principe de condensation de masse consiste alors à choisir cette formule de quadrature de telle sorte que, par construction, la matrice de masse soit diagonale. Le coût de l'inversion à chaque pas de temps devient alors insignifiant. Notre premier objectif est donc d'utiliser des éléments finis d'ordres arbitrairement élevés conjugués à des formules de quadrature judicieuses pour garantir une convergence optimale et construire une matrice de masse diagonale.

II.2. La minimisation du stockage mémoire : Puisque nous utiliserons le principe de condensation de masse, le stockage mémoire requis est alors essentiellement dicté par la matrice de rigidité (que l'on appellera dans cette introduction A_h). Cette matrice dépend des coefficients physiques du problème et de la géométrie des éléments du maillage. A partir d'une formulation mixte initialement proposée dans [Cohen et Fauqueux, 2000] nous montrerons comment factoriser A_h sous la forme :

$$A_h = R_h B_h^{-1} R_h^*$$

où toutes les informations relatives à la physique du problème et à la géométrie du maillage seront contenues dans B_h qui, par construction, sera diagonale ou diagonale par petits blocs. En utilisant un espace d'approximation non standard, nous construirons la matrice R_h de sorte à ce qu'elle soit assemblée à partir d'une unique matrice élémentaire \hat{R} , indépendante du maillage. Nous verrons comment déduire de cette factorisation, un algorithme performant qui permet de calculer un produit matrice-vecteur avec A_h sans assemblage, en réduisant ainsi le stockage de la matrice de rigidité au stockage de la matrice diagonale par blocs B_h (considérant que le stockage de \hat{R} est négligeable).

II.3. Contexte scientifique et bibliographique La méthode des éléments finis spectraux utilisant le principe de condensation de masse, introduite initialement par G. Cohen [Cohen *et al.*, 1994] pour l'équation des ondes 1D, trouvait sa justification théorique grâce aux résultats relatifs aux formules d'intégration numérique donnée dans [Ciarlet, 1978]. Dans [Cohen *et al.*, 1995] les auteurs se sont intéressés à la construction d'un élément fini triangulaire (donc en dimension 2) qui autorise la condensation de masse pour une approximation polynomiale de degré arbitrairement élevé, et ce, en garantissant la convergence optimale du schéma. Ils ont pu contruire "à la main" l'élément fini et les formules de quadratures qui répondent à ce critère pour les ordres 2 et 3 selon un processus qui ne se généralise a priori pas aux ordres supérieurs. Des travaux plus récents [Chin-Joe-Kong *et al.*, 1999] ont permis, en utilisant une démarche similaire, de construire des éléments qui autorisent la condensation de masse jusqu'à l'ordre 6 pour les triangles et jusqu'à l'ordre 4 pour les tétraèdres. Les "calculs à la main" arrivent à la limite de la complexité admissible et, à notre connaissance, la généralisation de cette approche à un ordre quelconque reste une question ouverte. Cependant, puisque l'on peut

construire un élément fini quadrangulaire ou hexaédrique par "tensorisation" d'un élément fini 1D, on pouvait alors conjecturer que les propriétés de la dimension 1 avaient une chance de rester vraies pour des méthodes d'éléments finis en 2D et 3D sur des maillages quadrilatéraux et hexaédriques, quelque soit l'ordre d'interpolation. Sur la base de cette conjecture, cette méthode a été développée et implémentée avec succès pour l'équation des ondes acoustiques en 2D [Tordjman, 1995]. Bien qu'offrant une très bonne précision, la méthode des éléments finis spectraux est handicapée, comme toute méthode d'ordre élevé, par le nombre d'interactions non nulles (croissant avec l'ordre d'approximation) entre degrés de liberté. Lorsque l'on monte en ordre, les matrices du problème discret sont alors de moins en moins creuses et par conséquent, de plus en plus coûteuses en termes de stockage mémoire. Pour pallier à ce problème, les auteurs ont proposé dans [Cohen et Fauqueux, 2000] une reformulation de la méthode des éléments finis spectraux sous une forme mixte qui permet alors la factorisation astucieuse de la matrice de rigidité. L'idée de cette formulation mixte est précisément le sujet de la section II.1. Une synthèse exhaustive des travaux effectués à ce stade est donnée dans [Cohen, 2002].

La performance de la méthode en termes de temps de calcul, stockage mémoire et précision, a motivé, en régime transitoire, l'application des éléments finis mixtes spectraux avec condensation de masse à de nombreux modèles physiques. On peut citer entre autres les travaux liés à l'équation de l'élastodynamique linéaire 3D [Cohen et Fauqueux, 2005], à un modèle poroélastique [Bécache *et al.*, 2004] et aux équations de Maxwell [Pernet, 2005]- [Durufle, 2006]. Plus récemment, cette méthode et surtout les algorithmes de calculs qui en découlent, ont été appliqués à l'équation de Helmholtz [Durufle, 2006]. Les bonnes propriétés de précision en terme de performance (stockage, temps de calcul, complexité algorithmique...) ont été mises en évidence à travers des tests numériques de convergence [Durufle, 2006] et des analyses de dispersion numériques [Fauqueux, 2003], [Durufle, 2006].

Concernant le domaine de la physique qui nous intéresse, à savoir le couplage fluide-structure, des méthodes de couplage conformes pour des problèmes 3D/3D (fluide/structure) ont été proposées dans [Fauqueux, 2003]- [J. Diaz, 2005]. En vibroacoustique, des méthodes non conformes utilisant les domaines fictifs, ont été proposées pour la modélisation de la tymbale [Rhaouti, 1999] et de la guitare [Derveaux, 2002].

II.4. Contenu de la première partie

Au chapitre 1, nous présentons la méthode sur un cas modèle à savoir l'équation des ondes scalaire. Nous exposerons les idées déjà développées dans [Cohen et Fauqueux, 2000] et [Cohen *et al.*, 1994] sous un angle différent, et surtout nous apporterons le point manquant : une analyse d'erreur détaillée justifiant théoriquement l'intérêt des espaces d'approximation et des formules de quadrature employées. L'analyse qui tient compte notamment de l'influence de l'intégration numérique est connue dans le cas des éléments affinement équivalents à un élément de référence (triangles, rectangles, parallélogrammes) [Ciarlet, 1978] mais restait, à notre connaissance, une question ouverte pour les éléments isoparamétriques quelconques. Signalons que la généralisation d'un théorème d'équivalence entre éléments finis spectraux et éléments finis mixtes spectraux, dont l'idée centrale est

donnée dans [Pernet, 2005], sera un des points clés de notre analyse.

Au chapitre 2, nous abordons la modélisation et la résolution numérique du problème structure. Après avoir présenté et motivé le choix du modèle de plaque de Reissner-Mindlin [Reissner, 1945], [Chapelle et Bathe, 2003], nous appliquerons la méthode des éléments finis mixtes spectraux avec condensation de masse et analyserons le schéma ainsi obtenu. Nous montrerons sur des résultats numériques la performance de notre méthode en terme de temps de calcul et de stockage mémoire, et notamment le bon comportement des ordres élevés face aux problèmes de verrouillages bien connus sur ce modèle. A notre connaissance, peu de méthodes numériques ont été proposées pour résoudre ce modèle de plaque en régime transitoire.

Au chapitre 3, nous couplons les schémas éléments finis spectraux développés pour la partie fluide au chapitre 1 et pour la partie structure au chapitre 2. Cependant un des aspects caractéristiques des problèmes d’interaction fluide-structure est que chaque milieu possède des caractéristiques physiques différentes et donc des paramètres de discrétisation optimaux (pas d’espace et de temps) également différents. De nombreuses méthodes traitent du raccord non conforme en espace et en temps. On peut citer notamment la méthode des éléments joints pour le raccord non conforme en espace [Bernardi *et al.*, 1994], [Ben Belgacem et Maday, 1997], [Ben Belgacem *et al.*, 2001] et les techniques de raffinement développées dans [Collino *et al.*, 2006], [Garcia, 2004] pour la gestion d’un pas de temps local. Nous proposerons une méthode non conforme sur maillage conforme, en utilisant la souplesse offerte par l’utilisation d’ordres élevés. En particulier nous adapterons l’ordre d’approximation à la physique de chaque milieu. Particulièrement simple à mettre en oeuvre, (au niveau du calcul des matrices de couplage) nous montrerons que le schéma proposé est optimal et permet de bénéficier des avantages des méthodes établies pour les parties fluides et structures. Par ailleurs nous proposerons un schéma en temps quasi explicite (implicite seulement sur l’interface de couplage) et garanti stable.

III. Deuxième partie : Couplage éléments finis-potentiels retardés

III.1. Contexte scientifique et bibliographique Dans cette partie, nous proposons une méthode alternative à la première qui permet notamment d’éviter les calculs éléments finis 3D dans le fluide, qui, quelques soient les techniques mises en oeuvre, demeurent très coûteux et posent le problème (peu abordé dans cette thèse mais largement traité via les développements sur les CLA et les PML) de savoir comment borner le domaine de calcul. Nous nous intéressons donc à une autre approche qui consiste à coupler une méthode basée sur l’utilisation d’éléments finis en espace pour la partie structure (un des postulats de base), avec une méthode d’éléments finis de frontière basée elle sur l’utilisation d’une formule de représentation intégrale. Ce type d’approche a été souvent développée en régime harmonique pour définir des conditions aux limites transparentes [de La Bourdonnaye, 1995], [Ammari et Nédélec, 1998], , [Hiptmair, 2003]. Les avantages fournis par l’utilisation

d'équations intégrales, bien connus, ont été largement évoqués dans le cas d'un problème de diffraction pure par un obstacle fixe :

- (i) Les calculs sont restreints à la surface de l'obstacle : On économise une dimension d'espace.
- (ii) On évite la question de la troncature du domaine fluide extérieur (utilisation de CLA, PML...) : Le caractère non borné du problème est traité exactement.
- (iii) On évite (au moins partiellement) la dispersion numérique induite par la discrétisation en temps de l'équation des ondes 3D.

En contrepartie :

- (a) La discrétisation en temps de l'équation intégrale peut générer des phénomènes d'instabilité (ce qui sera bien sure la question centrale)
- (b) Le noyau de Green impose la gestion de matrices pleines contrairement à une approximation par éléments finis 3D. En particulier en régime transitoire on ne peut pas obtenir de schéma totalement explicite ne serait-ce que sur la partie acoustique : Une matrice bande, mais symétrique définie positive, doit dans tous les cas être inversée.
- (c) En régime transitoire, on doit stocker une partie de "l'historique" de la solution aux temps retardés.

Cependant, bien que le point (c) soit inévitable, les impacts négatifs des points (a) et (b) peuvent être minimiser par l'utilisation de techniques avancées dont certaines sont issues de travaux de recherche récents. Concernant le point (a), les phénomènes d'instabilité sont essentiellement observés avec les méthodes de discrétisation en temps de type collocation pour l'équation intégrale [Rynne, 1985]. Le développement d'une classe de méthodes numériques, initialement introduites par [Duong, 1987] et basées sur une approche variationnelle espace-temps, ont conduit à des schémas conservatifs inconditionnellement stables (voir aussi [Bécache, 1991] en élastodynamique, [Terrasse, 1993]- [Bachelot et Lange, 1995] en électromagnétisme). De plus, des développements substantiels ont été fait pour concevoir des algorithmes rapides (Fast-Multiple-Methods) afin d'évaluer les produits matrices-vecteurs qui apparaissent avec la discrétisation de l'équation intégrale, minimisant ainsi l'impact du point (b). Initialement développées pour les cas harmoniques [Greengard et Rokhlin, 1997], les méthodes multi-pôles sont dorénavant explorées en régime transitoire [Kobidze *et al.*, 2005]. Couplées a des solveurs itératifs, elles permettent de résoudre de façon très performante des problèmes de diffraction à grande échelle par équations intégrales.

Pour notre problème de couplage fluide-structure, notre objectif principal sera le suivant :

- Pouvoir coupler les méthodes d'approximation espace temps, par nature très différentes, qui seraient utilisées pour la discrétisation du problème non couplé à savoir un schéma de type éléments finis espace-temps selon la démarche proposée dans [Duong, 1987] pour l'équation intégrale, et une méthode éléments finis en espace conjugué à un θ -schéma aux différences finies en temps pour l'équation de plaque.

Cette objectif devra être atteint en satisfaisant impérativement la contrainte majeure suivante :

- Le schéma de couplage devra être robuste, plus précisément garanti stable du point de vue théorique et dans la mesure du possible sans affecter la condition de stabilité du problème non couplé.

Il est difficile de trouver dans la littérature beaucoup de travaux qui abordent ce problème rigoureusement. Dans [Bachelot et Lubet, 1995] et [Bachelot *et al.*, 2001], les auteurs ont cependant traité un problème très semblable en utilisant les potentiels retardés comme conditions aux limites transparentes. Une des différences majeures avec la méthode que nous développerons est qu'ils utilisent une approximation par éléments-finis espace temps pour les deux équations du problème couplé, aboutissant ainsi à une discrétisation en temps de l'équation de Maxwell volumique non-standard et nécessairement implicite. De ce point de vue nos travaux sont plus proches de ceux issus de la littérature ingénierie [Mansur *et al.*, 2000], [Soares et Mansur, 2005], dans laquelle la question centrale de la stabilité n'est pas abordée. Les résultats numériques de ces articles montrent du reste que les schémas proposés sont instables.

III.2. Contenu de la deuxième partie

Au chapitre 4, nous reformulons globalement le problème vibroacoustique sur la structure à l'aide d'un potentiel retardé de double couche (vu comme un opérateur Dirichlet-Neumann) que l'on aura pris soin de définir rigoureusement et dont donnera les propriétés de positivité fondamentales liées à l'énergie. Nous proposerons dans un premier temps un couplage "naturel" des schémas traditionnellement utilisés pour chaque milieu de sorte à satisfaire notre objectif principal. Nous verrons que ce schéma ne conserve pas a priori une énergie discrète indépendante du couplage, empêchant ainsi de garantir un résultat de stabilité et donc de satisfaire notre contrainte majeure. Suivant une démarche similaire à [Bachelot *et al.*, 2001], nous proposerons alors un schéma totalement implicite, garanti stable, à partir d'une formulation variationnelle espace-temps pour les deux équations (fluide et structure). Nous verrons que, par construction, on perd alors la souplesse offerte par le θ -schéma. Nous mettrons en évidence le lien entre cette approche et le schéma "naturel".

Dans un deuxième temps, nous proposerons alors un nouveau schéma de couplage qui aura pour principal atout (en dehors évidemment de satisfaire notre objectif principal et la contrainte majeure) de pouvoir bénéficier de la souplesse du θ -schéma perdue dans la première approche. L'idée clef, en supposant que Δt est le pas de temps utilisé pour la discrétisation de l'inconnue mécanique, sera d'utiliser des grilles décalées de pas $2\Delta t$ aux temps pairs et impairs pour la discrétisation de l'équation intégrale.

Publications relatives à ce travail de thèse :

G. Cohen et P. Grob. “*Mixed higher order spectral finite elements for Reissner Mindlin equations in the time domain.*”, Accepté (sous réserve de corrections mineures) dans SIAM Journal on Scientific Computing.

P. Grob et P. Joly. “*Conservative coupling between finite elements and retarded potentials : Application to vibroacoustics.*”, Soumis à SIAM Journal on Scientific Computing.

Proceedings de conférence relatifs à ce travail de thèse :

G. Cohen et P. Grob. “*Elements finis mixtes spectraux d’ordre élevé pour la vibroacoustique instationnaire.*”, Conf. TAMTAM, Tunis-Tunisie, pp. 496-500

G. Cohen et P. Grob. “*Mixed Higher Order Spectral Elements for Vibroacoustics in Time Domain.*”, WAVES 2005, Providence-USA, pp.

P. Grob et P. Joly. “*Coupling finite elements and integral equations in time-domain vibroacoustics.*”, WAVES 2005, Providence-USA, pp.

Notations et définitions

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d .

♣ Produit scalaire, norme, espace produit :

- Soit E un espace de Hilbert :

• $\forall (u, v) \in E \times E$, $\langle u, v \rangle_E$ sera le produit scalaire sur E.

• $\forall u \in E$, $\|u\|_E = \sqrt{\langle u, u \rangle_E}$ sera la norme induite.

• $\forall \underline{v} \in V_1 \times \dots \times V_n$, $\|\underline{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|v_i\|_{V_i}^2}$

- Le cas de $L^2(\Omega)$:

• $L^2(\Omega) = \left\{ u \mid \int_{\Omega} |u|^2 < +\infty \right\}$

• $(u, v) = \int_{\Omega} uv$, $\forall \rho > 0$, $(u, v)_{\rho} = \int_{\Omega} \rho uv$, $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{0, \Omega}^2$

♣ Espace de Sobolev : Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ un multi-indice.

- Normes et semi-normes usuelles :

• $H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}} \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \right\}$

- $\|u\|_{m,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right|^2$

- $|u|_{m,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right|^2$

- $[u]_{m,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right\|_{0,\Omega}^2$

- Pour les fonctions à valeur complexe :

On notera en caractère gras les fonctions à valeurs complexes et les espaces de Sobolev relatifs à celles-ci. Ex :

$$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \in H^1(\Omega) \quad , \quad \mathbf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

- Norme à poids dans H^1 : Soit $s \in \mathbb{C}^+ = \{s = \eta + i\omega, \eta > 0\}$

- $(u, v)_{1,s} = (\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + |s|^2(u, v)_{0,\Omega}, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+ \quad , \quad \|u\|_{1,s}^2 = (u, u)_{1,s}$

Première partie

**Couplage non conforme d'éléments
finis mixtes spectraux avec
condensation de masse pour la
vibroacoustique instationnaire**

Chapitre 1

Analyse d'une méthode d'éléments finis mixtes spectraux avec condensation de masse sur un cas modèle.

Dans ce chapitre nous présentons et analysons une méthode d'éléments finis mixtes spectraux utilisant le principe de condensation de masse. Nous appliquons cette méthode sur un problème modèle, à savoir l'équation des ondes. Dans un premier temps, nous présentons un élément fini conforme- H^1 approprié pour faire de la condensation de masse. Nous analysons alors la discrétisation par élément fini et montrons qu'avec un bon choix de formules de quadrature la convergence du schéma obtenu est optimale. Toutes les idées et les techniques d'analyse de ce chapitre resteront vraies et utilisables pour les problèmes de plaque et de couplage fluide-structure considérés par la suite.

Contenu

1.1	Présentation de la méthode	21
1.2	Approximation par éléments finis spectraux quadrangulaires standard.	21
1.2.1	L'élément fini isoparamétrique $\mathcal{Q}^r(\hat{K}) = (\hat{K}, \mathcal{Q}^r(\hat{K}), \hat{\Xi}^d)$	21
1.2.1.1	Maillage et géométrie	21
1.2.1.2	L'élément fini	22
1.2.2	Formules de quadrature et condensation de masse :	24
1.3	Reformulation de la méthode comme une approximation par éléments finis mixtes.	27
1.3.1	La formulation mixte	27
1.3.2	Semi-discrétisation par éléments finis	28
1.3.3	Avantages informatiques et algorithmiques de la formulation mixte pour les calculs de produits matrice-vecteur	31
1.3.4	Le calcul des produits matrice-vecteur à partir de la formulation standard en assemblant \mathbf{A}_h	31
1.3.5	Le calcul des produits matrice-vecteur à partir de la formulation standard en assemblant directement $\mathbf{A}_h U_h^n$	32
1.3.5.1	Assemblage du produit élément par élément à partir de la formulation mixte	33
1.3.5.2	Minimisation du stockage mémoire :	35
1.3.6	Un résultat d'équivalence entre la formulation mixte et la formulation standard.	36
1.4	Analyse de la méthode des éléments finis isoparamétriques spectraux avec condensation de masse	38
1.4.1	Etude d'une famille de problèmes elliptiques "harmoniques"	39
1.4.1.1	Rappel : Analyse de l'approximation par éléments finis sans intégration numérique	40
1.4.1.2	Analyse de l'approximation par éléments finis avec intégration numérique	42
1.4.2	Estimations d'erreur dans le domaine temporel	50
1.4.3	Conclusion : Limites de notre analyse et réalité numériques	53
1.5	Quelques schémas pour la discrétisation en temps	56
1.5.1	Les schémas centrés d'ordre 2	56
1.5.2	Une classe de schémas d'ordres élevés conservatifs et explicites : La technique de l'équation modifiée	57

1.1 Présentation de la méthode

Le but est de ce chapitre est de présenter une méthode d'éléments finis robuste, performante et précise pour le problème modèle suivant (équation des ondes scalaires):

Trouver $u : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{sur } \Omega \times [0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T) \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

dont la formulation variationnelle est

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in \mathcal{S}^T \stackrel{\text{def}}{=} C^0(0, T; H^1(\Omega)) \times C^1(0, T; L^2(\Omega)) \text{ solution de} \\ &\frac{d}{dt^2} \int_{\Omega} u(t) v + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(t) v, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Sur le plan théorique, nous nous fixons comme objectifs de construire des schémas numériques dont nous pouvons:

- garantir la stabilité via la conservation d'une énergie discrète.
- garantir une convergence optimale (l'ordre d'approximation de la méthode est égal à l'ordre de l'interpolation polynomiale même en utilisant des formules de quadrature).

1.2 Approximation par éléments finis spectraux quadrangulaires standard.

Dans ce chapitre, nous présentons et analysons la semi-discrétisation par éléments finis spectraux quadrangulaires du problème variationnel (1.1.1). Nous présentons tout d'abord l'élément fini isoparamétrique utilisé.

1.2.1 L'élément fini isoparamétrique $\mathcal{Q}^r(\widehat{K}) = (\widehat{K}, \mathcal{Q}^r(\widehat{K}), \widehat{\Xi}^d)$

1.2.1.1 Maillage et géométrie

Soit $\mathcal{T}_h = \bigcup K$ un maillage de Ω . Notons $F_K : \widehat{K} \rightarrow K$ l'isomorphisme d -linéaire entre le carré ou le cube unité \widehat{K} et le quadrangle ou l'héxaèdre K .

Dans ce qui suit nous utiliserons de façon récurrente la matrice jacobienne DF_K et le jacobien $J_K = \det(DF_K)$ de l'application F_K . Précisons le bon choix de paramètres pour décrire la géométrie de K (cf. [Girault et Raviart, 1986])

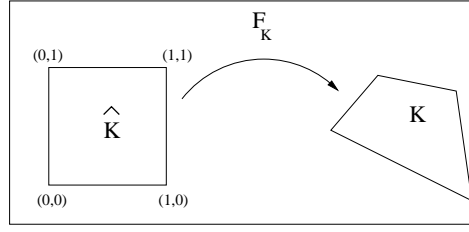


FIG. 1.1: L'application F_K en dimension 2.

- En dimension 2 : Notons ρ_K^i le diamètre du cercle inscrit aux quatre triangles $S_{i-1}S_iS_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq 3$ ($S_0 = S_4$). On utilisera alors :

$$h_K = \text{diam}(K) , \quad \rho_K = 2 \min_{1 \leq i \leq 4} (\rho_K^i) .$$

- En dimension 3 : On étend facilement la définition de ρ_K en considérant les diamètres des sphères inscrites dans les tétraèdres définis par les sommets du cube unité.

Dans tout ce qui suit on notera

$$\sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} \quad \text{et} \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K .$$

Enfin, nous ferons l'hypothèse de régularité suivante : Soit $\{\mathcal{T}_h\}_h$ une famille de maillages, alors on suppose que :

$$\exists \sigma > 0 \text{ tel que } \forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}_h , \quad \forall K \in \mathcal{T}_h , \quad \sigma_K < \sigma . \quad (1.2.1)$$

1.2.1.2 L'élément fini

On considère l'espace des polynômes sur K de degré au plus r en chaque variable :

$$\mathbb{Q}^r(K) = \left\{ q(x) = \sum_l a_l \prod_{l_i} x_i^{l_i}, \quad \forall l = (l_1..l_d) \mid l_i \leq r , \quad x \in K \right\} .$$

Soit $\hat{\Xi}$ un ensemble de points tel que $\text{card}(\hat{\Xi}^d) = (r+1)^d$ et tel que l'élément fini

$$\mathcal{Q}^r(\hat{K}) = (\hat{K}, \mathbb{Q}^r(\hat{K}), \hat{\Xi}^d)$$

soit unisolvant, c'est à dire que tout polynôme de $\mathbb{Q}^r(\hat{K})$ est entièrement caractérisé (et de manière unique) par ses valeurs aux points de $\hat{\Xi}^d$. A chaque élément K du maillage, on associe l'élément fini $\mathcal{Q}^r(K) = (K, \mathbb{Q}^r(K), \Xi(K)^d)$ qui est F_K -équivalent à l'élément $\mathcal{Q}^r(\hat{K})$ dans le sens où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi(K)^d = F_K(\hat{\Xi}^d), \\ \mathbb{Q}^r(K) = \left\{ p : K \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } p \circ F_K \in \mathbb{Q}^r(\hat{K}) \right\} . \end{array} \right.$$

De plus on suppose que les points de $\widehat{\Xi}^d$ sont tels que $\mathcal{Q}^r(\widehat{K})$ soit conforme $H^1(\Omega)$ c'est à dire :

$$U_h^r = \left\{ u_h \in C^0(\mathcal{T}_h) \text{ tel que } u_h|_K \circ F_K \in \mathcal{Q}_r(\widehat{K}) \right\} \subset H^1(\Omega) .$$

Nous préciserons l'ensemble $\widehat{\Xi}^d$ dans le chapitre suivant lorsque nous aborderons le principe de condensation de masse.

La discrétisation de l'équation (1.1.1) à l'aide de l'élément fini $\mathcal{Q}^r(\widehat{K})$ conduit donc au problème approché :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u_h(t) : [0, T] \longrightarrow U_h^r \text{ solution de} \\ & \frac{d}{dt^2} \int_{\Omega} u_h(t) v_h + \int_{\Omega} \nabla u_h(t) \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f_h(t) v_h , \quad \forall v_h \in U_h^r . \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Nous reformulons maintenant ce schéma sous forme matricielle. Soit $\{\psi_j\}_{1 \leq j \leq N_h^r}$ la base de Lagrange associée aux degrés de liberté de U_h^r . Notons

- M_h la matrice de masse (dans la base $\{\psi_j\}$) associée à la forme bilinéaire

$$(u_h, v_h) \longrightarrow \int_{\Omega} u_h v_h \quad \text{dans } U_h^r \times U_h^r ,$$

- A_h la matrice de rigidité (dans la base $\{\psi_j\}$) associée à la forme bilinéaire

$$(u_h, v_h) \longrightarrow \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \quad \text{dans } U_h^r \times U_h^r ,$$

- pour $t \in [0, T]$, $U_h(t)$ et $F_h(t)$ les vecteurs des coordonnées de $u_h(t)$ et $f_h(t)$ dans la base $\{\psi_j\}$.

Le problème (1.2.2) est équivalent au problème vectoriel :

$$\begin{aligned} & \forall t \in [0, T] , \text{ trouver } U_h(t) \in \mathbb{R}^{N_h^r} \text{ solution de} \\ & M_h \frac{d^2 U_h}{dt^2}(t) + A_h U_h(t) = F_h(t) . \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

En pratique, les intégrales qui définissent M_h et A_h ne sont pas calculées exactement mais à l'aide de formules de quadrature. Dans le cas des éléments finis triangulaires (ou tétraédriques), les fonctions des espaces d'approximation sont polynomiales et l'utilisation de formules de quadrature est alors un moyen efficace et simple (mais non impératif) pour calculer exactement les matrices du problème sans avoir recours à l'intégration analytique. Dans notre cas (éléments finis quadrangulaires ou hexaédriques), les fonctions de U_h^r ne sont pas polynomiales (car F_K^{-1} n'est pas affine). Il est alors incontournable de calculer

une approximation des matrices de masse et de rigidité à l'aide de formules d'intégration numérique. Il s'agit alors de choisir des formules de quadrature qui conservent l'ordre d'approximation polynomiale de la méthode. De plus, la solution approchée du problème (1.2.3) est souvent calculée à l'aide d'un schéma aux différences finies en temps. De part le support des fonctions de base de Lagrange la matrice M_h n'est pas diagonale et nécessite donc d'être inversée à chaque pas d'itération du schéma en temps ce qui peut se révéler particulièrement coûteux. Le principe de condensation de masse consiste alors à choisir des degrés de liberté (l'espace $\widehat{\Xi}^d$) qui induisent (en tant que points) une formule de quadrature qui permette de construire une matrice de masse diagonale $\mathbf{M}_h \simeq M_h$ telle que :

- l'ordre d'approximation polynomiale de la méthode soit conservé si A_h est calculée de manière exacte (au niveau de l'intégration numérique),
- l'élément fini $\mathcal{Q}^r(\widehat{K})$ soit conforme $H^1(\Omega)$.

Ce choix de degrés de liberté est le sujet de la section suivante. En pratique, la matrice de rigidité est aussi calculée à l'aide d'une formule de quadrature. Nous verrons, lors de l'analyse, quelle formule d'intégration numérique choisir pour approcher A_h en conservant l'ordre d'approximation polynomiale de la méthode.

1.2.2 Formules de quadrature et condensation de masse :

Définition 1.2.1 *On appelle formule de quadrature sur \widehat{K} un couple $(\widehat{\omega}_i, \widehat{\xi}_i)_{1 \leq i \leq N}$ tel que*

$$\forall \widehat{f} \in L^1(\widehat{K}), \int_{\widehat{K}} \widehat{f}(\widehat{x}) d\widehat{x} \simeq \sum_{k=1}^N \widehat{\omega}_k \widehat{f}(\widehat{\xi}_k).$$

Les $\{\widehat{\omega}_i\}_i$ sont appelés poids de quadrature et les $\{\widehat{\xi}_i\}_i$ points de quadrature.

Il existe plusieurs familles de points et de poids qui définissent des formules de quadrature exactes pour certains degrés de polynômes à une variable définis sur $[0, 1]$. Citons par exemple les formules de Gauss (dont les points sont les racines des polynômes de Legendre), Gauss-Lobatto (dont les points sont les racines des dérivées des polynômes de Legendre complétés par $\{0, 1\}$) et Newton-Cotes (dont les points sont équidistants). Par tensorisation (pour les points) et produit (pour les poids) on étend trivialement ces formules sur \widehat{K} (cf. Fig. 1.2). Nous éliminons immédiatement les formules de Newton-Cotes, peu précises, et dont certains poids associés sont négatifs à partir d'un certain ordre, rendant ainsi instables les schémas en temps [Zienkiewicz, 1971]. Nous rappelons, dans la proposition suivante, les propriétés des points de Gauss et Gauss-Lobatto.

1.2 Approximation par éléments finis spectraux quadrangulaires standard.

Proposition 1.2.1 $\forall 1 \leq i \leq (r+1)^d$, notons $(\hat{\omega}_i^G, \hat{\xi}_i^G)$ et $(\hat{\omega}_i^{GL}, \hat{\xi}_i^{GL})$ les poids et les points respectivement associés aux formules de Gauss et Gauss-Lobatto sur \hat{K} . On a les deux propriétés suivantes [Stroud, 1971] :

$$\int_{\hat{K}} \hat{f}(\hat{x}) d\hat{x} = \sum_{k=1}^{(r+1)^d} \hat{\omega}_k^G \hat{f}(\hat{\xi}_k^G) \quad , \quad \forall \hat{f} \in \mathbb{Q}_{2r+1}(\hat{K}) . \quad (1.2.4)$$

$$\int_{\hat{K}} \hat{g}(\hat{x}) d\hat{x} = \sum_{k=1}^{(r+1)^d} \hat{\omega}_k^{GL} \hat{g}(\hat{\xi}_k^{GL}) \quad , \quad \forall \hat{g} \in \mathbb{Q}_{2r-1}(\hat{K}) . \quad (1.2.5)$$

Dans tout ce qui suit, on adoptera pour les points de Gauss les notations suivantes :

$$\int_{\hat{K}}^G \hat{f}(\hat{x}) d\hat{x} \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{(r+1)^d} \hat{\omega}_k^G \hat{f}(\hat{\xi}_k^G) .$$

Ces notations seront étendues aux intégrales discrètes sur K ou sur Ω . En effet comme

$$\int_K f(x) dx = \int_{\hat{K}} \hat{f}(\hat{x}) |J_K|(\hat{x}) d\hat{x}, \quad \text{on posera} \quad \int_K^G f(x) dx \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{(r+1)^d} \hat{\omega}_k^G \hat{f}(\hat{\xi}_k^G) |J_K|(\hat{\xi}_k^G)$$

et, par ailleurs,

$$\int_{\Omega} f(x) dx \stackrel{def}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f(x) dx .$$

Enfin, si besoin est, on définira les points de Gauss d'un élément K comme les images par F_K des points de Gauss sur \hat{K} :

$$\forall 1 \leq i \leq (r+1)^d, \quad \xi_i^G = F_K(\hat{\xi}_i^G) .$$

Les notations pour les formules de Gauss-Lobatto s'étendent évidemment de la même manière.

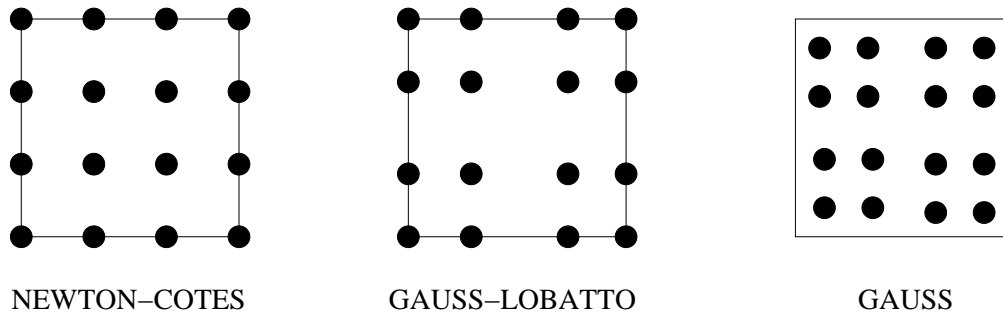


FIG. 1.2: Exemple de points de quadrature pour $r = 3$

A l'aide de ces formules de quadrature, nous proposons alors le schéma éléments finis

Trouver $u_h(t) : [0, T] \longrightarrow U_h^r$ solution de

$$\frac{d}{dt^2} \int_{\Omega}^M u_h(t) v_h + \int_{\Omega}^R \nabla u_h(t) \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f_h(t) v_h, \quad \forall v_h \in U_h^r. \quad (1.2.6)$$

avec au choix $M \in \{G, GL\}$ et $R \in \{G, GL\}$. Nous allons voir qu'autant on peut a priori s'autoriser une certaine souplesse pour le choix de R , autant l'utilisation du principe de condensation de masse fixe sans alternative possible le choix de M . Nous noterons

- \mathbf{M}_h matrice de masse (dans la base $\{\psi_j\}$) associée à la forme bilinéaire

$$(u_h, v_h) \longrightarrow \int_{\Omega}^M u_h v_h \quad \text{dans} \quad U_h^r \times U_h^r, \quad (1.2.7)$$

- \mathbf{A}_h la matrice de rigidité (dans la base $\{\psi_j\}$) associée à la forme bilinéaire

$$(u_h, v_h) \longrightarrow \int_{\Omega}^R \nabla u_h \nabla v_h \quad \text{dans} \quad U_h^r \times U_h^r. \quad (1.2.8)$$

Le problème (1.2.6) est équivalent au problème vectoriel :

$\forall t \in [0, T]$, trouver $U_h(t) \in \mathbb{R}^{N_h^r}$ solution de

$$\mathbf{M}_h \frac{dU_h}{dt}(t) + \mathbf{A}_h U_h(t) = F_h(t). \quad (1.2.9)$$

Le principe de condensation de masse [Hennart, 1979] : Comme nous l'avons mentionné, le principe de condensation de masse consiste à choisir une formule de quadrature pour calculer \mathbf{M}_h , telle que

- cette matrice soit diagonale,
- l'ordre d'approximation polynomiale soit conservé,
- l'élément fini $\mathcal{Q}^r(\widehat{K})$ soit conforme $H^1(\Omega)$.

Pour satisfaire le premier point, il suffit de choisir des points de quadrature qui coïncident avec les degrés de liberté de l'élément fini utilisé. Par construction, ce choix rend \mathbf{M}_h diagonale. En effet, notons $\widehat{\Xi}^d = \left\{ \widehat{\xi}_i \right\}_{1 \leq i \leq (r+1)^d}$ les degrés de liberté de l'élément fini $\mathcal{Q}^r(\widehat{K})$. Par définition, les fonctions de base de Lagrange ψ_i vérifient l'égalité

$$\widehat{\psi}_i(\widehat{\xi}_j) = \delta_{ij}.$$

1.3 Reformulation de la méthode comme une approximation par éléments finis mixtes.

Si on se donne une famille de poids $\{\widehat{\omega}_i\}_{1 \leq i \leq (r+1)^d}$ associés aux points de $\widehat{\Xi}^d$ pour calculer les intégrales élémentaires de \mathbf{M}_h , il vient :

$$\int_K^M \psi_i \psi_j dx = \int_{\widehat{K}}^M \widehat{\psi}_i \widehat{\psi}_j |J_K| d\widehat{x} = \sum_{k=1}^{(r+1)^d} \widehat{\omega}_k \widehat{\psi}_i(\widehat{\xi}_k) \widehat{\psi}_j(\widehat{\xi}_k) |J_K|(\widehat{\xi}_k) = \widehat{\omega}_i |J_K|(\widehat{\xi}_i) \delta_{ij} .$$

Donc tous les termes élémentaires de M_h sont diagonaux et par assemblage M_h également.

Le choix des degrés de liberté : Nous montrerons, lors de l'analyse du chapitre 1.4, qu'au moins en dimension 2 le critère (1.2.5) est suffisant pour ne pas pénaliser l'ordre d'approximation polynomiale sur le terme de masse (ce qui est bien connu en 1D [Ciarlet, 1978]). Par conséquent, en termes de précision, les points de Gauss-Lobatto comme les points de Gauss sont de bons candidats pour le choix de la formule d'intégration. Cependant, pour la condensation de masse, il nous faut choisir les degrés de liberté aux points de quadrature. La figure (Fig. 1.2) montre que, pour que les fonctions de U_h^r soient continues sur \mathcal{T}_h , et donc que U_h^r soit conforme H^1 , nous devons choisir les points de Gauss-Lobatto puisque qu'aucun point de Gauss ne se situent sur la frontière de l'élément. Désormais nous aurons donc

$$\widehat{\Xi}^d = \left\{ \widehat{\xi}_i^{GL} \right\}_{1 \leq i \leq (r+1)^d} ,$$

ce qui fixe un nouveau paramètre dans le schéma (1.2.6), à savoir $M = GL$.

1.3 Reformulation de la méthode comme une approximation par éléments finis mixtes.

Nous proposons dans cette section une reformulation de la méthode que nous venons de présenter sous la forme d'une semi-discrétisation par éléments finis mixtes [Cohen, 2002]. Cette nouvelle formulation présente un intérêt algorithmique fondamental pour la minimisation du stockage mémoire. C'est, en pratique, des formulations de ce type que nous implémenterons pour les problèmes de plaque et de couplage fluide-structure présentés dans les prochaines sections. Bien qu'à priori différente, nous montrerons que la semi discrétisation proposée pour le problème mixte est strictement équivalente au schéma (1.4.10). Ceci nous garantira les mêmes résultats de convergence pour notre formulation mixte que ceux obtenus au chapitre 1.4.

1.3.1 La formulation mixte

Cette formulation consiste à reformuler le problème initial, à savoir

Trouver $u : \Omega \times [0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{sur } \Omega \times [0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T) \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} ,$$

sous forme d'un système d'ordre 1 en espace afin d'isoler les opérateurs de type gradient. En rajoutant les conditions aux limites et les conditions initiales adéquates, (P) est équivalent à

Trouver $u, \underline{V} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \operatorname{div}(\underline{V}(x, t)) = 0, & \text{sur } \Omega \times [0, T] \\ \underline{V}(x, t) = \nabla u(x, t), & \text{sur } \Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (1.3.1a)$$

$$\quad (1.3.1b)$$

On choisit alors d'intégrer par parties l'opérateur de divergence dans (1.3.1a). Le problème variationnel associé a (1.3.1a)-(1.3.1b) est alors

Trouver $u \in \mathcal{S}^T$ et $\underline{V} \in L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^d)$ solutions de :

$$\frac{d}{dt^2} \int_{\Omega} u(t) v + \int_{\Omega} \underline{V}(t) \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(t) v, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (1.3.2)$$

$$\int_{\Omega} \underline{V}(t) \cdot \underline{w} = \int_{\Omega} \underline{w} \cdot \nabla u(t), \quad \forall \underline{w} \in [L^2(\Omega)]^d \quad (1.3.3)$$

Remarque 1.3.1 *Plusieurs choix d'intégration par parties sont possibles qui mènent à différents types de formulations mixtes appelées primale-duale, primale-primale, duale-duale... Ces formulations sont notamment discutées dans [Diaz, 2005].*

1.3.2 Semi-discrétisation par éléments finis

Le problème élément fini sans intégration numérique associé à (1.3.2)-(1.3.3) est

Trouver $u_h(t) : [0, T) \longrightarrow U_h^r$ et $\underline{V}_h(t) : [0, T) \longrightarrow V_h^r$ solutions de

$$\frac{d}{dt^2} \int_{\Omega} u_h(t) v_h + \int_{\Omega} \underline{V}_h(t) \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f_h(t) v_h, \quad \forall v_h \in U_h^r \quad (1.3.4)$$

$$\int_{\Omega} \underline{V}_h(t) \cdot \underline{w}_h = \int_{\Omega} \underline{w}_h \cdot \nabla u_h(t), \quad \forall \underline{w}_h \in V_h^r \quad (1.3.5)$$

où V_h^r est un espace d'approximation de $[L^2(\Omega)]^d$ qu'il nous reste à définir. Nous allons construire cet espace selon une approche non standard proposée initialement dans [Cohen et Fauqueux, 2000]. Nous aurons besoin du petit lemme algébrique suivant :

Lemme 1.3.1 Notons $\widehat{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial \widehat{x}_i})$, $1 \leq i \leq d$. Alors

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \forall v_h \in U_h^r, \nabla v_h \circ F_K = DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{v}_h.$$

Preuve :

Le lemme est juste une reformulation vectorielle de la formule de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{x}_i} (v_h \circ F_K)(\widehat{x}) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial v_h(x)}{\partial x_j} \frac{\partial F_K^j}{\partial \widehat{x}_i}(\widehat{x}). \quad \diamond$$

Notons R_h la matrice de la forme bilinéaire

$$(u_h, \underline{w}_h) \longrightarrow \int_{\Omega} \underline{w}_h \cdot \nabla u_h \quad \text{dans } U_h^r \times V_h^r,$$

Nous allons maintenant construire V_h^r de sorte que R_h soit indépendante de la géométrie du maillage. Nous verrons au chapitre suivant l'intérêt d'une telle démarche. En tant que matrice élément fini, R_h est construite par un assemblage de matrices élémentaires R_h^K : Formellement on a

$$R_h = \sum R_h^K$$

où la matrice élémentaire R_h^K contient, si V_h est un espace d'approximation standard, des informations relatives à la géométrie de l'élément K (via les termes $|J_K|$ et DF_K). Nous choisissons alors de construire l'espace V_h^r de sorte à ce que les matrices élémentaires R_h^K deviennent indépendantes de K . Plus précisément on va chercher à construire V_h^r de sorte à ce que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h \quad R_h^K = \widehat{R} \quad \text{avec} \quad \widehat{R} \stackrel{def}{=} R_h^{\widehat{K}}.$$

Pour ce faire, il faut construire l'espace V_h^r tel que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \forall \widehat{w}_h \in V_h^r, \int_K \underline{w}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\widehat{K}} \widehat{\underline{w}}_h \cdot \widehat{\nabla} \widehat{v}_h. \quad (1.3.6)$$

A cet effet, calculons la forme bilinéaire associée à R_h^K . Il vient :

$$\begin{aligned} \int_K \underline{w}_h \cdot \nabla v_h \, dx &= \int_{\widehat{K}} \underline{w}_h \circ F_K \cdot (\nabla v_h) \circ F_K |J_K| \, d\widehat{x} \\ &= \int_{\widehat{K}} \underline{w}_h \circ F_K \cdot DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{v}_h |J_K| \, d\widehat{x} \quad \text{d'après le Lemme 1.3.1} \\ &= \int_{\widehat{K}} [|J_K| DF_K^{-1} \underline{w}_h \circ F_K] \cdot \widehat{\nabla} \widehat{v}_h \, d\widehat{x} \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Nous choisissons alors de ne pas définir notre espace d'approximation élément fini V_h^r à l'aide la transformation standard

$$\underline{w}_h \circ F_K = \widehat{w} ,$$

mais à l'aide de la tranfomation de Piola

$$\underline{w}_h \circ F_K = \frac{1}{|J_K|} DF_K \widehat{w}_h , \quad (1.3.8)$$

de sorte que

$$V_h^r = \left\{ \underline{w}_h \in [L^2(\mathcal{T}_h)]^d \text{ tel que } |J_K| DF_K^{-1} \underline{w}_h \circ F_K \in [\mathbb{Q}_r(\widehat{K})]^d \right\} .$$

Par construction, en injectant alors (1.3.8) dans (1.3.7) on obtient bien (1.3.6) et toutes les matrices élémentaires sont identiques à \widehat{R} et sont donc indépendantes de la géométrie du maillage. Par conséquent R_h est entièrement définie à partir de \widehat{R} .

Afin de constuire un problème approché équivalent à (1.2.6) on propose le problème élément fini utilisant des formules de quadrature suivant :

Trouver $u_h(t) : [0, T) \longrightarrow U_h^r$ et $\underline{V}_h(t) : [0, T) \longrightarrow V_h^r$ solutions de

$$\frac{d}{dt^2} \int_{\Omega}^{GL} u_h(t) v_h + \int_{\Omega}^R \underline{V}_h(t) \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f_h(t) v_h \quad , \quad \forall v_h \in U_h^r \quad (1.3.9)$$

$$\int_{\Omega}^R \underline{V}_h(t) \cdot \underline{w}_h = \int_{\Omega}^R \underline{w}_h \cdot \nabla u_h(t) \quad , \quad \forall \underline{w}_h \in V_h^r \quad (1.3.10)$$

Remarque 1.3.2 *A ce stade, la formule de quadrature utilisée pour calculer les intégrales de rigidité ($\int^R \dots$) n'est toujours pas fixée.*

Notons

- \mathbf{B}_h la matrice de la forme bilinéaire

$$(\underline{w}_h, \underline{w}_h^*) \longrightarrow \int_{\Omega}^R \underline{w}_h \cdot \underline{w}_h^* \quad \text{dans} \quad V_h^r \times V_h^r ,$$

- \mathbf{R}_h la matrice de la forme bilinéaire

$$(u_h, \underline{w}_h) \longrightarrow \int_{\Omega}^R \underline{w}_h \cdot \nabla u_h \quad \text{dans} \quad U_h^r \times V_h^r ,$$

- $\widehat{\mathbf{R}}$ la matrice élémentaire de

$$(\widehat{u}_h, \widehat{u}_h) \longrightarrow \int_{\widehat{K}}^R \widehat{u}_h \cdot \widehat{\nabla} \widehat{u}_h \quad \text{dans} \quad U_h^r \times V_h^r .$$

Comme les fonctions de base de V_h^r sont purement locales (puisque $V_h^r \subset [L^2(\mathcal{T}_h)]^d$), B_h est diagonale par blocs $d(r+1) \times d(r+1)$. On utilisera alors les points $\{\xi_i^R\}$ comme degrés de liberté pour les fonctions de V_h^r (on rappelle que ξ_i^R désignent indépendamment les points de Gauss ou de Gauss-Lobatto). Ce choix condense alors la matrice de masse B_h en une nouvelle matrice de masse \mathbf{B}_h diagonale par petits blocs $d \times d$ si $R = GL$ (cf. [Cohen et Fauqueux, 2000]). Notons alors $V_h(t)$ le vecteur des coordonnées de v_h dans la base de V_h^r . La formulation matricielle du problème (1.3.9)-(1.3.10) est alors

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_h \frac{d^2 U_h}{dt^2}(t) + \mathbf{R}_h U_h(t) &= F_h(t) , \\ \mathbf{B}_h V_h(t) &= \mathbf{R}_h^* U_h(t) . \end{aligned}$$

Comme \mathbf{B}_h est facilement inversible, nous pouvons éliminer l'inconnue auxiliaire $V_h(t)$ et en pratique on résout l'EDO vectorielle

$$\mathbf{M}_h \frac{d^2 U_h}{dt^2}(t) + \mathbf{R}_h \mathbf{B}_h^{-1} \mathbf{R}_h^* U_h(t) = F_h(t) . \quad (1.3.11)$$

1.3.3 Avantages informatiques et algorithmiques de la formulation mixte pour les calculs de produits matrice-vecteur

Posons $N_{loc} = (r+1)^2$. A chaque degré de liberté de numéro local i dans l'élément K on associe i_{glob}^K son numéro global. A toute matrice \mathbf{B}_h on associera $B_{h,K}$ ($K \in \mathcal{T}_h$) ses matrices élémentaires.

1.3.4 Le calcul des produits matrice-vecteur à partir de la formulation standard en assemblant \mathbf{A}_h

A partir de la formulation éléments finis (1.2.6), il existe deux méthodes d'assemblage pour calculer le produit $\mathbf{A}_h U_h^n$ où U_h^n est le vecteur $U_h(t^n)$, $n = \{1, 2, \dots\}$ au temps $t = t^n$.

L'approche classique : en assemblant \mathbf{A}_h . Dans 99% des cas (à la louche...), à partir du maillage \mathcal{T}_h on calcule successivement des matrices élémentaires et on construit alors \mathbf{A}_h par un processus d'assemblage classique.

- Avantages : \mathbf{A}_h est calculée une fois pour toute et donc l'évaluation de $\mathbf{A}_h U_h^n$ pour $n = \{1, 2, \dots\}$ est immédiate une fois l'assemblage de la matrice effectué.
- Inconvénients : Dans le cas d'une géométrie de grande taille et d'une approximation d'ordre élevé, le stockage mémoire de \mathbf{A}_h peut devenir extrêmement coûteux. C'est une des limites classiques des méthodes d'éléments finis.

L'algorithme pour le calcul du produit est le suivant :

```
//Assemblage
Pour K décrivant les éléments du maillage

  On calcule  $A_{h,K}$ 

  Pour i allant de 1 à  $N_{loc}$ 

    Pour j allant de 1 à  $N_{loc}$ 

       $A_h(i_{glob}^K, j_{glob}^K) = A_h(i_{glob}^K, j_{glob}^K) + A_{h,K}(i, j)$ 

    Fin de la boucle en j

  Fin de la boucle en i
//Calcul du produit

 $\mathbf{A}_h U_h^n = \mathbf{A}_h \times U_h^n$ 
```

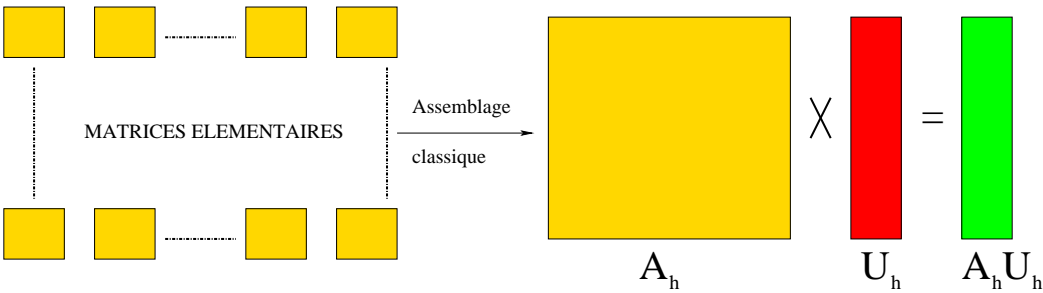


FIG. 1.3: Calcul du produit via un assemblage classique

1.3.5 Le calcul des produits matrice-vecteur à partir de la formulation standard en assemblant directement $\mathbf{A}_h U_h^n$

Il est facile de voir, en s'inspirant de l'assemblage classique, que l'on peut directement assembler le produit $\mathbf{A}_h U_h^n$ élément par élément sans assembler \mathbf{A}_h .

- **Avantage :** L'assemblage et donc le stockage de \mathbf{A}_h est inutile.
- **Inconvénients :** Cette méthode est efficace pour calculer un seul produit matrice vecteur. En effet, dès que l'on change de vecteur il faut recalculer les matrices élémentaires ce qui est impensable du point de vue du temps de calcul. Une façon d'éviter de recalculer ces matrices élémentaires est de les stocker une fois pour toute. Ce choix est stupide puisque le stockage de l'ensemble des matrices élémentaires est bien plus important que le stockage de la matrice assemblée.

1.3 Reformulation de la méthode comme une approximation par éléments finis mixtes.

On se donne $U_h^{loc} \in \mathbb{R}^{N_{loc}}$ un vecteur local. L'algorithme est alors le suivant :

Pour K décrivant les éléments du maillage

Pour j allant de 1 à N_{loc}

$$U_h^{loc}(j) = U_h^n(j_{glob}^K)$$

Fin de la boucle en j

$$U_h^{loc} = \mathbf{A}_{h,K} U_h^{loc}$$

//Assemblage direct du produit

Pour k allant de 1 à N_{loc}

$$(\mathbf{A}_h U_h^n)(k_{glob}^K) = (\mathbf{A}_h U_h^n)(k_{glob}^K) + U_h^{loc}(k_{glob}^K)$$

Fin de la boucle en k

Fin de la boucle en K

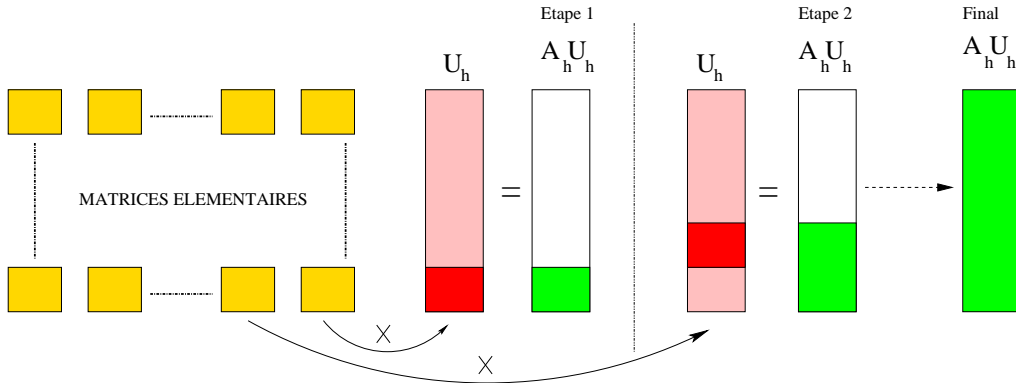


FIG. 1.4: Calcul du produit via un assemblage élément par élément

Sur la figure 1.4 le bloc rouge dans U_h^n représente formellement U_h^{loc} .

A priori ce processus d'assemblage est inutile puisque qu'au choix on explose le temps de calcul ou le stockage mémoire. Cependant nous allons voir que cette approche, combinée à notre formulation mixte, permet de construire un algorithme très astucieux et efficace.

1.3.5.1 Assemblage du produit élément par élément à partir de la formulation mixte

En utilisant la factorisation de (1.3.11), calculer le produit $\mathbf{A}_h U_h^n$ revient à calculer successivement les trois produit

$$\mathbf{R}_h^* \times U_h^n \longrightarrow \mathbf{B}_h^{-1} \times \mathbf{R}_h^* U_h^n \longrightarrow \mathbf{R}_h \times \mathbf{B}_h^{-1} \mathbf{R}_h^* U_h^n .$$

Pour calculer ces produits nous allons utiliser l'algorithme d'assemblage élément par élément détaillé dans la section précédente. Pour cela, nous allons calculer et stocker une fois pour toutes les matrices élémentaires de \mathbf{R}_h et \mathbf{B}_h^{-1} . Grâce aux propriétés de ces matrices il n'y a alors pas de problème de stockage puisque \mathbf{B}_h^{-1} est diagonale par blocs $d \times d$ (ces blocs étant précisément ses matrices élémentaires) et surtout puisque \mathbf{R}_h a pour unique matrice élémentaire $\widehat{\mathbf{R}}$. L'algorithme pour assembler le produit $\mathbf{A}_h U_h^n$ est alors le suivant :

Pour K décrivant les éléments du maillage

Pour j allant de 1 à N_{loc}

$$U_h^{loc}(j) = U_h(j_{glob}^K)$$

Fin de la boucle en j

$$V_h^{loc} = \widehat{\mathbf{R}}_h \mathbf{B}_{h,K}^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_h^* U_h^{loc}$$

Pour k allant de 1 à N_{loc}

$$(\mathbf{A}_h U_h)(k_{glob}^K) = (\mathbf{A}_h U_h)(k_{glob}^K) + V_h^{loc}(k_{glob}^K) \text{ (Assemblage)}$$

Fin de la boucle en k

Fin de la boucle en K

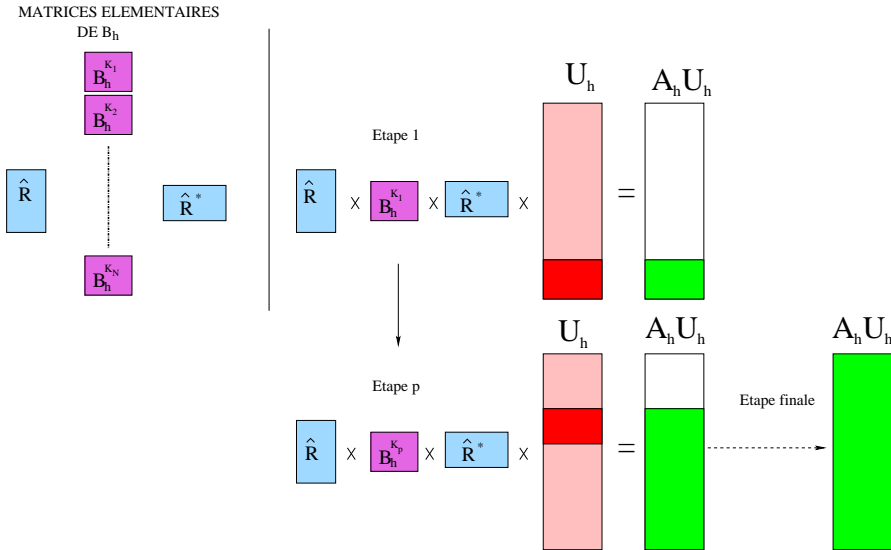


FIG. 1.5: Assemblage élément par élément à partir de la formulation mixte

Remarque 1.3.3 Lorsque l'on discrétise par différences finies l'équation (1.3.11), on utilise cet algorithme à chaque pas de temps pour calculer le produit $\mathbf{A}_h U_h^n$. En régime harmonique (ou stationnaire) cet algorithme peut être également très utile. On doit alors résoudre le système linéaire

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_h + \mathbf{R}_h \mathbf{B}_h^{-1} \mathbf{R}_h^*) U_h = F_h$$

où ω représente le paramètre de Fourier qui permet de passer de l'équation des ondes à l'équation de Helmholtz. L'utilisation de notre algorithme à chaque pas d'itération d'un solveur itératif permet alors de résoudre ce système sans assembler $-\omega^2 \mathbf{M}_h + \mathbf{A}_h$ ce qui permet, selon la taille du cas de calcul, une économie de stockage très importante. Une analyse détaillée de cette économie est donnée dans [Durufle, 2006].

1.3.5.2 Minimisation du stockage mémoire :

L'utilisation de cet algorithme permet donc une économie énorme en stockage mémoire lorsque l'on augmente l'ordre de la méthode ou la taille du cas de calcul. En effet, le stockage mémoire est en réalité entièrement dicté par les matrices de masse \mathbf{M}_h et \mathbf{B}_h puisque que l'on peut considérer que le stockage de $\hat{\mathbf{R}}$ est négligeable. Or, grâce à l'utilisation de la condensation de masse, le stockage de \mathbf{M}_h et \mathbf{B}_h est minimal.

Notons respectivement $FS_{stock}(r)$ et $FM_{stock}(r)$ le stockage requis par élément (en nombre de degrés de liberté) en fonction de l'ordre de la méthode, pour la formulation standard et la formulation mixte. Le même type d'étude de complexité que celles effectuées dans [Durufle, 2006] montre que

$$\frac{FS(r)}{FM(r)} \simeq \begin{cases} \frac{r^2}{8} & \text{si } d = 2 \\ \frac{r^3}{14} & \text{si } d = 3 \end{cases} .$$

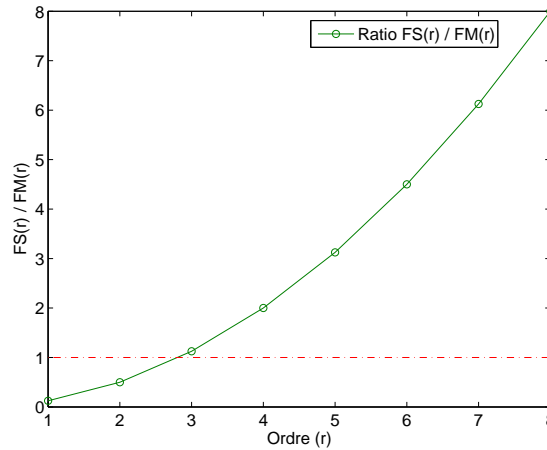


FIG. 1.6: Ratio du stockage requis en 2D.

Les Figures 1.6 et 1.7 illustrent l'économie quadratique de stockage dont on bénéficie lorsque l'on implémente la formulation mixte à la place de la formulation standard.

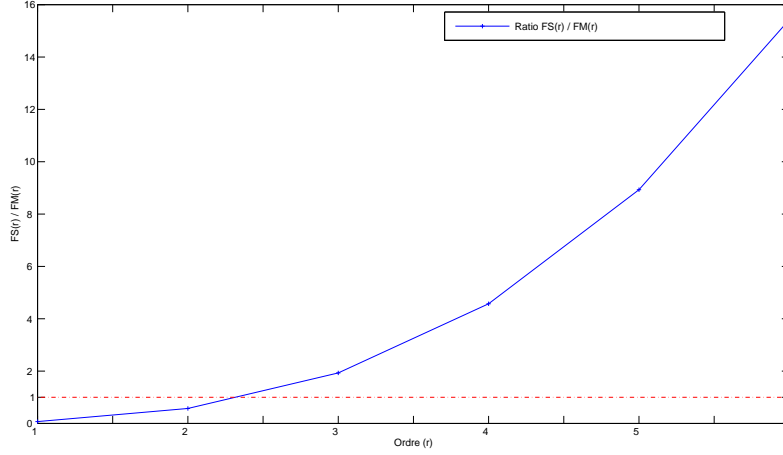


FIG. 1.7: Ratio du stockage requis en 3D.

1.3.6 Un résultat d'équivalence entre la formulation mixte et la formulation standard.

Afin de garantir, pour la formulation éléments finis mixtes (1.3.9)-(1.3.10) que nous implémenterons en pratique, les mêmes résultats de convergence que ceux établis au chapitre 1.4 pour le schéma (1.2.6), nous allons montrer que les problèmes (1.2.6) et (1.3.9)-(1.3.10) sont équivalents. Introduisons l'opérateur d'interpolation π_h défini par :

$$\begin{aligned} \pi_h : \Pi[C^0(K)]^2 &\longrightarrow V_h^r \\ \varphi_h &\longrightarrow \pi_h \varphi_h \end{aligned}$$

vérifiant

$$\forall 1 \leq i \leq (r+1)^2, \forall \xi_i^R \in K, (\pi_h \varphi_h)|_K(\xi_i^R) = \varphi_h|_K(\xi_i^R).$$

Cette opérateur est bien défini si l'application :

$$\widehat{\varphi}_h \longrightarrow (\widehat{\varphi}_h(\widehat{\xi}_1^R), \dots, \widehat{\varphi}_h(\widehat{\xi}_{(r+1)^d}^R))$$

est bijective. On remarque que c'est le cas lorsque l'ensemble des points $\{\widehat{\xi}_1^R, \dots, \widehat{\xi}_{(r+1)^d}^R\}$ utilisés en tant que degrés de liberté rendent l'élément fini $\mathcal{Q}^r(\widehat{K})$ unisolvant.

Remarque 1.3.4 φ_h est donc bien défini pour les points de Gauss et de Gauss-Lobatto.

Théorème 1.3.1 Si le couple (u_h, \underline{V}_h) est solution de (1.2.6) alors u_h est solution de (1.3.9)-(1.3.10). Réciproquement, si u_h est solution de (1.2.6), alors le couple (u_h, \underline{V}_h) où $\underline{V}_h = \pi_h(\nabla u_h)$ est solution de (1.3.9)-(1.3.10).

1.3 Reformulation de la méthode comme une approximation par éléments finis mixtes.

Une première démonstration de ce théorème, algébrique et non triviale à généraliser à d'autres équations (que l'équation des ondes scalaires), a été donnée dans [Fauqueux, 2003]. Dans [Pernet, 2005], l'auteur a proposé une démonstration d'équivalence éléments finis spectraux/éléments finis mixtes spectraux pour le système de Maxwell. Cette démonstration exploite de façon astucieuse l'utilisation de formules de quadrature et est fondée sur la remarque suivante:

Pour $v_h \in U_h^r$ il n'est pas du tout évident de trouver $\underline{w}_h \in V_h^r$ tel que $\underline{w}_h = \nabla v_h$ si l'on a pas $\nabla U_h^r \subset V_h^r$ (à ce titre l'équivalence des problèmes (1.2.2) et (1.3.4)-(1.3.5) n'est pas immédiate), tandis que l'on peut toujours construire \underline{w}_h tel que $\underline{w}_h(\xi_i^R) = \nabla v_h(\xi_i^R)$. Nous allons reprendre et généraliser quelque peu (en s'autorisant plus de liberté sur le choix de l'intégration numérique) cette technique de démonstration. C'est à ce niveau qu'intervient l'opérateur π_h . Nous verrons que cette technique s'adapte sans difficulté à des problèmes plus complexes (cf. Chapitre2)

Preuve :

Il nous suffit de montrer que si $u_h(t)$ et $\underline{V}_h(t)$ sont solutions de (1.3.9)-(1.3.10) alors $u_h(t)$ est solution de (1.4.10), par unicité des solutions, l'implication inverse est immédiate. Soit $v_h \in U_h^r$. Prenons comme fonction test $\underline{w}_h = \pi_h(\nabla v_h) \in V_h^r$ dans (1.3.10).

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \underline{V}_h(t) \cdot \underline{w}_h &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \underline{V}_h(t) \cdot \pi_h(\nabla v_h) \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{(r+1)^2} \omega_i^R \underline{V}_h(\xi_i^R, t) \pi_h(\nabla v_h)(\xi_i^R) \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^{(r+1)^2} \omega_i^R \underline{V}_h(\xi_i^R, t) \nabla v_h(\xi_i^R) \\
 &= \int_{\Omega} \underline{V}_h(t) \cdot \nabla v_h
 \end{aligned}$$

Strictement de la même manière on montre que

$$\int_{\Omega} \underline{w}_h \cdot \nabla u_h(t) = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h(t) .$$

D'après (1.3.10) on en déduit que

$$\int_{\Omega} \underline{V}_h(t) \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla u_h(t) .$$

Si on substitue cette dernière égalité dans (1.3.9) on obtient exactement (1.4.10). \diamond

Remarque 1.3.5 On peut reformuler la Proposition 1.3.1 via l'égalité matricielle

$$\mathbf{A}_h = \mathbf{R}_h \mathbf{B}_h^{-1} \mathbf{R}_h^* .$$

La formulation mixte permet donc de factoriser la matrice de rigidité à l'aide d'une matrice entièrement à partir de $\hat{\mathbf{R}}$ et d'une matrice diagonale par blocs.

1.4 Analyse de la méthode des éléments finis isoparamétriques spectraux avec condensation de masse

Dans les sections précédentes, nous avons reformulé, synthétisé et généralisé (à travers la souplesse autorisée sur les formules de quadrature) la méthode des éléments finis mixtes spectraux développées essentiellement dans [Cohen, 2002], [Fauqueux, 2003] et [Durufle, 2006]. Dans cette thèse nous apportons comme nouveauté des estimations d'erreur pour cette méthode, justifiant ainsi le choix des espaces d'approximation et surtout des formules de quadrature utilisées.

Concernant l'influence de l'intégration numérique, la théorie est connue et éprouvée dans le cas d'éléments finis affinement équivalents à un élément de référence (éléments triangulaires ou rectangulaires) [Ciarlet, 1978]. Certains critères lourds et contraignants sur l'espace d'approximation élément fini ainsi que sur les formules de quadrature employées sont donnés dans [Ciarlet et Raviart, 1972] pour quelques éléments finis isoparamétriques, mais la question reste (à notre connaissance) ouverte pour une approximation par éléments finis quadrilatéraux (ou hexaédriques) dans sa généralité.

La principale difficulté de l'analyse de notre méthode est qu'à la différence des éléments finis triangulaires, les éléments quadrangulaires ne sont pas affinement équivalent, mais équivalent via une transformation d -linéaire à un élément de référence. Le jacobien de cette transformation n'est alors plus constant par élément : il devient localement polynomial ce qui complique sensiblement les techniques classiques d'estimations [Arnold *et al.*, 2002]. L'analyse de notre schéma (1.2.6) repose essentiellement sur une version adaptée du lemme de Strang [Ciarlet, 1978] qui permet d'estimer l'erreur du schéma éléments finis comme somme de l'erreur due à l'interpolation polynomiale et de l'erreur issue de l'utilisation de formules de quadrature.

- Concernant l'erreur d'interpolation, les résultats (délicats) existent et proviennent pour la plupart de [Girault et Raviart, 1986]. Nous les rappellerons et les adapterons à notre problème modèle.
- Concernant l'erreur due à l'intégration numérique, la difficulté majeure de notre analyse sera la suivante :

L'application F_K étant d -linéaire et non pas affine, les fonctions de l'espace d'approximation U_h^r sont des fractions rationnelles (et non des polynômes), ce qui nous imposera d'estimer une erreur de quadrature sur une quantité non polynomiale.

Le plan de notre analyse sera calqué sur celui de [Cohen *et al.*, 1995] qui est particulièrement bien adapté au cas des systèmes hyperboliques transitoires. Ce plan consiste à

- obtenir des estimations sur une famille de problèmes elliptiques de type Helmholtz,
- exploiter ces estimations dans le domaine temporel $\Omega \times \mathbb{R}^+$ à l'aide de la transformée de Fourier-Laplace,
- en déduire des estimations dans $\Omega \times [0, T]$ pour le schéma (1.2.6) à l'aide de techniques de troncature.

1.4.1 Etude d'une famille de problèmes elliptiques "harmoniques"

Nous commençons par étudier une famille de problèmes bien posés de type Helmholtz, reliés au problèmes (P) via la transformation de Laplace. Nous noterons en caractère gras les fonctions à valeurs complexes et les espaces fonctionnels utilisés normalement pour les fonctions à valeurs réelles. On renvoie le lecteur à la page de notations en début de document pour plus de précision. Pour tout complexe $s \in \mathbb{C}^+ = \{s = \eta + i\omega, \eta > 0\}$ on considère le problème :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} = \mathbf{u}_s : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ solution de} \\ (P_s) \quad & \begin{cases} -\Delta \mathbf{u}(x) + s^2 \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \end{aligned}$$

dont la formulation variationnelle est :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \text{ solution de} \\ a(s; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{s}(\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega), \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

$$\text{où l'on a posé } a(s; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, s\mathbf{v})_{1,s} = \bar{s} \left[\int_{\Omega} s^2 u \bar{v} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \right].$$

Proposition 1.4.1 *La forme $a(s; \cdot, \cdot)$ vérifie les inégalités de continuité et de coercivité*

$$\begin{aligned} |a(s; \mathbf{u}, \mathbf{v})| & \leq |s| \|\mathbf{u}\|_{1,s} \|\mathbf{v}\|_{1,s}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \eta \|\mathbf{u}\|_{1,s}^2 & \leq |a(s; \mathbf{u}, \mathbf{u})|, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \end{aligned}$$

Preuve :

On a

$$|a(s; \mathbf{u}, \mathbf{v})| = |(\mathbf{u}, s\mathbf{v})_{1,s}| \leq |s| \|\mathbf{u}\|_{1,s} \|\mathbf{v}\|_{1,s}.$$

D'autre part

$$a(s; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{s} (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + s|s|^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \Rightarrow \mathcal{R}e(a(s; \mathbf{u}, \mathbf{u})) = \eta \|\mathbf{u}\|_{1,s}^2.$$

On peut conclure car

$$|a(s; \mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \mathcal{R}e(a(s; \mathbf{u}, \mathbf{u})) \geq \eta \|\mathbf{u}\|_{1,s}^2 \quad \diamond$$

Remarque 1.4.1 *Un point important est que nous munissons $\mathbf{H}^1(\Omega)$ d'une norme s -dépendante.*

Corollaire 1.4.1 *Le problème (1.4.1) admet donc une unique solution dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$.*

Preuve :

Comme $s \in \mathbb{C}^+$ alors $\eta > 0$, donc la proposition précédente assure que $a(s; \cdot, \cdot)$ vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. \diamond

On considère alors le problème approché sans intégration numérique associé à (1.4.1) suivant :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_h \in \mathbf{U}_h^r, \text{ solution de } a(s; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \bar{s} (\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h^r. \quad (1.4.2)$$

1.4.1.1 Rappel : Analyse de l'approximation par éléments finis sans intégration numérique

L'objectif de cette sous-section est de montrer que l'erreur du schéma éléments finis (1.4.2) est optimale en norme \mathbf{H}^1 dans le sens où, si \mathbf{u} est solution de (1.4.1) et \mathbf{u}_h est solution de (1.4.2) alors,

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,s} \leq C h^r$$

si les intégrales qui définissent la forme $a(s; \cdot, \cdot)$ sont calculées exactement; c'est à dire analytiquement ou grâce à des formules d'intégration exactes. Les résultats d'analyse utilisés dans cette section (bien plus délicats à établir que dans le cas des triangles) se trouvent dans [Girault et Raviart, 1986]. On signale cependant qu'une synthèse exhaustive et particulièrement lisible de ces résultats se trouvent dans [Achdou,].

Pour l'analyse de l'erreur d'interpolation nous aurons besoin des résultats géométriques (relatifs à F_K) suivants (cf. [Girault et Raviart, 1986]) : Soit $K \in \mathcal{T}_h$, alors

$$\|DF_K\|_{\infty, \hat{K}} \leq C h_K, \quad \|J_K\|_{\infty, \hat{K}} \leq C h_K^d, \quad \|J_K^{-1}\|_{\infty, \hat{K}} \leq C h_K^{-d}, \quad |DF_K^{-1}|_{\infty, \hat{K}} \leq C \frac{h_K^{d-1}}{\rho_K^d} \quad (1.4.3)$$

On rappelle dans la proposition suivante une version appropriée du lemme de Céa pour le problème (1.4.2).

Lemme 1.4.1 *Si \mathbf{u} est solution de (1.4.1) et \mathbf{u}_h solution de (1.4.2) alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de s telle que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,s} \leq C \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h^r} \left(1 + \frac{|s|}{\eta} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1,s}. \quad (1.4.4)$$

Pour majorer le membre de droite de (1.4.4), nous aurons besoin d'une version raffinée du lemme de Bramble-Hilbert et de plusieurs estimations d'interpolation données dans [Girault et Raviart, 1986].

Lemme 1.4.2 (*Bramble-Hilbert*)

Soit $r \geq 1$, $m \leq r + 1 \Rightarrow \mathbf{H}^{r+1}(\widehat{K}) \subset \mathbf{H}^m(\widehat{K})$. Soit $\widehat{\pi}^r$ l'application linéaire continue de $\mathbf{H}^{r+1}(\widehat{K})$ dans $\mathbf{H}^m(\widehat{K})$ vérifiant

$$\forall \widehat{\mathbf{p}} \in \mathbb{Q}^r(\widehat{K}), \widehat{\pi}^r \widehat{\mathbf{p}} = \widehat{\mathbf{p}}.$$

Alors il existe une constante $C > 0$ dépendante de \widehat{K} et de r telle que

$$\forall \widehat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^{r+1}(\widehat{K}), \|\widehat{\mathbf{u}} - \widehat{\pi}^r \widehat{\mathbf{u}}\|_{m, \widehat{K}} \leq C [\widehat{\mathbf{u}}]_{r+1, \widehat{K}}. \quad (1.4.5)$$

(la norme $[\cdot]_{r+1, \widehat{K}}$ est définie en page de notations). L'utilisation du changement de variable $x = F_K(\widehat{x})$ fournit les estimations suivantes : [Girault et Raviart, 1986]

Lemme 1.4.3 Soit $K \in \mathcal{T}_h$, $m \geq 1$. Alors $\forall v \in \mathbf{H}^m(K)$ il existe $C_\sigma > 0$ tel que

$$\|\mathbf{v}\|_{0, K} \leq C_\sigma h_K^{\frac{d}{2}} \|\widehat{\mathbf{v}}\|_{0, \widehat{K}},$$

$$|\mathbf{v}|_{m, K} \leq C_\sigma \frac{h_K^{\frac{d}{2}}}{\rho_K^m} \|\widehat{\mathbf{v}}\|_{m, \widehat{K}}, \quad (1.4.6)$$

$$[\widehat{\mathbf{v}}]_{m, \widehat{K}} \leq C_\sigma h_K^{m - \frac{d}{2}} |\mathbf{v}|_{m, K}. \quad (1.4.7)$$

Les lemmes 1.4.2 et 1.4.3 conduisent [Girault et Raviart, 1986] à la

Proposition 1.4.2 Soit $K \in \mathcal{T}_h$ et $0 \leq m \leq l \leq r + 1$. Notons π_K^r l'opérateur linéaire continu de $\mathbf{H}^l(K)$ dans $\mathbf{H}^m(K)$ défini par

$$(\pi_K^r \mathbf{v}) \circ F_K = \widehat{\pi}^r \widehat{\mathbf{v}}.$$

Alors il existe $C_\sigma > 0$ tel que $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^l(K)$,

$$|\mathbf{v} - \pi_K^r \mathbf{v}|_{m, K} \leq C_\sigma h_K^{l-m} |\mathbf{v}|_{l, K}. \quad (1.4.8)$$

Ce dernier lemme va nous permettre de majorer le membre de droite de (1.4.4). On peut alors énoncer le

Théorème 1.4.1 Si \mathbf{u} et \mathbf{u}_h sont respectivement solutions de (1.4.1) et (1.4.2) et si \mathbf{f} est suffisamment régulière pour que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{r+1}(\Omega)$, alors

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, s} \leq C \left(1 + \frac{|s|}{\eta} \right) (|s| |\mathbf{u}|_{r, \Omega} + |\mathbf{u}|_{r+1, \Omega}) h^r.$$

Preuve :

Soit $\Pi_h^r : C^0(\Omega) \longrightarrow \mathbf{U}_h^r$ défini par

$$(\Pi_h^r \mathbf{v})|_K = \pi_K^r \mathbf{v} . \quad (1.4.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h^r} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1,s}^2 &\leq \|\mathbf{u} - \Pi_h^r \mathbf{u}\|_{1,s}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u} - \pi_K^r \mathbf{u}\|_{1,s,K}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (|s|^2 \|\mathbf{u} - \pi_K^r \mathbf{u}\|_{0,K}^2 + |\mathbf{u} - \pi_K^r \mathbf{u}|_{1,K}^2) \end{aligned}$$

On applique alors successivement (1.4.8) avec $[m = 0; l = r]$ et $[m = 1; l = r+1]$ il vient

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h^r} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1,s}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C_\sigma^2 h_K^{2r} (|s|^2 |\mathbf{u}|_{r,K}^2 + |\mathbf{u}|_{r+1,K}^2)$$

Au final on obtient bien

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h^r} \left(1 + \frac{|s|}{\eta} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1,s} \leq C \left(1 + \frac{|s|}{\eta} \right) (|s| |\mathbf{u}|_{r,\Omega} + |\mathbf{u}|_{r+1,\Omega}) h^r . \quad \diamond$$

Remarque 1.4.2 *La dépendance en s de cette estimation a son importance. C'est elle qui va dicter la régularité en temps nécessaire pour la solution du problème (P) lorsque nous reviendrons dans le domaine temporel.*

Remarque 1.4.3 *Le résultat du théorème 1.4.1 serait suffisant pour finir l'analyse du schéma éléments finis (1.4.2). Or le schéma qui nous intéresse, à savoir (1.2.6) utilise plusieurs formules de quadrature. Bien qu'utile, le résultat du théorème 1.4.1 est insuffisant pour analyser (1.2.6). Il va nous falloir utiliser une version améliorée du lemme de Céa à savoir le lemme de Strang [Ciarlet, 1978]. C'est le sujet de la section suivante.*

1.4.1.2 Analyse de l'approximation par éléments finis avec intégration numérique

Pour notre analyse nous aurons besoin de fixer $R = G$, c'est à dire de calculer les intégrales qui définissent les termes de rigidité à l'aide d'une formule de Gauss. Nous verrons que ce choix est plus dû à une limite de nos techniques d'analyse qu'à une réalité numérique.

On considère le nouveau problème approché

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{u}_h \in \mathbf{U}_h^r, \text{ solution de} \\ &a_h(s; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \bar{s}(\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h^r , \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

où l'on a posé

$$a_h(s; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \bar{s} \left[|s|^2 \int_{\Omega}^{GL} \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h + \int_{\Omega}^G \nabla \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h \right].$$

Notre analyse reposera essentiellement sur une adptation du lemme de Strang donnée dans ([Cohen *et al.*, 1995]) :

Lemme 1.4.4 *Si \mathbf{u} est solution de (1.4.1) et \mathbf{u}_h solution de (1.4.10) alors il existe une constante C indépendante du pas de maillage et de s telle que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,s} \leq C \underbrace{\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h^r} \left[\left(1 + \frac{|s|}{\eta} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1,s} + \frac{1}{\eta} \right]}_{\text{Erreur d'interpolation}} \underbrace{\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h^r} \frac{|(a - a_h)(s; \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,s}}}_{\text{Erreur due à l'intégration numérique}} \quad (1.4.11)$$

Remarque 1.4.4 *La majoration de l'erreur d'interpolation du membre de droite de (1.4.11) était l'objet de la section 1.4.1.1. Il ne nous reste donc plus qu'à majorer*

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h^r} \frac{|(a - a_h)(s; \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,s}} \leq |s|^3 \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h^r} \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h^r} e_h^m(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + |s| \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h^r} \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h^r} e_h^r(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h),$$

où e_h^m est l'erreur due à l'approximation de la matrice de masse par une formule de Gauss-Lobatto, c'est à dire :

$$e_h^m(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) = \left| \int_{\Omega} \mathbf{v}_h \bar{\mathbf{w}}_h - \int_{\Omega}^{GL} \mathbf{v}_h \bar{\mathbf{w}}_h \right|$$

et e_h^r est l'erreur due à l'approximation de la matrice de rigidité par une formule de Gauss, c'est à dire :

$$e_h^r(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) = \left| \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}_h \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}_h - \int_{\Omega}^G \nabla \mathbf{v}_h \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}_h \right|.$$

Pour notre analyse, nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 1.4.5 *En dimension d on a :*

$$J_K \in \mathbb{Q}^{d-1}.$$

Preuve :

- Le cas $d=2$:

F_K est bilinéaire donc il existe $(\underline{\kappa}, \underline{a}, \underline{b}, \underline{\lambda})$ des vecteurs de \mathbb{R}^2 tels que

$$F_K(x, y) = \underline{\kappa} + \underline{a} x + \underline{b} y + \underline{\lambda} x y.$$

Par définition on a :

$$\begin{aligned} J_K &= (a_1 + \lambda_1 y)(b_2 + \lambda_2 x) - (b_1 + \lambda_1 x)(a_2 + \lambda_2 y) \\ &= a_1 b_2 - b_1 a_2 + x(\lambda_2 a_1 - \lambda_1 a_2) + y(\lambda_1 b_2 - \lambda_2 b_1) \\ &\Rightarrow J_K \in \mathbb{Q}^1 . \end{aligned}$$

• Le cas $d=3$:

F_K est bilinéaire donc il existe $(\underline{\kappa}, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}, \underline{\lambda})$ des vecteurs de \mathbb{R}^3 tels que

$$F_K(x, y) = \underline{\kappa} + \underline{a} x + \underline{b} y + \underline{c} z + \underline{\alpha} x y + \underline{\beta} x z + \underline{\gamma} y z + \underline{\lambda} x y z .$$

Les développements sont sensiblement plus lourds que pour $d = 2$. Cependant en calculant J_K à l'aide d'un développement de DF_K par la première ligne on montre trivialement que J_K peut s'écrire sous la forme

$$J_K = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} (a_i + \alpha_i y + \beta_i z + \lambda_i y z) \Delta_i , \quad (1.4.12)$$

où les déterminants Δ_i sont définis par

$$\begin{pmatrix} b_{\varphi(i)} + \alpha_{\varphi(i)} x + \gamma_{\varphi(i)} z + \lambda_{\psi(i)} x z & b_{\psi(i)} + \alpha_{\psi(i)} x + \gamma_{\psi(i)} z + \lambda_{\varphi(i)} x z \\ c_{\varphi(i)} + \beta_{\varphi(i)} x + \gamma_{\varphi(i)} y + \lambda_{\psi(i)} x y & c_{\psi(i)} + \beta_{\psi(i)} x + \gamma_{\psi(i)} y + \lambda_{\varphi(i)} x y \end{pmatrix} ,$$

φ et ψ étant des permutations sur les indices $\{1, 2, 3\}$. En calculant Δ_i on note que les termes de plus haut degré ($\lambda_{\psi(i)} \lambda_{\varphi(i)} x^2 y z$) s'annulent et que

$$\Delta_i \in \mathbb{Q}_{2,1,1} .$$

Comme $(a_i + \alpha_i y + \beta_i z + \lambda_i y z) \in \mathbb{Q}_{0,1,1}$, d'après (1.4.12) on a bien $J_K \in \mathbb{Q}^{d-1}$. \diamond

Erreur due à l'intégration sur le terme de masse : Estimation de $e_h^m(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)$

Par changement de variable, on a

$$\forall (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \in \mathbf{U}_h^r \times \mathbf{U}_h^r , \quad \int_K \mathbf{v}_h \bar{\mathbf{w}}_h - \int_K^{GL} \mathbf{v}_h \bar{\mathbf{w}}_h = \hat{E}_K(\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{\mathbf{w}}_h) \quad (1.4.13)$$

où

$$\hat{E}_K(\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{\mathbf{w}}_h) = \int_{\hat{K}} |J_K| \hat{\mathbf{v}}_h \hat{\mathbf{w}}_h - \int_{\hat{K}}^{GL} |J_K| \hat{\mathbf{v}}_h \hat{\mathbf{w}}_h \quad (1.4.14)$$

Lemme 1.4.6 Soit $j \geq 1$, $\widehat{\Pi}_j$ le projecteur de $L^2(\widehat{K})$ dans $\mathbb{Q}^j(\widehat{K})$. Alors

$$\forall r \geq d, \quad \forall p \in [1, r - d + 1], \quad \forall (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \in \mathbf{U}_h^r \times \mathbf{U}_h^r, \\ \widehat{E}_K(\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h) = \widehat{E}_K(\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h - \widehat{\Pi}_0\widehat{\mathbf{w}}_h).$$

Preuve :

Soit $(\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h) \in \mathbf{U}_h^r \times \mathbf{U}_h^r$, par bilinéarité

$$\begin{aligned} \widehat{E}_K(\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h - \widehat{\Pi}_0\widehat{\mathbf{w}}_h) &= \widehat{E}_K(\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h) - \widehat{E}_K(\widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h) \\ &\quad - \widehat{E}_K(\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\Pi}_0\widehat{\mathbf{w}}_h) + \widehat{E}_K(\widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\Pi}_0\widehat{\mathbf{w}}_h). \end{aligned}$$

Donc le lemme est vrai si

$$\widehat{E}_K(\widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h) = \widehat{E}_K(\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\Pi}_0\widehat{\mathbf{w}}_h) = \widehat{E}_K(\widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\Pi}_0\widehat{\mathbf{w}}_h) = 0.$$

Or d'après (1.2.5), on a

$$\widehat{E}_K(\widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h) = 0 \text{ dès que } \deg(|J_K|(\widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h)\widehat{\mathbf{w}}_h) \leq 2r - 1.$$

D'après le lemme 1.4.5, $J_K \in \mathbb{Q}^{d-1}$. Or $\widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h \in \mathbb{Q}^{p-1}$, $\widehat{\mathbf{v}}_h \in V_h^r$ donc

$$|J_K|(\widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h)\widehat{\mathbf{w}}_h \in \mathbb{Q}^{p+d+r-2}.$$

Par conséquent

$$\widehat{E}_K(\widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h) = 0 \text{ dès que } p + r + d - 2 \leq 2r - 1 \Leftrightarrow p \leq r - d + 1. \quad (1.4.15)$$

Par un raisonnement analogue, comme $|J_K|(\widehat{\Pi}_0\widehat{\mathbf{w}}_h)\widehat{\mathbf{v}}_h \in \mathbb{Q}^{d+r-1}$ alors

$$\widehat{E}_K(\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\Pi}_0\widehat{\mathbf{w}}_h) = 0 \text{ dès que } d + r - 1 \leq 2r - 1 \Leftrightarrow r \geq d. \quad (1.4.16)$$

Enfin comme $|J_K|(\widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h)(\widehat{\Pi}_0\widehat{\mathbf{w}}_h) \in \mathbb{Q}^{d+p-2}$ alors

$$\widehat{E}_K(\widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\Pi}_0\widehat{\mathbf{w}}_h) = 0 \text{ dès que } p + d - 2 \leq 2r - 1 \Leftrightarrow p \leq 2r - d + 1. \quad (1.4.17)$$

Les deux contraintes les plus fortes sont (1.4.15) et (1.4.16), donc le lemme est démontré.
◇

Proposition 1.4.3 Soit $r \geq d$. $\exists C > 0$ tel que $\forall (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \in \mathbf{U}_h^r \times \mathbf{U}_h^r$

$$\left| \int_K \mathbf{v}_h \bar{\mathbf{w}}_h - \int_K^{GL} \mathbf{v}_h \bar{\mathbf{w}}_h \right| \leq C h_K^{p+1} |\mathbf{v}_h|_{p,K} |\mathbf{w}_h|_{1,K}, \quad \forall p \in [1; r - d + 1]. \quad (1.4.18)$$

Preuve :

Par Cauchy-Schwartz et le lemme précédent on a :

$$\begin{aligned}
 |\widehat{E}_K(\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h)| &\leq \|J_K\|_{\infty, \widehat{K}} \|\widehat{\mathbf{v}}_h - \widehat{\Pi}_{p-1}\widehat{\mathbf{v}}_h\|_{0, \widehat{K}} \|\widehat{\mathbf{w}}_h - \widehat{\Pi}_0\widehat{\mathbf{w}}_h\|_{0, \widehat{K}} \\
 &\leq C \|J_K\|_{\infty, \widehat{K}} [\widehat{\mathbf{v}}_h]_{p, \widehat{K}} [\widehat{\mathbf{w}}_h]_{1, \widehat{K}}, \text{ par (1.4.5)} \\
 &\leq C \|J_K\|_{\infty, \widehat{K}} h_K^{p-\frac{d}{2}} |\mathbf{v}_h|_{p, K} h_K^{1-\frac{d}{2}} |\mathbf{w}_h|_{1, K}, \text{ par (1.4.7)} \\
 &\leq C h_K^{p+1} |\mathbf{v}_h|_{p, K} |\mathbf{w}_h|_{1, K}, \text{ par (1.4.3)} \diamond
 \end{aligned}$$

Puisque $|\mathbf{w}_h|_{1, K} < \|\mathbf{w}_h\|_{1, s}$, si on applique le lemme précédent avec $p = r - d + 1$, en sommant sur les éléments du maillage on obtient le

Corollaire 1.4.2 *Soit $r \geq d$. $\exists C > 0$ tel que $\forall (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \in \mathbf{U}_h^r \times \mathbf{U}_h^r$,*

$$e_h^m(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \leq C h^{r-d+2} |\mathbf{v}_h|_{r-1, \Omega} \|\mathbf{w}_h\|_{1, s}. \quad (1.4.19)$$

Remarque 1.4.5 *Le corollaire précédent montre qu'en dimension 3, l'utilisation d'une formule de quadrature de Gauss-Lobatto pénalise d'un ordre la convergence de l'approximation polynomiale. Ce phénomène est confirmé par les résultats numériques établis dans [Durufle, 2006]. Cependant en dimension 2, l'erreur due à l'intégration numérique sur le terme de masse reste en $O(h^r)$. On doit signaler que la technique de démonstration n'est elle, pas optimale, puisque le corollaire précédent n'est démontré qu'à partir de $r \geq d$ tandis que les résultats numériques montrent une convergence optimale pour les ordres $r = 1$ en dimension 2 et $r=1,2$ en dimension 3 [Durufle, 2006].*

Remarque 1.4.6 *Dans le cas d'un maillage régulier, J_K est constant et plus précisément $|J_K| = h_K^d$. Les relations (1.4.15), (1.4.16) et (1.4.17) deviennent alors respectivement ($p \leq r$), ($1 \leq r$), ($p \leq 2r$). de sorte que $\forall r \geq 1$. $\exists C > 0$ tel que $\forall (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \in \mathbf{U}_h^r \times \mathbf{U}_h^r$,*

$$e_h^m(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \leq C h^{r+1} |\mathbf{v}_h|_{r-1, \Omega} \|\mathbf{w}_h\|_{1, s}. \quad (1.4.20)$$

Par conséquent, à la différence du cas d'un maillage quelconque, l'utilisation d'une formule de Gauss-Lobatto pour calculer la matrice de masse conserve l'ordre d'interpolation polynomiale quel que soit cet ordre et quelle que soit la dimension.

Erreur d'intégration commise sur le terme de rigidité : Estimation de $e_h^r(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)$

Par changement de variable, on a :

$$\forall (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \in \mathbf{U}_h^r \times \mathbf{U}_h^r, \int_K \nabla \mathbf{v}_h \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}_h - \int_K^G \nabla \mathbf{v}_h \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}_h = \widehat{E}_K(\widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h) \quad (1.4.21)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \widehat{E}_K(\widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h) &= \int_{\widehat{K}} |J_K| DF_K^{*-1} DF_K^{-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h \\
 &- \int_{\widehat{K}}^G |J_K| DF_K^{*-1} DF_K^{-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h, \text{ d'après (1.3.1)}.
 \end{aligned}$$

Remarque 1.4.7 Dans le cas d'un maillage régulier le terme $|J_K| DF_K^{*-1} DF_K^{-1}$ est précisément la matrice identité quelque soit l'élément K du maillage. Dans ce cas, il est trivial de voir qu'utiliser une formule de Gauss sur la partie rigidité revient à faire une intégration exacte. En effet, $\widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h \in \mathbb{Q}^{2r}(\widehat{K})$ et donc d'après (1.2.4)

$$\int_{\widehat{K}} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h = \int_{\widehat{K}}^G \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h .$$

Dans cette configuration de maillage, l'utilisation d'une formule de Gauss pour calculer la matrice de rigidité n'a donc aucune influence sur la convergence de la méthode.

On se place donc dans l'hypothèse où \mathcal{T}_h est un maillage quelconque (quadrilatéral ou hexaédrique).

Proposition 1.4.4 Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \int_K \nabla \mathbf{v}_h \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}_h - \int_K^G \nabla \mathbf{v}_h \cdot \nabla \bar{\mathbf{w}}_h \right| \leq C h_K^{r+1} \left(\sum_{m=0}^{d-1} h_K^{-m} |\mathbf{v}_h|_{r+2-m,K} \right) |\mathbf{w}|_{1,K} \quad (1.4.22)$$

Pour démontrer cette proposition, nous n'allons pas pouvoir utiliser la même démarche que pour le terme de masse. En effet la démonstration précédente était uniquement basée sur des arguments arithmétiques sur des degrés de polynômes qui ne sont pas valables ici puisque le terme $|J_K| DF_K^{*-1} DF_K^{-1}$ est une fraction rationnelle. Cependant le critère de précision (1.2.4) satisfait par les points de Gauss va nous être utile. Nous introduisons donc $\widehat{\mathcal{J}}^r(\widehat{\varphi})$, le polynôme d'interpolation aux points de Gauss de la fonction $\widehat{\varphi}$ défini par

$$\widehat{\mathcal{J}}^r(\widehat{\varphi}) \in \mathbb{Q}_r(\widehat{K}) \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}(\widehat{\xi}_i^G) = \widehat{\mathcal{J}}^r(\widehat{\varphi})(\widehat{\xi}_i^G), \quad \forall 1 \leq i \leq (r+1)^d .$$

Preuve (de la proposition 1.4.4) :

Posons $\widehat{\mathbf{z}}_h^K = |J_K| DF_K^{*-1} DF_K^{-1} \nabla \widehat{\mathbf{v}}_h$. Par définition nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{E}_K(\widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h) &= \int_{\widehat{K}} \widehat{\mathbf{z}}_h^K \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h - \sum_{i=1}^{(r+1)^d} \widehat{\omega}_i^G \widehat{\mathbf{z}}_h^K(\widehat{\xi}_i^G) \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h(\widehat{\xi}_i^G) \\ &= \int_{\widehat{K}} \widehat{\mathbf{z}}_h^K \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h - \sum_{i=1}^{(r+1)^d} \widehat{\omega}_i^G \widehat{\mathcal{J}}^r(\widehat{\mathbf{z}}_h^K)(\widehat{\xi}_i^G) \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h(\widehat{\xi}_i^G) \\ &= \int_{\widehat{K}} \widehat{\mathbf{z}}_h^K \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h - \int_{\widehat{K}}^G \underbrace{\widehat{\mathcal{J}}^r(\widehat{\mathbf{z}}_h^K)}_{\in \mathcal{Q}_{2r}(\widehat{K})} \cdot \nabla \widehat{\mathbf{w}}_h \\ &= \int_{\widehat{K}} (\widehat{\mathbf{z}}_h^K - \widehat{\mathcal{J}}^r(\widehat{\mathbf{z}}_h^K)) \cdot \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h \quad (\text{par 1.2.4}) \end{aligned}$$

On remarque que l'on ne peut pas établir une égalité similaire avec des points de Gauss-Lobatto. Par Cauchy-Schwartz on en déduit que

$$|\widehat{E}_K(\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h)| \leq \|\widehat{\underline{\mathbf{z}}}_h^K - \widehat{\mathcal{J}}^r(\widehat{\underline{\mathbf{z}}}_h^K)\|_{0, \widehat{K}} |\widehat{\mathbf{w}}_h|_{1, \widehat{K}}. \quad (1.4.23)$$

Pour majorer le membre de droite de (1.4.23) nous allons utiliser l'estimation donnée dans [Gottlieb et Hesthaven, 2001]

$$\|\widehat{\underline{\mathbf{z}}}_h^K - \widehat{\mathcal{J}}^r(\widehat{\underline{\mathbf{z}}}_h^K)\|_{0, \widehat{K}} \leq [\widehat{\underline{\mathbf{z}}}_h^K]_{r+1, \widehat{K}}.$$

Majorons maintenant le terme $[\widehat{\underline{\mathbf{z}}}_h^K]_{r+1, \widehat{K}}$. La principale difficulté est l'estimation des dérivées d'ordre élevé de la fraction rationnelle $|J_K| DF_K^{*-1} DF_K^{-1}$. Cependant, on note que

$\widehat{\underline{\mathbf{z}}}_h^K = M_K(\nabla \mathbf{v}_h \circ F_K)$ où $M_K = (m_{ij}^K) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est la matrice des cofacteurs de DF_K à savoir $|J_K| DF_K^{*-1}$. Par conséquent

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, d\}^2, m_{ij}^K \in \mathbb{Q}^{d-1}(\widehat{K}). \quad (1.4.24)$$

Nous avons alors (en posant $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$)

$$\begin{aligned} [\widehat{\underline{\mathbf{z}}}_h^K]_{r+1, \widehat{K}}^2 &\leq \sum_{l=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_{\widehat{K}} \left| \frac{\partial^{r+1}}{\partial \widehat{x}_l^{r+1}} (m_{ij}^K (\nabla \mathbf{v}_h \circ F_K)_j) \right|^2 \\ &\leq \sum_{l=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{m=0}^{r+1} \int_{\widehat{K}} \left| C_{r+1}^m \frac{\partial^m}{\partial \widehat{x}_l^m} (m_{ij}^K) \frac{\partial^{r+1-m}}{\partial \widehat{x}_l^{r+1-m}} (\nabla \mathbf{v}_h \circ F_K)_j \right|^2 \end{aligned}$$

Or d'après (1.4.24), $\frac{\partial^m}{\partial \widehat{x}_l^m} (m_{ij}^K) = 0$ dès que $m \geq d$. De plus par définition de M_K , on a alors $\left| \frac{\partial^m}{\partial \widehat{x}_l^m} (m_{ij}^K) \right| < C h_K^{d-1}$. On en déduit qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} [\widehat{\underline{\mathbf{z}}}_h^K]_{r+1, \widehat{K}}^2 &\leq C h_K^{2(d-1)} \sum_{l=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{m=0}^{d-1} \int_{\widehat{K}} \left| \frac{\partial^{r+1-m}}{\partial \widehat{x}_l^{r+1-m}} (\nabla \mathbf{v}_h \circ F_K)_j \right|^2 \\ &= C h_K^{2(d-1)} \sum_{m=0}^{d-1} [\nabla \mathbf{v}_h \circ F_K]_{r+1-m, \widehat{K}}^2 \\ &\leq C h_K^{2(d-1)} \sum_{m=0}^{d-1} h_K^{2(r+1-m-\frac{d}{2})} |\mathbf{v}_h|_{r+2-m, K}^2 \quad \text{par (1.4.7)} \\ &\leq C h_K^{2r+d} \sum_{m=0}^{d-1} h_K^{-2m} |\mathbf{v}_h|_{r+2-m, K}^2 \end{aligned}$$

Au final, on en déduit que

$$[\widehat{\underline{\mathbf{z}}}_h^K]_{r+1, \widehat{K}} \leq C h_K^{r+\frac{d}{2}} \sum_{m=0}^{d-1} h_K^{-m} |\mathbf{v}_h|_{r+2-m, K}. \quad (1.4.25)$$

Il nous reste enfin à majorer la semi-norme $|\widehat{\mathbf{w}}_h|_{1,\widehat{K}}$ dans (1.4.23). Par changement de variable et grâce aux estimations (1.4.3) on a

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathbf{w}}_h|_{1,\widehat{K}}^2 &= \int_{\widehat{K}} |\widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h|^2 d\widehat{x} \\ &= \int_K |DF_K^* \nabla \mathbf{w}_h|^2 |J_K|^{-1} dx \quad (x = F_K(\widehat{x})) \\ &\leq \|DF_K\|_{\infty,\widehat{K}}^2 \|J_K^{-1}\|_{\infty,\widehat{K}} |\mathbf{w}_h|_{1,K}^2 \\ &\leq C \frac{h_K^2}{\rho_K^d} |\mathbf{w}_h|_{1,K}^2, \text{ d'après (1.4.3)} \end{aligned}$$

Au final d'après (1.2.1) il vient

$$|\widehat{\mathbf{w}}_h|_{1,\widehat{K}} \leq C \sigma h_K^{1-\frac{d}{2}} |\mathbf{w}_h|_{1,K}. \quad (1.4.26)$$

En injectant (1.4.25) et (1.4.26) dans (1.4.23) on obtient

$$|\widehat{E}_K(\widehat{\mathbf{v}}_h, \widehat{\mathbf{w}}_h)| \leq C h_K^{r+1} \left(\sum_{m=0}^{d-1} h_K^{-m} |\mathbf{v}_h|_{r+2-m,K} \right) |\mathbf{w}_h|_{1,K}. \quad \diamond$$

En sommant sur les éléments du maillage nous avons le

Corollaire 1.4.3 *Il existe $C > 0$ tel que $\forall (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \in \mathbf{U}_h^r \times \mathbf{U}_h^r$,*

$$e_h^r(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \leq C h^{r+1} \left(\sum_{m=0}^{d-1} h^{-m} |\mathbf{v}_h|_{r+2-m,\Omega} \right) \|\mathbf{w}_h\|_{1,s}. \quad (1.4.27)$$

On peut alors estimer l'erreur due à l'utilisation des formules de quadrature.

Lemme 1.4.7 *On a l'estimation*

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h^r} \frac{|(a - a_h)(s; \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,s}} \leq C h^r |s| \left[|s|^2 h^{2-d} |\mathbf{v}_h|_{r-1,\Omega} + h \sum_{m=0}^{d-1} h^{-m} |\mathbf{v}_h|_{r+2-m,\Omega} \right].$$

Preuve :

Par définition

$$\begin{aligned} \frac{|(a - a_h)(s; \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,s}} &\leq \frac{|s|^3 e_h^m(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| + |s| e_h^r(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,s}} \\ &\leq C h^r |s| \left[|s|^2 h^{2-d} |\mathbf{v}_h|_{r-1,\Omega} + h \sum_{m=0}^{d-1} h^{-m} |\mathbf{v}_h|_{r+2-m,\Omega} \right] \end{aligned}$$

d'après (1.4.19) et (1.4.27). \diamond

Corollaire 1.4.4 Quand $h \rightarrow 0$ de sorte que $h^k > h^m$, $\forall k < m$ alors

- Si $d = 2$, $\frac{|(a - a_h)(s; \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,s}} = O(h^r)$
- Si $d = 3$, $\frac{|(a - a_h)(s; \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,s}} = O(h^{r-1})$

Remarque 1.4.8 Le corollaire précédent montre que le choix de l'intégration numérique proposé pour le schéma (1.4.10) conserve l'ordre d'approximation polynomiale dans le cas de la dimension 2 mais fait perdre un ordre dans le cas de la dimension 3 sauf dans le cas d'un maillage régulier d'après les remarques 1.4.6 et 1.4.7 .

Théorème 1.4.2 Soit \mathbf{u} la solution de (1.4.1) et \mathbf{u}_h la solution de (1.4.10). Si la donnée \mathbf{f} est suffisamment régulière pour que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{r+2}(\Omega)$ alors il existe $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,s} \leq & C h^r \left[|s| |\mathbf{u}|_{r,\Omega} + |\mathbf{u}|_{r+1,\Omega} \right. \\ & \left. + \frac{|s|}{\eta} \left(|s|^2 h^{2-d} |\mathbf{u}|_{r-1,\Omega} + |s| |\mathbf{u}|_{r,\Omega} + |\mathbf{u}|_{r+1,\Omega} + h \sum_{m=0}^{d-1} h^{-m} |\mathbf{u}|_{r+2-m,\Omega} \right) \right] \end{aligned}$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer le lemme de Strang avec $\mathbf{v}_h = \Pi_h^r \mathbf{u}$ (cf.(1.4.9)) et d'utiliser le théorème (1.4.1) et le lemme (1.4.7). \diamond

1.4.2 Estimations d'erreur dans le domaine temporel

Rappelons que l'objectif de ce chapitre est l'analyse de la semi-discrétisation par éléments finis du problème

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u : \Omega \times [0, T) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ solution de} \\ (P) \quad & \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{sur } \Omega \times [0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T) \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \end{aligned}$$

dont la formulation variationnelle est

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u \in \mathcal{S}^T \stackrel{\text{def}}{=} C^0(0, T; H^1(\Omega)) \times C^1(0, T; L^2(\Omega)) \text{ solution de} \\ & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(t) v + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(t) v, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

Pour pouvoir exploiter les estimations obtenues sur le schéma d'approximation du problème "harmonique" (1.4.10) on utilisera une formule de Gauss dans le schéma (1.2.6) pour calculer le terme de rigidité. On considère donc le problème éléments finis suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u_h(t) : [0, T] \longrightarrow U_h^r \text{ solution de} \\ & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega}^{GL} u_h(t) v_h + \int_{\Omega}^G \nabla u_h(t) \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f_h(t) v_h, \quad \forall v_h \in U_h^r. \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

Nous suivrons la démarche proposée dans [Cohen *et al.*, 1995]. Elle consiste essentiellement à utiliser les estimations obtenues sur le problème (1.4.10) en utilisant la transformée de la Laplace. Les puissances du paramètres $|s|$ deviendront alors des opérateurs de dérivation en temps d'ordres élevés. Cela nous permettra d'obtenir des estimations pour (1.4.29) sous réserve que la solution du problème continu soit suffisamment régulière en temps.

Cadre fonctionnel dans le domaine temporel : Nous allons introduire ici les espaces fonctionnels appropriés pour définir la régularité de la solution du problème (P) à l'aide des résultats de la section précédente. A cet effet, introduisons l'espace

$$V_{T,0} = \{v \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ tel que } v(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega\},$$

et la norme liée à l'énergie sur $V_{T,0}$:

$$\|v\|_{1,T}^2 = \int_0^T \left[\left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{0,\Omega}^2 + |\nabla v|_{0,\Omega}^2 \right] dt.$$

Dans le cas d'une solution plus régulière en temps nous considèrerons la semi-norme

$$\forall v \in H^l(0, T; H^m(\Omega)) \quad , \quad |v|_{m,l,T}^2 = \int_0^T \left| \frac{\partial^l v}{\partial t^l} \right|_{m,\Omega}^2 dt. \quad (1.4.30)$$

Enfin nous exploiterons les résultats de la section (1.3.2.4) en utilisant la transformée de Laplace. Cette méthode nous imposera de travailler avec les espaces de Sobolev à poids

$$H_{\eta}^l(\mathbb{R}^+; H^m(\Omega)) = \left\{ v \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+; H^m(\Omega)) \text{ tel que } \frac{\partial^p v}{\partial t^p} e^{-\eta t} \in L^2(\mathbb{R}^+; H^m(\Omega)), \quad 0 \leq p \leq l \right\}.$$

où η est un réel strictement positif.

La transformée de Laplace : On rappelle ici brièvement quelques définitions relatives à la transformée de Laplace d'une distribution. Soit E un espace de Hilbert. On note $\mathcal{D}'_+(E)$ l'espace des distributions sur \mathbb{R} à valeur dans E causales et $\mathcal{S}'_+(E)$ l'espace des distributions tempérées de $\mathcal{D}'_+(E)$ [Dautray et Lions, 1988]. On définit alors l'espace des

distributions Laplace-Transformable

$$LT(\eta, E) = \{f \in \mathcal{D}'_+(E) \text{ tel que } e^{-\eta t} f \in \mathcal{S}'_+(E)\} .$$

Pour $s \in \mathbb{C}^+ = \{s = \eta + i\omega, \eta > 0\}$ on définit la transformée de Laplace \mathcal{F}_L sur $LT(\eta, E)$:

$$f(x, t) \xrightarrow{\mathcal{F}_L} \mathcal{F}_L(f(x, t)) = \mathbf{f}(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} f(x, t) e^{-st} dt .$$

Dans notre cas E sera typiquement un espace de type $H^m(\Omega)$. L'outil principal pour finir notre analyse sera le

Théorème 1.4.3 (Plancherel) *Soit $s \in \mathbb{C}^+$ et $w \in LT(\eta, L^2(\mathbb{R}))$ alors,*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{w}^2(s) d\omega = \int_0^{+\infty} w^2(t) e^{-2\eta t} dt .$$

Nous sommes maintenant en mesure d'exploiter les résultats des sections précédentes.

Proposition 1.4.5 *Soit $r \geq d$, u et u_h les solutions de (1.4.28) et (1.4.29). Alors \mathbf{u} et \mathbf{u}_h sont solutions de (1.4.1) et (1.4.10), et si f est suffisamment régulière pour que $u \in H_\eta^l(\mathbb{R}^+; H^{r+2-l}(\Omega)) \cap H_\eta^1(\mathbb{R}^+; H^{r+2-m}(\Omega))$ pour $l = \{1, \dots, 3\}$ et $m = \{0, \dots, d-1\}$, alors*

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial u - u_h}{\partial t} \right|_{0,\Omega}^2 + |u - u_h|_{1,\Omega}^2 \right) e^{-2\eta t} dt &\leq C h^{2r} \left[\int_0^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{r,\Omega}^2 + |u|_{r+1,\Omega}^2 \right) e^{-2\eta t} dt \right. \\ &+ \frac{1}{\eta^2} \int_0^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{r+1,\Omega}^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{r,\Omega}^2 + h^{2(2-d)} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|_{r-1,\Omega}^2 \right) e^{-2\eta t} dt \\ &\left. + h^2 \sum_{m=0}^{d-1} h^{-2m} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{r+2-m,\Omega}^2 e^{-2\eta t} dt \right] . \end{aligned}$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème de Plancherel à l'inégalité du théorème (1.4.2). \diamond

Pour obtenir des estimations en temps fini nous utiliserons le lemme de troncature suivant dont une démonstration est donnée dans [Cohen *et al.*, 1995].

Lemme 1.4.8 *Soit $v \in H^l(0, T; H^m(\Omega))$. Il existe un prolongement $\tilde{v} \in H^l(0, +\infty; H^m(\Omega))$ de v , causal, tel que*

$$\begin{cases} \tilde{v}(x, t) = v(x, t), & (x, t) \in \Omega \times [0, T] , \\ |\tilde{v}|_{m,l,\infty}^2 \leq C \sum_{j=0}^l |v|_{m,j,T}^2 . \end{cases}$$

En injectant les prolongements \tilde{u} , \tilde{u}_h , \tilde{f}_h définis grâce au lemme précédent, dans l'inégalité de la Proposition 1.4.5, on déduit l'estimation (car $e^{-2\eta t} \leq 1$ sur $(0, T)$) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial u - u_h}{\partial t} \right|_{0,\Omega}^2 + |u - u_h|_{1,\Omega}^2 e^{-2\eta t} dt \leq C h^{2r} \left[|u|_{r,0,T}^2 + \sum_{j=0}^1 |u|_{r,j,T}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\eta^2} \left(\sum_{j=0}^1 |u|_{r+1,j,T}^2 + \sum_{j=0}^2 |u|_{r,j,T}^2 + h^{2(2-d)} \sum_{j=0}^3 |u|_{r-1,j,T}^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + h^2 \sum_{m=0}^{d-1} h^{-2m} \sum_{j=0}^1 |u|_{r+2-m,j,T}^2 \right] . \right. \end{aligned}$$

En prenant $\eta = \frac{1}{T}$ pour minimiser $\frac{1}{\eta^2} e^{2\eta T}$ dans l'inégalité précédente on obtient le

Théorème 1.4.4 *Soit $r \geq d$. Supposons que la donnée f est suffisamment régulière pour que $u \in H^{r+3}(\Omega \times [0, T])$. Alors si u_h est solution de (1.4.29) on a l'estimation d'erreur*

$$\begin{aligned} |||u - u_h|||_{1,T}^2 \leq C h^{2r} \left[|u|_{r+1,0,T}^2 + \sum_{j=0}^1 |u|_{r,j,T}^2 + T \left(\sum_{j=0}^1 |u|_{r+1,j,T}^2 + \sum_{j=0}^2 |u|_{r,j,T}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + h^{2(2-d)} \sum_{j=0}^3 |u|_{r-1,j,T}^2 + h^2 \sum_{m=0}^{d-1} h^{-2m} \sum_{j=0}^1 |u|_{r+2-m,j,T}^2 \right) \right] . \end{aligned}$$

Corollaire 1.4.5 *Soit $T > 0$. Si la donnée f soit suffisamment régulière pour que $u \in H^{r+3}(\Omega \times [0, T])$ alors*

- Si $d = 2$, $|||u - u_h|||_{1,T} \leq C h^r$,
- Si $d = 3$, $|||u - u_h|||_{1,T} \leq C h^{r-1}$.

1.4.3 Conclusion : Limites de notre analyse et réalité numériques

En complément des nombreux travaux (cités en introduction via les références à plusieurs thèses et articles) nous avons dans ce chapitre apporté un point manquant relatif à la méthodes des éléments finis mixtes spectraux: Une analyse d'erreur détaillée justifiant ainsi l'utilité des espaces d'approximation et surtout des formules de quadratures employées. Un point important est que nous montré qu'une condensation de masse optimale (celle qui conserve une approximation optimale) n'est pas possible en 3D sur maillage quelconque. On perd nécessairement un ordre et ceci est cohérent avec les résultats numériques donnés dans [Duruffle, 2006]. Pour pouvoir faire cette analyse, nous nous sommes contraint à utiliser des points de Gauss pour calculer la matrice de rigidité. Or, les résultats

numériques de convergence obtenus pour l'équation de Helmholtz dans [Duruffe, 2006] ont confirmé et infirmé certains points de notre analyse. Les tableaux 1.8 et 1.9 comparent nos résultats théoriques de convergence avec ceux obtenus numériquement dans [Duruffe, 2006]. Les colonnes vertes représentent les résultats concordant entre théorie et pratique, et les colonnes roses ceux qui ne concordent pas. On en conclut que :

1. En dimension 2, l'utilisation d'une formule de quadrature de Gauss-Lobatto permet une convergence optimale sur maillage régulier ou non.
2. En dimension 3, l'utilisation d'une formule de quadrature de Gauss-Lobatto permet une convergence optimale sur maillage régulier mais fait perdre un ordre sur maillage non régulier.
3. En dimension 2 sur maillage quelconque et en dimension 3 sur maillage régulier, l'utilisation d'une formule de quadrature de Gauss-Lobatto pour calculer la matrice de rigidité suffit à conserver une convergence optimale.

Les points 1 et 2 confirment notre analyse et montrent que l'estimation 1.4.19 est optimale. La principale limite de notre analyse est que l'on ne sait pas évaluer l'erreur due à l'utilisation d'une formule de Gauss-Lobatto pour calculer la matrice de rigidité. Or, le point 3 montre qu'il n'est pas utile d'utiliser des points de Gauss pour calculer la matrice de rigidité en 2D. Ceci n'est pas anecdotique d'un point de vue algorithmique. En effet, lorsque l'on choisit de calculer la matrice de rigidité avec une formule de quadrature de Gauss-Lobatto (c'est à dire aux degrés de liberté), l'orthogonalité des fonctions de base (pour le produit scalaire discret induit par les points et les poids de Gauss-Lobatto) rend $\hat{\mathbf{R}}$ particulièrement creuse. Il s'opère une forme de "condensation de rigidité" [Fauqueux, 2003]. On perd cette merveilleuse propriété lorsque l'on choisit de calculer la matrice de rigidité avec une formule de quadrature de Gauss. Sur la figure 1.10 on peut voir les degrés de liberté (en rose) qui interagissent avec le DL rouge, à l'ordre $r = 3$, lorsque l'on choisit de calculer la matrice de rigidité avec des formules de quadrature de Gauss et Gauss-Lobatto. L'utilisation de points de Gauss rend $\hat{\mathbf{R}}$ pleine ce qui induit une augmentation importante du nombre d'opérations lors du produit matrice-vecteur pénalisant ainsi le temps de calcul. Des calculs de complexité détaillés relatifs à l'utilisation de points de Gauss pour calculer la matrice de rigidité sont donnés dans [Duruffe, 2006]. Cependant, l'utilisation de points de Gauss accroît tout de même la précision du schéma et permet a priori d'utiliser un maillage un peu moins fin que celui requis par un schéma utilisant des formules d'intégration aux points de Gauss Lobatto. Une étude plus approfondie serait vraisemblablement utile pour évaluer la pénalisation (en terme de complexité) relative à l'utilisation de points de Gauss pour calculer la matrice de rigidité. Nous avons pris le parti, dans ce document, d'analyser des schémas dont nous savons montrer des résultats de convergence optimaux. Cependant en pratique, on utilisera aussi bien des points de Gauss-Lobatto que des points de Gauss pour calculer la matrice de rigidité pour les calculs 2D.

1.4 Analyse de la méthode des éléments finis isoparamétriques spectraux avec condensation de masse

RESULTATS DE CONVERGENCE
SUR MAILLAGE REGULIER EN 2D

Rigidite Masse	GAUSS	GAUSS LOBATTO
GAUSS	Theorique r	Theorique ??
	Numerique r	Numerique r
GAUSS LOBATTO	Theorique r	Theorique ??
	Numerique r	Numerique r

RESULTATS DE CONVERGENCE
SUR MAILLAGE NON REGULIER EN 2D

Rigidite Masse	GAUSS	GAUSS LOBATTO
GAUSS	Theorique r	Theorique ??
	Numerique r	Numerique r
GAUSS LOBATTO	Theorique r	Theorique ??
	Numerique r	Numerique r

FIG. 1.8: Comparaison des résultats de convergence théoriques et numériques en 2D

RESULTATS DE CONVERGENCE
SUR MAILLAGE REGULIER EN 3D

Rigidite Masse	GAUSS	GAUSS LOBATTO
GAUSS	Theorique r	Theorique ??
	Numerique r	Numerique r
GAUSS LOBATTO	Theorique r	Theorique ??
	Numerique r	Numerique r

RESULTATS DE CONVERGENCE
SUR MAILLAGE NON REGULIER EN 3D

Rigidite Masse	GAUSS	GAUSS LOBATTO
GAUSS	Theorique r-1	Theorique ??
	Numerique r	Numerique r-1
GAUSS LOBATTO	Theorique r-1	Theorique ??
	Numerique r-1	Numerique r-1

FIG. 1.9: Comparaison des résultats de convergence théoriques et numériques en 3D

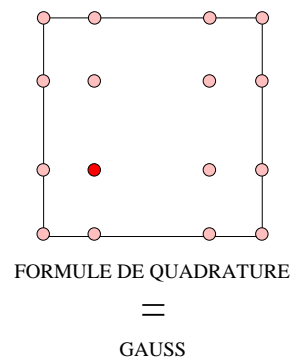
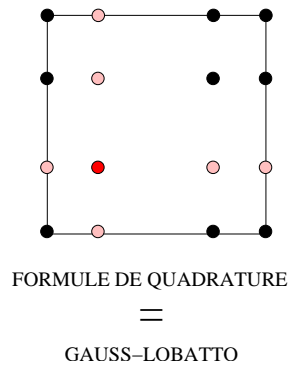


FIG. 1.10: Interactions non nulles pour le calcul de \hat{R} avec intégration numérique pour $r = 3$.

1.5 Quelques schémas pour la discrétisation en temps

Traditionnellement, lorsque l'on discrétise un système hyperbolique en espace par éléments finis, on résout l'EDO vectorielle en temps ainsi obtenue à l'aide de schémas aux différences finies. Posons

$$[0, T] \simeq \{t_n\} = n\Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{N} \text{ et } U_h^n = U_h(t_n), \quad n \in [0, N].$$

1.5.1 Les schémas centrés d'ordre 2

Une première approche consiste à utiliser la classe des schémas centrés d'ordre 2 à trois points. On peut citer entre autres le θ -schéma ($\theta \in [0, 1]$) qui offre la possibilité d'une résolution explicite si $\theta = 0$ (si on privilégie le temps de calcul) ou implicite (si on privilégie la robustesse en terme de stabilité). Dans notre cas il s'agit alors d'itérer le schéma :

$$\mathbf{M}_h \frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{A}_h [\theta U_h^{n+1} + (1 - 2\theta) U_h^n + \theta U_h^{n-1}] = F_h^n, \quad n = \{2, 3, \dots\} \quad (1.5.1)$$

initialisé par $U_h^0 = U_h^1 = 0$ dans le cas de condition initiales homogènes. Le cas $\theta = 0$, qui correspond au très classique schéma saute-mouton à savoir

$$\mathbf{M}_h \frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{A}_h U_h^n = F_h^n, \quad n = \{2, 3, \dots\} \quad (1.5.2)$$

est particulièrement bien adapté à notre cas puisque qu'il est explicite grâce à l'utilisation du principe de condensation de masse. Les avantages des schémas centrés d'ordre 2 sont multiples. Notamment, ils sont

- à trois points et faciles à implémenter,
- au choix explicites ou implicites,
- conservatifs (et donc non dissipatif),
- stables dans le cas explicite sous une condition de stabilité "raisonnable" et relativement facile à déterminer.

Concernant le dernier point on rappelle (cf. [Crouzeix et Mignot, 1984]) que le schéma (1.5.1) est inconditionnellement stable si $\theta \geq 1/4$ et, si $\theta < 1/4$, est stable sous la condition CFL :

$$\exists \alpha < 1, \quad \text{tel que } \frac{\Delta t^2}{4} (1 - 4\theta) \|\mathbf{A}_h\| \leq \alpha.$$

où l'on a posé :

$$\|\mathbf{A}_h\| = \sup_{V_h} \frac{\mathbf{A}_h V_h \cdot V_h}{\mathbf{M}_h V_h \cdot V_h}.$$

Cependant ces schémas restent d'ordre 2, et on peut se poser la question de leur pertinence lorsque le schéma en espace est basé sur une approximation d'ordre élevé. Sur ce point, les analyses de dispersion effectuées dans [Cohen, 2002] et [Fauqueux, 2003] ont tout de même montrer le gain important en terme de précision et de temps de calcul à utiliser des éléments finis d'ordres élevés en espace malgré une discrétisation par différences finies d'ordre 2 en temps.

1.5.2 Une classe de schémas d'ordres élevés conservatifs et explicites : La technique de l'équation modifiée

Il semble naturel, pour des raisons de précision (surtout pour minimiser la dispersion numérique en temps long) de vouloir utiliser des schémas d'ordres élevés en temps. A ce titre on peut mentionner les (nombreux) travaux effectués sur les EDO notamment la classe des schémas d'ordres élevés de type Runge-Kutta [Crouzeix et Mignot, 1984], [Demailly, 1992] mais qui pour être stables, sont toujours dissipatifs. On peut alors penser à discrétiser l'opérateur ∂_{tt} à l'aide d'un schéma aux différences finies d'ordre élevé. Cependant, il est montré dans [Hairer *et al.*, 1987] que tous les schémas aux différences finies d'ordre élevé à plus de trois points (construits par développements de Taylor) sont inconditionnellement instables.

Une alternative efficace et performante pour construire des schémas d'ordres élevés conservatifs à 3 points est donnée par la technique de l'équation modifiée. Introduite par Dablain [Dablain, 1986], cette technique astucieuse permet de construire des schémas en temps à 3 points d'ordre 4,6,8... Elle consiste à remplacer les termes du type $(\partial_{tt})^j$ dans le reste du développements de Taylor du schéma saute-mouton par des puissances du type $(\Delta u)^j$ en utilisant de façon récursive l'équation continue $\partial_{tt}u - \Delta u = 0$. Au niveau discret, cette technique donne en particulier le schéma d'ordre 4 suivant (adapté au cas d'un second membre non nul) :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_h \frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{A}_h \left[U_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} \mathbf{A}_h U_h^n \right] = F_h^n , \\ U_h^0 = U_h^1 = 0 . \end{cases}$$

Une expression généralisée de ce type de schéma aux ordres supérieurs est donnée dans [Cohen *et al.*, 1995]. On remarque immédiatement que ce schéma requiert, à l'ordre 4, de calculer deux fois le produit $\mathbf{A}_h U_h^n$ ce qui pénalise a priori le temps de calcul. Le nombre de multiplication augmente de la même façon lorsque l'on monte aux ordres 6,8... .Cependant l'étude de stabilité (cf. [Cohen *et al.*, 1995]) pour ce type de schémas montre que la CFL du schéma d'ordre 4 est deux fois meilleure que pour le schéma saute-mouton ce qui compense largement le coût induit par le double calcul du produit-matrice vecteur. Bien que la CFL se dégrade pour l'ordre 6, les auteurs ont montré qu'elle est encore meilleure pour l'ordre 8 que pour l'ordre 4! La technique de l'équation modifiée est à notre connaissance un des moyens les plus efficaces pour utiliser un approximation d'ordre élevé en temps.

Chapitre 2

Application de la méthode des éléments finis mixtes spectraux au modèle de plaque de Reissner-Mindlin en régime transitoire.

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle de plaque de Reissner-Mindlin en régime transitoire. Ce modèle, plus général que celui de Kirchhoff-Love, permet de modéliser de façon précise le comportement des plaques épaisses grâce à la prise en compte des efforts de cisaillement transverses. Après avoir présenté le système d'E.D.P. utilisé pour la modélisation, nous résolverons celui-ci à l'aide de la méthode des éléments finis spectraux présentée au chapitre précédent. Nous analyserons le schéma ainsi obtenu et nous montrerons, via des résultats numériques convaincants, l'intérêt de notre méthode en termes de précision, stockage mémoire, et temps de calcul.

Contenu

2.1	Le modèle de plaque de Reissner-Mindlin	61
2.1.1	Configuration tridimensionnelle du problème	61
2.1.2	Construction d'un modèle asymptotique bidimensionnel	63
2.1.2.1	Motivation	63
2.1.2.2	Les hypothèses de Reissner-Mindlin	63
2.1.2.3	Le modèle de plaque de Reissner-Mindlin	64
2.1.2.4	Avantages et inconvénients du modèle	65
2.1.3	Existence et unicité d'une solution forte	66
2.1.3.1	Le théorème de Hille-Yosida	66
2.1.3.2	Identité d'énergie et estimations à priori	70
2.2	Discrétisation par éléments finis spectraux en espace et différences finies en temps.	72
2.2.1	Le schéma éléments finis standard	73
2.2.2	Le schéma éléments finis mixtes	74
2.2.2.1	La formulation mixte :	75
2.2.2.2	Formulation matricielle et algorithme	78
2.3	Analyse du schéma	81
2.3.1	Le problème "harmonique" associé	81
2.3.2	Estimations d'erreur pour le problème harmonique	82
2.3.3	Estimations d'erreur dans le domaine temporel	87
2.4	Un mot sur la discrétisation en temps	88
2.5	Analyse par ondes planes	89
2.5.1	Expression des relations de dispersion	91
2.5.2	Propriétés du modèle	93
2.5.3	Longueur d'onde et critère de maillage	93
2.6	Résultats numériques	95
2.6.1	Validation de la méthode	96
2.6.2	Influence de l'ordre de la méthode sur le temps CPU et la précision	98
2.6.3	Propagation d'ondes dans une plaque hétérogène	104

2.1 Le modèle de plaque de Reissner-Mindlin

Dans tout ce chapitre, les indices latins (i, j, k, l) décriront les entiers $\{1, 2, 3\}$ et les indices grecs $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ décriront les entiers $\{1, 2\}$. De plus, les champs vectoriels seront soulignés une fois et les champs tensoriels deux fois.

2.1.1 Configuration tridimensionnelle du problème

Nous définirons une plaque comme un matériau élastique tridimensionnel Ω_δ dont une des dimensions, à savoir l'épaisseur, est petite devant les deux autres. Toutefois, cet aspect ne sera exploité qu'au chapitre suivant. Dans ce document nous considérerons une plaque d'épaisseur δ (supposée constante), et de surface médiane Σ incluse dans le plan $\{x_3 = 0\}$ de telle sorte que $\Omega_\delta = \Sigma \times [-\delta/2, \delta/2]$. Nous noterons (x, x_3) avec $x \in \Sigma$ les coordonnées d'un point de \mathbb{R}^3 dans la base canonique $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. La frontière de Ω_δ sera notée

$$\partial\Omega_\delta = \Sigma_\delta^+ \cup \Sigma_\delta^- \cup \Gamma_\delta$$

où

$$\Sigma^\pm = \Sigma \times \{\pm\delta\}, \quad \Gamma_\delta = \partial\Sigma \times \left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right].$$

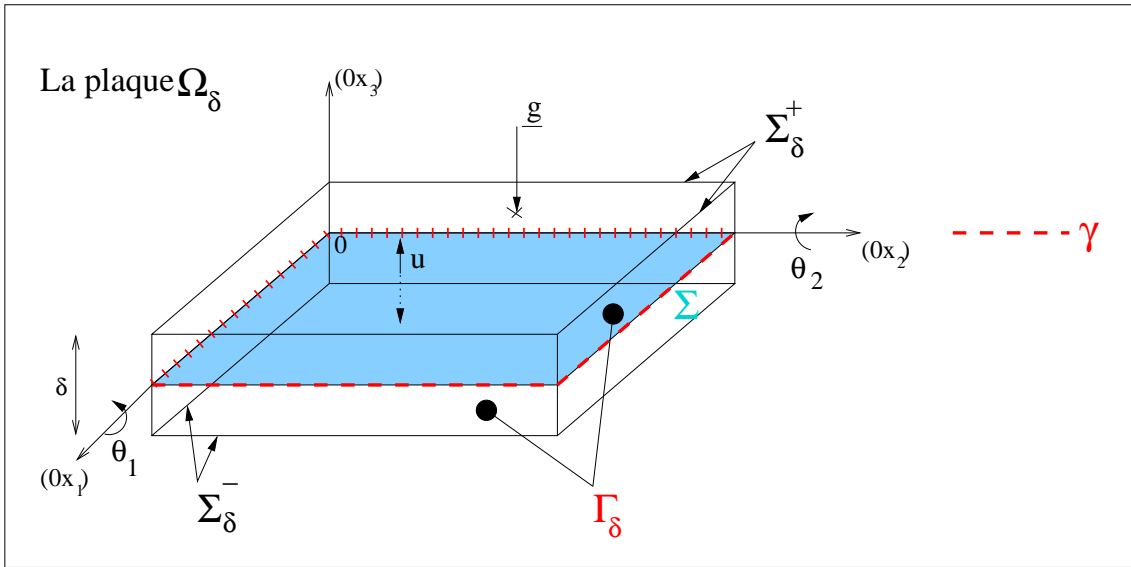


FIG. 2.1: Configuration géométrique du problème.

Les champs tridimensionnels de déformation de la plaque, notés

$$\underline{U}(x, x_3; t) = U_i(x, x_3; t), \quad (x, x_3; t) \in \Sigma \times \left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right] \times [0, T],$$

sont caractérisés par le tenseur linéarisé des déformations

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) \stackrel{def}{=} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U})_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Ces champs vérifient l'équation de l'élasticité linéaire 3D :

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial t^2} - \underline{\text{Div}} \left(\tilde{\underline{\underline{C}}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) \right) = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \times [0, T] \quad (2.1.1)$$

où ρ est la masse volumique de la plaque et $\tilde{\underline{\underline{C}}}$ le tenseur de loi de comportement qui, dans le cas d'un matériau isotrope, est défini par [Naghdi, 1963]

$$\tilde{C}^{ijkl} = \underbrace{\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}_{L_1} \delta_{ij}\delta_{kl} + \underbrace{\frac{E}{2(1+\nu)}}_{L_2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.1.2)$$

où L_1 et L_2 sont appelés coefficients de Lamé. Nous utiliserons alors deux types de conditions aux limites bien distinctes. Plus précisément nous supposons que

- la plaque est libre en son bord $\Sigma_\delta^+ \cup \Sigma_\delta^-$:

$$\tilde{\underline{\underline{C}}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}(x, t)) \underline{n} = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_\delta^+ \cup \Sigma_\delta^- \times [0, T]. \quad (2.1.3)$$

Cette condition est essentielle pour pouvoir construire un modèle de plaque asymptotique bidimensionnel à partir de (2.1.1),

- La plaque est “fortement encastrée” en son bord Γ_δ :

$$\underline{U}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_\delta \times [0, T].$$

Cette condition n'est pas essentielle et aurait pu être remplacée par une condition de bord libre ou d'appui simple [Lesueur, 1988].

Remarque 2.1.1 *En pratique, la condition (2.1.3) n'est pas exactement homogène mais prend en compte la source de chargement \underline{g} .*

Introduisons les espace fonctionnels

$$V_0 = \left\{ \underline{v} \in [H^1(\Omega)]^3, \underline{v} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\delta \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_0^T = C^0(O, T; V_0) \cap C^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3).$$

Compte tenu de notre choix de conditions aux limites, la solution de (2.1.1) est également l'unique solution du problème variationnel (cf. [Fauqueux, 2003]) :

Trouver $\underline{U}(x, t) \in \mathcal{U}_0^T$ solution de

$$\frac{d}{dt^2} \int_{\Omega} \rho \underline{U} \cdot \underline{U}^* dx + \int_{\Omega} \tilde{\underline{\underline{C}}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*) dx = \int_{\Sigma_\delta^+} \underline{g} \cdot \underline{U}^* d\gamma, \quad \forall \underline{U}^* \in V_0 \quad (2.1.4)$$

Nous allons, dans ce qui suit, présenter un modèle asymptotique à celui de l'élastodynamique linéaire 3D. Après avoir évoqué les motivations qui nous poussent à considérer un modèle asymptotique comme alternative au modèle 3D "naturel" présenté dans cette section, nous rappellerons les principales hypothèses cinématiques et étapes de calculs qui permettent d'établir ce nouveau modèle.

2.1.2 Construction d'un modèle asymptotique bidimensionnel

2.1.2.1 Motivation

Nous allons proposer une méthode numérique de type éléments finis pour calculer les champs de déformation en tout point de l'espace, au cours du temps, à partir d'un maillage de la plaque. Le temps de calcul et le stockage mémoire requis pour la résolution du problème ainsi discrétisé sont directement liés à la taille des matrices de masse et de rigidité et donc, au plus petit pas de maillage de la plaque. Il est ainsi naturel de chercher à éviter de mailler une plaque sur son épaisseur (cf. Fig 2.2). L'idée est d'utiliser un modèle asymptotique à celui de l'élasticité linéaire 3D (naturellement utilisé pour modéliser les déformations) constitué d'un système d'EDP uniquement défini sur Σ . Nous choisissons dans cette étude d'utiliser le modèle de plaque de Reissner-Mindlin pour les raisons que nous évoquerons en section 2.1.2.4 .

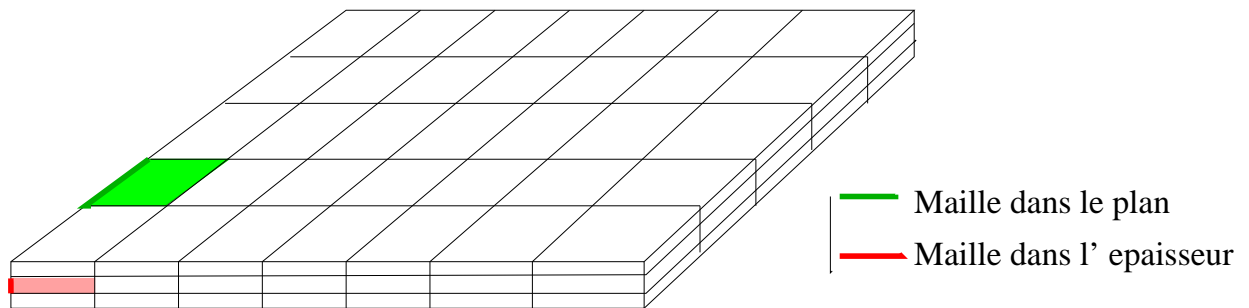


FIG. 2.2: Maillage d'une plaque 3D.

2.1.2.2 Les hypothèses de Reissner-Mindlin

Dans cette section, nous rappelons les conditions cinématiques sur la forme des champs de déplacement autorisés pour ramener le problème variationnel sur Ω (2.1.4) à un nouveau problème variationnel défini sur la surface médiane Σ . L'interprétation de ce nouveau système variationnel fournira alors le problème aux limites à considérer.

Les hypothèses fondamentales dues à Reissner et Mindlin sont les suivantes :

Proposition 2.1.1 *Tout segment de droite transversal dans la configuration d'équilibre reste un segment de droite après déformation.*

De plus, dans le cas de la plaque, il n'y a pas de déformation transversale [Chapelle et Bathe, 2003] ce qui se traduit par la

Proposition 2.1.2 $\underline{\varepsilon}_{33}(\underline{U}) = 0$

Ces deux propositions conduisent à la suivante :

Proposition 2.1.3 [Chapelle et Bathe, 2003], [Reissner, 1945] Il existe deux champs vectoriels $\underline{u}_m = \{u_\alpha\}$ et $\underline{\theta} = \{\theta_\alpha\}$ et un champ scalaire u , tous définis sur la surface médiane Σ qui caractérisent entièrement \underline{U} via les relations

$$U_\alpha(x, x_3; t) = u_\alpha(x; t) + x_3 \theta_\alpha(x; t), \quad (2.1.5)$$

$$U_3(x, x_3; t) = u(x; t) \quad (2.1.6)$$

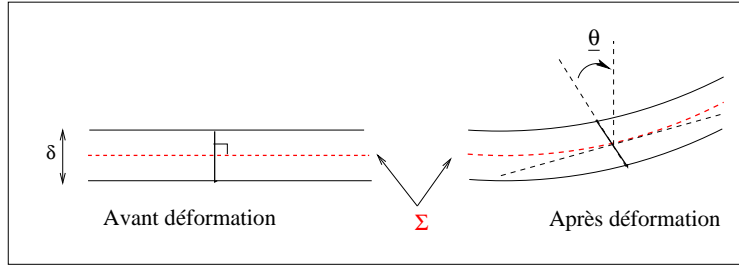


FIG. 2.3: Hypothèse de Reissner-Mindlin.

Les champs asymptotiques \underline{u}_m et u sont appelés respectivement déplacement membranaire et déplacement en flexion, et correspondent à des déplacements infinitésimaux dans le plan Σ pour \underline{u}_m et dans le plan défini par la normale \underline{n} pour u . Dans le cas de la plaque (à la différence d'une coque) on peut montrer (cf. Annexe 1) que s'opère un découplage entre le champ \underline{u}_m et les champs $\underline{\theta}$ et u . En l'absence d'efforts internes dans la plaque (ce qui est supposé le cas ici) on montre alors que $\underline{u}_m = 0$.

2.1.2.3 Le modèle de plaque de Reissner-Mindlin

La Proposition 2.1.3 va nous permettre d'obtenir un système d'EDP uniquement défini sur Σ dont les nouvelles inconnues seront $\underline{\theta}$ et u . Nous supposons que $\underline{g} = (0, 0, f)^T$.

Dans (2.1.4) on remplace \underline{U} par le développement asymptotique donné en (2.1.5) et (2.1.6) et on utilise des champs tests \underline{U}^* de la même forme :

$$U_\alpha^*(x, x_3; t) = u_\alpha^*(x; t) + x_3 \theta_\alpha^*(x; t),$$

$$U_3^*(x, x_3; t) = u^*(x; t).$$

Après intégration dans l'épaisseur (cf Annexe 1), (2.1.4) conduit à une équation variationnelle sur Σ qui, une fois interprétée, fournit les équations d'équilibre du modèle de plaque

en flexion pure de Reissner-Mindlin :

$$\rho \frac{\delta^3}{12} \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial t^2} - \frac{\delta^3}{12} \underline{\text{Div}} (\underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta})) + \delta G (\nabla u + \underline{\theta}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T], \quad (2.1.7)$$

$$\rho \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \delta \text{div} [G (\nabla u + \underline{\theta})] = f \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T], \quad (2.1.8)$$

$$u = 0, \quad \underline{\theta} = 0 \quad \text{sur } \gamma \times [0, T], \quad (2.1.9)$$

où $\underline{\underline{C}}$ est un nouveau tenseur de loi de comportement défini (dans le cas isotrope) par

$$C^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu}), \quad (2.1.10)$$

$G = E/(2(1+\nu))$ et $\gamma = \Gamma_0$ (cf. Fig. 2.1) [Chapelle et Bathe, 2003]. Le détail des calculs pour obtenir le problème (2.1.7)-(2.1.9) à partir du problème (2.1.4) est fourni en Annexe 1. De plus la justification concernant le passage du tenseur $\underline{\underline{\tilde{C}}}$ au tenseur $\underline{\underline{C}}$ se trouve dans [Naghdi, 1963].

Remarque 2.1.2 *Pour des raisons de simplicité, nous avons choisit de présenter les modèles de structure 2D et 3D pour un matériau isotrope. Le raisonnement est identique pour les matériaux anisotropes bien que les définitions des tenseurs $\underline{\underline{\tilde{C}}}$ et $\underline{\underline{C}}$ soient dans ce cas un peu plus complexes.*

Le système (2.1.7)-(2.1.9) est désormais complet si on lui rajoute les conditions initiales (que nous ne rappellerons plus) :

$$u(., 0) = \theta_\alpha(., 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(., 0) = \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial t}(., 0) = 0 .$$

2.1.2.4 Avantages et inconvénients du modèle

Le modèle de plaque le plus académique est celui proposé par Kirchhoff et Love (cf. [Love, 1944], [Derveaux, 2002] et aussi [Chapelle et Bathe, 2003]). Ce modèle est en réalité un cas particulier du modèle de Reissner-Mindlin. En effet, Kirchhoff et Love supposent que non seulement les segments de droite restent droits après déformation mais qu'ils restent également orthogonaux à la surface médiane (cf. Fig. 2.4). Cette hypothèse revient à négliger les efforts tranchants de cisaillement, c'est à dire supposer que

$$\nabla u + \underline{\theta} = 0 .$$

Au signe près, $\underline{\theta}$ est donc égal a ∇u . La même démarche qui conduisait au système (2.1.7)-(2.1.9) conduit alors (dans le cas homogène isotrope) à l'équation bien connue d'ordre 4 en espace (cf [Derveaux, 2002])

$$\delta \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E \nu \delta^3}{12(1-\nu^2)} \Delta(\Delta u) = f .$$

L'hypothèse de Kirchhoff-Love est pertinente uniquement pour les plaques très minces, mais induit un modèle inapproprié pour les structures plus épaisses. Le système (2.1.7)-(2.1.9) fournit alors une modélisation plus générale et plus précise dans le cas des plaques

épaisses. Du point de vue du modèle, l'équation de Kirchhoff-Love paraît bien plus simple que le système vectoriel de Reissner-Mindlin. Ceci doit être tempéré vu la complexité des conditions aux limites de bords libres (cf [Derveaux, 2002]). Pour ce qui concerne l'analyse numérique, le bilaplacien dans l'équation de Kirchhoff-Love est coercif dans $H_0^2(\Sigma)$ ce qui contraint à utiliser des éléments finis à raccord C^1 de type Hermite ou Argyris [Ciarlet, 1976], bien qu'une alternative efficace soit proposée dans [Bécache *et al.*, 2005] . Comme nous le verrons dans la section suivante, le système (2.1.7)-(2.1.9) est coercif dans un sous-espace de $H_0^1(\Sigma)$ et permet d'utiliser des éléments finis à raccord C^0 [Chapelle et Bathe, 2003]. En contrepartie, la prise en compte des efforts de cisaillement dans le modèle de Reissner-Mindlin (via le terme $\nabla u + \underline{\theta}$) produit des phénomènes de verrouillage numérique, qui peuvent se résumer (très) grossièrement par des problèmes de convergence des méthodes numériques de type éléments finis lorsque l'épaisseur de la plaque tend vers 0. La littérature est abondante sur ce sujet [Brezzi *et al.*, 1991], [Chapelle et Stenberg, 1998], [Havu et Pitkäranta, 2001] et nous y reviendrons brièvement dans l'analyse des résultats numériques.

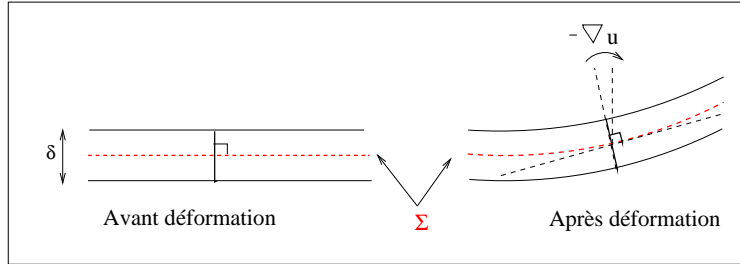


FIG. 2.4: Hypothèse de Kirchhoff-Love.

2.1.3 Existence et unicité d'une solution forte

Dans tout ce qui suit, les vecteurs notés $\underline{U}, \underline{V}, \underline{W}$ seront respectivement de la forme

$$\underline{U} = (u, \underline{\theta}), \quad \underline{V} = (v, \underline{\eta}), \quad \underline{W} = (\underline{U}, \underline{V}) .$$

2.1.3.1 Le théorème de Hille-Yosida

Nous renvoyons le lecteur à la page de notations en début de document pour tout ce qui concerne les normes et espaces de Sobolev utilisés. Le modèle de plaque de Reissner-Mindlin est, à notre connaissance, très peu étudié en régime transitoire. Nous montrons dans cette section qu'il existe une unique solution forte pour le problème (2.1.7)-(2.1.9). Bien que la démonstration soit presque un exercice d'application du théorème de Hille-Yosida [Brézis, 1983], celle-ci va nous permettre d'exhiber l'énergie du modèle de plaque ainsi qu'une propriété d'équivalence (la proposition 2.1.4) que nous utiliserons de façon récurrente dans la suite de ce chapitre. Dans un premier temps, nous introduisons le cadre fonctionnel adéquat pour les inconnues u et $\underline{\theta}$ et munissons les espaces considérés de la structure hilbertienne la plus appropriée pour vérifier facilement les hypothèses du

théorème de Hille-Yosida.

A cet effet posons

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ \underline{U} \in [H^1(\Sigma)]^3, \underline{U} = 0 \text{ sur } \gamma \right\} .$$

Proposition 2.1.4 *La forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{U}_0}$ définie par*

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{U}_0} = \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\eta}) + \delta \int_{\Sigma} G (\nabla u + \underline{\theta}) \cdot (\nabla v + \underline{\eta})$$

définit un produit scalaire sur \mathcal{U}_0 qui induit une norme équivalente à la norme usuelle.

Preuve.

Il est facile de montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{U}_0}$ définit un produit scalaire. En effet,

$$\langle \underline{U}, \underline{U} \rangle_{\mathcal{U}_0} = \frac{\delta^3}{12} \|\underline{\theta}\|_{\underline{\underline{C}}, \Sigma}^2 + \delta G \|\nabla u + \underline{\theta}\|_{0, \Sigma}^2 \geq 0, \quad \forall \underline{U} \in \mathcal{U}_0 .$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle \underline{U}, \underline{U} \rangle_{\mathcal{U}_0} = 0 &\Rightarrow \|\underline{\theta}\|_{\underline{\underline{C}}, \Sigma} = 0 \text{ et } \nabla u = -\underline{\theta} \\ &\Rightarrow \underline{\theta} = 0 \text{ et } \nabla u = 0 \\ &\Rightarrow u = \underline{\theta} = 0, \text{ car } u = 0 \text{ sur } \gamma \end{aligned}$$

Grâce aux inégalités de Poincaré et de Korn, il suffit de montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{U}_0}$ induit une norme équivalente à la norme

$$\|\underline{U}\| = \left(\|\underline{\theta}\|_{\underline{\underline{C}}, \Sigma}^2 + \|\nabla u\|_{0, \Sigma}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Par inégalité triangulaire nous avons

$$\|\underline{\theta}\|_{\underline{\underline{C}}, \Sigma}^2 + \|\nabla u + \underline{\theta}\|_{0, \Sigma}^2 \leq \|\underline{\theta}\|_{\underline{\underline{C}}, \Sigma}^2 + 2(\|\nabla u\|_{0, \Sigma}^2 + \|\underline{\theta}\|_{0, \Sigma}^2) \leq \max(2, 1 + 2C_P^K) \|\underline{U}\|^2$$

où C_P^K est une constante strictement positive telle que $\|\underline{\theta}\|_{0, \Sigma}^2 \leq C_P^K \|\underline{\theta}\|_{\underline{\underline{C}}, \Sigma}^2$. On en déduit aisément qu'il existe alors une constante $C_{\delta, G}^M > 0$ telle que

$$\langle \underline{U}, \underline{U} \rangle_{\mathcal{U}_0} \leq C_{\delta, G}^M \|\underline{U}\|^2 . \tag{2.1.11}$$

Dans l'autre sens, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\underline{\theta}\|_{\underline{\underline{C}}, \Sigma}^2 + \|\nabla u\|_{0, \Sigma}^2 &= \|\underline{\theta}\|_{\underline{\underline{C}}, \Sigma}^2 + \|\nabla u + \underline{\theta} - \underline{\theta}\|_{0, \Sigma}^2 \\ &\leq \|\underline{\theta}\|_{\underline{\underline{C}}, \Sigma}^2 + 2(\|\nabla u + \underline{\theta}\|_{0, \Sigma}^2 + \|\underline{\theta}\|_{0, \Sigma}^2) \\ &\leq \max(2, 1 + 2C_P^K) (\|\underline{\theta}\|_{\underline{\underline{C}}, \Sigma}^2 + \|\nabla u + \underline{\theta}\|_{0, \Sigma}^2) \end{aligned}$$

De la même façon on montre aisément qu'il existe une constante $C_{\delta,G}^m > 0$ telle que

$$C_{\delta,G}^m \|\underline{U}\|^2 \leq \langle \underline{U}, \underline{U} \rangle_{\mathcal{U}_0} \quad (2.1.12)$$

Les relations (2.1.11) et (2.1.12) achèvent la démonstration. \diamond

On munira désormais \mathcal{U}_0 de la norme

$$\|\underline{U}\|_{\mathcal{U}_0} = (\langle \underline{U}, \underline{U} \rangle_{\mathcal{U}_0})^{\frac{1}{2}} .$$

Nous allons maintenant réécrire le système (2.1.7)-(2.1.9) sous forme d'une équation différentielle d'ordre 1 en temps dont la solution est une fonction du temps à valeur dans un espace de Hilbert que l'on précisera. A cet effet on introduit l'espace

$$\mathcal{W}_0 = \left\{ \underline{W} \text{ tel que } \underline{U} \in \mathcal{U}_0, \underline{V} \in [L^2(\Sigma)]^3 \right\} ,$$

que l'on munit du produit scalaire

$$\langle \underline{W}, \underline{W}' \rangle_{\mathcal{W}_0} = \langle \underline{U}, \underline{U}' \rangle_{\mathcal{U}_0} + \langle \underline{V}, \underline{V}' \rangle .$$

Pour l'opérateur en espace du modèle de Reissner-Mindlin, nous adopterons la notation

$$\mathcal{R}_m(\underline{U}) = \mathcal{R}_m(u, \underline{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta^3}{12} \text{Div} (\underline{C} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta})) + G \delta (\nabla u + \underline{\theta}) \\ \delta \text{div} [G (\nabla u + \underline{\theta})] \end{pmatrix} .$$

On introduit alors les espaces fonctionnels

$$D_{\mathcal{R}_m} = \left\{ \underline{U} \in \mathcal{U}_0 \text{ tel que } \mathcal{R}_m(\underline{U}) \in [L^2(\Sigma)]^3 \right\} \text{ et } D(A) = D_{\mathcal{R}_m} \times \mathcal{U}_0 \quad (2.1.13)$$

ce qui nous permet de définir l'opérateur non borné A comme suit :

$$\begin{cases} A : D(A) \subset \mathcal{W}_0 \longrightarrow \mathcal{W}_0 \\ \underline{W} \longrightarrow A\underline{W} = \begin{pmatrix} -\underline{V} \\ -\mathcal{R}_m(\underline{U}) \end{pmatrix} \end{cases} . \quad (2.1.14)$$

Si on pose $\underline{F} = (0, 0, 0, 0, 0, f)^t$ le problème (2.1.7)-(2.1.9) est alors équivalent au problème d'ordre 1 en temps :

$$\text{Trouver } \underline{W} \in D(A) \text{ solution de } \begin{cases} \underline{\gamma} \cdot \frac{d\underline{W}}{dt} + A\underline{W} = \underline{F} & \text{sur } \Sigma , \\ \underline{C} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}) \underline{n} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} + \underline{\theta} \cdot \underline{n} = 0 & \text{sur } \gamma_L , \end{cases}$$

où $\underline{\gamma}$ est le vecteur des coefficients physique des termes de masse.

Proposition 2.1.5 $\forall \lambda \geq 0$, l'opérateur $A + \lambda I$ est maximal monotone.

Preuve i) Montrons d'abord la positivité de $A + \lambda I$. Par définition nous avons

$$\langle A\underline{W}, \underline{W} \rangle_{\mathcal{W}_0} = - \langle \underline{V}, \underline{U} \rangle_{\mathcal{U}_0} - (\mathcal{R}_m(\underline{U}), \underline{V}) .$$

D'autre part

$$\begin{aligned} - \langle \mathcal{R}_m(\underline{U}), \underline{V} \rangle &= - \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \text{Div} (\underline{C} \underline{\varepsilon}(\underline{\theta})) \cdot \underline{\eta} + \delta \int_{\Sigma} G (\nabla u + \underline{\theta}) \cdot \underline{\eta} \\ &\quad - \delta \int_{\Sigma} \text{div} [G (\nabla u + \underline{\theta})] v . \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

En appliquant la formule de Green nous obtenons

$$- \int_{\Sigma} \text{Div} (\underline{C} \underline{\varepsilon}(\underline{\theta})) \cdot \underline{\eta} = \int_{\Sigma} \underline{C} \underline{\varepsilon}(\underline{\theta}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\eta}) - \int_{\Gamma} \underline{C} \underline{\varepsilon}(\underline{\theta}) \underline{n} \cdot \underline{\eta}, \quad (2.1.16)$$

$$- \int_{\Sigma} \text{div} [G (\nabla u + \underline{\theta})] v = \int_{\Sigma} G (\nabla u + \underline{\theta}) \cdot \nabla v - \int_{\Gamma} G \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \underline{\theta} \cdot \underline{n} \right) v . \quad (2.1.17)$$

Les conditions aux limites annulent les intégrales de bord et en substituant (2.1.16) et (2.1.17) dans (2.1.15) il vient :

$$- \langle \mathcal{R}_m(\underline{U}), \underline{V} \rangle = \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{C} \underline{\varepsilon}(\underline{\theta}) : \underline{\varepsilon}(\underline{\eta}) + \delta \int_{\Sigma} G (\nabla u + \underline{\theta}) \cdot (\nabla v + \underline{\eta}) = \langle \underline{V}, \underline{U} \rangle_{\mathcal{U}_0}$$

et donc

$$\langle A\underline{W}, \underline{W} \rangle_{\mathcal{W}_0} = 0 .$$

Par conséquent

$$\langle (A + \lambda I) \underline{W}, \underline{W} \rangle_{\mathcal{W}_0} = \lambda \|\underline{W}\|_{\mathcal{W}_0}^2 .$$

Donc $(A + \lambda I)$ est positif si et seulement si $\lambda \geq 0$.

ii) Il reste maintenant à montrer que $(A + \lambda I) + I$ est surjectif c'est à dire que pour $\underline{\tilde{F}} = (\underline{\tilde{f}}, \underline{\tilde{g}})^T \in \mathcal{W}_0$ il existe $\underline{W} \in D(A)$ solution de

$$\begin{cases} A\underline{W} + (\lambda + 1)\underline{W} = \underline{\tilde{F}} & \text{sur } \Sigma , \\ \underline{\varepsilon}(\underline{\theta}) \underline{n} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} + \underline{\theta} \cdot \underline{n} = 0 & \text{sur } \gamma_L . \end{cases} \quad (2.1.18a)$$

L'équation (2.1.18a) est équivalente au système

$$\begin{cases} -\underline{V} + (\lambda + 1)\underline{U} = \underline{\tilde{f}} & (\underline{\tilde{f}} \in \mathcal{U}_0), \\ -\mathcal{R}_m(\underline{U}) + (\lambda + 1)\underline{V} = \underline{\tilde{g}} & (\underline{\tilde{g}} \in [L^2(\Sigma)]^3). \end{cases} \quad (2.1.19a)$$

$$(2.1.19b)$$

En éliminant \underline{V} dans (2.1.19a) on obtient l'équation

$$-\mathcal{R}_m(\underline{U}) + (\lambda + 1)^2 \underline{U} = \underline{\tilde{g}} + (\lambda + 1)\underline{\tilde{f}}, \quad (2.1.20)$$

dont la formulation variationnelle est

$$\langle \underline{U}, \underline{V} \rangle_{\mathcal{U}_0} + (\lambda + 1)^2 (\underline{U}, \underline{V}) = (\underline{\tilde{g}} + (\lambda + 1)\underline{\tilde{f}}, \underline{V}), \quad \forall \underline{V} \in \mathcal{U}_0. \quad (2.1.21)$$

La Proposition 2.1.4 assure que l'équation (2.1.21) satisfait les hypothèses du théorème de Lax-Milgram et admet donc une unique solution $\underline{U} \in \mathcal{U}_0$. Concernant la régularité, d'après (2.1.20) $\mathcal{R}_m(\underline{U}) \in [L^2(\Sigma)]^3$ et donc $U \in D_{\mathcal{R}_m}$. De la même façon, d'après (2.1.19a) $\underline{V} = (\lambda + 1)\underline{U} - \underline{\tilde{f}}$ est défini de manière unique et est bien un élément de \mathcal{U}_0 . Nous avons donc bien montré que $(A + \lambda I) + I$ est surjectif. \diamond

La proposition précédente nous permet d'énoncer le théorème

Théorème 2.1.1 (*Hille-Yosida*) *Si $f \in C^1(0, T; L^2(\Sigma))$ alors le problème (2.1.7)-(2.1.9) admet une unique solution forte dans l'espace*

$$C^2(0, T; [L^2(\Sigma)]^3) \cap C^1(0, T; \mathcal{U}_0) \cap C^0(0, T; D_{\mathcal{R}_m}).$$

2.1.3.2 Identité d'énergie et estimations à priori

Nous donnons ici une identité d'énergie vérifiée par la solution du problème (2.1.7)-(2.1.9) qui permet alors d'obtenir des estimations de continuité par rapport à la donnée $f \in C^1(0, T; L^2(\Sigma))$. Pour toutes fonctions $\xi(x, t)$ nous adopterons la notation $\xi(t) = \xi(\cdot, t)$ en considérant ξ comme une fonction du temps à valeur dans un espace de Hilbert.

Proposition 2.1.6 *Si on définit l'énergie E_m associée au problème de plaque par*

$$E_m[\underline{\theta}(t), u(t)] = \frac{1}{2} \left\{ \rho \frac{\delta^3}{12} \|\dot{\underline{\theta}}(t)\|_{0,\Sigma}^2 + \rho \delta \|\dot{u}(t)\|_{0,\Sigma}^2 + \frac{\delta^3}{12} \|\theta(t)\|_{\underline{\underline{C}}_2,\Sigma}^2 + \delta G \|(\nabla u + \underline{\theta})(t)\|_{0,\Sigma}^2 \right\} \quad (2.1.22)$$

Alors l'unique solution $(u, \underline{\theta})$ du problème (2.1.7)-(2.1.9) vérifie l'identité d'énergie :

$$\frac{d}{dt} E_m[\theta(t), u(t)] = \int_{\Sigma} f(t) \dot{u}(t) \quad (2.1.23)$$

Preuve :

En multipliant le système (2.1.7)-(2.1.9) par les fonctions tests $(v, \underline{\eta}) \in \mathcal{U}_0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} \underline{\theta}(t) \cdot \underline{\eta} - \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{\text{Div}} (\underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}(t))) \cdot \underline{\eta} + \delta \int_{\Sigma} G (\nabla u + \underline{\theta})(t) \cdot \underline{\eta} &= 0 , \\ \rho \delta \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} u(t) v - \delta \int_{\Sigma} \text{div} [G (\nabla u + \underline{\theta})(t)] v &= \int_{\Sigma} f(t) v , \end{aligned}$$

En utilisant les formules (2.1.16) et (2.1.17), la somme des deux équations précédentes fournit la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} \underline{\theta}(t) \cdot \underline{\eta} + \rho \delta \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} u(t) v + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}(t)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\eta}) \\ + \delta \int_{\Sigma} G (\nabla u(t) + \underline{\theta}(t)) \cdot (\nabla v + \underline{\eta}) &= \int_{\Sigma} f(t) v . \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Il suffit alors de choisir $\underline{\eta} = \dot{\underline{\theta}}(t)$ and $v = \dot{u}(t)$ pour obtenir (2.1.23). \diamond

Corollaire 2.1.1 *L'unique solution $(u, \underline{\theta})$ du problème (2.1.7)-(2.1.9) vérifie les estimations à priori sur l'intervalle $[0, T]$:*

$$\left\{ \begin{aligned} \|\dot{u}(t)\|_{0,\Sigma} &\leq \frac{1}{\rho \delta} T \|f(t)\|_{0,\Sigma} , & (2.1.25a) \\ \|\dot{\underline{\theta}}(t)\|_{0,\Sigma} &\leq \sqrt{\frac{12}{\rho^2 \delta^4}} T \|f(t)\|_{0,\Sigma} , & (2.1.25b) \\ \|\underline{\theta}(t)\|_{\underline{\underline{C}},\Sigma} &\leq \sqrt{\frac{12}{\rho \delta^4}} T \|f(t)\|_{0,\Sigma} , & (2.1.25c) \\ \|\nabla u\|_{0,\Sigma} &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{G} \delta^2} + \sqrt{\frac{12C_P^K}{\rho \delta^4}} \right) T \|f(t)\|_{0,\Sigma} . & (2.1.25d) \end{aligned} \right.$$

Preuve.

Les conditions initiales étant nulles, on déduit de (2.1.23) que

$$\forall t \in [0, T] , E_m[\underline{\theta}(t), u(t)] = \int_0^t \int_{\Sigma} f(x, s) \dot{u}(x, s) dx ds . \quad (2.1.26)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur le membre de droite de (2.1.26) on obtient les quatre estimations

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \delta \|\dot{u}(t)\|_{0,\Sigma}^2 \leq T \|f(t)\|_{0,\Sigma} \|\dot{u}(t)\|_{0,\Sigma} , \\ \rho \frac{\delta^3}{12} \|\dot{\underline{\theta}}(t)\|_{0,\Sigma}^2 \leq T \|f(t)\|_{0,\Sigma} \|\dot{u}(t)\|_{0,\Sigma} , \\ \frac{\delta^3}{12} \|\theta(t)\|_{\underline{C},\Sigma}^2 \leq T \|f(t)\|_{0,\Sigma} \|\dot{u}(t)\|_{0,\Sigma} , \\ \delta G \|(\nabla u + \underline{\theta})(t)\|_{0,\Sigma}^2 \leq T \|f(t)\|_{0,\Sigma} \|\dot{u}(t)\|_{0,\Sigma} . \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.1.27a) \\ (2.1.27b) \\ (2.1.27c) \\ (2.1.27d) \end{array}$$

La relation (2.1.27a) fournit immédiatement (2.1.25a). On utilise alors (4.4.6) dans (2.1.27b) et (2.1.27c) ce qui donne (2.1.25b) et (2.1.25c). Pour finir, en utilisant (2.1.25a) dans (2.1.27d) il vient

$$\|(\nabla u + \underline{\theta})(t)\|_{0,\Sigma} \leq \frac{1}{\sqrt{G \delta^2}} T \|f(t)\|_{0,\Sigma} \quad (2.1.28)$$

En remarquant alors que

$$\|\nabla u(t)\|_{0,\Sigma} \leq \|(\nabla u + \underline{\theta})(t)\|_{0,\Sigma} + \|\theta(t)\|_{0,\Sigma} \leq \|(\nabla u + \underline{\theta})(t)\|_{0,\Sigma} + \sqrt{C_P^K} \|\theta(t)\|_{\underline{C},\Sigma}$$

il suffit d'utiliser (2.1.25c) et (2.1.28) pour obtenir (2.1.25d). \diamond

Remarque 2.1.3 *Nous construirons par la suite un schéma au différences finies discret, conservatif, dont les vecteurs solutions satisfèront un éqivalent discret de l'identité d'énergie (2.1.26) et des estimations (2.1.25a)-(2.1.25d) ce qui permettra de garantir sa stabilité.*

Corollaire 2.1.2 *D'après les estimations précédentes, si $f \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ alors le problème (2.1.7)-(2.1.9) admet une solution faible [Lions et Magenes, 1968] dans*

$$\mathcal{S}_T \stackrel{def}{=} C^1(0, T; L^2(\Sigma)) \cap C^0(0, T; \mathcal{U}_0) .$$

2.2 Discrétisation par éléments finis spectraux en espace et différences finies en temps.

Dans cette section, nous appliquons la methode des éléments finis mixtes spectraux avec condensation de masse au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Nous reprendrons le plan du chapitre 1 à savoir :

- Définition d'un problème éléments finis standard (formulation, choix de l'élément fini et des formules de quadrature).
- Reformulation de ce schéma sous forme d'un problème mixte éqivalent.
- Analyse du schéma.

La quasi-totalité des idées et des techniques d'analyse utilisées dans ce chapitre proviennent du chapitre 1. Par conséquent, nous inviterons régulièrement le lecteur à s'y référer. En fin de chapitre, des résultats numériques viendront valider notre méthode, mettre en évidence sa performance en terme de précision et de temps de calcul, et également illustrer les phénomènes physiques que l'on cherche à simuler.

2.2.1 Le schéma éléments finis standard

On rappelle (cf. la preuve de la proposition 2.1.6) que le problème variationnel que l'on cherche à approcher est

Trouver $u \in \mathcal{S}_T$ solution de

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} \underline{\theta}(t) \cdot \underline{\eta} + \rho \delta \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} u(t) v + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{C} \underline{\varepsilon}(\underline{\theta}(t)) : \underline{\varepsilon}(\underline{\eta}) \\ + \delta \int_{\Sigma} G (\nabla u(t) + \underline{\theta}(t)) \cdot (\nabla v + \underline{\eta}) = \int_{\Sigma} f(t) v, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

pour toute fonction test $(v, \underline{\eta}) \in \mathcal{U}_0$.

Afin d'obtenir une convergence spectrale et de pouvoir utiliser le principe de condensation de masse pour un ordre d'approximation arbitrairement élevé, nous allons utiliser l'élément fini $\mathcal{Q}^r(\widehat{K}) = (\widehat{K}, \mathbb{Q}^r(\widehat{K}), \widehat{\Xi}^2)$ décrit en section 1.2.1 (les degrés de liberté défini par cet élément étant les points de Gauss-Lobatto). A cet effet on considèrera

$$\mathcal{T}_h = \bigcup K$$

un maillage de Σ et nous reprendrons les notations du chapitre 1.2.1 pour décrire la géométrie des éléments du maillage. Pour gérer le caractère vectoriel du système de Reissner-Mindlin, on introduit $\mathcal{U}_{h,0}^r$ l'espace d'approximation élément fini conforme \mathcal{U}_0 défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{h,0}^r = \{ U_h = (u_h, \underline{\theta}_h) \in [C^0(\mathcal{T}_h)]^3 \quad \text{tel que} \quad u_{h|_K} \circ F_K \in \mathbb{Q}_r(\widehat{K}), \underline{\theta}_{h|_K} \circ F_K \in [\mathbb{Q}_r(\widehat{K})]^2 \\ \text{et} \quad u_h = \underline{\theta}_h = 0 \text{ sur } \gamma \} . \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$\mathcal{U}_{h,0}^r$ est simplement l'espace produit $U_{h,0}^r \times U_{h,0}^r \times U_{h,0}^r$ où

$$U_{h,0}^r = \left\{ v_h \in C^0(\mathcal{T}_h) \text{ tel que } v_{h|_K} \circ F_K \in \mathbb{Q}_r(\widehat{K}) \text{ et } v_h = 0 \text{ sur } \gamma \right\} .$$

Pour les mêmes raisons et contraintes d'analyse que dans le chapitre 1, nous allons utiliser des formules de Gauss-Lobatto pour calculer la matrice de masse et des formules de Gauss pour calculer la matrice de rigidité afin d'établir des estimations d'erreur. On considère donc le problème approché suivant :

Trouver $(u_h, \underline{\theta}_h) : [0; T) \longrightarrow \mathcal{U}_{h,0}^r$ solution de

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} \underline{\theta}_h(t) \cdot \underline{\eta}_h + \rho \delta \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma}^{GL} u_h(t) v_h + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma}^G \underline{C} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}_h(t)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\eta}_h) \\ + \delta \int_{\Sigma}^G G (\nabla u_h(t) + \underline{\theta}_h(t)) \cdot (\nabla v_h + \underline{\eta}_h) = \int_{\Sigma} f_h(t) v_h, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

pour toute fonction test $(v_h, \underline{\eta}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r$.

Remarque 2.2.1 Ici on considèrera une plaque isotrope potentiellement hétérogène. Cependant, on se limitera au cas (très raisonnable) où les coefficients physiques sont constants par élément du maillage. Pour l'analyse, nous aurons besoin de définir les quantités positives :

$$\rho_{\infty} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \rho|_K, \quad G_{\infty} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} G|_K, \quad C_{\infty} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \max_{\alpha, \beta, \lambda, \mu = \{1, 2\}} C^{\alpha\beta\lambda\mu}|_K.$$

2.2.2 Le schéma éléments finis mixtes

Sur la base des idées développées dans le chapitre 1.3, nous allons proposer, à partir d'une formulation mixte, un schéma éléments finis équivalent à (2.2.3) dont l'implémentation peut s'opérer sans assemblage de matrices permettant ainsi un gain de stockage mémoire considérable. L'idée principale était d'isoler les opérateurs de type ∇ en introduisant de nouvelles inconnues auxiliaires discrétisées dans un espace de fonctions discontinues caractérisées par la transformation de Piola. La seule difficulté est de gérer le caractère vectoriel des inconnues et tensoriel des coefficients physiques.

Quelques notations : Soit V un espace de Hilbert munit du produit scalaire "·", dont les fonctions sont vectorielles à deux composantes :

$$\underline{v} \in V \Rightarrow \underline{v} = (v_1, v_2)^T.$$

On identifie le tenseur \underline{C} à la matrice 4×4 : $\underline{a} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ où les matrices A_{ij} sont définies par $A_{ij} = \begin{pmatrix} c^{i1j1} & c^{i1j2} \\ c^{i2j1} & c^{i2j2} \end{pmatrix} \quad \forall (i, j) = \{1, 2\}$. On notera

- \underline{u} tout vecteur de $V \times V$,
- $\underline{\nabla}$ le gradient d'un vecteur $\underline{u} \in V$ défini par $\underline{\nabla} \underline{u} = (\nabla u_1, \nabla u_2)^T$.

Enfin on définit l'opérateur produit "·" par

$$\underline{u} : \underline{v} = \underline{u}_1 \cdot \underline{v}_1 + \underline{u}_2 \cdot \underline{v}_2.$$

Le point clé pour lever la difficulté relative au caractère vectoriel des inconnues et tensoriel des coefficients physiques sera l'utilisation de la relation donnée dans [Cohen et Fauqueux, 2005] :

$$\underline{\text{Div}} (\underline{C} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta})) = \underline{\text{Div}} (\underline{a} \underline{\nabla} \underline{\theta}), \quad \forall \underline{\theta}. \quad (2.2.4)$$

2.2.2.1 La formulation mixte :

Ecrivons le système (2.1.7)-(2.1.9) sous forme d'un système mixte d'ordre 1 en espace. En injectant 2.2.4 dans 2.1.7 et en introduisant les variables auxiliaires

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{a}} \underline{\nabla} \underline{\theta} \quad \underline{\underline{Q}} = G (\nabla u + \underline{\theta}) \quad , \quad \underline{\underline{\gamma}} = \underline{\nabla} \underline{\theta} \quad , \quad (2.2.5)$$

alors le système (2.1.7)-(2.1.9) s'écrit

$$\rho \frac{\delta^3}{12} \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial t^2} - \frac{\delta^3}{12} \underline{\text{Div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \delta \underline{\underline{Q}} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T], \quad (2.2.6)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{a}} \underline{\underline{\gamma}} \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T], \quad (2.2.7)$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = \underline{\nabla} \underline{\theta} \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T], \quad (2.2.8)$$

$$\rho \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \delta \text{div}(\underline{\underline{Q}}) = f \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T], \quad (2.2.9)$$

$$\frac{1}{G} \underline{\underline{Q}} = (\nabla u + \underline{\theta}) \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T], \quad (2.2.10)$$

complété par les conditions aux limites et les conditions initiales homogènes appropriées.

$$\text{Posons } \mathcal{V}^T = L^2(0, T; [L^2(\Sigma)]^2) .$$

En utilisant les intégrations par parties de la section 2.1.3.1, la formulation variationnelle du système (2.2.6)-(2.2.10) est :

Trouver $(u, \underline{\theta}) \in \mathcal{U}_0^T$, $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\gamma}}, \underline{\underline{Q}}) \in [\mathcal{V}^T]^2 \times [\mathcal{V}^T]^2 \times \mathcal{V}^T$ solutions de

$$\rho \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} \underline{\theta}(t) \cdot \underline{\eta} + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\nabla} \underline{\eta} + \int_{\Sigma} \underline{\underline{Q}}(t) \cdot \underline{\eta} = 0 \quad ,$$

$$\int_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\underline{\psi}} = \int_{\Sigma} \underline{\underline{a}} \underline{\underline{\gamma}}(t) : \underline{\underline{\psi}} \quad ,$$

$$\int_{\Sigma} \underline{\underline{\gamma}}(t) : \underline{\underline{\xi}} = \int_{\Sigma} \underline{\nabla} \underline{\theta}(t) : \underline{\underline{\xi}} \quad ,$$

$$\rho \delta \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} u(t) v + \delta \int_{\Sigma} \underline{\underline{Q}}(t) \cdot \nabla v = \int_{\Sigma} f v \quad ,$$

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{G} \underline{\underline{Q}}(t) \cdot \underline{\phi} = \int_{\Sigma} (\nabla u(t) + \underline{\theta}(t)) \cdot \underline{\phi} \quad ,$$

pour toute fonction test $(v, \underline{\eta}) \in \mathcal{U}_0$, $(\underline{\underline{\psi}}, \underline{\underline{\xi}}, \underline{\phi}) \in [L^2(\Sigma)^2]^2 \times [L^2(\Sigma)^2]^2 \times L^2(\Sigma)^2$.

Chapitre 2 Application de la méthode des éléments finis mixtes spectraux au modèle de plaque de Reissner-Mindlin en régime transitoire.

Nous proposons maintenant un schéma éléments finis pour l'approximation en espace, équivalent à la formulation "standard" (2.2.3). Suivant la démarche détaillée dans le chapitre 1.3, nous utiliserons de nouveau l'espace d'approximation

$$V_h^r = \left\{ \underline{w}_h \in [L^2(\mathcal{T}_h)]^2 \text{ tel que } |J_K| DF_K^{-1} \underline{w}_h \circ F_K \in [\mathbb{Q}_r(\widehat{K})]^2 \right\}$$

pour approcher les inconnues auxiliaires. Afin d'assurer l'équivalence avec le problème (2.2.3) nous calculerons les matrices de masse scalaires à l'aide d'une formule d'intégration de Gauss-Lobatto et les matrices de rigidité à l'aide d'une formule d'intégration de Gauss (nous pourrions, comme dans le chapitre précédent être plus général en s'autorisant plus de liberté sur le choix des formules d'intégration). Nous proposons alors le problème variationnel éléments finis :

Trouver $(u_h, \underline{\theta}_h) : [0; T) \longrightarrow \mathcal{U}_{h,0}^r$ et $(\underline{\sigma}_h, \underline{\gamma}_h, \underline{Q}_h) : [0; T) \longrightarrow [V_h^r]^2 \times [V_h^r]^2 \times V_h^r$ tels que

$$\rho \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} \underline{\theta}_h(t) \cdot \underline{\eta}_h + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{\sigma}_h(t) : \underline{\nabla} \underline{\eta}_h + \int_{\Sigma} \underline{Q}_h(t) \cdot \underline{\eta}_h = 0 \quad (2.2.11)$$

$$\int_{\Sigma} \underline{\sigma}_h(t) : \underline{\psi}_h = \int_{\Sigma} \underline{a} \underline{\gamma}_h(t) : \underline{\psi}_h \quad (2.2.12)$$

$$\int_{\Sigma} \underline{\gamma}_h(t) : \underline{\xi}_h = \int_{\Sigma} \underline{\nabla} \underline{\theta}(t)_h : \underline{\xi}_h \quad (2.2.13)$$

$$\rho \delta \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} u_h(t) v_h + \delta \int_{\Sigma} \underline{Q}_h(t) \cdot \nabla v_h = \int_{\Sigma} f_h(t) v_h \quad (2.2.14)$$

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{G} \underline{Q}_h(t) \cdot \underline{\phi}_h = \int_{\Sigma} (\nabla u_h(t) + \underline{\theta}_h(t)) \cdot \underline{\phi}_h \quad (2.2.15)$$

pour toutes fonctions tests $(v_h, \underline{\eta}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r$, $(\underline{\psi}_h, \underline{\xi}_h, \underline{\phi}_h) \in [V_h^r]^2 \times [V_h^r]^2 \times V_h^r$. Introduisons les opérateurs d'interpolation aux points de Gauss

$$\left| \begin{array}{l} \pi_h : \Pi C^0(K) \longrightarrow V_h^r \\ \varphi_h \longrightarrow \pi_h \varphi_h \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} \pi_h^2 : \Pi[C^0(K)]^4 \longrightarrow [V_h^r]^2 \\ \underline{\varphi}_h \longrightarrow \pi_h^2 \underline{\varphi}_h \end{array} \right. .$$

En vertu de la remarque 1.3.4 ces opérateurs sont bien définis. On peut alors énoncer le résultat d'équivalence suivant :

Proposition 2.2.1 *Les schémas (2.2.3) et (2.2.11)-(2.2.15) sont équivalents i.e. si $(u_h, \underline{\theta}_h)$ est solution de (2.2.3) alors $(u_h, \underline{\theta}_h, \underline{\sigma}_h, \underline{\gamma}_h, \underline{Q}_h)$ où $\underline{\sigma} = \pi_h^2(\underline{a} \underline{\nabla} \underline{\theta})$, $\underline{Q} = G \pi_h(\nabla u + \underline{\theta})$, $\underline{\gamma} = \pi_h^2(\underline{\nabla} \underline{\theta})$ sont solutions de (2.2.11)-(2.2.15) et inversement : Si $(u_h, \underline{\theta}_h, \underline{\gamma}_h, \underline{Q}_h)$ sont solutions de (2.2.11)-(2.2.15) alors $(u_h, \underline{\theta}_h)$ est solution de (2.2.3).*

Preuve :

Il nous suffit de montrer que si $(u_h, \underline{\theta}_h, \underline{\sigma}_h, \underline{\gamma}_h, \underline{Q}_h)$ sont solutions de (2.2.11)-(2.2.15) alors $(u_h, \underline{\theta}_h)$ est solution de (2.2.3), par unicité des solutions, l'implication inverse est immédiate.

Nous incitons fortement le lecteur à se référer à la preuve de la proposition 1.3.1 dont les idées sont reprises pour celle ci.

Soit $(v_h, \underline{\eta}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r$. Prenons $\underline{\xi}_h = \pi_h^2(\underline{a}^* \nabla \underline{\eta}_h)$ (*). Par propriété de π_h^2 on a

$$\int_{\Sigma} \underline{\gamma}_h(t) : \underline{\xi}_h = \int_{\Sigma} \underline{\gamma}_h(t) : \underline{a}^* \nabla \underline{\eta}_h = \int_{\Sigma} \underline{a} \underline{\gamma}_h(t) : \nabla \underline{\eta}_h .$$

En injectant (*) dans (2.2.13) il vient

$$\int_{\Sigma} \underline{\gamma}_h(t) : \underline{\xi}_h = \int_{\Sigma} \underline{a} \nabla \underline{\theta}_h(t) : \nabla \underline{\eta}_h .$$

On en déduit que

$$\int_{\Sigma} \underline{a} \underline{\gamma}_h(t) : \nabla \underline{\eta}_h = \int_{\Sigma} \underline{a} \nabla \underline{\theta}_h(t) : \nabla \underline{\eta}_h . \quad (2.2.16)$$

Prenons alors $\underline{\psi}_h = \pi_h^2(\nabla \underline{\eta}_h)$ (**). Par propriété de π_h^2 on a

$$\int_{\Sigma} \underline{\sigma}_h(t) : \underline{\psi}_h = \int_{\Sigma} \underline{\sigma}_h(t) : \nabla \underline{\eta}_h .$$

En injectant (**) dans (2.2.12) il vient

$$\int_{\Sigma} \underline{\sigma}_h(t) : \underline{\psi}_h = \int_{\Sigma} \underline{a} \underline{\gamma}_h(t) : \nabla \underline{\eta}_h .$$

On en déduit que

$$\int_{\Sigma} \underline{\sigma}_h(t) : \nabla \underline{\eta}_h = \int_{\Sigma} \underline{a} \underline{\gamma}_h(t) : \nabla \underline{\eta}_h . \quad (2.2.17)$$

De (2.2.16) et (2.2.17) on tire

$$\int_{\Sigma} \underline{\sigma}_h(t) : \nabla \underline{\eta}_h = \int_{\Sigma} \underline{a} \nabla \underline{\theta}_h(t) : \nabla \underline{\eta}_h . \quad (2.2.18)$$

Prenons enfin $\underline{\phi}_h = \pi_h(\underline{\eta}_h)$ (***) . Par propriété de π_h on a

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{G} \underline{Q}_h(t) \cdot \underline{\phi}_h = \int_{\Sigma} \frac{1}{G} \underline{Q}_h(t) \cdot \underline{\eta}_h .$$

En injectant (***) dans (2.2.15) il vient

$$\int_{\Sigma}^G \frac{1}{G} \underline{Q}_h(t) \cdot \underline{\phi}_h = \int_{\Sigma}^G (\nabla u_h(t) + \underline{\theta}_h(t)) \cdot \underline{\eta}_h .$$

On en déduit que

$$\int_{\Sigma}^G \frac{1}{G} \underline{Q}_h(t) \cdot \underline{\eta}_h = \int_{\Sigma}^G (\nabla u_h(t) + \underline{\theta}_h(t)) \cdot \underline{\eta}_h . \quad (2.2.19)$$

Par un raisonnement analogue on montre que

$$\int_{\Sigma}^G \frac{1}{G} \underline{Q}_h(t) \cdot \nabla v_h = \int_{\Sigma}^G (\nabla u_h(t) + \underline{\theta}_h(t)) \cdot \nabla v_h . \quad (2.2.20)$$

En injectant (2.2.18) et (2.2.19) dans (2.2.11) ainsi que (2.2.20) dans (2.2.14), alors (2.2.11)+(2.2.14) donne bien (2.2.3). \diamond

2.2.2.2 Formulation matricielle et algorithme

Formulation matricielle : Nous allons reformuler matriciellement le schéma (2.2.11)-(2.2.15) et mettre en évidence comment la formulation mixte permet de calculer les produits matrice-vecteur du système obtenu à partir du seul stockage des matrices de masse, d'une matrice élémentaire de rigidité et des coefficients physiques.

Notons $N_{GL} = \dim(\mathcal{U}_{h,0}^r)$, $N_G = \dim(V_h^r)$. Les matrices

$$\mathbf{M}_h \in \mathcal{M}_{N_{GL}}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{B}_h \in \mathcal{M}_{N_G}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{R}_h \in \mathcal{M}_{N_G, N_{GL}}(\mathbb{R})$$

sont définies dans le chapitre 1.3. On rappelle simplement qu'elles sont respectivement diagonale, locale et diagonale par bloc 2×2 , locale et entièrement définie à partir de l'unique matrice élémentaire $\hat{\mathbf{R}}$. (cf. chap. 1.3)

Afin de gérer le caractère vectoriel du système on introduit alors les matrices de masses :

- $\mathcal{D}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_h & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_h \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N_{GL}}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale de

$$(\underline{\varphi}_h, \underline{\psi}_h) \longrightarrow \int_{\Sigma}^{GL} \underline{\varphi}_h \cdot \underline{\psi}_h \text{ dans } U_{h,0}^r \times U_{h,0}^r ,$$

- $\mathcal{M}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_h & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_h \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N_G}(\mathbb{R})$ la matrice locale et diagonale par blocs de

$$(\underline{\underline{\varphi}}_h, \underline{\underline{\psi}}_h) \longrightarrow \int_{\Sigma}^G \underline{\underline{\varphi}}_h : \underline{\underline{\psi}}_h \text{ dans } [V_h^r]^2 \times [V_h^r]^2 ,$$

- $\mathcal{M}_{h,\underline{a}} \in \mathcal{M}_{2N_G}(\mathbb{R})$ la matrice locale et diagonale par blocs de

$$(\underline{\varphi}_h, \underline{\psi}_h) \longrightarrow \int_{\Sigma}^G \underline{a} \underline{\varphi}_h : \underline{\psi}_h \text{ dans } [V_h^r]^2 \times [V_h^r]^2 ,$$

Pour la partie rigidité, on utilisera

- $\mathcal{R}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_h & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_h \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N_G, 2N_{GL}}(\mathbb{R})$ la matrice de

$$(\underline{\varphi}_h, \underline{\psi}_h) \longrightarrow \int_{\Sigma}^G \underline{\varphi}_h : \underline{\nabla} \underline{\psi}_h \text{ dans } [U_{h,0}^r]^2 \times [V_h^r]^2 ,$$

$$\text{(on notera } \widehat{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{R}} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{R}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N_{GL}}(\mathbb{R}))$$

et la matrice de couplage entre les inconnues u et $\underline{\theta}$

- $\mathcal{C}_h \in \mathcal{M}_{2N_{GL}, N_G}(\mathbb{R})$ la matrice de

$$(\underline{\varphi}_h, \underline{\psi}_h) \longrightarrow \int_{\Sigma}^G \underline{\varphi}_h \cdot \underline{\psi}_h \text{ dans } [U_{h,0}^r]^2 \times V_h^r ,$$

Remarque 2.2.2 Comme \mathbf{B}_h est purement locale et que G est supposé constant par élément du maillage, alors $\frac{1}{G} \mathbf{B}_h$ est la matrice de

$$(\underline{\varphi}_h, \underline{\psi}_h) \longrightarrow \int_{\Sigma}^G \frac{1}{G} \underline{\varphi}_h \cdot \underline{\psi}_h \text{ dans } V_h^r \times V_h^r .$$

Pour tout $t \in [0, T]$, notons alors $U_h(t), \Theta_h(t), \Sigma_h(t), \Gamma_h(t), \Upsilon_h(t)$ les composantes des vecteurs $u_h(t), \underline{\theta}_h(t), \underline{\sigma}_h(t), \underline{\gamma}_h(t), \underline{Q}_h(t)$ dans les bases où sont exprimées les matrices définies précédemment. La formulation matricielle du problème (2.2.11)-(2.2.15) est alors

$$\rho \mathcal{D}_h \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2 \Theta_h}{dt^2}(t) + \frac{\delta^3}{12} \mathcal{R}_h^* \Sigma_h(t) + \mathcal{C}_h \Upsilon_h(t) = 0$$

$$\mathcal{M}_h \Sigma_h(t) = \mathcal{M}_{h,\underline{a}} \Gamma_h(t)$$

$$\mathcal{M}_h \Gamma_h(t) = \mathcal{R}_h \Theta_h(t)$$

$$\rho \delta \mathbf{M}_h \frac{d^2 U_h}{dt^2}(t) + \delta \mathbf{R}_h^* \Upsilon_h(t) = F_h(t)$$

$$\frac{1}{G} \mathbf{B}_h \Upsilon_h(t) = \mathbf{R}_h U_h(t) + \mathcal{C}_h^* \Theta_h(t)$$

Il est bien trop coûteux (et du reste inutile) de calculer les inconnues auxiliaires. Grâce au principe de condensation de masse ces inconnues s'éliminent facilement. En pratique on résout le système vectoriel

$$\begin{aligned} \rho \mathcal{D}_h \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2 \Theta_h(t)}{dt^2} + \frac{\delta^3}{12} \mathcal{R}_h^* \mathcal{M}_{h,\underline{g}}^{-1} \mathcal{M}_h^{-1} \mathcal{R}_h \Theta_h(t) \\ + G \mathcal{C}_h \mathbf{B}_h^{-1} [\mathbf{R}_h U_h(t) + \mathcal{C}_h^* \Theta_h(t)] = 0 \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

$$\rho \delta \mathbf{M}_h \frac{d^2 U_h(t)}{dt^2} + \delta G \mathbf{R}_h^* \mathbf{B}_h^{-1} [\mathbf{R}_h U_h(t) + \mathcal{C}_h^* \Theta_h(t)] = F_h(t) \quad (2.2.22)$$

Remarque 2.2.3 *Ce schéma peut se mettre sous la forme d'une E.D.O. vectorielle de la forme*

$$\mathbb{M}_h \frac{d^2 V_h(t)}{dt^2} + \mathbb{R}_h V_h(t) = \mathbb{F}_h(t)$$

où l'on a posé $V_h(t) = (U_h(t), \Theta_h(t))^T$, $\mathbb{F}_h(t) = (0, F_h(t))^T$, $\mathbb{M}_h = \begin{pmatrix} \rho \mathcal{D}_h \frac{\delta^3}{12} & 0 \\ 0 & \rho \delta \mathbf{M}_h \end{pmatrix}$

et

$$\mathbb{R}_h = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_h^* \mathcal{M}_{h,\underline{g}}^{-1} \mathcal{M}_h^{-1} \mathcal{R}_h + \mathcal{C}_h \mathbf{B}_h^{-1} \mathbf{R}_h & G \mathcal{C}_h \mathbf{B}_h^{-1} \mathbf{R}_h \\ G \mathbf{R}_h^* \mathbf{B}_h^{-1} \mathcal{C}_h^* & G \mathbf{R}_h^* \mathbf{B}_h^{-1} \mathbf{R}_h \end{pmatrix}.$$

Là encore, on remarque que la formulation mixte conduit à une factorisation de la matrice de rigidité sous forme d'un produit constitué de

- matrices diagonales par blocs qui contiennent toutes les informations relatives à la physique du problème et à la géométrie des éléments du maillage,
- matrices de rigidité entièrement définie à partir de l'unique matrice élémentaire $\widehat{\mathbf{R}}$.

L'algorithme de calcul : Rappelons que cette formulation mixte un peu complexe a pour but de permettre de calculer le produit matrice-vecteur $\mathbb{R}_h V_h(t)$ sans assemblage et avec un stockage mémoire minimal. En nous inspirant de la procédure d'assemblage "élément par élément" proposée dans la section 1.3.5.1, il va nous suffir de calculer et de stocker les matrices définies pour le cas modèle (à savoir $\mathbf{M}_h, \mathbf{B}_h, \widehat{\mathbf{R}}$) ainsi que la matrice de masse $\mathcal{M}_{h,\underline{g}}^{-1}$ et les matrices élémentaires de \mathcal{C}_h . Beaucoup de matrices introduites précédemment l'ont été pour le formalisme mais ne sont pas calculées en pratique. Dans l'algorithme suivant nous reprendrons les notations de la section 1.3.5.1. Pour toute matrice A_h , nous noterons $A_{h,K}$ sa matrice élémentaire relative à l'élément K . On se donne alors quatre vecteurs locaux $(U_h^{loc}, \Theta_h^{loc}, W_{1h}^{loc}, W_{2h}^{loc})$. L'algorithme pour assembler le produit $\mathbb{R}_h V_h(t)$ est le suivant :

Pour K décrivant les éléments du maillage

Pour j allant de 1 à N_{loc}

$$U_h^{loc}(j) = U_h(j_{glob}^K)$$

$$\Theta_h^{loc}(j) = \Theta_h(j_{glob}^K)$$

Fin de la boucle en j

$$W_{1h}^{loc} = [\widehat{\mathbf{R}}^* \mathcal{M}_{h,\underline{a},K}^{-1} \mathcal{M}_{h,K}^{-1} \widehat{\mathbf{R}} + \mathbf{C}_{h,K} B_{h,K}^{-1} \widehat{\mathbf{R}}] \Theta_h^{loc} + G \mathbf{C}_{h,K} \mathbf{B}_{h,K}^{-1} \widehat{\mathbf{R}} U_h^{loc}$$

$$W_{2h}^{loc} = G \widehat{\mathbf{R}}^* \mathbf{B}_{h,K}^{-1} \mathbf{C}_{h,K}^* \Theta_h^{loc} + G \widehat{\mathbf{R}}^* B_{h,K}^{-1} \widehat{\mathbf{R}} U_h^{loc}$$

Pour k allant de 1 à N_{loc}

$$\mathbb{R}_h V_h(k_{glob}^K) = \mathbb{R}_h V_h(k_{glob}^K) + \begin{pmatrix} W_{1h}^{loc} \\ W_{2h}^{loc} \end{pmatrix}$$

Fin de la boucle en k

Fin de la boucle en K

2.3 Analyse du schéma

En reprenant la démarche suivie au chapitre 1.4, nous proposons dans un premier temps une analyse pour le schéma élément fini appliqué au problème "harmonique" relié à (2.2.3) par la transformée de Fourier-Laplace. Nous obtiendrons alors des estimations en domaine temporel à l'aide du théorème de Plancherel et d'un lemme de troncature exactement de la même manière qu'au chapitre 1.4.2.

2.3.1 Le problème "harmonique" associé

Pour tout complexe $s \in \mathbb{C}^+ = \{s = \eta + i\omega, \eta > 0\}$ on considère le problème :

Trouver $\mathbf{u} = \mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\theta}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_s : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ solutions de

$$(P_s) \begin{cases} \rho \frac{\delta^3}{12} s^2 \underline{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\delta^3}{12} \underline{\text{Div}}(\underline{\mathbf{C}} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{\theta}})) + \delta G (\nabla \mathbf{u} + \underline{\boldsymbol{\theta}}) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \rho \delta s^2 \mathbf{u} - \delta \text{div}[G (\nabla \mathbf{u} + \underline{\boldsymbol{\theta}})] = \mathbf{f} & \text{sur } \Sigma, \\ \mathbf{u} = 0, \underline{\boldsymbol{\theta}} = 0 & \text{sur } \gamma, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

dont la formulation variationnelle associée est :

Trouver $(\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\theta}}) \in \mathcal{U}_0$, solutions de

$$a(s; (\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\theta}}), (\mathbf{v}, \underline{\boldsymbol{\eta}})) = \bar{s} (\mathbf{f}, (\mathbf{v}, \underline{\boldsymbol{\eta}})) \quad \forall (\mathbf{v}, \underline{\boldsymbol{\eta}}) \in \mathcal{U}_0, \quad (2.3.2)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} a(s; (\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\theta}}), (\mathbf{v}, \underline{\boldsymbol{\eta}})) &= s|s|^2 \left[\delta \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \rho \underline{\boldsymbol{\theta}} \cdot \bar{\underline{\boldsymbol{\eta}}} \right] \\ &+ \bar{s} \left[\frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\bar{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) + \delta \int_{\Sigma} G (\nabla \mathbf{u} + \underline{\boldsymbol{\theta}}) \cdot (\nabla \bar{\mathbf{v}} + \bar{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) \right]. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.1 Les propositions 2.1.4 et 1.4.1 assurent que le problème (2.3.2) admet une unique solution $(\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\theta}}) \in \mathcal{U}_0$.

Le problème approché pour (2.3.2), relié au problème (2.2.3) par la transformée de Fourier-Laplace est alors :

Trouver $(\mathbf{u}_h, \underline{\boldsymbol{\theta}}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r$, solutions de

$$a_h(s; (\mathbf{u}_h, \underline{\boldsymbol{\theta}}_h), (\mathbf{v}_h, \underline{\boldsymbol{\eta}}_h)) = \bar{s} (\mathbf{f}_h, (\mathbf{v}_h, \underline{\boldsymbol{\eta}}_h)) \quad \forall (\mathbf{v}_h, \underline{\boldsymbol{\eta}}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r, \quad (2.3.3)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} a_h(s; (\mathbf{u}_h, \underline{\boldsymbol{\theta}}_h), (\mathbf{v}_h, \underline{\boldsymbol{\eta}}_h)) &= s|s|^2 \left[\delta \int_{\Sigma}^{GL} \rho \mathbf{u}_h \bar{\mathbf{v}}_h + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma}^{GL} \rho \underline{\boldsymbol{\theta}}_h \cdot \bar{\underline{\boldsymbol{\eta}}}_h \right] \\ &+ \bar{s} \left[\frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma}^G \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}_h) : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\bar{\underline{\boldsymbol{\eta}}}_h) + \delta \int_{\Sigma}^G G (\nabla \mathbf{u}_h + \underline{\boldsymbol{\theta}}_h) \cdot (\nabla \bar{\mathbf{v}}_h + \bar{\underline{\boldsymbol{\eta}}}_h) \right]. \end{aligned}$$

2.3.2 Estimations d'erreur pour le problème harmonique

Comme dans le chapitre 1, nous allons successivement étudier l'erreur d'interpolation et l'erreur due à l'utilisation de formules de quadrature. D'après la proposition 2.1.4, $a(s; \cdot, \cdot)$ est coercive sur \mathcal{U}_0 . De plus $\mathcal{U}_{h,0}^r \subset \mathcal{U}_0$ et comme les poids de Gauss et Gauss-Lobatto sont strictement positifs alors $a_h(s; \cdot, \cdot)$ est coercive sur $\mathcal{U}_{h,0}^r$. La proposition 2.1.4 assure en plus que $a(s; \cdot, \cdot)$ et $a_h(s; \cdot, \cdot)$ satisfont les propriétés de continuité et de coercivité de la proposition 1.4.1. Par conséquent, on peut énoncer une version du lemme de Strang appropriée au schéma (2.3.3).

Lemme 2.3.1 Si $\underline{\mathbf{U}} = (\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\theta}})$ est solution de (2.3.2) et $\underline{\mathbf{U}}_h = (\mathbf{u}_h, \underline{\boldsymbol{\theta}}_h)$ solution de (2.3.3), alors il existe une constante C indépendante du pas de maillage et de s telle que

$$\|\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}_h\|_{1,s} \leq C \left[\underbrace{\inf_{\underline{\mathbf{V}}_h \in \mathcal{U}_{h,0}^r} \left(1 + \frac{|s|}{\eta} \right) \|\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{V}}_h\|_{1,s}}_{\text{Erreur d'interpolation}} + \frac{1}{\eta} \underbrace{\sup_{\underline{\mathbf{W}}_h \in \mathcal{U}_{h,0}^r} \frac{|(a - a_h)(s; \underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h)|}{\|\underline{\mathbf{W}}_h\|_{1,s}}}_{\text{Erreur due à l'intégration numérique}} \right]$$

(2.3.4)

Preuve :

La proposition 2.1.4 assurent que $a(\cdot, \cdot)$ et $a_h(\cdot, \cdot)$ satisfont les propriétés de coercivité et de continuité (en norme $\|\cdot\|_{1,s}$) de la proposition 1.4.1. \diamond

Dans tout ce qui suit les vecteurs notés $\underline{\mathbf{V}}_h$ et $\underline{\mathbf{W}}_h$ seront de la forme $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_h \\ \boldsymbol{\eta}_{1h} \\ \boldsymbol{\eta}_{2h} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{w}_h \\ \boldsymbol{\zeta}_{1h} \\ \boldsymbol{\zeta}_{2h} \end{pmatrix}$.

Majoration de l'erreur d'interpolation La majoration de l'erreur d'interpolation est une triviale grâce à la proposition 1.4.4. En effet on a :

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{V}}_h\|_{1,s} &\leq \inf_{\mathbf{v}_h \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^r} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{1,s} + \inf_{\boldsymbol{\eta}_{1h} \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^r} \|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\eta}_{1h}\|_{1,s} + \inf_{\boldsymbol{\eta}_{2h} \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^r} \|\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\eta}_{2h}\|_{1,s} \\ &\leq C h^r [|s| (|\mathbf{u}|_{r,\Sigma} + |\boldsymbol{\theta}_1|_{r,\Sigma} + |\boldsymbol{\theta}_2|_{r,\Sigma}) + |\mathbf{u}|_{r+1,\Sigma} + |\boldsymbol{\theta}_1|_{r+1,\Sigma} + |\boldsymbol{\theta}_2|_{r+1,\Sigma}] \\ &\leq C h^r [|s| |\underline{\mathbf{U}}|_{r,\Sigma} + |\underline{\mathbf{U}}|_{r+1,\Sigma}] \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\exists C_{\eta,s} > 0 \text{ tel que } \inf_{\underline{\mathbf{v}}_h \in \underline{\mathbf{U}}_{h,0}^r} \left(1 + \frac{|s|}{\eta} \right) \|\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{V}}_h\|_{1,s} \leq C_{\eta,s} h^r . \quad (2.3.5)$$

Majoration de l'erreur due à l'intégration numérique Il s'agit maintenant de déterminer l'erreur due à l'utilisation de formules de quadrature. Par définition, on a

$$| (a - a_h)(s; \underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) | = \mathcal{E}_m(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) + \mathcal{E}_r(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) \quad (2.3.6)$$

où \mathcal{E}_m est l'erreur d'intégration numérique commise sur le terme de masse i.e.

$$\mathcal{E}_m(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) = s|s|^2 \left[\delta E(\rho \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + \frac{\delta^3}{12} [E(\rho \boldsymbol{\eta}_{1h}, \boldsymbol{\zeta}_{1h}) + E(\rho \boldsymbol{\eta}_{2h}, \boldsymbol{\zeta}_{2h})] \right]$$

où l'on a posé

$$E(\mathbf{p}_h, \mathbf{q}_h) = \int_{\Sigma} \mathbf{p}_h \bar{\mathbf{q}}_h - \int_{\Sigma}^{GL} \mathbf{p}_h \bar{\mathbf{q}}_h ,$$

et \mathcal{E}_r est l'erreur d'intégration numérique commise sur le terme de rigidité que l'on décompose comme suit :

$$\mathcal{E}_r(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) = \bar{s} \left[\frac{\delta^3}{12} \mathcal{E}_r^1(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) + \delta \mathcal{E}_r^2(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) \right]$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} \mathcal{E}_r^1(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) &= \int_{\Sigma} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{\eta}}_h) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{\zeta}}_h) - \int_{\Sigma}^G \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{\eta}}_h) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{\zeta}}_h), \\ \mathcal{E}_r^2(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) &= \int_{\Sigma} G (\nabla \mathbf{v}_h + \underline{\boldsymbol{\eta}}_h) \cdot (\nabla \mathbf{w}_h + \underline{\boldsymbol{\zeta}}_h) - \int_{\Sigma}^G G (\nabla \mathbf{v}_h + \underline{\boldsymbol{\eta}}_h) \cdot (\nabla \mathbf{w}_h + \underline{\boldsymbol{\zeta}}_h). \end{cases}$$

On remarque que l'erreur commise sur le terme de masse pour les inconnues vectorielles est simplement la somme des erreurs commises sur leurs composantes scalaires. Par conséquent, le corollaire 1.4.2 permet immédiatement d'énoncer la

Proposition 2.3.1 *Soit $r \geq 2$. $\exists C > 0$ tel que $\forall (\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{U}_{h,0}^r$,*

$$|\mathcal{E}_m(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h)| \leq C h^r |s|^3 |\underline{\mathbf{V}}_h|_{r-1,\Sigma} \|\underline{\mathbf{W}}_h\|_{1,s}. \quad (2.3.7)$$

Preuve :

Posons $C_{\delta} = \max(\delta, \frac{\delta^3}{12})$. Alors

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_m(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h)| &\leq |s|^3 \rho_{\infty} C_{\delta} [E(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + E(\boldsymbol{\eta}_{1h}, \boldsymbol{\zeta}_{1h}) + E(\boldsymbol{\eta}_{2h}, \boldsymbol{\zeta}_{2h})] \\ &\leq |s|^3 \rho_{\infty} C_{\delta} h^r \left[|\mathbf{v}_h|_{r-1,\Omega} \|\mathbf{w}_h\|_{1,s} + |\boldsymbol{\eta}_{1h}|_{r-1,\Omega} \|\boldsymbol{\zeta}_{1h}\|_{1,s} \right. \\ &\quad \left. + |\boldsymbol{\eta}_{2h}|_{r-1,\Omega} \|\boldsymbol{\zeta}_{2h}\|_{1,s} \right] \quad (\text{d'après le corollaire 1.4.2}) \\ &\leq |s|^3 \rho_{\infty} C_{\delta} h^r |\underline{\mathbf{V}}_h|_{r-1,\Sigma} \|\underline{\mathbf{W}}_h\|_{1,s} \quad \diamond \end{aligned}$$

Bien que la preuve ne soit pas tout à fait aussi immédiate, nous avons également une estimation optimale pour l'erreur d'intégration commise sur le terme de rigidité.

Proposition 2.3.2 *Il existe $C > 0$ tel que $\forall (\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{U}_{h,0}^r$,*

$$|\mathcal{E}_r(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h)| \leq C |s| \left[h^{r+1} |\underline{\mathbf{V}}_h|_{r+2,\Sigma} + h^r |\underline{\mathbf{V}}_h|_{r+1,\Sigma} \right] \|\underline{\mathbf{W}}_h\|_{1,s} \quad (2.3.8)$$

Pour démontrer cette proposition nous utiliserons l'identité :

$$\int_{\Sigma} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{\eta}}_h) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{\zeta}}_h) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Sigma} A_{ij} \nabla \boldsymbol{\theta}_{ih} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{jh}, \quad \forall (\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{U}_{h,0}^r, \quad (2.3.9)$$

qui se déduit trivialement de (2.2.4) (compte tenu des conditions aux limites).

Cette identité va nous permettre d'obtenir quasi immédiatement une estimation pour \mathcal{E}_r^1 grâce à la l'estimation 1.4.27. Pour majorer \mathcal{E}_r^2 nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.2 Pour toutes fonctions $\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_{h,0}^r$,

$$|J_K| DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h \in [\mathcal{Q}_r(\widehat{K})]^2.$$

Remarque 2.3.2 Ce lemme n'est pas tout à fait évident à première vue. En effet, en tenant compte de la relation 1.4.24, $|J_K| DF_K^{*-1} \in [\mathcal{Q}_1(\widehat{K})]^2$ et comme grossièrement $\widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h \in [\mathcal{Q}_r(\widehat{K})]^2$ alors on aurait tendance à écrire que

$$|J_K| DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h \in [\mathcal{Q}_{r+1}(\widehat{K})]^2.$$

Cette estimation "naturelle" ne nous sera pas assez précise pour utiliser la propriété d'intégration numérique satisfait par les points de Gauss pour pouvoir estimer \mathcal{E}_r^2 .

Preuve (du lemme 2.3.2)

Ici $d = 2$ ($\Sigma \subset \mathbb{R}^2$) donc F_K est bilinéaire et il existe trois vecteurs de \mathbb{R}^2 , $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ tels que

$$F_K(\widehat{x}, \widehat{y}) = \underline{\alpha} \widehat{x} + \underline{\beta} \widehat{y} + \underline{\gamma} \widehat{x} \widehat{y} \quad \text{pour tout point } (\widehat{x}, \widehat{y}) \text{ de } \widehat{K}.$$

de sorte que

$$DF_K = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma_1 \widehat{y} & \beta_1 + \gamma_1 \widehat{x} \\ \alpha_2 + \gamma_2 \widehat{y} & \beta_2 + \gamma_2 \widehat{x} \end{pmatrix}.$$

Par propriété

$$DF_K^{-1} = \frac{1}{|J_K|} \begin{pmatrix} \beta_2 + \gamma_2 \widehat{x} & -\beta_1 - \gamma_1 \widehat{x} \\ -\alpha_2 - \gamma_2 \widehat{y} & \alpha_1 + \gamma_1 \widehat{y} \end{pmatrix},$$

par conséquent,

$$|J_K| DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h = \begin{pmatrix} (\beta_2 + \gamma_2 \widehat{x}) \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}_h}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y}) - (\alpha_2 + \gamma_2 \widehat{y}) \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}_h}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y}) \\ -(\beta_1 + \gamma_1 \widehat{x}) \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}_h}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y}) + (\alpha_1 + \gamma_1 \widehat{y}) \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}_h}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y}) \end{pmatrix}.$$

Comme $\frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}_h}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \mathcal{Q}_{r-1,r}(\widehat{K})$ et que $\frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}_h}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \mathcal{Q}_{r,r-1}(\widehat{K})$ alors on a bien

$$|J_K| DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h \in [\mathcal{Q}_r(\widehat{K})]^2. \quad \diamond$$

Grâce aux deux lemmes précédents, nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 2.3.2.

Chapitre 2 Application de la méthode des éléments finis mixtes spectraux au modèle de plaque de Reissner-Mindlin en régime transitoire.

Preuve (de la proposition 2.3.2)

Soit $(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{U}_{h,0}^r$. D'après (2.3.9) on a

$$|\mathcal{E}_r^1(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h)| \leq C_\infty \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left| \int_\Sigma \nabla \boldsymbol{\theta}_{ih} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{ih} - \int_\Sigma^G \nabla \boldsymbol{\theta}_{ih} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{\zeta}}_{ih} \right|.$$

Donc d'après la proposition 1.4.27, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\mathcal{E}_r^1(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h)| \leq C [h^{r+1} |\underline{\mathbf{V}}_h|_{r+2,\Sigma} + h^r |\underline{\mathbf{V}}_h|_{r+1,\Sigma}] \|\underline{\mathbf{W}}_h\|_{1,s}.$$

Il nous reste alors à estimer \mathcal{E}_r^2 . Par changement de variable, d'après le lemme 1.3.1 on a

$$|\mathcal{E}_r^2(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h)| \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\widehat{E}_K(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h)|$$

où l'on a posé

$$\widehat{E}_K(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) = \int_\Sigma^G (|J_K| DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h + \widehat{\boldsymbol{\eta}}) \cdot (|J_K| DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h + \widehat{\boldsymbol{\zeta}}).$$

Or d'après le lemme 2.3.2, comme $\widehat{\boldsymbol{\eta}} \in [\mathbb{Q}_r(\widehat{K})]^2$ alors

$$|J_K| DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h + \widehat{\boldsymbol{\eta}} \in [\mathbb{Q}_r(\widehat{K})]^2.$$

De la même façon,

$$|J_K| DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h + \widehat{\boldsymbol{\zeta}} \in [\mathbb{Q}_r(\widehat{K})]^2.$$

Par conséquent,

$$(|J_K| DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{v}}_h + \widehat{\boldsymbol{\eta}}) \cdot (|J_K| DF_K^{*-1} \widehat{\nabla} \widehat{\mathbf{w}}_h + \widehat{\boldsymbol{\zeta}}) \in \mathbb{Q}_{2r}(\widehat{K})$$

et donc d'après (1.2.4), $\mathcal{E}_r^2(\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) = 0$, ce qui achève la démonstration. \diamond

Les propositions 2.3.1 et 2.3.2 induisent le

Corollaire 2.3.1 *Soit $r \geq 2$. $\exists C > 0$ tel que $\forall (\underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{U}_{h,0}^r$,*

$$\sup_{\underline{\mathbf{W}}_h \in \mathcal{U}_{h,0}^r} \frac{|(a - a_h)(s; \underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h)|}{\|\underline{\mathbf{W}}_h\|_{1,s}} \leq C h^r \left(|s|^3 |\underline{\mathbf{V}}_h|_{r-1,\Sigma} + |s| [h |\underline{\mathbf{V}}_h|_{r+2,\Sigma} + |\underline{\mathbf{V}}_h|_{r+1,\Sigma}] \right).$$

Nous pouvons alors énoncer un théorème de convergence pour l'approximation par éléments finis de notre modèle de plaque de Reissner-Mindlin "harmonique".

Théorème 2.3.1 Soit $\underline{\mathbf{U}}$ la solution de (2.3.2) et $\underline{\mathbf{U}}_h$ la solution de (2.3.3). Si la donnée \mathbf{f} est suffisamment régulière pour que $\underline{\mathbf{U}} \in [\mathbf{H}^{r+2}(\Sigma)]^3$ alors il existe $\mathcal{C} > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}_h\|_{1,s} &\leq C h^r \left[|s| \|\underline{\mathbf{U}}\|_{r,\Sigma} + \|\underline{\mathbf{U}}\|_{r+1,\Sigma} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|s|}{\eta} \left(|s|^2 \|\underline{\mathbf{U}}\|_{r-1,\Sigma} + |s| \|\underline{\mathbf{U}}\|_{r,\Sigma} + 2\|\underline{\mathbf{U}}\|_{r+1,\Sigma} + h \|\underline{\mathbf{U}}\|_{r+2,\Sigma} \right) \right] \end{aligned}$$

Preuve :

De la même façon que pour démontrer le théorème 1.4.2, il suffit d'appliquer le lemme de Strang 2.3.1 en choisissant pour $\underline{\mathbf{V}}_h$ la projection par élément de $\underline{\mathbf{U}}$ sur l'espace \mathbb{Q}_r et d'utiliser l'estimation 2.3.5 et le corollaire 2.3.1. \diamond

2.3.3 Estimations d'erreur dans le domaine temporel

Pour obtenir une estimation optimale relative à la semi-discrétisation par éléments finis spectraux de (2.2.1), il suffit d'adopter pas à pas la démarche de la section 1.4.2 qui pour mémoire était la suivante :

- Obtention d'estimations d'erreur sur $\Sigma \times \mathbb{R}^+$ via la transformée de Laplace des résultats de la section précédente.
- Obtention d'estimations d'erreur en temps fini (sur $\Sigma \times [0, T]$) via un lemme de troncature.

Evidemment nous ne réécrivons pas toute les étapes. En introduisant la bonne norme liée à l'énergie ainsi que les espaces fonctionnels adéquats, nous donnerons un équivalent du théorème 1.4.4. Rappelons que l'objectif de ce chapitre est l'analyse de la semi-discrétisation par éléments finis du problème

Trouver $u, \underline{\theta} : \Sigma \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ solutions de

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta^3}{12} \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial t^2} - \frac{\delta^3}{12} \text{Div} (\underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta})) + \delta G (\nabla u + \underline{\theta}) &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \rho \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \delta \text{div} [G (\nabla u + \underline{\theta})] &= f \quad \text{sur } \Sigma, \\ u = 0, \underline{\theta} = 0 &\quad \text{sur } \gamma, \end{aligned}$$

dont la formulation variationnelle est (2.2.1) et le problème élément fini associé :

Trouver $u_h(t), \underline{\theta}_h(t) : [0, T] \longrightarrow \mathcal{U}_{h,0}^r$ solutions de

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} \underline{\theta}_h(t) \cdot \underline{\eta}_h + \rho \delta \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} u_h(t) v_h + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}_h(t)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\eta}_h) \\ + \delta \int_{\Sigma} G (\nabla u_h(t) + \underline{\theta}_h(t)) \cdot (\nabla v_h + \underline{\eta}_h) = \int_{\Sigma} f_h(t) v \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

pour tout couple de fonctions tests $(v_h, \underline{\eta}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{U}_{h,0}^r$. Introduisons alors l'espace

$$\mathcal{V}_{T,0} = \{ \underline{U} \in H^1(0, T; L^2(\Sigma)) \cap L^2(0, T; \mathcal{U}_0) \text{ tel que } \underline{U}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \} ,$$

et la norme liée à l'énergie sur $\mathcal{V}_{T,0}$:

$$\forall \underline{U} = (u, \underline{\theta}) \in \mathcal{V}_{T,0} , \quad |||\underline{U}|||_{1,T}^2 = \int_0^T E_m[\theta(t), u(t)] dt .$$

Pour les fonctions plus régulières en temps on utilisera la notation (1.4.30). En reproduisant à l'identique les étapes de la section 1.4.2 on peut énoncer le

Théorème 2.3.2 *Soit $r \geq d$. Supposons que la donnée f soit suffisamment régulière pour que la solution $\underline{U} = (u, \underline{\theta})$ de (2.2.1) ait la régularité $[H^{r+3}(\Omega \times [0, T])]^3$. Alors, si $(u_h, \underline{\theta}_h)$ est solution de (2.3.10) on a l'estimation d'erreur*

$$\begin{aligned} |||\underline{U} - \underline{U}_h|||_{1,T}^2 \leq & C h^{2r} \left[|\underline{U}|_{r+1,0,T}^2 + \sum_{j=0}^1 |\underline{U}|_{r,j,T}^2 + T \left(\sum_{j=0}^3 |\underline{U}|_{r-1,j,T}^2 + \sum_{j=0}^2 |\underline{U}|_{r,j,T}^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \sum_{j=0}^1 |\underline{U}|_{r+1,j,T}^2 + h^2 \sum_{j=0}^1 |\underline{U}|_{r+2,j,T}^2 \right) \right] . \end{aligned}$$

Remarque 2.3.3 *L'estimation d'erreur obtenue dans le théorème précédent est optimale dans le sens où (lorsque $h \rightarrow 0$)*

$$\forall t \in [0, T], \quad |||(\underline{U} - \underline{U}_h)(t)|||_{1,T} = O(h^r)$$

2.4 Un mot sur la discrétisation en temps

Posons

$$[0, T] \simeq \{t_n\} = n\Delta t , \quad \Delta t = \frac{T}{N} , \quad n \in [0, N], \quad V_h(t_n) = V_h^n .$$

Sur la base des idées développées au chapitre 1.5 on peut utiliser aux choix des schémas centrés d'ordre 2 (θ -schéma si l'on souhaite faire de l'implicite, schéma saute-mouton si l'on souhaite faire de l'explicite) ou bien monter en ordre en utilisant par exemple la technique de l'équation modifiée, et ce, pour les raisons invoquées précédemment. On note que ces schémas s'appliquent indépendamment du modèle physique une fois que l'on a écrit la semi-discrétisation par éléments finis en espace. Nous pouvons donc, pour notre modèle de plaque, reprendre exactement les schémas présentés au chapitre 1.5 en changeant simplement les matrices de masse et de rigidité. Si l'on souhaite utiliser un schéma d'ordre

de 4 on résolvera alors

$$\begin{cases} \mathbb{M}_h \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{R}_h \left[V_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} \mathbb{R}_h V_h^n \right] = \mathbb{F}_h^n, \\ V_h^0 = V_h^1 = 0. \end{cases}$$

Les résultats numériques présentés au chapitre 2.6 ont été obtenus à l'aide du schéma saute-mouton

$$\begin{cases} \mathbb{M}_h \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{R}_h V_h^n = \mathbb{F}_h^n, \\ V_h^0 = V_h^1 = 0. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

L'étude de stabilité de ce schéma est complètement académique. Nous rappelons juste les principaux résultats dont le détail des démonstrations est donné dans [Bécache, 2003]. Notons

$$|V_h^n|_{\mathbb{M}_h}^2 = \mathbb{M}_h V_h^n \cdot V_h^n, \quad \text{et} \quad E_m^{n+\frac{1}{2}}(V_h) = \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} \right|_{\mathbb{M}_h}^2 + \mathbb{R}_h V_h^{n+1} \cdot V_h^n \right\},$$

On montre classiquement que la solution de (2.4.1) vérifie l'identité d'énergie

$$\frac{E_m^{n+\frac{1}{2}} - E_m^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = F_h^n \cdot \frac{V_h^{n+1} - V_h^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Remarque 2.4.1 Cette identité est l'équivalent discret de l'équation (2.1.23).

De cette identité on déduit que la suite V_h^n reste bornée et donc que le schéma est stable, si et seulement si le pas de temps Δt vérifie la condition de stabilité (CFL)

$$\frac{\Delta t^2}{4} \lambda_{\max}\left(\frac{1}{h^r}\right) < 1$$

où $\lambda_{\max}\left(\frac{1}{h^r}\right)$ est la plus grande valeur propre de la matrice $\mathbb{M}_h^{-1} \mathbb{R}_h$. En pratique on utilise (par exemple) la méthode des puissances itérées pour calculer cette valeur propre : On estime la limite de la suite

$$\frac{\|X_{n+1}\|_{l^2}}{\|X_n\|_{l^2}}, \quad \text{avec } X_n \text{ définie par } X_{n+1} = \mathbb{M}_h^{-1} \mathbb{R}_h X_n.$$

2.5 Analyse par ondes planes

Nous proposons maintenant une analyse par ondes planes des équations de Reissner-Mindlin. L'intérêt d'une telle analyse est de pouvoir définir une notion de longueur d'onde pour le problème de plaque qui est utile pour calculer le pas de maillage des calculs éléments finis. Or, pour définir la notion de longueur d'onde, il faut savoir définir les

vitesses de phase des ondes se propageant dans la plaque. Ces vitesses sont traditionnellement déterminées par les relations de dispersion du modèle, elles même établies via une analyse par ondes planes. C'est le sujet de cette section.

On cherche donc des solutions du système (2.1.7-2.1.9) de la forme :

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}^0 e^{-i(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{x})}, \quad u = u_0 e^{-i(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{x})}, \quad \underline{k} = (k_1, k_2), \quad (2.5.1)$$

Σ étant une plaque infinie homogène isotrope $\{x_3 = 0\}$. On adoptera les notations

$$k^\alpha = \|\underline{k}\|^\alpha, \quad \forall \alpha > 0, \quad \lambda = \frac{E \nu}{1 - \nu^2}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

On rappelle dans le lemme suivant, le symbole lié à l'opérateur de l'élasticité linéaire [Bamberger *et al.*, 1980] qui apparaît (bien qu'utilisant un tenseur de comportement de plaque) dans (2.1.7).

Lemme 2.5.1 *Pour un champ $\underline{\theta}$ de la forme (2.5.1) on a :*

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial t^2} + \text{Div}(\underline{C} \underline{\varepsilon}(\underline{\theta})) = [(\mu k^2 - \rho \omega^2) \underline{\theta}^0 + (\lambda + \mu)(\underline{k} \cdot \underline{\theta}^0) \underline{k}] e^{-i(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{x})}$$

Proposition 2.5.1 *Chercher des solutions de (2.1.7) et (2.1.8) de la forme (2.5.1) est équivalent à résoudre le système de dispersion suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\delta^3}{12} [(\mu k^2 - \rho \omega^2) \underline{\theta}^0 + (\lambda + \mu)(\underline{k} \cdot \underline{\theta}^0) \underline{k}] + \mu \delta (i \underline{k} u_0 + \underline{\theta}^0) = 0 \\ \delta (\mu \|\underline{k}\|^2 - \rho \omega^2) u_0 - \mu \delta i \underline{k} \cdot \underline{\theta}^0 = 0 \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Preuve

La preuve est triviale. Il suffit de remarquer que les symboles des opérateurs $\rho \partial_{tt}^2 - \text{div}(\mu \nabla)$, $\nabla + I$ (I étant l'identité) sont respectivement $(\mu k^2 - \rho \omega^2)$ et $(i \underline{k} + I)$. En utilisant le Lemme 2.5.1 on obtient immédiatement le système (2.5.2). \diamond

Le système (2.5.2) admet donc des solutions $(u_0, \underline{\theta}^0)$ non nulles si et seulement si le couple (ω, k) est solution du problème aux valeurs propres :

$$A(\underline{k}) V = \omega^2 M V \quad \text{où } V = \begin{pmatrix} \underline{\theta}^0 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad \text{et } M = \begin{pmatrix} \frac{\delta^3}{12} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta^3}{12} \rho & 0 \\ 0 & 0 & \delta \rho \end{pmatrix}$$

et $A(\underline{k})$ est la matrice définie par :

$$A(\underline{k}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta^3}{12} [\mu k^2 + (\lambda + \mu) k_1^2] + \mu \delta & \frac{\delta^3}{12} k_1 k_2 (\lambda + \mu) & i k_1 \mu \delta \\ \frac{\delta^3}{12} k_1 k_2 (\lambda + \mu) & \frac{\delta^3}{12} [\mu k^2 + (\lambda + \mu) k_2^2] + \mu \delta & i k_2 \mu \delta \\ -i k_1 \mu \delta & -i k_2 \mu \delta & \mu \delta |\underline{k}|^2 \end{pmatrix} .$$

L'expression des valeurs propres ω en fonction de k constituent les relations de dispersion associées au système (2.5.2).

Proposition 2.5.2 *La matrice $A(\underline{k})$ admet des valeurs propres réelles positives.*

Preuve :

$A(\underline{k})$ est clairement hermitienne et admet donc des valeurs propres réelles. Montrons qu'elle est définie positive. Notons $\underline{\theta}^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0)^T$, $V = (\underline{\theta}^0, u_0)^T$ et calculons $A(\underline{k}) V \cdot V$ (au sens du produit scalaire complexe). On a

$$A(\underline{k}) V = \begin{pmatrix} \frac{\delta^3}{12} [\mu k^2 + (\lambda + \mu) k_1^2 + \mu \delta] \theta_1^0 + \frac{\delta^3}{12} (\lambda + \mu) k_1 k_2 \theta_2^0 + i k_1 \mu \delta u_0 \\ \frac{\delta^3}{12} (\lambda + \mu) k_1 k_2 \theta_1^0 + \frac{\delta^3}{12} [\mu k^2 + (\lambda + \mu) k_2^2 + \mu \delta] \theta_2^0 + i k_2 \mu \delta u_0 \\ -i k_1 \mu \delta \theta_1^0 - i k_2 \mu \delta \theta_2^0 + \mu \delta u_0 k^2 \end{pmatrix} ,$$

et donc

$$\begin{aligned} A(\underline{k}) V \cdot V &= \frac{\delta^3}{12} \mu k^2 [|\theta_1^0|^2 + |\theta_2^0|^2] + \frac{\delta^3}{12} (\lambda + \mu) [k_1^2 |\theta_1^0|^2 + k_1 k_2 \theta_1^0 \bar{\theta}_2^0 + k_1 k_2 \bar{\theta}_1^0 \theta_2^0 + k_2^2 |\theta_2^0|^2] \\ &+ \mu \delta [|u_0|^2 k^2 + i k_1 (u_0 \bar{\theta}_1^0 - \theta_1^0 \bar{u}_0) + i k_2 (u_0 \bar{\theta}_2^0 - \bar{\theta}_2^0 u_0) + |\theta_1^0|^2 + |\theta_2^0|^2] \\ &= \frac{\delta^3}{12} [(\lambda + \mu) (\langle \underline{\theta}^0, \underline{k} \rangle)^2 + \mu k^2 |\underline{\theta}^0|^2] + \mu \delta \left| \underline{\theta}^0 + i \vec{k} u \right|^2 \end{aligned}$$

Donc on a $V^T A(\underline{k}) V > 0$ et donc les valeurs propres de $A(\underline{k})$ sont bien réelles et positives. \diamond

Remarque 2.5.1 *Si nous remplaçons les opérateurs $\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \nabla$ et div par leur symbole dans la partie rigidité de l'énergie (2.1.22) nous retrouvons le résultat du calcul précédent.*

2.5.1 Expression des relations de dispersion

Maintenant que l'on est sûr que le système de dispersion est bien posé, on souhaite calculer les couples (ω, k) solutions du problème aux valeurs propres

$$A(\underline{k}) V = \omega^2 M V .$$

Plutôt que de passer par un fastidieux calcul de déterminant on résout directement le système (2.5.2).

Pour $-\rho \omega^2 + k^2 \mu \neq 0$ (*), la deuxième équation de (2.5.2) donne $u_0 = \frac{\mu i \underline{k} \cdot \underline{\theta}^0}{-\rho \omega^2 + k^2 \mu}$. On injecte cette relation dans la première équation de (2.5.2) et en prenant le produit scalaire de celle-ci par \underline{k} et il vient

$$\left[\frac{\delta^3}{12} (-\rho \omega^2 + k^2 \mu) (-\rho \omega^2 + (\lambda + 2\mu) k^2) \right] \underline{\theta}^0 \cdot \underline{k} - \mu \delta \rho \omega^2 \underline{\theta}^0 \cdot \underline{k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\rho^2 \omega^4 - \rho \omega^2 \left[(\lambda + 3\mu) k^2 + \frac{12\mu}{\delta^2} \right] + k^4 \mu (\lambda + 2\mu) \right] \underline{\theta}^0 \cdot \underline{k} = 0$$

$$(\text{si } \underline{\theta}^0 \not\perp \underline{k}) \Leftrightarrow W^2 - W \left((\lambda + 3\mu) k^2 + \frac{12\mu}{\delta^2} \right) + k^4 \mu (\lambda + 2\mu) = 0, \text{ avec } W = \rho \omega^2$$

On montre que le discriminant de cette équation s'écrit

$$\Delta = \left[k^2 (\lambda + \mu) + \frac{12\mu}{\delta^2} \right]^2 + 4 \times \frac{12\mu}{\delta^2} k^2 \mu$$

Elle admet donc deux racines réelles qui définissent les deux relations de dispersion suivantes :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(\lambda + 3\mu) k^2 + \frac{12\mu}{\delta^2} - \sqrt{\left[k^2 (\lambda + \mu) + \frac{12\mu}{\delta^2} \right]^2 + \frac{48 k^2 \mu^2}{\delta^2}}}{2 \rho}}, \quad (2.5.3)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{(\lambda + 3\mu) k^2 + \frac{12\mu}{\delta^2} + \sqrt{\left[k^2 (\lambda + \mu) + \frac{12\mu}{\delta^2} \right]^2 + \frac{48 k^2 \mu^2}{\delta^2}}}{2 \rho}}. \quad (2.5.4)$$

La troisième relation est donnée par (*). Puisque les ω cherchés sont réels positifs on a :

$$\omega_3 = k \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.5.5)$$

On en déduit alors les vitesses de phases V_i des ondes se propageant dans la plaque définies comme le rapport ω_i/k ($i = \{1, 2, 3\}$) sont :

$$V_1 = \frac{1}{k \delta} \sqrt{\frac{(\lambda + 3\mu)(k \delta)^2 + 12\mu - \sqrt{\left[(k \delta)^2 (\lambda + \mu) + 12\mu \right]^2 + 48 \mu^2 (k \delta)^2}}{2\rho}} \quad (2.5.6)$$

$$V_2 = \frac{1}{k \delta} \sqrt{\frac{(\lambda + 3\mu)(k \delta)^2 + 12\mu + \sqrt{\left[(k \delta)^2 (\lambda + \mu) + 12\mu \right]^2 + 48 \mu^2 (k \delta)^2}}{2\rho}} \quad (2.5.7)$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.5.8)$$

2.5.2 Propriétés du modèle

Les relations (2.5.6)-(2.5.7) montrent que le modèle de Reissner-Mindlin est dispersif puisque les vitesses de phase V_1 et V_2 dépendent de la fréquence. De plus, on montre facilement que lorsque k ou δ deviennent grands, la dispersion diminue et les vitesses V_1 et V_2 ont tendance à devenir constantes. Les figures 2.5 illustrent les vitesses de phases V_1 et V_2 et les vitesses de groupe $\partial V_i / \partial k$ des ondes se propageant dans une plaque en aluminium pour laquelle

$$\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}, \quad E = 7.4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \quad \nu = 0.34,$$

et ce, pour différentes épaisseurs. Si l'on définit la longueur d'onde comme étant le ratio V/f où V est la plus petite vitesse de phase et f la fréquence du problème, le cas où la quantité $k \delta$ (qui détermine entièrement les vitesses de phase) est grande, c'est à dire soit le cas des cas hautes fréquences, soit le cas où l'épaisseur n'est plus un "petit paramètre", correspond au cas où la plaque contient plusieurs longueurs d'ondes dans l'épaisseur. Le comportement de la plaque doit alors être modélisé via un vrai modèle 3D et le modèle asymptotique n'est alors plus pertinent. Du reste, bien que les vitesses de phases deviennent constantes comme dans le cas du modèle de l'élasticité 3D, elles convergent vers les vitesses $\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ et $\sqrt{\mu/\rho}$ qui ne sont pas les vitesses du modèle 3D puisque λ et μ sont définis par 2.1.10 et non comme les coefficients de Lamé qui apparaissent dans 2.1.2. Un moyen pertinent pour appréhender le domaine de validité du modèle serait de comparer les relations de dispersion du modèle 3D et du modèle de Reissner-Mindlin et d'estimer leur différence en fonction du paramètre $k \delta$.

2.5.3 Longueur d'onde et critère de maillage

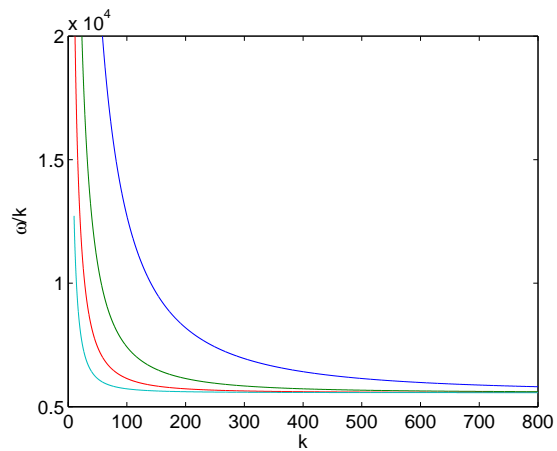
Les calculs précédents montrent qu'il convient de considérer trois longueurs d'ondes distinctes pour notre modèle à savoir

$$\lambda_i = \frac{V_i}{f}, \quad i = \{1, 2, 3\} \quad \text{avec} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

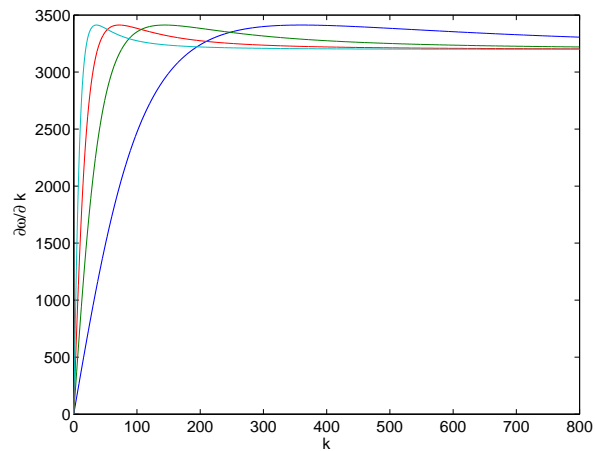
Pour une fréquence f donnée (et donc ω connue), on inverse (numériquement) les relations (2.5.3) et (2.5.4) de sorte à obtenir deux nombres d'onde k_1^2, k_2^2 . A l'aide de (2.5.6) et (2.5.7) on en déduit les deux vitesses de phases V_1, V_2 . On peut alors définir la plus petite longueur d'onde du problème comme étant

$$\lambda = \min_{i=\{1,2,3\}} \frac{V_i}{f}$$

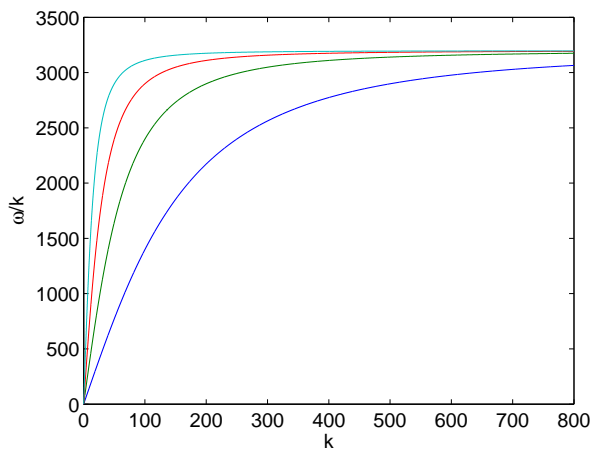
et ainsi se donner un pas de maillage de la forme λ/N où N est le nombre de points que l'on souhaite mettre par longueur d'onde.



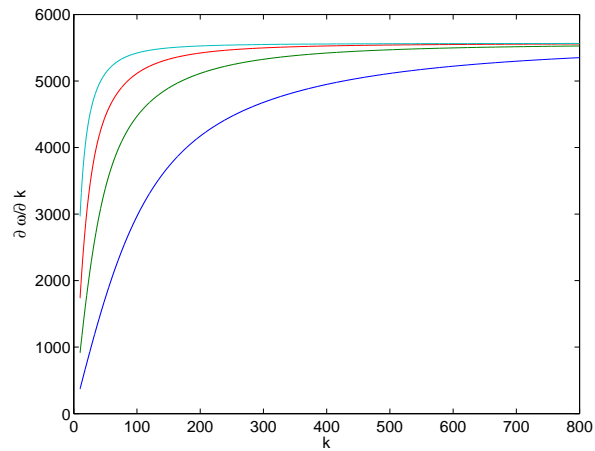
(a) Vitesse de phase V_1



(b) Vitesse de groupe associée



(c) Vitesse de phase V_2



(d) Vitesse de groupe associée

FIG. 2.5: Vitesses de phase V_1 et V_2 et vitesses de groupe associées

2.6 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section plusieurs résultats numériques validant et mettant en évidence la performance de la méthode employée (notamment l'utilisation d'une approximation d'ordre élevé en espace). Les simulations numériques auront en commun :

- La source de chargement localisée : $f(t, x) = f_1(t)f_2(x)$ où f_1 est une fonction de type Ricker de fréquence centrale f_0 (cf. Fig 2.6.a) et f_2 une gaussienne à support compact en espace centrée en $(0,0)$ de rayon r (cf. Fig 2.6.b) :

$$f_1(t) = -2\pi^2 f_0^2 (2\pi^2 (f_0 t - 1) e^{-\pi^2 (f_0 t - 1)^2}) , \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{-\pi^2 |x|^2}{r^2} e^{-\frac{\pi^2 |x|^2}{r^2}} & \text{si } |x| < r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

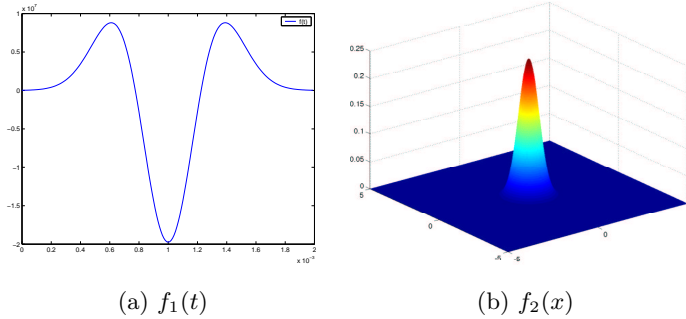


FIG. 2.6: La source

- Les dimensions et la géométrie de la plaque : $\Sigma = [-5, 5] \times [-5, 5]$.
- Les conditions aux limites : La plaque est totalement encastree, .i.e $\gamma = \partial\Sigma$.

Nous proposerons dans l'ordre :

1. Une validation de la méthode par des comparaisons avec un autre code de calcul.
2. Une étude numérique de performance.
3. Une simulation numérique sur une plaque hétérogène.

Pour la validation et l'étude de performance, nous supposerons que la plaque est en aluminium. Les constantes physiques pour ce type de matériau sont alors

$$\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}, \quad E = 7.4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, \quad \nu = 0.34 .$$

Pour ces deux sections, les maillages utilisés seront cartésiens.

2.6.1 Validation de la méthode

A notre connaissance, il n'existe pas de solution analytique pour le modèle de Reissner-Mindlin instationnaire. Pour valider notre méthode nous allons utiliser le fait que le modèle (2.1.7)-(2.1.9) est asymptotique à celui de l'élasticité linéaire 3D. Plus précisément nous souhaitons retrouver numériquement la relation (2.1.6) qui est vrai lorsque l'épaisseur δ est petite devant les autres dimensions. Pour $\delta = 1.4$, $\delta = 0.5$ et $\delta = 0.1$, nous allons calculer:

- \underline{U} : La solution 3D du système de l'élastodynamique linéaire (P_{3D}) à l'aide d'un code développé par [Fauqueux, 2003].
- $(u, \underline{\theta})$: La solution 2D de notre modèle de Reissner-Mindlin (2.1.7)-(2.1.9).

Pour ces expériences de validation nous avons utilisé des éléments Q^5 et des paramètres de discrétisation ($h, \Delta t$) suffisamment petits pour que les solutions puissent être considérées comme parfaitement convergées. Afin de mettre en évidence la relation (2.1.6) nous comparons les champs u et U_3 .

Les instantanés de la figure Fig.2.7 obtenus pour $\delta = 0.1$ (soit 1cm d'épaisseur pour une plaque d'un mètre de coté) montrent que les deux champs calculées pour cette épaisseur semblent représenter deux phénomènes physiques très proches.

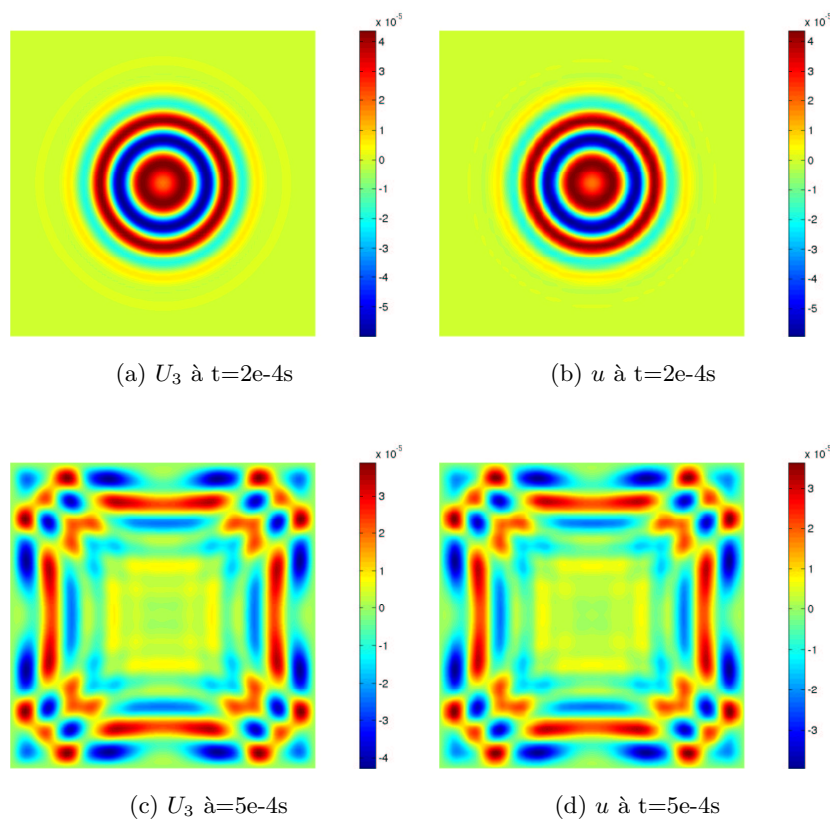
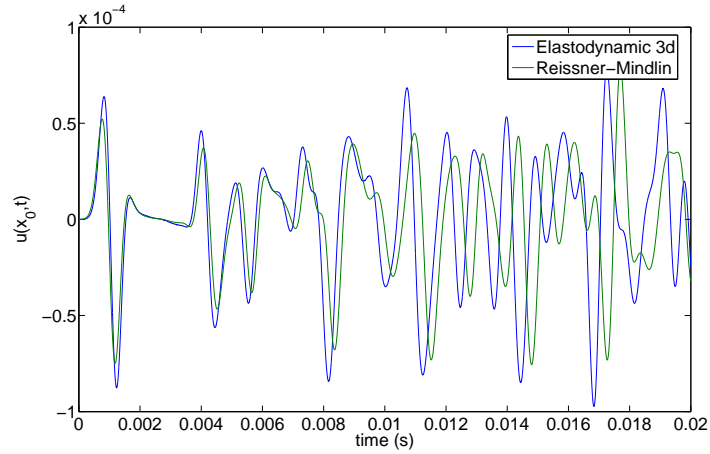
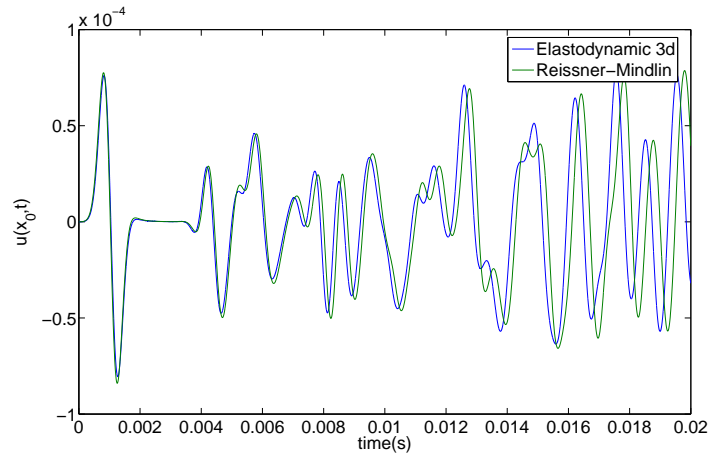
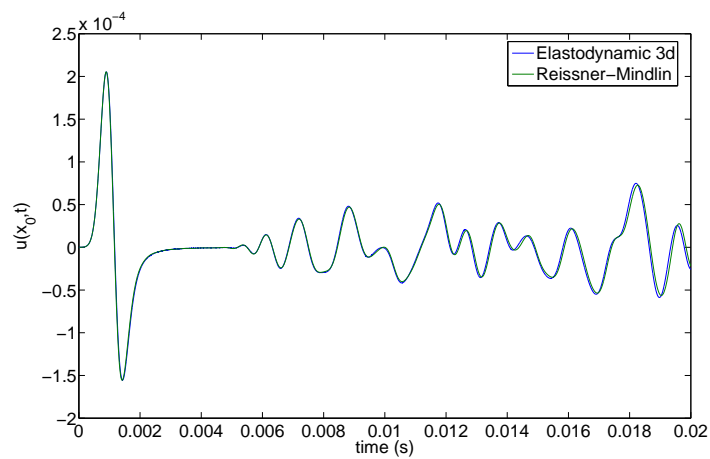


FIG. 2.7: Instantanés de u et U_3 .

(a) Comparaison pour $\delta = 1.4$ (b) Comparaison pour $\delta = 0.5$ (c) Comparaison pour $\delta = 0.1$ FIG. 2.8: Les solutions $U_3(x_0, t)$ et $u(x_0, t)$.

Le phénomène de superposition de U_3 et u qui s'opère lorsque l'épaisseur diminue est plus visible sur les courbes représentant les solutions en un point au cours du temps. Notons $x_0 = (0, 0)$. La figure Fig.2.8 représente $U_3(x_0, t)$ et $u(x_0, t)$. On remarque que le déphasage des courbes et les différences d'amplitudes visibles pour $\delta = 1.4$ s'atténuent lorsque δ diminue jusqu'à devenir négligeables pour $\delta = 0.1$ validant ainsi notre méthode et notre code de calcul. Ici toutes nos simulations numériques sont réalisées en 2D et sur maillage régulier et nous avons utilisé des formule de Gauss-Lobatto pour calculer la matrice de rigidité.

2.6.2 Influence de l'ordre de la méthode sur le temps CPU et la précision

Dans cette section $\delta = 0.1$. On calcule une solution de référence parfaitement convergée u_{ref} à l'aide d'éléments Q^7 sur un maillage très fin (2500 éléments). Dans cette section, nous montrons l'intérêt de notre schéma en termes de précision et de temps de calcul. Notons h_r et N_r^{ddl} le pas de maillage et le nombre de degrés de liberté nécessaires pour obtenir une solution qui satisfait un critère de précision donné. Par exemple

$$e_h < 5\%$$

où e_h est une mesure pertinente de la différence entre u_{ref} et u_h . Pour satisfaire un tel critère, l'utilisation d'une approximation d'ordre $r' > r$ permet évidemment de choisir $h_{r'} > h_r$. Cependant la vraie question est de savoir si on a $N_{r'}^{ddl} > N_r^{ddl}$. En effet si malgré un maillage moins fin l'approximation d'ordre r' requiert autant de degrés de liberté que l'approximation d'ordre r pour obtenir une précision identique, alors le gain en terme de performance est alors à peu près nul. L'approximation et les formules de quadratures utilisés ont pour but d'obtenir une convergence spectrale c'est à dire que l'augmentation de l'ordre d'approximation diminue non proportionnellement le nombre de degrés de liberté requis pour satisfaire un critère de précision donné :

$$r' > r \Rightarrow N_{r'}^{ddl} < N_r^{ddl} .$$

Le tableau ci-dessous montre le nombre de degrés de liberté et le temps CPU nécessaires pour calculer les solutions $u_h^r(x, t)$, $(x, t) \in \Sigma \times [0, 0.02]$ qui satisfont le critère de précision

$$e_h = \frac{\|u_h(x_0, t) - u_{ref}(x_0, t)\|_{\mu[0,T]}}{\|u_{ref}(x_0, t)\|_{L^2[0,T]}} \simeq 5\% \quad (2.6.1)$$

pour des approximations d'ordres $r = 2$ à $r = 7$. Pour chaque ordre on a pris le Δt optimal à savoir le plus grand pas temps autorisé par la condition de stabilité du schéma saute mouton.

Ordre	Éléments	Nb ddl	Δt	Temps CPU (s)	$e_h(\%)$
2	10000	40401	0.604e-5	556	5.2
3	1296	11881	0.882e-5	84	5.4
4	484	7921	0.908e-5	49	4.8
5	196	5041	0.961e-5	26	4.9
6	100	3721	0.971e-5	18	5.1
7	64	3249	0.93e-5	16	5

Ce tableau illustre clairement l'intérêt d'utiliser une approximation d'ordre élevé. L'utilisation d'éléments Q^7 divise par 3 le temps de calcul comparé aux éléments Q^4 et par 35 comparé aux éléments Q^2 . D'un point de vue stockage mémoire et complexité, l'utilisation d'éléments Q^7 divise par 2.5 le nombre de degrés de liberté comparé aux éléments Q^4 et par 12.5 comparé aux éléments Q^2 . Enfin, il est connu que le l'utilisation d'ordre élevé tend à diminuer la CFL et donc à pénaliser à priori le pas de temps. Cependant le maillage peut être choisi moins fin lorsque l'on monte en ordre. On observe alors que le pas de temps optimal reste sensiblement le même au moins pour les ordres $r = 4$ à $r = 7$. Ces résultats et interprétations sont illustrés sur la figure 2.9.

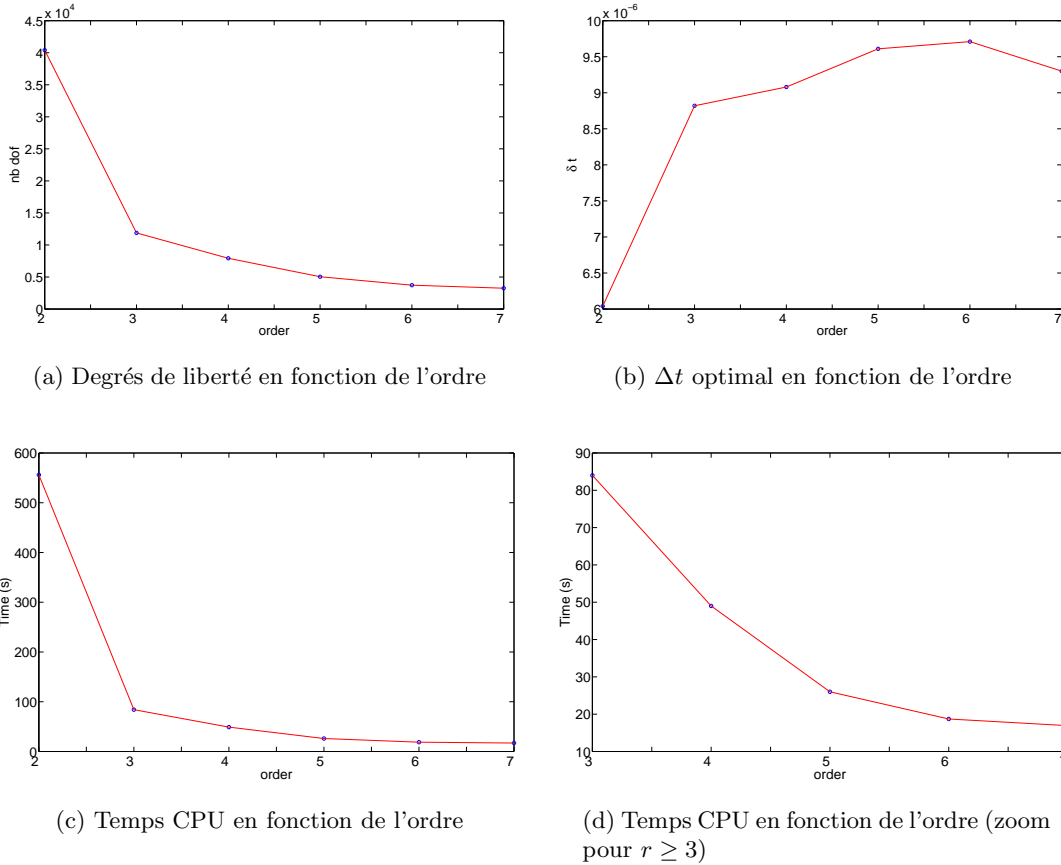
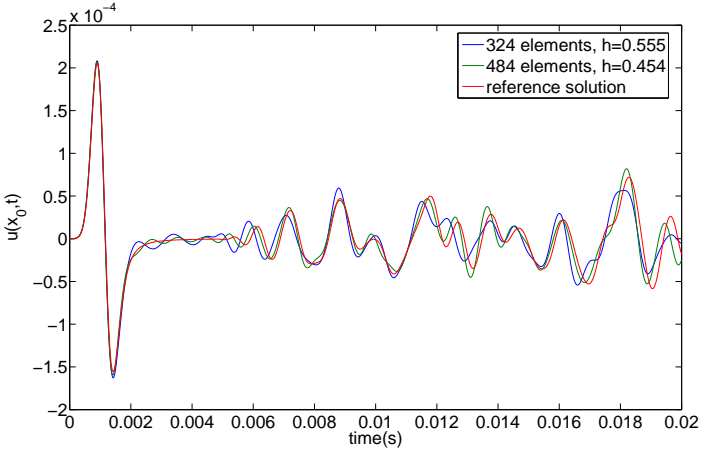
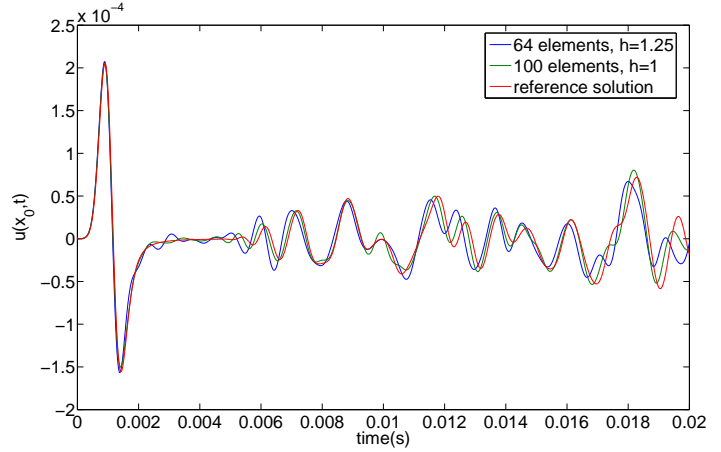


FIG. 2.9: Influence de l'ordre sur la performance de la méthode

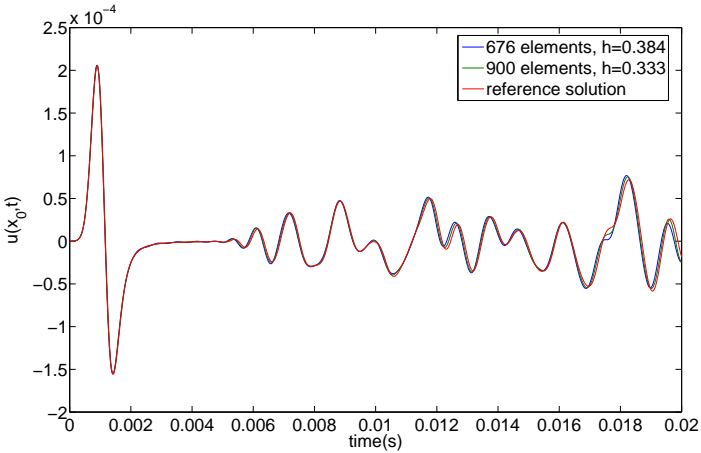
Afin d'illustrer la convergence en maillage de notre méthode, nous proposons via la figure 2.10 des courbes représentant $u(x_0, t)$ pour différents pas de maillage aux ordres $r = 3$ et $r = 5$.



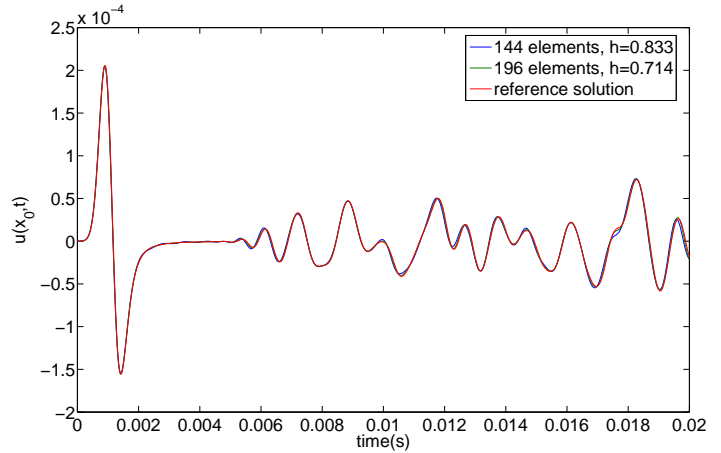
(a) Convergence sur maillage grossier pour $r = 3$.



(b) Convergence sur maillage grossier pour $r = 5$.



(c) Convergence sur maillage fin pour $r = 3$.

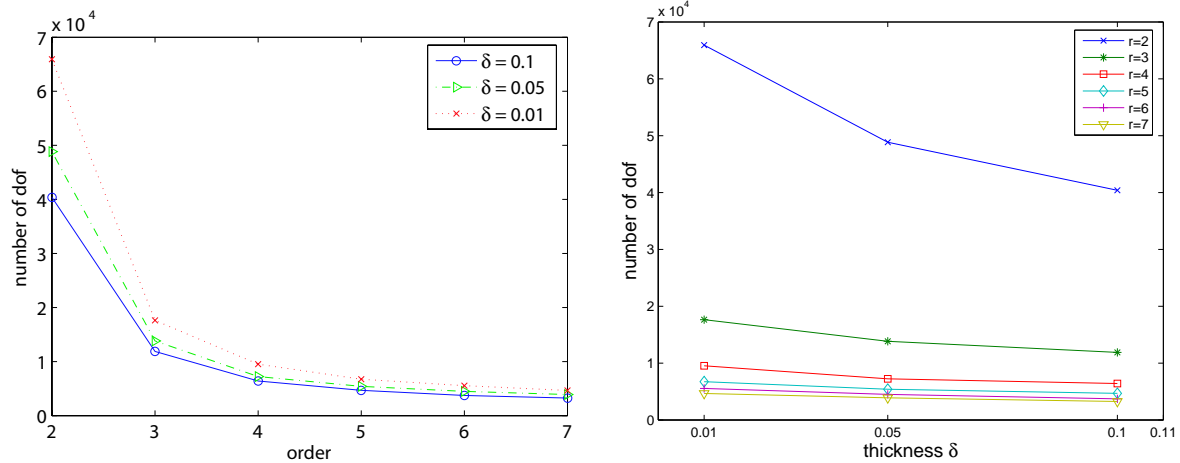


(d) Convergence sur maillage fin pour $r = 5$.

FIG. 2.10: Convergence en maillage .

Une remarque concernant l'influence de l'épaisseur sur l'approximation par éléments finis On peut remarquer le mauvais comportement des ordres 2 et 3 en terme de degrés de liberté requis pour satisfaire (2.6.1) pénalisant ainsi la performance de la méthode. Précisons que nous n'avons jamais réussi à atteindre le critère (2.6.1) à l'aide d'éléments Q^1 . Ceci est probablement un phénomène de verrouillage numérique : Le "petit paramètre" δ pénalise l'approximation par élément finis [Havu et Pitkäranta, 2001]. Ce phénomène est particulièrement sensible pour des approximations d'ordres peu élevés. Beaucoup de travaux et d'ouvrages traitent de ce sujet. A propos des problèmes de verrouillage pour les modèles de plaque et coque, le lecteur trouvera une analyse exhaustive du problème et de ses solutions dans [Chapelle et Bathe, 2003] et [Chapelle et Stenberg, 1998]. La figure 2.11 montre, pour différentes valeurs de δ , le nombre de degrés de liberté

(en un sens le pas d'espace) requis pour satisfaire (2.6.1). On peut voir que lorsque $\delta \rightarrow 0$ le nombre de degré de liberté augmente considérablement pour les ordres 2 et 3 tandis que ce n'est plus vrai à partir de l'ordre 4. Notre observation est qu'un moyen simple et efficace de diminuer de façon significative les phénomènes de verrouillage est d'utiliser une approximation d'ordre assez élevé bien qu'en aucun cas nous ne prétendons avoir proposé une méthode non verrouillante.

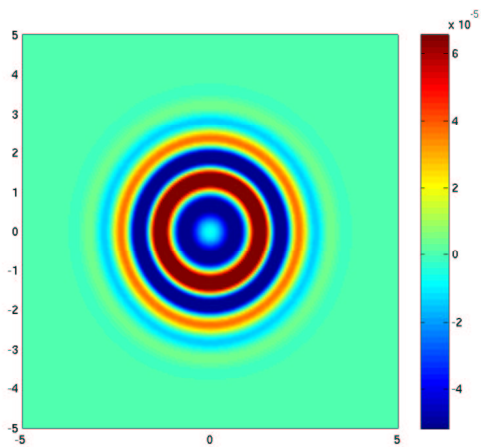


(a) ddl requis en fonction de l'ordre pour chaque épaisseur

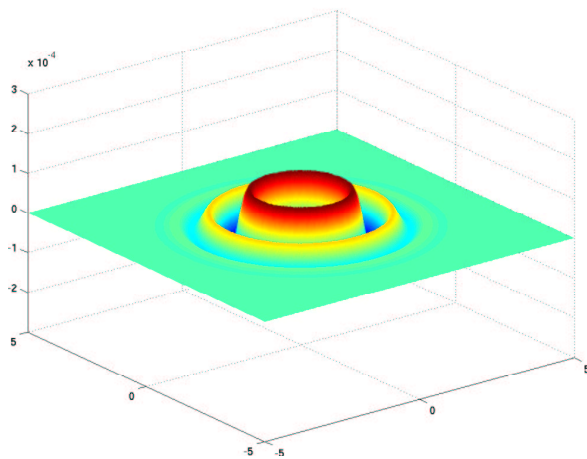
(b) ddl requis en fonction de l'épaisseur pour chaque ordre

FIG. 2.11: Verrouillage numérique pour les ordres bas.

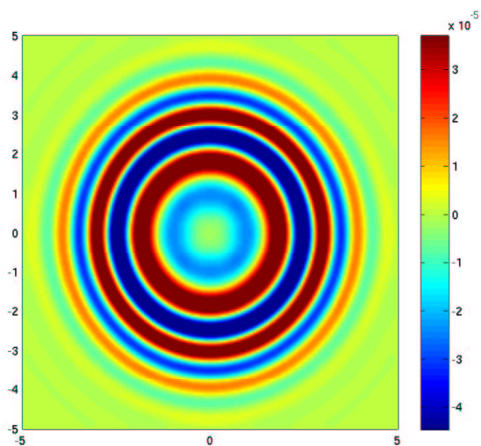
Illustration du phénomène physique : La figure 2.12 illustre le phénomène de propagation d'onde dans une structure mince. Puisque la source est centrée et que le milieu est homogène, le phénomène physique est relativement simple. On peut voir la propagation des ondes au cours du temps, puis une réflexion symétrique sur les quatre bords de la plaque. Cependant, la prise compte du cisaillement transverse dans le modèle (via le terme $\nabla u + \underline{\underline{q}}$) rend les ondes dispersives ce que l'on voit assez bien à travers la multiplication des fronts d'ondes au cours du temps.



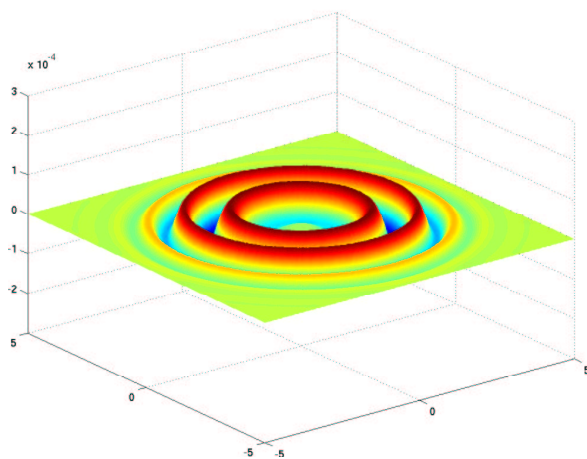
(a) Instantané à $t=0.0002\text{s}$



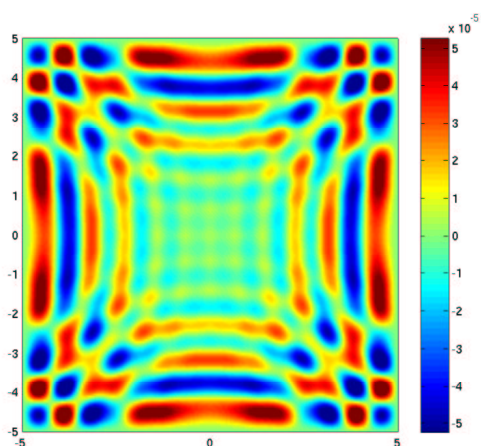
(b) Vue 3D correspondante



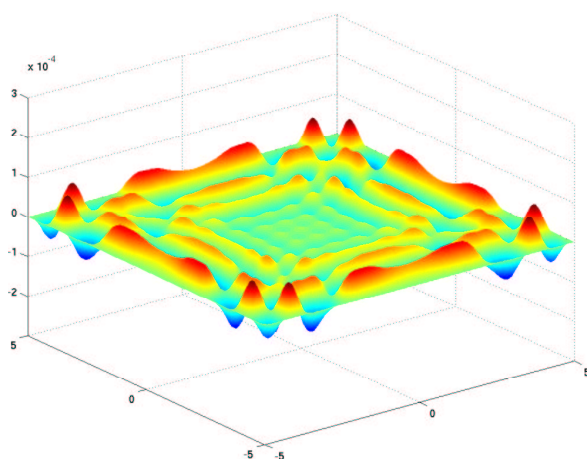
(c) Instantané à $t=0.000264$



(d) Vue 3D correspondante



(e) Instantané à $t=0.00048$



(f) Vue 3D correspondante

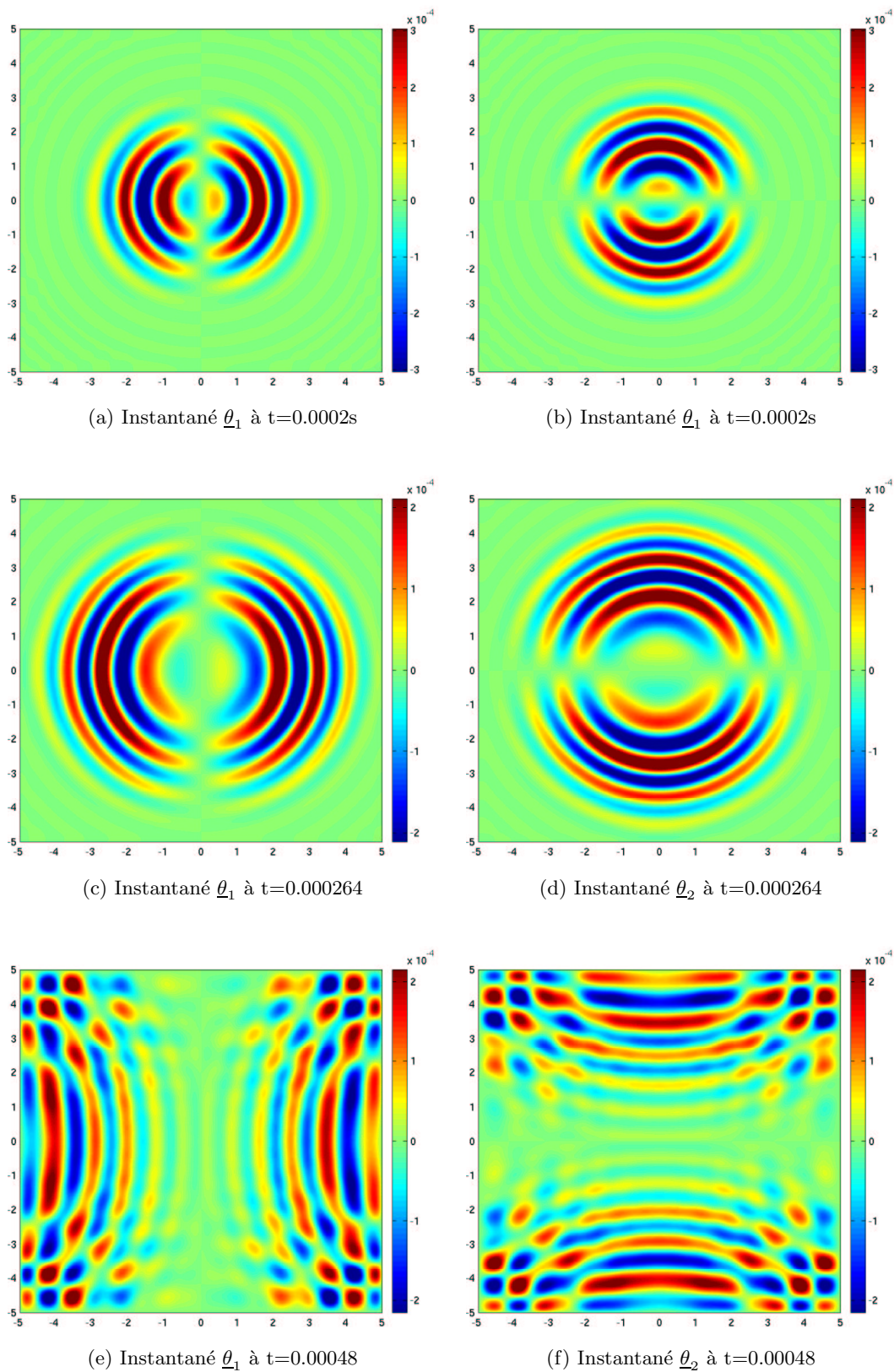


FIG. 2.13: Instantanés des rotations.

2.6.3 Propagation d'ondes dans une plaque hétérogène

Dans cette section nous proposons quelques résultats numériques issus d'une simulation sur une plaque hétérogène $\Sigma = [-10; 10] \times [-10; 10]$. La source f est décentrée au point $x_1 = (1.5, 0)$. La plaque est constituée de trois milieux (cf fig 2.14).

- Milieu 1 : Plexiglass $\Rightarrow \rho = 1800kg.m^{-3}$, $E = 2.9 \cdot 10^9 Pa$, $\nu = 0.4$.
- Milieu 2 : Aluminium $\Rightarrow \rho = 2700kg.m^{-3}$, $E = 7.4 \cdot 10^{10} Pa$, $\nu = 0.34$.
- Milieu 3 : Acier $\Rightarrow \rho = 7800kg.m^{-3}$, $E = 21 \cdot 10^{10} Pa$, $\nu = 0.22$.

On peut déduire des relations de dispersion que les vitesses minima des ondes se propageant dans chaque milieu sont respectivement

$$V_{min}^{Plex} = 740m.s^{-1}, V_{min}^{Alu} = 3097m.s^{-1}, V_{min}^{Acier} = 3205m.s^{-1}. \quad (2.6.2)$$

Par conséquent nous devons utiliser un maillage adapté à ce cas, c'est dire beaucoup plus raffiné dans le milieu 1 que dans les milieux 2 et 3. La plupart des maillages disponibles proposent des maillages triangulaires de meilleures qualités que les maillages quadrangulaires. En 3D il n'existe, à notre connaissance, que très peu de maillages hexaédriques. Nous construirons donc un maillage quadrangulaire à partir d'un maillage triangulaire en découpant chaque triangle en 3 quadrangles (cf. Fig. 2.14). Ce procédé a été utilisé avec succès et efficacité en 3D [Duruffe, 2006], [Pernet, 2005]. Les paramètres de discrétisation sont alors :

- 3198 éléments $Q^5 \Rightarrow 80291$ degrés de liberté.
- $\Delta t = 5 \cdot 10^{-7}$.

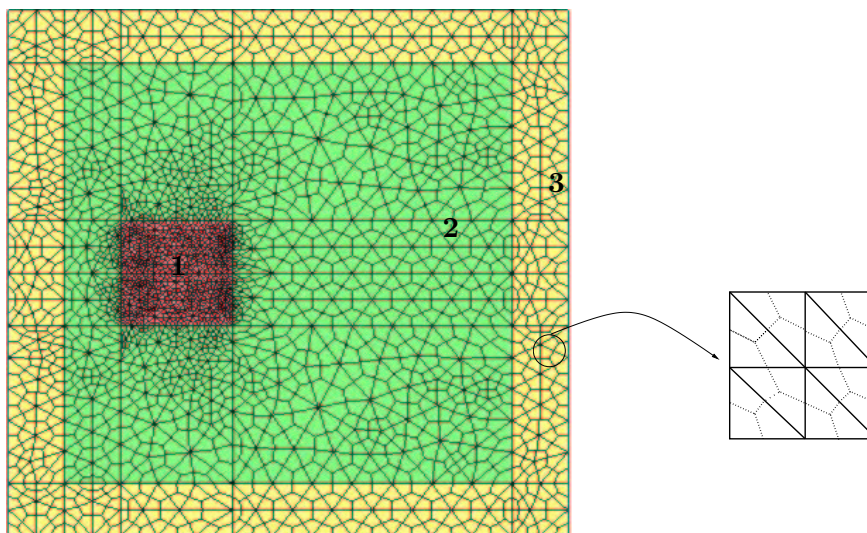
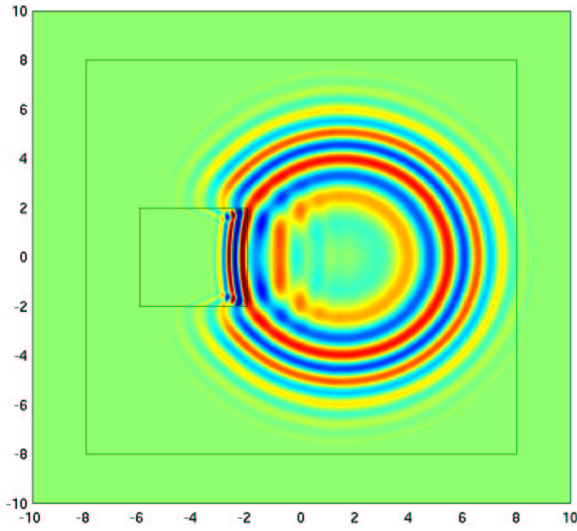
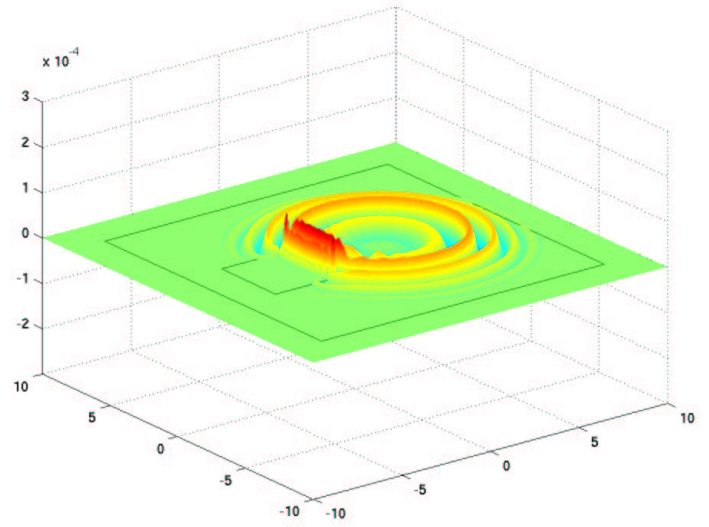
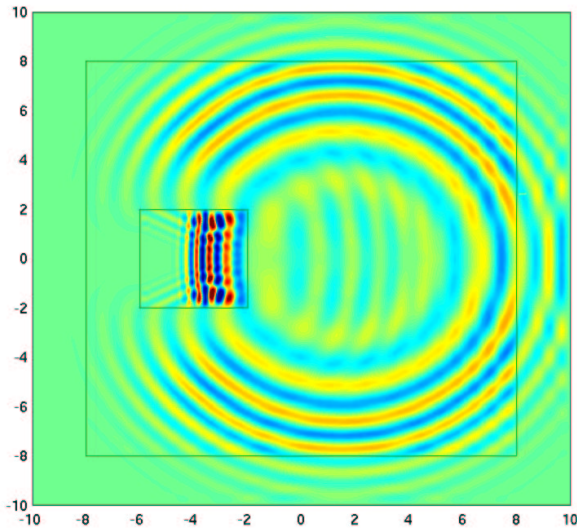
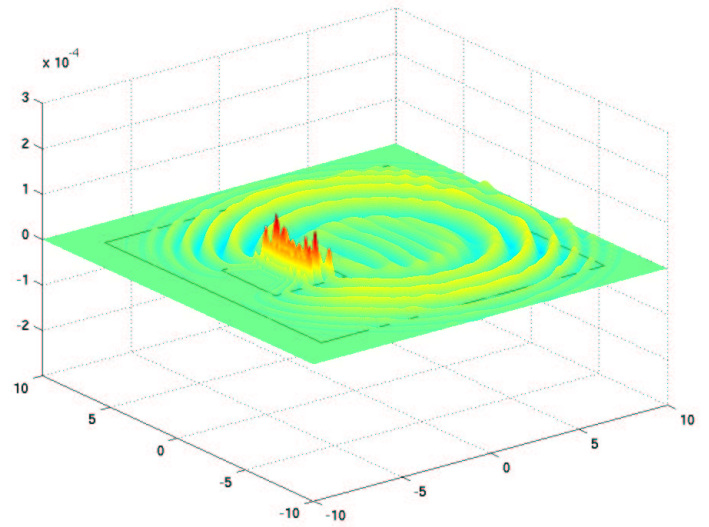


FIG. 2.14: Maillage quadrangulaire adapté pour une plaque hétérogène.

(a) Instantané à $t=0.00375s$ 

(b) Vue 3D correspondante

(c) Instantané à $t=0.0055s$ 

(d) Vue 3D correspondante

FIG. 2.15: Propagation d'ondes dans une plaque hétérogène.

La figure 2.15 illustre la propagation des ondes dans la plaque hétérogène. Ici le phénomène est sensiblement plus complexe et met clairement en évidence les propriétés physiques de chaque milieu. En effet, on peut voir sur les figures 2.15 a) et 2.15 b) le ralentissement

et les réflexions des ondes qui arrivent dans le milieu 1 ce qui est cohérent avec (2.6.2). Ce phénomène n'est quasiment pas visible au moment du passage des ondes du milieu 2 au milieu 3 puisque les vitesses de propagation dans l'acier et dans l'aluminium sont sensiblement identiques. Au niveau des amplitudes, on note (cf. Fig. 2.15 c) et Fig. 2.15 d)) une augmentation du déplacement en flexion dans le milieu 1 et une atténuation dans le milieu 3. Là encore, ce phénomène est cohérent avec les caractéristiques physiques de la plaque. En effet, la rigidité d'un matériau est directement proportionnelle au module de Young de celui-ci. Pour mieux observer localement le phénomène de réflexion-transmission à l'interface entre 2 milieux, on propose, via la figure 2.16, un zoom de la figure 2.15 a) autour du milieu 1, sur laquelle on peut notamment observer des sortes "d'ondes de raccordement" entre les milieux que l'on appelle "ondes de tête".

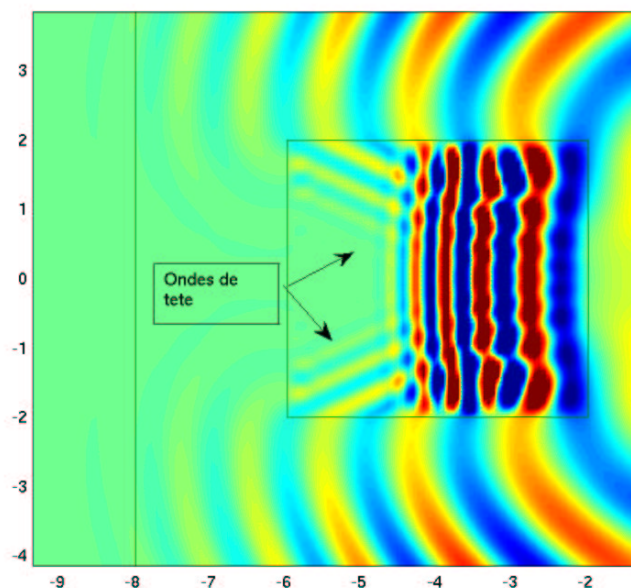


FIG. 2.16: Phénomène de réflexion-transmission à l'interface entre 2 milieux

Chapitre 3

Couplage éléments finis spectraux 2D-3D pour la vibroacoustique instationnaire

Dans ce chapitre, après avoir défini les équations de la vibroacoustique instationnaire, nous proposerons une méthode numérique alternative à la méthode des domaines fictifs développées pour les problèmes de couplage fluide-structure dans [Bécache *et al.*, 2005] et [Joly et Rhaouti, 1999]. Cette méthode, non conforme, consistera à coupler des éléments finis spectraux 2D et 3D d'ordres différents en utilisant un maillage conforme.

Contenu

3.1	Les équations de la vibroacoustique instationnaire	109
3.1.1	Notations et configuration du problème	109
3.1.2	Les équations de la vibroacoustique instationnaire	110
3.2	Caractère bien posé du problème	112
3.2.1	Estimation d'énergie et solution faible	112
3.2.2	Existence et unicité d'une solution forte	114
3.3	Une méthode numérique non conforme sur maillage conforme	115
3.3.1	Présentation de la méthode	115
3.3.2	Le schéma élément fini	117
3.3.2.1	Analyse du schéma	118
3.3.3	Discrétisation en temps	122
3.3.3.1	Le schéma éléments finis en espace différences finies en temps	122
3.3.3.2	Formulation matricielle et complément de Schur	123
3.3.3.3	Etude de stabilité	124
3.4	Résultats numériques	127
3.4.1	Validation de la méthode	127
3.4.2	Etude numérique de convergence et de performance	128
3.4.2.1	Convergence et précision	128
3.4.2.2	Potentiel de la méthode : Un gros cas de calcul.	129

3.1 Les équations de la vibroacoustique instationnaire

La vibroacoustique est le domaine de la physique qui s'intéresse au son émis par les vibrations d'une structure mince. Sous l'hypothèse de petites déformations, la modélisation standard consiste à coupler l'équation des ondes acoustiques avec un modèle de structure mince de type membrane, plaque et, plus généralement, coque. Dans ce chapitre nous nous limiterons au cas des plaques, l'intérêt et l'originalité de ce travail étant de proposer une méthode numérique performante et stable pour traiter le caractère couplé du problème, indépendamment du modèle mécanique.

3.1.1 Notations et configuration du problème

Dans ce qui suit, on notera $\mathbf{x} = (x, x_3)$, avec $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $x_3 \in \mathbb{R}$ les coordonnées d'un point de \mathbb{R}^3 dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) . Pour alléger les notations, x désignera également le point $(x, 0)$ de \mathbb{R}^3 . On considère alors les (petites) vibrations d'une plaque Σ située dans le plan $x_3 = 0$ (qui peut donc être identifiée à un ouvert borné de \mathbb{R}^2). La plaque est supposée encadrée en ses bords et couplée à un fluide homogène (typiquement de l'air) qui occupe le domaine extérieur $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$. Par la suite, (en particulier pour définir les traces d'une fonction définie en espace sur Ω), il sera utile de distinguer les deux faces de Σ à savoir

$$\Sigma^+ = \partial\Omega^+ \cap \Sigma \quad \text{et} \quad \Sigma^- = \partial\Omega^- \cap \Sigma$$

où l'on a posé

$$\Omega^\pm = \{\mathbf{x} = (x, x_3) \in \Omega / \pm x_3 > 0\} \quad (\text{cf Fig. 3.1}).$$

On définit enfin l'orientation de Σ grâce au vecteur unitaire normal $n = e_3$. Pour toute fonction $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, suffisamment régulière (typiquement $H^1(\Omega)$), on notera $[g]$ le saut de g sur Σ , défini par :

$$[g] = g|_{\Sigma_-} - g|_{\Sigma_+} \quad (\in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \quad \text{si} \quad g \in H^1(\Omega)).$$

Les inconnues principales de notre modèle mathématique seront :

- Le champ de distribution de la pression dans le fluide :

$$p(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0,$$

solution de l'équation des ondes acoustiques.

- La vitesse transverse issue du déplacement en flexion de la plaque :

$$v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad x \in \Sigma, \quad t > 0,$$

solution du modèle de plaque de Reissner-Mindlin.

Remarque 3.1.1 *On aurait naturellement envie de considérer comme inconnues principales le champ de pression et le déplacement en flexion (à la place de la vitesse transverse). Notre choix d'inconnues principales est motivé par la condition de couplage entre l'inconnue fluide et l'inconnue structure. Comme nous le verrons, cette condition conduit à un système bien posé et conservatif lorsqu'elle formulée avec la vitesse transverse ce qui n'est pas le cas lorsqu'elle est formulée avec le déplacement en flexion. Un des principaux objectifs de ce chapitre (et des suivants) est de proposer un schéma garanti stable pour le problème couplé. Il est alors fondamental, pour pouvoir démontrer un résultat de stabilité à l'aide de techniques énergétiques, de discrétiser un problème continu conservatif.*

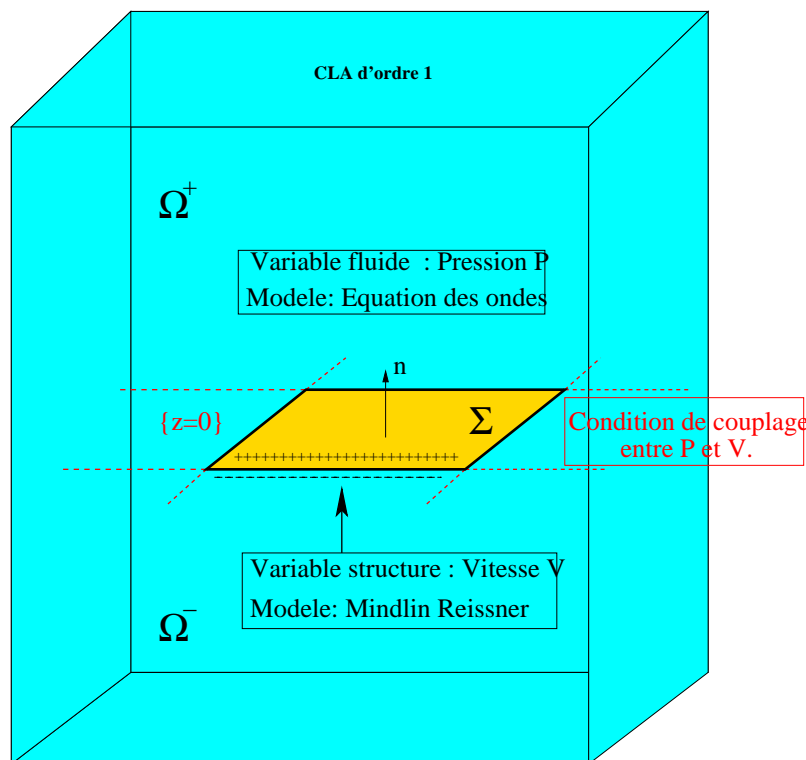


FIG. 3.1: Configuration du problème

Pour différencier les opérateurs bi et tri-dimensionnels nous noterons Δ le Laplacien 2D et $\mathbf{\Delta} = \Delta + \partial^2/\partial x_3^2$ le Laplacien 3D. De la même façon on notera respectivement $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})^T$ et $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})^T$ les opérateurs gradients 2D et 3D .

3.1.2 Les équations de la vibroacoustique instationnaire

D'après la description précédente, si l'on considère le problème sans couplage alors le champ de pression p est solution de l'équation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \mathbf{\Delta} p = 0, \text{ dans } \Omega \times [0, T]$$

où c est la célérité du milieu fluide. De la même façon, si on dérive en temps les équations (2.1.7) et (2.1.8) alors en introduisant $\underline{\kappa} = \dot{\underline{\theta}}$, la vitesse transverse v est solution des équations

$$\rho \frac{\delta^3}{12} \frac{\partial^2 \underline{\kappa}}{\partial t^2} - \frac{\delta^3}{12} \underline{\text{Div}} (\underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\kappa})) + \delta G (\nabla v + \underline{\kappa}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T] , \quad (3.1.1)$$

$$\rho \delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \delta \text{div}(G (\nabla v + \underline{\kappa})) = f \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T] . \quad (3.1.2)$$

Il reste maintenant à établir la condition de couplage fluide-structure entre v et p . Cette condition traduit l'hypothèse selon laquelle la composante normale (sur la plaque) de la vitesse acoustique \underline{V}_a est égale à la vitesse mécanique v [Lesueur, 1988] [Morand et Ohayon, 1992] :

$$\underline{V}_a \cdot n = v \quad \text{dans } \Sigma \times [0, T] . \quad (3.1.3)$$

Pour en déduire une condition de couplage en fonction des inconnues p et v , on utilise le fait que \underline{V}_a est relié à p via l'équation de conservation de la quantité de mouvement (ρ_f étant la densité du fluide)

$$\rho_f \frac{\partial \underline{V}_a}{\partial t} + \nabla p = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] ,$$

de laquelle on tire

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \frac{\partial \underline{V}_a \cdot n}{\partial t} \quad \text{dans } \Sigma \times [0, T] .$$

En dérivant alors (3.1.3) par rapport à t et en utilisant la relation précédente, on obtient la condition de couplage

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{dans } \Sigma \times [0, T] .$$

A ce stade, en ajoutant les conditions initiales et les conditions d'encastrement appropriées nous avons construit un système vibroacoustique instationnaire régi par le système d'EDP

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] , \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T] , \quad (3.1.5)$$

$$\rho \frac{\delta^3}{12} \frac{\partial^2 \underline{\kappa}}{\partial t^2} - \frac{\delta^3}{12} \underline{\text{Div}} (\underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\kappa})) + \delta G (\nabla v + \underline{\kappa}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T] , \quad (3.1.6)$$

$$\rho \delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \delta \text{div}(G (\nabla v + \underline{\kappa})) = f \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T] . \quad (3.1.7)$$

Ce système est dit faiblement couplé dans le sens où le calcul de p nécessite la connaissance de v (via l'équation 3.1.5) tandis que v peut être calculé indépendamment de p en résolvant "simplement" le système de Reissner-Mindlin (3.1.6)-(3.1.7). En pratique, pour résoudre un problème vibroacoustique faiblement couplé, on résout donc, dans un premier temps, le problème de mécanique des solides (3.1.6)-(3.1.7). Le résultat servira comme donnée au bord de type Neumann pour le problème extérieur (3.1.4)-(3.1.5). Physiquement, ce type de système laisse supposer (ce qui est inexact), que la modification du champ de pression au voisinage de la plaque n'a pas d'incidence sur les vibrations de celle-ci. Pour prendre en compte l'effet de la variation du champ de pression sur les déplacements de la plaque il faut rajouter comme terme source dans (3.1.7) la quantité $[\frac{\partial p}{\partial t}]$ [Lesueur, 1988]. Au final, nous considérerons le système vibroacoustique instationnaire en vitesse/pression :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.1.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T], \quad (3.1.9)$$

$$\rho \frac{\delta^3}{12} \frac{\partial^2 \underline{\kappa}}{\partial t^2} - \frac{\delta^3}{12} \text{Div}(\underline{C} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\kappa})) + \delta G(\nabla v + \underline{\kappa}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T], \quad (3.1.10)$$

$$\rho \delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \delta \text{div}[G(\nabla v + \underline{\kappa})] = f + [\frac{\partial p}{\partial t}] \quad \text{sur } \Sigma \times [0, T], \quad (3.1.11)$$

que l'on complète par les conditions d'encastrement

$$u(x, t) = \underline{\kappa}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Sigma,$$

et par les conditions initiales

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}, 0) = \dot{p}(\mathbf{x}, 0) = 0 & , \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = \underline{\kappa}(x, 0) = \dot{\underline{\kappa}}(x, 0) = 0 & , \quad x \in \Sigma \end{cases}$$

Pour résoudre numériquement ce système, on ramènera le domaine Ω à un domaine borné à l'aide d'une condition au limite absorbante d'ordre 1 sur le bord du domaine de calcul.

Remarque 3.1.2 *Le système (3.1.4)-(3.1.7) diffère donc du système (3.1.8)-(3.1.11) via le terme supplémentaire dans le membre de droite de (3.1.11).*

3.2 Caractère bien posé du problème

3.2.1 Estimation d'énergie et solution faible

Soit $t \in [0, T]$. On définit $E_a(p(t))$ l'énergie acoustique associée au problème extérieur (3.1.8) par

$$E_a(p(t)) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho_f c^2} \|\dot{p}(t)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\rho_f} \|\nabla p(t)\|_{0,\Omega}^2 \right]. \quad (3.2.1)$$

En reprenant la définition de la proposition 2.1.6, on définit l'énergie mécanique $E_m[\underline{\kappa}(t), v(t)]$ du système couplé par

$$E_m[\underline{\kappa}(t), v(t)] = \frac{1}{2} \left\{ \rho \frac{\delta^3}{12} \|\dot{\underline{\kappa}}(t)\|_{0,\Sigma}^2 + \rho \delta \|\dot{v}(t)\|_{0,\Sigma}^2 + \frac{\delta^3}{12} \|\kappa(t)\|_{\underline{\underline{C}},\Sigma}^2 + \delta G \|(\nabla v + \underline{\kappa})(t)\|_{0,\Sigma}^2 \right\}. \quad (3.2.2)$$

Proposition 3.2.1 *Si le problème (3.1.8)-(3.1.11) admet une solution $(v(t), \underline{\kappa}(t), p(t))$, alors celle-ci vérifie l'identité d'énergie*

$$\frac{d}{dt} E_V[\underline{\kappa}(t), v(t), p(t)] = (f(t), \frac{\partial v}{\partial t}(t)) \quad (3.2.3)$$

où l'énergie vibroacoustique E_V est définie par

$$E_V[\underline{\kappa}(t), v(t), p(t)] = E_m[\underline{\kappa}(t), v(t)] + E_a(p(t)).$$

Preuve

Notons $p^\pm = p|_{\Omega^\pm}$. Soit $q \in H^1(\Omega)$. On notera de la même façon $q^\pm = q|_{\Omega^\pm}$. Alors en multipliant successivement (3.1.8) par q^+ et q^- et en intégrant sur Ω^+ et Ω^- on obtient les équations variationnelles

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega^-} p^-(t) q^- + \int_{\Omega^-} \nabla p^-(t) \cdot \nabla q^- - \int_{\Sigma} \frac{\partial p(t)}{\partial n} \Big|_{\Sigma^-} q^- = 0, \quad (3.2.4)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega^+} p^+(t) q^+ + \int_{\Omega^+} \nabla p^+(t) \cdot \nabla q^+ + \int_{\Sigma} \frac{\partial p(t)}{\partial n} \Big|_{\Sigma^+} q^+ = 0. \quad (3.2.5)$$

La condition de couplage (3.1.5) nous assure que $\frac{\partial p}{\partial n}$ est continu et que (3.2.4)+ (3.2.5) donne

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} p(t) q + \int_{\Omega} \nabla p(t) \cdot \nabla q - \int_{\Sigma} \rho_f \frac{\partial v}{\partial t}(t) [q] = 0.$$

En divisant cette équation par ρ_f et en choisissant $q = \frac{\partial p}{\partial t}$ on obtient

$$\frac{d}{dt} E_a(p(t)) + \int_{\Sigma} \frac{\partial v}{\partial t}(t) \left[\frac{\partial p}{\partial t}(t) \right] = 0. \quad (3.2.6)$$

En reprenant les intégrations par parties de la section 2.1.3.1, la formulation variationnelle du système (3.1.10)-(3.1.11) est :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} \underline{\kappa}(t) \cdot \underline{\eta} + \rho \delta \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} v(t) w + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{C} \underline{\varepsilon}(\underline{\kappa}(t)) : \underline{\varepsilon}(\underline{\eta}) \\ + \delta \int_{\Sigma} G (\nabla v(t) + \underline{\kappa}(t)) \cdot (\nabla w + \underline{\eta}) - \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] w = \int_{\Sigma} f(t) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

pour toutes fonctions tests $(w, \underline{\eta}) \in \mathcal{U}_0$. En choisissant dans l'équation précédente $w = \frac{\partial v}{\partial t}$ on obtient

$$\frac{d}{dt} E_m[\underline{\kappa}(t), v(t)] - \int_{\Sigma} \frac{\partial v}{\partial t}(t) \left[\frac{\partial p}{\partial t}(t) \right] = \left(f(t), \frac{\partial v}{\partial t}(t) \right). \quad (3.2.8)$$

La somme (3.2.6)+(3.2.8) donne exactement (3.2.3). \diamond

A partir de cette identité, il est possible d'obtenir facilement des estimations sur $(p, v, \underline{\kappa})$. D'après [Lions et Magenes, 1968] on peut en déduire le

Corollaire 3.2.1 *Si $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ alors le problème (3.1.8)-(3.1.11) admet une unique solution faible*

$$(p, v, \underline{\kappa}) \in \mathcal{S}_f^T = C^1\left(0, T; [L^2(\Sigma)]^3 \times L^2(\Omega)\right) \cap C^0\left(0, T; \mathcal{U}_0 \times H^1(\Omega)\right).$$

Remarque 3.2.1 *Le choix de l'inconnue v pour formuler la condition (3.1.5) nous a permis de construire un système vibroacoustique instationnaire conservatif où l'énergie conservée est indépendante des termes de couplage : Ces termes s'annulent l'un l'autre naturellement lorsque l'on cherche à faire apparaître l'énergie du système couplé. Cette propriété, fondamentale au niveau continu pour assurer le caractère bien posé du problème, aura un équivalent discret tout aussi fondamental pour garantir la stabilité du schéma numérique proposé.*

3.2.2 Existence et unicité d'une solution forte

Notons

$$D_{\Delta} = \{v \in H^1(\Omega), \Delta v \in L^2(\Omega)\} \quad \text{et} \quad D_{\tilde{\Delta}} = D_{\Delta} \times H^1(\Omega).$$

Une fois que l'on a remarqué que les termes de couplage du système (3.1.8)-(3.1.11) sont anti-symétriques, il est très facile, modulo une formulation et un cadre fonctionnel plutôt lourd, de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution forte en appliquant le théorème de Hille-Yosida. On épargne au lecteur le détail des démonstrations mais on expose, dans les quelques lignes suivantes, les principales idées.

En utilisant la reformulation de l'équation des ondes sous forme d'un système d'ordre 1 en temps proposée dans [Brézis, 1983] et la reformulation du système de Reissner-Mindlin proposée au chapitre 2.1.3.1, il est facile de voir que l'on peut réécrire le système (3.1.8)-(3.1.11) sous la forme

$$\frac{d}{dt} \Lambda(t) + \mathcal{A} \Lambda(t) = \mathcal{F}(t)$$

où \mathcal{A} est un opérateur de la forme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & C \\ -C^* & \tilde{\Delta} \end{pmatrix}$$

où A (cf. 2.1.14) est démontré maximal monotone sur $D(A)$ (cf. 2.1.13) au chapitre 2.1.3.1 et $\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$ est démontré maximal monotone sur $D_{\tilde{\Delta}}$ dans [Brézis, 1983]. Par linéarité, la somme de 2 opérateurs maximaux monotones étant un opérateur maximal monotone, l’anti-symétrie des termes de couplage implique que \mathcal{A} est maximal monotone sur $D(A) \times D_{\tilde{\Delta}}$. Grâce au théorème de Hille-Yosida on peut alors énoncer la

Proposition 3.2.2 *Si $f \in C^1(0, T; L^2(\Sigma))$ alors le problème (3.1.8)-(3.1.11) admet une solution unique dans*

$$S_F^T = C^2(0, T; [L^2(\Sigma)]^3 \times L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; \mathcal{U}_0 \times H^1(\Omega)) \cap C^0(0, T; D_{\mathcal{R}_m} \times D_{\tilde{\Delta}}) .$$

3.3 Une méthode numérique non conforme sur maillage conforme

3.3.1 Présentation de la méthode

Nous proposons ici une semi-discrétisation du problème (3.1.8)-(3.1.11) par éléments finis spectraux avec condensation de masse. Les propriétés physiques de la plaque et du fluide induisent des vitesses de propagation généralement très différentes dans chaque milieu. Afin de ne pas surmailler (pour éviter un surcoût de temps CPU) ou sous-mailler (pour être assez précis) un des deux domaines, il faut a priori choisir un pas d’espace et donc un pas de temps (puisque qu’il est relié au pas d’espace via une CFL) appropriés à chaque milieu. Cet aspect caractéristique des problèmes de couplage fluide-structure induit donc deux difficultés majeures :

- gérer le maillage de l’interface de couplage \Rightarrow Non conformité en espace.
- construire un schéma stable avec un pas de temps différent dans chaque milieu.

Ce type de problème est abondamment traité dans la littérature. Concernant la gestion de maillages non conformes la méthode la plus utilisée est celle des éléments joints (Mortar) [Ben Belgacem et Maday, 1997], [Bernardi *et al.*, 1994]. Basé sur une formulation mixte avec multiplicateur de Lagrange, ce type de méthode est relativement complexe à analyser et à implémenter. Une alternative, notamment développée pour les problèmes de couplage fluide structure dans [Bécache *et al.*, 2005] et [Joly et Rhaouti, 1999] est la méthode dite des domaines fictifs. Celle-ci permet de traiter la propagation des ondes dans le fluide à l’aide d’un maillage cartésien, en “communiquant” avec la structure à l’aide d’une nouvelle inconnue traitée comme un multiplicateur de Lagrange. Plus récemment, les méthodes de type Galerkin discontinu ont apporté une solution alternative aux méthodes mortar

pour le raccord de maillage non conforme [Kabakian *et al.*, 2004]. Concernant l'utilisation d'un pas de temps local dans chaque milieu, on peut citer les techniques de raffinement développées dans [Garcia, 2004] et [Collino *et al.*, 2006].

En vibroacoustique, la vitesse des ondes dans le fluide est généralement beaucoup plus faible que la vitesses des ondes se propageant dans la structure (par exemple la vitesse de propagation dans l'air est $340m.s^{-1}$ tandis que la vitesse de propagation dans l'aluminium est de l'ordre de $5500m.s^{-1}$). Pour gérer efficacement et avec précision cette difficulté, nous proposerons une méthode non-conforme en espace sur maillage conforme (nous allons expliquer ce joli contresens) en utilisant à bon escient la souplesse offerte par l'utilisation d'ordre élevé. Par rapport aux méthodes Mortar notre approche permet :

- une formulation mathématique et une implémentation beaucoup plus simple,
- d'éviter le calcul des matrices et des vecteurs dus à un multiplicateur de Lagrange,
- d'éviter l'utilisation d'éléments devant satisfaire une condition *inf - sup*.
- d'utiliser un maillage conforme, ce qui simplifie grandement le calcul de la matrice de couplage entre p et v .

L'idée principale (et simple) de notre méthode est la suivante :

On construit un maillage fluide-structure conforme en "extrudant" un maillage de plaque 2D dont le pas est donc choisit en fonction des caractéristiques physiques de la plaque. Les éléments du maillage de plaque sont ainsi les traces des éléments du maillage fluide (cf. Fig. 3.2).

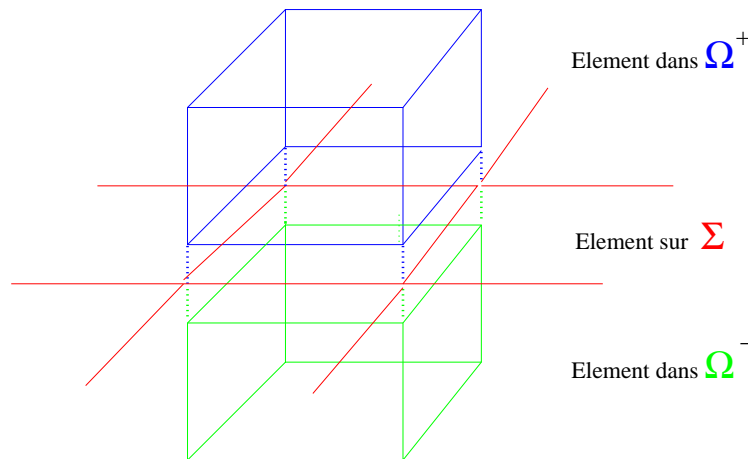


FIG. 3.2: Maillage fluide-structure conforme

D'après la remarque faite sur les vitesses de propagation dans les deux milieux, le maillage 3D obtenu pour le fluide est donc trop grossier (le nombre de points par longueur d'onde est insuffisant). Nous choisissons alors d'utiliser une approximation polynomiale d'ordre plus élevé dans le fluide que sur la structure (par exemple on utilisera des éléments Q_5 sur la plaque et Q_7 dans le fluide).

3.3.2 Le schéma élément fini

D'après les équations (3.2.4), (3.2.5) et (3.2.7) le problème variationnel associé au système (3.1.8)-(3.1.11) est :

Trouver $(p, v, \underline{\kappa}) \in \mathcal{S}_f^T$ solutions de

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_f c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} p(t) q + \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega} \nabla p(t) \cdot \nabla q - \int_{\Sigma} \frac{\partial v}{\partial t}(t) [q] = 0, \\ \rho \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} \underline{\kappa}(t) \cdot \underline{\eta} + \rho \delta \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma} v(t) w + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\kappa}(t)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\eta}), \\ \delta \int_{\Sigma} G(\nabla v(t) + \underline{\kappa}(t)) \cdot (\nabla w + \underline{\eta}) - \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial p}{\partial t}(t) \right] w = \int_{\Sigma} f(t) w \end{array} \right.$$

pour toutes fonctions tests $(q, w, \underline{\eta}) \in H^1(\Omega) \times \mathcal{U}_0$.

Il est bien évident que nous allons utiliser la méthode d'approximation développée dans le chapitre 2 pour la partie purement structure et la méthode développée dans le chapitre 1 pour la partie purement acoustique. L'utilisation d'un maillage conforme va simplifier considérablement l'approximation des termes de couplage. Reprenant l'idée principale développée précédemment, on utilisera $\mathcal{T}_h = \bigcup K$ un maillage en quadrangles de Σ et $\mathbb{T}_h = \bigcup H$ un maillage en hexaèdres de Ω tels que le maillage $\mathcal{T}_h \cup \mathbb{T}_h$ soit conforme, c'est à dire :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \exists H \in \mathbb{T}_h \text{ tel que } K = H \cap \Sigma \quad (\text{cf. Fig.3.2}).$$

Pour l'approximation des inconnues mécaniques nous utiliserons l'élément fini

$$\mathcal{Q}^r(\hat{K}) = (\hat{K}, \mathcal{Q}^r(\hat{K}), \hat{\Xi}^2)$$

et pour l'approximation de la pression nous utiliserons l'élément fini

$$\mathcal{Q}^{r'}(\hat{H}) = (\hat{H}, \mathcal{Q}^{r'}(\hat{H}), \hat{\Xi}^3)$$

où \hat{H} est le cube unité. Par conséquent, nous chercherons une solution approchée $(v_h, \underline{\kappa}_h)$ de $(v, \underline{\kappa})$ dans l'espace $\mathcal{U}_{h,0}^r$ défini par (2.2.2) et une solution approchée p_h de p dans l'espace $\mathcal{P}_h^{r'}$ défini par

$$\mathcal{P}_h^{r'} = \left\{ p_h \in C^0(\Omega) \text{ tel que } p_h \circ \mathbb{F}_H \in \mathcal{Q}^{r'}(\hat{H}) \right\} \subset H^1(\Omega),$$

où $\mathbb{F}_H : \hat{H} \rightarrow H$ est l'équivalent 3D de F_K (cf. Fig. 3.3).

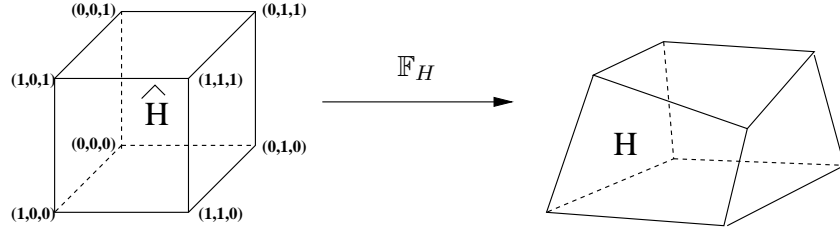


FIG. 3.3: L'application \mathbb{F}_H

Pour distinguer l'ordre des formules de quadrature, nous noterons respectivement $G(r)$ et $GL(r)$ les formules de Gauss et de Gauss-Lobatto d'ordre r . Posons $r_{max} = \max(r, r')$. Nous proposons alors le problème variationnel approché

Trouver $[v_h(t), \underline{\kappa}_h(t), p_h(t)] : [0, T] \longrightarrow \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{P}_h^{r'}$ solutions de

$$(\mathcal{P}_h) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_f c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega}^{GL(r')} p_h(t) q_h + \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega}^{G(r')} \nabla p_h(t) \cdot \nabla q_h + \int_{\Sigma}^{G(r_{max})} \frac{\partial v_h}{\partial t}(t) [q_h] = 0 \\ \rho \frac{\delta^3}{12} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma}^{GL(r)} \underline{\kappa}_h(t) \cdot \underline{\eta}_h + \rho \delta \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Sigma}^{GL(r)} v_h(t) w_h + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma}^{G(r)} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\kappa}_h(t)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\eta}_h) \\ + \delta \int_{\Sigma}^{G(r)} G(\nabla v_h(t) + \underline{\kappa}_h(t)) \cdot (\nabla w_h + \underline{\eta}_h) \\ - \int_{\Sigma}^{G(r_{max})} \left[\frac{\partial p}{\partial t}(t) \right] w_h = \int_{\Sigma} f(t) w_h \end{array} \right.$$

Ce schéma éléments finis proposé est donc un couplage des schémas (1.4.29) et (2.3.10) pour des approximations polynomiales d'ordre différent dans chaque milieu. On peut noter que la matrice de couplage est calculée à l'aide d'une formule de quadrature de Gauss d'ordre r_{max} . Nous verrons dans l'analyse qui suit que ce choix correspond à une intégrations exacte, ce qui va nous permettre de montrer que l'erreur d'approximation du schéma (\mathcal{P}_h) est simplement la somme des erreurs d'approximation des schémas (1.4.29) et (2.3.10) .

3.3.2.1 Analyse du schéma

Nous choisissons de ne pas donner une démonstration d'analyse aussi détaillée que celles proposées en section 1.4.1.2 et 2.3. Nous proposerons ici une démarche plus synthétique en utilisant autant que possible les résultats des chapitres précédents. Pour ce faire, on reprendra le formalisme et les notations de ces chapitres, en particulier :

- l'utilisation des caractères gras pour les fonctions (en particulier les transformées de Laplace des inconnues) et espaces fonctionnels sur \mathbb{C} ,
- la terminologie "problème harmonique" pour désigner un système d'équation déduit d'un système initial via la transformée de Laplace,

- pour toute forme bilinéaire $a(.,.)$ définie sur $V \times V$ à partir de produits scalaires continus, on notera $a_h(.,.)$ définie sur $V_h \times V_h$ ($V_h \subset V$) sa forme bilinéaire approchée définie à l'aide de produits scalaires discrets de type formules de quadrature.

Grâce aux analyses des chapitres 1 et 2 il va nous suffire :

1. d'obtenir un lemme de Strang pour notre problème de couplage (ce qui assurera en particulier une erreur d'interpolation optimale),
2. de montrer que la formule de quadrature utilisée pour calculer les termes de couplage conserve l'erreur d'interpolation.

Une version du lemme de Strang pour le problème \mathcal{P}_h Posons

$$\begin{aligned} b(s; (\mathbf{v}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}, \mathbf{p}), (\mathbf{w}, \underline{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q})) &= b_a(s; \mathbf{p}, \mathbf{q}) + b_{RM}(s; (\mathbf{v}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}), (\mathbf{w}, \underline{\boldsymbol{\eta}})) \\ &+ c(s; (\mathbf{v}, \mathbf{p}), (\mathbf{w}, \mathbf{q})) \end{aligned}$$

où les formes bilinéaires $b_a(s; ., .)$, $b_{RM}(s; ., .)$, $c(s; ., .)$ sont définies par

$$\begin{aligned} b_a(s; \mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{\rho_f c^2} s |s|^2 \int_{\Omega} \mathbf{p} \bar{\mathbf{q}} + \bar{s} \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{p} \cdot \nabla \bar{\mathbf{q}}, \\ b_{RM}(s; (\mathbf{v}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}), (\mathbf{w}, \underline{\boldsymbol{\eta}})) &= s |s|^2 \left[\delta \int_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \bar{\mathbf{w}} + \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \rho \underline{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \underline{\boldsymbol{\eta}} \right] \\ &+ \bar{s} \left[\frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\boldsymbol{\kappa}}) : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\boldsymbol{\eta}}) + \delta \int_{\Sigma} G (\nabla \mathbf{v} + \underline{\boldsymbol{\kappa}}) \cdot (\nabla \bar{\mathbf{w}} + \underline{\boldsymbol{\eta}}) \right], \\ c(s; (\mathbf{v}, \mathbf{p}), (\mathbf{w}, \mathbf{q})) &= -|s|^2 \left[\int_{\Sigma} \mathbf{v} [\mathbf{q}] - \int_{\Sigma} [\mathbf{p}] \mathbf{w} \right]. \end{aligned}$$

Le problème "harmonique" associé au problème (\mathcal{P}) est alors :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{v}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}, \mathbf{p}) \in \mathcal{U}_0 \times \mathbf{H}^1(\Omega), \text{ solutions de} \\ b(s; (\mathbf{v}, \underline{\boldsymbol{\kappa}}, \mathbf{p}), (\mathbf{w}, \underline{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q})) &= \bar{s} \int_{\Sigma} \mathbf{f} \mathbf{w}, \quad \forall (\mathbf{w}, \underline{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{q}) \in \mathcal{U}_0 \times \mathbf{H}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

auquel on associe le problème élément fini :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{v}_h, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_h, \mathbf{p}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{P}_h^{r'}, \text{ solutions de} \\ b_h(s; (\mathbf{v}_h, \underline{\boldsymbol{\kappa}}_h, \mathbf{p}_h), (\mathbf{w}_h, \underline{\boldsymbol{\eta}}_h, \mathbf{q}_h)) &= \bar{s} \int_{\Sigma} \mathbf{f}_h \mathbf{w}_h, \quad \forall (\mathbf{w}_h, \underline{\boldsymbol{\eta}}_h, \mathbf{q}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{P}_h^{r'}. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

On a $c(s; (\mathbf{v}, \mathbf{p}), (\mathbf{v}, \mathbf{p})) = 0$. Donc d'après la proposition 2.1.4 il est évident que $b(s; \cdot, \cdot)$ induit une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,s,\Omega \cup \Sigma}$ et qu'elle vérifie la propriété de coercivité

$$\exists C > 0 \quad , \quad C \eta (\|\mathbf{p}\|_{1,s,\Omega}^2 + \|(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{k}})\|_{1,s,\Sigma}^2) \leq b (s; (\mathbf{v}, \underline{\mathbf{k}}, \mathbf{p}), (\mathbf{v}, \underline{\mathbf{k}}, \mathbf{p})) .$$

Comme $\mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{P}_h^r \subset \mathcal{U}_0 \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ et que les poids de Gauss et Gauss-Lobatto sont strictement positifs alors b_h est naturellement coercive sur $\mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{P}_h^r$. Par conséquent, on peut énoncer une version du lemme de Strang appropriée à notre problème de couplage :

Lemme 3.3.1 *Si $\underline{\mathbf{U}} = (\mathbf{v}, \underline{\mathbf{k}}, \mathbf{p})$ est solution de (3.3.1) et $\underline{\mathbf{U}}_h = (\mathbf{v}_h, \underline{\mathbf{k}}_h, \mathbf{p}_h)$ est solution du problème approché (3.3.2), alors il existe une constante C indépendante du pas de maillage et de s telle que*

$$\|\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}_h\|_{1,s} \leq C \inf_{\underline{\mathbf{V}}_h \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{P}_h^{r'}} \left[\left(1 + \frac{|s|}{\eta} \right) \|\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{V}}_h\|_{1,s} + \frac{1}{\eta} \sup_{\underline{\mathbf{W}}_h \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{P}_h^{r'}} \frac{|(b - b_h)(s; \underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h)|}{\|\underline{\mathbf{W}}_h\|_{1,s}} \right] \quad (3.3.3)$$

Estimation d'erreur pour le problème couplé : En utilisant le résultat du théorème 1.4.1 pour \mathbf{p} et \mathbf{p}_h ainsi que l'estimation (2.3.5) pour $(\mathbf{v}, \underline{\mathbf{k}})$ et $(\mathbf{v}_h, \underline{\mathbf{k}}_h)$ on peut alors majorer l'erreur d'interpolation.

Proposition 3.3.1 *Il existe deux constantes $C_{\eta,s}^1, C_{\eta,s}^2$ strictement positives telles que*

$$\inf_{\underline{\mathbf{V}}_h \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{P}_h^{r'}} \left(1 + \frac{|s|}{\eta} \right) \|\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{V}}_h\|_{1,s} \leq C_{\eta,s}^1 h^r + C_{\eta,s}^2 h^{r'} .$$

Il nous suffit alors de majorer l'erreur due à l'utilisation de formules de quadrature

$$\sup_{\underline{\mathbf{W}}_h \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{P}_h^{r'}} \frac{|(b - b_h)(s; \underline{\mathbf{V}}_h, \underline{\mathbf{W}}_h)|}{\|\underline{\mathbf{W}}_h\|_{1,s}} .$$

Notons qu'il nous suffit d'étudier l'erreur effectuée sur les intégrales de couplage à savoir

$$\sup_{(\mathbf{v}_h, \mathbf{p}_h) \in \mathcal{U}_{h,0}^r \times \mathcal{P}_h^{r'}} \frac{|(c - c_h)(s; (\mathbf{v}_h, \mathbf{p}_h), (\mathbf{w}_h, \mathbf{q}_h))|}{\|(\mathbf{w}_h, \mathbf{q}_h)\|_{1,s}}$$

puisque les erreurs relatives aux termes purement acoustique et mécanique sont traitées respectivement dans les sections 1.4.1.2 et 2.3. Or, le choix de formule de quadrature correspond à une intégration exacte des termes de couplage. En effet, supposons (et c'est pratiquement toujours le cas) que $r' \geq r$. Comme le maillage $\mathcal{T}_h \cup \mathbb{T}_h$ est conforme on

peut écrire

$$|(c - c_h)(s; (\mathbf{v}_h, \mathbf{p}_h), (\mathbf{w}_h, \mathbf{q}_h))| = |s|^2 \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\hat{K}} (\hat{\mathbf{v}}_h [\hat{\mathbf{q}}_h] - [\hat{\mathbf{p}}_h] \hat{\mathbf{w}}_h) |J_k| d\hat{x} - \int_{\hat{K}}^G (\hat{\mathbf{v}}_h [\hat{\mathbf{q}}_h] - [\hat{\mathbf{p}}_h] \hat{\mathbf{w}}_h) |J_k| d\hat{x} \right| .$$

Comme $(\hat{\mathbf{v}}_h [\hat{\mathbf{q}}_h] - [\hat{\mathbf{p}}_h] \hat{\mathbf{w}}_h) |J_k| \in \mathcal{Q}^{r+r'+1}$ et que $r' \geq r \Rightarrow r + r' + 1 \leq 2r' + 1$, d'après le critère de précision (1.2.4), on a alors

$$\int_{\hat{K}} (\hat{\mathbf{v}}_h [\hat{\mathbf{q}}_h] - [\hat{\mathbf{p}}_h] \hat{\mathbf{w}}_h) |J_k| d\hat{x} - \int_{\hat{K}}^G (\hat{\mathbf{v}}_h [\hat{\mathbf{q}}_h] - [\hat{\mathbf{p}}_h] \hat{\mathbf{w}}_h) |J_k| d\hat{x} = 0$$

et donc

$$|(c - c_h)(s; (\mathbf{v}_h, \mathbf{p}_h), (\mathbf{w}_h, \mathbf{q}_h))| = 0 .$$

On peut alors déduire des propositions 1.4.7 et 2.3.1 et qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que

$$\sup_{\mathbf{W}_h \in \mathcal{U}_{h,0}^{r'} \times \mathcal{P}_h^{r'}} \frac{|(b - b_h)(s; \mathbf{V}_h, \mathbf{W}_h)|}{\|\mathbf{W}_h\|_{1,s}} \leq C_1 h^r + C_2 h^{r'-1} \quad (3.3.4)$$

Le lemme 3.3.1, la proposition 3.3.1 et l'estimation (3.3.4) nous permettent alors d'énoncer la

Proposition 3.3.2 *Si f est suffisamment régulière pour que $(v, \underline{\kappa}, p) \in [\mathbf{H}^{r+2}(\Sigma)]^3 \times \mathbf{H}^{r+1}(\Omega)$ alors*

$$\exists C_1, C_2 > 0 \text{ tels que } \|\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}_h\|_{1,s} \leq C_1 h^r + C_2 h^{r'-1} .$$

Reprenant la démarche développée dans le chapitre 1.4.2 il est facile d'obtenir une estimation d'erreur pour la formulation élément fini (\mathcal{P}_h) . On peut alors énoncer le

Théorème 3.3.1 *Soit $r \geq 2, r' \geq 3$. Supposons que la donnée f soit suffisamment régulière pour que la solution $(v, \underline{\kappa}, p)$ du problème (\mathcal{P}) aie la régularité $[H^{r+3}(\Sigma \times [0, T])]^3 \times H^{r+3}(\Omega \times [0, T])$. Alors si $(v_h, \underline{\kappa}_h, p_h)$ est solution de (\mathcal{P}_h) on a l'estimation d'erreur*

$$\exists C_1(T), C_2(T) > 0 \text{ tels que } \| |(v, \underline{\kappa}, p) - (v_h, \underline{\kappa}_h, p_h) | \|_{1,T} \leq C_1(T) h^r + C_2(T) h^{r'-1} ,$$

où $\| |\cdot| \|_{1,T}$ est la norme liée à l'énergie définie par

$$\| |(v, \underline{\kappa}, p) | \|_{1,T}^2 = \int_0^T E_V[v(t), \underline{\kappa}(t), p(t)] dt .$$

3.3.3 Discrétisation en temps

3.3.3.1 Le schéma éléments finis en espace différences finies en temps

Posons

$$[0, T] \simeq \{t_n\} = n\Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{N}, \quad n \in [0, N].$$

Soit V_h un espace vectoriel de dimension fini. Pour toute fonction $v_h(t, \cdot) : [0, T] \rightarrow V_h$ on adoptera la notation $v_h^n = v_h(t_n, \cdot)$. Nous allons proposer un schéma aux différences finies en temps, centré et d'ordre 2, construit à partir du schéma saute-mouton dont nous pourrions montrer la stabilité par une technique d'énergie classique.

Dans tout ce qui suit, on notera respectivement $\underline{\lambda}_h$ et $\underline{\mu}_h$ les couples $(v_h, \underline{\kappa}_h)$ et $(w_h, \underline{\eta}_h)$. Enfin, il sera commode pour l'analyse de stabilité d'introduire les notations suivantes :

$$\begin{aligned} (p_h, q_h)_h &= \frac{1}{\rho_f c^2} \int_{\Omega}^{GL(r')} p_h q_h, \\ a(p_h, q_h)_h &= \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega}^{G(r')} \nabla p_h \cdot \nabla q_h, \\ ((\underline{\lambda}_h, \underline{\mu}_h))_h &= \rho \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma}^{GL(r)} \underline{\kappa}_h \cdot \underline{\eta}_h + \rho \delta \int_{\Sigma}^{GL(r)} v_h w_h, \\ m(\underline{\lambda}_h, \underline{\mu}_h) &= \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma}^{G(r)} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\kappa}_h) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\eta}_h) + \delta \int_{\Sigma}^{G(r)} G (\nabla v_h + \underline{\kappa}_h) \cdot (\nabla w_h + \underline{\eta}_h), \\ c(v_h, q_h) &= \int_{\Sigma}^{G(r_{max})} v_h [q_h]. \end{aligned}$$

Partant de la semi-discrétisation par élément fini (P_h) , on propose alors le schéma espace-temps :

Trouver $[v_h^n, \underline{\kappa}_h^n, p_h^n], n = \{1, 2, 3, \dots\}$ solutions de

$$\left(\frac{p_h^{n+1} - 2p_h^n + p_h^{n-1}}{\Delta t^2}, q_h \right)_h + a(p_h^n, q_h) + c\left(\frac{v_h^{n+1} - v_h^{n-1}}{2\Delta t}, q_h \right) = 0, \quad (3.3.5)$$

$$\left(\left(\frac{\lambda_h^{n+1} - 2\lambda_h^n + \lambda_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \underline{\mu}_h \right) \right)_h + m(\underline{\lambda}_h^n, \underline{\mu}_h)_h - c\left(w_h, \frac{p_h^{n+1} - p_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) = \int_{\Sigma} f_h^n w_h. \quad (3.3.6)$$

3.3.3.2 Formulation matricielle et complément de Schur

Notons

- \mathcal{M}_h et \mathcal{R}_h les matrices de masse et de rigidité acoustiques respectivement associées aux formes bilinéaires $(\cdot, \cdot)_h$ et $a_h(\cdot, \cdot)$,
- \mathbb{M}_h et \mathbb{R}_h les matrices de masse et de rigidité mécaniques respectivement associées aux formes bilinéaires $((\cdot, \cdot))_h$ et $m_h(\cdot, \cdot)$,
- C_h la matrice de couplage associée à la forme bilinéaire $c_h(\cdot, \cdot)$.

Remarque 3.3.1 *En pratique on implémente le schéma (3.3.5)-(3.3.6) à partir d'une formulation mixte construite sur le modèle de celles proposées en sections 1.3 et 2.2.2.2. Par conséquent les matrices de rigidité acoustique et mécanique sont en fait entièrement définies à partir de matrices diagonales par blocs et d'une matrice élémentaire (associée à l'opérateur gradient 2D ou 3D). Plus précisément \mathcal{R}_h peut se factoriser selon l'expression donnée dans la remarque 1.3.5, et \mathbb{R}_h selon l'expression donnée dans la remarque 2.2.3. On utilise alors les algorithmes décrits dans ces sections pour calculer les produits matrice-vecteur associés aux matrices de rigidité. Cela nous permet de bénéficier d'une économie considérable en termes de stockage mémoire, surtout pour la matrice \mathcal{R}_h .*

Notons enfin

- Λ_h^n le vecteur des coordonnées de $\underline{\lambda}_h^n$ dans $\mathcal{U}_{h,0}^r$,
- P_h^n le vecteur des coordonnées de p_h^n dans \mathcal{P}_h^r ,
- F_h^n le vecteur des coordonnées de $\underline{\lambda}_h^n$ dans $\mathcal{U}_{h,0}^r$.

La formulation matricielle du schéma (3.3.5)-(3.3.6) est :

Trouver $[\Lambda_h^n, P_h^n], n = \{1, 2, 3, \dots\}$ solutions de

$$\mathcal{M}_h \frac{P_h^{n+1} - 2P_h^n + P_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{R}_h P_h^n + C_h \frac{\Lambda_h^{n+1} - \Lambda_h^{n-1}}{2\Delta t} = 0, \quad (3.3.7)$$

$$\mathbb{M}_h \frac{\Lambda_h^{n+1} - 2\Lambda_h^n + \Lambda_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{R}_h \Lambda_h^n - C_h^* \frac{P_h^{n+1} - P_h^{n-1}}{2\Delta t} = F_h^n. \quad (3.3.8)$$

En pratique, nous utilisons le principe du complément de Schur conjugué à un solveur itératif de type gradient conjugué pré-conditionné pour résoudre ce système :

Le système (3.3.7)-(3.3.8) peut se réécrire sous la forme :

$$\mathcal{M}_h P_h^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} C_h \Lambda_h^{n+1} = \underbrace{2P_h^n - P_h^{n-1} - \mathcal{R}_h P_h^n + \frac{\Delta t}{2} C_h \Lambda_h^{n-1}}_{F_{1h}^{n,n-1}} \quad (3.3.9)$$

$$\mathbb{M}_h \Lambda_h^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} C_h^* P_h^{n+1} = \underbrace{F_h^n + 2\Lambda_h^n - \Lambda_h^{n-1} - \mathbb{R}_h \Lambda_h^n - \frac{\Delta t}{2} C_h^* P_h^{n-1}}_{F_{2h}^{n,n-1}} \quad (3.3.10)$$

De (3.3.9) on tire

$$P_h^{n+1} = \mathcal{M}_h^{-1} \left(F_{1h}^{n,n-1} - \frac{\Delta t}{2} C_h \Lambda_h^{n+1} \right). \quad (3.3.11)$$

Si on injecte (3.3.11) dans (3.3.10) il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_h \Lambda_h^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} C_h^* \mathcal{M}_h^{-1} \left(F_{1h}^{n,n-1} - \frac{\Delta t}{2} C_h \Lambda_h^{n+1} \right) &= F_{2h}^{n,n-1} \\ \Leftrightarrow \Lambda_h^{n+1} &= \left(\mathbb{M}_h + \frac{\Delta t^2}{4} C_h^* \mathcal{M}_h^{-1} C_h \right)^{-1} \left(F_{2h}^{n,n-1} + \frac{\Delta t}{2} C_h^* \mathcal{M}_h^{-1} F_{1h}^{n,n-1} \right) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

On résout alors l'équation (3.3.12) en inversant la matrice symétrique définie positive

$$\mathbb{M}_h + \frac{\Delta t^2}{4} C_h^* \mathcal{M}_h^{-1} C_h \quad (3.3.13)$$

à l'aide d'un solveur itératif de type gradient conjugué pré-conditionné. Dès lors, connaissant Λ_h^{n+1} le calcul de P_h^{n+1} (via l'équation (3.3.11)) est immédiat puisque \mathcal{M}_h est diagonale, grâce à l'utilisation de la condensation de masse.

Remarque 3.3.2 *Le coût de l'inversion de la matrice définie par (3.3.13) est limité car celle-ci est purement 2D.*

3.3.3.3 Etude de stabilité

Nous allons montrer que le schéma (3.3.7)-(3.3.8) est stable sous réserve de vérifier la condition CFL la plus restrictive entre la CFL du schéma acoustique et la CFL du schéma mécanique. Nous allons montrer que ce schéma est conservatif, et, plus précisément qu'il conserve une énergie discrète indépendante des termes de couplage et équivalente à l'identité (3.2.3).

Pour toutes fonction, $v_h(\cdot, t)$ posons $v_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v_h^{n+1} + v_h^n}{2}$. On introduit alors l'énergie acoustique discrète

$$E_a^{n+\frac{1}{2}} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \left[\left| \frac{p_h^{n+1} - p_h^n}{\Delta t} \right|_{\mathcal{M}_h}^2 + a_h(p_h^{n+\frac{1}{2}}, p_h^{n+\frac{1}{2}}) \right], \quad \text{avec } |p_h^n|_{\mathcal{M}_h}^2 \stackrel{def}{=} (p_h^n, p_h^n)_h,$$

et l'énergie mécanique discrète

$$E_m^{n+\frac{1}{2}} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \left[\left| \frac{\lambda_h^{n+1} - \lambda_h^n}{\Delta t} \right|_{\mathbb{M}_h}^2 + m_h(\Delta_h^{n+\frac{1}{2}}, \Delta_h^{n+\frac{1}{2}}) \right], \quad \text{avec} \quad |\Delta_h^n|_{\mathbb{M}_h}^2 \stackrel{def}{=} ((\Delta_h^n, \Delta_h^n))_h.$$

Pour démontrer la stabilité on utilisera les identités algébriques résumées dans le lemme suivant.

Lemme 3.3.2 *Par bilinéarité on a les égalités :*

- $a_h(p_h^{n+1}, p_h^n) = a_h\left(p_h^{n+\frac{1}{2}}, p_h^{n+\frac{1}{2}}\right), \quad m_h(v_h^{n+1}, v_h^n) = m_h\left(v_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h^{n+\frac{1}{2}}\right),$
- $(p_h^{n+1} - 2p_h^n + p_h^{n-1}, p_h^{n+1} - p_h^{n-1})_h = |p_h^{n+1} - p_h^n|_{\mathcal{M}_h}^2 - |p_h^n - p_h^{n-1}|_{\mathcal{M}_h}^2,$
- $(\Delta_h^{n+1} - 2\Delta_h^n + \Delta_h^{n-1}, \Delta_h^{n+1} - \Delta_h^{n-1})_h = |\Delta_h^{n+1} - \Delta_h^n|_{\mathbb{M}_h}^2 - |\Delta_h^n - \Delta_h^{n-1}|_{\mathbb{M}_h}^2.$

Proposition 3.3.3 *La solution (p_h^n, Δ_h^n) du schéma (3.3.7)-(3.3.8) vérifie l'identité d'énergie discrète*

$$\frac{E_V^{n+\frac{1}{2}} - E_V^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = (f_h^n, \frac{v_h^{n+1} - v_h^{n-1}}{2\Delta t}) \quad , \quad \text{avec} \quad E_V^{n+\frac{1}{2}} \stackrel{def}{=} E_a^{n+\frac{1}{2}} + E_m^{n+\frac{1}{2}}. \quad (3.3.14)$$

Preuve : Il suffit d'écrire point par point un "équivalent discret" des arguments de la preuve de la proposition 3.2.1.

A cet effet choisissons comme fonctions test $q_h = \frac{p_h^{n+1} - p_h^{n-1}}{2\Delta t}$ dans (3.3.7) et $\underline{\mu}_h = \frac{\Delta_h^{n+1} - \Delta_h^{n-1}}{2\Delta t}$ dans (3.3.8). Il vient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p_h^{n+1} - 2p_h^n + p_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{p_h^{n+1} - p_h^{n-1}}{2\Delta t} \right)_h + a_h\left(p_h^n, \frac{p_h^{n+1} - p_h^{n-1}}{2\Delta t}\right) \\ & + c\left(\frac{v_h^{n+1} - v_h^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{p_h^{n+1} - p_h^{n-1}}{2\Delta t}\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta_h^{n+1} - 2\Delta_h^n + \Delta_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\Delta_h^{n+1} - \Delta_h^{n-1}}{2\Delta t} \right)_h + m_h\left(\Delta_h^n, \frac{\Delta_h^{n+1} - \Delta_h^{n-1}}{2\Delta t}\right) \\ & - c\left(\frac{v_h^{n+1} - v_h^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{p_h^{n+1} - p_h^{n-1}}{2\Delta t}\right) = \int_{\Sigma} f_h^n \frac{v_h^{n+1} - v_h^{n-1}}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Comme $a_h(\cdot, \cdot)$, $m_h(\cdot, \cdot)$ sont symétriques, d'après le lemme 3.3.2 la somme (3.3.15)+(3.3.16) donne

$$\frac{E_a^{n+\frac{1}{2}} - E_a^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + c\left(\frac{v_h^{n+1} - v_h^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{p_h^{n+1} - p_h^{n-1}}{2\Delta t}\right) = 0 ,$$

$$\frac{E_m^{n+\frac{1}{2}} - E_m^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - c\left(\frac{v_h^{n+1} - v_h^{n-1}}{2\Delta t}, \frac{p_h^{n+1} - p_h^{n-1}}{2\Delta t}\right) = \int_{\Sigma} f_h^n \frac{v_h^{n+1} - v_h^{n-1}}{2\Delta t} .$$

Par somme on obtient précisément l'identité (3.3.14). \diamond

Il est donc clair que le schéma est stable si et seulement Δt est suffisamment petit pour que la quantité $E_V^{n+\frac{1}{2}}$ soit positive [Bécache, 2003]. Par somme, cette condition est assurée si $E_a^{n+\frac{1}{2}}$ et $E_m^{n+\frac{1}{2}}$ sont positives, c'est à dire si Δt satisfait à la fois la CFL du schéma relatif au modèle de plaque et la CFL du schéma d'approximation de l'équation des ondes. Par conséquent on choisira un Δt qui satisfasse la CFL la plus restrictive. En pratique ce sera toujours la CFL du modèle de plaque. Notre schéma présente donc l'avantage de pouvoir contrôler la stabilité du problème couplé en contrôlant seulement la stabilité du problème de plaque. En contrepartie le pas de temps est alors bien plus petit que le pas de temps "optimal" autorisé par la CFL dans le fluide, ce qui pénalise sensiblement le temps de calcul.

Pour pallier à ce problème, une méthode de raffinement en temps conduisant à un schéma garanti stable (par technique d'énergie) avec un pas de temps optimal pour chaque milieu est proposé dans [Garcia, 2004]. Ce type de méthode a déjà été implémentée avec pour les problèmes de couplage fluide-structure dans [Diaz, 2005].

3.4 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section plusieurs résultats numériques qui illustrent un phénomène vibroacoustique transitoire généré par les vibrations d'une plaque couplée à un fluide environnant. Dans une première partie nous validerons notre méthode en comparant nos résultats avec un code élément fini de couplage fluide-structure 3D/3D réalisé dans le cadre des travaux de thèse de J.Diaz [Diaz, 2005]. Puis, nous proposerons une étude de performance qui mettra en évidence la convergence en ordre et en maillage de notre méthode ainsi que son potentiel sur un gros cas de calcul. Quelques instantanés du champ de pression et du déplacement en flexion de la plaque illustreront le phénomène physique que l'on cherche à simuler.

3.4.1 Validation de la méthode

Nous proposons dans cette section de valider notre méthode en comparant nos résultats avec un code élément fini de couplage fluide-structure 3D/3D dans lequel la partie structure est modélisée par le système de l'élasticité linéaire. Cette démarche de validation est la suite logique de la démarche établie pour valider notre code de plaque. Nous supposons que la structure est en aluminium ($\rho = 2700kg.m^{-3}$, $E = 7.4 \cdot 10^{10}Pa$, $\nu = 0.34$) et soumise à la force localisée de chargement $f(x, t) = f_1(t)f_2(x)$ avec (cf section 2.6)

$$f_1(t) = -2\pi^2 f_0^2 (2\pi^2 (f_0 t - 1) e^{-\pi^2 (f_0 t - 1)^2}) , \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{-\pi^2 |x|^2}{r^2} & \text{si } |x| < r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La structure $\Sigma = [-5, 5] \times [-5, 5]$ est couplée au fluide $\Omega = [-6, 6] \times [-6, 6] \times [-2, 2]$ où $c = 340m.s^{-1}$. La fréquence centrale de la source est $f_0 = 340Hz$ de sorte que la longueur d'onde du fluide soit $\lambda = 1$. Nous choisissons l'épaisseur de plaque $\delta = 0.1$ pour laquelle nous savons que les déplacements en flexion du modèle de élastodynamique 3D et du modèle de Reissner-Mindlin sont identiques sans couplage (cf section 2.6). Pour les deux codes, nous utiliserons un maillage conforme (cf Fig. 3.4) Le code 3D/3D est basé sur une méthode conforme et impose l'utilisation d'éléments \mathcal{Q}^5 (pour le fluide et la structure). Pour notre modèle de vibroacoustique nous utiliserons des éléments \mathcal{Q}^6 sur la plaque et \mathcal{Q}^7 dans le fluide. Enfin, nous prendrons $\Delta t = 6.6 \cdot 10^{-6}$ pour le code 3D/3D et $\Delta t = 4.3 \cdot 10^{-7}$ pour le code vibroacoustique. On compare alors à l'aide des deux codes les vitesses transverses en $X_0 = (0, 0, 0)$ (point \bullet sur la Fig. 3.4) et les pressions au point $X_1 = (0, 0, 0.5)$ (point \bullet sur la Fig. 3.4). Sur la figure 3.5 on peut voir que les pressions et les vitesses transverses calculées par les deux codes sont relativement semblables. Les courbes de chaque cas ne sont pas parfaitement confondues car le maillage fluide \mathcal{Q}^5 n'est pas tout à fait assez précis. Cependant ce cas 3D/3D nécessite déjà environ 15h de temps de calcul et est suffisamment convaincant pour valider notre méthode.

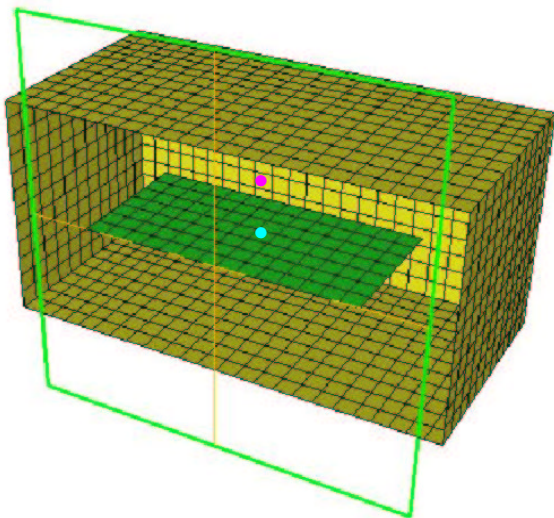


FIG. 3.4: Maillage vibroacoustique conforme.

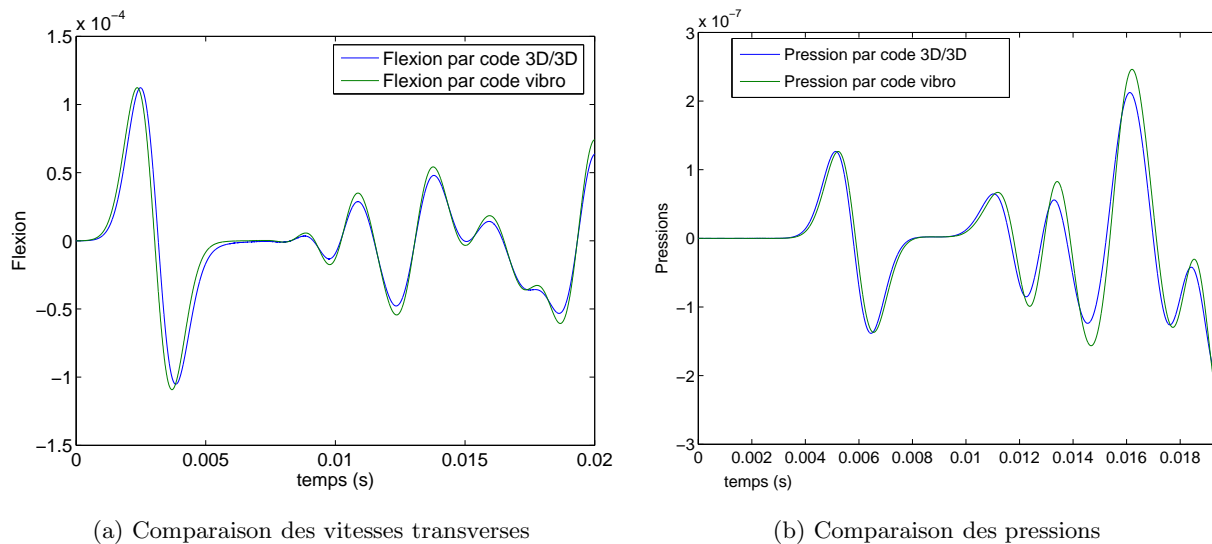


FIG. 3.5: Validation de la méthode : Comparaison des pressions et des vitesses transverses.

3.4.2 Etude numérique de convergence et de performance

3.4.2.1 Convergence et précision

Notre code de calcul étant validé, nous proposons ici quelques résultats numériques qui mettent en évidence la convergence de notre méthode ainsi que le gain de performance fourni par l'utilisation d'ordres élevés. Pour ce faire, nous reprenons exactement les mêmes paramètres physiques et géométriques que dans la section précédente (section de valida-

tion). On calcule une solution de référence (v_{ref}, p_{ref}) à l'aide d'un maillage Q^7/Q^7 (plaque/air) très raffiné. Pour différents ordres d'approximation, on s'intéresse au temps de calcul et au stockage mémoire nécessaires pour obtenir une solution précise à 4% c'est dire une solution (v_h, p_h) telle que

$$\frac{\|v_h(x_0, t) - v_{ref}(x_0, t)\|_{l_2[0,T]}}{\|v_{ref}(x_0, t)\|_{l_2[0,T]}} \simeq 4\% \quad , \quad \frac{\|p_h(x_1, t) - p_{ref}(x_1, t)\|_{l_2[0,T]}}{\|p_{ref}(x_1, t)\|_{l_2[0,T]}} \simeq 4\% \quad . \quad (3.4.1)$$

La plage de temps considérée est $[0, T] = [0, 2 \cdot 10^{-2}]$. On considère alors 3 cas de calculs pour des maillages (plaque/fluide) utilisant successivement des éléments Q^3/Q^5 , Q^4/Q^6 , Q^6/Q^7 . On utilise dans chaque cas le plus grand pas de temps autorisé par la condition de stabilité. Une analyse quantitative de l'erreur commise et du coût en temps de calcul et degré de liberté requis est donné dans le tableau ci dessous.

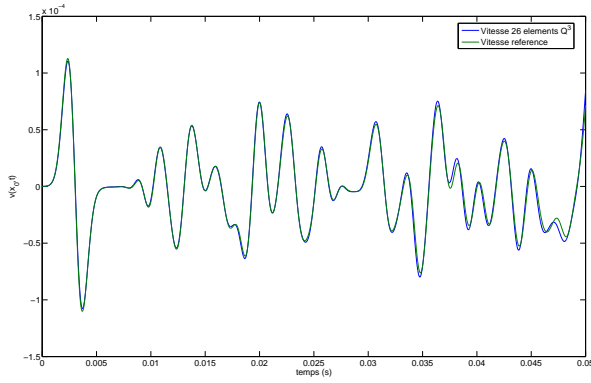
Ordre : Σ/Ω	Stockage (ddl) Σ/Ω	Δt	temps CPU (s)	Erreur relative : Σ/Ω (%)
3/5	5776 / 1 499 872	1.1e-5	36 min 22s	4.2% / 4.1%
4/6	4761 / 800 522	1e-5	22 min 1s	3.7% / 4%
6/7	3721 / 214 286	0.94e-5	8 min 25s	2.3% / 3.3%

Les résultats de ce tableau montrent encore une fois que l'utilisation d'ordre élevé permet de diminuer sensiblement le temps de calcul et le nombre de ddl pour obtenir une précision donnée. L'utilisation d'éléments Q^6/Q^7 divise par 4.5 le temps de calcul et par 7 le nombre de ddl requis pour satisfaire (3.4.1) par rapport à un choix d'éléments Q^3/Q^5 , et ce, sans pénaliser le pas de temps. Pour chaque cas, $v_h(x_0, t)$ et $p_h(x_1, t)$ sont illustrés avec leur solution de référence associée sur la figure 3.6.

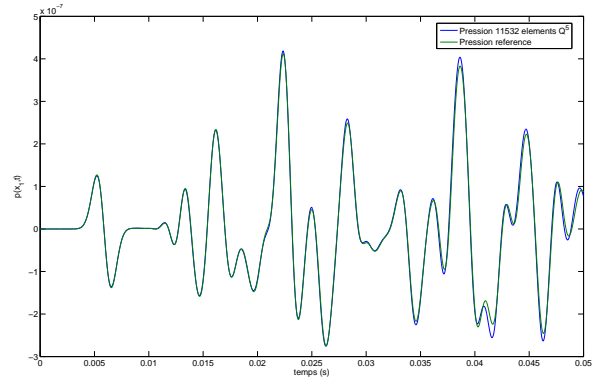
3.4.2.2 Potentiel de la méthode : Un gros cas de calcul.

Afin d'illustrer le phénomène physique que l'on cherche à simuler, la figure 3.7 propose plusieurs instantanés représentant les vibrations d'une plaque en aluminium et le champ de pression généré par celles-ci au cours du temps. A titre d'illustration, une coupe du champ de pression dans le plan (0y) et sa trace sur la plaque sont illustrés sur la figure 3.8. Pour ce cas de calcul, la source et la fréquence sont identiques au deux sections précédentes ($f_0 = 340Hz$). On a cependant augmenté de façon significative la taille du domaine de calcul : $\Sigma = [-10, 10]^2$ et $\Omega = [-16, -16]^2 \times [-10, 10]$. Le domaine fluide représente donc 20 longueurs d'ondes acoustiques dans le plan (Oz) et 32 longueurs d'ondes acoustiques dans le plan de la plaque! A l'aide d'un maillage approprié constitué d'élément Q^6 sur la plaque et Q^7 dans le fluide, on a simulé le phénomène de couplage fluide structure durant 0.2s. Sur la figure 3.7 on peut observer sur les instantanés de gauche le champ de pression au cours du temps et, à droite, le déplacement en flexion associé au même instant. Un tel cas met en évidence le potentiel de notre méthode en termes de temps de calcul et de minimisation du stockage mémoire. En effet, le maillage utilisé induit 10 000 000 de degrés de libertés. Il est absolument impensable (à cause du stockage mémoire requis) d'assembler des matrices de masse et de rigidité sur un tel maillage. On comprend ici l'intérêt fondamental des formulations mixtes et des algorithmes de produits matrice-vecteur proposés. Pour les mêmes raisons, il est inimaginable de résoudre un système linéaire à chaque pas de temps

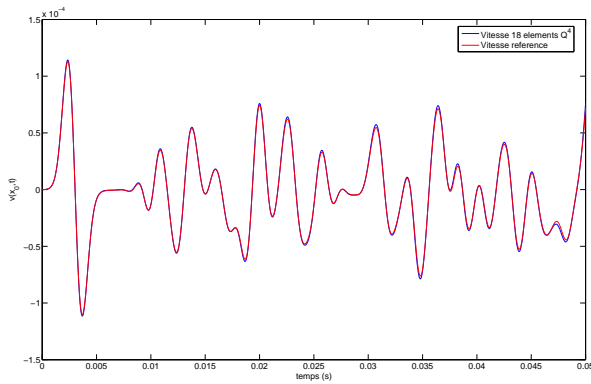
pour un cas de calcul de cette taille. L'utilisation du principe de condensation de masse est alors un atout primordial. Enfin l'utilisation d'ordre élevé nous a permis de limiter sensiblement le temps de calcul. Au final, cette simulation a pris "seulement" 14h et 1.3Go de mémoire RAM sur un PC de bureau équipé d'un processeur cadencé à 3.2 GHz.



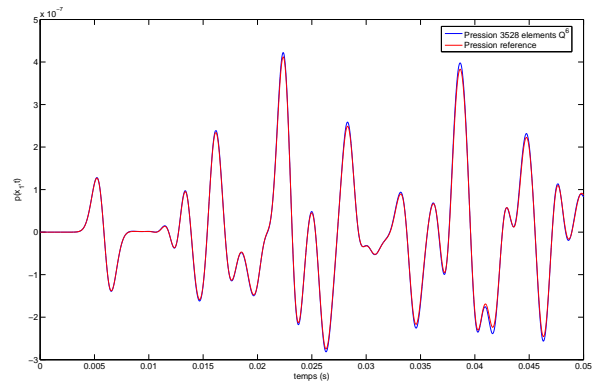
(a) Vitesse transverse avec maillage Q^3/Q^5



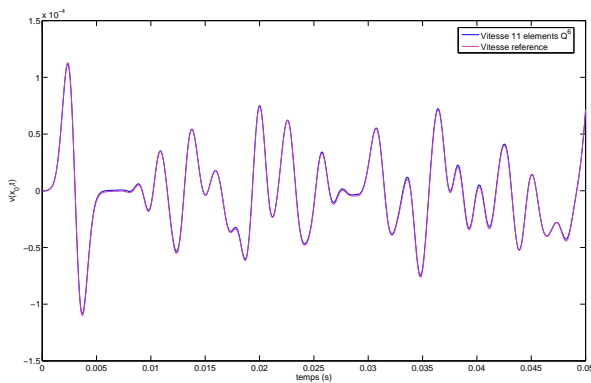
(b) Pression avec maillage Q^3/Q^5



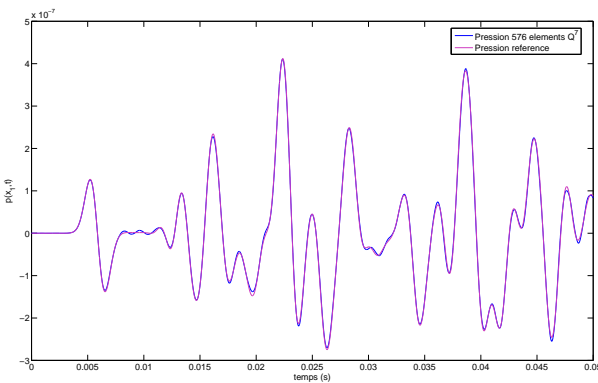
(c) Vitesse transverse avec maillage Q^4/Q^6



(d) Pression avec maillage Q^4/Q^6

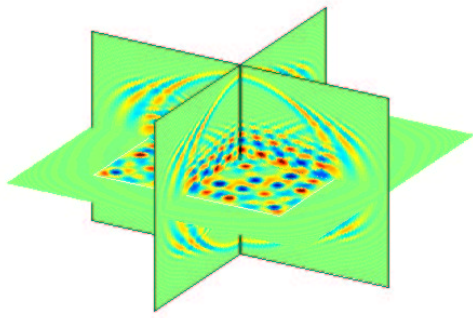


(e) Vitesse transverse avec maillage Q^6/Q^7

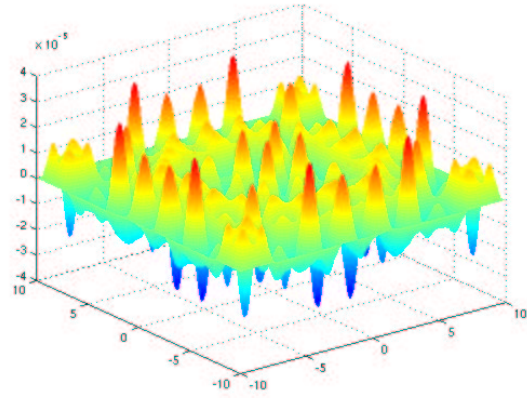


(f) Pression avec maillage Q^6/Q^7

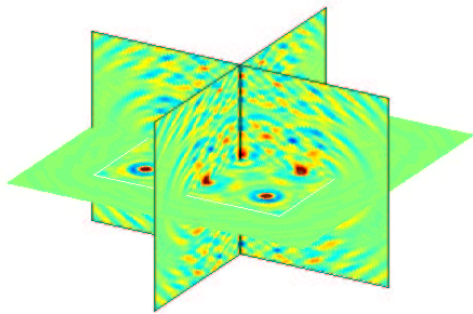
FIG. 3.6: Convergence pour différents ordres d'approximation.



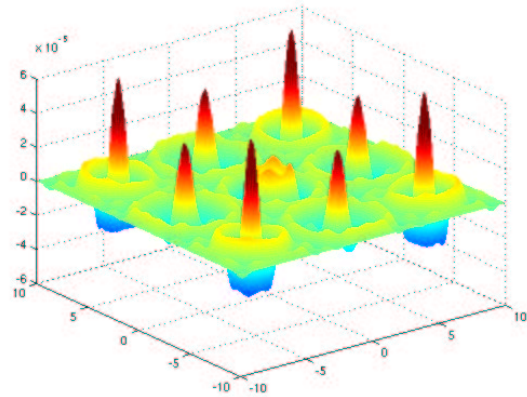
(a) Pression à $t=0.04s$



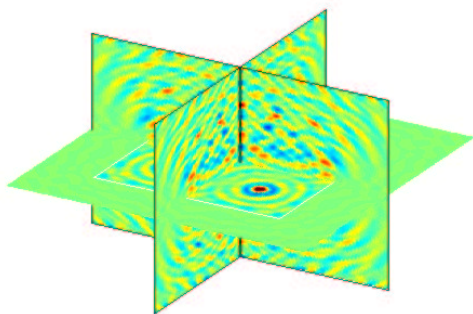
(b) Déplacement en flexion associé



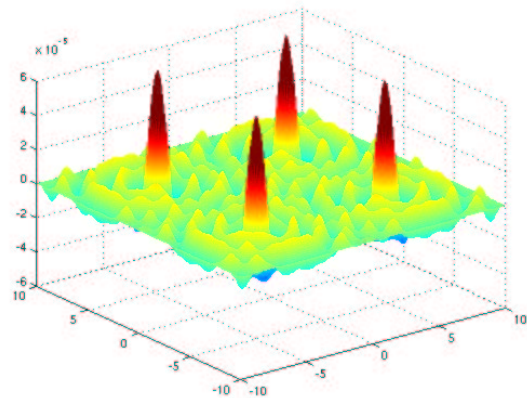
(c) Pression à $t=0.097s$



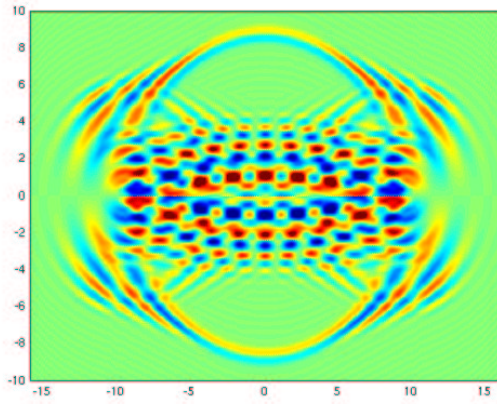
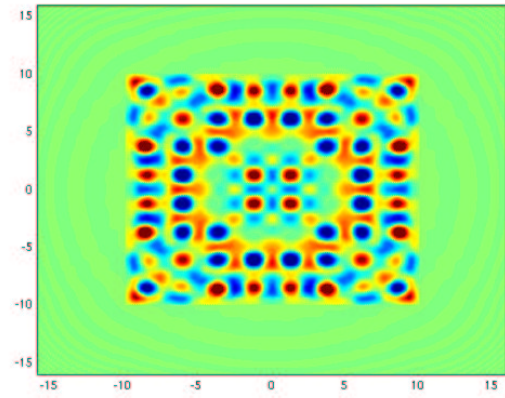
(d) Déplacement en flexion associé



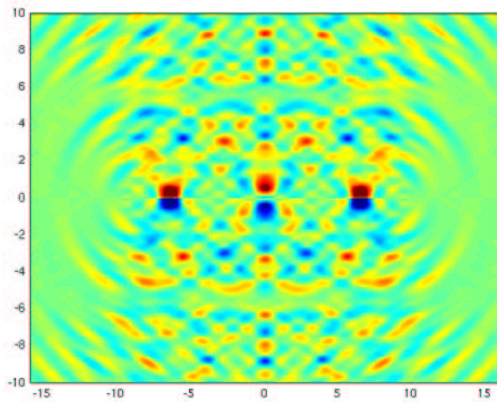
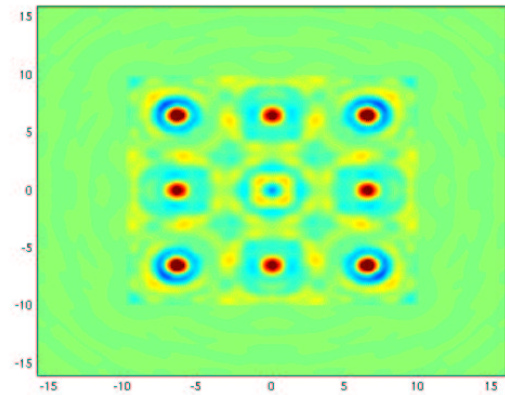
(e) Pression à $t=0.14s$



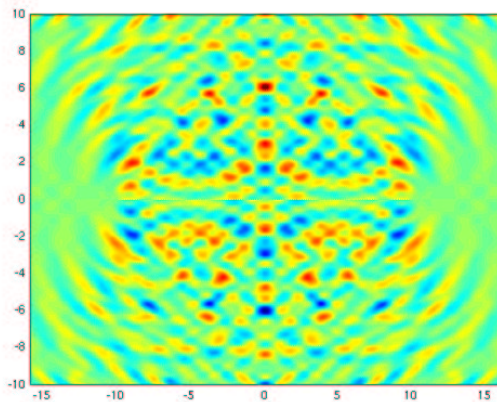
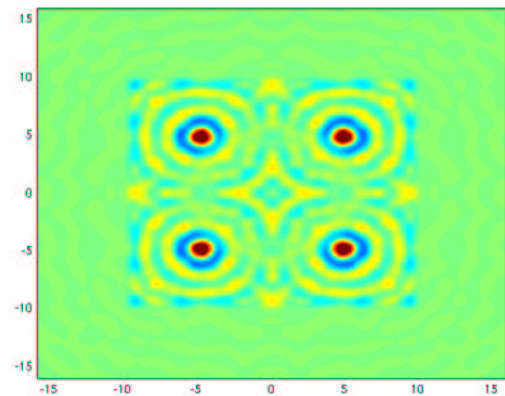
(f) Déplacement en flexion associé

(a) Pression à $t=0.04s$ dans le plan $(0y)$ 

(b) Trace de la pression sur la plaque

(c) Pression à $t=0.097s$ dans le plan $(0y)$ 

(d) Trace de la pression sur la plaque

(e) Pression à $t=0.14s$ dans le plan $(0y)$ 

(f) Trace de la pression sur la plaque

FIG. 3.8: Un autre angle de vue pour le champ de pression.

Deuxième partie

Couplage éléments finis-potentiels
retardés: Application à la
vibroacoustique instationnaire et
aux conditions aux limites
transparentes.

Chapitre 4

Couplage éléments finis-potentiels retardés pour la vibroacoustique instationnaire

Dans ce chapitre nous proposons une méthode numérique pour la vibroacoustique instationnaire qui traite la partie acoustique du problème de couplage par équation intégrale. Notre objectif principal est de construire un schéma de couplage garanti stable. Nous montrerons dans une première partie que le couplage “naturel” entre une méthode volumique (éléments finis en espace/différences finies en temps) et une méthode d’équation intégrale conduit à un schéma dont ne sait pas, a priori, démontré la stabilité. Dans une seconde partie, nous proposerons un schéma nouveau et garanti stable. Le point clé de la méthode sera l’utilisation de grilles décalées en temps pour la discrétisation de l’équation intégrale. La stabilité sera démontré à l’aide de techniques énergétiques.

Contenu

4.1	Introduction	139
4.2	Un problème modèle	140
4.2.1	Un résultat mathématique : Existence, unicité, régularité.	141
4.2.1.1	Espaces fonctionnels	141
4.2.1.2	Un résultat d'existence-unicité	142
4.3	Un opérateur Dirichlet-Neumann et ses propriétés	142
4.3.1	Définition formelle de l'opérateur	143
4.3.2	Cadre fonctionnel et principales propriétés de N_Σ	143
4.3.3	Une formule de représentation explicite pour N_Σ .	148
4.4	Formulation surfacique pour le système vibroacoustique	152
4.4.1	Une formulation variationnelle non uniforme en espace et en temps	155
4.5	Le schéma d'approximation espace-temps naturel	156
4.5.1	Discrétisation du noyau intégral N_Σ	156
4.5.1.1	Espaces d'approximation et notations	156
4.5.1.2	Discrétisation de l'opérateur N_Σ	158
4.5.2	Un schéma naturel pour le problème couplé	163
4.5.2.1	Le schéma	163
4.5.2.2	Le problème de la stabilité	166
4.5.3	Un schéma stable	167
4.5.3.1	Une formulation variationnelle "uniformisée"	167
4.5.3.2	Discrétisation par éléments finis espace-temps	169
4.5.3.3	Analyse de stabilité	170
4.5.4	Une drôle de coïncidence	172
4.5.5	Conclusion de ce chapitre.	173
4.6	Un schéma de couplage éléments finis/potentiels retardés utilisant des grilles décalées	173
4.6.1	Construction du schéma numérique	174
4.6.2	Reformulation matricielle du schéma	176
4.6.3	Algorithme de résolution	179
4.6.4	Analyse de stabilité	182
4.7	Extension aux vibrations d'une plaque	186
4.7.1	Le cas d'une plaque de type Kirchhoff-Love	186
4.7.2	Le cas d'une plaque de type Reissner-Mindlin	187
4.8	Résultats numériques	189
4.8.1	Les vibrations d'une membrane	189
4.8.2	Les vibrations d'une plaque	190

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode numérique pour la vibroacoustique instationnaire qui constitue une alternative à celle développée dans le chapitre 3. Nous supposons que le fluide entourant la plaque est homogène (hypothèse peu restrictive en pratique) ce qui nous permet de connaître explicitement la fonction de Green du problème acoustique extérieur. La méthode numérique que nous proposons consiste alors à coupler une méthode d'éléments finis de frontière adaptée pour la résolution des équations intégrales temporelles avec un schéma classique de type éléments finis en espace/différences finies en temps pour l'équation de plaque (cf. chapitre 2). L'approximation numérique de la solution de l'équation intégrale associée au problème de diffraction sans couplage est en soit un sujet très délicat. Une méthode basée sur l'utilisation d'éléments finis espace-temps pour la discrétisation des opérateurs intégraux a été développée et démontrée stable d'un point de vue théorique dans [Duong, 1987]. Cette approche a été appliquée par la suite aux équations de l'élasticité linéaire [Bécache, 1991] et aux équations de Maxwell [Bachelot et Pujols, 1992], [Terrasse, 1993], [Bachelot et Lange, 1995].

Notre objectif est de coupler ce type d'approximation avec une méthode volumique temporelle basée sur une approximation par éléments finis en espace complétée par un schéma aux différences finies en temps.

La formulation variationnelle proposée par [Duong, 1987] a ceci de particulier qu'elle utilise des fonctions tests en temps un degré moins régulières que les fonctions de base de l'espace d'approximation. Ce décalage de régularité, motivé par l'identité d'énergie satisfaite par la solution du problème continu, permet de construire un schéma espace-temps dont la propriété fondamentale est d'être inconditionnellement stable. Pour cette raison, nous nous contraindrons à utiliser cette méthode de discrétisation pour la partie acoustique de notre problème de couplage.

Nous verrons que le traitement "naturel" des termes de couplage par différences finies centrées dans l'équation de plaque (cf équation 3.3.8) et par éléments finis espace-temps dans l'équation acoustique, conduit à un schéma couplé dont on ne sait pas, a priori, démontrer la stabilité par technique d'énergie. Le problème est du à une "asymétrie" des termes de couplage induite par l'utilisation de deux méthodes d'approximation différentes pour les équations acoustiques et mécaniques.

Nous allons proposer une nouvelle méthode pour obtenir un schéma de couplage conservatif

Le point clé de notre méthode : L'idée de base pour construire un schéma qui vérifie un équivalent discret de l'identité 3.2.1 (permettant ainsi de garantir un résultat de stabilité) est la suivante : on utilisera

- (i) des éléments finis en espace combiné à un θ -schéma en temps (avec un pas Δt) pour discrétiser l'équation de plaque,
- (ii) des éléments finis espace/temps pour la discrétisation de l'équation acoustique, projetés deux fois sur deux grilles décalées définies à partir du pas de temps $2\Delta t$.

Le plan du chapitre : Afin de ne pas compliquer inutilement la présentation de notre méthode, nous présenterons celle-ci sur un problème modèle dans lequel on remplace l'équation de plaque par une équation de membrane. La majeure partie de ce chapitre sera donc consacré à la présentation et à l'analyse de notre méthode sur le cas de la membrane. L'extension naturelle de notre méthode au modèle de plaque est traitée au chapitre 4.7. Les grandes lignes de notre étude seront les suivantes :

- Au chapitre 4.3, on décrit et rappelle quelques propriétés d'un opérateur de type Dirichlet to Neumann qui permet de reformuler le problème de couplage entièrement sur la membrane.
- Au chapitre 4.5, nous rappellerons la méthode de discrétisation proposé par [Ha-Duong, 2003] pour les équations intégrales et nous montrerons que le couplage "naturel" de ce type de méthode avec une méthode volumique temporelle conduit à un schéma dont on ne sait pas, a priori, démontré la stabilité.
- Au chapitre 4.5.3, nous proposerons un schéma garanti stable selon une approche très semblable à celle proposée par [Bachelot *et al.*, 2001] basée sur une discrétisation globale du système couplé par éléments finis espace temps. Nous mettrons en évidence un lien étonnant entre ce schéma et le précédent.
- Au chapitre 4.6, nous proposerons un nouveau schéma de couplage garanti stable qui utilise des grilles décalées pour l'approximation de l'équation intégrale.

4.2 Un problème modèle

Pour la géométrie, nous utiliserons les notations (notamment pour distinguer les opérateurs et variables 2D et 3D) détaillées au début du chapitre 3.1.1. Dans ce qui suit nous noterons ρ la densité du fluide Ω et c la vitesse du son. De la même façon, si on note σ la densité surfacique de la membrane et T sa tension, alors $c_m = \sqrt{T/\sigma}$ représente la vitesse des ondes se propageant dans la membrane [Joly et Rhaouti, 1999]. Pour des raisons de simplicité, on considèrera une membrane homogène, ce qui n'est en soit absolument pas essentiel. On considère enfin que la membrane est soumise à la densité de forces surfaciques $f(x, t)$, $x \in \Sigma$, $t \geq 0$. Les équations de notre modèle mathématique sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = f + \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right], & x \in \Sigma, \quad t > 0, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

à laquelle on rajoute la condition de couplage fluide structure inchangée 3.1.5 à savoir :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Sigma_+} = \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Sigma_-} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad x \in \Sigma, \quad t > 0. \quad (4.2.2)$$

Il reste, pour compléter notre modèle, à rajouter la condition d'encastrement

$$v(x, t) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad t > 0. \quad (4.2.3)$$

et les conditions initiales homogènes

$$\begin{cases} v(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0, & x \in \Sigma, \\ p(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \Sigma. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

4.2.1 Un résultat mathématique : Existence, unicité, régularité.

Dans un premier temps nous allons réécrire le système vibroacoustique (4.2.1) sous forme d'un problème équivalent uniquement défini sur la membrane Σ . Pour cela nous allons reformuler la condition de couplage (4.2.2) à l'aide d'un opérateur Dirichlet-Neumann en utilisant les formules de représentation intégrales données dans [Ha-Duong, 2003]. Nous proposons dans la section qui suit un cadre fonctionnel sur $\Sigma \times [0, T]$ qui nous permettra de définir rigoureusement cet opérateur.

4.2.1.1 Espaces fonctionnels

Introduisons tout d'abord quelques notations pour les fonctions de la variable $t \in [0, T]$ à valeur dans l'espace de Sobolev X qui sont restrictions de fonctions causales d'un espace d'un espace de Sobolev sur \mathbb{R} . Plus précisément, étant donné $\nu \in \mathbb{R}^+$ on pose :

$$\mathcal{H}^\nu(0, T; X) = \{ u \in L^2(0, T; X) / \exists \tilde{u} \in H_+^\nu(\mathbb{R}; X) \text{ tel que } u(t) = \tilde{u}(t) \text{ si } 0 \leq t \leq T \}.$$

où, par définition,

$$H_+^\nu(\mathbb{R}; X) = \{ u \in H^\nu(\mathbb{R}; X) \mid u(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \}.$$

On munit $\mathcal{H}^\nu(0, T; X)$ de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{H}^\nu(0, T; X)} = \inf_{u \in H^\nu(\mathbb{R}; X), \tilde{u}|_{[0, T]} = u} \|u\|_{H^\nu(\mathbb{R}; X)},$$

et on notera $\mathcal{H}^{-\nu}(0, T; X)$ le dual de $\mathcal{H}^\nu(0, T; X)$.

Remarque 4.2.1 *La borne inférieure 0 de $[0, T]$ joue évidemment un rôle particulier. On peut montrer par exemple que [Lions et Magenes, 1968]*

- pour $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$, $\mathcal{H}^\nu(0, T; X) = H^\nu(0, T; X)$,

- pour $\nu = \frac{1}{2}$, $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0, T; X) = \left\{ u \in H^{\frac{1}{2}}(0, T; X) / \int_0^T \|u(t)\|_X^2 \frac{dt}{t} < +\infty \right\}$,
- pour $\frac{1}{2} < \nu < \frac{3}{2}$, $\mathcal{H}^\nu(0, T; X) = \{u \in H^\nu(0, T; X) / u(0) = 0\}$.

De plus, pour $T_2 > T_1$, $\mathcal{H}^\nu(0, T_1; X)$ n'est rien d'autre que l'espace généré par les restrictions à $]0, T_1[$ des fonctions de $\mathcal{H}^\nu(0, T_2; X)$.

4.2.1.2 Un résultat d'existence-unicité

En s'inspirant des arguments de la section 3.2.2 on donne dans le théorème qui suit un résultat d'existence-unicité et de régularité pour le problème (4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4).

Théorème 4.2.1 *Si la donnée*

$$f \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Sigma)) \tag{4.2.5}$$

alors le problème (4.2.1, 4.2.2, 4.2.4) admet une solution unique (v, p) où

$$\begin{cases} v \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Sigma)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Sigma)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; H^2(\Sigma)) \\ p \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)), \quad \Delta p \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Preuve :

Ce théorème est juste l'application du théorème de Hille-Yosida pour lequel les arguments sont donnés en section 3.2.2. \diamond

4.3 Un opérateur Dirichlet-Neumann et ses propriétés

Dans ce chapitre on introduit un opérateur de type Dirichlet-Neumann N_Σ que l'on peut caractériser explicitement à partir de formules de représentation intégrales temporelles établies pour les problèmes de diffraction [Duong, 1987], [Ha-Duong *et al.*, 2003].

L'essentiel de ce qui est développé dans cette section est bien connu mais indispensable à la compréhension de ce qui suit, notamment les propriétés de positivité vérifiées par N_Σ qui seront à la base des résultats de stabilité de notre méthode numérique. De plus, nous choisissons ici de redévelopper les définitions et propriétés relatives à la notion de potentiel de double couche [Ha-Duong, 2003] sous un angle différent, notamment en utilisant un cadre fonctionnel approprié au cas des temps finis (sur $\Sigma \times [0, T]$, $T < \infty$).

4.3.1 Définition formelle de l'opérateur

Dans cette section, on s'intéresse aux propriétés du problème intermédiaire de diffraction d'une onde acoustique par un obstacle fixe (Σ) avec condition de Neumann. Ce problème consiste donc à résoudre l'équation des ondes dans tout l'espace où l'on suppose que la dérivée normale de l'inconnue du problème est continue. En notant φ le saut de pression, il s'agit de résoudre le problème :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} - \Delta u_\varphi = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial n} \right] = 0, \quad [u_\varphi] = \varphi & \text{sur } \Sigma, \\ u_\varphi(x, 0) = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Formellement, on définit alors l'opérateur N_Σ par :

$$N_\Sigma : \varphi \longrightarrow N_\Sigma \varphi = \frac{\partial u_\varphi}{\partial n} \Big|_\Sigma, \quad (4.3.2)$$

qui est bien défini puisque $\frac{\partial u_\varphi}{\partial n}$ est continu sur Σ .

Dans les sections suivantes nous :

- définirons un cadre fonctionnel pour définir rigoureusement N_Σ ,
- donnerons les principales propriétés vérifiées par N_Σ ,
- donnerons une expression explicite de N_Σ (ce qui est indispensable pour les calculs numériques).

4.3.2 Cadre fonctionnel et principales propriétés de N_Σ

Notre premier objectif est d'établir un cadre fonctionnel (utilisant les espaces du chapitre 4.2.1.1) dans lequel N_Σ est rigoureusement défini. Ce sujet a déjà été traité [Ha-Duong, 2003], [Abboud *et al.*, 2000] et notre objectif n'est pas ici de donner une synthèse exhaustive de l'analyse fonctionnelle existante mais de donner les informations indispensables à la clarté et à la rigueur de ce qui suivra. Cependant, le cadre fonctionnel que l'on propose n'est pas celui traditionnellement utilisé pour les potentiels retardés.

La première étape est de définir précisément N_Σ pour des fonctions φ suffisamment régulières. Comme d'habitude la notion de condition au bord de Neumann est à prendre au sens faible.

Proposition 4.3.1 *Soit $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^+; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))$. Le problème (4.3.1) admet une unique solution :*

$$u_\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)), \quad (4.3.3)$$

avec, de plus,

$$\Delta u_\varphi \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

Preuve :

Soit $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^+; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))$ et $z_\varphi \in C^3(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$ un relèvement de φ solution problème stationnaire

$$\begin{cases} -\Delta z_\varphi + z_\varphi &= 0 \\ [z_\varphi] &= \varphi \end{cases}$$

Alors $w = u_\varphi - z_\varphi$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z_\varphi}{\partial t^2} + z_\varphi & \text{sur } \Omega, \\ \left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial n} \right] = 0, \quad [w] = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Comme $\frac{\partial^2 z_\varphi}{\partial t^2} + z_\varphi \in C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$ les arguments classiques [Joly, 2002] de théorie des semi-groupes permettent d'établir la régularité (4.3.3) pour w et donc pour u_φ . \diamond

Par théorème de trace (pour les fonctions de $H^1(\Sigma)$, on en déduit que :

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial n} \Big|_{\Sigma^+} \equiv \frac{\partial u_\varphi}{\partial n} \Big|_{\Sigma^-} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} \in C^0(\mathbb{R}^+; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)'). \quad (4.3.4)$$

Cela nous permet alors de définir l'opérateur

$$\left| \begin{array}{ll} N_\Sigma : C^3(\mathbb{R}^+; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)) & \longrightarrow C^0(\mathbb{R}^+; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)') \\ \varphi & \longrightarrow N_\Sigma \varphi = \frac{\partial u_\varphi}{\partial n} \Big|_{\Sigma}. \end{array} \right. \quad (4.3.5)$$

Le résultat (4.3.5) est loin d'être optimal en terme de régularité requise pour φ . Des résultats plus précis peuvent être obtenus par des techniques de type Fourier-Laplace, desquelles ont déduit la régularité en temps de φ via des estimations dépendantes du paramètre fréquence de la transformation utilisée [Ha-Duong, 2003]. Ce type de techniques mène naturellement à des estimations dans des espaces de Sobolev à poids (voir aussi [Terrasse, 1993], [Abboud *et al.*, 2000]) sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ et $\Sigma \times \mathbb{R}^+$. Cependant, par des techniques de troncature et des arguments de causalité proches de ceux que l'on a utilisés pour obtenir des estimations éléments finis dans le domaine temporel (cf. chapitres 1.4.2), on peut obtenir des résultats de régularité sur $\Omega \times [0, T]$ proches de ceux obtenus dans [Ha-Duong, 2003] sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ sans utiliser les techniques de type Fourier-Laplace. C'est le point de vue que nous choisissons d'adopter ici.

Pour $T > 0$, on note $\mathcal{Q}_T = \Omega \times]0, T[$ et $\mathcal{S}_T = \Omega \times]0, T[$. On introduit alors l'espace fonctionnel

$$V(\mathcal{S}_T) = L^2(0, T; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)) \cap \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0, T; L^2(\Sigma)) \quad (4.3.6)$$

et son dual

$$V(\mathcal{S}_T)' = L^2(0, T; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)') \cap \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(0, T; L^2(\Sigma)),$$

que l'ont munit de leurs normes naturelles $\|\cdot\|_{V(\mathcal{S}_T)}$ et $\|\cdot\|_{V(\mathcal{S}_T)'}$.

Proposition 4.3.2 *Il existe une constante $C_T > 0$ telle que*

$$\forall \varphi \in C^3(\mathbb{R}^+; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)), \quad \|N_\Sigma \varphi\|_{V(\mathcal{S}_T)'} \leq C_T \|\varphi\|_{V(\mathcal{S}_T)}. \quad (4.3.7)$$

Preuve :

Cette estimation n'est inhérente au cas de la plaque et reste valable pour toute autre surface suffisamment régulière. Dans notre cas, puisque Σ est incluse dans le plan $x_3 = 0$, cette estimation se démontre facilement en utilisant la transformée de Fourier-Laplace en temps et la transformée de Fourier en espace. En effet, notons

$$\tilde{\varphi}(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, t) & , \quad x \in \Sigma, \quad t \in [0, T] \\ 0 & , \quad x \in \{x_3 = 0\} \setminus \Sigma, \quad t \in [0, T] \end{cases}.$$

Soit $s \in \mathbb{C}^+$ (cf. chapitre 1) le paramètre Fourier-Laplace en temps et $k \in \mathbb{R}^2$ le paramètre Fourier en espace. On note alors $\hat{\varphi}(k, s)$ la transformée de $\tilde{\varphi}(x, t)$ et on renvoie à [Lions et Magenes, 1968] pour la définition des espaces de Sobolev par transformée de Fourier-Laplace. Comme Σ est plan, on en déduit que

$$\widehat{\frac{\partial u_\varphi}{\partial n}}(k, s, x_3 = 0) = \frac{1}{2} (k^2 + s^2/c^2)^{\frac{1}{2}} \hat{\varphi}(k, s), \quad (\text{avec } \mathcal{R}e(k^2 + s^2/c^2)^{\frac{1}{2}} > 0).$$

Soit $\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(0, T; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))$. D'après le théorème de Plancherel on a

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \frac{\partial u_\varphi}{\partial n} \tilde{\psi} e^{-2\eta t} \right| = \left| \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \frac{\partial \widehat{u_\varphi}}{\partial n} \widehat{\psi} \right| \leq C \left((|k|^2 + |s|^2)^{\frac{1}{2}} |\hat{\varphi}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left((|k|^2 + |s|^2)^{\frac{1}{2}} |\widehat{\psi}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Par densité de $\mathcal{D}(0, T; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))$ dans $V(\mathcal{S}_T)$ [Lions et Magenes, 1968], on en déduit que

$$\int_0^T \int_\Sigma \frac{\partial u_\varphi}{\partial n} \tilde{\psi} \leq C_T \|\tilde{\varphi}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})} \|\tilde{\psi}\|_{V(\mathcal{S}_T)}$$

On en conclut que :

$$\sup_{\tilde{\psi} \in V(\mathcal{S}_T)} \frac{\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial n}, \tilde{\psi} \right)}{\|\tilde{\psi}\|} \leq \inf_{\varphi, \tilde{\varphi}|_{[0, T]} = \varphi} \|\tilde{\varphi}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})} \quad \diamond$$

On peut se référer à [Lebeau et Schatzman, 1984] pour une étude approfondie de l'opérateur N_Σ dans le demi-plan.

Par densité de l'espace $C^3(\mathbb{R}^+; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))$ dans $V(\mathcal{S}_T)$ (modulo la troncature sur $[0, T]$), l'opérateur N_Σ peut être prolongé de manière unique en un opérateur (toujours noté N_Σ) tel que

$$N_\Sigma \in \mathcal{L}(V(\mathcal{S}_T), V(\mathcal{S}_T)'), \quad (4.3.8)$$

et on notera alors $b_T(\cdot, \cdot)$ sa forme bilinéaire associée :

$$b_T(\varphi, \psi) = \langle N_\Sigma \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}_T}, \quad \forall (\varphi, \psi) \in V(\mathcal{S}_T)^2, \quad (4.3.9)$$

(où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_T}$ désigne le crochet de dualité entre $V(\mathcal{S}_T)$ et $V(\mathcal{S}_T)'$) que l'on peut réécrire de la façon suivante :

$$b_T(\varphi, \psi) = \int_0^T \langle N_\Sigma \varphi(\cdot, t), \psi(\cdot, t) \rangle_\Sigma dt,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ désigne le crochet de dualité entre $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)'$ et $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

De plus pour tout $t \leq T$ on peut définir

$$b_t(\varphi, \psi) = b_T(\varphi, \chi_t \psi), \quad \forall (\varphi, \psi) \in V(\mathcal{S}_T)^2,$$

où χ_t est la fonction indicatrice de $[0, t]$. Nous allons maintenant donner un résultat de positivité fondamental pour l'opérateur N_Σ . Pour cela, on introduit l'espace

$$W(\mathcal{S}_T) = \mathcal{H}^1(0, T; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)) \cap \mathcal{H}^{\frac{3}{2}}(0, T; L^2(\Sigma)). \quad (4.3.10)$$

Puisque l'opérateur $\partial/\partial t$ envoie $W(\mathcal{S}_T)$ dans $V(\mathcal{S}_T)$, on peut définir, pour tout $t \leq T$, la forme bilinéaire :

$$p_t(\varphi, \psi) = b_t(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}), \quad \forall (\varphi, \psi) \in V(\mathcal{S}_T) \times W(\mathcal{S}_T). \quad (4.3.11)$$

A l'aide de ces notations, on est maintenant en mesure d'énoncer le

Théorème 4.3.1 *Pour tout $0 < t \leq T$ et $\varphi \in W(\mathcal{S}_T)$, la quantité :*

$$|\varphi|_{N, \mathcal{S}_t}^2 \stackrel{def}{=} p_t(\varphi, \varphi) \quad (4.3.12)$$

est positive. De plus, la forme quadratique

$$\varphi \in W(\mathcal{S}_T) \longrightarrow \|\varphi\|_{N, \mathcal{S}_T}^2 \stackrel{def}{=} \int_0^T p_t(\varphi, \varphi) dt \equiv \int_0^T |\varphi|_{N, \mathcal{S}_t}^2 dt \quad (4.3.13)$$

définit une norme notée $\|\cdot\|_{N, \mathcal{S}_T}$ sur $W(\mathcal{S}_T)^2$ qui satisfait (pour un certain α_T positif) :

$$\|\varphi\|_{N, \mathcal{S}_T}^2 \geq \alpha_T \|\varphi\|_{V(\mathcal{S}_T)}^2. \quad (4.3.14)$$

Preuve :

Evidemment il suffit de démontrer ce théorème pour $\varphi \in C^3(0, T; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))$, on conclut alors par densité. La solution u_φ du problème 4.3.1 est solution de l'équation variationnelle :

$$\iint_{\mathcal{Q}_t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} - \Delta u_\varphi \right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} dx ds = 0$$

En utilisant la formule de Green de part et d'autre de Σ (cf. preuve de (3.2.3)), on en déduit que :

$$\int_0^t \left\langle \left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial n} \right], \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right\rangle_\Sigma ds = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\frac{1}{c^2} \left| \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right|^2 + |\nabla u_\varphi|^2 \right) (x, t) dx.$$

Puisque $\frac{\partial u_\varphi}{\partial n}$ est continu et égal à $N_\Sigma \varphi$, alors par définition de $b_t(\cdot, \cdot)$ et $p_t(\cdot, \cdot)$ on a :

$$p_t(\varphi, \varphi) = \int_0^t \left\langle N_\Sigma \varphi, \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right\rangle_\Sigma ds = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\frac{1}{c^2} \left| \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right|^2 + |\nabla u_\varphi|^2 \right) (x, t) dx,$$

ce qui prouve la première partie du théorème. Si on intègre sur $[0, T]$ cette identité il vient :

$$\int_0^T p_t(\varphi, \varphi) dt = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{Q}_T} \left(\frac{1}{c^2} \left| \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right|^2 + |\nabla u_\varphi|^2 \right) dx dt.$$

de laquelle on déduit l'estimation (4.3.14) par continuité de l'application trace dans $H^1(\mathcal{Q}_T)$. \diamond

Remarque 4.3.1 *Suite a communication orale avec Gilles Lebeau, il apparaît que l'application $\varphi \rightarrow |\cdot|_{N, \mathcal{S}_T}$ définie en fait une norme. Cependant le complété de $V(\mathcal{S}_T)$ pour cette norme n'est a priori identifiable a aucun espace de Sobolev. Les arguments théoriques qui justifient ces propriétés sortent très largement du cadre de ce document et des compétences de son auteur.*

4.3.3 Une formule de représentation explicite pour N_Σ .

Nous allons maintenant exploiter le fait que nous considérons ici un milieu fluide homogène, ce qui va nous permettre de donner une expression explicite de l'opérateur N_Σ à partir de la fonction de Green associée au problème 4.3.1.

On rappelle tout d'abord (cf. [Ha-Duong, 2003],) que si u est la solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ égale à u^+ dans Ω^+ et u^- dans Ω^- , alors elle vérifie la formule de représentation intégrale

$$u(\mathbf{x}, t) = (S\psi)(\mathbf{x}, t) - (M\varphi)(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma \times \mathbb{R}^+ \quad (4.3.15)$$

où

$$\varphi = u^- - u^+, \quad \psi = \frac{\partial u^-}{\partial n} - \frac{\partial u^+}{\partial n}.$$

Dans le cas d'un milieu homogène, l'opérateur S , appelé potentiel de simple couche, est défini par

$$\psi \longrightarrow (S\psi)(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Sigma} G(\mathbf{x} - y, t - \tau) \psi(y, \tau) d\gamma_y d\tau, \quad (4.3.16)$$

et l'opérateur M , appelé potentiel de double couche, est défini par

$$\varphi \longrightarrow (M\varphi)(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{x} - y, t - \tau) \varphi(y, \tau) d\gamma_y d\tau, \quad (4.3.17)$$

où n_y désigne la normale à Σ au point $y \in \Sigma$ et G est la fonction de Green dans \mathbb{R}^3 de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ à savoir

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta(t - |\frac{\mathbf{x}}{c}|)}{4\pi c |\mathbf{x}|}.$$

Compte tenu de la continuité de sa dérivée normale sur Σ , la solution u_φ du problème 4.3.1 admet donc une représentation intégrale définie uniquement à partir d'un potentiel de double couche. En développant l'expression du noyau de Green dans 4.3.15 et en utilisant le fait que dans le cas de la plaque $n_y = (0, 0, 1)^T$, $\forall y \in \Sigma$ alors u_φ admet la formule de représentation intégrale suivante :

$$u_\varphi(\mathbf{x}, t) = - \int_{\Sigma} \frac{x_3}{|\mathbf{x} - y|} \left(\frac{\varphi(y, t - \tau(\mathbf{x}, y))}{|\mathbf{x} - y|^2} + \frac{1}{c} \frac{\dot{\varphi}(y, t - \tau(\mathbf{x}, y))}{|\mathbf{x} - y|} \right) dy$$

où $\tau(\mathbf{x}, y) = |\mathbf{x} - y|/c$ est appelé "temps retardé". Déterminer une expression de N_Σ revient donc à déterminer la dérivée normale de la formule de représentation précédente, c'est à dire de dériver par rapport à x_3 cette formule et d'estimer sa trace pour $x_3 = 0$. Ceci est relativement délicat à cause de la singularité de G quand $\mathbf{x} \rightarrow y \in \Sigma$. La formule que l'on obtient définit un noyau intégral hyper-singulier [Duong, 1987] inexploitable pour mettre en oeuvre une méthode numérique. Une façon de lever cette difficulté est d'exprimer le noyau N_Σ au sens faible, c'est à dire de fournir une expression explicite pour la forme bilinéaire $b_T(\varphi, \psi)$, qui est de plus la forme naturellement utilisée pour une approximation par éléments finis. L'idée est d'utiliser une intégration par parties astucieuse qui transfère les dérivées en espace du noyau de Green vers les fonctions tests [Nédélec, 1982].

Théorème 4.3.2 Soit $\varphi \in H^2(0, T; L^2(\Sigma)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Sigma))$ tq $\varphi(x, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = 0$,

$$\left| \begin{aligned} b_T(\varphi, \psi) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^T \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\ddot{\varphi}(y, t - \tau(x, y)) \psi(x, t)}{c^2 |x - y|} dx dy dt \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^T \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\nabla \varphi(y, t - \tau(x, y)) \cdot \nabla \psi(x, t)}{|x - y|} dx dy dt \end{aligned} \right. \quad (4.3.18)$$

pour toute fonction test $\psi \in V(\mathcal{S}_T) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Sigma))$.

Preuve :

Dans notre cas, Σ est plan, ce qui va nous permettre de donner une démonstration relativement simple en utilisant la transformée de Fourier.

Soit $\tilde{\varphi} \in H^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^2))$ telle que

$$\tilde{\varphi}(x, t) = 0, \quad \forall x \notin \overline{\Sigma}, \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}(x, t) = \varphi(x, t) \quad \forall x \in \Sigma, \quad \forall t \in [0, T].$$

Soit $\psi \in H^2(0, T; L^2(\Sigma)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Sigma))$ et $\tilde{\psi}$ son prolongement par 0 en dehors de \mathcal{S}_T . On utilise successivement la transformée de Fourier en temps et la transformée de Fourier en espace (chacune normalisée telle que le coefficient de la masse de Dirac soit 1 :

$$(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})(x, t) \xrightarrow{\mathcal{F}_t} (\widehat{\Phi}, \widehat{\Psi})(x, \omega) \xrightarrow{\mathcal{F}_x} (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})(k, \omega).$$

Par définition de $b_T(\cdot, \cdot)$, on peut écrire, grâce à la régularité de φ et ψ que :

$$b_T(\varphi, \psi) = \int_0^T \int_{\Sigma} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial n}(x, 0, t) \psi(x, t) dx dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial n}(x, 0, t) \tilde{\psi}(x, t) dx dt.$$

D'autre part on a :

$$\widehat{\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial n}}(k, \omega, x_3 = 0) = \frac{1}{2} (k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} \widehat{\varphi}(k, \omega), \quad \text{avec} \quad (k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (k^2 - \frac{(\omega + i\varepsilon)^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, en utilisant le théorème de Plancherel on a

$$\left| \begin{aligned} b_T(\varphi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} (k^2 - \omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}} \widehat{\varphi} \overline{\widehat{\psi}} dk d\omega. \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{ik \widehat{\varphi} \overline{ik \widehat{\psi}}}{(k^2 - \omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} dk d\omega + \frac{1}{c^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(i\omega)^2 \widehat{\varphi} \overline{\widehat{\psi}}}{(k^2 - \omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} dk d\omega. \end{aligned} \right.$$

Maintenant, en utilisant le fait que :

$$\mathcal{F}_x^{-1} \left[\frac{1}{2} (k^2 - \omega^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}|x|}}{4\pi|x|},$$

par transformée de Fourier inverse, il vient :

$$\mathcal{F}_x^{-1} \left(\frac{ik \widehat{\varphi}}{(k^2 - \omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}|x-y|}}{4\pi|x-y|} \nabla \Phi(y, \omega) dy.$$

En utilisant alors le théorème de Plancherel selon la variable x , il vient

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{ik \widehat{\varphi} \overline{ik \widehat{\psi}}}{(k^2 - \omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} dk = \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} e^{-i\frac{\omega}{c}|x-y|} \frac{\nabla \Phi(y, \omega) \overline{\nabla \Psi(x, \omega)}}{4\pi|x-y|} dx dy.$$

Maintenant, on remarque que

$$\mathcal{F}_t^{-1} \left[e^{-i\frac{\omega}{c}|x-y|} \Phi(y, \omega) \right] = \varphi(y, t - \tau(x, y)) .$$

Par conséquent, le théorème de Plancherel en la variable t (car $\text{supp } \tilde{\psi} \subset \bar{\Sigma} \times [0, T]$) donne

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{ik\widehat{\varphi} \overline{ik\widehat{\psi}}}{(k^2 - \omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} dk d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^T \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\nabla\varphi(y, \tau(x, y, t)) \cdot \nabla\psi(x, t)}{|x - y|} dx dy dt. \quad (4.3.19)$$

De la même façon,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(i\omega)^2 \widehat{\varphi} \overline{ik\widehat{\psi}}}{(k^2 - \omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} dk d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^T \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\ddot{\varphi}(y, \tau(x, y, t)) \psi(x, t)}{|x - y|} dx dy dt. \quad (4.3.20)$$

En sommant (4.3.19)+(4.3.20) on obtient le résultat voulu. \diamond

Remarque 4.3.2 Les intégrales dans (4.3.18) sont bien définies car [Nédélec, 1982]

$$(x, y) \longrightarrow |x - y|^{-1} \in L^2(\Sigma \times \Sigma)$$

Proposition 4.3.3 La formule (4.3.18) assure que $b_T(\varphi, \psi)$ est bien définie pour des fonctions moins régulières quand

$$(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}^2(0, T; H_0^1(\Sigma)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Sigma)).$$

Preuve:

Posons

$$I_1^T \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\Sigma \times \Sigma} g(x, y) f_T(x, y) dx dy, \text{ avec } \begin{cases} g(x, y) &= \frac{1}{4\pi|x - y|}, \\ f_T(x, y) &= \int_0^T (\ddot{\varphi}(y, \tau(x, y, t)) \psi(x, t)) dt. \end{cases}$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} |I_1^T| &\leq C \|g\|_{L^2(\Sigma \times \Sigma)} \iint_{\Sigma \times \Sigma} \left(\int_0^T |\ddot{\varphi}(y, \tau(x, y, t))|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} dx dy \iint_{\Sigma \times \Sigma} \left(\int_0^T |\psi(x, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} dx dy \\ &\leq C \|g\|_{L^2(\Sigma \times \Sigma)} \|\psi\|_{L^2(0, T; L^2(\Sigma))} \iint_{\Sigma \times \Sigma} \left(\int_{-\frac{|x-y|}{c}}^{T - \frac{|x-y|}{c}} |\ddot{\varphi}(y, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} dx dy, \quad s = \tau(x, y, t). \end{aligned}$$

Par causalité, $\varphi(x, s) = 0$ pour $s \in [-\frac{|x-y|}{c}, 0]$ et donc on peut déduire de la dernière inégalité :

$$|I_1^T| \leq C \|g\|_{L^2(\Sigma \times \Sigma)} \|\psi\|_{L^2(0, T; L^2(\Sigma))} \|\varphi\|_{\mathcal{H}^2(0, T; L^2(\Sigma))}$$

Par définition de g et d'après la remarque 4.3.2, I_1^T est donc bien définie si

$$(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}^2(0, T; L^2(\Sigma)) \times L^2(0, T; L^2(\Sigma)) .$$

Strictement de la même façon, on montre que la quantité

$$I_2^T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_0^T \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\nabla \varphi(y, t - \tau(x, y)) \cdot \nabla \psi(x, t)}{|x - y|} dx dy dt$$

est bien définie si $(\varphi, \psi) \in L^2(0, T; H_0^1(\Sigma))$.

Par somme, $b_T(\varphi, \psi)$ est bien donc définie pour $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}^2(0, T; H_0^1(\Sigma)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Sigma))$. \diamond

Corollaire 4.3.1 *Pour tout $t \leq T$ on a*

$$b_t(\varphi, \psi) = b_T(\varphi, \chi_t \psi), \quad \forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{H}^2(0, T; H_0^1(\Sigma)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Sigma))$$

Remarque 4.3.3 *La formule (4.3.18) est un cas particulier d'une formule plus générale donnée et démontrée dans [Nédélec, 1982], valable pour une surface Σ quelconque à savoir*

$$\left| \begin{aligned} b_T(\varphi, \psi) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^T \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{n_x \cdot n_y \ddot{\varphi}(y, \tau(x, y, t)) \psi(x, t)}{c^2 |x - y|} d\gamma_x d\gamma_y dt \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^T \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\overrightarrow{\text{rot}}_{\Sigma} \varphi(y, \tau(x, y, t)) \cdot \overrightarrow{\text{rot}}_{\Sigma} \psi(x, t)}{|x - y|} d\gamma_x d\gamma_y dt \end{aligned} \right.$$

Dans cette formule, $\overrightarrow{\text{rot}}_{\Sigma}$ désigne le rotationnel surfacique [Nédélec, 1976], [Terrasse, 1993]. La formule (4.3.18) se déduit trivialement de cette formule générale puisque dans notre cas $n_x \cdot n_y = 1$ et $\nabla = \overrightarrow{\text{rot}}_{\Sigma}$.

4.4 Formulation surfacique pour le système vibroacoustique

Nous allons maintenant reformuler le système vibroacoustique (4.2.1) entièrement sur Σ à l'aide de l'opérateur N_{Σ} et d'une nouvelle inconnue acoustique. Nous noterons

$$\begin{cases} W_v(\mathcal{S}_T) = C^2(0, T; L^2(\Sigma)) \cap C^1(0, T; H_0^1(\Sigma)) \cap C^0(0, T; H^2(\Sigma)) \\ W_p(\mathcal{Q}_T) = \{p \in C^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^1(\Omega)) / \Delta p \in C^0(0, T; L^2(\Omega))\} \end{cases}$$

les espaces fonctionnels introduits dans le théorème 4.2.1. Soit $(v, p) \in W_v(\mathcal{S}_T) \times W_p(\mathcal{Q}_T)$

l'unique solution du problème (4.2.1, 4.2.2, 4.2.4). On introduit alors comme nouvelle inconnue le saut de pression φ :

$$\varphi \stackrel{def}{=} [p] \quad (\Sigma \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}),$$

qui, par théorème de trace dans $H^1(\Omega)$, a la régularité :

$$\varphi \in C^1(0, T; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)) \quad (4.4.1)$$

Nous ferons l'hypothèse que f est suffisamment régulière pour que $p \in \mathcal{H}^3(0, T; L^2(\Omega))$. Comme l'opérateur de trace $p \mapsto [p]$ envoie $\mathcal{H}^3(0, T; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{H}^1(0, T; H^1(\Omega))$ dans $\mathcal{H}^{\frac{3}{2}}(0, T; L^2(\Sigma))$ on a :

$$\varphi \in \mathcal{H}^{\frac{3}{2}}(0, T; L^2(\Sigma)). \quad (4.4.2)$$

Finalement puisque $p(x, 0) = 0$, alors :

$$\varphi(x, 0) = 0. \quad (4.4.3)$$

On déduit alors naturellement de (4.4.1), (4.4.2) et (4.4.3) que

$$\varphi \in W(\mathcal{S}_T). \quad (4.4.4)$$

Dès lors, en substituant $\partial p / \partial n$ par N_Σ dans la condition de couplage fluide-structure (4.2.2) on peut reformuler sur Σ le système vibroacoustique 4.2.1. Plus précisément le couple $(v, \varphi) \in W_v(\mathcal{S}_T) \times W(\mathcal{S}_T)$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f, & x \in \Sigma, \quad t > 0, \\ N_\Sigma \varphi + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0, & \text{dans } V(\mathcal{S}_T), \\ v(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0, & x \in \Sigma. \end{cases} \quad (4.4.5)$$

On a donc construit un nouveau problème équivalent à 4.2.1 dans le sens où :

Théorème 4.4.1 *Si $(v, p) \in W_v(\mathcal{S}_T) \times W_p(\mathcal{Q}_T)$ est l'unique solution de (4.2.1, 4.2.2, 4.2.4) alors si $\varphi = [p]$, $(v, \varphi) \in W_v(\mathcal{S}_T) \times W(\mathcal{S}_T)$ est solution de (4.4.5). Réciproquement si $(v, \varphi) \in W_v(\mathcal{S}_T) \times W(\mathcal{S}_T)$ est solution de (4.4.5), alors $(v, p = u_\varphi) \in W_v(\mathcal{S}_T) \times W_p(\mathcal{Q}_T)$ est l'unique solution de (4.2.1, 4.2.2, 4.2.4).*

Preuve :

Nous avons déjà démontré la première partie du théorème. Pour la réciproque, il suffit de démontrer un résultat d'unicité pour (v, p) qui est une conséquence du lemme suivant. \diamond

Lemme 4.4.1 *Si le couple $(v, \varphi) \in W_v(\mathcal{S}_T) \times W(\mathcal{S}_T)$ est solution de (4.4.5) alors il satisfait l'identité d'énergie $\forall 0 \leq t \leq T$:*

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{c_m^2} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v|^2 \right) (x, t) dx + \frac{1}{\rho} |\varphi|_{N, \mathcal{S}_t}^2 = \iint_{\mathcal{S}_t} f(x, s) \frac{\partial v}{\partial t}(x, s) dx ds. \quad (4.4.6)$$

Preuve :

La preuve de ce lemme est très proche de la preuve de l'identité (3.2.3).

En multipliant la première équation de (4.4.5) par $\frac{\partial v}{\partial t}$ et en intégrant sur \mathcal{S}_t , on obtient, grâce à la formule de Green :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{c_m^2} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v|^2 \right) dx - \iint_{\mathcal{S}_t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} dx ds = \iint_{\mathcal{S}_t} f \frac{\partial v}{\partial t} dx ds. \quad (4.4.7)$$

D'autre part, en multipliant la seconde équation de (4.4.5) par $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ et en intégrant sur \mathcal{S}_t , on obtient, par définition de $b_t(\cdot, \cdot)$:

$$\frac{1}{\rho} b_t(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}) + \iint_{\mathcal{S}_t} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx ds = 0. \quad (4.4.8)$$

On conclut alors en sommant (4.4.7) et (4.4.8). \diamond

Remarque 4.4.1 *L'identité de ce lemme est équivalente à l'identité (3.2.3) obtenue pour la formulation vibroacoustique volumique. L'énergie du système couplé est définie comme la somme de l'énergie du système structure (via la quantité $\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{c_m^2} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v|^2 \right)$) et de l'énergie du système acoustique dorénavant formulé à l'aide de l'opérateur N_{Σ} (via la quantité $\frac{1}{\rho} |\varphi|_{N, \mathcal{S}_t}^2$).*

L'identité (4.4.6) est fondamentale dans le sens où elle ne fournit pas uniquement un résultat d'unicité mais également des estimations a priori. En effet, en intégrant (4.4.6) sur $[0, T]$ on obtient l'égalité :

$$\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{S}_T} \left(\rho_p \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v|^2 \right) dx dt + \frac{1}{\rho} \|\varphi\|_{N, \mathcal{S}_T}^2 = \iint_{\mathcal{Q}_T} (T-t) f \frac{\partial v}{\partial t} dx dt. \quad (4.4.9)$$

Ce qui donne, d'après le théorème 4.3.1 :

$$\begin{cases} \|v\|_{H^1(\mathcal{S}_T)} & \leq C_T \|f\|_{L^2(\mathcal{S}_T)}, \\ \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{S}_T)} & \leq C_T \|f\|_{L^2(\mathcal{S}_T)}. \end{cases} \quad (4.4.10)$$

Pour ces raisons, nous chercherons au niveau discret à construire un schéma numérique qui permet d'établir un équivalent discret des identités (4.4.6) et (4.4.10) ce qui garantira alors un résultat de stabilité.

4.4.1 Une formulation variationnelle non uniforme en espace et en temps

Nous donnons, dans cette section, une formulation variationnelle pour (4.4.5) qui prépare l'approximation espace-temps. Cette formulation est motivée par les points suivants :

- Si φ était considéré comme terme source dans la première équation de (4.4.5), alors on calculerait une approximation de v par éléments finis en espace et différences finies en temps, comme pour la discrétisation standard du problème purement structure (cf. chapitre 2). C'est pourquoi il est naturel d'utiliser une formulation variationnelle en espace seulement pour la première équation de (4.4.5).
- Si v était considéré comme un terme source dans la seconde équation de (4.4.5), alors on calculerait une approximation de φ en utilisant une méthode d'éléments finis espace-temps comme celles développées pour les problèmes de diffraction formulés par potentiels retardés (cf. [Bécache, 1991] , [Ha-Duong *et al.*, 2003], [Ha-Duong, 2003]). C'est pourquoi il est naturel d'utiliser une formulation variationnelle espace-temps pour la deuxième équation de (4.4.5).

Par conséquent, la formulation variationnelle du problème (4.4.5) est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v, \varphi) \in W_v(\mathcal{S}_T) \times W(\mathcal{S}_T) \quad \text{tel que } \quad \forall w \in H_0^1(\Sigma), \quad \forall \psi \in V(\mathcal{S}_T), \\ \frac{d^2}{dt^2}(v(t), w) + a(v(t), w) - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) w(x) dx = \int_{\Sigma} f(x, t) w(x) dx, \\ \frac{1}{\rho} b_T(\varphi, \psi) + \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial v}{\partial t} \psi dx dt = 0, \\ v(0) = \frac{dv}{dt}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (4.4.11)$$

où l'on a posé

$$\left\{ \begin{array}{l} (v, w)_{\rho} = \frac{1}{c_m^2} \int_{\Sigma} v w dx, \quad \forall (v, w) \in L^2(\Sigma)^2, \\ a(v, w) = \int_{\Sigma} \nabla v \cdot \nabla w dx, \quad \forall (v, w) \in H^1(\Sigma)^2. \end{array} \right. \quad (4.4.12)$$

Remarque 4.4.2 *Il est important de remarquer que dans la seconde équation de (4.4.11), l'espace des fonctions tests $W(\mathcal{S}_T)$ est différent de l'espace $V(\mathcal{S}_T)$ dans lequel est cherchée la solution. Plus précisément, $W(\mathcal{S}_T)$ défini par (4.3.10) contient les dérivées en temps des fonctions de $V(\mathcal{S}_T)$ (cf. (4.3.6)).*

4.5 Le schéma d'approximation espace-temps naturel

Ce chapitre est consacré à la partie la plus originale du travail de cette thèse, à savoir la construction d'un schéma d'approximation espace-temps stable basé sur un couplage éléments finis/potentiels retardés discrets. Le plan de ce chapitre est le suivant :

- Dans un premier temps, nous rappellerons comment la discrétisation du potentiel retardé N_Σ par éléments finis espace-temps proposée dans [Duong, 1987] conduit à une convolution discrète. Nous adopterons un point de vue original et détaillerons et justifierons autant que possible les calculs qui conduisent aux matrices de cette convolution. A partir de la formulation variationnelle (4.4.11), nous discrétiserons le terme de couplage dans l'équation acoustique en utilisant la même méthode que celle employée pour traiter N_Σ .
- Pour la partie structure, nous proposerons un schéma classique, à savoir une discrétisation par éléments finis en espace et un θ -schéma aux différences finies en temps . Nous verrons que le schéma de couplage ainsi obtenu, celui qui correspond donc à une approche naturelle, ne conserve pas a priori une énergie discrète équivalente à celle définie pour le cas continu par (4.4.6), nous empêchant ainsi de démontrer la stabilité. Cependant nous verrons qu'en modifiant la formulation variationnelle (4.4.11), on obtient un schéma dont on sait montrer la stabilité et qui est en fait le schéma naturel pour $\theta = \frac{1}{4}$. Cependant, on souhaite pouvoir utiliser la souplesse offerte par le θ schéma et notamment pouvoir rendre explicite le schéma au moins pour l'équation de plaque.
- Nous proposerons alors une méthode originale basée sur l'utilisation de grilles décalées en temps pour la discrétisation de l'opérateur N_Σ afin de rendre le schéma couplé conservatif (donc stable) et explicite pour l'équation de membrane.

4.5.1 Discrétisation du noyau intégral N_Σ

4.5.1.1 Espaces d'approximation et notations

Nous construisons dans cette section les espaces d'approximation éléments finis pour $W(\mathcal{S}_T)$ et $V(\mathcal{S}_T)$. Dans ce but, on introduit quelques notations utiles pour ce qui suit.

Considérons l'espace de Hilbert X et le pas de temps $\Delta t = T/N$. On introduit alors les espaces des fonctions de la variable t à valeur dans X , respectivement linéaires et constantes par morceaux :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\Delta t}^1(0, T; X) &= \{f \in C^0([0, T], X) / \forall n \leq N, f|_{[t^n, t^{n+1}]} \in P^1(X)\}, \\ \mathcal{P}_{\Delta t}^0(0, T; X) &= \{f \in L^2([0, T], X) / \forall n \leq N, f|_{[t^n, t^{n+1}]} \in P^0(X)\}, \end{cases} \quad (4.5.1)$$

où $t^n = n\Delta t$ et

$$\begin{cases} P^1(X) &= \{\psi(t) = \psi_0 + t\psi_1, \quad (\psi_0, \psi_1) \in X^2\}, \\ P^0(X) &= \{\psi(t) = \psi_0, \quad \psi_0 \in X\}. \end{cases}$$

On introduit alors $(\mathcal{M}_h, h > 0)$ un espace d'éléments finis conforme $H_0^1(\Sigma)$ (en pratique on utilisera des éléments \mathbb{P}^1 dans le cas de la membrane) et on considère alors pour $W(\mathcal{S}_T)$ et $V(\mathcal{S}_T)$ les espaces d'approximation suivants :

$$\begin{cases} W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) = \{ \varphi_{h,\Delta t} \in \mathcal{P}_{\Delta t}^1(0, T; \mathcal{M}_h) / \varphi_{h,\Delta t}(\cdot, 0) = 0 \}, \\ V_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) = \mathcal{P}_{\Delta t}^0(0, T; \mathcal{M}_h). \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Notons alors $\{w^n(t)\}$, $n \in \mathbb{N}$, une base de fonctions de la variable $t \in [0, T]$, linéaires par morceaux et nulles en $t = 0$:

$$w^n(t) = w_0(t - t^n) \quad \text{avec} \quad w_0(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\Delta t} & , \text{ si } |t| \leq \Delta t \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (4.5.3)$$

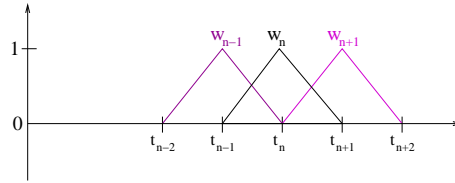


FIG. 4.1: Fonctions de bases w_n .

et $\{\zeta^n(t)\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, une base des fonctions de la variable $t \in [0, T]$, constantes par morceaux (cf. Fig. 4.2) :

$$\zeta^n(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } t \in]t^{n-1}, t^n] \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (4.5.4)$$

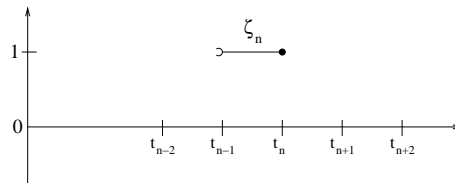


FIG. 4.2: Fonctions de bases $w\zeta_n$.

$W(\mathcal{S}_T)$ et $V(\mathcal{S}_T)$ sont ainsi caractérisés par le fait que $\varphi_{h,\Delta t} \in W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T)$ si et seulement si il existe $(\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathcal{M}_h^N$ tels que :

$$\varphi_{h,\Delta t}(x, t) = \sum_{n=1}^N \varphi^n(x) w^n(t) . \quad (4.5.5)$$

et de la même façon $\psi_{h,\Delta t} \in W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T)$ si et seulement si il existe $(\psi_1, \dots, \psi_N) \in \mathcal{M}_h^N$ tels que :

$$\psi_{h,\Delta t}(x, t) = \sum_{n=1}^N \psi^n(x) \zeta^n(t) \quad (4.5.6)$$

Si on introduit maintenant $\{\xi_j^h, 1 \leq j \leq N_h^m\}$ une base de \mathcal{M}_h , alors pour toute fonction $(\varphi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) \in W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) \times V_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T)$, on a la décomposition suivante :

$$\varphi_{h,\Delta t} = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{N_h^m} \varphi_j^n w^n \otimes \xi_j, \quad \psi_{h,\Delta t} = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{N_h^m} \psi_j^n \zeta^n \otimes \xi_j, \quad (4.5.7)$$

où $w^n \otimes \xi_j(x, t) = w^n(t) \xi_j(x)$. Pour conclure avec les notations, on utilisera

$$\Phi^n = (\varphi_j^n)_{1 \leq j \leq N_h^m} \quad \text{et} \quad \Psi^n = (\psi_j^n)_{1 \leq j \leq N_h^m},$$

les vecteurs des composantes de $\varphi_{h,\Delta t}(\cdot, t^n)$ et $\psi_{h,\Delta t}|_{[t^{n-1}, t^n]}$ dans la base $\{\xi_j^h\}$.

4.5.1.2 Discrétisation de l'opérateur N_Σ

Le schéma d'approximation "naturel" associé à la formulation variationnelle (4.4.11) est celui qui consiste à remplacer les espaces fonctionnels $W(\mathcal{S}_T)$ et $H_0^1(\Sigma)$ (pour les inconnues), $V(\mathcal{S}_T)$ et $H_0^1(\Sigma)$ (pour les fonctions tests) par leurs espaces d'approximation associés. On s'intéresse, dans cette sous-section, uniquement à l'approximation du terme

$$b_T(\varphi, \psi) \quad \text{pour} \quad (\varphi, \psi) \in W(\mathcal{S}_T) \times V(\mathcal{S}_T).$$

Plus précisément nous allons donner la formulation matricielle associée au terme

$$b_T(\varphi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) \quad \text{pour} \quad (\varphi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) \in W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) \times V_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T).$$

Cette formulation est assez complexe et repose sur le lemme 4.5.1. Pour écrire ce lemme, nous aurons besoin des notations suivantes. Soit $\delta > 0$ (homogène à un temps). On introduit le domaine d'intégration espace-temps de \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{C}_k(\delta) = \{ (x, y) \in \Sigma^2 / c(k-1)k\delta \leq |x-y| \leq c k \delta \}, \quad k \geq 1. \quad (4.5.8)$$

On peut remarquer [Ha-Duong, 2003] que pour k suffisamment grand cet ensemble est vide :

$$k > 1 + \frac{\text{diam } \Sigma}{c \delta} \implies \mathcal{C}_k(\delta) = \emptyset.$$

On introduit alors les matrices $\mathbf{P}_h^k(\delta)$ de taille $N_h^m \times N_h^m$ définies par :

$$\mathbf{P}_{ij}^k(\delta) = \delta^2 \int_{C_k(\delta)} \frac{\xi_i(x)\xi_j(y)}{4\pi|x-y|} dx dy. \quad (4.5.9)$$

Puis, en posant :

$$\sigma_k^\delta(x, y) = \frac{1}{2}(k - |x - y|/c\delta)^2 \quad \text{et} \quad G_{ij}(x, y) = \frac{\nabla \xi_i(x) \cdot \nabla \xi_j(y)}{4\pi|x-y|},$$

on définit les matrices $\mathbf{Q}_h^k(\delta)$ de taille $N_h^m \times N_h^m$

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{Q}_{ij}^k(\delta) &= \delta^2 \int_{C_k(\delta)} G_{ij} dx dy - \delta^2 \int_{C_k(\delta)} G_{ij} [\sigma_k^\delta + \sigma_{k-1}^\delta] dx dy \\ &+ \delta^2 \int_{C_{k-1}(\delta)} G_{ij} \sigma_{k-2}^\delta dx dy + \delta^2 \int_{C_{k+1}(\delta)} G_{ij} \sigma_{k+1}^\delta dx dy. \end{aligned} \right. \quad (4.5.10)$$

Les matrices qui servent à décrire $b_T(\varphi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t})$ sont les matrices $\mathbf{N}_h^k(\delta)$ définies par

$$\mathbf{N}_h^k(\delta) = \frac{\mathbf{P}_h^{k+1}(\delta) - 2\mathbf{P}_h^k(\delta) + \mathbf{P}_h^{k-1}(\delta)}{\delta^2} - \mathbf{Q}_h^k(\delta). \quad (4.5.11)$$

On peut remarquer que $\mathbf{P}_h^{k+1}(\delta)$, $\mathbf{Q}_h^k(\delta)$ et $\mathbf{N}_h^k(\delta)$ sont toutes symétriques. Le résultat précis est le suivant

Lemme 4.5.1 *Soit $(\phi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) \in W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) \times V_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T)$. Alors on a :*

$$b_T(\phi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \mathbf{N}_h^{n-m}(\Delta t) \Phi_h^m \cdot \Psi_h^n, \quad (4.5.12)$$

Preuve :

On présente ici une preuve formelle qui est justifiée théoriquement dans le lemme 4.5.2. Par bilinéarité on a :

$$\left| \begin{aligned} b_T(\varphi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N_h^m} \sum_{j=1}^{N_h^n} b_T(w^m \otimes \xi_i, \zeta^n \otimes \xi_j) \varphi_i^m \psi_j^n \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \mathbf{B}_T^{m,n} \Phi_h^m \cdot \Psi_h^n \end{aligned} \right. \quad (4.5.13)$$

où $\mathbf{B}_T^{m,n}$ est la matrice définie par $(\mathbf{B}_T^{m,n})_{ij} = b_T(w^m \otimes \xi_i, \zeta^n \otimes \xi_j)$. En utilisant la formule (4.3.18), on a formellement (puisque a priori $J_{m,n}^1$ défini ci-dessous n'est pas défini) :

$$\begin{cases}
\mathbf{B}_T^{m,n} &= \mathbf{B}_{T,1}^{m,n} + \mathbf{B}_{T,2}^{m,n} \\
\left(\mathbf{B}_{T,1}^{m,n}\right)_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\xi_j(y) \xi_i(x)}{c^2|x-y|} J_{mn}^1(x,y) dx dy \\
\left(\mathbf{B}_{T,2}^{m,n}\right)_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\nabla \xi_j(y) \cdot \nabla \xi_i(x)}{c^2|x-y|} J_{mn}^2(x,y) dx dy
\end{cases} \quad (4.5.14)$$

où

$$\begin{cases}
J_{mn}^1(x,y) = \int_0^T \ddot{w}^m(t - \tau(x,y)) \zeta^n(t) dt, \\
J_{mn}^2(x,y) = \int_0^T \dot{w}^m(t - \tau(x,y)) \zeta^n(t) dt.
\end{cases}$$

En particulier, puisque $\text{supp } w^m(\cdot - \tau(x,y)) \subset [t^{m-1}, +\infty[$ on peut voir que :

$$m > n \implies J_{mn}^1(x,y) = J_{mn}^2(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \Sigma \times \Sigma \implies \mathbf{B}_T^{m,n} = 0.$$

Pour $m \leq n$, l'intégrale J_{mn}^1 peut s'exprimer au sens des distributions. En effet, comme on a (δ_k désignant la distribution de Dirac en $t = t^k$) :

$$\ddot{w}^n(t - \tau) = \frac{1}{\Delta t} [\delta_{n+1}(t - \tau) - 2 \delta_n(t - \tau) + \delta_{n-1}(t - \tau)],$$

alors

$$J_{mn}^1(x,y) = \frac{1}{\Delta t} [\zeta^n(t^{m+1} + \tau(x,y)) - 2 \zeta^n(t^m + \tau(x,y)) + \zeta^n(t^{m-1} + \tau(x,y))] \quad (4.5.15)$$

Le lecteur notera que l'expression ci-dessus a un sens pour presque tout $(x,y) \in \Sigma \times \Sigma$ (tant que $\tau(x,y)$ n'est pas un multiple de Δt), ce qui permet de donner un sens aux calculs. Il s'agit maintenant de voir comment les supports des fonctions $(x,y) \mapsto \zeta^n(t^k + \tau(x,y))$ ($k = \{n-1, n, n+1\}$) introduisent des domaines d'intégration de type $\mathcal{C}_k(\Delta t)$. On a :

$$\begin{aligned}
\zeta^n(t^{m+1} + \tau(x,y)) \neq 0 &\Leftrightarrow t^{n-1} \leq t^{m+1} + \tau(x,y) \leq t^n \\
&\Leftrightarrow t^{n-1-m-1} \leq \tau(x,y) \leq t^{n-m-1} \\
&\Leftrightarrow \Delta t(n-m-2) \leq \tau(x,y) \leq \Delta t(n-m-1) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in C_{n-m-1}(2\Delta t).
\end{aligned}$$

De la même manière, on montre que

$$\zeta^n(t^m + \tau(x,y)) \neq 0 \Leftrightarrow (x,y) \in C_{n-m}(\Delta t)$$

et

$$\zeta^n(t^{m-1} + \tau(x, y)) \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \in C_{n-m+1}(\Delta t)$$

En injectant J_{mn}^1 dans (4.5.14), on en déduit que

$$\mathbf{B}_{T,1}^{m,n} = \frac{\mathbf{P}_h^{n-m+1}(\Delta t) - 2\mathbf{P}_h^{n-m}(\Delta t) + \mathbf{P}_h^{n-m-1}(\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (4.5.16)$$

Par ailleurs,

$$J_{mn}^2 = \int_0^{\Delta t} w^1\left(t + t^{n-m} - \frac{|x-y|}{c}\right) dt$$

Or, w^1 étant non nulle entre 0 et $2\Delta t$, cette intégrale sera non nulle pour toute valeur de $t' = t^{n-m} - |x-y|/c$ comprise entre $-\Delta t$ et $2\Delta t$, et elle vaudra :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\Delta t}(t' + \Delta t)^2 & \text{si } t' \in [-\Delta t, 0] \\ \frac{1}{2\Delta t}[(t' + \Delta t)^2 - 3t'^2] & \text{si } t' \in [0, \Delta t] \\ \frac{1}{2\Delta t}(2\Delta t - t')^2 & \text{si } t' \in [\Delta t, 2\Delta t] \end{cases}$$

En injectant ces expression dans (4.5.14), on en déduit que

$$\mathbf{B}_{T,2}^{m,n} = -\mathbf{Q}_h^{n-m}(\Delta t) \quad \diamond \quad (4.5.17)$$

Nous allons maintenant justifier théoriquement la validité des calculs précédents, notamment en quoi J_{mn}^1 est bien défini. Nous allons régulariser l'expression de J_{mn}^1 et passer à la limite en utilisant principalement des arguments du type convergence dominée de Lebesgue. On construit tout d'abord une fonction régulière w_0^ε qui régularise w_0 dans un sens que l'on va préciser. Soit

$$\rho_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{supp } \rho_0 \subset [-1, 1], \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_0 = 1.$$

Par construction

$$\rho_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon} \rho_0\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \longrightarrow \delta_0. \quad (4.5.18)$$

Nous remarquons que la fonction $\psi_\varepsilon = \rho_\varepsilon(t - \Delta t) - 2\rho_\varepsilon(t) + \rho_\varepsilon(t + \Delta t)$ est paire et par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(s) ds = 0 \quad \text{et de plus} \quad \int_{-\infty}^t \psi_\varepsilon(s) ds \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

On introduit alors la fonction régularisée

$$w_\varepsilon^0 = \int_{-\infty}^t \varphi_\varepsilon(s) ds$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\varepsilon^0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}) , \\ \text{supp } w_\varepsilon^0 \subset [-\Delta t - \varepsilon, \Delta t + \varepsilon] , \\ w_\varepsilon^0 \longrightarrow w^0 \quad \text{uniformément} . \end{array} \right.$$

D'après (4.5.18) on a la propriété suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \ddot{w}_\varepsilon^0(t) \psi(t) dt = \psi(-\Delta t) - 2\psi(0) + \psi(\Delta t) , \quad \forall \psi \text{ continue sur } \mathbb{R} . \quad (4.5.19)$$

Posons $w_n^\varepsilon(t) = w_0^\varepsilon(t - t_n)$ et introduisons l'opérateur de régularisation

$$\varphi_{h,\Delta t} = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) w_n(t) \in W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) \longrightarrow J_\varepsilon \varphi_{h,\Delta t} = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) w_n^\varepsilon(t) \in \mathcal{H}^2(0, T; \mathcal{M}_h).$$

En particulier, on peut définir (cf. remarque 4.3.2)

$$b_T(J_\varepsilon \varphi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}), \quad \forall \psi_{h,\Delta t} \in V_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) .$$

Lemme 4.5.2 *Pour tout $(\varphi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) \in W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) \times V_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T)$, on peut définir*

$$b_T(\varphi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_T(J_\varepsilon \varphi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) .$$

Cette limite est donnée par l'expression (4.5.12) du lemme 4.5.1.

Preuve :

En tenant compte de la décomposition (4.5.13) il suffit de montrer que l'expression

$$J(w^0) = \iint_{\Sigma \times \Sigma} \frac{\xi_i(x) \xi_j(y)}{4\pi|x-y|} dx dy \int_{\mathbb{R}} \ddot{w}^0(t - t^m - \tau(x, y)) \zeta^n(t) dt$$

est bien définie. Posons $s = t - \tau(x, y) - t^m$. Par changement de variable et en utilisant le théorème de Fubini on a :

$$J(w_\varepsilon^0) = \int_{\mathbb{R}} \ddot{w}^0(s) \underbrace{\iint_{\Sigma \times \Sigma} \frac{\xi_i(x) \xi_j(y)}{4\pi|x-y|} \zeta^n(s + \tau(x, y) + t^m) dx dy}_{f(s)} ds$$

Soit $\{s^\delta\}_\delta$ une suite telle que $s^\delta \longrightarrow s$. Pour la mesure relative à $\Sigma \times \Sigma$, l'ensemble

$$E_s(\Delta) = \{(x, y) \in \Sigma \times \Sigma / s + \tau(x, y) + t^m = q\Delta t, q \in \mathbb{N}\}$$

à savoir l'ensemble des points pour lesquels l'expression $\zeta^n(s + \tau(x, y) + t^m)$ n'est pas définie, est de mesure nulle. En dehors de ces ensembles, $\zeta^n(\cdot)$ est constante et donc continue. Par conséquent

$$\zeta^n(s^\delta + \tau(x, y) + t^m) \longrightarrow \zeta^n(s + \tau(x, y) + t^m) \quad \text{p.p.}$$

De plus on a trivialement

$$\left[\left| \zeta^n(s^\delta + \tau(x, y) + t^m) - \zeta^n(s + \tau(x, y) + t^m) \right| \left| \frac{\xi_i(x)\xi_j(y)}{4\pi|x-y|} \right| \right] \leq 2 \left| \frac{\xi_i(x)\xi_j(y)}{4\pi|x-y|} \right|$$

D'après la remarque 4.3.2, le membre de droite de cette estimation est en particulier dans $L^1(\Sigma \times \Sigma)$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure alors que $s \longrightarrow f(s)$ est continue presque partout. D'après (4.5.19) on a alors

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(w_\varepsilon^0) &\stackrel{\text{def}}{=} J(w^0) \\ &= \iint_{\Sigma \times \Sigma} \frac{\xi_i(x)\xi_j(y)}{4\pi|x-y|} \zeta^n(\tau(x, y) + t^{m-1}) - 2 \iint_{\Sigma \times \Sigma} \frac{\xi_i(x)\xi_j(y)}{4\pi|x-y|} \zeta^n(\tau(x, y) + t^m) dx dy \\ &+ \iint_{\Sigma \times \Sigma} \frac{\xi_i(x)\xi_j(y)}{4\pi|x-y|} \zeta^n(\tau(x, y) + t^{m+1}) \end{aligned}$$

On reconnaît les domaines d'intégration qui apparaissent initialement dans (4.5.15) et ainsi cette limite est précisément le terme élémentaire de la matrice

$$\frac{\mathbf{P}_h^{k+1}(\Delta t) - 2\mathbf{P}_h^k(\Delta t) + \mathbf{P}_h^{k-1}(\Delta t)}{\Delta t^2}, \quad k = n - m.$$

La définition rigoureuse du terme $J_{m,n}^2$ ne pose quand à elle aucun problème. Le passage à la limite est immédiat. \diamond

4.5.2 Un schéma naturel pour le problème couplé

4.5.2.1 Le schéma

Nous proposons ici le schéma d'approximation naturellement issu de la formulation variationnelle (4.4.11). Rappelons que nous nous sommes fixé comme contrainte de conserver

la méthode de discrétisation (sujet de la section précédente) du noyau N_Σ pour la partie acoustique. Toutes les notations nécessaires pour l'approximation du saut de pression ont été introduites dans la section précédente. Précisons quelques notations pour l'approximation de l'inconnue v .

Soit \mathcal{V}_h un espace élément fini conforme $H_0^1(\Sigma)$. La solution approchée de v sera

$$v_{h,\Delta t} \in \mathcal{P}_{\Delta t}^1(0, T; \mathcal{V}_h)$$

avec $v_h^n = v_{h,\Delta t}(t^n)$. On utilisera $\{\eta_j, 1 \leq j \leq N_h^v\}$ une base de \mathcal{V}_h et on notera V_h^n le vecteur des composantes de v_h^n dans cette base. Comme convenu, l'approximation de la première équation de (4.4.11) est complètement standard. On utilise une approximation par éléments finis en espace (dans \mathcal{V}_h) et un θ -schéma (différences finies) en temps. Par conséquent le schéma d'approximation "naturellement" (dans le sens où les espaces fonctionnels sont remplacés par leurs équivalents discrets et les fonctions indexées par les paramètres de discrétisation) associé à la formulation variationnelle (4.4.11) est :

Trouver $(\varphi_{h,\Delta t}, v_{h,\Delta t}) \in W(\mathcal{S}_T) \times \mathcal{P}_{\Delta t}^1(0, T; \mathcal{V}_h)$ tel que $\forall (\psi_{h,\Delta t}, w_h) \in V(\mathcal{S}_T) \times \mathcal{V}_h$

$$\left(\frac{v_h^{n+1} - 2v_h^n + v_h^{n-1}}{\Delta t^2}, w_h \right) + a(v_h^{n,\theta}, w_h) - \int_\Sigma \frac{\varphi_h^{n+1} - \varphi_h^{n-1}}{2\Delta t} w_h dx = \int_\Sigma f^n w_h dx \quad (4.5.20)$$

$$\frac{1}{\rho} b_T(\varphi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) + \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial v_{h,\Delta t}}{\partial t} \psi_{h,\Delta t} dx dt = 0, \quad (4.5.21)$$

où $f^n = f(t^n)$ et $v_h^{n,\theta} = \theta v_h^{n+1} + (1 - 2\theta) v_h^n + \theta v_h^{n-1}$. Dans ce qui suit nous donnons la formulation matricielle de ce schéma.

Pour l'équation de membrane, on introduit :

- la matrice de masse \mathbf{M}_h de taille $N_h^v \times N_h^v$ définie par :

$$\mathbf{M}_h = ((\mathbf{M}_{ij}))_{1 \leq i, j \leq N_h^v}, \quad \mathbf{M}_{ij} = (\eta_i, \eta_j), \quad (4.5.22)$$

- la matrice de rigidité \mathbf{A}_h de taille $N_h^v \times N_h^v$ définie par :

$$\mathbf{A}_h = ((\mathbf{A}_{ij}))_{1 \leq i, j \leq N_h^v}, \quad \mathbf{A}_{ij} = a(\eta_i, \eta_j). \quad (4.5.23)$$

- la matrice de couplage \mathbf{C}_h de taille $N_h^v \times N_h^m$ définie par

$$\mathbf{C}_h = ((\mathbf{C}_{ij}))_{1 \leq i \leq N_h^v, 1 \leq j \leq N_h^m}, \quad \mathbf{C}_{ij} = \int_\Sigma \eta_i \xi_j dx. \quad (4.5.24)$$

L'équation (4.5.20) est alors équivalente à

$$\mathbf{M}_h \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{A}_h V_h^{n,\theta} - \mathbf{C}_h \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^{n-1}}{2\Delta t} = F_h^n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.5.25)$$

où $F_h^n = \left(F_j^n \right)_{1 \leq j \leq N_h^v}$, avec $F_j^n = \int_{\Sigma} f(x, t^n) \eta_j dx$.

Nous allons donner maintenant l'expression vectorielle de l'équation (4.5.21). Dans cette équation, la partie concernant la forme bilinéaire b_T est déjà traitée via le lemme 4.5.1. Il reste alors à exprimer le terme de couplage. Pour ce faire, on décompose $v_{h,\Delta t}$ sous la forme :

$v_{h,\Delta t} = \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^{N_h^v} v_i^n w^m \otimes \xi_j$. En utilisant la décomposition (4.5.7) pour $\psi_{h,\Delta t}$, il vient :

$$\iint_{S_T} \frac{\partial v_{h,\Delta t}}{\partial t} \psi_{h,\Delta t} dxdt = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{j=0}^{N_h^m} \sum_{i=0}^{N_h^v} \psi_j^n v_i^m \int_{\Sigma} \xi_j \eta_i dx \int_0^T \frac{\partial w^m}{\partial t} \zeta^n dt .$$

Or le produit $\frac{\partial w^m}{\partial t} \zeta^n$ est non nul si et seulement si $m = n - 1$ ou $m = n$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \iint_{S_T} \frac{\partial v_{h,\Delta t}}{\partial t} \psi_{h,\Delta t} dxdt &= \sum_{n=1}^N \left[\mathbf{C}_h^* \Psi^n \cdot V_h^{n-1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \frac{\partial w^{n-1}}{\partial t} + \mathbf{C}_h^* \Psi^n \cdot V_h^n \int_{t^{n-1}}^{t^n} \frac{\partial w^n}{\partial t} \right] \\ &= \sum_{n=1}^N \mathbf{C}_h^* \Psi^n \cdot (V_h^n - V_h^{n-1}) \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

D'après le lemme 4.5.1, l'équation (4.5.21) est alors équivalente à :

$$\frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \mathbf{N}_h^{n-m}(\Delta t) \Phi_h^m \cdot \Psi_h^n + \sum_{n=1}^N \mathbf{C}_h^* \Psi^n \cdot (V_h^n - V_h^{n-1}) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

qui est elle même équivalente à l'équation vectorielle :

$$\frac{1}{\rho} \sum_{m=1}^n \mathbf{N}_h^{n-m}(\Delta t) \Phi_h^m \cdot + \mathbf{C}_h^* (V_h^n - V_h^{n-1}) = 0 . \quad (4.5.27)$$

Le schéma naturellement issue de la formulation variationnelle (4.4.11) est donc :

Trouver V_h^n , $n = \{2, 3, \dots\}$ ($V_h^0 = V_h^1 = 0$), Φ_h^n , $n = \{1, 2, \dots\}$ ($\Phi_h^0 = 0$) solutions de

$$\mathbf{M}_h \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{A}_h V_h^{n,\theta} - \mathbf{C}_h \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^{n-1}}{2\Delta t} = F_h^n, \quad (4.5.28)$$

$$\frac{1}{\rho \Delta t} \sum_{m=1}^n \mathbf{N}_h^{n+1-m}(\Delta t) \Phi_h^m \cdot + \mathbf{C}_h^* \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} = 0 . \quad (4.5.29)$$

Remarque 4.5.1 On a écrit l'équation (4.5.27) au "temps suivant" afin de coupler les inconnues acoustique et mécanique au même instant.

4.5.2.2 Le problème de la stabilité

Le problème : Le schéma de couplage que l'on obtient naturellement en s'imposant de garder la méthode de discrétisation de N_Σ proposé dans [Duong, 1987] est donc le schéma (4.5.28)-(4.5.29). Il est "naturel" dans le sens où il couple les deux schémas que l'on aurait choisi sans couplage, à savoir une approximation par éléments finis en espace couplée à un θ -schéma en temps pour l'équation de membrane et un schéma éléments finis espace-temps selon la démarche proposée dans [Duong, 1987] pour l'équation intégrale acoustique. Le gros inconvénient de ce schéma est qu'il n'est a priori pas conservatif. Il ne conserve a priori pas l'énergie discrète naturelle pour le système couplé qui serait définie comme somme de l'énergie discrète mécanique associée au θ -schéma et de l'énergie discrète acoustique induite par la convolution du lemme 4.5.1. En effet, le terme de couplage dans (4.5.28), à savoir

$$\mathbf{C}_h \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^{n-1}}{2\Delta t},$$

est obtenu par une approximation aux différences finies centrée sur une grille de temps de pas Δt . D'un autre côté, le terme de couplage dans (4.5.29), à savoir

$$\mathbf{C}_h^* \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t},$$

peut être vu comme une approximation aux différences finies centrée sur une grille de temps de pas $\Delta t/2$. Ceci diffère fondamentalement du schéma en temps (3.3.5)-(3.3.6) développé au chapitre 3 puisque les termes de couplage étaient obtenus par une approximation aux différences finies sur une unique grille de discrétisation en temps de pas Δt . On construisait alors l'énergie discrète du système vibroacoustique en multipliant de façon classique l'équation de plaque (ici de membrane) par la quantité

$$\frac{V_h^{n+1} - V_h^{n-1}}{2\Delta t}$$

et l'équation acoustique par la quantité

$$\frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Les termes de couplage ainsi obtenus s'annulaient alors naturellement par simple somme. Là encore, pour faire apparaître l'énergie discrète classique du θ -schéma dans le schéma (4.5.28)-(4.5.29), il nous faudrait multiplier (4.5.28) par

$$\frac{V_h^{n+1} - V_h^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Mais le terme de couplage ainsi obtenu ne s'annule pas naturellement avec celui de l'équation (4.5.29) car ici les termes de couplage sont obtenus par des approximations aux différences finies établies sur deux grilles différentes, l'une utilisant un pas de temps Δt , l'autre un pas de temps $\Delta t/2$.

L'origine du problème : Cette différence de grilles de discrétisation en temps est induite par le décalage P^0/P^1 (fonctions tests/fonctions de base) utilisé dans la méthode de discrétisation de N_Σ . Ceci se comprend assez bien lorsque l'on reprend le petit calcul algébrique qui permet d'interpréter la quantité variationnelle

$$\iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial v_{h,\Delta t}}{\partial t} \psi_{h,\Delta t} dxdt$$

comme un terme aux différences finies (en l'occurrence $\mathbf{C}_h^* \frac{V_h^n - V_h^{n-1}}{\Delta t}$).

Du reste, par un calcul simple, on montre que si l'on prends comme fonction test $\psi_{h,\Delta t} \in W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T)$, alors la quantité variationnelle

$$\iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial v_{h,\Delta t}}{\partial t} \psi_{h,\Delta t} dxdt$$

peut se réinterpréter comme le terme aux différences finies

$$\mathbf{C}_h^* \frac{V_h^{n+1} - V_h^{n-1}}{2\Delta t},$$

qui dans ce cas-là peut potentiellement s'annuler avec le terme de couplage de l'équation de membrane. Cependant, le choix P^1/P^1 (fonctions tests/fonctions de base) mène à un schéma instable (au moins en temps long) pour le noyau N_Σ [Bécache, 1991] et donc, pour le problème couplé.

Sur la base de toutes ces remarques, nous allons proposer un nouveau schéma établi à partir d'une formulation variationnelle uniformisée, à savoir une formulation variationnelle espace-temps pour l'équation acoustique et l'équation de membrane.

4.5.3 Un schéma stable

4.5.3.1 Une formulation variationnelle "uniformisée"

Nous proposons dans cette section un schéma de couplage établi à partir d'une formulation variationnelle "uniforme" en espace et en temps. Plus précisément, nous allons discrétiser l'équation acoustique et l'équation de plaque de la même façon afin d'obtenir des termes de couplage sous formes de différences finies centrées et calculées sur une même grille de temps. Comme on s'impose de conserver la discrétisation du potentiel N_Σ selon la démarche de [Duong, 1987], il s'agit alors de discrétiser l'équation de plaque par éléments finis espace-temps.

A cet effet, on va conserver la deuxième équation de (4.4.11) et proposer une formulation variationnelle espace-temps pour l'équation

$$\frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f. \quad (4.5.30)$$

Pour pouvoir discrétiser cette équation par éléments finis espace temps, l'idée naturelle est d'écrire l'équation variationnelle :

Trouver $(v, \varphi) \in W_v(\mathcal{S}_T) \times W(\mathcal{S}_T)$ tel que $\forall w \in V_v(\mathcal{S}_T)$

$$\frac{1}{c_m^2} \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w \, dxdt + \int_{\mathcal{S}_T} \nabla v \cdot \nabla w \, dxdt - \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial \varphi}{\partial t} w \, dxdt = \iint_{\mathcal{S}_T} f w \, dxdt . \quad (4.5.31)$$

Cependant, nous avons vu que la discrétisation du noyau N_Σ impose de choisir des fonctions tests en temps constantes par morceaux et des fonctions de bases en temps linéaires par morceaux. On a choisit (via espaces fonctionnels dans (4.5.31)), nous d'utiliser le même "décalage de régularité" pour cette équation (ce qui est en soit cohérent avec le souhait de vouloir uniformiser la formulation variationnelle du problème couplé). Un tel choix, bien qu'adapté à la discrétisation du potentiel retardé N_Σ , est inadapté à l'équation (4.5.31). En effet on ne dispose alors pas d'assez de régularité sur les fonctions des espaces d'approximation pour intégrer en temps le terme d'accélération. On introduit $\gamma = \dot{v}$ comme variable auxiliaire. On propose alors la formulation variationnelle suivante pour (4.5.30) :

Trouver $(v, \varphi, \gamma) \in W_v(\mathcal{S}_T) \times W(\mathcal{S}_T) \times W_v(\mathcal{S}_T)$ tel que $\forall v^* \in V_v(\mathcal{S}_T), \forall \gamma^* \in V_v(\mathcal{S}_T)$

$$\begin{cases} \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial v}{\partial t} \gamma^* & = \iint_{\mathcal{S}_T} \gamma \gamma^* , \\ \frac{1}{c_m^2} \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial \gamma}{\partial t} w^* + \iint_{\mathcal{S}_T} \nabla v \cdot \nabla v^* - \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v^* & = \iint_{\mathcal{S}_T} f v^* . \end{cases} \quad (4.5.32)$$

Il nous reste alors à prendre en compte l'équation acoustique, à savoir la deuxième équation de (4.4.11). La formulation variationnelle pour le problème couplé sera alors :

Trouver $(v, \varphi, \gamma) \in W_v(\mathcal{S}_T) \times W(\mathcal{S}_T) \times W_v(\mathcal{S}_T)$ telles que

$$\iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial v}{\partial t} \gamma^* = \iint_{\mathcal{S}_T} \gamma \gamma^* , \quad (4.5.33)$$

$$\frac{1}{c_m^2} \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial \gamma}{\partial t} v^* + \iint_{\mathcal{S}_T} \nabla v \cdot \nabla v^* - \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v^* = \iint_{\mathcal{S}_T} f v^* , \quad (4.5.34)$$

$$\frac{1}{\rho} b_T(\varphi, \varphi^*) + \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi^* = 0 . \quad (4.5.35)$$

pour toute fonction test $(v^*, \varphi^*, \gamma^*) \in V_v(\mathcal{S}_T) \times V(\mathcal{S}_T) \times V_v(\mathcal{S}_T)$.

Proposition 4.5.1 *Si (v, φ, γ) est solution de (4.5.33)-(4.5.34)-(4.5.35) alors on a l'identité d'énergie*

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{c_m^2} |\gamma|^2 + |\nabla v|^2 \right) (x, t) \, dx + \frac{1}{\rho} |\varphi|_{N, \mathcal{S}_t}^2 = \iint_{\mathcal{S}_t} f(x, s) \frac{\partial v}{\partial t}(x, s) \, dxds . \quad (4.5.36)$$

Preuve :

Il suffit de choisir comme fonctions tests $\gamma^* = \dot{\gamma}$, $v^* = \dot{v}$, $\varphi^* = \dot{\varphi}$ et de sommer alors (4.5.33)+(4.5.34)+(4.5.35). \diamond

4.5.3.2 Discrétisation par éléments finis espace-temps

Les espaces d'approximation de $W(\mathcal{S}_T)$ et $V(\mathcal{S}_T)$ sont déjà définis par (4.5.2). Sur ce modèle, on définit pour $W_v(\mathcal{S}_T)$ et $V_v(\mathcal{S}_T)$ les espaces d'approximation :

$$\begin{cases} W_{h,\Delta t}^v(\mathcal{S}_T) = \{v_{h,\Delta t} \in \mathcal{P}_{\Delta t}^1(0, T; \mathcal{V}_h) / v_{h,\Delta t}(\cdot, 0) = 0\}, \\ V_{h,\Delta t}^v(\mathcal{S}_T) = \mathcal{P}_{\Delta t}^0(0, T; \mathcal{V}_h). \end{cases} \quad (4.5.37)$$

On considère alors le problème approché (evidemment associé à (4.5.33)-(4.5.34)-(4.5.35)) :

Trouver $(v_{h,\Delta t}, \varphi_{h,\Delta t}, \gamma_{h,\Delta t}) \in W_{h,\Delta t}^v(\mathcal{S}_T) \times W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) \times W_{h,\Delta t}^v(\mathcal{S}_T)$ tel que

$$\iint_{\mathcal{S}_T} \dot{v}_{h,\Delta t} \gamma_{h,\Delta t}^* = \iint_{\mathcal{S}_T} \gamma_{h,\Delta t} \dot{\gamma}_{h,\Delta t}^* \quad (4.5.38)$$

$$\frac{1}{c_m^2} \iint_{\mathcal{S}_T} \dot{\gamma}_{h,\Delta t} w_{h,\Delta t}^* + \iint_{\mathcal{S}_T} \nabla v_{h,\Delta t} \cdot \nabla v_{h,\Delta t}^* - \iint_{\mathcal{S}_T} \dot{\varphi}_{h,\Delta t} v_{h,\Delta t}^* = \iint_{\mathcal{S}_T} f_{h,\Delta t} v_{h,\Delta t}^*, \quad (4.5.39)$$

$$\frac{1}{\rho} b_T(\varphi_{h,\Delta t}, \varphi_{h,\Delta t}^*) + \iint_{\mathcal{S}_T} \dot{v}_{h,\Delta t} \varphi_{h,\Delta t}^* = 0 \quad (4.5.40)$$

pour toute fonction test $(v_{h,\Delta t}^*, \varphi_{h,\Delta t}^*, \gamma_{h,\Delta t}^*) \in V_{h,\Delta t}^v(\mathcal{S}_T) \times V_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) \times V_{h,\Delta t}^v(\mathcal{S}_T)$.

Nous allons maintenant reformuler matriciellement ce schéma. Pour cela, nous utiliserons pour $v_{h,\Delta t}$ et $\varphi_{h,\Delta t}$ la décomposition donnée par (4.5.7) et nous réutiliserons les vecteurs V_h^n et Φ_h^n associés. Conformément aux espaces discrets, nous utiliserons pour $\gamma_{h,\Delta t}$ la décomposition :

$$\gamma_{h,\Delta t} = \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^{N_h^m} \gamma_j^n w^m \otimes \xi_j,$$

et nous choisirons dans (4.5.42) des fonctions tests de la forme

$$\gamma_{h,\Delta t}^* = \zeta^n \otimes \gamma_h^*.$$

Les fonctions de bases w^n et ζ^n sont définies par (4.5.3) et (4.5.4) et on rappelle que $\{\xi_j\}_j$ est une base de \mathcal{V}_h . On notera alors Γ_h^n le vecteurs des composantes de γ_h^n dans la base $\{\xi_j\}_j$.

Soit X est un espace de Hilbert, alors on notera :

$$\forall u_{h,\Delta t} \in \mathcal{P}^1(0, T; X), \quad u_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2}. \quad (4.5.41)$$

Des calculs algébriques simples et proches de ceux qui conduisent à la relation (4.5.26) permettent de voir que le schéma (4.5.38)-(4.5.39)-(4.5.40) est équivalent à

Trouver $(v_h^n, \varphi_{h,\Delta t}, \gamma_h^n) \in \mathcal{V}_h \times W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) \times \mathcal{V}_h$ tel que $\forall (v_h^*, \varphi_{h,\Delta t}^*, \gamma_h^*) \in \mathcal{V}_h \times V_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) \times \mathcal{V}_h$

$$\int_{\Sigma} \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} \gamma_h^* = \int_{\Sigma} \gamma_h^{n+\frac{1}{2}} \gamma_h^* \quad (4.5.42)$$

$$\frac{1}{c_m^2} \int_{\Sigma} \frac{\gamma_h^{n+1} - \gamma_h^n}{\Delta t} v_h^* + \int_{\Sigma} \nabla v_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla v_h^* - \int_{\Sigma} \frac{\varphi_h^{n+1} - \varphi_h^n}{\Delta t} v_h^* = \int_{\Sigma} f_h^{n+\frac{1}{2}} v_h^*, \quad (4.5.43)$$

$$\frac{1}{\rho} b_T(\varphi_{h,\Delta t}, \varphi_{h,\Delta t}^*) + \iint_{\mathcal{S}_t^n} \dot{v}_{h,\Delta t} \varphi_{h,\Delta t}^* = 0 \quad (4.5.44)$$

Matriciellement, ce schéma s'écrit alors : Trouver $(\Phi_h^n, V_h^n, \Gamma_h^n)$ tels que

$$\mathbf{M}_h \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} = \mathbf{M}_h \Gamma_h^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.5.45)$$

$$\mathbf{M}_h \frac{\Gamma_h^{n+1} - \Gamma_h^n}{\Delta t} + \mathbf{A}_h V_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{C}_h \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^n}{\Delta t} = F_h^{n+\frac{1}{2}}, \quad (4.5.46)$$

$$\frac{1}{\rho \Delta t} \sum_{m=1}^{n+1} \mathbf{N}_h^{n+1-m}(\Delta t) \Phi_h^m + \mathbf{C}_h^* \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} = 0 \quad (4.5.47)$$

où les matrices dans les équations (4.5.45)-(4.5.46) sont définies par (4.5.22),(4.5.23),(4.5.24) et les matrices de la convolution discrète dans (4.5.47) sont définies par (4.5.11). (On renvoie à (4.5.26) pour l'expression du terme de couplage dans (4.5.47))

4.5.3.3 Analyse de stabilité

Nous allons montrer dans cette section que le schéma (4.5.45)-(4.5.47) est inconditionnellement stable. On rappelle (c'est un point important) que l'opérateur ∂_t envoie respectivement $W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T)$ dans $V_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T)$ et $W_{h,\Delta t}^v(\mathcal{S}_T)$ dans $V_{h,\Delta t}^v(\mathcal{S}_T)$.

Le caractère inconditionnellement stable du schéma provient pour l'essentiel de la proposition suivante :

Proposition 4.5.2 *On définit l'énergie mécanique discrète centrée au temps t^n par*

$$E_h^n(v_h^n, \gamma_h^n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (|\gamma_h^n|^2 + a(v_h^n, v_h^n))$$

La solution $(v_{h,\Delta t}, \varphi_{h,\Delta t}, \gamma_{h,\Delta t})$ de (4.5.42)-(4.5.43)-(4.5.44) vérifie l'identité d'énergie

suivante ($\forall n \in \mathbb{N}$) :

$$E_h^n(v_h^n, \gamma_h^n) + \frac{1}{\rho} |\varphi_{h,\Delta t}|_{N, \mathcal{S}_{tn}}^2 = \sum_{k=0}^n \Delta t \int_{\Sigma} f^{k+\frac{1}{2}} \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} dx \quad (4.5.48)$$

Preuve

Dans les équations (4.5.42)-(4.5.43) on note $n = k$ et on prend

$$\gamma_h^* = \frac{\gamma_h^{k+1} - \gamma_h^k}{\Delta t} \text{ et } v_h^* = \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} .$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{p_h^{k+1} - p_h^k}{\Delta t} \frac{\gamma_h^{k+1} - \gamma_h^k}{\Delta t} &= \int_{\Sigma} \gamma_h^{k+\frac{1}{2}} \frac{\gamma_h^{k+1} - \gamma_h^k}{\Delta t} \\ \frac{1}{c_m^2} \int_{\Sigma} \frac{\gamma_h^{k+1} - \gamma_h^k}{\Delta t} \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} + \int_{\Sigma} \nabla v_h^{k+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} - \int_{\Sigma} \frac{\varphi_h^{k+1} - \varphi_h^k}{\Delta t} \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} \\ &= \int_{\Sigma} f_h^{k+\frac{1}{2}} \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t}, \end{aligned}$$

On multiplie alors ces équations par Δt , on somme pour $k = 0$ à n (cette étape correspond à une intégration discrète), par somme il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_m^2} \sum_{k=0}^n \Delta t \int_{\Sigma} \gamma_h^{k+\frac{1}{2}} \frac{\gamma_h^{k+1} - \gamma_h^k}{\Delta t} + \sum_{k=0}^n \Delta t \int_{\Sigma} \nabla v_h^{k+\frac{1}{2}} \cdot \nabla \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} \\ - \sum_{k=0}^n \Delta t \int_{\Sigma} \frac{\varphi_h^{k+1} - \varphi_h^k}{\Delta t} \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} = \sum_{k=0}^n \Delta t \int_{\Sigma} f_h^{k+\frac{1}{2}} \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} \end{aligned}$$

Comme les conditions initiales sont homogènes, en utilisant la définition (4.5.41) il est facile de voir que cette équation est équivalente à :

$$E_h^n(\gamma_h^n, v_h^n) - \sum_{k=0}^n \Delta t \int_{\Sigma} \frac{\varphi_h^{k+1} - \varphi_h^k}{\Delta t} \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} = \sum_{k=0}^n \Delta t \int_{\Sigma} f_h^{k+\frac{1}{2}} \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} \quad (4.5.49)$$

D'un autre coté, on peut se convaincre sans problème que

$$\text{pour } \varphi_{h,\Delta t} \in W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) \text{ on a } \iint_{\mathcal{S}_{tn}} \dot{v}_{h,\Delta t} \dot{\varphi}_{h,\Delta t} = \sum_{k=0}^n \Delta t \int_{\Sigma} \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} \frac{\varphi_h^{k+1} - \varphi_h^k}{\Delta t} .$$

Par conséquent en prenant $\varphi_{h,\Delta t}^* = \dot{\varphi}_{h,\Delta t}$ dans (4.5.44) il vient

$$\frac{1}{\rho} b_{tn}(\varphi_{h,\Delta t}, \dot{\varphi}_{h,\Delta t}) + \sum_{k=0}^n \Delta t \int_{\Sigma} \frac{v_h^{k+1} - v_h^k}{\Delta t} \frac{\varphi_h^{k+1} - \varphi_h^k}{\Delta t} = 0 . \quad (4.5.50)$$

La somme (4.5.49)+ (4.5.50) donne exactement (4.5.48). \diamond

Par des arguments classiques (lemme de Gronwall discret), cette identité d'énergie nous permet d'énoncer le théorème de stabilité suivant :

Théorème 4.5.1 *Le schéma (4.5.42)-(4.5.44) est inconditionnellement stable et on a les estimations de stabilité suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{t^{n+1} \leq T} |\gamma_h^n| + \sup_{t^{n+1} \leq T} |\nabla v_h^n|_{L^2(\Sigma)} \leq C T \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))}, \\ \sup_{t^n \leq T} |\varphi_{h,\Delta t}|_{S_{t^n}} \leq C T \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))}. \end{array} \right.$$

4.5.4 Une drôle de coïncidence

D'un point de vue pratique il est inutile de calculer l'inconnue auxiliaire Γ_h^n . Nous allons voir qu'en l'éliminant, on retrouve un schéma qui ne nous est pas inconnu. Nous allons effectuer une dérivation discrète de l'équation (4.5.45) afin de faire apparaître l'équivalent discret de \ddot{p} dans (4.5.46).

De l'équation (4.5.45) on tire les deux relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_h \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} = \mathbf{M}_h \frac{\Gamma_h^{n+1} + \Gamma_h^n}{2}, \\ \mathbf{M}_h \frac{V_h^n - V_h^{n-1}}{\Delta t} = \mathbf{M}_h \frac{\Gamma_h^n + \Gamma_h^{n-1}}{2}. \end{array} \right.$$

Par soustraction (et en divisant par Δt) il vient :

$$\mathbf{M}_h \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} = \mathbf{M}_h \frac{\Gamma_h^{n+1} - \Gamma_h^n}{2} + \mathbf{M}_h \frac{\Gamma_h^n - \Gamma_h^{n-1}}{2}. \quad (4.5.51)$$

Or de (4.5.45) on tire les deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_h \frac{\Gamma_h^{n+1} - \Gamma_h^n}{2\Delta t} = \frac{1}{2} \left[F_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{A}_h \frac{V_h^{n+1} + V_h^n}{2} + \mathbf{C}_h \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^n}{\Delta t} \right], \\ \mathbf{M}_h \frac{\Gamma_h^n - \Gamma_h^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{2} \left[F_h^{n-\frac{1}{2}} - \mathbf{A}_h \frac{V_h^n + V_h^{n-1}}{2} + \mathbf{C}_h \frac{\Phi_h^n - \Phi_h^{n-1}}{\Delta t} \right]. \end{array} \right.$$

Par somme il vient :

$$\mathbf{M}_h \frac{\Gamma_h^{n+1} - \Gamma_h^n}{2\Delta t} + \mathbf{M}_h \frac{\Gamma_h^n - \Gamma_h^{n-1}}{2\Delta t} = F_h^n - \mathbf{A}_h \frac{V_h^{n-1} + 2V_h^n + V_h^{n+1}}{4} + \mathbf{C}_h \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (4.5.52)$$

En utilisant (4.5.51) dans (4.5.52) on obtient l'équation discrète indépendante de Γ_h^n suivante :

$$\frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{A}_h \frac{V_h^{n-1} + 2V_h^n + V_h^{n+1}}{4} - \mathbf{C}_h \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^{n-1}}{2\Delta t} = F_h^n .$$

Par conséquent le schéma de couplage que l'on obtient est :

$$\frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{A}_h \frac{V_h^{n-1} + 2V_h^n + V_h^{n+1}}{4} - \mathbf{C}_h \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^{n-1}}{2\Delta t} = F_h^n ,$$

$$\frac{1}{\rho \Delta t} \sum_{m=1}^{n+1} \mathbf{N}_h^{n+1-m}(\Delta t) \Phi_h^m + \mathbf{C}_h^* \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} = 0 .$$

La drôle de coïncidence est que ce schéma est exactement le schéma naturel (4.5.28)-(4.5.29) (dont on ne savait a priori par démontré la stabilité) pour $\theta = 1/4$.

4.5.5 Conclusion de ce chapitre.

Le schéma “naturel”, à savoir celui qui couple naturellement les schémas espace-temps (volumique pour la membrane surfacique pour le fluide) n'est pas a priori conservatif. On ne sait pas montrer qu'il est stable, ce qui ne signifie pas pour autant qu'il ne l'est pas. Cependant, puisque la méthode proposée par [Duong, 1987] conduit à un schéma inconditionnellement stable, on espère contrôler la stabilité du schéma de couplage en contrôlant la stabilité du θ -schéma; ce qui est clairement le cas si le schéma de couplage conserve une énergie discrète définie comme somme des énergies discrètes acoustique et mécanique. Or, des simulations numériques montrent que ce schéma est instable pour $\theta = 0$ sous la CFL du θ -schéma... ce qui laisse fortement penser ce schéma est loin d'être robuste. En contrepartie, nous avons vu, mais finalement via une coïncidence algébrique et non grâce à une démonstration a priori, que le schéma naturel pour $\theta = 1/4$ est onconditionnellement stable. En conclusion, il doit exister des valeurs de θ pour lesquelles le schéma est stable et des valeurs de θ pour lesquelles il est instable. La encore le problème est que l'on ne sait pas déterminer ces intervalles de valeurs. Bien que nous ayons réussi à construire un schéma de couplage inconditionnellement stable, nous avons perdu la souplesse offerte par le θ schéma, notamment celle de rendre le schéma global potentiellement semi explicite (si on utilise le principe de condensation de masse pour le calcul de \mathbf{M}_h).

4.6 Un schéma de couplage éléments finis/potentiels retardés utilisant des grilles décalées

Nous allons modifier le schéma (4.5.28)-(4.5.29) de sorte à construire un nouveau schéma qui assure une identité d'énergie discrète indépendante des termes de couplage. L'idée principale de notre méthode est motivée par les explications du sous chapitre 4.5.2.2. En supposant que Δt est le pas de temps de utilisé pour discrétiser l'équation mécanique

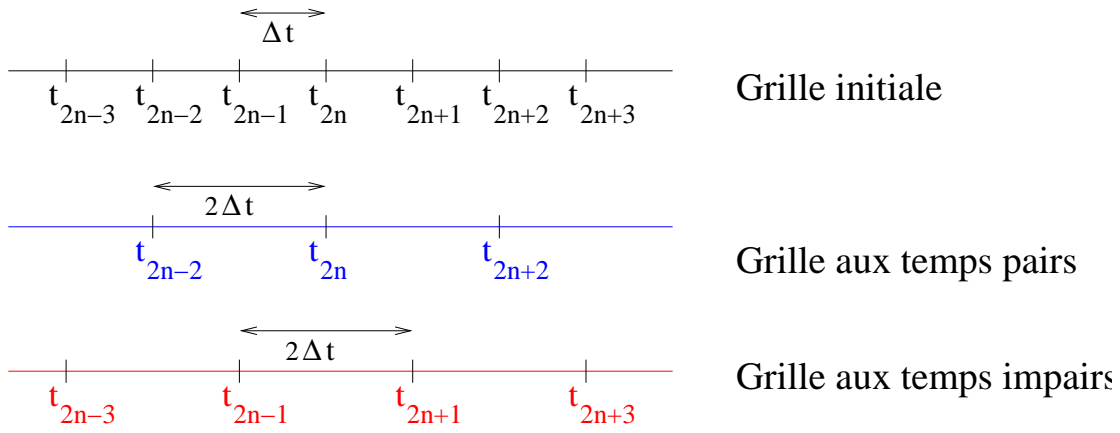


FIG. 4.3: Grilles décalées aux temps pairs et impairs

(4.5.28), on distinguera deux grilles décalées de pas $2\Delta t$ correspondant aux temps pairs et impairs pour la discrétisation de l'équation acoustique (4.5.29) (cf. Fig. 4.3). Dans une première section nous construirons le schéma numérique à l'aide de ces grilles décalées et dans une seconde partie nous étudierons sa stabilité.

4.6.1 Construction du schéma numérique

Dorénavant $\Delta t = T/(2N)$. Dans ce qui suit, nous aurons besoin de distinguer deux grilles de temps de pas $2\Delta t$, à savoir les grilles aux temps pairs t^{2n} et aux temps impairs t^{2n+1} . Une décomposition naturelle des espaces $\mathcal{P}_{\Delta t}^k(0, T; X)$, $\{k = 0, 1\}$ (cf. (4.5.1)) sur les grilles décalées aux temps pairs et impairs est :

$$\mathcal{P}_{\Delta t}^k(0, T; X) = \mathcal{P}_{\Delta t}^{k,p}(0, T; X) + \mathcal{P}_{\Delta t}^{k,i}(0, T; X), \quad \{k = 0, 1\}, \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\Delta t}^{k,p}(0, T; X) = \{f \in \mathcal{P}_{\Delta t}^k(0, T; X) / \forall n \leq N-1, f|_{[t^{2n}, t^{2n+2}]} \in P^k(X)\}, \\ \mathcal{P}_{\Delta t}^{k,i}(0, T; X) = \{f \in \mathcal{P}_{\Delta t}^k(0, T; X) / \forall n \leq N-1, f|_{[t^{2n-1}, t^{2n+1}]} \in P^k(X)\}. \end{cases} \quad (4.6.1)$$

Pour $k = 1$, on associe à la décomposition (4.6.1) les deux opérateurs d'interpolation

$$\Pi_{\Delta t}^{1,p} : C^0(0, T; X) \longrightarrow \mathcal{P}_{\Delta t}^{1,p}(0, T; X), \quad \Pi_{\Delta t}^{1,i} : C^0(0, T; X) \longrightarrow \mathcal{P}_{\Delta t}^{1,i}(0, T; X),$$

caractérisés par les relations

$$\begin{cases} \left[\Pi_{\Delta t}^{1,p} f \right] (t^{2n}) = f(t^{2n}), & 0 \leq n \leq N-1, \\ \left[\Pi_{\Delta t}^{1,i} f \right] (t^{2n+1}) = f(t^{2n+1}), & 0 \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (4.6.2)$$

De la même façon, pour $k = 0$ on définit les opérateurs de projection L^2

$$\Pi_{\Delta t}^{0,p} : L^2(0, T; X) \longrightarrow \mathcal{P}_{\Delta t}^{k,p}(0, T; X), \quad \Pi_{\Delta t}^{0,i} : L^2(0, T; X) \longrightarrow \mathcal{P}_{\Delta t}^{0,i}(0, T; X).$$

Le rôle de ces opérateurs de projection et d'interpolation est illustré sur la figure 4.4.

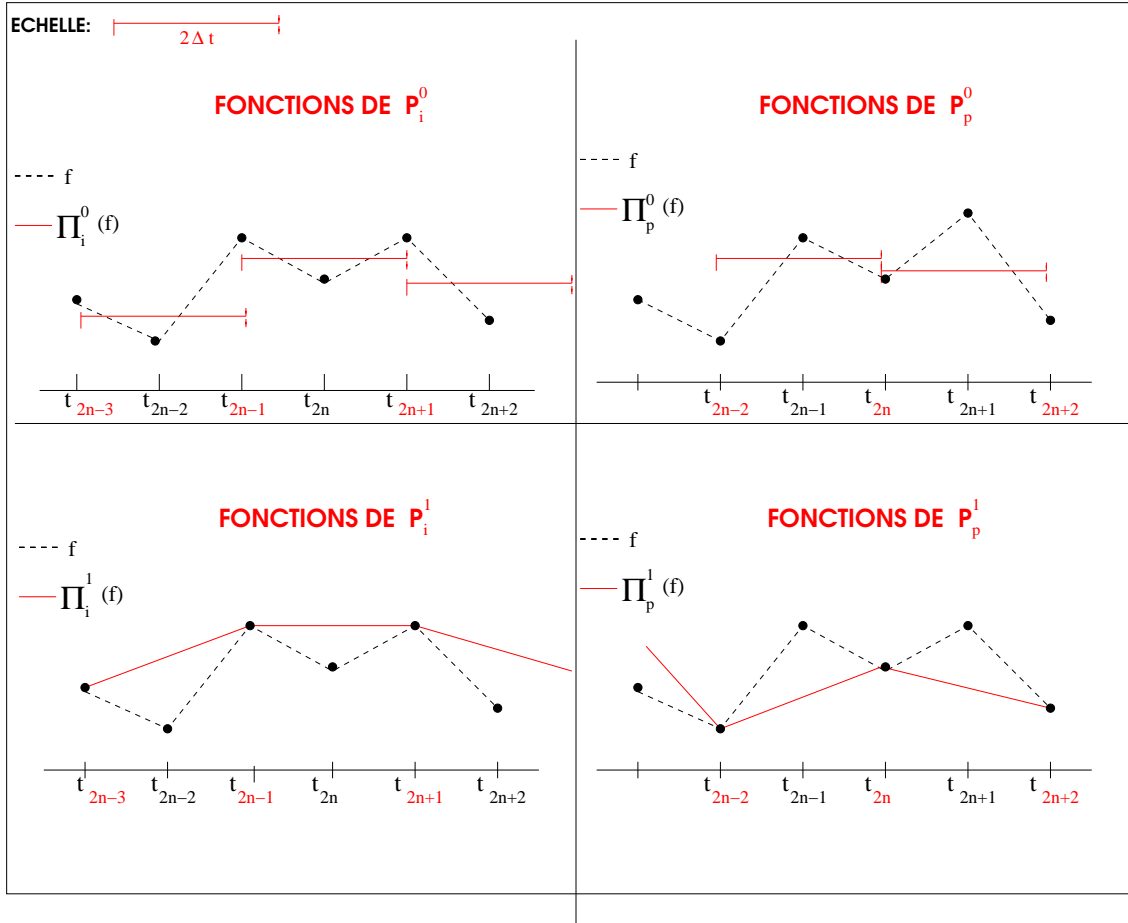


FIG. 4.4: Fonctions des espaces d'approximation pairs et impairs.

En notant $f_{n+\frac{1}{2}}$ la valeur sur $[t^n, t^{n+1}]$ d'une fonction $f \in \mathcal{P}_{\Delta t}^0(0, T; X)$ on a simplement :

$$\begin{cases} \left[\Pi_{\Delta t}^{0,p} f(t) \right] = \frac{f_{2n+\frac{1}{2}} + f_{2n+\frac{3}{2}}}{2}, & \text{si } t^{2n} < t < t^{2n+2}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ \left[\Pi_{\Delta t}^{0,i} f(t) \right] = \frac{f_{2n+\frac{1}{2}} + f_{2n-\frac{1}{2}}}{2}, & \text{si } t^{2n-1} < t < t^{2n+1}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (4.6.3)$$

Nous allons maintenant donner notre schéma d'approximation. Afin d'obtenir, dans l'équation acoustique, un terme de couplage équivalent à une approximation par différences

finies centrées sur une grille de pas Δt , l'idée est de "projeter" deux fois la deuxième équation de la formulation variationnelle 4.4.11 sur les grilles décalées aux temps pairs et impairs. C'est à ce niveau qu'on utilise les opérateurs de projection (4.6.3) et d'interpolation (4.6.2). On donne alors le schéma d'approximation suivant :

Trouver $(\varphi_{h,\Delta t}, v_{h,\Delta t}) \in W(\mathcal{S}_T) \times \mathcal{P}_{\Delta t}^1(0, T; \mathcal{V}_h)$, solution de

$$\left(\frac{v_h^{n+1} - 2v_h^n + v_h^{n-1}}{\Delta t^2}, w_h \right) + a(v_h^{n,\theta}, w_h) - \int_{\Sigma} \frac{\varphi_h^{n+1} - \varphi_h^{n-1}}{2\Delta t} w_h dx = \int_{\Sigma} f^n w_h dx \quad (4.6.4)$$

$$\frac{1}{\rho} b_T \left([\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t}], \Pi_p^0 \psi_{h,\Delta t} \right) + \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial \Pi_p^1 v_{h,\Delta t}}{\partial t} \Pi_p^0 \psi_{h,\Delta t} dx dt = 0, \quad (4.6.5)$$

$$\frac{1}{\rho} b_T \left([\Pi_i^1 \varphi_{h,\Delta t}], \Pi_i^0 \psi_{h,\Delta t} \right) + \iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial \Pi_i^1 v_{h,\Delta t}}{\partial t} \Pi_i^0 \psi_{h,\Delta t} dx dt = 0. \quad (4.6.6)$$

pour toute fonction test $(w_h, \psi_{h,\Delta t}) \in \mathcal{V}_h \times V(\mathcal{S}_T)$.

4.6.2 Reformulation matricielle du schéma

Nous allons maintenant reformuler matriciellement ce schéma pour pouvoir préciser l'algorithme de résolution utilisé. Evidemment, l'équation 4.6.4 est toujours équivalente à l'équation vectorielle (4.5.20). Il nous reste par conséquent à :

- reformuler matriciellement la discrétisation du potentiel retardé N_{Σ} sur les grilles décalées,
- interpréter sous forme de différences finies les termes de couplage des équations (4.6.5) et (4.6.6).

Dans ce qui suit, nous reprenons les notations et le formalisme (fonctions de base, matrices de convolution...) détaillés au chapitre 4.5.1.2. Nous détaillerons seulement le "cas pair" à savoir la discrétisation de l'équation (4.6.5) (le cas impair étant strictement identique à un décalage d'indice près).

Il s'agit donc de réécrire sous forme d'une convolution discrète la quantité

$$b_T \left([\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t}], \Pi_p^0 \psi_{h,\Delta t} \right).$$

Il n'est pas très difficile de voir que les matrices qui interviennent dans cette convolution sont en fait les matrices $\mathbf{N}_h^k(2\Delta t)$ où $\mathbf{N}_h^k(\delta)$ est défini par (4.5.11). Pour cela, il suffit simplement de remarquer que, par définition, les opérateurs $\Pi_{\Delta t}^{1,p}$ et $\Pi_{\Delta t}^{0,p}$ transforment respectivement les fonctions de base w^{2n} et les fonctions tests ζ^{2n} en nouvelles fonctions $w_{2\Delta t}^{2n}$ et $1/2(\zeta_{2\Delta t}^{2n})$ définies par (cf. Fig. 4.5) :

$$w_{2\Delta t}^{2n}(t) = \begin{cases} \frac{t - t^{2n-2}}{2\Delta t} & , \text{ si } t \in [t^{2n-2}, t^{2n}] \\ \frac{t^{2n+2} - t}{2\Delta t} & , \text{ si } t \in [t^{2n}, t^{2n+2}] \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (4.6.7)$$

et

$$\zeta_{2\Delta t}^{2n}(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } t \in [t^{2n-2}, t^{2n}] \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases} \quad (4.6.8)$$

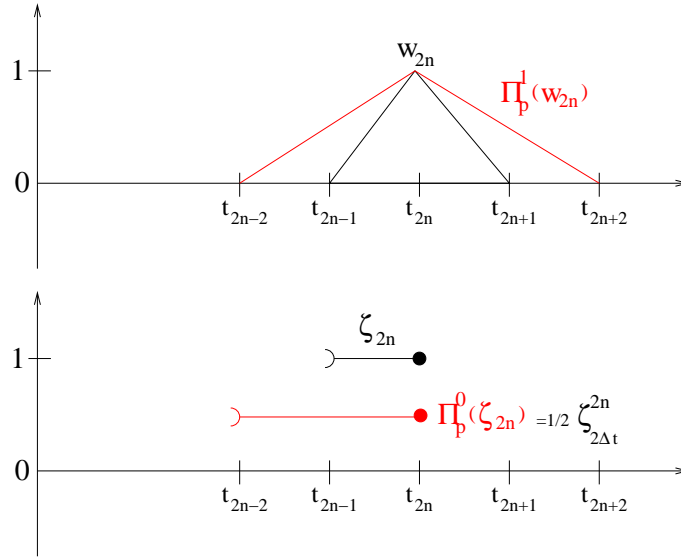


FIG. 4.5: Transformation de w^n et ζ^n par les opérateurs de projection et d'interpolation.

Reformulons maintenant le potentiel retardé N_Σ sur la grille des temps pairs.

Par définition $\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t} \in \mathcal{P}_{\Delta t}^{1,p}(0, T; \mathcal{M}_h)$ et $\Pi_p^0 \psi_{h,\Delta t} \in \mathcal{P}_{\Delta t}^{0,p}(0, T; \mathcal{M}_h)$ donc on a la décomposition suivante :

$$\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t} = \sum_{n=1}^{2N} \sum_{j=1}^{N_h^m} \varphi_j^{2n} w_{2\Delta t}^{2n} \otimes \xi_j, \quad \Pi_p^0 \psi_{h,\Delta t} = \sum_{n=1}^{2N} \sum_{j=1}^{N_h^m} \psi_j^{2n} \zeta_{2\Delta t}^{2n} \otimes \xi_j, \quad (4.6.9)$$

Posons alors $\Phi^{2n} = (\varphi_j^{2n})_{1 \leq j \leq N_h^m}$ et $\Psi^{2n} = (\psi_j^{2n})_{1 \leq j \leq N_h^m}$. En reprenant la démarche développée au chapitre 4.5.1.2 on a :

$$b_T \left([\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t}], \Pi_p^0 \psi_{h,\Delta t} \right) = \sum_{m=1}^n \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{B}_T^{2m,2n} \Phi_h^{2m} \cdot \Psi_h^{2n}$$

où $\mathbf{B}_T^{2m,2n}$ est la matrice définie par $(\mathbf{B}_T^{2m,2n})_{ij} = b_T(w_{2\Delta t}^{2m} \otimes \xi_i, \zeta_{2\Delta t}^{2n} \otimes \xi_j)$. En utilisant la formule (4.3.18) on a (la justification relève là encore du lemme 4.5.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_T^{2m,2n} = \mathbf{B}_{T,1}^{2m,2n} + \mathbf{B}_{T,2}^{2m,2n} \\ (\mathbf{B}_{T,1}^{2m,2n})_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\xi_j(y) \xi_i(x)}{c^2|x-y|} J_{2m,2n}^1(x,y) dx dy \\ (\mathbf{B}_{T,2}^{2m,2n})_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\nabla \xi_j(y) \cdot \nabla \xi_i(x)}{c^2|x-y|} J_{2m,2n}^2(x,y) dx dy \end{array} \right. \quad (4.6.10)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{2m,2n}^1(x,y) = \int_0^T \ddot{w}_{2\Delta t}^{2m}(t - \tau(x,y)) \zeta_{2\Delta t}^{2n}(t) dt, \\ J_{2m,2n}^2(x,y) = \int_0^T w_{2\Delta t}^{2m}(t - \tau(x,y)) \zeta_{2\Delta t}^{2n}(t) dt. \end{array} \right.$$

Comme on a

$$\ddot{w}_{2\Delta t}^{2m}(t - \tau) = \frac{1}{2\Delta t} [\delta_{2m+2}(t - \tau) - 2 \delta_{2m}(t - \tau) + \delta_{2m-2}(t - \tau)], \quad (4.6.11)$$

alors

$$J_{2m,2n}^1(x,y) = \frac{1}{\Delta t} [\zeta^{2n}(t^{2m+2} + \tau(x,y)) - 2 \zeta^{2n}(t^{2m} + \tau(x,y)) + \zeta^{2n}(t^{2m-2} + \tau(x,y))]$$

Il reste maintenant à faire le lien entre les couronnes de type $C_k(\delta)$ (cf. (4.5.8)) et les ensembles définis par les fonctions indicatrices ζ^{2n} dans la formule précédente. Or

$$\begin{aligned} \zeta^{2n}(t^{2m+2} + \tau(x,y)) \neq 0 &\Leftrightarrow t^{2n-2} \leq t^{2m+2} + \tau(x,y) \leq t^{2n} \\ &\Leftrightarrow t^{2n-2-2m-2} \leq \tau(x,y) \leq t^{2n-2m-2} \\ &\Leftrightarrow 2\Delta t(n-m-2) \leq \tau(x,y) \leq 2\Delta t(n-m-1) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in C_{n-m-1}(2\Delta t) . \end{aligned}$$

De la même manière on montre que

$$\zeta^{2n}(t^{2m} + \tau(x,y)) \neq 0 \Leftrightarrow (x,y) \in C_{n-m}(2\Delta t)$$

et

$$\zeta^{2n}(t^{2m-2} + \tau(x, y)) \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \in C_{n-m+1}(2\Delta t)$$

Par conséquent, on peut énoncer le

Lemme 4.6.1 *Soit $(\phi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) \in W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T) \times V_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T)$. Alors on a :*

$$b_T([\Pi_p^1 \phi_{h,\Delta t}], \Pi_p^0 \psi_{h,\Delta t}) = \sum_{n=1}^{2N} \sum_{m=1}^n N_h^{n-m}(2\Delta t) \Phi_h^{2m} \cdot \Psi_h^{2n}, \quad (4.6.12)$$

Donc, l'utilisation de grilles décalées ne complique en rien le calcul des matrices de la convolution discrète inhérente à la discrétisation de N_Σ . Notre schéma requiert simplement le calcul de ces matrices avec un pas de temps de taille $2\Delta t$. Le lecteur se convaincra facilement que, sur la grille de temps impairs, les calculs sont strictement identiques.

Concernant le traitement du terme de couplage, un calcul tout à fait identique à celui qui permet d'établir (4.5.26) nous permet d'écrire :

$$\iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial v_{h,\Delta t}}{\partial t} \Pi_p^0 \psi_{h,\Delta t} dxdt = \sum_{n=1}^N \mathbf{C}_h^* \Psi^{2n} \cdot (V_h^{2n} - V_h^{2n-2})$$

En adoptant une démarche similaire pour l'équation (4.6.6), la formulation matricielle du schéma d'approximation espace-temps (4.6.4)-(4.6.5)-(4.6.6) est

$$\mathbf{M}_h \frac{V_h^{n+1} - 2V_h^n + V_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{A}_h V_h^{n,\theta} - \mathbf{C}_h \frac{\Phi_h^{n+1} - \Phi_h^{n-1}}{2\Delta t} = F_h^n, \quad (4.6.13)$$

$$\frac{1}{2\rho\Delta t} \sum_{m=1}^n N_h^{n-m}(2\Delta t) \Phi_h^{2m+2} + \mathbf{C}_h^* \frac{V_h^{2n+2} - V_h^{2n}}{2\Delta t} = 0, \quad (4.6.14)$$

$$\frac{1}{2\rho\Delta t} \sum_{m=1}^n N_h^{n-m}(2\Delta t) \Phi_h^{2m+1} + \mathbf{C}_h^* \frac{V_h^{2n+1} - V_h^{2n-1}}{2\Delta t} = 0. \quad (4.6.15)$$

4.6.3 Algorithme de résolution

Dans cette section nous décrivons l'algorithme qui permet de calculer itérativement la solution (V_h^n, Φ_h^n) du schéma (4.6.13)-(4.6.14)-(4.6.15). Au passage, cet algorithme assure l'existence et l'unicité d'une solution pour le schéma (4.6.4)-(4.6.5)-(4.6.6).

On introduit les vecteurs U_h^n , B_h^{2n} et B_h^{2n+1} de taille $N_h^m + N_h^v$ et définis par $U_h^n = \begin{pmatrix} V_h^n \\ \Phi_h^n \end{pmatrix}$

et

$$B_h^{2n} = \begin{pmatrix} (2\mathbf{M}_h - \Delta t^2(1 - 2\theta)\mathbf{A}_h) V_h^{2n} + (\mathbf{M}_h - \theta\Delta t^2\mathbf{A}_h) V_h^{2n-1} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}_h\Phi_h^{2n-1} + \Delta t^2 F_h^{2n} \\ -\frac{1}{2\rho\Delta t} \sum_{m=1}^{n-1} N_h^{n-m}(2\Delta t) \Phi_h^{2m+1} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}_h^* V_h^{2n-1} \end{pmatrix}.$$

$$B_h^{2n+1} = \begin{pmatrix} (2\mathbf{M}_h - \Delta t^2(1 - 2\theta)\mathbf{A}_h) V_h^{2n+1} + (\mathbf{M}_h - \theta\Delta t^2\mathbf{A}_h) V_h^{2n} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}_h\Phi_h^{2n} + \Delta t^2 F_h^{2n+1} \\ -\frac{1}{2\rho\Delta t} \sum_{m=1}^{n-1} N_h^{n-m}(2\Delta t) \Phi_h^{2m+2} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}_h^* V_h^{2n} \end{pmatrix}.$$

En supposant U_h^k déjà calculé pour $k \leq 2n$, nous expliquons dans ce qui suit comment calculer U_h^{2n+1} et U_h^{2n+2} à partir de la formulation (4.6.13)-(4.6.14)-(4.6.15). On écrit d'abord l'équation (4.6.13) au temps t^{2n} (i.e "n=2n") et on la couple à l'équation (4.6.15), puis on écrit l'équation (4.6.13) au temps t^{2n+1} (i.e "n=2n+1") et on la couple à l'équation (4.6.14). Il est alors facile de voir que l'on est amené à résoudre successivement les deux systèmes linéaires de même nature à savoir :

$$\mathbf{K}_h(\Delta t) U_h^{2n+1} = B_h^{2n}, \quad \mathbf{K}_h(\Delta t) U_h^{2n+2} = B_h^{2n+1} \quad (4.6.16)$$

où la matrice $\mathbf{K}_h(\Delta t)$ est définie par blocs de la façon suivante :

$$\mathbf{K}_h(\Delta t) = \begin{pmatrix} (\mathbf{M}_h + \theta\Delta t^2\mathbf{A}_h) & -\frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}_h \\ \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}_h^* & \frac{1}{2\rho\Delta t}\mathbf{N}_h^0(2\Delta t) \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{K}_h(\Delta t)$ est inversible car la matrice $N_h^0(\Delta t)$ est symétrique définie positive.

En effet si on prend $N = 1$, i.e $T = \Delta t$ dans (4.5.12) il vient (en notant $\Phi = \Phi_h^1$, $\Psi = \Psi_h^1$)

$$b_{\Delta t}(\phi_{h,\Delta t}, \psi_{h,\Delta t}) = \mathbf{N}_h^0(\Delta t) \Phi \cdot \Psi.$$

Prenons alors $\psi_{h,\Delta t} = \dot{\phi}_{h,\Delta t}$. Par définition de la fonction de base w^1 et comme $\Phi_h^0 = 0$ on a

$$b_{\Delta t}(\phi_{h,\Delta t}, \dot{\phi}_{h,\Delta t}) = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{N}_h^0(\Delta t) \Phi \cdot \Phi.$$

D'après la propriété de positivité du théorème 4.3.1 on en déduit que $N_h^0(\Delta t)$ est positive. De plus d'après la remarque 4.3.1 on peut être plus précis et assurer que $N_h^0(\Delta t)$ est en fait définie positive.

Sur la figure 4.6 on montre comment l'algorithme de calcul proposé permet de calculer (V_h^6, Φ_h^6) et (V_h^7, Φ_h^7) connaissant (V_h^n, Φ_h^n) , $\forall n \leq 5$.

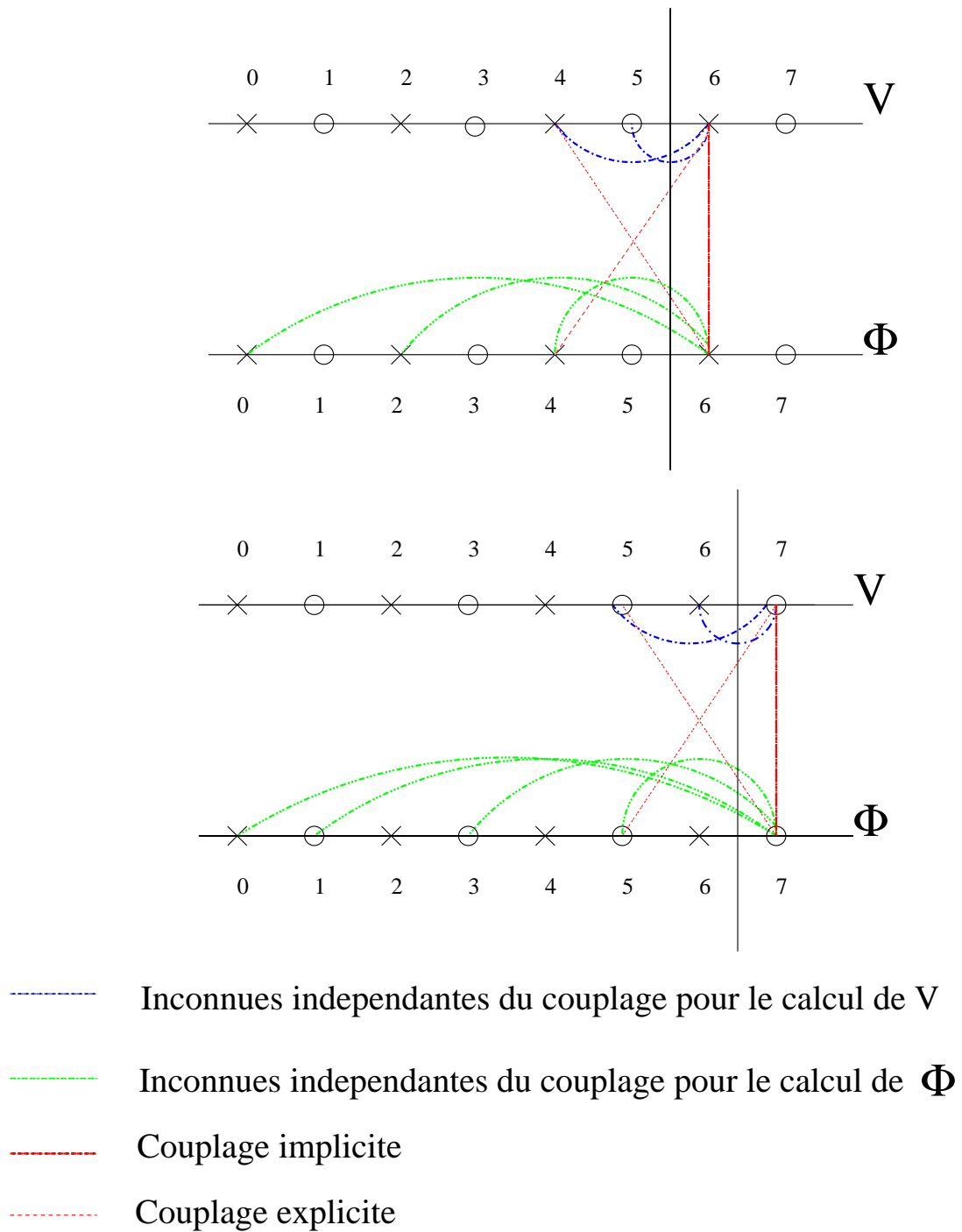


FIG. 4.6: Algorithme de calcul.

4.6.4 Analyse de stabilité

Dans ce qui suit nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.6.2 *On a la propriété de commutation suivante :*

$$\forall \varphi_{h,\Delta t} \in W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T), \quad \Pi_p^0 \frac{\partial \varphi_{h,\Delta t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t}], \quad \Pi_i^0 \frac{\partial \varphi_{h,\Delta t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\Pi_i^1 \varphi_{h,\Delta t}]. \quad (4.6.17)$$

Preuve :

La preuve est extrêmement simple une fois que l'on a remarqué comment les opérateurs de projection et d'interpolation transforment les fonctions de bases initiales en fonctions de bases sur les espaces pairs et impairs. Nous démontrons la première égalité.

On remarque qu'il suffit de monter cette égalité en remplaçant $\varphi_{h,\Delta t}$ par une fonction de base w^{2n} définie par (4.5.3). Par définition, on a :

$$w^{2n} = \begin{cases} \frac{t - t^{2n-1}}{\Delta t}, & \text{si } t \in]t^{2n-1}, t^{2n}] \\ \frac{t^{2n+1} - t}{\Delta t}, & \text{si } t \in]t^{2n}, t^{2n+1}] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial w^{2n}}{\partial t} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}, & \text{si } t \in]t^{2n-1}, t^{2n}] \\ -\frac{1}{\Delta t}, & \text{si } t \in]t^{2n}, t^{2n+1}] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après (4.6.3) il vient alors

$$\Pi_p^0 \frac{\partial w^{2n}}{\partial t} = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta t}, & \text{si } t \in]t^{2n-2}, t^{2n}] \\ -\frac{1}{2\Delta t}, & \text{si } t \in]t^{2n}, t^{2n+2}] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.6.18)$$

Or, on a vu que $\Pi_p^1 w^{2n} = w_{2\Delta t}^{2n}$ où $w_{2\Delta t}^{2n}$ est défini par (4.6.7). Si on dérive en temps (4.6.7) on obtient exactement (4.6.18). \diamond

Cette analyse de stabilité est basée sur un équivalent discret de l'identité (4.4.9). Dans ce qui suit on notera

$$|v|^2 = (\mathbf{M}_h v, v) \quad \text{et on rappelle que} \quad v_h^{n+\frac{1}{2}} \stackrel{\text{def}}{:=} \frac{v_h^{n+1} + v_h^n}{2}.$$

On introduit alors l'énergie discrète classique associé au θ -schéma :

$$E^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left| \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} \right|^2 + \frac{1}{2} a(v_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h^{n+\frac{1}{2}}) + \left(\theta - \frac{1}{4} \right) a\left(\frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t}, \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} \right). \quad (4.6.19)$$

Cette énergie n'est rien d'autre que l'équivalent discret de l'énergie continue relative à la

membrane (qui apparaît comme premier terme du membre de gauche dans (4.4.9)) :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{c_m^2} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v|^2 \right) (x, t) dx.$$

L'énergie discrète (4.6.19) du θ -schéma satisfait l'identité classique :

$$\frac{E^{n+\frac{1}{2}} - E^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left(\frac{v_h^{n+1} - 2v_h^n + v_h^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{v_h^{n+1} - v_h^{n-1}}{2\Delta t} \right) + a(v_h^{n,\theta}, \frac{v_h^{n+1} - v_h^{n-1}}{2\Delta t}). \quad (4.6.20)$$

Le principal résultat de cette section (et en quelque sorte de cette thèse) est donné dans le

Théorème 4.6.1 *La solution $(v_h^n, \varphi_{h,\Delta t})$ de (4.6.4)-(4.6.5)-(4.6.6) vérifie les identités d'énergie suivantes ($\forall n \in \mathbb{N}$) :*

$$\begin{aligned} E_h^{2n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\rho} \left[|\Pi_i^1 \varphi_{h,\Delta t}|_{\mathbb{N}, \mathcal{S}_{t,2n-1}}^2 + |\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t}|_{\mathbb{N}, \mathcal{S}_{t,2n}}^2 \right] \\ = \sum_{k=0}^{2n-1} \Delta t \int_{\Sigma} f^k \frac{v_h^{k+1} - v_h^{k-1}}{2\Delta t} dx, \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

$$\begin{aligned} E_h^{2n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\rho} \left[|\Pi_i^1 \varphi_{h,\Delta t}|_{\mathbb{N}, \mathcal{S}_{t,2n}}^2 + |\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t}|_{\mathbb{N}, \mathcal{S}_{t,2n+1}}^2 \right] \\ = \sum_{k=0}^{2n+1} \Delta t \int_{\Sigma} f^k \frac{v_h^{k+1} - v_h^{k-1}}{2\Delta t} dx. \end{aligned} \quad (4.6.22)$$

Preuve :

On démontre uniquement (4.6.21), la preuve de (4.6.22) étant tout à fait identique.

En prenant $w_h = \frac{v_h^{k+1} - v_h^{k-1}}{2\Delta t}$ dans (4.6.4) (avec $n = k$), et en utilisant l'identité (4.6.20) on obtient :

$$\frac{E_p^{k+\frac{1}{2}}(v_h) - E_p^{k-\frac{1}{2}}(v_h)}{\Delta t} - \int_{\Sigma} \frac{\varphi_h^{k+1} - \varphi_h^{k-1}}{2\Delta t} \frac{v_h^{k+1} - v_h^{k-1}}{2\Delta t} dx = \int_{\Sigma} f^k \frac{v_h^{k+1} - v_h^{k-1}}{2\Delta t} dx.$$

Après sommation pour k allant de 0 à $2n - 1$, on peut, en décomposant l'intégrale de couplage, obtenir :

$$\begin{aligned}
E_p^{2n-\frac{1}{2}}(v_h) &= \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Sigma} \frac{\varphi_h^{2k+1} - \varphi_h^{2k-1}}{2\Delta t} \frac{v_h^{2k+1} - v_h^{2k-1}}{2\Delta t} dx \\
&= \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Sigma} \frac{\varphi_h^{2k+2} - \varphi_h^{2k}}{2\Delta t} \frac{v_h^{2k+2} - v_h^{2k}}{2\Delta t} dx = \Delta t \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{\Sigma} f^{2k} \frac{v_h^{2k+1} - v_h^{2k-1}}{2\Delta t}.
\end{aligned} \tag{4.6.23}$$

Puis dans l'équation (4.6.5) on prend $\psi_{h,\Delta t} = \chi_{2n\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{h,\Delta t}$ ce qui ne pose pas de problème puisque $\chi_{2n\Delta t} \partial/\partial t$ envoie $W_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T)$ dans $V_{h,\Delta t}(\mathcal{S}_T)$. D'après le lemme 4.6.17 on a

$$\Pi_p^0 \left[\chi_{2n\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{h,\Delta t} \right] = \chi_{2n\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t},$$

et donc la propriété de positivité de la forme bilinéaire $b_T(\cdot, \cdot)$ (voir en particulier (4.3.1)) donne :

$$\begin{aligned}
\left| b_T \left(\left[\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t} \right], \Pi_p^0 \left[\chi_{2n\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{h,\Delta t} \right] \right) \right. &= b_T \left(\left[\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t} \right], \chi_{2n\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t} \right) \\
&= \left| \Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t} \right|_{N, \mathcal{S}_{t_{2n}}}^2.
\end{aligned} \tag{4.6.24}$$

De plus, on déduit d'un petit calcul simple équivalent à celui qui nous a permis de reformuler certains termes de couplage que

$$\iint_{\mathcal{S}_T} \frac{\partial v_{h,\Delta t}}{\partial t} \cdot \chi_{2n\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{h,\Delta t} dx dt = 2\Delta t \sum_{k=0}^n \int_{\Sigma} \frac{\varphi_h^{2k+2} - \varphi_h^{2k}}{2\Delta t} \frac{v_h^{2k+2} - v_h^{2k}}{2\Delta t} dx. \tag{4.6.25}$$

Par somme, on obtient :

$$\frac{1}{2\rho} \left| \Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t} \right|_{N, \mathcal{S}_{t_{2n}}}^2 + 2\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Sigma} \frac{\varphi_h^{2k+2} - \varphi_h^{2k}}{2\Delta t} \frac{v_h^{2k+2} - v_h^{2k}}{2\Delta t} dx = 0. \tag{4.6.26}$$

De la même façon, on choisit $\psi_{h,\Delta t} = \chi_{(2n-1)\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{h,\Delta t}$ dans (4.6.6) pour obtenir :

$$\frac{1}{2\rho} \left| \Pi_i^1 \varphi_{h,\Delta t} \right|_{N, \mathcal{S}_{t_{2n-1}}}^2 + 2\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Sigma} \frac{\varphi_h^{2k+1} - \varphi_h^{2k-1}}{2\Delta t} \frac{v_h^{2k+1} - v_h^{2k-1}}{2\Delta t} dx = 0. \tag{4.6.27}$$

Au final, la combinaison (4.6.23) + $\frac{1}{2}$ (4.6.26) + $\frac{1}{2}$ (4.6.27) donne bien le résultat annoncé. \diamond

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre théorème principal de stabilité :

Théorème 4.6.2 *Pour $\theta \geq 1/4$, notre schéma est inconditionnellement stable et on a les estimations de stabilité suivantes :*

$$\begin{cases} \sup_{t^{n+1} \leq T} \left| \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} \right| + \sup_{t^{n+1} \leq T} |\nabla v_h^{n+\frac{1}{2}}|_{L^2(\Sigma)} \leq C T \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))}, \\ \sup_{t^n \leq T} |\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t}|_{S_{t^n}} + \sup_{t^n \leq T} |\Pi_i^1 \varphi_{h,\Delta t}|_{S_{t^n}} \leq C T \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))}. \end{cases} \quad (4.6.28)$$

où C est une constante positive indépendante de Δt .

Pour $\theta < 1/4$, notre schéma est stable sous la condition CFL :

$$\exists \alpha < 1, \quad \text{tel que} \quad \frac{\Delta t^2}{4} (1 - 4\theta) \|a_h\| \leq \alpha. \quad (4.6.29)$$

où l'on a posé :

$$\|a_h\| = \sup_{v_h \in \mathcal{V}_h} \frac{a(v_h, v_h)}{|v_h|^2}. \quad (4.6.30)$$

Preuve :

On limite notre preuve au cas $\theta \geq 1/4$, le cas $\theta < 1/4$ étant identique à quelques détails techniques près.

Puisque $\theta \geq 1/4$ alors

$$\left| \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} \right|^2 \leq 2 E_h^{n+\frac{1}{2}}.$$

Grâce au lemme de Gronwall discret on en déduit que

$$\left| \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} \right| \leq C \sum_{k=0}^n \|f^k\|_{L^2(\Sigma)} \Delta t \leq C t^n \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))}. \quad (4.6.31)$$

En injectant (4.6.31) dans (4.6.21) et (4.6.22), on obtient facilement l'estimation

$$E_h^{n+\frac{1}{2}} \leq C (t^n)^2 \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))}^2,$$

de laquelle on déduit immédiatement la première inégalité de (4.6.28). Enfin, (4.6.21) et (4.6.22) donnent également

$$|\Pi_i^1 \varphi_{h,\Delta t}|_{N,S_{t^n}}^2 + |\Pi_p^1 \varphi_{h,\Delta t}|_{N,S_{t^n}}^2 \leq C (t^n)^2 \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Sigma))}^2$$

pour tout $t^n \leq T$ et, par conséquent, la deuxième estimation de (4.6.28). ◇

4.7 Extension aux vibrations d'une plaque

Nous montrons ici comment notre méthode numérique s'applique aux systèmes vibroacoustiques définis à partir d'un modèle de plaque mince. On considèrera deux modèles classiques de plaque : Le modèle de Kirchhoff-Love (K.L) et le modèle de Reissner-Mindlin (R.M). Pour des raisons de simplicité on supposera que la plaque est constituée d'un matériau homogène isotrope caractérisé par son module de Young E et son coefficient de Poisson ν . Cependant, l'extension à des plaques anisotropes (voir [Naghdi, 1963]) pour la définition des lois de comportement) ne pose aucun problème pour le couplage. On notera ρ_p la densité surfacique de la plaque et δ son épaisseur. Il est important de noter que, comme dans le cas de la membrane, nous utiliserons la vitesse transverse issue du déplacement en flexion (cf. chapitre 2) comme inconnue structure pour le problème couplé, ce qui laisse la condition de couplage (3.1.5) inchangé dans tous les cas de figure. Le changement de modèle n'affecte en réalité que la première équation du système (4.2.1) : il suffit de remplacer l'équation de membrane par le modèle de plaque. Nous montrons dans cette section comment le modèle de couplage s'inscrit dans le cadre variationnel abstrait (4.4.11) quel que soit le modèle de plaque, de sorte que la méthode numérique développée au chapitre 4.6 reste directement applicable. Pour les deux modèles (K.L) et (R.M), l'inconnue φ désigne, comme dans le cas de la membrane, le saut de pression sur la plaque Σ .

4.7.1 Le cas d'une plaque de type Kirchhoff-Love

Dans ce cas, la vitesse transverse est la seule inconnue du modèle mécanique. Les équations qui régissent le modèle sont :

$$\begin{cases} \rho_p \delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\delta^3 E}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 v = f + \left[\frac{\partial p}{\partial t} \right], & x \in \Sigma, \quad t > 0, \\ v(x, t) = \frac{\partial v}{\partial n_\sigma}(x, t) = 0, & x \in \partial\Sigma, \quad t > 0, \end{cases} \quad (4.7.1)$$

où la source f et la pression p joue le même rôle que dans le chapitre 3 (dans lequel on construit pas à pas le modèle vibroacoustique d'une plaque). Dans ce modèle, nous avons considéré le cas d'une plaque homogène isotrope, totalement encastrée (ce qui justifie les conditions aux limites dans 4.7.1, n_σ étant la normale extérieure à Σ).

En procédant comme au chapitre 4.4, il est alors trivial de voir que le système (4.2.1) dans lequel on remplace l'opérateur de membrane par l'opérateur de K.L (on rappelle que la condition de couplage est inchangée) est équivalent à un problème variationnel surfacique de la forme (4.4.11) où dorénavant :

$$\begin{cases} \mathcal{V} = H_0^2(\Sigma), \\ (v, w) = \rho_p \delta \int_{\Sigma} v w \, dx, & \forall (v, w) \in L^2(\Sigma)^2, \\ a(v, w) = \frac{\delta^3 E}{12(1-\nu^2)} \int_{\Sigma} \Delta v \Delta w \, dx, & \forall (v, w) \in \mathcal{V}^2. \end{cases} \quad (4.7.2)$$

4.7.2 Le cas d'une plaque de type Reissner-Mindlin

Le modèle de Reissner-Mindlin est sensiblement plus compliqué puisque qu'en complément de la vitesse transverse, il introduit une inconnue supplémentaire pour décrire le comportement de la plaque à savoir le vecteurs des rotations

$$\theta = (\theta_x, \theta_y)^t.$$

On renvoie évidemment le lecteur au chapitre 2 dont toute la première partie est consacré à la description de ce modèle. On rappelle tout de même que les équations qui régissent ce modèle sont

$$\begin{cases} \rho_p \delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \delta \operatorname{div}[G (\nabla v + \theta)] & = f + [\frac{\partial p}{\partial t}], & x \in \Sigma, \quad t > 0, \\ \rho_p \frac{\delta^3}{12} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\delta^3}{12} \operatorname{Div}(\underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\theta)) + \delta G (\nabla v + \theta) & = 0, & x \in \Sigma, \quad t > 0, \\ v(x, t) = \theta(x, t) & = 0, & x \in \partial\Sigma, \quad t > 0. \end{cases} \quad (4.7.3)$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est le tenseur des déformations linéarisé :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\theta) \stackrel{def}{=} \underline{\underline{\varepsilon}}(\theta)_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} \right) \quad \forall i, j = \{1, 2\} ,$$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ et $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur de rigidité défini par :

$$C^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu}).$$

Là encore, après une reformulation sur Σ à l'aide de potentiels retardés, on peut écrire une formulation variationnelle du type (4.4.11) où le cadre fonctionnel est défini par les espaces et les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{V} = H_0^1(\Sigma) \times H_0^1(\Sigma) \quad \text{et pour tout } ((v, \theta), (w, \eta)) \text{ in } \mathcal{V}^2, \\ ((v, \theta), (w, \eta)) = \rho_p \delta \int_{\Sigma} v w \, dx + \rho_p \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \theta \cdot \eta \, dx, \\ a((v, \theta), (w, \eta)) = \frac{\delta^3}{12} \int_{\Sigma} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\theta) : \varepsilon(\eta) + \delta \int_{\Sigma} G (\nabla v + \theta) \cdot (\nabla w + \eta). \end{cases} \quad (4.7.4)$$

En conclusion, notre schéma de couplage éléments finis-potentiels retardés s'applique à tous modèle vibroacoustique, et ce, indépendamment du modèle mécanique utilisé. Il était cependant plus "pédagogique" de présenter notre méthode numérique, dont le formalisme est un peu lourd, sur le cas de la membrane sans alourdir inutilement les calculs avec

un modèle de plaque. Du point de vue de l'implémentation, le schéma (4.6.13)-(4.6.14)-(4.6.15) se programme toujours à l'aide de l'algorithme décrit à cet effet, quelque soit le modèle mécanique choisit. Lorsque que l'on change le modèle structure, on change seulement les matrices de masse de rigidité et de couplage.

4.8 Résultats numériques

Les résultats numériques présentés dans cette section n'ont pas la prétention de reproduire des expériences physiques réalistes mais ont pour objectif de valider notre méthode et le code de calcul développé. Pour ce faire nous comparerons les résultats obtenus avec notre approche éléments finis/potentiels retardés (BEM-FEM) sur les grilles décalées (pour $\theta = 0$) avec des résultats obtenus par l'approche éléments finis 2D-3D développée dans le chapitre 3. On considèrera successivement le cas des vibrations d'une membrane et d'une plaque de type Reissner-Mindlin, couplée à de l'air. Ces deux expériences auront en commun :

- Pour le modèle continu :
 - La vitesse du son $c = 1$.
 - Les dimensions de la membrane (ou de la plaque) : $\Sigma = [-5, 5] \times [-5, 5]$.
 - La force de chargement f localisée au centre de Σ déjà utilisés dans les chapitres 2 et 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t, x) = g(x)h(t) \\ h(t) = -2\pi^2 f_0^2 [2\pi^2(f_0 t - 1)] e^{-\pi^2(f_0 t - 1)^2} , \\ g(x) = e^{-\pi^2|x|^2} \quad \text{si } |x| < 1 \quad , \quad 0 \quad \text{sinon} . \end{array} \right.$$

- Concernant les paramètres de discrétisation :
 - Pour la discrétisation du saut de pression φ i.e l'espace \mathcal{M}_h , on utilisera des éléments finis de Lagrange P_1 associé à un maillage triangulaire de Σ .
 - Le maillage pour φ est construit à partir d'un maillage quadrangulaire à 50 mailles dans chaque direction \Leftrightarrow pas de maillage $h = 0.2$, ou chaque quadrangle est découpé en deux triangles .
 - Pour les calculs via l'approche 2D-3D on utilisera le meme maillage de plaque avec des éléments Q^2 , et le maillage fluide sera suffisamment grand pour que la condition absorbante élimine parfaitement les ondes acoustiques générées par la plaque.

Suivant la démarche de validation proposée dans les chapitres 2 et 3, on calcule une solution de référence avec le code 2D-3D sur un maillage Q^7 raffiné. Cette solution nous permettra, en plus de valider notre méthode, de comparer également la précision respective de chaque approche.

4.8.1 Les vibrations d'une membrane

Nous présentons dans cette section quelques résultats numériques qui illustrent le saut de pression $\varphi_{h,\Delta t}$ et la vitesse transverse $v_{h,\Delta t}$ solution du système (4.4.11) où les formes bilinéaires (\cdot, \cdot) et $a(\cdot, \cdot)$ sont définies dans (4.4.12). On se donne alors la vitesse dans la membrane $c_m = 1$ et la fréquence centrale $f_0 = 0.5$ de sorte que la longueur d'onde dans

chaque milieu soit $\lambda = 2$. Les paramètres de discrétisation en espace décrits précédemment bien sont adaptés à ce cas de calcul.

Afin d'illustrer le phénomène physique que l'on souhaite simuler, on représente, sur la figure 4.9 deux instantanés de $\varphi_{h,\Delta t}$ et $v_{h,\Delta t}$ aux temps $t = 4.2s$ et $t = 8.4s$. Du fait que les vitesses de propagation sont les mêmes dans chaque milieu, le phénomène physique est particulièrement simple : Une phase de propagation à une vitesse de 1 dans la membrane, suivi de 4 réflexions symétriques après l'impact sur les bords.

Sur les figures Fig. 4.7 et Fig. 4.8, on observe et compare $\varphi_{h,\Delta t}$ et $v_{h,\Delta t}$ au cours du temps au centre de la membrane pendant 30s. Nous avons successivement calculés ces solutions avec notre méthode (BEM-FEM) et notre méthode éléments finis 2D-3D. On peut voir que les deux solutions sont très proches ce qui met en évidence que notre méthode est stable en temps long et calcule la bonne solution avec précision.

4.8.2 Les vibrations d'une plaque

Dans cette section on considère les vibrations d'une plaque de type Reissner-Mindlin à la place de la membrane. On présente ici quelques résultats liés au saut de pression $\varphi_{h,\Delta t}$ et à la vitesse transverse $v_{h,\Delta t}$, solutions du système (4.4.11) où les formes bilinéaires de la plaque sont définies par (4.7.4). On a choisi les mêmes paramètres de discrétisation (h et Δt) que pour le cas précédent, notamment pour ne pas à avoir à recalculer les matrices \mathbf{N}_h^M , qui est une des étapes les plus coûteuse en temps de calcul. Pour que le maillage soit suffisamment précis, nous avons choisi les paramètres physiques

$$\rho_p = 1, \quad E = 0.1297, \quad \nu = 0.3, \quad f_0 = 1,$$

(ce qui correspond à peu près à une vitesse de propagation de 1 dans la plaque). Signalons tout de même qu'un tel choix de paramètre correspond à un matériau physique... un peu atypique pour de la vibroacoustique (ligament croisé!).

Comme dans la section précédente, nous donnons quelques instantanés (Fig. 4.14) des solutions pour illustrer le phénomène physique. Comme on pouvait s'y attendre, le phénomène est plus complexe que dans le cas de la membrane : En particulier la nature dispersive des ondes se propageant dans la plaque est clairement visible.

Puis on observe $\varphi_{h,\Delta t}$ et $v_{h,\Delta t}$ au cours du temps (sur $[0, T] = [0, 50]$) au point $x_1 = (-2, 5, 0)$ (qui n'est donc plus le centre de la plaque). Les figures Fig. 4.10 et 4.11 montrent la comparaison entre les solutions de référence et les solutions calculées par notre méthode (BEM-FEM). Ces courbes attestent la encore que notre méthode est stable et calcule la bonne solution.

Enfin, pour montrer l'avantage de notre méthode (BEM-FEM) en terme de précision (l'utilisation des potentiels retardés minimise la dispersion numérique) on montre le saut de pression et la vitesse transverse calculée par notre code 2D-3D avec les paramètres de discrétisation utilisés pour valider la méthode (BEM-FEM). Les figures 4.12 et 4.13 laissent voir qu'en utilisant le même maillage, la méthode (BEM-FEM) est plus précise que la méthode éléments finis 2D-3D. Notre interprétation est que ceci est probablement dû au fait que la propagation acoustique est traitée plus exactement via les potentiels retardés : La dispersion numérique due à la discrétisation en temps de l'équation des ondes 3D est éliminée.

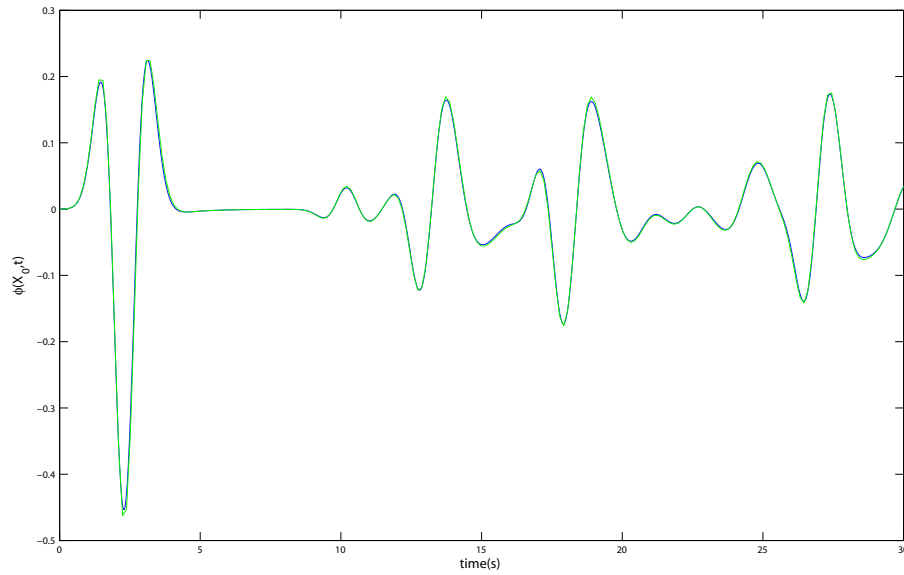


FIG. 4.7: Saut de pression au centre de la membrane.

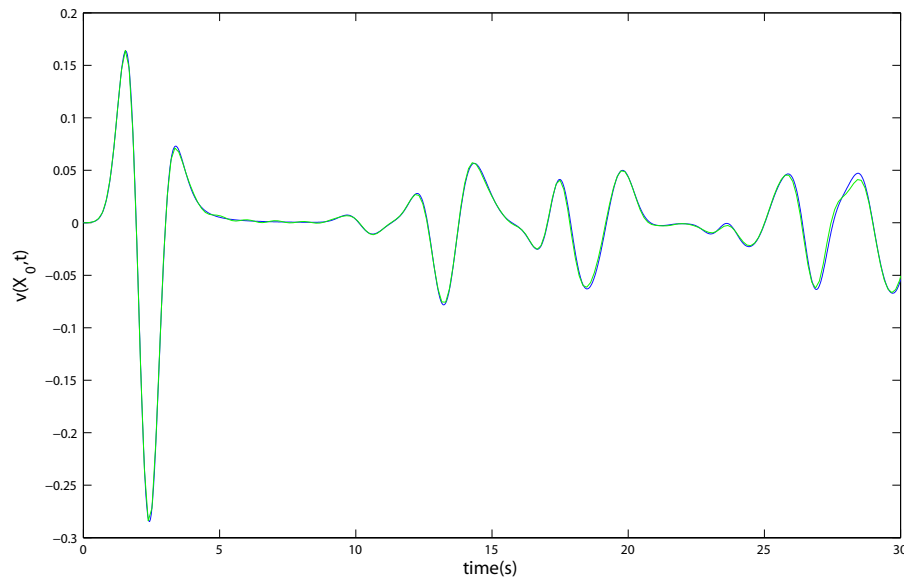
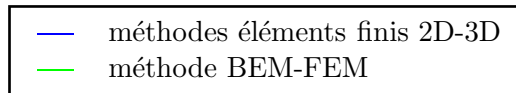


FIG. 4.8: Vitesse transverse au centre de la membrane.



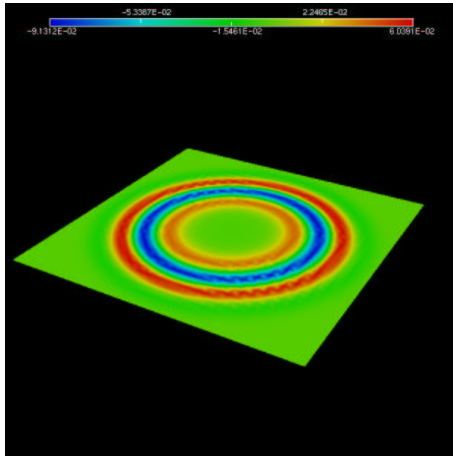
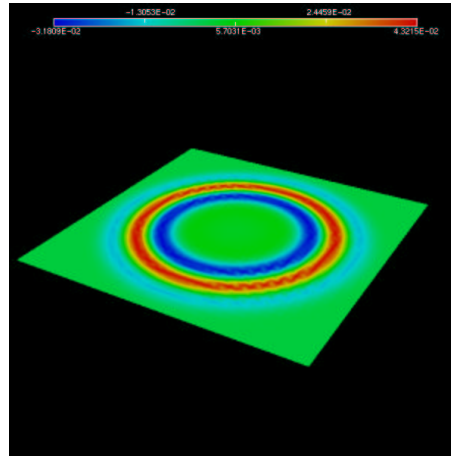
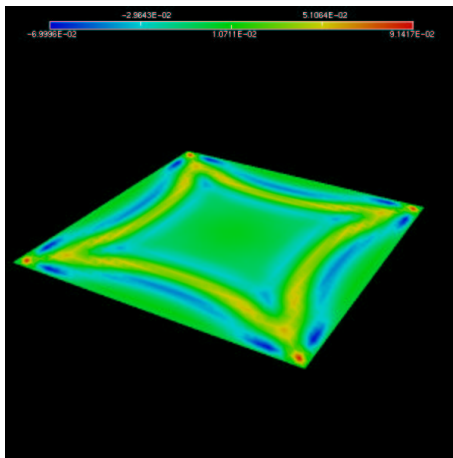
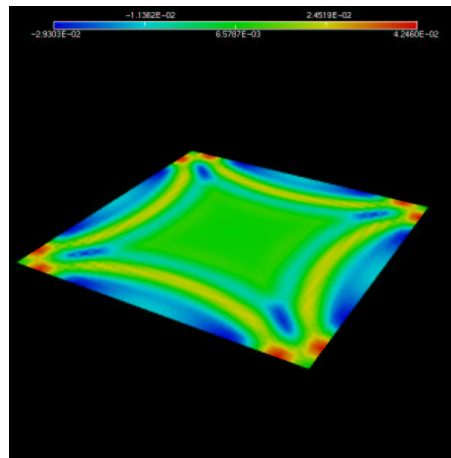
(a) Pressure jump at $t = 4.2s$ (b) Transverse velocity at $t = 4.2s$ (c) Pressure jump at $t = 8.4s$ (d) Transverse velocity at $t = 8.4s$

FIG. 4.9: Instantanés des solutions.

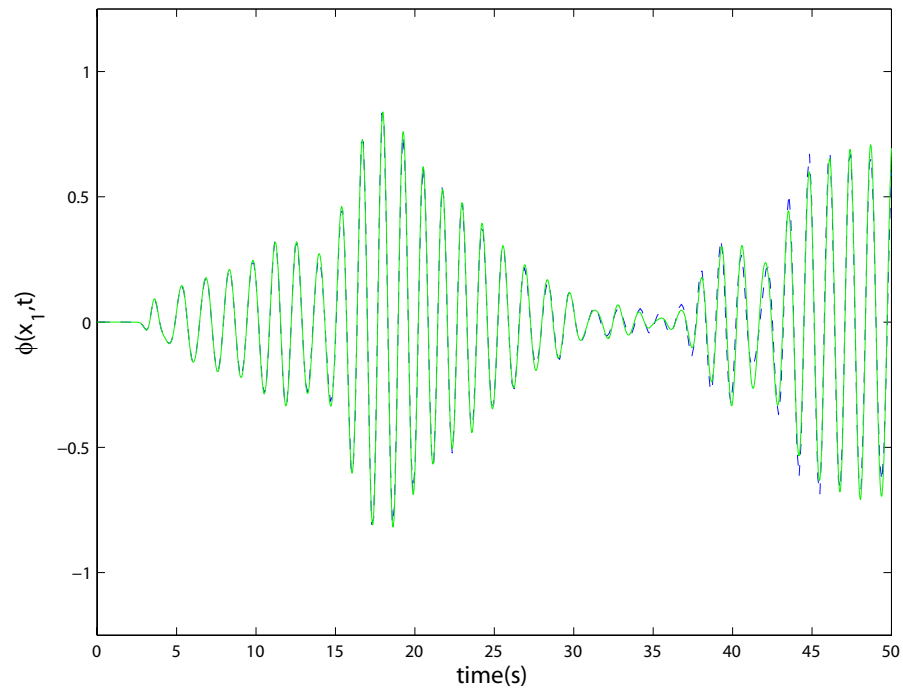


FIG. 4.10: Saut de pression par méthode (BEM-FEM) .

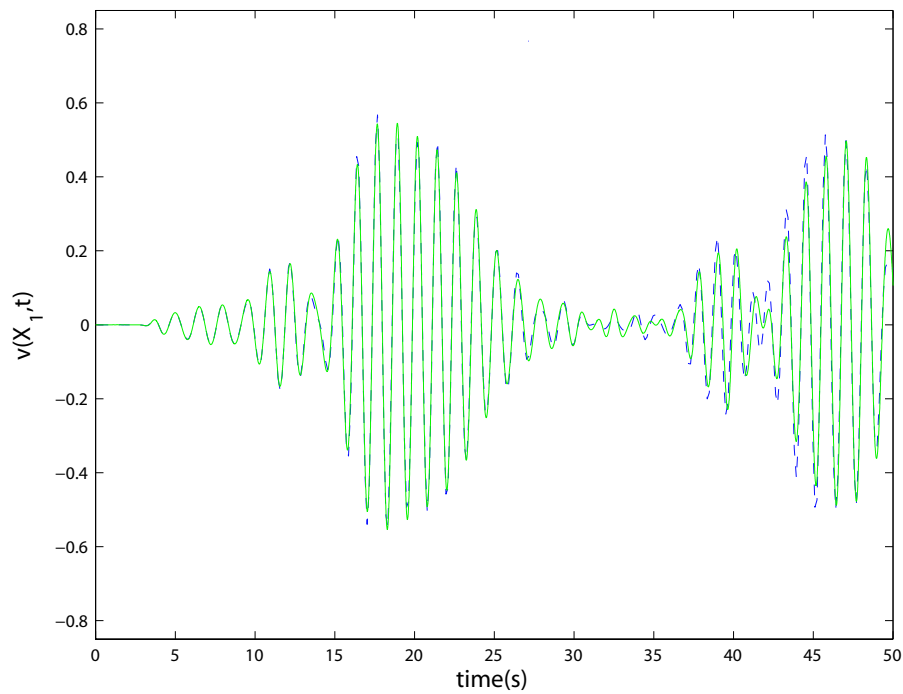
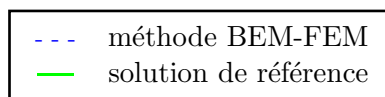


FIG. 4.11: Vitesse transverse par méthode (BEM-FEM) .



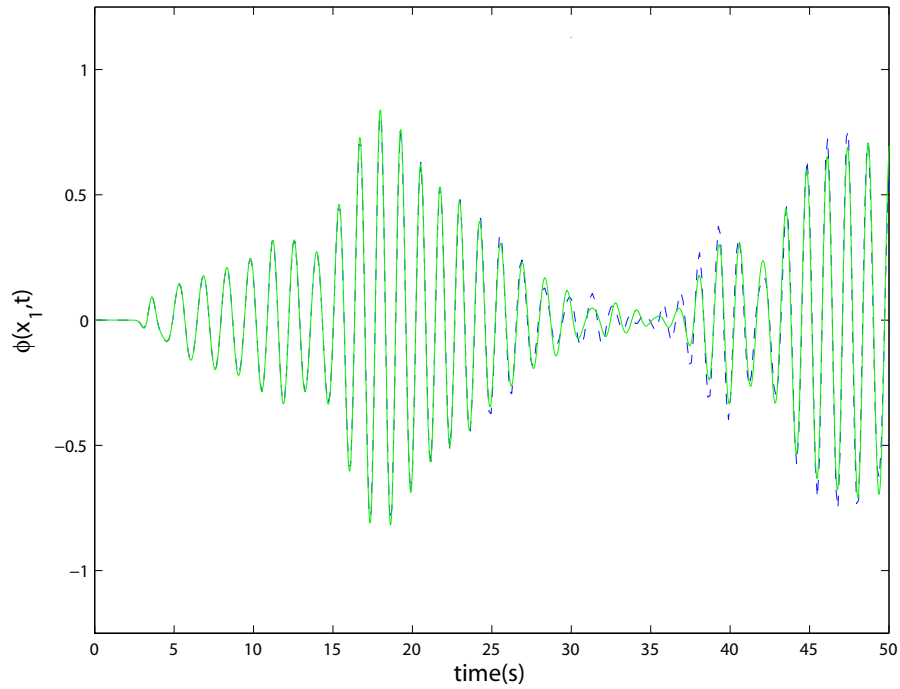


FIG. 4.12: Saut de pression par méthode 2D-3D .

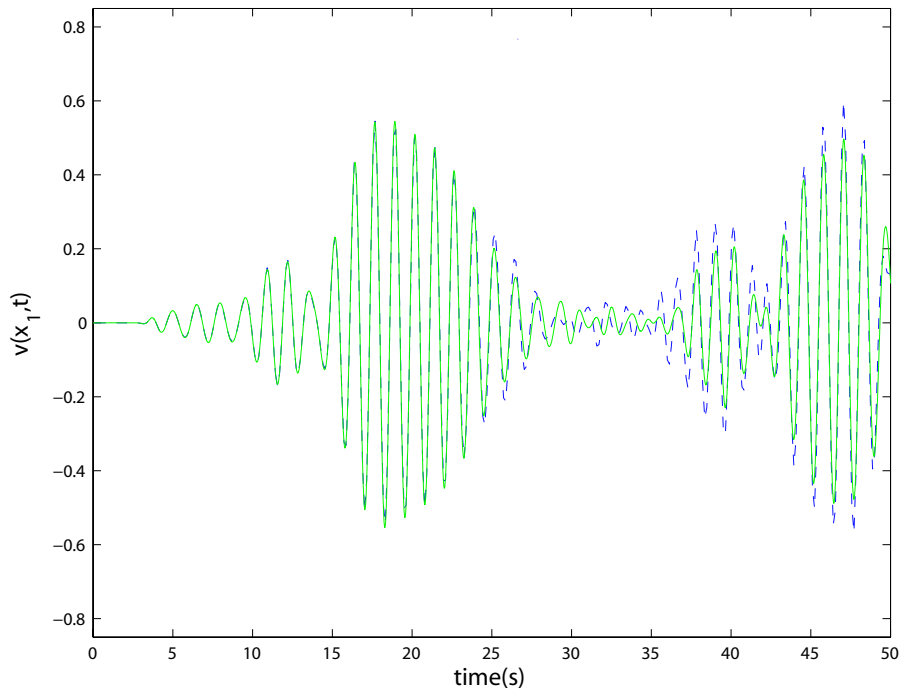
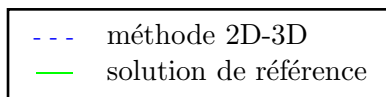


FIG. 4.13: Vitesse transverse par méthode 2D-3D .



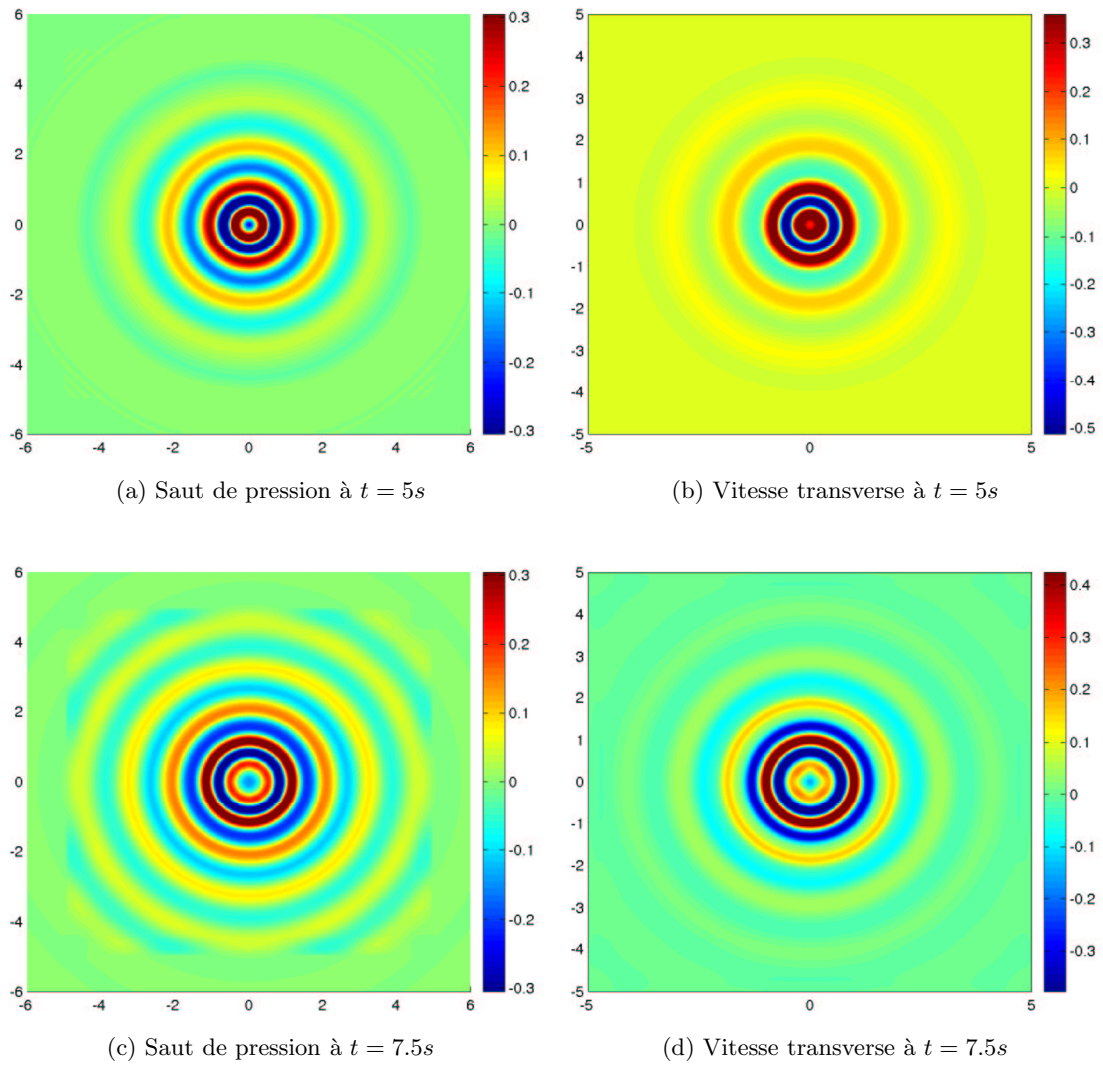


FIG. 4.14: Instantanés des solutions.

Références

- [Abboud *et al.*, 2000] ABBOUD, T., EL GHARIB, J. et ZHOU, B. (2000). Retarded potentials for acoustic impedance problems. *In Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostela, 2000)*, pages 703–708. SIAM, Philadelphia, PA.
- [Achdou,] ACHDOU, Y. *Notes sur les éléments finis.* www.ann.jussieu.fr/achdou/node8.html. Cours.
- [Ammari et Nédélec, 1998] AMMARI, H. et NÉDÉLEC, J.-C. (1998). Couplage éléments finis/équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène. *In Équations aux dérivées partielles et applications*, pages 19–33. Gauthier-Villars, Éd. Sci. Méd. Elsevier, Paris.
- [Arnold *et al.*, 2002] ARNOLD, D. N., BOFFI, D. et FALK, R. S. (2002). Approximation by quadrilateral finite elements. *Math. Comp.*, 71(239):909–922 (electronic).
- [Bachelot *et al.*, 2001] BACHELOT, A., BOUNHOURE, L. et PUJOLS, A. (2001). Couplage éléments finis–potentiels retardés pour la diffraction électromagnétique par un obstacle hétérogène. *Numer. Math.*, 89(2):257–306.
- [Bachelot et Lange, 1995] BACHELOT, A. et LANGE, V. (1995). Time dependent integral method for Maxwell’s system. *In Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Mandelieu-La Napoule, 1995)*, pages 151–159. SIAM, Philadelphia, PA.
- [Bachelot et Lubet, 1995] BACHELOT, A. et LUBET, V. (1995). On the coupling of boundary element and finite element methods for a time problem. *In Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Mandelieu-La Napoule, 1995)*, pages 130–139. SIAM, Philadelphia, PA.
- [Bachelot et Pujols, 1992] BACHELOT, A. et PUJOLS, A. (1992). Équations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 314(8): 639–644.
- [Bamberger *et al.*, 1980] BAMBERGER, A., CHAVENT, G. et LAILLY, L. (1980). Etude de schémas numériques pour les équations de l’élastodynamique linéaire. *INRIA Report*, RR-0041.
- [Bécache, 1991] BÉCACHE, E. (1991). *Résolution par une méthode d’équations intégrales d’un problème de diffraction d’ondes élastiques transitoires par une fissure*. Thèse de doctorat, Université Paris VI-Pierre et Marie Curie.

- [Bécache *et al.*, 2005] BÉCACHE, E., DERVEAUX, G. et JOLY, P. (2005). An efficient numerical method for the resolution of the Kirchhoff-Love dynamic plate equation. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 21(2):323–348.
- [Ben Belgacem *et al.*, 2001] BEN BELGACEM, F., BUFFA, A. et MADAY, Y. (2001). The mortar finite element method for 3D Maxwell equations: first results. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(3):880–901 (electronic).
- [Ben Belgacem et Maday, 1997] BEN BELGACEM, F. et MADAY, Y. (1997). The mortar element method for three-dimensional finite elements. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 31(2):289–302.
- [Bernardi *et al.*, 1994] BERNARDI, C., MADAY, Y. et PATERA, A. T. (1994). A new non-conforming approach to domain decomposition: the mortar element method. In *Non-linear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XI (Paris, 1989–1991)*, volume 299 de *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 13–51. Longman Sci. Tech., Harlow.
- [Brézis, 1983] BRÉZIS, H. (1983). *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [Brezzi *et al.*, 1991] BREZZI, F., FORTIN, M. et STENBERG, R. (1991). Error analysis of mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 1(2):125–151.
- [Bécache, 2003] BÉCACHE, E. (2003). *Schémas numériques pour la résolution de l’équation des ondes*. Cours.
- [Bécache *et al.*, 2004] BÉCACHE, E., EZZIANI, A. et JOLY, P. (2004). A mixed finite element approach for viscoelastic wave propagation. *Comput. Geosci.*, 8(3):255–299.
- [Chapelle et Bathe, 2003] CHAPELLE, D. et BATHE, K. J. (2003). *The finite element analysis of shells—fundamentals*. Computational Fluid and Solid Mechanics. Springer-Verlag, Berlin.
- [Chapelle et Stenberg, 1998] CHAPELLE, D. et STENBERG, R. (1998). An optimal low-order locking-free finite element method for Reissner-Mindlin plates. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8(3):407–430.
- [Chin-Joe-Kong *et al.*, 1999] CHIN-JOE-KONG, M. J. S., MULDER, W. A. et VAN VELD-HUIZEN, M. (1999). Higher-order triangular and tetrahedral finite elements with mass lumping for solving the wave equation. *J. Engrg. Math.*, 35(4):405–426.
- [Ciarlet, 1976] CIARLET, P. G. (1976). Conforming finite element methods for the shell problem. In *The mathematics of finite elements and applications, II (Proc. Second Brunel Univ. Conf. Inst. Math. Appl., Uxbridge, 1975)*, pages 105–123. Academic Press, London.

- [Ciarlet, 1978] CIARLET, P. G. (1978). *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.
- [Ciarlet et Raviart, 1972] CIARLET, P. G. et RAVIART, P.-A. (1972). The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods. In *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972)*, pages 409–474. Academic Press, New York.
- [Cohen et Fauqueux, 2000] COHEN, G. et FAUQUEUX, S. (2000). Mixed finite elements with mass-lumping for the transient wave equation. In *Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostela, 2000)*, pages 782–786. SIAM, Philadelphia, PA.
- [Cohen et Fauqueux, 2005] COHEN, G. et FAUQUEUX, S. (2005). Mixed spectral finite elements for the linear elasticity system in unbounded domains. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(3):864–884 (electronic).
- [Cohen *et al.*, 1994] COHEN, G., JOLY, P. et TORDJMAN, N. (1994). Higher-order finite elements with mass-lumping for the 1D wave equation. *Finite Elem. Anal. Des.*, 16(3-4):329–336. ICOSAHOM '92 (Montpellier, 1992).
- [Cohen *et al.*, 1995] COHEN, G., JOLY, P. et TORDJMAN, N. (1995). Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation. In *Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Mandelieu-La Napoule, 1995)*, pages 270–279. SIAM, Philadelphia, PA.
- [Cohen, 2002] COHEN, G. C. (2002). *Higher-order numerical methods for transient wave equations*. Scientific Computation. Springer-Verlag, Berlin. With a foreword by R. Glowinski.
- [Collino *et al.*, 2006] COLLINO, F., FOUQUET, T. et JOLY, P. (2006). Conservative space-time mesh refinement methods for the FDTD solution of Maxwell's equations. *J. Comput. Phys.*, 211(1):9–35.
- [Crouzeix et Mignot, 1984] CROUZEIX, M. et MIGNOT, A. L. (1984). *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris.
- [Dablain, 1986] DABLAIN, M. A. (1986). The application of high order differencing for the scalar wave equation. *Geophysics*, 51:54–66.
- [Dautray et Lions, 1988] DAUTRAY, R. et LIONS, J.-L. (1988). *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Vol. 7. INSTN: Collection Enseignement. [INSTN: Teaching Collection]. Masson, Paris. Evolution: Fourier, Laplace, Reprint of the 1985 edition.

- [de La Bourdonnaye, 1995] de LA BOURDONNAYE, A. (1995). Some formulations coupling finite element and integral equation methods for Helmholtz equation and electromagnetism. *Numer. Math.*, 69(3):257–268.
- [Demailly, 1992] DEMAILLY, J. (1992). *Analyse numérique et 'equations diff'erentielles*. PUF.
- [Derveaux, 2002] DERVEAUX, G. (2002). *Modélisation numérique de la guitare acoustique*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.
- [Diaz, 2005] DIAZ, J. (2005). *Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d'ondes en régime transitoire. Application au couplage fluide-structure et aux méthodes de couches parfaitement adaptées*. Thèse de doctorat, Université Paris VI-Pierre et Marie Curie.
- [Duong, 1987] DUONG, T. H. (1987). *Equations intégrales pour la résolution numérique de problèmes de diffraction d'ondes acoustiques dans R^3* . Thèse de doctorat, Université Paris VI-Pierre et Marie Curie.
- [Durufle, 2006] DURUFLE, M. (2006). *Intégration numérique et éléments finis d'ordre élevé appliquées aux équations de Maxwell en régime harmonique*. Thèse de doctorat, Université Paris IX-Dauphine.
- [Fauqueux, 2003] FAUQUEUX, S. (2003). *Éléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire*. Thèse de doctorat, Université Paris IX-Dauphine.
- [Garcia, 2004] GARCIA, J. R. (2004). *Raffinement de maillage spatio temporel pour les équations de l'élastodynamique*. Thèse de doctorat, INRIA.
- [Girault et Raviart, 1986] GIRAULT, V. et RAVIART, P.-A. (1986). *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin. Theory and algorithms.
- [Gottlieb et Hesthaven, 2001] GOTTLIEB, D. et HESTHAVEN, J. S. (2001). Spectral methods for hyperbolic problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 128(1-2):83–131. Numerical analysis 2000, Vol. VII, Partial differential equations.
- [Greengard et Rokhlin, 1997] GREENGARD, L. et ROKHLIN, V. (1997). A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions. *In Acta numerica, 1997*, volume 6 de *Acta Numer.*, pages 229–269. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [Ha-Duong, 2003] HA-DUONG, T. (2003). On retarded potential boundary integral equations and their discretisation. *In Topics in computational wave propagation*, volume 31 de *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 301–336. Springer, Berlin.
- [Ha-Duong et al., 2003] HA-DUONG, T., LUDWIG, B. et TERRASSE, I. (2003). A Galerkin BEM for transient acoustic scattering by an absorbing obstacle. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 57(13):1845–1882.

- [Hairer *et al.*, 1987] HAIRER, E., NØRSETT, S. P. et WANNER, G. (1987). *Solving ordinary differential equations. I*, volume 8 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin. Nonstiff problems.
- [Havu et Pitkäranta, 2001] HAVU, V. et PITKÄRANTA, J. (2001). An analysis of finite element locking in a parameter dependent model problem. *Numer. Math.*, 89(4):691–714.
- [Hennart, 1979] HENNART, J. (1979). On the efficient use of the finite element method in static neutron diffusion calculations. *Comput. Meth. in Nuclear Engee.*, 1:pp 185–199.
- [Hiptmair, 2003] HIPTMAIR, R. (2003). Coupling of finite elements and boundary elements in electromagnetic scattering. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(3):919–944 (electronic).
- [J. Diaz, 2005] J. DIAZ, P. J. (2005). Robust high order non-conforming finite element formulation for time domain fluid-structure interaction. *Journal of Computational Acoustics*, 13:403–431.
- [Joly, 2002] JOLY, P. (2002). *Analyse et approximation de modèles de propagation d’ondes. Partie I: Analyse mathématique*. Cours.
- [Joly et Rhaouti, 1999] JOLY, P. et RHAOUTI, L. (1999). Domaines fictifs, éléments finis $H(\text{div})$ et condition de Neumann: le problème de la condition inf-sup. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(12):1225–1230.
- [Kabakian *et al.*, 2004] KABAKIAN, A. V., SHANKAR, V. et HALL, W. F. (2004). Unstructured grid-based discontinuous Galerkin method for broadband electromagnetic simulations. *J. Sci. Comput.*, 20(3):405–431.
- [Kishimoto *et al.*, 1995] KISHIMOTO, Y., BERNSTEIN, D. S. et HALL, S. R. (1995). Energy flow modelling of interconnected structures: a deterministic foundation for statistical energy analysis. *J. Sound Vibration*, 186(3):407–445.
- [Kobidze *et al.*, 2005] KOBIDZE, G., GAO, J., SHANKER, B. et MICHELSEN, E. (2005). A fast time domain integral equation based scheme for analyzing scattering from dispersive objects. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 53(3):1215–1226.
- [Lebeau et Schatzman, 1984] LEBEAU, G. et SCHATZMAN, M. (1984). A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary. *J. Differential Equations*, 53(3):309–361.
- [Lesueur, 1988] LESUEUR, C., éditeur (1988). *Rayonnement acoustique des structures: Vibroacoustique, interactions fluide-structure*. Eyrolles.
- [Lions et Magenes, 1968] LIONS, J.-L. et MAGENES, E. (1968). *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris.
- [Love, 1944] LOVE, A. E. H. (1944). *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications, New York. Fourth Ed.

- [Mansur *et al.*, 2000] MANSUR, W. J., YU, G., CARRER, J. A. M., LIE, S. T. et SIQUEIRA, E. F. N. (2000). The θ scheme for time-domain BEM/FEM coupling applied to the 2-D scalar wave equation. *Comm. Numer. Methods Engrg.*, 16(6):439–448.
- [Morand et Ohayon, 1992] MORAND, H. J.-P. et OHAYON, R. (1992). *Interactions fluides-structures*, volume 23 de *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris.
- [Naghdi, 1963] NAGHDI, P. M. (1963). Foundations of elastic shell theory. In *Progress in Solid Mechanics, Vol. IV*, pages 1–90. North-Holland, Amsterdam.
- [Nédélec, 1976] NÉDÉLEC, J.-C. (1976). Curved finite element methods for the solution of integral singular equations on surfaces in \mathbf{R}^3 . In *Computing methods in applied sciences and engineering (Second Internat. Sympos., Versailles, 1975), Part 1*, pages 374–390. Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Vol. 134. Springer, Berlin.
- [Nédélec, 1982] NÉDÉLEC, J.-C. (1982). Integral equations with nonintegrable kernels. *Integral Equations Operator Theory*, 5(4):562–572.
- [Pernet, 2005] PERNET, S. (2005). *Etude de méthodes d'ordre élevé pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Application à la détection et à la compatibilité électromagnétique*. Thèse de doctorat, Université Paris IX-Dauphine.
- [Reissner, 1945] REISSNER, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 12:A–69–A–77.
- [Rhaouti, 1999] RHAOUTI, L. (1999). *Domaines fictifs pour la modélisation d'un problème d'interaction fluide-structure: Simulation de la timbale*. Thèse de doctorat, Université Paris IX-Dauphine.
- [Rynne, 1985] RYNNE, B. P. (1985). Stability and convergence of time marching methods in scattering problems. *IMA J. Appl. Math.*, 35(3):297–310.
- [Soares et Mansur, 2005] SOARES, Jr., D. et MANSUR, W. J. (2005). An efficient time-domain BEM/FEM coupling for acoustic-elastodynamic interaction problems. *CMES Comput. Model. Eng. Sci.*, 8(2):153–164.
- [Stroud, 1971] STROUD, A. H. (1971). *Approximate calculation of multiple integrals*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall Series in Automatic Computation.
- [Terrasse, 1993] TERRASSE, I. (1993). *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell par une méthode de potentiels retardés*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.
- [Tordjman, 1995] TORDJMAN, N. (1995). *Éléments finis d'ordre élevé pour l'équation des ondes*. Thèse de doctorat, Université Paris IX-Dauphine.
- [Zienkiewicz, 1971] ZIENKIEWICZ, O. C. (1971). *The finite element method in engineering science*. McGraw-Hill, London. The second, expanded and revised, edition of *The finite element method in structural and continuum mechanics*.