



HAL
open science

Identification simultanée des paramètres de rigidité et d'amortissement de plaques isotropes minces en vibration par la méthode des champs virtuels

Baoqiao Guo

► **To cite this version:**

Baoqiao Guo. Identification simultanée des paramètres de rigidité et d'amortissement de plaques isotropes minces en vibration par la méthode des champs virtuels. Sciences de l'ingénieur [physics]. Arts et Métiers ParisTech, 2007. Français. NNT : 2007ENAM0010 . pastel-00002749

HAL Id: pastel-00002749

<https://pastel.hal.science/pastel-00002749>

Submitted on 24 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° : 2007-ENAM-0010

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

de

L'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité : Mécanique

présentée et soutenue publiquement

par

Baoqiao GUO

le 10 juillet 2007

<p>IDENTIFICATION SIMULTANÉE DES PARAMÈTRES DE RIGIDITÉ ET D'AMORTISSEMENT DE PLAQUES ISOTROPES MINCES EN VIBRATION PAR LA MÉTHODE DES CHAMPS VIRTUELS</p>

Directeur de thèse : Fabrice PIERRON

Codirecteur de thèse : Alain GIRAUDEAU

Jury :

M. Michel GRÉDIAC	Professeur, Université Blaise Pascal Clermont II	Président
M. Jean-Michel GÉNEVAUX	Professeur, Université du Maine	Rapporteur
M. Thomas GMÜR	Professeur, École Polytechnique Fédérale de Lausanne	Rapporteur
M. Stéphane AVRIL	Maître de Conférences, ENSAM Châlons en Champagne	Examineur
M. Alain GIRAUDEAU	Maître de Conférences, ENSAM Châlons en Champagne	Examineur
M. Emmanuel PAGNACCO	Maître de Conférences, INSA de Rouen	Examineur
M. Fabrice PIERRON	Professeur, ENSAM Châlons en Champagne	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Procédés de Fabrication

ENSAM, CER de Châlons-en-Champagne

À toute ma famille ...

献给我的家人

Remerciements

Les travaux de cette thèse ont été effectués au Laboratoire de Mécanique et Procédés de Fabrication de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, CER de Châlons-en-Champagne. Le support financier de la Région Champagne-Ardenne et ainsi que les conditions offertes par la direction du centre de L'ENSAM de Châlons-en-Champagne m'ont permis d'effectuer cette thèse dans d'excellentes conditions.

Je tiens à remercier Monsieur le professeur Fabrice PIERRON, directeur du laboratoire et directeur de ma thèse, pour m'avoir accueilli, encadré tout au long de ce travail. J'ai beaucoup apprécié son soutien et sa rigueur scientifiques tout au long des trois années et plus de cette thèse.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Alain GIRAUDEAU, maître de conférences à l'ENSAM et co-directeur de ma thèse, pour toutes les aides qu'il m'a apportées, pour sa grande patience pendant toutes les périodes d'essais ainsi que pour toutes nos discussions.

Je remercie également Monsieur Michel GRÉDIAC, professeur à l'Université Blaise Pascal Clermont II, qui m'a fait l'honneur d'être le Président de mon jury de thèse. La coopération avec son doctorant Kashif SYED-MUHAMMAD m'a permis de mener à bien une partie importante de ce travail.

Je remercie vivement Monsieur Jean-Michel GENÉVAUX, professeur à l'Université du Maine et Monsieur Thomas GMÜR, professeur à l'École Fédérale Polytechnique de Lausanne pour avoir accepté de rapporter ma thèse et pour l'intérêt qu'ils lui ont porté à travers leur expertise. Une attention particulière à J.M. GENÉVAUX pour notre intéressant débat lors de la rencontre qu'il m'avait proposée.

Monsieur Emmanuel PAGNACCO, maître de conférences à l'INSA Rouen m'a fait l'honneur de participer à mon jury de thèse. Je l'en remercie également.

Monsieur Stéphane AVRIL, maître de conférences à l'ENSAM m'a apporté son excellence scientifique dans le traitement des images et ainsi que dans le développement des champs virtuels complexes par morceaux. C'est un ami très cher. Je suis heureux qu'il ait également participé à mon jury de thèse. Je l'en remercie chaleureusement.

Je remercie beaucoup Monsieur René ROTINAT, maître des conférences à l'ENSAM, qui a résolu bon nombre des problèmes que posaient le développement de mes essais. Toute ma gratitude va aux personnels techniques du laboratoire, messieurs Cédric PERSON, Alain BERRON et Abdel BOUZID sans qui ces expérimentations n'auraient pu avoir lieu.

Je voudrais exprimer sincèrement ma reconnaissance à tous les membres de l'équipe du LMPF. Avec eux dans une ambiance très humaine, j'ai passé des moments inoubliables. Merci également à tous les personnels de l'ENSAM qui m'ont rapporté leurs aides durant cette période.

Avec les amis j'ai passé des moments inoubliables, notamment avec les joueurs de football et de badminton. Cela m'a permis de passer certaines périodes difficiles. Parmi ces amis il y a Yannick, Hocine, Edoardo, GianLuca, José, Nuno, Michaël, Rute, Vinh, Larbi, Patrick, Régine, Dominique, Anne-Laure, Raphaël, Jin, Javier, Samuel, Ibrahim, Benjamin, Sylvain, Claude, Magalie, Laetitia, Sylvie, Martine, Florence, et les autres qui ne sont pas tous listés. Je vous remercie encore.

Sont aussi remerciées toutes les personnes qui se sont intéressées à ma thèse et parmi elles, celles qui sont venues à la soutenance ; leur présence m'a fait énormément plaisir.

Enfin, je suis infiniment reconnaissant à toute ma famille, notamment mon frère JinQiao, qui s'est chargé de la famille pendant mes longues études. Et LiXia qui m'a supporté avec sa grande patience.

Table des matières

Introduction générale	XI
1 Étude bibliographique	1
1.1 Introduction	1
1.2 Identification des rigidités	2
1.3 Identification des amortissements	3
1.3.1 Épouvette de type poutre	4
1.3.1.1 Vibrations libres	4
1.3.1.1.1 Poutre encastree-libre	5
1.3.1.1.2 Poutre libre-libre	7
1.3.1.2 Vibrations forcées	8
1.3.1.2.1 Poutre encastree-libre	8
1.3.1.2.2 Poutre libre-libre	9
1.3.1.3 Discussion	10
1.3.2 Épouvettes de type plaque	11
1.4 Conclusions	15
2 Méthode des Champs Virtuels	17
2.1 Introduction	17
2.2 Présentation de la Méthode des Champs Virtuels	18
2.3 Flexion des plaques minces	18
2.4 Principe proposé	21
2.4.1 Cas considéré	21
2.4.2 Application de la MCV	23
2.5 Ecriture du Principe des Travaux Virtuels	25
2.5.1 Expression générale des travaux	25

2.5.2	TVFE	26
2.5.3	TVFI	27
2.5.4	TVAC	29
2.6	Synthèse des travaux virtuels	29
2.6.1	Expression de S_{TVFI}	31
2.6.2	Expression de S_{TVAC}	34
2.6.3	Synthèse finale - Relation d'identification	35
2.7	Choix des champs virtuels	37
2.7.1	Modèle d'éléments finis	38
2.7.2	Choix intuitif	44
2.7.3	Champs virtuels spéciaux optimisés par morceaux	51
2.7.3.1	Principe de la méthode	51
2.7.3.2	Indépendance des équations	58
2.7.3.3	Travail virtuel nul des efforts extérieurs $TVFE = 0$	59
2.7.3.4	Synthèse des écritures des conditions 1 et 2	60
2.7.3.5	Effets du bruit sur les champs de courbure	61
2.7.3.6	Minimisation des effets du bruit de mesure	69
2.7.3.7	Validation numérique	74
2.7.3.8	Effets des erreurs de mesure du mouvement d'entraînement	79
2.7.3.9	Commentaires	83
2.7.4	Champs Virtuels Spéciaux optimisés polynomiaux	86
2.8	Conclusion	91
3	Expérimentation	93
3.1	Introduction	93
3.2	Matériau testé	94
3.2.1	Valeurs de référence	94
3.3	Dispositif expérimental	99
3.3.1	Introduction	99
3.3.2	Dispositif d'excitation	100
3.3.2.1	Objectif - Description	100
3.3.2.2	Validation du mouvement d'entraînement	100
3.3.3	Prises de vues	101
3.3.4	Estimation des erreurs d'entraînement et de synchronisation	104
3.3.4.1	Calibration de la mesure de l'amplitude de l'entraînement	104

3.3.4.2	Estimation de l'erreur de synchronisation	105
3.4	Mesure des champs cinématiques de la plaque	107
3.4.1	Introduction - choix d'une technique optique	107
3.4.2	Principe de la défectométrie	109
3.4.3	Méthode de grille - Décalage de phase spatial	110
3.4.4	Défectométrie - Configuration utilisée	111
3.4.5	Sensibilité en rotation	113
3.4.6	Sensibilité au déplacement hors-plan	115
3.5	Processus de traitement des images	118
3.5.1	Dépliage de la phase	118
3.5.2	Lissage spatial et dérivation locale - Intégration numérique	122
3.5.3	Lissage polynomial	126
3.5.3.1	Lissage global sur une base de polynômes	126
3.5.3.2	Choix du degré des polynômes	128
3.5.3.3	Estimation de l'écart-type du bruit des champs dérivés	133
3.5.4	Comparaison entre les deux techniques de lissage	133
3.6	Conclusion	135
4	Identification avec la méthode des champs virtuels	137
4.1	Introduction	137
4.2	Analyse vibratoire de la plaque	137
4.3	Optimisation des prises de vues	140
4.4	Champs cinématiques mesurés	143
4.5	Résultats des identifications	148
4.5.1	Valeurs de référence	148
4.5.2	Résultats des identifications	148
4.5.2.1	Résultats globaux	148
4.5.2.2	Résultats par fréquence	149
4.5.2.3	Anomalie des résultats à 100Hz	155
5	Conclusions et Perspectives	159
5.1	Conclusions	159
5.2	Perspectives	160
	Bibliographie	163

Liste des tableaux

2.1	Dimensions géométriques et caractéristiques matériau de la plaque	39
2.2	Paramètres de rigidités et d'amortissements de la plaque	39
2.3	Premières fréquences propres de la plaque	39
3.1	Valeurs de référence dynamiques du matériau	97
3.2	Écart-type du bruit de mesure	113
3.3	Vérification expérimentale de la sensibilité	115
4.1	Décalages ϕ choisis	142
4.2	Amplitudes d'entraînement	143
4.3	Valeurs de référence des paramètres	148
4.4	Identification avec des différents CVS par morceaux	152
4.5	Constantes élastiques et les taux d'amortissement identifiés	153

Table des figures

1.1	Réponse vibratoire libre par impact d'une poutre encastree-libre ([1])	6
1.2	méthode de bande 3 dB	6
1.3	Vibration forcée de poutre encastree-libre ([2])	9
1.4	Poutre libre-libre en vibrations forcées ([3])	10
1.5	Classement des essais avec des poutres pour l'identification d'amortissement	11
2.1	Plaque mince de type Love-Kirchhoff	19
2.2	Plaque en vibration forcée	22
2.3	Modèle de Kelvin-Voigt	32
2.4	Géométrie de la plaque	38
2.5	Modes et réponses harmoniques en résonance	41
2.6	Modes et réponses harmoniques hors résonance (1)	42
2.7	Modes et réponses harmoniques hors résonance (2)	43
2.8	Résultats identifiés par les champs virtuels choisis intuitivement	46
2.9	Influences des erreurs de mesures du mouvement d'entraînement : ampli- tude et phase	49
2.10	Plaque par morceaux	51
2.11	Élément rectangulaire de type Hermite16	52
2.12	Assemblage des éléments virtuels	56
2.13	Plaque par morceaux	74
2.14	Influences de différents CVS par morceaux	75
2.15	Sensibilités relatives de différents CVS par morceaux	76
2.16	Exemples des champs hors-résonance et en résonance	77
2.17	Courbures moyennes et sensibilités relatives	78
2.18	Identification avec le bruit	79
2.19	Influence des erreurs de mesures du mouvement d'entraînement	80

2.20	CVS de minimisation du bruit de mesure des champs et les erreurs de mesures du mouvement d'entraînement	82
2.21	Identification avec le bruit	82
2.22	Distribution aléatoire de l'erreur	84
2.23	Écart-type de l'identification avec les champs de courbure bruités	84
2.24	Influences de différents CVS polynomiaux	89
2.25	CVS ($n = 3$) minimisant le bruit de mesure et les erreurs de mesures entraînement	90
2.26	CVS ($n = 5$) de minimisation du bruit de mesure des champs et les erreurs de mesures du mouvement d'entraînement	90
3.1	Essais de poutres encastées-libres	94
3.2	Oscillations libres d'éprouvette-poutre	97
3.3	Résultats de l'essai DMTA	98
3.4	Vue du dispositif expérimental	99
3.5	Vue éclatée du dispositif d'excitation	100
3.6	Mesures de validation de l'entraînement	101
3.7	Diagramme temporel déclenchement flash, ici prise de vue 'en phase'	102
3.8	Schéma du dispositif de prise de vue	103
3.9	Calibration de l'accéléromètre	104
3.10	Erreur relative de l'amplitude	105
3.11	Erreur de mesure de Phase	107
3.12	Shéma du principe de la déflectométrie	109
3.13	Échantillon de la grille de pas $p = 2 \text{ mm}$	110
3.14	Schéma du dispositif de calibration de la sensibilité	114
3.15	Exemple d'étalonnage du montage optique de mesure de champs de pente par la grille de pas $p = 2 \text{ mm}$	115
3.16	Schéma du calibrage de la sensibilité hors-plan	116
3.17	Sensibilité en mouvement hors-plan	117
3.18	Processus du Traitement des images	119
3.19	Chemins de dépliements et coupures	120
3.20	Phase des champs de pente (en radians) : avant et après dépliement	121
3.21	Champs traités par lissage local	123
3.22	Schéma de procédure d'intégration pour l'obtention du champ de flèche à partir des deux champs de pente	124

3.23	Exemples de masque appliqué pour effectuer le lissage polynômial.	129
3.24	Évolution de l'écart quadratique moyen entre les pentes simulées/mesurées et les pentes projetées sur une base polynomiale en fonction du degré utilisé.	130
3.25	Comparaison entre les champs de pente (en radian) bruts et lissés par une base polynomiale de degré 14.	131
3.26	Champs traités par lissage polynomial	132
3.27	Champs traités par lissage local	134
4.1	Analyse en fréquence de la plaque	138
4.2	Champs de pentes mesurés en 80 Hz et 100 Hz avec $\phi = 0^\circ$	140
4.3	Rotation de repère	141
4.4	Champs de pentes mesurés en 80 Hz et 100 Hz avec phase initiale tournée	142
4.5	Pentes quadratiques moyennes en fonction des décalages ϕ imposés	143
4.6	Champs traités par lissage polynomial : 70 Hz et 80 Hz	145
4.7	Champs traités par lissage polynomial : 90 Hz et 100 Hz	146
4.8	Champs traités par lissage polynomial : 110 Hz	147
4.9	Moyennes des rigidités identifiées ($\pm \sigma$) en fonction des degrés des poly- nômes de lissage	150
4.10	Moyennes des amortissements identifiés ($\pm \sigma$) en fonction des degrés des polynômes de lissage	151
4.11	Champs de flèche en résonance, fréquence du premier mode de flexion	156
4.12	Anomalie de l'excitation	157

Introduction générale

La connaissance des propriétés des matériaux est indispensable à la conception, le dimensionnement et l'optimisation des systèmes mécaniques. Les caractéristiques élastiques et dissipatives jouent un rôle déterminant dans le comportement des structures en particulier dans leur comportement vibratoire. Par ailleurs ces mêmes propriétés offrent des indicateurs potentiels sur l'état du matériau en particulier son endommagement pendant toute la durée de son utilisation.

La détermination des caractéristiques élastiques a fait l'objet de nombreux travaux. Elle est bien maîtrisée dans le cas des matériaux métalliques dont les propriétés sont pratiquement indépendantes de la fréquence. Dans ce cas, la connaissance d'une valeur pour le module d'Young et d'une pour le coefficient de Poisson se révèle suffisante. Pour obtenir ces paramètres, l'approche usuelle consiste à réaliser des essais mécaniques quasi-statiques standard, comme par exemple l'essai de traction ou de flexion quatre points. Le cas des matériaux viscoélastiques tels que les polymères est plus délicat à aborder en raison de la variation de leurs caractéristiques mécaniques en fonction de la fréquence de la sollicitation et de la température. La caractérisation quasi-statique est alors insuffisante et doit être complétée d'une identification dynamique. D'une manière générale, il en est de même pour toute détermination de paramètres d'amortissement.

Par ailleurs, en raison de l'accroissement des performances de nombreux systèmes, la capacité à prévoir les niveaux de vibrations de ceux-ci prend une importance croissante dans le processus de conception. Cette tendance est soutenue par une forte demande en matière de confort vibratoire et acoustique dans de nombreux domaines dont celui des transports par exemple. Dans ce cadre, la connaissance de l'amortissement intrinsèque des matériaux est nécessaire à la prévision précise du comportement vibratoire et acoustique des structures.

L'amortissement est aussi amené à jouer un rôle important comme indicateur dans la dé-

tection de l'endommagement des structures. La fissuration ou le délaminage d'un élément peut entraîner des variations de l'amortissement sensiblement plus importantes que celles des fréquences propres. L'observation des variations des paramètres d'amortissement peut ainsi fournir un indicateur pertinent de l'endommagement du matériau.

Une solution classique pour déterminer les caractéristiques d'un matériau consiste à tester en vibrations une éprouvette de type poutre. Les conditions aux limites imposées sont choisies telles qu'elles conduisent à un état homogène de contraintes pour lequel une solution analytique du mouvement vibratoire existe. En initiant des vibrations libres, il est possible d'extraire des paramètres élastiques de la mesure des fréquences propres et les paramètres d'amortissement de la décroissance des oscillations. En excitant l'éprouvette en vibrations forcées, les mêmes informations peuvent être tirées respectivement de la mesure des fréquences de résonance d'une part et d'autre part de l'exploitation des variations du module et de la phase de la réponse autour de la résonance.

Un premier inconvénient de ces méthodes consiste dans le nombre limité de paramètres qu'il est possible d'extraire d'un essai. Par exemple dans le cas d'un matériau isotrope, les tests d'une éprouvette en vibrations de flexion pure ne pourront délivrer que les valeurs du module d'Young et de l'amortissement longitudinal. Un autre essai, de torsion par exemple pourra conduire au module de Coulomb et à l'amortissement associé. Pour des raisons pratiques, ces deux essais ne pourront généralement pas être pratiqués à l'aide des mêmes dispositifs expérimentaux. Dans le cas des matériaux anisotropes, ces difficultés se révèlent encore plus importantes.

De plus, l'identification des paramètres d'amortissement du matériau reste un problème ouvert en raison des nombreux phénomènes parasites qui viennent généralement perturber les mesures conduisant à sa détermination. Ces difficultés sont rapportées de manière récurrente dans de nombreux travaux. Elles deviennent encore plus intenses lorsque sont abordés les cas de matériaux anisotropes tels que les composites ou le carton ondulé par exemple.

Une alternative à cette démarche est constituée par des essais hétérogènes qui permettent d'identifier ces paramètres inconnus à partir d'un seul essai. Dans ce cas, il n'existe pas *a priori* de relation directe entre une mesure cinématique locale (déformation, déplacement ou courbure), l'effort appliqué et le paramètre à identifier. En conséquence, la recherche des paramètres constitue un problème inverse, qui nécessite une stratégie de résolution appropriée. Les principales techniques pour résoudre ce type de problème sont basées

sur des méthodes itératives de recalage avec un modèle éléments finis. Elles consistent à minimiser une fonction-coût de type moindre carré entre grandeurs mesurées et valeurs correspondantes déterminées par le calcul éléments finis, les variables étant les paramètres recherchés.

L'objectif de ce travail est de présenter une méthode d'identification non-itérative, permettant d'identifier simultanément les rigidités et les amortissements. Elle utilise une procédure traitant les mesures de champs cinématiques hétérogènes de pentes mesurés à la surface d'une plaque mince excitée en vibrations de flexion. Elle est associée à une procédure inverse d'identification utilisant la méthode des champs virtuels. Les développements présentés permettent d'identifier simultanément tous les paramètres de rigidité et d'amortissement d'une plaque isotrope, sous réserve que chacun des paramètres influe suffisamment sur la réponse mesurée. Cette méthode peut potentiellement être étendue aux matériaux anisotropes.

Dans le premier chapitre, une rapide revue des méthodes d'identification des paramètres de rigidité est présentée. Ensuite une étude bibliographique donne un aperçu général des principales méthodes d'identification de l'amortissement. Elle distingue les différentes géométries d'éprouvettes utilisées, les conditions aux limites imposées, les types de vibrations libres ou forcées ainsi que les techniques mises en œuvre. Enfin différentes méthodes d'identification à partir de mesure des champs hétérogènes sont répertoriées.

Le deuxième chapitre présente la théorie de la méthode développée. Le principe de la méthode des champs virtuels est rappelé et son application aux plaques minces en vibrations de flexion est détaillée à partir d'un bref rappel sur la flexion des plaques minces. Une grande attention est ensuite portée à la sélection de champs virtuels optimisés. Deux types de ces champs virtuels spéciaux sont étudiés : ceux définis par morceaux et ceux générés sur une base polynomiale. La mise en place d'une procédure de sélection de champs optimisés limitant les effets du bruit de mesure est largement détaillée. La validation de la procédure d'identification à partir de champs cinématiques simulés est présentée. Les résultats provenant de l'utilisation de champs virtuels sélectionnés suivant différents critères sont comparés et discutés.

Le troisième chapitre est constitué par la présentation de la partie expérimentale. Le principe du dispositif mis en œuvre est décrit. Les principes de la déflectométrie et celui de la méthode de grille utilisés pour la mesure des champs de pente sont détaillés ainsi que l'ensemble du montage permettant la synchronisation des prises de vues. Enfin la

procédure de traitement des images permettant d'obtenir des champs de flèches et de courbures à partir des champs de pente est décrite.

Le quatrième chapitre concerne la mise en œuvre de l'ensemble de la méthode pour l'identification des caractéristiques du matériau testé. Une procédure d'optimisation du rapport signal/bruit est décrite. Les résultats de la procédure appliquée à l'aide de deux types de champs virtuels sont présentés et discutés. Les conséquences d'un dysfonctionnement de l'excitation sont également décrites et commentées.

Finalement les conclusions de cette étude sont tirées et des perspectives de développement sont avancées.

Chapitre 1

Étude bibliographique

1.1 Introduction

La connaissance des propriétés mécaniques des matériaux est de première importance et leurs caractérisations ont depuis longtemps été étudiées. Les rigidités décrivent les relations élastiques entre les contraintes et les déformations. Dans le cas des petites déformations élastiques, ces relations sont considérées comme linéaires. Beaucoup de travaux ont été conduits dans ce domaine soit en statique, soit en dynamique. Les paramètres d'amortissement décrivent les propriétés dissipatives du matériau. Leurs déterminations sont effectuées au travers d'essais en vibration. La détermination de ces paramètres est plus délicate à réaliser que celles des grandeurs élastiques d'une part en raison des énergies souvent faibles mises en jeu, d'autre part à cause des phénomènes dissipatifs parasites qui biaisent les procédures.

La grande majorité des travaux portant sur l'identification des rigidités est effectuée sur des éprouvettes de types poutres, plaques ou coques, en sollicitations statiques ou dynamiques. Les configurations d'essais statiques cherchent généralement à imposer un état homogène de contraintes ou de déformations sur des éprouvettes de géométries simples. Ces conditions sont souvent difficiles à imposer avec rigueur au niveau expérimental.

Les essais réalisés en vibrations conduisent souvent à utiliser des méthodes d'identification inspirées par l'analyse modale expérimentale au niveau élémentaire.

En utilisant la méthode des champs virtuels proposée par Grédiac [4], les paramètres de rigidité de flexion de plaques composites ont été identifiés par Paris *et al.* [5–7]. L'étude présentée dans ce mémoire peut être considérée comme une première extension de ces travaux permettant l'extraction simultanée des paramètres de rigidité et d'amortissement par application de la même méthode à des plaques minces entraînées en vibrations forcées. La thèse de Paris [7] contient une étude quasi-systématique des méthodes d'identification des rigidités. Le paragraphe suivant en présente quelques exemples types. Les autres paragraphes se focaliseront sur l'identification des paramètres d'amortissement qui représente l'objectif principal du présent travail.

1.2 Identification des rigidités

L'identification des paramètres de rigidité est habituellement effectuée en utilisant des essais de traction, de flexion ou de torsion sur des éprouvettes de type poutre menant à des états simples de contrainte ou de déformation qui peuvent être exprimés en fonctions de la géométrie de l'éprouvette et de la charge appliquée par une solution analytique du problème mécanique. Dans le cas simple des matériaux isotropes, un ou deux essais sont suffisants pour déterminer les deux paramètres élastiques : module d'Young et coefficient de Poisson. Néanmoins, ces procédures montrent certaines limites. La principale concerne les conditions aux limites expérimentales qui doivent être conformes à celle du modèle mécanique, ce qui est en général difficile à respecter rigoureusement.

Concernant les matériaux anisotropes, typiquement les matériaux composites, la problématique est encore plus complexe. En conséquence, plusieurs essais sont généralement nécessaires pour identifier tous les paramètres des matériaux, augmentant la durée des essais et le coût de la procédure.

Sur l'ensemble des travaux concernant la caractérisation des rigidités de flexion, le domaine des essais dynamiques est particulièrement riche. Des essais inspirés de l'analyse modale ont été pratiqués pour identifier l'ensemble des rigidités de flexion, en particulier sur des poutres et plaques composites. L'ensemble des paramètres élastiques peut ainsi être identifiés. Différentes approches ont été mises en œuvre en utilisant des modèles analytiques ou numériques. Habituellement, les 10 à 15 premières fréquences propres d'une plaque mince en flexion sont considérées et le modèle est itérativement réactualisé jusqu'à ce que les fréquences propres expérimentales correspondent à celles du modèle [8–16] aux

incertitudes des mesures et des modèles.

Un prolongement aux plaques épaisses avec prise en compte du cisaillement transverse a été également développé [17, 18]. Plus récemment, l'approche ci-dessus a été affinée en utilisant non seulement des fréquences propres mais également des formes de mode. Ceci a eu comme conséquence une identification plus robuste, en particulier des modules de cisaillement transverse et du coefficient de Poisson [19–21]. Dans le même esprit, les rigidités sont estimées par Ip *et al.* [22] à partir d'essais sur des coques en utilisant l'analyse modale conjointement à un calcul utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode d'estimation bayésienne. Dans ce dernier étude, l'effet de Poisson n'est pas suffisamment sollicité, pour conduire une détermination satisfaisante de ce paramètre.

Les essais des études précédentes sont plus simples à mettre en œuvre, les conditions aux limites étant moins restrictives que celles des essais standards. Un inconvénient de ces méthodes réside dans la connaissance de valeurs initiales des rigidités nécessaires au démarrage du calcul. De plus ces processus itératifs entraînent des calculs généralement lourds.

Une alternative très intéressante a été proposée par Woodhouse *et al.* [23, 24], utilisant des plaques de formes rectangulaires et basée sur l'analyse des fréquences propres et des formes des modes. Basée sur le principe de la conservation de l'énergie mécanique, cette méthode permet d'extraire les quatre paramètres de rigidité et au moins trois paramètres d'amortissement de plaques orthotropes. Cette méthode sera présentée prochainement dans l'étude bibliographique sur l'identification d'amortissements.

Une autre stratégie a été suggérée par Grédiac *et al.* utilisant la mesure des champs de pente à la surface de plaques en flexion en vibration sur ses modes [5, 6, 25]. L'identification est effectuée par la méthode des champs virtuels (MCV) qui est une application particulière du principe des travaux virtuels. L'avantage principal de cette technique est que les rigidités sont obtenues directement, sans aucune itération ni recours à un schéma d'optimisation et que les restrictions concernant la géométrie des éprouvettes et la réalisation pratique des conditions aux limites sont moins sévères qu'avec d'autres méthodes.

1.3 Identification des amortissements

L'amortissement des vibrations est une conséquence de la dégradation de l'énergie mécanique durant les oscillations par un ensemble de phénomènes dissipatifs. Dans un système

mécanique, ces phénomènes se retrouvent d'une part au niveau des différentes liaisons entre composants et d'autre part au sein même des matériaux constitutifs.

La détermination de l'amortissement intrinsèque d'un matériau est un problème plus complexe que celui de l'identification de ses constantes élastiques d'une part en raison de l'ordre de grandeur plus faible des phénomènes mis en jeu et d'autre part à cause des dissipations parasites introduites par le dispositif d'essai.

Dans de nombreuses études, il ressort que les paramètres gouvernant les amortissements des matériaux sont dépendants de la fréquence, de la température et de l'amplitude de déformation.

La grande majorité des travaux d'identification de l'amortissement sont conduits sur des éprouvettes de type mince, poutre ou plaque, en vibration de flexion. Cependant, des essais en vibrations de torsion [26, 27] ou en vibrations longitudinales [28] ont également fait l'objet d'investigations.

L'étude se concentre sur les travaux d'identification de l'amortissement utilisant les vibrations de flexion d'éprouvettes, classées par leurs dimensions, de types poutre et plaque.

- les poutres sont des structures d'un milieu continu ayant une dimension très grande par rapport aux deux autres ;
- les plaques ainsi que les coques sont des structures continues qui ont par définition une dimension très petite par rapport aux deux autres.

1.3.1 Éprouvette de type poutre

Une part importante des études est conduite sur des éprouvettes poutre. Les paramètres d'amortissement sont extraits des mouvements vibratoires soit en vibrations libres, soit en vibrations forcées.

1.3.1.1 Vibrations libres

Une stratégie courante consiste dans l'utilisation des vibrations libres de poutres, dans des conditions aux limites encastrée-libre [1, 29–33], ou libre-libre [32–34].

Quand le premier mode vibratoire est prédominant [27, 29, 31–33], l'extraction de l'amortissement est obtenu dans le domaine temporel en utilisant la décroissance des amplitudes

du mouvement. Quand le mouvement est composé de plusieurs modes suffisamment séparés en fréquence (voir figure 1.1), l'identification est conduite dans le domaine fréquentiel par la méthode de la largeur de bande à -3 dB dite de la "demi-puissance" ou par lissage de la fonction de réponse en fréquence dans le plan complexe [34]. Les vibrations libres étant par nature transitoires, le choix de la méthode et la précision qu'il est possible d'atteindre sont largement tributaires de l'importance de l'amortissement à déterminer. Un amortissement relativement faible conduira à privilégier une procédure dans le domaine fréquentiel où une résolution correcte est susceptible d'être atteinte alors qu'une grande profondeur d'acquisition serait nécessaire dans le domaine temporel. Un amortissement important conduit toutes précautions gardées, au raisonnement inverse.

1.3.1.1.1 Poutre encastree-libre

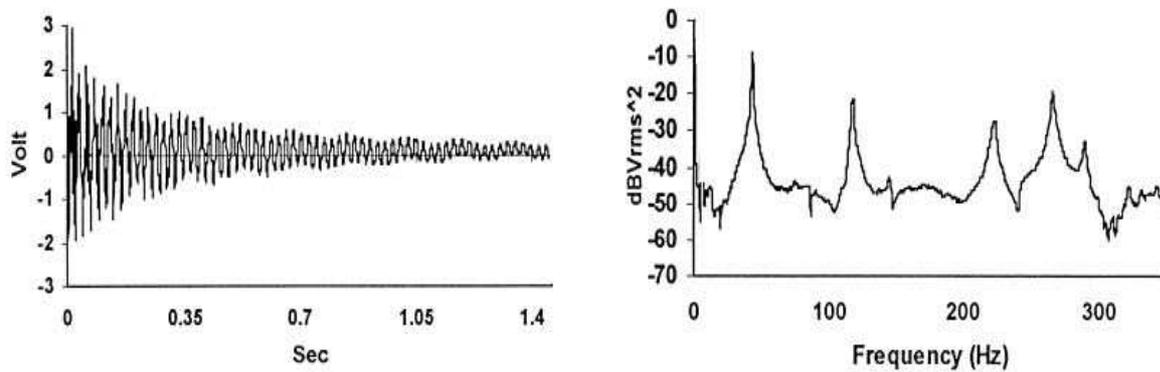
Les essais sur les poutres encastrees-libres sont les plus utilisés pour la caractérisation des propriétés d'amortissement de matériaux divers. Cette configuration n'est pas la plus simple à mettre en œuvre matériellement car l'encastrement introduit des dissipations parasites déjà évoquées. Pour tenter d'y pallier Wren [29] préconise d'augmenter le serrage des mors jusqu'à stabilisation des valeurs identifiées du paramètres d'amortissement. L'inconvénient majeur de ce procédé se situe au niveau de l'éventuel endommagement provoqué dans le matériau testé.

L'initiation du mouvement est pratiqué soit par lâcher soit plus couramment par impact au marteau manuel ou au marteau électrodynamique.

L'intérêt du premier cas est qu'il permet d'obtenir un mouvement composé majoritairement du premier mode de flexion. L'évaluation de la décroissance des amplitudes des oscillations associées à ce mode permet la détermination de l'amortissement. A l'aide d'un jeu d'éprouvettes de différentes longueurs il est ainsi possible d'extraire la valeur du paramètre d'amortissement dans une gamme de fréquences. Gu *et al.* [35] ont ainsi étudié l'influence du taux de fibres sur l'amortissement de poutres composites.

L'initiation par impact conduit à un mouvement composé de plusieurs modes. La mesure de l'effet d'impact et du mouvement vibratoire en un point permet le calcul de la fonction de réponse en fréquence (FRF) de la poutre.

La figure 1.1 présente un exemple de vibrations libres initiées par l'impact. La fenêtre (a) montre le signal traduisant le mouvement amorti et la fenêtre (b) la fonction de réponse



(a) Mouvement libre (accélération)

(b) FRF du signal

Figure 1.1 – Réponse vibratoire libre par impact d'une poutre encastrée-libre ([1])

en fréquence calculée à partir du signal précédent et de celui de l'effort d'impact.

L'amortissement peut en être extrait à l'aide de la méthode dite de la demi-puissance ou largeur de bande à -3 dB (voir figure 1.2).

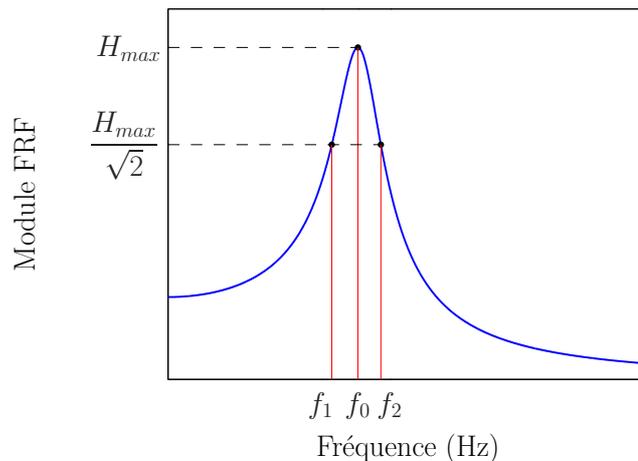


Figure 1.2 – méthode de bande 3 dB

On montre [36] que la puissance dissipée est proportionnelle au carré de la FRF. Les deux fréquences f_1 et f_2 sont celles pour lesquelles cette puissance est la moitié de la dissipation maximale. La figure 1.2 montre la détermination de ces deux fréquences telles que $H(f_1) = H(f_2) = H_{max}/\sqrt{2}$. Elles définissent une bande de fréquence dont l'ordonnée se situe à -3 dB de la réponse maximale du mode considéré de fréquence propre f_0 . L'amortissement se déduit à l'aide de la relation :

$$\eta = \frac{f_2 - f_1}{f_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \quad (1.1)$$

Dans ces essais, le mouvement vibratoire est généralement mesuré soit à l'aide d'un capteur sans contact à courant de Foucault [1] ou d'un vibromètre laser [37], soit à l'aide d'un accéléromètre faisant partie intégrante d'une inertie de translation et de rotation liée à l'extrémité libre de la poutre [29, 38]. L'intérêt de cette dernière configuration, lorsque l'amortissement est important, réside dans l'allongement de la durée des oscillations libres et donc de la durée d'observation possible du signal. Par ailleurs Wren *et al.* [29] ont défini et vérifié expérimentalement les conditions dans lesquelles l'inertie additionnelle n'entraîne que des effets parasites négligeables sur la détermination de l'amortissement.

1.3.1.1.2 Poutre libre-libre

Pour diminuer les erreurs d'identification introduites par les conditions d'encastrement, des auteurs préfèrent réaliser des essais de vibrations en conditions aux limites libre-libre. Le principe consiste à supporter la poutre par deux appuis linéiques aux droits des deux nœuds du premier mode de flexion de l'éprouvette. Pour ce mode, les mouvements relatifs entre la poutre et les supports sont particulièrement faibles et les dissipations parasites sont ainsi réduites. Une évaluation de l'importance de celles-ci peut être réalisée à partir d'essais dans lesquels les appuis sont légèrement déplacés de part et d'autre des lignes nodales.

El Moussaoui *et al.* [39] ont réalisé des essais de poutres polymères supportées par des couteaux rigides. Cette configuration particulière permet d'utiliser un essai par lâcher, privilégiant la création d'un mouvement où le premier mode est largement prépondérant et autorisant une identification simple dans le domaine temporel.

Plus fréquemment les éprouvettes sont suspendues aux niveaux des lignes nodales par des fils fins souples. Cette configuration est utilisée par Srikanth *et al.* [34, 40] pour la détermination d'amortissement de poutres en composite à matrice métallique. Le lâché n'étant pas praticable dans ces conditions, les vibrations libres sont provoquées par impact. La mesure de celui-ci et du mouvement d'une extrémité de la poutre permet comme précédemment le calcul de la FRF et donc la détermination de l'amortissement par la méthode de demi-puissance. Une autre technique, directement inspirée des méthodes dites

"SDOF" de l'analyse modale expérimentale [41], utilise le lissage de diagramme de Nyquist de cette fonction.

La suspension de la poutre de manière ponctuelle aux lieux des lignes nodales permet de limiter le cas échéant, l'introduction d'effets dissipatifs parasites par le couplage flexion-torsion que présentent certains composites (voir [39]).

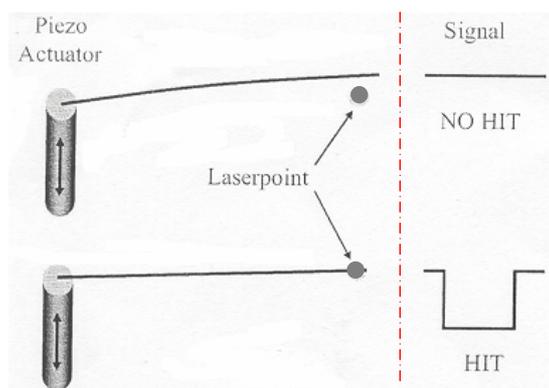
1.3.1.2 Vibrations forcées

1.3.1.2.1 Poutre encastrée-libre

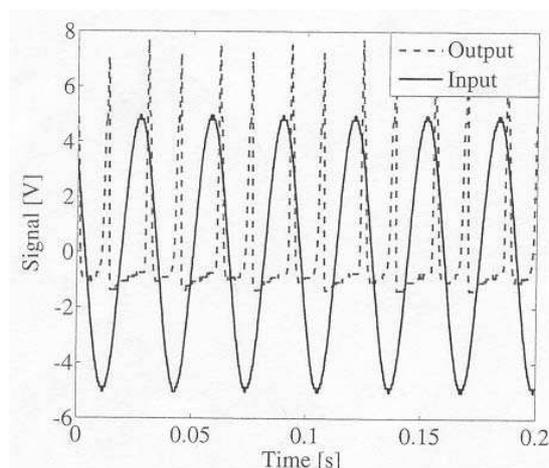
Pour éviter l'aspect transitoire des vibrations libres, de nombreuses études ont été réalisées à partir de vibrations forcées, généralement par excitation harmonique.

Wu *et al.* dans leur article [42] proposent sans vraiment le justifier, une configuration de poutre encastrée-encastrée avec l'application au milieu de la poutre de l'effort délivré par l'excitateur. Cette disposition qui fait intervenir trois liaisons introduisant des dissipations parasites n'a été retrouvée dans aucune autre étude. De manière à justement limiter l'influence des liaisons, l'excitation par inertie est préférée par de nombreux auteurs. Elle est appliquée en imposant au dispositif d'encastrement de la poutre un mouvement d'entraînement transversal à celle-ci. Les configurations couramment rencontrées sont la poutre encastrée-libre [2, 43] et la poutre encastrée par son milieu, présentant ainsi deux extrémités libres [44, 45]. Cette disposition présente l'avantage de pouvoir être réalisée en montant directement l'éprouvette sur un pot vibrant, sans réalisation de dispositif particulier. Sur des éprouvettes de poutres sandwich à peaux minces, l'amortissement a pu être ainsi extrait des résonances de modes atteignant 3 kHz par utilisation de la méthode de largeur de bande à -3 dB [44, 45].

Les travaux de Valtorta *et al.* [2] présentent une variante intéressante de la méthode dite "largeur de bande à -3 dB ". L'éprouvette y est constituée par une fibre optique de quelques dixièmes de millimètre de diamètre. Elle est essayée en encastrée-libre par excitation inertielle mais l'amplitude de sa réponse vibratoire est difficilement mesurable en raison de ses dimensions. Les auteurs ont préféré déterminer la phase entre l'entraînement et le signal d'un détecteur optoélectronique détectant le passage de la fibre à sa position



(a) Principe de détection



(b) Entraînement et signal détecté

Figure 1.3 – Vibration forcée de poutre encastée-libre ([2])

d'équilibre par rapport à l'équipage d'entraînement. L'intercorrélation des deux signaux (voir figure 1.3(b)) fournit la phase de la réponse par rapport à l'excitation. Un balayage fréquentiel de celle-ci permet de détecter les fréquences limitant la "bande à $-3dB$ " pour lesquelles la phase vaut respectivement $\pi/4$ et $3\pi/4$.

1.3.1.2.2 Poutre libre-libre

Pour les mêmes raisons que dans le cas des vibrations libres, des expérimentateurs essaient de définir des montages ne faisant pas appel à des encastements. Kyriazoglou *et al.* [3] proposent une configuration originale de poutre libre-libre en vibrations entretenues (voir figure 1.4).

Comme précédemment, l'éprouvette est supportée par deux appuis linéiques aux niveaux des nœuds du premier mode de flexion. L'excitation sans liaison avec l'échantillon est produite magnétiquement par deux aimants permanents fixés aux extrémités de la poutre. Ces deux aimants se trouvent placés dans les champs magnétiques de deux bobines pilotées en courant. La poutre est excitée à la résonance du mode. L'énergie fournie à la poutre correspond alors à celle dissipée qui est déterminée à partir du courant de pilotage et d'un facteur de calibrage du couplage bobines-aimants. L'énergie élastique de la poutre

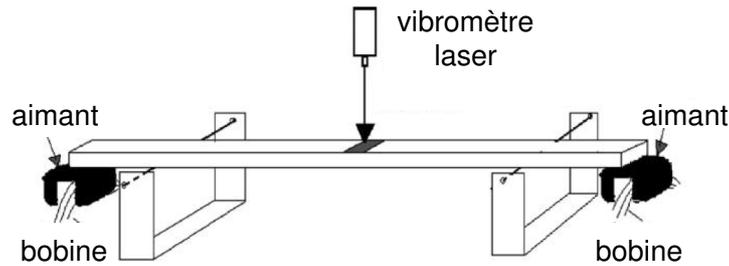


Figure 1.4 – Poutre libre-libre en vibrations forcées ([3])

est estimée à partir de la forme du mode et de la flèche maximale mesurée à l'aide d'un vibromètre laser. Le paramètre d'amortissement est ici déterminé par le rapport entre l'énergie dissipée et l'énergie élastique.

La disposition propose une limitation intéressante des effets parasites introduits par les conditions aux limites mais l'utilisation d'un facteur de calibrage peut rendre la procédure très sensible à la mise en œuvre du dispositif.

1.3.1.3 Discussion

Les différents travaux cités précédemment sont rappelés de manière synthétique dans la figure 1.5.

Une constatation concerne les méthodes d'extraction des paramètres d'amortissement qui n'utilisent que les descriptions temporelles ou fréquentielles des mouvements des éprouvettes. Les identifications ne sont donc pratiquées qu'aux fréquences propres et aux résonances. Ceci est entre autres une limite dans l'étude de la dépendance fréquentielle de l'amortissement que présentent certains matériaux. Les informations contenues dans les formes spatiales de ces poutres en vibrations ne sont pas exploitées.

Par ailleurs, le caractère essentiellement monodimensionnel de ces éprouvettes ne se prête que difficilement à l'identification de l'ensemble des amortissements de matériaux orthotropes et même isotropes.

Les deux dernières remarques amènent naturellement à s'intéresser à des éprouvettes de type plaque.

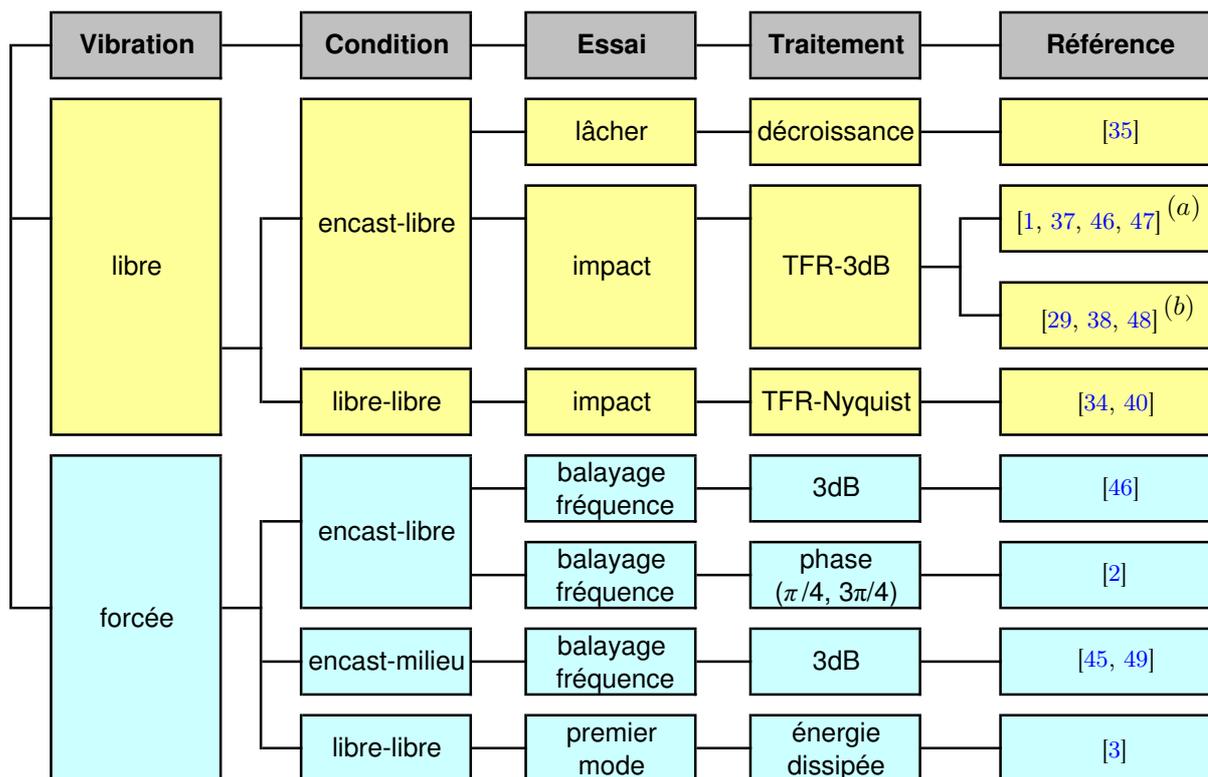


Figure 1.5 – Classement des essais avec des poutres pour l'identification d'amortissement. (a) sans masse à l'extrémité libre; (b) avec masse à l'extrémité libre.

1.3.2 Éprouvettes de type plaque

Un des intérêts majeurs de bâtir une procédure à partir de ce genre d'éprouvettes est lié à la richesse des informations contenues dans les formes spatiales qu'elles adoptent sous des chargements hétérogènes statiques ou dynamiques. Ces déformées étant sensibles aux différentes caractéristiques élastiques et d'amortissement de matériaux orthotropes, les identifications de celles-ci deviennent alors possibles.

Une première difficulté provient de la quasi absence de solutions analytiques concernant les vibrations dans le cadre des plaques minces. La deuxième concerne l'acquisition et l'exploitation de l'information spatiale. Ces deux considérations entraînent l'élaboration de stratégies d'identification spécifiques.

Une méthode fréquemment rencontrée est basée sur le principe de recalage de modèles élé-

ments finis. Des calculs itératifs sont conduits jusqu'à la bonne concordance entre mesures et résultats numériques issus d'un modèle de plaque sous l'action du chargement modélisé. Les paramètres identifiés sont ceux qui ont été entrés dans le calcul par éléments finis lors de la dernière boucle. Les problèmes posés par ce type d'approche sont généralement de deux ordres. D'une part la résolution est itérative, ce qui nécessite de nombreux calculs et la connaissance d'un jeu de paramètres initiaux pour démarrer la procédure. D'autre part, la répartition des chargements (efforts et moments) appliqués doit être connue à la frontière du modèle pour conduire tout calcul. Or généralement seule la résultante de ces efforts peut être mesurée lors d'un essai mécanique. De façon plus générale, il faut également souligner que le calcul par éléments finis constitue l'outil adapté à la résolution du problème direct mais qu'il n'est pas forcément l'outil pertinent pour résoudre le problème inverse. Des travaux utilisant ces démarches à partir de mesures ponctuelles multiples ou des mesures de champs cinématiques ont permis de déterminer les constantes élastiques de plaques orthotropes [50–52].

Concernant les amortissements, différentes approches ont été tentées sur des plaques en vibrations, en conditions libre-libre dans la plupart des cas.

Dans leurs travaux, Woodhouse *et al.* [23, 24] ont proposé une procédure d'identification des rigidités et amortissements de plaques de matériaux divers considérés comme orthotropes tels que des panneaux de bois. La détermination des rigidités est effectuée par une approche mêlant calcul et mesure basée sur le recalage des fréquences de certains modes propres calculées d'une part par la méthode de Rayleigh-Ritz et mesurées d'autre part. La configuration expérimentale retenue est celle d'une plaque suspendue en conditions libre-libre, l'excitation sans contact étant assurée par un haut-parleur. L'information spatiale est ici limitée à la reconnaissance des lignes nodales des modes concernés par utilisation d'une fine poudre répandue sur la plaque en vibration (méthode de Chladni). Les auteurs montrent en particulier que pour un rapport donné entre longueur et largeur de la plaque rectangulaire testée, le rapport entre la fréquence du mode dit en "X" et du mode dit en "O" est tout particulièrement dépendant de l'effet de Poisson. Ces modes sont respectivement ceux où les lignes nodales sont constituées par les deux diagonales de la plaque dans le premier cas et par une ellipse centrée dans l'éprouvette dans le second cas.

Concernant l'identification des amortissements matériau, ceux-ci sont recherchés sous la forme de la partie imaginaire des rigidités complexes D_i^* où la partie réelle est la partie purement élastique D_i et le paramètre d'amortissement η_i en est la fraction imaginaire pure : $D_i^* = D_i(1 + j\eta_i)$. Différents amortissements modaux ont été extraits de mesures

ponctuelles des mouvements libres initiés par un impact. Pour chaque mode considéré, l'éprouvette est suspendue en des points situés sur les lignes nodales du mode considéré. L'impact initiant un mouvement libre comprenant plusieurs modes, l'estimation de l'amortissement modal est déterminé à partir de la décroissance temporelle des élongations du mode considéré, obtenues à partir d'une transformée de Fourier à court terme. Pour passer des amortissements modaux aux amortissements matériau, les auteurs ont émis une hypothèse à partir de considérations sur les lois de la viscoélasticité. Cette hypothèse indique que pour un mode considéré l'amortissement modal est une combinaison linéaire des quatre amortissements matériau. Chacun de ceux-ci est pondéré par le rapport entre les énergies élastique et cinétique des mouvements associés à chaque rigidité dans le cas du mode concerné. Ces coefficients sont calculés à partir d'un modèle numérique intégrant les données élastiques préalablement identifiées. Compte tenu des sensibilités permises par les mesures, les auteurs ont pu identifier trois des quatre amortissements matériau.

Un des inconvénients de cette méthode est qu'elle utilise conjointement des amortissements modaux évidemment issus de mesures à des fréquences différentes et donc ne permet pas l'identification de la dépendance fréquentielle de l'amortissement.

Des travaux s'appuyant sur des considérations analogues ont été conduits par Visscher *et al.* [53] sur des plaques composites carbone-époxyde. Les essais concernant la détermination des amortissements ont été conduits sur des plaques suspendues élastiquement en approximation de conditions libre-libre. Les amortissements modaux sont extraits de la décroissance des mouvements du mode par l'arrêt brusque de l'excitation aérienne. Celle-ci est produite par un haut-parleur dont la fréquence d'émission est finement accordée sur celle du mode. L'intérêt évident de cette pratique est que le mouvement libre n'est constitué que du seul mode initialement excité. Dans le cas du matériau considéré, l'amortissement est essentiellement apporté par la matrice époxy dont la variation du module d'Young en fonction de la fréquence est connue. Les auteurs ont globalement considéré que la dépendance de l'amortissement de cette résine suit la même tendance. Ils ont ainsi proposé par extrapolation une tendance de l'évolution fréquentielle des caractéristiques élastiques et d'amortissement du matériau. Ces derniers résultats restent très liés à la nature du matériau où les caractéristiques mécaniques de la matrice et du renfort sont très différentes.

Les remarques qu'il est possible de formuler sur ces deux études tiennent d'une part à l'utilisation des mesures essentiellement modales n'utilisant que peu l'information spatiale et conduisant aux mélanges d'informations issues d'essais pratiqués à des fréquences

différentes. D'autre part l'obligation de limiter l'introduction de dissipations parasites contraint fortement les dispositifs expérimentaux. Les conditions libre-libre choisies imposent de supporter la plaque sur les lignes nodales et donc de réaliser une configuration de suspension par mode testé. Les excitations sans contact utilisées conduisent à des mouvements libres amortis dont les limites d'utilisation ont déjà été citées précédemment.

Une stratégie fondamentalement différente a été proposée par Pagnacco *et al.* [54, 55] permettant l'identification simultanée des paramètres élastiques et d'amortissement dans une large gamme de fréquence. Elle est basée sur une approche numérique-expérimentale utilisant la matrice de la fonction de réponse en fréquence (FRF) définie en un grand nombre de degrés de liberté du modèle de la plaque testée. Tant au niveau du calcul que de celui de la mesure ceci conduit à l'utilisation de la description aussi bien temporelle ou fréquentielle, que spatiale des mouvements vibratoires des degrés de liberté. La méthode n'utilise aucune propriété modale et peut ainsi être pratiquée dans une large bande de fréquence. La procédure utilise la minimisation d'une fonction coût entre les mouvements vibratoires mesurés sur la plaque et les réponses calculées aux mêmes degrés de libertés à partir d'un modèle éléments finis dont les caractéristiques matériau sont réactualisées à chaque itération.

Les auteurs décrivent une application expérimentale sur une plaque isotrope en conditions libre-libre par des suspensions souples périphériques. L'excitation est provoquée par un impact en un point choisi. Le mouvement vibratoire est donc libre et en bande large. Il est successivement mesuré en 570 points par un moyen de mesure sans contact. Les résultats de l'identification, réalisée à partir d'une seule configuration d'essais, montre la dépendance fréquentielle des caractéristiques mécaniques d'une plaque de polymère dans la bande $0 - 3\text{ kHz}$. Le choix du type d'excitation a été, d'après les auteurs, dicté par les considérations récurrentes d'absence de liaisons parasites. Ce choix entraîne une limite de l'étendue fréquentielle des réponses. Il peut éventuellement expliquer les quelques dispersions visibles dans les résultats des identifications.

Par sa formulation, cette stratégie est applicable à partir de champs cinématiques mesurés auxquels il faudrait adjoindre la dimension temporelle dans la description du mouvement. Plusieurs solutions sont éventuellement envisageables et renforceraient l'intérêt de cette méthode.

1.4 Conclusions

Les différentes considérations énoncées dans les paragraphes précédents amènent à la proposition de la procédure d'identification qui sera présentée dans les chapitres suivants. Les principales caractéristiques qui ont guidées sa définition sont :

- permettre l'identification simultanée des rigidités et amortissements d'éprouvettes ayant la forme de plaques minces ;
- n'avoir recours qu'à une seule configuration expérimentale ;
- mettre en œuvre une excitation harmonique entretenue ;
- utiliser la description spatiale et temporelle du mouvement de la plaque ;
- ne pas employer de schéma modal ;
- réaliser l'identification par la méthode des champs virtuels.

Cette dernière méthode a été introduite par Grédiac en 1989 [4]. Elle permet la résolution directe du problème inverse d'identification pour des lois élastiques. Le présent travail montre qu'il est possible d'étendre son application à la détermination des paramètres d'amortissement à partir de champs cinématiques mesurés à la surface de la plaque pour la partie spatiale du mouvement, la description temporelle provenant de la forme harmonique de la réponse vibratoire.

Chapitre 2

Méthode des Champs Virtuels

2.1 Introduction

L'objectif de la présente étude concerne la définition et la mise au point d'une méthode permettant la détermination des caractéristiques mécaniques d'un matériau en terme de rigidité et d'amortissement. Elle a été conduite en utilisant la Méthode des Champs Virtuels (MCV). Introduite par Grédiac [4], cette méthode est basée sur une application particulière du Principe de Travaux Virtuels [56, 57]. Elle permet d'identifier, directement et simultanément, plusieurs paramètres du matériau à partir de champs cinématiques mesurés à la surface de l'éprouvette et de champs virtuels choisis de manière pertinente. Elle a été appliquée à l'identification de propriétés élastiques de matériaux composites à partir de mesures de champs cinématiques dans le plan [58, 59], à l'identification de rigidités de plaque en flexion statique [60] et dynamique [6].

L'objectif est ici de rappeler les grandes lignes de la MCV ainsi que son application aux cas des plaques minces en vibration avec prise en compte de l'amortissement du matériau. Une procédure est ensuite présentée permettant le choix de champs virtuels susceptibles d'améliorer la stabilité et la précision de l'identification vis-à-vis du bruit de mesure. La validation de cette procédure est appuyée sur des simulations numériques.

2.2 Présentation de la Méthode des Champs Virtuels

La Méthode des Champs Virtuels est basée sur le Principe des Travaux Virtuels (P.T.V.). Dans le cas de la dynamique, avec des forces volumiques, et dans l'hypothèse des contraintes planes, le P.T.V. peut s'écrire, à un instant quelconque, sous la forme suivante :

$$\underbrace{-\int_V \sigma : \varepsilon^* dV}_{TVFI} + \underbrace{\int_S F \cdot u^* dS}_{TVFE} = \underbrace{\int_V a \cdot u^* dm}_{TVAC} \quad (2.1)$$

où σ est le champ de contrainte, ε^* est le champ virtuel de déformation, V le volume du solide, S la surface de la frontière, F les forces appliquées sur S , u^* les champs virtuels de déplacement auxquels sont associés ε^* . Enfin a représente le champ d'accélération absolue en tous points de la plaque.

Dans les trois termes de travaux virtuels de la précédente équation, soulignés par des accolades, il est possible de reconnaître :

- *TVFI* : travaux virtuels des forces intérieures ;
- *TVFE* : travaux virtuels des forces extérieures ;
- *TVAC* : travaux virtuels des forces d'accélération.

L'équation 2.1 reflète l'équilibre global des travaux virtuels écrit dans sa forme générale. Cet équilibre est vérifié pour tous les champs virtuels $\{u^*\}$ cinématiquement admissibles (C.A.). L'objectif de la MCV est de permettre l'extraction directe et simultanée des paramètres gouvernant le champ de contrainte considéré à partir des seules connaissances de la résultante de l'effort appliqué et des champs cinématiques mesurés sur la surface de l'éprouvette testée. Ceci est rendu possible grâce au choix pertinent de champs virtuels annulant les travaux virtuels des efforts de liaisons non mesurés ou non mesurables. Ces champs virtuels peuvent être considérés comme des filtres choisis à la discrétion de l'utilisateur pour permettre l'extraction des grandeurs recherchées.

2.3 Flexion des plaques minces

Dans l'application proposée, la MCV est mise en œuvre sur des plaques minces. Leur théorie est rapidement rappelée ci-après dans le cadre des hypothèses cinématiques dites

de Love-Kirchhoff [61, 62]. L'étude est conduite dans le domaine des petites déformations et des petits déplacements. La figure 2.1 précise les différentes grandeurs mises en jeu.

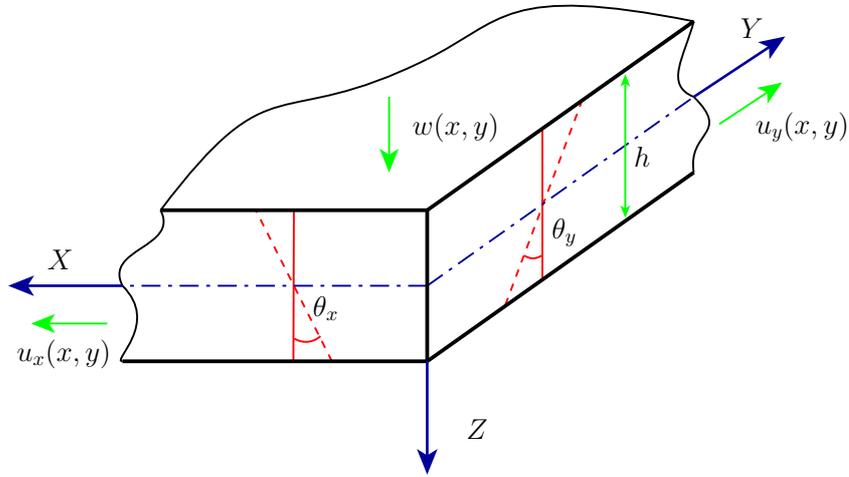


Figure 2.1 – Définition des variables de plaque mince de type Love-Kirchhoff : champs de déplacement et de pente

Hypothèses de Love-Kirchhoff (en dynamique) :

1. les plaques sont des structures minces planes d'épaisseur h petite par rapport aux longueurs des formes propres (λ_x et λ_y). Elles possèdent un plan moyen (x,y) et les faces extérieures de la plaque sont les plans $z = \pm h/2$;
2. les sections planes, initialement normales au plan moyen restent planes et normales à celui-ci, ce qui implique que la déformation au cisaillement transversal puisse être négligée. (Dans le cas d'un matériau isotrope, cette hypothèse est généralement admise à partir du rapport $\lambda_i/h > 20$ ($i = x, y$), étant une dimension caractéristique de la plaque [61]) ;
3. la contrainte σ_z dans la direction transversale est négligeables par rapport σ_x et σ_y . Elle doit s'annuler sur les faces extérieures et du fait de la faible épaisseur de la plaque, il est naturel d'admettre qu'elle est négligeable en tout z ;
4. seul le champ de déplacement w est considéré.

Dans le cas de la flexion pure, considérée ici, la plaque est non chargée dans son plan, les déplacements u_x et u_y dans son plan moyen sont alors nuls.

$$u_x(x, y, 0) = u_y(x, y, 0) = 0 \quad (2.2)$$

La flèche w de la plaque demeure en tout instant petite devant l'épaisseur h , le déplacement $w(x, y, z)$ peut alors être considéré comme indépendant de la cote z et donc identique à celui du plan moyen, d'où l'expression du champ de flèche :

$$w(x, y, z) = w(x, y, 0) = w(x, y) \quad (2.3)$$

A partir de cette dernière relation et de l'hypothèse 2 précédente, il est possible d'écrire le déplacement de n'importe quel point (x, y) de la plaque sous la forme d'un vecteur colonne $\{u\}$ à trois composantes :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Ici les champs de pente $\{\theta\}$ ^a [63] sont définis comme les dérivées partielles du champ de flèche $w(x, y)$ dans les directions des deux axes x et y . Ces champs sont présentés sous la forme d'un vecteur colonne $\{\theta\}$:

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

On en déduit les champs de déformations correspondants :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y, z) \\ \varepsilon_{yy}(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial u_y(x, y, z)}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

ainsi que les champs de courbure représentés par un vecteur colonne $\{\kappa\}$ à trois composantes :

^aIci θ_x et θ_y ne sont pas les rotations définies dans certains ouvrages [61].

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}(x, y) \\ \kappa_{yy}(x, y) \\ \kappa_{ss}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Dans le cadre des hypothèses de Love-Kirchhoff, la connaissance du champ de flèche $w(x, y)$ entraîne celles des champs de pente et de courbure de la plaque.

2.4 Principe proposé

L'application de la MCV a permis l'identification des rigidités de plaques minces, isotropes ou orthotropes en flexion statique [64]. Dans cette étude la plaque est appuyée en trois points situés à sa périphérie. Le chargement appliqué est tel qu'il en découle des champs de courbure hétérogènes sur l'ensemble de la plaque.

Dans ses travaux de thèse, P.-A. Paris [7] a proposé une méthode permettant l'identification de rigidités de plaques minces composites en vibrations forcées de flexion à la fréquence d'un mode.

Une alternative a été proposée par Giraudeau *et al.* [65]. Les rigidités de flexion ainsi que les paramètres d'amortissement peuvent être identifiés simultanément en appliquant la MCV à des plaques minces soumises à une excitation harmonique inertielle. La fréquence de cette dernière peut soit correspondre à une résonance de l'éprouvette, soit être choisie hors résonance.

2.4.1 Cas considéré

On considère une plaque mince ($S = S_1 \cup S_2$) d'épaisseur h , schématisée en figure 2.2, de forme quelconque, libre à sa périphérie et telle que tous les points de S_2 soient rigidement liés à un solide rigide V . Au repos le feuillet moyen de la plaque est situé dans le plan $(x, y, 0)$. Dans la suite du document, par abus de langage, la liaison rigide entre S_1 et S_2 sera appelé l'encastrement, et les flèches de la partie libre S_1 seront comptées relativement à V .

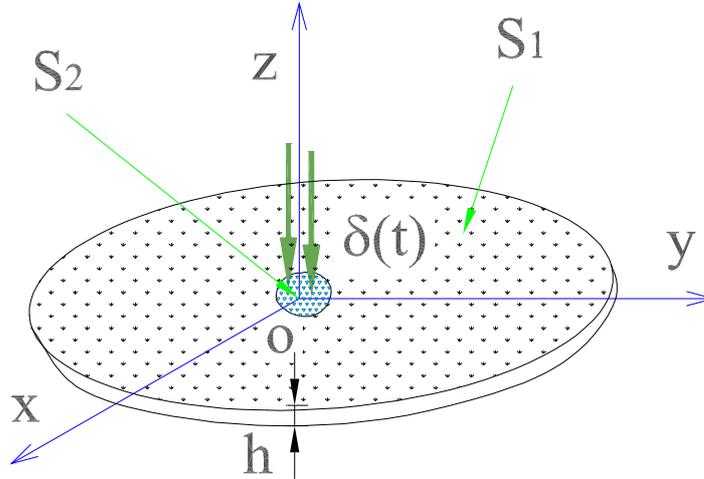


Figure 2.2 – Plaque en vibration forcée

L'encastrement est supposé animé d'un mouvement harmonique d'entraînement $\delta(t)$ dans la direction z normale au plan de la plaque. Cette loi d'entraînement s'écrit classiquement :

$$\delta(t) = d_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (2.8)$$

où d_0 , ω et ϕ sont respectivement l'amplitude, la pulsation et la phase initiale du mouvement. En notation complexe, utilisée dans la suite, cette expression peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \mathbf{Re}[d \exp(j \omega t)] \\ &= \mathbf{Re}[(d_r + j d_i) \exp(j \omega t)] \\ &= \mathbf{Re}[d_0 \exp(j(\omega t + \phi))] \end{aligned} \quad (2.9)$$

où d_r et d_i sont respectivement les parties réelle et imaginaire du mouvement d'entraînement, d_r caractérise la position à l'instant initial et d_i l'élongation au quart de période suivant. Les quatre grandeurs d_0 , ϕ , d_r et d_i sont évidemment liées par les relations :

$$d = d_r + j d_i; \quad d_0 = \sqrt{d_r^2 + d_i^2}; \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{d_i}{d_r} \right) \quad (2.10)$$

Ce mouvement d'entraînement provoque une excitation inertielle en chaque point (x, y) de la plaque. Pour une plaque homogène dont on suppose le comportement linéaire, il en résulte une réponse en flexion simple, harmonique et de même pulsation ω . Le champ de déplacement absolu hors-plan de la plaque peut s'écrire en notation complexe :

$$\mu(x, y, t) = \mathbf{Re} \left[(d + w(x, y)) \exp(j\omega t) \right], \quad d, w(x, y) \in \mathbb{C} \quad (2.11)$$

Cette expression fait apparaître deux parties dans ce déplacement hors-plan de la plaque : le mouvement d'entraînement d et le champ de flèche de la plaque $w(x, y)$ qui s'écrit naturellement en notation complexe :

$$w(x, y) = w_r(x, y) + j w_i(x, y) \quad (2.12)$$

De même que précédemment, $w_r(x, y)$ représente le champ de flèche de la plaque à l'instant choisi comme initial, $w_i(x, y)$ représente alors ce même champ au quart de période suivant. Dans le cas particulier où le mouvement d'entraînement est $\delta(t) = d_0 \cos(\omega t)$, les parties réelle et imaginaire de $w(x, y)$ sont alors les composantes respectivement en phase et en quadrature avec le mouvement d'entraînement.

L'expression 2.11 permet une représentation de la réponse en tout point de la plaque à partir des deux champs d'informations que sont les flèches réelles et imaginaires, respectivement $w_r(x, y)$ et $w_i(x, y)$. Une représentation équivalente pourrait évidemment être écrite à partir de deux autres champs d'informations $|w|(x, y)$ et $\varphi(x, y)$, respectivement champs d'amplitude de la flèche et champ de phase de la flèche de la plaque en tout point (x, y) :

$$w(x, y, t) = |w|(x, y) \cos(\omega t + \varphi(x, y)) \quad (2.13)$$

Pour des raisons pratiques tant au niveau des développements théoriques qu'en ce qui concerne la mise en œuvre expérimentale, la notation complexe sera conservée pour la suite. Le champ de phase $\varphi(x, y)$ paraît en effet difficilement mesurable. Les champs de pente et de courbure s'écrivent donc avec ce même type de notation :

$$\begin{aligned} \{\theta(x, y)\} &= \{\theta_r(x, y)\} + j \{\theta_i(x, y)\} \\ \{\kappa(x, y)\} &= \{\kappa_r(x, y)\} + j \{\kappa_i(x, y)\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.4.2 Application de la MCV

Comme précédemment indiqué au chapitre 2.2, la MCV repose sur une application particulière du Principe des Travaux Virtuels. L'équation 2.1, valable à tout instant, rappelle

que ce principe exprime l'équilibre global d'un solide sous l'action de champs virtuels de déplacement $\langle u^* \rangle$ choisis cinématiquement admissibles. Le déplacement virtuel défini en tous points (x, y) de la plaque sera présenté sous la forme d'un vecteur ligne à trois composantes :

$$\langle u^*(x, y, z) \rangle = \langle u_x^*(x, y, z), \quad u_y^*(x, y, z), \quad w^*(x, y) \rangle \quad (2.15)$$

Les trois fonctions $u_x^*(x, y)$, $u_y^*(x, y)$ et $w^*(x, y)$ représentent les trois composantes des déplacements virtuels dans les directions du repère lié à la plaque. Elles doivent être choisies continues et dérivables sur l'ensemble de la plaque.

A partir du champ de déplacement virtuel, il est possible, par analogie avec la théorie des plaques minces de Love-Kirchhoff rappelée en section 2.3, de définir les champs de pente virtuels et les champs de courbure virtuels.

Les champs de pente virtuels dans les directions x et y seront présentées sous la forme d'un vecteur ligne $\langle \theta^*(x, y) \rangle$ tel que :

$$\langle \theta_x^*(x, y), \quad \theta_y^*(x, y) \rangle = \left\langle \frac{\partial w^*(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial w^*(x, y)}{\partial y} \right\rangle \quad (2.16)$$

Pour être cinématiquement compatibles avec les champs physiques, il est possible d'admettre que les composantes de déplacements virtuels dans le plan et les pentes virtuelles sont en tous points liées par :

$$u_x^*(x, y, z) = -z \theta_x^*(x, y) \quad , \quad u_y^*(x, y, z) = -z \theta_y^*(x, y) \quad (2.17)$$

Enfin les champs de courbure virtuels seront présentées sous la forme d'un vecteur ligne $\langle \kappa^*(x, y) \rangle$ tel que :

$$\langle \kappa_{xx}^*(x, y), \quad \kappa_{yy}^*(x, y), \quad \kappa_{ss}^*(x, y) \rangle = \left\langle -\frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial x^2}, \quad -\frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial y^2}, \quad -2\frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial x \partial y} \right\rangle \quad (2.18)$$

2.5 Ecriture du Principe des Travaux Virtuels

2.5.1 Expression générale des travaux

Considérons une force fonction harmonique du temps $f(t) = F \exp(j\omega t)$ dont le point d'application subit un déplacement virtuel u^* également harmonique de même pulsation : $u^*(t) = U^* \exp(j\omega t)$. L'écriture sous forme complexe des quantités $f(t)$ et $u^*(t)$ permet de décrire leurs phases initiales éventuellement différentes ($F, U^* \in \mathbb{C}$).

Le travail virtuel développé par cet effort s'écrit :

$$W^* = \mathbf{Re}[u^*(t)] \mathbf{Re}[f(t)] \quad (2.19)$$

En écrivant les parties réelles de chaque quantité comme la demi somme de cette fonction et de son conjugué, il devient :

$$W^* = \frac{1}{2} \left(u^*(t) + \overline{u^*(t)} \right) \frac{1}{2} \left(f(t) + \overline{f(t)} \right) \quad (2.20)$$

où $\overline{u^*(t)}$ et $\overline{f(t)}$ sont respectivement les complexes conjugués de $u^*(t)$ et $f(t)$. W s'écrit alors :

$$W^* = \frac{1}{4} \left(u^*(t) \cdot \overline{f(t)} + \overline{u^*(t)} \cdot f(t) \right) + \frac{1}{4} \left(u^*(t) \cdot f(t) + \overline{u^*(t)} \cdot \overline{f(t)} \right) \quad (2.21)$$

Soit en remplaçant $u^*(t)$, $u(t)$ et leurs conjugués par leurs expressions harmoniques, il vient alors :

$$\begin{aligned} W^* &= \frac{1}{4} \left(U^* \exp(j\omega t) \cdot \overline{F} \exp(-j\omega t) + \overline{U^*} \exp(-j\omega t) \cdot F \exp(j\omega t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(U^* \exp(j\omega t) \cdot F \exp(j\omega t) + \overline{U^*} \exp(-j\omega t) \cdot \overline{F} \exp(-j\omega t) \right) \quad (2.22) \\ &= \frac{1}{4} \left[U^* \cdot \overline{F} + \overline{U^*} \cdot F \right] + \frac{1}{4} \mathbf{Re} \left[U^* \cdot F \exp(j2\omega t) + \overline{U^*} \cdot \overline{F} \exp(-j2\omega t) \right] \end{aligned}$$

A l'intérieur de chacun des crochets de l'équation 2.22, on reconnaît les parties réelles d'un produit :

$$W^* = \frac{1}{2} \mathbf{Re} \left[U^* \cdot \overline{F} \right] + \frac{1}{2} \mathbf{Re} \left[U^* \cdot F \exp(j2\omega t) \right] \quad (2.23)$$

Le travail développé par les deux grandeurs U^* et F apparaît donc comme la somme de deux termes. Le premier est indépendant du temps et le second présente une dépendance temporelle harmonique de pulsation double de celle de l'effort et de la réponse.

2.5.2 Travaux virtuels des forces extérieures (TVFE)

Les seuls efforts extérieurs s'appliquant sur la plaque, libre à sa périphérie, sont les efforts de liaison au niveau de l'encastrement S_2 . Au cas considéré, ils s'expriment en deux parties : la résultante de force (en direction z) $F_z(x, y, t)$ et les moments de réaction à l'encastrement $\{M(x, y, t)\}$. Compte tenu de la nature harmonique de l'excitation inertielle et de l'hypothèse de comportement linéaire de la plaque, ces efforts sont également harmoniques de pulsation ω . D'où :

$$\begin{cases} F_z(x, y, t) &= F_z(x, y) \exp(j\omega t) &= F_z \exp(j\omega t) \\ \{M(x, y, t)\} &= \begin{cases} M_x(x, y) \\ M_y(x, y) \end{cases} \exp(j\omega t) &= \{M\} \exp(j\omega t) \end{cases} \quad : \quad \forall (x, y) \in S_2 \quad (2.24)$$

En appelant $\langle \theta^*(x, y) \rangle$ le vecteur ligne représentant le champ de rotation virtuel dérivant du champ des flèches virtuels, les travaux virtuels des efforts extérieurs s'écrivent donc [61] :

$$\begin{aligned} TVFE(t) &= \int_S \mathbf{Re} \left[w^* \exp(j\omega t) \right] \cdot \mathbf{Re} \left[F_z \exp(j\omega t) \right] dS \\ &\quad + \int_S \mathbf{Re} \left[\langle \theta^* \rangle \exp(j\omega t) \right] \cdot \mathbf{Re} \left[\{M\} \exp(j\omega t) \right] dS \end{aligned} \quad (2.25)$$

La réaction d'encastrement n'existant que sur S_2 et en appliquant les résultats du paragraphe 2.5.1, TVFE peut s'écrire :

$$\begin{aligned} TVFE(t) &= \frac{1}{2} \int_{S_2} \mathbf{Re} \left[\overline{w^*} \cdot F_z \right] dS + \frac{1}{2} \int_{S_2} \mathbf{Re} \left[\langle \overline{\theta^*} \rangle \cdot \{M\} \right] dS \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{S_2} \mathbf{Re} \left[w^* \cdot F_z \cdot \exp(j2\omega t) \right] dS + \frac{1}{2} \int_{S_2} \mathbf{Re} \left[\langle \theta^* \rangle \cdot \{M\} \cdot \exp(j2\omega t) \right] dS \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.5.3 Travaux virtuels des forces intérieures (TVFI)

Les travaux virtuels des efforts intérieurs s'écrivent à partir des champs de contraintes de la plaque et des champs virtuels de déformations (voir équation 2.1) :

$$TVFI = - \int_V \sigma : \varepsilon^* dV \quad (2.27)$$

Les hypothèses de Love-Kirchhoff se traduisent par un état de contraintes planes à l'intérieur de la plaque. Les composantes non nulles du tenseur des contraintes peuvent être rassemblées dans un vecteur colonne $\{\sigma\}$:

$$\{\sigma\} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx}(x, y, z) \\ \sigma_{yy}(x, y, z) \\ \sigma_{xy}(x, y, z) \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

Les champs virtuels de déformations dérivent des champs virtuels de déplacement présentés en 2.15. Les trois composantes participant au produit doublement contracté de l'équation 2.27 s'écrivent dans un vecteur ligne $\langle \varepsilon^* \rangle$ dont il est facile de vérifier qu'il est en relation directe avec le vecteur ligne des champs de courbure virtuels $\langle \kappa^* \rangle$ défini en 2.18 :

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^* \rangle &= \left\langle \varepsilon_{xx}^*(x, y, z), \quad \varepsilon_{yy}^*(x, y, z), \quad \gamma_{xy}^*(x, y, z) \right\rangle \\ &= \left\langle -z \cdot \frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial x^2}, \quad -z \cdot \frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial y^2}, \quad -2z \cdot \frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial x \partial y} \right\rangle \\ &= \left\langle z \cdot \kappa_{xx}^*(x, y), \quad z \cdot \kappa_{yy}^*(x, y), \quad z \cdot \kappa_{ss}^*(x, y) \right\rangle \\ &= z \cdot \langle \kappa^* \rangle \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'équation 2.27 devient :

$$\begin{aligned} TVFI &= - \int_V \sigma : \varepsilon^* dV = - \int_V \langle \varepsilon^* \rangle \cdot \{\sigma\} dV \\ &= - \int_V z \cdot \langle \kappa^* \rangle \cdot \{\sigma\} dV \end{aligned} \quad (2.30)$$

Les champs de courbure virtuels étant indépendants de la cote z , l'équation 2.30 peut s'écrire :

$$TVFI = - \int_S \left[\langle \kappa^* \rangle \cdot \left(\int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \{\sigma\} dz \right) \right] dS \quad (2.31)$$

Les intégrations des champs de contraintes dans l'épaisseur de la plaque correspondent aux moments généralisés de flexion de la plaque :

$$m_x = - \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma_{xx} dz, \quad m_y = - \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma_{yy} dz, \quad m_{xy} = - \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma_{xy} dz \quad (2.32)$$

Ces derniers peuvent être regroupés dans un vecteur ligne :

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_{xx}(x, y) \\ m_{yy}(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Les travaux virtuels des efforts intérieurs s'écrivent donc d'une manière générale :

$$TVFI = - \int_S \langle \kappa^* \rangle \cdot \{m\} dS \quad (2.34)$$

En prenant en compte leurs variations temporelles dans la présente étude, TVFI s'écrit :

$$TVFI = - \int_S \mathbf{Re} \left[\langle \kappa^*(t) \rangle \right] \cdot \mathbf{Re} \left[\{m(t)\} \right] dS \quad (2.35)$$

L'excitation inertielle étant harmonique et le comportement de la plaque supposé linéaire, la réponse de la plaque en flexion est également harmonique de même pulsation ω . Le vecteur des moments s'écrit donc $\{m(t)\} = \{m\} \cdot \exp(j\omega t)$ et TVFI devient :

$$TVFI(t) = - \int_S \mathbf{Re} \left[\langle \kappa^* \rangle \exp(j\omega t) \right] \cdot \mathbf{Re} \left[\{m\} \exp(j\omega t) \right] dS \quad (2.36)$$

A partir des résultats du paragraphe 2.5.1, TVFI peut s'écrire :

$$TVFI(t) = - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{Re} \left[\langle \overline{\kappa^*} \rangle \cdot \{m\} \right] dS - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{Re} \left[\langle \kappa^* \rangle \cdot \{m\} \cdot \exp(j 2\omega t) \right] dS \quad (2.37)$$

2.5.4 Travaux virtuels des forces d'accélération (TVAC)

Dans l'écriture du Principe des Travaux Virtuels (*TVAC*) rappelé dans l'équation 2.1, le terme de droite représente les travaux virtuels des forces d'accélération.

A partir de la formulation de la réponse harmonique de la plaque, le champ d'accélération $\{a(x, y, z, t)\}$ s'écrit :

$$\{a(x, y, z, t)\} = \frac{d^2\{u(x, y, z, t)\}}{dt^2} = -\omega^2 \{u(x, y, z)\} \exp(j\omega t) \quad (2.38)$$

Le champ des forces volumiques d'accélération s'écrit $\{f_a(x, y, t)\} = \rho \cdot \{a(x, y, t)\}$, *TVAC* peut donc s'exprimer :

$$TVAC(t) = \int_V \mathbf{Re}[\langle u^*(t) \rangle] \cdot \mathbf{Re}[\rho \{a(t)\}] dV \quad (2.39)$$

En appliquant encore une fois les résultats du paragraphe 2.5.1, *TVAC* devient :

$$TVAC(t) = \frac{1}{2} \mathbf{Re} \left[-\rho \omega^2 \int_V \langle \overline{u^*} \rangle \cdot \{u\} dV \right] + \frac{1}{2} \mathbf{Re} \left[-\rho \omega^2 \int_V \langle u^* \rangle \cdot \{u\} \cdot \exp(j2\omega t) dV \right] \quad (2.40)$$

2.6 Synthèse des travaux virtuels

L'expression 2.1 rappelle le Principe des Travaux Virtuels. Celui-ci exprime l'équilibre entre l'ensemble des travaux virtuels effectués sous l'action d'un déplacement virtuel d'une part par l'ensemble des efforts intérieurs (*TVFI*) et extérieurs (*TVFE*) et d'autre part par les efforts d'accélération (*TVAC*).

$$TVFI + TVFE = TVAC \quad (2.41)$$

Dans le cas considéré, les résultats des paragraphes 2.5.2, 2.5.3 et 2.5.4 ont montré que chaque travail virtuel apparaît comme la somme de :

- un terme indépendant du temps ;
- un terme présentant une dépendance temporelle harmonique d'une pulsation double de celle du mouvement d'entraînement.

L'équilibre de la structure doit être vérifié quelque soit l'instant, ceci impose donc indépendamment :

- d'une part l'équilibre des termes indépendants du temps,
- d'autre part l'équilibre des termes dépendants du temps.

Cette dernière considération permet l'écriture de l'équation suivante, les deux termes simplifiés par $\exp(j 2\omega t)$, ce dernier facteur n'étant jamais nul :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{S_2} \mathbf{Re} [w^* \cdot F_z] dS + \frac{1}{2} \int_{S_2} \mathbf{Re} [\langle \theta^* \rangle \cdot \{M\}] dS \\ - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{Re} [\langle \kappa^* \rangle \cdot \{m\}] dS = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{Re} [-\rho \omega^2 \cdot \langle u^* \rangle \cdot \{u\}] dV \end{aligned} \quad (2.42)$$

Les travaux virtuels des forces extérieures sont à l'origine des deux premières intégrales de l'équation 2.42. La mesure de la résultante s'avère délicate, et celle des moments difficilement envisageable. Le choix de champs virtuels de déplacement $w^*(x, y)$ tels qu'indiqués ci-dessous annulent ces travaux :

$$\begin{cases} w^*(x, y) = 0 \\ \theta_x^*(x, y) = 0 \\ \theta_y^*(x, y) = 0 \end{cases} : \quad \forall (x, y) \in S_2 \quad (2.43)$$

Ceci traduit évidemment que les champs de déplacement virtuels hors-plan et les champs de pente dérivés doivent être choisis nuls sur la zone encastrée S_2 .

Dans ce cas l'équation 2.42 devient :

$$- \int_S \mathbf{Re} [\langle \kappa^* \rangle \cdot \{m\}] dS = -\rho \omega^2 \cdot \int_V \mathbf{Re} [\langle u^* \rangle \cdot \{u\}] dV \quad (2.44)$$

En explicitant les parties réelles des termes de l'équation 2.44 sous formes de demi sommes et produits concernés et de leurs conjugués respectifs, il vient :

$$-\frac{1}{2} \int_S [\langle \kappa^* \rangle \cdot \{m\} + \langle \overline{\kappa^*} \rangle \cdot \{\overline{m}\}] dS = -\frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_V [\langle u^* \rangle \cdot \{u\} + \langle \overline{u^*} \rangle \cdot \{\overline{u}\}] dV \quad (2.45)$$

L'équation ci-dessus doit être vérifiée en l'absence de toute relation entre les parties réelles et imaginaires des champs virtuels de déplacement et de courbure.

L'équation 2.45 peut donc être séparée en deux équations indépendantes :

$$\begin{cases} - \int_S [\langle \overline{\kappa^*} \rangle \cdot \{\overline{m}\}] dS = -\rho \omega^2 \int_V [\langle \overline{u^*} \rangle \cdot \{\overline{u}\}] dV \\ - \int_S [\langle \kappa^* \rangle \cdot \{m\}] dS = -\rho \omega^2 \int_V [\langle u^* \rangle \cdot \{u\}] dV \end{cases} \quad (2.46)$$

Cette dernière équation va être réécrite dans les paragraphes suivants en développant les intégrales S_{TVFI} et S_{TVAC} :

$$\begin{cases} S_{TVFI} = - \int_S [\langle \kappa^* \rangle \cdot \{m\}] dS \\ S_{TVAC} = -\rho \omega^2 \int_V [\langle u^* \rangle \cdot \{u\}] dV \end{cases} \quad (2.47)$$

La deuxième relation 2.46 peut s'exprimer :

$$S_{TVFI} = S_{TVAC} \quad (2.48)$$

2.6.1 Expression de S_{TVFI}

Le modèle le plus simple employé dans la littérature pour décrire le comportement d'un matériau viscoélastique est celui de Kelvin-Voigt [66, 67] (figure 2.3) dans lequel le comportement purement élastique est représenté par un ressort de module d'élasticité E agissant en parallèle avec un amortisseur visqueux de coefficient η .

Dans ce modèle, la contrainte totale σ se compose de deux parties : la contrainte élastique pure σ^e développée par le ressort élastique qui caractérise la partie réversible de la déformation avec proportionnalité entre la contrainte et l'élongation, l'autre contrainte

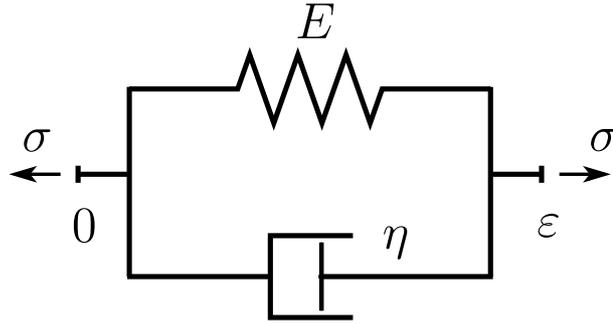


Figure 2.3 – Modèle de Kelvin-Voigt

dissipative σ^d symbolisée par un amortisseur caractérise la part irréversible de la déformation avec une proportionnalité entre l'effort et la vitesse de déformation. Dans le cas du mouvement harmonique de pulsation ω , il vient

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sigma^e(t) + \sigma^d(t) &= E \varepsilon(t) + \eta \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} \\ &= E \varepsilon(t) + j \omega \eta \varepsilon(t) &= (E + j \omega \eta) \varepsilon(t)\end{aligned}\quad (2.49)$$

Le module dynamique complexe \hat{E} du modèle dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$\hat{E} = E + j \omega \eta \quad (2.50)$$

La partie réelle E et la partie imaginaire $\omega \eta$ sont respectivement le module élastique (ou de stockage, en anglais *storage modulus*) et le module visqueux (ou de perte, en anglais *loss modulus*).

Le développement du terme S_{TVFI} requiert celui des moments de flexion par unité de longueur. Dans le cas d'un comportement viscoélastique, en fonction du modèle précédent, ceux-ci peuvent être décomposés chacun comme la somme de deux contributions, la première purement élastique, la seconde uniquement dissipative :

$$\{m\} = \{m^e\} + \{m^d\} \quad (2.51)$$

Le matériau étant homogène et isotrope, le vecteur des moments purement élastiques s'écrit :

$$\{m^e\} = \frac{h^3}{12} \cdot [Q] \cdot \{\kappa\} \quad (2.52)$$

où $[Q]$ est la matrice des rigidités normalisées de flexion (indépendante des dimensions de la plaque) et $\{\kappa\}$ le vecteur des courbures physiques (voir l'équation 2.55).

A partir de l'hypothèse d'un amortissement visqueux et en considérant que la réponse vibratoire de la plaque est harmonique de pulsation ω , la contribution dissipative des moments de flexion peut s'écrire :

$$\{m^d\} = \frac{h^3}{12} \cdot [B] \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{\kappa\} = \frac{h^3}{12} \cdot j \omega [B] \cdot \{\kappa\} \quad (2.53)$$

En récapitulant, le vecteur des moments de flexion de la plaque par unité de longueur s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \{m\} &= \{m^e\} + \{m^d\} \\ &= \frac{h^3}{12} \cdot ([Q] + j \omega [B]) \cdot \{\kappa\} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Les matrices $[Q]$ et $[B]$ s'écrivent :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{xy} & Q_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q_{xx} - Q_{xy}}{2} \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & 0 \\ B_{xy} & B_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_{xx} - B_{xy}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

où Q_{xx} et Q_{xy} sont les rigidités isotropes de flexion alors que B_{xx} et B_{xy} sont les paramètres d'amortissement isotrope de flexion.

L'identification de ces quatre paramètres constitue l'objectif de la présente étude. Pour la suite du développement, il est pratique d'introduire une matrice de rigidité complexe de flexion :

$$[\hat{Q}] = [Q] + j \omega [B] \quad (2.56)$$

ainsi qu'un vecteur colonne des rigidités complexes de flexion :

$$\{\hat{Q}\} = \begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{xx} + j \omega B_{xx} \\ Q_{xy} + j \omega B_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

L'intégrale S_{TVFI} s'écrit dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
S_{TVFI} &= - \int_S \langle \kappa^* \rangle \cdot \{m\} dS \\
&= - \frac{h^3}{12} \int_S \langle \kappa^* \rangle \cdot [\hat{Q}] \cdot \{\kappa\} dS \\
&= - \frac{h^3}{12} \left[\hat{Q}_{xx} \int_S \left(\kappa_{xx} \kappa_{xx}^* + \kappa_{yy} \kappa_{yy}^* + \frac{1}{2} \kappa_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \right] \\
&\quad - \frac{h^3}{12} \left[\hat{Q}_{xy} \int_S \left(\kappa_{xx} \kappa_{yy}^* + \kappa_{yy} \kappa_{xx}^* - \frac{1}{2} \kappa_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \right]
\end{aligned} \tag{2.58}$$

En posant

$$\begin{cases} G = - \int_S \left(\kappa_{xx} \kappa_{xx}^* + \kappa_{yy} \kappa_{yy}^* + \frac{1}{2} \kappa_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \\ H = - \int_S \left(\kappa_{xx} \kappa_{yy}^* + \kappa_{yy} \kappa_{xx}^* - \frac{1}{2} \kappa_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \end{cases} \tag{2.59}$$

L'intégrale S_{TVFI} s'écrit finalement :

$$S_{TVFI} = \frac{h^3}{12} \cdot \begin{bmatrix} G & H \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.60}$$

2.6.2 Expression de S_{TVAC}

Le développement de l'intégrale S_{TVAC} peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
S_{TVAC} &= -\rho\omega^2 \int_V \langle u^* \rangle \cdot \{u\} dV \\
&= -\rho\omega^2 \int_S \int_{-h/2}^{+h/2} \left(u_x \cdot u_x^* + u_y \cdot u_y^* + \mu \cdot w^* \right) dz dS
\end{aligned} \tag{2.61}$$

où $\mu = d + w$ est l'expression du mouvement absolu hors-plan de la plaque, combinaison de l'entraînement d et de la flèche de la plaque w (équation 2.11). Les termes u_x et u_y sont les composantes du champ de déplacement physique dans le plan de la plaque en tous points de celle-ci, définies dans l'équation 2.4. Les fonctions u_x^* , u_y^* et w^* sont les composantes du champ virtuel de déplacement telles que définies au paragraphe 2.4.2.

En appliquant les relations pentes-déplacements rappelées dans l'équation 2.5 concernant les champs physiques et dans l'équation 2.17 pour les champs virtuels, l'équation 2.61 s'écrit :

$$\begin{aligned} S_{TVAC} &= -\rho \omega^2 \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \left((-z\theta_x) \cdot (-z\theta_x^*) + (-z\theta_y) \cdot (-z\theta_y^*) + \mu \cdot w^* \right) dz dS \\ &= -\rho \omega^2 \int_S \left(\frac{h^3}{12} \cdot (\theta_x \cdot \theta_x^* + \theta_y \cdot \theta_y^*) + h \cdot (d + w) \cdot w^* \right) dS \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dans le cas des petits mouvements envisagés, les pentes θ_x et θ_y demeurent très faibles. La fraction de travail virtuel due aux termes tels que $\theta_x \theta_x^*$ et $\theta_y \theta_y^*$ reste négligeable par rapport à celle provenant des mouvements hors plan. Les simulations numériques effectuées à l'aide du modèle éléments finis utilisé par la suite ont montré que le rapport est généralement $< 0,1\%$. Les travaux virtuels d'accélération peuvent alors valablement s'exprimer à partir des seuls déplacements hors plan physiques et virtuels.

$$S_{TVAC} \approx -\rho h \omega^2 \int_S (d + w) \cdot w^* dS \quad (2.63)$$

où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation du mouvement d'entraînement.

2.6.3 Synthèse finale - Relation d'identification

A partir des équations 2.60 et 2.63, la relation $S_{TVFI} = S_{TVAC}$ (l'équation 2.48) devient :

$$\left[\begin{array}{cc} G & H \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{array} \right\} = -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} \int_S (d + w) w^* dS \quad (2.64)$$

\hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} sont les deux paramètres de rigidité complexe à identifier. Les quantités G et H sont les résultats de combinaisons d'intégrations sur la surface de la plaque de produits de courbures physiques et virtuelles (équation 2.59). D'autre part le terme de droite de la relation dans l'équation 2.64 s'obtient par intégration sur la surface de la plaque du produit des déplacements hors-plan physiques et virtuels. En choisissant deux champs virtuels $w^{*(1)}$ et $w^{*(2)}$ (et par dérivation $\kappa^{*(1)}$ et $\kappa^{*(2)}$) il est donc possible d'obtenir deux équations pouvant s'écrire sous forme d'un système linéaire (2×2) dont \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} sont les inconnues :

$$\begin{bmatrix} G^{(1)} & H^{(1)} \\ G^{(2)} & H^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} \begin{Bmatrix} \int_S (d+w) w^{*(1)} dS \\ \int_S (d+w) w^{*(2)} dS \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

En posant

$$[\mathbb{H}] = \begin{bmatrix} G^{(1)} & H^{(1)} \\ G^{(2)} & H^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

et

$$\{\hat{Q}\} = \begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

la résolution du système par simple inversion de la matrice $[\mathbb{H}]$ permet l'extraction des deux paramètres recherchés :

$$\begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} [\mathbb{H}]^{-1} \begin{Bmatrix} \int_S (d+w) w^{*(1)} dS \\ \int_S (d+w) w^{*(2)} dS \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

Les valeurs des quatre paramètres Q_{xx} , B_{xx} , Q_{xy} et B_{xy} peuvent être tirées des valeurs identifiées à partir respectivement des parties réelles et imaginaires des deux paramètres \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} . Il est ainsi possible de remonter aux constantes élastiques (E, ν) du matériau ainsi qu'à ses taux d'amortissement (β_{xx}, β_{xy}) :

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}}, & E &= Q_{xx} \cdot (1 - \nu^2) \\ \beta_{xx} &= \frac{B_{xx}}{Q_{xx}}, & \beta_{xy} &= \frac{B_{xy}}{Q_{xy}} \end{aligned} \quad (2.69)$$

L'amortissement d'un matériau est aussi couramment caractérisé par le facteur de perte $\tan \delta_i$, où δ est la phase entre la contrainte appliquée et la déformation qui en résulte. Les facteurs $\tan \delta_i$ apparaissent comme le rapport entre les parties imaginaires et les parties réelles des paramètres de rigidité complexe \hat{Q}_i (pour $i = xx, xy$), les relations liant les facteurs de perte aux taux d'amortissement s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \tan \delta_{xx} = \frac{\omega B_{xx}}{Q_{xx}} = \omega \beta_{xx} \\ \tan \delta_{xy} = \frac{\omega B_{xy}}{Q_{xy}} = \omega \beta_{xy} \end{cases} \quad (2.70)$$

Il est possible de noter dès à présent le cas particulier où la phase initiale du mouvement d'entraînement est nulle ($\phi = 0$) c'est à dire $d_r = d_0$, $d_i = 0$. Au niveau expérimental, on essaiera de se rapprocher de cette configuration en choisissant comme instant initial, l'instant d'élongation maximale du mouvement d'entraînement.

$$\begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} [\mathbb{H}]^{-1} \begin{Bmatrix} \int_S (d_0 + w) w^{*(1)} dS \\ \int_S (d_0 + w) w^{*(2)} dS \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

Il est évident que la qualité de l'identification à partir de cette méthode repose en grande partie sur le choix des champs virtuels. En particulier :

- ils doivent satisfaire l'équation 2.43 garantissant la non contribution des travaux virtuels des efforts de liaison ;
- ils doivent conduire à deux équations 2.64, linéairement indépendantes permettant à la matrice $[\mathbb{H}]$ d'être inversible (équation 2.68).

On peut noter que cette méthode permet la résolution directe d'un problème inverse. Elle ne requiert ni itérations, ni valeurs initiales ni schéma d'optimisation.

2.7 Choix des champs virtuels

L'étude de Giraudeau *et al.* [65] a montré la faisabilité de la méthode. Dans ce travail théorique, les auteurs ont utilisé les réponses harmoniques simulées d'un modèle éléments finis de plaque encadrée en un point. Dans toute configuration réelle, la plaque ne peut être encadrée que sur une zone de dimensions éventuellement réduites mais d'aire non nulle.

A partir des réponses simulées d'un modèle de configuration plus réaliste, cette partie de la présente étude se concentre sur la recherche méthodique de champs virtuels satisfaisants aux conditions énoncées à la fin de la section précédente.

2.7.1 Modèle d'éléments finis

La figure 2.4 présente la géométrie de la plaque modélisée. La forme rectangulaire adaptée d'une part pour correspondre à celle du capteur CCD, d'autre part afin de simplifier le traitement numérique (voir la section 3.5). Les conditions aux limites imposées au modèle consistent en l'encastrement d'une zone circulaire de diamètre $\Phi = 18 \text{ mm}$ dont le centre O est utilisée comme origine du repère.

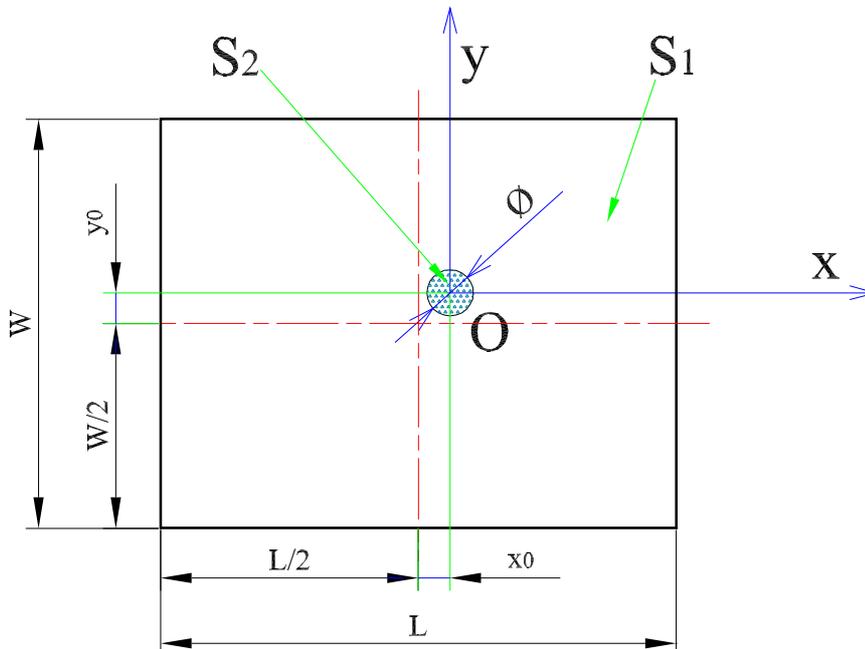


Figure 2.4 – Géométrie de la plaque

Le tableau 2.1 présente les caractéristiques géométriques de la plaque ainsi que les propriétés mécaniques du matériau constitutif. Ces dernières correspondent aux valeurs de référence du matériau testé au chapitre 3.

Le tableau 2.2 présente les quatre paramètres de rigidité et d'amortissement de la plaque calculés à partir des données précédentes.

Les réponses vibratoires de la plaque ont été simulées à l'aide du code de calcul par éléments finis ANSYS 8.0. Le maillage est de $80 \times 100 = 8000$ éléments rectangulaires

L	W	h	x_0	y_0	Φ	d_0	ρ	E	ν	$\beta (= \beta_{xx} = \beta_{xy})$
(mm)							$(kg.m^{-3})$	(GPa)		(s)
200	160	3	2	2	18	0,1	1190	5	0,3	10^{-4}

Tableau 2.1 – Dimensions géométriques et caractéristiques matériau de la plaque

Q_{xx}	Q_{xy}	B_{xx}	B_{xy}
(GPa)		($10^5 Pa \cdot s$)	
5,494	1,648	5,494	1,648

Tableau 2.2 – Paramètres de rigidités et d'amortissements de la plaque

de type **SHELL63**. Le tableau 2.3 présente les premières fréquences propres calculées à partir du modèle.

Un mouvement harmonique d'entraînement d'amplitude constante d_0 a été imposé à la zone circulaire encastree. Les réponses harmoniques correspondantes aux cinq premières fréquences propres ont été calculées sous la forme de leurs parties en phase avec l'entraînement (parties réelles) et leurs parties en quadrature (parties imaginaires).

La colonne de gauche de la figure 2.5 présente les formes des cinq premiers modes du modèle de la plaque non-amortie et rigidement liée en S_2 à V (Voir **Annexe a**). Les deux colonnes de droite présentent les parties respectivement réelles et imaginaires des réponses à une excitation inertielle à la fréquence du mode correspondant. Les champs représentés sont ceux des déplacements relatifs par rapport à l'encastrement. Les échelles d'ampli-

^aL'explication des modes (ou fréquences) propres et des réponses harmoniques en ou hors résonance. Les fréquences harmoniques en résonance sont celles de la plaque encastree sur S_2 par l'analyse modale.

N° de Mode	Fréquences propres
	(Hz)
1	80,18
2	99,62
3	104,9
4	128,7
5	205,8
6	334,3

Tableau 2.3 – Premières fréquences propres de la plaque

tudes sont identiques pour les deux parties de chaque réponse et leurs valeurs minimales et maximales sont indiquées pour chaque ligne. La zone circulaire blanche indique l'encastrement de manière purement graphique. On peut constater que les fréquences des modes 1 et 5 étant relativement écartées de celles des modes voisins, les formes des parties imaginaires des réponses en résonance sont très similaires à celles des modes correspondants et les parties réelles sont faibles. Compte tenu des distances fréquentielles, les contributions des modes non résonants sont peu importantes à ces deux résonances. Les amplitudes modérées de ces résonances s'expliquent d'une part par l'excitation ne sollicitant qu'assez peu des modes de formes quasi symétriques. D'autre part le niveau d'excitation inertielle est faible à la fréquence du mode 1 et l'amortissement de type proportionnel augmentant avec la fréquence, la résonance du mode 5 s'en trouve limitée.

Ceci contraste avec les réponses harmoniques aux fréquences des modes 2 et 3 où au contraire les écarts fréquents sont beaucoup plus faibles. Les formes des modes se retrouvent moins nettement dans les parties imaginaires des réponses dont par ailleurs les parties réelles sont beaucoup plus significatives et adoptent des formes fortement influencées par celle du mode proche. Du fait de l'amortissement et des distances fréquentielles peu importantes, les contributions des modes non résonants sont sensibles dans chacune de ces deux résonances. Les amplitudes atteintes y sont nettement plus élevées que celles présentées par les simulations aux trois autres fréquences.

La partie imaginaire de la réponse harmonique à la fréquence du mode 4 est extrêmement faible alors que sa partie réelle semble être une combinaison des formes des modes 3 et 5. Ceci montre que ce mode 4 n'est pas excité par la forme de l'excitation s'exerçant à partir d'un entraînement imposé par un encastrement de la plaque en position quasi-centrale.

Dix réponses harmoniques hors-résonances ont également été calculées pour des mouvements harmoniques d'entraînement de fréquences choisies dans la gamme $[50Hz - 150Hz]$ qui est celle des expérimentations conduites dans la suite et telles que :

$$f(k) = 50 + 10 \cdot k \quad (\text{Hz}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \in [1 : 10]$$

Les figures 2.5 et 2.6 présentent les parties réelles et imaginaires de ces réponses dans les deux colonnes de droite avec les mêmes conventions que précédemment. Pour mémoire, les formes des modes 1 à 5 sont rappelées en colonnes de gauche.

A l'exception des fréquences $80 Hz$, $100 Hz$ et $110 Hz$ les amplitudes de réponses restent

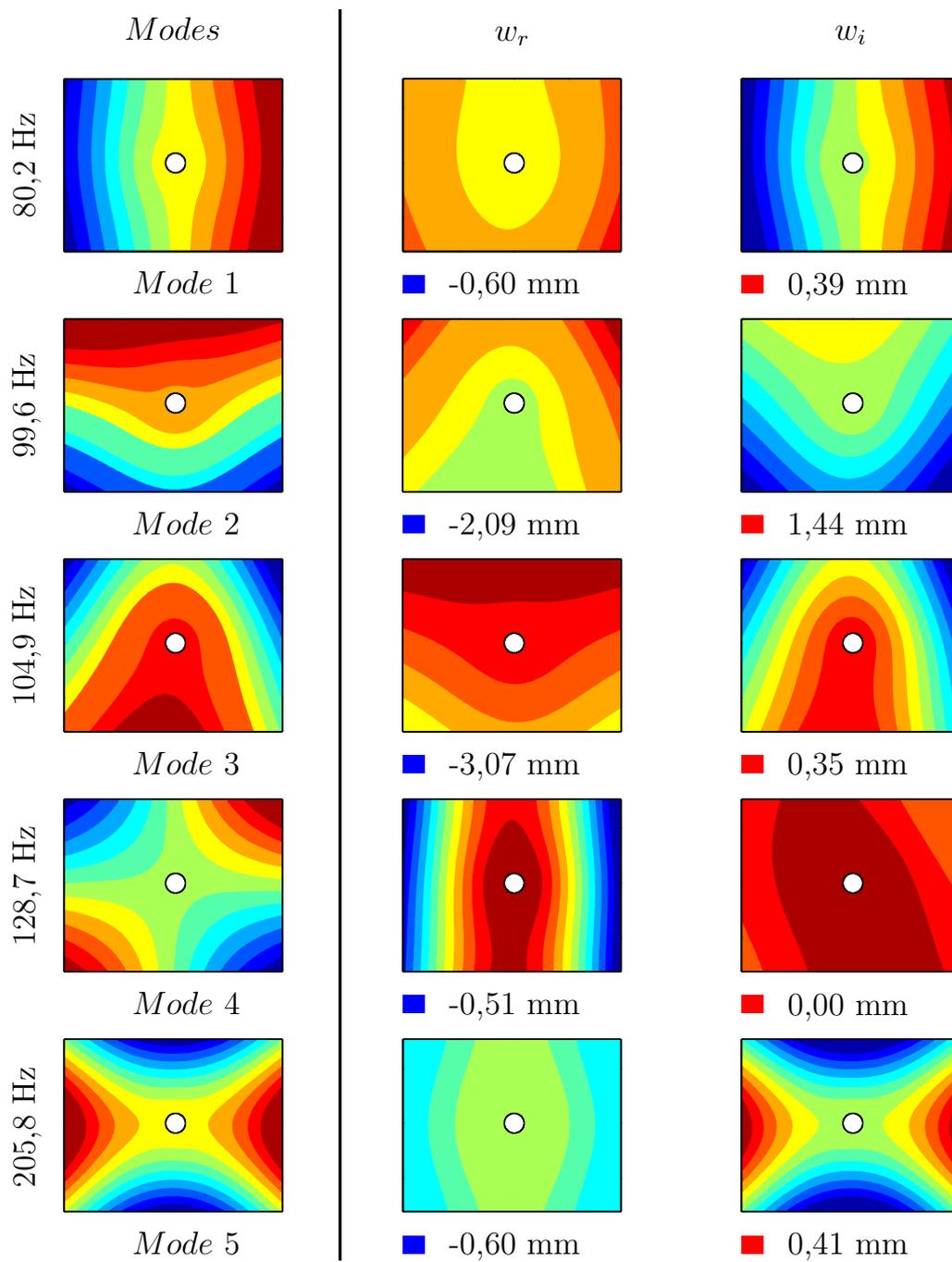


Figure 2.5 – Modes et réponses harmoniques en résonance : les cinq premiers modes

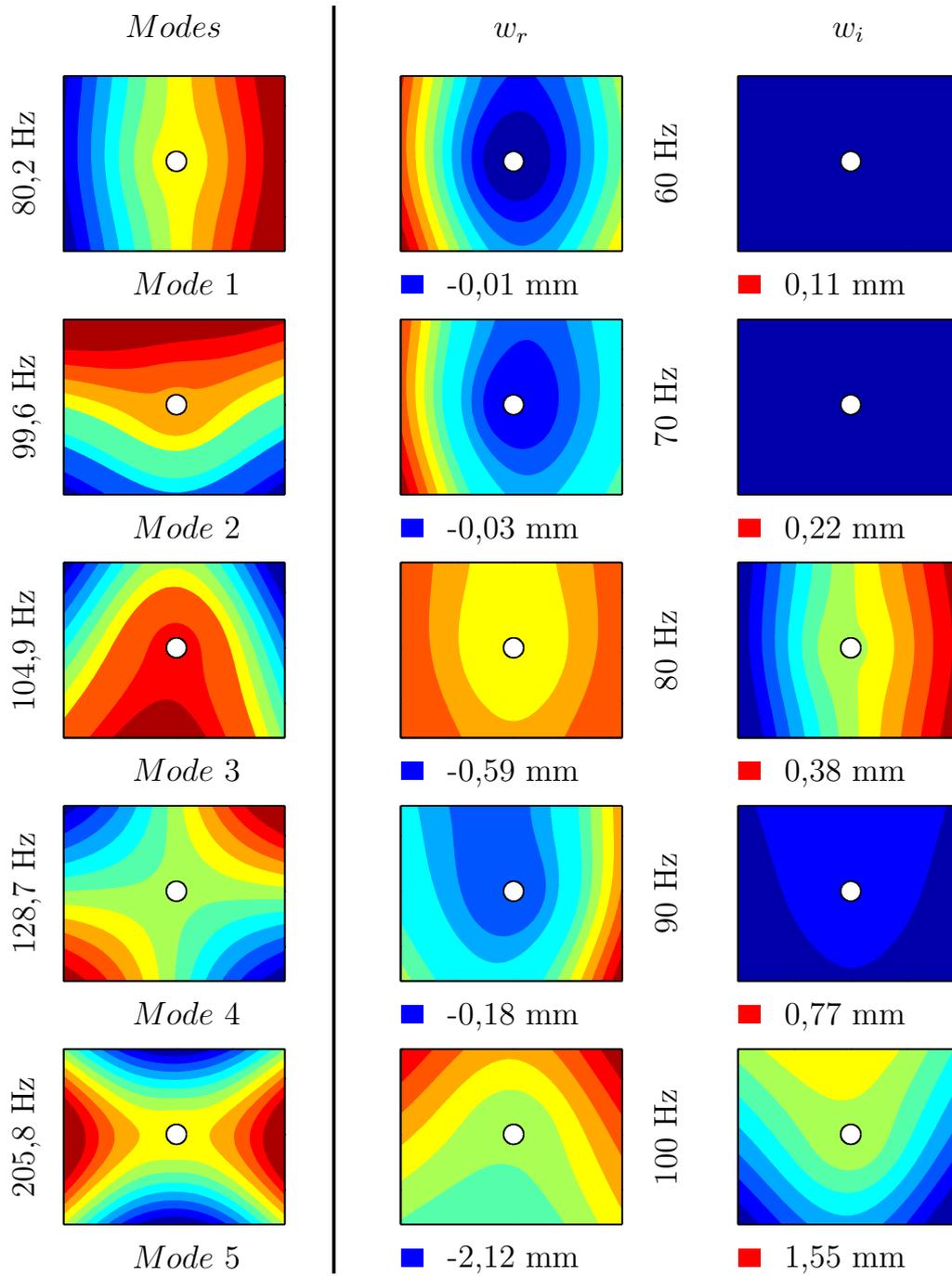


Figure 2.6 – Modes et réponses harmoniques hors résonances : 60 Hz – 100 Hz

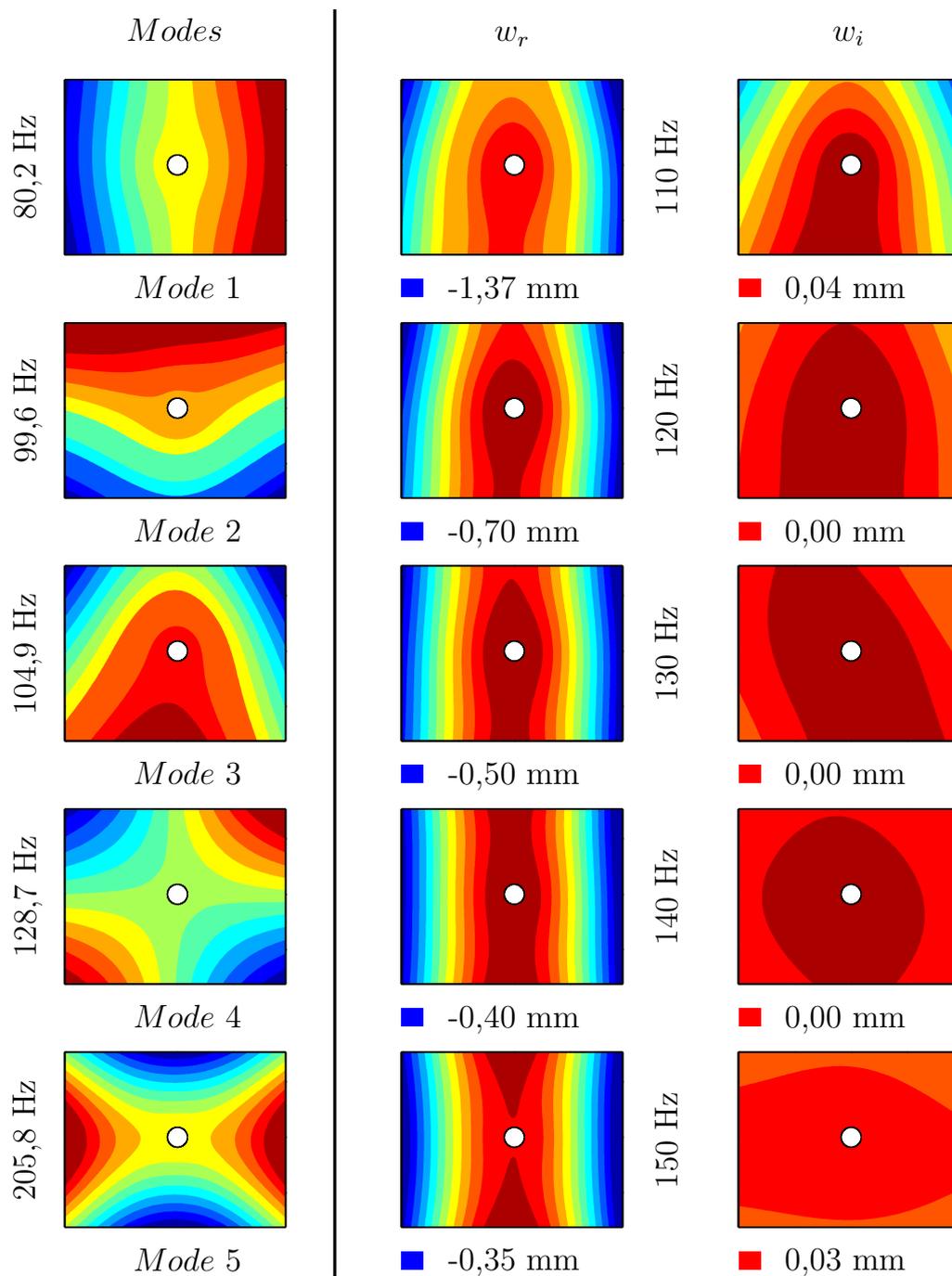


Figure 2.7 – Modes et réponses harmoniques hors résonances : 110 Hz – 150 Hz

faibles et ne sont principalement constituées que par les parties en phase avec l'entraînement (partie réelle), donc uniquement par les contributions de modes non résonants. Pour les réponses aux trois fréquences précitées qui sont proches de celles des modes 1, 2 et 3, les amplitudes des réponses sont évidemment beaucoup plus importantes dues aux contributions des modes résonants qui se retrouvent dans les parties imaginaires. La réponse à 100 Hz est évidemment similaires à celle calculée à la fréquence du mode 2 avec une importante contribution de la réponse du mode 3. Ce dernier domine les parties réelles et imaginaires de la réponse calculée à 110 Hz . Par ailleurs aucune contribution du mode 4 n'est détectable dans les réponses à 120 Hz et 130 Hz .

Les simulations de ces dix réponses harmoniques vont être utilisées dans les paragraphes suivants pour la recherche et la validation d'une méthode de choix de champs virtuels satisfaisants aux conditions énoncées en section 2.6.3.

2.7.2 Choix intuitif

Dans l'étude de Giraudeau *et al.* [65] déjà citée, le modèle de plaque n'est encadrée qu'en un seul nœud du modèle. La réaction d'encastrement (efforts et moments) n'est donc appliquée qu'en ce point pris pour origine des coordonnées. Des champs virtuels de déplacement hors-plan tels que : $w^{*(1)} = x^2(1 + j)$ et $w^{*(2)} = y^2(1 + j)$ vérifient :

$$w^*(0,0) = 0, \quad \frac{\partial w^*(0,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w^*(0,0)}{\partial y} = 0 \quad (2.72)$$

De tels champs entraînent des travaux virtuels identiquement nuls au niveau des efforts extérieurs ($TVFE = 0$). Ils ont permis d'obtenir des résultats d'identifications satisfaisants en présentant une certaine robustesse au bruit aléatoire ajouté aux réponses simulées.

Le modèle de plaque utilisé ici (en section 2.7.1) présente une zone circulaire d'encastrement. Il autorise une meilleure prise en compte des possibilités de montage expérimental. L'application des champs virtuels précédents ne conduit pas à des travaux virtuels des forces extérieures rigoureusement nuls ($TVFE \neq 0$). L'objectif des simulations suivantes est une tentative d'évaluation des conséquences du non respect rigoureux de la condition ($TVFE = 0$).

Deux couples de champs virtuels, appelés respectivement CV1 et CV2, ont été testés sur les réponses simulées provenant du modèle ci-dessus. CV1 et CV2 ont respectivement pour expressions :

$$CV1 : \begin{cases} w^{*(1)} = x^2 (1 + j) \\ w^{*(2)} = y^2 (1 + j) \end{cases}$$

et

$$CV2 : \begin{cases} w^{*(1)} = x^4 (1 + j) \\ w^{*(2)} = y^4 (1 + j) \end{cases}$$

Ces champs virtuels vérifient les conditions cinématiques à l'origine $(x, y) = (0, 0)$ mais non sur la totalité de la zone d'encastrement (voir équation 2.72). En conséquence, les travaux virtuels des efforts extérieurs ne sont pas rigoureusement nuls. Le degré 4 des monômes constituant CV2 génère des valeurs moyennes de flèche et de pente virtuelles beaucoup plus importantes sur l'ensemble de la plaque que le degré de CV1. Il en découle que les travaux virtuels des efforts intérieurs et d'accélération sont naturellement plus importants dans le cas CV2 par rapport à ceux issus de CV1. D'autre part les efforts d'encastrement ne s'exercent que sur la zone d'encastrement entourant l'origine $(0, 0)$ où les flèches virtuelles sont peu importantes par rapport à leurs valeurs moyennes tant pour CV1 que pour CV2. Les travaux virtuels non nuls des efforts extérieurs que ces flèches virtuelles engendrent influenceront d'autant moins les identifications que leurs valeurs seront petites comparées à celles des deux autres travaux virtuels.

Note au lecteur : Dans cette partie, de nombreux graphes présentent les erreurs relatives sur les identifications réalisées à partir de champs cinématiques simulés. Les conventions de représentation sont les suivantes :

- tracés continus pour les rigidités (Q_{xx} et Q_{xy});
- tracés discontinus (tirets) pour les amortissements (B_{xx} et B_{xy});
- marqueurs \circ pour Q_{xx} et B_{xx} ,
- marqueurs \triangleright pour Q_{xy} et B_{xy} .

La légende de chaque graphe rappelle ces conventions. Par ailleurs, en raison des grandes variations d'erreurs relatives rencontrées, le lecteur est invité à se reporter aux échelles des ordonnées (en %) qui sont propres à chaque graphique présenté.

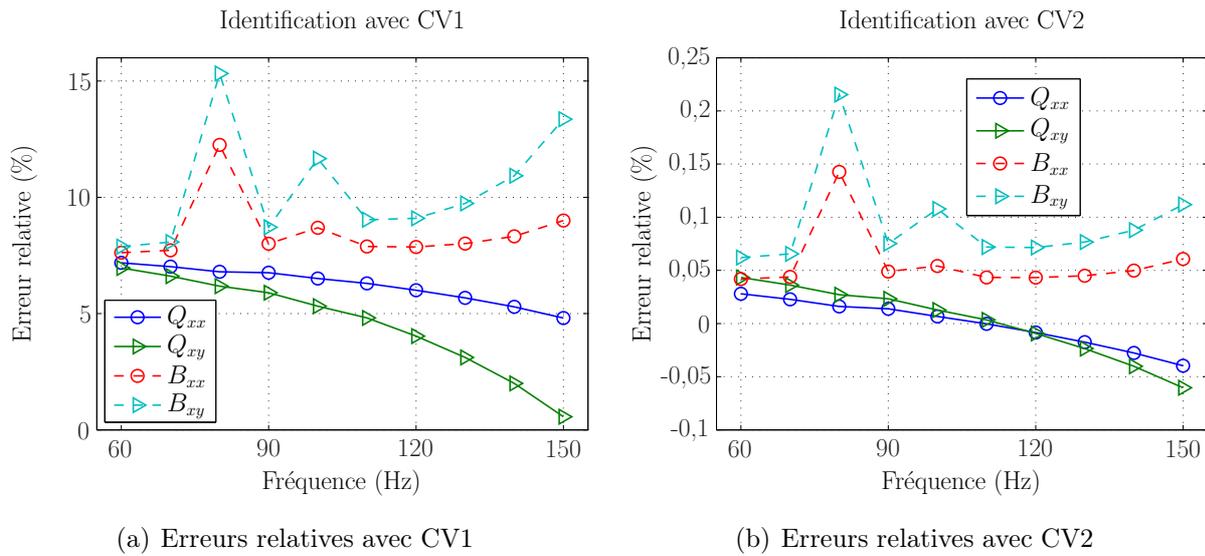


Figure 2.8 – Résultats identifiés par les champs virtuels choisis intuitivement

La figure 2.8 montre les erreurs relatives d'identification utilisant les couples de champs $CV1$ et $CV2$. Les erreurs obtenues avec les premiers sont très importantes alors que celles issues de l'utilisation des deuxièmes demeurent très faibles ce qui confirme les précédentes hypothèses.

Les graphes montrent que les erreurs sur les rigidités et sur les amortissements augmentent d'une manière générale avec la fréquence d'excitation. Cette dernière étant inertielle, les efforts d'encastrement croissent également en fonction de la fréquence entraînant l'augmentation des erreurs dues au choix des champs. Par ailleurs, les écarts sur les amortissements sont particulièrement prononcés aux fréquences de 80 Hz et 100 Hz qui sont voisines de deux résonances. Dans ces cas, les réponses harmoniques sont essentiellement pilotées par la dissipation du matériau et présentent de plus grandes amplitudes entraînant l'augmentation des efforts de liaison à l'encastrement. Les champs virtuels choisis ne permettant pas d'annuler leurs effets, les identifications en sont perturbées. Ces dernières remarques pointent la nécessité du choix de champs virtuels de déplacement annulant effectivement les travaux des efforts de liaison.

A ce niveau, il serait hasardeux de conclure que des champs virtuels polynômiaux de degrés élevés choisis intuitivement peuvent conduire à des identifications fiables. Il est en effet nécessaire de rappeler que l'exemple précédent a été conduit sur des champs cinématiques simulés exacts.

En effet, deux types de phénomènes peuvent perturber les mesures nécessaires à l'identi-

fication des grandeurs recherchées :

- le bruit de mesure proprement dit sur les champs cinématiques,
- l’erreur de mesure sur l’amplitude et sur la phase du mouvement d’entraînement.

A partir de la relation d’identification 2.71 rappelée ci-dessous :

$$\begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} [\mathbb{H}]^{-1} \begin{Bmatrix} \int_S (d_0 + w) w^{*(1)} dS \\ \int_S (d_0 + w) w^{*(2)} dS \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

il est possible de prévoir l’influence sur les paramètres identifiés d’une erreur δd ($\delta d \in \mathbb{C}$), représentant à la fois une perturbation sur le module (δd_0) et sur la phase ($\delta\phi$) du mouvement d’entraînement. L’influence de ces erreurs sur l’identification est analysée en considérant que ces erreurs sont faibles.

Par exemple dans le cas particulier $\phi = 0$ qui correspond à $d_i = 0$ et $d_r = d_0$. Deux cas d’erreurs sur les mesures du mouvement d’entraînement seront considérés :

Cas 1 Erreur sur la mesure de l’amplitude : $\delta d_0 \neq 0$, $\delta\phi = 0$

L’erreur d’identification à cause de l’erreur de la mesure de l’amplitude δd_0 sur l’entraînement s’écrit :

$$\delta \begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} [\mathbb{H}]^{-1} \delta d_0 \begin{Bmatrix} \int_S w^{*(1)} dS \\ \int_S w^{*(2)} dS \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

Cas 2 Erreur sur la mesure de la phase : $\delta d_0 = 0$, $\delta\phi \neq 0$

Les champs de flèches w_r et w_i sont nominalemeent ceux acquis respectivement aux instants d’élongation maximale et nulle de l’équipage d’entraînement. Le dispositif d’acquisition utilisé (voir paragraphe 3.3.3) conduit à postuler l’hypothèse que la même erreur de synchronisation $\delta\phi$ sera commise sur les deux prises de vues. En conséquence, les champs

de flèches et de courbures sont entachées de cette erreur de même que l'ensemble des composantes de la matrice \mathbb{H} en raison de l'équation 2.66. En résumé :

$$\begin{aligned} \text{sans erreur de mesure de phase : } & \delta\phi = 0; & w = w_r + j w_i; & \mathbb{H} \\ \text{avec erreur de mesure de phase : } & \delta\phi \neq 0; & w' = w e^{j\delta\phi}; & \mathbb{H}' = \mathbb{H} e^{j\delta\phi} \end{aligned}$$

Dans le cas de l'erreur de phase $\delta\phi \neq 0$, les paramètres erronés \hat{Q}'_{xx} et \hat{Q}'_{xy} issus de l'identification sont :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{Q}'_{xx} \\ \hat{Q}'_{xy} \end{Bmatrix} &= -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} [\mathbb{H} e^{j\delta\phi}]^{-1} \begin{Bmatrix} \int_S (d_0 + w e^{j\delta\phi}) w^{*(1)} dS \\ \int_S (d_0 + w e^{j\delta\phi}) w^{*(2)} dS \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} [\mathbb{H}]^{-1} \begin{Bmatrix} \int_S (d_0 e^{-j\delta\phi} + w) w^{*(1)} dS \\ \int_S (d_0 e^{-j\delta\phi} + w) w^{*(2)} dS \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.75)$$

L'écart par rapport à l'identification non entachée d'erreur (équation 2.73) s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta \begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} &= -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} [\mathbb{H}]^{-1} \begin{Bmatrix} \int_S d_0 (e^{-j\delta\phi} - 1) w^{*(1)} dS \\ \int_S d_0 (e^{-j\delta\phi} - 1) w^{*(2)} dS \end{Bmatrix} \\ &= j d_0 \delta\phi \cdot \frac{12\rho\omega^2}{h^2} [\mathbb{H}]^{-1} \begin{Bmatrix} \int_S w^{*(1)} dS \\ \int_S w^{*(2)} dS \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.76)$$

La figure 2.9 montre les erreurs relatives sur les identifications simulées utilisant les champs virtuels CV2. Chacune des fenêtres correspond à l'un des cas présentés ci-dessus sans ajout de bruits aléatoires sur les champs cinématiques issus des réponses du modèle.

La fenêtre de gauche montre les conséquences d'une erreur sur la mesure de l'amplitude du mouvement d'entraînement. Ces effets restent modérés sur les quatre grandeurs et se révèlent du même ordre de grandeur que la perturbation introduite.

A droite, la fenêtre présente les résultats de l'introduction simulée d'une erreur sur la mesure de phase du mouvement d'entraînement. Aucun effet n'est discernable sur les

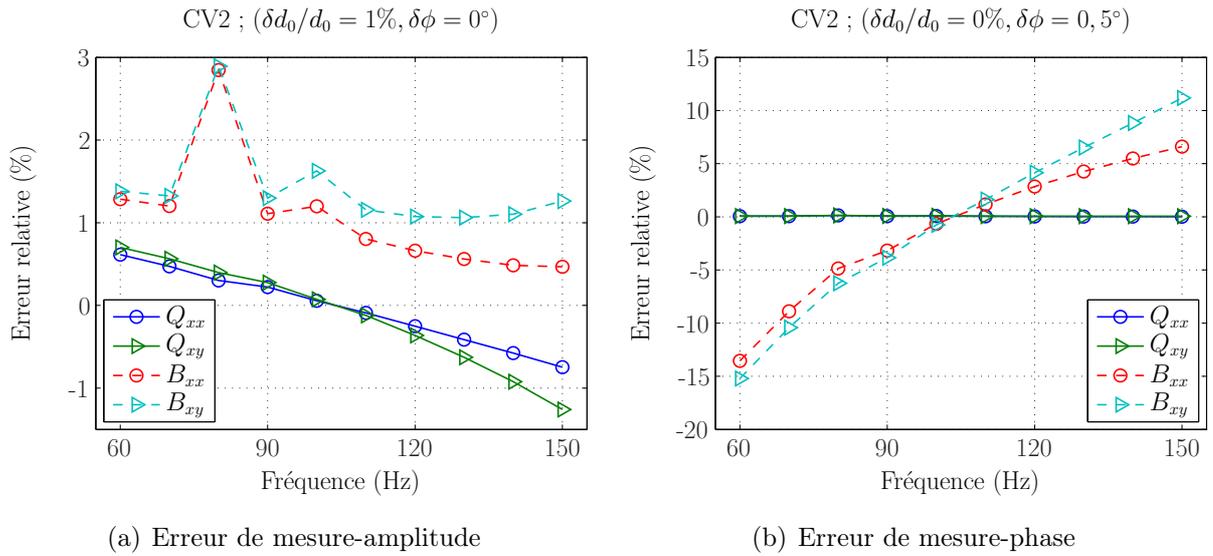


Figure 2.9 – Influences des erreurs de mesures du mouvement d'entraînement : amplitude et phase

identifications des rigidités Q_{xx} et Q_{xy} . Par contre les conséquences apparaissent très importantes sur les amortissements B_{xx} et B_{xy} . Ceci se justifie physiquement par la dépendance entre amortissement et phase. D'autre part la relation 2.76 fait intervenir un multiplicateur purement imaginaire $j d_0 \delta\phi$ qui reporte l'essentiel de l'erreur sur les parties imaginaires des rigidités complexes \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} donc sur les amortissements.

Ces rapides simulations confirment la nécessité d'une procédure méthodique de génération et de sélection de champs virtuels présentant des garanties vis à vis de la MCV d'une part et des perturbations d'origine expérimentale d'autre part.

Champs virtuels spéciaux optimisés

Les premières études portant sur la Méthode des Champs Virtuels [6, 58, 68, 69] ont mis en œuvre des champs virtuels choisis intuitivement. La sélection était effectuée par l'utilisateur parmi l'infinité des fonctions vérifiant la compatibilité cinématique de la configuration étudiée. Un tel choix ne fournit évidemment aucune garantie en ce qui concerne l'indépendance des équations du système linéaire final.

Des développements récents de la MCV proposent une génération automatique de champs virtuels qualifiés de *spéciaux* [70–72]. L'idée est de rechercher des champs virtuels tels que les équations du système final soient totalement découplées, autrement dit que la matrice

principale du système linéaire soit diagonale voire égale à l'identité. Dans le cas de la plaque en vibrations de flexion superposées à un mouvement d'entraînement, ceci aboutit à la recherche d'une matrice $[\mathbb{H}]_{2 \times 2}$ égale à la matrice identité. A partir de l'équation 2.71, cette condition s'écrit :

$$[\mathbb{H}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} G^{(1)} & H^{(1)} \\ G^{(2)} & H^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Les paramètres recherchés sont dans ce cas directement égaux à la partie droite de l'équation 2.71 évaluée à l'aide des champs virtuels spéciaux vérifiant la condition précédente 2.77 :

$$\begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} \begin{Bmatrix} \int_S (d+w) w^{*(1)} dS \\ \int_S (d+w) w^{*(2)} dS \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

Ces champs virtuels spéciaux (CVS) forment un ensemble non dénombrable [70] dans lequel une sélection de deux champs doit être opérée pour réaliser l'identification. Les résultats des simulations présentées dans [65] montrent que la robustesse de la méthode vis à vis du bruit de mesure des champs cinématiques dépend des champs virtuels choisis. Des travaux récents [73, 74] ont introduit une stratégie de choix de champs virtuels dits *optimisés* permettant de minimiser les effets du bruit de mesure. Une adaptation de cette méthode au cas étudié sera développée dans la suite de ce travail.

Par ailleurs les simulations du paragraphe 2.7.2 précédent montrent l'importance des effets des erreurs de mesure du mouvement d'entraînement. Dans la suite de cette étude, une condition supplémentaire sera présentée ayant pour but de réduire les conséquences de ces erreurs de mesure.

Enfin il convient de rappeler que la relation dans l'équation 2.71 a été établie à partir de l'hypothèse de champs virtuels produisant des travaux virtuels nuls au niveau des efforts de liaison ($TVFE = 0$).

En résumé, les champs virtuels spéciaux optimisés correspondant à cette étude doivent :

- imposer une matrice $[\mathbb{H}]_{2 \times 2}$ égale à la matrice identité ;
- annuler les travaux virtuels des efforts extérieurs au niveau de l'encastrement ;
- minimiser les effets du bruit de mesure des champs cinématiques ;

- réduire les conséquences des erreurs issues de la mesure du mouvement d'entraînement.

Dans les paragraphes suivants, deux méthodologies de recherche de champs virtuels respectant ces conditions vont être présentées et discutées :

- champs virtuels spéciaux optimisés par morceaux ;
- champs virtuels spéciaux optimisés construits sur une base polynômiale.

2.7.3 Champs virtuels spéciaux optimisés par morceaux

2.7.3.1 Principe de la méthode

L'idée maîtresse des champs virtuels par morceaux consiste à établir un maillage de la surface de l'éprouvette. Celle-ci est ainsi découpée en sous-domaines connectés par des nœuds. Les champs de déplacement virtuels peuvent alors être définis à partir des degrés de liberté des nœuds, à l'aide de fonctions semblables aux fonctions de forme utilisées dans la méthode des éléments finis. Les sous-domaines précédents peuvent alors apparaître comme des éléments virtuels.

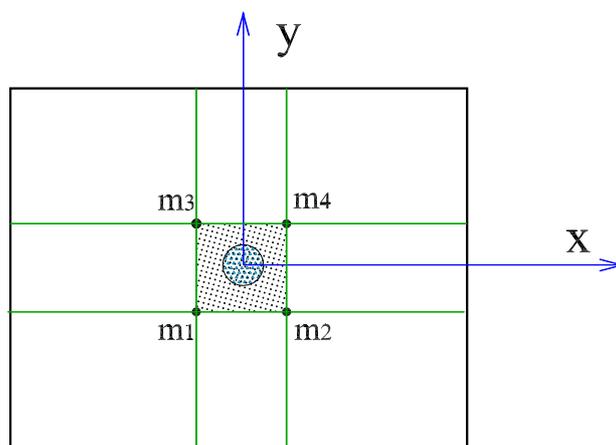


Figure 2.10 – Plaque par morceaux

La figure 2.10 montre un tel maillage sur la plaque étudiée à l'aide de $3 \times 3 = 9$ morceaux. Dans ce cas l'intérêt fondamental de ce type de champs virtuels est de pouvoir imposer des champs virtuels de déplacement hors-plan et de pente nuls sur l'élément central Ce sous-domaine, défini par les nœuds notés **m1**, **m2**, **m3**, **m4**, contient la zone circulaire d'encastrement. Les travaux virtuels des efforts extérieurs sont ainsi annulés ($TVFE = 0$).

Cette méthode a été récemment appliquée au cas des déplacements dans le plan [75] ainsi qu'au cas de flexion statique d'une plaque [74]. Cette étude se propose d'étendre cette application aux vibrations de flexion d'une plaque mince isotrope.

Pour une application rigoureuse du principe des travaux virtuels, les champs virtuels par morceaux doivent vérifier la condition générale de continuité sur l'ensemble de la structure. Dans le cas des plaques, cette condition doit s'appliquer aux champs de déplacement virtuels hors-plan et dans le plan ainsi qu'aux champs de pente virtuels dans les deux directions du plan. Dans leur étude concernant l'identification des rigidités de plaques minces en flexion statique, Syed-Muhammad *et al.* [74] ont utilisé des champs virtuels par morceaux construits sur des éléments de type Hermite16 [61]. Ce type d'élément est basé sur la théorie classique des plaques minces (Love-Kirchhoff) en considérant des formes variationnelles de type déplacement. Cet élément est rectangulaire, il présente quatre nœuds possédant chacun quatre degrés de liberté virtuels :

$$w^*(x, y), \quad \theta_x^*(x, y) \left(= \frac{\partial w^*}{\partial x} \right), \quad \theta_y^*(x, y) \left(= \frac{\partial w^*}{\partial y} \right), \quad \theta_{xy}^*(x, y) \left(= \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right)$$

La figure 2.11 présente les caractéristiques de cet élément type. Il convient de noter que la continuité des champs de pente dans toutes les directions repose uniquement sur le quatrième degré de liberté θ_{xy} . Cette condition ne serait pas respectée par la seule utilisation des trois premiers degrés de liberté.

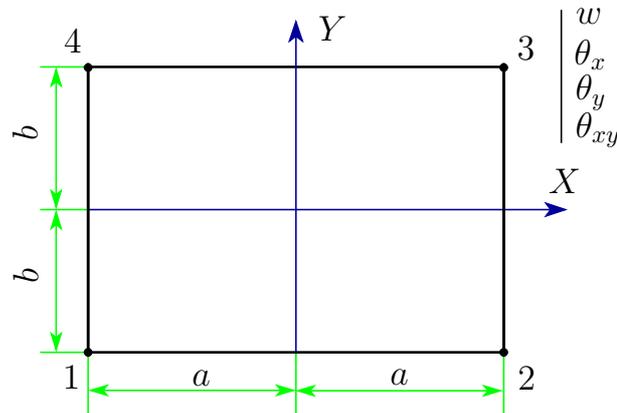


Figure 2.11 – Élément rectangulaire de type Hermite16

Le champ virtuel de déplacement hors-plan peut s'exprimer tel que :

$$w^*(x, y) = \langle f(x, y) \rangle \{Y_0^*\} \quad (2.79)$$

où (x, y) sont les coordonnées d'un point quelconque d'un élément virtuel, $\langle f(x, y) \rangle$ est la fonction de forme de l'élément type de Hermite16 et $\{Y_0^*\}$ est le vecteur colonne des degrés de liberté des quatre nœuds de cet élément virtuel. Ce vecteur peut s'écrire :

$$\{Y_0^*\} = \begin{pmatrix} w_{(1)}^* \\ \theta_{x(1)}^* \\ \theta_{y(1)}^* \\ \theta_{xy(1)}^* \\ \vdots \\ w_{(4)}^* \\ \theta_{x(4)}^* \\ \theta_{y(4)}^* \\ \theta_{xy(4)}^* \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

Compte tenu des opérations d'intégration à effectuer sur les éléments virtuels, il apparaît pratique de définir sur chaque sous-domaine un système de coordonnées locales analogues à celles utilisées dans la mise en œuvre de la méthode des éléments finis. Les éléments virtuels étant ici rectangulaires (figure 2.11), la transformation géométrique associant les coordonnées globales (x, y) et coordonnées locales (μ, ξ) s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \mu = \frac{x - x_c}{a} & \Rightarrow -1 \leq \mu \leq +1 \\ \xi = \frac{y - y_c}{b} & \Rightarrow -1 \leq \xi \leq +1 \end{cases} \quad (2.81)$$

où x_c et y_c sont les coordonnées globales du centre de l'élément virtuel. Le Jacobien de la transformation géométrique s'écrit donc :

$$\mathbb{J} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = ab \quad (2.82)$$

Il est facile de vérifier que celui-ci correspond au quart de l'aire Se de l'élément virtuel considéré.

On montre [61] que la fonction de forme $\langle f(x, y) \rangle$ d'un élément Hermite16 s'écrit, à travers la transformation géométrique, sous la forme d'un vecteur ligne dont les composantes sont des monômes $\mu^i \xi^j$ tels que :

$$\langle f(x, y) \rangle = \langle \mu^i \xi^j \rangle ; \quad \text{avec } i = 0, 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (2.83)$$

La relation finale d'identification 2.78 fait appel aux champs de courbure virtuels. Ceux-ci vont être exprimés sur l'élément virtuel à partir des champs de flèche virtuels. D'une manière analogue, les champs de courbure virtuels peuvent également s'exprimer :

$$\begin{cases} \kappa_{xx}^*(x, y) = -\frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial x^2} = \langle b_{xx}(x, y) \rangle \{Y_0^*\} \\ \kappa_{yy}^*(x, y) = -\frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial y^2} = \langle b_{yy}(x, y) \rangle \{Y_0^*\} \\ \kappa_{ss}^*(x, y) = -2 \frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial x \partial y} = \langle b_{ss}(x, y) \rangle \{Y_0^*\} \end{cases} \quad (2.84)$$

où les vecteurs lignes $\langle b_{xx}(x, y) \rangle$, $\langle b_{yy}(x, y) \rangle$ et $\langle b_{ss}(x, y) \rangle$ sont les écritures vectorielles des fonctions de forme des champs de courbure. Elles sont obtenues par doubles dérivations de la fonction de forme du champ de flèche :

$$\begin{cases} \langle b_{xx}(x, y) \rangle = -\frac{\partial^2 \langle f(x, y) \rangle}{\partial x^2} \\ \langle b_{yy}(x, y) \rangle = -\frac{\partial^2 \langle f(x, y) \rangle}{\partial y^2} \\ \langle b_{ss}(x, y) \rangle = -2 \frac{\partial^2 \langle f(x, y) \rangle}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2.85)$$

Soient p et q les nombres d'éléments virtuels choisis respectivement dans les directions x et y . Ceci conduit à $N_e = pq$ éléments virtuels. Le nombre de nœuds est alors $n = (1 + p)(1 + q)$ et par conséquent le nombre de degrés de liberté est $N = 4(1 + p)(1 + q)$. Ceux-ci peuvent être rassemblés dans le vecteur $\{Y^*\}$ à N composantes :

$$\{Y^*\} = \begin{pmatrix} w_{(1)}^* \\ \theta_{x(1)}^* \\ \theta_{y(1)}^* \\ \theta_{xy(1)}^* \\ \vdots \\ w_{(N)}^* \\ \theta_{x(N)}^* \\ \theta_{y(N)}^* \\ \theta_{xy(N)}^* \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

La relation d'identification 2.71 fait intervenir des composantes évaluées par intégration sur la surface de la plaque :

- les composantes G^α et H^α , ($\alpha = (1), (2)$) de la matrice \mathbb{H} (dans l'équation 2.66) ;
- les intégrales des expressions $(d+w)w^{*\alpha}$, (avec $\alpha = (1), (2)$).

Les expressions de G et H ont été définies dans l'équation 2.59 et sont telles que :

$$\begin{cases} G^\alpha = - \int_S \left(\kappa_{xx} \kappa_{xx}^* + \kappa_{yy} \kappa_{yy}^* + \frac{1}{2} \kappa_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS = \sum_{l=1}^{N_e} G_e^\alpha(l) \\ H^\alpha = - \int_S \left(\kappa_{xx} \kappa_{yy}^* + \kappa_{yy} \kappa_{xx}^* - \frac{1}{2} \kappa_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS = \sum_{l=1}^{N_e} H_e^\alpha(l) \end{cases} \quad (2.87)$$

L'évaluations de leurs valeurs peuvent être conduites sur chaque élément virtuel en remplaçant les champs de courbure virtuels $\kappa_{xx}^{*\alpha}$, $\kappa_{yy}^{*\alpha}$ et $\kappa_{ss}^{*\alpha}$ par leurs expressions tirées des relations 2.85 :

$$\begin{cases} G_e^\alpha = - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\kappa_{xx}(\mu, \xi) \langle b_{xx}(\mu, \xi) \rangle + \kappa_{yy}(\mu, \xi) \langle b_{yy}(\mu, \xi) \rangle \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \kappa_{ss}(\mu, \xi) \langle b_{ss}(\mu, \xi) \rangle \right) \{Y_e^{*\alpha}\} \mathbb{J} d\mu d\xi \\ H_e^\alpha = - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\kappa_{xx}(\mu, \xi) \langle b_{yy}(\mu, \xi) \rangle + \kappa_{yy}(\mu, \xi) \langle b_{xx}(\mu, \xi) \rangle \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} \kappa_{ss}(\mu, \xi) \langle b_{ss}(\mu, \xi) \rangle \right) \{Y_e^{*\alpha}\} \mathbb{J} d\mu d\xi \end{cases} \quad (2.88)$$

avec le Jacobien $\mathbb{J} = ab$ qui est égal au quart de l'aire Se d'un élément virtuel (voir l'équation 2.82).

Les champs de courbure physiques κ_{xx} , κ_{yy} et κ_{ss} simulés et plus tard mesurés sont décrits de manière discrète (éléments du modèle E.F., pixels de la caméra). En conséquence les intégrales sont évaluées numériquement sur chaque élément.

L'intégration des composantes G et H sur la totalité de la plaque se traduit par une sommation des quantités G_e et H_e sur l'ensemble des N_e nœuds de la plaque qui peut

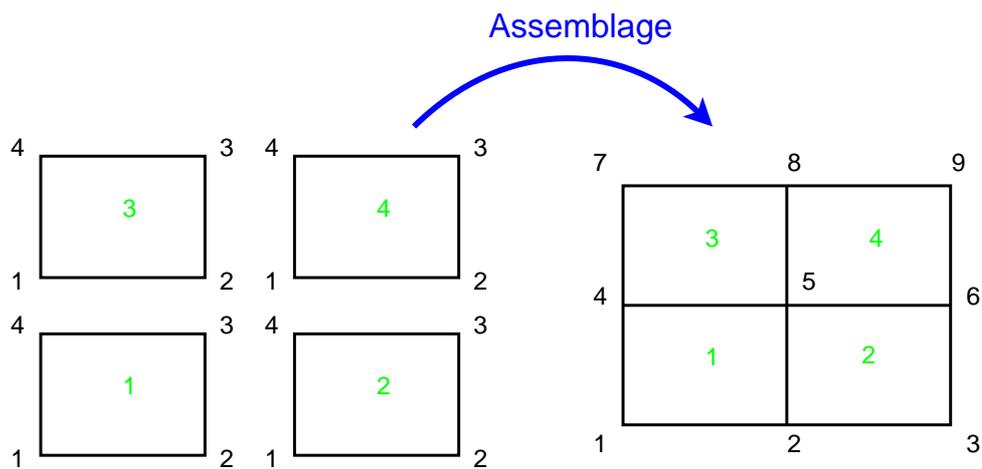


Figure 2.12 – Assemblage des éléments virtuels

être illustrée par la figure 2.12. G et H peuvent donc s'écrire en fonction du vecteur des N degrés de liberté virtuels $\{Y^*\}$:

$$\begin{cases} G = \langle I_{xx} \rangle \{Y^*\} \\ H = \langle I_{xy} \rangle \{Y^*\} \end{cases} \quad (2.89)$$

Les vecteurs lignes $\langle I_{xx} \rangle$ et $\langle I_{xy} \rangle$ peuvent être exprimées par sommations des N_e équations 2.88 :

$$\left\{ \begin{aligned}
\langle I_{xx} \rangle &= \sum_{l=1}^{N_e} \frac{S e^{(l)}}{4} \left(\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\kappa_{xx}(\mu, \xi) \langle b_{xx}(\mu, \xi) \rangle + \kappa_{yy}(\mu, \xi) \langle b_{yy}(\mu, \xi) \rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \kappa_{ss}(\mu, \xi) \langle b_{ss}(\mu, \xi) \rangle \right) d\mu d\xi \right) \\
&= \sum_{l=1}^{N_e} \frac{S e^{(l)}}{4} \left(S_p \sum_{p=1}^{N^{(l)}} \left(\kappa_{xx}(\mu_p, \xi_p) \langle b_{xx}(\mu_p, \xi_p) \rangle + \kappa_{yy}(\mu_p, \xi_p) \langle b_{yy}(\mu_p, \xi_p) \rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \kappa_{ss}(\mu_p, \xi_p) \langle b_{ss}(\mu_p, \xi_p) \rangle \right) \right) \\
\langle I_{xy} \rangle &= \sum_{l=1}^{N_e} \frac{S e^{(l)}}{4} \left(\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\kappa_{xx}(\mu, \xi) \langle b_{yy}(\mu, \xi) \rangle + \kappa_{yy}(\mu, \xi) \langle b_{xx}(\mu, \xi) \rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \kappa_{ss}(\mu, \xi) \langle b_{ss}(\mu, \xi) \rangle \right) d\mu d\xi \right) \\
&= \sum_{l=1}^{N_e} \frac{S e^{(l)}}{4} \left(S_p \sum_{p=1}^{N^{(l)}} \left(\kappa_{xx}(\mu_p, \xi_p) \langle b_{yy}(\mu_p, \xi_p) \rangle + \kappa_{yy}(\mu_p, \xi_p) \langle b_{xx}(\mu_p, \xi_p) \rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \kappa_{ss}(\mu_p, \xi_p) \langle b_{ss}(\mu_p, \xi_p) \rangle \right) \right)
\end{aligned} \right. \quad (2.90)$$

D'autre part, les intégrales des expressions $(d+w)w^{*\alpha}$ du membre de droite de l'équation 2.65 peuvent être calculées numériquement sur chaque élément virtuel :

$$-\frac{12\rho\omega^2}{h^2} \int_{S_e} (d+w)w^* dS = -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (d+w(\mu, \xi)) \langle f(\mu, \xi) \rangle \{Y_0^*\} \mathbb{J} d\mu d\xi \quad (2.91)$$

L'évaluation des intégrales de $(d+w)w^{*\alpha}$ sur l'ensemble de la plaque est alors réalisée par la sommation des résultats précédents provenant des N_e éléments. Ces termes peuvent donc s'écrire :

$$-\frac{12\rho\omega^2}{h^2} \int_S (d+w)w^* dS = \langle R \rangle \{Y^*\} \quad (2.92)$$

Le vecteur ligne $\langle R \rangle$ peut ainsi être évalué par sommation sur l'ensemble des éléments virtuels :

$$\begin{aligned}
\langle R \rangle &= -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} \sum_{l=1}^{N_e} \frac{Se_{(l)}}{4} \left(\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (d + w(\mu, \xi)) \langle f(\mu, \xi) \rangle d\mu d\xi \right) \\
&= -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} \sum_{l=1}^{N_e} \frac{Se_{(l)}}{4} \left(S_p \sum_{p=1}^{N_{(l)}} (d + w(\mu_p, \xi_p)) \langle f(\mu_p, \xi_p) \rangle \right)
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Le système final 2.68 peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle I_{xx} \rangle \{Y^{*(1)}\} & \langle I_{xy} \rangle \{Y^{*(1)}\} \\ \langle I_{xx} \rangle \{Y^{*(2)}\} & \langle I_{xy} \rangle \{Y^{*(2)}\} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \langle R \rangle \\ \langle R \rangle \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Y^{*(1)}\} \\ \{Y^{*(2)}\} \end{Bmatrix} \tag{2.94}$$

La fonction de forme de l'élément-type étant arrêtée, le choix des champs virtuels sur l'ensemble des sous-domaines revient à sélectionner les degrés de liberté des éléments virtuels $\{Y^*\}$ qui satisfont aux conditions présentées en section 2.7.2 :

1. assurer l'indépendance des équations du système final ;
2. rendre nuls les travaux virtuels des efforts extérieurs $TVFE = 0$;
3. minimiser les effets du bruit provenant de la mesure des champs cinématiques ;
4. réduire l'influence des erreurs de mesure sur le mouvement d'entraînement.

La suite de l'étude va montrer que la troisième condition débouche sur la minimisation d'une fonction coût et que les trois autres conditions apparaissent sous formes de contraintes dans cette optimisation.

2.7.3.2 Indépendance des équations

Comme indiqué au paragraphe 2.7.2, cette indépendance est assurée par des champs virtuels appelés spéciaux qui rendent la matrice $\mathbb{H}_{2 \times 2}$ égale à la matrice unité (équation 2.77). Dans le cas des champs par morceaux, cette condition devient :

$$[\mathbb{H}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \langle I_{xx} \rangle \{Y^{*(1)}\} & \langle I_{xy} \rangle \{Y^{*(1)}\} \\ \langle I_{xx} \rangle \{Y^{*(2)}\} & \langle I_{xy} \rangle \{Y^{*(2)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \langle I_{xx} \rangle \\ \langle I_{xy} \rangle \end{Bmatrix} \cdot [\{Y^{*(1)}\} \{Y^{*(2)}\}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Dans ces conditions, la relation d'identification 2.65 devient :

$$\begin{cases} \hat{Q}_{xx} = \langle R \rangle \{Y^{*(1)}\} \\ \hat{Q}_{xy} = \langle R \rangle \{Y^{*(2)}\} \end{cases} \quad (2.97)$$

2.7.3.3 Travail virtuel nul des efforts extérieurs $TVFE = 0$

Cette condition peut être respectée en imposant aux champs virtuels de pente et de déplacement hors plan d'être nuls sur tout le sous-domaine contenant la zone d'encastrement. Ceci est simplement obtenu en imposant aux quatre degrés de liberté de chacun des quatre nœuds de cet élément d'être nuls. Les nœuds étant respectivement notés : $m1$, $m2$, $m3$ et $m4$ (voir figure 2.10), les blocages imposés se traduisent pour chacun des deux champs virtuels par seize relations linéaires qui peuvent s'exprimées comme suit :

$$\{Y_m^{*\alpha}\} = \begin{Bmatrix} w_{(m1)}^{*\alpha} \\ \theta_{x(m1)}^{*\alpha} \\ \theta_{y(m1)}^{*\alpha} \\ \theta_{xy(m1)}^{*\alpha} \\ \vdots \\ w_{(m4)}^{*\alpha} \\ \theta_{x(m4)}^{*\alpha} \\ \theta_{y(m4)}^{*\alpha} \\ \theta_{xy(m4)}^{*\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad (\alpha = 1, 2) \quad (2.98)$$

Ces trente deux relations peuvent s'écrire sous forme matricielle par rapport aux vecteurs de dimension N des deux champs virtuels $\{Y^{*(1)}\}$ et $\{Y^{*(2)}\}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & | & 1 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & | & 0 & 1 & \cdots & 0 & | & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \ddots & 0 & | & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & | & 0 & 0 & \cdots & 1 & | & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{(1)}^{*(1)} & w_{(1)}^{*(2)} \\ \vdots & \vdots \\ \theta_{xy(m1-1)}^{*(1)} & \theta_{xy(m1-1)}^{*(2)} \\ \hline w_{(m1)}^{*(1)} & w_{(m1)}^{*(2)} \\ \theta_{x(m1)}^{*(1)} & \theta_{x(m1)}^{*(2)} \\ \vdots & \vdots \\ \theta_{xy(m4)}^{*(1)} & \theta_{xy(m4)}^{*(2)} \\ \hline w_{(m4+1)}^{*(1)} & w_{(m4+1)}^{*(2)} \\ \vdots & \vdots \\ \theta_{xy(n)}^{*(1)} & \theta_{xy(n)}^{*(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Cette expression peut prendre une forme plus synthétique :

$$[B] \cdot [\{Y^{*(1)}\} \{Y^{*(2)}\}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

où la matrice $[B]$ est une matrice de 16 lignes et N colonnes qui peut être décrite comme une matrice nulle $[16 \times N]$ à laquelle est superposée une matrice unité $[16 \times 16]$ entre les colonnes correspondant aux indices de lignes des degrés de liberté $w_{(m1)}^*$ et $\theta_{xy(m4)}^*$ dans les vecteurs $\{Y^{*\alpha}\}$.

2.7.3.4 Synthèse des écritures des conditions 1 et 2

Les écritures matricielles dans les équations 2.97 et 2.100 des deux premières conditions imposées aux champs virtuels peuvent être rassemblées en une seule expression également matricielle :

$$\begin{bmatrix} [B] \\ \hline \langle I_{xx} \rangle \\ \langle I_{xy} \rangle \end{bmatrix} \cdot [\{Y^{*(1)}\}, \{Y^{*(2)}\}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

soit sous une forme synthétique qui sera utilisée dans la suite :

$$[A] \cdot [\{Y^{*(1)}\}, \{Y^{*(2)}\}] = [\{Z^{(1)}\}, \{Z^{(2)}\}] = [Z] \quad (2.102)$$

dans laquelle la matrice $[A]$ possède $16 + 2 = 18$ lignes et N colonnes. La matrice Z est une matrice à N lignes et 2 colonnes dont tous les éléments sont nuls à l'exception de $Z(N-1, 1) = Z(N, 2) = 1$.

2.7.3.5 Effets du bruit sur les champs de courbure

Cette partie consacrée à la quantification des effets du bruit de mesure et la suivante concernant leur minimisation constituent une adaptation, au cas étudié, des travaux de Avril *et al.* [73].

Dans la partie expérimentale de cette étude, les champs de courbure physiques sont obtenus par dérivation spatiale des champs de pente qui sont mesurés sur la plaque. Cette opération se traduit évidemment par une augmentation du niveau de bruit sur les courbures. Au contraire, les champs physiques de flèche sont obtenus par intégration spatiale des mêmes champs de pente. Leurs niveaux de bruit s'en trouvent donc réduits. En conséquence, la minimisation des effets de ce bruit va être prioritairement recherchée sur celui des champs de courbure physiques $\kappa_{xx}(x, y)$, $\kappa_{yy}(x, y)$ et $\kappa_{ss}(x, y)$.

Dans cette approche le bruit spatial sera considéré de type blanc gaussien. Cette hypothèse peut apparaître comme simpliste mais d'un point de vue expérimental, elle constitue un critère utile pour la sélection du champ virtuel présentant la moins grande sensibilité au bruit ajouté. Par hypothèse les bruits blancs des différentes composantes du champ de courbure sont de niveaux équivalents et demeurent très faibles par rapport aux courbures elles-mêmes.

Au paragraphe 2.6, il a été établi que le Principe des Travaux Virtuels se traduit par l'équation 2.103 rappelée ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \left(- \int_S \left(\kappa_{xx} \kappa_{xx}^* + \kappa_{yy} \kappa_{yy}^* + \frac{1}{2} \kappa_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \right) \hat{Q}_{xx} \\ & + \left(- \int_S \left(\kappa_{xx} \kappa_{yy}^* + \kappa_{yy} \kappa_{xx}^* - \frac{1}{2} \kappa_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \right) \hat{Q}_{xy} = - \frac{12\rho\omega^2}{h^2} \int_S (d+w) w^* dS \quad (2.103) \end{aligned}$$

Dans le cas où un bruit spatial de faible niveau s'ajoute à celle-ci essentiellement aux champs de courbure, l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} & \left(- \int_S \left((\kappa_{xx} + \gamma N_{xx}) \kappa_{xx}^* + (\kappa_{yy} + \gamma N_{yy}) \kappa_{yy}^* + \frac{1}{2} (\kappa_{ss} + \gamma N_{ss}) \kappa_{ss}^* \right) dS \right) \hat{Q}_{xx} \\ & + \left(- \int_S \left((\kappa_{xx} + \gamma N_{xx}) \kappa_{yy}^* + (\kappa_{yy} + \gamma N_{yy}) \kappa_{xx}^* - \frac{1}{2} (\kappa_{ss} + \gamma N_{ss}) \kappa_{ss}^* \right) dS \right) \hat{Q}_{xy} \\ & = - \frac{12\rho\omega^2}{h^2} \int_S (d+w) w^* dS \quad (2.104) \end{aligned}$$

où N_{xx} , N_{yy} et N_{ss} sont respectivement des champs spatiaux de bruit blanc s'appliquant aux champs de courbure mesurés : κ_{xx} , κ_{yy} et κ_{ss} . Le nombre γ est réel positif. Il correspond à l'écart-type des courbures mesurées.

L'expression 2.104 n'est valide que si les différents bruits spatiaux sont faibles devant les courbures, c'est-à-dire : $\gamma N_{xx} \ll \kappa_{xx}$, $\gamma N_{yy} \ll \kappa_{yy}$, $\gamma N_{ss} \ll \kappa_{ss}$.

Les champs cinématiques étant représentés par des fonctions complexes, les bruits des champs possèdent évidemment chacun une partie réelle et une partie imaginaire toutes les deux de type blanc gaussien et non spatialement corrélées entre elles.

$$N(x, y) = N_r(x, y) + j N_i(x, y) \quad (2.105)$$

Les différentes composantes de bruits sont par hypothèse supposées spatialement indépendantes [73]. En notant $\overline{N(x, y)}$ le complexe conjugué de la composante de bruit $N(x, y)$, La fonction d'autocorrélation de celle-ci s'exprime :

$$\begin{aligned} R_N(\Delta x, \Delta y) &= E \left[N(x, y) \overline{N(x + \Delta x, y + \Delta y)} \right] \\ &= E \left[\left(N_r(x, y) + j N_i(x, y) \right) \overline{\left(N_r(x + \Delta x, y + \Delta y) + j N_i(x + \Delta x, y + \Delta y) \right)} \right] \\ &= E \left[N_r(x, y) N_r(x + \Delta x, y + \Delta y) + N_i(x, y) N_i(x + \Delta x, y + \Delta y) \right. \\ & \quad \left. + j \left(N_i(x, y) N_r(x + \Delta x, y + \Delta y) - N_r(x, y) N_i(x + \Delta x, y + \Delta y) \right) \right] \\ &= 2\delta(\Delta x)\delta(\Delta y) \end{aligned} \quad (2.106)$$

où $E[X]$ est l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X et $\delta(t)$ la fonction de distribution de Dirac qui vaut 1 quand $t = 0$ et s'annule pour toutes autres valeurs de t .

La relation 2.106 qui sera utilisée dans la suite est la conséquence de l'hypothèse d'indépendance des différents bruits.

Par ailleurs la relation 2.104 peut être réécrite :

$$\begin{aligned}
& \left(- \int_S \left(\kappa_{xx} \kappa_{xx}^* + \kappa_{yy} \kappa_{yy}^* + \frac{1}{2} \kappa_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \right) \hat{Q}_{xx} \\
& \quad + \left(- \int_S \left(\kappa_{xx} \kappa_{yy}^* + \kappa_{yy} \kappa_{xx}^* - \frac{1}{2} \kappa_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \right) \hat{Q}_{xy} \\
& = - \frac{12\rho\omega^2}{h^2} \int_S (d+w) w^* dS + \gamma \left(\int_S \left(N_{xx} \kappa_{xx}^* + N_{yy} \kappa_{yy}^* + \frac{1}{2} N_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \right) \hat{Q}_{xx} \\
& \quad + \gamma \left(\int_S \left(N_{xx} \kappa_{yy}^* + N_{yy} \kappa_{xx}^* - \frac{1}{2} N_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \right) \hat{Q}_{xy}
\end{aligned} \tag{2.107}$$

En utilisant l'équation 2.59 cette relation peut prendre une forme plus condensée :

$$\begin{aligned}
G \hat{Q}_{xx} + H \hat{Q}_{xy} & = - \frac{12\rho\omega^2}{h^2} \int_S (d+w) w^* dS \\
& \quad + \gamma \left(\int_S \left(N_{xx} \kappa_{xx}^* + N_{yy} \kappa_{yy}^* + \frac{1}{2} N_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \right) \hat{Q}_{xx} \\
& \quad + \gamma \left(\int_S \left(N_{xx} \kappa_{yy}^* + N_{yy} \kappa_{xx}^* - \frac{1}{2} N_{ss} \kappa_{ss}^* \right) dS \right) \hat{Q}_{xy}
\end{aligned} \tag{2.108}$$

A l'aide de deux champs virtuels par morceaux (section 2.7.3) dont les vecteurs $\{Y^{*(1)}\}$ et $\{Y^{*(2)}\}$ vérifient les conditions 2.101, les équations 2.92, 2.97 et 2.108 permettent d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{Q}_{xx} = \langle R \rangle \{Y^{*(1)}\} + \gamma \left[\hat{Q}_{xx} \left(\int_S \kappa_{xx}^{*(1)} N_{xx} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*(1)} N_{yy} dS + \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*(1)} N_{ss} dS \right) \right. \\ \quad \left. + \hat{Q}_{xy} \left(\int_S \kappa_{xx}^{*(1)} N_{yy} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*(1)} N_{xx} dS - \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*(1)} N_{ss} dS \right) \right] \\ \hat{Q}_{xy} = \langle R \rangle \{Y^{*(2)}\} + \gamma \left[\hat{Q}_{xx} \left(\int_S \kappa_{xx}^{*(2)} N_{xx} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*(2)} N_{yy} dS + \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*(2)} N_{ss} dS \right) \right. \\ \quad \left. + \hat{Q}_{xy} \left(\int_S \kappa_{xx}^{*(2)} N_{yy} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*(2)} N_{xx} dS - \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*(2)} N_{ss} dS \right) \right] \end{array} \right. \quad (2.109)$$

Dans ces expressions \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} sont les inconnues. Ce système non-linéaire n'a pas de solution analytique. Cependant, \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} peuvent être développées en séries de Taylor relativement à la variable γ . L'écart-type du bruit (γ) est faible par hypothèse, en conséquence il est possible de limiter le développement au premier ordre.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{Q}_{xx} = \langle R \rangle \{Y_{app}^{*(1)}\} + O(\gamma) \\ \hat{Q}_{xy} = \langle R \rangle \{Y_{app}^{*(2)}\} + O(\gamma) \end{array} \right. \quad (2.110)$$

Donc l'équation 2.109 devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{Q}_{xx} = \langle R \rangle \{Y^{*(1)}\} + \gamma \left[\langle R \rangle \{Y_{app}^{*(1)}\} \left(\int_S \kappa_{xx}^{*(1)} N_{xx} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*(1)} N_{yy} dS + \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*(1)} N_{ss} dS \right) \right. \\ \quad \left. + \langle R \rangle \{Y_{app}^{*(2)}\} \left(\int_S \kappa_{xx}^{*(1)} N_{yy} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*(1)} N_{xx} dS - \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*(1)} N_{ss} dS \right) \right] + \gamma O(\gamma) \\ \hat{Q}_{xy} = \langle R \rangle \{Y^{*(2)}\} + \gamma \left[\langle R \rangle \{Y_{app}^{*(1)}\} \left(\int_S \kappa_{xx}^{*(2)} N_{xx} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*(2)} N_{yy} dS + \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*(2)} N_{ss} dS \right) \right. \\ \quad \left. + \langle R \rangle \{Y_{app}^{*(2)}\} \left(\int_S \kappa_{xx}^{*(2)} N_{yy} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*(2)} N_{xx} dS - \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*(2)} N_{ss} dS \right) \right] + \gamma O(\gamma) \end{array} \right. \quad (2.111)$$

Les premiers termes de chaque membre de droite des équations 2.111 représentent les valeurs *exactes* de \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} respectivement. Les deuxièmes termes symbolisent les incertitudes sur l'identification des grandeurs précédentes et $O(\gamma)$ est le reste considéré comme négligeable en raison de l'hypothèse de faiblesse du bruit. La moyenne des termes d'incertitude pour n identifications tendant vers zéro, les espérances mathématiques des résultats tendent alors vers les estimations non biaisées de \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} :

$$\begin{cases} E(\hat{Q}_{xx}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Q}_{xx}(i) = \langle R \rangle \{Y^{*(1)}\} \\ E(\hat{Q}_{xy}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Q}_{xy}(i) = \langle R \rangle \{Y^{*(2)}\} \end{cases} \quad (2.112)$$

La variance du paramètre \hat{Q}_{xx} s'écrit :

$$V(\hat{Q}_{xx}) = E \left[\left(\hat{Q}_{xx} - E(\hat{Q}_{xx}) \right) \left(\overline{\hat{Q}_{xx} - E(\hat{Q}_{xx})} \right) \right] \quad (2.113)$$

En fonction de l'équation 2.111, l'expression de cette variance devient :

$$\begin{aligned} V(\hat{Q}_{xx}) &= E \left[\left(\gamma \langle R \rangle \{Y_{app}^{*(1)}\} \left(\int_S \kappa_{xx}^{*(1)} N_{xx} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*(1)} N_{yy} dS + \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*(1)} N_{ss} dS \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma \langle R \rangle \{Y_{app}^{*(2)}\} \left(\int_S \kappa_{xx}^{*(1)} N_{yy} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*(1)} N_{xx} dS - \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*(1)} N_{ss} dS \right) + \gamma O(\gamma) \right) \cdot \right. \\ &\quad \left(\gamma \langle R \rangle \{ \overline{Y_{app}^{*(1)}} \} \left(\int_S \overline{\kappa_{xx}^{*(1)}} \overline{N_{xx}} dS + \int_S \overline{\kappa_{yy}^{*(1)}} \overline{N_{yy}} dS + \frac{1}{2} \int_S \overline{\kappa_{ss}^{*(1)}} \overline{N_{ss}} dS \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma \langle R \rangle \{ \overline{Y_{app}^{*(2)}} \} \left(\int_S \overline{\kappa_{xx}^{*(1)}} \overline{N_{yy}} dS + \int_S \overline{\kappa_{yy}^{*(1)}} \overline{N_{xx}} dS - \frac{1}{2} \int_S \overline{\kappa_{ss}^{*(1)}} \overline{N_{ss}} dS \right) + \gamma O(\gamma) \right) \right] \\ &= \gamma^2 \langle \hat{Q}_{app} \rangle E \left[\left\{ N^{(1)} \right\} \left\{ \overline{N^{(1)}} \right\} \right] \left\{ \overline{\hat{Q}_{app}} \right\} + \gamma^2 O(\gamma) \end{aligned} \quad (2.114)$$

Le résultat du développement 2.106 montre que les moyennes spatiales des produits croisés tels que $N_{xx} \cdot \overline{N_{yy}}$ sont nulles. Il est alors possible d'écrire plus synthétiquement les produits restants en définissant les vecteurs lignes à deux composantes $\langle N^\alpha \rangle$ tels que :

$$\begin{aligned} \langle N^\alpha \rangle &= \left\langle \int_S \kappa_{xx}^{*\alpha} N_{xx} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*\alpha} N_{yy} dS + \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*\alpha} N_{ss} dS, \right. \\ &\quad \left. \int_S \kappa_{xx}^{*\alpha} N_{yy} dS + \int_S \kappa_{yy}^{*\alpha} N_{xx} dS - \frac{1}{2} \int_S \kappa_{ss}^{*\alpha} N_{ss} dS \right\rangle \quad \text{pour } \alpha = (1), (2). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Les vecteurs colonnes $\{N^\alpha\}$ en sont naturellement leurs transposés.

D'autre part, il est pratique de noter $\langle \hat{Q}_{app}^\alpha \rangle = \langle R \rangle \{Y_{app}^{*\alpha}\}$ ce qui conduit à l'introduction du vecteur ligne $\langle \hat{Q}_{app} \rangle$:

$$\langle \hat{Q}_{app} \rangle = \left\langle \hat{Q}_{app}^{(1)} \quad \hat{Q}_{app}^{(2)} \right\rangle = \left\langle \langle R \rangle \{ Y_{app}^{*(1)} \} \quad \langle R \rangle \{ Y_{app}^{*(2)} \} \right\rangle \quad (2.116)$$

La variance du paramètre \hat{Q}_{xx} peut alors se mettre sous une forme plus synthétique :

$$V(\hat{Q}_{xx}) = \gamma^2 \langle \hat{Q}_{app} \rangle E \left[\left\{ N^{(1)} \right\} \left\langle \overline{N^{(1)}} \right\rangle \right] \left\{ \overline{\hat{Q}_{app}} \right\} + \gamma^2 O(\gamma) \quad (2.117)$$

Un calcul analogue peut être conduit sur \hat{Q}_{xy} , ce qui mène aux expressions des variances des deux paramètres recherchés :

$$\begin{cases} V(\hat{Q}_{xx}) = \gamma^2 \langle \hat{Q}_{app} \rangle E \left[\left\{ N^{(1)} \right\} \left\langle \overline{N^{(1)}} \right\rangle \right] \left\{ \overline{\hat{Q}_{app}} \right\} + \gamma^2 O(\gamma) \\ V(\hat{Q}_{xy}) = \gamma^2 \langle \hat{Q}_{app} \rangle E \left[\left\{ N^{(2)} \right\} \left\langle \overline{N^{(2)}} \right\rangle \right] \left\{ \overline{\hat{Q}_{app}} \right\} + \gamma^2 O(\gamma) \end{cases} \quad (2.118)$$

Ces variances font chacune apparaître le terme γ^2 multiplié par un facteur dont une évaluation va être effectuée.

Les moyennes $E \left[\left\{ N^\alpha \right\} \left\langle \overline{N^\alpha} \right\rangle \right]$ des expressions précédentes sont des matrices 2×2 \mathbb{E}^α , dont les termes s'écrivent à partir des composantes $N^\alpha(i)$, avec $i = 1, 2$:

$$\mathbb{E}^\alpha = \begin{bmatrix} E \left[N^\alpha(1) \overline{N^\alpha(1)} \right] & E \left[N^\alpha(1) \overline{N^\alpha(2)} \right] \\ E \left[N^\alpha(2) \overline{N^\alpha(1)} \right] & E \left[N^\alpha(2) \overline{N^\alpha(2)} \right] \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

Les calculs des termes de la matrice \mathbb{E}^α font intervenir les calculs des espérances mathématiques de produits tels que :

$$E \left[\left(\int_S \kappa_{xx}^{*\alpha} N_{xx} dS \right) \left(\int_S \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}} \overline{N_{xx}} dS \right) \right] \quad (2.120)$$

Les différents champs n'étant connus que de manière discrète (Modèle E.F. des simulations ou pixels de la caméra), les intégrales sont évaluées numériquement par sommation. Les coordonnées (x_p, y_p) sont celles des points où sont connus les champs et S_p sont les aires connues des éléments finis du modèle de simulation ou des pixels de la caméra. Les bruits étant non corrélés, les moyennes telles que celle de l'équation 2.120 peuvent alors être développées comme suit :

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\int_S \kappa_{xx}^{*\alpha} N_{xx} dS \right) \left(\int_S \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha} N_{xx}} dS \right) \right] \\
&= E \left[\left(\sum_{p=1}^{N_p} S_p \kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) N_{xx}(x_p, y_p) \right) \left(\sum_{q=1}^{N_p} S_p \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_q, y_q) N_{xx}(x_q, y_q)} \right) \right] \\
&= S_p^2 E \left[\sum_{p=1}^{N_p} \sum_{q=1}^{N_p} \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_q, y_q)} N_{xx}(x_p, y_p) \overline{N_{xx}(x_q, y_q)} \right) \right] \quad (2.121) \\
&= S_p^2 E \left[\sum_{p=1}^{N_p} \left(\left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p)} \right) \left(N_{xx}(x_p, y_p) \overline{N_{xx}(x_p, y_p)} \right) \right) \right] \\
&= S_p^2 \sum_{p=1}^{N_p} \left(\left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p)} \right) E \left[\left(N_{xx}(x_p, y_p) \overline{N_{xx}(x_p, y_p)} \right) \right] \right)
\end{aligned}$$

Dans le terme final on reconnaît la fonction d'autocorrélation de la composante de bruit N_{xx} qui est égale à 2 (Equation 2.106). La valeur moyenne du produit considéré est donc :

$$E \left[\left(\int_S \kappa_{xx}^{*\alpha} N_{xx} dS \right) \left(\int_S \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha} N_{xx}} dS \right) \right] = 2S_p^2 \sum_{p=1}^{N_p} \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p)} \right) \quad (2.122)$$

Les calculs des autres moyennes peuvent être conduits de manière analogue et conduisent à des résultats similaires. Il est alors possible de développer les termes diagonaux de la matrice \mathbb{E}^α :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\alpha(1, 1) &= \mathbb{E}^\alpha(2, 2) \\
&= 2S_p^2 \sum_{p=1}^{N_p} \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p)} + \kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p)} + \frac{1}{4} \kappa_s^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{ss}^{*\alpha}(x_p, y_p)} \right) \quad (2.123)
\end{aligned}$$

ainsi que les termes anti-diagonaux de la matrice \mathbb{E}^α :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\alpha(1, 2) &= \mathbb{E}^\alpha(2, 1) \\
&= 2S_p^2 \sum_{p=1}^{N_p} \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p)} + \kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p)} - \frac{1}{4} \kappa_s^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{ss}^{*\alpha}(x_p, y_p)} \right) \quad (2.124)
\end{aligned}$$

Ces développements permettent d'écrire les expressions des variances des paramètres \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} (équations 2.118) :

$$\begin{cases} V(\hat{Q}_{xx}) = \gamma^2 (\eta^{(1)})^2 \\ V(\hat{Q}_{xy}) = \gamma^2 (\eta^{(2)})^2 \end{cases} \quad (2.125)$$

dont il est aisé de tirer les expressions des écarts-types :

$$\begin{cases} \sigma(\hat{Q}_{xx}) = \gamma (\eta^{(1)}) \\ \sigma(\hat{Q}_{xy}) = \gamma (\eta^{(2)}) \end{cases} \quad (2.126)$$

Dans ces expressions, les termes $(\eta^\alpha)^2$ proviennent des développements des équations 2.118 et s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\eta^\alpha)^2 = & 2S_p^2 \left[\left(\hat{Q}_{app}^{(1)} \overline{\hat{Q}_{app}^{(1)}} + \hat{Q}_{app}^{(2)} \overline{\hat{Q}_{app}^{(2)}} \right) \sum_{p=1}^{N_p} \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p)} + \kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p)} \right) \right. \\ & + \left(\hat{Q}_{app}^{(1)} \overline{\hat{Q}_{app}^{(2)}} + \hat{Q}_{app}^{(2)} \overline{\hat{Q}_{app}^{(1)}} \right) \sum_{p=1}^{N_p} \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p)} + \kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p)} \right) \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(\hat{Q}_{app}^{(1)} - \hat{Q}_{app}^{(2)} \right) \left(\overline{\hat{Q}_{app}^{(1)} - \hat{Q}_{app}^{(2)}} \right) \sum_{p=1}^{N_p} \left(\kappa_{ss}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{ss}^{*\alpha}(x_p, y_p)} \right) \right] + O(\gamma) \end{aligned}$$

pour $\alpha = (1), (2)$. (2.127)

Le terme $+O(\gamma)$ indique que cette relation ne fournit que des valeurs approchées des termes $(\eta^\alpha)^2$. En effet les valeurs exactes seraient données par la relation suivante tirée de l'équation 2.111 :

$$\begin{aligned} (\eta^\alpha)^2 = & 2S_p^2 \left[\left(\hat{Q}_{xx} \overline{\hat{Q}_{xx}} + \hat{Q}_{xy} \overline{\hat{Q}_{xy}} \right) \sum_{p=1}^{N_p} \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p)} + \kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p)} \right) \right. \\ & + \left(\hat{Q}_{xx} \overline{\hat{Q}_{xy}} + \hat{Q}_{xy} \overline{\hat{Q}_{xx}} \right) \sum_{p=1}^{N_p} \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p)} + \kappa_{yy}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p)} \right) \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(\hat{Q}_{xx} - \hat{Q}_{xy} \right) \left(\overline{\hat{Q}_{xx} - \hat{Q}_{xy}} \right) \sum_{p=1}^{N_p} \left(\kappa_{ss}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{ss}^{*\alpha}(x_p, y_p)} \right) \right] \end{aligned}$$

pour $\alpha = (1), (2)$. (2.128)

Toutefois cette relation ne peut être utilisée car elle fait intervenir explicitement les inconnues \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} dont seules des valeurs approchées, $\hat{Q}_{app}^{(1)}$ et $\hat{Q}_{app}^{(2)}$, peuvent être identifiées.

Les écarts-types de ces dernières, pour n identifications, sont proportionnels à γ (dans l'équation 2.126) qui est l'incertitude de la mesure des champs de courbure. Si celle-ci demeure faible, les écarts-types sur les paramètres identifiés peuvent être respectivement estimés par $\gamma\eta^{(1)}$ et $\gamma\eta^{(2)}$ qui peuvent alors s'interpréter comme les incertitudes d'identification provenant du bruit sur les mesures de champs de courbure.

Dans le cadre des hypothèses, il existe ainsi une relation de proportionnalité entre les incertitudes de mesure et celles des identifications. Les termes η^α apparaissent comme les facteurs de sensibilité de la MCV au bruit aléatoire de mesure. L'identification du paramètre \hat{Q}^α sera d'autant plus précise que le facteur η^α sera faible. Toutefois l'incertitude sur un paramètre ne possède de véritable signification que rapportée à la valeur moyenne de celui-ci : $\gamma\eta^{(1)}/\|\hat{Q}_{app}^{(1)}\|$ et $\gamma\eta^{(2)}/\|\hat{Q}_{app}^{(2)}\|$ qui sont les coefficients de variation pour n identifications.

Il faut remarquer que les paramètres $\hat{Q}_{app}^{(1)}$ et $\hat{Q}_{app}^{(2)}$ possèdent des valeurs complexes. Les incertitudes absolues $\eta^{(1)}$ et $\eta^{(2)}$ sont des grandeurs réelles positives. En conséquence $\eta^{(1)}$ ne permet pas d'évaluer séparément les incertitudes sur la partie réelle (Q_{xx}) et sur la partie imaginaire (ωB_{xx}) du paramètre identifié. La même remarque s'applique évidemment à $\eta^{(2)}$ vis à vis de Q_{xy} et ωB_{xy} .

2.7.3.6 Minimisation des effets du bruit de mesure

L'idée maîtresse consiste à utiliser la minimisation, sur les résultats de la MCV, des effets du bruit de mesure des champs de courbure comme critère de sélection des champs virtuels. Ce choix doit conduire à la meilleure identification possible d'un paramètre donné. Dans le cas des champs virtuels par morceaux tels que $w^*(x, y) = \langle f(x, y) \rangle \{Y^{*\alpha}\}$, la sélection revient à choisir les vecteurs $\{Y^{*\alpha}\}$ des degrés de liberté virtuels minimisant $\eta^{(1)}/\|\hat{Q}_{app}^{(1)}\|$ ou $\eta^{(2)}/\|\hat{Q}_{app}^{(2)}\|$ suivant que $\alpha = (1), (2)$.

Les évaluations des facteurs η^α s'effectuent à l'aide des équations 2.128 dans lesquelles les courbures virtuelles κ_{xx}^* , κ_{yy}^* et κ_{ss}^* sont respectivement remplacées par leurs expressions des courbures virtuelles par morceaux $\langle b_{xx} \rangle \{Y^*\}$, $\langle b_{yy} \rangle \{Y^*\}$ et $\langle b_{ss} \rangle \{Y^*\}$. Les intégrales sur la surface de la plaque de produits de courbures sont obtenues par la sommation, sur les N_e éléments virtuels, des intégrales numériques telles que :

$$\begin{aligned}
\int_S \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x, y) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}}(x, y) \right) dS &= S_p \sum_{p=1}^{N_p} \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x_p, y_p) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}}(x_p, y_p) \right) \\
&= \sum_{l=1}^{N_e} \int_{S_l} \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x, y) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}}(x, y) \right) dS \\
&= \sum_{l=1}^{N_e} \frac{S_l}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\langle Y^{*\alpha} \rangle_l \{ b_{xx}(\mu, \xi) \}_l \langle b_{xx}(\mu, \xi) \rangle_l \{ \overline{Y^{*\alpha}} \}_l \right) d\mu d\xi \quad (2.129) \\
&= \langle Y^{*\alpha} \rangle \left[\sum_{l=1}^{N_e} \frac{S_l}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\{ b_{xx}(\mu, \xi) \}_l \langle b_{xx}(\mu, \xi) \rangle_l \right) d\mu d\xi \right] \{ \overline{Y^{*\alpha}} \} \\
&= \langle Y^{*\alpha} \rangle [I_1] \{ \overline{Y^{*\alpha}} \}
\end{aligned}$$

Dans l'équation précédente, les fonctions $\langle b_{xx} \rangle$, $\langle b_{yy} \rangle$ et $\langle b_{ss} \rangle$ sont les dérivées secondes des fonctions de forme $\langle f(x, y) \rangle$ (équation 2.85) dont le monôme de degré maximal est $x^3 y^3$. Les intégrations numériques sont effectuées à l'aide de la méthode de Gauss bi-dimensionnelle [76, 77] en utilisant 5×5 points sur chaque élément virtuel. Le degré maximal des polynômes intégrés est alors $x^9 y^9$ ce qui est *a priori* suffisant pour la précision de l'évaluation numérique.

Le résultat de l'équation 2.129 peut être écrit sous la forme :

$$\int_S \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x, y) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}}(x, y) \right) dS = \langle Y^{*\alpha} \rangle [I_1] \{ \overline{Y^{*\alpha}} \} \quad (2.130)$$

où $[I_1]$ est une matrice 2×2 telle que :

$$\begin{aligned}
[I_1] &= \left[\sum_{l=1}^{N_e} \frac{S e(l)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\{ b_{xx}(\mu, \xi) \}_l \langle b_{xx}(\mu, \xi) \rangle_l \right) d\mu d\xi \right] \\
&= \left[\sum_{l=1}^{N_e} \frac{S e(l)}{4} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(H_i H_j \{ b_{xx}(\mu_i, \xi_j) \}_l \langle b_{xx}(\mu_i, \xi_j) \rangle_l \right) \right) \right] \quad (2.131)
\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, H_i et H_j sont les coefficients d'intégration de Gauss [76]. Les intégrations des autres produits de courbures sont effectuées de manière analogue et donnent les résultats :

$$\begin{cases} \int_S \left(\kappa_{xx}^{*\alpha}(x, y) \overline{\kappa_{xx}^{*\alpha}(x, y)} \right) dS = \langle Y^{*\alpha} \rangle [I_2] \{ \overline{Y^{*\alpha}} \} \\ \int_S \left(\kappa_{yy}^{*\alpha}(x, y) \overline{\kappa_{yy}^{*\alpha}(x, y)} \right) dS = \langle Y^{*\alpha} \rangle [I_3] \{ \overline{Y^{*\alpha}} \} \\ \int_S \left(\kappa_{ss}^{*\alpha}(x, y) \overline{\kappa_{ss}^{*\alpha}(x, y)} \right) dS = \langle Y^{*\alpha} \rangle [I_4] \{ \overline{Y^{*\alpha}} \} \end{cases} \quad (2.132)$$

où $[I_2]$, $[I_3]$ et $[I_4]$ sont des matrices 2×2 issues des intégrations numériques suivantes :

$$\begin{cases} [I_2] = \left[\sum_{l=1}^{N_e} \frac{Se(l)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\{b_{yy}(\mu, \xi)\}_l \langle b_{yy}(\mu, \xi) \rangle_l \right) d\mu d\xi \right] \\ = \left[\sum_{l=1}^{N_e} \frac{Se(l)}{4} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(H_i H_j \{b_{yy}(\mu_i, \xi_j)\}_l \langle b_{yy}(\mu_i, \xi_j) \rangle_l \right) \right) \right] \\ [I_3] = \left[\sum_{l=1}^{N_e} \frac{Se(l)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\{b_{xx}(\mu, \xi)\}_l \langle b_{yy}(\mu, \xi) \rangle_l + \{b_{yy}(\mu, \xi)\}_l \langle b_{xx}(\mu, \xi) \rangle_l \right) d\mu d\xi \right] \\ = \left[\sum_{l=1}^{N_e} \frac{Se(l)}{4} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j \left(\{b_{xx}(\mu_i, \xi_j)\}_l \langle b_{yy}(\mu_i, \xi_j) \rangle_l + \{b_{yy}(\mu_i, \xi_j)\}_l \langle b_{xx}(\mu_i, \xi_j) \rangle_l \right) \right) \right] \\ [I_4] = \left[\sum_{l=1}^{N_e} \frac{Se(l)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\{b_{ss}(\mu, \xi)\}_l \langle b_{ss}(\mu, \xi) \rangle_l \right) d\mu d\xi \right] \\ = \left[\sum_{l=1}^{N_e} \frac{Se(l)}{4} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(H_i H_j \{b_{ss}(\mu_i, \xi_j)\}_l \langle b_{ss}(\mu_i, \xi_j) \rangle_l \right) \right) \right] \end{cases} \quad (2.133)$$

Ces différentes expressions reportées dans l'équation 2.128 conduisent à une écriture synthétique des facteurs $(\eta^\alpha)^2$:

$$(\eta^\alpha)^2 = 1/2 \langle Y^{*\alpha} \rangle [\Gamma] \{ \overline{Y^{*\alpha}} \}, \quad \text{pour } \alpha = (1), (2). \quad (2.134)$$

qui apparaissent comme des formes quadratiques non négatives de la même matrice associée $[\Gamma]$ qui s'exprime :

$$\begin{aligned} [\Gamma] = 2S_p \left[\left(\hat{Q}_{xx} \overline{\hat{Q}_{xx}} + \hat{Q}_{xy} \overline{\hat{Q}_{xy}} \right) [I_1 + I_2] + \left(\hat{Q}_{xx} \overline{\hat{Q}_{xy}} + \hat{Q}_{xy} \overline{\hat{Q}_{xx}} \right) [I_3] \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(\hat{Q}_{xx} - \hat{Q}_{xy} \right) \left(\overline{\hat{Q}_{xx} - \hat{Q}_{xy}} \right) [I_4] \right] \quad (2.135) \end{aligned}$$

Les facteurs $(\eta^\alpha)^2$ ne peuvent être nuls que dans le cas de courbures virtuelles également nulles. Hormis ce cas, sans intérêt pratique pour la procédure d'identification, la matrice $[\Gamma]$ est symétrique définie positive. Ceci entraîne que les facteurs $(\eta^\alpha)^2$ possède chacun un minimum unique en fonction des vecteurs $\{Y^{*\alpha}\}$.

La sélection des vecteurs $\{Y^{*\alpha}\}$ peut donc s'opérer par minimisation de la fonction coût correspondant à l'expression de l'équation 2.134. Les relations linéaires des équations 2.96 et 2.99 expriment les conditions que doivent respecter les champs virtuels. Elles ont été rassemblées dans l'équation 2.102 rappelée ci-dessous et qui exprime les contraintes imposées à l'optimisation :

$$[A] \{Y^{*\alpha}\} = \{Z^\alpha\}$$

Les vecteurs $\{Y^{*\alpha}\}$ optimaux sont ceux qui correspondent au point de stationnarité de chaque Lagrangien \mathcal{L}^α :

$$\mathcal{L}^\alpha = 1/2 \langle Y^{*\alpha} \rangle [\Gamma] \{\overline{Y^{*\alpha}}\} + \langle \Lambda^\alpha \rangle \left([A] \{Y^{*\alpha}\} - \{Z^\alpha\} \right), \quad \text{pour } \alpha = (1), (2). \quad (2.136)$$

dans lequel $\langle \Lambda^\alpha \rangle$ représente les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange. Les vecteurs $\{Y^{*\alpha}\}$ sont solutions des systèmes linéaires :

$$\left[\begin{array}{c|c} \Gamma & A^T \\ \hline A & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} Y^{*\alpha} \\ \Lambda^\alpha \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ Z^\alpha \end{array} \right\} ; \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.137)$$

Toutefois leurs résolutions sont impossibles directement, les paramètres recherchés étant inclus dans les composantes de la matrice $[\Gamma]$. Les expressions exactes et approchées de $(\eta^\alpha)^2$ (respectivement les équations 2.127 et 2.128) ne diffèrent que par le terme $+O(\gamma)$ qui est considéré négligeable dans l'hypothèse d'un bruit faible.

En utilisant des valeurs approchées $\hat{Q}_{app}^{(1)}$ et $\hat{Q}_{app}^{(2)}$ respectivement pour les paramètres \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} , il est possible de calculer des valeurs approximatives de $(\eta^\alpha)^2$:

$$(\eta_{app}^\alpha)^2 = 1/2 \langle Y^{*\alpha} \rangle [\Gamma_{app}] \{\overline{Y^{*\alpha}}\} ; \quad \alpha = (1), (2) \quad (2.138)$$

expression dans laquelle la matrice $[\Gamma_{app}]$ est égale à :

$$\begin{aligned} [\Gamma_{app}] = 2S_p \left[\left(\hat{Q}_{app}^{(1)} \overline{\hat{Q}_{app}^{(1)}} + \hat{Q}_{app}^{(2)} \overline{\hat{Q}_{app}^{(2)}} \right) [I_1 + I_2] + \left(\hat{Q}_{app}^{(1)} \overline{\hat{Q}_{app}^{(2)}} + \hat{Q}_{app}^{(2)} \overline{\hat{Q}_{app}^{(1)}} \right) [I_3] \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(\hat{Q}_{app}^{(1)} - \hat{Q}_{app}^{(2)} \right) \left(\overline{\hat{Q}_{app}^{(1)} - \hat{Q}_{app}^{(2)}} \right) [I_4] \right] ; \quad \alpha = (1), (2) \quad (2.139) \end{aligned}$$

Les vecteurs $\{Y^{*\alpha}\}$ qui définissent les champs virtuels optimaux sont les points de stationnarité du Lagrangien \mathcal{L}_{app}^α qui s'écrit :

$$\mathcal{L}_{app}^\alpha = 1/2 \langle Y^{*\alpha} \rangle [\Gamma_{app}] \{\overline{Y^{*\alpha}}\} + \langle \Lambda^\alpha \rangle \left([A] \{Y^{*\alpha}\} - \{Z^\alpha\} \right) ; \quad \alpha = (1), (2) \quad (2.140)$$

qui conduisent aux résolutions maintenant possibles des systèmes linéaires :

$$\left[\begin{array}{c|c} \Gamma_{app} & A^T \\ \hline A & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} Y^{*\alpha} \\ \Lambda^\alpha \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ Z^\alpha \end{array} \right\}, \quad \text{pour } \alpha = (1), (2) \quad (2.141)$$

Les valeurs des paramètres matériau $\hat{Q}_{app}^{(1)}$ et $\hat{Q}_{app}^{(2)}$ qui tendent respectivement vers \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} sont celles qui minimisent l'écart entre les facteurs $(\eta_{app}^\alpha)^2$ et $(\eta^\alpha)^2$.

En conséquence un processus itératif est utilisé pour parvenir aux vecteurs $\{Y^{*(1)}\}$ et $\{Y^{*(2)}\}$ des champs virtuels *spéciaux optimisés* et ainsi aux valeurs des paramètres à identifier :

- itération 0 : Les valeurs initiales $\{\hat{Q}_{app(0)}\}$ sont introduites permettant le calcul de $[\Gamma_{app(0)}]$. Les résolutions des systèmes linéaires 2.141 permettent de déterminer les vecteurs $\{Y_{(0)}^{*\alpha}\}$ qui conduisent à l'identification des valeurs $\{\hat{Q}_{app(1)}\}$ des paramètres.
- itération 1 : Les résultats $\{\hat{Q}_{app(1)}\}$ sont utilisés pour calculer $[\Gamma_{app(1)}]$ qui conduit aux vecteurs $\{Y_{(1)}^{*\alpha}\}$ et à l'identification des valeurs $\{\hat{Q}_{app(2)}\}$
- ...
- itération k : Par le même processus, les résultats $\{\hat{Q}_{app(k)}\}$ de l'itération précédente conduisent à l'identification de $\{\hat{Q}_{app(k+1)}\}$

Le processus itératif est poursuivi jusqu'à ce que la différence ε entre les paramètres issus de deux itérations successives soient inférieures par exemple à 0,1% ($\varepsilon < 0,1\%$)

$$\varepsilon = \left\| \frac{\hat{Q}_{app}^{(k+1)} - \hat{Q}_{app}^{(k)}}{\hat{Q}_{app}^{(k+1)}} \right\|$$

La procédure est telle qu'aucune connaissance sur les propriétés du matériau n'est nécessaire pour les valeurs initiales $\{\hat{Q}_{app}^{(0)}\}$ quelque soit les valeurs de départ. Les résultats numériques montrent que cette procédure converge rapidement. Généralement trois ou quatre itérations suffisent pour atteindre la convergence.

2.7.3.7 Validation numérique

Une validation numérique de la procédure a été effectuée à ce niveau de l'étude. Elle utilise les réponses vibratoires du modèle éléments finis de plaque présenté au paragraphe 2.7.1. Les champs virtuels utilisés sont des champs spéciaux par morceaux sélectionnés par la procédure de minimisation de l'effet du bruit de mesure sur les champs de courbure.

Deux types de champs ont été testés, respectivement 3×3 et 5×5 éléments virtuels. La figure 2.13 présente le découpage des deux champs virtuels. Le sous-domaine central est identique dans les deux cas et de dimensions beaucoup plus importantes que la zone d'encastrement. Ce choix provient de la volonté de correspondre au cas expérimental où le traitement des images a imposé la non prise en compte d'une large zone autour de la fixation.

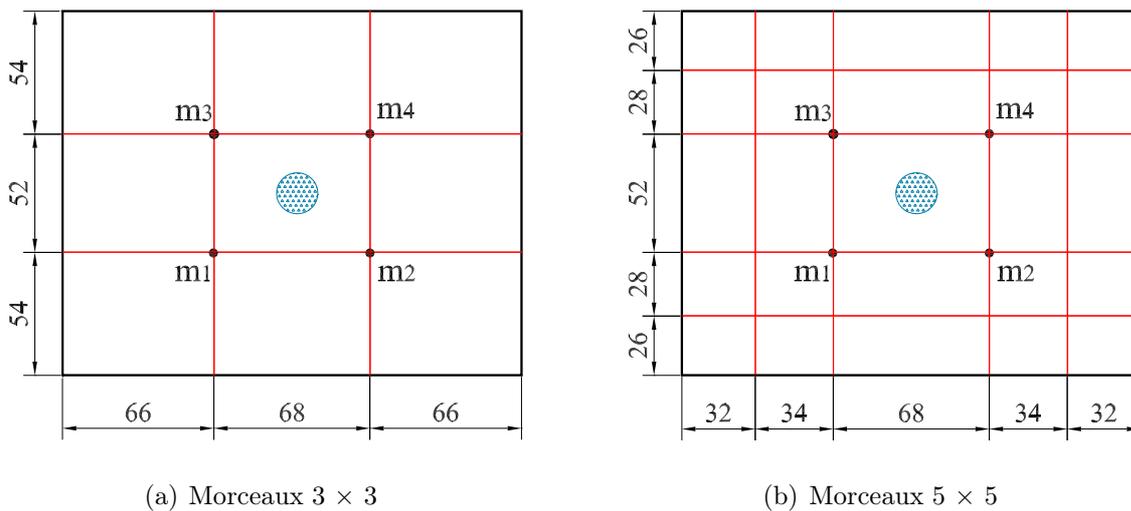


Figure 2.13 – Maillage du modèle E.F. de plaque en sous-domaines virtuels (cotes en *mm*)

Compte tenu des dimensions du modèle et de son maillage, les dimensions des éléments

finis rectangulaires équivalents aux pixels de l'image sont $2 \times 2 \text{ mm}^2$. Le découpage en éléments virtuels est tel qu'aucun "pixel" n'appartient simultanément à deux morceaux.

Dans un premier temps aucun bruit aléatoire n'a été ajouté aux champs de courbure et aucune erreur sur le mouvement d'entraînement n'a été introduite.

Les fenêtres de la figure 2.14 montrent les erreurs relatives sur les identifications obtenues avec les champs virtuels *spéciaux* par morceaux. Les erreurs apparaissent très faibles sur toute la gamme de fréquence considérée. Elles sont à comparer avec celles présentées dans la figure 2.8 obtenues avec des champs virtuels polynomiaux choisis intuitivement.

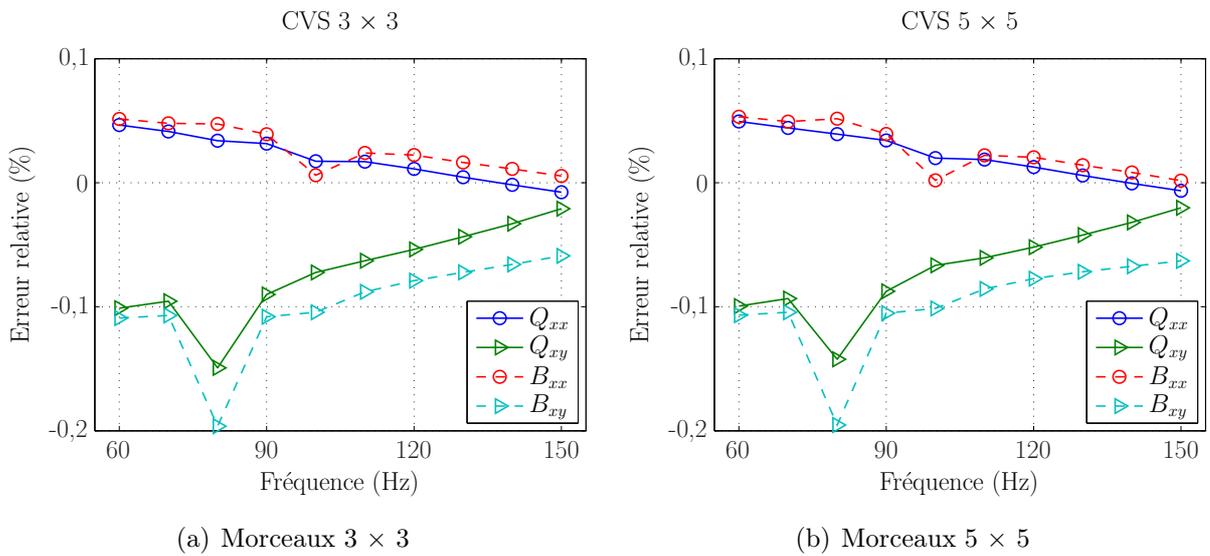


Figure 2.14 – Erreur relative des résultats identifiés sans bruit ajouté en utilisant deux types de champs virtuels par morceaux

Les résultats ci-dessus montrent l'innocuité de la procédure d'optimisation vis à vis de données non bruitées. Mais surtout ils valident l'efficacité des deux contraintes cherchant à imposer l'indépendance des équations et la nullité des travaux virtuels des efforts extérieurs. Les sensibilités relatives $\eta^{(1)}/\|\hat{Q}_{app}^{(1)}\|$ et $\eta^{(2)}/\|\hat{Q}_{app}^{(2)}\|$ sont également présentées dans la figure 2.15. Les champs de courbure ne présentent que le bruit numérique de la simulation par éléments finis, a priori de niveaux identiques pour toutes les fréquences de réponses. Tous les calculs de réponses vibratoires ont été effectués avec la même amplitude d'entraînement.

Les deux champs virtuels testés conduisent à des résultats très proches. Ceci laisse penser à une faible influence de la taille des éléments virtuels. Cette remarque reste toutefois à confirmer.

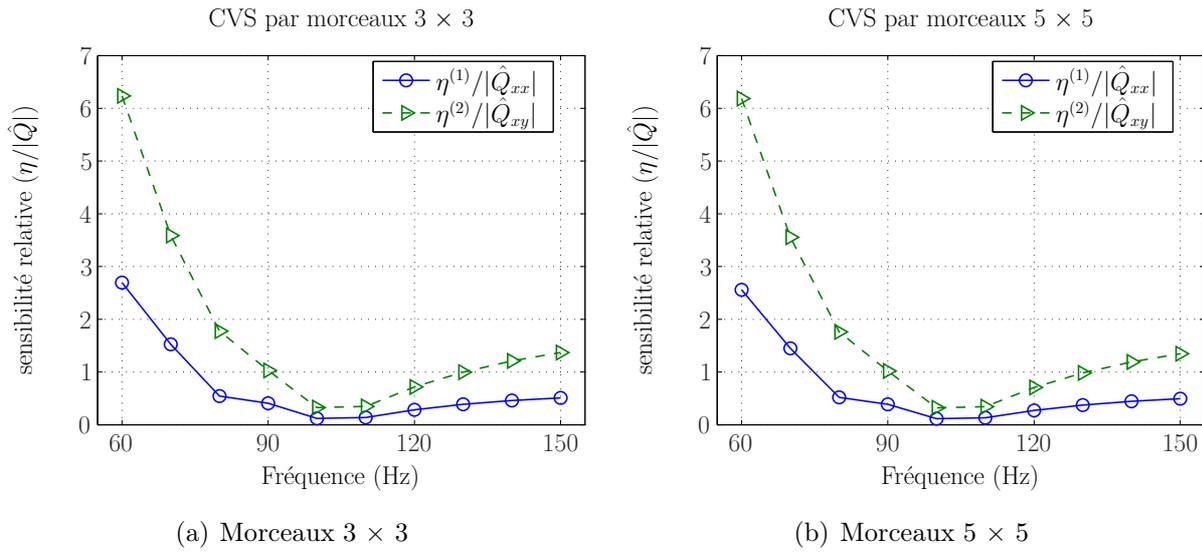


Figure 2.15 – Sensibilités relatives sans bruit ajouté en utilisant deux types de champs virtuels par morceaux

Les courbes de sensibilités relatives montrent toutes un minimum aux environs de 100 Hz (en résonance) qui correspond à une fréquence de résonance et donc à une bande fréquentielle de meilleur rapport signal-bruit. Par contre les réponses à 60 Hz possèdent les plus faibles amplitudes et donc les plus faibles rapports signaux / bruit. Les champs de pente, flèche et courbure à 60 Hz et à 100 Hz sont présentés dans la figure 2.16. Cette dernière réponse est nettement plus importante que celle à 60 Hz , ceci peut expliquer la relative sensibilité au bruit dans les cas de faibles amplitudes vibratoires entraînant des faibles courbures.

L'introduction de la notion de courbure quadratique moyenne $\bar{\kappa}$ permet une étude de cette sensibilité :

$$\bar{\kappa} = \sqrt{\frac{1}{S_u} \int_{S_u} \frac{1}{3} \left(\|\kappa_{xx}(x, y)\|^2 + \|\kappa_{yy}(x, y)\|^2 + \|\kappa_{ss}(x, y)\|^2 \right) dS} \quad , \quad (x, y) \in S_u \quad (2.142)$$

où S_u correspond à l'aire de la surface de la plaque diminuée de l'aire du sous-domaine virtuel central couvrant l'encastrement. Les courbures de cette partie ne contribuant pas aux travaux virtuels, elles ne doivent donc pas être prises en compte.

La fenêtre (a) de la figure 2.17 montre en fonction de la fréquence d'excitation, l'évolution de ces courbures moyennes calculées à partir des simulations des réponses à un même mouvement d'entraînement d'amplitude $0,1 \text{ mm}$. Cette valeur majore nettement les amplitudes utilisées expérimentalement.

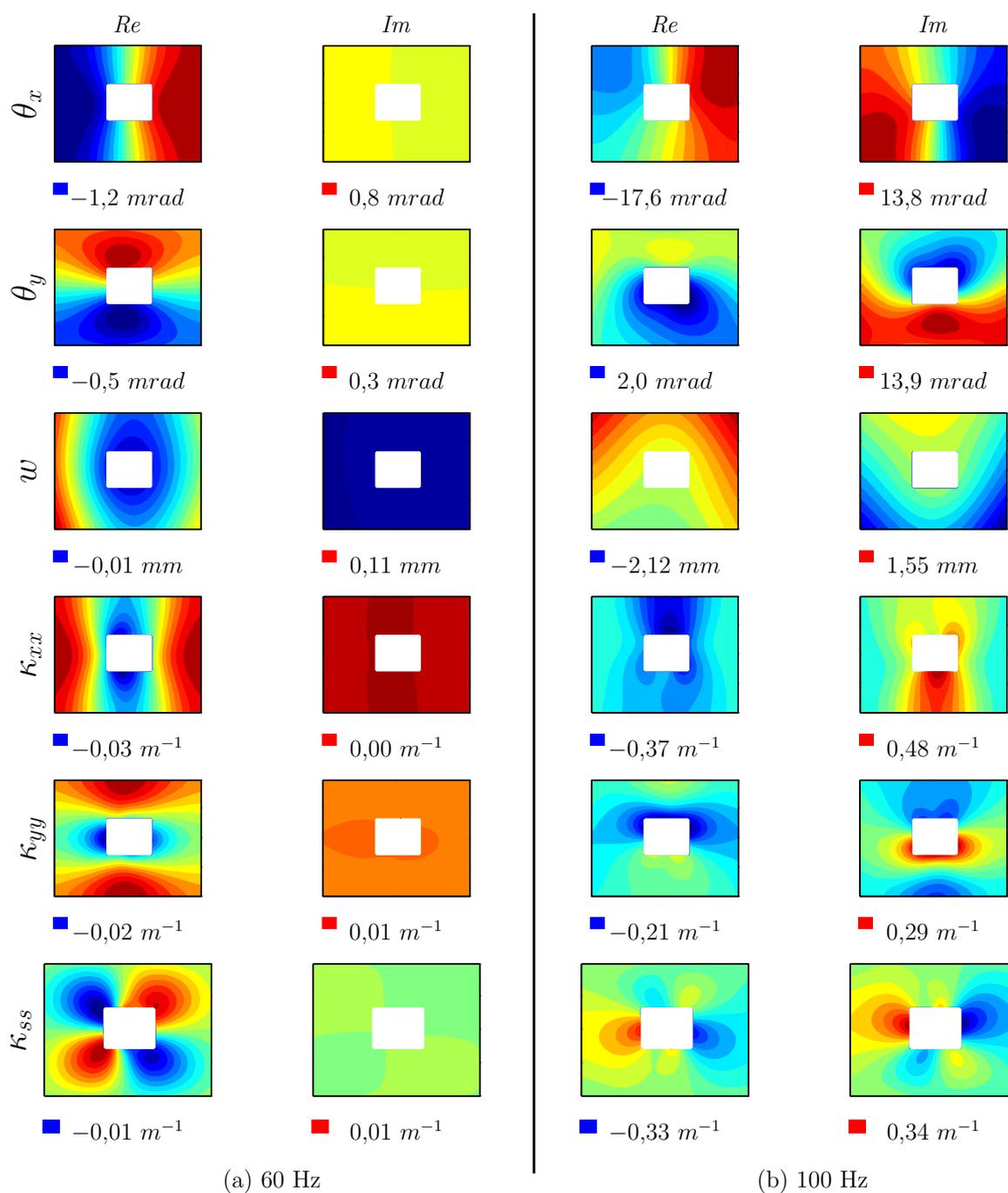


Figure 2.16 – Champs de pente, flèche et courbure issus de simulations : parties réelles et imaginaires. (a) 60 Hz (hors-résonance) ; (b) 100 Hz (en résonance)

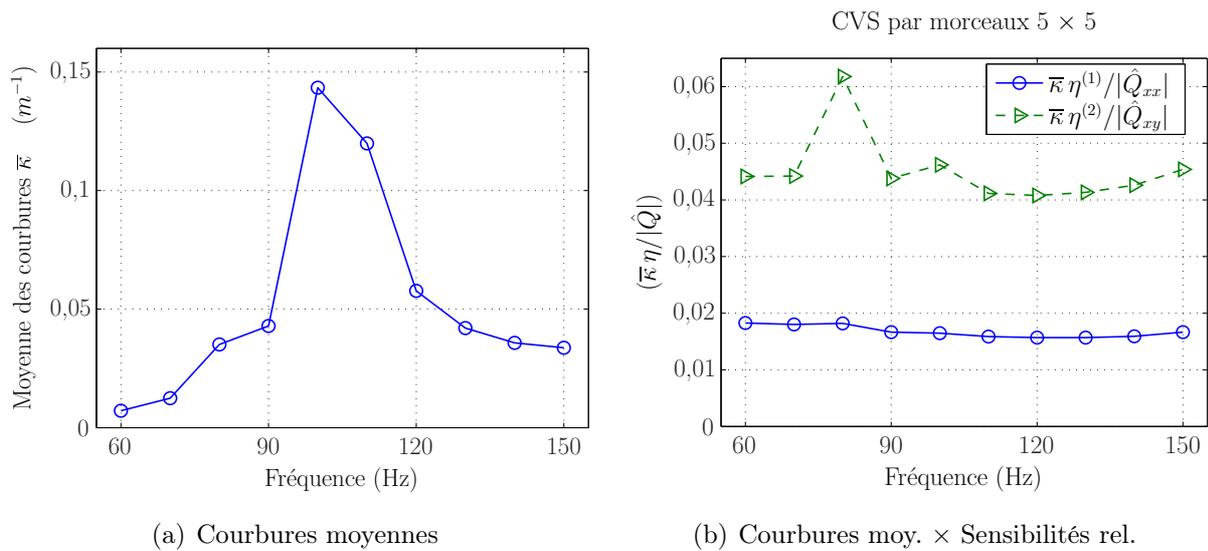


Figure 2.17 – Courbures moyennes et sensibilités relatives

La fenêtre (b) présente ces courbures moyennes multipliées par les sensibilités relatives $\bar{\kappa} \cdot \eta^{(1)} / |\hat{Q}_{xx}|$ et $\bar{\kappa} \cdot \eta^{(2)} / |\hat{Q}_{xy}|$. Malgré les très grandes variations observables sur les courbures moyennes, les deux valeurs des deux quantités sont pratiquement constantes, à l'exception de la seconde à la fréquence de 80 Hz . Ceci confirme que la sensibilité relative varie à l'inverse du rapport signal / bruit et donc à bruit constant, de l'amplitude de la réponse de la plaque.

La figure 2.18 montrent les résultats d'identification avec un bruit aléatoire d'un niveau $\gamma = 10^{-3} m^{-1}$ ajouté aux champs de courbure simulés obtenus sans aucune erreur sur l'entraînement. La fenêtre (a) montrent les erreurs relatives moyennes sur les quatre paramètres extraits à partir de 30 identifications. Les écarts demeurent très faibles et confirment l'intérêt de la méthode de minimisation. La fenêtre (b) à droite affiche les coefficients de variation des paramètres complexes identifiés \hat{Q}_{xx} et \hat{Q}_{xy} calculés de deux manières différentes :

- les marqueurs \bullet sur les traits respectivement continus et discontinus indiquent les valeurs calculées à partir des expressions : $\gamma(\eta^{(1)}) / \|\hat{Q}^{(1)}\|$ et $\gamma(\eta^{(2)}) / \|\hat{Q}^{(2)}\|$ utilisant les valeurs des paramètres identifiés à l'aide des champs virtuels optimisés ;
- les marqueurs \circ et \triangleright qui indiquent les coefficients de variation calculés sur les résultats des trente identifications.

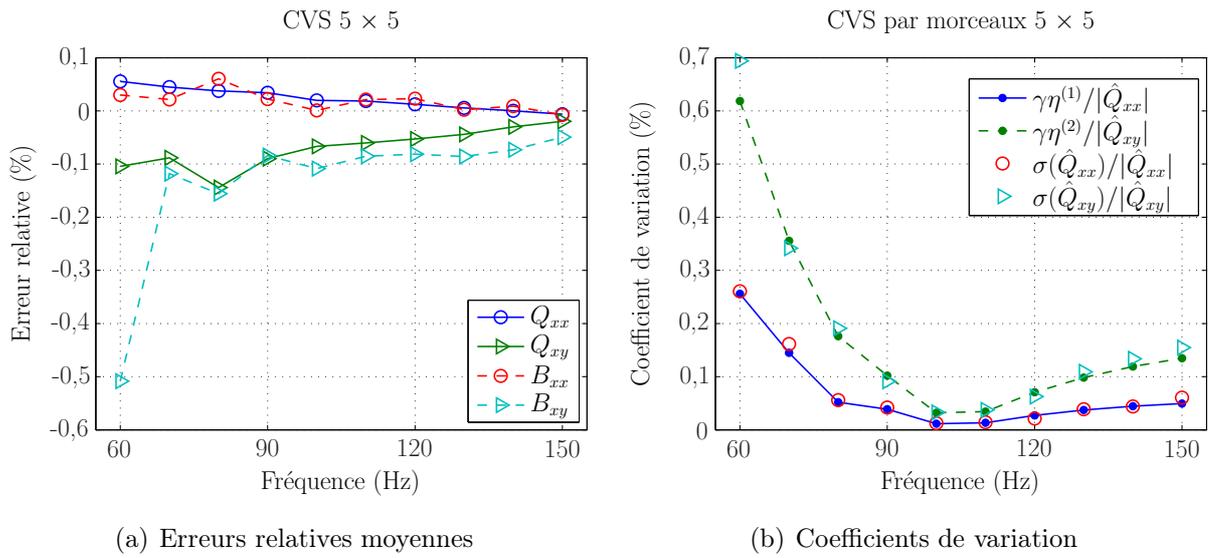


Figure 2.18 – Identification avec bruit : erreurs relatives moyennes et coefficients de variation (prévues et calculées)

A l'exception des valeurs sur \hat{Q}_{xx} à 60 Hz la coïncidence entre les deux séries de résultats est très bonne. Par hypothèse le bruit doit rester très faible par rapport au champ réel.

Ceci prouve que l'évaluation des écart-types sur laquelle s'appuie la procédure de minimisation est correcte dans le cadre des hypothèses avancées.

2.7.3.8 Minimisation des effets des erreurs de mesure du mouvement d'entraînement

Les fenêtres de la figure 2.19 montrent les erreurs relatives sur les paramètres identifiés à l'aide de champs virtuels spéciaux à 5×5 morceaux. Elles ont été obtenues à partir des champs de courbure simulés, sans ajout de bruit aléatoire mais avec introduction d'erreurs sur le module et sur la phase du mouvement d'entraînement.

Ces résultats sont du même ordre de grandeur que ceux de la figure 2.9 obtenus à partir des mêmes champs de courbure et à l'aide de champs virtuels polynomiaux choisis intuitivement.

Dans les deux cas, une erreur de mesure sur la phase du mouvement d'excitation entraîne des conséquences très importantes sur la précision de l'identification. La minimisation de ce type d'effets est le quatrième critère de sélection des champs virtuels dits *optimisés*.

L'équation établie en 2.74 et rappelée ci-dessous montre une estimation de l'erreur d'iden-

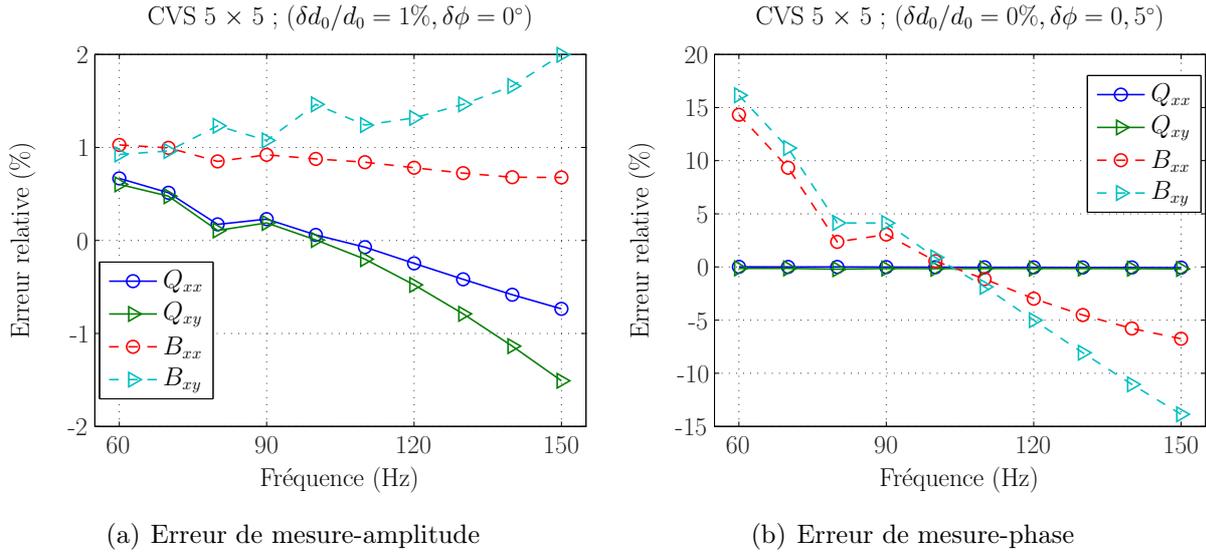


Figure 2.19 – Influence des erreurs de mesures du mouvement d'entraînement : amplitude et phase

tification $\delta(\hat{Q})$ introduite par une erreur δd sur le module et la phase de l'entraînement $\delta d \in \mathbb{C}$.

$$\delta \begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{12\rho\omega^2}{h^2} [\mathbb{H}]^{-1} \delta d \begin{Bmatrix} \int_S w^{*(1)} dS \\ \int_S w^{*(2)} dS \end{Bmatrix}$$

Si les champs virtuels sont choisis tels que les deux intégrales du membre de droite soient nulles, les erreurs tendent évidemment vers zéro. Ceci débouche sur une contrainte supplémentaire portant sur les champs virtuels de déplacement hors-plan qui doivent vérifier :

$$\int_S w^{*\alpha} dS = 0 \quad \text{pour } \alpha = (1), (2) \quad (2.143)$$

Ces intégrales peuvent être évaluées numériquement. Dans le cas des champs virtuels par morceaux, elles s'expriment :

$$\begin{aligned} \int_S w^{*\alpha} dS &= \sum_{p=1}^{N_p} \left(w^{*\alpha}(x_p, y_p) S_p \right) = \sum_{p=1}^{N_p} \left(\langle f(\mu_p, \xi_p) \rangle \{ Y^{*\alpha} \} S_p \right) \\ &= S_p \left(\sum_{p=1}^{N_p} \langle f(\mu_p, \xi_p) \rangle \right) \{ Y^{*\alpha} \} \end{aligned} \quad (2.144)$$

où N_p est le nombre de points où les champs sont connus (nœuds du modèle E.F. ou pixels de la caméra). La condition peut alors s'exprimer matriciellement :

$$\langle C \rangle [Y^{*\alpha}] = 0 \quad ; \quad \alpha = (1), (2) \quad (2.145)$$

avec le vecteur ligne $\langle C \rangle$ qui s'écrit :

$$\langle C \rangle = \sum_{p=1}^{N_p} \langle f(\mu_p, \xi_p) \rangle \quad (2.146)$$

La mise en place de cette contrainte consiste à ajouter à la matrice $[A]$ (équation 2.102) une ligne contenant les éléments du vecteur $\langle C \rangle$ et une composante nulle à la même ligne de chaque vecteur $\{Z^\alpha\}$.

Avec l'ensemble des contraintes, la relation finale d'identification s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \hat{Q}_{xx} \\ \hat{Q}_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{12 \rho \omega^2}{h^2} \begin{Bmatrix} \int_S w w^{*(1)} dS \\ \int_S w w^{*(2)} dS \end{Bmatrix} \quad (2.147)$$

La figure 2.20 montre les erreurs relatives sur les paramètres identifiés suite à l'introduction d'une erreur $\delta d = \delta d_0 \exp(j \delta \phi)$ sur le mouvement d'entraînement avec respectivement $\delta d_0 = 1\%$ et $\delta \phi = 0, 5^\circ$.

La procédure a dans un premier temps été appliquée sur des champs de courbure sans ajout de bruit aléatoire. L'identification a été conduite à l'aide de champs virtuels respectant l'ensemble des contraintes.

Tout en demeurant nettement inférieures à 1%, les erreurs relatives se révèlent un peu plus élevées que dans le cas précédent (Figure 2.15) certainement en raison de l'ajout d'une contrainte dans la procédure. Il faut noter que les simulations effectuées avec l'introduction d'erreurs plus importantes sur l'entraînement conduisent strictement aux mêmes résultats. Ceci confirme l'efficacité de cette dernière contrainte.

Outre la minimisation des conséquences des erreurs de mesures d'excitation, cette dernière contrainte supprime la nécessité de mesurer le mouvement d'entraînement, ce qui amène évidemment un allègement du dispositif expérimental. Il est toutefois à signaler que cette simplification ne dispense en rien de la nécessité de synchroniser l'acquisition des champs cinématiques avec le mouvement d'entraînement. En effet, les parties réelles

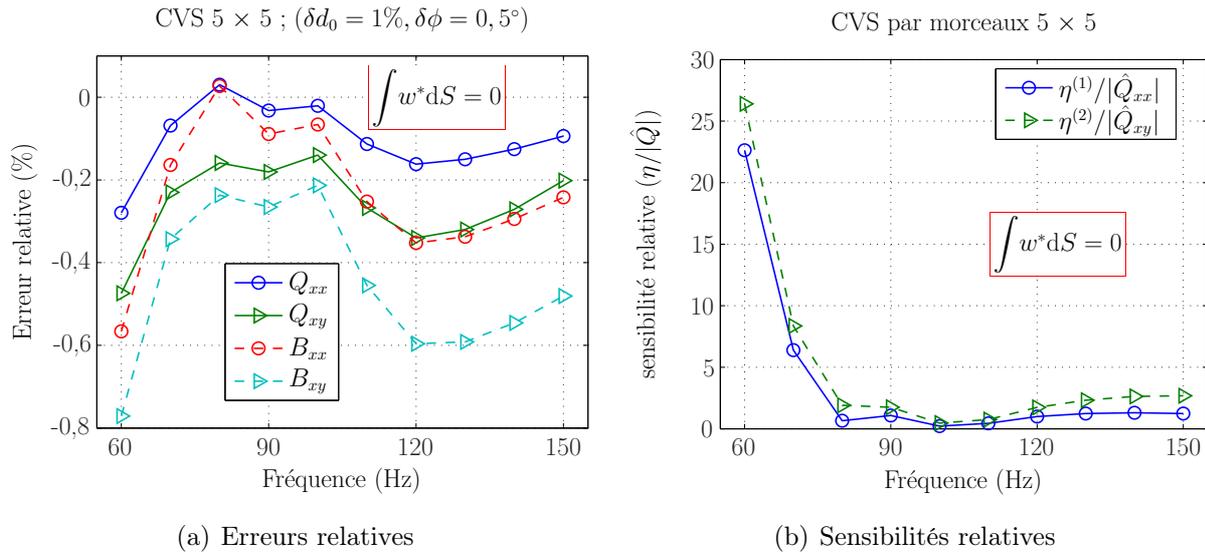


Figure 2.20 – Identification avec CVS minimisant le bruit de mesure des champs et les erreurs de mesures du mouvement d'entraînement ($\int w^* dS = 0$)

et imaginaires des champs physiques de courbure ont été définies respectivement comme leurs composantes en phase et en quadrature avec l'entraînement.

La figure 2.21 présente les résultats de la même identification que précédemment à l'exception de l'ajout de bruit aléatoire d'écart-type $\gamma = 10^{-3} m^{-1}$.

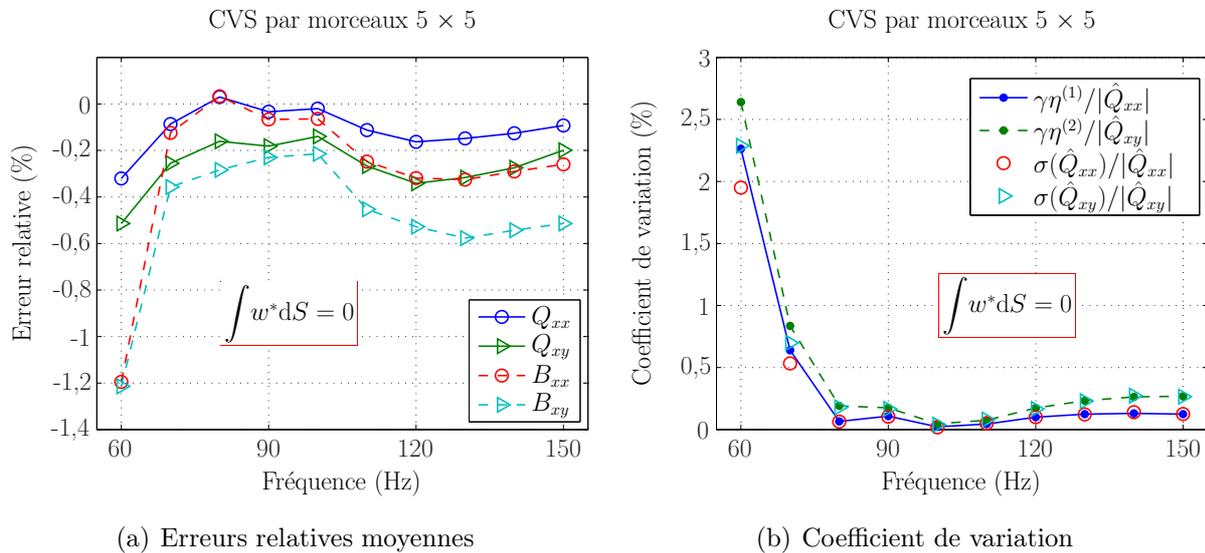


Figure 2.21 – Identification avec le bruit : erreurs relatives moyennes et coefficient de variation (prévues et calculées)

A l'exception des amortissements identifiés à la fréquence de $60Hz$ qui souffrent du plus

faible rapport signal / bruit, les erreurs relatives moyennes des paramètres matériau ne présentent pas d'altérations conséquentes dues à la présence de bruit de mesure (Voir la figure 2.20). Les erreurs restent très faibles et varient peu dans la gamme de fréquence étudiée.

La fenêtre 2.21(b) présente les coefficients de variation calculés et présentés de manières analogues à ceux de la figure 2.18(b). Dans le cas simulé, pour les fréquences d'excitation supérieures ou égales à $80Hz$ les coefficients de variations sont pratiquement nuls par opposition à ceux des deux fréquences les plus faibles. Ces derniers coefficients tout en restant très réduits semblent démontrer l'importance du rapport signal / bruit. En effet dans les plus basses fréquences considérées, d'une part la plaque ne présente pas de résonance et d'autre part l'excitation inertielle est faible, d'où des réponses vibratoires peu importantes de la plaque. Au niveau expérimental, ceci peut être partiellement compensé par l'augmentation de l'amplitude du mouvement d'entraînement.

2.7.3.9 Commentaires

Au paragraphe 2.7.3.6 le terme $\gamma\eta^\alpha$ a été présenté comme l'écart-type de l'identification d'un paramètre complexe \hat{Q}^α . Dans le cas de \hat{Q}_{xx} , les parties réelles et imaginaires sont respectivement Q_{xx} et ωB_{xx} . Toutefois les écart-types $\sigma(Q_{xx})$ et $\sigma(\omega B_{xx})$ ne peuvent être extraits directement de celui de \hat{Q}_{xx} ($\sigma(\hat{Q}_{xx})$). Il est toutefois possible d'écrire :

$$\left(\sigma(\hat{Q}_{xx})\right)^2 = \left(\sigma(Q_{xx})\right)^2 + \left(\sigma(\omega B_{xx})\right)^2 \quad (2.148)$$

Les bruits de mesure des champs de courbure ont été supposés aléatoires gaussiens. La figure 2.22 montre la construction de l'erreur sur \hat{Q}_{xx} à partir des erreurs sur Q_{xx} et ωB_{xx} . Le même raisonnement peut évidemment être tenu sur \hat{Q}_{xy} . Il suppose la distribution $\delta\hat{Q}_{xx}$ aléatoire gaussienne autour de \hat{Q}_{xx} et s'appuie sur l'hypothèse, vérifiée à travers les simulations numériques :

$$\sigma(Q_{xx}) = \sigma(\omega B_{xx}) \quad (2.149)$$

La figure 2.23(a) présente les écart-types calculés sur les quatre grandeurs Q_{xx} , Q_{xy} , ωB_{xx} et ωB_{xy} en appliquant les hypothèses précédentes aux résultats de la figure 2.21. En raison de la très grande plage de variation des différents écarts-types, une échelle logarithmique a été adoptée pour les ordonnées.

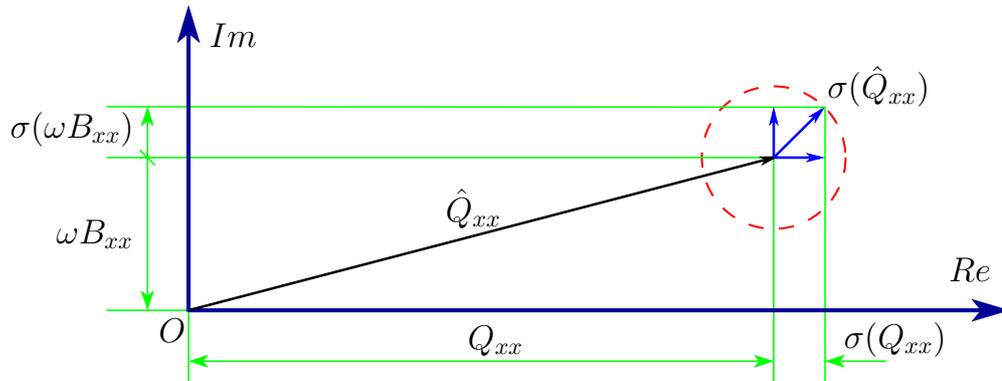


Figure 2.22 – Distribution de l’erreur du paramètre identifié avec les données bruitées : distribution aléatoire

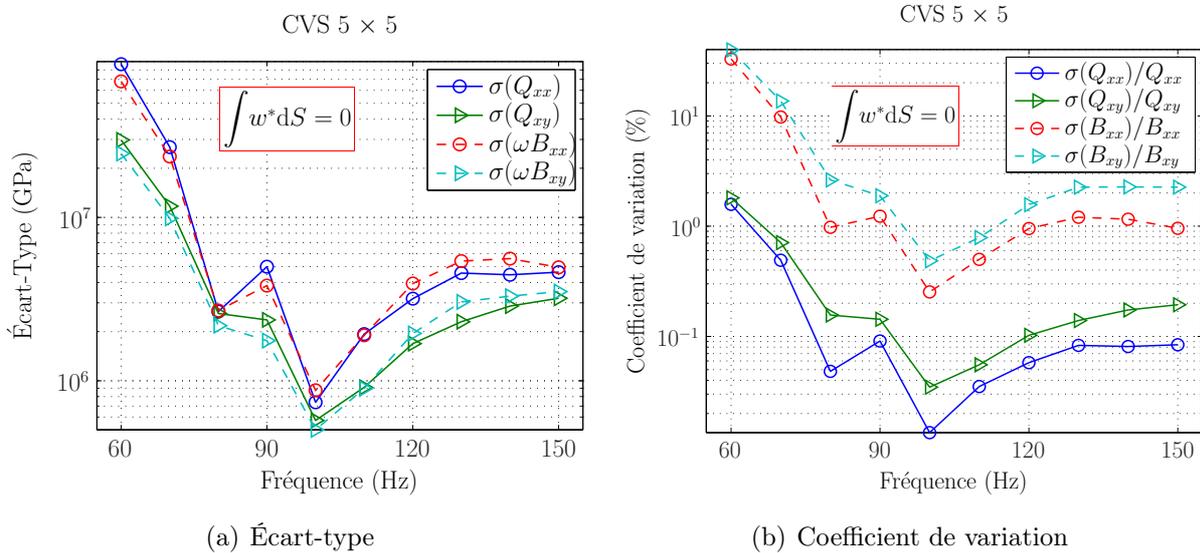


Figure 2.23 – Identification avec champs de courbure bruités : variations de l’écart-type

La figure 2.23(b) présente les coefficients de variation des paramètres matériau issus des résultats de la fenêtre (a). Tous les graphes montrent un minimum au voisinage de $100Hz$ qui est une fréquence de résonance, donc une bande fréquentielle présentant de plus fortes amplitudes de réponses. Les courbes montrent à même fréquence un rapport de l'ordre d'une décade entre les dispersions relatives des rigidités et des amortissements. Ces résultats peuvent s'expliquer par la différence importante entre les ordres de grandeur des rigidités et ceux des amortissements. En effet, compte tenu de l'équation 2.149 et de son homologue $\sigma(Q_{xy}) = \sigma(\omega B_{xy})$, les rapports des coefficients de variations entre rigidités et amortissements peuvent s'écrire respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma(Q_{xx})/Q_{xx}}{\sigma(B_{xx})/(B_{xx})} = \frac{\sigma(Q_{xx})/Q_{xx}}{\sigma(\omega B_{xx})/(\omega B_{xx})} = \frac{\sigma(Q_{xx})}{\sigma(\omega B_{xx})} \cdot \frac{\omega B_{xx}}{Q_{xx}} = \omega\beta_{xx} \\ \frac{\sigma(Q_{xy})/Q_{xy}}{\sigma(B_{xy})/(B_{xy})} = \omega\beta_{xy} \end{array} \right. \quad (2.150)$$

Les taux d'amortissement introduits dans le modèle éléments finis pour le calcul des champs cinématiques simulés sont :

$$\beta_{xx} = \beta_{xy} = 10^{-4} (s)$$

Pour la fréquence de $100Hz$, $\omega\beta_{xx} = \omega\beta_{xy} = 2\pi \times 100 \times 10^{-4} = 0,063$ soit un rapport entre coefficients de variation des rigidités et ceux des amortissements compris entre 10 et 20. C'est bien ce qui est observé dans la figure 2.23(b).

2.7.4 Champs Virtuels Spéciaux optimisés polynomiaux

En parallèle des développements des champs virtuels par morceaux, d'autres travaux ont porté sur la sélection de champs virtuels constitués de polynômes. Dans le cadre des plaques minces sollicitées en flexion, Grédiac *et al.* [72] ont proposé une méthodologie de génération systématique de champs virtuels de déplacement hors-plan dans une base de fonctions polynômiales telles que :

$$w^*(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m A_{ij} \left(\frac{x}{a}\right)^i \left(\frac{y}{b}\right)^j \quad (2.151)$$

dans lesquelles a et b sont des grandeurs représentatives de la plaque suivant les directions x et y . L'écriture équivalente ci-dessous se révèle d'une utilisation plus aisée :

$$w^*(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ (i=k-j)}}^k A_{ij} \left(\frac{x}{a}\right)^i \left(\frac{y}{b}\right)^j \quad (2.152)$$

Dans cette expression n apparaît directement comme le degré maximal du polynôme. Par analogie avec les champs virtuels par morceaux, il est possible d'écrire le champ virtuel de déplacement hors-plan sous la forme :

$$w^*(x, y) = \langle f(x, y) \rangle \{A_{ij}\} \quad (2.153)$$

dans laquelle le vecteur ligne $\langle f(x, y) \rangle$ est constitué de $N_m = (n+1)(n+2)/2$ monômes de degré maximal n :

$$f(x, y) = \left\langle x^0 y^0, \frac{x^1 y^0}{a}, \frac{x^0 y^1}{b}, \frac{x^2 y^0}{a^2}, \frac{x^1 y^1}{ab}, \frac{x^0 y^2}{b^2}, \dots, \frac{x^n y^0}{a^n}, \dots, \frac{x^0 y^n}{b^n} \right\rangle \quad (2.154)$$

Les champs virtuels de courbure sont évidemment obtenus par doubles dérivations du champ virtuel de déplacement hors-plan :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{xx}^*(x, y) = -\frac{1}{a^2} \sum_{k=2}^n \sum_{\substack{j=0 \\ (i=k-j)}}^k i(i-1)A_{ij} \left(\frac{x}{a}\right)^{i-2} \left(\frac{y}{b}\right)^j \\ \kappa_{yy}^*(x, y) = -\frac{1}{b^2} \sum_{k=2}^n \sum_{\substack{j=2 \\ (i=k-j)}}^k j(j-1)A_{ij} \left(\frac{x}{a}\right)^i \left(\frac{y}{b}\right)^{j-2} \\ \kappa_{ss}^*(x, y) = -\frac{1}{ab} \sum_{k=2}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (i=k-j)}}^k ijA_{ij} \left(\frac{x}{a}\right)^{i-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{j-1} \end{array} \right. \quad (2.155)$$

Ceux-ci peuvent être écrits sous formes vectorielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{xx}^*(x, y) = \langle b_{xx}(x, y) \rangle \{A_{ij}\} \\ \kappa_{yy}^*(x, y) = \langle b_{yy}(x, y) \rangle \{A_{ij}\} \\ \kappa_{ss}^*(x, y) = \langle b_{xy}(x, y) \rangle \{A_{ij}\} \end{array} \right. \quad (2.156)$$

où le vecteur colonne $\{A_{ij}\}$ constitué des N_m coefficients des monômes, joue un rôle analogue à celui du vecteur $\{Y^*\}$ des degrés de liberté des champs virtuels par morceaux. De la même manière, le choix des champs virtuels optimaux va être déplacé vers la sélection des vecteurs $\{A_{ij}\}$ définissant les champs qui vérifient les quatre conditions précédemment présentées.

La condition d'indépendance des équations décrite par la relation 2.77 rappelée ci-dessous :

$$[\mathbb{H}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} G^{(1)} & H^{(1)} \\ G^{(2)} & H^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se traduit, par analogie avec l'équation 2.96, par une contrainte sur l'opération d'optimisation s'écrivant matriciellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle I_{xx} \rangle \\ \langle I_{xy} \rangle \end{array} \right\} \cdot [\{A_{ij}^{(1)}\} \{A_{ij}^{(2)}\}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

avec $\langle I_{xx} \rangle$ et $\langle I_{xy} \rangle$ qui s'expriment respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle I_{xx} \rangle = \int_S \left(\kappa_{xx}(x, y) \langle b_{xx}(x, y) \rangle + \kappa_{yy}(x, y) \langle b_{yy}(x, y) \rangle + \frac{1}{2} \kappa_{ss}(x, y) \langle b_{ss}(x, y) \rangle \right) dS \\ \langle I_{xy} \rangle = \int_S \left(\kappa_{xx}(x, y) \langle b_{yy}(x, y) \rangle + \kappa_{yy}(x, y) \langle b_{xx}(x, y) \rangle - \frac{1}{2} \kappa_{ss}(x, y) \langle b_{ss}(x, y) \rangle \right) dS \end{array} \right. \quad (2.158)$$

Le critère de minimisation des effets du bruit de mesure des champs cinématiques est le même que celui développé au paragraphe 2.7.3. Son application débouche sur la minimisation d'une fonction coût où les vecteurs $\{Y^{*\alpha}\}$ sont remplacés par leurs homologues $\{A_{ij}^{(\alpha)}\}$, avec $\alpha = 1, 2$.

La condition de minimisation des erreurs de mesure sur le mouvement d'entraînement 2.143 prend la forme d'une relation linéaire qui s'écrit ici :

$$\int_S \langle f(x, y) \rangle \{A_{ij}^\alpha\} dS \quad \alpha = (1), (2) \quad (2.159)$$

soit sous forme matricielle :

$$\langle C \rangle \{A_{ij}^\alpha\} = 0 \quad \alpha = (1), (2) \quad (2.160)$$

avec $\langle C \rangle$ vecteur ligne à N_m composantes tel que :

$$\langle C \rangle = \int_S \langle f(x, y) \rangle dS \quad (2.161)$$

La condition de nullité des travaux virtuels des efforts extérieurs ($TVFE = 0$) ne peut pas être simplement décrite par une équation linéaire de contrainte. En effet imposer par exemple $A_{00} = A_{10} = A_{01} = 0$ ne conduit au respect rigoureux de la condition que dans le cas d'une plaque encastree en un seul point situé en $(x, y) = (0, 0)$ (Travail virtuel nul de la réaction et des moments d'encastrement). Cette contrainte a été essayée sur les champs cinématiques issus du modèle de plaque avec l'encastrement sur une zone circulaire, sans ajout de bruit aléatoire ni d'erreur sur l'entraînement. La figure 2.24 présente les erreurs relatives obtenues avec des polynômes de degrés maximaux $n = 3$ et $n = 5$.

Les erreurs sont évidemment beaucoup trop importantes et imposent de rechercher une meilleure prise en compte de la condition ($TVFE = 0$).

Le champ virtuel polynômial *modifié* présenté dans l'équation 2.162 assure la nullité des déplacements virtuels hors-plan dans une zone circulaire de rayon r centrée sur $(x, y) = (0, 0)$ et recouvrant largement la zone d'encastrement.

$$w^*(x, y) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{j=0 \\ (i=k-j)}}^k A_{ij} (x^2 + y^2 - r^2)^2 \left(\frac{x}{a}\right)^i \left(\frac{y}{b}\right)^j ; & (x^2 + y^2 > r^2) \\ 0 ; & (x^2 + y^2 \leq r^2) \end{cases} \quad (2.162)$$

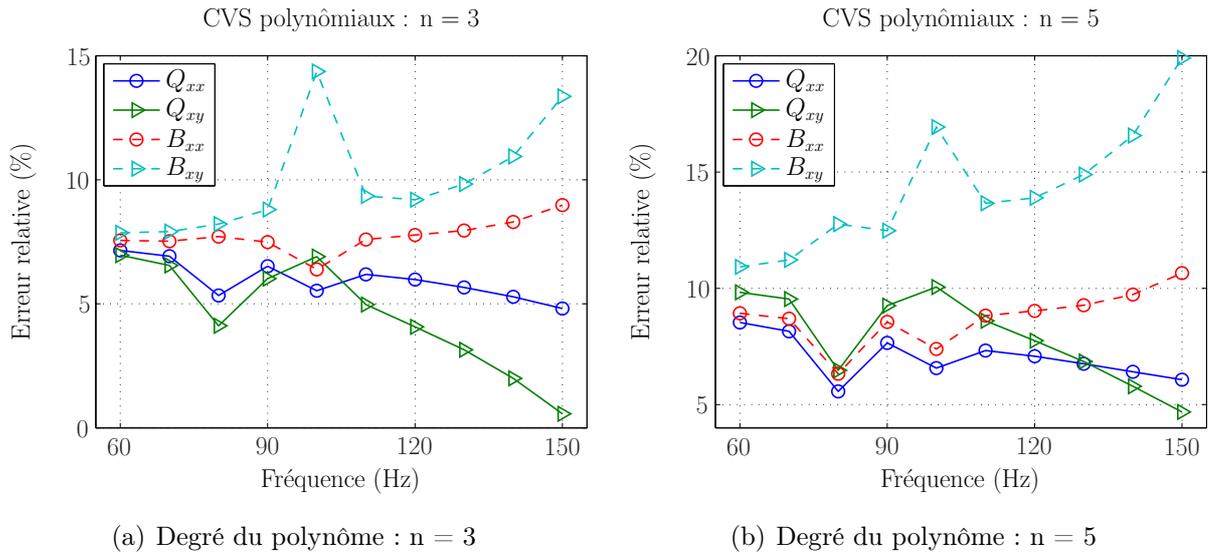


Figure 2.24 – Erreurs relatives d'identification : CVS polynomiaux

Les champs de pente s'expriment :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_x^*(x, y) = \frac{w^*(x, y)}{\partial x} = \begin{cases} (x^2 + y^2 - r^2) g(x, y); & (x^2 + y^2 > r^2) \\ 0; & (x^2 + y^2 \leq r^2) \end{cases} \\ \theta_y^*(x, y) = \frac{w^*(x, y)}{\partial y} = \begin{cases} (x^2 + y^2 - r^2) h(x, y); & (x^2 + y^2 > r^2) \\ 0; & (x^2 + y^2 \leq r^2) \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.163)$$

où $g(x, y)$ et $h(x, y)$ sont deux fonctions de la même base polynomiale. Ces champs sont évidemment nuls à l'intérieur de la zone circulaire de rayon r et les continuités des champs virtuels de pente et de déplacement hors-plan sont assurées à la périphérie de cette zone. La mise en œuvre pratique est assurée en effectuant les différentes intégrations uniquement sur l'aire de la plaque excluant la zone de rayon r .

Les figures 2.25 et 2.26 montrent les résultats obtenus avec de tels champs virtuels polynomiaux de degrés $n = 3$ et $n = 5$. Les identifications ont été conduites sur des champs de courbure avec ajout de bruits aléatoires d'écart-types $\gamma = 10^{-3} m^{-1}$ et introduction d'erreur sur le mouvement d'entraînement $\delta d_0 = 1\%$ et $\delta \phi = 0,5^\circ$.

Au niveau des erreurs relatives, les résultats sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus avec les champs virtuels par morceaux dans les mêmes conditions d'identification. On constate une tendance à une augmentation des effets du bruit de mesure avec le degré

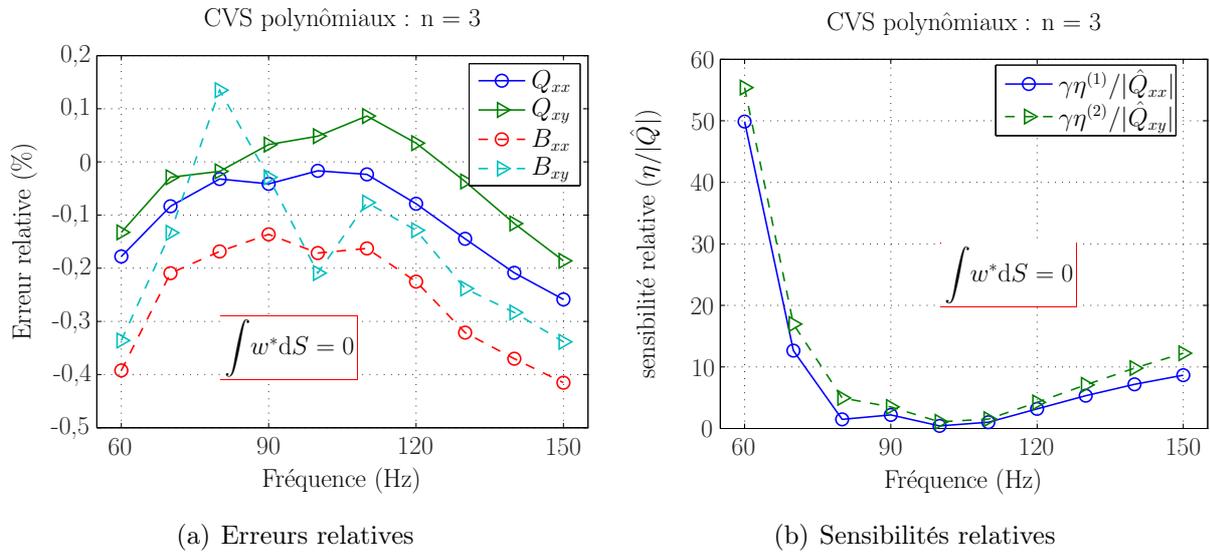


Figure 2.25 – Identification avec CVS (n = 3) minimisant le bruit de mesure et les erreurs de mesures d’entraînement ($\int w^*dS = 0$)

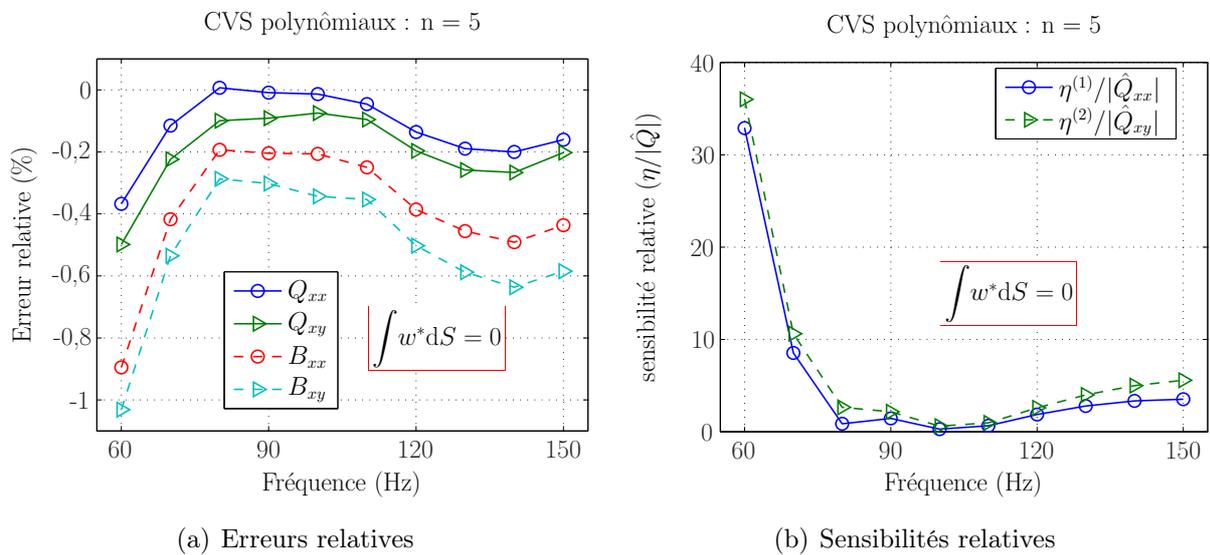


Figure 2.26 – Identification avec CVS (n = 5) minimisant le bruit de mesure et les erreurs de mesures d’entraînement ($\int w^*dS = 0$)

maximal des polynômes ce qui est confirmé par les deux graphes de sensibilités relatives, en particulier les résultats à 60 Hz .

D'une manière générale les sensibilités montrent que les champs polynomiaux possèdent une moins grande robustesse au bruit de mesure que les champs par morceaux.

2.8 Conclusion

Cette partie a permis d'établir les bases théoriques de l'application de la Méthode des Champs Virtuels aux cas des plaques minces en vibrations harmoniques forcées.

Deux méthodes systématiques de génération des champs virtuels ont été testées, chacune basée sur un type de champ particulier :

- Champs virtuels par morceaux ;
- Champs virtuels polynomiaux.

Dans ces deux cas, la méthodologie de sélection introduite permet de satisfaire quatre conditions qui peuvent être classées en deux groupes :

1. Les contraintes liées à l'application de la méthode :
 - Indépendance des équations ;
 - Travaux virtuels nuls des efforts extérieurs.
2. Les contraintes liées aux perturbations d'origine expérimentale :
 - Minimisation des effets du bruit de mesure des champs cinématiques ;
 - Réduction des effets des erreurs de mesure de l'entraînement.

Des champs cinématiques issus de réponses vibratoires de modèles éléments finis ont permis des simulations d'identifications. Les perturbations volontaires apportées à ces champs ont permis de tester les différentes étapes de la méthodologie de sélection et de les valider.

Les derniers résultats montrent un léger avantage en faveur des champs virtuels par morceaux. Ceux-ci seront utilisés pour les identifications réelles utilisant des champs cinématiques fournis par l'expérimentation.

Chapitre 3

Expérimentation

3.1 Introduction

L'application de la Méthode des Champs Virtuels au cas étudié a été présentée au chapitre précédent ainsi que sa validation à partir de champs cinématiques simulés numériquement par éléments finis.

Ce chapitre est consacré à la mise en œuvre du dispositif expérimental ainsi qu'à la présentation du principe de la déflectométrie couplée avec la méthode de grille. Utilisées conjointement, ces dernières permettent la mesure des champs de pente en surface des éprouvettes.

Le montage permettant l'excitation vibratoire inertielle de la plaque est présenté et justifié. La procédure de synchronisation du mouvement d'entraînement de la plaque avec la prise de vue est précisée ainsi que la détermination des incertitudes qui en découlent. Enfin différentes procédures de traitement d'images sont exposées. Celles-ci ont été développées en vue d'améliorer la qualité des résultats.

Au préalable, les caractéristiques du matériau testé sont déterminées à l'aide de méthodes classiques et sont considérées comme valeurs de référence.

3.2 Matériau testé

Le matériau testé, de type PMMA, se présente originellement sous forme de plaques produites par VULCASCOT, de dimensions $600 \times 600 \text{ mm}^2$, d'épaisseur 3 mm et traitées miroir sur leur face postérieure. Ce traitement a facilité la mise en œuvre de la méthode optique de mesure présentée en 3.4.2. Les différentes éprouvettes plaques utilisées, de dimensions typiques $200 \times 160 \times 3 \text{ mm}^3$, ont été découpées par fraisage à grande vitesse.

La fiche descriptive du matériau fournie par le fabricant ne mentionne qu'une valeur de module d'Young ($E = 3 \text{ GPa}$) obtenue par un test statique de flexion (ASTM D-638). La documentation ne présente aucune indication concernant l'amortissement.

3.2.1 Valeurs de référence

Le comportement mécanique de ce type de matériau est généralement très dépendant de la fréquence, ce que les premiers constats ont confirmé. Des essais conventionnels ont été pratiqués afin de disposer de valeurs de référence nécessaires à la validation de l'approche proposée. Ces essais sont basés sur les vibrations libres d'éprouvettes de type poutre en conditions aux limites encastrée-libre (voir figure 3.1).

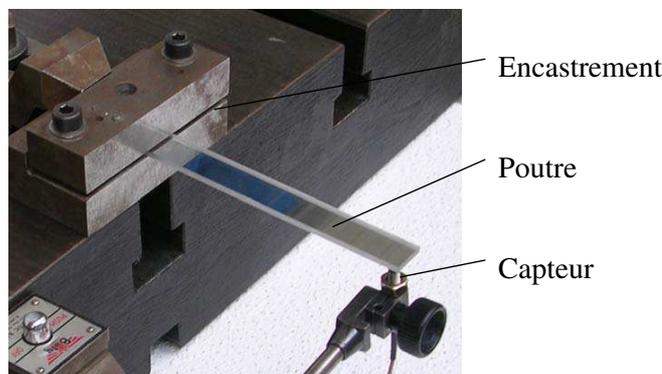


Figure 3.1 – Essais de poutres encastrées-libres

Quatre éprouvettes, de largeur $b = 22 \text{ mm}$ et d'épaisseur $h = 3 \text{ mm}$ ont été préparées en utilisant les mêmes moyens qu'indiqués précédemment. Leurs longueurs l hors-encastrement choisies dans la plage $[105 - 115 \text{ mm}]$ permettent d'obtenir des fréquences de premier mode de flexion comprises dans la gamme $[70 - 110 \text{ Hz}]$. Cette gamme correspond à celle dans laquelle est également testée la méthode proposée. L'ordre de grandeur des élancements δ des éprouvettes peut être évalué tel que :

$$\delta = \frac{l}{r} \quad (3.1)$$

où l et r sont respectivement la longueur active des échantillons poutres et leurs rayons de giration. Ce dernier s'exprime à l'aide du moment quadratique et de l'aire de section droite de la poutre, respectivement A et I :

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} \quad (3.2)$$

Les longueurs choisies pour les éprouvettes situent leurs élancements dans la gamme $\delta \in [120 - 130]$. Ces valeurs permettent d'utiliser les hypothèses de Bernoulli négligeant les effets du cisaillement transverse lors de leurs mouvements de flexion [78]. La fréquence du premier mode de flexion peut dans ces conditions s'exprimer à l'aide des caractéristiques géométriques et matériau (E, ρ) de la poutre par la relation :

$$f_1 = \frac{\lambda_1^2}{2\pi l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot S}} \quad (3.3)$$

La valeur du facteur λ_1 ici prise égale à 1,875 provient de l'application des conditions aux limites 'encastrée-libre' à un modèle de poutre droite sans prise en compte du cisaillement transverse [62, 79]. On peut en tirer l'expression permettant d'estimer le module d'Young à partir de la mesure de la fréquence de ce mode :

$$E = \frac{48\pi^2 \rho}{\lambda_1^4} \cdot \frac{f_1^2 \cdot l^4}{h^2} \quad (3.4)$$

La valeur de la masse volumique ρ introduite dans les calculs provient de la fiche constructeur (vérifiée expérimentalement). Cette caractéristique intervient au même ordre dans les relations d'identification issues des Champs Virtuels. En conséquence l'incertitude sur cette valeur n'a pas été prise en compte dans le calcul de l'erreur relative sur la détermination du module d'Young. Celle-ci s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(E)}{E} &= \sqrt{\frac{1}{E^2} \left(\left(\frac{\partial E}{\partial f_1} \sigma(f_1) \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial l} \sigma(l) \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial h} \sigma(h) \right)^2 \right)} \\ &= \sqrt{\left(2 \frac{\sigma(f_1)}{f_1} \right)^2 + \left(4 \frac{\sigma(l)}{l} \right)^2 + \left(2 \frac{\sigma(h)}{h} \right)^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les conditions d'encastrement, enfoncement, perpendicularité avec les mors et moments de serrage, ont été refaites et contrôlées avant chaque test. Un capteur à courant de Foucault a permis d'enregistrer, sans contact, les mouvements d'une pastille d'aluminium, de très faible masse, collée à l'extrémité de chacune des éprouvettes poutres.

Les signaux échantillonnés à la fréquence de $51,2 \text{ kHz}$ ont été acquis sous forme de blocs de 8192 mots contenant approximativement une douzaine de périodes d'oscillations. La détermination des fréquences du premier mode est effectuée par la mesure de la moyenne des périodes d'oscillations. On peut en déduire que l'erreur relative sur cette détermination est comprise entre 1% et 2%. Le contrôle des épaisseurs des éprouvettes a montré que les variations de celles-ci sont inférieures à $0,02 \text{ mm}$. Rapportées à la faible valeur de $h = 3 \text{ mm}$, il est possible d'évaluer la contribution de ces variations $2\Delta h/h \approx 1,5\%$. Les longueurs hors-encastrement ont été mesurées à la jauge de profondeur lors de chaque montage avec une incertitude évaluée à $0,2 \text{ mm}$. Celle-ci reste tributaire de la perpendicularité effectivement réalisée. La contribution de cette mesure de longueur peut être estimée à $4\Delta l/l \approx 1\%$. Compte tenu des élancements des éprouvettes utilisées, l'erreur sur le coefficient λ_1 dépend essentiellement de la réalisation de l'encastrement. Celui-ci est matérialisé par deux mors en acier dont les faces avant ont été rectifiées simultanément. Sa contribution sur l'erreur relative demeure difficilement quantifiable.

Au final on peut estimer l'erreur relative sur le module d'Young $\Delta E/E \geq 4\%$.

Cinq essais par lacher ont été pratiqués avec chacune des poutres. Bien qu'apparemment peu fréquemment utilisées dans ce type d'essais, ces conditions initiales se révèlent très bien adaptées au cas d'éprouvettes de dimensions modestes et de faible rigidité, d'une part par la facilité de mise en œuvre et d'autre part par le contenu vibratoire obtenu. En appliquant transversalement un effort constant à l'extrémité de la poutre, la déformée statique obtenue est alors très proche de la forme du premier mode de flexion de l'éprouvette. Le brusque relâchement de l'effort provoque un mouvement vibratoire presque uniquement composé des mouvements de ce premier mode. Ceci est beaucoup plus difficile à obtenir à partir d'un essai par impact. Un enregistrement temporel sans filtrage de ces mouvements vibratoires est présenté dans la figure 3.2.

Le lissage des élongations extrémales des oscillations par des exponentielles aux moindres carrés (en pointillés sur la figure 3.2) a permis la détermination des taux d'amortissement visqueux ξ . La bonne qualité du lissage permet de juger de l'accord entre le modèle d'amortissement visqueux et les phénomènes observés. Ce taux est lié au coefficient

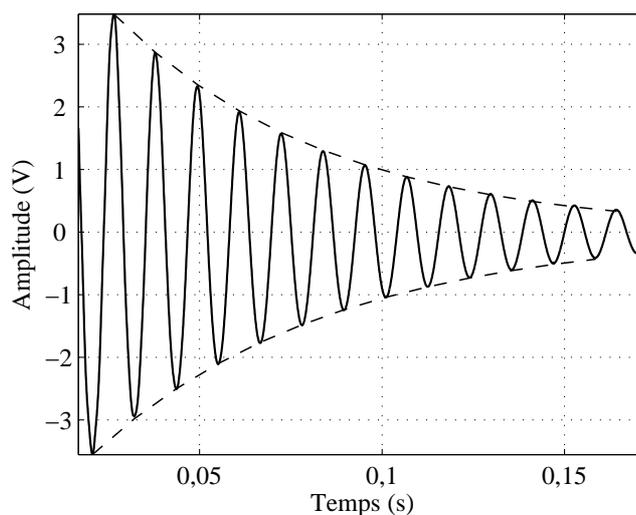


Figure 3.2 – Oscillations libres d'éprouvette-poutre

d'amortissement proportionnel β qui sera identifié dans la méthode proposée :

$$\beta = \frac{2 \cdot \xi}{\omega_1} = \frac{\xi}{\pi \cdot f_1} \quad (3.6)$$

Le tableau 3.1 présente les valeurs du module d'Young et du coefficient d'amortissement β déterminées à partir de ces essais. Pour chaque éprouvette poutre, le résultat provient de la moyenne obtenue à partir des cinq essais.

Poutre n°	Longueur (mm)	f_1 (Hz)	E (GPa)	β 10^{-4} s
1	106,9	86,68	4,98	$1,07 \pm 0,06^a$
2	107,9	85,01	4,96	$1,04 \pm 0,05^a$
3	113,5	75,05	4,73	$1,11 \pm 0,08^a$
4	114,2	75,52	4,92	$1,10 \pm 0,02^a$
Moyenne			4,90	1,08
Coeff. de var.			2,4%	3,2%

Tableau 3.1 – Valeurs de référence dynamiques du matériau

^apar Loi de Student avec 95% de confiance

Les résultats expérimentaux montrent un accroissement notable du module d'Young de 3 GPa en statique à 4,9 GPa à 80 Hz. Ces résultats apparaissent conformes à ceux

présentés par des auteurs pour des matériaux de type PMMA :

- Cucciti *et al* [80] : $E = 3,6 \text{ GPa}$ en statique, $E = 6,0 \text{ GPa}$ à 80 Hz ;
- Koppelman [81] : $E = 3 \text{ GPa}$ en statique, $3,2 \text{ GPa}$ à $0,01 \text{ Hz}$ et $3,9 \text{ GPa}$ à 20 Hz .

Concernant l'amortissement, des essais complémentaires ont été réalisés par analyse dynamique thermomécanique (DMTA). La figure 3.3 représente les variations de la tangente du déphasage δ en fonction de la fréquence entre la sollicitation de torsion à laquelle est soumise l'échantillon et la déformation imposée, ici 0,1%.

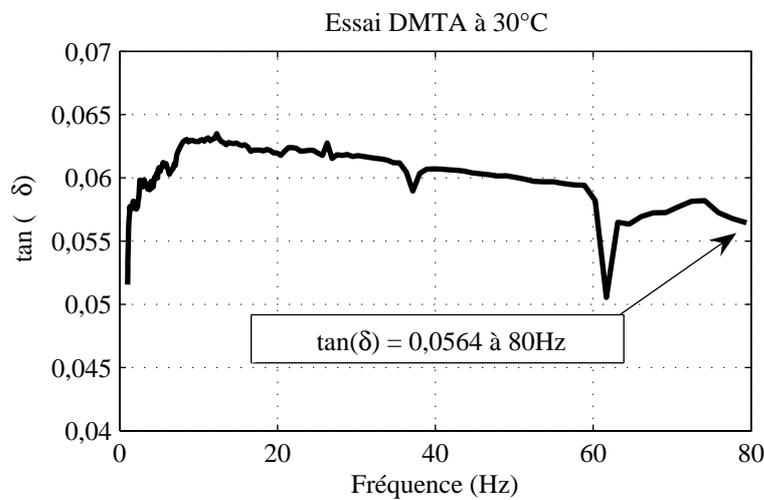


Figure 3.3 – Résultats de l'essai DMTA

A 80 Hz on relève $\tan(\delta) = 0.0564$. A partir du modèle de Kelvin-Voigt rappelé en 2.6.1, il vient :

$$\tan(\delta) = \omega \beta \quad (3.7)$$

La relation avec le coefficient β qui sera identifié dans la méthode s'écrit donc :

$$\beta = \frac{\tan(\delta)}{\omega} = \frac{\tan(\delta)}{2\pi f} \quad (3.8)$$

Soit pour la valeur à 80 Hz tirée de l'essai DMTA : $\beta = 1,12 \times 10^{-4} \text{ s}$, résultat qui est très voisin de celui des essais sur les poutres ($\beta = 1,08 \times 10^{-4} \text{ s}$).

3.3 Dispositif expérimental

3.3.1 Introduction

Comme indiqué au chapitre précédent, la présente extension de la méthode des champs virtuels requiert un montage produisant un mouvement d'entraînement harmonique de la plaque dans la direction normale à celle-ci. Ce mouvement provoque une excitation inertielle en flexion de l'éprouvette. Celle-ci est par ailleurs libre à sa périphérie.

Un dispositif basé sur un principe optique, associé à un traitement des images, doit pouvoir fournir les mesures des champs cinématiques de flèche et de courbure sur l'ensemble de la surface de la plaque. Ces derniers champs peuvent être obtenus par des doubles dérivations spatiales de champs de flèche mesurés. Ces opérations risquent toutefois de conduire à une importante dégradation du rapport signal sur bruit. Afin d'éviter ce problème, la mesure de champs de pente a été préférée au travers d'une méthode de déflectométrie qui est une technique non interférométrique en lumière blanche. Elle est basée sur l'analyse de l'image d'une grille se réfléchissant sur la surface de la plaque en essai. La description du mouvement nécessite des prises de vues pratiquées à deux instants différents de la période d'oscillation, choisis par exemple en phase et en quadrature retard avec le mouvement d'entraînement. Un flash dont l'éclair peut être synchronisé avec cette excitation permet de figer les images aux instants requis.

Une vue du dispositif expérimental complet est présentée en figure 3.4.

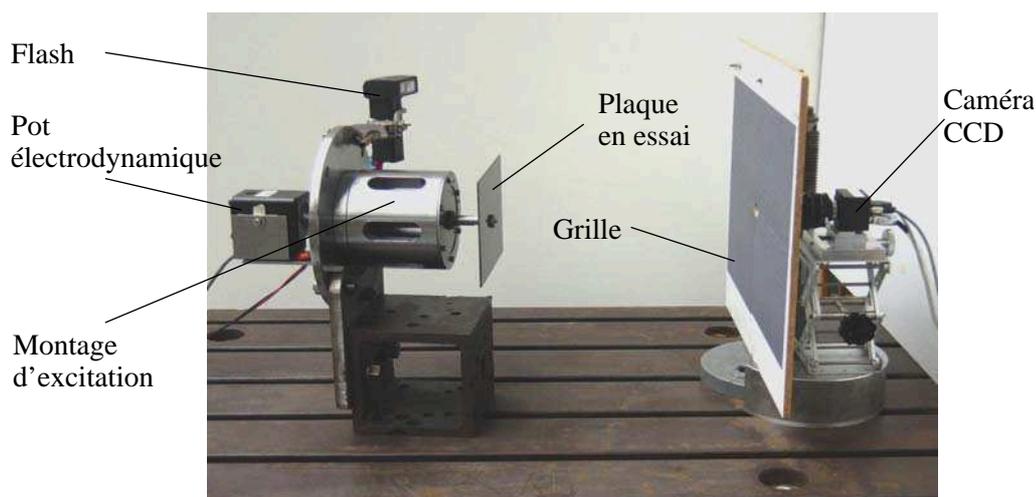


Figure 3.4 – Vue du dispositif expérimental

3.3.2 Dispositif d'excitation

3.3.2.1 Objectif - Description

L'utilisation d'une technique optique de mesure nécessite de limiter l'amplitude des mouvements de corps rigide imposés à la plaque ainsi que de celle des vibrations de flexion qui en résultent. Compte tenu de la masse modérée de l'éprouvette, l'entraînement direct de celle-ci par un pot électrodynamique ne permet pas de satisfaire ces conditions. Pour y parvenir un système dédié a été conçu et réalisé. La figure 3.5 montre une vue éclatée de ce dispositif. La plaque en essai est encastrée à l'extrémité d'une barre rigide. Un pot d'excitation électrodynamique impose un effort harmonique à l'autre extrémité de cette dernière.

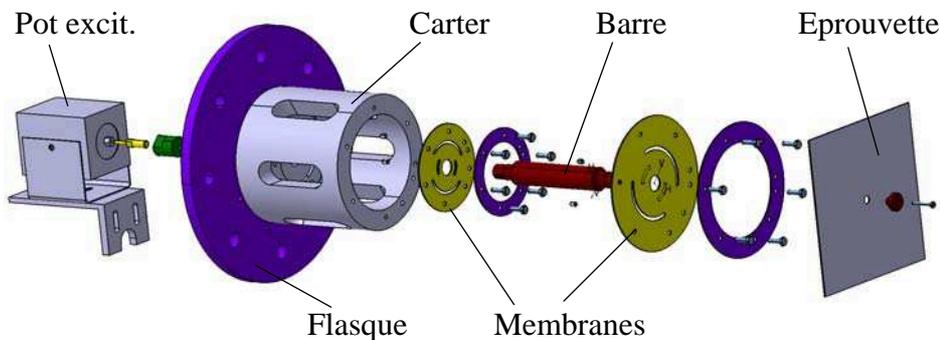


Figure 3.5 – Vue éclatée du dispositif d'excitation

Une paire de deux membranes en acier, rigidement liées au carter par leurs périphéries et axialement à la barre en leurs centres, assure par leur flexion le guidage longitudinal du mouvement de l'ensemble mobile. Les rigidités de ces membranes limitent par ailleurs les amplitudes des mouvements de l'ensemble barre-plaque (voir figure 3.5).

La plaque en essai est encastrée entre l'extrémité de la barre et une rondelle rigide de diamètre externe identique à celui de la barre. Elle est maintenue en pression par une vis axiale. Pour améliorer l'encastrement, les surfaces de contact ont été rectifiées [82].

3.3.2.2 Validation du mouvement d'entraînement

Des essais spécifiques ont été entrepris pour valider le dispositif d'excitation. Une éprouvette-plaque étant normalement fixée à l'extrémité de la barre, les accélérations axiales et trans-

versales de cette dernière ont été mesurées lors d'excitations commandées dans la gamme $[80 - 100 \text{ Hz}]$. Les graphes de la figure 3.6 présentent des résultats typiques de ces mesures effectuées successivement dans les deux directions avec un gain constant. La première ligne correspond à l'accélération axiale et la seconde l'accélération transversale. La colonne de gauche montre les autospectres des accélérations enregistrées pour une excitation à 80 Hz et une amplitude d'entraînement de $26 \mu\text{m}$. On y remarque que dans la direction axiale, le rapport entre l'amplitude du fondamental et celle de l'harmonique le plus important (le troisième en l'occurrence) est supérieur à 50 dB . Ce rapport demeure supérieur à 30 dB entre les fondamentaux des accélérations respectivement axiales et transversales. La colonne de droite présente les résultats obtenus lors d'une excitation à 100 Hz avec une amplitude plus importante de $65 \mu\text{m}$. Les mêmes rapports présentent des valeurs sensiblement identiques. Ces résultats montrent que dans la gamme de fréquence envisagée, le mouvement d'entraînement est fondamentalement axial et sinusoïdal.

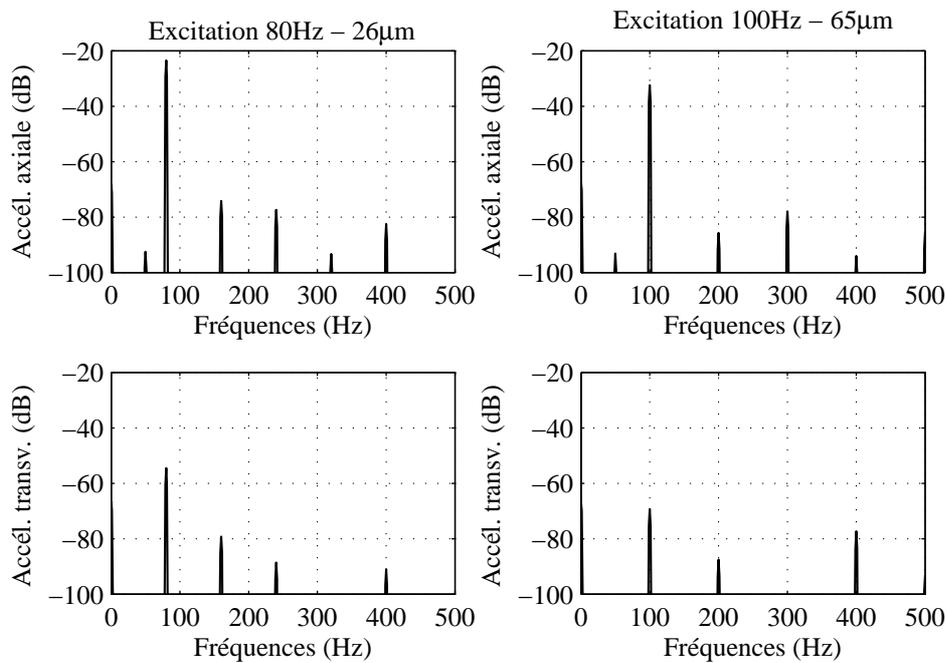


Figure 3.6 – Mesures de validation de l'entraînement

3.3.3 Prises de vues : synchronisation de la caméra et du flash

Comme présenté en section 2.4.2, le mouvement de flexion harmonique de la plaque est décrit à partir des champs de pente mesurés à deux instants différents de la période

d'oscillations, par exemple en phase et en quadrature avec le mouvement d'entraînement. Plutôt que de tenter de synchroniser la caméra CCD, il a paru plus simple d'éclairer la grille par l'éclair d'un flash déclenché aux moments choisis, le diaphragme de la caméra étant réglé de telle sorte que l'élément sensible n'enregistre rien en lumière ambiante. L'obturateur de la caméra étant préalablement ouvert, le capteur CCD reçoit, au moment de l'éclair, l'image figée de la grille réfléchiée par la plaque. Le diagramme de la figure 3.7 présente le déroulement de la prise de vue.

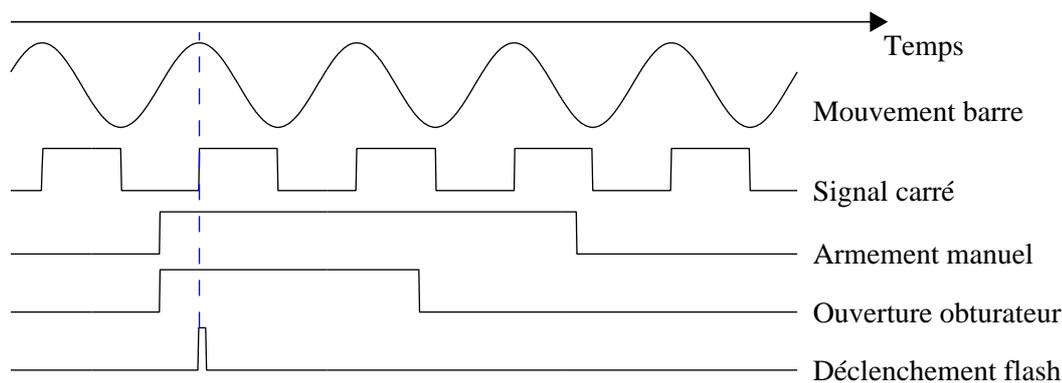


Figure 3.7 – Diagramme temporel déclenchement flash, ici prise de vue 'en phase'

La procédure utilise le signal d'un accéléromètre fixé sur la barre du dispositif d'excitation mesurant le mouvement axial de celle-ci. Ce signal permet d'une part la mesure de l'amplitude d'entraînement. Il est d'autre part utilisé pour la synchronisation de la prise de vue à l'aide d'un deuxième signal, carré, de même période que le signal d'entraînement et généré, par exemple en phase ou en quadrature avec celui-ci (voir figure 3.7). Un bouton poussoir permet l'armement manuel d'un circuit électronique. Dans un premier temps, ce dernier commande l'ouverture de l'obturateur de la caméra pour une durée fixe, typiquement supérieure à deux ou trois périodes d'excitation. Dans un second temps, à la première occurrence d'un front montant détecté sur le signal carré, il génère une impulsion qui déclenche le flash.

Dans la pratique, les deux voies d'une carte de conversion numérique-analogique sont utilisées pour générer, à partir de tables de valeurs de grandes profondeurs, typiquement $2,5 \cdot 10^5$ mots, un signal sinus et un signal carré tous les deux à la fréquence d'excitation (respectivement CNA1 et CNA2 sur le schéma de la figure 3.8). Le premier après amplification est utilisé pour commander le pot électrodynamique du montage.

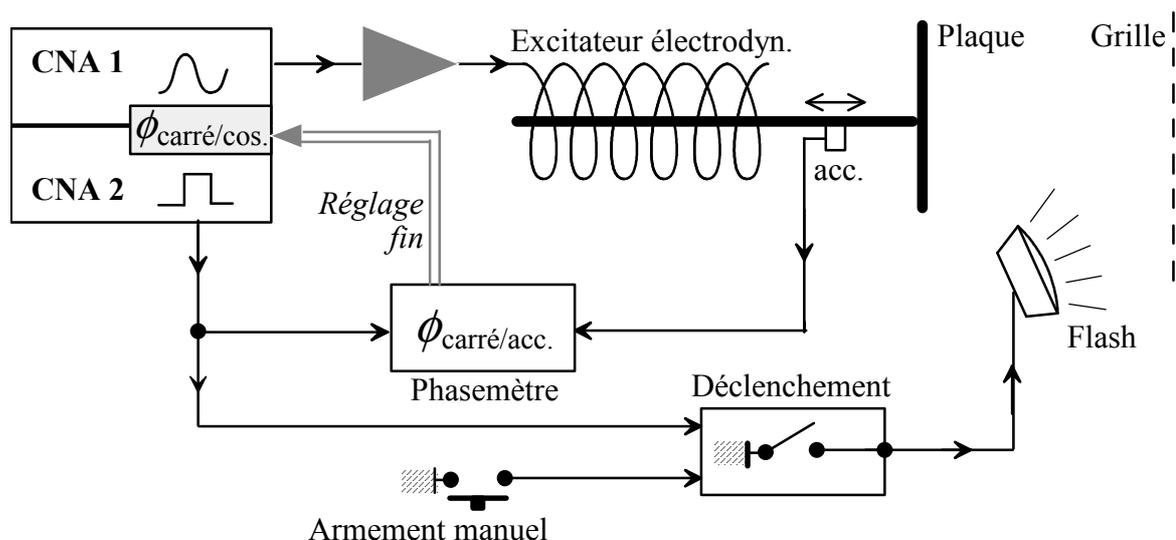


Figure 3.8 – Schéma du dispositif de prise de vue

Compte tenu du comportement fortement inductif de l'excitateur, le mouvement d'entraînement résultant possède un déphasage important, fonction de la fréquence, avec le signal sinus d'origine. Ceci entraîne l'existence d'un réglage complémentaire. Un phasemètre numérique *Eurelco 703* (résolution $0,1^\circ$) permet la mesure de la phase entre le signal issu de l'accéléromètre et le signal carré. La valeur relevée permet, en jouant sur les tables de valeurs, de régler numériquement le déphasage entre les deux signaux générés et ainsi d'obtenir la phase désirée, par exemple en phase ou en quadrature, entre le signal du mouvement d'entraînement et le signal carré de synchronisation.

La flexibilité procurée par ce montage permet la prise de vue à deux instants du mouvement, séparés par un quart de période de celui-ci et possédant une phase quelconque et contrôlée par rapport à l'entraînement. Par exemple, dans le cas où la plaque est excitée en résonance, sa réponse en quadrature est évidemment beaucoup plus importante que celle de la partie en phase avec l'entraînement. Le rapport signal sur bruit de l'image de cette dernière est évidemment plus faible que celui de l'autre composante. En choisissant expérimentalement ϕ_0 , les prises de vues déclenchées aux phases ϕ_0 et $\phi_0 + \pi/2$ permettent d'obtenir des images mieux équilibrées l'une par rapport à l'autre en terme de rapport signal sur bruit. Cette propriété sera illustrée au chapitre suivant.

3.3.4 Estimation des erreurs d'entraînement et de synchronisation

Le paragraphe 2.7.3.8 du chapitre précédent a montré que la dernière contrainte appliquée lors de la sélection des champs virtuels, doit permettre de limiter l'influence des erreurs de mesure du mouvement d'entraînement. Ceci s'applique aux erreurs sur le module et la phase de ce mouvement.

Toutefois, les prises de vues des images en phase et en quadrature ne peuvent matériellement être effectuées durant la même période d'entraînement. La stabilité de celui-ci a donc été vérifiée.

D'autre part, les prises de vues à deux instants séparés par un quart de période de l'entraînement doivent être synchronisés avec celui-ci. Compte tenu du dispositif expérimental utilisé, la précision de cette synchronisation est dépendante de la mesure effectuée par le phasemètre.

3.3.4.1 Calibration de la mesure de l'amplitude de l'entraînement

L'accélération axiale de la barre d'entraînement est mesurée grâce à un accéléromètre piézoélectrique *B&K4367* associé à un amplificateur de charge *B&K2635*. L'ensemble de cette chaîne a été calibrée en soumettant le capteur à un mouvement harmonique produit par un pot électrodynamique de calibrage *B&K4291*. La vitesse vibratoire du mouvement de l'accéléromètre était par ailleurs contrôlée par un vibromètre laser (voir l'image de la figure 3.9).

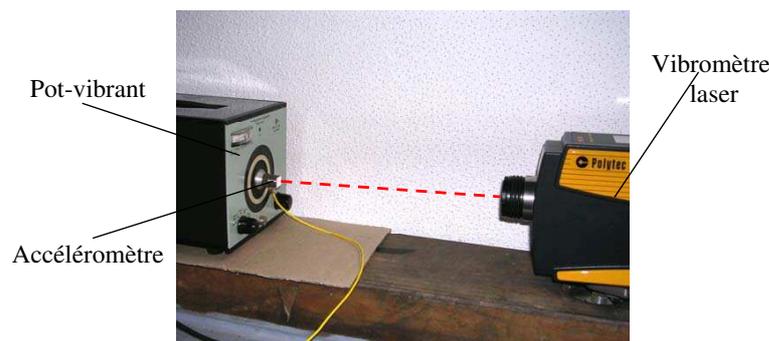


Figure 3.9 – Calibration de l'accéléromètre

La figure 3.10 montre les différences relatives entre les amplitudes des déplacements calculées à partir des deux signaux. Des essais conduits en maintenant les conditions d'essais

constantes pendant une durée supérieure à une dizaine de minutes n'ont pas montré de dérive des résultats.

L'incertitude de mesure du vibromètre laser récemment recalibré est inférieure à 1%. Les résultats montrent que l'amplitude fournie par l'accéléromètre est supérieure de 1,7% à 2% à celle de celle du mouvement d'entraînement dans la gamme de fréquence de l'étude.

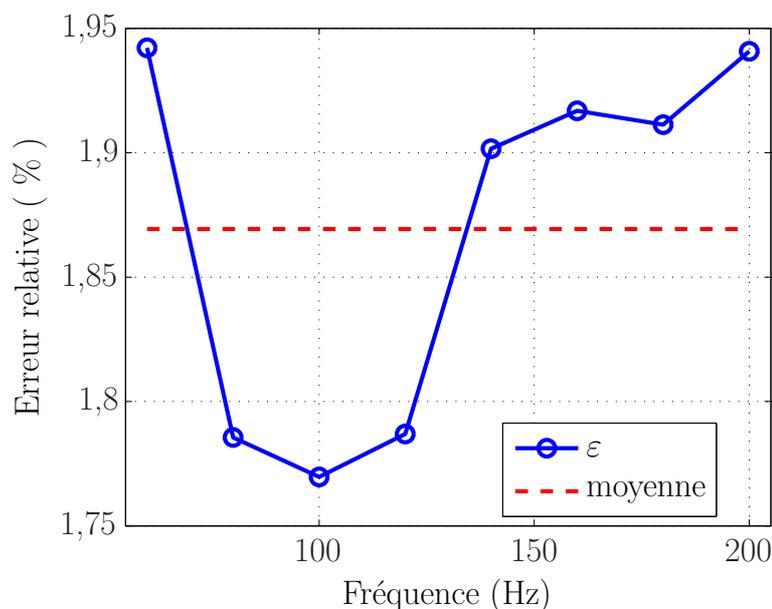


Figure 3.10 – Erreur relative sur l'amplitude du déplacement entre les deux capteurs

Par ailleurs, le signal de l'accéléromètre monté sur l'équipage d'entraînement est systématiquement enregistré pendant les excitations donnant lieu à des prises de vues. Leurs analyses ont montré que les écart-types des variations d'amplitudes durant les essais restaient inférieures à 1,5%.

3.3.4.2 Estimation de l'erreur de synchronisation

En raison du dispositif adopté, la précision du déclenchement de la prise de vue repose essentiellement sur celle du réglage du déphasage entre le signal carré et le signal sinus commandant l'entraînement. Trois causes paraissent *a priori* pouvoir être à la source de cette erreur :

1. une erreur sur le déphasage à la génération des deux signaux à l'aide de la carte numérique-analogique ;
2. une erreur sur la mesure de la phase avec le phasemètre Eurelco 703 ;

3. une phase parasite introduite par la chaîne de mesure d'accélération de l'équipage d'entraînement.

Des études spécifiques ont été entreprises pour quantifier chacune de ces erreurs :

1. Les deux signaux "sinus" et "carré" sont générés à partir de tables numériques de $2,5 \times 10^5$ mots chacune, converties en analogique sous la cadence d'une horloge de fréquence 500 kHz . Le déphasage désiré entre les deux signaux est obtenu à la création des tables en décalant leurs origines temporelles. Le contrôle qui peut être assuré sur ce décalage est de ± 1 période d'horloge qui est de l'ordre du millième de la période d'excitation dans la gamme fréquentielle des essais. Cette première source d'erreur pourra être considérée comme négligeable par rapport aux deux autres.
2. Pour estimer l'erreur introduite par la mesure de la phase à l'aide du phasemètre Eurelco 703, celui-ci a été utilisé pour mesurer la phase entre deux signaux de même fréquence, un "sinus" et un "carré" générés, comme précédemment décrit, par la carte N/A. Ces signaux étaient ici directement communiqués au phasemètre. Les essais ont été conduits pour différentes fréquences de la gamme $80 - 120 \text{ Hz}$ et différents déphasages contrôlés. Ils ont montré que les écarts entre les déphasages introduits et ceux mesurés restaient inférieurs à 1° pour un temps de mesure réglé à 1 seconde sur le phasemètre.
3. La mesure du mouvement d'entraînement est assurée par un accéléromètre piézo-électrique *B&K* 4391 associé à un amplificateur de charge *B&K* 2635. D'après les caractéristiques du constructeur, les phases introduites par les éléments de cette chaîne de mesure sont quasi-nulles dans la gamme de fréquence envisagée. Pour confirmation, des essais ont été conduits en doublant temporairement l'accéléromètre d'un second de type piézorésistif (PCB 333B52) associé à un conditionneur PCB 485B36. Pour plusieurs fréquences et amplitudes de la gamme d'excitation, les déphasages entre les signaux des deux accéléromètres de technologies profondément différentes, mesurés à l'aide du phasemètre Eurelco 703, sont restés largement inférieurs à 1° . La figure 3.11 montrent les valeurs de ces déphasages pour plusieurs fréquences d'excitation.

Ces différents essais montrent que le mouvement d'entraînement est stable en amplitude et que cette dernière est mesurée avec une incertitude inférieure à 2%. Les deux prises de vues nécessaires à la procédure d'identification sont effectivement décalées d'un quart de

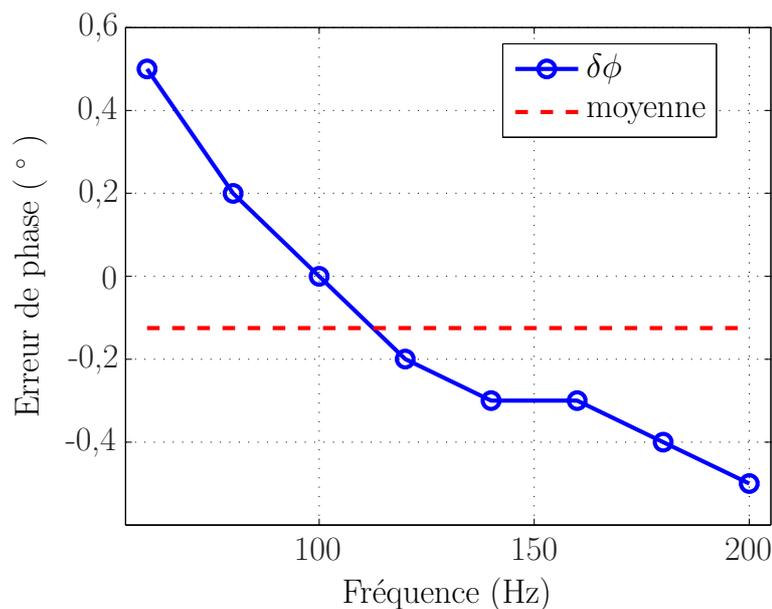


Figure 3.11 – Erreur de mesure de Phase

période de l'excitation avec une erreur négligeable. Les points 2 et 3 précédents montrent que l'incertitude de leur phase initiale par rapport à l'entraînement est inférieure à 1° . Bien que faible, cette valeur n'est pas négligeable par rapport aux déphasages introduits par l'amortissement entre l'excitation et la réponse vibratoire de la plaque.

3.4 Mesure des champs cinématiques de la plaque

3.4.1 Introduction - choix d'une technique optique

L'application des méthodes de mesure des champs cinématiques à la caractérisation mécanique des matériaux s'est beaucoup développée depuis une dizaine d'années. Cette croissance peut être attribuée à l'évolution des caméras CCD, à la diminution de leur coût ainsi qu'à celui des matériels informatiques. Ces méthodes de mesure de champs permettent d'avoir accès à des cartographies de grandeurs physiques telles que les déplacements, les déformations dans le plan ou les champs de flèche, de pente et de courbure (dans le cas des mouvements hors-plan).

Surrel [83] a présenté une étude comparative d'un certain nombre de méthodes. La nature du mesurande permet de distinguer les techniques interférométriques et les techniques non interférométriques. Les premières utilisent la phase d'une onde lumineuse cohérente

pour coder la quantité mesurée (déplacement ou déformation). Les secondes regroupent les techniques basées sur l'observation de l'intensité lumineuse réfléchie par un motif présent sur la surface analysée.

Les techniques interférométriques utilisant une mesure de la phase d'une onde cohérente, permettent d'obtenir une sensibilité très élevée si l'on est capable de mesurer cette phase, par décalage de phase temporel ou spatial. Ce peut être à la fois un avantage ou un inconvénient. En effet, la sensibilité de la méthode peut être largement supérieure à celle requise par l'application. Il faut également signaler que les techniques interférométriques de mesure de déplacement sont très sensibles aux vibrations parasites.

Dans les techniques de mesure non interférométriques, le mesurande est codé dans la variation spatiale de l'intensité lumineuse. A partir de la nature du codage de l'information, deux grandes classes de techniques apparaissent : le codage aléatoire (mouchetis) et le codage périodique (moiré ou grille). Ces techniques non interférométriques sont relativement faciles à mettre en œuvre et de coûts modérés. Les méthodes d'analyse des images correspondant au codage aléatoire ou au codage périodique sont respectivement la corrélation numérique [84, 85] et la détection de la modulation de phase [86, 87]. Dans ce dernier cas, la phase de chaque pixel peut être déterminée en utilisant les informations contenues dans les pixels voisins. Le décalage de phase permet d'obtenir des résolutions intéressantes dans de nombreux cas.

Comme présenté précédemment, la connaissance des champs de flèche et celles des champs de courbure sont nécessaires pour l'identification. Les mesures des champs de flèche à la surface de la plaque, par exemple par speckle interférométrique (ESPI : electronic speckle pattern interferometry) [82] conduisent à des dérivations spatiales doubles pour obtenir les champs de courbure. Pour limiter les effets du bruit de mesure sur les résultats de ces opérations, la mesure des champs de pentes a été préférée. Les différents champs de courbure peuvent être obtenus par dérivations simples des pentes et les champs de flèche à l'aide d'une intégration [88].

Compte tenu par ailleurs de l'expérience acquise par le laboratoire dans la mise en œuvre de la méthode de grille [64, 89, 90], cette technique couplée à une méthode de déflectométrie [64, 83] a été retenue pour la mesure des champs de pente. Son utilisation demande que la surface de la plaque possède des propriétés de réflexion spéculaire.

3.4.2 Principe de la déflectométrie

Son application nécessite une grille formée de traits noirs, de pas p et d'épaisseur $p/2$, tracés sur fond blanc dans deux directions perpendiculaires. Cette grille est placée en face de la surface réfléchissante de la plaque en essai. Au travers d'un orifice pratiqué au centre de la grille, une caméra CCD peut observer l'image de la grille formée sur la plaque. Lorsque l'éprouvette fléchit sous l'effet d'un chargement statique ou dynamique, deux phénomènes se superposent en tous points : une variation de la flèche et une variation de la pente locale de l'éprouvette. Le schéma de la figure 3.12 montre un certain pixel de la caméra observant un point M de la plaque qui au repos porte l'image d'un point P de la grille. Lorsque la plaque fléchit dans le plan de la figure, l'image observée est alors celle du point Q telle que $PQ = \delta$.

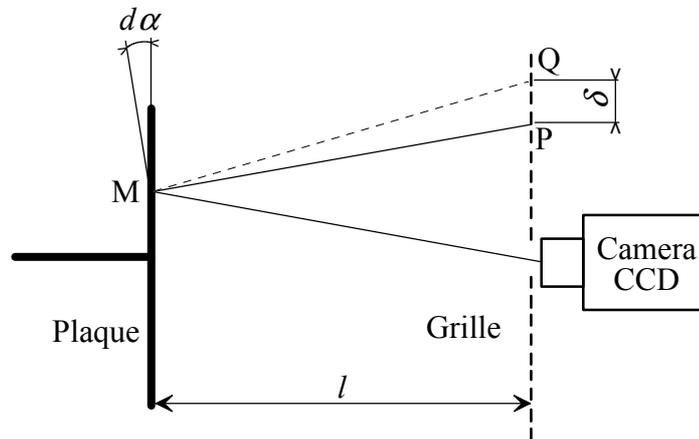


Figure 3.12 – Schéma du principe de la déflectométrie

Si la variation en M de la pente locale est $d\alpha$, le déplacement apparent de l'image de la grille vaut :

$$\delta = 2l \cdot d\alpha \quad (3.9)$$

où l qui est la distance entre la grille et la plaque, joue le rôle d'un puissant amplificateur de la mesure. Le mouvement local hors-plan de la plaque, combinaison de la variation locale de flèche et du mouvement d'entraînement, affecte également le déplacement apparent mais leurs amplitudes cumulées demeurant très faibles vis à vis de la distance l , la variation locale de pente reste le phénomène largement prépondérant au niveau de $d\delta$. Cette hypothèse sera vérifiée au paragraphe 3.4.6.

L'évaluation des champs de pente dans deux directions orthogonales de la plaque revient à celle, dans les mêmes directions et en tous points, des déplacements apparents entre deux images de la grille prises successivement, la plaque étant au repos puis en déformation de flexion. Cette évaluation est effectuée par la méthode de la grille qui est brièvement rappelée au paragraphe suivant.

3.4.3 Méthode de grille - Décalage de phase spatial

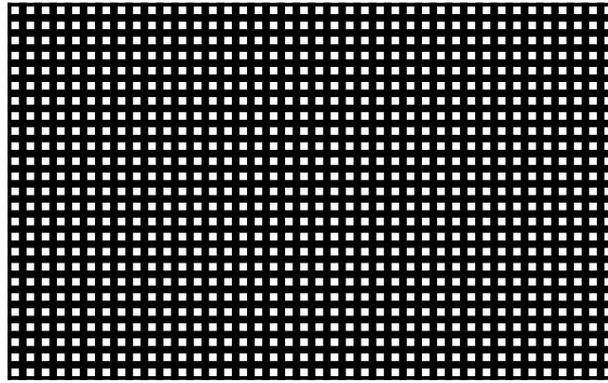


Figure 3.13 – Échantillon de la grille de pas $p = 2 \text{ mm}$

Dans ce qui suit, les points de la surface de la plaque sont repérés par leurs coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé dont les axes sont respectivement parallèles aux images des traits de la grille sur la plaque au repos. L'image de la grille de pas p forme un codage périodique de la surface de la plaque et devient la porteuse des déplacements apparents des images réfléchies. Vues de la caméra CCD ces dernières se présentent sous la forme d'un champ bidirectionnel d'intensité pouvant s'exprimer :

$$I(x, y) = A \cdot \left\{ 1 + \gamma \cdot \text{frgn} \left[\frac{2\pi x}{p} + \phi_x(x, y) \right] \cdot \text{frgn} \left[\frac{2\pi y}{p} + \phi_y(x, y) \right] \right\} \quad (3.10)$$

A est l'intensité moyenne et γ le contraste, la fonction *frgn* est 2π périodique et représente le profil des images des traits. ϕ_x et ϕ_y représentent respectivement les déphasages dans les directions x et y .

Si $\Delta\phi_x$ et $\Delta\phi_y$ représentent les variations de ceux-ci entre les deux images successives, les composantes u_{PQ} et v_{PQ} du déplacement apparent δ peuvent s'écrire :

$$u_{PQ} = \frac{p}{2\pi} \cdot \Delta\phi_x, \quad v_{PQ} = \frac{p}{2\pi} \cdot \Delta\phi_y \quad (3.11)$$

Fondamentalement dans la méthode de grille la quantification du champ de déplacement apparent revient à l'évaluation des champs de phase de la porteuse à partir des champs d'intensité de chacune des images. Celle-ci est pratiquée en mettant en œuvre la méthode du décalage de phase spatial qui utilise les informations contenues dans les pixels voisins de celui où est pratiquée l'évaluation. On montre [86] qu'en échantillonnant l'image par exactement N pixels par période de la grille on peut extraire la phase de l'harmonique 1 par application de l'algorithme ' $N - TFD$ '. L'influence des harmoniques jusqu'à l'ordre $N - 2$ est alors négligeable. Toutefois, il n'est généralement pas possible d'assurer un réglage du grandissement de l'objectif tel que l'échantillonnage soit exactement de N pixels par période. L'utilisation de l'algorithme dit de la « Transformée de Fourier Discrète Fenêtrée » (TFD-Fenêtrée) ' $N-TFD$ Fenêtrée' décrit par Surrel [86, 91, 92], permet alors de réduire les erreurs dues au décalage. Son utilisation permet en outre la minimisation des erreurs provenant d'autres sources telles que la variation de l'intensité lumineuse moyenne.

Une variation de 2π de la phase spatiale correspond à un décalage δ entre les deux images équivalent au pas p de la grille. Dans le cas de la déflectométrie, en considérant une petite rotation locale $d\alpha$, il est possible d'écrire la sensibilité s liant $d\alpha$ et la variation de la phase locale $d\phi$ telle que [93] :

$$d\phi = \frac{2\pi}{p} \cdot 2l \cdot d\alpha, \quad \Rightarrow \quad s = \frac{d\phi}{d\alpha} = \frac{4\pi \cdot l}{p} \quad (3.12)$$

La sensibilité s est le coefficient de proportionnalité entre la variation de phase mesurée entre les états chargé et non chargé, et la variation de pente locale correspondante. Cette expression de sensibilité est obtenue à partir de pures considérations géométriques. Elle correspond à une forme linéarisée utilisable lorsque les dimensions de la plaque sont faibles vis à vis de la distance grille-plaque, ce qui est le cas de la présente étude et sera confirmé expérimentalement.

3.4.4 Déflectométrie - Configuration utilisée

Les grilles utilisées dans la configuration sont de dimensions $500 \times 500 \text{ mm}^2$ avec un pas p de 2 mm . Elles ont été imprimées sur papier à partir d'un fichier PostScript en utilisant

un traceur. Elles ont été collées sur un panneau de bois et disposées face aux éprouvettes. La distance grille-plaque est $l = 813 \text{ mm}$.

Les images ont été prises en utilisant une caméra JAI (8 bits, monochrome) possédant un capteur CCD de 1376×1024 pixels et équipée d'un objectif zoom NIKKOR (28 – 105 mm, 1 : 3,5 – 4,5 D). La taille du trou dans la plaque est de diamètre 26 mm.

Les champs de pente ont été obtenus à partir d'une analyse de phase spatiale des images soustraites, en utilisant l'algorithme de "Transformée de Fourier Discrète Fenêtrée" présenté au paragraphe précédent.

L'application de la relation dans l'équation 3.12 à cette configuration conduit à une sensibilité approximative de 5,11 radians de variation de phase par milli-radian de variation de pente locale.

La résolution d'une mesure peut être définie comme la plus petite valeur décelable du mesurande. Ici, il s'agit de la plus petite valeur de la phase, donc de la pente, qui émerge du bruit de fond [83].

Cette résolution peut être évaluée à partir d'une étude de répétitivité. Deux images successives de la même scène statique sont statistiquement indépendantes. En conséquence, la variance σ_{Δ} de la différence des deux images est égale à la somme des variances des bruits de chacune des images σ_{b1}^2 et σ_{b2}^2 telles que $\sigma_{b1}^2 \approx \sigma_{b2}^2$ [83, 86].

Une évaluation de l'écart-type σ du bruit de mesure sur la phase peut s'écrire :

$$\sigma_{\Delta}^2 \approx \sigma_{b1}^2 + \sigma_{b2}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx \frac{\sigma_{\Delta}}{\sqrt{2}} \quad (3.13)$$

Une évaluation du bruit de phase a donc été effectuée en conduisant l'analyse sur huit images successivement enregistrées de la plaque statique, en absence de tout chargement. Les phases selon les deux directions (x et y) ont été extraites (par l'algorithme "TFD-Fenêtrée"). Sept cartes de bruit dans la direction x ont été ainsi obtenues par soustraction entre deux cartes successives et de manière analogue pour les cartes dans la direction y . Les écarts-types de ces bruits sont présentés dans le tableau 3.2.

Le bruit de mesure évalué sur la phase est donc approximativement : $\sigma_{\phi} \approx 1,3^{\circ} = 2,3 \times 10^{-2}$ radian, ce qui correspond à une résolution en pente locale $\sigma_{\alpha} = \sigma_{\phi}/(s \cdot \sqrt{2}) \approx 3 \mu\text{radian}$, soit 3 mm par kilomètre. Ceci confirme que cette technique bien que non interférométrique, possède une importante résolution.

Répétition de mesure (entre deux images)	écart-type $\sigma(\phi_x)$ (°)	écart-type $\sigma(\phi_y)$ (°)
1 ($A - B$)	1,46	1,38
2 ($B - C$)	1,52	1,20
3 ($C - D$)	1,30	1,07
4 ($D - E$)	1,15	1,12
5 ($E - F$)	1,27	1,19
6 ($F - G$)	1,31	1,43
7 ($G - H$)	1,13	1,09
moyenne	1,30	1,21

Tableau 3.2 – Bruit de mesure : écart-type du bruit de phase dans les directions x et y

Par ailleurs la résolution spatiale d'une mesure se définit comme la plus petite distance séparant deux mesures indépendantes. Elle fournit une indication de la fréquence de coupure spatiale de la méthode, à savoir sa capacité à traduire les gradients du mesurande. La méthode a été appliquée ici en utilisant une grille de pas $p = 2 \text{ mm}$. Compte tenu du grandissement $1/2$ entre la grille et son image, le pas apparent des traits sur la plaque est $p' = 1 \text{ mm}$. Les déplacements de ces traits, évalués par la méthode de grille, sont indépendants. Leur écartement constitue la résolution spatiale : $\Delta x = 1 \text{ mm}$.

La procédure d'identification nécessite la connaissance des champs de courbure. Ceux-ci seront obtenus par dérivation numérique des champs de pente mesurés. On peut dès à présent signaler que cette opération doit être accompagnée d'un énergique lissage spatial pour réduire l'augmentation du bruit de mesure inhérent à une dérivation numérique.

La conséquence de ce filtrage est une dégradation de la résolution spatiale. L'expérimentateur est donc confronté en pratique au choix d'un compromis entre résolution et résolution spatiale : un lissage spatial diminue le bruit donc la résolution mais dégrade la résolution spatiale.

3.4.5 Sensibilité en rotation

Cette sensibilité a été vérifiée expérimentalement en utilisant un montage permettant d'imposer à une plaque réfléchissante une rotation connue de corps rigide.

Le dispositif (voir figure 3.14) utilise une platine tournante d'axe vertical sur laquelle est

radialement bridé un bras rigide de longueur supérieure à 2,5 m.

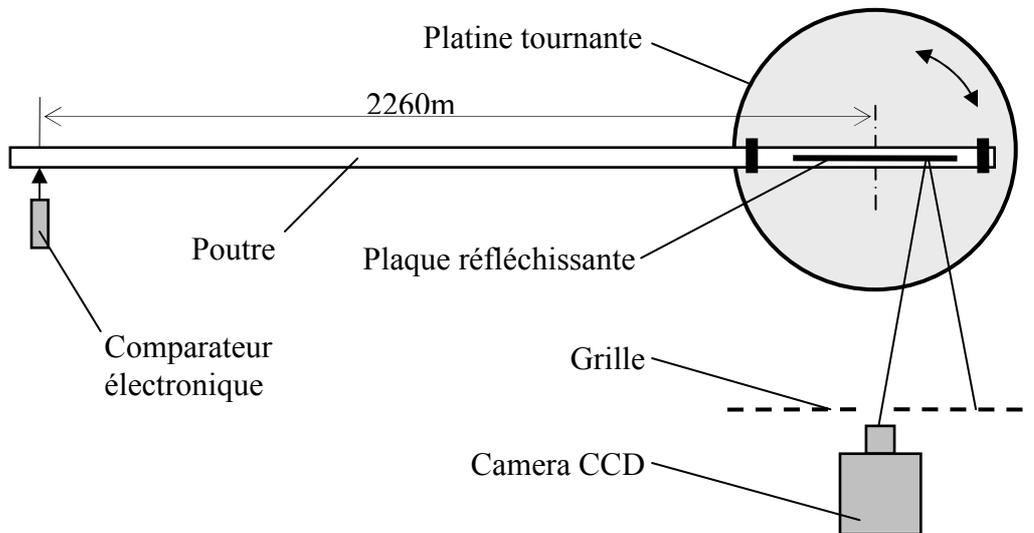


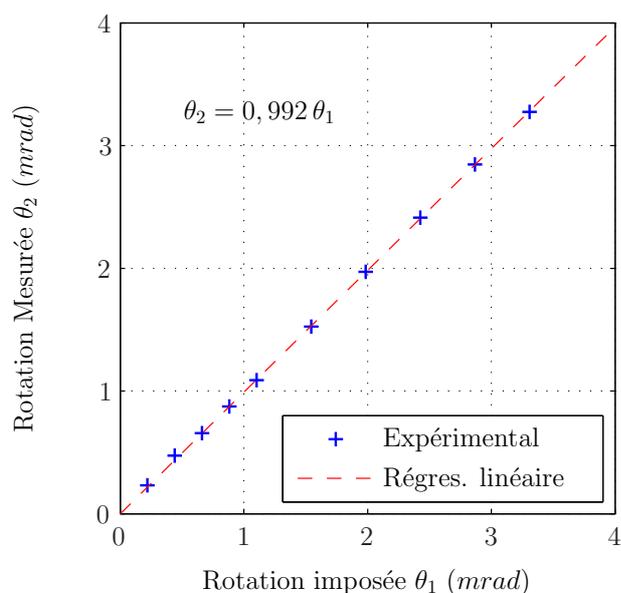
Figure 3.14 – Schéma du dispositif de calibration de la sensibilité

Des rotations sont imposées à la platine grâce à une vis micrométrique. Elles sont contrôlées à l'aide d'un comparateur électronique (sensibilité $1 \mu m$) détectant les déplacements tangentiels Δu d'un point du bras situé à $L = 2260 \text{ mm}$ de l'axe de rotation, permettant ainsi une mesure précise de la rotation imposée à la table $\theta_1 = \Delta u/L$. Une plaque constituée du matériau testé est rigidement fixée en position verticale sur la platine, telle que son plan contienne l'axe de rotation de la platine. Elle fait face à une grille dans les mêmes conditions que celles présentées au paragraphe 3.4.4. Cette plaque suit les mouvements de rotation imposés à la table et le champ de pente qu'elle présente dans la direction du bras (champ de pente constante en l'occurrence) est mesuré par la méthode précédemment présentée. Compte tenu des dimensions de la plaque ($L = 200 \text{ mm}$) et de la distance grille-plaque ($l = 650 \text{ mm}$), l'erreur de parallaxe évaluée à l'aide de considérations géométriques est de l'ordre de 2,5%. La variation spatiale de la mesure de la pente peut être considérée négligeable sur l'ensemble de la plaque. La valeur moyenne calculée sur le champ de pente mesuré après un lissage polynomial $2D$ de degré 1 est considérée comme la pente mesurée θ_2 . Le tableau 3.3 montre les résultats de quelques mesures de pente θ_2 comparées aux rotations correspondantes θ_1 imposées à la platine.

Le coefficient de corrélation sur une régression linéaire entre une dizaines de couples de rotations imposées et pentes mesurées vaut $r \approx 0,992$. Ces résultats confirment la sensibilité déterminée précédemment de manière purement géométrique.

Rotations imposées θ_1 (mrad)	Pentes estimées θ_2 (mrad)
0,221	0,231
0,441	0,473
0,662	0,657
0,882	0,875
1,103	1,089
1,544	1,524
1,985	1,971
2,426	2,414
2,867	2,847
3,308	3,274

Tableau 3.3 – Vérification expérimentale de la sensibilité

Figure 3.15 – Exemple d'étalonnage du montage optique de mesure de champs de pente par la grille de pas $p = 2 \text{ mm}$

3.4.6 Sensibilité au déplacement hors-plan

La flexion de la plaque suite à un chargement entraîne en tous points de celle-ci une variation de la pente ainsi que de la flèche. Cette dernière, dans le cas de la méthode proposée, se superpose au mouvement d'entraînement hors-plan. La variation de la phase

entraînée par ce couplage doit rester négligeable devant celle due à la variation de la pente pour que la méthode de mesure soit utilisable.

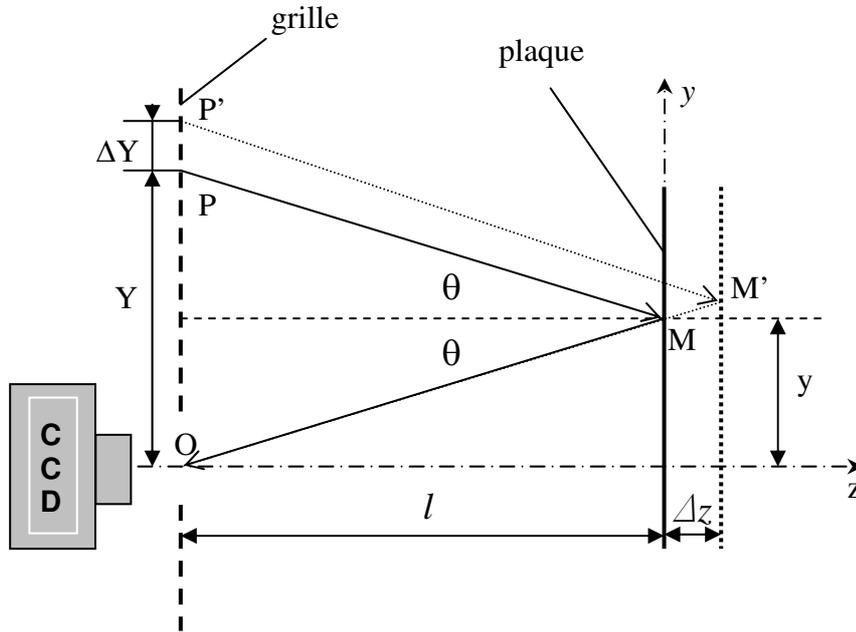


Figure 3.16 – Schéma du calibrage de la sensibilité hors-plan

Le schéma de la figure 3.16 montre les effets, dans la direction y de la plaque, d'un déplacement hors plan Δz . A l'état initial, un pixel O de la caméra CCD observe un point M de la plaque portant l'image du point P de la grille, tel que $OP = Y$. Après le déplacement hors-plan Δz le même pixel observe le point M' portant l'image du point P' distant de ΔY du point P initial. D'après la figure 3.16, il est possible d'écrire :

$$Y = 2l \cdot \tan \theta, \quad Y + \Delta Y = 2(l + \Delta z) \cdot \tan \theta \quad (3.14)$$

Si y est l'ordonnée du point M comptée depuis l'axe de la caméra, le déplacement apparent s'écrit :

$$\Delta Y = 2\Delta z \cdot \tan \theta = 2\Delta z \cdot \frac{y}{l} \quad (3.15)$$

A partir de l'équation 3.11, la variation de phase liée à la modification d'image peut s'écrire :

$$\Delta\phi(y) = \frac{2\pi}{p} \cdot \Delta Y = \frac{2\pi}{p} \cdot 2\Delta z \cdot \frac{y}{l} = \frac{4\pi \cdot \Delta z \cdot y}{p \cdot l} \quad (3.16)$$

Au niveau du traitement, elle peut s'interpréter comme une variation de pente locale $\Delta\alpha(y)$ qui par combinaison des équations 3.9 et 3.16 devient :

$$\Delta\alpha(y) = \frac{p \cdot \Delta\phi(y)}{4\pi \cdot l} = \frac{\Delta z \cdot y}{l^2} \quad (3.17)$$

Le même raisonnement peut évidemment s'appliquer dans la direction x . Finalement le déplacement hors-plan d se manifeste au niveau de l'évaluation des courbures de la plaque comme deux courbures apparentes additionnelles k'_{xx} et k'_{yy} constantes :

$$k'_{xx} = \frac{\partial\Delta\alpha(x)}{\partial x} = \frac{\Delta z}{l^2}, \quad k'_{yy} = \frac{\partial\Delta\alpha(y)}{\partial y} = \frac{\Delta z}{l^2} \quad (3.18)$$

Dans la configuration utilisée, la distance grille-plaque est $l = 650 \text{ mm}$. Ceci conduit à des courbures additionnelles de l'ordre de $2,4 \text{ km}^{-1}$ ($\text{km}^{-1} = 10^{-3} \text{ m}^{-1}$) par mm de déplacement hors plan. Lors des essais en vibrations, les amplitudes des mouvements d'entraînement sont de l'ordre de $50 \text{ }\mu\text{m}$ et les flèches restent inférieures à $0,5 \text{ mm}$. Ceci conduit à des 'courbures additionnelles' inférieures à $1,3 \text{ km}^{-1}$ effectivement négligeables devant les courbures effectives de la plaque en essai.

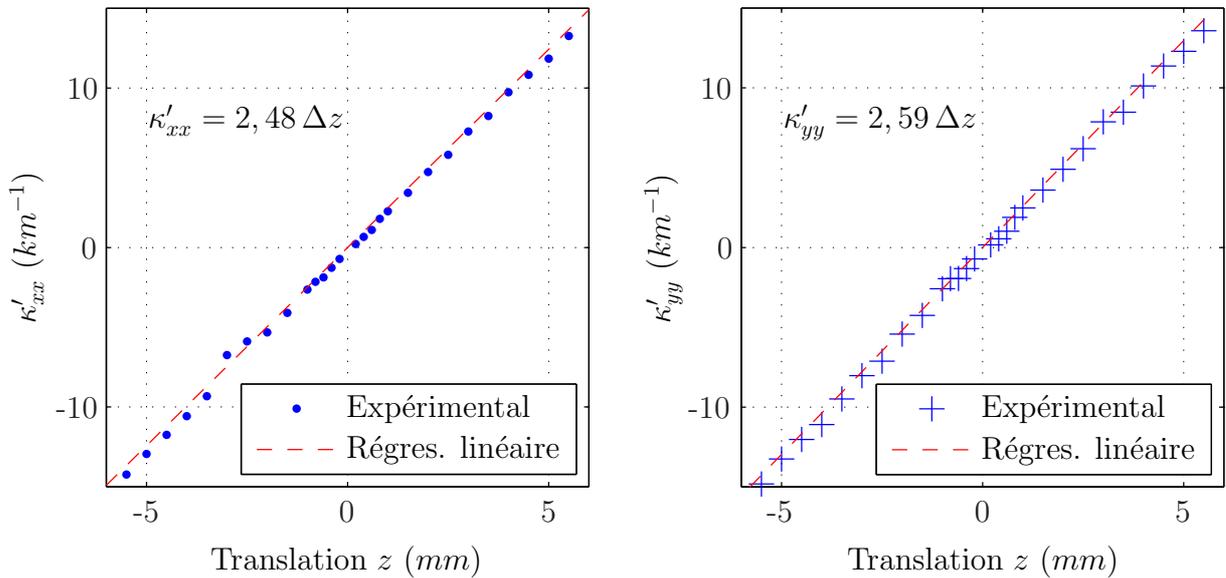


Figure 3.17 – Sensibilité en mouvement hors-plan

Pour valider expérimentalement ces conclusions, des essais ont été conduits sur un dispositif spécifique schématisé dans la figure 3.16. Il utilise une platine en translation horizontale commandée par une vis micrométrique et dont les déplacements sont contrôlés

par un comparateur électronique (sensibilité $1 \mu m$). Une plaque réfléchissante a été fixée verticalement sur la platine en face d'une grille dans des conditions semblables à celles décrites au paragraphe 3.4.4.

Les pentes mesurées sur la plaque translaturée et non déformée ont été traitées comme indiqué au paragraphe 3.4.3. La figure 3.17 montre les courbures apparentes 'additionnelles' détectées dans les directions x et y pour différents mouvements hors-plan imposés. Les valeurs sont conformes à celles attendues confirment les résultats de l'équation 3.17.

3.5 Processus de traitement des images

Cette partie présente l'ensemble des traitements effectués sur les images. Les cartes de phase sont obtenues à partir des images acquises en utilisant l'algorithme présenté en section 3.4.3. Après les opérations de dépliage et de division par la sensibilité, elles fournissent les champs de pente mesurés. Ceux-ci après intégration ou dérivation donneront accès respectivement aux champs de flèche et de courbure. Au préalable une opération de lissage des champs de pente est pratiquée afin de réduire les effets du bruit lors des dérivations. Deux stratégies de lissage ont été étudiées. Les techniques utilisées tant pour l'intégration que pour la dérivation sont alors spécifiques à chacune de ces méthodes de lissage (voir figure 3.18).

Le lissage local constitue la première stratégie. Il utilise la convolution avec un noyau gaussien. Les champs de courbure sont obtenus par dérivation locale en utilisant un autre noyau gaussien. Les champs de flèche sont produits par une intégration numérique partielle.

La deuxième stratégie est le lissage polynomial. Un champ de pente donné est représenté par un polynôme à deux variables (x, y) défini sur l'ensemble de l'image au sens des moindres carrés. L'intégration du polynôme conduit au champ de flèche et ses dérivations mènent aux champs de courbure tous décrits sous formes polynomiales.

3.5.1 Dépliage de la phase

Déplier la phase signifie supprimer les sauts de 2π présents, en ajoutant ou supprimant localement le multiple de 2π adéquat. Dans de nombreux travaux portant sur la caractérisation mécanique de matériaux, il est nécessaire de dériver spatialement des champs

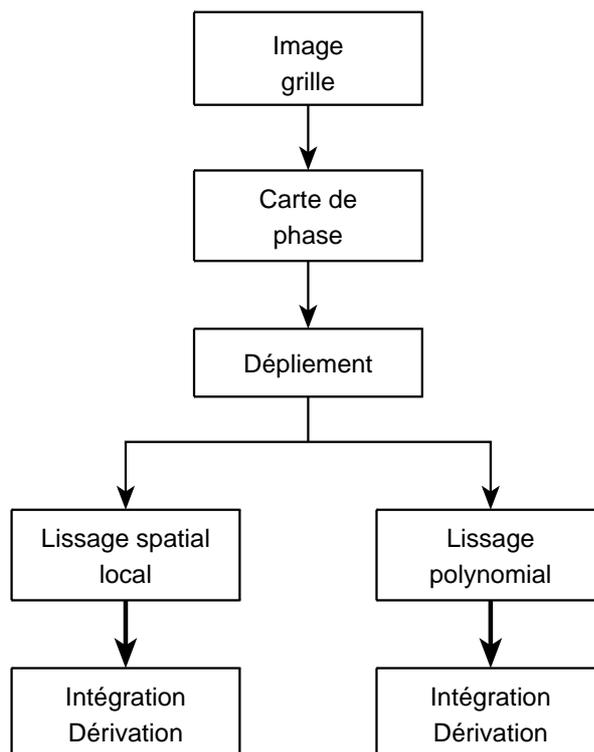


Figure 3.18 – Processus du Traitement des images

cinématiques mesurés [64, 89, 90, 94]. L'utilisation d'un algorithme de dérivation locale n'impose pas de déplier la phase. Par contre en cas d'intégration, comme dans cette étude, le dépliement devient une opération obligatoire.

La procédure de dépliement est triviale dans le cas unidimensionnel : il suffit de contrôler la différence de phase entre deux pixels voisins. Si cette différence est en valeur arithmétique plus grande que π , par exemple, on rajoute (ou soustrait, selon le signe de cette différence) 2π à la valeur de la phase du deuxième pixel et à tous les pixels suivants. L'application de cette procédure au cas bidimensionnel s'avère beaucoup plus délicate.

Plusieurs auteurs ont abordés le problème du dépliement de phase [86, 95–98] pour lequel deux stratégies se dégagent : spatiale et temporelle. On parle de dépliement spatial de phase quand une seule carte de phase est utilisée, ce qui est le cas de ce travail.

Une solution simple consiste à déplier la phase complètement sur des chemins rectilignes suivant la verticale de l'image. Ensuite, déplier la phase sur des chemins rectilignes suivant la direction horizontale (ou dans l'ordre inverse). Cette procédure présente des difficultés de dépliement lorsque le niveau du bruit sur les cartes de phase est important (un saut de 2π n'est pas détecté ou à l'inverse un saut est détecté alors qu'il n'a pas lieu d'être),

une erreur de dépliement en résulte et se propage le long du chemin rectiligne.

Divers artifices existent pour tenter de remédier à ce type de problèmes. Une méthode proposée par Surrel [86] consiste à réaliser un lissage spatial avant le dépliement généralement en utilisant une opération de convolution avec une fenêtre gaussienne $2D$ de 5 ou 7 pixels de large. Il est alors possible de soustraire la phase lissée spatialement de la phase bruitée et de conserver en mémoire le résultat de cette soustraction. Le dépliement du champ de phase lissé est bien plus facile. Pour finir, il suffit de rajouter la différence gardée en mémoire pour obtenir la carte phase dépliée et bruitée.

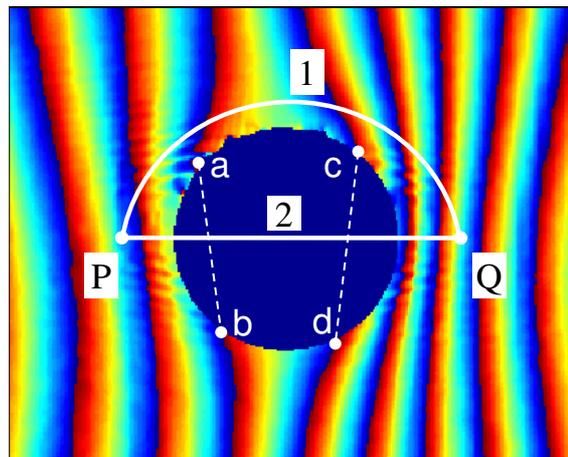


Figure 3.19 – Chemins de dépliements et coupures (L'image est tracée par la commande *imagesc* dans *Matlab*[®]. Le trou circulaire en bleu au centre de l'image ne présente aucune donnée.)

Cependant une des principales difficultés rencontrées concerne le manque d'information présenté par certaines images pour réaliser le dépliement (zone de pixels invalides où la phase n'est pas détectable). Ceci entraîne l'apparition de régions valides déconnectées entre elles, c'est-à-dire séparées par une zone de pixels invalides (où n'apparaît aucune frange). Il n'y a donc pas de chemin qui relie ces régions, et donc aucun moyen de connaître le multiple de 2π à introduire dans une zone par rapport à l'autre. La zone d'encastrement du cas étudié présente typiquement ce problème. La figure 3.19 montre une carte de phase dans la direction x mesurée sur cette partie de la plaque. Les phases de valeurs $+\pi$ et $-\pi$ sont respectivement représentées par les franges rouges et bleues^a. La carte ne présente

^aNotice : Dans la version noire/blanche de ce mémoire, les images des champs sont présentées au niveau de gris. Donc le rouge (ou le blanc dans version noire/blanche) présente la valeur maximale, et le bleu (ou le noir dans version noire/blanche) présente la valeur minimale.

évidemment aucune information de phase dans la zone circulaire de fixation. Par exemple, deux points P et Q sont arbitrairement choisis dans la région d'informations valides. Le nombre de sauts de phase de 2π entre ces deux points est évidemment différent suivant que ces sauts sont décomptés suivant les trajets marqués 1 ou 2 sur la figure 3.19. Pour un dépliement correct, ce nombre doit être indépendant du chemin liant tout couple de pixels valides de la carte.

Une idée reprise et améliorée par Huntley *et al* [99] propose de disposer des coupures interdisant le dépliement correspondant à des parcours traversant des zones de données invalides. Dans l'exemple précédent, l'algorithme proposé placerait une coupure entre les points a et b apparaissant sur une discontinuité de phase et situés en limite de zone de données invalides. Des polarités, par exemple $+1$ et -1 leurs sont respectivement affectées. Les points marqués c et d présentent respectivement les mêmes propriétés que a et b . Une coupure équivalente entre c et d peut également être mise en place. L'établissement de coupures telles que $a-d$ ou $b-c$ peuvent s'avérer pénalisantes dans des cas plus complexes que celui présenté. L'algorithme *minimum-cost-matching* proposé par Huntley recherche les coupures dont la longueur totale soit minimale sur l'ensemble des régions présentant des informations manquantes. Ce critère a été dégagé à partir d'observations expérimentales.

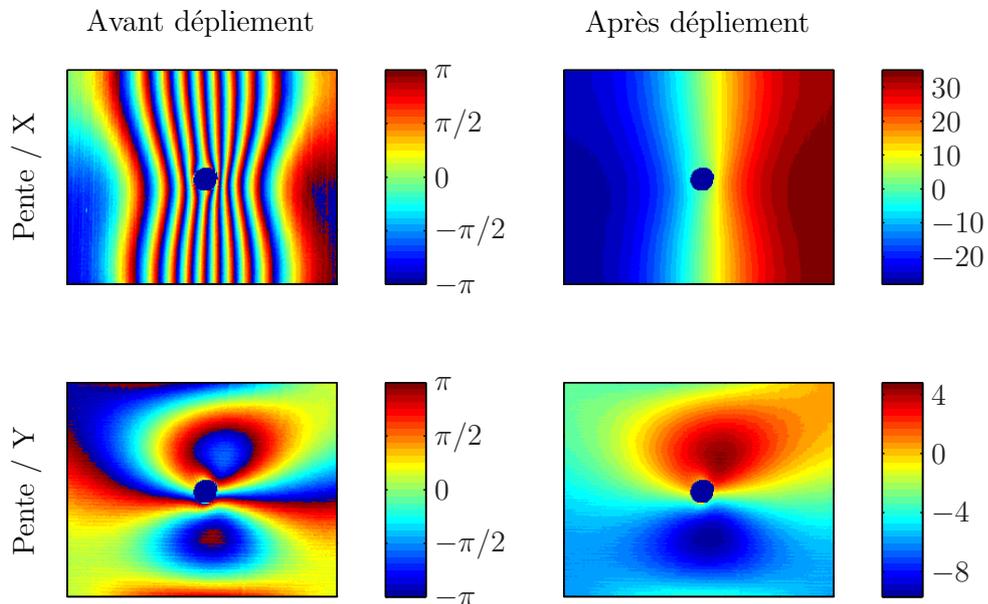


Figure 3.20 – Phase des champs de pente (en radians) : avant et après dépliement (Le trou circulaire en bleu au centre de l'image ne présente aucune donnée, comme dans figure 3.19).

Dans la présente étude, les cartes de phase ont été dépliées à l'aide du logiciel *^aPhase – Vision[®]* développé sur la base de l'algorithme précédemment décrit. La figure 3.20 présente des exemples de cartes de phases extraites dans les directions x et y . Elles proviennent d'images de la réponse de la partie réelle de la plaque excitée à 100 Hz (où l'amplitude du mouvement d'entraînement $d_0 = 27,7\ \mu\text{m}$). La colonne de gauche expose les cartes non dépliées qui montrent de nombreux sauts de phase ainsi qu'une discontinuité au niveau de l'encastrement. Les cartes de droite sont celles obtenues après les dépliements effectués à l'aide de l'algorithme ci-dessus.

3.5.2 Lissage spatial et dérivation locale - Intégration numérique

La détermination des champs de courbure par dérivation des champs de pente entraîne une amplification du bruit provenant de la méthode de grille. Un filtrage efficace de celui-ci s'avère nécessaire. La technique utilisée ici est une convolution de l'image avec une fenêtre $2D$ de noyau gaussien.

Les images capturées par la caméra CCD sont formées de 1250×1000 pixels. Les champs de pente obtenus après dépliement sont sous-échantillonnés en ne conservant qu'une seule information pour toute zone de 6×6 pixels. En effet chaque période de l'image de la grille, décrite sur $N = 6$ pixels, ne fournit qu'une seule information indépendante concernant son déplacement apparent. Le sous-échantillonnage est obligatoire pour se prémunir de tout biais dans les traitements à venir.

Pour réduire le bruit, un lissage par convolution avec une fenêtre gaussienne de 9×9 pixels est effectué deux fois. Les deux premières lignes de la figure 3.21 présente des exemples de champs de pente obtenus après ces traitements. Ils sont issus d'images acquises sur la plaque excitée hors résonance à 80 Hz et à proximité de la résonance à 100 Hz . Les parties réelles et imaginaires correspondantes sont tracées en utilisant les mêmes échelles graphiques dont les valeurs extrémales sont indiquées.

Les champs de courbure sont ici obtenus par différences finies entre pixels voisins. Pour réduire le bruit amplifié par cette opération, ils sont lissés deux fois par la fenêtre gaussienne de 9×9 pixels. Les trois dernières lignes de la figure 3.21 montrent, à titre d'exemples, les champs de courbure correspondantes aux champs de pente précédents avec les mêmes conventions graphiques.

^a<http://www.phasevision.co.uk/home.htm>

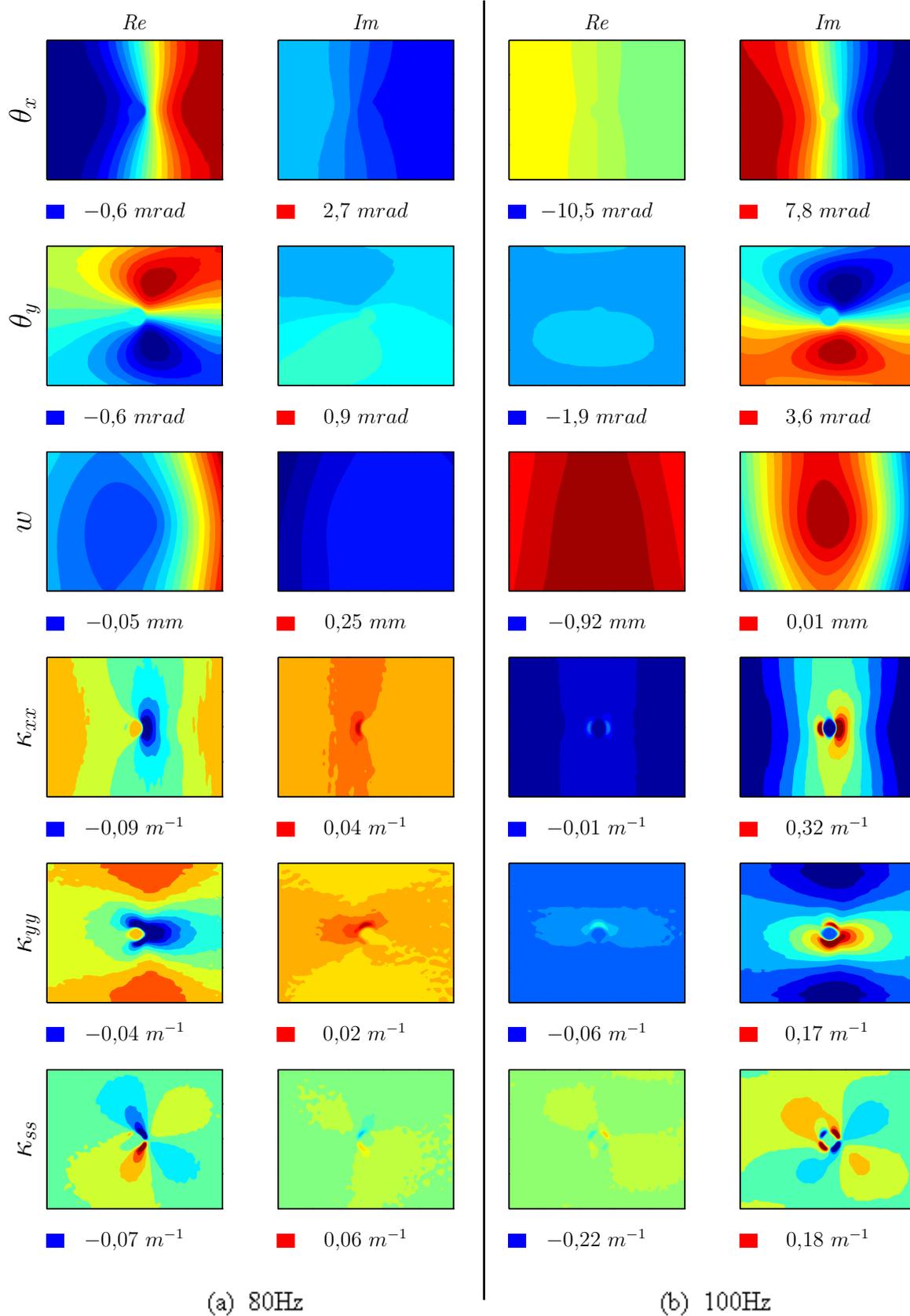


Figure 3.21 – Champs de pente, de flèche et de courbure issus de mesure et traités par lissage local. (a) 80 Hz (hors-résonance, $d_0 = 50,4 \mu\text{m}$); (b) 100 Hz (en résonance, $d_0 = 27,7 \mu\text{m}$)

Les champs de courbure étant les dérivées partielles du champ de flèche, ce dernier peut être obtenu par intégration numérique des pentes par la méthode des trapèzes.

$$\theta_x(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad \theta_y(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$$

La figure 3.22 schématise la procédure d'intégration mise en place pour lever l'indétermination de la constante qui en est issue.

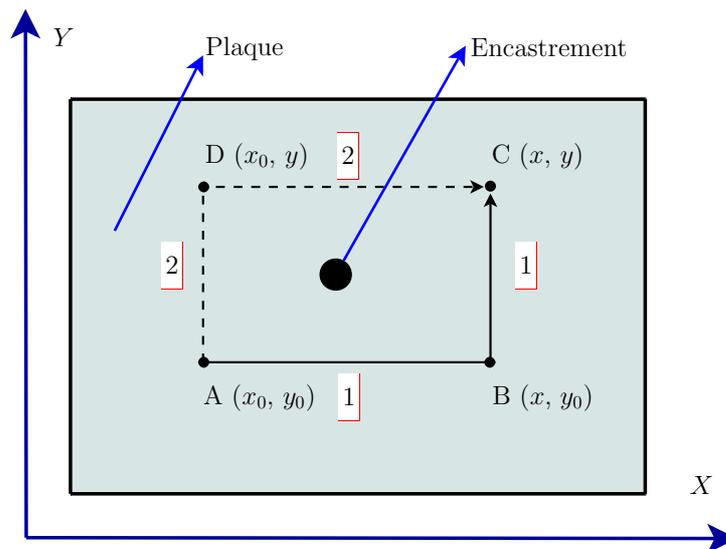


Figure 3.22 – Schéma de procédure d'intégration pour l'obtention du champ de flèche à partir des deux champs de pente

Cette méthode nécessite la connaissance de données sur toute de la surface de la plaque. Dans la zone d'encastrement, où les données sont manquantes, on considère que les valeurs de pente (θ_x et θ_y) sont nulles.

Soit $C(x, y)$ un point quelconque de la surface de la plaque où la valeur de la flèche est recherchée. Un point $A(x_0, y_0)$ est considéré comme le point de départ de l'intégration de A à C . Elle s'opère en intégrant $\theta_x(x, y)$ de $A(x_0, y_0)$ à $B(x, y_0)$ puis par l'intégration de $\theta_y(x, y)$ de $B(x, y_0)$ à $C(x, y)$:

$$w_1(x, y) = g(x, y) + w_1(x_0, y_0)$$

$$\text{avec} \quad g(x, y) = \int_{x_0}^x \theta_x(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y \theta_y(x, y) dy \quad (3.19)$$

La flèche $w(x_0, y_0)$ est inconnue pour tout point de la plaque à l'exception de ceux de la zone d'encastrement où elle est nulle. En particulier en son centre $w_1(0, 0) = 0$, ce qui permet de lever l'indétermination :

$$w_1(x_0, y_0) = w_1(0, 0) - g(0, 0) = -g(0, 0) \quad (3.20)$$

Toutefois le champ de pente $\theta_x(x, y)$ mesuré est perturbé au voisinage de l'encastrement et la qualité du résultat de la première intégrale de l'équation 3.19 s'en ressent.

Une autre valeur de la flèche au point $C(x, y)$ peut être obtenue en changeant de chemin d'intégration de A à C en passant par le point $D(x_0, y)$ (voir figure 3.22) :

$$w_2(x, y) = h(x, y) + w_2(x_0, y_0)$$

$$\text{avec } \begin{cases} h(x, y) = \int_{y_0}^y \theta_y(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x \theta_x(x, y) dx \\ w_2(x_0, y_0) = w_2(0, 0) - h(0, 0) = -h(0, 0) \end{cases} \quad (3.21)$$

La flèche $w(x, y)$ au point C est alors prise comme la moyenne des deux valeurs précédemment obtenues :

$$w(x, y) = \frac{w_1(x, y) + w_2(x, y)}{2} \quad (3.22)$$

La troisième ligne de la figure 3.21 montre les champs de flèche obtenus par cette méthode dans les deux cas donnés en exemples.

Cette technique a été utilisée dans les premiers temps de l'étude. Il est apparu que la taille du noyau gaussien ainsi que le nombre de lissages pratiqués influençaient sensiblement les résultats. De plus leurs choix respectifs demandent une certaine expérience.

Dans le cas de données manquantes ce qui se produit au niveau des défauts de grille ou encore au niveau des bords, on constate que la convolution échoue.

Cette technique a été abandonnée pour la suite de l'étude au profit du lissage polynomial.

3.5.3 Lissage polynomial

3.5.3.1 Lissage global sur une base de polynômes : dérivation et intégration

Une autre technique efficace pour déterminer les champs de courbure et de flèche à partir des champs de pente est proposée ici. Elle consiste à postuler *a priori* que le champ de flèche est une fonction régulière pouvant être exprimée de manière polynomiale. Les dérivations et intégrations peuvent alors être effectuées simplement. Le champ de flèche s'écrit alors :

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{\substack{i=0 \\ (j=k-i)}}^k \left(A_{ij} \cdot x^i y^j \right) = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{\substack{i=0 \\ (j=k-i)}}^k \left(A_{ij} \cdot P_{ij}(x, y) \right) \quad (3.23)$$

Les champs de pente θ_x et θ_y étant les dérivées partielles premières du champ de flèche, deux polynômes $P_x(x, y)$ et $P_y(x, y)$ peuvent en réaliser leurs approximations :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_x(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{i=0 \\ (j=k-i)}}^k \left(A_{ij} \cdot \frac{\partial P_{ij}(x, y)}{\partial x} \right) \\ = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{i=0 \\ (j=k-i)}}^k \left(\alpha_{ij} x^i y^j \right) \\ = \langle f(x, y) \rangle \{ \alpha \} \\ P_y(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{i=0 \\ (j=k-i)}}^k \left(A_{ij} \cdot \frac{\partial P_{ij}(x, y)}{\partial y} \right) \\ = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{i=0 \\ (j=k-i)}}^k \left(\beta_{ij} x^i y^j \right) \\ = \langle f(x, y) \rangle \{ \beta \} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

où $\langle f(x, y) \rangle$ représente le vecteur ligne des $\bar{n} = (n+1)(n+2)/2$ monômes de degré maximal n composant la base polynomiale utilisée (voir équation 3.25). Les vecteurs colonnes $\{ \alpha \}$ et $\{ \beta \}$ contiennent les coefficients des polynômes calculés par régression au sens des moindres carrés pondérés sur l'ensemble des pixels validés.

$$\langle f(x, y) \rangle = \langle x^0 y^0, x^1 y^0, x^0 y^1, x^2 y^0, x^1 y^1, x^0 y^2, \dots, x^n y^0, \dots, x^0 y^n \rangle \quad (3.25)$$

Un premier avantage de cette technique est qu'il est possible de donner un poids différent à chacun des pixels suivant qu'ils correspondent à un point où la mesure est fortement bruitée (près du bord ou près d'un défaut de codage) ou à un point où le bruit est faible. La fonction de pondération $m(x, y)$ est définie en affectant un poids de 1 aux points intéressants et un poids de 0 aux points aberrants, sans donnée ou fortement bruités.

Les pentes sont connues en surface de la plaque, de manière valide ou non, en $p \times q$ points, p et q étant respectivement les nombres de points de mesure sur la longueur et la largeur de la plaque rectangulaire. En tout point (x_k, y_l) tel que $\{1 \leq k \leq p\}$ et $\{1 \leq l \leq q\}$, les pentes peuvent donc s'écrire :

$$\begin{cases} m(x_k, y_l) \cdot \theta_x(x_k, y_l) = m(x_k, y_l) \cdot \langle f(x_k, y_l) \rangle \{\alpha\} \\ m(x_k, y_l) \cdot \theta_y(x_k, y_l) = m(x_k, y_l) \cdot \langle f(x_k, y_l) \rangle \{\beta\} \end{cases} \quad (3.26)$$

La première des deux équations 3.26 peut s'écrire $p \times q$ fois ce qui conduit matriciellement à :

$$\begin{cases} m(x_1, y_1) \cdot \theta_x(x_1, y_1) \\ \vdots \\ m(x_p, y_q) \cdot \theta_x(x_p, y_q) \end{cases} = \begin{bmatrix} m(x_1, y_1) \cdot \langle f(x_1, y_1) \rangle \\ \vdots \\ m(x_p, y_q) \cdot \langle f(x_p, y_q) \rangle \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (3.27)$$

En observant que la seconde équation 3.26 s'écrirait $p \times q$ fois de manière rigoureusement analogue, ces deux expressions peuvent s'exprimer de manière synthétique :

$$\begin{cases} \{\overline{\theta_x}\} = [F] \{\alpha\} \\ \{\overline{\theta_y}\} = [F] \{\beta\} \end{cases} \quad (3.28)$$

où $\{\overline{\theta_x}\}$ et $\{\overline{\theta_y}\}$ sont des vecteurs colonnes dont les $p \times q$ composantes sont les valeurs pondérées des pentes mesurées en chacun des points. $[F]$ est une matrice rectangulaire dont chacune des $p \times q$ lignes contient les valeurs pondérées des \overline{n} monômes de la base polynomiale calculés pour les coordonnées du point de mesure considéré.

Les coefficients polynomiaux décrivant les champs de pente $\theta_x(x, y)$ et $\theta_y(x, y)$ d'origine expérimentale sont alors obtenus par :

$$\begin{cases} \{\alpha\} = [F] \setminus \{\overline{\theta_x}\} \\ \{\beta\} = [F] \setminus \{\overline{\theta_y}\} \end{cases} \quad (3.29)$$

L'opération^a marquée " \setminus " dans l'équation 3.29 utilise la transformation orthogonale de Householder. Elle permet d'obtenir une solution précise au sens des moindres carrés dans le cas de systèmes hyperdéterminés.

Une fois les coefficients α_{ij} et β_{ij} déterminés, cette technique présente l'avantage de permettre d'interpoler les valeurs des champs de pente pour les pixels où les données sont manquantes.

En affectant maintenant la valeur 1 à l'ensemble des pondérations $m(x, y)$, les champs de pente lissés s'expriment sur l'ensemble de la plaque :

$$\begin{cases} \{P_x(x, y)\} = [F] \{\alpha\} \\ \{P_y(x, y)\} = [F] \{\beta\} \end{cases} \quad (3.30)$$

La détermination des coefficients $\{A_{ij}\}$ du champ de flèche (voir équation 3.23) à partir des polynômes $\{P_x(x, y)\}$ et $\{P_y(x, y)\}$ pose le même problème d'indétermination de la constante d'intégration, ici A_{00} , rencontré au paragraphe précédent (équation 3.5.2). Le centre $(0, 0)$ de la zone d'encastrement présentant une flèche nulle, il vient $A_{00} = 0$.

De même manière, les champs de courbure sont facilement obtenus par dérivations des polynômes $\{P_x(x, y)\}$ et $\{P_y(x, y)\}$ des champs de pente lissés.

3.5.3.2 Choix du degré des polynômes

Le degré des fonctions polynomiales utilisées pour la régression des champs de pente est choisi en fonction du gradient de courbure que l'éprouvette présente dans l'essai mécanique utilisé. En effet, un degré insuffisant entraînera une mauvaise représentation des champs de courbure dans les zones où leurs gradients sont importants. Ces considérations ont conduit à une étude sur l'influence du degré des polynômes.

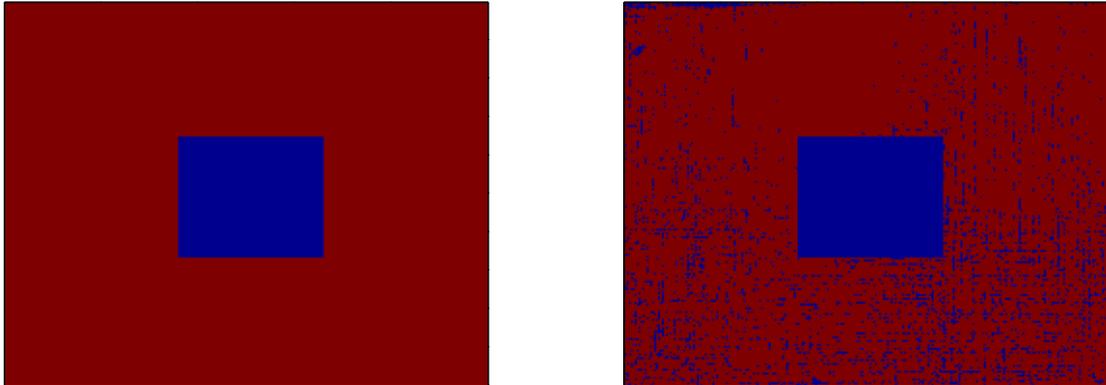
^aSymbole *MATLAB*[®] de la résolution de systèmes linéaires.

En effet, en raison de l'encastrement de l'éprouvette, les gradients des champs de courbure sont très importants au voisinage de cette zone. Les formes globales des champs de courbure sont alors très tourmentées (voir la figure 3.21) et l'application du lissage polynomial est difficile. Dans la procédure d'identification utilisant les champs virtuels par morceaux décrits au paragraphe 2.7.3, le sous-domaine entourant la zone d'encastrement ne participe pas aux travaux virtuels. En conséquence, les sous-domaines équivalents appartenant aux champs de pente mesurés peuvent être masqués de façon à pouvoir appliquer le lissage polynomial.

En choisissant le degré n du polynôme, les résidus peuvent être calculés en effectuant :

$$\begin{cases} \Delta\theta_x(x, y) = P_x(x, y) - \theta_x(x, y) \\ \Delta\theta_y(x, y) = P_y(x, y) - \theta_y(x, y) \end{cases} \quad (3.31)$$

où P_x, P_y sont les champs de pente projetés sur la base polynomiale et θ_x, θ_y des champs de pente mesurés. Le polynôme de degré n qui minimise les écarts types $\sigma(\Delta\theta_x)$ et $\sigma(\Delta\theta_y)$ est celui qui permet la meilleure reconstruction des champs considérés.



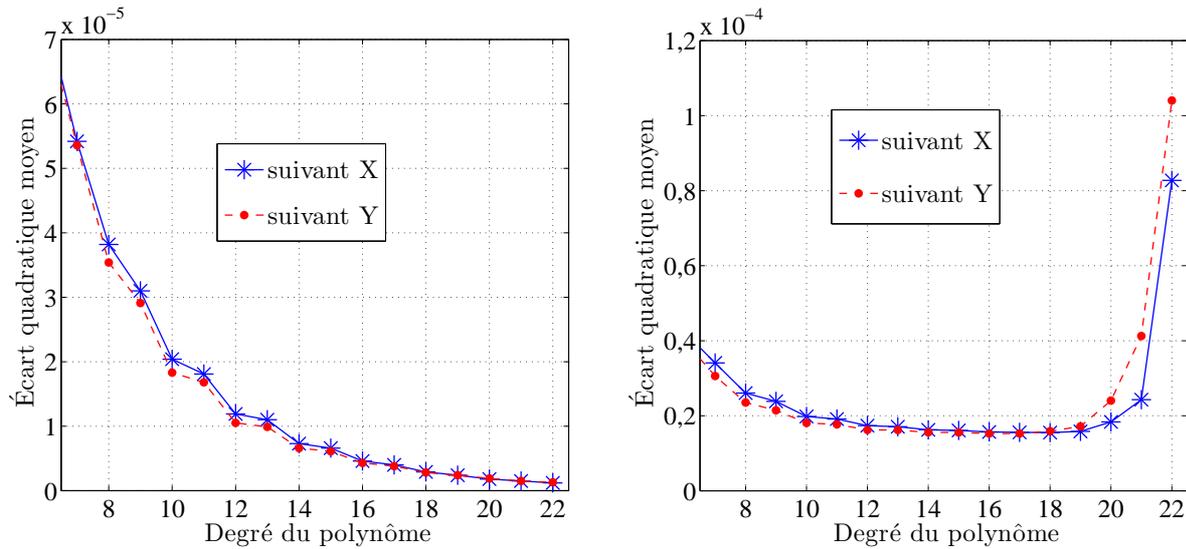
(a) Masque choisi au début

(b) Masque choisi

Figure 3.23 – Exemples de masque appliqué pour effectuer le lissage polynomial.

La recherche de ce minimum est conduite en deux temps. Tout d'abord, la fonction de pondération est annulée pour toute position correspondant à des données nulles ou non choisies, elle est portée à 1 partout ailleurs. On obtient alors, par exemple pour une mesure de champs de pente, le masque où les points en blanc représentent les pixels retenus pour la régression et en noir les pixels écartés (figure 3.23(a)). Dans cet exemple, tous les pixels sont retenus à l'exception de la zone rectangulaire recouvrant largement l'encastrement. Les résidus de cette première estimation sont alors calculés. La fonction de pondération est

alors ajustée pour la deuxième évaluation. Elle est annulée pour tous les pixels présentant un écart entre les pentes brutes et lissées supérieur à deux fois l'écart type du résidu ($\|\Delta\theta_x\| > 2\sigma(\Delta\theta_x)$ ou $\|\Delta\theta_y\| > 2\sigma(\Delta\theta_y)$). Le rapport entre les nombres de pixels retenus lors de la deuxième opération et ceux gardés lors de la première se situe entre 90% et 95%). Les pixels finalement retenus apparaissent en blanc dans la figure 3.23(b).



(a) À partir des champs simulés par EF.

(b) À partir des champs mesurés par la MG.

Figure 3.24 – Évolution de l'écart quadratique moyen entre les pentes simulées/mesurées et les pentes projetées sur une base polynomiale en fonction du degré utilisé.

Plusieurs degrés de polynômes de régression ont été utilisés et comparés en termes d'écarts quadratiques entre les pentes mesurées et les pentes estimées par lissage polynomial (équation 3.31).

Les figures 3.24(a) et 3.24(b) présentent les résultats de cette étude pour la plaque étudiée excitée à 100 Hz, respectivement dans le cas des champs de pente simulés par éléments finis et ceux mesurés par déflectométrie.

Ces deux figures montrent qu'un degré assez élevé ($n \geq 9$) est nécessaire pour minimiser l'écart, donné par l'équation 3.31.

Les champs simulés sont non bruités. Les écarts quadratiques sont d'autant plus faibles que le degré n est élevé. Par contre dans le cas des champs mesurés, les écarts augmentent brutalement pour un degré $n \geq 19$, le bruit se trouvant certainement amplifié par le degré élevé du polynôme. Les écarts sont minimaux et varient peu dans la plage $10 \leq n \leq 18$.

Les identifications pourront donc être conduites en utilisant des champs lissés par des polynômes dont les degrés appartiennent à cette gamme. Le choix final doit prendre en compte les temps de calculs qui augmentent sensiblement avec le degré n retenu.

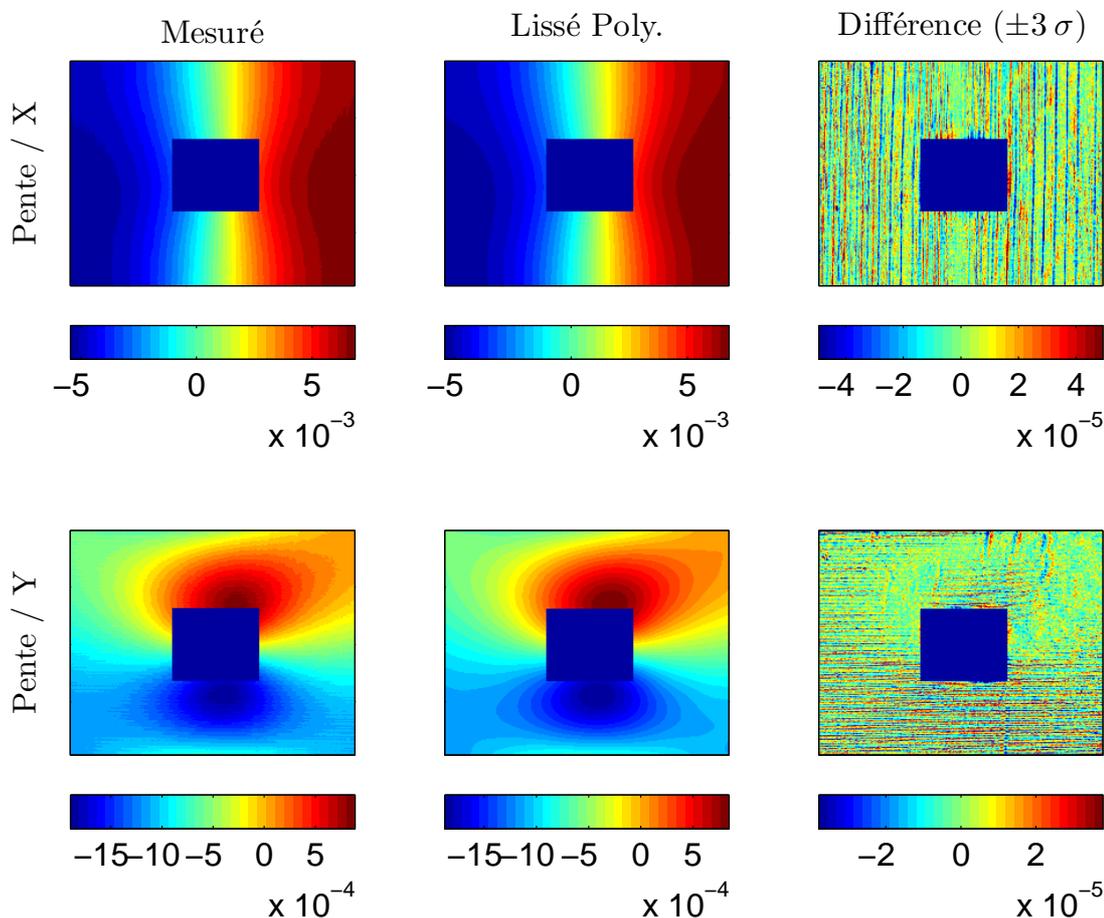


Figure 3.25 – Comparaison entre les champs de pente (en radian) bruts et lissés par une base polynomiale de degré 14.

Pour un degré choisi pour la base polynomiale, il est possible de vérifier le résultat de la régression en calculant les résidus entre les pentes mesurées et les pentes lissées par les fonctions polynomiales. La figure 3.25 présente les champs de pente dans les deux directions x et y , tirés du même exemple que celui traité précédemment. Les valeurs maximales des résidus, pour les deux composantes de pente θ_x et θ_y montrent clairement que le degré choisi (ici $n = 14$) est suffisant pour représenter d'une manière précise les gradients présents sur la surface observée.

Les deux premières lignes de la figure 3.26 montrent les champs de pente obtenus par un lissage polynômial ($n = 14$) des mêmes images que celles utilisées pour la figure 3.21.

Les échelles des parties réelles et imaginaires correspondantes sont identiques et leurs valeurs extrémales sont indiquées en dessous de chaque cas. La troisième ligne montre les champs de flèche obtenus par intégrations des polynômes lissant les pentes. Dans les mêmes conditions, les trois dernières lignes présentent les cartes des champs de courbure provenant des dérivations de ces mêmes fonctions polynomiales.

3.5.3.3 Estimation de l'écart-type du bruit des champs dérivés

Le chapitre précédent a montré que l'incertitude sur les résultats identifiés est directement liée au bruit des champs de courbure. Le niveau de ces bruits sont entre autres dépendants du traitement des images et en particulier des opérations de lissage.

Les différents champs de courbure κ_{xx} , κ_{yy} et κ_{ss} , parties réelles et imaginaires, ont été extraits de huit mesures consécutives et traités par lissage polynomial. Les différences sont calculées point par point entre les courbures correspondantes des champs issus de mesures différentes. La valeur moyenne des écarts types de ces différences pour les mesures effectuées sur la plaque excitée à 100 Hz et une amplitude d'entraînement $d_0 = 28 \mu m$ est $\sigma(\kappa) = 2,3 \times 10^{-4} m^{-1}$. Cette valeur peut être considérée comme une évaluation de la résolution en courbure.

3.5.4 Comparaison entre les deux techniques de lissage

Deux techniques de lissage ont été présentées. Les figures 3.21 et 3.26 montrent les résultats obtenus à partir des mêmes prises de vues, respectivement en utilisant le lissage local et le lissage polynomial. Les cartes de pente et de flèche sont très proches de même que les valeurs extrémales correspondantes. Par contre les représentations des courbures diffèrent sensiblement entre les deux figures ainsi que les valeurs des extrêmes. Comme déjà signalé, les régions de fortes courbures se situent au voisinage de l'encastrement. Le masque utilisé dans le lissage polynomial fait disparaître ces importantes courbures contrairement aux cartes issues des lissages locaux. Les régions de faibles courbures y sont mal représentées en raison des importantes valeurs crêtes à crêtes. Pour faciliter la comparaison entre les deux techniques, la figure 3.27 présente les champs provenant des traitements par lissage local, tracés respectivement avec les mêmes échelles que les cartes fournies par le lissage polynomial.

Les courbures correspondantes appartenant aux deux séries sont globalement similaires

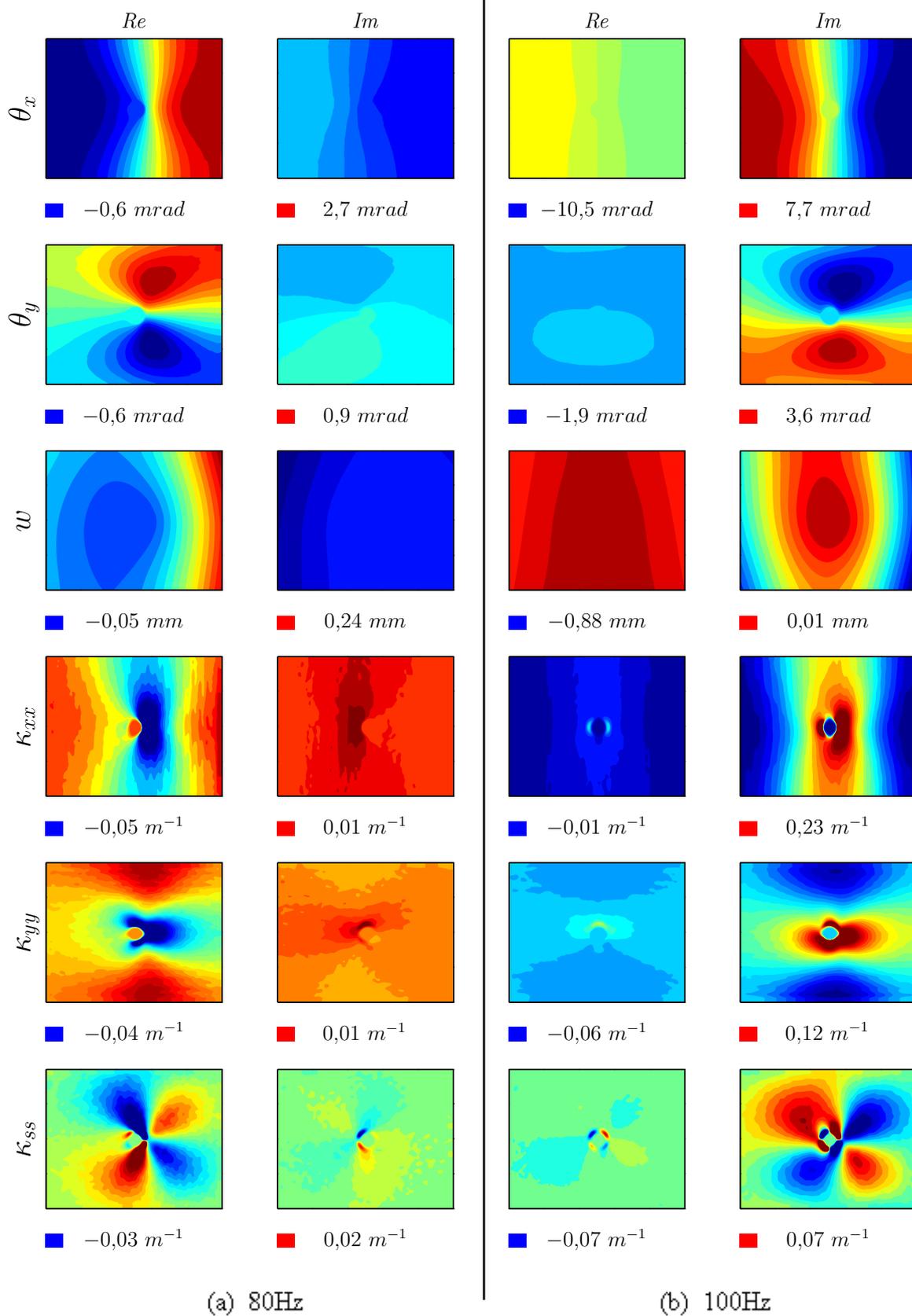


Figure 3.27 – Champs de pente, de flèche et de courbure issus de mesures et traités par lissage local, parties réelles et imaginaires tracées avec les échelles de la figure 3.26.

(a) 80 Hz (hors-résonance); (b) 100 Hz (en résonance).

mais celles provenant du lissage polynomial apparaissent beaucoup moins bruitées. Par ailleurs, cette dernière technique est complémentaire à l'utilisation des champs virtuels par morceaux. En effet la partie masquée au centre peut être choisie pour correspondre au sous domaine des champs virtuels par morceaux où le déplacement virtuel est imposé nul. Ceci constitue un argument supplémentaire pour le choix de son utilisation.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté l'ensemble des développements effectués pour permettre la mesure des champs cinématiques à la surface de la plaque.

Les dispositifs expérimentaux d'excitation et de prise de vue sont décrits ainsi que leurs validations expérimentales. Le choix de la méthode optique est justifié et ses conséquences sur l'identification sont étudiées.

Les techniques adoptées pour le traitement des images permettent de minimiser l'amplification du bruit à travers les opérations de dérivation.

L'ensemble de ces procédures permet d'obtenir les champs cinématiques nécessaires à la réalisation de l'identification.

Chapitre 4

Identification avec la méthode des champs virtuels

4.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats des mesures et identifications découlant de la mise en œuvre des procédures précédemment décrites. Les prises de vues ont été effectuées lors d'excitations dans la bande de fréquence $[70 - 110 \text{ Hz}]$ qui correspond à celle du fonctionnement satisfaisant du dispositif expérimental. Une procédure est proposée pour réduire le déséquilibre entre les rapports signal/bruit présentés par les différentes images acquises au cours d'un essai. Elle est basée sur un choix particulier de l'instant du déclenchement initial.

Les résultats des identifications obtenues avec les champs virtuels sont présentés et discutés.

4.2 Analyse vibratoire de la plaque

Une analyse élémentaire a été entreprise par des méthodes conventionnelles, pour caractériser le comportement vibratoire de la plaque encastree à l'extrémité de la barre d'entraînement. Cette dernière étant provisoirement bloquée, un essai au marteau d'impact

n'a pas permis d'obtenir une réponse vibratoire présentant une résolution fréquentielle suffisante. En effet, en raison de l'amortissement de la plaque, la durée de la réponse, mesurée à l'aide d'un accéléromètre miniature, se révèle trop brève pour conduire à une résolution fréquentielle satisfaisante dans la bande fréquentielle considérée ici.

Ce constat a conduit à la mise en œuvre d'une analyse par balayage en fréquence. Un signal sinus de fréquence lentement variable au pas de $0,2 \text{ Hz}$ dans la bande $[65 - 120 \text{ Hz}]$ a été appliqué au pot électrodynamique pendant que la vitesse vibratoire d'un point de la plaque était mesuré à l'aide d'un vibromètre laser. Le résultat de cette analyse est fourni, en fonction de la fréquence, sous la forme du module et de la phase du quotient de la vitesse vibratoire précédente par rapport à l'accélération mesurée sur la barre d'entraînement. L'excitation inertielle de la plaque étant directement liée à cette accélération, le rapport présente la forme d'une fonction de transfert entre l'excitation et la réponse.

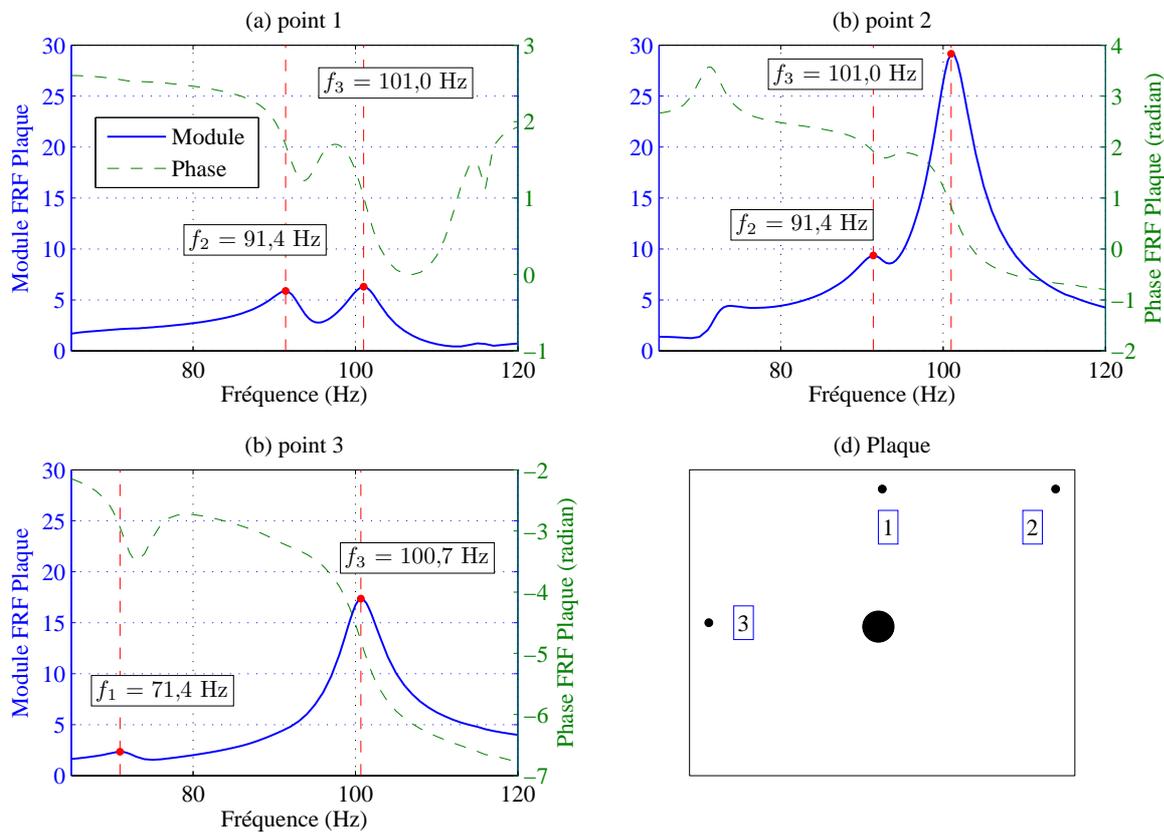


Figure 4.1 – Analyse en fréquence de la plaque

La figure 4.1 montre les graphes de ces fonctions relevées en trois points de la plaque correspondant aux repères marqués **1**, **2** et **3** sur le schéma. Les trois fenêtres montrent des variations prononcées de la phase et des maxima de module pour trois fréquences :

71,4 Hz, 91,4 Hz et 101 Hz. Ces réponses apparaissent comme les résonances des modes 1, 2 et 3 prévues par les simulations respectivement à 80,2 Hz, 99,6 Hz et 104,9 Hz (voir figure 2.5). Les écarts fréquentiels s'expliquent par les données matériau utilisées pour le modèle éléments finis ainsi que par la modélisation sur un faible nombre de nœuds des conditions aux limites au niveau de l'encastrement.

L'analyse des graphes en relation avec les positions des points de mesure confirme ces remarques. Les réponses aux trois fréquences sont maximales au point **2** (fenêtre (b)). Les formes modales calculées montrent que ce point est particulièrement mobile pour les modes 1, 2 et 3 (voir figure 2.5).

La fenêtre (a) ne montre par contre que des résonances faibles des modes 2 et 3. Le mouvement correspondant à ce dernier amène la plaque à se replier autour de la médiane verticale qui porte le point de mesure **1**. La faible mobilité de ce dernier explique la résonance limitée du mode 3 en ce point. Le mode 1 à 71,4 Hz consiste pour l'essentiel en une rotation de la plaque à l'état quasi rigide autour de la médiane verticale. Le point **1** se situe donc sur une ligne nodale de ce mode qui ainsi ne présente pas de résonance en ce point.

Pour une raison identique, dans la fenêtre (c) le point **3** ne présente pas de résonance du mode 2. Ce dernier consiste grossièrement en une rotation d'ensemble de la plaque autour de la médiane horizontale sur laquelle se situe le point **3**. La résonance du mode 3 y est par ailleurs moins prononcée qu'au point **1**, ce qui est en accord avec les formes calculées des modes.

La position quasi centrale de l'encastrement explique que les modes 1 et 2 approximativement symétriques par rapport aux médianes ne soient qu'assez faiblement sollicités par l'excitation inertielle appliquée. Enfin cette dernière, comme indiqué par les simulations, n'excite pas non plus le mode 4 qui se situe approximativement à 125 Hz. En effet ce mode est symétrique par rapport aux diagonales de la plaque et n'est pas sollicité par la forme de l'excitation. Les trois courbes de réponses sont faibles et décroissantes à 120 Hz alors que la forme modale calculée de ce mode prévoit que les points **1** et **3** présentent des mobilités maximales. Si la résonance était excitée, les réponses en ces points devraient être nettement croissantes.

4.3 Optimisation des prises de vues

Des prises de vues ont été opérées pour cinq fréquences du mouvement d'entraînement : 70 Hz , 80 Hz , 90 Hz , 100 Hz et 110 Hz . Les essais du paragraphe 4.2 montrent que la fréquence de 100 Hz correspond pratiquement à celle d'une résonance de la plaque.

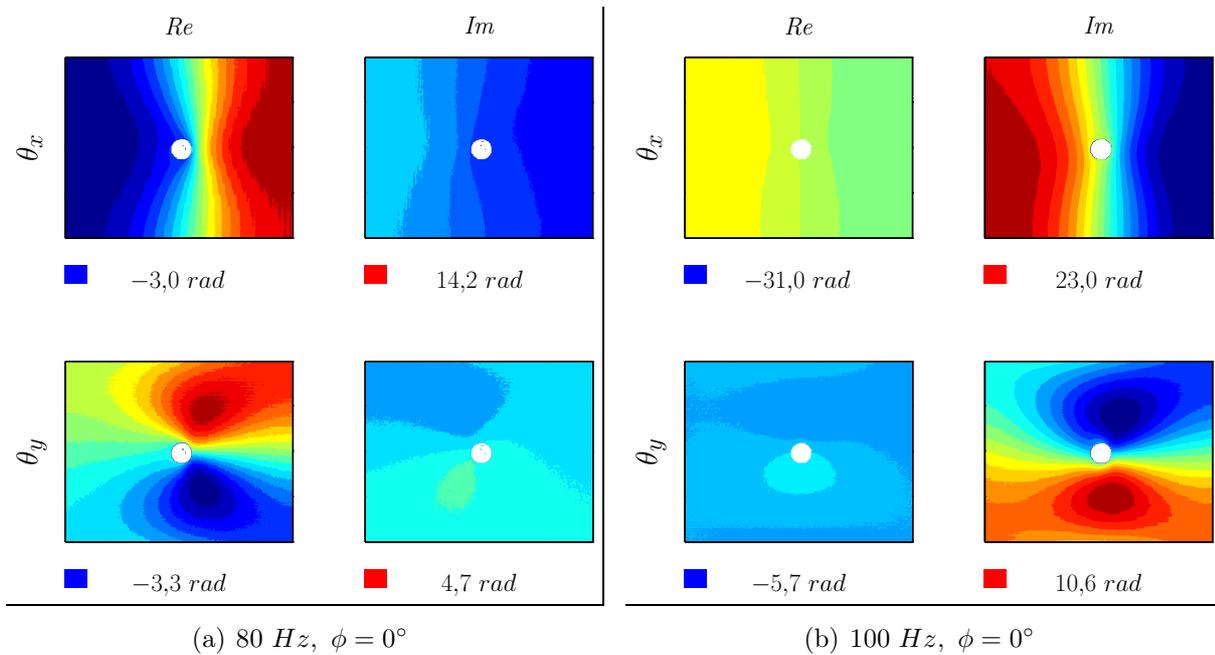


Figure 4.2 – Champs de pente mesurés à 80 Hz et 100 Hz sans décalage ($\phi = 0^\circ$)

La figure 4.2 montre les cartes de pentes non lissées obtenues lors d'excitations hors résonance à 80 Hz et proche d'une résonance à 100 Hz . Pour les premières, des pentes significatives ne s'observent que sur les champs acquis en phase avec l'excitation (*Re*). Toutefois leurs valeurs restent faibles devant celles des pentes relevées sur les cartes acquises en quadrature (*Im*) à la résonance à 100 Hz . Par contre, les pentes apparaissent peu significatives dans le cas des champs acquis en quadrature à 80 Hz et pratiquement nulles pour celles issues des prises de vue en phase à 100 Hz .

Les bruits de mesure sont *a priori* identiques lors de toutes les prises de vues. L'influence de ces derniers est d'autant plus importante que les champs mesurés présentent des pentes peu prononcées. Les rapports signaux sur bruit entre les acquisitions en phase et en quadrature d'un même essai peuvent ainsi être très différents. Une procédure a été mise en œuvre pour équilibrer les mesures des composantes moyennes des champs de pentes de manière à réduire les effets ultérieurs du bruit de mesure.

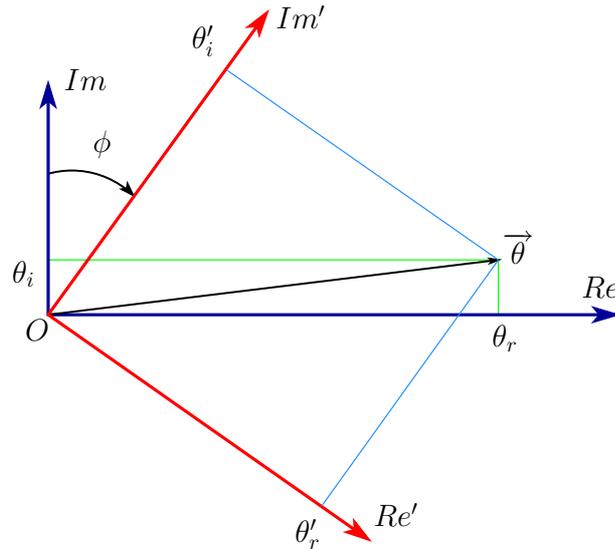


Figure 4.3 – Rotation du plan complexe

La figure 4.3 illustre cette procédure. Le vecteur $\vec{\theta}$ représente la pente moyenne de la plaque dans une direction. La composante réelle θ_r est ici, par exemple, dans le plan complexe initial (Re, Im) beaucoup plus importante que la composante imaginaire θ_i . La rotation ϕ du plan complexe amène les deux composantes θ'_r et θ'_i à être idéalement de valeurs équivalentes dans le nouveau repère complexe (Re', Im') . La diminution du rapport signal/bruit sur la nouvelle composante réelle est ici largement compensée par le gain sur le même rapport présenté par la nouvelle composante imaginaire. La rotation ϕ étant connue puisque imposée, le calcul des composantes θ_r et θ_i nécessaires pour le processus d'identification, est évident à partir de celles mesurées θ'_r et θ'_i .

En pratique cette rotation ϕ correspond à un retard qui doit être imposé aux déclenchements des prises de vues par rapport respectivement à l'instant de la position extrême de l'entraînement (Re) et à celui de la position médiane de l'entraînement (Im). Le montage présenté en 3.8 permet l'introduction d'un tel décalage au niveau du déclenchement du flash (voir section 3.3.3).

La figure 4.4 montre les champs de pentes acquis à 80 Hz et 100 Hz avec des décalages correspondants respectivement à $\phi = 45^\circ$ et $\phi = 60^\circ$. Ces cartes sont à comparer avec celles présentées initialement dans la figure 4.2. Dans ces deux exemples, l'introduction du décalage entraîne une diminution moyenne de 15% des valeurs crête-crête des pentes. Par contre les cartes montrent que l'équilibre recherché est quasiment atteint entre les cartes dites réelles et imaginaires d'un même champ de pente.

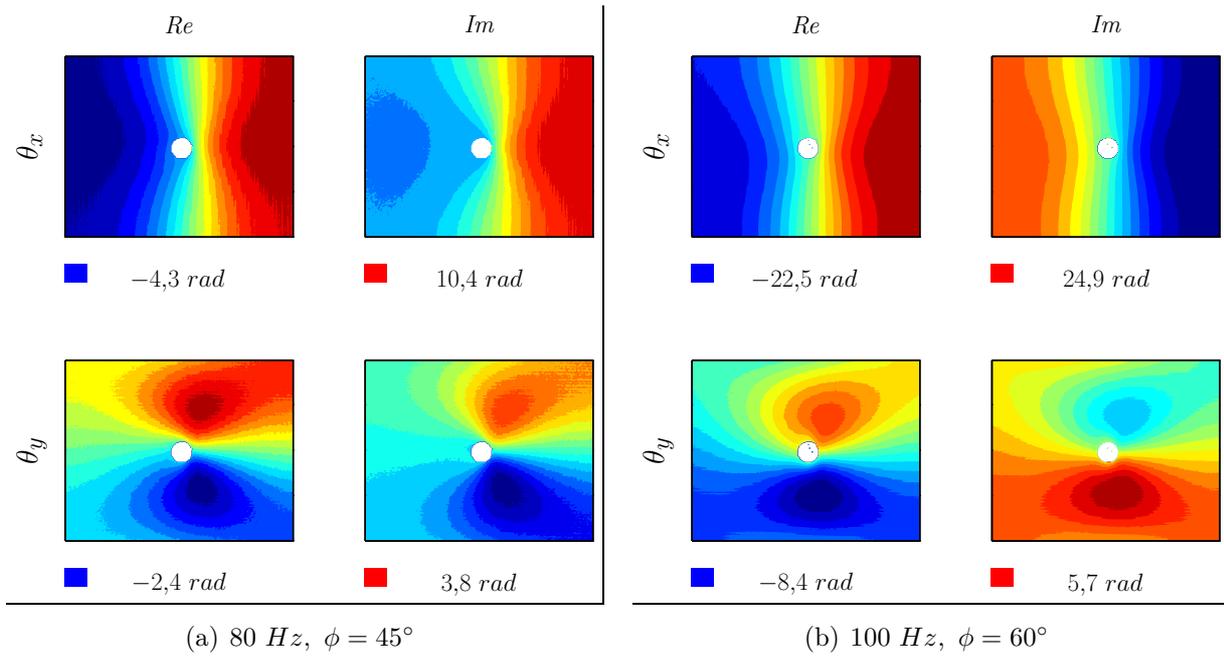


Figure 4.4 – Champs de pente mesurés à 80 Hz avec $\phi = 45^\circ$ et à 100 Hz avec $\phi = 60^\circ$

Le choix du décalage ϕ à imposer lors d'un essai donné demeure une difficulté expérimentale. A titre exploratoire, la plaque a été excitée sur chacune des cinq fréquences indiquées. Quatre décalages correspondant à $\phi = 0^\circ$, $\phi = 30^\circ$, $\phi = 45^\circ$ et $\phi = 60^\circ$ ont été successivement introduits dans les essais à chacune des fréquences.

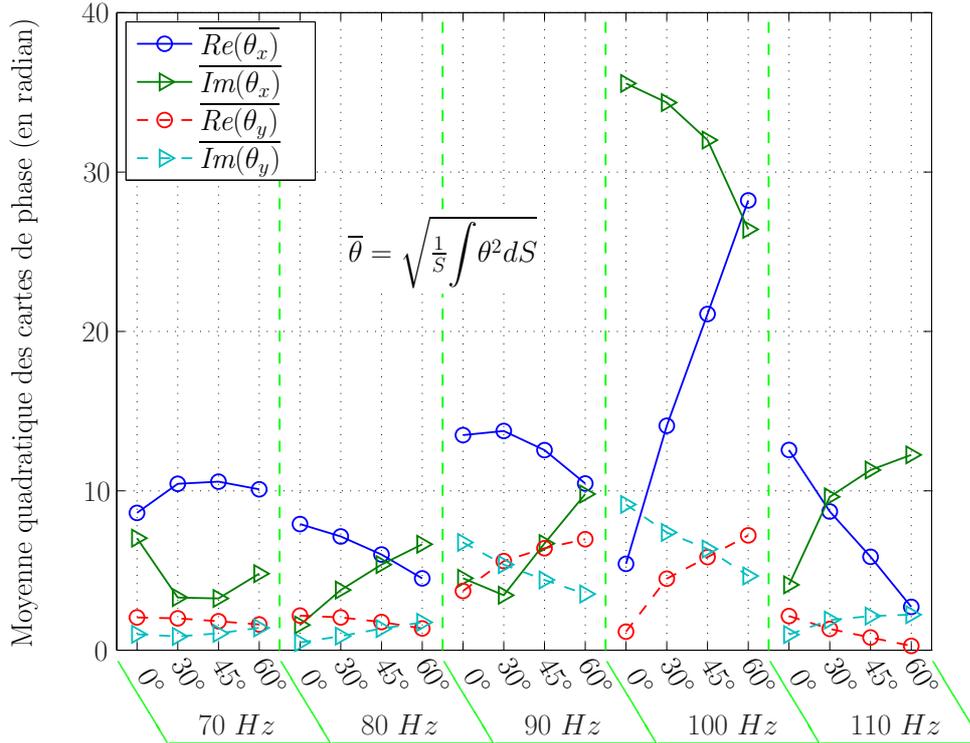
La figure 4.5 présente pour chaque essai, les quatre pentes moyennes quadratiques. Ces dernières notées $\bar{\theta}$ sont calculées à partir des champs mesurés, telles que :

$$\bar{\theta} = \sqrt{\frac{1}{S} \int (\theta(x, y))^2 dS} \quad , \quad \text{pour } \theta(x, y) = Re(\theta_x), Im(\theta_x), Re(\theta_y), Im(\theta_y) \quad (4.1)$$

Ces résultats ont été utilisés pour choisir de manière empirique les valeurs de retard ϕ permettant d'équilibrer approximativement les parties réelles et imaginaires des pentes quadratiques moyennes. Le tableau 4.1 indique les valeurs retenues pour chacune des cinq fréquences d'excitation.

Fréquence (Hz)	70	80	90	100	110
Décalage ϕ	0°	45°	60°	60°	30°

Tableau 4.1 – Décalages ϕ choisis


 Figure 4.5 – Pentés quadratiques moyennes en fonction des décalages ϕ imposés

Il est à remarquer que le même retard n'est pas simultanément optimal pour $\overline{\theta}_x$ et $\overline{\theta}_y$. Par exemple à 100 Hz, $\phi = 60^\circ$ paraît optimum pour les pentés suivant x , les valeurs correspondantes de $\overline{Re}(\theta_x)$ et $\overline{Im}(\theta_x)$ étant alors très proches. Par contre $\phi = 45^\circ$ apparaît mieux équilibrer les pentés réelles et imaginaires suivant y .

4.4 Champs cinématiques mesurés

Le tableau 4.2 indique, pour chacune des cinq fréquences, les amplitudes d'entraînement imposées à la plaque lors des essais finaux.

Fréquence (Hz)	70	80	90	100	110
Amplitude (10^{-5} m)	7,0	5,0	4,1	1,8	2,9
Coef. Var. (%)	1,6	1,3	1,2	1,9	0,8

Tableau 4.2 – Amplitudes d'entraînement

Le signal du mouvement d'entraînement étant acquis numériquement pendant environ 0,5 seconde lors de chaque prise d'image, les amplitudes sont calculées à partir des échantillons

acquis (équation 4.2).

$$d_0 = \sqrt{2} \frac{X_0}{\omega^2} = \frac{\sqrt{2}}{\omega^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k)^2} \quad (4.2)$$

L'excitation à 100 Hz a été volontairement réduite de manière à limiter la résonance de la plaque.

Les essais ont été effectués huit fois pour chaque fréquence. Les coefficients de variation de l'amplitude (des 8 mesures) indiquent la stabilité de l'entraînement. En raison du rechargement du flash, le délai entre deux prises de vue successives est d'environ une minute. La méthode de mesure est basée sur la variation de l'image de la grille entre la plaque au repos et de la déformée. En conséquence, une image de la plaque en position statique est prise entre chaque essai en vibration de manière à limiter au maximum les effets du décalage d'une part de l'échantillon dans son encastrement et d'autre part de la position de repos de l'ensemble de l'équipage mobile.

Les figures 4.6, 4.7 et 4.8 des pages suivantes présentent des exemples typiques des champs cinématiques issus des prises de vues pratiquées avec les décalages de déclenchement du tableau 4.1. Chaque figure montre respectivement de haut en bas, les parties réelles et imaginaires :

- des champs de pente suivant les directions x et y , après application du lissage polynomial présentés en section 3.5.3 (*ici de degré 14*) ;
- des champs de flèche obtenus par intégration numérique des champs de pentes lissés ;
- des trois champs de courbure issus des dérivations numériques des champs de pentes lissés.

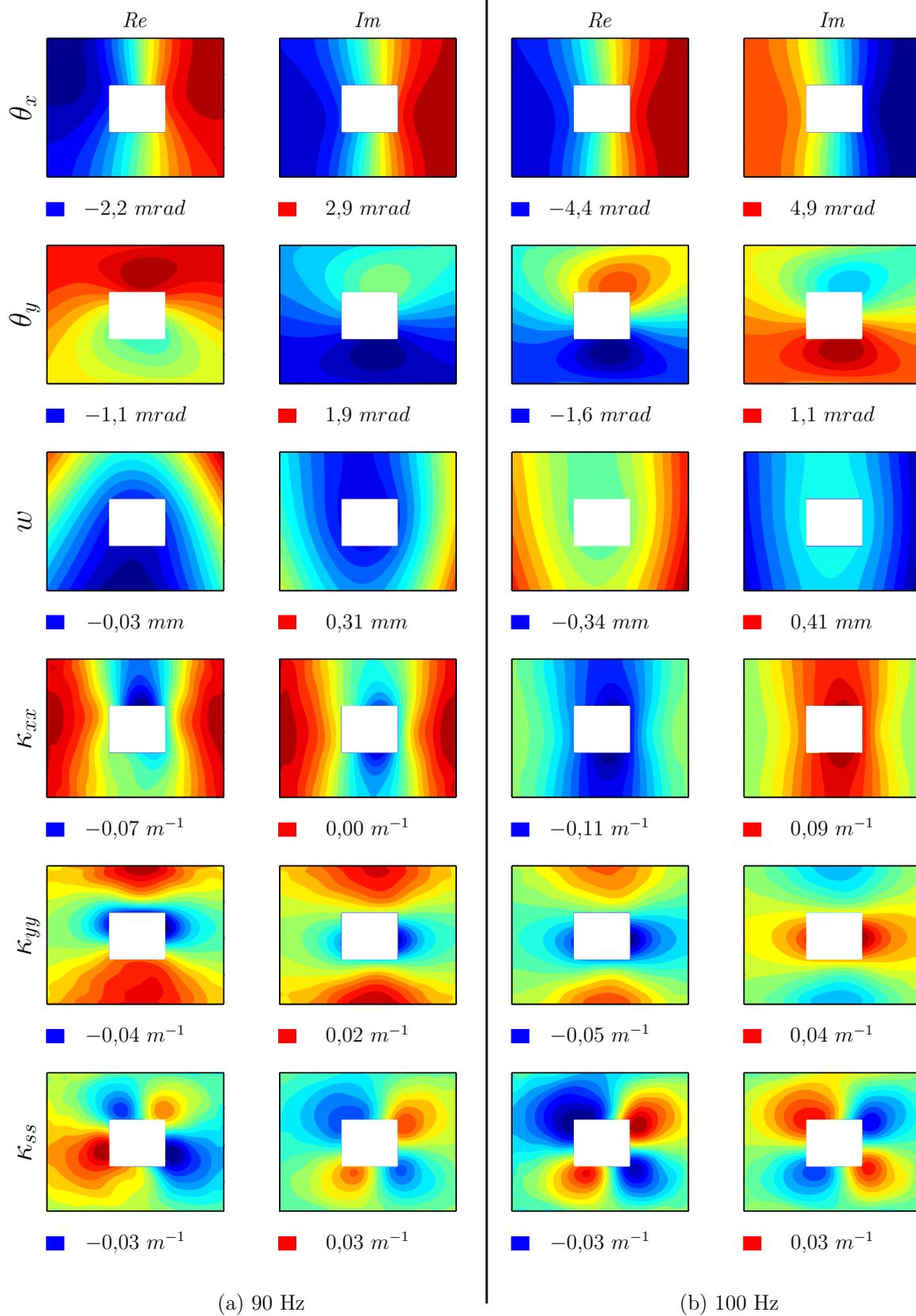


Figure 4.7 – Champs de pente, de flèche et de courbure issus de mesures, parties réelles et imaginaires : (a) 90 Hz avec $\phi = 60^\circ$, (b) 100 Hz avec $\phi = 60^\circ$.

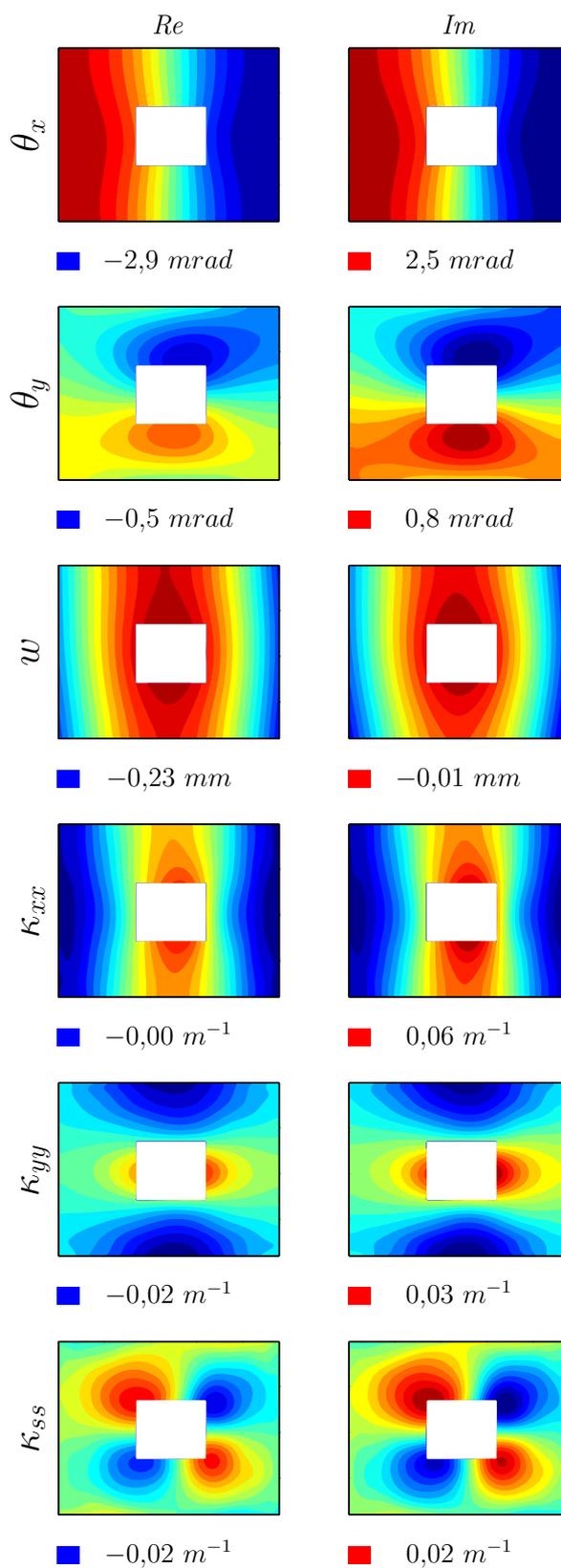


Figure 4.8 – Champs de pente, de flèche et courbure issus de mesures, parties réelles et imaginaires, à 110 Hz avec $\phi = 30^\circ$.

4.5 Résultats des identifications

4.5.1 Valeurs de référence

La partie gauche du tableau 4.3 rappelle les caractéristiques du matériau en séparant celles qui ont été identifiées à partir des essais sur poutres, module d'Young et taux d'amortissement β_{xx} (voir section 3.2.1) de celles fournies par d'autres sources. Le coefficient de Poisson provient de la bibliographie [100] et deux valeurs ont été retenues définissant une plage. Par manque d'information, le taux d'amortissement β_{xy} a été pris égal à β_{xx} (hypothèse classique).

Propriétés du matériau				Caractéristiques de la plaque			
Identif. 80 Hz		Biblio.	Hypoth.				
E (GPa)	β_{xx} (10^{-4} s)	ν	β_{xy} (10^{-4} s)	Q_{xx}	Q_{xy}	B_{xx}	B_{xy}
				(GPa)		(10 ⁻⁴ GPa · s)	
4,90	1,08	0,30		5,38	1,62	5,82	1,74
		0,35	1,08	5,58	1,95	6,03	2,11

Tableau 4.3 – Valeurs de référence des paramètres (en utilisant les différentes valeurs de coefficient de Poisson)

La partie droite du tableau présente deux jeux de caractéristiques de rigidité et d'amortissement de la plaque calculées à partir des propriétés matériau précédentes et des valeurs retenues pour le coefficient de Poisson.

4.5.2 Résultats des identifications

4.5.2.1 Résultats globaux

Les figures 4.9 et 4.10 présentent les valeurs moyennes et les écarts types respectivement des rigidités Q_{xx} , Q_{xy} et amortissements B_{xx} , B_{xy} identifiés à travers l'ensemble des mesures : huit essais sur chacune des cinq fréquences d'excitation. Ces résultats ont été obtenus à partir des champs de pente mesurés, présentés dans les figures 4.6, 4.7 et 4.8, lissés par des polynômes de degré variant de 8 à 18 (voir section 3.5.3). Les écarts types étant très faibles sur la plupart des rigidités identifiées, les barres d'erreur les représentant ne sont vraiment discernables que sur les résultats Q_{xy} à 70 Hz. Les deux couples

de lignes horizontales tracées en tirets fins représentent les valeurs de référence tirées du tableau 4.3.

Les paramètres recherchés ont été extraits en utilisant des champs virtuels par morceaux 5×5 optimisés présentés respectivement en 2.7.3 et 2.7.3.6. Le découpage et la taille des sous-domaines sont identiques à ceux présentés en 2.7.3.7.

Les séries (a) et (b) de résultats proviennent respectivement de deux jeux de champs virtuels :

- type (a) : sans la contrainte $\int w^* dS = 0$;
- type (b) : avec la contrainte $\int w^* dS = 0$, minimisant les effets des erreurs de mesure de l'entraînement.

L'observation des graphes montrent qu'à l'exception des amortissements identifiés à 70 Hz tous les résultats obtenus à l'aide des champs virtuels de type (a) sont stables pour des lissages polynômiaux de degré supérieur à 10.

Les résultats obtenus à l'aide des champs virtuels de type (b) montrent de manière générale une moins grande stabilité vis à vis du degré du polynôme de lissage. La contrainte supplémentaire imposée dans ces champs virtuels paraît rendre la procédure plus sensible au lissage polynomial. Un degré minimum de 14 semble nécessaire. D'autre part, les valeurs des rigidités sont sensiblement plus faibles mais leurs écarts types semblent peu affectés par la contrainte supplémentaire. Par contre les amortissements présentent des valeurs généralement plus élevées que celles de la série (a) mais avec une plus grande dispersion dans la plupart des cas, contrairement à ce que laissaient espérer les simulations.

4.5.2.2 Résultats par fréquence

Les remarques précédentes montrent une stabilité globale des résultats, pour les deux types de champs virtuels, après un lissage des champs de pente mesurés par des polynômes de degré 14. Les paramètres identifiés après un tel traitement des mesures sont détaillés dans le tableau 4.4 pour chacune des cinq fréquences d'excitation. Les écarts relatifs notés E. R. 1 et E. R. 2 sont calculées par rapport aux valeurs de référence du tableau 4.3 et respectivement pour les valeurs de coefficient de Poisson $\nu = 0,30$ et $\nu = 0,35$.

Les résultats obtenus avec les champs virtuels de type (a) montrent des coefficients de variation très faibles sur les deux rigidités et modérés sur l'amortissement B_{xx} à l'exception de ceux identifiés à 70 Hz. Comme les simulations le pressentaient (voir 2.7.3.7) la

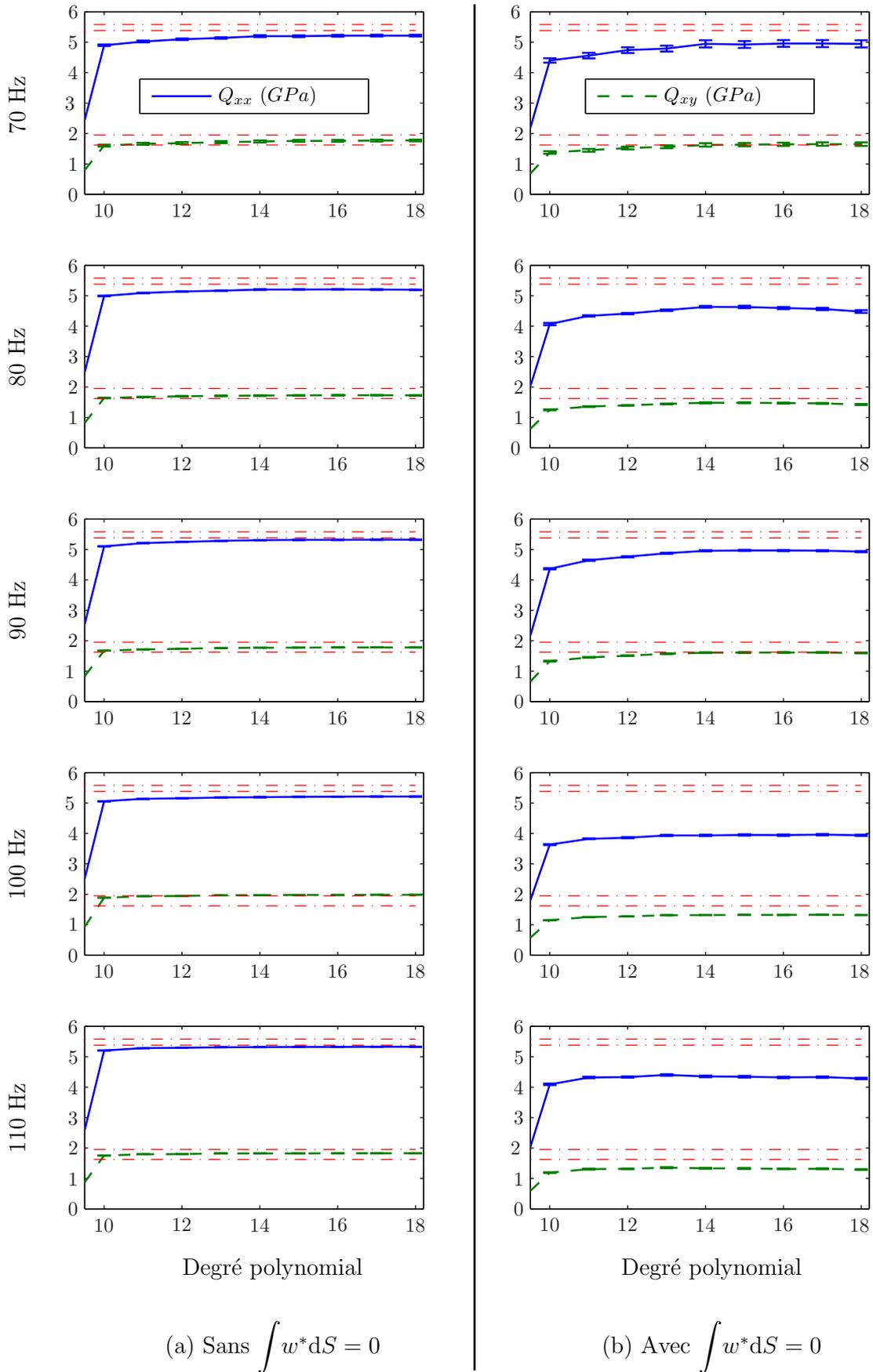


Figure 4.9 – Moyennes des rigidités identifiées ($\pm \sigma$) en fonction des degrés des polynômes de lissage

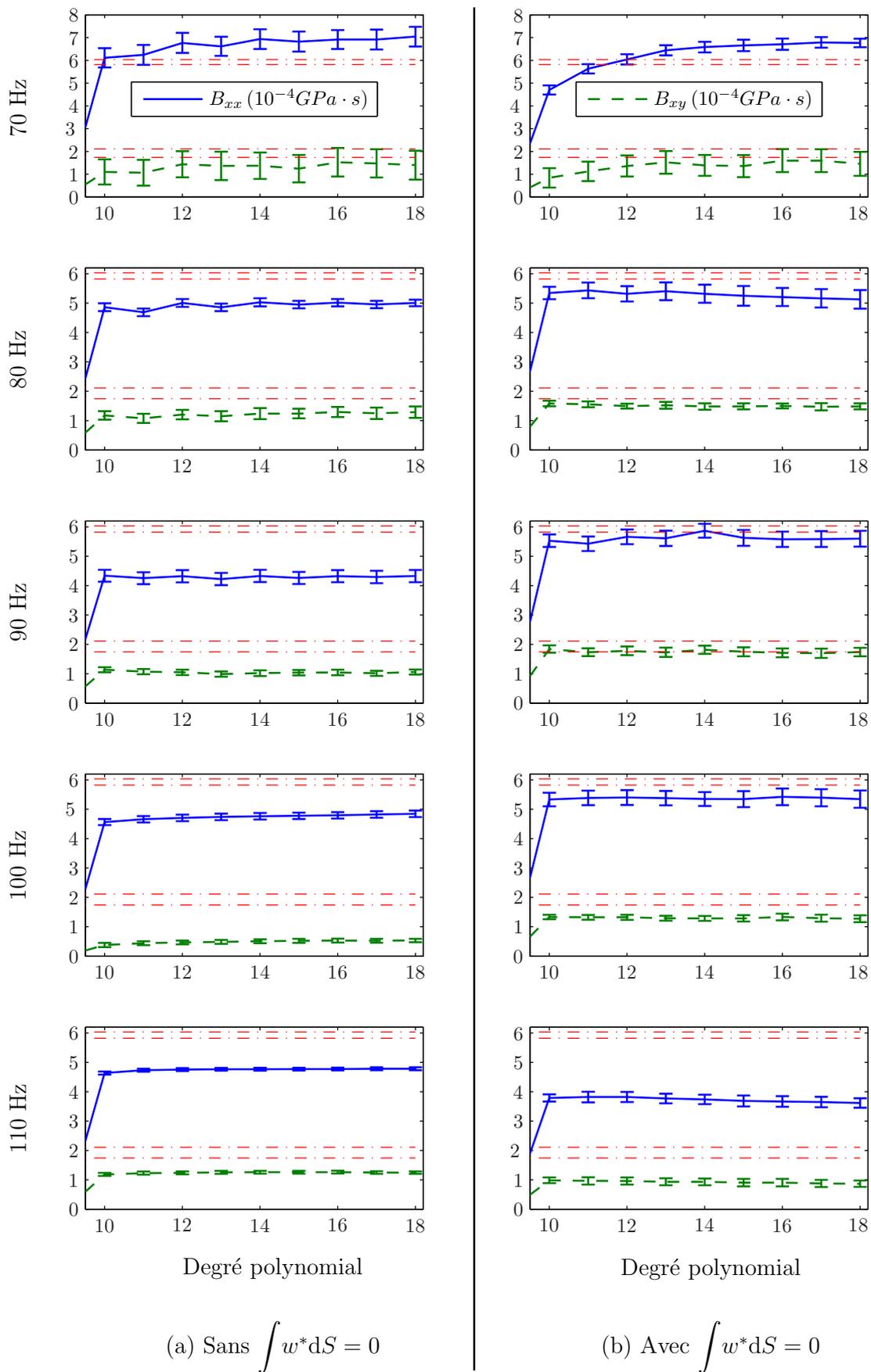


Figure 4.10 – Moyennes des amortissements identifiés ($\pm \sigma$) en fonction des degrés des polynômes de lissage

Fréquence (Hz)		Sans $w^*dS = 0$					Avec $w^*dS = 0$				
		70	80	90	100	110	70	80	90	100	110
Q_{xx} (GPa)	Moy.	5,20	5,20	5,30	5,19	5,31	4,94	4,63	4,96	3,94	4,35
	C. V. (%)	0,6	0,2	0,1	0,2	0,1	2,4	0,6	0,4	0,6	0,6
	E. R. 1 (%)	-3,5	-3,4	-1,5	-3,6	-1,3	-8,2	-14,0	-8,0	-26,9	-19,2
	E. R. 2 (%)	-6,9	-6,8	-5,1	-7,0	-4,9	-11,4	-17,0	-11,3	-29,5	-22,1
Q_{xy} (GPa)	Moy.	1,74	1,72	1,77	1,97	1,82	1,62	1,48	1,61	1,32	1,33
	C. V. (%)	1,9	0,7	0,2	0,2	0,3	3,5	1,2	0,8	0,5	1,2
	E. R. 1 (%)	7,5	6,2	9,4	22,1	12,7	0,5	-8,4	-0,5	-18,5	-17,7
	E. R. 2 (%)	-11,2	-12,2	-9,5	0,9	-6,9	-16,9	-24,3	-17,8	-32,6	-32,0
$10^4 \times B_{xx}$ (GPa · s)	Moy.	6,93	5,02	4,33	4,76	4,77	6,58	5,31	5,87	5,35	3,74
	C. V. (%)	6,3	2,7	4,8	2,3	1,0	3,5	5,8	4,0	4,4	4,3
	E. R. 1 (%)	19,2	-13,6	-25,6	-18,2	-18,1	13,2	-8,6	0,9	-8,1	-35,7
	E. R. 2 (%)	14,9	-16,7	-28,3	-21,1	-21,0	9,2	-11,9	-2,7	-11,4	-38,0
$10^4 \times B_{xy}$ (GPa · s)	Moy.	1,37	1,23	1,02	0,51	1,26	1,39	1,48	1,81	1,29	0,93
	C. V. (%)	43	15	9,4	12,7	3,7	33	7,3	7,7	6,4	12
	E. R. 1 (%)	-21,3	-29,3	-41,7	-70,9	-28,0	-20,4	-15,3	4,0	-26,3	-46,8
	E. R. 2 (%)	-35,0	-41,5	-51,8	-76,0	-40,5	-34,2	-30,0	-14,0	-39,0	-56,0

Tableau 4.4 – Résultats d’identification des paramètres de l’éprouvette (lissage polynomial degré $n = 14$)

figure 4.6(a) montre qu’en dépit de l’amplitude d’entraînement la plus élevée, trois des quatre champs de pente mesurés à cette fréquence ne présentent pas de valeur significative. La relative faiblesse du rapport signal/bruit de ces mesures amène une identification moins satisfaisante. Les mêmes cartes relevées aux autres fréquences montrent des champs beaucoup plus contrastés produisant un meilleur rapport signal/bruit. Ces premiers résultats montrent la robustesse de la méthode d’identification vis à vis des perturbations aléatoires. Les coefficients de variation sur l’amortissement B_{xy} ne sont pas satisfaisants et feront l’objet d’une analyse ultérieure.

Comme relevé précédemment sur les résultats globaux, les identifications obtenues avec les champs virtuels de type (b) exhibent des coefficients de variation plus importants que leurs homologues issus des champs (a). Cette constatation introduit un doute sur l’efficacité réelle de la contrainte devant limiter l’influence de l’erreur du mouvement d’entraînement. Ce résultat est décevant vis à vis de ce que les simulations laissaient entrevoir. La cause peut être recherchée dans un biais de cette partie de la procédure. Des investigations complémentaires devront être conduites pour permettre de conclure sur ce point.

L'existence de deux écarts relatifs rend peu aisée la comparaison des valeurs identifiées avec les références. Le tableau 4.5 présente les mêmes résultats sous la forme des constantes élastiques du matériau et de ses taux d'amortissement déterminés à l'aide des relations dans l'équation 4.3.

$$\nu = \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}}; \quad E = Q_{xx}(1 - \nu^2); \quad \beta_{xx} = \frac{B_{xx}}{Q_{xx}}; \quad \beta_{xy} = \frac{B_{xy}}{Q_{xy}} \quad (4.3)$$

Fréquence	(Hz)	Sans $\int w^* dS = 0$					Avec $\int w^* dS = 0$				
		70	80	90	100	110	70	80	90	100	110
ν	Moy.	0,33	0,33	0,33	0,38	0,34	0,33	0,32	0,32	0,33	0,30
	C. V. (%)	1,3	0,5	0,8	0,6	0,6	2,3	1,4	2,3	1,9	1,6
	E. R. 1 (%)	11,4	10,1	10,7	26,3	13,7	8,7	5,7	6,6	10,5	0,8
	E. R. 2 (%)	-4,5	-5,6	-5,1	8,3	-2,5	-6,9	-9,4	-8,7	-5,3	-13,6
E (GPa)	Moy.	4,56	4,59	4,68	4,43	4,68	4,29	4,02	4,33	3,46	3,91
	C. V. (%)	1,8	1,3	1,2	0,8	0,6	3,7	3,8	3,8	2,3	1,7
	E. R. (%)	-7,0	-6,3	-4,4	-9,6	-4,5	-12,5	-18,0	-11,7	-29,4	-20,2
β_{xx} (10^{-4} s)	Moy.	1,31	0,96	0,82	0,92	0,90	1,30	1,18	1,16	1,38	0,87
	C. V. (%)	2,9	1,8	1,8	0,9	0,3	7,5	5,4	3,9	2,7	3,1
	E. R. (%)	21,0	-11,5	-24,5	-15,2	-17,0	20,4	9,6	7,8	28,0	-19,8
β_{xy} (10^{-4} s)	Moy.	0,77	0,71	0,60	0,25	0,69	0,86	1,07	1,14	1,01	0,71
	C. V. (%)	10,3	4,7	6,0	9,1	0,8	13,5	8,2	9,1	6,2	7,1
	E. R. (%)	-28,6	-34,2	-44,7	-77,0	-36,5	-20,2	-1,2	5,7	-6,1	-34,2

Tableau 4.5 – Constantes élastiques et taux d'amortissement identifiés

En raison des remarques précédentes sur les résultats obtenus à l'aide des champs virtuels (b), les commentaires porteront essentiellement sur ceux issus de l'utilisation des champs virtuels (a).

Compte tenu du nombre d'opérations successives de la procédure, il est difficile de calculer la propagation des incertitudes. Les coefficients de variation sont faibles pour les deux constantes élastiques et le premier taux d'amortissement. Il est possible de remarquer que les coefficients de variation des caractéristiques élastiques sont légèrement supérieurs à ceux des rigidités dont elles sont issues alors que les variations des taux d'amortissement sont au contraire moins élevées que celles des paramètres d'amortissement du tableau 4.4. Il serait toutefois imprudent d'en tirer des conclusions à partir d'un nombre encore peu important d'essais.

Concernant les valeurs identifiées du module d'Young et du coefficient de Poisson celles provenant des mesures à 100 Hz sont singulièrement différentes de celles provenant des essais aux autres fréquences. La valeur de Q_{xy} figurant dans le tableau 4.4 à cette fréquence présageait de ce résultat. Cette anomalie sera analysée plus loin. Les commentaires ci-dessous ne concernent donc que les résultats obtenus aux quatre autres fréquences.

Les valeurs moyennes du coefficient de Poisson obtenues à partir de ces essais sont quasi unanimement $\nu \approx 0,33$ avec un coefficient moyen de variation inférieur à 1%, pénalisé par les mesures à 70 Hz déjà commentées.

De la même manière, concernant le module d'Young, les coefficients de variation des quatre valeurs identifiées sont généralement inférieurs à 1,5%, c'est à dire du même ordre de grandeur que les coefficients de variation des amplitudes d'entraînement enregistrées pendant les prises de vues. La moyenne des quatre modules identifiés ressort à $E \approx 4,63 \text{ GPa}$ dont il est aisé de vérifier qu'elle se situe dans la plage d'écart-type de chacune des valeurs identifiées. On peut noter enfin que cette valeur moyenne diffère de -5% de la valeur $E \approx 4,9 \text{ GPa}$ identifiée à partir des essais sur des poutres en vibrations libres (voir section 3.2.1) avec une incertitude évaluée au minimum à $\pm 5\%$.

En l'absence de valeurs de référence réellement fiables, il serait hasardeux de porter un jugement définitif sur la validité des constantes élastiques identifiées. Les faibles variations permettent de conclure à nouveau à une bonne robustesse de la procédure vis à vis des perturbations aléatoires. Les valeurs identifiées paraissent vraisemblables mais rien ne permet à l'heure actuelle de garantir l'absence d'un biais.

L'anomalie remarquée sur les constantes élastiques à 100 Hz ne se retrouvent pas sur la valeur moyenne du taux d'amortissement β_{xx} identifiées à la même fréquence. Les coefficients de variation paraissent notablement faibles concernant l'identification d'un amortissement. Les valeurs moyennes respectent l'ordre de grandeur des valeurs identifiées par les essais sur poutres ainsi que par analyse thermomécanique (DMTA), respectivement $\beta \approx 1,08 \times 10^{-4} s$ et $\beta \approx 1,12 \times 10^{-4} s$. Toutefois ces dernières, à l'exception de celle issues des essais à 70 Hz , sont supérieures aux valeurs identifiées par la procédure. Ceci apparaît comme une confirmation de l'intérêt de la méthode qui permet de s'affranchir des effets des conditions de liaison. L'encastrement des éprouvettes lors des essais de poutres ainsi que les mors de l'analyseur DMTA introduisent des dissipations parasites impossibles à quantifier et qui majorent les valeurs ainsi déterminées.

Les variations, d'une fréquence à l'autre, des valeurs moyennes β_{xx} identifiées apparaissent

dans certains cas supérieures aux coefficients de variation. Ceci suggère l'existence d'une erreur systématique approximativement constante pour les mesures issues d'une fréquence donnée et variable d'une fréquence à une autre.

Par ailleurs les identifications de l'amortissement β_{xy} ne sont pas satisfaisantes. Le rapport B_{xy}/B_{xx} devrait fournir une évaluation de l'effet de Poisson sur l'amortissement. Sans présager de sa valeur, celle-ci ne devrait pas varier davantage que le coefficient de Poisson identifié plus haut. Les valeurs des cinq rapports B_{xy}/B_{xx} calculées à partir des valeurs correspondantes du tableau 4.4 sont respectivement [0,20 0,24 0,23 0,11 0,26]. Deux hypothèses restent ouvertes à partir de ces résultats. D'une part l'existence d'un biais de procédure se reportant plus spécifiquement sur l'identification de l'amortissement, d'autre part la possibilité que l'effet de Poisson ne se manifeste pas de la même façon sur le comportement purement élastique et celui dissipatif du matériau.

De manière pragmatique, il est possible de considérer que les rigidités et donc les constantes élastiques dépendent de la description spatiale du mouvement et que les amortissements sont très liés à la partie temporelle car ils sont responsables du déphasage entre l'excitation et la réponse vibratoire. D'une part ces deux parties ne sont pas mesurées avec le même niveau de définition, plusieurs milliers de points de mesure pour les déformées spatiales de la plaque connues en seulement deux instants de la période de l'entraînement. Compte tenu de la procédure de synchronisation décrite en section 3.3.3, celle-ci est assurée avec une incertitude inférieure à $0,5^\circ$ de phase du mouvement harmonique. Pour donner un ordre de grandeur, l'analyse DMTA a fourni une valeur $\tan(\delta) = 0,056$ à 80 Hz soit un déphasage entre la déformation appliquée à l'échantillon et l'effort : $\delta = 3,30^\circ$. De toute évidence, la synchronisation entre l'entraînement et les prises de vues n'est pas assez précise et ne peut pas permettre une identification satisfaisante des amortissements. D'autre part, la procédure de synchronisation nécessite un réglage pour compenser le déphasage fonction de la fréquence, introduit par le pot électrodynamique d'excitation. Ce réglage est manuel, propre à chaque fréquence et il est effectué à partir des indications du phasemètre (voir 3.3.3). Il est de toute évidence la source de l'erreur systématique propre à chacune des fréquences et devra faire l'objet d'une profonde amélioration.

4.5.2.3 Anomalie des résultats à 100Hz

L'identification des constantes élastiques identifiées à 100 Hz présente une anomalie. Celle-ci trouve une explication dans la forme du champ de flèche imaginaire W_{Im} issu des

mesures à cette fréquence, sans décalage de déclenchement ($\phi = 0$). La carte représentant ce champ est présentée en figure 3.27. Les mesures ponctuelles de vibrations par balayage de fréquence (voir section 4.2) ont prouvé que cette fréquence correspondait à la résonance du premier mode de flexion de la plaque. Les simulations montrent que la réponse de ce mode doit être prépondérante. Dans la figure 2.5, les formes spatiales du premier mode de flexion et celle de la partie imaginaire de la réponse harmonique à la fréquence de ce mode sont en effet très proches. Ceci ne se retrouve pas dans la figure 4.11 qui présente les deux formes spatiales des parties imaginaires des flèches simulées et mesurées, respectivement dans les fenêtres (a) et (b). Ces deux formes apparaissent assez nettement différentes.

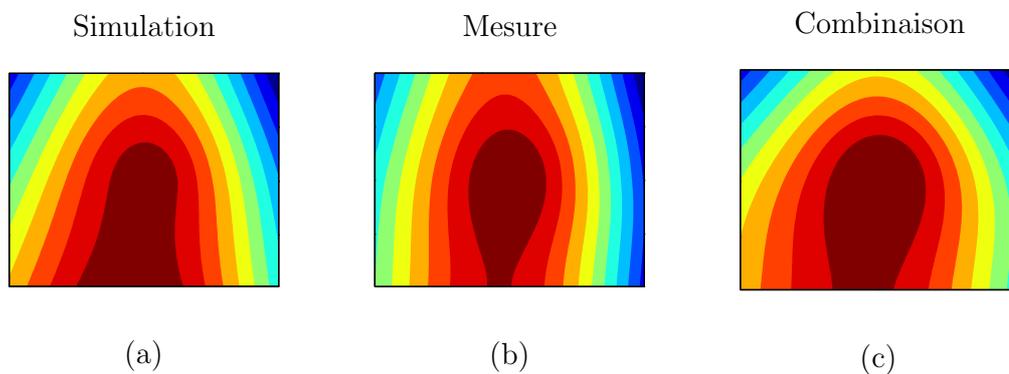


Figure 4.11 – Champs de flèche en résonance, fréquence du premier mode de flexion : (a) Réponse simulée, (b) Réponse mesurée, (c) Combinaison des résonances simulées modes 1 et 3

La partie imaginaire de la réponse mesurée à 100 Hz n'est visiblement pas composée de manière prépondérante de la seule résonance du premier mode de flexion. La cause en a été recherchée au niveau de l'excitation. La figure 4.12 présente les autospectres des mouvements d'entraînement à 80 Hz et 100 Hz enregistrés lors des prises de mesures. Le premier enregistrement confirme qu'à cette fréquence l'excitation a été correcte. Pour une raison inconnue, le contenu spectral de l'excitation à 100 Hz n'est pas celui observé lors des essais de validation du dispositif (voir figure 3.6).

D'une part le niveau du bruit de fond observable est élevé. La résonance de la plaque amène à réduire l'amplitude du mouvement d'entraînement ce qui entraîne un fonctionnement visiblement dégradé de l'ensemble du dispositif d'excitation. D'autre part, le rapport entre l'amplitude du deuxième harmonique et celle du fondamental est de -10 dB . La fréquence de 200 Hz de cet harmonique de l'excitation est très voisine de celle du troisième mode de flexion de la plaque. Celui-ci est ainsi également excité en résonance par l'entraînement

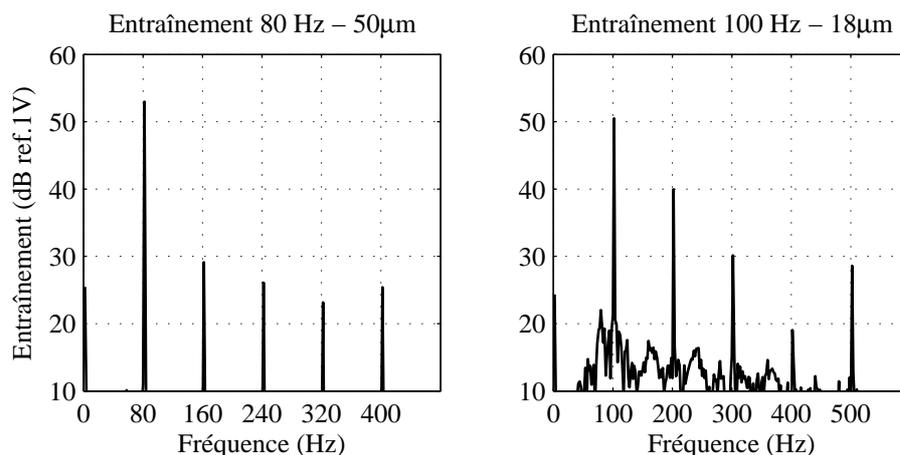


Figure 4.12 – Anomalie de l'excitation

(voir figure 2.5). La partie imaginaire de la réponse est donc constituée d'une combinaison de ces deux résonances. La fenêtre (c) de la figure 4.11 présente une combinaison des réponses harmoniques des résonances du premier mode de flexion et du troisième dans une proportion de 12%. Cette représentation constitue une confirmation pragmatique de l'hypothèse avancée.

Ce cas de dysfonctionnement ne s'est pas reproduit lors de vérifications postérieures aux prises de vues et ses causes demeurent inexplicées.

Dans le cas de cette excitation particulière, la réponse n'est pas harmonique et ne correspond donc pas aux hypothèses ayant conduit à la relation d'identification. En particulier la forme spatiale de la réponse perturbe les identifications des constantes élastiques qui en dépendent. La nécessité d'assurer un meilleur contrôle du mouvement d'entraînement est certainement la conclusion majeure à tirer de cet incident.

Chapitre 5

Conclusions et Perspectives

5.1 Conclusions

Ce travail présente le développement et la mise en œuvre d'une méthode d'identification des caractéristiques élastiques et dissipatives de matériaux isotropes se présentant sous la forme de plaques minces. La procédure utilise la mesure de champs cinématiques de la plaque en vibrations harmoniques de flexion à des fréquences quelconques, en résonance ou hors résonance. Ceci provient de l'écriture de l'équation d'identification dans la base physique sans recours à un schéma modal. Cette particularité permet à terme d'envisager l'utilisation de la méthode pour la détermination de la dépendance fréquentielle des caractéristiques élastiques et d'amortissement d'un matériau. Le seul essai d'une éprouvette à une fréquence donnée permet l'extraction simultanée des valeurs des quatre paramètres de la plaque à la fréquence testée.

D'une manière générale, le dispositif expérimental proposé utilise des composants relativement courants et peu coûteux ce qui représente un avantage pour des applications ultérieures.

L'excitation inertielle employée permet de limiter les liaisons entre le dispositif et l'éprouvette réduisant ainsi les perturbations induites par celles-ci dans l'identification de l'amortissement. D'autre part, l'évaluation de l'excitation s'effectue directement à partir de la mesure de l'amplitude d'entraînement et de celles des champs de flèches de la plaque.

La connaissance du mouvement vibratoire de la plaque requiert des mesures tout à la fois dans les domaines spatial et temporel. La technique de déflectométrie utilisée permet d'atteindre une grande sensibilité dans la mesure des champs de pente. Les cartographies obtenues pour ces derniers présentent des niveaux de bruit réduits. Ceci permet les opérations de dérivations numériques nécessaires à la détermination des champs de courbure. Pour la description temporelle du mouvement, cette technique de déflectométrie a été couplée avec une prise de vue instantanée employant un flash synchronisé avec le mouvement d'entraînement. Il est à remarquer que la seule opération spécifique de préparation de l'éprouvette consiste à rendre réfléchissante la surface de celle-ci. Des procédures développées dans d'autres travaux permettent d'y parvenir de manière satisfaisante [101].

La procédure d'identification, dite méthode des champs virtuels, utilise les champs de flèche et de courbure issus de mesures conjointement avec des fonctions bidimensionnelles complexes sélectionnées pour agir comme des filtres permettant l'extraction des paramètres recherchés.

Ce travail présente une adaptation au cas étudié d'une synthèse de travaux antérieurs concernant la sélection des champs virtuels dits optimisés. L'utilisation de cette procédure de choix permet une identification à l'aide de champs virtuels annulant les effets des conditions de liaison entre l'excitateur et la plaque, minimisant par ailleurs les effets du bruit de mesure des champs de pente. Une condition supplémentaire est proposée permettant de réduire l'influence des erreurs de mesure du mouvement d'entraînement.

Les premiers résultats d'identification, en nombre limité, montrent tout à la fois la robustesse de la méthode et les progrès à accomplir principalement sur le plan expérimental. En effet on remarque que les valeurs identifiées présentent généralement des dispersions faibles. Les valeurs de référence sont insuffisamment précises pour réellement juger des écarts. Il est à noter toutefois qu'ils restent modérés en présentant sur les amortissements un caractère systématique.

5.2 Perspectives

Ces dernières observations entraînent deux premières remarques essentiellement sur le plan de l'expérimentation : d'une part la nécessité pour valider la méthode de disposer de valeurs de référence de qualité sur plusieurs matériaux qui seront testés ; d'autre part le besoin impératif d'améliorer la qualité de la mesure des mouvements de la plaque.

Concernant ce dernier point, on peut remarquer que les mesures des parties spatiales et temporelles se situent à des niveaux très différents. A l'issue des traitements d'images, les champs de flèche et de courbure sont connus en environ 50 000 points mais à seulement deux instants de la période du mouvement harmonique. La connaissance de ces derniers est par ailleurs entachée d'un écart de synchronisation avec l'entraînement. Cet écart se révèle non négligeable par rapport aux déphasages introduits par les phénomènes dissipatifs qui font l'objet de l'identification.

Une solution réside dans la reconstruction de la description temporelle du mouvement grâce à des prises d'images multiples soit à des phases aléatoires de l'entraînement, soit à des phases déterminées sous réserve d'une amélioration substantielle de la synchronisation.

Une deuxième amélioration de la partie expérimentale de la procédure résiderait dans l'obtention d'une meilleure qualité de l'excitation tant sur le respect de la forme du mouvement que sur le contrôle de l'amplitude, le tout dans une gamme de fréquences beaucoup plus étendue. Les essais réalisés montrent, dans le cadre d'une telle application, les limites de l'utilisation de moyens classiques d'essais aux vibrations, conjointement à une mesure de grande sensibilité utilisant une technique optique.

Une autre modification du montage consisterait à déporter la caméra de manière à disposer d'une grille sans orifice de prise de vue. L'intérêt serait de ne pas être conduit à faire coïncider la rondelle d'encastrement de la plaque avec l'image de l'orifice de la grille et d'obtenir ainsi une plus grande liberté dans le choix de la position sur l'éprouvette de la zone d'application du mouvement d'entraînement.

Enfin, une adaptation du dispositif complet devrait être envisagée pour lui permettre d'opérer en vide primaire de manière à pouvoir pratiquer l'identification de l'amortissement de matériaux faiblement dissipatifs à l'abri des effets parasites de l'amortissement de l'air.

Concernant la procédure d'identification elle-même, la principale amélioration à apporter dans un premier temps concerne l'écriture de l'équation initiale à l'aide de champs virtuels purement réels. Les quatre paramètres seraient alors directement extraits sans avoir recours à leurs combinaisons complexes. En outre, les opérations de sélection des champs virtuels optimisés s'en trouveraient singulièrement allégées. En particulier la recherche de champs virtuels minimisant les effets du bruit de mesure sur les champs de pente serait alors une adaptation beaucoup plus légère de travaux antérieurs. Elle conduirait à des facteurs de sensibilité par grandeur identifiée, les deux rigidités et les deux amortisse-

ments, et non pas deux facteurs réels pour deux grandeurs complexes, ce qui est le cas actuellement.

Dans la présente étude, l'optimisation du rapport signal/bruit par décalage du déclenchement des prises de vues est restée très pragmatique et son intérêt n'a pas été évalué à partir de simulations. Cette pratique serait amenée à disparaître avec la mise en place des prises de vues multiples évoquées plus haut.

La démarche de minimisation des effets des erreurs de mesure du mouvement d'entraînement, prometteuse au niveau des simulations s'est finalement révélée décevante sur les résultats d'identification. Une analyse plus poussée devrait être conduite pour établir plus précisément son efficacité.

Par ailleurs un indicateur établi directement à partir des mesures de champs, en terme de quantité et de qualité d'information, présenterait l'intérêt de sélectionner de manière précoce les mesures assurant l'identification correcte des paramètres recherchés.

Un objectif à terme serait d'étendre la gamme fréquentielle d'identification jusqu'à plusieurs kilohertz. Ceci suppose que soit préalablement résolu l'ensemble des problèmes énoncés ci-dessus, principalement ceux liés à l'expérimentation. A ceux-ci s'ajouteront alors le contrôle de la durée de l'éclair du flash qui doit évidemment rester brève vis à vis de la période du mouvement harmonique. Une évaluation de l'erreur éventuellement introduite pourrait s'avérer nécessaire.

De manière plus fondamentale, l'augmentation de la fréquence d'excitation conduira à la rencontre de déformées spatiales plus complexes amenant à prendre en compte les effets du cisaillement transverse. Les hypothèses de Love-Kirchhoff n'étant alors plus valables, la mesure des champs de flèche à la surface de la plaque devient indispensable. Ceci requiert alors une technique permettant l'accès direct à ces champs.

Enfin l'application de la méthode aux plaques composites minces ne pose pas de problème formel. La prise en compte des effets du cisaillement transverse s'y posera avec plus d'acuité. Les essais sur ces matériaux ainsi que sur des plaques épaisses ne pourront être valablement abordés que lorsque des solutions auront été apportées aux différents problèmes énoncés.

Ce travail constitue un premier pas dans l'élaboration d'une méthode d'identification qui possède de larges perspectives. Après les développements complémentaires indiqués et d'autres à venir, la méthode proposée, après sa validation, pourra alors fournir un outil d'investigation du comportement de matériaux variés.

Bibliographie

- [1] R.F. GIBSON : Modal vibration response measurements for characterization of composite materials and structures. *Composites Science and Technology*, 60:2769–2780, 2000.
- [2] D. VALTORTA, J. LEFÈVRE et E. MAZZA : A new method for measuring damping in flexural vibration of thin fibers. *Experimental Mechanics*, pages 433–439, 2005.
- [3] C. KYRIAZOGLOU, B.H. Le PAGE et F.J. GUILD : Vibration damping for crack detection in composite laminates. *Composites : Part A*, 35:945–953, 2004.
- [4] M. GRÉDIAC : Principe des travaux virtuels et identification. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, II(309):1–5, 1989.
- [5] M. GRÉDIAC et P.-A. PARIS : Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : theoretical and numerical aspects. *Journal of Sound and Vibration*, 193(3):401–415, 1996.
- [6] M. GRÉDIAC, N. FOURNIER, P.-A. PARIS et Y. SURREL : Direct determination of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 210(5):643–659, 1998.
- [7] P.-A. PARIS : *Identification directe des rigidités de flexion de plaques composites à partir de la mesure de leurs modes propres en vibrations libres : Principe théorique, simulations et mise en œuvre expérimentale*. Mécanique des matériaux macromoléculaires et composites, Université Claude Bernard - Lyon I and Écoles des Mines de Saint-Etienne, Département Mécanique et Matériau, mars 1997.
- [8] H. SOL : *Identification of anisotropic plate rigidities using free vibration data*. Thèse de doctorat, Free University of Brussels, 1986.

- [9] L.R. DEOBALD et R.F. GIBSON : Determination of elastic constants of orthotropic plates by a modal analysis/Rayleigh-Ritz technique. *Journal of Sound and Vibration*, 124(2):269–283, 1988.
- [10] K.E. FÄLLSTRÖM et M.A. JONSSON : A non-destructive method to determine material properties in anisotropic plates. *Polymer Composites*, 12(5):293–305, 1991.
- [11] P. PEDERSEN et P. S. FREDERIKSEN : Identification of orthotropic materials moduli by combined experimental numerical approach. *Measurements*, 10:113–118, 1992.
- [12] W. P. De WILDE : *Mechanical identification of composites*, chapitre Identification of the rigidities of composite systems by mixed numerical/experimental methods, pages 1–15. A. Vautrin and H. Sol, Elsevier Science Publishers, 1991.
- [13] E.O. AYORINDE et R.F. GIBSON : Elastic constants of orthotropic composite materials using plate resonance frequencies, classical lamination theory and an optimized three-mode Rayleigh formulation. *Composites Engineering*, 3(5):395–407, 1993.
- [14] C.M. MOTA SOARES, M. MOREIRA DE FREITAS, A.L. ARAUJO et P. PEDERSEN : Identification of material properties of composite plate specimen. *Composite Structures*, 25:277–285, 1993.
- [15] P. FREDERIKSEN : Identification of elastic constants including transverse shear moduli of thick orthotropic plates. Rapport technique, Danish Centre for Applied Mathematics and Mechanics, 1995. Report number 500.
- [16] A.L. ARAUJO, C.M. Mota SOARES et M.J.M. FREITAS : Characterization of material parameters of composite specimens using optimization and experimental data. *Composites Part B*, 27(2):185–191, 1996.
- [17] P. S. FREDERIKSEN : Numerical studies for identification of orthotropic elastic constants of thick plates. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 16:117–140, 1997.
- [18] P.S. FREDERIKSEN : Experimental procedure and results for the identification of elastic constants of thick orthotropic plates. *Journal of Composite Materials*, 31(4): 360–382, 1997.

-
- [19] K.E. FÄLLSTRÖM, K. OLOFSSON, H.O. SALDNER et S. SCHEDIN : Dynamic material parameters in an isotropic plate estimated by phase-stepped holographic interferometry. *Polymer Composites*, 24(5-6):429–454, 1996.
- [20] J. CUNHA et J. PIRANDA : Application of model updating techniques in dynamics for the identification of elastic constants of composite materials. *Composites Part B*, 30:79–85, 1999.
- [21] J. CUGNONI, T. GMÜR et A. SCHORDERET : Identification by modal analysis of composite structures modelled with FSDT and HSDT laminated shell finite elements. *Composites Part A*, 35(7-8):977–987, 2004.
- [22] K.-H. IP, P.-C. TSE et T.-C. LAI : Material characterization for orthotropic shells using modal analysis and rayleigh-ritz models. *Composite Part B : Engineering*, 29(4):397–409, 1998.
- [23] M.E. MCINTYRE et J. WOODHOUSE : On measuring the elastic and damping constants of orthotropic sheet materials. *Acta Metallurgica*, 36(6):1397–1416, 1988.
- [24] J.P. TALBOT et J. WOODHOUSE : The vibration damping of laminated plates. *Composites Part A*, 28:1007–1012, 1997.
- [25] Y. SURREL, N. FOURNIER, M. GRÉDIAC et P.-A. PARIS : Phase-stepped deflectionometry applied to shape measurement of bent plates. *Experimental Mechanics*, 39(1):66–70, 1998.
- [26] R.F. GIBSON : Damping characteristics of composites materials and structures. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 1:11–20, 1992.
- [27] Z. ZHANG et G. HARTWIG : Relation of damping and fatigue damage of unidirectional fibre composite. *International Journal of Fatigue*, 24:713–718, 2002.
- [28] D. OUIS : Effect of structural defects on the strength and damping properties of a solid material. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 22:47–54, 2003.
- [29] G.G. WREN et V.K. KINRA : On the effect of an end-mass on a beam damping. *Experimental Mechanics*, 9:336–341, 1989.
- [30] G.G. WREN et V.K. KINRA : Modeling and measurement of axial and flexural damping in metal-matrix composites. *In Mechanics and Mechanisms of Material*

- Damping*, volume 1169, pages 282–315. American Society for Testing and Materials, 1992.
- [31] G.G. WREN et V.K. KINRA : Flexural damping of a p55 graphite magnesium composite. *Journal of Materials Science*, 30:3279–3284, 1995.
- [32] J.E. BISHOP et V.K. KINRA : Some improvements in the flexural damping measurement techniques. *In Mechanics and Mechanisms of Material Damping*, volume 1169, pages 457–470. American Society for Testing and Materials, 1992.
- [33] I.C. FINEGAN et R.F. GIBSON : Recent research on enhancement of damping in polymer composite. *Composite Structures*, 44:89–98, 1999.
- [34] N. SRIKANTH et M. GUPTA : Damping characterization of magnesium based composites using an innovative circle-fit approach. *Composites Science and Technology*, 63:559–568, 2003.
- [35] W. GU, H.F. WU, S.L. KAMPE et G.-Q. LU : Volume fraction effects on interfacial adhesion strength of glass-fiber-reinforced polymer composites. *Materials Science and Engineering*, pages 237–243, 2000.
- [36] Ch. LALANNE : *Vibrations et chocs mécaniques. Tome 2, Chocs mécaniques*. Hermès, Paris, 1999.
- [37] J.-M. BERTHELOT et Y. SEFRANI : Damping analysis of unidirectional glass and kevlar fibre composites. *Composites Science and Technology*, 64:1261–1278, 2004.
- [38] E.C. BOTELHO, A.N. CAMPOS, E. de BARROS, L.C. PARDINI et M.C. REZENDE : Damping behavior of continuous fiber/metal composite materials by the free vibration method. *Composites : Part B*, 37:255–263, 2006.
- [39] H. EL MOUSSAOUI et S. EL AMRI : Identification de l’amortissement des poutres composites. Projet de fin d’études, Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers Meknès, 2003.
- [40] N. SRIKANTH et M. GUPTA : Damping characterization of Mg-SiC composites using an integrated suspended beam method and new circle-fit approach. *Materials Research Bulletin*, 37:1149–1162, 2002.

-
- [41] Ewins D. J. : *Modal Testing : Theory, Practice and Application*. John Wiley and Sons, New York, 2nd édition, 2000.
- [42] J. WU, C. LI, D. WANG et M. GUI : Damping and sound absorption properties of particle reinforced al matrix composite foams. *Composites Science and Technology*, 63:569–574, 2003.
- [43] H. RAJORIA et N. JALILI : Passive vibration damping enhancement using carbon nanotube-epoxy reinforced composites. *Composites Science and Technology*, 65: 2079–2093, 2005.
- [44] R.F. GIBSON et R. PLUNKETT : Dynamic behavior of fiber-reinforced composites : Measurements and analysis. *Journal of Composite Materials*, 10:325–332, 1976.
- [45] L. ZHANG et M. J. CROCKER : Effects of thickness and delamination on the damping in honeycomb-foam sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 294:473–485, 2006.
- [46] H. RAJORIA et N. JALILI : Passive vibration damping enhancement using carbon nanotube-epoxy reinforced composites. *Composites Science and Technology*, 65: 2079–2093, 2005.
- [47] Y. SEFRANI et J.-M. BERTHELOT : Temperature effect on the damping properties of unidirectional glass fibre composites. *Composites : Part B*, 37:346–355, 2006.
- [48] E.C. BOTELHO, L.C. PARDINI et M.C. REZENDE : Hygrothermal effects on damping behavior of metal/glass fiber/epoxy hybrid composites. *Materials Science and Engineering A*, 399:190–198, 2005.
- [49] R.F. GIBSON et R. PLUNKETT : A forced-vibration technique for measurement of material damping. *Experimental Mechanics*, pages 297–302, 1977.
- [50] A. FOUJNET, C. SURRY et J.F. JULIEN : Indirect identification methods for the elastic constants of orthotropic materials and their application to wood. *Wood Science and Technology*, 2004.
- [51] L. Le MAGOROU, F. BOS et F. ROUGER : Identification of constitutive laws for wood-based panels by means of an inverse method. *Composite Science and Technology*, 62(4):591–596, 2001.

- [52] M. BONNET, H.D. BUI et A. CONSTANTINESCU : Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité. *Mécanique et Industrie*, 4:687–697, 2003.
- [53] J. De VISSCHER, H. SOL, W.P. De WILDE et J. VANTOMME : Identification of the damping properties of orthotropic composite materials using a mixed numerical experimental method. *Applied Composite Materials*, 4(1):13–33, 1991.
- [54] A. MOREAU, E. PAGNACCO, D. LEMOSSE et D. BORZA : An evaluation of a mixed experimental/numerical method using frf for the identification of viscoelastic materials. pages 2099–2112, Leuven, Belgique, septembre 2006. the 2006 International Conference on Noise and Vibration Engineering.
- [55] E. PAGNACCO, A. MOREAU et D. LEMOSSE : Inverse strategies for the identification of elastic and viscoelastic material parameters using full-field measurements. *Materials Science and Engineering : A*, 2006. In press, doi :10.1016/j.msea.2006.10.122.
- [56] P. GERMAIN : *Mécanique, Tome 1*. ellipses, Paris, 1986.
- [57] P. GERMAIN et P. MULLER : *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 2 édition, 1995.
- [58] M. GRÉDIAC et F. PIERRON : A T-shaped specimen for the direct characterization of orthotropic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41:293–309, 1998.
- [59] M. GRÉDIAC, F. PIERRON et Y. SURREL : Novel procedure for complete in-plane composite characterization using a single T-shaped specimen. *Experimental Mechanics*, 39(2):142–149, 1999.
- [60] M. GRÉDIAC : On the direct determination of invariant parameters governing anisotropic plate bending problems. *In. J. Solids Structures*, 33(27):3969–3982, 1996.
- [61] J.-L. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par éléments finis : poutres et plaques*, volume 2. Hermès édition, février 1990.
- [62] M. GÉRADIN et D. RIXEN : *Théorie des vibrations - Application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, deuxième édition, 1996.

-
- [63] O. C. ZIENKIEWICZ et R. L. TAYLOR : *The Finite Element Method, Fifth edition Volume 2 : Solid Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [64] S. AVRIL, F. PIERRON, M. GRÉDIAC, E. TOUSSAINT et Y. SURREL : Identification de rigidités en flexion de plaques : déflectométrie et méthode des champs virtuels. *In Photomécanique*. Ecole des Mines, 2004. 4-6 Mai à Albi, France.
- [65] A. GIRAUDEAU et F. PIERRON : Identification of stiffness and damping properties of thin isotropic vibrating plates using the virtual fields method : theory and simulations. *Journal of Sound and Vibration*, (284):757–781, 2005.
- [66] J. LEMAITRE et J.-L. CHABOCHE : *Mécanique des matériaux solides*. DUNOD, Paris, 2 édition, 2004.
- [67] J. GITTUS : *Creep, viscoelasticity and creep fracture in solids*. London, applied science publishers ltd édition, 1975.
- [68] M. GRÉDIAC, F. AUSLENDER et F. PIERRON : Applying the virtual fields method to determine the through-thickness moduli of thick composites with a nonlinear shear response. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 32(12):1713–1725, 2001.
- [69] F. PIERRON et M. GRÉDIAC : Identification of the through-thickness moduli of thick composites from whole-field measurements using the Iosipescu fixture. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(4):309–318, 1999.
- [70] M. GRÉDIAC, E. TOUSSAINT et F. PIERRON : Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1- principle and definition. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10):2691–2705, 2002.
- [71] M. GRÉDIAC, E. TOUSSAINT et F. PIERRON : Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2- application to in-plane properties. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10):2707–2730, 2002.
- [72] M. GRÉDIAC, E. TOUSSAINT et F. PIERRON : Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 3- application

- to the bending rigidities of anisotropic plates. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10):2691–2705, 2002.
- [73] S. AVRIL, M. GRÉDIAC et F. PIERRON : Sensitivity of the virtual fields method to noisy data. *Computational Mechanics*, 34(6):439–452, 2004.
- [74] K. SYED-MUHAMMAD, E. TOUSSAINT, M. GRÉDIAC et S. AVRIL : Optimisation d'un essai sur plaque avec la méthode des champs virtuels. Troyes, France, septembre 2005. 17^{ème} Congrès Français de Mécanique.
- [75] E. TOUSSAINT, M. GRÉDIAC et F. PIERRON : The virtual fields method with piecewise virtual fields. *International Journal of Mechanical Sciences*, (48):256–264, 2006.
- [76] J.-L. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par éléments finis : solides élastiques*, volume 1. Hermès édition, février 1992.
- [77] O. C. ZIENKIEWICZ et R. L. TAYLOR : *The Finite Element Method, Fifth edition Volume 1 : The Basis*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [78] S. CORN : *Simplification de modèles éléments finis de structures à comportement dynamique de poutre*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, novembre, 1998.
- [79] J.-L. GUYADER : *Vibrations des milieux continus*. Hermès, Paris, 2002.
- [80] M. CICCOTTI, R. ALMAGRO et F. MULARGIA : Static and dynamic moduli of the seismogenic layer in italy. *Rock Mech. Rock Engng.*, 37(3):229–238, 2004.
- [81] V. J. KOPPELMANN : Über die bestimmung des dynamischen elastizitätsmoduls und des dynamischen schubmoduls im frequenzbereich von 10^{-5} bis 10^{-1} Hz. *Rheol. Acta*, 1:20–28, 1958.
- [82] A. GIRAUDEAU, F. PIERRON et J.-P. CHAMBARD : Experimental study of air effect on vibrating lightweight structures. *In SEM Annual Congress on Experimental Mechanics*, Milwaukee, USA, Juin 2002. Society for Experimental Mechanics.
- [83] Y. SURREL : Les techniques optiques de mesure de champ : essai de classification. *Instrumentation mesure et métrologie*, 4(3-4):11–42, 2005.

-
- [84] F. HILD, J.-N. PÉRIÉ et M. CORET : Mesure de champs de déplacements 2d par intercorrélation d'images : Correli^{2d}. rapport 230, LMT-Cachan, 1999.
- [85] F. HILD : Correli^{lmt} : A software for displacement field measurements by digital image correlation. rapport 254, LMT-Cachan, 2002.
- [86] Y. SURREL : *Fringe analysis*, chapitre III, pages 55–102. Topics in Applied Physics. Springer, 2000.
- [87] Y. SURREL : La technique de la grille et ses applications. *Instrumentation mesure et métrologie*, 4(3-4):193–216, 2005.
- [88] A. GIRAUDEAU, B. GUO et F. PIERRON : Stiffness and damping identification from full field measurements on vibrating plates. *Experimental Mechanics*, 46(6):777–787, 2006.
- [89] H. CHALAL, S. AVRIL, F. PIERRON et F. MERAGHNI : Experimental identification of a damage model for composites using the grid technique coupled to the virtual fields method. *Composite part A*, 34(6):439–452, 2005.
- [90] Y. PANNIER, S. AVRIL, R. ROTINAT et F. PIERRON : Identification of elasto-plastic constitutive parameters from statically undetermined tests using the virtual fields method. *Experimental Mechanics*, 46(6):735–755, 2006.
- [91] Y. SURREL : Customised phase shift algorithms. *Elsevier Science*, pages 71–83, January 2000.
- [92] Y. SURREL : *Optique C1*. <http://www.cnam.fr/instrumasure/>.
- [93] Y. SURREL : Deflectometry : a simple and efficient noninterferometric method for slope measurement. In *SEM Annual Congress on Experimental Mechanics*, Costa Mesa, California, USA, juin 2004. Society for Experimental Mechanics.
- [94] R. MOULART, S. AVRIL et F. PIERRON : Identification of the through-thickness rigidities of a thick laminated composite tube. *Composite part A*, 37(2):326–336, 2006.
- [95] D. C. GHIGLIA et L. A. ROMERO : Minimum l^p -norm two-dimensional phase unwrapping. *Optical Society of America*, 13(10):781–789, 1996.

- [96] H. T. GOLDREIN, S. J. P. PALMER et J.M. HUNTLEY : Automated fine grid technique for measurement of large-strain deformation maps. *Optics and Lasers in Engineering*, (23):305–318, 1995.
- [97] J. M. HUNTLEY : Challenges in phase unwrapping. *Optical Nondestructive Testing and Inspection*, 2000.
- [98] P. D. RUIZ, G. H. KAUFMANN et J. M. HUNTLEY : Temporal phase evaluation using a novel adaptive phase-shifting algorithm. *Applied Optics*, 4829 II:912–913, Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering.
- [99] R. CUSACK, J. M. HUNTLEY et H. T. GOLDREIN : Improved noise-immune phase unwrapping algorithm. *Applied Optics*, 34:781–789, 1995.
- [100] N.W. TSCHOEGL, Wolfgang G. KNAUSS et Igor EMRI : Poisson's ratio in linear viscoelasticity - a critical review. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 6:3–51, 2002.
- [101] J.-H. KIM, F. PIERRON, M. GRÉDIAC et M.R. WISNOM : A procedure for producing reflective coatings on plates to be used for full-field slope measurement by a deflectometry technique. *Strain*, 2007. In press.

Annexe

Excitation inertielle par mouvement du support

Soit la plaque $S = S_1 \cup S_2$ de normale z , contenue au repos dans le plan (x, y) , telle que les points appartenant à S_1 soient libres et les points de S_2 rigidement liés à un solide rigide \mathbf{S} astreint à une loi de mouvement d'entraînement $\delta(t)$ en translation suivant z .

Les mouvements de la plaque sont paramétrés par le vecteur $\{q(t)\}$ tel que :

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

où les n_1 paramètres $\{q_1(t)\}$ et les n_2 paramètres $\{q_2(t)\}$ décrivent respectivement les mouvements des degrés de liberté de S_1 et de S_2 .

La mise en équation conduit à :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

où $f_2(t)$ est l'effort transmis à S_2 par V .

Le mouvement de la plaque peut être décrit par un mouvement d'ensemble assimilable à un mouvement de corps rigide $\{q_0(t)\}$ auquel se superpose un mouvement relatif $\{q_r(t)\}$ de la partie libre S_1 [62] tels que :

$$\{q_0(t)\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cdot \delta(t) \quad ; \quad \{q_r(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

L'équation 2 devient :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cdot \ddot{\delta}(t) + \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cdot \delta(t) + \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ g_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Le mode de corps rigide doit évidemment vérifier :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (5)$$

L'équation 4 s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cdot \ddot{\delta}(t) + \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ g_2(t) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

La première ligne de l'équation 6 s'écrit :

$$[M_{11}] \cdot \{\ddot{y}_1\} + [K_{11}] \cdot \{y_1\} = -([M_{11}] \cdot \{u_1\} + [M_{12}] \cdot \{u_2\}) \cdot \ddot{\delta}(t) \quad (7)$$

Le terme de droite correspond à l'excitation inertielle de la plaque par le mouvement d'entraînement. La réponse $\{q_1(t)\}$ de la partie libre de la plaque s'écrit comme la combinaison du mouvement d'entraînement et de la réponse relative $\{y_1(t)\}$. Cette dernière peut s'écrire sur la base des modes propres de la plaque S rigidement liée à V immobile, c'est à dire des modes de la plaque encastree au niveau de S_2 .

IDENTIFICATION SIMULTANÉE DES PARAMÈTRES DE RIGIDITÉ ET D'AMORTISSEMENT DE PLAQUES ISOTROPES MINCES EN VIBRATION PAR LA MÉTHODE DES CHAMPS VIRTUELS

RÉSUMÉ : Ce travail présente le développement théorique et l'application expérimentale d'une méthode permettant l'identification simultanée des caractéristiques élastiques et d'amortissement d'un matériau isotrope à partir d'essais de plaques minces en vibration. La théorie montre que les paramètres recherchés peuvent être extraits des champs de flèche et de courbure mesurés à la surface de l'éprouvette à deux instants particuliers du mouvement vibratoire. L'application expérimentale consiste dans la réalisation d'un dispositif original d'excitation couplé avec l'adaptation d'une technique optique permettant la mesure des champs de pentes présentés par la plaque. Ces dispositifs sont associés à un traitement des images permettant la détermination des champs de flèche et de courbure utilisés dans la procédure d'identification mettant en œuvre la méthode des champs virtuels. Ces derniers peuvent être considérés comme des filtres choisis pour permettre l'identification des paramètres recherchés. Une procédure a été développée permettant la sélection des champs virtuels optimaux respectant tout à la fois les conditions aux limites de la plaque et minimisant les effets du bruit de mesure sur les résultats de l'identification.

Mots-clés : *vibration, identification, méthode des champs virtuels, amortissement, deflectométrie, champs de pente*

SIMULTANEOUS IDENTIFICATION OF STIFFNESS AND DAMPING PARAMETERS FROM FULL FIELD MEASUREMENTS ON ISOTROPIC VIBRATING PLATES BY THE VIRTUAL FIELDS METHOD

ABSTRACT : The study presents the theory and the experimental application of a method leading to the simultaneous identification of the elastic and damping material properties of isotropic vibrating plates. The theory assumes that the searched parameters can be extracted from curvature and deflection fields measured on the whole surface of the plate at two particular instants of the vibrating motion. The experimental application consists in an original excitation fixture, a particular adaptation of an optical full-field measurement technique, a data preprocessing giving the curvature and deflection fields and finally in the identification process using the Virtual Fields Method. These latter act as filters leading to the extraction of the searched parameters. A particular attention is paid to the selection procedure of virtual fields which must comply with the experimental boundary conditions of the plate and can minimize the effects of the measurement noise on the identification results.

Key-words : *vibration, identification, Virtual Fields Method, damping, deflectometry, slope fields*