



**HAL**  
open science

# Applications du codage Spatio-Temporel à des réseaux sans fils

Elie Jandot Dit Danjou

► **To cite this version:**

Elie Jandot Dit Danjou. Applications du codage Spatio-Temporel à des réseaux sans fils. domain\_other. Télécom ParisTech, 2006. English. NNT: . pastel-00002519

**HAL Id: pastel-00002519**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00002519>**

Submitted on 12 Jun 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale  
d'Informatique,  
Télécommunications  
et Électronique de Paris

# Thèse

présentée pour obtenir le grade de Docteur  
de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications

Spécialité : Électronique et Communications

**Élie Jandot dit Danjou**

Applications du codage Spatio-Temporel  
à des réseaux sans fils

Soutenue le 14 décembre 2006 devant le jury composé de :

David Gesbert	Président
Jean-Francois Héliard	Rapporteurs
Emanuelle Viterbo	
Emilio Calvanese Strinati	Examineurs
Ghaya Rekaya - Ben Othman	
Jean-Claude Belfiore	Directeur de thèse



# Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Jean-Claude Belfiore pour avoir dirigé cette thèse, pour ses nombreux conseils et son soutien constant.

Cette thèse n'aurait vu le jour sans le soutien et le financement de la société COMSIS. Toute ma gratitude va à son président Monsieur Leclair qui en est à l'origine.

Je remercie Monsieur David Gesbert pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse. Je remercie sincèrement Messieurs Jean-François Héliard et Emmanuelle Viterbo d'avoir accepté d'être rapporteurs et pour le temps qu'ils y ont consacré. Merci à Ghaya Rekaya pour sa présence au sein du jury.

Je souhaite remercier tout spécialement Emilio Calvanese Strinati, également membre du jury, pour ses encouragements et ses conseils. Je remercie également Artur Hecker de m'avoir aidé à préparer la soutenance.

Je remercie toute l'équipe de COMSIS avec qui j'ai passé ces années de travail remplies de bons moments : les thésards David et Alexandre ainsi qu'Étienne, Olivier et Roxana.

Je remercie aussi mes amis thésard et anciens thésards du département COMELEC de l'ENST.



# Table des matières

<b>Acronymes</b>	<b>ix</b>
<b>Notations</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Codage Cohérent</b>	<b>5</b>
<b>1 Codes Espace-Temps cohérents</b>	<b>7</b>
1.1 Schéma de transmission . . . . .	7
1.1.1 Modélisation du canal de transmission . . . . .	8
1.1.2 Les diversités non codées . . . . .	10
1.2 Résultats connus sur les codes ST . . . . .	12
1.2.1 Capacité et diversité . . . . .	12
1.2.1.1 Capacité ergodique . . . . .	13
1.2.1.2 Capacité de coupure . . . . .	14
1.2.2 Probabilités d'erreur . . . . .	15
1.3 Critères de performance des codes ST . . . . .	18
1.4 Les différents codes ST cohérents . . . . .	19
1.4.1 Codes ST en treillis . . . . .	21
1.4.2 Les codes ST en couches . . . . .	22
1.4.2.1 D-BLAST . . . . .	22
1.4.2.2 V-BLAST . . . . .	22
1.4.2.3 Codes ST <i>Wrapped</i> . . . . .	23
1.4.3 Codes ST en blocs . . . . .	23
1.5 Codes ST orthogonaux . . . . .	24
1.5.1 Le code d'Alamouti . . . . .	24
1.5.2 Codes orthogonaux de grande dimension . . . . .	25
1.6 Codes à dispersion linéaire . . . . .	25
1.7 Codes algébriques . . . . .	26
1.7.1 Quelques notions d'algèbre . . . . .	26

1.7.2	Codes algébriques diagonaux DAST . . . . .	27
1.8	Premier code algébrique optimal . . . . .	28
1.8.1	Codes TAST . . . . .	29
1.8.2	Codes algébriques à rotations réelles . . . . .	30
1.8.3	Golden Code . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Décodage des codes Espace-Temps cohérents</b>	<b>35</b>
2.1	Modélisation du codage ST par les réseaux de points . . . . .	35
2.1.1	Cas d'une transmission non-codée . . . . .	36
2.1.2	Cas d'une transmission codée . . . . .	37
2.2	Décodage au maximum de vraisemblance . . . . .	39
2.3	Décodages par arbre de recherche . . . . .	39
2.3.1	Formation de l'arbre . . . . .	40
2.3.2	Algorithmes de recherche du point le plus proche . . . . .	41
2.3.3	Algorithme générique de recherche par arbre . . . . .	41
2.3.4	Décodeur par sphère . . . . .	42
2.3.5	Décodeur de Schnorr-Euchner . . . . .	45
2.3.6	Algorithmes séquentiels . . . . .	47
2.4	Prétraitements . . . . .	48
2.4.1	Réduction d'un réseau de points . . . . .	49
2.4.1.1	Orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .	50
2.4.1.2	Réduction de Minkowski . . . . .	51
2.4.1.3	Réduction KZ . . . . .	52
2.4.1.4	Réduction LLL . . . . .	52
2.4.1.5	Réduction algébrique . . . . .	52
2.4.2	Mise en forme MMSE-GDFE . . . . .	52
2.5	Décodeur itératif . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Prototype WiFi de COMSIS</b>	<b>65</b>
3.1	La norme IEEE 802.11a . . . . .	66
3.1.1	La modulation OFDM . . . . .	66
3.1.2	Principales caractéristiques techniques du <i>802.11a</i> . . . . .	67
3.1.2.1	Bande de fréquence . . . . .	67
3.1.2.2	Modulation et codage des données . . . . .	68
3.1.2.3	Débit binaire . . . . .	68
3.1.2.4	Synchronisations et estimation de canal . . . . .	69
3.1.3	Aperçu d'une chaîne de transmission <i>802.11a</i> . . . . .	69
3.1.3.1	Structure de l'émetteur <i>802.11a</i> . . . . .	69
3.1.3.2	Structure du récepteur <i>802.11a</i> . . . . .	70
3.1.4	Conclusion sur la norme <i>802.11a</i> . . . . .	72
3.2	Solution MIMO pour la norme 802.11a . . . . .	72

3.2.1	Codage Spatio-Temporel . . . . .	72
3.2.2	Aperçu de la chaîne de transmission multi-antennaire . . . . .	73
3.2.2.1	Structure de l'émetteur MIMO . . . . .	73
3.2.2.2	Structure du récepteur MIMO . . . . .	74
3.2.3	Le décodeur Spatio-Temporel . . . . .	75
3.2.4	Conclusion . . . . .	76
3.3	Performances et algorithmes du codage Espace-Temps . . . . .	76
3.3.1	Les algorithmes d'estimation et de synchronisation . . . . .	76
3.3.1.1	La synchronisation temporelle . . . . .	76
3.3.1.2	Synchronisation fréquentielle . . . . .	78
3.3.1.3	Estimation des canaux . . . . .	79
3.3.2	Modélisation des canaux . . . . .	80
3.3.2.1	Description des canaux multi-trajets . . . . .	80
3.3.2.2	Modélisation de l'offset fréquentiel . . . . .	82
3.3.3	Performances de la solution MIMO $2 \times 2$ . . . . .	82
3.3.3.1	Performances sur les bits codés . . . . .	83
3.3.3.2	Performances sur les bits d'information . . . . .	83
3.3.4	Conclusion . . . . .	85
3.4	Le démonstrateur et les évolutions futures . . . . .	86
3.4.1	Le démonstrateur . . . . .	86
3.4.2	Évolutions futures . . . . .	88

**II Codage Non Cohérent 91**

**4 Codage Spatio-Temporel non cohérent 93**

4.1	Approche géométrique . . . . .	94
4.1.1	La variété de Stiefel . . . . .	94
4.1.2	La variété de Grassmann . . . . .	94
4.1.3	Changement de coordonnées . . . . .	95
4.1.4	Notions sur les sous-espaces vectoriels . . . . .	95
4.2	Étude de capacité . . . . .	97
4.2.1	Résultats généraux . . . . .	97
4.2.2	Comportement asymptotique à fort SNR . . . . .	97
4.2.2.1	Structure de signal optimale . . . . .	98
4.2.2.2	Expression de la capacité asymptotique . . . . .	98
4.2.3	Comportement asymptotique à faible SNR . . . . .	99
4.3	Le décodage en non cohérent . . . . .	99
4.3.1	Décodage au maximum de vraisemblance . . . . .	99
4.3.2	Le GLRT . . . . .	100
4.3.2.1	Le GLRT dans le cas SISO . . . . .	100

4.3.2.2	Le GLRT dans le cas MIMO . . . . .	101
4.4	Calcul de la probabilité d'erreur . . . . .	102
4.4.1	Codage Spatio-Temporel unitaire . . . . .	102
4.4.2	Expression asymptotique . . . . .	102
4.5	Diversité en non cohérent . . . . .	103
4.5.1	Notion de diversité issue de la probabilité d'erreur par paire . . . . .	103
4.5.2	Notion de diversité issue de la probabilité d'erreur sur les mots de code ST . . . . .	104
4.5.3	Diversité algébrique . . . . .	104
4.6	Construction de Codes Spatio-Temporels non cohérents . . . . .	105
4.6.1	Codes différentiels . . . . .	105
4.6.1.1	Introduction . . . . .	105
4.6.1.2	Codes DPSK généralisés . . . . .	105
4.6.1.3	Construction différentielle issue du code d'Alamouti . . . . .	106
4.6.1.4	Codes différentiels basés sur la transformée de Cayley . . . . .	108
4.6.1.5	Conclusion . . . . .	112
4.6.2	Codes purement non cohérents . . . . .	112
4.6.2.1	Code construit par minimisation de distance . . . . .	113
4.6.2.2	Code construit par paramétrisation . . . . .	116
4.6.3	Codes non cohérents à entraînement . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Codages Spatio-Temporels non cohérents pour les modulations FSK et pour la norme Bluetooth</b>	<b>121</b>
5.1	Modulation FSK Spatio-Temporelle . . . . .	122
5.1.1	Rappel sur la modulation FSK . . . . .	122
5.1.2	Modélisation du système . . . . .	123
5.1.3	Construction du code sur la variété de Grassmann . . . . .	124
5.1.4	Modulation FSK Spatio-Temporelle à 2 antennes d'émission et 2 antennes de réception	126
5.1.5	Application au système Bluetooth . . . . .	128
5.1.5.1	La norme Bluetooth . . . . .	128
5.1.5.2	Modulation CPFSK Spatio-Temporelle . . . . .	130
5.1.6	Conclusion . . . . .	131
5.2	Extension de Bluetooth . . . . .	132
5.2.1	La norme Bluetooth EDR . . . . .	132
5.2.2	Solutions Spatio-Temporelles pour l'EDR . . . . .	132
	<b>Conclusion</b>	<b>139</b>

# Table des figures

1.1	Compromis gain de multiplexage/diversité pour $M = N = 2$ . . . . .	20
1.2	Les différents codes Espace-Temps . . . . .	20
1.3	Code en treillis à 4 . . . . .	21
2.1	Régions de Voronoï d'un réseau de points et intérêt de la réduction . . . . .	51
2.2	Perte de la forme de la constellation après réduction . . . . .	53
2.3	Décodeur itératif . . . . .	56
2.4	Performances d'un système $4 \times 4$ en BPSK . . . . .	60
2.5	Performances d'un système $4 \times 4$ en QPSK . . . . .	61
2.6	Performances d'un système $6 \times 6$ en BPSK . . . . .	62
3.1	Principe d'orthogonalité fréquentielle à l'intérieur d'un symbole OFDM . . . . .	66
3.2	Modulateur OFDM sans préfixe cyclique . . . . .	67
3.3	Symbole OFDM avec préfixe cyclique . . . . .	67
3.4	Modulateur OFDM avec préfixe cyclique . . . . .	68
3.5	Schéma d'un émetteur <i>802.11a</i> . . . . .	69
3.6	Schéma d'un récepteur <i>802.11a</i> . . . . .	70
3.7	Schéma de l'émetteur MIMO . . . . .	73
3.8	Schéma du récepteur MIMO . . . . .	74
3.9	Comparaison du préambule long du <i>802.11a</i> (en haut) et celui du système bi-antennaire (en bas) . . . . .	78
3.10	Étalement des retards des canaux expérimentaux . . . . .	82
3.11	Performances du <i>802.11a</i> et du Multidiverse sur les bits non codés . . . . .	83
3.12	Performances du <i>802.11a</i> et du MIMO à 24 Mbps après décodage souple . . . . .	84
3.13	Performances du <i>802.11a</i> et de différents codage MIMO à 24 Mbps après décodage souple . . . . .	85
3.14	Débit du <i>802.11a</i> et du MIMO au niveau de la couche MAC . . . . .	86
3.15	Carte FPGA contenant la couche physique d'un transmetteur . . . . .	87
3.16	Démonstration de transmission vidéo en liaison directe à l'ENST Bretagne . . . . .	88
4.1	Comparaison des performances de codes différentiels pour $M = N = 2$ et $R = 2$ bits pcu . . . . .	108

---

4.2	Performances de codes différentiels utilisant la transformée de Cayley pour $M = N = 2$ et $R = 6$ bits pcu . . . . .	112
4.3	Performances du Code de McCloud pour deux antennes d'émission et deux antennes de réception . . . . .	116
5.1	Récepteur MIMO FSK à 2 antennes . . . . .	126
5.2	Taux d'erreur binaire des solutions BFSK en SISO et en MIMO . . . . .	127
5.3	Taux d'erreur par mot de code ST des solutions BFSK en SISO et en MIMO . . . . .	128
5.4	Occupations spectrales des solutions BFSK en SISO et en MIMO . . . . .	129
5.5	Réponse impulsionnelle du Filtre Gaussien pour plusieurs valeurs de $K_{BT}$ . . . . .	130
5.6	Occupations spectrales des solutions GFSK en MIMO et Bluetooth (GFSK - SISO) . . . . .	131
5.7	Performances du GFSK en MIMO et de Bluetooth (SISO-GFSK) . . . . .	135
5.8	Constellation et transitions de la modulation $\pi/4$ -DQPSK . . . . .	135
5.9	Constellation et transitions de la modulation 8-DPSK . . . . .	136
5.10	Performances de la modulation $\pi/4$ -DQPSK et du code TAST différentiel . . . . .	136
5.11	Performances de la modulation 8-DPSK et du code TAST différentiel . . . . .	137

# Liste des tableaux

3.1	Débit en fonction de la constellation et du code convolutif utilisé de la norme <i>802.11a</i> . . .	68
3.2	Profil de puissance des canaux expérimentaux . . . . .	81



# Acronymes

<b>AWGN</b>	<i>Additive White Gaussian Noise</i>	Bruit additif blanc gaussien
<b>BFSK</b>	<i>Binary Frequency Shift Keying</i>	Modulation de fréquence binaire
<b>BLAST</b>	<i>Bell Labs Layered Space-Time</i>	Code espace temps en couche des Bell Labs
<b>BPSK</b>	<i>Binary Phase Shift Keying</i>	Modulation de phase binaire
<b>CAN</b>	<i>Digital to analogic converter</i>	Convertisseur Analogique Numérique
<b>CNA</b>	<i>Analogic to digital converter</i>	Convertisseur Numérique Analogique
<b>CPFSK</b>	<i>Continuous Phase Frequency Shift. Keying</i>	Modulation de fréquence à phase
<b>DAST</b>	<i>Diagonal Algebraic Space-Time code</i>	Code espace-temps algébrique diagonal
<b>DFE</b>	<i>Decision Feedback Equalizer</i>	Égaliseur à retour de décision
<b>DFT</b>	<i>Discrete Fourier Transform</i>	Transformée de Fourier Discrète
<b>EDR</b>	<i>Enhanced Data Rate</i>	Norme améliorant le débit de Bluetooth
<b>FFH</b>	<i>Fast-Frequency Hopping</i>	Saut de fréquence rapide
<b>FFT</b>	<i>Fast Fourier Transform</i>	Transformée de Fourier rapide
<b>FHSS</b>	<i>Frequency Hopping Spread Spectrum</i>	Étalement de spectre par saut de fréquence
<b>FPGA</b>	<i>Field Programmable Gate Array</i>	Circuit intégré programmable
<b>FSK</b>	<i>Frequency Shift Keying</i>	Modulation de fréquence
<b>GDFE</b>	<i>Generalized Decision Feedback Equalizer</i>	Égaliseur à retour de décision généralisé
<b>GFSK</b>	<i>Gaussian Frequency Shift Keying</i>	Modulation de fréquence à filtrage gaussien
<b>GLRT</b>	<i>Generalised Likelihood Ratio Test</i>	Test du rapport de vraisemblance généralisé
<b>ICI</b>	<i>Inter-Carrier Interference</i>	Interférence entre porteuses
<b>IFFT</b>	<i>Inverse Fast Fourier Transform</i>	Transformée de Fourier rapide inverse
<b>iid</b>	<i>independent and identically-distributed</i>	indépendants et identiquement distribués
<b>ISI</b>	<i>Intersymbol Interference</i>	Interférence entre symboles
<b>LD</b>	<i>Linear Dispersion code</i>	Code à dispersion linéaire
<b>LMMSE</b>	<i>Linear Minimum Mean Square Error</i>	Égaliseur linéaire minimisant l'erreur quadratique moyenne

<b>LST</b>	<i>Layered Space-Time code</i>	Code espace temps en couche
<b>MAC</b>	<i>Medium Access Control</i>	Sous-couche gérant l'accès au support physique
<b>MIMO</b>	<i>Multi Input Multi Output</i>	Entrées multiples sorties multiple
<b>ML</b>	<i>Maximum likelihood</i>	Maximum de vraisemblanc
<b>MMSE</b>	<i>Minimum Mean Square Error</i>	Erreur quadratique moyenne minimale
<b>OFDM</b>	<i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i>	Multiplexage par répartition en fréquences orthogonales
<b>PAM</b>	<i>Pulse Amplitude Modulation</i>	Modulation d'amplitude pulsée
<b>PEP</b>	<i>Pairwise Error Probability</i>	Probabilité d'erreur par paire
<b>PSK</b>	<i>Phase Shift Keying</i>	Modulation de phase
<b>puc</b>	<i>per channel use</i>	par utilisation canal
<b>QAM</b>	<i>Quadratique Amplitude Modulation</i>	Modulation d'amplitude en quadrature de phase
<b>SD</b>	<i>Sphere Decoder</i>	Décodeur par sphères
<b>SE</b>	<i>Schnorr-Euchner</i>	Schnorr-Euchner
<b>SIC</b>	<i>Successive Interference Cancellation</i>	Suppression successive d'interférence
<b>SISO</b>	<i>Single Input Single Output</i>	Entrée unique sortie unique
<b>SNR</b>	<i>Signal to Noise Ratio</i>	Rapport Signal à Bruit
<b>ST</b>	<i>Space-Time</i>	Espace-temps
<b>SVD</b>	<i>Singular Value Decomposition</i>	Décomposition en valeurs singulières
<b>TAST</b>	<i>Threaded Algebraic Space-Time code</i>	Code espace-temps algébrique en couches
<b>UWB</b>	<i>Ultra Wide Band</i>	Ultra large bande
<b>VHDL</b>	<i>Very High Speed Integrated Circuit Hardware Description Language</i>	Langage de description matérielle
<b>WiFi</b>	<i>Wireless Fidelity</i>	Fidélité sans fil
<b>WLAN</b>	<i>Wireless Local Area Network</i>	Réseau local sans fil
<b>WPAN</b>	<i>Wireless Personal Area Network</i>	Réseau personnel sans fil
<b>ZF</b>	<i>Zero-Forcing</i>	Forçage à zéro

# Notations

$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$S_{T,M}$	Variété de Stiefel
$G_{T,M}$	Variété de Grassmann
$\mathbf{M}_{l \times c}$	Matrice à $l$ lignes et $c$ colonnes
$\mathbf{v}_l$	Vecteur colonne de dimension $l$
$\mathbf{I}_n$	Matrice identité de dimension $n$
$\text{Diag}(\mathbf{v})$	Matrice diagonale et dont le vecteur $\mathbf{v}$ constitue la diagonale
$\text{diag}(\mathbf{M})$	Vecteur constitué des éléments diagonaux de la matrice $\mathbf{M}$
$(\cdot)^T$	Transposition
$(\cdot)^*$	Conjugaison
$(\cdot)^\dagger$	Trans-conjugaison
$(\cdot)^{-1}$	Inversion
$\otimes$	Produit de Kronecker
$\Re(\cdot)$	Partie réelle
$\Im(\cdot)$	Partie imaginaire
$\ \mathbf{v}\ $	Norme euclidienne du vecteur $\mathbf{v}$
$\ \mathbf{M}\ _F$	Norme de Frobenius de la matrice $\mathbf{M}$
$\text{span}(\mathbf{M})$	Espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice $\mathbf{M}$



# Introduction

Cette thèse s'inscrit dans un contexte global de multiplication des appareils électroniques intégrant des systèmes de transmission non filaires. Les solutions techniques de réseaux sans fils rencontrent des succès tant industriels que commerciaux et sont encore appelées à évoluer rapidement. La demande pour une augmentation des débits est très forte, alors même que les cellules se densifient avec l'augmentation du nombre d'utilisateurs et de leurs équipements, et que les ressources spectrales disponibles sont limitées. Tout est mis en œuvre pour obtenir la qualité des liaisons filaires, en termes de débit et de fiabilité... mais sans les fils.

Des solutions de transmission radio multi-antennaires commencent à apparaître et présentent de très significatives améliorations de performance. Les perspectives les plus intéressantes pour l'exploitation des systèmes à plusieurs antennes sont offertes par les codages Spatio-Temporels (ST). Les principaux critères de performance d'un code ST sont : son rendement, son ordre de diversité et son gain de codage. Un code ST de rendement maximal permet de multiplier le débit de transmission par le nombre d'antennes employé à chaque transmetteur. Plus l'ordre de diversité d'un code ST est important et moins il y a, à fort rapport signal à bruit, d'erreur de décodage. Enfin, le gain de codage permet de diminuer la puissance du signal en conservant les mêmes performances.

Ce travail de thèse a été effectué dans le cadre d'une convention industrielle entre l'ENST et la société COMSIS<sup>1</sup>. L'objectif de COMSIS, en 2002, était de proposer une solution multi-antennaire pour les réseaux locaux sans fils intégrant un codage Espace-Temps. Ce projet précurseur passait par la réalisation d'un démonstrateur MIMO dérivé de la norme Wifi 802.11a de l'IEEE. Cette norme basée sur une modulation OFDM à 5 GHz avait du mal à s'imposer face à la 802.11b, plus simple à réaliser. Le codage ST devait permettre de diminuer les taux d'erreur pour éviter les ré-émissions des trames et les pertes de liaison. La qualité de service devait être suffisante pour supporter des applications vidéo. De plus, il fallait pouvoir transmettre à plus bas rapport signal à bruit afin de baisser la consommation et de diminuer les interférences entre cellules. Ce démonstrateur fonctionne actuellement et continue d'être amélioré.

Le savoir-faire acquis a été mis à profit dans le développement MIMO d'autres systèmes de réseaux sans fils tels que Bluetooth.

---

<sup>1</sup>COMSIS  
3, rue Broussais  
75014 Paris

Le décodage ST est un point sensible dans la mise en pratique des techniques Spatio-Temporelles. Si le codeur ST est très simple, il n'en va pas de même du décodeur qui occupe une surface de silicium non négligeable pour un transmetteur Wifi. Des techniques de décodage ont été retenues en fonction du nombre d'antennes et des constellations utilisées afin de satisfaire au mieux à un compromis entre les performances et la complexité.

Cette thèse s'articule en deux parties. Les trois premiers chapitres forment la première partie. Ils traitent du cas des transmissions cohérentes où les caractéristiques du canal sont supposées inconnues au niveau de l'émetteur mais parfaitement connues au niveau du récepteur. Cette première partie correspond donc au scénario Wifi et aboutit à la présentation du premier prototype de COMSIS.

Les chapitres quatre et cinq forment la seconde partie et traitent du cas non-cohérent, lorsque le canal de transmission est inconnu, aussi bien à l'émetteur qu'au récepteur. Cette partie aboutit à la mise en pratique du codage ST pour la norme Bluetooth.

Le **premier chapitre** présente un état de l'art sur les ST construits dans l'optique d'un décodage cohérent. Les calculs de la théorie de l'information sur la capacité d'un canal MIMO et sur les probabilités d'erreur des codes ST permettent de dégager des critères pour construire et comparer les différents codes. Nous nous intéressons plus particulièrement à une catégorie de codes en blocs linéaires : les codes algébriques.

Le décodage des codes Spatio-Temporels dans le cas cohérent est traité dans le **deuxième chapitre**. Un code ST est délicat à construire mais son intégration dans un système est simple. Le décodeur ST, par contre, est très lourd à implémenter et il est primordial de le choisir avec soin.

Les systèmes MIMO peuvent être représentés par des réseaux de points et le décodage ST peut ainsi se faire par la recherche d'un point le plus proche dans un réseau de points. Cela passe par la construction d'un arbre de recherche. Le choix des algorithmes permet de choisir soit un algorithme optimal, c'est à dire équivalent au décodeur au sens du maximum de vraisemblance, soit un algorithme sous-optimal.

Nous présentons, en fin de chapitre, un décodeur sous-optimal minimisant le bruit et les interférences de manière itérative.

Le **troisième chapitre** est consacré au prototype développé par COMSIS. Dans un premier temps, nous présentons le principe de la modulation OFDM ainsi que la norme pour les réseaux sans fils 802.11a de l'IEEE. Puis nous précisons le codeur et le décodeur ST utilisés dans cette première version du démonstrateur. Enfin nous évoquons les évolutions futures qui sont actuellement à l'étude afin de constituer une offre commerciale.

Les schémas de codage non cohérents font l'objet du **quatrième chapitre**. Nous présentons une approche géométrique du problème ainsi que des calculs de capacité et de probabilité d'erreur.

Après la présentation des décodeurs ST non-cohérents, nous faisons un état de l'art sur la construction des codes ST non-cohérents, en commençant par les codes différentiels, en poursuivant par les codes

purement non cohérents et en finissant par les codes à entraînement.

Le **cinquième chapitre** propose une nouvelle famille de codes ST construite pour les modulations numériques de fréquence. Ce système de transmission non cohérent utilise des signaux de puissance constante où l'information est uniquement portée par leurs fréquences. Cette solution a l'avantage de pouvoir être produite industriellement à très bas coût, dans l'esprit des transmetteurs Bluetooth. L'adaptation du codage ST à la norme Bluetooth est ensuite présentée dans le cas d'un système bi-antennaire. Les performances d'un codage ST différentiel ont également été étudiées, afin de suivre l'évolution de la norme Bluetooth.



Première partie

Codage Cohérent



# Chapitre 1

## Codes Espace-Temps cohérents

### Introduction

Ce premier chapitre traite des systèmes de transmission multi-antennaire et plus particulièrement des schémas de codage Espace-Temps dans le cas cohérent, où les coefficients du canal de transmission sont supposés connus au niveau du récepteur. Nous verrons une synthèse sur l'état de l'art du codage ST, avant de nous intéresser, dans les chapitres suivants, au décodage et à la mise en œuvre pré-industrielle.

Après un exposé de la problématique, l'étude de la capacité des canaux MIMO<sup>1</sup> mettra en évidence l'intérêt des schémas multi-antennaires. Le calcul analytique de la probabilité d'erreur nous permettra ensuite de faire ressortir les principaux critères de construction des codes ST.

Puis nous présenterons les premiers codes Spatio-Temporels et les différentes classes de codes construits, jusqu'aux codes en blocs et codes algébriques qui seront utilisés dans la suite.

### 1.1 Schéma de transmission

Le codage Spatio-Temporel s'inscrit dans un cadre plus général que sont les systèmes de transmission multi-antennaires. Un système MIMO emploie  $M$  antennes au niveau de l'émetteur et  $N$  antennes au niveau du récepteur. Le coefficient multiplicatif représentant le canal entre l'antenne d'émission  $i$  et l'antenne de réception  $j$  est noté  $h_{ij}$ . Au niveau de l'émetteur, les bits d'information à transmettre sont modulés avant d'entrer dans le codeur ST. Par la suite, nous utiliserons des modulations d'amplitude en quadrature (QAM<sup>2</sup>) ou des modulations de phase (PSK<sup>3</sup>). Le codeur ST agit ensuite comme un multiplexeur sur les symboles d'information avant de les transmettre sur le canal. Le récepteur réalise les opérations inverses, avec, tout d'abord, un décodeur ST qui reforme les symboles d'information, puis un

---

<sup>1</sup> *Multi Input Multi Output*

<sup>2</sup> *Quadrature Amplitude Modulation*

<sup>3</sup> *Phase Shift Keying*

démodulateur qui régénère les bits d'information.

De fait, le codeur Espace-Temps forme, à partir de symboles d'information, un mot de code Spatio-Temporel  $\mathbf{X}$  de dimension  $M \times T$ , où  $T$  est la *longueur temporelle* du code. Dans un code ST linéaire, chaque élément  $x_{it}$  de la matrice  $\mathbf{X}$  est une combinaison linéaire des symboles d'information. Le rendement du code est défini comme le nombre de symboles d'information transmis par utilisation canal (p.u.c.), soit le nombre de symboles par mot de code divisé par  $T$ .

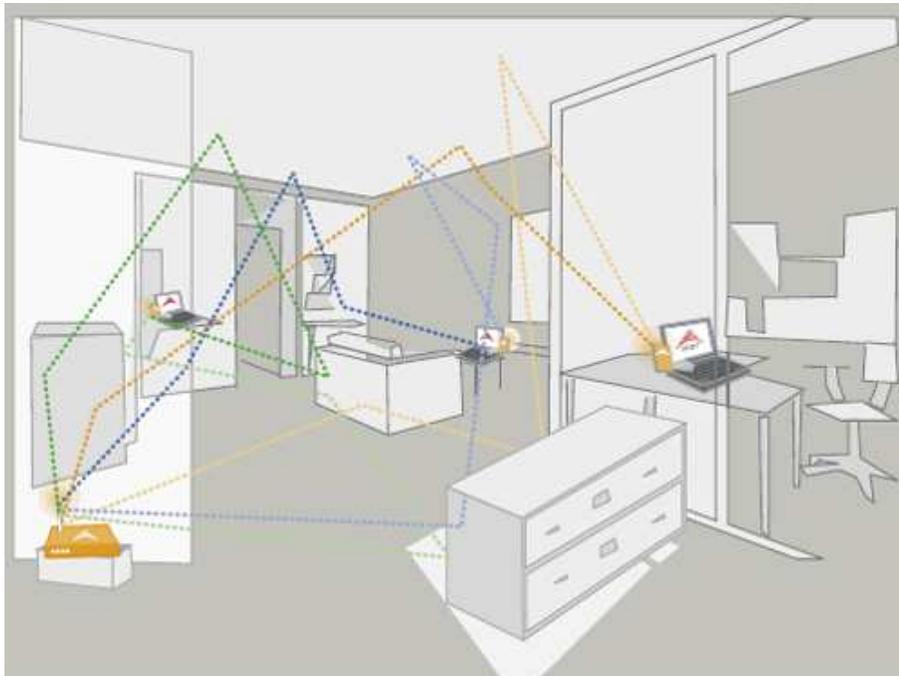
Dans le cas extrême où  $T = 1$ , les mots de codes ne sont alors que des vecteurs colonnes et la transmission est dite non-codée.

A la réception, le signal reçu par chaque antenne est modélisé par la somme des signaux émis par les antennes d'émission affectés d'un coefficient de canal, et par un bruit additif. Sur l'ensemble du récepteur, nous reformons le mot de code

$$\mathbf{Y}_{N \times T} = \mathbf{H}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times T} + \mathbf{W}_{N \times T} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{H}$  est la matrice de transfert du canal de transmission et  $\mathbf{W}$  est le bruit additif blanc gaussien (AWGN<sup>4</sup>). Les indices correspondent aux dimensions des matrices.

### 1.1.1 Modélisation du canal de transmission



<sup>4</sup> Additive White Gaussian Noise

Nous nous intéressons, ici, aux systèmes de transmission radio-mobiles. Que nous soyons en milieu fermé (INDOOR) ou à l'extérieur (OUTDOOR), les ondes électromagnétiques suivent plusieurs trajets entre chaque antenne de l'émetteur et chaque antenne du récepteur. Il peut y avoir un trajet direct si l'émetteur et le récepteur sont en vision direct (LOS<sup>5</sup>), et des trajets indirects dus aux réflexions et diffractions sur des objets environnants. Les trajets indirects sont déphasés et arrivent avec des retards étalés dans le temps en fonction de la distance parcourue et tous les trajets interfèrent entre eux. Les multi-trajets peuvent donc créer des problèmes d'interférences entre symboles qui seront vus dans le chapitre 3.

Sur le plan fréquentiel les multi-trajets rendent le canal sélectif en fréquence avec des risques d'évanouissements à certaines fréquences. Les parties réelle et imaginaire de chaque coefficient du canal sont indépendantes et suivent des lois gaussiennes ( $\mathcal{N}$ ). Les coefficients suivent donc des lois gaussiennes complexes ( $\mathcal{CN}$ ). Si les antennes d'émission sont suffisamment espacées entre elles, et que c'est également le cas des antennes de réception, les coefficients du canal peuvent être considérés comme indépendants entre eux.

S'il n'y a pas de trajet direct (NLOS<sup>6</sup>), les lois gaussiennes sont alors à moyennes nulles. Dans ce cas, l'enveloppe de chaque coefficient du canal suit une loi de Rayleigh et la phase suit une loi uniforme. Un tel canal est appelé canal de Rayleigh.

En présence d'un trajet direct (LOS), la moyenne des évanouissements n'est pas nulle, le module de chaque coefficient du canal suit une loi de Rice et le canal est dit de Rice.

Dans les chapitres 1 et 2, nous ne travaillerons que sur des canaux de Rayleigh. Nous prendrons des coefficients de canal i.i.d.<sup>7</sup> avec des parties réelles et imaginaires dans  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ . Les enveloppes des coefficients suivent donc des lois  $\mathcal{CN}(0, 1)$ .

Nous normaliserons l'énergie moyenne des mots de code à  $T$ . Ainsi, quelque soit le nombre d'antennes utilisées ou la longueur temporelle du code ST, la puissance d'émission sera toujours unitaire, comme dans le cas mono-antennaire. Les antennes de réception captent, en plus du signal émis, du bruit dû aux autres utilisateurs et à d'autres systèmes radio auquel s'ajoute le bruit dû aux chaînes radio-fréquences. L'ensemble de ces bruits est modélisé par un bruit AWGN, i.i.d. sur chaque antenne, de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Le calcul du rapport signal à bruit (SNR) dépendra uniquement de la variance du bruit  $\text{SNR} = \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{N_0}$ . La comparaison des performances des codes se fera préférentiellement en  $\frac{E_b}{N_0}$ , où  $E_b$  est l'énergie par bit d'information transmis.

Si maintenant l'émetteur, le récepteur ou les objets se déplacent, alors il s'ajoute un effet dynamique : le canal varie au cours du temps. Le *temps de cohérence*  $T_c$  est défini comme le temps pendant lequel la

---

<sup>5</sup> *Line Of Sight*

<sup>6</sup> *Non Line Of Sight*

<sup>7</sup> indépendants et identiquement distribués

variation du canal est négligeable. L'étude des canaux MIMO utilisent trois modèles classiques de canaux de Rayleigh .

**Le canal ergodique** <sup>8</sup> : à chaque temps symbole, il faut considérer une nouvelle réalisation du canal indépendante de la précédente.

**Le canal quasi-statique** <sup>9</sup> : le canal reste constant durant la transmission d'une trame ou d'un mot de code ST.

**Le canal à évanouissement par blocs** <sup>10</sup> : le canal reste constant durant la transmission de plusieurs trames ou de plusieurs mots de code ST.

La mobilité engendre aussi un décalage des fréquences par effet Doppler, qui sera vu dans la chapitre 3. Le canal de transmission utilisé dans les chapitres 1 et 2 sera un canal de Rayleigh quasi-statique, sauf pour certains calculs de capacité. En outre, la détection sera cohérente et le canal sera supposé parfaitement connu au niveau du récepteur.

### 1.1.2 Les diversités non codées

Si nous considérons un système de transmission SISO sur canal de Rayleigh

$$y = h \cdot x + w ,$$

il est clair que, même si la variance du coefficient du canal vaut 1, certaines réalisations du canal présenteront de forts évanouissements qui feront chuter le SNR au niveau du récepteur et ne permettront pas de décoder l'information transmise. L'idée sous-jacente des techniques de diversité est de permettre au récepteur de récupérer  $n$  fois le signal transmis et qu'à chacune de ces transmissions, la réalisation du canal soit différente. Une technique de diversité consiste donc à envoyer sur plusieurs voies indépendantes le même signal de façon à moyenner les évanouissements. L'ordre de diversité correspond au nombre de voies indépendantes par lesquelles transite chaque signal.

Ainsi les risques d'avoir un très mauvais canal diminuent, mais parallèlement les chances d'avoir un très bon canal baissent de même. Néanmoins, dans le cadre des communications numériques, la plage de rapport signal à bruit utilisée correspond, dans la pratique, à de faibles taux d'erreur où seuls les très mauvais canaux engendrent des estimations fausses. Nous voyons donc clairement l'intérêt apporté par la diversité pour améliorer les performances des transmissions.

Il existe deux groupes de diversités non codées. Tout d'abord, les techniques de diversité relativement intuitives où chaque signal est émis  $n$  fois pour atteindre une diversité d'ordre  $n$  :

**La diversité temporelle** : elle correspond au code à répétition  $(n, 1, n)$ , où chaque signal est transmis  $n$  fois, chaque envoi étant séparé du suivant par un intervalle au minimum égal au temps de

---

<sup>8</sup> *Fast-Fading Channel*

<sup>9</sup> *Quasi-Static Fading Channel*

<sup>10</sup> *Block-Fading Channel*

cohérence du canal  $T_c$ , afin d'assurer l'indépendance des coefficients de canal. Cette technique est utilisable sur un canal sélectif en temps et lorsque  $T_c$  est assez court, comme dans le cas du canal ergodique.

**La diversité fréquentielle :** l'envoi des  $n$  signaux est simultané, mais est réalisé sur  $n$  fréquences différentes. Sur un canal sélectif en fréquence, les canaux sont indépendants si les fréquences sont séparées d'au moins la bande de cohérence du canal. La diversité fréquentielle peut notamment être utilisée dans les systèmes OFDM que nous verrons chapitre 3.

**La diversité d'espace en émission :** les  $n$  signaux sont émis par des antennes différentes séparées d'au moins la longueur de cohérence qui assure l'indépendance des canaux. La longueur de cohérence dépend de la fréquence, elle est d'environ dix fois la longueur d'onde ( $\lambda$ ) à 900 MHz (GSM), mais peut être réduite à  $\frac{\lambda}{2}$  dans la bande des 5 GHz.

Ces techniques de diversité sont coûteuses en terme d'efficacité spectrale car elles consomment  $n$  utilisations canal pour chaque signal à transmettre. L'association d'un entrelaceur et/ou d'un code correcteur d'erreur à ces techniques de diversité est plus efficace et évite de gaspiller les ressources spectrales.

L'autre groupe de techniques de diversité a, intrinsèquement, une meilleure efficacité spectrale :

**La diversité d'espace en réception :** le signal, émis par une ou plusieurs antennes, est traité par  $n$  antennes de réception différentes, séparées d'au moins la longueur de cohérence du canal.

**La diversité de trajet :** elle utilise, dans le domaine temporel, l'étalement des retards dû aux multi-trajets. S'il y a au moins  $n$  trajets différents, un récepteur Rake peut discriminer ces  $n$  trajets qui sont affectés de coefficients de canal différents.

L'association de différentes techniques de diversité permet d'augmenter l'ordre de diversité global. L'ordre de diversité total atteignable est le produit des ordres de diversité de chaque technique employée.

Cette étude porte sur la diversité Spatio-Temporelle. Le codage Espace-Temps associe la diversité d'espace en émission et la diversité d'espace en réception<sup>11</sup>, mais la diversité Spatio-Temporelle n'est pas une simple addition des deux. Le codage et l'entrelacement sont effectués de façon à obtenir une forte diversité en utilisant peu les ressources du canal.

---

<sup>11</sup>contrairement à ce que pourrait laisser croire son nom, le codage Espace-Temps ne bénéficie pas de la diversité temporelle, car le canal doit être quasi-statique

## 1.2 Résultats connus sur les codes ST

Nous présentons ici des résultats de la théorie de l'information, qui permettent de déterminer analytiquement les performances des codes Espace-Temps. L'étude de la capacité ainsi que celle de la probabilité d'erreur nous permettront, par la suite, de dégager les principaux critères pour construire de "bons" codes ST.

### 1.2.1 Capacité et diversité

Sur un système de télécommunication numérique, il est primordial de connaître la qualité d'une liaison, c'est à dire la quantité maximale d'information transmissible entre un émetteur et un récepteur.

L'information mutuelle entre deux variables aléatoires  $A$  et  $B$ , notée  $I(A; B)$ , est la quantité d'information qu'apporte la réalisation de l'un sur la réalisation de l'autre. Nous considérons ici des transmissions non-codées où  $T = 1$ . Dans le cas où le décodage est cohérent, la réalisation  $\mathcal{H}$  du canal  $\mathbf{H}$  est supposée inconnue de l'émetteur et parfaitement connue du récepteur. La sortie du canal est alors  $(\mathbf{Y}, \mathcal{H}) = (\mathcal{H}\mathbf{X} + \mathbf{W}, \mathcal{H})$ , et l'information mutuelle entre l'entrée et la sortie est

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}; (\mathbf{Y}, \mathcal{H})) &= I(\mathbf{X}; \mathcal{H}) + I(\mathbf{X}; \mathbf{Y} | \mathcal{H}) \\ &= I(\mathbf{X}; \mathbf{Y} | \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Dans notre schéma de transmission, le mot émis  $\mathbf{X}$  peut prendre des valeurs discrètes dans un code et le mot reçu  $\mathbf{Y}$  peut prendre des valeurs continues. L'information mutuelle s'écrit alors

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y} | \mathcal{H}) = \sum_{\mathcal{X} \in \text{Code}} \int_{\mathbb{C}^M} P(\mathcal{Y} | \mathcal{X}, \mathcal{H}) P(\mathcal{Y} | \mathcal{H}) \log_2 \frac{P(\mathcal{Y} | \mathcal{X}, \mathcal{H})}{P(\mathcal{Y} | \mathcal{H})} d\mathcal{Y}$$

où  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{H}$  sont les réalisations de  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{H}$ .

Soit une réalisation de canal  $\mathcal{H}$ . Si  $\mathbf{Y}$  est le signal reçu lorsque le signal  $\mathbf{X}$  est émis, la capacité instantanée du canal de transmission est le maximum de l'information mutuelle entre  $\mathbf{X}$  et  $(\mathbf{Y} | \mathcal{H})$  sur toutes les distributions possibles de  $\mathbf{X}$ , soit encore l'information mutuelle lorsque le signal émis est le meilleur signal possible

$$C_i \triangleq \max_{p(\mathcal{X})} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y} | \mathbf{H} = \mathcal{H}). \quad (1.2)$$

La capacité ne dépend plus du codage, mais uniquement des caractéristiques du canal utilisé. La capacité s'exprime en bits par utilisation de canal (bits p.u.c.). La capacité est aussi le débit maximal avec lequel il est possible de transmettre en garantissant un taux arbitrairement bas.

Dans la suite nous présentons les calculs de capacité dans le cas des canaux ergodiques. Le canal ergodique est un cas d'école et n'est pas très réaliste, néanmoins ce modèle simple permet de trouver une expression de la capacité en MIMO. Historiquement, c'est la capacité MIMO ergodique, étudiée par [Telatar, 1995] et [Foschini et Gans, 1998] qui a poussé la recherche sur les systèmes multi-antennaires.

### 1.2.1.1 Capacité ergodique

La capacité ergodique est l'espérance de la capacité instantanée (1.2) sur la variable aléatoire  $\mathbf{H}$ . Nous présentons dans un premier temps le cas bien connu du canal SISO avant d'étudier le cas multi-antennaire.

Sous la contrainte d'une puissance maximale d'émission  $P$ , la capacité ergodique d'un canal mono-antennaire s'écrit

$$C_{SISO} = E_H \left[ \max_{\substack{p(x) \\ E[|X|^2] \leq P}} I(X; Y|H) \right].$$

Si le canal est AWGN, la capacité s'écrit aussi

$$C_{SISO} = E_H [\log_2(1 + \rho|h|^2)]$$

où  $h$  est le coefficient complexe du canal à évanouissement et  $\rho = \frac{P}{\sigma^2}$  le rapport signal à bruit.  $h$  suit une loi de Rayleigh, donc  $|h|^2$  suit une loi du  $\chi^2$ .

Dans le cas MIMO, l'énergie d'un mot de code est  $E_{mot} = E[\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X}] = \text{Tr} E[\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger]$  et la contrainte de puissance devient  $E_{mot} \leq P$ .

La capacité ergodique du canal MIMO s'écrit alors

$$C = E_{\mathbf{H}} \left[ \max_{\substack{p(\mathcal{X}) \\ E_{mot} \leq P}} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}|\mathbf{H}) \right].$$

[Telatar, 1995] a montré qu'il était optimal de mettre la même puissance sur toutes les antennes d'émission ( $E[\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger] = \frac{P}{M}\mathbf{I}_M$ ) et que la capacité ergodique du canal MIMO AWGN s'écrivait alors

$$C = E_{\mathbf{H}} \left[ \log_2 \left( \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\rho}{M} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} \right) \right) \right] \quad (1.3)$$

où  $\rho = \frac{P}{\sigma^2}$  est le SNR moyen par antenne de réception.

Lorsque le nombre d'antennes d'émission tend vers l'infini, nous pouvons appliquer la loi des grands nombres. Nous trouvons alors que  $\frac{1}{M} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \mathbf{I}_N$ . Dans ce cas, la capacité s'écrit

$$\lim_{M \rightarrow \infty} C = N \cdot \log_2(1 + \rho)$$

Il apparaît donc un phénomène de saturation. Augmenter le nombre d'antenne d'émission sera alors inefficace.

Telatar a proposé de prendre la décomposition en valeurs singulières (SVD<sup>12</sup>) de la matrice de canal :

---

<sup>12</sup> *Singular Value Decomposition*

$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\dagger$  où  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale composée des valeurs singulières  $\lambda_i$  de  $\mathbf{H}$  et où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont des matrices unitaires. La capacité (1.3) peut alors se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} C &= E_{\mathbf{H}} \left[ \log_2 \left( \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\rho}{M} \mathbf{D}^2 \right) \right) \right] \\ &= E_{\mathbf{H}} \left[ \log_2 \left( \prod_{i=1}^{\min(M, N)} \left( 1 + \frac{\rho}{M} \lambda_i^2 \right) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\min(M, N)} E_{\mathbf{H}} \left[ \log_2 \left( 1 + \frac{\rho}{M} \lambda_i^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

La capacité ergodique de notre canal MIMO à  $M$  antennes d'émission et à  $N$  antennes de réception correspond donc à la capacité de  $K = \min(M, N)$  canaux mono-antennaires.  $K$  est appelé *nombre de degrés de liberté* ou *gain de multiplexage* du canal MIMO.

À fort rapport signal à bruit, la capacité ergodique du canal MIMO peut s'écrire

$$C = K \log_2(\rho) + O(1) \quad (1.4)$$

soit l'équivalent de  $K$  canaux SISO parallèles.

### 1.2.1.2 Capacité de coupure

L'hypothèse d'ergodicité du canal n'est généralement pas vérifiée dans la pratique pour les canaux radio-mobiles, où la durée de cohérence du canal est souvent grande devant la taille des blocs de données émis ([Biglieri et al, 1998]). Dans ce cas, la capacité de Shannon du canal est nulle. En effet, quel que soit le débit de communication visé, il y a une probabilité non nulle que la réalisation du canal ne puisse la supporter, et ce même avec un code de très longue taille.

Pour mesurer les performances des canaux à évanouissement par blocs, une nouvelle capacité est donc définie à partir de la probabilité de coupure<sup>13</sup> et en associant ainsi un taux de confiance à chaque capacité. La capacité est alors considérée comme une variable aléatoire dépendant de la réponse instantanée du canal, celle-ci restant constante durant la transmission d'un mot de code de longueur finie.

Pour une réalisation de canal, si la capacité instantanée est inférieure au rendement visé, le mot de code transmis ne pourra être décodé sans erreur, quel que soit le code utilisé. Inversement, si pour une réalisation de canal, la capacité instantanée est supérieure au rendement voulu, alors le théorème de Shannon indique qu'il existe un code permettant de transmettre à ce rendement avec une probabilité d'erreur aussi petite que l'on veut.

---

<sup>13</sup> *Outage Probability*

La probabilité de coupure se définit comme la probabilité que la capacité instantanée du système de transmission soit inférieur au débit (ou rendement)  $R$

$$P_{out}(R) = P\{C_i(\mathbf{H}) < R\}.$$

La capacité de coupure<sup>14</sup> se définit ensuite de façon naturelle :  $C_\varepsilon$ , la capacité de coupure à  $\varepsilon\%$ , est la capacité atteinte par les meilleures réalisations de canal, sans considérer les  $\varepsilon\%$  de réalisations de canal qui ont les plus mauvaises capacités instantanées.  $C_\varepsilon$  correspond donc au débit  $R$  maximal auquel on peut émettre en pouvant avoir  $(100 - \varepsilon)\%$  des transmissions sans erreur, soit encore le débit  $R$ , tel que  $P_{out}(R) = \varepsilon\%$ .

Les capacités de coupure sont difficiles à calculer, c'est pourquoi les expressions des capacités ergodiques sont souvent prises comme références, même lorsque les canaux considérés sont à évanouissement par blocs.

### 1.2.2 Probabilités d'erreur

Afin d'établir des critères de performances des codes Espace-Temps, [Tarokh et al, 1998] ont été amenés à évaluer les probabilités d'erreur par mot de code ST. Le système de transmission à  $M$  antennes d'émission et  $N$  antennes de réception suit toujours l'équation (1.1)

$$\mathbf{Y}_{N \times T} = \mathbf{H}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times T} + \mathbf{W}_{N \times T}$$

où les coefficients de canal  $h_{i,j}$  sont  $CN(0,1)$  et les coefficients du bruit additif  $w_{i,j}$  sont  $CN(0, \sigma^2)$ .

Les performances de la transmission dépendent évidemment du décodeur utilisé. Nous étudierons ici un récepteur employant le décodeur optimal : le décodeur à maximum de vraisemblance (ML<sup>15</sup>). Nous sommes dans le cas cohérent et  $\mathbf{H}$ , la matrice de canal, est supposée parfaitement connue du récepteur. Le décodeur ML cherche alors, de façon exhaustive, dans l'alphabet du code ST, le mot de code  $\hat{\mathbf{X}}$  qui minimise la distance quadratique avec le mot reçu

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \text{Code}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{X}\|^2. \quad (1.5)$$

La probabilité d'erreur par mot de code est alors

$$\begin{aligned} P_{e, \text{mot}} &= P\{\hat{\mathbf{X}} \neq \mathbf{X}\} \\ &= \sum_{\mathbf{X}' \in \text{Code}} P\{\mathbf{X}'\} \cdot P\{\hat{\mathbf{X}} \neq \mathbf{X} \mid \mathbf{X} = \mathbf{X}'\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

<sup>14</sup> *Outage Capacity*

<sup>15</sup> *Maximum Likelihood*

La borne de l'union permet ensuite de majorer  $P\{\hat{\mathbf{X}} \neq \mathbf{X} \mid \mathbf{X} = \mathbf{X}'\}$

$$P\{\hat{\mathbf{X}} \neq \mathbf{X} \mid \mathbf{X} = \mathbf{X}'\} \leq \sum_{\substack{\mathbf{E} \in \text{Code} \\ \mathbf{E} \neq \mathbf{X}'}} P(\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{E}) \quad (1.7)$$

où  $P(\mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{E})$  est la *probabilité d'erreur par paire* (PEP<sup>16</sup>), la probabilité de détecter le mot de code  $\mathbf{E}$ , alors que c'est le mot de code  $\mathbf{X}'$  qui a été émis. Pour une réalisation  $\mathcal{H}$  du canal et dans le cas cohérent, la PEP s'écrit

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{E} \mid \mathbf{H} = \mathcal{H}) &= P\{\|\mathbf{Y} - \mathcal{H} \cdot \mathbf{E}\|^2 \leq \|\mathbf{Y} - \mathcal{H} \cdot \mathbf{X}\|^2 \mid \mathbf{X} \text{ est émis}\} \\ &= P\{\|\mathcal{H} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{E}) + \mathbf{W}\|^2 \leq \|\mathbf{W}\|^2 \mid \mathbf{X} \text{ est émis}\} \\ &= P\{\mathbf{V} \leq 0\} \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{V} = \|\mathcal{H} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{E}) + \mathbf{W}\|^2 - \|\mathbf{W}\|^2$ .  $\mathbf{V}$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $m_V = \|\mathcal{H} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{E})\|^2$  et de variance  $\sigma_V^2 = 4\|\mathcal{H} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{E})\|^2\sigma^2$ . La PEP correspond donc à la queue de la gaussienne

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{E} \mid \mathbf{H} = \mathcal{H}) &= Q\left(\frac{m_V}{\sigma_V}\right) \\ &= Q\left(\frac{\|\mathcal{H} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{E})\|}{2\sigma}\right). \end{aligned}$$

En utilisant la borne exponentielle  $Q(x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$ , nous trouvons

$$P(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{E} \mid \mathbf{H} = \mathcal{H}) \leq \exp\left(-\frac{\|\mathcal{H} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{E})\|^2}{8\sigma^2}\right)$$

et en moyennant sur  $\mathbf{H}$ , nous obtenons

$$P(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{E}) \leq \exp\left(-\frac{E_{\mathbf{H}}[\|\mathbf{H} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{E})\|^2]}{8\sigma^2}\right). \quad (1.8)$$

Nous allons maintenant expliciter le numérateur de l'exponentielle

$$E_{\mathbf{H}}[\|\mathbf{H} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{E})\|^2] = E_{\mathbf{H}}[\mathbf{H}(\mathbf{X} - \mathbf{E})(\mathbf{X} - \mathbf{E})^\dagger \mathbf{H}^\dagger].$$

Par construction, la matrice aléatoire  $\mathbf{A} = (\mathbf{X} - \mathbf{E})(\mathbf{X} - \mathbf{E})^\dagger$  est hermitienne. Elle est donc diagonalisable et nous pouvons écrire  $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{D} \mathbf{U}$  où  $\mathbf{U}$  est une matrice unitaire dont les colonnes sont les vecteur propres de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ . Comme  $\mathbf{A}$  est hermitienne

---

<sup>16</sup> *Pairwise Error Probability*

positive, ses valeurs propres  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) sont positives. Notre expression devient donc

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{H}} \left[ \|\mathbf{H} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{E})\|^2 \right] &= E_{\mathbf{H}} \left[ \text{Tr} (\mathbf{H} \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^\dagger \mathbf{H}^\dagger) \right] \\ &= E_{\mathbf{H}} \left[ \text{Tr} (\mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{B}^\dagger) \right] \\ &= E_{\mathbf{H}} \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \lambda_i |b_{ji}|^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \lambda_i E_{\mathbf{H}} \left[ |b_{ji}|^2 \right] \end{aligned}$$

où  $\mathbf{B} = \mathbf{H} \mathbf{U}$ .

Étant donné que les colonnes de  $\mathbf{U}$  sont les vecteurs propres normés de  $\mathbf{A}$ , elles forment une base orthonormale de  $\mathbb{C}^M$ . De plus, comme les coefficients de canaux sont  $\mathcal{CN}(0, 1)$  et indépendants entre eux, les coefficients  $b_{ji}$  sont eux aussi  $\mathcal{CN}(0, 1)$ . L'équation (1.8) devient donc

$$P(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{E}) \leq \prod_{j=1}^N \exp \left( -\frac{1}{8\sigma^2} \sum_{i=1}^M \lambda_i \right).$$

Soit  $r$  le rang de la matrice  $A$ , nous pouvons réécrire l'équation en ne tenant compte que des  $r$  valeurs propres non-nulles de  $A$

$$P(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{E}) \leq \left( \prod_{i=1}^r \left( 1 + \frac{\lambda_i}{8\sigma^2} \right) \right)^{-N}.$$

À fort SNR, lorsque la puissance du bruit devient négligeable devant les valeurs propres, c'est à dire,  $\sigma^2 = N_0 \ll \lambda_i \forall i = 1, \dots, r$ , nous obtenons

$$P(\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{E}) \leq \left( \prod_{i=1}^r \lambda_i \right)^{-N} \left( \frac{1}{8\sigma^2} \right)^{-rN}. \quad (1.9)$$

À fort rapport signal à bruit, la PEP diminue donc asymptotiquement en  $\rho^{-rN}$ . Par (1.6) et (1.7), la probabilité d'erreur se comporte de même et  $r \cdot N$  est l'ordre de diversité du code Espace-Temps.

Le produit  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)^{\frac{1}{r}}$  est appelé gain de codage et correspond à une diminution statique de la PEP, indépendante du SNR. Comme son nom l'indique, il est obtenu pour un système de transmission codé ( $T > 1$ ). Le gain de codage du code ST est déterminé par la plus mauvaise paire de mots de code  $(\mathbf{X}, \mathbf{E})$  qui fera chuter les performances

$$\begin{aligned} \delta_{Code} &= \min_{\substack{\mathbf{X}, \mathbf{E} \in Code \\ \mathbf{X} \neq \mathbf{E}}} (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)^{\frac{1}{r}} \\ &= \min_{\substack{\mathbf{X}, \mathbf{E} \in Code \\ \mathbf{X} \neq \mathbf{E}}} |\det(\mathbf{X} - \mathbf{E})|^{2/r}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

L'ordre de diversité et le gain de codage serviront à évaluer les performances des codes ST et à établir

des critères de construction.

### 1.3 Critères de performance des codes ST

Les deux principaux critères de performance et de construction des codes ST sont basés sur la minimisation de la PEP, entraînant une diminution de la probabilité d'erreur par mot. Ce sont le critère du rang et le critère du déterminant, introduits par [Tarokh et al, 1998].

**Critère du rang :** Afin d'obtenir la diversité maximale ( $M \cdot N$ ), la matrice  $\mathbf{A} = (\mathbf{X} - \mathbf{E})(\mathbf{X} - \mathbf{E})^\dagger$  doit être de rang plein pour tous les couples de mots de code  $(\mathbf{X}, \mathbf{E})$ . Si  $r$  est le rang minimal atteint par la matrice  $\mathbf{A}$  sur tous les couples de mots de code, alors l'ordre de diversité du code ST est  $(r \cdot N)$ .

Nous remarquons que la diversité d'espace en réception est structurellement acquise. En revanche, l'obtention de la diversité d'espace en émission est plus délicate et nécessite un codage spatio-temporel judicieux.

**Critère du déterminant :** Si la diversité maximale ( $M \cdot N$ ) est atteinte, le minimum du déterminant de  $\mathbf{A}$  sur tous les couples de mots de code ST doit être maximisé.

Le gain de codage  $\delta_{Code}$  est alors maximisé.

Il existe d'autres critères de construction de codes ST, mais ils sont moins utilisés :

- Le *critère de l'information mutuelle* ([Hassibi et Hochwald 1, 2002]) maximise l'information mutuelle entre le signal émis et le signal reçu, afin d'atteindre la capacité du canal.
- Le *critère de la trace* ([Aktas et al, 2002]) maximise la trace de  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$  sur tous les couples de mots de code, afin de maximiser la distance euclidienne minimale du code ST.

**Le compromis gain de multiplexage/diversité** Nous avons vu que les codes Espace-Temps étaient construits de façon à minimiser la probabilité d'erreur par mot de code. Pour cela, ils doivent atteindre une forte diversité (critère du rang) et s'approcher de la diversité maximale fixée par le canal MIMO et correspondant au nombre d'antennes d'émission multiplié par le nombre d'antennes de réception ( $M \cdot N$ ). Alors, pour un débit  $R$  fixé, la probabilité d'erreur diminue avec le rapport signal à bruit  $\rho$ . À fort SNR,  $P_e$  décroît en  $\frac{1}{\rho^{M \cdot N}}$ .

D'un autre côté, l'étude de la capacité ergodique des canaux MIMO a mis en évidence l'existence d'un gain de multiplexage spatial  $K$  qui augmente la capacité du canal. Ce gain de multiplexage correspond au nombre de degrés de liberté du canal :  $K = \min(M, N)$ . À fort rapport signal à bruit, nous avons vu que la capacité était équivalente à  $K \log_2(\rho)$ , soit l'équivalent de  $K$  canaux SISO en parallèle.

Un système de transmission MIMO associé à un code ST peut bénéficier à la fois de la diversité et d'un gain de multiplexage, néanmoins les deux restent difficiles à concilier : la diversité est obtenue à fort SNR, en ayant fixé le débit  $R$ , alors que le gain de multiplexage traduit une augmentation de la capacité

et donc une augmentation du débit  $R$  utilisable.

Pour traduire cela, [Zheng et Tse, 2003] ont introduit un compromis entre le gain de multiplexage et le gain de diversité. Pour cela, nous notons le gain de multiplexage maximal  $r_{max} = K = \min(M, N)$  et la diversité maximale  $d_{max} = M \cdot N$ . Nous nous plaçons toujours à fort rapport signal à bruit et nous considérons un point de fonctionnement correspondant à un débit  $R$ . Le rendement normalisé

$$r = \frac{R}{\log \rho}$$

représente le gain de multiplexage.  $r$  est fixé et le débit  $R = r \log \rho$  augmente avec le SNR, mais représente toujours une même fraction de la capacité ergodique. À ce rendement normalisé  $r$  correspond un gain de diversité

$$d = - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\log_2(P_e)}{\log_2(\rho)}.$$

En utilisant un code ST de longueur temporelle  $T \geq M + N - 1$ , [Zheng et Tse, 2003] ont montré que le gain de diversité maximal atteignable par le système pour un gain de multiplexage donné est

$$d(r) = (M - r)(N - r).$$

Et lorsque  $T \leq M + N - 1$ , [Zheng et Tse, 2003] ont proposé des bornes inférieures et supérieures du gain de diversité ( $r$ ).

Dans le cas simple  $M = N = 2$ , la figure 1.1 illustre le compromis gain de multiplexage/diversité avec une diversité maximale atteinte  $d_{max} = 4$  pour  $r = 0$  et un gain de multiplexage spatial maximal  $r_{max} = 2$  atteint pour  $d = 0$ .

La figure présente aussi les performances du code à répétition qui émet deux fois le même signal : une première fois sur une antenne, puis l'intervalle de temps suivant sur l'autre antenne

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}.$$

Le code à répétition peut atteindre la diversité maximale  $d_{max} = 4$  pour  $r = 0$ , mais son gain de multiplexage ne peut dépasser  $r = 1/2$ , car il ne transmet qu'un seul symbole sur deux intervalles temporels.

## 1.4 Les différents codes ST cohérents

Les études sur la capacité des canaux MIMO et sur la probabilité d'erreur par mot des codes ST ont mis en évidence l'intérêt des systèmes de transmission utilisant des codage Espace-Temps. De multiples

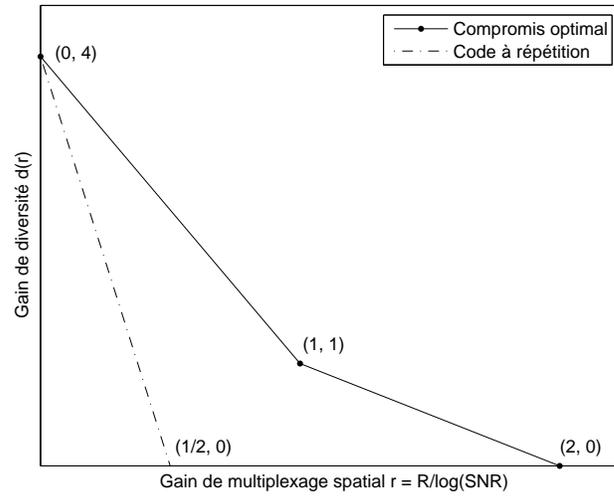


FIG. 1.1 – Compromis gain de multiplexage/diversité pour  $M = N = 2$

codes ont été proposés depuis 1998.

La figure (1.2) présente les plus intéressants, ainsi que leur "filiation". Deux *familles* de codes ST ont tout d'abord été présentées, les codes ST en treillis et les codes ST en blocs.

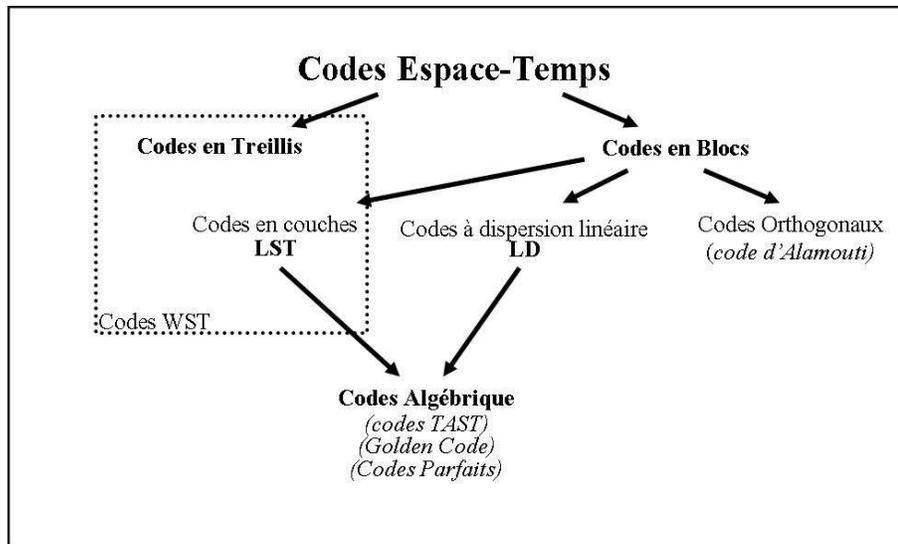


FIG. 1.2 – Les différents codes Espace-Temps

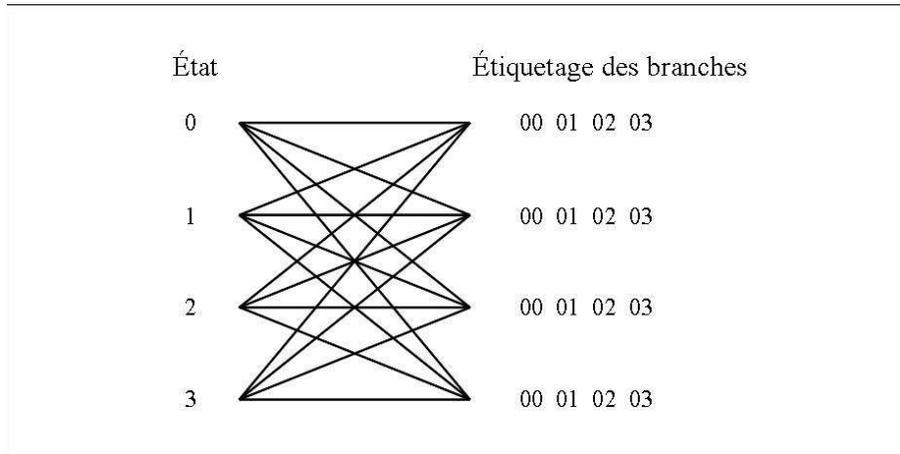


FIG. 1.3 – Code en treillis à 4

### 1.4.1 Codes ST en treillis

Les codes ST en treillis ont été les premiers codes ST présentés par [Tarokh et al, 1998]. Ces codes sont une adaptation des codes en treillis classiques (transmission mono-antennaire sur canal gaussien AWGN) aux systèmes MIMO. A chaque instant, les transitions du treillis sont codées par les symboles PSK transmis par l'ensemble des antennes d'émission.

La figure (1.3) présente un exemple de treillis MIMO à  $M = 2$  antennes d'émission pour une modulation QPSK. Si nous voulons transmettre la séquence  $\{0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1\}$ , correspondant aux symboles QPSK  $\{0, 2, 3, 1, 2\}$  il faut alors transmettre le mot de code ST

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La construction de codes ST en treillis vérifiant les critères du rang et du déterminant permet d'obtenir des codes à diversité maximale avec un fort gain de codage.

Comme pour les codes en treillis classiques, les codes ST en treillis se décotent en utilisant l'algorithme de Viterbi. Cet algorithme calcule en chaque noeud du treillis les sommes des métriques des branches y parvenant et qui correspondent aux différents chemins possibles. Ensuite, pour chaque noeud, il sélectionne le chemin obtenant la plus petite somme. Malheureusement, le nombre d'états du treillis augmente exponentiellement avec le débit de transmission et le nombre d'antennes d'émission. La complexité du décodeur limite donc rapidement les possibilités d'utilisation des codes en treillis.

### 1.4.2 Les codes ST en couches

[Foschini, 1996] a très tôt étudié la capacité des systèmes MIMO aux Bell Labs et a proposé un codage Espace-Temps. Ce codage ST est structuré en différentes strates d'où son appellation de code Spatio-Temporel en couches (LAST<sup>17</sup>), et son code ST en couches diagonales sera ensuite baptisé D-BLAST<sup>18</sup>. Une version simplifiée à couches verticales (V-BLAST) sera ensuite proposée par [Wolniansky et al, 1998].

Le codage WST, présenté postérieurement par [Caire et Colavolpe, 2001], permet de regrouper les codes en treillis et en couches dans une même famille.

#### 1.4.2.1 D-BLAST

Le codage D-BLAST a été conçu pour un système symétrique ( $M = N$ ). La trame de bits d'information est démultiplexée pour former  $M$  sous-frames, les sous-frames formant ensuite les différentes couches du code. Chaque sous-trame est codée indépendamment par un code correcteur d'erreur, avant d'être modulée (PSK ou QAM). Les symboles de chaque trame sont émis une seule fois, mais l'antenne allouée à chaque sous-trame change de façon cyclique tous les  $d_i$  symboles. Les sous-frames occupent ainsi les diagonales du code ST.

Le décodage peut se faire à l'aide d'un égaliseur par retour de décision (DFE<sup>19</sup>) par suppression successive d'interférence (SIC<sup>20</sup>) des couches déjà décodées. Nous voyons, pour cela, qu'il est intéressant de ne pas faire de codage entre les couches.

Nous voyons que D-BLAST atteint le rendement maximal de  $M$  symboles par utilisation canal (puc). De plus le codage binaire des sous-couches permet de faire transiter une partie de l'énergie de chaque bit d'information sur l'ensemble des chemins entre les  $M$  antennes d'émission et les  $N$  antennes de réception. La diversité maximale  $M \times N$  est donc elle aussi atteinte. Malheureusement le décodage est beaucoup trop compliqué et D-BLAST n'est donc pas utilisé.

#### 1.4.2.2 V-BLAST

La solution D-BLAST se révélant difficilement exploitable, les Bell Labs [Wolniansky et al, 1998] ont construit un nouveau code beaucoup plus simple : V-BLAST. Cette fois, chaque couche est associée à une seule antenne émettrice. V-BLAST est donc un simple système non-codé et peut entrer dans la catégorie des codes en blocs avec  $T = 1$ .

Le rendement est toujours plein avec  $M$  symboles puc, mais la diversité obtenue est uniquement une diversité de réception ( $d = N$ ). Comme le codage binaire des sous-frames ne permet plus d'obtenir de la diversité d'émission, il devient facultatif.

Le décodage peut aussi se faire à l'aide d'un égaliseur SIC, et comme toutes les couches sont équivalentes, nous pouvons décoder les couches de façon ordonnée, de celle ayant le meilleur rapport signal à bruit à celle ayant le moins bon. Nous obtenons ainsi un SIC avec ordonnancement (OSIC).

---

<sup>17</sup> *Layered Space-Time*

<sup>18</sup> *Diagonal-Bell Laboratories LAST*

<sup>19</sup> *Decision Feedback Equaliser*

<sup>20</sup> *Succesive Interference Cancellation*

V-BLAST est suffisamment simple pour être utilisé, bien qu'il ne possède que la diversité de réception. Une solution V-BLAST à deux antennes d'émission et trois antennes de réception est actuellement en vente sur le marché grand public. Le chipset est produit par Airgo Networks et est intégré par Belkin. La solution V-BLAST est aussi l'une des techniques proposées pour la norme MIMO Wifi IEEE 802.11n.

### 1.4.2.3 Codes ST *Wrapped*

[Caire et Colavolpe, 2001] ont proposé un codage ST *Wrapped*<sup>21</sup> (WST) qui permet de construire des codes couches de grande longueur, sans pour autant présenter une trop grande complexité. Cette solution utilise un unique codage binaire pour toute la trame de bits d'information et la longueur du mot dépend de la longueur du codage binaire.

Cette construction est remarquable, car elle englobe les codes en treillis pour qui le délai d'intercalage  $d_i$  est nul. Le code D-BLAST est obtenu en choisissant un code binaire formé de la réunion des codes binaires indépendants de chaque sous trame. Sans codage binaire et avec  $d_i = 0$ , nous retrouvons le code V-BLAST.

### 1.4.3 Codes ST en blocs

Un codage Espace-Temps en blocs découpe les symboles à transmettre en paquets de taille fixe et les incorpore dans un mot de code spatio-temporel  $\mathbf{X}_{M \times T}$ , lui aussi de taille fixe.

Depuis 1998, de nombreuses constructions de codes ST en blocs ont été proposées. Nous présentons ici les codes qui nous paraissent avoir apporté certaines "innovations" par rapport aux codes préexistants. Les caractéristiques de ces codes nous permettent d'observer certaines filiations entre les familles et de suivre l'évolution des codes ST en blocs (figure 1.2).

Le plus célèbre des codes ST en bloc est, sans doute, celui présenté par [Alamouti, 1998]. C'est un code Espace-Temps à deux antennes d'émission dont la structure orthogonale permet un décodage linéaire simple et astucieux. De plus, il permet d'atteindre la diversité maximale  $M \times N$  et il a pu être généralisé à un plus grand nombre d'antennes. Toutefois le code d'Alamouti est pénalisé par son rendement de 1 symbole puc qui ne tire pas parti des antennes multiples. L'augmentation du nombre de degrés de liberté passe par l'abandon de la contrainte d'orthogonalité.

Les codes à dispersion linéaire (LD<sup>22</sup>) sont des codes en blocs non-orthogonaux, mais dont l'expression générale ne permet pas de trouver facilement des codes intéressants.

L'utilisation d'outils d'algèbre permet la création de nouveaux codes : les codes algébriques (AST<sup>23</sup>). Ces codes utilisent des constellations tournées, ce qui revient à augmenter la dimension algébrique des constellations.

---

<sup>21</sup>enveloppés

<sup>22</sup>*Linear Dispersion codes*

<sup>23</sup>*Algebraic Space-Time codes*

## 1.5 Codes ST orthogonaux

Les codes ST orthogonaux sont des codes Spatio-Temporels en blocs dont tous les mots de codes sont des matrices orthogonales. Cette orthogonalité est une contrainte très forte qui va faciliter le décodage, mais qui va aussi empêcher l'augmentation du nombre de degrés de liberté.

### 1.5.1 Le code d'Alamouti

Le code ST construit par [Alamouti, 1998] pour deux antennes d'émission et une antenne de réception est optimal. Il regroupe les symboles à transmettre (PSK ou QAM) par paires  $(s_1, s_2)$  et les place dans le mot de code carré ( $T = M = 2$ )

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix}.$$

L'antenne de réception capte donc successivement

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1 \cdot s_1 + h_2 \cdot s_2 + w_1 \\ \text{et } y_2 &= -h_1 \cdot s_2^* + h_2 \cdot s_1^* + w_2 \end{aligned}$$

où  $h_1$  et  $h_2$  sont les coefficients de canaux entre les antennes d'émission et l'antenne de réception. Le mot de code reçu s'écrit donc

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2] = [h_1 \quad h_2] \cdot \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} + [w_1 \quad w_2].$$

En remarquant que

$$y_2^* = h_2^* \cdot s_1 - h_1^* \cdot s_2 + w_2^*,$$

nous pouvons introduire le nouveau mot de code en réception  $\mathbf{y}'$  qui fait intervenir  $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2^* \end{bmatrix}.$$

La transmission étant cohérente,  $h_1$  et  $h_2$  sont connus du récepteur et nous pouvons facilement construire

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^* & h_2 \\ h_2^* & -h_1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y}' = (|h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Comme les coefficients  $h_1$  et  $h_2$  sont décorrélés, les bruits additifs  $v_1$  et  $v_2$  restent décorrélés. La constellation des symboles  $s$  n'a subi qu'une dilatation de  $(|h_1|^2 + |h_2|^2)$  et le détecteur ML est donc un simple détecteur à seuil.

Lorsque le récepteur possède plusieurs antennes, il suffit de faire un MRC<sup>24</sup> en calculant la moyenne des  $\hat{\mathbf{X}}_j$  calculés sur chaque antenne réceptrice  $j = 1 \dots N$ .

Avec une seule antenne de réception, le code d'Alamouti est optimal : il atteint la diversité maximale  $M \times N = 2$  ainsi que le gain de multiplexage maximal  $K = \min(M, N) = 1$  symbole puc.

Par contre, lorsque  $N > 1$ , si la diversité maximale  $M \times N = 2N$  est toujours atteinte, le rendement reste bloqué à 1 symbole puc comme dans le cas d'une transmission SISO.

Bien qu'il ne permette pas d'augmenter le débit, le code d'Alamouti est utilisé sur de nombreux systèmes radio-mobiles comme l'UMTS (release 99) en mode STTD<sup>25</sup>, la norme WiMax IEEE 802.16 ou encore le projet de norme MIMO pour le Wifi IEEE 802.11n.

### 1.5.2 Codes orthogonaux de grande dimension

Des codes orthogonaux ont été proposés pour un nombre d'antennes d'émission  $M > 2$ , en généralisant le code d'Alamouti.

[Tarokh et al, 1999] ont construit des codes orthogonaux réels à diversité maximale pour n'importe quel nombre d'antennes. Leur rendement est de 1 symbole réel puc, ce qui en complexe ne donne qu'un rendement de 1/2 symbole puc.

[Tarokh et al, 1999] ont aussi montré qu'il est possible de transmettre  $K$  symboles d'information dans un mot de code ST orthogonal carré de taille  $M \times T = 2^{K-1} \times 2^{K-1}$ . Le rendement du code est alors  $\frac{K}{2^{K-1}}$ .

Par exemple le code orthogonal  $4 \times 4$  proposé par [Tirkkonen et Hottinen, 2002] s'écrit

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* & -s_3^* & 0 \\ s_2 & s_1^* & 0 & s_3^* \\ s_3 & 0 & s_1^* & -s_2^* \\ 0 & -s_3 & s_2 & s_1 \end{bmatrix}.$$

Les codes ST orthogonaux, bien qu'étant faciles à utiliser et à diversité maximale, ne sont pas très intéressants en raison de leurs faibles rendements (inférieurs ou égaux à 1 symbole puc), alors que l'étude de la capacité nous permet d'espérer un rendement plein de  $M$  symboles puc. Nous devons donc nous affranchir de la contrainte d'orthogonalité qui assurerait pourtant un décodage remarquablement simple.

## 1.6 Codes à dispersion linéaire

La généralisation des codes orthogonaux aux codes ST linéaires en blocs a été faite de façon formelle par [Hassibi et Hochwald 1, 2002]. Soit un système de transmission à  $M$  antennes d'émission et  $N$

<sup>24</sup> *Maximum Ratio Combining*

<sup>25</sup> *Space-Time Transmitt Diversity*

antennes de réception, un codage à dispersion linéaire (LD) de longueur temporelle  $T$  transmettra sur chaque antenne et à chacun des  $T$  instants, une combinaison linéaire de  $Q$  symboles d'information. Afin d'atteindre la diversité maximale, l'énergie allouée à chaque symbole devra être dispersée sur l'ensemble des antennes d'émission.

Les  $Q$  symboles complexes (QAM ou PSK) se décomposent en parties réelle et imaginaire  $s_q = \alpha_q + i\beta_q$ . Le mot de code  $\mathbf{X}$  s'écrit alors de façon générale

$$\mathbf{X} = \sum_{q=1}^Q \alpha_q \mathbf{A}_q + i\beta_q \mathbf{B}_q. \quad (1.11)$$

Le code LD de taille  $M \times T$  est entièrement défini par le choix de  $Q$  et des  $2Q$  matrices de dispersion  $\mathbf{A}_q$  et  $\mathbf{B}_q$ . Le code est linéaire par construction, son rendement est de  $\frac{Q}{T}$  symboles puc. Comme le rendement ne peut pas dépasser la capacité du canal (1.4), il faut prendre  $Q \leq K$ , où  $K = \min(M, N)$  est le nombre de degrés de liberté du canal MIMO. Le cas  $Q = K$  correspond alors au rendement plein.

L'expression (1.11) est une formulation trop générale pour permettre de construire directement des codes intéressants. Elle a néanmoins l'avantage de formaliser la construction des codes linéaires en blocs et englobe donc les codes orthogonaux et V-BLAST.

Le code d'Alamouti peut ainsi s'écrire

$$\mathbf{X} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + i\beta_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + i\beta_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous allons maintenant présenter certains des principaux codes LD. Ils sont basés sur des constructions algébriques.

## 1.7 Codes algébriques

Nous introduisons tout d'abord quelques éléments d'algèbre. Ils nous permettront ensuite de construire notamment les codes DAST, TAST et le Golden Code.

### 1.7.1 Quelques notions d'algèbre

Nous définissons quelques éléments d'algèbre ([Samuel, 2003], [Rekaya, 2004]) qui seront utiles pour la construction ultérieure des codes ST algébriques.

- Un **nombre algébrique** sur un corps  $K$  est la solution d'une équation polynomiale  $P(X) = 0$  à coefficients dans  $K$  ( $P(X) \in K(X)$ ). Un nombre non algébrique est dit transcendant.

Soit  $\theta$  un nombre algébrique sur un corps  $K$ , alors il existe un unique polynôme irréductible uni-

taire<sup>26</sup>  $\mu_\theta(X) \in K(X)$  dont  $\theta$  est racine : c'est le **polynôme minimal** de  $\theta$  sur  $K$ . Le degré de  $\theta$  sur  $K$  est le degré du polynôme minimal et les autres racines de  $\mu_\theta(X)$  sont les conjugués de  $\theta$ .

- Un corps  $L$  est une **extension d'un corps**  $K$  si  $L \supset K$ . L'adjonction d'un corps  $K$  et de  $\theta$ , un nombre algébrique sur  $K$  est l'**extension algébrique**  $K(\theta)$ .  $K(\theta)$  est le plus petit corps contenant  $K$  et  $\theta$ . Il contient toutes les combinaisons<sup>27</sup> de  $\theta$  et des éléments de  $K$ .
- Un **corps de nombres**  $L$  est une extension finie du corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels. Il existe un nombre algébrique  $\theta \in L$  de degré  $n$  sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $L = \mathbb{Q}(\theta)$  et alors  $\{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}\}$  forme une base de  $\mathbb{Q}(\theta)$ .

Une extension de degré 2 de  $\mathbb{Q}$  est appelée **corps quadratique**. Une extension de  $\mathbb{Q}$  par une racine de l'unité est appelée **corps cyclotomique**.

Par exemple  $\mathbb{Q}(i)$  est un corps quadratique de  $\mathbb{Q}$  et son polynôme minimal est  $\mu_i(X) = X^2 + 1$ .

- Soient  $K$  un corps,  $L$  une extension algébrique de  $K$  de degré  $n_1$  et  $M$  une extension algébrique de  $L$  de degré  $n_2$ , alors  $M$  est une extension algébrique de  $K$  de degré  $n = n_1 + n_2$ .

### 1.7.2 Codes algébriques diagonaux DAST

[Boullé et Belfiore, 1992] ont montré qu'il peut être avantageux de tourner la constellation des symboles d'information en la multipliant par une matrice de rotation unitaire. Dans une constellation de dimension  $n$ , si sur chaque dimension aucun des points de la constellation n'a la même coordonnée, alors la diversité de modulation est maximisée et vaut  $n$ . [Boutros et al, 1996] et [Giraud et al, 1997] ont construit des constellations tournées à diversité de modulation maximale telles que la distance produit minimale

$$d_{\min}^p = \min_{\substack{\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \in S}} \prod_{j=1}^n |\tilde{x}_j|$$

est maximisée.

Pour construire le code algébrique DAST<sup>28</sup>, [Damen et al 1, 2002] ont eu l'idée d'utiliser ces constellations tournées pour bénéficier de la diversité. Ils répartissent ainsi les symboles dans l'espace et le temps, avec un bon gain de codage, à l'aide de la transformation de Hadamard. Le code DAST utilise des matrices de rotation formées sur des corps de nombres [Boutros et Viterbo, 1998].

Si  $\mathbf{M}$  est une matrice de rotation de dimension  $M$  à diversité maximale, elle tourne le vecteur des symboles d'information pour former  $\mathbf{x} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{s}$ . Le mot de code DAST se construit en multipliant la

<sup>26</sup>un polynôme est unitaire lorsque le coefficient du monôme de plus haute degré est égal à 1

<sup>27</sup>combinaisons par les quatre opérations : +, -, ×, ÷

<sup>28</sup>*Diagonal Algebraic Space-Time code*

matrice d'Hadamard de dimension  $M$  par la matrice diagonale contenant les symboles tournés

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}_M \cdot \text{diag } \mathbf{x}.$$

Le codage TAST fonctionne bien pour deux ou des multiples de quatre antennes d'émission, mais il souffre évidemment de son faible rendement, limité à 1 symbole puc.

## 1.8 Premier code algébrique optimal

[Damen et al 2, 2002] ont construit le premier code linéaire à rendement plein et à diversité maximale. Ce code, conçu pour un système symétrique à deux antennes, est carré ( $M = N = T = 2$ ). Il permet donc de transmettre 2 symboles puc avec une diversité de 4. Il est issu de la théorie algébrique des nombres, et est fabriqué sur des corps de nombres.

Soit  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$  le vecteur des symboles d'information à transmettre. Les symboles sont pris dans une constellation QAM,  $\mathbf{s} \in S \subset \mathbb{Z}[i]^4$ . Le mot de code s'écrit

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} (s_1 + \theta s_2) & \phi(s_3 + \theta s_4) \\ \phi(s_3 - \theta s_4) & (s_1 - \theta s_2) \end{bmatrix}$$

où  $\phi^2 = \theta$  et  $\theta$  est de module 1. Nous pouvons donc écrire  $\theta = e^{i\lambda}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est le paramètre à optimiser.

En considérant une constellation infinie  $S = \mathbb{Z}[i]^4$ , le gain de codage se met sous la forme d'un polynôme en  $\theta$  de degré 3

$$\begin{aligned} \delta_\infty &= \inf_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}[i]^4} (\det \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \inf_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}[i]^4} (s_1^2 - s_3^2 \theta - s_2^2 \theta^2 - s_4^2 \theta^3) \end{aligned}$$

et pour une constellation  $S \subset \mathbb{Z}[i]^4$  finie

$$\delta = \min_{\substack{\tilde{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \\ \mathbf{s} \neq \mathbf{s}' \in S}} (s_1^2 - s_3^2 \theta - s_2^2 \theta^2 - s_4^2 \theta^3)$$

avec évidemment  $\delta \geq \delta_\infty$ .

En faisant en sorte d'avoir  $\delta \neq 0$ , nous satisfaisons le critère du rang et nous atteignons donc la diversité maximale de 4.  $\theta$  doit alors être, soit un nombre algébrique, soit un nombre transcendant.

- Si  $\theta$  est algébrique de degré strictement supérieur à 3 sur  $\mathbb{Q}(i)$ ,  $(1, \theta, \theta^2, \theta^3)$  forme une base de  $\mathbb{Q}(i, \theta)$  et donc  $\delta$  ne s'annule pas. Ainsi, avec  $\theta = e^{i\frac{\pi}{8}}$ , le gain de codage vaut 0.1304 avec une

constellation 4-QAM.

- Si  $\theta$  est algébrique de degré 2 sur  $\mathbb{Q}(i)$  avec  $\theta^2 \in \mathbb{Q}(i)$ , alors  $\delta$  ne s'annule pas. En effet,  $\{1, \theta\}$  forme un ensemble libre sur  $\mathbb{Q}(i)$  donc

$$\begin{aligned} & s_1^2 - s_3^2 \theta - s_2^2 \theta^2 - s_4^2 \theta^3 = 0 \\ \Leftrightarrow & (s_1^2 - s_2^2 \theta^2) - \theta (s_3^2 - s_4^2 \theta^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} s_1^2 - s_2^2 \theta^2 = 0 \\ s_3^2 - s_4^2 \theta^2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.12)$$

et comme le degré de  $\theta > 1$ ,  $\theta^2$  n'est pas un carré dans  $\mathbb{Q}(i)$ , donc  $s_2^2 \theta^2$  et  $s_4^2 \theta^2$  ne sont pas des carrés dans  $\mathbb{Q}(i)$  et (1.12) équivaut à  $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = s_4^2 = 0$  d'où  $\mathbf{s} = (0, 0, 0, 0)$  et  $\delta \neq 0$ .

Ainsi, avec  $\theta = e^{i\frac{\pi}{4}}$ , le gain de codage vaut 0.0858 avec une constellation 4-QAM.

- En prenant pour  $\theta = e^{i\lambda}$ , un nombre transcendant, le gain de codage peut être optimisé numériquement. Avec une 4-QAM, le gain de codage est maximal pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  et vaut 0.2369. Pour une constellation 16-QAM, le gain de codage est maximisé pour  $\lambda = 0.448$  et vaut 0.1397.

[Galliou et Belfiore, 2002] ont généralisé ce code pour n'importe quel nombre d'antennes en travaillant sur les corps de nombres. Leurs codes carrés sont eux aussi à rendement plein et à diversité maximale. Par exemple leur code  $3 \times 3$  s'écrit

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} (s_1 + \theta s_2 + \theta^2 s_3) & \phi (s_4 + \theta s_5 + \theta^2 s_6) & \phi^2 (s_7 + \theta s_8 + \theta^2 s_9) \\ \phi^2 (s_7 + j \theta s_8 + j^2 \theta^2 s_9) & (s_1 + j \theta s_2 + j^2 \theta^2 s_3) & \phi (s_4 + j \theta s_5 + j^2 \theta^2 s_6) \\ \phi (s_4 + j^2 \theta s_5 + j \theta^2 s_6) & \phi^2 (s_7 + j^2 \theta s_8 + j \theta^2 s_9) & (s_1 + j^2 \theta s_2 + j \theta^2 s_3) \end{bmatrix}$$

où  $\theta = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ,  $\phi = \theta^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{\pi}{18}}$  et  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

### 1.8.1 Codes TAST

Les codes TAST<sup>29</sup> combinent le principe du codage en couches (LST) et la construction algébrique des codes. [Gamal et Damen, 2003] obtiennent ainsi un codage à rendement plein et à diversité maximale. Les codes algébriques à rendement plein et à diversité pleine vus en 1.8 font partie de la famille des codes TAST.

Contrairement aux codes LST, les couches sont ici placées dans un code en blocs. Les couches, appelées *thread*<sup>30</sup> par [Gamal et Hammons, 2001] s'enroulent autour du mot de code de telle sorte que chaque couche est émise à chaque temps symbole et chaque fois sur une antenne différente. Toutes les interférences pourront ainsi être supprimées et pas seulement annulées comme certaines couches dans le

<sup>29</sup> Threaded Algebraic Space-Time codes

<sup>30</sup> «fil»

décodage des codes LST.

Les  $\ell$  symboles d'information à transmettre sont regroupés en  $L$  sous vecteurs  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_L$  de longueurs respectives  $\ell_1, \dots, \ell_L$  avec  $\sum_i \ell_i = \ell$ . Chaque couche  $i$  subit un codage de type DAST avec une rotation  $\mathbf{M}_i$  de sa constellation. Et le vecteur de symboles codés de la couche  $i$  s'écrit

$$\mathbf{x}_i = \varphi_i \cdot \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{s}_i .$$

Les coefficients  $\varphi_i$  sont choisis de façon à ce que chaque couche soit codée sur un sous-espace algébrique différent. Les différentes couches pourront ainsi être aisément discriminées, ce qui facilitera le décodage.

Le rendement maximal d'une couche codée en DAST est de 1 symbole puc, donc le rendement maximal du code TAST est de  $L$  symboles puc. Toutes les couches ayant le même rendement de 1 symbole puc, elles peuvent utiliser la même rotation  $\mathbf{M}$ . Le code TAST ainsi formé à  $L$  couches et transmettant  $L$  symboles puc est appelé code TAST symétrique.

En pratique, le rendement est limité par la capacité du canal et le nombre de couches  $L$  ne doit donc pas excéder le nombre de degrés de liberté du canal (1.4) :  $L \leq K = \min(M, N)$ . Choisir un nombre de couche  $L = K$  permet d'obtenir un code TAST à rendement plein. Il nous reste maintenant à atteindre la diversité maximale.

[Gamal et Damen, 2003] ont montré que, pour un code TAST symétrique, prendre des nombres diophantiens pour le choix des  $\varphi_1, \dots, \varphi_L$  permettrait de maximiser la diversité et le gain de codage. Un nombre diophantien est un nombre dont l'approximation diophantienne par les nombres algébriques est mauvaise. Pour cela, les auteurs proposent de prendre  $\{\varphi_1 = 1, \varphi_2 = \Phi^{\frac{1}{M}}, \dots, \varphi_L = \Phi^{\frac{M-1}{M}}\}$  avec

- soit  $\Phi$  un entier algébrique tel que  $\{1, \Phi, \dots, \Phi^{M-1}\}$  soient algébriquement indépendants sur le corps de nombres engendré par les éléments de la matrices de rotation  $\mathbf{M}$ ,
- soit  $\Phi$  un nombre transcendant de la forme  $e^{i\lambda}$  avec pour  $\lambda$  un nombre algébrique non nul.

Si toutes les couches du code n'utilisent pas la même rotation, le code TAST est dit asymétrique. En utilisant par exemple un code à répétition sur certaines couches, la diversité maximale est conservée et le rendement diminue au profit d'une diminution de la complexité du décodeur.

### 1.8.2 Codes algébriques à rotations réelles

Tandis que nous n'avons vu jusqu'ici que des rotations complexes pour tourner les constellations du code DAST, des codes  $2 \times 2$  peuvent être construits à partir de rotations réelles.

La matrice de rotation d'angle  $\theta$  s'écrit

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

[Yao et Wornell, 2003] utilisent une rotation différente pour chacune des deux couches  $i$  ( $i = 1, 2$ )  $\mathbf{x}_i = \mathbf{R}(\theta_i) \cdot \begin{bmatrix} s_i \\ s_{i+1} \end{bmatrix}$  avec  $s_i$  et  $s_{i+1} \in S \subset \mathbb{Z}[i]$ . Le mot de code ST s'écrit donc

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} s_1 \cos(\theta_1) + s_2 \sin(\theta_1) & s_3 \cos(\theta_2) + s_4 \sin(\theta_2) \\ -s_3 \sin(\theta_2) + s_4 \cos(\theta_2) & -s_1 \sin(\theta_1) + s_2 \cos(\theta_1) \end{bmatrix}.$$

Les angles  $\theta_1 = \frac{\arctan \frac{1}{2}}{2}$  et  $\theta_2 = \frac{\arctan 2}{2}$  permettent de satisfaire le critère du déterminant. Ce code à rendement plein et diversité maximale est remarquable, car quelle que soit la taille de la constellation  $S$  utilisée, le gain de codage ne s'évanouit pas. Nous rappelons que pour un système à deux antennes d'émission, le gain de codage (1.2.2) s'écrit

$$\delta_{Code} = \min_{\substack{\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in Code \\ \mathbf{X} \neq \mathbf{X}'}} |\det(\mathbf{X} - \mathbf{X}')|.$$

Pour la constellation infinie  $S = \mathbb{Z}[i]$ , la linéarité permet de calculer le déterminant entre un mot de code  $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$  et le mot de code nul  $\mathbf{X}' = \mathbf{0}$ . Le déterminant minimal du code infini s'écrit alors

$$\delta_\infty = \min_{\substack{\mathbf{X} \in Code \\ \mathbf{X} \neq \mathbf{0}}} |\det(\mathbf{X})|.$$

Pour une constellation finie telle que  $S \subset \mathbb{Z}[i]$

$$\delta_{Code} \geq \delta_\infty.$$

Nous calculons le déterminant minimal du code de [Yao et Wornell, 2003] : pour  $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (1, 0, 0, 0)$ , alors

$$\delta_{Yao}^\infty = \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) = \frac{\sin(2\theta_1)}{2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

[Dayal et Varanasi, 2003] ont construit un code similaire, en remplaçant la rotation complexe du code

TAST par la rotation réelle

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} s_1 \cos(\theta) + s_2 \sin(\theta) & \varphi(s_3 \cos(\theta) + s_4 \sin(\theta)) \\ \varphi(-s_3 \sin(\theta) + s_4 \cos(\theta)) & -s_1 \sin(\theta) + s_2 \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Le gain de codage est maximisé pour  $\varphi = -i$  et  $\theta = \frac{\arctan 2}{2}$ . Le déterminant minimal de ce code, calculé en  $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (1, 0, 0, 0)$ , est alors

$$\delta_{Dayal}^\infty = \cos(\theta) \sin(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Le gain de codage ne s'évanouie donc pas lorsque la taille de la constellation augmente.

### 1.8.3 Golden Code

Le code algébrique présenté par [Belfiore et Rekaya, 2003] est construit à partir d'algèbre cyclique de division de façon à être de rendement plein, de diversité pleine et avec un déterminant minimal ne s'évanouissant pas lorsque la constellation augmente.

Il est issu d'une première famille de codes appelés codes quaternioniques utilisant l'algèbre des quaternions [Belfiore et al, 2005].

Le Golden Code peut être vu comme un code TAST, dont la couche 1 subit la rotation

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha & \alpha\theta \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\theta \end{bmatrix}$$

et la couche 2 subit la rotation

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha\theta \\ \gamma\bar{\alpha} & \gamma\bar{\alpha}\theta \end{bmatrix}$$

avec  $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\alpha = 1 + i(1 - \theta)$  et leurs conjugués  $\bar{\theta} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ,  $\bar{\alpha} = 1 + i(1 - \bar{\theta})$ .  $\gamma$  est le coefficient de module unitaire permettant de séparer les deux couches. Ici  $\gamma = i$ . Le coefficient  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  devant  $\mathbf{M}_1$  permet de rendre la matrice unitaire.

Le mot de code ST s'écrit alors

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha(s_1 + s_2\theta) & \alpha(s_3 + s_4\theta) \\ \gamma\bar{\alpha}(s_3 + s_4\bar{\theta}) & \bar{\alpha}(s_1 + s_2\bar{\theta}) \end{bmatrix}.$$

$\theta$  et  $\bar{\theta}$  sont les zéros du polynôme  $\mu(X) = X^2 - X - 1$  et ont ainsi donné leur nom au Golden Code<sup>31</sup>. Le code ST est construit sur  $\mathbb{Q}(i, \theta) = \{a + b\theta \mid a, b \in \mathbb{Q}(i)\}$ , une extension quadratique de  $\mathbb{Q}(i)$ . Le choix de  $\alpha$  et de  $\gamma$  a permis de maximiser le déterminant minimal : en prenant  $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (1, 0, 0, 0)$ ,

<sup>31</sup> $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , un des zéros de  $\mu(X)$ , est le fameux nombre d'or

nous calculons

$$\delta_{Golden}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{5}} |\alpha \bar{\alpha}| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Le Golden Code a été généralisé par [Ogier et al, 2006] pour quatre antennes d'émission en QAM et pour trois et six antennes d'émission avec une modulation de type hexagonal. Tous ces codes ST linéaires construits sur des algèbres cycliques de division sont à diversité pleine et rendement plein, et leur déterminant ne s'évanouit pas lorsque l'efficacité spectrale augmente.

Le code à quatre antennes d'émission est construit sur le corps de nombre  $K = \mathbb{Q}(i, \theta)$ , avec  $\theta = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ . La matrice de rotation  $4 \times 4$  s'écrit numériquement

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 0.2582 - 0.3122i & 0.3455 - 0.4178i & -0.4178 + 0.5051i & -0.2136 + 0.2582i \\ 0.2582 + 0.0873i & 0.4718 + 0.1596i & 0.1596 + 0.0540i & 0.7633 + 0.2582i \\ 0.2582 + 0.2136i & -0.5051 - 0.4178i & -0.4178 - 0.3455i & 0.3122 + 0.2582i \\ 0.2582 - 0.7633i & -0.0540 + 0.1596i & 0.1596 - 0.4718i & -0.0873 + 0.2582i \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Le mot de code ST s'écrit ensuite dans la base de l'algèbre de division  $(\mathbf{I}_4, \mathbf{e}, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$  de la façon suivante

$$\mathbf{X} = \text{diag}(\mathbf{M}_4 \mathbf{S}_1) \mathbf{I}_4 + \text{diag}(\mathbf{M}_4 \mathbf{S}_1) \mathbf{e} + \text{diag}(\mathbf{M}_4 \mathbf{S}_1) \mathbf{e}^2 + \text{diag}(\mathbf{M}_4 \mathbf{S}_1) \mathbf{e}^3$$

avec

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La base  $(\mathbf{I}_4, \mathbf{e}, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$  permet de séparer les différentes couches. Chaque couche  $\ell = 1 \dots 4$  transporte quatre des seize symboles d'information transmis par mot de code avec

$$\mathbf{S}_\ell = \begin{bmatrix} s_{\ell 1} \\ s_{\ell 2} \\ s_{\ell 3} \\ s_{\ell 4} \end{bmatrix}.$$

Le déterminant minimal de ce code vaut  $\delta_{parfait 4}^{\infty} = \frac{1}{1125}$ .

## Conclusion

Nous avons dans ce chapitre présenté le canal de transmission multi-trajet et nous avons vu l'intérêt d'introduire de la diversité pour diminuer la fréquence des erreurs de transmission. Parallèlement, l'étude des canaux MIMO a montré que la capacité augmente proportionnellement au minimum entre le nombre

d'antennes à l'émission et le nombre d'antennes à la réception. Or, le rendement maximal peut être atteint par un codage Espace-Temps.

Nous avons ensuite présenté un état de l'art des codes Spatio-Temporels. Nous nous sommes focalisés sur les codes en blocs et plus particulièrement sur les récents codes algébriques dont certains, comme le Golden Code et les codes parfaits, permettent de bénéficier d'une diversité maximale et d'un rendement plein tout en possédant de bons gains de multiplexage. Ces codes seront ainsi utilisés dans la réalisation de notre prototype MIMO pour Wifi.

## Chapitre 2

# Décodage des codes Espace-Temps cohérents

### Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons étudié les codes Spatio-Temporels cohérents. L'étude de leurs performances a été faite dans l'hypothèse d'un décodage optimal et sans tenir compte des difficultés d'une telle opération. Il nous faut donc à présent approfondir l'étude de cette étape essentielle qu'est le décodage.

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à différentes structures de décodeurs pour les codes ST et à leurs algorithmes. Certains de ces décodeurs sont optimaux, comme le décodeur exhaustif, le Sphere Decoder ou le décodeur de Schnorr-Euchner, alors que d'autres sont conçus pour être sous-optimaux afin de réduire leur complexité.

Nous étudierons plus précisément le décodage de codes ST linéaires en blocs qui peuvent exploiter leur structure en réseaux de points. Ce chapitre débute ainsi par la représentation de codes ST en réseaux de points. Puis nous verrons comment le décodage au maximum de vraisemblance peut être remplacé par la recherche du point du réseau le plus proche du point reçu.

La structure générale des décodeurs par arbre de recherche sera ensuite détaillée, ainsi que la paramétrisation de l'algorithme permettant de retrouver des décodeurs connus. Nous présenterons enfin les prétraitements qui permettent de remettre les constellations en forme et facilitent ainsi le décodage. Pour conclure ce chapitre, nous proposerons un décodeur MIMO itératif qui annule progressivement le bruit et les interférences.

### 2.1 Modélisation du codage ST par les réseaux de points

Dans un premier temps, nous introduisons quelques notions utiles sur les "réseaux de points"<sup>1</sup> :

---

<sup>1</sup> *Lattice*

- Un réseau de points est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ , un réseau de dimension  $n$ , il est entièrement défini par sa matrice génératrice  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\Lambda = \{ \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{G}\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n \} .$$

Les vecteurs colonnes de la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  forment une base de  $\Lambda$ .

- Soient  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$  un réseau de points de dimension  $n$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur et  $\mathcal{R}$  une région mesurable de  $\mathbb{R}^n$ . Un code en réseau de points  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}, \mathcal{R})$  se définit comme l'ensemble des points du réseau translaté  $\Lambda + \mathbf{v}$  à l'intérieur de la région  $\mathcal{R}$

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}, \mathcal{R}) = \{ \Lambda + \mathbf{v} \} \cap \mathcal{R} . \quad (2.1)$$

$\mathcal{V}$  détermine ainsi la forme<sup>2</sup> de la constellation.

$\mathcal{C}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}, \mathcal{R})$  peut aussi être vu comme l'ensemble des points  $\mathbf{s} = \mathbf{c} + \mathbf{v}$ , où  $\mathbf{c}$  est le mot de code représentant le vecteur d'information  $\mathbf{u}$ . L'ensemble des vecteurs d'information est noté  $\mathcal{U} \subset \mathbb{Z}^n$ .

$$\mathbf{c} = \mathbf{G}\mathbf{u} .$$

### 2.1.1 Cas d'une transmission non-codée

Lors d'une transmission MIMO non codée, le vecteur de symboles d'information  $\mathbf{x}$  est transmis sur le canal de matrice de transfert  $\mathbf{H}$  de dimension  $N \times M$ , en présence de bruit additif. Le signal reçu s'écrit alors

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w} . \quad (2.2)$$

Afin d'obtenir une représentation dans  $\mathbb{R}$ , les parties réelles et imaginaires des vecteurs et des matrices sont séparées grâce aux transformations

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^N &\rightarrow \mathbb{R}^{2N} \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u}_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{u}) \\ \Im(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{N \times M} &\rightarrow \mathbb{R}^{2N \times 2M} \\ \mathbf{M} &\mapsto \mathbf{M}_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{M}) & -\Im(\mathbf{M}) \\ \Im(\mathbf{M}) & \Re(\mathbf{M}) \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

L'équation (2.2) s'écrit alors

$$\mathbf{y}_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{y}) \\ \Im(\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{H}) & -\Im(\mathbf{H}) \\ \Im(\mathbf{H}) & \Re(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{x}) \\ \Im(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{w}) \\ \Im(\mathbf{w}) \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{x}_{\mathbb{R}} + \mathbf{w}_{\mathbb{R}} .$$

---

<sup>2</sup> *shapping*

Nous retrouvons ainsi une structure de réseau de points de dimension  $2N$  de matrice génératrice  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ .

### 2.1.2 Cas d'une transmission codée

Lorsque la transmission MIMO est codée, il faut tenir compte de la longueur temporelle du code, et le mot de code reçu s'écrit

$$\mathbf{Y}_{N \times T} = \mathbf{H}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times T} + \mathbf{W}_{N \times T}. \quad (2.3)$$

Pour représenter le code ST codé sous forme de réseau de points, nous allons tout d'abord le représenter sous forme d'un système non-codé pour revenir au cas précédent.

Le mot de code émis  $\mathbf{X}$  est une combinaison linéaire de  $k$  symboles d'information, avec  $k \leq MN$ . Nous obtenons  $k = MN$  si le code ST est à rendement maximal. La contribution du  $i^{\text{ème}}$  symbole d'information  $s_i$  au mot de code  $\mathbf{X}(s_1, \dots, s_k)$  est explicitée par  $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}(s_i = 1, s_j = 0 \forall j \neq i)$

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^k \mathbf{X}_i \cdot s_i.$$

La matrice  $\mathbf{X}$  de dimension  $M \times T$  peut être présentée sous forme de vecteur colonne  $\mathbf{x}$  de taille  $MT$

$$\mathbf{x}_{M \cdot T} = \text{vect } \mathbf{X}_{M \times T} = [\text{vect } \mathbf{X}_1, \dots, \text{vect } \mathbf{X}_k] \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons donc une version vectorisée du mot de code et le mot de code reçu (2.3) devient

$$\mathbf{y}_{N \cdot T} = \text{vect } \mathbf{Y}_{N \times T} = \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_{MT} + \text{vect } \mathbf{W}$$

où  $\otimes$  représente le produit de Kronecker matriciel. La version complexe non-codée du mot de code reçu étant de taille  $NT$ , le réseau de points correspondant sera de taille  $n = 2NT$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{N \times T} &\rightarrow \mathbb{C}^{NT} \rightarrow \mathbb{R}^{2NT} \\ \mathbf{Y}_{N \times T} &\mapsto \mathbf{y}_{NT} \mapsto \mathbf{y}_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Par exemple, dans le cas  $M = N = T = 2$  du Golden Code 1.8.3, le mot de code émis s'écrit

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha(s_1 + s_2\theta) & \alpha(s_3 + s_4\theta) \\ i\bar{\alpha}(s_3 + s_4\theta) & \bar{\alpha}(s_1 + s_2\theta) \end{bmatrix}$$

et sa version vectorisée devient

$$\mathbf{x}_{M \cdot T} = \text{vect } \mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha & \alpha\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\bar{\alpha} & i\bar{\alpha}\bar{\theta} \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha\theta \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\bar{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}.$$

Le signal reçu peut alors se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{N \cdot T} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \alpha\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\bar{\alpha} & i\bar{\alpha}\bar{\theta} \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha\theta \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\bar{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} + \text{vect } \mathbf{W} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \mathbf{H}_{NT \times MT} \cdot \Phi \cdot \mathbf{s} + \mathbf{w}_{N \cdot T}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc un système d'équation non-codé de dimension  $NT \times MT$

$$\mathbf{y} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{w}$$

avec  $\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \mathbf{H}_{NT \times MT} \cdot \Phi$ .

En séparant les parties réelles et imaginaires, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\mathbb{R}} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{H}) & \mathbf{0} & -\Im(\mathbf{H}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Re(\mathbf{H}) & \mathbf{0} & -\Im(\mathbf{H}) \\ \Im(\mathbf{H}) & \mathbf{0} & \Re(\mathbf{H}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Im(\mathbf{H}) & \mathbf{0} & \Re(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Re(\Phi) & -\Im(\Phi) \\ \Im(\Phi) & \Re(\Phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{s}) \\ \Im(\mathbf{s}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{w}) \\ \Im(\mathbf{w}) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \cdot \Phi_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbb{R}} + \mathbf{w}_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Soit encore l'équation générale

$$\mathbf{y}_{\mathbb{R}} = \mathbf{M}_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbb{R}} + \mathbf{w}_{\mathbb{R}} \quad (2.4)$$

avec ici, une matrice génératrice du réseau de points de dimension 8 :  $\mathbf{M}_{\mathbb{R}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \cdot \Phi_{\mathbb{R}}$ .

Pour un système MIMO codé, la matrice génératrice du réseau de points reçu  $M_{\mathbb{R}}$  est la combinaison de la matrice génératrice du réseau de points émis  $\Phi_{\mathbb{R}}$  et de la matrice des coefficients de canal  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ . La difficulté du décodage repose sur la structure déformée du réseau de points étudié.

## 2.2 Décodage au maximum de vraisemblance

De façon générale, le décodage de l'équation (2.3) dans le cas cohérent et au sens du maximum de vraisemblance minimise la distance quadratique

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \text{Code}} |\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{X}|^2.$$

Pour un réseau de points  $\Lambda$ , le décodage ML devient

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} |\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{G}\lambda|^2. \quad (2.5)$$

Cela revient à rechercher  $\hat{\lambda}$ , le point le plus proche<sup>3</sup> du vecteur  $\mathbf{y}$  dans le réseau de points  $\Lambda$  défini tel que

$$\|\mathbf{y} - \hat{\lambda}\| \leq \|\mathbf{y} - \lambda\|, \forall \lambda \in \Lambda.$$

Pour un code en réseau de points  $\mathcal{C} = \{\mathbf{s} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}$  (2.1),

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} |\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{v}|^2$$

Pour un code infini, il n'est pas possible de réaliser un décodage ML (2.5) effectuant une recherche exhaustive sur tous les mots de code. Pour un code fini, cet algorithme s'avère généralement trop complexe. L'utilisation de la structure en réseau de points permet alors de simplifier la recherche.

[Pohst, 1981] a proposé de rechercher le point le plus proche à l'intérieur d'une hypersphère. La recherche se fait de façon exhaustive à l'intérieur de la sphère, mais la zone d'intérêt est ainsi restreinte.

Deux décodeurs optimaux découlent de la méthode de Pohst : Le Sphere Décodeur et le décodeur de Schnorr-Euchner.

Nous allons présenter de manière plus générale la stratégie de Pohst comme un cas particulier de l'algorithme de recherche par arbre, appliqué à la résolution du problème de recherche du point le plus proche dans un réseau.

## 2.3 Décodages par arbre de recherche

Nous présentons une famille d'algorithmes de recherche du point le plus proche utilisant l'algorithme de branche et de borne<sup>4</sup> (BB) présentée par [Murugan et al, 2005]. Cet algorithme permet de décoder les

---

<sup>3</sup>Closest Lattice Point Search (CLPS)

<sup>4</sup>Branch and Bound algorithm

mots de code reçus de façon optimale ou heuristique<sup>5</sup>.

Nous allons, dans un premier temps former l'arbre de recherche par une mise en forme du signal reçu. Ensuite nous présenterons l'algorithme BB. Et enfin, nous présenterons des réalisations particulière de l'algorithme BB, comme les mises en pratique de la stratégie de Pohst.

Dans cette partie, nous nous intéresserons uniquement aux transmissions symétriques ( $M = N$ ). La matrice génératrice du réseau de points correspondant au signal reçu est donc carrée de dimension  $m = 2MT$ .

### 2.3.1 Formation de l'arbre

Le signal reçu de l'équation (2.4) doit de nouveau être mis en forme, afin de former l'arbre de recherche. La matrice génératrice du réseau est soumise à une décomposition QR :  $\mathbf{M}_{\mathbb{R}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$  où  $\mathbf{R}$  est une matrice triangulaire supérieure et  $\mathbf{Q}$  est une matrice orthonormale (*i.e.*  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_m$ ). L'équation (2.4) devient donc

$$\mathbf{y}_{\mathbb{R}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{s}_{\mathbb{R}} + \mathbf{w}_{\mathbb{R}}$$

La multiplication du réseau de points par la matrice orthonormale  $\mathbf{Q}$  engendre un réseau de point équivalent (*le même réseau de points*) et la recherche du point le plus proche peut donc s'écrire

$$\hat{\mathbf{s}}_{\mathbb{R}} = \arg \min_{\mathbf{s}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{Z}^m} |\mathbf{y}'_{\mathbb{R}} - \mathbf{R}\mathbf{s}_{\mathbb{R}}|^2$$

avec

$$\mathbf{y}'_{\mathbb{R}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{y}_{\mathbb{R}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{s}_{\mathbb{R}} + \mathbf{w}'_{\mathbb{R}} \quad (2.6)$$

Afin de simplifier l'algorithme de décodage, les indices des vecteurs et des matrices sont inversés et nous retiendrons l'expression générale du signal reçu

$$\begin{pmatrix} y_m \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{m,m} & \dots & \dots & r_{m,1} \\ 0 & r_{m-1,m-1} & \dots & r_{m-1,1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r_{1,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_m \\ \vdots \\ s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_m \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

A l'initialisation de l'algorithme, nous plaçons un point factice  $s_0$  à la racine de l'arbre. Un nœud au niveau  $k$  est noté  $\mathbf{s}^k = (s_1, s_2, \dots, s_k)$  et est associé à la distance quadratique

$$w_k(\mathbf{s}^k) = \left| y_k - \sum_{j=1}^k r_{k,j} \cdot s_j \right|^2. \quad (2.8)$$

---

<sup>5</sup>*i.e.* suboptimale

### 2.3.2 Algorithmes de recherche du point le plus proche

L'algorithme de recherche du point le plus proche doit trouver le meilleur chemin à l'intérieur de l'arbre de recherche. La hauteur de notre arbre étant  $m$ , un nœud  $\mathbf{s}^m$  de niveau  $m$ , correspond à une *feuille*<sup>6</sup> de l'arbre. Nous cherchons donc la feuille minimisant la distance quadratique

$$d^2(\mathbf{s}, \mathbf{s}^m) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{s}^i). \quad (2.9)$$

Il apparaît donc que, pour un code fini, l'algorithme effectuant une recherche exhaustive de la feuille minimisant la métrique voit sa complexité augmenter exponentiellement avec  $m$  et donc avec le nombre d'antennes. Nous allons donc utiliser l'algorithme BB, comparant les coûts des nœuds situés à l'intérieur de la zone de recherche, en utilisant une *fonction coût* et un *bornage*.

Pour cela, [Murugan et al, 2005] ont proposé un algorithme de recherche générique dont le choix des paramètres permet de retrouver des décodeurs connus.

### 2.3.3 Algorithme générique de recherche par arbre

Nous présentons tout d'abord les fonctions et les notations utilisées par l'algorithme.

- ACTIVE est la liste ordonnée des nœuds dont les branches restent à parcourir. Le premier nœud de cette liste est en cours de traitement et est dit actif.
- $f(\cdot)$  est la *fonction coût*.  $f(\mathbf{s}^k) \in \mathbb{R}$  est le coût du nœud  $\mathbf{s}^k$ .
- $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$  est le bornage. Il définit la zone de recherche dans le réseau et contrôle ainsi indirectement le nombre de branches de l'arbre. La région de recherche peut être réduite au cours de l'algorithme.
- Un nœud  $\mathbf{s}^k$  est dit *valide* si  $f(\mathbf{s}^k) < t_k$ .
- Tous les nœuds qui apparaissent à un moment dans ACTIVE sont dits *générés*. Le nombre de nœuds générés par l'algorithme est compté par la variable  $n_c$ .
- La fonction *sort* ordonne les nœuds dans la liste ACTIVE.
- La fonction *gen* définit l'ordre de génération des nœuds fils du nœud actif.
- Les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  permettent de réduire la taille de la zone de recherche.
- Le nœud feuille généré présentant la plus petite distance quadratique est stocké dans  $\hat{\mathbf{s}}$ .

Voici l'algorithme BB générique :

**BBG**( $f, \mathbf{t}, \text{sort}, \text{gen}, g_1, g_2$ )

#### 1. Initialisation

Créer une liste ACTIVE vide et y insérer le nœud racine  $s_0$ .

Initialiser le compteur :  $n_c \leftarrow 1$ .

#### 2. Soit $\mathbf{s}^k$ , le nœud actif.

---

<sup>6</sup>leaf node

Si  $\mathbf{s}^k$  est un nœud feuille ( $k = m$ ), alors

$$\mathbf{t} \leftarrow g_1(\mathbf{t}, f(\mathbf{s}^m)) \text{ et } \hat{\mathbf{s}} = \arg \min \left( \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{s}^i), \sum_{i=1}^m w_i(\hat{\mathbf{s}}) \right).$$

Retirer  $s^m$  de ACTIVE.

Aller à l'étape 4.

Si  $\mathbf{s}^k$  n'est pas un nœud valide, alors

Retirer  $s^m$  de ACTIVE.

Aller à l'étape 4.

Si tous les nœuds fils valides de  $\mathbf{s}^k$  ont déjà été générés, alors

Retirer  $s^m$  de ACTIVE.

Aller à l'étape 4.

Générer le nœud valide  $\mathbf{s}^{k+1}$ , fils de  $\mathbf{s}^k$  n'ayant pas encore été généré et conformément à l'ordre de génération fixé par *gen*. Placer  $\mathbf{s}^{k+1}$  dans ACTIVE et incrémenter le compteur :  $n_c \leftarrow n_c + 1$ . Recalculer les bornes :  $\mathbf{t} \leftarrow g_2(\mathbf{t}, n_c, \text{ACTIVE})$ . Réactualiser  $f(\mathbf{s}^k)$  et  $f(\mathbf{s}^{k+1})$ .

3. Ordonner les nœuds de ACTIVE selon la fonction *sort*.

4. Si ACTIVE est vide, fin de l'algorithme.

*Si non*, aller à l'étape 2.

Nous remarquons que  $g_1$  permet de resserrer les bornes lorsqu'un nœud feuille est atteint. Il est inutile de continuer à chercher des points du lattice plus éloignés et l'utilisation de  $g_1$  n'empêche pas forcément l'algorithme d'être optimal. Par contre  $g_2$  rétrécit la zone de recherche de façon à limiter la complexité de l'algorithme en stoppant par exemple l'algorithme lorsque le nombre maximal de nœuds générés  $n_{c \max}$  est atteint.

### 2.3.4 Décodeur par sphère

Nous présentons ici le Sphere Decoder comme une application du GBB. Mais historiquement, il découle de la stratégie de Pohst et de son analyse mathématique par [Fincke et Pohst, 1985]. Ensuite, [Viterbo et Biglieri, 1993] ont présenté une interprétation géométrique conduisant à son implémentation par [Viterbo et Boutros, 1999].

$\text{SD}(f, C, \text{sort}, \text{gen}, g_1)$

– Le décodeur SD est optimal et n'utilise donc pas de fonction  $g_2$  qui terminerait prématurément l'algorithme. En d'autres termes  $g_2(\mathbf{t}, n_c) = \mathbf{t} \forall n_c$ .

- La fonction coût d'un nœud correspond à la somme des distances quadratiques du nœud et de ses antécédents

$$f(\mathbf{s}^k) = \sum_{i=1}^k w_i(\mathbf{s}^i).$$

Le coût d'un nœud est donc indépendant de ses enfants et n'a donc jamais besoin d'être réactualisé.

- Toute les composantes du bornage  $\mathbf{t}$  sont initialisées à  $t = C$ . La zone de recherche est donc une hypersphère de rayon  $\sqrt{C}$  centrée sur le point reçu  $y'_\mathbb{R}$ . Tous les nœuds de l'espace de recherche satisfont donc la relation

$$\sum_{i=1}^k w_i(\mathbf{s}^i) \leq C.$$

La génération du nœud  $\mathbf{s}^{k+1}$  fils de  $\mathbf{s}^k$  doit donc vérifier

$$w_{k+1}(\mathbf{s}^{k+1}) \leq C - \sum_{i=1}^k w_i(\mathbf{s}^i)$$

$$\text{soit } \left| y_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} r_{k+1,j} \cdot s_j \right|^2 \leq C - f(\mathbf{s}^k).$$

Lors de la génération de  $\mathbf{s}^{k+1}$ , le choix de la  $(k+1)^{\text{ème}}$  composante  $s_{k+1}$  est donc limité à un intervalle  $[a_0, a_1]$ .

- La fonction *sort* n'actualise pas l'ordre de traitement et celui-ci opère donc comme une LIFO<sup>7</sup>. Les nœuds sont donc placés dans ACTIVE dans l'ordre inverse de leur génération.
- Pour générer un nœud  $\mathbf{s}^{k+1}$ , fils de  $\mathbf{s}^k$ , la fonction *gen* choisit de prendre les  $\mathbf{s}^{k+1} = (\mathbf{s}^k, s_{k+1})$  dans l'ordre des  $s_{k+1}$  croissants. Sur l'intervalle  $[a_0, a_1]$ ,  $a_0$  est donc choisi en premier.
- La fonction  $g_1$  change le bornage lorsqu'un nouveau meilleur candidat au point le plus proche est trouvé :

$$g_1(t, f(\mathbf{s}^m)) = \min(t, f(\mathbf{s}^m)).$$

L'algorithme ainsi présenté ne correspond pas exactement à l'algorithme SD historique de [Viterbo et Boutros, 1999]. L'arbre de recherche de l'algorithme SD est formé à partir de l'équation (2.4)

$$\mathbf{y}_\mathbb{R} = \mathbf{M}_\mathbb{R} \cdot \mathbf{s}_\mathbb{R} + \mathbf{w}_\mathbb{R},$$

la recherche du point le plus proche minimise la métrique  $\|\mathbf{y}_\mathbb{R} - \mathbf{M}_\mathbb{R} \cdot \mathbf{s}_\mathbb{R}\|$ .

<sup>7</sup> Last In First Out ; le dernier nœud généré occupe la première position de la liste ACTIVE

Cette recherche étant difficile sur le réseau déformé par  $\mathbf{M}_{\mathbb{R}}$ , elle est réalisée sur  $\mathbb{Z}^m$ . Pour cela, nous calculons le point ZF<sup>8</sup> du mot de code reçu :  $\mathbf{y}_{\mathbb{R}} = \mathbf{M}_{\mathbb{R}} \cdot \rho$  et nous introduisons  $\mathbf{M}_{\mathbb{R}} \cdot \xi = (\mathbf{y}_{\mathbb{R}} - \mathbf{M}_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbb{R}})$ , soit  $\xi = \rho - \mathbf{s}_{\mathbb{R}}$ . Le point  $\xi \in \mathbb{R}^m$  est donc une translation de  $\mathbf{s}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{Z}^m$ .

Nous retrouvons un réseau non-déformé, mais la zone de recherche du point le plus proche, qui était auparavant une hypersphère centrée sur  $\mathbf{y}_{\mathbb{R}}$  est devenue un ellipsoïde centré sur l'origine et définie par

$$\|\mathbf{y}_{\mathbb{R}} - \mathbf{M}_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbb{R}}\|^2 = \mathcal{Q}(\xi) = \xi^{\mathbf{T}} \mathbf{M}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{T}} \mathbf{M}_{\mathbb{R}} \xi = \xi^{\mathbf{T}} \mathbf{G} \xi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_{i,j} \xi_i \xi_j \leq C$$

où  $\mathbf{G} = \mathbf{M}^{\mathbf{T}} \mathbf{M}$  est la matrice de Gram de  $M$ .

La factorisation de Cholesky de la matrice de Gram  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^{\mathbf{T}} \mathbf{R}$  permet de faire apparaître la matrice  $\mathbf{R}$  triangulaire supérieure et remplace donc la décomposition QR. Nous retrouvons donc la distance quadratique définie par (2.8) et (2.9)

$$d^2(\mathbf{s}, \mathbf{s}^m) = \sum_{i=1}^m w_i (\mathbf{s}^i).$$

Dans la pratique, le calcul de la matrice de Gram suivi de la factorisation de Cholesky nécessite plus d'opérations arithmétiques que la décomposition QR, qui sera donc privilégiée. La factorisation de Cholesky est toujours présentée, car elle était utilisée dans les premiers décodeurs par sphère.

Pour les constellations finies, il convient de prendre en compte la forme<sup>9</sup> de la constellation. Pour cela, il suffit d'intégrer cette contrainte sur la génération des nœuds fils. Les nœuds valides ne doivent plus seulement être choisis sur l'intervalle  $[a_0, a_1]$ , afin de rester dans la zone de recherche, mais ils doivent aussi être dans l'intervalle  $[c_{min}, c_{max}]$ . Si la forme de la constellation n'est pas un paralléloépe, les valeurs de  $c_{min}$  et  $c_{max}$  d'une couche  $k + 1$  peuvent dépendre des valeurs prises sur les couches précédentes. L'ensemble des nœuds valides correspond donc à l'intersection des intervalles

$$[a_0, a_1] \cap [c_{min}, c_{max}] = [\sup(a_0, c_{min}), \inf(a_1, c_{max})].$$

**Critères de choix du rayon de la sphère** Le choix du rayon est déterminant pour la vitesse de convergence de l'algorithme. D'une part, afin de garantir la présence d'un point du réseau à l'intérieur de la sphère, le rayon  $\sqrt{C}$  ne doit pas être trop petit, soit au moins le rayon de recouvrement du réseau. Si la sphère choisie ne contient aucun point du réseau, il faudra réitérer l'algorithme avec un rayon plus grand. D'autre part, un trop grand rayon placera trop de points dans la sphère, augmentant la complexité et le temps de décodage.

Ne connaissant pas le rayon de recouvrement, il nous faut trouver d'autres critères de choix de  $C$ . Nous présentons plusieurs choix possibles pour le rayon de la sphère :

---

<sup>8</sup> *Zero Forcing*

<sup>9</sup> *shapping*

1. Le rayon de recouvrement de la sphère peut être approximé par la borne supérieure de Rogers ([Conway et Sloane, 1988])

$$C_1 = \left( (m \log m + m \log \log m + 5m) \frac{\sqrt{\det(\mathbf{M}_{\mathbb{R}} \mathbf{M}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{T}})}}{V_m} \right)^{\frac{2}{m}}$$

où  $\sqrt{\det(\mathbf{M}_{\mathbb{R}} \mathbf{M}_{\mathbb{R}}^{\mathbf{T}})}$  est le volume fondamental du réseau de points et  $V_m$  est le volume d'une sphère unitaire de dimension  $m$ .

2. Il paraît naturel de faire intervenir l'estimation du rapport signal à bruit dans le choix du rayon : lorsque le bruit est faible, il est probable que le point reçu soit proche d'un point du réseau et il est alors possible de prendre une petite zone de recherche. A contrario, lorsque le SNR diminue il convient d'augmenter le rayon de la la sphère. [Hassibi et Vikalo, 2001] proposent de fixer le rayon en fonction du SNR

$$C_2 = 2 \cdot m \cdot \rho .$$

3. Ce sont les évanouissements du canal qui déforment le réseau de points et compliquent la recherche de point le plus proche. Une dimension qui subit un fort évanouissement est compressée et voit les points du réseau se rapprocher. Il semble donc intéressant de choisir la ligne la moins énergétique de la matrice génératrice du réseau  $\mathbf{M}$  :

$$C_3 = \min (\text{diag} (\mathbf{M} \mathbf{M}^{\mathbf{T}})) .$$

Il est également possible de combiner les critères du bruit et des évanouissements

$$C_4 = \min (\min (\text{diag} (\mathbf{M} \mathbf{M}^{\mathbf{T}})), 2 \cdot m \cdot \rho) .$$

### 2.3.5 Décodeur de Schnorr-Euchner

Plus récemment, [Agrell et al, 2002] ont développé un nouvel algorithme de recherche du point le plus proche à l'intérieur de l'hypersphère de Pohst. Ce nouveau décodeur est basé sur une variante de la stratégie de Pohst proposée par [Schnorr et Euchner, 1994].

L'implémentation du décodeur de Schnorr-Euchner (SE) est très proche de celle du SD. Il reprend :  
 – les mêmes fonctions de réduction de la zone de recherche :  $g_1(t, f(\mathbf{s}^m)) = \min(t, f(\mathbf{s}^m))$  lorsqu'un meilleur point est trouvé et  $g_2(\mathbf{t}, n_c) = \mathbf{t} \forall n_c$  pour un décodage optimal.

- la même fonction coût
- le décodeur SE est lui aussi optimal et ne s'arrête pas en cours de traitement :  $g_2(\mathbf{t}, n_c) = \mathbf{t} \forall n_c$ .
- la fonction coût d'un nœud correspond toujours à la somme des distances quadratiques du nœud et de ses antécédents

$$f(\mathbf{s}^k) = \sum_{i=1}^k w_i(\mathbf{s}^i).$$

- la fonction *sort* n'actualise pas l'ordre de traitement et les nœuds sont placés dans ACTIVE dans l'ordre inverse de leur génération.

La différence entre le SE et le SD réside dans la fonction *gen* qui fixe l'ordre de génération des nœuds fils du nœud actif. Alors que le SD choisit les nœuds fils  $\mathbf{s}^{k+1} = (\mathbf{s}^k, s_{k+1})$  dans l'ordre des  $s_{k+1}$  croissants et balaye ainsi la sphère en partant d'un point de la surface, le SE parcourt la sphère du centre vers l'extérieur :

Soit  $\mathbf{x}_k$  un nœud père et  $[a_0, a_1]$  l'intervalle de choix des  $s_{k+1}$  engendrant des nœuds fils  $\mathbf{s}^{k+1}$  valides, calculons  $a_{k+1} = \lfloor \frac{a_0 + a_1}{2} \rfloor$  et  $\delta = \text{sign } w_{k+1}(\mathbf{s}^{k+1})$ . Alors la fonction *gen* du SE génère les nœuds suivant l'ordre  $\{a_{k+1}, a_{k+1} + \delta, a_{k+1} - \delta, a_{k+1} + 2\delta, a_{k+1} - 2\delta, \dots\}$  pour les  $s_{k+1}$ .

La génération des nœuds fils de  $\mathbf{x}_k$  se fait donc dans l'ordre croissant de la distance quadratique  $w_{k+1}(\mathbf{s}^{k+1})$ . Le premier nœud fils généré étant  $\mathbf{s}^{k+1} = (\mathbf{s}^k, a_{k+1})$  avec

$$a_{k+1} = \arg \min_{s_{k+1} \in \mathbb{Z}} w_{k+1}(\mathbf{s}^{k+1}) = \arg \min_{s_{k+1} \in \mathbb{Z}} \left| y_{k+1} - \sum_{j=1}^k r_{k+1,j} \cdot s_j - r_{k+1,k+1} \cdot s_{k+1} \right|^2.$$

Ainsi le premier nœud feuille généré, c'est à dire le premier point du réseau trouvé  $\hat{\mathbf{s}} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  appelé *Babai point* correspond au décodage ZF-DFE, c'est à dire le point obtenu par projections successives du signal reçu sur les dimensions du réseau.

Toutes les composantes du bornage  $\mathbf{t}$  du SE peuvent être initialisées à  $t = C$ , comme pour le SD.

Néanmoins, le *Babai point* étant un relativement bon candidat pour la recherche du point le plus proche, il est possible de ne pas définir de rayon de sphère a priori (ce qui revient à prendre un rayon infini) et de prendre opportunément celui-ci comme la distance quadratique entre le point reçu et le *Babai point*

$$C = d^2(\mathbf{s}, \mathbf{s}_{\text{Babai}}) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{s}_{\text{Babai}}^i).$$

Le fait que le SE parcourt la sphère de recherche en partant du *Babai point* proche du centre et ajuste immédiatement le rayon, permet de diminuer le nombre de nœuds générés et donc la complexité

de l'algorithme.

De plus, le SE s'avère plus facilement exploitable pour une implémentation hardware que le SD : comme il commence par générer les nœuds les plus proches du centre a priori, un arrêt prématuré de l'algorithme en cas de convergence trop lente garantit un résultat suboptimal au moins aussi bon que le ZF-DFE.

La construction de l'arbre de recherche du SE se fait comme dans le cas général (2.3.1) à l'aide d'une décomposition QR. Les prédécodages du SE et du SD - décomposition QR, inversion et multiplication matricielle - présentant des complexités comparables, il est donc préférable d'adopter le décodeur de Schnorr-Euchner pour effectuer un décodage au maximum de vraisemblance.

### 2.3.6 Algorithmes séquentiels

Il existe de nombreux algorithmes suboptimaux de décodage par arbres. Nous nous intéressons ici à l'algorithme Stack de [Zigangirov, 1966] et [Jelinek, 1969] et à l'algorithme de [Fano, 1963] repris par [Murugan et al, 2005].

Les algorithmes optimaux peuvent être arrêtés prématurément, si le temps de calcul est jugé trop long via la fonction  $g_2$ , mais nous allons présenter d'autres mécanismes accélérant la recherche.

L'algorithme d'élagage statistique à rayons croissants (RC) de [Gowaikar et Hassibi, 2003] utilise

- une fonction coût d'un nœud correspondant à la somme des distances quadratiques du nœud et de ses antécédents

$$f(\mathbf{s}^k) = \sum_{i=1}^k w_i(\mathbf{s}^i).$$

- des bornes de recherches  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$ , avec, par exemple,  $t_k = b \cdot k + \delta$ , où  $b \in \mathbb{R}^+$  correspond à un biais augmentant la zone de recherche au fur et à mesure que nous ajoutons des dimensions et que nous nous rapprochons des feuilles de l'arbre.  $\mathbf{t}$  restant constant tout le long de l'algorithme, la fonction  $g_1$  n'est donc pas utilisée :

$$g_1(t, f(\mathbf{s}^m)) = \mathbf{t}.$$

Pour être valide, un nœud doit donc vérifier  $\sum_{i=1}^k w_i(\mathbf{s}^i) \leq b \cdot k + \delta$ , et l'algorithme ira chercher tous les points du réseau contenus dans une région non sphérique.

L'algorithme Stack utilise lui aussi un biais, mais sur la fonction coût. La fonction coût d'un nœud  $\mathbf{s}^k$

dépend de  $\mathbf{s}_g^k$ , le meilleur de ses nœuds fils n'ayant pas encore été généré

$$f(\mathbf{s}^k) = \sum_{i=1}^k w_i(\mathbf{s}^i) + w_k + 1(\mathbf{s}_g^{k+1}) - b(k+1).$$

A chaque génération d'un nœud, sa fonction coût est calculée et celle de son père est recalculée. De plus, les nœuds de la liste ACTIVE sont réordonnés dans l'ordre croissant de leur fonction coût. L'algorithme s'arrête dès qu'un nœud feuille est trouvé, il n'utilise donc pas de bornes ni de rayon de recherche.

L'algorithme Stack génère moins de nœuds que l'algorithme RC utilisant le même biais. De plus, lorsque le biais est nul, l'algorithme Stack est optimal et il est l'algorithme générant le moins de nœuds de tous les algorithmes optimaux ([Xu et al, 2004]). Enfin, le biais de l'algorithme est très pratique pour faire un compromis entre performance et complexité. Pour  $b = 0$  le décodeur Stack trouve le point le plus proche du réseau (ML). Lorsque  $b$  augmente, la complexité diminue jusqu'à obtenir le décodeur ZF-DFE (Babai point) pour  $b$  tendant vers l'infini.

Néanmoins, s'il génère peu de nœuds, l'algorithme Stack présente des inconvénients :

- Il impose le calcul de deux fonctions coût à chaque génération.
- Aucun nœud feuille n'est calculé avant la fin du décodage, ce qui peut poser des problèmes pratiques si la recherche s'avère trop longue. Si la fin du calcul s'impose, il faut effectuer un ZF-DFE du meilleur nœud trouvé, c'est à dire trouver le *Babai point* par projection sur les dernières dimensions du réseau.
- Il peut nécessiter une très grande place en terme de mémoire afin de stocker tous les nœuds de la liste ACTIVE. Ceci s'avère particulièrement handicapant pour une implémentation hardware de l'algorithme et risque de provoquer un arrêt prématuré de l'algorithme en cas de dépassement des ressources matérielles disponibles.

Motivés par le faible nombre de nœuds générés par l'algorithme Stack, [Murugan et al, 2005] l'ont repris en modifiant son implémentation, afin de brider son appétit en mémoire. Pour cela, leur algorithme ne garde en mémoire qu'un seul nœud, mais s'autorise en contre-partie à rechercher un même nœud plusieurs fois. La zone de recherche augmente progressivement et l'algorithme se termine lorsqu'un nœud feuille est trouvé. Cet algorithme correspond à l'algorithme proposé par [Fano, 1963] avec la fonction coût de l'algorithme Stack et peut être vu comme une version itérative de celui-ci.

## 2.4 Prétraitements

Lors de la formation de l'arbre de recherche en 2.3.1, nous avons procédé à une décomposition QR de la matrice génératrice du réseau de points. Dans le cas général à  $M$  antennes d'émission et  $N$  antennes de réception, nous avons :  $\mathbf{M}_{\mathbb{R}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$  où  $\mathbf{M}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est une matrice triangulaire supérieure et  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est une matrice orthonormale.

La recherche du point le plus proche peut alors s'écrire

$$\hat{\mathbf{s}}_{\mathbb{R}} = \arg \min_{\mathbf{s}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{Z}^m} |\mathbf{y}'_{\mathbb{R}} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{s}_{\mathbb{R}}|^2$$

avec

$$\mathbf{y}'_{\mathbb{R}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{y}_{\mathbb{R}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{s}_{\mathbb{R}} + \mathbf{w}_{\mathbb{R}}.$$

Un handicap au décodage de l'arbre, est la non-orthogonalité de la matrice génératrice  $\mathbf{M}_{\mathbb{R}}$ . Le réseau de points avec une base peu équilibrée - base fortement non-orthogonale et composée de vecteurs de grandes tailles - sera difficile à décoder. En effet, lors du décodage d'une base déséquilibrée, le point du réseau le plus proche du mot reçu risque de présenter, à certaines couches, des distances quadratiques  $w_k(\mathbf{s}^k)$  (2.8) beaucoup plus grandes que certains autres points du réseau. L'algorithme de décodage explorera alors de nombreuses branches de l'arbre avant de retrouver le point le plus proche, et a de grandes chances de se tromper de point avec un algorithme suboptimal.

Cette difficulté peut être levée à l'aide de **réductions de réseaux de points** qui seront vues en 2.4.1.

Pour le décodage de l'arbre, nous avons implicitement supposé que la matrice  $\mathbf{R}$  n'avait pas de zéro sur la diagonale, c'est à dire que  $\mathbf{M}_{\mathbb{R}}$  et  $\mathbf{R}$  étaient de rang plein. Si un espacement suffisant entre les antennes de chaque transmetteur permet de considérer l'indépendance des coefficients de canal entre toutes les antennes émettrices et toutes les antennes réceptrices, cela ne garantit pas le rang plein de la matrice de canal. En effet, des phénomènes de trous de serrure<sup>10</sup> où l'ensemble des trajets passe par un même point de l'espace, peuvent rendre le rang de la matrice de canal unitaire [Chizhik et al, 2002].

De plus, la matrice  $\mathbf{M}_{\mathbb{R}}$  peut être mal conditionnée. Dans ce cas, certains termes diagonaux de la matrice  $\mathbf{R}$  sont très faibles devant d'autres. Le décodage de l'arbre est cette fois possible mais plus complexe et peu efficace, les points du réseau étant compressés dans les directions correspondant aux faibles coefficients.

Ces difficultés peuvent être réduites, grâce au prétraitement **MMSE-GDFE** proposé par [Damen et al, 2004] et présenté en 2.4.2.

### 2.4.1 Réduction d'un réseau de points

La formation de notre arbre de recherche nécessite une mise en forme triangulaire supérieure de  $\mathbf{R}$  par décomposition QR de la matrice génératrice du réseau. La matrice génératrice est supposée ici de rang plein et les éléments diagonaux de  $\mathbf{R}$  sont donc tous strictement positifs. Par contre  $\mathbf{R}$  peut avoir des co-

---

<sup>10</sup> *keyhole*

lonnes fortement non orthogonales, compliquant considérablement le travail du décodeur. Les algorithmes de réduction de matrice permettent d'obtenir une matrice triangulaire plus aisée à manipuler, dont les valeurs des coefficients non diagonaux sont plus homogènes. La matrice  $\mathbf{R}$  "moins non-orthogonale" ainsi obtenue est plus favorable au décodage.

Les figures 2.4.1 (a) et (b) présentent un réseau de points QAM en dimension 2 avant et après le filtrage par le canal MIMO et mettent en évidence de façon géométrique, l'intérêt des réductions. Le réseau est déformé par le canal et les vecteurs de la base ne sont alors plus orthonormaux. La réduction opérée figure (c) permet de retrouver des vecteurs à la fois plus courts et plus orthogonaux. Les régions de Voronoï redeviennent alors plus proches de carrés.

Nous allons présenter dans un premier temps des généralités sur la réduction de réseaux de points, puis nous traiterons des réductions de Minkowski, de Korkine-Zolotareff (KZ) et de Lenstra, Lenstra et Lovasz (LLL).

#### 2.4.1.1 Orthogonalisation de Gram-Schmidt

La plupart des algorithmes de réduction utilisent des orthogonalisations afin de travailler indépendamment sur les sous-espaces du réseau. La décomposition QR peut également être réalisée par l'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Soit  $\mathbf{b}_i$ ,  $i = 1..n$  une base d'un espace euclidien de dimension  $n$ . Une base orthogonale  $\mathbf{b}_i^*$  de cet espace euclidien peut être obtenue par l'orthogonalisation de Gram-Schmidt :

$$\mathbf{b}_i^* = \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{i,j} \mathbf{b}_j^* \quad (1 \leq i \leq n)$$

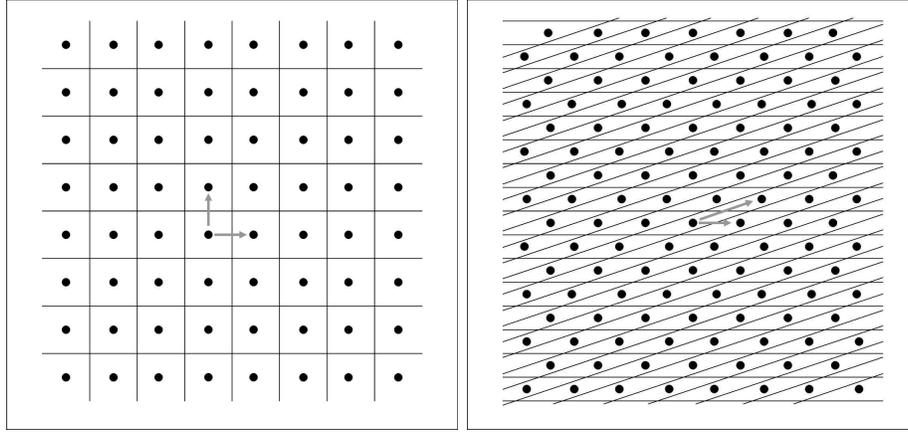
avec

$$\mu_{i,j} = \frac{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^* \rangle}{|\mathbf{b}_j^*|^2} \quad (1 \leq j < i \leq n).$$

Il est facile d'obtenir une base orthonormale, en normalisant les vecteurs de la base orthogonale :  $\frac{\mathbf{b}_i^*}{|\mathbf{b}_i^*|}$ .

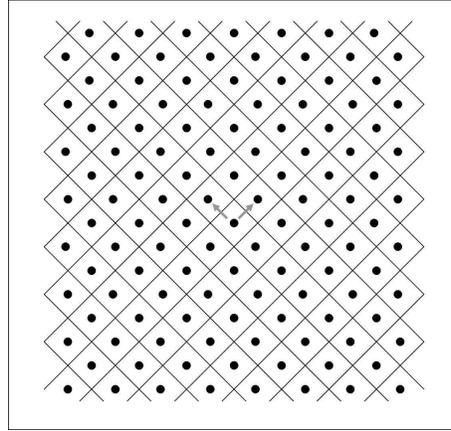
Un réseau de point est un sous-groupe de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  qui possède une infinité de bases. Soit  $\mathbf{B}$  une base du réseau de points  $\mathbf{A}$ . Pour que la matrice  $\mathbf{B}^* = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}$  soit elle aussi une base de  $\mathbf{A}$ , elle doit engendrer les mêmes points, autrement dit,  $\mathbb{Z}^n$  doit être stable par multiplication par  $\mathbf{U}$ . La matrice de changement de base  $\mathbf{U}$  doit alors être à valeurs entières, inversible et son inverse doit également être à valeurs entières. Ces propriétés ne sont pas assurées par l'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Le processus de sélection d'une base bien équilibrée du réseau est appelé réduction.

Les très fortes contraintes sur la matrice de changement de base font qu'il n'existe probablement pas de base orthonormale du réseau. La réduction se contente donc d'une base dont les vecteurs sont courts



(a) Réseau de points QAM

(b) Réseau de points filtré par le canal



(c) Réseau de points réduit

FIG. 2.1 – Régions de Voronoï d'un réseau de points et intérêt de la réduction

et raisonnablement orthogonaux. Nous présentons plusieurs techniques de réduction classiques offrant différents compromis entre efficacité et complexité.

### 2.4.1.2 Réduction de Minkowski

La réduction de Minkowski procède par récurrence en cherchant le vecteur le plus court dans le réseau de points privé du sous-espace engendré par les vecteurs déjà sélectionnés.

Soit  $\Lambda$ , un réseau de points de dimension  $n$ . La base  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  est réduite au sens de Minkowski si

- $\mathbf{b}_1$  est le vecteur le plus court de  $\Lambda$ ,
- pour tout  $i = 2 \dots n$ ,  $\mathbf{b}_i$  est le vecteur indépendant des  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}$  le plus court dans  $\Lambda$ .

La réduction de Minkowski n'est pas implémentable et reste donc uniquement utilisée dans le domaine de la théorie des nombre. D'autres réductions ont été proposées pour les utilisations numériques.

### 2.4.1.3 Réduction KZ

La réduction de Korkine-Zolotareff est une variante implémentable de la réduction de Minkowski. Les vecteurs de la base réduite sont cette fois pris dans le sous-espace perpendiculaire au sous-espace engendré par les vecteurs déjà générés de la nouvelle base.

Soit  $\Lambda$ , un réseau de points de dimension  $n$ . La base  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  est KZ réduite si

- $\mathbf{b}_1$  est le vecteur le plus court de  $\Lambda$ ,
- pour tout  $i = 2 \dots n$ ,  $\Lambda_i$  est la projection de  $\Lambda$  sur le sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  perpendiculaire au sous-espace engendré par  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1})$ .  $\mathbf{b}_i$  est le vecteur le plus court dans  $\Lambda_i$ .

Toutes les implémentations de l'algorithme de réduction KZ présentent des complexités exponentielles, c'est pourquoi la réduction LLL est souvent préférée.

### 2.4.1.4 Réduction LLL

L'algorithme de réduction proposé par [Lenstra et al, 1982] est très utilisé, car il est déterministe et sa complexité est polynomiale.

La complexité exponentielle de l'algorithme KZ vient du fait qu'il cherche le vecteur le plus court  $\mathbf{b}_i$  dans tout l'espace de dimension  $n - i + 1$ . Les vecteurs  $\mathbf{b}_i$  de la base KZ réduite sont donc tels que  $\forall i = 1 \dots n$ ,  $\mathbf{b}_i$  est le vecteur le plus court dans le sous-espace engendré par  $(\mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{b}_n)$ .

La réduction LLL est plus locale et se contente d'une base telle que pour tout  $i = 1 \dots n$ ,  $\mathbf{b}_i$  est le vecteur le plus court dans le sous-espace engendré par  $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i-1})$ . Bien sûr, le prix à payer pour cette relative simplicité est l'obtention d'une moins bonne base réduite. La base LLL réduite ne contiendra pas le vecteur le plus court, mais seulement une approximation de celui-ci.

Une généralisation des réductions KZ et LLL a été proposée par [Schnorr, 1987]. La réduction KZ par blocs consiste à rechercher le vecteur le plus court dans l'espace engendré par  $k$  vecteurs. Nous retrouvons le LLL pour  $k = 2$  et le KZ pour  $k = n$ .

### 2.4.1.5 Réduction algébrique

Cette nouvelle méthode permet de réduire les réseaux de points algébriques et a été présentée par [Rekaya et al, 2004] dans le cas mono-antennaire. Cette technique approxime les évanouissements du canal par le plongement canonique d'un élément de l'anneau des entiers du corps de construction du code. Les performances de la réduction algébrique sont comparables au LLL, et même meilleures pour les réseaux de points de grande dimension.

La réduction algébrique a été adaptée par D. Champion et J-C Belfiore au MIMO dans le cas bi-antennaire du Golden Code.

## 2.4.2 Mise en forme MMSE-GDFE

Les décodeurs de réseaux de points ne considèrent que des réseaux infinis et ne prennent pas en compte le shapping. Lorsque la constellation est cubique, il est facile d'arrêter la recherche du point le plus proche, si on sort de la région  $\mathcal{R}$ . Néanmoins, même pour des formes simples, les inéquations du

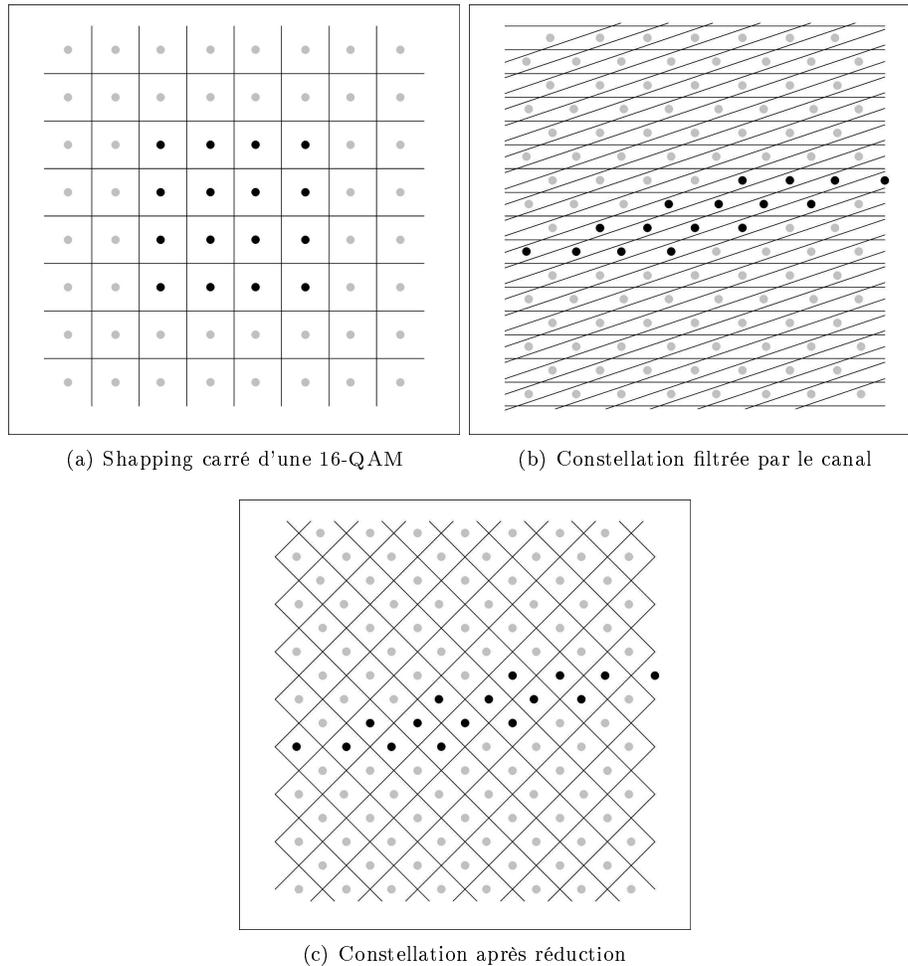


FIG. 2.2 – Perte de la forme de la constellation après réduction

shapping deviennent très compliquées après avoir effectué une réduction.

Les figures 2.4.2 reprennent les figures 2.4.1 en ajoutant le shapping. La constellation 16-QAM carrée en (a) est déformée par le canal en (b), et après réduction en (c) la détermination de sa forme n'est plus triviale, alors que nous ne sommes qu'en dimension 2. La forme de la constellation s'avère très difficile à retrouver sur des réseaux réduits de grande dimension.

L'utilisation d'un pré-traitement MMSE<sup>11</sup>-GDFE permet de se dégager des problèmes de shapping, en neutralisant les évanouissements du canal et en compressant le bruit additif. Ainsi le point du réseau le plus proche a-t-il de grandes chances de se trouver dans la constellation.

Le MMSE-GDFE peut aussi être avantageusement employé pour le décodage de codes dont le shapping n'est pas cubique, comme les codes sphériques et les codes de Voronoï ([Gamal et al, 2004]).

Enfin, le MMSE-GDFE permet d'utiliser un décodeur de réseaux de points, même lorsque le système

<sup>11</sup> *Minimum Mean Square Error*

d'équation est sous-déterminé, car le nombre d'antennes d'émission est supérieur au nombre d'antennes de réception ( $M \geq N$ ) ([Damen et al, 2004]).

Lors de la construction de l'arbre de recherche 2.3.1, nous avons procédé à une décomposition QR de la matrice génératrice du réseau :  $\mathbf{M}_{\mathbb{R}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$  où  $\mathbf{R}$  est une matrice triangulaire supérieure, permettant ainsi un simple décodage récursif du mot de code reçu. L'égaliseur à retour de décision ZF-DFE, donnant le *Babai point*, prend  $\mathbf{Q}^T$  comme matrice directe et  $\mathbf{R}$  comme matrice de retour (2.6). De même, les décodeurs par arbres de recherche que nous avons étudiés peuvent être vus comme des ZF-DFE avec des boucles de recherche. Ils ne prennent donc pas en compte le rapport signal à bruit, qui permet au MMSE-DFE d'avoir de meilleures performances que le ZF-DFE, dans l'hypothèse d'un retour de décision correct. [Damen et al, 2004] ont donc proposé un prétraitement intégrant le SNR et permettant un décodage de type MMSE.

Dans un premier temps, nous allons réaliser une décomposition QR de la matrice de canal seule. Pour cela, nous définissons la matrice canal augmentée

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \\ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

et sa décomposition QR

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{R}} = \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{R}_1$$

où  $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$  est orthonormale et  $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux strictement positifs. Dans la suite, nous utiliserons  $\mathbf{Q} = \mathbf{H} \mathbf{R}_1^{-1}$ , correspondant aux  $n$  premières lignes de  $\tilde{\mathbf{Q}}$ .

L'augmentation de la matrice de canal permet, entre autre, de garantir que la décomposition QR est pratiquée sur une matrice  $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{R}}$  de rang  $m$ .

Ensuite, le MMSE-DFE est réalisé en prenant  $\mathbf{F} = \mathbf{Q}^T$  pour la matrice directe et  $\mathbf{B} = \mathbf{R}_1$  pour la matrice de retour de la boucle. Comme, par construction,  $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{R}}^T \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbb{R}} = \frac{1}{\rho} \mathbf{I}_m + \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^T \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ , la matrice  $\mathbf{B}$  est bien conditionnée et toujours inversible lorsque  $\rho \neq \infty$ . De plus, nous voyons apparaître  $\frac{1}{\rho} \mathbf{I}_m$ , le terme du MMSE prenant en compte le bruit.

Le filtrage direct donne alors

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_{\mathbb{R}} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{y}_{\mathbb{R}} \\ &= \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{s}_{\mathbb{R}} + \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_{\mathbb{R}} - [\mathbf{B} - \mathbf{F} \mathbf{H}_{\mathbb{R}}] \mathbf{G} \mathbf{s}_{\mathbb{R}} \\ &= \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{s}_{\mathbb{R}} + \mathbf{w}'_{\mathbb{R}} . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nous voyons que dans la nouvelle expression du bruit  $\mathbf{w}'_{\mathbb{R}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{w}_{\mathbb{R}} - [\mathbf{B} - \mathbf{F} \mathbf{H}_{\mathbb{R}}] \mathbf{G} \mathbf{s}_{\mathbb{R}}$ , le second terme

est non-gaussien et est biaisé car dépendant du signal. La minimisation de la distance euclidienne

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \text{Code}} |\mathbf{y}' - \mathbf{BGs}|^2 \quad (2.11)$$

différentiera donc du décodage ML (2.5) et sera ainsi suboptimale.

Dans la pratique, la minimisation de la distance (2.11) donne des performances très proches du ML. Le prix à payer pour lutter contre les grands évanouissements du canal et obtenir une meilleure matrice génératrice de réseau  $\mathbf{BG}$  ne paraît donc pas prohibitif. De plus, le MMSE-DFE atténue l'effet du bruit en rapprochant le vecteur  $\mathbf{y}'$  du point du réseau transmis.

L'algorithme de réduction peut ensuite être appliqué sur la nouvelle matrice génératrice du réseau  $\mathbf{BG}$  avant le décodage par un *lattice decoder*.

## 2.5 Décodeur itératif

Nous présentons ici un nouveau décodeur itératif pour les codes ST linéaires, dont la structure est dérivée de l'égaliseur itératif en blocs présenté par [Chan et Wornell, 2001].

Cet égaliseur itératif permet de supprimer les interférences entre symboles (ISI<sup>12</sup>) car il est beaucoup moins complexe que le ML, et moins sensible au bruit que les égaliseurs linéaires. Comme le DFE, il utilise une boucle de retour de décision pour traiter les interférences dues à l'étalement des symboles, en revanche il permet d'annuler toutes les interférences et pas seulement les *postcursors*<sup>13</sup> ISI. Le décodeur itératif présenté ici est une reprise sous forme matricielle de cet égaliseur et a déjà été étudiée par Sandra Galliou et Jean-Claude Belfiore (rapport technique). Il est basé sur le fait que la matrice génératrice d'un code ST ressemble à celle d'un canal avec ISI.

Nous travaillons sur une représentation vectorisée du mot reçu comme vu au paragraphe 2.1.2. Le mot de code ST reçu est mis sous la forme d'un vecteur de longueur  $NT$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \text{vect } \mathbf{Y}_{N \times T} \\ &= \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_{MT} + \text{vect } \mathbf{W} \\ &= \mathbf{H}_{NT \times MT} \cdot \Phi \cdot \mathbf{s} + \mathbf{w}_{N \cdot T} \\ &= \mathbf{H}' \cdot \mathbf{s} + \mathbf{w}_{N \cdot T} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{s}$  est le vecteur des symboles d'information (PSK ou QAM). Dans toute la suite, nous exploiterons cette dernière formule en notant  $\mathbf{H}$  la nouvelle matrice de canal  $\mathbf{H}'$ .

<sup>12</sup>Intersymbol interference

<sup>13</sup>L'énergie d'un symbole peut être étalée dans toutes les directions, et pas seulement derrière le symbole

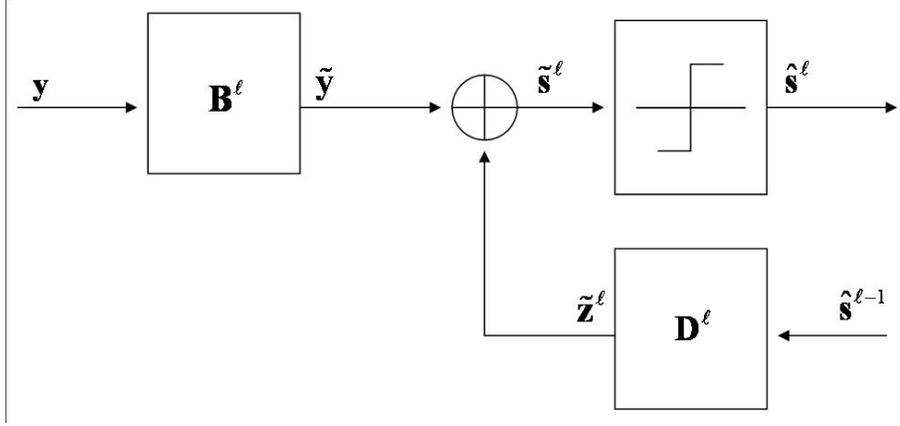


FIG. 2.3 – Décodeur itératif

La figure 2.3 montre la structure du décodeur à la  $\ell^{i\text{ème}}$  itération. Le décodeur est composé d'une matrice directe  $\mathbf{B}^\ell$  et d'une matrice de retour  $\mathbf{D}^\ell$ . Le vecteur mot de code reçu  $\mathbf{y}$  est multiplié par la matrice directe  $\mathbf{B}^\ell$

$$\tilde{\mathbf{y}}^\ell = \mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{y} .$$

Une estimation des interférences entre symboles  $\tilde{\mathbf{z}}^\ell$  est alors retranchée à  $\tilde{\mathbf{y}}^\ell$ , donnant ainsi  $\tilde{\mathbf{s}}^\ell$ , une estimation souple des symboles transmis

$$\tilde{\mathbf{s}}^\ell = \tilde{\mathbf{y}}^\ell - \tilde{\mathbf{z}}^\ell$$

où  $\tilde{\mathbf{z}}^\ell$  est calculé à partir de l'estimation précédente des symboles transmis  $\hat{\mathbf{s}}^{\ell-1}$

$$\tilde{\mathbf{z}}^\ell = \mathbf{D}^\ell \cdot \hat{\mathbf{s}}^{\ell-1} .$$

Les interférences dues au symbole  $s_i$  du vecteurs  $\mathbf{s}$  doivent être annulées pour tous les symboles  $s_j$ ,  $j \neq i$ . Par contre, il ne faut pas annuler l'information utile, ce qui implique la contrainte sur  $D^\ell$

$$\mathbf{D}_{ii}^\ell = 0, \forall i = 1 \dots NT \quad (2.12)$$

Enfin un comparateur fournit une décision dure  $\hat{\mathbf{s}}^\ell$  à partir de  $\tilde{\mathbf{s}}^\ell$ . Le décodage à l'itération  $\ell$  s'écrit donc

$$\tilde{\mathbf{s}}^\ell = \mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{y} - \mathbf{D}^\ell \cdot \hat{\mathbf{s}}^{\ell-1} = \mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{w} - \mathbf{D}^\ell \cdot \hat{\mathbf{s}}^{\ell-1}$$

Dans un premier temps, nous allons déterminer les matrices directes  $\mathbf{B}^\ell$  et les matrices de retour  $\mathbf{D}^\ell$  du

décodeur, de façon à minimiser l'erreur quadratique moyenne  $\|\tilde{\mathbf{s}}^\ell - \mathbf{s}\|^2$  à chaque itération  $\ell$ . Les matrices doivent vérifier

$$\frac{\partial \|\tilde{\mathbf{s}}^\ell - \mathbf{s}\|^2}{\partial \mathbf{B}^\ell} = 0$$

et

$$\frac{\partial \|\tilde{\mathbf{s}}^\ell - \mathbf{s}\|^2}{\partial \mathbf{D}^\ell} = 0.$$

[Chan et Wornell, 2001] ont résolu ces équations en utilisant les formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{\Gamma}^\dagger \mathbf{\Gamma} \mathbf{B})}{\partial \mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \mathbf{B}^T & \frac{\partial \mathbf{\Gamma}^\dagger}{\partial \mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{\Gamma}^\dagger \mathbf{B})}{\partial \mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{A}^* \mathbf{B}^T & \text{et} & \frac{\partial (\mathbf{A}^\dagger - \mathbf{\Gamma} \mathbf{B})}{\partial \mathbf{\Gamma}} &= -\mathbf{A}^* \mathbf{B}^T + \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{A}^* \mathbf{B}^T \end{aligned}$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des vecteurs lignes complexes et  $\mathbf{\Gamma}$  est une matrice carrée complexe.

[Chan et Wornell, 2001] ont ainsi obtenu le système

$$\begin{cases} \mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{H} \cdot E[\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^\dagger] \cdot \mathbf{H}^\dagger + \mathbf{B} \cdot E[\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^\dagger] - \mathbf{D}^\ell E[\hat{\mathbf{s}}^{\ell-1} \cdot \mathbf{s}^\dagger] \cdot \mathbf{H}^\dagger - E[\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^\dagger] \cdot \mathbf{H}^\dagger = \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{H} \cdot E[\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{s}}^{\ell-1}] + \mathbf{D}^\ell E[\hat{\mathbf{s}}^{\ell-1} \cdot \hat{\mathbf{s}}^{\ell-1\dagger}] + E[\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{s}}^{\ell-1}] = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (2.13)$$

auquel il convient d'ajouter la contrainte (2.12).

Soit  $E_s$  l'énergie moyenne du vecteur d'information  $\mathbf{s}$

$$E_s = E[s_s \cdot s_s^*] = \frac{1}{MT} \quad \forall i = 1 \dots MT,$$

nous avons donc

$$E[\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^\dagger] = E[\hat{\mathbf{s}}^{\ell-1} \cdot \hat{\mathbf{s}}^{\ell-1\dagger}] = E_s \cdot \mathbf{I}_{MT}$$

Nous définissons  $\rho_s^{\ell-1}$ , la corrélation entre les vecteurs  $\mathbf{s}$  et  $\hat{\mathbf{s}}^{\ell-1}$

$$\rho_s^{\ell-1} \cdot \mathbf{I}_{MT} = \frac{E[\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{s}}^{\ell-1}]}{E_s} = \frac{E[\hat{\mathbf{s}}^{\ell-1} \cdot \mathbf{s}^\dagger]}{E_s}.$$

Cette corrélation peut être vue comme une mesure de la fiabilité de l'estimation  $\hat{\mathbf{s}}^{\ell-1}$ .

L'expression de  $\mathbf{D}^\ell$  peut alors être obtenue à partir de la seconde équation du système (2.13)

$$\mathbf{D}^\ell = \rho_s^{\ell-1} \cdot \mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{H} - \rho_s^{\ell-1} \cdot \mathbf{I}_{MT}$$

Pour introduire la contrainte (2.12) dans l'expression de  $\mathbf{D}^\ell$ , nous introduisons les multipliers de Lagrange  $\lambda_i^\ell$

$$\mathbf{D}^\ell = \rho_s^{\ell-1} \cdot \mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{H} - \rho_s^{\ell-1} \cdot \mathbf{I}_{MT} + \text{Diag}(\lambda_i^\ell)_{1 \leq i \leq MT} \quad (2.14)$$

En remplaçant  $\mathbf{D}^\ell$  par cette expression dans la première équation du système (2.13), nous obtenons l'expression de la matrice  $\mathbf{B}^\ell$  sous contrainte

$$\mathbf{B}^\ell = \text{Diag} \left( \frac{\rho_s^{\ell-1} \cdot \lambda_i^\ell + \left(1 - (\rho_s^{\ell-1})^2\right)}{\frac{N_0}{E_s}} \right)_{1 \leq i \leq MT} \cdot \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{V}^\ell \quad (2.15)$$

où

$$\mathbf{V}^\ell = \left( \frac{1 - (\rho_s^{\ell-1})^2}{\frac{N_0}{E_s}} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\dagger + \mathbf{I}_{MT} \right)^{-1}.$$

Les multipliers de Lagrange sont obtenus en remplaçant  $\mathbf{B}^\ell$  par son développement (2.15) dans l'expression (2.14) de  $\mathbf{D}^\ell$

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\ell = \rho_s^{\ell-1} \cdot \left[ \text{Diag} \left( \frac{\rho_s^{\ell-1} \cdot \lambda_i^\ell + \left(1 - (\rho_s^{\ell-1})^2\right)}{\frac{N_0}{E_s}} \right)_{1 \leq i \leq MT} \cdot \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{V}^\ell \cdot \mathbf{H} - \mathbf{I}_{MT} \right] + \text{Diag} (\lambda_i^\ell)_{1 \leq i \leq MT} \\ \mathbf{D}_{ii}^\ell = 0, \forall i = 1 \dots NT \end{cases}.$$

Les multipliers de Lagrange s'écrivent alors

$$\lambda_i^\ell = \rho_s^{\ell-1} \cdot \frac{\frac{N_0}{E_s} - \left(1 - (\rho_s^{\ell-1})^2\right) \cdot A_i^\ell}{\frac{N_0}{E_s} + (\rho_s^{\ell-1})^2 \cdot A_i^\ell}$$

avec

$$\text{Diag} (A_i^\ell)_{1 \leq i \leq MT} = \mathbf{I}_{MT} \cdot \text{diag} (\mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{V}^\ell \cdot \mathbf{H}) = \text{Diag} \left( \sum_{k=1}^{NT} \mathbf{H}_{ki}^* \cdot \sum_{p=1}^{NT} \mathbf{V}_{kp}^\ell \cdot \mathbf{H}_{ki} \right)_{1 \leq i \leq MT}.$$

Nous obtenons donc les expressions finales des matrices directes et de retour

$$\begin{cases} \mathbf{B}^\ell = \text{Diag} \left( \frac{1}{\frac{N_0}{E_s} + (\rho_s^{\ell-1})^2 \cdot A_i^\ell} \right)_{1 \leq i \leq MT} \cdot \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{V}^\ell \\ \mathbf{D}^\ell = \rho_s^{\ell-1} \cdot \mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{H} - \text{Diag} \left( \frac{\rho_s^{\ell-1} \cdot A_i^\ell}{\frac{N_0}{E_s} + (\rho_s^{\ell-1})^2 \cdot A_i^\ell} \right)_{1 \leq i \leq MT} \end{cases}. \quad (2.16)$$

Dans notre schéma de décodeur 2.3, nous obtenons une estimation  $\tilde{\mathbf{z}}^\ell = \mathbf{D}^\ell \cdot \hat{\mathbf{s}}^{\ell-1}$  des interférences à retrancher au signal à la sortie de la matrice de retour. Il est normal que son poids dépende de la fiabilité  $\rho_s^{\ell-1}$  de l'estimation  $\hat{\mathbf{s}}^{\ell-1}$ . Ainsi, si  $\hat{\mathbf{s}}^{\ell-1} = \mathbf{s}$ , alors  $\rho_s^{\ell-1} = 1$  et  $\tilde{\mathbf{z}}^\ell$  représentera exactement les composantes ISI à retirer du signal. Inversement, si à l'itération  $\ell$  l'estimation à la sortie du décodeur est douteuse, la valeur de  $\rho_s^{\ell-1}$  sera suffisamment faible pour ne pas perturber le signal.

À la première itération  $\ell = 1$ , le décodeur n'a pas encore fonctionné et il n'est donc pas possible d'annuler les ISI. Nous initialisons la fiabilité à  $\rho_s^{\ell-1} = \rho_s^0 = 0$ . La matrice  $\mathbf{D}^1$  est alors nulle, ce qui équivaut à un décodeur direct  $\mathbf{B}^1$  sans chaîne de retour. Il est rassurant de noter que cette première itération correspond au décodage MMSE  $\mathbf{B}^1 = \mathbf{H}^\dagger \cdot \left( \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\dagger + \frac{N_0}{E_s} \cdot \mathbf{I}_{MT} \right)$ .

Nous devons maintenant évaluer la fiabilité de l'estimation à travers le calcul de  $\rho_s^{\ell-1}$ . Pour cela, [Chan et Wornell, 2001] proposent de calculer le SINR en sortie du décodeur à chaque itération. Nous calculons ensuite la probabilité d'erreur par symbole à partir du SINR. Cette probabilité d'erreur permet enfin de trouver la valeur de  $\rho_s^{\ell-1}$ .

L'expression du SINR a été calculée par [Chan et Wornell, 2001]

$$\gamma_i^\ell = \frac{1}{\frac{1}{\phi_i^\ell} - (1 - (\rho_s^{\ell-1})^2)} \quad (2.17)$$

où

$$\phi_i^\ell = \left( E \left[ \mathbf{H}^\dagger \cdot \left( \frac{N_0}{E_s} \cdot \mathbf{I}_{MT} + (1 - (\rho_s^{\ell-1})^2) \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\dagger \right)^{-1} \right] \cdot \mathbf{H} \right)_{ii} . \quad (2.18)$$

Le SINR moyen peut finalement être mis sous la forme

$$\gamma^\ell = \left( \frac{1}{\xi^\ell \cdot e^{\xi^\ell} \cdot E_1(\xi^\ell)} - 1 \right) \cdot \frac{1}{1 - (\rho_s^{\ell-1})^2} \quad (2.19)$$

où  $\xi^\ell = N \frac{E_s}{N_0} (1 - (\rho_s^{\ell-1})^2)$ , et où  $E_1(s) = \int_s^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  est la fonction exponentielle intégrale.

Les valeurs des  $\rho_s^\ell$  mesurant la fiabilité peuvent maintenant être calculées :

- *Initialisation* :  $\rho_s^0 = 0$  et  $\ell = 1$ .
- *Calcul du SINR* :  $\gamma^\ell$  est calculé d'après la formule (2.19) et en utilisant la valeur de  $\rho_s^{\ell-1}$ .
- *Calcul de la probabilité d'erreur par symbole* : pour une  $m$ -PSK, la probabilité d'erreur en sortie du comparateur peut être approximée par

$$P_e = 2 \cdot Q \left( \sin \left( \frac{\pi}{m} \right) \cdot \sqrt{2 \cdot \gamma^\ell} \right) \quad (2.20)$$

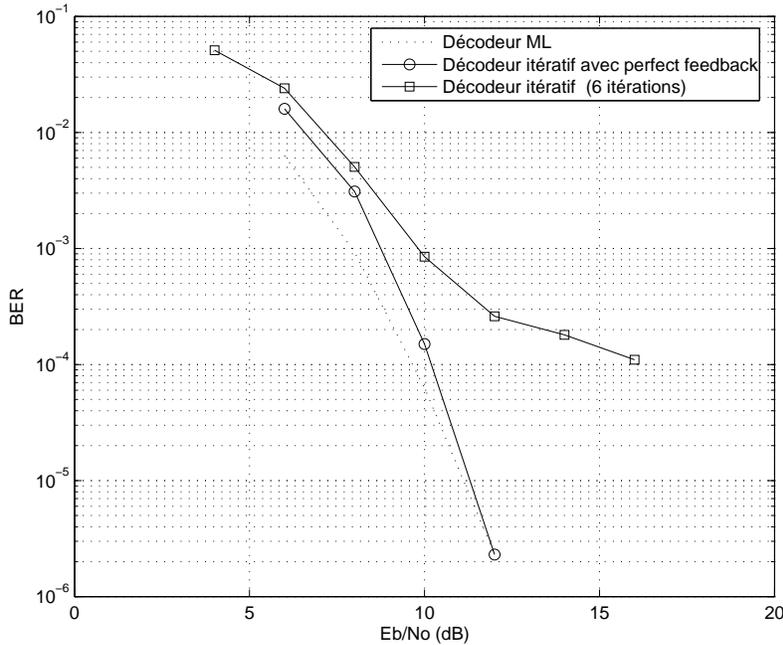
- *Calcul de la fiabilité* : la corrélation entre le vecteur symbole transmis  $\mathbf{s}$  et l'estimation  $\hat{\mathbf{s}}^\ell$  peut être approximée par

$$\rho_s^\ell \approx 1 - 2 \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi}{m} \right) \cdot P_e \quad (2.21)$$

- *Réitération* : Incrémenter  $\ell$  et retour à l'étape de calcul du SINR.

Remarques :

1. La boucle doit être arrêtée lorsqu'une fiabilité raisonnable a été obtenue, ou bien lorsque le nombre maximal d'itération du décodeur est atteint. Les valeurs des  $\rho_s^{\ell-1}$  ainsi calculées permettent, en les injectant dans les formules (2.16), de déterminer préalablement au décodage les matrices  $\mathbf{B}^\ell$  et  $\mathbf{D}^\ell$  du décodeur .
2. Le calcul du SINR (2.17) se fait par un calcul d'espérance sur la réalisation du canal (2.18). Cette moyenne n'a de sens que si les matrices sont de dimensions suffisamment grandes. Dans le cas contraire, il est préférable de calculer  $\gamma^\ell$  sans prendre l'espérance, ce qui alourdit fortement les traitements. Ce décodeur est donc réservé aux systèmes MIMO de grandes dimensions de  $4 \times 4$  antennes au minimum.

FIG. 2.4 – Performances d'un système  $4 \times 4$  en BPSK

La figure 2.4 présente les performances en termes de taux d'erreur binaire du décodeur itératif. Le codage ST utilise le *perfect code* à quatre antennes (1.13) sur des symboles BPSK. Lorsque le retour de décision est exact<sup>14</sup>, le décodeur itératif est à moins de 1 dB du ML. Par contre, l'estimation parfois erronée de  $\hat{\mathbf{s}}^{\ell-1}$  fait décrocher les performances du décodeur itératif, pour lequel nous observons alors un pallier. Ce décodeur est donc utilisable à condition que ce pallier se trouve en dehors de la zone de fonctionnement normale du système. Il est évidemment possible d'intégrer un code correcteur d'erreur

<sup>14</sup>*perfect feedback*

dans la boucle de retour afin de s'approcher des performances du *perfect feedback*<sup>15</sup>. Ce correcteur peut être à entrée dure en utilisant  $\hat{\mathbf{s}}^\ell$  ou à entrée souple avec  $\tilde{\mathbf{s}}^\ell$ . Cependant, cette solution lourde nous éloigne de l'objectif de simplicité de ce décodeur.

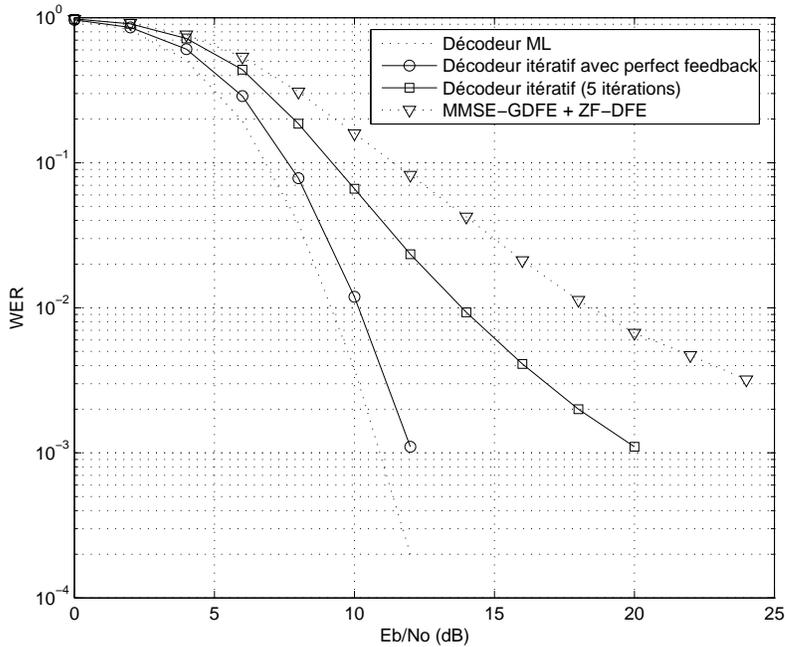
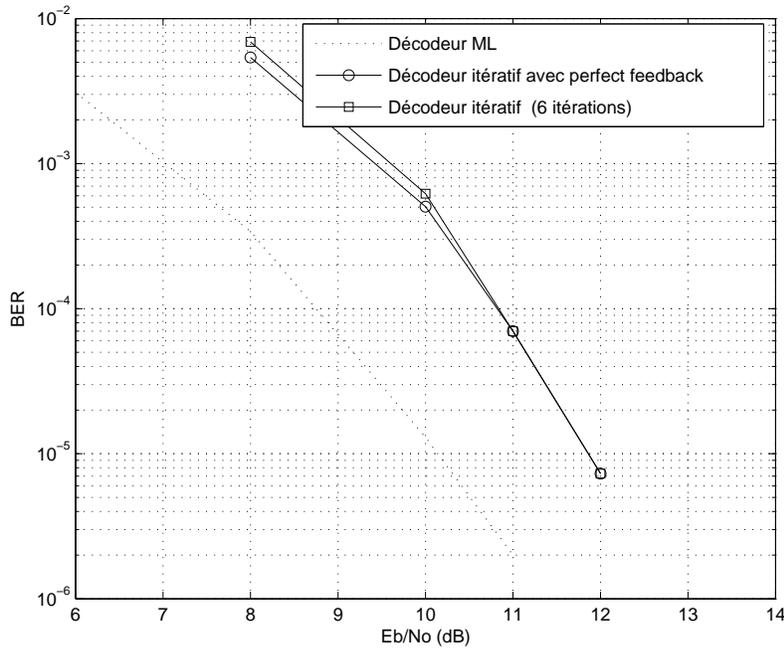


FIG. 2.5 – Performances d'un système 4 × 4 en QPSK

Les taux d'erreur par mot de code ST avec le perfect code 4 × 4 en QPSK sont présentés sur la figure (2.5). Nous voyons de nouveau apparaître le pallier dû au mauvais retour de décision, mais cette solution reste toutefois meilleure que le décodeur MMSE-GDFE avec ZF-DFE. Il faut noter que l'emploi d'un précodeur MMSE serait inapproprié dans le cas de notre décodeur itératif, car celui-ci effectue déjà un décodage minimisant l'erreur quadratique moyenne. L'utilisation d'un prétraitement par réduction LLL n'a pas été très concluante, surtout dans le cas de constellations de petites dimensions (QPSK).

La figure 2.6 présente les taux d'erreur binaires pour le code à 6 × 6 antennes présenté par [Galliou et Belfiore, 2002]. À fort SNR, le décodeur avec *perfect feedback* atteint asymptotiquement les mêmes performances que le décodeur ML. Mais le plus intéressant est que le décodeur itératif sans le *perfect feedback* obtient les mêmes performances à moins de 2 dB du ML. Ainsi, dans ce cas, nous n'observons pas de pallier. Le nombre d'antennes devient donc suffisant pour que le SINR ne dépende plus

<sup>15</sup>Le retour parfait de décision permet d'étudier le comportement du décodeur lorsque  $\hat{\mathbf{s}}^{\ell-1} = \mathbf{s}$

FIG. 2.6 – Performances d'un système  $6 \times 6$  en BPSK

des réalisations du canal et que l'expression (2.19) soit pertinente.

Dans un premier temps, nous n'avons considéré que le cas où les  $s_i$  sont des symboles PSK. Il nous restera donc à prendre en compte, dans un prochain travail, le cas QAM en reprenant les calculs de la fiabilité (2.21) et de la probabilité d'erreur (2.20) ([Proakis, 2000]).

Le décodeur itératif en blocs pour codes ST linéaires que nous avons présenté est inspiré des travaux de [Chan et Wornell, 2001] et permet d'atteindre de bonnes performances pour une complexité raisonnable. Par contre, il ne convient pas aux codes ST de dimension inférieure à  $4 \times 4$  et son adaptation aux constellations QAM doit être poursuivie.

## Conclusion

Le principal obstacle à l'intégration des codes Espace-Temps dans les systèmes radio cellulaires réside dans la difficulté du décodage. En effet, la complexité du décodage exhaustif croît exponentiellement avec les dimensions du code. Nous avons alors montré que le décodage ST peut avantageusement être remplacé par la recherche du point le plus proche dans un réseau. L'utilisation d'un arbre de recherche c'est ainsi révélée être une méthode performante.

Nous avons donc développé les principaux décodeurs par arbre, chacun présentant un compromis

performance-complexité différent des autres. La performance peut-être mesurée par la pertinence du point décodé et par le temps de recherche, tandis que la complexité correspond à la surface de silicium requise pour les traitements et pour la mémoire.

Nous avons également présenté des prétraitements devenus classiques pour le décodage ST : le MMSE-GDFE et les réductions. Tous permettent de remettre en forme le réseau de points, facilitant ainsi le travail du décodeur.

Nous avons enfin étudié l'adaptation aux codes ST d'un décodeur itératif annulant de façon successive les interférences engendrées par le canal MIMO et avons montré qu'il réalise un bon compromis entre performance et complexité.



## Chapitre 3

# Prototype WiFi de COMSIS

### Introduction

Ce troisième chapitre présente les applications pré-industrielles du codage Espace-Temps qui ont été réalisées dans le cadre de cette thèse en convention CIFRE. La solution multi-antennaire proposée dérive de la norme mono-antennaire de réseaux locaux sans fils (W-LAN<sup>1</sup>) *Wifi* IEEE 802.11a.

Nous présenterons tout d'abord la norme 802.11a et l'intérêt de la modulation OFDM<sup>2</sup> sur laquelle elle est basée.

Nous verrons ensuite l'adaptation de la norme au contexte MIMO. Les contraintes techniques de la réalisation matérielle nous ont incités à traiter, dans un premier temps, le cas bi-antennaire (avec deux antennes d'émission et deux antennes de réception).

Les performances de notre codage Espace-Temps seront alors présentées, et les algorithmes d'estimation du canal et de synchronisations temporelles et fréquentielles brièvement abordés. Ces algorithmes sont très importants, car la modulation OFDM est très sensible à leurs performances. De plus, ils ont nécessité quelques adaptations lors du passage au MIMO.

En fin de chapitre, nous présenterons le démonstrateur FPGA développé, ses futures évolutions, ainsi que les perspectives industrielles.

### Présentation de la société COMSIS

COMSIS est une petite entreprise qui a commencé son activité en 1995 en tant que bureau d'étude pour les télécommunications. Elle a souhaité développer sa propre technologie et a commencé l'étude des systèmes MIMO sur ses fonds propres en 2000. Elle travaille maintenant presque exclusivement sur le développement du MIMO, et principalement de sa solution MIMO 802.11n dérivée du 802.11a. Elle commercialise sa technologie sous forme de droits de licence ou de composants. Ses effectifs comptent actuellement sept docteurs et ingénieurs.

---

<sup>1</sup> *Wireless Local Area Network*

<sup>2</sup> *Orthogonal Frequency Division Multiplex*

### 3.1 La norme IEEE 802.11a

Les normes 802.11 de l'IEEE concernent les réseaux locaux sans fils. Les W-LAN doivent permettre des communications radio mobiles numériques hauts débits, dans un espace réduit, typiquement à l'intérieur d'un bâtiment (indoor), et sur des fréquences radio libres. La norme 802.11a définit une couche physique basée sur du multiplexage par répartition en fréquences orthogonales (OFDM) dans la bande radio des 5 GHz. Elle est similaire à la norme européenne Hiperlan/2 de l'ETSI.

Nous allons tout d'abord présenter le principe de la modulation OFDM, puis nous verrons les caractéristiques de la norme *Wifi*.

#### 3.1.1 La modulation OFDM

L'OFDM est une technique de transmission multi-porteuse permettant une transmission simple et à haut débit sur des canaux multi-trajets très hostiles.

Lorsque le canal de transmission est très sélectif en fréquence, il est intéressant d'utiliser une modulation multi-porteuse : la modulation de débit  $R$  est remplacée par  $P$  modulations sur  $P$  sous-porteuses de débit  $\frac{R}{P}$ . Le nombre de sous-porteuses  $P$  est choisi de façon à ce que les sous-canaux puissent être considérés comme non-sélectifs en fréquence. L'OFDM évite les interférences entre sous-canaux (ICI) grâce à l'orthogonalité fréquentielle des sous-porteuses, comme l'illustre la figure 3.1. La popularité de l'OFDM vient de la simplicité de sa réalisation : la modulation qui affecte une fréquence à chaque symbole à transmettre est effectuée par une simple transformée de Fourier discrète inverse. Celle-ci peut être réalisée par une IFFT. Inversement, la démodulation peut être réalisée par une FFT.

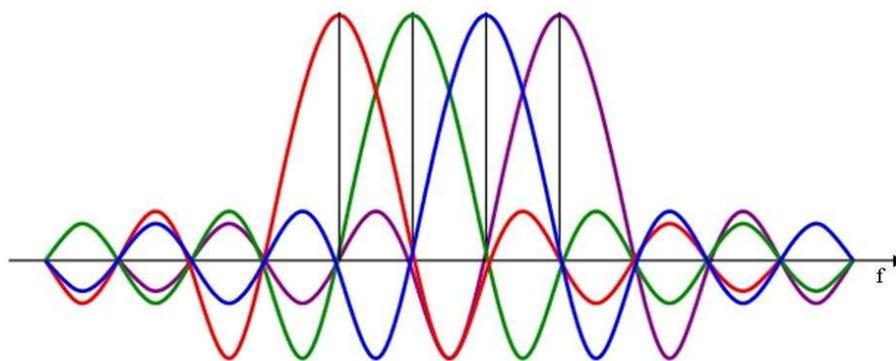


FIG. 3.1 – Principe d'orthogonalité fréquentielle à l'intérieur d'un symbole OFDM

Dans le cas d'un canal multi-trajets, les ondes électromagnétiques entre l'émetteur et le récepteur passent par différents chemins en se réfléchissant, ou en se diffractant sur les obstacles. Les temps de parcours varient en fonction de la longueur des trajets. Afin d'éviter les interférences entre les symboles OFDM, il faut faire précéder les symboles OFDM d'un intervalle de garde de durée  $T_G$  supérieure au

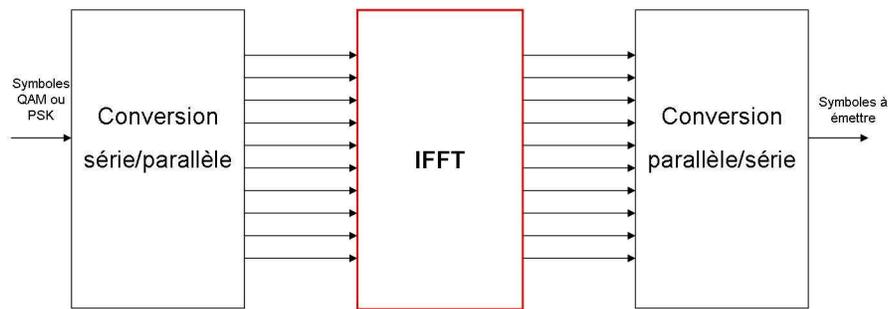


FIG. 3.2 – Modulateur OFDM sans préfixe cyclique

retard  $\tau_{max}$  du trajet le plus lent sur le trajet le plus rapide. Comme la démodulation OFDM est réalisée par une FFT, le signal est implicitement supposé  $T$ -périodique. L'intervalle de garde est donc rempli par une réplique de la fin du symbole et la démodulation peut être indifféremment débutée entre  $\tau_{max}$  et  $T_G$ . La structure du démodulateur OFDM devient donc celle présentée figure 3.4.

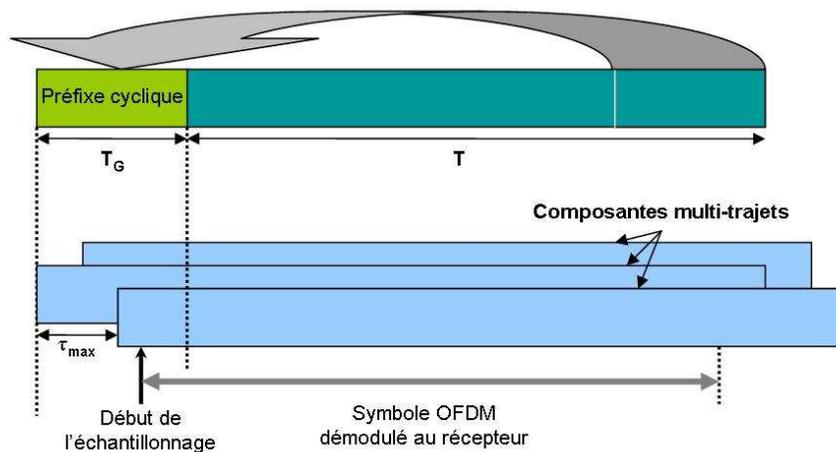


FIG. 3.3 – Symbole OFDM avec préfixe cyclique

Le principal inconvénient de la modulation OFDM est sa sensibilité aux problèmes de synchronisation fréquentielle : une déviation de la fréquence risque d'apparaître. Elle peut être due à l'effet Doppler ou à un décalage en fréquence des oscillateurs locaux à l'émission et à la réception. Ce problème sera abordé en 3.3.1.

### 3.1.2 Principales caractéristiques techniques du 802.11a

#### 3.1.2.1 Bande de fréquence

La norme 802.11a transmet sur une bande de fréquence centrée autour de 5,2 GHz. Plus précisément, elle prévoit d'utiliser jusqu'à trois bandes de 100 MHz : 5,15 - 5,25 GHz, 5,25 - 5,35 GHz et

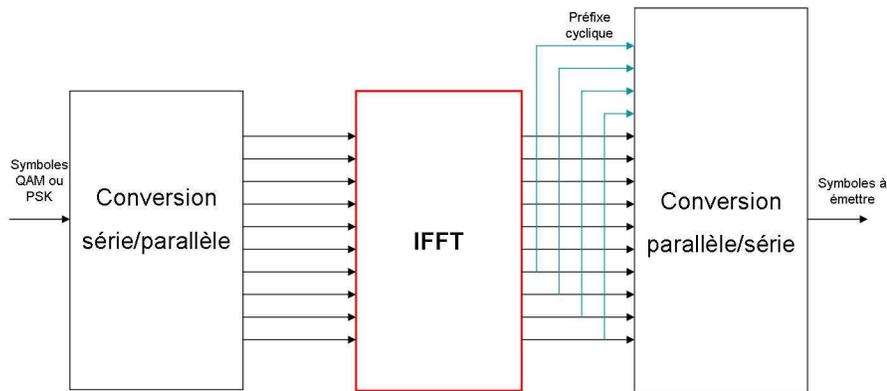


FIG. 3.4 – Modulateur OFDM avec préfixe cyclique

5,725 - 5,825 GHz. Sur chacune de ces bandes, quatre canaux OFDM de largeur 20 MHz sont multiplexés en fréquence. Dans la suite, nous ne ferons plus référence au multiplexage en fréquence et ne considérerons qu'un seul canal OFDM.

### 3.1.2.2 Modulation et codage des données

La norme *802.11a* utilise une technique de modulation OFDM à 64 sous-porteuses espacées de 0.3125 MHz (20/64 MHz) et avec un intervalle de garde cyclique de 16 échantillons. Un symbole OFDM est donc constitué de 80 échantillons pour une durée de 4  $\mu$ s. Parmi les 64 sous-porteuses, 48 conviennent des données, 4 sont des sous-porteuses pilotes et 12 sont nulles. Sur les 48 sous-porteuses de données, les symboles transmis appartiennent à une constellation QAM ou PSK notée  $\mathcal{C}$ . Chaque symbole QAM ou PSK correspond à un bloc de  $\log_2(\bar{\mathcal{C}})^3$  bits. Il ne s'agit pas directement de bits d'information puisque la norme *802.11a* prévoit le recours à un code convolutif combiné à un entrelaceur.

### 3.1.2.3 Débit binaire

La constellation et le code convolutif constituent deux degrés de liberté sur le débit binaire. Toutes les combinaisons prévues par la norme *802.11a* sont reprises dans le tableau 3.1.

Taux de codage	BPSK	QPSK	16 QAM	64 QAM
1/2	6 Mbps	12 Mbps	24 Mbps	-
2/3	-	-	-	48 Mbps
3/4	9 Mbps	18 Mbps	36 Mbps	54 Mbps

TAB. 3.1 – Débit en fonction de la constellation et du code convolutif utilisé de la norme *802.11a*

<sup>3</sup> $\bar{\mathcal{C}}$  désigne le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{C}$

### 3.1.2.4 Synchronisations et estimation de canal

La norme *802.11a* spécifie également la structure de la trame et en particulier le préambule de celle-ci (d'une longueur totale de 320 échantillons c'est à dire  $16 \mu\text{s}$ ), qui permet au récepteur d'effectuer :

- La synchronisation temporelle : détermination du début de la trame. Elle est effectuée sur le “préambule court” (les 160 premiers échantillons du préambule).
- La synchronisation fréquentielle : détermination et correction de l'*offset* fréquentiel entre l'oscillateur local de l'émetteur et celui du récepteur. Elle est effectuée de manière grossière sur le “préambule court”, et elle affinée grâce aux symboles pilotes, qui permettent par ailleurs une poursuite de cette synchronisation tout le long de la trame.
- L'estimation des coefficients de canal : détermination de la valeur de la réponse fréquentielle du filtre de canal à la fréquence de chaque sous-porteuse. Elle est effectuée sur le “préambule long” (les 160 derniers échantillons du préambule). Elle est nécessaire au décodage des symboles PSK ou QAM reçus.

### 3.1.3 Aperçu d'une chaîne de transmission *802.11a*

#### 3.1.3.1 Structure de l'émetteur *802.11a*

Une structure classique d'un émetteur *802.11a* est représentée par la figure 3.5.

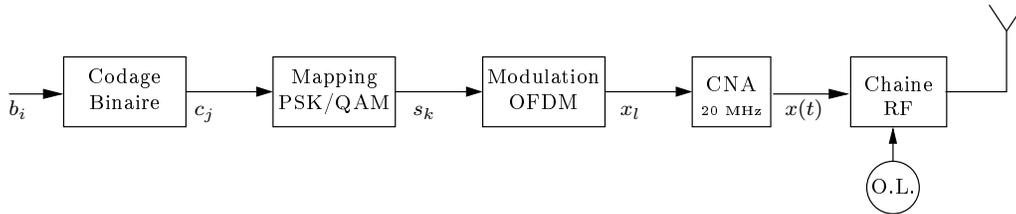


FIG. 3.5 – Schéma d'un émetteur *802.11a*

L'émetteur se compose :

- d'un codeur binaire, qui effectue le *scrambling*, le codage convolutif (suivi le cas échéant du poinçonnage) et l'entrelacement de la suite  $(b_i)$  des bits d'information pour obtenir la suite  $(c_j)$  des bits codés.
- d'un *mapper* PSK/QAM qui fait correspondre à des groupes de  $\log_2(\bar{C})$  bits un symbole  $s_k$  de  $\mathcal{C}$ .
- d'un modulateur OFDM qui forme le vecteur  $X_n$  ( $n$  est un indice sur les symboles OFDM) à 64 composantes complexes.  $X_n$  est obtenu par *mapping* fréquentiel (la fonction  $f$ ) du vecteur  $S_n$  de 48 symboles  $(s_{48n+k})_{0 \leq k \leq 47}$  et du vecteur  $P_n$  (à 4 composantes complexes) des symboles pilotes. Le vecteur  $X_n$  est augmenté par un préambule cyclique de 16 composantes. Le modulateur OFDM génère alors  $(x_{80n+m})_{0 \leq m \leq 79}$ , la Transformée de Fourier Discrète (TFD) Inverse de  $X_n$  prolongé :

$$x_{80n+m} = \left( \text{TFD}_{64}^{-1} X_n \right)_{(m+48) \bmod(64)} \quad \forall m, 0 \leq m \leq 79$$

où :

$$\begin{aligned}
 (\text{TFD}_{64}^{-1})_{j,k} &= \frac{1}{8} e^{\frac{2i\pi jk}{64}} \quad \forall (j, k), 0 \leq j \leq 63 \text{ et } 0 \leq k \leq 63 \\
 X_n &= f(S_n, P_n) \\
 (S_n)_k &= s_{48n+k} \quad \forall k, 0 \leq k \leq 47 \\
 P_n &= (-1)^{p(n)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{où } p(n) \text{ est la polarité des symboles pilotes} \\
 (f(S, P))_j &= \begin{cases} 0 & \text{si } j = 0 \text{ ou } 27 \leq j \leq 37 \\ S_{j+23} & \text{si } 1 \leq j \leq 6 \\ P_2 & \text{si } j = 7 \\ S_{j+22} & \text{si } 8 \leq j \leq 20 \\ P_3 & \text{si } j = 21 \\ S_{j+21} & \text{si } 22 \leq j \leq 26 \\ S_{j-38} & \text{si } 38 \leq j \leq 42 \\ P_0 & \text{si } j = 43 \\ S_{j-39} & \text{si } 44 \leq j \leq 56 \\ P_1 & \text{si } j = 57 \\ S_{j-40} & \text{si } 58 \leq j \leq 63 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- d'un Convertisseur Numérique Analogique (CNA) fonctionnant à une fréquence de 20 MHz et intégrant un filtre de mise en forme (en racine de cosinus surélevé), afin de générer le signal complexe en bande de base  $x(t)$ .
- d'une chaîne RF, qui se charge de transposer le signal en bande de base  $x(t)$  autour de la fréquence porteuse et d'amplifier le signal obtenu afin de l'émettre sur l'antenne.

### 3.1.3.2 Structure du récepteur 802.11a

Une structure classique de récepteur 802.11a est représentée par la figure 3.6.

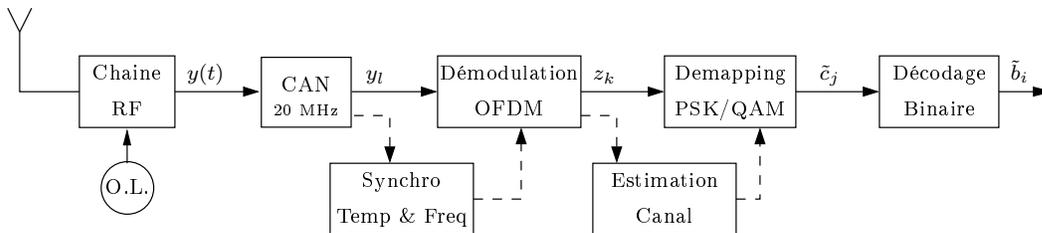


FIG. 3.6 – Schéma d'un récepteur 802.11a

Le récepteur se compose :

- d'une chaîne RF, qui transpose en bande de base, après amplification et filtrage, le signal reçu par l'antenne.
- d'un Convertisseur Analogique Numérique (CAN) qui échantillonne le signal  $y(t)$  à une fréquence de 20 MHz.
- d'un démodulateur OFDM, qui à un vecteur de 64 composantes complexes  $(y_{80n+16+m})_{0 \leq m \leq 63}$ , associe sa TFD  $Y_n$  dont est extrait le vecteur  $Z_n$  à 48 composantes complexes  $(z_{48n+k})_{0 \leq k \leq 47}$  par *demapping* des porteuses de données (la fonction  $f^{-1}$ ), c'est à dire :

$$Z_n = f^{-1}(Y_n)$$

où  $f^{-1}$  est définie par :

$$S = f^{-1}(f(S, P)) \quad \forall (S, P) \in \mathbb{C}^{48} \times \mathbb{C}^4$$

et :

$$Y_n = \text{TFD}_{64} \begin{pmatrix} y_{80n+16} \\ \vdots \\ y_{80n+79} \end{pmatrix}$$

$$(\text{TFD}_{64})_{j,k} = \frac{1}{8} e^{\frac{-2i\pi jk}{64}} \quad \forall (j, k), 0 \leq j \leq 63 \text{ et } 0 \leq k \leq 63.$$

- d'un décodeur PSK/QAM, qui effectue un décodage de la séquence  $(z_k)$  au Maximum de Vraisemblance a posteriori, fournissant une décision dure ou souple (suivant que le Viterbi est à entrée dure ou souple) sur la séquence des bits  $\tilde{c}_j$ . Le décodeur doit disposer de la réponse fréquentielle du filtre de canal, ou du moins d'une estimation de celle-ci pour les 48 fréquences porteuses de données. En effet, pour une réalisation de canal  $h(t)$  (incluant les filtres de mise en forme à l'émission et à la réception), on a :

$$Z_n = \underbrace{8 \text{Diag}(f^{-1}(H)) S_n}_{\text{symboles émis filtrés par le canal}} + \underbrace{W_n}_{\text{bruit}}$$

où :

$$H = \text{TFD}_{64} \begin{pmatrix} h(0) \\ \vdots \\ h(63T) \end{pmatrix} \quad \text{avec } T \text{ la période d'échantillonnage}$$

à condition que la longueur du préfixe cyclique (16 échantillons) soit supérieure au support de la réponse impulsionnelle du canal<sup>4</sup>, c'est à dire  $h(jT) = 0 \quad \forall j \geq 16$ .

- d'un décodeur binaire, qui effectue le désentrelacement, le décodage du code convolutif via l'algorithme de Viterbi et le désembrouillage.

<sup>4</sup>Dans le cas contraire, une égalisation entre symboles OFDM doit être prévue.

### 3.1.4 Conclusion sur la norme 802.11a

La norme 802.11a, grâce à la modulation OFDM, permet de réaliser un système W-LAN disposant d'une forte efficacité spectrale. Celle-ci lui autorise des débits binaires suffisants, au niveau de la couche physique, pour supporter des applications de type réseau d'entreprise, voire *broadcast* vidéo, et ceci dans une bande de fréquence (autour de 5 GHz) peu ou pas utilisée, contrairement au 2,4 GHz des normes 802.11b et 802.11g. De plus, le recours à une modulation OFDM assure une relative simplicité de conception de l'émetteur et du récepteur.

Cependant, il est très difficile à la norme 802.11a d'assurer de bonnes performances en terme de qualité de service, car cette norme ne prévoit aucun moyen de lutte efficace contre les évanouissements en fréquence que présentent les canaux *indoor* multi-trajets. Pour obtenir une probabilité d'erreur satisfaisante au niveau de la couche physique et éviter ainsi à la couche MAC de retransmettre fréquemment les paquets, ce qui diminue d'autant la bande passante utile, un système 802.11a doit fonctionner à fort rapport signal à bruit et donc à forte puissance d'émission, ce qui pose des problèmes de conception des circuits hyperfréquences ainsi que des problèmes d'interférences dans la perspective de déploiement de réseaux picocellulaires (réutilisation des fréquences).

## 3.2 Solution MIMO pour la norme 802.11a

Au début de cette thèse, en 2002, il n'existait pas de norme de réseaux locaux sans fils multi-antennaires, comme la norme 802.11n. La solution MIMO que nous avons développée est une extension de la norme 802.11a réalisée dans le but de pallier les faiblesses de celle-ci face aux évanouissements en fréquence. Nous utilisons, dans un premier temps, un codage Spatio-Temporel comportant deux antennes d'émission et deux antennes de réception. Le code Spatio-Temporel utilisé par COMSIS pour son démonstrateur est le Golden Code présenté en 1.8.3. En dehors du codage Spatio-Temporel, le reste des caractéristiques techniques (bande de fréquence, modulation, etc. . .) de la solution MIMO est identique celles de la norme 802.11a.

### 3.2.1 Codage Spatio-Temporel

Dans le cadre d'une modulation OFDM, on peut choisir de remplacer les *slots* temporels par des *slots* fréquentiels. On parle alors de codage Spatio-Fréquentiel. L'utilisation de *slots* fréquentiels évite la latence du nombre de *time-slots*  $T$ . De plus, le multiplexage en fréquence plutôt qu'en temps permet de bénéficier de la diversité de fréquence. La technique de codage restant globalement inchangée, nous continuerons à parler ici de codage Spatio-Temporel.

Le code ST utilisé est le Golden Code (cf. [Belfiore et al, 2005]), noté  $\mathcal{C}$ , est défini par :

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha(s_1 + s_2\theta) & \alpha(s_3 + s_4\theta) \\ \gamma\bar{\alpha}(s_3 + s_4\bar{\theta}) & \bar{\alpha}(s_1 + s_2\bar{\theta}) \end{bmatrix}, (s_1, s_2, s_3, s_4) \in QPSK^4 \right\}$$

avec  $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\alpha = 1 + i(1 - \theta)$ , leurs conjugués  $\bar{\theta} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ,  $\bar{\alpha} = 1 + i(1 - \bar{\theta})$  et  $\gamma = i$ .

Notons que le code  $\mathcal{C}$  est de cardinal 256, ce qui correspond à 8 bits d'indexation pour un mot de code. Étant donné que l'émission d'un mot de code requiert 2 fréquences porteuses, l'efficacité est donc de 4 bits par fréquence porteuse et par temps symbole OFDM, ce qui est équivalent à l'utilisation d'une constellation 16 QAM dans la norme 802.11a.

### 3.2.2 Aperçu de la chaîne de transmission multi-antennaire

#### 3.2.2.1 Structure de l'émetteur MIMO

La structure de l'émetteur multi-antennaire est représentée par la figure 3.7. Le codage Spatio-Fréquentiel plutôt que Spatio-Temporel est obtenu en effectuant le codage ST avant la transformation de Fourier de la modulation OFDM.

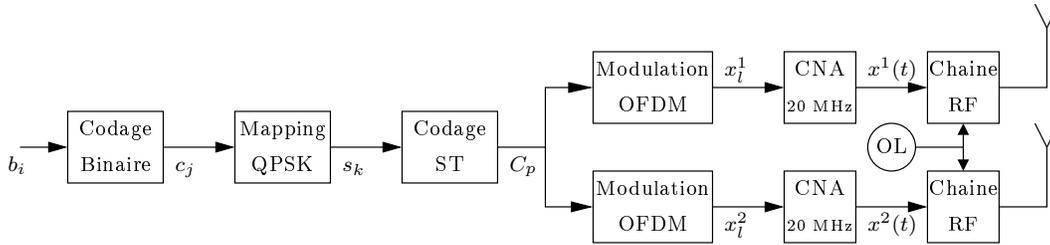


FIG. 3.7 – Schéma de l'émetteur MIMO

Le nouvel émetteur se compose :

- d'un codeur binaire, identique à celui de la norme 802.11a (avec une constellation 16 QAM).
- d'un *mapper* QPSK, identique à celui de la norme 802.11a excepté qu'il fonctionne à une cadence double.
- d'un codeur ST, qui à un vecteur  $S_p$  de 4 symboles QPSK  $(s_{4p+k})_{0 \leq k \leq 3}$  associe un mot de code ST  $C_p$  (mis sous forme de vecteur à 4 dimensions complexes au lieu d'une matrice complexe 2 par 2), c'est à dire

$$C_p = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha & \alpha\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\bar{\alpha} & i\bar{\alpha}\bar{\theta} \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha\theta \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\bar{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} S_p.$$

*Remarque* : avec cette notation vectorielle, on a :  $(C_p)_0$  et  $(C_p)_2$  qui sont envoyés sur l'antenne 1 respectivement aux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  et  $(C_p)_1$  et  $(C_p)_3$  qui sont envoyés sur l'antenne 2 respectivement aux fréquences  $f_1$  et  $f_2$ .

- de 2 modulateurs OFDM identiques à celui de la norme 802.11a (ils effectuent chacun la TFD inverse et l'ajout du préfixe cyclique), excepté un mapping fréquentiel un peu différent qui permet

de bénéficier de la diversité fréquentielle offerte par le canal sélectif en fréquence. On a

$$\begin{aligned} x_{80n+m}^1 &= (\text{TFD}_{64}^{-1} X_n^1)_{(m+48) \bmod(64)} \quad \forall m, 0 \leq m \leq 79 \\ x_{80n+m}^2 &= (\text{TFD}_{64}^{-1} X_n^2)_{(m+48) \bmod(64)} \quad \forall m, 0 \leq m \leq 79 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} X_n^1 &= f(S_n^1, P_n) \\ X_n^2 &= f(S_n^2, P_n) \\ P_n &= (-1)^{p(n)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{où } p(n) \text{ est la polarité des symboles pilotes} \\ S_n^1 &= \begin{pmatrix} (C_{24n})_0 \\ \vdots \\ (C_{24n+23})_0 \\ (C_{24n})_2 \\ \vdots \\ (C_{24n+23})_2 \end{pmatrix} \quad \text{et } S_n^2 = \begin{pmatrix} (C_{24n})_1 \\ \vdots \\ (C_{24n+23})_1 \\ (C_{24n})_3 \\ \vdots \\ (C_{24n+23})_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- de 2 CNA identiques à celui utilisé pour un émetteur *802.11a*.
- de 2 chaînes RF d'émission identiques à celle de l'émetteur *802.11a*. Cependant, pour obtenir la même puissance d'émission totale qu'un système *802.11a*, chacune des chaînes RF fonctionne à une puissance moitié moindre.

### 3.2.2.2 Structure du récepteur MIMO

La structure du récepteur multi-antennaire est représentée par la figure 3.8.

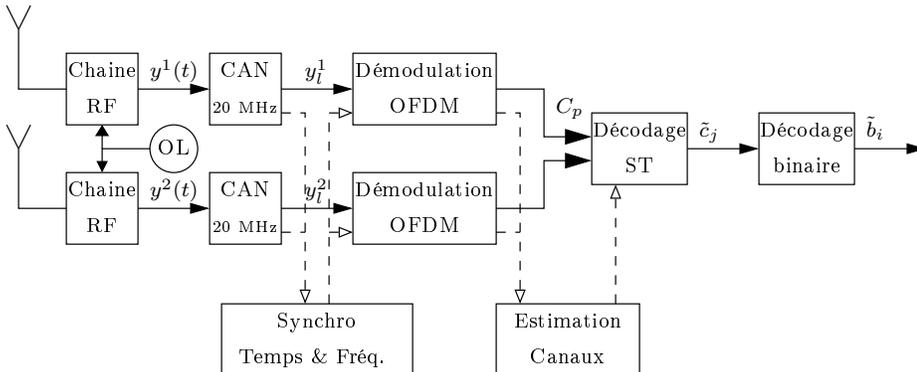


FIG. 3.8 – Schéma du récepteur MIMO

Le nouveau récepteur se compose :

- de 2 chaînes RF de réception identiques à celle d'un récepteur *802.11a*.
- de 2 CAN identiques à celui d'un récepteur *802.11a*.
- de 2 démodulateurs OFDM, identiques à celui du récepteur *802.11a*, excepté qu'un regroupement des symboles doit être opéré pour reformer une séquence  $(Z_{24n+k})_{0 \leq k \leq 23}$  (vecteurs complexes de dimension 4) de mots de code ST déformés par les canaux et bruités. On construit une séquence  $(Z_{24n+k})_{0 \leq k \leq 23}$  de la manière suivante :

$$Z_{24n+k} = \begin{pmatrix} (f^{-1}(Y_n^1))_k \\ (f^{-1}(Y_n^2))_k \\ (f^{-1}(Y_n^1))_{k+24} \\ (f^{-1}(Y_n^2))_{k+24} \end{pmatrix} \quad \forall k, 0 \leq k \leq 23$$

où

$$Y_n^1 = \text{TFD}_{64} \begin{pmatrix} y_{80n+16}^1 \\ \vdots \\ y_{80n+79}^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_n^2 = \text{TFD}_{64} \begin{pmatrix} y_{80n+16}^2 \\ \vdots \\ y_{80n+79}^2 \end{pmatrix}.$$

- d'un décodeur ST au Maximum de Vraisemblance a posteriori, dont le fonctionnement sera détaillé dans le paragraphe suivant, et qui à un vecteur  $Z_p$  associe 8 bits durs ou souples  $(\tilde{c}_{8p+j})_{0 \leq j \leq 7}$
- d'un décodeur binaire identique à celui d'un récepteur *802.11a*.

### 3.2.3 Le décodeur Spatio-Temporel

Si l'on note  $h^{ij}(t)$  ( $1 \leq i \leq 2$  et  $1 \leq j \leq 2$ ), la réponse impulsionnelle du canal entre l'antenne d'émission  $i$  et l'antenne de réception  $j$ , on peut démontrer que

$$Z_{24n+k} = \underbrace{\mathcal{H}_k C_{24n+k}}_{\text{mot de code déformé par le canal}} + \underbrace{W_{24n+k}}_{\text{bruit}} \quad \forall k, 0 \leq k \leq 23$$

où

$$\mathcal{H}_k = 8 \begin{pmatrix} H_k^{11} & H_k^{21} & 0 & 0 \\ H_k^{12} & H_k^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{k+24}^{11} & H_{k+24}^{21} \\ 0 & 0 & H_{k+24}^{12} & H_{k+24}^{22} \end{pmatrix}$$

avec

$$H^{ij} = f^{-1} \left( \text{TFD}_{64} \begin{pmatrix} h^{ij}(0) \\ \vdots \\ h^{ij}(63T) \end{pmatrix} \right). \quad (3.1)$$

Nous nous plaçons sous l'hypothèse d'une absence d'interférences entre symboles OFDM, c'est à dire

$$\forall (i, j), 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2 \quad h^{ij}(mT) = 0 \quad \forall m \geq 16.$$

Nous supposons que le bruit est blanc, centré et gaussien. Dans ces conditions, le décodage au Maximum de Vraisemblance revient à décider que le mot de code émis  $\tilde{C}_{24n+k}$ , connaissant le mot reçu  $Z_{24n+k}$ , est celui qui minimise la norme euclidienne au carré du vecteur de bruit  $W_{24n+k}$ , c'est à dire

$$\tilde{C}_{24n+k} = \text{Arg} \left( \min_{C \in \mathcal{C}} \|Z_{24n+k} - \mathcal{H}_k C\|^2 \right).$$

La résolution du problème de recherche du point d'un réseau le plus proche d'un point donné a déjà été traitée au chapitre 2. C'est un problème classique qui est résolu par des algorithmes de recherche de point le plus proche dans un réseau de points, comme le *Sphere Decoder*. Cependant, ces algorithmes mettent en jeu des calculs mathématiques complexes et le nombre d'opérations qu'ils nécessitent n'est pas toujours maîtrisable par avance. Ils sont donc très délicats à implémenter dans un contexte hardware et en temps réel.

### 3.2.4 Conclusion

Cette solution bi-antennaire propose d'améliorer les performances en termes de qualité de service de la norme *802.11a*, en y ajoutant un codage ST. La structure de la couche physique MIMO hérite de blocs entiers totalement conformes à la norme *802.11a*, comme le modulateur/démodulateur OFDM ou le codeur/décodeur binaire, ce qui a facilité la conception du démonstrateur.

## 3.3 Performances et algorithmes du codage Espace-Temps

Nous allons à présent illustrer le développement de la chaîne de simulation sous *Matlab* et les résultats qu'elle a permis d'obtenir quant aux performances du système MIMO par comparaison avec un système *802.11a*. Nous serons par ailleurs amenés à développer les adaptations des algorithmes d'estimation et de synchronisation nécessaires au passage du *802.11a* au multi-antennaire. De plus, nous détaillerons la modélisation adoptée pour le canal de transmission.

### 3.3.1 Les algorithmes d'estimation et de synchronisation

#### 3.3.1.1 La synchronisation temporelle

La synchronisation temporelle, comme pour le *802.11a*, est effectuée sur le préambule court, c'est à dire les 160 premiers échantillons de la trame. Le préambule court en MIMO est rigoureusement identique à celui du *802.11a* et envoyé de manière identique sur chacune des deux antennes d'émission. Le préambule court présente une structure périodique avec 10 périodes de 16 échantillons. En réception, nous n'exploitons pas les 16 premiers échantillons pour la synchronisation temporelle car nous les avons réservés au

régulation du contrôle automatique de gain. Il nous reste donc 9 périodes pour identifier le début de la trame.

Les algorithmes de synchronisation temporelle que nous utilisons sont semblables à ceux utilisés pour le 802.11a, sauf qu'il nous faut cumuler les informations obtenues par chacune des deux antennes de réception.

La synchronisation temporelle se compose de deux algorithmes (cf. [You et Horng, 2001] et [Speth et al, 2001]) :

- l'un pour la détection de trame, dont le but est de déterminer si l'on est en présence ou non d'une trame
- l'autre pour la détermination du temps de début de trame.

### Détection de trame

La détection de trame exploite la structure périodique du préambule court. Elle se fait en comparant à une constante le quotient  $Q(l)$ , défini comme

$$Q(l) = \frac{\sum_{i=0}^7 \sum_{j=i+1}^8 \sum_{k=0}^{15} \Re \{ y_{l-16i-k}^1 \bar{y}_{l-16j-k}^1 + y_{l-16i-k}^2 \bar{y}_{l-16j-k}^2 \}}{\sum_{k=0}^{143} |y_{l-k}^1|^2 + \sum_{k=0}^{143} |y_{l-k}^2|^2}$$

Le quotient  $Q(l)$  représente les corrélations croisées entre des blocs de 16 échantillons (pour les 9 blocs) du signal reçu et l'autocorrélation du signal. Lorsque ce quotient est supérieur à cette constante, on estime que l'on est en présence d'une trame.

### Détermination du temps de début de trame

On détermine le temps de début de trame, noté  $l^*$ , en utilisant  $\Gamma_{x \ y}(l) = \sum_{k=0}^{143} x_{k+16} \bar{y}_{l+k-143}$ , la corrélation entre le signal reçu et le préambule court connu et attendu au niveau du récepteur :

$$l^* = \text{Arg} \left( \max_l \left[ \frac{(|\Gamma_{x \ y^1}(l) + \Gamma_{x \ y^2}(l)| + |\Gamma_{x \ y^1}(l+1) + \Gamma_{x \ y^2}(l+1)|)^4}{\sum_{k=0}^{143} |y_{l-k}^1|^2 + \sum_{k=0}^{143} |y_{l-k}^2|^2} \right] \right) - 165$$

L'amplitude de  $\Gamma_{x \ y}$  est relativisée par l'énergie du signal reçu  $y$  en aval du contrôle automatique de gain. Enfin, comme le début de trame optimal ne correspond pas forcément à un instant d'échantillonnage, le début de trame est déterminé entre deux échantillons  $l$  et  $l+1$ .

### Comparaison avec un système 802.11a

Les algorithmes de synchronisation temporelle d'un système 802.11a (cf. [You et Horng, 2001] et [Speth et al, 2001]) sont identiques à ceux utilisés pour le MIMO, excepté le fait que les calculs de corrélations (intercorrélations et autocorrélations) se font sur une seule antenne au lieu de deux. Ainsi, la complexité de la synchronisation temporelle en multi-antennaire est de l'ordre de celle d'un système 802.11a. En ce qui concerne les performances, la synchronisation temporelle du MIMO présente un gain de 3 dB en rapport signal sur bruit grâce à la diversité de réception.

### 3.3.1.2 Synchronisation fréquentielle

Le but de la synchronisation fréquentielle est d'estimer et de corriger l'*offset* de fréquence qui peut exister entre l'oscillateur local de l'émetteur et celui du récepteur. Tout système de transmission utilisant une modulation OFDM y est sensible, puisqu'un décalage fréquentiel détruit l'orthogonalité entre les sous-porteuses et crée de l'interférence entre sous-porteuses après démodulation.

La synchronisation fréquentielle s'effectue en deux étapes (cf. [You et Horng, 2001], [Speth et al, 2001], [Coulson, 2001] et [Moose, 1994]) :

- À l'aide du préambule, qui permet d'obtenir une estimation "grossière" de l'offset fréquentiel et de démoduler les premiers symboles OFDM de la trame. Cette estimation se fait sur le préambule court et le préambule long.
- À l'aide des symboles pilotes, qui permettent d'affiner tout au long de la trame la première estimation et de poursuivre les variations temporelles de l'*offset* fréquentiel.

#### Synchronisation fréquentielle sur le préambule court

Les 160 échantillons du préambule court peuvent être vus comme deux symboles OFDM identiques précédés de leur intervalle de garde (c'est d'ailleurs comme cela qu'ils sont générés à l'émission), dont seulement 12 sous-porteuses sont non nulles. Le décalage en fréquence est estimé grâce à la dérive en phase du second symbole  $Y_0$  par rapport au premier symbole  $Y_1$ . En notant  $g^{-1}$  la fonction de *demapping* de ces 12 sous-porteuses parmi les 64 d'un symbole OFDM, on construit l'estimateur  $\widetilde{\Delta f}_1$  de la manière suivante :

$$\widetilde{\Delta f}_1 = \frac{20 \cdot 10^6}{2\pi 80} \tan^{-1} \left( \frac{\Im \{g^{-1}(Y_0^1)^H g^{-1}(Y_1^1) + g^{-1}(Y_0^2)^H g^{-1}(Y_1^2)\}}{\Re \{g^{-1}(Y_0^1)^H g^{-1}(Y_1^1) + g^{-1}(Y_0^2)^H g^{-1}(Y_1^2)\}} \right)$$

#### Synchronisation fréquentielle sur le préambule long

La norme *802.11a* préconise l'utilisation du préambule court seul. Pour le multi-antennaire, nous avons en plus eu recours au préambule long (les 160 derniers échantillons du préambule). Ceci a impliqué des modifications dans la structure même et le contenu du préambule long. Il est à noter que, pour des raisons d'estimations de canaux (cf. 3.3.1.3), le préambule long tel qu'il est défini dans la norme *802.11a*, ne pouvait rester inchangé dans un contexte multi-antennaire.

La figure 3.9 montre les différences entre le préambule long de la norme *802.11a* et celui utilisé par la solution MIMO  $2 \times 2$ .

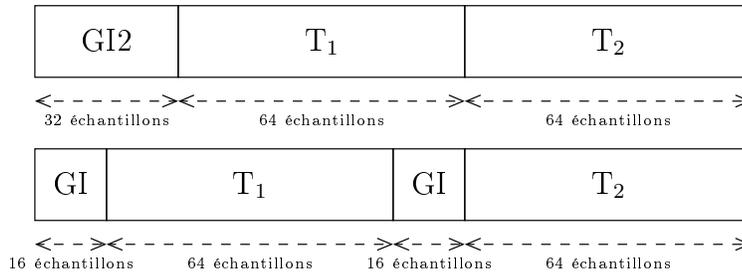


FIG. 3.9 – Comparaison du préambule long du *802.11a* (en haut) et celui du système bi-antennaire (en bas)

Pour la solution bi-antennaire, les symboles OFDM  $T_1$  et  $T_2$  émis par une même antenne sont identiques. En revanche leur contenu diffère entre les deux antennes émettrices. En réception, les symboles OFDM reçus  $T_1$  et  $T_2$  restent égaux entre eux, au bruit et au déphasage dû à l'offset fréquentiel près. Les symboles du préambule long peuvent donc être utilisés pour l'estimation de l'offset fréquentiel, de manière similaire à l'estimation sur le préambule court. Ainsi, on construit l'estimateur  $\widetilde{\Delta f}_2$  :

$$\widetilde{\Delta f}_2 = \frac{20 \cdot 10^6}{2\pi 80} \tan^{-1} \left( \frac{\Im \{f^{-1}(Y_2^1)^H f^{-1}(Y_3^1) + f^{-1}(Y_2^2)^H f^{-1}(Y_3^2)\}}{\Re \{f^{-1}(Y_2^1)^H f^{-1}(Y_3^1) + f^{-1}(Y_2^2)^H f^{-1}(Y_3^2)\}} \right)$$

L'estimateur de l'offset fréquentiel sur le préambule est obtenu en effectuant la moyenne des deux estimateurs précédents, c'est à dire :

$$\widetilde{\Delta f}_{\text{préambule}} = \frac{\widetilde{\Delta f}_1 + \widetilde{\Delta f}_2}{2}$$

### Poursuite de l'offset fréquentiel grâce aux symboles pilotes

Au fur et à mesure de la réception des symboles OFDM, on en extrait les symboles pilotes que l'on corrèle avec les symboles pilotes précédemment reçus pour en déduire le déphasage et donc l'offset fréquentiel. On applique une pondération différente suivant "l'âge" des symboles pilotes, de manière à poursuivre les variations temporelles de l'offset fréquentiel. Le facteur d'oubli affectant l'estimation de l'offset des anciens symboles pilotes est un compromis à trouver en fonction de la vitesse de variation de l'offset fréquentiel. Le système de pondération dépend donc de la qualité des oscillateurs locaux des transmetteurs.

### Comparaison avec un système 802.11a

Comme pour la synchronisation temporelle, les algorithmes de synchronisation fréquentielle du MIMO sont très semblables à ceux utilisés pour les systèmes 802.11a, excepté que les corrélations portent sur les signaux des deux antennes de réception. La complexité des algorithmes de synchronisation fréquentielle mono-antennaire et bi-antennaire ont donc des complexités comparables.

Par contre, le système de transmission MIMO s'est avéré dans la pratique encore plus sensible à l'offset fréquentiel résiduel. Les probabilité d'erreur sont plus faibles avec le codage ST et le pallier dû à une mauvaise estimation du canal arrive donc plus rapidement (à plus faible SNR). De surcroît, l'estimation de l'offset est évidemment moins bonne lorsque le SNR est faible. Les algorithmes d'estimation fréquentielle qui fonctionnent bien en mono-antennaire ont donc dû être affinés en bi-antennaire.

#### 3.3.1.3 Estimation des canaux

##### Les coefficients à estimer

Il s'agit d'estimer les 4 réponses impulsionnelles  $h^{ij}(t)$  (pour  $1 \leq i \leq 2$  et  $1 \leq j \leq 2$ ) échantillonnées à une fréquence de 20 MHz. On se place dans l'hypothèse d'une absence d'interférence entre symboles OFDM. Ainsi, chaque réponse impulsionnelle a au maximum 16 coefficients non nuls. L'estimation des canaux porte donc sur 64 coefficients.

### Le préambule long comme séquence d'apprentissage

Le préambule long sert de séquence d'apprentissage. De manière à discriminer l'antenne d'émission, il est nécessaire que les séquences d'apprentissage émises sur chacune des antennes soient orthogonales entre elles. Pour pouvoir effectuer la synchronisation fréquentielle, nous avons opté pour des séquences orthogonales en fréquence (cf. [Barhumi et al, 2002]).

### L'algorithme d'estimation

Le récepteur MIMO utilise une estimation des coefficients de canaux au Maximum de Vraisemblance a posteriori comme décrit par [Barhumi et al, 2002]. Il s'agit d'une projection orthogonale des séquences reçues sur l'espace vectoriel des séquences filtrées par un canal, dont la réponse impulsionnelle n'a que 16 coefficients non nuls.

### 3.3.2 Modélisation des canaux

Ce paragraphe a pour objectif de résumer la modélisation, faite au niveau de la chaîne de simulation *Matlab*, des phénomènes susceptibles de modifier les signaux entre le CNA de l'émetteur et le CAN du récepteur.

#### 3.3.2.1 Description des canaux multi-trajets

##### Modélisation mathématique des canaux

On a :

$$\forall j, 1 \leq j \leq 2 \quad y_l^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{ij} x_{l-k}^i + w_l^j$$

où les  $w_l^j$  sont des variables aléatoires indépendantes gaussiennes complexes centrées de variance  $N_0/2$  par composante réelle.

Intéressons-nous aux réponses impulsionnelles  $h^{ij}(t)$ . Nous rappelons que les  $h^{ij}(t)$  intègrent les réponses impulsionnelles des deux filtres de mise en forme en racine de Nyquist en émission et en réception. En notant  $k(t)$  la réponse impulsionnelle du filtre de Nyquist global normalisé en puissance et en considérant une propagation multi-trajets entre l'antenne  $i$  et l'antenne  $j$ , on a :

$$h^{ij}(t) = \sum_{p=1}^{N_{\text{trajets}}} \alpha_p k(t - \tau_p).$$

Chacun des trajets présente des évanouissements de type Rayleigh. Ainsi, les  $\alpha_p$  sont des variables aléatoires indépendantes gaussiennes complexes centrées dont la variance, notée  $\sigma_p^2$ , est calculée grâce au profil de puissance (cf. paragraphe suivant), sachant que la puissance de tous les trajets est normalisée, c'est à dire :

$$\sum_{p=1}^{N_{\text{trajets}}} \sigma_p^2 = 1.$$

Il est important de remarquer que nous avons considéré des canaux quasi-statiques : on considère que les amplitudes complexes des trajets restent inchangées pendant toute la durée d'une trame. Cependant,

d'une trame à l'autre, on effectue un nouveau tirage des amplitudes des trajets indépendamment du tirage précédent. De plus, on suppose qu'il y a décorrélation entre les antennes d'émission et entre les antennes de réception. Ainsi, les amplitudes complexes des trajets de chacun des 4 canaux sont indépendantes entre elles.

### Profil de puissance

La norme WLAN européenne HIPERLAN 2 a défini 5 modèles de canaux : les canaux A, B, C, D et E. Néanmoins, ces modèles de canaux ne décrivent pas de manière réaliste la propagation dans un environnement de type "Home" et "Small Office", auquel notre solution multi-antennaire se destine, au moins dans un premier temps. C'est pourquoi nous simulons notre chaîne de transmission MIMO sur des canaux différents. Un partenaire industriel de COMSIS a effectué une série de mesures expérimentales qui ont permis la définition de deux types de canaux, dont le tableau 3.2 et la figure 3.10 détaillent le profil de puissance (les puissances des différents trajets sont données relativement au trajet le plus important).

Délai (en ns)	Puissance du canal 1 (en dB)	Puissance du canal 2 (en dB)
0	-16	-29
10	-14	-18
20	-5	-15
30	0	-13
40	-7	-7
50	-5	0
60	-11	-5
70	-16	-6
80	-18	-5
90	-19	-7
100	-21	-8
110	-24	-9
120		-11
130		-12
140		-13
150		-14
160		-16
170		-17
180		-19
190		-20
200		-20
210		-24

TAB. 3.2 – Profil de puissance des canaux expérimentaux

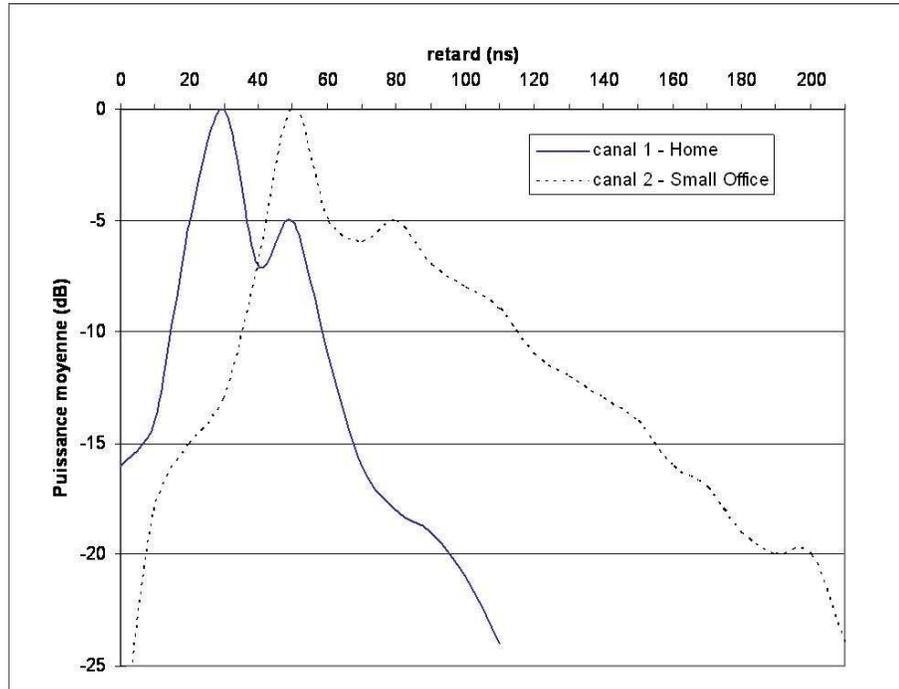


FIG. 3.10 – Étalement des retards des canaux expérimentaux

### 3.3.2.2 Modélisation de l'offset fréquentiel

La chaîne de simulation intègre le décalage fréquentiel possible entre les oscillateurs locaux sous la forme d'un décalage en fréquence  $\Delta f$  compris entre -10 kHz et 10 kHz tiré aléatoirement à chaque trame mais qui reste constant tout le long de la trame. Nous avons ainsi :

$$\forall j, 1 \leq j \leq 2 \quad y_l^j = \frac{e^{2\pi i l \Delta f T}}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} h_k^{ij} x_{l-k}^i + w_l^j .$$

L'intégration dans la modélisation de la variation temporelle le long de la trame de l'offset fréquentiel et du bruit de phase est en cours.

### 3.3.3 Performances de la solution MIMO $2 \times 2$

Le développement d'une chaîne de simulation sous *Matlab* a permis la mise au point et le choix des différents algorithmes, en les comparant suivant un critère de performance : la probabilité d'erreur binaire en fonction du rapport signal à bruit. Nous allons à présent mettre en évidence les performances du système multi-antennaire et les comparer avec celles d'un système *802.11a*.

### 3.3.3.1 Performances sur les bits codés

La comparaison est effectuée sur les bits codés, c'est à dire à la sortie du décodeur ST pour le MIMO et à la sortie du *demapper* QAM du *802.11a*. Comme on réalise la comparaison à efficacité spectrale égale, le système *802.11a* considéré utilise une constellation 16 QAM. Cela correspondrait à un système fonctionnant à un débit binaire de 48 Mbps. Il est important de noter que les performances du système *802.11a* sont données dans le cas où les synchronisations (temporelle et fréquentielle) et l'estimation de canal sont parfaites, alors que le multi-antennaire se sert des algorithmes présentés précédemment pour les synchronisations et l'estimation des coefficients de canal.

La courbe de la figure 3.11 présente la probabilité d'erreur sur les bits non codés en fonction du rapport signal à bruit. Multidiverse est le nom commercial de la solution MIMO de COMSIS.

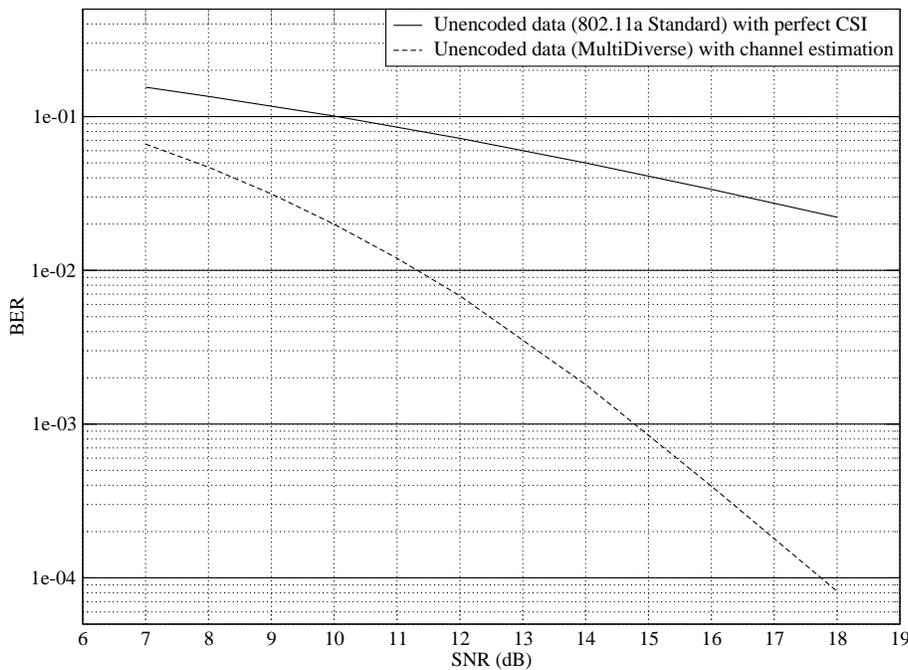


FIG. 3.11 – Performances du *802.11a* et du Multidiverse sur les bits non codés

La courbe de la figure 3.11 montre que le système MIMO a des performances nettement meilleures qu'un système *802.11a*, et est en outre avantagé par des synchronisations parfaites. Nous vérifions bien que, grâce à une diversité d'ordre 4 du code ST, la pente de la courbe de performances du système bi-antennaire a un coefficient directeur environ 4 fois supérieur à celui d'un système *802.11a* au delà de 14 dB de SNR.

### 3.3.3.2 Performances sur les bits d'information

La comparaison est effectuée sur les bits d'information, c'est à dire après le décodage du code convolutif par l'algorithme de Viterbi. Pour la comparaison, le décodage se fait à entrée souple, de manière à obtenir

les meilleures performances possibles des deux systèmes. Le code convolutif choisi est celui de la norme *802.11a* de rendement 1/2 (pas de poinçonnage). Pour obtenir la même efficacité spectrale, le système *802.11a* utilise une constellation 16 QAM. Ainsi, le débit binaire des deux systèmes est de 24 Mbps sur les bits d'information.

Comme dans la comparaison précédente, les performances du système *802.11a* sont données dans le cas où les synchronisations (temporelle et fréquentielle) et l'estimation de canal sont parfaites, alors que le système multi-antennaire se sert des algorithmes présentés précédemment pour les synchronisations et l'estimation des coefficients de canal.

La courbe de la figure 3.12 présente la probabilité d'erreur sur les bits d'information en fonction du SNR.

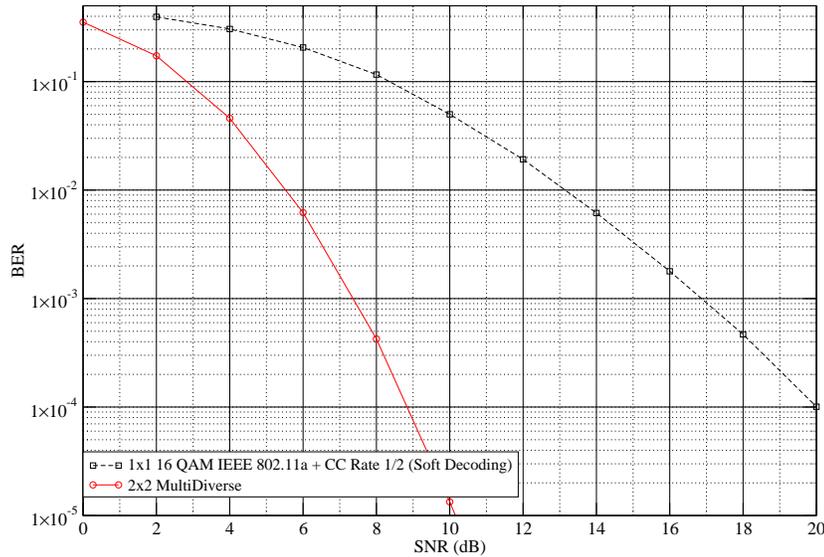


FIG. 3.12 – Performances du *802.11a* et du MIMO à 24 Mbps après décodage souple

Même après décodage souple, la solution MIMO présente une courbe de performances avec une décroissance beaucoup plus forte que celle du *802.11a*. Ceci s'explique par le fait que lorsqu'une trame a connu un évanouissement, elle présente un taux d'erreur tellement élevé (autour de  $10^{-1}$ ) que le code convolutif est inefficace et a plutôt tendance à faire empirer la probabilité d'erreur sur les bits d'information. Or la fréquence des trames perturbées par les évanouissements est plus élevée avec un système *802.11a* (de diversité unitaire) qu'avec le système bi-antennaire (de diversité 4). Ainsi, pour une probabilité d'erreur de  $10^{-3}$ , le système bi-antennaire présente un gain de 9,5 dB en SNR par rapport à un système *802.11a*. De plus, la solution MIMO permet d'envisager des applications du type broadcast vidéo, qui requiert un taux d'erreur de  $10^{-4}$ , avec un SNR de seulement 9 dB.

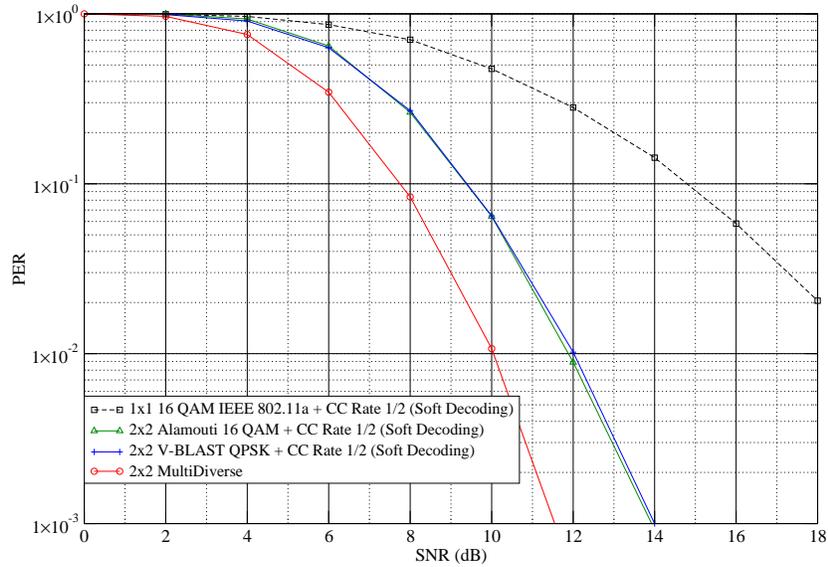


FIG. 3.13 – Performances du *802.11a* et de différents codage MIMO à 24 Mbps après décodage souple

La courbe de la figure 3.13 présente les taux d'erreur par trame de différents systèmes : Multidiverse, un *802.11a* classique, un codage d'Alamouti adapté à *802.11a* et un codage BLAST  $2 \times 2$  adapté à *802.11a*. Tous les débits sont de 24 Mbps avec des constellations 16 QAM pour la norme et pour Alamouti et des QPSK pour Multidiverse et BLAST qui transmettent 2 symboles par utilisation canal. Les codages BLAST et ALAMOUTI améliorent nettement les performances du système *802.11a*, mais restent moins bons que notre solution MIMO qui est la seule à allier haute efficacité spectrale et diversité maximale.

Les performances au niveau de la couche MAC sont présentées figure 3.14. Le débit maximal transmissible, qui était de 24 Mbps, ne vaut plus plus que de 21,3 Mbps en raison des encapsulements et des acquittements. Cette couche MAC est très rudimentaire car elle ne supporte qu'un seul débit, mais elle donne une première idée du comportement du MIMO. De plus la figure ne met pas en relief un gros inconvénient du système SISO soumis aux évanouissements : si le canal varie lentement, les évanouissements entraîneront des pertes de liaisons fatales à la transmission de flux audios et vidéos.

### 3.3.4 Conclusion

Le développement de la chaîne de simulation *Matlab* a permis de réaliser les algorithmes de synchronisations temporelle et fréquentielle et d'estimation de canal pour le système MIMO. Tous ces algorithmes sont très similaires à ceux employés pour le *802.11a*, et n'introduisent qu'un très faible surcoût en complexité. De plus, cette chaîne de simulation a démontré que cette solution présente des performances en termes de qualité de service bien supérieures à celles d'un système *802.11a*.

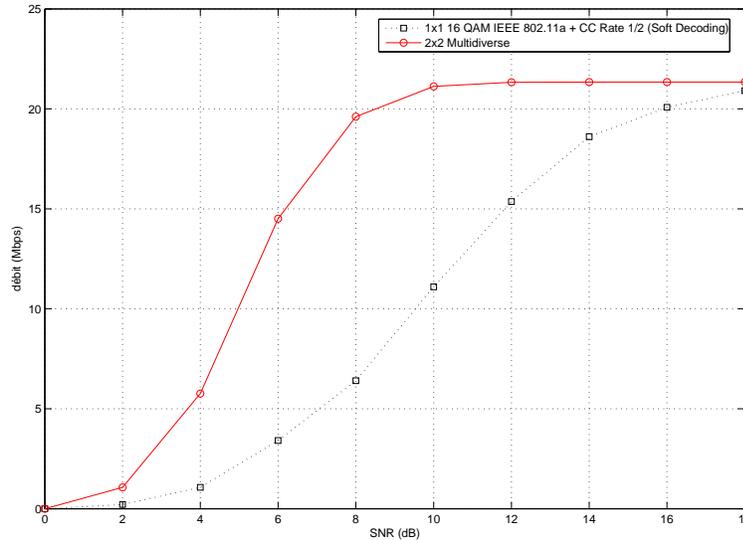


FIG. 3.14 – Débit du *802.11a* et du MIMO au niveau de la couche MAC

## 3.4 Le démonstrateur et les évolutions futures

### 3.4.1 Le démonstrateur

La couche physique de notre solution bi-antennaire reprend de nombreux éléments de la norme *IEEE 802.11a* auxquels s'ajoutent les modules de codage Espace-Temps.

Nous avons donc tout d'abord développé une chaîne de simulation *802.11a*, puis nous l'avons adaptée afin d'y intégrer le codeur et le décodeur ST. La mise au point et le choix des algorithmes ont été réalisés en virgule flottante sous *Matlab*, car il intègre de nombreuses fonctions comme la FFT. L'impact de la quantification et du passage des données de virgule flottante à virgule fixe sur les performances a été étudié par COMSIS sur une chaîne de simulation en *C point fixe*. Le passage en *C point fixe* a préparé le développement *VHDL* (beaucoup plus lourd) en décomposant toutes les fonctions complexes en opérations élémentaires (addition ou multiplication). Il a aussi permis de déterminer le nombre de bits utiles et la position de la virgule de toutes les variables de calcul utilisées. Un compromis a ainsi été trouvé entre complexité et dégradation des performances. Le *C point fixe* a aussi permis de générer des vecteurs de test pour valider le fonctionnement des modules développés en *VHDL*. La couche physique a ensuite été synthétisée et implémentée sur des cartes FPGA Stratix 80 d'Altera.

Le nombre de bits et la position de chaque variable du programme y sont paramétrables. Les optimisations sont encore en cours. Cependant, COMSIS dispose d'ores et déjà d'une configuration qui n'est pas totalement optimisée, mais dont les performances sont tout à fait correctes, puisqu'en retrait de seulement 0,5 dB par rapport à celles obtenues sous *Matlab*. Cette configuration requiert par exemple un CAN fonctionnant sur 12 bits : de tels composants font déjà partie du catalogue de certains équipementiers.



FIG. 3.15 – Carte FPGA contenant la couche physique d’un transmetteur

### Complexité du Codeur

Le nombre de portes logiques des éléments de la chaîne de transmission est une donnée confidentielle de COMSIS. Nous pouvons tout de même dire que la complexité du codeur ST et du deuxième modulateur IFFT est très raisonnable par rapport à la complexité d’un transmetteur 802.11a SISO. Le surplus de surface pour l’intégration en technologie  $0,13\ \mu\text{m}$  est suffisamment faible pour pouvoir l’utiliser dans une chaîne 802.11a.

### Complexité du Décodeur

Le décodeur ST est plus gourmand en ressources et sa synthèse est évidemment plus problématique. Le surcoût n’est pas négligeable mais les gains apportés par cette technologie sont suffisamment importants pour envisager de l’intégrer à une chaîne 802.11a et de le commercialiser.

### Chaînes radio

La conception des chaînes radio ne fait pas partie des compétences ni de la stratégie de COMSIS. Nous intégrons donc des chaînes toutes faites. Des chaînes radio mono-antennaire à 5 GHz pour le 802.11a existent et sont relativement faciles à trouver, mais elles ne sont pas directement utilisable en MIMO : les chaînes des différentes antennes doivent avoir le même oscillateur local à l’émission comme à la réception, car un *offset*, même léger, affecte les performances. Même si l’utilisation d’un même oscillateur pour les antennes d’émission paraît facile à réaliser, ce produit n’existait pas il y a trois ans chez les industriels. Nous avons donc travaillé avec le laboratoire d’électronique de l’ENST Bretagne qui a réalisé un banc radio MIMO à 4 antennes d’émission et de réception. Nous avons interfacé nos cartes FPGA contenant la couche physique numérique avec leur chaînes radio MIMO. Les chaînes radio sur fréquence intermédiaire

sont volumineuses, mais elles fonctionnent bien et ont permis de valider notre couche physique avec la transmission d'un flux vidéo (DVD dont le débit utile varie de 3 à 8 Mbps) entre des pièces éloignées de 20 m et sans liaison directe (NLOS) dans les locaux de l'entreprise.



FIG. 3.16 – Démonstration de transmission vidéo en liaison directe à l'ENST Bretagne

### 3.4.2 Évolutions futures

Plusieurs améliorations du démonstrateur vont prochainement être finalisées :

- Nos cartes contenant la couche physique numérique sont en cours d'interface avec des chaînes radio zero-FI<sup>5</sup> et dont les dimensions sont beaucoup moins encombrantes que les précédentes.
- COMSIS travaille actuellement avec des industriels pour interfacer sa couche physique avec leur couches MAC 802.11.
- L'utilisation de modulation codées (TCM<sup>6</sup>) avec le Golden Code permet de diminuer très fortement la complexité du décodeur avec une augmentation raisonnable des taux d'erreur.
- Des débits plus importants avec des modulations QAM de plus grandes tailles seront prochainement intégrés sur la carte FPGA (48, 96 et 108 Mbps).
- La mise en compatibilité de notre couche physique avec le système 802.11n utilisant du BLAST (EWC<sup>7</sup>) est bientôt terminée, elle entraînera l'utilisation d'une troisième antenne qui ne sera utilisée

<sup>5</sup> avec transposition directe en fréquence, sans passage par une fréquence intermédiaire

<sup>6</sup> *Trellis Coded Modulation*

<sup>7</sup> *Enhanced Wireless Consortium*

qu'en réception pour la diversité.

- L'utilisation d'un plus grand nombre d'antennes avec les codes parfaits ou le code TAST est à l'étude. La forme définitive du décodeur n'est pas encore arrêtée. Nous emploierons soit le décodeur itératif vu en 2.5, soit un *lattice decoder* intégrant une réduction.

## Conclusion

L'amélioration des performances offertes par l'utilisation d'un codage Espace-Temps pour les systèmes radio-mobiles a donc été mise en pratique avec succès.

Au cours de ces travaux, deux transmetteurs bi-antennaires de type 802.11a intégrant un codage Espace-Temps ont été réalisés. Ils fonctionnent à un débit physique de 24 Mbps et permettent de transmettre confortablement de la vidéo HD.

Plusieurs brevets ont par ailleurs été déposés :

- *procédé pour décoder les codes espace-temps linéaires dans un système de transmission sans fil multi-antennes et décodeur mettant en œuvre un tel procédé* n° 0207331 du 14 juin 2002,
- extension internationale n° PCT/FR0/01783 du 13 juin 2003,
- *procédé d'estimation du canal de transmission dans un réseau sans fil et système de radiocommunication mettant en œuvre un tel procédé* n° 037709 du 26 juin 2003.

Ce démonstrateur n'est qu'une première étape et de nombreuses améliorations de ce prototype sont actuellement à l'étude. Elles permettront de proposer des solutions commercialisables sous formes de licences ou de produits.



Deuxième partie

Codage Non Cohérent



## Chapitre 4

# Codage Spatio-Temporel non cohérent

Ce chapitre présente des codes Espace-Temps non cohérents, c'est à dire des codes ST pour lesquels le canal de transmission n'est connu ni à l'émetteur ni au receveur.

### Introduction

Nous avons considéré jusqu'ici des codes Spatio-Temporels cohérents, c'est à dire que le filtrage par le canal est connu au niveau du récepteur. Dans la pratique, il n'est pas toujours possible ni même intéressant d'estimer la réalisation du canal en réception. En effet, la taille de la séquence d'apprentissage doit être proportionnelle au nombre d'antennes d'émission, donc dans le cas d'un grand nombre d'antennes le débit risque d'être pénalisé. Ceci est d'autant plus problématique que le canal est sélectif en temps ; le canal variant vite, il faut le réestimer très souvent, or chaque séquence d'entraînement émise diminue le débit effectif. Il convient alors d'utiliser des codes non cohérents, pour lesquels le décodeur Espace-Temps ne nécessite aucune connaissance du canal.

Nous considérons un système de transmission à  $M$  antennes d'émission et  $N$  antennes de réception. Le canal de transmission est supposé quasi-statique, cela signifie que ses coefficients restent inchangés durant  $T$ , la longueur temporelle du code. De plus, le canal suit une statistique de Rayleigh. Le signal reçu s'écrit<sup>1</sup>

$$\mathbf{Y}_{T \times N} = \mathbf{X}_{T \times M} \cdot \mathbf{H}_{M \times N} + \mathbf{W}_{T \times N} \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{X}$  est le mot de code émis,  $\mathbf{H}$  est la matrice de transfert du canal de transmission, dont les coefficients  $h_{i,j}$  sont i.i.d.  $\mathcal{CN}(0,1)$ , et  $\mathbf{W}$  est le bruit additif blanc gaussien de variance  $\sigma^2 = \frac{1}{\text{SNR}}$ . Les indices correspondent aux dimensions des matrices.

Ce chapitre débute par des éléments de géométrie qui nous seront utiles, dans la suite, pour la construction des codes. Nous reprenons ensuite les calculs de capacité des canaux MIMO faits dans le

<sup>1</sup>En transposant cette équation nous retrouvons l'équation équivalente de la forme

$$\mathbf{Y}_{N \times T} = \mathbf{H}_{N \times M} \cdot \mathbf{X}_{M \times T} + \mathbf{W}_{N \times T}$$

premier chapitre pour le cas non cohérent. Nous présentons les algorithmes de décodage et calculons les probabilités d'erreur en fonction du décodeur utilisé. En fin de chapitre, nous présentons les principaux codes ST non cohérents regroupés en trois familles : les codes ST différentiels, les codes purement non cohérents et les codes à entraînement, qui peuvent être vus comme des codes cohérents particuliers.

## 4.1 Approche géométrique

Nous présentons ici les variétés de Stiefel et de Grassmann<sup>2</sup> qui ont été utilisées par [Zheng et Tse, 2002, Zheng et Tse, 2003]. Ces variétés nous permettront d'introduire un nouveau système de coordonnées utile pour l'étude de la capacité et pour la construction des codes Espace-Temps non cohérents.

### 4.1.1 La variété de Stiefel

**Définition** La variété de Stiefel,  $S_{T,M}(\mathbb{C})$ , est l'espace des matrices unitaires complexes<sup>3</sup> de dimension  $T \times M$

$$S_{T,M}(\mathbb{C}) = \{ \mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{T \times M}, \mathbf{Q}^\dagger \mathbf{Q} = \mathbf{I}^M \}.$$

$S_{T,M}(\mathbb{C})$  peut être vue comme une sous-variété de dimension réelle  $(2TM - M^2)$  de  $\mathbb{C}^{T \times M}$ . Dans le cas particulier où  $M = 1$ ,  $S_{T,1}(\mathbb{C})$  est la surface de la sphère unité de  $\mathbb{C}^T$ .

Comme [Zheng et Tse, 2002, Zheng et Tse, 2003], nous définissons le volume de la variété de Stiefel à partir de la mesure de Haar présentée par [Boothby, 1986].

**Définition** Le volume de  $S_{T,M}(\mathbb{C})$  est donné par

$$|S_{T,M}(\mathbb{C})| = \prod_{i=T-M+1}^T \frac{2\pi^i}{(i-1)!}. \quad (4.2)$$

### 4.1.2 La variété de Grassmann

Une relation d'équivalence peut être définie sur la variété de Stiefel : deux éléments  $P$  et  $Q \in S_{T,M}(\mathbb{C})$  sont équivalents si leurs vecteurs colonnes (de dimension  $T$ ) engendrent le même sous-espace, *i.e.*  $\exists \mathbf{U} \in \mathcal{U}_M(\mathbb{C}), \mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{U}$ , où  $\mathcal{U}_M(\mathbb{C})$  est la notation classique de  $S_{M,M}(\mathbb{C})$ , le groupe des matrices unitaires de dimension  $M \times M$ .

**Définition** La variété de Grassmann est l'espace quotient de la variété de Stiefel par sa relation d'équivalence

$$G_{T,M}(\mathbb{C}) = S_{T,M}(\mathbb{C})/\mathcal{U}_M(\mathbb{C}). \quad (4.3)$$

<sup>2</sup> Stiefel and Grassmann manifolds

<sup>3</sup> il est possible de définir de même  $S_{T,M}(\mathbb{R})$ , l'espace des matrices unitaires réelles de dimension  $T \times M$

Chaque élément de  $G_{T,M}(\mathbb{C})$  est une classe d'équivalence dans  $S_{T,M}(\mathbb{C})$ . Le Grassmannien  $G_{T,M}(\mathbb{C})$  peut aussi être défini comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes de dimension  $M$  de  $\mathbb{C}^T$ , avec  $T > M$ .

La variété de Grassmann a pour dimension réelle

$$\begin{aligned} \dim(G_{T,M}(\mathbb{C})) &= \dim(S_{T,M}(\mathbb{C})) - \dim(S_{M,M}(\mathbb{C})) \\ &= 2M(T - M), \end{aligned}$$

soit  $M(T - M)$  en dimension complexe.

De la même façon que pour pour la variété de Stiefel (4.2), il est possible de définir un volume pour la variété de Grassmann :

$$|G_{T,M}(\mathbb{C})| = \frac{|S_{T,M}(\mathbb{C})|}{|S_{M,M}(\mathbb{C})|} \quad (4.4)$$

$$= \frac{\prod_{i=T-M+1}^T \frac{2\pi^i}{(i-1)!}}{\prod_{i=1}^M \frac{2\pi^i}{(i-1)!}}. \quad (4.5)$$

### 4.1.3 Changement de coordonnées

Nous utilisons ici la variété de Grassmann et nous adoptons le nouveau système de coordonnées présenté par [Zheng, 2002] : le mot de code  $\mathbf{X}$  de dimension  $T \times M$ , avec  $T \geq M$  peut être représenté par un sous-espace  $\Omega_X$  ( $\Omega_X \in G_{T,M}(\mathbb{C})$ ) engendré par ses vecteurs colonnes  $\mathbf{x}_m$  ( $m = 1 \dots M$ ), et une matrice  $C_X$  de dimension  $M \times M$  qui définit les  $M$  colonnes de  $\mathbf{X}$  dans une base canonique de  $\Omega_X$ .

Nous avons ainsi effectué un changement de coordonnées

$$\mathbb{C}^{T \times M} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M} \times G_{T,M}(\mathbb{C}) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{X} \mapsto (C_X, \Omega_X) \quad (4.7)$$

avec

$$\Omega_X = \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M) = \text{span}(\mathbf{X}) \quad (4.8)$$

où  $\text{span}(\mathbf{X})$  est l'espace engendré par les colonnes de  $\mathbf{X}$ .

Ce nouveau système de coordonnées nous permettra de trouver l'expression de la capacité asymptotique à fort SNR et nous aidera à concevoir des codes ST non cohérents.

### 4.1.4 Notions sur les sous-espaces vectoriels

Nous introduisons ici quelques définitions utiles pour l'étude des sous-espaces vectoriels.

Le concept de biorthonormalité permet de caractériser deux sous-espaces.

**Définition** Soient deux sous-espaces  $\Omega_X$  et  $\Omega_Y \in G_{T,M}$ ,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  deux de leurs bases respectives sont dites biorthonormales si chacune d'elles est orthonormale et si

$$\mathbf{X}^\dagger \mathbf{Y} = \mathbf{C} \text{ est une matrice diagonale } \mathbf{C} = \text{diag}([c_1, \dots, c_M]) \text{ telle que } 0 < c_m \leq 1 \quad \forall m = 1..M \quad (4.9)$$

Deux bases biorthonormales peuvent être facilement obtenues à partir de la décomposition en valeurs singulières (SVD<sup>4</sup>) de deux bases orthonormales : soient  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  deux bases orthonormales, mais pas nécessairement biorthonormales, de  $\Omega_X$  et  $\Omega_Y$  respectivement, la SVD de  $\mathbf{X}^\dagger \mathbf{Y}$  s'écrit

$$\mathbf{X}^\dagger \mathbf{Y} = \mathbf{U}_X \mathbf{C} \mathbf{U}_Y^\dagger, \quad \mathbf{U}_X, \mathbf{U}_Y \in \mathcal{U}_M, \quad \mathbf{C} = \text{diag}([c_1, \dots, c_M]) \quad (4.10)$$

où  $0 < c_m \leq 1$  pour tout  $m$ . Les deux bases  $\mathbf{X} \mathbf{U}_X$  et  $\mathbf{Y} \mathbf{U}_Y$  sont alors biorthonormales.

**Définition** Soient deux sous-espaces  $\Omega_X, \Omega_Y \in G_{T,M}$ , les produits scalaires  $\mathbf{X}^\dagger \mathbf{Y} = \mathbf{C}$  de tous leurs couples de bases biorthonormales donnent le même ensemble de valeurs

$$c_m = \cos \theta_m, \quad \theta_m \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad m = 1..M. \quad (4.11)$$

Les  $\theta_m$  sont appelés les angles principaux entre les sous-espaces  $\Omega_X$  et  $\Omega_Y$ .

Contrairement aux bases biorthonormales, les angles principaux caractérisent un couple de sous-espace de façon unique.

**Définition** Deux sous-espaces  $\Omega_X, \Omega_Y \in G_{T,M}$  sont dits espaces intersectés si la dimension de leur intersection est non-nulle i.e.  $\dim(\Omega_X \cap \Omega_Y) > 0$ .

Ils sont dits espaces non-intersectés dans le cas contraire.

La dimension de l'intersection de deux sous-espaces est égale au nombre de leurs angles principaux nuls.

Plusieurs distances peuvent être définies sur le Grassmannien. Nous rappelons ici les plus utilisées.

**Définition** Soient deux sous-espaces  $\Omega_X, \Omega_Y \in G_{T,M}$  et  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_M)$  leurs angles principaux, nous définissons les distances suivantes

1. La distance géodésique

$$d_{arc}(\Omega_X, \Omega_Y) = \|\boldsymbol{\theta}\| = \left( \sum_{m=1}^M \theta_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

2. La distance cordale

$$d_c(\Omega_X, \Omega_Y) = \|\sin \boldsymbol{\theta}\| = \left( \sum_{m=1}^M \sin^2 \theta_m \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

---

<sup>4</sup> Singular Value Decomposition

3. La distance produit

$$d_p(\mathbf{\Omega}_X, \mathbf{\Omega}_Y) = \left( \prod_{m=1}^M \sin \theta_m \right)^{\frac{1}{M}} \quad (4.14)$$

## 4.2 Étude de capacité

Nous allons présenter quelques résultats issus de la théorie de l'information.

### 4.2.1 Résultats généraux

1. **Capacité lorsque  $M > T$ .**

Pour un intervalle de cohérence  $T$  et un nombre d'antennes de réception donné, la capacité en non cohérent obtenue avec  $M > T$  antennes à l'émission peut aussi être obtenue avec  $M = T$  antennes à l'émission ([Marzetta et Hochwald, 1999]).

2. **Structure de signal optimale.**

Un signal atteignant la capacité peut être mis sous la forme

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda} \quad (4.15)$$

où  $\mathbf{\Phi}$  est une matrice unitaire et isotropiquement distribuée<sup>5</sup>, et  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice diagonale réelle non-négative indépendante de  $\mathbf{\Phi}$ . Le signal optimal est donc composé de  $M$  vecteurs orthogonaux de normes  $\lambda_m \geq 0$ ,  $m = 0 \dots M$  ([Marzetta et Hochwald, 1999]).

3. **Comportement asymptotique de la capacité lorsque  $T \rightarrow \infty$ .**

Lorsque le temps de cohérence du canal et la longueur temporelle du code ST tendent vers l'infini, la capacité en non cohérent tend vers la capacité du cas cohérent avec connaissance parfaite du canal. De plus, toutes les distributions  $p(\lambda_m)$  convergent vers une distribution de Dirac centrée sur  $\sqrt{T}$ , montrant ainsi que l'information est portée par la direction des vecteurs et non par leur norme ([Warrier et Madhow, 2002]).

### 4.2.2 Comportement asymptotique à fort SNR

Nous allons utiliser ici la variété de Grassmann et le changement de coordonnées de [Zheng, 2002]  $\mathbf{X} \mapsto (C_X, \mathbf{\Omega}_X)$  défini en (4.6).

Sur un canal non bruité, le signal reçu s'écrit  $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X}$ . Les colonnes de  $\mathbf{Y}$  engendrent alors le même sous-espace que les colonnes de  $\mathbf{X}$  ( $\mathbf{\Omega}_{HX} = \mathbf{\Omega}_X$ ). Les coefficients du canal de transmission  $\mathbf{H}$  ne transforment donc pas le sous-espace  $\mathbf{\Omega}_X$  engendré par le mot code émis. Ils changent uniquement  $C_X$ , la

<sup>5</sup>Une matrice aléatoire est dite isotropiquement distribuée si sa distribution reste inchangée après une rotation *i.e.* si sa distribution reste inchangée après multiplication par une matrice déterministe unitaire.

représentation de ce mot de code dans une base de  $\Omega_X$ .

Dans le cas d'un canal avec bruit additif, le sous-espace  $\Omega_X$  est uniquement altéré par le bruit, alors que  $C_X$  subit le bruit ainsi que l'évanouissement du canal. Le nouveau système de coordonnées (4.6) permet ainsi de décomposer l'espace  $\mathbb{C}^{T \times M}$  en directions qui sont affectées par les coefficients du canal et par le bruit, et en directions qui sont uniquement affectées par le bruit.

A fort rapport signal à bruit ( $\rho \rightarrow \infty$ ), lorsque le bruit est négligeable ( $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{W} \approx \mathbf{H}\mathbf{X}$ ), il est intuitif que  $C_X$  n'est affecté que par les coefficients du canal. Le changement de coordonnées (4.6) nous permet donc, à fort SNR, de séparer les effets du bruit de ceux dus aux évanouissements du canal.

La matrice du canal est ici inconnue au niveau du récepteur. Les symboles d'information doivent donc être contenus dans  $\Omega_X$ . Autrement dit, dans un bon alphabet, l'information ne doit être portée ni par l'amplitude ni par la phase, mais uniquement par les directions des vecteurs  $\mathbf{x}_m$  ( $m = 1 \dots M$ ). Nous voyons, dès-lors, tout l'intérêt de la variété de Grassmann pour construire notre code Spatio-Temporel non cohérent et pour choisir les directions portant l'information de chaque mot de code de l'alphabet.

De même, au niveau du récepteur, le détecteur ST ne devra pas chercher à retrouver la base particulière  $\mathbf{X}$ , mais uniquement le sous-espace  $\Omega_X$  engendré par le mot de code émis.

[Zheng et Tse, 2002] ont trouvé la forme du signal optimale et l'expression asymptotique de la capacité ergodique.

#### 4.2.2.1 Structure de signal optimale

A fort SNR  $\rho$ , les variables aléatoires  $\lambda$  convergent vers  $\sqrt{T}$ , comme dans le cas  $T \rightarrow \infty$ . Le signal optimal est donc de nouveau isotropiquement distribué.

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_M] = \sqrt{T} \Phi, \quad \Phi \in S_{T,M}(\mathbb{C}). \quad (4.16)$$

L'information mutuelle est alors totalement portée par le sous-espace  $\Omega_X$

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = I(\Omega_X; \mathbf{Y}). \quad (4.17)$$

#### 4.2.2.2 Expression de la capacité asymptotique

La capacité est, en bits par utilisation canal (bits puc)

$$C_{nc} = K_{nc} \log_2 \rho + c_{M^\circ, N} + o(1) \quad (4.18)$$

où

$$K_{nc} = M^\star \left( 1 - \frac{M^\star}{T} \right) \quad (4.19)$$

avec  $M^\star = \min(M, N, \lfloor \frac{T}{2} \rfloor)$ ,  $M^\circ = \min(M, N)$  et  $c_{M^\circ, N}$ , une constante dépendant de  $M^\circ$ ,  $N$  et  $T$ .

L'expression de  $c_{M^\circ, N}$  est connue lorsque  $T \geq M^\circ + N$  et elle s'écrit

$$c_{M^\circ, N} = \frac{1}{T} \log_2 |G_{T, M^\circ}(\mathbb{C})| + M^\circ \left(1 - \frac{M^\circ}{T}\right) \log_2 \frac{T}{M^\circ \pi e} + \left(1 - \frac{M^\circ}{T}\right) E[\log_2(\det \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger)]$$

et  $|G_{T, M^\circ}(\mathbb{C})|$  est le volume de la variété de Grassmann défini en (4.5).

$K_{nc}$  est appelé le *nombre de degrés de liberté* ou *gain de multiplexage* du canal MIMO non cohérent.

$$\frac{\partial C_{nc}}{\partial \rho} = K_{nc} \frac{\partial C_{SISO}}{\partial \rho}. \quad (4.20)$$

Pour toute augmentation du SNR de 3 dB, la capacité augmente de  $K_{nc}$  bits puc, soit  $K_{nc}$  fois plus rapidement quand dans le cas SISO.

Pour maximiser le gain de codage, il convient de prendre  $T \geq 2M^\circ$ . De plus, il suffit d'utiliser  $M^\circ$  des  $M$  antennes d'émission disponibles car avoir un plus grand nombre d'antennes d'émission que de réception n'améliore pas la capacité à fort SNR.

Réécrivons l'expression de la capacité en non cohérent dans le cas  $T \geq 2M^\circ$  en faisant apparaître  $C_c$ , la capacité en cohérent avec connaissance parfaite du canal dont la formule a été établie en (1.3)

$$C_{nc} = \left(1 - \frac{M^\circ}{T}\right) C_c + \frac{1}{T} \log_2 |G_{T, M^\circ}(\mathbb{C})| + M^\circ \left(1 - \frac{M^\circ}{T}\right) \log_2 \frac{T}{M^\circ \pi e} + o(1). \quad (4.21)$$

Donc lorsque  $T \gg M$ , la capacité en non cohérent converge asymptotiquement vers la capacité en cohérent.

### 4.2.3 Comportement asymptotique à faible SNR

[Zheng et Tse, 2002] ont montré qu'à faible rapport signal à bruit, la capacité en non cohérent tend vers la capacité en cohérent

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{C}{\rho} = N \log_2 e \quad \text{bits puc} \quad (4.22)$$

Ainsi, la capacité est proportionnelle au nombre d'antennes de réception et le nombre de degrés de liberté n'intervient plus. Il est notamment inutile de prendre  $M$  et  $T$  supérieurs à 1 lorsque le canal est fortement bruité.

## 4.3 Le décodage en non cohérent

### 4.3.1 Décodage au maximum de vraisemblance

Lorsque les statistiques du canal à évanouissement et du bruit sont connues au niveau du récepteur, le critère du maximum de vraisemblance (ML<sup>6</sup>) peut être utilisé ([Proakis, 2000] et [Brehler et Varanasi, 2001]).

---

<sup>6</sup> *Maximum-Likelihood*

Voici la définition du critère du ML en non cohérent

$$\widehat{\mathbf{X}}_{ML} = \arg \max_{\mathbf{X} \in \text{Code}} \mathbf{E}_H \{ p[\mathbf{Y}/\mathbf{X}, \mathbf{H}] \} \quad (4.23)$$

Le détecteur ML est un détecteur quadratique qui se met sous la forme

$$\widehat{\mathbf{X}}_{ML} = \arg \min_{i=1 \dots L} [\mathbf{Y}^\dagger \mathbf{F}_i \mathbf{Y} + c_i] \quad (4.24)$$

où

$$\mathbf{F}_i = -\mathbf{X}_i \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{I}_M + \mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_i \right)^{-1} \mathbf{X}_i^\dagger \quad \text{et} \quad c_i = \ln \det \left( \mathbf{I}_M + \rho \mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_i \right)$$

avec  $L$ , la taille du code et  $\mathbf{X}_i$ , le  $i^{me}$  mot de code de l'alphabet.

Si le code ST est unitaire, l'expression du décodeur au maximum de vraisemblance se simplifie en

$$\widehat{\mathbf{X}}_{ML} = \arg \max_{\mathbf{X} \in \text{Code}} \|\mathbf{Y}^\dagger \mathbf{X}\|_F \quad (4.25)$$

où  $\|\cdot\|_F$  est la norme matricielle de Frobenius définie par  $\|A\|_F = \sqrt{\text{Tr}[A^\dagger A]}$ .

### 4.3.2 Le GLRT

Il est souvent difficile de connaître les statistiques du canal et du bruit, il est alors intéressant d'utiliser comme critère de détection le *Test du rapport de vraisemblance généralisé* (GLRT<sup>7</sup>)

([Brehler et Varanasi, 2001], [Warrier et Madhow, 2002] et [Lapidoth et Narayan, 1998]).

#### 4.3.2.1 Le GLRT dans le cas SISO

Le GLRT a tout d'abord été proposé par [Brehler et Varanasi, 2001] dans le cas mono-antennaire sur canal de Rayleigh quasi-statique. Le signal émis  $\mathbf{x}$  est un vecteur de taille  $1 \times T$ . Le signal reçu s'écrit  $\mathbf{y} = h\mathbf{x} + \mathbf{w}$  où  $h$ , le coefficient complexe du canal, est inconnu et le bruit  $\mathbf{w}$  est blanc et gaussien.

L'estimation GLRT du signal reçu vérifie alors

$$\widehat{\mathbf{x}}_{GLRT} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \text{Code}} \left[ \sup_h p[\mathbf{y}/\mathbf{x}, h] \right] \quad (4.26)$$

$$= \arg \min_{\mathbf{x} \in \text{Code}} \left[ \inf_h \|\mathbf{y} - h\mathbf{x}\|^2 \right]. \quad (4.27)$$

Le GLRT estime le canal conjointement aux données. L'estimation optimale du canal correspondant à la minimisation (4.27) est atteinte en projetant  $\mathbf{y}$  sur le sous-espace complexe de dimension 1 engendré par  $\mathbf{x}$ .

---

<sup>7</sup> *Generalised Likelihood Ratio Test*

L'estimation du coefficient du canal

$$\hat{\mathbf{h}}_{GLRT} = \arg \inf_h \|\mathbf{y} - h\mathbf{x}\|^2 \quad (4.28)$$

$$= \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} \quad (4.29)$$

n'est pas calculée par le décodeur, mais son expression permet de simplifier l'équation (4.27)

$$\hat{\mathbf{x}}_{GLRT} = \arg \max_{\mathbf{x} \in Code} \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|} \quad (4.30)$$

Nous remarquons que, pour tout coefficient complexe  $\lambda$ ,  $\frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\langle \mathbf{y}, \lambda \mathbf{x} \rangle}{\|\lambda \mathbf{x}\|}$ , le décodeur GLRT ne peut donc pas distinguer  $\mathbf{x}$  de  $\lambda \mathbf{x}$ . En effet, le coefficient  $\lambda$  est directement intégré dans l'estimation du canal (4.29).

#### 4.3.2.2 Le GLRT dans le cas MIMO

Comme dans le cas SISO, le GLRT en MIMO minimise la distance euclidienne entre le signal reçu et l'estimation du signal émis. Voici sa définition

$$\hat{\mathbf{X}}_{GLRT} = \arg \max_{\mathbf{X} \in Code} \left[ \sup_{\mathbf{H}} p[\mathbf{Y}/\mathbf{X}, \mathbf{H}] \right] \quad (4.31)$$

$$= \arg \min_{\mathbf{X} \in Code} \left[ \inf_{\mathbf{H}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{H}\|^2 \right]. \quad (4.32)$$

Le GLRT estime le canal conjointement aux données en projetant  $\mathbf{Y}$  sur le sous-espace engendré par  $\mathbf{X}$ . Le GLRT devient alors

$$\hat{\mathbf{X}}_{GLRT} = \arg \max_{\mathbf{X} \in Code} \text{Tr} \left[ \mathbf{Y}^\dagger \mathbf{X} (\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{Y} \right]. \quad (4.33)$$

Le GLRT compare donc les projections du signal reçu  $\mathbf{Y}$  sur tous les mots de l'alphabet et retient celui dont la projection est la plus énergétique.

De nouveau, nous remarquons que dans l'équation (4.33), deux mots de code engendrant le même sous-espace donnent la même métrique et ne peuvent être distingués par le GLRT. L'information doit donc être uniquement portée par les sous-espaces engendrés par les mots de code. Dans le cas d'un code unitaire, nous retrouvons la classe d'équivalence du Grassmannien.

Le décodeur GLRT est suboptimal mais nécessite moins de connaissances statistiques que le décodeur ML. De plus, dans le cas où les coefficients de canaux sont i.i.d. et si nous choisissons des mots de code unitaires, les critères GLRT et ML sont équivalents. Ce résultat est trivial en prenant  $\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} = \mathbf{I}_M$  dans (4.33).

## 4.4 Calcul de la probabilité d'erreur

Nous nous intéressons à la *probabilité d'erreur par paire* (PEP<sup>8</sup>)

$P_e(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j)$  avec  $i \neq j$ , est la probabilité d'avoir décodé  $\mathbf{X}_j$  alors que  $\mathbf{X}_i$  a été émis. L'expression de la PEP permet, dans le cas du décodage ML, de majorer la probabilité d'erreur par la borne de l'union. C'est donc un bon critère de construction du code ST.

### 4.4.1 Codage Spatio-Temporel unitaire

La PEP d'une modulation ST unitaire a comme borne supérieure de Chernoff

$$P_{ML}^{nc}(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j) \leq \frac{1}{2} \prod_{m=1}^M \left[ 1 + \frac{(\rho \frac{T}{M} \sin \theta_m)^2}{4(1 + \rho \frac{T}{M})} \right]^{-N} \quad (4.34)$$

où les  $\theta_m$   $m = 1 \dots M$  sont les angles principaux entre les sous-espaces  $\Omega_{X_i}$  et  $\Omega_{X_j}$ .

Nous retrouvons l'équivalent non-cohérent du critère du rang : les angles principaux doivent être non nuls pour tous les couples de mots de code  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{X}_j$  de l'alphabet, c'est à dire que tous les couples de sous-espaces  $\Omega_{X_i}$  et  $\Omega_{X_j}$  doivent être non intersectés.

De même, la maximisation de la distance produit (4.14) permet une minimisation du PEP à fort SNR, ce qui équivaut au critère du déterminant en non cohérent.

### 4.4.2 Expression asymptotique

Lorsque le code n'est pas unitaire, le critère GLRT n'est plus équivalent au ML. Nous définissons la matrice de corrélation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_i^\dagger \\ \mathbf{X}_j^\dagger \end{bmatrix} [\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ii} & \mathbf{R}_{ij} \\ \mathbf{R}_{ji} & \mathbf{R}_{jj} \end{bmatrix}$$

en supposant qu'elle est de rang plein (ce qui implique que l'on soit dans le cas  $T \geq 2M$ ). L'expression asymptotique à fort SNR de la PEP avec un détecteur GLRT s'écrit [Brehler et Varanasi, 2001]

$$P_{GLRT}^{nc}(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j) \sim \frac{\rho^{-MN} \binom{2MN-1}{MN} \left( 1 + \frac{\det(\mathbf{R}_{ii})^N}{\det(\mathbf{R}_{jj})^N} \right)}{\det(\mathbf{R}_{ii} - \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{R}_{ji})^N}. \quad (4.35)$$

Si le code est unitaire, le ML et le GLRT sont équivalents et l'expression asymptotique se simplifie en

$$P_{nc}(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j) \sim \frac{\rho^{-MN} \binom{2MN-1}{MN}}{\det(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{ji})^N}. \quad (4.36)$$

---

<sup>8</sup> *Pairwise Error Probability*

Lorsque les coefficients des canaux sont corrélés, la dégradation des performances se traduit par une augmentation de la probabilité d'erreur par paire d'un facteur

$$\frac{1}{\det E[HH^\dagger]}.$$

Lorsque les mots de code ont tous la même énergie ( $\text{Tr}[\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X}]$  est constant sur tout l'alphabet), [Brehler et Varanasi, 2001] ont montré que le codage unitaire minimisait la PEP.

## 4.5 Diversité en non cohérent

Il existe trois définitions différentes de la diversité pour les systèmes MIMO non cohérents sur des canaux à évanouissement par bloc.

### 4.5.1 Notion de diversité issue de la probabilité d'erreur par paire

La définition la plus large et la plus classique, valable en cohérent et en non cohérent, est basée sur l'expression asymptotique de la probabilité d'erreur par paire.

**Définition** Diversité basée sur la PEP<sup>9</sup>

*L'ordre de diversité  $d$  d'un code ST se définit comme*

$$d = - \min_{\substack{\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in \text{Code} \\ \mathbf{X}_i \neq \mathbf{X}_j}} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\ln P_{nc}(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j)}{\ln \rho} \quad (4.37)$$

Pour une modulation ST unitaire, dans l'expression de la PEP (4.34), le terme de rapport signal à bruit  $\rho$  est à la puissance  $-(Nm_{d,ij})$  où  $m_{d,ij} = M - \dim(\Omega_{X_i} \cap \Omega_{X_j})$  correspond au nombre d'angles principaux non nuls entre les sous-espaces  $\Omega_{X_i}$  et  $\Omega_{X_j}$ .

Alors

$$N \leq d = Nm_d \leq MN \quad \text{avec} \quad m_d = \min_{\substack{i,j \\ i \neq j}} m_{d,ij} \quad (4.38)$$

S'il n'y a aucune intersection deux à deux des sous-espaces engendrés par les mots du code, alors  $d = MN$  et le code jouit d'une diversité maximale. Une condition nécessaire pour que le code soit à diversité maximale est  $T \geq 2M$ .

De façon plus générale, pour les mots de code non unitaires, si la matrice de corrélation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_i^\dagger \\ \mathbf{X}_j^\dagger \end{bmatrix} [\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ii} & \mathbf{R}_{ij} \\ \mathbf{R}_{ji} & \mathbf{R}_{jj} \end{bmatrix}$$

<sup>9</sup>Dans cette définition, le PEP peut être remplacé par sa borne de Chernoff

est de rang plein (soit  $2M$ ) pour tous les mots de code  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{X}_j$  ( $i \neq j$ ), alors le code atteint la diversité maximale  $MN$  ([Brehler et Varanasi, 2001] et [Gamal et Damen, 2003]).

### 4.5.2 Notion de diversité issue de la probabilité d'erreur sur les mots de code ST

Comme dans le cas cohérent, [Zheng, 2002] définit la diversité en non cohérent en fonction de la probabilité d'erreur par mot à un rendement donné.

**Définition** Diversité basée sur la probabilité d'erreur par mots

*La diversité  $d$  atteinte par un code ST non cohérent s'écrit*

$$d = - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\ln Pem_{nc}(\rho)}{\ln \rho}. \quad (4.39)$$

Cette définition permet d'étudier le compromis diversité/gain de multiplexage des codes Espace-Temps.

### 4.5.3 Diversité algébrique

Une nouvelle définition de la diversité basée sur les propriétés algébriques de l'alphabet a été proposée par [Gamal et al, 2005]. Cette définition est valable pour les codes ST non unitaires et elle dépend du détecteur utilisé en réception. Considérons  $\mathcal{H}_{nc}(i, j)$ , le sous-espace des réalisations du canal pour lesquelles, en l'absence de bruit additif, le détecteur GLRT ne peut faire la distinction entre les mots de code émis  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{X}_j$  :

$$\mathcal{H}_{nc}(i, j) = \{\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{MN} : \exists \hat{\mathbf{H}} \in \mathbb{C}^{MN}, \mathbf{X}_i \mathbf{H} = \mathbf{X}_j \hat{\mathbf{H}}\} \quad (4.40)$$

$$= \{\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{MN} : \exists \tilde{\mathbf{H}} \in (\Omega_{X_i} \cap \Omega_{X_j}), \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{X}_i \mathbf{H}\}. \quad (4.41)$$

**Définition** Diversité algébrique

*La diversité algébrique d'un code ST<sup>10</sup> s'écrit*

$$d = N \left( M - \max_{\substack{\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in Code \\ \mathbf{X}_i \neq \mathbf{X}_j}} \dim \mathcal{H}_{nc}(i, j) \right) \quad (4.42)$$

$$= N \min_{\substack{\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in Code \\ \mathbf{X}_i \neq \mathbf{X}_j}} \left[ \dim (\Omega_{X_i} + \Omega_{X_j}) - \dim \Omega_{X_j} \right]. \quad (4.43)$$

[Gamal et al, 2005] ont démontré l'équivalence entre la diversité algébrique et celle issue de la PEP, dans le cas de codes ST unitaires. Pour les codes non unitaires, l'équivalence n'est pas prouvée. Néanmoins, il est trivial de montrer qu'un code à diversité algébrique maximale équivaut à un code dont tous les couples de sous-espaces  $(\Omega_{X_i}, \Omega_{X_j})$  sont non intersectés (4.43) et équivaut donc à un code à diversité

<sup>10</sup>Nous ne considérons pas, ici, de codage sur les *fading blocks*, c'est à dire sur les variations du canal quasi-statique

maximale au sens de la PEP. Ainsi, un code ST non cohérent atteint la diversité algébrique maximale si, et seulement si, le rang minimal de  $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]$  pris sur tous les couples de mots de code de l'alphabet est égal à  $2M$ .

## 4.6 Construction de Codes Spatio-Temporels non cohérents

### 4.6.1 Codes différentiels

#### 4.6.1.1 Introduction

Pour transmettre des données sans connaître le canal à l'émission ni à la réception, il est assez naturel d'adopter une démarche différentielle. Dans le cas SISO, la modulation DPSK<sup>11</sup> est très utilisée car elle est performante et simple à mettre en place. Dans un premier temps, nous verrons des généralisations de la DPSK pour des systèmes MIMO qui ont été proposées par [Hughes, 2000] et [Hochwald et Sweldens, 2000]. Nous présenterons ensuite d'autres codes Espace-Temps différentiels qui utilisent eux aussi des matrices unitaires et qui sont basés sur le code d'Alamouti ([Tarokh et Jafarkhani, 2000]) ou sur la Transformée de Cayley ([Hassibi et Hochwald 2, 2002]).

Pour toutes les modulations différentielles, le canal de transmission est supposé constant pendant deux utilisations consécutives ; ainsi, les deux mots de code successivement reçus ont subi le même évanouissement et le système de deux équations matricielles qu'ils forment permet d'éliminer l'inconnue qu'est la matrice de canal.

#### 4.6.1.2 Codes DPSK généralisés

Nous présentons ici les codes proposés par [Hochwald et Sweldens, 2000] et par [Hughes, 2000], sur un système à  $M$  antennes d'émission et  $N$  antennes de réception. Ces codes différentiels exploitent le fait que le canal reste constant durant 2 temps symboles pour coder l'information sur la rotation entre deux symboles consécutifs.

A l'instant  $n$ , l'émetteur envoie le symbole

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{V}_n \mathbf{X}_{n-1}. \quad (4.44)$$

Les  $\mathbf{X}_n$  et les  $\mathbf{V}_n$  sont des matrices unitaires carrées de dimension  $M$ . Les matrices  $\mathbf{V}_n$  sont les matrices contenant l'information et formant un alphabet.

Du point de vue du décodeur, le mot de code spatio-temporel de taille  $2M \times M$  s'écrit

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1} \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix}.$$

---

<sup>11</sup>*Differential Phase Shift Keying*

Évidemment, chaque  $\mathbf{X}_n$  n'est émis qu'une seule fois et entre donc dans la constitution de deux mots de code ST différentiels successifs.

La première matrice émise est la matrice identité  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{I}_M$ . Donc,  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1$ ,

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} \text{ et } \Phi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1 \end{bmatrix}.$$

Au niveau du récepteur, le démodulateur reçoit le flux des matrices  $\mathbf{Y}_n$  de taille  $M \times N$ . Il reforme ensuite les mots de code  $\mathbf{Y}$  qui vérifient l'équation matricielle

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{n-1} \\ \mathbf{Y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n-1} \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \mathbf{H} + \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{n-1} \\ \mathbf{W}_n \end{bmatrix}.$$

Les matrices émises  $\Phi_n$  sont unitaires, nous pouvons donc utiliser l'expression du démodulateur à maximum de vraisemblance (4.25) et nous trouvons facilement

$$\hat{\mathbf{V}}_{ML} = \arg \max_{\mathbf{V} \in \text{Alphabet}} \|\mathbf{Y}_{n-1} + \mathbf{V}_n^\dagger \mathbf{Y}_n\|_F. \quad (4.45)$$

Pour construire l'alphabet de leur code différentiel, [Hochwald et Sweldens, 2000] minimisent la probabilité d'erreur par paire de la constellation. Pour cela, il faut maximiser la distance produit (4.14) dans l'expression de la PEP (4.34). Ici la distance produit s'écrit

$$d_p = \frac{1}{2} \min |\det(\mathbf{V}_l - \mathbf{V}_{l'})|^{\frac{1}{M}}. \quad (4.46)$$

#### 4.6.1.3 Construction différentielle issue du code d'Alamouti

Nous présentons ici un schéma de codage différentiel présenté par [Tarokh et Jafarkhani, 2000]. Le code qu'ils proposent est une adaptation en non cohérent du code d'Alamouti et utilise donc deux antennes d'émission et un nombre quelconque d'antennes de réception.

Soient  $\mathcal{A}$  une constellation  $2^b$ -PSK et  $x_1$  et  $x_2$  deux symboles de  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{e^{\frac{2\pi k i}{2^b}}}{\sqrt{2}}, k = 0, 1, \dots, 2^b - 1 \right\}$$

Les vecteurs  $(x_1 \ x_2)$  et  $(-x_2^* \ x_1^*)$  sont orthogonaux et unitaires, ils forment donc une base orthonormale sur laquelle peut être décomposé de façon unique tout vecteur  $\mathcal{X} = (x_3 \ x_4)$ . Le vecteur  $P_{\mathcal{X}} = (A_{\mathcal{X}}, B_{\mathcal{X}})$

des coordonnées de  $\mathcal{X}$  dans cette nouvelle base vérifie

$$(x_3 \ x_4) = A_{\mathcal{X}} \cdot (x_1 \ x_2) + B_{\mathcal{X}} \cdot (-x_2^* \ x_1^*)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{X}} &= x_3 x_1^* + x_4 x_2^* \\ \text{et } B_{\mathcal{X}} &= -x_3 x_2 + x_4 x_1 . \end{aligned}$$

Pour  $(x_1, x_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$  fixé, l'ensemble  $\nu_{\mathcal{X}} = \{P_{\mathcal{X}}, \mathcal{X} \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}\}$  des coordonnées des vecteurs de la constellation vérifie les propriétés suivantes :

- $\nu_{\mathcal{X}}$  contient  $2^{2b}$  éléments correspondant aux paires  $(x_3, x_4)$  de symboles de la constellation,
- tous les éléments de  $\nu_{\mathcal{X}}$  ont une norme unité,
- pour chaque paire de vecteurs  $\mathcal{X} = (x_3 \ x_4)$ ,  $\mathcal{Y} = (y_3 \ y_4) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ , on a

$$\|P_{\mathcal{X}} - P_{\mathcal{Y}}\| = \|(x_3 \ x_4) - (y_3 \ y_4)\| ,$$

- la distance minimale entre deux éléments distincts de  $\nu_{\mathcal{X}}$  est égale à la distance minimale de la constellation  $2^b$ -PSK  $\mathcal{A}$ .

Le code ST de [Tarokh et Jafarkhani, 2000] est déterminé par le choix de  $(x_1, x_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$  qui fixe  $\nu_{\mathcal{X}}$  et par le choix de l'étiquetage qui associe un vecteur  $\mathcal{X}$  à chaque bloc de  $2b$  bits d'information.

La transmission différentielle est amorcée en envoyant le mot de code d'Alamouti contenant le vecteur de référence  $(x_1 \ x_2)$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} .$$

A l'instant 1,  $x_1$  est émis sur l'antenne 1 et  $x_2$  est émis sur l'antenne 2. A l'instant 2,  $-x_2^*$  est émis sur l'antenne 1 et  $x_1^*$  est émis sur l'antenne 2. Ce premier mot ne porte pas d'information.

Supposons qu'aux instants  $2t - 1$  et  $2t$ , le mot de code  $\mathbf{X}_t$  ait été émis. Si  $P_{t+1} = (A_{t+1}, B_{t+1})$  est le vecteur correspondant aux  $2b$  bits à transmettre, l'émetteur envoie, aux instants  $2t + 1$  et  $2t + 2$ , le mot de code

$$\mathbf{X}_{t+1} = \begin{bmatrix} x_{2t+1} & x_{2t+2} \\ -x_{2t+2}^* & x_{2t+1}^* \end{bmatrix}$$

où

$$(x_{2t+1} \ x_{2t+2}) = A_{t+1}(x_{2t-1} \ x_{2t}) + B_{t+1}(-x_{2t}^* \ x_{2t-1}^*).$$

Nous remarquons que, comme pour le code d'Alamouti, l'efficacité spectrale de ce code est de 1 symbole puc.

En réception, le décodage proposé par [Tarokh et Jafarkhani, 2000] rappelle lui aussi le schéma d'Alamouti. Nous ne reprenons donc que les formules du décodeur.

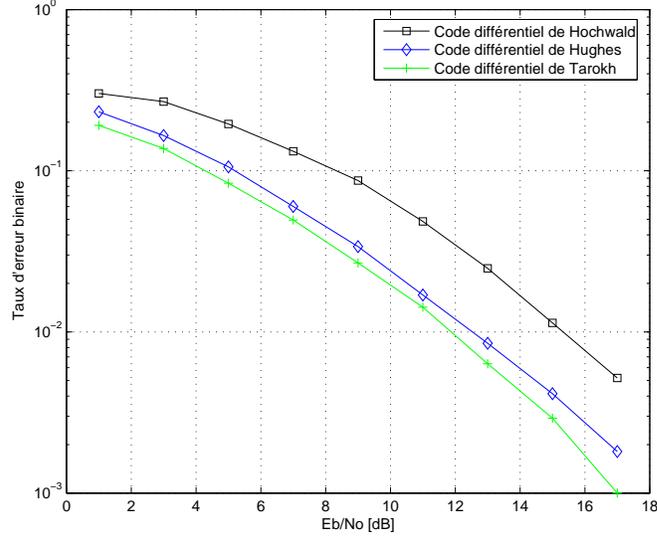


FIG. 4.1 – Comparaison des performances de codes différentiels pour  $M = N = 2$  et  $R = 2$  bits pcu

Sur une antenne, le signal reçu à l'instant  $\theta$  est noté  $y_\theta$ . Pour estimer les valeurs de  $A_{t+1}$  et  $B_{t+1}$ , le décodeur calcule les quantités

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= y_{2t+1}y_{2t-1}^* + y_{2t+2}^*y_{2t} \\ \text{et } \mathcal{R}_2 &= -y_{2t+1}y_{2t}^* - y_{2t+2}^*y_{2t-1} \end{aligned}$$

puis il cherche le vecteur  $P \in \nu$  le plus proche de  $(\mathcal{R}_1^j \ \mathcal{R}_2^j)$  et sort les  $2b$  bits d'information correspondants.

Si le système a  $N$  antennes de réception, le récepteur calcule les quantités  $\mathcal{R}_1^j$  et  $\mathcal{R}_2^j$  pour chaque antenne de réception  $j$ . Ensuite, c'est le vecteur le plus proche de  $(\sum_{j=1}^N \mathcal{R}_1^j \ \sum_{j=1}^N \mathcal{R}_2^j)$  qui est choisi.

La figure (4.1) présente une comparaison des codes différentiels de [Hughes, 2000], de [Hochwald et Sweldens, 2000] et de [Tarokh et Jafarkhani, 2000] pour deux antennes d'émission, deux antennes de réception et un rendement de 2 bits pcu. Pour conclure, nous pouvons dire que le code différentiel de [Tarokh et Jafarkhani, 2000] dérivé du code d'Alamouti est plus simple et plus performant que les codes proposés par [Hochwald et Sweldens, 2000] et par [Hughes, 2000]. Il ne s'applique malheureusement qu'à des constellation PSK et uniquement à des systèmes à deux antennes d'émission.

#### 4.6.1.4 Codes différentiels basés sur la transformée de Cayley

La transformée de Cayley proposée par [Hassibi et Hochwald 2, 2002] permet de paramétrer la variété de Stiefel  $S_{M,M}(\mathbb{C})$  (l'espace des matrices unitaires complexes  $M \times M$ ) vue en 4.1.1.

La transformée de Cayley de la matrice  $\mathbf{C}$  s'écrit

$$\mathbf{V} = (\mathbf{I}_M + \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{I}_M - \mathbf{C}) \quad (4.47)$$

où  $\mathbf{C}$  est supposée ne pas avoir  $-1$  pour valeur propre afin que l'inverse de  $(\mathbf{I}_M + \mathbf{C})$  existe.

Comme  $(\mathbf{I}_M - \mathbf{C})$  et  $(\mathbf{I}_M + \mathbf{C})^{-1}$  commutent, nous pouvons écrire  $\mathbf{V}$  sous la forme

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}_M - \mathbf{C}}{\mathbf{I}_M + \mathbf{C}}. \quad (4.48)$$

Soit  $\mathbf{A}$  une matrice hermitienne  $M \times M$ , la matrice anti-hermitienne  $\mathbf{C} = i\mathbf{A}$  a pour transformée de Cayley

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}_M - i\mathbf{A}}{\mathbf{I}_M + i\mathbf{A}}. \quad (4.49)$$

Comme les valeurs propres de  $i\mathbf{A}$  sont strictement imaginaires, l'inverse de  $(\mathbf{I}_M + i\mathbf{A})$  existe. En utilisant le fait que la matrice  $\mathbf{A}$  soit hermitienne, nous trouvons  $\mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{I}_M$ . La matrice  $\mathbf{V}$  est donc unitaire.

Le code différentiel de Cayley est l'ensemble des matrices unitaires obtenues par transformation de Cayley de matrices anti-hermitiennes. Le symbole émis de notre code ST différentiel  $\mathbf{X}_n = \mathbf{V}_n \mathbf{X}_{n-1}$  est déterminé par la matrice unitaire  $\mathbf{V}_n$  qui porte l'information. Or, comme la variété de Stiefel est non linéaire, le choix direct des matrices  $\mathbf{V}_n$  est problématique. Par contre l'espace des matrices anti-hermitiennes est linéaire. [Hassibi et Hochwald 1, 2002] ont donc proposé de remplacer la recherche de matrices dans la variété de Stiefel par le choix de matrices anti-hermitiennes grâce à la transformée de Cayley.

Pour construire notre code, nous prenons des matrices hermitiennes de la forme

$$\mathbf{A} = \sum_{q=1}^Q \alpha_q \mathbf{A}_q \quad (4.50)$$

où  $Q$  est le nombre de degrés de liberté réels du code, les  $\alpha_q$  ( $q = 1..Q$ ) sont des scalaires réels choisis dans un ensemble  $\mathcal{A}$  de  $r$  éléments et les  $\mathbf{A}_q$  sont des matrices hermitiennes  $M \times M$  fixées. Le choix des  $\mathbf{A}_q$  détermine totalement le code.

Chaque  $\alpha_q$  peut prendre  $r$  valeurs et le code utilise  $M$  fois le canal, le débit de transmission est donc

$$R = \left( \frac{Q}{M} \right) \log_2 r. \quad (4.51)$$

A la réception, le mot de code reçu à l'instant  $n$  s'écrit

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_n &= \mathbf{X}_n \mathbf{H} + \mathbf{W}_n \\ &= \mathbf{V}_n \mathbf{Y}_{n-1} + \mathbf{W}_n - \mathbf{V}_n \mathbf{W}_{n-1} \\ &= (\mathbf{I}_M + \mathbf{iA})^{-1} (\mathbf{I}_M - \mathbf{iA}) \mathbf{Y}_{n-1} + \mathbf{W}_n - (\mathbf{I}_M + \mathbf{iA})^{-1} (\mathbf{I}_M - \mathbf{iA}) \mathbf{W}_{n-1}\end{aligned}$$

donc

$$(\mathbf{I}_M + \mathbf{iA}) \mathbf{Y}_n = (\mathbf{I}_M - \mathbf{iA}) \mathbf{Y}_{n-1} + (\mathbf{I}_M + \mathbf{iA}) \mathbf{W}_n - (\mathbf{I}_M - \mathbf{iA}) \mathbf{W}_{n-1}$$

et nous trouvons ainsi l'équation

$$\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_{n-1} = \mathbf{A} \frac{1}{\mathbf{i}} (\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_{n-1}) + (\mathbf{I}_M + \mathbf{iA}) \mathbf{W}_n - (\mathbf{I}_M - \mathbf{iA}) \mathbf{W}_{n-1} \quad (4.52)$$

qui est linéaire en  $\mathbf{A}$  et est donc aussi linéaire en  $\{\alpha_q\}$ .

Dans l'équation 4.52, le bruit additif  $(\mathbf{I}_M + \mathbf{iA}) \mathbf{W}_n - (\mathbf{I}_M - \mathbf{iA}) \mathbf{W}_{n-1}$  a des colonnes indépendantes et sa covariance vaut

$$(\mathbf{I}_M + \mathbf{iA})(\mathbf{I}_M - \mathbf{iA}) + (\mathbf{I}_M - \mathbf{iA})(\mathbf{I}_M + \mathbf{iA}) = 2(\mathbf{I}_M + \mathbf{A}^2) .$$

L'estimation des  $\alpha_q$  au maximum de vraisemblance s'écrit

$$\hat{\alpha}_{ml} = \arg \min_{\{\alpha_q\}} \left\| (\mathbf{I}_M + \mathbf{iA})^{-1} \left( \mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_{n-1} - \frac{1}{\mathbf{i}} \mathbf{A} (\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_{n-1}) \right) \right\|^2$$

soit encore

$$\hat{\alpha}_{ml} = \arg \min_{\{\alpha_q\}} \left\| \left( \mathbf{I}_M + \mathbf{i} \sum_{q=1}^Q \alpha_q \mathbf{A}_q \right)^{-1} \left( \mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_{n-1} - \frac{1}{\mathbf{i}} \sum_{q=1}^Q \alpha_q \mathbf{A}_q (\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_{n-1}) \right) \right\|^2 . \quad (4.53)$$

Ce décodeur n'est pas quadratique en  $\{\alpha_q\}$ , ce qui rend la résolution ardue. Cependant, en ne tenant pas compte de la covariance du bruit et en ne considérant qu'un simple bruit blanc, il est possible d'obtenir une forme *linéarisée*<sup>12</sup> du décodeur ML

$$\hat{\alpha}_{ml} = \arg \min_{\{\alpha_q\}} \left\| \left( \mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_{n-1} - \frac{1}{\mathbf{i}} \sum_{q=1}^Q \alpha_q \mathbf{A}_q (\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_{n-1}) \right) \right\|^2 . \quad (4.54)$$

Comme cette équation est quadratique en  $\{\alpha_q\}$ , le décodeur peut utiliser un DFE ou un Sphere Decoder en faisant apparaître un canal équivalent. Néanmoins, comme l'expression de ce canal équivalent dépend de  $\mathbf{Y}_n$  et de  $\mathbf{Y}_{n-1}$ , les éléments du décodeur doivent être recalculés à chaque symbole, ce qui rend tout prétraitement inintéressant.

<sup>12</sup>le système d'équation 4.54 est linéaire en  $\alpha_q$

Nous présentons maintenant la stratégie de construction du code différentiel de Cayley de [Hassibi et Hochwald 1, 2002] pour un système à  $M$  antennes d'émission,  $N$  antennes de réception et pour un débit souhaité  $R$ .

1. Nous choisissons  $Q \leq \min(M, N) \max(2M - N, N)$ , afin que le nombre d'inconnues soit inférieur au nombre d'équations à résoudre<sup>13</sup>. En pratique, nous choisissons  $Q = \min(M, N) \max(2M - N, N)$ .
2. Le débit  $R$  (4.51) fixe le nombre d'éléments  $r = 2^{\frac{MR}{Q}}$  de  $\mathcal{A}$ . Prendre  $\mathcal{A}$  suivant une distribution de Cauchy discrétisée permet de maximiser l'information mutuelle entre  $\mathbf{V}_n$  et la paire  $(\mathbf{Y}_{n-1}, \mathbf{Y}_n)$ . L'ensemble  $\mathcal{A}$  est choisi comme l'image de l'ensemble  $\left\{ \frac{\pi}{r}, \frac{3\pi}{r}, \dots, \frac{(2r-1)\pi}{r} \right\}$  par la fonction  $\theta \rightarrow -i \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .
3. L'ensemble  $A_q$  est choisi numériquement de façon à maximiser la distance produit (4.46), ce qui permet de minimiser la probabilité d'erreur par paire.

[Hassibi et Hochwald 2, 2002] ont montré que l'ensemble des matrices  $\{\mathbf{V}\}$  atteignait la diversité maximale<sup>14</sup> si et seulement si l'ensemble des matrices hermitiennes de la transformée de Cayley  $\{\mathbf{A}\}$  était à diversité maximale. Les codes ST différentiels de Cayley ne sont donc pas toujours à diversité maximale. Cependant, ils sont plus performants que les codes de [Hughes, 2000], [Hochwald et Sweldens, 2000] et [Tarokh et Jafarkhani, 2000]. En outre ils peuvent être utilisés avec n'importe quel nombre d'antennes à l'émission et à la réception.

[Gamal et Damen, 2003] ont aussi proposé des codes ST différentiels utilisant la transformée de Cayley. Ils construisent leurs codes à partir du codage cohérent TAST<sup>15</sup> qui assure une diversité maximale sur un canal et un débit arbitraire. Le codage TAST est modifié afin de construire des matrices hermitiennes à diversité maximale.

Les codes TAST différentiels sont construits à partir de codes DAST réels, dont les couches sont séparées à l'aide de nombres diophantiens réels pour en faire des codes TAST réels. Sur une constellation réelle PAM<sup>16</sup> et avec une matrice de rotation réelle à diversité algébrique maximale ses codes peuvent atteindre la diversité maximale. Les performances de ces codes TAST différentiels sont significativement meilleures que celles des autres codes ST différentiels présentés précédemment.

La figure (4.2) montre que les codes de [Hassibi et Hochwald 2, 2002] et de [Gamal et Damen, 2003], qui utilisent la transformée de Cayley, sont plus performants que le meilleur des codes différentiels vus précédemment ([Tarokh et Jafarkhani, 2000]). Pour un taux d'erreur par mot de code ST de  $10^{-2}$ , le code TAST de [Gamal et Damen, 2003] présente un gain de 6 dB par rapport au code de Cayley différentiel de [Hassibi et Hochwald 2, 2002].

<sup>13</sup>Il est possible, avec un Sphere Decoder, de choisir un plus grand nombre d'inconnues (jusqu'à  $M^2$ )

<sup>14</sup>au sens de la probabilité d'erreur par paire

<sup>15</sup>*Threaded Algebraic Space-Time Codes* soit des codes espace-temps algébriques en couches

<sup>16</sup>*Pulse Amplitude Modulation*

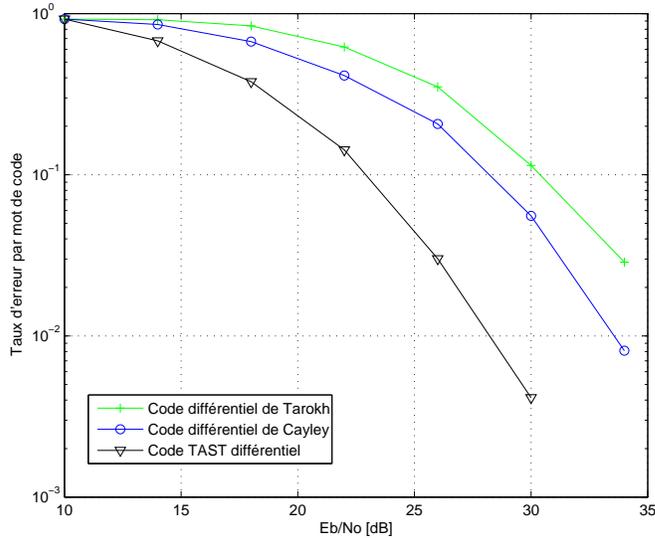


FIG. 4.2 – Performances de codes différentiels utilisant la transformée de Cayley pour  $M = N = 2$  et  $R = 6$  bits pcu

#### 4.6.1.5 Conclusion

Les systèmes de transmission différentiels MIMO offrent, comme les SISO, l'avantage d'avoir une détection non cohérente très simple. Les modulations Espace-Temps différentielles sont unitaires et le code doit donc être construit sur la variété de Stiefel. La variété de Stiefel étant hautement non-linéaire, cette construction s'avère délicate. La transformée de Cayley permet de concevoir des matrices unitaires à partir de matrices hermitiennes. L'espace des matrices hermitiennes est linéaire et la construction des codes ST différentiels s'en retrouve simplifiée.

Par contre, le gain de multiplexage des codes différentiels ne peut pas dépasser  $\frac{1}{2} \min(M, N)$ . Nous n'atteignons donc pas le gain de multiplexage maximal prévu  $K_{nc} = M^* \left(1 - \frac{M^*}{T}\right)$  avec  $M^* = \min(M, N, \lfloor \frac{T}{2} \rfloor)$ . Les codes différentiels ne permettent pas d'exploiter le fait que, à fort rapport signal à bruit, la capacité en non cohérent tend asymptotiquement vers la capacité en cohérent lorsque la longueur  $T$  du code augmente. Pour augmenter le gain de multiplexage, nous devons donc concevoir des codes ST *purement* non cohérents, c'est à dire décodables sans structure différentielle.

#### 4.6.2 Codes purement non cohérents

Nous présentons ici quelques exemples de codes Espace-Temps non cohérents. Il existe plusieurs critères de construction pour ces codes, qui peuvent être classés en trois types :

1. Les codes construits par recherches numériques :

- par minimisation numérique d’une fonction coût associée aux mesures de distance vues en 4.1.4 ([Hochwald et al, 2000, Agrawal et al, 2001, Gohary et Davidson, 2004]).
  - par minimisation de la borne de l’union sur la probabilité d’erreur ([McCloud et al, 2002, Brehler et Varanasi, 2003]).
  - par minimisation de la distance de Kullback-Leibler ([Borran et al, 2003]).
2. Les codes construits par paramétrisation
    - sur la variété de Stiefel ([Hochwald et al, 2000, Jing et Hassibi, 2001, Wang et al, 2004]).
    - sur la variété de Grassmann ([Kammoun, 2004, Kammoun et Belfiore, 2003]).
  3. Les codes construits par construction algébrique ([Tarokh et Kim, 2002, Zhao et al, 2004, Oggier et al, 2003]).

Nous ne ferons pas ici de présentation exhaustive des codes purements non cohérents. Nous en présenterons uniquement quelques uns qui nous semblent caractéristiques.

#### 4.6.2.1 Code construit par minimisation de distance

Nous avons vu que l’expression asymptotique de la probabilité d’erreur par paire d’un code non cohérent unitaire (4.36) s’écrit

$$P_{nc}(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j) \sim \frac{\rho^{-MN} \binom{2MN-1}{MN}}{\det(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{ji})^N}.$$

Il faut donc maximiser  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{ji})^N$  pour minimiser la probabilité d’erreur.

Soient  $\theta_{ij, m}$   $m = 1 \dots M$ , les angles principaux entre  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ , les sous-espaces engendrés par les mots de code  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{X}_j$ . Les  $\cos \theta_{ij, m}$  sont les valeurs singulières de  $\mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_j$ . La matrice  $\mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{ji} = \mathbf{X}_j^\dagger \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_j$  a donc pour valeurs propres les  $\cos^2 \theta_{ij, m}$  et

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{ji})^N = \left( \prod_{m=1}^M \sin^2 \theta_{ij, m} \right)^N. \quad (4.55)$$

Nous retrouvons donc l’expression de la distance produit définie en (4.14), et la maximisation du *produit de diversité*

$$\xi = \min_{\substack{\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in \text{Code} \\ \mathbf{X}_i \neq \mathbf{X}_j}} \left[ \prod_{m=1}^M \sin^2 \theta_{ij, m} \right]^{\frac{1}{2M}} \quad (4.56)$$

peut être un critère de construction de code ST qui permet une minimisation de la probabilité d’erreur (4.35)

Lorsque les valeurs singulières de  $\mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_j$  sont faibles, nous pouvons faire l'approximation

$$\prod_{m=1}^M \sin^2 \theta_{ij, m} = \prod_{m=1}^M (1 - \cos^2 \theta_{ij, m}) \approx 1 - \sum_{m=1}^M \cos^2 \theta_{ij, m}. \quad (4.57)$$

De manière similaire, quand le rapport signal à bruit est faible, [Agrawal et al, 2001] ont montré que

$$\left( \prod_{m=1}^M \sin^2 \theta_{ij, m} \right)^{\frac{1}{M}} \sim 1 - \frac{1}{M} \left\| \mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_j \right\|_F^2 \quad (4.58)$$

et nous retrouvons alors la distance cordale (4.13).

Maximiser  $\xi$  revient alors à maximiser

$$\min_{\substack{\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in \text{Code} \\ \mathbf{X}_i \neq \mathbf{X}_j}} \left[ \sum_{m=1}^M \sin^2 \theta_{ij, m} \right]^{\frac{1}{2}}$$

soit encore minimiser

$$\sigma^* = \max_{\substack{\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in \text{Code} \\ \mathbf{X}_i \neq \mathbf{X}_j}} \left\| \mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_j \right\|_F. \quad (4.59)$$

- [Agrawal et al, 2001] proposent, comme mesure de distance entre  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ , les sous espaces engendrés par les mots de code  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{X}_j$

$$d_a(\Omega_i, \Omega_j) = \sqrt{T - \sum_{m=1}^M \cos^2 \theta_{ij, m}} = \sqrt{T - \left\| \mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_j \right\|_F^2}. \quad (4.60)$$

Les sous-espaces vectoriels sont alors choisis dans la variété de Grassmann  $G_{T,M}(\mathbb{C})$  de façon à maximiser la distance minimale

$$d(G_{T,M}(\mathbb{C})) = \min_{\substack{\Omega_i, \Omega_j \in G_{T,M}(\mathbb{C}) \\ \Omega_i \neq \Omega_j}} d_a(\Omega_i, \Omega_j). \quad (4.61)$$

[Agrawal et al, 2001] reprennent dans le cas complexe, la méthodologie qu'avaient employée [?, ?] avec la variété de Grassmann réelle  $G_{T,M}(\mathbb{R})$ , et proposent une procédure d'optimisation numérique pour le choix des sous-espaces.

- [Hochwald et al, 2000] construisent leur code Espace-Temps non cohérent unitaire par diminution successive de  $\sigma^*$  (4.59). Pour cela, ils identifient les deux mots de code qui engendrent les sous-

espaces vectoriels les plus proches

$$(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \arg \max_{\substack{\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \in \text{Code} \\ \mathbf{X}_i \neq \mathbf{X}_j}} \left\| \mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_j \right\|_F . \quad (4.62)$$

Les sous-espaces sont ensuite *séparés* par multiplication à gauche de  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{X}'$  par des matrices unitaires.

3. [Gohary et Davidson, 2004] utilisent une autre métrique : la distance cordale de Frobenius ([Edelman et al, 1998])

$$d_{cF}^2(\boldsymbol{\Omega}_i, \boldsymbol{\Omega}_j) = 4 \sum_{m=1}^M \sin^2 \frac{\theta_{ij,m}}{2} .$$

Cette distance diffère de la distance distance cordale (4.13) :  $d_{cF} \leq d_c$  et est moins précise.

[Gohary et Davidson, 2004] proposent un décodage GLRT simplifié, qui ne fait pas de recherche exhaustive sur tout l'alphabet. Il ne calcule la métrique du GLRT que sur une liste de mots de code établie à partir d'un point de référence du Grassmannien.

4. Les codes ST non cohérents de [McCloud et al, 2002] sont construits de façon à minimiser la probabilité d'erreur par trame. La mesure de distance est déduite de la borne de l'union de l'expression asymptotique de la PEP (4.36)

$$P_{BU}^{nc} = \frac{\rho^{-MN}}{L} \binom{2MN-1}{MN} \sum_{i=1}^L \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L \det(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{ji})^N . \quad (4.63)$$

$P_{BU}^{nc}$  fournit une majoration assez fiable de la probabilité d'erreur à fort SNR. La distance à minimiser est donc

$$d_{BU} = \sum_{i=1}^L \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L \det(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{ji})^N . \quad (4.64)$$

5. A faible rapport signal à bruit, ou lorsque le temps de cohérence du canal diminue, les codes ST unitaires ne sont plus optimaux et obtiennent de piètres performances. Pour ces cas particuliers, [Borran et al, 2003] proposent des codes non-unitaires construits en maximisant le minimum la distance de Kullback-Leibler sur tous les mots de code afin de minimiser la PEP. La distance de

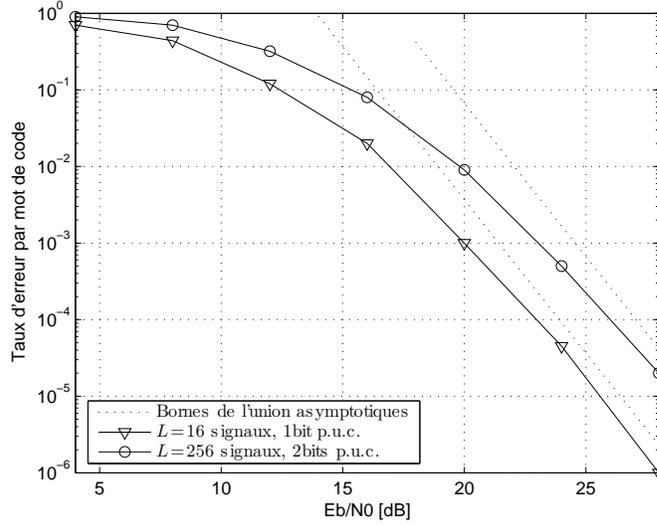


FIG. 4.3 – Performances du Code de McCloud pour deux antennes d’émission et deux antennes de réception

Kullback-Leibler entre deux distributions  $p_i(x)$  et  $p_j(x)$  s’écrit ([Cover et Thomas, 1991]) :

$$d_{KL}(p_i||p_j) = E_{p_i} \left[ \ln \left( \frac{p_i(x)}{p_j(x)} \right) \right] \quad (4.65)$$

$$= \int_x p_i(x) (\ln p_i(x) - \ln p_j(x)) dx . \quad (4.66)$$

#### 4.6.2.2 Code construit par paramétrisation

- [Hochwald et al, 2000] ont conçu une méthode systématique pour la conception de leur code ST non cohérent. La constellation espace-temps unitaire de  $L$  éléments se fait par rotations successives dans un espace complexe de dimension  $T$ . Le premier mot de code  $\mathbf{X}_1$  est fixé et le mot  $\mathbf{X}_i$  s’écrit

$$\mathbf{X}_i = \Theta^{i-1} \mathbf{X}_1 \quad (i = 1, \dots, L) \quad (4.67)$$

où  $\Theta$  est une matrice unitaire de dimension  $T \times T$  et est une racine  $L^{\text{ième}}$  de la matrice identité. Nous obtenons ainsi une structure circulante par bloc, car la matrice  $\mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_j$  ne dépend que de  $(i-j)$  modulo  $L$ .  $\Theta$  est une matrice diagonale dont les éléments s’écritent  $e^{\frac{i2\pi}{L}u_1}, \dots, e^{\frac{i2\pi}{L}u_T}$ , où les nombres  $u_1, \dots, u_T$  sont des entiers différents modulo  $L$ . Les  $u_1, \dots, u_T$  sont choisis numériquement de manière à minimiser la probabilité d’erreur.

La minimisation du critère (4.59) revient à chercher

$$\min_{0 \leq u_1, \dots, u_T \leq L-1} \left[ \max_{i=2, \dots, L} \left\| \mathbf{X}_i^\dagger \mathbf{X}_j \right\|_F \right] . \quad (4.68)$$

[Hochwald et al, 2000] ont montré que les constellations (4.67) peuvent être vues algébriquement,

car il existe une équivalence entre elles et les codes en blocs construits sur l'anneau des entiers. La recherche sur les codes linéaires permet de simplifier le critère de construction (4.68). La construction devient néanmoins compliquée lorsque les dimensions du code augmentent.

Pour le choix de la matrice initiale  $\mathbf{X}_1$ , [Hochwald et al, 2000] proposent de prendre  $M$  colonnes de la matrice de Transformation de Fourier Discrète (DFT) de dimension  $T \times T$ .

2. Les codes ST unitaires non cohérents de [Jing et Hassibi, 2001] utilisent la transformée de Cayley. Ils sont directement issus des codes de Cayley différentiels (4.6.1.4) et peuvent être vus comme leur généralisation aux codes rectangulaires.

Le code de Cayley unitaire construit dans  $S_{T,M}(\mathbb{C})$  s'écrit

$$\mathbf{X}_{T \times M} = (\mathbf{I}_T + \mathbf{iA})^{-1}(\mathbf{I}_T - \mathbf{iA})\mathbf{I}_{T,M} \quad (4.69)$$

où

$$\mathbf{I}_{T,M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0}_{T-M, M} \end{bmatrix}$$

et où la matrice hermitienne

$$\mathbf{A} = \sum_{q=1}^Q \alpha_q \mathbf{A}_q$$

est construite avec la même technique numérique que pour les codes de Cayley différentiels de [Hassibi et Hochwald 2, 2002].

Par contre, la diversité des codes différentiels n'est plus garantie dans le cas purement non cohérent.

3. Une méthode de paramétrisation différente a été utilisée par [Kammoun et Belfiore, 2003] pour leur code ST unitaire. Elle est basée sur des propriétés des variétés de Stiefel et de Grassmann ([Edelman et al, 1998]) : la variété de Stiefel  $S_{T,M}(\mathbb{C})$  est isomorphe au groupe quotient  $U_T(\mathbb{C})/U_{T-M}(\mathbb{C})$ , or comme le Grassmannien  $G_{T,M}(\mathbb{C})$  est isomorphe au groupe quotient  $S_{T,M}(\mathbb{C})/\mathcal{U}_M(\mathbb{C})$  (4.1.2), il est aussi isomorphe à  $U_T(\mathbb{C})/(\mathcal{U}_M(\mathbb{C}) \times U_{T-M}(\mathbb{C}))$ . Cela implique que chaque sous-espace de  $G_{T,M}(\mathbb{C})$  peut être représenté par un élément de  $U_T(\mathbb{C})/(\mathcal{U}_M(\mathbb{C}) \times U_{T-M}(\mathbb{C}))$  appliqué à un sous-espace de référence de dimension  $M$ .

$\mathbf{I}_{T,M}$  est choisi comme sous-espace de référence.

L'espace tangent de  $G_{T,M}(\mathbb{C})$  au point  $\mathbf{Q} \in G_{T,M}(\mathbb{C})$  est défini comme l'ensemble des matrices de la forme

$$\Delta = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{V} \\ -\mathbf{V}^\dagger & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

avec  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{M \times (T-M)}$ .

La théorie des groupes de Lie ([Fulton et Harris, 1991]) montre que les exponentiels des éléments de l'espace tangent au point unité sont des transformations unitaires représentant les points de  $G_{T,M}(\mathbb{C})$ .

Les points de  $G_{T,M}(\mathbb{C})$  peuvent donc être représentés par les matrices de la forme

$$\mathbf{X} = \left[ \exp \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{V} \\ -\mathbf{V}^\dagger & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \cdot \mathbf{I}_{T,M}. \quad (4.70)$$

Les matrices  $\mathbf{V}$  choisies pour construire le code non cohérent sont des matrices d'un code cohérent compressées par un facteur d'échelle réel et positif. Le facteur d'échelle est le seul paramètre de ce code et il est choisi de façon à maximiser la distance géodésique (4.12). La diversité de ce code non cohérent, construit à partir d'un code cohérent qui atteint la diversité maximale, est pressentie maximale, mais ce point n'a pas été formellement prouvé.

### 4.6.3 Codes non cohérents à entraînement

Une nouvelle classe de codes Espace-Temps non cohérents, récemment proposée, semble prometteuse : les codes à entraînement<sup>17</sup> ([Brehler et Varanasi, 2003, Gamal et Damen, 2003, Dayal et al, 2004]). Ces codes sont construits en fonction de la contrainte temporelle du canal :  $T_c$  le temps de cohérence, pendant lequel les coefficients du canal sont supposés constants. Le code est formé de deux parties, la phase d'entraînement et la phase de transmission de données. Pendant la période de temps  $T_t$ , un symbole pilote  $\mathbf{T}$  de taille  $T_t \times M$  est transmis. Il est connu du récepteur et permet d'effectuer une estimation assez grossière du canal. Ensuite, pendant  $T_d$ , l'information est transmise par un mot de code ST cohérent  $\mathbf{B}$  de taille  $T_d \times M$ . Le mot de code ST à entraînement s'écrit donc

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \sqrt{\tau} \mathbf{T} \\ \sqrt{1-\tau} \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

où  $0 \leq \tau \leq 1$  permet de choisir la puissance de la phase d'entraînement sans changer la puissance globale du mot de code. Le mot de code ST à entraînement dure alors  $T = T_t + T_d \leq T_c$ .

Le symbole d'information peut éventuellement être formé de  $S$  mots de code cohérents de taille  $\frac{T_t}{S} \times M$  ([Brehler et Varanasi, 2003]). Nous retrouvons ainsi une structure de trame classique précédée d'une phase d'entraînement, dont les codes à entraînement sont un cas extrême. Par contre, comme la "trame" est très courte, le canal est estimé une seule fois par réalisation du canal quasi-statique. Estimer la trame plus souvent serait trop coûteux en terme d'efficacité spectrale, toutefois la finesse de l'estimation peut être ajustée à l'aide de la puissance  $\tau$  allouée à la phase d'entraînement.

Les codes ST non cohérents à entraînement présentent des avantages appréciables qui devraient généraliser leur utilisation :

---

<sup>17</sup> *Training-codes* ou *Training Based Codes*

- la structure d’un code à entraînement (4.71) lui permet d’atteindre la même diversité, au sens de la PEP, que le code cohérent dont il est issu, si  $\mathbf{T}$  est de rang plein et si les coefficients du canal à évanouissement sont iid ([Dayal et al, 2004]).
- les codes ST cohérents sont bien mieux connus que les codes ST non cohérents, et la structure même des codes à entraînement permet de réinvestir avantageusement cette maîtrise.
- les techniques de décodage des codes cohérents, plus simples que celles des codes non cohérents, sont également applicables aux codes à entraînement.

L’équation du schéma de transmission s’écrit

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_t \\ \mathbf{Y}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\tau} \mathbf{T} \\ \sqrt{1-\tau} \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{H} + \begin{bmatrix} \mathbf{W}_t \\ \mathbf{W}_d \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Le récepteur simplifié des codes à entraînement opère en deux temps :

1. Le récepteur estime les coefficients du canal par l’algorithme LMMSE<sup>18</sup> ([Hassibi et Hochwald, 2003]) sur le symbole pilote reçu  $\mathbf{Y}_t$  :

$$\hat{\mathbf{H}} = \sqrt{\tau} \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{I}_M + \tau \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} \right)^{-1} \mathbf{T}^\dagger \mathbf{Y}_t. \quad (4.73)$$

L’estimateur LMMSE est a priori suboptimal.

2. Le récepteur suppose l’estimation du canal parfaite et l’utilise dans le décodeur ML cohérent pour détecter les symboles de données

$$\hat{\mathbf{H}} = \arg \min_{\mathbf{B} \in \text{Code}} \|\mathbf{Y}_d - \mathbf{B}\hat{\mathbf{H}}\|_F^2. \quad (4.74)$$

Dans le cas particulier où  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{B}$  sont unitaires, où le canal est i.i.d. et où  $\mathbf{B}$  est formé d’un seul mot de code cohérent ( $S = 1$ ), [Dayal et al, 2004] ont montré que le décodage en deux temps des codes à entraînement avec une estimation de canal LMMSE, est optimal et coïncide avec le décodage ML non cohérent (4.24). Par contre si  $\mathbf{B}$  est formé de plusieurs mots de code cohérent ( $S > 1$ ), le décodage en deux temps est toujours sous-optimal.

Le décodage ML cohérent (4.74) peut être remplacé par un autre algorithme de recherche de point le plus proche (*Sphere Decoder*, *Schnorr-Euchner*), néanmoins les calculs préliminaires qui ne servent que pour un seul symbole Espace-Temps  $\mathbf{B}$  peuvent s’avérer plus complexes que le décodage exhaustif.

Nous présentons maintenant des solutions pour former les codes à entraînement proposés par [Hassibi et Hochwald, 2003], lorsque les coefficients du canal sont estimés grâce à l’algorithme LMMSE. Pour estimer tous les coefficients du canal,  $\mathbf{T}$  doit être de rang  $M$  (*i.e.* de rang plein). Il sera optimal de choisir la matrice  $\mathbf{T}$  multiple d’une matrice orthonormale, ainsé que de prendre  $\mathbf{T}$  carrée ( $T_t = M$ ) quel

---

<sup>18</sup> *Linear Minimum Mean Square Error*

que soit le rapport signal à bruit et la taille  $T$  du mot de code ST à entraînement.

Alors, dans ces conditions, et si  $S = 1$ , la puissance optimale de la phase d'entraînement vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tau > \frac{1}{2} & \text{si } T > 2M \\ \tau = \frac{1}{2} & \text{si } T = 2M \\ \tau < \frac{1}{2} & \text{si } T < 2M \end{array} \right.$$

## Conclusion

Ce chapitre a présenté l'état actuel des recherches en matière de codage Spatio-Temporel dans le cas des transmissions non cohérentes.

Nous avons suivi une approche géométrique et mis en évidence la nécessité de placer l'information uniquement dans les sous-espaces vectoriels engendrés par les mots de code. Cette approche se traduit par l'emploi de la variété de Grassmann.

Nous avons étudié la capacité du canal MIMO dans le cas non cohérent. Il a été montré qu'à fort signal à bruit, il est inutile d'avoir plus d'antennes à l'émission qu'à la réception.

Nous avons également calculé les probabilités d'erreur en fonction du décodeur utilisé, et nous avons établi que, pour espérer bénéficier de la diversité maximale, la longueur temporelle du code doit être le double du nombre d'antennes d'émission.

Pour finir, nous avons présenté différents types de codes ST non cohérents : les codes ST différentiels, les codes ST purement non cohérents et enfin les codes ST à entraînement.

## Chapitre 5

# Codages Spatio-Temporels non cohérents pour les modulations FSK et pour la norme Bluetooth

Nous présentons dans ce dernier chapitre un nouveau schéma de codage pour les systèmes MIMO en non cohérent. Alors que les codages ST classiques travaillent sur des signaux PSK ou QAM, cette nouvelle solution est basée sur de la modulation numérique de fréquence FSK<sup>1</sup>. Ce codage conserve les qualités intrinsèques des modulations FSK et peut facilement être adapté à la norme de Bluetooth pour les réseaux personnels sans fil (WPAN<sup>2</sup>).

### Introduction

Les systèmes MIMO non cohérents classiques codent des signaux modulés en phase et/ou en amplitude (PSK et QAM). Pourtant, en SISO, la modulation FSK est une solution très efficace de transmission en non cohérent. De plus, la modulation FSK présente des caractéristiques intéressantes :

- Le signal émis a une puissance constante, ce qui élimine les contraintes de linéarité au niveau de l'amplificateur de puissance et permet donc de réduire le coût de l'émetteur.
- La transmission peut être purement non cohérente (sans codage différentiel). Cela simplifie le système et permet l'utilisation de sauts de fréquence rapides<sup>3</sup>, utiles pour lutter contre les interféreurs.

Nous présentons ici une nouvelle famille de codes Espace-Temps pour les systèmes MIMO non cohérents, inspirée des modulations FSK. Ces codes conservent les qualités intéressantes des modulations FSK (une puissance constante sur chaque antenne et la possibilité de faire des sauts de fréquence rapides) tout en atteignant la diversité maximale et une forte efficacité spectrale.

---

<sup>1</sup> *Frequency-Shift Keying*

<sup>2</sup> *Wireless Personal Area Networks*

<sup>3</sup> *Fast Frequency-Hopping*

Les systèmes de transmission Bluetooth fonctionnent par modulation de fréquence. Nous allons donc pouvoir adapter notre solution MIMO FSK pour en faire une solution MIMO Bluetooth.

La première partie de ce chapitre présente la construction de notre code ST non cohérent et les structures du codeur et du décodeur. Nous étudions les modifications à apporter pour l'adapter à la norme Bluetooth et comparons les performances des deux systèmes.

La seconde partie concerne l'extension EDR<sup>4</sup> de la norme Bluetooth, qui utilise un codage différentiel. L'EDR nous a donc amenés à mettre en œuvre un codage ST différentiel afin de compléter notre offre commerciale.

## 5.1 Modulation FSK Spatio-Temporelle

Pour construire notre code ST-FSK, nous allons tout d'abord rappeler certaines propriétés des FSK mono-antennaires classiques. Nous modéliserons ensuite le système de transmission MIMO, avant de construire notre famille de codes sur la variété de Grassmann. Nous terminerons cette partie par la présentation du code ST  $2 \times 2$ , de ses performances et de son adaptation à la norme Bluetooth.

### 5.1.1 Rappel sur la modulation FSK

Sur une modulation FSK binaire (BFSK), le signal transmis pendant l'intervalle temporel  $\tau$  s'écrit

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0(t) = e^{i2\pi f_0 t} \\ \text{ou } s(t) &= s_1(t) = e^{i2\pi f_1 t} \quad \text{avec } |f_1 - f_0| = \frac{1}{\tau}. \end{aligned}$$

Le produit scalaire analogique s'écrit

$$\langle a(t), b(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau a(t)b^*(t) dt \quad (5.1)$$

et nous savons que

$$\int_0^\tau e^{i2\pi f t} \times e^{-i2\pi f' t} dt = e^{i\pi(f-f')\tau} \text{sinc}((f-f')\tau)$$

$$\text{avec } \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Nous vérifions que  $\langle s_0(t), s_1(t) \rangle = 0$ ;  $s_0(t)$  et  $s_1(t)$  sont donc orthogonaux et ils forment une base de dimension 2 dans l'espace des signaux.

Si le signal est échantillonné, il nous faut considérer un produit scalaire numérique. Si  $K$  est le facteur

---

<sup>4</sup> *Enhanced Data Rate*

de suréchantillonnage (le nombre d'échantillons du signal pris pendant la durée du signal  $\tau$ ), nous avons

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_K = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K a\left(\frac{k\tau}{K}\right) b^*\left(\frac{k\tau}{K}\right). \quad (5.2)$$

Notre code ST va exploiter l'orthogonalité entre les signaux  $s_0(t)$  et  $s_1(t)$ , et les signaux qui formeront les mots de code de notre alphabet seront construits sur la base  $(s_0(t), s_1(t))$ . Ainsi les fréquences en bande de base des signaux émis seront choisies sur l'intervalle  $[f_0, f_1] = [-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}]$ . Ces signaux ne seront donc pas orthogonaux entre eux. Ce code différera fortement des codes proposés par [Leus et al, 2004] qui appliquent un code d'Alamouti sur des signaux, tous orthogonaux, et qui occupent donc une grande bande de fréquences.

### 5.1.2 Modélisation du système

Nous nous plaçons ici dans le cas d'une transmission sur un canal à évanouissement de Rayleigh. Nous considérons un système comportant  $M$  antennes d'émission et  $N$  antennes de réception. La longueur temporelle du code est notée  $T$ . Le canal est quasi-statique, c'est à dire que ses coefficients restent constants durant le temps de transmission d'un symbole ST soit  $T \times \tau$ . Dans ce cas, le signal analogique reçu sur l'antenne  $l$  pendant l'intervalle de temps  $[(i-1)\tau, i\tau]$  s'écrit

$$y_{i,l}(t) = \sum_{j=1}^M x_{i,j}(t) \cdot h_{j,l} + w_{i,l}(t) \quad (i = 1 \dots T, l = 1 \dots N). \quad (5.3)$$

$x_{i,j}(t) = e^{i2\pi f_{i,j}t}$  est le signal à enveloppe constante émis par l'antenne  $j$  durant l'intervalle de temps  $[(i-1)\tau, i\tau]$ .

$h_{j,l}$  est le coefficient d'évanouissement du canal entre l'antenne d'émission  $j$  et l'antenne de réception  $l$ .

$w_{i,l}(t)$  est le bruit additif blanc gaussien.

Nous utilisons maintenant la base orthonormale intrinsèque à la BFSK : nous projetons les signaux analogiques  $x_{i,j}(t)$ ,  $y_{i,l}(t)$  et  $w_{i,l}(t)$  sur  $(s_0(t), s_1(t))$ . Nous construisons ainsi  $\mathbf{Y}'_{2T \times N}$ ,  $\mathbf{X}'_{2T \times M}$  et  $\mathbf{W}'_{2T \times N}$  avec pour composants respectifs

$$y'_{2i-1,l} = \langle y_{i,l}(t), s_0(t) \rangle \quad \text{et} \quad y'_{2i,l} = \langle y_{i,l}(t), s_1(t) \rangle \quad (5.4)$$

$$x'_{2i-1,j} = \langle x_{i,j}(t), s_0(t) \rangle \quad \text{et} \quad x'_{2i,j} = \langle x_{i,j}(t), s_1(t) \rangle \quad (5.5)$$

$$w'_{2i-1,l} = \langle w_{i,l}(t), s_0(t) \rangle \quad \text{et} \quad w'_{2i,l} = \langle w_{i,l}(t), s_1(t) \rangle \quad (5.6)$$

où  $i = 1 \dots T$ ,  $j = 1 \dots M$  et  $l = 1 \dots N$ .

Le système de transmission peut maintenant se mettre sous la forme

$$\mathbf{Y}'_{2T \times N} = \mathbf{X}'_{2T \times M} \cdot \mathbf{H}_{M \times N} + \mathbf{W}'_{2T \times N}. \quad (5.7)$$

Les indices correspondent aux dimensions des matrices.

### 5.1.3 Construction du code sur la variété de Grassmann

Nous allons maintenant construire notre code Espace-Temps en modulation de fréquence. Pour cela, nous exploitons les résultats sur la variété de Grassmann vus dans la section 4.1.

Nous utilisons la transformation (4.6) qui permet de représenter le mot de code  $\mathbf{X}'$ , de dimension  $2T \times M$ , par  $\mathbf{\Omega}_{X'}$ , le sous-espace engendré par ses vecteurs colonnes, et  $\mathbf{F}_{X'}$ , une matrice de dimension  $M \times M$ .

Comme nous l'avons vu en 4.2.2, toute l'information doit être portée par  $\mathbf{\Omega}_{X'}$  et deux mots de code différents ne doivent pas engendrer les mêmes sous-espaces vectoriels. La construction du code ST se fait sur le Grassmannien avec une mesure de distance dérivée de l'expression de la probabilité d'erreur par paire vue en 4.4. Nous allons donc maximiser cette distance pour toute les paires de mot de code de l'alphabet.

Il nous faut maintenant choisir notre ensemble de sous-espaces vectoriels. Nous avons vu, dans le chapitre précédent, qu'il fallait sélectionner des sous-espaces de dimension  $M$  dans  $\mathbb{C}^T$ , avec  $T \geq 2M$ . Ici, notre base de fréquences orthonormales  $(s_0(t), s_1(t))$  nous permet de décomposer les signaux et de générer des matrices de longueur temporelle  $T' = 2T$ . Nous pouvons donc raccourcir la longueur temporelle de notre code vis à vis du nombre d'antennes, et prendre  $T = \frac{T'}{2} = M$ . Notre ensemble de sous-espaces sera ainsi de dimension  $M$  dans  $\mathbb{C}^{2T}$ .

Le choix des sous-espaces engendrés par les composantes  $x_{i,j}(t) = e^{i2\pi f_{i,j}t}$  des mots de code se fait par l'intermédiaire du choix des fréquences  $f_{i,j}$ . Tout d'abord nous construisons  $\mathbf{X}''$ , la normalisation du mot de code  $\mathbf{X}'$  :

$$x''_{2i-1,j} = \frac{|x'_{2i-1,j}|}{\sqrt{|x'_{2i-1,j}|^2 + |x'_{2i,j}|^2}} \quad (5.8)$$

$$\text{et } x''_{2i,j} = \frac{|x'_{2i,j}|}{\sqrt{|x'_{2i-1,j}|^2 + |x'_{2i,j}|^2}} \quad (i = 1 \dots T, j = 1 \dots M). \quad (5.9)$$

Comme  $x''_{2i-1,j} + x''_{2i,j} = 1$ , nous pouvons paramétrer  $\mathbf{X}''$  par  $T \times M$  angles  $\theta_{i,j}$  choisis sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$x''_{2i-1,j} = \cos \theta_{i,j} \quad (5.10)$$

$$\text{et } x''_{2i,j} = \sin \theta_{i,j} \quad (5.11)$$

Le choix des angles  $\theta_{i,j}$  détermine celui des fréquences  $f_{i,j}$

$$\cos \theta_{i,j} = \frac{|\langle x_{i,j}(t), s_0(t) \rangle|}{\sqrt{|\langle x_{i,j}(t), s_0(t) \rangle|^2 + |\langle x_{i,j}(t), s_1(t) \rangle|^2}} \quad (5.12)$$

$$\sin \theta_{i,j} = \frac{|\langle x_{i,j}(t), s_1(t) \rangle|}{\sqrt{|\langle x_{i,j}(t), s_0(t) \rangle|^2 + |\langle x_{i,j}(t), s_1(t) \rangle|^2}}. \quad (5.13)$$

En prenant le produit scalaire analogique (5.1), nous trouvons

$$f_{i,j} = \frac{\tan \theta_{i,j} - 1}{2\tau(\tan \theta_{i,j} + 1)}. \quad (5.14)$$

Mais, pour nous rapprocher d'une chaîne de transmission Bluetooth, il nous faut considérer le produit scalaire numérique (5.2). En prenant un facteur de suréchantillonnage  $K = 2$ , nous obtenons

$$f_{K=2}^{i,j} = \frac{2}{\pi\tau}\theta_{i,j} - \frac{1}{2\tau}. \quad (5.15)$$

Pour le choix des  $\theta_{i,j}$ , nous proposons d'utiliser une constellation tournée dans un espace de dimension  $(T \times M)$ .

Dans le réseau de point  $\Lambda = \mathbb{Z}^{TM}$ , nous formons une constellation dont le nombre de points sera la taille de notre alphabet. Ensuite, nous tournons cette constellation à l'aide d'une matrice de rotation réelle de taille  $TM \times TM$ , comme celles présentées par [Boutros et Viterbo, 1998]. La rotation de la constellation des  $\theta_{i,j}$ , permet au code d'atteindre la diversité maximale vue en 4.5.3.

Il est flagrant que le code Espace-Temps ainsi obtenu est non unitaire. Pour le décodage, nous allons donc employer le test du GLRT (4.33) :

$$\hat{\mathbf{X}}' = \arg \max_{\mathbf{X}' \in \text{Code}} \text{Tr}[\mathbf{Y}'^H \cdot \mathbf{X}' \cdot (\mathbf{X}'^H \cdot \mathbf{X}')^{-1} \cdot \mathbf{X}'^H \cdot \mathbf{Y}'] .$$

Nous devons donc considérer l'expression asymptotique à fort SNR du PEP associée au décodeur GLRT vue en (4.35)

$$P_{GLRT}^{nc}(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j) \sim \frac{\rho^{-MN} \binom{2MN-1}{MN} \left(1 + \frac{\det(\mathbf{R}_{ii})^N}{\det(\mathbf{R}_{jj})^N}\right)}{\det(\mathbf{R}_{ii} - \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{R}_{ji})^N} .$$

Dans cette expression, la maximisation du dénominateur, c'est à dire du déterminant de  $[\mathbf{R}_{ii} - \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{R}_{ji}]$ , permet de minimiser  $P_{GLRT}^{nc}(\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{X}_j)$ .

Pour minimiser la probabilité d'erreur, nous devons maximiser cette mesure de distance pour tout les mots de code  $\mathbf{X}'_i \neq \mathbf{X}'_j$ . Le critère utilisé est donc

$$\min_{\mathbf{X}'_i, \mathbf{X}'_j \in Code} \det [\mathbf{R}_{ii} - \mathbf{R}_{ij} \mathbf{R}_{jj}^{-1} \mathbf{R}_{ji}] \quad (5.16)$$

Les angles de rotation sont choisis de façon à maximiser ce critère grâce à des simulations numériques. De plus, nous vérifions que notre constellation tournée des  $\theta_{i,j}$  permet bien d'atteindre la diversité maximale.

Le récepteur doit donc former la matrice  $\mathbf{Y}'$ , de taille  $2M \times M$ , en corrélant les signaux reçus  $y_{i,l}(t)$  avec les signaux de référence  $s_0(t)$  et  $s_1(t)$  avant le décodeur GLRT (Fig. 5.1).

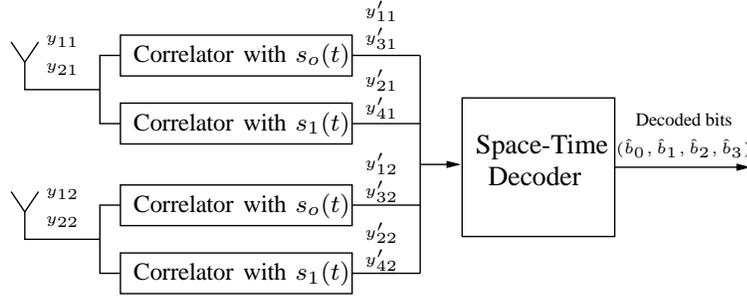


FIG. 5.1 – Récepteur MIMO FSK à 2 antennes

#### 5.1.4 Modulation FSK Spatio-Temporelle à 2 antennes d'émission et 2 antennes de réception

Nous nous intéressons maintenant au cas  $M = N = T = 2$ , et nous voulons élaborer un code Espace-Temps de cardinal 16. Avec 16 mots de code possibles, nous transmettons  $\log_2(16) = 4$  bits en  $T = 2$  intervalles temporels, ce qui représente 2 bits puc, à comparer à 1 bit pcu dans le cas de la BFSK en SISO. Ce code ST paraît être un bon compromis avec un débit de transmission de l'information doublé et une complexité raisonnable.

Nous devons maintenant construire les 16 vecteurs  $(\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{2,1}, \theta_{2,2})$ . Nous commençons par former un hypercube unitaire de dimension 4 et nous tournons ses 16 sommets par multiplication par la matrice de rotation réelle proposée par [Boutros et Viterbo, 1998].

$$\mathbf{v} = (\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{2,1}, \theta_{2,2}) = \mathbf{u} \mathbf{R} \quad (5.17)$$

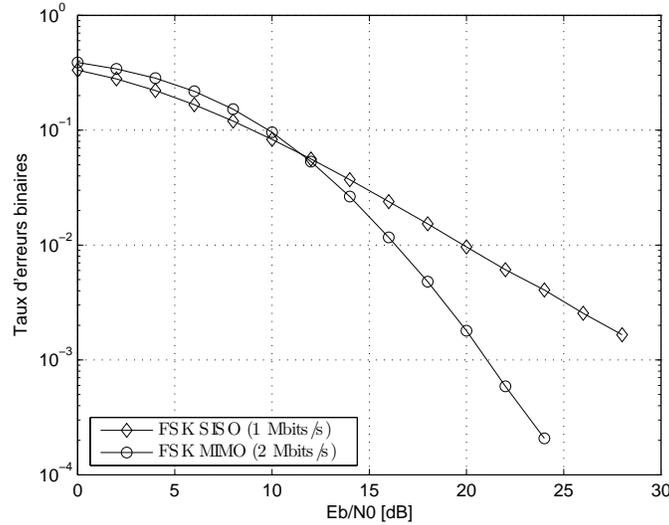


FIG. 5.2 – Taux d’erreur binaire des solutions BFSK en SISO et en MIMO

avec  $\mathbf{u} = (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$  et la matrice de rotation  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a & b & -c & -d \\ -b & a & d & -c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$

où  $a = \frac{1}{U\sqrt{1+\lambda_0^2}}$ ,  $b = \frac{\lambda_0}{U\sqrt{1+\lambda_0^2}}$ ,  $c = \frac{\lambda}{U\lambda_0}$ ,  
 $d = \frac{\lambda}{U}$  et  $U = \frac{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda^2 + \lambda_0^2 \lambda^2}}{\lambda_0}$ .

Les paramètres  $\lambda_0$  et  $\lambda$  de cette matrice sont choisis numériquement afin de maximiser le critère (5.16). Nous avons ainsi retenu les valeurs  $\lambda_0 = 0,365$  et  $\lambda = 0,385$ .

Comme le décodeur effectue une recherche exhaustive sur tous les mots de code, la complexité du décodeur devient rapidement prohibitive pour les grandes constellations. Dans notre cas, avec  $M = N = T = 2$ , une cardinalité du code de 16 et un facteur de suréchantillonnage  $K = 2$ , le produit scalaire numérique est facilement réalisable en VHDL. La partie bande de base de l’émetteur récepteur a été implémentée sur un FPGA Stratix d’Altera. Avec une horloge à 16 MHz, elle occupe 8000 cellules logiques<sup>5</sup> et 6100 bits de mémoire.

Les performances de notre code ST FSK sont largement meilleures que celles d’une FSK classique en SISO. Grâce à la diversité, le taux d’erreur binaire en MIMO devient rapidement meilleur qu’en SISO lorsque le SNR augmente, alors même que le débit de transmission de l’information est double (Fig. 5.2).

<sup>5</sup>Une *Logic Cell* de Stratix correspond en moyenne à 12 portes logiques.

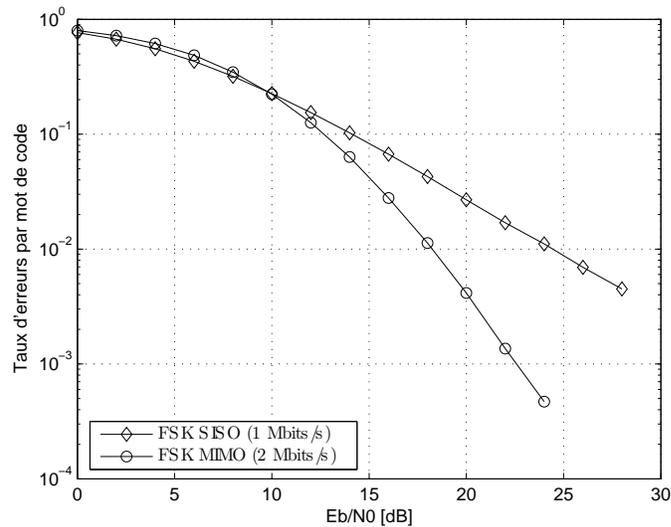


FIG. 5.3 – Taux d'erreur par mot de code ST des solutions BFSK en SISO et en MIMO

Les courbes de taux d'erreur par mot ST (5.3) montrent des résultat encore meilleurs; en effet le codage ST minimise la probabilité d'erreur sur les mots de code, mais lorsqu'un mot est mal décodé, il présente souvent plusieurs bits erronés.

Pour vérifier l'intérêt de notre nouvelle modulation, il importe de contrôler l'occupation spectrale du signal émis et de le comparer à la modulation de référence mono-antennaire. La BFSK en SISO n'émet que des signaux aux 2 fréquences de référence  $f_0$  et  $f_1$ , son occupation spectrale est ainsi concentrée sur ces 2 fréquences séparées de  $\frac{1}{T}$  (Fig. 5.4). Notre modulation MIMO FSK émet, quant à elle,  $4 \times 16 = 64$  signaux avec des fréquences différentes réparties sur l'intervalle de fréquences  $[f_0, f_1]$ . Notre modulation multi-antennaire permet ainsi de réduire significativement l'occupation spectrale de la FSK.

## 5.1.5 Application au système Bluetooth

### 5.1.5.1 La norme Bluetooth

La norme Bluetooth<sup>6</sup> est une norme de transmission radio pour les WPANs compatible avec la norme 802.15.1 de l'IEEE. Le schéma de transmission utilise une modulation de fréquence numérique gaussienne (GFSK<sup>7</sup>) échantillonnée à 1MHz.

<sup>6</sup> Bluetooth tient son nom d'Harald Blaatand (910-986), littéralement "Harald à la dent bleue", qui unifia le Danemark et la Norvège, dans une Europe divisée par des querelles de religions et de territoires. Les initiateurs de Bluetooth (Ericsson, IBM, Intel, Nokia et Toshiba) s'en sont inspirés...

<sup>7</sup>Gaussian Frequency-Shift Keying

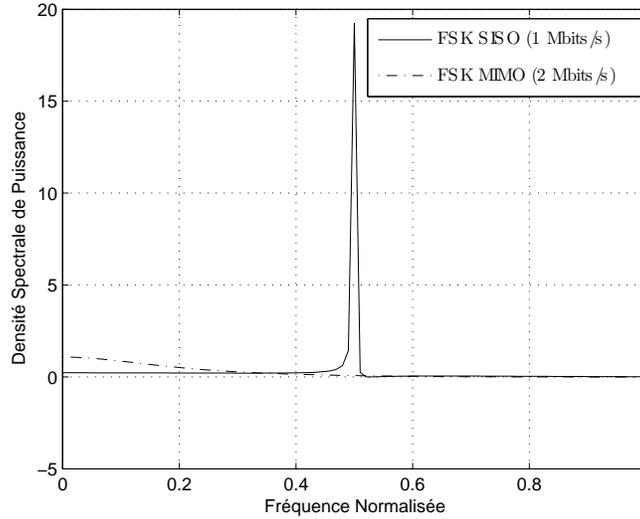


FIG. 5.4 – Occupations spectrales des solutions BFSK en SISO et en MIMO

Nous rappelons brièvement les caractéristiques d'une GFSK :

La GFSK est une sorte de FSK à phase continue (CPFSK<sup>8</sup>). L'émetteur d'une BFSK simple peut avoir 2 oscillateurs aux fréquences  $f_0$  et  $f_1$  et moduler en passant brutalement d'une fréquence à l'autre. D'un point de vue spectral, cette modulation entraîne l'apparition de lobes secondaires importants et nécessite donc une grande largeur de bande. L'émetteur d'une CPFSK utilise un oscillateur commandé dont la fréquence évolue continuellement. La phase du signal ainsi obtenu est elle aussi continue. Une GFSK est obtenue en plaçant un filtre gaussien avant le modulateur de fréquence de la FSK, afin de limiter la vitesse d'évolution de la fréquence.

L'expression discrète du filtre gaussien s'écrit

$$g[n] = \frac{1}{4K} \left[ \operatorname{erf} \left( \pi K_{BT} \sqrt{\frac{2}{\ln 2}} \left( \frac{n}{K} + \frac{1}{2} \right) \right) - \operatorname{erf} \left( \pi K_{BT} \sqrt{\frac{2}{\ln 2}} \left( \frac{n}{K} - \frac{1}{2} \right) \right) \right] \quad (5.18)$$

où  $K$  est le facteur de suréchantillonnage,  $\operatorname{erf}(\cdot)$  est la fonction d'erreur<sup>9</sup> et  $K_{BT}$ <sup>10</sup> est la largeur de bande normale du filtre.  $K_{BT}$  permet de régler au niveau du filtre le compromis entre l'occupation du signal dans le domaine temporel et celle dans le domaine fréquentiel. Ce compromis doit tenir compte des interférences entre symboles et de la densité spectrale de puissance du signal (Fig. 5.5). Pour la norme Bluetooth, il est fixé à  $K_{BT} = 0,5$ .

<sup>8</sup>Continuous-Phase Frequency-Shift Keying

<sup>9</sup> $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

<sup>10</sup>*Time-Bandwidth product*

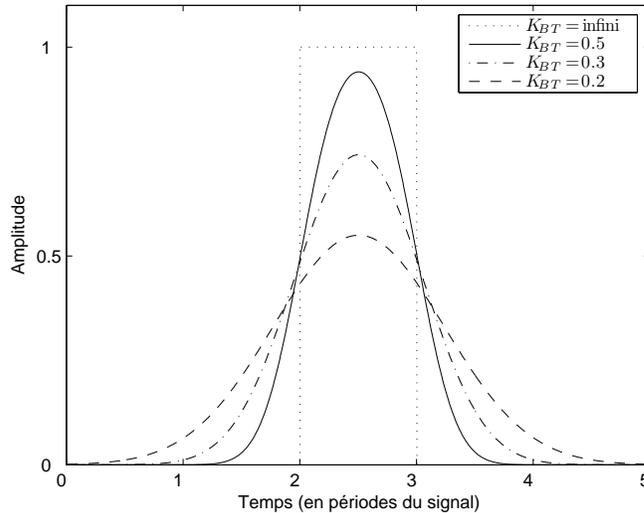


FIG. 5.5 – Réponse impulsionnelle du Filtre Gaussien pour plusieurs valeurs de  $K_{BT}$

Pour Bluetooth, l'indice de modulation<sup>11</sup> doit être pris entre 0.28 et 0.35. Cette compression en fréquence de l'espace des signaux réduit d'autant l'occupation fréquentielle du signal, mais a pour effet de rendre les signaux de référence  $s_0(t)$  et  $s_1(t)$  non orthogonaux.

Afin de limiter les interférences, Bluetooth utilise des sauts de fréquence par paquets (FHSS<sup>12</sup>). Le taux de *hopping* est de 1600 sauts par seconde sur 79 fréquences porteuses dans la bande des 2,4 GHz.

Voici les principales caractéristiques avantageuses de Bluetooth :

- sa faible consommation (1mW),
- sa faible portée (inférieure à 10 mètres),
- son relativement faible débit effectif (inférieur à 721kbps),
- le très faible coût de production d'un transceiver (moins de 3 euros).

Nous allons maintenant adapter la modulation FSK Spatio-Temporelle à 2 antennes aux modulations CPFSK et à la norme Bluetooth. Le doublement du débit physique et la diminution du taux d'erreur permettront d'augmenter significativement le débit effectif. Par ailleurs cette solution permettra d'améliorer le compromis consommation/portée tout en gardant une complexité et un coût de production raisonnables.

### 5.1.5.2 Modulation CPFSK Spatio-Temporelle

Notre modulation FSK spatio-temporelle peut être facilement adaptée aux CPFSK. En prenant un temps de transition de la fréquence suffisamment court, il est possible de prendre 2 échantillons de signal

<sup>11</sup> indice de modulation =  $\frac{\text{excursion en fréquence}}{\text{fréquence du modulant}} = \frac{\Delta f}{2T} = 2T\Delta f$

<sup>12</sup> *Frequency Hopped Spread Spectrum*

reçu par intervalle de temps  $\tau$  sans subir d'interférence de la part des signaux qui précèdent ou qui suivent.

Dans le cas de Bluetooth, le temps de montée du filtre gaussien prévu par la norme est trop long et entraîne de fortes interférences entre symboles : il doit donc être réduit. Nous décidons de prendre un temps de montée 4 fois plus rapide, ce qui a pour conséquence néfaste d'augmenter significativement l'occupation spectrale du MIMO FSK.

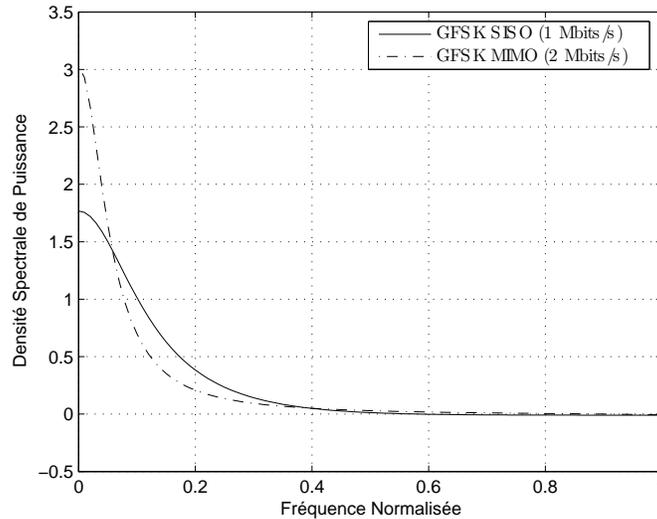


FIG. 5.6 – Occupations spectrales des solutions GFSK en MIMO et Bluetooth (GFSK - SISO)

Ensuite, nous choisissons l'index de modulation afin de garder la même occupation spectrale que Bluetooth et de rentrer dans le masque spectral d'émission prévu par la norme. La figure 5.6 montre les densités spectrales de puissance d'une émission Bluetooth et d'un signal GFSK Espace-Temps avec un indice de modulation  $h_M = 0.5$ .

Malheureusement, la compression de la constellation Espace-Temps entraîne une réduction des performances de la modulation FSK ST, comme le montre la figure 5.7. En effet, notre modulation est moins robuste que la modulation FSK mono-antennaire et elle est très sensible à la perte d'orthogonalité de la base des signaux ( $s_0(t)$ ,  $s_1(t)$ ). On observe une perte de 2dB de la solution multi-antennaire à bas rapport signal à bruit mais de meilleures performances à fort rapport signal à bruit et ce grâce à la diversité. Quoi qu'il en soit, le débit reste de 2Mbps, soit le double d'un système Bluetooth normal.

### 5.1.6 Conclusion

Nous avons présenté ici un nouveau schéma de codage Spatio-Temporel pour les modulations FSK et son application à un système Bluetooth à 2 antennes d'émission et 2 antennes de réception. Cette solution

améliore les performances (grâce à la diversité) et double le débit (grâce à la haute efficacité spectrale). Cette modulation, qui propose une solution FSK multi-antennaire à faible coût, a fait l'objet d'un brevet<sup>13</sup> déposé par la société COMSIS et d'un article paru en septembre 2005 dans les *Communications Letters* de l'IEEE ([Jandot et Belfiore, 2005]).

## 5.2 Extension de Bluetooth

Une seconde version de la norme Bluetooth permet d'augmenter les débits, en proposant une solution légèrement plus coûteuse.

Nous avons donc mis en oeuvre un codage ST différentiel pour cette extension de Bluetooth afin de compléter notre solution MIMO.

### 5.2.1 La norme Bluetooth EDR

La norme Bluetooth est un succès industriel avec 3 millions d'équipements vendus par semaine en 2004 et 6 millions par semaine en 2006. Néanmoins, son débit effectif de 721Kbps s'avère insuffisant pour répondre aux besoins croissants des utilisateurs qui disposent de plus en plus souvent de plusieurs périphériques Bluetooth. De plus, Bluetooth doit faire face à l'apparition d'un concurrent direct : l'UWB<sup>14</sup>, qui promet des débits bien plus importants. Bluetooth doit aussi contenir la technologie Wifi qui déborde sur son marché. Les fabricants d'équipements Bluetooth ont donc contre-attaqué en proposant une amélioration de la norme : Bluetooth 2.0 avec l'EDR. L'EDR prévoit une modulation  $\pi/4$ -DQPSK qui double le débit physique à 2Mbps et une modulation 8-DPSK optionnelle pour atteindre un débit physique de 3Mbps.

Comme le montre la figure 5.8, pour la modulation  $\pi/4$ -DQPSK, seules des rotations de phase de  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{3\pi}{4}$  sont autorisées, il n'y a donc jamais d'extinction totale de la porteuse.

La modulation 8-DPSK (Fig. 5.9) privilégie quand à elle le débit et transmet 3 bits par symbole.

### 5.2.2 Solutions Spatio-Temporelles pour l'EDR

Nous avons été amenés à proposer une solution MIMO à l'EDR de Bluetooth, afin de compléter le codage FSK Spatio-Temporel. Nous avons sélectionné le codage différentiel TAST de [Gamal et Damen, 2003], qui utilise la transformée de Cayley présentée en 4.6.1.4. Le code en bloc ST hermitien est construit à partir des codes TAST cohérents classiques. Ils sont pris à diversité maximale afin que le code différentiel soit lui aussi à diversité maximale.

Comme pour le codage FSK Espace-Temps, nous nous intéressons à un système à deux antennes d'émission et à deux antennes de réception.

Voici la structure des matrices hermitiennes :

<sup>13</sup> Procédé de codage et décodage spatio-temporel non cohérent par modulation de fréquence ; codeur et décodeur mettant en œuvre un tel procédé. brevet n° 0409486 du 8 septembre 2004 et extension internationale n° PCT/FR2005/002241

<sup>14</sup> Ultra Wide-Band

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\phi)}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}s_{21} & \phi^{1/2}s_{12} + i\phi^{1/2}s_{11} \\ \phi^{1/2}s_{12} - i\phi^{1/2}s_{11} & \sqrt{2}s_{22} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

avec  $\mathbf{s}_j = \begin{pmatrix} s_{j1} \\ s_{j2} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_r \mathbf{u}_j$  où  $\mathbf{u}_j \in \mathbb{Z}^2$  ( $j = 1, 2$ ) est le vecteur symbole d'information pris dans une constellation PAM.  $\phi$  doit être un nombre diophantien et nous prenons  $\phi = n_g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , le nombre d'or.  $\mathbf{M}_r$  est la matrice de rotation optimale  $2 \times 2$

$$\mathbf{M}_r = \frac{1}{\sqrt{1+n_g^2}} \begin{pmatrix} 1 & -n_g \\ n_g & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Nous voyons que si le vecteur  $\mathbf{u}$  est non nul, la matrice  $\mathbf{A}$  sera de rang plein. Par conséquent, le code TAST différentiel obtenu en appliquant la transformée de Cayley sur la matrice  $i\mathbf{A}$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}_M - i\mathbf{A}}{\mathbf{I}_M + i\mathbf{A}}$$

atteint la diversité maximale.

La figure 5.10 présente les taux d'erreur par mot de la  $\pi/4$ -DQPSK et du code TAST différentiel à deux antennes à l'émission et à la réception. Le code TAST est construit à partir d'une PAM à deux éléments  $\{1, -1\}$ , de façon à obtenir un débit de 2 Mbps comme pour la modulation  $\pi/4$ -DQPSK. L'alphabet TAST compte donc 16 mots de code, ce qui assure une détection exhaustive de type GLRT peu complexe. Les performances du code ST sont évidemment bien meilleures que la simple DPSK et ce, d'autant plus que le rapport signal à bruit augmente grâce à la diversité.

Sur la figure 5.11, la modulation 8-DPSK est comparée au code TAST différentiel à  $2 \times 2$  antennes avec un alphabet de 256 mots de code. Celui-ci est construit en partant d'une PAM à trois éléments  $\{3, 1, -1, -3\}$ . Son débit est donc de 4 Mbps et est ainsi supérieur à celui de la 8-DPSK (3Mbps). Les performances du code Espace-Temps sont de nouveau nettement meilleures que celles du code différentiel SISO, mais le décodage GLRT sur les 256 mots de code est trop lourd et cette solution paraît difficilement utilisable dans une application industrielle.

## Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des schémas de transmission MIMO en non cohérents pour la norme Bluetooth.

Dans un premier temps nous avons construit une nouvelle famille de codes Spatio-Temporels pour les modulations FSK. Ces codes sont à enveloppe constante sur toutes les antennes d'émission et toute l'information est portée par les fréquences des signaux constituant le mot de code ST. Comme nous n'avons pas de contrainte sur la phase, ce code est facilement applicable aux CPFASK. De plus, comme

la puissance du signal émis par chaque antenne est constante, la production industrielle peut se faire à faible coût, ce qui convient parfaitement au marché des systèmes Bluetooth. Nous avons ainsi proposé une solution MIMO à deux antennes d'émission et deux antennes de réception avec un filtrage gaussien, qui double le débit de Bluetooth (2Mbps). De plus, de par sa diversité, les performances de notre nouveau schéma de transmission, en termes de taux d'erreur par mots, sont meilleures que celles d'un système Bluetooth classique.

Ensuite, nous avons suivi l'évolution de la norme Bluetooth, qui, dans sa version 2.0, prévoit un mode au débit augmenté (EDR) avec des modulations de phase différentielles DPSK. Nous avons ainsi proposé les codes TAST différentiels comme solution MIMO à l'EDR avec deux antennes d'émission et deux antennes de réception.

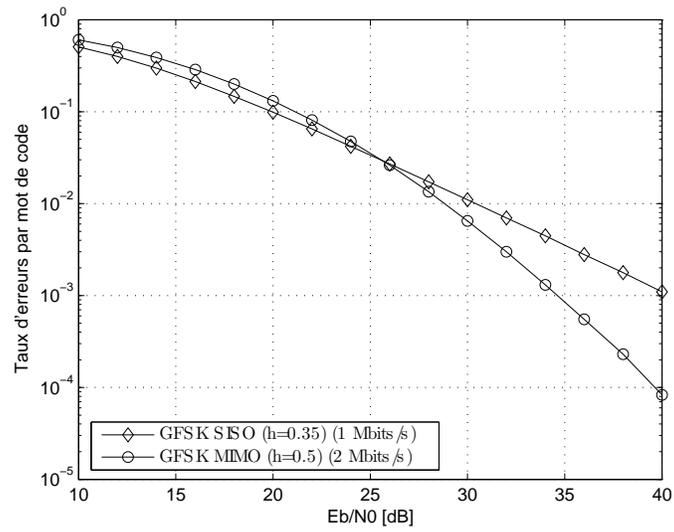
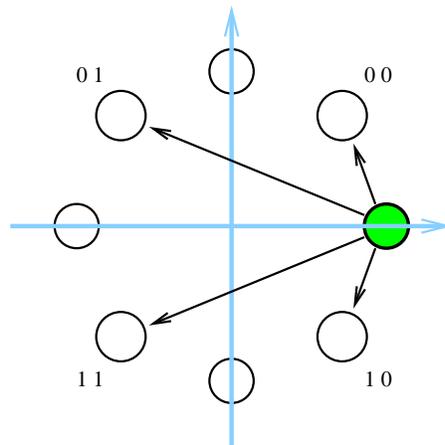


FIG. 5.7 – Performances du GFSK en MIMO et de Bluetooth (SISO-GFSK)

FIG. 5.8 – Constellation et transitions de la modulation  $\pi/4$ -DQPSK

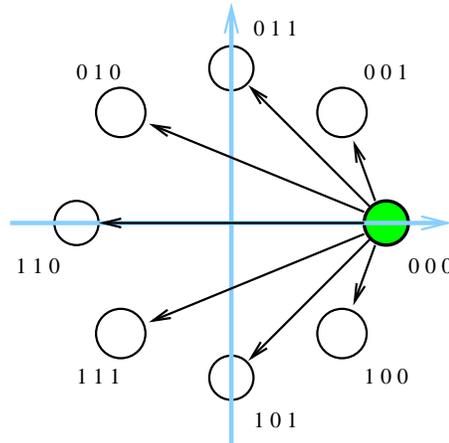
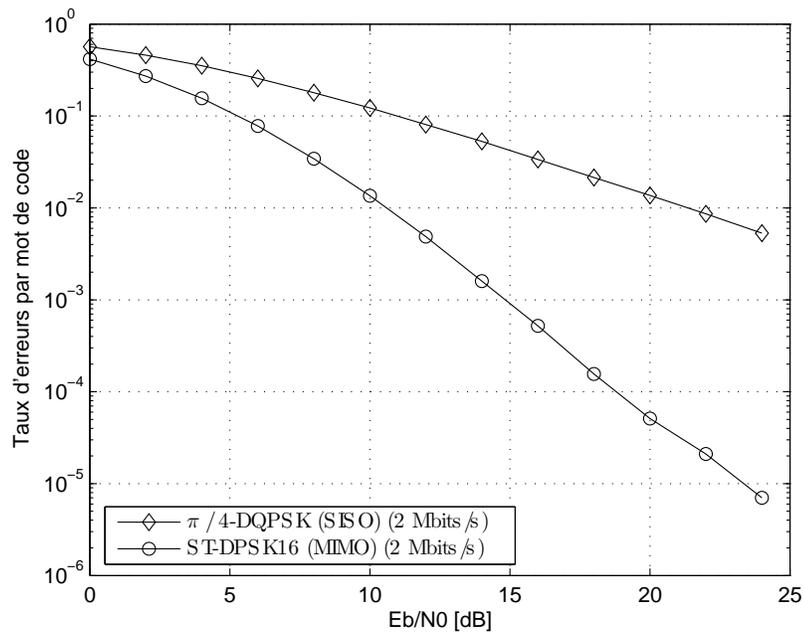


FIG. 5.9 – Constellation et transitions de la modulation 8-DPSK

FIG. 5.10 – Performances de la modulation  $\pi/4$ -DQPSK et du code TAST différentiel

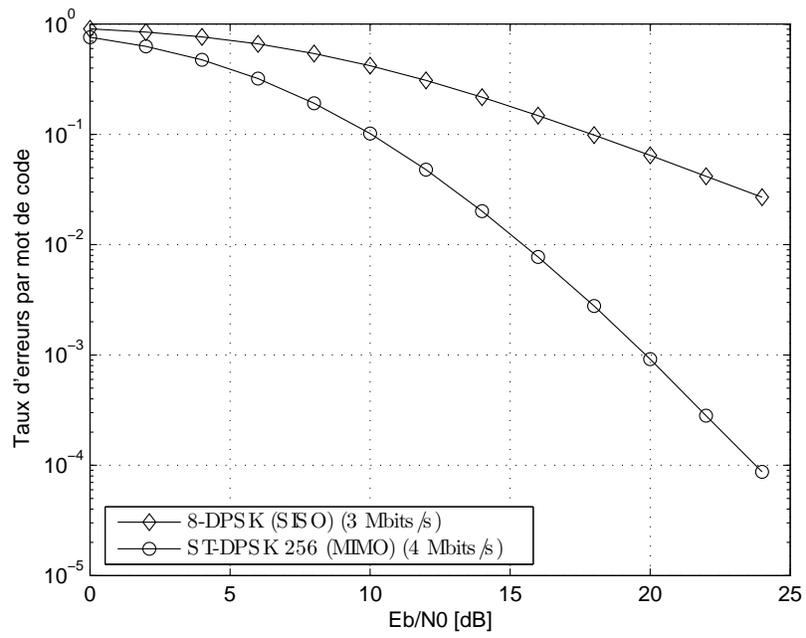


FIG. 5.11 – Performances de la modulation 8-DPSK et du code TAST différentiel



# Conclusion

Cette thèse a été consacrée à l'étude du codage Espace-Temps et à son utilisation dans les couches physiques non filaires.

Les perspectives offertes par les schémas de transmission MIMO en font des solutions innovantes de choix pour améliorer les transmissions et accélérer les succès commerciaux des réseaux personnels et locaux sans fils.

Ce travail, à financement industriel, a permis de mettre au point une couche physique bi-antennaire complète, intégrant un codeur et un décodeur ST. Elle fonctionne à 5 GHz sur la base de la norme IEEE 802.11a. Des transmetteurs de démonstration ont été réalisés sur FPGA et permettent de transmettre de la vidéo HD sans liaison directe entre les transmetteurs. Par contre, ce démonstrateur ne fonctionne pour l'instant qu'à 24 Mbps. De plus, il utilise des couches MAC et réseau simplifiées. Néanmoins, les résultats obtenus sont très encourageants et de nombreuses améliorations sont en cours de finalisation.

L'augmentation du nombre d'antennes est ainsi particulièrement d'actualité et les solutions utilisant un grand nombre d'antennes pourront bénéficier du décodeur itératif que nous avons présenté. Ce décodeur permet de traiter les mots de code ST filtrés par le canal MIMO comme un signal présentant des interférences entre symboles, et permet de minimiser l'erreur quadratique moyenne.

Des algorithmes de recherche de point le plus proche dans un réseau de point ont été étudiés afin d'adapter nos solutions aux différents systèmes. Ils pourront être accompagnés de prétraitements comme le MMSE-GDFE ou la réduction LLL.

Une solution multi-antennaire a également été mise au point pour les réseaux personnels sans fils Bluetooth. Elle utilise une nouvelle famille de codes ST non cohérents où les signaux émis par chacune des antennes ont tous la même puissance. Seules les fréquences des signaux portent l'information en représentant des sous-espaces vectoriels. Les sous-espaces de l'alphabet sont choisis en travaillant sur la variété de Grassmann. Une solution bi-antennaire comportant un alphabet de 16 mots de codes ST permet de doubler le débit pour des taux d'erreur comparables et une faible complexité. Une autre solution MIMO a été explorée pour la seconde version de la norme Bluetooth.

Le codage Espace-Temps a vocation à être appliqué à d'autres réseaux sans fils en adaptant à chaque fois le décodeur aux conditions particulières d'utilisation. Celles-ci dépendent principalement du code ST

utilisé, des performances visées par le système et des limites acceptables en termes d'augmentation de la complexité algorithmique.

# Bibliographie

- [Alamouti, 1998] S. Alamouti, "Space-Time block coding : A simple transmitter diversity technique for wireless communications," *IEEE Journal On Selected Areas In Communications*, vol. 48, pp. 1451-1458, October 1998.
- [Agrawal et al, 2001] D. Agrawal, T. J. Richardson and R. L. Urbanke, "Multiple antenna signal constellations for fading channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 2618-2626, September 2001.
- [Agrell et al, 2002] E. Agrell, T. Eriksson, A. Vardy and K. Zeger, "Closest point search in lattices," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 2201-2214, August 2002.
- [Aktas et al, 2002] D. Aktas, H. E. Gamal and M. P. Fitz, "Towards Optimal Space-Time Coding," in *Proceedings of Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, vol. 2, pp. 1137-1141, November 2002.
- [Barg et Nogin, 2002] A. Barg and D. Y. Nogin, "Bounds on packings in the Grassmann manifold," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 2450-2454, September 2002.
- [Barhumi et al, 2002] I. Barhumi, G. Leus and M. Moonen, "Optimal Training Design for MIMO OFDM Systems in Mobile Wireless Channel," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, pp. 1615-1624, June 2003.
- [Belfiore et al, 2005] J-C Belfiore, G. Rekaya and E. Viterbo, "The Golden Code : A  $2 \times 2$  Full-Rate Space-Time Code with Non-Vanishing Determinants," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, pp. 1432-1436, April 2005.
- [Belfiore et Rekaya, 2003] J-C Belfiore and G. Rekaya, "Quaternionic lattices for Space-Time coding," *IEEE Information Theory Workshop*, pp. 267-270, March 2003.
- [Biglieri et al, 1998] E. Biglieri, J. Proakis and S. Shamai, "Fading Channels : Information-Theoretic and Communications Aspects," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, pp. 2619-2692, October 1998.
- [Boothby, 1986] W.M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Pure and Applied Mathematics, Boston, MA : Academic Press, Inc., 1986.

- [Borran et al, 2003] M. J. Borran, A. Sabharwal, B. Aazhang, "On design criteria and construction of noncoherent space-time constellations," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, pp. 2332-2351, October 2003.
- [Boullé et Belfiore, 1992] K. Boullé and J. C. Belfiore, "Modulation scheme designed for the Rayleigh fading channel," in *Proceedings of Conference on Information Sciences and Systems*, Princeton, pp. 288-293, March 1992.
- [Boutros et al, 1996] J. Boutros, E. Viterbo, C. Rastello, and J.-C. Belfiore, "Good Lattice Constellations for Both Rayleigh Fading and Gaussian Channels," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 42, pp. 502-518, March 1996.
- [Boutros et Viterbo, 1998] J. Boutros, E. Viterbo, "Signal space diversity : a power- and bandwidth-efficient diversity technique for the Rayleigh fading channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, pp. 1453-1467, July 1998.
- [Brehler et Varanasi, 2001] M. Brehler and M. K. Varanasi, "Asymptotic error probability analysis of quadratic receivers in Rayleigh-fading channels with applications to a unified analysis of coherent and noncoherent space-time receivers," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, pp. 2383-2399, September 2001.
- [Brehler et Varanasi, 2003] M. Brehler and M. K. Varanasi, "Training codes for the noncoherent multi-antenna block Rayleigh fading channel," in *Proceedings of Conference on Information Sciences and Systems*, Johns Hopkins University, 2003.
- [Caire et Colavolpe, 2001] G. Caire and G. Colavolpe, "On space-time coding for quasi-static multiple-antenna channels," *IEEE Global Telecommunications Conference*, vol. 2, pp. 1078-1082, March 2001.
- [Chan et Wornell, 2001] A.M. Chan, G.W. Wornell, "A class of block-iterative equalizers for intersymbol interference channels : fixed channel results," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, pp. 1966-1976, November 2001.
- [Chizhik et al, 2002] D. Chizhik, G. J. Foschini, M. J. Gans, R. A. Valenzuela, "Keyholes, correlations, and capacities of multielement transmit and receive antennas," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 1, pp. 361-368, April 2002.
- [Conway et Sloane, 1988] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, New York Berlin : Springer-Verlag, 1988. 2nd edition.
- [Conway et Sloane, 1996] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Packing Lines, Planes, etc. : Packings in Grassmannian Spaces*, Experimental Mathematics, vol. 5, pp. 139-159, 1996.
- [Coulson, 2001] A. J. Coulson, "Maximum Likelihood Synchronization for OFDM using a Pilot Symbol," *IEEE Journal On Select Areas In Communications*, vol. 19, pp. 2486-2503, December 2001.

- [Cover et Thomas, 1991] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, New York : Wiley, 1991.
- [Damen et al 1, 2002] M. O. Damen, K. Abed-Meraim, and J.-C. Belfiore, "Diagonal algebraic space-time block codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 628-636, March 2002.
- [Damen et al 2, 2002] M. O. Damen, A. Tewfik, and J.-C. Belfiore, "A Construction of a Space-Time Code Based on Number Theory," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 753-760, March 2002.
- [Damen et al, 2003] M. O. Damen, H. E. Gamal, and G. Caire, "On Maximum-Likelihood Detection and the search for the Closest Lattice Point," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, pp. 2389-2402, October 2003.
- [Damen et al, 2004] M. O. Damen, H. E. Gamal, and G. Caire, "MMSE-GDFE Lattice Decoding for Under-determined Linear Channels," *in Proceedings of Conference on Information Sciences and Systems*, March 2004.
- [Dayal et al, 2004] P. Dayal, M. Brehler and M. K. Varanasi, "Leveraging coherent spacetime codes for noncoherent communication via training," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, pp. 2058-2080, September 2004.
- [Dayal et Varanasi, 2003] P. Dayal and M. K. Varanasi, "An Optimal Two Transmit Antenna Space-Time Code and its Stacked Extensions," *in Proceedings of Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Monterey, CA, November 2003.
- [Edelman et al, 1998] A. Edelman, T. A. Arias and S. T. Smith, "The Geometry of Algorithms with Orthogonality Constraints," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 20, pp. 303-353, June 1998.
- [Fano, 1963] R. M. Fano, "A heuristic discussion of probabilistic decoding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 9, pp. 64-74, April 1963.
- [Fincke et Pohst, 1985] U. Fincke and M. Pohst, "Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis," *Mathematics of computation*, vol. 44, pp. 463-471, April 1985.
- [Foschini, 1996] G. J. Foschini, "Layerd space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multiple antennas," *Bell Laboratories Technical Journal*, vol. 1, pp. 41-59, 1996.
- [Foschini et Gans, 1998] G. J. Foschini and M. J. Gans, "On limits of wireless Communication in a fading environment when using multiple antennas," *Wireless Personal Communications*, vol. 6, pp. 311-335, March 1998.
- [Fulton et Harris, 1991] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory*, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [Galliou et Belfiore, 2002] S. Galliou and J.-C. Belfiore, "A New Family of Full Rate, Fully Diverse Space-Time Codes Based on Galois Theory," *in Proceedings of IEEE In-*

- ternational Symposium on Information Theory*, Lausanne, Switzerland, p. 419, July 2002.
- [Gamal et al, 2003] H. El Gamal, D. Aktas and M. O. Damen, "Coherent Space-Time Codes for Noncoherent Channels," *in Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference*, San Francisco, December 2003.
- [Gamal et al, 2004] H. El Gamal, G. Caire and M. O. Damen, "Lattice Coding and Decoding Achieve the Optimal Diversity-Multiplexing Tradeoff of MIMO Channel," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 50, pp. 968-985, June 2004.
- [Gamal et al, 2005] H. El Gamal, D. Aktas and M. O. Damen, "Noncoherent space-time coding : an algebraic perspective," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 51, pp. 2380-2390, July 2005.
- [Gamal et Damen, 2003] H. E. Gamal and M. O. Damen, "Universal Space-Time Coding," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 49, pp. 1097-1119, May 2003.
- [Gamal et Hammons, 2001] H. E. Gamal, A. R. Hammons, "A new approach to layered space-time coding and signal processing," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, pp. 2321-2334, September 2001.
- [Giraud et al, 1997] X. Giraud, E. Boutillon, and J.-C. Belfiore, "Algebraic Tools to build Modulation Schemes for Fading Channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 43, pp. 938-952, May 1997.
- [Gohary et Davidson, 2004] R. H. Gohary and T. N. Davidson, "Noncoherent MIMO communication : Grassmannian constellation and efficient detection," *in Proceedings of the International Symposium of Information Theory*, Chicago, 2004.
- [Golub et Loan, 1989] G. H. Golub and C. F. V. Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, third edition, 1989.
- [Gowaikar et Hassibi, 2003] R. Gowaikar and B. Hassibi, "Efficient statistical pruning for maximum likelihood decoding," *in Proceedings of IEEE International Conference Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. V, Hong Kong, pp. 49-52, China, April 2003.
- [Hassibi et Hochwald 1, 2002] B. Hassibi and B. M. Hochwald, "Cayley differential unitary space-time codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 1485-1503, June 2002.
- [Hassibi et Hochwald 2, 2002] B. Hassibi and B. M. Hochwald, "High-rate codes that are linear in space and time," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 1804-1824, July 2002.
- [Hassibi et Hochwald, 2003] B. Hassibi and B. M. Hochwald, "How much training is needed in multiple-antenna wireless links," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 49, pp. 951-963, April 2003

- [Hassibi et Vikalo, 2001] B. Hassibi and H. Vikalo, "On the expected complexity of sphere decoding," in *Proceedings of Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, vol. 2, pp. 1051-1055, 2001.
- [Hassibi et Marzetta, 2002] B. Hassibi and T. L. Marzetta, "Multiple-antennas and isotropically random unitary inputs : the received signal density in closed form," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 48, pp. 1473-1484, 2002.
- [Hochwald et Marzetta, 2000] B. Hochwald. and T. L. Marzetta, "Unitary space-time modulation for multiple antenna communications in Rayleigh flat fading," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 46, pp. 543-564, March 2000.
- [Hochwald et al, 2000] B. Hochwald, T. L. Marzetta, T. J. Richardson, W. Sweldens and R. Urbanke, "Systematic design of unitary space-time constellations," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 46, pp. 1962-1973, September 2000.
- [Hochwald et Sweldens, 2000] B. Hochwald and W. Sweldens, "Differential unitary space-time modulation," *IEEE Transactions On Communications*, vol. 48, pp. 2041-2052, December 2000.
- [Hughes, 2000] B. Hughes, "Differential space-time modulation," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 46, pp. 2567-2578, November 2000.
- [Jandot et Belfiore, 2005] E. Jandot dit Danjou and J-C Belfiore, "A  $2 \times 2$  Antennas Bluetooth System," *IEEE Communications Letters*, vol. 9, pp. 784-786, September 2005.
- [Jelinek, 1969] F. Jelinek, "A fast sequential decoding algorithm using a stack," *IBM Journal Reseach and Development*, vol. 13, pp. 675-685, November 1969.
- [Jing et Hassibi, 2001] Y. Jing and B. Hassibi, "Unitary space-time modulation via Cayley transform," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, pp. 2891-2904, November 2003.
- [Kammoun, 2004] I. Kammoun, *Codage Spatio-temporel sans connaissance a priori du canal*, Ph.D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, 2004.
- [Kammoun et Belfiore, 2003] I. Kammoun and J-C Belfiore, "A new family of Grassmannian spacetime codes for noncoherent MIMO systems," *IEEE Communications Letters*, vol. 7, pp. 528-530, November 2003.
- [Lapidoth et Narayan, 1998] A. Lapidoth and P. Narayan, "Reliable Communication Under Channel Uncertainty," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 44, pp. 2148-2177, October 1998.
- [Lenstra et al, 1982] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, and L. Lovasz, "Factoring polynomials with rational coefficients," *Mathematische Annalen*, vol. 261, pp. 515-534, 1982.

- [Leus et al, 2004] G. Leus, W. Zhao, G. B. Giannakis, "Space-time frequency-shift keying Leu," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 52, pp. 346-349, March 2004.
- [Marzetta et al, 2002] T. L. Marzetta, B. Hassibi and B. M. Hochwald, "Structured unitary space-time autocoding constellations," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 48, pp. 942-950, April 2002.
- [Marzetta et Hochwald, 1999] T. L. Marzetta and B. M. Hochwald, "Capacity of a mobile multiple-antenna communication link in Rayleigh flat fading," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol 45, pp. 139-157, January 1999.
- [McCloud et al, 2002] M. L. McCloud, M. Brehler and M. K. Varanasi, "Signal design and convolutional coding for noncoherent spacetime communication on the block Rayleighfading channel," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 48, pp. 1186-1194, May 2002.
- [Moose, 1994] P. H. Moose, "A technique for Orthogonal Frequency Division Multiplexing frequency offset correction," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, pp. 2908-2914, October 1994.
- [Murugan et al, 2005] A. D. Murugan, H. El Gamal, M. O. Damen, and G. Caire, "A Unified Framework for Tree Search Decoding : Rediscovering the Sequential Decoder," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, pp 933-953, March 2006.
- [Oggier et al, 2006] F. Oggier, G. Rekaya, J-C Belfiore and E. Viterbo, "Perfect Space-Time Block Codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, September 2006.
- [Oggier et al, 2003] F. Oggier, N. J. A. Sloane, S. Diggavi and A. R. Calderbank, "Nonintersecting Subspaces Based on Finite Alphabets," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 51, pp. 4320-4325, December 2005.
- [Pohst, 1981] M. Pohst, "On the computation of lattice vectors of minimal length, successive minima and reduced basis with applications," *ACM SIGSAM Bulletin*, vol. 15, pp. 37-44, February 1981.
- [Proakis, 2000] J. G. Proakis, *Digital Communications*. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering, 1995, 4th edition.
- [Rekaya, 2004] G. Rekaya, *Nouvelles Constructions algébriques de codes spatio-temporels atteignant le compromis multiplexage-diversité*, Ph.D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, December 2004.
- [Rekaya et al, 2004] G. Rekaya, J.-C. Belfiore and E. Viterbo, "A Very Efficient Lattice Reduction Tool on Fast Fading Channels," *in Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory and its Applications*, Parme, Italie, October 2004.

- [Samuel, 2003] P. Samuel, *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, Editeur des sciences et des arts, Paris, 2003.
- [Schnorr, 1987] C. P. Schnorr, "A hierarchy of polynomial time lattice basis reduction algorithms," *Theoretical Computer Science*, vol. 53, pp. 201-224, 1987.
- [Schnorr et Euchner, 1994] C. P. Schnorr and M. Euchner, "Lattice basis reduction : Improved practical algorithms and solving subset sum problems," *Mathematical Programming*, vol. 66, pp. 181-191, 1994.
- [Speth et al, 2001] M. Speth, S. Fechtel, G. Fock and H. Meyr, "Optimum Receiver Design for Wireless Broad-Band using OFDM," *IEEE Transactions on Communications*, Part I, vol. 44, pp. 1668-1677, November 1999 and Part II, vol. 49, pp. 571-578, April 2001.
- [Tarokh et al, 1998] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank, "Space-Time Codes for High Data Rate Wireless Communication : Performance Criterion and Code Construction," *IEEE Transactions On Information Theory*, vol. 44, pp. 744-765, March 1998.
- [Tarokh et al, 1999] V. Tarokh, H. Jafarkhani and R. A. Calderbank, "Space-Time block codes from orthogonal designs," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, pp. 1456-1467, July 1999.
- [Tarokh et Jafarkhani, 2000] V. Tarokh and H. Jafarkhani, "A differential detection scheme for transmit diversity," *IEEE Journal On Select Areas In Communications*, vol. 48, pp. 37-44, July 2000.
- [Tarokh et Kim, 2002] V. Tarokh and I.-M. Kim, "Existence and construction of noncoherent unitary spacetime codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 3112-3117, December 2002.
- [Telatar, 1995] E. Telatar, "Capacity of Multi-antenna Gaussian Channels," *Internal technical report*, June 1995. Bell Laboratories <http://mars.bell-labs.com/papers/proof/>.
- [Tirkkonen et Hottinen, 1998] O. Tirkkonen and A. Hottinen, "Complex Space-Time Block Codes for four Tx," in *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference*, vol. 2, pp. 1005-1009, November 2000.
- [Tirkkonen et Hottinen, 2002] O. Tirkkonen and A. Hottinen, "Square-matrix embeddable space-time block codes for complex signal constellations," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 384-395, February 2002.
- [Viterbo et Biglieri, 1993] E. Viterbo and E. Biglieri, "A universal lattice decoder," in *GRETSI 14<sup>ième</sup> colloque*, Juan les Pins, September 1993.
- [Viterbo et Boutros, 1999] E. Viterbo and J. Boutros, "A universal lattice code decoder for fading channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, pp. 1639-1642, July 1999.

- [Wang et al, 2004] J. Wang, X. Wang and M. Madhian, "Optimal design of noncoherent Cayley unitary space-time codes," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, submitted for publication, 2004.
- [Warrier et Madhow, 2002] D. Warrier and U. Madhow, "Spectrally efficient noncoherent communication," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 651-668, March 2002.
- [Wolniansky et al, 1998] P.W.Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden, and R. A. Valenzuela, "V-BLAST : An Architecture for Realizing Very High Data Rates Over the Rich-Scattering Wireless Channel," in *Proceedings of the URSI International Symposium Signals, Systems, and Electronics*, Italy, September 1998.
- [Xu et al, 2004] W. Xu, Y. Wang, Z. Zhou, and J. Wang, "A computationally efficient exact ML sphere decoder," in *IEEE Global Telecommunications Conference*, pp. 2594-2598, November 2004.
- [Yao et Wornell, 2003] H. Yao and G.W.Wornell, "Achieving the Full MIMO Diversity-Multiplexing Frontier with Rotation-Based Space-Time Codes," in *Proceedings Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, Illinois, October 2003.
- [You et Horng, 2001] C. J. You and J. H. Horng, "Optimum Frame and Frequency Synchronization for OFDM Systems," in *Proceedings of IEEE International Conference on Consumer Electronics*, pp. 226-227, June 2001.
- [Zhao et al, 2004] W. Zhao, G. Leus and G. Giannakis, "Orthogonal design of unitary constellations for uncoded and trellis coded non-coherent space-time systems," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, pp. 1319-1327, March 2004.
- [Zheng, 2002] L. Zheng, *Diversity Multiplexing Tradeoff : A Comprehensive View of Multiple Antenna Systems*, Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, 2002.
- [Zheng et Tse, 2002] L. Zheng, and D. Tse, "Communication on the Grassmann manifold : A geometric approach to the noncoherent multiple-antenna channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 359-383, February 2002.
- [Zheng et Tse, 2003] L. Zheng and D. Tse, "Diversity and multiplexing : A fundamental tradeoff in multiple antenna channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, pp. 1073-1096, May 2003.
- [Zigangirov, 1966] K. S. Zigangirov, "Some sequential decoding procedures," *Problemy Peredachi Informatsii*, vol. 2, pp. 19-35, November 1966.