HAL
open science

Décomposition sur les mouvements périodiques ou sur les modes résonants pour la simulation de la réponse transitoire d'un problème de tenue à la mer

François Loret

▶ **To cite this version:**

François Loret. Décomposition sur les mouvements périodiques ou sur les modes résonants pour la simulation de la réponse transitoire d'un problème de tenue à la mer. Mathématiques [math]. ENSTA ParisTech, 2004. Français. NNT : 2004ECAP0948 . pastel-00002503

HAL Id: pastel-00002503

https://pastel.hal.science/pastel-00002503v1

Submitted on 6 Jun 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE CENTRALE DES ARTS
ET MANUFACTURES
— ÉCOLE CENTRALE PARIS —

Thèse de doctorat de l'École Centrale Paris

Spécialité

Mathématiques Appliquées

présentée par

François Loret

pour l'obtention du titre de docteur de l'École Centrale Paris

Sujet de la thèse :

Décomposition sur les mouvements périodiques ou sur les modes résonants pour la simulation de la réponse transitoire d'un problème de tenue à la mer

Soutenu le 15 septembre 2004 devant le jury composé de

MM.	**Nicolas Burq**	Président
	Alain Bachelot	Rapporteurs
	Philippe Destuynder	
	Michael Meylan	
	Didier Clouteau	Examinateur
	Christophe Hazard	Directeur de thèse

2004–17

À ma famille,
à mon épouse Karine, mes enfants Théo et Léa,
et à tous ceux, amis, chercheurs,
qui ont apporté leur brindille à cet humble édifice.

À tous un grand MERCI...

C'est une habitude saine que de remercier au début d'un tel travail tous ceux qui, plus ou moins directement, ont contribué à le rendre possible.

Je désire exprimer ma gratitude à Christophe Hazard mon directeur de thèse pour avoir accepté d'être mon guide tout au long de ce parcours. Je lui suis reconnaissant de m'avoir aidé à clarifier et mettre en forme ce manuscrit.

Je tiens à remercier Alain Bachelot, Philippe Destuynder et Mike Meylan d'avoir accepté la charge d'être rapporteurs de ma thèse et, Nicolas Burq et Didier Clouteau d'en être les examinateurs.

Je tiens à remercier également Mike ainsi que toute sa famille, Colin Fox et Boris Pavlov pour m'avoir permis d'effectuer un agréable séjour à Auckland et pour m'avoir chaleureusement accueilli à l'université de Auckland.

Je tiens à remercier vivement tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de L'énsta et plus particulièrement Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Marc Lenoir, Frédéric Jean, Jean-François Mercier, Jean-Luc Commeau et Eric Lunéville qui m'ont donné de leur temps et ont répondu à certaines de mes interrogations.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Annie Marchal et Odilia Bertrand pour leur gentillesse et leur incontournable soutient administratif respectivement à l'ensta et à l'ecp.

Il m'est très difficile de remercier à sa juste valeur toute la famille de thésards et de stagiaires avec qui j'ai pu passer de bons moments de/au travail. Je tiens tout particulièrement à remercier mes 'tepo' Fabrice Roy et Guillaume Legendre d'avoir été là aussi bien dans les moments de bonheur que dans les moments plus difficiles. Merci à vous deux.

Je ne saurais oublier le soutien et l'aide des personnes qui me sont très chères : mes grande et petite merveilleuses familles. Je réserve une reconnaissance particulière à ma tendre et douce mie, Karine, qui me supporte depuis tant d'années.

Table des matières

Introduction **iii**

I La méthode de décomposition en modes résonants : application à un problème transitoire de tenue à la mer 1

1 La méthode de décomposition en modes résonants **3**
1 Le problème transitoire modèle . . . 3
2 Le problème stationnaire : la transformée de Laplace . . . 4
3 La transformée de Laplace inverse et son prolongement . . . 5
3.1 Et vers le demi-plan complexe de gauche ? . . . 7
3.2 Quand dire que $u_{\text{reste}}(t)$ est négligeable ? . . . 10

2 Le problème de tenue à la mer d'une plaque mince **13**
1 Introduction et généralités . . . 13
2 Les équations linéarisées de la mécanique . . . 14
2.1 Le potentiel des vitesses . . . 14
2.2 La condition cinématique . . . 14
2.3 La condition dynamique . . . 15
2.4 Le modèle de plaque de Kirchhoff–Love . . . 15
3 Équation des ondes abstraite . . . 23
3.1 Approche intuitive . . . 24
3.2 Approche rigoureuse . . . 24

3 Application : le prolongement méromorphe **31**
1 Le procédé d'application . . . 31
2 Étude du problème libre . . . 32
2.1 Représentation spectrale de l'opérateur $\tilde{\mathbb{A}}$ . . . 32
2.2 Représentation intégrale de la résolvante $\tilde{R}$ . . . 35
2.3 Propriété du noyau de Green . . . 40
3 Problème diffracté et prolongement méromorphe . . . 43
3.1 Approche formelle . . . 43
3.2 Le cadre fonctionnel . . . 48
3.3 Le théorème de Steinberg . . . 49

4 Application de la méthode de décomposition 53

4 Mise en œuvre numérique en dimension 2 d'espace 55
1 Couplage éléments finis / éléments modaux 55
2 La résolvante approchée 58
3 La méthode de calcul des résonances et des modes associés 60
3.1 La méthode de l'intégrale de Cauchy 61
3.2 La méthode Newton–puissance inverse 63
4 La méthode de calcul des résidus 67
5 Calcul des divers termes de la méthode de décomposition 69

5 Résultats numériques 71
1 Résultats préliminaires 71
2 Les tests 76
3 Les résultats des tests 78
3.1 Autour de la fréquence nulle 78
3.2 Autour des fréquences $\pm\Im m(p_3)$ 89
3.3 Autour des fréquences $\pm\Im m(p_{11})$ 98
3.4 Excitation initiale de la plaque 103

Conclusion 107

A La résolvante d'un point de vue variationnel 109

B Outils de la méthode numérique 113
1 Diagonalisation de l'opérateur $\mathbb{A}_P$ 113
2 Extraction de la singularité pour le calcul de $\mathbb{G}_\zeta$ 116
2.1 Formule d'Euler 117
2.2 Formule d'intégration générale 117
2.3 La formule analytique 117
3 Extraction de la singularité pour le calcul de l'onde incidente 121

C Le contenu spectral d'une donnée 123

Bibliographie 124

II Développement en fonctions propres généralisées : application au problème transitoire de tenue à la mer 129

Introduction

Un dicton chinois dit :
"choisis un travail que tu aimes,
tu ne travailleras jamais."

Le thème initiateur de ce travail de thèse est le problème de stabilisation dynamique de navires (plus généralement de structures flottantes à la surface de l'océan) par déplacement de masses ou commandes d'appendices mobiles.
Le problème de stabilisation est un problème ardu dont la préoccupation n'est pas une affaire récente, mais les modèles retenus jusqu'ici sont beaucoup trop grossiers pour obtenir une simulation réaliste des mouvements. Et il est à craindre qu'un modèle de tenue à la mer qui rendrait mieux compte du problème physique, conduise à des temps de calcul trop importants pour un calcul en temps réel.
Afin de disposer d'un *processus fiable de contrôle* des mouvements transitoires d'un navire dans un champ de vagues quelconque, il est plus que nécessaire de posséder un moyen à la fois *rapide* et *précis* de prédiction de ces mouvements. L'objectif que nous nous sommes donc naturellement fixé est la mise au point d'un simulateur pouvant alimenter un processus de contrôle dynamique : nous n'aborderons finalement pas ici à proprement parler le problème de stabilisation dynamique. Pour ce faire, nous avons décidé de conserver *le modèle linéarisé complet* de tenue à la mer, pour satisfaire notre critère de précision. Le critère de rapidité exclut de fait, *a priori*, les méthodes habituellement utilisées pour simuler la propagation des ondes transitoires, qui sont certes précises mais trop coûteuses en temps de calcul :

- Équations intégrales : concernant les travaux impliquant la fonction de Green transitoire en hydrodynamique citons Jami et Pot [46], concernant les travaux sur les potentiels retardés en acoustique ou électromagnétisme citons Abboud, Nedelec et Volakis [1] ainsi que les rapports de recherche du cmap de Abboud sur le sujet ;
- Décomposition modale (sur les mouvements périodiques) : citons le précurseur Ikebe [45] dans le cadre de l'équation de Schrödinger, en acoustique et dans les milieux stratifiés Wilcox [63, 64], dans le cadre des guides d'ondes Goldstein [34], en hydrodynamique citons Beale [10] ;
- Transformation de Laplace : c'est une méthode qui procède de manière "opposée" à la méthode de décomposition modale en ce sens qu'elle va chercher à diagonaliser l'opération de dérivation en temps et non pas l'opérateur $\mathbb{A}$ (cf. (1)). Consulter Dautray-Lions [25] et par exemple Hazard, Loret et Meylan [43] pour une application en hydrodynamique ;
- Schémas aux différences finies en temps avec conditions aux limites absorbantes ou couches absorbantes (PML) dont l'intérêt est de borner artificiellement le domaine de calcul : citons les

précurseurs ENGQUIST et MAJDA [29] et BÉRENGER [12], mais aussi dans le cadre de l'électromagnétisme COLLINO et MONK [20] et en élasto-dynamique BÉCACHE, FAUQUEUX et JOLY [11]. Ce type de méthode ne semble pas avoir été appliqué en hydrodynamique navale.

Par pur soucis de généralité, nous ne travaillerons en fait pas directement sur les équations de l'hydrodynamique navale, comme on pourrait s'y attendre, mais sur une équation du second ordre en temps dite équation des ondes abstraite et définie par :

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H\text{, un espace de HILBERT séparable, telle que}\\ \partial_t^2 u + \mathbb{A}u = 0\,,\ \forall t > 0 \ \text{ avec } \mathbb{A} \text{ auto-adjoint et positif.}\\ u(0) = 0 \ \text{ et } \ \partial_t u(0) = u_1\,.\end{array}\right. \tag{1}$$

Le choix de ce modèle abstrait n'est pas l'aboutissement d'un simple désir d'abstraction, mais résulte d'un désir plus profond de montrer que ce que nous développerons peut également s'appliquer (directement) à d'autres problèmes que ceux issus de l'hydrodynamique navale. Le modèle que nous avons retenu répond à ce souhait en ce sens qu'il permet de réunir dans un même formalisme des problèmes issus de l'élasticité, de l'acoustique, de l'électromagnétisme et de l'hydrodynamique (consulter par exemple DAUTRAY-LIONS [25] et HAZARD [36]) : ce qui constitue un très large champ des applications.

Nous étudierons sur ce modèle deux méthodes de représentation de la solution transitoire. La première, baptisée *méthode de développement en fonctions propres généralisées* (voir DAUTRAY-LIONS [24], HAZARD [36] et, HAZARD et LORET [42]) est une méthode de décomposition spectrale qui conduit à une *représentation continue exacte* de u par *superposition de mouvements périodiques*. La seconde, nommée *méthode de décomposition en modes résonants* (voir HAZARD et LORET [41], HAZARD [40]) est une méthode qui peut être vue comme un prolongement analytique de la transformation de LAPLACE. Elle permet, par *superposition discrète de modes exponentiellement amortis*, d'obtenir un *comportement* de la solution transitoire *pour les temps longs*.
La base commune à ces deux techniques se retrouve dans le lien qui peut exister entre le régime transitoire et le régime harmonique. À savoir la possibilité de représenter la solution transitoire u de l'équation (1) à l'aide des solutions harmoniques. Pour ne laisser place à aucune source d'ambiguïté, précisons que par solutions harmoniques, nous entendons des solutions de l'équation (1) dont la dépendance temporelle est du type $\exp(\mathrm{i}\omega t)$. La fréquence ω pouvant être un élément du corps des complexes.

Décomposition spectrale

La méthode de décomposition spectrale consiste à diagonaliser l'opérateur $\mathbb{A}$ de l'équation (1). Supposons dans un premier temps, pour faciliter la compréhension, le cas relativement bien connu où l'opérateur $\mathbb{A}$ (que l'on nomme aussi l'hamiltonien en physique) possède un spectre discret.
La recherche des valeurs propres λ et des fonctions propres normalisées $w_\lambda^{\mathrm{disc}}$ de $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A}w_\lambda^{\mathrm{disc}} = \lambda\, w_\lambda^{\mathrm{disc}}\,,\ \lambda \geq 0 \tag{2}$$

conduit à un sous-ensemble discret Λ_{disc} de $\mathbb{R}^+$ contenant les valeurs propres auxquelles sont associées des fonctions propres appartenant à H. Un point important à noter est que la famille $\{w_\lambda^{\mathrm{disc}}\}_\lambda$ forme une base hilbertienne de H dans laquelle l'opérateur $\mathbb{A}$ agit comme un opérateur de multiplication, autrement dit il est diagonal. La solution transitoire admet alors le développement en fonctions propres suivant

$$u(t) = \Re e \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathrm{disc}}} \exp\big(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\, t\big)\, \big(u_1, w_\lambda^{\mathrm{disc}}\big)\, w_\lambda^{\mathrm{disc}} \tag{3}$$

où $(\cdot\,,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans H.

Lorsque le spectre de l'opérateur $\mathbb{A}$ devient continu, tout est plus compliqué mais nous obtenons *grosso modo* dans cette situation une "version continue" de l'expression (3). Il s'agit d'une situation que l'on rencontre souvent en pratique dès lors que l'on considère des problèmes de propagation en milieux non bornés : le caractère continu du spectre étant directement relié à la présence d'ondes progressives. Situations qui vont naturellement particulièrement nous intéresser dans ce mémoire. Dans ce cas, le théorème de VON NEUMANN et STONE (voir DAUTRAY-LIONS [25]) nous indique que l'opérateur $\mathbb{A}$ est encore diagonalisable.
La recherche des éléments propres $\{w_\lambda^{\text{cont}}, \lambda\}$ de $\mathbb{A}$ (cf. équation (2) avec w_λ^{cont} à la place de w_λ^{disc}) ne donne cette fois-ci aucun résultat si l'on se borne à chercher les fonctions w_λ^{cont} dans H. Par contre, si nous autorisons ces fonctions à vivre dans un espace plus grand que H alors nous obtenons un continuum de valeurs propres, noté $\Lambda_{\text{cont}} \subset \mathbb{R}^+$, auxquelles sont associées les fonctions w_λ^{cont} dites fonctions propres généralisées.

Le calcul effectif des éléments propres de l'opérateur $\mathbb{A}$ n'est pas chose aisée en général. Dans le cadre d'un phénomène de propagation en milieu homogène, la transformée de FOURIER est l'outil adapté pour obtenir une expression du type (4). Par contre dans le cadre d'une propagation en milieu hétérogène, l'affaire est plus délicate. Un moyen couramment utilisé consiste à adopter une approche perturbative, c'est-à-dire considérer le milieu hétérogène comme une perturbation du milieu homogène. Cette approche conduit alors en quelque sorte à construire la transformée de FOURIER adaptée à l'opérateur $\mathbb{A}$. Les premiers travaux sur cette technique remontent à IKEBE [45] en 1960 pour l'équation de SCHRÖDINGER puis des situations de plus en plus complexes ont été considérées telles que les équations de l'hydrodynamique avec BEALE [10] en 1977 et les milieux stratifiés avec DERMANJIAN et GUILLOT [26] en 1986.
Nous pouvons montrer par cette approche perturbative, non sans peine, que la solution transitoire admet le développement en fonctions propres généralisées (du type) suivant (voir HAZARD [36] et, HAZARD et LORET [42]) qui constitue le pendant continu de la représentation discrète (3) :

$$u(t) = \Re e \int_{\lambda \in \Lambda_{\text{cont}}} \exp\big(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,t\big)\,\langle u_1, w_\lambda^{\text{cont}}\rangle\, w_\lambda^{\text{cont}}\,\mathrm{d}\lambda \tag{4}$$

où $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ note une extension du produit scalaire de H ($w_\lambda^{\text{cont}} \notin H$). La formule (4) ne représente en fait qu'un cas particulier (lorsque tout point du spectre est simple) d'une représentation plus générale, mais elle a le mérite de donner une bonne idée de ce que l'on peut obtenir.

La mise en œuvre de la méthode de développement en fonctions propres généralisées est nécessairement très coûteuse en temps de calcul puisqu'elle requiert le calcul des fonctions propres associées à un continuum de valeurs propres. Par contre c'est une technique de représentation qui donne une solution exacte globale en espace qui constitue donc une possible solution de référence pour des développements ultérieurs. Maintenant, si nous voulons une représentation de la solution transitoire rapidement calculable, il est nécessaire de faire des concessions : nous allons nous intéresser uniquement à une partie de la solution. Nous allons poursuivre par la recherche d'une méthode performante, en terme de temps de calcul, dont l'objectif sera de récupérer avec précision le comportement de la solution transitoire pour les temps longs.

Décomposition en modes résonants

Nous avons vu au travers de l'expression (4) que toute représentation exacte de la solution du problème (1) est de nature continue (lorsque le spectre de l'opérateur $\mathbb{A}$ est continu). Ce que nous

cherchons à faire ici, c'est de considérer des quantités qui telles les valeurs propres et les fonctions propres (dans la situation où le spectre de $\mathbb{A}$ est discret) nous permettront d'obtenir une représentation discrète non pas de la solution transitoire mais seulement de son comportement asymptotique en temps. Quelle orientation suivre ?

La notion de résonance

En physique, il est d'usage d'appeler fréquences de résonance, les *fréquences réelles* pour lesquelles la réponse d'un milieu soumis à une excitation périodique (en temps) présente un maximum (un pic).

D'un point de vue mathématique, il en est autrement. Supposons que l'on sache (et que l'on puisse) prolonger analytiquement aux *fréquences complexes* (nous verrons dans le mémoire un moyen de procéder) la réponse fréquentielle du milieu (autorisant cette réponse à être éventuellement exponentiellement croissante en espace). Les *résonances* se définissent alors comme les *pôles* de ce prolongement dont les modes associés se nomment modes résonants.
Le lien avec les "résonances physiques" est le suivant : lorsque les "résonances mathématiques" sont proches de l'axe réel, leurs parties réelles coïncident (presque) avec les fréquences de "résonance physiques". Les parties imaginaires renseignent quant à elles sur le taux de décroissance des modes résonants (voir par exemple LAX et PHILLIPS [52]). Citons entre autres les travaux de CIVITARESE et GADELLA qui donnent dans leur manuscrit [19] (riche en références) un cadre mathématique rigoureux dans lequel ils proposent une étude des résonances.

De nombreux travaux ont été effectués tant sur le plan de l'analyse mathématique que le calcul numérique des résonances. Notamment depuis une quinzaine d'années dans mon laboratoire d'accueil SMP (CNRS/ENSTA) nouvellement POÉMS (UMR/ENSTA 2706) les chercheurs et les thésards successifs ont largement contribué sur ce thème. Les différentes techniques développées peuvent être regroupées en trois grandes familles :

- Les méthodes de représentation intégrale (prolongement méromorphe : c'est la technique que nous utiliserons) : HAZARD, LENOIR et VULLIERME-LEDARD [53], HAZARD et LENOIR [38], POISSON [58], LABREUCHE [50], ALVES et HA DUONG [2], BACHELOT et BACHELOT-MOTET [7], CUTZACH [22], DOUTRELEAU [27] et, FILIPPI, HABAULT, MATTEI et MAURY [31] ;
- Les méthodes de séparation de variables (décomposition en série) : HAZARD et LENOIR [38], MAURY [56] ;
- Les méthodes de dilatation analytique ("changement de variables" complexes) dues à BALSLEV et COMBES [8] et, AGUILAR et COMBES [4]. Consulter également HERBST et SIMON [44].

La connaissance des fréquences de résonance complexes et des modes résonants associés fournissent peut-être l'outil de simulation que nous recherchons.

La SEM

La méthode que nous proposons repose sur cette notion de résonance. L'idée maîtresse de la méthode n'est toutefois pas récente. En effet, elle découle de travaux menés dans les années 70 par BAUM [9] dans le cadre de l'électromagnétisme et connus sous le nom de *Singularity Expansion Method* (SEM). L'étude mathématique de cette méthode a été poursuivie par différents auteurs tel que RAMM [59]. Citons aussi les travaux de FELSEN et HEYMAN [30] qui proposent une méthode hybride couplant la SEM et les techniques d'optique géométrique relativement efficaces pour décrire les phénomènes hautes fréquences. La méthode initiée par BAUM ne semble pas avoir connu un franc succès, certainement à cause de l'absence à cette époque de techniques fiables de calcul numérique des résonances qui limitait son utilisation aux rares cas où le calcul devient explicite. Nous disposons maintenant de telles

techniques. Citons quelques unes des applications de cette technique : GENG, JACKSON et CARIN [32] dans le cadre de la détection d'un corps diélectrique et, CONCIAURO et BRESSAN [21] dans le cadre de la propagation de micro-ondes entre deux plaques.

Le principe de la méthode que nous proposons *méthode de décomposition en modes résonants* est somme toute relativement simple. Il s'agit en quelque sorte d'une extension analytique de la méthode de la transformation de LAPLACE. Elle repose sur la possibilité de prolonger analytiquement aux fréquences complexes la réponse fréquentielle, c'est-à-dire la solution du problème harmonique en temps. Chaque résonance, qui représente un pôle de ce prolongement, se traduit via le théorème des résidus par une contribution oscillante exponentiellement amortie de la réponse transitoire. Cette réponse transitoire apparaît alors comme une superposition discrète de modes (résonants) exponentiellement amortis. Nous obtenons ainsi non pas directement la solution transitoire *exacte*, *globale* en espace, mais un comportement *asymptotique* en temps, *local* en espace, obtenu en ne considérant qu'un nombre fini de modes (l'erreur commise étant exponentiellement décroissante en temps)

$$u(t) \approx \Re e \sum_{\lambda \in \mathrm{Res}} \exp\big(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\, t\big)\, \{u_1, w_\lambda^{\mathrm{res}}\}\, w_\lambda^{\mathrm{res}}\,, \ \lambda \in \mathbb{C} \tag{5}$$

où Res note un sous-ensemble discret de $\mathbb{C}$ désignant un nombre fini de résonances. La forme $\{\cdot\,,\cdot\}$ est une forme bilinéaire qui va en particulier opérer une restriction de la donnée sur un domaine compact. L'écriture (5) est une expression que l'on obtient par exemple dans le cadre de l'acoustique tridimensionnel (voir VAINBERG [62]) mais elle est en général incomplète. En effet, l'expression (5) ne tient compte que des singularités isolées (du prolongement méromorphe) de type pôles, mais il peut exister un autre type de singularités isolées : les points de branchement. Dans le cadre de l'hydrodynamique navale (en profondeur infinie) par exemple, nous verrons qu'il faut rajouter à l'expression (5) une contribution basses fréquences liée au rôle particulier que joue la fréquence nulle dans le prolongement (singularité de type logarithmique). On peut aussi consulter HAZARD et LORET [41] et HAZARD [40]. Dans le cadre de problèmes de guidage d'ondes nous devons rajouter une contribution pour chaque fréquence de coupure (qui représente un point de branchement). Il se produit un phénomène analogue dans le cadre du problème de tenue à la mer en profondeur finie.
D'un point de vue numérique, il est clair que le comportement asymptotique (5) est beaucoup moins coûteux (en temps de calcul) à calculer que la réponse transitoire dès lors que l'on dispose des résonances et des modes résonants associés.

L'étude mathématique de la "théorie des résonances" est difficile et encore largement incomplète. Seules certaines situations très particulières sont bien maîtrisées tel le cas de l'acoustique tridimensionnelle dans le cadre d'obstacles bornés et convexes (voir VAINBERG [62]). Toute une branche des mathématiques, l'analyse microlocale, s'attache à donner des informations relativement fines sur la répartition des pôles et sur le comportement asymptotique hautes fréquences de la solution, sur le comportement asymptotique des fonctions de comptage des résonances, sur des minorations des parties imaginaires des résonances... Les outils microlocaux trouvent leur origine dans des techniques développées pour comprendre la mécanique ondulatoire ou des questions asymptotiques de la mécanique quantique : consulter BURQ [15], BURQ et ZWORSKI [16], ZWORSKI [65, 66] et SJÖSTRAND [60] pour un aperçu de l'état de l'art dans ce domaine.

Toute la question, qui va nous préoccuper, est de savoir si ce comportement asymptotique de la réponse transitoire constitue une estimation que l'on peut qualifier de suffisamment précise.
Nous nous proposons dans ce mémoire de donner une réponse, ou du moins un début de réponse, dans le cadre de l'hydrodynamique navale. Cette réponse sera basée sur l'expérimentation numérique en comparant la solution transitoire de référence obtenue au moyen de la méthode de la transformation

de LAPLACE et l'estimation fournie par la méthode de décomposition en modes résonants. Nous aurions tout aussi pu prendre la solution obtenue par la méthode de développement en fonctions propres généralisées.
Nous avons décidé de retenir pour cette prospection numérique, le problème bidimensionnel de tenue à la mer d'une structure élastique mince flottant librement (par exemple une piste d'atterrissage flottante, un iceberg, ...) et décrite par l'hypothèse de KIRCHHOFF-LOVE (mouvements de flexion).
Ce problème nous a été proposé par MEYLAN de l'université de Auckland, en Nouvelle-Zélande. Ce dernier a montré [57] dans un cadre mono dimensionnel que la méthode de décomposition en modes résonants fournit une excellente approximation de la réponse transitoire du problème de diffraction d'une plaque élastique mince de masse nulle flottant librement à la surface d'une eau peu profonde. De quoi nous encourager.

Le programme des festivités

Ce mémoire est organisé en deux parties. Le premier volet est consacré à la "prospection numérique" de la méthode de décomposition en modes résonants tandis que la seconde partie résulte de travaux initialement menés par HAZARD dans son mémoire d'habilitation [36] consacré à l'analyse modale que nous avons appliqués au problème de tenue à la mer.

Nous décrivons donc dans la première partie la méthode de décomposition en modes résonants au chapitre 1 suivie de la modélisation et de l'analyse mathématique du problème de tenue à la mer que nous considérons au chapitre 2. L'étude mathématique que nous poursuivons au chapitre 3 nous permet d'une part de mener à bien le prolongement aux fréquences complexes du problème de diffraction et d'autre part de décider du procédé d'application de notre méthode sur le plan numérique. Finalement les chapitres 4 et 5 sont dédiés à la mise en œuvre numérique de notre méthode et à l'exploitation de ses résultats.

La seconde partie du mémoire est réservée à la méthode de décomposition en fonctions propres généralisées. Nous présentons dans un premier temps les résultats théoriques qui montrent un procédé de construction des fonctions propres généralisées en considérant le problème de diffraction comme une perturbation du même problème mais posé en milieu homogène. Ce procédé repose d'une part sur un "principe d'absorption limite stable" du problème posé en milieu homogène et d'autre part sur une "propriété de compacité" du problème perturbé. Finalement nous montrons sur un exemple concret, en l'occurrence le problème bidimensionnel de tenue à la mer d'un corps rigide, l'application des résultats théoriques. Ma contribution dans les travaux présentés dans la seconde partie se concentre sur ce dernier point. Cette partie, soumise au journal SIAM, a été rédigée en ce sens en anglais.

Première partie

La méthode de décomposition en modes résonants

application à un problème transitoire de tenue à la mer

Chapitre 1

La méthode de décomposition en modes résonants

Qu'est-ce que la méthode de décomposition en modes résonants ? En quelques mots, il s'agit d'une méthode destinée à fournir un comportement asymptotique en temps de la solution d'un problème transitoire (de propagation).
Cette méthode est basée sur les propriétés d'analyticité de la transformée de Laplace en temps de la solution. Plus précisément, il s'agit dans un premier temps de prolonger méromorphiquement la transformée de Laplace en temps de la solution à tout le plan complexe sauf peut-être en certains points : les singularités du prolongement ; puis d'appliquer la transformée de Laplace inverse pour recouvrer la solution transitoire. En déformant le chemin d'intégration autour des singularités éventuelles du prolongement, le théorème des résidus nous donne une expression de la solution transitoire composée de termes liés à chacune des singularités du prolongement. L'objet de la méthode de décomposition en modes résonants est de déduire un comportement asymptotique en temps à partir de cette décomposition. Ce chapitre a pour objectif la description cette méthode sur un problème d'évolution 'général' abstrait dans un premier temps, puis de proposer un procédé d'application.

1 Le problème transitoire modèle

Nous choisissons d'expliciter la méthode de décomposition en modes résonants sur un problème modèle abstrait : une équation des ondes abstraite. Il s'agit de trouver une fonction causale $u(t)$ à valeurs dans l'espace de Hilbert complexe séparable $\mathcal{H}$ telle que

$$\mathrm{d}_t^2 u + \mathbb{A}u = f\,,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

où le terme 'causale' signifie que $u(t)$ est nulle pour tout temps t négatif. Les dérivées en temps (d_t^k : dérivée d'ordre k par rapport au temps t) sont prises au sens des distributions de sorte que la fonction f, supposée elle aussi causale, représente à la fois les conditions initiales sous la forme

$$\begin{aligned} &u(0) \otimes \mathrm{d}_t\delta(t) + \mathrm{d}_t u(0) \otimes \delta(t) \\ &\text{où } \delta(t) \text{ note la masse de Dirac placée en } t = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

mais aussi un éventuel régime forcé (dans l'optique d'un possible contrôle dynamique). Enfin l'opérateur $\mathbb{A}$ (indépendant du temps) est positif et auto-adjoint sur $\mathcal{H}$.
Le choix de ce modèle abstrait est guidé par la volonté de décrire la méthode sur un exemple suffisamment général pour représenter de nombreuses situations pratiques. Plus précisément, on peut

montrer (voir Dautray-Lions [25] et Hazard [36]) que cette écriture sous la forme d'une équation du second ordre en temps permet de réunir dans un même formalisme des problèmes d'évolution issus de l'acoustique, de l'électromagnétisme, de l'élasticité et de l'hydrodynamique. C'est dire que cette formulation couvre un vaste champ d'applications.

La question se pose alors de savoir comment résoudre (1.1). De nombreuses approches sont possibles. Nous en privilégions tout particulièrement une. Nous optons pour l'approche consistant dans un premier à *diagonaliser l'un des deux opérateurs* d_t^2 et $\mathbb{A}$, puis à résoudre le nouveau problème ainsi obtenu. Deux possibilités s'offrent à nous alors :

- Soit nous diagonalisons l'opérateur $\mathbb{A}$: ce qui conduit à la *méthode de décomposition en fonctions propres généralisées*. On obtient par cette méthode une représentation continue exacte de la solution en la projetant sur les fonctions w qui satisfont formellement l'équation $\mathbb{A}w = \lambda w\,,\ \lambda \geq 0$. Ces fonctions n'appartiennent pas toujours à $\mathcal{H}$ (le spectre de $\mathbb{A}$ n'est pas nécessairement ponctuel), d'où la terminologie 'généralisées'. La seconde partie de ce mémoire décrit théoriquement et pratiquement le moyen de procéder.
- Soit nous diagonalisons l'opérateur de dérivation par rapport au temps : ce qui conduit à la *méthode de la transformation de* Laplace. On obtient cette fois-ci une représentation continue exacte de la solution faisant intervenir une fonction de l'opérateur $\mathbb{A}$ nommée résolvante de $\mathbb{A}$.

Ces deux méthodes sont équivalentes dans leur cadre de validité commun (voir par exemple Hazard [36]), mais la méthode de la transformation de Laplace donne la clé de la résolution en temps du problème (1.1) indépendamment de la forme diagonale de l'opérateur $\mathbb{A}$. C'est donc finalement cette dernière technique que nous avons retenue et que nous allons développer pour en "extraire" la *méthode de décomposition en modes résonants* qui nous fournira une représentation 'asymptotique-discrète' en temps de la solution transitoire.

2 Le problème stationnaire : la transformée de Laplace

La transformée de Laplace va nous permettre de diagonaliser les opérations de dérivation par rapport au temps. Par suite, elle transformera notre équation d'évolution en une équation stationnaire. Le terme 'stationnaire' signifiant que la nouvelle équation d'évolution ne fera pas explicitement apparaître le temps.
Considérons la transformée de Laplace $\mathscr{L}$ formellement définie[1] par

$$\mathscr{L}(v)(p) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\, v(t)\,\mathrm{d}t\,,\ \forall p \in \mathbb{C}_D := \{q \in \mathbb{C}\,;\, \Re e(q) > 0\}\,.$$

Pour être rigoureux, nous devrions introduire la notion de distributions vectorielles à valeurs dans un espace de Banach. Ces dernières ont beaucoup de propriétés semblables à celles des distributions habituelles (à valeurs scalaires). La théorie de la transformation de Laplace se fait alors parallèlement à la théorie scalaire. Pour ne pas alourdir la présentation, nous n'évoquerons pas en détail cet aspect mathématique. Le lecteur intéressé pourra consulter Dautray-Lions [25].

À noter : La transformée d'une fonction causale est une fonction causale holomorphe de la variable complexe p dans $\mathbb{C}_D$. C'est une de ses propriétés essentielles.

[1] Plus généralement, la transformée de Laplace d'une distribution causale est définie à travers la transformation de Fourier $\mathscr{F}$ des distributions par la relation

$$\mathscr{L}(v)(p) := \mathscr{F}(\mathrm{e}^{-\zeta t}\, v(t))(\eta) \quad \text{où} \quad p := \zeta + \mathrm{i}\eta\,.$$

REMARQUE 1.1 *La transformée de* LAPLACE *de* $\mathrm{d}_t^k\delta(t)$ *est une fonction entière définie par*

$$\mathscr{L}(\mathrm{d}_t^k\delta)(p) = p^k \quad \textit{pour tout } p \in \mathbb{C} \textit{ et } k \in \mathbb{N}.$$

La transformée de LAPLACE *de l'expression* (1.2) *s'écrit donc*

$$p\,u(0) + \mathrm{d}_t u(0)\,.$$

Pour faire court, la notation '$\hat{}$' fera référence dans la suite du mémoire à la transformée de LAPLACE. Alors en appliquant la transformée $\mathscr{L}$ à l'équation (1.1), on obtient

$$\mathrm{d}_t^2 u + \mathbb{A}u = f \overset{\mathscr{L}}{\Longrightarrow} p^2\,\hat{u} + \mathbb{A}\hat{u} = \hat{f} \iff \hat{u} = R(-p^2)\hat{f}$$

où $R(\zeta) := (\mathbb{A} - \zeta\mathbb{I})^{-1}$ est la résolvante de l'opérateur $\mathbb{A}$ et est définie pour tout ζ du plan complexe n'appartenant pas au spectre de $\mathbb{A}$.

REMARQUE 1.2 *À toutes fins utiles on peut remarquer que l'opérateur* $\mathbb{A}$ *étant positif, son spectre Spec(*$\mathbb{A}$*) vérifie : Spec(*$\mathbb{A}$*)*$\subset \mathbb{R}^+$ *. On observe alors que pour tout* $p \in \mathbb{C}_D$*,* $-p^2 \notin \mathbb{R}^+$ *et donc* $R(-p^2)$ *est bien définie et analytique.*

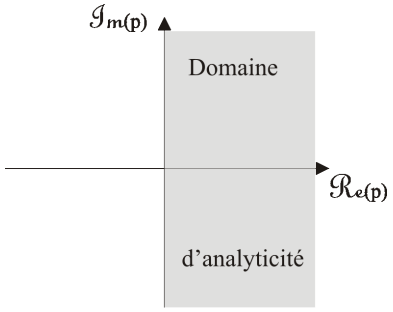

FIG. 1 – Domaine d'analyticité de la résolvante.

Nous sommes finalement partis d'un problème transitoire pour aboutir à un problème stationnaire à l'aide d'une transformation fonctionnelle. La première idée qui vient à l'esprit est d'appliquer la transformation inverse pour déterminer la solution transitoire. C'est ce que l'on nomme la *méthode de la transformation de* LAPLACE. Nous allons voir dans la section suivante que nous pourrons aller un peu plus loin dans la représentation de notre solution transitoire en prolongeant notre transformée fonctionnelle inverse au demi-plan complexe de gauche.

3 La transformée de LAPLACE inverse et son prolongement

Nous souhaitons, à partir de l'égalité $\hat{u} = R(-p^2)\hat{f}$, appliquer la transformée de LAPLACE inverse pour obtenir $u(t)$. La première question qui se pose alors est de savoir s'il est légitime de vouloir inverser la transformée de LAPLACE pour recouvrer $u(t)$.
Nous énonçons donc le résultat suivant qui va fixer la condition d'existence de la transformation de LAPLACE inverse.

Théorème 1.3 (Dautray-Lions **[25]**) *Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $p \mapsto F(p)$ soit la transformée de* Laplace *d'une distribution causale (à support dans $[0\,,+\infty[$) à valeurs dans $\mathcal{H}$ est que F soit holomorphe dans $\mathbb{C}_D$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ et vérifie*

$$\exists C \in \mathbb{R}^+\,,\ \exists n \in \mathbb{N}\,,\ \|F(p)\|_{\mathcal{H}} \leq C\,|p|^n$$

où $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ désigne la norme dans $\mathcal{H}$.

Corollaire 1.4 *Il existe une unique distribution causale à valeurs dans $\mathcal{H}$ dont la transformée de* Laplace *est $R(-p^2)\hat{f}$ pour tout $p \in \mathbb{C}_D$.*

Démonstration. Rappelons que l'opérateur $\mathbb{A}$ est auto-adjoint et positif. Nous avons donc l'identité suivante : posons $\zeta = -p^2$,

$$\|(\mathbb{A}-\zeta)\hat{u}\|_{\mathcal{H}}^2 = \|(\mathbb{A}-\Re e(\zeta))\hat{u}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\Im m(\zeta)\hat{u}\|_{\mathcal{H}}^2\,.$$

Nous en déduisons que

$$\|(\mathbb{A}-\zeta)\hat{u}\|_{\mathcal{H}} \geq \begin{cases} \|\Im m(\zeta)\hat{u}\|_{\mathcal{H}} & \text{si } \Re e(\zeta) \geq 0, \\ \\ |\zeta|\,\|\hat{u}\|_{\mathcal{H}} & \text{si } \Re e(\zeta) < 0. \end{cases}$$

Par voie de conséquence, avec $\hat{u} = R(\zeta)\hat{f}$, on a

$$\|R(\zeta)\hat{f}\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\|\hat{f}\|_{\mathcal{H}}}{\operatorname{dist}(\zeta\,,\mathbb{R}^+)}\,.$$

Au passage, cette inégalité montre que $R(\zeta)$ est un opérateur borné tant que $\zeta \notin \mathbb{R}^+$. Le théorème 1.3 nous permet alors d'en déduire le résultat annoncé. □

Considérons maintenant toujours formellement la transformée de Laplace inverse définie par

$$\mathscr{L}^{-1} : v(p) \mapsto \mathscr{L}^{-1}(v)(t) := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{p_0+\mathrm{i}\mathbb{R}} \mathrm{e}^{pt}\,v(p)\,\mathrm{d}p\,,\ \forall p_0 > 0\,.$$

Appliquons la transformée de Laplace inverse à $\hat{u} = R(-p^2)\hat{f}$:

$$u(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{p_0+\mathrm{i}\mathbb{R}} \mathrm{e}^{pt}\,R(-p^2)\hat{f}(p)\,\mathrm{d}p\,,\ \forall p_0 > 0\,. \tag{1.3}$$

L'indépendance de la définition (1.3) de $\mathscr{L}^{-1}(\hat{u})$ vis-à-vis du choix de $p_0 > 0$ est une conséquence de l'analyticité de la résolvante dans $\mathbb{C}_D$. Nous obtenons ainsi une représentation de $u(t)$ à l'aide d'une somme continue (une intégrale). Nous pouvons observer dans l'expression (1.3) un handicap majeur qui va nous pousser à chercher une autre représentation de $u(t)$ qui se déduira de l'expression (1.3). En effet, pour chaque fréquence complexe p, il faut systématiquement recalculer la résolvante. Et bien entendu pour les traitements numériques ultérieurs cette réévaluation peut s'avérer coûteuse en temps de calcul. Il faut donc (essayer d') aller plus loin afin de satisfaire au mieux le critère de rapidité (des calculs) que nous nous sommes imposés. Toutefois c'est un bon candidat pour tester ultérieurement l'efficacité de la méthode que nous allons développer.

3.1 Et vers le demi-plan complexe de gauche ?

Que devient l'expression (1.3) lorsque l'on déplace le chemin d'intégration $p_0 + i\mathbb{R}$ vers le demi-plan complexe de gauche ($p_0 < 0$) ?

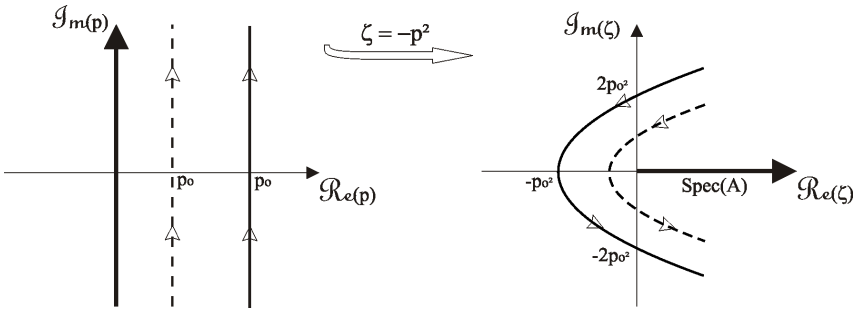

FIG. 2 – Influence du déplacement du chemin d'intégration.

Cette question, loin d'être une trivialité, est en fait à la base d'une méthode initialement développée en électromagnétisme par BAUM [9] et baptisée *Singularity Expansion Method*.
On peut voir toute la difficulté de la tâche liée à cette question, somme toute naturelle, en observant sur la figure 2 que lorsque le chemin d'intégration (sur le dessin de gauche) en trait continu se déplace vers la gauche pour former le chemin en trait discontinu puis continue progressivement jusqu'à franchir le chemin en trait gras (l'axe imaginaire), le paramètre spectral ζ décrit une succession de paraboles (sur le dessin de droite) qui viennent progressivement 'pincer' le spectre de l'opérateur $\mathbb{A}$ pour finalement le traverser lorsque le chemin d'intégration passe dans le demi-plan complexe de gauche ($p_0 < 0$). En nous reportant à l'expression (1.3), nous voyons transparaître la nécessité d'être capable de construire le prolongement (méromorphe) de la résolvante $R(\zeta)$ au travers du spectre de l'opérateur $\mathbb{A}$. Nous pouvons encore voir plus clairement (peut-être) sur la figure 3 ce qu'induit dans le plan spectral (ζ) la traversée du spectre de l'opérateur $\mathbb{A}$. Cette figure, et peut-être plus encore la suivante, montre que

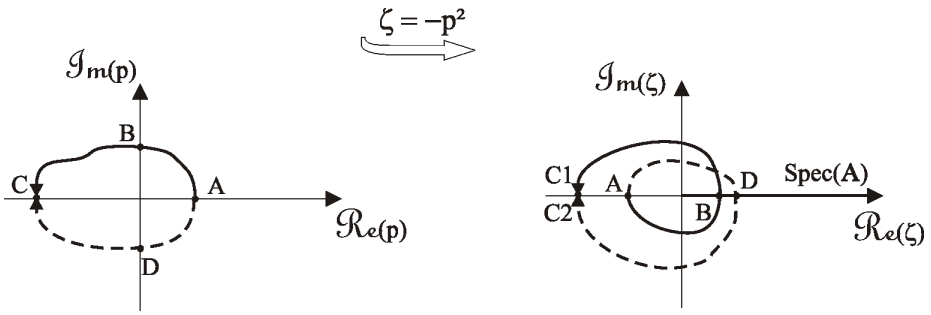

FIG. 3 – Nécessité de prolonger à travers le spectre.

déplacer le chemin d'intégration vers le demi-plan complexe de gauche conduit dans le plan spectral à considérer le prolongement de la résolvante à une surface de RIEMANN.
La construction d'un tel prolongement de la résolvante a fait couler beaucoup d'encre ces quinze dernières années (voir HAZARD [37] pour un aperçu), et trois techniques d'approche se dégagent des différents travaux sur le sujet : les méthodes de représentation intégrale (c'est typiquement l'approche que nous développerons), les méthodes de séparation de variables (décomposition en séries) et les méthodes de dilatation analytique.

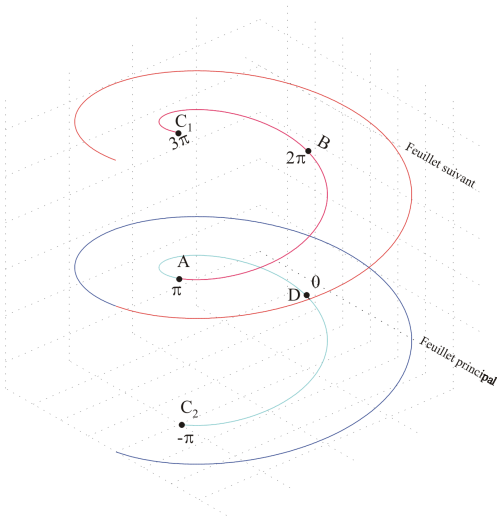

Fig. 4 – Feuillets de Riemann.

Le principe de la méthode de décomposition en modes résonants consiste, partant du demi-plan complexe de droite ($\Re e(p) > 0$), à pousser le chemin d'intégration $p_0 + \mathrm{i}\mathbb{R}$ vers le demi-plan complexe de gauche ($\Re e(p) < 0$). Ce faisant, nous devons prolonger la résolvante, en tant que fonction de la variable complexe p, à tout le plan complexe sauf peut-être en certains points isolés : les pôles du prolongement et les points de branchement[2] (à partir desquels nous définissons des coupures bornées ou non du plan complexe afin de conserver une fonction univalente).
Pour l'heure, nous supposerons ce prolongement acquis, son obtention ou du moins une manière de l'obtenir sera en partie l'objet du chapitre 3.

Remarque 1.5 *L'opérateur $\mathbb{A}$ étant auto-adjoint, sa résolvante vérifie : $\overline{R(\zeta)} = R(\bar{\zeta})$. Ce qui signifie que les singularités (pôles et points de branchement) sont symétriquement placées par rapport à l'axe $\Re e(p)$.*

Finalement, si nous déformons le chemin d'intégration comme nous le montre la figure 5 (autour de chaque pôle et autour des coupures), nous pouvons à partir de l'expression (1.3) donner une décomposition de $u(t)$ à l'aide de termes liés aux singularités éventuelles de la résolvante en appliquant le théorème des résidus (voir Knopp [48]) :

$$u(t) = u_{\text{pôles}}(t) + u_{\text{cut}}(t) + u_{\text{reste}}(t) \tag{1.4}$$

où $u_{\text{pôles}}$, u_{cut} et u_{reste} correspondent respectivement à l'intégration autour des pôles, autour des coupures (les courbes $\mathscr{C}_{\text{Cut}}$) et le long de la courbe $\mathscr{C}_{\text{Reste}}$ (cf. figure 5). Les différents termes de l'expression

[2]Les points de branchement sont des points du plan complexe autour desquels le prolongement de la résolvante devient une fonction multivalente. Il devient alors nécessaire soit de considérer des surfaces de Riemann, soit de définir à partir de chacun de ces points une coupure (bornée ou non) du plan complexe afin de conserver une fonction univalente. Cette dernière façon de faire permet de rester dans le plan complexe certes, mais définie ainsi des lignes bornées ou non à la traversée desquelles le prolongement de la résolvante aura toujours un saut.

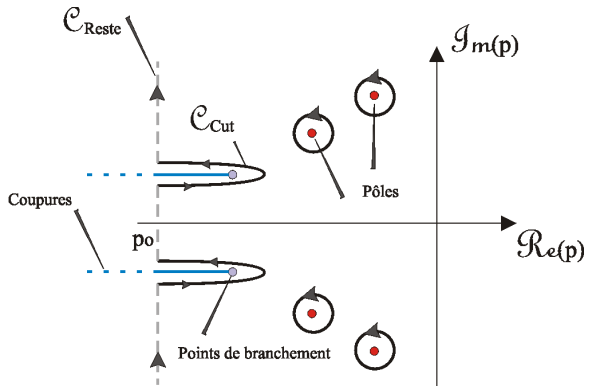

FIG. 5 – Déformation du chemin d'intégration.

(1.4) s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
u_{\text{pôles}}(t) &:= \sum_{p_k \in \{\xi \in \mathbb{C}\,;\, \Re e(\xi) > p_0\}} \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\odot_k} \mathrm{e}^{pt}\, \mathcal{R}(-p^2) \hat{f}(p)\, \mathrm{d}p\,, \\
u_{\text{cut}}(t) &:= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \oint_{\mathscr{C}_{\text{Cut}}} \mathrm{e}^{pt}\, \mathcal{R}(-p^2) \hat{f}(p)\, \mathrm{d}p\,, \\
u_{\text{reste}}(t) &:= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\mathscr{C}_{\text{Reste}}} \mathrm{e}^{pt}\, \mathcal{R}(-p^2) \hat{f}(p)\, \mathrm{d}p\,,
\end{aligned}$$

où $\int_{\odot_k}$ note l'intégrale sur un chemin fermé ne contenant qu'un seul pôle indicé k, *i.e.* p_k et $\mathcal{R}$ note le prolongement méromorphe de la résolvante R. Plus exactement, $R(-p^2)\hat{f}$ ayant la fâcheuse tendance à être exponentiellement croissant en espace lorsque $\Re e(p) < 0$, seul son comportement local peut être considéré et donc $\mathcal{R}(-p^2)$ note le prolongement méromorphe de $\chi R(-p^2)\chi$ où χ est une fonction qui vaut 1 sur un domaine compact et 0 ailleurs.
Le terme $u_{\text{pôles}}$ représente une superposition discrète de mouvements oscillants exponentiellement amortis ($\Re e(p_k) < 0$)

$$u_{\text{pôles}}(t) = \sum_k c_k(t)\, \mathrm{e}^{p_k t}$$

où $c_k(t)\, \mathrm{e}^{p_k t}$ note le résidu de $\mathrm{e}^{pt}\, \mathcal{R}(-p^2)\hat{f}(p)$ associé au pôle p_k. Ces modes oscillants sont appelés les *modes résonants* du système et sont associés chacun à une *fréquence de résonance* : les pôles p_k.

REMARQUE 1.6 *L'opérateur $\mathcal{R}(-p^2)$ étant méromorphe au voisinage de chacun de ses pôles p_k, il admet le développement en série de* LAURENT *suivant*

$$\mathcal{R}(-p^2) = \sum_{n \geq -m} (p - p_k)^n\, \mathcal{R}_k^{(n)}$$

où m note la multiplicité du pôle p_k et les $\mathcal{R}_k^{(n)}$ sont des opérateurs linéaires continus. Supposons que les pôles du prolongement méromorphe soient simples, i.e. $m = 1$. *On obtient alors*

$$u_{\hat{p}oles}(t) = \sum_{p_k \in \{\xi \in \mathbb{C}\,;\, \Re e(\xi) > p_0\}} \mathrm{e}^{p_k t}\, \mathcal{R}_k^{(-1)} \hat{f}(p_k)\,.$$

La quantité $\mathcal{R}_k^{(-1)}$ *est définie par*

$$\mathcal{R}_k^{(-1)} := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\odot_k} \mathcal{R}(-p^2)\,\mathrm{d}p\,.$$

La composante u_{cut} correspond aux contributions liées aux intégrations autour des coupures. Enfin le terme u_{reste} représente toutes les contributions éventuelles à gauche de la courbe $\mathscr{C}_{\text{Reste}}$: plus rapidement exponentiellement amorties que chacun des termes de $u_{\text{pôles}}$ ($u_{\text{reste}}(t) = O(\mathrm{e}^{p_0 t})$ quand t tend vers $+\infty$).

> La méthode de décomposition en modes résonants consiste à considérer le terme $u_{\text{reste}}(t)$ négligeable, quand $t \to +\infty$, dans l'expression (1.4).

Cette méthode permet donc d'obtenir un comportement asymptotique en temps de $u(t)$

$$u(t) \underset{+\infty}{\sim} u_{\text{pôles}}(t) + u_{\text{cut}}(t)$$

contrairement à la méthode de la transformée de Laplace (1.3) qui donne une représentation exacte de la solution transitoire.

Seulement force est de constater que u_{reste} n'a, *a priori*, aucune raison d'être négligeable en général. D'ailleurs, si l'on considère la propagation d'une onde "libre", *i.e.* se propageant dans un domaine homogène (sans obstacle), alors le terme $u_{\text{pôles}}$, cher à la méthode de décomposition en modes résonants, est purement et simplement absent car le prolongement de la résolvante dans ce cas ne possède pas de singularités isolées (résonances), le milieu étant homogène. Nous verrons au chapitre 3 sous l'appellation de 'problème libre' un exemple de telles situations. Dans cette hypothèse seuls restent alors les termes u_{cut} et u_{reste}. Malheureusement, il est loin d'être évident de savoir lequel de ces deux termes est prépondérant. En particulier, nous ne pourrons pas appliquer notre méthode aux ondes dites libres.

3.2 Quand dire que $u_{\text{reste}}(t)$ est négligeable ?

Nous l'avons vu, le fondement de la méthode de décomposition en modes résonants consiste à négliger le terme $u_{\text{reste}}(t)$ quand t devient grand. Malheureusement, nous ne sommes pour l'instant pas en mesure de déterminer quand $u_{\text{reste}}(t)$ est effectivement un terme négligeable.
Cette section a pour seul objectif de mettre en avant une idée sur un possible processus d'application de notre méthode que nous suivrons et essayerons de comprendre à l'aide du traitement numérique à venir.

L'approche perturbative : un espoir... ?

Nous allons dans un premier temps considérer un problème de diffraction d'ondes par un obstacle dans le cadre de l'acoustique tridimensionnelle. Nous pensons que cet exemple est un modèle qui ouvre la voie à un procédé d'application de la méthode de décomposition en modes résonants.

Soit Ω le sous-espace non borné de $\mathbb{R}^3$ extérieur à un domaine borné convexe de frontière Γ. Considérons le problème de propagation suivant :

$$\mathrm{d}_t^2 u - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega\,,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \tag{1.6}$$

$$\text{avec} \quad f := u(0) \otimes \mathrm{d}_t\delta(t) + \mathrm{d}_t u(0) \otimes \delta(t)\,. \tag{1.7}$$

L'opérateur $-\Delta$ est auto-adjoint et positif sur $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$.
Notre intention ici est, rappelons-le, d'adapter l'application de notre méthode de décomposition en

modes résonants. Nous allons adopter une approche perturbative. En d'autres termes, nous choisissons de considérer le problème (1.5)–(1.7) comme une perturbation du même problème posé dans un milieu homogène (sans obstacle) que nous nommerons 'libre'

$$\mathrm{d}_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = f.\mathbb{1}_\Omega \quad \text{dans } \mathbb{R}^3\,,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

où $\mathbb{1}_\Omega(X)$ vaut 1 si $X \in \Omega$ et 0 sinon. Si maintenant nous appliquons la transformée de LAPLACE aux équations (1.5)–(1.7) et (1.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} &p^2 \hat{u} - \Delta \hat{u} = \hat{f} \quad \text{dans } \Omega \\ &\hat{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

pour le problème initial et

$$p^2 \hat{\tilde{u}} - \Delta \hat{\tilde{u}} = \hat{f}.\mathbb{1}_\Omega \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

pour le problème libre (avec $p \in \mathbb{C}_D$). La solution de cette dernière équation (équation de HELMHOLTZ) est connue et admet la représentation intégrale suivante :

$$\hat{\tilde{u}}(X,p) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{-p\,\|X-Y\|}}{4\pi\,\|X-Y\|}\, \hat{f}(Y,p).\mathbb{1}_\Omega(Y)\,\mathrm{d}Y\,. \tag{1.9}$$

Dit autrement, nous connaissons une représentation intégrale de la résolvante de notre problème libre. Considérons maintenant le problème diffracté (sa transformée de LAPLACE en fait), différence du problème initial et du problème libre, qui s'écrit

$$\left|\begin{aligned} &p^2 \hat{u}_D - \Delta \hat{u}_D = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \\ &\hat{u}_D = -\hat{\tilde{u}} \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned}\right. \tag{1.10}$$

avec $u_D := u - \tilde{u}$ et sur lequel nous allons effectivement appliquer la méthode de décomposition en modes résonants.

On montre (consulter le livre de VAINBERG [62]) qu'étant donné que les seconds membres de l'équation (1.10) sont à support compact[3], l'opérateur $D(-p^2)$ qui à une excitation donnée fait correspondre la solution du problème diffracté (analytique sur $\mathbb{C}_D$) se prolonge méromorphiquement à tout le plan complexe (il n'y a pas de coupure). Les pôles de ce prolongement étant nécessairement de partie réelle négative. L'expression (1.9) montre, en particulier, que $\hat{\tilde{u}}$ se prolonge aisément en une fonction analytique sur $\mathbb{C}$. Nous en déduisons que $\hat{u}_D$ se prolonge méromorphiquement à tout le plan complexe, ses pôles étant les pôles du prolongement $\mathcal{D}$ de D.

Étant donné que l'obstacle considéré est convexe (et de manière plus générale non captif, c'est-à-dire qu'il ne "piège pas les rayons"), on montre également par des arguments 'très techniques' des estimations sur $\mathcal{D}(-p^2)$ lorsque $|\Im m(p)| \to \infty$. Ces estimations permettent non seulement d'affirmer qu'il n'y a pas de contribution d'une portion du contour à l'infini ($|p| = \infty$) lorsque le chemin d'intégration est déformé vers le demi-plan complexe de gauche ; mais aussi qu'il n'y a qu'un nombre fini de pôles dans une bande $\{p \in \mathbb{C}\,;\, p_0 < \Re e(p) < 0\}$. Nous en déduisons en particulier que le terme $u_{D_{\text{pôles}}}$ est défini par une somme finie. Toujours dans le livre de VAINBERG, on obtient de ces estimations sur la résolvante le comportement asymptotique en temps de la solution transitoire u_D :

$$u_D(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t)\,\mathrm{e}^{p_k t} + O(\mathrm{e}^{p_0 t})\,.$$

[3] On a tout fait pour cela en choisissant un problème libre adéquat. Pour ne pas rajouter de difficultés dans la résolution de notre problème, il est bon d'opter pour un problème libre 'simple' que l'on sait résoudre par ailleurs (dans notre situation, nous connaissons une représentation intégrale de la résolvante du problème libre).

Ce comportement asymptotique montre en particulier que le terme $u_{D_{\text{reste}}}$ est négligeable. Dans ces conditions, la méthode de décomposition en modes résonants nous donne

$$u(t) \simeq \tilde{u}(t) + \sum_{k=1}^{N} c_k(t)\, \mathrm{e}^{p_k t}\,.$$

Nous constatons que la décomposition de la solution transitoire u du problème (1.5)–(1.7) en onde libre et en onde diffractée marche plutôt bien. En effet, elle nous a permis d'obtenir une décomposition de la partie diffractée que l'on pourrait noter $u_{D_{\text{pôles}}}$ pour faire référence à la méthode de décomposition en modes résonants.

Notre démarche Nous nous basons sur l'exemple précédent pour suggérer la démarche que nous allons suivre : l'approche perturbative. Il s'agit de comparer le problème considéré à son homologue posé en milieu homogène. Nous considérons alors le problème initial comme une perturbation du problème posé en milieu homogène. Nous espérons que l'essentiel de l'information contenue dans le terme u_{reste} se retrouve asymptotiquement en temps dans l'onde libre (définie en milieu homogène) de sorte que le terme 'reste' de la partie diffractée se retrouve négligeable. Il s'en suit que nous appliquerons la méthode de décomposition en modes résonants uniquement sur la "partie diffractée". La solution de la "partie incidente", *i.e.* la solution sans obstacle (onde libre), s'obtiendra par un autre procédé (il convient donc d'écrire un problème libre que l'on sait résoudre 'aisément').
Nous ne possédons malheureusement aucune démonstration de la validité de cette approche. Il s'agit donc d'une approche prospective que le traitement numérique devrait éclairer.

Nous allons découvrir dans les chapitres suivants un exemple de problème d'interaction fluide–structure au chapitre 2 sur lequel nous appliquerons la méthode de décomposition en modes résonants d'un point de vue théorique au chapitre 3 puis numérique au chapitre 4. Finalement au chapitre 5 nous ferons parler les résultats numériques et nous discuterons de la validité de notre méthode.

Chapitre 2

Le problème de tenue à la mer d'une plaque mince

Nous allons dans ce chapitre, dans un premier temps, redécouvrir les équations linéarisées régissant les mouvements de flexion d'une plaque mince flottant librement, sans vitesse d'avance, à la surface de l'océan, supposé non borné et de profondeur infinie. Il s'agit d'un problème de couplage entre un milieu fluide, à la surface duquel des ondes de gravité peuvent se propager, et une structure élastique. Dans un second temps, nous nous attacherons à donner un sens mathématique rigoureux à l'interprétation de notre problème de couplage sous la forme d'une équation des ondes abstraite. Comme cela a été présenté au chapitre précédent, c'est le point de départ pour une future application de la méthode de décomposition en modes résonants.

1 Introduction et généralités

Soit $\mathcal{E}^3$ l'espace euclidien usuel rapporté à un repère orthonormé (O, e_x, e_y, e_z) où O est un point quelconque sur la surface de l'océan à l'équilibre et d'axe des z normal à cette surface.
Nous considérons une plaque mince d'épaisseur uniforme possédant une surface moyenne P à mi-chemin de ses deux faces. Pour des raisons encore prématurées pour l'instant, mais qui seront plus claires au paragraphe 2.3, parce que la plaque est mince, elle (tridimensionnelle) peut être considérée, vue... comme sa surface moyenne. Et c'est en ces termes que nous parlerons de la plaque : en terme d'un objet non plus (physiquement) tridimensionnel, mais d'un objet (mathématiquement) bidimensionnel.
Le système fluide–structure au repos occupe le domaine non borné de $\mathcal{E}^3$ représenté par l'ouvert Ω

$$\Omega := \left\{ M \in \mathcal{E}^3 \, ; \, \overrightarrow{OM} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, , \, z < 0 \right\} \, ;$$

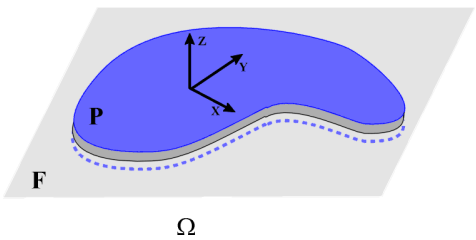

Fig. 1 – Le système fluide–structure au repos.

dont la frontière $\partial\Omega$ est constituée de la surface fluide F (ou surface libre) : un ouvert non borné du plan (O, e_x, e_y) ; et de la "plaque P" : un ouvert borné du plan (O, e_x, e_y) de frontière régulière. On désigne par η le déplacement vertical des points de la surface, *i.e.* leur coordonnée en z. On notera ∂_i^k la dérivée partielle d'ordre k suivant la i-ième composante et ∂_{ij}^2 la dérivée partielle suivant la i-ième et la j-ième composante.
Nous commencerons par rappeler assez brièvement les équations (classiques) régissant les mouvements linéarisés du fluide. Puis, nous nous attarderons beaucoup plus sur l'établissement des équations traduisant la dynamique de la plaque. Enfin nous montrerons comment notre problème de couplage fluide–structure peut se réduire à une seule équation du second ordre en temps posée sur la surface.

2 Les équations linéarisées de la mécanique

La linéarisation des équations va s'effectuer sous l'hypothèse de petites perturbations : les déformations seront supposées petites notamment vis-à-vis de l'épaisseur, c'est-à-dire que la position des points de la plaque varient peu à l'égard de l'épaisseur, de sorte que toutes les grandeurs physiques considérées ζ peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\zeta = \zeta^{(0)} + \epsilon\zeta^{(1)} + o(\epsilon^2)\,,$$

où ϵ est un petit paramètre représentant l'ordre de la perturbation. L'ordre 0 est associé au système au repos ; le problème linéarisé se limite à l'étude de l'ordre 1.
Ces hypothèses vont nous permettre d'écrire les équations de l'écoulement fluide dans le *domaine moyen* occupé par le fluide, *i.e.* le domaine Ω occupé par le fluide au repos, et non dans le *domaine réel* inconnu $\Omega(t)$ qui, à chaque instant, dépend de l'élévation de la surface F du fluide et de la position de la plaque P.

2.1 Le potentiel des vitesses

Le fluide est supposé parfait, incompressible et en écoulement irrotationnel. Le champ des vitesses est alors défini par le gradient d'un potentiel scalaire $\phi(X,t)$ vérifiant l'équation de Laplace

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans } \Omega(t)$$

où $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On obtient donc, en choisissant $\phi^{(0)}$ identiquement nul puisqu'il caractérise l'état du système au repos,

$$\Delta\phi^{(1)} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.1}$$

À cette équation il faut rajouter des conditions aux limites sur $\partial\Omega$ qui sont de deux types : une condition cinématique qui traduit la continuité de la vitesse à la traversée de $\partial\Omega$ et une condition dynamique qui traduit celle de la pression.

2.2 La condition cinématique

Supposons que l'équation de la surface s'écrive $f(X,t) = 0$, on aura alors

$$0 = \mathrm{d}_t f = \nabla f \,\boldsymbol{.}\, \mathrm{d}_t X + \partial_t f$$

où d_t et ∂_t désignent respectivement les dérivées complète et partielle suivant la variable de temps t. La notation ' $\boldsymbol{.}$ ' désigne le produit scalaire euclidien et le symbole ∇ note le gradient. Comme le vecteur ∇f est normal à la surface définie par f, on en déduit que la vitesse normale d'un point

$X(t)$ de la surface n'est autre que $-(\partial_t f)/\|\nabla f\|$ et est par conséquent indépendante de la trajectoire particulière du point : on pourra donc parler de la vitesse normale de la surface.
La condition cinématique qui exprime le fait que l'on a bien une surface matérielle, se traduit par l'égalité entre la vitesse normale de la surface et la vitesse normale du fluide $(\nabla\phi \cdot \nabla f/\|\nabla f\|)$. Soit

$$\nabla\phi \cdot \nabla f + \partial_t f = 0\,.$$

Choisissons maintenant d'exprimer f à l'aide de l'élévation de la surface notée $\eta(x, y, t)$: $f = \eta - z$. On peut alors récrire la condition cinématique sous la forme

$$\partial_t \eta + \nabla\phi \cdot \nabla(\eta - z) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega(t)\,.$$

En posant $\eta^{(0)}$ identiquement nulle, la condition cinématique ainsi devient au premier ordre

$$\partial_t \eta^{(1)} - \partial_3 \phi^{(1)} = 0 \quad \text{sur } F \cup P\,. \tag{2.2}$$

2.3 La condition dynamique

Pour exprimer la condition dynamique qui traduit la continuité de la pression à la traversée de la surface, il nous faut connaître la pression en tout point de la surface. Pour cela on utilise l'équation de Bernoulli qui relie la pression p au potentiel des vitesses ϕ en tout point du domaine fluide

$$\frac{p}{\rho_F} + g\,z + \partial_t\phi + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 = C(t) \quad \text{dans } \Omega(t)\,, \tag{2.3}$$

où ρ_F note la masse volumique du fluide, g représente l'accélération de la pesanteur et $C(t)$ est une fonction ne dépendant que du temps. Pour déterminer cette pression, il nous faut considérer deux cas :

- Considérons tout d'abord le cas de la surface fluide F. Si l'on suppose la pression à la surface du fluide égale à la pression atmosphérique p_0, la relation (2.3) devient

  $$\frac{p_0}{\rho_F} + \epsilon(g\,\eta^{(1)} + \partial_t\phi^{(1)}) + 0(\epsilon^2) = C(t) \quad \text{sur } F\,,$$

  ce qui montre que $C(t)$ peut être choisie constante et égale à p_0/ρ_F, et nous fournit la condition dynamique à l'ordre 1

  $$\partial_t\phi^{(1)} + g\,\eta^{(1)} = 0 \quad \text{sur } F\,. \tag{2.4}$$

- Par contre, la détermination du champ de pression sous la plaque nécessite la connaissance du champ de déformations de celle-ci. Ce qui bien entendu requiert quelques hypothèses de modélisation afin d'en avoir une bonne approximation. La section suivante est consacrée à ce dernier point.

2.4 Le modèle de plaque de Kirchhoff–Love

Comme le montre l'équation de Bernoulli, la détermination de la pression régnant sous la plaque nécessite de connaître les équations du mouvement de la plaque ; ce qui impose de faire le choix d'un modèle mathématique. Considérons donc une plaque élastique mince $\mathcal{P}$ (pour l'occasion nous considérons la plaque tridimensionnelle) homogène et isotrope d'épaisseur uniforme h, flottant 'librement' à la surface de l'océan. La configuration de la plaque, avant déformation coïncide avec le sous-ensemble fermé de $\mathcal{E}^3$

$$\mathcal{P} := \left\{ M \in \mathcal{E}^3\,;\, \overrightarrow{OM} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,\, (x, y) \in \overline{P}\,,\, -\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2} \right\}\,.$$

Le terme 'librement' signifie que la plaque n'est soumise à aucun effort sur ses extrémités et que l'on ne considère ni distribution volumique de forces ni distribution surfacique de forces sur sa face supérieure (en contact avec l'air). Quand nous disons plaque mince, nous supposons d'une part que la plaque possède une surface moyenne plane au repos que l'on nomme *surface neutre* à mi-chemin de ses deux faces. D'autre part nous supposons que l'épaisseur de la plaque est faible en comparaison des dimensions dans les deux autres directions.
Notre étude se limitera au cadre des mouvements en flexion pure. Nous optons donc pour le modèle de Kirchhoff–Love pour les plaques minces, dont l'idée essentielle est de prendre en compte la géométrie particulière de tels milieux (minces) et, par "intégration sur l'épaisseur", d'obtenir un modèle bidimensionnel formulé sur la surface moyenne (ou surface neutre) du milieu pour lequel l'inconnue est le champ de déplacements des points de la surface moyenne. Ce modèle que l'on sait être une

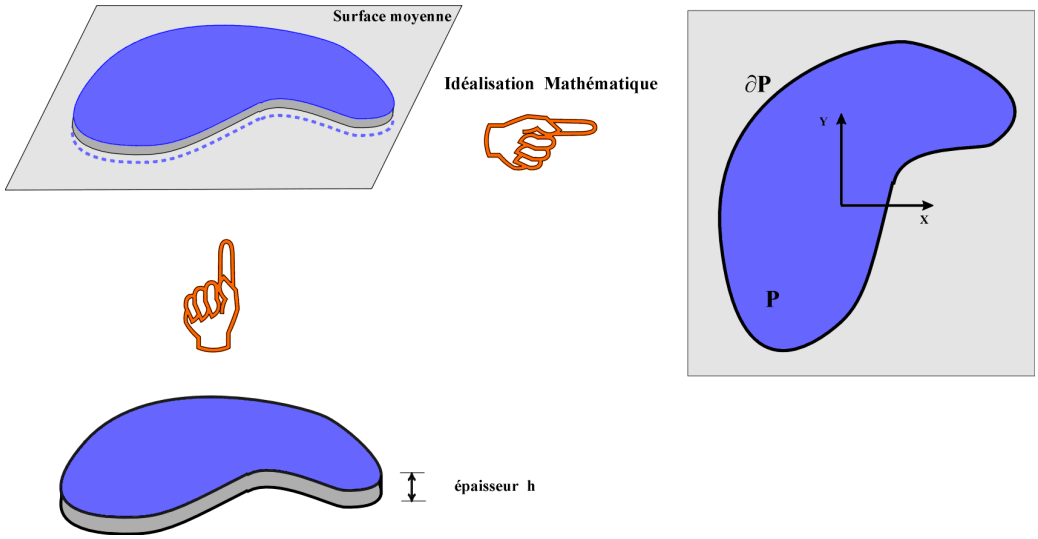

Fig. 2 – Idéalisation de la plaque en un modèle 2D.

"bonne" approximation du modèle tridimensionnel depuis les travaux de Ciarlet et Destuynder [18], repose sur l'hypothèse suivante :

> Toute fibre rectiligne perpendiculaire à la surface moyenne non déformée
> de la plaque reste rectiligne et perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

Cette hypothèse revient à négliger les effets de cisaillement transverses et compte tenu de l'hypothèse de petites déformations, nous conduit à ne considérer que les champs de déplacements $\vec{u}$ de la forme

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta(x,y,t) \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} \partial_1 \eta(x,y,t) \\ \partial_2 \eta(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

que nous pouvons encore noter

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -z\nabla\eta(x,y,t) \\ \eta(x,y,t) \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Nous pouvons visualiser ces mouvements dans le plan (O, e_x, e_z) comme indiqué sur la figure 3.
Comme nous l'avons précisé plus haut, nous devons déterminer les mouvements de la plaque pour en

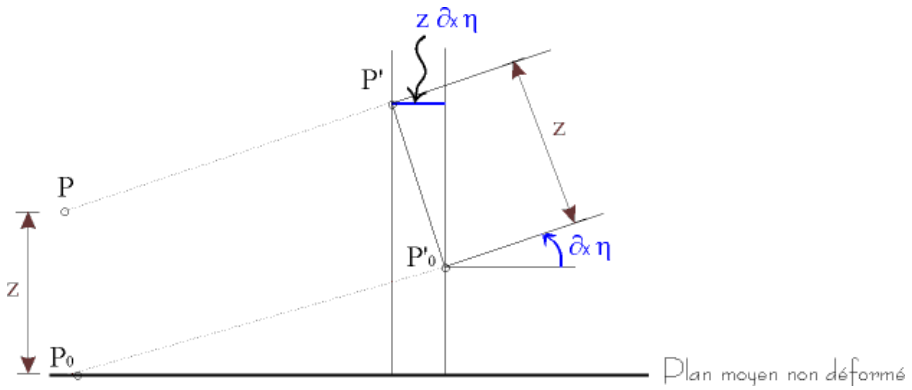

FIG. 3 – Cinématique de la plaque de KIRCHHOFF-LOVE.

déduire l'expression de la pression régnant sous la plaque. Mais il va sans dire que cette démarche nécessite quelques rudiments de mécanique. En effet, pour étudier la dynamique de la plaque, nous avons besoin de quelques notions d'élasto-dynamique tridimensionnelle dont nous faisons un bref rappel :

- Le matériau élastique considéré étant linéaire homogène et isotrope, il suit la loi de comportement de HOOKE :

$$\begin{aligned} &\sigma(\nabla\vec{u}) := \lambda\,\mathrm{tr}(\varepsilon(\nabla\vec{u}))\mathrm{Id} + 2\mu\,\varepsilon(\nabla\vec{u}) \\ &\text{avec } \varepsilon(\nabla\vec{u}) := \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + {}^t\nabla\vec{u}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

  où σ représente le tenseur des contraintes, ε le tenseur des déformations et $\vec{u} := (u_1, u_2, u_3)$ désigne le vecteur déplacement d'un point de la plaque. Les constantes λ et μ sont les constantes de LAMÉ et tr note l'opérateur de trace.

- Les équations de la dynamique :

$$\rho_P\,\partial_t^2\vec{u} - \mathrm{div}(\sigma(\nabla\vec{u})) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{P} \tag{2.8}$$

  où ρ_P note la masse volumique de la plaque. Le membre de droite est nul parce que nous ne considérons aucune force volumique.

- Les conditions aux limites :

$$\sigma\,\vec{n} = \begin{cases} p & \text{sur } P \times \{-h/2\}, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \tag{2.9}$$

  où $\vec{n}$ désigne le vecteur unité suivant la normale extérieure à la surface et p représente la pression régnant à l'interface de la plaque et du fluide.

Nous allons maintenant nous servir des équations de l'élasto-dynamique (2.7)-(2.8)-(2.9) et du champs de déplacements (2.6) pour en déduire les équations du mouvement de la plaque puis, à l'aide de l'équation de BERNOULLI (2.3), nous déterminerons le champ de pression.
Dans de nombreux problèmes de physique, et notre problème ne fait pas exception, les formulations variationnelles sont naturelles et particulièrement bien adaptées à l'interprétation (et à la manipulation) des lois de la physique. Aussi nous adopterons ce procédé de formulation faible des équations fortes afin d'en extraire l'information que nous recherchons : l'équation de vibration de la plaque. Nous allons

donc considérer une formulation faible de nos équations (2.8)–(2.9). Le problème de plaque d'élasticité linéaire, isotrope et homogène que nous considérons admet la formulation variationnelle suivante :

$$\rho_P \, \mathrm{d}_t^2 \int_{\mathcal{P}} \vec{u} \cdot \vec{v} - \int_{\mathcal{P}} \sigma(\nabla \vec{u}) : \varepsilon(\nabla \vec{v}) = \int_{P \times \{-h/2\}} p \vec{v} \cdot \vec{e_z} \qquad \forall \vec{v} \text{ indépendant de } t \tag{2.10}$$

où ' : ' note le produit contracté des tenseurs du second ordre.
Nous allons maintenant exprimer les différentes quantités intervenant dans cette formulation à l'aide du champ de déplacements de Kirchhoff–Love. Nous obtiendrons ainsi à l'aide d'intégrations par parties, l'équation du mouvement de la plaque et les conditions aux limites.
On déduit du champ de déplacements (2.6) que

$$\nabla \vec{u} = \begin{pmatrix} -z\mathrm{Hess}(\eta) & -\nabla\eta \\ {}^t\nabla\eta & 0 \end{pmatrix}$$

où Hess note le hessien. Nous obtenons par conséquent les formules suivantes pour les composantes du tenseur des déformations[1]

$$\varepsilon(\nabla \vec{u}) = \begin{pmatrix} -z\mathrm{Hess}(\eta) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le tenseur des contraintes s'écrit donc

$$\begin{aligned} \sigma(\nabla \vec{u}) &= \lambda \, \mathrm{tr}(-z \, \mathrm{Hess}(\eta))\mathrm{Id} + 2\mu \, \varepsilon(\nabla \vec{u}) \\ &= -z \begin{pmatrix} \sigma_{2D}(\mathrm{Hess}(\eta)) & 0 \\ 0 & \lambda \, \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}(\eta)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\sigma_{2D}(w) = \lambda \, \mathrm{tr}(w)\mathrm{Id}_{2D} + 2\mu \, w \, .$$

Il vient alors

$$\vec{u} \cdot \vec{u'} = \eta \, \eta' + z^2 \, \nabla\eta \cdot \nabla\eta' \, ,$$

$$\sigma(\nabla \vec{u}) : \varepsilon(\nabla \vec{u'}) = z^2 \, \sigma_{2D}(\mathrm{Hess}(\eta)) : \mathrm{Hess}(\eta')$$

$$\text{avec} \quad \sigma_{2D}(\mathrm{Hess}(\eta)) : \mathrm{Hess}(\eta') = \lambda \, \Delta\eta \, \Delta\eta' + 2\mu \, \mathrm{Hess}(\eta) : \mathrm{Hess}(\eta') \, .$$

La formulation variationnelle (2.10) peut alors se récrire :

$$\underbrace{\rho_P \, h \, \mathrm{d}_t^2 \int_P \left[\eta \, \eta' + \frac{h^2}{12} \nabla\eta \cdot \nabla\eta' \right] \mathrm{dXdY}}_{\mathrm{Ec}(\eta \, , \eta')} + \underbrace{\frac{h^3}{12} \int_P \sigma_{2D}(\mathrm{Hess}(\eta)) : \mathrm{Hess}(\eta') \, \mathrm{dXdY}}_{\mathrm{Epi}(\eta \, , \eta')} = \int_P p \, \eta' \, \mathrm{dXdY} \tag{2.11}$$

en intégrant explicitement sur $]-h/2, +h/2[$: l'épaisseur de la plaque ; où Ec note l'énergie cinétique et Epi l'énergie potentielle interne de déformation. Une pause lexicale s'impose. Les puristes verront certainement dans ces dénominations pour Ec et Epi un outrage, une aversion, un non sens... Mesdames, messieurs tempérez. Nous avons, après réflexion et faute de mieux, décidé de conserver ces dénominations bien qu'elles ne soient pas conformes au sens physique habituel en faisant référence aux quantités sous-jacentes qui, elles, ne prêtent pas à palabre.
Nous allons déduire de la formulation (2.11), après une phase calculatoire peu excitante mais nécessaire, la condition dynamique convoitée. Il sera alors temps de réunir les diverses équations établies traduisant le problème de tenue à la mer.

[1] On retrouve tout naturellement notre hypothèse de déformation plane : $\varepsilon_{33} = 0$; et d'absence de cisaillements transverses : $\varepsilon_{13} = 0$ et $\varepsilon_{23} = 0$.

Équation du mouvement et conditions limites naturelles

Tout d'abord, une fois n'est pas coutume, un peu de sentiment. Parce que nous jugeons le choix des paramètres λ et μ (coefficients de LAMÉ) moins bien adapté pour la suite au sens où l'écriture des équations est moins "belle" et donc comme annoncé certainement plus par sentiment, nous considérons désormais les constantes E et ν qui sont respectivement le module de YOUNG et le coefficient de POISSON ($0 < \nu < 1/2$) :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,,$$
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\,.$$

Dans ce cas l'énergie potentielle interne se récrit en explicitant toutes les quantités

$$\begin{aligned}\mathrm{Epi}(\eta\,,\eta') \;=\; & \mathcal{D}\int_P \Big[\;\partial_1^2\eta\,\partial_1^2\eta' + \partial_2^2\eta\,\partial_2^2\eta' \\ & + \nu\left(\partial_1^2\eta\,\partial_2^2\eta' + \partial_1^2\eta'\,\partial_2^2\eta\right) \\ & + 2(1-\nu)\partial_{12}\eta\,\partial_{12}\eta'\;\Big]\;\mathrm{dX}\mathrm{dY}\,,\end{aligned} \tag{2.12}$$

où la constante

$$\mathcal{D} := \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

est souvent nommée rigidité de flexion dans la littérature. Nous optons pour une écriture explicite car nous allons être amenés à effectuer des intégrations par parties afin de déterminer à la fois l'équation du mouvement de la plaque (intégrales de surface) et les conditions aux limites (intégrales de bord).

PROPOSITION 2.1 *Lorsque le bord de la plaque ∂P est suffisamment régulier*[2] *($\mathscr{C}^1$ par morceaux par exemple), l'énergie potentielle interne Epi se récrit*

$$\begin{aligned}Epi(\eta\,,\eta') \;=\; & \mathcal{D}\int_P \Delta^2\eta\,\eta'\mathrm{dX}\mathrm{dY} \\ & + \mathcal{D}\oint_{\partial P}(\Delta\eta\,\partial_n\eta' - \partial_n\Delta\eta\,\eta')\mathrm{d}s \\ & + (1-\nu)\mathcal{D}\oint_{\partial P}\partial_n\eta'\left[2\,n_1\,n_2\,\partial_{12}\eta - n_2^2\,\partial_1^2\eta - n_1^2\,\partial_2^2\eta\right]\mathrm{d}s \\ & + (1-\nu)\mathcal{D}\oint_{\partial P}\eta'\,\partial_l\left[n_1\,n_2\,(\partial_2^2\eta - \partial_1^2\eta) + (n_1^2 - n_2^2)\partial_{12}^2\eta\right]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

où Δ^2 note le bilaplacien. Les notations ∂_n et ∂_l représentent les dérivées partielles suivant les vecteurs $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{l} = \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix}$ respectivement les normale unitaire extérieure et tangente au contour de la plaque.

REMARQUE 2.2 *Une question en particulier reste encore sans réponse : Que se passe-t-il sur les coins lorsque le bord de la plaque n'est plus suffisamment régulier ?*

[2] Nous considérons une plaque qui se trouve localement d'un seul côté de son bord. De plus, nous réclamons que le bord de la plaque soit au moins lipschitzien, ce afin de pouvoir utiliser la formule de GREEN.

Remarque 2.3 *Nous précisons les notations suivantes par mesure de clarté :*

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_n v = \sum_{i=1}^{2} n_i \, \partial_i v \, , \quad \partial_l v = \sum_{i=1}^{2} l_i \, \partial_i v \, ,$$

$$\partial_{nl} v = \sum_{i,j=1}^{2} n_i \, l_j \, \partial_{ij} v \, , \quad \partial_l^2 v = \sum_{i,j=1}^{2} l_i \, l_j \, \partial_{ij} v \, .$$

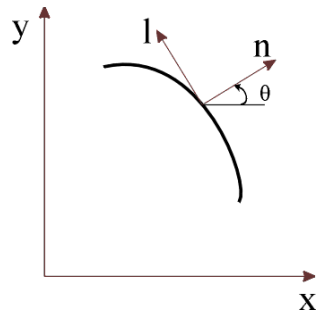

Fig. 4 – Coordonnées curvilignes.

Démonstration. Récrivons dans un premier temps (2.12) à l'aide d'une intégration par parties : le bord de la plaque étant $\mathscr{C}^1$ par morceaux nous pouvons utiliser la formule de Green qui transforme l'intégrale surfacique (sur P) en une intégrale de bord (sur ∂P). Nous obtenons donc pour tous η et η' suffisamment réguliers

$$\begin{aligned} \text{Epi}(\eta \, , \eta') \quad = \quad & \mathcal{D} \int_P \Delta^2 \eta \, \eta' \mathrm{dXdY} \\ & + \mathcal{D} \oint_{\partial P} (\Delta \eta \, \partial_n \eta' - \partial_n \Delta \eta \, \eta') \mathrm{d}s \\ & + (1-\nu) \mathcal{D} \int_P \left(2 \partial_{12} \eta \, \partial_{12} \eta' - \partial_1^2 \eta \, \partial_2^2 \eta' - \partial_2^2 \eta \, \partial_1^2 \eta' \right) \mathrm{dXdY} \, . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Nous allons récrire la dernière intégrale de (2.13) sur le bord de la plaque en introduisant les formules suivantes pour exprimer les dérivées par rapport à x et y en fonction des dérivées suivant la normale n au contour et sa tangente l

$$\begin{aligned} \partial_1 &= n_1 \, \partial_n - n_2 \, \partial_l \, , \\ \partial_2 &= n_2 \, \partial_n + n_1 \, \partial_l \, . \end{aligned}$$

Nous obtenons, après quelques manipulations, le résultat suivant

$$\begin{aligned}
&\int_P \left(2\,\partial_{12}^2\eta\,\partial_{12}^2\eta' - \partial_1^2\eta\,\partial_2^2\eta' - \partial_2^2\eta\,\partial_1^2\eta'\right)\mathrm{dXdY}\\
&= \int_P \left\{\partial_1\left[\partial_2\eta'\,\partial_{12}\eta - \partial_1\eta'\,\partial_2^2\eta\right] + \partial_2\left[\partial_1\eta'\,\partial_{12}\eta - \partial_2\eta'\,\partial_1^2\eta\right]\right\}\mathrm{dXdY}\\
&= \oint_{\partial P}\left[n_1\left(\partial_2\eta'\,\partial_{12}\eta - \partial_1\eta'\,\partial_2^2\eta\right) + n_2\left(\partial_1\eta'\,\partial_{12}\eta - \partial_2\eta'\,\partial_1^2\eta\right)\right]\mathrm{d}s\\
&= \oint_{\partial P}\partial_n\eta'\left[2\,n_1\,n_2\,\partial_{12}\eta - n_2^2\,\partial_1^2\eta - n_1^2\,\partial_2^2\eta\right]\mathrm{d}s\\
&\quad + \oint_{\partial P}\partial_l\eta'\left[n_1\,n_2\,(\partial_2^2\eta - \partial_1^2\eta) + (n_1^2 - n_2^2)\partial_{12}\eta\right]\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

Nous allons récrire la dernière intégrale. Il suffit pour cela d'effectuer une intégration par parties. Étant donnée qu'elle est prise sur un contour fermé, les limites d'intégration sont confondues. Et d'en déduire

$$\begin{aligned}
&\int_P \left(2\,\partial_{12}^2\eta\,\partial_{12}^2\eta' - \partial_1^2\eta\,\partial_2^2\eta' - \partial_2^2\eta\,\partial_1^2\eta'\right)\mathrm{dXdY}\\
&= \oint_{\partial P}\partial_n\eta'\left[2\,n_1\,n_2\,\partial_{12}\eta - n_2^2\,\partial_1^2\eta - n_1^2\,\partial_2^2\eta\right]\mathrm{d}s\\
&\quad + \oint_{\partial P}\eta'\,\partial_l\left[n_1\,n_2\,(\partial_2^2\eta - \partial_1^2\eta) + (n_1^2 - n_2^2)\partial_{12}^2\eta\right]\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

□

Cette première étape calculatoire aboutie, il ne nous reste plus qu'à faire une petite intégration par parties dans l'expression de Ec pour être récompensés de nos efforts.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ec}(\eta\,,\eta') &= \rho_P\,h\,\mathrm{d}_t^2\int_P\left[\eta\,\eta' + \frac{h^2}{12}\nabla\eta\,.\,\nabla\eta'\right]\mathrm{dXdY}\\
&= \rho_P\,h\,\mathrm{d}_t^2\int_P\left[\eta\,\eta' - \frac{h^2}{12}\Delta\eta\,\eta'\right]\mathrm{dXdY} + \frac{\rho_P\,h^3}{12}\,\mathrm{d}_t^2\oint_{\partial P}\partial_n\eta\,\eta'\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}\tag{2.14}$$

Il s'en suit alors au regard de la formulation variationnelle (2.10), des nouvelles expressions de l'énergie cinétique (2.14) et de l'énergie potentielle interne (2.13) que le déplacement vertical η de la plaque satisfait l'équation suivante

$$\rho_P\,h\,\partial_t^2\eta - \mathcal{K}\,\partial_t^2\Delta\eta + \mathcal{D}\Delta^2\eta = p \quad \text{sur} \quad P \tag{2.15}$$

où

$$\mathcal{K} := \frac{\rho_P h^3}{12}$$

avec les conditions aux bords suivantes

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}\left\{\partial_n\Delta\eta + (1-\nu)\partial_l\left[n_1\,n_2\,\left(\partial_2^2\eta - \partial_1^2\eta\right) + (n_1^2 - n_2^2)\partial_{12}^2\eta\right]\right\} - \mathcal{K}\partial_t^2\partial_n\eta = 0\,,\\
&\Delta\eta + (1-\nu)\left[2\,n_1\,n_2\,\partial_{12}^2\eta - n_2^2\,\partial_1^2\eta - n_1^2\,\partial_2^2\eta\right] = 0\,.
\end{aligned}$$

Nous choisissons maintenant d'utiliser les coordonnées locales (les cordonnées curvilignes) pour récrire les conditions aux bords. Nous allons montrer ainsi en particulier que la courbure du bord de la plaque

apparaît explicitement dans nos expressions[3]. Posons donc le changement de variables

$$\mathrm{x} := (x, y) \mapsto (r, s)$$

où r note la distance d'un point du bord ∂P à l'origine et s son abscisse curviligne alors

$$n = n(s) \quad \text{et} \quad l = l(s)\,.$$

De plus nous avons les relations de Frenet

$$\partial_s n = -\frac{1}{R(s)}\, l \quad \text{et} \quad \partial_s l = \frac{1}{R(s)}\, n\,,$$

où $R(s)$ note le rayon de courbure de ∂P à l'abscisse s. Rappelons que $\kappa := \frac{1}{R(s)}$ est la courbure. Nous obtenons alors

$$\partial_r = \partial_n \quad \text{et} \quad \partial_s = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \partial_l\,.$$

Ces nouvelles notations nous permettent, après moult manipulations, de récrire les conditions aux limites[4] :

$$\mathcal{D}\left\{\partial_n \Delta\eta + (1-\nu)\partial_s[\partial_n + \kappa]\partial_s\eta\right\} - \mathcal{K}\partial_t^2\partial_n\eta = 0 \quad \text{sur} \quad \partial P\,, \tag{2.16}$$

$$\nu\Delta\eta + (1-\nu)\partial_n^2\eta = 0 \quad \text{sur} \quad \partial P\,. \tag{2.17}$$

Nous nous rendons parfaitement compte du caractère indigeste de l'écriture des conditions aux limites, mais hélas...

Proposition 2.4 *Le déplacement vertical η de la plaque satisfait l'équation de mouvement*

$$\rho_P\, h\, \partial_t^2\eta - \mathcal{K}\,\partial_t^2\Delta\eta + \mathcal{D}\Delta^2\eta = p \quad \textit{sur} \quad P$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}\left\{\partial_n \Delta\eta + (1-\nu)\partial_s[\partial_n + \kappa]\partial_s\eta\right\} - \mathcal{K}\,\partial_t^2\partial_n\eta = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial P\,,\\
&\nu\Delta\eta + (1-\nu)\partial_n^2\eta = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial P\,.
\end{aligned}$$

Remarque 2.5 *Le fait que l'on ne voit apparaître que deux conditions naturelles sur le bord peut sembler paradoxal. En effet, intuitivement, on voudrait une équation pour chacune des conditions suivantes : les moments de torsion et de flexion, et la force de cisaillement transversale. Mais ceci est lié à notre modèle asymptotique qui néglige le cisaillement transversal.*

Finalement, la condition dynamique sous la plaque à l'ordre 1 qui se déduit de l'équation de Bernoulli (2.3) et de l'équation de la dynamique de la plaque (2.15) s'écrit

$$\frac{1}{\rho_F}\left(\rho_P\, h\, \partial_t^2\eta^{(1)} - \mathcal{K}\,\partial_t^2\Delta\eta^{(1)} + \mathcal{D}\Delta^2\eta^{(1)}\right) + g\,\eta^{(1)} + \partial_t\phi^{(1)} = 0 \quad \text{sur} \quad P. \tag{2.18}$$

[3] Ceci laisse songeur sur le rôle que doit jouer la régularité du bord de la plaque.

[4] Si le domaine est polygonal, nous obtenons les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}\left[\partial_n^3\eta + (2-\nu)\partial_n\partial_l^2\eta\right] - \mathcal{K}\,\partial_t^2\partial_n\eta = 0\,,\\
&\partial_n^2\eta + \nu\,\partial_l^2\eta = 0\,.
\end{aligned}$$

Adimensionnement des diverses quantités et bilan

Pour obtenir une formulation adimensionnée de nos équations, on décide de prendre les paramètres caractéristiques suivants

- ▷ Pour les longueurs : on choisit une longueur caractéristique L de la plaque (par exemple son diamètre).
- ▷ Pour les temps : on choisit $\sqrt{\frac{L}{g}}$.
- ▷ Pour les masses : on choisit $\rho_P L^3$.

On obtient alors les formulations adimensionnées suivantes de nos expressions en conservant les mêmes notations que précédemment pour les variables adimensionnées excepté l'exposant (1) devenu inutile

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\,, \tag{2.19}$$

$$\partial_t\eta - \partial_n\phi = 0 \quad \text{sur} \quad \tilde{F} := F \cup P\,, \tag{2.20}$$

$$\partial_t\phi + \eta = 0 \quad \text{sur} \quad F\,, \tag{2.21}$$

$$\partial_t\phi + \eta + \beta\Delta^2\eta + \gamma\partial_t^2\eta - \alpha\partial_t^2\Delta\eta = 0 \quad \text{sur} \quad P\,, \tag{2.22}$$

$$\beta\left\{\partial_n\Delta\eta + (1-\nu)\partial_s[\partial_n + \kappa]\partial_s\eta\right\} - \alpha\,\partial_t^2\partial_n\eta = 0 \quad \text{sur} \quad \partial P\,, \tag{2.23}$$

$$\nu\Delta\eta + (1-\nu)\partial_n^2\eta = 0 \quad \text{sur} \quad \partial P\,. \tag{2.24}$$

Notons que pour être complet, il faudrait rajouter à ces équations un jeu de conditions initiales portant sur η et $\partial_t\eta$. Les constantes α, β et γ sont définies par

$$\alpha := \frac{\rho_P h^3}{12\rho_F L^3}\,,\ \beta := \frac{\mathcal{D}}{\rho_F g L^4} \quad \text{et} \quad \gamma := \frac{\rho_P h}{\rho_F L}\,.$$

Nous décidons de choisir les coefficients β et γ de l'ordre de 1 : nous ne nous intéressons qu'aux situations où β et γ ne sont ni petits ni grands devant 1. En d'autres termes, nous optons pour une participation active au couplage de l'élasticité et de la masse de la plaque. Nous constatons alors que le coefficient $\alpha = \frac{1}{12}\gamma\left(\frac{h}{L}\right)^2$ est clairement toujours négligeable devant β, γ et 1. Nous le poserons désormais nul. De quoi simplifier les expressions (2.22) et (2.23).
Cette approximation (α négligeable) revient en fait à négliger l'énergie cinétique due à la rotation de chaque tronçon de la plaque

$$\rho_P\frac{h^3}{12}\,\mathrm{d}_t^2\int_P \nabla\eta\,.\,\nabla\eta'\,\mathrm{dX}\mathrm{dY}$$

devant celle due au déplacement vertical et à la déformation interne (2.12).

Dans la section suivante, nous allons montrer rigoureusement comment notre problème transitoire de tenue à la mer (2.19)–(2.24) peut se mettre sous la forme d'une seule équation posée sur la surface $\tilde{F}$: une équation des ondes abstraite, *i.e.* une équation du second ordre en temps.

3 Équation des ondes abstraite

Comment obtenir notre équation des ondes abstraite ? L'idée consiste à ramener notre problème en une seule équation posée sur la surface $\tilde{F} = F \cup P$. Pour cela, nous allons d'une part dériver la condition cinématique (2.20) et ne plus considérer le potentiel des vitesses ϕ, mais (l'opposé de) sa dérivée par rapport au temps φ : phase nécessaire si l'on veut une équation du second ordre en temps dans (2.20) qui pour ne rien cacher sera à la base de notre future équation des ondes abstraite. D'autre part nous

devrons introduire un opérateur $\mathbb{H}$ qui sera l'outil permettant de ne considérer qu'une équation posée sur la surface (les autres équations étant implicitement contenues dans la définition de $\mathbb{H}$).

Nous allons dans un premier temps introduire la notation suivante pour plus de lisibilité. Le déplacement vertical η de la surface sera décomposé comme suit :

$$\eta = (\eta_F\,, \eta_P) \quad \text{où} \quad \eta_F := \eta_{|F} \quad \text{et} \quad \eta_P := \eta_{|P}\,. \tag{2.25}$$

Notre problème transitoire se récrit alors en utilisant également la variable φ qui représente donc le potentiel des accélérations (en fait son opposé) : pour tout $t > 0$

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{2.26}$$

$$\partial_t^2\eta + \partial_n\varphi = 0 \quad \text{sur } \tilde{F}\,, \tag{2.27}$$

$$-\varphi + \eta_F = 0 \quad \text{sur } F\,, \tag{2.28}$$

$$-\varphi + \eta_P + \beta\Delta^2\eta_P + \gamma\partial_t^2\eta_P = 0 \quad \text{sur } P\,, \tag{2.29}$$

avec les conditions aux limites (2.23)–(2.24) et les conditions initiales

$$\eta(x,y,0) = \eta^0(x,y) \quad \text{et} \quad \partial_t\eta(x,y,0) = \eta^1(x,y)\,. \tag{2.30}$$

3.1 Approche intuitive

En regardant de plus près les équations (2.26)–(2.29), on constate sans mal que le potentiel des accélérations φ est entièrement déterminé par la donnée du déplacement η. Ce qui signifie qu'il existe un opérateur $\mathbb{H}$ que l'on nomme... que nous nommons abusivement relèvement harmonique reliant η à φ. Posons alors $\Psi := \mathbb{H}(\eta)$ solution du système

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{2.31}$$

$$\Psi = \eta_F \quad \text{sur } F\,, \tag{2.32}$$

$$\Psi + \gamma\partial_n\Psi = \eta_P + \beta\Delta^2\eta_P \quad \text{sur } P\,. \tag{2.33}$$

On constate d'une part (sans surprise) que

$$\varphi = \mathbb{H}(\eta)$$

et d'autre part que le problème transitoire se réduit à

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2\eta + \partial_n\mathbb{H}(\eta) = 0 \quad \text{sur } \tilde{F}\,,\ \forall t > 0\\
&\eta(0) = \eta^0 \quad \text{et} \quad \partial_t\eta(0) = \eta^1\\
&+ \text{conditions aux limites}
\end{aligned}$$

3.2 Approche rigoureuse

Nous allons désormais, mettre un terme à l'approche intuitive précédente et 'causer' mathématique. Cette phrase un peu pompeuse ne sous-tend rien d'effrayant, il s'agit essentiellement de donner un sens mathématique aux différents objets que nous allons devoir manipuler.
Notre objectif principal dans cette section est de montrer rigoureusement que l'opérateur $\mathbb{A}$ formellement défini par

$$\mathbb{A} := \partial_n\mathbb{H} \tag{2.34}$$

est un opérateur auto-adjoint défini positif de sorte que notre problème de tenue à la mer se récrit sous la forme abstraite

$$\partial_t^2 \eta + \mathbb{A}\eta = f$$

requise au chapitre 1. Et l'on verra que la fonction f n'est autre qu'une récriture des conditions initiales. Pour définir l'opérateur $\mathbb{A}$ nous allons bien évidemment au préalable devoir donner une définition digne de ce nom de l'opérateur de relèvement $\mathbb{H}$. Laquelle requiert d'avoir, au préalable, donné un sens à l'opérateur

$$\begin{aligned} &\mathbb{A}_P := \beta\Delta^2 + \mathbb{I}_P\,, \\ &+ \text{ conditions aux limites.} \end{aligned}$$

qui apparaît comme second membre dans l'équation (2.33) définissant la restriction de $\mathbb{H}$ à la plaque. Comment ? Cette question est certainement la première qui doit venir à l'esprit ou... presque. Comment allons-nous définir nos divers opérateurs ? Dans notre situation, la façon la plus commode pour définir $\mathbb{A}_P$, $\mathbb{H}$ puis $\mathbb{A}$ sera d'utiliser des formulations variationnelles (résultant d'une formulation faible des équations de la physique). Une formulation variationnelle accompagnée d'un résultat abstrait de relèvement (lemme 2.9) permettra de définir l'opérateur $\mathbb{H}$. Les opérateurs $\mathbb{A}_P$ et $\mathbb{A}$ seront quant à eux définis à partir de formes bilinéaires et du résultat suivant, dont une démonstration se trouve par exemple dans le livre de Birman et Solomjak [13], et qui permet de définir un opérateur auto-adjoint à partir d'une forme bilinéaire.

Lemme 2.6 *Soit $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ et $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ deux espaces de* Hilbert *tels que $\mathcal{V}$ s'injecte continûment dans $\mathcal{H}$*

$$\exists C > 0\,,\ \|u\|_{\mathcal{H}} \leq C\,\|u\|_{\mathcal{V}}\,,\ \forall u \in \mathcal{V}$$

et dense dans $\mathcal{H}$

$$\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{H}\,.$$

Soit $a(\cdot\,,\cdot)$ une forme sesquilinéaire hermitienne

$$a(u,v) = \overline{a(v,u)}\,,\ \forall u, v \in \mathcal{V}$$

continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$

$$\exists M > 0\,,\ |a(u,v)| \leq M\,\|u\|_{\mathcal{V}}\,\|v\|_{\mathcal{V}}\,,\ \forall u, v \in \mathcal{V}$$

et $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$–coercive

$$\exists \lambda > 0\,,\ \exists \alpha > 0\,,\ a(u,u) + \lambda\,\|u\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \alpha\,\|u\|_{\mathcal{V}}^2\,,\ \forall u \in \mathcal{V}\,.$$

Alors l'opérateur $\mathcal{A}$ défini par

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{H}} := a(u,v)\,,\ \forall u \in \mathscr{D}(\mathcal{A}) \ \text{ et } \ \forall v \in \mathscr{D}[a] := \mathcal{V} \\ &\mathscr{D}(\mathcal{A}) := \{u \in \mathcal{V}\,;\ \exists K > 0\,,\ \forall v \in \mathcal{V}\,,\ |a(u,v)| \leq K\,\|v\|_{\mathcal{H}}\} \end{aligned}$$

est un opérateur auto-adjoint de domaine dense dans $\mathcal{H}$

$$\overline{\mathscr{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}\,.$$

Briefing notations Pour ne pas que notre lecteur se perde parmi les diverses notations à venir, nous offrons un petit guide. Dans tout ce qui suit, nous aurons les correspondances suivantes :

$\mathscr{D}(\cdot)$	$\longleftrightarrow$	domaine d'un opérateur ;
$\mathscr{D}[\cdot]$	$\longleftrightarrow$	domaine d'une forme sesquilinéaire ;
$\mathcal{V}$	$\longleftrightarrow$	espace fonctionnel sur lequel nous définirons $\mathbb{H}$;
$\mathcal{H}$	$\longleftrightarrow$	espace fonctionnel sur lequel $\mathbb{A}$ nous apparaîtra auto-adjoint.

Définition de l'opérateur $\mathbb{A}_P$

Nous allons définir l'opérateur $\mathbb{A}_P$ à partir de la forme bilinéaire suivante à laquelle il sera associé, et qui intervient en partie dans la définition de l'énergie potentielle interne (2.13)

$$
\begin{aligned}
(2.35) \qquad a_P(\eta_P, \eta'_P) \quad &:= \int_P (\beta\, \Delta\eta_P\, \Delta\eta'_P + \eta_P\, \eta'_P)\, \mathrm{dXdY} \\
&\quad + \beta(1-\nu) \int_P \big(2\, \partial_{12}\eta_P\, \partial_{12}\eta'_P - \partial_1^2\eta_P\, \partial_2^2\eta'_P - \partial_2^2\eta_P\, \partial_1^2\eta'_P\big)\, \mathrm{dXdY} \\
&= \int_P (\beta\, \nu\, \Delta\eta_P\, \Delta\eta'_P + \eta_P\, \eta'_P)\, \mathrm{dXdY} \\
&\quad + \beta(1-\nu) \int_P \big(2\, \partial_{12}\eta_P\, \partial_{12}\eta'_P + \partial_1^2\eta_P\, \partial_1^2\eta'_P + \partial_2^2\eta_P\, \partial_2^2\eta'_P\big)\, \mathrm{dXdY}
\end{aligned}
$$

pour tous η_P et η'_P suffisamment réguliers. On constate alors d'une part (grâce aux calculs un peu techniques qui nous ont permis d'obtenir les conditions aux limites naturelles) que

$$
\begin{aligned}
&a_P(\eta_P, \eta'_P) = (\beta\, \Delta^2\eta_P\, , \eta'_P)_{0,P} + (\eta_P\, , \eta'_P)_{0,P} \\
&\text{pour tout } \eta_P \text{ satisfaisant les conditions aux limites}
\end{aligned}
$$

où $(\cdot\,,\cdot)_{0,P}$ désigne le produit scalaire dans l'espace de Hilbert $L^2(P)$; d'autre part on remarque que la forme $a_P(\cdot\,,\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique positive. La dernière affirmation (la positivité) étant triviale si l'on note que $0 < \nu < 1/2$. Elle est de plus, continue et définie positive sur

$$\mathscr{D}[a_P] := H^2(P)$$

car

$$|\cdot|_{2,P} + \|\cdot\|_{0,P}$$

est une norme équivalente à

$$\|\cdot\|_{2,P}$$

puisque P à la propriété de 2-prolongement : cette propriété traduit le fait que la plaque est de frontière assez régulière (à savoir un domaine à bord polyédrique ou $\mathscr{C}^1$ par morceaux par exemple) ; où $|\cdot|_{2,P}$ et $\|\cdot\|_{2,P}$ notent respectivement la semi-norme et la norme de $H^2(P)$, et $\|\cdot\|_{0,P}$ la norme de $L^2(P)$. Ceci est lié à des résultats de convexité dans l'espace de Sobolev H^2 (voir Dautray–Lions [23]). On sait alors

Proposition 2.7 *L'opérateur $\mathbb{A}_P$*[5] *défini par*

$$(\mathbb{A}_P\eta_P\, , \eta'_P)_{0,P} := a_P(\eta_P\, , \eta'_P)\, ,\ \forall \eta_P \in \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)\, ,\ \forall \eta'_P \in \mathscr{D}[a_P]$$

[5] Quelques précisions sur $D(\mathbb{A}_P)$. Décrire plus précisément le domaine de l'opérateur $\mathbb{A}_P$ n'est pas une mince affaire. Nous pouvons dans un premier temps déduire de la définition de $\mathbb{A}_P$ que

$$D(\mathbb{A}_P) = \big\{u \in H^2(P)\, ;\, \Delta^2 u \in L^2(P)\, ,\, + \text{ conditions aux limites}\big\}\ .$$

Nous pouvons même aller un peu plus loin en énonçant un résultat de *régularité locale* :

$$\text{comme } \Delta^2 u \in L^2(P), \text{ alors } u \in H^4_{\mathrm{loc}}(P)\, .$$

Ce résultat découle du théorème 1 pp. 1272, de Dautray-Lions [23].
Pour aller encore plus loin et énoncer un résultat de *régularité globale*, il nous faut prendre en compte les deux facteurs qui y jouent un rôle primordial. À savoir :
- la géométrie de l'ouvert P,
- les conditions aux limites.

Cette démarche bien que très intéressante (qui est au cœur du livre de Grisvard [33]), et nous comprenons la frustration du lecteur à ce stade, nous semble trop "vaste" vu notre objectif et le temps imparti pour sa réalisation. Aussi, nous nous contenterons ici de la régularité locale.

avec

$$\mathscr{D}(\mathbb{A}_P) := \{\eta_P \in \mathscr{D}[a_P]\,;\, \exists K > 0\,,\ \forall \eta'_P \in \mathscr{D}[a_P]\,,\ |a_P(\eta_P\,,\eta'_P)| \leq K\,\|\eta'_P\|_{0,P}\}\ ,$$

est un opérateur auto-adjoint non borné et défini positif sur $L^2(P)$.

Le cas particulier de la dimension 2 d'espace Dans le cadre de la dimension 2 d'espace, les résultats sont plus simples. En effet, la forme bilinéaire s'écrit

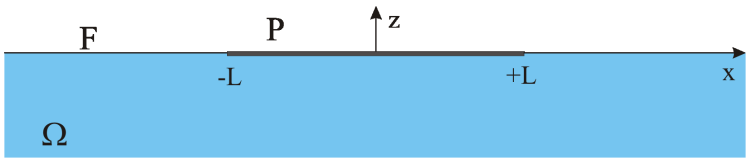

FIG. 5 – Problème 2D.

$$a_P(\eta_P, \eta'_P) = \int_P \left(\beta\,\partial_1^2\eta_P\ \partial_1^2\eta'_P + \eta_P\,\eta'_P\right)\mathrm{d}x$$

et on a

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}[a_P] = H^2(P)\,,\\
&\mathscr{D}(\mathbb{A}_P) = \left\{\eta_P \in H^4(P)\,;\, \partial_1^2\eta_P(\pm L) = 0 = \partial_1^3\eta_P(\pm L)\right\}\ .
\end{aligned}$$

Le "relèvement" harmonique $\mathbb{H}$

Nous allons utiliser une formulation variationnelle dans le domaine non borné Ω afin de préciser le cadre fonctionnel dans lequel nous aurons l'existence du relèvement. Ce cadre fonctionnel nous conduira notamment, comme le décrit le paragraphe suivant, à définir $\mathbb{A}$ comme un opérateur auto-adjoint non borné.
Usant de la formule de GREEN, l'équation (2.31) avec les conditions aux limites (2.32) et (2.33), on obtient

$$\int_\Omega \nabla\Psi \cdot \nabla\Psi' + \gamma^{-1}\int_P \Psi\,\Psi' = \gamma^{-1}\int_P \mathbb{A}_P\eta_P\,\Psi'$$

pour toute fonction Ψ' suffisamment régulière à support compact et s'annulant sur F. Le fait que le domaine Ω ne soit pas borné rend l'étude un peu délicate. En effet, dans ce cadre, nous devons fixer le comportement à l'infini des données et de la solution du problème définissant l'opérateur $\mathbb{H}$. Les travaux dus à HANOUZET [35] puis généralisés par AMROUCHE [5] nous fournissent un cadre fonctionnel approprié en considérant des espaces de SOBOLEV à poids.

LEMME 2.8 *Considérons l'espace de* SOBOLEV *à poids*

$$W^1(\Omega) := \left\{\Psi\,;\, \tau\Psi \in L^2(\Omega)\,,\ \nabla\Psi \in \left(L^2(\Omega)\right)^N\right\}$$

où N désigne la dimension de l'espace Ω ($N = 2$ ou 3) et

$$\tau := \left(1 + \|X\|^2\right)^{-1/2}\left(\ln(2 + \|X\|^2)\right)^{N-3}.$$

Nous savons alors que $\|\nabla\cdot\|_{0,\Omega}$ définie une norme sur $W^1(\Omega)$ équivalente à la norme du graphe lorsque $N = 3$. Par contre lorsque $N = 2$, l'espace $W^1(\Omega)$ contient les constantes et $\|\nabla\cdot\|_{0,\Omega}$ quotienter par les constantes cette fois-ci est une norme équivalente à la norme du graphe.

Nous obtenons également par l'article [5] de Amrouche, aussi bien en dimension 2 d'espace qu'en dimension 3 d'espace, le

Lemme 2.9 *Il existe un relèvement non nécessairement harmonique $\mathbb{H}_0$ de $W^{1/2}(\tilde{F})$, l'espace des traces de $W^1(\Omega)$, dans l'espace fonctionnel $W^1(\Omega)$ et l'on a la caractérisation suivante :*

$$W^{1/2}(\tilde{F}) \cap L^2(\tilde{F}) = H^{1/2}(\tilde{F})$$

où $H^{1/2}(\tilde{F})$ est la trace sur $\tilde{F}$ de l'espace de Sobolev *classique $H^1(\Omega)$.*

Il est alors facile de voir que le problème variationnel

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } \Psi \in W^1(\Omega) \ \text{ tel que } \ \Psi_{|F} = \eta_F \ \text{ et} \\
&\int_\Omega \nabla\Psi \,\boldsymbol{.}\, \nabla\Psi' + \gamma^{-1} \int_P \Psi\, \Psi' = \gamma^{-1} \int_P \mathbb{A}_P \eta_P\, \Psi' \\
&\forall \Psi' \in W^1(\Omega) \ \text{ avec } \ \Psi'_{|F} = 0
\end{aligned}$$

admet une solution unique dès que η_F est judicieusement choisi dans $H^{1/2}(F)$. En effet L'existence du relèvement harmonique $\mathbb{H}$ est alors une simple formalité en invoquant le théorème de Lax-Milgram. En conséquence,

Proposition 2.10 *$\mathbb{H}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{V} := H^{1/2}(F) \times \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)$ dans $W^1(\Omega)$.*

Définition de l'opérateur $\mathbb{A}$

Nous allons maintenant 'enfin' pouvoir donner un sens mathématique à l'opérateur $\mathbb{A}$. Tâche que nous accomplirons avec l'aide précieuse de la forme bilinéaire symétrique $a(\cdot\,,\cdot)$ définie par

$$a(\eta\,,\eta') := \int_\Omega \nabla\mathbb{H}(\eta) \,\boldsymbol{.}\, \nabla\mathbb{H}(\eta') + \gamma^{-1} \int_P (\mathbb{A}_P\eta_P - \mathbb{H}(\eta))(\mathbb{A}_P\eta'_P - \mathbb{H}(\eta')) \tag{2.36}$$

pour tout η et $\eta' \in D[a]$ où

$$\mathscr{D}[a] := \mathcal{V}\,.$$

Alors usant de la continuité de $\mathbb{H}$, on voit aisément que $a(\cdot\,,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ en plus d'être positive. Le choix de notre forme bilinéaire se justifie par la propriété suivante

Propriété 2.11 *Nous avons formellement l'égalité suivante*

$$a(\eta\,,\eta') = (\partial_n\mathbb{H}(\eta)\,,\eta')_{\mathcal{H}}$$

où $(\cdot\,,\cdot)_{\mathcal{H}} := (\cdot\,,\cdot)_{0,F} + a_P(\cdot\,,\cdot)$ note le produit scalaire dans l'espace de Hilbert *$\mathcal{H}$ défini par*

$$\mathcal{H} := \left\{\eta \in L^2(\tilde{F})\,;\, \eta_P \in \mathscr{D}[a_P]\right\}\,.$$

Démonstration. On obtient sans mal par les formules de Green les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
a(\eta\,,\eta') &= \int_F \partial_n\mathbb{H}(\eta)\,\eta'_F + \int_P \partial_n\mathbb{H}(\eta)\,\mathbb{H}(\eta') + \gamma^{-1}\int_P (\mathbb{A}_P\eta_P - \mathbb{H}(\eta))(\mathbb{A}_P\eta'_P - \mathbb{H}(\eta')) \\
&= \int_F \partial_n\mathbb{H}(\eta)\,\eta'_F + \int_P \gamma^{-1}(\mathbb{A}_P\eta_P - \mathbb{H}(\eta))\mathbb{H}(\eta') \\
&\quad + \gamma^{-1}\int_P (\mathbb{A}_P\eta_P - \mathbb{H}(\eta))(\mathbb{A}_P\eta'_P - \mathbb{H}(\eta')) \\
&= \int_F \partial_n\mathbb{H}(\eta)\,\eta'_F + \gamma^{-1}\int_P (\mathbb{A}_P\eta_P - \mathbb{H}(\eta))\mathbb{A}_P\eta'_P \\
&= \int_F \partial_n\mathbb{H}(\eta)\,\eta'_F + \int_P \partial_n\mathbb{H}(\eta)\mathbb{A}_P\eta'_P \\
&\overset{\text{Formellement}}{=} (\partial_n\mathbb{H}(\eta)\,,\eta'_F)_{0,F} + a_P(\partial_n\mathbb{H}(\eta)\,,\eta'_P) \\
&= (\partial_n\mathbb{H}(\eta)\,,\eta')_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned}$$

□

Nous définissons maintenant rigoureusement l'opérateur $\mathbb{A}$ à travers la forme bilinéaire a de la manière suivante

$$(\mathbb{A}\eta\,,\eta')_{\mathcal{H}} := a(\eta\,,\eta')\ ,\ \forall\eta\in\mathscr{D}(\mathbb{A})\,,\ \forall\eta'\in\mathscr{D}[a]$$

avec[6]

$$\mathscr{D}(\mathbb{A}) := \left\{\eta\in\mathcal{V}\,;\,\exists C>0\ \ \forall\eta'\in\mathcal{V}\,,\ |a(\eta\,,\eta')|\le C\,\|\eta'\|_{\mathcal{H}}\right\}.$$

On pourra alors en déduire que $\mathbb{A}$ est un opérateur auto-adjoint défini positif sur $\mathcal{H}$ à condition que la forme bilinéaire $a(\cdot\,,\cdot)$ soit une forme définie et fermée, *i.e.* $(\mathcal{V},\mathcal{H})$–coercive.

Proposition 2.12 *Pour tout λ positif, il existe m positif tel que*

$$a(\eta\,,\eta) + \lambda\,\underbrace{\|\eta\|^2_{\mathcal{H}}}_{\text{là}} \ge m\,\|\eta\|^2_{\mathscr{D}[a]}\quad\forall\eta\in\mathscr{D}[a]\,.$$

Démonstration. Nous choisissons en fait de montrer par l'absurde une propriété plus forte où la norme dans $\mathcal{H}$ là est remplacée par la norme dans $L^2(F)$ ici

$$\forall\lambda>0\,,\,\exists m>0\,,\ \forall\eta\in\mathscr{D}[a]\,,\ a(\eta\,,\eta) + \lambda\,\underbrace{\|\eta_F\|^2_{0,F}}_{\text{ici}} \ge m\,\|\eta\|^2_{\mathscr{D}[a]}\,.$$

Supposons donc que

$$\exists\lambda>0\,,\ \forall m>0\,,\,\exists\eta\in\mathscr{D}[a]\,,\ a_\lambda(\eta\,,\eta)\le m\,\|\eta\|^2_{\mathscr{D}[a]}$$

où

$$a_\lambda(\cdot\,,\cdot) := a(\cdot\,,\cdot) + \lambda\,\|\cdot\|^2_{0,F}\,.$$

[6] Donner une description précise du domaine de l'opérateur $\mathbb{A}$ est une tâche au moins aussi ardue que la description de $\mathscr{D}(\mathbb{A}_P)$. En clair nous n'irons pas plus loin et fort heureusement, nous n'en avons pas besoin pour mener à bien notre travail.

Posons $m_n := 1/n$. Nous choisissons η_n tel que $\|\eta_n\|_{\mathscr{D}[a]} = 1$. On note alors que $a_\lambda(\eta_n\,,\eta_n) \leq 1/n$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on déduit les implications suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ |\mathbb{H}\eta_n|_{1,\Omega} \overset{n}{\to} 0 \\ \Rightarrow \mathbb{H}\eta_{n\,|F} \overset{n}{\to} 0 \ \text{ dans } \ W^{1/2}(F) \\ \bullet\ \ \|\eta_{n\,F}\|_{0,F} \overset{n}{\to} 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \ \ \|\eta_{n\,F}\|_{1/2,F} \overset{n}{\to} 0$$

$$\bullet\ \ |\ \|\mathbb{A}_P\eta_{n\,P}\|_{0,P} - \|\mathbb{H}\eta_n\|_{0,P}\ | \leq \|\mathbb{A}_P\eta_{n\,P} - \mathbb{H}\eta_n\|^2_{0,P} \overset{n}{\to} 0$$

$$\bullet\ \ \mathbb{H}\eta_n \xrightarrow[W^1(\Omega)]{n} 0 \ \overset{P\ \text{borné}}{\Longrightarrow}\ \ \mathbb{H}\eta_{n|P} \xrightarrow[H^{1/2}(P)]{n} 0 \Rightarrow \mathbb{H}\eta_{n|P} \xrightarrow[L^2(P)]{n} 0$$

d'où $\mathbb{A}_P\eta_{n\,P} \xrightarrow[L^2(P)]{n} 0\,,$

où $|\cdot|_{1,\Omega}$ note la semi-norme dans $H^1(\Omega)$ et $\|\cdot\|_{1/2,F}$ note la norme dans $H^{1/2}(F)$. On aboutit alors au fait que $1 = \|\eta_n\|_{\mathscr{D}[a]} \overset{n}{\to} 0$ ce qui constitue bien évidemment une contradiction. □

Proposition 2.13 *$\mathbb{A}$ est un opérateur auto-adjoint non borné et défini positif sur $\mathcal{H}$.*

Le résultat principal de cette section est maintenant une directe conséquence des différents résultats que nous avons établis :

Théorème 2.14 *Le problème transitoire* (2.26)–(2.29) *avec les conditions aux limites* (2.23)–(2.24) *et les conditions initiales* (2.30)*, se ramène à l'écriture d'une équation des ondes abstraite posée sur la surface ayant pour seule inconnue le déplacement vertical de cette dernière :*

$$\left|\begin{array}{l} \partial_t^2\eta + \mathbb{A}\eta = 0 \quad \textit{sur } \tilde{F}\,,\ \forall t > 0\,, \\ \eta(0) = \eta^0 \ \ \textit{et} \ \ \partial_t\eta(0) = \eta^1\,. \end{array}\right. \tag{2.37}$$

Nous allons maintenant, afin de rentrer complètement dans le cadre abstrait de l'application de la méthode de décomposition en modes résonants, introduire la notion de fonction causale. Laquelle consiste simplement à considérer $\eta(t)$ comme une fonction non plus seulement définie pour $t \geq 0$, mais pour $t \in \mathbb{R}$ en posant que

$$\eta(t) = 0 \ \text{ si } \ t < 0\,.$$

L'intérêt de cette notion est de nous permettre de récrire (2.37) sous la forme d'une seule équation, à condition de considérer η comme une distribution en temps à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et donc d'interpréter les dérivées en temps au sens des distributions :

$$\partial_t^2\eta + \mathbb{A}\eta = f \quad \text{sur } \tilde{F}\,,\ \forall t \in \mathbb{R}\,, \tag{2.38}$$

$$\text{où} \ \ f(x,y,t) := \eta^0(x,y) \otimes \delta(t) + \eta^1(x,y) \otimes \mathrm{d}_t\delta(t)\,, \tag{2.39}$$

où δ note la mesure de Dirac en $t = 0$ et $\otimes$ le produit tensoriel de distributions spatiales et temporelles.

Nous sommes désormais en mesure d'appliquer la méthode de décomposition en modes résonants à notre problème de tenue à la mer. Cette lourde tâche sera l'objet des chapitres suivants.

Chapitre 3

Application : le prolongement méromorphe

Nous nous proposons dans ce chapitre d'appliquer la méthode de décomposition en modes résonants à notre problème transitoire de tenue à la mer d'une plaque élastique mince. Cette méthode, qui peut être vue comme une extension asymptotique de la méthode de la transformation de Laplace, va consister, comme nous l'avons évoqué au chapitre 1, à calculer non pas directement les mouvements de la surface mais plutôt un comportement asymptotique en temps obtenu en approchant la "composante diffractée" par une superposition discrète de mouvements oscillants exponentiellement amortis. Ces derniers sont appelés les *modes résonants* du système et sont associés chacun à une *fréquence de résonance*. L'application de cette méthode repose de manière cruciale sur la construction du prolongement méromorphe de la résolvante de notre problème de diffraction.

1 Le procédé d'application

L'approche que nous avons retenue pour l'application de notre méthode de décomposition en modes résonants à notre problème de tenue à la mer consiste dans un premier temps à considérer notre problème physique comme une perturbation du même problème posé en milieu homogène, c'est-à-dire sans la plaque. En d'autres termes, nous adoptons une démarche perturbative. L'étape suivante consiste à appliquer notre méthode sur la partie diffractée, c'est-à-dire la différence entre le problème physique considéré, hétérogène, et le problème homogène.

Comment allons-nous nous y prendre ? La première étape réside dans la considération d'un problème homogène que nous nommerons "libre". Nous verrons à la section 2 le problème libre que nous avons à disposition et qui traduit simplement "l'oubli" de la plaque. Nous établirons une formule de représentation intégrale de la résolvante du problème libre à l'aide d'une famille d'ondes planes. Cette technique sera par ailleurs reprise en détail sous l'intitulé *méthode de développement en fonctions propres généralisées* dans la seconde partie du mémoire. Cette formule de représentation intégrale jouera un rôle essentiel tout au long de ce chapitre, notamment dans le prolongement méromorphe de la résolvante du problème diffracté.

La seconde étape réside dans l'établissement à la section 3 des équations du problème diffracté et au prolongement méromorphe. Ce prolongement ne se fera pas sans peine. Nous établirons dans un premier temps une formulation de notre problème diffracté posée en domaine borné dont nous déduirons une formulation variationnelle. Puis le prolongement méromorphe de la solution de notre problème diffracté résultera de l'application au paragraphe 3.3 du théorème de Steinberg [61] qui traite du caractère méromorphe des inverses d'une famille d'opérateurs, perturbations analytiques compactes

d'un isomorphisme. Le caractère analytique découlera de la dépendance analytique du noyau de la représentation intégrale de la résolvante du problème libre. Le caractère compact sera une conséquence de l'écriture variationnelle sur un domaine borné.
La dernière étape constitue à la section 4 une phase de bilan. Ayant établi le prolongement méromorphe, nous pourrons dans cette troisième étape appliquer la méthode de décomposition en modes résonants.

2 Étude du problème libre

Nous obtenons les équations de notre problème libre en considérant les équations du problème transitoire initial (2.26)–(2.30), la plaque en moins (β et γ étant nulles) : $\forall t > 0$

$$\Delta\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\,, \tag{3.1}$$

$$\partial_t^2\tilde{\varphi} + \partial_n\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{sur} \quad \tilde{F}\,, \tag{3.2}$$

$$\tilde{\varphi} - \tilde{\eta} = 0 \quad \text{sur} \ \tilde{F}\,, \tag{3.3}$$

où $\tilde{\varphi}$ représente le potentiel des accélérations et $\tilde{\eta}$ le déplacement vertical de la surface libre avec les mêmes conditions initiales que le problème initial

$$\tilde{\eta}(0) = \eta^0 \quad \text{et} \quad \partial_t\tilde{\eta}(0) = \eta^1\,. \tag{3.4}$$

Rappelons que $\tilde{F} = F \cup P$. Dans toute la suite, la notation '$\tilde{}$' fera toujours référence au problème libre. Bien entendu, le problème (3.1)–(3.4) admet aussi une écriture analogue à (2.38)

$$\partial_t^2\tilde{\eta} + \tilde{\mathbb{A}}\tilde{\eta} = f\,, \ \forall t \in \mathbb{R}\,, \tag{3.5}$$

où $\tilde{\mathbb{A}} := \partial_n\tilde{\mathbb{H}}$ est un opérateur auto-adjoint défini positif ($\mathrm{Spec}(\tilde{\mathbb{A}}) = \mathbb{R}^+$) sur $L^2(\tilde{F})$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\mathbb{H}}(\tilde{\eta})$ et $\tilde{\mathbb{H}}$ représente le relèvement harmonique de $\tilde{F}$ dans Ω défini par

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\mathbb{H}} : H^{1/2}(\tilde{F}) & \to & W^1(\Omega) \\ \tilde{v} & \mapsto & \tilde{\mathbb{H}}(\tilde{v}) \end{array}$$

et

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\tilde{\mathbb{H}}(\tilde{v}) = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \\ \tilde{\mathbb{H}}(\tilde{v}) = \tilde{v} \quad \text{sur } \tilde{F}\,. \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Nous rappelons que $W^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev à poids (localement équivalent à $H^1(\Omega)$) défini au lemme 2.8. Enfin f est définie en (2.39).

Nous allons maintenant voir au paragraphe 2.1 que l'on peut obtenir une représentation spectrale explicite de l'opérateur $\tilde{\mathbb{A}}$, *i.e.* une forme diagonale, à partir de laquelle nous établirons au paragraphe 2.2 la représentation intégrale de la résolvante $\tilde{R}(\zeta) := (\tilde{\mathbb{A}} - \zeta\mathbb{I})^{-1}$ du problème libre définie pour tout ζ n'appartenant pas au spectre de $\tilde{\mathbb{A}}$, *i.e.* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

2.1 Représentation spectrale de l'opérateur $\tilde{\mathbb{A}}$

Nous allons dans la suite de l'exposé considérer exclusivement le problème tridimensionnel, c'est-à-dire le cas où $\tilde{F} = \mathbb{R}^2$. Le cas bidimensionnel, $\tilde{F} = \mathbb{R}$, est traité dans la seconde partie du mémoire. Toutefois nous énoncerons quand même sans les montrer les résultats dans ce dernier cas.

Considérons la transformée de Fourier horizontale $\mathscr{F}$ définie par

$$v \mapsto (\mathscr{F}v)(\xi) := \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{F}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{X}\cdot\xi}\, v(\mathrm{X})\,\mathrm{d}\mathrm{X}\,, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^2$$

qui apparaît comme une transformation unitaire de $L^2(\tilde{F})$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_\xi)$.
Soit $\tilde{\Psi} := \tilde{\mathbb{H}}(\tilde{v})$ le relèvement harmonique d'une fonction $\tilde{v} \in H^{1/2}(\tilde{F})$. Nous notons $\check{\Psi}(\xi, x_3)$ la transformée de Fourier horizontale, $(\mathscr{F}\tilde{\Psi})(\xi)$, de $\tilde{\Psi}$. D'après le système d'équations (3.6) définissant le relèvement harmonique $\tilde{\mathbb{H}}$, nous avons

$$\left| \begin{array}{l} \partial^2_{x_3}\check{\Psi}(\xi, x_3) - \|\xi\|^2\check{\Psi}(\xi, x_3) = 0 \quad \text{pour} \quad x_3 < 0 \\ \\ \check{\Psi}(\xi, 0) = (\mathscr{F}\tilde{v})(\xi)\,. \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Nous obtenons alors immédiatement du système (3.7) l'égalité suivante

$$(\mathscr{F}\tilde{\mathbb{H}}\tilde{v})(\xi) = \check{\Psi}(\xi, x_3) = (\mathscr{F}\tilde{v})(\xi)\exp(\|\xi\|x_3) \tag{3.8}$$

(la fonction $\check{\Psi}$ ne pouvant être exponentiellement croissante quand x_3 tend vers $-\infty$ puisque $\tilde{\Psi}$ appartient à $W^1(\Omega)$). Nous déduisons de l'expression (3.8) la relation

$$\tilde{\mathbb{H}}(\tilde{v})(\mathrm{x}) = \Big[\mathscr{F}^*\exp(\|\xi\|x_3)\,\mathscr{F}\tilde{v}(\xi)\Big](\mathrm{x})\,.$$

Il s'en suit que

$$\tilde{\mathbb{A}} = \partial_{x_3}\tilde{\mathbb{H}}_{|\tilde{F}} = \mathscr{F}^*\|\xi\|\mathscr{F}\,. \tag{3.9}$$

Pour obtenir la forme diagonale de l'opérateur $\tilde{\mathbb{A}}$, il nous suffit d'introduire un changement de variable en coordonnées polaires dans le plan Fourier. Pour cela, considérons le couple $(\lambda, k) \in \mathbb{R}^+ \times S^1$, où S^1 note le cercle unité, associé au point $\xi \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\xi = \lambda k \quad \text{où} \quad \lambda := \|\xi\|\,.$$

Nous avons alors l'égalité suivante

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\mathscr{F}\tilde{v}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^+\times S^1} |\sqrt{\lambda}\mathscr{F}\tilde{v}(\lambda, k)|^2\,\mathrm{d}\sigma_k\mathrm{d}\lambda$$

qui traduit en particulier le fait que

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{T} : L^2(\mathbb{R}^2_\xi) & \to & L^2(\mathbb{R}^+ \times S^1) := \left\{ v_{\lambda,k}\,;\, \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+\times S^1} |v_{\lambda,k}|^2\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\sigma_k < +\infty \right\} \\ (\mathscr{F}\tilde{v})(\xi) & \mapsto & \sqrt{\lambda}(\mathscr{F}\tilde{v})(\lambda k) \end{array}$$

est un opérateur unitaire. Par conséquent,

Proposition 3.1 *La relation* (3.9) *est équivalente à*

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{\mathbb{A}} = (\mathscr{F}^*\mathscr{T}^*)\,(\mathscr{T}\|\xi\|\mathscr{T}^*)\,(\mathscr{T}\mathscr{F}) = \tilde{\mathscr{U}}^*\lambda\tilde{\mathscr{U}} \\ \\ \textit{où} \quad \tilde{\mathscr{U}} := \mathscr{T}\mathscr{F}\,. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Dans l'expression (3.10) *nous notons abusivement λ l'opérateur de multiplication par le scalaire λ. L'opérateur $\tilde{\mathscr{U}}$ défini de $L^2(\tilde{F})$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^+ \times S^1)$, en tant que produit de composition d'opérateurs unitaires, est un opérateur unitaire qui diagonalise l'opérateur $\tilde{\mathbb{A}}$ au sens de l'expression* (3.10).

Notons également que la relation (3.10) nous ouvre également la voie du calcul fonctionnel de $\tilde{\mathbb{A}}$.

Définition 3.2 *Pour toute fonction $S : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ bornée, nous définissons $S(\tilde{\mathbb{A}})$ par la relation*

$$S(\tilde{\mathbb{A}}) := \tilde{\mathscr{U}}^* S(\lambda) \tilde{\mathscr{U}} \,. \tag{3.11}$$

La transformation $\tilde{\mathscr{U}}$ peut s'interpréter comme la 'projection' sur la famille des ondes planes

$$\tilde{w}_{\lambda,k}(\mathrm{X}) := \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \exp(\mathrm{i}\lambda k \,.\, \mathrm{X}) \,.$$

En effet,

$$\tilde{\mathscr{U}} \tilde{v}(\lambda, k) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda k . \mathrm{X}} \, \tilde{v}(\mathrm{X}) \, \mathrm{dX}$$

peut se récrire

$$\tilde{\mathscr{U}} \tilde{v}(\lambda, k) = \langle \tilde{v} \,, \tilde{w}_{\lambda,k} \rangle \tag{3.12}$$

où le crochet $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$ note une extension du produit scalaire de $L^2(\tilde{F})$.
Les fonctions $\tilde{w}_{\lambda,k}$ étant essentiellement bornées en espace, elles n'appartiennent pas à $L^2(\tilde{F})$. Une conséquence immédiate de cette remarque est que les fonctions $\tilde{v}$ doivent être suffisamment décroissantes à l'infini pour justifier l'écriture (3.12). Pour être plus précis, nous allons considérer un espace fonctionnel de type L^2 mais à poids qui contiendra les constantes. Nous choisissons finalement de plonger les fonctions $\tilde{w}_{\lambda,k}$ dans l'espace à poids $L^2_{-s}(\tilde{F})$ avec $s > 1$ et

$$L^p_s(\tilde{F}) := \left\{ v \,;\, (1 + \|\mathrm{Y}\|^2)^s \, |v|^p(\mathrm{Y}) \in L^1(\tilde{F}) \right\} \,, \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \,.$$

À ce stade, nous pouvons voir le crochet $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$ comme le produit de dualité entre $L^2_{-s}(\tilde{F})$ (espace contenant les ondes planes) et $L^2_s(\tilde{F})$ (espace contenant les fonctions $\tilde{v}$ "suffisamment décroissantes") en identifiant $L^2(\tilde{F})$ à son dual dans le schéma

$$L^2_s(\tilde{F}) \subset L^2(\tilde{F}) \subset L^2_{-s}(\tilde{F}) \,.$$

Propriété 3.3 *La transformation $\tilde{\mathscr{U}}$ peut s'interpréter comme un opérateur de projection sur la famille des ondes planes $\{\tilde{w}_{\lambda,k}\}_{\lambda,k}$:*

$$\tilde{\mathscr{U}} \tilde{v}(\lambda, k) = \langle \tilde{v} \,, \tilde{w}_{\lambda,k} \rangle \quad \forall \tilde{v} \in L^2_s(\tilde{F}) \,, \; s > 1$$

où $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $L^2_s(\tilde{F})$ et $L^2_{-s}(\tilde{F})$.

La définition de $\tilde{\mathscr{U}}$ sur tout l'espace $L^2(\tilde{F})$ découle alors de la densité de $L^2_s(\tilde{F})$ dans $L^2(\tilde{F})$.

Remarque 3.4 *Si l'on considère le problème bidimensionnel, alors $\tilde{F}$ est égale à $\mathbb{R}$, k appartient à l'ensemble $\{\pm 1\}$, les fonctions $\tilde{w}_{\lambda,k}(x)$ sont égales à $\exp(\mathrm{i}\lambda k x)/\sqrt{2\pi}$ et le paramètre s est strictement supérieur à $1/2$.*

2.2 Représentation intégrale de la résolvante $\tilde{R}$

Considérons la fonction $S(\lambda) = 1/(\lambda - \zeta)$, alors $S(\tilde{\mathbb{A}}) = \tilde{R}(\zeta)$ et la relation (3.11) nous donne pour tous $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ dans $L^2_s(\tilde{F})$

$$\begin{aligned}
(\tilde{R}(\zeta)\tilde{u}\,,\tilde{v})_{L^2(\tilde{F})} = (S(\lambda)\tilde{\mathscr{U}}\tilde{u}\,,\tilde{\mathscr{U}}\tilde{v})_{L^2(\mathbb{R}^+\times S^1)} &= \int_{\mathbb{R}^+\times S^1} \frac{1}{\lambda-\zeta}\,\langle \tilde{u}, \tilde{w}_{\lambda,k}\rangle\,\overline{\langle \tilde{v}, \tilde{w}_{\lambda,k}\rangle}\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\sigma_k \\
&= \int_{\mathbb{R}^+\times S^1} \frac{1}{\lambda-\zeta}\,\langle\langle \overline{\tilde{w}_{\lambda,k}} \otimes \tilde{w}_{\lambda,k}\,, \overline{\tilde{u}} \otimes \tilde{v}\rangle\rangle\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\sigma_k \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\lambda-\zeta}\,\langle\langle \int_{S^1} \overline{\tilde{w}_{\lambda,k}} \otimes \tilde{w}_{\lambda,k}\mathrm{d}\sigma_k\,, \overline{\tilde{u}} \otimes \tilde{v}\rangle\rangle\,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

où le double produit de dualité est défini par

$$\langle\langle u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2\rangle\rangle := \langle u_1, v_1\rangle\,\langle u_2, v_2\rangle \quad \forall u_1, u_2 \in L^2_{-s}(\tilde{F}) \;\text{ et }\; \forall v_1, v_2 \in L^2_s(\tilde{F})\,.$$

La permutation du double produit de dualité et de l'intégrale sur le sous-ensemble compact S^1 de $\mathbb{R}^2$ est une simple application du théorème de Fubini à l'intégrand $\overline{\tilde{w}_{\lambda,k}}\,\tilde{w}_{\lambda,k}\,\tilde{u}\,\overline{\tilde{v}}$:

$$\underbrace{\underbrace{\overbrace{\underbrace{\overline{\tilde{w}_{\lambda,k}}(\mathrm{X})}_{\in L^2_{-s}(\tilde{F}_\mathrm{X})}\quad \underbrace{\tilde{u}(\mathrm{X})}_{\in L^2_s(\tilde{F}_\mathrm{X})}}^{\text{bornée en } k}}_{\in L^1(\tilde{F}_\mathrm{X})}\quad \overbrace{\underbrace{\tilde{w}_{\lambda,k}(\mathrm{Y})\,\overline{\tilde{v}}(\mathrm{Y})}_{\in L^1(\tilde{F}_\mathrm{Y})}}^{\text{bornée en } k}}_{\in L^1(S^1\times\tilde{F}_\mathrm{X}\times\tilde{F}_\mathrm{Y})}$$

Propriété 3.5 *La permutation de l'intégrale sur S^1 et du double produit de dualité nous fournit l'expression suivante*

$$(\tilde{R}(\zeta)\tilde{u}\,,\tilde{v})_{L^2(\tilde{F})} = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\lambda-\zeta}\,\langle\langle \phi_\lambda\,, \overline{\tilde{u}} \otimes \tilde{v}\rangle\rangle\,\mathrm{d}\lambda \tag{3.13}$$

avec $\phi_\lambda = \lambda J_0(r\lambda)/2\pi$ où $r := \|\mathrm{X} - \mathrm{Y}\|$ et où J_0 note la fonction de Bessel *de première espèce et d'indice zéro (voir* Abramowitz *et* Stegun *[3]).*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\phi_\lambda(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &:= \int_{k\in S^1} \overline{\tilde{w}_{\lambda,k}}(\mathrm{Y})\,\tilde{w}_{\lambda,k}(\mathrm{X})\,\mathrm{d}k \\
&= \int_{k\in S^1} \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda k\cdot(\mathrm{X}-\mathrm{Y})}\,\lambda\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{\lambda}{2\pi}\,\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\lambda r\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta}_{=J_0(r\lambda)}\,.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.6 *Si l'on considère le problème bidimensionnel, $\phi_\lambda = \cos(r\lambda)/\pi$.*

Si nous permutons maintenant l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ avec le double produit de dualité dans la représentation spectrale (3.13), nous obtenons formellement

$$(\tilde{R}(\zeta)\tilde{u}\,,\tilde{v})_{L^2(\tilde{F})} = \langle\langle G_\zeta\,,\overline{\tilde{u}}\otimes\tilde{v}\rangle\rangle \quad \text{où} \quad G_\zeta := \mathrm{VP}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\phi_\lambda}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda\,. \tag{3.14}$$

L'intégrand $\phi_\lambda/(\lambda-\zeta)$ n'étant pas une fonction de $L^1(\mathbb{R}^+_\lambda)$ nous ne pouvons parler de son intégrale qu'en un sens faible (par le critère d'Abel). Nous la définissons donc à l'aide d'une valeur principale :

$$\mathrm{VP}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\phi_\lambda}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{\Lambda\to+\infty}\int_0^\Lambda\frac{\phi_\lambda}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

La relation (3.14) n'est ni plus ni moins que la représentation intégrale de la résolvante $\tilde{R}(\zeta)$ de $\tilde{\mathbb{A}}$ dont le noyau G_ζ a été exprimé au moyen des fonctions $\tilde{w}_{\lambda,k}$. Cependant, cette dernière permutation d'intégrales requiert quelques justifications.
Tout d'abord remarquons, par une utilisation sans difficulté du théorème de Fubini, que

Propriété 3.7 *Pour tous $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ appartenant à $L^2_s(\mathbb{R}^2)$:*

$$\int_{\mathbb{R}^+}\langle\langle\Phi_\lambda\,,\overline{\tilde{u}}\otimes\tilde{v}\rangle\rangle\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{\Lambda\to+\infty}\langle\langle G^\Lambda_\zeta\,,\overline{\tilde{u}}\otimes\tilde{v}\rangle\rangle$$

où

$$\Phi_\lambda := \frac{\phi_\lambda}{\lambda-\zeta} \quad \textit{et} \quad G^\Lambda_\zeta := \int_0^\Lambda\Phi_\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

La difficulté maintenant est de pouvoir justifier le passage à la limite à l'intérieur du double produit de dualité.

Proposition 3.8 *Soit $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ appartenant à $L^2_s(\mathbb{R}^2)$. Pour toute fonction F vérifiant*

$$[\![F(\mathrm{X},\cdot)]\!] < +\infty \quad \textit{et} \quad [\![F(\cdot,\mathrm{Y})]\!] < +\infty$$

avec

$$[\![F(\mathrm{X},\cdot)]\!] := \sup_{\mathrm{X}\in\mathbb{R}^2}\|F(\mathrm{X},\cdot)\|_{L^1_{-s}(\mathbb{R}^2)}\,,$$

nous avons l'inégalité suivante

$$\big|\langle\langle F\,,\overline{\tilde{u}}\otimes\tilde{v}\rangle\rangle\big| \le [\![F(\mathrm{X},\cdot)]\!]\,[\![F(\cdot,\mathrm{Y})]\!]\,\|\tilde{u}\|_{L^2_s(\mathbb{R}^2)}\,\|\tilde{v}\|_{L^2_s(\mathbb{R}^2)}\,. \tag{3.15}$$

Démonstration. Posons $\tau_s(\mathrm{X}) = (1 + \|\mathrm{X}\|^2)^s$.

$$\begin{aligned}
\big|\langle\langle F\,, \overline{\tilde{u}} \otimes \tilde{v}\rangle\rangle\big| &\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} |F(\mathrm{X},\mathrm{Y})|\,|\tilde{u}(\mathrm{X})|\,|\tilde{v}(\mathrm{Y})|\,\mathrm{d}\mathrm{X}\mathrm{d}\mathrm{Y} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{v}(\mathrm{Y})| \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|F(\mathrm{X},\mathrm{Y})|^{1/2}}{\tau_s(\mathrm{X})^{1/2}} |\tilde{u}(\mathrm{X})|\,\tau_s(\mathrm{X})^{1/2}\,|F(\mathrm{X},\mathrm{Y})|^{1/2}\,\mathrm{d}\mathrm{X}\right] \mathrm{d}\mathrm{Y} \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{v}(\mathrm{Y})| \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|F(\mathrm{X},\mathrm{Y})|}{\tau_s(\mathrm{X})}\,\mathrm{d}\mathrm{X}\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(\mathrm{X})|^2\,\tau_s(\mathrm{X})\,|F(\mathrm{X},\mathrm{Y})|\,\mathrm{d}\mathrm{X}\right)^{1/2} \mathrm{d}\mathrm{Y} \\
&\leq \sup_{\mathrm{Y}\in\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|F(\mathrm{X},\mathrm{Y})|}{\tau_s(\mathrm{X})}\,\mathrm{d}\mathrm{X}\right)^{1/2} \\
&\qquad \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{v}(\mathrm{Y})| \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(\mathrm{X})|^2\,\tau_s(\mathrm{X})\,|F(\mathrm{X},\mathrm{Y})|\,\mathrm{d}\mathrm{X}\right)^{1/2} \mathrm{d}\mathrm{Y} \\
&\underset{\text{et Fubini}}{\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}} [\![F(\mathrm{X},\cdot)]\!]\,[\![F(\cdot,\mathrm{Y})]\!]\,\|\tilde{u}\|_{L^2_s(\tilde{F})}\,\|\tilde{v}\|_{L^2_s(\tilde{F})}
\end{aligned}$$

□

La proposition 3.8 nous indique clairement la voie à suivre. En effet, si nous montrons que

$$\lim_{\Lambda\to+\infty} [\![(G^\Lambda_\zeta - G_\zeta)(\mathrm{X},\cdot)]\!] = 0\,,$$

alors nous obtiendrons par la même occasion que

$$\lim_{\Lambda\to+\infty} \langle\langle G^\Lambda_\zeta - G_\zeta\,, \overline{\tilde{u}} \otimes \tilde{v}\rangle\rangle = 0\,.$$

Une conséquence directe de ce dernier résultat est la validité de la formule de représentation intégrale (3.14).

Remarque 3.9 *Notons qu'il va de soi que* $[\![G^\Lambda_\zeta]\!]$ *est finie et donc que* $F = G^\Lambda_\zeta$ *vérifie l'inégalité* (3.15). *De plus, si nous montrons que* $[\![G^\Lambda_\zeta - G_\zeta]\!]$ *tend vers* 0 *quand* Λ *tend vers* $+\infty$, *nous montrerons par la même occasion que* $[\![G_\zeta]\!]$ *est finie et que* $F = G_\zeta$ *vérifie également l'inégalité* (3.15).

Proposition 3.10 $(G^\Lambda)_\Lambda$ *est une famille de fonctions qui tend vers* G *au sens où*

$$\lim_{\Lambda\to+\infty} [\![(G^\Lambda - G)(\mathrm{X},\cdot)]\!] = 0\,.$$

Démonstration. Tout d'abord, rappelons que

$$(G^\Lambda - G)(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \int_\Lambda^{+\infty} \Phi_\lambda(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Nous aimerions, de l'expression précédente, écrire

$$[\![(G^\Lambda - G)(\mathrm{X},\cdot)]\!] \leq \int_\Lambda^{+\infty} [\![\Phi_\lambda(\mathrm{X},\cdot)]\!]\,\mathrm{d}\lambda$$

puis montrer que

$$[\![\Phi_\lambda(\mathrm{X},\cdot)]\!] \leq \frac{C}{\lambda^{\alpha+1}} \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \to +\infty$$

pour en déduire que

$$\int_{\Lambda}^{+\infty} [\![\Phi_\lambda(\mathrm{X},\cdot)]\!]\,\mathrm{d}\lambda \leq \frac{C}{\Lambda^\alpha} \to 0 \quad \text{quand} \quad \Lambda \to +\infty\,.$$

C'est un plan séduisant, mais qu'il faut abandonner car la fonction Φ_λ n'est pas intégrable (elle n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}^+_\lambda)$). Il faut donc revenir à la définition de Φ_λ et travailler un peu, tout en gardant en tête le schéma de démonstration précédent.
Nous rappelons donc que

$$\Phi_\lambda(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \frac{\phi_\lambda(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\lambda-\zeta} = \frac{\lambda J_0(r\lambda)}{2\pi(\lambda-\zeta)} \quad \text{où} \quad r = \|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|$$

avec (voir [3])

$$J_0(s) = \left(\frac{2}{\pi\, s}\right)^{1/2} \cos(s-\pi/4) + K(s) \quad \text{avec} \quad |K(s)| \leq \frac{C}{s^{3/2}} \quad \text{quand } s \to +\infty\,.$$

Nous obtenons alors d'une part que

$$\frac{\lambda J_0(r\lambda)}{\lambda-\zeta} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\lambda\,\cos(r\lambda-\pi/4)}{(r\lambda)^{1/2}(\lambda-\zeta)} + \frac{\lambda\, K(r\lambda)}{\lambda-\zeta}$$

et d'autre part que

$$(G^\Lambda - G)(\mathrm{X},\cdot) = \frac{1}{2\pi}\int_\Lambda^{+\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\lambda\,\cos(r\lambda-\pi/4)}{(r\lambda)^{1/2}(\lambda-\zeta)}}_{⓪} + \underbrace{\frac{\lambda\, K(r\lambda)}{\lambda-\zeta}}_{①} \right) \mathrm{d}\lambda\,.$$

L'intégrand ⓪ n'étant toujours pas intégrable, nous allons procéder à une intégration par parties afin de considérer un intégrand plus décroissant :

$$\int_\Lambda^{+\infty} \frac{\lambda\,\cos(r\lambda-\pi/4)}{(r\lambda)^{1/2}(\lambda-\zeta)}\,\mathrm{d}\lambda \quad = \quad \int_\Lambda^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin(r\lambda-\pi/4)}{r^{3/2}\,\lambda^{1/2}(\lambda-\zeta)}\left[\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\lambda-\zeta}\right]}_{②} \mathrm{d}\lambda - \underbrace{\frac{\Lambda\,\sin(r\Lambda-\pi/4)}{(r\Lambda)^{1/2}(\Lambda-\zeta)r}}_{③}\,.$$

Il nous suffit maintenant de montrer que

$$\begin{aligned} [\![③ + \int_\Lambda^{+\infty}(① + ②)]\!] \quad &\leq \quad [\![③]\!] + \int_\Lambda^{+\infty}([\![①]\!] + [\![②]\!]) \\ &\overset{?}{\leq} \quad \frac{C}{\Lambda^\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

pour conclure.

• Les intégrands ① et ② se comportent tous les deux à l'infini en λ comme (en module)

$$\frac{C}{r^{3/2}}\,\frac{1}{\lambda^{3/2}}\,.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \left\| \frac{C}{r^{3/2}\,\tau_s(\mathrm{Y})}\,\frac{1}{\lambda^{3/2}} \right\|_{L^1_{-s}(\mathbb{R}^2)} \quad &= \quad \frac{1}{\lambda^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^2_\mathrm{Y}} \frac{C}{r^{3/2}\,\tau_s(\mathrm{Y})}\,\mathrm{d}\mathrm{Y} \quad \text{avec} \quad \tau_s = (1+\|\mathrm{X}\|^2)^s \\ &\leq \quad \frac{C'}{\lambda^{3/2}} \end{aligned}$$

où C' est une constante indépendante de λ et de X.

• Enfin, nous nous intéressons au terme ③ :

$$\begin{aligned}\|③\|_{L^1_{-s}(\mathbb{R}^2)} &= \frac{\Lambda}{|\Lambda-\zeta|\Lambda^{1/2}}\int_{\mathbb{R}^2_{\mathrm{Y}}}\left|\frac{\sin(r\Lambda-\pi/4)}{r^{3/2}\tau_s(\mathrm{Y})}\right|\mathrm{d}\mathrm{Y}\,,\\ &\leq \frac{C'\Lambda}{|\Lambda-\zeta|\Lambda^{1/2}}\,.\end{aligned}$$

Nous déduisons finalement des résultats précédents que

$$[\![③]\!] \underset{\Lambda\to+\infty}{\sim} \frac{C'}{\Lambda^{1/2}}\,,$$

$$[\![①]\!]+[\![②]\!] \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{C'}{\lambda^{3/2}}\,.$$

Il s'en suit que

$$[\![G^\Lambda - G]\!] \leq \frac{C}{\Lambda^{1/2}} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \Lambda\to+\infty\,.$$

□

Remarque 3.11 *De l'inégalité* (3.15) *nous pouvons maintenant déduire que*

$$\left|(\tilde{R}(\zeta)\tilde{u},\tilde{v})_{L^2(\tilde{F})}\right| \leq [\![G_\zeta]\!]^2\,\|\tilde{u}\|_{L^2_s(\tilde{F})}\,\|\tilde{v}\|_{L^2_s(\tilde{F})}\,.$$

Ce qui montre que la résolvante $\tilde{R}$ peut être considérée comme un opérateur continu de $L^2_s(\tilde{F})$ à valeurs dans $L^2_{-s}(\tilde{F})$.

Corollaire 3.12 *Pour tous $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ appartenant à $L^2_s(\mathbb{R}^2)$*

$$\lim_{\Lambda\to+\infty}\ \langle\langle G^\Lambda_\zeta\,,\overline{\tilde{u}}\otimes\tilde{v}\rangle\rangle = \langle\langle G_\zeta\,,\overline{\tilde{u}}\otimes\tilde{v}\rangle\rangle\,.$$

Corollaire 3.13 *Soit $\tilde{f}\in L^2_s(\tilde{F})$. La fonction $\hat{\tilde{\eta}}$ définie par $\hat{\tilde{\eta}} := \tilde{R}(\zeta)\tilde{f}$ pour tout ζ appartenant à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$, admet la représentation intégrale suivante*

$$\hat{\tilde{\eta}}(\mathrm{X}) = \int_{\tilde{F}}\tilde{f}(\mathrm{Y})\,G_\zeta(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y})\,\mathrm{d}\mathrm{Y}\,,\quad \forall \mathrm{X}\in\tilde{F}$$

où la fonction

$$G_\zeta(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}) := vp\int_{\lambda\in\mathbb{R}^+}\Phi_\lambda(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y})\,\mathrm{d}\lambda \tag{3.16}$$

est généralement nommée la fonction (ou noyau) de Green[1].

[1] On pourrait montrer que notre fonction G est en fait la trace sur $\tilde{F}$ de la fonction de Green tridimensionnelle G^{3D}. On peut s'inspirer de la décomposition de G^{3D} obtenue dans [39] pour mener à bien cette tâche.

2.3 Propriété du noyau de Green

Proposition 3.14 *Pour tout ζ appartenant à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, la fonction de* Green *admet la décomposition suivante*

$$G_\zeta(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}) = \frac{1}{r} - \phi_\zeta\, Ln(-r\zeta) + H(r\zeta) \quad \textit{avec} \quad r = \|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\| \tag{3.17}$$

où la fonction Ln note le logarithme complexe défini à la section suivante et H note une fonction entière.

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que la fonction de Green G_ζ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} G_\zeta(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}) &= \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{vp}\int_0^{+\infty}\frac{J_0(r\lambda)}{\lambda-\zeta}\,\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,, \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{vp}\int_0^{+\infty} J_0(r\lambda)\,\mathrm{d}\lambda + \zeta\int_0^{+\infty}\frac{J_0(r\lambda)}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda\right]. \end{aligned}$$

Nous savons (voir par exemple Lavoine [51]) que la transformée de Laplace de la fonction $J_0(s)$ est $2\pi(1+p^2)^{-1/2}$. Nous en déduisons que

$$\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{vp}\int_0^{+\infty} J_0(r\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{r}\,.$$

Qu'en est-il de la seconde intégrale ? Nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\frac{J_0(r\lambda)}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda &= \int_0^{+\infty}\frac{J_0(\rho)}{\rho-r\zeta}\,\mathrm{d}\rho\,, \\ &= \int_0^{r\zeta+1}\frac{J_0(\rho)}{\rho-r\zeta}\,\mathrm{d}\rho + \int_{r\zeta+1}^{\infty}\frac{J_0(\rho)}{\rho-r\zeta}\,\mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

où les deux dernières intégrales sont définies respectivement sur $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux chemins du plan complexe. Le chemin $\mathscr{C}_1$ relie l'origine et le point $r\zeta+1$ sans jamais traverser l'axe réel. Le chemin $\mathscr{C}_2$ a pour origine le point $r\zeta+1$ et se prolonge vers l'infini en regagnant l'axe réel positif (ceci afin de s'assurer que J_0 n'explose pas à l'infini), tout cela sans jamais traverser l'axe réel. Nous imposons également que la déformation de contour de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2$ ne rencontre pas le point $r\zeta$.

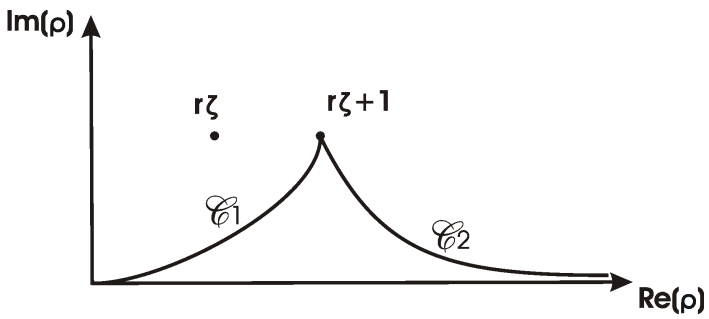

Fig. 1 – Représentation des chemins d'intégration $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{J_0(r\lambda)}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda &= -J_0(r\zeta)\mathrm{Ln}(-r\zeta)\,,\\ &\quad + \int_0^{r\zeta+1} \frac{J_0(\rho)-J_0(r\zeta)}{\rho-r\zeta}\,\mathrm{d}\rho + \int_{r\zeta+1}^{\infty} \frac{J_0(\rho)}{\rho-r\zeta}\,\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

où la fonction Ln note le prolongement à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ (voir §2.3) de la fonction logarithme ln classique définie sur $\mathbb{R}^+$.
Notons que $-r\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, puisque $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$, et donc la fonction Ln est bien définie. Pour ce qui est des deux intégrales du membre de droite, elles sont analytiques sur $\mathbb{C}$ vis-à-vis de la variable complexe ζ et sont aussi régulières vis-à-vis de la variable réelle r étant donné que la fonction de Bessel J_0 est elle-même analytique.
Nous avons finalement montré que

$$G_\zeta(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}) = \frac{1}{r} - \frac{\zeta J_0(r\zeta)}{2\pi}\,\mathrm{Ln}(-r\zeta) + \text{ fonction entière de } r\zeta\,.$$

□

Remarque 3.15 *Nous n'avons fait les démonstrations que pour la fonction de* Green *bidimensionnelle, mais pour la fonction de* Green *mono dimensionnelle les démonstrations sont similaires, à ceci près que* $\frac{1}{2\pi}J_0(r\lambda)\,\lambda$ *est remplacée par* $\frac{1}{\pi}\cos(r\lambda)$.

Le logarithme complexe

Rappelons tout d'abord la définition usuelle (sur $\mathbb{R}^+$) du logarithme

$$\forall x > 0\,,\quad \ln(x) := \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}\,.$$

Prolongement au plan complexe et détermination principale Étant donné un nombre complexe z, cherchons tous les nombres complexes w tels que $\mathrm{e}^w = z$. Il n'en existe que si $z \neq 0$. Dans ce cas, la relation

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}$$

montre que les complexes w recherchés sont de la forme

$$\ln(|z|) + \mathrm{i}\arg(z)$$

puisque

$$\mathrm{e}^w = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)} = \mathrm{e}^{\ln(|z|)+\mathrm{i}\arg(z)}\,.$$

On pose alors par définition,

$$\ln(z) := \ln(|z|) + \mathrm{i}\arg(z)\,.$$

Il s'agit d'un nombre complexe défini à l'addition près d'un multiple entier de $2\mathrm{i}\pi$.
De fait de l'ambiguïté de l'amplitude de la partie imaginaire de notre logarithme complexe, notre fonction ainsi définie est multivalente (elle possède plusieurs images). Pour considérer une fonction univalente, nous devons faire le choix d'une détermination de notre logarithme ou, de manière équivalente, de la fonction argument arg.

Définition 3.16 *On dit que la fonction continue L de la variable complexe z, définie sur un ouvert connexe $\mathscr{O} \subset \mathbb{C}$ ne contenant pas 0, est une détermination du logarithme sur $\mathscr{O}$ si pour tout $z \in \mathscr{O}$,* $\exp(L(z)) = z$.

Propriété 3.17 *Si L est une détermination du logarithme sur $\mathscr{O}$, toute autre détermination du logarithme sur $\mathscr{O}$ est de la forme $L + 2\mathrm{i}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Pour notre part, nous faisons le choix de la détermination dite principale qui consiste à imposer que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,, \quad \arg(z) \in \,]-\pi\,, +\pi]\,.$$

La fonction arg ainsi définie est alors univalente et nous la notons Arg. Par conséquent, la détermination principale, notée Ln, du logarithme s'écrit

$$\mathrm{Ln}(z) := \ln(|z|) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)\,, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-\,.$$

Remarque 3.18 *Nous constatons, et cela aurait pu être notre point de départ pour définir le logarithme complexe, que*

$$\mathrm{Ln}(z) = \int_1^{|z|} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \mathrm{i} \int_0^{\mathrm{Arg}(z)} \mathrm{d}\theta = \int_1^z \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

où la dernière intégrale est définie sur un chemin du plan complexe qui ne passe pas par l'origine et ne traverse pas l'axe réel négatif.

Une surface de Riemann à infinité de feuillets De manière tout à fait générale, une surface de Riemann désigne une surface sur laquelle une fonction multivalente devient univalente.
Puisque les autres valeurs de $\ln(z)$ diffèrent de la valeur principale $\mathrm{Ln}(z)$ de $2\mathrm{i}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nous sommes conduits à introduire la surface de Riemann, notée $\mathbb{C}_{\ln}$, constituée d'une infinité de feuillets raccordés continûment. Chaque feuillet, notée $\mathbb{C}_{\ln}^{(k)}$, est défini par

$$\mathbb{C}_{\ln}^{(k)} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, (2k-1)\pi < \arg(z) \leq (2k+1)\pi\}\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Le feuillet $\mathbb{C}_{\ln}^{(0)} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ désigne le feuillet principal et $\mathbb{C}_{\ln} := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}_{\ln}^{(k)}$. Le logarithme complexe ainsi défini sur $\mathbb{C}_{\ln}$, devient un prolongement analytique de Ln, de $\mathbb{C}_{\ln}^{(0)}$ à $\mathbb{C}_{\ln}$.

Propriété 3.19 *La fonction de Green G_ζ initialement définie sur le feuillet principal $\mathbb{C}_{\ln}^{(0)} \ni -\zeta$ se prolonge analytiquement sur les autres. Son prolongement sur $\mathbb{C}_{\ln}^{(k)}$ étant donné par*

$$G_{\zeta^{(k)}} = G_\zeta - 2\mathrm{i}k\pi\,\phi_\zeta$$

où $k \in \mathbb{Z}$ et $\zeta^{(k)}$ est tel que $|\zeta^{(k)}| := |\zeta|$ et $\arg(\zeta^{(k)}) := Arg(\zeta) + 2k\pi$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'écriture (3.17) de la fonction de Green et du prolongement analytique de la détermination principale du logarithme complexe Ln à la surface de Riemann $\mathbb{C}_{\ln}$. ∎

3 Problème diffracté et prolongement méromorphe

Nous allons dans cette section donner une écriture du problème diffracté basée sur l'utilisation de la résolvante du problème libre. Cette nouvelle écriture va s'avérer d'une part bien adaptée pour la description de la méthode de décomposition en modes résonants qui suivra, mais surtout la connaissance d'une représentation intégrale de la résolvante du problème libre nous permettra d'écrire une formulation faible de notre problème diffracté. C'est à partir de cette formulation faible, ou formulation variationnelle, que nous construirons le prolongement méromorphe de la résolvante. C'est aussi une porte ouverte au traitement numérique qui suivra.
Nous allons procéder en trois grandes étapes. La première consiste à donner une écriture explicite de la résolvante de notre problème de tenue à la mer. La seconde étape utilise une décomposition de la résolvante dont l'objectif est de permettre l'écriture d'un problème équivalent posé en domaine borné. Enfin, la troisième étape consiste à déduire du problème posé en domaine borné, une formulation variationnelle.
Afin de faciliter la lecture, nous allons dans un premier temps au paragraphe 3.1 faire totalement abstraction des espaces fonctionnels. Mais... nous y reviendrons au paragraphe 3.2.

3.1 Approche formelle

Considérons une excitation $\hat{f}$ et posons

$$\hat{\eta} := R(\zeta)\hat{f} \quad \text{avec} \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ .$$

Nous rappelons que

$$\hat{\eta} = R(\zeta)\hat{f} \iff \partial_n \mathbb{H}(\hat{\eta}) - \zeta\hat{\eta} = \hat{f} \quad \text{sur } \tilde{F} \tag{3.18}$$

où la fonctionnelle

$$\hat{\varphi} := \mathbb{H}(\hat{\eta})$$

associée à $\hat{\eta}$ est solution du système

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\hat{\varphi} = 0 \quad \text{dans } \Omega , \\ \\ \hat{\varphi} = \hat{\eta} + (\mathbb{A}_P\hat{\eta}_P - \hat{\eta}_P - \gamma\partial_n\hat{\varphi})\mathbb{1}_P \quad \text{sur } \tilde{F} , \end{array} \right. \tag{3.19}$$

avec

$$\mathbb{1}_P(\mathrm{x}) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{x} \in P, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Propriété 3.20 *Nous avons l'égalité suivante*

$$\tilde{\mathbb{H}}(\hat{\varphi}_{|\tilde{F}}) = \mathbb{H}(\hat{\eta}) .$$

Démonstration. Considérant les définitions (3.6) et (2.31)–(2.33) des opérateurs $\tilde{\mathbb{H}}$ et $\mathbb{H}$ respectivement, nous obtenons que $\tilde{\mathbb{H}}(\hat{\varphi}_{|\tilde{F}})$ et $\mathbb{H}(\hat{\eta})$ satisfont tous les deux le système d'équations

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\Psi = 0 \quad \text{dans } \Omega , \\ \\ \Psi = \hat{\eta}_F \quad \text{sur } F , \\ \\ \Psi + \gamma\partial_n\Psi = \mathbb{A}_P\hat{\eta}_P \quad \text{sur } P . \end{array} \right.$$

Nous en déduisons l'égalité annoncée. □

Proposition 3.21 *Le système* (3.18)–(3.19) *est équivalent au suivant*

$$\left|\begin{array}{l} \hat{\eta}+\hat{\psi}=\tilde{R}(\zeta)(\hat{f}-\zeta\hat{\psi}) \quad \textit{sur } \tilde{F}\,, \\ \\ \hat{\psi}=\big(\mathbb{A}_P-(\gamma\zeta+1)\big)\hat{\eta}_P-\gamma\hat{f} \quad \textit{sur } P \end{array}\right. \tag{3.20}$$

où $\hat{\psi} := \hat{\varphi}_{|\tilde{F}} - \hat{\eta}$.

Démonstration. Le système (3.18)–(3.19) peut se récrire

$$\left|\begin{array}{l} \Delta\hat{\varphi}=0 \quad \text{dans } \ \Omega\,, \\ \\ \partial_n\hat{\varphi}=\zeta\hat{\eta}+\hat{f} \quad \text{sur } \ \tilde{F}\,, \\ \\ \hat{\varphi}=\hat{\eta}+\big(\mathbb{A}_P\hat{\eta}_P-(\gamma\zeta+1)\hat{\eta}_P-\gamma\hat{f}\big)\mathbb{1}_P \quad \text{sur } \ \tilde{F}\,. \end{array}\right. \tag{3.21}$$

en remplaçant $\partial_n\hat{\varphi}$ par $\hat{f}+\zeta\hat{\eta}$ dans la dernière équation. On constate, immédiatement de la définition de $\hat{\psi}$, que

$$\hat{\psi}_{|F}=0 \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_{|P}=\mathbb{A}_P\hat{\eta}_P-(\gamma\zeta+1)\hat{\eta}_P-\gamma\hat{f}\,.$$

Nous déduisons maintenant de la propriété (3.20) que le système d'équations (3.21) est équivalent au suivant

$$\left|\begin{array}{l} \hat{\varphi}=\tilde{\mathbb{H}}\Big(\hat{\eta}+\big(\mathbb{A}_P\hat{\eta}_P-(\gamma\zeta+1)\hat{\eta}_P-\gamma\hat{f}\big)\mathbb{1}_P\Big) \quad \text{sur } \tilde{F}\,, \\ \\ \partial_n\hat{\varphi}=\zeta\hat{\eta}+\hat{f} \quad \text{sur } \ \tilde{F}\,, \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \hat{\varphi}-\tilde{\mathbb{H}}(\hat{\eta})=\tilde{\mathbb{H}}(\hat{\psi}) \quad \text{sur } \tilde{F}\,, \\ \\ \partial_n\hat{\varphi}=\zeta\hat{\eta}+\hat{f} \quad \text{sur } \ \tilde{F}\,. \end{array}\right. \tag{3.22}$$

Du fait de l'égalité entre $\hat{\varphi}=\mathbb{H}(\hat{\eta})$ et $\tilde{\mathbb{H}}(\hat{\varphi}_{|\tilde{F}})$, nous obtenons une autre équation satisfaite par $\partial_n\hat{\varphi}$:

$$\partial_n\hat{\varphi}=\partial_n\tilde{\mathbb{H}}(\hat{\varphi}_{|\tilde{F}})=\partial_n\tilde{\mathbb{H}}(\hat{\eta}+\hat{\psi})$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \partial_n\hat{\varphi}=\zeta\hat{\eta}+\hat{f} \quad &\Longrightarrow \quad \partial_n\tilde{\mathbb{H}}(\hat{\eta}+\hat{\psi})=\zeta\hat{\eta}+\hat{f}\,, \\ &\Longleftrightarrow \quad (\partial_n\tilde{\mathbb{H}}-\zeta\mathbb{I})(\hat{\eta}+\hat{\psi})=\hat{f}-\zeta\hat{\psi}\,, \\ &\Longleftrightarrow \quad \hat{\eta}+\hat{\psi}=\tilde{R}(\zeta)(\hat{f}-\zeta\hat{\psi})\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, le système d'équations (3.22) est équivalent à (3.20). □

Décomposition de $\hat{\eta}$

Rappelons que nous avons opté pour une approche perturbative de notre problème initial, d'où la recherche d'un problème diffracté. Cette approche perturbative consiste à décomposer la solution $\hat{\eta}$ de notre problème initial en une partie incidente $\hat{\eta}_I$ et une partie diffractée $\hat{\eta}_D$:

$$\hat{\eta}=\hat{\eta}_I+\hat{\eta}_D\,.$$

La partie incidente $\hat{\eta}_I$ représentera tout ou partie d'une onde se propageant en milieu homogène. Il s'agira donc clairement d'une partie de l'onde libre $\hat{\tilde{\eta}}$. La partie diffractée représentera la réponse de l'obstacle, la plaque, à l'onde incidente. Elle devra en particulier répondre à une contrainte : être solution d'un problème dont les données sont à support compact (contrairement à $\hat{\eta}$ et $\hat{\tilde{\eta}}$).
La question se pose alors de savoir comment choisir $\hat{\eta}_I$ pour que les données du problème diffracté soient à support compact. Au regard des équations du système (3.20) et plus particulièrement la première équation, nous constatons que nous pouvons tout naturellement localiser nos données sur le domaine occupé par la plaque en retirant à $\hat{\eta}$ la quantité

$$\mathbb{1}_F\, \tilde{R}(\zeta)\hat{f}\,.$$

Le second membre de la deuxième équation est déjà restreint à P.
Nous ne pouvons pas faire mieux en terme de localisation des données sans demander abusivement[2] à l'onde incidente de se comporter comme une onde élastique.
Nous considérons finalement la décomposition suivante de $\hat{\eta}$ qui nous conduira un peu plus loin à écrire un problème diffracté sur LE domaine borné que nous ayons à disposition, à savoir P. Nous posons donc

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\eta} & = & \hat{\eta}_I & + & \hat{\eta}_D \quad , \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R(\zeta)\hat{f} & = & \mathbb{1}_F\tilde{R}(\zeta)\hat{f} & + & D(\zeta)\hat{f} \quad . \end{array}$$

Propriété 3.22 *Le système d'équations* (3.20) *se récrit de manière équivalente*

$$\left|\begin{array}{l} \hat{\eta}_D + \hat{\psi} + \zeta\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi} = \mathbb{1}_P\, \tilde{R}(\zeta)\hat{f} \quad \text{sur } \tilde{F}\,, \\ \big(\mathbb{A}_P - (\gamma\zeta+1)\big)\hat{\eta}_D - \hat{\psi} = \gamma\hat{f} \quad \text{sur } P\,. \end{array}\right. \tag{3.24}$$

ou, si l'on pose $\vec{u} := {}^t(\hat{\eta}_D\,, \hat{\psi})$, *de manière plus condensée*

$$M(\zeta)\,\vec{u} = \overrightarrow{F}(\zeta, \hat{f})$$

avec

$$M(\zeta) := \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{\tilde{F}} & \mathbb{I}_P + \zeta\tilde{R}(\zeta) \\ \mathbb{A}_P - (\gamma\zeta+1) & -\mathbb{I}_P \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F}(\zeta, \hat{f}) := \mathbb{1}_P \begin{bmatrix} \tilde{R}(\zeta)\hat{f} \\ \gamma\hat{f} \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Le système couplé (3.20) se récrit à l'aide de la décomposition de $\hat{\eta}$ en partie incidente $\hat{\eta}_I$ et partie diffractée $\hat{\eta}_D$

$$\left|\begin{array}{l} \big(\mathbb{1}_F\tilde{R}(\zeta)\hat{f} + \hat{\eta}_D\big) + \hat{\psi} = \tilde{R}(\zeta)(\hat{f} - \zeta\hat{\psi}) \quad \text{sur } \tilde{F}\,, \\ \hat{\psi} = \big(\mathbb{A}_P - (\gamma\zeta+1)\big)\hat{\eta}_P - \gamma\hat{f} \quad \text{sur } P\,. \end{array}\right.$$

[2]Si on souhaite retirer une quantité $\mathbb{1}_{\mathscr{O}}\tilde{R}(\zeta)\hat{f}$ à $\hat{\eta}$ avec $\mathscr{O} \supset F$, alors nous constatons que la différence essentielle avec ce qui précède réside dans le fait que nous allons cette fois-ci chercher à modifier la deuxième équation du système (3.20) (qui régit la dynamique de la plaque) :

$$\big(\mathbb{A}_P - (\gamma\zeta+1)\big)(\hat{\eta}_P - \mathbb{1}_{P\cap\mathscr{O}}\tilde{R}(\zeta)\hat{f}) - \psi = \gamma f - \big(\mathbb{A}_P - (\gamma\zeta+1)\big)\,\mathbb{1}_{P\cap\mathscr{O}}\tilde{R}(\zeta)\hat{f}\,. \tag{3.23}$$

Un tel choix pose un gros problème puisque le second membre de l'équation (3.23) montre qu'il faudrait que l'onde libre $\tilde{R}(\zeta)\hat{f}$ se comporte sur le domaine occupé par la plaque comme $\hat{\eta}_P$, *i.e.* comme une onde élastique. En d'autres termes, ce choix exige de la part de $\mathbb{1}_P\tilde{R}(\zeta)\hat{f}$ beaucoup trop de régularité.

Soit encore

$$\left|\begin{array}{l} \hat{\eta}_D + \hat{\psi} + \zeta\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi} = \mathbb{1}_P\,\tilde{R}(\zeta)\hat{f} \quad \text{sur } \tilde{F}\,, \\ \big(\mathbb{A}_P - (\gamma\zeta+1)\big)\hat{\eta}_D - \hat{\psi} = \gamma\hat{f} \quad \text{sur } P\,. \end{array}\right.$$

Le résultat annoncé en découle. □

Remarque 3.23

1. *Notons que $\hat{\psi}$ n'est pas simplement une variable de "commodité d'écriture", mais une fonction nécessaire pour établir le problème diffracté au sens où elle ne peut s'obtenir à partir de $\hat{\eta}_D$*

$$\hat{\psi} = \hat{\varphi}_{|\tilde{F}} - \hat{\eta} = \hat{\varphi}_{|P} - \hat{\eta}_{|P} = \hat{\varphi}_{|P} - \hat{\eta}_D$$

   où bien entendu $\hat{\varphi}_{|P} \neq \hat{\eta}_{|P}$.
2. *Si nous supposons que $M^{-1}(\zeta)$ existe, alors*

$$\vec{u} = M^{-1}(\zeta)\overrightarrow{F}(\zeta,\hat{f})\,.$$

   Si de plus nous notons π_1 la projection sur la première composante de $\vec{u}$, nous en déduisons que

$$D(\zeta)\hat{f} = \pi_1 M^{-1}(\zeta)\overrightarrow{F}(\zeta,\hat{f})\,.$$

Réduction en domaine borné

Nous allons maintenant montrer que le système d'équations du problème diffracté peut être résolu localement, en fait sur le domaine occupé par la plaque. Les équations du problème diffracté à l'extérieur de ce domaine sont alors implicitement contenues dans la relation entre les résolvantes

$$R(\zeta) = \mathbb{1}_F\tilde{R}(\zeta) + D(\zeta)\,,\ \forall\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+\,.$$

Proposition 3.24 *Soit $\hat{f}$ une excitation donnée, $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$ et $\hat{\tilde{\eta}} = \tilde{R}(\zeta)\hat{f}$.*

(i) Si $(\hat{\eta}_D\,,\hat{\psi})$ est solution de (3.24) alors $(\hat{\eta}_{D|P}\,,\hat{\psi}_{|P})$ est solution de

$$\left|\begin{array}{l} \hat{\eta}^b(\mathrm{x}) + \hat{\psi}^b(\mathrm{x}) + \zeta\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi}^b(\mathrm{x}) = \hat{\tilde{\eta}}(\mathrm{x})\,,\ \forall\mathrm{x}\in P\,, \\ \big(\mathbb{A}_P - (\gamma\zeta+1)\big)\hat{\eta}^b(\mathrm{x}) - \hat{\psi}^b(\mathrm{x}) = \gamma\,\hat{f}(\mathrm{x})\,,\ \forall\mathrm{x}\in P\,. \end{array}\right. \tag{3.25}$$

(ii) La solution $(\hat{\eta}^b\,,\hat{\psi}^b)$ du problème (3.25), défini en domaine borné, se prolonge en une solution $(\hat{\eta}_D\,,\hat{\psi})$ du problème initial (3.24), avec

$$(\hat{\eta}_D\,,\hat{\psi}) = \Big(\mathbb{1}_P\hat{\eta}^b - \zeta\mathbb{1}_F\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi}^b\,,\mathbb{1}_P\hat{\psi}^b\Big)\,.$$

Démonstration.

1. Si $(\hat{\eta}_D\,,\hat{\psi})$ est solution de (3.24), alors clairement $(\hat{\eta}_{D|P}\,,\hat{\psi}_{|P})$ est solution de (3.25).
2. Montrons maintenant que $(u,v) := \Big(\mathbb{1}_P\hat{\eta}^b - \zeta\mathbb{1}_F\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi}^b\,,\mathbb{1}_P\hat{\psi}^b\Big)$ est une solution du système d'équations (3.24) qui prolonge $(\hat{\eta}^b\,,\hat{\psi}^b)$. 'Traduisons' simplement la définition du couple (u,v) :

. Sur P nous avons

$$\left| \begin{array}{l} u(\mathrm{x}) + v(\mathrm{x}) + \zeta \tilde{R}(\zeta) v(\mathrm{x}) = \hat{\tilde{\eta}}(\mathrm{x}) \,, \\ \big(\mathbb{A}_P - (\gamma\zeta + 1)\big) u(\mathrm{x}) - v(\mathrm{x}) = \gamma\, \hat{f}(\mathrm{x}) \,. \end{array} \right.$$

. Sur F nous avons

$$\left| \begin{array}{l} u(\mathrm{x}) = -\zeta \tilde{R}(\zeta) v(\mathrm{x}) \,, \\ v(\mathrm{x}) = 0 \,. \end{array} \right.$$

Nous en déduisons finalement que le couple (u, v) est une solution des équations (3.24) qui prolonge $(\hat{\eta}^b \,, \hat{\psi}^b)$.

□

Nous allons maintenant chercher une formulation variationnelle non pas du problème (3.24) mais, ce qui est équivalent, du problème (3.25).

Une formulation variationnelle

Il s'agit de multiplier la première équation du système (3.25) par une fonction test $\hat{\psi}'$ et la seconde par une fonction test $\hat{\eta}'$ puis d'intégrer sur P. Nous obtenons les équations variationnelles suivantes

$$(\hat{\eta}^b \,, \hat{\psi}')_{0,P} + (\hat{\psi}^b \,, \hat{\psi}')_{0,P} + \zeta(\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi}^b \,, \hat{\psi}')_{0,P} = (\hat{\tilde{\eta}} \,, \hat{\psi}')_{0,P}$$

$$a_P(\hat{\eta}^b \,, \hat{\eta}') - (\gamma\zeta + 1)(\hat{\eta}^b \,, \hat{\eta}')_{0,P} - (\hat{\psi}^b \,, \hat{\eta}')_{0,P} = \gamma\, (\hat{f} \,, \hat{\eta}')_{0,P} \tag{3.26}$$

où $a_P(\cdot\,,\cdot)$ est la forme sesquilinéaire définie en (2.35). Nous pouvons sommer ces deux équations variationnelles pour en déduire que $(\hat{\eta}^b \,, \hat{\psi}^b)$ est solution de la formulation variationnelle

$$\left| \begin{array}{c} \text{Trouver } \boldsymbol{u} = (\hat{\eta} \,, \hat{\psi}) \in \boldsymbol{\mathcal{H}} \text{ tel que} \\ \underline{a}(\boldsymbol{u} \,, \boldsymbol{u}') + c(\boldsymbol{u} \,, \boldsymbol{u}' \,; \zeta) = l(\boldsymbol{u}') \\ \text{pour tout } \boldsymbol{u}' = (\hat{\eta}' \,, \hat{\psi}') \in \boldsymbol{\mathcal{H}} \end{array} \right. \tag{3.27}$$

avec

$$\begin{aligned} &\underline{a}(\boldsymbol{u} \,, \boldsymbol{u}') := (\hat{\psi} \,, \hat{\psi}')_{0,P} + a_P(\hat{\eta} \,, \hat{\eta}') \,, \\ &c(\boldsymbol{u} \,, \boldsymbol{u}' \,; \zeta) := (\hat{\eta} \,, \hat{\psi}')_{0,P} + \zeta(\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi} \,, \hat{\psi}')_{0,P} \,, -((\gamma\zeta + 1)\hat{\eta} + \hat{\psi} \,, \hat{\eta}')_{0,P} \\ &l(\boldsymbol{u}') := (\hat{\tilde{\eta}} \,, \hat{\psi}')_{0,P} + \gamma\, (\hat{f} \,, \hat{\eta}')_{0,P} \,. \end{aligned}$$

Nous nous satisfaisons d'une telle écriture car la forme $\underline{a}(\cdot\,,\cdot)$ est un bon candidat pour définir une forme coercive et la forme $c(\cdot\,,\cdot\,;\zeta)$ est un bon candidat à "contenir de la compacité". Nous nous réjouissons car $\underline{a} + c$ rentrerait dans un cadre d'étude bien connu et le théorème de Steinberg serait alors en mesure de nous fournir le prolongement méromorphe que nous convoitons. Nous constatons donc qu'un bon cadre fonctionnel à considérer serait $\boldsymbol{\mathcal{H}} := \mathscr{D}[a_P] \times L^2(P)$.
Notons que si $\hat{\psi}^b$ appartient à $L^2(P)$, alors $\hat{\psi}^b$ appartient aussi à $L^2_s(\tilde{F})$ en prolongeant $\hat{\psi}^b$ par 0. Nous pouvons donc utiliser la formule de représentation intégrale que nous avons établie au corollaire 3.13 afin d'exprimer $\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi}^b$ par l'intégrale suivante

$$\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi}^b(\mathrm{x}) = \int_P \hat{\psi}^b(\mathrm{y})\, G_\zeta(\mathrm{x}, \mathrm{y})\, \mathrm{d}\mathrm{y} \,, \quad \forall \mathrm{x} \in \tilde{F} \,.$$

Le paragraphe suivant va donc chercher à montrer rigoureusement que le cadre fonctionnel précité est bien un choix possible.

3.2 Le cadre fonctionnel

Étant donné que nous allons très rapidement faire usage des espaces fonctionnels que nous avons définis dans le chapitre précédent, nous allons en faire un bref rappel :

$\mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}})$	$\longleftrightarrow$	domaine de l'opérateur $\tilde{\mathbb{A}}$;
$\mathscr{D}[\tilde{a}] := H^{1/2}(\tilde{F})$	$\longleftrightarrow$	domaine de la forme sesquilinéaire associée à l'opérateur $\tilde{\mathbb{A}}$;
$\mathscr{D}(\mathbb{A}_P)$	$\longleftrightarrow$	domaine de l'opérateur $\mathbb{A}_P$ (localement $H^4(P)$) ;
$\mathscr{D}[a_P] := H^2(P)$	$\longleftrightarrow$	domaine de la forme sesquilinéaire associée à l'opérateur $\mathbb{A}_P$;
$\mathcal{V} := H^{1/2}(F) \times \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)$	$\longleftrightarrow$	espace fonctionnel sur lequel est défini l'opérateur $\mathbb{H}$;
$\mathscr{D}(\mathbb{A})$	$\longleftrightarrow$	domaine de l'opérateur $\mathbb{A}$;
$\mathscr{D}[a] := \mathcal{V} \supset \mathscr{D}(\mathbb{A})$	$\longleftrightarrow$	domaine de la forme sesquilinéaire associée à l'opérateur $\mathbb{A}$;
$\mathcal{H} := L^2(F) \times \mathscr{D}[a_P]$	$\longleftrightarrow$	espace fonctionnel sur lequel l'opérateur $\mathbb{A}$ est auto-adjoint ;
$W^1(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	espace de Sobolev à poids (localement $H^1(\Omega)$).

Lemme 3.25 *Soit $\hat{f}$ une excitation donnée dans $\mathcal{H}$, ζ un élément de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ et $\hat{\tilde{\eta}} := \tilde{R}(\zeta)\hat{f}$ appartenant à $H^{1/2}(\tilde{F})$ une onde libre.*
La solution $(\hat{\eta}^b\,,\hat{\psi}^b)$ appartenant à $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathscr{D}[a_P] \times L^2(P)$ du problème

$$\left|\begin{array}{l} \hat{\eta}^b(\mathrm{x}) + \hat{\psi}^b(\mathrm{x}) + \zeta\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi}^b(\mathrm{x}) = \hat{\tilde{\eta}}(\mathrm{x})\,,\ \forall \mathrm{x} \in P\,, \\ \\ \big(\mathbb{A}_P - (\gamma\zeta+1)\big)\hat{\eta}^b(\mathrm{x}) - \hat{\psi}^b(\mathrm{x}) = \gamma\,\hat{f}(\mathrm{x})\,,\ \forall \mathrm{x} \in P\,. \end{array}\right. \tag{3.28}$$

se prolonge en une solution $(\hat{\eta}_D\,,\hat{\psi})$ appartenant à $\mathcal{V} \times H^{1/2}(P)$

$$(\hat{\eta}_D\,,\hat{\psi}) := \Big(\mathbb{1}_P\hat{\eta}^b - \zeta\mathbb{1}_F\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi}^b\,,\mathbb{1}_P\hat{\psi}^b\Big)$$

du problème diffracté

$$\left|\begin{array}{l} \left\|\begin{array}{l} \hat{\psi}(\mathrm{x}) = 0\,,\ \forall \mathrm{x} \in F\,, \\ \\ \hat{\eta}_D(\mathrm{x}) = -\zeta\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi}(\mathrm{x})\,,\ \forall \mathrm{x} \in F\,, \end{array}\right. \\ \\ \left\|\begin{array}{l} \hat{\eta}_D(\mathrm{x}) + \hat{\psi}(\mathrm{x}) + \zeta\tilde{R}(\zeta)\hat{\psi}(\mathrm{x}) = \hat{\tilde{\eta}}(\mathrm{x})\,,\ \forall \mathrm{x} \in P\,, \\ \\ \big(\mathbb{A}_P - (\gamma\zeta+1)\big)\hat{\eta}_D(\mathrm{x}) - \hat{\psi}(\mathrm{x}) = \gamma\hat{f}(\mathrm{x})\,,\ \forall \mathrm{x} \in P\,. \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{3.29}$$

De plus, la solution $\hat{\eta}$ définie par

$$\hat{\eta} := \mathbb{1}_F\hat{\tilde{\eta}} + \hat{\eta}_D$$

est un élément de $\mathscr{D}(\mathbb{A})$ qui vérifie

$$\hat{\eta} = R(\zeta)\hat{f}\,.$$

Remarque 3.26 *Il est à noter que l'équation* (3.28) *est à interpréter en un sens variationnel uniquement. Nous donnons l'interprétation en* (3.27).

Démonstration.
• Vérifions la régularité annoncée de $(\hat{\eta}_D, \hat{\psi})$. L'équivalence des problèmes (3.28) et (3.29) relève de la proposition 3.24.
Nous rappelons que l'opérateur

$$\tilde{R} : L^2(\tilde{F}) \to \mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}}) \subset \mathscr{D}[\tilde{a}] = H^{1/2}(\tilde{F})$$

est linéaire et continu. Nous en déduisons que $\hat{\tilde{\eta}}$ est bien définie puisque $\hat{f}$ appartient à $\mathcal{H} \subset L^2(\tilde{F})$ et d'autre part que $\hat{\tilde{\eta}}$ appartient à $H^{1/2}(\tilde{F})$. Nous en déduisons également que $\mathbb{1}_F \hat{\eta}_D$ appartient à $H^{1/2}(F)$. De plus, puisque $\mathbb{1}_P \hat{\psi} = \mathbb{1}_P(-\hat{\eta}^b - \zeta \tilde{R}(\zeta)\hat{\psi}^b + \hat{\tilde{\eta}})$, alors $\mathbb{1}_P \hat{\psi}$ appartient à $H^{1/2}(P)$.
Partant maintenant de l'égalité $\mathbb{A}_P \hat{\eta}^b = [\mathbb{1}_P((\gamma\zeta + 1)\hat{\eta}^b + \hat{\psi}^b + \gamma \hat{f})] \in L^2(P)$ nous obtenons, puisque $\hat{\eta}^b$ appartient à $\mathscr{D}[a_P]$,

$$(\hat{\eta}^b\,, \mathbb{A}_P \hat{\eta}')_{L^2(P)} = a_P(\hat{\eta}^b\,, \hat{\eta}') = ((\gamma\zeta + 1)\hat{\eta}^b + \hat{\psi}^b + \gamma \hat{f}\,, \hat{\eta}')_{L^2(P)}\,, \quad \forall \hat{\eta}' \in \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)\,.$$

Cette dernière égalité signifie que $\hat{\eta}^b$ appartient à $\mathscr{D}(\mathbb{A}_P^*) = \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)$. Par conséquent, $\hat{\eta}_D$ appartient bien à $\mathcal{V}$.

• Si nous reprenons le raisonnement par équivalence de la démarche formelle du paragraphe 3.1, mais en sens inverse, qui nous a conduit à écrire un problème posé en domaine borné, nous pouvons remonter jusqu'à l'égalité suivante :

$$\hat{\eta} = R(\zeta)\hat{f} \quad \text{avec} \quad \hat{f} \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \hat{\eta} \in \mathscr{D}[a] = \mathcal{V}\,.$$

Cette égalité est équivalente à

$$a(\hat{\eta}\,, \hat{\eta}') - \zeta(\hat{\eta}\,, \hat{\eta}')_{\mathcal{H}} = (\hat{f}\,, \hat{\eta}')_{\mathcal{H}} \quad \forall \hat{\eta}' \in \mathscr{D}[a]$$

$$\Longleftrightarrow \hat{\eta} \in \mathscr{D}(\mathbb{A}) \quad \text{et} \quad (\mathbb{A} - \zeta)\hat{\eta} = \hat{f} \quad \text{car } \hat{f} \in \mathcal{H}\,.$$

□

Remarque 3.27

1. *Le problème* (3.27) *en tant que formulation équivalente à* (3.28) *est bien posé. On vérifie sans grande difficulté que* $\underline{a}(\cdot\,,\cdot)$ *et* $c(\cdot\,,\cdot\,;\zeta)$ *sont des formes sesquilinéaires continues sur* $\boldsymbol{\mathcal{H}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}$ *et que* $l(\cdot)$ *est une forme anti-linéaire continue sur l'espace fonctionnel* $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.
2. *En observant l'équation* (3.26)*, nous remarquons que la formulation variationnelle n'exige pas que l'excitation* $\hat{f}$ *soit dans* $\mathcal{H}$*. En fait, nous voyons qu'il suffit de prendre* $\hat{f}$ *dans* $L^2(\tilde{F})$*. La justification de cette remarque nécessite de donner, comme on peut s'en douter, une interprétation plus faible (puisque nous voulons que* $\hat{f}$ *soit moins régulier) du système d'équations* (3.29)*. Nous détaillons cette idée à l'annexe A.*

3.3 Le théorème de Steinberg

Nous allons maintenant nous attacher à établir le prolongement méromorphe de la partie diffractée D de la résolvante de notre problème de tenue à la mer. Nous allons montrer que notre opérateur $D = R - \mathbb{1}_F \tilde{R}$ (ou de manière équivalente M^{-1}) se prolonge de façon méromorphe à la surface de Riemann, $\mathbb{C}_{\ln}$, associée au logarithme. Le prolongement méromorphe résultera de l'application du théorème de Steinberg qui traite du caractère méromorphe des inverses d'une famille d'opérateurs, perturbations analytiques compactes d'un isomorphisme, c'est-à-dire d'une famille analytique d'opérateurs de Fredholm. Nous exploiterons dans cette optique, la formulation variationnelle de notre problème diffracté posée en domaine borné pour en "exhiber de la compacité". Le caractère analytique découlera de la dépendance analytique de G_ζ vis-à-vis de ζ.

Nous allons maintenant montrer que notre problème diffracté posé en domaine borné satisfait les hypothèses du théorème suivant dû à Steinberg. Le point (ii) de ce théorème nous donnera alors le prolongement méromorphe recherché.

Théorème 3.28 (Steinberg **[61]**) *Si $T(\nu)$ est une famille d'opérateurs compacts sur un espace de* Hilbert *$\mathscr{H}$, dépendant analytiquement de $\nu \in \mathscr{O}$, où $\mathscr{O}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors nous avons l'alternative suivante :*

(i) soit $\mathrm{Id} - T(\nu)$ n'est inversible pour aucune valeur de $\nu \in \mathscr{O}$

(ii) soit $(\mathrm{Id} - T(\nu))^{-1}$ est méromorphe dans $\mathscr{O}$, ses pôles étant les valeurs de $\nu \in \mathscr{O}$ pour lesquelles 1 est une valeur propre de $T(\nu)$.

Remarque 3.29 *Ce théorème généralise en fait un résultat bien connu pour une fonction analytique g dans un ouvert du plan complexe : si g n'est pas identiquement nulle, son inverse est méromorphe, ses pôles étant les zéros de g.*

Tout d'abord, le théorème de représentation de Riesz nous permet de définir les opérateurs linéaires continus suivants :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{J} : \boldsymbol{\mathcal{H}} \to \boldsymbol{\mathcal{H}}\,, \text{ tel que}\\
&(\mathbb{J}\boldsymbol{v}\,,\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} := \underline{a}(\boldsymbol{v}\,,\boldsymbol{w})\,, \quad \forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\,,\\
&\mathbb{K}(\zeta) : \boldsymbol{\mathcal{H}} \to \boldsymbol{\mathcal{H}}\,, \text{ tel que}\\
&(\mathbb{K}(\zeta)\boldsymbol{v}\,,\boldsymbol{w})_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} := c(\boldsymbol{v}\,,\boldsymbol{w}\,;\zeta)\,, \quad \forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned}$$

Propriété 3.30 *L'opérateur $\mathbb{B} : \boldsymbol{\mathcal{H}} \to \boldsymbol{\mathcal{H}}$ défini par $\mathbb{B} := \mathbb{J} + \mathbb{K}(\zeta)$ est un automorphisme pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.*

Démonstration. Comme l'on sait que le problème (3.27) est naturellement bien posé, alors $\mathbb{B}$ est un automorphisme de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. □

Proposition 3.31 *La fonction $\zeta \mapsto \mathbb{K}(\zeta)$ est analytique sur $\mathbb{C}_{\ln}$.*

Nous rappelons un résultat d'analyse complexe qui nous permettra d'établir l'analyticité de l'opérateur $\mathbb{K}$.

Lemme 3.32 (**voir par exemple [23]**) *Soit $\zeta \mapsto A(\zeta)$ une application A définie sur un domaine $\mathscr{O} \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathscr{L}(\boldsymbol{\mathcal{H}})$ (ensemble des applications linéaires continues de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ à valeurs dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}$).*
L'application A est holomorphe au sens de la norme si et seulement si A est faiblement holomorphe sur $\mathscr{O}$, c'est-à-dire si pour tous $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ appartenant à $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ l'application $\zeta \mapsto (A(\zeta)\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$ est holomorphe.

Démonstration. [proposition 3.31] Nous savons par définition de l'opérateur $\mathbb{K}$ que

$$\forall \boldsymbol{u}\,,\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\,,\ (\mathbb{K}(\zeta)\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = c(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v}\,;\zeta)\,.$$

De par la définition de la forme $c(\cdot\,,\cdot\,;\zeta)$, nous obtenons la faible holomorphie de l'opérateur $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{C}_{\ln}$ comme la conséquence directe de la dépendance holomorphe de G_ζ vis-à-vis de ζ (cf. propriété 3.19). Nous en déduisons alors que l'opérateur $\mathbb{K}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_{\ln}$ d'après le lemme 3.32. □

Proposition 3.33 *$\mathbb{J}$ étant l'identité sur $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, c'est naturellement un opérateur défini positif.*

Il ne reste donc plus qu'à vérifier la compacité de l'opérateur $\mathbb{K}$. Tout d'abord, le théorème de représentation de Riesz (encore lui) nous permet de récrire la forme sesquilinéaire $c(\cdot\,,\cdot\,;\zeta)$ comme suit : pour tous $\boldsymbol{u} = (\hat{\eta}\,,\hat{\psi})$ et $\boldsymbol{u}' = (\hat{\eta}'\,,\hat{\psi}')$ appartenant à $\boldsymbol{\mathcal{H}}$

$$c(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}'\,;\zeta) = (\mathbb{K}_1\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} + \zeta\,(\mathbb{K}_2\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} - (\mathbb{K}_3\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$$

où

$$(\mathbb{K}_1\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} := (\hat{\eta}\,,\hat{\psi}')_{0,P}\,,$$

$$(\mathbb{K}_2\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} := \langle\langle G_\zeta\,,\mathbb{1}_P\overline{\hat{\psi}}\otimes\mathbb{1}_P\hat{\psi}'\rangle\rangle\,,$$

$$(\mathbb{K}_3\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} := ((\gamma\zeta+1)\hat{\eta}+\hat{\psi}\,,\eta')_{0,P}\,.$$

Par conséquent, $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1 + \zeta\,\mathbb{K}_2 - \mathbb{K}_3$. Il nous suffit alors de montrer que $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$ sont des opérateurs compacts sur $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

Proposition 3.34 *Les opérateurs $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$ (et donc aussi $\mathbb{K}$) sont compacts sur $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.*

Démonstration. Introduisons les opérateurs continus suivants qui vont nous permettre de récrire $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$:

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{D}_\tau : \boldsymbol{\mathcal{H}} & \hookrightarrow & L^2(P)\ \ \forall\tau\in\mathbb{C}\\ \boldsymbol{u} & \mapsto & \tau\hat{\eta}+\hat{\psi}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}_1 : \boldsymbol{\mathcal{H}} & \hookrightarrow & H^2(P)\\ \boldsymbol{u} & \mapsto & \hat{\eta}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}_2 : \boldsymbol{\mathcal{H}} & \hookrightarrow & L^2(P)\\ \boldsymbol{u} & \mapsto & \hat{\psi}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{I}_{\text{can}} : H^2(P) & \underset{\text{compact}}{\hookrightarrow} & L^2(P)\ \ \text{l'injection canonique}\\ v & \mapsto & v\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{T} : L^2(P) & \underset{\text{compact}}{\hookrightarrow} & L^2(P)\\ v & \mapsto & (\mathbb{T}v)(\mathrm{X}) := \displaystyle\int_P v(\mathrm{Y})G_\zeta(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y})\,\mathrm{d}\mathrm{Y}\end{array}$$

L'opérateur $\mathbb{I}_{\text{can}}$ est compact d'après le théorème de Rellich-Kondrachov. La compacité de l'opérateur $\mathbb{T}$ découle de la proposition suivante.

Proposition 3.35 *L'opérateur $\mathbb{T}$ est compact.*

Démonstration. Nous allons séparer dans la démonstration qui va suivre le cas de la dimension 2 d'espace et le cas de la dimension 3 d'espace. La raison de cette approche est simplement liée au fait que notre fonction de Green ne possède pas la même régularité suivant la dimension d'espace. Le lecteur pourra, concernant les résultats qui vont être annoncés, consulter par exemple le livre de Brézis [14].

• Dans le cas bidimensionnel, lorsque P est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$, G possède en espace la singularité

$$\ln(|x-y|) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\,.$$

L'opérateur intégral $\mathbb{T}$ de noyau G est alors un opérateur de HILBERT-SCHMIDT ; c'est en particulier un opérateur compact de $L^2(P)$.

• Dans le cas tridimensionnel, la fonction de GREEN admet en espace la singularité

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \ni \quad \frac{1}{\|\mathrm{X} - \mathrm{Y}\|} - \zeta \ln(\|\mathrm{X} - \mathrm{Y}\|) \quad \notin L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)\,.$$

La stratégie précédente est donc inopérante.
Nous allons ici utiliser le lemme qui suit et qui est en fait un corollaire du théorème de RIESZ-FRÉCHET-KOLMOGOROV. Ce théorème en question constitue la "version L^p" du théorème d'ASCOLI et permet de reconnaître quand une famille de fonctions de L^p est relativement compacte.

LEMME 3.36 *Soit F appartenant à $L^1(\mathbb{R}^N)$ une fonction fixée et soit*

$$\mathcal{F} := \{f\,;\, f = F * v\,,\ v \in \mathcal{B}\}$$

où $*$ note le produit de convolution et $\mathcal{B}$ désigne un sous-ensemble borné de $L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors la famille $\mathcal{F}_{|\mathscr{O}}$ est relativement compacte dans $L^p(\mathscr{O})$ pour tout ouvert borné $\mathscr{O}$ de $\mathbb{R}^N$.

Nous pouvons remarquer que si nous posons

$$F(\mathrm{X} - \mathrm{Y}) := \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\text{oule}}}(\mathrm{X} - \mathrm{Y})\, G_\zeta(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y})\,,$$

puisqu'en fait G est une fonction de $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$, avec

$$\mathcal{B}_{\text{oule}} := \{t \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq \|t\| \leq \mathrm{Diam}(P)\}\,,$$

$\mathrm{Diam}(P)$ désignant le diamètre de P, alors nous pouvons écrire l'opérateur $\mathbb{T}$ comme un produit de convolution :

$$\mathbb{T}v(\mathrm{X}) = F \overset{(\mathrm{X})}{*} v\,.$$

Si nous appliquons maintenant le lemme précédent avec $\mathcal{B} := \{v \in L^2(\tilde{F})\,;\, \|v\|_{0,\tilde{F}} \leq M\}$ pour un certain M positif donné et $\mathcal{F} := \{\mathbb{T}v\,;\, v \in \mathcal{B}\}$, alors nous en déduisons que $\mathcal{F}_{|P}$ est une famille relativement compacte dans $L^2(P)$. Par conséquent $\mathbb{T}$ est un opérateur compact sur $L^2(P)$. □[prop. 3.35]

Récrivons alors les opérateurs $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{K}_1\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} &= (\hat{\eta}\,,\hat{\psi}')_{0,P} \qquad\qquad ,\\
&= (\mathbb{I}_{\text{can}}\mathbb{E}_1\boldsymbol{u}\,,\mathbb{E}_2\boldsymbol{u}')_{0,P}\,,\\
&= (\mathbb{E}_2^*\mathbb{I}_{\text{can}}\mathbb{E}_1\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}}\,,\\
(\mathbb{K}_2\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} &= \langle\langle G_\zeta\,,\mathbb{1}_P\overline{\hat{\psi}} \otimes \mathbb{1}_P\hat{\psi}'\rangle\rangle\,,\\
&= \left(\int_P \mathbb{E}_2\boldsymbol{u}(\mathrm{Y})G_\zeta(\cdot\,,\mathrm{Y})\,\mathrm{d}\mathrm{Y}\,,\mathbb{E}_2\boldsymbol{u}'\right)_{0,P}\,,\\
&= (\mathbb{T}\,\mathbb{E}_2\boldsymbol{u}\,,\mathbb{E}_2\boldsymbol{u}')_{0,P}\,,\\
&= (\mathbb{E}_2^*\,\mathbb{T}\,\mathbb{E}_2\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}}\,,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\mathbb{K}_3\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}} &= (\tau\hat{\eta}+\hat{\psi}\,,\hat{\eta}')_{0,P} \qquad \text{où} \qquad \tau := \gamma\zeta+1\,,\\ &= (\mathbb{D}_\tau\boldsymbol{u}\,,\mathbb{I}_{\text{can}}\mathbb{E}_1\boldsymbol{u}')_{0,P}\,,\\ &= (\boldsymbol{u}\,,\mathbb{D}_\tau^*\mathbb{I}_{\text{can}}\mathbb{E}_1\boldsymbol{u}')_{\boldsymbol{\mathcal{H}}}\,.\end{aligned}$$

Par conséquent les opérateurs

$$\mathbb{K}_1 = \mathbb{E}_2^*\mathbb{I}_{\text{can}}\mathbb{E}_1\,,\ \mathbb{K}_2 = -\mathbb{E}_2^*\,\mathbb{T}\,\mathbb{E}_2 \ \text{ et } \ \mathbb{K}_3 = [\mathbb{D}_\tau^*\mathbb{I}_{\text{can}}\mathbb{E}_1]^*$$

sont des opérateurs compacts. En effet, nous savons d'une part que l'ensemble des opérateurs compacts est un idéal bilatère fermé dans l'ensemble des opérateurs continus et d'autre part le théorème de Schauder nous indique que l'adjoint d'un opérateur compact est encore un opérateur compact. □[prop. 3.34]

Nous avons finalement montré au cours de ce paragraphe que notre problème diffracté (3.27) satisfait les hypothèses du théorème 3.28 et par conséquent

Théorème 3.37 *La "résolvante*[3]*" $D^b := (\mathbb{J}+\mathbb{K}(\zeta))^{-1}$ du problème réduit* (3.27) *se prolonge à $\mathbb{C}_{\ln}$ en une fonction méromorphe : ses pôles (les résonances du problème) sont les valeurs $\zeta \in \mathbb{C}_{\ln}$ pour lesquelles $\mathbb{J}+\mathbb{K}(\zeta)$ n'est pas inversible, autrement dit ce sont les valeurs ζ pour lesquelles -1 est une valeur propre de $\mathbb{J}^{-1}\mathbb{K}(\zeta)$.*

Démonstration. On sait que $\mathbb{J}+\mathbb{K}(\zeta)$ est un automorphisme pour tout $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$. Comme $\mathbb{J}$ est inversible et comme $\mathbb{K}(\zeta)$ est compact et holomorphe en ζ sur $\mathbb{C}_{\ln}$, alors le théorème de Steinberg nous donne le résultat. □

4 Application de la méthode de décomposition

L'heure est maintenant au bilan. Nous avons au cours de ce chapitre décomposé notre solution transitoire η en partie incidente η_I et partie diffractée η_D. Nous avons montré que la résolvante du problème libre et la partie diffractée de la résolvante R se prolongent méromorphiquement à la surface de Riemann à infinité de feuillets associée au logarithme, le seul point de branchement étant l'origine. Si l'on souhaite introduire une coupure (associée au logarithme) pour rester dans le plan complexe, le prolongement se limite alors à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ (le feuillet principal) : c'est l'option que nous avons retenue.
Tout d'abord, rappelons que la méthode de décomposition en modes résonants conduit comme nous l'avons vu au chapitre 1 à considérer la résolvante de l'opérateur $\mathbb{A}$ au point $\zeta = -p^2$, où p désigne le paramètre de la transformée de Laplace (fréquence complexe). Nous avons établi au théorème 3.37 qu'en dehors d'un ensemble de points isolés $\{p_k\}$ (les pôles du prolongement), $D^b(-p^2)$ ou de manière équivalente $M^{-1}(-p^2)$ existe (où M est l'opérateur défini à la propriété 3.22).
Les conditions requises par le chapitre 1 étant satisfaites, nous allons maintenant pouvoir appliquer

[3] Il s'agit ici d'un abus de langage. L'opérateur D^b désigne en fait l'opérateur $J_0\mathbb{1}_P R(\zeta)\mathbb{1}_P J_1$ où $R(\cdot)$ est la résolvante dans le sens habituel du terme. J_0 et J_1 désignent respectivement les injections

$$J_0 : \mathscr{D}[a] \hookrightarrow \mathcal{H} \ \text{ et } \ J_1 : \mathcal{H} \hookrightarrow L^2(\tilde{F})\,.$$

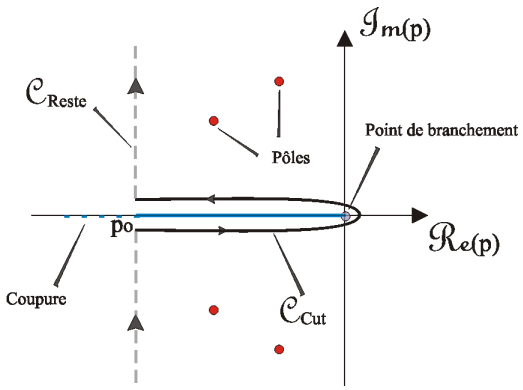

FIG. 2 – Singularités de notre prolongement.

la méthode de décomposition en modes résonants à notre problème diffracté.
Par intégration sur un contour fermé ne contenant qu'un pôle p_k, on obtient

$$\begin{aligned}
\eta_D^k(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\odot_k} \mathrm{e}^{pt} D(-p^2)\hat{f}(p)\,\mathrm{d}p \quad &= \quad \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\odot_k} \mathrm{e}^{pt}\pi_1 M^{-1}(-p^2)\overrightarrow{F}(-p^2,\hat{f})\,\mathrm{d}p\,,\\
&= \quad \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\,\pi_1\int_{\odot_k} \mathrm{e}^{pt} M^{-1}(-p^2)\overrightarrow{F}(-p^2,\hat{f})\,\mathrm{d}p\,,\\
&\overset{\substack{\text{Si } p_k \text{ est un}\\ \text{pôle simple}}}{=} \quad \mathrm{e}^{p_k t}\,\pi_1\left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\odot_k} M^{-1}(-p^2)\,\mathrm{d}p\right)\overrightarrow{F}(-p_k^2,\hat{f})\,,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne le terme dans $\eta_{D_{\text{pôles}}}$ associé à p_k :

$$\eta_{D_{\text{pôles}}}(t) = \sum_{p_k\in\{\Re e(p)>p_0\}} \eta_D^k(t)\,.$$

Le terme $\eta_{D_{\text{cut}}}$ s'obtient comme suit

$$\eta_{D_{\text{cut}}}(t) = \pi_1\left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\oint_{\mathscr{C}_{\text{Cut}}} \mathrm{e}^{pt} M^{-1}(-p^2)\overrightarrow{F}(-p^2,\hat{f})\,\mathrm{d}p\right)\,.$$

Enfin, n'oublions pas le terme complémentaire $\eta_{D_{\text{reste}}}$:

$$\eta_{D_{\text{reste}}}(t) = \eta_D(t) - \eta_{D_{\text{pôles}}}(t) - \eta_{D_{\text{cut}}}(t) = \pi_1\left(\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{C}_{\text{Reste}}} \mathrm{e}^{pt} M^{-1}(-p^2)\overrightarrow{F}(-p^2,\hat{f})\,\mathrm{d}p\right)\,.$$

Nous allons nous attacher dans le chapitre suivant à mettre numériquement en œuvre l'application de notre méthode de décomposition en modes résonants. Nous donnerons les moyens permettant, dans un premier temps, de calculer la matrice M_h, *i.e.* le pendant discrétisé de l'opérateur M, puis nous décrirons le procédé de calcul des résonances et des résidus associés.

Chapitre 4

Mise en œuvre numérique en dimension 2 d'espace

Nous avons établi dans les chapitres précédents un certain nombre de résultats qui font appel à des calculs exacts. Seulement, d'un point de vue purement numérique, le calcul exact des différentes quantités dont nous avons besoin, pour la méthode de décomposition en modes résonants, est hors d'atteinte. C'est pourquoi le problème (continu) de diffraction sera approché par un problème discret formulé dans un espace de dimension finie, ce qui conduira à la résolution d'un système linéaire.
L'ambition de ce chapitre est de mettre au point la méthode numérique qui va nous permettre de calculer le pendant discrétisé de l'opérateur résolvant D^b du problème réduit, les résonances et les résidus associés dans le cadre de la dimension 2 d'espace.
Pourquoi choisir la dimension 2 d'espace pour la mise en œuvre numérique ? La réponse à cette question est assez simple : la facilité. En effet les calculs dans le cadre bidimensionnel sont plus simples et la difficulté essentielle liée à la présence de la singularité logarithmique (extraction de la singularité et présence de la coupure, $\mathbb{R}^-$, dans le plan complexe) de la fonction de Green pour l'application de notre méthode de décomposition en modes résonants est déjà contenue dans le problème bidimensionnel.

1 Couplage éléments finis / éléments modaux

Nous allons dans cette section donner une formulation discrète de notre problème réduit. Cette discrétisation conduira naturellement à l'écriture d'un système matriciel.
Rappelons dans un premier temps notre problème variationnel (continu)

$$\left|\begin{array}{c}\text{Trouver } \boldsymbol{u} = (\hat{\eta}\,,\hat{\psi}) \in \boldsymbol{\mathcal{H}} \text{ tel que}\\ \underline{a}(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}') + c(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}'\,;\zeta) = l(\boldsymbol{u}')\\ \text{pour tout } \boldsymbol{u}' = (\hat{\eta}'\,,\hat{\psi}') \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\end{array}\right. \tag{4.1}$$

avec $\boldsymbol{\mathcal{H}} = H^2(P) \times L^2(P)$, $\zeta := -p^2$, $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et

$$\begin{aligned}
&\underline{a}(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}') = (\hat{\psi}\,,\hat{\psi}')_{0,P} + a_P(\hat{\eta}\,,\hat{\eta}')\,,\\
&c(\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{u}'\,;\zeta) = (\hat{\eta}\,,\hat{\psi}')_{0,P} + \zeta(G_\zeta\,,\overline{\hat{\psi}} \otimes \hat{\psi}')_{0,P\times P} - ((\gamma\zeta+1)\hat{\eta} + \hat{\psi}\,,\hat{\eta}')_{0,P}\,,\\
&l(\boldsymbol{u}') = (\hat{\tilde{\eta}}\,,\hat{\psi}')_{0,P} + \gamma\,(\hat{f}\,,\hat{\eta}')_{0,P}
\end{aligned}$$

où

$$(G_\zeta\,,\overline{\hat{\psi}} \otimes \hat{\psi}')_{0,P\times P} := \int_P \int_P \hat{\psi}(y)\, G_\zeta(x,y)\, \overline{\hat{\psi}'(x)}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(comme la fonction G est localement intégrable, cette dernière définition a bien un sens) et

$$\hat{\tilde{\eta}} = \tilde{R}(-p^2)\hat{f}\,.$$

Nous avons décidé de ne considérer que des excitations $\hat{f}$ à support compact pour des raisons numériques évidentes. L'onde libre se calcule alors à l'aide de la représentation intégrale de la résolvante du problème libre :

$$\hat{\tilde{\eta}}(x) = \int_{\mathrm{supp}(\hat{f})} \hat{f}(y)\, G_{-p^2}(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Pour réaliser une approximation numérique de notre formulation variationnelle, nous introduisons de façon standard une famille de sous-espaces $\boldsymbol{\mathcal{H}}_h$ de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ de dimension finie N_h. Le paramètre h est destiné à tendre vers zéro : en pratique, ce pas sera lié d'une part à la discrétisation du segment P (pour la discrétisation éléments finis) et d'autre part à un choix de troncature fixant le nombre d'éléments modaux. Notre sous-espace $\boldsymbol{\mathcal{H}}_h$ doit évidemment correspondre à une discrétisation de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, c'est-à-dire de $H^2(P) \times L^2(P)$. Il nous faut donc construire une discrétisation de $H^2(P)$ et une discrétisation de $L^2(P)$.
Concernant la discrétisation de l'espace $H^2(P)$, plutôt que de considérer des éléments finis de Hermite, nous optons pour le choix de la simplicité en retenant un sous-espace de $H^2(P)$ constitué d'un nombre fini N_1 de fonctions propres de l'opérateur $\mathbb{A}_P$. En effet, l'opérateur auto-adjoint $\mathbb{A}_P$ étant à résolvante compacte (l'injection canonique de $\mathscr{D}[a_P] = H^2(P)$ dans $L^2(P)$ est compacte), nous savons qu'il est diagonalisable sur une base de fonctions propres. L'ensemble de ces fonctions propres constitue une base de $H^2(P)$.
En ce qui concerne l'espace $L^2(P)$, nous en faisons une discrétisation standard à l'aide des éléments finis de Lagrange d'ordre 1, dont les éléments de base sont communément appelés "fonctions chapeau" : nous présentons sur la figure 1 le graphique d'une de ces fonctions de base associée au noeud d'indice i de la discrétisation $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N_2}\}$ de $P = [-1, 1]$.

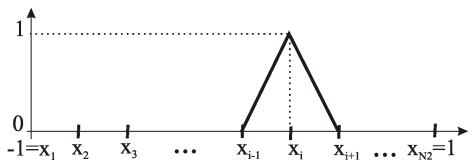

Fig. 1 – Graphe d'une fonction chapeau.

Bien entendu, n'importe quels éléments finis de Lagrange d'ordre $n \geq 0$, *i.e.* des fonctions dont la restriction à chaque sous intervalle de la subdivision de P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, auraient aussi bien fait l'affaire.
Nous définissons finalement le sous-espace $\boldsymbol{\mathcal{H}}_h$ de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ comme suit :

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_h := \left\{ \mathrm{w}_\mu \times w_j \,;\, 1 \leq \mu \leq N_1 \;\text{ et }\; 1 \leq j \leq N_2 \right\}, \quad \text{avec} \;\; N_h = N_1 + N_2\,,$$

où w_μ sont les fonctions propres normalisées de l'opérateur $\mathbb{A}_P$ et w_j sont les fonctions chapeau. L'inconnue $\boldsymbol{u} = (\hat{\eta}, \hat{\psi})$ s'écrit dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}_h$ comme suit $\boldsymbol{u}_h = (\hat{\eta}_h, \hat{\psi}_h)$ avec

$$\hat{\eta}_h(x) = \sum_{\mu=1}^{N_1} \hat{\eta}_\mu\, \mathrm{w}_\mu(x)\,, \quad \text{où} \;\; \hat{\eta}_\mu \in \mathbb{C}\,,$$

$$\hat{\psi}_h(x) = \sum_{j=1}^{N_2} \hat{\psi}_j\, w_j(x)\,, \quad \text{où} \;\; \hat{\psi}_j \in \mathbb{C}$$

et se représente par le vecteur ${}^t(\hat{\boldsymbol{\eta}}_h\,,\hat{\boldsymbol{\psi}}_h) \in \mathbb{C}^{N_h}$ tel que

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_h := \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\eta}_{N_1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{\psi}}_h := \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\psi}_{N_2} \end{pmatrix} .$$

Nous anticipons un peu, mais... il est clair que nous aurons besoin à un moment ou un autre de calculer l'onde incidente pour reconstituer la déflexion totale de la surface. Pour cette raison nous devons avoir calculé au préalable une estimation de notre onde incidente. Il semble alors naturel de projeter les fonctions $\hat{f}$ et $\hat{\tilde{\eta}}$ sur la base éléments finis. En effet, concernant $\hat{f}$ le choix est vite fait dès qu'on sait que $\hat{f}$ peut avoir une partie de son support à l'extérieur de la plaque ; pour ce qui est de $\hat{\tilde{\eta}}$ ce choix est une conséquence de la discrétisation de l'équation intégrale.
La formulation variationnelle (4.1) se récrit alors dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}_h$ sous la forme matricielle suivante

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{P,h} - (\gamma\,\zeta + 1)\mathbb{M}_{\mathrm{w}} & -\mathbb{C}^w_{\mathrm{w}} \\ {}^t\mathbb{C}^w_{\mathrm{w}} & \mathbb{M}_w + \zeta\mathbb{G}_\zeta \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}_h} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\eta}}_h \\ \hat{\boldsymbol{\psi}}_h \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma\mathbb{C}^w_{\mathrm{w}}\,\hat{\boldsymbol{f}}_h \\ \mathbb{M}_w\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}_h \end{pmatrix}}_{\mathbb{L}_h}$$

où

$$(\mathbb{A}_{P,h})_{\mu\nu} := a_P(\mathrm{w}_\nu\,,\mathrm{w}_\mu)\,,$$

$$(\mathbb{M}_{\mathrm{w}})_{\mu\nu} := (\mathrm{w}_\nu\,,\mathrm{w}_\mu)_{0,P}\,,$$

$$(\mathbb{C}^w_{\mathrm{w}})_{\mu j} := (w_j\,,\mathrm{w}_\mu)_{0,P}\,,$$

$$(\mathbb{M}_w)_{ij} := (w_j\,,w_i)_{0,P}\,,$$

$$(\mathbb{G}_\zeta)_{ij} := (G_\zeta\,,w_j \otimes w_i)_{0,P\times P}$$

et où le vecteur $\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}_h$ qui note la projection de $\hat{\tilde{\eta}}$ sur la base $\{w_j\}$ s'obtient comme suit :

$$\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}_h\right)_j := \hat{f}_j \int_{\mathrm{Supp}(\hat{f})} G_\zeta(\cdot\,,y)\,w_j^{\mathrm{Sf}}(y)\,\mathrm{d}y$$
$$\text{avec} \quad \hat{f}_h(x) = \sum_{j=1}^{N_2} \hat{f}_j\,w_j^{\mathrm{Sf}}(x)\,, \quad \text{où} \quad \hat{f}_j \in \mathbb{C}\,.$$

La famille $\{w_j^{\mathrm{Sf}}\}$ représente la base éléments finis de Lagrange d'ordre 1 construite sur le support de la fonction $\hat{f}$.

Remarque 4.1 *L'opérateur $\mathbb{A}_P$ étant auto-adjoint, ses fonctions propres sont orthogonales entre elles. Ce qui implique en particulier que*

$$\left(\mathbb{A}_{P,h} - (\gamma\,\zeta + 1)\mathbb{M}_{\mathrm{w}}\right)_{\nu\mu} = a_P(\mathrm{w}_\mu\,,\mathrm{w}_\nu) - (\gamma\zeta + 1)\,(\mathrm{w}_\mu\,,\mathrm{w}_\nu)_{0,P} = \{\lambda_\mu - (\gamma\zeta + 1)\}\,\delta^\nu_\mu$$

où λ_μ est la valeur propre de $\mathbb{A}_P$ associée à w_μ.

La notation δ_μ^ν désigne le symbole de Kronecker *: il vaut* 1 *si* $\mu = \nu$ *et* 0 *sinon. On trouvera le calcul explicite des fonctions propres de l'opérateur* $\mathbb{A}_P$ *à l'annexe B §1.*
Les matrices $\mathbb{M}_{\mathrm{w}}$ *et* $\mathbb{M}_w$ *sont des matrices de masse et la matrice* $\mathbb{C}_{\mathrm{w}}^w$ *est une matrice qui couple les deux discrétisations ; en d'autres termes, c'est elle qui réalise au niveau discret le couplage entre la plaque et le milieu fluide.*

Nous définissons également les matrices $\mathbb{J}_h$ et $\mathbb{K}_h(p)$ dont nous aurons besoin ultérieurement et qui constituent les pendants discrétisés des opérateurs $\mathbb{J}$ et $\mathbb{K}(p)$ respectivement :

$$\mathbb{J}_h \quad := \quad \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{P,h} & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_w \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{K}_h(p) \quad := \quad \begin{bmatrix} -(\gamma\,\zeta + 1)\mathbb{M}_{\mathrm{w}} & -\mathbb{C}_{\mathrm{w}}^w \\ {}^t\mathbb{C}_{\mathrm{w}}^w & \zeta\mathbb{G}_\zeta \end{bmatrix}.$$

Nous observons qu'étant données les propriétés de la forme $\underline{a}(\cdot\,,\cdot)$, la matrice $\mathbb{J}_h$ est symétrique et définie positive. Par contre la matrice $\mathbb{K}_h$ ne possède pas de propriété particulière.

La question se pose de savoir si notre problème approché est numériquement stable, c'est-à-dire si les solutions numériques que nous obtiendrons sont bien des approximations convergentes de la solution du problème continu. Cette question mérite que l'on s'y attarde un peu car la forme $b := \underline{a}+c$ n'est pas coercive sur $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. Il ne s'agit donc pas d'une situation classique que l'on peut régler par le théorème de Lax-Milgram. Notre cadre d'étude est un peu plus complexe et la théorie variationnelle habituelle ne suffit plus. En fait, il faut généraliser la théorie classique aux problèmes qui apparaissent comme des perturbations compactes de problèmes coercifs (l'opérateur $\mathbb{J}$ est défini positif et l'opérateur $\mathbb{K}$ est compact). En effet, non seulement b n'est pas coercive, mais tant la forme sesquilinéaire b que la forme anti-linéaire l sont sujettes à approximation et cela découle de l'approximation des données et des formules d'intégration numérique. Nous pouvons malgré tout obtenir un résultat similaire à celui décrit par la théorie classique comme le montre par exemple le livre de Aubin [6] ou le cours de Lenoir [54].

Nous allons maintenant donner les informations essentielles permettant la construction de la matrice $\mathbb{B}_h$ et du second membre $\mathbb{L}_h$. Puis nous montrerons comment nous obtenons les approximations numériques des résonances et des résidus associés. Ce qui nous permettra d'obtenir les termes η_D^h, $\eta_{\text{pôles}}^h$ et η_{cut}^h, approximations numériques de η_D, $\eta_{D\text{pôles}}$ et $\eta_{D\text{cut}}$ respectivement. Le terme $\eta_{D\text{reste}}$ étant approché par $\eta_D^h - \eta_{\text{pôles}}^h - \eta_{\text{cut}}^h$.

2 La résolvante approchée

Un premier point à noter est que contrairement aux matrices d'éléments finis correspondant à l'approximation d'équations aux dérivées partielles, la matrice $\mathbb{B}_h$ est pleine. Il est clair que d'un point de vue pratique, il nous faudra d'une part calculer les coefficients de $\mathbb{B}_h$ (pour construire la matrice $\mathbb{B}_h$) et d'autre part inverser $\mathbb{B}_h$ pour résoudre le système linéaire. L'inversion de la matrice $\mathbb{B}_h$ résulte de l'utilisation d'algorithmes d'algèbre linéaire classique. La matrice étant pleine nous privilégierons une méthode de Gauss.
Le calcul des coefficients de $\mathbb{B}_h$ pose des difficultés plus spécifiques aux équations intégrales. Il est clair que ce calcul ne peut être effectué exactement et qu'il faudra par conséquent faire appel à des méthodes de quadrature numérique. Il s'agit de formules permettant de calculer une valeur approchée

de l'intégrale d'une fonction continue donnée sur un intervalle donné. Pour notre part nous utilisons la formule de quadrature dite de Gauss-Legendre exacte pour un polynôme de degré 5.
Le calcul des matrices $\mathbb{A}_{P,h}$, $\mathbb{M}_{\mathrm{w}}$, $\mathbb{M}_w$ et $\mathbb{C}_{\mathrm{w}}^w$ s'effectue classiquement. Par contre l'intégrand, la fonction de Green, dans le calcul des coefficients de la matrice $\mathbb{G}_\zeta$ est une fonction singulière : nous savons[1] que la fonction de Green

$$G_\zeta(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos([x-y]\rho)}{\rho-\zeta}\,\mathrm{d}\rho$$

se récrit

$$G_\zeta(x,y) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta r} + \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta r}E_1(\mathrm{i}\zeta r) + \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta r}E_1(-\mathrm{i}\zeta r)\,, \quad \text{avec } r = |x-y| \tag{4.2}$$

où E_1 note l'exponentielle intégrale

$$E_1(z) := \int_z^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Cette fonction est connue pour admettre le développement suivant

$$E_1(z) = -\ln(z) + E_1^{\text{rég}}(z)$$

avec ln le logarithme complexe et $E_1^{\text{rég}}$ une fonction entière dont l'expression se trouve par exemple dans le manuel [3]. Par conséquent la fonction de Green se construira, à la lumière de l'expression (4.2), à l'aide de l'exponentielle intégrale.
Clairement, lorsque $r = |x-y|$ peut s'annuler, *i.e.* uniquement si les segments $S \ni x$ et $T \ni y$ de la subdivision de P ne sont pas disjoints, les coefficients de la matrice $\mathbb{G}_\zeta$ se calculeront à l'aide d'une formule d'intégration numérique. Dans le cas contraire nous utiliserons une formule d'extraction analytique de la singularité : il s'agit dans ce cas d'effectuer un calcul exact.

Extraction de la singularité L'extraction de la singularité logarithmique pour le calcul des coefficients de la matrice $\mathbb{G}_\zeta$ s'effectue selon le procédé suivant. Tout d'abord

$$\begin{aligned}(\mathbb{G}_\zeta)_{ij} &= (G_\zeta\,, w_j \otimes w_i)_{0,P\times P}\,,\\ &= \sum_m\sum_n (\mathbb{G}_\zeta)_{ij\,,\,mn}\end{aligned}$$

où

$$(\mathbb{G}_\zeta)_{ij\,,\,mn} := (G_\zeta\,, w_i \otimes w_j)_{0,S_m\times T_n}$$

avec S_m et T_n des segments de la subdivision de P appartenant au support de w_i et w_j respectivement. Maintenant si les segments S_m et T_n ne sont pas disjoints ou plus généralement s'ils sont voisins[2], nous décomposerons la fonction de Green en partie singulière et partie régulière. Ce choix conduit naturellement à calculer $(\mathbb{G}_\zeta)_{ij\,,\,mn}$ comme somme de $(\mathbb{G}_\zeta)_{ij\,,\,mn}^{\text{sing}}$ et $(\mathbb{G}_\zeta)_{ij\,,\,mn}^{\text{rég}}$ avec

$$(\mathbb{G}_\zeta)_{ij\,,\,mn}^{\text{sing}} := -\frac{1}{\pi}\left(\ln(|x-y|)\,, w_j(y)\otimes w_i(x)\right)_{0,S_m\times T_n}\,,$$

$$(\mathbb{G}_\zeta)_{ij\,,\,mn}^{\text{rég}} := (G_\zeta^{\text{rég}}\,, w_j \otimes w_i)_{0,S_m\times T_n}$$

[1] Ce point est développé dans la seconde partie de ce mémoire.
[2] Le terme 'voisin' signifiant que les segments peuvent être disjoints, mais tous deux dans la même boule de rayon prédéfini.

où la partie régulière est approchée numériquement à l'aide d'une méthode de quadrature numérique et le calcul de $(\mathbb{G}_\zeta)^{\text{sing}}_{ij\,,mn}$ s'effectue analytiquement à l'aide des formules établies à l'annexe B §2 en notant que, puisque w_i et w_j sont des fonctions de la base éléments finis de Lagrange, le calcul de $(\mathbb{G}_\zeta)^{\text{sing}}_{ij\,,mn}$ revient à celui d'une combinaison d'intégrales du type

$$\int_{x\in S_m}\int_{y\in T_n} x^q\, y^s\, \ln(|x-y|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,\ \ q \text{ et } s\in\mathbb{N}\,.$$

Deux mots sur l'onde incidente

Rappelons que l'onde libre se calcule à l'aide de la représentation intégrale suivante :

$$\hat{\tilde{\eta}}(x) = \int_{\text{supp}(\hat{f})} \hat{f}(y)\, G_{-p^2}(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Du fait de cette expression, nous devons extraire la singularité logarithmique de la fonction de Green pour calculer le second membre $\mathbb{L}_h$ du système linéaire.
Le principe de calcul doit paraître assez clair étant donné le paragraphe qui a précédé. Lorsque nous nous trouvons sur une subdivision T du support de $\hat{f}$ où la fonction de Green n'est pas singulière, *i.e.* $x\notin T$, nous appliquons une formule de quadrature numérique. Dans le cas contraire, nous décomposons la fonction de Green en partie régulière et partie singulière pour finalement calculer

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\text{supp}(\hat{f})} w_j^{\text{Sf}}(y)\ln(|x-y|)\,\mathrm{d}y$$

à l'aide de la formule analytique qui se trouve à l'annexe B §3 et

$$\int_{\text{supp}(\hat{f})} w_j^{\text{Sf}}(y)\, G_\zeta^{\text{rég}}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

par une formule d'intégration numérique.

3 La méthode de calcul des résonances et des modes associés

Nous allons, dans ce paragraphe, donner la méthode de calcul de nos résonances ainsi que des modes associés (modes dits à gauche) et des modes adjoints (modes dits à droite).

Principe général de calcul

Nous avons vu au chapitre précédent (théorème 3.37) que les résonances sont les fréquences complexes p_o du demi-plan complexe de gauche ($\Re e(p_o)<0$) pour lesquelles 0 est une valeur propre de $\mathbb{J}+\mathbb{K}(p_o)$. Donc p_o est une fréquence de résonance si et seulement si il existe $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}$ non nul tel que

$$(\mathbb{J}+\mathbb{K}(p_o))\boldsymbol{u}=0\,.$$

En d'autres termes, d'un point de vue pratique nous pouvons chercher les résonances numériques p_k soit comme solutions de

$$\left|\begin{array}{c}\text{Trouver } p_k\in\mathbb{C},\ \Re e(p_k)<0, \text{ tel que}\\ \det(\mathbb{J}_h+\mathbb{K}_h(p_k))=0\end{array}\right. \tag{4.3}$$

soit comme solutions du problème aux valeurs propres non linéaire

$$\left|\begin{array}{c}\text{Trouver } p_k\in\mathbb{C},\ \Re e(p_k)<0, \text{ tel que}\\ \mu(p_k)=-1\end{array}\right. \tag{4.4}$$

où μ est une valeur propre de $\mathbb{J}_h^{-1}\,\mathbb{K}_h$.
Nous verrons par la suite que la méthode choisie pour le calcul de μ repose sur une hypothèse simplificatrice : les valeurs propres μ sont simples. Nous n'avons aucune validation théorique du caractère simple des valeurs propres, bien que l'on puisse s'attendre à une situation générique où les pôles multiples correspondraient à des cas pathologiques ou découleraient des symétries du problème considéré. Nous avons eu de la chance car nous avons testé et validé numériquement cette hypothèse.
Bien évidemment aucun pôle n'existe dans le demi-plan complexe de droite étant donnée l'analyticité de la résolvante que nous avons d'ailleurs vérifiée numériquement. Pour résoudre ces problèmes, nous envisageons deux méthodes : une méthode basée sur l'intégrale de Cauchy, plus précisément le théorème de Rouché, pour résoudre (4.3) (nous avons ici en tête d'exploiter l'analyticité du déterminant) et une méthode basée sur la méthode itérative de Newton pour résoudre (4.4) (il s'agira ici de chercher les zéros de la fonction $\mu + 1$).

Il s'avère en fait nécessaire de coupler les deux méthodes car la méthode de l'intégrale de Cauchy est une méthode coûteuse qui va demander un soin tout particulier pour donner les pôles numériques avec une bonne précision : il faudra entre autre que le contour d'intégration ne contienne pas trop de pôles. Par contre la méthode de Newton est un procédé itératif qui converge rapidement et avec une bonne précision vers un pôle à la condition que le point initial soit suffisamment proche d'un pôle. En effet, on peut facilement manquer un pôle si le point initial n'est pas assez proche. En couplant les deux méthodes, on s'assure de ne manquer aucun pôle dans une région considérée tout en obtenant 'rapidement' une bonne approximation de leur position.

Nous envisageons donc dans un premier temps utiliser la méthode basée sur l'intégrale de Cauchy. Cette étape a pour objectif de fournir une estimation du nombre et de la position des pôles dans une région donnée du plan complexe. Puis nous affinons cette estimation des pôles à l'aide de la méthode de Newton couplée à la méthode de la puissance inverse. La méthode itérative de Newton nous fournira la position des résonances avec une meilleure précision tandis que la méthode de la puissance inverse nous donnera les modes associés.

3.1 La méthode de l'intégrale de Cauchy

La méthode de l'intégrale de Cauchy consiste à tirer profit, autant que faire se peut, de l'analyticité du déterminant de $\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h(p)$ vis-à-vis du paramètre de Laplace p (fréquence complexe). Nous savons parfaitement que s'agissant d'une matrice pleine, le calcul d'un déterminant est en général une affaire qu'il est préférable d'éviter (numériquement parlant). Nous verrons un peu plus loin que la quantité qui nous intéressera ne sera pas tant le déterminant $\det(\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h(p))$, mais sa dérivée logarithmique. Ouf... ! Cette quantité est nettement plus agréable à manipuler numériquement, d'autant plus que nous utiliserons une méthode originale et "peu coûteuse" pour l'évaluer sans jamais avoir à calculer le déterminant ni sa dérivée.

Le calcul des zéros de la fonction analytique[3] $\det(\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h(p))$ va se baser sur le résultat d'analyse complexe suivant que l'on peut trouver par exemple dans le livre de Knopp [48] : il s'agit d'une combinaison du théorème des résidus et de la formule intégrale de Cauchy.

Lemme 4.2 *Soit g et q deux fonctions holomorphes dans $\mathscr{O}$. Supposons que $\mathscr{C} \subset \mathscr{O}$ est un chemin fermé. Si q ne s'annule pas sur $\mathscr{C}$ et possède au plus un nombre fini de zéros dans l'intérieur de $\mathscr{C}$,*

[3] Pour un exposé complet sur les méthodes de calcul des zéros d'une fonction analytique, on peut consulter les notes de Kravanja et Van Barel [49]

noté $\overset{\circ}{\mathscr{C}}$, *alors*

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{C}} g(z)\,\frac{q'(z)}{q(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{\text{zéro } s\in\overset{\circ}{\mathscr{C}} \text{ de } q} g(s)\,.$$

Chaque zéro est compté avec sa multiplicité.

Nous allons appliquer ce résultat aux fonctions $g_k(z) := z^k$, pour $k = 1\ldots n$, et à la fonction analytique $q(z) := \det(\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h(z))$ en supposant que q possède n zéros dans $\overset{\circ}{\mathscr{C}}$ notés z_i, $i = 1\ldots n$. En nous appuyant sur l'identité de Newton (voir Carpentier et Dos Santos [17]), nous allons construire un polynôme dont les zéros sont justement les zéros de $\det(\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h(z))$ dans la région désignée, et qu'il "suffira" de résoudre.

Lemme 4.3 *Soit les quantités* s_j, $j = 1\ldots n$, *définies par*

$$s_j := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{C}} z^j\,\frac{q'(z)}{q(z)}\,\mathrm{d}z\,.$$

Alors

- $s_j = \sum_{k=1}^n z_k^j$ *(lemme précédent) ;*
- *le polynôme associé, de degré* n, *s'écrit*

$$P_n(z) := \prod_{k=1}^n (z - z_k) =: z^n + \sigma_1 z^{n-1} + \ldots + \sigma_n \tag{4.5}$$

où les coefficients σ_j *sont définis par l'identité de* Newton

$$\left|\begin{array}{l} s_1 + \sigma_1 = 0 \\ \\ s_2 + s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0 \\ \vdots \\ s_n + s_{n-1}\sigma_1 + \ldots + s_1\sigma_1 + n\sigma_n = 0 \end{array}\right. \tag{4.6}$$

Le point faible de cette démarche est que plus la région désignée contient de zéros, plus le degré du polynôme associé est élevé et plus le calcul des zéros du polynôme P_n est mal conditionné : l'application qui relie les coefficients s_j aux coefficients σ_j est mal conditionnée. En d'autres termes, une petite erreur sur les coefficients s_j peut entraîner une erreur conséquente sur les coefficients σ_j et par la suite causer une importante erreur sur le calcul des zéros z_j du polynôme P_n. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire, pour des raisons de précision des calculs, de considérer des régions où il n'y a pas "trop" de zéros quitte à subdiviser la région initialement désignée[4].

[4] C'est à partir de ce constat que nous nous sommes intéressés à une alternative permettant de balayer une "grande" région sans devoir éventuellement la subdiviser pour limiter le degré du polynôme sous-jacent. Tien-Yen Li décrit dans son article [55] une méthode stable permettant de résoudre directement le système

$$\left|\begin{array}{l} z_1 + z_2 + \ldots + z_n = s_1 \\ \\ z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 = s_2 \\ \vdots \\ z_1^n + z_2^n + \ldots + z_n^n = s_n \end{array}\right.$$

Comment évaluer la dérivée logarithmique de $L(p) = \det(\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h(p))$?

Toute l'astuce consiste à évaluer $\mathrm{d}_p L/L$ sans jamais calculer $\mathrm{d}_p L$ et L. Si nous considérons l'expression suivante $L(p) = \prod_{j=1}^{N_h} \lambda_j^h(p)$ alors

$$\frac{\mathrm{d}_p L(p)}{L(p)} = \sum_{j=1}^{N_h} \frac{\mathrm{d}_p \lambda_j^h(p) \prod_{k\neq j} \lambda_k^h(p)}{\lambda_j^h(p) \prod_{k\neq j} \lambda_k^h(p)} = \sum_{j=1}^{N_h} \frac{\mathrm{d}_p \lambda_j^h(p)}{\lambda_j^h(p)} .$$

Cette écriture n'est intéressante que si l'on est en mesure de calculer 'sans trop de difficulté' les valeurs λ_j^h ainsi que leur dérivée. Nous remarquons, ou plutôt nous nous souvenons car il s'agit d'un résultat classique, qu'une factorisation LU de la matrice $\mathbb{B}_h$ nous donne accès aux quantités λ_j^h : ce sont les termes diagonaux de la factorisation. Nous pouvons alors nous demander si une modification de l'algorithme de factorisation LU ne nous permettrait pas d'accéder également aux quantités $\mathrm{d}_p \lambda_j^h$. C'est exactement l'idée qu'a suivie Labreuche dans sa thèse [50] et qui l'a conduit à différencier analytiquement l'algorithme de factorisation LU.
Partant des matrices $\mathbb{B}_h$ et $\mathrm{d}_p \mathbb{B}_h = \mathrm{d}_p \mathbb{K}_h$ (laquelle se calcule sans difficulté supplémentaire comparativement au calcul de $\mathbb{B}_h$, comme nous le verrons dans la suite) il nous suffit d'appliquer l'algorithme décrit au tableau 4.1 pour obtenir la dérivée logarithmique de $\det(\mathbb{B}_h(p))$.

3.2 La méthode Newton–puissance inverse

La méthode Newton–puissance inverse à deux objectifs à réaliser : calculer plus précisément les pôles fournis par la méthode de l'intégrale de Cauchy et calculer les modes résonants associés. Cette méthode suit la logique suivante :

1. Récupérer une valeur initiale p_o fournie par la méthode de l'intégrale de Cauchy : approximation d'un pôle.

2. Calculer la valeur propre $\mu^h(p_o)$ de $\mathbb{J}_h^{-1}\mathbb{K}_h(p_o)$ la plus proche de -1. Cette tâche est accomplie à l'aide de la méthode de la puissance inverse qui fournit par la même occasion les modes à gauche et à droite (mode adjoint).

3. Construire une nouvelle valeur p_j destinée à faire de $\mu^h(p_j)$ la valeur propre -1 de $\mathbb{J}_h^{-1}\mathbb{K}_h(p_j)$. Cette tâche est réalisée à l'aide de la méthode itérative de Newton.

4. On reprend le processus à l'étape 2 avec $p_o = p_j$ jusqu'à convergence.

Bien que les méthodes de la puissance inverse et de Newton soient relativement bien connues, nous allons brièvement en rappeler les algorithmes.

---

sans jamais former le polynôme (4.5). Sa méthode est basée sur une technique de prolongement homotopique qui conduit à la résolution d'une équation différentielle ordinaire (il s'agit alors de suivre un chemin pour trouver les zéros). Une autre alternative développée par Kravanja et Van Barel [49], consiste à traiter séparément cette fois-ci les zéros et leur multiplicité. Dans un premier temps, les zéros (distincts) sont calculés en résolvant un problème aux valeurs propres généralisé. Puis les multiplicités respectives sont calculées en résolvant un système de Vandermonde.
Malheureusement ces méthodes, très originales, nécessitent de faire des calculs suffisamment précis sur des "grandes" régions (l'idée étant d'englober un maximum de zéros à la fois). Ne disposant pas d'une puissance de calcul suffisante pour calculer avec assez de précision, sur des régions qui contiennent plus de 3 ou 4 pôles, les quantités s_j également requises pour ces deux dernières méthodes, nous nous sommes contentés de la première méthode.

Algorithme de calcul de $\mathrm{d}_p \det(\mathbb{B}_h(p))/\det(\mathbb{B}_h(p))$	
Donner les matrices $\mathrm{d}\mathbb{B} := \mathrm{d}_p\mathbb{B}_h(p)$ et $\mathbb{B} := \mathbb{B}_h(p)$	Ces deux matrices seront modifiées comme dans l'algorithme de factorisation LU
— Initialisation des pivots — Pour $K = 1, N_h$ faire IPIV(K) = K Fin Pour K	Vecteur des permutations
— Boucle principale — Pour $K = 1, N_h$	
$K_p = K$ maxB = abs($\mathbb{B}$(IPIV(K),K)) Pour ① $J = K + 1, N_h$ mB = abs(IPIV(J),K)) Tant que mB $\leq$ maxB Aller à ① K_p = J maxB = mB Fin Pour J	Recherche du pivot
I_p = IPIV(K) IPIV(K) = IPIV(K_p) IPIV(K_p) = I_p K_p = IPIV(K) PIVINV = 1 / $\mathbb{B}$(K_p,K) Pour $I = K + 1, N_h$ I_p = IPIV(I) C = $\mathbb{B}$(I_p,K) Cprime = (d$\mathbb{B}$(I_p,K)*$\mathbb{B}$(K_p, K)- $\mathbb{B}$(I_p,K)*d$\mathbb{B}$(K_p,K))* PIVINV^2 $\mathbb{B}_h$(I_p,K) = C d$\mathbb{B}$(I_p,K) = Cprime Pour $J = K + 1, N_h$ $\mathbb{B}$(I_p,J) = $\mathbb{B}$(I_p,J) - C * $\mathbb{B}$(K_p,J) d$\mathbb{B}$(I_p,J) = d$\mathbb{B}$(I_p,J) - C * d$\mathbb{B}$(K_p,J) - Cprime * $\mathbb{B}$(K_p,J) Fin Pour J Fin Pour I Fin Pour K	On fait la transformation autour du pivot
— Calcul du rapport $R = \frac{\mathrm{d}_p \det(\mathbb{B}_h(p))}{\det(\mathbb{B}_h(p))}$ — R = 0 Pour $K = 1, N_h$ R = R + d$\mathbb{B}$(IPIV(K),K) / $\mathbb{B}$(IPIV(K),K) Fin Pour K	

Tab. 4.1 – Modification de la factorisation LU.

La méthode de la puissance inverse

Il s'agit de calculer la valeur propre $\mu^h(p)$ de $\mathbb{J}_h^{-1}\mathbb{K}_h(p)$ la plus proche de -1. À savoir, résoudre le problème aux valeurs propres généralisé suivant

$$\left|\begin{array}{c}\text{Trouver la plus proche valeur } \mu \text{ de } -1 \text{ telle que}\\ \text{il existe } \boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_h \text{ non nulle et}\\ \mathbb{K}_h\,\boldsymbol{u}_h = \mu\,\mathbb{J}_h\,\boldsymbol{u}_h\,.\end{array}\right.$$

Pour ce faire, nous généralisons le processus de la puissance inverse dont l'algorithme de résolution figure au tableau 4.2.

Algorithme de la puissance inverse généralisée	
Vecteur initial non nul y Pour $K = 1, 2, \ldots$ $\mathrm{w} = \mathbb{J}_h \mathrm{y}$ $Ny = (\mathrm{w}^*\mathrm{y})^{1/2}$, $\mathrm{v} = \mathrm{y}\ /\ Ny$ $\mathrm{w} = \mathrm{w}\ /\ Ny$ $\mathrm{y} = (\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h)^{-1}\mathrm{w}$ ici $\theta = \mathrm{w}^*\mathrm{y}$	 On normalise y par rapport au produit scalaire $(\mathbb{J}_h\cdot\,,\cdot)$ On résout le système $\mathbb{B}_h\mathrm{y} = \mathrm{w}$ θ désigne le quotient de Rayleigh $\theta = (\mathrm{y},\mathrm{w})$ $= (\mathbb{B}_h^{-1}\mathrm{w},\mathrm{w}) = ([\mathbb{B}_h^{-1}\mathbb{J}_h]\mathrm{v}\,,\mathbb{J}_h\mathrm{v})$
Si $\lVert \mathrm{y}/\theta - \mathrm{v}\rVert < \epsilon_{\text{fixé}}$ Stop Sortie : – valeur propre acceptée : $\mu = -1 + 1/\theta$; – vecteur propre acceptée : y/θ.	Test du vecteur résiduel

Tab. 4.2 – Algorithme de la puissance inverse généralisée.

Le processus précédent nous donne donc d'une pierre deux coups, la valeur propre de $\mathbb{J}_h^{-1}\mathbb{K}_h$ la plus proche de -1 et le vecteur propre (à droite) associé. Pour obtenir le vecteur propre à gauche (adjoint), il suffit de remplacer à l'étape ici la matrice $\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h$ par la matrice $\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h^*$ (son adjoint).

La méthode itérative de Newton

Le processus de Newton est somme toute assez simple. C'est une méthode de recherche des zéros d'une fonction basée sur la linéarisation de cette dernière, dont nous donnons l'algorithme au tableau 4.3. Nous rappelons qu'ici, il s'agit de construire une séquence de valeurs p_j qui font de μ la valeur propre -1 de $\mathbb{J}_h^{-1}\mathbb{K}_h$.

Algorithme de Newton	
Point initial p_o	Valeur fournie par la méthode de l'intégrale de Cauchy
a $p_{j+1} = p_j - \frac{\mu(p_j)+1}{\mathrm{d}_p\mu(p_j)}$	La valeur propre $\mu(p_j)$ de $\mathbb{J}_h^{-1}\mathbb{K}_h(p_j)$ la plus proche de -1 est fournie par la méthode de la puissance inverse
Tant que $\lvert p_{j+1} - p_j\rvert > \epsilon_{\text{fixé}}$ Retourner à a	

Tab. 4.3 – Algorithme de Newton.

À la lumière de cet algorithme, la question se pose de savoir comment nous allons évaluer $\mathrm{d}_p\mu(p_j)$ à chaque itération. Comme μ est une valeur propre supposée simple (p est un pôle simple), la dérivée $\mathrm{d}_p\mu$ s'obtient assez simplement dès lors que l'on sait calculer la matrice $\mathrm{d}_p\mathbb{K}_h$:

Proposition 4.4 *Soit $\boldsymbol{u}^d$ et $\boldsymbol{u}^g$ les vecteurs propres à droite et à gauche de $\mathbb{J}_h^{-1}\mathbb{K}_h$ associés à la valeur propre simple μ :*

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_h\,\boldsymbol{u}^d &= \mu\,\mathbb{J}_h\,\boldsymbol{u}^d\,, \\ \mathbb{K}_h^*\,\boldsymbol{u}^g &= \overline{\mu}\,\mathbb{J}_h\,\boldsymbol{u}^g \end{aligned} \tag{4.7}$$

où $(\cdot\,,\cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien. Si nous choisissons $\boldsymbol{u}^g$ tel que

$$(\mathbb{J}_h\boldsymbol{u}^d\,,\boldsymbol{u}^g) = 1$$

alors

$$\mathrm{d}_p\mu(p) = (\mathrm{d}_p\mathbb{K}_h(p)\boldsymbol{u}^d\,,\boldsymbol{u}^g)\,.$$

Démonstration. Dérivons l'expression (4.7)

$$\mathrm{d}_p\mathbb{K}_h\,\boldsymbol{u}^d + \mathbb{K}_h\,\mathrm{d}_p\boldsymbol{u}^d = \mathrm{d}_p\mu\,\mathbb{J}_h\,\boldsymbol{u}^d + \mu\,\underbrace{\mathrm{d}_p\mathbb{J}_h}_{=0}\,\boldsymbol{u}^d + \mu\,\mathbb{J}_h\,\mathrm{d}_p\boldsymbol{u}^d\,.$$

Si maintenant nous prenons le produit scalaire de l'expression précédente avec $\boldsymbol{u}^g$, nous obtenons

$$(\mathrm{d}_p\mathbb{K}_h\,\boldsymbol{u}^d\,,\boldsymbol{u}^g) + (\mathrm{d}_p\boldsymbol{u}^d\,,\underbrace{(\mathbb{K}_h^* - \overline{\mu}\,\mathbb{J}_h)\,\boldsymbol{u}^g}_{=0}) = \mathrm{d}_p\mu\,(\mathbb{J}_h\,\boldsymbol{u}^d\,,\boldsymbol{u}^g)\,.$$

Nous en déduisons alors le résultat. □

Il ne nous reste plus qu'à discuter du calcul de $\mathrm{d}_p\mathbb{K}_h$. Nous allons voir que le calcul de la dérivée de la matrice $\mathbb{K}_h$ dépend (évidemment) de la fonction de Green et de sa dérivée, mais surtout que cette dernière s'obtient aisément (numériquement parlant) dès lors que l'on sait calculer la fonction de Green. En d'autres termes les techniques mises en place pour calculer G permettent également le calcul de d_pG et par conséquent celui de $\mathrm{d}_p\mathbb{K}_h$.

Calcul de la matrice $\mathrm{d}_p\mathbb{K}_h$

Rappelons que la matrice $\mathbb{K}_h$ est définie par : pour tous $\boldsymbol{u}_h = (\hat{\eta}_h\,,\hat{\psi}_h)$ et $\boldsymbol{u}'_h = (\hat{\eta}'_h\,,\hat{\psi}'_h)$ appartenant à $\boldsymbol{\mathcal{H}}_h$

$$(\mathbb{K}_h(p)\,\boldsymbol{u}_h\,,\boldsymbol{u}'_h) = (\hat{\eta}_h\,,\hat{\psi}'_h)_{0,P} - ((1-\gamma p^2)\hat{\eta}_h + \hat{\psi}_h\,,\hat{\eta}'_h)_{0,P} - p^2(G_{-p^2}\,,\overline{\hat{\psi}_h}\otimes\hat{\psi}'_h)_{0,P\times P}\,.$$

Par conséquent

$$(\mathrm{d}_p\mathbb{K}_h(p)\,\boldsymbol{u}_h\,,\boldsymbol{u}'_h) = (\mathrm{d}_p[-p^2G_{-p^2}]\,,\overline{\hat{\psi}_h}\otimes\hat{\psi}'_h)_{0,P\times P} + 2\,p\,\gamma\,(\hat{\eta}_h\,,\hat{\eta}'_h)_{0,P}\,.$$

Nous voyons alors clairement que le calcul de la dérivée de la matrice $\mathbb{K}_h$ est subordonné à celui de la dérivée de $-p^2G_{-p^2}$. Heureusement, nous avons une expression (4.2) fort commode de la fonction G à partir de laquelle nous pouvons déduire sans difficulté une expression de la dérivée de la fonction de Green connaissant celle de $\mathrm{e}^zE_1(z)$:

$$\mathrm{d}_z[\mathrm{e}^zE_1(z)] = \mathrm{e}^zE_1(z) - \frac{1}{z}\,.$$

Le point fort appréciable, ici, est que l'expression de la dérivée de $-p^2G_{-p^2}$ n'apporte aucune difficulté supplémentaire par rapport au calcul de la fonction de Green puisque nous avons essentiellement besoin du calcul de l'exponentielle intégrale. Nous pouvons même constater que la fonction $\mathrm{d}_pG_{-p^2}$ est continue.

4 La méthode de calcul des résidus

Rappelons que nous avons fait l'hypothèse que les résonances sont des pôles simples de multiplicité 1 du prolongement méromorphe de la résolvante. En d'autres termes, -1 est une valeur propre simple de $\mathbb{J}_h^{-1}\mathbb{K}_h(p)$ lorsque p est une résonance. Une conséquence immédiate de cette hypothèse est que les résidus $\eta_k(t)$ s'expriment sous la forme $\mathrm{e}^{p_k t}\,\eta_k$:

$$\eta_{D_{\text{pôles}}}(t) = \sum_{p_k \in \{\Re e(p) > p_0\}} \mathrm{e}^{p_k t}\,\eta_k\,.$$

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que si nous connaissons la position d'une résonance p_k, alors nous pouvons calculer η_k à l'aide des modes à gauche et à droite (adjoint) associés à p_k.

Nous allons maintenant exposer la technique sur laquelle nous nous appuyons et qui résulte de la théorie de perturbation exposée dans l'article de Hazard, Lenoir et Vullierme-Ledard [53], lequel reprend les résultats décrits dans le livre de Kato [47].
De part la propriété de prolongement de la fonction de Green, les opérateurs $\mathbb{L}_h(p)$ et $\mathbb{K}_h(p)$ sont holomorphes au voisinage d'un pôle p_k. Nous en déduisons les développements en séries de Laurent suivants :

$$\mathbb{L}_h(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p-p_k)^n \mathbb{L}^{(n)}\,,$$

$$\mathbb{K}_h(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p-p_k)^n \mathbb{K}^{(n)} \quad \text{et}$$

$$D_h^b(p) = (\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h(p))^{-1} = \sum_{n=-1}^{+\infty} (p-p_k)^n D^{b^{(n)}}$$

où nous avons en particulier $\mathbb{L}^{(0)} := \mathbb{L}_h(p_k)$ et $\mathbb{K}_h^{(0)} := \mathbb{K}_h(p_k)$. Ainsi la solution du problème réduit discrétisé $\boldsymbol{u}_h(p) = (\hat{\eta}_h\,, \hat{\psi}_h) = D_h^b(p)\mathbb{L}_h(p)$ admet le développement en série de Laurent suivant :

$$\boldsymbol{u}_h(p) = \sum_{n=-1}^{+\infty} (p-p_k)^n \boldsymbol{u}^{(n)}$$

$$\text{avec} \quad \boldsymbol{u}^{(-1)} := D_h^{b\,(-1)}\mathbb{L}^{(0)}\,.$$

C'est de ce dernier terme, $\boldsymbol{u}^{(-1)}$ (le résidu), que nous chercherons une expression explicite.

Remarque 4.5 *Comme $\boldsymbol{u}_h = (\hat{\eta}_h\,, \hat{\psi}_h)$, alors η_k correspond à la "première composante" de $\boldsymbol{u}^{(-1)}$.*

Lemme 4.6 *Posons $\boldsymbol{e}_1$ le vecteur de base du sous-espace propre associé à la valeur propre simple -1 de l'opérateur $\mathbb{U}_h := \mathbb{J}_h^{-1}\mathbb{K}_h$:*

$$\mathbb{K}_h\,\boldsymbol{e}_1 = -\mathbb{J}_h\,\boldsymbol{e}_1\,;$$

et soit $\boldsymbol{g}_1$ le vecteur propre adjoint :

$$\mathbb{K}_h^*\,\boldsymbol{g}_1 = -\mathbb{J}_h\,\boldsymbol{g}_1\,,$$

où $\mathbb{K}_h^*$ désigne l'adjoint de $\mathbb{K}_h$, tels que

$$(\mathbb{J}_h\boldsymbol{e}_1\,, \boldsymbol{g}_1) = 1\,.$$

La notation $(\cdot\,,\cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien. Le résidu admet alors l'expression suivante :

$$\boldsymbol{u}^{(-1)} = \frac{(\mathbb{L}^{(0)}\,, \boldsymbol{g}_1)}{(\mathbb{K}^{(1)}\boldsymbol{e}_1\,, \boldsymbol{g}_1)}\;\boldsymbol{e}_1\,. \tag{4.8}$$

Démonstration. L'opérateur $\mathbb{U}_h(p) := \mathbb{J}_h^{-1}\mathbb{K}_h(p)$ admet au voisinage du pôle p_k le développement en série de Laurent suivant :

$$\mathbb{U}_h(p) = \sum_{n=0}^{+\infty}(p-p_k)^n\mathbb{U}^{(n)}$$
$$\text{avec} \quad \mathbb{U}^{(n)} := \mathbb{J}_h^{-1}\mathbb{K}^{(n)}\,.$$

Soient $\mu_j(p)$, $j = 1\dots K$, les valeurs propres de $\mathbb{U}_h(p)$ pour $p \neq p_k$ et $\mathbb{P}_j(p)$ les projections spectrales associées. Nous savons alors qu'un pôle p_k fait de -1 une valeur propre de $\mathbb{U}_h$. Supposons que

$$\mu_1 \to -1 \quad \text{quand} \quad p \to p_k\,.$$

Alors en notant

$$(\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h(p))^{-1} = (\mathbb{I}_h + \mathbb{U}_h(p))^{-1}\mathbb{J}_h^{-1}$$

où $\mathbb{I}_h$ désigne la matrice identité, nous pouvons récrire D_h^b comme suit

$$D_h^b(p) = D_{\text{sing}}^b(p) + D_{\text{rég}}^b(p)$$

avec

$$D_{\text{sing}}^b(p) := \frac{\mathbb{P}_1(p)\mathbb{J}_h^{-1}}{1+\mu_1(p)} \quad \text{et} \quad D_{\text{rég}}^b(p) := \sum_{j=2}^{K}\frac{\mathbb{P}_j(p)\,\mathbb{J}_h^{-1}}{1+\mu_j(p)}\,.$$

Bien entendu, $D_{\text{rég}}^b$ est régulier (holomorphe) au voisinage d'un pôle p_k.
Les pôles étant simples, nous savons par la théorie de Kato [47] que $\mu_1(p)$ et $\mathbb{P}_1(p)$ sont holomorphes au voisinage de $p = p_k$:

$$\mu_1(p) = -1 + (p-p_k)\mu^{(1)} + O(p-p_k)$$
$$\mathbb{P}_1(p) = \mathbb{P} + O(1)$$

avec

$$\mu^{(1)} = \text{tr}[\mathbb{U}^{(1)}\,\mathbb{P}]$$

où $\mathbb{P}$ est la projection spectrale associée à $\mathbb{U}^{(0)}$. Comme p_k est un pôle simple, on a notamment $\mu^{(1)} \neq 0$ et donc

$$\begin{aligned} D_{\text{sing}}^b(p) &= \frac{\mathbb{P}\,\mathbb{J}_h^{-1}}{(p-p_k)\mu^{(1)}} + O(1) \\ &= \frac{D^{b^{(-1)}}}{p-p_k} + O(1) \end{aligned}$$

De plus, la projection spectrale $\mathbb{P}$ peut s'exprimer à l'aide des vecteurs propres à gauche et à droite :

$$\mathbb{P}\,\boldsymbol{v} = (\mathbb{J}_h\,\boldsymbol{v}\,,\boldsymbol{g}_1)\,\boldsymbol{e}_1\,.$$

Nous en déduisons alors la trace de l'opérateur $\mathbb{U}^{(1)}\mathbb{P}$:

$$\mu^{(1)} = (\mathbb{J}_h\,\mathbb{U}^{(1)}\boldsymbol{e}_1\,,\boldsymbol{g}_1) = (\mathbb{K}^{(1)}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{g}_1)\,.$$

Il est alors aisé de conclure :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{(-1)} = D^{b^{(-1)}}\mathbb{L}^{(0)} &= \frac{\mathbb{P}\,\mathbb{J}_h^{-1}\,\mathbb{L}^{(0)}}{\mu^{(1)}} \\ &= \frac{(\mathbb{L}^{(0)}\,,\boldsymbol{g}_1)}{(\mathbb{K}^{(1)}\,\boldsymbol{e}_1\,,\boldsymbol{g}_1)}\,\boldsymbol{e}_1\,. \end{aligned}$$

□

Nous considérons également en parallèle la technique suivante qui utilise l'intégrale de CAUCHY (1.6) pour tester et valider le code de calcul que nous développerons et qui sera basé sur la technique de perturbation que nous venons de décrire.

PROPOSITION 4.7 *Soit $p_k \in \{p \in \mathbb{C}\,;\, \Re e(p) < 0\}$ un pôle numérique (simple) du prolongement méromorphe de l'opérateur résolvant $D_h^b(p)$ du problème réduit discrétisé*

$$D_h^b(p) := (\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h)^{-1}(p)\,.$$

Alors le résidu numérique η_k associé à p_k est donné par la formule

$$\eta_k = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\left[\int_{\odot_k} D_h^b(p)\,\mathrm{d}p\right]\mathbb{L}_h(p_k)$$

où $\int_{\odot_k}$ désigne l'intégration sur un contour fermé ne contenant que le pôle p_k.

REMARQUE 4.8 *Nous n'effectuerons nos intégrales de* CAUCHY *que sur des domaines rectangulaires pour des raisons de simplicité uniquement. Pour cela, nous découperons notre contour rectangulaire en quatre segments et nous considérerons la somme des intégrales sur chacun des segments. Considérons un chemin $\mathscr{C}$ du plan complexe, une fonction g et une fonction θ telle que $\theta(I) = \mathscr{C}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et*

$$\int_{\mathscr{C}} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_I g(\theta(t))\,\theta'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Lorsque $\mathscr{C}$ est un segment parallèle à l'un des axes, la fonction θ et sa dérivée sont très simples à calculer.

5 Calcul des divers termes de la méthode de décomposition

Nous allons maintenant recueillir le fruit de nos efforts pour montrer comment s'obtiennent les différents termes que nous donne la méthode de décomposition en modes résonants.
Commençons par l'estimation du terme $\eta^h_{\text{pôles}}$, approximation numérique du terme $\eta_{D_{\text{pôles}}}$:

$$\eta^h_{\text{pôles}}(t) = \sum_{p_k} \mathrm{e}^{p_k t}\,\frac{(\mathbb{L}_h(p_k)\,,\boldsymbol{g}_k)}{(\mathrm{d}_p\mathbb{K}_h(p_k)\boldsymbol{e}_k\,,\boldsymbol{g}_k)}\,\pi_1^h\boldsymbol{e}_k$$

où $\boldsymbol{e}_k$ et $\boldsymbol{g}_k$ notent respectivement les modes résonants et les modes adjoints associés aux résonances p_k. L'opérateur π_1^h désigne la projection sur les N_1 premières composantes correspondant aux coordonnées de $\boldsymbol{e}_k$ dans la base $\{\mathrm{w}_\mu\}$.
Qu'en est-il du calcul de l'estimation η^h_{cut} du terme $\eta_{D_{\text{cut}}}$? Le calcul de ce terme nécessite dans un premier temps de résoudre le système linéaire

$$\mathbb{B}_h(p)\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{h}}\\ \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{h}}\end{pmatrix} = \mathbb{L}_h(p)$$

puis d'intégrer $\hat{\eta}_h$ sur un chemin du plan complexe contournant la coupure, $\mathbb{R}^-$:

$$\eta^h_{\text{cut}}(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\oint_{\mathscr{C}_{\text{Cut}}} \mathrm{e}^{pt}\,\hat{\eta}_h(p)\,\mathrm{d}p\,.$$

Pour cela, nous découperons le chemin d'intégration en trois segments parallèles aux axes pour des raisons de simplicité (uniquement) comme le montre la figure 2.

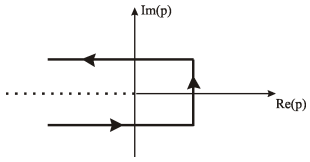

FIG. 2 – Chemin considéré pour la coupure.

Enfin, nous évaluerons la quantité η^h_{reste} approximation numérique du terme $\eta_{D\text{reste}}$ à l'aide de la relation

$$\eta^h_{\text{reste}} = \eta^h_D - \eta^h_{\text{pôles}} - \eta^h_{\text{cut}} \,.$$

Il nous faut donc calculer l'approximation η^h_D de la solution η_D fournie par la méthode de la transformée de LAPLACE que nous considérerons par ailleurs comme solution de référence pour tester notre méthode de décomposition en modes résonants.
Il s'agit donc de calculer une approximation numérique de la transformée de LAPLACE inverse de la résolvante le long d'un chemin $p_0 + \mathrm{i}\mathbb{R}$ avec p_0 positif

$$\eta_D(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{p_0+\mathrm{i}\mathbb{R}} \mathrm{e}^{pt} D(-p^2)\hat{f}(p)\,\mathrm{d}p \simeq \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{p_0+\mathrm{i}\mathbb{R}} \mathrm{e}^{pt}\hat{\eta}_h(p)\,\mathrm{d}p = \eta^h_D(t)\,.$$

Enfin, pour des raisons de symétrie les quantités η^h_{cut} et η^h_D (et donc aussi η^h_{reste}) seront obtenues en n'effectuant l'intégration que sur la moitié du chemin. Par exemple pour le calcul de η^h_D nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{p_0+\mathrm{i}\mathbb{R}} \mathrm{e}^{pt} D(-p^2)\hat{f}(p)\,\mathrm{d}p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{(p_0+\mathrm{i}\sigma)t} D(-(p_0+\mathrm{i}\sigma)^2)\hat{f}(p_0+\mathrm{i}\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,, \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(p_0+\mathrm{i}\sigma)t} D(-(p_0+\mathrm{i}\sigma)^2)\hat{f}(p_0+\mathrm{i}\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{(p_0+\mathrm{i}\sigma)t} D(-(p_0+\mathrm{i}\sigma)^2)\hat{f}(p_0+\mathrm{i}\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,, \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \Big[\mathrm{e}^{(p_0+\mathrm{i}\sigma)t} D(-(p_0+\mathrm{i}\sigma)^2)\hat{f}(p_0+\mathrm{i}\sigma) \\
&\qquad + \mathrm{e}^{(p_0-\mathrm{i}\sigma)t} D(-(p_0-\mathrm{i}\sigma)^2)\hat{f}(p_0-\mathrm{i}\sigma)\Big]\,\mathrm{d}\sigma\,, \\
&= \frac{1}{\pi}\,\Re e\left[\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(p_0+\mathrm{i}\sigma)t} D(-(p_0+\mathrm{i}\sigma)^2)\hat{f}(p_0+\mathrm{i}\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right]\,.
\end{aligned}$$

Pour le calcul approché de ces intégrations, nous utiliserons la formule de quadrature dite de SIMPSON à trois points exacte pour les polynômes de degré 3.

Nous allons donner et commenter dans le chapitre suivant les résultats du code de calcul que nous avons développé en nous basant sur les techniques décrites dans ce chapitre.

Chapitre 5

Résultats numériques

Ce dernier chapitre est entièrement consacré à l'exploitation des résultats numériques obtenus à l'aide du code de calcul que nous avons développé en appliquant les méthodes numériques décrites au chapitre précédent.

L'objectif affiché est de tirer des d'enseignements concernant notre méthode de décomposition en modes résonants et son cadre de validité. Nous considérerons dans la suite toujours la même configuration de notre problème : les coefficients β et γ de notre système d'équations (2.26)-(2.29) seront respectivement égaux à 0.0032 et 0.02. Ces valeurs numériques correspondent à des valeurs typiques pour des pistes d'envol flottantes. Le segment P représentant la position de la plaque sera toujours égal à l'intervalle $[-1, +1]$. Les seules quantités qui changeront seront les conditions initiales.

La configuration particulière que nous avons retenue est voisine de celle étudiée par Meylan [57] dans le cadre du problème de diffraction d'une plaque élastique mince de masse nulle flottant librement à la surface d'une eau peu profonde. Les résultats obtenus dans le cadre de la profondeur finie montrent que si la hauteur du fluide est suffisamment grande, nous nous retrouvons quasiment dans une situation de profondeur infinie. Nous avons donc pu comparer la majeure partie de notre code de calcul avec celui développé par Meylan lors d'un séjour à l'université de Auckland en Nouvelle-Zélande.

1 Résultats préliminaires

Nous avons commencé par évaluer les pôles numériques et les modes associés. Nous donnons une représentation dans le plan complexe de la répartition des pôles que nous avons pu calculer (les limitations n'étant que numériques) sur la figure 1. Le nombre relativement faible de ces pôles est lié aux difficultés numériques auxquelles nous avons été confrontés lors de la mise en œuvre des techniques décrites au chapitre précédent. En effet, en cherchant une approximation d'un pôle p, il faut se souvenir que le paramètre spectral est $-p^2$. Par conséquent, les solutions du problème harmonique, $\hat{\eta}$, oscillent à une fréquence de $2.\Re e(p)\Im m(p)$, imposant une discrétisation éléments finis suffisamment fine (cette contrainte fait aussi comprendre pourquoi nos pôles calculés se trouvent dans une région de type hyperbolique). La difficulté majeure étant par la suite de devoir manipuler des matrices complexes quasi-pleines de taille importante. C'est justement sur ce point que nous avons été limités : le temps de calcul devenant trop important.
Nous donnons également dans le tableau 5.1 les valeurs numériques des pôles de partie imaginaire positive (la répartition des pôles étant symétrique vis-à-vis de l'axe réel) et l'allure des modes associés

sur les figures 2 à 14. Nous représentons sur les figures 2 à 14 à la fois les parties réelles et imaginaires de l'élévation de la plaque en trait gras et le potentiel des accélérations (en fait son opposé) en trait fin. Nous rappelons qu'à l'extérieur de la plaque le potentiel des accélérations est égal à l'élévation de la surface libre.

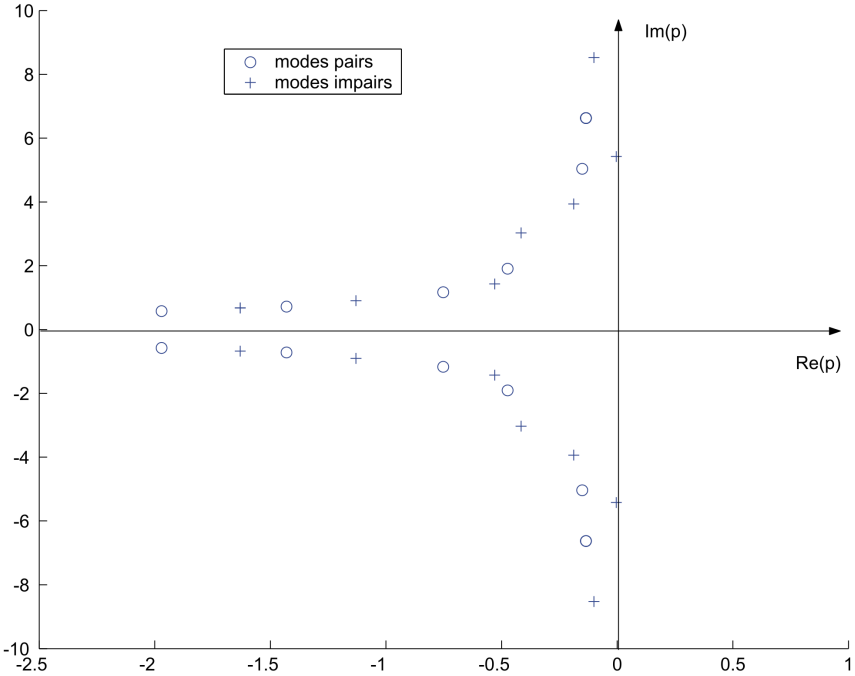

FIG. 1 – Représentation des pôles numériques dans le plan complexe.

Nom	Partie réelle	Partie imaginaire
p_1	-1.97013	0.57661
p_2	-1.63017	0.67725
p_3	-1.42960	0.71939
p_4	-1.12970	0.90598
p_5	-0.75226	1.17063
p_6	-0.52950	1.42717
p_7	-0.47359	1.90782
p_8	-0.41570	3.02755
p_9	-0.18777	3.93866
p_{10}	-0.15117	5.03931
p_{11}	-0.00361	5.42444
p_{12}	-0.13497	6.62686
p_{13}	-0.10006	8.52498

TAB. 5.1 – Valeurs numériques de la moitié supérieure des pôles représentés.

Les figures représentant les modes résonants nous montrent un comportement bien distinct entre le domaine fluide et le domaine occupé par la plaque. Cela n'a rien d'étonnant. Nous pouvons également observer que les modes résonants "explosent" de manière exponentielle lorsque l'on s'éloigne de la

plaque, et ce d'autant plus vite que que la partie réelle (négative) du pôle associé est petite. Cette observation s'explique par le caractère exponentiellement croissant de la fonction de Green G_{-p^2} du problème libre (voir l'expression (4.2)) lorsque $\Re e(p) < 0$, et par la possibilité que nous avons d'exprimer l'élévation de la surface libre à l'aide d'une représentation intégrale ayant pour noyau G. Enfin, tout naturellement, les modes résonants sont d'autant plus oscillants que la partie imaginaire du pôle associé est grande.

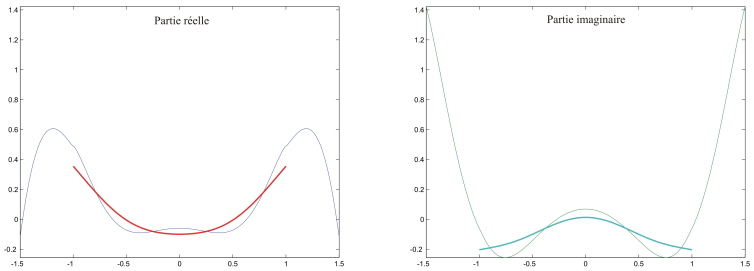

Fig. 2 – Mode résonant 1.

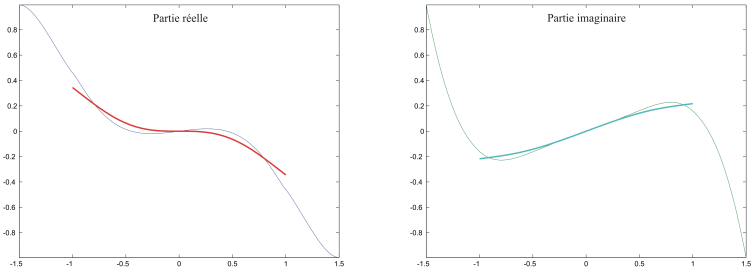

Fig. 3 – Mode résonant 2.

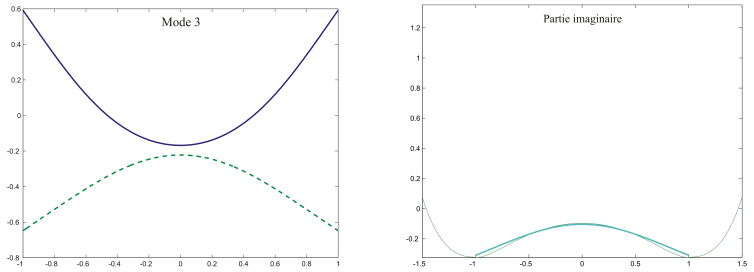

Fig. 4 – Mode résonant 3.

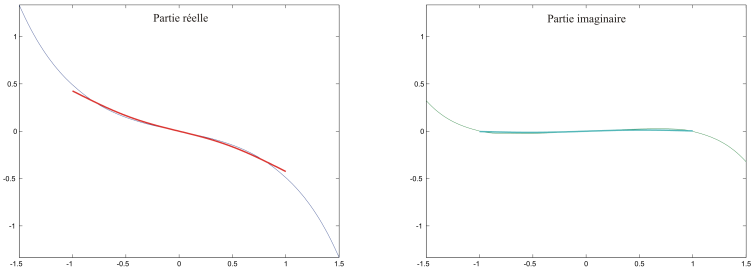

FIG. 5 – Mode résonant 4.

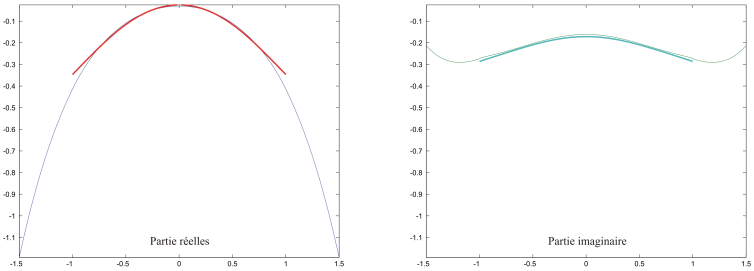

FIG. 6 – Mode résonant 5.

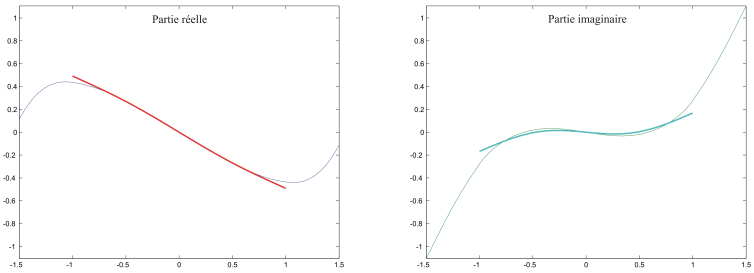

FIG. 7 – Mode résonant 6.

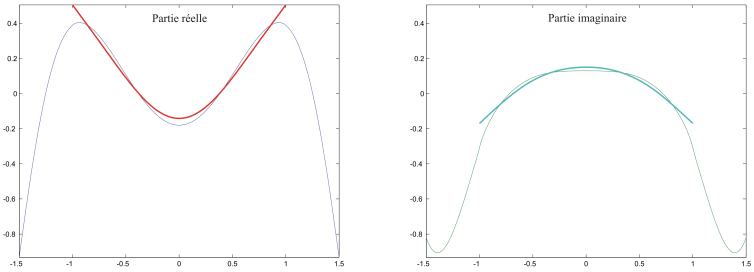

FIG. 8 – Mode résonant 7.

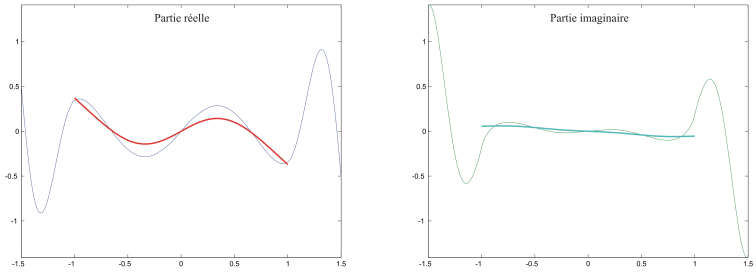

FIG. 9 – Mode résonant 8.

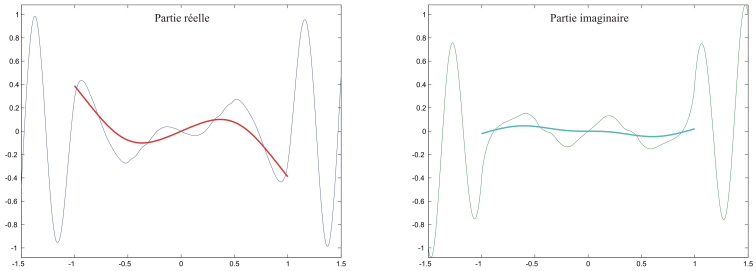

FIG. 10 – Mode résonant 9.

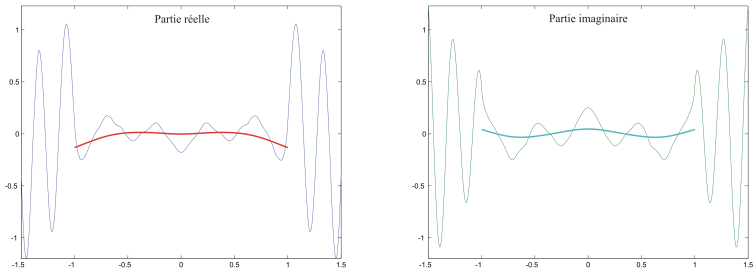

FIG. 11 – Mode résonant 10.

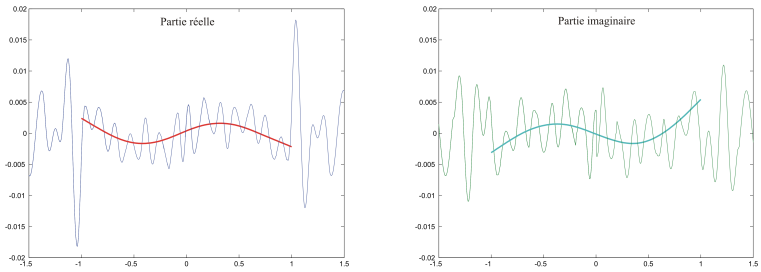

FIG. 12 – Mode résonant 11.

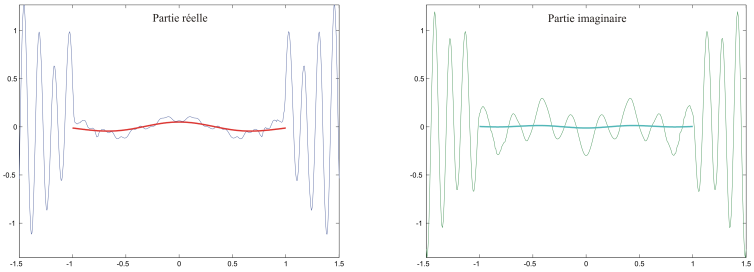

FIG. 13 – Mode résonant 12.

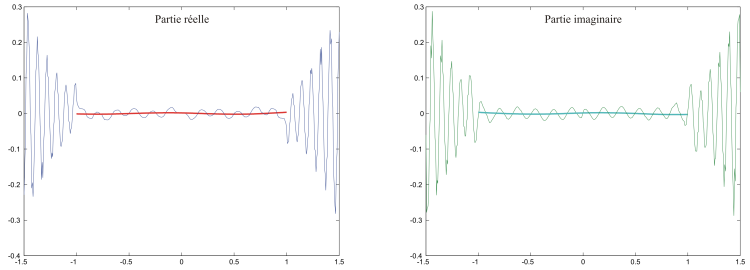

FIG. 14 – Mode résonant 13.

Cette étape préliminaire accomplie, nous allons maintenant nous attacher à “faire parler” notre code de calcul.

2 Les tests

L'objectif des tests que nous allons mener est d'essayer de fixer le cadre de validité de la méthode de décomposition en modes résonants. Pour cela, la première chose qu'il nous faudra faire, est de quantifier la part du terme η^h_{reste} dans la décomposition

$$\eta^h_D = \eta^h_{\text{pôles}} + \eta^h_{\text{cut}} + \eta^h_{\text{reste}} \,.$$

La méthode de décomposition en modes résonants que nous avons décrite au chapitre 1 demande au terme η^h_{reste} d'avoir une contribution négligeable dans la décomposition ci-dessus. Dans cette optique, nous évaluerons la quantité

$$\text{Err}(t) := \frac{\|\eta^h_D(t) - \eta^h_{\text{pôles}}(t) - \eta^h_{\text{cut}}(t)\|_{a_p,h}}{\|\eta^h_D(t)\|_{a_p,h}}$$

où la norme $\|\cdot\|_{a_p,h}$ est définie par

$$\|v\|^2_{a_p,h} := \sum_{\nu=1}^{N_1} \lambda_\nu \left(v, \mathrm{w}_\nu\right)^2_{0,P} \,.$$

Nous pourrons ainsi, pour une excitation donnée, estimer quand notre méthode de décomposition en modes résonants a un sens, autrement dit quand le terme η^h_{reste} est négligeable, et si elle permet d'obtenir une approximation suffisamment précise des mouvements transitoires de la plaque.

Par la suite, nous chercherons à observer dans quel rapport les différentes résonances participent à la reconstitution du signal transitoire. Dans ce but, nous représenterons, pour une excitation donnée, l'évolution en fonction du temps du logarithme népérien du module du coefficient "de couplage" $c_k \exp(p_k t)$ associé à chaque résonance où

$$\eta^h_{\text{pôles}}(t) = 2\,\Re e \sum_{k=1}^{13} c_k \, \exp(p_k t)\, \boldsymbol{e}_k \,.$$

Le coefficient c_k correspond à l'équivalent du coefficient apparaissant devant $\boldsymbol{e}_1$ dans l'expression (4.8) et $\boldsymbol{e}_k$ note le mode résonant (normalisé) associé au pôle p_k.
Nous évaluerons également l'influence de la coupure dans le comportement asymptotique que nous calculons, c'est-à-dire la part qu'occupe le terme η^h_{cut} dans la somme $\eta^h_{\text{décomp}} := \eta^h_{\text{pôles}} + \eta^h_{\text{cut}}$. Il est important de savoir dans quel rapport intervient la quantité η^h_{cut} car c'est le "maillon faible" de notre méthode : c'est le terme encore coûteux à calculer systématiquement. Pour cela nous évaluerons la quantité

$$\mathrm{Q}_{\text{cut}}(t) := \frac{\|\eta^h_{\text{cut}}(t)\|_{a_p,h}}{\|\eta^h_{\text{décomp}}(t)\|_{a_p,h}} \,.$$

Afin d'éprouver notre code de calcul, il va sans dire que nous devons être en mesure de choisir des conditions initiales susceptibles d'agir sur différentes plages de fréquences. Clairement, nous devons trouver un moyen de "contrôler" le contenu spectral de la donnée $\hat{f}$, plus humblement d'en avoir une idée. Nous reprenons à l'annexe C un résultat qui découle de la méthode de développement en fonctions propres généralisées décrite dans la seconde partie de ce mémoire et qui nous permet d'obtenir une estimation du contenu spectral d'une donnée $\hat{f}$.

Finalement, nous allons conduire nos tests à l'aide des conditions initiales suivantes

$$\eta(0,x,\omega) := \cos(\omega\, x)\exp(-3(x-2.5)^2)\,,$$

$$\partial_t\eta(0,x,\omega) := \partial_t\eta(0,x+t,\omega)_{|t=0} = \partial_x\big(\cos(\omega\, x)\exp(-3(x-2.5)^2)\big)$$

susceptibles d'exciter les résonances dont la partie imaginaire est "voisine" de la fréquence $+\omega$ ou $-\omega$. Nous choisirons successivement $\omega = 0$, $\omega = \Im m(p_3)$ et $\omega = \Im m(p_{11})$. Pour le test avec $\omega = \Im m(p_{11})$, nous considérerons une vitesse initiale nulle contrairement aux autres cas où nous considérerons uniquement une déformation initiale dans un premier temps, puis une déformation et une vitesse initiales non nulles. Pour conclure, nous ferons un dernier test pour vérifier la pertinence d'un temps caractéristique qui se dégagera des tests précédents. Nous choisirons les conditions initiales suivantes :

$$\eta(0,x) = 0\,,$$

$$\partial_t\eta(0,x) = \sin(\pi(x+1))\,\mathbb{1}_P(x)\,.$$

3 Les résultats des tests

3.1 Autour de la fréquence nulle

Déformation initiale

$$\eta(0,x,0) = \exp(-3(x-2.5)^2) \quad \text{et}$$

$$\partial_t \eta(0,x,0) = 0\,.$$

L'évolution de la courbe d'erreur relative Err en fonction du temps, sur la figure 15, nous montre qu'à partir de $t = T_0$, lorsque l'onde incidente a "complètement traversé" la plaque, nous oscillons faiblement autour de 4% d'erreur. La série d'intantanés de l'onde incidente, sur la figure 16, montre graphiquement ce que nous entendons par "complètement traversé" la plaque et qui définit notre instant caractéristique $T_0 \simeq 13.4$.

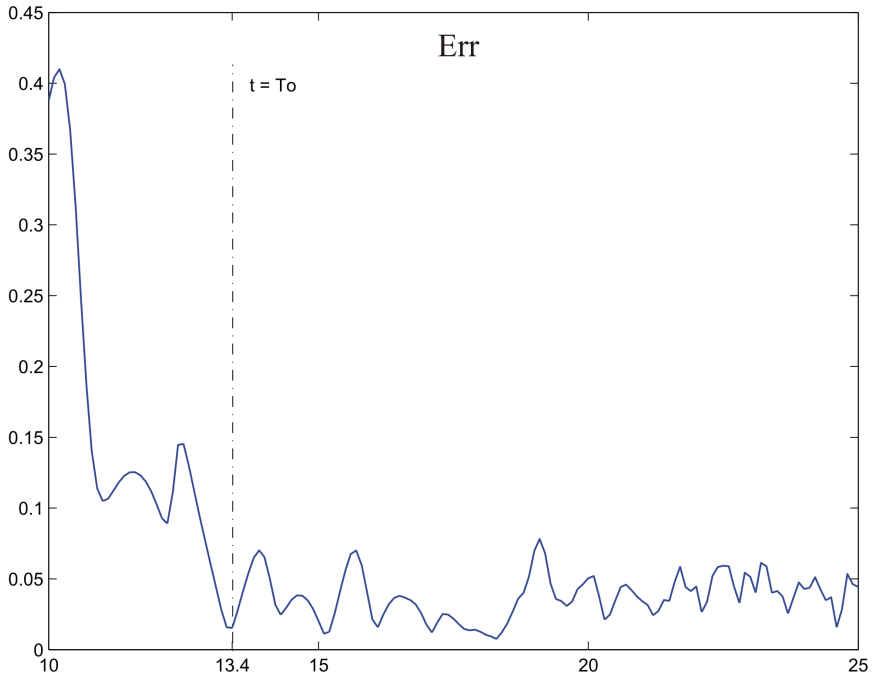

Fig. 15 – Erreur relative pour le test basses fréquences.

Pour parfaire notre vision sur l'évolution de la réponse transitoire du problème, nous proposons une planche d'instantanés, sur la figure 17, représentant l'onde totale (onde diffractée + onde incidente). La figure 17 montre en trait gras la déflexion de la plaque et en trait fin le potentiel des accélérations (en fait son opposé). Nous rappelons qu'à l'extérieur de l'intervalle $[-1,+1]$, le potentiel des accélérations représente également l'élévation de la surface libre.

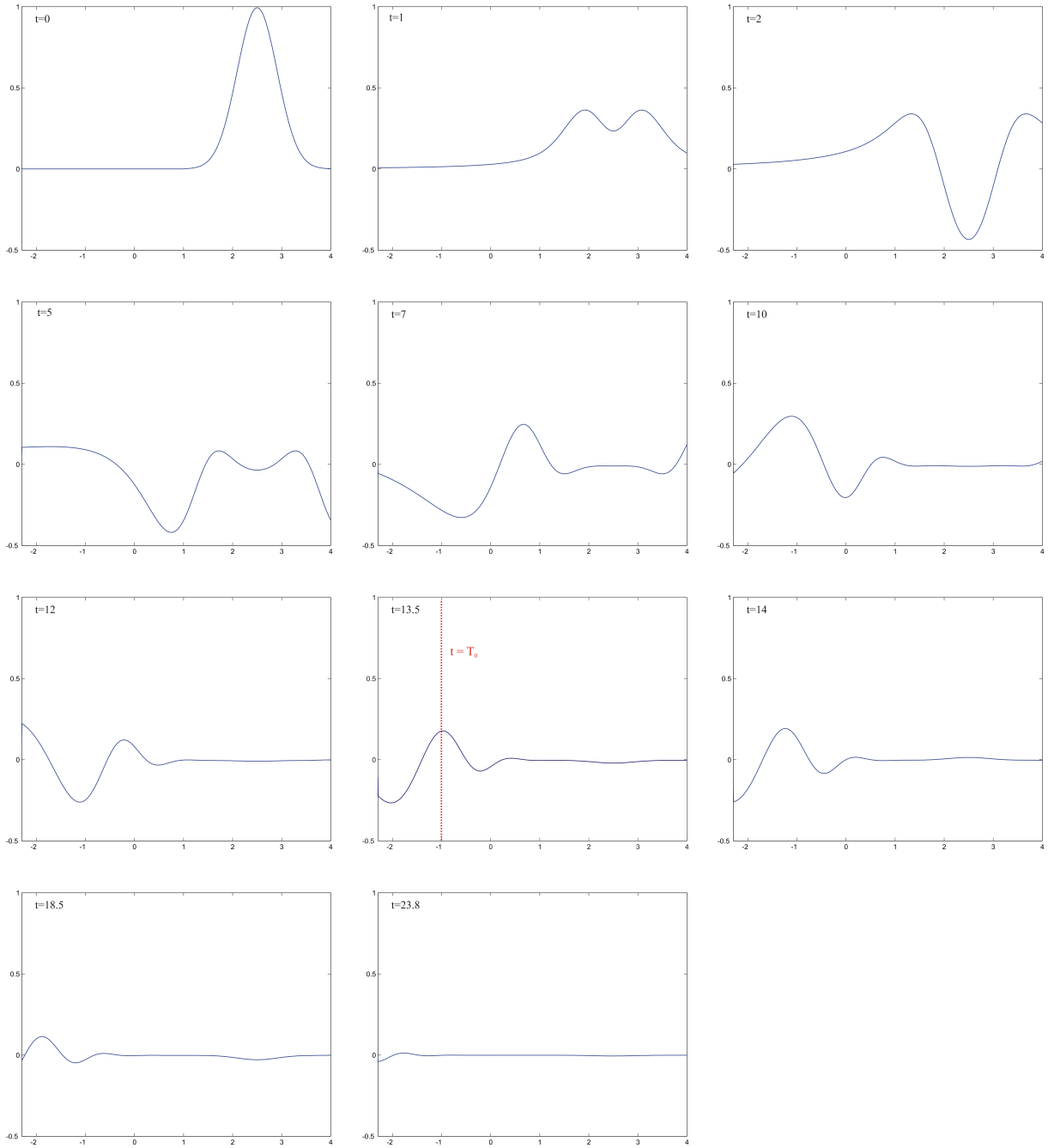

FIG. 16 – Des instantanés de l'onde incidente obtenus par la méthode de la transformée de LAPLACE.

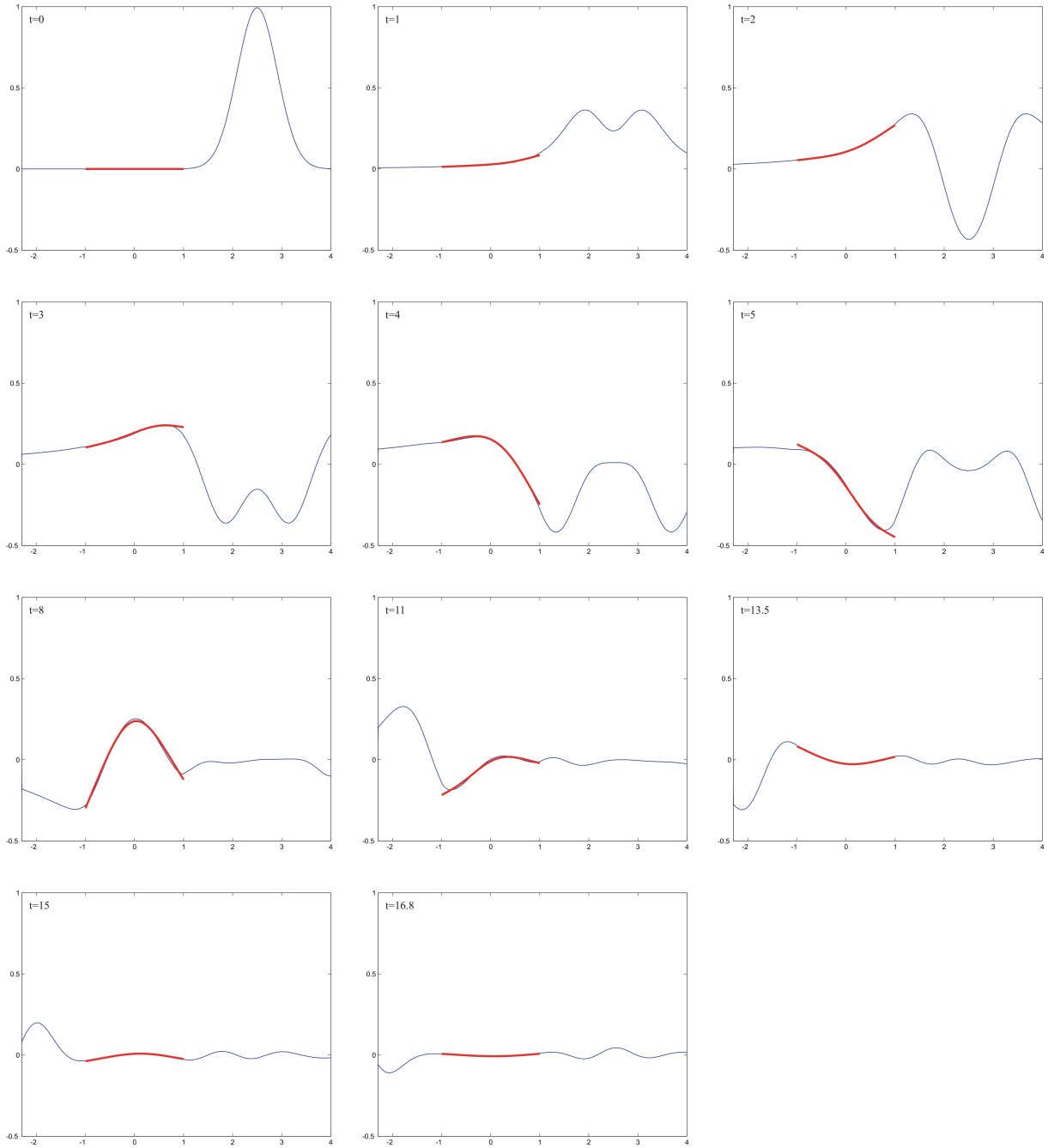

FIG. 17 – Des instantanés de l'onde totale obtenus par la méthode de la transformée de LAPLACE.

Nous représentons maintenant sur la figure 18 l'évolution en fonction du temps du logarithme népérien du module des résidus associés à chaque résonance p_k suivie de la figure 19 représentant l'évolution de la quantité Q_{cut}. Les numéros sur les droites, à la figure 19, indiquent les pôles considérés (cf. tableau 5.1). La partie grisée sur le graphique 18 indique une zone de rapport 10 en référence au segment le plus élevé. Plus clairement, pour $t > 5$ par exemple, tous les points $y(t)$ situés sous la zone

grisée satisfont

$$\left|\frac{y_7(t)}{y(t)}\right| > 10$$

où y_7 est un point de la droite numérotée 7. La zone grisée est donc simplement un moyen visuel de repérer rapidement les résidus les plus influents au cours du temps.

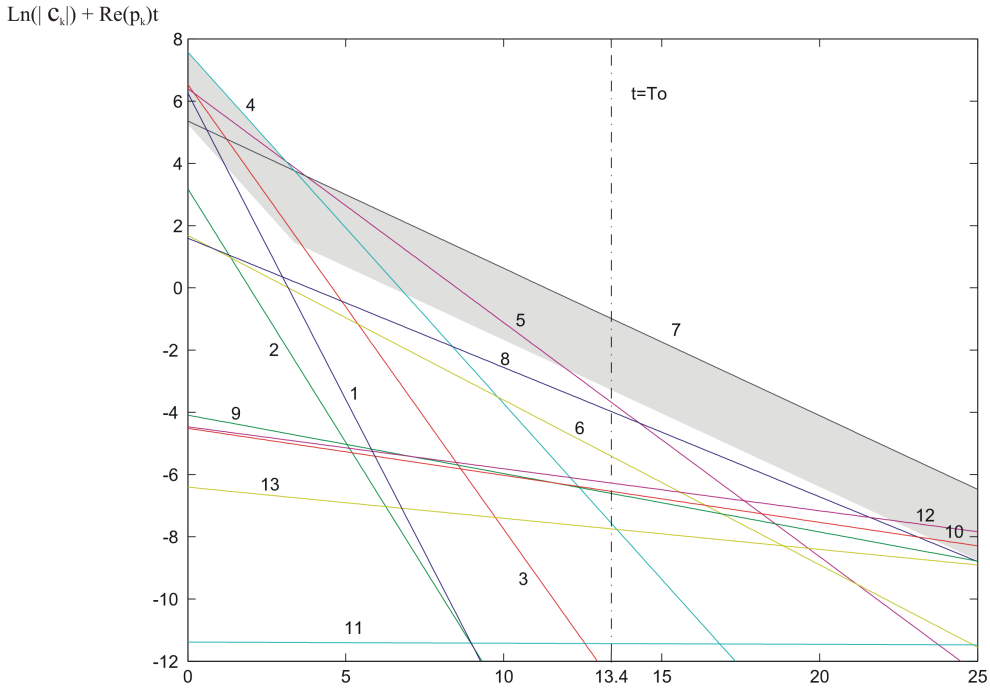

FIG. 18 – Comparatif des résidus pour le test basses fréquences.

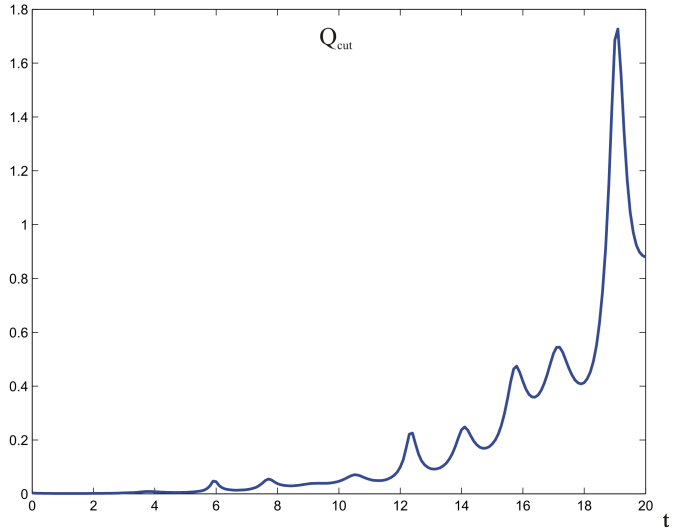

FIG. 19 – Influence de la coupure pour le test basses fréquences.

Nous observons sur la figure 18 que les résidus “dominants” correspondent aux 8 premiers pôles (basses fréquences), avec leurs conjugués. On note une participation plus forte des pôles p_7 et $\overline{p_7}$.
En parallèle, la figure 19 nous indique que le terme η^h_{cut} occupe une place non négligeable dans notre décomposition, environ 10%, dès l'instant caractéristique T_0. La part de ce terme croît rapidement, 50% à $t \simeq 16$, pour finalement atteindre une position largement dominante rendant négligeable la contribution de $\eta^h_{\text{pôles}}$ pour les temps “longs”, mettant en évidence le rôle significatif du terme lié à la coupure dans notre décomposition.
Nous pouvons maintenant observer “localement” la déflexion de la plaque, au point d'abscisse $x_0 = 0.5$ par exemple, au cours du temps. Nous obtenons alors la figure 20 qui montre qu'à partir de l'instant $T_1 \simeq 5.4$, lorsque l'onde incidente “arrive au point d'observation”, les courbes $\eta^h_D(t, x_0)$ (solution de référence) et $\eta^h_{\text{décomp}}(t, x_0)$ (solution approchée) deviennent relativement proches et le reste jusqu'à l'instant $T_2 \simeq 7.3$, lorsque la première crête de l'onde incidente a passé le point d'observation. À partir de l'instant T_2 les courbes se superposent quasi parfaitement. Nous renvoyons à la figure 21 qui donne un sens graphique à nos instants T_1 et T_2 en montrant quelques instantanés de l'onde incidente.

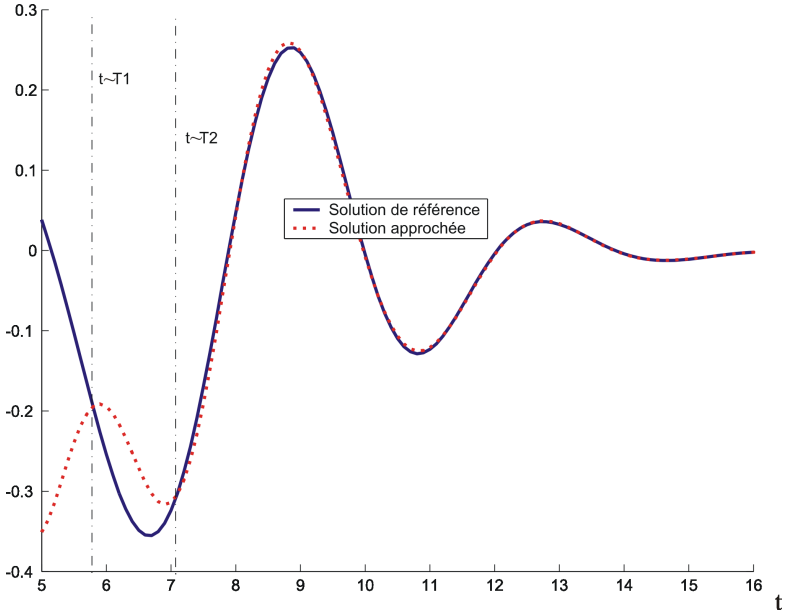

Fig. 20 – Solution transitoire pour le test basses fréquences.

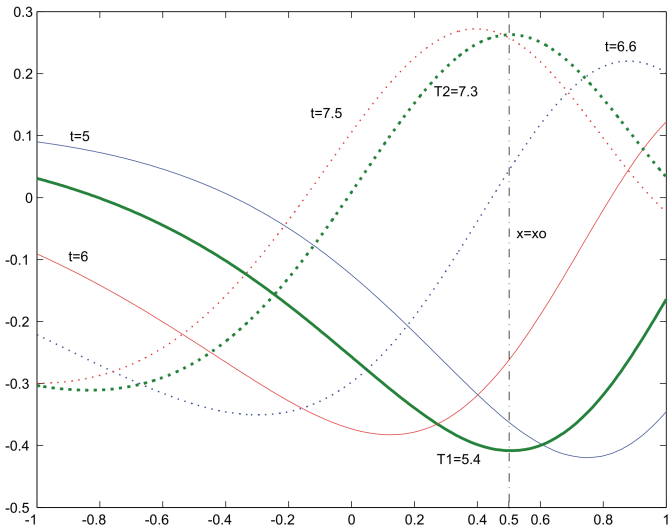

FIG. 21 – Définition graphique des instants T_1 et T_2.

Le graphique 20 montre que nous avons, dans la situation considérée, calculé "suffisamment" de résonances numériques pour qu'après en temps caractéristique correspondant (approximativement) au temps nécessaire à l'onde incidente pour exciter toute la plaque, la réponse transitoire calculée par la méthode de décomposition en modes résonants soit une excellente estimation des mouvements de la surface.

Considérant la figure 18 et le caractère distinctif des droites numérotées 7 et 5 (pour les premiers temps), nous décidons de représenter sur un même graphique, figure 22, et toujours au point d'abscisse x_0, la solution approchée obtenue en considérant η^h_{cut} et tous les pôles numériques calculés d'une part, et la solution "réduite" obtenue en considérant η^h_{cut} et uniquement les pôles p_5, $\overline{p_5}$, p_7 et $\overline{p_7}$ d'autre part.

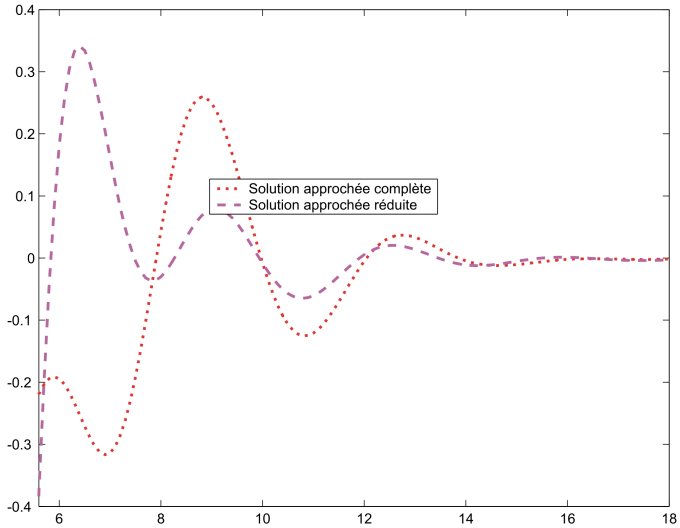

FIG. 22 – Comparaisons des solutions approchées pour le test basses fréquences.

La figure 22 montre que l'on récupère bien l'allure générale de la courbe de réponse mais que le signal n'est pas "suffisamment mono fréquentiel" pour que l'amplitude du signal soit également correctement approchée par la solution dite réduite : la réponse reste donc profondément multi fréquentielle.

Nous allons continuer dans ce qui suit à faire référence aux instants caractéristiques T_0, T_1 et T_2. Il va de soi que leur "définition" reste inchangée mais que leur valeur numérique dépend des conditions initiales choisies.
La suite de ce chapitre consiste maintenant essentiellement, pour des conditions initiales différentes, à fournir le même jeu de figures.

Déformation et vitesse initiales

$$\eta(0,x,0) = \exp(-3(x-2.5)^2) \quad \text{et}$$

$$\partial_t \eta(0,x,0) = \partial_x \exp(-3(x-2.5)^2)\,.$$

La courbe d'erreur relative, sur la figure 23, nous indique à partir de $T_0 \simeq 13.5$ une erreur comprise entre 1 et 5%. Nous sommes sensiblement dans la même situation que précédemment. La solution réduite que nous représentons sur la figure 29 est construite à partir de η^h_{cut} et des pôles p_7 et $\overline{p_7}$. L'ensemble des graphiques que nous représentons ici conduit aux mêmes observations que dans la situation précédente.

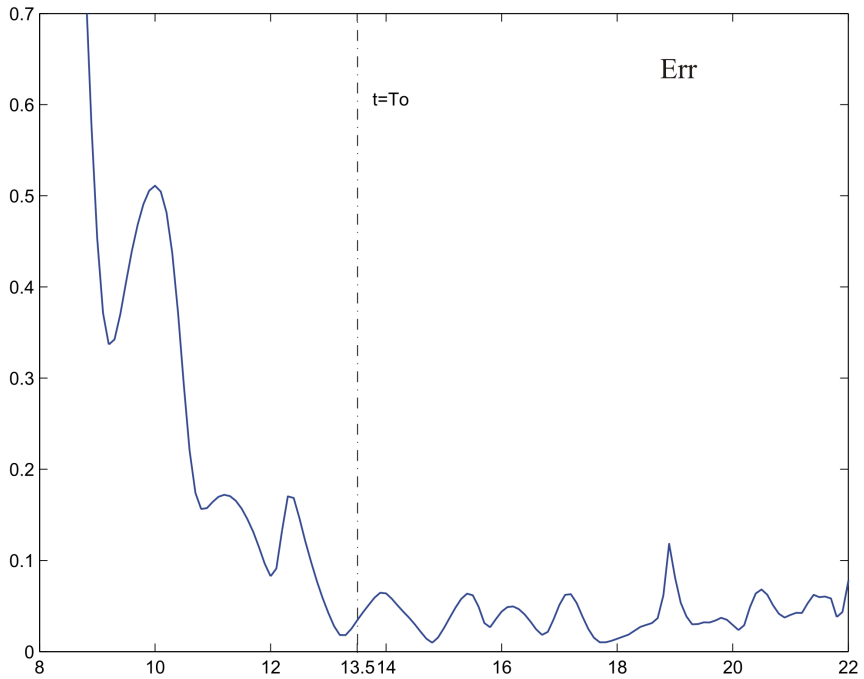

Fig. 23 – Erreur relative pour le second test basses fréquences.

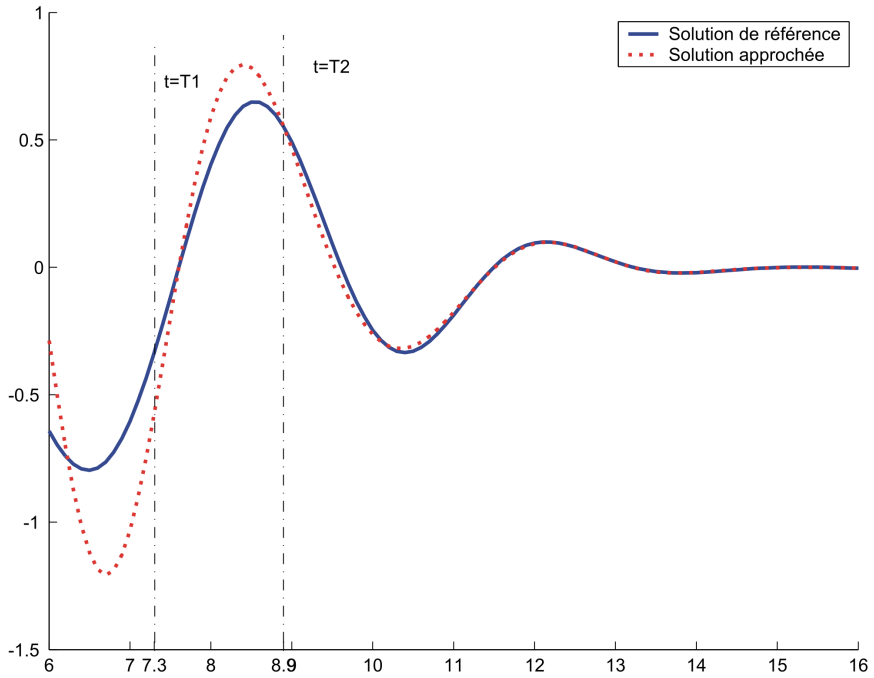

FIG. 24 – Solution transitoire pour le second test basses fréquences.

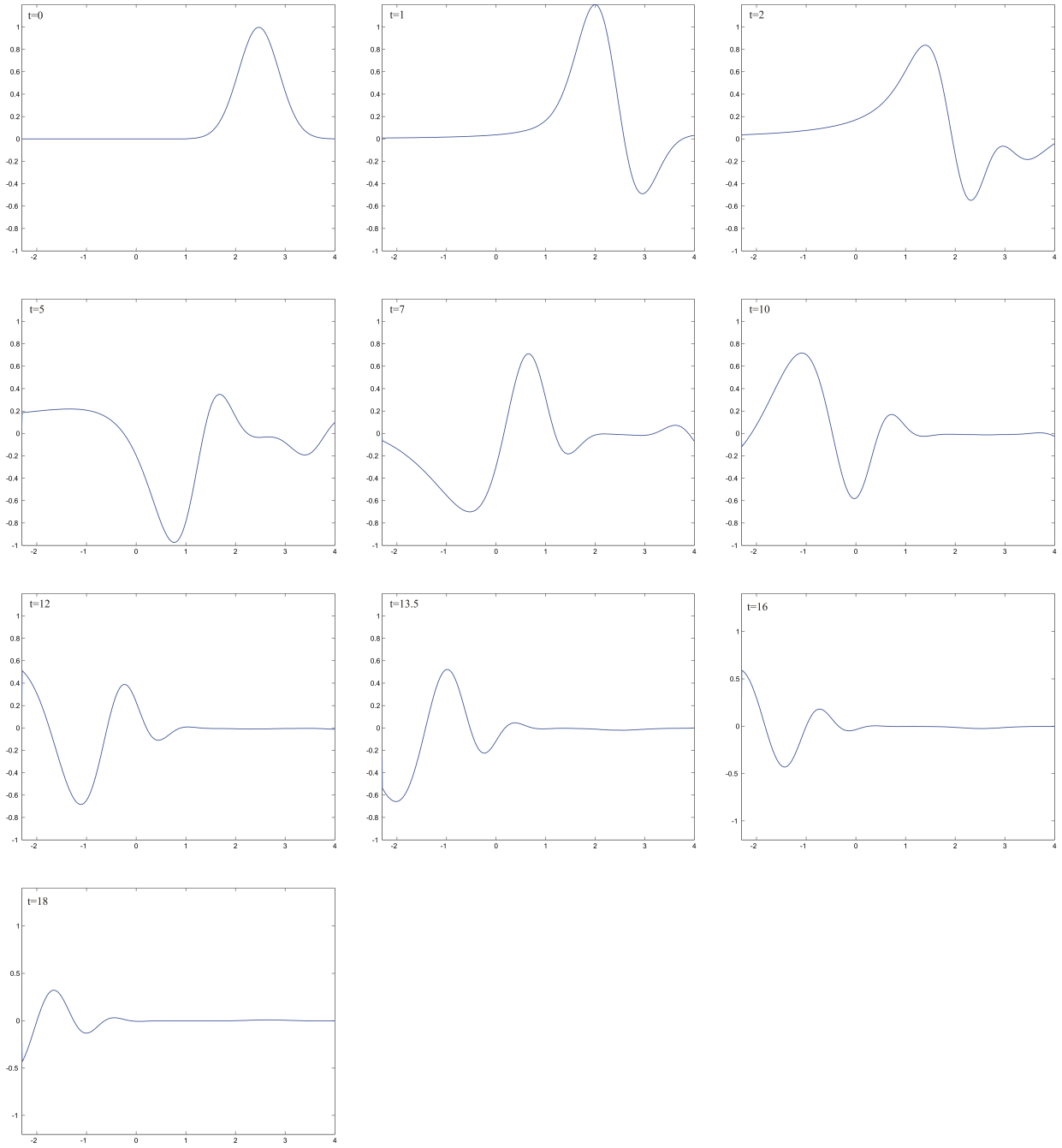

FIG. 25 – Des instantanés de l'onde incidente obtenus par la méthode de la transformée de LAPLACE.

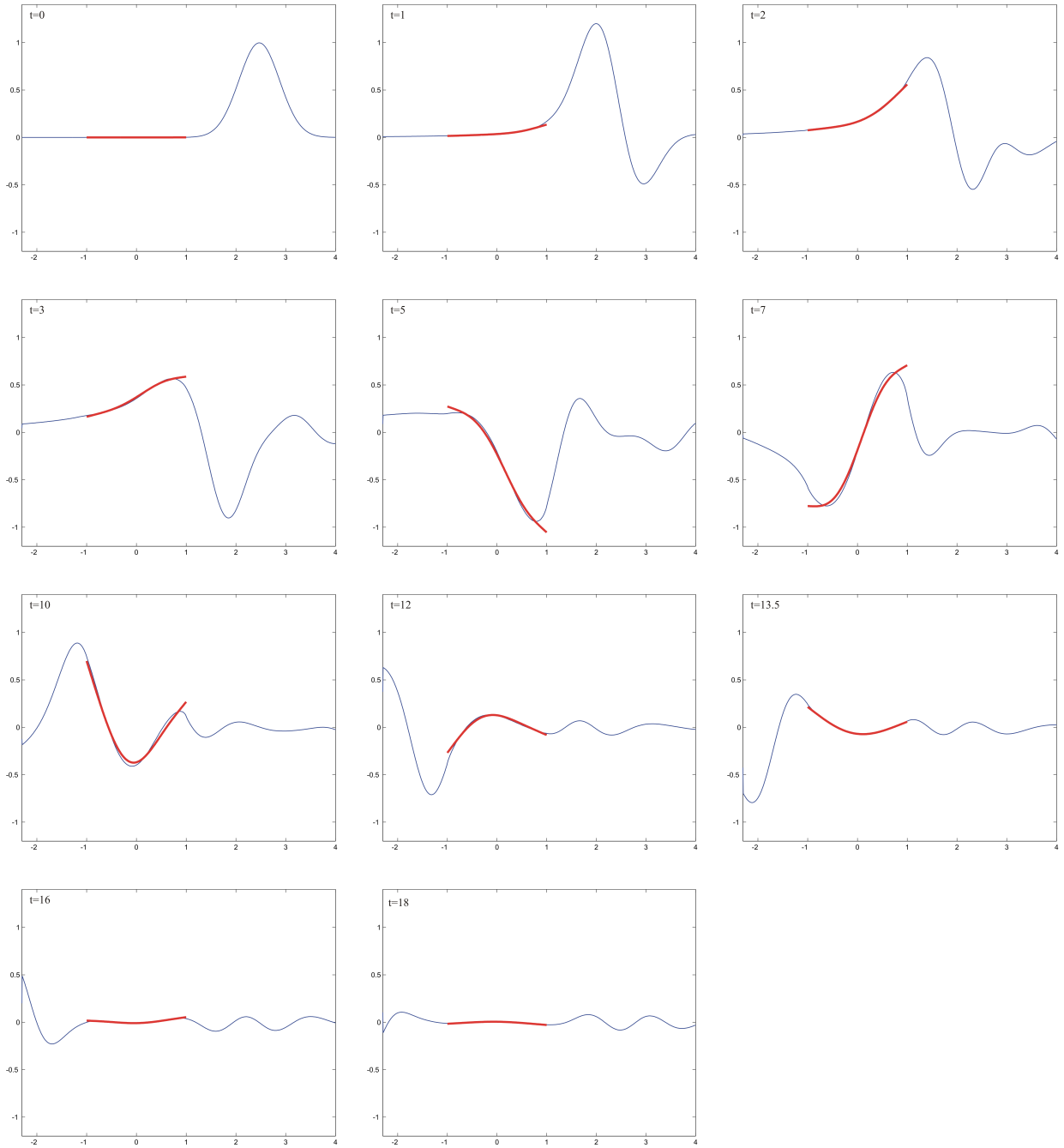

FIG. 26 – Des instantanés de l'onde totale obtenus par la méthode de la transformée de LAPLACE.

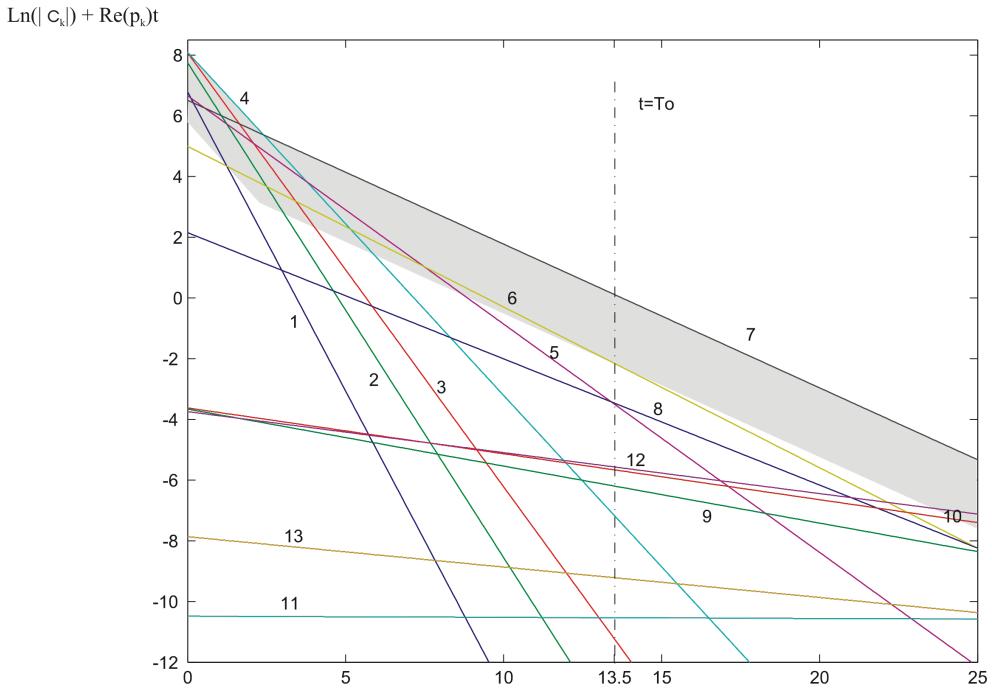

FIG. 27 – Comparatif des résidus pour le second test basses fréquences.

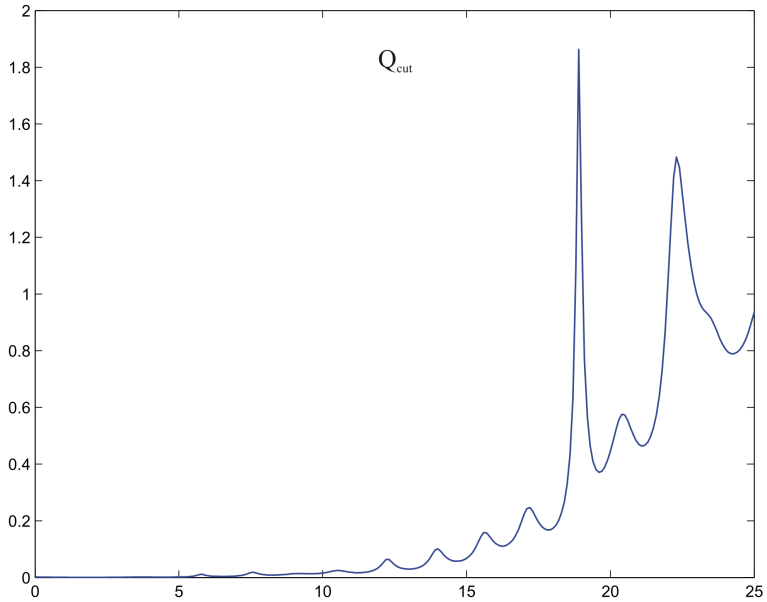

FIG. 28 – Influence de la coupure pour le second test basses fréquences.

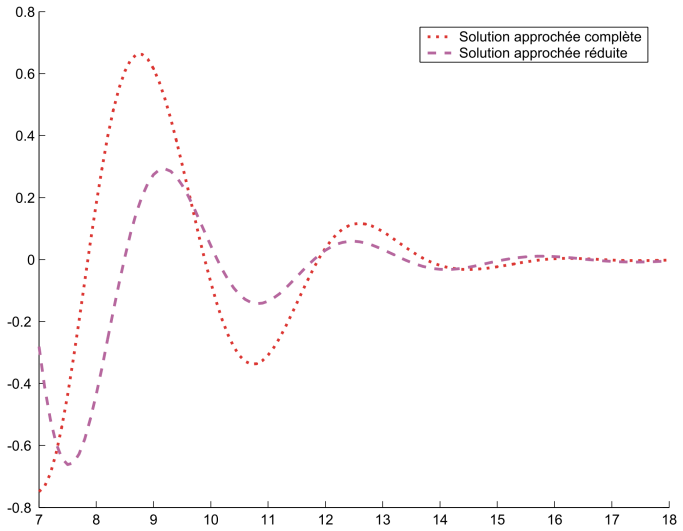

FIG. 29 – Comparaisons des solutions approchées pour le second test basses fréquences.

3.2 Autour des fréquences $\pm\Im m(p_3)$

Nous considérons maintenant une situation légèrement différente de la précédente. Nous choisissons des conditions initiales susceptibles d'exciter des zones fréquentielles un peu plus élevées : centrées autour de $\pm\Im m(p_3)$.

Déformation initiale

$$\eta(0,x,0) = \cos(\Im m(p_3)\, x)\ \exp(-3(x-2.5)^2) \quad \text{et}$$

$$\partial_t \eta(0,x,0) = 0\,.$$

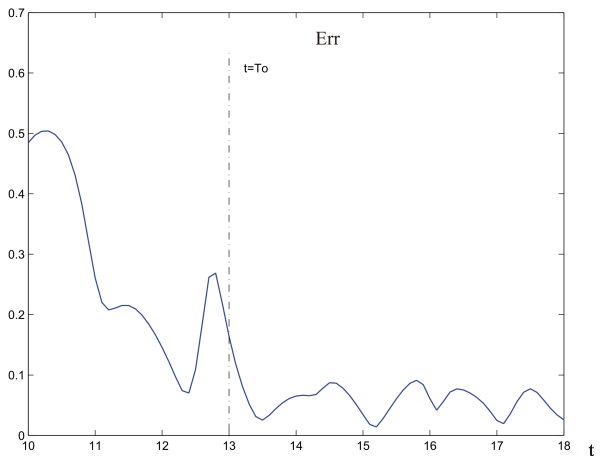

FIG. 30 – Erreur relative pour le test "des fréquences $\pm\Im m(p_3)$".

La courbe d'erreur relative, sur la figure 30, nous montre qu'à partir de l'instant caractéristique $t = T_0$, l'erreur chute pour osciller entre 2 et 8%. Le manque de résonances numériques calculées dans les zones de fréquences excitées commence à se faire sentir. Toujours pour donner une vision plus globale de l'évolution du problème transitoire, nous représentons deux planches d'instantanés sur les figures 31 et 32.

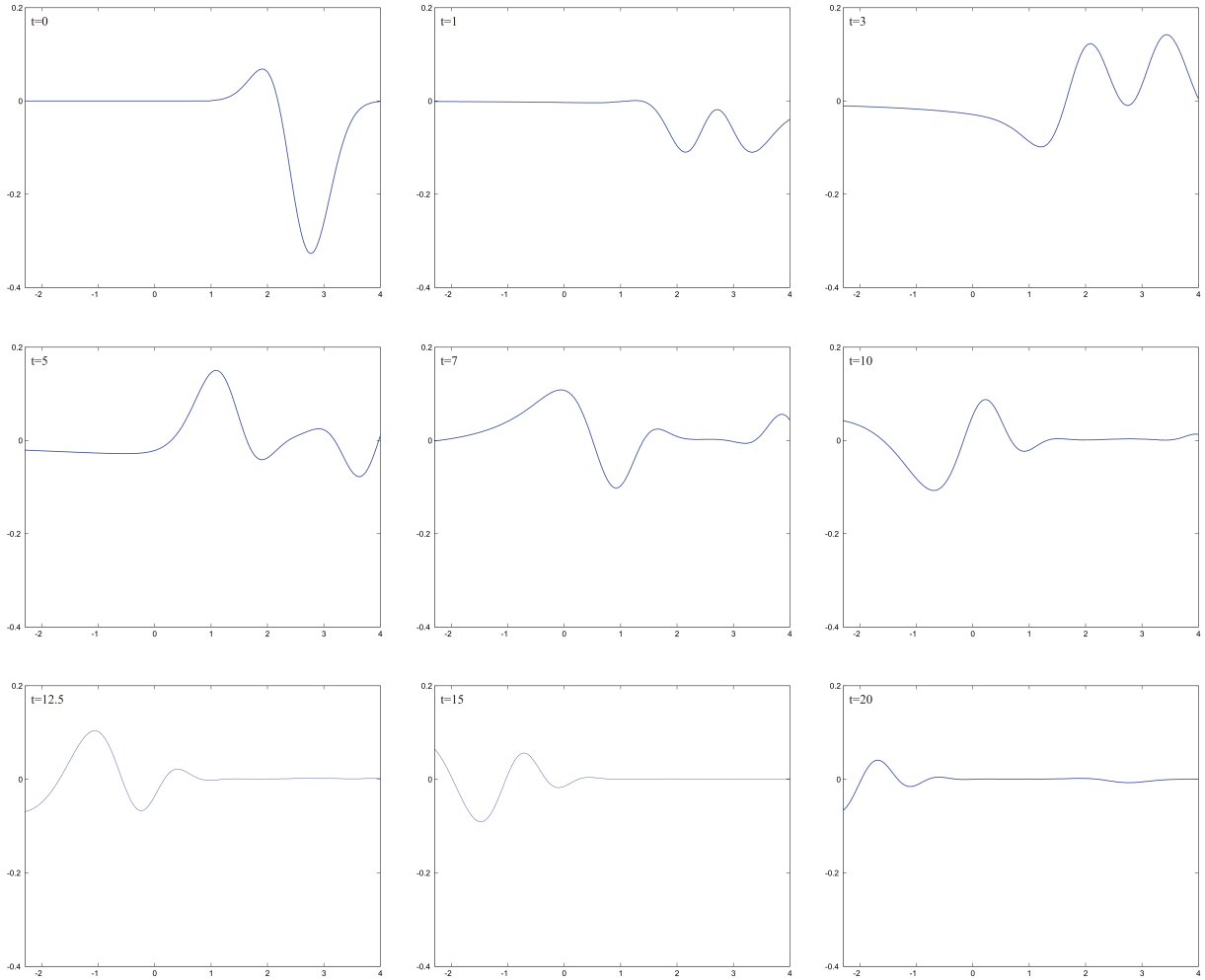

Fig. 31 – Des instantanés de l'onde incidente obtenus par la méthode de la transformée de Laplace.

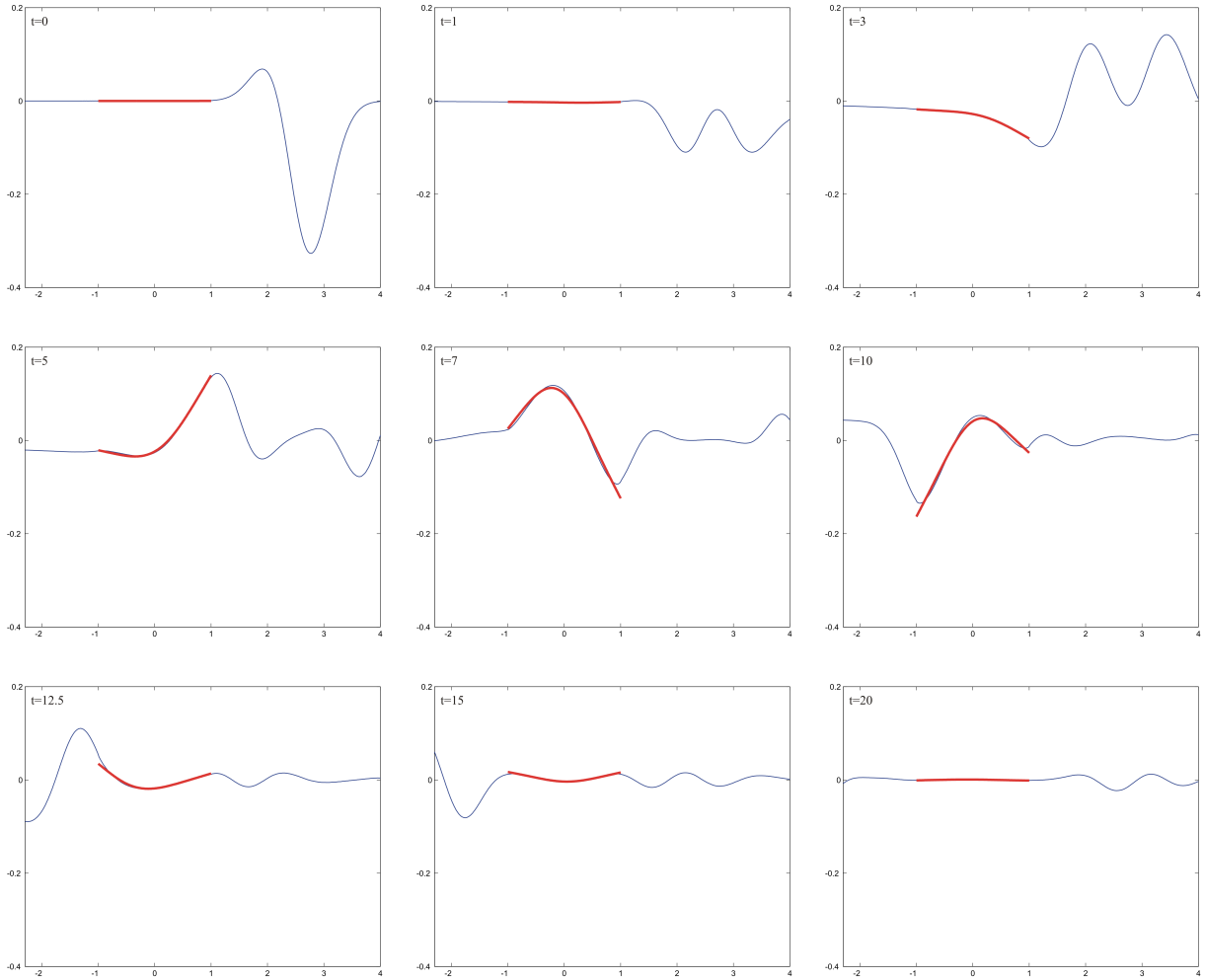

FIG. 32 – Des instantanés de l'onde totale obtenus par la méthode de la transformée de LAPLACE.

Le graphique 33 représentant la contribution des résidus dans la construction du terme $\eta^h_{\text{pôles}}$ nous montre une configuration dans laquelle la zone grisée est un peu plus fournie contrairement à la configuration de la figure 18. Notons que cette fois-ci les résidus associés aux pôles p_6, $\overline{p_6}$, p_7, $\overline{p_7}$, p_8 et $\overline{p_8}$ peuvent être considérés comme sortant du lot.

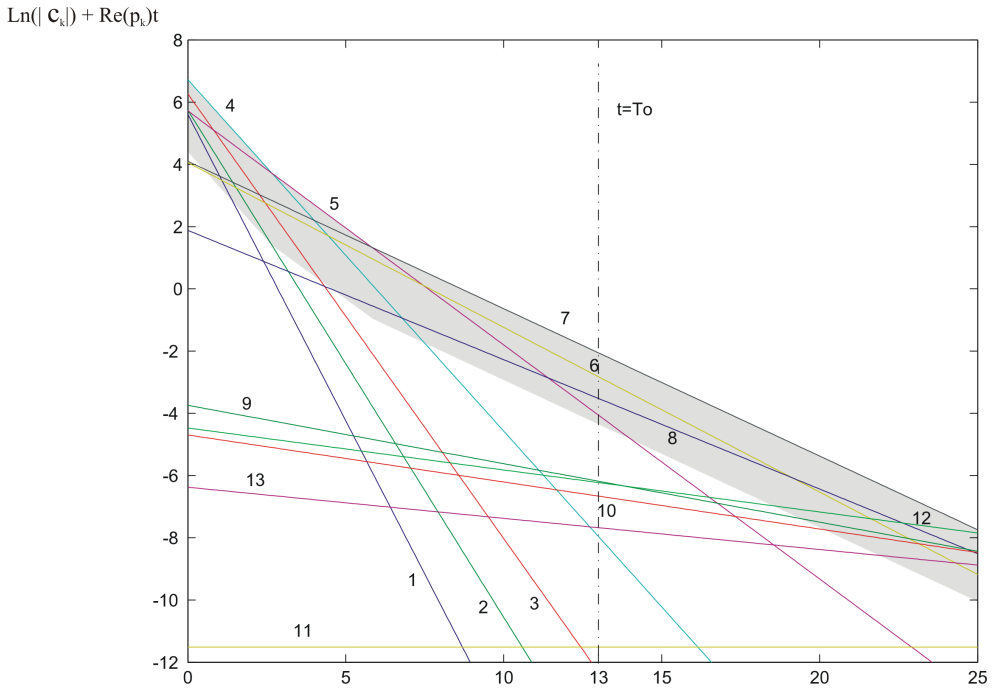

FIG. 33 – Comparatif des résidus pour le test “des fréquences $\pm\Im m(p_3)$”.

La comparaison des solutions transitoires de référence et approchée nous donne les mêmes indications que dans le cas précédent, à ceci près qu'après l'instant $t = T_2$ les courbes ne se superposent plus immédiatement. Ce fait est très certainement lié à la définition de l'instant T_2 qui ne tient pas compte des traînées qui suivent la première vague.

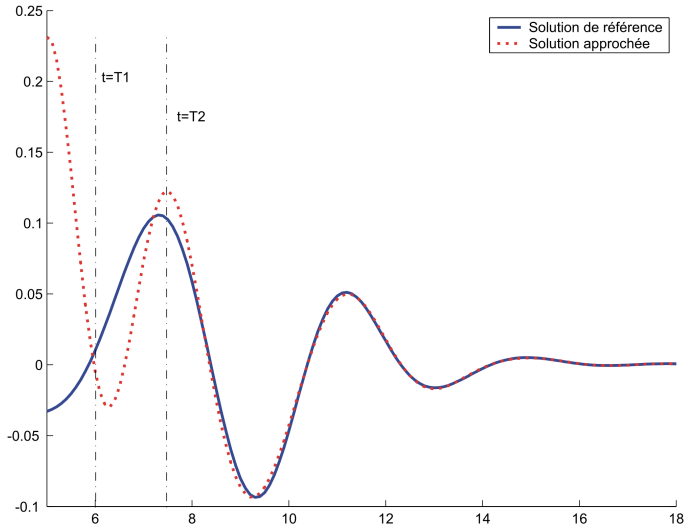

FIG. 34 – Solution transitoire pour le test “des fréquences $\pm\Im m(p_3)$”.

Nous traçons maintenant sur la figure 35 la solution approchée “complète” et la solution approchée

"réduite" obtenue en ne retenant que les pôles p_6, $\overline{p_6}$, p_7, $\overline{p_7}$, p_8 et $\overline{p_8}$. Nous constatons cette fois-ci qu'après l'instant T_2 les solutions approchées complète et réduite se superposent, indiquant que dans la situation considérée les modes associés aux pôles p_6, p_7 et p_8 véhiculent l'essentiel de l'information.

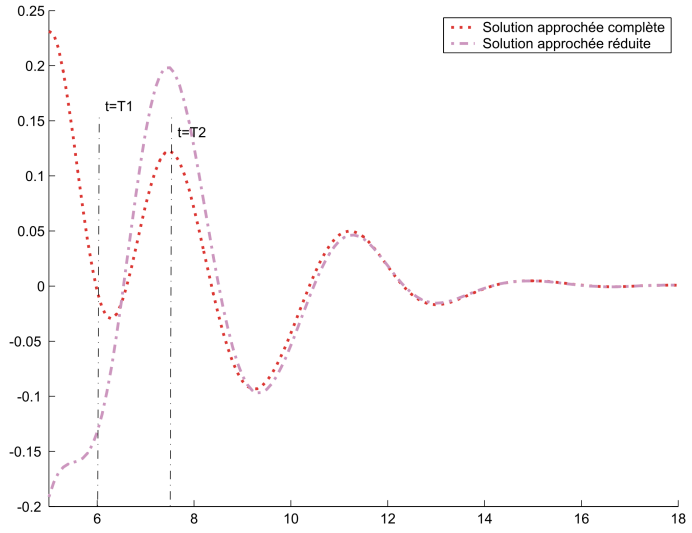

FIG. 35 – Comparaisons des solutions approchées pour le test "des fréquences $p_3^{\pm}$".

Enfin, la figure 36 nous montre que comparativement à la figure 19, le terme η^h_{cut} commence à occuper une place moins importante dans notre décomposition. Cette observation semble naturelle puisque nous avons ici encore considéré une excitation susceptible d'agir dans des zones relativement basses fréquences. Nous excitons donc toujours la fréquence nulle mais "moins fortement".

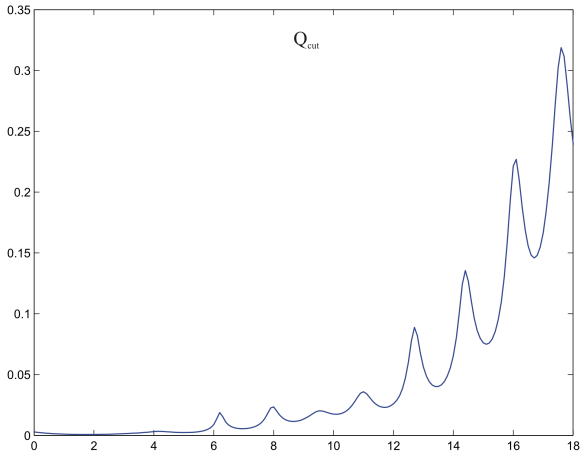

FIG. 36 – Influence de la coupure pour le test "des fréquences $\pm\Im m(p_3)$".

Déformation et vitesse initiales

$$\eta(0,x,0) = \cos(\Im m(p_3)\,x)\,\exp(-3(x-2.5)^2) \quad \text{et}$$

$$\partial_t\eta(0,x,0) = \partial_x\big(\cos(\Im m(p_3)\,x)\,\exp(-3(x-2.5)^2)\big)\,.$$

La courbe d'erreur relative, figure 37, nous indique à partir de l'instant $T_0 \simeq 12.3$ une erreur comprise entre 2 et 8%. Nous sommes dans une situation comparable à la précédente. La solution réduite que nous représentons à la figure 43 est construite à partir de η^h_{cut}, des pôles p_6, p_7, p_8 et de leurs conjugués. L'ensemble des graphiques que nous représentons conduit aux mêmes observations que précédemment.

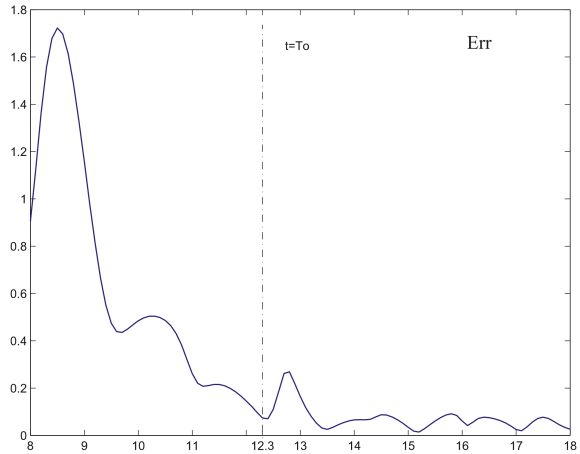

FIG. 37 – Erreur relative pour le second test "des fréquences $\pm\Im m(p_3)$".

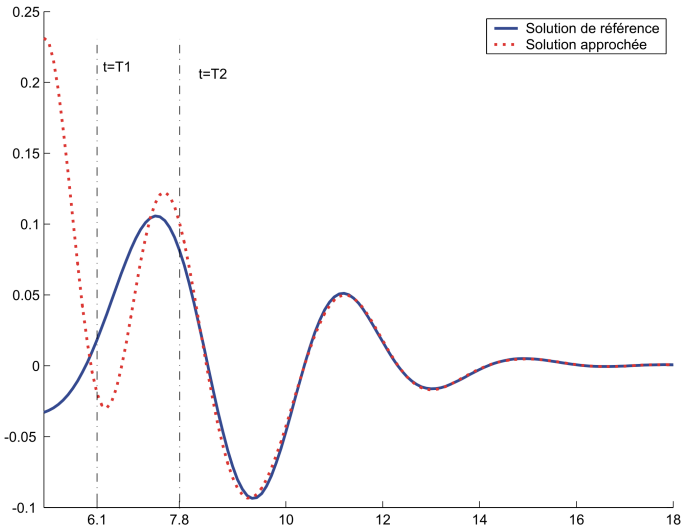

FIG. 38 – Solution transitoire pour le second test "des fréquences $\pm\Im m(p_3)$".

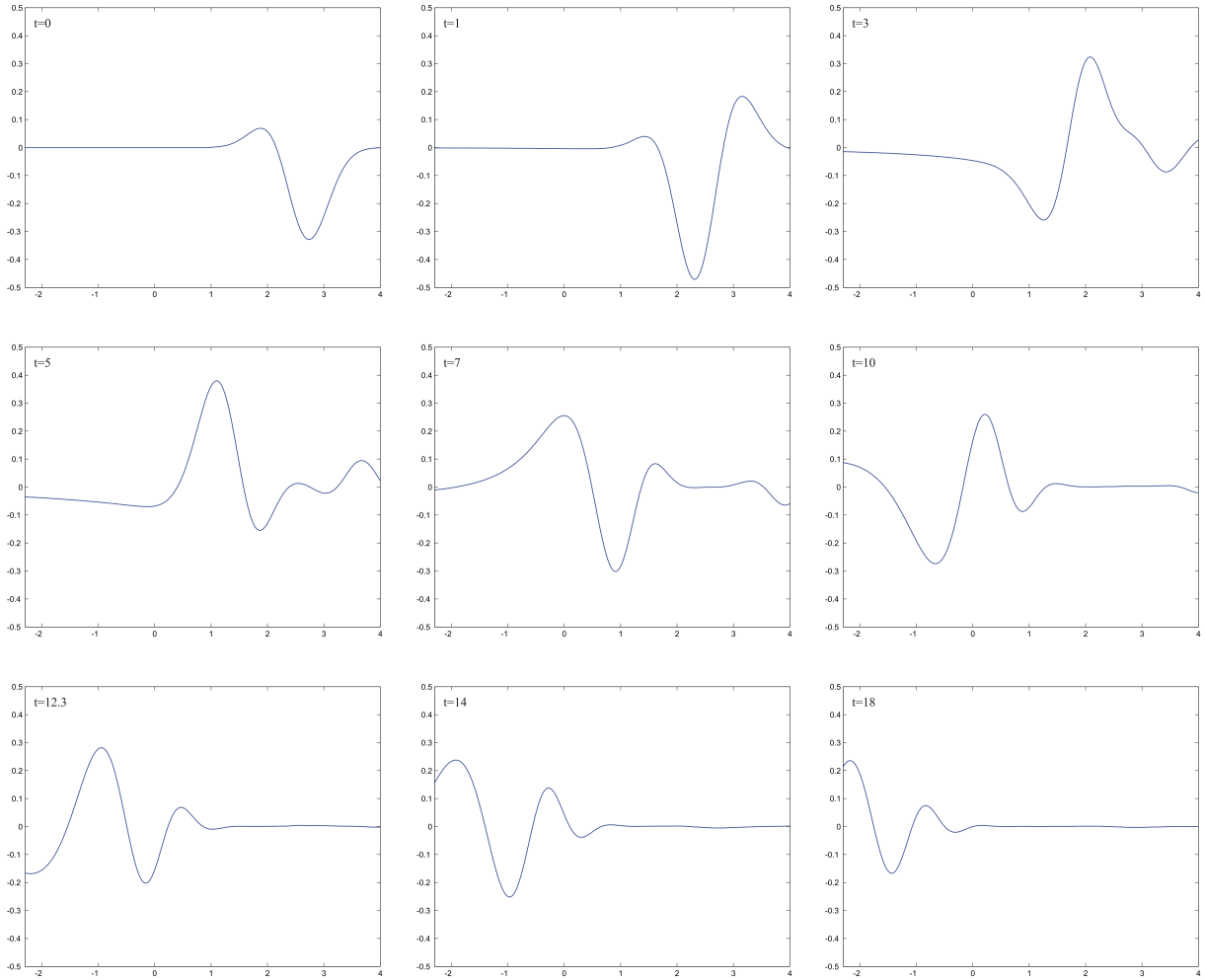

FIG. 39 – Des instantanés de l'onde incidente obtenus par la méthode de la transformée de LAPLACE.

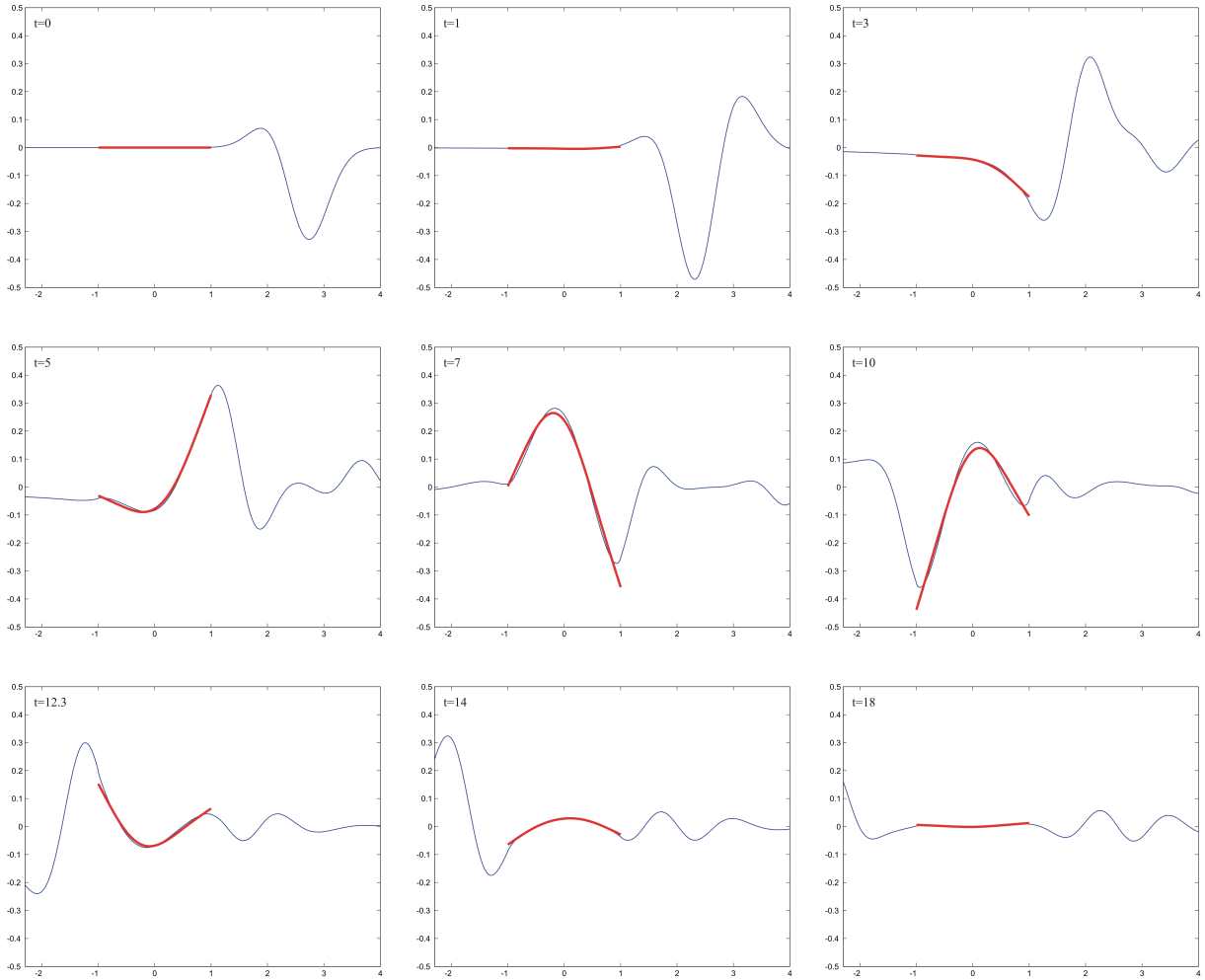

FIG. 40 – Des instantanés de l'onde totale obtenus par la méthode de la transformée de LAPLACE.

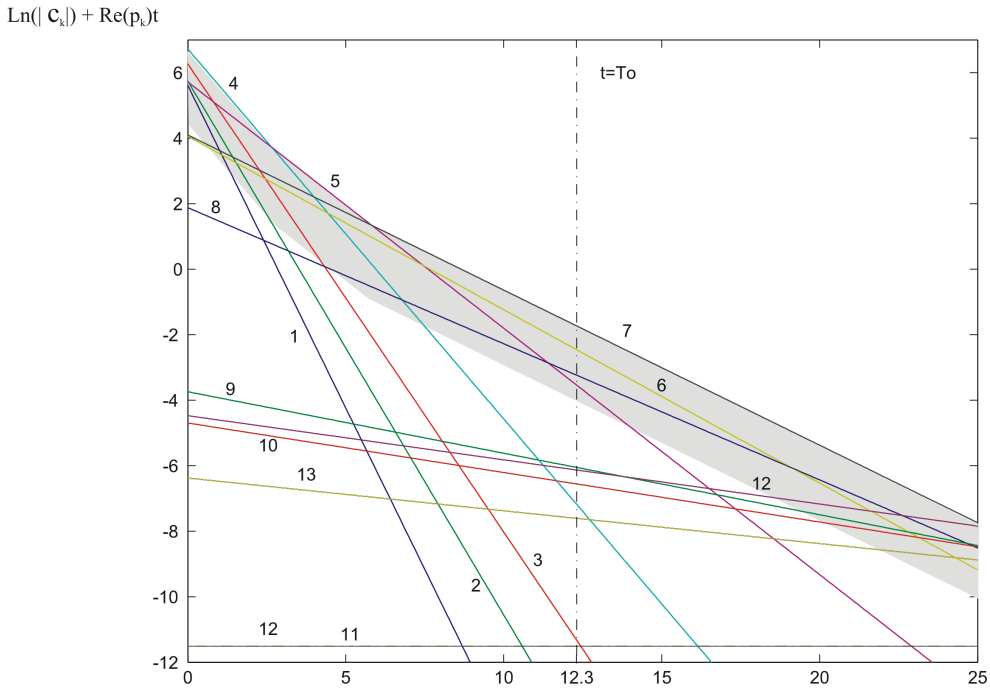

FIG. 41 – Comparatif des résidus pour le second test “des fréquences $\pm\Im m(p_3)$”.

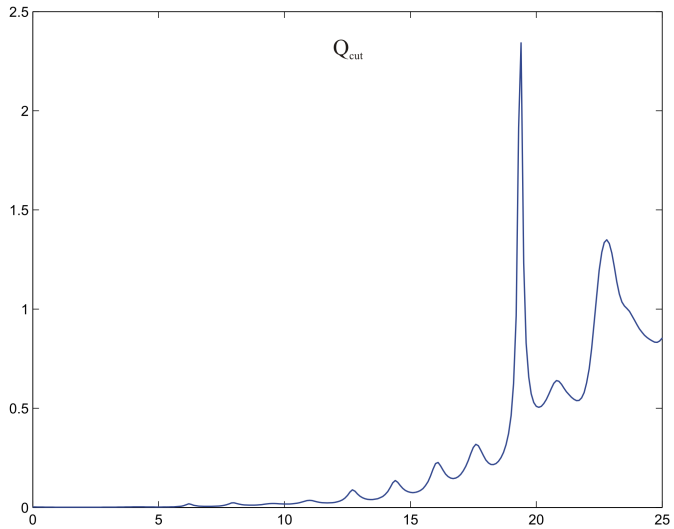

FIG. 42 – Influence de la coupure pour le second test “des fréquences $\pm\Im m(p_3)$”.

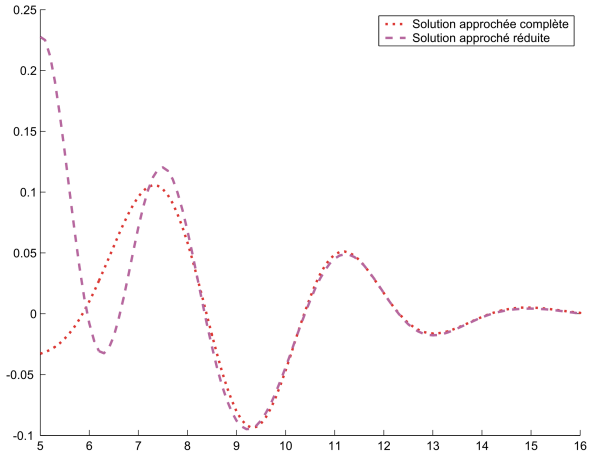

FIG. 43 – Comparaisons des solutions approchées pour le second test "des fréquences $\pm\Im m(p_3)$".

3.3 Autour des fréquences $\pm\Im m(p_{11})$

$$\eta(0,x,0) = \cos(\Im m(p_{11})\, x)\, \exp(-3(x-2.5)^2) \quad \text{et}$$

$$\partial_t \eta(0,x,0) = 0\,.$$

Nous considérons dans cette nouvelle série de tests des conditions initiales susceptibles d'exciter des zones fréquentielles encore plus élevées : centrées autour de $\pm\Im m(p_{11})$. Nous suivons toujours la même logique en représentant le même jeu de figures.

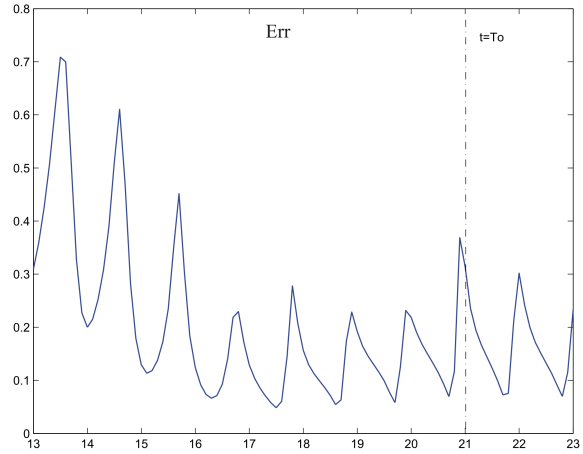

FIG. 44 – Erreur relative pour le test "des fréquences $\pm\Im m(p_{11})$".

La courbe d'erreur relative, sur la figure 44, nous indique qu'à peu près à partir de l'instant caractéristique $T_0 \simeq 21$, l'erreur oscille entre 30 et 5%. La gamme de fréquence étant encore plus élevée que dans les tests précédents, nous observons (cf. figure 45) que l'onde incidente met beaucoup plus

de temps à traverser toute la plaque. Cette figure montre que les résonances numériques commencent à faire cruellement défaut dans les bandes de fréquences excitées et que même après le temps caractéristique, le régime transitoire ne peut toujours pas être correctement estimé par notre solution approchée. La figure 47 qui compare les déflexions de référence et approchée au point d'abscisse x_0 confirme bien les observations que nous venons de faire.

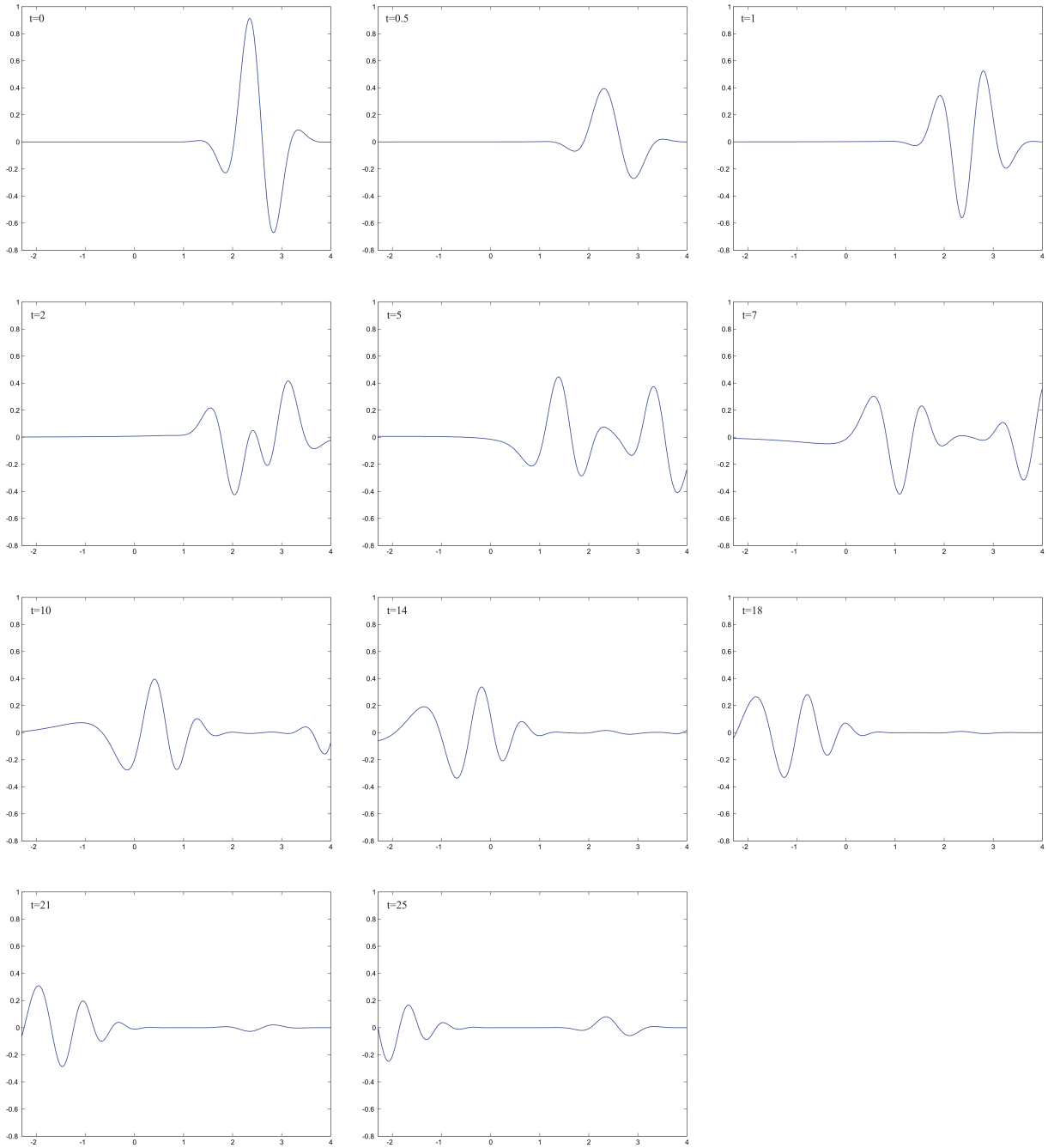

FIG. 45 – Des instantanés de l'onde incidente obtenus par la méthode de la transformée de LAPLACE.

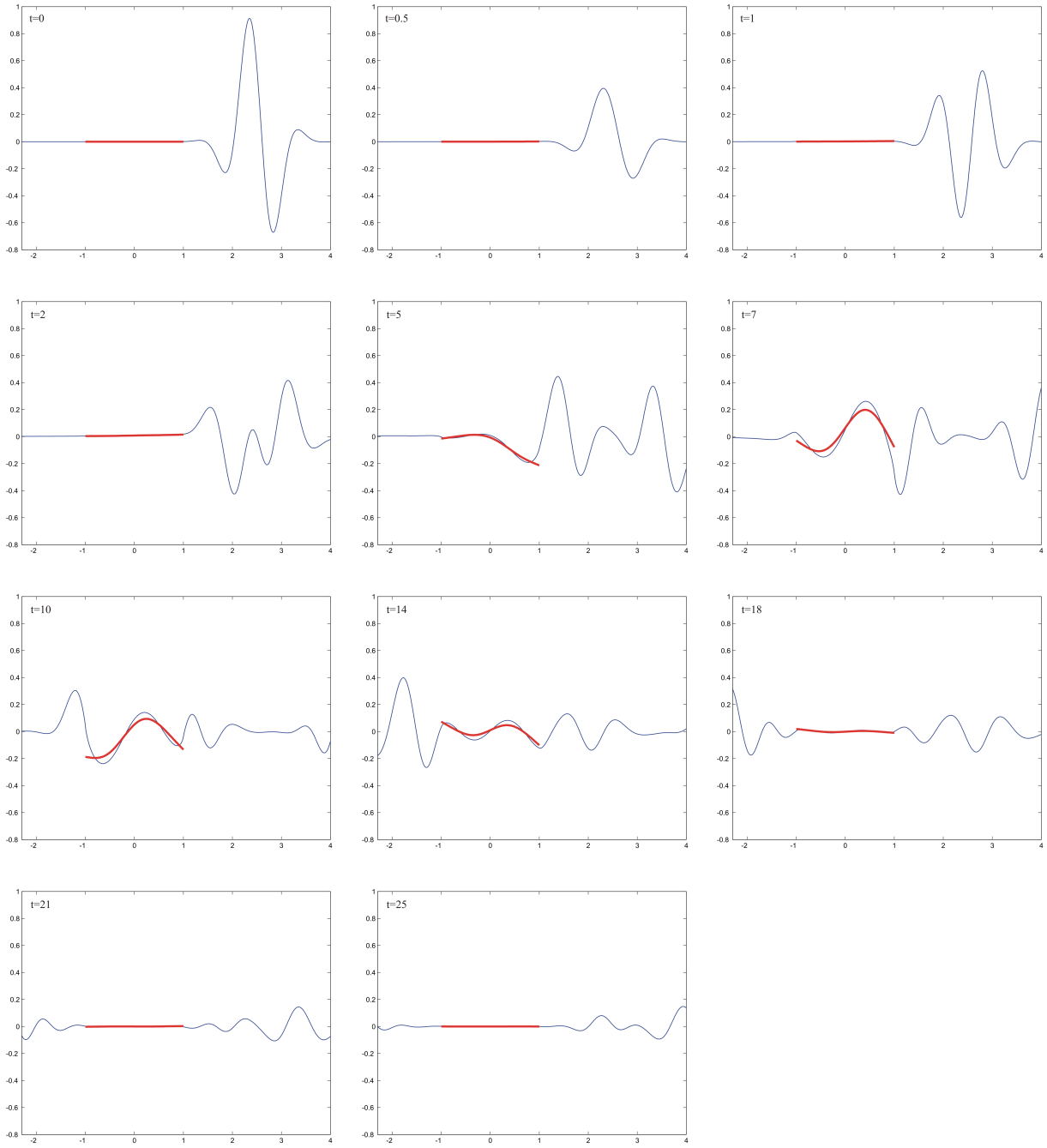

FIG. 46 – Des instantanés de l'onde incidente obtenus par la méthode de la transformée de LAPLACE.

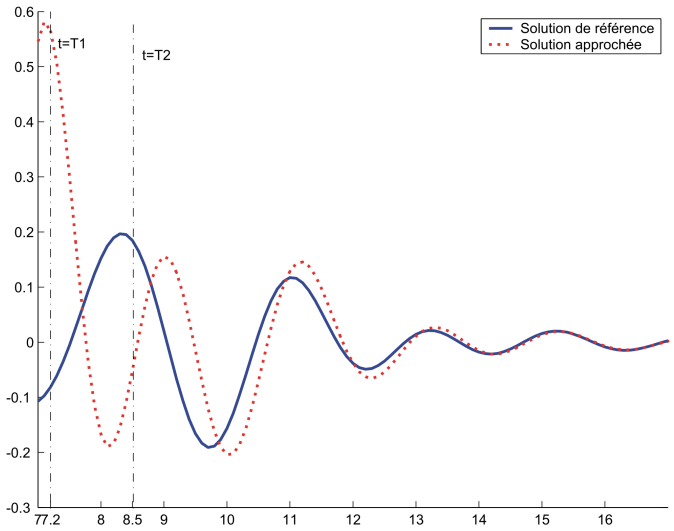

FIG. 47 – Solution transitoire pour le test “des fréquences $\pm\Im m(p_{11})$”.

Le graphique comparatif des résidus, sur la figure 48, montre une configuration semblable à ce qui a pu être observé dans les situations précédentes. Toutefois, on peut y remarquer que les droites 6, 7 et 8 se détachent des autres. Une observation très intéressante semble ressortir de la comparaison des figures 18, 33 et 48 : il semble que nous sommes incapables d'exciter les modes associés aux pôles assez proches de l'axe imaginaire, c'est-à-dire des résonances “presque valeurs propres”, avec une onde incidente. Les cas les plus parlant sont ceux des pôles p_{11} et $\overline{p_{11}}$ dont les modules des “coefficients de couplage” sont quasiment toujours de l'ordre de la précision de notre code de calcul, *i.e.* nulles.

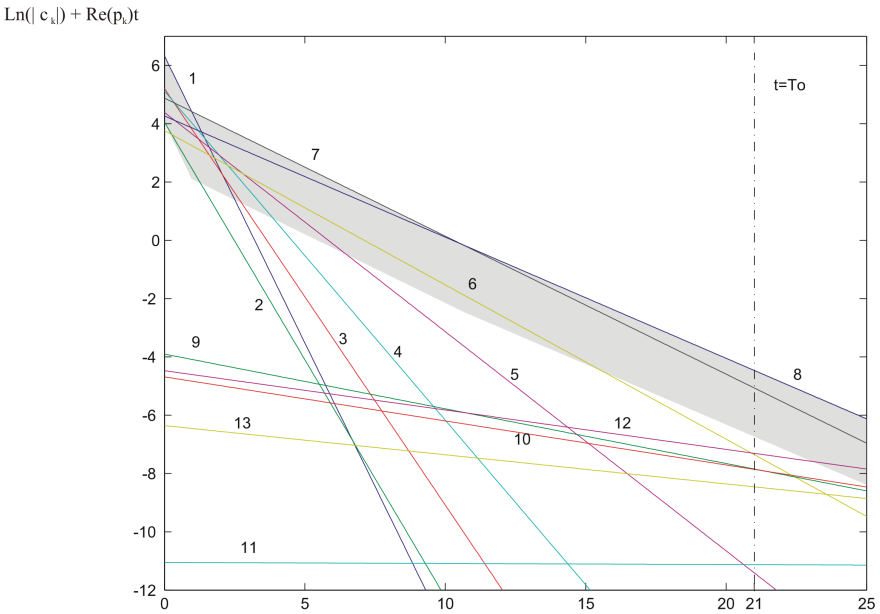

FIG. 48 – Comparatif des résidus pour le test “des fréquences $\pm\Im m(p_{11})$”.

Nous présentons finalement le graphique comparant la solution transitoire approchée (complète) et la solution approchée (réduite) obtenue à partir de η^h_{cut} et des pôles p_6, $\overline{p_6}$, p_7, $\overline{p_7}$, p_8 et $\overline{p_8}$, suivi de la courbe montrant l'évolution de Q_{cut}.

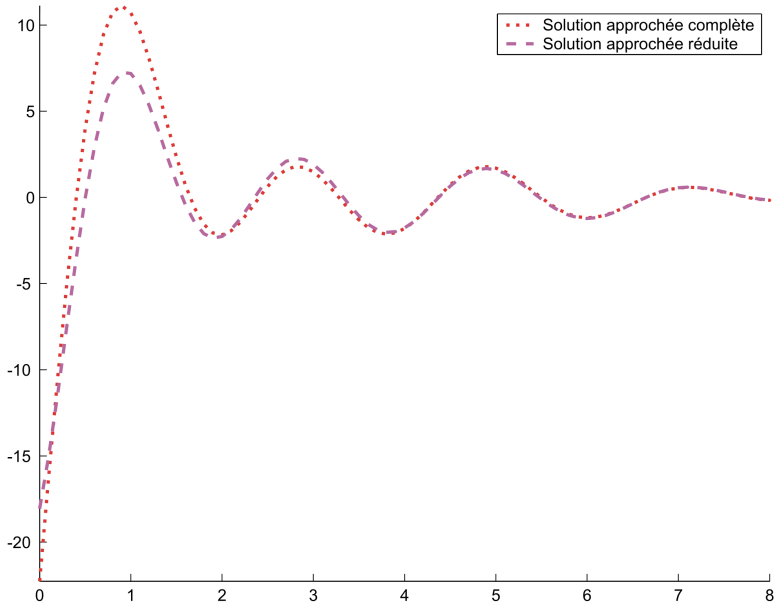

FIG. 49 – Comparaisons des solutions approchées pour le test "des fréquences $\pm\Im m(p_{11})$".

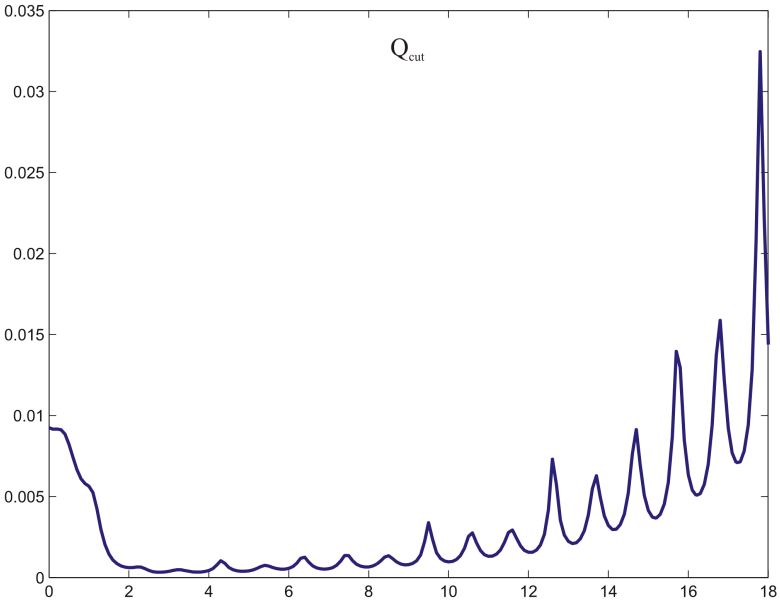

FIG. 50 – Influence de la coupure pour le test "des fréquences $\pm\Im m(p_{11})$".

La figure 49 montre que l'essentielle de l'information contenue dans la solution approchée se re-

trouve dans la solution réduite. Ce qui signifie simplement que les modes associés aux pôles p_6, $\overline{p_6}$, p_7, $\overline{p_7}$, p_8 et $\overline{p_8}$ sont "dominants" dans l'écriture de $\eta^h_{\text{pôles}}$.
La figure 50 confirme la tendance déjà observée sur la figure 36, à savoir que le terme η^h_{cut} n'est vraiment influent dans notre décomposition que si nous considérons des excitations susceptibles d'exciter la fréquence nulle. En effet, dans la situation considérée ici, contrairement aux précédentes, l'excitation "arrose" des bandes de fréquences qui "évitent" la fréquence nulle et nous observons que le terme η^h_{cut} représente moins de 3% du signal transitoire approché $\eta^h_{\text{décomp}}$.

3.4 Excitation initiale de la plaque

$$\eta(0,x,0) = 0 \quad \text{et}$$

$$\partial_t \eta(0,x,0) = \sin(\pi(x+1))\, \mathbb{1}_P(x)\,.$$

Nous considérons dans ce dernier test une situation différente des précédentes. Nous imposons cette fois-ci, comme annoncé, une déformation initiale de la plaque nulle et une vitesse initiale sinusoïdale. Ce test supplémentaire est essentiellement destiné à vérifier la pertinence de l'instant caractéristique T_0. En effet, nous nous attendons à ce que T_0 soit relativement petit puisque dans cette situation nous pouvons considérer que la plaque est instantanément excitée par l'onde incidente.
Nous allons donc représenter la courbe d'erreur relative et le graphique comparant notre solution de référence (obtenue par la méthode de la transformée de Laplace) et notre solution approchée.

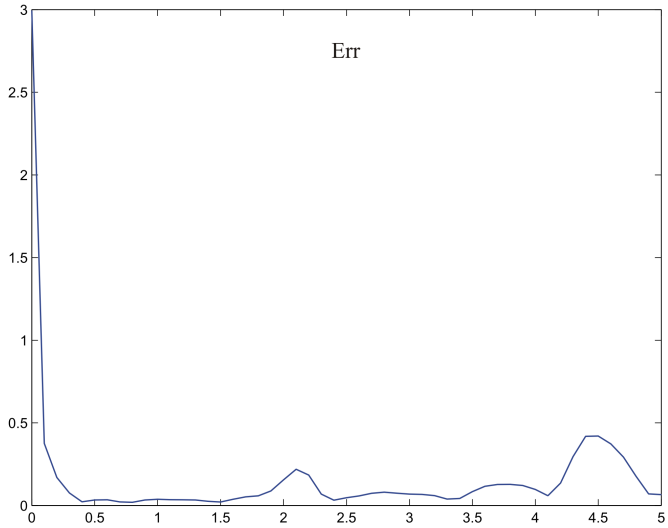

Fig. 51 – Courbe d'erreur relative.

La courbe d'erreur relative nous indique, pratiquement dès l'instant $t = 0$, une bonne approximation de la solution transitoire. La figure 52 qui représente sur un même graphique nos solutions de référence et approchée, vient confirmer nos propos.
Finalement, à titre indicatif, nous donnons quelques instantanés de l'onde incidente ainsi que de l'onde diffractée.

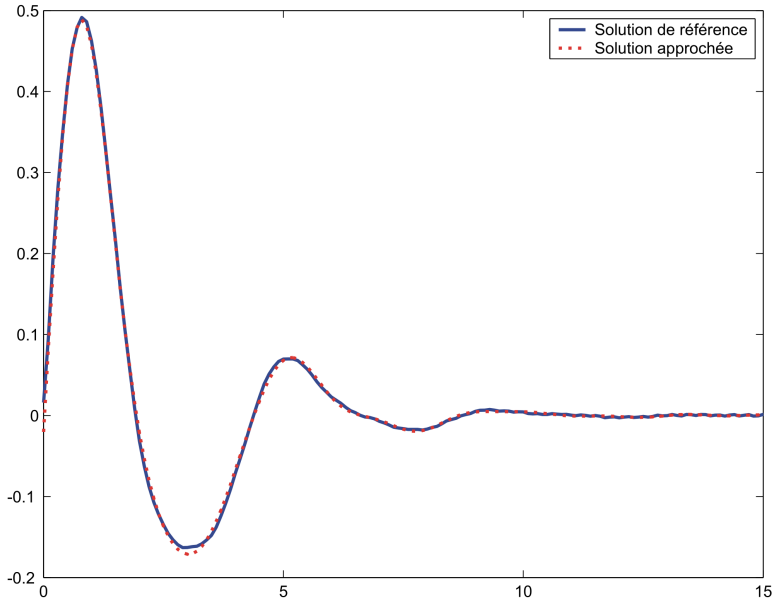

FIG. 52 – Comparaison des solutions de référence et approchée.

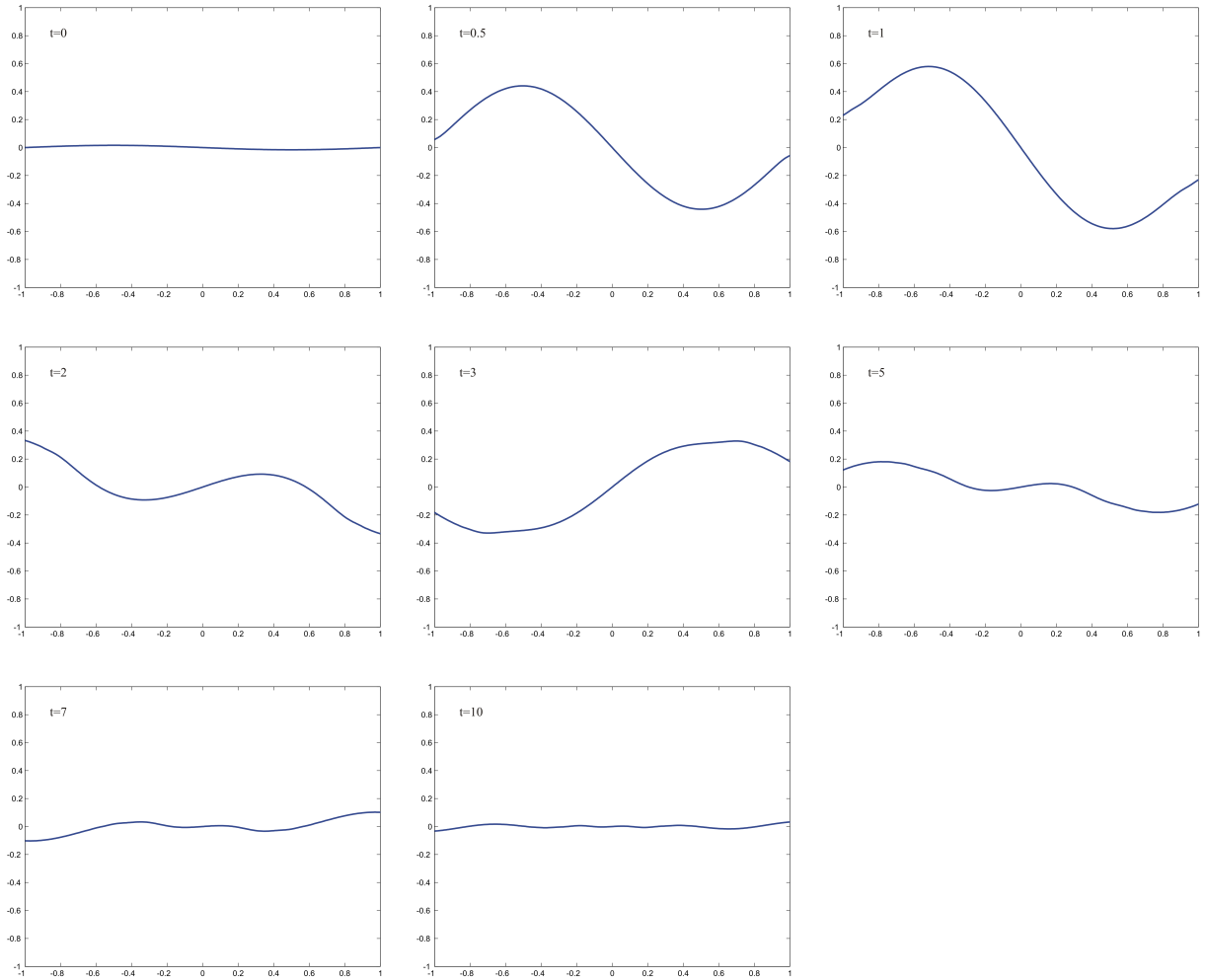

Fig. 53 – Des instantanés de l'onde incidente obtenus par la méthode de la transformée de Laplace.

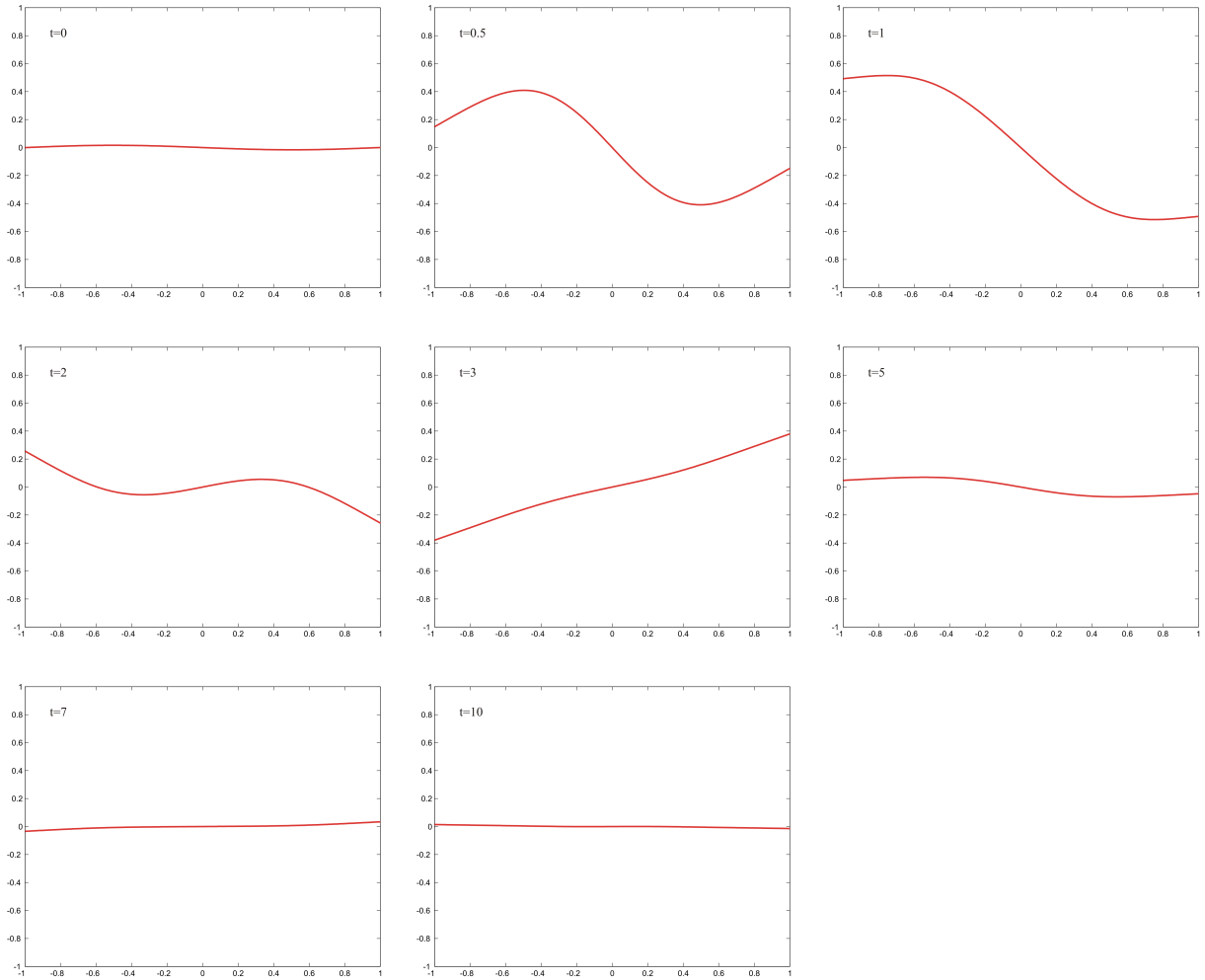

FIG. 54 – Des instantanés de l'onde diffractée obtenus par la méthode de la transformée de LAPLACE.

Conclusion

Un dicton africain dit :
"quelle que soit la longueur du chemin à parcourir,
le voyage commence par un premier pas."

Nous avons commencé par redécouvrir les équations linéarisées régissant les mouvements de flexion d'une plaque mince flottant librement et sans vitesse d'avance à la surface de l'océan, supposé non borné et de profondeur infinie. Puis nous avons pu donner un sens mathématique rigoureux à l'interprétation de notre problème de couplage sous la forme d'une équation des ondes abstraite en ramenant notre problème en une seule équation posée sur la surface : point de départ de notre méthode de décomposition en modes résonants.
Nous avons montré par la suite que la résolvante de l'hamiltonien de notre équation des ondes se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (plus généralement à la surface de Riemann à infinité de feuillets associée au logarithme), le seul point de branchement étant l'origine.
Les conditions requises pour l'application de notre méthode étant satisfaites, nous nous sommes attachés à décrire un procédé de mise en œuvre numérique qui consiste essentiellement en trois points :

1. Une équation intégrale posée en domaine borné, qui utilise la solution fondamentale du problème posé en milieu homogène, couplée à la dynamique de la plaque ;
2. Une approche variationnelle conduisant au couplage de deux types de discrétisation de la solution : une discrétisation sur une base éléments finis pour le potentiel des accélérations (qui représente l'élévation de la surface libre à l'extérieur de la plaque) et une discrétisation sur une base modale pour la déflexion de la plaque ;
3. La réduction de la recherche des résonances à la résolution d'un problème aux valeurs propres non linéaire.

Concernant notre prospection numérique annoncée en introduction et dont l'objectif est d'essayer de cerner le cadre de validité de notre méthode de décomposition en modes résonants, nous avons pu établir l'existence d'un temps caractéristique T_0 à partir duquel notre méthode prend tout son sens. Ce temps caractéristique correspond *grosso modo* au temps nécessaire à l'onde incidente (propagation en milieu homogène) pour parcourir entièrement la plaque. Notre méthode de décomposition en modes résonants ne s'appliquant uniquement qu'à la partie diffractée de la solution transitoire, c'est-à-dire la différence entre la solution du problème physique et la solution incidente, il semble naturel d'attendre que cette partie diffractée ait "une existence avérée". Il s'agit d'attendre qu'il soit légitime de parler d'onde diffractée. Bien entendu, comme le montre notre dernier test, ce délai devient négligeable dès lors que l'excitation est placée sur le support de la plaque.

Nous avons pu observer que le terme η_{reste} a une contribution négligeable dans la décomposition

$$\eta_D = \eta_{\text{pôles}} + \eta_{\text{cut}} + \eta_{\text{reste}}$$

et que notre méthode fournit une bonne approximation de la solution transitoire dès l'instant caractéristique T_0. Cela indique que la déformation du chemin dans le plan complexe décrite au chapitre 1 peut être fermée à distance finie $|\Im m(p)| < C$, où la constante C dépend exclusivement de l'excitation plus précisément des zones fréquentielles que la donnée choisie excite.

Le temps d'attente nécessaire pour pouvoir parler d'onde diffractée écoulé, nous avons pu établir que l'essentiel de l'information contenue dans $\eta_{\text{pôles}} + \eta_{\text{cut}}$ se retrouve dans $\eta_{\text{pôles}}$ lorsque l'excitation considérée excite des plages de fréquences qui évitent la fréquence nulle. Par contre lorsque la fréquence nulle est excitée, la coupure acquiert une influence significative à travers le terme η_{cut}.

L'objectif que nous nous étions fixé en introduction et qui consistait à obtenir un simulateur performant de prédiction des mouvements est pour l'instant partiellement atteint. En effet, nous avons obtenu des résultats positifs lorsque l'on attend suffisamment longtemps pour que l'onde incidente ait excitée toute la plaque, mais le calcul du terme lié à la coupure, η_{cut}, reste encore trop coûteux. De plus le calcul des résonances pose encore des difficultés numériques essentiellement liée à la mise en œuvre de la méthode de l'intégrale de CAUCHY qui reste très coûteuse.
Néanmoins nos travaux viennent compléter les travaux déjà existants sur des modèles simplifiés qui ramènent l'action de l'océan à un simple effet de masses et d'amortissements ajoutés autorisant ainsi une évaluation efficace de la solution pour des temps courts. Il est donc maintenant envisageable de chercher une approximation de la réponse transitoire sur différentes échelles de temps.

Il serait également très intéressant de s'imprégner des techniques de l'analyse microlocale et plus généralement de l'analyse semi-classique pour s'attaquer entre autres aux questions encore ouvertes concernant la simplicité des pôles, *i.e.* le fait que le premier terme du développement en série de LAURENT de la résolvante est d'ordre -1 au voisinage du pôle, et le comportement de $R(-p^2)$ quand $|\Im m(p)| \to +\infty$ (qui pourrait conduire à l'évaluation du comportement asymptotique de la solution transitoire). L'obtention d'un développement de $R(-p^2)$ au voisinage de l'origine serait aussi très intéressant car il pourrait fournir un moyen de traiter le problème de la coupure.

Annexe A

La résolvante d'un point de vue variationnel

Le choix d'un point de vue variationnel de la résolvante revient à interpréter $R(\zeta)$ comme un opérateur défini de $\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})^*$, le dual topologique de $\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})$ [1], dans $\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})$, dans le schéma

$$\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^* \subset \mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})^*$$

où l'on a identifié $\mathcal{H}$ à son dual (au lieu de dual nous devrions parler d'anti-dual, mais pour faire court nous continuerons l'abus de langage).

Proposition A.1 *Pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus Spec(\mathbb{A})$, la résolvante $R(\zeta)$ définie sur $\mathcal{H}$ et continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{A})$, se prolonge en un opérateur continu de $\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})^*$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})$: pour tout $\hat{f} \in \mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})^*$, la fonction $\hat{\eta} = R(\zeta)\hat{f} \in \mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})$ est l'unique solution de*

$$a(\hat{\eta}\,,\hat{\eta}') - \zeta(\hat{\eta}\,,\hat{\eta}')_{\mathcal{H}} = \langle \hat{f}\,,\hat{\eta}'\rangle_{\mathcal{H}}\,,\ \forall \hat{\eta}' \in \mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})$$

où

$$a(\eta\,,\eta') := \int_\Omega \nabla\mathbb{H}(\hat{\eta}) \cdot \overline{\nabla\mathbb{H}(\hat{\eta}')} + \gamma^{-1}\int_P \big(\mathbb{A}_P\hat{\eta}_P - \mathbb{H}(\hat{\eta})\big)\,\overline{\big(\mathbb{A}_P\hat{\eta}'_P - \mathbb{H}(\hat{\eta}')\big)}$$

et $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ note le produit de dualité entre $\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})^*$ et $\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})$.

Démonstration. Lorsque $\hat{f} \in \mathcal{H}$ nous savons que

$$((\mathbb{A} - \zeta\mathbb{I})\hat{\eta}\,,\hat{\eta}')_{\mathcal{H}} = a(\hat{\eta}\,,\hat{\eta}') - \zeta(\hat{\eta}\,,\hat{\eta}')_{\mathcal{H}} = (\hat{f}\,,\hat{\eta}')_{\mathcal{H}}\ \ \forall\hat{\eta} \in \mathscr{D}(\mathbb{A})\,,\ \forall\hat{\eta}' \in \mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})$$

et par densité de $\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})$ dans $\mathcal{H}$, nous en déduisons que

$$(\mathbb{A} - \zeta\mathbb{I})\hat{\eta} = \hat{f}\,.$$

□

De même,

[1] Nous rappelons que l'espace fonctionnel $\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})$ représente en fait le domaine $\mathscr{D}[a]$ de la forme a à partir de laquelle nous avons défini l'opérateur $\mathbb{A}$ (voir par exemple Birman et Solomjak [13]).

Proposition A.2 *Pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus Spec(\tilde{\mathbb{A}})$, la résolvante $\tilde{R}(\zeta)$ définie sur $L^2(\tilde{F})$ et continue de $L^2(\tilde{F})$ dans $\mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}})$, se prolonge en un opérateur continu de $\mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}}^{1/2})^*$ dans $\mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}}^{1/2})$ dans le schéma*

$$\mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}}^{1/2}) \subset L^2(\tilde{F}) = \big(L^2(\tilde{F})\big)^* \subset \mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}}^{1/2})^* .$$

Pour tout $\hat{f} \in \mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}}^{1/2})^*$, la fonction $\hat{\varphi}_I = \tilde{R}(\zeta)\hat{f} \in \mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}}^{1/2})$ est l'unique solution de

$$\tilde{a}(\hat{\varphi}_I\,, \hat{\tilde{\eta}}') - \zeta(\hat{\varphi}_I\,, \hat{\tilde{\eta}}')_{L^2(\tilde{F})} = \langle \hat{f}\,, \hat{\tilde{\eta}}' \rangle_{L^2(\tilde{F})}\,,\ \forall \hat{\tilde{\eta}}' \in \mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}}^{1/2})$$

où

$$\tilde{a}(\hat{\varphi}_I\,, \hat{\tilde{\eta}}') := \int_\Omega \nabla\tilde{\mathbb{H}}(\hat{\varphi}_I) \,.\, \overline{\nabla\tilde{\mathbb{H}}(\hat{\tilde{\eta}}')}$$

et $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{L^2(\tilde{F})}$ note le produit de dualité entre $\mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}}^{1/2})^*$ et $\mathscr{D}(\tilde{\mathbb{A}}^{1/2})$.

Nous allons montrer que l'interprétation variationnelle des résolvantes R et $\tilde{R}$ que nous venons de décrire va nous permettre de considérer la donnée $\hat{f}$ dans l'espace fonctionnel $L^2(\tilde{F})$ moins restrictif que $\mathcal{H}$ (qui demande beaucoup de régularité sur P).

Lemme A.3 $\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})^* \supset L^2(\tilde{F})$.

Démonstration. Rappelons que nous nous sommes placés dans le schéma fonctionnel suivant

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2}) & \subset & \mathcal{H} = \mathcal{H}^* & \subset & \mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2})^* \\
\| & & \| & & \| \\
\big(H^{1/2}(F) \times \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)\big) & \subset & \Big(L^2(F) \times \mathscr{D}(\mathbb{A}_P^{1/2})\Big) & \subset & \big(H^{1/2}(F) \times \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)\big)^* \\
 & & \| & & \| \\
 & & \big(L^2(F) \times H^2(P)\big) & & \big(H^{1/2}(F)\big)^* \times (\mathscr{D}(\mathbb{A}_P))^*
\end{array}$$

On constate alors que le lemme sera démontré dès lors que l'on aura montré que $\mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^* = L^2(P)$ dans le schéma suivant

$$\mathscr{D}(\mathbb{A}_P) \subset \mathscr{D}(\mathbb{A}_P^{1/2}) = H^2(P) \subset \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^* \overset{?}{=} L^2(P)\,.$$

• Soit $u \in \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)$ et $L \in \mathscr{D}(\mathbb{A}_P^{1/2})$. Alors d'après la définition de l'opérateur $\mathbb{A}_P$

$$\langle L, u \rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^*, \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)} = a_P(L, u) = (L, \mathbb{A}_P u)_{0,P}\,.$$

Nous en déduisons que

$$\big|\langle L, u \rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^*, \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)}\big| \leq \|L\|_{0,P}\, \|\mathbb{A}_P u\|_{0,P}\,.$$

Ce qui signifie que l'application $u \mapsto L(u)$ est linéaire et continue sur $\mathscr{D}(\mathbb{A}_P)$ et

$$\|L\|_{\mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^*} \leq \|L\|_{0,P} \Longrightarrow L^2(P) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^*\,.$$

• Réciproquement. Supposons que $L^2(P) \subsetneq \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^*$. Par hypothèse il existe un élément $L_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^*$ tel que $L_0 \notin L^2(P)$. Cette dernière propriété se traduit par le fait qu'il existe donc un élément $u \in \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^{**} = \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)$, $u \neq 0$, tel que

$$\left|\begin{array}{l}
\langle L, u \rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^*, \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^{**}} = 0\,, \quad \forall L \in L^2(P)\,, \\[2ex]
\langle L_0, u \rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^*, \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^{**}} \neq 0\,.
\end{array}\right.$$

Nous allons donc simplement montrer que $L^2(P) = \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^*$ en montrant que u est nécessairement nulle.
Supposons que $L \in \mathscr{D}(\mathbb{A}_P^{1/2})$, alors

$$\langle L, u \rangle_{\mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^*, \mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^{**}} = a_P(L, u) = \big(L, \mathbb{A}_P u\big)_{0,P} .$$

Par densité de $\mathscr{D}(\mathbb{A}_P^{1/2})$ dans $L^2(P)$, nous en déduisons que $\|\mathbb{A}_P u\|_{0,P} = 0$. Ce qui implique que $u = 0$ puisque l'opérateur $\mathbb{A}_P$ est inversible.
Nous déduisons finalement de tous ces calculs que

$$\mathscr{D}(\mathbb{A}_P)^* = L^2(P) .$$

□

Corollaire A.4 *La résolvante R de $\mathbb{A}$ se prolonge en un opérateur continu de $L^2(\tilde{F})$ à valeurs dans $\mathscr{D}(\mathbb{A}^{1/2}) = \mathcal{V}$.*

Annexe B

Outils de la méthode numérique

Nous regroupons dans cet annexe la méthode de diagonalisation de l'opérateur $\mathbb{A}_P$ et la technique d'extraction analytique de la singularité de la fonction de Green.

1 Diagonalisation de l'opérateur $\mathbb{A}_P$

Le but de cette section est de donner une expression explicite des éléments spectraux de l'opérateur $\mathbb{A}_P$. Il s'agit donc de rechercher les valeurs et fonctions propres de l'opérateur $\mathbb{A}_P = \beta\partial_x^4 + \mathbb{I}$.
L'équation aux valeurs propres s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } U \neq 0 \text{ et } \lambda \text{ tels que} \\ &\beta\partial_x^4 U + U = \lambda U\,,\ \lambda \geq 1 \text{ car } \mathbb{A}_P \geq \mathbb{I} \\ &\partial_x^2 U(\pm 1) = 0 = \partial_x^3 U(\pm 1) \end{aligned} \tag{B.1}$$

Équation caractéristique

L'équation caractéristique associée à (B.1) s'écrit

$$\beta x^4 + 1 = \lambda\,.$$

On pose

$$\alpha := \left(\frac{\lambda - 1}{\beta}\right)^{1/4}$$

- Si $\lambda = 1$, *i.e.* $\alpha = 0$, alors $U = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La fonction U peut alors s'interpréter comme les mouvements rigides de la plaque (en fait de la poutre) ;
- Si $\lambda \neq 1$, *i.e.* $\alpha \neq 0$, alors $U = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + C\cosh(\alpha x) + D\sinh(\alpha x)$ avec

$(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$. De plus

$$\partial_x^2 U(\pm 1) = 0 \implies \left| \begin{array}{l} -Ac - Bs + Cch + Dsh = 0 \\ \\ -Ac + Bs + Cch - Dsh = 0 \end{array} \right.$$

$$\partial_x^3 U(\pm 1) = 0 \implies \left| \begin{array}{l} As - Bc + Csh + Dch = 0 \\ \\ -As - Bc - Csh + Dch = 0 \end{array} \right.$$

où c, s, ch et sh notent respectivement $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cosh(\alpha)$ et $\sinh(\alpha)$. Nous sommes donc conduits à résoudre le système suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -c & -s & ch & sh \\ -c & s & ch & -sh \\ s & -c & sh & ch \\ -s & -c & -sh & ch \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = [0]$$

Bien entendu, ce système admettra une solution non triviale si et seulement si

$$\det(\mathcal{A}) = 4c^2 sh^2 - 4s^2 ch^2 \neq 0\,.$$

Or nous constatons que

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{A}) = 0 \quad &\iff \quad c^2 sh^2 = s^2 ch^2 \\ &\iff \quad \tan^2(\alpha) = \tanh^2(\alpha) \\ &\qquad\quad\ \ \text{car } \alpha \equiv 0 \left[\tfrac{\pi}{2}\right] \text{ n'est pas solution} \\ &\iff \quad \tan(\alpha) = \pm \tanh(\alpha) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant pouvoir déduire les fonctions propres (non nulles).

Calcul des fonctions propres

Nous manipulons dans un premier temps la matrice $\mathcal{A}$ pour en obtenir une réduction de Gauss et ainsi résoudre le système :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} -c & -s & ch & sh \\ -c & s & ch & -sh \\ s & -c & sh & ch \\ -s & -c & -sh & ch \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s & -2c & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & c & -s \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -c & -s & ch & sh \\ 0 & -1 & sch + csh & ssh + cch \\ 0 & 0 & -2c(sch + csh) & -2ch - 2c(ssh + cch) \\ 0 & 0 & 0 & 2csh - 2sch \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• Maintenant, si $\tan(\alpha) = \tanh(\alpha) \Longleftrightarrow csh - sch = 0$ alors notre système réduit s'écrit

$$\begin{bmatrix} -c & -s & ch & sh \\ 0 & -1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = [0]$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A = \frac{D}{c}\left[s\left(\frac{a_1 b_2}{b_1} - a_2\right) - ch\frac{b_2}{b_1} + sh\right] \\ \\ B = -D\left(\frac{a_1 b_2}{b_1} - a_2\right) \\ \\ C = -D\frac{b_2}{b_1}\,,\ b_1 \neq 0 \end{array} \right.$$

• Par contre si $\tan(\alpha) = -\tanh(\alpha) \Longleftrightarrow csh + sch = 0$ alors notre système réduit s'écrit

$$\begin{bmatrix} -c & -s & ch & sh \\ 0 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = [0]$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} B = D = 0 \\ \\ C = A\frac{c}{ch}\,,\ A \neq 0 \end{array} \right.$$

On peut donc résumer le tout de la manière suivante :

- Si $\alpha = 0$ alors les fonctions propres associées $U(x)$ sont

$$U(x) = b \ \text{ et } \ U(x) = ax \ \text{ avec } \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\,;$$

- Si $\alpha \neq 0$
  - Si $\tan(\alpha) = -\tanh(\alpha)$ alors les fonctions propres associées $U(x)$ sont

$$U(x) = A\left[\cos(\alpha x) + \frac{\cos(\alpha)}{\cosh(\alpha)}\cosh(\alpha x)\right] \ \text{ avec } \ A \in \mathbb{R}\,;$$

  - Si $\tan(\alpha) = \tanh(\alpha)$ alors les fonctions propres associées $U(x)$ sont

$$\begin{aligned} U(x) \quad = \quad & \frac{D}{\cos(\alpha)}\left[\sin(\alpha)\left(\frac{a_1 b_2}{b_1} - a_2\right) - \cosh(\alpha)\frac{b_2}{b_1} + \sinh(\alpha)\right]\cos(\alpha x) \\ & - D\left(\frac{a_1 b_2}{b_1} - a_2\right)\sin(\alpha x) - D\frac{b_2}{b_1}\cosh(\alpha x) + D\sinh(\alpha x) \ \text{ avec } \ D \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où

$$a1 = \sin(\alpha)\,\cosh(\alpha) + \cos(\alpha)\,\sinh(\alpha)\,,$$

$$a2 = \sin(\alpha)\,\sinh(\alpha) + \cos(\alpha)\,\cosh(\alpha)\,,$$

$$b1 = -2\,\cos(\alpha)\,a1\,,$$

$$b2 = -2\,\cosh(\alpha) - 2\,\cos(\alpha)\,a2\,.$$

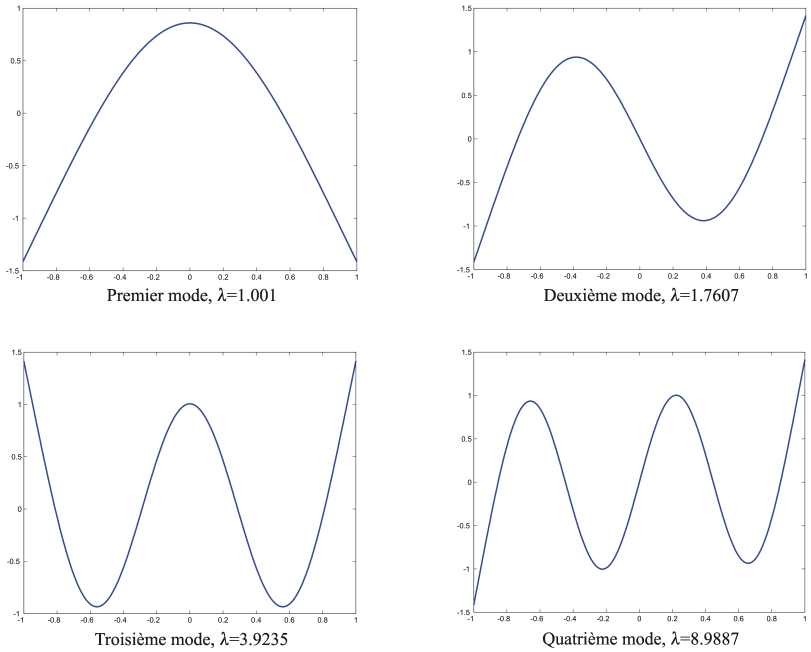

FIG. 1 – Représentation des 4 premiers modes et calcul des valeurs propres avec $\beta = 0.0032$.

2 Extraction de la singularité pour le calcul de $\mathbb{G}_\zeta$

Il s'agit de calculer aussi précisément que possible une intégrale du type[1]

$$I = \int_{S\times T} \tau(x)\mu(y)\ln(|x-y|)\,\mathrm{d}s_x\mathrm{d}t_y$$

où S et T sont deux segments rectilignes composant la discrétisation de la surface bornée P, τ et μ deux des fonctions de base respectives de chacun de ces segments. Il faut noter ici que les fonctions de base de la discrétisation sont des fonctions polynomiales. Par conséquent, nous devrons être capables de calculer une intégrale du type

$$I_{mp} = \int_{S\times T} x^m y^p \ln(|x-y|)\,\mathrm{d}s_x\mathrm{d}t_y\,.$$

[1] J'aimerais remercier Marc LENOIR qui m'a permis de 'm'inspirer' d'un de ces nombreux poly en cours.

2.1 Formule d'Euler

Nous allons tout d'abord rappeler une propriété des fonctions homogènes dont nous ferons usage. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{x} = (x, y)$ un élément de Ω et f une fonction homogène de degré κ

$$f(\lambda \mathrm{x}) = \lambda^\kappa f(\mathrm{x})\,.$$

Si nous dérivons cette formule par rapport à λ, nous obtenons

$$(\nabla_{\mathrm{x}} f(\lambda \mathrm{x}), \mathrm{x}) = \kappa \lambda^{\kappa-1} f(\mathrm{x})\,,$$

où $(\cdot\,,\cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien. Et pour $\lambda = 1$

$$(\nabla_{\mathrm{x}} f(\mathrm{x}), \mathrm{x}) = \kappa f(\mathrm{x})\,.$$

2.2 Formule d'intégration générale

Considérons la fonction f suivante qui n'est plus homogène

$$f(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x}) \ln(r(\mathrm{x}))$$

où r est homogène de degré q et g est homogène de degré κ. Alors

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathrm{x}} r(\mathrm{x}), \mathrm{x}) &= q\, r(\mathrm{x})\,,\\ (\nabla_{\mathrm{x}} g(\mathrm{x}), \mathrm{x}) &= \kappa g(\mathrm{x})\,.\end{aligned}$$

Posons

$$u(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x}) \frac{(\nabla_{\mathrm{x}} r(\mathrm{x}), \mathrm{x})}{r(\mathrm{x})}$$

alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} &= \int_\Omega g(\mathrm{x}) \frac{(\nabla_{\mathrm{x}} r(\mathrm{x}), \mathrm{x})}{r(\mathrm{x})}\,\mathrm{dx}\\ &= \int_{\partial\Omega} (\mathrm{x}\,, \nu) f(\mathrm{x}) \mathrm{d}\sigma(\mathrm{x}) - 2\int_\Omega f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} - \int_\Omega (\nabla_{\mathrm{x}} g(\mathrm{x}), \mathrm{x}) \ln(h(\mathrm{x}))\,\mathrm{dx}\end{aligned}$$

où ν désigne la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$. Par conséquent

$$(\kappa + 2) \int_\Omega f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int_{\partial\Omega} (\mathrm{x}\,, \nu) f(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\sigma(\mathrm{x}) - q \int_\Omega g(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}\,. \tag{B.2}$$

2.3 La formule analytique

Tout d'abord quelques notations. Les extrémités de S sont notées γ_1 et γ_2, celles de T, δ_1 et δ_2. On pose $\gamma := (\gamma_1\,, \gamma_2)$ et $\delta := (\delta_1\,, \delta_2)$. Pour calculer notre intégrale I_{mp}, nous allons utiliser notre formule générale (B.2) dans le cas particulier suivant

$$\begin{aligned}r(\mathrm{x}) &= |x - y|\ , \quad \text{homogène de degré } 1\,,\\ g(\mathrm{x}) &= x^m y^p\ , \quad \text{homogène de degré } (\mathrm{m{+}p})\,.\end{aligned}$$

Par conséquent si on utilise la formule (B.2), on obtient

$$(2 + m + p) I_{mp} = J - \frac{1}{(m+1)(p+1)} \left[\gamma_2^{m+1} - \gamma_1^{m+1}\right] \left[\delta_2^{p+1} - \delta_1^{p+1}\right]$$

avec

$$\begin{aligned} J &:= \int_{\partial\Omega} {}^t(x,y) \cdot \nu\, f(\mathrm{x})\, \mathrm{d}\sigma(\mathrm{x}) \\ &= \int_{\partial\Omega} {}^t(x,y) \cdot \nu\, x^m y^p \ln(|x-y|) \mathrm{d}\sigma(\mathrm{x}) \\ &= \int_{\delta_1}^{\delta_2} \gamma_2^{m+1} y^p \ln(|\gamma_2 - y|)\mathrm{d}y + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \delta_2^{p+1} x^m \ln(|x-\delta_2|)\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\delta_1}^{\delta_2} \gamma_1^{m+1} y^p \ln(|\gamma_1 - y|)\mathrm{d}y - \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \delta_1^{p+1} x^m \ln(|x-\delta_1|)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Pour poursuivre les calculs, il nous faut distinguer trois cas :

1. le premier est celui où les segments sont confondus ($\gamma = \delta$),
2. le second est celui où les segments ont une extrémité commune (on supposera que $\gamma_2 = \delta_1$),
3. et enfin le troisième cas est celui où les segments sont disjoints (on supposera que $\gamma_2 < \delta_1$).

Cas 1 : $\gamma = \delta$

On pose

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

avec

$$\begin{aligned} J_1 &= \gamma_2^{m+1} \int_0^{\gamma_2-\gamma_1} (\gamma_2 - t)^p \ln(t)\mathrm{d}t \\ J_2 &= -\gamma_1^{m+1} \int_0^{\gamma_2-\gamma_1} (t+\gamma_1)^p \ln(t)\mathrm{d}t \\ J_3 &= \gamma_2^{p+1} \int_0^{\gamma_2-\gamma_1} (\gamma_2 - s)^m \ln(s)\mathrm{d}s \\ J_4 &= -\gamma_1^{p+1} \int_0^{\gamma_2-\gamma_1} (s+\gamma_1)^m \ln(s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Cas 2 : $\gamma_2 = \delta_1$

On pose

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

avec

$$\begin{aligned} J_1 &= \gamma_2^{m+1} \int_0^{\delta_2-\gamma_2} (t+\gamma_2)^p \ln(t)\mathrm{d}t \\ J_2 &= -\gamma_1^{m+1} \int_{\gamma_2-\gamma_1}^{\delta_2-\gamma_1} (t+\gamma_1)^p \ln(t)\mathrm{d}t \\ J_3 &= \delta_2^{p+1} \int_{\delta_2-\gamma_2}^{\delta_2-\gamma_1} (\delta_2 - s)^m \ln(s)\mathrm{d}s \\ J_4 &= -\gamma_2^{p+1} \int_0^{\gamma_2-\gamma_1} (\gamma_2 - s)^m \ln(s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Cas 3 : $\gamma_2 < \delta_1$

On pose

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

avec

$$\begin{aligned}
J_1 &= \gamma_2^{m+1} \int_{\delta_1-\gamma_2}^{\delta_2-\gamma_2} (t+\gamma_2)^p \ln(t)\mathrm{d}t \\
J_2 &= -\gamma_1^{m+1} \int_{\delta_1-\gamma_1}^{\delta_2-\gamma_1} (t+\gamma_1)^p \ln(t)\mathrm{d}t \\
J_3 &= \delta_2^{p+1} \int_{\delta_2-\gamma_2}^{\delta_2-\gamma_1} (\delta_2-s)^m \ln(s)\mathrm{d}s \\
J_4 &= -\delta_1^{p+1} \int_{\delta_1-\gamma_2}^{\delta_1-\gamma_1} (\delta_1-s)^m \ln(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Nous constatons alors qu'une formule explicite de I_{mp} (dans les trois cas) se déduira de la connaissance d'une primitive de

$$\int (a+bx)^n \ln(x)\mathrm{d}x\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Commençons donc par donner l'expression analytique de la primitive ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\int (a+bx)^n \ln(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{b(n+1)} \left[(a+bx)^{n+1}\ln(x) - \int \frac{(a+bx)^{n+1}}{x}\mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{1}{b(n+1)} \left[(a+bx)^{n+1}\ln(x) - \int \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k x^k \mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{1}{b(n+1)} \left[\left\{ (a+bx)^{n+1} - a^{n+1} \right\} \ln(x) - \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k \frac{x^k}{k} \right] \\
&= \frac{1}{b(n+1)} \left[\left\{ (a+bx)^{n+1} - a^{n+1} \right\} \ln(x) - \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} a^{n-k} b^{k+1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right] \\
&= \frac{1}{b(n+1)} \left[(a+bx)^{n+1} - a^{n+1} \right] \ln(x) - \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{a^{n-k} b^k x^{k+1}}{(k+1)^2}
\end{aligned}$$

où $C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ note le coefficient binomial.
Nous pouvons déduire de la formule précédente les expressions explicites des J_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ et donc celle de I_{mp} :

• Si l'on suppose que les segments sont confondus, on obtient :

$$\begin{aligned}
(2+m+p)I_{mp} &= -\frac{(\gamma_2^{m+1}-\gamma_1^{m+1})(\gamma_2^{p+1}-\gamma_1^{p+1})}{(m+1)(p+1)} \\
&+ \left[\frac{1}{p+1}+\frac{1}{m+1}\right](\gamma_2^{m+1}-\gamma_1^{m+1})(\gamma_2^{p+1}-\gamma_1^{p+1})\ln(\gamma_2-\gamma_1) \\
&- \gamma_2^{m+1}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{\gamma_2^{p-k}(-1)^k(\gamma_2-\gamma_1)^{k+1}}{(k+1)^2} + \gamma_1^{m+1}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{\gamma_1^{p-k}(\gamma_2-\gamma_1)^{k+1}}{(k+1)^2} \\
&- \gamma_2^{p+1}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\gamma_2^{m-k}(-1)^k(\gamma_2-\gamma_1)^{k+1}}{(k+1)^2} + \gamma_1^{p+1}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\gamma_1^{m-k}(\gamma_2-\gamma_1)^{k+1}}{(k+1)^2}
\end{aligned}$$

• Si l'on suppose que les segments ont une extrémité commune avec $\gamma_2 = \delta_1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(2+m+p)I_{mp} &= -\frac{(\gamma_2^{m+1}-\gamma_1^{m+1})(\delta_2^{p+1}-\gamma_2^{p+1})}{(m+1)(p+1)} \\
&+ \frac{\gamma_2^{m+1}}{p+1}(\delta_2^{p+1}-\gamma_2^{p+1})\ \ln(\delta_2-\gamma_2) + \frac{\gamma_2^{p+1}}{m+1}(\gamma_1^{m+1}-\gamma_2^{m+1})\ln(\gamma_2-\gamma_1) \\
&+ \gamma_2^{p+1}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\gamma_2^{m-k}(-1)^k(\gamma_2-\gamma_1)^{k+1}}{(k+1)^2} - \gamma_2^{m+1}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{\gamma_2^{p-k}(\delta_2-\gamma_2)^{k+1}}{(k+1)^2} \\
&- L(\gamma_1\,,\delta\,,m\,,p) + S(\gamma_1\,,\delta\,,m\,,p) + L(\delta_2\,,\gamma\,,p\,,m) - S(\delta_2\,,\gamma\,,p\,,m)
\end{aligned}$$

où $\forall i \in \{1,2\}$

$$\begin{aligned}
L(\gamma_i\,,\delta\,,m\,,p) &= \frac{\gamma_i^{m+1}}{p+1}\left[(\delta_2^{p+1}-\gamma_i^{p+1})\ln(|\delta_2-\gamma_i|) - (\delta_1^{p+1}-\gamma_i^{p+1})\ln(|\delta_1-\gamma_i|)\right] \\
S(\gamma_i\,,\delta\,,m\,,p) &= \gamma_i^{m+1}\left[\sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{\gamma_i^{p-k}(\delta_2-\gamma_i)^{k+1}}{(k+1)^2} - \sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{\gamma_i^{p-k}(\delta_1-\gamma_i)^{k+1}}{(k+1)^2}\right].
\end{aligned}$$

• Si l'on suppose que les segments sont disjoints avec $\gamma_2 < \delta_1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(2+m+p)I_{mp} &= -\frac{(\gamma_2^{m+1}-\gamma_1^{m+1})(\delta_2^{p+1}-\delta_1^{p+1})}{(m+1)(p+1)} \\
&+ L(\gamma_2\,,\delta\,,m\,,p) - S(\gamma_2\,,\delta\,,m\,,p) - L(\gamma_1\,,\delta\,,m\,,p) + S(\gamma_1\,,\delta\,,m\,,p) \\
&+ L(\delta_2\,,\gamma\,,p\,,m) - S(\delta_2\,,\gamma\,,p\,,m) - L(\delta_1\,,\gamma\,,p\,,m) + S(\delta_1\,,\gamma\,,p\,,m)\,.
\end{aligned}$$

3 Extraction de la singularité pour le calcul de l'onde incidente

Nous donnons ici simplement la formule analytique permettant l'extraction de la singularité lors du calcul de l'onde libre.

$$\begin{aligned}
\int y^m \ln(a+by)\mathrm{d}y &= \frac{1}{m+1}\left[y^{m+1}\ln(a+by) - b\int \frac{y^{m+1}}{a+by}\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{1}{m+1}\left[y^{m+1} - \frac{(-a)^{m+1}}{b^{m+1}}\right]\ln(a+by) \\
&\quad + \frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k \frac{y^{m-k+2}\,a^{k-1}}{(m-k+2)\,b^{k-1}}
\end{aligned}$$

où le nombre m est un entier positif et les coefficients a et b sont choisis de telle sorte que $|x-y| = a+by$.

Annexe C

Le contenu spectral d'une donnée

Rappelons notre équation des ondes abstraite

$$\mathrm{d}_t^2\eta + \mathbb{A}\eta = 0 \quad \forall t > 0\,,$$

$$\eta(0) = \eta^0 \quad \text{et} \quad \partial_t\eta(0) = \eta^1\,,$$

où l'opérateur $\mathbb{A}$ est auto-adjoint et défini positif.
Le point qui nous intéresse ici est de savoir estimer la gamme de fréquences dans laquelle notre solution transitoire η sera excitée étant données les conditions initiales η^0 et η^1. Pour cela nous allons utiliser des résultats de la seconde partie de ce mémoire. Malheureusement, il y a fort à parier que le lecteur sera perdu à la première lecture, mais pour éviter de reprendre des passages déjà détaillés en seconde partie, nous ne rappellerons que les résultats dont nous avons besoin sans les démontrer.

Tout d'abord notons que la solution de cette équation des ondes en terme de fonctions de l'opérateur $\mathbb{A}$ s'écrit

$$\eta(t) = \cos\left(\mathbb{A}^{1/2}t\right)\eta^0 + \mathbb{A}^{-1/2}\sin\left(\mathbb{A}^{1/2}t\right)\eta^1\,.$$

L'opérateur $\mathbb{A}$ étant auto-adjoint et défini positif, les opérateurs $\tilde{\mathbb{A}}^{\pm 1/2}$ sont bien définis et auto-adjoints (consulter par exemple Dautray-Lions [24]).
Nous montrons dans la seconde partie de ce mémoire que notre opérateur $\mathbb{A}$ (pour le problème bi-dimensionnel) admet une représentation spectrale semblable à celle de l'opérateur $\tilde{\mathbb{A}}$ que nous avons établie au chapitre 3 §2.1, faisant intervenir les familles $\{w^{\pm}_{\lambda,k}\}$ de fonctions propres généralisées du problème de diffraction (le signe + signifie qu'il s'agit d'une onde entrante, le signe - signifie qu'il s'agit d'une onde sortante) où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $k = \pm 1$. Cette famille de fonction propres généralisées nous permet alors d'écrire η comme suit

$$\begin{aligned}\eta(t) = \quad & \int_{\lambda\in\mathbb{R}^+}\sum_{k\in\{\pm1\}}\cos\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\langle\eta^0\,,w^{\pm}_{\lambda,k}\rangle\,w^{\pm}_{\lambda,k}\,\mathrm{d}\lambda \\ + \quad & \int_{\lambda\in\mathbb{R}^+}\sum_{k\in\{\pm1\}}\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)}{\sqrt{\lambda}}\langle\eta^1\,,w^{\pm}_{\lambda,k}\rangle\,w^{\pm}_{\lambda,k}\,\mathrm{d}\lambda\,.\end{aligned}$$

Nous constatons alors qu'il nous suffit pour contrôler le contenu spectral de la donnée, d'être capable de choisir η^0 et η^1 de telle sorte que le support de $\langle\eta^0\,,w^{\pm}_{\lambda,k}\rangle$ et de $\langle\eta^1\,,w^{\pm}_{\lambda,k}\rangle$ soit inclus dans un intervalle du type $]\lambda_0-\epsilon\,,\lambda_0+\epsilon[$ avec $\epsilon > 0$.

C'est là qu'intervient une propriété importante des fonctions propres généralisées : asymptotiquement en espace ou loin de l'obstacle si l'on préfère

$$w^{\pm}_{\lambda,k} \sim \tilde{w}_{\lambda,k} + \alpha^{\pm}_{k} \tilde{w}_{\lambda,k}\,.$$

Les coefficients complexes $\alpha^{\pm}_{k}$ sont généralement appelés, suivant le contexte, coefficients de transmission ou de réflexion. Finalement le tout est de savoir estimer le support de

$$\langle v\,, \tilde{w}_{\lambda,k}\rangle$$

pour une fonction v donnée. Le point clé est de se souvenir que "les coordonnées spectrales" de la fonction v ne sont rien d'autre que

$$\langle v\,, \tilde{w}_{\lambda,k}\rangle = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}(v)(\lambda k)\,.$$

Ayant en mémoire que la transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne nous entreprenons de poser

$$v(x) := \cos(\lambda_0 x)\,\exp\big(-\tau(x-x_0)^2\big)$$

dont la transformée de Fourier est

$$(\mathscr{F}v)(\xi) = \frac{1}{2}\,\big(\exp\big(-\mathrm{i}\,(\xi+\lambda_0)x_0\big)\,\mathcal{F}(\xi+\lambda_0) + \exp\big(-\mathrm{i}\,(\xi-\lambda_0)x_0\big)\,\mathcal{F}(\xi+\lambda_0)\big)$$

$$\text{où}\quad \mathcal{F}(\xi) := \mathscr{F}\left(\exp\big(-\tau\,y^2\big)\right)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\,\exp\big(-\xi^2/(4\,\tau)\big)\ .$$

La fonction cosinus permet de centrer $\mathscr{F}(v)$ sur $\pm\lambda_0$ (cf. figure 2), le coefficient τ permet de régler la largeur des gaussiennes (plus τ est grand et plus les gaussiennes "fréquentielles" sont étroites) enfin le paramètre x_0 nous permet de placer la gaussienne "spatiale" où bon nous semble. L'idée maintenant est donc simplement, en fonction de la donnée v, de se fixer un intervalle à l'extérieur duquel la transformée de Fourier de v sera considérée espsilonesque, c'est-à-dire

$$|(\mathscr{F}v)(\xi)| \le \epsilon \max_{\kappa\in\mathbb{R}} |(\mathscr{F}v)(\kappa)|$$

comme le montre la figure ci-dessous.

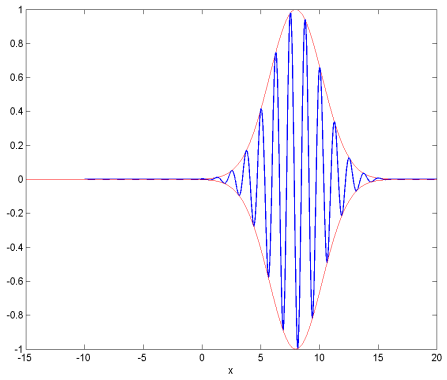

Fig. 1 – $v(x) = \cos(5x)\,\exp\big(-0.1(x-8)^2\big)$.

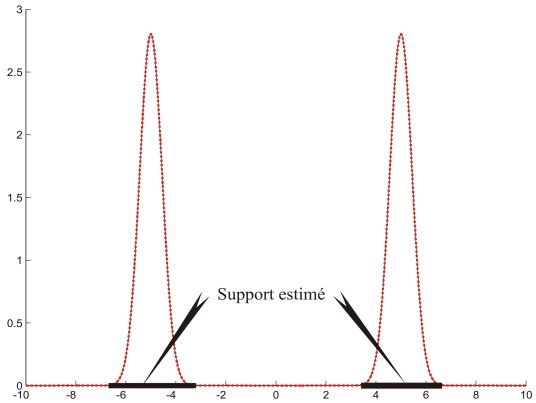

Fig. 2 – Module de $\mathscr{F}(v)$.

Pour nos tests numériques nous supposerons que nos conditions initiales sont susceptibles d'exciter plutôt les résonances dont la partie imaginaire est voisine de leur support fréquentiel, lequel support nous sera fourni par la transformée de Fourier de nos données.

Bibliographie

[1] T. Abboud, J.-C. Nedelec et J. Volakis, *Stable solution of the retarded potential equations*, Proc. 17th Ann. Rev. Progress in Appl. Comp. Electromagnetics, Monterey, CA, pp. 146-151, 2001.

[2] C. Alves et T. Ha Duong, *Numerical experiments on the resonance poles associated to acoustic and elastic scattering by a plane crack*, in Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Ed. par E. Bécache et al., SIAM, 1995.

[3] M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York, 9ème ed., 1970.

[4] J. Aguilar et J. M. Combes, *A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger hamiltonians*, Comm. Math. Phys., 22, pp. 269–279, 1971.

[5] C. Amrouche, *The Neumann problem in the half-space*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335, pp. 151–156, 2002.

[6] J. P. Aubin, *Aproximation of elliptic boundary value problems*, Wiley-Interscience, 1972.

[7] A. Bachelot et A. Motet-Bachelot, *Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild*, Ann. Henri. Poincarré, vol. 59, №1, pp. 280–294, 1993.

[8] E. Balslev et J.M. Combes, *Spectral properties of many body Shrödinger operators with dilation analytic interactions*, Comm. Math. Phys., vol. 22, 1971, pp. 280–294.

[9] C.E. Baum, *The singularity expansion method, in transient electromagnetic fields*, édité par L. B. Felsen, Springer–Verlag, Berlin, 1976.

[10] J. T. Beale, *Eigenfunction expansions for objects floating in an open sea*, Comm. Pure Appl. Math., 30, 1977, pp. 283–313.

[11] E. Bécache, S. Fauqueux et P. Joly, *Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves*, J. Comput. Phys., 188, 2003, pp. 399–433.

[12] J. P. Bérenger, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys., 114, 1994, pp. 185–200.

[13] M. S. Birman et M. Z. Solomjak , *Mathematics and its Applications*, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1972.

[14] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, *Théorie et application*, Masson, Paris, 1983.

[15] N. Burq, *Lower bounds for shape resonances widths of long range Schrödinger operators*, Am. J. Math., 124, №4, pp. 667–735, 2002.

[16] N. Burq et M. Zworski, *Resonance expansions in semi-classical propagation*, Comm. Math. Phys., 232, 2001, pp. 1–12.

[17] M. P. Carpentier et A. F. Dos Santos, *Solution of equations involving analytic functions*, J. Comput. Phys., 45, 1982, pp. 210–220.

[18] P. G. Ciarlet et P. Destuynder, *A justification of the two-dimensional linear plate model*, J. Mécanique, 18, 1979, pp. 315–344.

[19] O. Civitarese et M. Gadella, *Physical and mathematical aspects of Gamov states*, Physics Reports, 396, Elsevier, pp. 41–113, 2004.

[20] F. Collino et P. B. Monk, *Optimizing the perfectly matched layer*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 164, 1998, pp. 157–171.

[21] G. Conciauro et M. Bressan, *Singularity enpansion of mode voltages and currents in a layered anisotropic dispersive medium included between two ground planes*, IEEE Transactions on microwave theory and techniques, vol. 47, №9, 1999.

[22] P. M. Cutzach, *Influence d'une interface plane sur la diffraction des ondes acoustiques et electromagnétiques par un obstacle*, Thèse, 1997.

[23] R. Dautray et J. L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Dunod, Paris, 1984, Tome 1.

[24] R. Dautray et J. L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Dunod, Paris, 1985, Tome 2.

[25] R. Dautray et J. L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Dunod, Paris, 1985, Tome 3.

[26] Y. Dermanjian et J. C. Guillot, *Théorie spectrale de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu stratifié perturbé*, J. Différential Equations, 62, 1986, pp. 357–409.

[27] Y. Doutreleau, *Étude mathématique et numérique du problème de résistance de vague*, Thèse, 1997.

[28] G. Duvaut et J. L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Masson, Paris, 1972, chap.3 sec.4.

[29] B. Engquist et A. Majda, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comput., vol. 31, 1977, pp. 629–651.

[30] L. B. Felsen et E. Heyman, *Hybrid ray mode analysis of transient scattering*, Low and Frequency Asymptotics, Edité par V.K. Varadan et V.V. Varadan, 1986.

[31] P. J. T. Filippi, D. Habault, P. O. Mattei, C. Maury, *The role of the resonance modes in the response of a fluid-loaded structure*, Journal of Sound and Vibration, vol.239, №4, 2001, pp. 639-663.

[32] N. Geng, D.R. Jackson et L. Carin, *On the resonances of a dielectric BOR buried in a dispersive layered medium*, IEEE Transactions on antennas and propagation, vol. 47, №8, 1999.

[33] P. Grivard, *Elliptic problems in nonsmooh domains*, Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

[34] C. Goldstein, *Eigenfunction expansions associated with the laplacian for certain domains with infinite boundaries*, I et II, Trans. Amer. Math. Soc., 135, 1969, pp. 1–31 et 33–50.

[35] B. Hanouzet, *Espaces de Sobolev avec poids, application au problème de Dirichlet dans un demi-espace*, Rend. Sem. Univ. di Padova, 46, 1971, pp. 227–272.

[36] C. Hazard, *Analyse modale de la propagation des ondes*, Mémoire d'habilitation, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2001.

[37] C. Hazard, *How and why to compute resonances for fluid-structure interaction in unbounded domains ?*, 5ème congrès chilien de mathématiques, Olmue, 1998.

[38] C. Hazard et M. Lenoir, *Determination of scattering frequencies for an elastic floating body*, SIAM J. Math. Anal., vol. 24, №6, pp. 1456–1514, 1993.

[39] C. Hazard et M. Lenoir, *Modélisation et résolution des problèmes de diffraction*, cours É.N.S.T.A., Paris, 2001.

[40] C. Hazard, *The singularity expansion method : an application in hydrodynamics*, Congrès WAVES2000, 5th International conference on mathematical and numerical aspect wave propagation, Santiago de Compostela, 2000.

[41] C. Hazard et F. Loret, *Décomposition en modes résonants pour le problème transitoire de tenue à la mer*, 9eme Journées de l'Hydrodynamique, Poitiers, France, 2003.

[42] C. Hazard et F. Loret, *Generalized eigenfunction expansions ; an application to linear water waves*, Congrès WAVES2003, 6th International conference on mathematical and numerical aspect wave propagation, Université de Jyväskylä, Finlande, 2003.

[43] C. Hazard, F. Loret et M. H. Meylan, *Linear time-dependent motion of two-dimensional floating elastic plate in finite depth water using the Laplace transform*, 19th International worshop on water waves and floating bodies, Cortona, Italie, 2004.

[44] I. Herbst et B. Simon, *Dilation analyticity in constant electric field*, Comm. Math. Phys., 80, №2, pp. 181–216, 1981.

[45] T. Ikebe, *Eigenfunction expansions associated with* Schrödinger *operators and their applications to scattering theory*, Arch. Rational Mech. Anal., 5, 1960, pp. 1–34.

[46] A. Jami et G. Pot, *Finite element solution for the transient flow past a freely floating body*, Proc. Fourth Int. Conf. on Num. Ship Hydrodynamics, Washington, 1985.

[47] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer–Verlag, New York, 1984.

[48] K. Knopp, *Theory of functions*, Part II, version anglaise, Dover, New York, 1947.

[49] P. Kravanja et M. Van Barel, *Computing the zeros of analytic functions*, Lecture notes in mathematics, 1727, Springer, 2000.

[50] C. Labreuche, *Problèmes inverses en diffraction d'ondes basés sur la notion de résonance*, Thèse, 1997.

[51] J. Lavoine, *Calcul symbolique, distributions et pseudo-fonctions*, Ed. C.N.R.S., Paris, 1959.

[52] P. Lax et R. Phillips, *Scattering theory*, Academic Press, 1967.

[53] M. Lenoir, M. Vullierme-Ledard et C. Hazard, *Variational formulations for the determination of resonant states in scattering problems*, SIAM J. Math. Anal., vol. 23, №3, pp. 579–608, 1992.

[54] M. Lenoir, *Approximation par éléments finis des problèmes elliptiques*, cours É.N.S.T.A. 771, Paris, 1987.

[55] T.-H. Li, *On locating all zeros of an analytic function within a bounded domain by a revised* Delvess/Lyness *method*, SIAM J. Numer. Anal., vol.20, №4, 1983.

[56] C. Maury, *Rayonnement acoustique de structures vibrantes : études en régime temporel et fréquentiel*, Thèse, 1999.

[57] M. H. Meylan, *Spectral solution of time dependent shallow water hydroelasticity*, J. of Fluid Mech., 454, 2002, pp. 387–402.

[58] O. Poisson, *Calculs des pôles de résonance associés à la diffraction d'ondes acoustiques et élastiques en dimension 2*, Thèse, 1992.

[59] A. G. Ramm, *Mathematical fundations of the Singularity and Eigenmodes Expansion Methods*, J. Math. Anal. Appl., 86, 1982, pp. 562–591.

[60] J. Sjöstrand, *A trace formula and review of some estimates for resonances*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 490, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[61] S. Steinberg, *Meromorphic families of compact operators*, Arch. Rational Mech. Anal., 31, 1968, pp. 372–380.

[62] B. R. Vainberg, *Asymptotic methods in equations of mathematical physics*, Gordon and Breach Science Publishers, 1989.

[63] C. H. Wilcox, *Scatering theory for the d'Alembert equation in exterior domains*, Springer Verlag, Berlin, 1975.

[64] C. H. Wilcox, *Sound propagation in stratified fluids*, Springer Verlag, Berlin, 1984.

[65] M. Zworski, *Resonances in physics and geometry*, Notices of the Amer. Math. Soc. 46, №3, pp. 319–328, 1999.

[66] M. Zworski, *Counting scattering poles*, Lecture notes, Pure Appl. Math., 161, Dekker, New-York, pp. 301–331.

Deuxième partie

Développement en fonctions propres généralisées

application au problème transitoire de tenue à la mer

GENERALIZED EIGENFUNCTION EXPANSIONS FOR CONSERVATIVE SCATTERING PROBLEMS WITH AN APPLICATION TO WATER WAVES

CHRISTOPHE HAZARD† AND FRANÇOIS LORET†

Abstract. This paper is devoted to a *harmonic* description of wave propagation phenomena in conservative unbounded media. The fact that a time-dependent wave can be represented by a superposition of time-harmonic waves often appears as a universal truth, but is seldom rigorously justified. We present an abstract framework for establishing such *generalized eigenfunction expansions* in the context of scattering problems. Considering the latters as perturbations of a free problem (*i.e.*, without the scatterer), we show that such an expansion is based on one hand on a *stable limiting absorption principle* for the free problem, and on the other hand on a *compactness* (or short range) property of the perturbed problem.

This approach is illustrated by the scattering of linear water waves by a floating body. The above properties are obtained with the help of integral representations which allow to deduce the asymptotic behavior of time-harmonic waves from that of the Green function of the free problem. The results are not new: the only improvement lies in the splitting between general theoretical results and technical properties depending on the considered problem. This improves the legibility and the concision of the proofs, which still remain bulky!

Key words. scattering, generalized eigenfunctions, spectral theory, limiting absorption

AMS subject classifications. 35P10, 47A40, 47A70, 76B15

1. Introduction.

1.1. Motivation. The aim of the present paper is to show a general way of establishing *eigenfunction expansions* for linear scattering problems, and illustrate the method by a coupled problem arising in hydrodynamics: the scattering of water waves by a floating body. From a physical point of view, such an expansion provides the connexion between *transient* and *time-harmonic* motions. More precisely, it leads to decompose the state of the system at every time on a continuous family of time-harmonic states which represent the response of the system to a family of time-harmonic plane waves. This decomposition is a powerful tool for the study of the large time behavior of transient waves. From a mathematical point of view, the above mentioned family appears as an *orthonormal basis* (in a sense to be precised) of the functional energy space of the problem. Moreover, in this basis, the linear operator which defines the dynamics of the system becomes *diagonal*.

This approach actually consists in an extension of the well-known *spectral decomposition* of transient vibrations of a conservative system in a bounded domain (see, *e.g.*, [22]). Without outer excitation, these vibrations express as a series of time-harmonic states which appear for discrete values of the frequency. In this situation, the operator which characterizes the dynamics of the system has a *pure point spectrum*, and the spectral theory of compact selfadjoint operators provides the proper abstract framework: the set of its (normalized) eigenvectors form a *discrete* orthonormal family which makes it diagonal. As regards wave propagation in unbounded media, the associated operator generally possesses a *continuous spectrum*. Hence one may hope to find a *continuous* orthonormal family of *generalized* eigenfunctions, where the word

†Laboratoire POEMS (Propagation des Ondes : Etude Mathematique et Simulation, UMR CNRS 2706), Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées. Address: ENSTA/UMA/POEMS, 32 Boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15, France (hazard@ensta.fr, loret@ensta.fr).

"generalized" signifies that the latter are allowed to have an *infinite energy*. Unfortunately no general theoretical results are available to exhibit such a family. At best, one can obtain the existence of this family in a proper functional framework, but not the way to construct it.

In some particular situations, this construction can be achieved by means of separation of spatial variables, which reduces the question to the diagonalization of differential equations. In the case of constant coefficients, the Fourier transform is the very tool for this work. We shall see in particular that the eigenfunction expansion associated with water waves in a half space follows easily from the use of a horizontal Fourier transform.

For non-separable scattering problems, a natural idea consists in considering the system as a perturbation of a *free problem*, *i.e.*, without the scatterer. If the latter comes within the framework of separable problems, its generalized eigenfunctions can be constructed explicitly. Considering them as *incident* time-harmonic waves, the generalized eigenfunctions of the scattering problem are searched as perturbations of the previous ones, by adding a perturbation term representing a *scattered* time-harmonic wave.

The first justification of this approach is due to Ikebe [13] for the Schrödinger equation. His method was then improved [2, 18] and applied to many other wave propagation phenomena (see, *e.g.*, [6, 24, 25, 27, 28, 29]). In hydrodynamics, the scattering of linear water waves by a fixed body was first studied by Beale [4], and later by Vullierme-Ledard [23] (see also [10]). The common feature of these papers is that most proofs are highly "problem-dependent", that is, a slight change in the definition of the perturbed problem requires to adapt most proofs. The technical reason of this flaw lies in the use of a *local* definition of energy (*i.e.*, in any bounded subdomain of the propagation medium) when dealing with generalized eigenfunctions. The purpose of the present paper is to show a more synthetic approach based on a *weighted* definition of energy. It has the advantage to allow general perturbations of a free water wave problem. In fact we shall see how to construct generalized eigenfunction expansions for any *compact* perturbation: we shall give the precise meaning of this compactness property which may include unbounded "short-range" perturbations. This is the object of §2 where the notion of generalized spectral basis is introduced in an abstract functional framework. This approach, which was mainly inspired by the so-called *auxiliary space method* developped in mathematical physics (notably the book from Weder [25]), is an improved version of the approach proposed in [9].

The method is illustrated by the problem of a rigid body floating on a sea of infinite depth. For the sake of simplicity, we only consider the two-dimensional situation. The following section describes the equations of the problem and presents a formal expression of the generalized eigenfunction expansion of the transient motions. Its derivation is the object of §3. These results are not new: they slightly improve the already known results [8]. But the proofs are. In particular they clearly identify the part of the work which has to be revisited when dealing with more involved situations, for instance the case of an elastic floating body [11].

1.2. Main results for the 2D sea-keeping problem. The linearized equations which model the coupled motions of a rigid body floating at the free surface of an inviscid perfect fluid (with a potential flow) are well-known (see, *e.g.*, John [14]). We present here a non-dimensional expression of these equations which involves the "acceleration potential" $\Phi = \Phi(X,t)$ (where $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ denotes a point in the

FIG. 1.1. *Free and perturbed fluid domains*

fluid, and t the time) instead of the usual velocity potential (*i.e.*, the former is the time-derivative of the latter). The advantage of this formulation lies in the fact that it only involves second order time-derivatives: it is well adapted to enter the abstract framework described in §2.

For the sake of simplicity, we only consider two of the three possible rigid motions of the floating body. These motions are described by a vector $p = p(t) \in \mathbb{R}^2$, where the first component represents the *heave*, *i.e.,* the vertical displacement of the center of gravity $G = (x_G, y_G)$ of the body with respect to its equilibrium position, and the second, the *roll*, *i.e.,* its rotation in the plane. The *sway*, *i.e.,* the horizontal displacement, actually plays a different role from the latters in the coupling process. The fact that it does not contribute to Archimede force leads to a one-way coupling: at every time t, this motion is entirely determined by the knowledge of the pair (Φ, p).

We denote by $\tilde{\Omega} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y < 0\big\}$ the half space filled by the water at rest in the absence of the body, and by $\tilde{F} = \big\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\big\}$ its free surface. The tilde character will be used for all quantities related to this free situation. In the presence of the body, the fluid domain is denoted by $\Omega \subset \tilde{\Omega}$. Its boundary consists of the part F of $\tilde{F}$ located outside the body, and the immersed part Γ of its hull. At every point $X \in \Gamma$, we denote by $n = (n_x, n_y)$ the outer unit normal (exterior to Ω) and by $\nu \in \mathbb{R}^2$ the vector related to n by $\nu(X) := (n_y, (x - x_G)n_y - (y - y_G)n_x)$.

The time-dependent sea-keeping problem consists in finding a pair (Φ, p) solution to the following coupled equations at every time $t > 0$:

$$\Delta\Phi = 0 \ \text{ in } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\partial_t^2\Phi + \partial_y\Phi = 0 \ \text{ on } F, \tag{1.2}$$

$$\partial_n\Phi - \mathrm{d}_t^2 p \cdot \nu = 0 \ \text{ on } \Gamma, \tag{1.3}$$

$$\mathbb{M}\mathrm{d}_t^2 p + \mathbb{K}p + \int_\Gamma \Phi\,\nu\,\mathrm{d}\gamma = 0, \tag{1.4}$$

as well as suitable initial conditions. In (1.4), $\mathbb{M}$ and $\mathbb{K}$ are 2×2 real symmetric positive definite matrices: $\mathbb{M}$ is the *mass matrix* of the body and $\mathbb{K}$ is the *hydrostatic stiffness matrix* ($\mathbb{K}p$ represents the variation of the Archimede force due to a displacement p of the body). Without loss of generality, we assume in the sequel that $\mathbb{M}$ is the identity matrix: using the Cholesky factorization of $\mathbb{M} = \mathbb{L}\,\mathbb{L}^*$, this amounts to replacing p, ν and $\mathbb{K}$ respectively by $\mathbb{L}^*p$, $\mathbb{L}^{-1}\nu$ and $\mathbb{L}^{-1}\mathbb{K}\,(\mathbb{L}^*)^{-1}$.

Our aim is to express (Φ, p) by means of particular *time-harmonic* solutions to (1.1)–(1.4) which are constructed by considering this system as a perturbation of the *free* water wave problem:

$$\Delta\tilde{\Phi} = 0 \ \text{ in } \tilde{\Omega}, \tag{1.5}$$

$$\partial_t^2\tilde{\Phi} + \partial_y\tilde{\Phi} = 0 \ \text{ on } \tilde{F}. \tag{1.6}$$

A time-harmonic free wave is a solution to these equations which has the form

$$\tilde{\Phi}(X,t) = \Re e\left\{\tilde{\Phi}_\omega(X)\ \exp(-\mathrm{i}\omega t)\right\},$$

for some given circular frequency $\omega > 0$. In the whole paper, we shall use a "spectral index" $\lambda = \omega^2$ instead of ω. Define

$$\tilde{\Phi}_{\lambda,k}(X) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp(\lambda(\mathrm{i}kx + y)) \ \text{ for } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ and } k = \pm 1, \tag{1.7}$$

(where the choice of the coefficient $1/\sqrt{2\pi}$ will be justified later). These functions obviously satisfy the time-harmonic equations corresponding to (1.5)–(1.6):

$$\Delta\tilde{\Phi}_{\lambda,k} = 0 \ \text{ in } \tilde{\Omega}, \tag{1.8}$$

$$\partial_y\tilde{\Phi}_{\lambda,k} - \lambda\,\tilde{\Phi}_{\lambda,k} = 0 \ \text{ on } \tilde{F}. \tag{1.9}$$

They represent plane surface waves of frequency $\sqrt{\lambda}$ which propagate towards $k \times \infty$.

We consider two kinds of perturbations of these plane waves, denoted by

$$w^\pm_{\lambda,k} := (\Phi^\pm_{\lambda,k}, p^\pm_{\lambda,k}) \ \text{ where } \ \Phi^\pm_{\lambda,k} := \tilde{\Phi}_{\lambda,k} + \dot{\Phi}^\pm_{\lambda,k}, \tag{1.10}$$

which represents the superposition of the *incident* wave $\tilde{\Phi}_{\lambda,k}$ and the *scattered* wave $\dot{\Phi}^\pm_{\lambda,k}$. These pairs correspond to periodic solutions to (1.1)–(1.4) if $(\dot{\Phi}^\pm_{\lambda,k}, p^\pm_{\lambda,k})$ satisfies

$$\Delta\dot{\Phi}^\pm_{\lambda,k} = 0 \ \text{ in } \Omega, \tag{1.11}$$

$$\partial_y\dot{\Phi}^\pm_{\lambda,k} - \lambda\,\dot{\Phi}^\pm_{\lambda,k} = 0 \ \text{ on } F, \tag{1.12}$$

$$\partial_n\dot{\Phi}^\pm_{\lambda,k} + \lambda\, p^\pm_{\lambda,k}\cdot\nu = -\partial_n\tilde{\Phi}_{\lambda,k} \ \text{ on } \Gamma, \tag{1.13}$$

$$(\mathbb{K} - \lambda)p^\pm_{\lambda,k} + \int_\Gamma \dot{\Phi}^\pm_{\lambda,k}\,\nu\,\mathrm{d}\gamma = -\int_\Gamma \tilde{\Phi}_{\lambda,k}\,\nu\,\mathrm{d}\gamma. \tag{1.14}$$

The sign $+$, respectively $-$, is assigned to *outgoing*, respectively *incoming*, waves. This difference is usually specified by means of a *radiation condition* at infinity, which expresses that the energy of the scattered wave either radiates towards infinity $(+)$ or comes from infinity $(-)$. It is given by (see [14])

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{|x|=R}\left|\partial_{|x|}\dot{\Phi}^\pm_{\lambda,k} \mp \mathrm{i}\lambda\,\dot{\Phi}^\pm_{\lambda,k}\right|^2 \mathrm{d}y = 0. \tag{1.15}$$

The aim of the present paper is to understand the different properties which allow us to express the transient solution $u(t) := (\Phi(\cdot\,,t), p(t))$ to (1.1)–(1.4) as a continuous superposition of the time-harmonic solutions (1.10). More precisely, we show that for a suitable inner product $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, we have

$$u(t) = \Re e\int_{\mathbb{R}^+}\sum_{k=\pm1}\langle u^{(0)}, w^\pm_{\lambda,k}\rangle\, w^\pm_{\lambda,k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,t}\,\mathrm{d}\lambda, \tag{1.16}$$

where $u^{(0)}$ only depends on the initial conditions. This formula is called the *generalized eigenfunction expansions* of $u(t)$.

2. An abstract context for generalized eigenfunctions. We now describe the mathematical tools which will help us to prove the above expansion in §3. Our aim is to show how the well-known discrete spectral expansion associated with a compact selfadjoint operator extends to the case of an operator that has a continuous spectrum. Such a generalization is possible in a very general context, but its description is intricate. Here we restrict ourselves to a particular situation which applies for selfadjoint operators having an *absolutely continuous* spectrum with no change of multiplicity. Our water wave problem comes within this framework, as well as many other applications.

In §2.1 we set the definition of a generalized spectral basis which furnishes a suitable functional context for generalized eigenfunction expansions, and offers a general but formal point of view on integral representations. In §2.2, considering an abstract wave equation, we show the basic consequences of our definition for time–frequency analysis. The so-called limiting absorption principle guarantees the existence of time-harmonic outgoing and incoming waves. We introduce a "stable" form of this principle which plays an essential role in §2.3 where the question of the perturbation of a generalized spectral basis is investigated. The main result of this paper, Theorem 2.10, shows that under some compactness property, the perturbed generalized eigenfunctions are obtained by adding to the unperturbed ones, considered as *incident* waves, the outgoing or incoming wave *scattered* by the perturbation. The proof is presented in §2.4 which precises the connection with spectral theory of selfadjoint operators. For the sake of simplicity the theory is presented under restrictive assumptions: only bounded operators with no point spectrum are considered. We show in §2.5 how to relax these assumptions in order to deal with physical applications.

2.1. Definition of a generalized spectral basis.

Functional framework. In a Hilbert space $\mathcal{H}$ equipped with an inner product $(\cdot\,,\cdot)$ and the associated norm $\|\cdot\|$, consider a *bounded selfadjoint* operator $\mathcal{A}$, that is, such that

$$(\mathcal{A}u\,,v) = (u\,,\mathcal{A}v) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

The kind of pairs $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ we are interested in concerns models of wave propagation phenomena in *unbounded* conservative media (see §2.2). The norm of $\mathcal{H}$ can be interpreted as the energy gauge of our system: in practice such an energy is defined by an integral over the whole propagative medium. The elements of $\mathcal{H}$ represent the possible states v of the system: their energy $\|v\|$ is finite, which implies a sufficient decay of v at infinity. The operator $\mathcal{A}$ describes the dynamics of the system, and the above selfadjointness property expresses a reciprocity condition between action and observation. On account of the unbounded nature of the medium, the eigenfunctions of $\mathcal{A}$ with finite energy, if any, cannot describe the propagation at large distance: generalized eigenfunctions have to be searched in an "overspace" of $\mathcal{H}$, which will be obtained by a weighted definition of energy. We introduce below an extension of the notion of "spectral basis" composed of such generalized eigenfunctions, which requires the following ingredients.

(i) A *weighted energy* Hilbert space $\mathcal{H}_\downarrow \subset \mathcal{H}$ equipped with a norm $\|\cdot\|_\downarrow$ where the index $\downarrow$ signifies that the states of $\mathcal{H}_\downarrow$ have a stronger decay at infinity than those of $\mathcal{H}$: these "localized" states are obtained by introducing a suitable weight in the integral that defines $\|\cdot\|$. We assume that $\mathcal{H}_\downarrow$ is *continuously embedded* in $\mathcal{H}$ and *dense*. In this situation, its dual space $\mathcal{H}_\uparrow := (\mathcal{H}_\downarrow)'$ can be interpreted as an "overspace" of

$\mathcal{H}$ (containing non-localized states of infinite energy) when the latter is identified with its own dual, *i.e.*,

$$\mathcal{H}_\downarrow \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}_\uparrow. \tag{2.1}$$

Hence the duality product[1] between $\mathcal{H}_\downarrow$ and $\mathcal{H}_\uparrow$ appears as an extension of the inner product $(\cdot\,,\cdot)$ since relation (2.1) means in particular that

$$\langle u\,,v\rangle = (u\,,v) \quad \forall u \in \mathcal{H}_\downarrow,\ \forall v \in \mathcal{H}. \tag{2.2}$$

(ii) A *spectral* Hilbert space $\hat{\mathcal{H}}$ whose elements will represent the coordinates of the states of $\mathcal{H}$ in a generalized spectral basis. For the sake of simplicity, we consider here the situation where this spectral space can be chosen as a standard L^2-space, more precisely[2]

$$\hat{\mathcal{H}} := L^2(\Lambda \times K), \tag{2.3}$$

where $\Lambda :=]\lambda_-, \lambda_+[$ is a bounded open interval of $\mathbb{R}$ (whose closure will represent the spectrum of $\mathcal{A}$) equipped with the Lebesgue measure. The elements of K are intended to number the generalized eigenfunctions associated with a given $\lambda \in \Lambda$: these "wavenumbers" may compose a discrete, or continuous set K. Here we assume that K is either finite or a compact subset of $\mathbb{R}^n$ (for some $n \geq 1$) equipped with a finite measure $\mathrm{d}\sigma$. Both spectral variables λ and k will generally appear as indices, and we shall denote by

$$(\hat{u}\,,\hat{v})_{\Lambda\times K} := \int_{\Lambda\times K} \hat{u}_{\lambda,k}\,\overline{\hat{v}_{\lambda,k}}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\sigma_k$$

the inner product in $L^2(\Lambda \times K)$. Note that if K is finite, the integral on K should be replaced by a finite sum. We keep the integral notation for simplicity.

We are now able to state the definition of a generalized spectral basis composed of non-localized states $w_{\lambda,k} \in \mathcal{H}_\uparrow$ indexed by $\lambda \in \Lambda$ and $k \in K$. For technical reasons that will be clarified later, we shall need a sufficient regularity of the vector-valued function $(\lambda, k) \mapsto w_{\lambda,k}$. We shall say that a family $\{w_{\lambda,k} \in \mathcal{H}_\uparrow;\ (\lambda, k) \in \Lambda \times K\}$ is Λ-*locally Hölder continuous* if for every compact interval Λ' interior to Λ (*i.e.*, $\Lambda' = [a, b]$ with $\lambda_- < a < b < \lambda_+$), on one hand

$$\text{the map}\ \ \Lambda' \times K \ni (\lambda, k) \longmapsto w_{\lambda,k} \in \mathcal{H}_\uparrow\ \ \text{is continuous,} \tag{2.4}$$

and on the other hand there exist $\alpha \in]0, 1]$ and $C(\Lambda') > 0$ such that

$$\sup_{k\in K} \|w_{\lambda,k} - w_{\lambda',k}\|_\uparrow \leq C(\Lambda')\ |\lambda - \lambda'|^\alpha \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda'. \tag{2.5}$$

Note that (2.4) derives from (2.5) when K is finite.

[1]We actually consider a semi-duality product: $\langle \alpha u\,, \beta v\rangle = \alpha\beta\,\langle u\,, v\rangle$ for $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. We use both notations $\langle u\,, v\rangle$ and $\langle v\,, u\rangle$ for $u \in \mathcal{H}_\downarrow$ and $v \in \mathcal{H}_\uparrow$: they are simply conjugated to each other.

[2]Our special choice (2.3) of a spectral space is sufficient for the applications we have in mind in this paper, but not if the "spectral multiplicity" of a point $\lambda \in \Lambda$ depends on λ. In this situation, which occurs for instance in waveguides, one may choose instead of (2.3)

$$\hat{\mathcal{H}} := L^2(\Lambda_1 \times K_1) \oplus L^2(\Lambda_2 \times K_2) \oplus \ldots.$$

The ideas we present here can be readily extended to this case. More generally, the spectral space of a selfadjoint operator appears as a *direct integral* of Hilbert spaces (see [21]).

DEFINITION 2.1. *A Λ-locally Hölder continuous family $\{w_{\lambda,k} \in \mathcal{H}_\uparrow;\ (\lambda,k) \in \Lambda \times K\}$ associated with a spectral space $L^2(\Lambda \times K)$ is said to be a generalized spectral basis*[3] *for the operator $\mathcal{A}$ in $\mathcal{H}$ if the transformation $\mathcal{U}$ given by*

$$(\mathcal{U}v)_{\lambda,k} := \langle v\,, w_{\lambda,k}\rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}_\downarrow, \tag{2.6}$$

defines by density a unitary operator from $\mathcal{H}$ to $L^2(\Lambda \times K)$ (still denoted by $\mathcal{U}$) which diagonalizes $\mathcal{A}$ in the sense that

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}^* \lambda \mathcal{U} \quad ([4]). \tag{2.7}$$

Remark 2.2. The functions $w_{\lambda,k} \in \mathcal{H}_\uparrow$ are called *generalized eigenfunctions* since they formally satisfy

$$\mathcal{A} w_{\lambda,k} = \lambda\, w_{\lambda,k} \quad \forall (\lambda,k) \in \Lambda \times K. \tag{2.8}$$

Indeed suppose that $\mathcal{A}(\mathcal{H}_\downarrow) \subset \mathcal{H}_\downarrow$, which allows us to define the extension of $\mathcal{A}$ to the space $\mathcal{H}_\uparrow$ by

$$\langle v, \mathcal{A}u\rangle := \langle \mathcal{A}v, u\rangle \quad \forall u \in \mathcal{H}_\uparrow,\ \forall v \in \mathcal{H}_\downarrow.$$

Relation (2.7) can also be written $\mathcal{U}\mathcal{A} = \lambda\mathcal{U}$, *i.e.*,

$$\langle \mathcal{A}v, w_{\lambda,k}\rangle = \lambda\, \langle v, w_{\lambda,k}\rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}_\downarrow,$$

which is nothing but (2.8). In practice we shall use this relation only for an intuitive construction of a perturbed generalized basis (see §2.3). Hence the restrictive assumption $\mathcal{A}(\mathcal{H}_\downarrow) \subset \mathcal{H}_\downarrow$ is not necessary for our purposes.

The diagonal representation (2.7) provides the key for a functional calculus of $\mathcal{A}$: for every bounded function $f : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$, the operator $f(\mathcal{A})$ is then simply given by

$$f(\mathcal{A}) = \mathcal{U}^* f(\lambda)\, \mathcal{U}. \tag{2.9}$$

We show below two interpretations of this formula, which also reads

$$(f(\mathcal{A})u, v) = (f(\lambda)\mathcal{U}u, \mathcal{U}v)_{\Lambda\times K} = \int_{\Lambda\times K} f(\lambda)\, \langle u, w_{\lambda,k}\rangle\, \overline{\langle v, w_{\lambda,k}\rangle}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k \tag{2.10}$$

if u and v belong to $\mathcal{H}_\downarrow$. By permuting the integral on $\Lambda \times K$ with the second duality product (involving v), we first exhibit the *generalized eigenfunction expansion* of $f(\mathcal{A})$. The permutation of the integral with both duality products then leads to the notion of *integral representations*. However in the present context, this latter interpretation is but formal (its justification requires more informations about $\mathcal{A}$), whereas the functional scheme (2.1) yields a suitable framework for the former.

[3]This definition extends the notion of a spectral basis for a hermitian matrix, or more generally, that of a compact selfadjoint operator $\mathcal{A}$ in $\mathcal{H}$. In the latter case, one can find a hilbertian basis $\{w_n \in \mathcal{H};\ n \in \mathbb{N}\}$ (*i.e.*, an infinite complete orthonormal family) composed of eigenvectors: $(\mathcal{A} - \lambda_n)w_n = 0$ where $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a real sequence which tends to 0. The transformation $\mathcal{U}$ defined by $(\mathcal{U}v)_n := (v\,, w_n)$ is a unitary operator from $\mathcal{H}$ to the spectral space

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{\hat{v} = (\hat{v}_n)_{n\in\mathbb{N}};\ \hat{v}_n \in \mathbb{C} \text{ and } \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |\hat{v}_n|^2 < \infty\right\},$$

and $\mathcal{U}$ diagonalizes $\mathcal{A}$ in the sense that $\mathcal{A}u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\ (v\,, w_n)\, w_n$, which is nothing but (2.7).

[4]In this formula, we denote abusively λ the operator of multiplication by the scalar fonction λ in the spectral space $L^2(\Lambda \times K)$.

Generalized eigenfunction expansions. The continuity assumption (2.4) on the $w_{\lambda,k}$ (which does not concern the behaviour of $w_{\lambda,k}$ near the bounds $\lambda_\pm$ of Λ) allows us to construct some *superpositions* of these functions by means of vector-valued integrals[5]

$$v' = \int_{\Lambda\times K} \hat{v}_{\lambda,k}\, w_{\lambda,k}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k \in \mathcal{H}_\uparrow,$$

provided $\hat{v} \in L^2(\Lambda \times K)$ is Λ-compactly supported (*i.e.*, $\hat{v}_{\lambda,k} = 0$ for all $k \in K$ and λ in a vicinity of $\lambda_\pm$). It satisfies the Fubini property

$$\langle v', v\rangle = \int_{\Lambda\times K} \hat{v}_{\lambda,k}\, \langle v, w_{\lambda,k}\rangle\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k \quad \forall v \in \mathcal{H}_\downarrow.$$

By virtue of the definition (2.6) of $\mathcal{U}$, this relation reads $\langle v', v\rangle = (\hat{v}, \mathcal{U}v)_{\Lambda\times K}$ where the right-hand side is nothing but $(\mathcal{U}^*\hat{v}, v)$. Hence the above vector-valued integral initially defined in $\mathcal{H}_\uparrow$ actually belongs to $\mathcal{H}$ and

$$\mathcal{U}^*\hat{v} = \int_{\Lambda\times K} \hat{v}_{\lambda,k}\, w_{\lambda,k}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k.$$

The expression of $\mathcal{U}^*\hat{v}$ for any $\hat{v} \in L^2(\Lambda \times K)$ follows by approximating $\hat{v}$ by its restrictions to an increasing sequence of compact subsets of Λ whose union covers Λ. Since $\mathcal{U}^*$ is continuous, the corresponding integrals admit a limit in $\mathcal{H}$, which can be seen as a *principal value* at the bounds of Λ, and will be denoted by

$$\mathcal{U}^*\hat{v} = \mathcal{H}\text{-PV} \int_{\Lambda\times K} \hat{v}_{\lambda,k}\, w_{\lambda,k}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k \quad \forall \hat{v} \in L^2(\Lambda \times K). \tag{2.11}$$

This formula provides an explicit form of the diagonal representation (2.9):

$$f(\mathcal{A})u = \mathcal{H}\text{-PV} \int_{\Lambda\times K} f(\lambda)\, \langle u, w_{\lambda,k}\rangle\, w_{\lambda,k}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k \quad \forall u \in \mathcal{H}_\downarrow, \tag{2.12}$$

which is the *generalized eigenfunction expansion* of $f(\mathcal{A})$ (for $u \in \mathcal{H}$, the same expression holds if $\langle u, w_{\lambda,k}\rangle$ is replaced by $(\mathcal{U}u)_{\lambda,k}$).

Integral representations. Considering tensor products of Hilbert spaces [20] (also called direct products), formula (2.10) can be rewritten as

$$(f(\mathcal{A})u, v) = \int_\Lambda f(\lambda) \left\{ \int_K \langle\!\langle \overline{w_{\lambda,k}} \otimes w_{\lambda,k}\, ,\, \overline{u} \otimes v \rangle\!\rangle\, \mathrm{d}\sigma_k \right\} \mathrm{d}\lambda \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_\downarrow,$$

[5]The vector- or operator-valued integrals considered in this paper can be interpreted as Bochner integrals (see *e.g.*, [30]). Here this means that the integrand $\hat{v}_{\lambda,k}\, w_{\lambda,k}$ can be approximated by a sequence of finitely-valued functions $\{\varphi^{(n)}_{\lambda,k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ strongly convergent in $\mathcal{H}_\uparrow$ for fixed λ and k, in such a way that

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Lambda\times K} \|\hat{v}_{\lambda,k}\, w_{\lambda,k} - \varphi^{(n)}_{\lambda,k}\|_\uparrow\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k = 0.$$

Bochner integral offers in the vector case most of the nice properties of the scalar Lebesgue integral. It obeys a norm dominated convergence theorem, and allows the permutation of the integral with any continuous operator (the case of linear forms yields the Fubini-like relation which leads to (2.11)).

where the double duality product between $\mathcal{H}_\uparrow \otimes \mathcal{H}_\uparrow$ and $\mathcal{H}_\downarrow \otimes \mathcal{H}_\downarrow$ is given by

$$\langle\!\langle u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2 \rangle\!\rangle := \langle u_1, v_1 \rangle \langle u_2, v_2 \rangle \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{H}_\uparrow, \ \forall v_1, v_2 \in \mathcal{H}_\downarrow.$$

The permutation of $\int_K$ with $\langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle$ then yields the condensed expression

$$(f(\mathcal{A})u, v) = \int_\Lambda f(\lambda) \langle\!\langle \Upsilon_\lambda, \overline{u} \otimes v \rangle\!\rangle \, \mathrm{d}\lambda \quad \text{where} \tag{2.13}$$

$$\Upsilon_\lambda := \int_K \overline{w_{\lambda,k}} \otimes w_{\lambda,k} \, \mathrm{d}\sigma_k \in \mathcal{H}_\uparrow \otimes \mathcal{H}_\uparrow \text{ for } \lambda \in \Lambda. \tag{2.14}$$

Then by permuting similarly the integral on Λ, we obtain

$$(f(\mathcal{A})u, v) = \langle\!\langle \kappa_f, \overline{u} \otimes v \rangle\!\rangle \quad \text{where} \quad \kappa_f := \mathrm{PV} \int_\Lambda f(\lambda) \, \Upsilon_\lambda \, \mathrm{d}\lambda. \tag{2.15}$$

This relation is nothing but the *integral representation* of $f(\mathcal{A})$ which involved its *kernel* κ_f expressed here by means of the generalized eigenfunctions.

The permutations of integrals which lead to this representation are easily justified if f is compactly supported. Indeed $\overline{w_{\lambda,k}} \otimes w_{\lambda,k}$ is a continuous family of $\mathcal{H}_\uparrow \otimes \mathcal{H}_\uparrow$ (thus uniformly continuous on $\Lambda' \times K$ for every compact $\Lambda' \subset \Lambda$), so κ_f belongs to $\mathcal{H}_\uparrow \otimes \mathcal{H}_\uparrow$. But apart from this case, the justification of the last permutation requires a precise knowledge of the behaviour of Υ_λ near the bounds $\lambda_\pm$ of Λ. This behaviour determines the singularity of the kernel: in general the principal value must be understood in a weaker topology than the one of $\mathcal{H}_\uparrow \otimes \mathcal{H}_\uparrow$. For instance, the kernel of the identity operator is the diagonal Dirac measure (given by $\langle\!\langle \delta_{\mathrm{diag}}, \overline{u} \otimes v \rangle\!\rangle = (u, v)$). In §3.2 we shall deal with the case of the Green function of our free water wave problem, *i.e.*, the kernel of its resolvent (which belongs to $\mathcal{H}_\uparrow \otimes \mathcal{H}_\uparrow$ in this particular two-dimensional situation).

2.2. Application to time–frequency analysis.

An abstract wave equation. In order to illustrate the consequences of the preceding definition of a generalized spectral basis, we consider in this section an abstract wave equation which consists in finding $u = u(t) \in \mathcal{H}$ such that

$$\mathrm{d}_t^2 u + \mathcal{A} u = 0 \quad \text{for } t > 0, \tag{2.16}$$

and which satisfies the initial conditions:

$$u(0) = g \quad \text{and} \quad \mathrm{d}_t u(0) = h, \tag{2.17}$$

for some real data g and h in $\mathcal{H}$. As before, $\mathcal{A}$ is supposed bounded and selfadjoint in $\mathcal{H}$. Here we assume in addition that $\mathcal{A}$ is real, positive and invertible. In these conditions the solution to (2.16)–(2.17) reads

$$u(t) = \cos(\mathcal{A}^{1/2} t) \, g + \mathcal{A}^{-1/2} \sin(\mathcal{A}^{1/2} t) \, h,$$

or equivalently,

$$u(t) = \mathfrak{Re} \left\{ \exp(-\mathrm{i}\mathcal{A}^{1/2} t) u^{(0)} \right\} \quad \text{where} \quad u^{(0)} := g + \mathrm{i}\mathcal{A}^{-1/2} h. \tag{2.18}$$

Definition 2.1 offers an explicit form of operator $\exp(-\mathrm{i}\mathcal{A}^{1/2}t) = \mathcal{U}^* \exp(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,t)\,\mathcal{U}$ (which is unitary since the multiplication by $\exp(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,t)$ is unitary in $L^2(\Lambda \times K)$). Indeed formula (2.9) becomes in this case

$$u(t) = \Re e \left\{ \mathcal{H}\text{-PV} \int_{\Lambda\times K} \langle u^{(0)}, w_{\lambda,k}\rangle\, w_{\lambda,k}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\,t}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k \right\}, \tag{2.19}$$

which amounts to interpreting the transient wave $u(t)$ as a continuous superposition of the time-harmonic waves $w_{\lambda,k}\, \exp(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t)$.

Consider now the case of a time-harmonic excitation starting at $t = 0$ which generates a time-dependent wave $u = u(t) \in \mathcal{H}$ solution to

$$\mathrm{d}_t^2 u + \mathcal{A}u = f\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda_0}\,t}, \tag{2.20}$$

for some given $\lambda_0 \in \Lambda$ and $f \in \mathcal{H}$, and which satisfies initial conditions such as (2.17). What can be said about the behaviour of $u(t)$ at large time? Does it reach asymptotically a time-harmonic regime? We first show an essential consequence of Definition 2.1 which will yield the answer.

The limiting absorption principle. By definition the spectrum of $\mathcal{A}$ is the complementary of the set composed of the $\zeta \in \mathbb{C}$ such that the resolvent of $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{R}_\zeta := (\mathcal{A} - \zeta)^{-1}, \tag{2.21}$$

is a bounded operator in $\mathcal{H}$. Definition 2.1 contains actually precise informations about the behaviour of $\mathcal{R}_\zeta$ in the vicinity of Λ (which will justify in particular the fact that $\overline{\Lambda}$ is the spectrum of $\mathcal{A}$). This is the object of the so-called *limiting absorption principle*, which concerns the existence of both one-sided limits

$$\mathcal{R}_\lambda^{\pm} := \lim_{\mathbb{C}^\pm \ni \zeta \to \lambda \in \Lambda} \mathcal{R}_\zeta \quad \text{with} \quad \mathbb{C}^\pm := \{\zeta \in \mathbb{C};\ \pm\, \Im m\, \zeta > 0\}, \tag{2.22}$$

for a suitable topology. Indeed such limits cannot be bounded in $\mathcal{H}$ (otherwise λ would not be in the spectrum of $\mathcal{A}$). The functional scheme (2.1) furnishes a weaker topology: by virtue of (2.2), we can write

$$\langle \mathcal{R}_\zeta\, u, v\rangle = (\mathcal{R}_\zeta\, u, v) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_\downarrow,$$

which amounts to considering $\mathcal{R}_\zeta$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow, \mathcal{H}_\uparrow)$, the space of bounded operators from $\mathcal{H}_\downarrow$ to $\mathcal{H}_\uparrow$.

Formula (2.9) applied to $f(\lambda) = (\lambda - \zeta)^{-1}$ yields the generalized eigenfunction expansion of $\mathcal{R}_\zeta$:

$$\mathcal{R}_\zeta\, u = \mathcal{H}\text{-PV} \int_{\Lambda\times K} \frac{\langle u, w_{\lambda,k}\rangle\, w_{\lambda,k}}{\lambda - \zeta}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k \quad \forall u \in \mathcal{H}_\downarrow. \tag{2.23}$$

The regularity assumption (2.5) allows us to exhibit the limit of this expression when $\zeta \in \mathbb{C}^\pm$ tends to some $\lambda_0 \in \Lambda$:

Proposition 2.3 (Limiting absorption principle). *In the context of Definition* 2.1*, for every* $\lambda_0 \in \Lambda$*, the resolvent* $\mathcal{R}_\zeta$ *of* $\mathcal{A}$ *has one-sided limits* (2.22) *for the uniform topology*[6] *of* $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow, \mathcal{H}_\uparrow)$*. These limits* (*which are locally Hölder continuous on* Λ) *are*

[6]More explicitely: $\displaystyle\lim_{\mathbb{C}^\pm \ni \zeta \to \lambda_0 \in \Lambda}\ \sup_{v \in \mathcal{H}_\downarrow \setminus \{0\}} \frac{\|\mathcal{R}_\zeta\, v - \mathcal{R}_{\lambda_0}^{\pm}\, v\|_\uparrow}{\|v\|_\downarrow} = 0.$

given by

$$\mathcal{R}^{\pm}_{\lambda_0}\, u = \mathcal{H}_{\uparrow}\text{-PV}\int_{(\Lambda\setminus\{\lambda_0\})\times K} \frac{\langle u, w_{\lambda,k}\rangle\, w_{\lambda,k}}{\lambda-\lambda_0}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\sigma_k \pm \mathrm{i}\pi\int_K \langle u, w_{\lambda_0,k}\rangle\, w_{\lambda_0,k}\,\mathrm{d}\sigma_k \quad \forall u\in\mathcal{H}_{\downarrow}, \tag{2.24}$$

where the principal value is understood at $\lambda_\pm$ as well as λ_0.

Proof. In order to split the difficulties related to the principal values at $\lambda_\pm$ and λ_0, choose a compact $\Lambda'\subset\Lambda$ containing λ_0 as an interior point, and consider the following decomposition of the resolvent:

$$\mathcal{R}_\zeta = \mathcal{R}'_\zeta + \mathcal{R}''_\zeta,$$

where $\mathcal{R}'_\zeta$ and $\mathcal{R}''_\zeta$ are spectrally truncated parts of the resolvent defined by

$$\mathcal{R}'_\zeta := \mathcal{U}^*\,\frac{\chi_{\Lambda'}(\lambda)}{\lambda-\zeta}\,\mathcal{U} \quad\text{and}\quad \mathcal{R}''_\zeta := \mathcal{U}^*\,\frac{\chi_{\Lambda\setminus\Lambda'}(\lambda)}{\lambda-\zeta}\,\mathcal{U}.$$

where $\chi_{\Lambda'}$ (respectively, $\chi_{\Lambda\setminus\Lambda'}$) denotes the characteristic function of Λ' (respectively, of $\Lambda\setminus\Lambda'$).

The family of functions $f_\zeta(\lambda) = (\lambda-\zeta)^{-1}\chi_{\Lambda\setminus\Lambda'}(\lambda)$ is indefinitely differentiable with respect to ζ when the latter lies in a vicinity of λ_0, uniformly with respect to $\lambda\in\Lambda$. Hence $\mathcal{R}''_\zeta$ is also infinitely differentiable near λ_0 for the topology of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, thus *a fortiori* for that of $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow,\mathcal{H}_\uparrow)$. At point λ_0, its limit value is simply given by

$$\mathcal{R}''_{\lambda_0}\, u = \mathcal{H}\text{-PV}\int_{(\Lambda\setminus\Lambda')\times K} \frac{\langle u, w_{\lambda,k}\rangle\, w_{\lambda,k}}{\lambda-\lambda_0}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\sigma_k \quad \forall u\in\mathcal{H}_{\downarrow}, \tag{2.25}$$

where the principal value is taken at the bounds $\lambda_\pm$ of Λ.

It remains do deal with $\mathcal{R}'_\zeta$, given by (2.23) where Λ is replaced by Λ', which allows to get rid of the principal value. The existence of the one-sided limits depends on the regularity of the integrand with respect to λ. In order to point up this dependence, we introduce the family of operators $\mathcal{U}_\lambda$, for $\lambda\in\Lambda$, simply obtained by fixing the variable λ in the definition of $\mathcal{U}$:

$$(\mathcal{U}_\lambda v)_k := (\mathcal{U}v)_{\lambda,k} = \langle v, w_{\lambda,k}\rangle \quad \forall v\in\mathcal{H}_{\downarrow}. \tag{2.26}$$

The continuity assumption (2.4) implies that for every $\lambda\in\Lambda$, the operator $\mathcal{U}_\lambda$ is continuous from $\mathcal{H}_\downarrow$ to $L^2(K)$. As for formula (2.11), it is easy to see that its adjoint is the operator of superposition of the generalized eigenfunctions associated with λ :

$$\mathcal{U}^*_\lambda f = \int_K f_k\, w_{\lambda,k}\,\mathrm{d}\sigma_k \ \in\mathcal{H}_\uparrow, \quad \forall f\in L^2(K).$$

Hence $\mathcal{R}'_\zeta$ reads

$$\mathcal{R}'_\zeta = \int_{\Lambda'} \frac{\mathcal{U}^*_\lambda\,\mathcal{U}_\lambda}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda \ \in\mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow,\mathcal{H}_\uparrow).$$

Notice then that the local Hölder continuity (2.5) of the $w_{\lambda,k}$ implies the same regularity for $\mathcal{U}_\lambda$ in the uniform topology of $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow, L^2(K))$. Indeed, by Schwarz inequality, we have

$$\sup_{v\in\mathcal{H}_\downarrow\setminus\{0\}} \frac{\|\mathcal{U}_\lambda v - \mathcal{U}_{\lambda'} v\|_K}{\|v\|_\downarrow} \le C(\Lambda')\,|\lambda-\lambda'|^\alpha \quad \forall\lambda,\lambda'\in\Lambda'.$$

And of course the same property holds for $\mathcal{U}_\lambda^* \in \mathcal{B}(L^2(K), \mathcal{H}_\uparrow)$, thus also for $\mathcal{U}_\lambda^* \mathcal{U}_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow, \mathcal{H}_\uparrow)$. Hence Plemelj formula (also called Sokhotskyi formula [12]) gives an explicit form of the limits of the above expression of $\mathcal{R}'_\zeta$, as well as the local Hölder continuity of these limits:

$$\mathcal{R}'^{\pm}_{\lambda_0} = {}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow,\mathcal{H}_\uparrow)}\text{-PV} \int_{\Lambda'\setminus\{\lambda_0\}} \frac{\mathcal{U}_\lambda^* \, \mathcal{U}_\lambda}{\lambda - \lambda_0} \, \mathrm{d}\lambda \ \pm \ \mathrm{i}\pi \, \mathcal{U}_{\lambda_0}^* \, \mathcal{U}_{\lambda_0}, \tag{2.27}$$

where the principal value is taken at λ_0. Combining (2.25) and (2.27) yields (2.24). □

Physical signification. We now come back to our abstract wave equation (2.20). The existence of the one-sided limits $\mathcal{R}_\lambda^\pm$ actually guarantees the asymptotic time-harmonic behaviour of its solution. More precisely $\mathcal{R}_\lambda^+$ (respectively, $\mathcal{R}_\lambda^-$) describes the *outgoing* (respectively, *incoming*) regime of propagation which is reached when $t \to +\infty$ (respectively, $-\infty$). This is the object of the *limiting amplitude principle.* We give here without proof[7] a weak formulation of this property that will not be used in the sequel: we only want to justify the physical interpretation of $\mathcal{R}_\lambda^\pm$.

PROPOSITION 2.4 (Limiting amplitude principle). *In the context of Definition* 2.1*, let λ_0 be an interior point of Λ, and $f \in \mathcal{H}_\downarrow$ chosen such that $\mathcal{U}f$ is Λ-compactly supported*[8]*. Then for every initial data $u(0)$ and $\mathrm{d}_t u(0)$ in $\mathcal{H}$, the solution $u(t)$ to* (2.20) *has the following asymptotic behaviour at large time:*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \langle u(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda_0}t} \, \mathcal{R}_{\lambda_0}^\pm f, v\rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}_\downarrow.$$

In other words, forgetting the factor $\exp(-\mathrm{i}\sqrt{\lambda_0}t)$, we see that $\mathcal{R}_{\lambda_0}^\pm f$ represents the time-harmonic outgoing $(+)$ or incoming $(-)$ wave generated by the excitation f. The fact that $\mathcal{R}_{\lambda_0}^\pm \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow, \mathcal{H}_\uparrow)$ signifies that we consider localized excitations $f \in \mathcal{H}_\downarrow$, and the corresponding responses are non-localized but have a finite weighted energy.

A "stable" form of limiting absorption. We see from (2.24) that

$$\mathfrak{Im}\langle \mathcal{R}_{\lambda_0}^\pm u, u\rangle = \pm\pi \int_K |\langle u, w_{\lambda_0,k}\rangle|^2 \, \mathrm{d}\sigma_k \quad \forall u \in \mathcal{H}_\downarrow. \tag{2.28}$$

This quantity may be interpreted as the mean energy flux[9] which is necessary to maintain the time-harmonic wave $\mathcal{R}_{\lambda_0}^\pm u$ (it is positive for outgoing waves, and negative for

[7] Proposition 2.4 is easily proved following the idea of Eidus [7] (see also [22]).

[8] If f is not Λ-compactly supported, the limiting amplitude principle holds with an additional condition on the behaviour of $\mathcal{R}_\zeta$ near the bounds of Λ [7, 22].

[9] In equation (2.20), the "physical" wave is represented by the real part $\varphi(t)$ of $u(t)$, which satisfies

$$\mathrm{d}_t^2\varphi + \mathcal{A}\varphi = g(t) := \mathfrak{Re}\{f \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda_0}\, t}\}.$$

Taking the inner product of this equation with $\mathrm{d}_t\varphi$ yields the energy relation

$$\mathrm{d}_t \left\{ \frac{1}{2}\|\mathrm{d}_t\varphi\|^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{A}\varphi, \varphi) \right\} = (g(t), \mathrm{d}_t\varphi),$$

where the right-hand side stands for the energy flux brought to the system. If $f \in \mathcal{H}_\downarrow$, we know from Proposition 2.4 that the behaviour of this flux at large time is given by

$$\mathcal{F}^\pm(t) := \langle \, \mathfrak{Re}\{f \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda_0}\, t}\} \, , \, \mathrm{d}_t \, \mathfrak{Re}\{\mathcal{R}_{\lambda_0}^\pm f \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda_0}\, t}\} \, \rangle,$$

whose average on one period reads

$$\frac{\sqrt{\lambda_0}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sqrt{\lambda_0}} \mathcal{F}^\pm(t) \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2} \, \mathfrak{Im}\langle \mathcal{R}_{\lambda_0}^\pm f, f\rangle.$$

incoming waves). If this flux vanishes, can we assert that the corresponding outgoing or incoming wave has a finite energy? Such a property, which cannot be deduced from the assumptions of Definition 2.1, plays a leading role in the perturbation approach of §2.3. In short it guarantees that the limiting absorption holds for localized enough perturbations of the propagative medium. For this reason we set

DEFINITION 2.5. *In the context of Definition* 2.1*,* $\mathcal{A}$ *is said to satisfy a stable limiting absorption principle if the limits* $\mathcal{R}_\lambda^\pm$ *of Proposition* 2.3 *satisfy in addition the "stability condition"*

$$u \in \mathcal{H}_\downarrow \text{ and } \mathfrak{Im}\langle \mathcal{R}_\lambda^\pm u, u\rangle = 0 \implies \mathcal{R}_\lambda^\pm u \in \mathcal{H}. \tag{2.29}$$

The mathematical interpretation of this condition concerns the link between $\mathcal{R}_\lambda^\pm$ and the unbounded inverse $(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}$ of $\mathcal{A}-\lambda$, whose domain is the range $\mathrm{R}(\mathcal{A}-\lambda)$ of $\mathcal{A}-\lambda$:

$$(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}(\mathcal{A}-\lambda) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \quad \text{and} \quad (\mathcal{A}-\lambda)\,(\mathcal{A}-\lambda)^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{R}(\mathcal{A}-\lambda)}.$$

The following lemma shows that both one-sided limits $\mathcal{R}_\lambda^\pm$ may be seen as extensions of $(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}$.

LEMMA 2.6. *In the context of Definition* 2.1*, if* $u \in \mathrm{R}(\mathcal{A}-\lambda)\cap\mathcal{H}_\downarrow$*, then*

$$\mathcal{R}_\lambda^\pm u = (\mathcal{A}-\lambda)^{-1}u. \tag{2.30}$$

Proof. For $u \in \mathrm{R}(\mathcal{A}-\lambda_0)\cap\mathcal{H}_\downarrow$, denote $v := (\mathcal{A}-\lambda_0)^{-1}u \in \mathcal{H}$ which satisfies $(\mathcal{A}-\lambda_0)v = u$. Applying $\mathcal{R}_{\lambda_0\pm\mathrm{i}\varepsilon}$ to this relation yields

$$v \pm \mathrm{i}\varepsilon\mathcal{R}_{\lambda_0\pm\mathrm{i}\varepsilon}\, v = \mathcal{R}_{\lambda_0\pm\mathrm{i}\varepsilon}\, u.$$

In order to obtain the limit of this equality as ε tends to 0^+, consider the quantity $v_\varepsilon^\pm := \varepsilon\mathcal{R}_{\lambda_0\pm\mathrm{i}\varepsilon}\, v$ which can be written $v_\varepsilon^\pm = f_\varepsilon^\pm(\mathcal{A})v$ where

$$f_\varepsilon^\pm(\lambda) := \frac{\varepsilon}{\lambda-\lambda_0\mp\mathrm{i}\varepsilon}.$$

Hence by (2.9),

$$\left\|v_\varepsilon^\pm\right\|^2 = \left\|f_\varepsilon^\pm(\lambda)\mathcal{U}v\right\|_{\Lambda\times K}^2 = \int_{\Lambda\times K}\left|f_\varepsilon^\pm(\lambda)\right|^2\ |(\mathcal{U}v)_{\lambda,k}|^2\ \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\sigma_k.$$

Noticing that $\lim_{\varepsilon\to0} f_\varepsilon^\pm(\lambda) = 0$ for all $\lambda \neq \lambda_0$ and that $|f_\varepsilon^\pm(\lambda)| \le 1$, we deduce from Lebesgue theorem that $\lim_{\varepsilon\to0}\|v_\varepsilon^\pm\| = 0$. The conclusion follows from the limiting absorption principle. □

The stability condition (2.29) furnishes a sufficient condition for some $u \in \mathcal{H}_\downarrow$ to belong to the range of $\mathcal{A}-\lambda$ (so that (2.30) holds).

LEMMA 2.7. *In the context of Definition* 2.5*, for* $u \in \mathcal{H}_\downarrow$ *we have*

$$\mathfrak{Im}\langle \mathcal{R}_\lambda^\pm u, u\rangle = 0 \iff u \in \mathrm{R}(\mathcal{A}-\lambda). \tag{2.31}$$

Proof. First notice that if $u \in \mathrm{R}(\mathcal{A}-\lambda_0)\cap\mathcal{H}_\downarrow$, then $v := (\mathcal{A}-\lambda_0)^{-1}u$ satisfies $(\mathcal{A}-\lambda_0)v = u$, which shows that

$$\mathfrak{Im}((\mathcal{A}-\lambda_0)^{-1}u, u) = \mathfrak{Im}\{(v,\mathcal{A}v) - \lambda_0\,\|v\|^2\} = 0.$$

Hence $\mathfrak{Im}\langle \mathcal{R}^{\pm}_{\lambda_0} u, u\rangle = 0$ by Lemma 2.6.

The converse is based on the stability condition (2.29). Let $u \in \mathcal{H}_{\downarrow}$ such that $\mathfrak{Im}\langle \mathcal{R}^{\pm}_{\lambda_0} u, u\rangle = 0$. From (2.28), this is equivalent to $\mathcal{U}_{\lambda_0} u = 0$ (where the operators $\mathcal{U}_\lambda$ are defined in (2.26)). In this situation, the principal value at λ_0 in the expression (2.24) of $\mathcal{R}^{\pm}_{\lambda_0} u$ can be removed. As this quantity belongs here to $\mathcal{H}$, we have

$$(\mathcal{R}^{\pm}_{\lambda_0} u, v) = \int_\Lambda \frac{(\mathcal{U}_\lambda u, \mathcal{U}_\lambda v)_K}{\lambda - \lambda_0}\, \mathrm{d}\lambda \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\downarrow},$$

since the Hölder continuity of $\mathcal{U}_\lambda$ implies that near λ_0,

$$\|\mathcal{U}_\lambda u\|_K \leq C\ |\lambda - \lambda_0|^\alpha.$$

By density the above expression remains valid for all $v \in \mathcal{H}$ such that $\|\mathcal{U}_\lambda v\|_K$ is continuous near λ_0, in particular $\mathcal{A}v$ with $v \in \mathcal{H}_{\downarrow}$ since $\mathcal{U}_\lambda \mathcal{A} v = \lambda \mathcal{U}_\lambda v$. We deduce that

$$(\mathcal{R}^{\pm}_{\lambda_0} u, (\mathcal{A} - \lambda_0) v) = \int_\Lambda (\mathcal{U}_\lambda u, \mathcal{U}_\lambda v)_K\, \mathrm{d}\lambda = (u, v) \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\downarrow},$$

which shows that $(\mathcal{A} - \lambda_0)\, \mathcal{R}^{\pm}_{\lambda_0} u = u$, hence u belongs to $\mathrm{R}(\mathcal{A} - \lambda_0)$. □

From a physical point of view, the stability condition (2.29) signifies that if a time-harmonic wave does not produce nor use any energy on average in time, then the total energy of the wave is necessarily *finite*. To a certain extent, this means that there is a "no-wave's-land" between two kinds of time-harmonic waves maintained by a localized excitation: *stationary* waves of finite energy (which are both incoming and outgoing), and *propagative* incoming or outgoing waves of infinite energy. And the energy flux is the very tool to distinguish between them.

2.3. Perturbation of a generalized spectral basis. We show now how to construct under suitable assumptions generalized spectral bases for an operator $\mathcal{A}$ considered as a perturbation of a "simpler" operator $\tilde{\mathcal{A}}$, called *free*, where both $\mathcal{A}$ and $\tilde{\mathcal{A}}$ are assumed bounded selfadjoint operators in the same space $\mathcal{H}$. We denote their difference

$$\mathcal{D} := \mathcal{A} - \tilde{\mathcal{A}}, \tag{2.32}$$

which is clearly bounded and selfadjoint in $\mathcal{H}$. We shall assume that we know a generalized spectral basis $\{\tilde{w}_{\lambda,k}\}$ for $\tilde{\mathcal{A}}$ defined in the context of Definition 2.1: the transformation

$$(\tilde{\mathcal{U}} v)_{\lambda,k} := \langle v, \tilde{w}_{\lambda,k}\rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\downarrow}, \tag{2.33}$$

defines by density a unitary operator from $\mathcal{H}$ to $L^2(\Lambda \times K)$ which diagonalizes $\tilde{\mathcal{A}}$.

Intuitive construction. In order to find a generalized spectral basis for $\mathcal{A}$, we search solutions $w_{\lambda,k}$ to (2.8) in the form $w_{\lambda,k} = \tilde{w}_{\lambda,k} + \dot{w}_{\lambda,k}$. Using the above definition of $\mathcal{D}$ and the fact that $(\tilde{\mathcal{A}} - \lambda)\tilde{w}_{\lambda,k} = 0$, we see that the perturbation term $\dot{w}_{\lambda,k}$ must satisfy

$$(\mathcal{A} - \lambda)\dot{w}_{\lambda,k} = -\mathcal{D}\tilde{w}_{\lambda,k}. \tag{2.34}$$

But this equation is ill-posed if λ belongs to the spectrum of $\mathcal{A}$, which is precisely the situation we are interested in. A roundabout way to solve it consists in replacing first

$\mathcal{A}-\lambda$ by $\mathcal{A}-\zeta$ for some $\zeta \in \mathbb{C}^{\pm}$, solving the corresponding equation, and letting then ζ tend to λ. This is precisely the purpose of the limiting absorption principle. If the one-sided limits (2.22) of the resolvent of $\mathcal{A}$ exist, we can consider the outgoing and incoming perturbations $\dot{w}^{\pm}_{\lambda,k}$ of the free generalized eigenfunctions $\tilde{w}_{\lambda,k}$ given by

$$\dot{w}^{\pm}_{\lambda,k} := -\mathcal{R}^{\pm}_{\lambda}\mathcal{D}\tilde{w}_{\lambda,k},$$

which formally satisfy (2.34). In these conditions, we are led to two families of generalized eigenfunctions for $\mathcal{A}$:

$$w^{\pm}_{\lambda,k} := \tilde{w}_{\lambda,k} + \dot{w}^{\pm}_{\lambda,k} = (\mathrm{Id} - \mathcal{R}^{\pm}_{\lambda}\mathcal{D})\tilde{w}_{\lambda,k}. \tag{2.35}$$

In the context of wave propagation, $\tilde{w}_{\lambda,k}$ can be interpreted as an *incident* time-harmonic wave and $\dot{w}^{\pm}_{\lambda,k}$ then represents the corresponding *scattered* outgoing or incoming wave, that is, the response of the perturbation of the propagative medium to the incident wave. Do these families define generalized spectral bases for $\mathcal{A}$? We present below sufficient conditions that guarantee such a property.

Compact perturbation of the free problem. In §2.2 we deduce the limiting absorption principle from the *a priori* knowledge of a generalized spectral basis. Here the question is reversed: the above construction of perturbed generalized eigenfunctions is subject to the existence of the one-sided limits $\mathcal{R}^{\pm}_{\lambda}$. The idea is to derive them from the following relation between $\mathcal{R}_{\zeta}$ and the free resolvent $\tilde{\mathcal{R}}_{\zeta} := (\tilde{\mathcal{A}} - \zeta)^{-1}$:

$$\mathcal{R}_{\zeta} - \tilde{\mathcal{R}}_{\zeta} = -\mathcal{R}_{\zeta}\,\mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}_{\zeta} = -\tilde{\mathcal{R}}_{\zeta}\,\mathcal{D}\,\mathcal{R}_{\zeta} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^{\pm}, \tag{2.36}$$

which is easily deduced from the definition (2.32) of $\mathcal{D}$. This relation yields in particular

$$\mathcal{R}_{\zeta} = \tilde{\mathcal{R}}_{\zeta}(\mathrm{Id} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}_{\zeta})^{-1}, \tag{2.37}$$

which shows that the existence of $\mathcal{R}^{\pm}_{\lambda}$ depends

(i) on one hand, on a *limiting absorption principle* for the free problem, *i.e.*, the existence of the limits $\tilde{\mathcal{R}}^{\pm}_{\lambda}$,

(ii) on the other hand, on an invertibility condition for $\mathrm{Id} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}^{\pm}_{\lambda}$ (sometimes called a "division" property).

Proposition 2.3 provides the existence of the one-sided limits $\tilde{\mathcal{R}}^{\pm}_{\lambda}$ as operators from $\mathcal{H}_{\downarrow}$ to $\mathcal{H}_{\uparrow}$. Hence the formal limit of relation (2.37) will make sense if the invertibility of $\mathrm{Id} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}^{\pm}_{\lambda}$ occurs in $\mathcal{H}_{\downarrow}$. We thus have to assume that $\mathcal{D}$ extends by density to an operator of $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\uparrow}, \mathcal{H}_{\downarrow})$, which signifies that $\mathcal{A}$ differs from $\tilde{\mathcal{A}}$ by a "localizing" operator. But this continuity is not sufficient to provide the invertibility of $\mathrm{Id} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}^{\pm}_{\lambda}$. With the following definition of a *compact perturbation*, the question falls within Fredholm alternative.

Definition 2.8. *$\mathcal{A}$ is called a compact perturbation of $\tilde{\mathcal{A}}$ in the functional scheme* (2.1) *if $\mathcal{D}$ extends by density to a bounded operator from $\mathcal{H}_{\uparrow}$ to $\mathcal{H}_{\downarrow}$, and $\mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}^{\pm}_{\lambda}$ are compact operators in $\mathcal{H}_{\downarrow}$ for every $\lambda \in \Lambda$.*

In this context, it remains to find the values of λ for which the homogeneous equations

$$u^{\pm} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}^{\pm}_{\lambda}u^{\pm} = 0 \quad \text{with } u^{\pm} \in \mathcal{H}_{\downarrow}, \tag{2.38}$$

admit a non-zero solution.

PROPOSITION 2.9. *Assume that the free operator $\tilde{\mathcal{A}}$ satisfies the stable limiting absorption principle of Definition* 2.5. *Then for every compact perturbation $\mathcal{A}$ of $\tilde{\mathcal{A}}$, the operator* $\mathrm{Id} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm$ *is invertible in $\mathcal{H}_\downarrow$ if and only if λ is not an eigenvalue of $\mathcal{A}$.*

Proof. Let us first assume that λ is an eigenvalue of $\mathcal{A}$. Then there exists a non-zero $w \in \mathcal{H}$ such that $\mathcal{A}w = \lambda\, w$, which shows by (2.32) that

$$(\tilde{\mathcal{A}} - \lambda)w = -\mathcal{D}w.$$

As a consequence $u := \mathcal{D}w \in \mathcal{H}_\downarrow$ belongs to the range of $\tilde{\mathcal{A}} - \lambda$ and Lemma 2.6 thus shows that $w = -\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm u$. Applying $\mathcal{D}$ to this equality gives

$$(\mathrm{Id} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm)u = 0,$$

where $u \neq 0$ (otherwise w would also vanish). Hence $\mathrm{Id} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm$ is not invertible.

The converse is based on the stability property (2.29) for the free resolvent $\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm$. Assume that $u^\pm \in \mathcal{H}_\downarrow$ is a non-zero solution to (2.38). The function $w^\pm := \tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm u^\pm \in \mathcal{H}_\uparrow$ then satisfies

$$w^\pm = -\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm \mathcal{D}w^\pm, \tag{2.39}$$

from which we infer that

$$\langle \tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm \mathcal{D}w^\pm, \mathcal{D}w^\pm\rangle = -\langle w^\pm, \mathcal{D}w^\pm\rangle \in \mathbb{R},$$

since $\mathcal{D}$ is the extension in $\mathcal{H}_\uparrow$ of a selfadjoint operator in $\mathcal{H}$. The stability property (2.29) for the free resolvent then shows that $\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm \mathcal{D}w^\pm \in \mathcal{H}$, so $w^\pm \in \mathcal{H}$ by (2.39). Moreover Lemma 2.7 tells us that $\mathcal{D}w^\pm$ belongs to the range of $\tilde{\mathcal{A}} - \lambda$, which allows us to use Lemma 2.6. Applying $\tilde{\mathcal{A}} - \lambda$ to (2.39) yields

$$(\tilde{\mathcal{A}} - \lambda)w^\pm = -\mathcal{D}w^\pm,$$

that is, $(\mathcal{A} - \lambda)w^\pm = 0$: hence λ is an eigenvalue of $\mathcal{A}$. □

Main result. The following theorem justifies our intuitive construction of perturbed generalized eigenfunctions.

THEOREM 2.10. *Assume that the free operator $\tilde{\mathcal{A}}$ is diagonalized in the sense of Definition* 2.1 *and satisfies the additional stability property of Definition* 2.5. *Then for every compact perturbation $\mathcal{A}$ of $\tilde{\mathcal{A}}$* (*in the sense of Definition* 2.8) *which has no point spectrum*[10], *the following statements hold.*

(i) (Perturbed limiting absorption). *The perturbed resolvent $\mathcal{R}_\zeta$ admits one-sided limits*[11] $\mathcal{R}_\lambda^\pm \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow, \mathcal{H}_\uparrow)$ *at every point $\lambda \in \Lambda$. These limits are given by*

$$\mathcal{R}_\lambda^\pm = \tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm\,(\mathrm{Id} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm)^{-1} \quad \forall \lambda \in \Lambda. \tag{2.40}$$

(ii) (Perturbed spectral bases). *Both families $\{w_{\lambda,k}^\pm;\ (\lambda, k) \in \Lambda \times K\}$ given by* (2.35) *define generalized spectral bases of $\mathcal{A}$ in the sense of Definition* 2.1.

[10] See §2.5 if $\mathcal{A}$ has eigenvalues.

[11] As in Proposition 2.3, these limits hold for the uniform topology of $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow, \mathcal{H}_\uparrow)$ and are locally Hölder continuous on Λ.

Proof. We have already justified the existence of the right-hand side of (2.40). The fact that these are the one-sided limits in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow, \mathcal{H}_\uparrow)$ of the right-hand side of (2.37) (as well as the Hölder continuity of these limits) follows from standard arguments of perturbation theory, essentially based on the properties of the Neumann series (see [16], Theorem IV-1.16). Hence (i) is proved.

The proof of (ii) is based on spectral theory: it is given in the next section. □

Translated into a more physical language, Theorem 2.10 guarantees fundamental properties for every localized enough (or "short range") perturbation of a free propagative medium.

(i) The existence of outgoing and incoming time-harmonic waves, which involve a similar asymptotic distribution of energy to free propagation (indeed the weighted definition of energy is the same for both free and perturbed problems).

(ii) The fact that the outgoing and incoming perturbations of a complete family of *incident* free waves yield the suitable tool for time–frequency analysis.

2.4. Connection with spectral theory. The so-called spectral theorem (see, e.g., [5, 16]) is the keystone of a *functional calculus of selfadjoint operators.* This theorem asserts that every bounded selfadjoint operator $\mathcal{A}$ admits a *spectral family* $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, *i.e.*, a family of orthonormal projections which allows to express any function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ of $\mathcal{A}$ by the explicit formula

$$(f(\mathcal{A})u, v) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mathrm{d}(\mathcal{E}_\lambda u, v) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}. \tag{2.41}$$

We denote by $\mathcal{E}_I := \chi_I(\mathcal{A})$ the spectral projection associated with any interval $I \subset \mathbb{R}$, where χ_I is the characteristic function of I. This operator is related to the resolvent of $\mathcal{A}$ by means of Stone's formula which reads

$$(\mathcal{E}_I u, u) = \|\mathcal{E}_I u\|^2 = \frac{\pm 1}{\pi} \lim_{\delta\to 0^+} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \Im m(\mathcal{R}_{\lambda\pm \mathrm{i}\varepsilon}\, u, u)\,\mathrm{d}\lambda \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

for an *open* interval $I =]a, b[$. Notice that

$$\Im m(\mathcal{R}_{\lambda\pm \mathrm{i}\varepsilon}\, u, u) = \pm\varepsilon\, \|\mathcal{R}_{\lambda\pm \mathrm{i}\varepsilon}\, u\|^2,$$

since $\mathcal{A}$ is selfadjoint. Hence if I is contained in the resolvent set of $\mathcal{A}$, the quantity $\|\mathcal{R}_{\lambda\pm \mathrm{i}\varepsilon}\, u\|$ remains bounded as ε tends to 0, which shows that $\|\mathcal{E}_I u\| = 0$ for every $u \in \mathcal{H}$, that is, $\mathcal{E}_I = 0$.

On the other hand, if I is such that the limiting absorption principle holds near all its points, *i.e.*, if the one-sided limits $\mathcal{R}_\lambda^\pm$ exist in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\downarrow, \mathcal{H}_\uparrow)$, Stone's formula becomes

$$\|\mathcal{E}_I u\|^2 = \frac{\pm 1}{\pi} \int_I \Im m\langle \mathcal{R}_\lambda^\pm u, u\rangle\,\mathrm{d}\lambda \quad \forall u \in \mathcal{H}_\downarrow. \tag{2.42}$$

This relation tells us that the *spectral measure* $\mathrm{d}(\mathcal{E}_\lambda u, u) = \mathrm{d}\,\|\mathcal{E}_\lambda u\|^2$ is proportional to Lebesgue measure, and its density is a continuous function of λ, which is nothing but the energy flux appearing in (2.28):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\,\|\mathcal{E}_\lambda u\|^2 = \frac{\pm 1}{\pi}\,\Im m\langle \mathcal{R}_\lambda^\pm u, u\rangle \quad \forall u \in \mathcal{H}_\downarrow. \tag{2.43}$$

The spectral measure is called *absolutely continuous* in this case.

Spectral measures for the free and perturbed problems. For the free problem, limiting absorption is derived from the *a priori* knowledge of a generalized spectral basis $\{\tilde{w}_{\lambda,k}\}$: Proposition 2.3 holds for $\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm$, as well as its consequence (2.28) which gives here an explicit form of the spectral density of $\tilde{\mathcal{A}}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\|\tilde{\mathcal{E}}_\lambda u\right\|^2 = \frac{\pm 1}{\pi}\,\mathfrak{Im}\langle\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm u, u\rangle = \int_K |\langle u, \tilde{w}_{\lambda,k}\rangle|^2\,\mathrm{d}\sigma_k \quad \forall u \in \mathcal{H}_\downarrow. \tag{2.44}$$

We want to establish a similar formula for the perturbed problem. Limiting absorption was obtained in this case by means of the perturbation relation (2.40), so (2.43) holds. We first prove

Lemma 2.11. *For $\lambda \in \Lambda$ and $u \in \mathcal{H}_\downarrow$, we denote $\tilde{u}^\pm \in \mathcal{H}_\downarrow$ defined by*

$$\tilde{u}^\pm = (\mathrm{Id} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm)^{-1}u = (\mathrm{Id} - \mathcal{D}\,\mathcal{R}_\lambda^\pm)u, \tag{2.45}$$

so that (2.40) *reads equivalently $\mathcal{R}_\lambda^\pm u = \tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm \tilde{u}^\pm$. Then*

$$\mathfrak{Im}\langle\mathcal{R}_\lambda^\pm u, u\rangle = \mathfrak{Im}\langle\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm \tilde{u}^\pm, \tilde{u}^\pm\rangle.$$

Proof. For $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, define

$$u_\zeta := (\mathrm{Id} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}_\zeta)^{-1}u = (\mathrm{Id} - \mathcal{D}\,\mathcal{R}_\zeta)u \in \mathcal{H},$$

where the second equality is readily deduced from (2.36) which also shows that $\mathcal{R}_\zeta\, u = \tilde{\mathcal{R}}_\zeta u_\zeta$. Hence

$$(\mathcal{R}_\zeta\, u, u) = (\tilde{\mathcal{R}}_\zeta u_\zeta, (\mathrm{Id} + \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}_\zeta)u_\zeta) = (\tilde{\mathcal{R}}_\zeta u_\zeta, u_\zeta) + (\tilde{\mathcal{R}}_\zeta u_\zeta, \mathcal{D}\,\tilde{\mathcal{R}}_\zeta u_\zeta),$$

where the last inner product is real for $\mathcal{D}$ is selfadjoint. As a consequence,

$$\mathfrak{Im}(\mathcal{R}_\zeta\, u, u) = \mathfrak{Im}(\tilde{\mathcal{R}}_\zeta u_\zeta, u_\zeta).$$

The conclusion then follows from both free and perturbed limiting absorption principles. □

By virtue of (2.43), Lemma 2.11 tells us that the spectral measure $\mathrm{d}\|\mathcal{E}_\lambda u\|^2$ of $\mathcal{A}$ is related to that of $\tilde{\mathcal{A}}$ by the relation $\mathrm{d}\|\mathcal{E}_\lambda u\|^2 = \mathrm{d}\|\tilde{\mathcal{E}}_\lambda \tilde{u}^\pm\|^2$. It remains to show the link with perturbed generalized eigenfunctions.

Proposition 2.12. *With the assumptions of Theorem* 2.10*, the spectral density of $\mathcal{A}$ is given by*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\,\|\mathcal{E}_\lambda u\|^2 = \int_K |\langle u, w_{\lambda,k}^\pm\rangle|^2\,\mathrm{d}\sigma_k \quad \forall u \in \mathcal{H}_\downarrow. \tag{2.46}$$

Proof. By the definition (2.35) of $w_{\lambda,k}^\pm$, we have

$$\langle u, w_{\lambda,k}^\pm\rangle = \langle u, (\mathrm{Id} - \mathcal{R}_\lambda^\pm\,\mathcal{D})\tilde{w}_{\lambda,k}\rangle,$$

which shows by transposition that

$$\langle u, w_{\lambda,k}^\pm\rangle = \langle(\mathrm{Id} - \mathcal{D}\,\mathcal{R}_\lambda^\mp)u, \tilde{w}_{\lambda,k}\rangle = \langle\tilde{u}^\mp, \tilde{w}_{\lambda,k}\rangle,$$

where $\tilde{u}^\pm$ is defined in (2.45). Hence we deduce from (2.44) that

$$\int_K |\langle u, w_{\lambda,k}^\pm\rangle|^2\,\mathrm{d}\sigma_k = \int_K |\langle\tilde{u}^\mp, \tilde{w}_{\lambda,k}\rangle|^2\,\mathrm{d}\sigma_k = \frac{\pm 1}{\pi}\,\mathfrak{Im}\langle\tilde{\mathcal{R}}_\lambda^\pm \tilde{u}^\pm, \tilde{u}^\pm\rangle.$$

Lemma 2.11 then yields the result. □

Proof of Theorem 2.10. Spectral theory together with Proposition 2.12 provide the isometric character of the operation of projection on the $w^{\pm}_{\lambda,k}$ (Corollary 2.13). The fact that it is surjective follows from the same property for the free problem (Proposition 2.14).

COROLLARY 2.13. *With the assumptions of Theorem* 2.10*, both transformations*

$$(\mathcal{U}^{\pm}v)_{\lambda,k} := \langle v, w^{\pm}_{\lambda,k}\rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\downarrow}, \tag{2.47}$$

define by density isometric operators from $\mathcal{H}$ *to* $L^2(\Lambda \times K)$ *which satisfy*

$$\mathcal{U}^{\pm}\, f(\mathcal{A}) = f(\lambda)\,\mathcal{U}^{\pm}. \tag{2.48}$$

Proof. Formula (2.46) means that for every interval $I \subset \Lambda$,

$$\|\mathcal{E}_I u\|^2 = \int_{\Lambda\times K} \chi_I(\lambda)\, |(\mathcal{U}^{\pm}u)_{\lambda,k}|^2 \,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\sigma_k \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\downarrow}.$$

In particular we have $\mathcal{E}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}$, thus

$$\|u\|^2 = \|\mathcal{U}^{\pm}\, u\|^2_{\Lambda\times K} \quad \forall u \in \mathcal{H}_{\downarrow}.$$

So $\mathcal{U}^{\pm}$ is isometric, and extends by density to $\mathcal{H}$. The fact that this transformation diagonalizes $\mathcal{A}$ is a direct consequence of formula (2.41) where $\mathrm{d}(\mathcal{E}_\lambda u, v)$ is deduced from (2.46) by the polarization principle:

$$(f(\mathcal{A})u, v) = \int_{\Lambda\times K} f(\lambda)\,(\mathcal{U}^{\pm}u)_{\lambda,k}\,\overline{(\mathcal{U}^{\pm}v)_{\lambda,k}}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\sigma_k, \tag{2.49}$$

which reads $(f(\mathcal{A})u, v) = (f(\lambda)\,\mathcal{U}^{\pm}u, \mathcal{U}^{\pm}v)_{\Lambda\times K}$, hence

$$f(\mathcal{A}) = (\mathcal{U}^{\pm})^*\, f(\lambda)\,\mathcal{U}.$$

Relation (2.48) is a slightly more precise version of this diagonalization formula which amounts to

$$\mathcal{U}^{\pm}\, f(\mathcal{A}) = \mathcal{P}^{\pm}\, f(\lambda)\,\mathcal{U}^{\pm},$$

where $\mathcal{P}^{\pm} := \mathcal{U}^{\pm}(\mathcal{U}^{\pm})^*$ is the orthogonal projection on the range $\mathrm{R}(\mathcal{U}^{\pm})$ of $\mathcal{U}^{\pm}$. To remove $\mathcal{P}^{\pm}$ in the above relation, notice that

$$\|f(\mathcal{A})v\| = \|\mathcal{U}^{\pm}\, f(\mathcal{A})v\|_{\Lambda\times K} = \|f(\lambda)\,\mathcal{U}^{\pm}v\|_{\Lambda\times K} \quad \forall v \in \mathcal{H},$$

which is readily deduced from (2.49) by taking $u = v$ and $f(\mathcal{A})\bar{f}(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A})\,(f(\mathcal{A}))^*$ instead of $f(\mathcal{A})$. So (2.48) is proved. □

PROPOSITION 2.14. *With the assumptions of Theorem* 2.10*, both transformations* $\mathcal{U}^{\pm}$ *are unitary from* $\mathcal{H}$ *to* $L^2(\Lambda \times K)$.

Proof. We know that $\mathcal{U}^{\pm}$ is isometric: it remains to prove that it is surjective, or equivalently that $(\mathcal{U}^{\pm})^*$ is injective. Suppose that $(\mathcal{U}^{\pm})^*\hat{u} = 0$ for some $\hat{u} \in L^2(\Lambda\times K)$, then

$$(\hat{u}, \mathcal{U}^{\pm}v)_{\Lambda\times K} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

For every interval $I \subset \Lambda$, one can replace v by $\mathcal{E}_I v$ in this formula. Noticing that $\mathcal{U}^\pm \mathcal{E}_I = \chi_I(\lambda)\mathcal{U}^\pm$ by (2.48), we deduce that $(\chi_I \hat{u}, \mathcal{U}^\pm v)_{\Lambda\times K} = 0$ for all $v \in \mathcal{H}$, which means that $(\mathcal{U}^\pm)^* \chi_I \hat{u} = 0$. Following (2.11), this relation reads

$$\int_{\Lambda\times K} \chi_I(\lambda)\, \hat{v}_{\lambda,k}\, w^\pm_{\lambda,k}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k = 0$$

for every I interior to Λ. Hence

$$\int_K \hat{v}_{\lambda,k}\, w^\pm_{\lambda,k}\, \mathrm{d}\sigma_k = 0 \quad \text{for a.e. } \lambda \in \Lambda.$$

Using the definition (2.35) of $w^\pm_{\lambda,k}$, this property becomes

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\uparrow} - \mathcal{R}^\pm_\lambda \mathcal{D})\tilde{u}_\lambda = 0 \quad \text{where } \tilde{u}_\lambda := \int_K \hat{v}_{\lambda,k}\, \tilde{w}_{\lambda,k}\, \mathrm{d}\sigma_k \in \mathcal{H}_\uparrow, \tag{2.50}$$

for almost every $\lambda \in \Lambda$. Applying $\mathcal{D}$, we deduce

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\downarrow} - \mathcal{D}\mathcal{R}^\pm_\lambda)\mathcal{D}\tilde{u}_\lambda = 0.$$

Notice then that from (2.40) and (2.45), we have

$$\mathcal{R}^\pm_\lambda \mathcal{D} = \tilde{\mathcal{R}}^\pm_\lambda\, (\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\downarrow} - \mathcal{D}\mathcal{R}^\pm_\lambda)\, \mathcal{D}.$$

Hence $\mathcal{R}^\pm_\lambda \mathcal{D}\tilde{u}_\lambda = 0$, so $\tilde{u}_\lambda = 0$ by (2.50). In other words we have proved that

$$\int_{\Lambda\times K} \chi_I(\lambda)\, \hat{v}_{\lambda,k}\, \tilde{w}_{\lambda,k}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k = 0$$

for every $I \subset \Lambda$, that is $\tilde{\mathcal{U}}^*(\chi_I \hat{u}) = 0$. But $\tilde{\mathcal{U}}$ is unitary, so $\tilde{\mathcal{U}}^*$ is injective, thus $\hat{u} = 0$. □

2.5. From theory to applications. How does the preceding abstract framework apply in practical situations? For most models of wave propagation phenomena which enter the framework of our abstract wave equation (2.16) (in particular our water wave problem), $\mathcal{A}$ is *unbounded* and may have a *point spectrum* besides the continuous spectrum investigated in the present paper. So far this situation was excluded. We show here that the content of §§2.1 and 2.2 easily extends to such operators, but not the perturbation approach of §2.3. We give a trick to overcome this difficulty.

Unbounded operators. In the context of spectral theory, dealing with unbounded operators amounts to allowing unbounded functions $f : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ in the functional calculus offered by formula (2.9). To do so, it suffices to restrict the latter to the elements of the domain of $f(\mathcal{A})$ which is naturally characterized by means of the inverse spectral transformation $\mathcal{U}^*$:

$$\begin{gathered} f(\mathcal{A})v = \mathcal{U}^* f(\lambda)\, \mathcal{U}\, v \quad \forall v \in \mathrm{D}(f(\mathcal{A})) \quad \text{where} \\ \mathrm{D}(f(\mathcal{A})) = \mathcal{U}^* \left\{ \hat{v} \in L^2(\Lambda\times K);\ f(\lambda)\hat{v} \in L^2(\Lambda\times K) \right\}. \end{gathered} \tag{2.51}$$

This formula actually provides the extension of Definition 2.1 to an unbounded self-adjoint operator $A := f(\mathcal{A})$. Indeed suppose that f is a smooth real-valued diffeomorphism so that it defines a change of variable $\mu := f(\lambda)$. Noticing that

$$\int_{\Lambda\times K} |\hat{v}_{\lambda,k}|^2\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\sigma_k = \int_{f(\Lambda)\times K} |\hat{v}_{f^{-1}(\mu),k}|^2\, c_\mu\, \mathrm{d}\mu\, \mathrm{d}\sigma_k \quad \text{with } c_\mu := \left| \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}\mu}(\mu) \right|,$$

we infer that the transformation

$$\hat{v}_{\lambda,k} \xrightarrow{C} (C\hat{v})_{\mu,k} = c_\mu^{1/2}\, \hat{v}_{f^{-1}(\mu),k}$$

is unitary from $L^2(\Lambda \times K)$ to $L^2(f(\Lambda) \times K)$. Hence (2.51) can be rewritten

$$A = U^* \mu\, U \quad \text{in } \mathrm{D}(A) \quad \text{where } U := C\,\mathcal{U}$$

is unitary from $\mathcal{H}$ to $L^2(f(\Lambda) \times K)$. This transformation takes the form

$$(Uv)_{\mu,k} := \langle v\,, w'_{\mu,k} \rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}_\downarrow \quad \text{with } w'_{\mu,k} := c_\mu^{1/2}\, w_{f^{-1}(\mu),k}\,, \tag{2.52}$$

which shows that the family $\{w'_{\mu,k} \in \mathcal{H}_\uparrow;\ (\mu,k) \in f(\Lambda) \times K\}$ is a generalized spectral basis for the unbounded operator A. The normalization coefficient $c_\mu^{1/2}$ is smooth, so it does not affect the regularity assumptions of Definition 2.1 which then holds for unbounded operators: Λ is simply allowed to be unbounded. It is readily seen that the matter of §§2.1 and 2.2, that is, generalized eigenfunction expansions and limiting absorption, extends to unbounded operators with natural precautions concerning the domain. More precisely all the properties mentioned in theses lines hold for $\mathcal{A}$ if and only if they hold for $A = f(\mathcal{A})$.

About a possible point spectrum. The present spectral analysis cannot provide any information about the possible eigenvalues of the system, which reveal the existence of trapped waves (or bound states). It only concerns the continuous spectrum (more precisely the absolutely continuous spectrum) which corresponds to *propagative waves* whereas the point spectrum is related to localized *vibrations* of the system. Fortunately both regimes exist independently.

Indeed suppose that $\mathcal{A}$ has a point spectrum Λ_p. Let $\mathcal{H}_\mathrm{p}$ denote the subspace of $\mathcal{H}$ spanned by the associated eigenvectors, and $\mathcal{H}_\mathrm{c}$ its orthogonal complement:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mathrm{c} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_\mathrm{p}.$$

Both these subspaces are invariant under $\mathcal{A}$, which shows that $\mathcal{A}$ can be split as a direct sum

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathrm{c} \oplus \mathcal{A}_\mathrm{p},$$

where the restriction $\mathcal{A}_\mathrm{c} := \mathcal{A}_{|\mathcal{H}_\mathrm{c}}$ (respectively, $\mathcal{A}_\mathrm{p} := \mathcal{A}_{|\mathcal{H}_\mathrm{p}}$) has a pure continuous spectrum (respectively, pure point spectrum). Definition 2.1 then extends as follows, under the natural assumption $\mathcal{H}_\mathrm{p} \subset \mathcal{H}_\downarrow$ (trapped waves are always localized states).

Definition 2.15. *Let $\Lambda_\mathrm{c} := \Lambda \setminus \Lambda_\mathrm{p}$. A Λ_c-locally Hölder continuous family $\{w_{\lambda,k} \in \mathcal{H}_\uparrow;\ (\lambda,k) \in \Lambda_\mathrm{c} \times K\}$ associated with a spectral space $L^2(\Lambda \times K)$ is said to be a generalized spectral basis for the continuous part of $\mathcal{A}$ if the transformation*

$$(\mathcal{U}v)_{\lambda,k} := \langle v\,, w_{\lambda,k} \rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}_\downarrow,$$

defines by density a unitary operator from $\mathcal{H}_\mathrm{c} = (\mathrm{N}(\mathcal{U}))^\perp$ to $L^2(\Lambda \times K)$ which satisfies

$$\mathcal{A}_\mathrm{c} \oplus 0 = \mathcal{U}^* \lambda\, \mathcal{U}.$$

To obtain a spectral representation of $\mathcal{A}$, not only of its continuous part, we simply have to exhibit an orthonormal family of eigenvectors which spans $\mathcal{H}_\mathrm{p}$. The complete

spectral transformation then appears as the sum of two orthogonal contributions: the continuous part described by the $w_{\lambda,k}$ and a discrete part similar to the finite dimensional case (see footnote 3).

Definition 2.15 offers a "restricted " functional calculus which only involves the continuous part of $\mathcal{A}$: formula (2.12) is now the generalized eigenfunction expansion of $(f(\mathcal{A}_{\rm c})\oplus 0)u$. Hence the content of §2.2 holds if we are only interested in the spectrally continuous part of the solution to our abstract wave equation (which amounts to considering data in $\mathcal{H}_{\rm c}$), keeping in mind the fact that $\mathcal{R}_\zeta$ now denotes $(\mathcal{A}_{\rm c}-\zeta)^{-1}\oplus 0$. Note that outside $\Lambda_{\rm p}$, a complete limiting absorption principle for $\mathcal{A}$ is readily deduced from the restricted version since the discrete part of the resolvent, *i.e.*, $(\mathcal{A}_{\rm p}-\zeta)^{-1}$, is analytic outside the eigenvalues. All the results concerning the energy flux then also hold for the complete resolvent of $\mathcal{A}$ provided λ is not an eigenvalue, because the discrete part of the resolvent does not contribute to the energy flux.

Finally the perturbation approach of §2.3 holds with minor changes if $\mathcal{A}$ has a point spectrum. The perturbed limiting absortion principle (Theorem 2.10, (i)) is valid outside eigenvalues: this is exactly what Proposition 2.9 tells us. And the perturbed generalized spectral bases (Theorem 2.10, (ii)) have to be understood in the sense of Definition 2.15. Indeed the expression of the spectral density given in Proposition 2.12 is valid outside eigenvalues, and Corollary 2.13 now involves $f(\mathcal{A}_{\rm c})\oplus 0$ instead of $f(\mathcal{A})$.

How to use Theorem 2.10. In §2.3 the assumption that $\mathcal{A}$ and $\tilde{\mathcal{A}}$ are bounded operators defined in the same Hilbert space cannot be removed without introducing technical complications which reduce the generality of this approach. But for most scattering problems, the operators which describe the free and perturbed dynamics of the system, say $\tilde{A}$ and A, are not only unbounded but also defined in different Hilbert spaces, say $\tilde{\mathcal{H}}$ and $\mathcal{H}$. Indeed the presence of the scatterer generally implies a different description of the possible states of the system, which is particularly clear in coupled problems. The following idea, which applies in many practical situations (and is illustrated in §3) simply consists in *comparing bounded functions of A and $\tilde{A}$ in an "cumulative" functional framework* into which both free and perturbed problem can be carried.

If both A and $\tilde{A}$ are positive, a convenient choice of bounded function is to consider their respective resolvents R_ζ and $\tilde{R}_\zeta$ at a given point $\zeta=-\alpha$ with $\alpha>0$:

$$\mathcal{A}:=R_{-\alpha}=(A+\alpha)^{-1}\quad\text{and}\quad\tilde{\mathcal{A}}:=\tilde{R}_{-\alpha}=(\tilde{A}+\alpha)^{-1}.$$

These operators are clearly bounded positive and selfadjoint. As mentioned above, the limiting absorption principle holds for A if and only if it holds for $\mathcal{A}$, and likewise for $\tilde{A}$ and $\tilde{\mathcal{A}}$. Here the link is explicit since the resolvent $\mathcal{R}_\xi$ of $\mathcal{A}$ is related to R_ζ by

$$\mathcal{R}_\xi=-\xi^{-1}\,(\mathrm{Id}+\xi^{-1}\,R_\zeta)\quad\text{with}\quad\xi:=(\zeta+\alpha)^{-1},\tag{2.53}$$

which follows from the relation

$$r_\xi\circ r_{-\alpha}=-\xi^{-1}\,(1+\xi^{-1}\,r_\zeta)\quad\text{where}\quad r_\zeta(\lambda):=(\lambda-\zeta)^{-1}.$$

As a consequence, if they exist, the one-sided limits of these resolvents satisfy

$$\mathcal{R}^\pm_\mu=-\mu^{-1}\,(\mathrm{Id}+\mu^{-1}\,R^\mp_\lambda)\quad\text{with}\quad\mu:=(\lambda+\alpha)^{-1},\tag{2.54}$$

where the change of sign is due to the fact that $\xi\in\mathbb{C}^\pm$ if and only if $\zeta=\xi^{-1}-\alpha\in\mathbb{C}^\mp$. Note that this relation shows that the stability condition (2.29) holds for $\mathcal{R}^\pm_\mu$ if and only if it holds for $R^\pm_\lambda$.

We shall be able to say that $\mathcal{A}$ is a perturbation of $\tilde{\mathcal{A}}$ if both spaces $\tilde{\mathcal{H}}$ and $\mathcal{H}$ can be identified with two subspaces of a same "cumulative" Hilbert space $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, that is,

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}} \,\tilde{\oplus}\, \tilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_0. \tag{2.55}$$

In such a case, the operators $\tilde{\mathcal{A}}$ and $\mathcal{A}$ can be carried into $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ by defining

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}} := \tilde{\mathcal{A}} \,\tilde{\oplus}\, 0 \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \oplus 0,$$

which are bounded selfadjoint operators in $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. Their difference

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} := \boldsymbol{\mathcal{A}} - \tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \left\{(A+\alpha)^{-1} \oplus 0\right\} - \left\{(\tilde{A}+\alpha)^{-1} \,\tilde{\oplus}\, 0\right\} \tag{2.56}$$

is thus also bounded and selfadjoint. In order to apply Theorem 2.10, the cumulative space must fit into a weighted functional scheme such as (2.1), *i.e.*,

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\downarrow} \subset \boldsymbol{\mathcal{H}} \subset \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\uparrow},$$

where both spaces $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\downarrow}$ and $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\uparrow}$ are related to their free and perturbed analogues by

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\downarrow/\uparrow} = \tilde{\mathcal{H}}_{\downarrow/\uparrow} \,\tilde{\oplus}\, \tilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H}_{\downarrow/\uparrow} \oplus \mathcal{H}_0. \tag{2.57}$$

In these conditions, it is clear that a family $w_{\mu,k} \in \mathcal{H}$ is a generalized spectral basis for $\mathcal{A}$ in the sense of Definition 2.1 if and only if $\mathbf{w}_{\mu,k} := w_{\mu,k} \oplus 0 \in \boldsymbol{\mathcal{H}}$ is a generalized spectral basis for $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ in the sense of Definition 2.15 (and the same holds for the free problem). Hence the perturbation approach of §2.3 will apply if one is able to prove the compactness property of Definition 2.8 for $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

To sum up, the justification of generalized eigenfunction expansions for a scattering problem consists in the following steps.

(i) Find a generalized spectral basis $\tilde{w}_{\lambda,k}$ for the unbounded operator $\tilde{A}$ (using well-known functional transformations), and verify the stability condition (2.29).

(ii) Find a cumulative functional scheme as described above and prove that

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}\,\tilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_{\mu}^{\pm} = \boldsymbol{\mathcal{D}}\left(\tilde{\mathcal{R}}_{\mu}^{\pm} \,\tilde{\oplus}\, (-\mu^{-1}\mathrm{Id})\right)$$

is compact in $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\downarrow}$ for every $\mu \in r_{-\alpha}(\Lambda)$.

Then both families

$$\mathbf{w}_{\lambda,k}^{\pm} := \left(\mathrm{Id} - \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\mu}^{\mp}\boldsymbol{\mathcal{D}}\right)\tilde{\mathbf{w}}_{\lambda,k} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\uparrow} \quad \text{where} \quad \tilde{\mathbf{w}}_{\lambda,k} := \tilde{w}_{\lambda,k} \,\tilde{\oplus}\, 0,$$

are generalized spectral bases for $A \oplus 0$. Note that the change of sign in this formula is due to (2.54). Denoting by $\mathcal{P} : \boldsymbol{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}$ and $\mathcal{P}_0 : \boldsymbol{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}_0$ the restricted projections defined by $\mathbf{u} = \mathcal{P}\mathbf{u} \oplus \mathcal{P}_0\mathbf{u}$ (which extend to $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\uparrow}$ by (2.57)), we have

$$\mathbf{w}_{\lambda,k}^{\pm} = \left(\mathcal{P} - \mathcal{R}_{\mu}^{\mp}\mathcal{P}\boldsymbol{\mathcal{D}}\right)\tilde{\mathbf{w}}_{\lambda,k} \oplus \left(\mathcal{P}_0 + \mu^{-1}\mathcal{P}_0\boldsymbol{\mathcal{D}}\right)\tilde{\mathbf{w}}_{\lambda,k},$$

where the component in $\mathcal{H}_0$ vanishes since

$$\mathcal{P}_0\boldsymbol{\mathcal{D}}\tilde{\mathbf{w}}_{\lambda,k} = -\mathcal{P}_0\tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\tilde{\mathbf{w}}_{\lambda,k} = -\mu\,\mathcal{P}_0\tilde{\mathbf{w}}_{\lambda,k}.$$

Hence the families

$$w_{\lambda,k}^{\pm} := \left(\mathcal{P} - \mathcal{R}_{\mu}^{\mp}\mathcal{P}\boldsymbol{\mathcal{D}}\right)\tilde{\mathbf{w}}_{\lambda,k} \in \mathcal{H}_{\uparrow} \tag{2.58}$$

are generalized spectral bases for the unbounded operator A.

3. Application to the 2D sea-keeping problem.

3.1. Abstract formulation. We show here that our water wave problem (1.1)–(1.4) as well as the free version (1.5)–(1.6) can be expressed as abstract wave equations such as (2.16) involving unbounded selfadjoint operators.

The coupled problem. Substituting (1.4) in (1.3) (recall that we have chosen $\mathbb{M} = \mathrm{Id}$), the sea-keeping problem reads

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{3.1}$$

$$\partial_t^2\Phi + \partial_y\Phi = 0 \quad \text{on } F, \tag{3.2}$$

$$\partial_n\Phi + \left(\mathbb{K}p + \int_\Gamma \Phi\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right)\cdot\nu = 0 \quad \text{on } \Gamma, \tag{3.3}$$

$$\mathrm{d}_t^2 p + \mathbb{K}p + \int_\Gamma \Phi\,\nu\,\mathrm{d}\gamma = 0. \tag{3.4}$$

The key of the abstract formulation lies in the following remark: at every time t, if we know the acceleration potential only on the free surface F, say $\varphi := \Phi|_F$, as well as the position p of the floating body, then equations (3.1) and (3.3) determine Φ everywhere. This suggests to introduce the operator Θ which maps the pair (φ, p) onto the solution $\Phi = \Theta(\varphi, p)$ to the boundary value problem

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi = 0 \quad \text{in } \Omega,\\ &\Phi = \varphi \quad \text{on } F,\\ &\partial_n\Phi + \left(\int_\Gamma \Phi\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right)\cdot\nu = -\mathbb{K}p\cdot\nu \quad \text{on } \Gamma. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Hence our system (3.1)–(3.4) amounts to

$$\begin{aligned} &\partial_t^2\varphi + \partial_y\Theta(\varphi,p) = 0 \quad \text{on } F,\\ &\mathrm{d}_t^2 p + \mathbb{K}p + \int_\Gamma \Theta(\varphi,p)\,\nu\,\mathrm{d}\gamma = 0, \end{aligned}$$

which can be condensed as a single equation on $u := (\varphi, p)$:

$$\mathrm{d}_t^2 u + Au = 0 \quad \text{where } Au := \left(\partial_y\Theta u\,, \mathbb{K}p + \int_\Gamma \Theta u\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right). \tag{3.6}$$

To prove that the operator A is selfadjoint, we have to precise the proper functional framework in which it is defined. We first give a rigorous definition of Θ.

LEMMA 3.1. *The operator Θ formally defined by* (3.5) *appears as a continuous operator from $H^{1/2}(F)\times\mathbb{C}^2$ (where $H^{1/2}(F)$ is the trace space of the standard Sobolev space $H^1(\Omega)$) to the weighted Sobolev space*

$$\begin{aligned} W^1(\Omega) := \left\{\Psi;\ \eta\Psi \in L^2(\Omega) \text{ and } \nabla\Psi \in L^2(\Omega)^3\right\}\\ \text{where } \eta(X) := (1+\|X\|^2)^{-1/2}(\ln(2+\|X\|^2))^{-1}. \end{aligned}$$

Proof. The basic property of $W^1(\Omega)$ is that the quantity $\int_\Omega \|\nabla\Psi\|^2$ defines a norm in $W^1(\Omega)/\mathbb{C}$ equivalent to the quotient norm [3]. Hence the following variational

formulation of (3.5), which is easily derived from Green's formula,

$$\begin{aligned}&\text{Find } \Phi \in W^1(\Omega) \text{ such that } \Phi_{|F} = \varphi \text{ and}\\ &\int_\Omega \nabla\Phi \cdot \overline{\nabla\Psi} + \left(\int_\Gamma \Phi\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right)\cdot\left(\int_\Gamma \overline{\Psi}\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right) = -\mathbb{K}p\cdot\int_\Gamma \overline{\Psi}\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\\ &\qquad\qquad \forall \Psi \in W^1(\Omega) \text{ such that } \Psi_{|F} = 0,\end{aligned}$$

falls within the province of Lax-Milgram theorem, since the second sesquilinear term is positive. This means that this variational problem is well-posed provided φ belongs to the trace space $W^{1/2}(F)$ of $W^1(\Omega)$. The statement of the lemma follows by noticing that $H^{1/2}(F) \subset W^{1/2}(F)$, since $H^1(\Omega) \subset W^1(\Omega)$. More precisely, the following topological equality holds:

$$H^{1/2}(F) = W^{1/2}(F) \cap L^2(F), \tag{3.7}$$

which is easily deduced from the characterization of $W^{1/2}(F)$ given in [3]. □

Consider then the Hilbert space

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &:= L^2(F)\times\mathbb{C}^2 \text{ equipped with the inner product}\\ (u,v)_{\mathcal{H}} &:= \int_F \varphi\,\overline{\psi}\,\mathrm{d}x + \mathbb{K}p\cdot\overline{q} \quad \text{for } u=(\varphi,p) \text{ and } v=(\psi,q),\end{aligned}$$

as well as its subspace

$$\mathcal{V} := H^{1/2}(F)\times\mathbb{C}^2.$$

Proposition 3.2. *The operator A formally defined by* (3.6) *appears as an unbounded positive selfadjoint injective operator in $\mathcal{H}$, given by*

$$(Au,v)_{\mathcal{H}} := a(u,v) \quad \forall u \in \mathrm{D}(A),\ \forall v \in \mathcal{V}, \tag{3.8}$$

$$\mathrm{D}(A) := \{u \in \mathcal{V};\ \exists K_u > 0,\ \forall v \in \mathcal{V},\ |a(u,v)| \le K_u\,\|v\|_{\mathcal{H}}\}, \tag{3.9}$$

where $a(\cdot\,,\cdot)$ is the hermitian form defined in $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ by

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla\Theta u\cdot\overline{\nabla\Theta v} + \left(\mathbb{K}p + \int_\Gamma \Theta u\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right)\cdot\left(\mathbb{K}\overline{q} + \int_\Gamma \overline{\Theta v}\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right),$$

for all $u=(\varphi,p)$ and $v=(\psi,q)$ in $\mathcal{V}$.

Proof. The link between the formal definition (3.6) of A and the form $a(\cdot\,,\cdot)$ follows from Green's formula and the definition (3.5) of Θ, which yield

$$a(u,v) = \int_F \partial_y\Theta u\,\overline{v}\,\mathrm{d}x + \left(\mathbb{K}p + \int_\Gamma \Theta u\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right)\cdot\overline{\mathbb{K}q} = (Au,v)_{\mathcal{H}}.$$

Thanks to Lemma 3.1, we infer that $a(\cdot\,,\cdot)$ is continuous on $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$. It is clearly positive and hermitian. Moreover we show below that for some positive constants λ_0 and m, we have

$$a(u,u) + \lambda_0\,\|u\|^2_{\mathcal{H}} \ge m\,\|u\|^2_{\mathcal{V}} \quad \forall u \in \mathcal{V}. \tag{3.10}$$

For such a form, we know that (3.8)–(3.9) defines a positive selfadjoint operator (see, e.g., [16]). The fact that it is injective is obvious: $a(u,u)=0$ implies $\Theta u = 0$, thus $u=0$ (Θ is clearly injective).

Property (3.10) can be proved by contradiction. Suppose that there exists a sequence $u_n = (\varphi_n, p_n) \in \mathcal{V}$ such that $\|u_n\|_{\mathcal{V}} = 1$ and

$$a(u_n, u_n) + \lambda_0 \|u_n\|_{\mathcal{H}}^2 \to 0 \quad \text{as } n \to +\infty.$$

The fact that $\|u_n\|_{\mathcal{H}} \to 0$ tells us that $\varphi_n \to 0$ in $L^2(F)$ and $p_n \to 0$. On the other hand $a(u_n, u_n) \to 0$ shows that $\Theta u_n \to 0$ in $W^1(\Omega)$, hence $\varphi_n = (\Theta u_n)_{|F} \to 0$ in $W^{1/2}(F)$. From (3.7) we deduce that $\varphi_n \to 0$ in $H^{1/2}(F)$, thus $u_n \to 0$ in $\mathcal{V}$, which contradicts the assumption $\|u_n\|_{\mathcal{V}} = 1$. □

The free problem. In the absence of the floating body, the propagation of water waves is described by the system (1.5)–(1.6) which leads to an abstract wave equation similar to (3.6):

$$\mathrm{d}_t^2 \tilde{\varphi} + \tilde{A}\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{where } \tilde{A}\tilde{\varphi} := \partial_y \tilde{\Theta}\tilde{\varphi}, \tag{3.11}$$

where $\tilde{\Theta}$ denotes the harmonic lifting that maps a function $\tilde{\varphi}$ defined on $\tilde{F}$ to the solution $\tilde{\Phi}$ to

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\Phi} &= 0 \quad \text{in } \tilde{\Omega} \\ \tilde{\Phi} &= \tilde{\varphi} \quad \text{on } \tilde{F}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

As in Lemma 3.1, $\tilde{\Theta}$ defines a continuous operator from $H^{1/2}(\tilde{F})$ to $W^1(\tilde{\Omega})$, and Proposition 3.2 can be transposed to the operator $\tilde{A}$ which is selfadjoint in $L^2(\tilde{F})$: it is now associated with the hermitian form

$$a(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) := \int_{\tilde{\Omega}} \nabla\tilde{\Theta}\tilde{\varphi} \cdot \overline{\nabla\tilde{\Theta}\tilde{\psi}} \quad \forall \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in H^{1/2}(\tilde{F}).$$

3.2. Spectral analysis of the free problem.

Construction of a generalized spectral basis. We first exhibit a *diagonal representation* of the free operator $\tilde{A} = \partial_y \tilde{\Theta}$ defined in (3.11). We proceed as in [10] using the horizontal Fourier transform:

$$\mathcal{F}\varphi(\kappa) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \quad \kappa \in \mathbb{R},$$

which appears as a unitary transformation from $L^2(\mathbb{R}_x)$ to $L^2(\mathbb{R}_\kappa)$. Recall that its inverse $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ is given by

$$\mathcal{F}^*\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\kappa x}\, \hat{\varphi}(\kappa)\, \mathrm{d}\kappa.$$

Applying $\mathcal{F}$ to the equations (3.12) satisfied by $\tilde{\Phi} = \tilde{\Theta}\tilde{\varphi}$ and solving the resulting differential equation in the y direction yields

$$\mathcal{F}\tilde{\Phi}(\kappa, y) = \exp(|\kappa|\, y)\ \mathcal{F}\tilde{\varphi}(\kappa).$$

Taking the y-derivative of this expression at $y = 0$, we deduce that

$$\partial_y \tilde{\Theta} = \mathcal{F}^*\, |\kappa|\ \mathcal{F}. \tag{3.13}$$

Consider then the change of variables

$$\kappa \in \mathbb{R} \longrightarrow (\lambda, k) := (|\kappa|, \operatorname{sgn}\kappa) \in \mathbb{R}^+ \times \{\pm 1\}.$$

The corresponding transformation

$$\hat{\varphi}(\kappa) \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{C}\hat{\varphi}(\lambda, k) := \hat{\varphi}(k\lambda)$$

is unitary from $L^2(\mathbb{R}_\kappa)$ to $L^2(\mathbb{R}^+ \times \{\pm 1\})$ since

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\kappa)|^2 \, \mathrm{d}\kappa = \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{k=\pm 1} |\mathcal{C}\hat{\varphi}(\lambda, k)|^2 \, \mathrm{d}\lambda.$$

As a consequence formula (3.13) turns into the required form (2.7), *i.e.*,

$$\tilde{A} = \tilde{U}^* \, \lambda \, \tilde{U} \quad \text{where} \quad \tilde{U} := \mathcal{C}\,\mathcal{F}$$

appears as a product of unitary operators: it is then unitary from $L^2(\mathbb{R})$ to the *spectral* space $L^2(\mathbb{R}^+ \times \{\pm 1\})$.

This diagonal representation of $\tilde{A}$ can now be interpreted as its generalized eigenfunction expansion. Indeed by introducing the functions

$$\tilde{\varphi}_{\lambda,k}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\lambda x} \quad \text{for } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ and } k = \pm 1, \tag{3.14}$$

we see that $\tilde{U}$ reads

$$(\tilde{U}\tilde{\varphi})_{\lambda,k} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x) \, \overline{\tilde{\varphi}_{\lambda,k}(x)} \, \mathrm{d}x.$$

We can interpret this integral as a duality product between two weighted L^2-spaces of the form

$$L^2_s(\mathbb{R}) := \left\{\tilde{\varphi};\ \eta_s \tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})\right\} \quad \text{where } \eta_s(x) := (1 + x^2)^{s/2}. \tag{3.15}$$

Indeed $L^2_s(\mathbb{R})$ and $L^2_{-s}(\mathbb{R})$ are obviously dual to each other when $L^2(\mathbb{R})$ is identified with its own dual. Noticing that $\tilde{\varphi}_{\lambda,k} \in L^2_{-s}(\mathbb{R})$ provided $s > 1/2$, the above expression of $\tilde{U}$ becomes

$$(\tilde{U}\tilde{\varphi})_{\lambda,k} = \langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{\lambda,k} \rangle \quad \forall \tilde{\varphi} \in L^2_s(\mathbb{R}), \tag{3.16}$$

where $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ denotes the integral over $\mathbb{R}$ in the rest of this section. To sum up, we have almost proved

PROPOSITION 3.3. *In the functional scheme $L^2_s(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset L^2_{-s}(\mathbb{R})$ with $s > 1/2$, the family $\{\tilde{\varphi}_{\lambda,k} \in L^2_{-s}(\mathbb{R});\ (\lambda, k) \in \mathbb{R}^+ \times \{\pm 1\}\}$ associated with the spectral space $L^2(\mathbb{R}^+ \times \{\pm 1\})$ is a generalized spectral basis of $\tilde{A}$ (in the sense of Definition* 2.1).

Proof. It only remains to verify the local Hölder continuity of $\tilde{\varphi}_{\lambda,k}$, *i.e.*, property (2.5). Here this is a consequence of the following inequality:

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau'}\right| \le 2^{1-\alpha} \, |\tau - \tau'|^\alpha, \quad \forall \tau, \tau' \in \mathbb{R},\ \forall \alpha \in [0, 1]. \tag{3.17}$$

which is easily proved by noticing that

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau'}\right| \le 2 \quad \text{and} \quad \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau'}\right| = \left|\int_\tau^{\tau'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t\right| \le |\tau - \tau'|,$$

and taking the product of these inequalities raised to the powers $1-\alpha$ and α respectively. Applying (3.17) yields here

$$\|\tilde{\varphi}_{\lambda,k} - \tilde{\varphi}_{\lambda',k}\|^2_{L^2_{-s}(\mathbb{R})} \leq C\ |\lambda-\lambda'|^{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^{2\alpha}}{(1+x^2)^s}\,\mathrm{d}x,$$

where the integral in the right-hand side is bounded if $\alpha < s - 1/2$. As $s > 1/2$, property (2.5) is proved. □

We are thus in the context of §2.1. In particular we know that every function of $\tilde{A}$ has the generalized eigenfunction expansion

$$f(\tilde{A})\tilde{\varphi} = {}_{L^2(\mathbb{R})}\text{-PV}\int_{\mathbb{R}^+} f(\lambda) \sum_{k=\pm 1} \langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{\lambda,k}\rangle\, \tilde{\varphi}_{\lambda,k}\,\mathrm{d}\lambda, \quad \forall \tilde{\varphi} \in \mathrm{D}(f(\tilde{A})) \cap L^2_s(\mathbb{R}). \tag{3.18}$$

Green's function and integral representation. Our aim here is to justify formula (2.15) for the resolvent $\tilde{R}_\zeta$ of the free operator $\tilde{A}$. The spectral representation yields in this case

$$\langle \tilde{R}_\zeta \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\langle\!\langle \Upsilon_\lambda, \overline{\tilde{\varphi}} \otimes \tilde{\psi}\rangle\!\rangle}{\lambda - \zeta}\,\mathrm{d}\lambda \quad \text{where} \tag{3.19}$$

$$\Upsilon_\lambda(x,x') := \sum_{k=\pm 1} \overline{\tilde{\varphi}_{\lambda,k}(x)} \otimes \tilde{\varphi}_{\lambda,k}(x') = \frac{1}{\pi}\cos(\lambda|x-x'|), \tag{3.20}$$

and $\langle\!\langle \cdot\,,\cdot\rangle\!\rangle$ stands for a double integral over $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{x'}$, more precisely for the duality product between $L^2_{-s}(\mathbb{R}) \otimes L^2_{-s}(\mathbb{R})$ and $L^2_s(\mathbb{R}) \otimes L^2_s(\mathbb{R})$: the kernel Υ_λ clearly belongs to the former.

Permuting $\langle\!\langle \cdot\,,\cdot\rangle\!\rangle$ with the integral on $\mathbb{R}^+$, we have

$$\langle \tilde{R}_\zeta \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\rangle = \langle\!\langle g_\zeta, \overline{\tilde{\varphi}} \otimes \tilde{\psi}\rangle\!\rangle = \int_{\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{x'}} g_\zeta(x,x')\,\tilde{\varphi}(x)\,\overline{\tilde{\psi}(x')}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}x',$$

where g_ζ is the *Green's function* of $\tilde{A}$, *i.e.*, the kernel of its resolvent, which is formally given by

$$g_\zeta(x,x') := \mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\Upsilon_\lambda(x,x')}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\cos(\lambda|x-x'|)}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{3.21}$$

The function ψ can be eliminated in the above formula which then takes the usual form of the integral representation of $\tilde{R}_\zeta$:

$$(\tilde{R}_\zeta\tilde{\varphi})(x') = \int_{\mathbb{R}} g_\zeta(x,x')\,\tilde{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall x' \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

We have to precise the proper interpretation of the principal value in (3.21) which allows the permutation leading to this integral representation. Here the Green's function has a weak singularity, for the problem is one-dimensional.

PROPOSITION 3.4. *The Green's function of the free water wave problem belongs to $L^2_{-s}(\mathbb{R}) \otimes L^2_{-s}(\mathbb{R})$ with $s > 1/2$: it is given by* (3.21) *where the principal value is understood in $L^2_{-s}(\mathbb{R}) \otimes L^2_{-s}(\mathbb{R})$ at $\lambda = +\infty$. And the integral representation* (3.22) *holds for every $\tilde{\varphi} \in L^2_s(\mathbb{R})$.*

Proof. First notice that for fixed x and x' such that $x \neq x'$, the principal value in (3.21) exists in $\mathbb{C}$. Indeed integrating by parts yields

$$\int_0^M \frac{\cos(\lambda r)}{\lambda - \zeta}\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^M \frac{\sin(\lambda r)}{r\,(\lambda-\zeta)^2}\,\mathrm{d}\lambda + \frac{\sin(Mr)}{r\,(M-\zeta)} \quad \text{where } r = |x - x'|,$$

which clearly admits a limit when M tends to $+\infty$. This formula can be written

$$\int_0^M \frac{\Upsilon_\lambda}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^M \frac{\Upsilon_\lambda^{(-1)}}{(\lambda-\zeta)^2}\,\mathrm{d}\lambda + \frac{\Upsilon_M^{(-1)}}{M-\zeta} \quad \text{where}$$
$$\Upsilon_\lambda^{(-1)}(x,x') := \int_0^\lambda \Upsilon_\mu(x,x')\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(\lambda|x-x'|)}{|x-x'|}.$$

The kernel $\Upsilon_\lambda^{(-1)}$ is bounded, thus belongs to $L^2_{-s}(\mathbb{R}) \otimes L^2_{-s}(\mathbb{R})$ for every $\lambda > 0$. Moreover

$$\left\|\Upsilon_\lambda^{(-1)}\right\|_{L^2_{-s}(\mathbb{R})\otimes L^2_{-s}(\mathbb{R})} \leq C\ \lambda^{2/3},$$

for some positive constant C, since

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(\lambda|x-x'|)}{x-x'}\right|^2 \eta^2_{-s}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \lambda^2 \int_{|x-x'|<\lambda^{-2/3}} \mathrm{d}x + \lambda^{4/3} \int_{|x-x'|>\lambda^{-2/3}} \eta^2_{-s}(x)\,\mathrm{d}x \leq C\ \lambda^{4/3}.$$

As a consequence $(\lambda-\zeta)^{-2}\,\Upsilon_\lambda^{(-1)}$ is integrable over $\mathbb{R}^+$ with values in $L^2_{-s}(\mathbb{R})\otimes L^2_{-s}(\mathbb{R})$ and

$$g_\zeta = \mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\Upsilon_\lambda}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\Upsilon_\lambda^{(-1)}}{(\lambda-\zeta)^2}\,\mathrm{d}\lambda.$$

The integral representation is then easily justified:

$$\langle \tilde{R}_\zeta \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\rangle = \lim_{M\to+\infty} \left\langle\!\!\left\langle \int_0^M \frac{\Upsilon_\lambda}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda\ ,\ \overline{\tilde{\varphi}} \otimes \tilde{\psi} \right\rangle\!\!\right\rangle,$$
$$= \left\langle\!\!\left\langle \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{\Upsilon_\lambda}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda\ ,\ \overline{\tilde{\varphi}} \otimes \tilde{\psi} \right\rangle\!\!\right\rangle,$$

where the first equality follows from (3.19) by Fubini's theorem, and the second, from the above property of g_ζ. □

Proposition 3.4 is not optimal: formula (3.22) actually is valid for every $\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$, but this is not used here.

The limiting absorption principle. Since we are in the context of Definition 2.1, the statement of Proposition 2.3 holds for the free problem. And the generalized eigenfunction expansion (2.24) can be translated into the limit form of the integral representation (3.22). This is the object of

PROPOSITION 3.5. *For every $\lambda > 0$, the one-sided limits $\tilde{R}^\pm_\lambda$ of the free resolvent $\tilde{R}_\zeta$ exist in $\mathcal{B}(L^2_s(\mathbb{R}), L^2_{-s}(\mathbb{R}))$ for $s > 1/2$. They satisfy the integral representation*

$$(\tilde{R}^\pm_\lambda \tilde{\varphi})(x') = \int_{\mathbb{R}} g^\pm_\lambda(x,x')\,\tilde{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall x' \in \mathbb{R}, \tag{3.23}$$

where $g_\lambda^\pm \in L^2_{-s}(\mathbb{R}) \otimes L^2_{-s}(\mathbb{R})$ *are the one-sided limits of* g_ζ*, which can be expressed in the form*

$$g_\lambda^\pm(x,x') = \pm \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\lambda r} + \frac{1}{\pi}\,\mathfrak{Re}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r} E_1(\mathrm{i}\lambda r)\right\} \quad \textit{with} \quad r := |x-x'|, \tag{3.24}$$

where E_1 *denotes the exponential integral function* (*see e.g.,* [1]).

Proof. Formula (2.24) yields here

$$\langle \tilde{R}^\pm_{\lambda_0}\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\rangle = \mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^+\setminus\{\lambda_0\}} \frac{\langle\!\langle \Upsilon_\lambda, \overline{\tilde{\varphi}} \otimes \tilde{\psi}\rangle\!\rangle}{\lambda-\lambda_0}\,\mathrm{d}\lambda \pm \mathrm{i}\pi\,\langle\!\langle \Upsilon_{\lambda_0}, \overline{\tilde{\varphi}} \otimes \tilde{\psi}\rangle\!\rangle,$$

for $\tilde{\varphi}$ and $\tilde{\psi}$ in $L^2_s(\mathbb{R})$. The existence of the principal value at λ_0 follows from the local Hölder continuity of Υ_λ (which derives from that of $\tilde{\varphi}_{\lambda,k}$). Using the same arguments as in the proof of Proposition 3.4, this formula amounts to the integral representation (3.23) where

$$g^\pm_{\lambda_0} = \mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^+\setminus\{\lambda_0\}} \frac{\Upsilon_\lambda}{\lambda-\lambda_0}\,\mathrm{d}\lambda \pm \mathrm{i}\pi\,\Upsilon_{\lambda_0}. \tag{3.25}$$

The equivalent expression (3.24) is deduced from (3.21) written in the form

$$g_\zeta(x,x') = \frac{1}{2\pi}\left\{\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\lambda r}}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda + \mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda r}}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda\right\}.$$

Indeed considering each integral as a Cauchy integral in the complex λ-plane, the residue theorem allows us to move the integration path to the half imaginary axis located in the half λ-plane where $\exp(\pm\mathrm{i}\lambda r)$ is exponentially decreasing. For instance, if $\mathfrak{Re}\,\zeta > 0$ and $\mathfrak{Im}\,\zeta > 0$, we have

$$\begin{aligned}\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\lambda r}}{\lambda-\zeta}\,\mathrm{d}\lambda &= 2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta r} + \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{e}^{-tr}}{t+\mathrm{i}\zeta}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta r} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta r}\int_{\mathrm{i}\zeta r+\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

where the last integral is nothing but $E_1(\mathrm{i}\zeta r)$. Similarly the second Cauchy integral is equal to $\exp(-\mathrm{i}\zeta r)\,E_1(-\mathrm{i}\zeta r)$, which yields

$$g_\zeta(x,x') = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta r} + \frac{1}{2\pi}\left\{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\zeta r}\,E_1(+\mathrm{i}\zeta r) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta r}\,E_1(-\mathrm{i}\zeta r)\right\}.$$

The case where $\mathfrak{Re}\,\zeta > 0$ and $\mathfrak{Im}\,\zeta < 0$ leads to the same expression where the first term $\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\zeta r)$ must be replaced by $-\mathrm{i}\exp(-\mathrm{i}\zeta r)$. Taking the limit as $\zeta \in \mathbb{C}^\pm$ tends to $\lambda > 0$ gives (3.24). □

The stability property. It remains to verify that the free problem satisfies the "stable" form of limiting absorption defined in Definition 2.5.

PROPOSITION 3.6. *For every* $\tilde{\varphi} \in L^2_s(\mathbb{R})$ *with* $s > 1$*, we have*

$$\mathfrak{Im}\langle \tilde{R}^\pm_\lambda\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle = 0 \implies \tilde{R}^\pm_\lambda\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Proof. We know from (2.28) that the energy flux $\mathfrak{Im}\langle \tilde{R}^{\pm}_{\lambda}\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle$ vanishes if and only if the spectral components of $\tilde{\varphi}$ vanish at λ :

$$(\tilde{U}\tilde{\varphi})_{\lambda,k} = \langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{\lambda,k}\rangle = 0 \quad \text{for} \quad k = \pm 1.$$

We show below that these components describe the amplitude of the far field, *i.e.,* the asymptotic behaviour of $(\tilde{R}^{\pm}_{\lambda}\tilde{\varphi})(x)$ as x tends to $\pm\infty$. More precisely we prove that if $\tilde{\varphi} \in L^2_s(\mathbb{R})$ with $s > 1$, then

$$\tilde{R}^{\pm}_{\lambda}\tilde{\varphi} - \sum_{k=\pm 1} \pm 2\mathrm{i}\pi \, \langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{\lambda,k}\rangle \, \tilde{\varphi}^{\pm}_{\lambda,k} \in L^2(\mathbb{R}) \tag{3.26}$$

where $\tilde{\varphi}^{\pm}_{\lambda,k}$ may be seen as the outgoing $(+)$ or incoming $(-)$ contribution of $\tilde{\varphi}_{\lambda,k}$ defined by

$$\tilde{\varphi}^{\pm}_{\lambda,k}(x) := H(\pm kx) \; \tilde{\varphi}_{\lambda,k}(x),$$

where H stands for the Heaviside step function ($H(x) = 1$ if $x > 0$, else $H(x) = 0$). Of course, the statement of the Proposition follows from (3.26).

The ingredients of the proof are given by Proposition 3.5. First rewrite $g^{\pm}_{\lambda}$ in the form

$$\begin{aligned} g^{\pm}_{\lambda}(x, x') \; &= \; f^{\pm}_{\lambda}(x - x') + e_{\lambda}(x - x') \quad \text{where} \\ f^{\pm}_{\lambda}(x) := \pm\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\lambda|x|} \; &\text{and} \; e_{\lambda}(x) := \frac{1}{\pi}\, \mathfrak{Re}\left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda|x|} E_1(\mathrm{i}\lambda|x|)\right\}. \end{aligned}$$

The functions $f^{\pm}_{\lambda}$ and e_{λ} represent respectively the far field and the evanescent components of the Green's function: from the properties of the exponential integral [1], it is clear that $e_{\lambda} \in L^2(\mathbb{R})$. Substituting this decomposition in the integral representation (3.23) yields

$$\tilde{R}^{\pm}_{\lambda}\tilde{\varphi} = f^{\pm}_{\lambda} * \tilde{\varphi} + e_{\lambda} * \tilde{\varphi}.$$

The fact that $e_{\lambda} * \tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ is obvious: by Schwarz's inequality and Fubini's theorem, we have

$$\|e_{\lambda} * \tilde{\varphi}\|^2 \le \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{e_{\lambda}(x' - x)}{\eta_s(x)} \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}x' \; \int_{\mathbb{R}} |\eta_s(x)\tilde{\varphi}(x)|^2 \, \mathrm{d}x \le C \; \|e_{\lambda}\|^2 \, \|\eta_s\tilde{\varphi}\|^2,$$

if $s > 1/2$. To deal with $f^{\pm}_{\lambda} * \tilde{\varphi}$, notice that from the definition (3.14) of $\tilde{\varphi}_{\lambda,k}$,

$$f^{\pm}_{\lambda}(x' - x) = \begin{cases} \pm 2\mathrm{i}\pi \, \tilde{\varphi}_{\lambda,\pm 1}(x') \, \overline{\tilde{\varphi}_{\lambda,\pm 1}(x)} & \text{if } x < x', \\ \\ \pm 2\mathrm{i}\pi \, \tilde{\varphi}_{\lambda,\mp 1}(x') \, \overline{\tilde{\varphi}_{\lambda,\mp 1}(x)} & \text{if } x > x', \end{cases}$$

which shows that

$$\begin{aligned} (f^{\pm}_{\lambda} * \tilde{\varphi})(x') = \pm 2\mathrm{i}\pi \Bigg\{ &\tilde{\varphi}_{\lambda,\pm 1}(x') \int_{-\infty}^{x'} \tilde{\varphi}(x) \, \overline{\tilde{\varphi}_{\lambda,\pm 1}(x)} \, \mathrm{d}x \\ &+ \tilde{\varphi}_{\lambda,\mp 1}(x') \int_{x'}^{+\infty} \tilde{\varphi}(x) \, \overline{\tilde{\varphi}_{\lambda,\mp 1}(x)} \, \mathrm{d}x \Bigg\}. \end{aligned}$$

If $\tilde{\varphi} \in L^2_s(\mathbb{R})$ with $s > 1$, the first integral in the right-hand side satisfies

$$\int_{-\infty}^{x'} \tilde{\varphi}(x)\, \overline{\tilde{\varphi}_{\lambda,\pm 1}(x)}\, \mathrm{d}x - H(x')\, \langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{\lambda,\pm 1} \rangle \in L^2(\mathbb{R}).$$

Indeed by Schwarz's inequality, we see that when $r \to +\infty$,

$$\left| \int_{|x|>r} \tilde{\varphi}(x)\, \overline{\tilde{\varphi}_{\lambda,k}(x)}\, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{C}{r^{s-1/2}}\, \|\eta_s \tilde{\varphi}\|.$$

Of course a similar property holds for the second integral (which behaves like the quantity $H(-x')\, \langle \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{\lambda,\mp 1} \rangle$). Hence (3.26) is proved. □

3.3. Compactness of the perturbation. We prove here that the sea-keeping problem (3.6) corresponds to a compact perturbation of the free problem (3.11) using the trick described in §2.5, *i.e.*, by comparing the resolvents $\mathcal{A} := R_{-\alpha}$ and $\tilde{\mathcal{A}} := \tilde{R}_{-\alpha}$ of A and $\tilde{A}$ for some $\alpha > 0$ in a cumulative functional framework.

The comparison operator. The free and perturbed energy spaces $\tilde{\mathcal{H}} := L^2(\tilde{F})$ and $\mathcal{H} := L^2(F) \times \mathbb{C}^2$ appear naturally as subspaces of $\boldsymbol{\mathcal{H}} := L^2(\tilde{F}) \times \mathbb{C}^2$ since (2.55) holds with complementary subspaces given by $\mathcal{H}_0 := L^2(F_0)$ where $F_0 := \tilde{F} \setminus F$ and $\tilde{\mathcal{H}}_0 := \mathbb{C}^2$. We denote by $\mathcal{P} : \boldsymbol{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}$ and $\mathcal{P}_0 : \boldsymbol{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}_0$ the canonical restrictions associated with the perturbed decomposition, that is,

$$\mathcal{P}\,(\tilde{\varphi}, p) = (\tilde{\varphi}_{|F}, p) \quad \text{and} \quad \mathcal{P}_0\,(\tilde{\varphi}, p) = \tilde{\varphi}_{|F_0}, \quad \forall (\tilde{\varphi}, p) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}.$$

Consider then the comparison operator (2.56) for some given $\alpha > 0$,

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} := \boldsymbol{\mathcal{A}} - \tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \quad \text{where} \quad \boldsymbol{\mathcal{A}} := R_{-\alpha} \oplus 0 \quad \text{and} \quad \tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}} := \tilde{R}_{-\alpha} \,\tilde{\oplus}\, 0,$$

which can be written

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}\mathbf{u} = \Big\{ R_{-\alpha}\mathcal{P}\mathbf{u} - \mathcal{P}\,(\tilde{R}_{-\alpha}\tilde{\varphi}, 0) \Big\} \oplus \Big\{ -\mathcal{P}_0\,(\tilde{R}_{-\alpha}\tilde{\varphi}, 0) \Big\}, \quad \forall \mathbf{u} = (\tilde{\varphi}, p) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}.$$

The aim of this section is to prove

PROPOSITION 3.7. *For $s,\ s' < 3/2$, the operator $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ is compact from $L^2_{-s}(\tilde{F}) \times \mathbb{C}^2$ to $L^2_{s'}(\tilde{F}) \times \mathbb{C}^2$.*

Let us first make explicit the above definition of $\boldsymbol{\mathcal{D}}$. For $\mathbf{u} = (\tilde{\varphi}, p) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}$, define $\tilde{\varphi}_\alpha := \tilde{R}_{-\alpha}\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}$ and $u_\alpha := R_{-\alpha}\mathcal{P}\mathbf{u} = (\varphi_\alpha, p_\alpha) \in \mathcal{H}$, so that

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}\mathbf{u} = (\varphi_\alpha - (\tilde{\varphi}_\alpha)_{|F}\,,\, p_\alpha) \oplus (-(\tilde{\varphi}_\alpha)_{|F_0}). \tag{3.27}$$

By virtue of (3.6), u_α is the solution to the following coupled problem

$$\begin{aligned} &\partial_y \Theta u_\alpha + \alpha\, \varphi_\alpha = \tilde{\varphi}_{|F}, \\ &\mathbb{K} p_\alpha + \int_\Gamma \Theta u_\alpha\, \nu\, \mathrm{d}\gamma + \alpha\, p_\alpha = p. \end{aligned}$$

From the definition (3.5) of Θ, this amounts to solving the boundary value problem

$$\begin{aligned} &\Delta \Phi_\alpha = 0 \ \text{ in } \Omega, \\ &\partial_y \Phi_\alpha + \alpha\, \Phi_\alpha = \tilde{\varphi} \ \text{ on } F, \\ &\partial_n \Phi_\alpha + \left(\mathbb{K} p_\alpha + \int_\Gamma \Phi_\alpha\, \nu\, \mathrm{d}\gamma \right) \cdot \nu = 0 \ \text{ on } \Gamma, \\ &\mathbb{K} p_\alpha + \int_\Gamma \Phi_\alpha\, \nu\, \mathrm{d}\gamma + \alpha\, p_\alpha = p, \end{aligned}$$

where $\Phi_\alpha := \Theta u_\alpha$, so $\varphi_\alpha = (\Phi_\alpha)_{|F}$. Similarly, for the free problem we have $\tilde{\varphi}_\alpha = (\tilde{\Phi}_\alpha)_{|\tilde{F}}$ where

$$\begin{aligned} &\Delta\tilde{\Phi}_\alpha = 0 \ \text{ in } \tilde{\Omega}, \\ &\partial_y\tilde{\Phi}_\alpha + \alpha\,\tilde{\Phi}_\alpha = \tilde{\varphi} \ \text{ on } \tilde{F}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

As a consequence, for finding $\boldsymbol{\mathcal{D}}\mathbf{u}$, we must first solve (3.28) and then the following coupled system, where $\Psi := \Phi_\alpha - (\tilde{\Phi}_\alpha)_{|\Omega}$:

$$\begin{aligned} &\Delta\Psi = 0 \ \text{ in } \Omega, \\ &\partial_y\Psi + \alpha\,\Psi = 0 \ \text{ on } F, \\ &\partial_n\Psi + \left(\mathbb{K}q + \int_\Gamma \Psi\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right)\cdot\nu = -\partial_n\tilde{\Phi}_\alpha - \left(\int_\Gamma \tilde{\Phi}_\alpha\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right)\cdot\nu \ \text{ on } \Gamma, \\ &\mathbb{K}q + \int_\Gamma \Psi\,\nu\,\mathrm{d}\gamma + \alpha\,q = p - \int_\Gamma \tilde{\Phi}_\alpha\,\nu\,\mathrm{d}\gamma. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Relation (3.27) thus becomes

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}\mathbf{u} = (\Psi_{|F}, q) \oplus (-(\tilde{\Phi}_\alpha)_{|F_0}). \tag{3.30}$$

In order to prove that $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ enters the framework of Definition 2.8, we need precise information about the solutions of problems (3.28) and (3.29), which will be obtained with the help of the "immersed" Green's function. The latter provides an explicit integral representation of $\tilde{\Phi}_\alpha$ and an implicit one for Ψ.

The "immersed" Green's function. The Green's function g_ζ introduced in §3.2 (see Proposition 3.4) is not adapted to study the solution to (3.29) because the perturbation extends under the free surface. This function represents the response of the free surface to a point source located on this free surface. Here we need the response of the whole sea to an immersed excitation, represented by the "immersed" Green's function which is nothing but the function generally used in the literature for integral equations (see, *e.g.*, [17, 26]). We denote it by $G_\zeta = G_\zeta(X, X')$ where $X = (x, y)$ and $X' = (x', y')$ belong to $\tilde{\Omega}$, and $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. It satisfies the following equations

$$\begin{aligned} &\Delta_X G_\zeta(X, X') = \delta_{X'}(X) \ \text{ for } X \in \tilde{\Omega} \\ &\partial_y G_\zeta(X, X') - \zeta\, G_\zeta(X, X') = 0 \ \text{ for } X \in \tilde{F}, \end{aligned}$$

where $\delta_{X'}$ stands for the Dirac measure at point X'. It is given by

$$G_\zeta(X, X') = \frac{1}{2\pi}\left\{\ln\left|\frac{z - \overline{z'}}{z - z'}\right| + 2\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\overline{z} - z')})}{\lambda - \zeta}\,\mathrm{d}\lambda\right\}, \tag{3.31}$$

where $z = z(X) := x + \mathrm{i}y$ and $z' = z'(X) := x' + \mathrm{i}y'$. Of course this expression coincide with (3.21) when $X, X' \in \tilde{F}$, that is, $y = y' = 0$: the free surface Green's function is simply the trace on $\tilde{F} \times \tilde{F}$ of the immersed one.

In the sequel we are only interested in the particular case $\zeta = -\alpha$ with $\alpha > 0$ for which G_ζ has a stronger decay at infinity than for $\mathfrak{Im}\,\zeta \neq 0$.

Lemma 3.8. *When $r := |x - x'|$ tends to $+\infty$, then $G_{-\alpha}(X, X') = O(r^{-2})$ uniformly in every strip $y_0 < y, y' \leq 0$. And the same behaviour holds for every spatial derivative of $G_{-\alpha}$.*

Proof. Under the assumption that $y + y'$ remains bounded, we have

$$\ln\left|\frac{z-\overline{z'}}{z-z'}\right| = \frac{(y+y')^2-(y-y')^2}{2r^2} + O(r^{-4}),$$

which shows that the first term in (3.31) is $O(r^{-2})$. Following the same idea as in the proof of formula (3.24), the second term can be written

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\overline{z}-z')})}{\lambda+\alpha}\,\mathrm{d}\lambda = \mathfrak{Re}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\mathrm{e}^{-t\rho}}{t-\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{where} \quad \rho := r - \mathrm{i}(y+y').$$

Then integrating by part twice yields

$$\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\mathrm{e}^{-t\rho}}{t-\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\rho^2}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{2\mathrm{e}^{-t\rho}}{(t-\mathrm{i}\alpha)^3}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\rho^2\alpha^2} + \frac{\mathrm{i}}{\rho\alpha}.$$

The two first terms of the right-hand side are obviously $O(r^{-2})$. As α is real, the real part of the third one also is $O(r^{-2})$. Hence the lemma is proved for $G_{-\alpha}$. For its spatial derivatives, the same arguments apply: the logarithmic term is dealt with by a direct derivation, and the last formula can be derived with respect to ρ. □

The free problem. For $\tilde{\varphi} \in L^2(\tilde{F})$, problem (3.28) is well-posed in

$$W^1_{\tilde{F}}(\tilde{\Omega}) := \left\{\tilde{\Phi} \in W^1(\tilde{\Omega});\ \tilde{\Phi}_{|\tilde{F}} \in L^2(\tilde{F})\right\},$$

where $W^1(\tilde{\Omega})$ is given in Lemma 3.1. Indeed its variational formulation reads

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla\tilde{\Phi}_\alpha \cdot \overline{\nabla\tilde{\Phi}'} + \alpha\int_F \tilde{\Phi}_\alpha\,\overline{\tilde{\Phi}'}\,\mathrm{d}x = \int_F \tilde{\varphi}\,\overline{\tilde{\Phi}'}\,\mathrm{d}x, \quad \forall\tilde{\Phi}' \in W^1_{\tilde{F}}(\tilde{\Omega}),$$

where the left-hand side defines an inner product in $W^1_{\tilde{F}}(\tilde{\Omega})$. Hence the operator $\tilde{\Theta}_\alpha$ which maps $\tilde{\varphi}$ to the solution $\tilde{\Phi}_\alpha$ to (3.28) is continuous from $L^2(\tilde{F})$ to $W^1_{\tilde{F}}(\tilde{\Omega})$. The knowledge of $G_{-\alpha}$ yields an explicit integral representation of this operator:

$$(\tilde{\Theta}_\alpha\tilde{\varphi})(X') = \tilde{\Phi}_\alpha(X') = \int_{\tilde{F}} G_{-\alpha}((x,0),X')\,\tilde{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall X' \in \tilde{\Omega} \tag{3.32}$$

which is classically obtained by Green's formula. This relation is nothing but the harmonic lifting in $\tilde{\Omega}$ of the integral representation (3.22) since $\tilde{\Theta}_\alpha = \tilde{\Theta}\,R_{-\alpha}$ and $G_{-\alpha}((x,0),\cdot) = \tilde{\Theta}g_{-\alpha}(x,\cdot)$ where $\tilde{\Theta}$ is defined in (3.12).

We want to extend formula (3.32) to every $\tilde{\varphi} \in L^2_{-s}(\tilde{F})$. We are only interested in the local behaviour of $\tilde{\Phi}_\alpha$, say in $\tilde{\Omega}_R := \{X \in \tilde{\Omega};\ \|X\| < R\}$, since the perturbed problem (3.29) only involves $(\tilde{\Phi}_\alpha)_{|\Gamma}$ and $(\partial_n\tilde{\Phi}_\alpha)_{|\Gamma}$.

LEMMA 3.9. *For $s < 3/2$ and $R > 0$, the mapping $\tilde{\Theta}_\alpha : \tilde{\varphi} \longrightarrow \tilde{\Phi}_\alpha$ extends to a bounded operator from $L^2_{-s}(\tilde{F})$ to $H^1_\Delta(\tilde{\Omega}_R) := \left\{\tilde{\Phi} \in H^1(\tilde{\Omega}_R);\ \Delta\tilde{\Phi} = 0 \text{ in } \tilde{\Omega}_R\right\}$.*

Proof. Choose $R' > R$ and denote by $\chi_{R'}$ the characteristic function of the set $\{|x| < R'\}$. Then $\tilde{\Theta}_\alpha$ can be split as follows:

$$\tilde{\Theta}_\alpha = \tilde{\Theta}^{R'}_\alpha + \tilde{\Theta}^\infty_\alpha \quad \text{where} \quad \tilde{\Theta}^{R'}_\alpha\tilde{\varphi} := \tilde{\Theta}_\alpha(\chi_{R'}\tilde{\varphi}) \quad \text{and} \quad \tilde{\Theta}^\infty_\alpha\tilde{\varphi} := \tilde{\Theta}_\alpha((1-\chi_{R'})\tilde{\varphi}).$$

For every $s > 0$, the operator $\tilde{\Theta}_\alpha^{R'}$ is clearly continuous from $L^2_{-s}(\tilde{F})$ to $W^1_{\tilde{F}}(\tilde{\Omega})$, thus also to $H^1_\Delta(\tilde{\Omega}_R)$ by restriction. To deal with $\tilde{\Theta}_\alpha^\infty$, notice that by Schwarz's inequality, (3.32) yields

$$\left|(\tilde{\Theta}_\alpha^\infty \tilde{\varphi})(X')\right|^2 \leq \|\tilde{\varphi}\|^2_{L^2_{-s}(\tilde{F})} \int_{|x|>R'} |\eta_s(x)\, G_{-\alpha}((x,0),X')|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Lemma 3.8 shows that if $s < 3/2$, the last integral is a bounded function of $X' \in \tilde{\Omega}_R$. And a similar inequality holds for every spatial derivative of $\tilde{\Theta}_\alpha^\infty \tilde{\varphi}$. Hence $\tilde{\Theta}_\alpha^\infty$ is continuous from $L^2_{-s}(\tilde{F})$ to $H^m(\tilde{\Omega}_R)$ for every $m > 0$. The conclusion follows. □

The perturbed problem. As above, problem (3.29) is well-posed in the space $W^1_F(\Omega) \times \mathbb{C}^2$. Indeed its variational formulation can be written

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\Psi \cdot \overline{\nabla\Psi'} + \alpha \int_F \Psi\, \overline{\Psi'}\,\mathrm{d}x + \alpha\, \mathbb{K}q \cdot \overline{q'} + \left(\mathbb{K}q + \int_\Gamma \Psi\, \nu\,\mathrm{d}\gamma\right) \cdot \left(\mathbb{K}\overline{q'} + \int_\Gamma \overline{\Psi'}\, \nu\,\mathrm{d}\gamma\right)\\ = -\int_\Gamma \partial_n \tilde{\Phi}_\alpha\, \overline{\Psi'}\,\mathrm{d}\gamma - \left(\int_\Gamma \tilde{\Phi}_\alpha\, \nu\,\mathrm{d}\gamma\right) \cdot \left(\mathbb{K}\overline{q'} + \int_\Gamma \overline{\Psi'}\, \nu\,\mathrm{d}\gamma\right) + \mathbb{K}p \cdot \overline{q'},\end{aligned}$$

for all pairs $(\Psi', q') \in W^1_F(\Omega) \times \mathbb{C}^2$. The left-hand side is clearly a coercive sesquilinear form in this space, and the right-hand side depends continuously on $(\tilde{\Phi}_\alpha, p) \in H^1_\Delta(\tilde{\Omega}_R) \times \mathbb{C}^2$ (where R must be chosen so that $\Gamma \subset \tilde{\Omega}_R$). This means that the operator which maps $(\tilde{\Phi}_\alpha, p)$ to the solution (Ψ, q) to (3.29) is continuous from $H^1_\Delta(\tilde{\Omega}_R) \times \mathbb{C}^2$ to $W^1_F(\Omega) \times \mathbb{C}^2$. Moreover Ψ satisfies the usual integral representation (see, *e.g.*, [17, 26])

$$\Psi(X') = \int_\Gamma \left(\Psi(X)\ \partial_{n_X} G_{-\alpha}(X,X') - \partial_n \Psi(X)\ G_{-\alpha}(X,X')\right) \mathrm{d}\gamma_X, \quad \forall X' \in \Omega. \tag{3.33}$$

LEMMA 3.10. *For $s' < 3/2$, the mapping $(\tilde{\Phi}_\alpha, p) \longrightarrow (\Psi_{|F}, q)$ is continuous from $H^1_\Delta(\tilde{\Omega}_R) \times \mathbb{C}^2$ to $H^{1/2}_{s'}(F) \times \mathbb{C}^2$ where $H^{1/2}_{s'}(F) := H^{1/2}(F) \cap L^2_{s'}(F)$.*

Proof. From (3.7) we know that $H^{1/2}(F)$ is the trace space of $W^1_F(\Omega)$. On the other hand, the above integral representation and Lemma 3.8 show that $\Psi(x,0) = O(|x|^{-2})$, hence $\Psi_{|F} \in L^2_{s'}(F)$ for every $s' < 3/2$. □

Proof of Proposition 3.7 and consequence. The characterization (3.30) of $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ together with Lemmas 3.9 and 3.10 show that $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ is continuous from $L^2_{-s}(\tilde{F}) \times \mathbb{C}^2$ to $\{H^{1/2}_{s'}(F) \oplus H^{1/2}(F_0)\} \times \mathbb{C}^2$ for $s,\ s' < 3/2$. Moreover by Rellich theorem, the canonical injections $H^{1/2}(F_0) \subset L^2(F_0)$ and $H^{1/2}_{s'}(F) \subset L^2_{s''}(F)$ are compact if $s' > s''$. So Proposition 3.7 is proved.

This guarantees the compactness of the perturbation in the sense of Definition 2.8.

COROLLARY 3.11. *For $1/2 < s < 3/2$, the operators $\boldsymbol{\mathcal{D}}\tilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_\mu^\pm$ are compact in $\boldsymbol{\mathcal{H}}_\downarrow := L^2_s(\tilde{F}) \times \mathbb{C}^2$ for every $\mu \in]0, \alpha^{-1}[$.*

Proof. From Proposition 3.5, we know that $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_\mu^\pm = \tilde{\mathcal{R}}_\mu^\pm \tilde{\oplus} (-\mu^{-1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$ is continuous from $L^2_s(\tilde{F}) \times \mathbb{C}^2$ to $L^2_{-s}(\tilde{F}) \times \mathbb{C}^2$ if $s > 1/2$. Choosing $s' = s$ in Proposition 3.7 yields the result. □

3.4. Conclusion. The previous sections show that our wave problem comes within the field of application of Theorem 2.10. Indeed we know a generalized spectral basis for the free problem (Proposition 3.3) which satisfies the stability condition

(Proposition 3.6). And the perturbation we consider is compact (Corollary 3.11). As a consequence, for $1 < s < 3/2$, both families (2.58), *i.e.*,

$$w^{\pm}_{\lambda,k} := \left(\mathcal{P} - \mathcal{R}^{\mp}_{\mu}\mathcal{P}\boldsymbol{\mathcal{D}}\right)(\tilde{w}_{\lambda,k}, 0) \in L^2_{-s}(\tilde{F}) \times \mathbb{C}^2, \quad \text{where} \quad \mu := (\lambda+\alpha)^{-1},$$

define generalized spectral bases for A. It remains to exhibit a more explicit characterization of these eigenfunctions, by a proper interpretation of $\mathcal{R}^{\mp}_{\mu}\mathcal{P}\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

For $\mathbf{u} = (\tilde{\varphi}, p) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\uparrow}$, denote $v := \mathcal{P}\boldsymbol{\mathcal{D}}\mathbf{u} = (\psi, q)$ and $\dot{u} := \mathcal{R}_{\xi}v = (\dot{\varphi}, \dot{p})$ where $\xi \in \mathbb{C}^{\pm}$. Formula (3.30) tells us that $v = (\Psi_{|F}, q)$ where (Ψ, q) is obtained by solving successively (3.28) and (3.29). Moreover by (2.53), we have $\dot{u} = -\xi^{-1}\,(\mathrm{Id} + \xi^{-1}\,R_{\zeta})v$ where $\xi = (\zeta+\alpha)^{-1}$, or equivalently

$$(A-\zeta)(\xi\dot{u} + v) = -\xi^{-1}v.$$

By virtue of the definition (3.6) of A, this means that

$$\begin{aligned}
&\partial_y\Theta(\xi\dot{u}+v) - \zeta\,(\xi\dot{\varphi}+\psi) = -\xi^{-1}\psi,\\
&\mathbb{K}(\xi\dot{p}+q) + \int_{\Gamma}\Theta(\xi\dot{u}+v)\,\nu\,\mathrm{d}\gamma - \zeta\,(\xi\dot{p}+q) = -\xi^{-1}q.
\end{aligned}$$

By defining $\dot{\Phi}$ such that

$$\Theta(\xi\dot{u}+v) = \xi\dot{\Phi} + \Psi,$$

and using the equations (3.29), this system amounts to solving

$$\begin{aligned}
&\Delta\dot{\Phi} = 0 \ \text{ in } \Omega,\\
&\partial_y\dot{\Phi} - \zeta\,\dot{\Phi} = 0 \ \text{ on } F,\\
&\partial_n\dot{\Phi} + \left(\mathbb{K}\dot{p} + \int_{\Gamma}\dot{\Phi}\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right)\cdot\nu = \xi^{-1}\left(\partial_n\tilde{\Phi}_{\alpha} + \nu\cdot\int_{\Gamma}\tilde{\Phi}_{\alpha}\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right) \quad \text{on } \Gamma,\\
&\mathbb{K}\dot{p} + \int_{\Gamma}\dot{\Phi}\,\nu\,\mathrm{d}\gamma - \zeta\,\dot{p} = \xi^{-1}\left(-p + \int_{\Gamma}\tilde{\Phi}_{\alpha}\,\nu\,\mathrm{d}\gamma\right).
\end{aligned}$$

This means that for finding $\dot{u} := \mathcal{R}_{\xi}\mathcal{P}\boldsymbol{\mathcal{D}}\mathbf{u}$, we must first solve (3.28) and then the above system, which yields $\dot{u} = (\dot{\Phi}_{|F}, \dot{p})$.

When $\xi \in \mathbb{C}^{\mp}$ tends to $\mu \in \,]0, \alpha^{-1}[$, that is, when $\zeta \in \mathbb{C}^{\pm}$ tends to $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$, the limiting absorption principle tells us that the limit of $(\dot{\Phi}, \dot{p})$ exists and satisfies the above equations with ζ replaced by λ (and ξ by μ). In the particular case $\mathbf{u} = -(\tilde{w}_{\lambda,k}, 0)$, we rediscover the equations (1.11)–(1.14) satisfied by the scattered wave $(\dot{\Phi}^{\pm}_{\lambda,k}, p^{\pm}_{\lambda,k})$, since in this situation $\tilde{\Phi}_{\alpha} = \mu\,\tilde{\Phi}_{\lambda,k}$ where $\tilde{\Phi}_{\lambda,k}$ is given in (1.7).

The radiation condition (1.15) which characterizes the outgoing or incoming solution is then easily justified using again the immersed Green's function (3.31). Indeed the solution $(\dot{\Phi}, \dot{p})$ of the above equations satisfies the integral representation (3.33) with $G_{-\alpha}$ replaced by G_{ζ}. Hence

$$\dot{\Phi}^{\pm}_{\lambda,k}(X') = \int_{\Gamma}\left(\dot{\Phi}^{\pm}_{\lambda,k}(X)\;\partial_{n_X}G^{\pm}_{\lambda}(X,X') - \partial_n\dot{\Phi}^{\pm}_{\lambda,k}(X)\;G^{\pm}_{\lambda}(X,X')\right)\mathrm{d}\gamma_X, \quad \forall X' \in \Omega,$$

where $G^{\pm}_{\lambda}$ are the one-sided limits of G_{ζ}, which shows that $\dot{\Phi}^{\pm}_{\lambda,k}$ satisfies the radiation condition (1.15) if the same holds for $G^{\pm}_{\lambda}(X,\cdot)$ and $\partial_{n_X}G^{\pm}_{\lambda}(X,\cdot)$ uniformly in $X \in \Gamma$. Following the same idea as in Proposition 3.5, we see that

$$G^{\pm}_{\lambda}(X,X') = \pm\mathrm{i}\;\mathrm{e}^{\lambda(\pm\mathrm{i}|x-x'|+(y+y'))} + E^{\pm}_{\lambda}(X,X'),$$

where $E^{\pm}_{\lambda}(X, X')$ represents the evanescent component of $G^{\pm}_{\lambda}(X, X')$ whose contribution vanishes in the radiation condition. And the dominant term obviously satisfies (1.15). As a conclusion, we have justified the intuitive construction of §1.2.

THEOREM 3.12. *Under the assumption that the operator A defined in Proposition* 3.2 *has no eigenvalues, both families*

$$w^{\pm}_{\lambda,k} := \left((\tilde{\Phi}_{\lambda,k} + \dot{\Phi}^{\pm}_{\lambda,k})_{|F} \ , \ p^{\pm}_{\lambda,k} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \ \textit{and} \ k = \pm 1,$$

given by (1.7) *and* (1.11)–(1.15), *and associated with the spectral space* $L^2(\mathbb{R}^+ \times \{\pm 1\})$, *define generalized spectral bases for A in the functional scheme*

$$L^2_s(F) \times \mathbb{C}^2 \subset L^2(F) \times \mathbb{C}^2 \subset L^2_{-s}(F) \times \mathbb{C}^2 \quad \textit{with} \quad s > 1.$$

In particular the announced generalized eigenfunction expansion (1.16) of the transient coupled motions is now established: it has to be understood in the sense of (2.19).

Remark that the absence of eigenvalues of A, which amounts to the uniqueness of the solution to (1.11)–(1.15), seems to be an open question. The case of the scattering by a fixed obstacle has been extensively studied, from the uniqueness proof pioneered by John [15] to the discovery of trapped waves by McIver [19] (see [17] for a review of these results). But very few is known about the coupled problem.

REFERENCES

[1] M. ABRAMOWITZ AND I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1970.

[2] S. AGMON, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Norm. Sup. Pisa C1, Sci. II 2 (1975), pp. 151–218.

[3] C. AMROUCHE, *The Neumann problem in the half space*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002), pp. 151–156.

[4] J.T. BEALE, *Eigenfunction expansions for objects floating in an open sea*, Comm. Pure Appl. Math., 30 (1977), pp. 283–313.

[5] M.S. BIRMAN AND M.Z. SOLOMJAK, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1972.

[6] Y. DERMENJIAN AND J.C. GUILLOT, *Théorie spectrale de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu stratifié perturbé*, J. Differential Equations, 62 (1986), pp. 357–409.

[7] D.M. EIDUS, *The principle of limiting absorption*, Transl. Amer. Soc., 47 (1965), pp. 157–191.

[8] C. HAZARD, *Etude des résonances pour le problème linéarisé des mouvements d'un navire sur la houle*, thesis, University Paris VI, Technical Report ENSTA 257, Paris, 1991.

[9] ———, *Analyse Modale de la Propagation des Ondes*, Habilitation Thesis, University Paris VI, 2001.

[10] C. HAZARD AND M. LENOIR, *Surface water waves*, in *Scattering*, edited by R. Pike and P. Sabatier, Academic Press, 2002.

[11] C. HAZARD AND M. MEYLAN, *Spectral theory for an elastic thin plate floating on water of finite depth*, submitted to J. Fluid Mech..

[12] P. HENRICI, *Applied and Computational Complex Analysis, Volume 3*, John Wiley, New York, 1986.

[13] T. IKEBE, *Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory*, Arch. Rational Mech. Anal., 5 (1960), pp. 1–34.

[14] F. JOHN, *On the motion of floating bodies, I*, Comm. Pure Appl. Math., 2 (1949), pp. 13–57.

[15] ———, *On the motion of floating bodies, II*, Comm. Pure Appl. Math., 3 (1950), pp. 45–101.

[16] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[17] N. KUZNETSOV, V. MAZ'YA AND B. VAINBERG, *Linear Water Waves, a Mathematical Approach*, Cambridge, 2002.

[18] A. MAJDA, *Outgoing solutions for perturbations of $-\Delta$ with applications to spectral and scattering theory*, J. Differential Equations, 16 (1974), pp. 515–547.

[19] M. McIver, *An example of non-uniqueness in the two-dimensional linear water wave problem*, J. Fluid Mech., 315 (1996), pp. 257–266.
[20] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*, Academic Press, 1980.
[21] ———, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV: Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.
[22] J. Sanchez Hubert and E. Sanchez Palencia, *Vibration and Coupling of Continuous Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
[23] M. Vullierme-Ledard, *The limiting amplitude principle applied to the motion of floating bodies*, Math. Model. and Numer. Anal., 21 (1987), pp. 125–170.
[24] R. Weder, *Spectral analysis of strongly propagative systems*, J. reine und angew. Mathematick, 354 (1984), pp. 95–122.
[25] ———, *Spectral and Scattering Theory for Wave Propagation in Perturbed Stratified Media*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
[26] J.V. Wehausen and E.V. Laitone, *Surface Waves*, in Hanbuch der Physik IX, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
[27] C.H. Wilcox, *Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
[28] ———, *Scattering Theory for Diffraction Gratings*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
[29] ———, *Sound Propagation in Stratified Fluids*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
[30] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

Décomposition sur les mouvements périodiques ou
sur les modes résonants pour la simulation de
la réponse transitoire d'un problème de tenue à la mer

Résumé Ce mémoire organisé en deux parties présente deux méthodes de représentation de la solution transitoire d'un problème de tenue à la mer basées sur l'utilisation de solutions harmoniques.
La première partie est consacrée à l'étude une méthode baptisée *méthode de décomposition en modes résonants* appliquée au problème de tenue à la mer d'une plaque élastique mince. Cette méthode qui peut être vue comme un prolongement analytique de la transformation de Laplace consiste à représenter la réponse transitoire à l'aide d'une superposition discrète de modes résonants exponentiellement amortis. La question à laquelle nous tentons de donner une "réponse numérique" est de savoir si dans le cadre de l'hydrodynamique, cette représentation nous permet de récupérer avec précision le comportement de la solution transitoire pour les temps longs.
La seconde partie du mémoire est consacrée à la justification rigoureuse, dans le cadre d'un problème de diffraction posé en domaine non borné, de la possibilité de représenter la solution transitoire comme la superposition de mouvements périodiques qui apparaissent pour un continuum de fréquences : ce que l'on nomme généralement *développement en fonctions propres généralisées*. Nous illustrons nos résultats par le problème de tenue à la mer d'un corps rigide flottant.

Mots-clés Transformée de Laplace, résonance, famille méromorphe d'opérateurs, théorie spectrale, théorie du scattering, fonctions propres généralisées, absorption limite.

Time-harmonic or resonant states decomposition
for the simulation of the time-dependent
solution of a sea-keeping problem

Abstract This thesis is organised in two parts and presents two methods for representing the transient solution of a sea-keeping problem based on time-harmonic solutions.
The first part deals with the study of a the *Singularity Expansion Method* applied to the sea-keeping problem of a thin elastic plate. This method can be seen as an analytic extension of the Laplace transform and consists of representing the time-dependent solution as a discrete superposition of damped oscillating modes. The question we try to "answer numerically" is the following: is this representation an accurate way to obtain the long time behaviour of the solution in the hydrodynamic case?
The second part concerns the decomposition of a time-dependent wave on a continuous family of time-harmonic ones: the so-called *Generalized Eigenfunction Expansions*. We give a rigourous justification of this decomposition in the case of the linear scattering problem and we illustrate our results with the sea-keeping problem of a rigid floating body.

Keywords Laplace transform, resonance, meromorphic family of operators, spectral theory, scattering theory, generalized eigenfunctions, limiting absorption.

Laboratoire d'accueil : poéms umr cnrs / énsta / inria 2706
Propagation des Ondes : Étude Mathématique et Simulation
énsta / uma / poéms - 32 boulevard Victor - 75015 Paris.