



Contribution à la modélisation de la mise en forme des tôles métalliques : application au retour élastique et à la localisation

Badis Haddag

► To cite this version:

Badis Haddag. Contribution à la modélisation de la mise en forme des tôles métalliques : application au retour élastique et à la localisation. Sciences de l'ingénieur [physics]. Arts et Métiers ParisTech, 2007. Français. NNT : 2007ENAM0002 . pastel-00002780

HAL Id: pastel-00002780

<https://pastel.hal.science/pastel-00002780>

Submitted on 19 Jul 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Ecole doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur

de

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers
Spécialité "Mécanique"

*présentée et soutenue publiquement
par*

Badis HADDAG

le 06 février 2007

**CONTRIBUTION A LA MODELISATION
DE LA MISE EN FORME DES TOLES METALLIQUES :
APPLICATION AU RETOUR ELASTIQUE
ET A LA LOCALISATION**

Directeur de thèse : Marcel BERVEILLER

*Codirecteur(s) de thèse : Tudor BALAN
Farid ABED-MERAÏM*

Jury :

Mme. Elisabeth MASSONI, Maître de recherche, CEMEF, Ecole des Mines de Paris .. Présidente
M. Michel BRUNET, Professeur, LaMCoS, INSA de Lyon..... Rapporteur
M. René BILLARDON, Professeur, Université Paris 6, LMT-Cachan. Rapporteur
M. Marcel BERVEILLER, Professeur, LPMM, ENSAM de Metz..... Directeur de thèse
M. Farid ABED-MERAÏM, Maître de Conférences, LPMM, ENSAM de Metz..... Codirecteur de thèse
M. Tudor BALAN, Maître de Conférences, LPMM, ENSAM de Metz.. Codirecteur de thèse
M. Xavier LEMOINE, Ingénieur de recherche, ARCELOR Research Examineur

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
ENSAM, CER de Metz

Résumé

Ce travail de recherche, qui s'inscrit dans le cadre d'un projet Européen, se propose d'étudier le comportement des tôles métalliques lors des opérations de mise en forme. Les applications visées sont la prédiction, au moyen de la simulation numérique du procédé, des défauts majeurs tels que le retour élastique et la localisation des déformations. A cette fin, une modélisation phénoménologique du comportement a été retenue. Un modèle de comportement élasto-plastique a été considéré, dans lequel deux modèles d'écrouissage sont introduits pour reproduire l'anisotropie induite lors de trajets complexes de chargement. En particulier, le modèle microstructural de Teodosiu-Hu, basé sur l'évolution des structures de dislocations, a été sélectionné afin de bien prendre en compte les phénomènes de transition liés aux changements de trajets de déformation. Ce modèle a été enrichi par la suite, en le couplant au modèle d'endommagement de Lemaitre-Chaboche, afin de reproduire la chute de la contrainte d'écoulement à l'approche de la rupture du matériau. De plus, pour modéliser la limite de ductilité des tôles métalliques, le critère de localisation par bandes de cisaillement de Rice a été introduit, dans le cadre d'une formulation complètement tridimensionnelle en grandes déformations. La modélisation développée tient ainsi compte de nombreux phénomènes tels que l'anisotropie plastique initiale, celle induite par écrouissage, l'adoucissement généré par l'endommagement et enfin la localisation des déformations.

Pour permettre l'exploitation de cette modélisation dans le cadre de la simulation numérique des procédés de mise en forme, une implantation numérique robuste et efficace a été réalisée dans un code de calcul par éléments finis. Différents schémas d'intégration ont été testés et comparés afin de retenir le meilleur compromis entre précision et temps de calcul. A des fins de validation, cette modélisation a d'abord été appliquée à la simulation d'essais rhéologiques à trajets directs et séquentiels. En comparaison avec les courbes expérimentales, les prédictions obtenues ont bien montré toute la capacité du modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural à reproduire les phénomènes de transition observés sur des trajets séquentiels. Par la suite, l'application de cette modélisation à l'étude du retour élastique a mis en évidence les effets de plusieurs paramètres (rhéologiques, numériques ou liés au procédé). En particulier, il a été montré, à travers une application spécifiquement déterminée, que l'influence d'un modèle d'écrouissage avancé, tel que le modèle microstructural, pouvait se révéler importante dans certaines applications. Enfin, une analyse de la localisation des déformations a été menée en utilisant le critère de Rice conjointement au modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement. Cette étude a montré la capacité de cette approche à prédire les courbes limites de formage, ainsi que l'orientation des bandes de localisation, sur des trajets de chargement directs et séquentiels.

Mots clés : élasto-plasticité, écrouissage combiné, changements de trajets de déformation, endommagement, grandes déformations, implantation numérique, retour élastique, localisation, éléments finis.

Abstract

The aim of this work, part of a larger European project, was the study of the sheet metals behaviour during forming operations. The applications in mind concern the prediction, through the forming process numerical simulation, of major defects like springback and strain localization. In this context, a phenomenological material modelling has been considered. An elastic-plastic behaviour model has been adopted, in which two hardening models have been introduced to reproduce induced anisotropy during complex loading. The microstructural work-hardening model of Teodosiu-Hu, based on the evolution of dislocation structures, has been considered to take into account transient work-hardening due to the strain-path changes. This model has been improved, by coupling with the Lemaitre-Chaboche damage model, in order to reproduce the softening that appears prior to failure. In addition, in order to represent the ductility limit of the sheet metals, Rice's localisation criterion by shear bands has been introduced and written in the large strain framework. The developed modelling takes into account the initial plastic anisotropy, the work-hardening-induced anisotropy, the damage and finally strain localisation.

A robust and efficient computer implementation has been performed in a finite element code, in order to apply the developed models to forming process simulation. Different time integration algorithms have been tested and compared in order to obtain the best compromise between accuracy and computing time. Direct and sequential rheological tests have been simulated in order to validate the computer implementation, with very good results. The application of the elastic-plastic model to a springback analysis has highlighted the effect of various parameters (rheological, numerical, process-related). Especially, the impact of advanced hardening models, like the microstructural one, proved to be important for some specific applications. Eventually, a strain localisation analysis has been performed using Rice's criterion and the elastic-plastic model coupled to damage. This study showed the capability of this approach to predict the forming limit diagrams as well as the orientation of the shear bands, during direct and two-step loading paths.

Keywords: elastic-plasticity, combined work-hardening, strain-path changes, damage, large strain, numerical implementation, localization, spring-back, finite elements.

Dédicace

A mes parents

A ma famille

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux sur le site de l'ENSAM de Metz et a été financé par ARCELOR dans le cadre d'un projet Européen. Je remercie d'abord les membres de Jury, M. Michel BRUNET, M. René BILLARDON et Mme Élisabeth MASSONI, d'avoir accepté d'évaluer ce travail de thèse.

Je tiens à remercier profondément mes encadrants, M. Tudor BALAN et M. Farid ABED-MERAÏM, pour avoir dirigé cette thèse. Je tiens particulièrement à les remercier pour leur grande et constante disponibilité, la qualité de leurs conseils, leurs qualités humaines et la confiance qu'ils m'ont donné durant ces quatre années.

Je remercie également mon directeur de thèse, M. Marcel BERVEILLER, de la confiance qu'il nous a donné à travailler en toute autonomie.

Je remercie notre partenaire industriel Xavier LEMOINE, ainsi que les autres partenaires du projet Européen, pour les discussions fructueuses et qui m'ont beaucoup aidé dans l'orientation de ce travail.

Une grande pensée à ma famille (mes parents, mes frères et sœurs), sans laquelle je n'arriverai pas là et pour laquelle je représente un exemple de réussite. Ce travail leur est dédié.

Enfin, une pensée à tous les doctorants et mes amis que j'ai côtoyé à Metz et ailleurs.

Table des matières

Introduction générale

Introduction	2
Contexte et motivation de l'étude	3
Objectifs de la thèse	4
Organisation des chapitres	5

Chapitre 1 : Aspects physiques du comportement des tôles métalliques

1.1	Introduction	8
1.2	Défauts en mise en forme des tôles métalliques	8
1.2.1	Retour élastique	8
1.2.2	Striction	13
1.2.3	Plissement	15
1.2.4	Synthèse	15
1.3	Caractérisation du comportement des tôles métalliques	16
1.3.1	Trajet monotone	17
1.3.2	Trajet inverse	18
1.3.3	Essais séquentiels	18
1.3.4	Essais jusqu'à rupture	21
1.4	Formabilité des tôles métalliques	24
1.4.1	Application des CLF	25
1.4.2	CLF expérimentales	27
1.5	Conclusion	28

Chapitre 2 : Modélisation du comportement

2.1	Introduction	31
2.2	Description du comportement élasto-plastique	32
2.2.1	Cinématique des grandes déformations	32
2.2.2	Formulation des lois de comportement en repère tournant	33
2.2.3	Equations du modèle élasto-plastique	35
2.2.4	Condition de cohérence	36
2.2.5	Module tangent analytique	37
2.3	Modélisation de l'anisotropie plastique initiale	38
2.3.1	Critères de plasticité	38
2.3.2	Critère retenu	39
2.4	Modélisation de l'écrouissage	39
2.4.1	Lois d'écrouissage isotrope	41
2.4.2	Lois d'écrouissage cinématique	42
2.4.3	Modèle d'écrouissage cyclique de Chaboche-Marquis	43
2.4.4	Modèle d'écrouissage microstructural de Teodosiu-Hu	43
2.4.5	Synthèse	50

2.5	Couplage élasto-plasticité/endommagement.....	50
2.5.1	Approche de Lemaitre	51
2.5.2	Formulation du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement.....	54
2.5.3	Synthèse	63
2.6	Modélisation de la localisation.....	63
2.6.1	La localisation des déformations dans les tôles	64
2.6.2	Formulation du critère de Rice.....	65
2.6.3	Détermination du module tangent pour la localisation	68
2.7	Conclusion.....	72

Chapitre 3 : Mise en œuvre numérique

3.1	Introduction	75
3.2	Position du problème.....	76
3.3	Méthodes de discrétisation temporelle	76
3.3.1	Méthodes d'intégration explicite.....	77
3.3.2	Méthodes d'intégration implicite	79
3.4	Intégration des modèles de comportement.....	80
3.4.1	Intégration explicite du modèle élasto-plastique.....	81
3.4.2	Intégration implicite du modèle élasto-plastique	86
3.4.3	Cas du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement.....	102
3.5	Implantation du critère de localisation de Rice	112
3.5.1	Formulation du problème de minimisation	112
3.5.2	Calcul du tenseur acoustique et algorithme de résolution.....	114
3.6	Conclusion.....	116

Chapitre 4 : Analyse des schémas d'intégration et simulation d'essais rhéologiques

4.1	Introduction	119
4.2	Analyse des schémas d'intégration	119
4.2.1	Schémas explicites	120
4.2.2	Schémas implicites.....	124
4.2.3	Synthèse	126
4.3	Simulation des changements de trajets de déformation	127
4.3.1	Description des matériaux.....	127
4.3.2	Essais à trajets monotones.....	127
4.3.3	Essais séquentiels à deux trajets.....	130
4.3.4	Comparaison avec les essais expérimentaux.....	133
4.4	Simulation de tests académiques.....	134
4.4.1	Plaque en essai de traction	134
4.4.2	Plaque en essai de cisaillement	138
4.4.3	Plaque en essai orthogonal	141
4.5	Conclusion.....	144

Chapitre 5 : Application en mise en forme : retour élastique et localisation

5.1	Introduction	146
5.2	Etude du retour élastique	146
5.2.1	Description de l'essai « Oméga »	146
5.2.2	Analyse par éléments finis de l'essai	147
5.2.3	Essai à géométrie « arrondie »	148
5.2.4	Essai à géométrie « tranchante »	151
5.2.5	Analyse de la convergence et du temps CPU	156
5.2.6	Synthèse	157
5.3	Etude du phénomène de localisation	158
5.3.1	Application du modèle couplé à l'endommagement	158
5.3.2	Détermination de Courbes Limite de Formage à localisation	162
5.3.3	Orientation des bandes de localisation	172
5.4	Conclusion	175

Conclusion générale

Conclusions	178
Perspectives	179

Annexes

A.	Développement du module tangent pour le critère de localisation	182
B.	Termes intervenant dans la résolution du système réduit	186

Bibliographie

Introduction générale

Introduction	2
Contexte et motivation de l'étude	3
Objectifs de la thèse.....	4
Organisation des chapitres	5

Introduction

Les exigences actuelles en termes de réduction des coûts de fabrication et d'allègement des produits finis dans divers secteurs de l'industrie, tels que ceux de l'automobile, l'aéronautique, etc., ont conduit les industriels mais aussi les chercheurs dans les laboratoires à développer de nouveaux matériaux et également à améliorer les anciennes nuances déjà largement utilisées. Ces exigences, motivées par de nombreuses directives nationales et européennes, ont des répercussions positives sur les plans économique et environnemental. En effet, un produit léger, tel qu'une automobile, sera moins coûteux, consommera moins d'énergie et par conséquent sera moins polluant puisqu'il rejettera moins de déchets. Pour atteindre ces objectifs, une étape importante consiste à étudier très finement le comportement des matériaux entrant dans la constitution des différentes pièces afin d'alléger le produit fini.

Dans les industries mécaniques, les produits plats (tôles) sont largement utilisés pour réaliser diverses composantes ; les pièces de carrosseries d'automobiles par exemple sont principalement fabriquées à partir de tôles métalliques. L'industrie sidérurgique développe actuellement de nouvelles tôles à partir de matériaux combinant à la fois résistance et large aptitude à la mise en forme (formabilité). Cette branche d'activité occupe une place importante dans cette industrie. Des développements considérables ont été également réalisés ces dernières années pour l'amélioration des procédés de mise en forme de ces tôles. L'emboutissage reste l'un des procédés les plus utilisés pour fabriquer des pièces à partir de tôles métalliques. Son succès est dû au fait que presque la totalité du matériau est utilisé. De plus, il permet d'obtenir des pièces à des cadences très élevées. Son intérêt économique est donc indéniable.

Le comportement de ces tôles métalliques, mises en forme par déformation plastique, a fait l'objet de nombreuses études depuis maintenant plusieurs décennies. Des modèles de comportement intégrant divers phénomènes physiques, liés aux déformations irréversibles que subit la tôle, ont été développés. Avec l'avènement des puissants calculateurs, parallèlement au développement de la méthode des éléments finis, des simulations pour des formes complexes en emboutissage ont été rendues possibles. Néanmoins, la prédiction fiable de l'état de la déformée finale des pièces reste un problème relativement ouvert. Ceci est dû principalement à l'interaction de plusieurs paramètres entrant en jeu lors de la simulation du procédé de mise en forme. En plus de la modélisation du comportement rhéologique de la tôle, quelques incertitudes sur les valeurs exactes des paramètres du procédé (contact et efforts transmis à la tôle), ainsi que l'approximation par éléments finis constituent des sources d'erreur qui affectent directement la qualité de la prédiction de l'état final de la tôle.

Ainsi, malgré les avancées réalisées aux niveaux expérimental (techniques permettant de montrer les mécanismes physiques élémentaires de la déformation), théorique (modèles de comportement performants) et numérique (codes de calculs capables de réaliser des simulations complexes), les industriels pensent qu'il reste du chemin à parcourir avant d'arriver à une maîtrise parfaite de la prédiction de certains phénomènes. Le retour élastique et la striction localisée sont parmi les phénomènes « indésirables » constatés sur les pièces embouties et qui restent à étudier de façon approfondie. Le retour élastique est beaucoup plus accentué sur les nouvelles nuances d'aciers, à haute résistance, développées ces dernières années par les métallurgistes. Le phénomène de striction dû à la localisation des déformations dans des régions étroites de la tôle en est un autre problème crucial, car il remet en question la faisabilité d'obtenir la forme souhaitée. La striction limite ainsi le domaine de formabilité des pièces en emboutissage.

Dans la perspective d'une compréhension approfondie de ces phénomènes permettant de les prédire correctement, des modèles de comportement performants, ainsi que des critères pertinents doivent être développés. Ces modèles doivent tenir compte de l'anisotropie du comportement élasto-plastique du matériau, mais également de son endommagement. Concernant le comportement élasto-plastique, ceci permettra de suivre l'évolution de l'état de chaque point de la pièce (champs de déformation, contraintes, écrouissage, etc.) dans le domaine de formabilité de la tôle. Pour ce qui est de la modélisation de l'endommagement, ceci permettra de prédire la dégradation éventuelle du matériau (précurseur de la rupture) avant d'atteindre la forme finale souhaitée. Des critères peuvent être également introduits pour prédire une étape intermédiaire correspondant à une certaine limite de formabilité de la pièce. Ces critères constituent des indicateurs utiles pour caractériser la formabilité des tôles métalliques.

Contexte et motivation de l'étude

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre d'un projet européen CECA qui a démarré en 2002 pour une durée de trois ans. Trois grands groupes industriels européens de sidérurgie interviennent dans ce projet : Arcelor, ThyssenKrupp et VoestAlpine. Ce projet vise à répondre à plusieurs questions, qui intéressent non seulement nos partenaires directs, mais également d'autres industriels qui travaillent sur les mêmes nuances d'aciers. Sans entrer dans les détails de ce projet et le plan élaboré avec nos trois partenaires, nous donnons quelques grandes lignes qui constituent la base de notre travail avant de décrire les objectifs fixés dans le cadre de cette thèse.

Ce projet vise à étudier le comportement d'une classe d'aciers utilisés pour l'élaboration de produits plats qui entrent dans la fabrication de divers produits (carrosseries d'automobiles, emballages, etc.). Ce projet est né d'un réel besoin de développer des modèles de comportement riches, permettant à la fois de comprendre les mécanismes élémentaires de déformation des tôles métalliques en mise en forme et de prédire les défauts susceptibles d'apparaître sur les pièces finales après mise en forme.

Trois grandes étapes ont été définies dans ce projet, que nous décrivons comme suit :

1. *Etude expérimentale* : définir les matériaux sur lesquels portera l'étude. Il s'agit de choisir une large classe d'aciers et de s'assurer notamment que les nuances proposées par chaque partenaire correspondent à celles utilisées par les autres. Ceci permettra de dégager des conclusions communes. L'étude expérimentale devra donner des informations sur la microstructure de ces aciers. Egalement, une étude expérimentale sur des tests rhéologiques à trajets directs et séquentiels devra être réalisée afin de déterminer l'anisotropie plastique initiale et celle induite par écrouissage des tôles. L'étude des trajets complexes de chargement devra mettre en évidence les principaux phénomènes à prendre en compte dans la modélisation théorique du comportement. Ces tests doivent couvrir le maximum de trajets de déformation que l'on retrouve en mise en forme. D'un autre côté, des tests d'emboutissage devront être réalisés afin de mettre en évidence les principaux phénomènes limitant la formabilité (retour élastique, striction localisée).
2. *Modélisation du comportement* : proposer des modèles de comportement performants permettant de décrire les mécanismes élémentaires entrant en jeu lors de trajets complexes de déformation. A cette fin, deux approches de modélisation peuvent être

adoptées. La première consiste à utiliser une modélisation micromécanique couplée à une transition d'échelle. Cette démarche physique est riche car la réponse macroscopique obtenue est directement extraite de l'information microscopique (à une échelle beaucoup plus fine, celle du grain par exemple). La deuxième approche consiste à utiliser des modèles phénoménologiques, tout en tenant compte des phénomènes de changement de trajets de déformation. L'avantage de cette dernière modélisation est qu'il est plus simple de l'intégrer dans des codes de calcul par éléments finis.

3. *Prédiction par simulation numérique* : montrer l'apport de ces modèles de comportement en termes de prédiction des phénomènes observés sur les essais expérimentaux (essais rhéologiques et de mise en forme). Cette troisième étape passe évidemment par la mise en œuvre numérique consistant à implanter les modèles de comportement retenus, ainsi que les critères de localisation dans des codes de calcul par éléments finis. Une attention particulière est à accorder au choix du schéma d'intégration des équations incrémentales des modèles de comportement, afin de garantir précision, stabilité et robustesse. De même, une grande importance devra être accordée à la prédiction du retour élastique et de la striction localisée. Des simulations seront à réaliser dans des codes de calculs afin d'étudier directement des formes complexes que l'on retrouve dans l'industrie.

Objectifs de la thèse

En étroite collaboration avec nos partenaires du projet CECA, nous avons fixé un ensemble d'objectifs à atteindre sur la durée de cette thèse. La partie expérimentale est totalement étudiée par nos partenaires, qui ont une grande expérience dans la caractérisation des matériaux métalliques. Ainsi, nous avons défini un certain nombre de tâches à réaliser que les industriels confient souvent aux laboratoires de recherche. Elles consistent à :

1. Proposer une modélisation du comportement élasto-plastique assez riche, capable de reproduire les phénomènes de changement de trajets de déformation pour les nuances d'aciers proposées par nos partenaires. Une modélisation phénoménologique est celle retenue dans notre travail. Les modèles proposés devront aussi prendre en compte les aspects de grandes déformations que subit la tôle lors de sa mise en forme.
2. Coupler le comportement élasto-plastique à un modèle d'endommagement, permettant de prédire la rupture dans la tôle pour divers trajets de chargement, notamment ceux rencontrés en emboutissage. Le modèle devra déterminer, en outre, l'état d'endommagement de la pièce au cours de sa mise en forme.
3. Introduire un critère pour la striction localisée, permettant de prédire le moment d'apparition des bandes de localisation de la déformation, précurseurs de la rupture observée sur les pièces embouties. Le critère doit aussi être capable de prédire les modes de localisation, c-à-d. les orientations des bandes pour différents trajets de chargement.
4. Réaliser une implantation numérique suffisamment générale et modulaire de ces modèles de comportement, pour pouvoir les incorporer dans divers codes de calcul par éléments finis. Les algorithmes développés doivent être à la fois précis et robustes mais possédant également un degré de généralité suffisant pour permettre d'ajouter éventuellement d'autres modèles de comportement (modularité).

5. Mener une étude comparative entre les diverses méthodes d'intégration des modèles de comportement proposés. Ceci permettra de montrer les performances et les limites de chaque méthode et de retenir le meilleur compromis en termes d'efficacité, précision, robustesse et modularité.
6. Planter le critère de localisation dans ces mêmes codes de calculs. En plus de la détection de la localisation lors de trajets rhéologiques, ceci permettra de traiter le problème de localisation directement sur des structures.
7. Effectuer une analyse du phénomène de retour élastique sur des tôles en aciers doux et à très haute résistance. L'étude devra montrer la sensibilité du retour élastique au modèle de comportement utilisé dans les prédictions par éléments finis, mais également montrer l'effet d'autres paramètres (numériques et du procédé).
8. Réaliser une étude détaillée par éléments finis de la striction localisée. Cette étude devra montrer les modes de localisation et le moment de leur apparition sur des essais rhéologiques à trajets directs et séquentiels.

Organisation des chapitres

Ce rapport de thèse est organisé dans l'ordre des objectifs fixés au départ et est composé de **cinq chapitres** décrits comme suit :

Le **premier chapitre** est consacré en première partie à une description générale des problèmes rencontrés en mise en forme des tôles métalliques, notamment par emboutissage. Ensuite, l'aspect expérimental de la caractérisation des phénomènes de changement de trajets de déformation est abordé. Les différents essais rhéologiques utilisés pour reproduire les principaux trajets de déformation que l'on retrouve en mise en forme sont décrits. Une importance particulière est donnée à la réponse contrainte/déformation. Le comportement rhéologique jusqu'à rupture est également montré. Enfin, la caractérisation de la formabilité des tôles métalliques est discutée.

En s'appuyant sur cette étude bibliographique, le **deuxième chapitre** est consacré entièrement à la modélisation du comportement. En premier lieu, une importance particulière est accordée à la modélisation de l'anisotropie induite par écrouissage et à la phase ultime du matériau. L'anisotropie initiale induite par la texture de la tôle laminée est décrite par un critère de plasticité anisotrope. L'anisotropie induite par l'écoulement plastique est décrite par des lois d'évolution de différents types d'écrouissages. Le modèle élasto-plastique ainsi défini est ensuite couplé avec un modèle d'endommagement développé dans le cadre de la mécanique de l'endommagement continu. Un critère de localisation par bandes de cisaillement, utilisé habituellement pour déterminer des courbes limites de formage (CLF) à localisation, a été introduit et reformulé dans le cadre des grandes déformations.

Le **troisième chapitre** est consacré à l'implantation numérique de ces modèles de comportement, ainsi que du critère de localisation dans les codes de calculs par éléments finis. En premier lieu, nous rappelons les différents schémas utilisés pour intégrer les lois d'évolution données sous forme incrémentale. Deux principales classes de schémas sont ainsi retenues : les schémas explicites (Euler direct, Runge-Kutta d'ordre deux et quatre) et les schémas implicites (les méthodes du point milieu généralisé, des trapèzes généralisés et asymptotique). L'implantation du modèle élasto-plastique, écrit sous forme unifiée, ainsi que du modèle couplé avec l'endommagement est exposée en détails. Une attention particulière est accordée à l'intégration implicite car ses performances sont bien reconnues, notamment en

termes de précision et de stabilité. Les algorithmes correspondants à chaque schéma sont exposés également. Les développements de l'implantation du critère de localisation dans le même code sont décrits. Des détails de calculs sont donnés en **annexe A** et **B**.

Grâce aux algorithmes développés et présentés dans le chapitre précédent, et implantés dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS, nous avons réalisé toute une étude qui nous a permis de montrer les performances et les points faibles de chaque méthode d'intégration. Cette étude fait l'objet du début du **quatrième chapitre**. Différents tests rhéologiques monotones et séquentiels ont été ensuite simulés dans le but de voir l'effet du modèle d'écrouissage sur la réponse globale contrainte-déformation. Une comparaison avec les courbes expérimentales est réalisée. Des tests académiques sont également étudiés dans ce chapitre pour montrer l'effet du changement du mode de chargement dans différents endroits d'une structure.

Enfin, le **cinquième** et **dernier chapitre** est consacré à l'étude de deux phénomènes qui peuvent apparaître lors de la mise en forme des tôles métalliques par emboutissage. Le premier est le retour élastique. Un essai spécialement conçu pour son évaluation est modélisé par éléments finis. L'étude porte sur l'évaluation de l'influence de divers paramètres entrant en jeu lors de la simulation de ce phénomène. Les effets des efforts transmis par les outils à la tôle, du type d'écrouissage introduit dans le modèle de comportement, de la géométrie des outils, ainsi que du type des éléments finis utilisés sont discutés. Une étude de la localisation des déformations par bandes de cisaillement est réalisée à la fin. Dans cette dernière partie de ce chapitre, le critère de localisation est appliqué au cours du chargement afin de détecter le moment où le premier mode de localisation apparaît, lors de trajets directs et séquentiels.

Il est à noter que chaque chapitre fini par une conclusion partielle. A la fin du document, une **conclusion générale** sur ce travail est donnée et des **perspectives** de développement et de travaux futurs sont dégagées.

Chapitre 1

Aspects physiques du comportement des tôles métalliques

1.1	Introduction	8
1.2	Défauts en mise en forme des tôles métalliques	8
1.2.1	Retour élastique	8
1.2.2	Striction	13
1.2.3	Plissement.....	15
1.2.4	Synthèse	15
1.3	Caractérisation du comportement des tôles métalliques	16
1.3.1	Trajet monotone	17
1.3.2	Trajet inverse.....	18
1.3.3	Essais séquentiels	18
1.3.4	Essais jusqu'à rupture.....	21
1.4	Formabilité des tôles métalliques.....	24
1.4.1	Application des CLF	25
1.4.2	CLF expérimentales	27
1.5	Conclusion.....	28

1.1 Introduction

Lors de la mise en forme des tôles métalliques, plusieurs défauts peuvent être rencontrés. Afin de pouvoir les prédire avec fiabilité, une caractérisation expérimentale fine du comportement est nécessaire, en vue de mettre en évidence les mécanismes élémentaires à l'origine de leur apparition. Ceci permettra de développer des modèles de comportement performants, voire d'enrichir des modèles existants, qui seront intégrés dans les codes de calculs et qui contribueront à l'optimisation des opérations de mise en forme des pièces formées.

Nous donnons en premier lieu de ce chapitre introductif une description des différents phénomènes de déformation mis en évidence lors de la mise en forme des tôles métalliques. Ensuite, nous abordons la caractérisation expérimentale du comportement des tôles comme décrite dans la littérature, qui permet de révéler l'évolution de la microstructure, ainsi que le comportement rhéologique au cours des chargements simples et complexes. A la fin de ce chapitre, nous donnons un aperçu de la caractérisation de la formabilité des tôles métalliques par les courbes limites de formage (CLF).

1.2 Défauts en mise en forme des tôles métalliques

Au cours des opérations de mise en forme des tôles métalliques et parfois postérieurement, divers défauts peuvent apparaître sur les pièces. Ces défauts peuvent être classés en deux catégories : les défauts globaux et les défauts locaux, que nous définissons comme suit :

- Un défaut global concerne la géométrie finale de la pièce. A l'issue de l'opération de mise en forme d'une tôle, par exemple par emboutissage, la géométrie finale obtenue après enlèvement des outils peut ne pas correspondre exactement à la forme recherchée. Deux phénomènes sont essentiellement à l'origine de ces défauts : le retour élastique et le plissement.
- Un défaut local concerne des zones plus ou moins réduites de la pièce, où une diminution nette de l'épaisseur, voire rupture, peut apparaître. La striction localisée en est un exemple. D'autres phénomènes plus rares, comme la rupture différée en est un autre.

Nous décrivons ces principaux défauts dans les paragraphes suivants.

1.2.1 Retour élastique

Lors de la mise en forme d'une tôle métallique par emboutissage, la forme recherchée est celle définie par le profil des outils à la fin de l'étape d'emboutissage. Cependant, après extraction de la pièce, à cause du comportement élastique du matériau, elle se relâche et la forme de la pièce évolue vers un nouvel état d'équilibre jusqu'à relaxation des contraintes. La Figure 1.1 montre un exemple d'une déformée obtenue juste à la fin de l'étape d'emboutissage puis après enlèvement des outils. Elle illustre clairement la différence entre les deux déformées. Ce phénomène n'apparaît, heureusement, pas sur toutes les pièces, mais uniquement sur certaines formes où des degrés de liberté en rotation de la tôle sont possibles. C'est la raison pour laquelle ce phénomène n'apparaît pas par exemple sur des pièces de forme tubulaire (godets, bouteilles, tubes etc.).

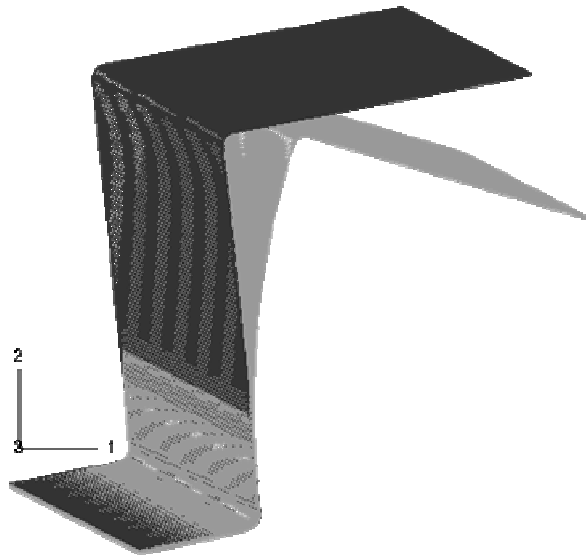


Figure 1.1. Exemple de déformées obtenues à la fin puis après l'étape d'emboutissage (simulation par éléments finis) d'une géométrie en « Oméga ». D'après Haddag et al. (2005).

Divers essais ont été proposés dans la littérature pour caractériser ce phénomène. Le plus fréquemment utilisé est l'essai dit en « Oméga », proposé à la conférence Numisheet'93. C'est cet essai qui sera considéré au chapitre 5 pour étudier ce phénomène. Cet essai est utilisé tant au niveau expérimental qu'au niveau de la simulation numérique. La caractérisation expérimentale consiste à mesurer certains indicateurs du niveau du retour élastique pour différentes conditions de mise en forme. Dans le cas de l'essai « Oméga », ces indicateurs sont les angles de rotation des parois, ainsi que la courbure de la paroi, tels que montrés sur la Figure 1.2.

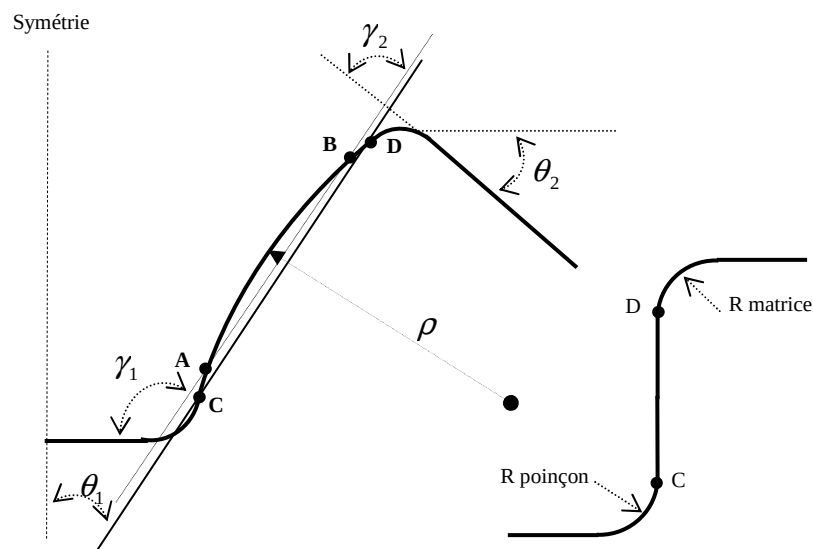


Figure 1.2. Indicateurs du niveau du retour élastique dans l'essai « Oméga ».

Divers travaux (Pourboghrat et Chu, 1995 ; Carden et al., 2002 ; Geng et Wagoner, 2002 ; Lee et al., 2005 etc.) montrent que le niveau du retour élastique est sensible à plusieurs facteurs. Ces facteurs sont liés, d'une part, au procédé de mise en forme et, d'autre part, à la tôle elle-même. Les paramètres du procédé sont l'effort de serrage, la vitesse de mise en forme, la nature du contact entre les outils et la tôle (avec ou sans frottement), ainsi que les paramètres géométriques, tels que les rayons de courbure des outils et la course du poinçon. Les paramètres de la tôle sont le matériau (composition chimique, taille des grains), la texture et l'épaisseur de la tôle.

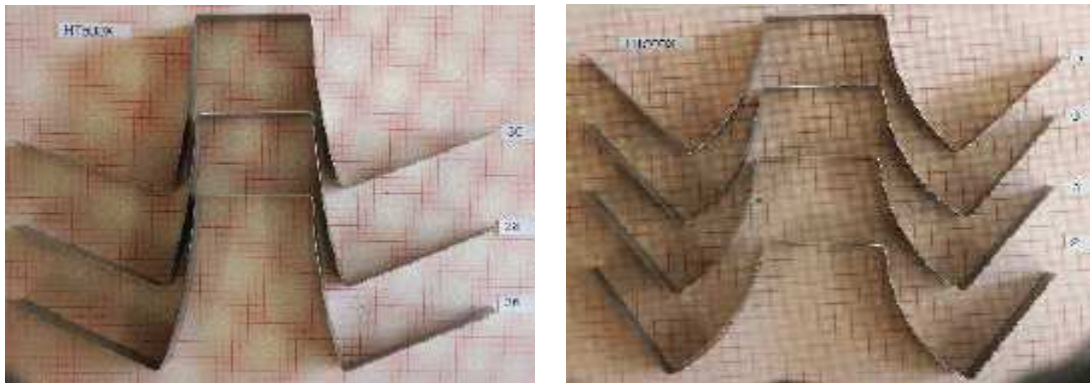


Figure 1.3. Retour élastique pour différents efforts de serrage sur un acier à très haute résistance (4^{ème} Rapport CECA, VoestAlpine). A gauche : efforts de serrage élevés.

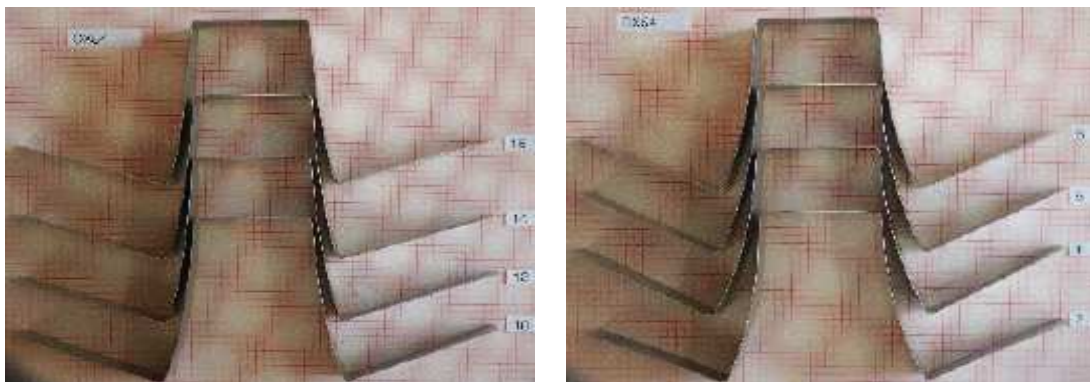


Figure 1.4. Retour élastique pour différents efforts de serrage sur un acier doux (4^{ème} Rapport CECA, VoestAlpine). A gauche : efforts de serrage élevés.

Les Figures 1.3 et 1.4 montrent, par exemple, l'influence de l'effort de serrage du serre flan sur le niveau du retour élastique pour la géométrie en « Oméga ». Sur chaque figure, la déformée située à gauche correspond à l'effort de serrage élevé. Ces figures montrent que le retour élastique est beaucoup plus prononcé pour de faibles efforts de serrage, tel que constaté dans plusieurs travaux (Pourboghrat et Chu, 1995 ; Carden et al., 2002 ; Geng et Wagoner, 2002 ; Lee et al., 2005a, 2005b ; Haddag et al., 2004, 2005 etc.).

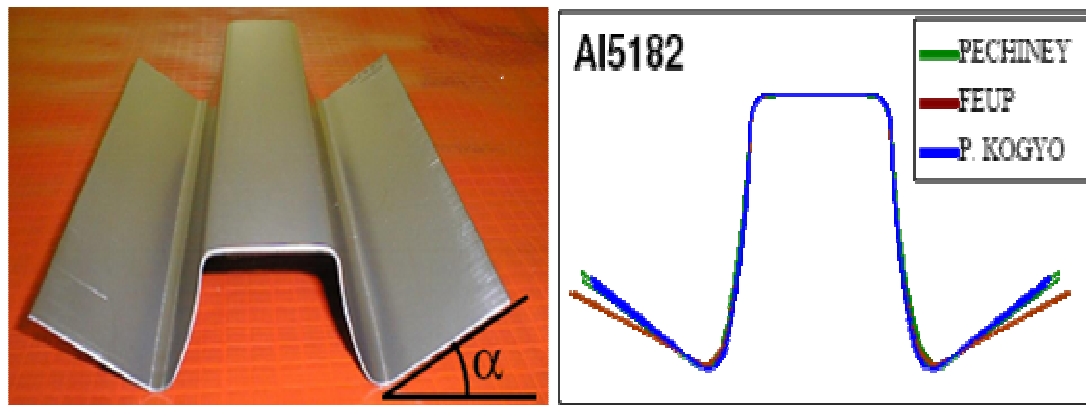


Figure 1.5. Dispersion des résultats du retour élastique sur une nuance d'aluminium obtenue par différents partenaires dans le cadre du projet 3DS de la conférence Numisheet2005. D'après Col et Santos (2005).

La sensibilité à la vitesse de déplacement du poinçon en emboutissage peut également avoir un effet sur le retour élastique. Col et Santos (2005), en comparant différents résultats sur le même essai de retour élastique effectué par plusieurs partenaires, ont souligné l'effet de la vitesse de déplacement du poinçon afin d'expliquer la dispersion entre leurs résultats. Ils attribuent ceci à l'effet que peut avoir cette vitesse sur le frottement entre les outils et la tôle, qui lui-même a un effet sur les efforts transmis à la tôle lors de la mise en forme. La variation de l'effort de serrage ainsi induite fait varier le niveau du retour élastique. Par contre, Mori et al. (2005) ont montré sur une géométrie en "V", comme illustré sur la Figure 1.6, que le niveau du retour élastique est faiblement affecté par la vitesse de mise en forme. Ceci laisse à penser que les grandes déformations plastiques générées localement dans la tôle par la pointe de l'outil ne sont pas affectées par la vitesse du poinçon.

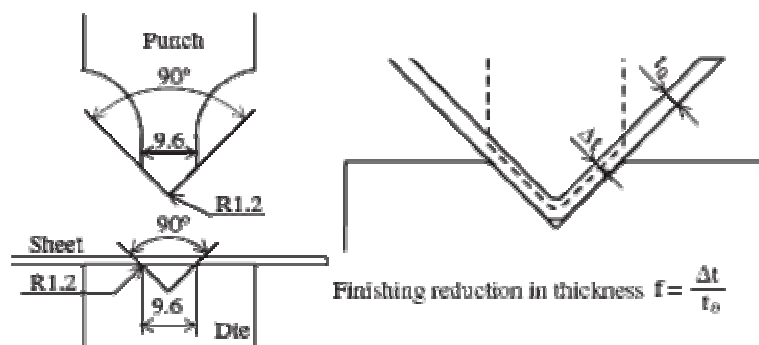


Figure 1.6. Essai en "V" pour caractériser la sensibilité du retour élastique à la vitesse de mise en forme. D'après Mori et al. (2005).

Le choix du matériau a une grande influence sur le retour élastique. Les matériaux à très haute résistance exhibent souvent un retour élastique plus élevé par rapport aux matériaux ductiles. En effet, comme le montre la Figure 1.7, par la comparaison de deux matériaux ayant des limites d'élasticité différentes et un module de Young quasi-identique, lorsqu'on effectue une décharge élastique au même niveau de déformation on obtient des niveaux de déformation résiduelle différents. C'est le fait que $Y_{HLE}^e > Y_{FLE}^e$ qui rend les matériaux à très hautes résistances beaucoup plus sensibles au phénomène de retour élastique.

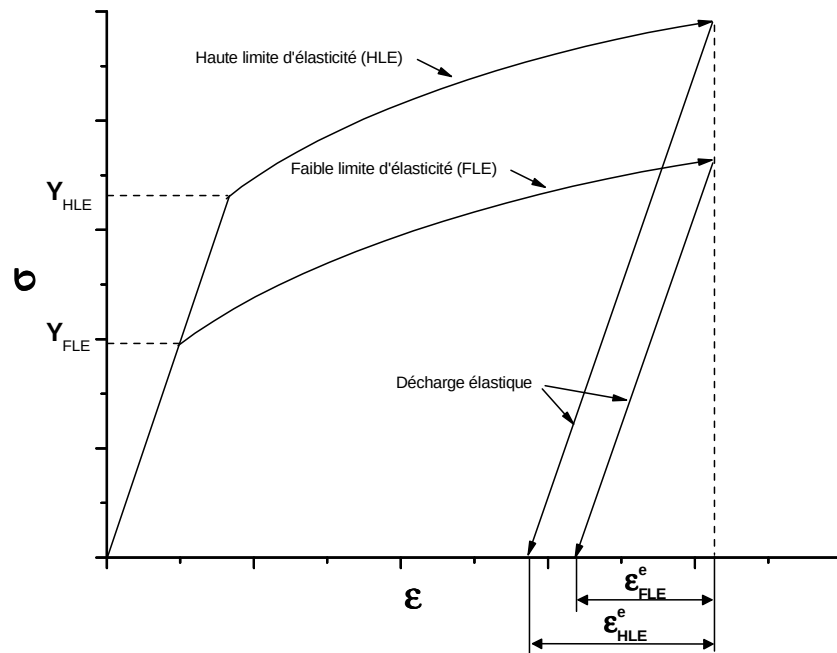


Figure 1.7. Illustration par une courbe rhéologique de la sensibilité au retour élastique de deux matériaux ayant le même module de Young et des limites d'élasticité différentes.

Du fait que les tôles métalliques sont obtenues généralement par le procédé de laminage, elles exhibent souvent une texture qui leur procure une anisotropie initiale de plasticité. Ainsi, l'orientation de la direction de laminage de la tôle dans le dispositif de mise en forme peut avoir une influence directe sur le retour élastique. En effet, ceci induit des différences entre les contraintes d'écoulement atteintes lors de la mise en forme et influe directement sur le retour élastique comme indiqué précédemment.

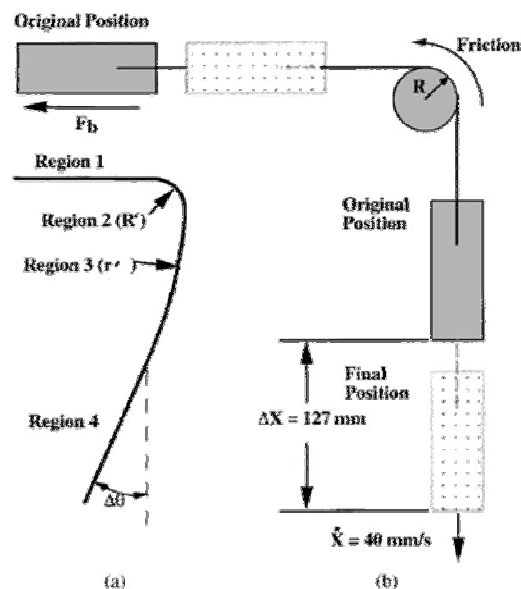


Figure 1.8. Essai d'enroulement d'une tôle : (a) forme finale après l'essai (b) formes initiale et finale durant l'essai. Trois matériaux testés, trois conditions de frottement et différents rayons de l'outil. D'après Carden et al. (2002).

Sur un essai de pliage/dépliage par enroulement d'une tôle sur un outil circulaire, Carden et al. (2002) ont examiné l'effet du rapport entre le rayon de l'outil et l'épaisseur de la tôle (R/e). Ils ont montré que le retour élastique décroît avec l'augmentation du rapport R/e . Également, en variant les conditions de frottement (à sec, avec lubrifiant et avec rotation libre de l'outil) pour trois matériaux différents (un acier doux, un acier à haute résistance et un alliage d'aluminium), ils ont conclu que le frottement a un faible effet sur le niveau du retour élastique (dans le cas étudié).

1.2.2 Striction

Le phénomène de striction en mise en forme des tôles métalliques pose un problème délicat pour l'industrie, du fait qu'il limite le domaine de formabilité de la tôle. La faisabilité de la pièce par grandes déformations plastiques dépend de l'aptitude de la tôle à se déformer d'une manière quasi-homogène. Cette striction est caractérisée par la diminution de l'épaisseur de la tôle. Deux types de striction peuvent être définis : diffuse et localisée. La striction diffuse est caractérisée par une large zone de concentration des déformations et la striction localisée est caractérisée par une concentration des déformations dans des zones étroites, principalement sous forme de bandes. Ces bandes sont le lieu de rupture par fissuration lors de la mise en forme du matériau.

D'une manière générale, la striction diffuse précède la striction localisée. Néanmoins, dans certains cas les déformations peuvent se localiser dans des bandes étroites sans qu'il y ait de striction diffuse perceptible dans la tôle, c'est le cas des tôles très minces par exemple (Col, 2006). La Figure 1.9 montre la différence en termes de striction entre une tôle épaisse et une tôle mince lors d'un essai de traction uniaxiale. Sur la tôle épaisse, nous remarquons une réduction de la largeur de l'éprouvette par rétreint avant rupture, signe de striction diffuse avant localisation. Par contre, sur la tôle mince la déformation est concentrée principalement dans une bande étroite où l'épaisseur diminue jusqu'à rupture ; la striction diffuse y est peu perceptible.

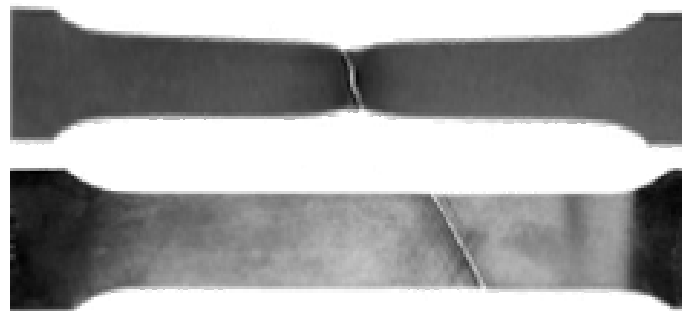


Figure 1.9. Striction sur une tôle épaisse (en haut) et très mince (en bas). D'après Col (2006).

Également, dans certains cas nous pouvons avoir une rupture sans qu'il y ait de striction localisée perceptible. C'est le cas de l'expansion d'une tôle par exemple, comme le montre la Figure 1.10. En effet, pour ce mode de chargement il n'y a pas de direction privilégiée pour la formation d'une bande de localisation. Souvent, la fissure suit une direction quelconque.

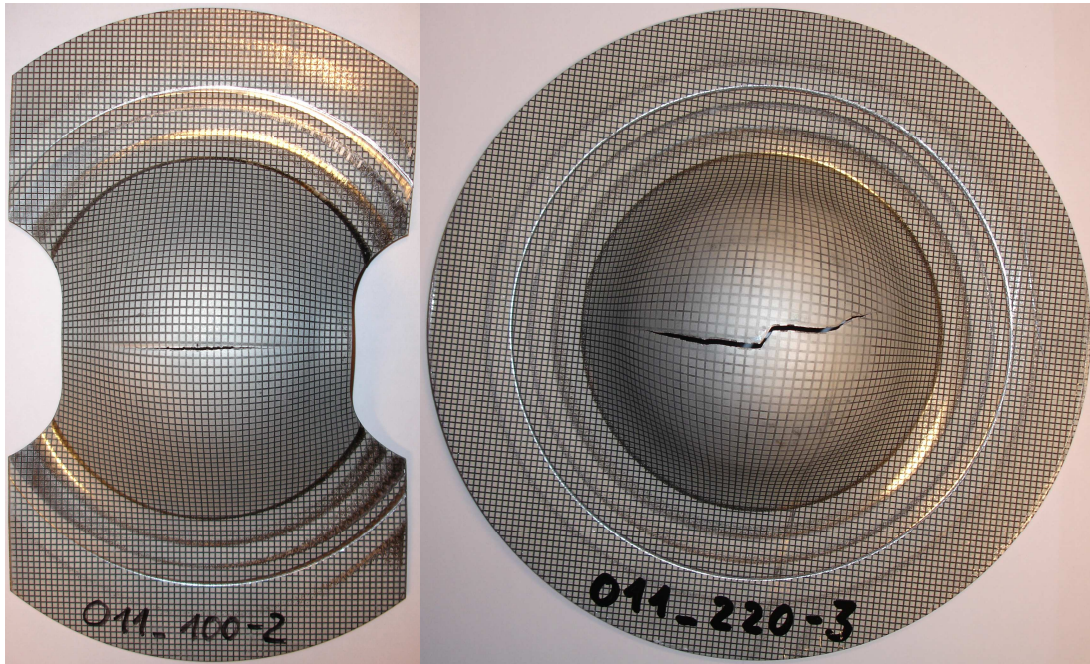


Figure 1.10. Mise en évidence par l'essai Nakazima d'une rupture après striction localisée (à gauche : en rétreint) et sans striction localisée (à droite : en expansion). Photos du projet CECA (ThyssenKrupp).

Certaines formes géométriques de la pièce ont un effet sur l'endroit où la striction est susceptible d'apparaître. Les trous ou les entailles, par exemple, constituent des lieux favorables à la concentration de déformations, donc à la formation de bandes de localisation. La Figure 1.11 montre une localisation des déformations autour d'un trou de la tôle. Nous remarquons une apparition de plusieurs bandes de localisation au bord du trou, avec propagation d'une fissure macroscopique selon une direction radiale au trou.



Figure 1.11. Essai d'expansion d'une tôle en acier doux ayant un trou au centre. Apparition de plusieurs bandes de localisation au bord du trou, avec propagation d'une fissure macroscopique selon la direction radiale (3^{ème} Rapport CECA, VoestAlpine).

1.2.3 Plissement

Les tôles métalliques, vues leurs caractéristiques dimensionnelles (rapport très faible entre l'épaisseur et les dimensions de la tôle dans son plan), sont très sensibles au flambement. Ceci se traduit au cours de la déformation de la tôle par la formation de plis. Ce phénomène est dû aux contraintes de compression qui se développent au cours de la mise en forme et qui agissent dans le plan de la tôle comme des efforts de flambement.

Comme le montre la Figure 1.12, lors de l'opération d'emboutissage d'un godet, ce phénomène peut se manifester au voisinage du bord de la tôle. Il est d'autant plus prononcé que l'effort de serrage est faible. De plus, ces contraintes de compression sont d'autant plus grandes que le diamètre initial du flan est grand par rapport au diamètre du poinçon. L'augmentation de l'effort de serrage génère des efforts normaux au plan de la tôle qui tendent à éliminer ce phénomène (photo de gauche). Néanmoins, cette solution n'est pas sans risque, car elle empêche l'écoulement de la matière et peut conduire à une rupture prématurée de l'embouti. Une solution complémentaire consiste à diminuer le frottement entre les outils et la tôle, tout en augmentant cet effort de serrage.



Figure 1.12. Rupture sans formation de plis (à gauche : effort de serrage élevé) et avec formation de plis (à droite : effort de serrage faible). D'après Lang et al. (2004).

1.2.4 Synthèse

Comme décrit précédemment, divers défauts peuvent apparaître sur les pièces obtenues par mise en forme. Certains phénomènes apparaissent au cours de l'opération de mise en forme (striction localisée, rupture et plissement). D'autres apparaissent juste à la fin (retour élastique). On peut citer également d'autres phénomènes. Par exemple, les ondulations au bord (« cornes » d'emboutissage), qui sont dues à la texture initiale de la tôle. Également, la rupture différée, caractérisée par la formation de fissures sur la pièce finale après un certain temps, allant de quelques heures à plusieurs jours, et qui apparaît sur certaines nuances d'aciers à très haute résistance.

Nous nous intéressons, dans la suite, plus particulièrement à l'étude du retour élastique en emboutissage et à l'étude de la formabilité des tôles métalliques (prédiction de la localisation des déformations). Les deux paragraphes suivants décrivent les phénomènes pris en compte dans la littérature pour modéliser le comportement des matériaux. De même, la caractérisation expérimentale de la formabilité des tôles métalliques est abordée.

1.3 Caractérisation du comportement des tôles métalliques

Pour étudier tous ces phénomènes, une caractérisation expérimentale est nécessaire permettant de mettre en évidence le comportement du matériau lors des différentes séquences de chargement. Les essais rhéologiques sont souvent utilisés pour définir l'état de contrainte en fonction de l'histoire de déformation. Ces essais doivent couvrir au moins les principaux trajets de déformation rencontrés au cours de la mise en forme de la tôle. Dans la plupart des applications industrielles, ces trajets sont souvent non proportionnels et complexes (trajets fortement non-linéaires). Comme le montre la Figure 1.13 par exemple, lors du passage de la tôle par le rayon de courbure de l'outil, sur la partie supérieure de la tôle on passe d'une traction à une compression, tandis que sur la partie inférieure c'est l'inverse qui se produit.

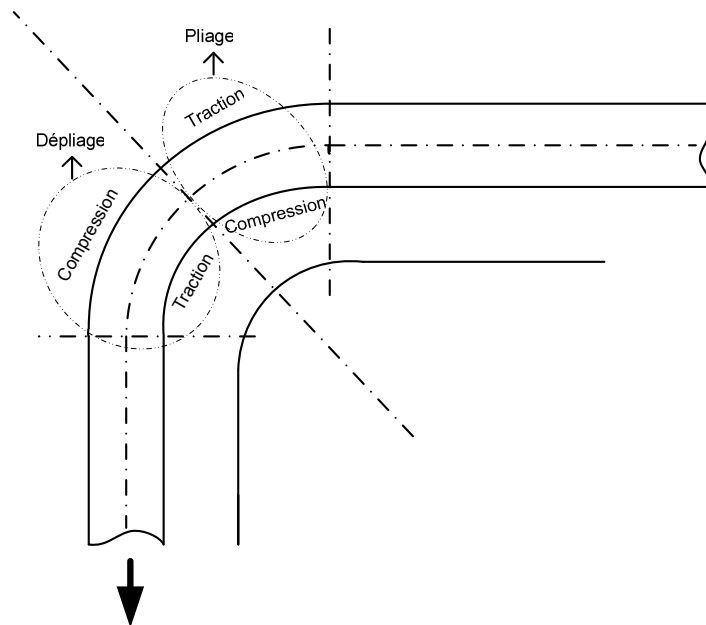


Figure 1.13. Changement du trajet de déformation au cours du passage de la tôle par le rayon de courbure de l'outil.

Ces changements de trajets de déformation, induits par le pliage/dépliage par exemple, sont sources de certains phénomènes de comportement qui ne peuvent être révélés par des essais simples à trajet monotone. Il est important de les prendre en compte dans les modèles de comportement, afin de reproduire au mieux les différentes courbes rhéologiques pour une large gamme de matériaux, allant des matériaux ductiles jusqu'aux matériaux à très haute résistance. De tels modèles contribueront à la prédiction fiable des divers phénomènes indésirables cités au paragraphe précédent (retour élastique, striction localisée etc.).

Les expériences (observations et essais) ont montré que ces phénomènes dépendent de différents facteurs. Les prédire correctement passe par la compréhension et la prise en compte de la microstructure du matériau et de son évolution. En général, les essais rhéologiques utilisés sont directs et/ou séquentiels (composés généralement de deux trajets). Nous décrivons ici, en s'appuyant notamment sur les travaux de Teodosiu et Hu (1995 et 1998), comment la microstructure des aciers doux évolue selon les différents trajets de chargement.

1.3.1 Trajet monotone

Pour les matériaux poly-cristallins (par exemple les aciers) soumis à une déformation monotone, une réorganisation de la microstructure apparaît et des structures de dislocation dites à faible énergie (SDFE) se forment graduellement. Au fur et à mesure que le niveau de déformation augmente ces SDFE deviennent de plus en plus planaires et forment ainsi des structures de dislocations persistantes planaires, dites aussi, parois de dislocations. Ces structures sont plus ou moins parallèles au plan de glissement principal et possèdent une polarité. Ce qui signifie, un excès de dislocations de même signe sur chaque côté de la paroi, du côté opposé le signe est différent. Tel qu'il a été observé par Rauch et al. (1990), l'activation des systèmes de glissement non-coplanaires est à l'origine de la formation des parois de dislocations.

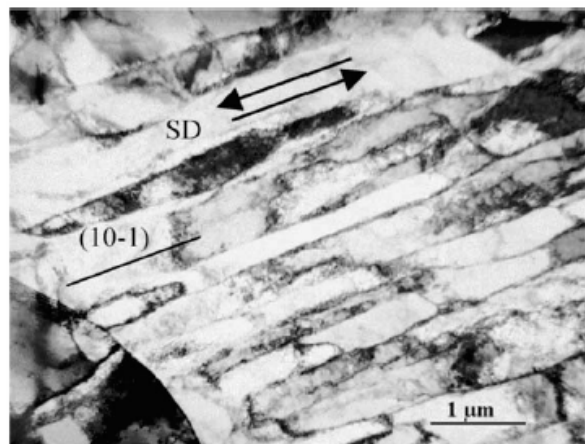


Figure 1.14. Structures de dislocations intragranulaires des grains orientés selon la fibre γ dans un acier doux après 60% de déformation de cisaillement (SD : direction de cisaillement). D'après Nesterova et al. (2001a).

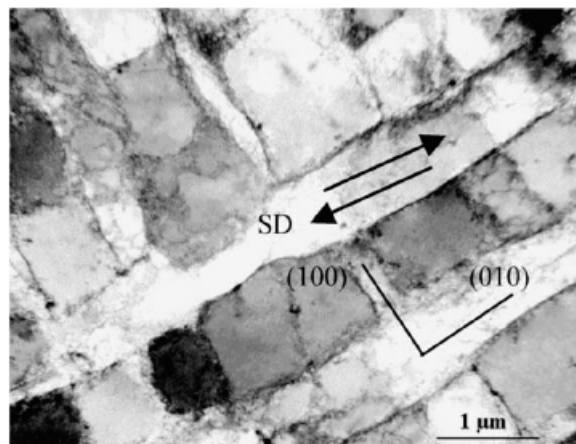


Figure 1.15. Structures de dislocations intragranulaires des grains d'orientation « cube » dans un acier doux après 15% de déformation de cisaillement (SD : direction de cisaillement). D'après Nesterova et al. (2001b).

Les Figures 1.14 et 1.15 montrent ces structures de dislocations planaires persistantes pour deux grains ayant des orientations différentes. L'essai considéré est un cisaillement simple. Ces structures planaires sont moins marquées dans le cas d'un trajet en expansion équibiaxiale (Langlois, 2000 ; Langlois et Berveiller, 2003), comme le montre la Figure 1.16.

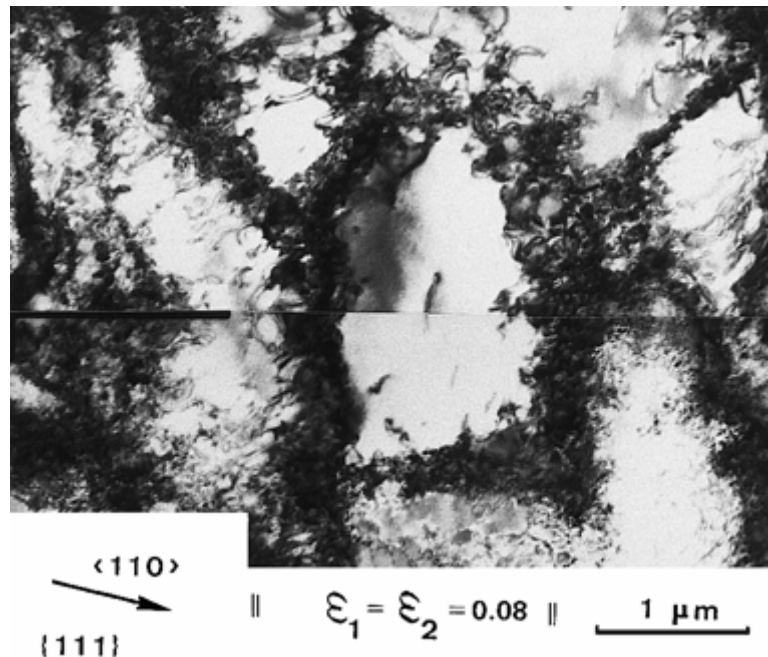


Figure 1.16. Structures de dislocations intragranulaires dans un matériau soumis à une expansion équibiaxiale. D'après Langlois (2000).

1.3.2 Trajet inverse

Un essai de déformation inverse largement utilisé est le cisaillement Bauschinger. Durant le second trajet de déformation, après une pré-déformation suffisamment importante, une évolution rapide de l'écrouissage est observée (régime de déformation microplastique), suivie d'une stagnation de l'écrouissage, puis d'une reprise de son évolution, comme illustré sur la Figure 1.17. Les observations microscopiques montrent que la première étape de la déformation inverse est due à la coalescence des structures cellulaires de dislocations préformées, le plateau de stagnation de l'écrouissage observé sur la courbe déformation/contrainte est dû à la désintégration des structures cellulaires préformées et la reprise de l'écrouissage provient de la formation de nouvelles structures cellulaires.

1.3.3 Essais séquentiels

La mise en forme implique des changements de trajets de déformation très complexes. Les essais les plus répandus pour les caractériser se limitent à deux variations du chemin de chargement. Un paramètre scalaire a été proposé par Schmitt et al. (1985) afin de caractériser de tels changements de trajet de déformation, défini comme suit :

$$\beta = N_1 : N_2 \quad (1.1)$$

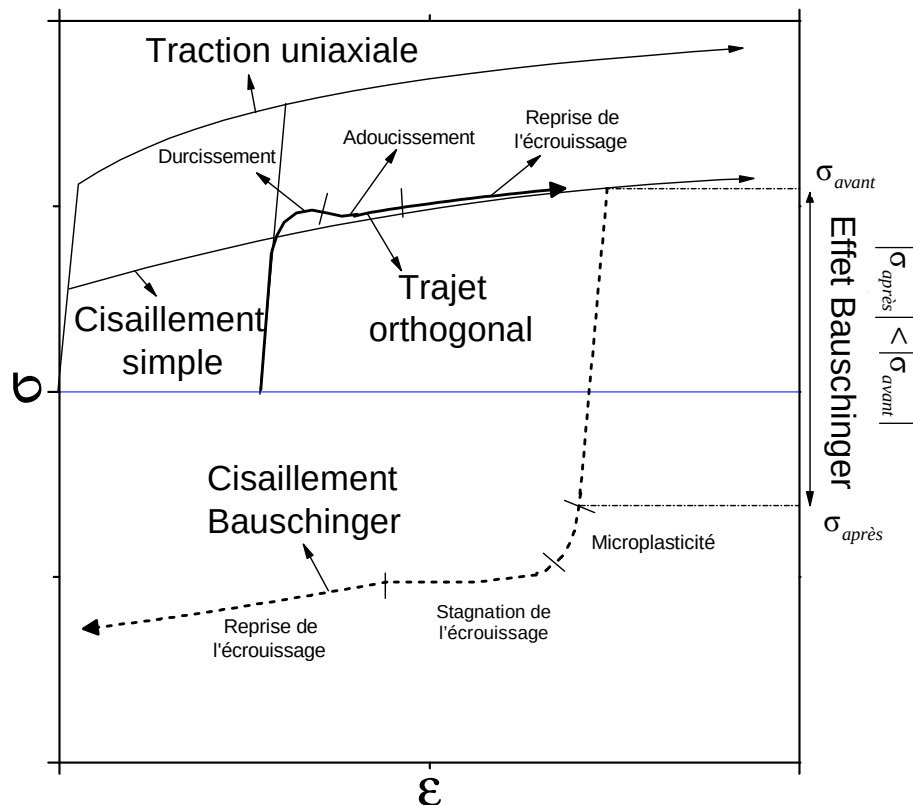


Figure 1.17. Mise en évidence de quelques phénomènes de transition lors de changements du trajet de déformation. Essais utilisés par Teodosiu et Hu (1995, 1998) pour modéliser l'anisotropie de plasticité induite par l'écrouissage.

où N_1 et N_2 sont les directions du tenseur taux de déformation lors du premier et second trajet, respectivement. Le paramètre β varie de -1 (essai Bauschinger) à 1 (essai monotone). Lorsque $\beta=0$, le trajet est dit orthogonal. Selon Schmitt et al. (1985), ce paramètre est approprié pour caractériser la surface de charge des aciers doux largement pré-déformés. Notant par σ_{avant} et $\sigma_{après}$, respectivement, la contrainte d'écoulement avant et après la décharge, le rapport $\sigma_{après}/\sigma_{avant}$ est égal à un pour $\beta=1$, inférieur à un pour $\beta=-1$ et atteint en général la valeur maximale pour $\beta=0$. Des essais expérimentaux obtenus pour différents changements de trajets de déformation et pour la même valeur de β sont relativement différents mais restent toujours similaires, confirmant que β est un paramètre adéquat pour caractériser les changements de trajets de déformation (Genevois, 1992 ; Bacroix et al., 1994 ; Hoc et Rey, 2000 ; Hoc et al., 2001).

Le trajet orthogonal implique l'activation de nouveaux systèmes de glissement qui sont latents durant la pré-déformation. Durant la séquence orthogonale de déformation, la contrainte d'écoulement est supérieure à celle de déformation monotone à la même déformation cumulée. Quand le niveau de pré-déformation est faible, le taux d'écrouissage est toujours positif. Par contre, quand ce niveau de pré-déformation est grand, au début un adoucissement apparaît, suivi d'une reprise de l'écrouissage. Durant l'adoucissement, au moment où la déformation macroscopique peut rester plus ou moins homogène, la déformation suivante est essentiellement localisée à l'échelle intragranulaire. En effet, le taux de cisaillement est dû principalement à la formation de microbandes le long des nouveaux

plans de glissements actifs ; à l'extérieur des microbandes, il n'y a presque pas de glissement. De plus, les parois de dislocations préformées sont cisailées par les microbandes et ceci peut être utilisé comme un indicateur de leur présence.

Thuillier et Rauch (1994) ont étudié le développement des microbandes à l'échelle du grain dans un acier doux durant un trajet orthogonal de chargement composé d'une traction suivie d'un cisaillement. Ils attribuent l'adoucissement de la contrainte lors de la recharge en cisaillement simple, préalablement sollicités en traction, à l'émergence, à l'échelle du grain, d'une localisation de la déformation dans des microbandes. Ces microbandes correspondent à un système de glissement unique. A plus fort taux de déformation, la contrainte augmente et la structure de dislocations est alors composée de parois planes parallèles et/ou perpendiculaires à la direction de sollicitation en cisaillement. La Figure 1.18 illustre ce phénomène.

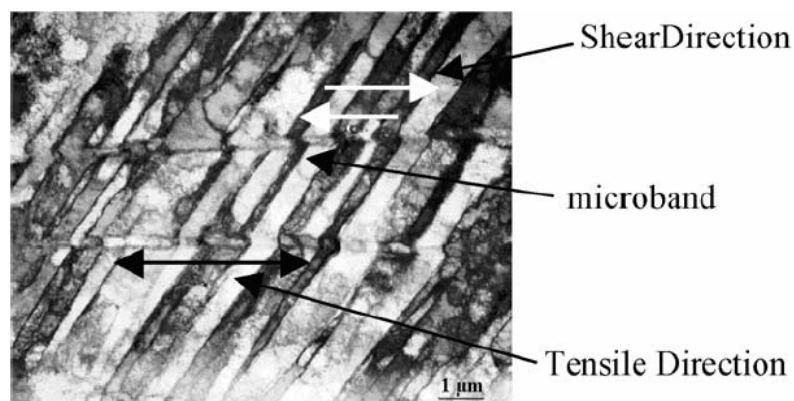


Figure 1.18. Mise en évidence des microbandes à la fin d'un essai de cisaillement à 10% après une pré-déformation en traction de 10%. D'après Bouvier et al. (2003).

Les mêmes mécanismes microstructuraux apparaissent pour d'autres trajets de déformations. Hoc et Rey (2000) et Hoc et al. (2001) ont étudié l'effet de la pré-déformation en traction plane suivant la direction de laminage sur la localisation des déformations lors d'une traction uniaxiale suivant la direction transverse. Le paramètre β vaut 0, ce qui correspond à un trajet de chargement orthogonal. La Figure 1.19 montre les cellules de dislocations, ainsi que les murs de dislocations formés à 3% de déformation en traction plane.

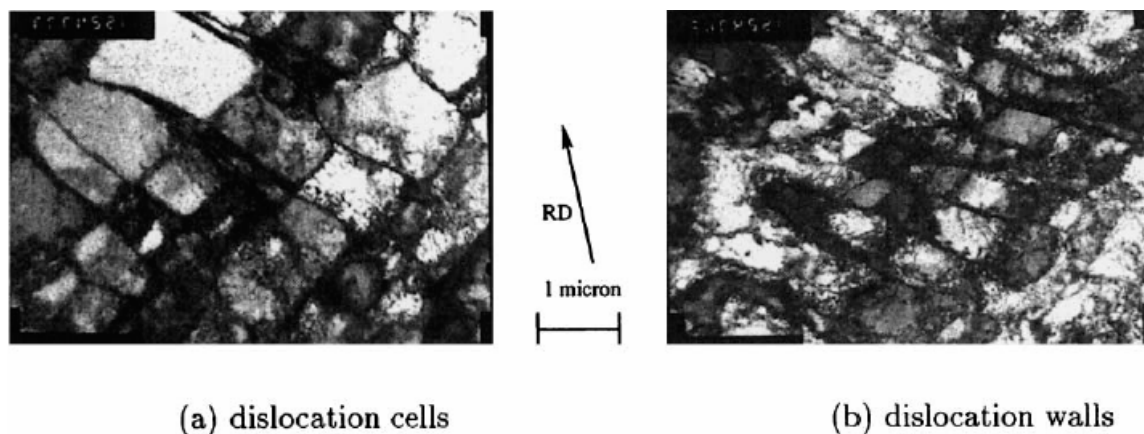


Figure 1.19. Macro-bandes des sous-structures de dislocations après 3% de pré-déformation en traction plane. D'après Hoc et al. (2001).

1.3.4 Essais jusqu'à rupture

Le comportement du matériau à la rupture met en jeu des mécanismes de déformation et d'endommagement très complexes. Les faciès de rupture, révélateurs du type de rupture (ductile, fragile ou mixte), montrent toute la complexité de ce phénomène. Pour les tôles métalliques, les grandes déformations qu'implique l'opération de mise en forme génèrent des localisations de déformations qui conduisent à la rupture prématurée du matériau. La Figure 1.20 montre le comportement jusqu'à rupture d'un aluminium et d'un acier doux (Brunet et al., 1998) en trajet monotone. Ces courbes mettent en évidence la chute de la contrainte d'écoulement qui traduit la rupture du matériau, ainsi que le niveau de déformation (ductilité) qu'atteint le matériau en traction uniaxiale.

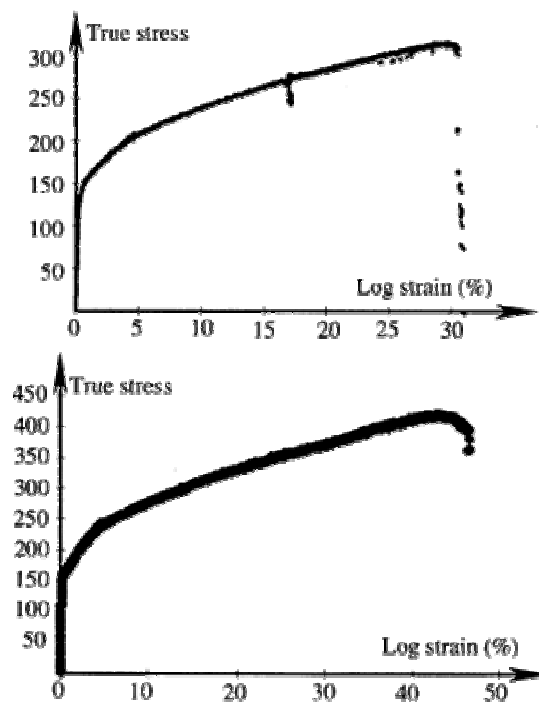


Figure 1.20. Courbes expérimentales pour un AL 6016 (bas) et un acier doux (haut). D'après Brunet et al. (1998).

Ce niveau de déformation à rupture n'est pas tout à fait reproductible expérimentalement. La Figure 1.21 (Khelifa, 2004) montre des essais rhéologiques de traction uniaxiale sur une tôle en aluminium. Trois directions de chargement ont été considérées (0° , 45° et 90° par rapport à la direction de laminage). Pour chaque direction une série de quatre essais a été réalisée. Deux constats peuvent être tirés des courbes obtenues. Nous remarquons que pour chaque direction de chargement les essais reproduisent quasiment le même comportement élasto-plastique, mais pas le niveau de rupture du matériau ; la contrainte chute à des niveaux de déformation différents. Ceci est dû au fait que les éprouvettes, bien que découpées et chargées selon la même direction, n'ont pas réellement une microstructure identique. L'orientation des grains, ainsi que l'existence d'inclusions à l'endroit le plus sollicité, où la rupture est susceptible d'apparaître, peut avoir une influence directe sur le moment de rupture du matériau. De plus, l'anisotropie plastique initiale a une influence sur ce moment de rupture. En considérant les courbes sélectionnées (celles qui donnent un niveau de déformation à rupture le plus élevé), on constate que la limite de ductilité est variable. Autrement dit, elle dépend de la direction de chargement.

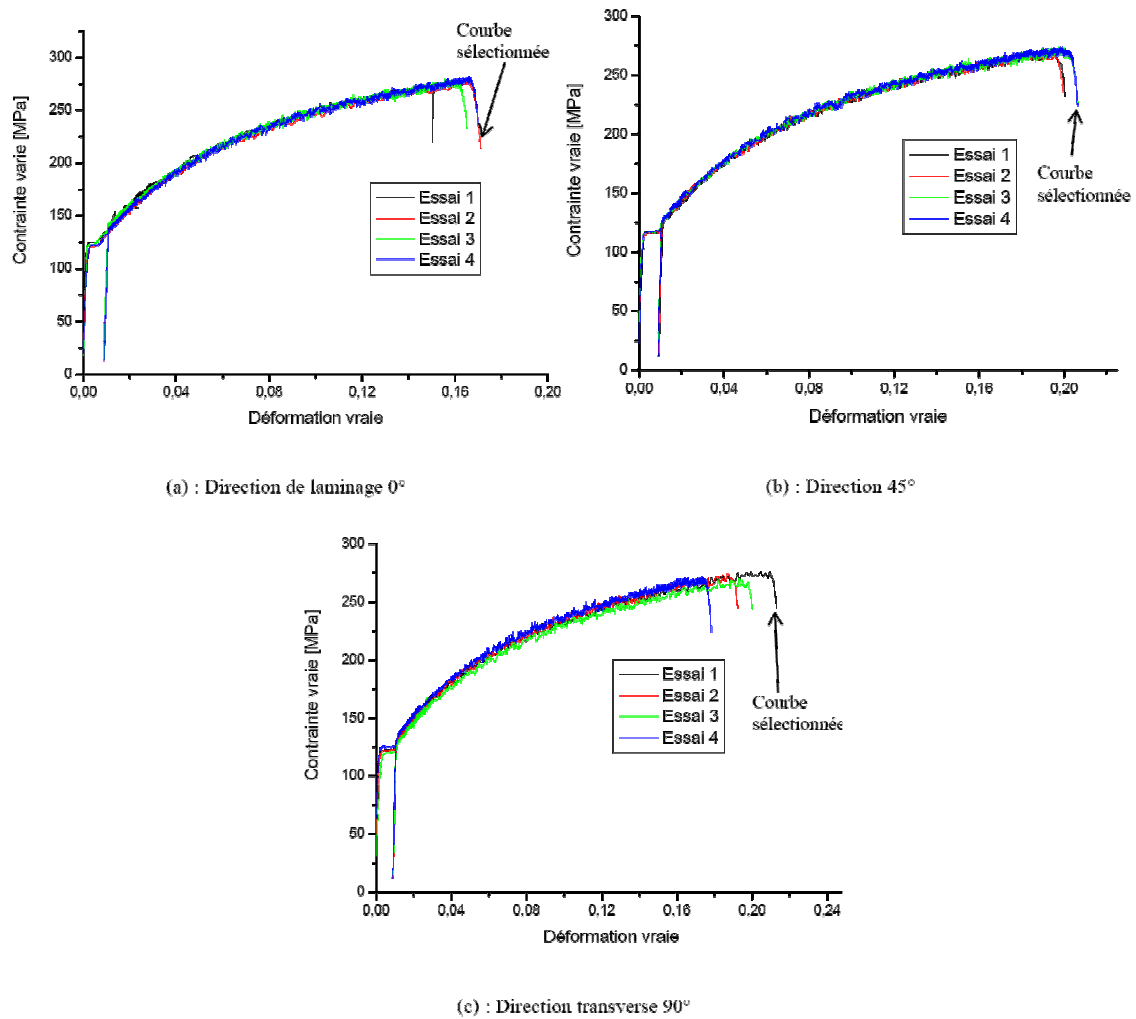


Figure 1.21. Courbes expérimentales de traction à différentes directions de chargement sur une tôle en aluminium. D'après Khelifa (2004).

Le changement du trajet de déformation a une influence sur la limite de ductilité du matériau. Genevois (1992) a réalisé des essais séquentiels pour déterminer l'effet de la pré-déformation sur la limite de ductilité du matériau lors du second trajet de chargement. Comme le montre la Figure 1.22, la pré-déformation de cisaillement (32%) conduit à des niveaux de ruptures différents lors du trajet suivant en traction uniaxiale. Lors de la traction suivant la direction de laminage ($\varphi_0 = 0^\circ$), la rupture est quasi brutale ; la ductilité du matériau selon ce trajet de chargement est très faible. Le même constat est observé sur la traction à $\varphi_0 = 90^\circ$. En effet, ces deux trajets sont orthogonaux (le paramètre $\beta = 0$). Ceci montre que ce type de trajets est plus néfaste pour la ductilité du matériau, du fait qu'il conduit à une rupture prématurée du matériau. À $\varphi_0 = \pm 45^\circ$, la ductilité du matériau est légèrement supérieure ($\beta = \pm 0,6$). Néanmoins, pour tous ces cas l'adoucissement conduit directement à la rupture du matériau ; il n'existe aucune reprise de l'écrouissage et par conséquent de l'écoulement plastique. Ce constat ne peut être généralisé, y compris pour l'essai orthogonal. En effet, à la différence de l'essai orthogonal montré ici (cisaillement suivi d'une traction), sur l'essai orthogonal de la Figure 1.17 (cisaillement après une pré-déformation de traction) on observe une reprise de l'écoulement plastique après la phase d'adoucissement lors du second trajet. Ainsi, l'ordre d'application des chargements séquentiels a une influence directe sur la ductilité d'un matériau. Le niveau de pré-déformation a également une grande influence.

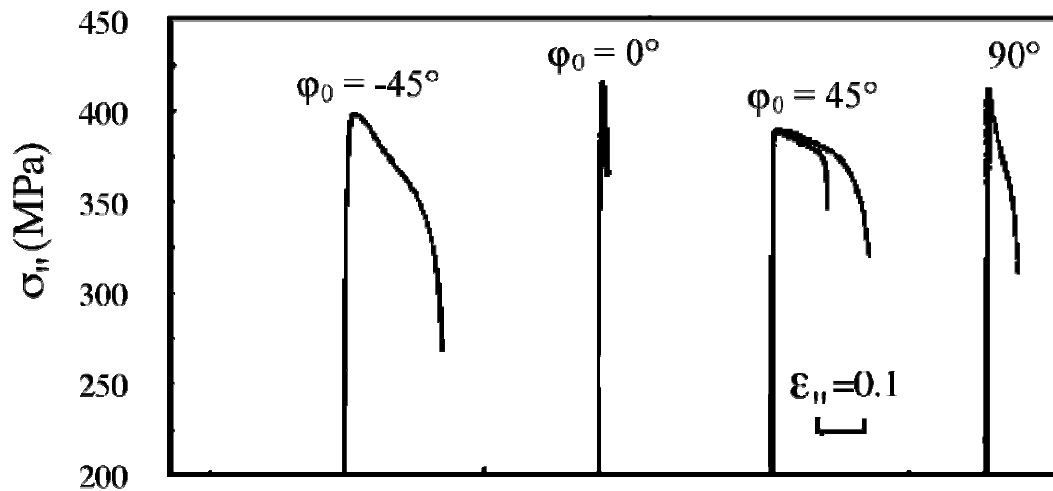


Figure 1.22. Influence du changement du trajet de chargement sur la ductilité d'un acier doux. Traction uniaxiale après un cisaillement simple de 32% le long de la direction de laminage (0°). φ_0 est l'angle entre la première et la seconde direction de chargement.
 $\varphi_0 = 0^\circ$ ou $90^\circ \rightarrow \beta = 0$ (trajets orthogonaux) et $\varphi_0 = \pm 45^\circ \rightarrow \beta = \pm 0,6$. D'après Genevois (1992).

Sur l'essai orthogonal de la Figure 1.23, étudié par Hoc et Rey (2000) et Hoc et al. (2001), le comportement rhéologique est globalement similaire à ce qui est observé sur l'essai orthogonal de Teodosiu et Hu (1995, 1998) (traction uniaxiale, suivie d'un cisaillement). Néanmoins, quelques différences sont à signaler. Pour l'essai orthogonal de Hoc et Rey, lors du second trajet, la contrainte d'écoulement mesurée est de l'ordre de trois fois celle de la traction uniaxiale suivant la direction transverse. De plus, elle dépend du niveau de pré-déformation. Les courbes présentent des maxima de la contrainte d'écoulement, suivies d'un adoucissement et puis d'un plateau, tel que montré sur la Figure 1.23. Les pics de la contrainte correspondent à la formation de la première macrobande de localisation. Tel que montré sur la Figure 1.24, le niveau de pré-déformation a une influence sur le nombre de macrobandes qui se développent simultanément.

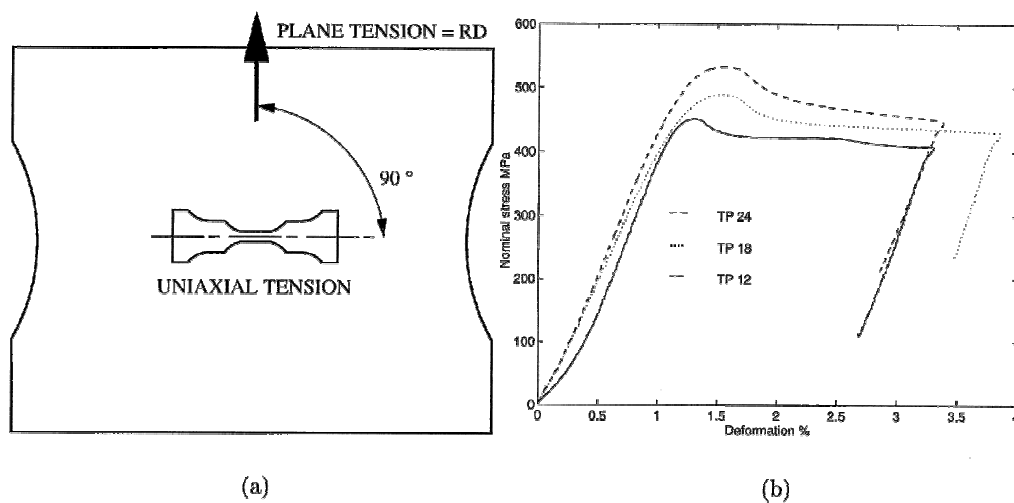


Figure 1.23. Courbes rhéologiques obtenues pour l'essai orthogonal composé d'une traction uniaxiale après trois niveaux de pré-déformation en traction plane. D'après Hoc et Rey (2000).

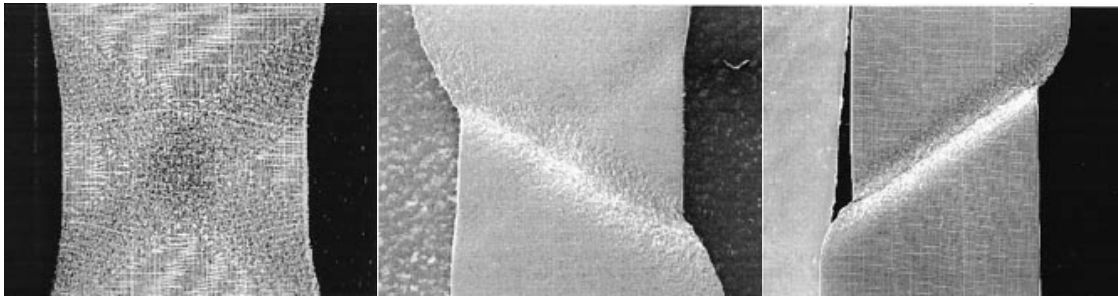


Figure 1.24. Formation de macro-bandes de localisation lors de la traction uniaxiale après trois niveaux de pré-déformation en traction plane (essai orthogonal). D'après Hoc et Rey (2000).

1.4 Formabilité des tôles métalliques

La caractérisation de la formabilité des tôles métalliques a fait l'objet de nombreuses études depuis plusieurs décennies maintenant (Marciniak et Kuczynski, 1967 ; Goodwin, 1968 ; Keeler, 1968 ; Nakazima et Kikuma, 1971 ; Hecker, 1972 ; Marciniak et al., 1973). Pour caractériser cette formabilité, Keeler (1965) a introduit la notion de courbe limite de formage (CLF). Cet auteur a constaté que l'allongement local maximal (ou déformation maximale) à lui seul n'est pas suffisant pour déterminer le taux d'allongement possible d'une tôle. En reportant sur les deux axes d'un même diagramme les valeurs de déformation principales à rupture dans le plan de la tôle, il constata que tous les points se situaient sur une même courbe, appelée courbe limite de formage. Cette courbe initialement limitée au quadrant défini par une déformation principale mineure positive a été complétée par Goodwin (1968) en considérant les cas où la déformation principale mineure est négative. La Figure 1.25 montre ces CLF.

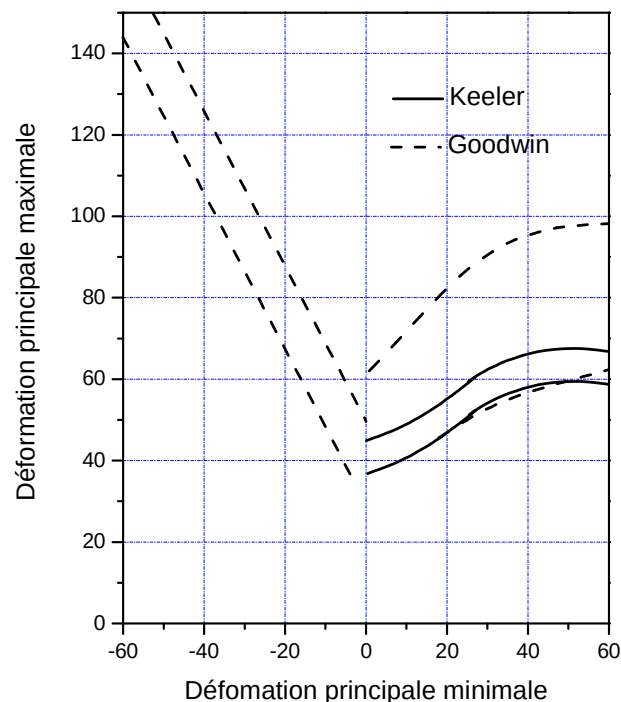


Figure 1.25. Courbes limites de formage de Keeler et Goodwin. D'après Keeler (1965) et Goodwin (1968).

Depuis ces premiers travaux, plusieurs études ont été menées, jusqu'à nos jours, au niveau expérimental et théorique, dans le but d'obtenir des CLF représentatives de la formabilité des tôles métalliques pour des trajets de déformation complexes (Gosh et Laukonis, 1976 ; Hutchinson et Neale, 1978 ; Cordebois et Ladevèze, 1982 ; Cordebois, 1983 ; Needleman et Tvergaard, 1983 ; Brunet et al., 1985 ; Arrieux et al., 1985 ; Arrieux, 1990 ; Haddad, 1997 ; Hiwatashi et al., 1998 ; Kuroda et Tvergaard, 2000 ; Stoughton, 2001 ; Chow et al., 2002 ; Butuc, 2004).

1.4.1 Application des CLF

Ce diagramme s'est révélé très pratique dans le domaine industriel, car il définit deux zones :

- celle située au-dessus de la CLF et qui correspond à la rupture de la pièce,
- et celle située en-dessous de la CLF et qui correspond à la réussite de la pièce.

Ces CLF sont initialement définies dans l'espace des déformations (Keeler, 1968), mais peuvent être tracées dans l'espace des contraintes principales (par exemple, Arrieux, 1990 ; Haddad, 1997 ; Stoughton, 2001 etc.).

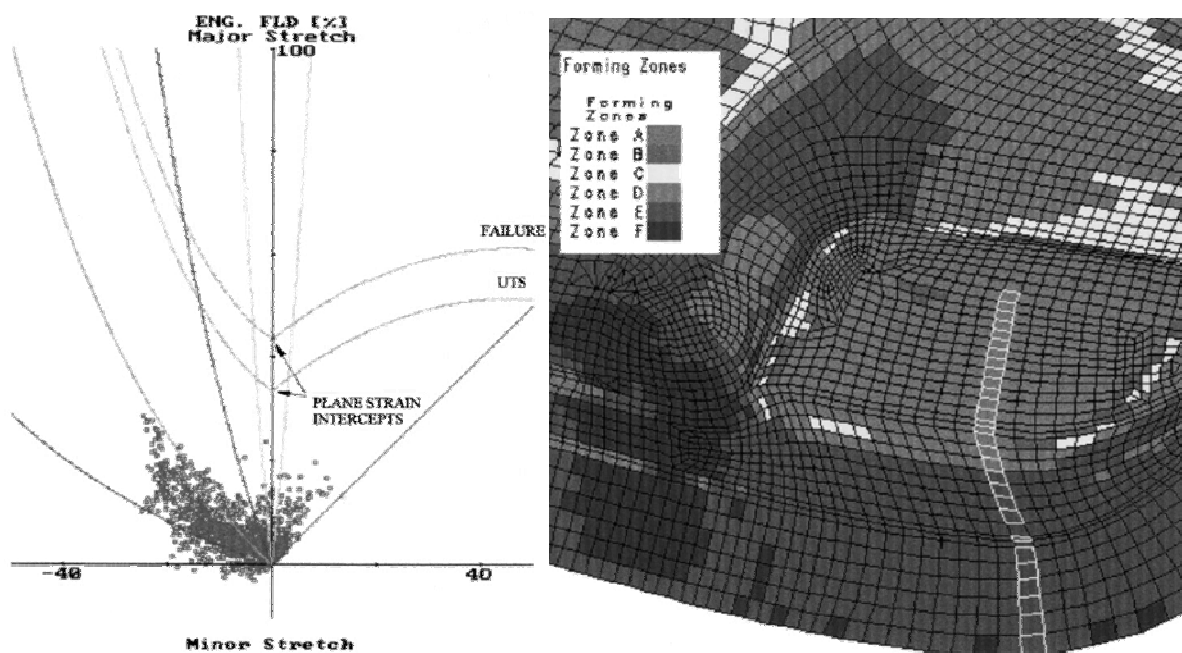


Figure 1.26. Utilisation des CLF dans le cadre d'une simulation par éléments finis. Le nuage de points représente l'état de déformations dans une zone de la pièce, généralement là où les déformations se localisent. D'après Rees et Power (1998).

En termes d'applications, d'une manière générale les CLF peuvent remplir deux fonctions différentes :

- d'une part, elles permettent de comparer la formabilité des tôles métalliques, soit entre des tôles de même matériau et ayant des épaisseurs différentes, soit entre des tôles à épaisseurs identiques et constituées de matériaux différents.

- d'autre part, elles peuvent être utilisées dans le cadre d'un calcul de structures par éléments finis. En reportant l'état de déformation prédit à la fin de la simulation sur le diagramme de la CLF, cette dernière permet d'indiquer la position des points calculés (déformations ou contraintes principales dans le plan de la tôle). Si tous les points se trouvent en dessous de la CLF la pièce peut être réalisée avec succès. La Figure 1.26 montre un exemple d'utilisation de la CLF lors d'une simulation par éléments finis. Bien que critiquable, cette utilisation est très répandue dans les milieux industriels.

Cependant, la définition de la limite de formabilité n'est pas unique. On définit généralement deux principales limites :

- la limite de formage à rupture et qui correspond au moment d'apparition d'une fissure macroscopique. La courbe obtenue constitue la limite supérieure admissible.
- la limite de formage à striction. Plusieurs courbes peuvent être définies, du fait que la striction apparaît avant la rupture et son appréciation n'est pas tout à fait objective (plusieurs états de déformation peuvent être qualifiés de striction). Néanmoins, la striction localisée, qui correspond au début de l'apparition d'une bande où les déformations se concentrent, est celle prise comme critère pour définir une CLF. On parle alors de CLF à striction localisée.

La Figure 1.27 montre l'écart entre les deux types de CLF. Cet écart dépend notamment du matériau. En effet, un matériau ayant une bonne ductilité présentera un écart important entre les deux CLF. De plus, pour un matériau donné, l'épaisseur de la tôle a une influence sur cet écart ; une tôle de faible épaisseur est beaucoup plus sujette à une rupture prématurée après l'apparition d'une striction localisée.

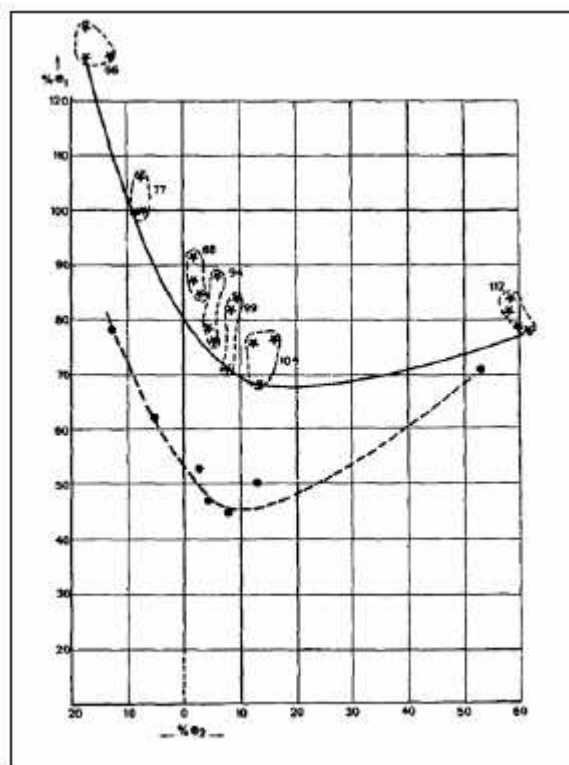


Figure 1.27. Courbes limites de formage à rupture et à striction localisée. D'après Veerman (1972).

Ce sont les CLF à striction localisée qui sont généralement retenues dans la pratique pour deux principales raisons :

- Ces courbes se situent en-dessous de la CLF à rupture et sont donc beaucoup plus conservatives. Elles permettent de s'assurer de la bonne résistance mécanique en service des pièces, en évitant d'avoir de faibles épaisseurs localement sur la pièce finale.
- Egalement, pour des raisons esthétiques, en particulier dans le domaine de la carrosserie automobile, de tels défauts peuvent constituer une raison de rejet de certaines pièces. L'utilisation donc d'une CLF à striction localisée permet de s'assurer de la quasi-homogénéité de l'épaisseur de la tôle à la fin de l'opération de mise en forme.

1.4.2 CLF expérimentales

La détermination expérimentale des CLF consiste à réaliser un ensemble d'essais rhéologiques jusqu'à striction localisée ou rupture et mesurer les deux déformations principales correspondantes dans le plan de la tôle. Les principaux chargements utilisés sont la traction uniaxiale, la traction plane et l'expansion équibiaxiale. Tous les points de la CLF se situent entre les points extrêmes obtenus par les essais de traction uniaxiale et de l'expansion équibiaxiale. Selon le trajet de chargement, deux types de CLF peuvent être définies :

- les CLF directes, obtenues à partir d'essais monotones. Ces courbes servent notamment à classer les tôles métalliques (matériaux différents) selon leur ductilité.
- les CLF indirectes, obtenues à partir d'essais séquentiels. Leur utilité peut s'avérer d'une grande importance, car lors de la mise en forme de géométries complexes la formabilité de la tôle peut être affectée considérablement par les changements du trajet de déformation. L'utilisation d'une CLF directe n'est alors pas suffisante.

D'une manière générale, les CLF ne sont pas intrinsèques, mais dépendent du trajet de déformation. Autrement dit, nous pouvons obtenir des CLF différentes pour des pré-déformations différentes. La Figure 1.28, par exemple, montre des CLF à trajets séquentiels, obtenues après des pré-déformations en expansion. L'effet de la pré-déformation en expansion est caractérisé par une translation de la CLF vers la droite et vers le bas.

La Figure 1.29 montre des CLF à trajets séquentiels, obtenues après des pré-déformations en traction uniaxiale. L'effet de la pré-déformation en traction est caractérisé par une translation de la CLF vers la gauche et vers le haut. La formabilité de la tôle se trouve nettement améliorée sur les trajets en expansion.

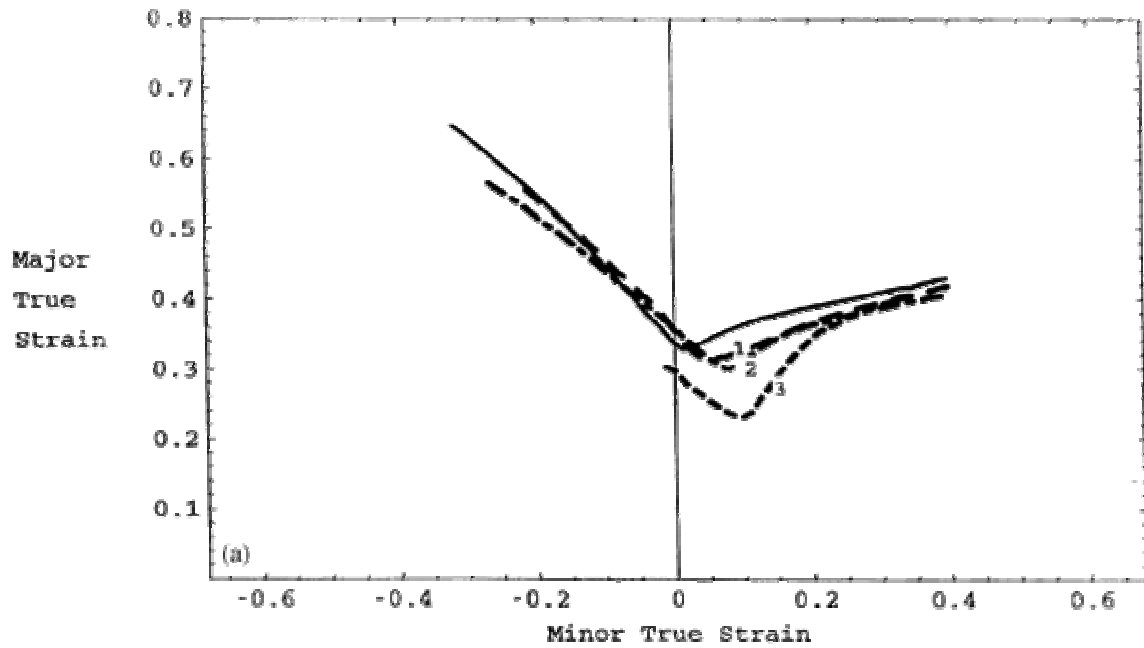


Figure 1.28. CLF obtenues pour différentes pré-déformations en expansion équi-biaxiale d'un acier doux. D'après Stoughton (2000).

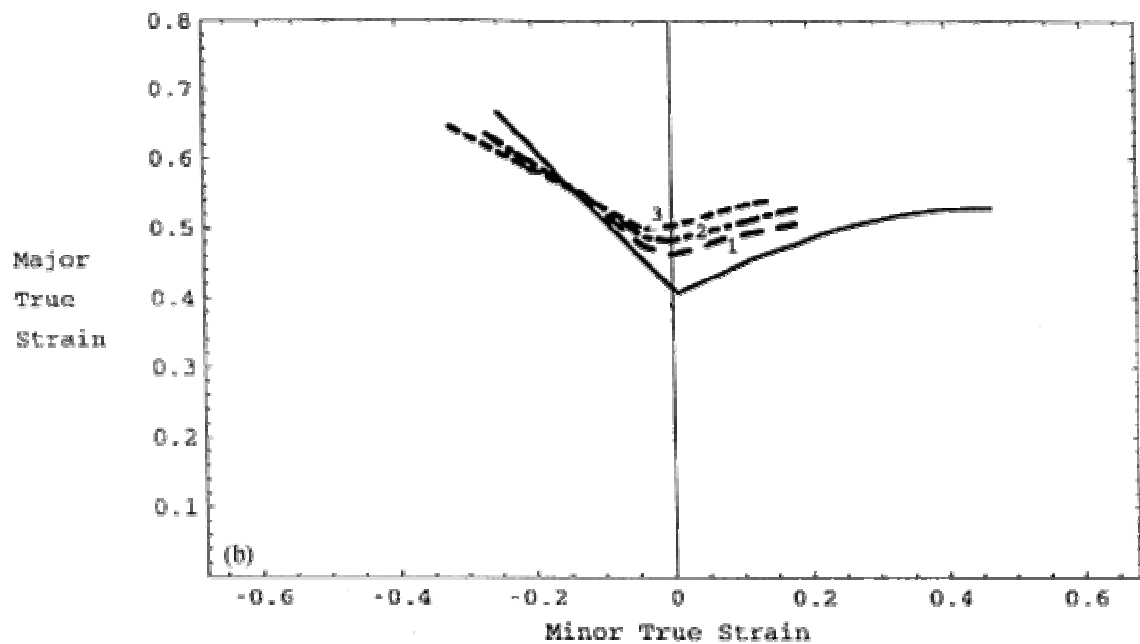


Figure 1.29. CLF obtenues pour différentes pré-déformations en traction uniaxiale selon la direction transverse (TD) d'un acier doux. D'après Stoughton (2000).

1.5 Conclusion

Nous avons donné un aperçu général des principaux défauts rencontrés en mise en forme des tôles métalliques. Pour pouvoir modéliser et prédire les différents phénomènes mis en jeu, les observations et les essais constituent la première étape dans le processus de description du comportement des tôles métalliques.

Comme on peut le déduire du §1.2, les essais rhéologiques à trajets directs ne suffisent pas à eux seuls à caractériser le comportement réel d'un matériau qui subit des grandes déformations. Il est nécessaire d'inclure des essais complexes afin de reproduire au mieux les différents phénomènes de transition observés lors de changement de trajets de déformation. De plus, les observations de la microstructure s'avèrent très utiles dans la mise en évidence des mécanismes élémentaires mis en jeu, notamment les mécanismes prédominants qui ne doivent pas être négligés, tel que la formation de structures planaires de dislocation. Une modélisation fiable doit tenir compte de tous ces aspects.

Pour caractériser la formabilité des tôles métalliques, plusieurs essais rhéologiques sont nécessaires. De plus, la prise en compte des changements de trajets de déformation implique des essais supplémentaires qui sont souvent difficiles à mettre en œuvre. Ceci rend également la démarche expérimentale très coûteuse. Ainsi, la modélisation du comportement avec la prise en compte des phénomènes de changement de trajets de déformation et de l'endommagement du matériau constitue un moyen rapide et économique pour décrire l'évolution de l'état mécanique d'une pièce au cours de l'opération de mise en forme. L'utilisation de critères limite de ductilité dans les simulations des différents trajets de déformation, conjointement à un modèle de comportement performant, constitue un moyen efficace et rapide pour obtenir des CLF.

Dans ce sens, le prochain chapitre sera consacré à la description du comportement élasto-plastique avec la prise en compte des différentes anisotropies de plasticité. On s'intéressera particulièrement à la modélisation de l'anisotropie induite par l'écrouissage, où la formation des structures de dislocations sera prise en compte. L'endommagement sera également considéré, afin de traduire la chute de la contrainte d'écoulement plastique. Enfin, un critère de prédiction de la limite de ductilité sera introduit.

Chapitre 2

Modélisation du comportement

2.1	Introduction	31
2.2	Description du comportement élasto-plastique	32
2.2.1	Cinématique des grandes déformations.....	32
2.2.2	Formulation des lois de comportement en repère tournant.....	33
2.2.3	Equations du modèle élasto-plastique	35
2.2.4	Condition de cohérence	36
2.2.5	Module tangent analytique	37
2.3	Modélisation de l'anisotropie plastique initiale.....	38
2.3.1	Critères de plasticité	38
2.3.2	Critère retenu	39
2.4	Modélisation de l'écrouissage.....	39
2.4.1	Lois d'écrouissage isotrope	41
2.4.2	Lois d'écrouissage cinématique	42
2.4.3	Modèle d'écrouissage cyclique de Chaboche-Marquis.....	43
2.4.4	Modèle d'écrouissage microstructural de Teodosiu-Hu	43
2.4.5	Synthèse	50
2.5	Couplage élasto-plasticité/endommagement.....	50
2.5.1	Approche de Lemaitre	51
2.5.2	Formulation du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement.....	54
2.5.3	Synthèse	63
2.6	Modélisation de la localisation	63
2.6.1	La localisation des déformations dans les tôles	64
2.6.2	Formulation du critère de Rice.....	65
2.6.3	Détermination du module tangent pour la localisation	68
2.7	Conclusion.....	72

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à la modélisation des différents phénomènes mis en jeu lors de la mise en forme des tôles métalliques, tels que décrits au chapitre 1. Les effets liés au changement de trajets de déformation et à l'endommagement du matériau en grandes déformations seront les principaux phénomènes à modéliser. Pour cela, nous allons suivre une démarche phénoménologique de modélisation, permettant de tenir compte de ces principaux phénomènes, mais présentant une certaine richesse physique. Cette modélisation sera réalisée dans l'esprit de pouvoir l'implanter par la suite dans des codes de calculs par la méthode des éléments finis. Ceci permettra de réaliser des calculs de structures, tel que la simulation du procédé d'emboutissage, tout en prédisant avec fiabilité un maximum de phénomènes.

Pour la modélisation du comportement plastique, deux aspects de l'anisotropie seront pris en compte : l'anisotropie initiale, due à la texture initiale des tôles métalliques (obtenues généralement par laminage) et l'anisotropie induite par écrouissage, due principalement au développement de structures de dislocations dans le matériau. Ceci peut se faire en introduisant des variables internes représentatives des mécanismes élémentaires de l'écrouissage. Le choix judicieux de ces variables aura une influence directe sur le comportement local (contrainte-déformation) du VER et ainsi sur le comportement global de la structure mise en forme, tel que la distorsion par retour élastique. Des modèles avancés d'écrouissage seront introduits afin de représenter ce type d'anisotropie induite.

L'endommagement des tôles métalliques en mise en forme accompagne les grandes déformations que subit le matériau. La description des mécanismes d'endommagement à l'échelle microscopique est peu envisagée, du fait de la complexité de ces phénomènes. Pour décrire l'endommagement du matériau, nous allons adopter une approche phénoménologique de modélisation. Dans la littérature on retrouve principalement deux approches : l'approche de Gurson (1977) basée sur la description de la fraction volumique des microcavités qui représentent l'endommagement du matériau et l'approche de Lemaitre (1985) qui consiste à introduire une variable interne représentant une densité surfacique d'endommagement. Nous allons suivre cette dernière approche pour réaliser un couplage du modèle élasto-plastique à écrouissage avancé avec le modèle d'endommagement de Lemaitre.

Pour pouvoir prédire la striction localisée pour différents trajets de chargement, nous allons introduire un critère de localisation de la déformation par bandes de cisaillement initialement développé par Rice (1976). Ce critère, basé sur la théorie de bifurcation, sera formulé et adapté à notre modèle élasto-plastique écrit dans le cadre des grandes déformations et ceci dans les deux cas : avec et sans couplage à l'endommagement. La modélisation ainsi définie permettra de prédire le moment d'apparition des premières bandes de localisation, ainsi que l'orientation de ces bandes par rapport à la direction du chargement. Ce critère sera principalement utilisé avec le modèle couplant élasto-plasticité et endommagement. Il peut être appliqué au tracé des courbes limites de formage à localisation, ainsi qu'à la prédiction de la localisation dans des structures en mise en forme.

La modélisation de l'ensemble de ces phénomènes sera abordée dans ce chapitre dans l'ordre suivant :

1. Un rappel sur la théorie des grandes déformations sera donné permettant de définir un cadre pour l'écriture des relations incrémentales de comportement. La notion d'objectivité des lois de comportement sera aussi rappelée.

2. Une modélisation du comportement élasto-plastique indépendant du temps physique sera introduite. Deux aspects de l'anisotropie plastique seront pris en compte : l'anisotropie initiale et l'anisotropie induite par écrouissage.
3. Un couplage du modèle élasto-plastique précédemment défini sera réalisé avec le modèle d'endommagement de Lemaitre.
4. Un développement du critère de localisation de Rice sera effectué dans le cadre des grandes déformations et du comportement élasto-plastique couplé à l'endommagement.

2.2 Description du comportement élasto-plastique

Les tôles subissent des déformations importantes en mise en forme et les lois de comportement ainsi définies sont généralement écrites en vitesse. Afin de respecter le principe d'objectivité (indépendance de la loi de comportement par rapport au référentiel d'observation), l'utilisation de dérivées dites objectives s'impose, aussi bien pour la contrainte que pour toutes les variables internes tensorielles. Une formulation alternative consiste à écrire les lois de comportement dans un repère tournant, qui permet de prendre en compte différemment le mouvement rigidifiant. Dans un tel repère, les équations du modèle de comportement correspondent formellement à une écriture en petites déformations (Sidoroff, 1982).

Nous suivrons cette démarche pour introduire différentes lois de comportement. Nous commençons d'abord par un rappel sur la théorie des grandes déformations qui définit ce cadre général d'écriture des lois de comportement en transformations finies. Cette théorie, largement utilisée, offre un cadre simplifié pour l'implantation des modèles de comportement dans les codes de calcul par éléments finis.

2.2.1 Cinématique des grandes déformations

La cinématique des grandes déformations est basée sur la décomposition multiplicative du gradient de transformation $\mathbf{F}$ en une partie élastique $\mathbf{F}^e$ et une partie plastique $\mathbf{F}^p$, c-à-d.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (2.1)$$

Cette décomposition multiplicative introduit la notion de configuration intermédiaire relâchée. La différentiation de (2.1) nous permet de définir le tenseur gradient de vitesse $\mathbf{L}$ par

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot (\mathbf{F}^e)^{-1} + \mathbf{F}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot (\mathbf{F}^p)^{-1} \cdot (\mathbf{F}^e)^{-1} \quad (2.2)$$

Pour les matériaux métalliques mis en forme à froid, la partie élastique de $\mathbf{F}$ fait intervenir des déformations élastiques très faibles par rapport à l'unité, mais éventuellement de grandes rotations. Cette hypothèse simplificatrice revient à admettre que les configurations actuelle et relâchée élastiquement sont très voisines (sauf rotations). Ainsi, en utilisant la décomposition polaire de $\mathbf{F}^e$, on peut écrire

$$\mathbf{F}^e \equiv (\mathbf{1} + \mathbf{e}) \cdot \mathbf{R} \quad (2.3)$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur identité du second ordre, $\mathbf{e}$ est le tenseur symétrique des déformations élastiques ($|\mathbf{e}| \ll 1$) et $\mathbf{R}$ est le tenseur de rotation élastique ayant les propriétés suivantes :

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{1} \quad (2.4)$$

En introduisant (2.3) dans (2.2) et en négligeant les termes du second ordre en $|\mathbf{e}|$, on obtient

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \overset{\circ}{\mathbf{e}} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot (\mathbf{F}^p)^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \quad (2.5)$$

où

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T - \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{e} \quad (2.6)$$

est la dérivée temporelle objective de $\mathbf{e}$ calculée avec le spin $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$ associé à la rotation élastique $\mathbf{R}$.

Les parties symétrique et antisymétrique de $\mathbf{L}$ définissent, respectivement, le tenseur taux de déformation $\mathbf{D}$ et le tenseur taux de rotation (spin) $\mathbf{W}$ par

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.7)$$

En utilisant l'expression (2.5) de $\mathbf{L}$, on obtient $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$ sous la forme

$$\mathbf{D} = \overset{\circ}{\mathbf{e}} + \mathbf{D}^p \quad \mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{W}^p \quad (2.8)$$

où $\mathbf{D}^p$ et $\mathbf{W}^p$ sont le tenseur taux de déformation plastique et le spin plastique, respectivement, donnés par

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{D}}^p \cdot \mathbf{R}^T \quad \mathbf{W}^p = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{W}}^p \cdot \mathbf{R}^T \quad (2.9)$$

où $\hat{\mathbf{D}}^p$ et $\hat{\mathbf{W}}^p$ sont, respectivement, la partie symétrique et antisymétrique de $\dot{\mathbf{F}}^p \cdot (\mathbf{F}^p)^{-1}$.

2.2.2 Formulation des lois de comportement en repère tournant

L'objectivité des lois de comportement nécessite une formulation dans un référentiel adéquat. L'idée de base de cette approche est d'utiliser un référentiel tournant dans lequel les taux des variables se réduisent à de simples dérivées temporelles. Autrement dit, le comportement du matériau dans ce référentiel n'est pas affecté par un mouvement de corps rigide du point matériel considéré. Ce repère local sera défini par un certain tenseur de rotation $\mathfrak{R}$ en chaque instant et en chaque point matériel. Ce tenseur $\mathfrak{R}$ est généré à partir d'un spin anti-symétrique Ω en utilisant la relation $\dot{\mathfrak{R}} \cdot \mathfrak{R}^T = \Omega$.

Si l'on désigne par $\mathbf{A}$ et $\mathbf{S}$ deux tenseurs d'ordres deux et quatre, respectivement, leur écriture dans le repère tourné par $\mathfrak{R}$ est définie par

$$\hat{A}_{ij} = \mathfrak{R}_{ki} \mathfrak{R}_{lj} A_{kl} \quad \hat{S}_{ijkl} = \mathfrak{R}_{pi} \mathfrak{R}_{qj} \mathfrak{R}_{rk} \mathfrak{R}_{sl} S_{pqrs} \quad (2.10)$$

L'intérêt principal de cette approche est qu'une dérivée objective définie, comme par exemple dans (2.6), sous la forme

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A} \quad (2.11)$$

est reliée simplement à la dérivée matérielle de la quantité tournée par des relations similaires aux équations (2.10), c-à-d.

$$\hat{\dot{A}}_{ij} = \mathfrak{R}_{ki} \mathfrak{R}_{lj} \overset{\circ}{A}_{kl} \quad \hat{\dot{S}}_{ijkl} = \mathfrak{R}_{pi} \mathfrak{R}_{qj} \mathfrak{R}_{rk} \mathfrak{R}_{sl} \overset{\circ}{S}_{pqrs} \quad (2.12)$$

La question qui se pose réside dans le choix de la rotation $\mathfrak{R}$ définissant le passage vers ce repère tournant. Compte tenu de la non unicité de la décomposition multiplicative (2.1) de $\mathbf{F}$, le choix de $\mathfrak{R}$ n'est pas unique. Ainsi, divers choix sont proposés dans la littérature et qui reposent sur des justifications plus ou moins physiques. A l'échelle du grain (monocristal) cette "ambiguïté" peut être levée. Certaines directions privilégiées liées au réseau cristallin peuvent définir un repère local dans lequel une description des mécanismes de déformation est possible, c-à-d. formulation d'une loi de comportement dans ce repère local. Ce choix de repère tournant à partir de directions privilégiées est bien adapté à certains matériaux composites également (par exemple, les composites à fibres longues). Pour les matériaux polycristallins, dont font partie les aciers considérés dans notre étude, Mandel (1982) a introduit la notion de repères directeurs et a proposé un calcul de la rotation du repère tournant en moyennant les rotations des réseaux cristallins de l'ensemble des grains constituant le VER. Cette démarche entre dans le cadre des méthodes d'homogénéisation par transition d'échelle micro-macro.

Dans le cas où la modélisation du comportement est purement phénoménologique et où des directions privilégiées sont difficilement identifiables, voire impossibles, la loi d'évolution de $\mathfrak{R}$ est donnée par une démarche purement phénoménologique. Par exemple, en considérant $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W}$ dans (2.11), on retrouve la dérivée de Jaumann. Par contre, si l'on prend $\mathfrak{R} = \mathbf{R}$, on retrouve la dérivée de Green-Naghdi, appelée également dérivée en rotation propre. Ces deux dérivées objectives sont les plus couramment utilisées dans les codes de calcul par éléments finis prenant en compte les grandes déformations. Plusieurs chercheurs ont proposé d'affiner ces choix en proposant une évolution phénoménologique du spin plastique $\mathbf{W}^p$ (par exemple Mandel, 1982).

L'usage d'un référentiel tournant adéquat, c-à-d. assurant l'objectivité, permet ainsi de découpler le problème des non-linéarités géométriques (grandes déformations) de celui des non-linéarités matérielles (nature des lois de comportement). Une fois que le choix de la cinématique de rotation est fait, on peut formuler les lois de comportement comme en petites déformations, en utilisant les variables tensorielles tournées et où les taux de ces variables apparaissent comme de simples dérivées temporelles. Une conséquence directe est que la résolution de ces modèles de comportement peut être complètement découplée de la résolution du problème des non-linéarités géométriques en chaque étape de chargement. Ceci

simplifie considérablement l'implantation de ces modèles dans des codes de calcul par éléments finis.

Notons que la transformation donnée par (2.10) préserve les normes, c-à-d. $|\mathbf{A}| = |\hat{\mathbf{A}}|$ et $|\mathbf{S}| = |\hat{\mathbf{S}}|$. Dans ce qui suit nous nous plaçons dans le repère tournant associé à la dérivée de Jaumann. Toutes les variables tensorielles considérées seront écrites implicitement dans ce repère. De même, pour simplifier l'écriture, l'indice chapeau (^) indiquant ces quantités tournées est omis dans toute la suite du mémoire, sauf mention contraire.

2.2.3 Equations du modèle élasto-plastique

La modélisation du comportement adoptée dans ce travail est basée sur une approche purement phénoménologique. Pour que le modèle, ainsi construit, soit assez représentatif de la réalité physique, nous introduisons un ensemble de variables représentatives de l'état interne du matériau.

Les modèles phénoménologiques sont souvent écrits dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Cette approche offre un cadre général d'écriture d'une large classe de lois de comportement tout en vérifiant certains principes de la thermodynamique. Nous donnons ici directement les équations locales sans réécrire tout ce formalisme. En effet, seules ces équations seront nécessaires lors de l'implantation du modèle ainsi défini.

Nous nous intéressons dans un premier temps à la modélisation de l'élasto-plasticité indépendante du temps physique. D'une manière assez générale, un tel modèle de comportement est composé principalement des quatre types de lois suivantes :

1. Une loi d'élasticité définissant une relation entre les contraintes et les déformations réversibles.
2. Une règle d'écoulement plastique définissant l'évolution des déformations irréversibles.
3. Un critère de plasticité délimitant le domaine d'élasticité.
4. Un ensemble de lois d'évolution des variables internes définissant les phénomènes mis en jeu lors de la déformation plastique, tel que l'écrouissage.

C'est sur cette structure que nous nous appuyons pour introduire l'ensemble des équations du modèle élasto-plastique. Nous verrons par la suite, au § 2.5, comment tenir compte du phénomène d'endommagement.

L'évolution de la contrainte de Cauchy est donnée par la loi hypo-élastique suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}^e = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (2.13)$$

où $\mathbf{C}$ est le tenseur du quatrième ordre des modules d'élasticité.

L'évolution du tenseur de déformation plastique est donnée par la loi d'écoulement associée suivante :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{V} \quad (2.14)$$

où $\mathbf{V}$ est la direction d'écoulement plastique, normale à la surface de charge, définie par le potentiel F et $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique à déterminer par le critère de charge-décharge.

Le critère de plasticité peut s'exprimer sous la forme de Kuhn-Tucker suivante :

$$F = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) - Y \leq 0 \quad (2.15)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.16)$$

$$F \dot{\lambda} = 0 \quad (2.17)$$

où $\bar{\sigma}$ est la contrainte équivalente, fonction de la contrainte déviatorique $\boldsymbol{\sigma}'$ et de la contrainte de rappel $\mathbf{X}$ définissant la translation de la surface de charge dans l'espace des contraintes déviatoriques (centre du domaine élastique). Enfin, Y représente la taille de la surface de charge, liée à l'écrouissage isotrope du matériau.

L'évolution des variables internes est régie par des lois sous forme algébrique ou différentielle. Nous considérons la forme suivante pour l'évolution de toutes les variables internes $\mathbf{y}$:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}_y \dot{\lambda} \quad (2.18)$$

A noter que cette dernière écriture inclut aussi les équations algébriques, car celles-ci peuvent être mises sous cette forme par différentiation ; nous en donnerons un exemple au § 2.4.1.

2.2.4 Condition de cohérence

Pour déterminer l'expression du multiplicateur plastique, dans le cas d'un chargement élasto-plastique, on applique la condition de cohérence $\dot{F} = 0$. Cela revient à écrire

$$\dot{\bar{\sigma}} - \dot{Y} = 0 \quad (2.19)$$

où le taux de la contrainte équivalente peut être développé comme suit :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X})} : (\dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{V} : (\dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \dot{\mathbf{X}}) \quad (2.20)$$

Le taux de la contrainte déviatorique peut être déduit de la loi hypo-élastique par

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{C} : (\mathbf{D}' - \mathbf{V} \dot{\lambda}) \quad (2.21)$$

Nous considérons également, qu'à partir de (2.18) les taux de l'écrouissage isotrope et cinématique peuvent s'exprimer, respectivement, sous la forme

$$\dot{Y} = H_Y \dot{\lambda} \quad (2.22)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda} \quad (2.23)$$

En remplaçant (2.21) à (2.23) dans (2.20) et par la suite dans la condition de cohérence (2.19), on obtient

$$\mathbf{V} : [\mathbf{C} : (\mathbf{D}' - \mathbf{V} \dot{\lambda}) - \mathbf{H}_X \dot{\lambda}] = H_Y \dot{\lambda} \quad (2.24)$$

Le multiplicateur plastique est ainsi déduit de cette dernière expression par

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{V} : \mathbf{C} : \mathbf{D}'}{H_\lambda} = \frac{\mathbf{V} : \mathbf{C} : \mathbf{D}}{H_\lambda} \quad (2.25)$$

où H_λ est un module plastique scalaire, donné par

$$H_\lambda = \mathbf{V} : \mathbf{C} : \mathbf{V} + \mathbf{V} : \mathbf{H}_X + H_Y \quad (2.26)$$

2.2.5 Module tangent analytique

Le module tangent analytique $\mathbf{C}^{Ana}$ relie linéairement le taux de contrainte de Cauchy au taux de déformation totale, c-à-d.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{Ana} : \mathbf{D} \quad (2.27)$$

Nous donnons ici les principales étapes de son calcul. En remplaçant dans la relation (2.13) le taux de déformation plastique par son expression (2.14), on obtient

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{V} \dot{\lambda}) \quad (2.28)$$

En introduisant l'expression du multiplicateur plastique (2.25) dans cette dernière relation, on obtient une relation de la forme (2.27), c-à-d.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}) \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} \right) : \mathbf{D} \quad (2.29)$$

où l'expression du module tangent analytique est simplement déduite de cette dernière relation par

$$\mathbf{C}^{Ana} = \mathbf{C} - \alpha \left(\frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}) \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} \right) \quad (2.30)$$

où $\alpha = 1$ pour un chargement élasto-plastique et 0 autrement.

Dans le cas où $\mathbf{C}$ est un tenseur isotrope, le module scalaire élasto-plastique et le module tangent analytique sont donnés, respectivement, par

$$H_\lambda = 2G|\mathbf{V}|^2 + \mathbf{V} : \mathbf{H}_x + H_y \quad (2.31)$$

$$\mathbf{C}^{Ana} = \mathbf{C} - \alpha \frac{4G^2 \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}}{H_\lambda} \quad (2.32)$$

où G est le module de cisaillement et $|\mathbf{V}| = \sqrt{V_{ij}V_{ij}}$ désigne la norme du tenseur $\mathbf{V}$.

2.3 Modélisation de l'anisotropie plastique initiale

Comme évoqué au début de ce chapitre, les tôles métalliques sont obtenues généralement par laminage. Elles présentent ainsi une texture particulière, caractérisée par une orientation privilégiée des grains constituant le matériau. Cette texture donne à la tôle un comportement plastique particulier. En effet, le seuil de plasticité en contrainte varie en fonction de la direction de chargement. Cet aspect de l'anisotropie, appelé également anisotropie initiale, est pris en compte à travers un critère de plasticité.

2.3.1 Critères de plasticité

L'anisotropie initiale est considérée à travers le choix de la surface de charge. La forme de cette surface est définie par la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$. Ainsi, pour reproduire l'anisotropie plastique initiale des tôles métalliques plusieurs formulations de surfaces de charge ont été développées. Vu le nombre important de surfaces proposées dans la littérature, nous nous contentons ici de citer les principaux types d'approches envisagées. Nous pouvons les classer en deux catégories :

1. Une formulation dans l'espace des contraintes ; c'est plus récemment la plus largement suivie. On retrouve à titre d'exemple les travaux de Hill (1948, 1979, 1993, 1999 etc.) et de Barlat et al. (1991, 1993 etc.). Le critère quadratique de Hill 48 est l'un des plus couramment utilisés pour la modélisation de l'anisotropie plastique initiale des tôles métalliques. En effet, ce critère offre un compromis entre la simplicité de sa formulation et sa capacité à reproduire des formes d'anisotropie plus ou moins marquées. C'est un critère qui ne nécessite que peu d'essais pour identifier ses paramètres. Egalement, vue sa forme quadratique, la dérivation de ce critère ne pose pas trop de difficultés, ainsi son implantation numérique est relativement "simple".
2. Une formulation dans l'espace des vitesses de déformation, dite également approche "duale", où un potentiel est défini avec le tenseur taux de déformation plastique. Cette approche, moins couramment utilisée que la première, semble donner des résultats assez intéressants quant à la prédiction de fortes anisotropies où des points anguleux sont observés sur les surfaces de charge (Bacroix et al., 2003 ; Barlat et al., 1993 etc.). Cette approche présente l'avantage d'avoir la possibilité de relier les paramètres du potentiel à l'évolution de la texture du matériau au cours de sa

déformation. Ceci permet de générer des formes d'anisotropie beaucoup plus complexes.

2.3.2 Critère retenu

Nous nous intéressons dans notre travail à la première approche où les surfaces de charge sont définies dans l'espace des contraintes. Le choix effectué est de modéliser l'anisotropie plastique initiale par la surface quadratique de Hill 48, définie par

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{M} : \mathbf{T}} \quad (2.33)$$

où $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}$ est la contrainte déviatorique "efficace" et $\mathbf{M}$ est un tenseur d'ordre quatre contenant les six paramètres d'anisotropie de Hill. L'écriture indicielle suivante de ce critère montre ces paramètres qui caractérisent l'anisotropie du matériau :

$$\bar{\sigma}^2 = F(T_{22} - T_{33})^2 + G(T_{33} - T_{11})^2 + H(T_{11} - T_{22})^2 + 2L T_{23}^2 + 2M T_{13}^2 + 2N T_{12}^2 \quad (2.34)$$

Compte tenu de ce critère, la direction d'écoulement plastique $\mathbf{V}$ s'exprime comme suit :

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\mathbf{M} : \mathbf{T}}{\bar{\sigma}} \quad (2.35)$$

La surface de plasticité de von Mises définie par $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{T} : \mathbf{T}}$ peut être retrouvée comme cas particulier, en considérant $F = G = H = \frac{1}{2}$ et $L = M = N = \frac{3}{2}$. La direction d'écoulement plastique est donnée alors simplement par

$$\mathbf{V} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{T}}{\bar{\sigma}} \quad (2.36)$$

2.4 Modélisation de l'écrouissage

La description appropriée du comportement plastique des tôles métalliques en mise en forme repose principalement sur le bon choix d'un certain nombre de variables internes décrivant les mécanismes entrant en jeu lors de la plasticité. L'écrouissage qui accompagne la déformation plastique a été identifié comme étant l'un des principaux phénomènes à l'origine de son développement. Dans ce sens, plusieurs études ont été consacrées à sa modélisation. Une attention particulière a été accordée à la description de l'écrouissage à partir d'observations assez fines de la microstructure du matériau au cours de sa déformation ; et ceci pour différents trajets de chargement. Plusieurs modèles d'écrouissage sont ainsi développés à différentes échelles (microscopique et macroscopique).

Les premiers modèles d'écrouissage développés sont purement phénoménologiques et sont identifiés sur de simples trajets monotones. Les lois d'Holomon, de Voce ou de Swift permettent de décrire un écrouissage isotrope du matériau. Ces lois ont connu un large succès du fait qu'elles n'introduisent que peu de paramètres à identifier. De plus, elles sont facilement intégrables dans les codes de calcul par éléments finis. Ces lois, bien qu'elles

datent maintenant de plusieurs décennies, continuent à être utilisées, notamment, pour réaliser des calculs en mise en forme sur des géométries plus ou moins complexes. Leur avantage est qu'elles sont capables de donner une approximation rapide et une idée générale de l'état final de la pièce.

Cependant, en mise en forme, les changements de trajets de déformation impliquent des mécanismes d'écrouissage beaucoup plus complexes qui influent directement sur l'état local de chaque point matériel de la pièce et ainsi sur l'état global. Un des effets de changement de trajets de déformation les plus connus est l'effet Bauschinger. Bauschinger a observé qu'après avoir déformé du fer en traction, la limite d'élasticité était atteinte en compression pour une valeur inférieure à la limite d'élasticité en traction. Ce phénomène est l'exemple typique de l'anisotropie induite par écrouissage et de nombreux travaux ont été consacrés à sa modélisation jusqu'à nos jours.

En termes de modélisation de cet effet, c-à-d. reproduire la diminution de la contrainte d'écoulement plastique lors d'un trajet inverse de chargement, Prager (1956) et Ziegler (1959) ont proposé une relation linéaire entre la contrainte de rappel $\mathbf{X}$ et le taux de déformation plastique $\mathbf{D}^p$ (écrouissage cinématique linéaire). Armstrong et Frederick (1966) ont proposé une loi d'évolution non linéaire pour $\mathbf{X}$, qui a été successivement améliorée par la suite dans plusieurs travaux, non seulement pour décrire correctement l'effet Bauschinger, mais également d'autres phénomènes, par exemple l'effet rochet en fatigue (progression de la déformation au cours des cycles de chargement). On peut citer quelques travaux sur la modélisation de cet effet : Marquis (1979), Chaboche (1986, 1989), Lemaitre et Chaboche (1985), Ohno et Kachi, (1986), Ohno et Wang (1993), Abdel-Karim et Ohno (2000) et Geng et Wagoner (2002). Plusieurs contraintes de rappels sont introduites dans ces modèles.

Plus spécifiquement en mise en forme des matériaux métalliques, Chun et al. (2002a, 2002b) ont récemment amélioré le modèle cyclique de Chaboche-Marquis, en considérant différentes contraintes de rappel pour un trajet monotone ou inverse. Cette modélisation nécessite l'introduction d'un détecteur de changement de trajet de déformation. Ce qui est recherché n'est pas seulement l'effet Bauschinger, mais aussi avoir un niveau de saturation de la contrainte d'écoulement en trajet inverse différent de celui d'un trajet monotone. Chung et al. (2005) ont proposé une version modifiée du modèle cyclique de Chaboche-Marquis, en considérant certains paramètres de la loi d'évolution de l'écrouissage cinématique comme fonctions de la déformation plastique équivalente. Cette modélisation permet en effet d'améliorer la prédiction des phénomènes de transition observés juste après l'entrée en plasticité en trajet inverse.

Cependant des limites ont été constatées sur tous ces modèles qui sont mal adaptés à la mise en forme impliquant d'autres changements de trajets de déformation. Des essais rhéologiques à deux trajets ont révélé que des phénomènes de transition assez particuliers apparaissent juste au début du second trajet de déformation, et ceci concerne autre que les trajets inverses. D'autres modélisations de l'écrouissage ont été ainsi développées, que ce soit dans le cadre d'une modélisation microscopique (par exemple Langlois, 2000 ; Peeters, 2001) ou purement phénoménologique (Teodosiu et Hu, 1995 et 1998).

En étudiant la microstructure des tôles métalliques en déformations séquentielles, Teodosiu et Hu (1995, 1998) ont proposé un modèle d'écrouissage bien adapté à la mise en forme, reproduisant non seulement l'effet Bauschinger et les zones de transition qui s'en suivent, mais également certains phénomènes de transition observés sur des essais

orthogonaux. Une telle modélisation permet en effet de couvrir une large gamme de trajets séquentiels de déformation.

Nous présentons dans les paragraphes qui suivent quelques lois classiques d'évolution de l'écrouissage isotrope et de l'écrouissage cinématique séparément. Par la suite, nous présentons deux modèles combinant les deux types d'écrouissage, qui seront implantés et utilisés dans les applications. Le premier est le modèle cyclique de Chaboche-Marquis (Marquis, 1979 ; Chaboche, 1986, 1989) à écrouissage isotrope et cinématique non linéaire et saturant, et le deuxième est celui de Teodosiu et Hu (1998), dit modèle d'écrouissage microstructural, basé sur la description des structures de dislocations planaires persistantes.

2.4.1 Lois d'écrouissage isotrope

Diverses lois d'évolution de l'écrouissage isotrope ont été proposées dans la littérature. Ces lois peuvent être identifiées par de simples essais monotones (traction, cisaillement etc.). Nous citons ici, à titre d'exemple, deux lois largement utilisées. Selon le comportement observé sur la courbe monotone contrainte-déformation, l'une ou l'autre est mieux adaptée.

La loi de Voce, donnée par

$$\dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda} \quad (2.37)$$

modélise un écrouissage isotrope non linéaire saturant, et est bien adaptée aux comportements où la contrainte sature au bout d'un certain niveau de déformation. La variable R est la mesure de l'écrouissage isotrope et les paramètres C_R et R_{sat} sont des constantes du matériau caractérisant la vitesse et la valeur de saturation de R , respectivement.

La taille de la surface de charge est donnée par

$$Y = Y_0 + R \quad (2.38)$$

où Y_0 est la limite élastique initiale.

Une loi similaire à (2.37) est donnée sous la forme exponentielle suivante :

$$R = Q_\infty (1 - e^{-b\bar{\varepsilon}^p}) \quad (2.39)$$

où $\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}^p dt$ est la déformation plastique cumulée, alors que Q_∞ et b sont deux paramètres du matériau.

Le taux de déformation plastique cumulée est défini comme la puissance conjuguée de la contrainte équivalente, c-à-d.

$$\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \mathbf{T} : \mathbf{D}^p \quad (2.40)$$

Des équations (2.14), (2.33) et (2.40) on déduit que :

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \quad (2.41)$$

Tenant compte de cette dernière relation, par identification des deux lois (2.37) et (2.39), on retrouve la correspondance suivante entre les différents paramètres :

$$C_R = b \quad R_{sat} = Q_\infty \quad (2.42)$$

A noter que la relation (2.39) est le résultat de l'intégration de la forme différentielle (2.37) sur l'intervalle $[0, t]$, avec la condition initiale $R(0) = 0$.

Une autre loi où l'évolution de la variable R est croissante en fonction de la déformation plastique cumulée (loi non saturante) est celle de Swift qui s'écrit sous la forme

$$Y = k(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n \quad (2.43)$$

où k et n sont des paramètres caractérisant la vitesse d'accroissement de la taille de la surface de charge et ε_0 est un paramètre qui permet de décrire la limite d'élasticité initiale du matériau.

Cette loi est bien adaptée au comportement non saturant de la contrainte ; c'est le cas par exemple de certains aciers à très haute résistance.

Pour rester dans le cadre de la forme générale du modèle élasto-plastique incrémental du § 2.2.3, nous reformulons la loi de Swift sous la forme différentielle. En différentiant cette loi, on obtient

$$\dot{Y} = \dot{R} = nk(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^{n-1} \dot{\lambda} \quad (2.44)$$

avec $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}$. Ce qui nous donne la forme (2.22)

$$\dot{Y} = nk^n \frac{1}{n} Y^{\frac{n-1}{n}} \dot{\lambda} = H_Y \dot{\lambda} \quad (2.45)$$

La loi d'évolution de l'écrouissage isotrope est ainsi déduite par

$$\dot{R} = nk^n \left(Y_0 + R \right)^{\frac{n-1}{n}} \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda} \quad (2.46)$$

2.4.2 Lois d'écrouissage cinématique

Armstrong et Frederick (1966) ont proposé une loi d'évolution non linéaire pour l'écrouissage cinématique, décrit par la contrainte de rappel $\mathbf{X}$. La loi d'évolution est de la forme

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X (X_{sat} \mathbf{n} - \mathbf{X}) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda} \quad (2.47)$$

où C_X et X_{sat} sont deux paramètres caractérisant la vitesse et la valeur de saturation, respectivement, alors que $\mathbf{n} = \mathbf{T} / \bar{\sigma}$ est la direction de saturation. A noter que dans le cas de la surface de von Mises, $\mathbf{n}$ coïncide avec la direction de l'écoulement plastique.

La même loi peut être écrite sous la forme suivante (Chaboche, 1986 ; Abaqus, 2003) :

$$\dot{\mathbf{X}} = C \dot{\lambda} \frac{1}{\bar{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) - \gamma \mathbf{X} \dot{\lambda} \quad (2.48)$$

où C et γ sont deux paramètres du matériau. Par identification des deux lois précédentes, on retrouve la correspondance suivante entre les différents paramètres :

$$C = C_X X_{sat} \quad \gamma = C_X \quad (2.49)$$

Dans le cas particulier où $\gamma = 0$ et $C \neq 0$ et où la surface de charge est de type von Mises, on retrouve la loi d'écrouissage cinématique linéaire de Prager (1956)

$$\dot{\mathbf{X}} = C \dot{\lambda} \frac{1}{\bar{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) = \frac{2}{3} C \mathbf{D}^p \quad (2.50)$$

où les directions d'évolution de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{D}^p$ sont confondues.

2.4.3 Modèle d'écrouissage cyclique de Chaboche-Marquis

Ce modèle fait intervenir les deux types d'écrouissage. C'est donc un modèle à écrouissage mixte construit à partir de l'écrouissage isotrope de Voce et de l'écrouissage cinématique de Armstrong-Frederick, c-à-d.

$$\dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda} \quad (2.51)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X (X_{sat} \mathbf{n} - \mathbf{X}) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda} \quad (2.52)$$

Ce modèle est considéré comme référence dans notre travail, du fait qu'il est largement utilisé dans la littérature pour tenir compte de l'effet Bauschinger. En plus, ce modèle est disponible dans plusieurs codes de calculs par éléments finis. Par exemple, dans le code ABAQUS, il est présenté sous la forme des équations (2.39) et (2.48).

2.4.4 Modèle d'écrouissage microstructural de Teodosiu-Hu

La présentation de ce modèle suit les travaux donnés dans Teodosiu et Hu (1995, 1998). Ce modèle d'écrouissage est capable de reproduire non seulement l'effet Bauschinger, mais aussi d'autres phénomènes de transition observés sur des tests rhéologiques séquentiels. Il est basé sur des considérations physiques, principalement sur la description de l'évolution de ce qui est appelé *structures planaires de dislocations persistantes* (SPDP) et leur contribution à l'écrouissage du matériau. La description appropriée des mécanismes d'évolution de ces

SPDP devrait conduire à la prédiction des phénomènes élémentaires de transition observés sur les courbes contrainte-déformation.

Ce modèle fait intervenir quatre variables internes, notées R , $\mathbf{X}$, $\mathbf{S}$ et $\mathbf{P}$. La variable $\mathbf{S}$ est un tenseur d'ordre quatre, $\mathbf{X}$ et $\mathbf{P}$ sont deux tenseurs d'ordre deux et R est un scalaire. Pour un matériau bien recuit, leurs valeurs initiales sont considérées nulles.

La variable tensorielle $\mathbf{S}$ décrit la résistance directionnelle des structures planaires de dislocations persistantes. Les éléments de ce tenseur ont la dimension d'une contrainte.

La variable tensorielle $\mathbf{P}$ est associée à la polarité des structures de dislocations persistantes, qui est due à l'excès de dislocations de même signe de part et d'autre des parois de dislocations (Kocks et al., 1980). Lorsque la microstructure n'est pas du tout polarisée, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Par contre, lorsque la microstructure est complètement polarisée après un trajet monotone de déformation, alors $\mathbf{P} = \mathbf{N}$ durant la pré-déformation, où $\mathbf{N} = \mathbf{D}^p / |\mathbf{D}^p|$ est la direction normalisée du taux de déformation plastique. La norme de $\mathbf{P}$ varie entre 0 et 1 ($0 \leq |\mathbf{P}| \leq 1$).

Quant à la variable $\mathbf{X}$, elle permet de décrire les changements rapides de la contrainte sous un chargement inverse, par exemple ceux produits par les parois de dislocations.

Deux types de dislocations contribuent à l'écrouissage isotrope où la taille de la surface de charge est considérée comme fonction de R et $\mathbf{S}$:

$$Y = Y_0 + R + f|\mathbf{S}| \quad (2.53)$$

où R et $f|\mathbf{S}|$ décrivent, respectivement, les contributions à l'écrouissage isotrope des dislocations distribuées aléatoirement et des structures de dislocations persistantes, et f est un paramètre du matériau ($0 \leq f \leq 1$).

L'évolution de R est gouvernée par la loi de Voce

$$\dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda} \quad (2.54)$$

Cette loi est bien adaptée pour un comportement où la contrainte d'écoulement est saturante. La loi de Swift peut être éventuellement utilisée dans le cas où la contrainte d'écoulement ne sature pas en trajet monotone.

La loi d'évolution de la variable décrivant la polarité des structures de dislocations persistantes est postulée sous la forme

$$\dot{\mathbf{P}} = C_p (\mathbf{N} - \mathbf{P}) \dot{\lambda} \quad (2.55)$$

où C_p est un paramètre du matériau caractérisant la vitesse de saturation de la polarité des structures de dislocations persistantes vers la direction de l'écoulement plastique $\mathbf{N}$, définie par

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{D}^p}{|\mathbf{D}^p|} \quad (2.56)$$

De ce fait, $|\mathbf{P}|$ tend vers l'unité, quelle que soit la direction du taux de déformation plastique restant inchangée sur un certain niveau de déformation suffisamment élevé par rapport à $1/C_p$.

L'évolution de l'écrouissage cinématique est gouvernée par une loi similaire à celle d'Armstrong-Frederick, c-à-d.

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X \left(X_{sat} \mathbf{n}^* - \mathbf{X} \right) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda} \quad (2.57)$$

où C_X caractérise la vitesse de saturation de $\mathbf{X}$ et X_{sat} la valeur de saturation de $|\mathbf{X}|$. Deux directions de saturation $\mathbf{n}^*$ sont proposées. Dans Teodosiu et Hu (1995), $\mathbf{n}^*$ est considérée comme la direction de l'écoulement plastique, c-à-d.

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{N} \quad (2.58)$$

Par contre dans Teodosiu et Hu (1998), la direction $\mathbf{n}^*$ est supposée de la forme suivante :

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n} = \frac{\mathbf{T}}{\bar{\sigma}} \quad (2.59)$$

Avec cette nouvelle expression, $\mathbf{X}$ devient asymptotiquement coaxial à $\boldsymbol{\sigma}'$. Le choix de cette dernière forme a été justifié par la suite par Bouvier et al. (2003), par le fait que la contrainte de rappel s'oppose par définition à la contrainte de cisaillement appliquée au niveau de chaque système de glissement. Ce qui donne la même tendance au niveau macroscopique (VER).

Si on considère le cas particulier de la surface de von Mises, alors la direction $\mathbf{n}$ devient coaxiale à celle de $\mathbf{N}$ ($\mathbf{n} = (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) / \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{N}$). Par contre, dans le cas anisotrope, les deux directions ne sont pas confondues. A noter qu'au niveau de l'implantation numérique, c'est la dernière expression qui est considérée.

Pour tenir compte de l'effet de l'orientation relative de la direction du taux de déformation actuel par rapport aux structures de dislocations persistantes, X_{sat} n'est plus considéré comme paramètre du matériau mais comme une fonction de la variable $\mathbf{S}$. C'est la différence fondamentale par rapport à la loi de Armstrong-Frederick. Cette dépendance de X_{sat} par rapport à $\mathbf{S}$ est supposée de la forme

$$X_{sat} = X_0 + (1-f) \sqrt{r |\mathbf{S}|^2 + (1-r) S_D^2} \quad (2.60)$$

où X_0 est la valeur initiale de X_{sat} , r est un paramètre du matériau, et

$$S_D = \mathbf{N} : \mathbf{S} : \mathbf{N} \quad (2.61)$$

En introduisant le paramètre $\beta_s = S_D / |\mathbf{S}| \in [0, 1]$, (2.60) peut se réécrire sous la forme

$$X_{sat} = X_0 + (1-f)|\mathbf{S}| \sqrt{r + (1-r)\beta_s^2} \quad (2.62)$$

Lorsque $r > 1$, X_{sat} a une valeur maximale pour $\beta_s = 0$, et une valeur minimale pour $\beta_s = 1$. D'après Teodosiu et Hu (1995), le paramètre β_s est bien adapté à la description de surfaces de charge après pré-déformation, du fait que β_s est la mesure du changement d'orientation du tenseur taux de déformation par rapport aux structures de dislocations persistantes. Ce paramètre est considéré comme une généralisation du paramètre de changement de trajet de déformation proposé par Schmitt et al. (1985) et qui est défini par le facteur β (voir § 1.3.3). Ainsi, β_s peut être considéré comme un indicateur de changement de trajet de déformation. Il évolue entre 0 (trajet orthogonal) et 1 (trajet monotone ou inverse).

Une des caractéristiques des structures de dislocations est leur directionnalité. Ainsi, pour un matériau déformé à partir d'un état initial bien recuit, les parois ou les cellules de dislocations se développent parallèlement aux plans de glissements actifs. D'un autre côté, pour un matériau fortement déformé à froid, qui subit un trajet orthogonal de déformation, le taux de déformation est fortement localisé. Les microbandes sont parallèles aux nouveaux plans de glissements actifs, et entre eux de nouvelles parois de dislocations se forment graduellement. Cette observation expérimentale suggère que les structures de dislocations associées à la direction actuelle du taux de déformation évoluent bien différemment du reste des structures de dislocations persistantes.

Dans le but de décrire de tels processus d'évolution, et en tenant compte de la définition de S_D , la variable $\mathbf{S}$ est décomposée comme

$$\mathbf{S} = S_D \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{S}_L \quad (2.63)$$

où S_D représente la résistance des structures de dislocations associées aux systèmes de glissements actuellement actifs. Par contre, $\mathbf{S}_L$ est associée à la partie latente des structures de dislocations persistantes.

Pour décrire l'évolution de S_D , la loi suivante est proposée

$$\dot{S}_D = C_{SD} \left[g(S_{sat} - S_D) - h S_D \right] \dot{\lambda} = H_{S_D} \dot{\lambda} \quad (2.64)$$

où C_{SD} caractérise la vitesse de saturation de S_D , S_{sat} représente la valeur de saturation de S_D , g est une fonction de S_D et $\mathbf{P} : \mathbf{N}$ qui décrit l'influence de la polarité des structures de dislocations, et h est une fonction de $\mathbf{X} : \mathbf{N}$ et de X_{sat} .

En négligeant l'influence de g et h , c-à-d. prendre $g = 1$ et $h = 0$, l'équation précédente décrit la saturation progressive de S_D vers S_{sat} , correspondant à la formation et à la saturation

des structures planaires de dislocations persistantes associées à la direction $\mathbf{N}$. Pour former des parois ou cellules de dislocations, le niveau de déformation le long d'une direction fixe de $\mathbf{N}$ devrait être supérieur à $1/C_{SD}$.

La fonction h est définie par

$$h = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathbf{X} : \mathbf{N}}{X_{sat} \mathbf{n} : \mathbf{N}} \right) \quad (2.65)$$

et a une valeur non négligeable seulement durant l'étape micro-plastique. En effet, Hu (1994) fait remarquer que la présence de h permet d'évaluer une légère perte ΔS_D de S_D quand $\mathbf{X} : \mathbf{N}$ approche sa valeur de saturation $X_{sat} \mathbf{n} : \mathbf{N}$. Le résultat s'exprime comme

$$\Delta S_D = -\frac{C_{SD}}{C_X} S_D \quad (2.66)$$

Des observations expérimentales ont montré que pour un matériau fortement pré-déformé soumis à un trajet de déformation inverse, il existe une stagnation de l'écrouissage, suivie par une reprise de l'écrouissage. Ce phénomène de transition est décrit par la fonction g . En notant

$$P_D = \mathbf{P} : \mathbf{N} \quad (2.67)$$

la forme suivante est proposée pour g :

$$g = \begin{cases} 1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \left| \frac{S_D}{S_{sat}} - P_D \right| & \text{si } P_D \geq 0 \\ (1 + P_D)^{n_p} \left(1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \frac{S_D}{S_{sat}} \right) & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.68)$$

où n_p est un paramètre du matériau. On peut clairement voir que g est continue par rapport à P_D . De plus, considérant que le matériau est fortement déformé à un taux de déformation constant de direction $\mathbf{N}_1$; alors, selon (2.55), à la fin de cette déformation le tenseur polarité sera pratiquement égal à $\mathbf{N}_1$. Si le matériau est soumis par la suite à une déformation inverse, c-à-d. $\mathbf{N}_2 = -\mathbf{N}_1$, alors, à partir des expressions (2.67) et (2.68), $P_D = -1$ et $g = 0$. En considérant aussi (2.64), on peut voir que la dernière condition correspond à la stagnation de l'écrouissage.

La dernière variable à discuter est S_L qui résulte de l'interaction entre les microbandes et les microstructures préformées. Deux mécanismes physiques sont possibles : l'annihilation des dislocations dans les structures préformées, tel que proposé par Thuillier et Rauch (1994), et l'adoucissement des structures préformées après avoir été cisailées par les microbandes, tel que suggéré implicitement par Bay et al. (1992). Les deux mécanismes réduisent la résistance

des structures préformées, représentées par $|\mathbf{S}_L|$. Ainsi, la loi d'évolution suivante a été proposée pour décrire ces phénomènes :

$$\dot{\mathbf{S}}_L = -C_{SL} \left(\frac{|\mathbf{S}_L|}{S_{sat}} \right)^{n_L} \mathbf{S}_L \dot{\lambda} = \mathbf{H}_{S_L} \dot{\lambda} \quad (2.69)$$

où C_{SL} et n_L sont deux paramètres du matériau caractérisant la vitesse de saturation de $\mathbf{S}_L$.

Le facteur $(|\mathbf{S}_L|/S_{sat})^{n_L}$ est introduit dans le but d'expliquer l'influence du niveau de la pré-déformation ε_{pd} . Selon Rauch et Schmitt (1989), pour des matériaux fortement pré-déformés soumis par la suite à une déformation orthogonale, le pourcentage des grains contenant des microbandes croît avec la pré-déformation ε_{pd} . Puisque la diminution de $|\mathbf{S}_L|$ est principalement due à l'interaction entre les microbandes et les structures préformées, le taux de décroissement de $|\mathbf{S}_L|$ devrait croître avec ε_{pd} . Lorsque ε_{pd} est très petit, $|\mathbf{S}_L| \ll S_{sat}$, alors l'évolution de $\mathbf{S}_L$ est négligeable, par contre lorsque la pré-déformation ε_{pd} est grande, $|\mathbf{S}_L|$ approche S_{sat} , et $\mathbf{S}_L$ évolue rapidement en décroissant.

Pour se conformer à la forme générale définie pour l'évolution de l'écrouissage isotrope, voir § 2.2.3, nous définissons la loi d'évolution de la taille de la surface de charge Y sous la forme $\dot{Y} = H_Y \dot{\lambda}$.

A partir de la relation (2.63), nous pouvons déduire $|\mathbf{S}|$ par

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{S_D^2 + |\mathbf{S}_L|^2} \quad (2.70)$$

Le taux d'évolution de Y sera ainsi donné par

$$\dot{Y} = \dot{R} + f(\dot{\mathbf{S}}) = H_Y \dot{\lambda} \quad (2.71)$$

Le taux d'évolution de $|\mathbf{S}|$ est obtenu après calcul des taux de S_D et $|\mathbf{S}_L|$. Ce qui donne, après quelques développements, la relation suivante :

$$\dot{|\mathbf{S}|} = \frac{1}{|\mathbf{S}|} \left[H_{S_D} S_D - C_{SL} \left(\frac{|\mathbf{S}_L|}{S_{sat}} \right)^{n_L} |\mathbf{S}_L|^2 \right] \dot{\lambda} = H_{|\mathbf{S}|} \dot{\lambda} \quad (2.72)$$

Ainsi, la fonction scalaire H_Y intervenant dans (2.71) est déduite par

$$\begin{aligned}
H_Y &= H_R + f H_{|S|} \\
&= C_R (R_{sat} - R) + f \frac{1}{|S|} \left[C_{SD} [g(S_{sat} - S_D) - h S_D] S_D - C_{SL} \left(\frac{|S_L|}{S_{sat}} \right)^{n_L} |S_L|^2 \right] \quad (2.73)
\end{aligned}$$

Tableau 2.1 : Résumé des équations du modèle élasto-plastique.	
Loi d'élasticité :	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p)$
Règle d'écoulement associée :	$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$
Critère de charge-décharge :	$F = \bar{\boldsymbol{\sigma}}'(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) - Y \leq 0$ $\dot{\lambda} \geq 0$ $F \dot{\lambda} = 0$
Multiplicateur plastique :	$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{V} : \mathbf{C} : \mathbf{D}}{H_\lambda}$
Module tangent analytique :	$\mathbf{C}^{Ana} = \mathbf{C} - \alpha \left(\frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}) \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} \right)$
Anisotropie initiale :	$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{M} : \mathbf{T}} \quad / \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}$
Ecrouissage de Chaboche-Marquis	Ecrouissage de Teodosiu-Hu
$Y = Y_0 + R$ $\dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda}$ $\dot{\mathbf{X}} = C_X \left(X_{sat} \frac{\mathbf{T}}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathbf{X} \right) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda}$	$Y = Y_0 + R + f S $ $\dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda}$ $\dot{\mathbf{X}} = C_X (X_{sat} \mathbf{n}^* - \mathbf{X}) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda}$ $\dot{\mathbf{P}} = C_p (\mathbf{N} - \mathbf{P}) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_p \dot{\lambda}$ $\mathbf{S} = S_D \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{S}_L$ $\dot{S}_D = C_{SD} [g(S_{sat} - S_D) - h S_D] \dot{\lambda} = H_{S_D} \dot{\lambda}$ $\dot{\mathbf{S}}_L = -C_{SL} \left(\frac{ S_L }{S_{sat}} \right)^{n_L} \mathbf{S}_L \dot{\lambda} = \mathbf{H}_{S_L} \dot{\lambda}$ $X_{sat} = X_{sat}(\mathbf{S}), \quad g = g(\mathbf{P}, S_D, \mathbf{N}), \quad h = h(\mathbf{X}, \mathbf{N})$

La loi d'évolution de l'écrouissage cinématique (2.57) est également exprimée sous la forme (2.18), où

$$\mathbf{H}_X = C_X \left(X_{sat} \mathbf{n}^* - \mathbf{X} \right) \quad (2.74)$$

2.4.5 Synthèse

Nous avons adopté un cadre général pour la formulation en grandes déformations du comportement élasto-plastique indépendant du temps physique. Ce formalisme général unifié présente un certain nombre d'avantages et notamment au niveau de l'implantation numérique. En effet, il permet de construire des algorithmes de résolution ayant un certain degré de généralité et avec un caractère modulaire. Ainsi, l'introduction d'autres modèles d'écrouissage ou de nouveaux critères de plasticité en contraintes qui satisfont la forme proposée au § 2.2.3 peut être réalisée sans modifications majeures au niveau de la structure générale de l'algorithme de résolution.

Pour ce qui est des applications que l'on va présenter, nous utiliserons uniquement le critère de plasticité de Hill 48 et les deux modèles à écrouissage mixte. Nous avons accordé une attention particulière au modèle microstructural de Teodosiu-Hu qui est capable de reproduire assez finement les phénomènes de changements de trajets de déformation. Nous avons notamment réussi à montrer que ce modèle peut être formellement écrit sous la forme générale proposée, et qu'il rejoint en ce sens les autres modèles plus classiques en termes de l'écriture unifiée.

Nous dressons dans le Tableau 2.1 un résumé des équations du modèle élasto-plastique contenant les deux types d'écrouissage qui seront utilisés par la suite dans les applications.

Enfin, il est important de noter que la majeure partie des développements, et notamment le calcul du multiplicateur plastique et du module tangent analytique, a été réalisée sans particulariser le modèle d'écrouissage ou la surface de charge. Ce souci pour la généralité sera mis à profit dans le chapitre suivant, consacré à l'implantation numérique.

2.5 Couplage élasto-plasticité/endommagement

L'endommagement qui accompagne les grandes déformations en mise en forme est de type ductile. Pour le modéliser, deux théories sont principalement proposées dans la littérature.

L'approche de Gurson (1977) consiste à modéliser la dégradation du matériau à l'aide d'une variable interne représentant la fraction volumique de microcavités formées au cours de la déformation du matériau. Dans cette approche trois mécanismes liés à l'endommagement sont considérés : la germination des microfissures et cavités, la croissance de ces micro-défauts et enfin leur coalescence jusqu'à rupture du VER. Cette théorie est bien adaptée pour les matériaux poreux.

L'approche développée par Lemaitre (1985), qui a introduit une variable interne liée à la densité surfacique des micro-défauts formés dans le VER. Cette théorie est souvent appelée approche de la mécanique de l'endommagement continu. Elle est fondée sur la thermodynamique des processus irréversibles et est largement appliquée pour les matériaux métalliques.

C'est cette deuxième approche que nous allons suivre afin de construire un modèle couplant l'élasto-plasticité à l'endommagement. Le choix de cette approche est motivé par la simplicité de la formulation du couplage. Avant de construire le modèle couplé, nous allons d'abord rappeler quelques notions de la mécanique de l'endommagement continu, telles que présentées par Lemaitre et Chaboche dans divers travaux, notamment la définition de la variable d'endommagement, de la contrainte effective et du principe d'équivalence en déformations.

2.5.1 Approche de Lemaitre

2.5.1.1 Définition d'une variable d'endommagement

Considérons un VER (Volume Élémentaire Représentatif) et soit A une section de ce VER, repérée par sa normale $\mathbf{n}$. Dans cette section, les fissures et cavités qui constituent le dommage laissent des traces de formes diverses. Soit $\tilde{A}$ l'aire résistante effective ($\tilde{A} < A$) et soit A_D la différence : $A_D = A - \tilde{A}$ (voir Figure 2.1). Par définition

$$D_n = \frac{A_D}{A} \quad (2.75)$$

est la mesure de l'endommagement local relativement à la direction $\mathbf{n}$.

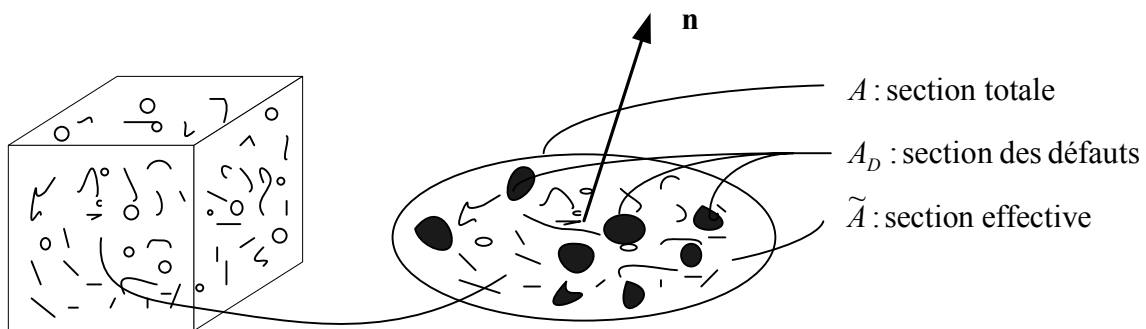


Figure 2.1. Définition des différentes sections dans un VER endommagé.

Physiquement, la variable D_n est l'aire relative des fissures et cavités coupées par le plan normal à la direction $\mathbf{n}$. D'un point de vue mathématique, en faisant tendre $\tilde{A}$ vers 0, la variable D_n est la densité surfacique des discontinuités de la matière dans le plan normal à $\mathbf{n}$.

$D_n = 0$ correspond à l'état non endommagé ou vierge.

$D_n = 1$ correspond à l'élément rompu en deux parties selon un plan normal à $\mathbf{n}$.

$0 < D_n < 1$ caractérise l'état d'endommagement.

Dans le cas général d'un endommagement anisotrope constitué de fissures et de cavités d'orientations privilégiées, la variable scalaire D_n dépend de l'orientation de la normale. L'état d'endommagement du VER peut être représenté alors par une variable tensorielle du 2^{ème} ou de 4^{ème} ordre, par exemple.

Un endommagement isotrope est constitué de fissures et cavités dont la répartition est distribuée uniformément dans toutes les directions. Dans ce cas, la valeur de la variable D_n ne dépend pas de l'orientation $\mathbf{n}$ et le scalaire d caractérise complètement l'état d'endommagement du VER, c-à-d.

$$D_n = d \quad \forall \mathbf{n} \quad (2.76)$$

2.5.1.2 Définition d'une contrainte effective

La contrainte effective au sens de l'endommagement est définie par la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts.

Dans le cas unidimensionnel, si f est la force appliquée sur une section A du VER, $\sigma = f/A$ est la contrainte usuelle qui satisfait les équations d'équilibre. En présence d'un endommagement isotrope de mesure d , la section résistante effective est

$$\tilde{A} = A - A_D = (1 - d) A \quad (2.77)$$

La contrainte effective est donnée par définition

$$\tilde{\sigma} = \frac{f}{\tilde{A}} = \sigma \frac{A}{\tilde{A}} \quad (2.78)$$

En introduisant la variable d , la contrainte effective est reliée à la contrainte usuelle (celle qui satisfait l'équilibre) via la variable d'endommagement d , c-à-d.

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - d} \quad (2.79)$$

Nous avons évidemment $\tilde{\sigma} \geq \sigma$ et

$\tilde{\sigma} = \sigma$ pour un matériau vierge,

$\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$ au moment de la rupture du VER.

Dans le cas d'un état de contraintes tridimensionnel et d'un endommagement isotrope, le rapport $\frac{A}{\tilde{A}}$ ne dépend pas de l'orientation de la normale $\mathbf{n}$ et l'opérateur $(1 - d)$ s'applique à toutes les composantes. Le tenseur contrainte effective est défini ainsi par

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d} \quad (2.80)$$

Dans le cas d'un endommagement anisotrope défini par un tenseur $\mathbf{D}$, d'ordre 2 ou d'ordre 4 par exemple (Chaboche, 1999 ; Lemaitre et al., 2000 ; Hammi, 2000), la contrainte effective est définie à partir d'un certain opérateur d'endommagement tensoriel $\mathbf{H}(\mathbf{D})$:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{H}(\mathbf{D}) : \sigma \quad (2.81)$$

2.5.1.3 Principe d'équivalence en déformation

Ce principe suppose que le comportement à la déformation du matériau n'est affecté par l'endommagement que sous la forme de la contrainte effective. Son énoncé est le suivant (Lemaitre, 1985) :

Tout comportement à la déformation d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective.

La Figure 2.2 illustre d'une manière schématique ce principe.

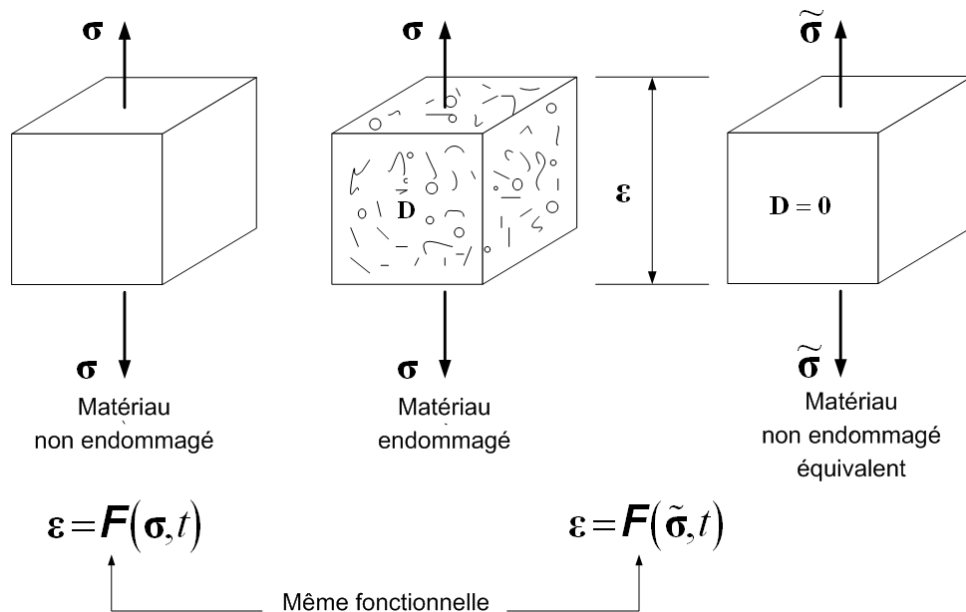


Figure 2.2. Contrainte effective et principe d'équivalence en déformation

Cette hypothèse, telle que soulignée par Lemaitre et Chaboche (1985), n'est pas tout à fait rigoureuse. Elle suppose que les différents comportements (élasticité, plasticité etc.) sont affectés par la densité surfacique des défauts de dommage, corrigés de la même façon. Sa simplicité permet néanmoins d'établir un formalisme cohérent et efficace.

2.5.2 Formulation du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement

Nous considérons dans ce paragraphe le cas d'un endommagement isotrope. Nous reprenons la présentation du modèle élasto-plastique afin de montrer les couplages avec la variable d'endommagement. Le couplage est réalisé à travers le concept de la contrainte effective, associée au principe d'équivalence en déformation, décrits précédemment.

2.5.2.1 Loi d'élasticité endommagée

L'élasticité couplée à l'endommagement isotrope est décrite par la loi

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.82)$$

Avec la définition du tenseur des constantes élastiques effectives par $\tilde{\mathbf{C}} = (1-d)\mathbf{C}$ et sachant que $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$, l'équation précédente peut s'écrire

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.83)$$

Cette loi peut s'exprimer sous la forme incrémentale suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\mathbf{C} : \mathbf{D}^e - d\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \tilde{\mathbf{C}} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - \dot{d}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.84)$$

où on voit apparaître le taux d'accroissement de l'endommagement $\dot{d}$.

Pour un chargement monotone, l'accroissement de l'endommagement traduit par $\dot{d} > 0$ implique une augmentation de la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et donc du terme $\dot{d}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Dans le même temps, le tenseur d'élasticité effectif $\tilde{\mathbf{C}} = (1-d)\mathbf{C}$ décroît, ce qui entraîne un décroissement du terme $\tilde{\mathbf{C}} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p)$. Une telle évolution implique, à partir d'un certain niveau de chargement, un taux de contrainte négatif, et donc l'apparition d'un adoucissement.

2.5.2.2 Critère de plasticité couplé à l'endommagement

Le critère de plasticité est exprimé sous la forme de Kuhn-Tucker suivante :

$$F = \bar{\sigma}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{X}) - Y \leq 0 \quad (2.85)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.86)$$

$$F \dot{\lambda} = 0 \quad (2.87)$$

où la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$ est maintenant fonction de la contrainte effective déviatorique $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'$ et de la contrainte de rappel $\mathbf{X}$, par contre la taille de la surface de charge Y , définissant l'écrouissage isotrope du matériau, reste la même.

Compte tenu du choix fait précédemment de modéliser l'anisotropie initiale par la surface de Hill 48, voir (2.33), l'introduction de la contrainte effective dans le critère permet de redéfinir une contrainte effective équivalente par

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\tilde{\sigma}' - \mathbf{X}) = \sqrt{\tilde{\mathbf{T}} : \mathbf{M} : \tilde{\mathbf{T}}} \quad (2.88)$$

où $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\sigma}' - \mathbf{X}$ est la contrainte déviatorique *efficace* effective et $\mathbf{M}$ reste le tenseur d'ordre quatre contenant les six paramètres d'anisotropie de Hill.

Le cas particulier de la surface de plasticité de von Mises est défini par $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{T}}}$.

A noter également que le centre du domaine élastique dans l'espace des contraintes déviatoriques n'est plus $\mathbf{X}$.

2.5.2.3 Lois d'écoulement plastique couplées à l'endommagement

Le tenseur taux de déformation plastique est donné par la règle d'écoulement associée suivante :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \tilde{\mathbf{V}} \quad (2.89)$$

où $\tilde{\mathbf{V}}$ est la direction d'écoulement plastique effective normale à la surface de charge définie par le potentiel F et $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique à déterminer par la condition de cohérence.

Dans le cas particulier du critère de Hill 48, la direction d'écoulement plastique $\tilde{\mathbf{V}}$ est donnée par

$$\tilde{\mathbf{V}} = \frac{1}{(1-d)} \mathbf{V} = \frac{1}{(1-d)} \frac{\mathbf{M} : (\tilde{\sigma}' - \mathbf{X})}{\bar{\sigma}} \quad (2.90)$$

2.5.2.4 Couplage de l'écrouissage avec l'endommagement

L'endommagement va affecter l'écrouissage du matériau à travers la contrainte effective. Les lois d'évolution, données en (2.18), seront réécrites formellement comme suit :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}_y(\mathbf{y}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_y(\mathbf{y}, \boldsymbol{\sigma}, d) \dot{\lambda} \quad (2.91)$$

i. Ecrouissage isotrope

Toutes les lois d'évolution de l'écrouissage isotrope présentées au § 2.4.1 ne font pas intervenir le tenseur des contraintes d'une manière explicite. Ainsi, la loi d'évolution de l'écrouissage isotrope total Y reste inchangée.

ii. Écrouissage cinématique

La loi d'évolution d'Armstrong-Frederick (2.47) fait intervenir d'une manière explicite la variable d'endommagement à travers la direction de saturation $\mathbf{n}$. En introduisant la contrainte effective, cette direction devient également une fonction de d , c-à-d.

$$\tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{n}}(d) = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{X}}{\tilde{\sigma}} = \frac{\tilde{\mathbf{T}}}{\tilde{\sigma}} \quad (2.92)$$

En remplaçant $\mathbf{n}$ par $\tilde{\mathbf{n}}$, la loi d'évolution de la contrainte de rappel s'exprime ainsi sous la forme

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X (X_{sat} \tilde{\mathbf{n}} - \mathbf{X}) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda} \quad (2.93)$$

où $\tilde{\mathbf{n}}$ est la nouvelle direction de saturation de $\mathbf{X}$. A noter que dans le cas de la surface de von Mises, $\tilde{\mathbf{n}}$ coïncide avec la direction de l'écoulement plastique.

La loi proposée par Chaboche (2.48) s'exprime également sous la nouvelle forme

$$\dot{\mathbf{X}} = C \dot{\lambda} \tilde{\mathbf{n}} - \gamma \mathbf{X} \dot{\lambda} \quad (2.94)$$

Dans le cas particulier où $\gamma = 0$ et $C \neq 0$ et où la surface de charge est de type von Mises, on retrouve la loi d'écrouissage linéaire de Prager couplée à l'endommagement scalaire, où les directions d'évolution de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{D}^p$ restent confondus, du fait que l'endommagement est isotrope, c-à-d.

$$\dot{\mathbf{X}} = C \dot{\lambda} \tilde{\mathbf{n}} = \frac{2}{3} C (1-d) \mathbf{D}^p \quad (2.95)$$

iii. Écrouissage cyclique de Chaboche-Marquis avec endommagement

Le couplage du modèle à écrouissage mixte de Chaboche-Marquis avec l'endommagement scalaire consiste à considérer les deux lois (2.37) et (2.93) pour l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique, respectivement, c-à-d.

$$\dot{Y} = \dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda} \quad (2.96)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X (X_{sat} \tilde{\mathbf{n}} - \mathbf{X}) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda} \quad (2.97)$$

iv. Écrouissage microstructural de Teodosiu-Hu avec endommagement

Dans ce modèle d'écrouissage, la variable d'endommagement va intervenir à travers la contrainte effective dans le calcul de la direction normalisée $\mathbf{N}$ de l'écoulement plastique et la direction de saturation $\mathbf{n}$ de la contrainte de rappel, c-à-d.

$$\tilde{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{N}}(d) = \frac{\mathbf{D}^p}{|\mathbf{D}^p|} = \frac{\tilde{\mathbf{V}}}{|\tilde{\mathbf{V}}|} \quad (2.98)$$

$$\tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{n}}(d) = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{X}}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\tilde{\mathbf{T}}}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (2.99)$$

En considérant par exemple le cas particulier du critère de Hill 48, $\tilde{\mathbf{N}}$ sera donné par

$$\tilde{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{M} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{X})}{|\mathbf{M} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{X})|} = \frac{\mathbf{M} : \tilde{\mathbf{T}}}{|\mathbf{M} : \tilde{\mathbf{T}}|} \quad (2.100)$$

Ainsi, en remplaçant $\mathbf{N}$ et $\mathbf{n}$ par $\tilde{\mathbf{N}}$ et $\tilde{\mathbf{n}}$, respectivement, dans toutes les lois faisant apparaître ces grandeurs nous arrivons aux équations couplées du modèle d'écrouissage de Teodosiu-Hu avec l'endommagement scalaire, données sous la forme suivante :

$$\dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda} \quad (2.101)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X (X_{sat} \tilde{\mathbf{n}} - \mathbf{X}) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{S} = S_D \tilde{\mathbf{N}} \otimes \tilde{\mathbf{N}} + \mathbf{S}_L \quad (2.103)$$

$$S_D = \tilde{\mathbf{N}} : \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{N}} \quad (2.104)$$

$$\dot{S}_D = C_{SD} [\tilde{g}(S_{sat} - S_D) - \tilde{h} S_D] \dot{\lambda} = H_{S_D} \dot{\lambda} \quad (2.105)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_L = -C_{SL} \left(\frac{|\mathbf{S}_L|}{S_{sat}} \right)^{n_L} \mathbf{S}_L \dot{\lambda} = \mathbf{H}_{S_L} \dot{\lambda} \quad (2.106)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = C_p (\tilde{\mathbf{N}} - \mathbf{P}) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_p \dot{\lambda} \quad (2.107)$$

La fonction h du modèle initial est remplacée par $\tilde{h}$ définie par

$$\tilde{h} = \tilde{h}(d) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathbf{X} : \tilde{\mathbf{N}}}{X_{sat} \tilde{\mathbf{n}} : \tilde{\mathbf{N}}} \right) \quad (2.108)$$

Dans le cas particulier du critère de Hill 48, $\tilde{h}$ sera donné par

$$\tilde{h} = \tilde{h}(d) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathbf{X}}{X_{sat}} : \frac{\mathbf{M} : \tilde{\mathbf{T}}}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \quad (2.109)$$

Le terme P_D qui intervient dans la fonction g sera aussi modifié et devient

$$\tilde{P}_D = \tilde{P}_D(d) = \mathbf{P} : \tilde{\mathbf{N}} \quad (2.110)$$

Enfin, la fonction g est remplacée par $\tilde{g}$ définie par

$$\tilde{g} = \begin{cases} 1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \left| \frac{S_D}{S_{sat}} - \mathbf{P} : \tilde{\mathbf{N}} \right| & \text{si } \tilde{P}_D \geq 0 \\ \left(1 + \mathbf{P} : \tilde{\mathbf{N}}\right)^{n_p} \left(1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \frac{S_D}{S_{sat}}\right) & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.111)$$

2.5.2.5 Loi d'évolution de l'endommagement

L'endommagement qui accompagne les grandes déformations plastiques est considéré de type ductile. Pour modéliser ce type d'endommagement diverses lois ont été proposées dans la littérature (Ladevèze et Lemaitre 1984 ; Dragon et Halm, 1995 ; Chaboche, 1999 ; Lemaitre et al., 2000 ; Brunet et al., 2005 etc.). Une des lois les plus couramment utilisées pour décrire l'endommagement ductile est celle proposée par Lemaitre (1985), qui consiste à relier le taux d'endommagement à la déformation plastique cumulée et à une certaine énergie de déformation.

Sous sa forme la plus simple, cette loi est donnée par

$$\dot{d} = \left(\frac{Y_e}{S} \right)^s \dot{p} \quad (2.112)$$

où s et S sont des paramètres caractéristiques de l'endommagement de chaque matériau, $\dot{p}$ est le taux de déformation plastique cumulée, alors que Y_e est le taux de restitution de la densité d'énergie élastique, défini par

$$Y_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.113)$$

Dans le cas de l'élasticité isotrope, Y_e s'exprime sous la forme

$$Y_e = \frac{J_2^2}{2(1-d)^2 E} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma^s}{J_2} \right)^2 \right] \quad (2.114)$$

où J_2 est la contrainte équivalente au sens de von Mises, c-à-d. $J_2 = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}$, et $\sigma^s = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ est la contrainte hydrostatique.

Le taux de déformation plastique cumulée est défini comme la puissance conjuguée de la contrainte effective équivalente, c-à-d.

$$\bar{\sigma} \dot{p} = (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) : \mathbf{D}^p \quad (2.115)$$

En considérant le cas particulier du critère de plasticité de Hill 48 et en remplaçant $\mathbf{D}^p$ par son expression (2.89), nous pouvons retrouver la relation suivante entre $\dot{p}$ et $\dot{\lambda}$:

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1-d} \quad (2.116)$$

La loi d'évolution de d peut s'exprimer ainsi sous la forme

$$\dot{d} = \frac{1}{1-d} \left(\frac{Y_e}{S} \right)^s \dot{\lambda} \quad (2.117)$$

Cette relation implique que dès l'entrée en plasticité ($\dot{\lambda} > 0$) nous avons une évolution simultanée de l'endommagement ($\dot{d} \neq 0$). Ceci pose quelques difficultés pour décrire l'endommagement de certains matériaux. En effet, dans le cas de la majorité des matériaux métalliques ductiles utilisés en mise en forme, l'endommagement n'est détecté qu'après que le matériau ait subi une certaine déformation plastique, parfois assez importante. Pour rendre compte de ce comportement, un paramètre seuil d'endommagement a été proposé par Lemaitre (1985). La nouvelle loi proposée comporte un seuil p_d pour la déformation plastique cumulée p . La valeur p_d du seuil est considérée comme un paramètre d'endommagement du matériau. La nouvelle loi d'évolution de d s'exprime comme suit :

$$\dot{d} = \begin{cases} \frac{1}{(1-d)} \left(\frac{Y_e}{S} \right)^s \dot{\lambda} & \text{si } p \geq p_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.118)$$

Une autre loi similaire a été utilisée par Khelifa (2004), en définissant un paramètre seuil sur le taux de restitution d'énergie élastique. La loi proposée s'écrit comme suit :

$$\dot{d} = \begin{cases} \frac{1}{(1-d)^\beta} \left(\frac{Y_e - Y_{ei}}{S} \right)^s \dot{\lambda} & \text{si } Y_e \geq Y_{ei} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.119)$$

où Y_{ei} est la densité d'énergie élastique initiale capable de provoquer l'endommagement du matériau. Un nouveau paramètre β est également introduit de telle sorte à agir directement sur la variable d'endommagement.

C'est cette dernière loi qui a été retenue dans notre étude. Elle fait intervenir au total quatre paramètres supplémentaires par rapport au modèle d'élasto-plasticité, à savoir s , S , Y_{ei} et β . Afin de rester dans le cadre de l'écriture des lois d'évolution des variables internes sous la forme (2.18), nous réécrivons cette loi comme suit :

$$\dot{d} = H_d \dot{\lambda} \quad (2.120)$$

tel que

$$H_d = \begin{cases} \frac{1}{(1-d)^\beta} \left(\frac{Y_e - Y_{ei}}{S} \right)^s & \text{si } Y_e \geq Y_{ei} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.121)$$

2.5.2.6 Condition de cohérence

L'application de la condition de cohérence $\dot{F} = 0$ donne

$$\dot{\bar{\sigma}} - \dot{Y} = 0 \quad (2.122)$$

qui peut s'écrire également

$$\dot{\bar{\sigma}} = H_Y \dot{\lambda} \quad (2.123)$$

Le taux de contrainte effective équivalente peut être développé comme suit :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tilde{\sigma}'} : \dot{\tilde{\sigma}}' + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tilde{\sigma}'} : (\dot{\tilde{\sigma}}' - \dot{\mathbf{X}}) \quad (2.124)$$

Les différents termes intervenant dans cette relation s'expriment par

$$\dot{\tilde{\sigma}}' = \mathbf{C} : (\mathbf{D}' - \mathbf{D}^p) = \mathbf{C} : (\mathbf{D}' - \tilde{\mathbf{V}} \dot{\lambda}) \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tilde{\sigma}'} = \frac{\mathbf{M} : (\tilde{\sigma}' - \mathbf{X})}{\bar{\sigma}} = \mathbf{V} \quad (2.126)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda} \quad (2.127)$$

En remplaçant ces termes dans (2.124) et par la suite dans la condition de cohérence (2.123), on obtient

$$\mathbf{V} : [\mathbf{C} : (\mathbf{D}' - \tilde{\mathbf{V}} \dot{\lambda}) - \mathbf{H}_X \dot{\lambda}] = H_Y \dot{\lambda} \quad (2.128)$$

Le multiplicateur plastique est ainsi déduit de cette dernière expression par

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{V} : \mathbf{C} : \mathbf{D}'}{H_\lambda} = \frac{\mathbf{V} : \mathbf{C} : \mathbf{D}}{H_\lambda} \quad (2.129)$$

où H_λ est le module élasto-plastique scalaire affecté par l'endommagement, donné par

$$H_\lambda = \mathbf{V} : \mathbf{C} : \tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{V} : \mathbf{H}_X + H_Y \quad (2.130)$$

En l'absence d'endommagement nous retrouvons l'expression (2.25) de $\dot{\lambda}$.

2.5.2.7 Module tangent analytique

Nous cherchons à déterminer le module tangent analytique, défini par $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{Ana} : \dot{\mathbf{D}}$, pour ce modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement.

En remplaçant dans la relation (2.84), le taux de déformation plastique, le taux d'endommagement et la déformation élastique par leurs expressions, données respectivement par (2.89), (2.120) et (2.82), la loi d'élasticité couplée à l'endommagement peut être réécrite sous la forme

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{C}} : (\mathbf{D} - \tilde{\mathbf{V}}\dot{\lambda}) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}H_d\dot{\lambda} \quad (2.131)$$

En introduisant l'expression du multiplicateur plastique (2.129) dans cette dernière relation, on obtient une relation de la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\tilde{\mathbf{C}} - \frac{(\tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{V}}) \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} - \frac{H_d \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} \right) : \mathbf{D} \quad (2.132)$$

d'où l'expression du module tangent analytique simplement déduite sous la forme

$$\mathbf{C}^{Ana} = \tilde{\mathbf{C}} - \alpha \left(\frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}) \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} + \frac{H_d \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} \right) \quad (2.133)$$

où $\alpha = 1$ pour un chargement élasto-plastique avec endommagement et 0 autrement.

Dans le cas où $\mathbf{C}$ est un tenseur isotrope et sachant que $\mathbf{V}$ et $\tilde{\mathbf{V}}$ sont deux tenseurs déviatoriques, et que $\tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{C} : \mathbf{V}$, le multiplicateur plastique et le module tangent analytique sont données, respectivement, par

$$\dot{\lambda} = \frac{2G\mathbf{V} : \mathbf{D}}{H_\lambda} \quad (2.134)$$

et

$$\mathbf{C}^{Ana} = \tilde{\mathbf{C}} - \alpha \left(\frac{4G^2(1-d)^2 \tilde{\mathbf{V}} \otimes \tilde{\mathbf{V}}}{H_\lambda} + \frac{2GH_d \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \tilde{\mathbf{V}}}{H_\lambda} \right) \quad (2.135)$$

où

$$H_\lambda = (1-d)(2G\tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{V}} : \mathbf{H}_X) + H_Y \quad (2.136)$$

Comme on peut le constater, en absence d'endommagement, $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$ et H_d est nul. Ainsi, nous retrouvons exactement l'expression (2.30) du module tangent analytique élasto-plastique.

Tableau 2.2 : Résumé des équations du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement.	
Loi d'élasticité :	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{C}} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$
Règle d'écoulement associée :	$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$
Critère de charge-décharge :	$F = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{X}) - Y \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad F \dot{\lambda} = 0$
Multiplicateur plastique :	$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{V} : \mathbf{C} : \mathbf{D}}{H_\lambda}$
Module tangent analytique :	$\mathbf{C}^{Ana} = \tilde{\mathbf{C}} - \alpha \left(\frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}) \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} + \frac{H_d \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} \right)$
Anisotropie initiale :	$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\tilde{\mathbf{T}} : \mathbf{M} : \tilde{\mathbf{T}}} \quad / \quad \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{X}$
Ecrouissage de Chaboche-Marquis	Ecrouissage de Teodosiu-Hu
$Y = Y_0 + R$ $\dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda}$ $\dot{\mathbf{X}} = C_X \left(X_{sat} \frac{\tilde{\mathbf{T}}}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathbf{X} \right) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda}$	$Y = Y_0 + R + f \mathbf{S} $ $\dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda}$ $\dot{\mathbf{X}} = C_X \left(X_{sat} \frac{\tilde{\mathbf{T}}}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathbf{X} \right) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda}$ $\dot{\mathbf{P}} = C_p (\tilde{\mathbf{N}} - \mathbf{P}) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_p$ $\mathbf{S} = S_D \tilde{\mathbf{N}} \otimes \tilde{\mathbf{N}} + \mathbf{S}_L$ $\dot{S}_D = C_{SD} [\tilde{g}(S_{sat} - S_D) - \tilde{h} S_D] \dot{\lambda} = H_{S_D} \dot{\lambda}$ $\dot{\mathbf{S}}_L = -C_{SL} \left(\frac{ \mathbf{S}_L }{S_{sat}} \right)^{n_L} \mathbf{S}_L \dot{\lambda} = \mathbf{H}_{S_L} \dot{\lambda}$ $X_{sat} = X_{sat}(\mathbf{S}), \quad \tilde{g} = \tilde{g}(\mathbf{P}, S_D, \tilde{\mathbf{N}}),$ $\tilde{h} = \tilde{h}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{N}})$
Loi d'évolution de l'endommagement	
$d = H_d \dot{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{(1-d)^\beta} \left(\frac{Y_e - Y_{ei}}{S} \right)^s \dot{\lambda} & \text{si } Y_e \geq Y_{ei} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad Y_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$	

2.5.3 Synthèse

La modélisation retenue au § 2.2 est suffisamment générale pour être étendue au cas de l'endommagement. Néanmoins les équations du modèle élasto-plastique s'en retrouvent modifiées, à travers le concept de la contrainte effective associée au principe d'équivalence en déformation. Nous avons notamment proposé un couplage du modèle microstructural de Teodosiu-Hu avec le modèle d'endommagement scalaire de Lemaitre. Nous avons ainsi obtenu un modèle tenant compte en même temps des changements de trajets de déformation et de l'endommagement. Aucune hypothèse simplificatrice n'a été nécessaire lors de ce couplage. La même démarche peut s'appliquer pour la prise en compte d'un endommagement anisotrope et avec d'autres lois d'évolutions de la variable d'endommagement.

Nous dressons dans le Tableau 2.2 un résumé des équations du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement qui sera introduit par la suite dans l'étude de la striction localisée.

Enfin, le modèle élasto-plastique peut être retrouvé moyennant une désactivation de l'endommagement ; c'est ce qui est montré à travers le calcul du multiplicateur plastique et du module tangent analytique. Ceci va de soit au niveau de l'implantation numérique, où un seul algorithme de résolution suffit.

2.6 Modélisation de la localisation

La localisation des déformations peut être vue comme une instabilité se traduisant par le passage d'un état de déformation quasi-homogène à un état non-homogène défini par la concentration des déformations dans des zones particulières du matériau. L'instant d'apparition de ces zones de localisation et leur étendue dépendent de la géométrie de la structure, du matériau déformé et du trajet de chargement appliqué. Il existe deux types de striction : la striction diffuse, caractérisée par une large zone de concentration des déformations et la striction localisée caractérisée par une concentration des déformations, souvent, dans des bandes étroites. Ces bandes sont ensuite le lieu de rupture par fissuration lors de la mise en forme d'un matériau. De ce fait, leur prédiction peut servir à l'optimisation de la forme finale recherchée.

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude des différents phénomènes d'instabilités (striction, flambement etc.). Nous citons à titre d'exemple les travaux de Hill (1952), Marciniak et Kuczynski (1967), Rudnicki et Rice (1975), Rice (1976), Benallal et al. (1988), Billardon et Doghri (1989), Needleman et Tvergaard (1992), Doghri et Billardon (1995), Barbier et al. (1998), Keryvin, V., 1999, Benallal et Comi (2000), Benallal et Bigoni (2003), Stören et al. (2004), Brunet et al. (2005) etc. En mise en forme, ces études sont basées sur le développement de critères permettant principalement de prédire le moment d'apparition de la striction (diffuse et localisée) ou du plissement. Certains critères fournissent également les orientations des bandes de localisation ; une information qui permet d'estimer la direction de rupture d'un matériau. Nous allons donner un aperçu sur les principaux critères couramment évoqués dans la littérature et appliqués pour les tôles métalliques en mis en forme.

2.6.1 La localisation des déformations dans les tôles

Le critère le plus couramment utilisé a été développé par Marciniak et Kuczynski (1967). Son principe consiste à supposer un défaut initial sous forme de bande dans une tôle. Ce défaut est caractérisé par son épaisseur légèrement inférieure à celle du reste de la tôle et par son orientation. Le traitement de ce problème par la suite consiste à résoudre l'équilibre dans les deux zones, à savoir à l'intérieur et à l'extérieur de la bande, tout en tenant compte du comportement du matériau et des hypothèses de continuité des champs mécaniques au niveau des surfaces délimitant le défaut. Cette approche est appliquée souvent à la détermination des courbes limites de formage (CLF). Bien qu'elle ait prouvé son efficacité en termes de reproduction de CLF expérimentales, cette approche souffre d'objectivité, car le rapport entre l'épaisseur du défaut et celle de la tôle n'est pas un paramètre intrinsèque au matériau. Il est choisi de telle manière à reproduire la CLF expérimentale. Cette théorie est appliquée souvent avec l'hypothèse de contraintes ou de déformations planes ; son application dans le cadre d'une analyse tridimensionnelle, à notre connaissance, est rarement abordée.

Des critères d'instabilité ont été formulés sans nécessiter l'introduction de paramètres d'ajustement. Plusieurs critères entrent dans ce cadre. Le critère de Considère (1885) est le premier proposé pour l'étude des problèmes d'instabilités plastiques. Selon ce critère, la striction se manifeste lorsque la force de traction appliquée à une éprouvette passe par son maximum. Swift (1952) a repris l'idée de la force maximale de Considère et l'a appliquée au cas des tôles minces dans le cadre d'un calcul bidimensionnel. La formulation originale du critère de Swift considère une tôle mince soumise à un chargement biaxial et proportionnel en contraintes. La striction est supposée avoir lieu lorsque les composantes principales des deux efforts appliqués passent simultanément par un maximum. Le caractère bidimensionnel de ce critère permet de l'appliquer au tracé des CLF.

Par ailleurs, des critères locaux basés sur des hypothèses de discontinuité des champs mécaniques au niveau d'un point matériel ou d'une interface ont été développés. Ces critères ne sont pas restreints aux chargements bidimensionnels, mais tiennent compte de l'aspect tridimensionnel des déformations et des contraintes. Le critère de Cordebois et Ladevèze (1982) par exemple, considère que le comportement instable d'un matériau est caractérisé par la non nullité du champ des vitesses lorsque l'on arrête le chargement extérieur. A l'inverse, le champ de vitesse s'annule pour un matériau stable placé dans la même situation. Selon ce critère, le début de la striction est associé à l'instant où le matériau présente un régime instable tel que défini précédemment. Ce critère peut être appliqué en chaque point de la structure et à chaque instant du chargement dans le cadre d'un calcul par éléments finis. Il permet la prédiction de la striction diffuse et localisée selon le mode associé (Habbad, 1994).

Comme indiqué précédemment, souvent, les zones de striction localisée sont les lieux de rupture lors de l'opération de mise en forme et la localisation intervient juste avant la rupture. De ce fait, l'utilisation d'un critères permettant à la fois de prédire le moment d'apparition des premières bandes de localisation, ainsi que leurs orientations a un grand intérêt en simulation des procédés de mise en forme, notamment par emboutissage. Ceci permettra d'ajuster les paramètres du procédé (effort appliqué, contact etc.) afin d'éviter des diminutions excessives de l'épaisseur sur la forme finale. Nous abordons dans cette dernière partie de ce chapitre la modélisation de ce type d'instabilités plastiques dans les matériaux métalliques à travers un critère de localisation basé sur l'apparition d'une bande de cisaillement dans le matériau. Avec ce critère, nous nous intéressons notamment à prédire une situation intermédiaire correspondant à l'apparition des premières bandes de localisation au cours du chargement. Le

comportement du matériau est décrit par le modèle élasto-plastique couplé ou non à l'endommagement introduit aux § 2.2 à 2.5.

Nous avons fait le choix de traiter le problème de localisation des déformations dans les tôles métalliques avec le critère de localisation de Rice (1976). Ce critère est capable de prédire la striction localisée, en donnant les informations citées précédemment, à savoir le moment d'apparition et l'orientation des premières bandes de localisation. Ce critère a été déjà appliqué par Doghri (1989), Billardon et Doghri (1989) et Doghri et Billardon (1995) avec un modèle élasto-plastique-endommagement et par Keryvin (1999) dans le cadre de calculs par éléments finis, ainsi que par Lorrain (2005) pour le tracé des CLF dans le cadre de calculs micromécaniques. Nous développons dans ce qui suit la formulation de ce critère en grandes déformations et en tenant compte des différentes lois de comportement introduites dans ce chapitre. Ceci nous permettra de réaliser une étude complète (voir § 5.3), qui permettra de prendre en compte les effets de changement de trajets de déformation, de la localisation et de l'endommagement.

2.6.2 Formulation du critère de Rice

Dans l'approche de Rice, la localisation est considérée comme une bifurcation à partir d'un état de déformation homogène vers un état où la déformation est concentrée à l'intérieur des bandes de cisaillement. Dans ces mêmes travaux, l'hypothèse d'un milieu infini est faite pour simplifier la démarche ce qui justifie aussi de l'état homogène de déformation. D'après Rudnicki et Rice (1975) et Rice (1976), ce moment de passage d'un état homogène à un état non-homogène correspond à une discontinuité du gradient de vitesse. La formulation du critère de localisation de Rice est basée principalement sur cette hypothèse.

Considérons donc une structure soumise initialement à un état de déformation homogène (voir la Figure 2.3.), où on cherche à déterminer le moment d'apparition de la localisation par le traitement du problème de perte d'unicité (bifurcation) de la solution. Pour rendre compte de ce mode de localisation de la déformation, on imagine une bande de localisation dans un milieu infini à déformation homogène. On note les champs gradient de vitesse à l'intérieur et à l'extérieur de la bande $\mathbf{G}^-$ et $\mathbf{G}^+$, les champs de contraintes nominales correspondants $\mathbf{N}^-$ et $\mathbf{N}^+$, et $\mathbf{n}$ la normale à la bande délimitée par les surfaces notés Σ' et Σ'' .

2.6.2.1 Condition du saut au travers de Σ

Nous cherchons à déterminer la condition pour laquelle la continuité du taux de certaines grandeurs n'est plus vérifiée, c-à-d. existence d'un saut. L'opérateur $[\bullet]$ indique le saut de la grandeur considérée entre l'intérieur et l'extérieur de la bande, c-à-d. $[\bullet] = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$.

Pour le vecteur taux de contrainte nominale, nous avons l'équation de continuité suivante :

$$[\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{N}}] = \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{N}}] = 0 \quad (2.137)$$

Cette condition est appelée également condition de compatibilité statique dans le cadre des modèles indépendants du temps (continuité normale du vecteur taux de contrainte nominale au travers des deux surfaces Σ' et Σ'' délimitant la bande de largeur l).

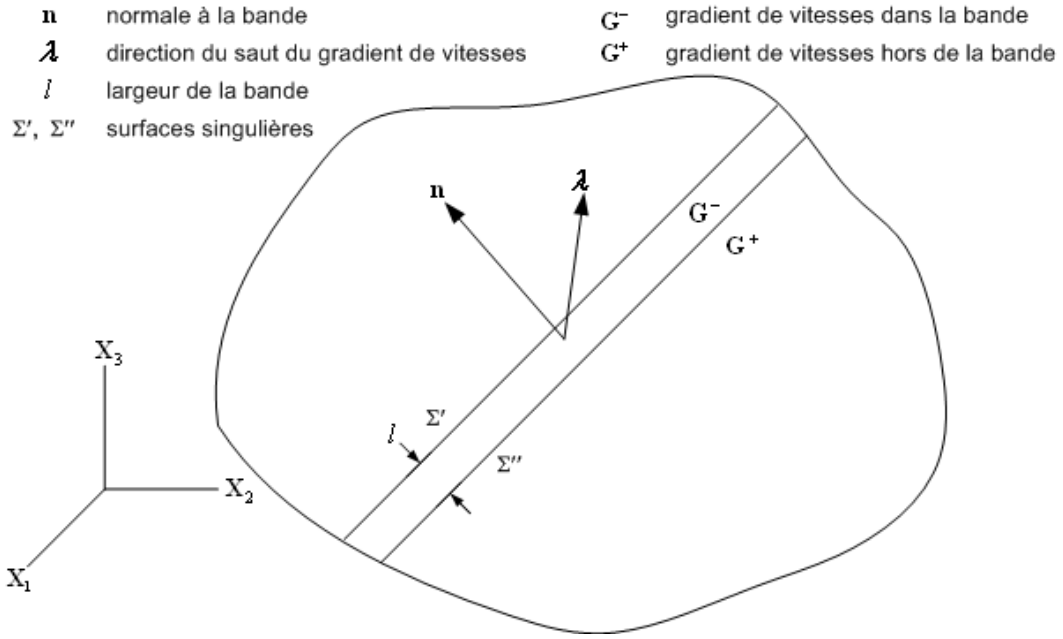


Figure 2.3. Position du problème de localisation.

D'un autre côté, le champ gradient de vitesse est discontinu à la traversée de la surface singulière Σ . Le saut du champ gradient de vitesse a une forme particulière. Ceci est donné par l'application de la condition de compatibilité de Hadamard (1903), qui montre qu'il existe un vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ tel que le saut du gradient de vitesse est donné par

$$[\mathbf{G}] = \boldsymbol{\lambda} \otimes \mathbf{n} \quad (2.138)$$

où $\boldsymbol{\lambda}$ représente le mode de localisation. Cette forme du saut de $\mathbf{G}$ est appelée également condition de compatibilité géométrique de Maxwell. Dans le cas où $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, on a un saut nul du gradient de vitesse (c-à-d. pas de bifurcation).

2.6.2.2 Condition de localisation

On peut réécrire les relations de comportement précédentes, reliant le taux de contrainte de Cauchy au taux de déformation totale, pour avoir un nouveau module tangent reliant le taux de la contrainte nominale au gradient de vitesse par la relation

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{L} : \mathbf{G} \quad (2.139)$$

où $\mathbf{L}$ est le module tangent analytique défini dans un repère fixe et dont les formules seront déduites plus loin dans les deux cas : élasto-plasticité en grandes déformations avec ou sans endommagement.

En remplaçant $\dot{\mathbf{N}}$ par son expression (2.139) dans (2.137) et en utilisant la définition du saut d'une grandeur, on aura

$$[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{L} : \mathbf{G})] = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L} : \mathbf{G})^+ - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L} : \mathbf{G})^- = \mathbf{0} \quad (2.140)$$

Avec l'hypothèse de continuité du module tangent qui s'exprime par

$$[\mathbf{L}] = \mathbf{0} \quad (2.141)$$

l'équation (2.140) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} : [\mathbf{G}] = \mathbf{0} \quad (2.142)$$

En introduisant la condition de compatibilité cinématique portant sur le gradient de vitesse (2.138) dans cette dernière équation, on obtient

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} : (\boldsymbol{\lambda} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (2.143)$$

que l'on peut écrire également sous la forme

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (2.144)$$

S'il existe une discontinuité du taux de déformation de part et d'autre de la bande, alors

$$\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0} \quad (2.145)$$

La condition nécessaire d'apparition d'une bande de localisation se traduit ainsi par

$$\det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (2.146)$$

Cette condition correspond à la singularité du tenseur acoustique, qui est également la condition de perte d'ellipticité des équations d'équilibre en vitesse. C'est une condition nécessaire d'apparition d'une bande de localisation et correspond au critère de localisation de Rice.

2.6.2.3 Quelques remarques

Si $\mathbf{n}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ sont colinéaires, le mode de localisation est dit d'ouverture, s'ils sont orthogonaux c'est un mode de cisaillement ; autrement, on aura des modes de localisation quelconques.

La condition est dite de bifurcation continue, car le module tangent $\mathbf{L}$ est considéré continu à travers la surface de singularité Σ . Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, on parle de bifurcation discontinue. Elle correspond à l'apparition d'une décharge élastique autour de la bande. Elle est appelée également condition de bifurcation élastique/plastique.

A rappeler que cette condition est établie dans le cas d'un milieu infini où le champ de déformation est initialement homogène et où les conditions aux limites n'interviennent pas. Benallal et al. (1990, 1993) ont montré qu'il faut satisfaire trois conditions pour la localisation dans le cas d'un milieu fini :

1. La condition de perte d'ellipticité pour une localisation à l'intérieur du solide.

2. Une condition complémentaire à la frontière.
3. Une condition complémentaire d'interface lorsque le solide est initialement hétérogène.

Dans divers travaux (Ottosen et Runesson, 1991 ; Benallal et Comi, 1994 etc.), on s'est intéressé à la détermination du module d'écrouissage critique correspondant à une bifurcation localisée. Tous ces travaux rejoignent ceux de Rice (1976), qui montre que dans le cas de la plasticité associée, la bifurcation en mode localisé ne peut intervenir en phase d'écrouissage positif, alors qu'elle est possible pour une loi non associée où la surface de plasticité présente des points anguleux. En effet, au voisinage de ces points plusieurs directions d'écoulement plastique sont possibles, d'où la possibilité d'apparition d'instabilités plastiques, telles que les bandes de localisation.

En accord avec les résultats de la littérature ci-dessus mentionnés, et comme nous allons le montrer à travers des applications au Chapitre 5, sans l'introduction d'un effet adoucissant dans le modèle élasto-plastique, le critère de Rice ne détectera aucun mode de localisation. Avec le modèle couplé à l'endommagement ceci sera cependant possible.

2.6.3 Détermination du module tangent pour la localisation

Nous nous intéressons ici à la détermination du module tangent analytique $\mathbf{L}$ qui intervient dans le critère de localisation de Rice. Ce module sera formulé dans le cas du modèle élasto-plastique et dans le cas du modèle couplé à l'endommagement en prenant en compte tous les effets liés aux grandes déformations.

2.6.3.1 Cas du modèle élasto-plastique

Pour déterminer $\mathbf{L}$, nous allons passer de la loi de comportement reliant le taux de la contrainte de Cauchy au taux de déformation totale, c-à-d. la loi (2.13), à celle reliant le taux de la contrainte nominale au gradient de vitesse, c-à-d. la loi (2.139). Ce passage va faire apparaître des termes convectifs dus au formalisme des grandes déformations.

On considère de nouveau la loi d'élasticité donnée par

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (2.147)$$

où $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ désigne la dérivée de Jaumann de la contrainte de Cauchy définie par

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \quad (2.148)$$

A partir des deux relations précédentes, la dérivée temporelle de la contrainte de Cauchy peut s'écrire

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \quad (2.149)$$

Pour passer de la contrainte de Cauchy à la contrainte nominale, on s'appuie sur les relations classiques de la mécanique des milieux continus, qui définissent le passage entre les différents tenseurs de contraintes par

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.150)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur de Kirchhoff, $\mathbf{B}$ est le 1^{er} tenseur de Piola-Kirchhoff ou de Boussinesq, $\boldsymbol{\Pi}$ est le 2nd tenseur de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{F}$ est le tenseur gradient de transformation et J est le Jacobien de la transformation, donné par

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (2.151)$$

En différenciant la relation (2.150), on obtient la relation suivante :

$$\dot{J} \boldsymbol{\sigma} + J \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{N}} \quad (2.152)$$

En introduisant l'expression $\dot{J}$, donnée par

$$\dot{J} = J \cdot \text{tr}(\mathbf{D}) \quad (2.153)$$

dans la relation (2.152), on aura

$$J (\text{tr}(\mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}) = J \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{N}} \quad (2.154)$$

$$J (\text{tr}(\mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{N}} \quad (2.155)$$

D'où l'expression du taux de la contrainte nominale suivante :

$$\dot{\mathbf{N}} = J \mathbf{F}^{-1} (\text{tr}(\mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (2.156)$$

Dans une formulation lagrangienne réactualisée, la configuration de référence est celle courante à l'instant t , ce qui revient à écrire

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \quad J = 1 \quad (2.157)$$

on en déduit la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{N}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \text{tr}(\mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.158)$$

En introduisant l'expression (2.149) de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ dans cette dernière relation, on obtient

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} + \boldsymbol{\sigma} \text{tr}(\mathbf{D}) - \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.159)$$

Sachant que $\mathbf{G} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$, on obtient la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} + \boldsymbol{\sigma} \text{tr}(\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.160)$$

Comme nous le montrons dans l'annexe A, on peut exprimer chaque terme du 2nd membre en fonction du gradient de vitesse, c-à-d. obtenir les formes suivantes :

$$\mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) = \mathbf{L} : \mathbf{D} = \mathbf{L} : \mathbf{G} \quad (2.161)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \, tr(\mathbf{D}) = \mathbf{L}_1 : \mathbf{D} = \mathbf{L}_1 : \mathbf{G} \quad (2.162)$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}_2 : \mathbf{D} = \mathbf{L}_2 : \mathbf{G} \quad (2.163)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{L}_3 : \mathbf{W} = \mathbf{L}_3 : \mathbf{G} \quad (2.164)$$

où $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ et $\mathbf{L}_3$ sont des tenseurs de 4^{ème} ordre définis ci-après.

Nous montrons en annexe A, que $\mathbf{L}$ est le module tangent analytique donné par (2.30), c-à-d.

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}^{Ana} = \mathbf{C} - \alpha \left(\frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}) \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} \right) \quad (2.165)$$

Il est à noter que dans (2.30), $\mathbf{L}$ est écrit dans le repère d'anisotropie, alors qu'ici il est tourné dans le repère global.

Les termes convectifs sont donnés par les équations suivantes :

$$L_{ijkl} = \sigma_{ij} \delta_{kl} \quad (2.166)$$

$$L_{2ijkl} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ik} \sigma_{lj} + \delta_{il} \sigma_{kj} \right] \quad (2.167)$$

$$L_{3ijkl} = \frac{1}{2} \left[\sigma_{ik} \delta_{lj} - \sigma_{il} \delta_{jk} \right] \quad (2.168)$$

En remplaçant chaque terme dans la relation (2.160), on obtient une relation de la forme

$$\dot{\mathbf{N}} = [\mathbf{L} + \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_3] : \mathbf{G} \quad (2.169)$$

D'où le module tangent à introduire dans le critère de localisation

$$\mathbf{L} = \mathbf{L} + \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_3 \quad (2.170)$$

A noter que tous les termes composant $\mathbf{L}$ sont écrits dans un repère fixe (c'est-à-dire évalués avec les grandeurs tournées dans le repère global).

2.6.3.2 Cas du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement

Pour déterminer $\mathbf{L}$, nous allons suivre la même procédure que celle développée pour le modèle élasto-plastique.

La loi d'élasticité couplée à l'endommagement est donnée dans le repère global par

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (2.171)$$

où $\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}$ désigne la dérivée de Jaumann de la contrainte de Cauchy effective, définie par

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathbf{W} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{W} \quad (2.172)$$

La dérivée temporelle se déduit par

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) + \mathbf{W} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{W} \quad (2.173)$$

D'un autre coté, en introduisant la relation entre la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, donnée par $\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, dans l'équation ci-dessus on obtient

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{d} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - \dot{d} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \quad (2.174)$$

En utilisant la même procédure, suivie au paragraphe précédent, pour établir une relation entre $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\mathbf{N}}$, nous retrouvons une relation similaire à (2.160), donnée par

$$\dot{\mathbf{N}} = (1-d)\mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - \dot{d} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} + \boldsymbol{\sigma} tr(\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.175)$$

Dans le même esprit, on cherche à relier chaque terme du second membre au gradient de vitesse, c-à-d. avoir

$$(1-d)\mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - \dot{d} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} = \mathbf{L} : \mathbf{G} \quad (2.176)$$

$$\boldsymbol{\sigma} tr(\mathbf{D}) = \mathbf{L}_1 : \mathbf{D} = \mathbf{L}_1 : \mathbf{G} \quad (2.177)$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}_2 : \mathbf{D} = \mathbf{L}_2 : \mathbf{G} \quad (2.178)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{L}_3 : \mathbf{W} = \mathbf{L}_3 : \mathbf{G} \quad (2.179)$$

A partir de ces relations, le module tangent à introduire dans le critère de localisation de Rice est simplement déduit par

$$\mathbf{L} = \mathbf{L} + \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_3 \quad (2.180)$$

Nous montrons également en annexe A que

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}^{Ana} = \tilde{\mathbf{C}} - \alpha \left(\frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}) \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} + \frac{H_d \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} \right) \quad (2.181)$$

et $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ et $\mathbf{L}_3$ sont donnés, respectivement, par les mêmes relations (2.166) à (2.168).

A noter que le module tangent $\mathbf{L}$ ainsi obtenu inclut le cas particulier de celui développé pour le modèle élasto-plastique sans couplage à l'endommagement. En effet, en l'absence d'endommagement : $d = 0$, $H_d = 0$, $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}$ et l'on retrouve bien le module tangent obtenu pour le modèle élasto-plastique sans endommagement : équations (2.165) à (2.170).

2.6.3.3 Propriétés de symétrie de $\mathbf{L}$

En s'appuyant sur l'étude donnée en annexe A, on peut démontrer les propriétés suivantes de L_{ijkl} :

- $\mathbf{L}$ n'a pas la symétrie mineure en $kl \leftrightarrow lk$ puisque $\mathbf{L}_3$ ne possède pas cette symétrie.
- $\mathbf{L}$ n'a pas la symétrie mineure en $ij \leftrightarrow ji$ puisque $\mathbf{L}_2$ et $\mathbf{L}_3$ n'ont pas cette symétrie.
- $\mathbf{L}$ n'a pas la symétrie majeure en $ij \leftrightarrow kl$ puisque $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ et $\mathbf{L}_3$ ne l'ont pas.

Ce qui permet de conclure que $\mathbf{L}$ ne possède aucune des symétries mineures et majeures.

2.7 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une modélisation tenant compte de trois grands phénomènes qui peuvent apparaître lors de la mise en forme. La formulation des modèles ainsi proposée est introduite dans le cadre de la théorie des grandes déformations.

Le premier phénomène modélisé est lié aux changements de trajets de déformation au cours du chargement, où des zones de transition sont mises en évidence sur des courbes contrainte-déformation. Deux modèles à écrouissage mixte ont ainsi été introduits. Ils diffèrent par leur capacité à retrouver certains phénomènes induits par les changements de trajets de déformation. Nous avons introduit le modèle classique de Chaboche-Marquis à écrouissage isotrope et cinématique non linéaires et saturants. De même, nous avons introduit le modèle d'écrouissage de Teodosiu-Hu basé sur les structures de dislocations persistantes. Ce modèle, fondé sur des considérations physiques, a la capacité de reproduire une large gamme de trajets complexes de déformation.

Le deuxième phénomène modélisé est l'endommagement dû aux grandes déformations que subit le matériau. L'endommagement considéré est isotrope et est ainsi modélisé par une variable scalaire. Nous avons couplé le modèle élasto-plastique, contenant les différents modèles d'écrouissage, au modèle d'endommagement de Lemaitre, grâce à la notion de la contrainte effective associée au principe d'équivalence en déformation.

Enfin, le troisième phénomène considéré est la striction localisée précurseur de la rupture du matériau. Nous avons fait le choix d'introduire le critère de localisation par bandes de

cisaillement développé par Rice. Ce critère peut être appliqué au tracé de CLF à localisation, ainsi qu'à la prédiction des directions de rupture dans un matériau lors de sa mise en forme.

Le prochain chapitre sera consacré à l'implantation numérique de l'ensemble des équations des modèles de comportement présentés, en utilisant divers schémas d'intégration. De la même façon, l'implantation du critère de localisation de Rice sera abordée.

Chapitre 3

Mise en œuvre numérique

3.1	Introduction	75
3.2	Position du problème	76
3.3	Méthodes de discrétisation temporelle	76
3.3.1	Méthodes d'intégration explicite.....	77
3.3.2	Méthodes d'intégration implicite	79
3.4	Intégration des modèles de comportement	80
3.4.1	Intégration explicite du modèle élasto-plastique.....	81
3.4.2	Intégration implicite du modèle élasto-plastique	86
3.4.3	Cas du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement.....	102
3.5	Implantation du critère de localisation de Rice.....	112
3.5.1	Formulation du problème de minimisation	112
3.5.2	Calcul du tenseur acoustique et algorithme de résolution.....	114
3.6	Conclusion.....	116

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à l'implantation numérique des lois de comportement introduites au chapitre 2 et également à l'implantation du critère de localisation de Rice dans des codes de calcul par éléments finis ; et plus particulièrement le code ABAQUS/Standard.

L'implantation numérique des modèles de comportement est une étape cruciale dans la qualité de prédiction de divers phénomènes en calcul de structures et en mise en forme. En effet, la richesse physique de ces modèles peut être compromise par les erreurs liées à l'approximation numérique de la solution exacte du problème, qui n'est généralement pas connue. L'étude des performances des schémas d'intégration est nécessaire, afin de s'assurer de la précision de la solution recherchée. De nombreux schémas sont disponibles et chacun possède ses avantages et ses inconvénients. Ainsi, les schémas les plus précis sont très laborieux à développer et souvent de type itératif, donc sujets à divergence, alors que des schémas beaucoup plus simples et robustes existent, dont la précision est cependant bien plus mauvaise.

D'une manière générale, un schéma d'intégration doit assurer trois conditions que l'on peut classer comme suit :

1. La précision de la solution.
2. Le coût de la solution, lié au temps de calcul.
3. La stabilité, étroitement liée à la nature du schéma d'intégration.

A ces trois conditions nous pouvons rajouter un critère de choix lié à la généralité de l'algorithme d'intégration, c-à-d. sa capacité à inclure des modèles plus avancés.

Nous souhaitons explorer en premier lieu un ensemble représentatif d'algorithmes d'intégration en soulignant surtout leur généralité (capacité à inclure des modèles très avancés, à l'instar du modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural couplé à l'endommagement), leur qualité prédictive (précision de la solution) et également leur coût (temps de calcul). Le choix de chaque algorithme sur la base de ces critères est discuté au fur et à mesure de leur présentation.

Nous allons introduire divers schémas d'intégration pour des équations de modèles de comportement écrites sous forme différentielle. Ces schémas nous permettent de construire une forme algébrique que l'on peut résoudre soit analytiquement, soit par des méthodes numériques. Le résultat de la résolution est l'état local du matériau, c-à-d. l'état de contrainte, de déformation et des variables internes correspondantes. Nous développons pour chaque modèle de comportement différents algorithmes d'intégration. Ces schémas seront appliqués successivement au modèle élasto-plastique et ensuite au modèle couplé à l'endommagement.

Nous nous intéressons principalement à deux types de schémas d'intégration :

1. Les schémas explicites, regroupant une famille de schémas d'intégration de type Runge-Kutta.

2. Les schémas implicites, où trois grandes familles seront introduites : le schéma du point milieu généralisé, le schéma des trapèzes généralisé et le schéma asymptotique généralisé.

Pour pouvoir réaliser des calculs par éléments finis, nous expliciterons le module tangent cohérent pour chacun des schémas d'intégration utilisés. Ce module cohérent dit aussi 'algorithmique' est nécessaire dans certains codes pour vérifier l'équilibre de la structure et permet d'assurer une convergence quadratique comme montré par Simo et Taylor (1985).

A la fin de ce chapitre, la résolution du problème de localisation sera étudiée à travers l'introduction d'une méthode de recherche des minima du déterminant du tenseur acoustique, qui donne le moment d'apparition de la localisation. Nous expliquons également la procédure de recherche des angles pour l'orientation des bandes de localisation.

3.2 Position du problème

Dans un calcul de structure, le problème consiste à rechercher un état de déformation et de contrainte correspondant au comportement local du matériau, en chaque point matériel, tout en vérifiant l'équilibre global de la structure. Ainsi, la résolution des équations du modèle de comportement intervient dans le contexte de vérification de l'équilibre de la structure. La méthode des éléments finis offre une possibilité de résolution de ce problème. Elle consiste à discrétiser la structure en sous-domaines (éléments finis) et à transformer les équations d'équilibre en un système d'équations algébriques où les inconnues sont les déplacements nodaux et/ou les forces nodales. La résolution de la loi de comportement intervient au niveau de chaque point d'intégration des éléments finis. Le développement de cette discrétisation spatiale du problème d'équilibre ne sera pas abordé dans ce mémoire, du fait que nous utilisons un code commercial de calcul par éléments finis. Nous nous intéressons uniquement à l'intégration locale de la loi de comportement, nécessaire pour le calcul du champ de contraintes (à partir d'une approximation du champ de déformations) à transmettre au code afin de vérifier l'équilibre global de la structure après assemblage de tous les éléments finis.

Comme les équations constituant le modèle de comportement sont en majeure partie des équations différentielles, leur résolution consiste à les intégrer sur un incrément de chargement afin d'extraire la solution en fin de chaque incrément, connaissant la solution au début de l'incrément. En premier lieu, la résolution de l'ensemble des équations de comportement consiste à construire une forme discrétisée ; vient par la suite l'étape de résolution de la forme algébrique ainsi obtenue. Nous rappelons d'abord dans les paragraphes suivants les méthodes de discrétisation temporelle couramment appliquées pour intégrer des modèles de comportement élasto-plastique, ainsi que la stratégie de résolution du système d'équations algébriques qui en résulte. Par la suite, nous montrons l'application de ces schémas sur les modèles introduits dans ce mémoire.

3.3 Méthodes de discrétisation temporelle

Nous décrirons ci-dessous les deux grandes familles de méthodes d'intégration que nous allons appliquer aux modèles de comportement.

3.3.1 Méthodes d'intégration explicite

Ces schémas d'intégration sont très pratiques pour la résolution des Equations Différentielles Ordinaires (EDO). Nous rappelons ici seulement les schémas à pas indépendant, c-à-d. où la valeur prédite à la fin de l'incrément ne dépend que de la solution obtenue à la fin de l'incrément précédent. Les trois schémas explicites qui seront utilisés sont : Euler explicite, Runge-Kutta d'ordre 2 et Runge-Kutta d'ordre 4.

Toutes les lois d'évolution des variables internes décrites au chapitre précédent sont de type EDO. Ainsi, on peut formellement regrouper toutes ces variables dans un seul vecteur $\mathbf{y}$ et écrire l'ensemble de ces lois sous la forme globale suivante :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(t, \mathbf{y}) \dot{\lambda} \quad (3.1)$$

Ensuite, on peut intégrer cet ensemble d'équations sur un incrément avec les schémas explicites présentés ci-dessous.

3.3.1.1 Méthode d'Euler explicite

Le schéma d'intégration le plus simple de ce système d'équations est le schéma d'Euler explicite qui estime l'incrément de $\mathbf{y}$ avec les variables du début d'incrément, c-à-d.

$$\mathbf{k}_1 = \Delta \mathbf{y} = \mathbf{h}(t_n, \mathbf{y}_n) \Delta \lambda_1 \quad (3.2)$$

Ainsi, la valeur de $\mathbf{y}$ à la fin de l'incrément est explicitement obtenue par

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1 \quad (3.3)$$

3.3.1.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 ou du point milieu est une amélioration de la méthode d'Euler explicite, en approchant la solution par le développement de Taylor limité à l'ordre 2. L'intégration se fait en deux étapes successives, où l'on utilise les variables $\mathbf{y}$ à l'instant n , ainsi que leur prédiction explicite $\mathbf{y}_{n+\frac{1}{2}}$.

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{h}(t_n, \mathbf{y}_n) \Delta \lambda_1 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{h}\left(t_n + \frac{1}{2} \Delta t, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2} \mathbf{k}_1\right) \Delta \lambda_2 \quad (3.5)$$

La solution est ainsi obtenue explicitement par

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad (3.6)$$

3.3.1.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

L'une des méthodes les plus populaires de ces schémas explicites est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, qui introduit quatre étapes d'estimations de l'incrément de $\mathbf{y}$, évaluées successivement comme suit :

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{h}(t_n, \mathbf{y}_n) \Delta\lambda_1 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{h}\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right) \Delta\lambda_2 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{h}\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right) \Delta\lambda_3 \quad (3.9)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{h}(t_n + \Delta t, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3) \Delta\lambda_4 \quad (3.10)$$

La solution est ainsi obtenue explicitement par

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\mathbf{k}_1}{6} + \frac{\mathbf{k}_2}{3} + \frac{\mathbf{k}_3}{3} + \frac{\mathbf{k}_4}{6} \quad (3.11)$$

3.3.1.4 Forme unifiée des trois méthodes

Toutes ces trois méthodes peuvent être regroupées en une seule écriture plus compacte afin de faciliter leur implantation numérique en utilisant un seul algorithme d'intégration. Cette forme est donnée par

$$\Delta\mathbf{y}_0 = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

$$\Delta\mathbf{y}_i = \mathbf{h}(t_n + a_i\Delta t, \mathbf{y}_n + a_i\Delta\mathbf{y}_{i-1}) \Delta\lambda_i \quad ; \quad i = 1 \text{ à } N \quad (3.13)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta\mathbf{y}_i \quad (3.14)$$

où les coefficients de pondération a_i et b_i , ainsi que l'ordre d'intégration N sont spécifiés par

$$\begin{cases} a_i = \{0\} & b_i = \{1\} & N = 1 & \text{EE} \\ a_i = \{0, \frac{1}{2}\} & b_i = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} & N = 2 & \text{R-K2} \\ a_i = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\} & b_i = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\} & N = 4 & \text{R-K4} \end{cases} \quad (3.15)$$

Cette forme est bien adaptée à une implantation modulaire des modèles de comportement présentés au chapitre précédent. En effet, elle permet de construire un seul algorithme avec une boucle sur les étapes définissant le schéma appliqué, et où l'intégration en chaque étape est de type Euler explicite. Nous verrons en détail son application au § 4.2.

3.3.2 Méthodes d'intégration implicite

Avec ces schémas d'intégration, le second membre est évalué entre autre avec la solution recherchée $\mathbf{y}_{n+1}$, qui est *a priori* l'inconnue du système, d'où le mot implicite. Ceci est la principale différence avec les schémas explicites où le second membre est évalué à partir d'un certain $\mathbf{y}$ connu à l'avance. Nous citons ici les trois principales méthodes implicites utilisées pour l'intégration des modèles de comportement élasto-plastique.

3.3.2.1 La thêta méthode

On trouve deux familles de schémas d'intégration implicite pour les équations différentielles de la forme :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}(t, \mathbf{y}) \quad (3.16)$$

Elles consistent à introduire un paramètre de pondération θ , compris entre 0 et 1, entre les valeurs de $\mathbf{y}$ ou de $\mathbf{H}$ du début d'incrément et de la fin d'incrément pour évaluer le second membre de l'équation (3.16). Ces schémas se présentent comme suit :

1. La méthode du point milieu généralisée est basée sur la pondération de $\mathbf{y}$ et sa formulation est donnée par

$$\mathbf{y}_{n+\theta} = (1-\theta)\mathbf{y}_n + \theta\mathbf{y}_{n+1} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{H}(t_{n+\theta}, \mathbf{y}_{n+\theta}) \quad (3.18)$$

2. La méthode des trapèzes généralisée est basée sur une pondération de la fonction $\mathbf{h}$ et sa formulation est donnée par

$$\mathbf{h}_{n+\theta} = (1-\theta)\mathbf{H}(t_n, \mathbf{y}_n) + \theta\mathbf{H}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \quad (3.19)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{h}_{n+\theta} \quad (3.20)$$

Si $\theta = 0$, nous retrouvons le schéma d'Euler explicite dans les deux cas. Dans les autres cas, les deux méthodes donnent un schéma implicite. Si $\theta = \frac{1}{2}$, le schéma est dit "semi implicite". Pour $\theta = 1$, le schéma est dit "Euler implicite". Ortiz et Popov (1985) montrent que la méthode du point milieu généralisée est inconditionnellement stable pour $\theta \geq \frac{1}{2}$ et conditionnellement stable pour $\theta < \frac{1}{2}$ avec une étude réalisée sur un modèle élastique parfaitement plastique indépendamment de la forme de la surface de charge. Par contre, la méthode des trapèzes généralisée est stable seulement pour $\theta = 1$ avec une surface de charge quelconque. Nous supposons que les propriétés de stabilité peuvent s'étendre aux modèles introduits dans ce travail, bien que les lois d'évolution des variables internes sont fortement non linéaires et le critère de plasticité est anisotrope.

3.3.2.2 La méthode asymptotique

Cette méthode est applicable uniquement pour des EDO du premier ordre de la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{y}} = \phi(\mathbf{y})[\mathbf{A}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}] \quad (3.21)$$

Avec $\phi(\mathbf{y})$ une fonction scalaire. C'est le cas de la plupart des lois d'évolution des modèles d'écrouissage présentés dans le paragraphe 2. Cette équation peut être intégrée exactement sous la forme suivante :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \exp\left[-\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \phi[\mathbf{y}(\xi)] d\xi\right] \mathbf{y}_n + \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \exp\left[\int_{t_n+\Delta t}^{\xi} \phi[\mathbf{y}(z)] dz\right] \phi[\mathbf{y}(\xi)] \mathbf{A}[\mathbf{y}(\xi)] d\xi \quad (3.22)$$

Cette méthode a été développée initialement par Freed et Walker (1992), qui l'ont appliquée principalement à des modèles de viscoplasticité.

Comme cette dernière expression est sous forme intégrale, Freed et Walker (1992) ont considéré plusieurs discrétisations de cette solution exacte. L'approximation de cette expression par la méthode du mi-point asymptotique donne

$$\mathbf{y}_{n+\theta} = e^{-\theta\phi(\mathbf{y}_{n+\theta})\Delta t} \mathbf{y}_n + \left[1 - e^{-\theta\phi(\mathbf{y}_{n+\theta})\Delta t}\right] \mathbf{A}(\mathbf{y}_{n+\theta}) \quad (3.23)$$

et pour $\theta = 1$, l'intégration asymptotique donne

$$\mathbf{y}_{n+1} = e^{-\phi(\mathbf{y}_{n+1})\Delta t} \mathbf{y}_n + \left[1 - e^{-\phi(\mathbf{y}_{n+1})\Delta t}\right] \mathbf{A}(\mathbf{y}_{n+1}) \quad (3.24)$$

C'est une équation implicite, puisque l'inconnue $\mathbf{y}_{n+1}$ apparaît dans le second membre.

3.4 Intégration des modèles de comportement

Nous nous intéressons à la résolution des deux modèles de comportement développés au chapitre 2, à savoir le modèle élasto-plastique et celui couplé à l'endommagement. Nous développons en premier une résolution du modèle de comportement élasto-plastique avec les schémas d'intégration explicite et puis implicite. Le cas du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement sera traité tout à la fin dans le contexte d'une intégration implicite uniquement.

En appliquant la méthode du point milieu généralisée aux équations différentielles du modèle élasto-plastique, on obtient les expressions suivantes :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.25)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+\theta} \quad (3.26)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, \mathbf{y}_{n+\theta}) \quad (3.27)$$

$$\Delta \lambda = \mathbf{h}_\lambda(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, \mathbf{y}_{n+\theta}) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.28)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta} = (1-\theta)\boldsymbol{\sigma}_n + \theta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{y}_{n+\theta} = (1-\theta)\mathbf{y}_n + \theta\mathbf{y}_{n+1} \quad (3.30)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+\theta} = \mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, \mathbf{y}_{n+\theta}) \quad (3.31)$$

et $\mathbf{h}_\lambda$ est déduit de l'expression du multiplicateur plastique (2.25) par

$$\mathbf{h}_\lambda = \frac{\mathbf{V} : \mathbf{C}}{H_\lambda} \quad (3.32)$$

3.4.1 Intégration explicite du modèle élasto-plastique

3.4.1.1 Forme discrétisée

L'intégration d'Euler explicite revient à prendre $\theta = 0$ dans les équations précédentes, ce qui donne les équations suivantes :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.33)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_n = \Delta \lambda \mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{y}_n) \quad (3.34)$$

$$\Delta \lambda = \mathbf{h}_\lambda(\boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{y}_n) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.35)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{y}_n) \quad (3.36)$$

Connaissant l'incrément de déformation totale et toutes les variables au début de l'incrément, l'ensemble de ces dernières équations suffit pour mettre à jour toutes les variables, c-à-d. le tenseur de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, et le vecteur $\mathbf{y}$ contenant toutes les variables internes.

L'intégration de ce modèle élasto-plastique par le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 ou d'ordre 4 peut se faire à travers la forme (3.33) à (3.36), où à chaque étape ($i = 1, \dots, N$) nous calculons les sous-incréments de toutes les variables comme suit :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^p) \quad (3.37)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^p = \Delta \lambda_i \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_i = \Delta \lambda_i \mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma}_n + a_i \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i-1}, \mathbf{y}_n + a_i \Delta \mathbf{y}_{i-1}) \quad (3.38)$$

$$\Delta \lambda_i = \mathbf{h}_\lambda(\boldsymbol{\sigma}_n + a_i \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i-1}, \mathbf{y}_n + a_i \Delta \mathbf{y}_{i-1}) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.39)$$

$$\Delta \mathbf{y}_i = \Delta \lambda_i \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_n + a_i \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i-1}, \mathbf{y}_n + a_i \Delta \mathbf{y}_{i-1}) \quad (3.40)$$

Avec comme valeurs initiales

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}, \quad \Delta \mathbf{y}_0 = \mathbf{0} \quad (3.41)$$

les contraintes et les variables internes seront réactualisées comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \boldsymbol{\sigma}_i \quad (3.42)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \mathbf{y}_i \quad (3.43)$$

Les coefficients de pondération a_i et b_i , ainsi que l'ordre d'intégration N sont définis par (3.15). On retrouve le schéma d'Euler explicite pour $N=1$, alors que pour $N=2$ ou 4 on obtient les schémas de Runge-Kutta d'ordre 2 et 4, respectivement. Certaines précautions doivent être prises afin de détecter en chaque étape le comportement à considérer, c'est-à-dire élasticité seulement, charge plastique ou décharge élastique. C'est uniquement dans le cas de charge plastique stricte que les sous-incréments des variables internes et du multiplicateur plastique seront calculés, autrement ils seront nuls.

3.4.1.2 Module tangent cohérent

Pour vérifier les équations d'équilibre résolues au moyen d'un code quasi-statique implicite, tel que ABAQUS/Standard, il est nécessaire de calculer le module tangent, défini comme le rapport d'une perturbation de l'incrément de contrainte sur une perturbation de l'incrément de déformation. Il est recommandé de calculer ce rapport à partir des équations discrétisées du modèle de comportement, pour être cohérent avec le schéma d'intégration utilisé (d'où l'appellation module cohérent ou aussi module algorithmique). En effet comme cela a été montré dans plusieurs travaux (Simo et Taylor, 1985 ; Chaboche et Cailletaud, 1996 etc.), le module tangent cohérent a une influence directe sur la vitesse de convergence de l'algorithme de résolution des équations d'équilibre et par conséquent sur le temps de calcul. Il s'exprime par

$$\mathbf{C}^{Algo} = \frac{D(\Delta \boldsymbol{\sigma})}{D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon})} \quad (3.44)$$

Pour déterminer l'expression de ce module tangent cohérent, nous nous basons sur les équations (3.37) à (3.43).

L'équation (3.42) donne l'incrément de la contrainte par

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^N b_i \Delta \boldsymbol{\sigma}_i \quad (3.45)$$

En différentiant cette relation et en tenant compte de (3.37), on obtient

$$D(\Delta \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i=1}^N b_i D(\Delta \boldsymbol{\sigma}_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ b_i \mathbf{C}_i : \left[D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) - D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^p) \right] \right\} \quad (3.46)$$

Que l'on peut écrire comme suit

$$D(\Delta \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i=1}^N \left[b_i \mathbf{C}_i : D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \right] = \left(\sum_{i=1}^N b_i \mathbf{C}_i \right) : D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.47)$$

tel que

$$\mathbf{C}_i : D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{C} : \left[D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) - D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^p) \right] \quad (3.48)$$

En suivant la même démarche appliquée pour le calcul du module tangent analytique (voir § 2.2.5), nous pouvons montrer que $\mathbf{C}_i$ prends une forme similaire à (2.30), c-à-d.

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{C} - \alpha \left(\frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}_i) \otimes (\mathbf{V}_i : \mathbf{C})}{H_{\lambda i}} \right) \quad (3.49)$$

tel que $\alpha = 1$ si l'on est en charge plastique pendant le sous-incrément et 0 autrement.

De la relation (3.47), le module tangent cohérent est simplement déduit par la sommation des contributions de chaque étape, pondérées par les facteurs b_i , c-à-d.

$$\mathbf{C}^{Algo} = \sum_{i=1}^N b_i \mathbf{C}_i \quad (3.50)$$

En particulier, lorsque $N = 1$, ce qui correspond au schéma d'Euler explicite, le module tangent cohérent s'identifie au module tangent analytique.

3.4.1.3 Algorithme d'intégration

L'algorithme d'intégration de la loi de comportement dans le cas d'un schéma explicite est donné par le Tableau 3.1 ci-après. Pour un incrément de déformation donné, on effectue N sous-incréments en fonction du degré du schéma considéré. Dans notre cas, N prend les valeurs 1, 2 ou 4 correspondants, respectivement, aux schémas explicites d'Euler, Runge-Kutta d'ordre 2 et 4. Dans chacune des étapes notées i avec $(i = 1, \dots, 4)$, on évalue le critère de plasticité avec les variables d'entrée afin de détecter si le comportement est élastique ou élasto-plastique. Si $F_i < 0$, le calcul est élastique et seul le sous-incrément de la contrainte est à calculer puisque le sous-incrément des variables internes est nul.

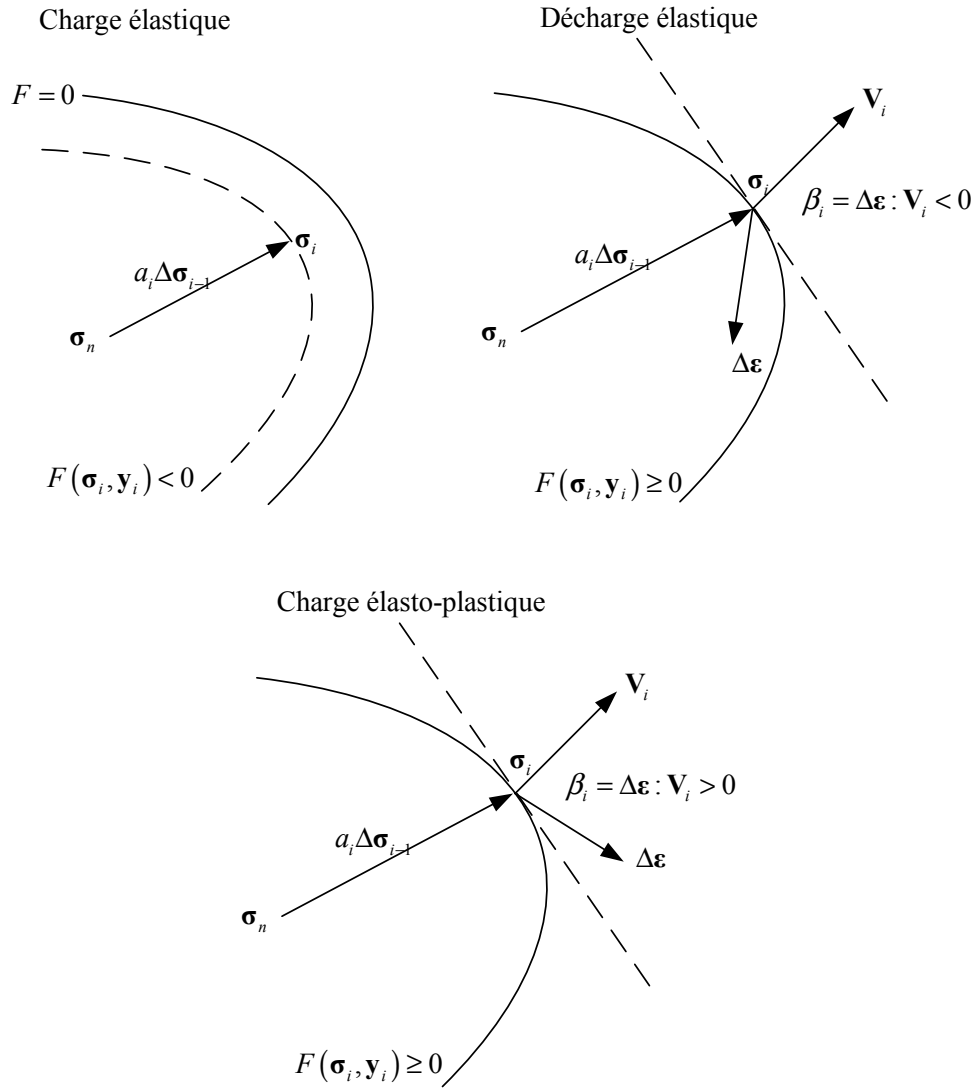


Figure 3.1. Les différents comportements que l'on retrouve lors d'un sous-incrément de la méthode d'intégration explicite.

Sinon, on vérifie si l'on est en décharge élastique, en calculant un paramètre d'orientation de la direction d'écoulement plastique par rapport à l'incrément de déformation comme suit :

$$\beta_i = \Delta \epsilon : \mathbf{V}_i \quad (3.51)$$

Si $\beta_i < 0$, on est en décharge élastique et on effectue un calcul élastique, comme dans le cas où $F_i < 0$. Sinon ($F_i \geq 0$ et $\beta_i \geq 0$), on effectue un calcul élasto-plastique, en calculant l'incrément des variables internes et de la contrainte et également la contribution élasto-plastique au module tangent cohérent. A la sortie de la boucle sur les étapes, la mise à jour des variables est simplement réalisée en ajoutant les contributions correspondantes de chaque étape, pondérées par les facteurs b_i de la méthode sélectionnée. La Figure 3.1 montre les différentes situations de chargement qui peuvent être rencontrées sur une étape de la méthode explicite. Le Tableau 3.1 illustre clairement les étapes de résolution de la loi de comportement élasto-plastique.

Tableau 3.1 : Algorithme d'intégration par un schéma explicite dans le repère tournant.

1. Données d'entrée : incrément de déformation, contrainte et variables internes du début d'incrément : $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}_n$ et $\mathbf{y}_n$.

2. Initialiser les sous-incréments pour la boucle sur les étapes : $\Delta \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$ et $\Delta \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$

3. Boucle sur les étapes :

Pour i allant de 1 à N :

Calculer les variables d'entrée de l'étape i

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_n + a_i \Delta \boldsymbol{\sigma}_{i-1} \quad \mathbf{y}_i = \mathbf{y}_n + a_i \Delta \mathbf{y}_{i-1}$$

Calculer le critère de plasticité : $F_i(\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{y}_i) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}'_i - \mathbf{X}_i) - Y(\mathbf{y}_i)$

3.1. Si $F_i < 0$ alors, calcul élastique :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad \Delta \mathbf{y}_i = \mathbf{0} \quad \mathbf{C}_i^{Algo} = \mathbf{C}$$

3.2. Sinon : calcul de $\beta_i = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{V}_i$,

- Si $\beta_i < 0$ alors, calcul élastique comme dans 3.1.

- Sinon, calcul élasto-plastique :

$$\mathbf{V}_i = \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_i \quad \Delta \lambda_i = \frac{\mathbf{V}_i : \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{H_{\lambda_i}} \implies \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^p = \mathbf{V}_i \Delta \lambda_i$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^p) \quad \Delta \mathbf{y}_i = \Delta \lambda_i \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{y}_i)$$

$$\mathbf{C}_i^{Algo} = \mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}_i) \otimes (\mathbf{V}_i : \mathbf{C})}{H_{\lambda_i}}$$

Fin de la boucle

4. Mise à jour : calcul des variables en fin d'incrément :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \boldsymbol{\sigma}_i \quad \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^N b_i \Delta \mathbf{y}_i$$

5. Dédire le module tangent cohérent :

$$\mathbf{C}^{Algo} = \sum_{i=1}^N b_i \mathbf{C}_i^{Algo}$$

6. Retourner $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ et $\mathbf{C}^{Algo}$ pour vérifier l'équilibre.

3.4.1.4 Discussion

Comme on peut le constater, le critère de plasticité n'est pas vérifié à la fin de l'incrément, puisque l'ensemble des équations (3.37) à (3.43) suffit à mettre à jour toutes les variables. C'est le principal reproche qui est fait à ces schémas explicites. Pour que ces schémas soient performants, il faut les accompagner d'une adaptation de l'incrément de chargement. D'autres méthodes explicites, telle que la méthode de Runge-Kutta emboîtée (Press et al. 1992 ; Adam, 2003 etc.), permettent de donner une estimation de l'erreur sur la solution et ainsi, d'adapter l'incrément de chargement.

D'un autre côté, l'adaptation du pas de chargement afin de mieux satisfaire le critère de plasticité peut poser des problèmes de temps de calcul. En effet, ces schémas explicites exigent de prendre des incréments de chargement très petits ce qui augmente considérablement les temps de calculs. Pour éviter ce problème et pour répondre au besoin d'utiliser de gros incréments de chargement, il est fort intéressant d'introduire des schémas d'intégration incluant le critère de plasticité dans l'ensemble des équations à résoudre. Le schéma du retour radial associé à une intégration implicite des équations sous forme différentielle, permet de répondre à ces deux exigences ; c'est l'objet des paragraphes suivants.

3.4.2 Intégration implicite du modèle élasto-plastique

Le but des méthodes d'intégration implicite citées précédemment est de transformer, dans un premier temps, les lois d'évolution données sous forme différentielle en équations algébriques. A ces équations algébriques, sera rajoutée celle du critère de plasticité afin de construire un système complet d'équations algébriques permettant, après résolution, de réactualiser l'ensemble des variables du modèle de comportement.

On estime que la méthode du point milieu asymptotique possède au moins les mêmes propriétés de stabilité que la méthode du point milieu généralisée, car c'est une approximation de la solution exacte et non pas de l'équation différentielle elle-même. Ainsi, la valeur de $\theta = 1$ recommandée par Ortiz et Popov (1985) sera adoptée pour les deux méthodes.

En appliquant la méthode du point milieu généralisée ou des trapèzes généralisée aux équations différentielles du modèle élasto-plastique, avec la valeur particulière de $\theta = 1$, ce qui correspond à l'application du schéma d'Euler implicite, on obtient les expressions suivantes :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} = \Delta \lambda \mathbf{V}_{n+1} \quad (3.52)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \quad (3.53)$$

pour l'intégration de la loi d'écoulement plastique et des lois d'évolution des variables internes.

Par ailleurs, on sait que l'équation (3.1) peut être intégrée par la méthode du point milieu asymptotique si elle est de la forme (3.21). Dans ces conditions, $\Delta \mathbf{y}$ est fonction non linéaire de $\Delta \lambda$. Le résultat peut s'écrire, dans le cas où $\theta = 1$, sous la forme

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{y}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}, \Delta \lambda) \quad (3.54)$$

A la différence des schémas explicites où toutes les variables de fin d'incrément sont déduites sans satisfaire le critère de plasticité, c-à-d. sans garantir $F_{n+1} = 0$, la résolution implicite tient compte de la vérification du critère de plasticité en fin d'incrément. Le système d'équations algébriques ainsi à résoudre contient les équations suivantes :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.55)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} = \Delta \lambda \mathbf{V}_{n+1} \quad (3.56)$$

$$F_{n+1} = 0 \quad (3.57)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \quad (3.58)$$

Dans les cas où le schéma asymptotique est utilisé, l'équation (3.58) est remplacée par (3.54), le nombre d'inconnues et d'équations du système reste le même.

La difficulté, lors de la résolution de ce système, réside dans les seconds membres qui sont fonctions des inconnues du problème, à la différence des schémas explicites qui donnent explicitement ces inconnues. Il est donc nécessaire de mettre au point une méthodologie de résolution adéquate pour retrouver la solution à moindre coût, tout en assurant la précision requise. Nous développons dans ce qui suit trois démarches de résolution du système d'équations algébriques non linéaires (3.55) à (3.58).

3.4.2.1 Méthode générale

3.4.2.1.1 Forme discrétisée

Le principe de cette méthode est de résoudre ce système tel qu'il est (Keavey, 2002), c'est-à-dire sans simplifier le problème (réduire le nombre d'équations et d'inconnues). Ce système peut s'écrire sous la forme symbolique suivante :

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varepsilon}^p}, R_{\lambda}, \mathbf{R}_{\mathbf{y}}]^T = \mathbf{0} \quad (3.59)$$

avec

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}} = \Delta \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbf{0} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varepsilon}^p} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - \Delta \lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} = \mathbf{0} \quad (3.61)$$

$$R_{\lambda} = F_{n+1} = 0 \quad (3.62)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}} = \Delta \mathbf{y} - \Delta \lambda \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

3.4.2.1.2 Résolution par Newton-Raphson

Ce système d'équations algébriques non linéaires est à résoudre par la méthode de Newton-Raphson. Ceci revient à adopter une résolution itérative qui passe par la linéarisation de ce système sous la forme

$$L(\mathbf{R}^i) = \mathbf{R}^i + \delta \mathbf{R}^i = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

qui peut s'écrire également sous la forme développée suivante :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|^i \delta \boldsymbol{\sigma} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right|^i \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \right|^i \delta \lambda + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{y}} \right|^i \delta \mathbf{y} = -\mathbf{R}^i \quad (3.65)$$

où l'indice i désigne la i ème itération de Newton-Raphson. En calculant toutes les dérivées, le système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante dans le cas de l'intégration d'Euler implicite :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Delta \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{I} & -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & -\Delta \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{0} & 0 & \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \\ -\Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{0} & -\mathbf{h} & \mathbf{I} - \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \delta \lambda \\ \delta \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{C}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ -\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \Delta \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ -F \\ -\Delta \mathbf{y} + \Delta \lambda \mathbf{h} \end{bmatrix}^i \quad (3.66)$$

A noter que l'intégration asymptotique des lois d'évolution des variables internes ne modifie pas la structure générale du système. Seule l'équation (3.63) est à remplacer par (3.54).

3.4.2.1.3 Module tangent cohérent

Après convergence vers la solution, les équations discrètes (3.55) à (3.58) sont satisfaites, ainsi le système (3.66) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Delta \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{I} & -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & -\Delta \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{0} & 0 & \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \\ -\Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{0} & -\mathbf{h} & \mathbf{I} - \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D\boldsymbol{\sigma} \\ D\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ D\lambda \\ D\mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} D\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

L'expression du module tangent cohérent est obtenue simplement par élimination de Gauss de la matrice Jacobienne et du second membre, c'est-à-dire construire une triangulation supérieure de la matrice Jacobienne. Ce qui donne une seule équation de la forme :

$$\mathbf{W}_1 : D\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{W}_2 : D\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.68)$$

Le module tangent cohérent est ainsi déduit par :

$$\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{D\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{W}_1^{-1} : \mathbf{W}_2 \quad (3.69)$$

3.4.2.1.4 Discussion

Cette méthode a été appliquée par Keavey (2002) pour de simples modèles de plasticité. Elle est générale car elle ne fait aucune hypothèse sur la forme des équations constitutives. Son principal inconvénient est le nombre d'équations à résoudre à chaque itération de Newton-Raphson. En effet, la taille du système dépend fortement du nombre de variables internes. Ce qui peut poser des difficultés de convergence de la solution, du fait de la non-linéarité des lois d'évolution qui peuvent être introduites. Le modèle d'écrouissage de Teodosiu, introduisant des lois d'évolution fortement non linéaires, en est un exemple, en plus du nombre de variables (en termes de composantes) qui avoisine la cinquantaine.

3.4.2.2 Méthode de condensation

3.4.2.2.1 Formulation

C'est une méthode qui vise à diminuer la taille du système à résoudre par Newton-Raphson et à déduire le reste des variables explicitement. Cette méthode, proposée dans le manuel théorique du code ABAQUS (2003), suppose que la loi d'élasticité et les lois d'évolution des variables internes sont satisfaites à chaque itération de Newton-Raphson, c'est-à-dire.

$$\begin{bmatrix} -\Delta\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{C}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ -\Delta\mathbf{y} + \Delta\lambda\mathbf{h} \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Ceci permet de réduire considérablement le nombre d'équations à résoudre par Newton-Raphson. Avec les hypothèses précédentes, le système (3.66) prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\Delta\lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{I} & -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & -\Delta\lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{0} & 0 & \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \\ -\Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{0} & -\mathbf{h} & \mathbf{I} - \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\sigma} \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \delta\lambda \\ \delta\mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p + \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ -F \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^i \quad (3.71)$$

En vue de faire une substitution de termes dans les équations, on écrit ce système sous la forme suivante :

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{C} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.72)$$

$$-\Delta \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} \delta \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \delta \lambda - \Delta \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} = -\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \Delta \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} = -F \quad (3.74)$$

$$-\Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \delta \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{h} \delta \lambda + \left[\mathbf{I} - \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}} \right] \delta \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3.75)$$

Ce sont les équations discrètes de base utilisées dans le manuel théorique du code ABAQUS. La manipulation de ces équations dans le but de construire une forme réduite est longue à réaliser ; seules les grandes lignes sont récapitulées ici.

En utilisant les notations suivantes :

$$\tilde{\mathbf{H}} = \left[\mathbf{I} - \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}} \right]^{-1} \mathbf{h} \quad (3.76)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \Delta \lambda \left[\mathbf{I} - \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.77)$$

l'élimination des équations (3.72), (3.74) et (3.75) donne la relation

$$\left[\mathbf{I} + \Delta \lambda \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{C} \right] \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - \tilde{\mathbf{n}} \delta \lambda = -\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \Delta \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.78)$$

où

$$\tilde{\mathbf{N}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{y}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (3.79)$$

$$\tilde{\mathbf{n}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \Delta \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{y}} \tilde{\mathbf{H}} \quad (3.80)$$

A partir des équations (3.72), (3.74) et (3.75), on déduit l'équation suivante :

$$\tilde{\mathbf{m}} \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \tilde{\mathbf{H}} \delta \lambda = F \quad (3.81)$$

où

$$\tilde{\mathbf{m}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (3.82)$$

Des deux relations (3.78) et (3.81), $\delta\lambda$ peut être éliminé pour obtenir la relation finale suivante :

$$[\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{Z} \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{C}] \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{Z} \left[-\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] + \frac{1}{d} \tilde{\mathbf{n}} F \quad (3.83)$$

où

$$\mathbf{Z} = \mathbf{I} - \frac{1}{d} \tilde{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{m}} \mathbf{C} \quad (3.84)$$

$$d = \tilde{\mathbf{m}} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{n}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} \tilde{\mathbf{H}} \quad (3.85)$$

La seule inconnue dans la relation (3.83) est la correction plastique $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$ qui peut être déduite une fois que le second membre et le terme multipliant $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$ sont évalués avec les valeurs des variables de l'itération précédente. La correction $\delta\lambda$ du multiplicateur plastique est ensuite déduite par la relation (3.81), qui peut s'écrire :

$$\delta\lambda = \frac{1}{d} \Delta\lambda \tilde{\mathbf{m}} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{d} \tilde{\mathbf{m}} \mathbf{C} \left[-\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] + \frac{1}{d} F \quad (3.86)$$

où le second membre est évalué avec les variables de l'itération précédente.

Connaissant $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$ et $\delta\lambda$ à l'itération courante, il est possible de calculer la correction de la contrainte $\delta \boldsymbol{\sigma}$ par le biais de la relation (3.72) et par la suite, la correction des variables internes $\delta \mathbf{y}$ par la relation (3.75). Toutes les variables seront ensuite réactualisées afin de passer à l'itération suivante. Le système de départ est ainsi résolu d'une manière itérative jusqu'à convergence.

3.4.2.2.2 Module tangent cohérent

Une expression similaire à (3.69) peut être retrouvée en écrivant les équations du système (3.67) explicitement, c'est-à-dire

$$D\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{C} D\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.87)$$

$$-\Delta\lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} D\boldsymbol{\sigma} + D\boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} D\lambda - \Delta\lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{y}} D\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} D\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} D\mathbf{y} = 0 \quad (3.89)$$

$$-\Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} D\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{h} D\lambda + \left[\mathbf{I} - \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}} \right] D\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3.90)$$

Par substitutions de plusieurs termes, comme dans le cas de la méthode générale, nous arrivons à l'expression suivante du module tangent cohérent :

$$\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{D\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{C} : \mathbf{Z} : \tilde{\mathbf{N}} \right]^{-1} : \mathbf{C} : \mathbf{Z} \quad (3.91)$$

3.4.2.2.3 Discussion

Le principal avantage de cette méthode est la résolution du système (3.83) qui contient six équations au maximum pour calculer $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ à chaque itération et d'en déduire le reste des inconnues explicitement. Par contre, son inconvénient est le calcul du terme $\tilde{\mathbf{H}}$ de la relation (3.76) à chaque itération et qui nécessite, en effet, une inversion d'une matrice dont la taille est liée directement au nombre de variables internes. Nous retombons ainsi dans les mêmes difficultés que ceux de la méthode générale qui nécessite l'inversion d'une matrice Jacobienne de grande taille, dès lors que le nombre de variables internes est important.

Cette méthode est en quelque sorte une variante de la méthode générale. Il nous semble donc que ces deux méthodes ne sont intéressantes que si le nombre de variables internes est faible. Elles ne sont donc efficacement applicables que pour l'intégration de simples modèles de comportement. De plus, l'inversion de matrices de grandes tailles, ne peut qu'altérer la convergence, notamment si les lois d'évolution des variables internes introduites sont fortement non linéaires.

Une méthode basée sur la manipulation des équations du système (3.59), afin d'extraire la forme la plus réduite possible à résoudre par une méthode itérative et sans introduire d'inversions de matrices de grandes tailles, a donc un grand intérêt. En effet, ceci aura une conséquence directe sur la réduction du temps de calcul consacré à la résolution de la loi de comportement dans le contexte d'un calcul de structure par élément finis. De plus, ceci contribuera également à réduire les erreurs numériques, liées généralement à la manipulation de gros systèmes d'équations, et donc à obtenir des résultats plus fiables.

Néanmoins, une telle démarche doit assurer un minimum de généralité, c'est-à-dire la méthode doit couvrir une large classe de lois d'évolutions de variables internes. Dans la littérature, il semble que c'est la démarche la plus suivie, au lieu de passer par des formalismes standard de résolution trop coûteux. Nous allons développer dans ce qui suit cette démarche qui nous permet de tenir compte de plusieurs modèles d'écrouissage, plus particulièrement le modèle de Chaboche-Marquis et celui de Teodosiu-Hu adoptés dans notre travail.

3.4.2.3 Méthode de résolution adaptative

3.4.2.3.1 Forme discrétisée

Cette méthode permet un gain de temps considérable, bien qu'elle présente l'inconvénient d'être beaucoup moins générale que les précédentes ; c'est une résolution qui s'adapte à chaque cas étudié. En effet, comme son nom l'indique, cette méthode ne s'applique que pour une classe de modèles ayant une certaine forme. Dans notre cas c'est la forme donnée au § 2.2, faisant intervenir les deux modèles d'écrouissage, à savoir le modèle classique de Chaboche-Marquis et microstructural de Teodosiu-Hu.

Le principe consiste toujours à construire un système algébrique, le plus réduit possible, à résoudre par la méthode de Newton-Raphson. En revanche, on évitera cette fois les inversions de matrices de grandes tailles ; nous aurons seulement à inverser la matrice liée à la résolution itérative du système réduit. Pour cela, on se basera sur la forme particulière des lois d'évolution des variables internes et la façon dont elles sont couplées. Le reste des variables sera déduit explicitement.

Commençons par l'équation discrétisée de la loi d'élasticité, la contrainte à la fin de l'incrément est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.92)$$

où l'incrément de la déformation plastique est donné par la loi de normalité sous la forme

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} \right|_{n+1} = \Delta \lambda \mathbf{V}_{n+1} \quad (3.93)$$

qui est écrite ici de manière différente mais équivalente à celle donnée par l'équation (3.56). En effet, $\mathbf{V}$ est écrit ici comme la dérivée de F par rapport à $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}$. Pour définir cette nouvelle variable, on a besoin de la décomposition de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ en une partie déviatorique et une partie sphérique. En considérant le cas de l'élasticité isotrope, on a

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_n + 2G\Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - 2G\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.94)$$

$$\sigma^s_{n+1} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_n) + K \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.95)$$

Par la soustraction de la contrainte de rappel $\mathbf{X}_{n+1}$, donnée par

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \Delta \mathbf{X} \quad (3.96)$$

de l'équation (3.94), on obtient

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_n - \mathbf{X}_n + 2G\Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - 2G\Delta \lambda \mathbf{V}_{n+1} - \Delta \mathbf{X} \quad (3.97)$$

En introduisant la nouvelle variable $\mathbf{T}$, cette dernière équation peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_n + 2G\Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - 2G\Delta \lambda \mathbf{V}_{n+1} - \Delta \mathbf{X} \quad (3.98)$$

D'un autre côté, le critère de plasticité doit être satisfait à la fin de l'incrément pour un chargement élasto-plastique, ce qui revient à écrire

$$F_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1} - Y_{n+1} = 0 \quad (3.99)$$

Pour les modèles de comportement retenus et les surfaces de charge associées (voir Chapitre 2), la contrainte équivalente $\bar{\sigma}_{n+1}$ est fonction uniquement de la contrainte efficace $\mathbf{T}_{n+1}$. Pour la fonction Y_{n+1} et l'incrément de l'écrouissage cinématique $\Delta \mathbf{X}$, nous montrons

que pour le modèle de Chaboche-Marquis et pour le schéma implicite considéré, ils sont fonctions uniquement de l'incrément du multiplicateur plastique $\Delta\lambda$ et de la nouvelle variable $\mathbf{T}_{n+1}$. Pour ce qui est du modèle d'écrouissage de Teodosiu-Hu, la fonction Y_{n+1} et l'incrément de l'écrouissage cinématique $\Delta\mathbf{X}$, dépendront également seulement du couple $(\Delta\lambda, \mathbf{T}_{n+1})$ moyennant des hypothèses qui seront justifiées plus loin et qui sont basées sur la physique du problème (vitesses de variation de certaines variables par rapport à d'autres et la façon particulière dont certaines variables sont couplées aux autres variables). Dans ces conditions, (3.98) et (3.99) forment un système de sept équations algébriques non linéaires (au maximum) que l'on peut résoudre par la méthode de Newton-Raphson pour le calcul de $\mathbf{T}_{n+1}$ et $\Delta\lambda$. Le système s'écrit, avec comme inconnues principales $(\mathbf{T}_{n+1}, \Delta\lambda)$, sous la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n - 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}' + 2G\Delta\lambda\mathbf{V}(\mathbf{T}_{n+1}) + \Delta\mathbf{X}(\mathbf{T}_{n+1}, \Delta\lambda) \\ \bar{\sigma}(\mathbf{T}_{n+1}) - Y(\mathbf{T}_{n+1}, \Delta\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

3.4.2.3.2 Résolution par Newton-Raphson

Le système (3.100) peut s'écrire également sous la forme symbolique suivante :

$$\mathbf{R}(\mathbf{T}_{n+1}, \Delta\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

L'application de la méthode de Newton-Raphson revient à adopter un schéma itératif sur le système linéarisé suivant

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{z}} \right| \delta \mathbf{z}^i = -\mathbf{R}^i \quad (3.102)$$

où le vecteur inconnu $\mathbf{z}$ et la matrice Jacobienne $\mathbf{J}$ sont donnés, respectivement, par

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

$$\mathbf{J} = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{z}} \right| = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}] & [\mathbf{c}] \\ [\mathbf{b}] & d \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

et les termes $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et d sont donnés, respectivement, par

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{T}} \quad (3.105)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} \quad (3.106)$$

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \Delta\lambda} \quad (3.107)$$

$$d = \frac{\partial F}{\partial \Delta \lambda} \quad (3.108)$$

A partir des expressions de $\mathbf{G}$ et F , on déduit $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et d par

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + 2G\Delta\lambda\mathbf{Q} + \frac{\partial\Delta\mathbf{X}}{\partial\mathbf{T}} \quad (3.109)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial\mathbf{T}} \quad (3.110)$$

$$\mathbf{c} = 2G\mathbf{V} + \frac{\partial\Delta\mathbf{X}}{\partial\Delta\lambda} \quad (3.111)$$

$$d = -\frac{\partial Y}{\partial\Delta\lambda} \quad (3.112)$$

où

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{T}} \quad (3.113)$$

Plusieurs termes sont à définir dans le système (3.102). Les expressions de $\bar{\sigma}$, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{Q}$ dépendent de la surface de charge retenue. Les expressions de $\Delta\mathbf{X}$, Y et des dérivées $\frac{\partial\Delta\mathbf{X}}{\partial\mathbf{T}}$, $\frac{\partial\Delta\mathbf{X}}{\partial\Delta\lambda}$, $\frac{\partial Y}{\partial\mathbf{T}}$ et $\frac{\partial Y}{\partial\Delta\lambda}$ dépendent du modèle d'écrouissage, ainsi que du schéma d'intégration implicite adopté ; dans notre cas c'est l'intégration asymptotique. Nous développons, dans ce qui suit, leur calcul pour chaque modèle.

Dans le paragraphe qui va suivre, nous allons détailler l'application de cette méthode de résolution pour le modèle élasto-plastique avec la prise en compte des modèles d'écrouissage introduits au § 2.4. Le traitement du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement avec cette méthode sera fait à part, avec une adaptation de la méthode du fait de l'introduction de la loi d'évolution de l'endommagement.

3.4.2.3.3 Cas du modèle d'écrouissage de Chaboche-Marquis

Dans ce modèle, les variables internes sont R et $\mathbf{X}$. L'intégration par la méthode asymptotique de la loi d'évolution de $\mathbf{X}$ donne

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n e^{-C_X \Delta\lambda} + X_{sat} \frac{\mathbf{T}_{n+1}}{\sigma_{n+1}} (1 - e^{-C_X \Delta\lambda}) \quad (3.114)$$

d'où

$$\Delta\mathbf{X} = \Delta\mathbf{X}(\mathbf{T}_{n+1}, \Delta\lambda) = \left(X_{sat} \frac{\mathbf{T}_{n+1}}{\sigma_{n+1}} - \mathbf{X}_n \right) (1 - e^{-C_X \Delta\lambda}) \quad (3.115)$$

L'expression de Y est donnée par

$$Y_{n+1} = Y_0 + R_{n+1} \quad (3.116)$$

où l'intégration asymptotique de R nous donne

$$R_{n+1} = R(\Delta\lambda) = R_n + (R_{sat} - R_n)(1 - e^{-C_R \Delta\lambda}) \quad (3.117)$$

3.4.2.3.4 Cas du modèle d'écrouissage de Teodosiu-Hu

Ce modèle fait intervenir les quatre variables internes R , $\mathbf{X}$, $\mathbf{S}$ et $\mathbf{P}$. L'intégration par la méthode asymptotique de la loi d'évolution de $\mathbf{X}$ donne

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n e^{-C_X \Delta\lambda} + X_{n+1}^{sat} \frac{\mathbf{T}_{n+1}}{\sigma_{n+1}} (1 - e^{-C_X \Delta\lambda}) \quad (3.118)$$

où X_{sat} est fonction des variables de fin d'incrément, donnée par

$$X_{n+1}^{sat} = X_0 + (1 - f) \sqrt{r |\mathbf{S}_{n+1}|^2 + (1 - r) S_{Dn+1}^2} \quad (3.119)$$

On obtient ainsi

$$\Delta\mathbf{X} = \left(X_{n+1}^{sat} \frac{\mathbf{T}_{n+1}}{\sigma_{n+1}} - \mathbf{X}_n \right) (1 - e^{-C_X \Delta\lambda}) \quad (3.120)$$

L'expression de Y est donnée par

$$Y_{n+1} = Y_0 + R_{n+1} + f |\mathbf{S}|_{n+1} \quad (3.121)$$

où l'intégration asymptotique de R nous donne

$$R_{n+1} = R(\Delta\lambda) = R_n + (R_{sat} - R_n)(1 - e^{-C_R \Delta\lambda}) \quad (3.122)$$

et l'expression de $|\mathbf{S}|_{n+1}$ est donnée par

$$|\mathbf{S}|_{n+1} = \sqrt{S_{Dn+1}^2 + |\mathbf{S}_L|_{n+1}^2} \quad (3.123)$$

A ce stade, Y_{n+1} dépend de $|\mathbf{S}|_{n+1}$ et de $\Delta\lambda$ à travers R_{n+1} , et $\Delta\mathbf{X}$ dépend de $\Delta\lambda$ et de $|\mathbf{S}|_{n+1}$ et S_{Dn+1} à travers X_{n+1}^{sat} . Le problème n'est pas exactement exprimé sous la forme du système (3.100) dans lequel les seules inconnues sont $\mathbf{T}_{n+1}$ et $\Delta\lambda$. Pour pouvoir entrer ce modèle d'écrouissage dans notre algorithme de résolution, des hypothèses qui seront justifiées ci-après et qui sont basées sur la cinétique des lois d'évolutions (vitesses de variation de certaines variables par rapport à d'autres) seront introduites. Nous nous appuyerons pour cela sur les hypothèses proposées par Teodosiu.

Le modèle contient cinq lois d'évolutions sous forme d'équations différentielles. Vue la forme de ces équations et la nature de l'évolution des variables entre elles, des hypothèses s'avèrent intéressantes à prendre en compte afin de simplifier l'intégration du modèle. En effet, l'écroutissage cinématique $\mathbf{X}$ évolue plus vite par rapport aux autres variables, suivi de l'écroutissage isotrope R et enfin des variables internes $\mathbf{S}$ et $\mathbf{P}$. Ceci est dû à l'écart entre les vitesses de saturation de ces variables, traduit symboliquement par :

$$C_X \gg C_R > C_{SD}, C_{SL}, C_P \quad (3.124)$$

Une autre grandeur qui a une variation rapide, notamment lors d'un changement du trajet de déformation, est la direction de l'écoulement plastique $\mathbf{N} = \mathbf{D}^p / |\mathbf{D}^p|$.

Avec toutes ces observations, on peut introduire les hypothèses simplificatrices suivantes lors de l'intégration des lois d'évolution :

- Les fonctions g et h , qui interviennent dans la loi d'évolution (2.64) de S_D , ainsi que la fonction X_{sat} qui intervient dans (3.118), seront évaluées avec leurs valeurs du début d'incrément.
- La normale $\mathbf{N}$ sera prise constante et égale à sa valeur de fin d'incrément.

Les lois d'évolution peuvent être intégrées ainsi par la méthode asymptotique, de telle façon à obtenir les variables internes en fin d'incrément comme fonctions uniquement des inconnues $\mathbf{T}_{n+1}$ et $\Delta\lambda$ du système (3.100), c-à-d.

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{T}_{n+1}, \Delta\lambda) \quad (3.125)$$

L'intégration asymptotique des lois d'évolution de S_D et $\mathbf{S}_L$ donne les expressions suivantes :

$$S_{Dn+1} = S_{Dn} e^{-C_{SD}(g_n+h_n)\Delta\lambda} + S_{sat} \frac{g_n}{(g_n+h_n)} \left(1 - e^{-C_{SD}(g_n+h_n)\Delta\lambda}\right) \quad (3.126)$$

$$\mathbf{S}_{Ln+1} = |\mathbf{S}_L|_{n+1} \frac{\mathbf{S}_{Ln}}{|\mathbf{S}_L|_n} \quad (3.127)$$

tel que

$$|\mathbf{S}_L|_{n+1} = \left(|\mathbf{S}_L|_n^{-n_L} + n_L \frac{C_{SL}}{S_{sat}^{n_L}} \Delta\lambda \right)^{-\frac{1}{n_L}} \quad (3.128)$$

où les fonctions g et h sont évaluées avec leurs valeurs du début d'incrément et s'expriment comme suit :

$$h_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathbf{X}_n : \mathbf{N}_n}{X_n^{sat} \mathbf{n}_n : \mathbf{N}_n} \right) \quad (3.129)$$

$$g_n = \begin{cases} 1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \left| \frac{S_{Dn}}{S_{sat}} - \mathbf{P}_n : \mathbf{N}_n \right| & \text{si } \mathbf{P}_n : \mathbf{N}_n \geq 0 \\ (1 + \mathbf{P}_n : \mathbf{N}_n)^{n_p} \left(1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \frac{S_{Dn}}{S_{sat}} \right) & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.130)$$

Connaissant S_{Dn+1} et $|\mathbf{S}_L|_{n+1}$, $\mathbf{S}_{n+1}$ est simplement déduit par

$$\mathbf{S}_{n+1} = S_{Dn+1} \mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1} + |\mathbf{S}_L|_{n+1} \frac{\mathbf{S}_{Ln}}{|\mathbf{S}_L|_n} \quad (3.131)$$

L'intégration asymptotique de la loi d'évolution de $\mathbf{P}$ donne

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n + (\mathbf{N}_{n+1} - \mathbf{P}_n) (1 - e^{-C_P \Delta \lambda}) \quad (3.132)$$

La direction de l'écoulement plastique $\mathbf{N}_{n+1}$ est fonction de $\mathbf{T}_{n+1}$ et compte tenu des hypothèses citées précédemment, toutes les variables internes écrites ci-dessus à la fin de l'incrément sont fonction seulement de $\Delta \lambda$ et/ou de $\mathbf{T}_{n+1}$ à travers $\mathbf{N}_{n+1}$ ou $\bar{\sigma}_{n+1}$.

3.4.2.3.5 Réactualisation de la contrainte

Après résolution du système (3.100), toutes les variables internes d'écrouissage peuvent être réactualisées. La contrainte peut être également réactualisée par

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} + \sigma_{n+1}^s \mathbf{I}_2 \quad (3.133)$$

où σ_{n+1}^s et $\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}$ sont simplement déduits à partir des relations suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \mathbf{T}_{n+1} + \mathbf{X}_{n+1} \quad (3.134)$$

$$\sigma_{n+1}^s = \sigma_n^s + K \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.135)$$

3.4.2.3.6 Module tangent cohérent

La différentielle totale de la loi hypo-élastique discrétisée (3.92) donne

$$D(\Delta \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{C} : [D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) - D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)] \quad (3.136)$$

La différentielle totale de la loi d'écoulement plastique discrétisée (3.93) donne

$$D(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) = D(\Delta \lambda \mathbf{V}) = D(\Delta \lambda) \mathbf{V} + \Delta \lambda D(\mathbf{V}) \quad (3.137)$$

où le terme $D(\mathbf{V})$ s'exprime comme suit :

$$D(\mathbf{V}) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{T}} : D(\mathbf{T}) = \mathbf{Q} : D(\mathbf{T}) \quad (3.138)$$

et le terme $D(\Delta\lambda)$ est déterminé à partir de la condition de cohérence

$$DF = D\bar{\sigma} - DY = 0 \quad (3.139)$$

Ce qui donne

$$D(\Delta\lambda) = \frac{1}{H_Y} \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{T}} \right) : D(\mathbf{T}) \quad (3.140)$$

où H_Y (voir le développement en annexe B) est donné par

$$H_Y = \frac{\partial Y}{\partial \Delta\lambda} = \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \Delta\lambda} & \text{écouissage de Chaboche} \\ \frac{\partial R}{\partial \Delta\lambda} + f \frac{\partial |\mathbf{S}|}{\partial \Delta\lambda} & \text{écouissage de Teodosiu} \end{cases} \quad (3.141)$$

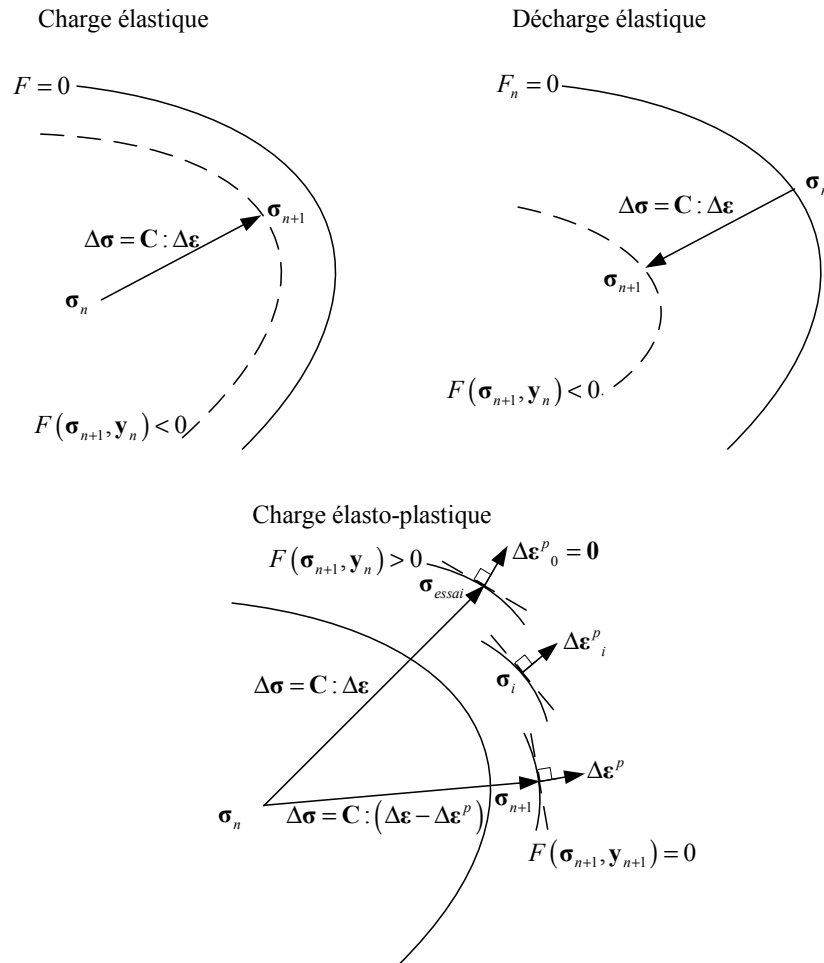


Figure 3.2. Principe du schéma de prédiction élastique/correction plastique.

En remplaçant $D(\mathbf{V})$ et $D(\Delta\lambda)$ par leurs expressions respectives dans (3.137), on obtient une relation linéaire entre $D(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ et $D(\mathbf{T})$ de la forme

$$D(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \left[\frac{1}{H_Y} \mathbf{V} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{T}} \right) + \Delta\lambda \mathbf{Q} \right] : D(\mathbf{T}) \quad (3.142)$$

Avec la différentiation de l'équation (3.98), et après quelques développements, on obtient une relation linéaire entre $D(\mathbf{T})$ et $D(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})$, de la forme

$$D(\mathbf{T}) = 2G\boldsymbol{\Lambda}^{-1} : D(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.143)$$

avec

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{I}'_4 + 2G \left[\frac{1}{H_Y} \mathbf{V} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{T}} \right) + \Delta\lambda \mathbf{Q} \right] + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{T}} + \frac{1}{H_Y} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Delta\lambda} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{T}} \right) \quad (3.144)$$

où $\mathbf{I}'_4$ est le tenseur identité, déviatorique et symétrique d'ordre quatre.

En remplaçant $D(\mathbf{T})$ par son expression (3.143) dans (3.142), puis $D(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ par son expression (3.142) dans (3.136), on obtient finalement une relation linéaire entre $D(\Delta\boldsymbol{\sigma})$ et $D(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})$, où le module tangent cohérent appelé aussi algorithmique est simplement déduit par

$$\mathbf{C}^{Algo} = \frac{D(\Delta\boldsymbol{\sigma})}{D(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})} = K(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2G\mathbf{I}'_4 - \alpha 4G^2 \left[\frac{1}{H_Y} \mathbf{V} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{T}} \right) + \Delta\lambda \mathbf{Q} \right] : \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \quad (3.145)$$

où $\alpha = 1$ en charge plastique stricte et $\alpha = 0$ en charge ou décharge élastique.

3.4.2.3.7 Algorithme d'intégration

L'implantation du modèle de comportement élasto-plastique nécessite une stratégie de résolution qui doit distinguer entre le comportement purement élastique (charge ou décharge élastique) et le comportement élasto-plastique où le critère de plasticité doit être vérifié ($F = 0$) en fin d'incrément et où les variables internes doivent être réactualisées. L'algorithme de prédiction élastique/correction plastique, recommandé par plusieurs auteurs (Hughes, 1984 ; Chaboche et Cailletaud, 1996 etc.) est appliqué ici, car il permet une implantation directe de la forme discrétisée par le schéma implicite et il fournit également une détection numérique très simple des conditions de charge/décharge.

La Figure 3.2 montre le principe de fonctionnement de cet algorithme et le Tableau 3.2 illustre les grandes lignes à suivre pour intégrer le modèle de comportement. Le Tableau 3.3 illustre les étapes de résolution par Newton-Raphson du système (3.101), permettant, après initialisation par prédiction élastique, de réactualiser la contrainte et les variables internes lors d'un chargement élasto-plastique (correction plastique).

Tableau 3.2 : Algorithme de prédiction/correction sur un incrément dans le repère tournant appliqué au modèle élasto-plastique.

-
1. Données d'entrée : Incrément de déformation, contrainte et variables internes :
 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}_n$ et $\mathbf{y}_n$
 2. Prédiction élastique : $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{essai} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$
 3. Vérifier le critère de plasticité : $F_{n+1}^{essai} = F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{essai}, \mathbf{y}_n) < 0$?
 4. Si le comportement est élastique :
 Mise à jour des variables : $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{essai}$ et $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n \rightarrow$ aller à 8.
 Sinon (*c-à-d.* comportement élasto-plastique), continuer.
 5. Initialisation : $\mathbf{T}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}'^{essai} - \mathbf{X}_n$ et $\Delta \lambda = 0$
 6. Réactualiser $\mathbf{T}_{n+1}$ et $\Delta \lambda$: appliquer l'algorithme du Tableau 3.3.
 7. Mise à jour des variables :
 $\mathbf{y}_{n+1}$ avec (3.125).
 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ avec (3.133).
 8. Calculer le module tangent cohérent $\mathbf{C}^{Algo}$ avec (3.145).
 9. Retourner $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ et $\mathbf{C}^{Algo}$ pour vérifier l'équilibre.
-

Remarque 1 :

La détection d'un comportement purement élastique tel que nous l'avons implanté s'écrit

$$\bar{\sigma}^{essai} = \bar{\sigma}(\mathbf{T}_{n+1}^{essai}) < (1 + e_0) Y_n \quad (3.146)$$

Qui peut s'écrire également sous la forme

$$(F^{essai} = \bar{\sigma}^{essai} - Y_n) < e_0 Y_n \quad (3.147)$$

où $e_0 \ll 1$ est un paramètre numérique positif à fixer par l'utilisateur.

Ce critère offre une souplesse vis-à-vis de l'application du schéma de prédiction/correction. En effet, pour un incrément de déformation générant une très faible sortie de la surface de plasticité, l'incrément peut être considéré élastique, et donc il n'est pas nécessaire de résoudre le système itératif, quoique en toute rigueur on génère une très faible déformation plastique.

Tableau 3.3 : Algorithme de résolution par Newton-Raphson du système réduit.

-
1. Récupérer le vecteur solution initiale : $\mathbf{f}_{sol} = [\mathbf{T}_{n+1}^{essai}, 0]^T$
 2. Boucle sur les itérations de Newton-Raphson :
Répéter de $i = 1$
 - 2.1. Calculer le Jacobien : $\mathbf{J}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & d \end{bmatrix}^i$
 - 2.2. Calculer le résidu : $\mathbf{R}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ F \end{bmatrix}^i$
 - 2.3. Vérifier le critère de convergence de la solution : $|\mathbf{R}^i| \leq tol$
Si oui : sortir de la boucle et aller à 3. Sinon continuer.
 - 2.4. Résoudre le système linéaire : $\mathbf{J}^i \delta \mathbf{f}_{sol}^i = -\mathbf{R}^i \Rightarrow \delta \mathbf{f}_{sol}^i = -[\mathbf{J}^i]^{-1} \mathbf{R}^i$
 - 2.5. Réactualiser la solution : $\mathbf{f}_{sol}^{i+1} = \mathbf{f}_{sol}^i + \delta \mathbf{f}_{sol}^i$

Jusqu'à $i = i_{max}$.

 - 2.6. Message d'arrêt : divergence de l'algorithme.
3. Extraire $\mathbf{T}_{n+1}$ et $\Delta \lambda$ de $\mathbf{f}_{sol}^i$ et retour à la suite du Tableau 3.2.
-

Remarque 2 :

Le critère de convergence de la solution s'exprime comme suit :

$$|\mathbf{R}^{i+1}| \leq tol_{max} \quad / \quad tol_{max} = e_0 Y_n \quad (3.148)$$

où la tolérance de convergence tol_{max} n'est pas tout à fait constante, mais elle est proportionnelle à la taille de la surface de charge évaluée avec les variables du début d'incrément.

3.4.3 Cas du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement

Dans ce qui a précédé, seul le problème de résolution de la loi de comportement élasto-plastique a été examiné en utilisant différents schémas d'intégration et différentes méthodes de résolution. Nous allons traiter maintenant le cas du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement. Pour intégrer ce modèle, nous allons utiliser uniquement la dernière méthode qui consiste à intégrer les équations du modèle avec un schéma implicite, plus particulièrement le schéma asymptotique, et une réduction du nombre d'équations à résoudre par Newton-Raphson (méthode de résolution adaptative). Ce choix est justifié par la précision

et la stabilité des schémas d'intégration implicites, tout en ayant la possibilité d'augmenter l'incrément de chargement.

3.4.3.1 Forme discrétisée

La forme discrétisée de la loi d'élasticité couplée à l'endommagement nous donne l'incrément de la contrainte effective par

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.149)$$

Cette expression peut être développée et prendre la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - d_{n+1}) \left[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n + \mathbf{C} : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \right] \quad (3.150)$$

où $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n = \boldsymbol{\sigma}_n / (1 - d_n)$. Comme on peut le constater, la contrainte en fin d'incrément dépend non seulement de l'incrément de la déformation plastique, mais aussi de la variable d'endommagement en fin d'incrément.

La forme discrétisée de la loi d'écoulement associée est obtenue par intégration de type Euler implicite et l'incrément de la déformation plastique est donné ainsi par

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} = \tilde{\mathbf{V}}_{n+1} \Delta \lambda = \frac{1}{1 - d_{n+1}} \mathbf{V}_{n+1} \Delta \lambda \quad (3.151)$$

Les lois d'évolution des variables internes sont intégrées par le schéma asymptotique et l'ensemble des variables internes sont données par

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{y}_{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \Delta \lambda) \quad (3.152)$$

où le vecteur $\mathbf{y}$ inclue les variables d'écrouissage et la variable d'endommagement.

A ces équations, on rajoute le critère de plasticité à vérifier avec les variables de fin d'incrément, c-à-d.

$$F_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - Y_{n+1} = 0 \quad (3.153)$$

3.4.3.2 Forme réduite

Les expressions (3.150) à (3.153) constituent un système d'équations algébriques non linéaires à résoudre afin de réactualiser l'ensemble des variables du modèle de comportement. La démarche à suivre consiste en première étape à réduire la taille du système à résoudre par Newton-Raphson, et d'en déduire par la suite le reste des variables explicitement. La démarche est très similaire à celle développée pour la résolution adaptative du modèle élasto-plastique sans endommagement.

On décompose d'abord la contrainte de Cauchy effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ en une partie déviatorique et une partie sphérique, c-à-d.

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'_n + 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}' - 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.154)$$

$$\tilde{\sigma}_{n+1}^s = \frac{1}{3} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n) + K \text{tr}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.155)$$

De la forme (3.152), on extrait la contrainte de rappel de fin d'incrément par

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \Delta\mathbf{X} \quad (3.156)$$

Par la soustraction de cette contrainte de rappel de l'équation (3.154), on obtient

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'_n - \mathbf{X}_n + 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}' - 2G\Delta\lambda\tilde{\mathbf{V}}_{n+1} - \Delta\mathbf{X} \quad (3.157)$$

En définissant une autre variable $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{X}$, cette dernière équation s'écrit sous la forme

$$\tilde{\mathbf{T}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{T}}_n + 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}' - 2G\Delta\lambda\tilde{\mathbf{V}}_{n+1} - \Delta\mathbf{X} \quad (3.158)$$

D'un autre coté, le critère de plasticité doit être satisfait à la fin de l'incrément pour un chargement élasto-plastique avec endommagement, c-à-d.

$$\bar{\sigma}(\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}) - Y(\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}, \Delta\lambda) = 0 \quad (3.159)$$

Il est à noter que pour les modèles de comportement considérés et les surfaces de charge associées, la contrainte effective équivalente $\bar{\sigma}_{n+1}$ est fonction uniquement de la contrainte effective efficace $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}$. Comme pour l'intégration du modèle élasto-plastique, et moyennant les considérations faites sur la cinétique des lois d'évolutions (variables internes à variation lente ou rapide), on peut montrer que Y_{n+1} et $\Delta\mathbf{X}$ ne dépendent plus que du couple $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}$ et $\Delta\lambda$. En revanche, la direction de l'écoulement plastique $\tilde{\mathbf{V}}_{n+1}$ est fonction de $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}$ et de la variable d'endommagement d_{n+1} . Dans ces conditions, (3.158) et (3.159) forment un système de sept équations algébriques non linéaires (au maximum) qui s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{T}}_n - 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}' + 2G\Delta\lambda\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}, d_{n+1}) + \Delta\mathbf{X}(\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}, \Delta\lambda) \\ \bar{\sigma}(\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}) - Y(\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}, \Delta\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

Ce système est néanmoins sous-déterminé (sept équations pour huit inconnues scalaires $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}, \Delta\lambda$ et d_{n+1}) à cause du couplage avec l'endommagement. Comme le seul terme où la variable d_{n+1} apparaît est la direction de l'écoulement plastique $\tilde{\mathbf{V}}$, nous prendrons la variable endommagement, pour la résolution de ce système, avec sa valeur au début de l'incrément, soit d_n . Dans ces conditions, on peut résoudre le système implicite par la méthode de Newton-Raphson pour le calcul de $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}$ et $\Delta\lambda$ et ceci de façon très similaire à celle utilisée pour le modèle élasto-plastique non-couplé. Il est à noter aussi que le modèle

d'endommagement considéré contient un paramètre seuil d'endommagement. Ainsi, l'hypothèse faite sur d_{n+1} n'affecte pas la résolution sur une bonne partie du trajet de chargement. Sur la partie où l'endommagement s'active, nous veillerons à prendre des pas de chargement suffisamment petits pour préserver la précision globale.

3.4.3.3 Résolution par Newton-Raphson

Le système (3.160) peut s'écrire sous la forme symbolique

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}, \Delta\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

L'application de la méthode de Newton-Raphson revient à adopter un schéma itératif sur le système linéarisé suivant

$$\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} \right|^i \delta \mathbf{z}^i = -\mathbf{R}^i \quad (3.162)$$

où le vecteur inconnu $\mathbf{z}$ et la matrice Jacobienne $\mathbf{J}$ sont donnés, respectivement, par

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{n+1} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}] & [\mathbf{c}] \\ [\mathbf{b}] & d \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

et les termes $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et d sont donnés, respectivement, par

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \quad (3.165)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \quad (3.166)$$

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \Delta\lambda} \quad (3.167)$$

$$d = \frac{\partial F}{\partial \Delta\lambda} \quad (3.168)$$

A partir des expressions de $\mathbf{G}$ et F , on déduit $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et d par

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + 2G\Delta\lambda\tilde{\mathbf{Q}} + \frac{\partial \Delta\mathbf{X}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \quad (3.169)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} = \mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \quad (3.170)$$

$$\mathbf{c} = 2G\tilde{\mathbf{V}} + \frac{\partial \Delta\mathbf{X}}{\partial \Delta\lambda} \quad (3.171)$$

$$d = -\frac{\partial Y}{\partial \Delta \lambda} \quad (3.172)$$

où

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \quad (3.173)$$

Plusieurs termes sont à définir dans le système (3.161). Les expressions de $\bar{\sigma}$, $\tilde{\mathbf{V}}$ et $\tilde{\mathbf{Q}}$ dépendent de la surface de charge choisie. Les expressions de $\Delta \mathbf{X}$, Y et des dérivées $\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}}$, $\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta \lambda}$, $\frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}}$ et $\frac{\partial Y}{\partial \Delta \lambda}$ dépendent du modèle d'écrouissage, ainsi que du schéma d'intégration implicite. Les expressions de ces termes sont données en annexe B.

3.4.3.4 Intégration des modèles d'écrouissage/endommagement

L'intégration des deux modèles d'écrouissage couplés à l'endommagement par le schéma asymptotique est donnée ci-dessous.

i. Ecrouissage de Chaboche-Marquis/endommagement

L'intégration par le schéma asymptotique des lois d'évolution de R et $\mathbf{X}$ donne

$$R_{n+1} = R_n + (R_{sat} - R_n)(1 - e^{-C_R \Delta \lambda}) \quad (3.174)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + (X_{sat} \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} - \mathbf{X}_n)(1 - e^{-C_X \Delta \lambda}) \quad (3.175)$$

où

$$\tilde{\mathbf{n}}_{n+1} = \frac{\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_{n+1}} \quad (3.176)$$

Comme on peut le constater, les termes R_{n+1} et $\mathbf{X}_{n+1}$ sont fonctions uniquement de $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}$ et $\Delta \lambda$, et donc ils peuvent être réactualisés explicitement après résolution du système (3.161).

ii. Ecrouissage de Teodosiu-Hu/endommagement

Pour intégrer les lois d'évolution de ce modèle, nous nous appuyons sur les mêmes hypothèses introduites au § 3.4.2.3.4, relatives à la cinétique des lois d'évolutions (vitesses de variation de certaines variables par rapport à d'autres). Ceci permet de rester dans le cadre de l'algorithme général de la méthode de résolution adaptative.

$$R_{n+1} = R_n + (R_{sat} - R_n)(1 - e^{-C_R \Delta \lambda}) \quad (3.177)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + (X_{n+1}^{sat} \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} - \mathbf{X}_n) (1 - e^{-C_X \Delta \lambda}) \quad (3.178)$$

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n + (\tilde{\mathbf{N}}_{n+1} - \mathbf{P}_n) (1 - e^{-C_P \Delta \lambda}) \quad (3.179)$$

$$S_{n+1}^D = S_n^D e^{-C_{SD}(\tilde{g}_n + \tilde{h}_n) \Delta \lambda} + S_{sat} \frac{\tilde{g}_n}{(\tilde{g}_n + \tilde{h}_n)} (1 - e^{-C_{SD}(\tilde{g}_n + \tilde{h}_n) \Delta \lambda}) \quad (3.180)$$

$$\mathbf{S}_{n+1}^L = |\mathbf{S}_{n+1}^L| \frac{\mathbf{S}_n^L}{|\mathbf{S}_n^L|} = \left(|\mathbf{S}_n^L|^{-n_L} + n_L \frac{C_{SL}}{S_{sat}^{n_L}} \Delta \lambda \right)^{-1/n_L} \frac{\mathbf{S}_n^L}{|\mathbf{S}_n^L|} \quad (3.181)$$

où les fonctions $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ sont évaluées avec leurs valeurs du début d'incrément et s'expriment comme suit :

$$\tilde{h}_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathbf{X}_n : \tilde{\mathbf{N}}_n}{X_n^{sat} \tilde{\mathbf{n}}_n : \tilde{\mathbf{N}}_n} \right) \quad (3.182)$$

$$\tilde{g}_n = \begin{cases} 1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \left| \frac{S_{Dn} - \mathbf{P}_n : \tilde{\mathbf{N}}_n}{S_{sat}} \right| & \text{si } \mathbf{P}_n : \tilde{\mathbf{N}}_n \geq 0 \\ \left(1 + \mathbf{P}_n : \tilde{\mathbf{N}}_n \right)^{n_p} \left(1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \frac{S_{Dn}}{S_{sat}} \right) & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.183)$$

Connaissant S_{n+1}^D et $|\mathbf{S}_L|_{n+1}$, $\mathbf{S}_{n+1}$ et sa norme sont simplement déduits par

$$\mathbf{S}_{n+1} = S_{n+1}^D \tilde{\mathbf{N}}_{n+1} \otimes \tilde{\mathbf{N}}_{n+1} + |\mathbf{S}_L|_{n+1} \frac{\mathbf{S}_{Ln}}{|\mathbf{S}_L|_n} \quad (3.184)$$

$$|\mathbf{S}|_{n+1} = \sqrt{|\mathbf{S}_{n+1}^L|^2 + S_{n+1}^{D^2}} \quad (3.185)$$

Egalement ici, toutes les variables (R_{n+1} , $\mathbf{X}_{n+1}$, $\mathbf{P}_{n+1}$ et $\mathbf{S}_{n+1}$) sont fonctions de $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}$ et $\Delta \lambda$, ce qui permet de les réactualiser explicitement après résolution du système (3.161), par

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta \mathbf{y}(\mathbf{T}_{n+1}, \Delta \lambda) \quad (3.186)$$

3.4.3.5 Intégration de la loi d'évolution de l'endommagement

Dans l'intégration précédente des variables internes d'écrouissage, la variable d'endommagement de fin d'incrément d_{n+1} n'intervenait pas explicitement dans la résolution du système (3.161). Cette variable d'endommagement intervient néanmoins dans la mise à jour de la contrainte et également comme valeur initiale pour le système (3.161) au prochain incrément. Sa loi d'évolution sera intégrée aussi suivant le schéma asymptotique pour être cohérent avec le schéma d'intégration des lois d'évolution des autres variables internes.

Dans le chapitre 2, équation (2.114), le taux de restitution d'énergie élastique Y_e a été défini et son expression donnée en fonction de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$. Dans cette dernière écriture, la variable d'endommagement apparaît explicitement. Nous allons réécrire ce même taux de restitution d'énergie élastique Y_e mais cette fois en termes de la contrainte effective avec ses parties déviatorique et sphérique. On obtient ainsi la forme :

$$Y_e = \frac{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})^2}{2E} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\tilde{\sigma}^s}{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} \right)^2 \right] \quad (3.187)$$

où $J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ est la contrainte effective équivalente au sens de von Mises, c-à-d. $J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}$, et $\tilde{\sigma}^s = \frac{1}{3} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ est la contrainte effective hydrostatique.

Sous la forme ci-dessus du taux de restitution d'énergie, l'intégration asymptotique de la loi d'endommagement (2.119) est possible. En effet une fois le système (3.161) résolu, la contrainte effective à la fin du pas $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ est connue par la réactualisation suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'_{n+1} = \tilde{\mathbf{T}}_{n+1} + \mathbf{X}_{n+1} \quad (3.188)$$

$$\tilde{\sigma}^s_{n+1} = \tilde{\sigma}^s_n + K \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.189)$$

et donc la fonction Y_{n+1}^e est complètement connue. Après quelques développements, l'intégration de la variable d'endommagement conduit à l'expression suivante :

$$d_{n+1} = 1 - \left[(1-d_n)^{1+\beta} - (1+\beta) \left(\frac{Y_{n+1}^e - Y_i^e}{S} \right)^s \Delta \lambda \right]^{\frac{1}{1+\beta}} \quad \text{si } Y_{n+1}^e \geq Y_i^e \quad (3.190)$$

$$d_{n+1} = d_n \quad \text{sinon}$$

où Y_{n+1}^e est donné par

$$Y_{n+1}^e = \frac{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1})^2}{2E} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\tilde{\sigma}_{n+1}^s}{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1})} \right)^2 \right] \quad (3.191)$$

3.4.3.6 Réactualisation de la contrainte

Après résolution du système (3.161), toutes les variables internes d'écrouissage peuvent être réactualisées et également celle de l'endommagement. La contrainte peut être ainsi réactualisée par

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} + \sigma_{n+1}^s \mathbf{I}_2 \quad (3.192)$$

où σ_{n+1}^s et $\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}$ sont simplement déduits à partir des relations suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = (1 - d_{n+1})(\tilde{\mathbf{T}}_{n+1} + \mathbf{X}_{n+1}) \quad (3.193)$$

$$\sigma^s_{n+1} = (1 - d_{n+1})[\tilde{\sigma}_n^s + Ktr(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})] \quad (3.194)$$

3.4.3.7 Module tangent cohérent

Nous nous plaçons dans le cas de l'élasticité isotrope. La différentielle de (3.149) donne

$$D\Delta\boldsymbol{\sigma} = (1 - d)\mathbf{C} : D\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - (1 - d)2GD\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}Dd \quad (3.195)$$

On cherche maintenant à construire une relation linéaire entre $D\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et $D\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, et également entre Dd et $D\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.

Pour $D\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$, on a

$$D\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\lambda D\tilde{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{V}}D\Delta\lambda \quad (3.196)$$

où $D\Delta\lambda$ et $D\tilde{\mathbf{V}}$ sont donnés, respectivement, par

$$D\Delta\lambda = \frac{1}{H_y} \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) : D(\tilde{\mathbf{T}}) \quad (3.197)$$

$$D\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{Q}} : D\tilde{\mathbf{T}} \quad (3.198)$$

où H_y (voir le développement en annexe B) est donné par

$$H_y = \frac{\partial Y}{\partial \Delta\lambda} = \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \Delta\lambda} & \text{écouissage de Chaboche} \\ \frac{\partial R}{\partial \Delta\lambda} + f \frac{\partial |\mathbf{S}|}{\partial \Delta\lambda} & \text{écouissage de Teodosiu} \end{cases} \quad (3.199)$$

Par substitution de $D\Delta\lambda$ et $D\tilde{\mathbf{V}}$ par leur expression respective dans (3.196), on aura

$$D\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \left[\frac{1}{H_y} \tilde{\mathbf{V}} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) + \Delta\lambda \tilde{\mathbf{Q}} \right] : D\tilde{\mathbf{T}} \quad (3.200)$$

Ensuite, en remplaçant $D\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ par cette dernière expression dans (3.195), on aura

$$D\Delta\boldsymbol{\sigma} = (1 - d)\mathbf{C} : D\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - (1 - d)2G \left[\frac{1}{H_y} \tilde{\mathbf{V}} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) + \Delta\lambda \tilde{\mathbf{Q}} \right] : D\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}Dd \quad (3.201)$$

A ce stade, on cherche à trouver une relation entre $D\tilde{\mathbf{T}}$ et $D\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. On différenciant l'équation (3.158) on trouve :

$$D\tilde{\mathbf{T}} = 2G\boldsymbol{\Lambda}^{-1} : D\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.202)$$

où

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}'_4 + 2G \left[\frac{1}{H_Y} \tilde{\mathbf{V}} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) + \Delta \lambda \tilde{\mathbf{Q}} \right] + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} + \frac{1}{H_Y} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Delta \lambda} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) \quad (3.203)$$

Par ailleurs, la différentiation de l'équation (3.190) donne

$$Dd = \frac{\partial d}{\partial \Delta \lambda} D\Delta \lambda + \frac{\partial d}{\partial Y_e} DY_e \quad (3.204)$$

Ensuite, la différentiation de l'équation (3.187) donne

$$DY_e = \frac{1}{2G} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \left\{ \mathbf{C} - 4G^2 \left[\frac{1}{H_Y} \tilde{\mathbf{V}} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) + \Delta \lambda \tilde{\mathbf{Q}} \right] : \mathbf{\Lambda}^{-1} \right\} : D\Delta \boldsymbol{\varepsilon} + 3\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^s : D\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.205)$$

En utilisant les équations (3.197), (3.202), (3.204) et (3.204), la contribution $-\tilde{\boldsymbol{\sigma}} Dd$ au module tangent cohérent peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} -\tilde{\boldsymbol{\sigma}} Dd = & -\frac{\partial d}{\partial Y_e} \frac{1}{2G} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \left\{ \mathbf{C} - 4G^2 \left[\frac{1}{H_Y} \tilde{\mathbf{V}} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) + \Delta \lambda \tilde{\mathbf{Q}} \right] : \mathbf{\Lambda}^{-1} \right\} : D\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ & - \frac{\partial d}{\partial Y_e} 3\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^s : D\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{2G}{H_Y} \frac{\partial d}{\partial \Delta \lambda} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) : \mathbf{\Lambda}^{-1} : D\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.206)$$

Finalement, en remplaçant $-\tilde{\boldsymbol{\sigma}} Dd$ par son expression ci-dessus dans l'équation (3.201), puis $D\tilde{\mathbf{T}}$ par son expression (3.202) dans l'équation (3.201), nous obtenons la relation linéaire suivante entre $D\Delta \boldsymbol{\sigma}$ et $D\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} D\Delta \boldsymbol{\sigma} = & (1-d) \left\{ \mathbf{C} - 4G^2 \left[\frac{1}{H_Y} \tilde{\mathbf{V}} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) + \Delta \lambda \tilde{\mathbf{Q}} \right] : \mathbf{\Lambda}^{-1} \right\} : D\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ & - \frac{\partial d}{\partial Y_e} \frac{1}{2G} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \left\{ \mathbf{C} - 4G^2 \left[\frac{1}{H_Y} \tilde{\mathbf{V}} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) + \Delta \lambda \tilde{\mathbf{Q}} \right] : \mathbf{\Lambda}^{-1} \right\} : D\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ & - \frac{\partial d}{\partial Y_e} 3\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^s : D\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{2G}{H_Y} \frac{\partial d}{\partial \Delta \lambda} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) : \mathbf{\Lambda}^{-1} : D\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.207)$$

Tableau 3.4 : Algorithme de prédiction/correction sur un incrément dans le repère tournant appliqué au modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement.

1. Données d'entrée :

Incrément de déformation, contrainte et variables internes : $\Delta\epsilon$, σ_n et y_n

2. Prédiction élastique : $\tilde{\sigma}_{n+1}^{essai} = \tilde{\sigma}_n + \mathbf{C} : \Delta\epsilon$

3. Vérifier le critère de plasticité : $F_{n+1}^{essai} = F(\tilde{\sigma}_{n+1}^{essai}, y_n) < 0$?

4. Si le comportement est élastique :

Mise à jour des variables : $\sigma_{n+1} = (1 - d_n) \tilde{\sigma}_{n+1}^{essai}$ et $y_{n+1} = y_n \rightarrow$ aller à 8.

Sinon (c-à-d. comportement élasto-plastique/endommagement) : continuer.

5. Initialisation : $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1} = \tilde{\sigma}_{n+1}^{essai} - \mathbf{X}_n$ et $\Delta\lambda = 0$

6. Réactualiser $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}$ et $\Delta\lambda$: résolution par Newton-Raphson du système (3.160) (similaire à l'algorithme du Tableau 3.3).

7. Mise à jour des variables :

y_{n+1} avec (3.186).

σ_{n+1} avec (3.192).

8. Calculer le module tangent cohérent $\mathbf{C}^{Algo}$ avec (3.208).

9. Retourner σ_{n+1} et $\mathbf{C}^{Algo}$ pour vérifier l'équilibre.

où le module tangent cohérent est simplement déduit par

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{Algo} = & (1-d) \left\{ \mathbf{C} - 4G^2 \left[\frac{1}{H_Y} \tilde{\mathbf{V}} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) + \Delta\lambda \tilde{\mathbf{Q}} \right] : \Lambda^{-1} \right\} \\ & - \frac{\partial d}{\partial Y_e} \frac{1}{2G} \tilde{\sigma} \otimes \tilde{\sigma}' : \left\{ \mathbf{C} - 4G^2 \left[\frac{1}{H_Y} \tilde{\mathbf{V}} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) + \Delta\lambda \tilde{\mathbf{Q}} \right] : \Lambda^{-1} \right\} \\ & - \frac{\partial d}{\partial Y_e} 3\tilde{\sigma} \otimes \tilde{\sigma}^s - \frac{2G}{H_Y} \frac{\partial d}{\partial \Delta\lambda} \tilde{\sigma} \otimes \left(\mathbf{V} - \frac{\partial Y}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) : \Lambda^{-1} \end{aligned} \quad (3.208)$$

A noter que dans le cas où il n'y a pas d'endommagement : $d = 0$, $\frac{\partial d}{\partial \Delta\lambda} = 0$, $\frac{\partial d}{\partial Y_e} = 0$,

$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}$, $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}$ et $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$, nous retrouvons exactement l'expression (3.145) du module tangent cohérent développé pour le modèle élasto-plastique.

3.4.3.8 Algorithme d'intégration

Nous allons appliquer l'algorithme de prédiction élastique/correction plastique, utilisé précédemment pour l'implantation du modèle élasto-plastique. Les grandes lignes de l'algorithme restent les mêmes, mais quelques légères modifications sont néanmoins nécessaires. Seule l'inconnue $\mathbf{T}_{n+1}$ est à remplacer par $\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}$; de même les termes intervenants dans la matrice Jacobienne et le second membre sont à recalculer avec ces nouvelles variables.

Le Tableau 3.4 illustre les différentes étapes à suivre pour l'implantation du modèle. Pour la résolution par Newton-Raphson, la démarche est similaire à celle donnée au Tableau 3.3.

3.5 Implantation du critère de localisation de Rice

Nous allons nous intéresser dans cette partie à l'implantation du critère de localisation de Rice. Rappelons que les développements théoriques relatifs à ce critère et son couplage avec les modèles de comportement considérés sous le formalisme des grandes déformations sont donnés au § 2.6.2. Nous allons résumer ici le problème que l'on veut résoudre. Il s'agit de rechercher essentiellement les deux informations suivantes :

1. Trouver le moment de l'apparition des premières bandes de localisation, c-à-d. lorsque le tenseur acoustique devient singulier ($\det\{\mathbf{n.L.n}\} = 0$). Cette information permettra de trouver l'état de contrainte et de déformation correspondant à l'apparition de la striction localisée. Ainsi, nous pouvons les exploiter pour tracer des courbes limite de formage à localisation en déformations ou en contraintes.
2. Trouver les orientations de toutes ces bandes au moment où le critère est vérifié, c-à-d. lorsque $\det\{\mathbf{n.L.n}\} = 0$. C'est une information importante, car elle permet de donner une idée sur les directions possibles de déchirure dans des tôles en mise forme.

3.5.1 Formulation du problème de minimisation

Pour un état de contraintes et de déformations donné, la détection de la localisation par ce critère peut être vue comme un problème de minimisation d'une fonction scalaire formulé comme suit :

$$\begin{cases} \text{minimiser } f(\mathbf{n}) \text{ avec } |\mathbf{n}| = 1 \\ f(\mathbf{n}) = \det\{\mathbf{n.L.n}\} \end{cases} \quad (3.209)$$

Dans le cas où $\min[f(\mathbf{n})] > 0$, alors il n'y a pas de localisation au point matériel considéré. Sinon, $\exists \mathbf{n}_{loc} / f(\mathbf{n}_{loc}) = 0$, ce qui correspond au moment de l'apparition de la localisation, avec $\mathbf{n}_{loc}$ qui désigne toutes les directions normales aux bandes ainsi formées.

Ce problème de minimisation a été souvent traité dans la littérature dans le cas bidimensionnel (par exemple, Lemaitre et al., 2000). Pour les tôles ceci revient à considérer

uniquement le plan de la tôle. En d'autres termes, la normale à la bande a été supposée rester dans le plan de la tôle, ce qui simplifiait considérablement la résolution du problème (3.209), car la direction $\mathbf{n}$ pouvait être définie avec un seul paramètre en coordonnées polaires, c-à-d.

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 \\ \sin \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.210)$$

Dans ces conditions, résoudre (3.209) revient à minimiser une fonction à une seule variable scalaire. Pour des chargements simples, telle que la traction uniaxiale ou le cisaillement simple, des solutions analytiques peuvent être retrouvées (Doghri et Billardon, 1995 ; Lemaitre et al., 2000 etc.). Par contre dans le cas le plus général (3D), le recours à des méthodes numériques de résolution est nécessaire (par exemple, Keryvin, 1999). Une méthode itérative de type Newton-Raphson peut donner des résultats satisfaisants si la fonction à minimiser est suffisamment régulière. Néanmoins, dans le cas où plusieurs minima se présentent, ce qui correspond à la formation de plusieurs bandes de localisation, la méthode peut faillir, car une seule direction est détectée. D'un autre côté, cette hypothèse qui consiste à ne considérer que des bandes perpendiculaires à un plan fixe nous semble trop restrictive et parfois difficile à justifier physiquement compte tenu du caractère tridimensionnel de la déformation. Ainsi, nous allons nous affranchir de cette hypothèse simplificatrice et traiter le problème en 3D.

La normale $\mathbf{n}$ à la bande de localisation peut être exprimée en coordonnées sphériques par

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \psi_2 \cos \psi_1 \\ \sin \psi_2 \sin \psi_1 \\ \cos \psi_2 \end{pmatrix} \quad / \quad 0 \leq \psi_1 < 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi_2 \leq \pi \quad (3.211)$$

où la Figure 3.3 montre les angles ψ_1 et ψ_2 définissant cette normale.

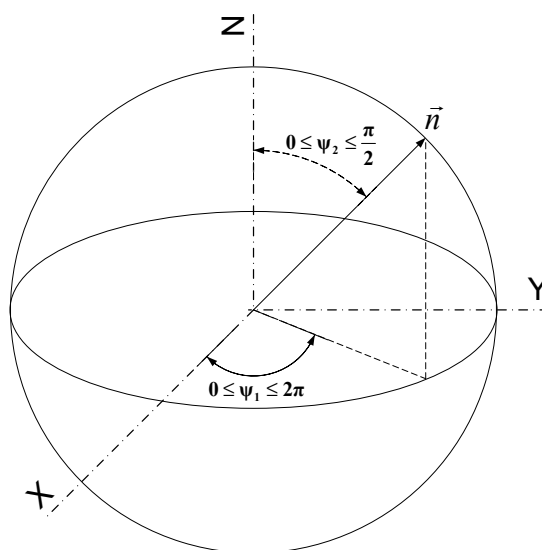


Figure 3.3. Angles définissant la normale à la bande de localisation

Notons qu'avec la propriété $f(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} = f(-\mathbf{n})$, l'espace de recherche peut être réduit à la moitié des directions possibles. Ce qui revient à prendre par exemple :

$$0 \leq \psi_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \psi_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.212)$$

3.5.2 Calcul du tenseur acoustique et algorithme de résolution

L'expression du tenseur acoustique $\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ est donnée ici sous la forme développée :

$$\begin{aligned} H_{jk} = n_i L_{ijkl} n_l = & n_1^2 L_{1jk1} + n_1 n_2 (L_{1jk2} + L_{2jk1}) \\ & + n_2^2 L_{2jk2} + n_1 n_3 (L_{1jk3} + L_{3jk1}) \\ & + n_3^2 L_{3jk3} + n_2 n_3 (L_{2jk3} + L_{3jk2}) \end{aligned}$$

L'expression de son déterminant peut être également développée analytiquement pour donner le problème de minimisation suivant

$$\begin{cases} \text{minimiser } f(\psi_1, \psi_2) \text{ avec } 0 \leq \psi_1 < 2\pi \text{ et } 0 \leq \psi_2 \leq \frac{\pi}{2} \\ f(\psi_1, \psi_2) = \det(H_{jk}) \end{cases} \quad (3.213)$$

Il est à noter que peu de travaux ont été consacrés à la résolution de ce problème avec l'application au calcul de structures en 3D. Keryvin (1999) a proposé une méthode composée de deux étapes :

1. Discrétisation en n valeurs ψ_1^i de l'intervalle de variation de ψ_1 .
2. Résolution de l'équation $f(\psi_1^i, \psi_2) = 0$ pour chacune des valeurs ψ_1^i par une méthode itérative (Newton-Raphson par exemple).

Cette méthode ne garantit pas de retrouver tous les minima possibles et dépend fortement de la discrétisation de l'intervalle de variation de ψ_1 .

Une autre méthode proposée par le même auteur, consiste à :

1. Déterminer en première approximation des minima de f par discrétisation des intervalles de variation de ψ_1 et ψ_2 , puis calcul de f en chacune de ces valeurs discrètes.
2. Calculer des minima par une méthode itérative (méthode des gradients ou des gradients conjugués par exemple).

Cette méthode ne converge que si f est suffisamment régulière.

Tableau 3.5 : Algorithme de calcul du module tangent analytique de localisation pour le modèle élasto-plastique-endommagement dans la routine UVARM.

1. Récupérer les variables de ABAQUS, données en fin d'incrément dans le repère tournant :
 - $\hat{\sigma}_I, \hat{\tilde{V}}_I, d, H_\lambda, \alpha$
2. Passer de la notation vectorielle de Voigt à la notation tensorielle :
 - $\hat{\sigma}_I(Voigt) \rightarrow \hat{\sigma}_{ij}$
 - $\hat{\tilde{V}}_I(Voigt) \rightarrow \hat{\tilde{V}}_{ij}$
3. Changement de repère pour avoir les variables dans le repère global :
 - $\sigma_{ij} = R_{ik} R_{jl} \hat{\sigma}_{kl}$
 - $\tilde{V}_{ij} = R_{ik} R_{jl} \hat{\tilde{V}}_{kl}$
4. Calculer le module tangent pour la localisation dans le repère global :
 - $L_{ijkl} = L_{ijkl} + L_{1ijkl} - L_{2ijkl} - L_{3ijkl}$

Avec :

$$\begin{aligned}
 & \text{— } L_{ijkl} = \tilde{C}_{ijkl} - \alpha \left(\frac{4G^2 (1-d)^2 \tilde{V}_{ij} \otimes \tilde{V}_{kl}}{H_\lambda} + \frac{2GH_d \sigma_{ij} \otimes \tilde{V}_{kl}}{H_\lambda} \right) \\
 & \text{— } L_{1ijkl} = \sigma_{ij} \delta_{kl} \\
 & \text{— } L_{2ijkl} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ik} \sigma_{lj} + \delta_{il} \sigma_{kj} \right] \\
 & \text{— } L_{3ijkl} = \frac{1}{2} \left[\sigma_{ik} \delta_{lj} - \sigma_{il} \delta_{jk} \right]
 \end{aligned}$$

Face à la difficulté de trouver une méthode donnant tous les minima possibles de f , nous avons fait le choix de travailler avec une méthode assez simple, bien qu'elle soit coûteuse en temps de calcul et qui consiste à

1. Discrétiser en n valeurs ψ_1^i l'intervalle de variation de ψ_1 et m valeurs ψ_2^j l'intervalle de variation de ψ_2 .
2. Calculer pour tous les couples (ψ_1^i, ψ_2^j) les valeurs f_{ij} correspondantes et tester si les minima vérifient la condition $f_{ij} = 0$. Les couples (ψ_1^i, ψ_2^j) correspondants à ces minima définissent les directions normales aux bandes de localisation.

Notons que la précision de cette méthode est liée à l'incrément de discrétisation $\Delta\psi$ des intervalles de variation de ψ_1 et ψ_2 . L'erreur ainsi commise sur la prédiction de la direction $\mathbf{n}$ est de l'ordre de $\pm\Delta\psi$. Le temps CPU est d'autant plus important que la discrétisation $\Delta\psi$ est fine. Néanmoins, la méthode est très efficace, car toutes les directions possibles peuvent être retrouvées par cette stratégie.

Tableau 3.6 : Algorithme d'implantation du critère de localisation.

-
1. Récupérer le module tangent $\mathbf{L}$ (algorithme du Tableau 3.5).
 2. Initialiser le déterminant minimum à une valeur maximale.
 - $\det \min = \det \max$
 3. Recherche de la direction $\mathbf{n}_{\min}$, correspondant au déterminant minimum

Choix du pas de balayage : $\Delta\psi_1, \Delta\psi_2$

- Aller de $\psi_1 = 0$

- Aller de $\psi_2 = 0$

Calculer $f(\mathbf{n}) = \det\{\mathbf{n.L.n}\}$ pour $\mathbf{n}(\psi_1, \psi_2)$

Si $f(\mathbf{n}) < \det \min$, alors :

$\mathbf{n}_{\min} = \mathbf{n}(\psi_1, \psi_2)$

$\det \min = \det\{\mathbf{n.L.n}\}$

- Jusqu'à $\psi_2 = \pi$

- Jusqu'à $\psi_1 = 2\pi$

Ce critère de localisation a été implanté dans le code ABAQUS/Standard via la routine utilisateur UVARM, afin de l'appliquer directement lors de calculs de structures. L'algorithme développé est composé de deux parties. La première partie consiste à calculer le module tangent constituant le tenseur acoustique et qu'il convient d'introduire dans le critère de localisation à la fin de l'incrément. Le Tableau 3.5 donne quelques éléments de son calcul dans la routine UVARM. La deuxième partie consiste à traiter le problème de minimisation (3.213) suivant la méthode proposée. Le Tableau 3.6 illustre la procédure d'implantation du critère de localisation.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré entièrement à l'implantation de l'ensemble des modèles de comportement et du critère de localisation développés au Chapitre 2. Trois points ont été abordés dans ce chapitre.

1. Une étude détaillée et approfondie sur l'intégration numérique des modèles de comportement élasto-plastique. Nous avons explicité deux grandes méthodes d'intégration : les schémas explicites et les schémas implicites. Avec chaque schéma, nous avons construit des algorithmes d'intégration à implanter directement dans les codes de calcul par éléments finis. Le module tangent cohérent relatif à chaque schéma d'intégration a été développé.

2. Une deuxième étude a été consacrée à l'implantation du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement, en généralisant l'algorithme de résolution par intégration implicite du modèle élasto-plastique et en réduisant le nombre d'équations à résoudre par la méthode de Newton-Raphson. Comme précédemment, le module tangent cohérent a été développé.
3. Enfin, nous avons traité le problème d'implantation du critère de localisation de Rice. Un algorithme a été développé de telle manière à l'implanter directement dans un code de calcul par éléments finis (dans notre cas ABAQUS/Standard) dans la perspective des applications directes sur des structures en mise en forme.

Le prochain chapitre sera consacré à l'étude approfondie des capacités de chaque algorithme d'intégration des modèles de comportements introduits. La validation de ces schémas d'intégration numérique constitue une étape importante avant de les appliquer sur des structures beaucoup plus complexes. Egalement, des essais rhéologiques à trajets directs et séquentiels sur un point matériel et sur de simples structures seront simulés. Pour le critère de localisation de Rice, son application sera abordée au chapitre 5, notamment pour le tracé de courbes limite de formage à localisation.

Chapitre 4

Analyse des schémas d'intégration et simulation d'essais rhéologiques

4.1	Introduction	119
4.2	Analyse des schémas d'intégration	119
4.2.1	Schémas explicites	120
4.2.2	Schémas implicites	124
4.2.3	Synthèse	126
4.3	Simulation des changements de trajets de déformation	127
4.3.1	Description des matériaux	127
4.3.2	Essais à trajets monotones	127
4.3.3	Essais séquentiels à deux trajets	130
4.3.4	Comparaison avec les essais expérimentaux	133
4.4	Simulation de tests académiques.....	134
4.4.1	Plaque en essai de traction	134
4.4.2	Plaque en essai de cisaillement	138
4.4.3	Plaque en essai orthogonal	141
4.5	Conclusion.....	144

4.1 Introduction

Nous analysons dans ce chapitre trois aspects relatifs, respectivement, à la performance des algorithmes d'intégration développés au chapitre précédent, à la capacité des modèles d'écrouissage (classique et microstructural) introduits au chapitre 2 à reproduire les phénomènes de changement de trajets de déformation, et enfin, à la capacité de ces modèles à reproduire les mêmes phénomènes dans le cadre d'un calcul de structures par éléments finis.

Pour les schémas d'intégration des lois de comportement, il est aujourd'hui largement admis qu'ils ont une influence directe sur la qualité des solutions obtenues. Pour montrer les performances et aussi les limites des principaux schémas d'intégration développés, une étude comparative sera entreprise en premier lieu de ce chapitre. Les critères de base pour qualifier la performance d'un schéma sont la précision de la solution recherchée et le temps CPU nécessaire pour l'obtenir. Nous nous basons sur des simulations de simples essais rhéologiques pour réaliser cette étude.

Afin d'appliquer par la suite les modèles de comportement avec une intégration adéquate à la mise en forme de tôles métalliques, ce qui fera l'objet du prochain chapitre, nous allons réaliser une étude sur la capacité de chaque modèle d'écrouissage à reproduire les phénomènes de changement de trajets de déformation. Pour cela, nous allons utiliser deux aciers, un acier ductile et un acier à très haute résistance, qui couvrent une large gamme de comportement des tôles métalliques utilisées en mise en forme.

Le dernier point abordé concerne quelques simulations de structures par éléments finis. Nous allons considérer des structures simples soumises à de grandes déformations de l'ordre de celles que l'on retrouve lors de la mise en forme des tôles métalliques. Nous allons réaliser une étude similaire à celle développée pour les tests rhéologiques. L'étude a pour but de mettre en évidence l'effet des changements de trajets de déformation dans différents endroits de la structure ; on évoquera l'effet de la perte d'homogénéité des champs mécaniques.

A noter que seul le modèle élasto-plastique à écrouissage combiné (classique et microstructural) sera utilisé dans ce chapitre. Les applications du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement, ainsi que le critère de localisation seront introduits au dernier chapitre, afin d'étudier le phénomène de localisation des déformations.

4.2 Analyse des schémas d'intégration

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude des deux principales classes de schémas d'intégrations développés au chapitre précédent. La première classe est relative aux schémas explicites qui regroupent Euler explicite (EE), Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) et Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). La deuxième classe représente les schémas implicites où nous nous intéressons uniquement au schéma de prédiction élastique/correction plastique du § 3.4.2.3 et qui consiste à utiliser un système d'équations réduit à résoudre par la méthode itérative de Newton-Raphson.

Pour toute l'étude qui sera réalisée ici nous considérons un essai de cisaillement Bauschinger. Cet essai est composé de deux trajets de chargement, un cisaillement direct (30% de déformation en cisaillement) suivi d'un cisaillement dans le sens inverse (60%). Le calcul est réalisé dans le code ABAQUS/Standard en utilisant un seul élément fini de type

C3D8I (élément volumique linéaire à huit nœuds et à intégration complète et avec des fonctions de forme enrichies).

4.2.1 Schémas explicites

Nous simulons l'essai de cisaillement inverse en utilisant le modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural. Nous avons utilisé en premier lieu l'algorithme du Tableau 3.1 mais sans l'introduction du paramètre β de détection de la décharge élastique. La Figure 4.1 montre les trois courbes de comportement, correspondant aux trois schémas, obtenues avec 100 incréments sur chaque trajet de chargement. Une courbe de référence simulée avec le schéma de RK4, en utilisant 10000 incréments sur chaque trajet, est reportée sur la même figure. Nous constatons les anomalies suivantes sur les trois courbes :

- La première est liée à la détection du seuil de plasticité ; aucun des schémas explicites n'est capable de détecter correctement l'entrée en plasticité. En effet, tel qu'indiqué au chapitre 3, ces schémas d'intégration ne vérifient pas le critère de plasticité à la fin de l'incrément. Nous remarquons néanmoins qu'avec les schémas de RK2 et RK4 la détection plastique est bien meilleure comparée à celle du schéma de EE et les courbes de comportement ainsi obtenues sont plus proches de la courbe de référence en trajet direct. Sur le trajet inverse nous constatons la même tendance, où le schéma de EE donne un comportement particulièrement aberrant.
- La deuxième anomalie apparaît juste au début de la décharge élastique. Au lieu d'obtenir tout de suite la décharge élastique, nous observons un comportement élasto-plastique qui suit la courbe monotone avant que la décharge élastique ait lieu. Comme nous le verrons par la suite, ce comportement non réaliste peut être supprimé en introduisant le paramètre β (voir § 3.4.1.3) permettant de détecter la décharge élastique après un chargement élasto-plastique.
- Une dernière anomalie est observée sur le comportement en décharge élastique. Nous remarquons que ce comportement n'est pas tout à fait linéaire, notamment avec le schéma de RK2. Ceci est dû à la taille de l'incrément de chargement qui génère dès le début du trajet inverse un comportement élasto-plastique. Ceci impose quelques précautions à prendre lors d'un changement du trajet de chargement. En effet, une diminution du pas de chargement ou son adaptation à ce niveau est nécessaire.

Pour éliminer les deux dernières anomalies, nous avons activé le critère de détection de la décharge élastique en introduisant le paramètre β dans l'algorithme d'intégration (voir Tableau 3.1). Pour les mêmes simulations, nous avons remarqué une nette amélioration sur les courbes de comportement. Les deux problèmes liés à la décharge élastique ont été supprimés. Le seul problème qui subsiste reste la détection de l'état élasto-plastique qui se manifeste assez nettement en trajet inverse. Comme le montre la Figure 4.2, même avec une diminution de la taille de l'incrément (1000 incréments sur chaque trajet) il y a toujours un écart entre les trois courbes et la courbe de référence. Néanmoins, une nette amélioration est obtenue avec le schéma de RK4.

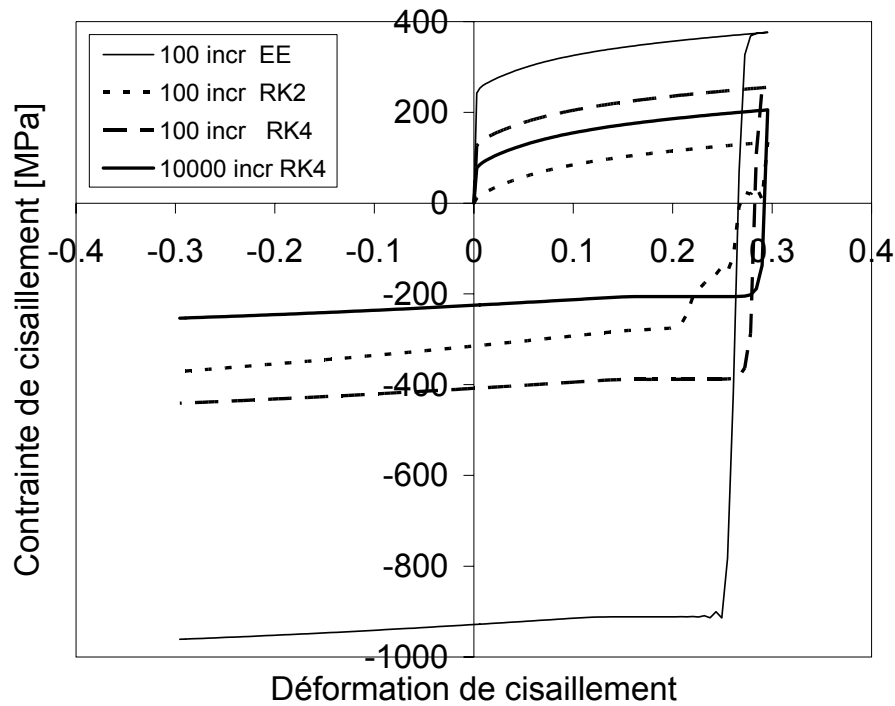


Figure 4.1. Simulation d'un essai de cisaillement inverse avec le modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural en utilisant les trois schémas d'intégration explicite sans introduction du paramètre de détection de la décharge élastique.

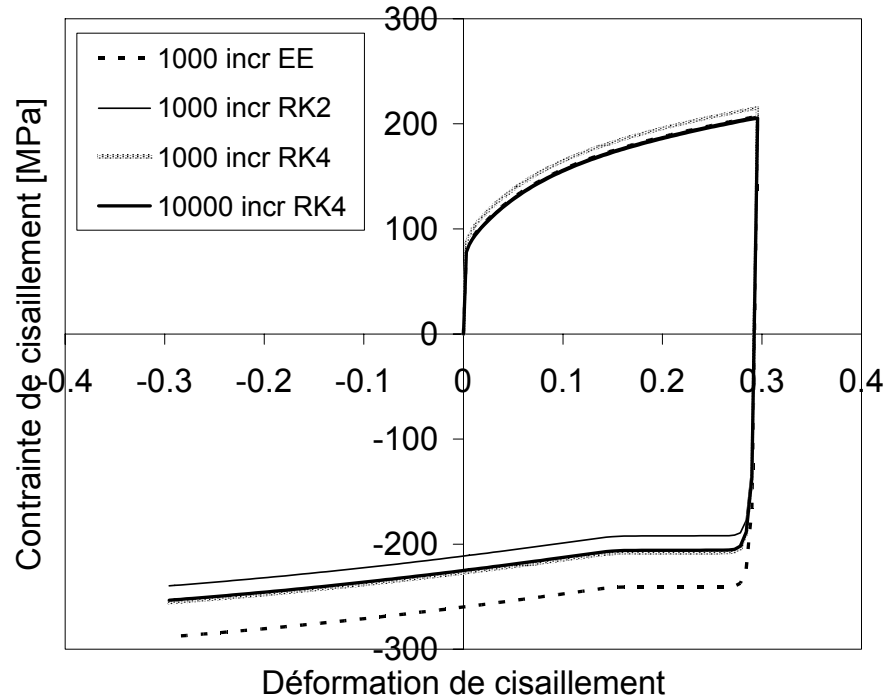


Figure 4.2. Simulation d'un essai de cisaillement inverse avec le modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural en utilisant les trois schémas d'intégration explicite et en introduisant le paramètre de détection de la décharge élastique.

Nous avons diminué l'incrément de chargement, en utilisant 10000 incréments sur chaque trajet et pour chaque schéma dans le but d'évaluer leur performance avec un faible incrément de chargement. De la même façon, le critère de détection de la décharge élastique a été activé. Les simulations ont montré que ces schémas donnent pratiquement la même courbe de comportement, mais avec une légère différence en trajet inverse, comme le montre la Figure 4.3.

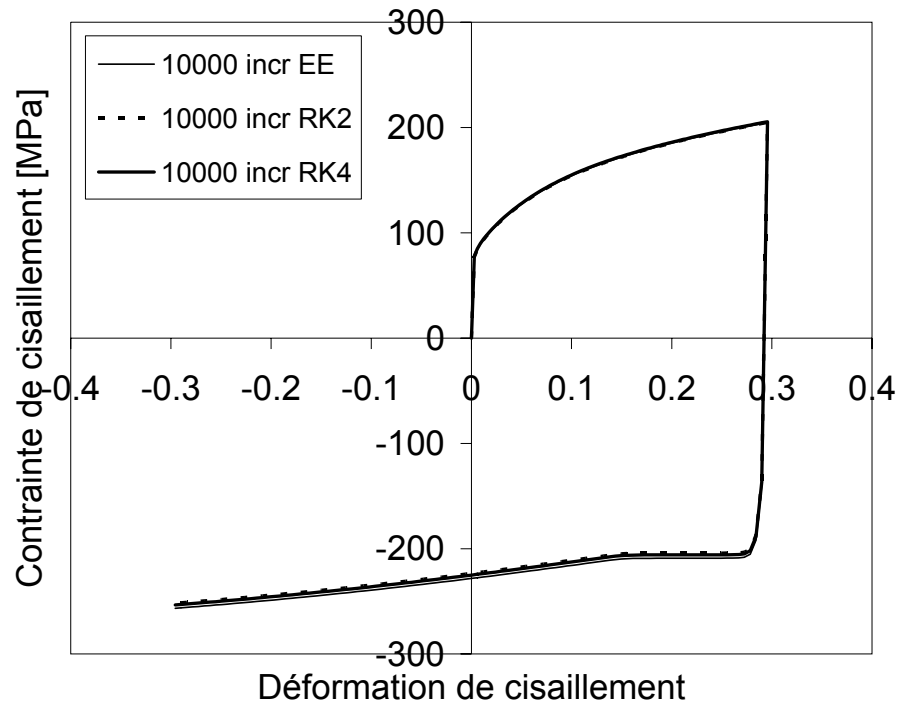


Figure 4.3. Simulation d'un essai de cisaillement inverse avec le modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural en utilisant un faible incrément de chargement pour les trois schémas d'intégration explicite.

En résumé, quelques remarques peuvent être tirées de l'application de ces trois schémas :

- Le traitement grossier de la condition de cohérence conduit à des entrées en plasticité et des décharges élastiques complètement erronées. De ce fait, un faible incrément de chargement est nécessaire pour reproduire le bon comportement.
- Le schéma de EE est particulièrement instable, notamment lors d'un changement de trajet de déformation.
- Le schéma de RK4 est le plus précis, suivi de RK2 et ensuite de EE. Cette constatation confirme le fait qu'en augmentant l'ordre d'intégration la précision augmente.
- Sans introduction d'un détecteur de décharge élastique les trois schémas peuvent faillir à reproduire le bon comportement lors d'un changement de trajet de chargement.

Des variantes de ces schémas ont été développées dans la littérature (Press et al., 1992) afin d'améliorer la précision de la solution. Par exemple, la méthode de RK4 emboîtée, qui consiste à estimer l'erreur de troncature sur la solution, a été appliquée par Adam (2003) avec succès pour la résolution d'un modèle de comportement thermo-élasto-visco-plastique

fortement non linéaire. Une idée assez simple pour améliorer la qualité de prédiction de ces schémas consiste à introduire un critère d'adaptation de l'incrément de chargement basé sur le saut entre la contrainte de début et celle de fin d'incrément. Ceci dans le but de garder une faible sortie de la surface de charge, c'est-à-dire avoir $F_{n+1} \approx 0$. Un incrément de contrainte $\Delta\sigma_{\text{lim}}$ est à fixer par l'utilisateur selon la précision et le temps de calcul souhaités. Le critère s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} \Delta\sigma = \|\sigma_{n+1} - \sigma_n\| = \sqrt{\sum_{i,j} (\sigma_{n+1}^{ij} - \sigma_n^{ij})^2} \\ \text{si } \Delta\sigma > \Delta\sigma_{\text{lim}} \text{ alors } \Delta t_{\text{nouveau}} = \frac{\Delta\sigma_{\text{lim}}}{\Delta\sigma} \Delta t_{\text{courant}} \end{cases} \quad (4.1)$$

Le nouvel incrément de chargement $\Delta t_{\text{nouveau}}$ sera utilisé à la place de l'incrément courant $\Delta t_{\text{courant}}$. Comme on peut le constater, le principal inconvénient de ce critère est le temps de calcul qu'il peut générer, du fait que pour satisfaire le critère de plasticité il faut éviter des sauts élevés de la contrainte. La Figure 4.4 montre un essai de cisaillement inverse simulé avec cette technique d'adaptation du pas de chargement, où $\Delta\sigma_{\text{lim}} = 2,5$ MPa. Concrètement, les courbes obtenues sont pratiquement confondues avec de très faibles écarts, même en trajet inverse.

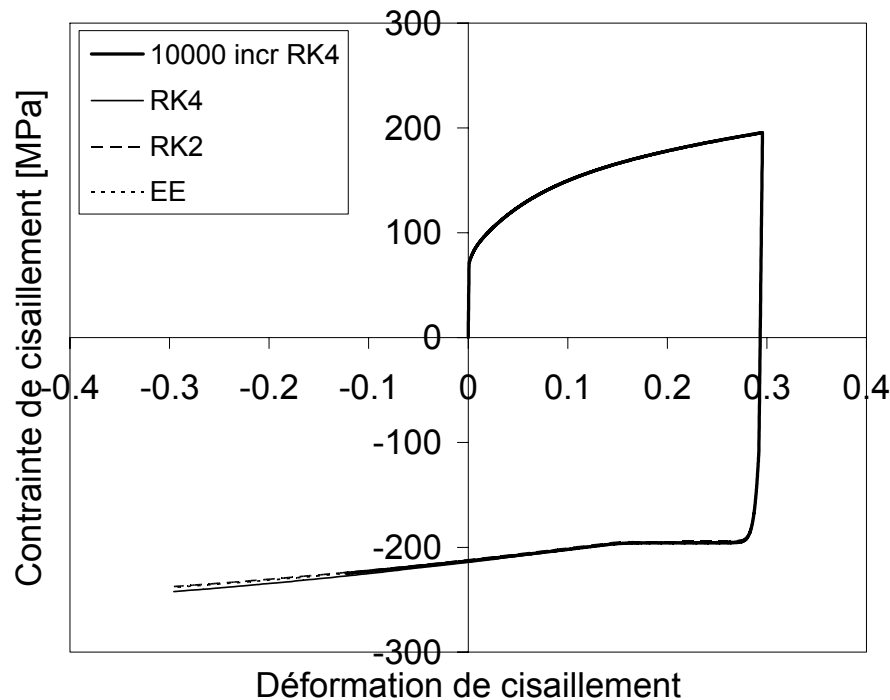


Figure 4.4. Simulation d'un essai de cisaillement inverse avec le modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural en utilisant une adaptation de l'incrément de chargement pour les trois schémas d'intégration explicite.

Le Tableau 4.1 montre le temps CPU en secondes obtenu avec chaque schéma d'intégration et dans les deux cas (avec et sans adaptation du pas de temps). Sans l'adaptation du pas de temps, les trois schémas donnent pratiquement le même temps CPU (rapport de

temps de l'ordre de 1). Nous remarquons que l'ordre du schéma d'intégration fait augmenter légèrement le temps CPU, du fait qu'il y a plus de sous étapes avec RK4 qu'avec RK2 et EE. Avec l'adaptation du pas de temps, autorisant un saut de contrainte de 2,5 MPa au maximum, les trois schémas donnent un très faible temps CPU par rapport à l'intégration sans adaptation (rapport de temps de l'ordre de 16). Entre les trois schémas, celui de EE donne le plus faible temps CPU (rapport de temps de l'ordre de 1,5 entre EE et RK2 ou RK4). L'ordre d'intégration a un impact direct sur le temps de calcul, du fait que le saut de contrainte limite choisi est suffisant pour une bonne simulation de la courbe de comportement avec les trois schémas.

Tableau 4.1 : Temps CPU en secondes d'une simulation d'un cisaillement inverse avec le modèle microstructural				
	Incrément fixe		Incrément adaptatif ($\Delta\sigma_{\text{lim}} = 2,5 \text{ MPa}$)	
	Temps CPU	Nombre d'incréments	Temps CPU	Nombre d'incréments
EE	731	1000	31	421
RK2	740		46	607
RK4	756		47	570

L'adaptation du pas de chargement est intéressante dans le cas de simulations de tests rhéologiques ou de simples calculs de structures par éléments finis. Néanmoins, dans le cadre d'un calcul de structure complexe, tel qu'en mise en forme, cette technique peut s'avérer très coûteuse en termes du temps CPU qu'elle peut générer. En effet, cette adaptation impose une diminution simultanée de l'incrément de chargement au niveau de tous les points d'intégration des éléments finis de la structure, ce qui n'est probablement pas nécessaire.

Une alternative à cela est d'appliquer des schémas d'intégration implicite qui permettent d'utiliser de gros incréments de chargement tout en satisfaisant la condition de cohérence, ce qui permet de diminuer considérablement le temps CPU.

4.2.2 Schémas implicites

Nous étudions ici les performances de l'algorithme de prédiction élastique/correction plastique, en utilisant un schéma d'intégration implicite de type asymptotique des lois d'écrouissage des modèles classique et microstructural. En premier lieu et à des fins de validation, nous considérons le modèle d'écrouissage classique de Chaboche-Marquis, disponible dans le code ABAQUS. Comme application, nous reprenons le même essai de cisaillement inverse. La Figure 4.5.a montre les courbes de comportement obtenues avec 1 et 10 incréments de chargement pour chaque trajet. La courbe de référence est simulée avec le modèle existant dans ABAQUS en utilisant 100 incréments pour chaque trajet.

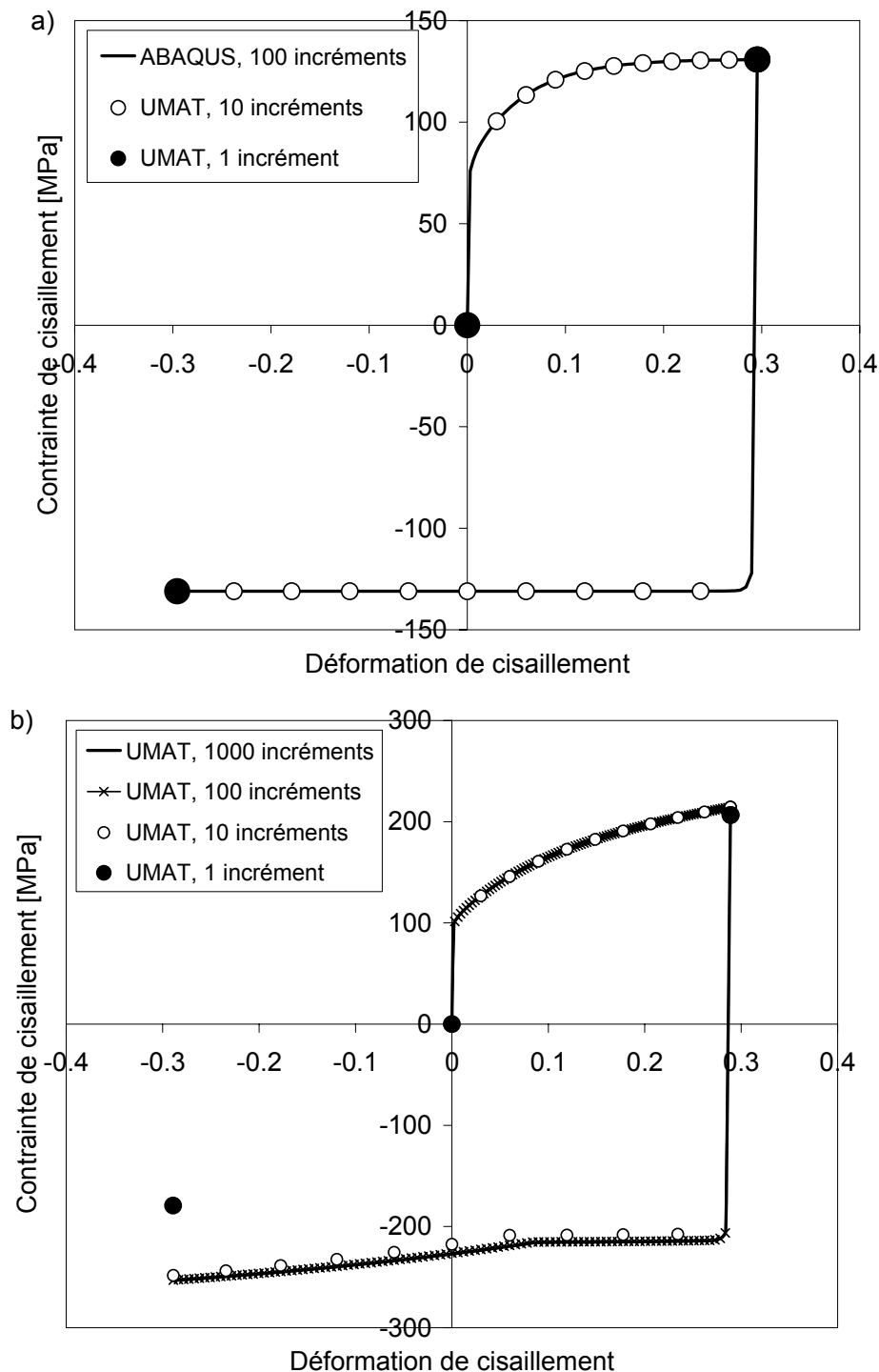


Figure 4.5. Simulation d'un essai de cisaillement inverse en utilisant le schéma d'intégration implicite avec le modèle élasto-plastique à écrouissage a) classique et b) microstructural.

Comme le montre la Figure 4.5.a, le comportement obtenu avec le schéma implicite correspond parfaitement à celui simulé avec le modèle existant dans ABAQUS et ceci même avec un seul incrément de chargement en trajet direct ou inverse. En effet, l'intégration asymptotique des lois d'écrouissage de ce modèle donne une approximation quasi exacte de la solution. Une simulation avec une intégration d'Euler implicite des lois d'écrouissage donne une très faible différence par rapport à la courbe de référence.

Dans le cas où nous utilisons le modèle d'écrouissage microstructural, des précautions sont néanmoins nécessaires à prendre, notamment lors d'un changement du trajet de chargement, où les hypothèses introduites au § 3.4.2.3.4 doivent être vérifiées. Pour cela, de grands incréments sont à éviter, afin de simuler correctement les phénomènes de changement de trajets de déformation, qui seront discutés dans les paragraphes suivants. La Figure 4.5.b montre ce comportement simulé en utilisant différentes tailles d'incrément. Avec 10 incréments (voire 1 incrément), la simulation s'écarte de la solution de référence. Avec 100 incréments, la simulation est confondue avec la solution de référence. Ceci suggère de se limiter à des incréments inférieurs à 5%, ce qui reste une valeur encore bien élevée pour un calcul par éléments finis en mise en forme.

4.2.3 Synthèse

Nous avons étudié les deux grandes classes de schémas d'intégration (explicites et implicites) couramment utilisés pour la résolution d'EDO. L'étude consistait à évaluer ces schémas et à mettre en évidence les performances et les limites de ces méthodes dans le cas d'une résolution d'un modèle élasto-plastique à écrouissage combiné.

Nous avons pu montrer, à travers un essai de cisaillement inverse, les différences que l'on peut avoir dans le cas d'une intégration explicite où le critère de plasticité n'est pas pris en compte directement dans la résolution. De ce fait, ces schémas ne peuvent être appliqués sur un modèle de comportement de la forme présentée au chapitre 2 qu'avec une adaptation du pas de chargement. Nous avons signalé que le temps CPU généré par une telle adaptation pouvait être élevé, notamment pour des calculs de structures complexes. Ainsi, un compromis doit être fait entre la précision recherchée et le temps de calcul envisagé. Néanmoins, pour la simulation d'essais rhéologiques ou de simples calculs de structures ces méthodes peuvent être appliquées avec un certain succès et les calculs peuvent être effectués dans des durées raisonnables. Le principal avantage de ces méthodes est la simplicité de leur mise en œuvre.

Notons que lorsque le modèle de comportement est implanté dans un code dynamique explicite, comme ABAQUS/explicite, les pas de temps de chargement sont extrêmement faibles (limités par la taille de la plus petite maille de la structure). Dans ces considérations, les limitations des schémas explicites s'estompent. Ainsi, dans la cadre d'un projet avec Arcelor, nos algorithmes ont été utilisés pour des simulations de mise en forme. L'objectif du développement de ces algorithmes était la mise au point d'un « laboratoire d'essais » pour modèles de comportement au sein de PamStamp, pour notre partenaire industriel.

Enfin, nous avons montré l'intérêt particulier des schémas d'intégration implicite. Ces schémas permettent d'utiliser de grands incréments de chargement, d'où la diminution du temps CPU. Néanmoins, des précautions sont à prendre en compte dans le cas où des hypothèses simplificatrices sont introduites lors de la résolution. De plus, si ces schémas s'avèrent précis et stables, la principale difficulté réside dans la mise en œuvre d'une stratégie générale de résolution par intégration implicite. En effet, dans ce cas on abouti généralement à des systèmes d'équations non linéaires à résoudre par une méthode itérative qui peut poser des difficultés de convergence. Une résolution adaptative, prenant en considération la nature physique de chaque phénomène modélisé, semble la plus adoptée dans la littérature, vu la complexité des lois d'évolution introduites dans les modèles de comportement.

4.3 Simulation des changements de trajets de déformation

Nous consacrons cette partie à la simulation de deux types d'essais rhéologiques, des essais monotones (traction et cisaillement) et des essais séquentiels composés de chargements simples (traction et/ou cisaillement). A travers les essais monotones, nous mettrons en évidence l'effet de l'anisotropie initiale par l'application d'un chargement dans différentes directions d'anisotropie. Avec les essais séquentiels, nous mettrons en évidence les capacités de chaque modèle d'écrouissage à reproduire les phénomènes de changement de trajets de déformation.

4.3.1 Description des matériaux

Deux aciers sont considérés dans cette étude, un acier doux (DC06) et un acier dual phase (DP600) fournis par Arcelor et VoestAlpine, respectivement, dans le cadre du projet européen CECA. Ces deux nuances d'aciers sont choisies du fait qu'elles couvrent une large gamme de comportements allant des aciers doux (DC06) aux aciers à très haute résistance (DP600).

Les paramètres d'anisotropie initiale (critère de Hill 48) sont donnés au Tableau 4.2 pour chaque matériau. Les paramètres des deux modèles d'écrouissage correspondant à chaque matériau sont donnés au Tableau 4.3. Tous ces paramètres ont été identifiés par le Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux (LPMTM, Université Paris 13).

4.3.2 Essais à trajets monotones

Nous considérons ici des essais de traction uniaxiale et de cisaillement simple. Nous utilisons uniquement le modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural avec la prise en compte de l'anisotropie initiale à travers le critère de Hill 48. Les simulations réalisées consistent à appliquer un chargement de traction ou de cisaillement selon une direction orientée de 0° , 45° ou 90° par rapport à la direction de laminage.

Tableau 4.2 : Anisotropie initiale : paramètres de Hill 48 pour les deux aciers.

Matériau	Acier doux (DC06)	Acier dual phase (DP600)
Epaisseur de la tôle (mm)	0.68	1.2
F	0.234	0.428
G	0.339	0.562
H	0.662	0.438
N	1.35	1.09
L, M	1.5	1.5

Tableau 4.3 : Paramètres d'écrouissage pour les deux aciers.

	Acier doux		Acier dual phase	
	Classique	Microstructural	Classique	Microstructural
Y_0 (MPa)		161.7		356.1
R_{sat} (MPa)	225.5	75.12	331	77.02
C_R	4.14	23.29	5.88	558.9
X_{sat} (MPa)	78.26	-	220.4	-
C_X	28.9	361.9	70.93	65.1
X_0 (MPa)		7.3		120.4
S_{sat} (MPa)		233.3		313.3
C_{SD}		3.75		8.67
C_{SL}		1.097		0
C_p		2.42		1.53
n_L		0		0
n_p		974		700
f		1		0.49
r		0.86		0

La Figure 4.6 montre les courbes de comportement simulées pour les deux matériaux. Nous remarquons que l'effet de l'anisotropie initiale est nettement prononcé en traction uniaxiale pour les deux matériaux. En cisaillement simple, les courbes de comportement obtenues avec un chargement à 0° et à 90° sont pratiquement confondues. Un faible écart est obtenu avec un chargement à 45° .

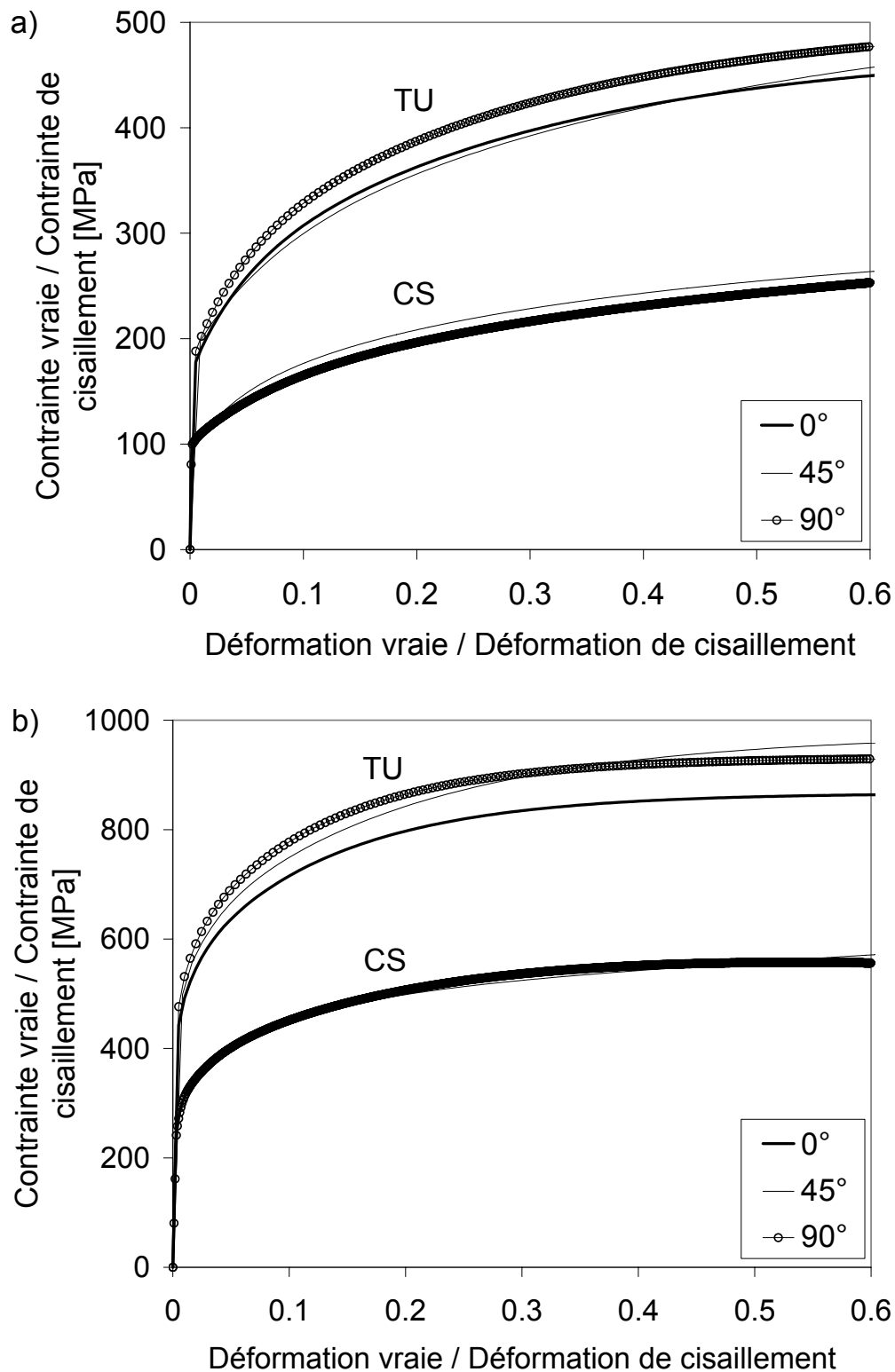


Figure 4.6. Simulations d'essais de traction uniaxiale et de cisaillement simple à différentes orientations par rapport à la direction de laminage. a) DC06 et b) DP600.

4.3.3 Essais séquentiels à deux trajets

Les simulations que nous réalisons ici regroupent l'ensemble d'essais rhéologiques utilisés pour identifier le modèle microstructural (Haddadi et al., 2003). Ils correspondent à :

- Deux essais monotones : une traction uniaxiale (TU) et un cisaillement simple (CS).
- Trois essais de cisaillement inverse ou Bauschinger (CB).
- Un essai orthogonal composé d'une pré-déformation en traction suivie d'un cisaillement simple (OR).

Tous les chargements sont appliqués selon la direction initiale de laminage.

Ces tests ont été utilisés par Teodosiu et Hu (1995, 1998) pour mettre en évidence les principaux effets d'un changement du trajet de chargement sur l'écrouissage. Les Figures 4.7 et 4.8 montrent la capacité des deux modèles d'écrouissage à prédire le comportement transitoire après un changement brusque du trajet de déformation. Comme mentionné par Bouvier et al. (2003), la prédiction des deux modèles diffère spécialement au niveau de la zone de transition, tandis que leur comportement en trajet monotone est pratiquement identique. Il a été montré que le modèle microstructural décrit mieux le comportement transitoire réel pour une large nuances de tôles métalliques (Teodosiu et Hu, 1995, 1998 ; Bouvier et al., 2003).

D'après les Figures 4.7 et 4.8, la comparaison entre les prédictions des deux modèles montre plusieurs différences lors d'un changement du trajet de chargement. Pour l'acier doux (voir Figure 4.7.a) le modèle microstructural exhibe une évolution rapide de l'écrouissage, suivie d'une stagnation et puis d'une reprise de l'écrouissage sur le trajet inverse en cisaillement. Egalement, un fort écrouissage suivi d'un adoucissement observé sur l'essai orthogonal est bien reproduit. Comme on peut le constater sur la Figure 4.8, ces phénomènes transitoires ne peuvent être captés par le modèle d'écrouissage classique.

Pour l'acier dual phase, ces phénomènes transitoires sont moins prononcés, comme on peut le voir sur la Figure 4.7.b. En effet, l'évolution de l'écrouissage est moins rapide au début du second trajet en cisaillement inverse et le plateau est moins prononcé. Il est à noter néanmoins que la taille du plateau augmente avec le niveau de pré-déformation. Sur le trajet orthogonal, la contrainte d'écoulement en cisaillement ne dépasse pas celle d'un essai de cisaillement monotone au niveau de la zone de transition.

Clairement, les prédictions des deux modèles diffèrent sous un trajet de chargement non-monotone, par contre elles sont pratiquement identiques sous un chargement monotone. Ainsi, leur dépendance du trajet de déformation sera la principale source de différence dans les simulations de mise en forme, comme nous le verrons au dernier chapitre lors de l'étude du phénomène de retour élastique en emboutissage.

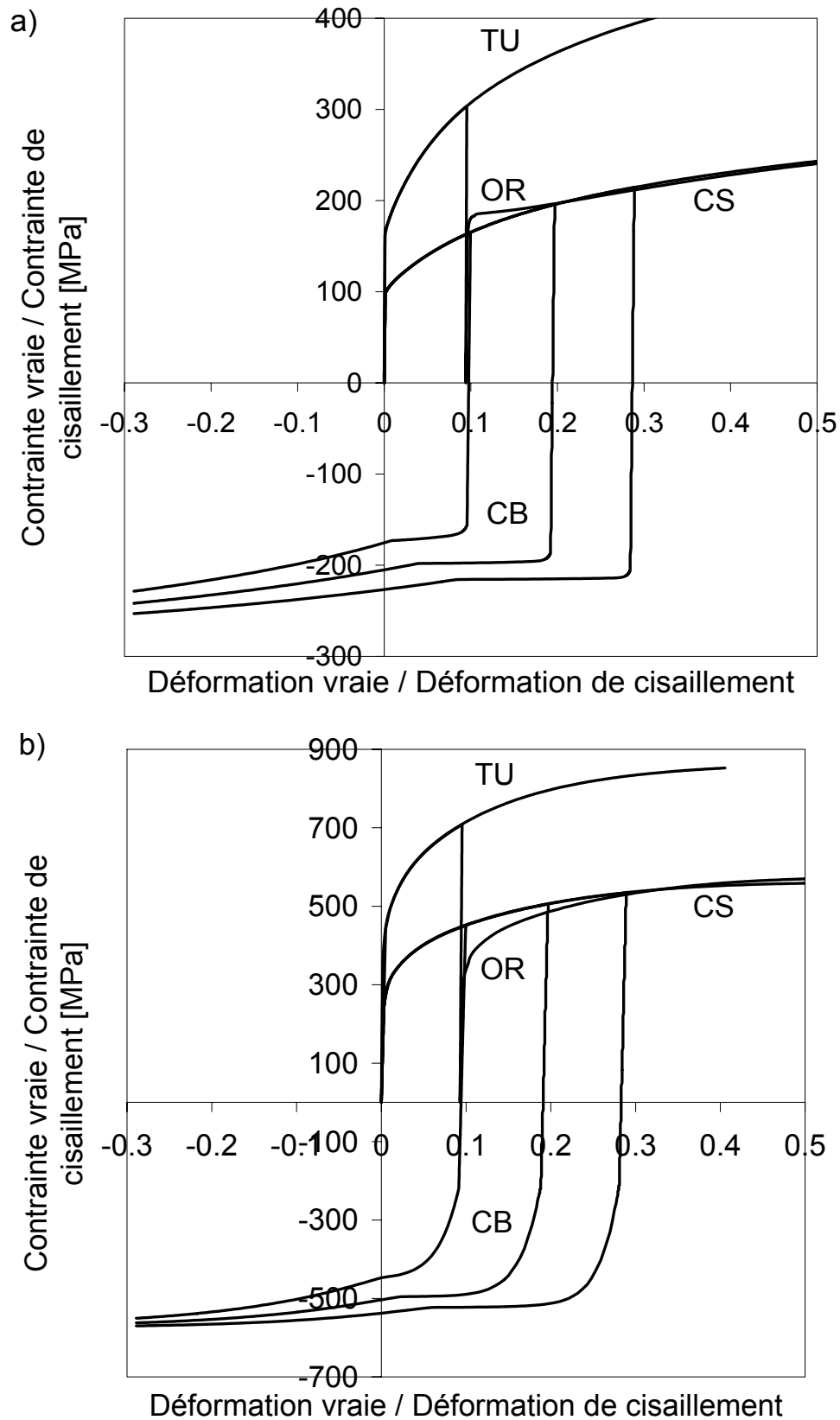


Figure 4.7. Prédictions rhéologiques avec le modèle microstructural. a) DC06 et b) DP600. TU : traction uniaxiale ; CS : cisaillement simple ; BS : cisaillement Bauschinger à 10, 20 et 30% de pré-déformation ; OR : traction uniaxiale à 10% de pré-déformation suivie d'un cisaillement simple dans la même direction.

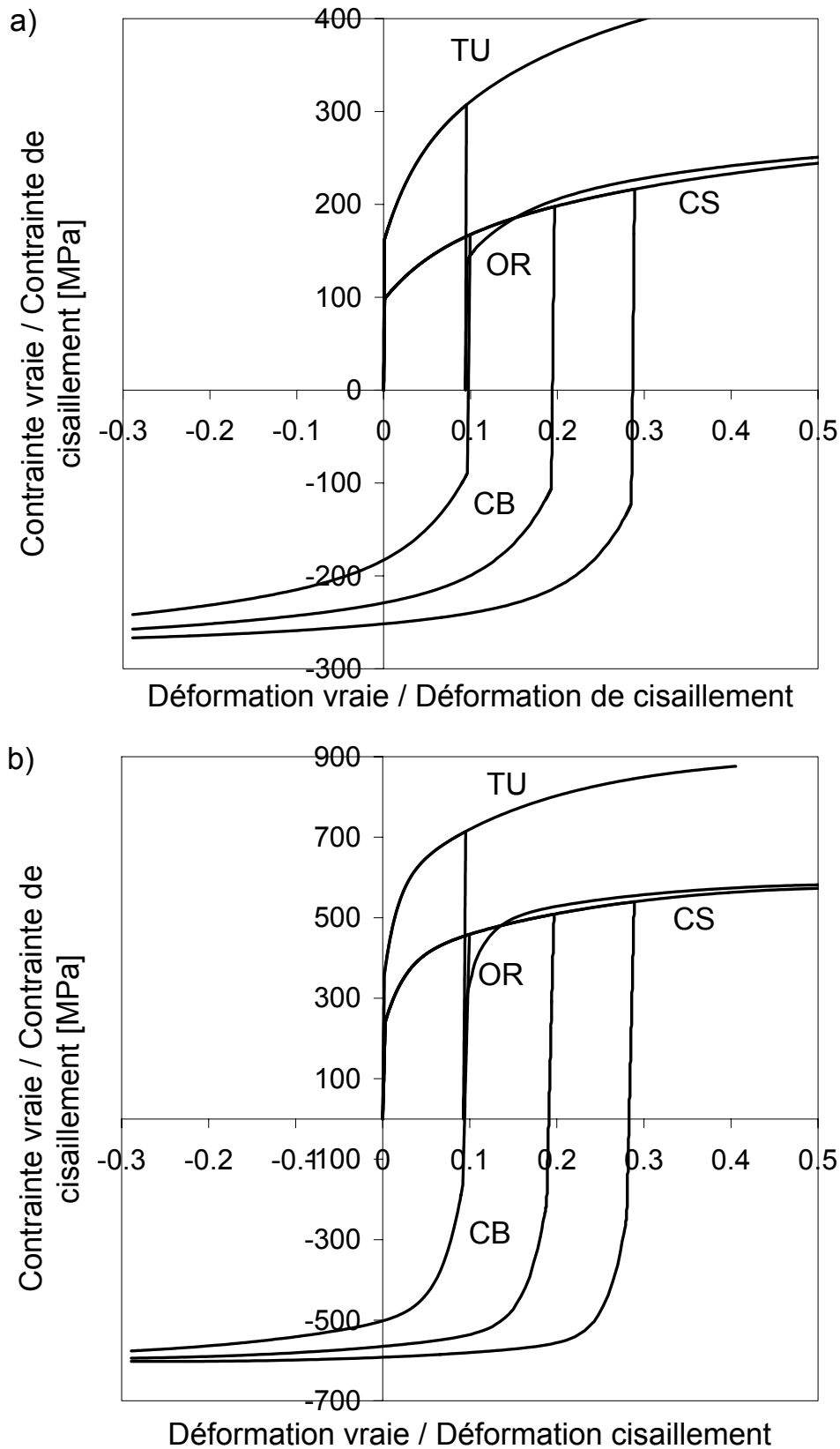


Figure 4.8. Prédictions rhéologiques avec le modèle classique. a) DC06 et b) DP600. TU : traction uniaxiale ; CS : cisaillement simple ; BS : cisaillement Bauschinger à 10, 20 et 30% de pré-déformation ; OR : traction uniaxiale à 10% de pré-déformation suivie d'un cisaillement simple dans la même direction.

4.3.4 Comparaison avec les essais expérimentaux

Les simulations réalisées précédemment sont confrontées ci-dessous aux résultats expérimentaux réalisés par le LPMTM (voir § 4.3.1). Ces derniers mettent clairement en évidence l'existence des zones de transition lors d'un changement du trajet de chargement, comme le montre la Figure 4.9. La comparaison montre une bonne reproduction des plateaux qui caractérisent la stagnation de l'écrouissage lors du début du trajet inverse. Par contre, sur l'essai orthogonal la contrainte d'écoulement plastique est légèrement sous-estimée au début du second trajet, mais nous obtenons une saturation au même niveau que l'expérience.

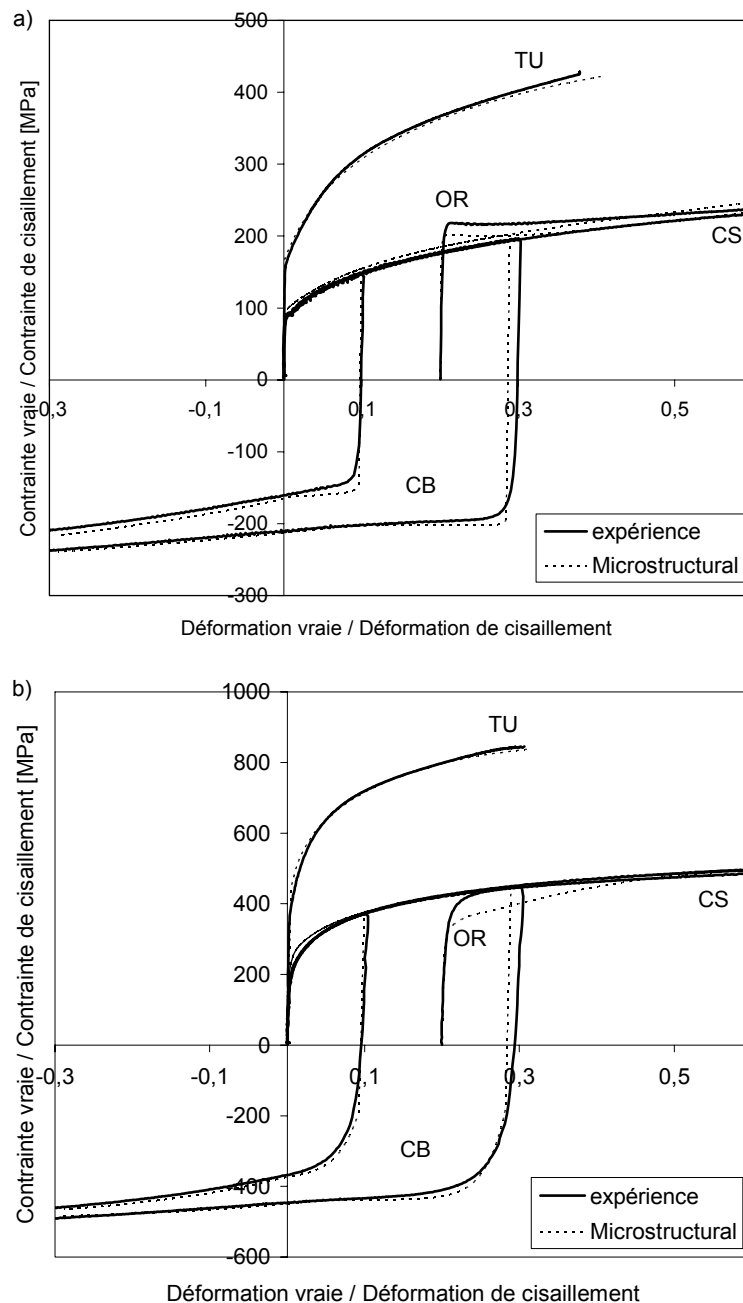


Figure 4.9. Comparaison des résultats expérimentaux avec les prédictions du modèle microstructural. a) DC06 et b) DP600.

4.4 Simulation de tests académiques

Nous considérons dans cette dernière partie de ce chapitre des simulations d'essais rhéologiques sur de structures simples en chargement de type traction et/ou cisaillement. Nous cherchons, d'un côté, à montrer l'efficacité de la routine de comportement UMAT (User Material dans ABAQUS/Standard), développée pour le modèle élasto-plastique, dans le cadre de simples calculs de structures par éléments finis en grandes déformations ; et d'un autre côté, à montrer les effets des trajets de chargement sur le comportement rhéologique que l'on peut obtenir dans différentes zones de la structure.

A noter que toutes les simulations seront réalisées le long de cette partie avec le modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural.

4.4.1 Plaque en essai de traction

Nous considérons une plaque de dimensions $30 \times 20 \text{ mm}^2$ et d'épaisseur $0,68 \text{ mm}$ pour le DC06 et $1,2 \text{ mm}$ pour le DP600. La plaque est encastree au niveau de la partie inférieure (le long de la largeur) et est soumise à un chargement en traction le long de la longueur, correspondant soit à la direction de laminage (0°) ou à la direction transverse (90°). Nous étudions le comportement rhéologique en réalisant des simulations par éléments finis, afin d'explorer l'état des champs mécaniques dans différentes zones de la plaque. Pour des raisons de symétrie, $1/8$ de la plaque est considéré avec un maillage de 150 éléments finis de type C3D8I du code ABAQUS/Standard. La géométrie, les conditions aux limites ainsi que le maillage sont illustrés sur la Figure 4.10. Le comportement introduit est celui du modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural. Les paramètres correspondant aux deux matériaux sont ceux donnés aux Tableaux 4.2 et 4.3.

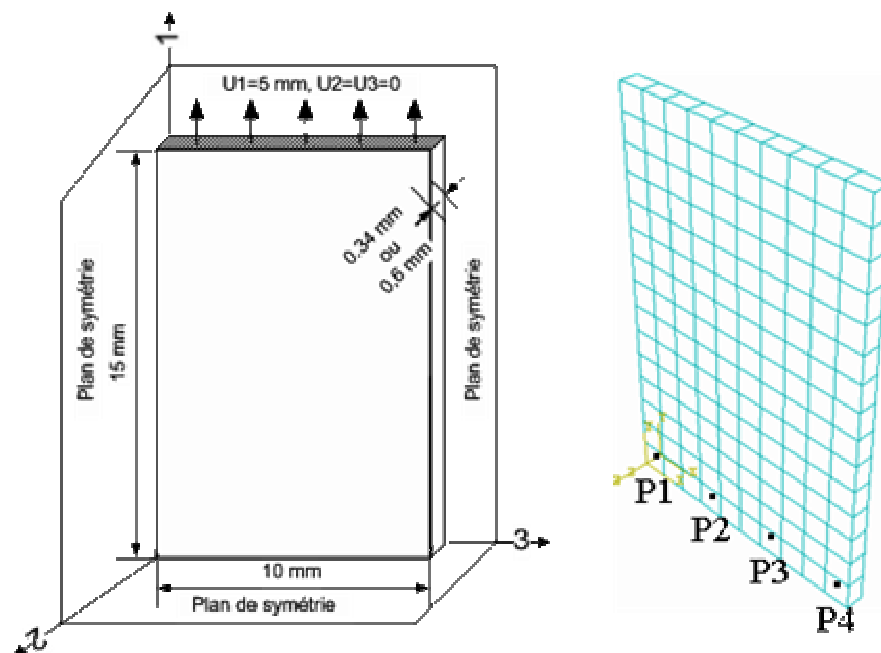


Figure 4.10. Géométrie ($1/8$ de la plaque), conditions aux limites et maillage de la plaque en essai de traction.

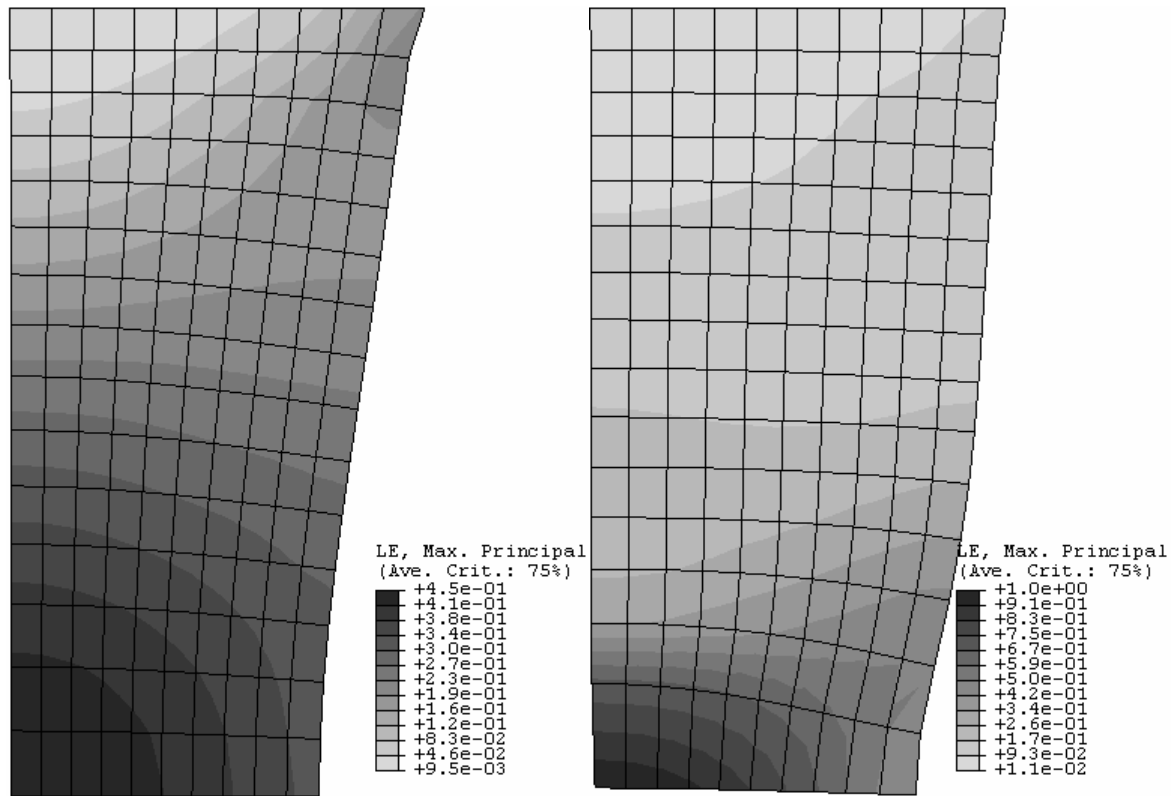


Figure 4.11. Distribution de la déformation vraie selon la direction de chargement à $U1=4$ mm en traction selon la direction de laminage. DC06 à gauche et DP600 à droite.

Les simulations numériques montrent que les champs mécaniques deviennent fortement hétérogènes à l'approche de la striction localisée. Presque la totalité de la déformation est concentrée au centre de la plaque. En termes du comportement contrainte/déformation de traction, les courbes correspondantes aux différents points choisis, allant du centre jusqu'au bord libre de la plaque le long de l'axe de symétrie horizontal, sont pratiquement confondues et ce jusqu'à environ 30% de déformation vraie pour le DC06 et 20% de déformation vraie pour le DP600 ; ceci dans les deux cas de traction selon la direction de laminage ou transverse. Au-delà de ces deux niveaux, le comportement devient différent ; au centre de la plaque (P1) la contrainte vraie devient nettement plus élevée qu'en s'approchant du bord libre (P4), comme le montrent les Figures 4.12 et 4.13. Dans tous les cas, au bord libre (P4) la courbe de comportement est pratiquement confondue avec la courbe rhéologique d'un essai de traction uniaxiale pour le DC06 (voir Figures 4.12.a et 4.13.a). Pour le DP600, la courbe de traction uniaxiale sature au même niveau que la courbe P4 (voir Figures 4.12.b et 4.13.b). Pour les deux matériaux les courbes P2 et P3 sont bornées par les courbes P1 (centre) et P4 (bord libre) et ceci dans tous les cas simulés. Le comportement au bord libre (P4) est le plus proche de celui de la traction uniaxiale, par contre au centre de la plaque on s'approche d'un état de traction plane.

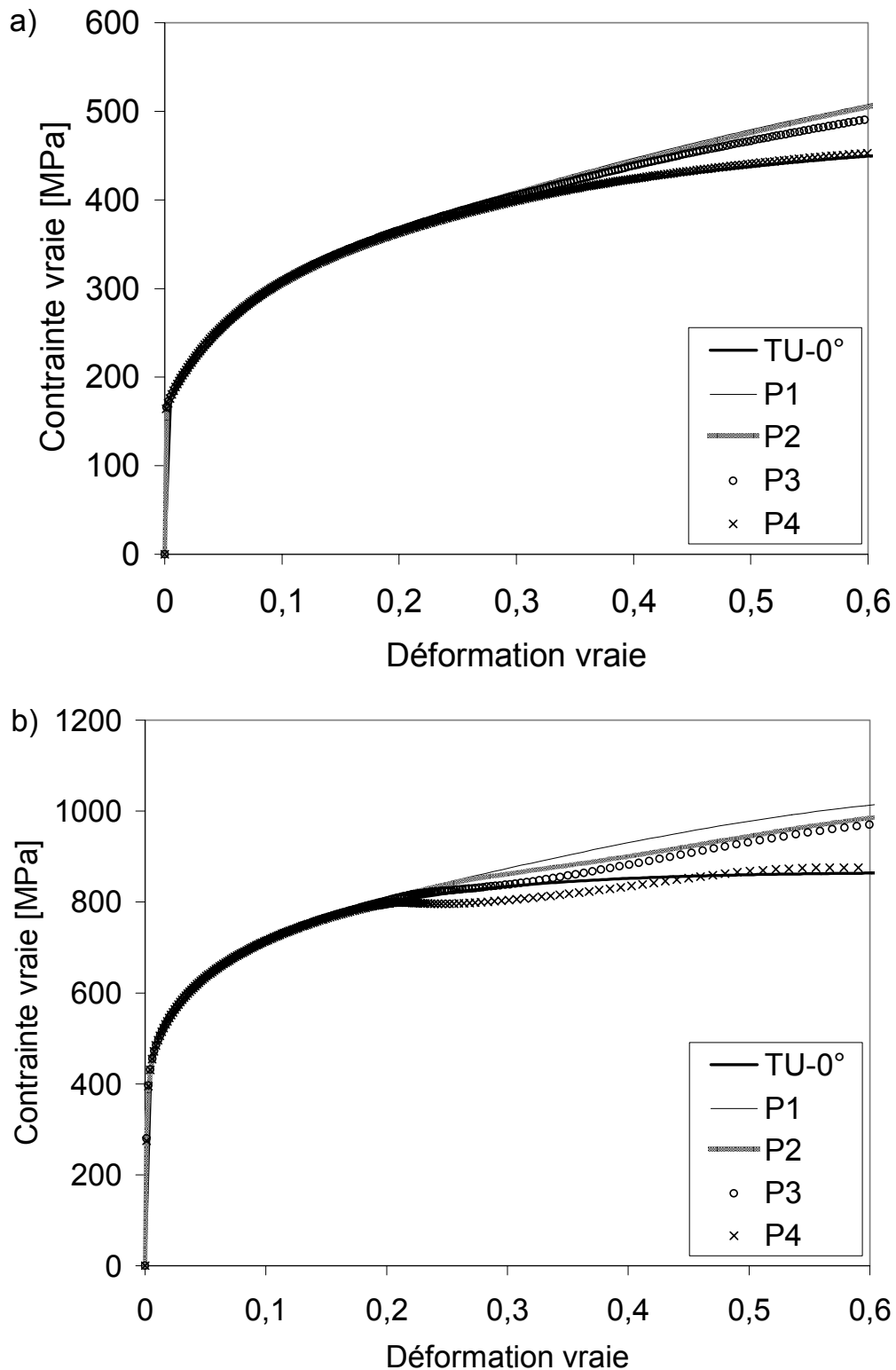


Figure 4.12. Courbes de comportement le long de la direction de chargement de la plaque soumise à une traction dans la direction de laminage. a) DC06 et b) DP600. TU-0° : traction uniaxiale dans la direction de laminage ; P1 à P4 sont les courbes de comportement dans la même direction aux points considérés de la Figure 4.10.

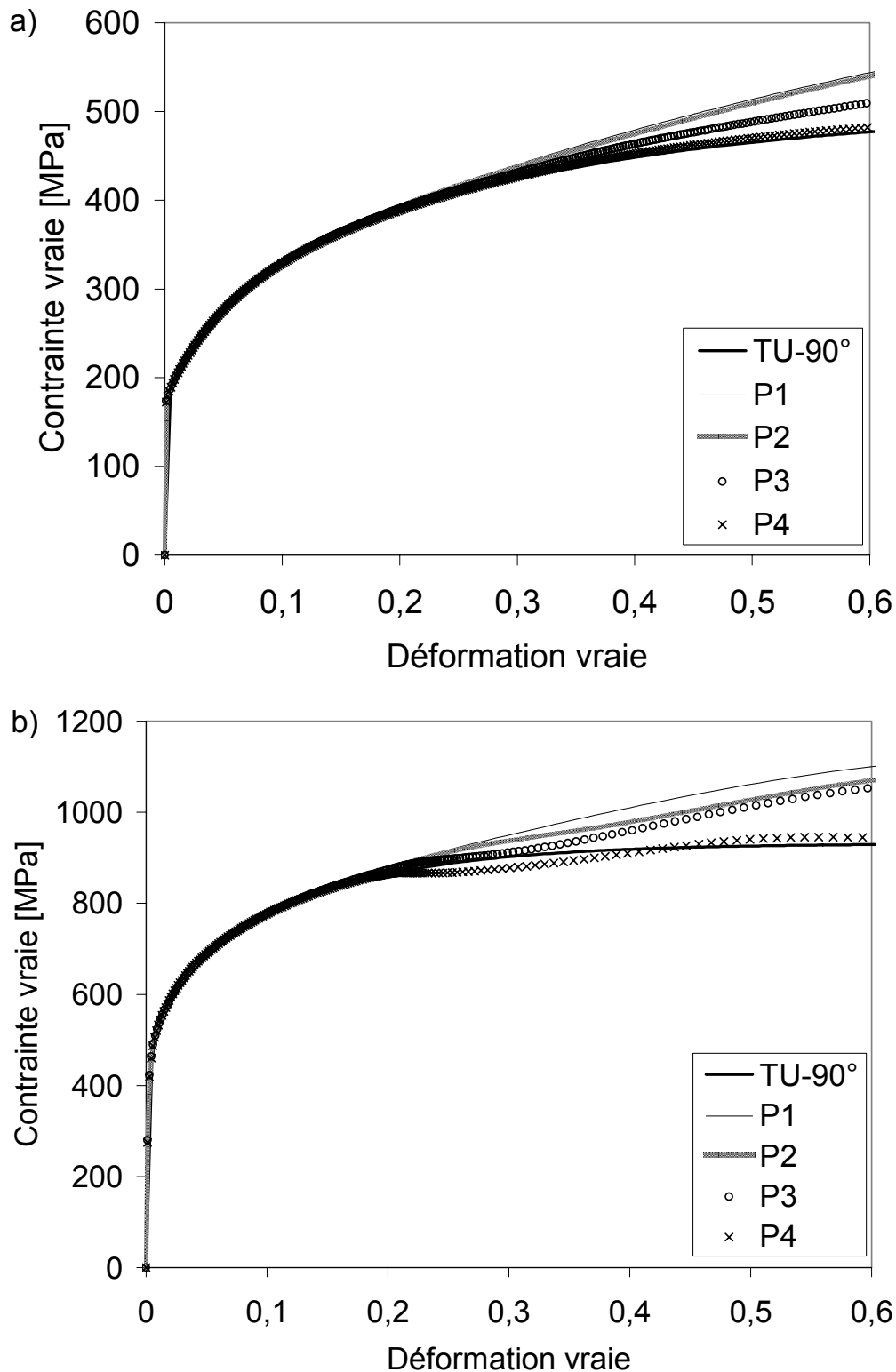


Figure 4.13. Courbes de comportement le long de la direction de chargement de la plaque soumise à une traction dans la direction transverse. a) DC06 et b) DP600. TU-90° : traction uniaxiale dans la direction transverse ; P1 à P4 sont les courbes de comportement dans la même direction aux points considérés de la Figure 4.10.

4.4.2 Plaque en essai de cisaillement

Nous considérons une plaque de dimensions $50 \times 25 \text{ mm}^2$ et d'épaisseur 0,68 mm pour le DC06 et 1,2 mm pour le DP600. Cette plaque est encastrée au niveau de la face inférieure et soumise à un chargement en cisaillement le long de la direction de laminage ou transverse appliqué au niveau de la face supérieure. Nous étudions son comportement rhéologique en cisaillement direct et inverse en réalisant des simulations par éléments finis, afin d'explorer l'état des champs mécaniques dans différentes zones de la plaque. Egalement, nous mettrons en évidence les effets de bord sur les phénomènes de transition qui apparaissent lors du trajet inverse.

Les simulations ont été réalisées avec un maillage de 325 éléments finis de type C3D8I du code ABAQUS/Standard. Trois points, allant du centre au bord libre de la plaque, ont été choisis pour montrer le comportement rhéologique en cisaillement.

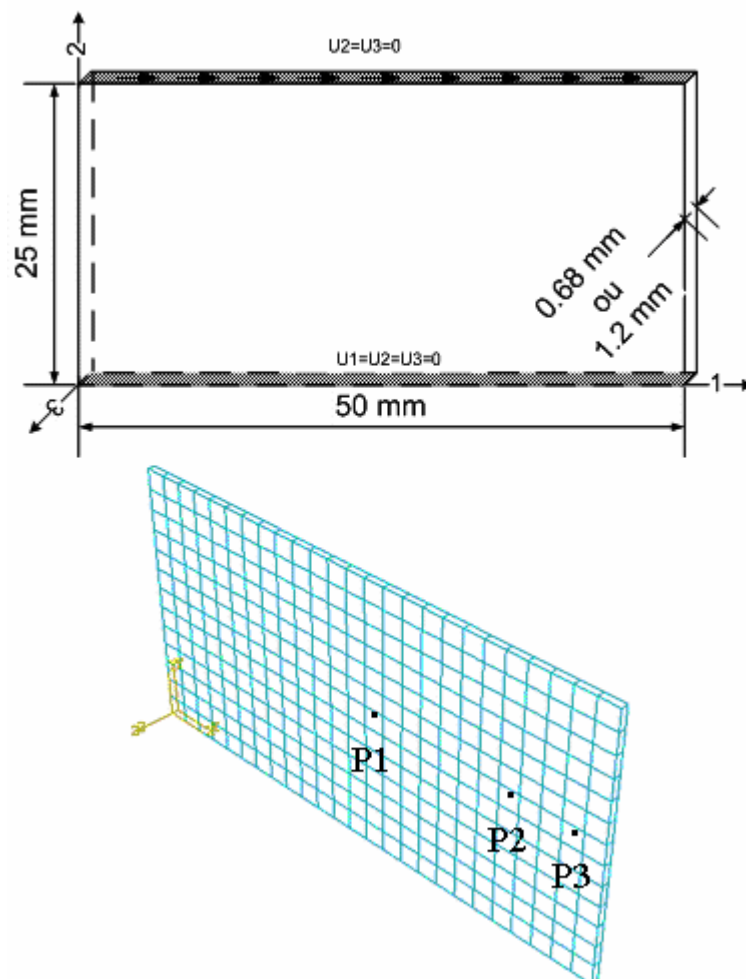


Figure 4.14. Géométrie, conditions aux limites et maillage de la plaque en essai de cisaillement.

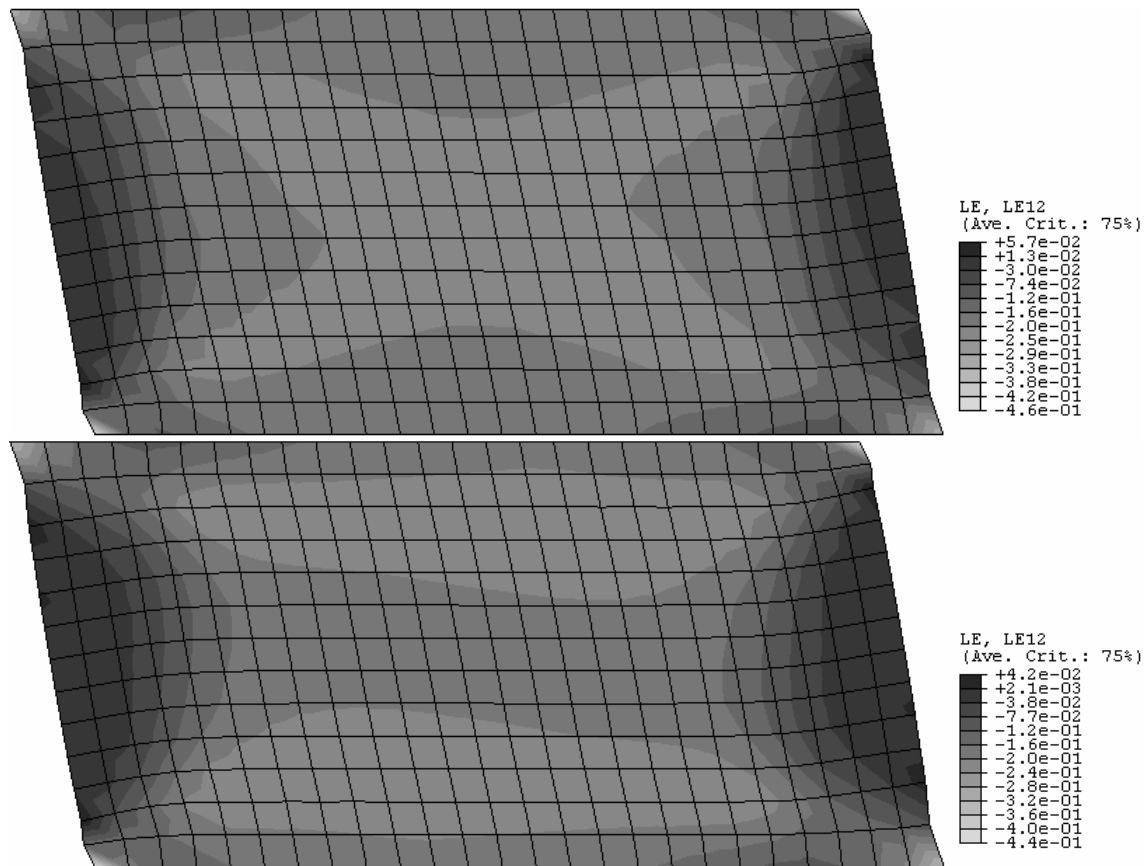


Figure 4.15. Distribution de la déformation de cisaillement à la fin du chargement en cisaillement inverse selon la direction de laminage. DC06 en haut et DP600 en bas.

L'inhomogénéité des champs mécaniques se manifeste aux bords libres de la plaque et se propage vers le centre avec l'augmentation du taux de cisaillement. Une concentration de contraintes est observée aux extrémités des bords supérieur et inférieur de la plaque au cours du chargement. Un cisaillement simple est obtenu dans la partie centrale de la plaque.

En termes du comportement rhéologique, le niveau de déformation de cisaillement atteint au centre de la plaque (P1) est nettement supérieur à celui du voisinage des bords libres (P2 et P3), et ceci lors des deux trajets (direct et inverse). La Figure 4.16 illustre ce constat, où l'on voit bien qu'au moment où au point P1 la déformation de cisaillement atteinte est de l'ordre de 20% pour les deux matériaux, aux points P2 et P3 (voisinage du bord libre) la déformation atteinte est de l'ordre de 15% (P2) et 8% (P3) pour le DC06, et 9% (P2) et 4% (P3) pour le DP600, et ceci en trajets direct et inverse.

Clairement, pour obtenir un cisaillement simple dans les différents endroits de la plaque il faut diminuer sa largeur ou augmenter sa longueur. Autrement dit, il faut avoir un rapport suffisamment grand entre la longueur (direction de chargement en cisaillement) et la largeur de la plaque. Ce qui a pour conséquence de diminuer l'effet de bord.

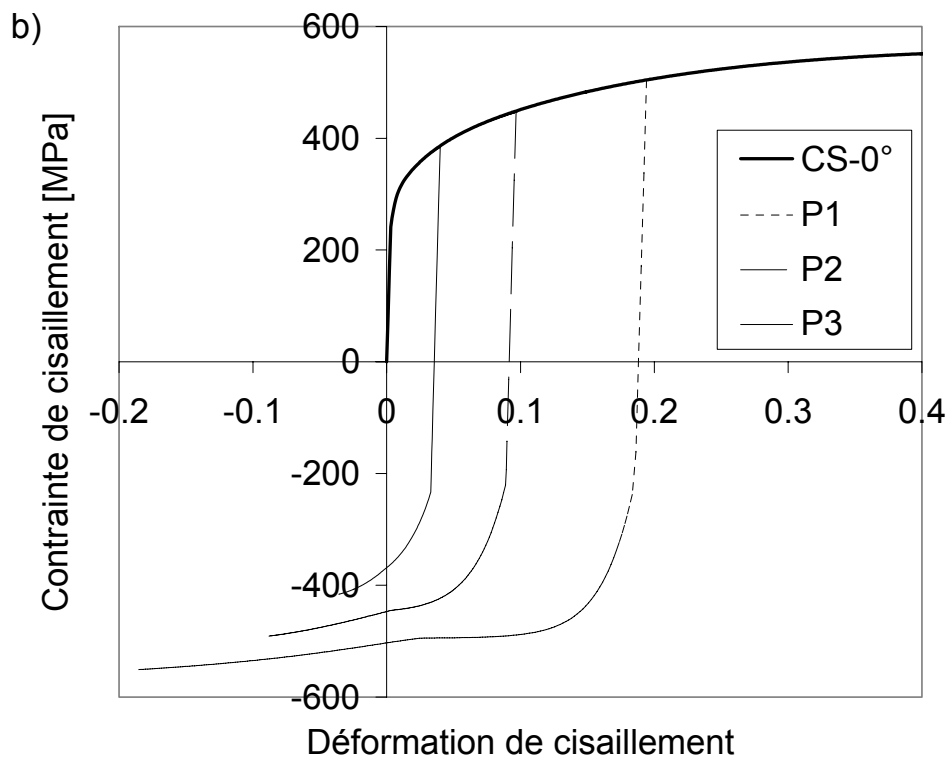
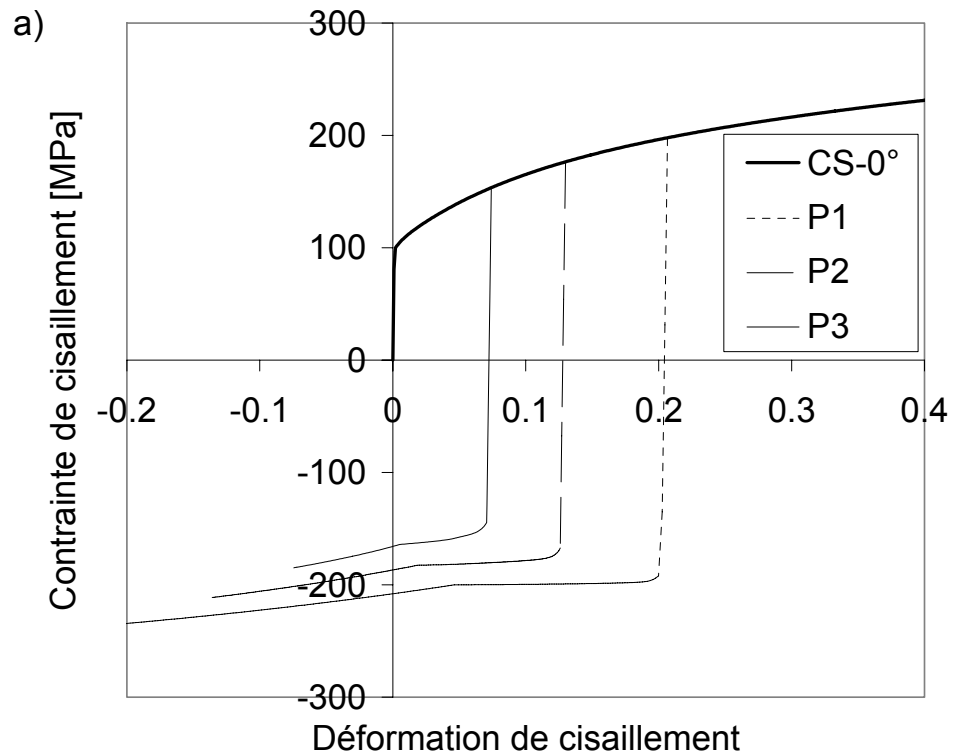


Figure 4.16. Courbes de comportement de la plaque soumise à un cisaillement dans la direction de laminage. a) DC06 et b) DP600. CS-0° : cisaillement simple dans la direction de laminage ; P1 à P3 sont les courbes de comportement en cisaillement dans la même direction aux points considérés de la Figure 4.14.

4.4.3 Plaque en essai orthogonal

A travers cette application, nous cherchons à reproduire ici les effets observés sur l'essai orthogonal du § 4.3.3. L'essai consiste à soumettre une plaque à une traction selon une direction d'orthotropie (0° ou 90°), suivie d'un cisaillement dans la même direction. Il s'agit de montrer l'effet induit par la pré-déformation en traction sur le comportement lors du chargement en cisaillement, et ceci à différents endroits de la plaque, allant du centre jusqu'aux bords libres de la plaque.

Le maillage est identique à celui de la plaque en cisaillement et nous utilisons le même modèle de comportement. Les conditions aux limites sont définies pour chaque étape du chargement. Pendant la première étape, nous appliquons des conditions aux limites de telle manière à créer un état de déformation homogène dans la plaque en traction. Lors de la deuxième étape, nous relâchons la plaque (décharge élastique). En dernière étape, nous appliquons les mêmes conditions de chargement que pour la plaque en cisaillement (voir Figure 4.17). Deux points, un au centre et un autre au voisinage du bord libre de la plaque, ont été choisis pour montrer le comportement rhéologique lors du second trajet de chargement.

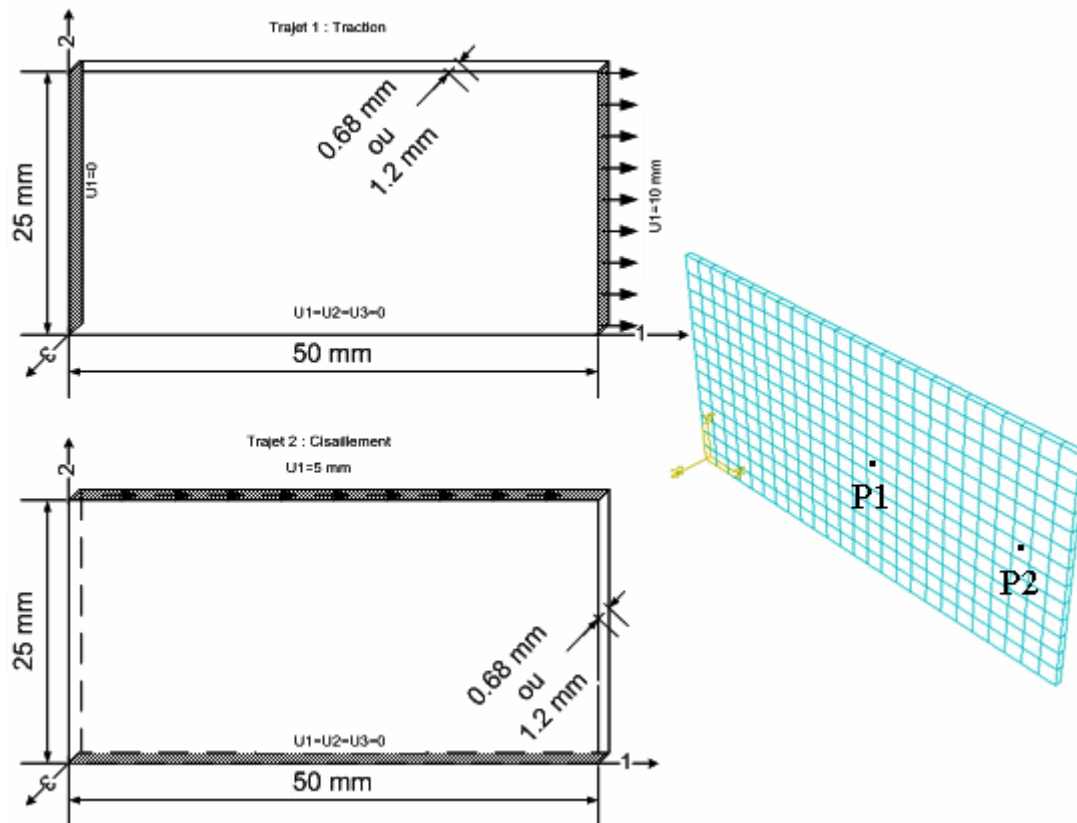


Figure 4.17. Géométrie, conditions aux limites et maillage de la plaque en essai orthogonal.

Lors du premier trajet de chargement en traction, l'état de déformation et de contrainte est homogène dans la plaque. L'inhomogénéité des champs mécaniques ne se manifeste qu'en trajet de cisaillement et particulièrement aux bords libres de la plaque et qui se propage vers le centre avec l'augmentation du taux de cisaillement. Une concentration de contraintes est observée aux extrémités des bords supérieur et inférieur de la plaque au cours du chargement.

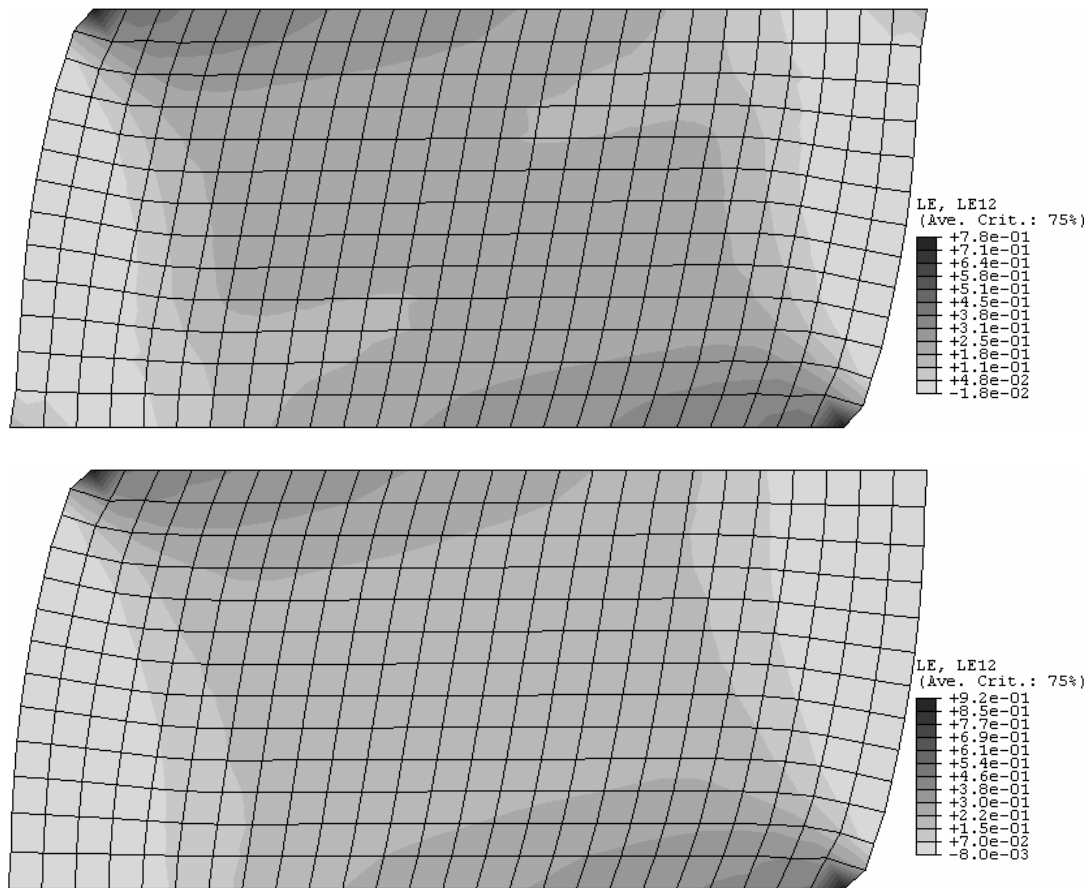


Figure 4.18. Distribution de la déformation de cisaillement à la fin du second trajet de chargement en cisaillement selon la direction de laminage. DC06 en haut et DP600 en bas.

Lors du second trajet, le niveau de déformation de cisaillement atteint au centre de la plaque (P1) est nettement supérieur à celui observé au voisinage des bords libres (P2) ; la Figure 4.19 illustre ce constat. On voit bien qu'au moment où au point P1 la déformation de cisaillement atteinte est de l'ordre de 28% (0° et 90°) pour le DC06 et 26% (0° et 90°) pour le DP600, au point P2 la déformation atteinte est nettement inférieure et est de l'ordre de 16% (0°) et 14% (90°) pour le DC06, et de 15% (0°) et 14% (90°) pour le DP600. Egalement, dans tous les cas, le niveau de contrainte atteint lors du second trajet au point P2 est nettement inférieur comparé à celui atteint au point P1.

Sur les courbes obtenues aux points P1 et P2, des effets de changement du trajet de déformation similaires à ceux observés sur un trajet orthogonal sont observés. En effet, des zones de transition, caractérisées par un durcissement suivi d'un adoucissement et puis d'une reprise de l'écrouissage, sont observées tout au début du second trajet de cisaillement. Ces effets sont assez marqués sur le DC06 et beaucoup moins sur le DP600, comme le confirme la Figure 4.19. Notons qu'au point P2 le second trajet est loin d'être un cisaillement simple ; ce qui éloigne la contrainte de cisaillement de sa valeur en cisaillement simple, puisque d'autres composantes du tenseur de contrainte ne sont pas nulles.

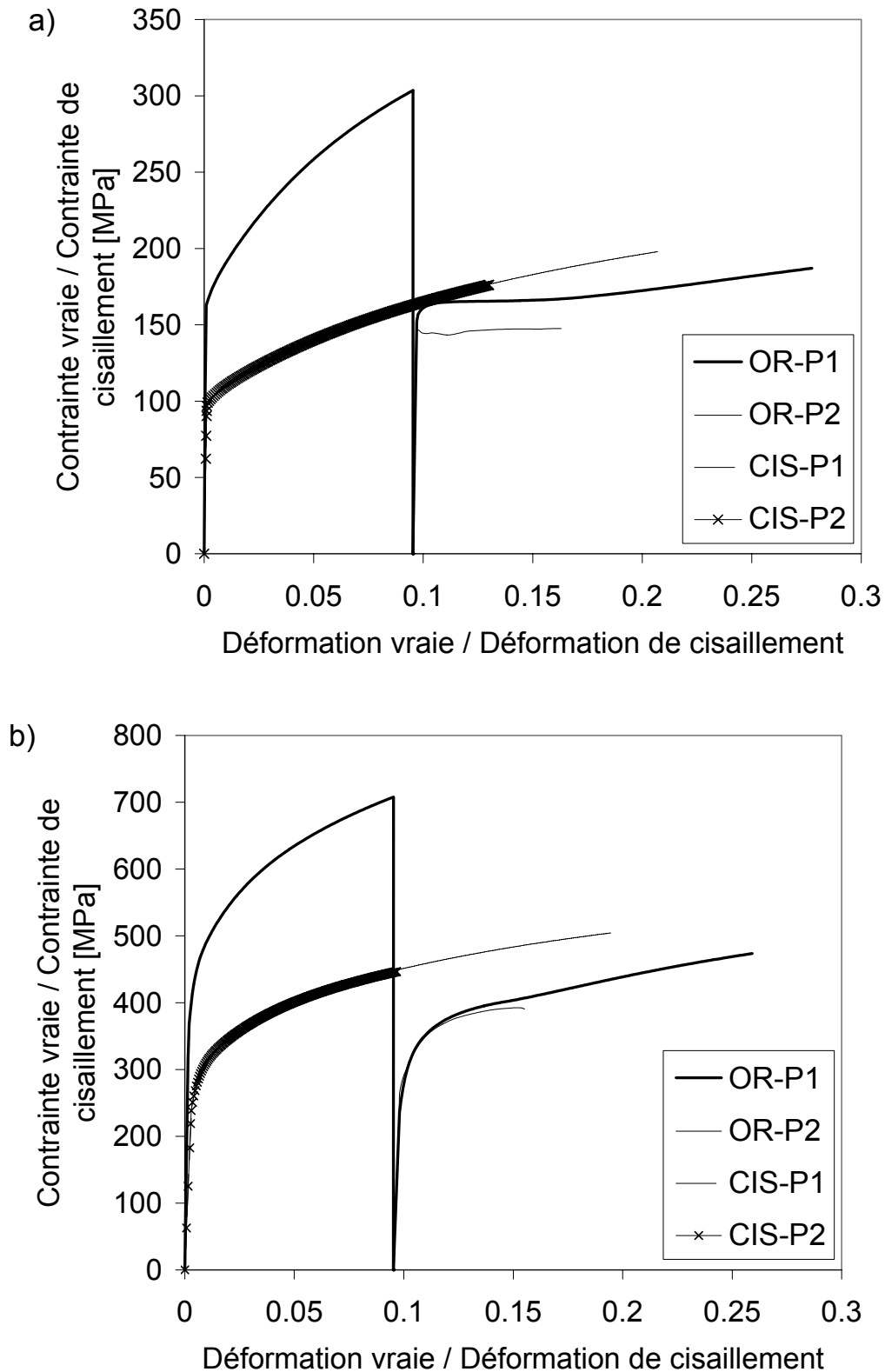


Figure 4.19. Courbes de comportement de la plaque soumise à un cisaillement selon la direction de laminage, après une pré-déformation homogène en traction de l'ordre de 10%. a) DC06 et b) DP600. OR-P1 et OR-P2 : cisaillement après pré-déformation en traction aux points P1 et P2. CIS-P1 et CIS-P2 : cisaillement monotone aux points P1 et P2.

4.5 Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre trois aspects importants, à savoir l'analyse des performances des différents algorithmes d'intégration du modèle élasto-plastique, des simulations de phénomènes de transition observés sur des essais rhéologiques à trajets séquentiels et enfin, des applications académiques dans le cadre d'un calcul de structure par éléments finis.

Pour l'évaluation des algorithmes d'intégration développés, nous avons montré les performances et les limites des différents schémas explicites et du schéma implicite basé sur la prédiction élastique et la correction plastique.

A travers les simulations de tests rhéologiques, nous avons montré la capacité de chaque modèle d'écrouissage à reproduire les phénomènes de changement de trajets de déformation. Plus particulièrement, nous avons pu voir la capacité du modèle microstructural à reproduire les phénomènes de transition observés sur des essais séquentiels composés de deux trajets de chargement.

En dernier lieu, nous avons montré que sur des structures simples soumises aux mêmes types de chargement que les essais rhéologiques, les mêmes phénomènes de transition peuvent être reproduits dans certains endroits de la structure. L'inhomogénéité des champs mécaniques fait que ces phénomènes de transition ne sont pas identiques d'un endroit à un autre de la structure.

Dans le prochain et dernier chapitre, nous allons exploiter le modèle élasto-plastique à écrouissage combiné (classique et microstructural) pour l'étude du phénomène de retour élastique en mise en forme par emboutissage des tôles métalliques. Nous étudions l'impact des phénomènes de transition, tels que modélisés par chaque modèle d'écrouissage, sur la déformée finale de la tôle après retour élastique. Egalement, nous introduirons le modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement conjointement avec le critère de localisation, développé sous le formalisme des grandes déformations, pour étudier le phénomène de localisation des déformations dans les tôles métalliques. Plus particulièrement, nous verrons son application pour le tracé des CLF.

Chapitre 5

Application en mise en forme : retour élastique et localisation

5.1	Introduction	146
5.2	Etude du retour élastique	146
5.2.1	Description de l'essai « Oméga »	146
5.2.2	Analyse par éléments finis de l'essai	147
5.2.3	Essai à géométrie « arrondie »	148
5.2.4	Essai à géométrie « tranchante »	151
5.2.5	Analyse de la convergence et du temps CPU	156
5.2.6	Synthèse	157
5.3	Etude du phénomène de localisation	158
5.3.1	Application du modèle couplé à l'endommagement	158
5.3.2	Détermination de Courbes Limite de Formage à localisation	162
5.3.3	Orientation des bandes de localisation	172
5.4	Conclusion	175

5.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous étudions deux phénomènes complètement distincts, le problème du retour élastique en emboutissage et le phénomène de localisation des déformations généré par les grandes déformations plastiques que subit le matériau. Ces deux phénomènes représentent les défauts majeurs, en plus du plissement, qui peuvent compromettre une opération d'emboutissage et leur prédiction est d'une importance majeure pour les industriels. Nous les utilisons donc pour quantifier la contribution de notre modélisation à cette direction de recherche très active au sein de la communauté scientifique.

Le retour élastique en emboutissage des tôles métalliques est un phénomène qui apparaît après enlèvement des outils. Comme indiqué au chapitre 1, il s'agit d'un défaut géométrique qu'il convient de quantifier, afin de pouvoir le corriger. Pour l'étudier, nous allons considérer un essai standard largement utilisé dans la littérature et dans les milieux industriels. L'étude consistera à simuler le retour élastique en analysant l'impact de différents paramètres ayant une influence sur la forme finale de la pièce emboutie. De nombreuses simulations de cet essai ont été présentées dans la littérature. Nous revisitons ces résultats, en apportant des éclairages notamment en ce qui concerne l'effet du modèle d'écrouissage sur le retour élastique.

Par la suite, le critère de localisation de Rice sera utilisé conjointement avec le modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement pour la prédiction des déformations limites à localisation pour différents trajets de chargement. Bien que volontairement limités ici à un seul élément fini, les trajets utilisés, monotones ainsi que séquentiels, sont typiques des chargements rencontrés en mise en forme des tôles métalliques. Ce sont aussi les chargements utilisés pour le tracé des CLF. Outre les déformations limites à localisation, nous mettrons en évidence l'orientation des bandes de localisations ainsi prédites.

5.2 Etude du retour élastique

Nous réalisons ici une étude du retour élastique à travers un essai standard (essai dit « Omega », ou U Shape test en anglais) proposé à la conférence Numisheet'93 (1993). Ce test a été considéré comme un essai de référence pour l'étude expérimentale de ce phénomène dans les tôles métalliques et également pour la validation des simulations numériques (Mattiasson et al., 1995 ; He et Wagoner, 1996 ; Duffett et al., 2002 ; Sabourin et al., 2002 ; Lee et al., 2005b ; Dongjuan et al., 2006 ; Firat, 2006). Dans le cadre de notre étude, ce test est considéré dans le but de mettre en évidence l'effet des modèles d'écrouissage sur le niveau du retour élastique, combiné aux paramètres numériques et du procédé d'emboutissage.

5.2.1 Description de l'essai « Oméga »

Nous considérons deux géométries pour cet essai, dont les paramètres géométriques sont donnés au Tableau 5.1. Les principales caractéristiques géométriques de ce test sont les rapports L/W , D/W et T/R , où W est la largeur du poinçon, L est la longueur initiale de la tôle, D est la course du poinçon, T est l'épaisseur de la tôle et R est le rayon de courbure du poinçon et de la matrice. Plus ces valeurs sont grandes et plus le niveau du retour élastique est important ; ainsi, la sensibilité aux paramètres de la modélisation s'accroît.

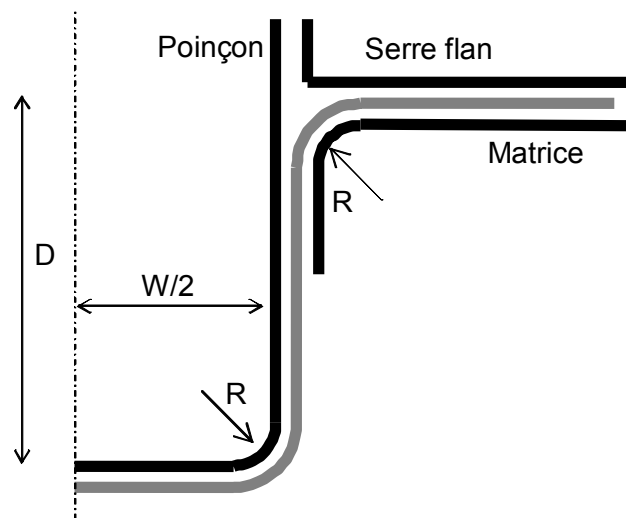


Figure 5.1. Géométrie de l'essai en « Oméga ».

Tableau 5.1 : Caractéristiques géométriques du test.

Dimensions	Essai 1 : « arrondi »	Essai 2 : « tranchant »
R (mm)	6	3
D (mm)		110
L / W	4.4	6.4
D / W	0.9	1.7
T / R	0.2	0.23 (DC06) 0.4 (DP600)

5.2.2 Analyse par éléments finis de l'essai

L'analyse par éléments finis de ce test consiste à modéliser la tôle par des éléments solides bidimensionnels (hypothèse de déformations planes) et un nombre fixe de points d'intégration à travers l'épaisseur (quatre couches d'éléments dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire huit points d'intégration). Cette hypothèse de déformations planes est assez réaliste car la dimension hors plan de la tôle considérée est suffisamment grande. Néanmoins, pour une étude très précise une analyse tridimensionnelle serait nécessaire ; l'analyse considérée ici n'a pour but que de réaliser une étude comparative. Les outils (poinçon, matrice et serre flan) sont considérés indéformables et sont modélisés par des surfaces analytiques rigides bidimensionnelles. Pour des raisons de symétrie, seule la moitié de la tôle est considérée.

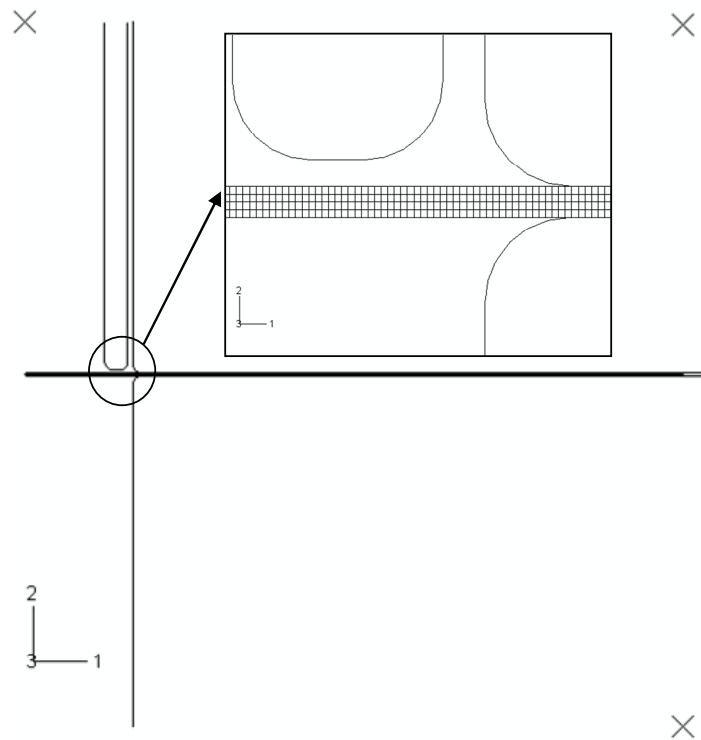


Figure 5.2. Modèle éléments finis de la seconde géométrie.

L'analyse est principalement composée de deux étapes. La première est l'étape d'emboutissage qui consiste à exercer un effort de serrage uniformément réparti par le serre flan sur la tôle et d'appliquer ensuite un déplacement imposé du poinçon jusqu'à atteindre la profondeur voulue. Dans cette étape, on a considéré un coefficient de frottement constant entre les outils et la tôle et égal à 0,1. La seconde étape est celle du retour élastique qui consiste à enlever les outils de manière à obtenir un relâchement de la tôle. La comparaison de la déformée ainsi obtenue avec la déformée de fin de l'étape d'emboutissage permet de mesurer le niveau du retour élastique.

A noter que toutes les étapes de la simulation sont réalisées dans le code ABAQUS/Standard. Dans plusieurs travaux réalisés sur la prédiction du retour élastique (par exemple, Lee et al., 2005b) l'étape d'emboutissage est simulée au moyen d'un code explicite, afin d'éviter les difficultés de convergence de l'équilibre rencontrées dans un code implicite. Les résultats sont ensuite importés du code explicite vers le code implicite afin de simuler l'étape du retour élastique. Nous estimons que la simulation de toutes les étapes de l'analyse dans un code implicite fournit une meilleure prédiction du retour élastique par rapport à la démarche citée précédemment.

5.2.3 Essai à géométrie « arrondie »

Plusieurs facteurs physiques et numériques ont été identifiés dans la littérature comme ayant un impact considérable sur le retour élastique. Nous avons réalisé une étude générale de sensibilité de ces paramètres en utilisant en premier lieu l'essai à géométrie « arrondie ». Trois principales séries représentatives des simulations réalisées sont données par la Figure 5.3. Elle illustre l'influence de l'effort de serrage, de la loi d'écrouissage et de la formulation de l'élément fini.

L'impact de l'effort de serrage, comme paramètre du procédé, est mis en évidence sur la Figure 5.3.a. Le niveau du retour élastique est inversement proportionnel à l'effort de serrage. En effet, l'augmentation de l'effort de serrage augmente l'effort de tension dans la tôle, qui devient le chargement prédominant par rapport à la flexion. Par conséquent, la distribution des contraintes est plus uniforme et le moment de flexion résiduel devient négligeable avec l'augmentation de l'effort de serrage. Ceci signifie qu'après décharge, le retour élastique décroît avec l'augmentation de l'effort de serrage. Des résultats expérimentaux confirment systématiquement cette tendance pour différentes nuances de matériaux (voir par exemple Chu, 1991 ; NUMISHEET'93 Benchmark Problem, 1993 ; Kuwabara et al., 1996).

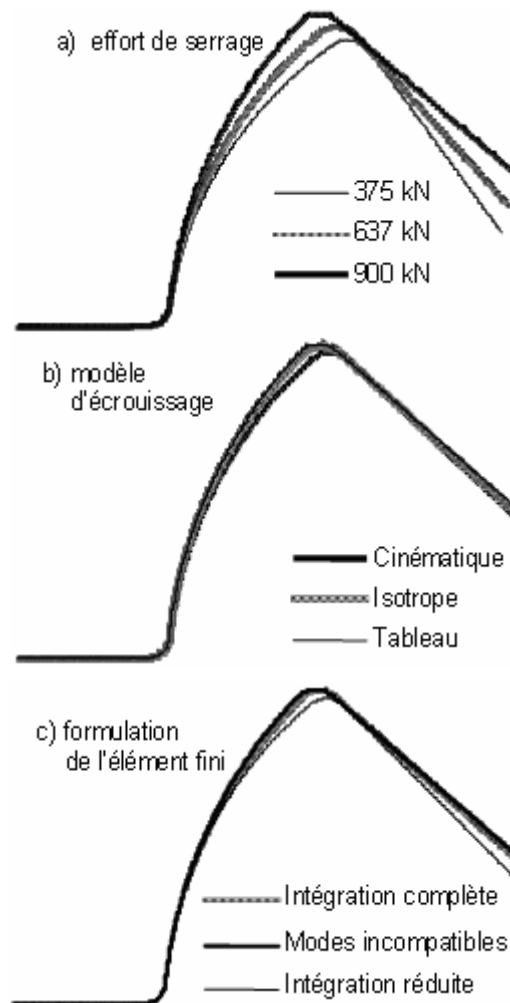


Figure 5.3. Essai de la géométrie « arrondie » : forme de la pièce après retour élastique. Influence a) de l'effort de serrage, b) du modèle d'écrouissage et c) de la formulation de l'élément fini.

D'un autre côté, le modèle d'écrouissage n'a presque pas d'effet dans cette simulation. Même dans les cas extrêmes d'un écrouissage purement isotrope ou purement cinématique l'impact sur le retour élastique est très faible. Les paramètres de ces modèles simplifiés sont identifiés en utilisant une courbe de traction uniaxiale et sont donnés dans le Tableau 5.2. Finalement, la courbe d'écrouissage a été introduite dans le code Abaqus sous forme d'un tableau de valeurs contrainte équivalente - déformation plastique équivalente : la façon la plus simple de décrire l'écrouissage dans un code de calcul par éléments finis. Comme le montre la

Figure 5.3.b et comme indiqué par plusieurs auteurs (par exemple, Bouvier et al., 2005 ; Lee et al., 2005b), il n'y a pas de différence significative sur le niveau du retour élastique même lorsque nous utilisons ces trois modèles, malgré le fait que les prédictions de ces modèles sur un essai de chargement inverse devraient être très différentes. Ce résultat est dû à la faible valeur du rapport épaisseur/rayon du poinçon, combinée à un effet de frottement tôle/outils élevé. En effet, quand un effort de tension uniforme est superposé à de la flexion pure, le gradient de contraintes dans l'épaisseur est réduit et pour un certain niveau de tension donné, toutes les valeurs de contraintes dans une section seront de même signe. Dans ce cas, il n'y aura pas de contraintes de rappel durant le passage de la tôle sur le rayon de la matrice. Ainsi, la seule partie de l'écrouissage qui contribue au comportement pourrait être décrite par la courbe monotone. Cette hypothèse sera explorée dans le prochain paragraphe.

Tableau 5.2 : Paramètres d'écrouissage des deux aciers – Modèles simplifiés

	Acier doux (DC06)		Acier dual phase (DP600)	
	Purement isotrope	Purement cinématique	Purement isotrope	Purement cinématique
Y_0 (MPa)	161.7		356.1	
R_{sat} (MPa)	303.75	-	551.40	-
C_R	5.1	-	9.3	-
X_{sat} (MPa)	-	303.75	-	551.40
C_X	-	5.1	-	9.3

Plusieurs autres paramètres numériques ont une influence directe sur la prédiction du retour élastique. Li et al. (2002) ont examiné en détail l'impact du nombre de points d'intégration à travers l'épaisseur de la tôle, la différence entre les éléments solides et coques, etc. L'analyse que nous avons réalisée ici est restreinte aux éléments solides bidimensionnels (déformations planes) et un nombre fixe de points d'intégration à travers l'épaisseur (quatre couches d'éléments dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire huit points d'intégration). Néanmoins, trois différentes formulations d'un tel élément, disponibles dans le code Abaqus/Standard, ont donné une certaine différence du profil de retour élastique (voir Figure 5.3.c). L'élément à intégration réduite surestime le retour élastique du fait que sa matrice de rigidité est trop souple par rapport à celle de l'élément à intégration complète. Ce phénomène, dont souffrent les éléments sous-intégrés, est bien connu et est dû aux modes de « hourglass », appelés également modes à énergie nulle, qui nécessitent une technique efficace de stabilisation. D'un autre côté, les éléments linéaires à intégration complète sont bien connus pour leur rigidité excessive, particulièrement en chargement de flexion dominante, et qui est due au blocage en cisaillement et parfois en volume. C'est pour ces raisons que l'élément linéaire de type déformations planes CPE4I du code Abaqus (2003) est préféré dans notre analyse. Cet élément offre une intégration réduite sélective afin d'éviter le blocage volumique, lié à l'incompressibilité plastique, rencontré dans la plupart des comportements élasto-plastiques, ainsi que des degrés de liberté additionnels en modes incompatibles pour éviter le verrouillage en cisaillement (Simo et Armero, 1992). Cet élément a été particulièrement conçu pour une description précise de la déformation de flexion. De plus, nous avons considéré un rapport d'aspect, pour ces trois types d'éléments, égal à peu près à

un dans toutes les simulations, afin de préserver une précision optimale. Ceci permettra également d'avoir un nombre d'éléments suffisant le long du rayon du poinçon et de la matrice. Dans le cas le plus défavorable, l'angle de rotation ne dépassera pas $5,5^\circ$ par élément. Notons que jusqu'à 54000 éléments sont nécessaires pour satisfaire ces conditions pour toutes les simulations données dans le paragraphe suivant.

Il est important de noter que l'impact de la formulation de l'élément fini utilisé peut être plus important que celui du modèle d'écrouissage adopté. Pour les applications où une grande précision est exigée, l'utilisation nécessaire de modèles de comportement avancés n'est pas toujours suffisante, le recours au développement de nouveaux éléments finis plus précis peut s'avérer aussi nécessaire (Yoon et al., 1999).

En résumé, il y a une influence sensible de l'effort de serrage, de la formulation de l'élément fini et d'autres paramètres numériques (Haddag et al., 2005) sur le retour élastique de cette géométrie. Néanmoins, elle n'est pas vraiment sensible au modèle d'écrouissage. Ceci rend une telle géométrie non appropriée pour comparer l'effet des deux modèles d'écrouissage, introduits au chapitre 2, sur le retour élastique. Par conséquent, nous avons choisi une autre géométrie, dans le paragraphe suivant, présentant des rapports dimensionnels caractéristiques plus serrés.

5.2.4 Essai à géométrie « tranchante »

Pour mettre en évidence l'influence du modèle d'écrouissage sur le retour élastique, nous avons considéré une deuxième géométrie (Till et Raab, 2005). En effet, les rayons de courbure du poinçon et de la matrice sont considérés plus petits, de telle manière à créer un changement important du trajet de déformation, lors du passage de la tôle sur le rayon de la matrice, par pliage/dépliage avec tension durant l'étape d'emboutissage. Dans de telles conditions, l'écrouissage transitoire et le retour élastique prédits par les deux modèles d'écrouissage devraient être différents.

Comme montré dans plusieurs travaux (Pourboghrat et Chu, 1995 ; Carden et al., 2002 ; Geng et Wagoner, 2002 ; Lee et al., 2005a, 2005b ; Haddag et al., 2004, 2005, etc.), le pliage/dépliage (avec ou sans effort de tension) de la tôle est le principal mode de déformation qui affecte le retour élastique. La séquence de dépliage peut être considérée comme un chargement inverse et ainsi l'essai de cisaillement inverse peut être utilisé comme une représentation typique de ce mode de déformation, dans le but d'interpréter la différence du retour élastique prédit par les deux modèles d'écrouissage. La Figure 5.4 montre les courbes de cisaillement inverse prédites par les deux modèles d'écrouissage à deux niveaux de pré-déformation (10 % et 30 %) et pour chaque matériau.

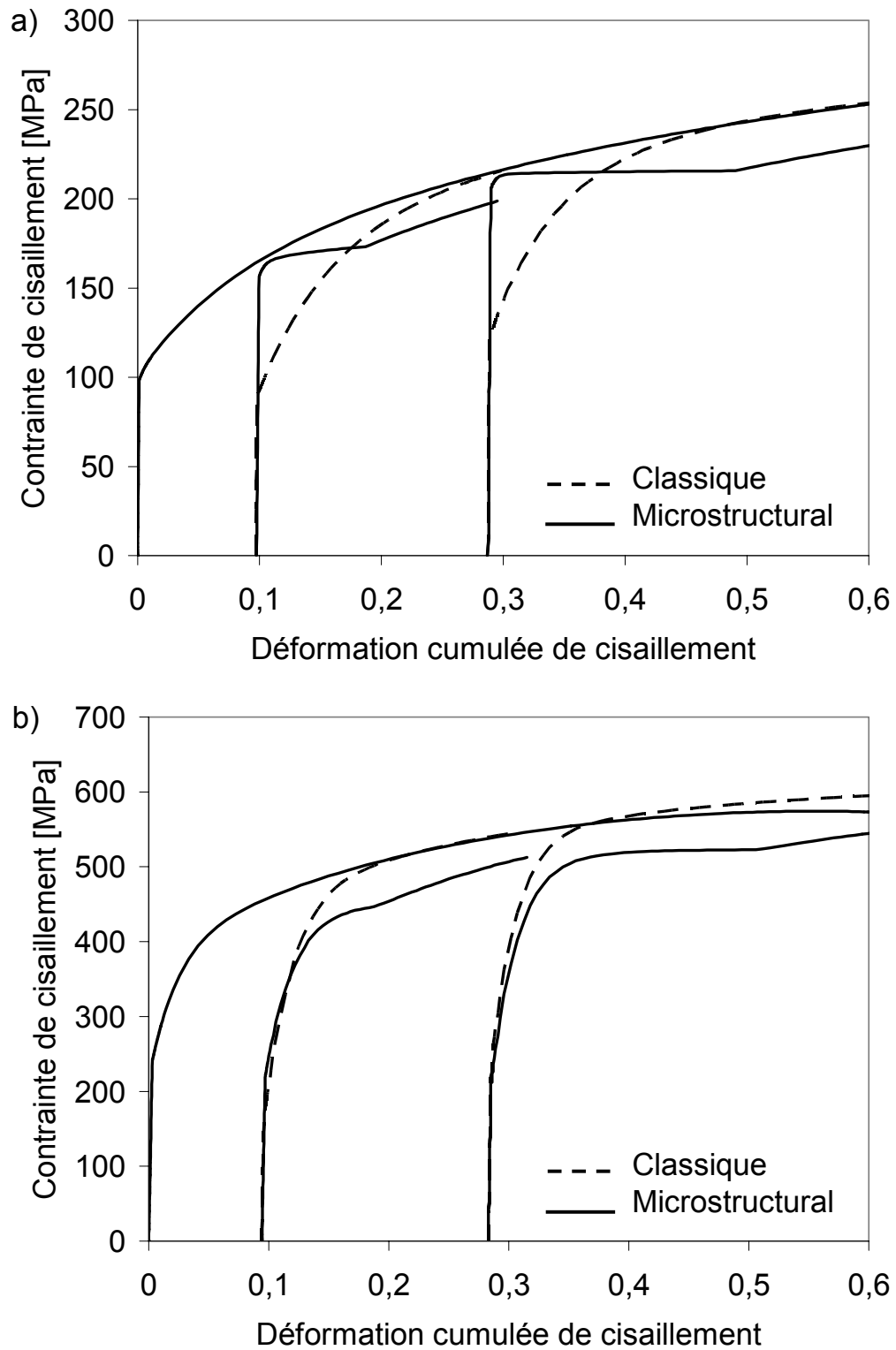


Figure 5.4. Comparaison entre les deux modèles d'écrouissage sur un essai de cisaillement inverse à 10 et 30 % de pré-déformation : a) acier doux DC06 et b) acier dual phase DP600.

Les prédictions des deux modèles diffèrent fortement sous un trajet de déformation non-monotone, tandis qu'elles sont très proches pour un chargement monotone. Ainsi, le niveau du retour élastique prédit peut être presque indépendant du modèle (comme il a été le cas de la géométrie « arrondie » et comme reporté dans la littérature), si la tôle subit un chargement où les contraintes de tension sont dominantes par rapports aux contraintes de flexion. Néanmoins, si l'histoire de déformation devient dominée par de la flexion, la distribution de contraintes à la fin de la simulation de l'étape d'emboutissage sera fortement dépendante du modèle de comportement, impliquant ainsi différents résultats en terme de retour élastique. Comme tendance générale, on peut conclure, à partir de la Figure 5.4, que pour une large gamme de déformation suivant la contrainte inverse, le modèle classique surestime la contrainte d'écoulement par rapport au modèle microstructural ; uniquement pour l'acier doux, une situation différente peut être attendue pour de faibles déformations inverses. Par conséquent, une surestimation du retour élastique devrait être obtenue avec le modèle classique.

Nous avons utilisé la seconde géométrie pour étudier la validité de ces développements intuitifs. Les Figures 5.5 et 5.6 montrent le niveau du retour élastique prédit par les différents modèles et ceci pour chaque matériau, correspondant à cette nouvelle géométrie. Un grand et un petit effort de serrage sont utilisés pour chaque matériau. Ici, le niveau maximum de pré-déformation à la fin de la séquence de pliage est de l'ordre de 13 à 32% (déformation équivalente), dépendant de l'épaisseur de la tôle, du modèle de comportement et de l'effort de serrage. Il est à noter que ce niveau de déformation est à peu près trois fois plus grand que celui atteint sur la géométrie « arrondie ».

Pour l'acier doux (voir Figure 5.5), il y a une différence significative en termes de retour élastique prédit par les modèles à écrouissage combiné ; le modèle classique prédit un plus grand retour élastique pour chaque effort de serrage. Ce résultat est en bonne corrélation avec les constats intuitifs précédents, basés sur l'analyse du comportement en trajet inverse. On peut raisonnablement conclure que pour ce matériau et cette géométrie, le chargement de flexion par pliage/dépliage est l'effet prédominant comparé à l'effort de tension dû principalement à l'effort de serrage. Les prédictions des modèles purement isotrope et purement cinématique confirment cette conclusion.

Pour l'acier à haute résistance (voir Figure 5.6), par contre, un plus grand retour élastique est obtenu avec le modèle microstructural lorsque le faible effort de serrage est appliqué. L'interprétation de ce résultat uniquement à partir de l'analyse du trajet inverse de cisaillement n'est pas évidente. En effet, comme le montre la Figure 5.4.b, le modèle classique surestime la contrainte d'écoulement durant le trajet inverse ; ainsi, la même tendance devrait être obtenue que pour l'acier doux. Une interprétation réaliste devrait tenir compte de l'histoire des déformations et de la distribution des contraintes dans la tôle avant le retour élastique. Il est évident, à partir du Tableau 5.1, que puisque l'épaisseur des deux matériaux n'est pas la même, les niveaux de déformation et la distribution correspondante des contraintes à travers l'épaisseur seront différentes comparés à la simulation effectuée sur l'acier doux. Ainsi, de simples et générales tendances et interprétations ne peuvent pas être facilement déduites pour de telles applications et une simulation numérique complète et précise est nécessaire.

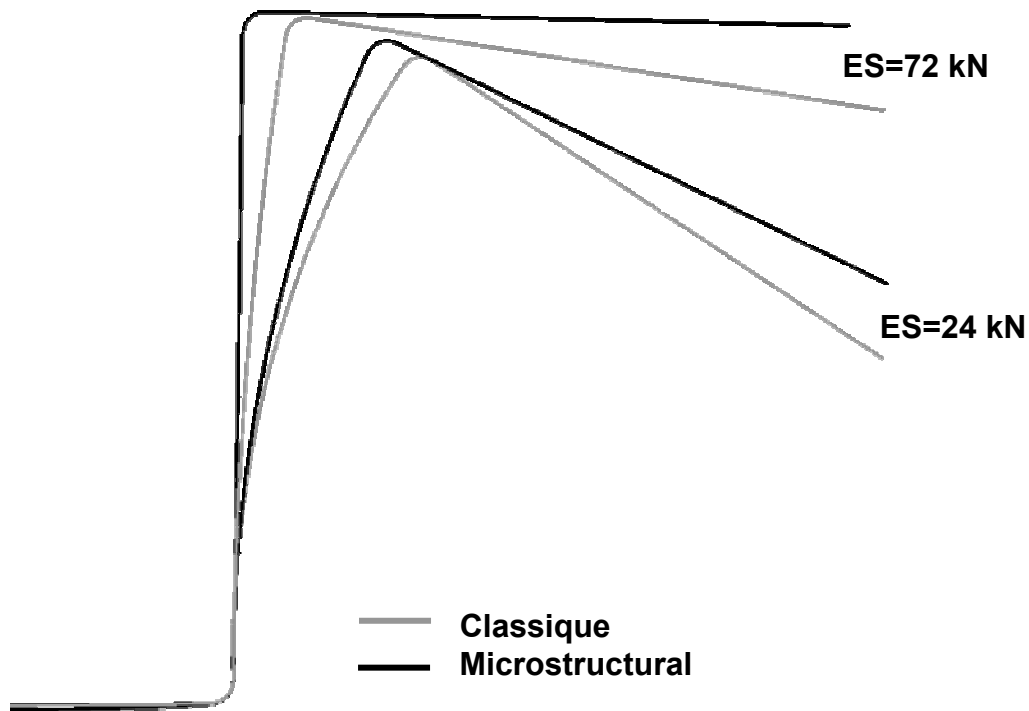


Figure 5.5. Essai de la géométrie « tranchante » : forme de la tôle après retour élastique. Influence du modèle d'écrouissage et de l'effort de serrage pour la tôle en acier doux DC06 : faible effort de serrage (ES=24kN) et grand effort de serrage (ES=72kN).

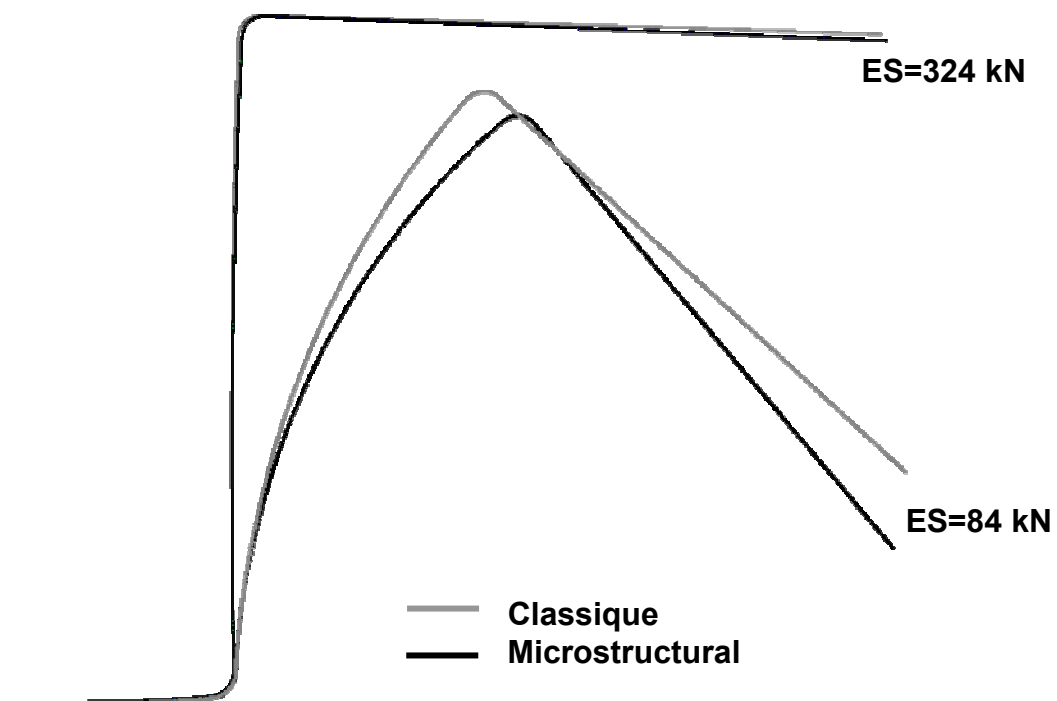


Figure 5.6. Essai de la géométrie « tranchante » : forme de la tôle après retour élastique. Influence du modèle d'écrouissage et de l'effort de serrage pour la tôle en acier dual phase DP600 : faible effort de serrage (ES=84kN) et grand effort de serrage (ES=324kN).

De plus, lorsque les efforts de tension deviennent importants par rapport à ceux de flexion, la différence en termes de retour élastique donnée par les deux modèles a tendance à diminuer. Ceci est réalisé ici en considérant un grand effort de serrage. Les différentes évolutions de la force de réaction du poinçon en fonction de son déplacement lors de l'étape d'emboutissage des deux tôles, obtenues avec chaque modèle d'écrouissage (classique et microstructural) et pour chaque effort de serrage, sont représentées sur la Figure 5.7. Clairement, nous remarquons que pour un effort de serrage donné les deux modèles d'écrouissage n'ont pas beaucoup d'influence sur l'effort d'emboutissage (force de réaction). Par contre, cet effort est d'autant plus grand que l'effort de serrage est grand pour chaque matériau. Egalement, les efforts mis en jeu dans l'emboutissage de la tôle en acier dual phase sont plus grands que ceux de la tôle en acier doux. Ceci est dû, d'un côté, à la différence entre les épaisseurs des deux tôles (voir Tableau 5.1) et, d'un autre côté, à la différence entre leur résistance. La Figure 5.7 illustre ces remarques.

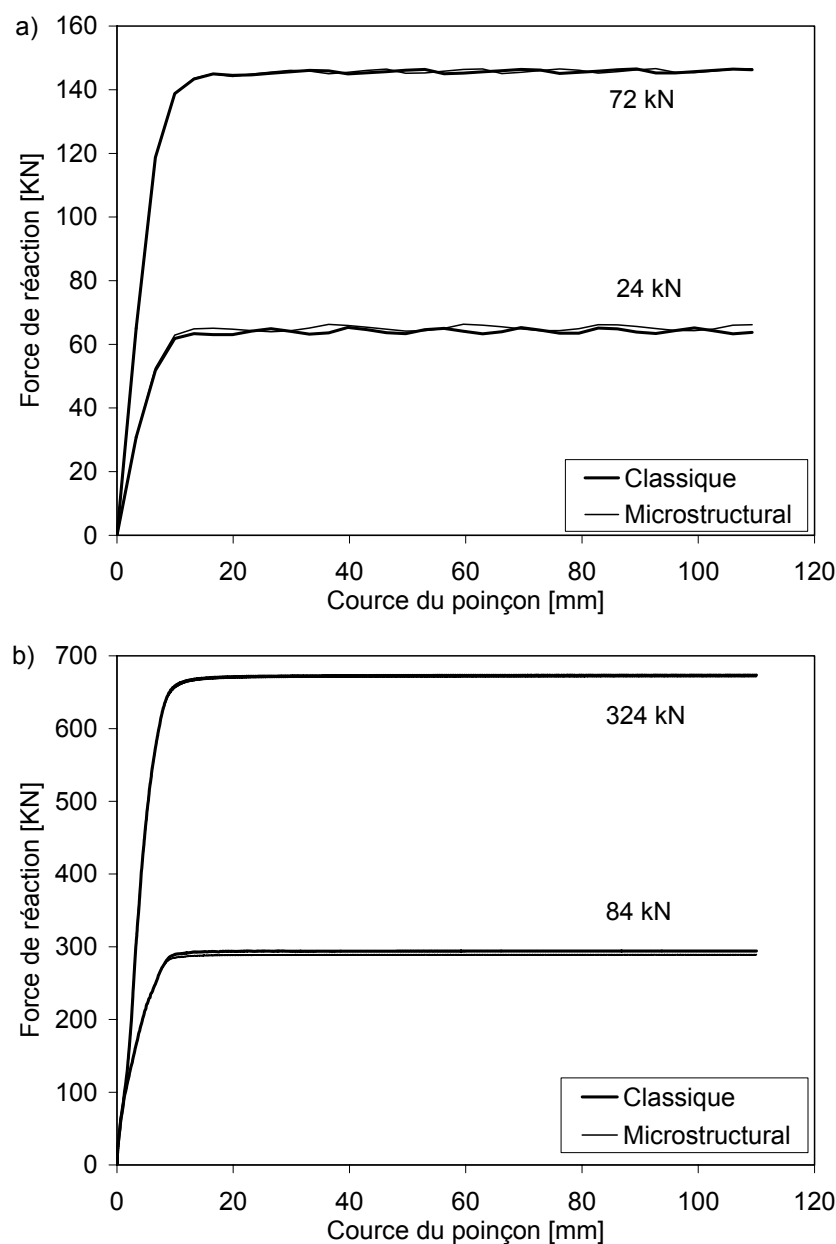


Figure 5.7. Force de réaction du poinçon lors de l'étape d'emboutissage : a) acier doux DC06 et b) acier dual phase DP600.

5.2.5 Analyse de la convergence et du temps CPU

Dans le but de montrer les performances de notre implantation numérique, nous avons réalisé une analyse du temps CPU et du nombre d'itérations d'équilibre obtenues dans les simulations de toutes les étapes du test de retour élastique. Pour pouvoir comparer, toutes les simulations réalisées précédemment sont obtenues avec le même nombre d'incrément (11000 incrément pour la totalité de la simulation). Le Tableau 5.3 donne le nombre total d'itérations d'équilibre effectué par le code Abaqus/Standard pour chaque simulation et pour chaque modèle de comportement. Ce tableau montre, clairement, que l'implantation que nous avons effectuée est au moins aussi efficace que celle existante dans le code Abaqus.

Tableau 5.3 : Nombre total d'itérations d'équilibre pour la simulation des étapes d'emboutissage et de retour élastique de la géométrie "aigue".

	Acier doux (DC06)		Acier Dual phase (DP600)	
Effort de Serrage (kN)	24	72	84	324
Chaboche (Abaqus)	24640	21868	22419	27799
<i>Chaboche (UMAT)</i>	<i>24552</i>	<i>21905</i>	<i>22319</i>	<i>27466</i>
<i>Teodosiu (UMAT)</i>	<i>22120</i>	<i>22729</i>	<i>21944</i>	<i>23222</i>

De plus, comme indiqué dans le Tableau 5.4, le temps CPU n'est pas vraiment affecté par l'utilisation du modèle microstructural, impliquant un grand nombre de variables internes, en comparaison avec le modèle classique ou son équivalent existant dans Abaqus. Cette performance est due à deux raisons. La première est le fait que dans le code utilisé (statique implicite) le temps CPU est relié directement à la résolution des équations d'équilibre. Ainsi, l'algorithme d'intégration de la loi de comportement a un impact relativement réduit sur le temps CPU total. La deuxième est le fait que les systèmes non-linéaires résolus dans l'algorithme d'intégration du comportement développés ici ont la même taille pour les deux modèles d'écrouissage. Le temps nécessaire à leur intégration est presque identique, bien que la complexité des deux modèles soit très différente.

Tableau 5.4 : Temps CPU total (en heures) pour la simulation des étapes d'emboutissage et de retour élastique de la géométrie "aigue".

	Acier doux (DC06)		Acier Dual phase (DP600)	
Effort de Serrage (kN)	24	72	84	324
Chaboche (Abaqus)	60,69	55,2	38,18	45,03
<i>Chaboche (UMAT)</i>	<i>61,62</i>	<i>57,12</i>	<i>38,59</i>	<i>45,57</i>
<i>Teodosiu (UMAT)</i>	<i>57,66</i>	<i>58,35</i>	<i>38,61</i>	<i>40,01</i>

5.2.6 Synthèse

Nous avons réalisé, dans cette première partie de ce dernier chapitre, une étude sur le retour élastique en emboutissage de tôles métalliques. A travers les deux géométries étudiées, nous avons montré l'impact de différents modèles d'écrouissage. Un des principaux résultats obtenus est le lien direct établi entre les caractéristiques géométriques des essais, provoquant les changements de trajets de déformation dans la tôle lors de l'étape d'emboutissage, et l'impact du modèle de comportement sur le niveau du retour élastique.

La différence du niveau de retour élastique observée entre les prédictions des différents modèles d'écrouissage a montré l'importance de tenir compte des phénomènes de transition qui apparaissent lors d'un trajet inverse de déformation. Ces phénomènes ne sont négligeables que dans le cas où les caractéristiques géométriques des outils n'impliquent pas de forts changements du trajet de déformation. Si ces changements n'ont pas lieu ou s'ils existent mais avec des niveaux de déformations plastiques faibles (zones de transition négligeables) de simples modèles de comportement suffisent.

Il est à noter que, dans les tests considérés ici, le type de chargement prédominant est le trajet inverse, dû aux séquences de pliage/dépliage. Il n'y a pas de trajets orthogonaux, que l'on peut retrouver par contre lors de la mise en forme de formes complexes par emboutissage ou par d'autres procédés de mise en forme de tôles métalliques, impliquant des opérations à plusieurs séquences. Nous pouvons nous attendre à une nette amélioration de la prédiction, dans les simulations de tels cas, en utilisant des modèles de comportement très performants, à l'instar du modèle microstructural de Teodosiu-Hu.

5.3 Etude du phénomène de localisation

Nous allons consacrer cette toute dernière partie à l'étude de la localisation des déformations dans les tôles métalliques soumises à des chargements monotones et séquentiels. Dans cette étude, nous allons introduire le modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural couplé à l'endommagement pour la description du comportement. Dans le but de détecter, au cours du trajet de chargement, le moment correspondant à l'apparition des bandes de localisation ainsi que leur orientation, nous allons introduire le critère de localisation de Rice tel que développé en grandes déformations (voir § 2.6) et implanté dans le code Abaqus (voir § 3.5).

Avec cette modélisation, nous allons déterminer des Courbes Limite de Formage (CLF) à localisation en trajet direct et séquentiel. L'effet d'une pré-déformation sur la formabilité des tôles étudiées sera également examiné. Enfin, pour chaque trajet de chargement, nous allons prédire les orientations possibles des bandes de localisation au moment de leur apparition, ainsi que l'influence de la pré-déformation sur l'orientation des bandes qui apparaissent au cours du second trajet de chargement.

Avant d'appliquer le critère de Rice, nous allons d'abord tenter d'identifier les paramètres de la loi d'évolution de l'endommagement. Pour cela, nous allons nous baser sur certains comportements rhéologiques et rechercher un jeu de paramètres rendant le modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement capable de reproduire ces tests rhéologiques.

5.3.1 Application du modèle couplé à l'endommagement

Pour pouvoir appliquer le modèle de comportement à la simulation des essais rhéologiques, nous avons procédé en premier lieu à l'identification des paramètres de la loi d'évolution de l'endommagement. Notre démarche d'identification s'appuie sur quelques informations tirées de la littérature sur les courbes expérimentales concernant les deux aciers étudiés précédemment (Bouvier et al. 2003 ; Khelifa, 2004) ; notamment, le niveau de déformation atteint par chaque matériau sur des trajets directs et séquentiels.

Dans les travaux réalisés par Khelifa (2004) sur l'identification des paramètres d'un modèle élasto-plastique à écrouissage combiné couplé à l'endommagement (avec la même loi que celle utilisée dans notre étude) sur des aciers doux et à haute résistance, deux étapes sont considérées :

1. Identification des paramètres du modèle d'écrouissage, sans tenir compte de l'endommagement sur un essai de traction uniaxiale.
2. Identification des paramètres de la loi d'endommagement en fixant les paramètres d'écrouissage. Cette identification a été réalisée avec et sans prise en compte du seuil d'endommagement Y_{ei} (la densité d'énergie élastique nécessaire pour initier l'endommagement dans le VER, voir § 2.5.2.5).

L'auteur avait bien signalé que le jeu de paramètres de la loi d'endommagement n'est pas unique ; il dépend fortement des paramètres initiaux introduits dans l'algorithme d'identification. Ainsi, différentes valeurs du paramètre seuil d'endommagement par exemple peuvent être obtenues.

Sur les essais rhéologiques réalisés au LPMTM (Université Paris 13), et qui ont été utilisés pour l'identification des paramètres du modèles d'écrouissage microstructural, Bouvier et al. (2003) montrent que la limite de déformation uniforme en traction uniaxiale est de l'ordre de 40% pour l'acier doux DC06 et de 20% pour l'acier dual phase DP600. Nous avons choisi en premier lieu ces deux niveaux de déformation comme la limite de rupture de chaque matériau. Notre démarche d'identification est composée des étapes suivantes :

1. Déterminer en premier lieu la valeur du paramètre seuil d'endommagement. En l'absence d'études sur ce point, nous avons choisi de fixer sa valeur en la calculant avec le modèle non couplé pour un niveau de déformation choisi à l'avance et qui est inférieur à la valeur de déformation limite.
2. Une fois ce paramètre calculé, nous avons procédé à l'identification des trois autres paramètres de la loi, à savoir s , S et β , de telle manière à obtenir une chute de la contrainte de Cauchy au voisinage de 40% de déformation pour le DC06 et 20% pour le DP600.
3. Nous avons ensuite considéré le cas sans activation du seuil d'endommagement, c-à-d. $Y_{ei} = 0$, et nous avons identifié de nouveau les trois autres paramètres de la loi de telle manière à faire chuter la contrainte de Cauchy aux mêmes niveaux qu'avec activation du seuil, c-à-d. à 40% de déformation pour le DC06 et 20% pour le DP600.

Les déformations locales après la striction diffuse (puis localisée) peut atteindre des valeurs deux à trois fois l'allongement total de l'éprouvette (Stoughton, 2001 ; Arrieux, 1990). En se basant sur quelques essais fournis par nos partenaires dans le projet Européen (3^{ème} Rapport CECA, 2003), nous avons constaté que sur des essais de traction réalisés sur les deux matériaux considérés ici, la déformation atteinte localement à rupture est de l'ordre de 80% à 100% pour le DC06, et de l'ordre de 50% pour le DP600. Nous avons refait ainsi la même démarche d'identification que précédemment (avec et sans seuil d'endommagement) de telle manière à faire chuter la contrainte en traction uniaxiale à deux nouveaux niveaux de déformation (100% pour le DC06 et 50% pour le DP600).

Les paramètres de la loi d'endommagement correspondants aux différents cas considérés sont reportés au Tableau 5.5 pour le DC06 et au Tableau 5.6 pour le DP600.

Tableau 5.5 : Paramètres de la loi d'endommagement dans les différents cas – Acier doux DC06.

Niveau de déformation atteint en traction uniaxiale	40% (précoce)		100% (tardif)	
Cas considérés	Avec seuil	Sans seuil	Avec seuil	Sans seuil
Y_{ei} (MPa)	0,38	0	0,5	0
S	2	2	2	2
s	0,01	1	0,08	1
β	20	20	5	5

Tableau 5.6 : Paramètres de la loi d'endommagement dans les différents cas – Acier dual phase DP600.

Niveau de déformation atteint en traction uniaxiale	20% (précoce)		50% (tardif)	
Cas considérés	Avec seuil	Sans seuil	Avec seuil	Sans seuil
Y_{ei} (MPa)	1,3	0	1,66	0
S	0,5	20	0,5	9
s	0,6	0,01	0,5	0,5
β	30	5	15	5

Les courbes rhéologiques simulées en traction uniaxiale pour les deux matériaux sont représentées sur la Figure 5.8. Nous constatons que, pour chaque niveau de déformation atteint, la contrainte d'écoulement obtenue sans activation du seuil d'endommagement est inférieure à celle obtenue avec seuil. Ceci est dû à l'effet adoucissant qu'implique la variable d'endommagement et qui croît dès le début de la plasticité dans le cas où le paramètre seuil n'est pas considéré. La Figure 5.9 montre l'évolution de l'endommagement au cours du chargement correspondant aux différents cas envisagés.

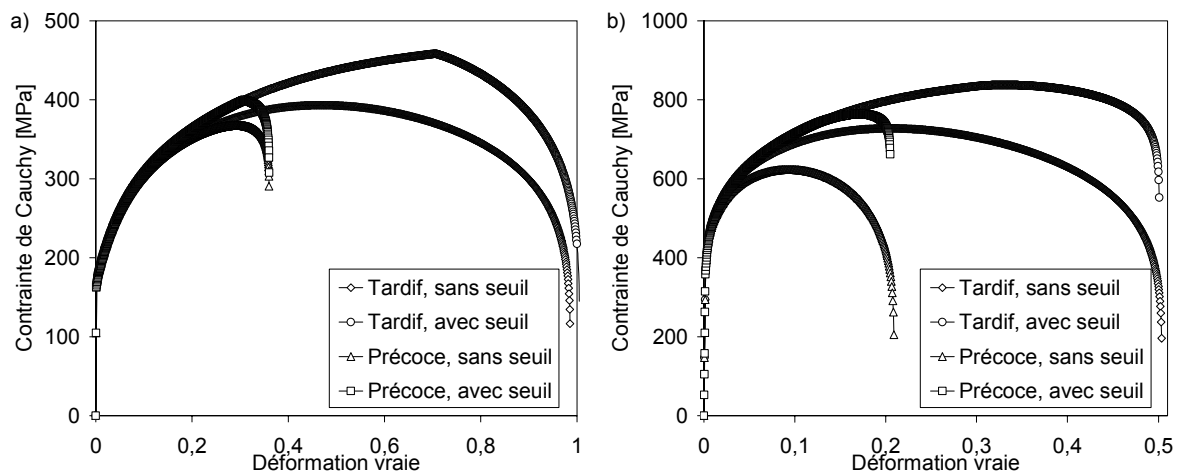


Figure 5.8. Courbes de comportement en traction uniaxiale dans les différents cas : avec ou sans seuil d'endommagement. a) acier doux DC06 et b) acier dual phase DP600.

Nous avons simulé d'autres trajets directs dans les différents cas. Les courbes rhéologiques simulées en traction uniaxiale, traction plane, traction équi-biaxiale et cisaillement simple sont représentées sur la Figure 5.10 pour l'acier doux DC06 et la Figure 5.11 pour l'acier dual phase DP600. Elles représentent l'évolution de la contrainte vraie ou de cisaillement en fonction de la déformation vraie ou de cisaillement, pour des essais réalisés selon la direction de laminage.

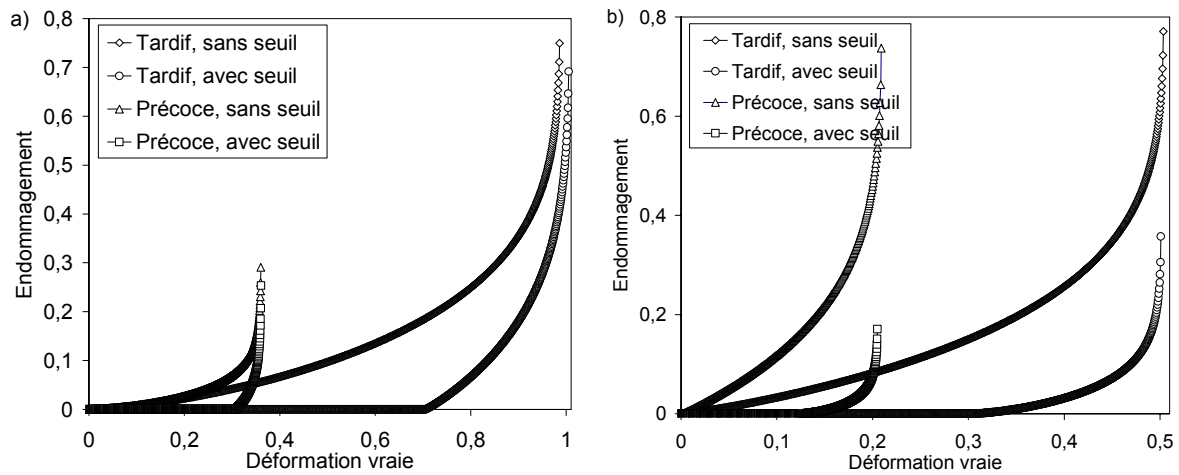


Figure 5.9. Evolution de l'endommagement en traction uniaxiale dans les différents cas : avec ou sans seuil d'endommagement. a) acier doux DC06 et b) acier dual phase DP600.

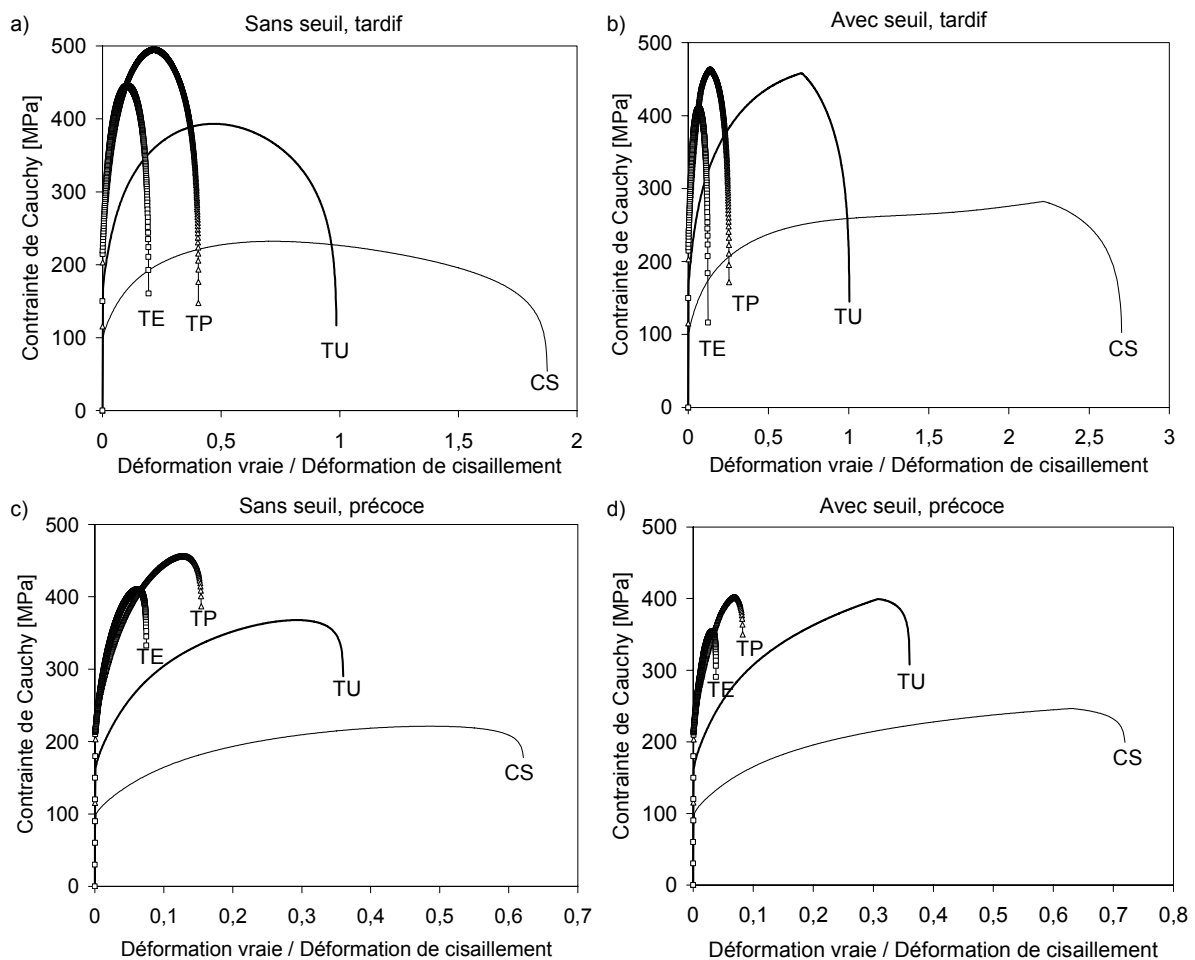


Figure 5.10. Courbes de comportement de l'acier doux DC06 en traction uniaxiale (TU), traction plane (TP), traction équibiaxiale (TE) et cisaillement simple (CS). a) sans seuil et b) avec seuil jusqu'à 100% de déformation en TU et c) sans seuil et d) avec seuil jusqu'à 40% de déformation en TU.

Pour le DC06 nous constatons sur la Figure 5.10 que le niveau de déformation atteint en cisaillement simple est nettement supérieur à celui atteint sur les autres trajets de chargement. Pour le DP600 nous constatons par contre sur les cas b) et d) de la Figure 5.11 que le niveau de déformation en cisaillement est nettement plus faible. Pour les deux matériaux et dans tout les cas en traction plane on atteint un faible niveau de déformation par rapport à celui atteint en traction uniaxiale, mais nettement supérieur à celui de la traction équi-biaxiale. Nous discuterons plus ces différences au paragraphe suivant, ainsi que leurs conséquences sur les niveaux de CLF en déformation prédites par le critère de localisation de Rice.

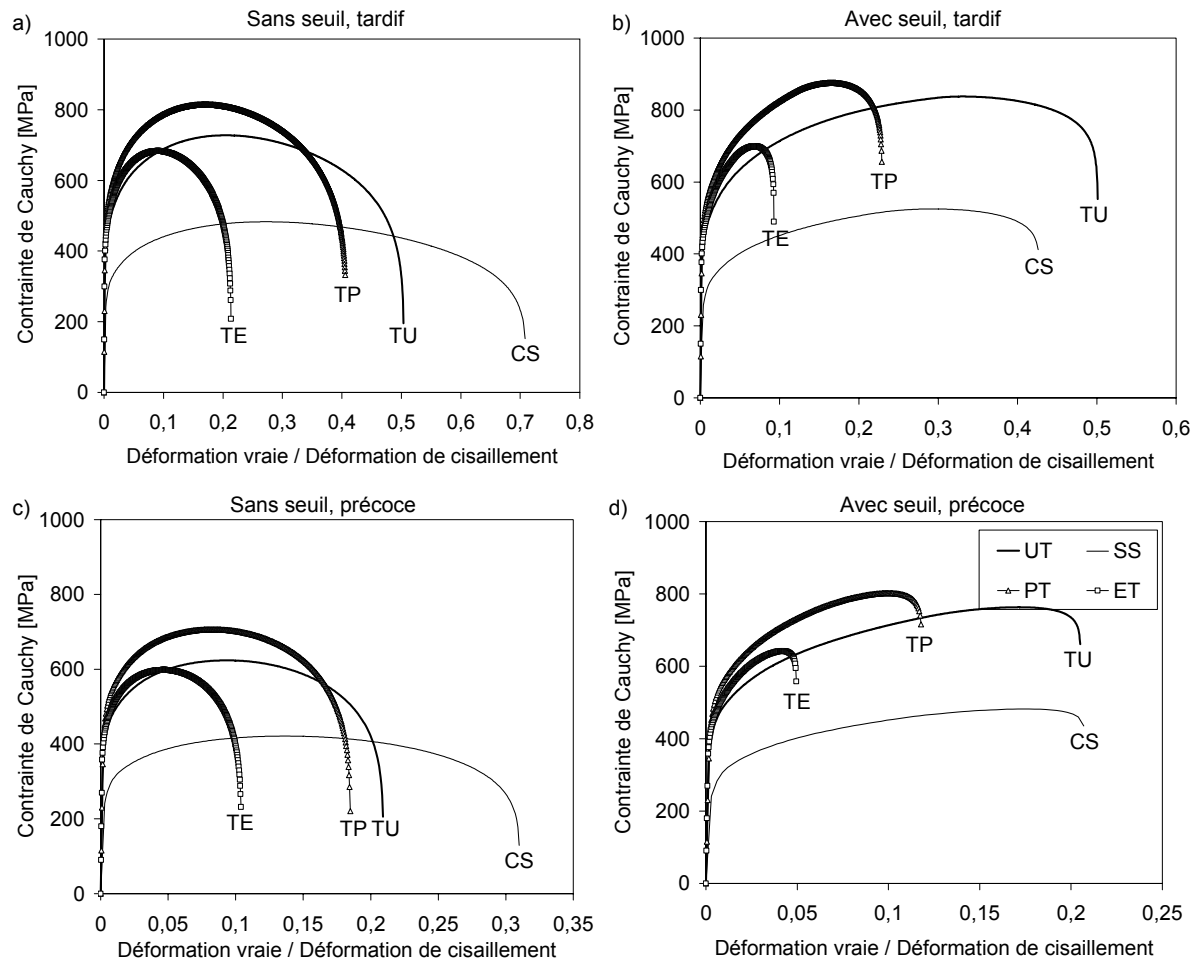


Figure 5.11. Courbes de comportement de l'acier dual phase DP600 en traction uniaxiale (TU), traction plane (TP), traction équi-biaxiale (TE) et cisaillement simple (CS). a) sans seuil et b) avec seuil jusqu'à 50% de déformation en TU et c) sans seuil et d) avec seuil jusqu'à 20% de déformation en TU.

5.3.2 Détermination de Courbes Limite de Formage à localisation

Pour déterminer les Courbes Limite de Formage à localisation pour les deux aciers considérés, nous allons introduire le critère de Rice dans les simulations des différents essais rhéologiques. Le moment où le critère de localisation est satisfait, c'est-à-dire lorsque $\det(\mathbf{n}, \mathbf{L}, \mathbf{n}) = 0$, correspondra à l'état de déformation limite que peut subir le matériau selon le trajet de chargement appliqué. Pour cela, nous avons considéré trois trajets monotones des Figures 5.10 et 5.11 (tractions uniaxiale, plane et équi-biaxiale) pour déterminer les CLF

directes. Pour montrer l'effet d'une pré-déformation sur la formabilité des deux aciers, nous allons déterminer des CLF en trajet séquentiel, en considérant des pré-déformations en traction uniaxiale et par la suite en traction équi-biaxiale.

Avant d'aborder cette étude en détail, nous allons examiner d'abord l'application du critère de Rice sur un essai de traction simulé avec le modèle élasto-plastique sans endommagement. La courbe rhéologique reproduite par le modèle de comportement est saturante. Nous avons tracé l'évolution du minimum de $\det(\mathbf{n.L.n})$ en fonction de la déformation de traction telle que montrée sur la Figure 5.12. Cette courbe montre qu'à saturation de la contrainte d'écoulement, $\min\{\det(\mathbf{n.L.n})\}$ devient saturant mais reste toujours positif. Autrement dit, le critère ne détecte pas d'apparition de la localisation. Le même résultat est obtenu en simulant d'autres essais rhéologiques.

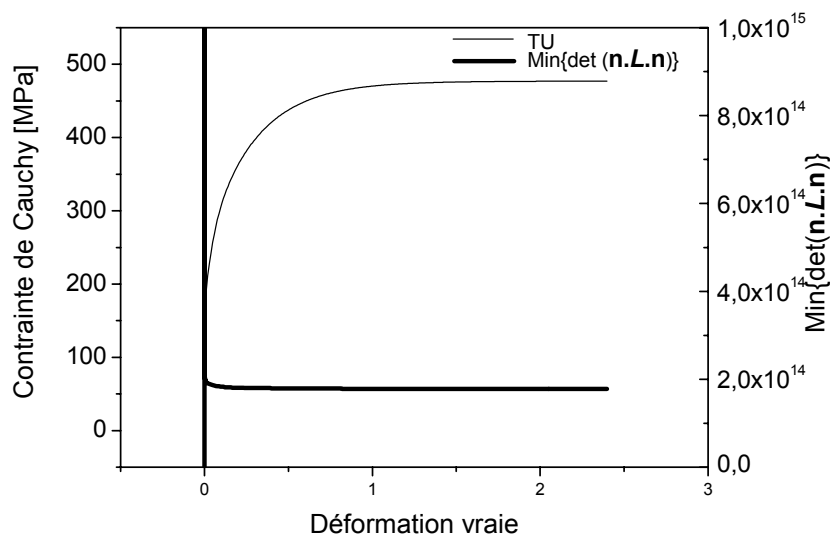


Figure 5.12. Evolution de la contrainte et du minimum de $\det(\mathbf{n.L.n})$ avec la déformation dans un essai de traction. Simulation avec le modèle élasto-plastique à écrouissage microstructural sans endommagement.

En cherchant bien dans la littérature, on s'aperçoit que ce constat n'est pas nouveau. En effet, plusieurs auteurs ont montré que dans le cas d'un modèle de comportement élasto-plastique avec une règle d'écoulement standard (plasticité associée) la localisation ne peut être détectée par le critère de Rice tant que la contrainte de Cauchy n'exhibe pas de régime adoucissant. Rice (1976) a étudié le problème de localisation des déformations dans les roches et il a montré que dans le cas d'un modèle élasto-plastique avec une loi de normalité associée la localisation ne peut apparaître pour un module d'écrouissage positif. Cependant, dans le cas où la loi de normalité n'est pas vérifiée, la localisation peut apparaître même avec un module d'écrouissage positif. Sur les modèles présentés par Rudnicki et Rice (1975) et Rice (1976), ce phénomène est attribué généralement à la perte de normalité de l'écoulement plastique. Ceci se manifeste par des points singuliers (vertex) au niveau de la surface de plasticité où plusieurs modes de déformation peuvent apparaître en leur voisinage. En se basant sur les travaux de Rice, Benallal et Comi (2000) montrent sur un modèle de comportement des milieux poreux qu'il faut un effet adoucissant qui rend le module d'écrouissage décroissant le long du trajet de chargement afin de détecter la localisation avec le critère de Rice. Tous ces travaux montrent bien que pour détecter la localisation avec le critère de Rice, il faut, soit

utiliser des modèles de plasticité non associée, soit introduire un effet adoucissant dans le modèle de comportement. Le couplage du modèle élasto-plastique introduit dans notre travail avec le modèle d'endommagement scalaire de Lemaitre a été justement réalisé dans ce sens. Ainsi, nous allons pouvoir appliquer le critère de Rice conjointement avec le modèle couplé afin de tracer des CLF à localisation en trajet direct et séquentiel tel que mentionné au début de cette partie.

5.3.2.1 CLF à localisation en trajet direct

Avant de tracer les CLF, nous nous intéressons à l'évolution du minimum de $\det(\mathbf{n.L.n})$ au cours du chargement dans les différents cas envisagés pour l'évolution de l'endommagement et qui permettra de déterminer l'état de contrainte et de déformation au moment de la localisation. La Figure 5.13 pour le DC06 et la Figure 5.14 pour le DP600 montrent clairement le moment de passage du $\min\{\det(\mathbf{n.L.n})\}$ par zéro, correspondant à l'apparition de la localisation. L'état de déformation associé à cette singularité du tenseur acoustique permettra de calculer les valeurs principales du tenseur de déformation à localisation dans le plan de la tôle, qui seront les points de passage de la CLF.

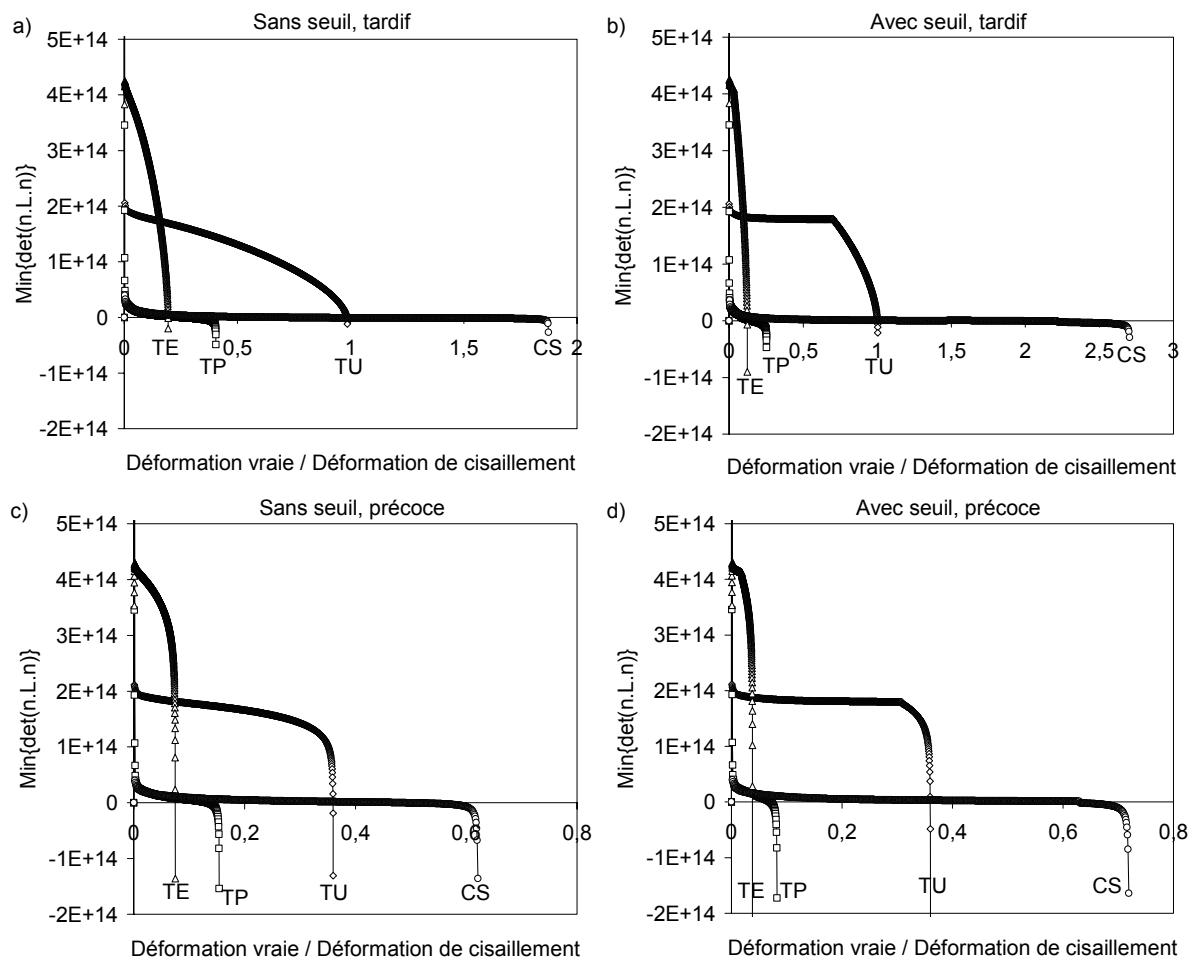


Figure 5.13. Evolution du minimum de $\det(\mathbf{n.L.n})$ avec la déformation dans les différents cas pour l'acier doux DC06. a) sans seuil et b) avec seuil jusqu'à 100% de déformation en TU et c) sans seuil et d) avec seuil jusqu'à 40% de déformation en TU.

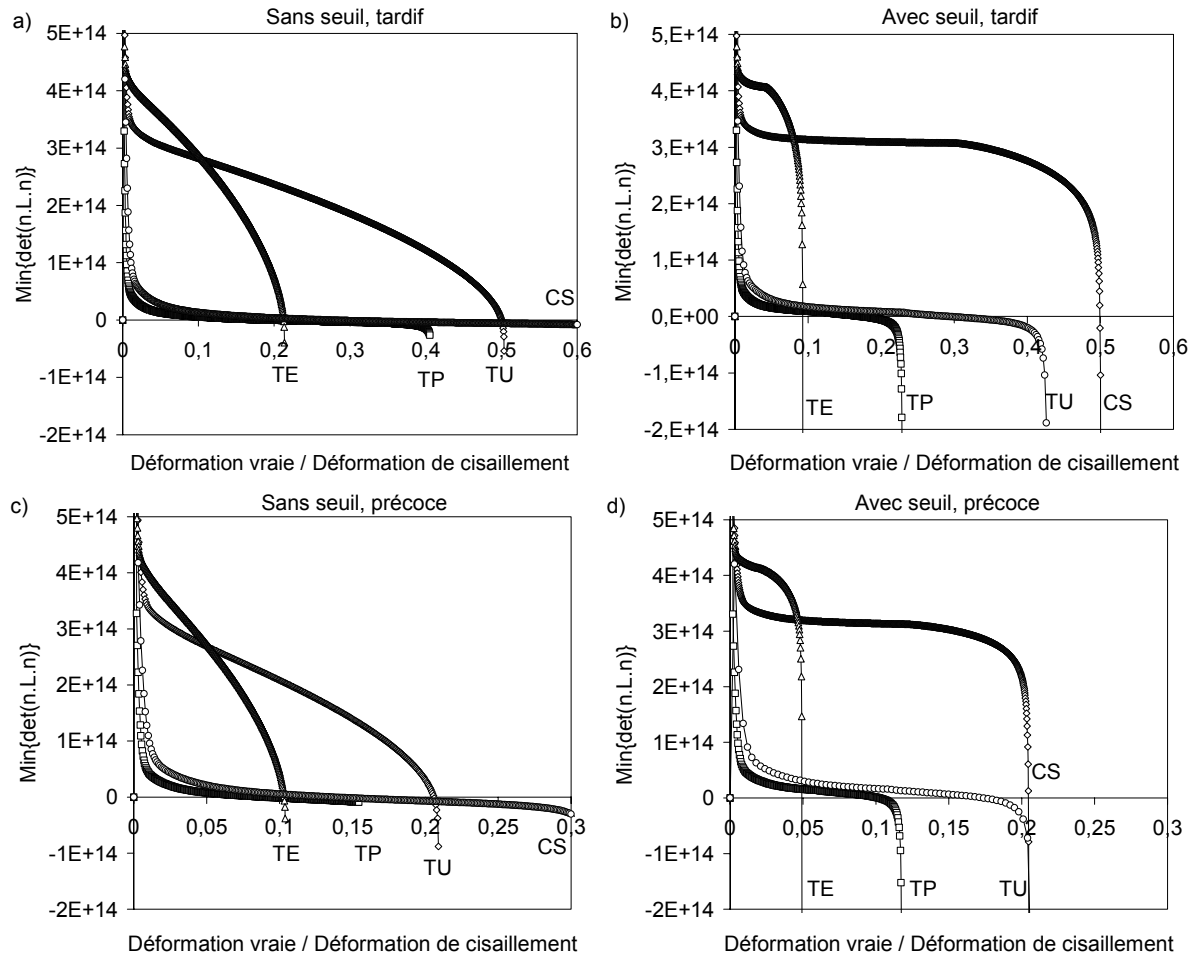


Figure 5.14. Evolution du minimum de $\det(\mathbf{n.L.n})$ avec la déformation dans les différents cas pour l'acier dual phase DP600. a) sans seuil et b) avec seuil jusqu'à 50% de déformation en TU et c) sans seuil et d) avec seuil jusqu'à 20% de déformation en TU.

Nous nous intéressons uniquement aux CLF en déformations. La Figure 5.15 montre les CLF directes obtenues par l'application du critère de Rice en considérant le comportement élasto-plastique à écrouissage microstructural couplé à l'endommagement et dans les différents cas d'évolution de l'endommagement. Globalement, sur la partie gauche des CLF l'écart entre les niveaux de formabilité obtenus entre la traction uniaxiale et la traction plane est le même couramment observé sur les CLF expérimentales. Sur la partie droite, néanmoins, l'expansion équi-biaxiale montre une faible formabilité du matériau, contrairement à ce qui est communément observé expérimentalement et présenté dans la littérature (Arrieux, 1990 ; Haddad, 1997 ; Brunet et Morestin, 2001 ; Stoughton, 2001 ; Chow et al., 2002 ; Butuc, 2004 ; Brunet et al., 2005, etc.). En effet, en se basant sur les courbes rhéologiques des Figures 5.10 et 5.11, nous remarquons que de la manière dont on a identifié les paramètres d'endommagement sur la base de la seule courbe de traction uniaxiale, la contrainte d'écoulement chute beaucoup plus tôt en expansion équi-biaxiale que pour les autres trajets considérés. Le niveau de déformation limite ainsi atteint en expansion équi-biaxiale est inférieur à celui atteint sur les autres trajets. La limite de formabilité que le critère de localisation peut détecter sur ce trajet ne peut être ainsi qu'inférieure à celle détectée sur les autres trajets de déformation.

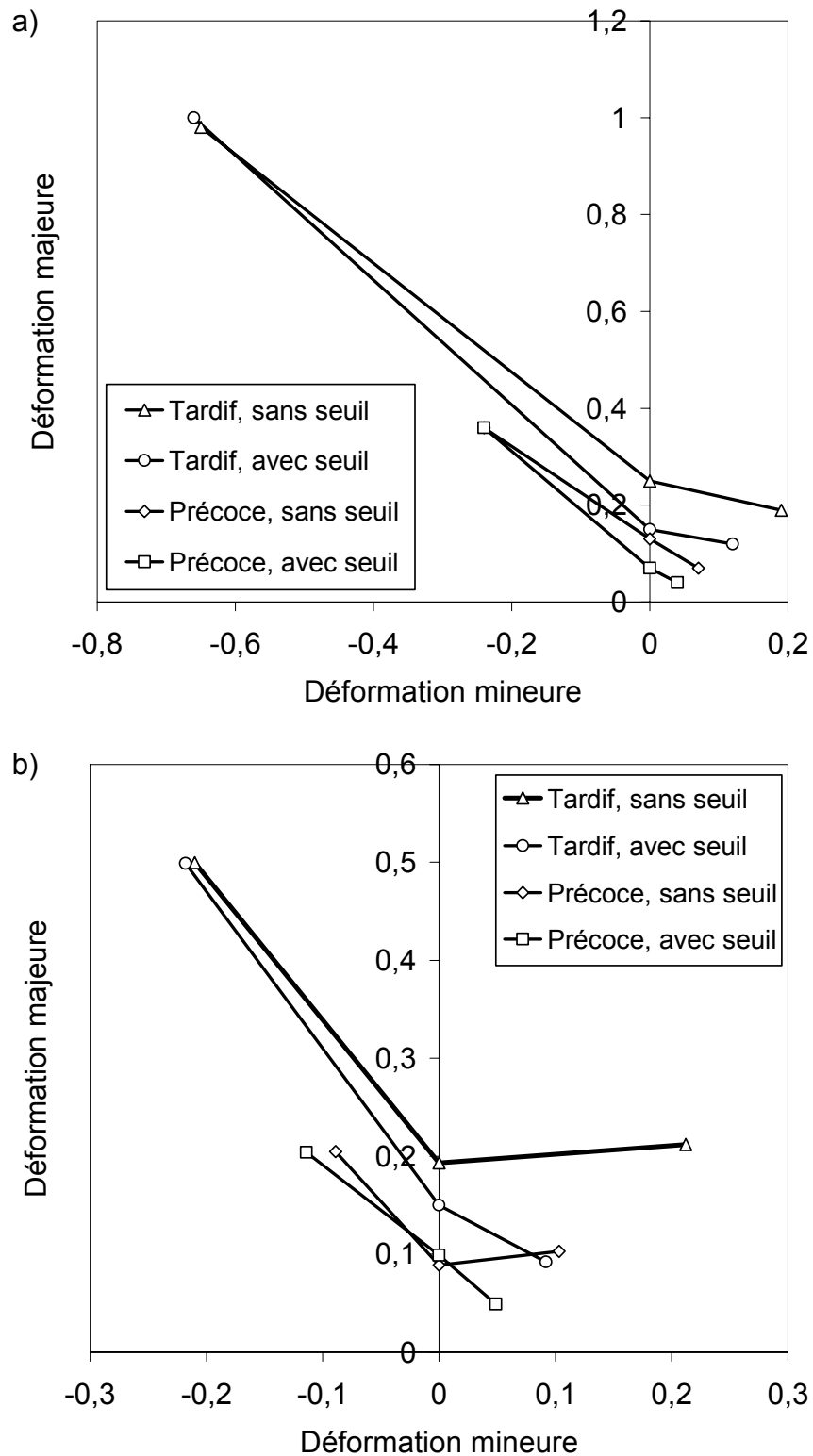


Figure 5.15. CLF en trajet direct obtenues avec le critère de localisation de Rice dans les différents cas. a) acier doux DC06 et b) acier dual phase DP600.

A noter que la loi d'évolution de l'endommagement introduite dans ce travail a été utilisée par Hammi (2000), Cherouat et al. (2003) et Khelifa (2004), avec une identification similaire à notre démarche, c-à-d. en se basant sur un seul essai rhéologique, principalement la traction uniaxiale. On remarque que le choix des paramètres du modèle d'endommagement a un impact déterminant sur les résultats de la localisation. Ainsi, les déformations limites obtenues avec les paramètres de l'endommagement plus « tardif » sont beaucoup plus proches des CLF expérimentales, que ce soit pour les aciers doux ou dual phase. Ensuite, la partie en retreint (gauche) de la CLF semble moins sensible au jeu de paramètres et l'on retrouve dans tous les cas une déformation principale majeure en traction plane qui est bien plus faible que celle correspondant à la traction uniaxiale. Par contre, la partie en expansion (droite) de la CLF présente une sensibilité aux paramètres beaucoup plus importante. Ainsi, la déformation limite majeure en expansion équibiaxiale peut être plus grande ou plus petite que celle de la traction plane, suivant les paramètres choisis. Cette étude numérique laisse penser que l'utilisation d'un seuil pour le déclenchement de l'endommagement n'est pas utile. Aussi, avec les paramètres d'endommagement « tardif » on retrouve pour le DP600 une CLF qui correspond bien aux résultats attendus.

Rappelons que l'objectif premier de ce travail, qui était partie intégrante d'un projet européen avec des partenaires industriels, était d'abord de se doter d'un outil de prédiction de la localisation des déformations à partir d'une formulation rigoureusement établie et d'un critère de bifurcation théoriquement fondé. Une validation complète par rapport à des CLF expérimentales, aurait demandé des expérimentations dans ce sens qui n'étaient pas prévues dans ce projet européen. Néanmoins, cette comparaison par rapport à l'expérimental nous semble être une bonne perspective à ce travail moyennant une identification cohérente des paramètres d'endommagement sur un ensemble complet de courbes rhéologiques.

5.3.2.2 CLF à localisation en trajet séquentiel

Nous nous intéressons ici à l'influence des pré-déformations sur la formabilité des deux nuances d'acier. Pour cela, nous considérons deux pré-déformations, une en traction uniaxiale et l'autre en expansion équibiaxiale. Suite aux observations du paragraphe précédent, nous utilisons ici les jeux de paramètres d'endommagement « tardif » pour les deux aciers. Pour l'acier doux DC06, nous considérons le comportement identifié à 100% de déformation limite en traction uniaxiale avec et sans seuil d'endommagement. Pour l'acier dual phase DP600, nous considérons le comportement identifié à 50% de déformation limite en traction uniaxiale avec et sans seuil d'endommagement.

Les courbes de comportement en trajets séquentiels avec une pré-déformation de 10% en traction uniaxiale sont reportées sur la Figure 5.16 pour les deux matériaux. On observe, en plus de l'adoucissement dû à l'endommagement, les zones de transition après changement de trajet dues au modèle d'écrouissage microstructural. Les CLF en déformations obtenues sont reportées sur la Figure 5.17. Nous constatons bien l'effet de la translation de la CLF vers la gauche due à cette pré-déformation de traction uniaxiale. Dans la littérature (Hiwatashi et al., 1998 ; Kuroda et Tvergaard, 2000a et 2000b ; Stoughton, 2001 ; Chow et al., 2002, etc.), en plus de la translation de la CLF vers la gauche on observe souvent une augmentation de la limite de formabilité du matériau (translation de la CLF vers le haut). Sur la partie droite de la CLF la limite de formabilité en expansion reste toujours sous-estimée par le critère ; pour les mêmes raisons évoquées plus haut, intimement liées à la stratégie d'identification des paramètres de la loi d'évolution de l'endommagement.

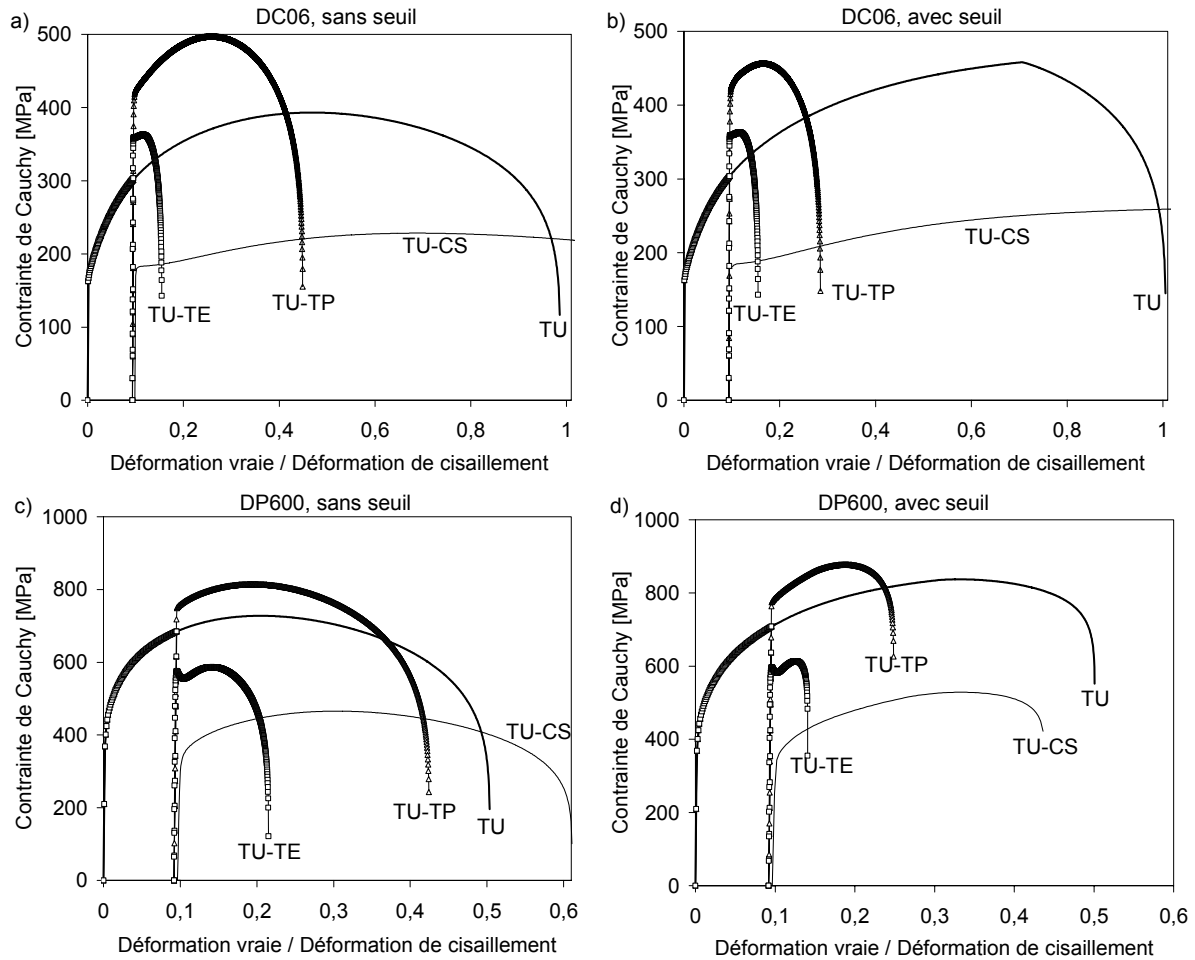


Figure 5.16. Courbes de comportement en traction uniaxiale (TU), traction plane (TP), traction équiaxiale (TE) et cisaillement simple (CS) après une pré-déformation de 10% en TU. a) sans seuil et b) avec seuil à 100% en TU (acier doux DC06), et c) sans seuil et d) avec seuil à 50% en TU (acier dual phase DP600).

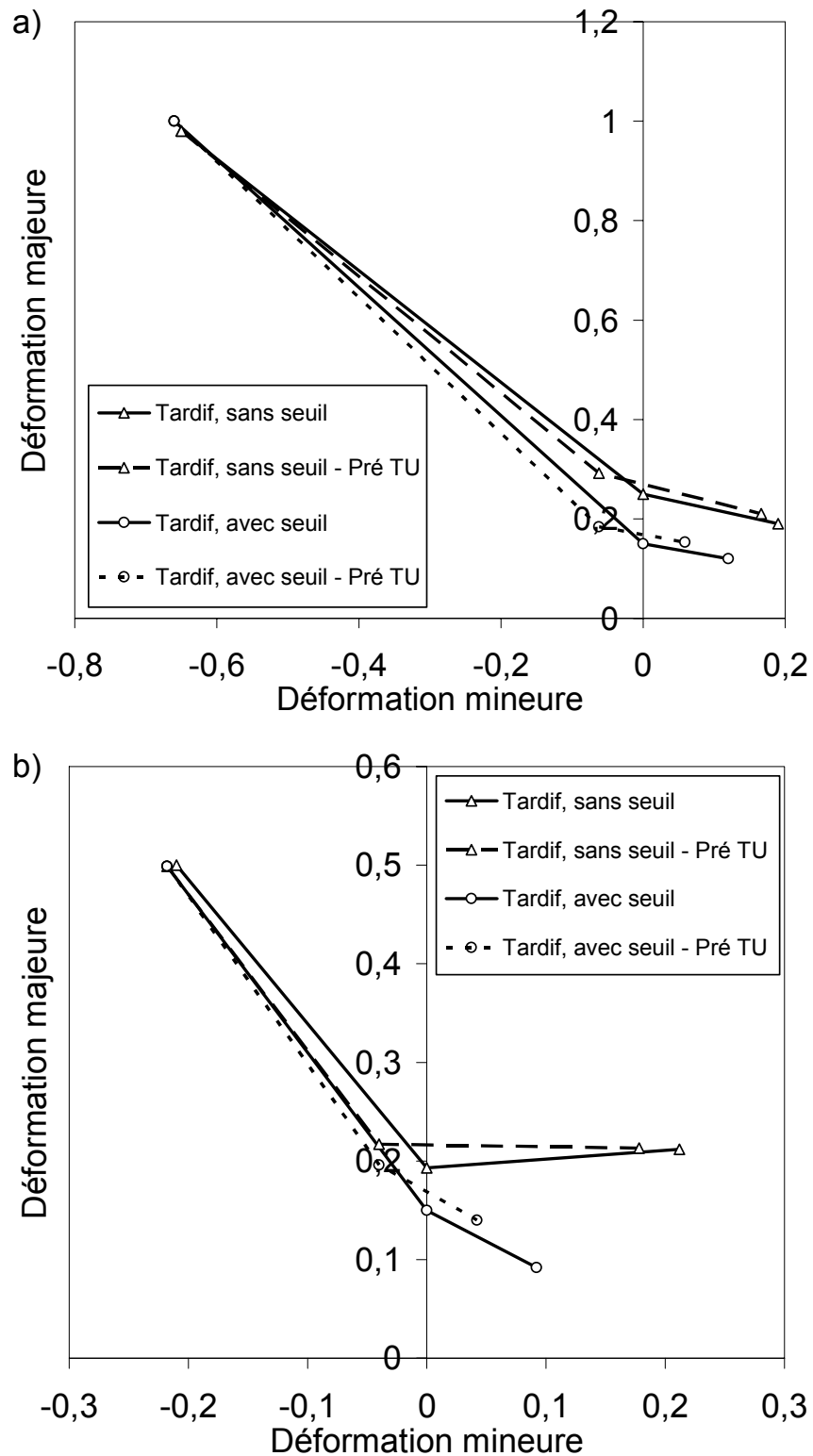


Figure 5.17. CLF en trajet séquentiel avec une pré-déformation de 10 % en traction uniaxiale. a) acier doux DC06 et b) acier dual phase DP600.

Les courbes de comportement en trajets séquentiels avec une pré-déformation de 5% en traction équi-biaxiale sont reportées sur la Figure 5.18 pour les deux matériaux. Les CLF en déformation obtenues sont reportées sur la Figure 5.19. Nous constatons bien l'effet de la translation de la CLF vers la droite et vers le bas due à cette pré-déformation. Cette tendance est souvent retrouvée expérimentalement.

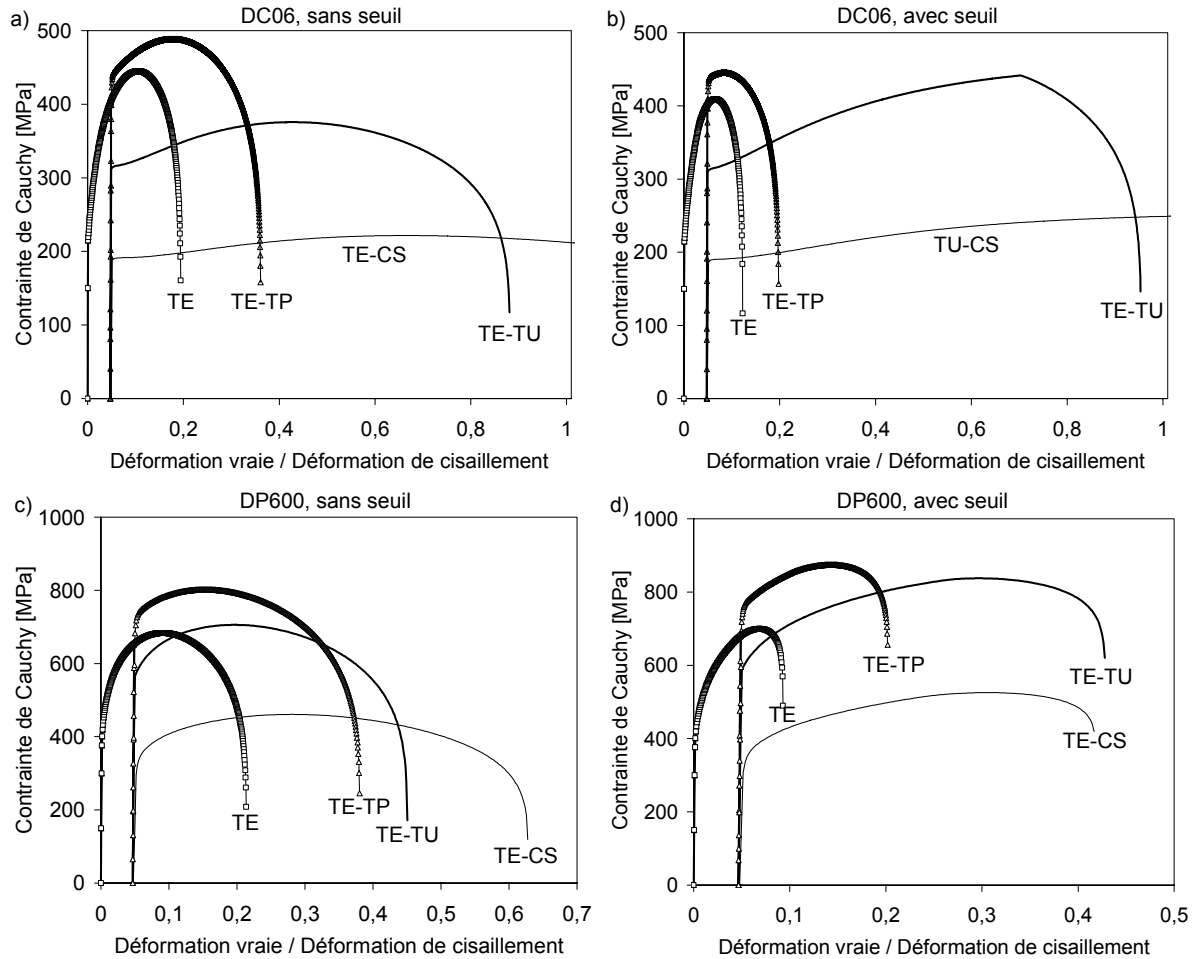


Figure 5.18. Courbes de comportement en traction uniaxiale (TU), traction plane (TP), traction équi-biaxiale (TE) et cisaillement simple (CS) après une pré-déformation de 5% en TE. a) sans seuil et b) avec seuil à 100% en TU (acier doux DC06), et c) sans seuil et d) avec seuil à 50% en TU (acier dual phase DP600).

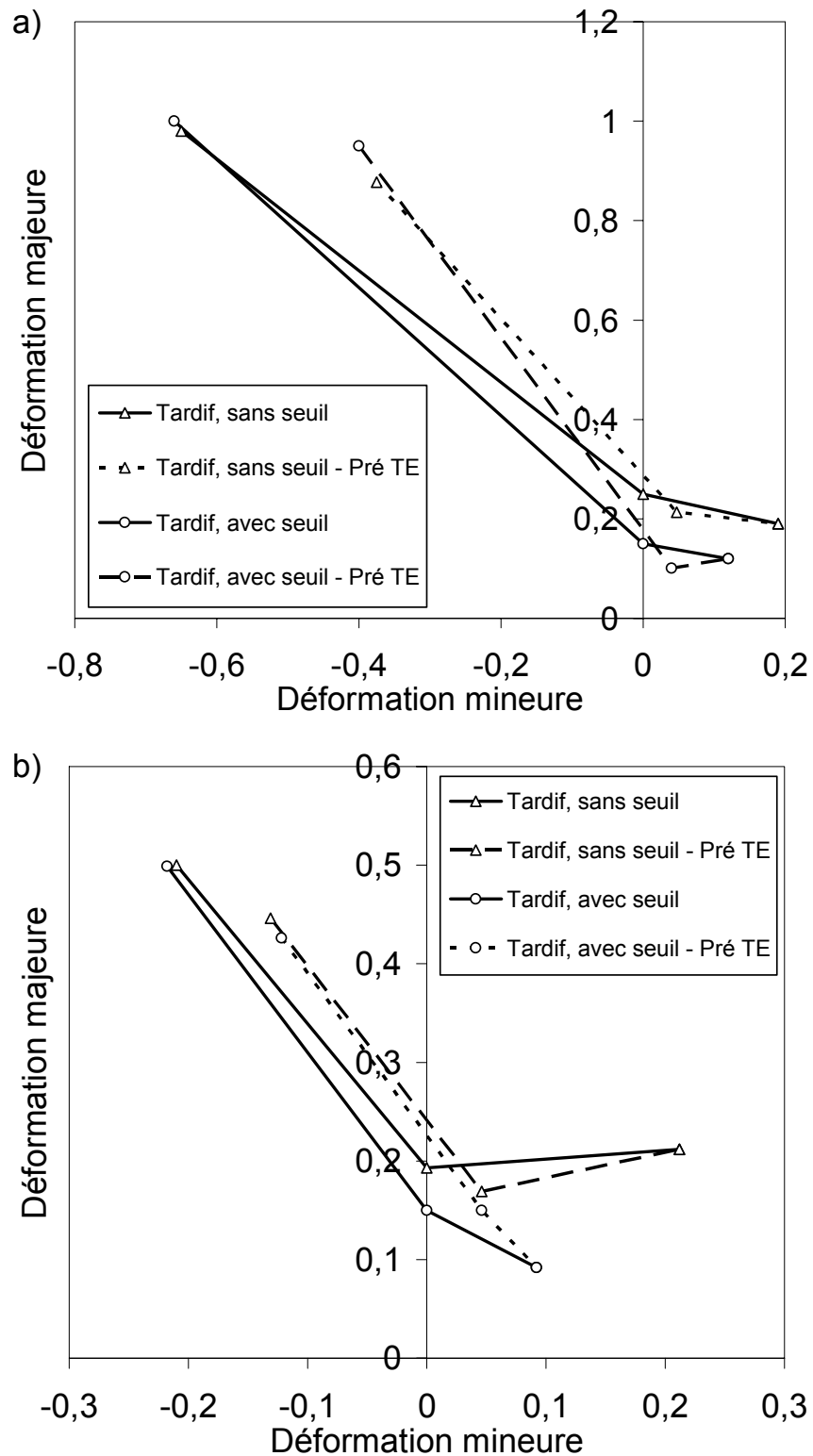


Figure 5.19. CLF en trajet séquentiel avec une pré-déformation de 5% en traction équiaxiale. a) acier doux DC06 et b) acier dual phase DP600.

5.3.3 Orientation des bandes de localisation

L'orientation des bandes de localisation est une autre information que le critère de Rice est capable de prédire. Cette information permet de connaître la direction à travers laquelle des fissures macroscopiques sont susceptible de se propager dans le matériau. Nous avons déterminé pour les différents trajets envisagés dans la partie précédente ces orientations et nous les avons comparées à celles disponibles dans la littérature (Doghri et Billardon, 1995 ; Keryvin, 1999 ; Lorrain, 2005). La Figure 5.20 montre l'évolution du $\det(\mathbf{n.L.n})$, dans le cas élastique et au moment de la localisation, en fonction de l'orientation de la normale à la bande définie par les coordonnées sphériques ψ_1 et ψ_2 (voir Figure 5.21). A rappeler que $0 \leq \psi_1 < 2\pi$ et $0 \leq \psi_2 \leq \pi/2$ (voir § 3.5.1). Elle montre que plusieurs minima vérifient le critère de localisation en même temps. Ceci correspond à l'apparition de plusieurs bandes de localisation dues aux propriétés de symétries du problème. Pour des raisons de clarté nous donnons uniquement les angles définissant l'orientation d'une seule bande.

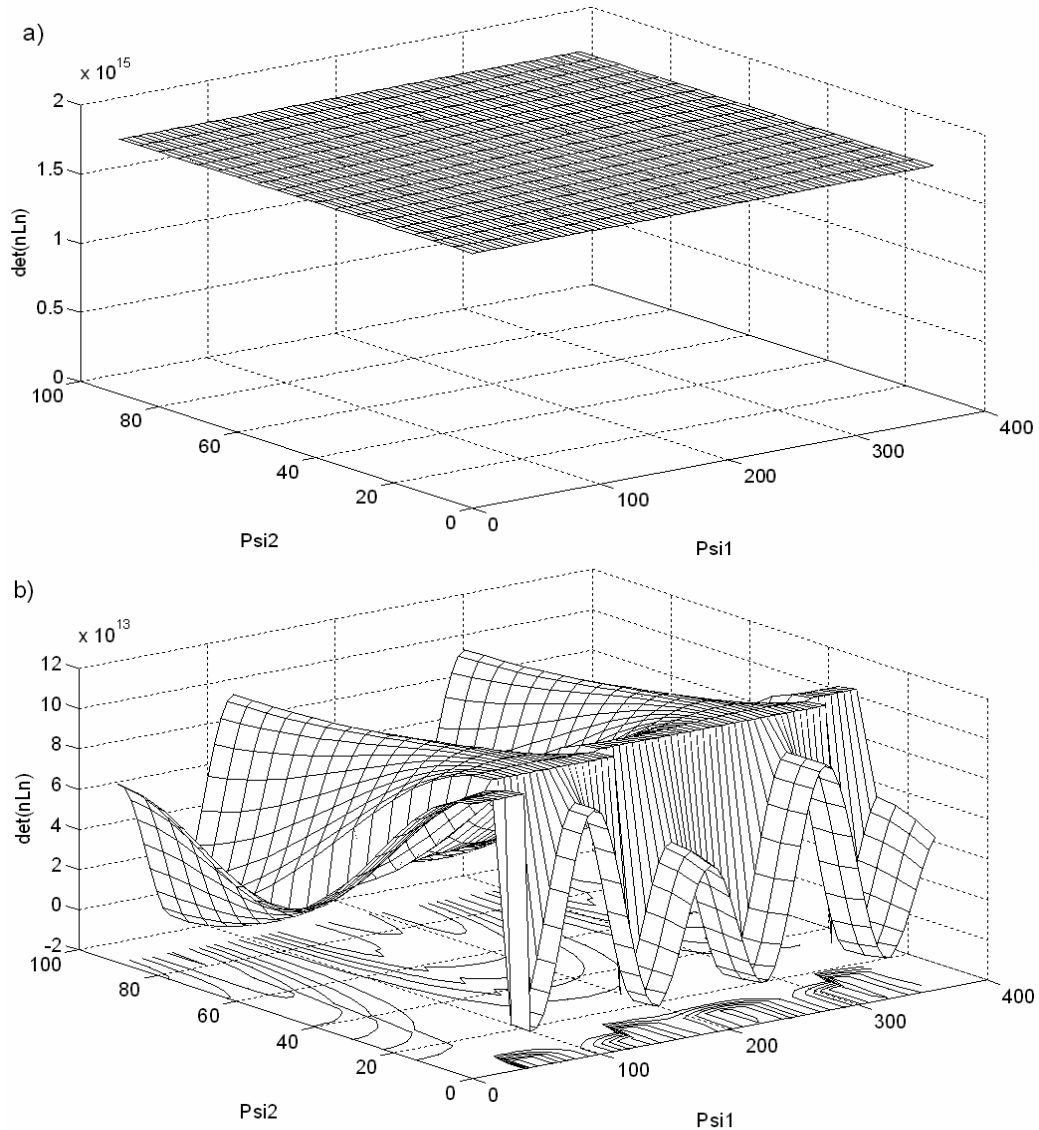


Figure 5.20. Représentation du $\det(\mathbf{n.L.n})$ en fonction de l'orientation de la normale à la bande dans le cas d'une traction uniaxiale. a) chargement élastique et b) au moment de la localisation.

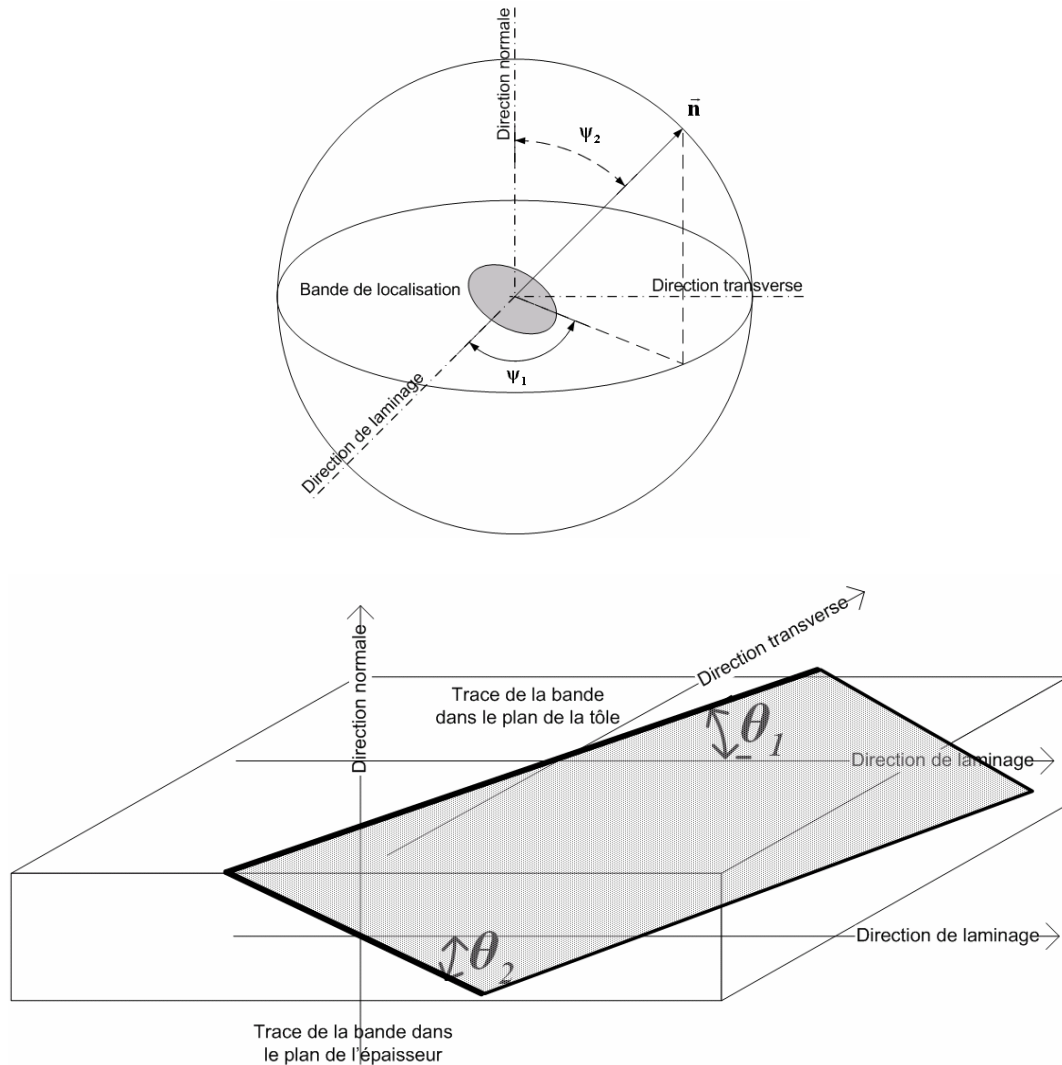


Figure 5.21. Angles définissant la normale à la bande de localisation par rapport aux directions d'anisotropie plastique initiale, ainsi que l'orientation de la trace de la bande dans les plans de la tôle et de l'épaisseur.

Dans la littérature, et pour pouvoir comparer également aux résultats existants, on indique souvent l'orientation de la bande dans le plan de la tôle par rapport à la direction de chargement. Nous considérons dans tous les cas traités ici la direction de laminage comme axe de référence pour la mesure des nouveaux angles. Ces nouveaux angles (voir Figure 5.21), notés θ_1 et θ_2 , définiront l'orientation des deux traces de la bande comme suit :

1. Dans le plan de la tôle, l'angle d'orientation de la trace de la bande par rapport à la direction de laminage est défini par $\theta_1 = \psi_1 \pm \pi/2$.
2. Dans le plan de l'épaisseur, défini par la direction de laminage et la direction normale au plan de la tôle, l'angle d'orientation de la trace de la bande est défini par $\theta_2 = \arctg(\cos \psi_2 / \sin \psi_2 \cos \psi_1) \pm \pi/2$.

La prédiction donnée par le critère montre que plusieurs bandes de localisation peuvent se former en même temps (voir Figure 5.20). En effet, plusieurs orientations correspondent au moment où $\min\{\det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n})\}$ passe par zéro, dues aux symétries du problème. Nous reportons

dans le Tableau 5.7 les angles ψ_1 et ψ_2 , ainsi que les angles θ_1 et θ_2 définis précédemment dans le cas des différents trajets monotones. Le Tableau 5.8 montre les orientations obtenues dans le cas des trajets séquentiels. A noter que l'erreur de discrétisation sur les angles est de $\pm 2^\circ$.

Tableau 5.7 : Orientation des bandes de localisation dans le cas de trajets directs de chargement.

Angle	Orientation de la normale à la bande		Orientation des traces de la bande	
	ψ_1	ψ_2	θ_1	θ_2
en degrés			Plan de la tôle	Hors plan
TU	36°	90°	54°	90°
TP	0°	44°	90°	46°
TE	-	-	-	-
CS	0°	90°	90°	90°

Tableau 5.8 : Orientation des bandes de localisation dans le cas de trajets séquentiels de chargement.

Angles	Orientation de la normale à la bande		Orientation des traces de la bande	
	ψ_1	ψ_2	θ_1	θ_2
en degré			Plan de la tôle	Hors plan
TU-TP	0°	44°	90°	46°
TU-TE	-	-	-	-
TU-CS	0°	90°	90°	90°
TE-TU	40°	90°	50°	90°
TE-TP	0°	46°	90°	44°
TE-CS	0°	90°	90°	90°

Les principales observations sur les orientations des bandes sont les suivantes :

1. Sur les trajets directs nous avons constaté que le critère prédit ces orientations bien avant le moment de passage du $\min\{\det(\mathbf{n.L.n})\}$ par zéro.
2. Les angles d'orientation sont quasi indépendants des paramètres de la loi d'endommagement ; de très faibles variations sur les angles sont obtenues et sont inférieures à l'erreur de discrétisation des intervalles de recherches.
3. En plus de l'orientation des bandes dans le plan de la tôle, notre analyse complètement tridimensionnelle de la localisation a permis de prédire l'orientation hors plan de ces bandes de localisation. Dans la littérature, bien souvent l'application de ce critère est limitée au cas 2D (par exemple, Lemaitre et al.,

2000), en supposant que la bande est normale au plan de la tôle. Nos résultats ne confirment cette hypothèse que pour certains chargements (cisaillement simple, traction uniaxiale).

4. D'une manière générale, les résultats obtenus sont en parfait accord avec ceux reportés dans la littérature (Keryvin, 1999 ; Lorrain 2005).
5. L'angle de $54,7^\circ$ reporté dans la littérature (par exemple, Doghri et Billardon, 1995) pour la traction uniaxiale est bien retrouvé ici. La faible différence peut être attribuée à l'anisotropie initiale ; dans les cas reportés dans la littérature c'est le critère de von Mises qui est considéré.
6. Sur les trajets séquentiels (voir Tableau 5.8), nous avons constaté que les pré-déformations, de 10% en TU et de 5% en TE, n'ont pas beaucoup d'influence sur l'orientation de la bande de localisation formée lors du second trajet.

5.4 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons abordé deux études distinctes de prévision des défauts en mise en forme. La première est la prédiction du retour élastique en emboutissage et la deuxième est l'étude de la localisation des déformations dans les tôles métalliques.

A travers un essai standard d'emboutissage, nous avons montré les effets des paramètres numériques, du procédé et du comportement sur le niveau du retour élastique. Nous avons montré principalement l'impact de différents modèles d'écrouissage et notamment, dans quelle situation l'utilisation d'un modèle d'écrouissage avancé tel que celui de Teodosiu-Hu peut s'avérer nécessaire. Nous avons ainsi répondu à la question de savoir si les phénomènes locaux transitoires liés aux changements de trajets de déformation ont une influence, et dans quelles circonstances, sur un phénomène global tel que le retour élastique.

A notre connaissance, les applications connues du modèle de Teodosiu-Hu pour des problèmes de retour élastique n'ont pas montré de différences importantes par rapport à des modèles de type Chaboche (Bouvier et al. 2003), ce qui laissait croire que ce modèle ne serait finalement pas nécessaire pour des simulations de ce type. Notre étude montre pour la première fois que cette conclusion n'est applicable que pour des géométries assez « faciles » à emboutir. Cependant, pour certaines géométries plus « difficiles » le choix du modèle est crucial. Or, c'est justement dans le cadre de telles géométries, où le savoir-faire des emboutisseurs est mis en défaut, que la simulation numérique est appelée à apporter des réponses prédictives.

Nous avons aussi montré l'impact accru des paramètres numériques sur les simulations, ce qui justifie pleinement le choix fait pour nos développements (simulation statique implicite, intégration temporelle, éléments finis solides, etc.). De plus, nous avons montré que l'utilisation de modèles avancés (avec un grand nombre de variables internes) et leur intégration temporelle implicite peut se faire sans aucun surcoût en termes de temps de calcul.

L'étude de la localisation des déformations avec le modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement a été réalisée totalement dans un code de calcul par éléments finis. Ceci a permis d'avoir un outil prédictif de la localisation applicable dans le cadre d'un calcul de structures. La formulation du critère de Rice en grandes déformations combinée au modèle couplé a permis de montrer la capacité de cette approche à prédire le comportement jusqu'à la

rupture du matériau. Plusieurs informations importantes ont été fournies par le couplage du modèle de comportement et du critère de localisation. Ainsi, à travers une analyse complètement tridimensionnelle, le moment de l'apparition des bandes de localisation ainsi que leurs orientations ont été prédits avec succès, par comparaison aux résultats disponibles dans la littérature, sur des tests rhéologiques à trajets directs et séquentiels.

Enfin, un des points importants dans cette étude est le couplage proposé du modèle de Teodosiu et Hu avec le modèle d'endommagement de Lemaitre, ainsi que l'introduction du critère de localisation de Rice. L'implantation réalisée, totalement en tridimensionnelle, avec un formalisme en grandes déformations, bien que impliquant des développements plus laborieux, nous a permis de mettre en avant des résultats nouveaux : endommagement en trajets séquentiels avec apparition des phénomènes de transition, orientation hors-plan des bandes de localisation, étude de la localisation en cisaillement. L'étude menée ici montre l'intérêt de cette approche pour d'autres applications impliquant des chargements complexes. Ces résultats justifieront de continuer cette direction de recherche.

Conclusion générale

Conclusions	178
Perspectives.....	179

Conclusions

Ce travail s'inscrit dans le cadre général de la prédiction numérique de la mise en forme des tôles métalliques par une approche macroscopique. Une modélisation phénoménologique assez complète du comportement du matériau (surface de plasticité, écrouissage combiné, endommagement, critère de localisation) a été développée. Une attention particulière a été portée à la description de l'écrouissage et à la prise en compte du comportement transitoire après changements de trajet de déformation. Le modèle de Teodosiu-Hu apporte sur ce point une modélisation beaucoup plus fine que le modèle classique d'écrouissage combiné isotrope et cinématique saturant. Le couplage avec l'endommagement a été réalisé en suivant l'approche de Lemaitre. Enfin, le critère de Rice, basé sur la théorie de bifurcation, a été adopté pour prédire la localisation, dans le cadre d'une modélisation du comportement indépendante du temps physique. Ce critère, ainsi que l'ensemble du modèle de comportement, a été développé sous sa forme tridimensionnelle, en adoptant le formalisme des grandes déformations. Ces différents couplages ont été réalisés dans un cadre général, sans supposer de forme particulière pour la surface de plasticité, la loi d'écrouissage isotrope ou cinématique ou encore la loi d'évolution de la variable endommagement. Ces développements ont abouti notamment à des expressions générales des différents modules tangents (module analytique, module algorithmique, module pour le tenseur acoustique).

Un effort considérable a été consacré à une implantation numérique robuste et efficace des différents modèles dans des logiciels commerciaux de calcul par éléments finis. Plusieurs schémas d'intégration temporelle ont ainsi été utilisés pour intégrer les lois d'évolution des modèles de comportement. Ces schémas, qui diffèrent par leur robustesse, précision et facilité de développement, peuvent s'avérer plus ou moins adaptés suivant les applications, les modèles à implanter et ainsi que suivant les logiciels de calcul utilisés (statique implicite, dynamique explicite). Une analyse détaillée de ces différents schémas nous a permis de les tester et les comparer afin de retenir le meilleur compromis entre précision et temps de calcul.

Les schémas d'intégration implicites, supérieurs en termes de précision et de coût, conduisent à des systèmes d'équations algébriques non-linéaires dont la résolution fait appel à des méthodes itératives. Dans ce contexte, nous avons montré que le modèle de Teodosiu-Hu, malgré un nombre élevé de variables internes, peut se ramener à la résolution d'un système de la même taille que dans le cas des modèles classiques. L'algorithme d'intégration temporelle du modèle de comportement avec endommagement a été réalisé en suivant la même démarche, et ce sans augmenter la taille du système d'équations. Le temps de calcul a été ainsi peu ou pas affecté et la modularité algorithmique a été préservée en grande partie.

D'un autre côté, les schémas d'intégration explicites offrent une voie beaucoup plus simple et modulaire pour l'implantation numérique des modèles de comportement. Des schémas explicites d'ordres supérieurs ont été développés ici à partir d'un schéma d'ordre un, en n'y apportant que très peu de modifications. Malgré leurs limitations bien connues, ces schémas restent attractifs pour une implantation rapide et flexible, notamment dans des codes dynamiques explicites qui utilisent des incréments de chargement extrêmement faibles. Les développements réalisés au sein du logiciel Abaqus/Explicit ont été ensuite interfacés avec PamStamp et généralisés au cas des éléments coques, dans le cadre du post-doctorat de G. Racz chez Arcelor. Cette implantation permet par ailleurs à notre partenaire industriel de tester rapidement des lois de comportement à base microstructurale développées en interne, au sein des logiciels de calcul par éléments finis.

Comme première application, une étude du retour élastique a été entreprise afin d'évaluer l'intérêt pratique des modèles avancés d'écrouissage. Cette étude a permis de nuancer certains résultats de la littérature et de mettre en évidence des géométries d'essai où l'impact du modèle d'écrouissage sur le retour élastique est considérable. Dans ces cas, le retour élastique s'est aussi avéré plus sensible à de nombreux paramètres numériques, notamment le type d'élément fini et le nombre de points d'intégration dans l'épaisseur.

Enfin, l'ensemble des modèles développés a été mis en œuvre pour la prédiction de courbes limites de formage en utilisant le critère de localisation de Rice. En suivant la démarche de Rice, l'analyse de bifurcation nous a permis de déduire analytiquement les différents modules associés à la perte d'ellipticité, dans un formalisme complètement tridimensionnel en grandes déformations. Par la suite, à travers une étude essentiellement numérique, ce critère s'est avéré capable de reproduire les caractéristiques principales des courbes limites de formage : allure, dépendance à la pré-déformation. Des clarifications ont pu notamment être apportées quand à l'orientation hors-plan des bandes de localisation pour certains chargements. Une identification paramétrique soignée de l'ensemble des modèles couplés à l'endommagement s'avère nécessaire afin d'aller plus loin dans la validation de cette approche vis-à-vis des résultats expérimentaux relatifs aux limites de formage.

Perspectives

Les travaux réalisés dans cette thèse ont permis de développer et valider une démarche et d'en montrer les premiers fruits. A son issue, de nombreuses perspectives sont ouvertes.

Avant d'aller plus loin, la validation complète de certains développements réalisés ici nécessite une identification soignée des paramètres des différents modèles couplés. Il s'agit d'un travail difficile, étant donné que l'identification paramétrique des surfaces de plasticité anisotropes, des modèles d'écrouissage avancés ou bien des modèles d'endommagement – même pris séparément – demande une expérimentation spécifique pour chaque cas. La modélisation couplée une fois disponible, il reste à regrouper tous ces résultats expérimentaux en une procédure unique d'identification des paramètres. En ce qui concerne notamment l'endommagement, des modèles plus avancés (anisotropes) pourraient s'avérer nécessaires à l'avenir. Il en est certainement de même pour les critères de plasticité, la prise en compte d'un modèle plus avancé que celui de Hill'48 ne posant par ailleurs aucune difficulté.

Le critère de Rice a été implanté dans le code Abaqus et pourrait donc être utilisé dès à présent comme critère de prédiction de la localisation lors de la simulation des procédés de formage. L'utilisation d'une loi d'écoulement non-associée permettrait d'appliquer ce critère en l'absence de l'endommagement – et de prendre en compte des effets de non-normalité mis en évidence dans la littérature. De même, il peut s'avérer très instructif de confronter ce critère à d'autres modélisations de la localisation, plus populaires dans la communauté de la mise en forme des tôles métalliques. Une thèse vient de démarrer récemment dans cette voie, suite aux résultats prometteurs obtenus ici.

L'étude du retour élastique a confirmé entre autres la sensibilité des résultats de simulation à la formulation de l'élément fini. Afin de contribuer à la maîtrise de cet aspect, la modélisation développée dans cette thèse est en cours de couplage avec un élément fini de type solide-coque. Une partie des perspectives envisagées ici font d'ailleurs l'objet du projet ANR « FORMEF » qui a été financé dans le cadre du Réseau National Matériaux et Procédés.

Enfin, les applications de la modélisation développée, de par leur généralité peuvent être appliqués à la simulation de nombreux problèmes de mise en forme des tôles.

Annexe

A.	Développement du module tangent pour le critère de localisation.....	182
B.	Termes intervenant dans la résolution du système réduit	186

A. Développement du module tangent pour le critère de localisation

Nous développons ici le calcul des différents termes intervenant dans le module tangent $\mathbf{L}$ à introduire dans le critère de localisation de Rice, à savoir $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ et $\mathbf{L}_3$. Nous donnons surtout plus de détails sur le calcul des termes convectifs $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ et $\mathbf{L}_3$, et leurs propriétés de symétrie.

Nous rappelons les relations de départ

$$\dot{\mathbf{N}} = \begin{cases} \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} & \text{élasto-plastique} \\ (1-d)\mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - \dot{d} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} & \text{élasto-plastique/endommagement} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où nous cherchons à relier chaque terme du second membre au gradient de vitesses, c-à-d. avoir

$$\begin{cases} \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) = \mathbf{L} : \mathbf{D} = \mathbf{L} : \mathbf{G} & \text{élasto-plastique} \\ \text{ou} & \\ (1-d)\mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - \dot{d} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} : \mathbf{D} = \mathbf{L} : \mathbf{G} & \text{élasto-plastique/endommagement} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\mathbf{D}) = \mathbf{L}_1 : \mathbf{D} = \mathbf{L}_1 : \mathbf{G} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}_2 : \mathbf{D} = \mathbf{L}_2 : \mathbf{G} \quad (\text{A.4})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{L}_3 : \mathbf{W} = \mathbf{L}_3 : \mathbf{G} \quad (\text{A.5})$$

de telle sorte à obtenir

$$\mathbf{L} = \mathbf{L} + \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_3 \quad (\text{A.6})$$

A.1 Détermination de $\mathbf{L}$

Nous avons

$$\mathbf{L} : \mathbf{D} = \mathbf{C}^{Ana} : \mathbf{D} \quad (\text{A.7})$$

où $\mathbf{C}^{Ana}$ est le module tangent analytique développé au § 2.1..5 pour le modèle élasto-plastique et au § 2.5.2.7 pour le modèle couplé à l'endommagement, qui sont donnés ici, respectivement, par

$$\mathbf{C}^{Ana} = \begin{cases} \mathbf{C} - \alpha \left[\frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}) \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} \right] & \text{élasto-plastique} \\ \tilde{\mathbf{C}} - \alpha \left(\frac{(\mathbf{C} : \mathbf{V}) \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} + \frac{H_d \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \otimes (\mathbf{V} : \mathbf{C})}{H_\lambda} \right) & \text{élasto-plastique/endommagement} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Sachant que, grâce à certaines relations de symétrie, on a

$$\mathbf{C}^{Ana} : \mathbf{D} = \mathbf{C}^{Ana} : \mathbf{G} \quad (\text{A.9})$$

Le tenseur $\mathbf{L}$ est simplement déduit par

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}^{Ana} \quad (\text{A.10})$$

A.2 Détermination de $\mathbf{L}_1$

Nous cherchons à déterminer $\mathbf{L}_1$ tel que

$$\sigma \, tr(\mathbf{D}) = \mathbf{L}_1 : \mathbf{G} \quad (\text{A.11})$$

Le terme $\sigma \, tr(\mathbf{D})$ peut s'écrire

$$\sigma \, tr(\mathbf{D}) = (\sigma \otimes \mathbf{I}) : \mathbf{D} = \mathbf{L}_1 : \mathbf{D} \quad (\text{A.12})$$

Sous forme indicielle, on a

$$\sigma_{ij} D_{kk} = L_{ijkl} D_{kl} \quad (\text{A.13})$$

Pour étudier les symétries de $\mathbf{L}_1$, il suffit de voir que

$$L_{ijkl} = \sigma_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{A.14})$$

Le tenseur d'ordre 4 $\mathbf{L}_1$ possède donc les symétries mineures mais pas la symétrie majeure.

D'un autre côté, le développement suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} D_{kk} &= L_{ijkl} D_{kl} = L_{ijkl} \left(\frac{G_{kl} + G_{lk}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} L_{ijkl} G_{kl} + \frac{1}{2} L_{ijkl} G_{lk} \\ &= \frac{1}{2} L_{ijkl} G_{kl} + \frac{1}{2} L_{1ijlk} G_{lk} \\ &= \frac{1}{2} L_{ijkl} G_{kl} + \frac{1}{2} L_{1ijkl} G_{kl} \\ &= L_{ijkl} G_{kl} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

montre que

$$\sigma \, tr(\mathbf{D}) = \mathbf{L}_1 : \mathbf{D} = \mathbf{L}_1 : \mathbf{G} \quad (\text{A.16})$$

D'où l'expression finale de $\mathbf{L}_1$

$$\mathbf{L}_1 = \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{A.17})$$

A.3 Détermination de $\mathbf{L}_2$

Nous cherchons à déterminer $\mathbf{L}_2$ tel que

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}_2 : \mathbf{D} = \mathbf{L}_2 : \mathbf{G} \quad (\text{A.18})$$

Nous écrivons d'abord

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}_2 : \mathbf{D} \quad (\text{A.19})$$

Pour déterminer $\mathbf{L}_2$ et étudier ses symétries, il suffit d'écrire que

$$D_{ip} \sigma_{pj} = L_{2ijkl} D_{kl} \quad (\text{A.20})$$

$$D_{il} \sigma_{lj} = D_{kl} \delta_{ik} \sigma_{lj} \quad (\text{A.21})$$

$$D_{ik} \sigma_{kj} = D_{lk} \delta_{il} \sigma_{kj} \quad (\text{A.22})$$

$$D_{ip} \sigma_{pj} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ik} \sigma_{lj} + \delta_{il} \sigma_{kj} \right] D_{kl} \quad (\text{A.23})$$

Le tenseur $\mathbf{L}_2$ possède la symétrie mineure sur les deux derniers indices ; c-à-d.

$$L_{2ijkl} = L_{2ijlk} \quad (\text{A.24})$$

Comme pour $\mathbf{L}_1$, on peut montrer que

$$\mathbf{L}_2 : \mathbf{D} = \mathbf{L}_2 : \mathbf{G} \quad (\text{A.25})$$

de sorte que

$$L_{2ijkl} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ik} \sigma_{lj} + \delta_{il} \sigma_{kj} \right] \quad (\text{A.26})$$

A.4 Détermination de $\mathbf{L}_3$

Nous cherchons à déterminer $\mathbf{L}_3$ tel que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{L}_3 : \mathbf{W} = \mathbf{L}_3 : \mathbf{G} \quad (\text{A.27})$$

Pour déterminer $\mathbf{L}_3$ et étudier ses symétries, il suffit d'écrire

$$\sigma_{ip} W_{pj} = L_{3ijkl} W_{kl} \quad (\text{A.28})$$

$$\sigma_{il} W_{lj} = -\sigma_{il} W_{jl} = -\sigma_{il} \delta_{jk} W_{kl} \quad (\text{A.29})$$

$$\sigma_{ik} W_{kj} = \sigma_{ik} \delta_{lj} W_{kl} \quad (\text{A.30})$$

$$\sigma_{ip} W_{pj} = \frac{1}{2} [\sigma_{ik} \delta_{lj} - \sigma_{il} \delta_{jk}] W_{kl} \quad (\text{A.31})$$

Le tenseur $\mathbf{L}_3$ possède l'antisymétrie sur les deux derniers indices, c-à-d.

$$L_{3ijkl} = -L_{3ijlk} \quad (\text{A.32})$$

Ceci permet d'avoir

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{L}_3 : \mathbf{W} = \mathbf{L}_3 : \left(\frac{\mathbf{G} - \mathbf{G}^T}{2} \right) = \mathbf{L}_3 : \mathbf{G} \quad (\text{A.33})$$

de sorte que

$$L_{3ijkl} = \frac{1}{2} [\sigma_{ik} \delta_{lj} - \sigma_{il} \delta_{jk}] \quad (\text{A.34})$$

B. Termes intervenant dans la résolution du système réduit

Nous donnons ici les différents termes intervenants dans la résolution des deux systèmes d'équations non-linéaires (3.101) et (3.161), respectivement, pour le modèle élasto-plastique et celui couplé à l'endommagement.

B.1 Modèle élasto-plastique sans endommagement

- **Calcul de $\mathbf{V}$ et $\mathbf{Q}$**

Les expressions de $\mathbf{V}$ et $\mathbf{Q}$ dépendent de la surface de plasticité retenue. Dans notre cas, nous travaillons avec le critère de Hill 48, où la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$ est fonction de la contrainte efficace $\mathbf{T}$. La direction de l'écoulement plastique $\mathbf{V}$ est ainsi donnée par

$$\mathbf{V} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\mathbf{M} : \mathbf{T}}{\bar{\sigma}} = \mathbf{M} : \mathbf{n} \quad (\text{B.1})$$

et sa dérivée par rapport à $\mathbf{T}$ est donnée par

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{T} \partial \mathbf{T}} = \frac{1}{\bar{\sigma}} (\mathbf{M} - \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \quad (\text{B.2})$$

- **Calcul de Y , $\Delta \mathbf{X}$ et des dérivées $\frac{\partial Y}{\partial \Delta \lambda}$, $\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \mathbf{T}}$ et $\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta \lambda}$**

Nous ne considérons ici que le cas de l'intégration asymptotique des lois d'évolution.

Modèle de Chaboche-Marquis

En utilisant les expressions (3.115) et (3.116), nous obtenons

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = C_R (R_{sat} - R_{n+1}) \quad (\text{B.3})$$

$$\left. \frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \mathbf{T}} \right|_{n+1} = \frac{X_{sat}}{\bar{\sigma}_{n+1}} (1 - e^{-C_X \Delta \lambda}) (\mathbf{I} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{V}_{n+1}) \quad (\text{B.4})$$

$$\left. \frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = C_X e^{-C_X \Delta \lambda} \left(X_{sat} \frac{\mathbf{T}_{n+1}}{\bar{\sigma}_{n+1}} - \mathbf{X}_n \right) \quad (\text{B.5})$$

Modèle de Teodosiu-Hu

En utilisant les expressions (3.120) et (3.121), nous obtenons

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = C_R (R_{sat} - R_{n+1}) + \frac{f}{|\mathbf{S}|_{n+1}} \left\{ C_{SD} S_{Dn+1} [S_{sat} g_n - S_{Dn+1} (g_n + h_n)] - C_{SL} \left(\frac{|\mathbf{S}_L|_{n+1}}{S_{sat}} \right)^{n_L} |\mathbf{S}_L|_{n+1}^2 \right\} \quad (\text{B.6})$$

$$\left. \frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \mathbf{T}} \right|_{n+1} = \frac{X_{n+1}^{sat}}{\bar{\sigma}_{n+1}} (1 - e^{-C_X \Delta \lambda}) (\mathbf{I} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{V}_{n+1}) \quad (\text{B.7})$$

$$\left. \frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = C_X e^{-C_X \Delta \lambda} (X_{n+1}^{sat} \mathbf{n}_{n+1} - \mathbf{X}_n) + \frac{(1 - e^{-C_X \Delta \lambda})(1 - f)}{\sqrt{r |\mathbf{S}_L|_{n+1}^2 + S_{Dn+1}^2}} \left\{ C_{SD} S_{Dn+1} [S_{sat} g_n - S_{Dn+1} (g_n + h_n)] - r C_{SL} \left(\frac{|\mathbf{S}_L|_{n+1}}{S_{sat}} \right)^{n_L} |\mathbf{S}_L|_{n+1}^2 \right\} \mathbf{n}_{n+1} \quad (\text{B.8})$$

B.2 Modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement

• Calcul de $\tilde{\mathbf{V}}$ et $\tilde{\mathbf{Q}}$

Les expressions de $\tilde{\mathbf{V}}$ et $\tilde{\mathbf{Q}}$ dépendent de la surface de charge. Pour la surface de Hill 48, retenue ici, on a

$$\tilde{\mathbf{V}} = \frac{\partial \bar{\tilde{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{1 - d_{n+1}} \mathbf{V} \quad (\text{B.9})$$

Dans le cas du critère de Hill 48, on a

$$\tilde{\mathbf{V}} = \frac{\partial \bar{\tilde{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \approx \frac{1}{1 - d_n} \mathbf{V} = \frac{1}{1 - d_n} \frac{\mathbf{M} : \tilde{\mathbf{T}}}{\bar{\tilde{\sigma}}} \quad (\text{B.10})$$

et sa dérivée par rapport à $\tilde{\mathbf{T}}$ est donnée par

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \approx \frac{1}{(1 - d_n) \bar{\tilde{\sigma}}} (\mathbf{M} - \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \quad (\text{B.11})$$

• Calcul de Y , $\Delta \mathbf{X}$ et des dérivées $\frac{\partial Y}{\partial \Delta \lambda}$, $\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}}$ et $\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta \lambda}$

Comme pour les modèles d'écrouissage sans endommagement, nous ne considérons ici que le cas de l'intégration asymptotique.

Modèle de Chaboche-Marquis avec endommagement

En utilisant les expressions (3.116) et (3.175), nous obtenons

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = C_R (R_{sat} - R_{n+1}) \quad (B.12)$$

$$\left. \frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right|_{n+1} = \frac{X_{sat}}{\tilde{\sigma}_{n+1}} (1 - e^{-C_X \Delta \lambda}) (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} \otimes \mathbf{V}_{n+1}) \quad (B.13)$$

$$\left. \frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = C_X e^{-C_X \Delta \lambda} \left(X_{sat} \frac{\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_{n+1}} - \mathbf{X}_n \right) = C_X e^{-C_X \Delta \lambda} (X_{sat} \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} - \mathbf{X}_n) \quad (B.14)$$

Modèle de Teodosiu-Hu avec endommagement

En utilisant les expressions (3.120) et (3.178), nous obtenons

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = \left. \frac{\partial R}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} + \frac{f}{|\mathbf{S}|_{n+1}} \left(S_{Dn+1} \left. \frac{\partial S_D}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} + |\mathbf{S}_L|_{n+1} \left. \frac{\partial |\mathbf{S}_L|}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} \right) \quad (B.15)$$

$$\left. \frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right|_{n+1} = (1 - e^{-C_X \Delta \lambda}) \left(\frac{X_{sat}}{\tilde{\sigma}_{n+1}} \mathbf{I} + \left. \frac{\partial X_{sat}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right|_{n+1} \otimes \frac{\tilde{\mathbf{T}}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_{n+1}} + X_{sat} \tilde{\mathbf{T}}_{n+1} \otimes \left. \frac{\partial (1/\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right|_{n+1} \right) \quad (B.16)$$

$$\left. \frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = \left. \frac{\partial X_{sat}}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} (1 - e^{-C_X \Delta \lambda}) + C_X e^{-C_X \Delta \lambda} (X_{sat} \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} - \mathbf{X}_n) \quad (B.17)$$

où $\left. \frac{\partial X_{sat}}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1}$, $\left. \frac{\partial X_{sat}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right|_{n+1}$ et $\left. \frac{\partial (1/\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right|_{n+1}$ sont données comme suit :

$$\left. \frac{\partial (1/\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right|_{n+1} = - \frac{\mathbf{V}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_{n+1}^2} \quad (B.18)$$

$$\left. \frac{\partial X_{sat}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right|_{n+1} = \mathbf{0} \quad (B.19)$$

$$\left. \frac{\partial X_{sat}}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = \frac{(1-f)}{\sqrt{r|\mathbf{S}_L|_{n+1}^2 + S_{Dn+1}^2}} \left(S_{Dn+1} \left. \frac{\partial S_D}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} + r|\mathbf{S}_L|_{n+1} \left. \frac{\partial |\mathbf{S}_L|}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} \right) \quad (B.20)$$

Les dérivées $\left. \frac{\partial R}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1}$, $\left. \frac{\partial S_D}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1}$ et $\left. \frac{\partial |\mathbf{S}_L|}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1}$ sont données par

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = C_R (R_{sat} - R_{n+1}) \quad (B.21)$$

$$\left. \frac{\partial S_D}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = C_{SD} [\tilde{g}(S_{sat} - S_{Dn+1}) - \tilde{h}S_{Dn+1}] \quad (B.22)$$

$$\left. \frac{\partial |\mathbf{S}_L|}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = -C_{SL} \left(\frac{|\mathbf{S}_L|_{n+1}}{S_{sat}} \right)^{n_L} |\mathbf{S}_L|_{n+1} \quad (\text{B.23})$$

Après calculs, regroupement des termes et simplifications, les dérivées $\frac{\partial Y}{\partial \Delta \lambda}$, $\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}}$ et $\frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta \lambda}$ recherchées sont données par les expressions finales suivantes :

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} = C_R (R_{sat} - R_{n+1}) + \frac{f}{|\mathbf{S}|_{n+1}} \left\{ C_{SD} S_{Dn+1} [S_{sat} \tilde{g}_n - S_{Dn+1} (\tilde{g}_n + \tilde{h}_n)] - C_{SL} \left(\frac{|\mathbf{S}_L|_{n+1}}{S_{sat}} \right)^{n_L} |\mathbf{S}_L|_{n+1}^2 \right\} \quad (\text{B.24})$$

$$\left. \frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right|_{n+1} = \frac{X_{n+1}^{sat}}{\tilde{\sigma}_{n+1}} (1 - e^{-C_X \Delta \lambda}) (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} \otimes \mathbf{V}_{n+1}) \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Delta \mathbf{X}}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} &= C_X e^{-C_X \Delta \lambda} (X_{n+1}^{sat} \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} - \mathbf{X}_n) + \\ &\frac{(1 - e^{-C_X \Delta \lambda})(1 - f)}{\sqrt{r |\mathbf{S}_L|_{n+1}^2 + S_{Dn+1}^2}} \left\{ C_{SD} S_{Dn+1} [S_{sat} \tilde{g}_n - S_{Dn+1} (\tilde{g}_n + \tilde{h}_n)] - r C_{SL} \left(\frac{|\mathbf{S}_L|_{n+1}}{S_{sat}} \right)^{n_L} |\mathbf{S}_L|_{n+1}^2 \right\} \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Bibliographie

Références

- Abaqus, 2003. ABAQUS Theory User's manual for version 6.4, Hibbitt, Karlson & Sorensen Inc.
- Abdel-Karim, M., Ohno, N., 2000. Kinematic hardening model suitable for ratcheting with steady-state. *Int. J. of Plasticity* 16, 225–240.
- Abdel-Karim, M., 2005. Numerical integration method for kinematic hardening rules with partial activation of dynamic recovery term. *Int. J. of Plasticity* 21, 1303-1321.
- Adam, L., 2003. Modélisation du comportement thermo-élasto-visco-plastique des métaux soumis à grandes déformations : Application au formage superplastique. Thèse de doctorat de l'Université de Liège.
- Alves, J.L., 2003. Simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas: Modelação mecânica e métodos numéricos. Ph. D. Thesis, University of Minho, Portugal.
- Armero, F., Pérez-Foguet, A., 2002. On the formulation of closest-point projection algorithms in elastoplasticity—part I: The variational structure. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 53, 297–329.
- Armstrong, P.J., Frederick, C.O., 1966. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. G.E.G.B. Report RD/B/N731.
- Arrieux, R., Bedrin, C., Boivin, M., 1985. Determination of the strain-path influence on the forming limit diagrams from the limit stress curve. *C.I.R.P. annals* 34/1, 205-208.
- Arrieux, R., 1990. Détermination théorique et expérimentale des courbes limites de formage en contraintes. Thèse de doctorat de l'Université de Lyon 1.
- Bacroix, B., Genevoix, P., Teodosiu, C., 1994. Plastic anisotropy in low carbon steels subjected to simple shear with strain-path changes. *European J. Mech. Ser. A/Solids* 13, 661-675.
- Bacroix, B., Balan, T., Bouvier, S., Teodosiu, C., 2003. Identification of plastic potentials by inverse method, In: *Proc. 6th Int. Esaform Conf.*, Salerno, Italy, April 28-30 2003, pp. 347-350.
- Balan, T., Teodosiu, C., 1999. Constitutive algorithm for plasticity model of texture, strain-path induced anisotropy and rate-sensitivity: Interface between constitutive algorithm and FE code (Abaqus/ Standard). Internal Report, Paris 13 University.
- Barbier, G., Benallal, A., Cano, V., 1998. Relation théorique entre la méthode de perturbation linéaire et l'analyse de bifurcation pour la prédiction de la localisation des déformations. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 326, série II b, 153-158.
- Barlat, F., Lege, D.J., Brem, J.C., 1991. A six-component yield function for anisotropic materials. *Int. J. of Plasticity* 7, 693-712.

- Barlat, F., Chung, K., 1993. Anisotropic potentials for plastically deformation metals. *Modelling Simul. Mater. Sci. Engng.* 1, 403-416.
- Barlat, F., Chung, K., Richmond, O., 1993. Strain rate potential for metals and its application to minimum plastic work path calculations. *Int. J. of Plasticity* 9, 51-63.
- Barlat, F., Ferreira Duarte, J.M., Gracio, J.J., Lopes, A.B., Rauch, E.F., 2003. Plastic flow for nonmonotonic loading conditions of an aluminum alloy sheet sample. *Int. J. of Plasticity* 19, 1215-1244.
- Bay, B., Hansen, N., Hughes, D.A., Kuhlmann-Wilsdorf, D., 1992. Evolution of F.C.C. deformation structures in polyslips. *Acta Metall.* 40, 205-219.
- Benallal, A., Billardon, R., Doghri, I., 1988. Integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elasto-plastic and damage equations. *Communications in Applied Numerical Methods*, 4 (6), 731-740.
- Benallal, A., Billardon, R., Geymonat, G., 1990. Phénomènes de localisation à la frontière d'un solide. *C. R. Acad. Sci. Paris t310, série II*, 679-684.
- Benallal, A., Billardon, R., Geymonat, G., 1993. Bifurcation and localization in rate-independent materials. Some general considerations. In: *Bifurcation and stability of dissipative systems*, CISM, courses and Lectures n° 327, ed: Nguyen Q.S., Springer-Verlag.
- Benallal, A., Comi, C., 1994. Closed form solutions to localization conditions for rate-independent materials. *C. R. Acad. Sci. Paris t318, série II*, 7-14.
- Benallal, A., Comi, C., 2000. On localisation in saturated porous continua. *C. R. Acad. Sci. Paris t328, série II b*, 847-853.
- Benallal, A., Bigoni, D., 2003. Effects of temperature and thermo-mechanical couplings on material instabilities and strain localisation of inelastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 52, Issue 3, 725-753.
- 3DS Benchmarks, 2002. Results of the experimental benchmark tests, "Growth Programme, Research Project 3DS, Digital Die Design System, Contract G1RDCT-2000-00104, IMS199900005".
- Billardon, R., Doghri, I., 1989. Prévision de l'amorçage d'une macro-fissure par localisation de l'endommagement. *C.R. Acad. Sci. Paris II*, 308, 347-352.
- Boger, R.K., Wagoner, R.H., Barlat, F., Lee, M.G., Chung, K., 2005. Continuous, large strain, tension/compression testing of sheet material. *Int. J. of Plasticity* 21, 2319-2343.
- Bouvier, S., Teodosiu, C., Haddadi, H., Tabacaru, V., 2003. Anisotropic work-hardening behavior of structural steels and aluminum alloys at large strains. *Journal de Physique IV* 105, 215-222.

- Bouvier, S., Alves, J.L., Oliveira, M.C., Menezes, L.F., 2005. Modeling of anisotropic work-hardening behavior of metallic materials subjected to strain-path changes. *Computational Material Science* 32 (3-4), 301-315.
- Bouvier, S., Haddadi, H., Levée P., Teodosiu, C., 2006. Simple shear tests: Experimental techniques and characterization of the plastic anisotropy of rolled sheets at large strains. *J. Mater. Proc. Technol.* 172, 96–103.
- Brunet, M., Arrieux, R., Boivin, M., 1985. Détermination par éléments finis en grandes déformations des courbes limites de formage en contraintes. *Proc. Int. Symp. on Plastic instability*, Paris, 227-238.
- Brunet, M., Sabourin, F., 1994. Prediction of wrinkles and necking with a simplified triangular shell element. *Metal forming process simulation in industry*, 73-75.
- Brunet, M., Mguil, S., Morestin, F., 1998. Analytical and experimental studies of necking in sheet metal forming processes. *J. of Material Processing Technology* 80/81, 40-46.
- Brunet, M., Morestin, F., 2001. Experimental and analytical necking studies of anisotropic sheet metals. *J. of Material Processing Technology* 112, 214-226.
- Brunet, M., Morestin, F., Walter-Leberre, H., 2005. Failure analysis of anisotropic sheet metals using a non-local plastic damage model. *J. of Material Processing Technology* V170, 457-470.
- Butuc, M.C., 2004. Forming limit diagrams: definition of plastic instability criteria. PhD Thesis. Engineering Faculty of Porto University.
- Carden, W.D., Geng, L.M., Matlock, D.K., Wagoner, R.H., 2002. Measurement of springback. *Int. J. of Mech. Sci.* 44, 79-101.
- Chaboche, J.L., 1986. Time independent constitutive theories for cyclic plasticity. *Int. J. of Plasticity* 2 (2), 149.
- Chaboche, J.L., 1989. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *Int. J. of Plasticity* 5, 247–302.
- Chaboche, J.L. 1991. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratcheting effects. *Int. J. of Plasticity* 7, 661-678.
- Chaboche, J.L., Cailletaud, G., 1996. Integration methods for complex plastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 133 (1-2), 125-155.
- Chaboche, J.L., 1999. Thermodynamically founded CDM models for creep and other conditions: CISM Courses and lectures No.399, International Centre for Mechanical Sciences. *Creep and Damage in Materials and structures*, 209-283.
- Cherouat, A., Saanouni, K., Hammi, Y., 2003. Improvement of forging process of a 3D complex part with respect to damage occurrence. *Journal of Materials processing Technology* 142, 307-317.

- Choi, Y., Han, C.S., Lee, J.K., Wagoner, R.H., 2006a. Modeling multi-axial deformation of planar anisotropic elasto-plastic materials, part I: Theory. *Int. J. of Plasticity* 22, 1745-1764.
- Choi, Y., Han, C.S., Lee, J.K., Wagoner, R.H., 2006b. Modeling multi-axial deformation of planar anisotropic elasto-plastic materials, part II: Applications. *Int. J. of Plasticity* 22, 1765-1783.
- Chow, C.L., Yang, X.L., Chu, E., 2002. Prediction of forming limit diagram based on damage coupled kinematic-isotropic hardening model under non-proportional loading. *Journal of Engineering Material and Technology* 124, 259-256.
- Chu, C.C., 1991. The effect of restraining force on springback. *Int. J. Solids Struct.* 27, 1035-1046.
- Chun, B.K., Jinn, J.T., Lee, J.K., 2002a. Modeling the Bauschinger effect for sheet metals, part I: theory. *Int. J. of Plasticity* 18, 571-595.
- Chun, B.K., Jinn, J.T., Lee, J.K., 2002b. Modeling the Bauschinger effect for sheet metals, part II: applications. *Int. J. of Plasticity* 18, 597-616.
- Chung, K., Lee, M.-G., Kim, D., Kim, C., Wenner, M.L., Barlat, F., 2005. Springback evaluation of automotive sheets based on isotropic-kinematic hardening laws and non-quadratic anisotropic yield functions. Part I: theory and formulation, *Int. J. of Plasticity* 21, 861-882.
- Col, A., 2006. Emboutissage des tôles : Importance des modes de déformation. *Techniques de l'ingénieur*. M 3 180.
- Considère, A., 1885. Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions. *Annales des Ponts et Chaussées* 9, 574.
- Cordebois, J.P., Ladevèze, P., 1982. Détermination et étude des courbes limites de formage des tôles minces. *Journées d'automne, Société Française de Métallurgie*, 415.
- Cordebois, J.P., 1983. Critères d'instabilité plastique et endommagement ductile en grandes déformations. Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris 6.
- De Montleau, P., Duchêne, L., Bouvier, S., Flores, P., Habraken, A.M., 2004. Deep drawing process with different elastoplastic laws. In: *Esaform Conference Proceedings*, Trondheim, 163-166.
- Doghri, I., 1989. Etude de la localisation de l'endommagement. Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, L.M.T. Cachan, France.
- Doghri, I., Billardon, R., 1995. Investigation of localization due to damage in elasto-plastic materials. *Mechanics of Materials* 19, 129-149.
- Dongjuan, Z., Zhenshan, C., Xueyu, R., Yuqiang, L., 2006. Sheet springback prediction based on non-linear combined hardening rule and Barlat89's yielding function. *Comp. Mat. Sci.*, in press.

- Dragon, A., Halm, D., 1995. A model of anisotropic damage by micro-crack growth, unilateral effect. Proc. Workshop Mechanical Behaviour of Damaged Solids, Fontainebleau, France.
- Duffett, G., Weyler, R., Cruz, C., 2002. Material hardening model sensitivity in springback predictions. In: Conference Proceedings of Numisheet'02, 85-90.
- Firat, M., 2006. U-channel forming analysis with an emphasis on springback deformation. Materials & Design, in press.
- Freed, A.D., Walker K.P., 1992. Exponential integration algorithms for first-order ODES with application to viscoplasticity, NASA TM 105.587, ASME Summer Conf. on Mechanics and Materials. Recent Advances on Damage Mechanics and Plasticity, Tempe.
- Gau, J.T., Kinzel, G.L., 2001. A new model for springback prediction in which the Bauschinger effect is considered. Int. J. Mech. Sci. 43, 1813-1832.
- Genevois, P., 1992. Étude expérimentale et modélisation du comportement plastique anisotrope de tôles d'acier en grandes déformations. Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Geng, L., 2000. Application of plastic anisotropy and non-isotropic hardening to springback prediction. PhD Thesis. The Ohio State University, Columbus, OH.
- Geng, L., Shen, Y., Wagoner, R.H., 2002. Anisotropic hardening equations derived from reverse-bend testing. Int. J. of Plasticity 18 (5-6), 743-767.
- Geng, L., Wagoner, R.H., 2002. Role of plastic anisotropy and its evolution on springback. Int. J. Mech. Sci. 44, 123-148.
- Goodwin, G.M., 1968. Application of the strain analysis to steel metal forming in press shop. La Metallurgia Italiana 8, 767-772.
- Gosh, A.K., Laukonis, J.V., 1976. Influence of the strain-path changes on the formability of the steel sheet. Sheet Metal Forming and Energy Conversation 10, 153-155.
- Gurson, A.-L., 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I-Yield criteria and flow rules for porous ductile media. J. Eng., Mat. Tech, Vol. 99, 2-15.
- Habbad, M., 1994. Instabilités plastiques en élasto-plasticité anisotrope en grandes déformations. Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon.
- Hadamard, J., 1903. Leçons sur la propagation des ondes et équations de l'hydrodynamique. Ed. Hermann, Paris.
- Haddad, A., 1997. Contribution à la détermination des courbes limites de formage en contraintes et en déformations à partir de la théorie 3G. Thèse de doctorat de l'Université de Savoie.

- Haddadi, H., Bouvier, S., Levée, P., 2001. Identification of a microstructural model for steels subjected to large tensile and/or simple shear deformations. *Journal de Physique IV* 11, 329-337.
- Haddadi, H., Tabacaru, V., Teodosiu, C., Maier, C., Bouvier, S., 2003. Tensile/Shear Tests and Identification of Elastoplastic Models for DP600, DP500 and DC06 Steels, Final report, LPMTM, University Paris 13.
- Haddadi, H., Bouvier, S., Banu, M., Maier, C., Teodosiu, C., 2006. Towards an accurate description of the anisotropic behavior of sheet metals under large plastic deformations: Modeling, numerical analysis and identification. *Int. J. of Plasticity* 22, 2226-2271.
- Haddag, B., Balan, T., Abed-Meraim, F., 2004. Finite element prediction of strain-path induced anisotropy in deep drawing. In: *Esaform Conference Proceedings*, Trondheim, 491-494.
- Haddag, B., Balan, T., Abed-Meraim, F., 2005. Springback simulation: Impact of some advanced constitutive models and numerical parameters. In: *Numisheet'05 Conference*, Detroit, 286-291.
- Haddag, B., Balan, T., Abed-Meraim, F., 2006. Investigation of advanced strain-path dependent material models for sheet metal forming simulations. *Int. J. of Plasticity*, in press, 1-29.
- Haddag, B., Abed-Meraim, F., Balan, T., 2006. Strain localization analysis using large deformation anisotropic elasto-plastic model coupled with damage. *III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, C.A. Mota Soares et.al. (eds.) Lisbon, in CD-ROM, 1-14.
- Hammi, Y., 2000. Simulation numérique de l'endommagement dans les procédés de mise en forme. Thèse de doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne.
- Hartmann, S., Haupt, P., 1993. Stress computation and consistent tangent operator using non-linear kinematic hardening models. *Int. J. Num. Methods Engng.* 36, 3801-3814.
- He, N., Wagoner, R.H., 1996. Springback simulation in sheet metal forming. In: *Conference Proceedings of Numisheet'96*, 308-315.
- Hecker, S.S., 1972. A simple forming limit curve technique and results on aluminium alloys. *Proc. 7th International Deep Drawing Research Group Congress*, Amsterdam, 51.
- Hill, R., 1948. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, *Proc. Royal Soc. A* 193, 281-297.
- Hill, R., 1950. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, Oxford.
- Hill, R., 1952. On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids* 1, 19-30.

- Hill, R., 1979. Theoretical plasticity of textured aggregates, *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.* 85, 179-191.
- Hill, R., 1987. Constitutive dual potentials in classical plasticity, *J. Mech. Phys. Solids* 35, 22-33.
- Hill, R., 1993. A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals, *Int. J. Mech. Sci.* 35, 19-25.
- Hill, R., 1999. Plastic anisotropy and the geometry of yield surfaces in stress space. *J. Mech. Phys. of solids* 48, 1093-1106.
- Hiwatashi, S., Van Bael, A., Van Houtte, P., Teodosiu, C., 1998. Prediction of forming limit strains under strain-path changes: application of an anisotropic model based on texture and dislocation structure. *Int. J. of Plasticity* 14, 647-669.
- Hoc, T., Rey, C., 2000. Mesostructure of the localization in prestrained mild steel. *Scripta mater.* 42, 749-754.
- Hoc, T., Dirras, G.F., Rey, C., 2001. Mesostructure of the localization in prestrained mild steel. *Materials Science and Engineering A* 319-321, 304-307.
- Hoc, T., Rey, C., Raphanel, J.L., 2001. Experimental and numerical analysis of localization during sequential test for AN IF-TI. *Acta mater.* 49, 1835-1846.
- Hoferlin, E., Li, S., Van Bael, A., Van Houtte, P., 2001. Texture and microstructure induced anisotropy: micro-macro modeling, implementation. In: Mori, K. (Ed.), *Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications*, Proc. of Inter. Conf. Numiform 2001. Swets & Zeitlinger, Lisse, 209-214.
- Hu, Z., 1994. Work-hardening behavior of mild steel under cyclic deformation at finite strains. *Acta Metall. Mater.*, 42, 3481-3491.
- Hughes, T.J.R., 1984. Numerical implementation of constitutive models: rate-independent deviatoric plasticity. In: *Theoretical foundation for large-scale computations for nonlinear material behavior*, Netherlands: Martinus Nij Publishers, 29-57.
- Hutchinson, J.W., Neale, K.W., 1978. *Sheet necking mechanics of sheet metal forming*. Plenum Press, New York, 215-280.
- Keavey, M.A., 2001. A canonical form return mapping algorithm for rate independent plasticity. *Int. J. Numer. Methods Engng.* 53, 1491-1510.
- Keeler, S.P., 1965. Determination of the forming limits in automotive stamping. *Sheet Metal Industries* 42, 683-703.
- Keryvin, V., 1999. Contribution à la modélisation de l'endommagement localisé. Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers.

- Khan, A., Huang, S.H., 1995. *Continuum Theory of Plasticity*. John Wiley & Sons, New York.
- Khelifa, M., 2004. Simulation numérique de l'endommagement en formage des structures minces. Thèse de doctorat de l'Université de Technologie de Troyes.
- Khoei, A.R., Jamali, N., 2005. On the implementation of a multi-surface kinematic hardening plasticity and its applications. *Int. J. of Plasticity* 21, 1741-1770.
- Kocks, U.F., Hasegawa, T., Scattergood, R.O., 1980. On the origin of cell walls of lattice misorientations during deformation. *Scripta Metall*, 14-449.
- Kuroda, M., Tvergaard, V., 2000a. Forming limit diagrams for anisotropic metal sheets with different yield criteria. *Int. J. of Solids and Structures* 37, 5037-5059.
- Kuroda, M., Tvergaard, V., 2000b. Effect of strain path change on limits to ductility of anisotropic metal sheets. *Int. J. of Mechanical Sciences* 42, 867-887.
- Kuwabara, T., Morita, Y., Miyashita, Y., Takahashi, S., 1995. Elastic-plastic behavior of sheet metal subjected to in-plane reverse loading. In: *Proceedings of Plasticity'95, Dynamic Plasticity and Structural Behavior*. Gordon and Breach.
- Kuwabara, T., Takahashi, S., Ito, K., 1996. Springback analysis of sheet metal subjected to bending-unbending under tension, Part II (experimental verification). *Advanced Technology of Plasticity*. In: Altan T., editor. *Proceedings of the 5th ICTP*, vol. II. Columbus, Ohio, 747-50.
- Ladevèze, P., Lemaitre, J., 1984. Damage effective stress in quasi unilateral conditions. 16th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Lyngby, Denmark.
- Lang, L., Danckert, J., Nielsen, K.B., 2004. Investigation into hydrodynamic deep drawing assisted by radial pressure - Part I : Experimental observations of the forming process of aluminium alloy. *Journal of Materials Processing Technology* 148, 119-131.
- Langlois, L., 2000. Évolutions propres de la microstructure de dislocations et conséquences sur le comportement élasto-plastique des métaux. Thèse de doctorat de l'université de Metz.
- Langlois, L., Berveiller, M., 2003. Overall softening and anisotropy related with the formation and evolution of dislocation cell structures. *Int. J. of Plasticity* 19, 599-624.
- Lee, M.-G., Kim, D., Kim, C., Wenner, M.L., Wagoner, R.H., Chung, K., 2005a. Springback evaluation of automotive sheets based on isotropic-kinematic hardening laws and non-quadratic anisotropic yield functions. Part II: Characterization of material properties. *Int. J. of Plasticity* 21, 883-914.
- Lee, M.-G., Kim, D., Kim, C., Wenner, M.L., Chung, K., 2005b. Springback evaluation of automotive sheets based on isotropic-kinematic hardening laws and non-quadratic anisotropic yield functions. Part III: Applications. *Int. J. of Plasticity* 21, 915-953.

- Lemaitre, J., 1985. Continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Material and Technology* 107, Issue 1, 83-89.
- Lemaitre, J., Chaboche, J.L., 1985. *Mécanique des matériaux solides*. Edition Dunod, Paris.
- Lemaitre, J., Desmorat, R., Sauzay, M., 2000. Anisotropic damage law of evolution. *Eur. J. Mech. A/Solids* 19, 187–208.
- Li, K.P., Carden, W.P., Wagoner, R.H., 2002. Simulation of springback. *Int. J. Mech. Sci.* 44, 103-122.
- Lorrain, J.P., 2005. Critère de ductilité basé sur la perte d'ellipticité du module tangent élasto-plastique déduit d'un module tangent autocohérent. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.
- Mandel, J., 1982. Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformations anélastiques du polycristal. *J. Méca. Théor. Appl.* 1, 7-23.
- Marciniak, Z., Kuczynski, K., 1967. Limit strains in the process of stretch forming sheet metal. *Int. J. Mechanical Sciences* 9, 609-620.
- Marciniak, Z., Kuczynski, K., Pokora, T., 1973. Influence of the plastic properties of a material on the forming limit diagram for sheet metal in tension. *Int. J. Mechanical Sciences* 15, 789-805.
- Marquis, D., 1979. Modélisation et identification de l'écrouissage anisotrope des Métaux. Thèse de doctorat de l'Université Paris 6.
- Mattiasson, K., Strange, A., Thilderkvist, P., Samuelsson, A., 1995. Springback in sheet metal forming. In: *Conference Proceedings of Numiform'95*, pp. 115–124.
- Miyauchi, K., 1984a. A proposal of a planar simple shear test in sheet metals. In: *Scientific Papers of the Institute of Physical and Chemical Research*, Vol. 78 (3), pp. 27–40.
- Miyauchi, K., 1984b. Bauschinger effect in planar shear deformation of sheet metals. *Adv. Technol. Plasticity* 1, 523.
- Mori, K., Akita, K., Abe, Y., 2005. Springback of high strength steel and aluminium alloy sheets in bending using CNC servo press. *Int. Conf. on Technology of Plasticity*, Italy, 87-88.
- Moussey, F., 1985. Les différentes échelles du développement de l'endommagement dans les aciers : influence de la déformation à l'échelle microscopique. *Instabilités Plastiques*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Nakazima, K., Kikuma, T., 1971. Effects of the deforming conditions and mechanical properties on the stretch forming of steel sheets. *Trans. Iron and steel Institute of Japan* 11, 827-839.
- Needleman, A., Tvergaard, V., 1983. Limits to formability in rate sensitive metal sheets. *Proc. 4th Int. Conf. Mechanical Behaviour of Materials*, Stockholm, 51-65.

- Needleman, A., Tvergaard, V., 1992. Analyses of plastic flow localization in metals. *Appl. Mech. Rev.* 45, Part 2, 3-18.
- Nesterova, E.V., Bacroix, B., Teodosiu, C., 2001a. Experimental observation of microstructure evolution under strain-path changes in low-carbon IF steel, *Mater. Sci. Eng.* A309–310, 495–499.
- Nesterova, E.V., Bacroix, B., Teodosiu, C., 2001b. Microstructure and texture evolution under strain-path changes in low-carbon interstitial-free steel, *Metal. Mater. Trans.* 32A, 2527–2538.
- Numisheet'93 Benchmark Problem, 1993. In: Makinouchi, A., Nakamachi, E., Onate, E., Wagoner, R.H. (Eds.), *Proc. 2nd Int. Conf. on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes – Verification of Simulation with Experiment*, Isehara, Japan.
- Ohno, N., Kachi, Y., 1986. A constitutive model of cyclic plasticity for nonlinear hardening materials. *ASME, J. Appl. Mech.* 53, 395–404.
- Ohno, N., Wang, J.D., 1993a. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery: part I—formulation and basic features for ratcheting behavior. *Int. J. of Plasticity* 9, 373–390.
- Ohno, N., Wang, J.D., 1993b. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery: part II—application to experimental of ratcheting behavior. *Int. J. of Plasticity* 9, 391–403.
- Oliviera, M.C., Alves, J.L., Menezes, L.F., 2003. One step springback strategies in metal forming. In: *Proc. of the 7th Int. Conf. on Comp. Plasticity, COMPLAS*, Barcelona.
- Ortiz, M., Popov, E.P., 1985. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 21, 1561-1576.
- Ottosen, N.S., Runesson, K., 1991. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures* 27, 401-421.
- Peeters, B., Seefeldt, M., Teodosiu, C., Kalidindi, S.R., Van Houte, P., Aernoudt, E., 2001. Work-hardening/softening behaviour of B.C.C. polycrystals during changing strain paths: I. An integrated model based on texture evolution, and its prediction of the stress-strain behaviour of an IF steel during two-stage strain paths. *Acta mater.* 49, 1607–1619.
- Pérez-Foguet, A., Armero, F., 2002. On the formulation of closest-point projection algorithms in elasto-plasticity—part II: Globally convergent schemes. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 53, 331–374.
- Pessanha, M.L., 2002. Étude numérique de l'influence du modèle de plasticité sur le comportement des tôles lors de l'emboutissage. Thèse de doctorat de l'Université de Metz.
- Pourboghrat, F., Chu E., 1995. Springback in plane strain stretch/draw sheet forming. *Int. J. Mech. Sci.* 36 (3), 327–41.

- Prager, W., 1956. A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids. ASME, J. App. Mech. Trans. 78, 493.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1992. Numerical recipes: The art of scientific computing. Ed. Cambridge University Press.
- Rabahallah, M., 2007. Étude du comportement des matériaux métalliques en approche potentiel dual : application à la mise en forme. Thèse en cours à l'université de Metz.
- 3^{ème} Rapport CECA, 2003. Improved constitutive equations for forming processes including ductility criteria. Research Program of research fund for coal and steel. Annual report.
- 4^{ème} Rapport CECA, 2004. Improved constitutive equations for forming processes including ductility criteria. Research Program of research fund for coal and steel. Annual report.
- Rauch, E.F., 1998. Plastic anisotropy of sheet metals determined by simple shear tests. Mater. Sci. Eng. A241, 179–183.
- Rauch, E.F., Hashimoto, S., Baudelet, B., 1990. Simple shear deformation of iron-silicon single crystals. Scripta Metall. 24, 1081-1086.
- Rauch, E.F., Schmitt, J.H., 1989. Dislocation substructures in mild steel deformed in simple shear. Mater. Sci. Engng., A 113, 441-448.
- Rees, D.W.A., Power, R.K., 1998. Process signatures and finite elements in sheet metal forming. Journal of Materials Processing Technology 77, 134–144.
- Rey, C., Eriean, P., Hoc, T., 2002. Localisation de la déformation dans les polycristaux. Mécanique & Industries V3, Issue 5, 489-496.
- Rice, J.R., 1976. The localisation of plastic deformation. Theoretical and Applied Mechanics. Edited by W.T. Koiter, North-Holland, Amsterdam, 207-220.
- Rudnicki, J.W., Rice, J.R., 1975. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. J. Mech. Phys. Solids, 23 (6), 597-605.
- Sabourin, F., Brunet, M., Vives, M., 1999. 3D springback analysis with a simplified three-node triangular element. Numisheet'99, the 4th Int. Conf. and Workshop on numerical simulation of 3D sheet forming process, 17-22.
- Sabourin, F., Morestin, F., Brunet, M., 2002. Effect of non-linear kinematic hardening on springback analysis. In: Conference Proceedings of Numisheet'02, pp. 79–89.
- Schmitt, J. H., Aernoutd, E., Baudelet, B., 1985. Yield loci for polycrystalline metals without texture. Mater. Sci. Eng. 75, 13-20.
- Sidoroff, F., 1982. Cours sur les grandes déformations. Rapport GRECO N° 51.
- Simo, J., Taylor, R., 1985. Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 48, 101-118.

- Simo, J.C., Armero, F., 1992. Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Num. Methods Engng.* 33, 1413-1449.
- Stainier, L., 1997. Modélisation numérique du comportement irréversible des métaux ductiles soumis à grandes déformations avec endommagement. Thèse de doctorat de l'Université de Liège.
- Stören, S., Hopperstad, O.S., Roven, H.J., Langtangen, H.P., 2004. Modelling and simulation of flow localisation in material processing. Physical, theoretical and numerical fundamentals. ESAFORM Short Course.
- Stoughton, T. B., 2000. A general forming limit criterion for sheet metal forming. *Int. Journal of Mechanical Sciences* 42, 1-27.
- Stoughton, T.B., 2001. Stress-based forming limits in sheet-metal forming. *Journal of Engineering Material and Technology* 123, 417-422.
- Stoughton, T.B., Yoon, J.-W., 2004. A pressure-sensitive yield criterion under a non-associated flow rule for sheet metal forming. *Int. J. of Plasticity* 20, 705-731.
- Swift, W., 1952. Plastic instability under plane stress. *J. Mech. Phys. Solids* 1, 1–18.
- Teodosiu, C., Hu, Z., 1995. Evolution of the intragranular microstructure at moderate and large strains: Modeling and computational significance. In: *Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications*. Numiform'95 Proceedings, 173-182.
- Teodosiu, C. (editor), 1997. Large Plastic Deformation of crystalline aggregates. CISM courses and lectures – No. 376, ISBN: 3-211-82909.
- Teodosiu, C., Hu, Z., 1998. Microstructure in the continuum modeling of plastic anisotropy. In: *19th Riso International Symposium on Materials Science Proceedings*, Roskilde, 149-168.
- Teodosiu, C., 2003. On the implementation of the dislocation-based microstructural model. Private Communication.
- Thuillier, S., Rauch, E.F., 1994. Development of microbands in mild steel during cross loading. *Acta Metallurgica et Materialia*, 42, 1973-1983.
- Till, E., Raab, A.E., 2005. Modeling effects in springback simulation. In: *24th IDDRG Conference*. Besançon.
- Veerman, C., 1972. The determination and application of the FLC-onset of localized necking. IDDRG, Meeting, Amsterdam.
- Yoon, J.W., Yang, D.Y., Chung, K., 1999. Elasto-plastic finite element method based on incremental deformation theory and continuum based shell elements for planar anisotropic sheet materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 174, 23-56.
- Yoshida, F., Uemori, T., Fujiwara, K., 2002a. Elastic–plastic behavior of steel sheets under in-plane cyclic tension–compression at large strain. *Int. J. of Plasticity* 18, 633-659.

- Yoshida, F., Uemori, T., 2002b. A model of large-strain cyclic plasticity describing the Bauschinger effect and work hardening stagnation. *Int. J. of Plasticity* 18, 661-686.
- Ziegler, H., 1959. A modification of Prager's hardening rule. *Quart. Appl. Math.* 17, 55-65.