



**HAL**  
open science

# Gyrolaser à état solide. Application des lasers à atomes à la gyrométrie.

Sylvain Schwartz

► **To cite this version:**

Sylvain Schwartz. Gyrolaser à état solide. Application des lasers à atomes à la gyrométrie.. Physique [physics]. Ecole Polytechnique X, 2006. Français. NNT: . pastel-00002959

**HAL Id: pastel-00002959**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00002959v1>**

Submitted on 28 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THALES RESEARCH AND TECHNOLOGY FRANCE  
INSTITUT D'OPTIQUE GRADUATE SCHOOL

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
SPÉCIALITÉ : PHYSIQUE QUANTIQUE

par

**Sylvain SCHWARTZ**

---

**Gyrolaser à état solide**  
**Application des lasers à atomes**  
**à la gyrométrie**

Soutenue le 27 novembre 2006 devant le jury composé de :

M. Alain Aspect	Directeur de thèse
M. Fabien Bretenaker	Rapporteur
M. Iacopo Carusotto	
M. Pierre Chavel	Président du jury
M. Martin Defour	
M. Claude Fabre	Rapporteur
M. Evguenii Lariontsev	
M. Jean-Paul Pocholle	



*Le Pendule me disait que, tout se mouvant, le globe, le système solaire, les nébuleuses, les trous noirs et toute la postérité de la grande émanation cosmique, depuis les premiers éons jusqu'à la matière la plus visqueuse, un seul point demeurait, pivot, cheville, crochet idéal, permettant à l'univers de se mouvoir autour de soi. Et moi je participais maintenant de cette expérience suprême, moi qui pourtant me mouvais avec tout et avec le tout, mais pouvais voir Cela, le Non-Mouvant, la Forteresse, la Garantie, le brouillard très lumineux qui n'est corps, n'a figure, forme, poids, quantité ou qualité, et ne voit, n'entend, ni ne tombe sous la sensibilité, n'est pas en un lieu, en un temps ou en un espace, n'est âme, intelligence, imagination, opinion, nombre, ordre, mesure, substance, éternité, n'est ni ténèbre ni lumière, n'est pas erreur et n'est pas vérité.*

**Umberto Eco, *Le Pendule de Foucault* (1988)**



# Remerciements

Les travaux décrits dans ce mémoire ont été principalement réalisés à Thales Research and Technology France (TRT), en partenariat avec l'Institut d'Optique. Je remercie les directeurs successifs de ces deux établissements de m'y avoir accueilli : Laure Reinhart, Thierry Beauvais et Bertrand Demotes-Mainard pour TRT ; Arnold Migus et Jean-Louis Martin pour l'Institut d'Optique.

J'ai eu la chance d'être encadré, tout au long de mes travaux de thèse, par des personnalités exceptionnelles, qui m'ont fait largement profiter de leurs qualités humaines et scientifiques.

Parmi celles-ci, je voudrais avant tout remercier Gilles Feugnet. Après avoir guidé mes premiers pas dans le monde des lasers, il n'a cessé d'être présent à mes côtés tout au long de ces années. Je pense que ma décision de prolonger mon stage à TRT par une thèse sur les gyrolasers a été largement due au plaisir et à l'épanouissement personnel que j'ai retirés de notre collaboration. Trois années plus tard, tout cela est resté intact, et j'espère avoir encore longtemps la chance de travailler avec lui. Un grand nombre des résultats présentés dans ce mémoire lui sont directement ou indirectement dus. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

J'ai également eu l'immense plaisir de voir mes travaux placés sous la haute supervision de Jean-Paul Pocholle. C'est à lui que les activités de TRT sur le gyrolaser à état solide et sur les gyromètres à ondes de matière doivent leur existence, qu'il soit remercié pour cela ! Mais je suis avant tout heureux d'avoir eu la chance de profiter de façon quasi quotidienne de son immense culture, de son ouverture d'esprit, de son enthousiasme sans cesse renouvelé pour la chose scientifique, de ses conseils humanistes et éclairés et de bien d'autres choses encore. Jean-Paul s'est toujours montré très disponible malgré ses nombreuses obligations, et je suis fier de pouvoir dire aujourd'hui que je suis l'un des nombreux membres de la prestigieuse caste de ses anciens stagiaires (les autres membres se reconnaîtront !).

J'ai été encadré, lors de mon passage dans le groupe d'Optique Atomique du laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, par Philippe Bouyer. Je le remercie de n'avoir jamais hésité à me consacrer des parts importantes de son temps précieux, d'avoir toujours manifesté de l'intérêt pour tous les aspects de mon travail de thèse (et pas seulement pour ceux qui le concernaient directement) et d'avoir eu le souci constant de la cohérence de l'ensemble de mes travaux. Une mention toute particulière pour l'aide précieuse qu'il m'a prodiguée lors de la rédaction de notre premier article sur le gyrolaser à état solide, qui n'aurait sans doute pas été publié dans la revue *Physical Review Letters* sans cela.

Enfin, j'ai eu la chance et le grand honneur de voir mes travaux de thèse dirigés par Alain Aspect. En dépit de toutes les charges inhérentes à sa renommée nationale et in-

ternationale, M. Aspect a participé très régulièrement à mes réunions d'avancement de thèse. Il a également su, à chaque fois que cela était nécessaire, se montrer présent et donner les impulsions qui ont permis à ce travail de continuer à avancer. Je n'ai pas oublié son aide déterminante à propos des publications. Je lui suis également très reconnaissant d'avoir rendu possible et encouragé ma collaboration avec le groupe de Trento, qui a été pour moi très enrichissante. Enfin, sa démarche pédagogique fondée sur le bon sens et sur le bannissement systématique de toute source de complexité inutile restera pour moi un modèle du genre.

Je tiens aussi à remercier Evguenii Lariontsev, qui fut dans les années 1970 l'un des pionniers de l'étude du laser en anneau à état solide, d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Les résultats présentés dans ce mémoire doivent beaucoup aux travaux qu'il a menés à l'époque avec ses collaborateurs. La possibilité de rencontrer Evguenii, à Moscou d'abord, à TRT par la suite, a été pour moi une source de découvertes et une expérience humaine aussi enrichissantes l'une que l'autre. Elle a apporté à notre projet plusieurs avancées théoriques majeures. J'espère que cette collaboration pourra se poursuivre dans les années à venir.

Je suis à cet égard très reconnaissant à Michèle Leduc, dans l'équipe de laquelle j'ai eu par ailleurs le plaisir d'effectuer mon stage de DEA en 2002, d'avoir grandement facilité nos interactions avec Evguenii Lariontsev (et tout particulièrement d'avoir rendu possible sa présence à ma soutenance de thèse). Je remercie le Groupement de recherche européen franco-russe "Lasers et techniques optiques de l'information", dirigé jusqu'à une date récente par Michèle, d'avoir financé plusieurs visites de Evguenii à TRT.

J'ai également eu la chance, après en avoir été privé pendant plusieurs années pour cause de secret industriel, de profiter des lumières de Fabien Bretenaker. Fabien brille tout autant par l'étendue de ses connaissances et la clarté avec laquelle il les partage avec son entourage que par sa simplicité et sa modestie. J'ai beaucoup appris à son contact, et je serais heureux de resserrer encore à l'avenir les liens que nous avons pu tisser avec lui. Je remercie Fabien d'avoir bien voulu accepter le rôle de rapporteur, ainsi que Claude Fabre qui a partagé cette charge avec lui, et ce en dépit des très nombreuses sollicitations dont ils sont tous deux l'objet.

Mes travaux de thèse ont largement bénéficié de l'intérêt et du soutien de Thales Avionics (division Aerospace). En plus du confort matériel procuré par un tel soutien, nous avons pu bénéficier de la "fertilisation croisée" inhérente aux collaborations entre laboratoires de recherche et milieu industriel, qui nous a apporté beaucoup à tous les niveaux. J'ai pu, en particulier, interagir avec un certain nombre de personnes de très grande qualité, que je voudrais évoquer ici.

Je remercie en premier lieu Hervé Girault, dont j'ai toujours admiré la foi indéfectible en notre projet. Co-auteur du premier brevet Thales sur le gyrolaser à état solide, il a su diriger nos réunions d'une main résolument optimiste et déterminée, avec à chaque fois le même objectif : aller de l'avant. Même si nous avons eu à un moment donné quelques divergences au sujet des publications, je n'ai pas oublié tout ce que notre projet lui doit. Qu'il trouve ici la marque de mon profond respect.

J'ai eu aussi le plaisir de côtoyer Pierre Gallon au cours des années précédant son départ en retraite. J'ai été marqué par sa jovialité, son bon sens d'"homme du métier" (qui nous a évité plus d'une fois de nous égarer sur des chemins de traverse) ainsi que

sa connaissance infinie du domaine de l'inertie. Je lui souhaite (ainsi qu'à M. Girault) de profiter pleinement des joies d'une retraite bien méritée!

Je remercie aussi Martin Defour de suivre de près notre projet et de le soutenir. Je lui suis tout particulièrement reconnaissant pour son action à propos de nos publications, et aussi pour avoir un jour pris de son temps précieux pour discuter longuement avec moi de mon avenir professionnel. Enfin, j'ai été très sensible à l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de prendre part à mon jury de thèse.

Merci également à Michel Mary pour la confiance sans cesse renouvelée dont il fait preuve à mon égard et qui me touche profondément, mais aussi pour sa grande foi en notre projet, qu'il a toujours su gérer et défendre avec efficacité et bonne humeur.

Merci à François Gutty, avec qui j'ai toujours beaucoup de plaisir à travailler. Discret mais efficace, François s'est révélé un collaborateur indispensable lorsqu'il s'est agit de construire une maquette intégrée de notre "manip" de laboratoire, tâche difficile qu'il a assumée avec brio. J'espère avoir encore pendant longtemps la chance de collaborer avec lui.

Ma reconnaissance va encore à Bruno Mourey, Etienne Bonnaudet, Bernard Chaumet, Stéphanie Bouley, Michel Dorbes, Philippe Loué et Charles Dussurgey, ainsi que tout le personnel du site de Châtellerault-Brelandière, et notamment les équipes de mécaniciens et d'électroniciens qui se sont penchés sur notre projet. Qu'ils m'excusent de ne pas m'aventurer à citer ici tous leurs noms, par peur d'en oublier.

J'ai eu la chance par ailleurs de passer une partie de ma thèse dans le groupe de physique théorique "Bose Einstein Condensation" de l'Université de Trento (Italie). Je remercie Sandro Stringari de m'y avoir accueilli. La découverte de ce milieu bouillonnant où les idées fusent et où les calculs se résolvent en groupe autour d'un tableau noir a été pour moi une expérience passionnante, dont je garde un excellent souvenir.

Je remercie Chiara Menotti de m'avoir encadré lors de mes deux premiers séjours à Trento, et d'avoir continué ensuite à distance à nous apporter son aide précieuse, notamment au niveau des simulations numériques. Merci aussi pour la séance d'escalade sur les hauteurs de la ville!

Je remercie également Marco Cozzini, dont j'ai beaucoup apprécié le talent, la gentillesse et la grande modestie. Son aide m'a été très précieuse, notamment au début de mes travaux, et je lui en suis d'autant plus reconnaissant qu'il me l'a apportée pendant une période où son emploi du temps était extrêmement chargé.

Un grand merci aussi à Iacopo Carusotto, qui a repris à sa charge mon encadrement après le départ de Chiara. Iacopo était l'un de mes professeurs de DEA, et je suis content qu'une heureuse coïncidence ait permis à nos chemins de se croiser de nouveau quelques années plus tard. Iacopo associe à ses immenses compétences en physique théorique de très grandes qualités humaines que j'ai beaucoup appréciées. Je lui suis également reconnaissant d'avoir participé à mon jury de thèse, et j'espère que notre collaboration durera le plus longtemps possible.

Je remercie enfin toutes les autres personnes que j'ai eu le plaisir de rencontrer à l'université de Trento, parmi lesquelles Lev Pitaevskii, Franco Dalfovo, Carlos Lobo, Alessio Recati et Cesare Tozzo.

Un grand nombre de mes collègues de Thales Research and Technology France ont contribué, de près ou de loin, au bon déroulement de mes travaux.

Je remercie tout d'abord Jean-Paul Castéra et Éric Lallier de m'avoir accueilli respectivement dans le département d'Optique et d'Optronique et dans le laboratoire Sources Laser.

Je voudrais également remercier tout particulièrement Joseph Colineau et Jacky Antoine, qui nous ont beaucoup aidé dans la réalisation de l'électronique de nos premières expériences. Une pensée toute spéciale pour Jacky, qui nous manque beaucoup et dont la boucle de contre-réaction, réalisée avec un soin proche de la perfection, nous sert encore quasi quotidiennement sur nos expériences. Un grand merci aussi, Joseph, de continuer à nous recevoir avec le sourire à chaque fois que l'on vient te poser une question d'électronique !

J'ai eu la chance de me voir confier la responsabilité de l'encadrement d'un stagiaire, en la personne de Francis Grabisch. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec ce dernier. L'efficacité dont il a fait preuve pendant son stage a permis de déboucher sur un modèle numérique simple et performant des équations du laser, qui est devenu l'un de nos principaux outils de travail. Je le remercie bien sincèrement pour cela, et lui souhaite bonne chance dans la suite de sa carrière. Je souhaite également bonne chance à Maxence Rebut, qui vient de commencer un stage dans notre équipe sur le gyrolaser à état solide et qui semble déjà très à l'aise sur nos "manips".

Merci aux responsables de la bibliothèque de TRT, qui ont toujours réussi à me procurer avec bonne humeur et efficacité toute la littérature dont j'ai eu besoin, y compris des articles russes pas toujours faciles à trouver !

Et merci à Jean-Pascal Duchemin pour sa gestion efficace de nos brevets (et aussi pour la colombe de la Paix !).

Merci enfin à tous les collègues du département optique (ou assimilés) pour les discussions techniques, les prêts de matériels, les coups de pouce informatiques mais aussi et surtout pour tous les petits détails du quotidien qui rendent l'ambiance de travail à TRT des plus agréables. Merci donc (par ordre alphabétique) à Mehdi Alouini, Ghaya Baili, Giuseppe Bellomonte, Jérôme Bourderionnet, Arnaud Brignon, Evelyne Chastaing, Anne Deboulbé, Thierry Debuisschert, Sylvain Delaitre, Johan Dhoose, Daniel Dolfi, David Faye, Patrick Feneyrou, Simon Fossier, Yves Gourdel, Arnaud Grisard, Jean-Pierre Huignard, Thierry Lamarque, Sébastien Laux, Pierre Lebarney, Laure Lee, Jean-Claude Lehureau, Brigitte Loiseaux, Augustin Mignot, Nicolas Millet, Stéphanie Molin, Loïc Morvan, Edouard Obert, Dominique Papillon, Grégoire Pillet, Céline Ribot, Muriel Schwarz (non Gilles, ce n'est pas ma soeur !), Noémie Seguin, Hélène Soubaras, Françoise Soyer, Bastien Steinhauser et Sylvie Tonda. Merci à ceux que j'ai eu la chance de côtoyer avant qu'ils ne quittent TRT vers d'autres horizons : Kahina Abdeli, William Boucher, Romain Czarny, Laurent Divay, Jérôme Lodewyck, Laurent Lombard, Aymeric Monsterlet, Grégory Taupier, Vincent Racht, Julien Taste et Elodie Wickzack.

Une mention toute particulière à Sébastien Demoustier, qui a partagé mes bureaux successifs tout au long de nos années de thèse. J'ai beaucoup appris à son contact sur les plans professionnel et humain. Toujours de bonne humeur (en dépit de quelques injures occasionnelles proférées à l'encontre de son ordinateur), Sébastien a été un voisin des plus agréables. Je lui renouvelle ici toute l'assurance de mon amitié, et tiens à lui redire mon soulagement qu'il ait pu rester parmi nous à l'issue de sa thèse !

Une autre mention particulière à Christian Larat, dont j'ai beaucoup apprécié la compagnie, que ce soit au cours de nos nombreuses discussions sur des sujets plus ou moins scientifiques ou lors de nos footings quasi hebdomadaires (ou presque !). Un grand merci

également pour les cours de danse!

Enfin, je ne saurais être complet sans remercier celle qui constitue le centre vital (pour ne pas dire nerveux!) du département, c'est-à-dire Barbara Petit, pour les innombrables services rendus.

Je remercie également les personnes que j'ai côtoyées lors de mon passage à l'Institut d'Optique. Merci tout d'abord à Pierre Chavel de m'avoir accueilli au sein du laboratoire Charles Fabry, et aussi d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Merci tout particulièrement à Jean-Félix Riou et William Guérin, qui m'ont très gentiment initié à leur imposant dispositif expérimental "pince optique", sur lequel je n'ai malheureusement pas pu passer autant de temps que je l'aurais souhaité. Merci aussi à Laurent Sanchez-Palencia et Karen Perronet dont j'ai partagé un temps le bureau.

Je tiens aussi à dire ma gratitude à notre ingénieur brevets Jean-Marc Breda (de Thales IP puis Marks and Clark France), qui s'est toujours montré disponible, efficace et intéressé par nos travaux.

Merci à Sandrine Dorbes-Lhote qui a contribué à nous rendre accessibles certains documents en les traduisant du russe au français.

Que tous ceux qui ont apporté leur contribution à ce travail et que j'aurais oublié de citer ici veuillent bien me le pardonner!

Je voudrais enfin remercier certaines personnes qui ont permis, par leur influence plus ou moins directe, que ces travaux puissent exister.

Je pense tout d'abord à mes camarades David Fattal et Jérémie Bouttier, avec qui j'ai eu la chance de travailler pendant mes études et dont l'influence sur mon orientation professionnelle a été certaine. Mon inclination pour la physique doit également beaucoup à l'influence de mes professeurs de l'École Polytechnique. Je pense notamment à Jean-Louis Basdevant, Jean Dalibard, Alain Aspect, Costas Bachas et Jean-Yves Courtois, en demandant à tous ceux que j'oublie, et ils sont nombreux, de me pardonner. Un merci tout particulier à Jean-Yves Courtois de m'avoir par la suite introduit à TRT, pour un stage qui a finalement débouché sur cette thèse.

Ces travaux ont pu se dérouler dans le cadre d'un détachement du Corps Interministériel des Ingénieurs des Télécommunications, au titre de la recherche d'intérêt national. Je remercie Emmanuel Rosencher et Joseph Zyss, qui m'ont incité par leur exemple à intégrer ce Corps. Je remercie Christophe Digne de m'avoir guidé dans le labyrinthe administratif des textes et des décrets sur le statut des fonctionnaires. Je le remercie également pour son soutien indéfectible lors de la phase de "montage" du projet. Je remercie Marc Oberlé d'avoir entériné ce détachement.

Enfin, je remercie mes proches, dont la présence autour de moi rend ma vie plus belle. Je remercie mes amis, que je ne me risquerai pas à tenter d'énumérer. Ils se reconnaîtront. Je remercie mes parents, qui m'ont apporté, parmi tant d'autres belles choses, le goût de la recherche et du travail bien fait. Une mention spéciale pour le travail de relecture impitoyable effectué par mon père sur ce manuscrit. Je remercie également le reste de ma famille, et notamment mon frère, ma sœur et mes cousins, ainsi que mon oncle Pierre, qui a toujours été pour moi un exemple.

Merci enfin à Sylvie, qui est ma femme depuis quelques semaines seulement, mais qui a déjà partagé tant de choses de ma vie. Merci en particulier d'avoir enduré (presque)

sans rechigner les moments difficiles de mon travail de thèse (et surtout la période de rédaction). Merci aussi pour tout le reste.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>15</b>
<b>Quelques mots sur l'effet Sagnac...</b>	<b>21</b>
<b>I Du laser en anneau au gyrolaser à état solide</b>	<b>31</b>
<hr/>	
<b>1 Modèle semi-classique du laser en anneau à état solide</b>	<b>35</b>
1.1 Établissement des équations du laser . . . . .	35
1.2 Premiers résultats issus du modèle semi-classique . . . . .	49
1.3 Conclusion . . . . .	60
<b>2 Étude théorique de la dynamique du laser en anneau à état solide</b>	<b>61</b>
2.1 Étude du laser à l'arrêt . . . . .	62
2.2 Étude du laser en rotation . . . . .	70
2.3 Conclusion . . . . .	76
<b>3 Étude théorique de la stabilisation du régime de battement</b>	<b>79</b>
3.1 Dynamique du laser en présence d'un dispositif stabilisateur . . . . .	79
3.2 Génération de pertes différentielles par action sur la polarisation . . . . .	87
3.3 Conclusion . . . . .	97
<b>4 Étude expérimentale</b>	<b>101</b>
4.1 Le point de vue qualitatif . . . . .	101
4.2 Le point de vue quantitatif . . . . .	114
4.3 Conclusion . . . . .	120
<b>Conclusion de la première partie</b>	<b>121</b>

## **II Performances du gyrolaser à état solide** 123

---

<b>5</b>	<b>Mise en œuvre d'un biais magnéto-optique (2 ondes)</b>	<b>127</b>
5.1	Étude de quelques configurations . . . . .	127
5.2	Résultats expérimentaux . . . . .	132
5.3	Conclusion . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Solution à biais compensé (4 ondes)</b>	<b>143</b>
6.1	Principe du gyrolaser 4 ondes à hélium-néon . . . . .	143
6.2	Vers un gyrolaser 4 ondes à état solide . . . . .	146
6.3	Mise en œuvre expérimentale . . . . .	151
6.4	Conclusion . . . . .	158
<b>7</b>	<b>Utilisation d'un mouvement mécanique</b>	<b>161</b>
7.1	Mise en mouvement de la cavité laser ("activation mécanique") . . . . .	162
7.2	Mise en mouvement du cristal . . . . .	167
7.3	Conclusion . . . . .	176
	<b>Conclusion de la deuxième partie</b>	<b>179</b>

## **III Lasers à atomes et gyrométrie** 181

---

<b>8</b>	<b>Condensat de Bose-Einstein torique en rotation : principes de base</b>	<b>187</b>
8.1	Cas du tore infiniment fin et parfaitement circulaire . . . . .	187
8.2	Couplages entre modes, métastabilité . . . . .	192
8.3	Conclusion : vers un gyrolaser atomique ? . . . . .	195
<b>9</b>	<b>Description unidimensionnelle d'un condensat torique</b>	<b>197</b>
9.1	Description quantitative du guide d'onde atomique . . . . .	197
9.2	Procédure de découplage en l'absence de rotation . . . . .	199
9.3	Prise en compte des effets de la rotation . . . . .	203
9.4	Conclusion . . . . .	204
<b>10</b>	<b>Quelques applications possibles</b>	<b>205</b>
10.1	Cas du guide d'onde elliptique . . . . .	205
10.2	Vers une configuration expérimentale ? . . . . .	211
10.3	Conclusion . . . . .	213
	<b>Conclusion de la troisième partie</b>	<b>215</b>

## **Conclusion générale** 217

**Annexes** **221**

**A Détail de certains calculs** **223**

A.1	Équations pour la somme et la différence des intensités . . . . .	223
A.2	Condition de stabilité d'une solution stationnaire non nulle quelconque .	224
A.3	Stabilité de la solution nulle : seuil du laser . . . . .	232
A.4	Étude du régime d'émission bidirectionnelle verrouillé en fréquence . . . .	233
A.5	Étude du régime unidirectionnel à l'arrêt . . . . .	236
A.6	Étude du régime d'automodulation à l'arrêt pour $m \gg \gamma\eta$ et $ \theta_1 - \theta_2  \ll 1$	239
A.7	Étude du régime stationnaire unidirectionnel en rotation . . . . .	240
A.8	Pertes différentielles induites par la rétrodiffusion à $\Omega$ grand . . . . .	242
A.9	Étude du régime d'automodulation en rotation . . . . .	243
A.10	Étude du régime de battement . . . . .	247
A.11	Rotation réciproque induite par la non-planéité . . . . .	251

**B Fluctuations en température** **253**

B.1	Principe de fonctionnement . . . . .	254
B.2	Relation fondamentale entre les caractéristiques des différents composants	255
B.3	Un exemple simple de réalisation . . . . .	255
B.4	Suppression des sauts de modes en conservant le facteur d'échelle . . . .	256
B.5	Une réalisation sans saut de mode . . . . .	257
B.6	Conclusion . . . . .	258

**Liste des publications et bibliographie** **261**



# Introduction générale

*The development of the ring laser gyro evinces particularly well the way in which physics characteristically benefits from the interplay of the applied and “pure” spheres.*

**M. Scully et collaborateurs, *Review of Modern Physics* 57 (1985)**

Un capteur sensible à des différences de temps de trajet de l'ordre de  $10^{-26}$  s, soit à peu près le temps qu'il faut à la lumière pour parcourir le millièème du diamètre d'un proton; un oscillateur délivrant un signal stable à mieux que  $10^{-18}$  fois sa fréquence porteuse sur plusieurs heures; une onde stationnaire immobile par rapport à l'univers, et autour de laquelle tourne la Terre; un instrument fondé sur un effet purement relativiste et utilisé quotidiennement dans l'aéronautique... Le gyrolaser est tout cela à la fois.

Mis au point au début des années 60 par Macek et Davis [1] et inspiré des expériences historiques de Sagnac [2, 3] et de Michelson et Gale [4], le gyrolaser a suivi de très près (deux ans environ) la réalisation du premier laser par Maiman [5, 6]. Une quinzaine d'années a ensuite été nécessaire pour passer du statut d'expérience de laboratoire à celui de produit commercial, ce qui fut chose faite en 1978 lorsque l'avionneur Boeing décida d'équiper les centrales inertielles de ses nouveaux modèles de l'époque (767 et 757) avec des gyrolasers, fabriqués par la société Honeywell<sup>1</sup>. Cette dernière, qui se présente aujourd'hui comme le leader mondial sur le marché des gyrolasers, a produit depuis ce premier contrat plus de 200 000 unités<sup>2</sup>. Actuellement, un certain nombre d'autres sociétés fabriquent et commercialisent des gyrolasers, parmi lesquelles les américains Litton Industries (intégré en 2001 au groupe Northrop Grumman) et Kearfott, ainsi que le russe Polyus. Côté français, le gyrolaser a suscité l'intérêt dès les premières années de son existence, puisque d'importants travaux sur le sujet ont été entrepris au Centre de Recherches de la Compagnie Générale d'Électricité à Marcoussis au milieu des années 1960 [7, 8]. Ceux-ci ont été poursuivis dans les années 1970 aux Ulis dans les laboratoires de Quantel, détenu majoritairement par la Société française d'équipement de navigation aérienne (SFENA), elle-même filiale du groupe Aérospatiale. Le premier débouché pour les gyrolasers de la SFENA sera fourni par le prestigieux lanceur européen Ariane. En 1989 est créé Sextant Avionique, issu de la fusion d'un certain nombre de filiales de l'Aérospatiale (dont la SFENA) avec la division avionique générale du groupe Thomson-CSF. D'abord sous contrôle paritaire avec l'Aérospatiale, l'entreprise, qui a hérité de l'activité gyrolaser de la SFENA, va progressivement devenir une filiale entièrement détenue par le groupe Thomson-CSF, avant de prendre le nom de Thales Avionics (regroupée avec d'autres

---

<sup>1</sup>Source : société Honeywell, sur <http://content.honeywell.com/dses/products/gyros/>

<sup>2</sup>Source : Avionics Magazine, may 2001, disponible sur <http://www.aviationtoday.com/>

unités au sein de la division “Aerospace” du groupe Thales). Elle fabrique encore aujourd’hui, sur son site de Châtellerault, plusieurs centaines de gyrolasers par an, et compte toujours le lanceur Ariane parmi ses clients. On ne saurait être complet sans mentionner son concurrent direct, le français Sagem (intégré depuis peu au groupe Safran), également présent sur ce marché.

Depuis le début de son existence, le gyrolaser a constamment bénéficié de l’intérêt immense qu’il suscite du point de vue industriel et militaire. On ne compte plus les groupes de recherche, publics et privés, qui ont travaillé à sa mise au point ou travaillent encore à son amélioration. Les investissements considérables qui ont été réalisés dans ce but ont eu des retombées dans le domaine de la physique des lasers tout entier, aussi bien du point de vue technologique (c’est au gyrolaser que l’on doit par exemple les efforts importants qui ont été déployés pour améliorer la qualité optique des miroirs) que scientifique (dans le domaine de la dynamique des lasers bien sûr [9–11] mais aussi dans d’autres domaines, *a priori* plus surprenants, comme par exemple celui des phénomènes chaotiques [12–17]).

Le gyrolaser, dans sa forme la plus commune (voir figure 1), se compose d’un bloc de matériau à faible coefficient de dilatation thermique (comme par exemple le Zerodur) dans lequel sont usinés un certain nombre de conduits permettant à la lumière de se propager et contenant le mélange gazeux servant de milieu amplificateur. Des miroirs, apposés sur ce bloc, forment la cavité optique tandis que des électrodes à haute tension permettent la création d’un plasma entraînant l’établissement de l’inversion de population. L’ensemble est généralement monté sur une roue d’activation mécanique qui maintient le gyrolaser en mouvement pendant tout le temps de son fonctionnement, afin de limiter les effets du verrouillage en fréquence qui survient aux faibles vitesses de rotation. Le signal de sortie du gyrolaser est obtenu par la superposition, à l’extérieur de la cavité laser, des deux faisceaux contrarotatifs, qui forment, lorsqu’ils sont légèrement divergents l’un par rapport à l’autre, un ensemble de franges mobiles dont la vitesse de déplacement est proportionnelle à la vitesse de rotation de l’ensemble selon l’axe perpendiculaire au plan de la cavité, appelé également axe sensible. Il suffit alors de compter le nombre de franges ayant défilé dans un sens et dans l’autre (ce qui est rendu possible par l’utilisation d’une double cellule de détection) pour obtenir une mesure, intrinsèquement numérique, de la position angulaire du gyrolaser autour de son axe sensible.

En combinant les informations issues de trois gyrolasers ayant des axes sensibles deux à deux orthogonaux, il est donc possible pour un observateur de connaître à chaque instant son orientation par rapport à un référentiel inertiel. Cela permet l’utilisation d’accéléromètres physiquement liés au véhicule dont on cherche à déterminer le mouvement, l’information issue de ces accéléromètres étant combinée à celle délivrée par les gyrolasers, qui jouent en quelque sorte le rôle d’un “référentiel inertiel virtuel” (on parle de système inertiel lié, ou *strapped-down inertial system* en anglais). À l’opposé, les systèmes fondés sur des gyromètres mécaniques tentent de créer un référentiel inertiel réel en utilisant un jeu de cardans (on parle alors de systèmes inertiels isolés, ou *gimbaled inertial systems* en anglais). Les avantages des systèmes inertiels liés sur leurs homologues isolés sont nombreux, notamment en termes de poids, de taille, de fiabilité, de facilité d’entretien, de coût de production et de sensibilité aux contraintes extérieures [18]. En particulier, ces systèmes sont moins perturbés par les accélérations ou les vibrations mécaniques, et sont opérationnels sur une plage de vitesse de rotation beaucoup plus importante.

Le principal inconvénient des systèmes inertiels liés provient des limitations intrinsè-



FIGURE 1 – Gyrolaser à hélium-néon monoaxe triangulaire, produit par Thales Aerospace. La photo de gauche représente le gyrolaser à l’arrêt, et celle de droite le gyrolaser en fonctionnement. La couleur rose est due à la fluorescence du néon vue à travers le Zerodur. Photos Thales Aerospace.

ques des gyrolasers qu’ils utilisent, ces limitations étant elles-mêmes en grande partie dues à la nature gazeuse de leur milieu amplificateur. En effet, la pureté de ce dernier s’avère être un facteur déterminant pour les performances inertielles, ce qui nécessite une grande étanchéité (les miroirs sont donc fixés au bloc de Zerodur par adhérence moléculaire, l’utilisation de tout type de colle étant exclue) et impose des conditions de fabrication contraignantes (en particulier lorsque l’on remplit les blocs avec le mélange gazeux, ce qui ne peut s’effectuer que dans des “salles blanches”). De plus, un soin particulier est nécessaire au niveau de la forme et de la composition des électrodes à haute tension, ces dernières ayant tendance à polluer le milieu gazeux et à induire des dépôts sur les miroirs, ce qui entraîne une dégradation progressive des performances et limite la durée de vie.

Ces inconvénients, s’ils n’ont pas privé le gyrolaser à hélium-néon du beau succès qu’on lui connaît, ont toutefois stimulé une recherche très active pour lui trouver un successeur fondé sur un milieu à gain solide plutôt que gazeux. Le gyromètre à fibre optique [19,20], s’il constitue un candidat sérieux, reste limité par une grande sensibilité à son environnement extérieur et par le coût élevé des éléments spécifiques qui le composent, comme les fibres optiques monomodes à maintien de polarisation ou les sources lumineuses à large spectre et à forte cohérence spatiale. Parmi les autres voies, plus exotiques, qui ont été explorées dans le domaine des gyromètres optiques fibrés, on peut citer le gyromètre passif résonnant [21], ainsi que le gyromètre actif fibré utilisant comme source de gain l’erbium [22], l’effet Brillouin stimulé [23] ou un amplificateur à semi-conducteur [24]. Dans le domaine des gyrolasers à état solide non fibrés, on peut, en première approximation, diviser les activités de recherche en deux catégories : celle des gyrolasers fonctionnant en régime impulsionnel, dont le principal acteur est sans conteste le groupe du Nouveau-Mexique [25–27], et celle des gyrolasers continus, qui a bénéficié d’un intense effort de recherche dans l’ancienne Union Soviétique, notamment à l’Université de Moscou [28–43] (voir aussi [44]). Cet effort s’est poursuivi après la chute du bloc de l’Est [45–51], avec toutefois une très forte diminution des activités expérimentales. Il convient de noter que

chacun de ces deux groupes de recherche s'est intéressé à la thématique dominante de l'autre, comme le montrent par exemple les références [40] et [52].

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire, qui s'inscrit dans la lignée des travaux décrits ci-dessus, a été mené à Thales Research and Technology France, en étroite collaboration avec la division Thales Aerospace, dans le cadre d'un projet initié au début des années 2000 [53] baptisé GESCA (pour Gyrolaser à État Solide et à Cavité Active) et dont l'objectif est de mettre au point un gyrolaser à état solide, capable à terme de remplacer la génération actuelle des gyrolasers à gaz (et potentiellement, en fonction de l'évolution du projet et des besoins exprimés, de toucher les marchés de l'inertie basse et moyenne performances occupés actuellement par des gyromètres à fibre optique et des senseurs mécaniques). Ce projet est parti du constat qu'un certain nombre d'avancées technologiques dans le domaine des lasers solides (portées notamment par les marchés des lasers industriels et télécoms) rendaient accessibles de nouvelles configurations qui permettent d'envisager des gyromètres optiques utilisant des composants standards et ayant des coûts modérés (comme c'est par exemple le cas pour le milieu à gain que nous avons choisi d'utiliser, à savoir un cristal de YAG dopé aux ions  $\text{Nd}^{3+}$  et pompé par une diode laser). Afin de tirer parti au maximum du savoir-faire historique qui existe au sein de la division Thales Aerospace (hérité, on le rappelle, des travaux pionniers de la Compagnie Générale d'Électricité puis des activités de la SFENA et de Sextant Avionique), il a été décidé d'orienter les recherches vers une configuration qui serait la plus proche possible des gyrolasers déjà existants. En particulier, les principes d'un bloc résonateur non fibré, d'un fonctionnement continu et d'un signal de mesure ayant la forme d'un battement optique ont été conservés. En ce qui concerne l'aspect théorique du problème, nous avons eu l'opportunité de collaborer avec Evguenii Lariontsev (du groupe de recherche de l'Université de Moscou cité précédemment), qui a consacré l'essentiel de sa carrière à l'étude du laser en anneau à état solide et à ses possibles applications, notamment en tant que gyromètre. Cette collaboration s'est matérialisée par un voyage à Moscou que j'ai effectué au cours de ma première année de thèse, suivi de deux visites de Evguenii Lariontsev en France. Elle a notamment permis de confronter les immenses connaissances théoriques acquises par le groupe de Moscou avec les moyens technologiques dont nous disposons actuellement (notamment le pompage par diode, qui n'était pas accessible du temps de l'Union Soviétique), et a finalement débouché sur une publication commune [54]. Signalons enfin qu'une équipe de l'Université de Pékin s'est également lancée dans la course au gyrolaser à Nd-YAG pompé diode [55], mais n'a pas pour l'instant obtenu à notre connaissance de résultat significatif.

Une autre tâche qui m'a été confiée dès le début de ma thèse et qui s'inscrit dans la mission de veille technologique de Thales Research and Technology France, est de réfléchir, à la lumière des connaissances acquises sur les gyrolasers, à ce que pourrait être une future génération de senseurs inertiels utilisant les propriétés particulières des condensats de Bose-Einstein, disponibles expérimentalement depuis une dizaine d'années [56, 57] et que l'on qualifie parfois de "lasers à atomes" [58]. Pour m'aider à tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question, j'ai été encadré par Alain Aspect et Philippe Bouyer du groupe d'optique atomique du laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique à Orsay, ainsi que par Sandro Stringari, Chiara Menotti et Iacopo Carusotto du groupe de physique théorique italien de l'Université de Trente, groupe dans lequel j'ai été accueilli pendant un mois et demi à la fin de ma deuxième année de thèse. Les travaux que nous avons menés autour de cette problématique, et qui ont également débouché sur

---

une publication commune [59], sont pour l'instant d'ordre théorique, mais ils s'articulent autour d'une proposition de réalisation expérimentale qui pourrait voir le jour prochainement à partir du laser à atome "tout optique" réalisé au laboratoire Charles Fabry [60,61].

Ce mémoire est divisé en trois parties. Les deux premières concernent le gyrolaser à état solide pompé diode, et l'on s'intéresse dans la troisième à une possible analogie avec le domaine des lasers à atomes.

Dans la **première partie**, on considère le problème de l'obtention d'un régime bidirectionnel dans lequel le laser en anneau à état solide est sensible à la rotation qui lui est appliquée, ce qui n'est pas évident *a priori* en raison notamment de la nature homogène du milieu à gain utilisé ; à cette fin, un modèle semi-classique est développé et appliqué à la description des différents comportements possibles pour le laser en anneau à état solide ; un dispositif stabilisateur est proposé afin de contrebalancer les effets de la compétition entre modes ; l'étude analytique et numérique est accompagnée d'une étude expérimentale, qui aboutit finalement à l'obtention d'un gyrolaser à état solide.

La **seconde partie** a pour objet principal les performances inertielles du gyrolaser à état solide obtenu dans la première partie, celles-ci étant *ab initio* fortement dégradées par les couplages entre modes liés à la diffusion et au milieu à gain ; trois configurations sont proposées pour améliorer ces performances, fondées respectivement sur l'utilisation d'un biais magnéto-optique constant, la mise en œuvre simultanée de quatre modes et la mise en mouvement du milieu à gain ; l'étude analytique de ces configurations s'accompagne dans les deux premiers cas d'une étude expérimentale, et dans le troisième cas d'une étude numérique.

Dans la **troisième partie**, après avoir exposé quelques principes de base qui régissent la dynamique d'un laser à atomes en anneau dans un référentiel tournant, on présente une méthode originale permettant une description simplifiée de ce type de dispositif ; la validité de cette méthode et ses possibles applications pratiques, notamment sur le laser à atomes de l'Institut d'Optique cité précédemment, sont finalement discutées.



## En guise de préambule : quelques mots sur l'effet Sagnac...

Imaginons un observateur qui, étant enfermé dans une boîte noire en mouvement par rapport au monde extérieur supposé galiléen, serait désireux d'acquiescer de l'information sur la nature de ce mouvement [62]. On sait, depuis les travaux de Newton, que, si la boîte noire se déplace en ligne droite et à vitesse constante, notre observateur ne pourra pas réaliser d'expérience lui permettant de déterminer cette vitesse. On sait également, depuis les travaux d'Einstein et l'avènement de la théorie de la relativité générale, qu'il est impossible à notre observateur de faire la distinction entre un mouvement de la boîte noire uniformément accéléré et la présence d'un champ gravitationnel. Nous nous intéresserons dans ce qui suit aux possibilités de détection et de caractérisation d'un mouvement de rotation de la boîte noire.

Une première solution pour notre observateur pourrait être d'analyser les effets de la force de Coriolis sur un système mécanique en mouvement, par exemple une toupie en rotation montée sur des cardans afin de laisser son axe libre de s'orienter, ce dernier gardant alors une direction fixe par rapport au monde extérieur, ou encore un pendule comme celui utilisé par Léon Foucault au XIX<sup>ème</sup> siècle pour démontrer la rotation de la Terre. Les systèmes mécaniques fondés sur des effets liés à la force de Coriolis constituent aujourd'hui une part importante du marché des gyromètres, et semblent encore promis

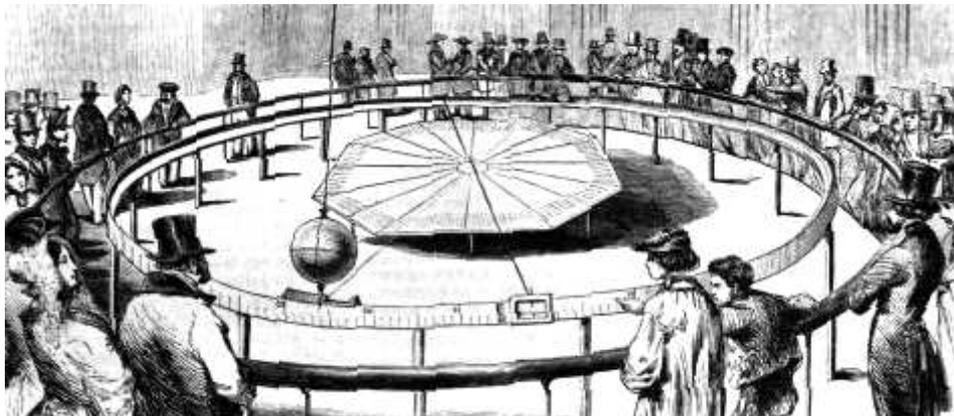


FIGURE 2 – Le pendule de Foucault au Panthéon, présenté à l'exposition universelle de Paris en 1851. Image tirée du dictionnaire encyclopédique Larousse (1986), mise en ligne sur le site de l'École professionnelle de Lausanne [63].

à un bel avenir malgré le développement de technologies concurrentes. Une deuxième solution serait de mesurer à l'aide d'une masse test  $m$  l'effet de la force centrifuge et d'en déduire la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  de la boîte noire à l'aide de la formule  $F_{\text{centrifuge}} = mr\dot{\theta}^2$ . Mais il n'est pas forcément possible pour l'observateur de connaître sa distance  $r$  à l'axe de rotation, surtout dans le cas où ce dernier ne traverse pas la boîte noire (dans le cas contraire, il faudrait localiser l'ensemble des points où la force centrifuge s'annule). Cette solution semble donc difficile à mettre en œuvre en pratique.

Une troisième solution à ce problème, qui nous intéresse tout particulièrement ici, consisterait à mesurer le temps de propagation d'un signal le long d'une boucle fermée. En effet, si ce temps dépend (bien évidemment !) des caractéristiques géométriques de la boucle ainsi que de la vitesse du signal, il se trouve (c'est l'effet Sagnac) qu'il est également fonction de la vitesse de rotation de l'ensemble du dispositif. En pratique, notre observateur aura plutôt intérêt à mesurer la différence entre les temps de parcours de signaux se propageant à la même vitesse le long de la même boucle mais dans des sens opposés. Cela offre, d'une part, un gain de sensibilité évident apporté par la soustraction des deux signaux, et présente, d'autre part, l'intérêt de fournir un résultat indépendant de la vitesse de propagation du signal, ce qui est une curiosité théorique remarquable et un avantage expérimental certain. C'est de cette manière que l'effet Sagnac est utilisé de nos jours dans l'ensemble des gyromètres optiques.

## Un peu d'histoire

C'est en 1893 que Sir Oliver Lodge propose pour la première fois l'utilisation d'un interféromètre optique pour mesurer la vitesse de rotation de la Terre [64]. Quatre ans plus tard, il suggère la mise en œuvre de ce même type d'interféromètre sur une table tournante afin de caractériser les effets liés à la rotation de celle-ci [65]. Les travaux de Lodge s'appuient sur une théorie très en vogue à l'époque, celle de l'éther non relativiste. C'est en voulant valider expérimentalement cette théorie que le physicien français Gérard Sagnac observe en 1913 l'effet qui porte son nom, en utilisant, comme l'avait suggéré Lodge, un interféromètre optique placé sur un plateau tournant (à une vitesse de l'ordre de quelques tours par seconde, ce qui est en soi une performance technique pour l'époque) [2, 3]. En fait, Sagnac n'est pas le premier à avoir observé cet effet puisque Franz Harreß, jeune chercheur allemand de l'université de Jena, avait mesuré deux ans plus tôt, au cours d'une expérience de caractérisation du coefficient d'entraînement de Fresnel-Fizeau [66], un biais inexplicable alors et qui s'est avéré *a posteriori* être dû à l'effet Sagnac, comme le montra en 1914 Harzer [67], qui avait repris les travaux de Harreß après la mort prématurée de celui-ci. Il convient de noter que les résultats de Harreß et Harzer ont prouvé non seulement l'existence de l'effet Sagnac mais aussi le fait que celui-ci est indépendant de l'indice optique du milieu dans lequel se propage la lumière, ce qui n'est pas le cas de l'expérience de Sagnac, effectuée dans l'air. D'un point de vue théorique, les premières tentatives d'interprétation de cet effet fondées sur la théorie de la relativité restreinte sont apparues dès 1914 avec Einstein lui-même [68] et Witte [69, 70], puis au début des années 1920 avec les travaux de von Laue [71] et Silberstein [72]. Il faut toutefois garder à l'esprit que cette théorie n'a pas été universellement acceptée à l'époque par la communauté scientifique, les partisans de l'éther étant alors nombreux (ceux-ci existent encore de nos jours, et les articles cherchant à interpréter l'effet Sagnac autrement que comme un effet relativiste ne



Considérons un photon parcourant un guide d'onde circulaire de rayon  $R$  (et d'indice optique  $n$ , supposé pour le moment égal à 1), ce dernier étant animé d'un mouvement de rotation autour de son axe central à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  par rapport au référentiel du laboratoire (supposé galiléen). On s'intéresse à la longueur effective  $l_{\text{eff}}$  d'un tour complet, c'est-à-dire à la distance parcourue par le photon dans le référentiel du laboratoire avant de rencontrer à nouveau son point de départ dans le guide d'onde. Si ce dernier est au repos ( $\dot{\theta} = 0$ ), on a évidemment  $l_{\text{eff}} = 2\pi R$ . Par contre, s'il est en rotation à la vitesse  $\dot{\theta}$ ,  $l_{\text{eff}}$  sera différente de  $l$  puisque le point de départ du photon se sera déplacé d'une distance  $R\dot{\theta}t$  pendant le temps  $t$  que mettra le photon à faire un tour complet (si le photon et le guide d'onde tournent dans le même sens, le point de départ s'éloigne du photon ; dans le cas contraire, il s'en rapproche, voir figure 4). La longueur effective s'exprime donc de deux manières en fonction de  $t$ . D'une part, elle est égale à  $ct$  ( $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide). D'autre part, elle est égale à  $l + R\dot{\theta}t$ . De cette égalité, on tire la valeur :

$$t = \frac{2\pi R}{c - R\dot{\theta}}. \quad (1)$$

Deux photons se propageant en sens opposés mettront donc des temps différents pour effectuer un tour de guide d'onde, la différence de temps étant donnée par :

$$\Delta t = \frac{2\pi R}{c - R\dot{\theta}} - \frac{2\pi R}{c + R\dot{\theta}} = \frac{4\pi R^2\dot{\theta}}{c^2(1 - R^2\dot{\theta}^2/c^2)}. \quad (2)$$

Dans la limite  $R\dot{\theta}/c \ll 1$ , que l'on peut considérer comme toujours valable en pratique, cette formule se réduit à :

$$\boxed{\Delta t = \frac{4\pi R^2\dot{\theta}}{c^2}}, \quad (3)$$

qui est l'expression universellement admise pour l'effet Sagnac.

Comme annoncé précédemment, il convient de considérer ce modèle avec précaution, en particulier lorsque l'on tente de le généraliser. Par exemple, celui-ci laisse entendre que, dans le cas où le signal n'est pas un photon, mais un ensemble d'objets classiques liés au référentiel tournant (comme des tortues marchant sur un manège), il n'y a pas d'effet Sagnac. On verra un peu plus loin que cela est faux. On pourrait être également tenté, à la lumière de ce modèle, d'utiliser des ondes se propageant moins vite que les ondes électromagnétiques, par exemple des ondes sonores, afin de remplacer le  $c$  de la formule 3 par la vitesse du signal utilisé, et ainsi gagner en sensibilité. En réalité, un tel changement serait inutile, car on montre (voir plus loin) que, quel que soit le signal utilisé, c'est bien la vitesse de la lumière dans le vide  $c$  qui apparaît dans l'expression 3. En fait, ce  $c$  provient de la formule d'addition des vitesses en relativité restreinte, et n'a rien à voir avec la vitesse du signal utilisé. En d'autres termes, l'effet Sagnac est un effet purement relativiste !

REMARQUE : le raisonnement décrit dans ce paragraphe peut en revanche se généraliser au cas où la propagation lumineuse a lieu dans un milieu d'indice  $n \neq 1$ . Dans ce cas, la vitesse de la lumière dans le référentiel du laboratoire est donnée par la formule suivante (théorie de Fresnel-Fizeau) :

$$v = \frac{c}{n} + \alpha R\dot{\theta}, \quad (4)$$

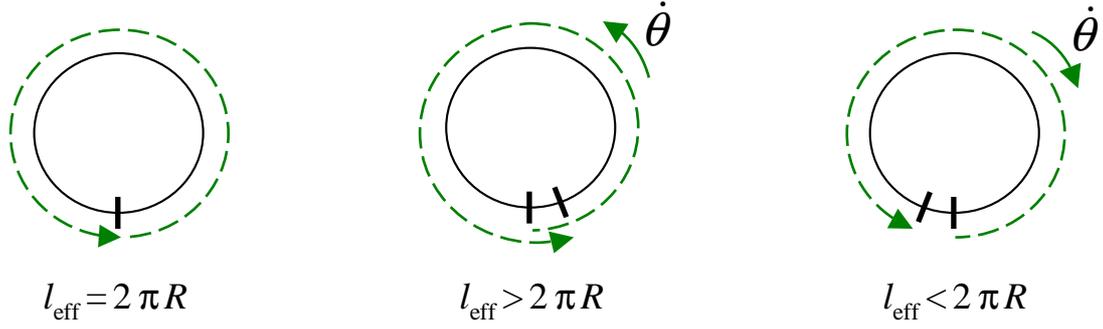


FIGURE 4 – Schémas illustrant la description simplifiée de l'effet Sagnac optique donnée dans le texte. Le guide d'onde circulaire est représenté par un trait plein, et la trajectoire du photon est symbolisée par une flèche en pointillés. Dans le schéma de gauche, le dispositif est immobile et la longueur effective est égale à la longueur réelle. Dans le schéma du milieu, le guide d'onde tourne autour de son axe central dans le sens de propagation du photon. Le point d'arrivée de ce dernier s'est donc éloigné, et la longueur effective est plus grande que la longueur réelle. Dans le schéma de droite, le guide d'onde tourne dans un sens opposé à celui du photon. Le point d'arrivée de ce dernier s'est donc rapproché, et la longueur effective est plus petite que la longueur réelle. Il convient de noter que la différence entre longueur effective et longueur réelle a été fortement exagérée sur ces schémas, afin de la rendre visible.

où  $\alpha$  est le coefficient d'entraînement de Fizeau, caractéristique du milieu considéré. La longueur effective devient dans ces conditions :

$$l_{\text{eff}} = \left( \frac{c}{n} + \alpha R \dot{\theta} \right) t = 2\pi R + R \dot{\theta} t, \quad (5)$$

d'où l'on tire l'expression du temps mis par un photon pour faire un tour complet :

$$t = \frac{2\pi R}{c/n + R \dot{\theta} (\alpha - 1)}, \quad (6)$$

et finalement l'expression de  $\Delta t$  :

$$\Delta t = \frac{4\pi R^2 \dot{\theta} n^2 (1 - \alpha)}{c^2 [1 - (1 - \alpha)^2 R^2 \dot{\theta}^2 / c^2]}. \quad (7)$$

En utilisant la relation  $n^2(1 - \alpha) = 1$ , cette expression se réduit, au premier ordre en  $R \dot{\theta} / c \ll 1$ , à l'équation 3, qui est indépendante de  $n$  ! Ce phénomène, qui semble ici un peu fortuit, apparaîtra comme tout-à-fait naturel à l'issue du calcul en relativité restreinte effectué un peu plus loin<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>En fait, il n'est pas si fortuit que cela puisque la relation  $n^2(1 - \alpha) = 1$  peut être vue comme une conséquence directe de la loi d'addition des vitesses en relativité restreinte appliquée au référentiel tournant (la question de la légitimité de l'utilisation de cette loi en référentiel tournant sera abordée un peu plus loin). En effet, la vitesse  $v$  correspondant à l'addition de la vitesse de la lumière dans le milieu au repos  $c/n$  et de la vitesse du référentiel tournant  $R \dot{\theta}$  s'écrit en relativité restreinte :

$$v = \frac{c/n + R \dot{\theta}}{1 + R \dot{\theta} / (nc)} \quad \text{d'où, au premier ordre en } R \dot{\theta} / c : \quad v = \frac{c}{n} + \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) R \dot{\theta},$$

qui est bien la formule 4 avec  $\alpha = 1 - 1/n^2$ .

## Effet Sagnac en relativité restreinte

On donne ici une interprétation de l'effet Sagnac entièrement fondée sur la théorie de la relativité restreinte (et plus particulièrement sur la loi de composition des vitesses qui découle de cette théorie). Cette interprétation de l'effet Sagnac est très générale et valable dans pratiquement tous les cas.

Considérons deux points  $M_+$  et  $M_-$  se déplaçant à la même vitesse constante  $v'$  selon une trajectoire circulaire de rayon  $R$ , chacun dans un sens différent. Supposons de plus que l'ensemble est placé sur une table tournant à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  par rapport au référentiel du laboratoire (supposé galiléen). Le "prime" désigne par convention dans tout ce qui suit les grandeurs exprimées dans le référentiel tournant. Le signe  $+$  désigne par convention tout ce qui concerne le point se déplaçant dans le sens de la rotation. On ne précise volontairement pas pour l'instant la nature de  $M_+$  et  $M_-$ , qui peuvent aussi bien être des objets classiques que des fronts d'ondes optiques ou atomiques se propageant dans un guide. On s'intéresse dans ce qui suit aux temps  $t'_+$  et  $t'_-$  que mettent les points  $M_+$  et  $M_-$  pour revenir à leur position initiale sur la table tournante, et plus particulièrement à la différence entre ces deux temps  $\Delta t' = t'_+ - t'_-$ .

On choisit par convention de compter positivement les vitesses et les déplacements lorsque ceux-ci correspondent au sens de la rotation de la table tournante. La vitesse du point  $M_+$  (respectivement  $M_-$ ) est alors  $v'$  (respectivement  $-v'$ ), avec  $v' > 0$ . Soit  $l_+$  (respectivement  $l_-$ ) la distance (dans le référentiel du laboratoire) qu'a parcourue le point  $M_+$  (respectivement  $M_-$ ) lorsqu'il est revenu à sa position initiale sur la table tournante. Soit  $t_+$  (respectivement  $t_-$ ) le temps (dans le référentiel du laboratoire) nécessaire pour parcourir cette distance. On a avec nos conventions de signe :

$$l_{\pm} = \pm 2\pi R + R\dot{\theta}t_{\pm} . \quad (8)$$

Par ailleurs,  $l_+$  (respectivement  $l_-$ ) peut s'écrire comme le produit de  $t_+$  (respectivement  $t_-$ ) et de la vitesse de  $M_+$  (respectivement  $M_-$ ) dans le référentiel du laboratoire, notée  $v_+$  (respectivement  $v_-$ ). Cela donne :

$$l_{\pm} = t_{\pm}v_{\pm} . \quad (9)$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$t_{\pm} = \frac{\pm 2\pi R}{v_{\pm} - R\dot{\theta}} \quad \text{d'où} \quad \Delta t = t_+ - t_- = \frac{2\pi R}{v_+ - R\dot{\theta}} + \frac{2\pi R}{v_- - R\dot{\theta}} . \quad (10)$$

La loi de composition des vitesses en relativité restreinte permet d'exprimer  $v_+$  et  $v_-$  en fonction de  $v'$  :

$$v_{\pm} = \frac{\pm v' + R\dot{\theta}}{1 \pm v'R\dot{\theta}/c^2} \quad \text{d'où} \quad \Delta t = \frac{4\pi R^2\dot{\theta}}{c^2(1 - R^2\dot{\theta}^2/c^2)} , \quad (11)$$

et finalement l'expression de  $\Delta t'$  en repassant dans le référentiel tournant à l'aide d'une transformation de Lorentz :

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R^2\dot{\theta}^2}{c^2}} = \frac{4\pi R^2\dot{\theta}}{c^2 \sqrt{1 - R^2\dot{\theta}^2/c^2}} . \quad (12)$$

Dans la limite  $R\dot{\theta}/c \ll 1$ , on retrouve l'expression 3. Il est intéressant de noter que l'expression 12 est indépendante de  $v'$ , ce qui montre, comme annoncé précédemment, que l'effet Sagnac est indépendant de la vitesse de propagation du signal utilisé (en particulier, l'effet Sagnac en optique ne dépend pas de l'indice). On peut également remarquer que l'effet de retard calculé ici découle de la loi d'addition des vitesses en relativité restreinte. En particulier, si l'on avait utilisé pour exprimer  $v_+$  et  $v_-$  en fonction de  $v'$  la loi de composition des vitesses newtonienne  $v_{\pm} = \pm v' + R\dot{\theta}$ , on aurait obtenu à la place de l'équation 11 :

$$\Delta t_{\text{classique}} = \frac{2\pi R}{v_+ - R\dot{\theta}} + \frac{2\pi R}{v_- - R\dot{\theta}} = 0, \quad (13)$$

ce qui correspond à l'intuition classique du problème que l'on peut avoir *a priori* pour des corps non relativistes, à savoir que deux tortues se déplaçant à la même vitesse mais en sens opposés sur un manège doivent en accomplir le tour en un temps égal. Le calcul relativiste montre qu'en toute rigueur il n'en est rien, la différence de temps de parcours  $\Delta t$  pour un manège de 1 m<sup>2</sup> effectuant un tour par minute étant égale à  $5.10^{-18}$  s, ce qui, pour des tortues marchant à la vitesse de 1 mm/s, correspond à une différence de longueur de trajet de  $0,5.10^{-19}$  m. Naturellement, l'effet Sagnac n'a jamais été mesuré avec des tortues [82], ni avec aucun autre objet macroscopique. Son action sur la phase d'une onde est en revanche détectable, comme nous allons le voir un peu plus loin.

On peut se demander, au terme de ce calcul, s'il est légitime d'utiliser la loi de composition des vitesses de la relativité restreinte pour un référentiel tournant, qui n'est en particulier pas galiléen. Il nous semble intéressant de citer le chercheur russe Grigorii Malykin [83] à ce sujet :

There was a long-standing opinion after the special theory of relativity was created that all events in noninertial (e. g. rotating) reference systems should be considered only in the domain of the general theory of relativity. However, the use of the general theory of relativity is unnecessary when purely kinematic effects are considered.

Et l'auteur de s'en référer à Albert Einstein [84] :

Kinematic equivalence of two coordinate systems is actually not restricted to the case when systems K and K' make rectilinear uniform motions. From the kinematic standpoint, this equivalence is fairly well satisfied, for instance, if one system uniformly rotates with respect to the other.

En l'absence d'effet gravitationnel et pour des vitesses de rotation ne variant pas significativement à l'échelle du temps de parcours du signal, l'usage de la théorie de la relativité restreinte semble donc adapté. Lorsque cela n'est pas le cas, il faut faire appel à la théorie de la relativité générale, ce qui dépasse le cadre de ce mémoire !

REMARQUE : Il est intéressant de revenir, à ce stade de la discussion, sur la première explication de l'effet Sagnac présentée, qui semblait prédire "miraculeusement" la bonne expression pour  $\Delta t$ . En fait, en supposant que la vitesse de la lumière était égale à  $c$  dans tous les référentiels (y compris le référentiel tournant), on a utilisé sans s'en rendre compte la loi d'addition des vitesses de la relativité restreinte (formule 11) dans le cas  $v' = c$ . C'est ce qui explique à la fois que l'on trouve le bon résultat, et que celui-ci tombe en défaut dès que l'on considère un signal qui n'est pas de nature électromagnétique.

## Utilisation pratique de l'effet Sagnac

On peut montrer [62] que le décalage temporel  $\Delta t'$  induit par l'effet Sagnac est indépendant de la forme de la boucle utilisée (à condition de remplacer dans l'équation 12 la quantité  $\pi R^2$  par l'aire  $A$  délimitée par la trajectoire<sup>2</sup>), ainsi que de la position de l'axe de rotation. Ces propriétés ont rendu possible les applications pratiques de l'effet Sagnac. Pour cela, on pourrait imaginer utiliser deux impulsions lumineuses ultra-courtes qui, en se propageant en sens opposés, arriveraient à des temps différents sur un détecteur, la différence de temps étant donnée par  $\Delta t'$ . Toutefois, cette valeur est beaucoup trop faible en pratique (de l'ordre de  $10^{-23}$  s) pour être mesurée par les horloges actuelles. On utilisera donc plutôt des méthodes interférométriques, en remarquant qu'il est possible d'appliquer les raisonnements effectués précédemment à des fronts d'onde, même s'ils ne correspondent pas à des objets physiques réels [83]. La différence de phase induite par l'effet Sagnac s'écrit alors (toujours au premier ordre en  $R\dot{\theta}/c$ ) :

$$\Phi = \omega \Delta t' = \frac{4A\dot{\theta}\omega}{c^2}. \quad (14)$$

où  $\omega$  est la pulsation (ou fréquence angulaire) de l'onde dans le référentiel tournant. En particulier, lorsque l'on considère des ondes optiques, on note que ce déphasage est indépendant de l'indice du milieu traversé.

## Principe de base du gyrolaser

Le gyrolaser est un laser en anneau dans lequel se propagent deux modes contrarotatifs, désignés parfois par les lettres CW (pour *clockwise*) et CCW (pour *counterclockwise*). Lorsque ce dispositif est en rotation à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , les modes contrarotatifs sont déphasés de la quantité  $\Phi$  donnée par l'expression 14, ce qui entraîne la différence suivante entre leurs fréquences propres :

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{c}{L_{\text{op}}} \frac{\Phi}{2\pi} = \frac{4A}{\lambda L_{\text{op}}} \dot{\theta}. \quad (15)$$

Cette différence entre les fréquences propres se traduit en principe par une différence entre les fréquences d'émission, que l'on peut mesurer en recombinaison des faisceaux issus des modes contrarotatifs sur un photodétecteur. Le signal de battement ainsi obtenu fournit donc une information sur la vitesse de rotation du gyrolaser. Le coefficient de proportionnalité entre la fréquence de battement et la vitesse de rotation appliquée, donné par  $4A/(\lambda L_{\text{op}})$ , est connu sous le nom de facteur d'échelle. Il convient de noter que c'est le fait d'avoir transformé le signal temporel en une différence de fréquence qui donne accès à la mesure. Par exemple, un retard temporel de  $\Delta t' = 10^{-23}$  s (impossible à mesurer dans l'absolu!) correspond, sur un laser de 30 cm de périmètre, à une différence de fréquence de 20 Hz (facilement mesurable). Il convient de noter également que le fait d'utiliser comme signal une différence de fréquence permet de soustraire automatiquement toutes les fluctuations de nature réciproque, c'est-à-dire agissant de la même manière sur les modes contrarotatifs. On s'affranchit ainsi, au premier ordre, des variations de longueur de cavité liées notamment aux fluctuations thermiques et aux vibrations mécaniques, qui

<sup>2</sup>Plus précisément, lorsque la trajectoire considérée est représentée paramétriquement par le vecteur  $\mathbf{r}$  et tourne autour d'un axe défini par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ , on a  $A = \mathbf{u} \cdot \frac{1}{2} \oint_{\text{cav}} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ .

sans cela masqueraient les variations de longueur “utiles” induites par l’effet Sagnac<sup>3</sup>.

Comme on l’a vu précédemment, le signal important en pratique pour la navigation inertielle n’est pas la vitesse instantanée mais plutôt la position angulaire. La fréquence  $\Omega/(2\pi)$  est donc intégrée dans le temps en comptant le nombre de franges issues du signal de battement qui défilent sur un détecteur. L’utilisation d’un deuxième détecteur permet d’avoir en plus une information sur le signe de la vitesse de rotation. Le signal utile s’écrit donc, dans le cas d’un gyrolaser idéal :

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\Omega}{2\pi} dt = \frac{4A}{\lambda L_{\text{op}}} (\theta_f - \theta_i) . \quad (16)$$

Les deux principaux enjeux pour un gyrolaser sont donc l’existence simultanée de deux modes contrarotatifs ayant des intensités similaires et pas trop modulées dans le temps (pour obtenir un réseau de franges issu du signal de battement qui puisse être correctement traité par le dispositif de détection), ainsi que l’obtention d’une réponse en fréquence la plus linéaire possible (c’est-à-dire la plus proche possible de la fréquence idéale  $\Omega/(2\pi)$  donnée par l’équation 15, afin de ne pas trop fausser l’estimation de position découlant du signal intégré 16). Ce sont ces deux enjeux, appliqués au cas du gyrolaser à état solide, qui font respectivement l’objet des deux premières parties de ce mémoire.

---

<sup>3</sup>Autrement dit, la fréquence de battement du gyrolaser ne dépend que des effets non réciproques, les effets réciproques étant éliminés par hétérodynage.



## **Première partie**

# **Du laser en anneau au gyrolaser à état solide**



# Introduction

Le laser en anneau à état solide peut sembler, au premier abord, similaire en de nombreux points à son homologue à base de mélange gazeux d'hélium et de néon. N'est-il pas en effet composé, comme ce dernier, d'un milieu à gain placé dans un résonateur optique en anneau ? Une analyse plus poussée révèle en fait de multiples différences entre ces deux dispositifs, à tel point que leurs dynamiques de fonctionnement respectives n'ont finalement que peu de choses en commun.

Si l'on y regarde de près, le laser en anneau à hélium-néon semble avoir été prédestiné au rôle de gyrolaser qu'il assume actuellement. Tout d'abord, la largeur de sa courbe de gain à température ambiante permet un fonctionnement monomode longitudinal pour les dimensions typiques des gyrolasers, tout en fournissant un signal d'erreur pour l'asservissement de la longueur de la cavité sur la fréquence d'une transition atomique. De plus, le caractère gazeux du milieu amplificateur permet d'utiliser l'effet Doppler pour supprimer la compétition entre les modes contrarotatifs. Ainsi, en se plaçant volontairement hors résonance, les seuls atomes qui peuvent amplifier un mode donné sont ceux dont la vitesse les ramène à résonance avec ce mode. En particulier, un atome donné interagira préférentiellement avec l'un des deux modes contrarotatifs. À la condition que l'écart à résonance soit supérieur à la largeur homogène de la raie d'émission, tout se passe comme si l'on disposait de deux milieux amplificateurs séparés (un pour chaque sens de propagation), ce qui garantit l'émission bidirectionnelle stable tout en permettant aux modes contrarotatifs d'être superposés en tout point de la cavité. Enfin, cerise sur le gâteau, l'utilisation de deux isotopes du néon permet de rendre l'ensemble symétrique, c'est-à-dire que l'on peut se placer au centre de la courbe de gain tout en étant non résonnant avec les atomes au repos, ce qui permet de réduire significativement certaines sources de biais. À tous ces avantages "naturels" du gyrolaser à hélium-néon, il convient d'ajouter un grand nombre d'avantages acquis grâce aux longues années d'étude intensive de ce dispositif, tant sur le plan scientifique que sur le plan industriel.

On peut alors se demander si la conception d'un gyrolaser à état solide destiné à concurrencer les gyrolasers existants ne relève pas de la gageure. En effet, on ne retrouve dans un tel dispositif aucun des avantages "naturels" cités ci-dessus : un laser solide est volontiers multimode, possède un milieu à gain à fort élargissement homogène (propice à la compétition entre les modes contrarotatifs et à une dynamique non linéaire), présente une sensibilité importante aux variations de température et un taux de rétrodiffusion important... Le défi est donc de taille mais le jeu en vaut la chandelle, au vu des très nombreux avantages que possède l'état solide sur le gaz, avantages déjà cités dans l'introduction générale de ce mémoire.

Le prérequis indispensable pour qu'un laser en anneau puisse être utilisé en tant que gyrolaser est le fonctionnement dans un régime de battement, c'est-à-dire dans un régime pour lequel les modes contrarotatifs ont d'une part des intensités à peu près constantes et de valeurs similaires, et d'autre part des fréquences dont la différence est égale, en première approximation, à la différence entre les fréquences propres des modes considérés. Si un tel régime, pour des raisons déjà évoquées, survient naturellement dans le cas du gyrolaser à hélium-néon (exception faite du phénomène de zone aveugle [18]), en revanche il n'en est rien dans le cas du laser en anneau à état solide, pour lequel de nombreux régimes de fonctionnement différents sont possibles [44, 45, 85]. L'objet de cette première partie est de décrire ces différents régimes puis, en se fondant sur la compréhension du laser en anneau à état solide ainsi acquise, de proposer et de mettre en œuvre un dispositif destiné à assurer le fonctionnement de ce dernier dans un régime de battement, ce qui permet finalement d'obtenir, à partir d'un simple laser en anneau à état solide, un gyrolaser.

Cette partie se compose de quatre chapitres. Dans le **premier chapitre**, on présente en détail l'établissement des équations du laser en anneau à état solide à partir de la théorie semi-classique générale. Ces équations sont ensuite utilisées pour mettre en évidence certains comportements caractéristiques de ce type de laser. Dans le **second chapitre**, on présente, en s'appuyant sur les résultats du premier, les principaux régimes de fonctionnement pouvant survenir dans le laser en anneau à état solide. La plupart des calculs relatifs à l'existence et à la stabilité de ces différents régimes sont détaillés en annexe. Dans le **troisième chapitre**, on étudie le comportement dynamique du laser en anneau à état solide en présence d'un dispositif de stabilisation du régime de battement. On montre que dans ce cas il est possible d'obtenir un fonctionnement en tant que gyrolaser à état solide. On présente ensuite une façon concrète de mettre en œuvre un tel dispositif. Dans le **quatrième chapitre**, on présente les résultats de l'étude expérimentale relative aux chapitres précédents. On y décrit en particulier les différents régimes observés pour le laser en anneau à état solide, ainsi que la réalisation du procédé de stabilisation du régime de battement décrit au troisième chapitre et la réponse en fréquence du gyrolaser ainsi obtenu. Ces résultats expérimentaux sont comparés aux prédictions théoriques. Tout au long de ces chapitres, des simulations numériques illustrent et accompagnent les différentes prédictions théoriques et observations expérimentales.

Il convient de noter que les équations semi-classiques du laser en anneau à état solide ainsi que la description théorique de ses différents régimes de fonctionnement peuvent être trouvées en partie dans la littérature [28–51]. En revanche, ce n'est à notre connaissance pas le cas en ce qui concerne la plupart des détails des calculs permettant d'obtenir ces résultats, détails que nous avons choisi de présenter dans ce mémoire (essentiellement en annexe). L'intérêt d'une telle démarche est double à notre avis. D'une part, elle offre la possibilité de bien préciser les approximations successives à même d'aboutir aux résultats présentés et les limites de leur validité. D'autre part, elle peut faciliter la généralisation de ce modèle à d'autres situations, comme par exemple la mise en mouvement du cristal amplificateur (chapitre 7) ou l'utilisation d'un milieu à gain semi-conducteur (travaux en cours, non décrits dans ce mémoire).

# Chapitre 1

## Modèle semi-classique du laser en anneau à état solide

L'objet de ce chapitre est d'introduire les équations différentielles qui serviront de base pour l'étude de la dynamique du laser en anneau à état solide. On utilise pour cela l'approche semi-classique [86], qui consiste à décrire le champ électromagnétique à l'aide des équations de Maxwell et le milieu amplificateur à l'aide des équations de Bloch. Une telle approche est justifiée tant que l'on ne s'intéresse pas aux propriétés purement quantiques du rayonnement, comme le bruit d'émission spontanée ou les états comprimés de la lumière.

La première partie de ce chapitre présente en détail le cheminement qui mène des équations fondamentales (équations de Maxwell, équations de Bloch) aux équations du laser que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire. La seconde partie tente, en s'appuyant sur les résultats de la première, de mettre en évidence de la façon la plus simplifiée possible certaines caractéristiques importantes du comportement d'un laser en anneau à état solide.

### 1.1 Établissement des équations du laser

Le principe général de la théorie semi-classique d'un laser est illustré en figure 1.1. Il s'agit d'une démarche auto-consistante, qui consiste à supposer que la polarisation macroscopique  $\mathbf{P}$  du milieu amplificateur agit comme un terme source pour le champ

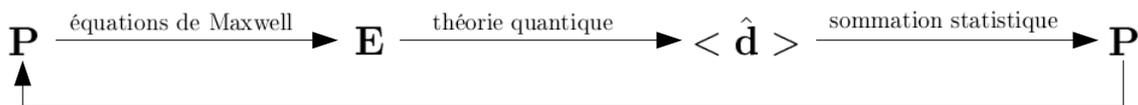


FIGURE 1.1 – Principe de la théorie de Lamb aboutissant aux équations semi-classiques du laser. La polarisation macroscopique  $\mathbf{P}$  du milieu amplificateur agit comme un terme source dans les équations de Maxwell du champ électrique  $\mathbf{E}$ . Ce dernier agit en retour sur la valeur moyenne  $\langle \hat{\mathbf{d}} \rangle$  du dipôle des atomes du milieu amplificateur via le couplage dipolaire électrique (équations de Bloch). La somme des dipôles atomiques n'est autre que la polarisation macroscopique  $\mathbf{P}$  du milieu amplificateur.

électrique  $\mathbf{E}$  du laser, qui agit en retour sur  $\mathbf{P}$  par couplage dipolaire électrique. Cette approche est très communément utilisée (voir par exemple [87–89]), car elle permet la description précise de phénomènes dynamiques parfois complexes, tout en étant beaucoup plus simple à manipuler que la théorie quantique générale.

### 1.1.1 Description classique du champ électromagnétique

#### Modélisation du champ et de la cavité

On suppose que le champ électrique  $\mathbf{E}$  dans la cavité laser peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{E}(z, t) = \Re e [E_1(t)e^{-ikz} + E_2(t)e^{ikz}] \mathbf{e} . \quad (1.1)$$

Un telle écriture implique en particulier les hypothèses suivantes :

- seuls deux modes sont susceptibles d'osciller dans la cavité, ces deux modes ayant des sens de propagation opposés et correspondant à la même fréquence spatiale (ou module du vecteur d'onde)  $k$  ; cette hypothèse est en pratique vérifiée la plupart du temps, sauf lorsque le laser est à l'arrêt<sup>1</sup> ; le paramètre  $k$  est relié à la fréquence spatiale dans le vide  $k_0$  par la relation  $k = k_0 L_{\text{op}}/L$ , où  $L_{\text{op}}$  et  $L$  désignent respectivement les longueurs optique et géométrique de la cavité ; la condition de résonance s'écrit donc  $k_0 L_{\text{op}} = 2\pi p$ , avec  $p$  entier ; la longueur d'onde du laser dans le vide est donnée par  $\lambda = 2\pi/k_0$  ;
- l'état de polarisation du champ électrique est supposé identique dans les deux sens de propagation et rectiligne<sup>2</sup>, défini par le vecteur unitaire  $\mathbf{e}$  ;
- tous les effets transverses sont ignorés ; les effets longitudinaux autres que ceux qui sont liés à l'accroissement linéaire de phase  $\pm kz$  sont également négligés ; en particulier, on ne tient pas compte des variations spatiales de  $\mathbf{E}$  dues au fait que le milieu à gain et les sources de pertes ne sont pas répartis uniformément le long de l'axe de propagation.

La cavité laser est modélisée quant à elle par un milieu diélectrique dépourvu de charges libres ( $\rho_{\text{libre}} = 0$ ) et d'aimantation ( $\mathbf{M} = 0$ ), et caractérisé par :

- un terme source  $\mathbf{P}$ , lié au milieu actif du laser, et dont l'expression en fonction du champ électrique  $\mathbf{E}$  sera déterminée dans un deuxième temps à l'aide des équations de Bloch ;

<sup>1</sup>Plus précisément, on observe en pratique un fonctionnement monomode dès que la différence entre les fréquences propres des modes contrarotatifs est supérieure à quelques kHz.

<sup>2</sup>Il convient de noter que cette hypothèse n'est pas incompatible avec la prise en compte d'effets liés à la polarisation du champ électromagnétique : plus loin dans ce mémoire, de tels effets seront inclus dans notre modèle de manière indirecte à travers la modification de certains des paramètres du laser (comme le taux de pertes ou la non-réciprocité en fréquence).

- une constante diélectrique  $\varepsilon$ , reliée à l'indice optique moyen de la cavité par l'expression  $\varepsilon = n^2\varepsilon_0$ ; l'indice  $n$  peut être déduit des paramètres usuels du laser par  $n = L_{\text{op}}/L$ ;
- une conductivité électrique  $\kappa$ , qui permet de modéliser les pertes du laser par des pertes ohmiques, en supposant vérifiée la loi d'Ohm locale  $\mathbf{j}_{\text{libre}} = \kappa\mathbf{E}$ ; il convient de noter ici qu'il s'agit d'une conductivité fictive destinée à introduire des pertes dans notre modèle, et qui en particulier ne signifie pas que le milieu à gain utilisé est un conducteur électrique; on montre (voir plus loin) que  $\kappa$  est relié au taux de pertes de la cavité en intensité par unité de temps, noté  $\gamma$ , par la relation :

$$\gamma = \frac{\kappa}{\varepsilon}; \quad (1.2)$$

il est possible de faire le lien avec les paramètres usuels du laser en utilisant la formule  $\gamma = rc/L_{\text{op}}$ , où  $r$  est le taux de pertes en intensité par tour de cavité et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide; le paramètre  $\gamma$  peut également être relié au temps de vie  $\tau$  du photon dans la cavité par  $\gamma = 1/\tau$ , à la finesse de la cavité  $F$  par  $\gamma = 2\pi c/(FL_{\text{op}})$  et au facteur de qualité du laser  $Q$  par  $\gamma = \omega/Q$ ; l'ordre de grandeur typique de  $\gamma$  que l'on considérera dans la suite est d'environ  $10^7 \text{ s}^{-1}$  (par exemple, une cavité de 30 cm de longueur optique avec 2% de pertes en intensité par tour correspond à  $\gamma = 2.10^7 \text{ s}^{-1}$ ).

Les fonctions  $\varepsilon$  et  $\kappa$  sont considérées dans notre modèle comme des constantes, avec toutefois une petite modulation longitudinale à la fréquence spatiale  $2k$  qui ne peut être négligée car elle entraîne, comme on va le voir, un couplage entre les modes contrarotatifs<sup>3</sup>.

### Équation d'onde

Les équations de Maxwell pour le champ et la cavité ainsi modélisés s'écrivent<sup>4</sup> [91] :

$$\text{div}\mathbf{D} = 0, \quad \text{div}\mathbf{B} = 0, \quad \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \right), \quad (1.3)$$

le vecteur induction électrique  $\mathbf{D}$  étant relié aux vecteurs champ électrique et polarisation totale par la relation suivante :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}_{\text{tot}}. \quad (1.4)$$

La polarisation totale du milieu  $\mathbf{P}_{\text{tot}}$  est la somme de deux contributions distinctes. La première, notée  $\mathbf{P}$ , est liée au milieu actif du laser. La seconde, notée  $\mathbf{P}_{\text{cav}}$ , est due à l'ensemble des éléments optiques constituant la cavité froide, c'est-à-dire en l'absence de gain. Elle obéit à la relation suivante (relation constitutive du milieu) :

$$\mathbf{P}_{\text{cav}} + \varepsilon_0\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad (1.5)$$

<sup>3</sup>Dire que cette modulation est petite revient à dire, comme on le verra plus loin, que le taux de rétrodiffusion est faible devant le taux de pertes, ce qui est en général le cas en pratique.

<sup>4</sup>On utilise ici le système d'unités MKSA rationalisé, par opposition au système gaussien que l'on pourra trouver dans certains articles, notamment la littérature russe (voir [90] pour plus de détails à ce sujet).

si bien que le vecteur induction électrique s'écrit finalement :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P} . \quad (1.6)$$

En prenant en compte l'expression 1.1 du champ  $\mathbf{E}$ , on obtient après quelques manipulations à partir des équations de Maxwell 1.3 l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\kappa}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{k^2}{\mu_0 \varepsilon} \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} , \quad (1.7)$$

connue sous le nom d'équation d'onde du champ  $\mathbf{E}$ .

### Approximation de l'enveloppe lentement variable

On s'intéresse maintenant à la dépendance temporelle des modes du champ, c'est-à-dire aux fonctions  $E_{1,2}(t)$  de l'expression 1.1. On fait ici l'hypothèse que l'on peut écrire ces fonctions comme le produit d'une porteuse oscillant à une fréquence angulaire  $\omega$  proche de la fréquence angulaire d'émission laser et d'une enveloppe complexe lentement variable par rapport à cette porteuse, d'où l'expression suivante :

$$\mathbf{E}(z, t) = \Re \left[ \tilde{E}(t) \right] \mathbf{e} \quad \text{avec} \quad \tilde{E}(t) = \tilde{E}_1(t) e^{i(\omega t - kz)} + \tilde{E}_2(t) e^{i(\omega t + kz)} . \quad (1.8)$$

De même, on écrit la polarisation liée au milieu à gain  $\mathbf{P}$  comme suit :

$$\mathbf{P}(z, t) = \Re \left[ \tilde{P}_1(t) e^{i(\omega t - kz)} + \tilde{P}_2(t) e^{i(\omega t + kz)} \right] \mathbf{e} , \quad (1.9)$$

ce choix étant justifié par le fait que  $\tilde{P}_1$  et  $\tilde{P}_2$  sont les seules composantes de la polarisation qui sont susceptibles d'interagir avec les champs  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$ . L'approximation de l'enveloppe lentement variable se traduit par les inégalités suivantes [88] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{d^2 \tilde{E}_{1,2}(t)}{dt^2} \right| \ll \omega \left| \frac{d \tilde{E}_{1,2}(t)}{dt} \right| \ll \omega^2 |\tilde{E}_{1,2}(t)| , \\ \left| \frac{d^2 \tilde{P}_{1,2}(t)}{dt^2} \right| \ll \omega \left| \frac{d \tilde{P}_{1,2}(t)}{dt} \right| \ll \omega^2 |\tilde{P}_{1,2}(t)| , \\ \gamma \ll \omega \quad \text{et} \quad |\omega_c^2 - \omega^2| \ll \omega^2 , \end{array} \right. \quad (1.10)$$

où l'on a introduit la fréquence angulaire de résonance de la cavité  $\omega_c = k/\sqrt{\mu_0 \varepsilon}$ . Il convient de noter ici que la fréquence angulaire moyenne  $\omega$ , sans réelle signification physique, peut être choisie librement dans la mesure où les inégalités 1.10 sont vérifiées et de manière à rendre les équations du laser aussi simples que possible. En pratique, les inégalités de la troisième ligne de 1.10 sont automatiquement vérifiées puisque le taux d'amortissement (ordre de grandeur typique :  $10^7 \text{ s}^{-1}$ ) et la largeur de la courbe de gain (comprise entre  $10^{11}$  et  $10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$ ) sont très inférieurs à la fréquence angulaire d'émission laser (environ  $2.10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ ). Le calcul des dérivées partielles temporelles de  $\mathbf{E}$  et de  $\mathbf{P}$

conduit aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(z, t) = \Re \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{d\tilde{E}_j(t)}{dt} + i\omega \tilde{E}_j(t) \right] e^{i[\omega t + (-1)^j kz]} \right\} \mathbf{e} , \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}(z, t) = \Re \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{d^2 \tilde{E}_j(t)}{dt^2} + 2i\omega \frac{d\tilde{E}_j(t)}{dt} - \omega^2 \tilde{E}_j(t) \right] e^{i[\omega t + (-1)^j kz]} \right\} \mathbf{e} , \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}(z, t) = \Re \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{d^2 \tilde{P}_j(t)}{dt^2} + 2i\omega \frac{d\tilde{P}_j(t)}{dt} - \omega^2 \tilde{P}_j(t) \right] e^{i[\omega t + (-1)^j kz]} \right\} \mathbf{e} . \end{cases}$$

Ces égalités, combinées aux approximations 1.10, permettent d'écrire l'équation d'onde 1.7 sous la forme<sup>5</sup> :

$$\sum_{j=1}^2 \left[ \varepsilon \frac{d\tilde{E}_j}{dt} + \frac{i\varepsilon}{2\omega} (\omega^2 - \omega_c^2) \tilde{E}_j + \frac{\kappa}{2} \tilde{E}_j - \frac{\omega}{2i} \tilde{P}_j \right] e^{i(-1)^j kz} = 0 . \quad (1.11)$$

### Projection sur l'un des modes propres longitudinaux

En projetant l'équation d'onde sur les modes propres longitudinaux, on obtient les équations d'évolution des champs correspondants [92]. On traite ici en détail le cheminement menant à l'équation d'évolution de  $\tilde{E}_2$ . On multiplie pour cela l'équation 1.11 par  $\exp(-ikz)$ , puis on moyenne le résultat le long de la cavité, en utilisant les identités suivantes :

$$\frac{1}{L} \oint_{\text{cav}} dz = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{L} \oint_{\text{cav}} e^{-2ikz} dz = 0 , \quad (1.12)$$

ainsi que la notation :

$$\langle f \rangle_+ = \frac{1}{L} \oint_{\text{cav}} f(z) e^{-2ikz} dz . \quad (1.13)$$

Il vient :

$$\langle \varepsilon \rangle_+ \left( \frac{d\tilde{E}_1}{dt} + \frac{i\omega}{2} \tilde{E}_1 \right) + \frac{\langle \kappa \rangle_+}{2} \tilde{E}_1 + \varepsilon \frac{d\tilde{E}_2}{dt} + \frac{i\varepsilon}{2\omega} (\omega^2 - \omega_c^2) \tilde{E}_2 + \frac{\kappa}{2} \tilde{E}_2 - \frac{\omega}{2i} \tilde{P}_2 = 0 .$$

L'approximation de l'enveloppe lentement variable 1.10 permet de négliger  $d\tilde{E}_1/dt$  par rapport à  $\omega \tilde{E}_1$  et elle autorise le développement  $\omega_c^2 - \omega \simeq 2\omega(\omega_c - \omega)$ . On obtient alors :

$$\frac{i\omega}{2\varepsilon} \left( \langle \varepsilon \rangle_+ - i \frac{\langle \kappa \rangle_+}{\omega} \right) \tilde{E}_1 + \frac{d\tilde{E}_2}{dt} - i(\omega_c - \omega) \tilde{E}_2 + \frac{\kappa}{2\varepsilon} \tilde{E}_2 - \frac{\omega}{2i\varepsilon} \tilde{P}_2 = 0 . \quad (1.14)$$

<sup>5</sup>En effet, en utilisant l'identité  $\Re(z) = (z + z^*)/2$ , en conservant seulement les termes oscillant comme  $\exp(i\omega t)$  et en projetant le long du vecteur  $\mathbf{e}$ , on obtient l'équation d'onde suivante :

$$\sum_{j=1}^2 \left[ \frac{d^2 \tilde{E}_j}{dt^2} + \left( 2i\omega + \frac{\kappa}{\varepsilon} \right) \frac{d\tilde{E}_j}{dt} + \left( \omega_c^2 - \omega^2 + \frac{i\omega\kappa}{\varepsilon} \right) \tilde{E}_j + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{d^2 \tilde{P}_j}{dt^2} + 2i\omega \frac{d\tilde{P}_j}{dt} - \omega^2 \tilde{P}_j \right) \right] e^{i(-1)^j kz} = 0 .$$

On peut alors négliger dans cette équation, en vertu de l'approximation de l'enveloppe lentement variable, le terme  $d^2 \tilde{E}_j/dt^2$  par rapport au terme  $\omega d\tilde{E}_j/dt$ , ainsi que les termes  $d^2 \tilde{P}_j/dt^2$  et  $\omega d\tilde{P}_j/dt$  par rapport au terme  $\omega^2 \tilde{P}_j$ . En revanche, on ne peut pas négliger le terme  $\omega d\tilde{E}_j/dt$  par rapport au terme  $(\omega_c^2 - \omega^2) \tilde{E}_j$ , car ils sont *a priori* du même ordre de grandeur. De même, on néglige  $\kappa/\varepsilon$  par rapport à  $\omega$  mais pas  $\omega\kappa/\varepsilon$  par rapport à  $(\omega_c^2 - \omega^2)$ , d'où finalement l'équation 1.11.

On voit sur cette expression que les petites modulations longitudinales à la fréquence spatiale  $2k$  des paramètres de la cavité  $\varepsilon$  et  $\kappa$  induisent un couplage entre le mode  $\tilde{E}_1$  et le mode  $\tilde{E}_2$ , caractérisé par les coefficients  $\tilde{m}_1$  et  $\tilde{m}_2$  suivants :

$$\tilde{m}_{1,2} = -\frac{\omega}{\varepsilon L} \oint_{\text{cav}} \left[ \varepsilon(z) - \frac{i\kappa(z)}{\omega} \right] e^{-2i(-1)^{1,2}kz} dz . \quad (1.15)$$

Ce couplage, lié aux imperfections des éléments qui composent la cavité, s'interprète habituellement comme le résultat de la rétrodiffusion de la lumière d'un mode dans l'autre [92]. Le coefficient  $\tilde{m}_{1,2}$  peut alors être vu comme le taux de rétrodiffusion du mode  $\tilde{E}_{2,1}$  par unité de temps<sup>6</sup>. On sait grâce à la théorie des gyrolasers à hélium-néon (voir par exemple [93]) que ce couplage, aussi petit soit-il, ne peut être négligé car il joue un rôle fondamental dans la réponse en fréquence du laser. Comme on aura l'occasion de le constater dans ce mémoire, il s'agit également d'un phénomène important pour la dynamique du laser en anneau à état solide.

Si l'on revient à l'équation 1.14, on constate que le taux d'amortissement de l'amplitude du champ par unité de temps est donné par l'expression  $\kappa/(2\varepsilon)$ . Cela justifie en particulier l'expression 1.2 pour le taux d'amortissement de l'intensité par unité de temps. On utilisera lorsque nécessaire la notation  $\gamma_{1,2}$  pour désigner des pertes dépendant du sens de propagation des modes (de telles pertes pourront être par exemple induites par des effets magnéto-optiques, comme on le verra plus loin dans ce mémoire). L'équation d'évolution de  $\tilde{E}_2$  s'écrit avec ces notations :

$$\frac{d\tilde{E}_2}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2} \tilde{E}_2 + i\frac{\tilde{m}_2}{2} \tilde{E}_1 - i(\omega - \omega_c) \tilde{E}_2 + \frac{\omega}{2i\varepsilon} \tilde{P}_2 . \quad (1.16)$$

L'équation d'évolution de  $\tilde{E}_1$  s'obtient par échange des indices.

### Prise en compte de l'effet Sagnac et conclusion

Lorsque le laser est en rotation à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , l'effet Sagnac lève la dégénérescence entre les fréquences angulaires propres des modes contrarotatifs. Ces dernières s'écrivent alors (voir par exemple [62]) :

$$\omega_{c2} = \omega_c + \frac{\Omega}{2} \quad \text{et} \quad \omega_{c1} = \omega_c - \frac{\Omega}{2} \quad \text{avec} \quad \Omega = 2\pi \frac{4A}{\lambda L_{\text{op}}} \dot{\theta} , \quad (1.17)$$

où  $A$  est l'aire délimitée par la cavité en anneau. En choisissant pour valeur de  $\omega$  la moyenne des fréquences angulaires propres des modes contrarotatifs  $\omega_c$ , on obtient finalement les équations d'évolution suivantes pour  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{E}_1}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2} \tilde{E}_1 + i\frac{\tilde{m}_1}{2} \tilde{E}_2 - i\frac{\Omega}{2} \tilde{E}_1 + \frac{\omega_c}{2i\varepsilon} \tilde{P}_1 , \\ \frac{d\tilde{E}_2}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2} \tilde{E}_2 + i\frac{\tilde{m}_2}{2} \tilde{E}_1 + i\frac{\Omega}{2} \tilde{E}_2 + \frac{\omega_c}{2i\varepsilon} \tilde{P}_2 . \end{cases} \quad (1.18)$$

On va maintenant s'intéresser à la description du terme source intervenant dans ces équations, c'est-à-dire à la polarisation  $\mathbf{P}$  associée au milieu amplificateur.

<sup>6</sup>Il convient toutefois de garder à l'esprit que  $\tilde{m}_{1,2}$  est une quantité complexe. Son argument, noté  $(-1)^{2,1}\theta_{1,2}$  (voir équation 1.45), représente le déphasage subi par le champ  $\tilde{E}_{2,1}$  lors de la rétrodiffusion. On verra plus loin que la quantité  $\theta_1 - \theta_2$  joue un rôle fondamental dans la dynamique du laser.

### 1.1.2 Description quantique du milieu amplificateur

#### Hypothèses de modélisation

Le milieu amplificateur considéré ici est constitué d'une matrice de YAG dopée par l'ion néodyme  $\text{Nd}^{3+}$  (Nd-YAG). Le pompage optique s'effectue à partir d'une diode laser émettant à la longueur d'onde de 808 nm, pour une longueur d'onde d'émission égale à 1,064  $\mu\text{m}$  (figure 1.2). On effectue les hypothèses de modélisation suivantes :

- le niveau supérieur  $|b\rangle$  de la raie d'émission à 1,064  $\mu\text{m}$  est considéré comme unique ; en pratique, on sait qu'il existe un deuxième niveau [94], mais que celui-ci peut être ignoré dans la plupart des cas<sup>7</sup> [95] ;
- le niveau inférieur  $|a\rangle$  de la raie d'émission se vide très rapidement vers d'autres niveaux, de sorte que sa population peut être considérée comme nulle à chaque instant ; cette hypothèse est légitimée par la faible durée de vie de ce niveau, de l'ordre de quelques dizaines de ns<sup>8</sup> [96] ;
- le milieu à gain est supposé uniformément réparti le long de la cavité ; le taux de pompage optique est également supposé uniforme ; en particulier, on néglige les effets liés aux variations longitudinales de la puissance de pompe.

Le milieu à gain peut donc être considéré comme un ensemble d'atomes à deux niveaux, possédant chacun un dipôle électrique associé à l'observable  $\hat{\mathbf{d}}$  et dont la valeur moyenne est donnée par l'expression :

$$\langle \hat{\mathbf{d}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\mathbf{d}}), \quad (1.19)$$

où  $\hat{\rho}$  est la matrice densité associée à chaque atome, qui s'écrit dans la base  $\{|a\rangle, |b\rangle\}$  :

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ab}^* & \rho_{bb} \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Les quantités réelles  $\rho_{aa}$  et  $\rho_{bb}$  représentent les populations des niveaux  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ , tandis que  $\rho_{ab} = \rho_{ba}^*$  est la cohérence atomique. Conformément à ce qui a été supposé précédemment, on considérera dans ce qui suit que  $\rho_{aa} = 0$ . L'observable  $\hat{\mathbf{d}}$  possède quant à elle la forme suivante :

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{d} \\ \mathbf{d} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}, \quad (1.21)$$

avec  $d$  réel [98]. L'absence de termes diagonaux est due à l'invariance de l'atome par rotation. Avec ces notations, la valeur moyenne du dipôle atomique prend la forme suivante :

$$\langle \hat{\mathbf{d}} \rangle = 2d \Re(\rho_{ab}) \mathbf{e}. \quad (1.22)$$

<sup>7</sup>Il convient toutefois de noter qu'au moins un régime de fonctionnement du laser en anneau à état solide, à savoir le régime d'alternance périodique à haute fréquence du sens d'émission du laser (appelé aussi régime d'auto-modulation de type II, voir figure 4.4), ne peut être décrit avec succès que grâce à la prise en compte de l'existence de cette deuxième raie [44].

<sup>8</sup>Signalons que la prise en compte de cette durée de vie non nulle pourrait, d'après les auteurs de [41], expliquer la réponse en fréquence anormale qui est parfois observée sur le laser en anneau à état solide aux basses vitesses de rotation (appelé aussi "faux Sagnac", voir figure 4.5).

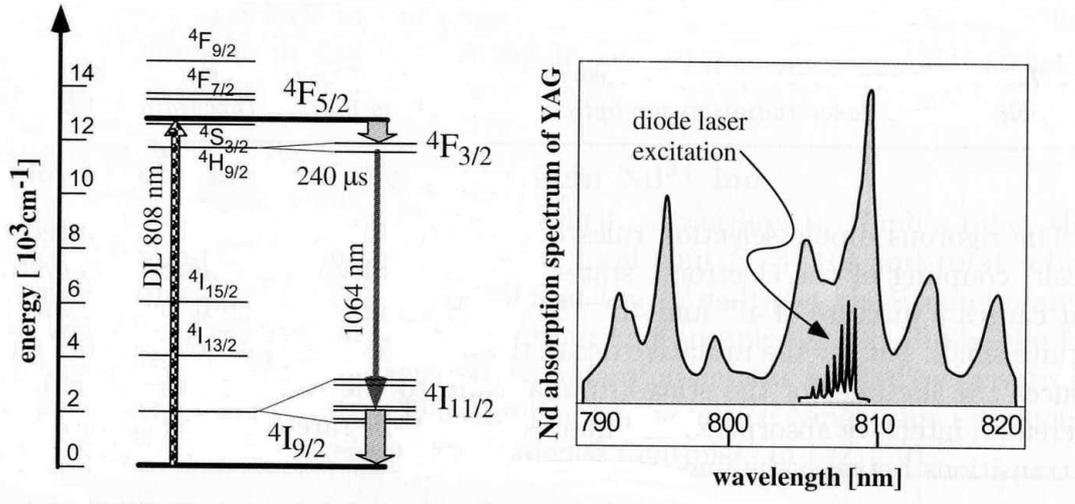


FIGURE 1.2 – Transition laser à 1,06  $\mu\text{m}$  du Nd-YAG et spectre d'absorption autour de la longueur d'onde de pompe. Figure extraite de [97].

La polarisation macroscopique  $\mathbf{P}$  liée au milieu à gain s'écrit quant à elle :

$$\mathbf{P} = n_0 \langle \hat{\mathbf{d}} \rangle = 2dn_0 \Re(\rho_{ab}) \mathbf{e} , \quad (1.23)$$

où  $n_0$  est le nombre d'atomes amplificateurs par unité de volume. On voit donc que le calcul de  $\mathbf{P}$  se ramène à celui de  $\rho_{ab}$ , auquel nous allons maintenant nous intéresser. Étant donné les expressions 1.9 et 1.23, on écrit  $\rho_{ab}$  sous la forme suivante :

$$\rho_{ab}(z, t) = \rho_{ab}^{(1)}(t) e^{i(\omega_c t - kz)} + \rho_{ab}^{(2)}(t) e^{i(\omega_c t + kz)} . \quad (1.24)$$

## Équations de Bloch

L'évolution temporelle de la matrice densité est décrite par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}] , \quad (1.25)$$

où le crochet désigne le commutateur ( $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ ). Le hamiltonien qui intervient ici est la somme du hamiltonien atomique  $\hat{H}_{\text{at}}$  et du hamiltonien d'interaction entre l'atome et le champ électrique (classique) du laser, à savoir  $\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}$  (on effectue ici l'approximation des grandes longueurs d'ondes, ou approximation dipolaire, qui consiste à supposer que le champ  $\mathbf{E}$  est uniforme à l'échelle de l'atome [98]). Sous sa forme matricielle, ce hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hbar\omega_a & 0 \\ 0 & \hbar\omega_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} & 0 \end{bmatrix} , \quad (1.26)$$

où  $\hbar\omega_a$  et  $\hbar\omega_b$  sont les énergies des niveaux atomiques  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ . On a alors :

$$[\hat{H}, \hat{\rho}] = \begin{bmatrix} (\rho_{ab} \mathbf{d} - \rho_{ab}^* \mathbf{d}) \cdot \mathbf{E} & \rho_{ab} \hbar(\omega_a - \omega_b) - \rho_{bb} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \\ \rho_{ab}^* \hbar(\omega_b - \omega_a) + \rho_{bb} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} & (\rho_{ab}^* \mathbf{d} - \rho_{ab} \mathbf{d}) \cdot \mathbf{E} \end{bmatrix} , \quad (1.27)$$

d'où les équations d'évolution suivantes :

$$\begin{cases} \hbar \frac{d\rho_{bb}}{dt} = -2 \Im(\rho_{ab}) \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} , \\ i\hbar \frac{d\rho_{ab}}{dt} = \rho_{ab} \hbar(\omega_a - \omega_b) - \rho_{bb} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} . \end{cases} \quad (1.28)$$

Ces équations décrivent l'évolution de l'atome sous l'effet de son interaction avec le champ  $\mathbf{E}$ . Certains autres effets peuvent être pris en compte par l'adjonction de termes supplémentaires, à savoir :

- le terme d'émission spontanée, qui entraîne une décroissance de la population du niveau supérieur de la transition laser  $\rho_{bb}$  avec une constante de temps caractéristique  $T_1$  ( $T_1$  est le temps de vie du niveau excité, qui vaut environ 200  $\mu\text{s}$  pour la transition à 1,064  $\mu\text{m}$  entre les niveaux  ${}^4\text{F}_{3/2}$  et  ${}^4\text{I}_{11/2}$  de l'ion  $\text{Nd}^{3+}$  dans le YAG) ;
- le terme de brouillage de la cohérence, lié à l'environnement cristallin de l'atome, qui entraîne une décroissance de  $\rho_{ab}$  avec un temps caractéristique  $T_2$  ( $T_2$  est l'inverse de la largeur de la courbe de gain ou largeur homogène  $\gamma_{ab}$  [99], qui est de l'ordre de 100 GHz dans notre cas) ;
- le terme de pompage optique, qui pour un atome est donné par  $\sigma_a I_p / (\hbar \omega_c)$ , où  $\sigma_a$  est la section efficace d'absorption de la pompe par le milieu à gain<sup>9</sup> et  $I_p$  l'éclairement de pompe (en  $\text{W}/\text{m}^2$ ) ; il est commode pour la suite d'introduire le taux de pompage volumique, noté  $W$  et défini par  $W = n_0 \sigma_a I_p / (\hbar \omega_c)$  ; le taux de pompage par atome s'écrit alors  $W/n_0$ .

On obtient finalement les équations d'évolution suivantes pour  $\rho_{bb}$  et  $\rho_{ab}$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_{bb}}{\partial t} = -\frac{2}{\hbar} \Im(\rho_{ab}) \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{T_1} \rho_{bb} + \frac{W}{n_0} , \\ \frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t} = -i(\omega_a - \omega_b) \rho_{ab} + \frac{i}{\hbar} \rho_{bb} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{T_2} \rho_{ab} . \end{cases} \quad (1.29)$$

Ces équations sont connues sous le nom d'équations de Bloch.

### Élimination adiabatique de la polarisation

En utilisant l'expression de  $\rho_{ab}$  1.24, on peut écrire la deuxième équation du système 1.29 sous la forme suivante<sup>10</sup> :

$$\left[ \frac{d\rho_{ab}^{(1)}}{dt} + i\omega_c \rho_{ab}^{(1)} \right] e^{i[\omega_c t - kz]} + \left[ \frac{d\rho_{ab}^{(2)}}{dt} + i\omega_c \rho_{ab}^{(2)} \right] e^{i[\omega_c t + kz]} = -i\rho_{ab}(\omega_a - \omega_b) + \frac{i}{\hbar} \frac{d\tilde{E}}{2} \rho_{bb} - \frac{1}{T_2} \rho_{ab} .$$

<sup>9</sup>Pour être tout-à-fait rigoureux, il faudrait prendre en compte la structure à 4 niveaux du système considéré (voir figure 1.2), et notamment l'efficacité des transitions non radiatives.

<sup>10</sup>Pour obtenir cette équation, nous avons utilisé l'expression  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} = (\tilde{E} + \tilde{E}^*)/2$  et seuls les termes proportionnels à  $\exp(i\omega_c t)$  sont conservés.

On fait ici l'hypothèse que  $\rho_{ab}^{(1)}(t)$  et  $\rho_{ab}^{(2)}(t)$  atteignent leur état stationnaire quasiment instantanément par rapport au temps d'établissement du champ électrique dans la cavité et au temps de variation de l'inversion de population. Cette approximation, connue sous le nom d'élimination adiabatique de la polarisation, est justifiée par les inégalités  $T_2 \ll 1/\gamma$  et  $T_2 \ll T_1$ , qui sont en pratique toujours vérifiées dans notre cas<sup>11</sup> (voir [100] pour des considérations subtiles à propos de la validité de cette approximation dans le laser en anneau). Cela permet de poser  $d\rho_{ab}^{(1,2)}(t)/dt = 0$  dans l'équation ci-dessus. Il nous semble utile de préciser que l'élimination adiabatique de la polarisation effectuée ici ne doit pas être confondue avec une simple approximation de l'enveloppe lentement variable. En effet, cette dernière ne permet pas à elle seule d'écrire  $d\rho_{ab}/dt = 0$ , ce terme étant certes négligeable devant  $\omega_c\rho_{ab}$  mais pas devant  $[\omega_c - (\omega_b - \omega_a)]\rho_{ab}$ . On obtient finalement :

$$n_0 \left[ \rho_{ab}^{(1)}(t)e^{i(\omega_c t - kz)} + \rho_{ab}^{(2)}(t)e^{i(\omega_c t + kz)} \right] = \frac{iN(z, t)d}{2\hbar\gamma_{ab}(1 + i\delta)} \left[ \tilde{E}_1(t)e^{i(\omega_c t - kz)} + \tilde{E}_2(t)e^{i(\omega_c t + kz)} \right], \quad (1.30)$$

où l'on a posé  $\omega_0 = \omega_b - \omega_a$  (énergie de la transition laser) et  $N = n_0\rho_{bb}$  (densité d'inversion de population). On définit également le désaccord relatif à la résonance  $\delta$  par :

$$\delta = \frac{\omega_c - \omega_0}{\gamma_{ab}}. \quad (1.31)$$

En multipliant terme à terme l'équation 1.30 par  $\exp(-ikz)$  et en intégrant le long de la cavité, on obtient :

$$n_0\rho_{ab}^{(2)} = \frac{id}{2\hbar\gamma_{ab}(1 + i\delta)L} \left( \tilde{E}_2 \oint_{\text{cav}} N d\tilde{z} + \tilde{E}_1 \oint_{\text{cav}} N e^{-2ikz} dz \right). \quad (1.32)$$

Cette expression fait intervenir la valeur moyenne ainsi qu'une harmonique spatiale de la densité d'inversion de population  $N$ , que l'on a supposée jusqu'ici répartie sur toute la longueur  $L$  de la cavité. En pratique,  $N$  est nulle partout sauf au niveau de la zone de gain, de longueur  $l$  (typiquement quelques millimètres). On définit donc la valeur moyenne ainsi que les harmoniques spatiales de la densité d'inversion de population le long de la zone de gain comme suit :

$$N_0 = \frac{1}{l} \int N dz \quad \text{et} \quad N_{1,2} = \frac{1}{l} \int N e^{2i(-1)^{2,1}kz} dz. \quad (1.33)$$

En toute rigueur, le vecteur d'onde  $k$  qui intervient dans ces expressions n'est pas le vecteur d'onde moyen défini précédemment comme  $k = k_0 L_{\text{op}}/L$  mais plutôt le vecteur d'onde dans le milieu à gain, défini par  $k = k_0 n_g$  où  $n_g$  est l'indice du milieu à gain. On utilisera toutefois la même notation pour ces deux quantités, cette distinction n'apportant pas de changement significatif en pratique<sup>12</sup>. En utilisant l'expression 1.32 et l'égalité

<sup>11</sup>On rappelle les ordres de grandeur suivants :  $T_1 \simeq 2.10^{-4}$  s,  $1/\gamma \simeq 10^{-7}$  s et  $T_2 \simeq 10^{-11}$  s.

<sup>12</sup>Le seul cas où il apparaît vraiment important de faire la distinction entre  $k$  et  $k_g$  est lorsque l'on s'intéresse à la mise en mouvement du milieu à gain (voir chapitre 7). En effet, la réponse en fréquence du gyrolaser peut dans ce cas dépendre fortement de la quantité  $kz_m$ , où  $z_m$  est l'amplitude du mouvement du cristal. Une connaissance précise de la valeur de  $k$  est alors nécessaire. Naturellement, c'est l'expression  $k = k_0 n_g$  qu'il convient d'utiliser dans ce cas.

$\tilde{P}_{1,2} = 2n_0 d\rho_{ab}^{(1,2)}$ , on obtient finalement :

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{P}_1 = \frac{id^2 l}{\hbar\gamma_{ab}(1+i\delta)L} (N_0\tilde{E}_1 + N_1\tilde{E}_2), \\ \tilde{P}_2 = \frac{id^2 l}{\hbar\gamma_{ab}(1+i\delta)L} (N_0\tilde{E}_2 + N_2\tilde{E}_1). \end{cases}} \quad (1.34)$$

Il reste maintenant à établir l'équation d'évolution temporelle de  $N$ .

### Équations d'évolution de la densité d'inversion de population

En multipliant la première équation du système 1.29 par  $n_0$ , on obtient :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{2n_0}{\hbar} \Im(\rho_{ab}) \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} - \frac{N}{T_1} + W. \quad (1.35)$$

L'équation 1.30 nous permet d'écrire :

$$n_0 \Im(\rho_{ab}) = \frac{Nd\tilde{E}}{2\hbar\gamma_{ab}(1+\delta^2)}, \quad (1.36)$$

d'où, en négligeant les termes oscillant à la fréquence  $2\omega_c$  (approximation séculaire) :

$$n_0 \Im(\rho_{ab}) \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = \frac{Nd^2\tilde{E}\tilde{E}^*}{4\hbar\gamma_{ab}(1+\delta^2)}. \quad (1.37)$$

On définit le paramètre  $a$  de la manière suivante :

$$a = \frac{T_1 d^2}{\hbar^2 \gamma_{ab} (1 + \delta^2)}, \quad (1.38)$$

si bien que l'équation d'évolution de  $N$  s'écrit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial N}{\partial t} = W - \frac{N}{T_1} - \frac{aN}{2T_1} \left| \tilde{E}_1 e^{-ikz} + \tilde{E}_2 e^{ikz} \right|^2}. \quad (1.39)$$

On donne également une formulation équivalente à l'équation 1.39 utilisant directement le champ électrique  $\mathbf{E}$  au lieu de son amplitude complexe  $\tilde{E}$  :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = W - \frac{N}{T_1} - \frac{aN}{T_1} \mathbf{E}^2. \quad (1.40)$$

La quantité  $a\mathbf{E}^2$ , sans dimension, n'est autre que le rapport de l'intensité lumineuse  $I$  à l'intensité de saturation  $I_{\text{sat}}$ . Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que lorsque  $\mathbf{E}^2$  ne dépend pas du temps, la valeur stationnaire de  $N$  est donnée par  $N = WT_1/(1+a\mathbf{E}^2)$ , égalité qu'il convient de comparer à l'expression usuelle du gain dans un laser  $g = g_0/(1+I/I_{\text{sat}})$ . Le paramètre  $a$  est appelé pour cette raison paramètre de saturation<sup>13</sup>.

<sup>13</sup>Il est également possible de démontrer directement l'égalité  $a\mathbf{E}^2 = I/I_{\text{sat}}$  à partir des relations suivantes :  $I = n\varepsilon_0 c \mathbf{E}^2$  et  $I_{\text{sat}} = \hbar\omega_c/(T_1\sigma)$ . On utilise pour cela les définitions 1.38 et 1.42 de  $a$  et  $\sigma$ .

### 1.1.3 Équations finales et conclusion

#### Équations du laser

En combinant les équations du champ 1.18 avec celles de la polarisation 1.34, on obtient les équations auto-consistantes d'évolution des champs. Cela donne par exemple pour  $\tilde{E}_2(t)$  :

$$\frac{d\tilde{E}_2}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2}\tilde{E}_2 + i\frac{\tilde{m}_2}{2}\tilde{E}_1 + i\frac{\Omega}{2}\tilde{E}_2 + \frac{\omega_c d^2 (N_0 \tilde{E}_2 + N_2 \tilde{E}_1)}{2\varepsilon \hbar \gamma_{ab} (1 + i\delta)}. \quad (1.41)$$

On définit la section efficace d'émission laser  $\sigma$  et sa valeur à la résonance  $\sigma_0$  par :

$$\sigma = \frac{\omega_c d^2 \mu_0 c}{\hbar \gamma_{ab} n (1 + \delta^2)} = \frac{\sigma_0}{1 + \delta^2}. \quad (1.42)$$

On pose également  $T = L_{\text{op}}/c$  ( $T$  est le temps de parcours de la cavité par un photon). On obtient finalement les équations d'évolution suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{E}_1}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2}\tilde{E}_1 + i\frac{\tilde{m}_1}{2}\tilde{E}_2 - i\frac{\Omega}{2}\tilde{E}_1 + \frac{\sigma l}{2T}(1 - i\delta)N_0\tilde{E}_1 + \frac{\sigma l}{2T}(1 - i\delta)N_1\tilde{E}_2, \\ \frac{d\tilde{E}_2}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2}\tilde{E}_2 + i\frac{\tilde{m}_2}{2}\tilde{E}_1 + i\frac{\Omega}{2}\tilde{E}_2 + \frac{\sigma l}{2T}(1 - i\delta)N_0\tilde{E}_2 + \frac{\sigma l}{2T}(1 - i\delta)N_2\tilde{E}_1, \\ \frac{\partial N}{\partial t} = W - \frac{N}{T_1} - \frac{aN}{2T_1} \left| \tilde{E}_1 e^{-ikz} + \tilde{E}_2 e^{ikz} \right|^2. \end{array} \right. \quad (1.43)$$

On identifie sur les équations d'évolution des champs (première et deuxième lignes de 1.43) cinq termes qui influencent cette évolution. Le premier et le quatrième termes représentent respectivement les pertes et le gain du laser. Le troisième terme traduit l'effet d'une rotation de la cavité (effet Sagnac). Enfin, les second et cinquième termes sont des termes de couplage entre les modes contrarotatifs. Le second est un terme de couplage linéaire, induit par les éléments optiques de la cavité passive (rétrodiffusion). Le cinquième est un terme de couplage non linéaire induit par les modulations spatiales du gain. Il peut s'interpréter de la manière suivante : l'intensité résultant de l'interférence entre les deux modes contrarotatifs est modulée le long de l'axe de propagation à la fréquence spatiale  $2k$  ; il en résulte, par émission stimulée, l'existence d'un réseau d'inversion de population à cette même fréquence spatiale  $2k$  ; en particulier, ce réseau est susceptible de coupler entre eux, par diffraction, les modes contrarotatifs, qui ont pour vecteurs d'ondes respectifs  $+k$  et  $-k$ . On verra plus loin dans ce mémoire que ces effets de couplage entre les modes contrarotatifs jouent un rôle important dans la dynamique du laser en anneau à état solide.

L'équation d'évolution de la densité d'inversion de population (troisième ligne de 1.43) comporte quant à elle successivement un terme de pompage optique (premier terme), un terme d'émission spontanée (deuxième terme) et un terme d'émission stimulée (troisième terme). L'expression de ce dernier terme fait explicitement apparaître la dépendance spatiale issue de l'interférence entre les modes contrarotatifs, qui est en particulier à l'origine de l'existence du réseau d'inversion de population mentionné ci-dessus.

#### Séparation amplitude-phase

Le système d'équations 1.43, qui porte sur des fonctions à valeurs complexes, peut être transformé en un système d'équations à valeurs réelles, au prix d'une augmentation

du nombre d'équations. On distingue à cette fin le module et l'argument des amplitudes complexes lentement variables  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$  :

$$\tilde{E}_{1,2}(t) = E_{1,2}(t)e^{-i\varphi_{1,2}(t)} . \quad (1.44)$$

On pose également  $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Enfin, on sépare le module et l'argument des coefficients de rétrodiffusion  $\tilde{m}_1$  et  $\tilde{m}_2$  comme suit :

$$\tilde{m}_{1,2} = m_{1,2} e^{i(-1)^{2,1}\theta_{1,2}} . \quad (1.45)$$

Le système d'équations 1.43 devient, avec ces notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_1}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2}E_1 - \frac{m_1}{2}E_2 \sin(\Phi + \theta_1) + \frac{\sigma}{2T} \left( E_1 \int_0^l N dz + E_2 \int_0^l N \cos(2kz + \Phi) dz \right) , \\ \frac{dE_2}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2}E_2 + \frac{m_2}{2}E_1 \sin(\Phi + \theta_2) + \frac{\sigma}{2T} \left( E_2 \int_0^l N dz + E_1 \int_0^l N \cos(2kz + \Phi) dz \right) , \\ \frac{d\varphi_1}{dt} E_1 = -\frac{m_1}{2}E_2 \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{\Omega}{2}E_1 - \frac{\sigma}{2T}E_2 \int_0^l N \sin(2kz + \Phi) dz , \\ \frac{d\varphi_2}{dt} E_2 = -\frac{m_2}{2}E_1 \cos(\Phi + \theta_2) - \frac{\Omega}{2}E_2 + \frac{\sigma}{2T}E_1 \int_0^l N \sin(2kz + \Phi) dz . \\ \frac{\partial N}{\partial t} = W - \frac{N}{T_1} - \frac{a}{2T_1}N [E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(2kz - \Phi)] . \end{array} \right. \quad (1.46)$$

Pour obtenir ces équations, on a séparé les égalités sur la partie réelle et la partie imaginaire des équations d'évolution des champs. Afin d'alléger les écritures et en anticipant sur la suite (voir partie 1.2.1), on a également supposé l'absence de désaccord à résonance ( $\delta = 0$ ).

### Suppression de la dépendance spatiale dans le cas d'un faible taux de pompe

En introduisant le taux de pompage optique et la densité d'inversion de population au seuil du laser, notés respectivement  $W_{\text{seuil}}$  et  $N_{\text{seuil}}$  (vérifiant la relation  $N_{\text{seuil}} = T_1 W_{\text{seuil}}$ ), ainsi que l'excès relatif de pompe au-dessus du seuil, noté  $\eta$  et défini par :

$$\eta = \frac{W - W_{\text{seuil}}}{W_{\text{seuil}}} , \quad (1.47)$$

l'équation d'évolution de la densité d'inversion de population (troisième ligne de 1.43) devient :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{N_{\text{seuil}}(1 + \eta)}{T_1} - \frac{N}{T_1} - \frac{aN}{2T_1} \left| \tilde{E}_1 e^{-ikz} + \tilde{E}_2 e^{ikz} \right|^2 . \quad (1.48)$$

On se propose de montrer que, si l'on fait de plus l'hypothèse d'un faible taux de pompage optique ( $\eta \ll 1$ ), il est possible de tirer parti du fait que la taille de la zone de gain ( $\simeq 1$  mm) est très grande devant la longueur d'onde ( $\simeq 1$   $\mu\text{m}$ ) pour réduire le système d'équation 1.43, dépendant des variables d'espace et de temps, à un système d'équations ne dépendant plus que du temps. Pour cela, on remarque que l'écart relatif entre la densité

d'inversion de population  $N$  et sa valeur au seuil du laser  $N_{\text{seuil}}$  est au plus de l'ordre de grandeur de  $\eta$ , ce qui s'écrit :

$$\frac{|N_{\text{seuil}} - N|}{N_{\text{seuil}}} \lesssim \eta. \quad (1.49)$$

Par ailleurs, comme on le verra plus loin dans ce mémoire, l'intensité normalisée du laser  $a\mathbf{E}^2$  est de l'ordre de grandeur de  $\eta$ . En se limitant au premier ordre en  $\eta$ , l'équation 1.48 s'écrit alors :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{N_{\text{seuil}}(1 + \eta)}{T_1} - \frac{N}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} \left| \tilde{E}_1 e^{-ikz} + \tilde{E}_2 e^{ikz} \right|^2. \quad (1.50)$$

Les équations d'évolution temporelle de la moyenne spatiale de  $N$  (entre  $z = 0$  et  $z = l$ ), notée  $N_0$ , et de l'harmonique spatiale à l'ordre  $\pm 2k$  de  $N$  (entre  $z = 0$  et  $z = l$ ), notée  $N_{1,2}$ , s'écrivent alors :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dN_0}{dt} = W - \frac{N_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} \left( |\tilde{E}_1|^2 + |\tilde{E}_2|^2 \right), \\ \frac{dN_{1,2}}{dt} = -\frac{N_{1,2}}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} \tilde{E}_{1,2} \tilde{E}_{2,1}^* . \end{cases}} \quad (1.51)$$

Pour obtenir ces équations, on a pris la valeur moyenne et l'harmonique spatiale à l'ordre  $\pm 2k$  de l'équation 1.50. L'hypothèse fondamentale utilisée ici est le fait que la taille de la zone de gain est très supérieure à la longueur d'onde, ce qui permet de négliger les effets de bords dans les intégrales. On constate sur les équations 1.51 que la variable  $z$  a effectivement été supprimée, la fonction  $N(z, t)$  ayant été remplacée par les fonctions  $N_0(t)$  et  $N_1(t) = N_2^*(t)$ . Cette simplification joue un rôle fondamental aussi bien dans notre traitement analytique que dans nos simulations numériques<sup>14</sup>. Il convient de noter que la dépendance spatiale peut également être supprimée des équations d'évolution des champs du système 1.46 grâce aux relations suivantes :

$$\frac{1}{l} \int_0^l N \cos(2kz + \Phi) dz = \Re(N_1 e^{i\Phi}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{l} \int_0^l N \sin(2kz + \Phi) dz = \Im(N_1 e^{i\Phi}). \quad (1.52)$$

REMARQUE : dans le cas où l'hypothèse stipulant que la taille du milieu à gain est très supérieure à la longueur d'onde n'est pas vérifiée (par exemple dans le cas où le milieu à gain est un puits quantique, dont l'épaisseur est de l'ordre de quelques nm), le calcul effectué ici n'est bien évidemment plus valable, ce qui oblige alors à conserver explicitement la dépendance spatiale longitudinale dans les équations du laser.

### Équations pour la somme et la différence des intensités

Dans certaines situations, il est commode d'introduire les variables somme et différence des intensités des champs, définies par :

$$Y = E_1^2 + E_2^2 \quad \text{et} \quad X = E_1^2 - E_2^2. \quad (1.53)$$

<sup>14</sup>En effet, plusieurs milliers d'équations différentielles temporelles auraient été nécessaires pour décrire point par point les modulations spatiales de  $N$  le long du milieu à gain tandis que seules deux suffisent dans le cas du système 1.51 !

On montre (voir annexe A.1) que le système d'équations 1.43 s'écrit à l'aide de ces nouvelles variables (et en faisant de plus les hypothèses simplificatrices  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ,  $\eta \ll 1$  et  $\delta = 0$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Y} = -Y \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} \left[ m_1 \sin(\Phi + \theta_1) - m_2 \sin(\Phi + \theta_2) - \frac{2\sigma l}{T} \Re(N_1 e^{i\Phi}) \right] \\ \dot{X} = -X \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} [m_1 \sin(\Phi + \theta_1) + m_2 \sin(\Phi + \theta_2)] \\ \dot{\Phi} = \Omega - \frac{m_1}{2} \sqrt{\frac{Y-X}{Y+X}} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{m_2}{2} \sqrt{\frac{Y+X}{Y-X}} \cos(\Phi + \theta_2) - \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \frac{\sigma l}{T} \Im(N_1 e^{i\Phi}) \\ \dot{N}_0 = W - \frac{N_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} Y \\ \dot{N}_1 = -\frac{N_1}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \sqrt{Y^2 - X^2} e^{-i\Phi} \end{array} \right. \quad (1.54)$$

## Conclusion

On dispose, grâce à une série d'approximations adaptées au laser en anneau à état solide, d'un modèle permettant de décrire, comme on va le voir, la riche dynamique de ce système, sans pour autant s'embarasser de détails inutilement complexes.

Mentionnons, pour finir et de manière non exhaustive, quelques axes d'amélioration possible de ce modèle, à savoir la prise en compte de plusieurs modes longitudinaux [31], la prise en compte des effets liés à la structure transverse des champs, la prise en compte des effets liés aux variations spatiales du pompage optique, la prise en compte de l'existence d'une deuxième raie d'émission laser [95] ou la modélisation des effets de bruits (bruits mécaniques, bruit quantique [101], bruit lié au pompage optique...).

Nous allons toutefois voir dans la suite de ce mémoire qu'en dépit des nombreuses approximations faites dans ce chapitre, le système d'équations 1.43 permet une description riche et précise de la plupart des comportements dynamiques du laser en anneau à état solide.

## 1.2 Premiers résultats issus du modèle semi-classique

On se propose dans la deuxième partie de ce chapitre d'appliquer les équations obtenues dans la première à l'étude de certaines situations "d'école". L'objet de cette démarche est double. Tout d'abord, elle propose au lecteur une mise en application progressive de notre formalisme. D'autre part, elle tente de dégager, sur la base d'arguments physiques simples, les principaux enjeux qui régissent la dynamique du laser en anneau à état solide sans pour autant entrer dans des détails trop calculatoires (une analyse plus complète sera proposée au chapitre suivant).

On s'intéressera dans ce qui suit successivement :

- à l'étude de la susceptibilité induite par un désaccord à résonance ;
- à l'étude du laser monomode unidirectionnel ;

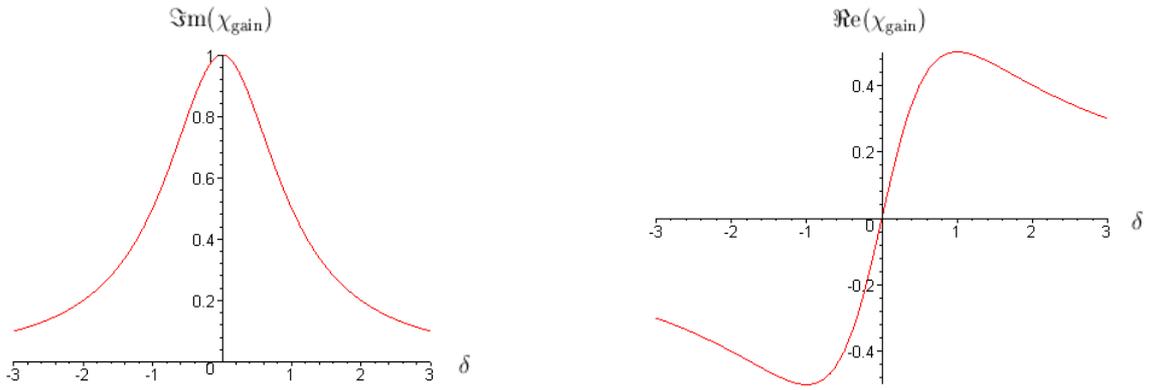


FIGURE 1.3 – Courbes de réponse atomique en fonction du désaccord à résonance  $\delta$  : la partie imaginaire de  $\chi_{\text{gain}}$  donne le gain en amplitude et la partie réelle la dispersion d'indice associée. La susceptibilité diélectrique a été normalisée de manière à avoir  $\Im\text{m}(\chi_{\text{gain}}) = 1$  quand  $\delta = 0$ .

- à l'étude simplifiée des effets du réseau d'inversion de population sur la compétition entre modes ;
- à l'étude simplifiée des effets de la rétrodiffusion sur les intensités puis sur la réponse en fréquence du laser en rotation lorsque le couplage amplitude-phase est négligé.

### 1.2.1 Effet du désaccord à résonance

Le désaccord à résonance (écart entre la fréquence propre du mode considéré et la fréquence pour laquelle le gain est maximum) est pris en compte dans nos équations à travers le paramètre  $\delta$  (défini en 1.31). Ce dernier apparaît explicitement dans les équations 1.43, et également implicitement à travers les paramètres  $\sigma$  (section efficace d'émission laser) et  $a$  (paramètre de saturation). Il est commode pour étudier les effets de  $\delta$  d'introduire la susceptibilité diélectrique complexe associée au gain du laser, que l'on note  $\chi_{\text{gain}}$  et que l'on définit par :

$$\tilde{P}_{1,2} = \varepsilon_0 \chi_{\text{gain}} \left( \tilde{E}_{1,2} + \frac{N_{1,2}}{N_0} \tilde{E}_{2,1} \right). \quad (1.55)$$

De l'expression 1.34 de  $\tilde{P}_{1,2}$ , on déduit :

$$\chi_{\text{gain}} = \frac{ild^2 N_0}{\varepsilon_0 \hbar \gamma_{ab} L (1 + i\delta)}. \quad (1.56)$$

La partie imaginaire de  $\chi_{\text{gain}}$  décrit le gain en amplitude reçu par le champ, tandis que la partie réelle décrit la variation d'indice optique qui en résulte. On a tracé en figure 1.3 les fonctions  $\Im\text{m}(\chi_{\text{gain}})$  et  $\Re\text{e}(\chi_{\text{gain}})$  en fonction de  $\delta$ . On observe un comportement de type résonnant pour le gain en amplitude (centré sur  $\delta = 0$  et de largeur unité) et de type dispersif pour l'indice optique. Ces comportements sont caractéristiques du mécanisme d'amplification laser [88].

Afin d'évaluer l'importance du désaccord à résonance, on se propose d'estimer l'ordre de grandeur de  $\delta$ . Pour cela, on considère que le mode qui oscille dans la cavité est celui dont le gain est maximal. Cela implique que la différence entre la fréquence de ce mode et la valeur du maximum de la courbe de gain est inférieure à la moitié de l'intervalle spectral libre, ce qui donne, pour une cavité de longueur optique 30 cm,  $|\omega_c - \omega_0| < 3.10^9 \text{ rad.s}^{-1}$ . Par ailleurs, on sait que  $\gamma_{ab} = 1/T_2$  est de l'ordre de 100 GHz. Le désaccord relatif  $\delta$  est donc inférieur à 3%, ce qui nous amènera à poser  $\delta = 0$  dans la suite de ce mémoire. En particulier, les paramètres  $\sigma$  et  $a$  sont, dans le cadre de cette hypothèse, considérés comme des constantes.

### 1.2.2 Quelques mots sur l'étude des équations différentielles couplées

Il n'est pas possible d'exprimer analytiquement l'ensemble des solutions du système d'équations différentielles à plusieurs variables couplées 1.46. Certaines solutions particulières peuvent toutefois être étudiées, parmi lesquelles les solutions stationnaires, c'est-à-dire celles qui, après un régime transitoire, deviennent indépendantes du temps. D'un point de vue plus formel, si l'on considère un système de  $N$  équations différentielles du premier ordre en temps  $(X_1, \dots, X_N)$ , on appelle solution stationnaire de ce système tout  $N$ -uplet vérifiant la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_N \end{pmatrix} = 0. \quad (1.57)$$

Pour qu'une solution stationnaire corresponde à un état physique du système, il faut qu'elle soit stable sous l'effet d'une petite perturbation. On suppose donc que le  $N$ -uplet  $(X_1, \dots, X_N)$ , vérifiant la condition 1.57, est soumis à une variation infinitésimale des paramètres, notée  $(x_1, \dots, x_N)$ . En effectuant dans le système d'équations initial la substitution  $(X_1, \dots, X_N) \rightarrow (X_1 + x_1, \dots, X_N + x_N)$  et en se limitant au premier ordre en  $x_1, \dots, x_N$ , on obtient une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}. \quad (1.58)$$

Les solutions de cette équation sont les combinaisons linéaires des fonctions  $\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_N)$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  sont les valeurs propres de la matrice  $M$ . La condition de stabilité d'une solution stationnaire donnée s'écrit alors :

$$\Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \in [1, N]. \quad (1.59)$$

Lorsque la solution étudiée est stable, la partie imaginaire des valeurs propres de  $M$  donne les fréquences angulaires propres d'oscillation du système, qui sont également les fréquences angulaires des oscillations qui accompagnent l'amortissement des éventuelles perturbations.

La méthode décrite ici peut être étendue à l'étude des régimes permanents, c'est-à-dire les régimes pour lesquels certains paramètres, après une période transitoire, oscillent à une fréquence constante grande devant l'inverse des temps caractéristiques de variation des autres paramètres du système. Il est alors possible, par un procédé de moyenne temporelle,

d'obtenir des équations différentielles pour les paramètres lentement variables, équations dont on cherche ensuite les solutions stationnaires stables.

Ce sont ces méthodes que l'on se propose d'utiliser pour l'étude analytique des équations du laser en anneau à état solide.

### 1.2.3 Étude du cas monomode unidirectionnel

On s'intéresse ici au cas où seul un mode est susceptible d'osciller dans la cavité. Cette situation peut par exemple survenir si l'on insère une diode optique dans le laser en anneau [102]. Naturellement, une telle configuration n'est pas utilisable en tant que gyro-laser. Son étude présente toutefois l'intérêt de mettre en évidence certains comportements importants du laser à état solide, qui perdurent au-delà du cas monomode unidirectionnel (pics de démarrage, oscillations de relaxation...).

#### Mise en équation

Notre point de départ est le système d'équations semi-classiques 1.43. On suppose que seul le mode  $\tilde{E}_1$  est susceptible d'exister. On ne prend donc pas en considération l'équation d'évolution de  $\tilde{E}_2$ , ni les termes de couplage entre modes. Avec ces hypothèses, l'évolution de l'amplitude et celle de la phase de  $\tilde{E}_1$  sont découplées, et l'on ne s'intéressera dans ce qui suit qu'à la première. Notre système est donc décrit par les deux équations différentielles réelles suivantes (où l'on a posé  $E = |\tilde{E}_1|$ ) :

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = -\frac{\gamma}{2}E + \frac{\sigma l}{2T}NE, \\ \frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{T_1} - \frac{aE^2N}{2T_1}. \end{cases} \quad (1.60)$$

On remarque que la densité d'inversion de population  $N$  ne dépend plus de  $z$  dans ces équations.

#### Solution nulle, seuil du laser

Un premier couple de solutions stationnaires du système d'équations 1.60 est donné par  $(E = 0, N = WT_1)$ . Cette solution, appelée solution nulle, correspond à l'absence d'émission laser. On montre [103] qu'elle est stable lorsque  $\gamma > WT_1\sigma l/T$ , et instable dans le cas contraire. Le seuil du laser  $W_{\text{seuil}}$  correspond à la valeur critique du taux de pompage optique  $W$  au-delà de laquelle la solution nulle devient instable, ce qui s'écrit :

$$W_{\text{seuil}} = \frac{\gamma T}{\sigma l T_1}. \quad (1.61)$$

L'excès relatif de pompe au-dessus du seuil, noté  $\eta$  et défini en 1.47, permet de faire directement le lien entre les équations et le dispositif expérimental, sans avoir à modéliser dans les détails le processus de pompage optique. Pour cela, il suffit de mesurer le courant d'alimentation de la diode de pompe ( $I$ ), ainsi que ce même courant respectivement au seuil du laser ( $I_{s1}$ ) et au seuil de la diode de pompe ( $I_{s2}$ ). Une bonne estimation du paramètre  $\eta$  est alors donnée par  $\eta = (I - I_{s1})/(I_{s1} - I_{s2})$ .

### Solution stationnaire non nulle, oscillations de relaxation

Dans le cas où  $W > W_{\text{seuil}}$ , la seule solution stationnaire qui n'est pas *a priori* instable correspond à  $E \neq 0$ , soit :

$$\begin{cases} 0 = -\gamma + \frac{\sigma l}{T} N, \\ 0 = N_{\text{seuil}}(1 + \eta) - N - \frac{aE^2 N}{2}, \end{cases} \quad (1.62)$$

d'où le couple de solutions suivant :

$$\begin{cases} N = N_{\text{seuil}}, \\ aE^2 = 2\eta, \end{cases} \quad (1.63)$$

Si l'on effectue l'étude de stabilité de cette solution sous l'effet d'une perturbation infinitésimale  $(e, n)$ , on obtient :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma l E / (2T) \\ -aEN/T_1 & -(1 + \eta)/T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}. \quad (1.64)$$

Le discriminant du polynôme caractéristique de la matrice  $2 \times 2$  ci-dessus s'écrit :

$$\Delta = \frac{(1 + \eta)^2 - 4\gamma\eta T_1}{T_1^2}. \quad (1.65)$$

On utilise les ordres de grandeur suivants, caractéristiques de nos situations expérimentales (voir plus loin) :

$$\gamma = 10^7 \text{ s}^{-1}, \quad T_1 \simeq 200 \mu\text{s} \quad \text{et} \quad 0,1 \lesssim \eta < 1. \quad (1.66)$$

Le discriminant se réduit alors à  $\Delta \simeq -4\gamma\eta/T_1$ , d'où les valeurs propres recherchées :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(1 + \eta)}{2T_1} \pm i\sqrt{\frac{\gamma\eta}{T_1}}. \quad (1.67)$$

L'inégalité  $\Re(\lambda_{1,2}) < 0$  garantit la stabilité de la solution étudiée sur toute sa plage d'existence (c'est-à-dire pour  $W > W_{\text{seuil}}$ ). La partie imaginaire de  $\lambda_{1,2}$  fait apparaître une fréquence caractéristique  $f_r$ , connue sous le nom de fréquence de relaxation du laser et donnée par :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma\eta}{T_1}}. \quad (1.68)$$

L'existence de cette fréquence est caractéristique des lasers Nd-YAG (plus précisément des lasers de classe B, c'est-à-dire des lasers pour lesquels l'inertie du milieu à gain joue un rôle important [104]). La valeur absolue de la partie réelle de  $\lambda_{1,2}$  varie en  $1 + \eta$ , ce qui veut dire en particulier que les perturbations sont amorties d'autant plus vite que le taux de pompe augmente. Expérimentalement, cela se traduit donc par la présence dans le spectre de bruit en fréquence du laser d'un pic dont la position et la largeur augmentent avec le taux de pompe. La mesure de la fréquence de relaxation constitue en pratique un outil commode de détermination du taux de pertes moyen de la cavité  $\gamma$ , comme on le verra plus loin dans ce mémoire (partie 4.2.1).

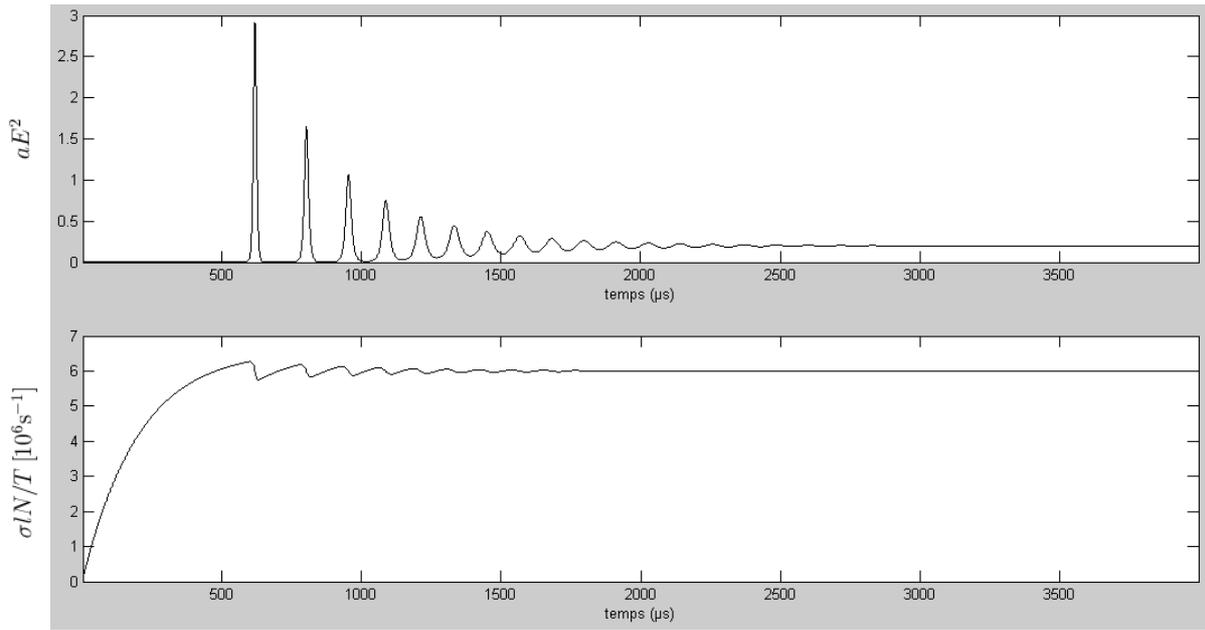


FIGURE 1.4 – Démarrage du laser monomode. Ces courbes sont issues de l'intégration numérique du système d'équations 1.60 avec un pas temporel de  $1 \mu\text{s}$  et un bruit en amplitude implémenté sous la forme d'une constante aléatoire ajoutée à chaque pas à la valeur de  $E$ . La force de ce bruit est fixée empiriquement de manière à avoir un effet significatif mais pas prépondérant sur la dynamique du laser. La courbe du haut représente  $aE(t)^2$  (sans dimension) et celle du bas  $\sigma lN(t)/T$  (exprimée en  $10^6 \text{ s}^{-1}$ ). Les paramètres utilisés sont  $\gamma = 6 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_1 = 200 \mu\text{s}$  et  $\eta = 0,1$ . Avec ces paramètres, la valeur théorique de la fréquence de relaxation  $f_r$  est égale à environ 8,7 kHz. On mesure sur les figures ci-dessus les valeurs stationnaires suivantes :  $aE^2 = 0,2$ ,  $\sigma lN/T = 6 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$  et  $f_r \simeq (1/115 \mu\text{s}) \simeq 8,7 \text{ kHz}$ , en très bon accord avec les prédictions théoriques (voir texte).

### Étude numérique du démarrage du laser

On a représenté en figure 1.4 le résultat de l'intégration numérique du système 1.60, avec des paramètres compatibles avec les ordres de grandeur 1.66. Le comportement observé (pics de démarrage puis relaxation vers un état stationnaire) est là encore caractéristique des lasers de classe B (voir par exemple [105]). Les mesures effectuées à partir de ces simulations sont en très bon accord avec les prédictions analytiques : la valeur stationnaire de  $aE^2$  est bien égale à  $2\eta$ , celle de  $\sigma lN/T$  est bien égale à  $\gamma$  et la période mesurée des oscillations de relaxation observées est bien compatible avec la valeur théorique de  $1/f_r$  donnée par l'équation 1.68.

### 1.2.4 Modèle simplifié de la compétition entre modes

On considère dorénavant que les deux modes contrarotatifs sont *a priori* susceptibles d'osciller ensemble dans la cavité laser. Le phénomène de compétition entre modes apparaît alors, à cause du fait que les deux ondes se partagent les mêmes atomes amplificateurs (le Nd-YAG est un milieu à gain à élargissement homogène). Comme on va le voir,

cette compétition est exacerbée par la modulation spatiale du gain (ou réseau d'inversion de population). On se propose dans cette partie de décrire ce phénomène de la manière la plus simplifiée possible. On suppose à cette fin que le laser est au repos ( $\Omega = 0$ ) et que les couplages linéaires dus à la cavité passive (rétrodiffusion) sont inexistantes ( $m_1 = m_2 = 0$ ). La différence de phase  $\Phi$  est supposée constante dans le temps. Les équations du laser 1.46 s'écrivent avec ces hypothèses :

$$\begin{cases} \frac{dE_1}{dt} = -\frac{\gamma}{2}E_1 + \frac{\sigma}{2T} \left( E_1 \int_0^l N dz + E_2 \int_0^l N \cos(2kz + \Phi) dz \right) , \\ \frac{dE_2}{dt} = -\frac{\gamma}{2}E_2 + \frac{\sigma}{2T} \left( E_2 \int_0^l N dz + E_1 \int_0^l N \cos(2kz + \Phi) dz \right) , \\ \frac{\partial N}{\partial t} = W - \frac{N}{T_1} - \frac{a}{2T_1} N [E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(2kz + \Phi)] . \end{cases} \quad (1.69)$$

### Effet du réseau d'inversion de population lorsque $\gamma T_1 \ll 1$

On supposera dans cette partie (et dans cette partie seulement) que la durée de vie du niveau supérieur de la transition laser est très courte devant celle du photon dans la cavité (ce qui s'écrit avec nos notations  $\gamma T_1 \ll 1$ ). Lorsque cette hypothèse est vérifiée, la densité d'inversion de population suit adiabatiquement les variations des champs, ce qui conduit, à partir de la troisième équation de 1.69, à :

$$N = \frac{WT_1}{1 + (a/2)[E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(2kz + \Phi)]} . \quad (1.70)$$

Il convient de noter ici que cette situation n'est pas celle qui se produit dans les lasers de type Nd-YAG (pour lesquels, on le rappelle, l'inertie du milieu à gain ne peut être négligée). Toutefois, son étude permet de mettre en évidence l'effet déstabilisateur du réseau d'inversion de population en reliant nos équations semi-classiques à un modèle connu de compétition entre modes [103]. On effectue pour cela une hypothèse supplémentaire, à savoir celle du faible taux de pompage optique ( $\eta \ll 1$ ). On peut alors écrire  $N$  sous la forme linéarisée suivante :

$$N = WT_1 \left[ 1 - \frac{a(E_1^2 + E_2^2)}{2} - aE_1 E_2 \cos(2kz + \Phi) \right] , \quad (1.71)$$

d'où le calcul des harmoniques spatiales :

$$\int_0^l N dz = lWT_1 \left[ 1 - \frac{a(E_1^2 + E_2^2)}{2} \right] \quad \text{et} \quad \int_0^l N \cos(2kz + \Phi) dz = -lWT_1 \frac{aE_1 E_2}{2} ,$$

et finalement la forme suivante pour le système d'équations 1.69 :

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = I_1(\alpha - \beta I_1 - \theta I_2) , \\ \frac{dI_2}{dt} = I_2(\alpha - \beta I_2 - \theta I_1) , \end{cases} \quad (1.72)$$

où l'on a posé :

$$I_{1,2} = aE_{1,2}^2 , \quad \alpha = \frac{\sigma l T_1 W}{T} - \gamma \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\theta}{2} = \frac{\sigma l T_1 W}{T} . \quad (1.73)$$

On rappelle ici les principaux résultats de l'étude du système d'équations 1.72 [103]. Lorsque la constante de couplage  $C$ , définie comme le carré du rapport du coefficient de saturation croisée au coefficient d'autosaturation, soit avec nos notations  $C = (\theta/\beta)^2$ , est inférieure à 1, les deux modes d'intensité  $I_1$  et  $I_2$  coexistent malgré la compétition pour le gain. En revanche, lorsque  $C > 1$ , l'un des modes monopolise tout le gain disponible au détriment de l'autre, dont l'intensité en régime stationnaire est alors égale à zéro.

Dans le cas étudié ici, on vient de montrer que  $\theta = 2\beta$ , c'est-à-dire  $C = 4$ . Les deux modes contrarotatifs sont donc trop fortement couplés par le gain pour osciller simultanément dans la cavité. Il convient de noter ici le rôle prépondérant joué par le réseau d'inversion de population, c'est-à-dire le terme en  $\int N \cos(2kz + \Phi_{st}) dz$ . En effet, en l'absence de ce terme dans les équations (cas où les deux modes, pour une raison ou pour une autre, n'interfèrent pas), on aurait  $\theta = \beta$  donc  $C = 1$ , ce qui correspondrait au cas limite de stabilité de l'émission bidirectionnelle.

En conclusion, on a montré que lorsque le réseau d'inversion de population suit adiabatiquement les variations du champ (ce qui n'est pas le cas du Nd-YAG, mais plutôt des lasers à gaz homogènes ou des lasers à semi-conducteurs), la constante de couplage est égale à 4, alors qu'elle n'est plus égale qu'à 1 en l'absence de ce réseau. Ce dernier a donc un effet déstabilisateur sur l'émission bidirectionnelle. On va voir dans ce qui suit que le fait de tenir compte de l'inertie de l'inversion de population ne change pas cette conclusion.

### Cas (plus réaliste) d'un milieu à gain possédant de l'inertie ( $\gamma T_1 \gg 1$ )

On revient maintenant au cas du laser en anneau utilisant comme un milieu amplificateur le Nd-YAG, pour lequel on a  $\gamma T_1 \gg 1$ . L'hypothèse de suivi adiabatique des champs par la densité d'inversion de population n'est alors plus valable. Plutôt que de présenter le calcul complet des solutions stationnaires de ce système et leur étude de stabilité (dont il sera question au chapitre suivant), on fait le choix de mener ici une discussion plus qualitative. Dans cet esprit, nous admettons qu'il est possible, en tirant parti de l'inégalité  $\gamma T_1 \eta \gg 1$ , de séparer les perturbations auxquelles sont soumises les solutions stationnaires en perturbations lentes (oscillant à une fréquence proche de  $\sqrt{\gamma \eta / T_1}$ ) et perturbations rapides (oscillant à une fréquence proche de  $\gamma \eta$ ) [29]. Le premier type de perturbation est caractéristique des processus transitoires amortis (voir le cas monomode unidirectionnel, partie 1.2.3), ce qui permet de restreindre l'étude de stabilité aux perturbations rapides. De plus, étant donnée l'inégalité  $\gamma \eta \gg 1/T_1$ , ces dernières oscillent trop rapidement pour affecter la densité d'inversion de population, qui reste donc égale à sa valeur stationnaire, donnée par :

$$N_{st} = \frac{WT_1}{1 + (a/2)[E_{1st}^2 + E_{2st}^2 + 2E_{1st}E_{2st} \cos(2kz + \Phi_{st})]} , \quad (1.74)$$

où l'indice "st" désigne la valeur à l'état stationnaire. On définit alors la constante  $\tilde{N}$ , dont on peut montrer qu'elle est toujours négative<sup>15</sup>, par :

$$\tilde{N} = \int_0^l N_{\text{st}} \cos(2kz + \Phi_{\text{st}}) dz . \quad (1.76)$$

Avec cette notation et en négligeant pour l'instant la rétrodiffusion, on peut réécrire, à partir du système 1.69, le gain effectif  $\alpha_{1,2}$  fourni au champ  $E_{1,2}$  sous la forme suivante :

$$\alpha_{1,2} = \frac{\sigma}{2T} \left( \int_0^l N_{\text{st}} dz + \frac{E_{2,1\text{st}}}{E_{1,2\text{st}}} \tilde{N} \right) . \quad (1.77)$$

Puisque  $\tilde{N} < 0$ , l'onde ayant la plus forte amplitude possède aussi le gain effectif le plus important. Une petite perturbation ayant tendance à favoriser l'une des deux ondes va donc être amplifiée jusqu'à l'extinction de l'autre. On aboutit ainsi à la même conclusion que dans le cas d'un milieu à gain sans inertie, à savoir que la présence du réseau d'inversion de population a tendance à déstabiliser l'émission bidirectionnelle.

REMARQUE : la raison fondamentale de ce phénomène est que le réseau d'inversion de population est en opposition de phase avec le réseau lumineux qui l'inscrit (c'est-à-dire que là où l'intensité lumineuse est maximale, la densité d'inversion de population est minimale). Cela implique que la partie de l'intensité de chaque mode qui est diffractée sur ce réseau se soustrait à l'intensité de l'autre mode, d'où l'effet déstabilisateur (plus un mode est fort et plus il atténue l'autre). Ce processus joue un rôle important dans la dynamique du laser en anneau à état solide.

### 1.2.5 Étude simplifiée des effets de la rétrodiffusion

On va maintenant s'intéresser au couplage entre modes par rétrodiffusion, dont les effets sur la dynamique du laser sont également importants. Ce couplage est induit, comme on l'a vu (partie 1.1.1), par les inhomogénéités de la permittivité et de la conductivité de la cavité passive. On tente de mettre en évidence dans ce qui suit de la façon la plus simplifiée possible deux de ses principaux effets, à savoir la stabilisation de l'émission bidirectionnelle et le verrouillage en fréquence des modes contrarotatifs.

#### Effet stabilisateur sur les intensités

Si l'on répète le raisonnement effectué précédemment en tenant compte cette fois du couplage par rétrodiffusion, on obtient, toujours à partir du système 1.69 et en remplacement de 1.77, l'expression suivante pour le gain effectif  $\alpha_{1,2}$  fourni à  $E_{1,2}$  :

$$\alpha_{1,2} = \frac{\sigma}{2T} \int_0^l N_{\text{st}} dz + \left[ \frac{\sigma}{T} \tilde{N} + (-1)^{2,1} \frac{m_{1,2}}{2} \sin(\Phi_{\text{st}} + \theta_{1,2}) \right] \frac{E_{2,1\text{st}}}{E_{1,2\text{st}}} . \quad (1.78)$$

<sup>15</sup>En effet, en considérant que la zone de gain est grande devant la longueur d'onde, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{N} &\simeq \frac{kl}{\pi} \int_0^{\pi/k} \frac{WT_1 \cos(2kz + \Phi_{\text{st}}) dz}{1 + aE_{1\text{st}}^2 + aE_{2\text{st}}^2 + aE_{1\text{st}}E_{2\text{st}} \cos(2kz + \Phi_{\text{st}})} \\ &= -2klWT_1 \frac{2 + aE_{1\text{st}}^2 + aE_{2\text{st}}^2 - \sqrt{(2 + aE_{1\text{st}}^2 + aE_{2\text{st}}^2)^2 - aE_{1\text{st}}^2 aE_{2\text{st}}^2}}{aE_{1\text{st}}E_{2\text{st}} \sqrt{(1 + aE_{1\text{st}}^2/2 + aE_{2\text{st}}^2/2)^2 - a^2 E_{1\text{st}}^2 E_{2\text{st}}^2/4}} < 0 . \end{aligned} \quad (1.75)$$

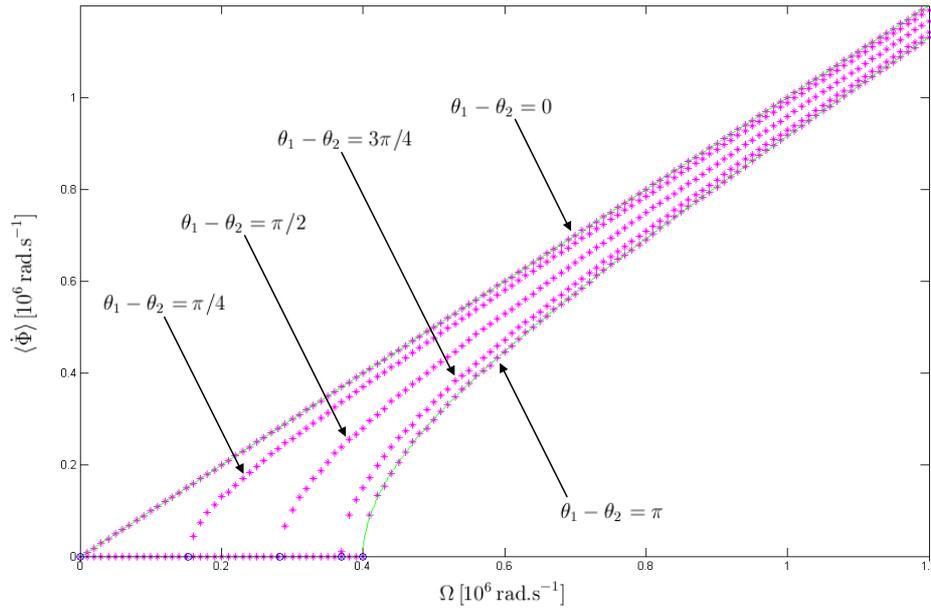


FIGURE 1.5 – Courbes de réponse en fréquence obtenues par intégration numérique du système d'équations 1.79 avec  $m_1 = m_2 = m = 0,4 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$  et pour différentes valeurs du paramètre  $\theta_1 - \theta_2$ . La non-réciprocité en fréquence  $\Omega$  et la valeur moyenne temporelle de la différence de phase  $\langle \dot{\Phi} \rangle$  sont exprimées en  $10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ . Les croix correspondent aux résultats des simulations numériques, tandis que les lignes pleines correspondent respectivement à  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega$  et  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \sqrt{\Omega^2 - m^2}$ .

On voit sur cette expression que le processus décrit précédemment peut s'inverser en présence de rétrodiffusion, à condition que le terme en facteur de  $E_{2,1\text{st}}/E_{1,2\text{st}}$  soit négatif. En effet, dans ce dernier cas, le mode le plus fort possède le gain effectif le plus faible, ce qui entraîne la stabilité de l'émission bidirectionnelle, et ce en dépit de la compétition entre modes exacerbée par le réseau d'inversion de population.

### Conclusion à propos de l'effet des couplages sur les intensités

Il apparaît, au terme de cette première analyse, deux types de couplage entre les modes contrarotatifs qui peuvent influencer fortement la dynamique du laser en anneau à état solide : le couplage non linéaire induit par le réseau d'inversion de population, qui déstabilise l'émission bidirectionnelle, et le couplage linéaire induit par la rétrodiffusion sur les éléments de la cavité passive, qui peut sous certaines conditions s'opposer aux effets du couplage non linéaire et avoir un effet stabilisateur. Une étude plus précise des actions combinées de ces deux formes de couplage sera présentée au chapitre suivant. On va pour l'instant s'intéresser à un deuxième effet important induit par le couplage linéaire, à savoir le verrouillage en fréquence aux basses vitesses de rotation.

### Effet de verrouillage en fréquence

On s'intéresse dans ce qui suit à l'action du couplage par rétrodiffusion sur les phases des champs  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{E}_2$ . Pour cela, on néglige dans ce qui suit l'effet du réseau d'inversion de population sur la réponse en fréquence (ce qui est par exemple légitime dans la limite  $\eta \rightarrow$

0). On suppose également pour simplifier que les amplitudes des champs des deux modes sont constantes et égales<sup>16</sup>. On obtient alors, à partir de 1.46, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{m_1}{2} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{\Omega}{2} , \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{m_2}{2} \cos(\Phi + \theta_2) - \frac{\Omega}{2} . \end{cases} \quad (1.79)$$

Après quelques manipulations trigonométriques, l'équation d'évolution de la différence de phase  $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$  devient :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Omega - \Omega_L \sin(\Phi + \beta) , \quad (1.80)$$

où l'on a posé :

$$\Omega_L = \frac{|m_1 e^{i\theta_1} - m_2 e^{i\theta_2}|}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\pi}{2} + \arg(m_1 e^{i\theta_1} - m_2 e^{i\theta_2}) . \quad (1.81)$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation d'Adler [106], qui initialement a traité le couplage entre oscillateurs électriques. Elle a ensuite été appliquée au traitement du couplage entre modes dans une cavité optique, dont le gyrolaser hélium-néon est un parfait cas d'école [18]. Lorsque  $|\Omega| < \Omega_L$ , cette équation entraîne une réponse en fréquence nulle ( $\langle \dot{\Phi} \rangle = 0$ , zone aveugle). Lorsque  $|\Omega| > \Omega_L$ , on obtient la réponse en fréquence suivante :

$$\langle \dot{\Phi} \rangle = \sqrt{\Omega^2 - m^2} . \quad (1.82)$$

Pour les fortes valeurs de  $|\Omega|$ , l'écart entre la réponse en fréquence et la droite  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega$  est connu sous le nom de déplacement d'Adler. Lorsque  $m_1 = m_2 = m$ , la taille de la zone aveugle, donnée par l'expression 1.81, s'écrit :

$$\Omega_L = m \sin \left| \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right| . \quad (1.83)$$

La taille de la zone aveugle est donc maximale lorsque  $|\theta_1 - \theta_2| = \pi$  et nulle lorsque  $\theta_1 - \theta_2 = 0$ . Afin d'illustrer cette dépendance, on a représenté en figure 1.5 la réponse en fréquence (issue des simulations numériques des équations 1.79) pour  $m_1 = m_2 = m = 0,4 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$  et pour un certain nombre de valeurs de  $\theta_1 - \theta_2$ , reportées dans le tableau ci-dessous avec les valeurs théoriques correspondantes de  $\Omega_L$  prédites par l'équation 1.83.

Valeur de $\theta_1 - \theta_2$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$
Valeur de $\Omega_L$ ( $10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ )	0	0,15	0,28	0,37	0,4

On constate sur la figure 1.5 un bon accord entre les prédictions analytiques et les simulations numériques.

On verra plus loin que la réponse en fréquence du gyrolaser à état solide est en fait relativement différente de ce qui a été présenté dans ce chapitre, en raison d'une part de l'effet des modulations temporelles d'intensité (couplage amplitude-phase) et d'autre part de l'effet du réseau d'inversion de population. On aura également l'occasion de revenir sur l'importance du paramètre  $\theta_1 - \theta_2$  pour la dynamique du laser.

<sup>16</sup>En pratique, les modulations temporelles de l'intensité affectent la réponse en fréquence, ce qui change un peu les résultats présentés ici (voir partie 3.1.4).

### 1.3 Conclusion

On dispose, au terme de ce chapitre, d'un ensemble d'équations différentielles couplées décrivant la dynamique en amplitude et en phase du laser en anneau à état solide. Ces équations vont servir de point de départ pour l'étude des différents régimes de fonctionnement du laser en anneau à état solide menée au chapitre suivant.

De plus, on a tenté de dégager, à partir de ces équations et sans entrer dans des considérations trop quantitatives, certains comportements caractéristiques du laser en anneau à état solide. On s'est pour cela intéressé à des situations simplifiées, afin de mieux faire ressortir les effets des différents paramètres. On récapitule ici les principales conclusions de cette étude :

- le laser en anneau à Nd-YAG, du fait de l'élargissement homogène du milieu à gain et de l'inertie de l'inversion de population, possède une fréquence de relaxation caractéristique dans son spectre de bruit, donnée par  $\omega_r/(2\pi) = \sqrt{\gamma\eta/T_1}$ ; cette fréquence est notamment utile pour évaluer expérimentalement les pertes de la cavité laser ; elle peut également donner lieu à des résonances paramétriques ;
- la compétition entre les modes contrarotatifs, liée à l'élargissement homogène du milieu à gain, est exacerbée par les modulations spatiales de la densité d'inversion de population, qui tendent à empêcher la coexistence des deux modes ;
- à ce couplage entre les modes par le gain s'ajoute le couplage par rétrodiffusion, induit par les éléments de la cavité passive ; ce couplage peut avoir sous certaines conditions un effet stabilisateur sur l'émission bidirectionnelle, ainsi qu'un effet de verrouillage en fréquence des modes contrarotatifs (zone aveugle) ; ces effets dépendent en particulier de la valeur des phases  $\theta_1$  et  $\theta_2$  des coefficients de rétrodiffusion.

L'objet du chapitre suivant est de décrire la dynamique du laser en anneau à état solide résultant de la prise en compte simultanée de ces deux types de couplage.

## Chapitre 2

# Étude théorique de la dynamique du laser en anneau à état solide

On se propose dans ce chapitre de décrire, à partir des équations semi-classiques introduites au chapitre précédent, les principaux régimes de fonctionnement du laser en anneau à état solide. Le système d'équations 1.43 n'est pas, on l'a vu, soluble en général. On s'intéressera donc à certaines situations asymptotiques pour lesquelles des solutions correspondant à des régimes stationnaires ou permanents peuvent être étudiées analytiquement. On fait le choix d'omettre dans le texte la plupart des détails des calculs menant aux résultats présentés. Ces détails font en partie l'objet de l'annexe A. On présente également dans ce chapitre, parallèlement aux résultats analytiques, des courbes issues de l'intégration numérique des équations semi-classiques. Celles-ci permettent d'étendre les prédictions du modèle au-delà des situations asymptotiques. On limitera cette étude au cas des faibles taux de pompage ( $\eta \ll 1$ ), pour lequel la dépendance spatiale des équations du laser peut être éliminée. Cette hypothèse peut sembler contraignante *a priori*. Toutefois, on observe une bonne adéquation entre les résultats expérimentaux et les prédictions analytiques et ceci même quand l'hypothèse  $\eta \ll 1$  n'est plus vérifiée. On étudiera dans une première partie de ce chapitre le comportement du laser à l'arrêt, avant de s'intéresser à la dynamique en rotation. Il convient de noter que l'on désigne le laser dépourvu de non-réciprocité en fréquence (c'est-à-dire correspondant à  $\Omega = 0$ ) par laser à l'arrêt. Dans le cas opposé ( $\Omega \neq 0$ ), on parle de laser en rotation. Cette terminologie est commode dans le contexte de notre étude, même s'il s'agit en fait d'un abus de langage, puisque l'origine de la non-réciprocité en fréquence n'est pas nécessairement une rotation du laser (voir par exemple les chapitres 5 et 6).

Afin de guider le lecteur, on a synthétisé dans le tableau qui suit les différents régimes présentés dans ce chapitre. La colonne de gauche contient la liste des régimes étudiés à l'arrêt. La colonne de droite indique ce que deviennent ces régimes sous l'effet d'une rotation.

Régime étudié à l'arrêt	Régime correspondant en rotation
Bidirectionnel verrouillé en fréquence	Transition bi→unidirectionnel, toujours verrouillé en fréquence
Unidirectionnel verrouillé en fréquence, sens d'émission aléatoire	Reste unidirectionnel verrouillé en fréquence, sens d'émission déterminé par $\Omega$
Automodulation des intensités et de la différence de phase	Alternance de trois régimes : automodulation, battement, unidirectionnel

L'étude de stabilité d'une solution stationnaire non nulle quelconque selon la méthode des petites perturbations décrite au chapitre précédent est présentée dans l'annexe A.2. On y utilise comme point de départ le système d'équations 1.54, qui porte sur six variables réelles et dépendant du temps (la somme et la différence des intensités, la différence des phases, la moyenne spatiale de la densité d'inversion de population et les parties réelle et imaginaire de l'harmonique spatiale à l'ordre  $2k$  de la densité d'inversion de population). On y établit l'équation caractéristique de degré 6 (équation A.33) qui décrit la stabilité d'une solution stationnaire non nulle quelconque. Cette équation sera ensuite utilisée pour l'étude des différents régimes stationnaires non nuls.

## 2.1 Étude du laser à l'arrêt

On s'intéresse dans la première partie de ce chapitre à l'étude du laser à l'arrêt, c'est-à-dire en l'absence de non-réciprocité en fréquence. Après l'étude de la solution nulle (qui nous renseigne sur le seuil du laser), on s'intéresse successivement à trois régimes : le régime d'onde stationnaire, le régime unidirectionnel et le régime d'auto-modulation. Les deux premiers sont des régimes stationnaires, et le troisième un régime permanent. Comme on va le voir, ces régimes dépendent des valeurs des différents paramètres du laser, et notamment des forces respectives des couplages par le réseau d'inversion de population et par la rétrodiffusion.

### 2.1.1 Existence et stabilité de la solution nulle : seuil du laser

La première solution stationnaire qu'il est naturel de considérer est la solution correspondant à une intensité totale nulle dans la cavité laser. Plus précisément, cette solution vérifie  $E_{1,2} = 0$ ,  $N_0 = WT_1$  et  $N_1 = 0$ . Il convient de noter que la valeur stationnaire de la différence de phase  $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$  n'est pas contrainte par les équations dans ce cas, et peut prendre *a priori* n'importe quelle valeur. L'étude de stabilité de cette solution sous l'effet d'une petite perturbation est effectuée dans l'annexe A.3. On y montre que la condition de stabilité s'écrit (équation A.41) :

$$\frac{\sigma l}{T} N_0 < \gamma - \sqrt{\frac{m_1 m_2}{2} [1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)]}, \quad (2.1)$$

d'où la densité d'inversion de population au seuil du laser :

$$N_{\text{seuil}} = \frac{T}{\sigma l} \left( \gamma - \sqrt{m_1 m_2} \left| \sin \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right| \right). \quad (2.2)$$

En l'absence de rétrodiffusion ( $m_1 = m_2 = 0$ ), on retrouve la condition de démarrage du laser monomode unidirectionnel 1.61, qui exprime le fait qu'au seuil du laser, le gain non saturé est égal aux pertes. En présence de rétrodiffusion, il apparaît sur l'équation 2.2 que la valeur du seuil du laser est abaissée du fait de la redistribution d'énergie induite par ce couplage. Tout comme l'effet de verrouillage en fréquence des modes contrarotatifs étudié au chapitre précédent, cet effet d'abaissement du seuil est maximal lorsque  $|\theta_1 - \theta_2| = \pi$  et disparaît totalement quelle que soit la valeur de  $m_{1,2}$  lorsque  $\theta_1 - \theta_2 = 0$ .

On supposera dorénavant que le laser est au-dessus de son seuil ( $\eta > 0$ ), ce qui implique en particulier la non-stabilité de la solution nulle étudiée ici.

### 2.1.2 Régime d'émission bidirectionnelle verrouillée en fréquence

Une première solution stationnaire non nulle qu'il est possible d'étudier analytiquement est la solution pour laquelle les intensités des modes contrarotatifs sont à peu près égales. On présente ici les résultats du calcul détaillé dans l'annexe A.4.

#### Existence

On cherche donc une solution du système d'équations 1.54 indépendante du temps et qui vérifie l'inégalité  $|X|/Y \ll 1$  (où l'on rappelle que  $X = E_1^2 - E_2^2$  et  $Y = E_1^2 + E_2^2$ ). On obtient la solution suivante (équations A.52, A.57, A.69 et A.70) :

$$\begin{cases} \frac{aY}{2} = \frac{2\eta}{3} & ; & X = 0 & ; & \tan \Phi = \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{\sin \theta_1 - \sin \theta_2} & ; \\ N_0 = N_{\text{seuil}} \left(1 + \frac{\eta}{3}\right) & ; & N_1 = -\frac{\eta N_{\text{seuil}}}{3} e^{-i\Phi} & , \end{cases} \quad (2.3)$$

où l'on a supposé pour simplifier  $m_1 = m_2 = m$ . Cette solution appelle les commentaires suivants :

- le laser n'utilise pas tout le gain disponible lorsqu'il est dans ce régime ; en effet, la somme des intensités s'écrit  $a(E_1^2 + E_2^2)/2 = 2\eta/3$ , alors que, dans le cas monomode unidirectionnel, on a  $aE^2/2 = \eta$  (voir équation 1.63) ; cela est lié à la structure d'onde stationnaire caractéristique du régime d'émission bidirectionnelle verrouillée en fréquence, qui fait que les zones de gain se trouvant au voisinage d'un nœud participent moins efficacement à l'amplification laser ; dans le cas unidirectionnel, au contraire, la totalité du milieu à gain est saturée de façon uniforme ;
- la différence d'intensité entre les modes contrarotatifs est nulle dans ce régime en l'absence d'effet non réciproque ; cela s'explique par l'absence de facteur permettant de briser la symétrie entre les deux sens de propagation ; cela n'est plus vrai par exemple lorsque  $m_1 \neq m_2$ , ou lorsque le laser est en rotation (voir plus loin) ;
- la différence de phase est indépendante du temps, ce qui correspond à un régime verrouillé en fréquence ; sa valeur est fixée par les coefficients  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ;

- la moyenne spatiale de la densité d'inversion de population est supérieure à sa valeur au seuil ; là encore, cela est lié à la saturation non uniforme du gain ;
- le contraste du réseau d'inversion de population est important dans ce régime ; il est caractérisé par le coefficient  $\eta N_{\text{seuil}}/3$ .

### Stabilité

Les racines du polynôme caractéristique A.33 issu de l'étude de stabilité des solutions stationnaires s'écrivent dans le cas du régime étudié ici (équations A.74, A.77 et A.78) :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2T_1} \pm i\sqrt{\frac{\gamma'\eta}{T_1}} \quad ; \quad \lambda_{3,4} = d \pm iM_0 \quad ; \quad \lambda_5 = -\left(\frac{1}{T_1} - \frac{\gamma'\eta}{3T_1} \frac{d}{d^2 + M_0^2}\right), \quad (2.4)$$

où l'on a utilisé la notation  $\gamma' = \sigma l N_{\text{seuil}}/T$ , ainsi que :

$$d = -\gamma + \frac{\sigma l}{T} N_0 = \frac{\gamma\eta}{3} - m \left| \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right| \quad \text{et} \quad M_0 = \frac{m_1 \cos(\Phi + \theta_1) + m_2 \cos(\Phi + \theta_2)}{2}. \quad (2.5)$$

Le coefficient  $\gamma'$  représente les “pertes effectives” du laser, qui tiennent compte de l'abaissement de la densité d'inversion de population au seuil du laser induit par la rétrodiffusion (équation 2.2). La condition de stabilité du régime d'émission bidirectionnelle verrouillé en fréquence s'écrit  $d < 0$ , soit :

$$\boxed{m \left| \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right| > \frac{\gamma\eta}{3}}. \quad (2.6)$$

Cette condition de stabilité peut s'interpréter comme résultant de la compétition entre deux effets opposés. Le premier (membre de droite de l'inégalité 2.6) est l'effet déstabilisateur du réseau d'inversion de population créé par l'onde stationnaire. Le second (membre de gauche de l'inégalité 2.6) est l'effet stabilisateur du couplage par rétrodiffusion. Ce résultat est en bon accord avec les considérations qualitatives du chapitre précédent.

Une application numérique à partir de la condition 2.6 et en utilisant les ordres de grandeur typiques du gyrolaser à état solide<sup>1</sup> montre qu'une condition nécessaire pour que ce régime soit stable est  $m > 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ . Il est intéressant de comparer ce résultat au cas du gyrolaser à hélium-néon, pour lequel le régime bidirectionnel verrouillé en fréquence étudié ici survient systématiquement à l'arrêt alors que la valeur typique du coefficient de rétrodiffusion n'est que de  $10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ . La différence entre les deux systèmes constatée ici s'explique naturellement par l'élargissement du gain, homogène dans le premier cas et inhomogène dans le second. Elle constitue une bonne illustration du fait que l'on a affaire à deux systèmes physiques très différents, bien qu'ils se ressemblent *a priori*.

### 2.1.3 Étude du régime unidirectionnel à l'arrêt

On s'intéresse maintenant à une deuxième solution stationnaire non nulle, qui correspond à un régime unidirectionnel. On présente ici les résultats des calculs détaillés dans l'annexe A.5 avec en plus l'hypothèse simplificatrice  $m_1 = m_2 = m$ .

<sup>1</sup>On a utilisé ici les valeurs  $\gamma = 30.10^6 \text{ s}^{-1}$  et  $\eta = 0, 1$ .

### Existence

On cherche donc une solution du système d'équations 1.46 indépendante du temps et pour laquelle l'un des modes est fortement atténué par rapport à l'autre, par exemple  $E_1/E_2 \ll 1$ . On montre (condition A.88) qu'une telle solution n'existe que lorsque l'inégalité  $m \ll \gamma\eta$  est vérifiée. Elle s'écrit alors (équations A.82, A.86, A.87 et A.89) :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m}{\gamma\eta} ; \quad aE_2^2 = 2\eta ; \quad \sin(\Phi + \theta_1) = -1 ; \quad N_0 = N_{\text{seuil}} ; \quad N_1 = -\frac{m}{\gamma}N_{\text{seuil}}e^{-i\Phi} . \quad (2.7)$$

On constate que le taux d'extinction d'un mode par rapport à l'autre est donné par la quantité  $m/(\gamma\eta)$ , d'où la condition d'existence  $m \ll \gamma\eta$ . On voit également que, contrairement à la situation du régime d'onde stationnaire, le laser utilise dans le régime étudié ici tout le gain dont il dispose, ce qui se traduit par  $a(E_1^2 + E_2^2)/2 = \eta$  et par  $N_0 = N_{\text{seuil}}$ . Enfin, on note que le réseau d'inversion de population est toujours présent, quoique beaucoup plus faible dans ce régime que dans le régime bidirectionnel<sup>2</sup>. Ce régime diffère donc quelque peu du régime monomode unidirectionnel étudié au chapitre précédent : dans ce dernier cas, l'un des deux sens de propagation est strictement nul (et le réseau d'inversion de population n'existe pas), tandis que, dans le cas étudié ici, l'un des deux sens de propagation est très fortement atténué mais pas réduit à zéro (et la présence du réseau subsiste, même si celui-ci est très faible).

### Stabilité

L'étude de stabilité du régime unidirectionnel à l'arrêt est menée dans l'annexe A.5. La partie imaginaire des racines du polynôme caractéristique A.33 fait apparaître deux fréquences propres, données par (équation A.95) :

$$\omega_{r1} = \sqrt{\frac{\gamma\eta}{T_1}} = \omega_r \quad \text{et} \quad \omega_{r2} = \sqrt{\frac{\gamma\eta}{2T_1}} = \frac{\omega_r}{\sqrt{2}} . \quad (2.8)$$

La première de ces fréquence est la fréquence de relaxation habituelle. La seconde fréquence, différant d'un facteur  $1/\sqrt{2}$ , est caractéristique du régime unidirectionnel étudié ici [45]. Plus généralement, on retiendra que le spectre de bruit du laser en anneau à état solide présente une dynamique riche et fortement dépendante des différents paramètres (y compris la rotation), et qu'il ne se limite en général pas à la simple fréquence de relaxation.

La condition de stabilité s'écrit, pour les faibles valeurs de  $|\theta_1 - \theta_2|$  (condition A.107)<sup>3</sup> :

$$m < \sqrt{\frac{\gamma\eta}{4T_1}} = \frac{\omega_r}{2} . \quad (2.9)$$

Cette condition est compatible avec la condition d'existence du régime unidirectionnel  $m \ll \gamma\eta$ . Ce régime est donc stable dans la limite d'une faible rétrodiffusion. Plus

<sup>2</sup>Plus précisément, le rapport entre l'harmonique spatiale  $N_1$  (représentant l'importance du réseau d'inversion de population) dans le régime étudié ici et son équivalent dans le régime bidirectionnel verrouillé en fréquence est donné par  $m/(\gamma\eta)$ , qui est par hypothèse très petit devant 1.

<sup>3</sup>Lorsque la condition  $|\theta_1 - \theta_2| \ll 1$  n'est pas vérifiée, l'expression de la condition de stabilité est significativement plus compliquée (voir annexe A.5).

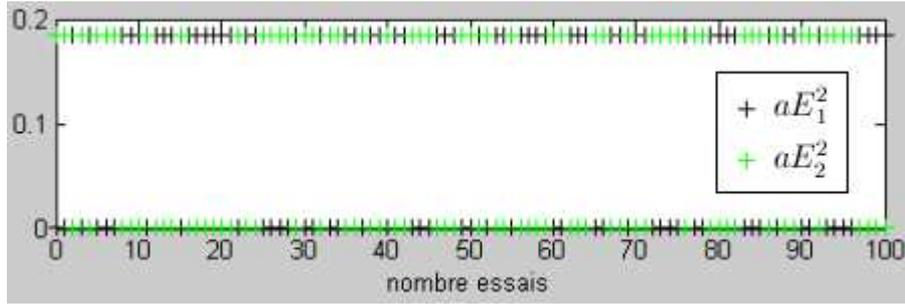


FIGURE 2.1 – Valeur stationnaire de l’intensité des modes contrarotatifs pour 100 tirages successifs. Les points sont issus de l’intégration numérique des équations semi-classiques du laser entre 0 et 1 ms, avec un pas de  $0,1 \mu\text{s}$  et avec les paramètres du laser suivants :  $\gamma = 6.10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_1 = 200 \mu\text{s}$ ,  $\eta = 0,1$ ,  $m_1 = m_2 = 4,3.10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\theta_1 - \theta_2 = 9\pi/10$ ,  $\Omega = 0$ . En particulier, avec ce choix de paramètres, la condition 2.9 est vérifiée. Un bruit a par ailleurs été introduit dans ces simulations (ajout d’un nombre aléatoire à  $E_1$  et  $E_2$  à chaque pas).

précisément, on voit que les échanges d’énergie par rétrodiffusion, qui tendent à déstabiliser le régime unidirectionnel et qui s’effectuent à une fréquence caractéristique de l’ordre de  $m$ , sont amortis tant que cette dernière est inférieure à la fréquence de relaxation.

On a présenté ici l’étude du régime correspondant à  $E_1 \ll E_2$ . Naturellement, l’étude du régime opposé ( $E_2 \ll E_1$ ) est similaire et aboutit aux mêmes conclusions. En l’absence d’élément permettant de briser la symétrie entre les deux sens de propagation, c’est donc le bruit du laser qui détermine, lorsque la condition 2.9 est vérifiée, lequel des deux modes va osciller au détriment de l’autre. Ceci est illustré en figure 2.1, où l’on a représenté les valeurs stationnaires des intensités des modes contrarotatifs calculées numériquement pour 100 tirages successifs. Il apparaît que chacun des modes domine dans environ la moitié des cas. En pratique, on s’attend à ce que la symétrie ne soit jamais parfaitement réalisée, favorisant toujours le même mode au détriment de l’autre.

#### 2.1.4 Étude du régime d’automodulation à l’arrêt

On a vu que, lorsque le couplage par rétrodiffusion est suffisamment important (condition 2.6), le régime bidirectionnel est stable malgré le réseau d’inversion de population. On a vu également que, lorsque ce couplage est trop faible (condition 2.9), c’est le régime unidirectionnel qui survient. On s’intéresse dans ce qui suit à la situation intermédiaire pour laquelle ni la condition 2.6 ni la condition 2.9 ne sont vérifiées. Dans ce cas, le laser ne se place plus dans un régime stationnaire, mais plutôt dans un régime où les intensités sont modulées dans le temps. Dans le cas asymptotique suivant :

$$\begin{cases} m \gg \gamma\eta, \\ |\theta_1 - \theta_2| \ll 1, \end{cases} \quad (2.10)$$

le laser adopte un régime permanent qu’il est possible d’étudier analytiquement. On présente dans ce qui suit les résultats de cette étude (menée dans l’annexe A.6).

En utilisant l'inégalité  $m \gg \gamma\eta$ , on peut écrire les intensités des modes contrarotatifs (équation A.115) sous la forme :

$$aE_{1,2}^2 = \frac{aB}{2} + \frac{(-1)^{2,1} aA \sin(mt + \varphi)}{2}, \quad (2.11)$$

où les quantités  $A$  et  $B$  sont lentement variables par rapport à la fréquence  $m/(2\pi)$  et admettent pour valeurs stationnaires (système d'équations A.121) :

$$a\sqrt{B^2 - A^2} = \frac{4m|\delta_\theta|}{\gamma'} \quad \text{et} \quad \frac{aB}{2} = \eta + 1 - \frac{\gamma}{\gamma'}. \quad (2.12)$$

On rappelle que la quantité  $\gamma'$  est définie par  $\gamma' = \sigma l N_{\text{seuil}}/T$ . Dans le cas étudié ici, on a  $\gamma' = \gamma - m|\delta_\theta|$ , où l'on a posé  $\delta_\theta = (\theta_1 - \theta_2)/2$ . On a donc deux modes modulés en opposition de phase à la fréquence  $m/(2\pi)$ , avec une valeur moyenne donnée par :

$$\frac{aB}{2} = \eta - \frac{m|\delta_\theta|}{\gamma'}, \quad (2.13)$$

et un contraste de modulation vérifiant :

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \sqrt{1 - \left( \frac{4m|\delta_\theta|}{aB\gamma'} \right)^2}. \quad (2.14)$$

La différence de phase du laser possède quant à elle l'expression suivante (équation A.122) :

$$\dot{\Phi} = \frac{mA\sqrt{B^2 - A^2} \sin(mt + \varphi)}{B^2 - A^2 \sin^2(mt + \varphi)}. \quad (2.15)$$

Ces résultats appellent les commentaires suivants :

- comme annoncé en introduction, le régime étudié ici correspond à un régime permanent, pour lequel les intensités des modes sont modulées sinusoïdalement en opposition de phase ; ce régime peut être vu comme un état “intermédiaire” entre les régimes bidirectionnel et unidirectionnel ;
- la saturation du gain s'effectue d'autant mieux que le contraste de la modulation temporelle est élevé ; cela s'explique par le fait que, plus le contraste de modulation est importante, plus le système s'éloigne du régime bidirectionnel et se rapproche du régime unidirectionnel ; quand le contraste de modulation est maximal ( $A/B=1$ ), la valeur moyenne des intensités des modes contrarotatifs est égale à  $\eta$ , comme dans le cas unidirectionnel ;
- la différence de phase instantanée est une fonction périodique du temps (de période  $2\pi/m$ ) dont la dérivée a une valeur moyenne nulle, ce qui correspond à une absence de battement malgré la présence de modulations temporelles.

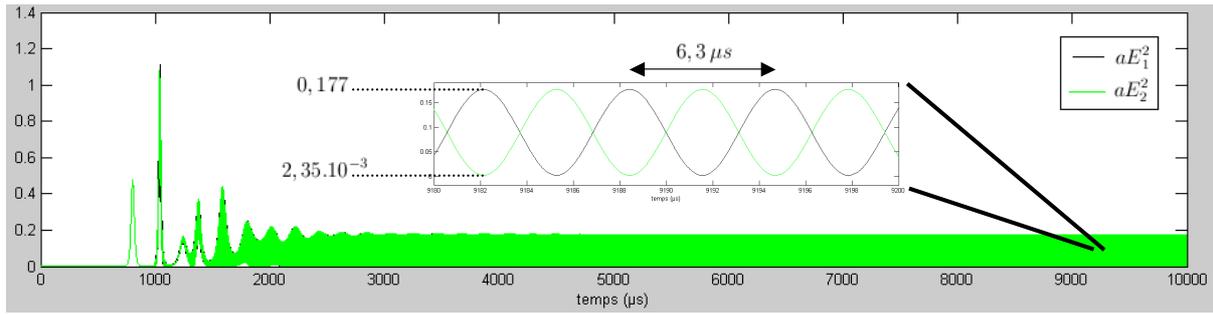


FIGURE 2.2 – Dépendance temporelle des intensités des deux modes contrarotatifs dans le régime d'automodulation du laser à l'arrêt. La courbe en insert est un zoom sur une période temporelle plus courte, qui montre le détail des oscillations. Les valeurs indiquées ont été mesurées directement sur la courbe. Cette figure est issue de l'intégration numérique des équations du laser, avec un pas temporel de  $0,005 \mu\text{s}$  et les paramètres suivants :  $\gamma = 2.10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_1 = 200 \mu\text{s}$ ,  $\eta = 0,1$ ,  $m_1 = m_2 = m = 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\theta_1 - \theta_2 = \pi/78$ . Ces paramètres ont été choisis pour ne vérifier ni la condition 2.6 ni la condition 2.9. De ces valeurs, on déduit, à l'aide des formules analytiques présentées dans le texte,  $\gamma' = 1,98.10^6 \text{ s}^{-1}$  puis  $aB = 0,18$  d'où finalement les valeurs maximale et minimale des intensités :  $0,177$  et  $2,33.10^{-3}$ . Ces valeurs sont en bon accord avec les valeurs mesurées sur la courbe numérique, de même que la période théorique  $2\pi/m = 6,28 \mu\text{s}$  est en bon accord avec la période mesurée, et ceci malgré le fait que la condition 2.10 ne soit pas vérifiée.

On présente sur la figure 2.2 le résultat de l'intégration numérique des équations du laser avec des paramètres correspondant au régime d'automodulation. Les valeurs mesurées sur la courbe obtenue (période, valeurs minimale et maximale des intensités) sont en bon accord avec les prédictions analytiques, ce qui illustre la validité de la démarche utilisée ci-dessus pour décrire le régime d'automodulation. On constate même (voir commentaires associés à la figure 2.2) que le domaine de validité des résultats analytiques est plus vaste que celui qui est défini par la condition 2.10.

REMARQUE : nous n'avons pas établi, dans le cadre de cette étude, de condition de stabilité pour le régime d'automodulation. On se fonde sur les résultats des simulations numériques pour affirmer que ce régime est stable pour toutes les valeurs des paramètres du laser pour lesquelles les régimes stationnaires étudiés précédemment ne le sont pas.

### 2.1.5 Extension numérique et conclusion sur le laser à l'arrêt

On présente sur la figure 2.3 une étude numérique, qui permet d'étendre l'étude analytique aux valeurs de  $m$  ne vérifiant pas la condition 2.10. Cette figure présente, de bas en haut, le profil temporel des intensités des modes contrarotatifs pour 6 valeurs du coefficient de rétrodiffusion  $m$  croissantes. Sur la courbe du bas,  $m$  est inférieur à  $\omega_r/2$ , si bien que la condition de stabilité du régime unidirectionnel 2.9 est vérifiée. Lorsque  $m$  augmente, on voit que le laser quitte le régime stationnaire pour entrer dans le régime d'automodulation. Dans ce régime, on note que la modulation temporelle des intensités se rapproche d'autant plus d'une courbe sinusoïdale que  $m$  est grand. On note également

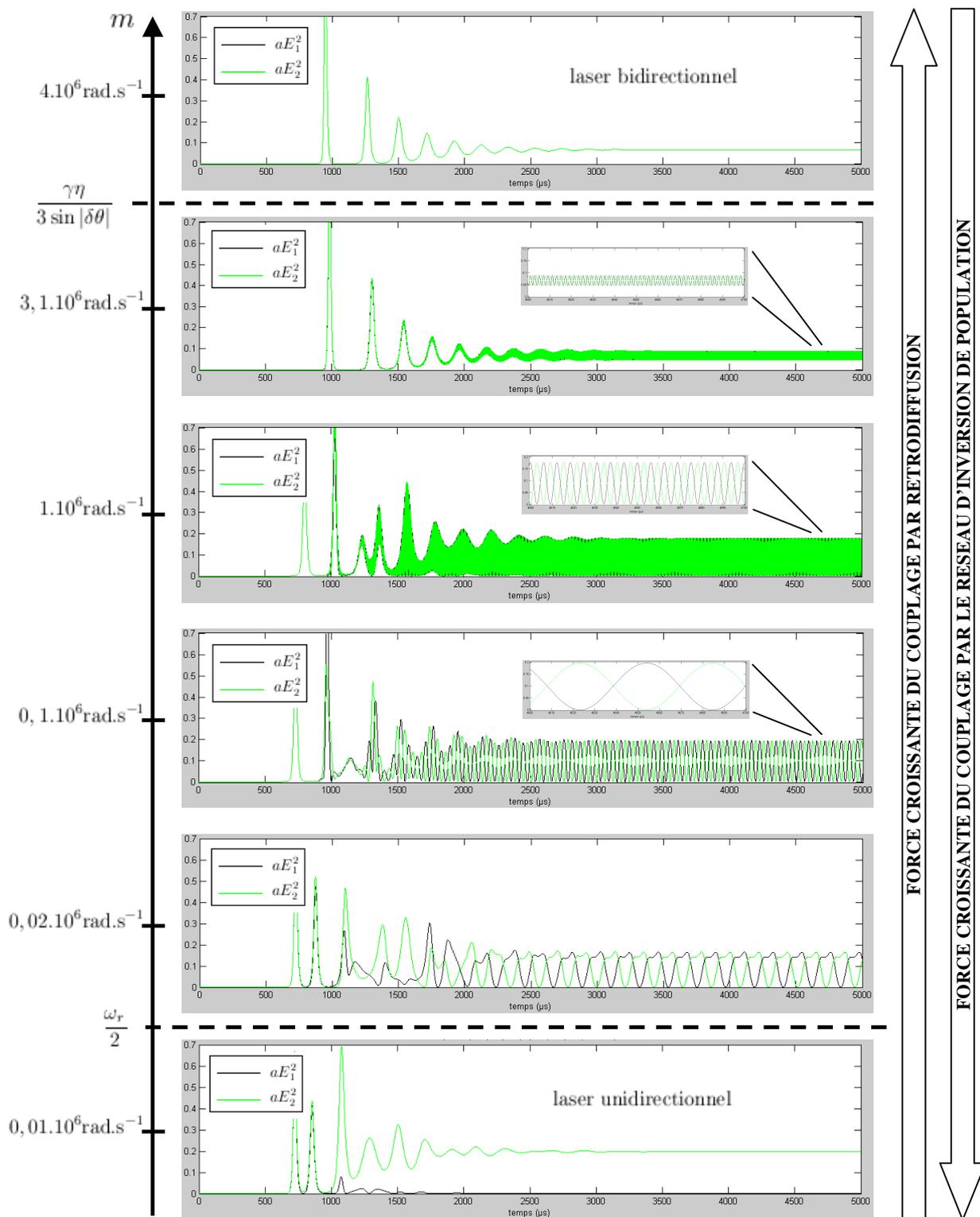


FIGURE 2.3 – Dépendance temporelle des intensités pour différentes valeurs de  $m$ . Courbes issues de l'intégration numérique des équations du laser, avec un pas temporel de  $0,1 \mu s$  et les paramètres suivants :  $\gamma = 2.10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_1 = 200 \mu s$ ,  $\eta = 0, 1$ ,  $\theta_1 - \theta_2 = \pi/78$ .

que lorsque  $m$  augmente, l'amplitude de la modulation diminue tandis que sa fréquence augmente. Enfin, lorsque  $m$  dépasse la valeur critique  $\gamma\eta/(3 \sin |\delta_\theta|)$ , donnée on le rappelle par la condition 2.6, les modulations disparaissent complètement et le laser passe dans le régime stationnaire bidirectionnel.

En conclusion de l'étude du laser en anneau à état solide à l'arrêt que l'on vient d'effectuer, on peut dire que, dans le cadre du modèle semi-classique introduit au chapitre précédent, les régimes susceptibles d'être atteints peuvent être classés en trois catégories, à savoir :

- le régime stationnaire unidirectionnel, qui survient lorsque la rétrodiffusion est très faible ;
- le régime stationnaire bidirectionnel, qui survient lorsque la rétrodiffusion est très importante ;
- un régime non stationnaire, appelé régime d'auto-modulation, qui survient pour les valeurs intermédiaires du coefficient de rétrodiffusion.

L'existence de ces trois régimes peut s'interpréter comme résultant de la compétition entre deux sources de couplage aux effets opposés, d'une part la rétrodiffusion, qui stabilise l'émission bidirectionnelle, et d'autre part le réseau d'inversion de population, qui favorise l'émission unidirectionnelle. On dispose, à l'issue de cette étude, d'une description quantitative des effets combinés de ces couplages lorsque le laser est à l'arrêt. On va s'intéresser maintenant à la prise en compte d'une éventuelle rotation (ou de toute autre source de non-réciprocité en fréquence), qui donne naissance comme on va le voir à un certain nombre de nouveaux régimes.

## 2.2 Étude du laser en rotation

On se propose d'étudier, dans la deuxième partie de ce chapitre, la dynamique du laser en anneau à état solide sous l'effet d'une rotation ( $\Omega \neq 0$ ). Après avoir mis en évidence la présence d'un régime stationnaire unidirectionnel qui survient pour les fortes vitesses de rotation, on s'intéresse à ce que deviennent, lorsque  $\Omega \neq 0$ , les différents régimes étudiés dans la première partie de ce chapitre.

### 2.2.1 Étude du régime stationnaire unidirectionnel aux fortes vitesses de rotation

On a étudié analytiquement, dans la première partie de ce chapitre, trois régimes stationnaires pour le laser à l'arrêt : le régime d'intensité nulle (en-dessous du seuil du laser) et les régimes unidirectionnel et bidirectionnel verrouillés en fréquence. Fait remarquable, il existe également dans le cas du laser en anneau à état solide un régime stationnaire dans la limite des fortes vitesses de rotation. C'est à l'étude analytique de ce régime, dont on va voir qu'il correspond à une émission unidirectionnelle, que l'on s'intéresse dans ce qui suit. On suppose pour cela que la condition suivante est vérifiée :

$$|\Omega| \gg m, \gamma\eta . \quad (2.16)$$

On cherche alors une solution du système d'équations 1.46 indépendante du temps et pour laquelle l'un des modes est fortement atténué par rapport à l'autre, par exemple  $E_1/E_2 \ll 1$ . On obtient (équations A.125, A.126 et A.127) :

$$aE_2^2 = 2\eta \quad ; \quad \sin(\Phi + \theta_1) = 0 \quad ; \quad \frac{E_1}{E_2} = \left| \frac{m}{2\Omega} \right|. \quad (2.17)$$

L'étude de stabilité de cette solution sous l'effet d'une perturbation infinitésimale, menée dans l'annexe A.7, fait apparaître les fréquences caractéristiques  $\omega_r$  et  $\omega_r/\sqrt{2}$  (comme dans le cas du régime unidirectionnel à l'arrêt, voir partie 2.1.3), ainsi que la fréquence  $\Omega$ . La condition de stabilité de ce régime s'écrit (condition A.141) :

$$\Omega \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) < 0. \quad (2.18)$$

On obtient de même la condition de stabilité suivante pour le régime opposé, correspondant à  $E_2/E_1 \ll 1$  (condition A.142) :

$$\Omega \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) > 0. \quad (2.19)$$

On voit donc que le régime stationnaire unidirectionnel existe et est stable dans la limite d'une non-réciprocité en fréquence importante, et ceci quelle que soit la valeur des autres paramètres du laser. Autrement dit, un laser en anneau à état solide animé d'un mouvement de rotation devient toujours unidirectionnel au-delà d'une certaine vitesse. De plus, lorsque l'on inverse le sens de la rotation appliquée, le sens du mode dominant dans le laser s'inverse également. On verra plus loin dans ce mémoire (partie 4.1.1) que les observations expérimentales sont en accord avec ces prédictions.

On tente dans ce qui suit de donner une interprétation qualitative au phénomène que l'on vient de décrire. Dans la limite des très grandes vitesses de rotation, l'intensité des couplages induits par la rétrodiffusion et par le réseau d'inversion de population tend vers zéro. Dans le cas du couplage induit par la rétrodiffusion, cela est dû au fait que le champ électrique de chaque mode n'est plus à résonance avec le mode opposé. La force de ce couplage décroît comme  $1/\sqrt{1 + \Omega^2/m^2}$  (voir partie 3.1.1). Dans le cas du couplage par le réseau d'inversion de population, cela est dû au fait que les atomes du milieu amplificateur ne peuvent plus suivre les mouvements des franges lumineuses. La force de ce couplage décroît comme  $1/(1 + \Omega^2 T_1^2)$ . En définitive, les différentes sources de couplage étant quasiment réduites à zéro, le système se retrouve à la limite de stabilité entre le régime unidirectionnel et le régime bidirectionnel ( $C \rightarrow 1$  dans le formalisme de la constante de couplage). Toutefois, ces couplages, s'ils sont fortement atténués, ne sont pas pour autant réduits à zéro. Au-delà d'une certaine valeur de  $|\Omega|$ , c'est le couplage par rétrodiffusion qui domine. On montre (voir annexe A.8) qu'il induit alors des pertes différentielles entre les deux sens de propagation égales à  $m^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)/\Omega$ . Ce sont ces pertes différentielles qui font basculer le système dans le régime unidirectionnel. Cela explique également le rôle des signes comparés de  $\Omega$  et de  $\theta_1 - \theta_2$  dans les conditions de stabilité 2.18 et 2.19.

Le régime décrit ici, caractéristique des lasers en anneau à état solide, constitue un obstacle majeur pour une utilisation en tant que gyrolaser à état solide. Il est donc nécessaire de faire en sorte qu'il soit supprimé et remplacé par le régime de battement, ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

### 2.2.2 Cas où le laser est en régime stationnaire à l'arrêt

On suppose dans ce qui suit que les paramètres du laser sont tels qu'il se trouve, lorsque  $\Omega = 0$ , dans un régime stationnaire (unidirectionnel ou bidirectionnel). On suppose de plus qu'une rotation  $\Omega \neq 0$  est appliquée au dispositif.

Dans le cas où le régime à l'arrêt est bidirectionnel, on peut montrer (voir annexe A.5) que le laser reste dans ce régime lorsqu'une rotation lui est appliquée, dans la mesure où celle-ci n'est pas trop forte [32]. On montre (équation A.68) que, dans ce cas, la rotation lève la dégénérescence entre les intensités des modes contrarotatifs, selon la formule :

$$\frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1^2 + E_2^2} = \frac{m^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)\Omega}{2dM_0^2}, \quad (2.20)$$

les paramètres  $d$  et  $M_0$  étant définis par le système d'équations 2.5. On a représenté sur la figure 2.4 les résultats des simulations numériques donnant la valeur stationnaire de l'intensité des modes contrarotatifs en fonction de la vitesse de rotation, et ce successivement pour  $\theta_1 - \theta_2 > 0$  et  $\theta_1 - \theta_2 < 0$ . Lorsque le laser est à l'arrêt, on a bien  $a(E_1^2 + E_2^2)/2 = 2\eta/3$ , ce qui correspond au régime stationnaire bidirectionnel (voir partie 2.1.2). En présence d'une rotation, les intensités se séparent selon une pente conforme à la prédiction théorique de l'équation 2.20, qui donne  $a(E_1^2 - E_2^2) = 0,016\Omega$  (où  $\Omega$  est exprimée en  $10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ). Enfin, on observe que le sens de propagation qui domine dépend bien des signes comparés de  $\Omega$  et de  $\theta_1 - \theta_2$ . L'étude numérique de la différence de phase, non présentée ici, fait apparaître que celle-ci est indépendante du temps quelle que soit la valeur de  $\Omega$ , ce qui semble indiquer que le laser, lorsqu'il est en régime stationnaire bidirectionnel à  $\Omega = 0$ , reste dans un régime stationnaire quelle que soit la valeur de  $\Omega$ . Lorsque  $|\Omega|$  est suffisamment élevé, le laser se place dans le régime stationnaire unidirectionnel décrit précédemment (voir partie 2.2.1).

Dans le cas où le régime à l'arrêt est unidirectionnel, il apparaît au vu des simulations numériques que ce régime demeure quelle que soit la rotation appliquée. Cette dernière n'a pour effet que de briser la symétrie entre les deux sens de propagation, comme on peut le voir sur la figure 2.5 : lorsque le laser est à l'arrêt, les deux modes dominent de façon équiprobable, tandis qu'en présence d'une rotation, c'est toujours le même mode qui domine, ce mode étant déterminé par les signes respectifs de  $\Omega$  et de  $\theta_1 - \theta_2$ . Le laser passe donc directement du régime stationnaire unidirectionnel à l'arrêt au régime stationnaire unidirectionnel en rotation.

### 2.2.3 Cas où le laser est dans le régime d'automodulation à l'arrêt

Supposons maintenant que les paramètres du laser soient tels que, lorsque  $\Omega = 0$ , celui-ci se trouve dans le régime d'automodulation décrit dans la partie 2.1.4. Dans ce cas, une étude analytique du laser en rotation est possible lorsque  $\nu = \sqrt{m^2 + \Omega^2} \gg \gamma\eta$  et lorsque  $|\theta_1 - \theta_2| \ll 1$  [33]. Les conclusions de cette étude, menée dans l'annexe A.9 et dont les résultats sont présentés ici, peuvent être prolongées numériquement au-delà du domaine de validité du calcul analytique.

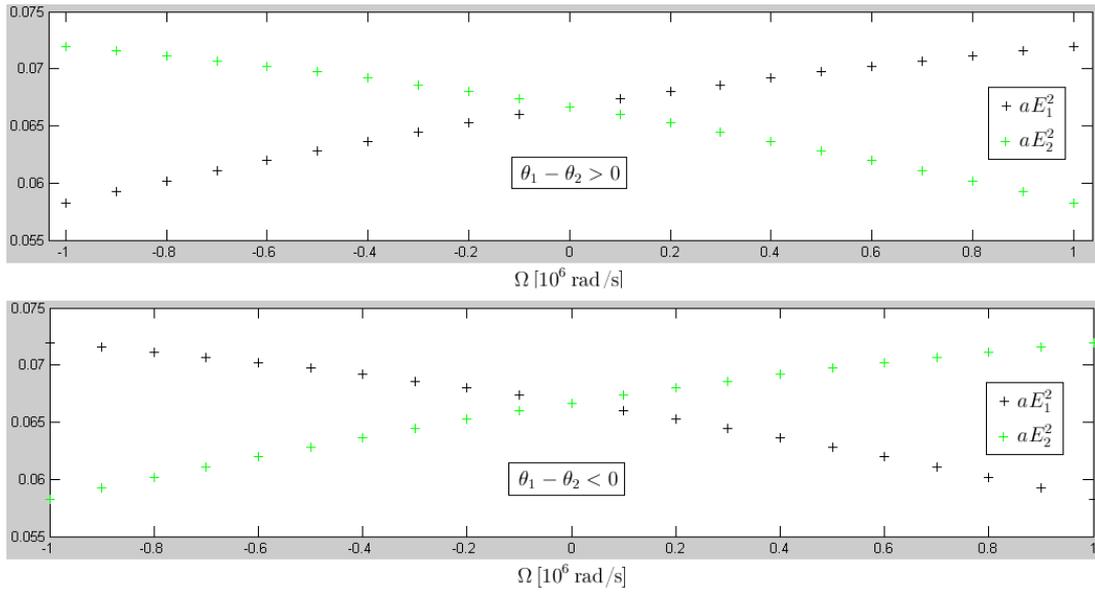


FIGURE 2.4 – Valeur stationnaire des intensités des modes contrarotatifs en fonction de la non-réciprocité en fréquence  $\Omega$ . Ces valeurs sont issues de l'intégration numérique du système d'équations du laser, avec un pas temporel de  $0,05 \mu\text{s}$ . Les paramètres utilisés sont  $\gamma = 50.10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 4.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\theta_1 - \theta_2 = \pm 5\pi/6$  et  $\eta = 0, 1$ . En particulier, la condition de stabilité du régime d'onde stationnaire 2.6 est vérifiée, avec  $d \simeq -2, 2.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ . La dépendance linéaire de  $a(E_1^2 - E_2^2)$  en fonction de  $\Omega$  mesurée sur cette figure autour de  $\Omega = 0$  donne  $aX = 0,014\Omega$ , où  $\Omega$  est exprimée en  $10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ . Cette dépendance est en bon accord avec la théorie (voir texte).

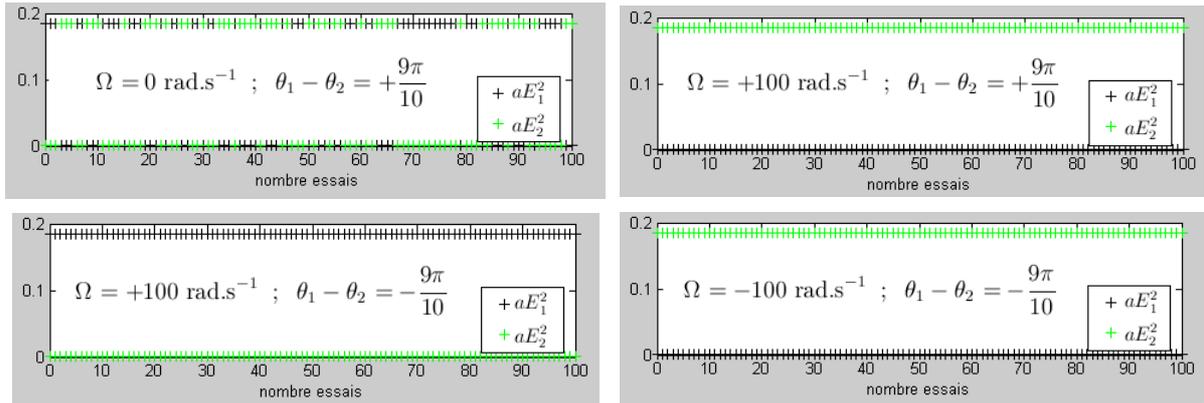


FIGURE 2.5 – Valeur stationnaire des intensités des modes contrarotatifs pour 100 tirages successifs identiques, et ceci pour différentes valeurs de  $\Omega$  et de  $\theta_1 - \theta_2$ . On observe qu'à l'arrêt, les deux modes peuvent exister indifféremment, tandis qu'en rotation, c'est toujours le même mode qui domine, et ce en fonction du signe de  $\Omega$  et de  $\theta_1 - \theta_2$ . Ces valeurs sont issues de l'intégration numérique du système d'équations du laser, avec un pas temporel de  $0,05 \mu\text{s}$ . Les paramètres utilisés sont  $\gamma = 6.10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 0,043.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\eta = 0, 1$ . En particulier, ces paramètres vérifient la condition de stabilité du régime unidirectionnel 2.9.

Les intensités des modes contrarotatifs s'écrivent, pour le régime permanent étudié ici (équation A.170) :

$$aE_{1,2}^2 = \frac{aB}{2} + (-1)^{1,2} \left[ \epsilon \frac{2\Omega|\delta_\theta|}{\gamma'} + \frac{m}{2\nu} aA \sin(\nu t + \varphi) \right]. \quad (2.21)$$

où  $A$  et  $B$  sont des fonctions lentement variables par rapport à la fréquence  $\nu/(2\pi)$  et dont la valeur stationnaire est donnée par (équation A.168) :

$$\begin{cases} a\sqrt{B^2 - A^2} = \frac{4\nu|\delta_\theta|}{\gamma'}, \\ \frac{aB}{2} = \eta + 1 - \frac{\gamma}{\gamma'}. \end{cases} \quad (2.22)$$

On montre également dans l'annexe A.9 que la dérivée de la différence de phase, qui est une fonction du temps de période  $2\pi/\nu$ , a une valeur moyenne temporelle nulle lorsque l'inégalité suivante est vérifiée (condition A.187) :

$$\sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}} > \frac{|\Omega|}{\nu}, \quad \text{ce qui se réécrit} \quad \frac{|\Omega|}{m^2 + \Omega^2} < \frac{4|\delta_\theta|}{\gamma'aB}. \quad (2.23)$$

Dans le cas contraire, la valeur moyenne temporelle de la différence de phase est donnée par  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \text{sign}(\Omega)\nu$ , ce qui correspond à un battement entre les modes contrarotatifs à la fréquence  $\nu$ .

Lorsque  $8m|\delta_\theta| > \gamma'aB$ , la condition 2.23 est réalisée quelle que soit la valeur de  $\Omega$ , ce qui correspond à une fréquence de battement égale à zéro. Dans le cas opposé ( $8m|\delta_\theta| < \gamma'aB$ ), on distingue trois zones de fonctionnement, selon la valeur de  $\Omega$  :

- la zone I, définie par  $|\Omega| < \Omega_1$  (la vitesse critique  $\Omega_1$  étant définie par l'équation 2.24), correspond à une émission quasiment bidirectionnelle avec une fréquence de battement nulle; cette zone joue le même rôle que la zone aveugle du gyrolaser à hélium-néon (bien que son origine physique soit différente);
- la zone II, définie par  $\Omega_1 < |\Omega| < \Omega_2$  (la vitesse critique  $\Omega_2$  étant également définie par l'équation 2.24), correspond à une zone de battement à la fréquence  $\nu = \pm\sqrt{m^2 + \Omega^2}$  (le signe de  $\nu$  étant déterminé par celui de  $\Omega$ ); on constate sur l'expression de  $\nu$  que, dans ce régime, la non-linéarité de la réponse en fréquence est principalement due au couplage par rétrodiffusion;
- la zone III, définie par  $|\Omega| > \Omega_2$ , correspond à une émission quasiment unidirectionnelle avec une fréquence de battement nulle.

Les vitesses de rotation critiques  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont données par :

$$\Omega_{1,2} = \frac{\gamma'aB}{8|\delta_\theta|} + (-1)^{2,1} \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\gamma'aB}{4|\delta_\theta|} \right)^2 - 4m^2}, \quad (2.24)$$

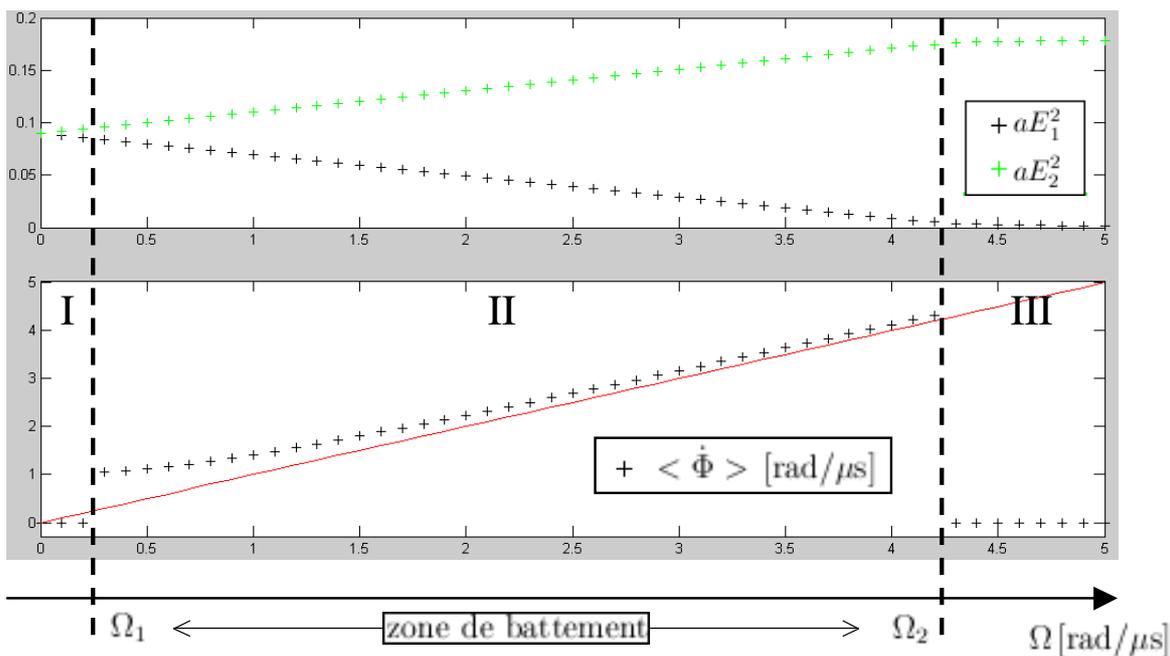


FIGURE 2.6 – Intensité des modes contrarotatifs et fréquence de battement d’un laser en anneau à état solide en fonction de la non-réciprocité en fréquence  $\Omega$  qui lui est appliquée. Ces courbes sont issues de l’intégration numérique des équations du laser, avec les paramètres suivants :  $\gamma = 2.10^6 \text{s}^{-1}$ ,  $m = 1.10^6 \text{rad.s}^{-1}$ ,  $\theta_1 - \theta_2 = \pi/78$  et  $\eta = 0, 1$ . Ces paramètres sont identiques à ceux utilisés pour l’étude du régime d’automodulation à l’arrêt (figure 2.2). Le pas d’intégration utilisé est de 3 ns, entre 0 et 7 ms. Les valeurs moyennes des intensités et la pente de la différence de phase sont calculées entre 5 ms et 7 ms, ce qui laisse le temps au système de démarrer et de se stabiliser. Les trois zones décrites dans le texte apparaissent clairement sur ces courbes. Avec les paramètres utilisés ici, l’équation 2.24 prédit les valeurs suivantes :  $\Omega_1 = 0, 24.10^6 \text{rad.s}^{-1}$  et  $\Omega_2 = 4, 2.10^6 \text{rad.s}^{-1}$ , ce qui est en bon accord avec les valeurs observées ci-dessus.

où l’on rappelle la définition suivante :  $\gamma' = \gamma - m|\delta_\theta|$ .

On a représenté sur la figure 2.6 des courbes issues des simulations numériques montrant la valeur des intensités des modes contrarotatifs et de la fréquence de battement en fonction de  $\Omega$ . Les trois zones mentionnées ci-dessus apparaissent clairement sur ces courbes, les valeurs de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  observées étant en bon accord avec l’équation 2.24.

Des simulations numériques non présentées ici montrent que le comportement décrit précédemment reste qualitativement valable (en particulier la présence des trois zones) même lorsque les conditions  $\nu \gg \gamma\eta$  et  $|\delta_\theta| \ll 1$  ne sont plus vérifiées. En revanche, les valeurs critiques de  $\Omega$  marquant la limite entre les différentes zones ne sont plus données par l’équation 2.24. Ces simulations numériques permettent également de prouver la stabilité du régime d’automodulation avec les paramètres utilisés, ce qui n’a pas été effectué analytiquement dans le cadre de cette étude.

Lorsque les paramètres du laser en anneau à état solide sont tels qu’il fonctionne dans

la zone II décrite précédemment, il est sensible à la rotation et peut en principe être utilisé en tant que gyrolaser, avec toutefois les inconvénients suivants :

- la taille de la zone I (qui correspond à une zone d'absence de battement centrée sur  $\Omega = 0$ ) est, avec les paramètres typiques du laser en anneau à état solide, très supérieure à la taille typique de la zone aveugle sur un gyrolaser à helium-néon, ce qui présage de mauvaises performances inertielles; toutefois, on peut imaginer de réduire la taille de cette zone en changeant certains des paramètres du laser, ce qui fait que ce premier obstacle n'a *a priori* rien de fondamental;
- la réponse en fréquence, donnée par  $|\langle \dot{\Phi} \rangle| = \sqrt{m^2 + \Omega^2}$ , est on l'a vu affectée d'une non-linéarité d'autant plus forte que la rotation appliquée au système  $\Omega$  est proche de 0; cela signifie que, même si l'on arrivait à supprimer totalement de la zone I au profit de la zone II, le dispositif serait toujours insensible à la rotation autour de 0 car la pente de la réponse en fréquence y est nulle ou quasiment nulle (au lieu d'être égale ou proche du facteur d'échelle); cela constitue un obstacle, certainement plus fondamental que le précédent, à l'utilisation en tant que gyrolaser d'un simple laser en anneau à état solide;
- enfin, un troisième obstacle est constitué par le comportement du laser aux fortes vitesses de rotation, c'est-à-dire dans la zone III; en effet, le signal de battement disparaît dans cette zone, ce qui restreint l'utilisation du dispositif à la zone  $|\Omega| < \Omega_2$ , ce qui n'est pas acceptable pour un gyrolaser; ce dernier obstacle est certainement le plus important des trois, et doit absolument être contourné, ce qui fait l'objet du prochain chapitre.

À ces objections d'ordre théorique s'ajoute une remarque expérimentale qui est que la zone II est observée en pratique sur une plage de vitesse de rotation de taille très inférieure à ce qui est prévu par la théorie présentée ici. Tout cela nous amène à conclure que le laser en anneau à état solide est *a priori* un moins bon candidat que son homologue gazeux pour être utilisé en tant que gyrolaser, ce qui explique probablement l'absence de tels dispositifs sur le marché de la navigation inertielle. Nous étudierons dans la suite de ce mémoire un certain nombre de pistes destinées à contourner les différents obstacles que nous venons d'énumérer.

## 2.3 Conclusion

On a tenté de donner dans ce chapitre un aperçu de la riche dynamique du laser en anneau à état solide, dans le cadre du modèle semi-classique introduit au chapitre précédent. Le comportement obtenu est totalement différent de celui du gyrolaser à hélium-néon. Il est régi notamment par les couplages entre modes liés à la rétrodiffusion et au réseau d'inversion de population. Lorsque le laser est à l'arrêt, on a vu que trois régimes de fonctionnement étaient possibles au-dessus du seuil, à savoir un régime stationnaire unidirectionnel, un régime d'automodulation et un régime stationnaire bidirectionnel. Dans la limite des grandes vitesses de rotation, ces trois régimes se transforment en un régime

stationnaire unidirectionnel, dont le sens d'émission dépend du sens de rotation. Pour des valeurs intermédiaires de la vitesse de rotation, le régime d'automodulation qui existe lorsque  $\Omega = 0$  est susceptible de se transformer en régime de battement, mais les caractéristiques d'un tel régime (taille de la zone morte, non-linéarité de la réponse en fréquence et surtout disparition du battement aux fortes vitesses de rotation) ne permettent pas d'envisager une utilisation en tant que gyrolaser à moins que des précautions particulières ne soient prises pour obtenir un régime de battement aux grandes vitesses de rotation, ce qui fait l'objet du chapitre suivant.

On a essayé, autant que possible, d'accompagner les résultats analytiques présentés dans ce chapitre de simulations numériques. Dans la totalité des cas, l'adéquation obtenue entre les deux approches est très bonne dans la limite de validité des calculs effectués, ce qui constitue une validation simultanée de notre étude analytique et de notre étude numérique. En particulier, cela permet de conforter les prédictions du modèle numérique lorsque les paramètres du laser sont tels qu'il n'est pas possible d'effectuer un calcul analytique. Cette validation de notre modèle numérique, qui constitue un outil précieux à différents stades de l'étude du gyrolaser à état solide, est l'un des résultats importants de ce chapitre.



## Chapitre 3

# Étude théorique de la stabilisation du régime de battement

On a vu au chapitre précédent que, lorsqu'il était en rotation, le laser en anneau à état solide avait tendance à devenir unidirectionnel. On s'intéresse dans ce chapitre à une méthode permettant d'inverser cette tendance, et d'assurer un fonctionnement en régime de battement aux fortes vitesses de rotation. L'idée [37,38] consiste à agir sur les pertes subies par les modes contrarotatifs, en faisant en sorte que le mode le plus intense subisse les pertes les plus fortes.

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première, on s'intéresse à la dynamique du laser en anneau à état solide en présence de pertes différentielles proportionnelles à la différence d'intensité entre les modes. On montre en particulier que la présence de ces pertes différentielles permet de transformer le régime unidirectionnel en un régime de battement aux fortes vitesses de rotation. Dans la seconde partie de ce chapitre, on s'intéresse aux possibilités concrètes de générer de telles pertes différentielles en agissant sur les états de polarisation des champs. On propose en particulier une solution originale [107] permettant de stabiliser le régime de battement sans introduire d'élément supplémentaire dans la cavité laser.

### 3.1 Dynamique du laser en présence d'un dispositif stabilisateur

On suppose dans ce qui suit que le laser en anneau est doté d'un dispositif stabilisateur, ce dernier induisant une différence entre les taux de pertes des modes contrarotatifs donnée par :

$$\gamma_1 - \gamma_2 = K(aE_1^2 - aE_2^2) . \quad (3.1)$$

Le coefficient  $K$  est supposé positif, de telle sorte que le mode le plus fort subisse les pertes les plus importantes. On ne s'intéresse pas pour l'instant aux moyens concrets permettant d'induire des pertes de la forme 3.1, cela faisant l'objet de la seconde partie de ce chapitre. On s'intéresse plutôt dans ce qui suit à la dynamique du laser en anneau à état solide en présence de ce dispositif stabilisateur, et plus particulièrement à l'étude du régime de battement aux grandes vitesses de rotation. Ce dernier étant un régime permanent, on va d'abord établir les équations d'évolution des grandeurs lentement variables avant

de procéder à l'étude de l'existence et de la stabilité des solutions stationnaires de ces équations. Les détails des calculs menant aux résultats présentés ici peuvent être trouvés dans l'annexe A.10.

### 3.1.1 Établissement des équations d'évolution des grandeurs lentement variables

On fait dans ce qui suit l'hypothèse des grandes non-réciprocités en fréquence, ce qui se traduit par  $|\Omega| \gg \gamma\eta, m$ . On s'intéresse à l'étude d'un régime de battement, c'est-à-dire un régime pour lequel les intensités des modes contrarotatifs sont quasiment égales, tandis que la valeur de la fréquence (angulaire) de battement est proche de  $\Omega$ . On fait de plus l'hypothèse que le laser a atteint un régime permanent, pour lequel les intensités des modes et la différence de phase sont modulées à la fréquence angulaire  $\Omega$ . Les variables somme des intensités ( $Y = E_1^2 + E_2^2$ ) et différence des intensités ( $X = E_1^2 - E_2^2$ ) peuvent donc se mettre sous la forme :

$$X = C + x_M \quad \text{et} \quad Y = B + y_M, \quad (3.2)$$

où les termes  $C$  et  $B$  sont des fonctions lentement variables du temps (par rapport à la période de battement  $2\pi/|\Omega|$ ) tandis que  $x_M$  et  $y_M$  oscillent à la fréquence angulaire  $\Omega$ . On a de plus les inégalités suivantes :

$$\frac{|C|}{B} \ll 1, \quad \frac{|x_M|}{B} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{|y_M|}{B} \ll 1, \quad (3.3)$$

qui traduisent le fait que les intensités des modes contrarotatifs sont, dans ce régime, à peu près égales et faiblement modulées. De même, la différence de phase  $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$  s'écrit :

$$\Phi = \Omega t + F + \Phi_M, \quad (3.4)$$

où  $F$ , qui va être à l'origine de la non-linéarité de la réponse en fréquence, est une fonction lentement variable par rapport au temps caractéristique  $2\pi/|\Omega|$ , tandis que  $\Phi_M$ , qui traduit les (faibles) modulations temporelles de la différence de phase, est une fonction oscillant à la fréquence angulaire  $\Omega$  et petite devant 1.

En ne gardant que les termes d'ordre dominant, on obtient les expressions suivantes pour la valeur moyenne  $N_0$  et l'harmonique spatiale  $N_1$  de la densité d'inversion de population (équations A.192 et A.196) :

$$N_0 = WT_1 - \frac{aB}{2}N_{\text{seuil}} \quad \text{et} \quad N_1 = -\frac{aBN_{\text{seuil}}}{4} \frac{1 + i\Omega T_1}{1 + \Omega^2 T_1^2} e^{-i\Omega t}. \quad (3.5)$$

Par ailleurs, les fonctions  $x_M$ ,  $y_M$  et  $\Phi_M$ , qui décrivent les modulations temporelles des variables  $X$ ,  $Y$  et  $\Phi$ , peuvent être calculées en fonction des paramètres du laser en régime permanent (voir annexe A.10, et plus particulièrement le système d'équations A.198). Leur expression permet en retour d'établir les équations suivantes pour les grandeurs lentement variables  $B$  et  $C$  (système d'équations A.200) :

$$\begin{cases} \dot{B} = \frac{Cm^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{4\Omega} - \frac{\gamma' a B^2}{4} \frac{1}{1 + \Omega^2 T_1^2} - B \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{aKC^2}{2}, \\ \dot{C} = \frac{Bm^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2\Omega} - C \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{aKBC}{2}, \end{cases} \quad (3.6)$$

où l'on a posé  $d = \gamma - \sigma l N_0 / T$ . On montre (voir équation A.202) que  $1/d$ , qui est le temps caractéristique de variation de  $B$  et  $C$ , est grand devant  $1/\gamma\eta$ . Cela prouve *a posteriori*, en utilisant l'inégalité  $\gamma\eta \ll |\Omega|$ , que les grandeurs  $B$  et  $C$  sont bien lentement variables par rapport à  $|\Omega|$ .

### 3.1.2 Existence du régime de battement

Une solution stationnaire du système d'équations 3.6 est donnée (équation A.204) par :

$$\frac{C}{B} = \frac{m^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\Omega} \left( 2K\eta - \frac{\gamma\eta}{1 + \Omega^2 T_1^2} \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

Supposons dans un premier temps que le dispositif stabilisateur est désactivé, c'est-à-dire  $K = 0$ . En tenant par ailleurs compte de l'hypothèse  $|\Omega| \gg \gamma\eta$  qui implique en particulier, avec les ordres de grandeur typique d'un laser Nd-YAG,  $|\Omega|T_1 \gg 1$ , l'expression 3.7 se réécrit :

$$\frac{C}{B} \simeq - \frac{m^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) T_1^2}{\gamma\eta} \Omega. \quad (3.8)$$

On constate que la quantité  $C/B$  diverge linéairement avec  $\Omega$ , ce qui est incompatible avec l'hypothèse initiale  $|C/B| \ll 1$ . Le traitement effectué ici n'est donc dans ce cas pas auto-consistant, ce qui signifie en d'autres termes que la solution étudiée (régime de battement) n'existe pas en l'absence du dispositif stabilisateur. Cette conclusion est compatible avec celles du chapitre précédent, en particulier avec le fait que le laser atteint toujours un régime stationnaire unidirectionnel dans la limite des grandes vitesses de rotation.

REMARQUE : il est intéressant, avant de poursuivre, de considérer l'existence du régime de battement étudié dans ce chapitre dans le cas où le temps de vie du niveau excité est très faible, ce qui se traduit par :

$$\gamma\eta, m \ll |\Omega| \ll \frac{1}{T_1}. \quad (3.9)$$

En pratique, cette situation pourrait correspondre à certains lasers à gaz ou à semi-conducteur. En supposant, comme précédemment, l'absence de dispositif stabilisateur ( $K = 0$ ), on peut alors écrire l'expression 3.7 sous la forme :

$$\frac{C}{B} = - \frac{m^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\gamma\eta\Omega}. \quad (3.10)$$

On constate sur l'expression 3.10 que la quantité  $|C/B|$  tend vers 0 dans la limite  $|\Omega| \rightarrow \infty$ , ce qui valide l'hypothèse initiale  $|C/B| \ll 1$ . On peut donc conclure à l'existence du régime de battement dans le cas des lasers ayant des temps de vie très courts, contrairement au cas du laser Nd-YAG, décrit précédemment. Ce résultat peut s'interpréter en terme de génération d'harmoniques dans le domaine temporel : lorsque le temps de vie  $T_1$  est très court, le réseau d'inversion de population suit adiabatiquement les mouvements des franges lumineuses issues de l'interférence entre les modes contrarotatifs. Il en résulte une modulation du gain à la fréquence  $\Omega$ , qui se traduit en retour, pour les modes contrarotatifs, par la génération de bandes latérales aux fréquences  $\pm\Omega$ . Ce sont ces bandes latérales qui, en réinjectant une partie de l'intensité de chacun des modes contrarotatifs

dans l'autre, permettent l'existence du régime de battement étudié ici. En conclusion de cette digression, on note que les lasers pour lesquels le temps de vie du niveau excité est court, comme par exemple les lasers à semi-conducteurs, semblent être de bons candidats pour un fonctionnement en tant que gyrolaser<sup>1</sup>.

On revient au cas du laser Nd-YAG, pour lequel nous avons  $|\Omega|T_1 \gg 1$ . On suppose maintenant que le dispositif stabilisateur est activé, c'est-à-dire  $K \neq 0$ . L'expression 3.7 s'écrit alors :

$$\frac{C}{B} = \frac{m^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2K\eta\Omega}. \quad (3.11)$$

On constate sur l'expression 3.11 que la quantité  $|C/B|$  tend vers 0 dans la limite  $|\Omega| \rightarrow \infty$ , ce qui valide l'hypothèse initiale  $|C/B| \ll 1$ . La présence du dispositif stabilisateur permet donc l'existence du régime de battement aux fortes vitesses de rotation dans le cas du laser en anneau à Nd-YAG. On va maintenant s'intéresser à la stabilité de ce régime.

### 3.1.3 Stabilité du régime de battement

L'étude de la stabilité du régime de battement sous l'effet d'une petite perturbation est présentée dans l'annexe A.10. Elle montre que la fréquence angulaire de relaxation, définie on le rappelle par :

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma\eta}{T_1}}, \quad (3.12)$$

est présente dans le spectre de bruit du laser (équation A.213). Elle prédit également que le régime de battement est stable lorsque la condition suivante (condition A.216) est vérifiée :

$$K > \frac{\gamma/2}{1 + \Omega^2 T_1^2}. \quad (3.13)$$

Cette condition de stabilité inspire les remarques suivantes :

- tout d'abord, on constate que le régime de battement ne peut pas être stable pour les valeurs négatives de  $K$  ; cela confirme le fait que, pour bénéficier d'un effet de stabilisation du régime de battement, il faut nécessairement infliger les pertes les plus fortes au mode dont l'intensité est la plus forte, et non pas l'inverse ;
- une interprétation physique possible de la condition de stabilité 3.13, illustrée sur la figure 3.1, est que le dispositif stabilisateur ne sera efficace que lorsque sa force (représentée par le terme  $2K\eta$ ) sera supérieure à la force déstabilisatrice du réseau d'inversion de population (représentée par le terme  $\gamma\eta/(1 + \Omega^2 T_1^2)$ ) ;
- en particulier, il est remarquable de noter que, quelle que soit la valeur de  $K > 0$ , il existe toujours une valeur de  $|\Omega|$  au-delà de laquelle la stabilité du régime de battement est assurée ; cette remarque se vérifie en pratique, puisque l'on constate expérimentalement qu'en présence du dispositif stabilisateur, le régime de battement

---

<sup>1</sup>Il faut toutefois garder à l'esprit que si la présence du réseau assure dans ce cas l'existence du régime de battement, le problème de la stabilité de ce dernier demeure.

est d'autant plus facile à obtenir que la non-réciprocité en fréquence est élevée.

L'efficacité du dispositif stabilisateur étudié dans ce chapitre est illustrée numériquement sur la figure 3.2. On constate en particulier que celui-ci permet d'obtenir un battement aux fortes vitesses de rotation (la zone III est remplacée par une zone de battement qui prolonge la zone II). En revanche, on n'observe pas ou peu d'effet aux faibles vitesses de rotation (la zone I ne semble pas affectée par ce dispositif). Le problème de l'absence de battement aux faibles vitesses de rotation fait l'objet d'une partie de la suite de ce mémoire (notamment les chapitres 5 et 6).

### 3.1.4 Non-linéarité de la réponse en fréquence

La fonction  $F$ , définie par l'équation 3.4 et lentement variable par rapport à la fréquence angulaire  $|\Omega|$ , obéit à l'équation moyennée suivante (voir annexe A.10, expression A.221) :

$$\langle \dot{F} \rangle = \frac{m^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2\Omega} + \frac{\gamma\eta}{2\Omega T_1}. \quad (3.14)$$

La fréquence de battement, définie on le rappelle comme la moyenne temporelle de  $\dot{\Phi}$ , est donc donnée par l'expression suivante :

$$\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega + \frac{m^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2\Omega} + \frac{\gamma\eta}{2\Omega T_1}, \quad (3.15)$$

cette formule n'étant valable, on le rappelle, que dans la limite où les deux termes de droite sont très inférieurs à  $|\Omega|$ . Il apparaît sur l'équation 3.15 que la réponse en fréquence du gyrolaser à état solide dans le régime de battement étudié ici est le fruit de trois contributions distinctes :

- la première correspond à ce que serait la fréquence de battement si le gyrolaser était idéal, c'est-à-dire en l'absence de couplage entre les modes contrarotatifs ; on aurait alors simplement  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega$  ;
- la seconde est due au couplage par rétrodiffusion ; son influence sur la réponse en fréquence du gyrolaser à état solide est la même que dans le cas du gyrolaser à hélium-néon ; cet effet rappelle celui qui se produit pour des oscillateurs classiques, par exemple des pendules, qui voient leurs fréquences d'oscillation modifiées par la présence d'un éventuel couplage (par exemple induit par un ressort)<sup>2</sup> ;
- la troisième contribution, spécifique au gyrolaser à état solide, est liée au réseau d'inversion de population ; ce dernier, qui agit comme un filtre passe-bas en raison du temps de réponse important de l'inversion de population, possède en particulier un comportement dispersif qui entraîne un décalage en fréquence supplémentaire entre les modes contrarotatifs ; il est notamment intéressant de remarquer (voir annexe A.10.4) que ce décalage en fréquence disparaît dans la limite  $|\Omega|T_1 \ll 1$ , c'est-à-dire lorsque le réseau n'agit plus comme un filtre mais comme un système

<sup>2</sup>Dans la limite d'un couplage très fort, les pendules vont adopter une fréquence d'oscillation commune même si leurs fréquences propres sont différentes, ce qui est l'analogie mécanique du phénomène de zone aveugle.

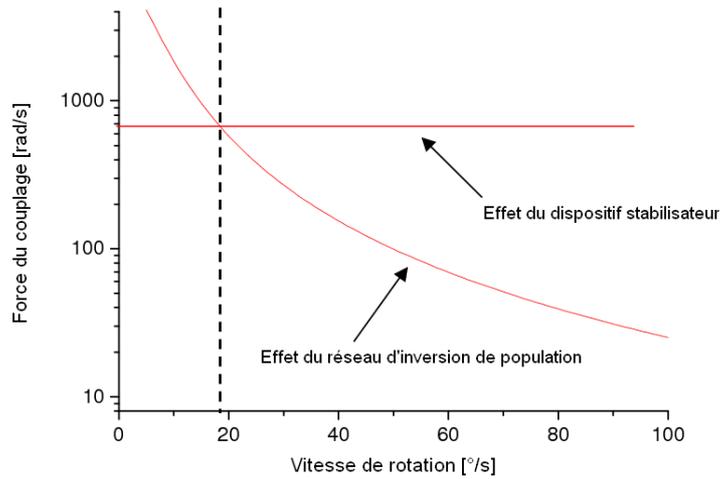


FIGURE 3.1 – Forces comparées du couplage induit par le réseau d'inversion de population et du dispositif stabilisateur pour un jeu de paramètres arbitraires du laser. On voit qu'au-delà d'une certaine vitesse de rotation, le dispositif stabilisateur finit toujours par l'emporter sur le réseau d'inversion de population.

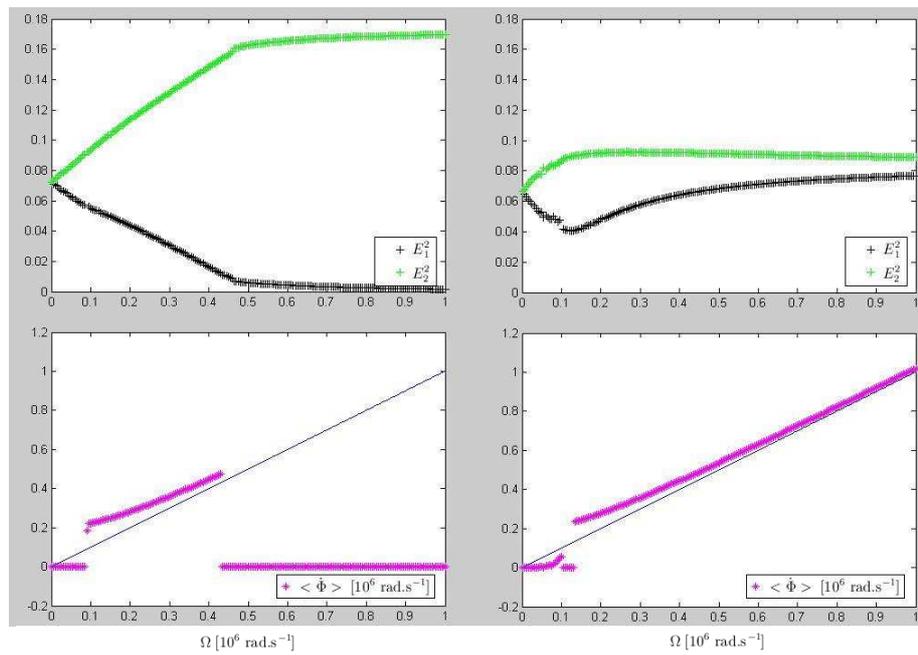


FIGURE 3.2 – Valeur moyenne de l'intensité des modes contrarotatifs et de la fréquence de battement en fonction de la non-réciprocité en fréquence  $\Omega$ . La colonne de gauche correspond à l'absence de dispositif stabilisateur ( $K = 0$ ), tandis que la colonne de droite correspond à  $K = 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Ces courbes sont issues de l'intégration numérique des équations du laser, avec les paramètres suivants :  $\gamma = 2.10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 0,2.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\theta_1 - \theta_2 = \pi/10$  et  $\eta = 0,1$ . Le pas d'intégration utilisé est de  $0,1 \mu\text{s}$ , entre 0 et 10 ms. Les valeurs moyennes des intensités et la pente de la différence de phase sont calculées entre 8 ms et 10 ms. L'effet du dispositif stabilisateur apparaît clairement pour les grandes vitesses de rotation (qui correspondent à la zone III décrite dans la partie 2.2.3).

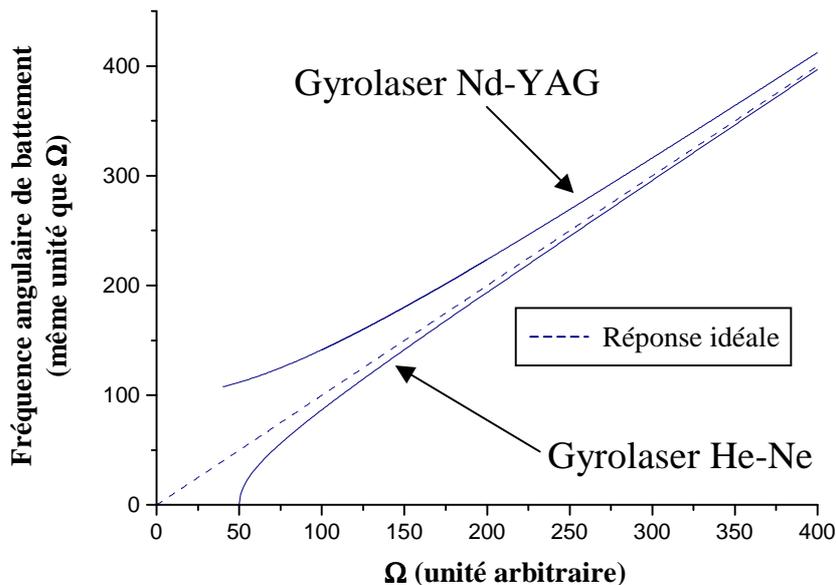


FIGURE 3.3 – Courbes de réponse en fréquence habituellement associées au gyrolaser à hélium-néon et au gyrolaser à état solide (voir texte). La première est incurvée vers le bas par rapport à la réponse en fréquence idéale, tandis que la seconde est incurvée vers le haut. Ces courbes qualitatives ne tiennent en particulier pas compte de la différence d'ordre de grandeur entre les coefficients de rétrodiffusion des deux types de dispositifs.

de bande passante infinie; l'effet décrit ici, directement proportionnel au taux de pompage  $\eta$ , est néfaste pour une utilisation en tant que gyrolaser car il dégrade les performances inertielles.

### Réponse en fréquence incurvée vers le haut ou vers le bas ?

La réponse en fréquence du gyrolaser à hélium-néon est habituellement associée à une courbe de la forme  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \sqrt{\Omega^2 - \Omega_L^2}$  [18], où le paramètre  $\Omega_L$  dépend des coefficients de rétrodiffusion (équation 1.83) et détermine la taille de la zone aveugle. La forme caractéristique d'une telle courbe est représentée sur la figure 3.3. On voit en particulier que la sortie de la zone aveugle est progressive, et que la courbe tend vers son asymptote (qui n'est autre que la droite de réponse idéale  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega$ ) par le bas. La réponse en fréquence du gyrolaser à état solide est très différente, aussi bien au vu des observations numériques (voir par exemple figure 3.2) qu'expérimentales (voir par exemple figure 4.12). On a représenté sa forme caractéristique sur la figure 3.3. La courbe obtenue est incurvée vers le haut et tend vers l'asymptote  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega$  par valeurs supérieures. De plus, la disparition du signal de battement lorsque  $\Omega$  se rapproche de 0 est abrupte, et non pas progressive comme c'est le cas pour le gyrolaser à hélium-néon.

Les remarques suivantes ont pour but d'éclairer le lecteur sur l'origine de ces différences :

- la réponse en fréquence du gyrolaser présentée ici est obtenue à partir de l'équation d'Adler pour la différence de phase  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega - \Omega_L \sin(\Phi + \beta)$  [18]; or cette équation n'est valable que dans l'hypothèse où l'on néglige les modulations temporelles de

l'intensité des modes contrarotatifs induites par la rétrodiffusion (*winking*), ce qui est légitime aux alentours de la zone aveugle, mais pas pour des vitesses de rotation importantes ;

- dans le cas plus réaliste où l'on prend en compte ces modulations, on obtient, dans la limite des grandes non-réciprocités en fréquence, l'expression  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega + m^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)/(2\Omega)$ , qui est compatible avec l'équation 3.15 ; on montre (voir annexe) que cette expression est le résultat de deux contributions distinctes ; la première est due au déplacement d'Adler et correspond au développement limité de  $\sqrt{\Omega^2 - \Omega_L^2}$ , tandis que la seconde est due aux modulations d'intensité ; ce résultat est tout aussi valable dans le cas de l'état solide que dans celui de l'hélium-néon ; en particulier, l'expression  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \sqrt{\Omega^2 - \Omega_L^2}$ , qui est une bonne approximation autour de la zone aveugle du gyrolaser à hélium-néon, cesse d'être valable dans la limite des grandes vitesses de rotation pour laisser place à l'expression  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega + m^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)/(2\Omega)$  ; rien n'interdit donc à la courbe de réponse en fréquence du gyrolaser à hélium-néon de se situer au-dessus de son asymptote, contrairement à ce qui est souvent sous-entendu dans la littérature ;
- le décalage en fréquence induit par le réseau d'inversion de population est quant à lui toujours positif ; ce décalage étant la plupart du temps dominant par rapport au décalage induit par la rétrodiffusion, la courbe de réponse en fréquence du gyrolaser à état solide se situe la plupart du temps au-dessus de son asymptote, conformément à la figure 3.3 ;
- enfin, la différence de comportement lors de la disparition du régime de battement aux faibles vitesses de rotation tient au fait que, dans le cas du gyrolaser à état solide, le réseau d'inversion de population joue un rôle prépondérant, contrairement au cas du gyrolaser à hélium-néon (pour lequel seul le couplage par rétrodiffusion est présent).

### 3.1.5 Conclusion

On a montré, dans la première partie de ce chapitre, qu'il est possible de transformer le régime unidirectionnel, qui survient pour le laser en anneau à état solide aux fortes vitesses de rotation, en un régime de battement propice à une utilisation en tant que gyrolaser, et ceci grâce à l'utilisation d'un dispositif stabilisateur, qui consiste à infliger à chacun des modes contrarotatifs des pertes d'autant plus importantes que l'intensité du mode en question est forte.

On s'est ensuite intéressé à la réponse en fréquence du gyrolaser à état solide ainsi obtenu. Il apparaît un comportement très différent de celui du gyrolaser à hélium-néon, en particulier en raison de l'influence du réseau d'inversion de population sur la réponse en fréquence. C'est ce dernier qui est en particulier responsable de la forme typique "incurvée vers le haut" de la courbe de réponse en fréquence du gyrolaser à état solide.

On s'intéresse maintenant, dans le cadre de la deuxième partie de ce chapitre, aux possibilités de mettre en œuvre de façon concrète le dispositif stabilisateur dont les effets ont été étudiés dans la première partie.

## 3.2 Génération de pertes différentielles par action sur la polarisation

Le dispositif stabilisateur décrit dans la première moitié de ce chapitre est un dispositif qui consiste à induire une différence de pertes entre les modes contrarotatifs du laser en anneau, selon l'expression 3.1, que l'on rappelle ici :

$$\gamma_1 - \gamma_2 = K(aE_1^2 - aE_2^2) . \quad (3.16)$$

Afin de mettre en œuvre un tel dispositif, on se propose de mesurer à l'aide de deux photodiodes les intensités  $aE_1^2$  et  $aE_2^2$ , puis d'infliger au laser, à l'aide d'une boucle de contre-réaction électronique, des pertes différentielles proportionnelles à la différence des intensités mesurées [37, 38]. On est donc ramené au problème de la génération de pertes différentielles contrôlables dans le laser en anneau. On a choisi de générer ces pertes en agissant sur les états de polarisation des champs. On suppose que l'on dispose pour cela des quatre classes d'éléments optiques suivantes : les rotateurs réciproques, les lames biréfringentes, les éléments polarisants et les rotateurs Faraday. Après avoir présenté brièvement le formalisme matriciel utilisé pour décrire les effets de ces différents éléments, nous montrerons qu'il est nécessaire, pour atteindre le but que l'on s'est fixé, d'utiliser au moins trois éléments, parmi lesquels un élément polarisant et un rotateur Faraday. Nous concluons en proposant trois configurations distinctes permettant d'induire effectivement des pertes dépendantes du sens de propagation en agissant sur la polarisation.

### 3.2.1 Formalisme des matrices de Jones

On présente dans ce qui suit le formalisme introduit par R. Jones en 1941 [108], qui consiste à décrire chaque élément optique comme une matrice (appelée matrice de Jones) agissant sur le vecteur champ électrique (parfois appelé dans ce contexte vecteur de Jones). Ce dernier étant toujours perpendiculaire à la direction de propagation, tout se passe dans le plan transverse et les matrices sont donc de taille  $2 \times 2$ . Un ensemble constitué de plusieurs éléments optiques successifs sera décrit par le produit des matrices de Jones des différents éléments. La matrice de Jones d'un élément optique dépend *a priori* de la base utilisée ainsi que du sens dans lequel l'onde électromagnétique traverse cet élément.

#### Choix de base et sens de propagation

Pour un sens de propagation donné, le choix de la base orthonormée utilisée pour décrire le plan transverse est en général déterminé par la géométrie de la configuration considérée (il sera par exemple avantageux de prendre comme vecteur de base l'axe d'un polariseur ou d'une lame d'onde). Lorsque les deux sens de propagation sont envisagés simultanément, comme dans le cas du laser en anneau, deux options sont envisageables :

- soit on impose à la base utilisée de former un trièdre direct avec le vecteur d’onde du champ électromagnétique quel que soit le sens de propagation, et dans ce cas la base utilisée dépendra du sens de propagation ; avec ce choix, un état de polarisation circulaire aura la même matrice de Jones dans les deux sens de propagation, mais pas un état de polarisation rectiligne ;
- soit on fait le choix d’une base indépendante du sens de propagation, et dans ce cas il existera un sens de propagation pour lequel la base utilisée ne formera pas un trièdre direct avec le vecteur d’onde du champ électromagnétique ; ce choix permet de représenter un état de polarisation rectiligne par le même vecteur de Jones quel que soit son sens de propagation, mais pas un état de polarisation circulaire.

Dans ce qui suit, on utilisera la seconde convention. Un état de polarisation linéaire aura donc le même vecteur de Jones quel que soit son sens de propagation, tandis qu’un état de polarisation circulaire aura un vecteur de Jones différent selon son sens de propagation. À titre d’exemple, un état de polarisation circulaire gauche s’écrira avec ce choix  $(1, -i)$  s’il se propage dans le sens CW et  $(1, i)$  s’il se propage dans le sens CCW.

### Matrices de Jones des éléments optiques considérés

Nous allons maintenant nous intéresser aux quatre types d’éléments optiques cités plus haut, en explicitant notamment, en fonction des paramètres caractéristiques, les matrices de Jones qui leur correspondent. Signalons avant de poursuivre plus avant que l’on ne tiendra pas compte des éventuels facteurs de phase communs aux deux sens de propagation, afin de simplifier et/ou de rendre symétriques les écritures. La prise en compte de ces facteurs de phase n’induit qu’une faible variation de la longueur optique totale, sans conséquence sur la dynamique du laser.

**Rotateur réciproque** Une rotation du plan de polarisation du champ est dite “réciproque” lorsque ses effets se compensent après un aller-retour. Certains éléments optiques possèdent la propriété d’induire une telle rotation (on parle d’activité optique naturelle). L’origine d’une telle activité est microscopique (voir par exemple [109]) : elle est due soit à une dissymétrie moléculaire (comme dans le cas de la solution d’acide tartrique, à laquelle s’intéressa Pasteur pour étudier l’activité optique [110]), soit à une dissymétrie cristalline (comme dans le cas des cristaux de quartz).

La matrice de Jones d’un rotateur optique naturel parcouru dans le sens CW, que l’on notera  $RR^{CW}$ , peut s’écrire avec nos conventions :

$$RR^{CW} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \mathfrak{R}(\alpha) . \quad (3.17)$$

Lorsque le même rotateur est parcouru dans le sens opposé, sa matrice de Jones s’écrit :

$$RR^{CCW} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \mathfrak{R}(-\alpha) . \quad (3.18)$$

La valeur de l’angle  $\alpha$  dépend du pouvoir rotatoire du matériau considéré et de l’épaisseur de milieu traversée. L’identité matricielle  $\mathfrak{R}(\alpha).\mathfrak{R}(-\alpha) = I$  (où  $I$  est la matrice identité)

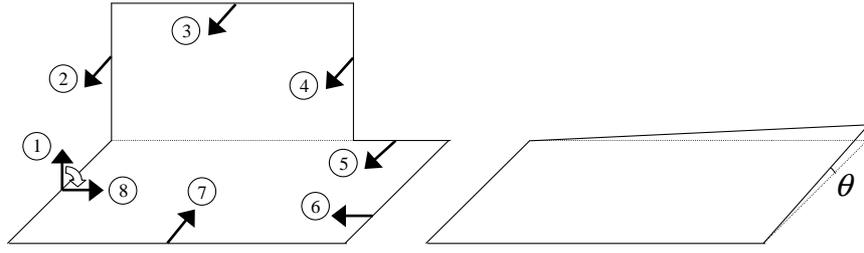


FIGURE 3.4 – Deux exemples de cavités non planaires induisant une rotation réciproque du plan de polarisation du champ électromagnétique qui les parcourt. Dans le cas de la configuration de gauche, l’angle de rotation après un tour est égal à  $\pi/2$ . Dans le cas de la configuration de droite, l’angle dépend de la géométrie précise de la cavité (voir la partie 4.2.1 de ce mémoire pour un calcul explicite sur un exemple concret).

traduit le fait que l’état de polarisation est inchangé après un aller-retour à travers le rotateur réciproque.

Un état de polarisation peut également être soumis à une rotation réciproque lorsqu’il parcourt une cavité en anneau, à la condition que cette dernière ne soit pas contenue dans un plan [111]. On parle dans ce cas de cavité non planaire. On donne sur la partie gauche de la figure 3.4 l’exemple d’une cavité dont on peut se convaincre, par des considérations géométriques, qu’elle engendre une rotation réciproque de  $\pi/2$  à chaque tour. En pratique, on utilisera plutôt une cavité du type de celle présentée à droite de la figure 3.4, beaucoup plus proche en apparence d’une cavité planaire et induisant une rotation dont l’angle est très inférieur à  $\pi/2$ . Un formalisme précis permettant d’exprimer, dans le cas général, l’angle de la rotation induite en fonction de la géométrie de la cavité peut être trouvé dans [112]. On aura l’occasion de revenir sur ce point lors de l’évaluation de nos paramètres expérimentaux (partie 4.2.1).

On retiendra pour l’instant qu’une cavité non planaire est équivalente à un rotateur optique naturel, dont l’angle de rotation est déterminé par la géométrie de la cavité. On parlera dans les deux cas de rotateur optique réciproque.

**Lame d’onde** Une lame d’onde est un élément biréfringent, possédant deux axes propres orthogonaux  $\mathbf{e}_u$  et  $\mathbf{e}_v$  associés respectivement aux valeurs propres  $e^{i\psi}$  et  $e^{-i\psi}$ . Si l’on suppose dans un premier temps que les axes  $\mathbf{e}_u$  et  $\mathbf{e}_v$  coïncident respectivement avec  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$ , alors la matrice de Jones de la lame d’onde, notée dans ce cas  $LO(0, \psi)$ , s’écrit :

$$LO(0, \psi) = \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix} = G(\psi). \quad (3.19)$$

Si maintenant l’axe  $\mathbf{e}_u$  forme avec l’axe  $\mathbf{e}_x$  un angle  $\theta$ , la matrice de la lame d’onde devient :

$$LO(\theta, \psi) = \mathfrak{R}(\theta).LO(0, \psi).\mathfrak{R}(-\theta) = \mathfrak{R}(\theta).G(\psi).\mathfrak{R}(-\theta). \quad (3.20)$$

Étant donné les conventions de choix de base adoptées précédemment, cette matrice est indépendante du sens de propagation. Les lames d’onde les plus couramment utilisées sont

les lames demi-onde (correspondant dans notre formalisme à  $\psi = \pi/2$ ) et les lames quart d'onde ( $\psi = \pi/4$ ). Toutes les valeurs de  $\psi$  peuvent toutefois être obtenues en pratique, par exemple en utilisant des éléments électro-optiques (cellules de Pockels, etc.), qui peuvent être assimilés à des lames d'onde à effet contrôlable par voie électrique.

**Élément polarisant** Un élément polarisant est un élément optique possédant un premier axe propre  $\mathbf{e}_u$  associé à la valeur propre  $\varepsilon_1$  (avec  $0 \leq \varepsilon_1 \ll 1$ ) et un deuxième axe propre  $\mathbf{e}_v$ , perpendiculaire au premier et associé à la valeur propre  $1 - \varepsilon_2$  (avec  $0 \leq \varepsilon_2 \ll 1$ ). Ce dernier axe est appelé axe de polarisation. Si l'on note  $\theta$  l'angle existant entre les vecteurs  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_u$ , la matrice de Jones d'un élément polarisant s'écrit :

$$EP(\theta, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = R(\theta)\mathcal{P}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)R(-\theta) \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Tout comme dans le cas de la lame d'onde et pour les mêmes raisons, la matrice de Jones d'un élément polarisant est avec nos conventions indépendante du sens de propagation du champ. La matrice de Jones d'un polariseur idéal dont l'axe de polarisation fait un angle  $\theta$  avec  $\mathbf{e}_y$  s'écrit  $EP(\theta, 0, 0)$ .

**Rotateur Faraday** Un milieu cristallin, soumis à un champ magnétique, induit par effet Faraday une rotation du plan de polarisation de la lumière qui le traverse [109], dont l'angle est proportionnel à la longueur de matériau traversée et à l'intensité du champ magnétique le long de l'axe de propagation. En raison des propriétés de symétrie du champ magnétique, les rotations Faraday se cumulent sur un aller et retour, au lieu de se compenser comme c'est le cas pour les rotations réciproques. Un état de polarisation linéaire sera donc tourné d'un angle  $\beta$  quel que soit son sens de propagation. Les états circulaire gauche se propageant dans le sens CW et circulaire droit se propageant dans le sens CCW auront la même valeur propre  $e^{i\beta}$ , l'autre valeur propre  $e^{-i\beta}$  étant associée aux états propres circulaire droit CW et circulaire gauche CCW.

Avec nos conventions, la matrice de Jones d'un rotateur Faraday est indépendante du sens dans lequel celui-ci est traversé. Elle ne dépend que de l'angle de rotation  $\beta$ , et s'écrit :

$$RF(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \mathfrak{R}(\beta). \quad (3.22)$$

### Application à l'insertion d'un élément optique dans une cavité laser

Les matrices de Jones des différents éléments optiques introduites précédemment l'ont été dans le but de pouvoir décrire les effets d'une insertion d'un ou plusieurs de ces éléments dans la cavité laser. À cette fin, on se propose dans ce qui suit d'établir une relation simple entre les valeurs propres de la matrice de Jones des éléments optiques contenus dans une cavité laser en anneau d'une part et la fréquence de résonance et les pertes de ladite cavité d'autre part. On considère pour cela un modèle de laser simplifié comprenant un gain en amplitude  $\sqrt{G}$ , des pertes en amplitude liées à la transmission du miroir de sortie  $\sqrt{1 - T}$  et un déphasage lié au parcours de la cavité  $\exp(ikL)$ , ces trois grandeurs étant supposées indépendantes de la polarisation. Le parcours d'un tour

de cavité laser peut alors être représenté par la matrice de Jones suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{G(1-T)} \exp(ikL) & 0 \\ 0 & \sqrt{G(1-T)} \exp(ikL) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

La condition de résonance, qui s'écrit  $M = I$ , donne dans ce cas :

$$\begin{cases} G(1-T) = 1, \\ kL = k_0 L_{\text{op}} = 2\pi q \quad \text{avec } q \text{ entier.} \end{cases} \quad (3.24)$$

La première condition exprime le fait que le gain compense les pertes, la deuxième que la fréquence d'émission laser, donnée par  $k_0 c / 2\pi$ , est un multiple entier de l'intervalle spectral libre  $c / L_{\text{op}}$ .

On suppose maintenant que l'on insère dans la cavité décrite ci-dessus un certain nombre d'éléments optiques, représentés par la matrice de Jones  $N$  (cette matrice est obtenue en faisant le produit des matrices de Jones des différents éléments considérés). La nouvelle condition de résonance  $M.N = I$  s'écrit alors, en appelant  $\mu$  et  $\nu$  le module et l'argument d'une valeur propre de  $N$  :

$$\begin{cases} G(1-T)\mu^2 = 1, \\ kL = k_0 L_{\text{op}} = 2\pi q - \nu \quad \text{avec } q \text{ entier.} \end{cases} \quad (3.25)$$

Le coefficient de pertes en intensité  $p$  lié à la présence de ces éléments optiques est donc donné par  $p = 1 - \mu^2$ , tandis que la fréquence de résonance de la cavité en présence de ces éléments devient :

$$\omega_c = k_0 c = (2\pi p - \nu) \frac{c}{L_{\text{op}}}. \quad (3.26)$$

Il convient de noter qu'il y a en théorie deux couples de valeur propre  $(\mu, \nu)$  pour la matrice  $N$ , qui est rappelons-le de taille  $2 \times 2$ . Toutefois, lorsqu'un élément polarisant est présent (ce qui sera toujours le cas dans nos expériences, sauf dans le chapitre 6), seule l'une des deux valeurs propres a un module significativement différent de 0, et peut osciller dans la cavité.

On retiendra donc la procédure suivante pour calculer l'effet de l'insertion d'un ensemble d'éléments optiques (comprenant au moins un polariseur) dans une cavité laser : il convient tout d'abord de calculer la matrice de Jones des éléments considérés, puis d'identifier parmi ses valeurs propres celle qui a un module proche de 1 ; si l'on appelle  $\mu$  le module de cette valeur propre et  $\nu$  son argument, les pertes d'insertion (en intensité)  $p$  sont données par  $p = 1 - \mu^2$ , tandis que le décalage en fréquence (angulaire) s'écrit  $\nu c / L_{\text{op}}$ . On aura l'occasion à plusieurs reprises de mettre en œuvre cette procédure dans la suite de ce mémoire.

### 3.2.2 Conditions nécessaires pour produire des pertes dépendantes du sens de propagation

On se propose maintenant d'utiliser le formalisme que l'on vient de décrire afin d'établir un certain nombre de conditions nécessaires à la génération de pertes différentielles dans

la cavité. Ces conditions sont, comme on va le voir, au nombre de trois : utiliser au moins un élément polarisant, utiliser au moins un rotateur Faraday et utiliser au moins trois éléments distincts.

### Nécessité de l'utilisation d'un élément polarisant

Parmi les quatre types d'éléments présentés plus haut, trois d'entre eux (rotations réciproques et non réciproques ainsi que lames d'onde) correspondent à des transformations unitaires, c'est-à-dire vérifient l'identité matricielle suivante :

$${}^t M^* M = I, \quad (3.27)$$

où  ${}^t M$  désigne la transposée de  $M$  et  $M^*$  son conjugué. Une des principales caractéristiques des matrices unitaires est qu'elles conservent la norme, ou (ce qui revient au même) que toutes leurs valeurs propres sont de module 1<sup>3</sup>. Physiquement, cela signifie que de tels éléments n'engendrent pas de perte. Le produit de matrices unitaires étant une matrice unitaire, on se convainc aisément de la nécessité d'au moins un élément polarisant (qui est le seul non unitaire parmi les quatre types d'éléments considérés) pour induire des pertes dans le système.

### Nécessité de l'utilisation d'un rotateur Faraday

On se propose de démontrer, dans ce qui suit, qu'il est nécessaire d'utiliser au moins un élément Faraday pour générer des pertes qui dépendent du sens de propagation. Pour cela, on va considérer un laser en anneau contenant un assemblage quelconque d'éléments des trois autres catégories (rotateurs réciproques, lames d'onde, éléments polarisants) et l'on va montrer que dans ce cas le coefficient de pertes (ou, ce qui revient au même, le module des valeurs propres du produit des matrices de Jones de ces éléments) est indépendant du sens de propagation. On utilisera à cette fin le fait que les valeurs propres d'une matrice  $2 \times 2$  sont entièrement déterminées par la donnée de sa trace et de son déterminant<sup>4</sup>.

Soit donc un ensemble de  $n$  éléments optiques  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  choisis parmi les trois catégories présentées plus haut (rotateurs réciproques, lames d'onde et polariseurs partiels) et insérés dans une cavité optique en anneau. La matrice de Jones  $M^{\text{CW}}$  de l'ensemble des éléments lorsque la cavité est parcourue dans le sens CW s'écrit :

$$M^{\text{CW}} = M_n^{\text{CW}} \dots M_2^{\text{CW}} M_1^{\text{CW}}, \quad (3.30)$$

<sup>3</sup>Pour s'en convaincre, considérons une matrice unitaire  $U$ , une valeur propre de  $U$  notée  $\lambda$  et un vecteur propre de  $U$  associé à  $\lambda$  et noté  $|v\rangle$ . On a par hypothèse :

$$U|v\rangle = \lambda|v\rangle \quad \text{d'où} \quad \langle v|^t U^* = \lambda^* \langle v| \quad \text{et donc} \quad \langle v|^t U^* U |v\rangle = |\lambda|^2 \langle v|v\rangle. \quad (3.28)$$

Comme  $U$  est unitaire, cela implique  $\langle v|v\rangle = |\lambda|^2 \langle v|v\rangle$  d'où  $|\lambda|^2 = 1$  (car  $\langle v|v\rangle \neq 0$ ).

<sup>4</sup>En effet, le polynôme caractéristique  $\mathcal{P}_M(X)$  d'une matrice  $M$  de taille  $2 \times 2$  est donné par :

$$\mathcal{P}_M(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix} = X^2 - (a + d)X + (ad - bc) \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

d'où finalement  $\mathcal{P}_M(X) = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M)$ . Les valeurs propres de la matrice  $M$  étant les racines de  $\mathcal{P}_M(X)$ , elles ne dépendent que de la trace et du déterminant de  $M$ . En particulier, si deux matrices de taille  $2 \times 2$  ont même trace et même déterminant, elles ont les mêmes valeurs propres (ceci n'est bien entendu plus vrai pour les dimensions supérieures à 2).

où  $M_1^{\text{CW}}, M_2^{\text{CW}}, \dots, M_n^{\text{CW}}$  désignent les matrices de Jones des différents éléments optiques. Dans le sens inverse (CCW), on a :

$$M^{\text{CCW}} = M_1^{\text{CCW}} M_2^{\text{CCW}} \dots M_n^{\text{CCW}} . \quad (3.31)$$

On se propose de montrer que les matrices  $M^{\text{CW}}$  et  $M^{\text{CCW}}$  ont le même déterminant et la même trace. Les matrices  $M_i$  vérifiant toutes l'égalité  $\det(M_i^{\text{CCW}}) = \det(M_i^{\text{CW}})$ , on a immédiatement  $\det(M^{\text{CW}}) = \det(M^{\text{CCW}})$ . En ce qui concerne la trace, on peut écrire :

$$\text{Tr}(M^{\text{CCW}}) = \text{Tr}(M_1^{\text{CCW}} M_2^{\text{CCW}} \dots M_n^{\text{CCW}}) = \text{Tr}({}^t M_n^{\text{CCW}} \dots {}^t M_2^{\text{CCW}} {}^t M_1^{\text{CCW}}) . \quad (3.32)$$

Il est nécessaire d'étudier, cas par cas, le lien entre  ${}^t M_i^{\text{CCW}}$  et  $M_i^{\text{CW}}$  selon que l'élément optique associé à la matrice  $M_i$  (noté  $\mathcal{E}_i$ ) est un rotateur réciproque, une lame d'onde ou un polariseur partiel :

- si  $\mathcal{E}_i$  est un rotateur réciproque, alors  $M_i^{\text{CW}}$  s'écrit  $\mathfrak{R}(\alpha_i)$  et  $M_i^{\text{CCW}} = \mathfrak{R}(-\alpha_i)$ , d'où  ${}^t M_i^{\text{CCW}} = {}^t \mathfrak{R}(-\alpha_i) = \mathfrak{R}(\alpha_i) = M_i^{\text{CW}}$  ;
- si  $\mathcal{E}_i$  est une lame d'onde, alors  $M_i^{\text{CW}}$  et  $M_i^{\text{CCW}}$  s'écrivent  $\mathfrak{R}(\alpha_i)G(\psi_i)\mathfrak{R}(-\alpha_i)$ , d'où  ${}^t M_i^{\text{CCW}} = {}^t \mathfrak{R}(-\alpha_i) {}^t G(\psi_i) {}^t \mathfrak{R}(\alpha_i) = \mathfrak{R}(\alpha_i)G(\psi_i)\mathfrak{R}(-\alpha_i) = M_i^{\text{CW}}$  ;
- enfin, si  $\mathcal{E}_i$  est un polariseur partiel, alors on a pour les mêmes raisons que dans le cas de la lame d'onde  ${}^t M_i^{\text{CCW}} = M_i^{\text{CW}}$ .

Ainsi, quel que soit le cas envisagé, on a  ${}^t M_i^{\text{CCW}} = M_i^{\text{CW}}$ . L'équation (3.32) se réécrit alors :

$$\text{Tr}(M^{\text{CCW}}) = \text{Tr}(M_n^{\text{CW}} \dots M_2^{\text{CW}} M_1^{\text{CW}}) = \text{Tr}(M^{\text{CW}}) . \quad (3.33)$$

Les matrices  $M^{\text{CCW}}$  et  $M^{\text{CW}}$  ont donc la même trace et le même déterminant. On en déduit en particulier qu'elles possèdent les mêmes valeurs propres, d'où l'on conclut que les pertes infligées au système ne dépendent pas du sens de propagation. L'utilisation d'un élément Faraday (non réciproque) est donc indispensable, dans le cadre de cette étude, à la mise en œuvre de pertes différentielles.

REMARQUE : il est possible d'arriver à la même conclusion en utilisant le principe de Curie [113], qui stipule que les propriétés de symétrie des causes se retrouvent sur les effets qu'elles induisent. En particulier, lorsque les causes sont invariantes par renversement du temps, les effets qu'elles induisent le sont également. Dans le cas d'un laser en anneau, cela signifie qu'un effet dépendant du sens de propagation devra nécessairement être induit par une cause non invariante par renversement du temps. C'est bien le cas des effets impliquant un champ magnétique (comme l'effet Faraday), ainsi que des effets fondés sur des mouvements mécaniques (effet acousto-optique, effet Doppler). Ce n'est en revanche pas le cas des effets liés à la biréfringence ou à l'utilisation d'éléments polarisants.

### Nécessité de l'utilisation d'au moins trois éléments dans la cavité

Une dernière condition nécessaire, dans le cadre de cette étude, à la production de pertes différentielles est l'utilisation d'au moins trois éléments distincts. Pour s'en

convaincre, on considère une cavité ne contenant que deux éléments  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ . D'après ce qui précède, ces éléments sont nécessairement un élément polarisant et un rotateur Faraday. En particulier, leurs matrices de Jones  $M_1$  et  $M_2$  sont indépendantes du sens de propagation. La matrice totale s'écrit  $M_1.M_2$  dans le sens (CW) et  $M_2.M_1$  dans le sens (CCW). Ces deux matrices ont la même trace et le même déterminant, donc les mêmes valeurs propres. En conséquence, il n'est pas possible de générer des pertes différentielles en n'utilisant que ces deux éléments.

### 3.2.3 Quelques configurations simples permettant d'induire des pertes différentielles

On a montré dans ce qui précède qu'il était nécessaire, pour générer des pertes dépendantes du sens de propagation, d'utiliser au moins trois éléments optiques parmi lesquels un élément polarisant et un rotateur Faraday. On va maintenant étudier quelques configurations simples qui permettent d'atteindre cet objectif.

#### Association d'un polariseur, d'un rotateur Faraday et d'un rotateur réciproque

Considérons une cavité en anneau contenant un élément polarisant supposé idéal et d'axe de polarisation  $\mathbf{e}_y$ , un rotateur Faraday d'angle de rotation  $\beta$  et un rotateur réciproque d'angle de rotation  $\alpha$ . La matrice de Jones de l'ensemble de ces éléments parcourus dans le sens CW s'écrit (avec les notations introduites précédemment) :

$$M^{\text{CW}} = EP(0, 0, 0).RF(\beta).RR^{\text{CW}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

La seule valeur propre non nulle de cette matrice est  $\cos(\alpha + \beta)$ , ce qui correspond à un coefficient de pertes par tour en intensité  $p_{\text{CW}}$  égal à  $1 - \cos^2(\alpha + \beta)$ . Dans le sens CCW, la matrice de Jones totale s'écrit :

$$M^{\text{CCW}} = RR^{\text{CCW}}(\alpha).RF(\beta).EP(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\alpha - \beta) \\ 0 & \cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

qui admet pour valeur propre non nulle  $\cos(\alpha - \beta)$ , ce qui correspond à un coefficient de pertes par tour en intensité  $p_{\text{CCW}}$  égal à  $1 - \cos^2(\alpha - \beta)$ . Ce dispositif est donc bien générateur de pertes dépendantes du sens de propagation, avec une différence de pertes donnée par :

$$|p_{\text{CCW}} - p_{\text{CW}}| = |\sin(2\alpha) \sin(2\beta)|. \quad (3.36)$$

La valeur moyenne des pertes infligées aux deux modes est quant à elle égale à :

$$\frac{1}{2}(p_{\text{CCW}} + p_{\text{CW}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha) \cos(2\beta). \quad (3.37)$$

On voit donc qu'il est possible avec ce dispositif de générer des pertes différentielles (équation 3.36), au prix d'une augmentation du coefficient de pertes moyen (équation 3.37). Le choix des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  est en général le fruit d'un compromis entre ces deux effets (on cherche à maximiser le premier tout en limitant le second).

REMARQUE : le cas correspondant à  $\alpha = \beta$  est utilisé en pratique pour obtenir un laser

en anneau unidirectionnel [111]. En effet, dans ce cas, les coefficients de pertes infligés aux deux modes valent respectivement 0 et  $1 - \cos^2(2\alpha)$ , ce qui permet d'obtenir l'extinction d'un mode au profit de l'autre. D'un point de vue géométrique, cela correspond à une situation pour laquelle les effets des rotateurs réciproque et Faraday se compensent exactement dans un sens de propagation et s'additionnent dans l'autre.

### Association d'un polariseur, d'un rotateur Faraday et d'une lame d'onde

Une configuration alternative à la précédente peut être obtenue en remplaçant le rotateur réciproque par une lame d'onde, que l'on suppose *a priori* quelconque, tournée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $\mathbf{e}_x$  et induisant un déphasage de  $2\psi$  entre ses deux axes propres. La matrice de Jones totale du dispositif s'écrit alors, dans le sens CW :

$$M^{\text{CW}} = EP(0, 0, 0).RF(\beta).LO(\theta, \psi) = \mathcal{P}(0, 0).\mathfrak{R}(\beta + \theta).G(\psi).\mathfrak{R}(-\theta), \quad (3.38)$$

d'où après calcul :

$$M^{\text{CW}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin\beta \cos\psi - i \sin(\beta + 2\theta) \sin\psi & \cos\beta \cos\psi - i \cos(\beta + 2\theta) \sin\psi \end{pmatrix}.$$

Dans le sens CCW, on a :

$$M^{\text{CCW}} = LO(\theta, \psi).RF(\beta).EP(0, 0, 0) = \mathfrak{R}(\theta).G(\psi).\mathfrak{R}(-\theta + \beta).\mathcal{P}(0, 0), \quad (3.39)$$

ce qui donne après calcul :

$$M^{\text{CCW}} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\beta \cos\psi - i \sin(-\beta + 2\theta) \sin\psi \\ 0 & \cos\beta \cos\psi - i \cos(-\beta + 2\theta) \sin\psi \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Les valeurs propres non nulles de  $M^{\text{CW}}$  et  $M^{\text{CCW}}$  s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \lambda_{\text{CW}} = \cos\beta \cos\psi - i \cos(\beta + 2\theta) \sin\psi \\ \lambda_{\text{CCW}} = \cos\beta \cos\psi - i \cos(\beta - 2\theta) \sin\psi \end{cases}. \quad (3.41)$$

Afin d'éviter que le dispositif stabilisateur ne perturbe la réponse en fréquence du gyrolaser, il faut s'assurer que la différence entre les arguments de  $\lambda_{\text{CW}}$  et de  $\lambda_{\text{CCW}}$  ne dépende pas de  $\beta$ . On montre<sup>5</sup> que cette condition est réalisée soit pour  $\theta = 0$  (modulo  $\pi/2$ ), soit pour  $\sin\psi = 0$ , soit pour  $\cos\psi = 0$ . Les deux premiers cas sont à exclure car ils correspondent à des pertes différentielles nulles. Il est donc nécessaire d'avoir  $\cos\psi = 0$  c'est-à-dire  $\psi = \pi/2$  (modulo  $\pi$ ), ce qui correspond à une lame demi-onde (ou lame  $\lambda/2$ ). Les pertes différentielles s'écrivent alors :

$$|p_{\text{CCW}} - p_{\text{CW}}| = |\sin(2\beta) \sin(4\theta)|, \quad (3.42)$$

tandis que les pertes moyennes sont égales à :

$$\frac{1}{2}(p_{\text{CCW}} + p_{\text{CW}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\beta) \cos(4\theta). \quad (3.43)$$

<sup>5</sup>En effet, lorsque  $\cos\psi = 0$ ,  $\lambda_{\text{CW}}$  et  $\lambda_{\text{CCW}}$  sont tous les deux imaginaires purs, donc ont le même argument. Lorsque  $\cos\psi \neq 0$ , on montre que la différence entre les tangentes des arguments de  $\lambda_{\text{CW}}$  et  $\lambda_{\text{CCW}}$  s'écrit  $2 \tan\beta \tan\psi \sin(2\theta)$ . Cette différence n'est indépendante de  $\beta$  qu'à la condition  $\sin\psi = 0$  ou  $\sin(2\theta) = 0$ .

Il est donc possible de remplacer le rotateur réciproque du paragraphe précédent par une lame d'onde, à condition d'utiliser une lame  $\lambda/2$ . Cette dernière produit, dans ce contexte, le même effet qu'un rotateur réciproque dont l'angle de rotation serait égal à deux fois l'angle existant entre les axes propres de la lame d'onde et ceux du polariseur. On peut noter que ce type de configuration, tout comme la précédente, peut être utilisée dans le but d'obtenir un laser en anneau unidirectionnel (voir par exemple [114]).

### Association d'un rotateur Faraday et de deux polariseurs

Considérons maintenant une cavité contenant un rotateur Faraday d'angle  $\beta$  ainsi que deux polariseurs idéaux, le premier ayant pour axe de polarisation  $\mathbf{e}_y$  et le deuxième ayant un axe de polarisation tourné d'un angle  $\theta$  par rapport au premier. La matrice de Jones de l'ensemble du dispositif dans le sens CW s'écrit :

$$M^{\text{CW}} = EP(0, 0, 0)RF(\beta)EP(\theta, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos(\beta + \theta) \sin(\theta) & \cos(\beta + \theta) \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dans le sens CCW, on a :

$$M^{\text{CCW}} = EP(\theta, 0, 0)RF(\beta)EP(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\beta - \theta) \sin(\theta) \\ 0 & \cos(\beta - \theta) \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres non nulles de ces deux matrices sont donc données par :

$$\begin{cases} \lambda_{\text{CW}} = \cos \theta \cos(\beta + \theta) \\ \lambda_{\text{CCW}} = \cos \theta \cos(\beta - \theta) \end{cases}, \quad (3.44)$$

d'où les pertes différentielles :

$$|p_{\text{CCW}} - p_{\text{CW}}| = \cos^2 \theta |\sin(2\beta) \sin(2\theta)|, \quad (3.45)$$

et les pertes moyennes :

$$\frac{1}{2} (p_{\text{CCW}} + p_{\text{CW}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\beta) \cos(2\theta) + \frac{1}{2} \sin^2 \theta [1 + \cos(2\beta) \cos(2\theta)]. \quad (3.46)$$

On voit donc que cette configuration constitue une alternative possible aux deux précédentes, l'angle  $\theta$  entre les axes des polariseurs pouvant être comparé à l'angle  $\alpha$  de rotation réciproque. Toutefois, elle est moins avantageuse que par exemple la première configuration, puisqu'à valeur des paramètres fixée ( $\alpha = \theta$ ) les pertes différentielles produites sont moins importantes (atténuation d'un facteur  $\cos^2 \theta$ ) et les pertes moyennes plus importantes (augmentation de la quantité  $\sin^2 \theta [1 + \cos(2\beta) \cos(2\theta)]/2$ ).

### Conclusion

Après avoir établi qu'il était nécessaire d'utiliser au moins trois éléments optiques pour générer dans la cavité laser des pertes dépendantes du sens de propagation, on a étudié l'ensemble des configurations à exactement trois éléments qui permettent de produire ce résultat. Parmi les configurations présentées, la première (association d'un polariseur, d'un rotateur Faraday et d'un rotateur réciproque) est particulièrement avantageuse, car elle

peut être mise en œuvre sans avoir besoin d'ajouter d'élément physique supplémentaire dans la cavité. En effet, il est possible d'intégrer le polariseur dans un miroir, d'utiliser le milieu à gain comme matériau Faraday et la non-planéité de la cavité comme rotateur réciproque [107]. La réalisation expérimentale de cette configuration est décrite au chapitre suivant (partie 4.1.2).

### Cas d'un polariseur non idéal : un effet paradoxal ?

Au terme de cette étude, il nous semble intéressant de mentionner un effet "paradoxal", mis en évidence dans [115] et qui peut se formuler ainsi : lorsque la qualité du polariseur utilisé se dégrade, les pertes différentielles générées augmentent ! On peut illustrer quantitativement cet effet en considérant par exemple la première des trois configurations étudiées précédemment (c'est-à-dire l'association d'un polariseur, d'un rotateur réciproque et d'un rotateur non réciproque), en supposant que l'on a remplacé le polariseur idéal par un polariseur imparfait, dont la matrice de Jones est donnée par :

$$EP(0, x, 0) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

La matrice totale du système s'écrit alors, dans le sens CW :

$$M^{CW} = EP(0, x, 0).RF(\beta).RR^{CW}(\alpha) = \begin{pmatrix} x \cos(\alpha + \beta) & x \sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

et dans le sens CCW :

$$M^{CCW} = RR^{CCW}(\alpha).RF(\beta).EP(0, x, 0) = \begin{pmatrix} x \cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) \\ x \sin(\alpha - \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

On a tracé sur la figure 3.5 la valeur des pertes différentielles, obtenues à partir des valeurs propres de ces matrices ci-dessus, en fonction de la qualité du polariseur  $x$  (le polariseur idéal correspondant à  $x = 0$  et le polariseur totalement inopérant à  $x = 1$ ). On observe effectivement que la courbe est une fonction croissante de  $x$ , ce qui confirme l'effet "paradoxal" annoncé. En fait, cet effet peut s'expliquer par des considérations géométriques, en remarquant que, lorsque l'effet polarisant diminue, la sensibilité à la rotation augmente, ce qui résulte finalement en une augmentation globale des pertes différentielles. On note au passage que, lorsque l'effet polarisant devient trop faible ( $x > 0,85$  sur la figure 3.5), les pertes différentielles disparaissent totalement (cela correspond à une situation où les états propres du laser ne sont plus linéaires). L'effet que l'on vient de décrire est intéressant en pratique, car il permet de gagner potentiellement un facteur 100 sur la valeur des pertes différentielles simplement en dégradant les performances du polariseur utilisé.

### 3.3 Conclusion

On a montré dans la première partie de ce chapitre qu'il était possible de stabiliser le régime de battement, et donc de transformer le laser en anneau à état solide en un gyrolaser, à condition d'infliger à la cavité des pertes différentielles proportionnelles à la différence d'intensité, selon l'expression :

$$\gamma_1 - \gamma_2 = K(aE_1^2 - aE_2^2) \quad \text{avec} \quad K > 0. \quad (3.50)$$

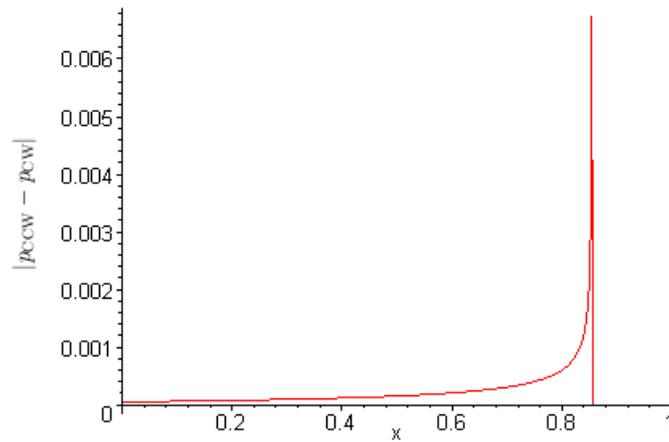


FIGURE 3.5 – Valeur des pertes différentielles subies par une cavité en anneau contenant un rotateur réciproque d'angle  $\alpha = 4,5^\circ$ , un rotateur Faraday d'angle  $\beta = 0,16$  mrad et un polariseur imparfait, en fonction du paramètre  $x$  qui représente la qualité de ce polariseur selon la relation 3.47.

On a mis en évidence deux sources de non-linéarité agissant sur la réponse en fréquence du gyrolaser ainsi obtenu, à savoir la rétrodiffusion et le réseau d'inversion de population. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on s'est intéressé à la mise en œuvre d'un dispositif stabilisateur selon l'équation 3.50. Après avoir étudié un certain nombre de configurations, il a été proposé de générer des pertes différentielles au moyen de l'action combinée d'un rotateur réciproque, d'un polariseur et d'un rotateur non réciproque, et de maintenir la valeur de ces pertes proportionnelle à différence d'intensité entre les modes contrarotatifs à l'aide d'une boucle de contre-réaction électronique. Le principal intérêt de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas d'ajout d'élément supplémentaire dans la cavité laser, puisqu'une non-planéité de la cavité peut faire office de rotateur réciproque, le milieu à gain peut faire office de matériau Faraday et l'un des miroirs de la cavité peut faire office de polariseur. Nous aurons l'occasion de revenir en détail sur la réalisation expérimentale de cette configuration dans le chapitre suivant (partie 4.1.2).

Il convient de noter que la boucle de contre-réaction pourrait tout aussi bien agir sur un paramètre réciproque de la cavité. Ainsi, on pourrait imaginer une configuration associant un rotateur Faraday à angle de rotation fixe (par exemple avec un aimant), un polariseur et un élément électro-optique agissant comme une lame  $\lambda/2$  dont l'orientation serait contrôlable et asservie sur la différence d'intensité entre les modes contrarotatifs.

Signalons également qu'une alternative à l'utilisation d'un élément polarisant pourrait être l'utilisation d'un milieu à gain anisotrope, comme le Nd-YVO<sub>4</sub> [116].

Enfin, on ne saurait conclure sans citer un certain nombre d'autres types de dispositifs stabilisateurs, proposés pour la plupart par les auteurs de [43, 45] et qui constituent une alternative à la méthode étudiée dans ce chapitre. Au lieu d'utiliser une boucle de contre-réaction agissant sur les pertes différentielles de la cavité par l'intermédiaire des états de polarisation du champ, on aurait pu :

- créer des pertes différentielles asservies sur la différence d'intensité mais générées par un effet acousto-optique [35] ;
- utiliser un effet non linéaire permettant d'infliger à chaque mode, de manière passive, des pertes d'autant plus importantes que leur intensité est importante [45] ; un tel effet peut par exemple être obtenu à l'aide d'un cristal doubleur de fréquence (si l'on considère que ce qui est doublé est perdu) ;
- inscrire dans le milieu à gain un deuxième réseau de signe opposé au premier en y réinjectant une partie des signaux de sortie du laser ; ce deuxième réseau peut avoir, lorsqu'il est suffisamment intense, un effet stabilisateur [39] ;
- coupler les deux ondes contrarotatives par mélange à quatre ondes dans un milieu non linéaire intracavité, comme proposé dans [117] ;
- utiliser un absorbant saturable, dans lequel peut également se créer un réseau de signe opposé au réseau de gain, donc ayant un effet stabilisateur [41] ;
- séparer spatialement les modes au niveau du milieu à gain afin qu'ils n'interagissent pas avec les mêmes atomes [42].

Le lecteur se demande peut-être pourquoi nous avons été amené à choisir la méthode de la boucle de contre-réaction et non l'une des autres méthodes énumérées ci-dessus. La réponse est que l'utilisation d'un circuit électronique nous offre un degré de liberté supplémentaire, c'est-à-dire "des réglages en plus" au niveau expérimental. Nous pensons toutefois que l'étude de ces voies alternatives pourrait s'avérer utile dans la conception de nouvelles générations de gyrolaser à état solide (par exemple un dispositif de stabilisation passif serait sans doute plus adapté pour une configuration du type de celle présentée dans le chapitre 6).



# Chapitre 4

## Étude expérimentale

Après avoir décrit d'un point de vue théorique, dans les trois chapitres précédents, le cheminement qui mène du laser en anneau au gyrolaser à état solide, on s'intéresse maintenant à l'aspect expérimental de cette étude. L'objet de ce chapitre est à la fois la description des dispositifs expérimentaux utilisés ainsi que celle des principaux résultats obtenus. On y adopte dans une première partie un point de vue qualitatif, en décrivant nos observations expérimentales du comportement du laser en anneau puis du gyrolaser à état solide. La démarche devient dans une deuxième partie plus quantitative, puisque l'on tente, à partir des données obtenues, d'évaluer les ordres de grandeur des différents paramètres du laser. Cela permet en particulier de confronter les observations expérimentales aux prédictions théoriques.

### 4.1 Le point de vue qualitatif

Il ne s'agit pas dans ce qui suit de s'intéresser systématiquement à tous les montages expérimentaux réalisés en vue de l'obtention puis de l'étude d'un gyrolaser à état solide, mais plutôt de décrire, à partir de données extraites de ces différents montages, les deux expériences "types" que sont le laser en anneau à état solide simple (c'est-à-dire sans dispositif stabilisateur) d'une part et le gyrolaser à état solide (c'est-à-dire le laser en anneau à état solide avec un dispositif stabilisateur comme celui décrit au chapitre précédent) d'autre part. Il convient de noter que cette dernière expérience se décline en deux versions, une première sur banc optique et une seconde intégrée dans un bloc rigide.

#### 4.1.1 Laser en anneau à état solide sans dispositif stabilisateur

##### Dispositif expérimental

Le laser en anneau à état solide tel que nous l'avons réalisé dans sa forme la plus simple est représenté sur la figure 4.1. Le milieu laser utilisé est un barreau de Nd-YAG, dont la taille varie entre 5 et 50 mm selon les cas. Le pompage optique provient d'une diode laser à 808 nm fibrée (puissance de l'ordre du watt), asservie en température et dont le faisceau est focalisé en sortie de fibre à l'aide d'une lentille convergente. La taille du faisceau de pompe au niveau de la zone de gain est typiquement de l'ordre de 500  $\mu\text{m}$ . En conséquence, celui-ci joue dans la cavité le rôle d'un diaphragme, et permet d'obtenir un mode transverse  $\text{TEM}_{00}$  lorsqu'il est convenablement positionné. Au moins l'un des miroirs

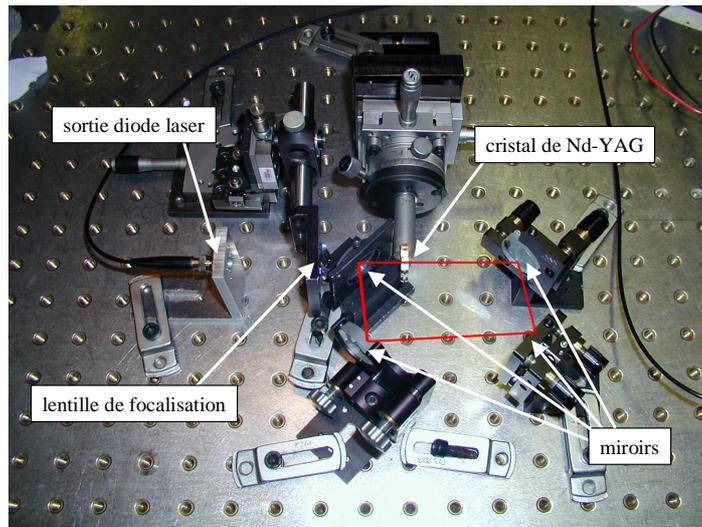


FIGURE 4.1 – Dispositif expérimental pour l'étude du laser en anneau à état solide, tel que décrit dans le texte. Le chemin optique correspondant au parcours de la cavité laser est représenté en rouge. Les photodétecteurs, positionnés en-dehors de la cavité laser, n'apparaissent pas sur cette figure.

utilisés est courbe (typiquement entre 20 cm et 1 m de rayon de courbure), afin d'assurer la stabilité du mode gaussien qui se propage dans la cavité. La longueur du chemin optique est typiquement comprise entre 30 et 60 cm selon les cas. Lors de l'assemblage de la cavité, on utilise un laser à hélium-néon dont l'émission dans le rouge facilite l'alignement des différents éléments. Les intensités des faisceaux de sortie des modes contrarotatifs sont mesurées à l'aide de deux photodiodes distinctes. Une troisième photodiode permet de mesurer l'intensité du signal de battement, obtenu par recombinaison des faisceaux des modes contrarotatifs à l'extérieur de la cavité. L'ensemble du dispositif est monté sur une table tournante, munie de joints électriques pour l'alimentation des différents composants et le passage des signaux. Cette table peut atteindre des vitesses de rotation supérieures à  $360^\circ/\text{s}$ , avec une précision allant jusqu'à  $0,01^\circ/\text{s}$ .

### Cavité en triangle ou en carré ?

Une cavité en anneau est par définition constituée au moins par 3 miroirs. En pratique, on utilise la plupart du temps 3 ou 4 miroirs selon les besoins (à l'exception des cavités exotiques à 5 ou 6 miroirs du chapitre 6). Il nous semble intéressant de signaler ici une propriété particulière de la cavité à 3 miroirs, qui lui confère un avantage tout particulier en termes d'une part de facilité de montage et d'autre part de stabilité mécanique. Cette propriété est la suivante : étant donné trois plans verticaux (plan des miroirs), il existe toujours une trajectoire lumineuse fermée se réfléchissant sur ces trois plans<sup>1</sup>. Ainsi, les

<sup>1</sup>Pour démontrer cette propriété, on considère, dans un plan horizontal, le triangle formé par les trois plans des miroirs. La trajectoire lumineuse en question est alors celle qui relie entre eux les pieds des hauteurs de ce triangle. En effet, on peut montrer par des considérations géométriques que les hauteurs du triangle formé par les plans des miroirs sont aussi bissectrices pour le triangle formé par les pieds de ces hauteurs.

petits défauts d'alignement liés par exemple aux vibrations mécaniques seront dans une certaine limite automatiquement compensés. De même, il est beaucoup plus facile d'assembler un laser en anneau dans une cavité en triangle que dans une cavité à 4 miroirs.

Il convient également de citer ici quelques autres particularités de la cavité en triangle, à commencer par le fait que celle-ci est forcément contenue dans un plan, ce qui peut s'avérer être incompatible avec la réalisation de certaines configurations expérimentales. On peut également rappeler qu'en terme de sensibilité à la rotation, la configuration en triangle est moins favorable que la configuration en carré, car elle est plus éloignée de la configuration idéale du cercle (qui maximise le facteur d'échelle à longueur de cavité fixée).

### Régimes de fonctionnement observés

On tente dans ce qui suit de décrire (le plus souvent qualitativement) les différents types de comportement observés expérimentalement sur le laser en anneau à état solide.

Lorsque le laser est à l'arrêt, on observe la plupart du temps un comportement de type "émission bidirectionnelle stable". Les intensités des modes contrarotatifs ont dans ce cas des valeurs comparables, et ne sont que peu ou pas modulées dans le temps. Lorsque l'on part de cette situation et que l'on met le laser en rotation, on observe un comportement unidirectionnel, conformément à ce qui avait été prédit au chapitre 2 (partie 2.2.1). De plus, lorsque l'on inverse le signe de la rotation, on observe bien une inversion du sens d'émission laser. Ce comportement, répétable et caractéristique de ce type de dispositif [45], est illustré par la figure 4.2.

Lorsque le laser est en rotation à une vitesse modérée, le comportement bidirectionnel stable peut perdurer, avec toutefois une différence entre les valeurs des intensités des modes contrarotatifs qui augmente avec la vitesse de rotation (en accord avec l'équation 2.20). Un autre régime possible dans cette situation est le régime d'automodulation, dans lequel les modes contrarotatifs s'échangent de l'énergie périodiquement au cours du temps. Ce régime peut prendre deux formes distinctes, parfois qualifiées de type I et II [48]. Le régime d'automodulation de type I est celui qui a été décrit au chapitre 2. Il s'agit d'un régime pour lequel les intensités des modes contrarotatifs sont modulées dans le temps en opposition de phase (voir partie 2.2.3). L'observation de ce régime est rapportée sur la figure 4.3. Le régime d'automodulation de type II [44, 48, 118] correspond à une extinction alternative des modes contrarotatifs à une fréquence élevée (de l'ordre du kHz). Ce régime a également pu être observé sur nos expériences (figure 4.4). Enfin, un signal de battement à une fréquence proche de la fréquence Sagnac est parfois obtenu, mais seulement de manière très fugace.

Dans le cas des très basses vitesses de rotation, on observe parfois un signal de battement donc la fréquence est proportionnelle à la vitesse de rotation tout en étant très inférieure à la fréquence Sagnac (figure 4.5). Cette réponse anormale en fréquence est parfois qualifiée de "faux Sagnac". Des tentatives d'explication de ce phénomène peuvent être trouvées dans [41, 44].

Enfin, signalons l'apparition sous certaines conditions d'un régime chaotique (figure

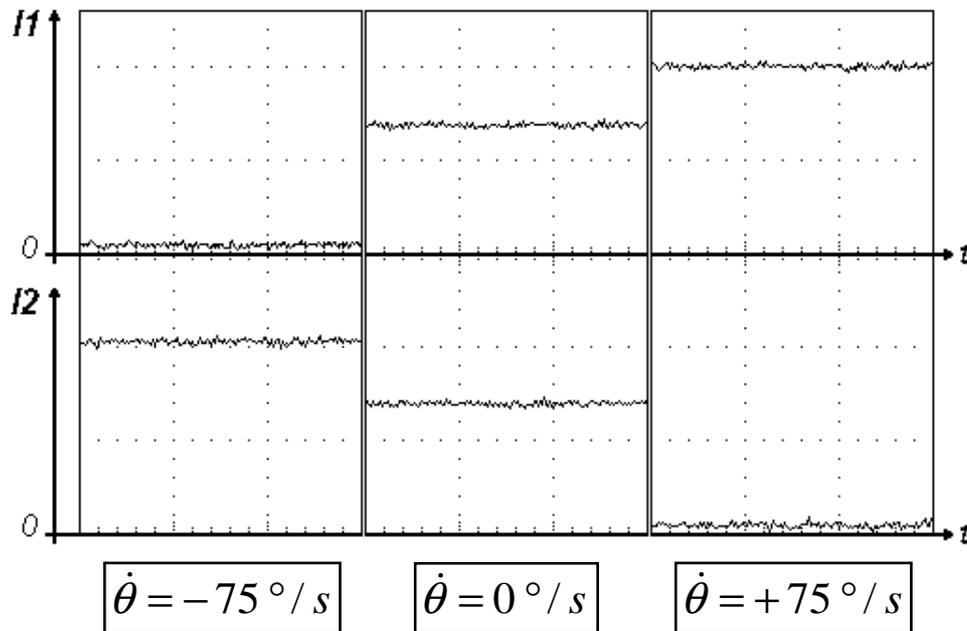


FIGURE 4.2 – Valeur expérimentale des intensités des modes contrarotatifs (on note  $I_{1,2} = aE_{1,2}^2$ ) en fonction du temps, lorsque le laser est à l'arrêt et en rotation à  $\pm 75^\circ/s$ . Il convient de noter que les photodiodes utilisées ici délivrent des signaux à valeurs négatives, et que les origines des intensités sont décalées (comme indiqué sur la figure). On constate que le laser est bidirectionnel à l'arrêt, et devient unidirectionnel lorsqu'il est mis en rotation à  $\pm 75^\circ/s$ . Le sens de l'émission laser unidirectionnelle est déterminé par le sens de la rotation. On note que l'intensité du mode dominant lorsque le laser est en rotation est supérieure à la moyenne des intensités des modes contrarotatifs lorsque le laser est à l'arrêt, conformément à ce qui a été prédit au chapitre 2. Toutefois, on constate que la moyenne des intensités à l'arrêt est supérieure à ce qu'elle devrait être ( $aE_1^2 = aE_2^2 = 2\eta/3$  d'après le système d'équations 2.3) en regard de l'intensité du mode dominant en rotation ( $aE_{1,2}^2 = 2\eta$  et  $aE_{2,1} = 0$  d'après le système d'équations 2.17). On attribue cet écart entre la prédiction et l'observation à l'existence d'un second mode longitudinal dans le cas du laser en arrêt, existence qui n'est pas prise en compte dans le modèle théorique.

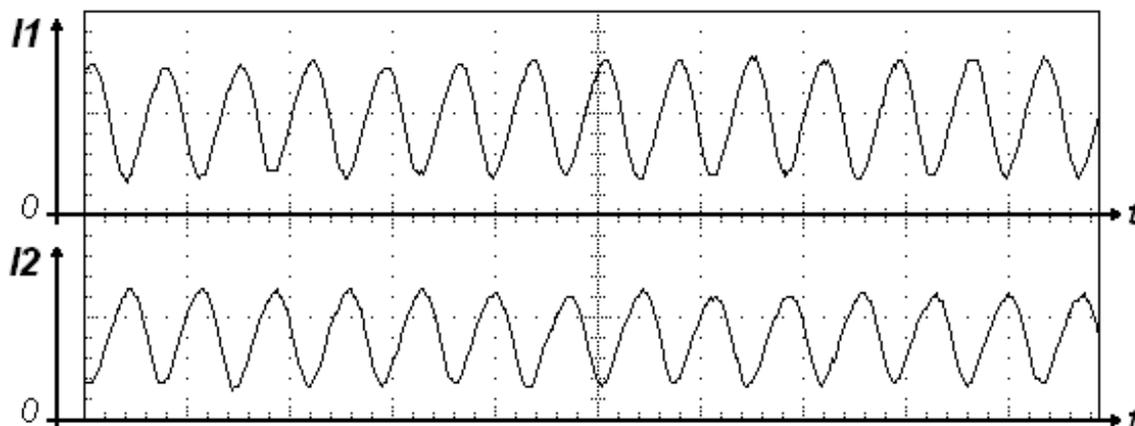


FIGURE 4.3 – Valeur expérimentale des intensités des modes contrarotatifs en fonction du temps lorsque le laser est en régime d’automodulation de type I. On observe une modulation des intensités en opposition de phase à une fréquence d’environ 12 kHz (base de temps : 50  $\mu$ s/div).

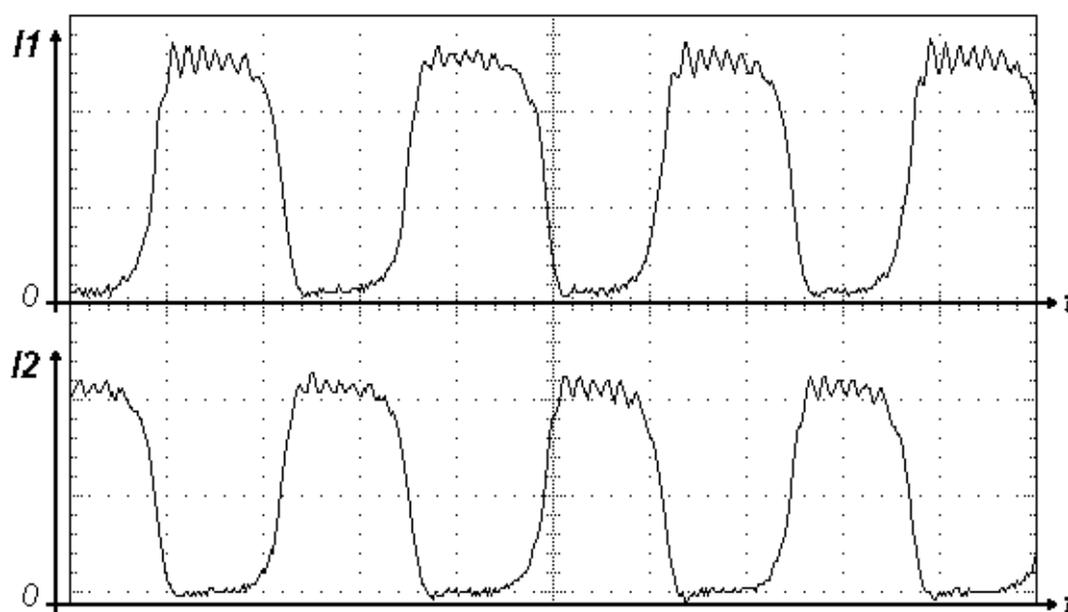


FIGURE 4.4 – Valeur expérimentale des intensités des modes contrarotatifs en fonction du temps lorsque le laser est en régime d’automodulation de type II. On observe une inversion du sens d’émission unidirectionnelle à une fréquence d’environ 3,6 kHz. On observe de plus des oscillations de relaxation à une fréquence d’environ 60 kHz (base de temps : 100  $\mu$ s/div).

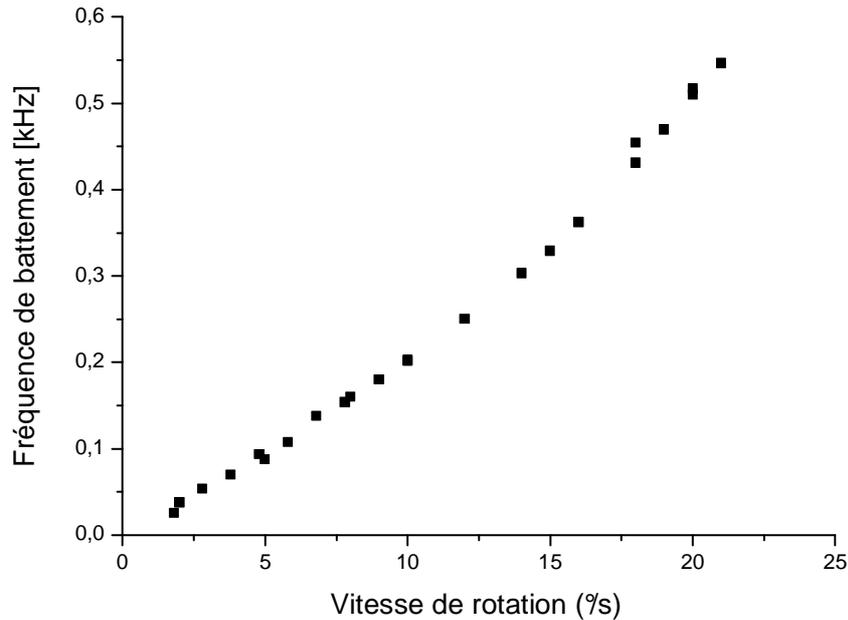


FIGURE 4.5 – Fréquence de battement en fonction de la vitesse de rotation lorsque le laser en anneau est en régime de “faux Sagnac”. La réponse en fréquence est à peu près linéaire, mais la pente de la droite correspondant, environ  $20 \text{ Hz}/(^{\circ}/\text{s})$ , est très inférieure au facteur d’échelle théorique calculé à partir des dimensions de la cavité, typiquement de l’ordre de  $1 \text{ kHz}/(^{\circ}/\text{s})$ .

4.6), souvent associé à la fluctuation (volontaire ou involontaire) d’un paramètre de la cavité [15–17, 49, 51, 119, 120]. Le laser en anneau à état solide, en raison de sa dynamique fortement non linéaire, est propice à l’apparition de ce type de phénomène.

## Conclusion

Au terme de cette étude expérimentale du laser en anneau à état solide, on a identifié les régimes de fonctionnement suivants :

- un régime de fonctionnement bidirectionnel stable à l’arrêt, probablement multi-mode longitudinal ;
- un régime de fonctionnement unidirectionnel aux fortes vitesses de rotation, le mode dominant étant déterminé par le sens de la rotation ;
- un régime d’automodulation correspondant à une modulation temporelle des intensités des modes contrarotatifs sinusoïdale ou quasi-sinusoïdale en opposition de phase (automodulation de type I) ;
- un régime d’automodulation correspondant à une extinction alternative des modes contrarotatifs à une fréquence de l’ordre du kHz (automodulation de type II) ;
- un régime de réponse en fréquence anormale ou “faux Sagnac” aux faibles vitesses de rotation ; la pente mesurée de la réponse en fréquence est alors de deux ordres de grandeur inférieure au facteur d’échelle de la cavité laser ;
- un régime de chaos dynamique.

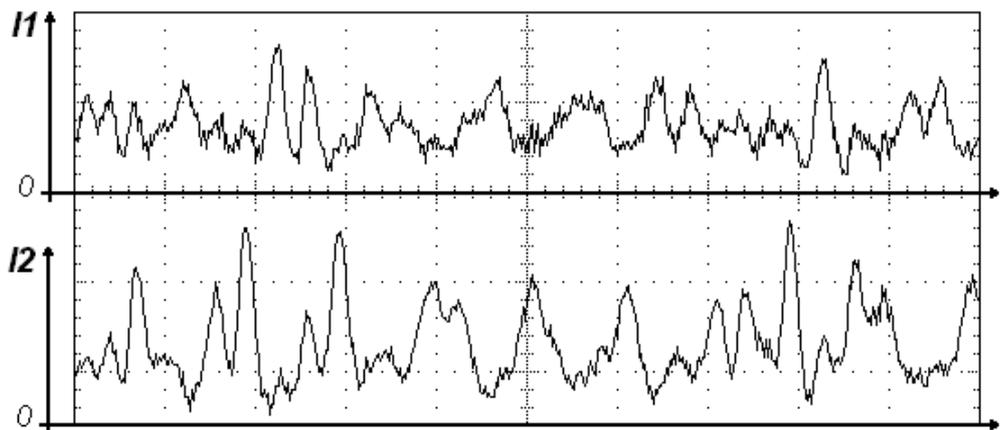


FIGURE 4.6 – Valeur expérimentale des intensités des modes contrarotatifs en fonction du temps lorsque le laser est en régime de chaos dynamique (base de temps :  $100 \mu\text{s}/\text{div}$ ). Un tel régime peut être obtenu par exemple en introduisant une modulation temporelle du taux de pompe du laser.

De plus, un signal de battement à la fréquence Sagnac est parfois observé, mais pas de façon stable ni reproductible.

Il apparaît clairement au terme de cette étude expérimentale que le laser en anneau à état solide n'est pas un dispositif adapté à une utilisation en tant que gyrolaser, à moins que des dispositions particulières ne soient prises pour stabiliser le régime de battement. Cette conclusion légitime donc la suite de ce chapitre, dans laquelle il est question de la mise en œuvre du dispositif stabilisateur décrit au chapitre 3.

### 4.1.2 Gyrolaser à état solide

Le principe du dispositif que l'on a choisi d'utiliser afin de stabiliser le régime de battement aux fortes vitesses de rotation est, on le rappelle, d'infliger au système des pertes différentielles proportionnelles à la différence entre les intensités des modes contrarotatifs. On décrira donc successivement dans ce qui suit la génération expérimentale de pertes différentielles dans la cavité laser et la boucle de contre-réaction électronique qui contrôle la valeur de ces pertes. On présentera ensuite les résultats obtenus grâce à la mise en œuvre de ce dispositif, notamment l'observation d'un régime de battement stable en rotation et la réponse en fréquence qui lui est associée.

#### Génération de pertes différentielles

Nous avons testé plusieurs configurations expérimentales pour générer des pertes différentielles dans la cavité laser, selon le principe introduit au chapitre 3 et rappelé sur la figure 4.7.

En ce qui concerne le rotateur réciproque, nous avons testé une lame de quartz (qui est un rotateur optique naturel) ainsi qu'une lame  $\lambda/2$  (qui joue dans ce contexte, on le rappelle, le même rôle qu'un rotateur réciproque, voir partie 3.2.3), avant d'opter finalement pour une configuration non planaire, qui présente l'avantage de ne pas nécessiter

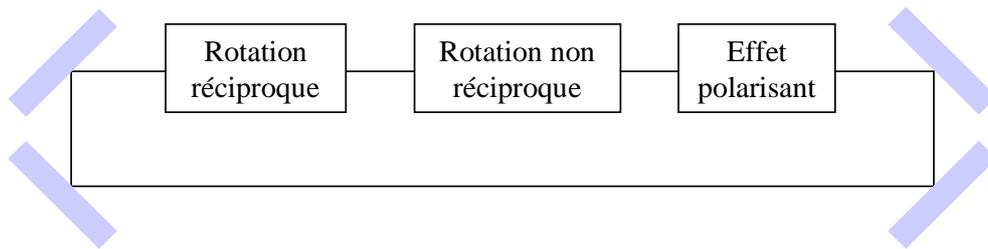


FIGURE 4.7 – Schéma de principe du dispositif mis en œuvre pour générer des pertes différentielles dans le laser en anneau.

l'introduction d'un élément optique supplémentaire dans la cavité. On utilise donc une cavité à 4 miroirs, dont l'un est surélevé de quelques millimètres par rapport aux autres.

En ce qui concerne l'effet polarisant, nous avons tout d'abord utilisé un polariseur diélectrique en transmission, avant de constater que celui-ci était associé à la présence d'interférences parasites et à une forte sensibilité aux réglages et aux vibrations. Nous lui avons donc préféré une utilisation en réflexion, qui assure un comportement plus stable et un effet polarisant quasiment parfait (une onde polarisée dans le plan d'incidence est totalement transmise, tandis qu'une onde polarisée dans le plan du polariseur est totalement réfléchie).

Enfin, en ce qui concerne le rotateur non réciproque, il a été choisi d'utiliser le milieu amplificateur comme matériau Faraday. On a donc placé le cristal de Nd-YAG pompé diode dans un solénoïde. Naturellement, certains matériaux sont plus propices que le YAG à induire une rotation Faraday. On pense par exemple au TGG (Terbium Gallium Garnet), dont le pouvoir rotatoire est 23 fois supérieur à celui du YAG. Toutefois, l'utilisation du milieu amplificateur est préférable lorsque cela est possible, ce qui évite l'introduction d'un élément supplémentaire dans la cavité.

En résumé, la configuration typique utilisée dans nos expériences pour générer des pertes différentielles dans le laser en anneau se compose d'un miroir polarisant, d'une

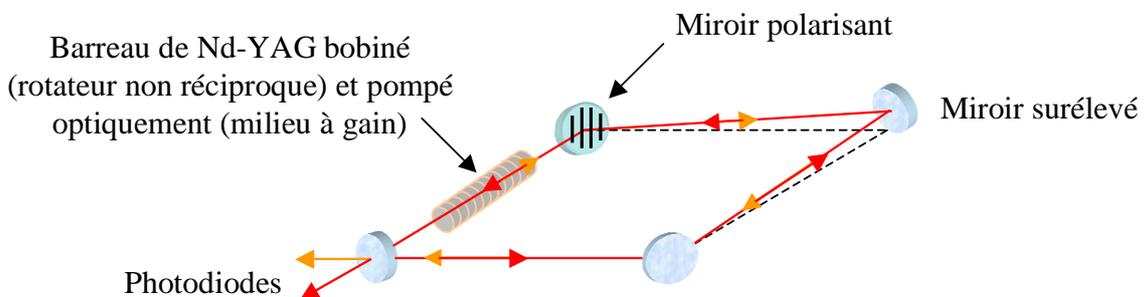


FIGURE 4.8 – Configuration typique utilisée dans nos expériences pour produire les pertes différentielles : utilisation conjointe d'un miroir polarisant, d'une cavité non plane et de l'effet Faraday dans le barreau de Nd-YAG pompé diode.

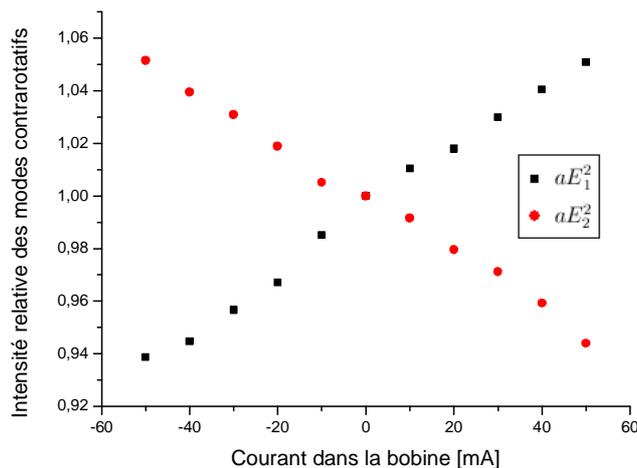


FIGURE 4.9 – Intensité moyenne mesurée des modes contrarotatifs pour une configuration du type de la figure 4.8, en fonction du courant qui circule dans le solénoïde entourant le barreau de Nd-YAG. Le comportement observé met en évidence la présence de pertes différentielles contrôlables. Les intensités ont été renormalisées afin de vérifier, lorsque le courant dans la bobine est nul, l'égalité (arbitraire) suivante :  $aE_1^2 = aE_2^2 = 1$ .

légère non-planéité de la cavité et d'un solénoïde disposé autour du barreau de Nd-YAG pompé diode. Une telle configuration présente l'avantage majeur de ne contenir aucun élément dans la cavité autre que le cristal de Nd-YAG<sup>2</sup>. Le bon fonctionnement de ce dispositif a été validé expérimentalement. Ainsi, on constate sur la figure 4.9 que la différence entre les intensités des modes contrarotatifs, en présence de ce dispositif, dépend du courant qui circule dans le solénoïde entourant le barreau de Nd-YAG.

### La boucle de contre-réaction

Après avoir validé le principe de la génération de pertes différentielles contrôlables, on s'intéresse maintenant à la boucle de contre-réaction électronique, destinée à maintenir la valeur de ces pertes proportionnelle à la différence entre les intensités des modes contrarotatifs (selon l'équation 3.1). Le circuit réalisé utilise comme signal d'entrée les tensions aux bornes des photodiodes qui mesurent l'intensité des modes contrarotatifs. La différence entre ces deux valeurs est effectuée électroniquement, et un courant proportionnel à cette différence est délivré en sortie (c'est-à-dire dans le solénoïde entourant le barreau de Nd-YAG), avec un gain et un "offset" réglables par l'utilisateur. Ce montage électronique a été réalisé par Jacky Antoine et Joseph Colineau de TRT, et son très bon fonctionnement constitue encore aujourd'hui un atout majeur pour mener à bien nos expériences. Il convient de noter que la bande passante d'un tel dispositif n'est pas forcément très élevée. En particulier, elle est dans notre cas bien inférieure aux fréquences typiques d'oscillation des intensités du laser (qui sont, on le rappelle, de l'ordre de la dizaine de kHz). Notre dispositif ne se comporte donc pas comme une bonne boucle d'asservissement, puisqu'il

<sup>2</sup>Signalons toutefois que la longueur de Nd-YAG utilisée doit être un peu supérieure à ce qu'elle est dans le cas du simple laser en anneau à état solide, afin de pouvoir induire une rotation Faraday significative.

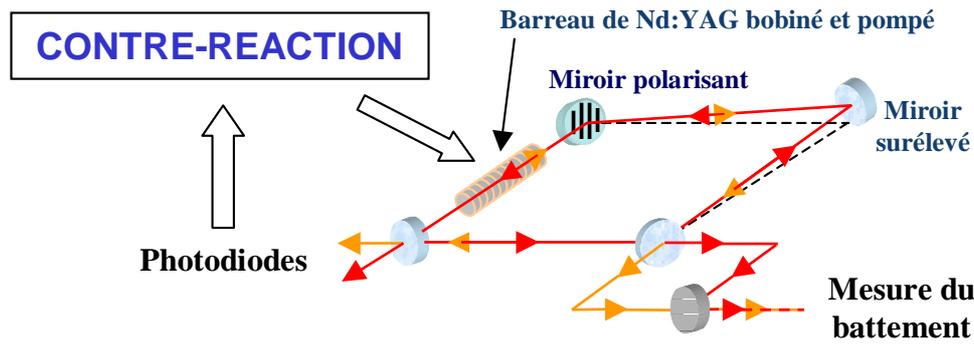


FIGURE 4.10 – Schéma de principe de l'architecture du gyrolaser à état solide.

ne corrige pas les modulations naturelles du laser. Il s'agit plutôt d'une boucle de contre-réaction, qui permet au laser de se maintenir autour d'un point de fonctionnement stable correspondant au régime de battement<sup>3</sup> [54].

### Observation du régime de battement

Le bon fonctionnement du dispositif stabilisateur, réalisé selon le schéma de la figure 4.10, est validé expérimentalement par les résultats de la figure 4.11. On y constate que le laser en rotation à la vitesse angulaire de  $75^\circ/\text{s}$  est unidirectionnel en l'absence du dispositif stabilisateur et bidirectionnel lorsque ce dernier est activé. De plus, comme on peut le voir sur la figure 4.12, un signal de battement stable est observé dès que la vitesse de rotation est supérieure à la dizaine de degrés par seconde. Ces observations sont en bon accord qualitatif avec les prédictions théoriques du chapitre 3.

On a représenté sur la figure 4.12 la valeur moyenne de la fréquence de battement en fonction de la vitesse de rotation, ou réponse en fréquence du gyrolaser. La courbe obtenue est linéaire pour les fortes vitesses de rotation, et s'écarte de son asymptote lorsque la vitesse diminue. Cette non-linéarité, étudiée théoriquement au chapitre précédent, fera l'objet de mesures quantitatives dans la deuxième partie de ce chapitre. La pente de l'asymptote de la courbe de réponse en fréquence du gyrolaser est en très bon accord avec la formule Sagnac :

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{4A}{\lambda L_{\text{op}}} \dot{\theta}. \quad (4.1)$$

En effet, les dimensions de la cavité laser utilisée pour l'obtention de la figure 4.12 correspondent aux paramètres  $L_{\text{op}} = 0,65 \text{ m}$  et  $A = 211,8 \text{ cm}^2$ , ce qui donne  $4A/(\lambda L_{\text{op}}) = 124 \text{ kHz}/(\text{rad}/\text{s})$  soit  $2,16 \text{ kHz}/(^\circ/\text{s})$ , à comparer à la valeur issue de la pente de l'asymptote  $S = 2,12 \text{ kHz}/(^\circ/\text{s})$ .

<sup>3</sup>Dans la limite des fortes vitesses de rotation, ce point de fonctionnement correspond au cas où la différence entre les intensités des modes contrarotatifs est telle que la différence de pertes qui en résulte d'après l'équation 3.1 compense exactement les "pertes différentielles" induites par la rétrodiffusion  $m^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)/\Omega$  (voir partie 2.2.1).

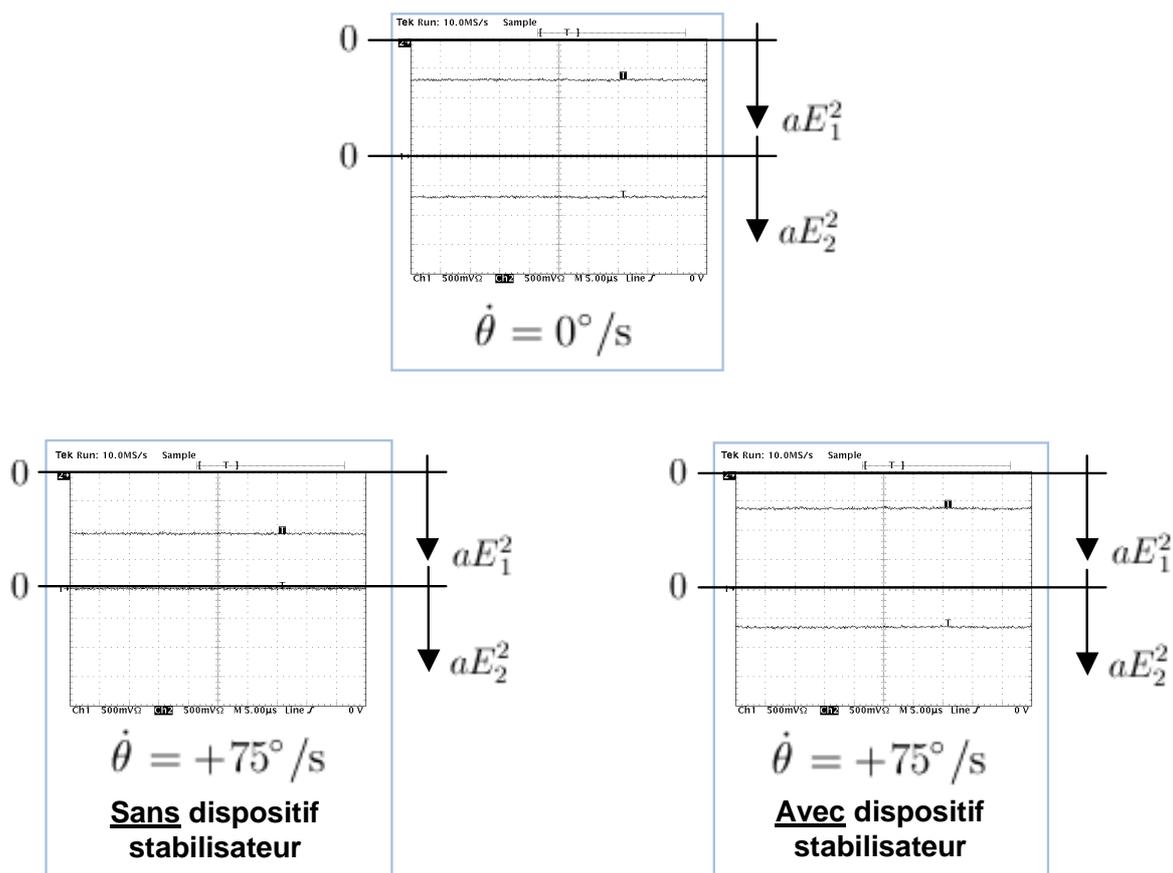


FIGURE 4.11 – Validation expérimentale du bon fonctionnement du dispositif stabilisateur. On part d’une situation pour laquelle le laser est bidirectionnel à l’arrêt (figure de gauche). Lorsque l’on met celui-ci en rotation, il devient unidirectionnel (figure du centre). On active alors le dispositif de contre-réaction, et le laser redevient bidirectionnel (figure de droite).

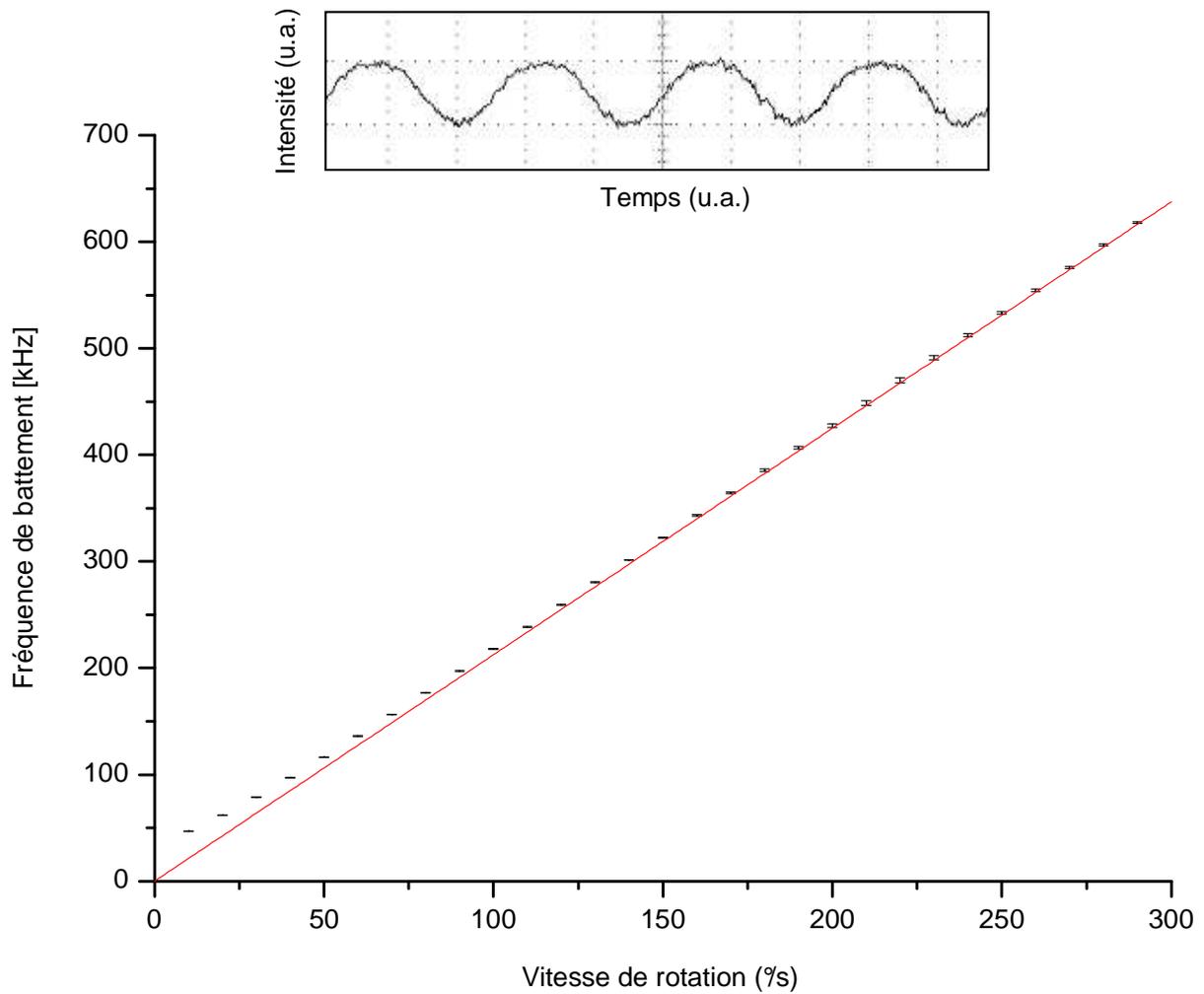


FIGURE 4.12 – Réponse en fréquence du gyrolaser à état solide. La réponse est linéaire pour les fortes vitesses de rotation, et s'écarte de la droite Sagnac pour les faibles vitesses. Un exemple de signal de battement (intensité des deux faisceaux mélangés en fonction du temps) est représenté en insert (signal obtenu pour une vitesse de rotation égale à  $75^\circ/\text{s}$ ).

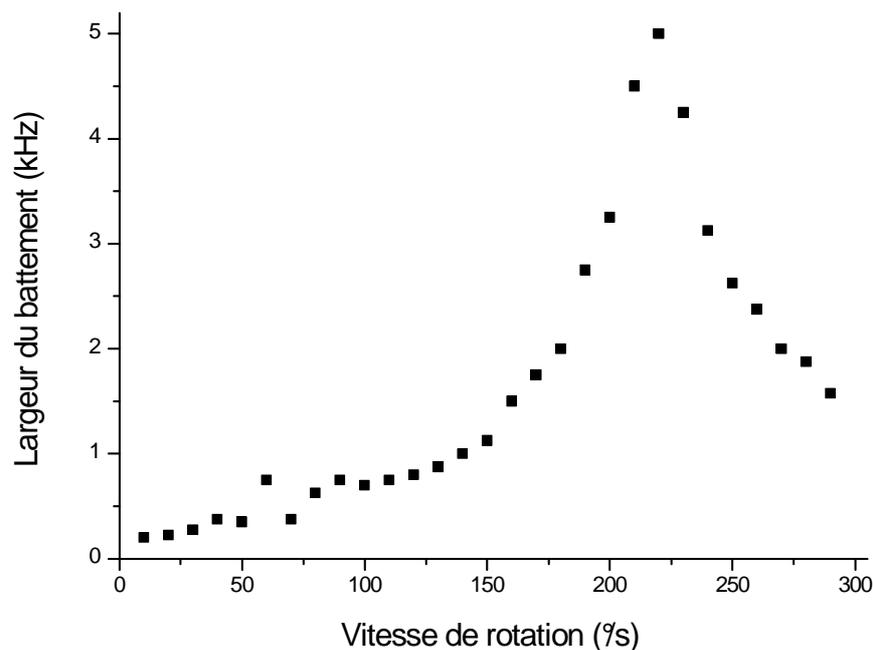


FIGURE 4.13 – Largeur du signal de battement en fonction de la vitesse de rotation. Ces données ont été obtenues par transformation de Fourier numérique du signal temporel.

### Largeur du battement

La largeur spectrale du signal de battement a été mesurée, sur le gyrolaser à état solide en rotation, par transformation de Fourier du signal temporel obtenu grâce à un oscilloscope numérique à grand taux d'échantillonnage. Cette largeur est typiquement de l'ordre de la centaine de Hz, avec un effet de résonance autour de  $220^\circ/\text{s}$  (figure 4.13), probablement dû à une résonance mécanique de la table tournante. Les vibrations mécaniques constituent *a priori* la principale source d'élargissement du battement.

### Démonstrateur intégré

A l'issue de ces expériences sur banc optique, qui ont démontré la possibilité de réaliser un gyrolaser à état solide sans ajouter d'élément optique dans la cavité, il a été décidé la fabrication d'un démonstrateur intégré dans un bloc rigide, afin de minimiser l'influence des vibrations mécaniques. Ce démonstrateur a été conçu et réalisé par Thales Avionics à Châtelleraut, en étroite collaboration avec notre équipe. Il est constitué d'un bloc d'invar<sup>4</sup> usiné sur lequel viennent se visser les supports des miroirs. La cavité a une forme caractéristique de trapèze, pour permettre le fonctionnement à  $56^\circ$  d'incidence du polariseur diélectrique utilisé en réflexion. L'un des miroirs est surélevé de 1 mm pour produire la non-planéité. Enfin, un barreau de Nd-YAG de 25 mm de long est utilisé comme milieu amplificateur et rotateur Faraday. Il est pompé par une diode laser (située à l'extérieur du bloc d'invar) et entouré par une bobine de cuivre de 13 mm de longueur constituée de 900 spires. Le circuit électronique de contre-réaction, fabriqué par les électroniciens

<sup>4</sup>Alliage principalement composé de fer et de nickel et possédant la propriété de se dilater très peu, typiquement moins de  $2 \cdot 10^{-6}$  par degré [121].

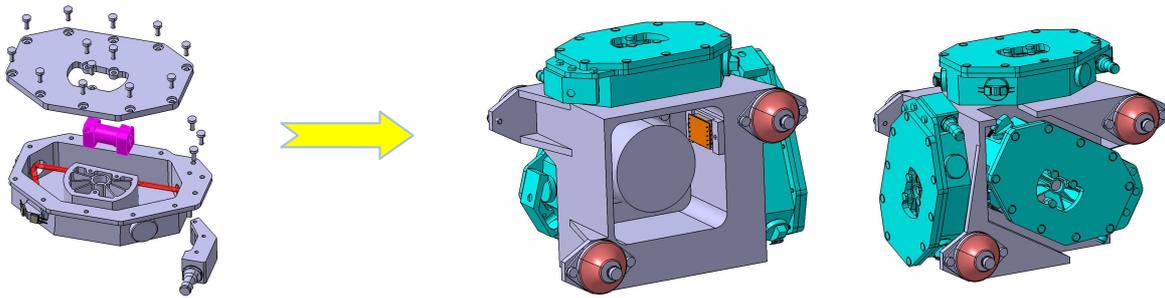


FIGURE 4.14 – Représentation graphique du démonstrateur intégré, montrant en particulier la possibilité d’assembler trois de ces démonstrateurs dans une unité de navigation inertielle standard. Images Thales Aerospace.

de Châtellerault, assure les mêmes fonctions que celui utilisé au cours des précédentes expériences.

Toutes les dimensions de ce démonstrateur étant connues avec précisions, il constitue un bon système de référence pour une étude quantitative du gyrolaser à état solide, comme on va le voir dans la deuxième partie de ce chapitre.

## 4.2 Le point de vue quantitatif

On se propose dans ce qui suit de mener une étude quantitative du laser en anneau à état solide, afin de pouvoir comparer avec précision les prédictions théoriques et les observations expérimentales. Pour cela, il est nécessaire de connaître les ordres de grandeurs des différents paramètres qui interviennent dans le modèle semi-classique. Si l’accès à certains de ces paramètres est relativement immédiat (longueur de cavité, excès de pompe au-dessus du seuil...), on va voir que cela n’est pas le cas pour tous (taux de pertes, coefficient de rétrodiffusion...). Une fois ces paramètres évalués, on utilisera les résultats obtenus pour discuter de la pertinence et des limites de notre modèle théorique, à la lumière des observations expérimentales.

### 4.2.1 Estimation des différents paramètres du laser

#### Géométrie de la cavité et angles de rotation

On donne sur la figure 4.15 la configuration précise mise en œuvre lors de la réalisation du démonstrateur. La longueur géométrique de la cavité laser est égale à 22 cm. Celle-ci contient un barreau de Nd-YAG de 25 mm (d’où  $L_{op} \simeq 24,5$  cm). L’aire inscrite dans la cavité est environ égale à  $25,5 \text{ cm}^2$ . Le facteur d’échelle, à la fois théorique et mesuré, est égal à  $0,691 \text{ kHz}/(^{\circ}/\text{s})$ .

L’un des miroirs (celui situé au point C sur la figure 4.15) est surélevé de 1 mm par rapport aux autres. Cela entraîne une rotation du plan de polarisation de  $\alpha = 4,5^{\circ}$  lors du parcours de la cavité (le calcul précis, qui utilise le formalisme de [112], figure dans

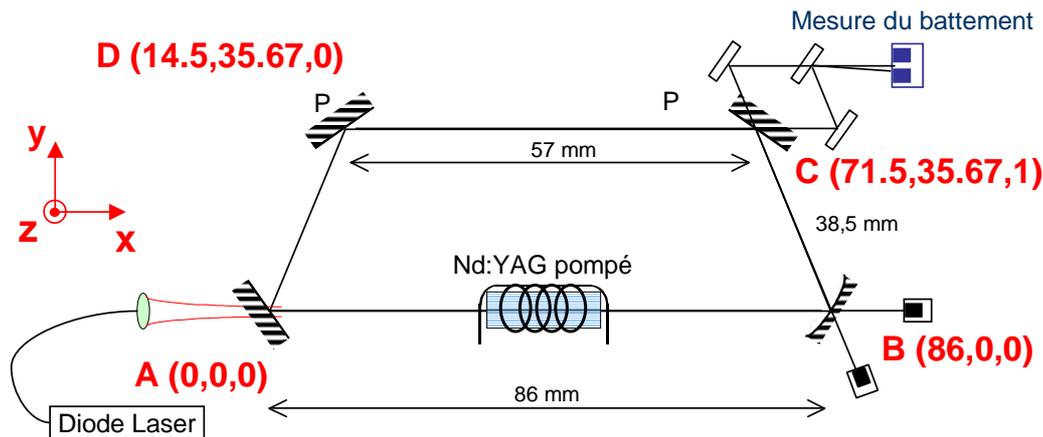


FIGURE 4.15 – Dimensions précises de la cavité considérée. Les coordonnées des quatre points A, B, C et D correspondant aux endroits où le faisceau se réfléchit sont exprimées en millimètres. On constate que le miroir correspondant au point C est surélevé de 1 mm.

l'annexe A.11).

Le barreau de Nd-YAG est entouré d'une bobine de cuivre de 13 mm de long et composée d'environ 900 spires. Celle-ci induit en son sein un champ magnétique d'environ 85 mT par ampère. Ce champ magnétique engendre à son tour une rotation non réciproque du plan de polarisation, dont l'angle est donné par la relation :

$$\beta = V l B , \quad (4.2)$$

où  $l$  est la longueur de matériau traversé,  $B$  la projection du champ magnétique sur l'axe de propagation et  $V$  une constante caractéristique du matériau, appelée constante de Verdet. Cette constante vaut dans le cas du YAG  $V=103^\circ \text{T}^{-1}\text{m}^{-1}$  [112]. À titre de comparaison, elle est égale à  $2290^\circ \text{T}^{-1}\text{m}^{-1}$  dans le cas du TGG (Terbium Gallium Garnet) [122]. Pour un courant de fonctionnement typique dans la bobine environ égal à 40 mA, l'angle de rotation non réciproque est de l'ordre de  $\beta = 0,16 \text{ mrad}$ , ce qui correspond à des pertes différentielles (par tour en intensité) de l'ordre de  $4\alpha\beta = 5 \cdot 10^{-5}$ . En dépit de leur très faible valeur, ce sont ces pertes qui permettent le fonctionnement du laser en anneau à état solide en tant que gyrolaser.

### Taux de pertes

On présente ici trois méthodes indépendantes pour évaluer le taux de pertes dans la cavité.

La première méthode consiste à additionner les coefficients de pertes des différents éléments de la cavité. Dans notre cas, on sait que la rotation réciproque induite par la non-planéité correspond à 0,6% de pertes en intensité. Les miroirs sont supposés ne pas introduire de pertes. Les pertes en intensité à la traversée d'un barreau de Nd-YAG sont données par l'expression  $1 - \exp(-l/D)$ , où  $l$  est la longueur du barreau et  $1/D = 0,003 \text{ cm}^{-1}$  [96]. Pour un barreau de 25 mm comme celui utilisé ici, cela correspond à 0,7% de pertes en intensité. À cela s'ajoute environ 0,2% par interface entre le

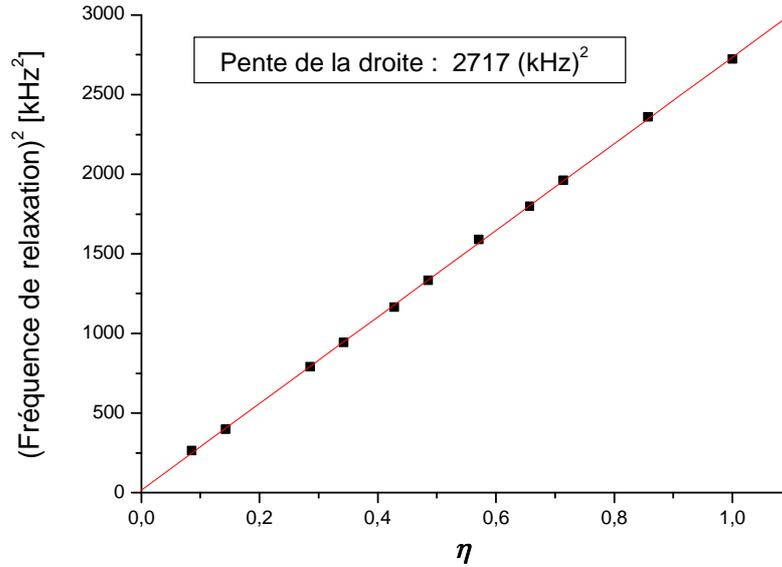


FIGURE 4.16 – Fréquence de relaxation au carré en fonction de l'excès de pompe au-dessus du seuil  $\eta$ . À partir de la valeur de la pente, issue d'une régression linéaire, on obtient  $\gamma = 21,5 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ .

crystal et l'air, ce qui donne finalement une première estimation d'environ 1,7% de pertes en intensité.

Une seconde méthode permettant de déterminer le taux de pertes total de la cavité, couramment utilisée dans les lasers de classe B (voir par exemple [105]), consiste à mesurer la valeur de la fréquence de relaxation du laser  $f_r$  en fonction du taux de pompage  $\eta$ . En effet, on rappelle que ces deux grandeurs sont liées par la relation suivante (équation 3.12) :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma\eta}{T_1}}. \quad (4.3)$$

La valeur de  $T_1$  étant connue pour le Nd-YAG ( $T_1=200 \mu\text{s}$ ), la pente de la droite  $f_r^2(\eta)$  fournit une mesure directe de  $\gamma$ . La fréquence de relaxation est mesurée par analyse spectrale de l'intensité de l'une des voies du laser. Le pic de relaxation est facilement reconnaissable sur le spectre car la position de son maximum et sa largeur changent avec le taux de pompe. La mise en œuvre de cette technique est rapportée sur la figure 4.16. On obtient  $\gamma = 21,5 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ , ce qui correspond à un taux de pertes par tour donné par  $\gamma L_{\text{op}}/c = 1,75\%$ , en très bon accord avec la première méthode présentée.

On présente maintenant une troisième méthode de mesure des pertes, intrinsèque au gyrolaser à état solide. Le principe consiste à utiliser la non-linéarité de la réponse en fréquence du gyrolaser, donnée par (équation 3.15) :

$$\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega + \frac{m^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2\Omega} + \frac{\gamma\eta}{2\Omega T_1}, \quad (4.4)$$

cette formule étant valable dans la limite où les deux derniers termes de l'équation sont petits, en valeur absolue, devant  $|\Omega|$ . Il suffit donc de mesurer, à vitesse de rotation

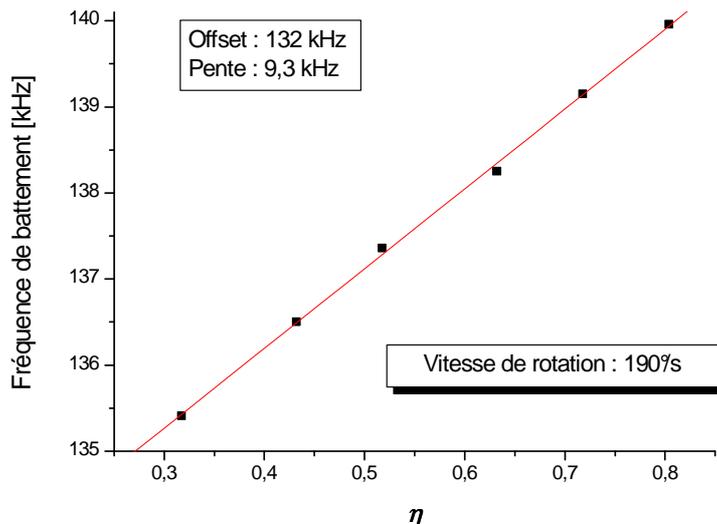


FIGURE 4.17 – Mesure expérimentale de la fréquence de battement en fonction du taux de pompe  $\eta$ , pour une vitesse de rotation constante et égale à  $190^\circ/\text{s}$ , en présence du dispositif stabilisateur. La pente de la droite permet d'obtenir la valeur  $\gamma = 19,3 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ , tandis que de l'ordonnée à l'origine on déduit  $m^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = (0,11 \cdot 10^6 \text{ rad/s})^2$ .

constante, la fréquence de battement en fonction du taux de pompe pour obtenir une droite dont la pente fournit une mesure de  $\gamma$ . On obtient (figure 4.17) la valeur  $\gamma = 19,3 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$  soit 1,6% par tour, ce qui est en bon accord avec les deux premières méthodes présentées.

### Rétrodiffusion

Parmi tous les paramètres du gyrolaser à état solide, la rétrodiffusion est peut-être le plus difficile à évaluer. La méthode de mesure des pertes de la figure 4.17 nous fournit, en considérant l'ordonnée à l'origine de la droite obtenue, l'estimation suivante :  $m^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = (0,11 \text{ rad}/\mu\text{s})^2$ . En ce qui concerne l'estimation de la valeur de  $\theta_1 - \theta_2$ , on peut remarquer que celle-ci détermine la phase relative entre les modulations des intensités des modes contrarotatifs en régime de battement<sup>5</sup>. En particulier, lorsque ces modulations ont lieu en opposition de phase (ce que l'on observe expérimentalement), on peut en déduire  $|\theta_1 - \theta_2| \ll 1$ . On obtient alors l'estimation suivante :  $m = 110 \text{ krad/s}$ , ce qui correspond à une fraction rétrodiffusée par tour égale à  $mL_{\text{op}}/c = 90 \cdot 10^{-6}$ .

Il est également possible d'évaluer le taux de rétrodiffusion dû à la présence du cristal de Nd-YAG directement, en faisant l'hypothèse que celui-ci diffuse la lumière de façon isotrope. On a vu précédemment que les pertes induites par un barreau de 25 mm étaient égales à 0,7%. Comme le niveau bas de la transition laser se vide très rapidement vers un niveau inférieur (système à 4 niveaux), on peut considérer qu'il n'y a pas d'absorption dans ce matériau, c'est-à-dire que l'ensemble de ces 0,7% de pertes est dû à la diffusion. Un

<sup>5</sup>Pour s'en convaincre, on peut par exemple considérer l'équation A.198. Lorsque  $|\theta_1 - \theta_2| \ll 1$ , les coefficients  $B_S$  et  $B_C$  sont proches de zéro, ce qui correspond à des modulations en opposition de phase. En revanche, lorsque  $|\theta_1 - \theta_2| \simeq \pi$ , ce sont les coefficients  $C_S$  et  $C_C$  qui sont proches de zéro, ce qui correspond à des modulations en phase.

photon sera considéré comme étant rétrodiffusé s'il est diffusé dans l'angle solide du mode gaussien de la cavité, qui s'écrit  $2\pi(1 - \cos\theta)$ , où  $\theta$  est la divergence du mode gaussien, donnée par  $\theta = \lambda/(\pi w)$ , où  $w$  est le waist du mode gaussien (typiquement  $500 \mu\text{m}$ ). La fraction (en intensité) de lumière rétrodiffusée est donc le rapport de cet angle solide à  $4\pi$ , ce qui s'écrit [18] :

$$\left(\frac{r}{r_s}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 w^2}, \quad (4.5)$$

où  $r$  représente la fraction rétrodiffusée en champ électrique et  $r_s$  la fraction totale diffusée en champ électrique (c'est-à-dire  $r_s^2 = 0,7\%$  pour un barreau de  $25 \text{ mm}$ ). Avec nos paramètres, on obtient par cette estimation  $r \simeq 28 \cdot 10^{-6}$  d'où  $m = 2rc/L_{\text{op}} \simeq 70 \text{ krad/s}$ . L'ordre de grandeur obtenu est compatible avec la première estimation présentée, puisqu'il ne tient pas compte de la rétrodiffusion induite par les miroirs et par les interfaces du cristal. Un modèle de diffusion tenant compte de la structure cristalline du YAG permettrait d'affiner cette estimation.

On peut citer une troisième méthode d'évaluation du taux de rétrodiffusion, qui consiste à s'intéresser aux harmoniques successives des signaux temporels du laser [123]. Nous n'avons pour l'instant pas testé cette méthode sur le gyrolaser à état solide.

En conclusion, on estime le taux de rétrodiffusion dans le gyrolaser à état solide à environ  $0,1 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$ . À titre de comparaison, ce taux n'est que d'environ  $0,2 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$  sur un gyrolaser à He-Ne commercial typique [124]. Il y a donc un rapport 500 entre les deux dispositifs, ce qui apparaît comme un handicap pour les performances du gyrolaser à état solide.

### Boucle de contre-réaction

Une estimation de la valeur typique du coefficient  $K$  intervenant dans la relation  $\gamma_1 - \gamma_2 = K(aE_1^2 - aE_2^2)$  a été obtenue expérimentalement. Pour cela, on a effectué pour plusieurs points de fonctionnement du laser les mesures des intensités des modes contrarotatifs ainsi que de la consigne d'offset et du courant dans la bobine. Cela a permis d'en déduire  $K = 10,6 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ , soit environ la moitié du taux de pertes  $\gamma$ .

### 4.2.2 Validité du modèle théorique

Le modèle théorique développé dans les chapitres précédents est en bon accord, sur un certain nombre de points, avec les observations expérimentales. Par exemple la plupart des régimes prédits ont été observés (régime d'automodulation notamment). Le comportement du laser dans la limite des fortes vitesses de rotation (régime unidirectionnel dont le sens d'émission est déterminé par le sens de la rotation) est également en très bon accord avec ce qui avait été prédit par la théorie. En présence du dispositif stabilisateur, le modèle rend compte correctement de l'émergence du régime de battement que l'on observe. Il permet d'obtenir une expression analytique de la non-linéarité de la réponse en fréquence qui est remarquablement bien vérifiée expérimentalement (voir figure 4.18).

En revanche, les prédictions de ce modèle ne coïncident pas avec ce qui est observé expérimentalement pour les faibles vitesses de rotation. En effet, avec les paramètres

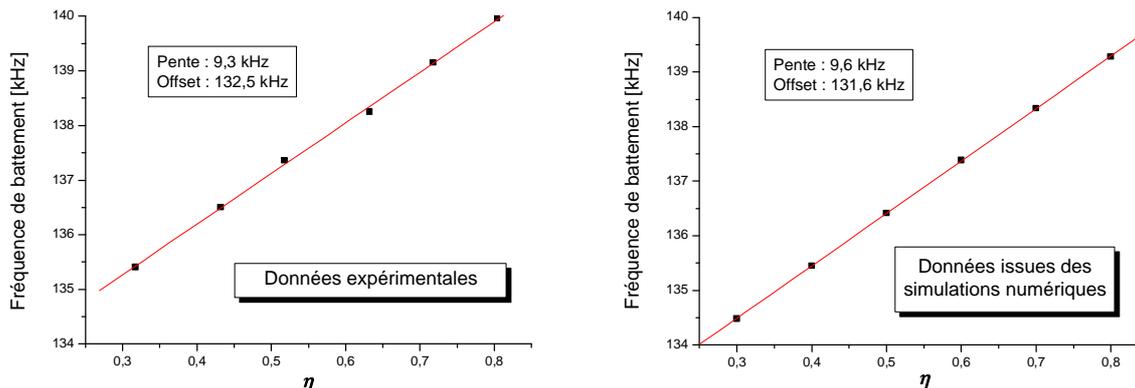


FIGURE 4.18 – Comparaison entre expérience et simulation numérique. La figure de gauche est issue des mesures expérimentales sur le gyrolaser à état solide mis en rotation à la vitesse constante de  $\dot{\theta} = 190^\circ/s$ . La figure de droite est issue des simulations numériques pendant 10 ms avec un pas de 6 ns. La fréquence de battement est calculée sur les 2 dernières millisecondes. Les paramètres utilisés, choisis à la lumière de l'étude menée dans ce chapitre pour refléter au mieux la réalité expérimentale, sont  $\gamma = 21,9 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 0,11 \text{ rad}/\mu\text{s}$ ,  $\theta_1 - \theta_2 = \pi/30$ ,  $\Omega = 0,8249 \text{ rad}/\mu\text{s}$ ,  $K = 10 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ . L'accord entre les deux approches est relativement bon.

évalués précédemment, le laser en anneau à état solide devrait se trouver à l'arrêt dans le régime d'automodulation de type I, alors que c'est le régime bidirectionnel que l'on observe. Cela s'explique très certainement par la présence en pratique de plusieurs modes longitudinaux dans le laser à l'arrêt [125], qui est liée au spatial hole burning [126] et qui n'est pas prise en compte dans notre modèle théorique. Des expériences récentes menées sur le gyrolaser à état solide ont montré que celui-ci était effectivement multimode à l'arrêt, et cessait de l'être dès que la non-réciprocité en fréquence dépassait les 5 kHz environ.

Une deuxième lacune de ce modèle est la non-prise en compte des sources de bruit influant sur la dynamique du laser, notamment les bruits à basse fréquence, d'origine mécanique [46] ou thermique [127]. Cette lacune est une explication possible au fait que la taille de la zone naturelle de battement (zone II) prédite par le modèle théorique est très supérieure à celle observée expérimentalement. On note également que la taille de cette zone est plus grande dans le cas du démonstrateur intégré (sans boucle de contre-réaction) que dans le cas des expériences sur banc optique. Tout se passe comme si l'augmentation des sources de bruit d'origine mécanique entraînait une diminution de la taille de la zone de battement en l'absence de boucle de contre-réaction, point que nous ne sommes pas en mesure de confirmer ou d'infirmer avec notre modèle théorique.

Un troisième point insuffisamment modélisé concerne le comportement en fréquence de la boucle de contre-réaction. En effet, celle-ci est considérée dans le modèle théorique comme ayant une bande passante infinie, ce qui n'est pas le cas en pratique. Cette hypothèse simplificatrice conduit à des résultats surprenants lorsque le laser est à l'arrêt, allant même dans certains cas jusqu'à empêcher celui-ci de démarrer! On n'a pas pour le

moment mis au point de modèle réaliste de comportement de la boucle d'asservissement <sup>6</sup>.

Le modèle théorique dont nous disposons semble donc relativement bien adapté à la description du gyrolaser à état solide dans la limite où ce dernier est monomode, ce qui est le cas sauf pour les très faibles vitesses de rotation. Des axes d'amélioration possibles sont la prise en compte de plusieurs modes longitudinaux, des sources de bruit mécanique et de la bande passante limitée de la boucle de contre-réaction.

### 4.3 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre les principaux résultats issus de l'étude expérimentale du laser en anneau puis du gyrolaser à état solide. La dynamique très riche du laser en anneau à état solide a tout d'abord été explorée. Plusieurs régimes ont été observés, des plus classiques, prédits par notre modèle théorique, aux plus exotiques comme le régime d'automodulation de type II ou le régime chaotique. Ces observations expérimentales, en bon accord qualitatif avec les prédictions théoriques, ont permis entre autres de confirmer le fait qu'il n'est pas possible d'utiliser un simple laser en anneau à état solide en tant que gyrolaser. On s'est ensuite intéressé à la mise en œuvre expérimentale du dispositif stabilisateur. On a décrit le régime de battement ainsi observé, puis la réponse en fréquence non linéaire qui en résulte. Dans une deuxième partie de ce chapitre, on a tenté d'évaluer la valeur des différents paramètres du laser. On a en particulier utilisé pour cela la réponse en fréquence du gyrolaser, qui permet d'accéder à la valeur du taux de pertes et de la rétrodiffusion. Ces estimations ont permis de confronter les observations expérimentales aux prédictions du modèle théorique, et de conclure à la validité de ce dernier sauf dans le cas des très faibles vitesses de rotation (moins de  $10^\circ/\text{s}$ ).

---

<sup>6</sup>En dépit de quelques tentatives de limitation de la bande passante, comme par exemple la prise en compte dans le calcul de  $aE_1^2 - aE_2^2$  non pas de la dernière valeur de l'intensité mais de la valeur moyenne de celle-ci sur un intervalle de temps  $\Delta t$ , ce qui a pour effet de "lisser" les modulations d'intensité à l'échelle de  $\Delta t$ .

# Conclusion de la première partie

Le laser en anneau à état solide, à cause des effets combinés des couplages induits par la rétrodiffusion et par le réseau d'inversion de population, est un système fortement non linéaire, qui possède en conséquence une dynamique très riche. On a utilisé pour décrire ce système un modèle fondé sur l'approche semi-classique des équations de Lamb et adapté aux caractéristiques particulières de ce type de laser (cavité en anneau, élimination adiabatique de la polarisation mais pas de la densité d'inversion de population, prise en compte des effets de la rotation et du couplage par rétrodiffusion...). Ce modèle prédit que le laser en anneau à état solide à l'arrêt peut se trouver dans trois régimes différents : le régime bidirectionnel verrouillé en fréquence lorsque la rétrodiffusion domine, le régime unidirectionnel lorsque le réseau d'inversion de population domine et un régime d'automodulation dans les cas intermédiaires. Lorsque le laser est en rotation, le modèle théorique prévoit l'existence possible du régime de battement sur un domaine limité de vitesse de rotation, puis un régime unidirectionnel verrouillé en fréquence au-delà d'une certaine vitesse limite. Cette étude théorique a été confirmée en grande partie par les observations expérimentales (à l'exception notamment du cas des très faibles vitesses de rotation, pour lequel le laser est multimode longitudinal, ce qui n'est pas pris en compte dans le modèle). Elle conclut à l'impossibilité d'utiliser le laser en anneau à état solide en tant que gyrolaser, ce qui nous a amené à nous intéresser aux méthodes de stabilisation du régime de battement pour les fortes vitesses de rotation. La méthode retenue, inspirée des propositions des auteurs de [45] et des techniques développées pour rendre les lasers en anneau unidirectionnels [111,114], est originale en ce qu'elle ne nécessite pas l'introduction d'élément supplémentaire dans la cavité [107,116]. Les résultats de l'étude théorique et expérimentale de cette méthode ont été présentés. Ils nous amènent à conclure à la stabilité du régime de battement lorsque le laser est en rotation ( $|\dot{\theta}| \gtrsim 10^\circ/\text{s}$ ). Cela permet en particulier de tracer une courbe expérimentale de la réponse en fréquence (c'est-à-dire la valeur de la fréquence de battement en fonction de la vitesse de rotation de l'ensemble), qui constitue un premier point de comparaison entre le gyrolaser à état solide et son équivalent à hélium-néon.

La courbe de réponse en fréquence ainsi obtenue laisse apparaître une zone morte (c'est-à-dire une zone d'absence de battement) de taille très supérieure à celle de la zone aveugle du gyrolaser à hélium-néon (environ  $10^\circ/\text{s}$  contre  $0,1^\circ/\text{s}$ ), ainsi qu'une forte non-linéarité en sortie de la zone morte, que l'on ne retrouve que dans une moindre mesure sur le gyrolaser à hélium-néon. Ces différences s'expliquent en partie par le fait que l'on compare un montage de laboratoire élaboré sans précaution particulière avec un produit commercial fini. Elles s'expliquent toutefois principalement par le fait que les caractéristiques physiques de ces deux systèmes sont très différentes. En particulier, la

réponse en fréquence du gyrolaser à état solide est fortement dégradée par la présence du réseau d'inversion de population, qui n'existe pas sur le gyrolaser à hélium-néon. De plus, la rétrodiffusion, qui est également responsable de la détérioration des performances inertielles, est intrinsèquement supérieure dans le cas du gyrolaser à état solide, un cristal étant par nature plus diffusant qu'un gaz.

Au terme de cette première partie, on dispose donc d'un modèle théorique et numérique qui permet de rendre compte dans une large mesure du riche comportement du laser en anneau à état solide. On dispose également d'un dispositif stabilisateur permettant d'utiliser le laser en anneau à état solide en tant que gyrolaser sans rajouter d'élément optique dans la cavité. En revanche, il apparaît indispensable au vu des résultats obtenus de mettre en œuvre un dispositif supplémentaire destiné à améliorer la taille de la zone de battement et la linéarité de la courbe de réponse en fréquence du gyrolaser à état solide, afin de pouvoir rivaliser avec les gyrolaser à hélium-néon. Cela fait l'objet de la deuxième partie de ce mémoire.

## **Deuxième partie**

### **Performances du gyrolaser à état solide**



# Introduction

La première partie de ce mémoire a montré comment il était possible, dans un laser en anneau à état solide, de stabiliser le régime de battement afin d'obtenir un gyrolaser. On se pose maintenant la question des performances inertielles d'un tel dispositif. Pour tenter d'y répondre, il convient tout d'abord de s'intéresser à la manière dont sont caractérisées de telles performances dans le cas du gyrolaser à hélium-néon. La caractérisation complète d'un tel produit est un processus complexe et fastidieux [128], dont la description dépasse le cadre de ce mémoire. On fera donc l'hypothèse simplificatrice que les performances d'un gyrolaser à hélium-néon sont entièrement déterminées par la donnée des trois paramètres suivants :

- la dérive long-terme, appelée aussi faux-zéro ou K0, qui traduit la stabilité du signal délivré par le gyrolaser après un long temps d'intégration ; à titre d'exemple, sur un gyrolaser haut de gamme, l'erreur de cap après une heure d'intégration ne doit pas être supérieure<sup>1</sup> à  $0,01^\circ$  ;
- la stabilité du facteur d'échelle, ou K1, qui ne doit pas dériver<sup>2</sup> de plus de quelques ppm sur des plages de température allant de  $-40^\circ\text{C}$  à  $+80^\circ\text{C}$  ;
- la marche au hasard, qui est une source de bruit spécifique à la mise en œuvre de l'activation mécanique (voir chapitre 7) ; ses effets doivent être compatibles avec le critère de stabilité du faux-zéro énoncé ci-dessus.

On s'intéressera surtout dans ce qui suit au premier point, c'est-à-dire à la stabilité du faux-zéro. Le second point a fait l'objet d'une étude qui est décrite dans l'annexe B. Quant au troisième point, il n'a de sens qu'en présence d'une activation mécanique, et ne sera donc évoqué qu'au chapitre 7, qui traite de ce sujet.

Pour obtenir de bonnes performances inertielles sur un gyrolaser à hélium-néon, on utilise un dispositif d'activation mécanique, qui consiste à imprimer à la cavité laser un mouvement de vibration autour de son axe afin d'éviter au maximum de se trouver dans la zone aveugle. Toutefois, cette technique ne permet d'atteindre des performances inertielles convenables qu'à la condition que la taille de la zone aveugle soit suffisamment petite, et la réponse en fréquence suffisamment linéaire. Or on a vu précédemment que, dans le cas du gyrolaser à état solide, la taille de la zone morte et la non-linéarité de la réponse en fréquence étaient toutes deux très supérieures à ce qu'elles sont dans le cas du gyrolaser à hélium-néon. Il apparaît donc nécessaire de mettre en œuvre sur le gyrolaser à état solide un dispositif d'amélioration des performances inertielles qui tienne compte

---

<sup>1</sup>Source : Thales Aerospace. Cette valeur apparaît également dans [124].

<sup>2</sup>Source : spécifications pour la centrale inertielle de l'Airbus A350, données communiquées par Thales Aerospace.

des particularités de ce type de milieu laser. On étudie successivement, dans les trois chapitres qui suivent, trois configurations spécifiques ayant pour but d'améliorer la réponse en fréquence du gyrolaser à état solide.

On s'intéresse tout d'abord, dans le **chapitre 5**, à un dispositif très simple qui consiste à introduire une non-réciprocité en fréquence constante dans la cavité, afin que le gyrolaser à état solide se trouve toujours dans une zone où sa réponse en fréquence est linéaire. Une version plus élaborée de ce dispositif est étudiée au **chapitre 6**. Dans cette version, on fait coexister 4 modes dans la cavité de façon à obtenir deux battements qui permettent une compensation naturelle du biais magnéto-optique induit sur le principe décrit au chapitre 5. Enfin, dans le **chapitre 7**, on explore les possibilités fondées sur des phénomènes mécaniques, qui sont souvent, comme on le verra, les meilleurs candidats pour l'obtention de performances haut-de-gamme en raison de leur bonne stabilité à long terme. Les chapitres 5 et 6 présentent la mise en œuvre expérimentale des solutions qui y sont décrites. Dans le cas du chapitre 7, l'étude expérimentale, non achevée, n'est pas relatée. Une étude numérique permet toutefois de se convaincre de l'intérêt de la méthode proposée.

# Chapitre 5

## Mise en œuvre d'un biais magnéto-optique (2 ondes)

Une première méthode possible pour améliorer les performances inertielles du gyrolaser à état solide est l'introduction d'une non-réciprocité en fréquence de valeur constante, notée  $\Omega_0$ , et suffisamment importante pour que le gyrolaser fonctionne en permanence dans une zone où sa réponse en fréquence est suffisamment linéaire [129]. Lorsqu'une rotation à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est appliquée au système, la non-réciprocité en fréquence totale s'écrit :

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{8\pi A}{\lambda L_{\text{op}}} \dot{\theta} . \quad (5.1)$$

Pour connaître la valeur de  $\dot{\theta}$ , il suffit alors de retrancher la valeur du biais  $\Omega_0$  à celle de la fréquence angulaire du signal de battement mesurée. On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude de quelques configurations permettant d'introduire un tel biais en fréquence dans le gyrolaser à état solide, tout en prenant en compte les spécificités de ce dernier. Une mise en œuvre expérimentale d'un gyrolaser à état solide avec un biais en fréquence sera ensuite présentée, ainsi que quelques mesures effectuées avec ce dispositif (caractérisation inertielle par comptage de frange, mesure du champ magnétique terrestre...). Des calculs d'ordre de grandeur seront notamment effectués, montrant la difficulté d'atteindre les performances inertielles énoncées précédemment avec ce type de dispositif. On retiendra à cette fin l'ordre de grandeur suivant : sur la base d'un biais en fréquence de 300 kHz avec un facteur d'échelle de 0,7 kHz/(°/s), il faudrait que le biais soit contrôlé à mieux que 2 mHz pour atteindre une stabilité de faux-zéro de 0,01°/h.

### 5.1 Étude de quelques configurations

On a vu au chapitre 3 qu'il était nécessaire, pour générer des pertes dépendant du sens de propagation, d'utiliser un dispositif non invariant par renversement du temps, comme par exemple un milieu Faraday. Ce qui est valable pour les pertes l'étant également pour les déphasages, c'est l'effet Faraday que l'on utilisera pour générer une différence de chemin optique entre les modes contrarotatifs. On a vu, toujours au chapitre 3, qu'un rotateur Faraday admet pour états propres les polarisations circulaires gauche et droite, associées aux valeurs propres  $\exp(\pm i\zeta)$ . En particulier, un état de polarisation circulaire donné admettra des valeurs propres différentes selon son sens de propagation. Ainsi, lorsque

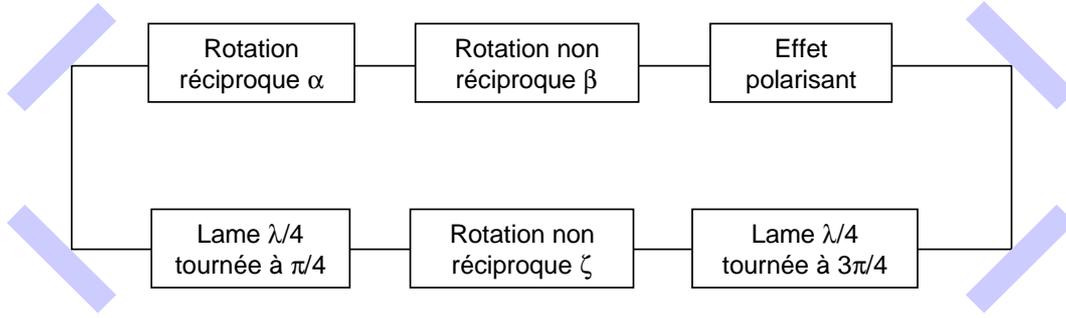


FIGURE 5.1 – Schéma de principe d'une cavité laser comprenant un dispositif de génération de pertes différentielles (ligne du haut) et un dispositif de génération d'un biais en fréquence (ligne du bas).

deux modes contrarotatifs possédant le même état de polarisation circulaire parcourent la cavité, le rotateur Faraday va induire entre eux une différence de chemin optique qui va se traduire au niveau de la cavité laser par une différence de fréquences propres entre les deux sens de propagation, donc une non-réciprocité en fréquence  $\Omega_0$ . Le principe de base étant établi, on va maintenant décrire plus en détail quelques configurations concrètes.

### 5.1.1 La configuration de base

Considérons la cavité laser représentée sur la figure 5.1. Cette cavité est composée d'un premier ensemble, permettant la génération de pertes différentielles contrôlables, et lui-même composé d'un rotateur réciproque (d'angle  $\alpha$ ), d'un rotateur Faraday (d'angle  $\beta$ ) et d'un polariseur, ainsi que d'un deuxième ensemble, permettant la génération d'un déphasage entre les modes contrarotatifs, et lui-même composé d'une première lame  $\lambda/4$ , tournée à  $45^\circ$  de l'axe du polariseur, d'un deuxième rotateur Faraday (d'angle  $\zeta$ ) et d'une deuxième lame  $\lambda/4$ , orientée à  $90^\circ$  par rapport à la première (ou, ce qui revient au même, à  $135^\circ$  de l'axe du polariseur). Ces lames  $\lambda/4$  ont pour but de transformer les états de polarisation linéaires en états circulaires, et réciproquement. Leur matrice de Jones s'écrit :

$$\begin{array}{c|c} \text{Lame } \lambda/4 \text{ tournée à } 45^\circ & \text{Lame } \lambda/4 \text{ tournée à } 135^\circ \\ \hline LO(\pi/4, \pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} & LO(3\pi/4, \pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice de Jones de la cavité laser parcourue dans le sens CW s'écrit alors :

$$M^{\text{CW}} = RF(\beta).RR^{\text{CW}}(\alpha).LO(\pi/4, \pi/4).RF(\zeta).LO(3\pi/4, \pi/4).P, \quad (5.2)$$

qui admet pour valeur propre non nulle (calcul effectué avec le logiciel Maple 6) :

$$\lambda_{\text{CW}} = \cos(\alpha + \beta)e^{-i\zeta}. \quad (5.3)$$

Dans le sens opposé, on a :

$$M^{\text{CCW}} = P.LO(3\pi/4, \pi/4).RF(\zeta).LO(\pi/4, \pi/4).RR^{\text{CCW}}(\alpha).RF(\beta), \quad (5.4)$$

qui admet pour valeur propre non nulle :

$$\lambda_{\text{CCW}} = \cos(\alpha - \beta)e^{i\zeta}. \quad (5.5)$$

On voit en considérant le module de ces valeurs propres que le dispositif induit bien des pertes différentielles, conformément à ce qui a été décrit au chapitre 3. Par ailleurs, on constate, en considérant l'argument de ces valeurs propres, qu'il existe une différence entre les fréquences de résonance des modes contrarotatifs donnée, en application de la formule 3.26, par :

$$\Omega_0 = \frac{2\zeta c}{L_{op}} . \quad (5.6)$$

Le dispositif présenté ici (rotateur Faraday entouré de deux lames  $\lambda/4$ ) constitue le moyen le plus direct pour générer un biais magnéto-optique sur tout type de laser en anneau. On s'intéresse maintenant à d'autres configurations possibles, qui prennent en compte les spécificités du gyrolaser à état solide.

### 5.1.2 Suppression du rotateur réciproque par désalignement d'une lame d'onde

Le montage que l'on se propose de décrire maintenant a pour but, en partant de la configuration "standard" de la figure 5.1, de faire l'économie d'un élément (à savoir le rotateur réciproque) tout en conservant les effets de génération des pertes différentielles et du biais en fréquence. On va voir qu'il suffit pour cela de désaligner l'une des lames d'ondes par rapport à sa position idéale. On considère donc une cavité laser telle que décrite par la figure 5.1, mais sans le rotateur réciproque et avec l'une des deux lames d'onde tournée non plus de  $\pi/4$  par rapport à l'axe du polariseur mais de  $\pi/4 + \theta$  (l'orientation de l'autre lame d'onde restant inchangée par rapport à la configuration précédente). La matrice de la première lame d'onde ainsi tournée devient :

$$LO(\pi/4 + \theta, \pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + i - 2i \cos^2(\frac{\pi}{4} + \theta) & -2i \cos(\frac{\pi}{4} + \theta) \sin(\frac{\pi}{4} + \theta) \\ -2i \cos(\frac{\pi}{4} + \theta) \sin(\frac{\pi}{4} + \theta) & 1 + i - 2i \sin^2(\frac{\pi}{4} + \theta) \end{pmatrix} .$$

La matrice de Jones de l'ensemble du dispositif parcouru dans le sens CW s'écrit alors :

$$M^{CW} = RF(\beta).LO(\pi/4 + \theta, \pi/4).RF(\zeta).LO(3\pi/4, \pi/4).P , \quad (5.7)$$

qui admet pour valeur propre non nulle (calcul effectué avec le logiciel Maple 6) :

$$\lambda_{CW} = \cos(\theta + \beta)e^{i(\theta - \zeta)} . \quad (5.8)$$

Dans le sens opposé, on a :

$$M^{CCW} = P.LO(3\pi/4, \pi/4).RF(\zeta).LO(\pi/4 + \theta, \pi/4).RF(\beta) , \quad (5.9)$$

qui admet pour valeur propre non nulle :

$$\cos(\theta - \beta)e^{i(\theta + \zeta)} . \quad (5.10)$$

On voit donc, en considérant le module des valeurs propres, que le dispositif considéré ici induit bien des pertes différentielles, l'angle  $\theta$  jouant dans ce contexte le même rôle que l'angle de rotation réciproque  $\alpha$  dans le dispositif précédent. De plus, en considérant l'argument de ces valeurs propres, on voit que le biais en fréquence induit par ce dispositif est égal à :

$$\Omega_0 = \frac{2\zeta c}{L_{op}} , \quad (5.11)$$

ce qui est identique à la réalisation précédente. On voit donc à l'issue de ce calcul qu'il est en théorie possible de générer des pertes différentielles et un biais en fréquence tout en faisant l'économie du rotateur réciproque utilisé sur le montage de la figure 5.1, au prix du désalignement de l'une des lames  $\lambda/4$ . Toutefois, on a supposé dans cette analyse que la deuxième lame était inclinée d'un angle exactement égal à  $135^\circ$  par rapport à l'axe du polariseur, ce qui n'est jamais le cas en pratique. On se propose donc dans ce qui suit d'étudier l'effet d'un désalignement accidentel de cette deuxième lame.

### 5.1.3 Effets d'un désalignement simultané des deux lames d'onde

La configuration à laquelle on s'intéresse maintenant est similaire à la précédente, avec en plus la seconde lame d'onde tournée non pas de  $3\pi/4$  ( $135^\circ$ ) par rapport à l'axe du polariseur mais de  $3\pi/4 + \varepsilon$ . La matrice d'une telle lame s'écrit :

$$LO(3\pi/4 + \varepsilon, \pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - i + 2i \cos^2(\frac{\pi}{4} + \varepsilon) & 2i \cos(\frac{\pi}{4} + \varepsilon) \sin(\frac{\pi}{4} + \varepsilon) \\ 2i \cos(\frac{\pi}{4} + \varepsilon) \sin(\frac{\pi}{4} + \varepsilon) & 1 - i + 2i \sin^2(\frac{\pi}{4} + \varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

La matrice représentant un tour de cavité dans le sens CW est alors :

$$M^{CW} = RF(\beta).LO(\pi/4 + \theta, \pi/4).RF(\zeta).LO(3\pi/4 + \varepsilon, \pi/4).P, \quad (5.13)$$

qui admet pour valeur propre non nulle :

$$\lambda_{CW} = \cos(\beta + \theta - \varepsilon) \cos(d - \theta + \varepsilon) + i \cos(\beta + \theta + \varepsilon) \sin(-d + \theta - \varepsilon). \quad (5.14)$$

La matrice représentant un tour de cavité dans le sens CCW s'écrit quant à elle :

$$M^{CCW} = P.LO(3\pi/4 + \varepsilon, \pi/4).RF(\zeta).LO(\pi/4 + \theta, \pi/4).RF(\beta), \quad (5.15)$$

et admet pour valeur propre non nulle :

$$\lambda_{CCW} = \cos(\beta - \theta + \varepsilon) \cos(d + \theta - \varepsilon) + i \cos(\beta - \theta - \varepsilon) \sin(d + \theta - \varepsilon). \quad (5.16)$$

Tant que la valeur de  $\varepsilon$  reste petite, le désalignement ne perturbe pas le fonctionnement du dispositif stabilisateur (en effet, à l'ordre 0 en  $\varepsilon$ , les modules des valeurs propres sont respectivement égaux à  $\cos(\beta - \theta)$  et  $\cos(\beta + \theta)$ ). En revanche, on voit que lorsque  $\varepsilon \neq 0$ , la différence de phase entre les modes contrarotatifs devient dépendante de  $\beta$ . Autrement dit, un mauvais alignement des lames d'onde induit un couplage entre le dispositif stabilisateur et le biais Faraday, ce dernier devenant dépendant du courant dans la bobine de contre-réaction, donc en particulier des fluctuations de l'intensité des modes contrarotatifs. Afin d'évaluer quantitativement cette dépendance, on effectue un calcul numérique avec les paramètres suivants :  $\zeta=1,5$  mrad (ce qui correspond typiquement à 500 kHz de biais en fréquence),  $\theta=4,5^\circ$  (voir la partie 4.2.1) et  $\varepsilon=0,5^\circ$  (ce qui représente l'incertitude expérimentale sur l'alignement des lames d'ondes). On évalue alors la quantité  $\arg(\lambda_{CCW}) - \arg(\lambda_{CW})$  pour deux valeurs typiques de  $\beta$ , par exemple  $\beta=0,16$  mrad (valeur mesurée en fonctionnement à l'équilibre sur le démonstrateur) et  $\beta=0,3$  mrad. La différence entre les deux résultats vaut dans ce cas précis  $0,34.10^{-6}$  rad, ce qui correspond à une modification de la valeur du biais en fréquence d'environ 100 Hz. Autrement dit, lorsque le courant dans la boucle de contre-réaction passe de sa valeur de fonctionnement à l'équilibre (40 mA) à une valeur environ deux fois supérieure (par exemple pour

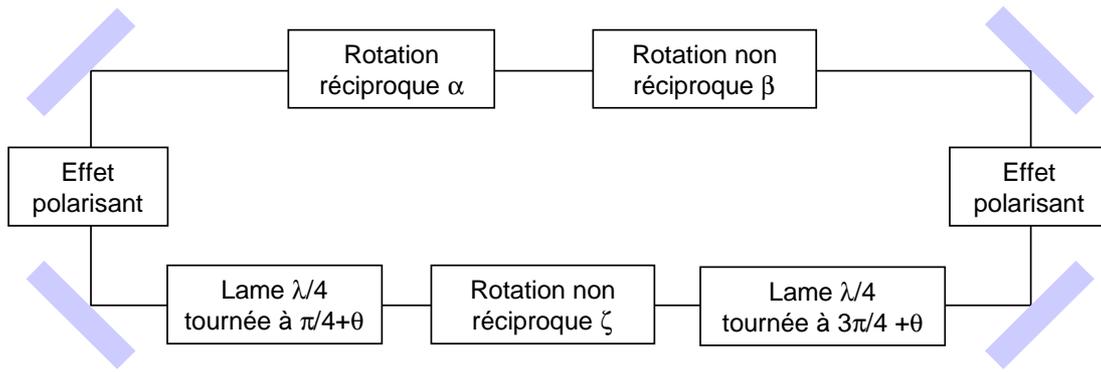


FIGURE 5.2 – Schéma de principe d'une cavité laser avec un dispositif de génération de pertes différentielles (ligne du haut) et dispositif de génération d'un biais en fréquence (ligne du bas), ces deux dispositifs étant séparés par deux polariseurs.

corriger une éventuelle fluctuation d'origine extérieure), le biais en fréquence est modifié d'environ 0,02% de sa valeur, ce qui est réhhibitoire pour la navigation inertielle haut de gamme. De manière plus générale, il n'est pas acceptable que le biais en fréquence, qui est supposé être extrêmement stable, soit dépendant du courant délivré par la boucle de contre-réaction, qui est par définition fluctuant. On propose donc une nouvelle configuration, qui permet de s'affranchir de ce problème en découplant totalement le dispositif stabilisateur du dispositif de génération du biais en fréquence grâce à l'utilisation de deux polariseurs.

#### 5.1.4 Vers une configuration insensible aux désalignements des lames d'ondes

On considère donc dans ce qui suit la configuration présentée sur la figure 5.2, dans laquelle deux polariseurs de même axe séparent les deux dispositifs (stabilisation et génération du biais en fréquence). Ces derniers sont alors indépendants l'un de l'autre puisqu'ils reçoivent toujours en entrée un état de polarisation linéaire selon l'axe des polariseurs. En revanche, cette méthode de découplage rend inopérante l'astuce présentée plus haut pour s'affranchir du rotateur réciproque en désalignant l'une des lames d'ondes. Il convient donc de réintégrer le rotateur réciproque dans la configuration finale, comme c'est le cas sur la figure 5.2.

Pour mettre en évidence quantitativement l'effet de découplage, on considère le dispositif de la figure 5.2 en supposant que les lames d'ondes sont légèrement désalignées par rapport à leur position idéale (le désalignement étant représenté par les angles  $\theta$  et  $\varepsilon$ ). La matrice de Jones de d'ensemble du dispositif parcouru dans le sens CW s'écrit alors :

$$M^{CW} = P.RF(\beta)R^{CW}(\alpha).P.LO(\pi/4 + \theta, \pi/4).RF(\zeta).LO(3\pi/4 + \varepsilon, \pi/4) , \quad (5.17)$$

qui admet pour valeur propre non nulle :

$$\lambda_{CW} = \cos(\alpha + \beta) [\cos(\zeta + \theta - \varepsilon) \cos(\theta - \varepsilon) - i \sin(\zeta + \theta - \varepsilon) \cos(\theta + \varepsilon)] . \quad (5.18)$$

Dans le sens opposé, on a :

$$M^{\text{CCW}} = LO(3\pi/4 + \varepsilon, \pi/4).RF(\zeta).LO(\pi/4 + \theta, \pi/4).P.R^{\text{CCW}}(\alpha).RF(\beta).P, \quad (5.19)$$

qui admet pour valeur propre non nulle :

$$\lambda_{\text{CW}} = \cos(\alpha - \beta) [\cos(\zeta - \theta + \varepsilon) \cos(\theta - \varepsilon) + i \sin(\zeta - \theta + \varepsilon) \cos(\theta + \varepsilon)] . \quad (5.20)$$

On constate sur les expressions 5.18 et 5.20 que le module des valeurs propres est donné, dans la limite où  $\varepsilon$  et  $\theta$  sont proches de zéro, par  $\cos(\alpha \pm \beta)$ , ce qui valide le principe de la génération des pertes différentielles. De plus, on voit sur ces mêmes expressions que l'argument des valeurs propres est indépendant de  $\beta$ , ce qui rend la question de l'alignement des lames d'ondes beaucoup moins critique : le seul effet d'un mauvais alignement, en présence des polariseurs, sera l'introduction de pertes supplémentaires. Toujours dans la limite où  $\varepsilon$  et  $\theta$  sont proches de zéro, la différence entre les fréquences propres des modes contrarotatifs est donnée par :

$$\Omega_0 = \frac{2\zeta c}{L_{\text{op}}}, \quad (5.21)$$

ce qui valide également le principe de génération du biais.

Il convient de noter que les expressions 5.18 et 5.20 fournissent de plus un signal d'erreur utile pour positionner correctement les lames d'onde par rapport aux axes des polariseurs.

### 5.1.5 Conclusion

On a présenté plusieurs configurations permettant d'introduire un biais magnéto-optique dans le gyrolaser à état solide. Toutes ces configurations utilisent un milieu Faraday entouré de deux lames  $\lambda/4$ . On a montré qu'un désalignement de l'une des lames pouvait remplacer avantageusement le rotateur réciproque nécessaire à la génération des pertes différentielles. Toutefois, on a vu que dans une version à un seul polariseur, le dispositif de génération du biais se couple au dispositif de génération des pertes différentielles à cause du positionnement imparfait des lames d'onde, ce qui dégrade les performances inertielles. On a proposé une variante permettant de s'affranchir de ce problème grâce à l'utilisation de deux polariseurs, ce qui découple totalement les deux dispositifs. Cette variante ne permet en revanche plus de se passer du rotateur réciproque, qui doit être réintroduit.

## 5.2 Résultats expérimentaux

On se propose dans ce qui suit de présenter quelques résultats issus de la mise en œuvre expérimentale du gyrolaser à état solide avec un biais magnéto-optique. Nous avons pour cela réalisé une configuration de cavité conforme à la figure 5.2. Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 5.3. Après avoir vérifié que le biais en fréquence est bien présent sur ce dispositif, on s'intéressera à ses possibles applications, comme la mesure de très petites vitesses de rotation ou celle du champ magnétique terrestre. On terminera ce chapitre par un début de caractérisation inertielle du gyrolaser à état solide avec un biais en fréquence.

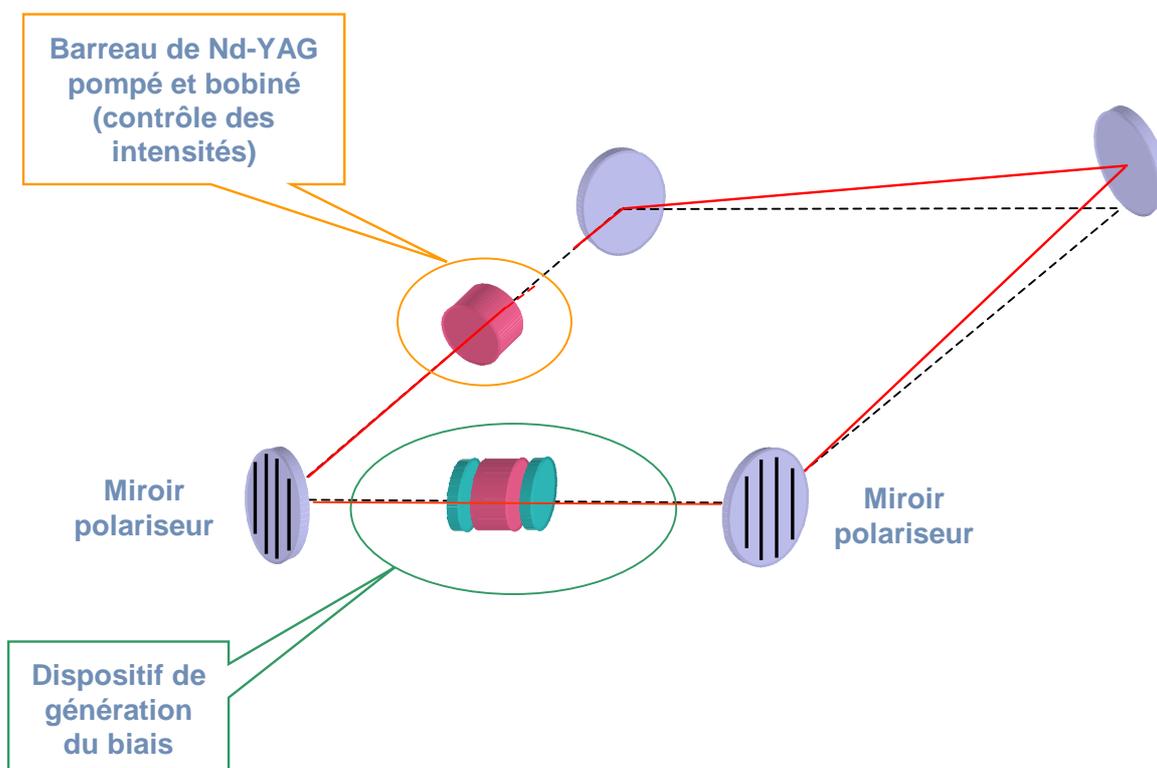


FIGURE 5.3 – Schéma représentant le gyrolaser à état solide avec un biais magnéto-optique. Le barreau de Nd-YAG pompé sert de milieu à gain et de rotateur Faraday pour la stabilisation du régime de battement. Le courant qui circule dans la bobine qui entoure ce barreau est délivré par la boucle de rétro-action, qui le maintient proportionnel à la différence d'intensité entre les modes contrarotatifs du laser. Le dispositif de génération du biais est composé d'un milieu Faraday (barreau de YAG ou de TGG par exemple) parcouru par un champ magnétique (créé par une bobine ou par un aimant) et entouré de deux lames  $\lambda/4$  comme décrit plus haut dans ce chapitre. Les deux polariseurs sont des miroirs dichroïques à  $56^\circ$  d'incidence. La non-planéité de la cavité permet d'induire la rotation réciproque du plan de polarisation nécessaire au fonctionnement du dispositif stabilisateur.

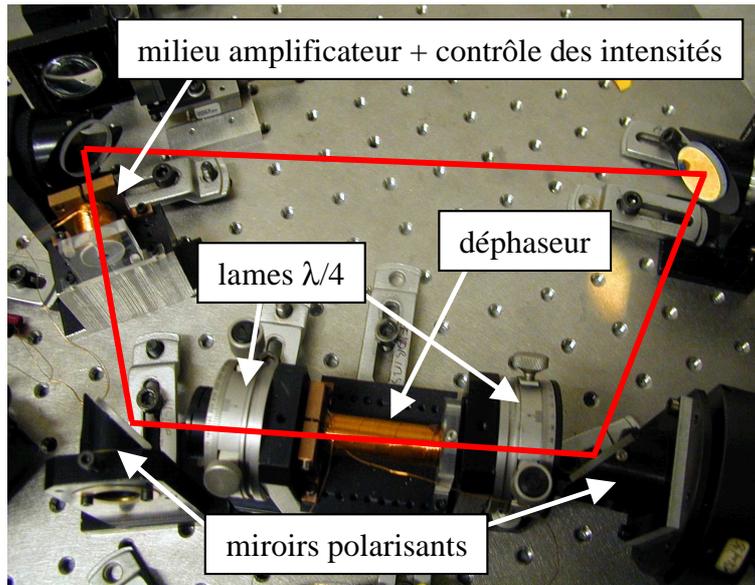


FIGURE 5.4 – Gyrolaser à état solide avec un biais magnéto-optique : photo du dispositif expérimental.

### 5.2.1 Mise en œuvre du biais magnéto-optique sur le gyrolaser à état solide

Le premier effet que nous avons observé après avoir introduit un biais en fréquence dans le laser en anneau à état solide selon le montage de la figure 5.3 (mais sans le dispositif stabilisateur) est le comportement unidirectionnel du laser dans la limite des forts biais, similaire en tout point au comportement qui avait été constaté dans la limite des fortes vitesses de rotation (partie 4.1.1). En particulier, le sens de l'émission unidirectionnelle s'inverse lorsque l'on change le signe du courant dans la bobine de génération du biais. Lorsque l'on active en plus le dispositif stabilisateur, on obtient un régime de battement stable, qui permet de tracer la courbe de réponse en fréquence présentée sur la figure 5.5. La cavité utilisée a un périmètre égal à 45 cm, et contient deux barreaux de YAG. Le premier (utilisé comme milieu à gain et pour la génération des pertes différentielles) est long de 25 mm. Le second (destiné à la génération du biais magnéto-optique) est long de 50 mm. Il est entouré d'une bobine de longueur  $L_{\text{bob}} = 40$  mm, de rayon  $R_{\text{bob}} = 5$  mm et composé de  $N = 2000$  spires. Celle-ci crée au centre du barreau de YAG un champ magnétique dont la valeur est donnée par :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L_{\text{bob}}} \cos \xi \quad \text{avec} \quad \tan \xi = \frac{R_{\text{bob}}}{L_{\text{bob}}/2} = 0,25 . \quad (5.22)$$

En faisant l'hypothèse que ce champ est constant tout le long de la bobine et nul à l'extérieur (ce qui revient à négliger les effets de bord), l'angle de la rotation induite par le barreau s'écrit :

$$\zeta = BL_{\text{bob}}V_{\text{YAG}} = \mu_0 NI \cos \xi V_{\text{YAG}} , \quad (5.23)$$

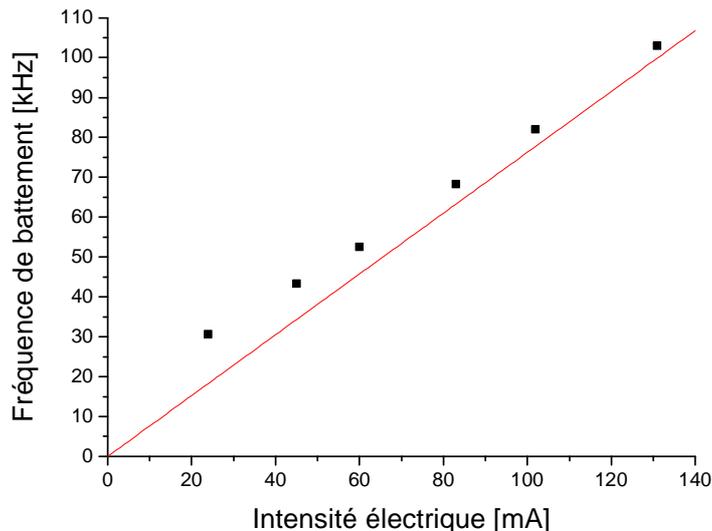


FIGURE 5.5 – Fréquence de battement en fonction du courant  $I$  dans la bobine servant à créer le biais magnéto-optique. La droite est un guide pour l'œil, dont la pente  $A$  est obtenue par un ajustement des données avec une fonction du type  $y = Ax + B/x$ . On estime ainsi la valeur du biais magnéto-optique effectivement créé à  $\Omega_0/I = 4,8 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$ .

où  $V_{\text{YAG}}$  est la constante de Verdet du YAG<sup>1</sup>. Le biais magnéto-optique en fonction du courant  $I$  dans la bobine est finalement donné par :

$$\frac{\Omega_0}{I} = \frac{2\zeta c}{IL_{\text{op}}} = \frac{2c\mu_0 N \cos \xi V_{\text{YAG}}}{L_{\text{op}}} \simeq 5 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{A}^{-1} . \quad (5.24)$$

Cette estimation théorique est à comparer à la valeur mesurée expérimentalement (voir figure 5.5), à savoir  $\Omega_0 = 4,8 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$ . Ces résultats sont en relativement bon accord, l'écart résiduel d'environ 5% étant attribué aux effets de bords.

Le comportement du gyrolaser à état solide en présence d'un biais magnéto-optique est donc conforme à ce qui était attendu théoriquement. En particulier, l'effet d'un tel biais peut être considéré comme équivalent à celui d'une rotation continue, et permet de faire fonctionner le gyrolaser dans une zone où sa réponse en fréquence peut être considérée comme linéaire.

### 5.2.2 Application à la mesure de très petites vitesses de rotation

Grâce au biais magnéto-optique introduit dans la cavité laser, il est possible d'effectuer des mesures de très petites vitesses de rotation en étudiant les variations de la fréquence de battement autour de sa valeur à l'arrêt. Les résultats d'une telle mesure sont présentés figure 5.6. On voit que la précision obtenue est de l'ordre du centième de degré par seconde, ce qui est plus de 1000 fois inférieur à la vitesse minimale nécessaire pour obtenir un battement en l'absence de biais magnéto-optique.

<sup>1</sup>Donnée on le rappelle par  $V_{\text{YAG}} = 103^\circ \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ , ou de manière équivalente  $V_{\text{YAG}} = 1,8 \text{ rad} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

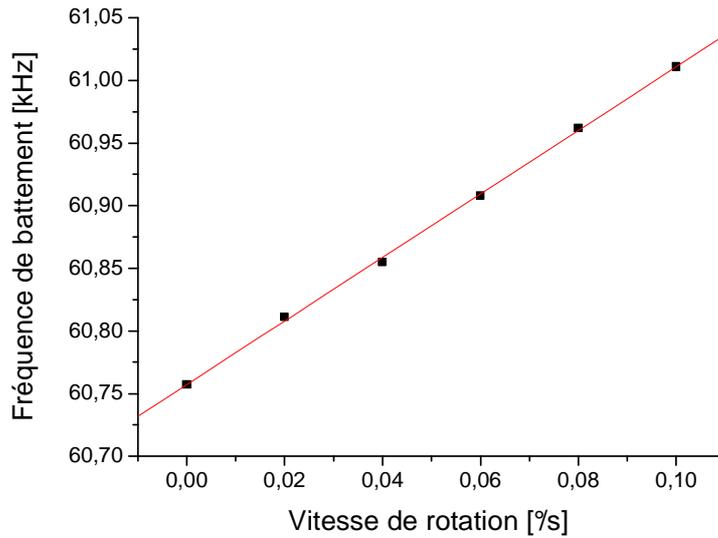


FIGURE 5.6 – Mesure expérimentale de très petites vitesses de rotation, rendue possible par la présence du biais magnéto-optique. La largeur du battement est de l'ordre de la centaine de Hz. La valeur moyenne de la fréquence de battement est déterminée très précisément par transformation de Fourier numérique du signal temporel de battement.

Toutefois, ce résultat spectaculaire ne doit pas masquer les deux inconvénients majeurs de ce dispositif, auxquels on va maintenant s'intéresser, à savoir la sensibilité au champ magnétique extérieur et les fluctuations (surtout sur le long terme) de la valeur du biais.

### 5.2.3 Application à la mesure du champ magnétique ambiant

Lorsque le dispositif de la figure 5.3 est soumis à un champ magnétique extérieur, ce dernier s'ajoute au champ magnétique créé par la bobine de génération du biais, modifiant ainsi la valeur de  $\Omega_0$ . Cet effet a été mis en évidence par une expérience, dont le résultat est porté sur la figure 5.7, qui consiste à mesurer la fréquence de battement du gyrolaser à état solide avec un biais magnéto-optique constant pour différentes orientations du dispositif. On voit que le biais varie sinusoïdalement avec l'angle d'orientation de la table, l'effet du champ magnétique extérieur dépendant de la manière dont celui-ci s'additionne avec le champ magnétique créé par la bobine de génération du biais. La cavité utilisée dans l'expérience de la figure 5.7 a une longueur géométrique d'environ 565 mm, et contient un barreau de Nd-YAG pompé diode d'une longueur de 25 mm ainsi qu'un barreau de TGG (entouré de 2 lames  $\lambda/4$ ) d'une longueur de  $L_{\text{TGG}}=20$  mm. L'amplitude de variation  $\Delta\Omega_0$  (crête-crête) du biais magnéto-optique est estimée à  $\Delta\Omega_0/(2\pi) \simeq 3,5$  kHz. Cela correspond à un champ magnétique extérieur qui, une fois projeté dans le plan de la cavité, a un module donné par :

$$B_{\text{ext}} = \frac{\Delta\Omega_0 L_{\text{op}}}{4cV_{\text{TGG}}L_{\text{TGG}}} . \quad (5.25)$$

En prenant  $V_{\text{TGG}} = 2290^\circ \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  ou, de manière équivalente,  $V_{\text{TGG}} = 40 \text{ rad} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ , on obtient  $B_{\text{ext}} \simeq 1,4 \cdot 10^{-5}$  T. Cette mesure est en bon accord avec la valeur du champ magnétique terrestre, dont le module est donné par  $B_{\text{Terre}} \simeq 4,5 \cdot 10^{-5}$  T et qui fait avec

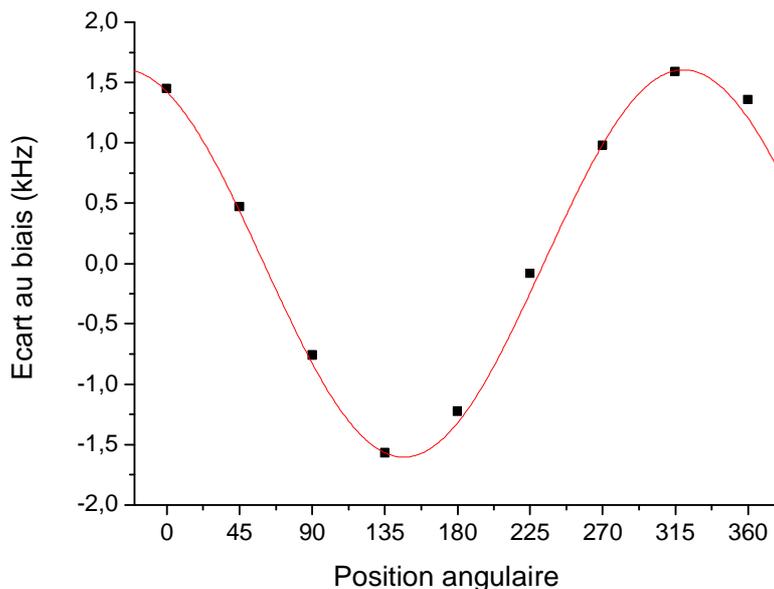


FIGURE 5.7 – Écart entre la fréquence de battement et la valeur de référence du biais magnéto-optique en fonction de la position angulaire du gyrolaser à état solide. La valeur de référence du biais est environ égale à 280 kHz.

l'horizontale un angle d'environ  $70^\circ$ , d'où une valeur projetée donnée par  $B_{\text{Terre}} \cdot \cos(70^\circ) \simeq 1,5 \cdot 10^{-5}$  T. Ce calcul semble indiquer que la principale source de champ magnétique dans le laboratoire est le champ magnétique terrestre.

On voit donc que le dispositif étudié dans ce chapitre est très sensible au champ magnétique extérieur<sup>2</sup>, ce qui risque de dégrader considérablement ses performances inertielles (par exemple une variation du champ magnétique extérieur de seulement  $1 \mu\text{T}$  va entraîner un changement de la fréquence de battement égal à 40 Hz, ce qui n'est pas acceptable pour des applications inertielles haut de gamme). Plusieurs moyens peuvent être imaginés pour pallier ce problème. On les mentionne ici, même si on ne les a pas pour l'instant mis en œuvre expérimentalement. On peut par exemple utiliser un dispositif de blindage pour atténuer les effets des champs magnétiques extérieurs. On peut aussi utiliser, pour la génération du biais, un matériau ferro-magnétique saturé (par exemple un barreau de YIG), qui est *de facto* beaucoup moins sensible au champ magnétique extérieur, dans la limite où il reste saturé. Enfin, on peut envisager d'utiliser, toujours pour la génération du biais, deux barreaux de même longueur et séparés par une lame  $\lambda/2$ . Le déphasage induit par le champ magnétique extérieur est alors compté positivement dans l'un des barreaux et négativement dans l'autre, ce qui permet à ses effets de se compenser. Pour générer le biais magnéto-optique, il suffit alors de créer dans les deux barreaux des champs magnétiques de sens opposés, en utilisant par exemple des bobines identiques mais alimentées par des courants de signes différents. On obtient ainsi un gyrolaser à état solide avec un biais magnéto-optique insensible (en théorie) au champ magnétique extérieur.

<sup>2</sup>Au point que l'on pourrait envisager son utilisation en tant que magnétomètre, selon le principe décrit dans [130]!

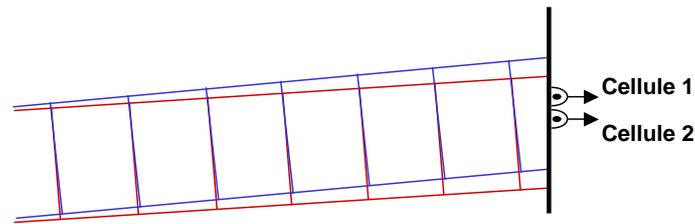


FIGURE 5.8 – Représentation schématique du dispositif de détection pour le comptage de franges. Les deux faisceaux issus des modes contrarotatifs de la cavité laser sont superposés avec un petit angle sur deux détecteurs très rapprochés. On obtient deux signaux de battement dont on peut régler la phase relative en jouant sur cet angle.

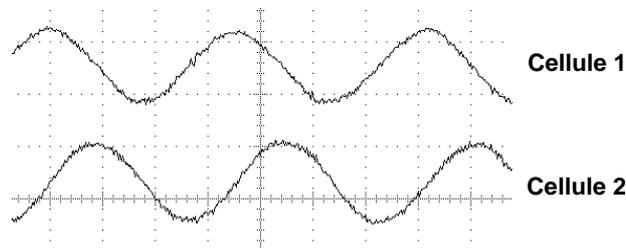


FIGURE 5.9 – Signaux expérimentaux mesurés par les deux cellules de détection pour le comptage de franges. Le signal de battement est induit par un biais magnéto-optique constant. L'angle entre les deux faisceaux a été choisi de manière à obtenir des signaux en quadrature de phase.

#### 5.2.4 Mesure de performances inertielles par comptage de frange

Afin d'évaluer les performances inertielles du gyrolaser à état solide avec un biais magnéto-optique, on a mis en place un dispositif intégrateur similaire à ceux qui sont utilisés pour les gyrolasers à hélium-néon. Le principe consiste à compter le nombre de franges qui défilent sur le signal de battement. Afin de tenir compte du sens de défilement, on utilise deux détecteurs rapprochés, comme sur la figure 5.8. En agissant sur l'angle formé par les vecteurs d'ondes des deux faisceaux, on peut changer la phase qui existe entre les signaux de battement des deux détecteurs, et les mettre en quadrature l'un par rapport à l'autre. Cela permet alors à un dispositif électronique de comptage de disposer d'une information sur le sens de défilement des franges, donc sur le signe de la vitesse de rotation.

Les signaux de battement en quadrature de phase issus du gyrolaser à état solide avec un biais magnéto-optique constant sont reproduits figure 5.9. Le résultat de la mesure est donné sur la figure 5.10. L'ordinateur affiche à chaque seconde le nombre de franges ayant défilé pendant la seconde écoulée, ce qui peut être vu comme une mesure de la fréquence instantanée (en fait la fréquence moyenne à chaque seconde) en fonction du temps. On constate que, pendant le temps d'intégration, qui est égal à 10 minutes, la valeur de la fréquence instantanée reste à peu près constante, avec une dispersion de l'ordre de 150 ppm.

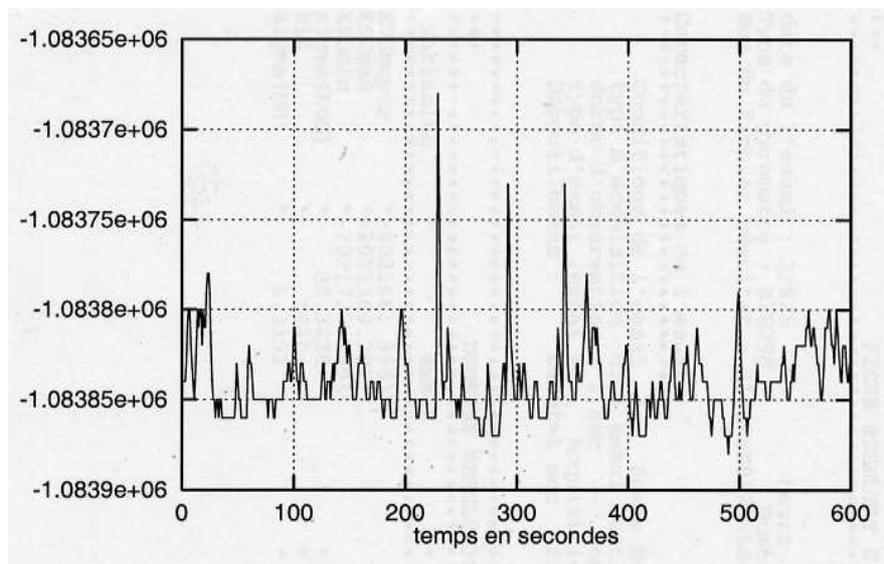


FIGURE 5.10 – Résultat du comptage de franges avec un biais magnéto-optique constant pendant 10 minutes. On voit sur cette figure le nombre de franges ayant défilé à chaque seconde. La valeur du biais magnéto-optique utilisée pour cette série de mesures est d'environ 500 kHz. La dispersion de la fréquence mesurée est de l'ordre de 75 Hz, soit 150 ppm.

Une deuxième expérience a été menée sur une durée d'observation beaucoup plus grande (1 heure). Le résultat est donné sur la figure 5.11. On y observe les deux choses suivantes :

- la présence de pics correspondant à des sauts de fréquence d'amplitude relativement importante (de l'ordre de  $10^{-3}$ ) et de courte durée (de l'ordre de la dizaine de secondes) ; ce phénomène n'est pas pour le moment expliqué avec certitude, mais on peut évoquer les hypothèses des vibrations mécaniques ou de la circulation de l'air à l'intérieur de la cavité ; on a observé que ces pics devenaient plus rares lorsque l'on protégeait la cavité par un capot en plexiglas, ce qui tendrait plutôt à confirmer la seconde hypothèse ;
- une dérive long terme de la valeur du biais lorsque ces pics sont absents ; en une heure, celui-ci a changé linéairement d'environ 250 ppm ; là encore, plusieurs hypothèses sont envisagées, comme par exemple la dérive de l'alimentation de courant à l'origine du biais magnéto-optique (si cette hypothèse était vérifiée, cela voudrait dire que le courant délivré, qui est égal à 200 mA, a varié de  $50 \mu\text{A}$  sur une heure), ou un changement de température qui influe sur certains des paramètres du laser (changement des indices optiques, du coefficient de Verdet...).

On voit donc qu'au problème de la sensibilité au champ magnétique extérieur s'ajoute celui de la stabilité du biais. Au vu des ordres de grandeur considérés, cela reviendrait entre autres à stabiliser le courant dans la bobine à mieux que  $10^{-7}$ , ce qui semble exclu *a priori*. On peut signaler toutefois l'existence d'un composant électronique qui délivre une tension stable à mieux que 2 ppm sur 30 jours [131], qui pourrait servir de base à une source de

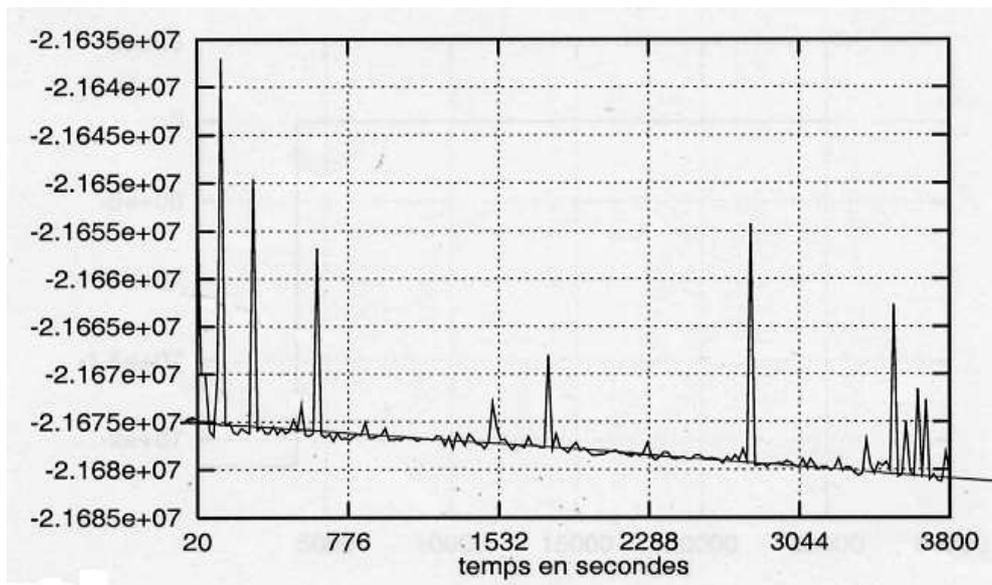


FIGURE 5.11 – Résultat du comptage de franges avec un biais magnéto-optique constant pendant environ une heure. On constate une dérive long terme, symbolisée par la ligne continue superposée aux données, ainsi que des sauts de fréquence sur des durées plus courtes (de l'ordre de la dizaine de secondes).

courant destinée à l'alimentation de la bobine de génération du biais<sup>3</sup>. Une telle source, combinée à une cavité monobloc et éventuellement à certaines des techniques exposées dans ce chapitre pour s'affranchir de la sensibilité au champ magnétique extérieur, pourrait fournir un gyromètre aux performances inertielles acceptables pour des applications de type basse ou moyenne gamme.

### 5.3 Conclusion

Le dispositif présenté dans ce chapitre permet, en introduisant un biais magnéto-optique constant, de faire fonctionner le gyrolaser à état solide dans une zone où la réponse en fréquence est quasiment linéaire. Nous avons présenté plusieurs configurations en vue de la génération de ce biais, et avons notamment souligné la nécessité d'utiliser deux polariseurs afin de découpler les effets du dispositif stabilisateur, décrit dans les chapitres précédents, des effets du dispositif de génération du biais. Nous avons présenté une réalisation expérimentale du gyrolaser à état solide avec un biais magnéto-optique, qui nous a permis de mesurer des vitesses de rotation aussi faibles que  $0,02^\circ/\text{s}$ . Nous avons montré que ce système est très sensible au champ magnétique extérieur, ce qui en fait potentiellement un bon magnétomètre mais un mauvais gyromètre. Les performances inertielles ont été mesurées sur banc optique, montrant la nécessité de stabiliser la valeur du biais et de diminuer la sensibilité au champ magnétique extérieur. Des pistes d'amélioration ont été proposées (blindage magnétique, alimentation stabilisée, matériau

<sup>3</sup>On peut de plus imaginer un dispositif qui inverserait périodiquement le signe du courant délivré, de façon à compenser les dérives qui auraient lieu sur des échelles de temps supérieures au temps caractéristique de commutation.

saturé...), qui pourraient permettre d'atteindre les performances d'un gyromètre bas de gamme (c'est-à-dire de l'ordre du degré par heure).

Il convient par ailleurs de souligner le grand intérêt pratique du dispositif décrit dans ce chapitre en tant qu'instrument d'étude. En effet, il permet de se placer en régime de battement tout en se libérant des contraintes de la table tournante, parmi lesquelles on peut citer les vibrations mécaniques ou la distorsion des signaux à cause des joints électriques. Il permet également d'introduire dans le gyrolaser une non-réciprocité en fréquence dépendant du temps et prenant la forme d'une sinusoïde ou d'un signal en créneau [132, 133], ce qui serait *a priori* plus difficile à réaliser avec un mouvement mécanique. Une version monobloc du gyrolaser à état solide avec un biais en fréquence pourrait servir de base à l'étude de configurations plus élaborées, comme celle décrite au chapitre suivant.



# Chapitre 6

## Solution à biais compensé (4 ondes)

La solution “4 ondes”, qui permet d’introduire un biais magnéto-optique dans la cavité tout en s’affranchissant des fluctuations de ce dernier, a été proposée pour la première fois par De Lang [134, 135] dans les années 1960 pour les gyrolasers à hélium-néon. Le principe consiste à faire coexister dans la cavité deux paires orthogonales de modes contrarotatifs soumis à un biais magnéto-optique commun, de telle sorte que ces deux paires soient sensibles à ce biais avec des signes opposés. En effectuant la différence entre les deux fréquences de battement obtenues, il est alors possible en principe d’éliminer le biais et ses fluctuations, tout en conservant le signal dû à la rotation. Grâce au biais présent dans la cavité, la réponse en fréquence du dispositif est linéaire. De plus, grâce à la coexistence des deux paires de modes, le facteur d’échelle de ce type de gyrolaser est doublé. Après avoir décrit de manière un peu plus quantitative ce dispositif dans le cas de l’hélium-néon, on propose dans ce chapitre une transposition originale [136] de cette architecture au cas de l’état solide, qui prend notamment en compte la nécessité d’inclure dans le système un dispositif de stabilisation du régime de battement. On présente pour finir quelques résultats issus de la mise en œuvre expérimentale de la solution proposée.

### 6.1 Principe du gyrolaser 4 ondes à hélium-néon

Le gyrolaser 4 ondes à hélium-néon [124, 137, 138] est une cavité laser dans laquelle se propagent quatre modes superposés spatialement et oscillant à quatre fréquences différentes. Pour cela, une telle cavité doit contenir un rotateur réciproque, d’angle  $\Gamma$ , et un rotateur

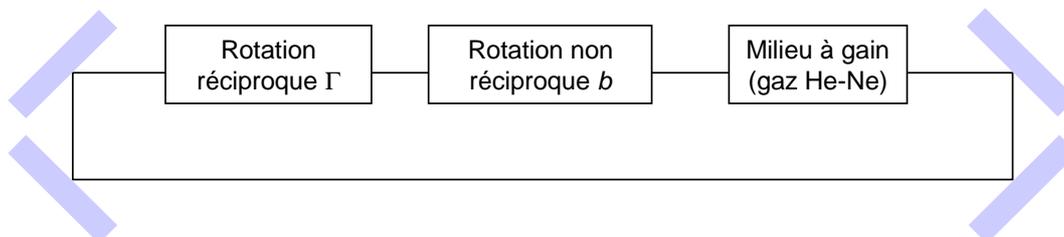


FIGURE 6.1 – Schéma de principe d’un gyrolaser 4 ondes à hélium-néon. Afin de garantir l’existence des états propres circulaires dans la cavité, celle-ci ne doit contenir aucun élément anisotrope.

non réciproque, d'angle  $b$ . Il convient de noter que ce dernier rotateur n'a pas besoin dans cette configuration d'être placé entre deux lames  $\lambda/4$ . Dans le sens CW, la matrice de Jones de ce dispositif s'écrit :

$$M^{\text{CW}} = RR^{\text{CW}}(\Gamma).RF(b) = \begin{pmatrix} \cos(\Gamma + b) & \sin(\Gamma + b) \\ -\sin(\Gamma + b) & \cos(\Gamma + b) \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

et admet comme vecteur propre l'état circulaire gauche  $(1, -i)$  avec la valeur propre  $\exp[i(\Gamma + b)]$  et l'état circulaire droit  $(1, i)$  avec la valeur propre  $\exp[-i(\Gamma + b)]$ . Dans le sens CCW, la matrice de Jones s'écrit :

$$M^{\text{CCW}} = RF(b).RR^{\text{CCW}}(\Gamma) = \begin{pmatrix} \cos(b - \Gamma) & \sin(b - \Gamma) \\ -\sin(b - \Gamma) & \cos(b - \Gamma) \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

qui admet comme vecteur propre l'état circulaire gauche  $(1, i)$  avec la valeur propre  $\exp[i(\Gamma - b)]$  et l'état circulaire droit  $(1, -i)$  avec la valeur propre  $\exp[i(b - \Gamma)]$ . On note GCW et DCW (respectivement GCCW et DCCW) les états circulaires gauche et droit se propageant dans le sens CW (respectivement dans le sens CCW). Les fréquences propres (angulaires) de ces modes s'écrivent alors (en utilisant l'équation 3.26) :

$$\frac{\omega_{\text{GCW}}}{(2\pi p - \Gamma - b)c/L_{\text{op}}} \quad \Big| \quad \frac{\omega_{\text{DCW}}}{(2\pi p + \Gamma + b)c/L_{\text{op}}} \quad \Big| \quad \frac{\omega_{\text{GCCW}}}{(2\pi p - \Gamma + b)c/L_{\text{op}}} \quad \Big| \quad \frac{\omega_{\text{DCCW}}}{(2\pi p + \Gamma - b)c/L_{\text{op}}}$$

On voit donc apparaître quatre fréquences propres *a priori* différentes. Si l'on considère maintenant que le gyrolaser est en rotation et que ladite rotation induit une non-réciprocité en fréquence  $\Omega$  entre un mode se propageant dans le sens CW et un mode se propageant dans le sens CCW, on voit que la fréquence de battement entre les ondes circulaires gauches est donnée par :

$$\omega_G = |\omega_{\text{GCW}} - \omega_{\text{GCCW}} + \Omega| = 2b \frac{c}{L_{\text{op}}} - \Omega, \quad (6.3)$$

tandis que la fréquence de battement entre les ondes circulaires droites s'écrit :

$$\omega_D = |\omega_{\text{DCW}} - \omega_{\text{DCCW}} + \Omega| = 2b \frac{c}{L_{\text{op}}} + \Omega, \quad (6.4)$$

où l'on a utilisé l'inégalité  $2|b|c/L_{\text{op}} > |\Omega|$ . En faisant la différence entre les deux fréquences de battement, on obtient comme annoncé au début de ce chapitre :

$$\omega_D - \omega_G = 2\Omega. \quad (6.5)$$

Cette quantité, facilement accessible expérimentalement, est en théorie indépendante des paramètres  $\Gamma$  et  $b$ , donc de leurs éventuelles fluctuations ! De plus, une telle configuration permet de multiplier le facteur d'échelle par 2, ce qui veut dire que ce dispositif, à encombrement égal, est deux fois plus sensible à la rotation qu'un gyrolaser "classique". Le principe du calcul effectué ci-dessus peut être résumé sur un "arbre des fréquences" comme celui représenté sur la figure 6.2. Naturellement, les valeurs de  $\Gamma$  et  $b$  doivent être telles que l'espacement entre les fréquences propres garantisse la linéarité de la réponse en fréquence pour chacun des modes.

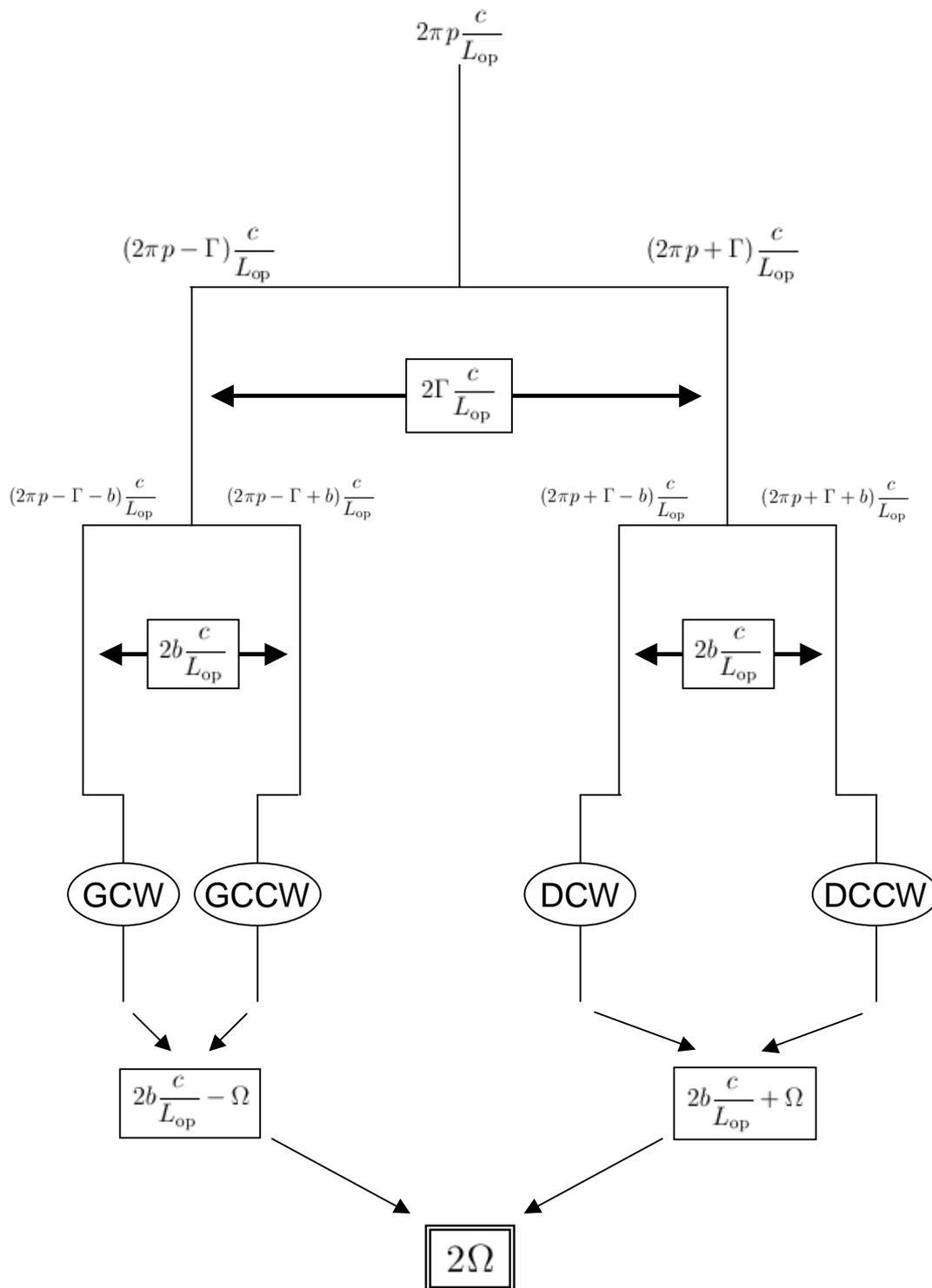


FIGURE 6.2 – “Arbre des fréquences” pour un gyrolaser 4 ondes à hélium-néon. Le premier niveau correspond à la fréquence commune aux 4 modes en l’absence de rotateur dans la cavité. Les second, troisième et quatrième niveaux prennent en compte successivement les effets du rotateur réciproque, du rotateur non réciproque et de la rotation.

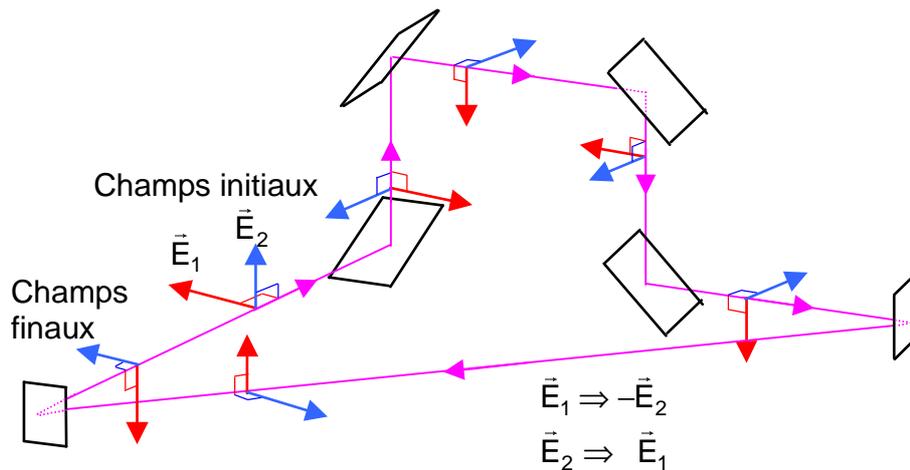


FIGURE 6.3 – Cavité non planaire induisant une rotation géométrique de  $90^\circ$  par tour. Ce type de cavité est utilisé en pratique pour la réalisation des gyrolasers 4 ondes à hélium-néon [139].

En pratique, la rotation non réciproque est assurée par un matériau Faraday et la rotation réciproque par une configuration non planaire du type de celle de la figure 6.3 [139]. Une telle géométrie de cavité correspond à un angle de rotation réciproque égal à  $\pi/2$ , ce qui induit une séparation en fréquence de  $c/(2L_{op})$  entre les modes orthogonaux. À notre connaissance, la société Northrop Grumman (anciennement Litton Industries) produit et commercialise ce type de dispositif actuellement.

## 6.2 Vers un gyrolaser 4 ondes à état solide

Lorsque l'on tente de transposer les principes décrits précédemment au cas du gyrolaser à état solide, on se heurte à la nécessité de mettre en œuvre un dispositif stabilisateur pour le régime de battement, afin que ce dernier ne se transforme pas en régime unidirectionnel en présence du biais magnéto-optique (voir partie 5.2.1). Or le dispositif stabilisateur retenu dans les chapitres précédents utilise un élément polarisant, donc ne permet pas la coexistence de deux modes orthogonaux dans la cavité! La solution que nous proposons dans ce qui suit utilise, pour pallier ce problème, une paire de cristaux biréfringents uniaxes taillés à  $45^\circ$  de leur axe optique. Après avoir présenté succinctement le principe de fonctionnement de ce type d'élément, on se propose de montrer comment il autorise l'oscillation simultanée des 4 modes dans la cavité tout en permettant la mise en œuvre du dispositif stabilisateur grâce à la génération de pertes différentielles par action sur la polarisation.

### 6.2.1 Le cristal biréfringent uniaxe taillé à $45^\circ$ de son axe optique

On considérera le cristal biréfringent uniaxe taillé à  $45^\circ$  de son axe optique comme un élément permettant de séparer spatialement des états de polarisation linéaire issus d'un même faisceau. Ce comportement est illustré sur la partie gauche du haut de la figure 6.4, où l'on voit que la composante du vecteur incident selon  $x$  va être transmise normalement

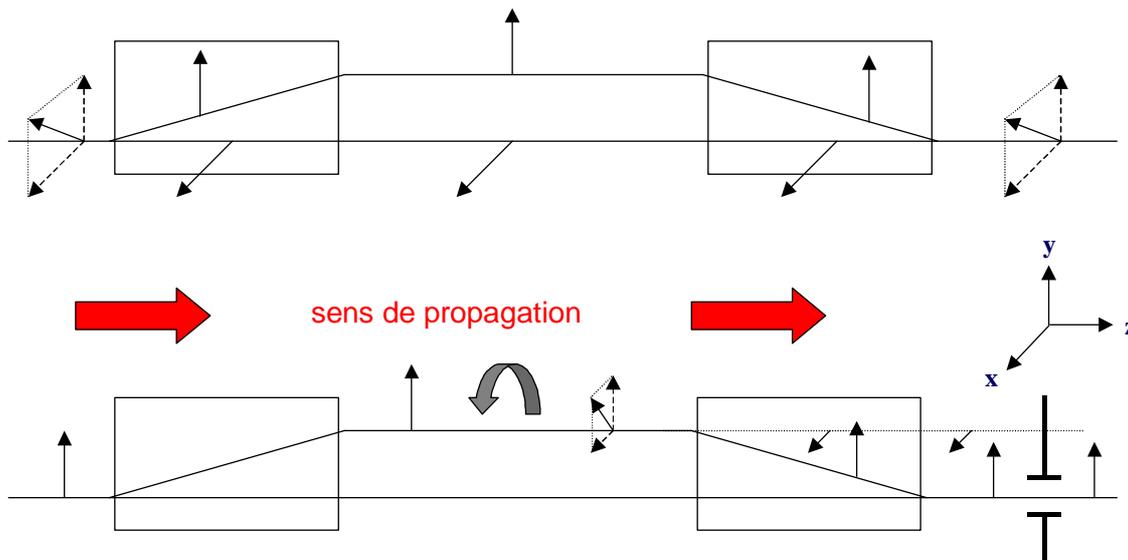


FIGURE 6.4 – Association de deux cristaux biréfringents uniaxes taillés à 45° de leur axe optique : en l’absence d’élément entre les deux cristaux, le faisceau incident est transmis sans perte. En présence d’un élément rotateur, l’ensemble des deux cristaux agit comme un polariseur selon chacun des axes  $x$  et  $y$  (voir texte).

par le cristal (suivant l’axe dit “ordinaire”) tandis que la composante selon  $y$  va être déviée selon l’axe “extraordinaire”, pour ressortir parallèle mais décalée spatialement par rapport à l’axe du faisceau incident. Un tel cristal peut dans ce contexte être considéré comme une “boîte noire” à deux entrées et deux sorties. En suivant les notations de [140], on désigne par  $B$  (“bottom”) le canal du bas et par  $T$  (“top”) le canal du haut. Les composantes  $B_x$  et  $T_x$ , transmises selon l’axe ordinaire, vont être envoyées sur elles-mêmes. La composante  $B_y$  suit l’axe extraordinaire et est donc envoyée sur  $T_y$ . Enfin, la composante  $T_y$  suit également l’axe extraordinaire et sort du dispositif (figure 6.5). On peut mettre à profit cette analyse en terme de “boîte noire” pour adapter le formalisme des matrices de Jones aux systèmes optiques contenant ce type de cristal [140, 141]. Pour cela, on décrit le champ électrique non plus par ses deux composantes  $(E_x; E_y)$  mais par quatre composantes  $(E_x^T; E_y^T; E_x^B; E_y^B)$  correspondant aux deux composantes du champ sur l’axe  $B$  et aux deux composantes du champ sur l’axe  $T$ . Un élément optique habituellement décrit par une matrice de Jones  $m$  de taille  $2 \times 2$  sera décrit dans ce formalisme par la matrice  $4 \times 4$  suivante :

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Le cristal biréfringent uniaxe taillé à 45° de son axe optique possède deux matrices de Jones différentes selon que son axe extraordinaire décale les faisceaux vers le haut ou vers

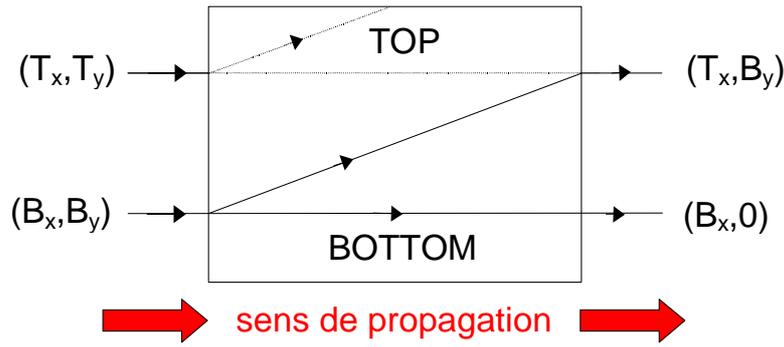


FIGURE 6.5 – Description du cristal biréfringent uniaxe taillé à  $45^\circ$  de son axe optique en terme de “boîte noire” (voir texte). Image tirée de [140].

le bas. On a dans le premier cas :

$$C_{\uparrow}(\phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\Gamma/2} \\ 0 & 0 & e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et dans le second :

$$C_{\downarrow}(\phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où l’on note  $\Gamma$  le déphasage qui survient entre le faisceau ordinaire et le faisceau extraordinaire lors de la traversée du cristal. Il est également utile d’introduire la matrice d’un diaphragme positionné de telle sorte qu’il ne laisse passer que l’axe “bottom”. Une telle matrice s’écrit :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Ce formalisme permet de décrire les états propres d’une cavité laser contenant entre autres éléments des cristaux biréfringents uniaxes taillées à  $45^\circ$  de leur axe optique.

Lorsque l’on utilise deux de ces cristaux placés tête-bêche [142,143], comme schématisé sur le haut de la figure 6.4, les états de polarisation linéaires orthogonaux, séparés spatialement par le premier cristal, sont recombinaés par le second. On suppose maintenant que l’on ajoute à cet ensemble un rotateur optique placé entre les deux cristaux (bas de la figure 6.4), et on s’intéresse au devenir d’un faisceau incident polarisé par exemple selon  $y$ . Ce faisceau va être décalé selon l’axe extraordinaire par le premier cristal. Son vecteur polarisation va ensuite être tourné par le rotateur optique. Lorsque le faisceau arrive sur le second cristal, seule sa composante selon  $y$  va être recombinaée dans l’axe du faisceau incident (la composante selon  $x$  traverse le second cristal sans être déviée, et est éliminée par exemple à l’aide d’un diaphragme ou simplement parce qu’elle n’est plus résonante

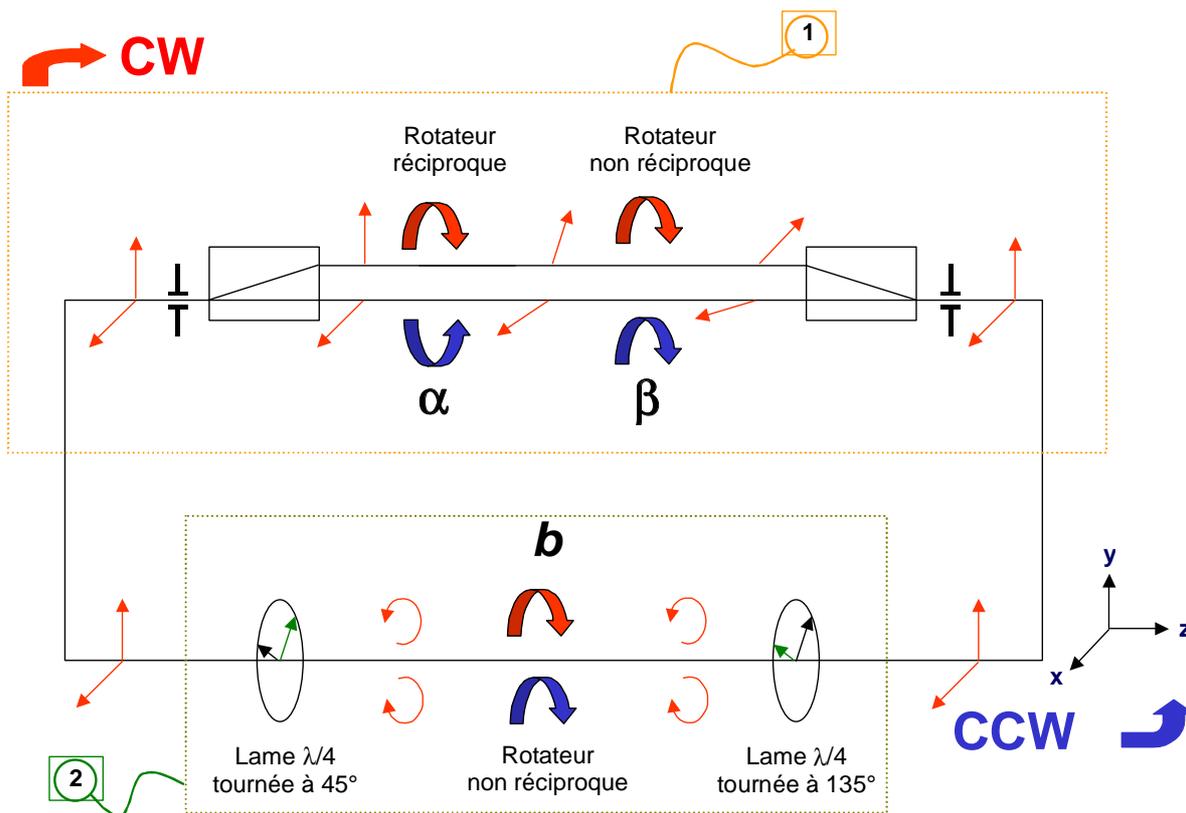


FIGURE 6.6 – Schéma de principe du gyrolaser à état solide 4 ondes. L’ensemble 1 assure la génération de pertes différentielles pour la stabilisation du régime de battement, tandis que l’ensemble 2 assure la génération du biais magnéto-optique.

spatialement avec la cavité). On peut donc conclure que la combinaison des deux cristaux biréfringents et du rotateur optique produit le même effet pour le faisceau incident selon  $y$  que si les deux cristaux étaient remplacés par un polariseur d’axe  $y$ . Le même raisonnement montre que, lorsque le faisceau incident est polarisé selon  $x$ , les deux cristaux jouent le même rôle qu’un polariseur d’axe  $x$ . C’est ce phénomène qui va permettre d’introduire des pertes par action sur la polarisation tout en autorisant les 4 modes à osciller dans la cavité, comme on va le voir maintenant de façon plus quantitative.

### 6.2.2 Principe du 4 ondes avec dispositif stabilisateur

Les considérations développées précédemment nous amènent à nous intéresser à la cavité représentée sur la figure 6.6 [136]. Cette cavité est composée de deux parties, notées 1 et 2 et ayant des finalités distinctes. La partie 1 est destinée à la génération de pertes différentielles. Elle est composée d’un rotateur réciproque et d’un rotateur non réciproque, entourés par deux cristaux biréfringents uniaxes taillés à  $45^\circ$  de leur axe optique et placés tête-bêche. Afin de créer l’effet stabilisateur, l’angle de rotation du rotateur non réciproque est maintenu proportionnel à la différence d’intensité entre les faisceaux contrarotatifs par une boucle de contre-réaction électronique, comme décrit au chapitre 3. Étant donné la position du milieu à gain (symbolisé sur la figure 6.6 par l’un des diaphragmes), seul le faisceau correspondant à l’axe “bottom” peut osciller à l’extérieur de la partie 1. La par-

tie 2 est destinée à la génération du biais magnéto-optique. Elle est identique au dispositif de génération du biais décrit pour le gyrolaser 2 ondes au chapitre précédent.

Les matrices de Jones  $4 \times 4$  correspondant à la cavité de la figure 6.6 parcourue dans les sens CCW et CW s'écrivent :

$$\begin{cases} M_{CCW} = LO(3\pi/4, \pi/4).RF(b).LO(\pi/4, \pi/4).D.C_{\downarrow}(\phi).RR^{CCW}(\alpha).RF(\beta).C_{\uparrow}(\phi).D, \\ M_{CW} = LO(\pi/4, \pi/4).RF(b).LO(3\pi/4, \pi/4).D.C_{\downarrow}(\phi).RF(\beta).RR^{CW}(\alpha).C_{\uparrow}(\phi).D, \end{cases}$$

où l'on a utilisé, en plus des notations introduites plus haut dans ce chapitre, les notations du chapitre précédent (en désignant certaines matrices  $4 \times 4$  par la même notation que la matrice  $2 \times 2$  qui leur correspond selon l'équation 6.6). Un calcul de produit matriciel permet d'obtenir le résultat suivant pour le sens CCW :

$$M_{CCW} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha - \beta)e^{-i(\Gamma-b)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha - \beta)e^{i(\Gamma-b)} \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Dans le sens CW, on a :

$$M_{CW} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha + \beta)e^{-i(\Gamma+b)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha + \beta)e^{i(\Gamma+b)} \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

On voit sur ces matrices que les modes propres, par exemple au niveau de l'un des diaphragmes de la figure 6.6, sont polarisés linéairement selon les axes  $x$  et  $y$ . On notera ces 4 modes  $xCW$ ,  $yCW$ ,  $xCCW$  et  $yCCW$ . Les arguments des valeurs propres de ces modes permettent de calculer leurs fréquences de résonance (formule 3.26), qui s'écrivent :

$$\frac{\omega_{yCW}}{(2\pi p - \Gamma - b)c/L_{op}} \quad \Big| \quad \frac{\omega_{xCW}}{(2\pi p + \Gamma + b)c/L_{op}} \quad \Big| \quad \frac{\omega_{yCCW}}{(2\pi p - \Gamma + b)c/L_{op}} \quad \Big| \quad \frac{\omega_{xCCW}}{(2\pi p + \Gamma - b)c/L_{op}}$$

On constate que ce tableau est identique à celui présenté dans le cas du gyrolaser 4 ondes à hélium-néon un peu plus haut dans ce chapitre, à condition de remplacer les états de polarisation circulaires gauches et droits par des états polarisés linéairement respectivement selon  $y$  et  $x$ . Lorsque ce dispositif est soumis à une rotation induisant une non-réciprocité en fréquence angulaire  $\Omega$ , le signal de battement entre les ondes polarisées selon  $y$  admet pour fréquence angulaire :

$$\omega_y = |\omega_{yCW} - \omega_{yCCW} + \Omega| = 2b \frac{c}{L_{op}} - \Omega \quad (6.10)$$

tandis que la fréquence de battement entre les modes polarisés selon  $x$  s'écrit :

$$\omega_x = |\omega_{xCW} - \omega_{xCCW} + \Omega| = 2b \frac{c}{L_{op}} + \Omega \quad (6.11)$$

où l'on a utilisé l'inégalité  $2|b|c/L_{op} > |\Omega|$ . La différence entre les deux fréquences de battement s'écrit donc :

$$\omega_x - \omega_y = 2\Omega. \quad (6.12)$$

En terme de réponse en fréquence, le dispositif décrit ci-dessus est donc tout-à-fait similaire au gyrolaser 4 ondes à hélium-néon.

De plus, si l'on s'intéresse au module des valeurs propres des matrices 6.8 et 6.9, on constate que celui-ci vaut  $\cos(\alpha + \beta)$  pour les modes se propageant dans le sens CW et  $\cos(\alpha - \beta)$  pour les modes se propageant dans le sens CCW, ce qui valide la possibilité de générer avec ce dispositif des pertes différentielles permettant la stabilisation du régime de battement selon la méthode décrite au chapitre 3.

La configuration proposée possède donc le même comportement en fréquence qu'un gyrolaser 4 ondes à hélium-néon tout en intégrant un dispositif de stabilisation du régime de battement comme celui décrit au chapitre 3. On présente dans ce qui suit les résultats issus de l'étude expérimentale de cette configuration.

## 6.3 Mise en œuvre expérimentale

### 6.3.1 Une première tentative infructueuse

Le premier dispositif expérimental 4 ondes que nous avons réalisé est représenté sur la figure 6.7. On utilise comme séparateurs de faisceaux des cristaux de Vanadate d'Yttrium ( $\text{YVO}_4$ ) taillés à  $45^\circ$  de leur axe optique. Pour une épaisseur de 10 mm traversée, ce type de cristal assure une séparation spatiale de 1 mm. La rotation réciproque d'angle  $\alpha$  nécessaire à la génération des pertes différentielles est induite par une non-planéité de la cavité, comme c'est le cas dans les chapitres précédents. Les considérations suivantes nous amènent alors à la conclusion qu'il faut utiliser une cavité à au moins 5 miroirs :

- il est nécessaire d'utiliser au moins un miroir courbe dans la cavité pour garantir sa stabilité ;
- nous avons observé lors d'essais préliminaires que, lorsque le faisceau de pompage optique traversait un miroir courbe avant d'arriver sur le milieu à gain, il n'était pas possible de faire osciller simultanément les 4 modes dans la cavité ; le faisceau de pompe ne doit donc pas traverser de miroir courbe ; par ailleurs, le pompage optique doit avoir lieu à un endroit où les faisceaux sont superposés ;
- de même, le miroir courbe ne peut pas se trouver à un point où les faisceaux sont séparés spatialement, sous peine de désaligner au moins l'un des deux chemins optiques ;
- la rotation réciproque doit avoir lieu entre les deux cristaux d' $\text{YVO}_4$ , c'est-à-dire lorsque les faisceaux sont séparés spatialement ; cette rotation étant induite par un effet de non-planéité, il est nécessaire de disposer d'au moins 3 miroirs dans la partie où les faisceaux sont séparés spatialement ; si l'on ajoute à ces trois miroirs le miroir courbe et le miroir par lequel passe la pompe, on obtient bien comme annoncé un total de 5 miroirs.

La configuration proposée en comprend en fait six, ce qui permet d'utiliser pour assembler la cavité des miroirs traités pour une incidence à  $45^\circ$ , qu'il est relativement facile de se procurer.

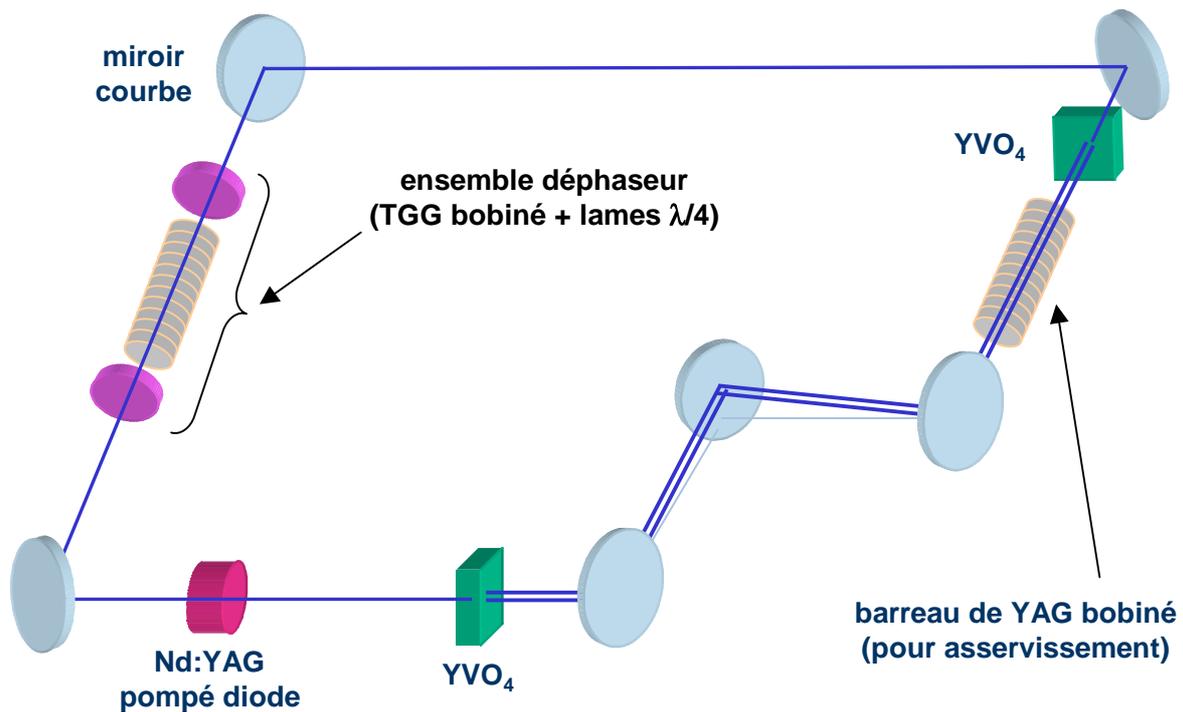


FIGURE 6.7 – Dispositif expérimental initialement réalisé dans le but d’obtenir un gyro-laser à état solide 4 ondes. On notera la partie hors plan de la cavité (en bas à droite), destinée à produire la rotation réciproque nécessaire au contrôle des pertes. Ce dispositif ne fonctionne toutefois pas en pratique (voir texte).

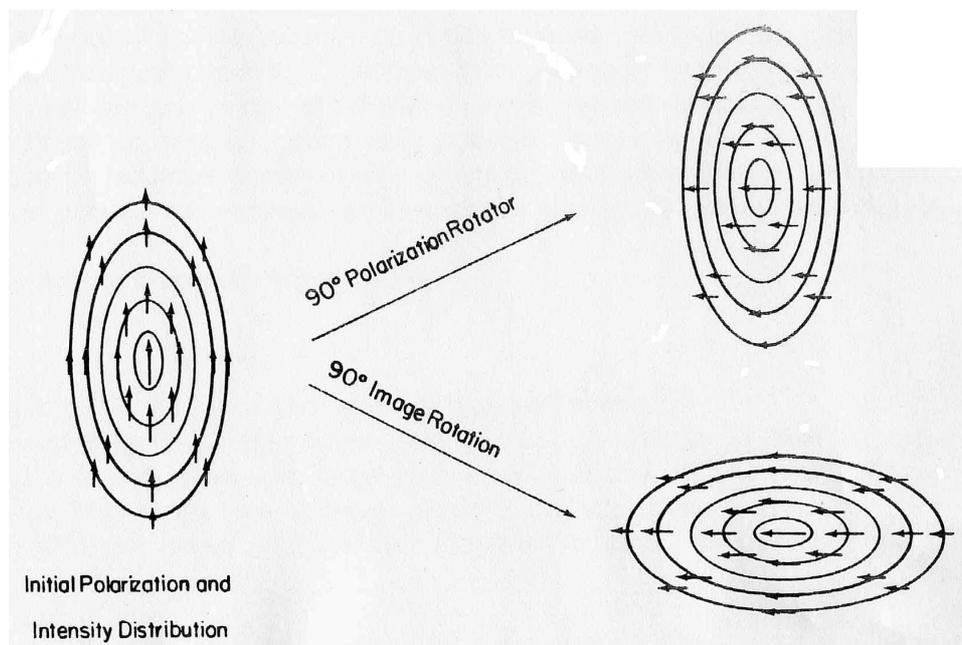


FIGURE 6.8 – Schéma montrant la différence entre rotation du plan de polarisation et rotation géométrique. Dans le premier cas, la distribution transverse d’intensité est inchangée, tandis que dans le deuxième cas elle subit la rotation. Figure extraite de [124].

Après avoir réalisé expérimentalement une telle cavité, nous avons constaté un comportement anormal des faisceaux décalés spatialement, ainsi qu'une absence totale de contrôle des intensités des modes contrarotatifs par le dispositif stabilisateur. Nous avons alors réalisé, *a posteriori*, que cette configuration ne peut pas fonctionner, puisque la partie non planaire de la cavité induit une rotation géométrique du plan contenant les deux faisceaux. Il en résulte que ceux-ci sont mal positionnés par rapport aux cristaux d'YVO<sub>4</sub>, d'où un comportement non conforme à ce qui était prévu par la théorie<sup>1</sup>. On conclut de cette première expérience que le rotateur réciproque utilisé dans le gyrolaser à état solide 4 ondes ne doit donc pas être un rotateur d'image mais seulement un rotateur de polarisation (comme une lame de quartz par exemple). Une bonne illustration de la différence de principe entre rotation d'image et rotation de polarisation est donnée dans [124] et reproduite sur la figure 6.8.

### 6.3.2 Validation expérimentale du dispositif 4 ondes

On présente dans ce qui suit une seconde expérience (figure 6.9), qui vient corriger les défauts de la première. La nouvelle cavité considérée, entièrement planaire, contient une lame de quartz (produite par la société Optique Fichou, celle-ci induit une rotation réciproque de 2°). Elle est par ailleurs constituée de 5 miroirs au lieu de 4, ce qui permet d'utiliser un coupleur (ou miroir de sortie) à incidence normale (il est en effet plus facile de se procurer un coupleur indépendant de la polarisation à incidence normale qu'à 45°).

La mise en œuvre expérimentale de cette nouvelle configuration nous conduit aux observations suivantes :

- la compétition entre les modes orthogonaux ayant le même sens de propagation est suffisamment faible pour permettre leur coexistence ; cela avait déjà été observé sur des lasers linéaires à base de Nd-YAG [144], où il avait été mesuré une constante de couplage équivalente de l'ordre de 0,8 entre deux états de polarisation rectilignes croisés ; on s'attend à ce que la valeur de cette constante de couplage équivalente soit diminuée (et donc la stabilité de notre dispositif améliorée) en utilisant une matrice de YAG taillée selon l'axe  $\langle 100 \rangle$  (au lieu de  $\langle 111 \rangle$  comme cela est fait habituellement) ; en effet, dans ce cas, les dipôles élémentaires des ions Nd<sup>3+</sup> sont orientés parallèlement ou perpendiculairement aux axes  $x$  et  $y$ , ce qui fait qu'un ion donné n'est susceptible d'interagir qu'avec un seul mode [145, 146], d'où l'absence de compétition ; nous sommes actuellement en train de vérifier ce point expérimentalement ;
- le dispositif stabilisateur, qui utilise comme signal d'entrée la différence entre les intensités totales des modes contrarotatifs (mesurée à l'aide des détecteurs 1 et 2 de la figure 6.9) et qui agit en créant des pertes différentielles communes aux états de polarisation orthogonaux, permet de stabiliser efficacement les deux signaux de battement ;
- le positionnement transverse du diaphragme permet de répartir le gain entre les

---

<sup>1</sup>Il est possible de rattraper ce mauvais positionnement en inclinant l'un des cristaux d'YVO<sub>4</sub> autour de son axe d'un angle égal à l'angle  $\alpha$  induit par la rotation réciproque. Toutefois, on perd alors l'effet de génération des pertes différentielles (tout se passe dans ce cas comme si  $\alpha$  était égal à zéro).

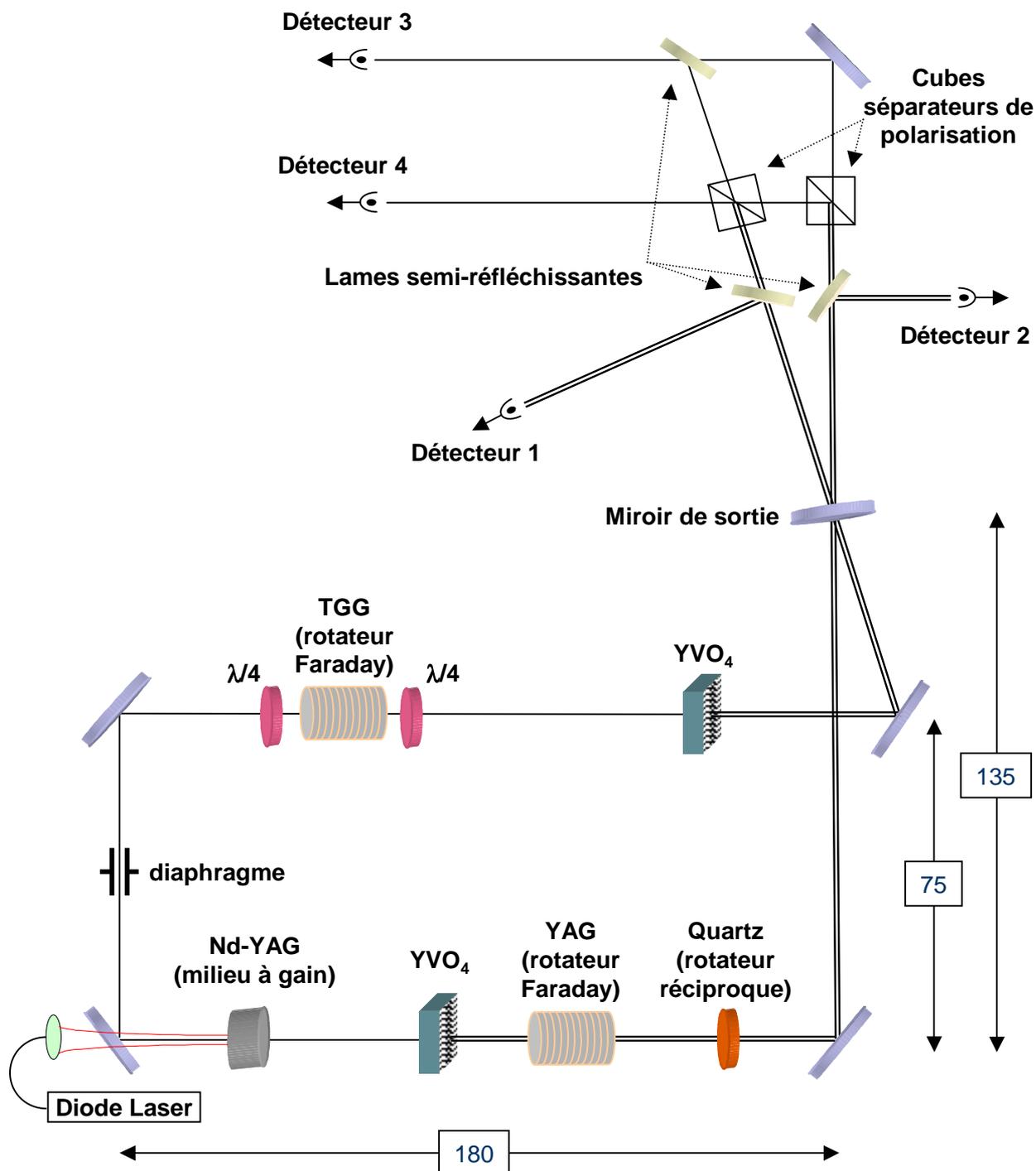


FIGURE 6.9 – Gyrolaser à état solide 4 ondes tel que nous l’avons réalisé expérimentalement (incluant le dispositif de détection). Les dimensions, données à titre indicatif, sont exprimées en millimètres.

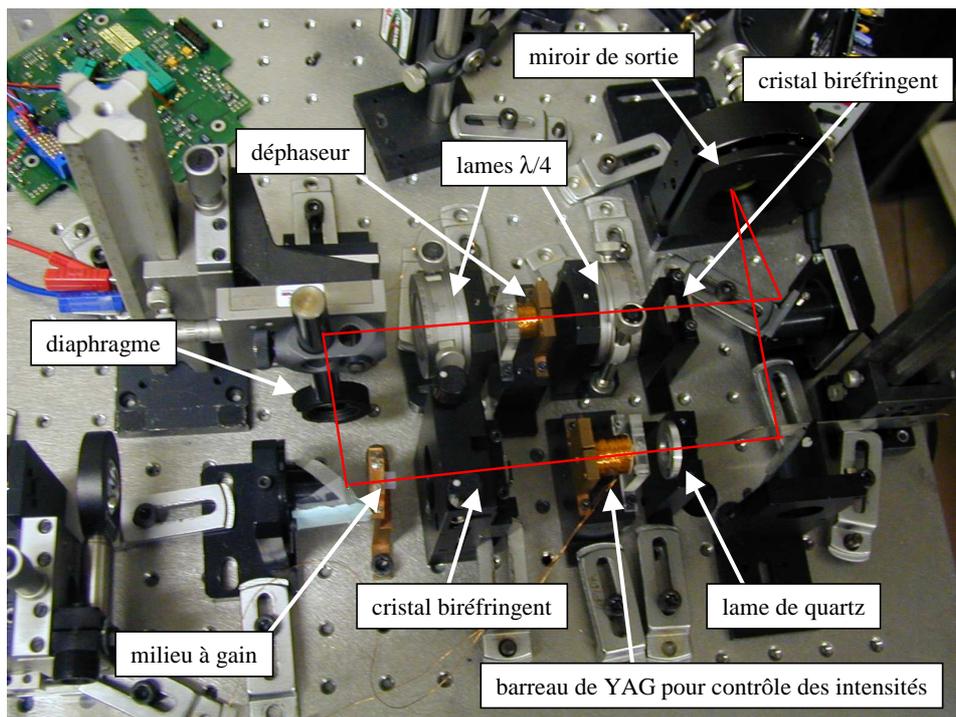


FIGURE 6.10 – Gyrolaser à état solide 4 ondes : photo de la cavité laser.

états de polarisation orthogonaux ; on peut également, à cette fin, agir sur le positionnement transverse du point de focalisation du faisceau de pompe ;

- lorsque le dispositif est correctement réglé, on observe sur les détecteurs 3 et 4 de la figure 6.9 la présence simultanée de deux signaux de battement ; les fréquences de ces deux battements évoluent dans des sens opposés sous l'effet d'une rotation (figure 6.11), ce qui valide le principe du comportement en fréquence de ce dispositif (équations 6.10 et 6.11).

### 6.3.3 Interprétation des résultats, axes d'amélioration

Lorsque l'on mesure précisément les fréquences des signaux de battement issus des détecteurs 3 et 4 de la figure 6.11, on constate une différence entre les deux valeurs obtenues. Par exemple, on présente sur la figure 6.12 un spectre numérique des signaux de battement sur lequel on mesure  $\omega_x/(2\pi) = 240$  kHz et  $\omega_y/(2\pi) = 245$  kHz. Cela peut sembler surprenant au vu des calculs présentés précédemment, qui prédisent en particulier  $\omega_x = \omega_y$  à l'arrêt. Toutefois, ces calculs ne tiennent pas compte du fait que les déphasages induits par les éléments biréfringents et magnéto-optiques dépendent de la longueur d'onde. Il convient donc d'écrire les angles  $b$  et  $\Gamma$  non plus comme des constantes mais comme des fonctions de  $k_0$  (fréquence spatiale dans le vide du mode considéré) selon la forme :

$$\begin{cases} b(k_0) = k_0 L_b , \\ \Gamma(k_0) = k_0 L_\Gamma , \end{cases} \quad (6.13)$$

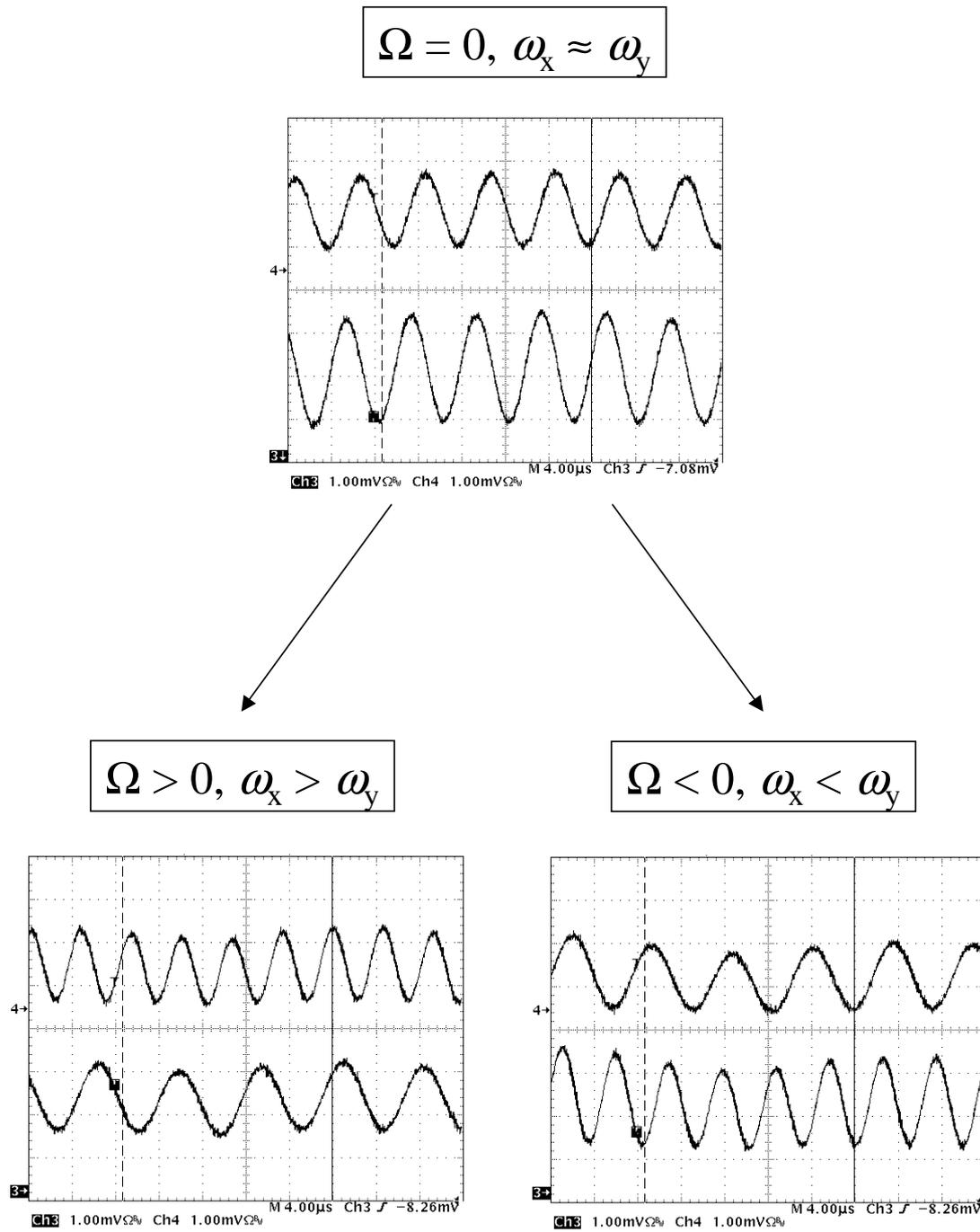


FIGURE 6.11 – Comportement en fréquence du gyrolaser à état solide 4 ondes. À l'arrêt, les deux fréquences de battement sont à peu près égales. Lorsque le laser est en rotation, l'une des fréquences augmente et l'autre diminue. Ce processus s'inverse lorsque l'on change le sens de la rotation.

où  $L_b$  et  $L_\Gamma$  sont indépendants de  $k_0$ . Les fréquences propres des 4 modes s'écrivent en tenant compte de l'expression 6.13 :

$$\begin{array}{c|c} \frac{\omega_{yCW}}{2\pi p c / (L_{op} + L_\Gamma + L_b)} & \frac{\omega_{xCW}}{2\pi p c / (L_{op} - L_\Gamma - L_b)} \\ \hline \frac{\omega_{yCCW}}{2\pi p c / (L_{op} + L_\Gamma - L_b)} & \frac{\omega_{xCCW}}{2\pi p c / (L_{op} - L_\Gamma + L_b)} \end{array}$$

Au premier ordre en  $L_b, L_\Gamma \ll L_{op}$  et en se rappelant que  $2\pi p / L_{op} = k_0$ , on retrouve bien les résultats énoncés plus haut, à savoir :

$$\begin{array}{c|c|c|c} \frac{\omega_{yCW}}{(2\pi p - \Gamma - b)c / L_{op}} & \frac{\omega_{xCW}}{(2\pi p + \Gamma + b)c / L_{op}} & \frac{\omega_{yCCW}}{(2\pi p - \Gamma + b)c / L_{op}} & \frac{\omega_{xCCW}}{(2\pi p + \Gamma - b)c / L_{op}} \end{array}$$

ainsi que les conclusions qui en découlent, c'est-à-dire notamment  $\omega_x = \omega_y = 2bc / L_{op}$  à l'arrêt. En poussant le développement à l'ordre supérieur, on obtient :

$$\omega_x = \frac{2\pi p c}{L_{op} - L_\Gamma - L_b} - \frac{2\pi p c}{L_{op} - L_\Gamma + L_b} = \frac{2bc}{L_{op}} \left( 1 + \frac{2L_\Gamma}{L_{op}} \right) ; \quad (6.14)$$

on obtient de même :

$$\omega_y = \frac{2bc}{L_{op}} \left( 1 - \frac{2L_\Gamma}{L_{op}} \right) . \quad (6.15)$$

La différence entre les deux fréquences de battement  $\omega_x$  et  $\omega_y$  s'écrit donc à l'arrêt :

$$\omega_x - \omega_y = \frac{8bcL_\Gamma}{L_{op}^2} \neq 0 . \quad (6.16)$$

La formule 6.16 nous permet d'estimer l'ordre de grandeur de  $L_\Gamma$ , qui n'est autre que la différence de chemin optique entre les états de polarisation orthogonaux. Étant donné les ordres de grandeur suivants :  $L_{op} \simeq 0,7$  m,  $b = \omega_y L_{op} / (2c) \simeq 1,8$  mrad et  $(\omega_x - \omega_y) / (2\pi) \simeq 5$  kHz, on obtient  $L_\Gamma \simeq 3,5$  mm. Cette valeur est très élevée. À titre d'exemple, si on la convertit en angle de rotation, on obtient  $\Gamma = k_0 L_\Gamma \simeq 2$  krad, ce qui est à comparer à la valeur  $\Gamma = \pi/2$ , typique du gyrolaser 4 ondes à hélium néon. Il s'agit là du point limitant pour les performances du gyrolaser 4 ondes à état solide. Il faudrait pour aller plus loin comprendre l'origine de cette différence de marche<sup>2</sup>, afin de réduire sa valeur ou à défaut de la stabiliser.

**REMARQUE** : il convient de noter que l'origine de  $\Gamma$  joue un rôle important dans le raisonnement effectué ci-dessus. En effet, si  $\Gamma$  était induit par une rotation géométrique (comme c'est le cas pour le 4 ondes hélium-néon [139]), les conclusions seraient différentes puisque sa valeur serait alors indépendante de  $k_0$ . On aurait donc dans ce cas :

$$\omega_x = \left( \frac{2\pi p c}{L_{op} - L_b} + \Gamma \right) - \left( \frac{2\pi p c}{L_{op} + L_b} + \Gamma \right) , \quad (6.17)$$

<sup>2</sup>Les hypothèses ne manquent pas : déphasage induit à la traversée des cristaux de  $YVO_4$ , biréfringence de certains éléments de la cavité comme le milieu amplificateur, différence géométrique de chemin optique liée à la séparation spatiale des faisceaux...

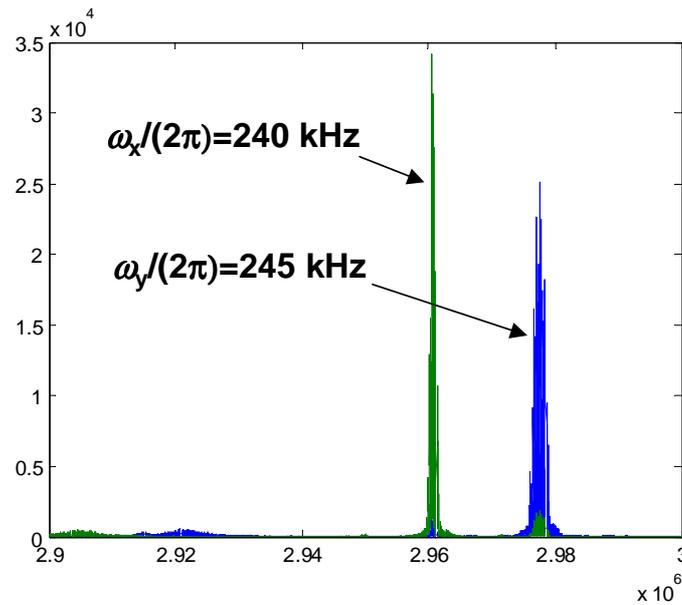


FIGURE 6.12 – Spectre en fréquence issu des transformées de Fourier numériques des deux signaux de battement d'un gyrolaser à état solide 4 ondes à l'arrêt. La différence entre les fréquences des deux signaux est de l'ordre de 5 kHz (pouvant dépendre des alignements).

qui est indépendant de  $\Gamma$  et bien égal à  $2bc/L_{op}$ , y compris au second ordre en  $L_b/L_{op}$ . Cette différence subtile (mais bien réelle) entre un déphasage géométrique et un déphasage induit par différence de marche joue un rôle important dans les configurations de type 4 ondes. C'est entre autres pour cette raison que dans le domaine des gyrolasers à hélium-néon, la configuration 4 ondes non planaire [139] a été préférée à son homologue planaire [137].

## 6.4 Conclusion

Nous avons proposé, décrit et mis en œuvre une solution originale de gyrolaser à état solide 4 ondes. Le premier défi à relever était de concilier le dispositif de contrôle des pertes, fondé sur la présence d'un élément polarisant, avec l'existence simultanée d'états de polarisation orthogonaux. Cela a été rendu possible grâce à l'utilisation de cristaux biréfringents uniaxes taillés à  $45^\circ$  de leur axe optique en remplacement de l'élément polarisant. La présence de ces cristaux n'étant pas compatible avec l'utilisation d'une cavité non planaire pour générer une rotation réciproque, on a finalement choisi d'utiliser une configuration planaire avec une lame de quartz. Les résultats expérimentaux obtenus ont permis de constater la coexistence des 4 modes dans la cavité, ainsi que le bon fonctionnement du dispositif stabilisateur. Le comportement en rotation est qualitativement conforme aux prévisions théoriques. Toutefois, on observe une différence de fréquence significative entre les deux signaux de battement, que l'on interprète comme la conséquence d'une différence de chemin optique entre les modes orthogonaux égale à environ 3 mm. Le premier axe d'amélioration du dispositif étudié dans ce chapitre nous semble donc être l'identification des origines de cette différence de chemin optique. Un autre axe d'amélioration possible

pourrait être le remplacement du milieu amplificateur actuel par une matrice de Nd-YAG taillée selon l'axe cristallographique  $\langle 100 \rangle$ , ce qui permet en théorie un découplage total des modes orthogonaux.

La réalisation de ce gyrolaser 4 ondes à état solide ouvre la voie à de nouvelles configurations fondées sur le même principe. Par exemple, on pourrait imaginer utiliser un dispositif passif de stabilisation du régime de battement [41] indépendant de la polarisation, ce qui présenterait l'avantage de simplifier grandement la configuration expérimentale. Le principe du gyrolaser 4 ondes pourrait également être adapté à d'autres types de milieux à gain comme par exemple les matériaux semi-conducteurs.



# Chapitre 7

## Utilisation d'un mouvement mécanique

Afin de maintenir le plus souvent possible le gyrolaser à hélium-néon en-dehors de sa zone aveugle, on lui imprime un mouvement mécanique sinusoïdal à l'aide d'une roue mue par des dispositifs piézo-électriques. Cette technique, qui peut paraître grossière au premier abord par rapport à des procédés plus élaborés comme par exemple le gyrolaser 4 ondes, se révèle être en fait une excellente solution au niveau de la stabilité à long terme du biais. Pour s'en convaincre, considérons un gyrolaser idéal, soumis à une rotation  $\theta$  que l'on cherche à déterminer. On rappelle que le signal mesuré correspond à l'intégration dans le temps de la fréquence de battement  $\Omega/(2\pi)$ , ce qui s'écrit (équation 16 de l'introduction générale) :

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\Omega}{2\pi} dt = \int S \dot{\theta} dt = S(\theta_f - \theta_i) \quad \text{avec} \quad S = \frac{4A}{\lambda L_{\text{op}}} . \quad (7.1)$$

Lorsque l'on introduit dans la cavité une non-réciprocité additionnelle  $\Omega_b(t)$  (qui permet de minimiser le temps passé dans les zones non linéaires et donc de considérer en première approximation que l'équation 7.1 est vérifiée), le signal total devient :

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\Omega}{2\pi} dt = S(\theta_f - \theta_i) + \int_{t_i}^{t_f} \frac{\Omega_b(t)}{2\pi} dt . \quad (7.2)$$

Afin d'extraire l'information utile, on doit donc être capable de retrancher au signal la contribution du biais. Cela implique de connaître avec précision la quantité  $\int \Omega_b(t) dt$ , ou à défaut de s'assurer qu'elle ne dérive pas dans le temps, ce qui est très difficile lorsque ce biais est induit par exemple par des moyens magnéto-optiques (voir chapitre 5). En revanche, lorsque l'origine du biais  $\Omega_b(t)$  est liée au mouvement d'activation mécanique donné par la fonction  $\theta_{\text{cav}}(t)$ , on a :

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\Omega_b(t)}{2\pi} dt = \int_{t_i}^{t_f} S \dot{\theta}_{\text{cav}}(t) dt = S(\theta_{\text{cav}f} - \theta_{\text{cav}i}) . \quad (7.3)$$

La contribution du biais au signal total est donc donnée par la position instantanée de la cavité. En particulier, elle ne peut pas dériver dans le temps (à moins que le laser ne se décroche de son support!).

L'objet de ce chapitre est de proposer une configuration pour l'amélioration des performances inertielles du gyrolaser à état solide qui mette à profit l'avantage particulier,

décrit ci-dessus, des solutions fondées sur des mouvements mécaniques. On présente tout d'abord, de manière un peu plus détaillée que dans cette introduction, la théorie de la mise en mouvement périodique du gyrolaser à hélium-néon et des phénomènes qui lui sont associés (lock-in dynamique et marche au hasard), théorie que nous avons été amené à étudier en détail (particulièrement d'un point de vue numérique) afin de pouvoir l'adapter au cas du gyrolaser à état solide. On s'intéresse dans un deuxième temps au gyrolaser à état solide animé du même mouvement d'activation mécanique. Après avoir constaté qu'un tel mouvement n'était pas suffisant, on propose une technique originale [147] d'amélioration des performances inertielles du gyrolaser à état solide fondée sur la mise en mouvement du milieu amplificateur (le but étant notamment de diminuer le contraste du réseau d'inversion de population afin de rendre la réponse en fréquence plus linéaire). Les expériences concernant les dispositifs présentés dans ce chapitre étant actuellement en cours de réalisation, on devra se contenter dans ce qui suit, pour accompagner les calculs analytiques, des résultats des simulations numériques.

## 7.1 Mise en mouvement de la cavité laser (“activation mécanique”)

On présente ici les principaux résultats de la théorie de l'activation mécanique sur les gyrolaser à hélium-néon [148], résultats illustrés par des courbes issues de nos simulations numériques. Cette démarche a pour objectif, d'une part, de permettre au lecteur qui le souhaiterait de se familiariser avec cette théorie et, d'autre part, de vérifier la validité de notre modèle numérique dans le but de le transposer ensuite au cas du gyrolaser à état solide.

### 7.1.1 Cas du gyrolaser à hélium-néon

La théorie que nous présentons ici est intégralement tirée de [148]. On part de l'équation de phase suivante pour le gyrolaser avec activation mécanique (voir aussi l'équation 1.80) :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega + m \sin(\varphi + \chi) + \Omega_D \sin(\omega_d t) , \quad (7.4)$$

où  $\chi$  est caractéristique des déphasages à la rétrodiffusion et  $\Omega_D$  et  $\omega_d$  sont respectivement l'amplitude et la fréquence angulaire d'activation. On cherche à calculer l'erreur de phase induite par une traversée de zone aveugle lors du mouvement d'activation mécanique. Pour cela, on écrit la phase totale comme la somme de la phase inertielle  $\varphi_a$  et de l'erreur de phase  $\varphi_e$ , qui obéissent aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_a}{dt} = \Omega + \Omega_D \sin(\omega_d t) , \\ \frac{d\varphi_e}{dt} = m \sin(\varphi_a + \varphi_e + \chi) . \end{cases} \quad (7.5)$$

En première approximation, on néglige dans la première équation de 7.5 la contribution de  $\Omega$  par rapport à celle du mouvement d'activation mécanique et dans la deuxième équation de 7.5 la contribution de  $\varphi_e$  par rapport à celle de  $\varphi_a$ . En intégrant la première équation

de 7.5, on obtient :

$$\varphi_a = \varphi_0 + \frac{\Omega_D}{\omega_d} [1 - \cos(\omega_d t)] , \quad (7.6)$$

où  $\varphi_0$  est une condition initiale. L’erreur que l’on cherche à estimer, qui correspond à l’accroissement de phase au cours d’une traversée de zone aveugle, survient par exemple autour de  $t = 0$ . On peut alors approximer la fonction  $1 - \cos(\omega_d t)$  par une parabole :

$$\varphi_a = \varphi_0 + \frac{1}{2} \Omega_D \omega_d t^2 . \quad (7.7)$$

Le calcul de l’erreur peut alors être effectué par intégration de la seconde équation de 7.5 entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , ce qui donne :

$$\Delta\varphi_e = m \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \left( \varphi_0 + \frac{1}{2} \Omega_D \omega_d t^2 + \chi \right) dt = \sqrt{\frac{2m^2}{\Omega_D \omega_d}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2 + \alpha) dx . \quad (7.8)$$

L’erreur de phase induite par une traversée de la zone aveugle au cours du cycle d’activation est donc une fonction de la phase initiale du laser, représentée par le paramètre  $\alpha$ , selon la relation <sup>1</sup> :

$$\Delta\varphi_e = \sqrt{\frac{\pi m^2}{\Omega_D \omega_d}} (\cos \alpha + \sin \alpha) . \quad (7.10)$$

L’erreur de phase maximale survient lorsque  $\alpha = \pi/4$ , et est donnée par :

$$\Delta\varphi_m = \sqrt{\frac{2\pi m^2}{\Omega_D \omega_d}} . \quad (7.11)$$

Cette erreur de phase est responsable de l’existence d’une petite zone aveugle résiduelle autour de zéro, et ceci en dépit de l’activation mécanique. Ce phénomène est connu sous le nom de lock-in dynamique. Il survient lorsque la rotation  $\Omega$  appliquée au dispositif est telle que l’accroissement de phase qu’elle entraîne sur une demi-période d’activation (qui correspond à une traversée de la zone aveugle), donné par  $\Omega T_d/2 = \pi\Omega/\omega_d$ , compense exactement l’erreur de phase  $\Delta\varphi_e$ . De plus, lorsque cette compensation survient, le système reste dans le même état d’un cycle sur l’autre. En particulier, il n’y a plus d’accroissement de phase malgré la rotation appliquée, ce qui justifie l’appellation de “petite zone aveugle” utilisée précédemment. Naturellement, ce phénomène ne peut se produire que si l’accroissement de phase lié à la non-réciprocité en fréquence  $\Omega$  est inférieur en valeur absolue à l’amplitude maximale de l’erreur de phase, ce qui s’écrit :

$$\frac{|\Omega| T_d}{2} < \Delta\varphi_m \quad \text{soit} \quad |\Omega| < m \sqrt{\frac{2\omega_d}{\pi\Omega_D}} . \quad (7.12)$$

Aussi surprenant que cela puisse paraître, la condition nécessaire établie ci-dessus est également suffisante. En effet, dès que celle-ci est vérifiée, le laser atteint en quelques

<sup>1</sup>Pour obtenir cette relation, on a utilisé l’identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2 + \alpha) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha + \sin \alpha) . \quad (7.9)$$

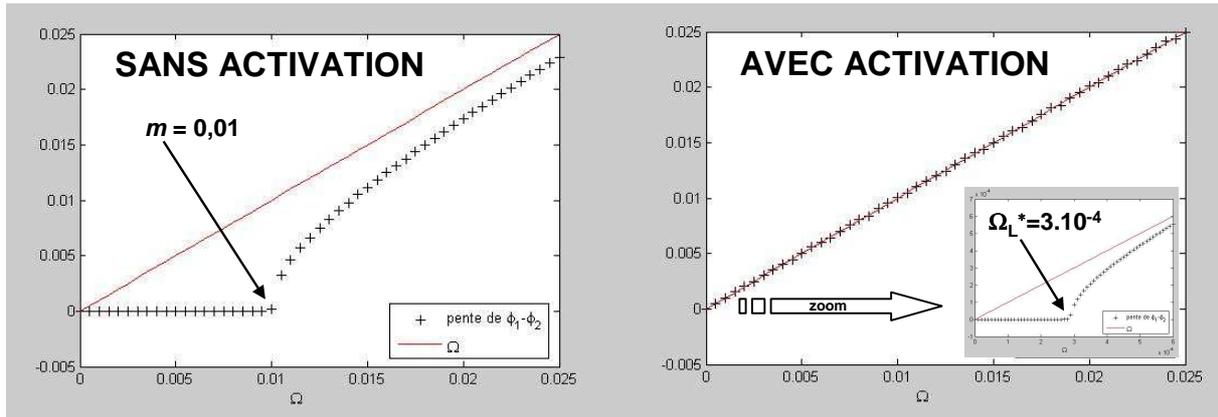


FIGURE 7.1 – Illustration du phénomène de lock-in dynamique. Courbes issues de l'intégration numérique de l'équation de phase avec activation mécanique 7.4. Les valeurs numériques sont exprimées en  $10^6$  rad/s. La courbe de gauche représente la réponse en fréquence sans activation mécanique. La courbe de droite représente la réponse en fréquence avec activation mécanique. L'insert de la courbe de droite correspond à un zoom autour de  $\Omega = 0$ . Les paramètres utilisés pour obtenir ces courbes sont  $m = 10^4$  rad/s,  $\Omega_D = 0,6672 \cdot 10^6$  rad/s et  $\omega_d/(2\pi) = 160$  Hz. Pas d'intégration :  $1 \mu\text{s}$ . Temps d'intégration : 2 s.

cycles son état d'équilibre, pour ne plus le quitter par la suite. Cela est illustré par les simulations numériques de la figure 7.1. Sur la courbe de gauche figure la réponse en fréquence du gyrolaser à hélium-néon sans activation mécanique. La taille de la zone aveugle observée est égale au coefficient de rétrodiffusion  $m = 0,01$  rad/ $\mu\text{s}$ . Sur la courbe de droite, on peut voir la réponse en fréquence du même gyrolaser soumis à un mouvement d'activation mécanique avec  $\omega_d/(2\pi) = 160$  Hz et  $\Omega_D = 0,6672$  rad/ $\mu\text{s}$ . On constate la disparition de la zone aveugle et une réponse en fréquence qui semble linéaire à petite échelle. Toutefois, si l'on étudie plus en détail la zone autour de  $\Omega = 0$  (insert de la courbe de droite), il apparaît une zone où le gyrolaser n'est toujours pas sensible à la rotation. La taille mesurée de cette zone est d'environ 300 rad/s, ce qui est en bon accord avec la taille théorique de la zone de lock-in dynamique, donnée par  $m\sqrt{2\omega_d/(\pi\Omega_D)} \simeq 310$  rad/s avec nos paramètres. Signalons, pour conclure sur ce sujet, que d'autres zones équivalentes à celles-ci existent autour des valeurs de  $\Omega$  correspondant à des multiples entiers de  $\omega_d$  (ce qui correspond au cas où la somme de l'accroissement de phase dû à la rotation et de l'erreur de phase n'est pas égale à 0 mais à un multiple entier de  $2\pi$ ).

On conclut donc que l'activation mécanique a pour effet de transformer une grande zone aveugle, autour de 0, en une multitude de zones aveugles beaucoup plus petites (la taille de ces nouvelles zones étant donnée par l'équation 7.12) et centrées autour des valeurs correspondant aux multiples entiers de  $\omega_d$ .

Comme on s'en doute, l'existence de ces zones résiduelles d'insensibilité à la rotation (particulièrement autour de zéro) est rédhibitoire pour la réalisation d'un gyrolaser

à hautes performances. Il a donc été imaginé très vite un dispositif supplémentaire pour s’affranchir de ce problème. L’idée consiste à changer aléatoirement la valeur du paramètre  $\alpha$  suffisamment souvent pour que le laser n’ait pas le temps de se stabiliser dans le régime d’équilibre décrit ci-dessus. Concrètement, on peut par exemple changer aléatoirement l’amplitude d’activation  $\Omega_D$  d’environ 10% de sa valeur tous les 2 à 4 cycles. Cette technique est connue sous la dénomination de super-activation. La suppression du phénomène de lock-in dynamique ainsi obtenue l’est au prix d’un bruit supplémentaire lié à l’erreur de phase résiduelle accumulée à chaque passage dans la zone aveugle. Ce bruit est connu sous le nom de marche au hasard. Il s’agit d’un bruit de diffusion de la phase. En effet, à chaque traversée de la zone aveugle, celle-ci est augmentée d’une valeur aléatoire d’amplitude  $\Delta\varphi_m$  (donnée par l’équation 7.11). Chaque traversée pouvant être considérée, grâce à la superactivation, comme étant indépendante des précédentes, l’erreur de phase cumulée au bout de  $N$  traversées s’écrit :

$$\Delta\varphi_e(N) = \frac{\Delta\varphi_m}{\sqrt{2}}\sqrt{N}. \quad (7.13)$$

Au bout d’un temps  $t$ , le nombre de traversées de la zone aveugle est égal à  $N = 2f_d t = \omega_d t / \pi$ , d’où l’expression de l’erreur de phase en fonction du temps :

$$\Delta\varphi_e(t) = \frac{m}{\sqrt{\Omega_D}}\sqrt{t}. \quad (7.14)$$

On a donc bien affaire à un mouvement de type “marche au hasard”, avec un coefficient de diffusion donné par  $W = m/\sqrt{\Omega_D}$ . La diffusion de la phase en présence de super-activation peut être observée numériquement comme le montre la figure 7.2, sur laquelle sont représentés quatre trajectoires de phase obtenues avec des paramètres identiques. Si l’on effectue un grand nombre de tirages successifs, on constate que la dispersion de la position finale de la phase augmente comme la racine carrée du temps (voir figure 7.3). En traçant le carré de la largeur de la distribution obtenue en fonction du temps, on obtient une droite dont la pente donne la valeur suivante du coefficient de diffusion :  $W = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ rad}/\sqrt{\mu\text{s}}$ . Cette valeur est en bon accord avec la prédiction théorique  $W = m/\sqrt{\Omega_D} \simeq 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}/\sqrt{\mu\text{s}}$ .

Ce bruit de marche au hasard constitue la limite ultime des performances des gyrolasers actuels. C’est donc bien la valeur du coefficient de rétrodiffusion qui détermine les performances ultimes en terme de biais sur un gyrolaser à hélium-néon.

### 7.1.2 Cas du gyrolaser à état solide

Comme nous l’avons déjà mis en avant à plusieurs reprises, le gyrolaser à état solide est un dispositif physiquement très différent du gyrolaser à hélium-néon. En particulier, il est en l’état peu propice à une activation mécanique. En effet, on sait qu’il existe sur le gyrolaser à état solide une zone “perturbée” (c’est-à-dire pour laquelle une mesure de la rotation n’est pas possible), centrée en zéro et dont la taille est typiquement de l’ordre de 50 krad/s, soit plus de 100 fois la taille typique de la zone aveugle sur un gyrolaser à hélium-néon. De plus, la non-linéarité de la réponse en fréquence sur le gyrolaser à état solide est nettement supérieure à celle que l’on rencontre sur le gyrolaser à gaz, en raison de l’action cumulée du réseau d’inversion de population et d’une rétrodiffusion supérieure

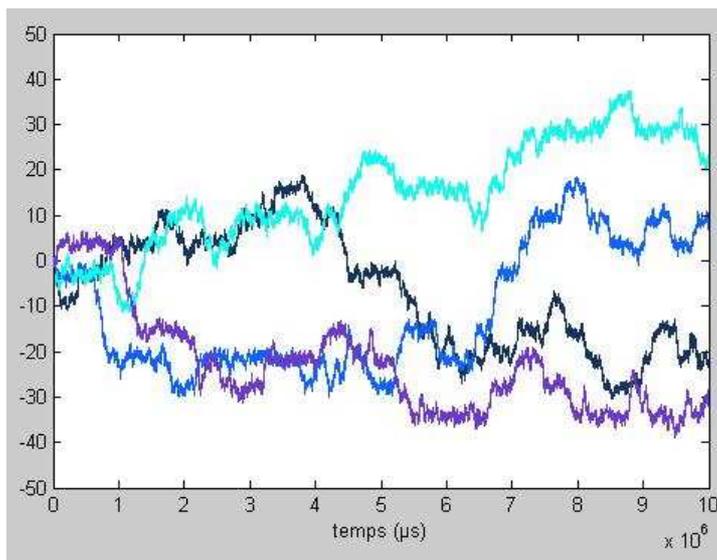


FIGURE 7.2 – Exemples de profils temporels de phase en présence de super-activation. La valeur de la phase représentée en ordonnée est exprimée en rad. Ces courbes sont issues des simulations numériques du gyrolaser à hélium-néon avec les paramètres de la figure 7.1 et pour  $\Omega = 0$ .

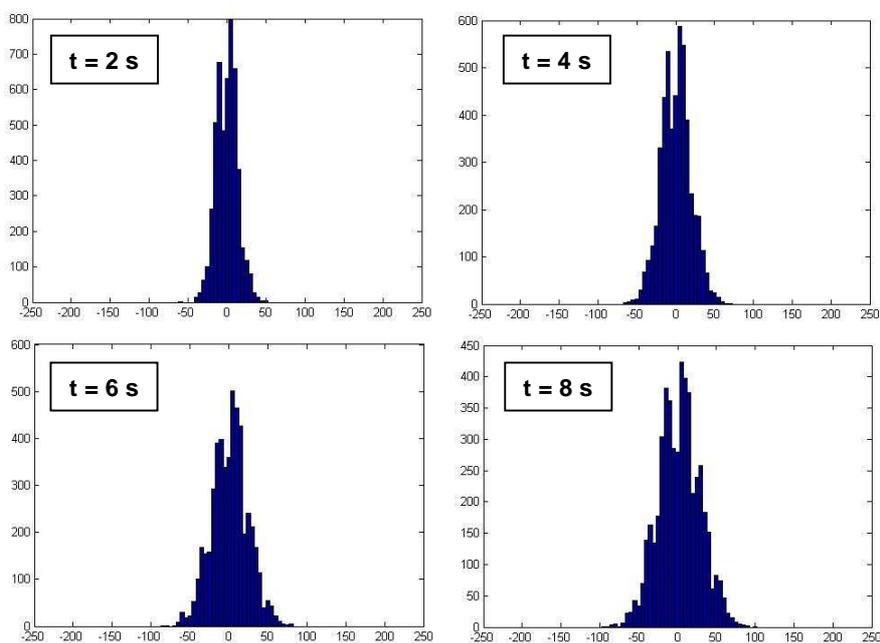


FIGURE 7.3 – Répartition de la valeur finale de la phase en présence de super-activation pour quatre temps successifs. Chaque courbe correspond à 5000 tirages indépendants. La valeur finale de la phase (en rad) est représentée en abscisse et le nombre d'occurrences correspondant en ordonnée. Ces courbes sont issues des simulations numériques du gyrolaser à hélium-néon avec les paramètres de la figure 7.1 et pour  $\Omega = 0$ .

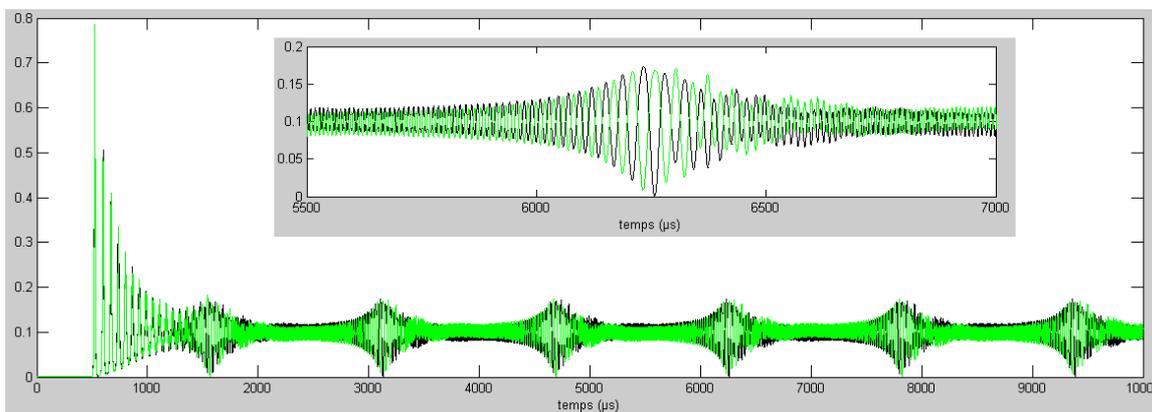


FIGURE 7.4 – Intensités  $aE_1^2$  et  $aE_2^2$  des modes contrarotatifs en fonction du temps, pour un gyrolaser à état solide avec activation mécanique (avec un zoom en insert). Ces intensités sont fortement perturbées chaque fois que la non-réciprocité en fréquence induite par l’activation mécanique s’annule, se qui traduit les insuffisances du modèle théorique autour de  $\Omega = 0$ . Les paramètres utilisés sont  $\gamma = 21,9 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 10^5 \text{ rad/s}$ ,  $\theta_1 - \theta_2 = \pi/25$ ,  $\eta = 0,1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $K = 0$ ,  $\Omega_D = 0,66712 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_d/(2\pi) = 320 \text{ Hz}$ . Temps d’intégration : 10 ms ; pas d’intégration :  $0,05 \mu\text{s}$ .

en valeur. Nous avons vu dans le cas du gyrolaser à hélium-néon que les performances ultimes en terme de biais dépendaient de la taille de la zone aveugle (équation 7.14). On s’attend donc, pour le gyrolaser à état solide activé mécaniquement, à des performances au moins 100 fois inférieures à celles du gyrolaser à hélium-néon.

Si l’on essaie tout de même de simuler numériquement le comportement du gyrolaser à état solide lorsqu’il est soumis à une activation mécanique, on se heurte (figure 7.4) au problème de validité du modèle théorique autour de  $\Omega = 0$  déjà évoqué (section 4.2.2). Une amélioration du modèle numérique est donc nécessaire pour une analyse convenable du comportement du gyrolaser à état solide sous l’effet d’une activation mécanique.

En conclusion, on s’attend à ce que le gyrolaser à état solide activé mécaniquement ne puisse pas atteindre, à paramètres d’activation égaux, les mêmes performances qu’un gyrolaser à hélium-néon. On propose donc dans ce qui suit une solution différente, fondée sur l’élimination du réseau d’inversion de population par un mouvement mécanique.

## 7.2 Mise en mouvement du cristal

L’existence du réseau d’inversion de population, responsable en partie de la non-linéarité de la réponse en fréquence du gyrolaser à état solide et de la zone “perturbée” autour de  $\Omega = 0$ , est liée au fait que les atomes du milieu à gain ne sont pas tous soumis à la même intensité lumineuse (voir chapitre 1). L’idée de la configuration proposée ici est de mieux répartir l’intensité lumineuse vue par chacun des atomes, en imprimant au cristal de Nd-YAG un mouvement de translation le long de l’axe de la cavité. Cette

méthode a déjà été utilisée, avec succès, pour supprimer le spatial hole burning dans un laser Nd-YAG linéaire [149, 150]. On supposera par exemple que la position de l'une des faces du cristal est modulée selon la loi suivante :

$$z_c(t) = z_m \cos(2\pi f_m t) . \quad (7.15)$$

On peut montrer [151] que l'intensité moyenne vue par chaque atome est indépendante de sa position lorsque  $J_0(2kz_m) = 0$ , où  $J_0$  est une fonction de Bessel du premier ordre [152]. De plus, on s'attend à ce que le contraste du réseau d'inversion de population soit d'autant plus faible que la fréquence de vibration du cristal  $f_m$  est grande devant l'inverse de la durée de vie  $T_1$  du niveau excité. Afin d'étudier plus précisément les effets du mouvement du cristal, on se propose de les modéliser dans le cadre des équations semi-classiques établies au chapitre 1.

### 7.2.1 Équations du laser lorsque le cristal est en mouvement

Comme on va le voir, le mouvement du cristal agit sur la cavité laser à trois niveaux distincts : le réseau d'inversion de population, la rétrodiffusion et la non-réciprocité en fréquence.

#### Effet sur l'inversion de population

Lorsque l'une des faces du cristal est modulée selon la loi 7.15, la fonction densité d'inversion de population dans le référentiel de la cavité est reliée à son équivalent dans le référentiel du cristal par la relation :

$$N_{\text{cav}}(z, t) = N_{\text{crist}}(z - z_c(t), t) , \quad (7.16)$$

où la densité d'inversion de population est choisie nulle par convention à l'extérieur de la zone pompée. On a alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} \int N_{\text{cav}}(z, t) dz = \int N_{\text{crist}}(z - z_c(t), t) dz = \int N_{\text{crist}}(z, t) dz , \\ \int N_{\text{cav}}(z, t) e^{2ikz} dz = \int N_{\text{crist}}(z - z_c(t), t) e^{2ikz} dz = e^{2ikz_c} \int N_{\text{crist}}(z, t) e^{2ikz} dz . \end{cases} \quad (7.17)$$

Dans le référentiel du cristal, l'équation d'évolution de la densité d'inversion de population est conforme à l'équation 1.39, à ceci près que l'intensité vue par les atomes est affectée du mouvement du cristal. On a donc :

$$\frac{\partial N_{\text{crist}}}{\partial t} = W - \frac{N_{\text{crist}}}{T_1} - \frac{aN_{\text{crist}}}{2T_1} [E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(2k(z + z_c) - \Phi)] . \quad (7.18)$$

Le mouvement du cristal agit par conséquent sur le réseau d'inversion de population de deux manières : en changeant la position relative de l'onde stationnaire lumineuse et des atomes du cristal d'une part et en introduisant un facteur de phase  $2kz_c(t)$  au terme de couplage  $N_1$  d'autre part. En revanche, il est sans effet sur la valeur moyenne de l'inversion de population (gain total du laser).

### Effet sur la rétrodiffusion

Le coefficient caractéristique de la rétrodiffusion de la lumière par le cristal de YAG est donné par l'équation 1.15, qui s'écrit lorsque ce cristal est en mouvement :

$$\tilde{m}_{1,2}(t) = -\frac{\omega}{\langle \varepsilon \rangle L} \oint_{\text{cav}} \left[ \varepsilon_{\text{crist}}(z - z_c) - \frac{ik_{\text{crist}}(z - z_c)}{\omega} \right] e^{2i(-1)^{2,1}kz} dz . \quad (7.19)$$

Les coefficients de rétrodiffusion "dynamiques"  $\tilde{m}_{1,2}(t)$  se déduisent donc des coefficients statiques par la relation :

$$\tilde{m}_{1,2}(t) = \tilde{m}_{1,2}^{\text{crist}} e^{2i(-1)^{2,1}kz_c(t)} . \quad (7.20)$$

Il apparaît donc un terme de phase supplémentaire, dû au changement de position des centres diffuseurs. Naturellement, ce terme de phase ne concerne que la rétrodiffusion induite par le cristal de Nd-YAG, caractérisée en l'absence de mouvement par les coefficients indépendants du temps  $\tilde{m}_{1,2}^{\text{crist}}$ . On est donc amené à introduire d'autres coefficients de rétrodiffusion, également indépendants du temps et notés  $\tilde{m}_{1,2}^{\text{autre}}$ , pour prendre en compte la présence d'autres sources de rétrodiffusion, comme les miroirs de la cavité ou d'éventuels autres éléments optiques. Bien entendu, ces derniers coefficients ne seront pas affectés du facteur de phase lié au mouvement du cristal.

### Effet sur la non-réciprocité en fréquence (effet Fresnel-Fizeau)

La théorie de Fresnel et Fizeau prédit que, lorsque qu'une onde électromagnétique se propage dans un milieu d'indice  $n$  lui-même animé d'une vitesse dont la projection sur l'axe de propagation est notée  $V_c$ , la vitesse de phase de l'onde obéit à la loi suivante :

$$v_\varphi = \frac{c}{n} + V_c \left( 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega_c}{n} \frac{dn}{d\omega} \right) . \quad (7.21)$$

Les deux premiers termes entre parenthèses traduisent l'effet d'entraînement de l'onde électromagnétique par le milieu (voir l'introduction générale). Le troisième terme traduit l'effet de la modification de la fréquence apparente de l'onde à cause de la vitesse (effet Doppler) sur la dispersion du milieu. Dans le cas d'un cristal de Nd-YAG, on a  $n \simeq 1,82$  donc  $1 - 1/n^2 \simeq 0,7$ . En dehors de la zone de gain, la dispersion est très faible, donnée par :  $n\omega dn/d\omega \simeq 2.10^{-2}$  [153]. Au niveau de la zone de gain, la relation de dispersion d'indice induite par la résonance atomique est donnée par :

$$n_{\text{gain}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \Re(\chi_{\text{gain}}) = 1 + \frac{1}{2} \frac{ld^2 N_0 \delta}{\varepsilon_0 \hbar \gamma_{ab} L (1 + \delta^2)} = 1 + \frac{\gamma n^2 \delta}{2\omega} , \quad (7.22)$$

où l'on a utilisé l'expression 1.56 pour  $\chi_{\text{gain}}$ , puis l'expression 1.42 pour  $\sigma$  et enfin l'égalité  $\sigma l N_0 / T \simeq \gamma$ . On a alors :

$$n\omega \frac{dn_{\text{gain}}}{d\omega} = \frac{n\omega}{\gamma_{ab}} \frac{dn_{\text{gain}}}{d\delta} = \frac{\gamma n^3}{2\gamma_{ab}} < 10^{-3} . \quad (7.23)$$

On conclut de ces deux ordres de grandeur que le terme de dispersion peut être négligé dans le cas du gyrolaser à état solide (ce terme est en revanche une source de biais importante sur les gyrolasers à hélium-néon). On retiendra donc l'expression suivante :

$$v_\varphi = \frac{c}{n} + V_c \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) . \quad (7.24)$$

Le temps mis par un photon pour parcourir la cavité dans le sens CW est alors donné par la somme du temps de parcours en-dehors du cristal, noté  $t_1^{\text{CW}}$ , et du temps de parcours dans le cristal, noté  $t_2^{\text{CW}}$ . On a alors, en suivant la même démarche que lors de la discussion sur l'effet Sagnac présentée dans l'introduction générale :

$$t_1^{\text{CW}} = \frac{2\pi R - l}{c - R\dot{\theta}} \quad \text{et} \quad t_2^{\text{CW}} = \frac{l}{c/n - R\dot{\theta} + (V_c + R\dot{\theta})(1 - 1/n^2)}. \quad (7.25)$$

Dans l'autre sens de parcours, on a :

$$t_1^{\text{CCW}} = \frac{2\pi R - l}{c + R\dot{\theta}} \quad \text{et} \quad t_2^{\text{CCW}} = \frac{l}{c/n + R\dot{\theta} - (V_c + R\dot{\theta})(1 - 1/n^2)}. \quad (7.26)$$

La différence de temps de parcours hors du cristal est donnée par :

$$\Delta t_1 = t_1^{\text{CW}} - t_1^{\text{CCW}} = \frac{(2\pi R - l)2R\dot{\theta}}{c^2}. \quad (7.27)$$

À l'intérieur du cristal, on a :

$$\Delta t_2 = t_2^{\text{CW}} - t_2^{\text{CCW}} = \frac{2R\dot{\theta}l}{c^2} - \frac{2V_c(n^2 - 1)l}{c^2}. \quad (7.28)$$

La différence totale de temps de parcours s'écrit finalement :

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{4A\dot{\theta}}{c^2} - \frac{2V_c(n^2 - 1)l}{c^2}, \quad (7.29)$$

d'où une non-réciprocité en fréquence donnée par :

$$\frac{\Omega_{\text{tot}}}{2\pi} = \frac{4A}{\lambda L_{\text{op}}} \dot{\theta} - \frac{2V_c l (n^2 - 1)}{\lambda L_{\text{op}}} = \frac{\Omega}{2\pi} + \frac{\Omega_{\text{Fiz}}}{2\pi}. \quad (7.30)$$

Le premier terme correspond à l'effet Sagnac habituel. Le second, proportionnel à la vitesse du cristal, traduit l'effet d'entraînement de l'onde par le cristal (ou effet Fizeau). On constate que cet effet est susceptible d'induire dans la cavité une non-réciprocité en fréquence de la même forme que celle induite par une activation mécanique. À titre d'exemple, lorsque la cavité est animée d'un mouvement sinusoïdal de type 7.15, avec  $z_m = 1 \mu\text{m}$ ,  $f_m = 15 \text{ kHz}$ ,  $l = 20 \text{ mm}$  et  $L_{\text{op}} = 0,3 \text{ m}$ , la non-réciprocité en fréquence induite par effet Fizeau s'écrit :

$$\Omega_{\text{Fiz}}/(2\pi) = \Omega_D/(2\pi) \sin(2\pi f_m t), \quad (7.31)$$

avec  $\Omega_D/(2\pi) \simeq 27 \text{ kHz}$ . Naturellement, on bénéficie avec l'effet Fizeau du même avantage vis-à-vis de la stabilité long terme qu'avec l'activation mécanique. En effet, lorsque l'on intègre  $\Omega_{\text{Fiz}}$ , on obtient :

$$\int \Omega_{\text{Fiz}} dt = \frac{2l(n^2 - 1)}{\lambda L_{\text{op}}} \int V_c(t) dt = \frac{2l(n^2 - 1)}{\lambda L_{\text{op}}} (z_{cf} - z_{ci}). \quad (7.32)$$

La contribution de l'effet Fizeau au signal utile du gyrolaser ne dépend donc que de la position instantanée du cristal. En particulier, cette quantité ne peut pas dériver dans le temps, à la condition que les autres paramètres (indice et longueur notamment) ne varient pas significativement sur un temps d'aller-retour du cristal.

### Conclusion

En conclusion, on peut réécrire les équations semi-classiques du laser en anneau en tenant compte du mouvement du milieu à gain comme suit (où l'on a posé  $N = N_{\text{crist}}$  pour alléger les écritures) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{E}_{1,2}(t)}{dt} = -\frac{\gamma_{1,2}}{2}\tilde{E}_{1,2}(t) + \frac{i}{2} \left( \tilde{m}_{1,2}^{\text{crist}} e^{(-1)^{2,1}2ikz_c(t)} + \tilde{m}_{1,2}^{\text{autre}} \right) \tilde{E}_{2,1}(t) \\ \quad + \frac{i(-1)^{2,1}}{2} [\Omega + \Omega_{\text{Fiz}}(t)] \tilde{E}_{1,2}(t) + \frac{\sigma l}{2T} \left[ N_0 \tilde{E}_{1,2} + N_{1,2} e^{(-1)^{2,1}2ikz_c(t)} \tilde{E}_{2,1} \right], \\ \frac{\partial N}{\partial t} = W - \frac{N}{T_1} - \frac{aN}{2T_1} \left| \tilde{E}_1 e^{-ik(z+z_c)} + \tilde{E}_2 e^{ik(z+z_c)} \right|^2. \end{array} \right. \quad (7.33)$$

Ces équations vont servir de base à l'étude qui va suivre.

### 7.2.2 Mise en évidence de l'effet du mouvement du cristal

#### Effet sur le réseau d'inversion de population, influence des paramètres du mouvement

On s'intéresse dans ce qui suit à l'effet du réseau d'inversion de population sur la réponse en fréquence lorsque le cristal est en mouvement. Pour des valeurs de  $\Omega$  suffisamment importantes et des intensités à peu près égales, le biais en fréquence induit par le réseau est donné par (voir le système d'équations 1.54) :

$$\Omega_{\text{réseau}} = -\frac{\sigma l}{T} \Im \{ N_1 e^{i[\Omega t + 2kz_c(t)]} \}. \quad (7.34)$$

Par ailleurs, l'équation d'évolution de  $N_1$  s'écrit, d'après le système d'équations 7.33 :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{T_1} - \frac{\eta N_s}{2T_1} e^{-i(\Omega t + 2kz_c(t))}. \quad (7.35)$$

Lorsque  $z_c(t) = 0$ , la résolution de l'équation différentielle ci-dessus donne :

$$N_1(t) = -\frac{i\eta N_s}{2\Omega T_1} e^{-i\Omega t}, \quad (7.36)$$

ce qui conduit à l'expression déjà connue (voir équation 3.15) :

$$\Omega_{\text{réseau}} = \frac{\gamma\eta}{2\Omega T_1}, \quad (7.37)$$

où l'on a utilisé  $|\Omega| \gg T_1$  et  $\sigma l N_0 / T \simeq \gamma$ . Dans le cas où  $z_c(t) = z_m \cos(\omega_m t)$ , on est confronté, en tentant de résoudre le système d'équations 7.33, à des termes du type  $\exp[2ikz_m \cos(\omega_m t)]$ . On utilise alors le développement suivant [152] :

$$e^{2ikz_m \cos(\omega_m t)} = J_0(2kz_m) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} i^n J_n(2kz_m) \cos(n\omega_m t), \quad (7.38)$$

où les  $J_n(x)$  sont les fonctions de Bessel du premier ordre. Ces fonctions possèdent chacune une série de zéros, et une enveloppe tendant vers 0 comme  $1/\sqrt{x}$  lorsque  $x$  tend vers l'infini.

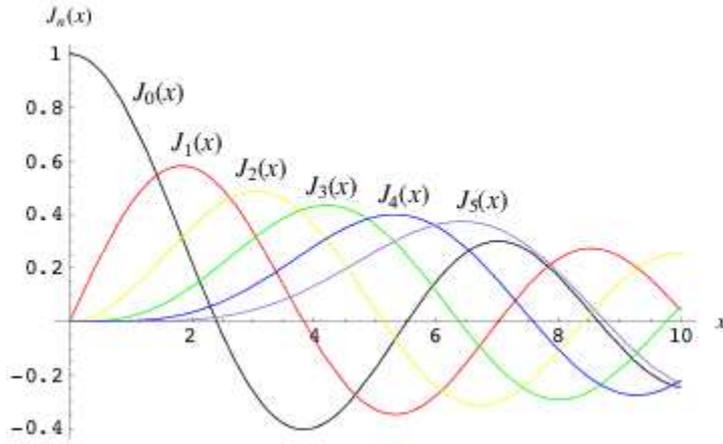


FIGURE 7.5 – Allure des premières fonctions de Bessel  $J_0(x)..J_5(x)$ , tiré de [152]

L'allure des premières fonctions de Bessel du premier ordre est représentée sur la figure 7.5. En utilisant le développement 7.38 pour résoudre l'équation 7.33, on obtient, lorsque  $\Omega$  est suffisamment grand, l'expression suivante pour  $N_1$  :

$$N_1 = -\frac{\eta N_s}{2T_1} e^{-i\Omega t} \left[ \frac{iJ_0(2kz_m)}{\Omega} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} i^n J_n(2kz_m) \frac{n\omega_m \sin(n\omega_m t) - i\Omega \cos(n\omega_m t)}{n^2\omega_m^2 - (\Omega + i/T_1)^2} \right].$$

Cette expression doit être combinée avec l'équation 7.34 pour estimer la non-linéarité de la réponse en fréquence induite par le réseau d'inversion de population lorsque le cristal est en mouvement. Si le résultat général semble *a priori* complexe, il appelle tout de même les commentaires suivants :

- dans le cas où la fréquence de vibration du cristal  $\omega_m$  est très supérieure à  $|\Omega|$  (et donc aussi à  $1/T_1$ ), le biais en fréquence induit par le réseau d'inversion de population se réduit à l'expression suivante :

$$\Omega_{\text{reseau}} = \frac{\gamma\eta J_0^2(2kz_m)}{2T_1\Omega}; \quad (7.39)$$

en particulier, si on a de plus  $J_0(2kz_m) = 0$ , le réseau d'inversion de population disparaît totalement (en effet, dans ce cas, les atomes ne sont sensibles qu'à la valeur moyenne de l'intensité lumineuse, qui est uniforme grâce à la condition  $J_0(2kz_m) = 0$ ); afin de vérifier numériquement la validité de l'expression 7.39, on a tracé sur la figure 7.6 la réponse en fréquence du gyrolaser à état solide avec un cristal vibrant à la fréquence  $f_m = \omega_m/(2\pi) = 500$  kHz en fonction de son amplitude de vibration  $kz_m$ ; on observe une dépendance de l'écart à la fréquence de battement idéale ( $0,8 \cdot 10^6$  rad/s) très proche de la fonction de Bessel  $J_0^2(x)$  représentée en insert, multipliée par le biais en l'absence de vibration  $\gamma\eta/(2T_1\Omega)$ ; il y a donc sur ce point accord entre les prédictions analytiques et les simulations numériques;

- dans le cas opposé, où la fréquence de vibration du cristal et toutes ses harmoniques non négligeables sont très inférieures à  $|\Omega|$  (plus précisément :  $2kz_c\omega_m \ll |\Omega|$ ), le biais induit par le réseau d'inversion de population se réduit à sa valeur en l'absence de vibration, c'est-à-dire  $\Omega_{\text{reseau}} = \gamma\eta/(2T_1\Omega)$ ; ce résultat traduit simplement le fait que, lorsque le mouvement du cristal est suffisamment lent par rapport à l'onde lumineuse, il y a suivi adiabatique de l'intensité des champs par la densité d'inversion de population; le mouvement n'a donc dans ce cas aucun effet atténuant sur le réseau;
- dans les cas intermédiaires, il est difficile d'obtenir une expression simple du résultat; on constate toutefois sur l'expression de  $N_1$  donnée précédemment que le biais en fréquence induit par le réseau sera d'autant plus important que  $|\Omega|$  est proche d'un multiple entier de  $\omega_m$ ; on s'attend donc à une série de petites perturbations centrées sur les valeurs de  $|\Omega| \simeq q\omega_m$  (avec  $q$  entier) et d'autant plus importantes que  $J_q(2kz_m)$  est grand; naturellement, l'idéal serait de choisir  $kz_m$  suffisamment grand pour que toutes les valeurs de  $J_q(2kz_m)$  soient si proches de zéro qu'elles puissent être négligées; ça ne sera toutefois pas le cas en pratique.

En conclusion, on prédit un effet de diminution de la non-linéarité de la réponse en fréquence induite par le réseau d'inversion de population lorsque le cristal est en mouvement. Toutefois, l'efficacité de cette diminution dépend fortement de la fréquence de vibration du cristal, ainsi que de l'amplitude du mouvement. Une technique possible pour asservir cette dernière sur un zéro de la fonction de Bessel  $J_0$  pourrait être d'utiliser comme signal d'erreur les modulations temporelles de l'intensité (on s'attend en effet à ce que celles-ci, tout comme le réseau d'inversion de population, soient minimales lorsque  $J_0(2kz_m) = 0$ ).

### Effet sur la rétrodiffusion

On n'a considéré jusqu'ici que les effets du mouvement du cristal sur le réseau d'inversion de population. On s'intéresse maintenant aux effets de ce mouvement sur la rétrodiffusion induite par le cristal de YAG, qui se traduit par la présence d'un terme de phase supplémentaire (équation 7.20). Afin de mettre en évidence l'effet de ce terme de phase, on a choisi de présenter ici le résultat de l'intégration numérique des équations de phase simplifiées du laser :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{m_1}{2} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{\Omega}{2}, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{m_2}{2} \cos(\Phi + \theta_2) - \frac{\Omega}{2}, \end{cases} \quad (7.40)$$

dans lesquelles on peut inclure le terme de phase 7.20 grâce à la substitution suivante :

$$\theta_{1,2} \rightarrow \theta_{1,2}^0 - 2kz_m \cos(\omega_m t). \quad (7.41)$$

On présente sur la figure 7.7 le résultat des simulations, avec et sans le terme de phase supplémentaire. On peut y voir clairement que la présence de ce terme diminue la taille de la zone aveugle et améliore la linéarité de la réponse en fréquence. Ce résultat peut s'interpréter par le fait que le mouvement du cristal impose à chaque instant un déphasage

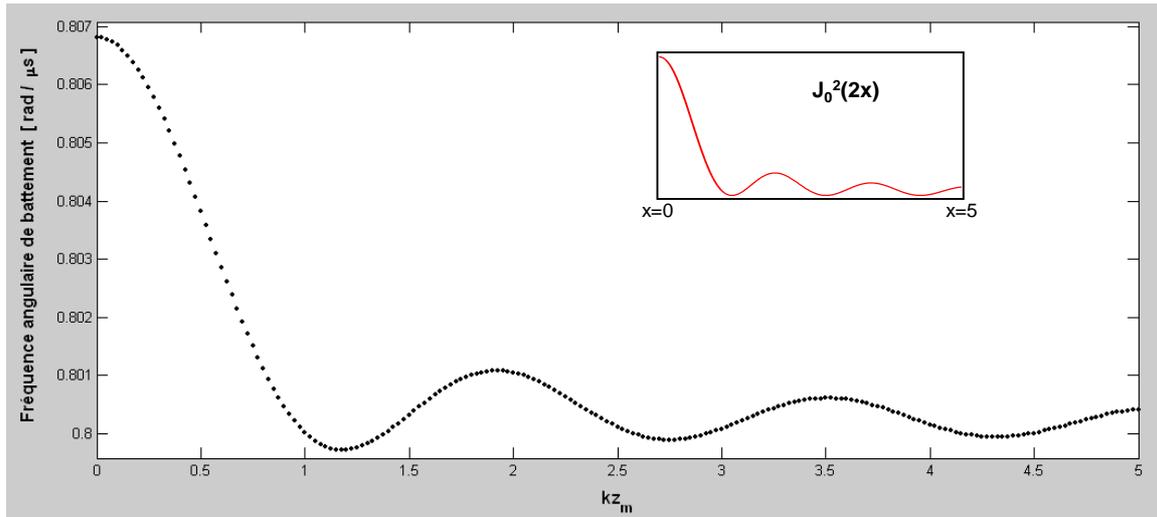


FIGURE 7.6 – Réponse en fréquence du gyrolaser à état solide avec cristal vibrant en fonction de son amplitude de vibration, représentée par le paramètre sans dimension  $kz_m$ . Ces points sont issus de l'intégration numérique du système d'équations 7.33, avec les paramètres suivants :  $\gamma = 21,9 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ ;  $m^{\text{autre}} = 10^4 \text{ rad/s}$ ;  $\theta_1^{\text{autre}} - \theta_2^{\text{autre}} = \pi/30$ ;  $m^{\text{crist}}=0$ ;  $\eta = 0,1$ ;  $\Omega = 0,8 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$ ;  $K = 10^7 \text{ s}^{-1}$ ; pas d'intégration :  $0,05 \mu\text{s}$ ; temps d'intégration :  $10 \text{ ms}$ ; moyennes effectuées entre  $8$  et  $10 \text{ ms}$ . L'écart entre la fréquence de battement et sa valeur "idéale"  $0,8 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$  est environ égal, pour  $z_m = 0$ , à  $6,8 \text{ krad/s}$ , ce qui est en bon accord avec la valeur théorique  $\gamma\eta/(2T_1\Omega) = 6,8 \text{ krad/s}$ . Afin de pouvoir étudier les effets du réseau, la valeur de la rétrodiffusion a volontairement été choisie très petite, et la valeur de la fréquence de vibration du cristal très grande. Par ailleurs, on n'a pas pris en compte l'effet Fizeau dans ces simulations numériques. La courbe en insert est le tracé, à titre de comparaison, de la fonction  $J_0^2(2x)$ , pour  $x$  allant de  $0$  à  $5$ .

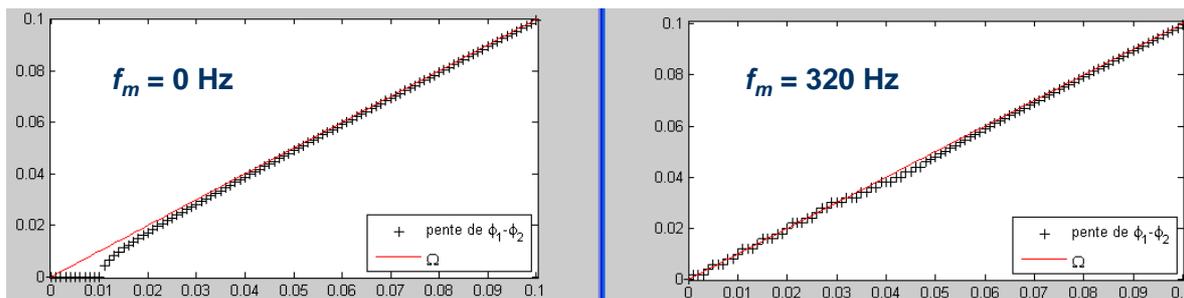


FIGURE 7.7 – Mise en évidence de l’effet bénéfique du mouvement du cristal sur la non-linéarité de la réponse en fréquence induite par la rétrodiffusion. Ces courbes sont issues de l’intégration numérique des équations 7.40, avec (courbe de droite) et sans (courbe de gauche) le terme de phase supplémentaire 7.20 lié au mouvement du cristal et inclus dans les équations 7.40 par la substitution 7.41. En abscisse est représentée la non-réciprocité en fréquence  $\Omega$  et en ordonnée la fréquence angulaire de battement, exprimées en  $10^6$  rad/s. Les paramètres suivants ont été utilisés :  $m^{\text{crist}} = 10^4$  rad/s ;  $\theta_1^{\text{crist}} - \theta_2^{\text{crist}} = 99\pi/100$  ;  $m^{\text{autre}}=0$  ;  $kz_m = 10$  ;  $f_m = 0$  (courbe de gauche) et  $f_m = 320$  Hz (courbe de droite) ; pas d’intégration :  $1 \mu\text{s}$  ; temps d’intégration :  $1$  s.

différent aux champs rétrodiffusés, ce qui rend plus difficile le couplage entre les deux modes. On note toutefois que la réponse en fréquence reste légèrement perturbée. On peut montrer que ces perturbations surviennent au voisinage des points  $|\Omega| = q\omega_m$  (avec  $q$  entier), et que l’importance de cet effet est proportionnelle à  $J_q(2kz_m)$ .

En conclusion, on s’attend à ce que l’effet de la rétrodiffusion sur la non-linéarité de la réponse en fréquence diminue avec la mise en mouvement du cristal, grâce à la présence d’un terme de phase supplémentaire qui rend moins efficace le couplage entre les modes contrarotatifs.

### 7.2.3 Mise en évidence d’une amélioration globale des performances

Après avoir identifié et isolé les différents phénomènes induits par la mise en mouvement du cristal, on se propose maintenant d’étudier de façon globale l’effet de ce mouvement sur les performances inertielles du gyrolaser à état solide, avec des ordres de grandeurs réalistes pour les différents paramètres. On considère pour cela un gyrolaser à état solide avec stabilisation du régime de battement, tel que décrit au chapitre 4 de ce mémoire. On présente sur la figure 7.8 la réponse en fréquence, issue des simulations numériques, de ce dispositif dans les quatre situations suivantes :

1. gyrolaser à état solide “simple”, c’est-à-dire sans aucun dispositif d’amélioration des performances inertielles ;
2. gyrolaser à état solide avec cristal vibrant, et pour lequel on ne prend pas en compte la non-réciprocité en fréquence induite par l’effet d’entraînement de Fizeau ; l’amplitude du mouvement du cristal est de  $0,8 \mu\text{m}$ , et la fréquence de vibration est égale à  $20$  kHz ;

3. même configuration que 2., mais en incluant l'effet Fizeau, sur la base d'un cristal de YAG de 20 mm et une cavité optique de 30 cm ;
4. même configuration que 3., mais en ajoutant une activation mécanique de la cavité à une fréquence de 320 Hz et pour une amplitude  $\Omega_D$  égale à  $0,667 \cdot 10^6$  rad/s.

On voit sur la figure 7.8 que, sous l'effet de la seule vibration du cristal, la non-linéarité de la réponse en fréquence diminue, sauf dans les zones pour lesquelles  $\Omega$  est proche des multiples entiers de la fréquence de vibration  $\omega_m = 2\pi f_m \simeq 0,125 \cdot 10^6$  rad/s. La prise en compte de l'effet Fizeau affecte quelque peu ces non-linéarités résiduelles, mais sans les faire disparaître. En revanche, la mise en œuvre simultanée du mouvement du cristal et de l'activation mécanique de la cavité semble donner des résultats très prometteurs. La non-linéarité de la réponse en fréquence est dans ce cas très fortement atténuée, et se confond quasiment avec la droite de réponse en fréquence idéale (quatrième courbe de la figure 7.8).

### 7.2.4 Vers une réalisation expérimentale

Une réalisation expérimentale du gyrolaser à état solide avec cristal vibrant est actuellement en cours. Il semble raisonnable d'espérer atteindre les paramètres utilisés pour les simulations numériques de la figure 7.8 à l'aide d'une cale piézo-électrique (0,8  $\mu\text{m}$  crête à crête à une fréquence de 20 kHz). Un paramètre important, qu'il convient de ne pas négliger, est l'existence de la fréquence de relaxation du laser (donnée par l'équation 3.12). En effet, si celle-ci ne semble pas poser de problème sur les simulations numériques de la figure 7.8 (il est même possible, lorsque le cristal est en mouvement, d'obtenir une fréquence de battement égale à la fréquence de relaxation), on s'attend en revanche à d'importants problèmes expérimentaux lorsque sa valeur se rapproche de  $\omega_m$  (fréquence de vibration du cristal). En effet, dans les situations pratiques, la mise en mouvement du cristal s'accompagne nécessairement d'une modulation de certains paramètres comme le taux de pertes par exemple. S'il est dans la plupart des cas possible de s'arranger pour que de telles modulations soient petites ou négligeables, cela peut devenir très difficile dans le cas d'une résonance paramétrique du type  $\omega_m = \omega_r$  [105]. Le choix se résume donc *a priori* à  $\omega_m > \omega_r$  ou  $\omega_m < \omega_r$ . En pratique, cette dernière condition est beaucoup plus contraignante à cause de la présence des harmoniques d'ordres supérieurs dans le développement en série de  $\exp[2ikz_m \cos(\omega_m t)]$  (qui font que, lorsque l'on croit exciter le système à la fréquence  $\omega_m$ , on l'excite en fait sur une plage de fréquence comprise grossièrement entre  $\omega_m$  et  $2kz_m\omega_m$ ), ce qui fait qu'elle s'écrit en fait  $\omega_m < \omega_r/(2kz_m)$ . Cette condition n'étant pas compatible avec une réduction de la non-linéarité de la réponse en fréquence<sup>2</sup>, il ne reste plus que la solution  $\omega_m > \omega_r$  (ce qui semble réalisable, par exemple en prenant  $\omega_m/(2\pi) \simeq 20$  kHz et  $\omega_r/(2\pi) \simeq 15$  kHz).

## 7.3 Conclusion

L'utilisation de procédés fondés sur les mouvements mécaniques pour améliorer les performances du gyrolaser à état solide semble être un choix très avantageux en raison

<sup>2</sup>Avec des paramètres typiques,  $\omega_r/(2\pi) \simeq 15$  kHz et  $2kz_m \gtrsim 4$ , ce qui donne  $\omega_m/(2\pi) \lesssim 4$  kHz, ce qui est inférieur à  $1/T_1$ .

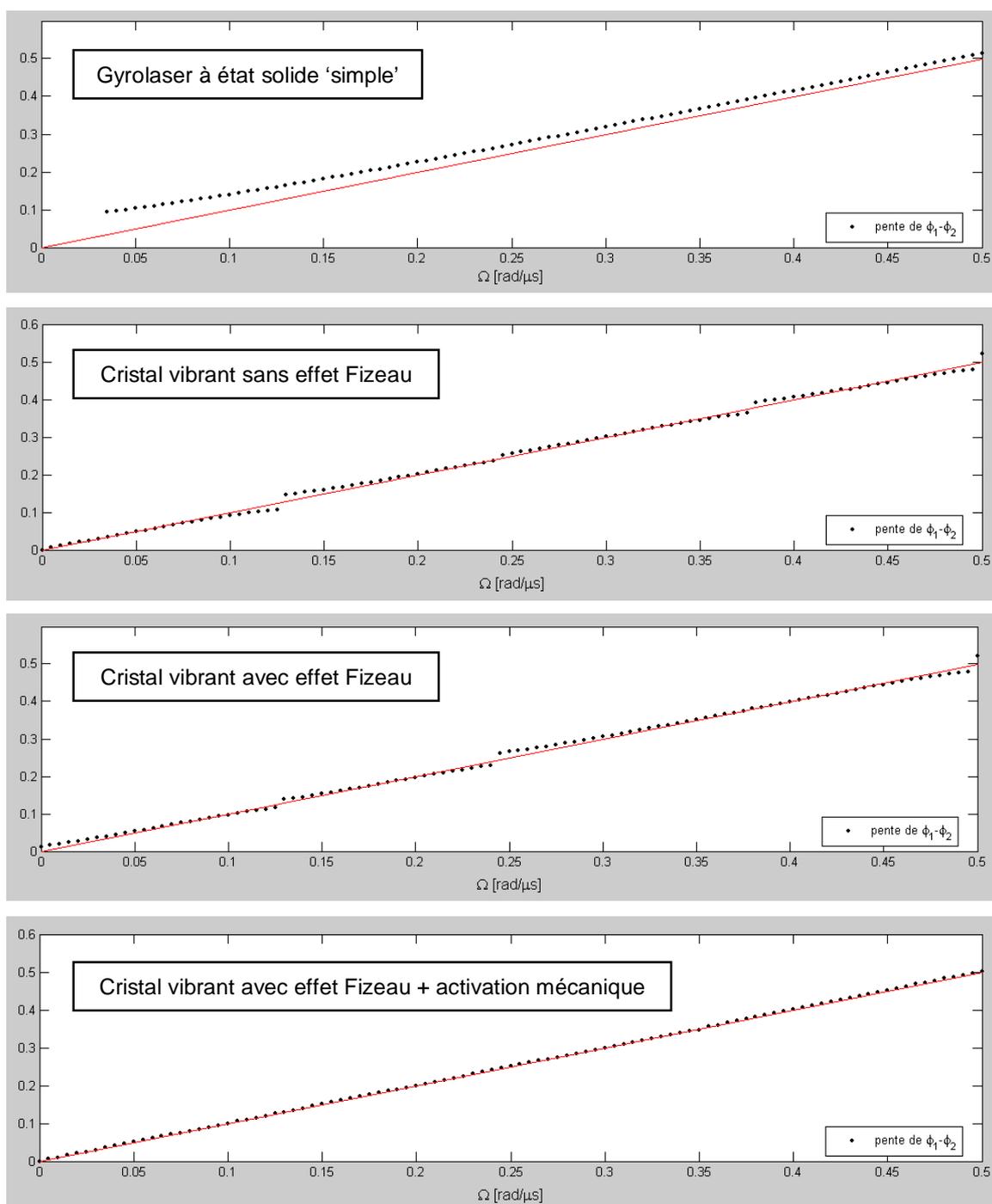


FIGURE 7.8 – Courbes comparées de réponse en fréquence du gyrolaser à état solide dans quatre configurations différentes (voir texte). Chaque point est issu de l'intégration numérique du système d'équations 7.33, avec les paramètres suivants :  $\gamma = 21,9 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ ;  $m^{\text{autre}} = 3 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$ ;  $\theta_1^{\text{autre}} - \theta_2^{\text{autre}} = \pi/25$ ;  $m^{\text{crist}} = 7 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$ ;  $\theta_1^{\text{crist}} - \theta_2^{\text{crist}} = \pi/25$ ;  $\eta = 0,1$ ;  $\Omega=0 \rightarrow 0,5 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$ ;  $K = 10^7 \text{ s}^{-1}$ ; pas d'intégration :  $0,05 \mu\text{s}$ ; temps d'intégration : 10 ms; moyennes effectuées entre 8 et 10 ms.

de l'absence de dérive à long terme des biais induits par ces mouvements. Cet argument est renforcé par le fait que la quasi-totalité des gyrolasers commerciaux sont fondés sur ce principe (à l'exception de quelques gyrolasers à hélium-néon 4 ondes, voir chapitre 6). Si une activation mécanique "classique" ne semble pas suffisante pour atteindre des performances inertielles haut de gamme sur le gyrolaser à état solide (en raison des fortes non-linéarités présentes sur ce type de système), en revanche la mise en mouvement du cristal, éventuellement couplée à une activation de la cavité, semble une voie très prometteuse, permettant d'obtenir une réponse en fréquence quasiment linéaire sans pour autant introduire de dérive long terme du biais, grâce à son origine mécanique. Cette atténuation des non-linéarités est rendue possible par la diminution simultanée du contraste du réseau d'inversion de population et de l'efficacité du couplage entre les modes par la rétrodiffusion. La présence de l'effet Fizeau dans le cristal en mouvement permet d'induire un biais alternatif, qui constitue un complément au biais d'activation mécanique. Des expériences sont actuellement en cours pour tenter de confirmer expérimentalement ces prédictions.

## Conclusion de la deuxième partie

On a étudié dans cette deuxième partie trois types de configuration ayant pour but d'améliorer les performances inertielles du gyrolaser à état solide. Un certain nombre de points a été validé dans chaque cas, et si les performances visées de  $0,01^\circ/\text{h}$  n'ont pas été atteintes pour le moment, plusieurs axes de progression restent encore à explorer.

Le premier dispositif étudié comprend un matériau Faraday qui permet d'introduire un biais magnéto-optique constant dans la cavité. Ce dispositif, d'une grande simplicité de mise en œuvre, a permis de mesurer de très petites vitesses de rotation, ainsi que le champ magnétique terrestre. Toutefois, ce dispositif présente l'inconvénient majeur que les fluctuations du biais se retrouvent intégralement sur le signal utile, ce qui rend très difficile l'utilisation de cette configuration dans le domaine visé ( $0,01^\circ/\text{h}$ ). En revanche, une application de type "bas coût" (avec des performances moindres) pourrait être visée, tout en améliorant la stabilité du biais à l'aide par exemple de matériaux magnétiques saturables, d'une source de courant asservie sur une référence de tension stabilisée au ppm et d'un dispositif d'inversion périodique du signe du biais. Par ailleurs, un tel dispositif est un très bon outil de laboratoire, dont l'étude constitue une étape importante vers des configurations plus évoluées.

Le principe du second dispositif étudié est de faire coexister dans la cavité 4 modes soumis à la même source de biais magnéto-optique. On obtient ainsi deux signaux de battement, sensibles au biais avec des signes opposés. Cela permet, par soustraction des deux fréquences de battement, d'éliminer en temps réel le biais introduit, et donc de s'affranchir de ses éventuelles fluctuations tout en profitant de ses effets bénéfiques au niveau de la réponse en fréquence du gyrolaser. La version proposée et mise en œuvre expérimentalement répond, grâce à l'utilisation de cristaux biréfringents uniaxes taillés à  $45^\circ$  de leur axe optique, au défi de faire osciller simultanément dans la cavité deux modes orthogonaux dans chaque sens de propagation tout en utilisant un effet stabilisateur fondé sur des pertes générées par action sur la polarisation. Toutefois, un biais subsiste à l'arrêt entre les deux signaux de battement, probablement lié à la séparation physique des faisceaux sur une partie du trajet. Cette solution semble donc prometteuse, à condition d'arriver à identifier précisément l'origine de ce biais. De plus, la configuration expérimentale utilisée serait grandement simplifiée par l'utilisation d'un dispositif stabilisateur passif agissant simultanément sur les deux états de polarisation orthogonaux. La mise au point d'un élément optique remplissant ces critères constitue un nouvel axe de recherche intéressant et prometteur.

Enfin, après avoir constaté l'insuffisance de l'activation mécanique pour obtenir des performances inertielles acceptables sur le gyrolaser à état solide, un troisième dispositif a été proposé, fondé sur un mouvement de vibration du cristal. Il a été montré analytiquement et numériquement qu'un tel mouvement permettait, sous certaines conditions, de réduire les effets néfastes du réseau d'inversion de population et de la rétrodiffusion. La mise en œuvre d'une telle configuration, combinée à une activation mécanique, semble, au vu des résultats numériques obtenus avec des paramètres réalistes, une voie très prometteuse d'amélioration des performances inertielles du gyrolaser à état solide. La validation de ce dispositif d'un point de vue expérimental est en cours de réalisation.

Il apparaît donc que les trois voies présentées dans cette partie sont loin d'avoir été explorées entièrement, et présentent chacune un potentiel d'évolution pouvant offrir, à plus ou moins long terme, un intérêt pour le marché de l'inertie haut de gamme ou pour d'autres types de marchés moins exigeants en termes de performances mais plus exigeants en termes de coût de production. Il convient de noter par ailleurs l'existence d'autres types de configurations destinées à l'amélioration des performances du gyrolaser à état solide. On pense notamment à l'utilisation du laser en régime chaotique, qui présente l'avantage de supprimer les couplages entre modes et dont le signal de sortie peut être étudié par analyse spectrale, ou encore à l'utilisation de milieux solides de classe A, c'est-à-dire pour lesquels le temps de vie du niveau excité de la transition laser est très court, de sorte que les oscillations de relaxation et l'effet néfaste du réseau de gain sur la réponse en fréquence disparaissent naturellement. Signalons que ces deux thématiques ont fait l'objet d'études préliminaires que nous avons choisi de ne pas présenter dans ce mémoire.

## **Troisième partie**

### **Lasers à atomes et gyrométrie**



# Introduction

Comme on l'a vu dans l'introduction générale de ce mémoire, l'effet Sagnac optique a été démontré dès le début du XX<sup>ème</sup> siècle, en mesurant le déphasage qu'il induit dans un interféromètre à l'aide d'une source de lumière incohérente. La sensibilité des dispositifs de l'époque était toutefois très limitée, à tel point que Sagnac n'a pu observer qu'un déplacement de l'ordre d'une fraction de frange, tandis que Michelson et Gale ont dû mobiliser plus de 3km de canalisation des égouts de Chicago pour construire un interféromètre suffisamment grand pour mesurer la rotation terrestre [154]. C'est l'avènement du laser, que l'on peut considérer dans le contexte de cette troisième partie comme un ensemble de modes du champ électromagnétique macroscopiquement peuplés [130, 155], qui a ouvert la voie aux utilisations pratiques de l'effet Sagnac, grâce à un gain très important de sensibilité obtenu en observant l'effet de la rotation non pas sur la phase des ondes utilisées mais directement sur les modes eux-mêmes.

Par ailleurs, le remplacement pour la gyrométrie des sources lumineuses par des sources d'ondes de matière a été suggéré longtemps avant l'obtention expérimentale de ces dernières (voir par exemple [156, 157]) en raison du gain de sensibilité d'environ dix ordres de grandeur qu'il apporte – plus précisément, le gain relatif en sensibilité (à aire égale) est donné par le rapport des énergies  $mc^2/(\hbar\omega)$ . Il est actuellement possible d'observer expérimentalement sur des ondes de matière l'effet Sagnac, induit par exemple par la rotation terrestre [79]. Grâce au gain de sensibilité déjà mentionné, une telle expérience nécessite un interféromètre beaucoup plus petit que celle de Michelson et Gale. Toutefois, ces deux expériences sont très proches sur le principe puisque dans les deux cas la mesure est effectuée sur les phases des ondes utilisées.

Parallèlement à ces travaux sur l'interférométrie atomique, une nouvelle source d'ondes de matière a vu le jour en 1995, avec l'obtention des premiers condensats de Bose-Einstein [56, 57]. Cette nouvelle source a très rapidement été qualifiée de laser à atomes [58], en raison notamment de l'occupation macroscopique d'un ou plusieurs modes par les atomes [158], tout comme dans le cas du laser<sup>3</sup>. On peut alors se demander si, tout comme l'apparition du laser a bouleversé le monde des gyromètres optiques, celle des lasers à atomes ne pourrait pas ouvrir la voie à de nouveaux types de senseurs inertiels, qui détecteraient l'action de la rotation non pas sur la phase des signaux émis mais directement sur les modes eux-mêmes.

Cette question, à laquelle j'ai tenté d'apporter quelques fragments de réponse au cours de mes travaux de thèse, est motivée, en plus de son intérêt intrinsèque, par la mission

---

<sup>3</sup>On peut pousser l'analogie plus loin en remarquant que le processus de la diffusion d'un boson vers un mode donné se fera d'autant plus favorablement que ce mode est déjà peuplé par des bosons identiques au premier [159], comme c'est le cas lors du processus d'émission stimulée.

de veille technologique de Thales Research and Technology France, dans un contexte où les premiers brevets concernant les capteurs à atomes froids font progressivement leur apparition (voir par exemple le brevet commun Sagem-Observatoire de Paris [160]). Ce sujet intéresse également tout particulièrement le groupe d’Optique Atomique du Laboratoire Charles Fabry de l’Institut d’Optique, avec lequel j’ai eu la chance de collaborer. Ce groupe, qui travaille depuis plusieurs années dans le domaine de l’interférométrie atomique, possède également plusieurs sources de condensats de Bose-Einstein gazeux, dont un laser à atomes “tout optique” [60, 61] qui pourrait servir dans le futur à des expériences de détection de rotation. Une collaboration s’est développée, autour de cette problématique et de ce projet expérimental, avec le groupe de physique théorique de l’Université de Trente, dans lequel j’ai eu la chance d’être accueilli et encadré.

Afin de conserver le principe des conditions aux limites périodiques inhérent au gyrolaser, il a été décidé de s’intéresser au condensat de Bose-Einstein lorsqu’il est contenu dans un piège en anneau (ou piège torique). Tout comme dans le cas du laser, il est avantageux de découpler les comportements transverse et longitudinal lorsque cela est possible. On a donc supposé dans un premier temps, pour simplifier le problème, que notre piège en anneau présenterait un fort confinement transverse. On s’est naturellement intéressé tout particulièrement au cas où ce système est en rotation autour de son axe. Ce type de dispositif, déjà considéré dans les années 70 d’un point de vue théorique pour ses propriétés superfluides [161], a connu un regain d’intérêt suite à la réalisation expérimentale des premiers condensats de Bose-Einstein et à l’observation, au sein de ces derniers, de vortex en présence d’une rotation [162, 163]. Un important effort est actuellement effectué, tant sur le plan théorique [164–167] qu’expérimental [168, 169], dans le domaine des condensats de Bose-Einstein en anneau et de leurs propriétés en rotation. Il apparaît, lorsque ce dispositif est mis en rotation, des propriétés très différentes de celles des systèmes classiques [170], propriétés qui nous intéressent ici dans la mesure où elles pourraient ouvrir la voie à de nouveaux types de senseurs inertiels.

Les travaux effectués pendant ma thèse, en lien étroit avec l’Université de Trente, ont donné lieu au développement d’un formalisme original pour décrire à l’aide d’une équation unidimensionnelle un condensat placé dans un piège torique en rotation dans le cas d’un fort confinement transverse [59]. Ce formalisme pourrait servir à simplifier l’étude théorique d’un tel système, en permettant d’éliminer les degrés de liberté transverses.

L’objet principal de cette troisième partie est la présentation de ce formalisme. On s’intéressera de plus au contexte qui a motivé son développement, ainsi qu’à quelques-unes de ses possibles applications. On commence par rappeler, dans le **chapitre 8**, quelques propriétés de base du condensat de Bose-Einstein torique en rotation. On montre en particulier que des courants atomiques superfluides sont susceptibles de s’établir le long du tore, et que leur sensibilité à la rotation dépend des interactions atomiques et de la géométrie de piégeage. Des possibilités pour utiliser un tel dispositif en tant que senseur de rotation sont proposées, et la comparaison avec le gyrolaser optique est discutée. Dans le **chapitre 9**, on présente le formalisme que nous avons développé et qui débouche sur l’obtention d’une équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle pour le condensat torique en rotation. On applique ensuite, dans le **chapitre 10**, ce formalisme au cas du guide d’onde elliptique, ce qui permet de vérifier numériquement *a posteriori* certaines des prédictions effectuées, avant de présenter pour finir un moyen concret de réaliser expérimentalement (par exemple à partir de l’expérience de l’Institut d’Optique mentionnée précédemment)

un dispositif entrant dans le domaine de description de notre formalisme, qui pourrait constituer un premier pas vers un “gyrolaser atomique”.



## Chapitre 8

# Condensat de Bose-Einstein torique en rotation : principes de base

L'objectif de ce chapitre est de présenter, de la manière la plus simplifiée possible, le comportement du condensat de Bose-Einstein torique en rotation. On s'intéresse pour cela, dans une première partie, à la situation idéalisée du tore de forme circulaire et ayant un confinement transverse infiniment fort. On montre que dans ce cas des courants atomiques superfluides peuvent s'établir le long du tore lorsque celui-ci est en rotation. L'étude de ces courants fournit une information sur la vitesse de rotation de l'ensemble, d'où une première configuration de capteur inertiel. On montre toutefois que la sensibilité d'un tel instrument serait limitée par la quantification de la vitesse des atomes. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on enrichit le modèle précédent par la prise en compte des interactions atomiques et d'une éventuelle asymétrie du tore. On montre alors, sous certaines hypothèses simplificatrices, que la condition de quantification est levée par la présence des phénomènes mentionnés ci-dessus, qui induisent des couplages entre les modes de rotation du tore idéal. En revanche, il apparaît un effet de métastabilité, néfaste pour la gyrométrie, lorsque l'effet des interactions est supérieur à celui de l'asymétrie du tore. La condition de métastabilité est comparée avec la condition d'établissement du régime de battement dans le gyrolaser à état solide.

REMARQUE : il convient de noter que la plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont issus de la littérature (références citées dans le texte). Il nous est toutefois apparu utile d'en présenter ici une synthèse, afin d'une part de familiariser le lecteur avec ce type de dispositif et d'autre part de montrer les motivations qui nous ont amené à nous intéresser à la mise en œuvre du formalisme présenté au chapitre suivant.

### 8.1 Cas du tore infiniment fin et parfaitement circulaire

On s'intéresse dans ce qui suit au "cas d'école" constitué par un condensat de Bose-Einstein contenu dans un piège torique infiniment fin et parfaitement circulaire, dans un référentiel tournant. En guise de préambule à cette étude, on présente quelques résultats très généraux sur la rotation d'un condensat de Bose-Einstein non torique.

### 8.1.1 Rotation d'un condensat de Bose-Einstein et vortex (tiré de [171])

L'une des propriétés remarquables du condensat de Bose-Einstein est qu'il s'agit d'un fluide irrotationnel. En termes mathématiques, cela signifie que le champ de vitesse, dans le référentiel du laboratoire, possède un rotationnel nul en tout point du condensat. En effet, si l'on décrit la fonction d'onde macroscopique du condensat  $\Psi(r, t)$  en termes de densité  $\rho(r, t)$  et de phase  $\varphi(r, t)$  selon la relation :

$$\Psi(r, t) = \rho(r, t)e^{i\varphi(r, t)}, \quad (8.1)$$

la vitesse est alors proportionnelle au gradient de la phase :

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi, \quad (8.2)$$

ce qui permet d'écrire  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Toutefois, il ne faut pas en déduire qu'un tel fluide ne tourne pas. Ainsi, il a été montré dans [172], à partir des équations hydrodynamiques du condensat dans le référentiel tournant, qu'un état stationnaire possible, appelé mode quadrupolaire, correspondait à une rotation d'ensemble selon un champ de vitesse très particulier (et bien entendu différent du champ de vitesse de la rotation d'un solide, puisque dans ce dernier cas on a  $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\Omega}$ ). Le moment cinétique associé à cet écoulement est alors d'autant plus élevé que la déformation du condensat est importante. Dans la limite d'un condensat isotrope, celui-ci est nul. Dans la limite d'un condensat très déformé, il tend vers sa valeur classique (le champ de vitesse étant, dans ce dernier cas, très proche de celui d'un solide en rotation). Il apparaît donc que la géométrie de piégeage joue un rôle fondamental sur le comportement du condensat de Bose-Einstein en rotation. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point ultérieurement.

Une alternative, permettant également au condensat d'acquérir un moment cinétique non nul sous l'effet d'une rotation, est d'accueillir en son sein un ou plusieurs tourbillons quantiques ou vortex. Ces derniers correspondent à des lignes où la densité atomique s'annule, de sorte que la phase n'y est plus définie. Cela permet à la circulation de la vitesse autour d'une telle ligne d'être différente de zéro<sup>1</sup>. Plus précisément, celle-ci est proportionnelle à l'accroissement de la phase le long d'un tour, accroissement qui doit être un multiple entier de  $2\pi$  d'après l'équation 8.1. Cela donne :

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = n \frac{h}{m} \quad \text{avec } n \text{ entier.} \quad (8.4)$$

L'entier  $n$  est appelé charge du vortex, et l'écoulement autour de ce dernier est parfois qualifié de supercourant, puisqu'il s'agit d'un mouvement non dissipatif (ou superfluide). On peut montrer, dans le cadre d'un modèle de vortex droit, que le moment cinétique (par atome) du condensat le long de l'axe du vortex est donné par :

$$L_z = n\hbar. \quad (8.5)$$

<sup>1</sup>Dans le cas contraire, la circulation de la phase s'écrit, grâce au théorème de Stokes :

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \iint \nabla \times \mathbf{v} \cdot d^2s = 0. \quad (8.3)$$

Plus la charge du vortex (ou le nombre de vortex) est élevée et plus le moment cinétique des atomes est important. On montre qu'un vortex de charge supérieure à 1 est instable, et va se disloquer pour donner naissance à  $n$  vortex de charge 1. C'est donc dans ce cas le nombre de vortex présents dans le condensat qui détermine la valeur du moment cinétique.

### 8.1.2 Condensat dans un tore idéal et supercourants (tiré de [173])

Dans la description effectuée précédemment, il a été supposé que le condensat était simplement connexe (en dehors de la présence d'éventuels vortex). On s'intéresse à partir de maintenant (et jusqu'à la fin de ce mémoire) au cas où le condensat est contenu dans un piège en anneau (ou piège torique). Le comportement en rotation est alors différent du cas précédent, puisque la densité atomique est nulle au centre de l'anneau, ce qui n'impose plus à la circulation de la vitesse le long de celui-ci de s'annuler. En d'autres termes, des lignes de vortex peuvent être contenues au centre de l'anneau, sans nécessairement induire de trous dans la densité atomique. De plus, leur charge peut dans ce cas être supérieure à 1.

#### Équations hydrodynamiques

On tente de donner dans ce qui suit une description plus quantitative des phénomènes évoqués ci-dessus. On considère pour cela un condensat de Bose-Einstein contenu dans un piège torique idéal, c'est-à-dire parfaitement circulaire et avec un confinement transverse infiniment fort, de telle sorte que l'équation de Gross-Pitaevskii pour la fonction d'onde macroscopique du condensat s'écrive :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + U + \frac{gN}{RS} |\Psi|^2 \right) \Psi = \mu \Psi , \quad (8.6)$$

où  $R$  désigne le rayon du tore,  $S$  sa section transverse,  $\theta$  l'angle polaire usuel,  $m$  la masse atomique,  $U$  le potentiel extérieur,  $N$  le nombre d'atomes condensés et où  $g$ , appelé constante de couplage, est relié à la longueur de diffusion  $a$  par la formule :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a . \quad (8.7)$$

La fonction d'onde  $\Psi(\theta)$  vérifie quant à elle la condition de normalisation suivante :

$$\int_0^{2\pi} |\Psi(\theta)|^2 d\theta = 1 . \quad (8.8)$$

Lorsque l'ensemble est mis en rotation à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  autour de l'axe du tore, il est en général<sup>2</sup> possible d'écrire un hamiltonien  $\hat{H}_{\text{eff}}$  indépendant du temps dans le référentiel tournant à condition de poser [174, 175] :

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_{\text{lab}} - \dot{\theta} \hat{L} , \quad (8.9)$$

---

<sup>2</sup>Une condition suffisante est que le potentiel décrivant l'interaction entre deux particules ne dépende que de la distance qui les sépare [170], condition que l'on considérera vérifiée en pratique.

où  $\hat{H}_{\text{lab}}$  est le hamiltonien en l'absence de rotation et où  $\hat{L}$  est l'opérateur moment cinétique selon l'axe du tore, donné par  $\hat{L} = -i\hbar\partial/\partial\theta$ . L'équation de Gross-Pitaevskii s'écrit dans le référentiel tournant :

$$\left[ \frac{\hbar\dot{\theta}_c}{2} \left( -i\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_c} \right)^2 - \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + U + \frac{gN}{RS}|\Psi|^2 \right] \Psi = \mu\Psi, \quad (8.10)$$

où l'on a introduit le quantum élémentaire de rotation associé au système :

$$\dot{\theta}_c = \frac{\hbar}{mR^2}. \quad (8.11)$$

En cherchant des solutions de la forme 8.1, on obtient les équations suivantes :

$$\mu = -\frac{\hbar\dot{\theta}_c}{2} \frac{(\sqrt{\rho})''}{\sqrt{\rho}} + \frac{\hbar\dot{\theta}_c}{2} (\varphi')^2 - \hbar\dot{\theta}\varphi' + U + \frac{gN}{RS}\rho, \quad (8.12)$$

$$\varphi'' + 2\varphi' \frac{(\sqrt{\rho})'}{\sqrt{\rho}} - 2\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_c} \frac{(\sqrt{\rho})'}{\sqrt{\rho}} = 0, \quad (8.13)$$

où le symbole “prime” se rapporte à la dérivation par rapport à la variable  $\theta$ . Ces équations sont connues sous l'appellation d'équations hydrodynamiques du condensat.

### Solution de densité uniforme

On suppose dans cette partie que  $U = 0$  (ce qui revient en particulier à négliger les effets de la gravité). On cherche une solution de densité uniforme, c'est-à-dire vérifiant  $\rho' = 0$ . Cela donne, à partir de l'équation 8.13 :

$$\varphi'' = 0, \quad (8.14)$$

d'où  $\varphi' = J$  avec  $J$  indépendant de  $\theta$ . On en déduit  $\varphi = J\theta$  (ce qui revient à choisir  $\varphi(0) = 0$ ). L'équation 8.1 implique en particulier :

$$\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta) + 2\pi p \quad \text{avec } p \text{ entier}, \quad (8.15)$$

d'où l'on déduit que  $J$  est nécessairement un nombre entier. La solution de densité uniforme s'écrit donc finalement (en prenant en compte la condition de normalisation) :

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iJ\theta} \quad \text{avec } J \text{ entier}. \quad (8.16)$$

L'équation 8.12 s'écrit alors (toujours en supposant  $U = 0$ ) :

$$\mu = \frac{\hbar\dot{\theta}_c}{2} J^2 - \hbar\dot{\theta}J + 2\hbar\dot{\theta}_c \frac{aR}{S} N, \quad (8.17)$$

ce qui donne :

$$\mu = \frac{\hbar\dot{\theta}_c}{2} \left( \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_c} - J \right)^2 - \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + \frac{gN}{2\pi RS}. \quad (8.18)$$

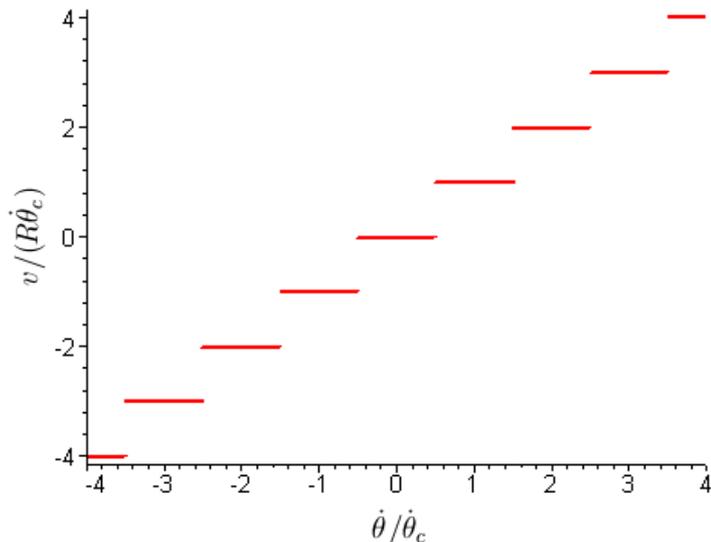


FIGURE 8.1 – Vitesse du supercourant atomique en fonction de la rotation appliquée, pour un condensat sans interaction. On constate que la réponse d'un tel dispositif est quantifiée, le quantum élémentaire de rotation étant donné par  $\dot{\theta}_c$ . En particulier, il existe une plage autour de  $\dot{\theta} = 0$  pour laquelle le système est totalement insensible à la rotation (effet Hess-Fairbank).

Afin de minimiser la valeur de  $\mu$ , donnée par l'expression 8.18, tout en respectant la condition 8.16, le système va choisir la valeur de  $J$  correspondant à l'entier le plus proche de  $\dot{\theta}/\dot{\theta}_c$ . L'expression de la vitesse des atomes le long de l'anneau est donnée par  $v = JR\dot{\theta}_c$ , ce qui montre que le système répond à la rotation de façon quantifiée, le quantum élémentaire de rotation étant donné par  $\dot{\theta}_c = \hbar/(mR^2)$ . Cette réponse en fréquence est illustrée sur la figure 8.1. En particulier, lorsque  $|\dot{\theta}/\dot{\theta}_c| < 1/2$ , la rotation appliquée est trop faible pour exciter le premier quantum de rotation, ce qui fait que le système reste immobile en dépit du mouvement des parois du récipient qui le contient. Cet effet de superfluidité est l'analogie de l'effet Hess-Fairbank dans les supraconducteurs [170].

Un calcul du spectre des modes d'excitation du condensat par la méthode de Bogoliubov-Gennes [173] montre que la solution de densité uniforme que l'on vient d'étudier est stable lorsque les interactions atomiques sont répulsives (ce qui correspond à  $a > 0$ ). En effet, dans ce dernier cas, les énergies des modes d'excitations sont toutes réelles et positives, ce qui assure la stabilité dynamique et thermodynamique du condensat (voir [176] pour une discussion détaillée à ce sujet). Il convient de noter que, lorsque la condition  $a > 0$  n'est plus vérifiée, la solution de densité uniforme peut devenir instable, et donner naissance par exemple à l'établissement d'une solution de type soliton [173]. Nous restreindrons toutefois notre étude au cas des interactions répulsives (cas des atomes de rubidium utilisés dans le laser à atome de l'Institut d'Optique mentionné précédemment).

On pourrait imaginer tirer parti de l'accroissement linéaire de phase qui s'établit le long du tore sous l'effet d'une rotation pour utiliser ce système en tant que gyromètre (la détection pouvant par exemple être assurée par des méthodes interférentielles). La précision ultime de la mesure serait dans ce cas donnée par la valeur du quantum de

rotation  $\dot{\theta}_c$ , qui est par exemple égale, pour  $R = 1$  mm et  $m = 1,4 \cdot 10^{-25}$  kg (atomes de rubidium), à environ 150 degrés par seconde, qui est une valeur très élevée par rapport à la sensibilité d'un interféromètre atomique ou d'un gyromètre optique. Toutefois, on va voir dans ce qui suit que cette sensibilité est nettement améliorée par la présence des phénomènes de couplages entre les niveaux correspondant aux différentes valeurs de  $J$ , phénomènes que l'on va maintenant tenter de décrire.

## 8.2 Couplages entre modes, métastabilité

La grande majorité des résultats présentés dans cette section est tirée de [170]. La réponse en fréquence du condensat de Bose-Einstein placé dans un piège torique idéal, que l'on vient de présenter, permet en particulier, comme on l'a vu, d'expliquer l'absence de rotation d'un superfluide lorsque la vitesse angulaire du récipient (ou du piège) est inférieure à la moitié du quantum de rotation (effet Hess-Fairbank). En revanche, elle ne permet pas d'expliquer la superfluidité pour les vitesses de rotation beaucoup plus importantes : lorsque l'on met un superfluide en rotation à une vitesse grande devant  $\dot{\theta}_c$  et que l'on arrête dans un deuxième temps le mouvement du récipient, il est possible d'observer un mouvement persistant du superfluide. Cela peut paraître surprenant à la lumière des résultats précédents, qui stipulent qu'en l'absence de rotation du récipient (ou du piège), l'état de plus basse énergie correspond au fluide au repos. Cette différence s'explique par le fait que l'on a négligé dans le modèle précédent un paramètre important, à savoir les interactions atomiques. Il a été montré [164,177] que celles-ci sont responsables de phénomènes de métastabilité qui font que le système peut demeurer dans certains états qui correspondent à des minima locaux d'énergie, même s'ils ne correspondent pas à l'état fondamental du système.

L'objet de ce qui suit est de décrire ce phénomène de métastabilité dans le contexte, qui nous intéresse ici, du condensat de Bose-Einstein torique en rotation. Pour cela, il convient d'enrichir le modèle simplifié présenté précédemment en y intégrant les interactions entre atomes, ainsi qu'une éventuelle asymétrie du tore, supposé jusqu'ici on le rappelle parfaitement circulaire. Ce nouveau modèle, plus riche, peut être résolu exactement lorsque l'on ne considère que les deux premiers quanta de rotation ( $J = 0$  et  $J = 1$ ). Ce résultat, que l'on reproduit dans ce qui suit, est dû à Anthony Leggett [170], qui le qualifie de "*toy model*" en raison des hypothèses simplificatrices utilisées. Il montre, comme on va le voir, que le phénomène de métastabilité survient lorsque l'effet des interactions est supérieur à celui de l'asymétrie du tore.

### 8.2.1 Mise en équation

On part de l'expression suivante pour le hamiltonien effectif dans le référentiel tournant à la vitesse  $\dot{\theta}$  :

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\dot{\theta}_c}{2\hbar} \hat{L}^2 - \dot{\theta} \hat{L} + \sum_i V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (8.19)$$

Dans cette équation,  $V_{\text{ext}}$  représente le potentiel extérieur vu par chaque atome, et  $U$  le potentiel associé aux interactions entre les atomes (ces dernières étant supposées ne

dépendre que de la distance interatomique). On supposera également dans ce qui suit, par souci de simplicité, que la vitesse de rotation du système est inférieure au quantum élémentaire de rotation ( $0 < \dot{\theta} < \dot{\theta}_c$ ), de telle sorte que seuls les deux premiers états propres du système (correspondant aux valeurs  $J = 0$  et  $J = 1$ ) peuvent être excités. On va exprimer successivement chaque terme du hamiltonien dans le formalisme, plus commode lorsque l'on traite d'effets collectifs, de la seconde quantification (voir par exemple [159]).

### Termes cinétiques

Dans la base de ces états propres, les deux premiers termes du hamiltonien effectif s'écrivent :

$$\frac{\dot{\theta}_c}{2\hbar}\hat{L}^2 - \dot{\theta}\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\theta}_c/2 - \hbar\dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (8.20)$$

Un changement d'origine des énergies permet de rendre cette expression symétrique, ce qui donne :

$$\frac{\dot{\theta}_c}{2\hbar}\hat{L}^2 - \dot{\theta}\hat{L} = -\frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \hbar(\dot{\theta}_c/2 - \dot{\theta}) & 0 \\ 0 & -\hbar(\dot{\theta}_c/2 - \dot{\theta}) \end{pmatrix}. \quad (8.21)$$

Cet opérateur prend donc en deuxième quantification la forme  $\frac{1}{2}\hbar(\dot{\theta}_c/2 - \dot{\theta})(a_1^\dagger a_1 - a_0^\dagger a_0)$ .

### Potentiel de piégeage

Le terme dû au potentiel de piégeage s'écrit en deuxième quantification :

$$\hat{H}_{\text{ext}} = V(a_0^\dagger a_0 + a_1^\dagger a_1) - V_0(a_0^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_0), \quad (8.22)$$

où l'on a posé :

$$V = \int \psi_0^*(\mathbf{r})V_{\text{ext}}(\mathbf{r})\psi_0(\mathbf{r})d\mathbf{r} \quad \text{et} \quad V_0 = - \int \psi_1^*(\mathbf{r})V_{\text{ext}}(\mathbf{r})\psi_0(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad (8.23)$$

la phase relative de  $\psi_0$  et  $\psi_1$  ayant été choisie de manière à rendre  $V_0$  réel et positif. Le terme en facteur de  $V$  correspondant à un opérateur identité, il peut être annulé par un nouveau changement d'origine des énergies. On ne conservera donc finalement que l'expression :

$$\hat{H}_{\text{ext}} = -V_0(a_0^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_0). \quad (8.24)$$

### Interaction entre atomes

Le terme d'interaction s'écrit dans l'approximation habituelle des basses énergies :

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int \frac{g}{2}\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}, \quad (8.25)$$

l'opérateur de destruction d'une particule au point  $\mathbf{r}$  s'écrivant :

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r})a_0 + \psi_1(\mathbf{r})a_1. \quad (8.26)$$

En réorganisant les termes, en utilisant les égalités suivantes :

$$\int \psi_0^*(\mathbf{r})\psi_1^*(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = 0 \quad \text{et} \quad |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \simeq |\psi_1(\mathbf{r})|^2, \quad (8.27)$$

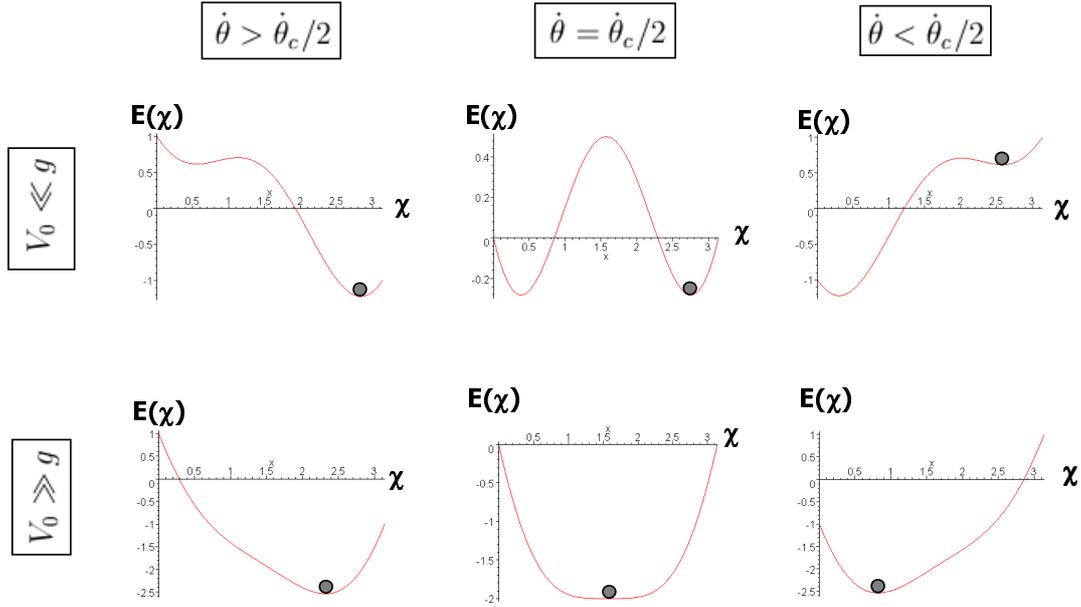


FIGURE 8.2 – Énergie du condensat en fonction du paramètre  $\chi$  pour différentes valeurs de  $\dot{\theta}$  et du paramètre d'anisotropie  $V_0/g$  (image tirée de [170]).

et au prix d'un nouveau changement d'origine des énergies, on obtient :

$$\hat{H}_{\text{int}} = \left( \int g |\psi_0(\mathbf{r})|^4 d^3\mathbf{r} \right) a_0^\dagger a_0 a_1^\dagger a_1 . \quad (8.28)$$

## Conclusion

Le hamiltonien effectif en seconde quantification s'écrit finalement :

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\hbar}{2} (\dot{\theta}_c/2 - \dot{\theta}) (a_1^\dagger a_1 - a_0^\dagger a_0) - V_0 (a_0^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_0) + \left( \int g |\psi_0(\mathbf{r})|^4 d^3\mathbf{r} \right) a_0^\dagger a_0 a_1^\dagger a_1 . \quad (8.29)$$

## 8.2.2 Énergie du condensat et interprétation

Les  $N$  particules du condensat sont *a priori* dans une superposition des états  $J = 0$  et  $J = 1$ . On note, pour plus de commodité dans la suite, les poids respectifs de ces deux états  $\cos(\chi/2)$  et  $\sin(\chi/2)$ . La fonction d'onde du condensat s'écrit alors :

$$|\Psi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left( \hat{a}_0^\dagger \cos \frac{\chi}{2} + \hat{a}_1^\dagger \sin \frac{\chi}{2} \right)^N |0\rangle , \quad (8.30)$$

et l'énergie associée :

$$E(\chi) = \langle \Psi_N | \hat{H}_{\text{eff}} | \Psi_N \rangle . \quad (8.31)$$

On obtient après calcul l'expression de l'énergie en fonction du paramètre  $\chi$  :

$$E(\chi)/N = \frac{\hbar}{2} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_c/2) \cos \chi - V_0 \sin \chi + \frac{1}{4} \int g N |\psi_0(\mathbf{r})|^4 d^3\mathbf{r} \sin^2 \chi \quad (8.32)$$

On a représenté sur la figure 8.2 plusieurs courbes d'énergie  $E(\chi)$  pour différentes valeurs de  $\dot{\theta}$ , dans le cas de faible anisotropie (première ligne) et dans le cas de forte anisotropie (deuxième ligne). On voit clairement sur la première ligne apparaître le phénomène de métastabilité : si l'on part d'une vitesse de rotation plutôt élevée ( $\dot{\theta} > \dot{\theta}_c/2$ ) et que l'on ralentit la rotation en-dessous de la valeur critique ( $\dot{\theta} < \dot{\theta}_c/2$ ), le système reste dans un état où le paramètre  $\chi$  est proche de  $\pi$ , ce qui correspond à un état proche de  $J = 1$ . Dans le cas inverse (forte anisotropie, deuxième ligne), on voit que le paramètre  $\chi$  suit continûment les variations de  $\dot{\theta}$ , sans effet de métastabilité.

Ce phénomène peut s'interpréter de la manière suivante : pour qu'une ligne de vortex entre ou sorte de l'anneau, elle doit forcément traverser la périphérie de celui-ci, où se trouvent les atomes, ce qui implique en particulier que la densité atomique s'annule quelquepart. Naturellement, les interactions répulsives ont tendance à s'opposer à ce phénomène. À l'inverse, une asymétrie du récipient rend certains endroits plus favorables que d'autres à une annulation de la densité atomique, ce qui favorise l'entrée et la sortie d'éventuelles lignes de vortex et donc tend à contrecarrer le phénomène de métastabilité.

REMARQUE : lorsque  $V_0 = 0$  et  $g = 0$ , on a  $\chi = \pi$  si  $\dot{\theta} > \dot{\theta}_c/2$  et  $\chi = 0$  sinon, ce qui veut dire qu'en l'absence de couplage, le système ne peut se trouver que dans les états "non mélangés"  $J = 0$  et  $J = 1$ , conformément aux résultats de la première partie de ce chapitre.

### 8.3 Conclusion : vers un gyrolaser atomique ?

On a présenté dans ce chapitre quelques résultats issus de la littérature et qui illustrent les propriétés très particulières des superfluides en rotation. On a vu que dans un condensat de Bose-Einstein torique, la rotation peut se traduire par l'établissement d'un supercourant atomique ou, de manière équivalent, d'une variation de la phase dans la direction longitudinale. Le *toy model* de Leggett, présenté dans ce chapitre, montre que l'état du système dépend continûment de la vitesse de rotation appliquée à la condition que l'énergie d'asymétrie  $V_0$  soit supérieure à l'énergie moyenne d'interaction par particule  $g$ . Cette condition n'est pas sans rappeler la condition d'établissement du régime de battement dans le gyrolaser à état solide (condition 3.13). Dans les deux cas, le système est sensible à la rotation à la condition qu'un couplage additionnel et linéaire favorable compense les effets d'un couplage naturellement présent et non linéaire défavorable. Cette analogie est une illustration des passerelles qui peuvent exister entre l'étude des couplages entre modes dans différents systèmes ayant des conditions aux limites périodiques [54].

La présence d'une asymétrie du tore qui contient le condensat est donc bénéfique à deux points de vue : d'une part elle permet d'augmenter la sensibilité à la rotation en permettant au système de se retrouver dans une superposition d'états et d'autre part elle permet de faire disparaître le phénomène de métastabilité, incompatible d'une utilisation en tant que gyromètre.

Un senseur de rotation bâti sur ce principe devra donc être suffisamment asymétrique. On peut alors imaginer mesurer la vitesse de rotation en analysant le profil de densité le long du tore, celui-ci étant donné dans le cas du *toy model* par la relation :

$$|\Psi(\theta)|^2 = 1 + \sin \chi \cos \theta . \quad (8.33)$$

D'autres méthodes ont été également suggérées. Par exemple l'analyse du profil condensat après un temps d'expansion libre (ou temps de vol) permettrait de remonter à une information sur le nombre de vortex présents dans le tore [166]. On pourrait également envisager une analyse en impulsion du condensat par spectroscopie de Bragg [178].

# Chapitre 9

## Description unidimensionnelle d'un condensat torique

Le rôle clé joué par la forme géométrique du piège contenant le condensat de Bose-Einstein nous a amené à nous intéresser plus précisément au moyen de prendre en compte, de façon quantitative, une éventuelle déformation du tore par rapport à sa forme circulaire. Cette démarche nous a conduit à développer un formalisme permettant la description unidimensionnelle d'un guide d'onde atomique en rotation dans le cas d'un fort confinement transverse. C'est ce formalisme, développé en collaboration avec le groupe de l'Université de Trente [59], que l'on présente dans ce chapitre. Après avoir posé le problème sur des bases mathématiques précises, on expose la procédure de découplage successivement en l'absence puis en la présence d'une rotation. Les effets des interactions atomiques et d'une possible variation longitudinale de la fréquence de piégeage transverse sont également discutés.

### 9.1 Description quantitative du guide d'onde atomique

On considère un guide d'onde atomique le long d'une courbe  $\mathcal{C}$ , définie paramétriquement par le vecteur  $\mathbf{r}_{\mathcal{C}}(s)$ , où  $s$  est l'abscisse curviligne le long de  $\mathcal{C}$ . En chaque point de la courbe, on définit le repère de Frenet local  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  par :

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}_{\mathcal{C}}}{ds} \quad ; \quad \kappa \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad ; \quad \tau \mathbf{b} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} + \kappa \mathbf{t} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}, \quad (9.1)$$

où  $\kappa$  et  $\tau$  désignent respectivement la courbure et la torsion de  $\mathcal{C}$  [152]. On définit alors, au voisinage de  $\mathcal{C}$ , un système local de coordonnées  $(s, u, v)$  par :

$$\mathbf{r}(s, u, v) = \mathbf{r}_{\mathcal{C}}(s) + u\mathbf{N}(s) + v\mathbf{B}(s), \quad (9.2)$$

le repère  $(\mathbf{t}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$  se déduisant du repère de Frenet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  par une rotation autour de  $\mathbf{t}$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

où l'angle  $\theta$  vérifie :

$$\frac{d\theta}{ds} = -\tau. \quad (9.3)$$

Un tel choix de coordonnées, suggéré par [179], permet d'obtenir une expression très simple pour le gradient<sup>1</sup>, qui ne dépend en particulier plus de la torsion qu'à travers le paramètre angulaire  $\theta$ . Plus précisément, on a :

$$\nabla = \mathbf{t} h^{-1} \partial_s + \mathbf{N} \partial_u + \mathbf{B} \partial_v , \quad (9.4)$$

où l'on a défini la fonction  $h(s, u, v)$  comme suit :

$$h(s, u, v) = 1 - \kappa (u \cos \theta - v \sin \theta) . \quad (9.5)$$

On suppose que le potentiel de piégeage du guide d'onde assure en tout point un confinement harmonique perpendiculaire à la tangente locale, selon l'expression :

$$V_{\perp}(u, v) = \frac{M}{2} (\omega_u^2 u^2 + \omega_v^2 v^2) , \quad (9.6)$$

où  $M$  est la masse atomique et  $\omega_{u,v}$  sont les fréquences de piégeage transverse respectivement dans les directions  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{B}$  (qui, rappelons-le, peuvent dépendre de la coordonnée longitudinale  $s$ ). On supposera dans tout ce qui suit, pour simplifier, que ces fréquences sont égales ( $\omega_u = \omega_v = \omega_{\perp}$ ).

L'hypothèse principale de notre traitement est de supposer que l'extension de l'état fondamental du piège harmonique transverse, donnée par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_{\perp}}} , \quad (9.7)$$

est très inférieure aux dimensions et longueurs de variation typique de  $\mathcal{C}$ , ce qui s'écrit :

$$\kappa\sigma \ll 1 \quad |\kappa'|\sigma \ll |\kappa| \quad |\kappa''|\sigma \ll \kappa^2 , \quad (9.8)$$

où le "prime" désigne la dérivation par rapport à la coordonnée longitudinale  $s$ . Comme on l'a vu précédemment, lorsque le guide d'onde est au repos dans un référentiel en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$ , on peut écrire une équation de Schrödinger stationnaire dans le référentiel tournant sous la forme suivante :

$$\mu\Psi(s, u, v) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 - \Omega \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + V_{\perp}(u, v) + V_{\text{ext}}(s) \right] \Psi(s, u, v) , \quad (9.9)$$

où l'opérateur quantité de mouvement est défini par  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ , le gradient prenant la forme 9.4 dans le système de coordonnées  $(s, u, v)$ . Le terme  $V_{\text{ext}}(s)$  décrit tout potentiel agissant sur les atomes dans la direction longitudinale, en plus du potentiel de piégeage. Ce terme est supposé petit devant l'énergie de confinement transverse  $\hbar\omega_{\perp}$ .

La condition de normalisation de la fonction d'onde  $\Psi$  s'écrit, en tenant compte de la métrique associée à  $(s, u, v)$  :

$$\iiint ds du dv h(s, u, v) |\Psi(s, u, v)|^2 = 1 . \quad (9.10)$$

La quantité  $h(s, u, v)$ , définie plus haut (équation 9.5), n'est pas factorisable en général en un produit d'une fonction de la variable longitudinale  $s$  et d'une fonction des variables

<sup>1</sup>Voir par exemple [152] pour une définition du gradient dans un système de coordonnées arbitraire.

transverses  $(u, v)$ . On est donc amené, afin de pouvoir découpler les dynamiques longitudinale et transverse, à introduire la nouvelle fonction d'onde  $\Phi = \sqrt{h}\Psi$ , dont la condition de normalisation prend la forme simple suivante :

$$\iiint ds du dv |\Phi(s, u, v)|^2 = 1. \quad (9.11)$$

En insérant l'expression de  $\Phi(s, u, v)$  dans l'équation 9.9, on montre que son évolution est régie par le hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{\hbar^2}{2M} \left[ \partial_s (h^{-2} \partial_s) + \partial_{uu}^2 + \partial_{vv}^2 + \frac{\kappa^2}{4h^2} + \frac{5h'^2}{4h^4} - \frac{h''}{2h^3} \right] \\ & - \sqrt{h} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \frac{1}{\sqrt{h}} + V_{\perp}(u, v) + V_{\text{ext}}(s). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Cette équation a été obtenue dans [179] pour le cas  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ . Les auteurs de cette référence séparent les dynamiques transverse et longitudinale en passant à la limite adiabatique, définie par  $h \rightarrow 1$ ,  $h' \ll \kappa$  et  $\sqrt{h''} \ll \kappa$ . Ils démontrent ainsi l'existence d'un potentiel longitudinal, proportionnel au carré de la courbure locale. Toutefois cette approche n'est pas facilement généralisable au cas  $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ , ce qui a motivé le traitement que l'on présente dans ce qui suit.

## 9.2 Procédure de découplage en l'absence de rotation

### 9.2.1 Description de la procédure

On considère tout d'abord le cas simplifié d'un guide d'onde sans rotation ( $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ ) avec une fréquence de piégeage transverse indépendante de la coordonnée longitudinale ( $\omega'_{\perp} = 0$ ). On écrit alors la fonction d'onde  $\Phi$  comme le produit  $\Phi(s, u, v) = f_s(u, v) g(s)$  d'une fonction d'onde longitudinale  $g(s)$  et d'une fonction d'onde transverse  $f_s(u, v)$ , cette dernière pouvant *a priori* dépendre de la coordonnée longitudinale  $s$ . La condition de normalisation s'écrit, à l'aide de ces nouvelles fonctions :

$$\begin{cases} \iint du dv |f_s(u, v)|^2 = 1, \\ \int ds |g(s)|^2 = 1. \end{cases} \quad (9.13)$$

La méthode que nous présentons ici s'inspire de l'approximation de Born-Oppenheimer [180], pour laquelle les degrés de liberté électroniques, très rapides, sont réduits à un potentiel moyen agissant sur le mouvement du noyau.

Pour une fonction d'onde longitudinale donnée  $g(s)$ , on définit un hamiltonien transverse  $\hat{h}$  à la position  $s$  par :

$$\hat{h} f_s \equiv \hat{H}(f_s g). \quad (9.14)$$

L'hypothèse principale de notre approche consiste à supposer que le mouvement transverse est gelé dans l'état fondamental  $f_s^0$  de  $\hat{h}$ . Notre but est de réduire le problème à

trois dimensions à un problème à une dimension, en intégrant sur les degrés de liberté transverses. L'équation à une dimension que l'on recherche prend alors la forme suivante :

$$\mu g(s) = \iint du dv f_s^{0*}(u, v) \hat{H} f_s^0(u, v) g(s) \equiv \hat{H}_g g(s). \quad (9.15)$$

Il est possible d'obtenir une expression explicite de  $\hat{H}_g$  en utilisant une approche perturbative [181], après avoir séparé dans  $\hat{h}$  les contributions dues respectivement aux degrés transverses et longitudinal, à savoir :

$$\hat{h} = H_0 + W, \quad (9.16)$$

avec :

$$H_0 = g(s) \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} (\partial_{uu}^2 + \partial_{vv}^2) + V_{\perp}(u, v) \right], \quad (9.17)$$

et :

$$W = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[ h^{-2} (g \partial_{ss}^2 + 2g' \partial_s + g'') - \frac{2h'}{h^3} (g \partial_s + g') + \frac{g \kappa^2}{4h^2} + \frac{5gh'^2}{4h^4} - \frac{gh''}{2h^3} \right] + gV_{\text{ext}}. \quad (9.18)$$

On traite perturbativement le hamiltonien  $W$  par rapport à  $H_0$ , qui, à un facteur multiplicatif  $g$  près, correspond à un oscillateur harmonique d'énergie  $\hbar\omega_{\perp}$ . Tous les termes de  $W$  sont très petits devant  $|g|\hbar\omega_{\perp}$  à condition que :

$$|g''| \ll |g|/\sigma^2 \quad \text{and} \quad |g'| \ll |g|/\sigma. \quad (9.19)$$

Ces conditions seront vérifiées à la fin de notre procédure de découplage, à l'aide des conditions 9.8, afin de garantir l'auto-consistance de la méthode.

La théorie des perturbations au premier ordre, avec pour petit paramètre  $\kappa^2\sigma^2$ , nous permet de remplacer  $f_s^0$  dans l'équation 9.15 par la fonction d'onde  $f_0$  de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique de fréquence  $\omega_{\perp}$ , donnée par :

$$f_0(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-(u^2+v^2)/(2\sigma^2)}, \quad (9.20)$$

ce qui mène à l'équation de Schrödinger unidimensionnelle effective suivante pour la fonction d'onde longitudinale  $g(s)$  :

$$\mu g = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 g}{ds^2} + \left[ \hbar\omega_{\perp} + V_{\text{ext}}(s) - \frac{\hbar^2 \kappa^2(s)}{8M} \right] g. \quad (9.21)$$

On identifie facilement sur cette équation le terme d'énergie cinétique, le terme d'énergie de point zéro de l'oscillateur harmonique transverse à 2 dimensions et le (faible) potentiel extérieur  $V_{\text{ext}}$ . Quant au dernier terme de l'équation 9.21, il s'agit d'un potentiel effectif proportionnel au carré de la courbure, comme il avait été prédit dans [179]. La régularité du guide d'onde, fixée par les conditions 9.8, garantit le respect des conditions 9.19, ce qui assure l'auto-consistance de cette approche.

### 9.2.2 Effet d'une variation longitudinale de $\omega_{\perp}$

On considère dans ce qui suit le cas où la fréquence de piégeage transverse  $\omega_{\perp}$  dépend de la coordonnée longitudinale  $s$ . Une telle dépendance entraîne une variation longitudinale de la fonction d'onde transverse  $f_{0s}$ , introduisant de nouveaux termes dans le hamiltonien  $\hat{H}_g$  issus des dérivées longitudinales de  $f_{0s}$ . En appliquant la même procédure que précédemment, et en se limitant au premier ordre en  $\kappa^2\sigma^2$ , on obtient l'équation effective unidimensionnelle suivante pour  $g(s)$  :

$$\mu g = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2g}{ds^2} + \left[ \hbar\omega_{\perp} + V_{\text{ext}} - \frac{\hbar^2\kappa^2}{8M} + \frac{\hbar^2}{16M} \frac{\omega_{\perp}'^2}{\omega_{\perp}^2} \right] g. \quad (9.22)$$

La dépendance longitudinale  $\omega_{\perp}$  induit non seulement un potentiel longitudinal égal à l'énergie de point zéro  $\hbar\omega_{\perp}(s)$ , mais aussi une contribution proportionnelle à  $\omega_{\perp}'^2/\omega_{\perp}^2$ . Pour rester consistant avec notre procédure de découplage, on doit avoir  $|\omega_{\perp}'| \lesssim \kappa\omega_{\perp}$  et  $|\omega_{\perp}''| \lesssim \kappa^2\omega_{\perp}$ . Cela implique en particulier que le terme proportionnel à  $\omega_{\perp}'^2/\omega_{\perp}^2$  est très petit devant le terme d'énergie de point zéro.

Dans le but de vérifier le bien-fondé de ce nouveau terme de potentiel proportionnel à  $\omega_{\perp}'^2/\omega_{\perp}^2$ , l'équation de Schrödinger à deux dimensions a été intégrée numériquement en coordonnées cartésiennes dans le cas d'un guide droit avec un potentiel de confinement transverse  $\omega_{\perp}(s)$  modulé. Afin de mettre en évidence l'effet du  $\omega_{\perp}'^2/\omega_{\perp}^2$ , le potentiel extérieur  $V_{\text{ext}}$  a été choisi pour compenser exactement les modulations de l'énergie de point zéro liées au confinement harmonique transverse, ce qui s'écrit  $\hbar\omega_{\perp}(s)/2 + V_{\text{ext}}(s) = 0$ . Comme on peut le voir sur la figure 9.1, la modulation de densité résiduelle possède la même périodicité que  $\omega_{\perp}'^2/\omega_{\perp}^2$ , et est en bon agrément avec la solution numérique de l'équation de Schrödinger unidimensionnelle effective 9.22.

### 9.2.3 Rôle des interactions atomiques

Dans une configuration à trois dimensions, les interactions de champ moyen sont présentes dans l'équation de Gross-Pitaevskii [158] sous la forme du terme non linéaire suivant :

$$V_{\text{int}} = g_{3D}N_0 \left| \frac{f_s(u, v)g(s)}{\sqrt{h(s, u, v)}} \right|^2, \quad (9.23)$$

où l'on a noté  $g_{3D} = 4\pi\hbar^2 a_{3D}/M$ ,  $a_{3D}$  étant la longueur de diffusion à trois dimensions et  $N_0$  le nombre total d'atomes dans le condensat<sup>2</sup>. On sait, grâce aux travaux sur les condensats de Bose-Einstein dans des réseaux optiques, qu'il est en général difficile de découpler les mouvements transverses et longitudinal en présence d'interactions.

Dans notre cas, la présence d'interactions impose à la fonction d'onde transverse  $f_0(u, v)$  d'être la solution de plus basse énergie de l'équation de Gross-Pitaevskii transverse suivante :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_{uu}^2 + \partial_{vv}^2) + N_0 g_{3D} |g(s)|^2 |f_{0s}(u, v)|^2 + V_{\perp}(u, v) \right] f_{0s}(u, v) = \mu_{\perp} f_{0s}(u, v), \quad (9.24)$$

<sup>2</sup>Il convient de ne pas confondre  $g_{3D}$ , défini ici, avec la fonction d'onde longitudinale  $g(s)$ .

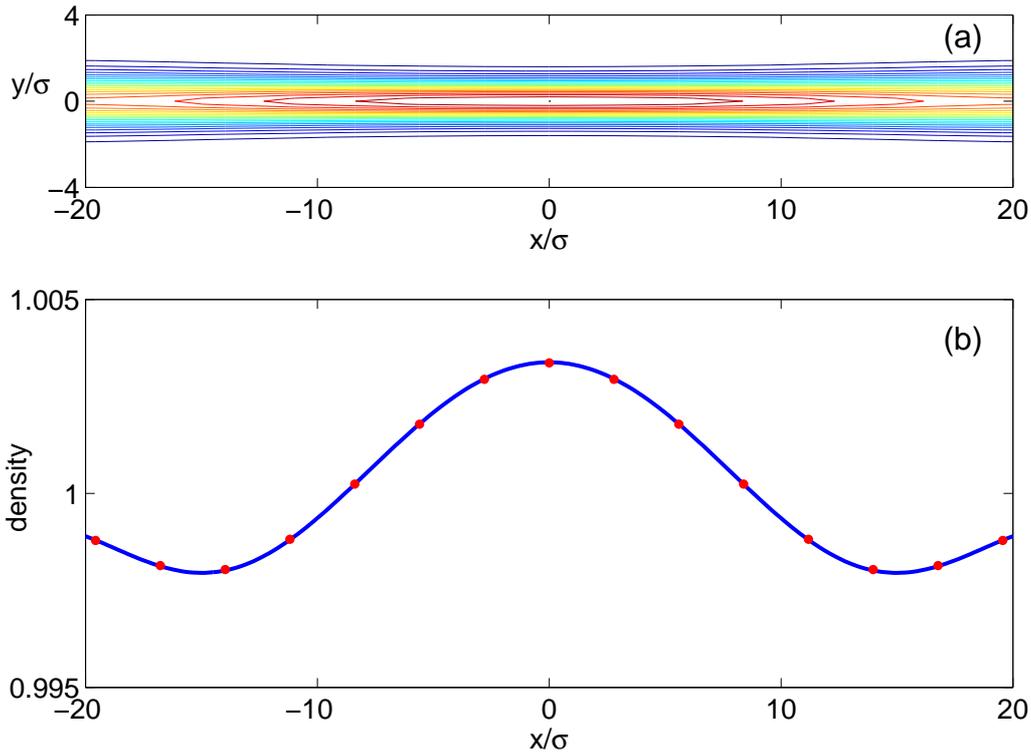


FIGURE 9.1 – (a) Résultat de l'intégration numérique de l'équation de Schrödinger à deux dimensions dans le cas d'un guide d'onde droit avec un fort confinement transverse dont la fréquence dépend de la position longitudinale selon la loi  $\omega_{\perp}(x) = \omega_{\perp} \sqrt{1 + 4(\delta\omega_{\perp}/\omega_{\perp}) \cos(\pi x/\lambda)}$ . Les paramètres utilisés sont :  $\delta\omega_{\perp}/\omega_{\perp} = 0.1$ ,  $\lambda/\sigma \simeq 22.4$ . Un potentiel extérieur tel que  $V_{\text{ext}} + V_{\perp} = M\omega_{\perp}(x)^2 y^2/2 - \hbar\omega_{\perp}(x)/2$  a été introduit afin de compenser les modulations spatiales de l'énergie de point zéro. (b) Comparaison entre la densité à deux dimensions intégrée le long de  $y$  (points rouges) et la solution de l'équation de Schrödinger effective (ligne continue). Simulations numériques effectuées à l'Université de Trento par I. Carusotto.

qui résulte de l'inclusion du terme d'interactions de champ moyen dans le hamiltonien transverse 9.17. Dans cette équation,  $\mu_{\perp}$  désigne le potentiel chimique transverse. Dans le cas général, il faut résoudre l'équation 9.24 de façon auto-consistante avec l'équation d'évolution de la fonction d'onde longitudinale  $g(s)$ , ce qui est un problème ardu, y compris d'un point de vue numérique.

Une expression très simple peut toutefois être obtenue dans la limite où les interactions sont suffisamment faibles par rapport au confinement transverse pour ne pas perturber le profil de la fonction d'onde transverse  $f_0(u, v)$ . Dans cette limite, il est possible d'inclure les interactions sous la forme d'un terme de champ moyen proportionnel à la densité locale, ce qui permet alors d'obtenir l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle suivante :

$$(\mu - \hbar\omega_{\perp})g(s) = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2g(s)}{ds^2} + V_{\text{ext}}(s)g(s) - \frac{\hbar^2\kappa^2(s)}{8M}g(s) + g_{1D}N_0|g(s)|^2g(s), \quad (9.25)$$

où la constante effective de couplage unidimensionnelle est définie par [182] :

$$g_{1D} = \frac{4a_{3D}\hbar^2}{M\sigma^2}. \quad (9.26)$$

### 9.3 Prise en compte des effets de la rotation

On considère maintenant le cas, plus général, d'un guide d'onde en rotation. Dans un souci de simplicité, on supposera désormais que la courbe  $\mathcal{C}$  est incluse dans le plan  $(x, y)$ , que le vecteur rotation  $\mathbf{\Omega}$  est orthogonal à ce plan et que l'origine du vecteur  $\mathbf{r}_{\mathcal{C}}$  coïncide avec le centre de la rotation. On se restreindra de plus dans ce qui suit au cas où  $\omega_{\perp}$  est indépendant de la position longitudinale le long de la courbe  $\mathcal{C}$ . En appliquant la même procédure que dans la partie 9.2, le hamiltonien transverse peut se décomposer comme suit :

$$\hat{h} = \tilde{H}_0 + \tilde{W}, \quad (9.27)$$

avec :

$$\tilde{H}_0 = \frac{\hbar^2g}{2M} \left( i\partial_u - \frac{M\Omega r_t}{\hbar} \right)^2 - \frac{\hbar^2g}{2M} \partial_{vv}^2 + gV_{\perp}, \quad (9.28)$$

et :

$$\tilde{W} = W + i\hbar\Omega \left[ \frac{gr_t\kappa}{2h} + \frac{u}{h}g' - \frac{guh'}{2h^2} + r_n g' - \frac{gr_n h'}{2h^2} + \frac{gu}{h}\partial_s + \frac{gr_t}{h}\partial_s \right] - \frac{1}{2}M\Omega^2 r_t^2 g, \quad (9.29)$$

où l'on a utilisé les notations suivantes :  $r_t = \mathbf{r}_{\mathcal{C}} \cdot \mathbf{t}$  et  $r_n = \mathbf{r}_{\mathcal{C}} \cdot \mathbf{n}$ . L'état fondamental de  $\tilde{H}_0$  s'écrit maintenant :

$$\tilde{f}_{0s}(u, v) = f_0(u, v) e^{-iM\Omega r_t u/\hbar}. \quad (9.30)$$

En supposant que la vitesse de rotation n'est pas trop importante ( $|\Omega| \ll \omega_{\perp}$  et  $M\Omega^2 \mathbf{r}_{\mathcal{C}}^2 \ll \hbar\omega_{\perp}$ ), il est possible de montrer, par un calcul explicite des dérivées longitudinales de  $\tilde{f}_{0s}$ , que les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}_{0s}}{\partial s} \right| \ll \left| \frac{\tilde{f}_{0s}}{\sigma} \right| \quad \text{and} \quad \left| \frac{\partial^2 \tilde{f}_{0s}}{\partial s^2} \right| \ll \left| \frac{\tilde{f}_{0s}}{\sigma^2} \right|, \quad (9.31)$$

ce qui permet de traiter  $\tilde{W}$  comme une petite perturbation par rapport à  $\tilde{H}_0$ . On a alors, au premier ordre en  $\kappa^2\sigma^2$  :

$$\begin{aligned}\hat{H}_g g(s) &= \int \int du dv \tilde{f}_{0s}^* (\tilde{H}_0 + \tilde{W}) \tilde{f}_{0s} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2M} g'' + \left[ \hbar\omega_{\perp} + V_{\text{ext}} - \frac{\hbar^2 \kappa^2}{8M} - \frac{M\Omega^2}{2} r_t^2 \right] g + i\hbar\Omega \left[ \frac{r_t \kappa}{2} g + r_n g' \right],\end{aligned}\quad (9.32)$$

d'où finalement l'équation suivante pour le guide d'onde en rotation :

$$\mu g = \frac{1}{2M} \left[ i\hbar \frac{d}{ds} + M \mathbf{t} \cdot (\mathbf{r}_C \times \boldsymbol{\Omega}) \right]^2 g + \left[ \hbar\omega_{\perp} + V_{\text{ext}} - \frac{\hbar^2 \kappa^2}{8M} - \frac{1}{2} M \Omega^2 \mathbf{r}_C^2 \right] g, \quad (9.33)$$

où l'on a utilisé l'identité  $dr_n/ds = \kappa r_t$ . Si l'on compare avec le cas sans rotation (équation 9.21), on constate la présence de termes supplémentaires, à savoir un terme de jauge dans l'énergie cinétique en référentiel tournant, qui affecte principalement la phase du condensat, et un terme d'énergie centrifuge, que l'on peut qualifier de classique. Ce dernier, tout comme le terme de courbure, le potentiel extérieur et le terme d'énergie de point zéro, peuvent servir à transférer au condensat un moment cinétique, afin de permettre l'établissement d'une circulation de phase le long du guide d'onde.

## 9.4 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre un formalisme original, inspiré de l'approximation de Born-Oppenheimer, qui permet de restreindre à la dimension longitudinale la description d'un guide d'onde atomique dans le cas d'un fort confinement transverse. Plus précisément, ce formalisme permet d'écrire une équation de Schrödinger unidimensionnelle pour un condensat dans le guide d'onde torique en rotation. Une telle équation peut constituer un point de départ pour l'étude analytique ou numérique d'un tel système. Elle permet de simplifier considérablement les analyses, tout en rendant compte quantitativement des principaux effets, notamment d'origine géométrique.

# Chapitre 10

## Quelques applications possibles

On s'intéresse dans ce dernier chapitre à deux applications concrètes du formalisme présenté au chapitre précédent. Dans un premier temps, on considère le cas d'un guide d'onde elliptique, pour lequel il est possible de prédire analytiquement les effets de la courbure en fonction des paramètres géométrique de l'ellipse ; cela permet *a posteriori* de vérifier, en comparant les simulations numériques à une et à plusieurs dimensions, les prédictions de notre formalisme. Dans un second temps, on tente de faire le lien entre la situation décrite par notre formalisme et une possible réalisation expérimentale (inspirée du laser à atome de l'Institut d'Optique déjà mentionné) ; en particulier, on montre que les hypothèses de fort confinement transverse effectuées au chapitre précédent sont réalistes au vu des différents paramètres expérimentaux qu'il est possible d'atteindre en pratique.

### 10.1 Cas du guide d'onde elliptique

On suppose dans la première partie de ce chapitre que l'on se trouve dans la situation générale décrite au chapitre précédent, avec en plus la particularité que la courbe  $\mathcal{C}$  est une ellipse. Il est alors possible, en utilisant conjointement le système de coordonnées elliptiques et les résultats du chapitre précédent, d'écrire une équation de Schrödinger unidimensionnelle pour le guide d'onde elliptique en fonction des seuls paramètres de définition de l'ellipse (taille et excentricité). Cela permet dans un deuxième temps d'estimer quantitativement la variation de densité (lorsque le guide d'onde est au repos) induite par la variation de courbure le long de l'ellipse, et de comparer cette estimation au résultat de simulations numériques à plusieurs dimensions.

#### 10.1.1 Coordonnées elliptiques

Étant donné un paramètre  $a$ , on définit les coordonnées elliptiques  $(u, v)$  en les reliant aux coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  par :

$$\begin{cases} x = a \cosh u \cos v , \\ y = a \sinh u \sin v , \\ z = z . \end{cases} \quad (10.1)$$

L'équation  $u = u_0$  désigne alors l'ellipse de foyers  $(a, 0)$  et  $(-a, 0)$  (où ces dernières

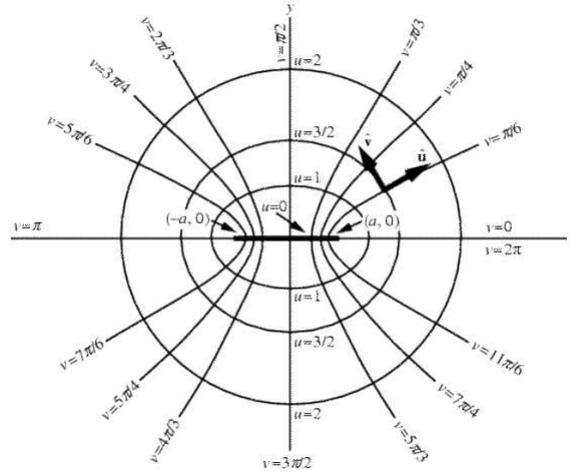


FIGURE 10.1 – Les coordonnées elliptiques désignent les points du plan par intersection entre une ellipse et une hyperbole de mêmes foyers. Figure tirée de [152].

coordonnées s'entendent cartésiennes), et dont les dimensions des demi-petit axe et grand axe valent respectivement  $a \sinh u_0$  et  $a \cosh u_0$  (voir figure 10.1). Dans ce système de coordonnées, le gradient [152] et le laplacien s'écrivent :

$$\nabla = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{e}_v \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \nabla^2 = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (10.2)$$

où l'on a introduit le facteur  $h(u, v)$  suivant :

$$h = a \sqrt{\cosh^2 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cos^2 v} = a \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}. \quad (10.3)$$

Il est possible de calculer explicitement, grâce aux coordonnées elliptiques, la courbure de l'ellipse. Cela donne :

$$\kappa(v) = \frac{\cosh u_0 \sinh u_0}{a(\sinh^2 u_0 + \sin^2 v)^{3/2}}. \quad (10.4)$$

### 10.1.2 Validité de la condition (9.8) dans le cas de l'ellipse

On rappelle l'hypothèse fondamentale utilisée dans notre formalisme de découplage des degrés de liberté transverses et longitudinal (conditions 9.8) :

$$\kappa \sigma \ll 1, \quad \kappa' \sigma \ll \kappa \quad \text{and} \quad \kappa'' \sigma \ll \kappa^2. \quad (10.5)$$

Dans le cas de l'ellipse, l'expression explicite de la courbure 10.4 permet d'évaluer la validité des conditions ci-dessus. Par exemple, la première de ces conditions,  $\kappa \sigma \ll 1$ , est vérifiée tant que :

$$\sigma \ll a \sinh u_0 \tanh u_0, \quad (10.6)$$

ce qui se réécrit en terme de l'ellipticité  $e$ , définie par  $e = 1/\cosh^2 u_0$  :

$$\sigma \ll a \sinh u_0 \sqrt{1 - e^2}. \quad (10.7)$$

Ainsi, pour des ellipses pas trop aplaties (c'est-à-dire pour  $e$  pas trop proche de 1), la condition  $\kappa\sigma \ll 1$  est équivalente à l'hypothèse de fort confinement  $\sigma \ll a \sinh u_0$ . On montre de même, par un calcul explicite des dérivées successives de  $\kappa$  (dans ce contexte, le prime désigne la dérivée par rapport à  $\tilde{v}$ ), que les conditions  $|\kappa'|\sigma \ll \kappa$  et  $|\kappa''|\sigma \ll \kappa^2$  sont automatiquement vérifiées grâce à l'hypothèse de fort confinement tant que l'ellipticité n'est pas trop importante (plus précisément tant que  $e \lesssim 0.3$ ).

Il est également possible de vérifier explicitement ces conditions. Par exemple, on considère un guide d'onde défini par  $\sigma = 1$ ,  $a = 250$  et  $u_0 = 1,5$ . Avec ces valeurs, l'hypothèse de fort confinement est vérifiée, puisque l'on a  $a \sinh(u_0) > 500 \gg \sigma = 1$ . On montre par ailleurs que l'on a  $1,5 \cdot 10^{-3} < \kappa < 2,1 \cdot 10^{-3}$ ,  $\kappa' < 10^{-6}$  et  $\kappa'' < 5 \cdot 10^{-9}$ , ce qui prouve que les conditions 9.8 sont vérifiées. Cela n'est pas surprenant, puisque la condition de fort confinement est vérifiée, et puisque  $e \simeq 0,18 < 0,3$ .

### 10.1.3 Coordonnées au voisinage de l'ellipse

On suppose, dans ce qui suit, que le guide d'onde atomique est défini par un confinement harmonique transverse le long de l'ellipse définie par l'équation  $u = u_0$ . L'hypothèse de fort confinement signifie alors que l'extension du paquet d'onde transverse  $\sigma$  est très inférieure à la taille des axes de l'ellipse, ce qui s'écrit :

$$\sigma \ll a \sinh u_0 . \quad (10.8)$$

Cette hypothèse implique en particulier  $\sigma \ll h$ . Pour un point de coordonnées elliptiques  $(u, v)$  localisé au voisinage de l'ellipse (c'est-à-dire à une distance inférieure à  $\sigma$ ), on a  $h|u - u_0| \lesssim \sigma$ , ce qui implique, d'après l'hypothèse de fort confinement,  $|u - u_0| \ll 1$ . Un développement limité au voisinage de l'ellipse permet alors d'écrire le vecteur position sous la forme :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cosh u_0 \cos v \\ a \sinh u_0 \sin v \end{pmatrix} + h(u_0, v)(u - u_0)\mathbf{e}_u . \quad (10.9)$$

Un point au voisinage de l'ellipse peut donc être repéré par son projeté sur l'ellipse (premier terme) et sa distance à l'ellipse (deuxième terme). On utilise, pour simplifier les écritures, la notation  $h_0(v) = h(u_0, v)$ . Le potentiel de confinement transverse prend alors la forme suivante :

$$V_{\text{ext}} = \frac{1}{2} M \omega^2 h_0^2 (u - u_0)^2 . \quad (10.10)$$

### 10.1.4 Lien avec le chapitre précédent, équation unidimensionnelle

Afin de faire le lien avec le système de coordonnées défini au chapitre précédent, on définit les nouvelles coordonnées  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  par :

$$\begin{cases} \tilde{u} = h_0(v)(u - u_0) , \\ d\tilde{v} = h(u_0, v)dv . \end{cases} \quad (10.11)$$

La coordonnée  $\tilde{v}$  est l'abscisse curviligne le long de l'ellipse, tandis que  $\tilde{u}$  est la distance du point à l'ellipse. Ces coordonnées sont donc l'équivalent des coordonnées  $x$  et  $y$  définies

au chapitre précédent. L'équation de Schrödinger unidimensionnelle dans le guide d'onde elliptique s'écrit donc :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 g}{\partial \tilde{v}^2} + \left( \frac{1}{2} \hbar \omega_{\perp} - \frac{\hbar^2 \kappa^2}{8M} \right) g = \mu g , \quad (10.12)$$

où  $\kappa$  est la courbure de l'ellipse, donnée on le rappelle par l'expression 10.4. Celle-ci est maximale pour  $v = 0$  et  $v = \pi$  (grand axe de l'ellipse) et minimale pour  $v = \pm\pi/2$  (petit axe de l'ellipse). Dans la limite d'un cercle de rayon  $R$ , définie par  $u_0 \rightarrow +\infty$  et  $a \rightarrow 0$  avec  $a \sinh u_0 \rightarrow R$ , la courbure est égale à  $1/R$  (ce qui est un résultat connu). Naturellement, il convient d'exprimer la courbure  $\kappa$  en fonction de  $\tilde{v}$  plutôt que  $v$ , afin de pouvoir intégrer l'équation 10.12 (qui porte sur des dérivées par rapport à  $\tilde{v}$ ). Pour cela, on peut utiliser la relation suivante, qui met en jeu une intégrale elliptique :

$$\tilde{v} = \int_0^v h(u_0, v) dv . \quad (10.13)$$

Une alternative au calcul de cette intégrale elliptique est d'écrire l'équation 10.12 en fonction de la variable  $v$ , en utilisant la relation différentielle  $d\tilde{v} = h(u_0, v)dv$ .

### 10.1.5 Solution perturbative de l'équation unidimensionnelle

On se propose dans ce qui suit, dans la limite d'une courbure suffisamment faible, de traiter perturbativement les effets de cette dernière afin d'estimer quantitativement la perturbation de densité qui en résulte. L'équation de Schrödinger, en l'absence du potentiel de courbure, s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \tilde{v}^2} = E_n g_n . \quad (10.14)$$

La fonction d'onde  $g_n$  associée à l'énergie  $E_n$  s'écrit, en raison des conditions aux limites périodiques :

$$g_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \left( n \frac{2\pi \tilde{v}}{L} \right) \quad \text{pour} \quad n > 0 , \quad (10.15)$$

et :

$$g_0 = \sqrt{\frac{1}{L}} , \quad (10.16)$$

où  $L$  est la longueur totale le long de l'ellipse, donnée par :

$$L = \oint d\tilde{v} = \int_0^{2\pi} h_0(v) dv . \quad (10.17)$$

L'énergie du mode  $n$  s'écrit quant à elle :

$$E_n = n^2 \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ML^2} . \quad (10.18)$$

La théorie des perturbations au premier ordre [181] donne alors :

$$|g\rangle = |g_0\rangle + \frac{1}{E_2} \int_{\tilde{v}=0}^{\tilde{v}=L} d\tilde{v} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \left( 2 \frac{2\pi \tilde{v}}{L} \right) \frac{\hbar^2 \kappa(v)^2}{8M} \sqrt{\frac{1}{L}} |g_2\rangle , \quad (10.19)$$

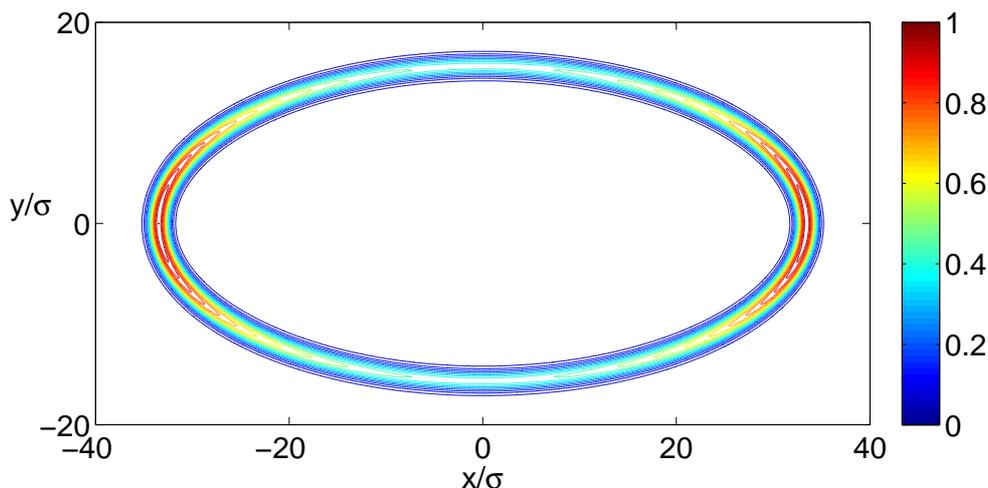


FIGURE 10.2 – Résultat de l'intégration numérique de l'équation de Schrödinger à deux dimensions dans le cas d'un guide d'onde elliptique avec fort confinement transverse. Paramètres utilisés : demi-grand axe 34.5 ; demi-petit axe 15.6 ;  $\sigma = 1$ . Simulations effectuées par C. Menotti.

ce qui donne :

$$|g\rangle = |g_0\rangle + \frac{\sqrt{2}L}{16\pi^2} \int_{v=0}^{v=2\pi} h_0(v) dv \cos\left(\frac{4\pi\tilde{v}(v)}{L}\right) \kappa(v)^2 |g_2\rangle. \quad (10.20)$$

Comme on s'y attendait, la fonction d'onde de densité uniforme  $g_0$  est assortie d'une petite modulation de même période que la fonction  $\kappa^2$ . L'expression ci-dessus permet d'évaluer l'ordre de grandeur de cette modulation lorsque celle-ci n'est pas trop importante.

### 10.1.6 Simulations numériques

On présente dans ce qui suit le résultat de simulations numériques permettant de mettre en évidence, de façon qualitative puis quantitative, les effets du potentiel de courbure dans le cas d'un guide d'onde elliptique. La figure 10.2 montre la densité atomique à deux dimensions dans le cas d'un guide d'onde elliptique avec un confinement transverse harmonique de fréquence uniforme. On observe que la densité atomique n'est pas uniforme, et atteint son maximum aux endroits où la courbure est maximale en valeur absolue (c'est-à-dire au niveau du grand axe de l'ellipse). Ce résultat est en accord qualitatif avec nos prédictions.

D'un point de vue plus quantitatif, la figure 10.3 montre le résultat de la comparaison entre les simulations numériques de l'équation de Schrödinger habituelle à 2 dimensions et les simulations numériques de l'équation de Schrödinger effective unidimensionnelle 10.12 dans le cas d'un guide d'onde elliptique. On constate un accord remarquable entre les deux résultats, ce qui valide en partie la procédure de découplage présentée précédemment.

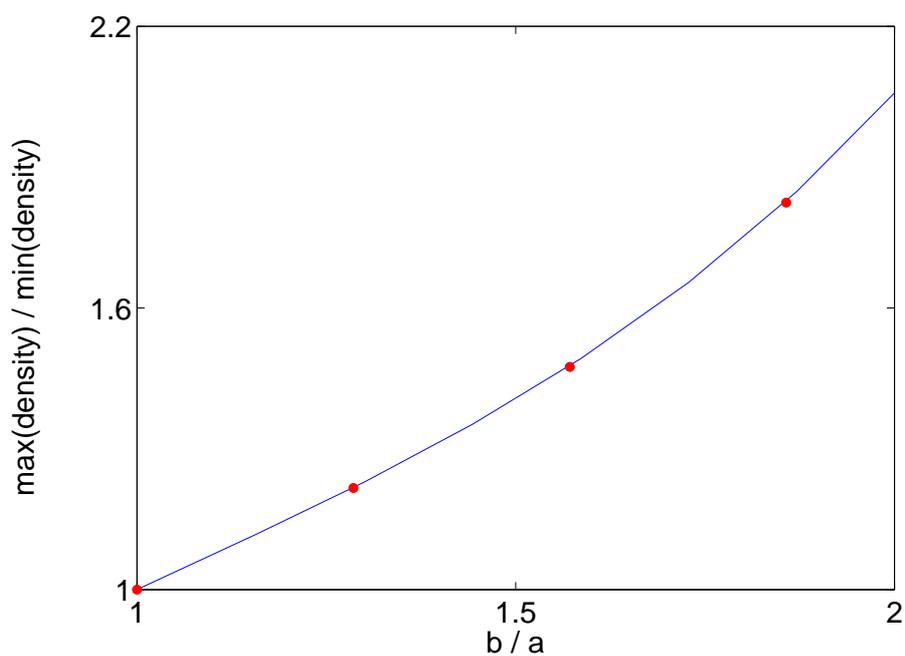


FIGURE 10.3 – Résultat de l'intégration numérique de l'équation de Schrödinger dans le cas d'un guide d'onde elliptique avec fort confinement transverse. La courbe montre le rapport entre les densités aux points extrêmes de l'ellipse, en fonction du rapport entre les longueurs des axes. Les points sont issus des simulations de l'équation de Schrödinger à deux dimensions en coordonnées cartésiennes, tandis que la ligne pleine provient des simulations de l'équation effective unidimensionnelle 9.21. Simulations effectuées par C. Menotti.

## 10.2 Vers une configuration expérimentale ?

La problématique du condensat de Bose-Einstein dans un piège torique n'est pas nouvelle, et la réalisation d'un tel dispositif, à l'aide d'un piège magnétique, fait actuellement l'objet de travaux importants [168, 169]. On propose dans la deuxième partie de ce chapitre une approche différente, fondée sur le piégeage optique des atomes. L'idée est d'utiliser une pince optique [183], dont le centre est déplacé le long d'une courbe fermée  $\mathcal{C}$  suffisamment rapidement pour que les atomes ne soient sensibles qu'à la valeur moyenne de l'intensité (plus concrètement, la fréquence du mouvement doit être très supérieure à la plus grande des fréquences de piégeage). Le potentiel ainsi créé présente l'avantage d'être plus facilement confinant qu'un piège magnétique, et également de forme plus facilement contrôlable (il est, par exemple, possible grâce à cette technique de changer la forme de  $\mathcal{C}$  en cours d'expérience ou de faire tourner les axes du guide sans avoir à mettre en œuvre de rotation physique). Un tel système pourrait être constitué d'un laser décalé vers le rouge, dont le point focal se déplacerait suite à une ou plusieurs réflexions sur des miroirs vibrants (l'utilisation de modulateurs acousto-optiques pourrait également être envisagée).

On décrit dans ce qui suit le potentiel moyen créé par un tel système en supposant que le déplacement de la pince optique a lieu dans le plan horizontal  $(x, y)$ , le confinement selon  $z$  étant supposé assuré par un autre moyen (par exemple une feuille de lumière). Le potentiel créé par une pince optique centrée en  $(0, 0)$  s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$V_{\text{tw}}(x, y) = V_{\text{tw}}^0 e^{-(x^2+y^2)/w^2}, \quad (10.21)$$

où l'on suppose  $V_{\text{tw}}^0 < 0$  afin d'avoir un potentiel confinant. Près du centre, on peut utiliser l'approximation suivante :

$$V_{\text{tw}}(x, y) \simeq V_{\text{tw}}^0 - \frac{V_{\text{tw}}^0}{w^2} x^2 - \frac{V_{\text{tw}}^0}{w^2} y^2, \quad (10.22)$$

si bien que le piège peut être considéré comme harmonique, avec la fréquence de piégeage suivante :

$$\omega_{\text{tw}} = \sqrt{\frac{2V_{\text{tw}}^0}{mw^2}}. \quad (10.23)$$

Supposons maintenant que le centre de ce piège optique est en mouvement le long de la courbe  $\mathcal{C}$ , avec une période de révolution  $T$ . Le potentiel moyen vu par les atomes est donné par l'expression suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{T} \int_0^T V_{\text{tw}}[x - x_{\mathcal{C}}(t), y - y_{\mathcal{C}}(t)] dt \quad (10.24)$$

Supposons pour commencer que le mouvement est circulaire, de rayon  $R$  et à une vitesse angulaire constante  $\omega$  :

$$\begin{cases} x_{\mathcal{C}}(t) = R \cos(\omega t), \\ y_{\mathcal{C}}(t) = R \sin(\omega t). \end{cases} \quad (10.25)$$

On décrit un point  $(x, y)$  au voisinage de cette trajectoire circulaire en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \theta, \\ y = (R + r) \sin \theta. \end{cases} \quad (10.26)$$

La distance entre le point  $(x, y)$  et un point quelconque du cercle  $(x_C, y_C)$  s'écrit alors :

$$[x - x_C(t)]^2 + [y - y_C(t)]^2 = 2R(R + r)[1 - \cos(\omega t - \theta)] + r^2, \quad (10.27)$$

d'où l'expression suivante pour le potentiel moyen :

$$V(x, y) = \frac{V_{\text{tw}}^0}{T} e^{-r^2/w^2} \int_0^T e^{-2R(R+r)[1-\cos(\omega t-\theta)]/w^2} dt. \quad (10.28)$$

On ne considère que les points qui sont au voisinage du cercle de rayon  $R$ , ce qui permet d'écrire  $|r| \ll R$ , d'où :

$$V(x, y) \simeq \frac{V_{\text{tw}}^0}{T} e^{-r^2/w^2} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2R^2[1-\cos(\omega t)]/w^2} dt. \quad (10.29)$$

On suppose de plus que la taille du spot lumineux est petite devant le rayon du cercle,  $R/w \gg 1$ . La principale contribution à l'intégrale est alors autour de  $t = 0$ , ce qui permet finalement d'écrire pour le potentiel moyen :

$$V(x, y) \simeq \frac{V_{\text{tw}}^0}{T} e^{-r^2/w^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-R^2\omega^2 t^2/w^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}w}{2\pi R} V_{\text{tw}}^0 e^{-r^2/w^2}. \quad (10.30)$$

Comme attendu, le résultat est indépendant de  $\theta$ . De plus, autour de  $r = 0$ , une expression approchée du potentiel est donnée par :

$$V(x, y) \simeq \frac{V_{\text{tw}}^0 \sqrt{\pi}w}{R\omega T} - \frac{V_{\text{tw}}^0 \sqrt{\pi}}{R\omega T w} r^2, \quad (10.31)$$

ce qui correspond à un confinement harmonique transverse de fréquence :

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{2V_{\text{tw}}^0 \sqrt{\pi}}{mR\omega T w}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}w}{R\omega T}} \omega_{\text{tw}}. \quad (10.32)$$

L'énergie du fond du piège, correspondant à  $r = 0$ , est quant à elle donnée par :

$$V_{\text{ext}} = \frac{V_{\text{tw}}^0 \sqrt{\pi}w}{R\omega T}. \quad (10.33)$$

Le calcul effectué ci-dessus est local, donc peut être transposé à n'importe quelle géométrie tant que la courbe  $\mathcal{C}$  peut être localement approchée par un cercle dont le rayon est très supérieur à  $w$ . On peut également généraliser ce résultat au cas d'une vitesse de déplacement du spot non constante, tant que les variations de celles-ci restent petites à l'échelle de  $w$ . On retiendra donc finalement les expressions suivantes pour la fréquence de piégeage et l'énergie de fond de piège :

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}w}{vT}} \omega_{\text{tw}} \quad \text{et} \quad V_{\text{ext}} = \frac{V_{\text{tw}}^0 \sqrt{\pi}w}{vT}. \quad (10.34)$$

Ces quantités peuvent dépendre de la position longitudinale à travers les paramètres  $v$  et  $V_{\text{tw}}^0$ , ce qui constitue un moyen possible pour induire une modulation périodique de potentiel, par exemple en agissant sur la vitesse de déplacement du spot ou sur son intensité.

En insérant dans l'équation 10.34 les valeurs typiques d'intensité  $I = 100$  W et de désaccord  $\delta = 300$  nm pour une pince optique dont la taille du spot est  $w = 30$   $\mu\text{m}$ , on voit qu'il est possible d'obtenir une taille transverse inférieure à  $1,2$   $\mu\text{m}$  pour un tore de  $150$   $\mu\text{m}$  de rayon. Un tel dispositif vérifierait les hypothèses faites dans cette étude théorique, ce qui permettrait d'appliquer les résultats obtenus.

Un autre prérequis important pour l'existence des supercourants dans un tore est la non-fragmentation du condensat. En particulier, les potentiels longitudinaux mis en jeu doivent être suffisamment faibles pour ne pas entraîner une telle fragmentation. Par exemple, on peut estimer l'effet de la gravité lorsque le plan contenant les atomes est incliné d'un angle  $\alpha \ll 1$  par rapport à l'horizontale. La différence d'énergie potentielle entre les deux points extrêmes du guide d'onde est alors égale à  $2Mg_G R \sin \alpha$ , où  $g_G$  est l'accélération du champ de gravité et  $2R$  est la distance horizontale entre ces deux points. Dans l'approximation de Thomas-Fermi, la fragmentation survient lorsque l'énergie potentielle de gravité est supérieure à l'énergie de champ moyen, ce qui s'écrit :

$$2Mg_G R \sin \alpha > \frac{g_{1D} N_0}{2\pi R}. \quad (10.35)$$

Pour un système contenant  $N_0 = 10^6$  atomes de  $^{87}\text{Rb}$ , dont la longueur de diffusion est de  $a = 5.77$  nm, dans un guide d'onde de rayon  $R = 150$   $\mu\text{m}$  avec  $\sigma = 1.16$   $\mu\text{m}$ , le système demeure non fragmenté tant que  $\alpha < 0.15^\circ$ . Cette condition est très contraignante, mais pas irréalisable en pratique. Il convient de noter que le potentiel de gravitation, qui ne tourne pas avec le potentiel de piégeage, est susceptible d'agir comme un défaut se propageant à travers le condensat.

## 10.3 Conclusion

On a étudié dans ce chapitre deux possibles applications concrètes du formalisme présenté au chapitre précédent, la première d'un point de vue théorique et la seconde d'un point de vue expérimental. L'étude théorique, fondée sur le cas d'un guide d'onde elliptique, a permis d'une part de se convaincre que le domaine d'application de ce formalisme était raisonnable (en terme de géométrie du guide d'onde notamment) et d'autre part de conforter la confiance que l'on peut avoir en ce formalisme en le validant par des simulations numériques lorsque le guide d'onde est au repos. Un axe d'étude certainement très prometteur serait de poursuivre les simulations numériques dans le cas elliptique à partir de l'équation unidimensionnelle lorsque le guide d'onde est en rotation, afin d'étudier la génération des supercourants atomiques par ce moyen. L'étude pratique présentée dans la seconde partie de ce chapitre montre qu'il n'y a en théorie pas d'impossibilité de principe à réaliser expérimentalement un guide d'onde suffisamment fortement confinant dans la direction transverse pour que notre formalisme s'applique. On propose pour cela une méthode consistant à faire varier la position d'une pince optique très focalisée le long d'une courbe  $\mathcal{C}$  afin de créer un potentiel moyen. Un tel dispositif offre notamment les avantages de pouvoir changer la forme du guide d'onde en cours d'expérience et de pouvoir induire une rotation d'ensemble sans avoir recours à un dispositif de type "table tournante".



## Conclusion de la troisième partie

Le condensat de Bose-Einstein placé dans un guide d'onde en anneau pourrait constituer un nouveau type de capteur inertielle, que l'on peut considérer à plusieurs égards comme l'équivalent atomique du gyrolaser (en particulier parce que l'effet de la rotation se traduit directement sur les modes d'émission et non sur les phases des champs émis). Le signal gyrométrique pourrait être obtenu en observant les supercourants atomiques induits le long du guide d'onde atomique par la rotation de ce dernier. Plusieurs méthodes sont envisageables pour cela (imagerie par contraste de phase, méthodes interférométriques à l'extérieur du piège, spectroscopie de Bragg...). Naturellement, le bon fonctionnement d'un tel dispositif en tant que gyromètre suppose que la vitesse du supercourant induit dépende le plus linéairement possible de la vitesse de rotation du guide d'onde. Une étude très simplifiée, ne prenant pas en compte les couplages entre modes de rotation, montre que la vitesse des supercourants est quantifiée, la valeur du quantum de rotation étant trop importante pour laisser espérer une application gyrométrique. La prise en compte des couplages entre modes lève cette restriction, mais fait apparaître un nouvel obstacle : la métastabilité des supercourants. Cela se traduit en pratique par un phénomène d'hystérésis lié à la présence de minima locaux d'énergie, qui perturbe la réponse du système aux variations de vitesse. Ce phénomène est dû au couplage par les interactions atomiques. Il peut être éliminé grâce à un autre couplage, lié à l'asymétrie du guide d'onde (qui avait été supposé circulaire dans l'étude initiale).

Le rôle prépondérant joué par la forme du guide d'onde nous a amené à développer un formalisme permettant de réduire à une dimension la description d'un tel système dans le cas d'un fort confinement transverse. Ce formalisme permet d'inclure les effets liés aux dimensions transverses tout en simplifiant grandement le traitement analytique et numérique par rapport au cas général. Il a été validé par des simulations numériques lorsque le guide d'onde est au repos, et pourrait servir de base de départ à une étude plus poussée des effets de la rotation. Par exemple, une expérience préalable à la réalisation d'un gyromètre tel que décrit dans cette troisième partie serait la génération et l'observation d'un supercourant le long d'un condensat de Bose-Einstein dans un guide d'onde en anneau. On peut imaginer pour cela une séquence expérimentale au cours de laquelle le piège est initialement elliptique et en rotation, afin de transférer du moment cinétique aux atomes, puis devient dans un deuxième temps circulaire afin de permettre au supercourant de s'établir et d'être observé. L'étude d'une telle séquence pourrait être grandement simplifiée par l'utilisation de notre formalisme à une dimension.

De plus, on a montré qu'il était possible, sous certaines conditions, d'appliquer nos résultats à des configurations expérimentales réalistes. En particulier, le protocole que nous

proposons dans ce mémoire est compatible avec le dispositif et les objectifs déjà existants au laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, et pourrait en conséquence être mis en œuvre dans un futur que nous espérons proche. En plus d'ouvrir la voie à de nouveaux types de senseurs atomiques, une telle expérience présenterait un immense intérêt dans le domaine fondamental puisqu'elle constituerait une observation directe d'un courant superfluide.

# Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire ont porté sur l'étude expérimentale, analytique et numérique d'un gyrolaser à état solide, ainsi que sur l'étude théorique d'un possible équivalent atomique au gyrolaser. On se propose pour conclure ce mémoire de dresser un bilan des principaux résultats obtenus, puis de dégager quelques axes possibles pour des travaux futurs.

Après avoir mis en avant les intérêts industriels du gyrolaser à état solide par rapport à son homologue à hélium-néon en termes notamment de coût de production, de fiabilité et de durée de vie, on a étudié, à l'aide d'un modèle semi-classique, la dynamique d'un laser en anneau utilisant comme milieu à gain un cristal de Nd-YAG pompé par diode laser. Le comportement de ce type de dispositif s'est avéré très différent de celui du gyrolaser à hélium-néon, notamment en raison du caractère homogène du milieu amplificateur, entraînant un couplage non linéaire entre les modes contrarotatifs qui déstabilise l'émission bidirectionnelle. Après avoir mis en évidence expérimentalement, analytiquement et numériquement les principaux régimes de fonctionnement avec et sans rotation, on est arrivé à la conclusion qu'il n'est pas possible d'utiliser un simple laser en anneau à état solide en tant que gyrolaser. On s'est ensuite intéressé à la stabilisation du régime de battement, à l'aide d'un dispositif agissant sur la polarisation et infligeant à chaque mode des pertes d'autant plus fortes que son intensité lumineuse est forte. On a montré expérimentalement, analytiquement et numériquement que ce dispositif stabilisateur fonctionnait au-delà d'une certaine vitesse de rotation critique, qui correspond au point de fonctionnement pour lequel le couplage additionnel induit par le dispositif stabilisateur devient supérieur au couplage non linéaire induit par le réseau d'inversion de population. Grâce à ce dispositif, on a obtenu un gyrolaser à état solide, dont les caractéristiques inertielles ont pu être mesurées. Les performances obtenues (qui se mesurent à la fois par la taille de la "zone morte" aux faibles vitesses de rotation et par l'ampleur de la non-linéarité de la réponse en fréquence dans la zone de fonctionnement) sont beaucoup moins bonnes que celles d'un gyrolaser à hélium-néon commercial, ce qui s'explique par le fort taux de diffusion caractéristique de l'état solide ainsi que par l'influence du réseau d'inversion de population sur la dynamique du laser.

Il est donc apparu nécessaire de poursuivre cette étude en tentant d'améliorer les performances inertielles du gyrolaser à état solide. Les travaux effectués dans ce but font l'objet de la deuxième partie de ce mémoire. On y présente successivement trois configurations. La première consiste à séparer les fréquences propres des modes contrarotatifs à l'aide d'un biais magnéto-optique, afin de placer le gyrolaser dans une zone de fonctionnement pour laquelle la réponse en fréquence est linéaire. Cette solution présente l'inconvénient évident que les fluctuations du biais se reportent directement sur celles

du signal utile, ce qui est incompatible avec les performances de la navigation inertielle. Toutefois, des pistes d'amélioration existent (blindage, référence de tension stabilisée au ppm, matériau magnétique saturé, biais alternatif...) qui rendent cette méthode potentiellement intéressante pour des applications moins exigeantes en termes de performances que la navigation inertielle. Une deuxième configuration étudiée, inspirée des solutions "multi-oscillateur" pour les gyrolasers à hélium-néon, consiste à faire coexister dans la cavité quatre modes, afin d'obtenir deux signaux de battement biaisés de la même fréquence mais sensibles aux rotations avec des signes différents. Il en résulte en théorie une compensation "en temps réel" du biais, ce qui permet de s'affranchir des inconvénients de la configuration précédente. Toutefois, la mise en œuvre expérimentale de ce dispositif a montré l'existence d'un biais résiduel, que l'on attribue à la nécessaire séparation spatiale des faisceaux sur une partie de leur parcours dans la cavité laser. La faisabilité de cette solution est donc validée, mais il est nécessaire pour aller plus loin de s'affranchir de ce biais résiduel. Enfin, une troisième configuration proposée consiste à faire vibrer longitudinalement le cristal servant de milieu amplificateur afin de diminuer le contraste du réseau d'inversion de population et l'effet de la rétrodiffusion. Cette solution, qui nous semble très prometteuse à court terme, partage avec l'activation mécanique utilisée sur les gyrolasers à hélium-néon l'avantage que le biais qu'elle induit se moyenne à zéro pour les longs temps d'intégration. Les résultats numériques présentés dans ce mémoire ont montré l'intérêt de cette solution, les expériences n'en étant pour le moment qu'au stade préliminaire.

Dans la troisième partie de ce mémoire, on s'est intéressé à la question du lien possible entre les lasers à atomes et la gyrométrie. Plus précisément, on a considéré le cas d'un condensat de Bose-Einstein placé dans un piège torique. Tout comme dans le cas du gyrolaser, l'effet de la rotation se traduit par une modification au niveau des modes propres de ce système, plus précisément sous la forme de courants atomiques superfluides, dont l'étude permet de remonter à la vitesse de rotation de l'ensemble, ce qui constitue potentiellement un nouveau type de gyromètre atomique. L'étude plus précise de ce dispositif, déjà abordée dans la littérature et résumée dans ce mémoire, montre que la présence des interactions atomiques entraîne un phénomène de métastabilité du supercourant néfaste pour les applications de type gyrométrie. Il apparaît donc nécessaire de mettre en œuvre un couplage supplémentaire, par exemple en utilisant une configuration de piégeage qui n'est plus circulaire. Afin d'être en mesure de caractériser plus précisément les effets dynamiques de la configuration géométrique utilisée, on a développé un formalisme original de réduction à une dimension de l'équation de Schrödinger dans le cas d'un piège torique fortement confinant et de forme quelconque, dans un référentiel tournant. Ce formalisme, inspiré de l'approximation de Born-Oppenheimer, a été testé numériquement avec succès dans le cas d'un piège elliptique au repos. On a également montré qu'il était possible de réaliser expérimentalement un dispositif qui entrerait dans le champ d'application de notre formalisme.

Les perspectives d'évolution de ce travail de thèse sont nombreuses, aussi bien à court terme qu'à moyen et à long terme.

À court terme tout d'abord, les travaux menés à Thales Aerospace sur le démonstrateur mono-bloc de gyrolaser à état solide se poursuivent, en s'orientant vers une configuration de type "cristal vibrant". On espère obtenir, avec un déplacement de l'ordre du  $\mu\text{m}$  à des fréquences de vibration de quelques dizaines de kHz, un effet significatif de linéarisation de

la réponse en fréquence. Par ailleurs, des travaux aussi bien théoriques qu'expérimentaux sont en cours dans notre équipe pour étendre le principe du gyrolaser à état solide au cas des sources semi-conductrices à émission par la surface (VECSEL). Ces travaux, menés en collaboration avec Arnaud Garnache, de l'Institut d'Électronique du Sud (ex-CEM2) de Montpellier, et Isabelle Sagnes, du Laboratoire de Photonique et de Nanostructures (LPN) de Marcoussis, devraient on l'espère déboucher rapidement sur l'observation d'un battement Sagnac, ouvrant la voie à un nouveau type de gyrolaser à état solide, pour lequel le réseau de gain ne distord pas la réponse en fréquence comme c'est le cas pour les milieux cristallins (on peut aussi mentionner comme avantage le phénomène de diffusion des porteurs qui, lorsque les conditions nécessaires sont remplies, tend à effacer ce réseau). Du côté des travaux sur le gyromètre atomique, il serait souhaitable de poursuivre l'étude de l'équation unidimensionnelle établie dans ce mémoire, afin notamment de définir une procédure temporelle de génération d'un supercourant atomique le long du tore.

À moyen terme, on pourrait effectuer un certain nombre d'expériences complémentaires afin de mettre au point des alternatives à la solution "cristal vibrant" pour l'amélioration des performances inertielles du gyrolaser à état solide (à base de cristal ou de semi-conducteur). Parmi ces expériences, on peut citer l'amélioration de la solution utilisant un biais magnéto-optique stabilisé, l'étude de dispositifs passifs de stabilisation du régime de battement en vue d'une application à la solution "4 ondes" qui éviterait de devoir séparer spatialement les faisceaux ou l'étude du fonctionnement du gyrolaser à état solide en régime chaotique (ce qui présente l'avantage de supprimer tous les couplages entre modes, néfastes à la gyrométrie, le signal utile étant obtenu par analyse spectrale des signaux chaotiques).

Enfin, on peut mentionner ici deux objectifs à long terme qui sont d'une part l'obtention d'un gyrolaser à base de semi-conducteur pompé électriquement (ce qui aurait pour effet une réduction drastique des coûts de production, tout en conservant les très bonnes performances des gyrolasers) et d'autre part la génération et l'observation d'un supercourant atomique sur le dispositif expérimental de l'Institut d'Optique.

En tout état de cause, notre objectif principal, quel que soit son terme, reste l'obtention d'un capteur de rotation à état solide capable de remplacer les gyrolasers à gaz, qui occupent actuellement le marché de l'inertie haut de gamme. Cet objectif paraîtra à certains optimiste et ambitieux. Que ceux-ci se tournent un instant vers le passé, et se remémorent l'histoire des pionniers de la gyrométrie optique, qui ont réussi à transformer une expérience sur l'éther lumineux en une centrale inertielle pour le Boeing 767. Pour parcourir ce long chemin, qui fut sans doute l'une des plus belles aventures scientifiques et industrielles du XX<sup>ème</sup> siècle, ne leur a-t-il pas fallu une bonne dose d'ambition et d'optimisme ?



# **Annexes**



# Annexe A

## Détail de certains calculs

*Les détails, les détails, voilà l'essentiel!*  
T. Dostoïevski, *Crime et Châtiment* (1866)

### A.1 Équations pour la somme et la différence des intensités

Les variables somme et différence sont définies par :

$$Y = E_1^2 + E_2^2 \quad \text{et} \quad X = E_1^2 - E_2^2. \quad (\text{A.1})$$

On pose également :

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2). \quad (\text{A.2})$$

On a bien sûr les relations inverses :

$$E_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(Y \pm X) \quad \text{et} \quad \gamma_{1,2} = \gamma \pm \Delta \quad (\text{A.3})$$

On part alors de l'équation  $\dot{Y} = 2E_1\dot{E}_1 + 2E_2\dot{E}_2$  et on remplace  $\dot{E}_{1,2}$  par son expression 1.43. Cela donne :

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= 2E_1 \left[ -\frac{\gamma_1}{2}E_1 + \frac{m_1}{2}E_2 \sin(\Phi - \theta_1) + \frac{\sigma}{2T} \left( E_1 \int_0^l N dz + E_2 \int_0^l N \cos(2kz - \Phi) dz \right) \right] \\ &\quad + 2E_2 \left[ -\frac{\gamma_2}{2}E_2 - \frac{m_2}{2}E_1 \sin(\Phi - \theta_2) + \frac{\sigma}{2T} \left( E_2 \int_0^l N dz + E_1 \int_0^l N \cos(2kz - \Phi) dz \right) \right] \\ &= -(\gamma + \Delta) E_1^2 + m_1 E_1 E_2 \sin(\Phi - \theta_1) + \frac{\sigma l}{T} [E_1^2 N_0 + E_1 E_2 \Re(N_1 e^{-i\Phi})] \\ &\quad - (\gamma - \Delta) E_2^2 - m_2 E_1 E_2 \sin(\Phi - \theta_2) + \frac{\sigma l}{T} [E_2^2 N_0 + E_1 E_2 \Re(N_1 e^{-i\Phi})] \\ &= -Y \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - X \Delta + \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} \left[ m_1 \sin(\Phi - \theta_1) - m_2 \sin(\Phi - \theta_2) + \frac{2\sigma l}{T} \Re(N_1 e^{-i\Phi}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

On obtient de même :

$$\dot{X} = -X \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - Y \Delta + \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} [m_1 \sin(\Phi - \theta_1) + m_2 \sin(\Phi - \theta_2)]. \quad (\text{A.5})$$

L'équation d'évolution de la phase  $\dot{\Phi} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$  s'écrit quant à elle à l'aide de 1.43 :

$$\dot{\Phi} = \Omega + \frac{m_1}{2} \sqrt{\frac{Y-X}{Y+X}} \cos(\Phi - \theta_1) - \frac{m_2}{2} \sqrt{\frac{Y+X}{Y-X}} \cos(\Phi - \theta_2) + \left( \sqrt{\frac{Y-X}{Y+X}} + \sqrt{\frac{Y+X}{Y-X}} \right) \frac{\sigma l}{2T} \Im(N_1 e^{-i\Phi}) \quad (\text{A.6})$$

L'hypothèse des faibles taux de pompage ( $\eta \ll 1$ ) permet d'écrire :

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{T_1} - \frac{a}{T_1} N_{\text{seuil}} [E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(2kz - \Phi)]^2 . \quad (\text{A.7})$$

En prenant la moyenne spatiale de cette équation, on obtient :

$$\frac{dN_0}{dt} = W - \frac{N_0}{T_1} - \frac{a}{T_1} N_{\text{seuil}} Y . \quad (\text{A.8})$$

En calculant l'harmonique spatiale à l'ordre  $2k$  de l'équation (A.7), on obtient :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{T_1} - \frac{a}{2T_1} N_{\text{seuil}} \sqrt{Y^2 - X^2} e^{i\Phi} . \quad (\text{A.9})$$

En résumé, le système d'équation de base 1.43 s'écrit avec les nouvelles variables :

$$\begin{cases} \dot{Y} = -Y \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - X \Delta + \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} \left[ m_1 \sin(\Phi - \theta_1) - m_2 \sin(\Phi - \theta_2) + \frac{2\sigma l}{T} \Re(N_1 e^{-i\Phi}) \right] \\ \dot{X} = -X \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - Y \Delta + \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} [m_1 \sin(\Phi - \theta_1) + m_2 \sin(\Phi - \theta_2)] \\ \dot{\Phi} = \Omega + \frac{m_1}{2} \sqrt{\frac{Y-X}{Y+X}} \cos(\Phi - \theta_1) - \frac{m_2}{2} \sqrt{\frac{Y+X}{Y-X}} \cos(\Phi - \theta_2) + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \frac{\sigma l}{T} \Im(N_1 e^{-i\Phi}) \\ \dot{N}_0 = W - \frac{N_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{T_1} Y \\ \dot{N}_1 = -\frac{N_1}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} \sqrt{Y^2 - X^2} e^{i\Phi} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

qui n'est autre que le système d'équation 1.54.

## A.2 Condition de stabilité d'une solution stationnaire non nulle quelconque

On part du système d'équations A.10 (ou 1.54) établi précédemment. Afin de se ramener à un système à variables réelles, on pose  $R_+ = \Re N_+$  et  $I_+ = \Im N_+$ . On a donc :

$$\begin{cases} \dot{Y} = -Y \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - X \Delta - \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} \left[ m_1 \sin(\Phi + \theta_1) - m_2 \sin(\Phi + \theta_2) - \frac{2\sigma l}{T} (R_+ \cos \Phi - I_+ \sin \Phi) \right] \\ \dot{X} = -X \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - Y \Delta - \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} [m_1 \sin(\Phi + \theta_1) + m_2 \sin(\Phi + \theta_2)] \\ \dot{\Phi} = \Omega - \frac{m_1}{2} \sqrt{\frac{Y-X}{Y+X}} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{m_2}{2} \sqrt{\frac{Y+X}{Y-X}} \cos(\Phi + \theta_2) - \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \frac{\sigma l}{T} (R_+ \sin \Phi + I_+ \cos \Phi) \\ \dot{N}_0 = W - \frac{N_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} Y \\ \dot{R}_+ = -\frac{R_+}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \sqrt{Y^2 - X^2} \cos \Phi \\ \dot{I}_+ = -\frac{I_+}{T_1} + \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \sqrt{Y^2 - X^2} \sin \Phi \end{cases}$$

Afin d'étudier la stabilité des solutions stationnaires, on suppose que le système est soumis à une petite perturbation. On effectue donc dans le système d'équations ci-dessus la substitution suivante :

$$(Y, X, \Phi, R_+, I_+, N_0) \rightarrow (Y, X, \Phi, R_+, I_+, N_0) + (y, x, \varphi, r_+, i_+, n_0)e^{\lambda t}, \quad (\text{A.11})$$

où chaque terme du vecteur  $(y, x, \varphi, r_+, i_+, n_0)$  est supposé réel, indépendant du temps et très inférieur en module au terme lui correspondant dans le vecteur  $(Y, X, \Phi, R_+, I_+, N_0)$ . On pose par ailleurs  $d = -\gamma + \sigma l N_0 / T$ . On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda y = (Y + y) \left( d + \frac{\sigma l}{T} n_0 \right) - \frac{\sqrt{(Y + y)^2 - (X + x)^2}}{2} \left[ m_1 \sin(\Phi + \varphi + \theta_1) - m_2 \sin(\Phi + \varphi + \theta_2) \right. \\ \quad \left. - \frac{2\sigma l}{T} \left( (R_+ + r_+) \cos(\Phi + \varphi) - (I_+ + i_+) \sin(\Phi + \varphi) \right) \right] \\ \lambda x = (X + x) \left( d + \frac{\sigma l}{T} n_0 \right) - \frac{\sqrt{(Y + y)^2 - (X + x)^2}}{2} [m_1 \sin(\Phi + \varphi + \theta_1) + m_2 \sin(\Phi + \varphi + \theta_2)] \\ \lambda \varphi = \Omega - \frac{m_1}{2} \sqrt{\frac{Y + y - X - x}{Y + y + X + x}} \cos(\Phi + \varphi + \theta_1) + \frac{m_2}{2} \sqrt{\frac{Y + y + X + x}{Y + y - X - x}} \cos(\Phi + \varphi + \theta_2) \\ \quad - \frac{Y + y}{\sqrt{(Y + y)^2 - (X + x)^2}} \frac{\sigma l}{T} [(R_+ + r_+) \sin(\Phi + \varphi) + (I_+ + i_+) \cos(\Phi + \varphi)] \\ \lambda r_+ = -\frac{R_+ + r_+}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \sqrt{(Y + y)^2 - (X + x)^2} \cos(\Phi + \varphi) \\ \lambda i_+ = -\frac{I_+ + i_+}{T_1} + \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \sqrt{(Y + y)^2 - (X + x)^2} \sin(\Phi + \varphi) \\ \lambda n_0 = W - \frac{N_0 + n_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} (Y + y) \end{array} \right.$$

On utilisera les formes linéarisées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(Y + y)^2 - (X + x)^2} = \sqrt{Y^2 - X^2} + \frac{Yy - Xx}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \\ \sqrt{\frac{Y + y - X - x}{Y + y + X + x}} = \sqrt{\frac{Y - X}{Y + X}} + \frac{Xy - Yx}{\sqrt{Y - X}(X + Y)^{3/2}} \\ \sqrt{\frac{Y + y + X + x}{Y + y - X - x}} = \sqrt{\frac{Y + X}{Y - X}} + \frac{Yx - Xy}{\sqrt{X + Y}(Y - X)^{3/2}} \\ \frac{Y + y}{\sqrt{(Y + y)^2 - (X + x)^2}} = \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} + \frac{XYx - X^2y}{(Y^2 - X^2)^{3/2}} \\ \cos(A + \varphi) = \cos A - \varphi \sin A \quad \text{et} \quad \sin(A + \varphi) = \sin A + \varphi \cos A \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

On obtient, en se limitant au premier ordre en  $(y, x, \varphi, r_+, i_+, n_0)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda y = (Y + y) \left( d + \frac{\sigma l}{T} n_0 \right) - \frac{1}{2} \left( \sqrt{Y^2 - X^2} + \frac{Yy - Xx}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \right) \left[ m_1 \sin(\Phi + \theta_1) + m_1 \cos(\Phi + \theta_1) \varphi \right. \\ \quad \left. - m_2 \sin(\Phi + \theta_2) - m_2 \cos(\Phi + \theta_2) \varphi - \frac{2\sigma l}{T} \left( (R_+ + r_+) (\cos \Phi - \varphi \sin \Phi) - (I_+ + i_+) (\sin \Phi + \varphi \cos \Phi) \right) \right] \\ \lambda x = (X + x) \left( d + \frac{\sigma l}{T} n_0 \right) - \frac{1}{2} \left( \sqrt{Y^2 - X^2} + \frac{Yy - Xx}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \right) \left[ m_1 \sin(\Phi + \theta_1) + m_1 \cos(\Phi + \theta_1) \varphi \right. \\ \quad \left. + m_2 \sin(\Phi + \theta_2) + m_2 \cos(\Phi + \theta_2) \varphi \right] \\ \lambda \varphi = \Omega - \frac{m_1}{2} \left( \sqrt{\frac{Y - X}{Y + X}} + \frac{Xy - Yx}{\sqrt{Y - X}(X + Y)^{3/2}} \right) (\cos(\Phi + \theta_1) - \varphi \sin(\Phi + \theta_1)) \\ \quad + \frac{m_2}{2} \left( \sqrt{\frac{Y + X}{Y - X}} + \frac{Yx - Xy}{\sqrt{X + Y}(Y - X)^{3/2}} \right) (\cos(\Phi + \theta_2) - \varphi \sin(\Phi + \theta_2)) \\ \quad - \left( \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} + \frac{XYx - X^2y}{(Y^2 - X^2)^{3/2}} \right) \frac{\sigma l}{T} [(R_+ + r_+) (\sin \Phi + \varphi \cos \Phi) + (I_+ + i_+) (\cos \Phi - \varphi \sin \Phi)] \\ \lambda r_+ = -\frac{R_+ + r_+}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \left( \sqrt{Y^2 - X^2} + \frac{Yy - Xx}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \right) (\cos \Phi - \varphi \sin \Phi) \\ \lambda i_+ = -\frac{I_+ + i_+}{T_1} + \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \left( \sqrt{Y^2 - X^2} + \frac{Yy - Xx}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \right) (\sin \Phi + \varphi \cos \Phi) \\ \lambda n_0 = W - \frac{N_0 + n_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} (Y + y) \end{array} \right.$$

On va utiliser les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = m_1 \sin(\Phi + \theta_1) - m_2 \sin(\Phi + \theta_2) \\ B = m_1 \sin(\Phi + \theta_1) + m_2 \sin(\Phi + \theta_2) \\ C = m_1 \cos(\Phi + \theta_1) + m_2 \cos(\Phi + \theta_2) \\ D = m_1 \cos(\Phi + \theta_1) - m_2 \cos(\Phi + \theta_2) \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$

Par ailleurs, on a en régime stationnaire :

$$N_1 = -\frac{aN_{\text{seuil}}}{4} \sqrt{Y^2 - X^2} e^{-i\Phi} \quad (\text{A.14})$$

On en déduit les égalités suivantes :

$$R_+ \sin \Phi + I_+ \cos \Phi = 0 \quad \text{et} \quad R_+ \cos \Phi - I_+ \sin \Phi = -\frac{aN_{\text{seuil}}}{4} \sqrt{Y^2 - X^2}. \quad (\text{A.15})$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda y = (Y + y) \left( d + \frac{\sigma l}{T} n_0 \right) \\ \quad - \frac{1}{2} \left( \sqrt{Y^2 - X^2} + \frac{Yy - Xx}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \right) \left[ A + D\varphi - \frac{2\sigma l}{T} \left( (R_+ + r_+) \cos \Phi - (I_+ + i_+) \sin \Phi \right) \right] \\ \lambda x = (X + x) \left( d + \frac{\sigma l}{T} n_0 \right) - \frac{1}{2} \left( \sqrt{Y^2 - X^2} + \frac{Yy - Xx}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \right) [B + C\varphi] \\ \lambda \varphi = \Omega - \frac{m_1}{2} \left( \sqrt{\frac{Y - X}{Y + X}} + \frac{Xy - Yx}{\sqrt{Y - X}(X + Y)^{3/2}} \right) (\cos(\Phi + \theta_1) - \varphi \sin(\Phi + \theta_1)) \\ \quad + \frac{m_2}{2} \left( \sqrt{\frac{Y + X}{Y - X}} + \frac{Yx - Xy}{\sqrt{X + Y}(Y - X)^{3/2}} \right) (\cos(\Phi + \theta_2) - \varphi \sin(\Phi + \theta_2)) \\ \quad - \left( \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} + \frac{XYx - X^2y}{(Y^2 - X^2)^{3/2}} \right) \frac{\sigma l}{T} \left[ r_+ \sin \Phi + i_+ \cos \Phi - \varphi \frac{aN_{\text{seuil}}}{4} \sqrt{Y^2 - X^2} \right] \\ \lambda r_+ = -\frac{R_+ + r_+}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \left( \sqrt{Y^2 - X^2} + \frac{Yy - Xx}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \right) (\cos \Phi - \varphi \sin \Phi) \\ \lambda i_+ = -\frac{I_+ + i_+}{T_1} + \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \left( \sqrt{Y^2 - X^2} + \frac{Yy - Xx}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \right) (\sin \Phi + \varphi \cos \Phi) \\ \lambda n_0 = W - \frac{N_0 + n_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} (Y + y) \end{array} \right.$$

On détaille le calcul de certains éléments de matrice (issus de la troisième ligne du système d'équations ci-dessus) :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\varphi, y} = -\frac{m_1 X \cos(\Phi + \theta_1)}{2\sqrt{Y - X}(X + Y)^{3/2}} - \frac{m_2 X \cos(\Phi + \theta_2)}{2\sqrt{X + Y}(Y - X)^{3/2}} = \frac{X^2 D - XYC}{2(Y^2 - X^2)^{3/2}} \\ a_{\varphi, x} = \frac{m_1 Y \cos(\Phi + \theta_1)}{2\sqrt{Y - X}(X + Y)^{3/2}} + \frac{m_2 Y \cos(\Phi + \theta_2)}{2\sqrt{X + Y}(Y - X)^{3/2}} = \frac{Y^2 C - XYD}{2(Y^2 - X^2)^{3/2}} \\ a_{\varphi, \varphi} = -\lambda + \frac{m_1}{2} \sqrt{\frac{Y - X}{Y + X}} \sin(\Phi + \theta_1) - \frac{m_2}{2} \sqrt{\frac{Y + X}{Y - X}} \sin(\Phi + \theta_2) + \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{\text{seuil}}}{4} Y \\ \quad = -\lambda + \frac{YA - XB}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} + \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{\text{seuil}}}{4} Y \end{array} \right.$$

On est finalement ramené au calcul du déterminant suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
-\lambda + d - \frac{Y[A-2(\sigma l/T)(R_+ \cos \Phi - I_+ \sin \Phi)]}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} & \frac{X[A-2(\sigma l/T)(R_+ \cos \Phi - I_+ \sin \Phi)]}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2 - X^2} & -\frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2 - X^2} \cos \Phi & -\frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2 - X^2} \sin \Phi & Y\sigma l/T & \\
-\frac{YB}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} & -\lambda + d + \frac{XB}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} & -\frac{C}{2}\sqrt{Y^2 - X^2} & 0 & 0 & X\sigma l/T & \\
\frac{X^2 D - XYC}{2(Y^2 - X^2)^{3/2}} & \frac{Y^2 C - XYD}{2(Y^2 - X^2)^{3/2}} & -\lambda + \frac{YA - XB}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} + \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} Y & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y \sin \Phi}{\sqrt{Y^2 - X^2}} & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y \cos \Phi}{\sqrt{Y^2 - X^2}} & 0 & \\
-\frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \cos \Phi & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \cos \Phi & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2 - X^2} \sin \Phi & -\lambda - 1/T_1 & 0 & 0 & \\
\frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \sin \Phi & -\frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \sin \Phi & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2 - X^2} \cos \Phi & 0 & -\lambda - 1/T_1 & 0 & \\
-\frac{aN_{seuil}}{2T_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda - 1/T_1 & \\
& & & & & & (A.16)
\end{array}$$

On effectue l'opération suivante :

$$C_1 \rightarrow C_1 + \frac{Y}{X} C_2 - \frac{aN_{seuil}}{2(1 + \lambda T_1)} C_6 \quad (A.17)$$

On obtient :

$$\begin{array}{ccccccc}
-\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1 + \lambda T_1} & \frac{X[A-2(\sigma l/T)(R_+ \cos \Phi - I_+ \sin \Phi)]}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2 - X^2} & -\frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2 - X^2} \cos \Phi & -\frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2 - X^2} \sin \Phi & Y\sigma l/T & \\
(-\lambda + d) \frac{Y}{X} - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1 + \lambda T_1} & -\lambda + d + \frac{XB}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} & -\frac{C}{2}\sqrt{Y^2 - X^2} & 0 & 0 & X\sigma l/T & \\
\frac{CY - DX}{2X\sqrt{Y^2 - X^2}} & \frac{Y^2 C - XYD}{2(Y^2 - X^2)^{3/2}} & -\lambda + \frac{YA - XB}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} + \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} Y & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y \sin \Phi}{\sqrt{Y^2 - X^2}} & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y \cos \Phi}{\sqrt{Y^2 - X^2}} & 0 & \\
0 & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \cos \Phi & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2 - X^2} \sin \Phi & -\lambda - 1/T_1 & 0 & 0 & \\
0 & -\frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \sin \Phi & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2 - X^2} \cos \Phi & 0 & -\lambda - 1/T_1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda - 1/T_1 & \\
& & & & & & (A.18)
\end{array}$$

On est donc ramené au déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix}
 -\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & \frac{X[A-2(\sigma l/T)(R_+ \cos \Phi - I_+ \sin \Phi)]}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & \frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2-X^2} \cos \Phi & -\frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2-X^2} \sin \Phi \\
 (-\lambda + d) \frac{Y}{X} - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\lambda + d + \frac{XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{C}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & 0 & 0 \\
 \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & \frac{Y^2C-XYD}{2(Y^2-X^2)^{3/2}} & -\lambda + \frac{YA-XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} + \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} Y & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y \sin \Phi}{\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y \cos \Phi}{\sqrt{Y^2-X^2}} \\
 0 & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2-X^2}} \cos \Phi & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2-X^2} \sin \Phi & -\lambda - 1/T_1 & 0 \\
 0 & -\frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2-X^2}} \sin \Phi & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2-X^2} \cos \Phi & 0 & -\lambda - 1/T_1
 \end{vmatrix} \quad (A.19)$$

On effectue l'opération  $C_5 \rightarrow C_5 \cos \Phi + C_4 \sin \Phi$ . Il vient :

$$\begin{vmatrix}
 -\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & \frac{X[A-2(\sigma l/T)(R_+ \cos \Phi - I_+ \sin \Phi)]}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & \frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2-X^2} \cos \Phi & 0 \\
 (-\lambda + d) \frac{Y}{X} - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\lambda + d + \frac{XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{C}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & 0 & 0 \\
 \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & \frac{Y^2C-XYD}{2(Y^2-X^2)^{3/2}} & -\lambda + \frac{YA-XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} + \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} Y & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y \sin \Phi}{\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{\sqrt{Y^2-X^2}} \\
 0 & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2-X^2}} \cos \Phi & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2-X^2} \sin \Phi & -\lambda - 1/T_1 & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} \sin \Phi \\
 0 & -\frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2-X^2}} \sin \Phi & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2-X^2} \cos \Phi & 0 & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} \cos \Phi
 \end{vmatrix} \quad (A.20)$$

On effectue l'opération  $L_5 \rightarrow L_5 \cos \Phi + L_4 \sin \Phi$ . Il vient :

$$\begin{vmatrix}
 -\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & \frac{X[A-2(\sigma l/T)(R_+ \cos \Phi - I_+ \sin \Phi)]}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & \frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2-X^2} \cos \Phi & 0 \\
 (-\lambda + d) \frac{Y}{X} - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\lambda + d + \frac{XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{C}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & 0 & 0 \\
 \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & \frac{Y^2C-XYD}{2(Y^2-X^2)^{3/2}} & -\lambda + \frac{YA-XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} + \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} Y & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y \sin \Phi}{\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{\sqrt{Y^2-X^2}} \\
 0 & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2-X^2}} \cos \Phi & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2-X^2} \sin \Phi & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} \sin \Phi \\
 0 & 0 & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2-X^2} & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} \sin \Phi & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1}
 \end{vmatrix} \quad (A.21)$$

On effectue l'opération  $C_4 \rightarrow C_4 - C_5 \sin \Phi$ . Il vient :

$$\begin{vmatrix}
 -\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & \frac{X[A-2(\sigma l/T)(R_+ \cos \Phi - I_+ \sin \Phi)]}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & \frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2-X^2} \cos \Phi & 0 \\
 (-\lambda + d) \frac{Y}{X} - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\lambda + d + \frac{XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{C}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & 0 & 0 \\
 \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & \frac{Y^2C-XYD}{2(Y^2-X^2)^{3/2}} & -\lambda + \frac{YA-XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} + \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} Y & 0 & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{\sqrt{Y^2-X^2}} \\
 0 & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2-X^2}} \cos \Phi & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2-X^2} \sin \Phi & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} \cos^2 \Phi & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} \sin \Phi \\
 0 & 0 & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \sqrt{Y^2-X^2} & 0 & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1}
 \end{vmatrix} \quad (A.22)$$

On effectue l'opération  $C_3 \rightarrow C_3 + C_5 \frac{aN_{seuil}\sqrt{Y^2-X^2}}{4(1+\lambda T_1)}$ . Il vient :

$$\begin{vmatrix}
 -\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & \frac{X[A-2(\sigma l/T)(R_+ \cos \Phi - I_+ \sin \Phi)]}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & \frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2-X^2} \cos \Phi & 0 \\
 (-\lambda + d) \frac{Y}{X} - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\lambda + d + \frac{XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{C}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & 0 & 0 \\
 \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & \frac{Y^2C-XYD}{2(Y^2-X^2)^{3/2}} & -\lambda + \frac{YA-XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} + \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \left( Y - \frac{Y}{1+\lambda T_1} \right) & 0 & -\frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{\sqrt{Y^2-X^2}} \\
 0 & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2-X^2}} \cos \Phi & 0 & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} \cos^2 \Phi & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} \sin \Phi \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1}
 \end{vmatrix} \quad (A.23)$$

On a donc le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} -\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & \frac{X[A-2(\sigma l/T)(R_+ \cos \Phi - I_+ \sin \Phi)]}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & \frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2-X^2} \cos \Phi \\ (-\lambda + d) \frac{Y}{X} - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\lambda + d + \frac{XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} & -\frac{C}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & 0 \\ \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & \frac{Y^2C-XYD}{2(Y^2-X^2)^{3/2}} & -\lambda + \frac{YA-XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} + \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \left( Y - \frac{Y}{1+\lambda T_1} \right) & 0 \\ 0 & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2-X^2}} \cos \Phi & 0 & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} \cos^2 \Phi \end{vmatrix} \quad (\text{A.24})$$

On utilise les relations suivantes :

$$\begin{cases} A + \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{2} \sqrt{Y^2-X^2} = \frac{2dY}{\sqrt{Y^2-X^2}} \\ dX - \frac{\sqrt{Y^2-X^2}}{2} B = 0 \\ \frac{YA-XB}{2\sqrt{Y^2-X^2}} = d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} Y \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Il vient :

$$\begin{vmatrix} -\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & \frac{dXY}{Y^2-X^2} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & \frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2-X^2} \\ (-\lambda + d) \frac{Y}{X} - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\lambda + \frac{dY^2}{Y^2-X^2} & -\frac{C}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & 0 \\ \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & \frac{Y^2C-XYD}{2(Y^2-X^2)^{3/2}} & -\lambda + d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & 0 \\ 0 & \frac{aN_{seuil}}{4T_1} \frac{X}{\sqrt{Y^2-X^2}} & 0 & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} \end{vmatrix} \quad (\text{A.26})$$

On effectue l'opération  $C_2 \rightarrow C_2 + C_4 \frac{aN_{seuil}}{4\sqrt{Y^2-X^2}} \frac{X}{1+\lambda T_1}$ . Il vient :

$$\begin{vmatrix} -\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & \frac{dXY}{Y^2-X^2} + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & \frac{\sigma l}{T}\sqrt{Y^2-X^2} \\ (-\lambda + d) \frac{Y}{X} - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\lambda + \frac{dY^2}{Y^2-X^2} & -\frac{C}{2}\sqrt{Y^2-X^2} & 0 \\ \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & \frac{Y^2C-XYD}{2(Y^2-X^2)^{3/2}} & -\lambda + d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1+\lambda T_1}{T_1} \end{vmatrix} \quad (\text{A.27})$$

On a donc le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} -\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & \frac{dXY}{Y^2-X^2} + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2-X^2} \\ (-\lambda + d) \frac{Y}{X} - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\lambda + \frac{dY^2}{Y^2-X^2} & -\frac{C}{2}\sqrt{Y^2-X^2} \\ \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & \frac{Y^2C-XYD}{2(Y^2-X^2)^{3/2}} & -\lambda + d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{Y}{1+\lambda T_1} \end{vmatrix} \quad (\text{A.28})$$

On effectue l'opération  $L_2 \rightarrow YL_2 - XL_1$ . Il vient :

$$\begin{vmatrix} -\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & \frac{dXY}{Y^2-X^2} + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} & -\frac{D}{2}\sqrt{Y^2-X^2} \\ (-\lambda + d) \frac{Y^2-X^2}{X} & (-\lambda + d)Y - \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{X^2}{1+\lambda T_1} & \frac{\sqrt{Y^2-X^2}}{2} (DX - CY) \\ \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & \frac{Y^2C-XYD}{2(Y^2-X^2)^{3/2}} & -\lambda + d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{Y}{1+\lambda T_1} \end{vmatrix} \quad (\text{A.29})$$

On effectue l'opération  $C_2 \rightarrow C_2 - \frac{XY}{Y^2-X^2}C_1$ . Il vient :

$$\left| \begin{array}{ccc} -\lambda + d - \frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{Y}{1+\lambda T_1} & \frac{\lambda XY}{Y^2-X^2} + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{1}{1+\lambda T_1} \frac{3XY^2-X^3}{Y^2-X^2} & -\frac{D}{2} \sqrt{Y^2-X^2} \\ (-\lambda + d) \frac{Y^2-X^2}{X} & -\frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{X^2}{1+\lambda T_1} & \frac{\sqrt{Y^2-X^2}}{2} (DX - CY) \\ \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & 0 & -\lambda + d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{Y}{1+\lambda T_1} \end{array} \right| \quad (A.30)$$

On effectue l'opération  $L_1 \rightarrow L_1/Y - \frac{X}{(Y^2-X^2)Y}L_2$ . Il vient :

$$\left| \begin{array}{ccc} -\frac{aN_{seuil}}{2} \frac{\sigma l}{T} \frac{1}{1+\lambda T_1} & \frac{\lambda X}{Y^2-X^2} + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{1}{1+\lambda T_1} \frac{3XY}{Y^2-X^2} & \frac{(CX-DY)}{2\sqrt{Y^2-X^2}} \\ (-\lambda + d) \frac{Y^2-X^2}{X} & -\frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{X^2}{1+\lambda T_1} & \frac{\sqrt{Y^2-X^2}}{2} (DX - CY) \\ \frac{CY-DX}{2X\sqrt{Y^2-X^2}} & 0 & -\lambda + d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{Y}{1+\lambda T_1} \end{array} \right| \quad (A.31)$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left( -\lambda + d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{Y}{1+\lambda T_1} \right) \left[ \frac{(aN_{seuil})^2}{8} \left( \frac{\sigma l}{T} \right)^2 \frac{X^2}{(1+\lambda T_1)^2} + (\lambda - d) \left( \lambda + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{3Y}{1+\lambda T_1} \right) \right] \\ & + \frac{CY - DX}{2X\sqrt{Y^2 - X^2}} \left[ \left( \frac{\lambda X}{Y^2 - X^2} + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{1}{1+\lambda T_1} \frac{3XY}{Y^2 - X^2} \right) \frac{\sqrt{Y^2 - X^2}}{2} (DX - CY) \right. \\ & \left. + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{X^2}{1+\lambda T_1} \frac{(CX - DY)}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} \right] \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} & \left( -\lambda + d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{Y}{1+\lambda T_1} \right) \left[ \frac{(aN_{seuil})^2}{8} \left( \frac{\sigma l}{T} \right)^2 \frac{X^2}{(1+\lambda T_1)^2} + (\lambda - d) \left( \lambda + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{3Y}{1+\lambda T_1} \right) \right] \\ & + \frac{CY - DX}{2X\sqrt{Y^2 - X^2}} \left[ \left( \lambda + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{3Y}{1+\lambda T_1} \right) \frac{X(DX - CY)}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{X^2}{1+\lambda T_1} \frac{(CX - DY)}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} \right] \end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} & \left( -\lambda + d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{Y}{1+\lambda T_1} \right) \left[ \frac{(aN_{seuil})^2}{8} \left( \frac{\sigma l}{T} \right)^2 \frac{X^2}{(1+\lambda T_1)^2} + (\lambda - d) \left( \lambda + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{3Y}{1+\lambda T_1} \right) \right] \\ & + \frac{CY - DX}{4(Y^2 - X^2)} \left[ \left( \lambda + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{3Y}{1+\lambda T_1} \right) (DX - CY) + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{X}{1+\lambda T_1} (CX - DY) \right] \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \left( -\lambda + d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{Y}{1+\lambda T_1} \right) \left[ \frac{(aN_{seuil})^2}{8} \left( \frac{\sigma l}{T} \right)^2 \frac{X^2}{(1+\lambda T_1)^2} + (\lambda - d) \left( \lambda + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{3Y}{1+\lambda T_1} \right) \right] \\ & - \frac{(CY - DX)^2}{4(Y^2 - X^2)} \lambda + \frac{CY - DX}{4(Y^2 - X^2)} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{3Y(DX - CY) + X(CX - DY)}{1+\lambda T_1} \end{aligned}$$

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{cases} M_0^2 = \frac{(CY - DX)^2}{4(Y^2 - X^2)} \\ M_1^2 = \frac{C(CY - DX)}{8Y} \end{cases} \quad (A.32)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} & \left( -\lambda + d - \frac{\sigma l}{T} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{Y}{1+\lambda T_1} \right) \left[ \frac{(aN_{seuil})^2}{8} \left( \frac{\sigma l}{T} \right)^2 \frac{X^2}{(1+\lambda T_1)^2} + (\lambda - d) \left( \lambda + \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{3Y}{1+\lambda T_1} \right) \right] \\ & - M_0^2 \lambda + \frac{CY - DX}{4(Y^2 - X^2)} \frac{aN_{seuil}}{4} \frac{\sigma l}{T} \frac{2Y(DX - CY) + C(X^2 - Y^2)}{1+\lambda T_1} \end{aligned}$$

d'où l'équation caractéristique de degré 6 recherchée, dont les racines déterminent la stabilité de la solution stationnaire étudiée :

$$\left[ \left( -\lambda + d - \frac{\sigma l a N_{\text{seuil}}}{T} \frac{Y}{4} \frac{1}{1 + \lambda T_1} \right) \left[ \frac{(aN_{\text{seuil}})^2}{8} \left( \frac{\sigma l}{T} \right)^2 \frac{X^2}{(1 + \lambda T_1)^2} + (\lambda - d) \left( \lambda + \frac{\sigma l 3aN_{\text{seuil}}}{T} \frac{Y}{4} \frac{1}{1 + \lambda T_1} \right) \right] - M_0^2 \left( \lambda + \frac{\sigma l a N_{\text{seuil}}}{T} \frac{Y}{2} \frac{1}{1 + \lambda T_1} \right) - \frac{\sigma l a N_{\text{seuil}}}{T} \frac{Y}{2} \frac{1}{1 + \lambda T_1} M_1^2 = 0, \right. \quad (\text{A.33})$$

où l'on rappelle les notations utilisées dans cette équation :

$$\begin{cases} d = -\gamma + \frac{\sigma l}{T} N_0 = -\gamma + \frac{\sigma l}{T} N_{\text{seuil}} \left( 1 + \eta - \frac{aY}{2} \right) \\ M_0 = \frac{Y [m_1 \cos(\Phi + \theta_1) + m_2 \cos(\Phi + \theta_2)] - X [m_1 \cos(\Phi + \theta_1) - m_2 \cos(\Phi + \theta_2)]}{2\sqrt{Y^2 - X^2}} \\ M_1^2 = \frac{Y [m_1 \cos(\Phi + \theta_1) + m_2 \cos(\Phi + \theta_2)]^2 - X [m_1^2 \cos^2(\Phi + \theta_1) - m_2^2 \cos^2(\Phi + \theta_2)]}{8Y} \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

L'équation A.33 obtenue ici est conforme à ce qui avait été trouvé dans [29], ce qui confirme la validité de ce calcul.

### A.3 Stabilité de la solution nulle : seuil du laser

On rappelle (voir partie 2.1.1) que la solution nulle correspond à  $E_{1,2} = 0$ ,  $N_0 = WT_1$  et  $N_1 = 0$ . La phase stationnaire  $\Phi$  n'est pas contrainte par les équations dans ce cas. On étudie l'effet d'une perturbation infinitésimale et dépendant du temps comme  $\exp(\lambda t)$ , en effectuant la substitution suivante :

$$(E_1, E_2, N_0) \rightarrow (E_1, E_2, N_0) + (e_1, e_2, n_0)e^{\lambda t}, \quad (\text{A.35})$$

où chaque terme du vecteur infinitésimal  $(e_1, e_2, n_0)$  est supposé réel et indépendant du temps. Les équations du laser s'écrivent alors au premier ordre sous la forme matricielle suivante :

$$\lambda \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma l}{2T} N_0 & -\frac{m_1}{2} \sin(\Phi + \theta_1) & 0 \\ \frac{m_2}{2} \sin(\Phi + \theta_2) & -\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma l}{2T} N_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Les valeurs possibles de  $\lambda$  sont donc les racines de l'équation caractéristique suivante :

$$\left( \lambda + \frac{1}{T_1} \right) \left[ \left( \lambda + \frac{\gamma}{2} - \frac{\sigma l}{2T} N_0 \right)^2 + \frac{m_1 m_2}{4} \sin(\Phi + \theta_1) \sin(\Phi + \theta_2) \right] = 0. \quad (\text{A.37})$$

Une première valeur possible est  $\lambda_1 = -1/T_1$ , qui est toujours négative. Les autres valeurs possibles sont les solutions de l'équation :

$$\left( \lambda + \frac{\gamma}{2} - \frac{\sigma l}{2T} N_0 \right)^2 = \frac{m_1 m_2}{8} [\cos(2\Phi + \theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (\text{A.38})$$

Deux cas sont alors possibles :

- si  $\cos(2\Phi + \theta_1 + \theta_2) < \cos(\theta_1 - \theta_2)$ , alors les deux autres valeurs possibles de  $\lambda$  sont :

$$\lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma l}{2T} N_0 \pm i \sqrt{\frac{m_1 m_2}{8} |\cos(2\Phi + \theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)|}, \quad (\text{A.39})$$

et la condition de stabilité de la solution nulle  $\Re \lambda > 0$  s'écrit  $(\sigma l/T) N_0 < \gamma$ .

- si  $\cos(2\Phi + \theta_1 + \theta_2) > \cos(\theta_1 - \theta_2)$ , alors les deux autres valeurs possibles de  $\lambda$  sont :

$$\lambda_{2,3} = -\frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma l}{2T} N_0 \pm \sqrt{\frac{m_1 m_2}{8} [\cos(2\Phi + \theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)]}; \quad (\text{A.40})$$

la solution nulle étudiée ici n'est stable que si la partie réelle de  $\lambda_{2,3}$  est négative pour toutes les valeurs de  $\Phi$ , ce qui s'écrit :

$$\boxed{\frac{\sigma l}{T} N_0 < \gamma - \sqrt{\frac{m_1 m_2}{2} [1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)]}} . \quad (\text{A.41})$$

La condition A.41 est donc finalement la condition de stabilité de la solution nulle.

## A.4 Étude du régime d'émission bidirectionnelle verrouillé en fréquence

On cherche une solution du système d'équations 1.54 qui vérifie  $|X|/Y \ll 1$ . On détermine tout d'abord la valeur stationnaire des différents paramètres, avant de s'intéresser à l'étude de stabilité de ce régime.

### A.4.1 Valeur stationnaire de la différence de phase $\Phi$

En régime stationnaire, on a :

$$N_1 = -\frac{aN_{\text{seuil}}}{4} \sqrt{Y^2 - X^2} e^{-i\Phi} . \quad (\text{A.42})$$

En particulier, on a :

$$\Im(N_1 e^{i\Phi}) = 0 , \quad (\text{A.43})$$

d'où l'équation d'évolution de  $\Phi$  en régime stationnaire (en utilisant  $|X|/Y \ll 1$ ) :

$$0 = \Omega - \frac{m_1}{2} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{m_2}{2} \cos(\Phi + \theta_2) . \quad (\text{A.44})$$

Soit alors le nombre complexe  $\tilde{M}$  défini par :

$$\tilde{M} = \frac{m_1 e^{i\theta_1} - m_2 e^{i\theta_2}}{2} . \quad (\text{A.45})$$

Son module  $M$  s'écrit :

$$M = |\tilde{M}| = \frac{1}{2} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} , \quad (\text{A.46})$$

et son argument  $\theta$  vérifie :

$$\tan \theta = \frac{m_1 \sin \theta_1 - m_2 \sin \theta_2}{m_1 \cos \theta_1 - m_2 \cos \theta_2} . \quad (\text{A.47})$$

L'équation (A.44) se simplifie en utilisant les grandeurs  $M$  et  $\theta$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega - \cos \Phi \Re(\tilde{M}) + \sin \Phi \Im(\tilde{M}) \\ &= \Omega - M (\cos \Phi \cos \theta - \sin \Phi \sin \theta) \\ &= \Omega - M \cos(\Phi + \theta) . \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Cette équation n'admet de solution que pour  $|\Omega| < M$ , ce qui fixe une première limite d'existence pour ce régime : lorsqu'elle n'est plus vérifiée (c'est-à-dire lorsque le laser tourne trop vite), il n'existe pas de solution stationnaire correspondant à une émission bidirectionnelle stable. Dans le cas contraire,  $\Phi$  peut prendre deux valeurs distinctes :

$$\Phi = -\theta \pm \arccos \left( \frac{\Omega}{M} \right) . \quad (\text{A.49})$$

Étudions la stabilité de ces deux solutions. Pour cela, supposons qu'une petite perturbation dépendant du temps  $\varphi \ll 1$  se rajoute à la valeur stationnaire  $\Phi$ . L'équation d'évolution de la phase s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \Omega - M \cos(\Phi + \varphi + \theta) \\ &= \Omega - M [\cos(\Phi + \theta) - \sin(\Phi + \theta) \varphi] \\ &= M \sin \left[ \pm \arccos \left( \frac{\Omega}{M} \right) \right] \varphi , \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

où l'on a utilisé les équations (A.48) et (A.49). La seule solution stable pour  $\Phi$  dans ce régime est donc :

$$\Phi = -\theta - \arccos\left(\frac{\Omega}{M}\right). \quad (\text{A.51})$$

Si l'on suppose que le laser est à l'arrêt ( $\Omega = 0$ ) et que les coefficients de rétrodiffusion sont égaux ( $m_1 = m_2 = m$ ), on obtient :

$$\tan \Phi = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{\sin \theta_1 - \sin \theta_2}. \quad (\text{A.52})$$

### A.4.2 Valeur stationnaire de la somme des intensités des deux modes

L'équation d'évolution pour  $Y$  s'écrit en régime stationnaire :

$$0 = -Y \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{Y}{2} \left[ m_1 \sin(\Phi + \theta_1) - m_2 \sin(\Phi + \theta_2) - \frac{2\sigma l}{T} \Re(N_1 e^{i\Phi}) \right]$$

On a en régime stationnaire l'expression de  $N_0$  suivante :

$$N_0 = N_{\text{seuil}} \left( 1 + \eta - \frac{aY}{2} \right). \quad (\text{A.53})$$

On a également (en utilisant  $|X|/Y \ll 1$ ) :

$$\frac{2\sigma l}{T} \Re(N_1 e^{i\Phi}) \simeq -\frac{\sigma l a N_{\text{seuil}}}{T} Y, \quad (\text{A.54})$$

et aussi :

$$\begin{aligned} m_1 \sin(\Phi + \theta_1) - m_2 \sin(\Phi + \theta_2) &= 2M(\sin \Phi \cos \theta + \cos \Phi \sin \theta) \\ &= 2M \sin(\Phi + \theta) = -2M \sin \left[ \arccos\left(\frac{\Omega}{M}\right) \right] = -2\sqrt{M^2 - \Omega^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

L'équation d'évolution pour  $Y$  en régime stationnaire devient :

$$0 = -\gamma + \frac{\sigma l}{T} N_{\text{seuil}} \left( 1 + \eta - \frac{3aY}{4} \right) + \sqrt{M^2 - \Omega^2}$$

Il vient :

$$\frac{\sigma l}{T} N_{\text{seuil}} \frac{3aY}{4} = \frac{\sigma l}{T} N_{\text{seuil}} \eta + \sqrt{M^2 - \Omega^2} - \sqrt{m_1 m_2} \left| \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right|$$

d'où finalement :

$$\frac{aY}{2} = \frac{2}{3} \left( \eta + \frac{\sqrt{M^2 - \Omega^2} - \sqrt{m_1 m_2} \left| \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right|}{\gamma - \sqrt{m_1 m_2} \left| \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right|} \right) \quad (\text{A.56})$$

Si l'on suppose que le laser est à l'arrêt ( $\Omega = 0$ ) et que les coefficients de rétrodiffusion sont égaux ( $m_1 = m_2 = m$ ), on obtient :

$$\frac{aY}{2} = \frac{2\eta}{3}. \quad (\text{A.57})$$

### A.4.3 Valeur stationnaire de la différence des intensités

L'équation stationnaire pour la différence d'intensité s'écrit :

$$0 = -X \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{Y}{2} \underbrace{\left[ m_1 \sin(\Phi + \theta_1) + m_2 \sin(\Phi + \theta_2) \right]}_B \quad (\text{A.58})$$

Afin d'effectuer le calcul de la quantité  $B$ , on remarque tout d'abord qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$B = \Im \left( e^{i\Phi} \tilde{P} \right), \quad (\text{A.59})$$

où l'on a défini :

$$\tilde{P} = m_1 e^{i\theta_1} + m_2 e^{i\theta_2} \quad (\text{A.60})$$

et où l'on a utilisé l'identité suivante :

$$\Im(z_1 z_2) = \Im z_1 \Re z_2 + \Re z_1 \Im z_2 \quad (\text{A.61})$$

On a par ailleurs :

$$\tilde{M}^* \tilde{P} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2} + i m_1 m_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (\text{A.62})$$

Il vient :

$$M^2 B = \tilde{M} \tilde{M}^* \Im(e^{i\Phi} \tilde{P}) = \Im(\tilde{M}^* \tilde{P} M e^{i(\theta+\Phi)}) \quad (\text{A.63})$$

d'où :

$$M^2 B = m_1 m_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \Omega + \frac{m_2^2 - m_1^2}{2} \sqrt{M^2 - \Omega^2} \quad (\text{A.64})$$

On a donc :

$$\frac{X}{Y} \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) = \frac{1}{2M^2} \left[ m_1 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \Omega + \frac{m_2^2 - m_1^2}{2} \sqrt{M^2 - \Omega^2} \right] \quad (\text{A.65})$$

En posant :

$$d = \frac{\sigma l}{T} N_0 - \gamma \quad (\text{A.66})$$

on obtient finalement :

$$\frac{X}{Y} = \frac{1}{2dM^2} \left[ -m_1 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \Omega + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2} \sqrt{M^2 - \Omega^2} \right] \quad (\text{A.67})$$

On rappelle que cette solution stationnaire est soumise à la condition d'auto-consistance  $|X|/Y \ll 1$ . Si l'on suppose que  $m_1 = m_2 = m$ , on obtient :

$$\frac{X}{Y} = \frac{-m^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \Omega}{2dM^2}. \quad (\text{A.68})$$

Si l'on suppose de plus que le laser est à l'arrêt ( $\Omega = 0$ ), on a :

$$X = 0. \quad (\text{A.69})$$

En insérant les valeurs de  $Y$  et de  $X$  A.57 et A.69 dans les équations A.42 et A.53, on obtient, toujours sous les hypothèses  $\Omega = 0$  et  $m_1 = m_2 = m$  :

$$N_0 = N_{\text{seuil}} \left( 1 + \frac{\eta}{3} \right) \quad \text{et} \quad N_1 = -\frac{\eta N_{\text{seuil}}}{3} e^{-i\Phi}. \quad (\text{A.70})$$

#### A.4.4 Stabilité du régime étudié à $\Omega = 0$ et $m_1 = m_2$

On suppose dans ce qui suit que  $\Omega = 0$  et  $m_1 = m_2 = m$ . On a alors  $X = 0$  et  $aY/2 = 2\eta/3$ . On utilise les pertes effectives du laser  $\gamma'$  définies par  $\gamma' = (\sigma l/T) N_{\text{seuil}}$ . Le polynôme caractéristique issu de l'étude de stabilité des solutions stationnaires A.33 s'écrit dans notre cas :

$$\left( -\lambda + d - \frac{\gamma'}{3} \frac{\eta}{1 + \lambda T_1} \right) (\lambda - d) \left( \lambda + \frac{\gamma' \eta}{1 + \lambda T_1} \right) - M_0^2 \left( \lambda + \frac{\gamma'}{3} \frac{2\eta}{1 + \lambda T_1} \right) - \frac{\gamma'}{3} \frac{2\eta}{1 + \lambda T_1} M_1^2, \quad (\text{A.71})$$

où l'on a utilisé les notations :

$$\begin{cases} d = -\gamma + \frac{\sigma l}{T} N_0 = -\gamma + \gamma' \left( 1 + \eta - \frac{aY}{2} \right) = \frac{\gamma \eta}{3} - m \left| \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right| \\ M_0 = \frac{m_1 \cos(\Phi + \theta_1) + m_2 \cos(\Phi + \theta_2)}{2} \\ M_1 = \frac{m_1 \cos(\Phi + \theta_1) + m_2 \cos(\Phi + \theta_2)}{2\sqrt{2}} = \frac{M_0}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (\text{A.72})$$

Grâce à la relation  $M_1^2 = M_0^2/2$ , l'équation A.71 se réécrit :

$$\left( \lambda + \frac{\gamma'\eta}{1 + \lambda T_1} \right) \left[ \left( -\lambda + d - \frac{\gamma'}{3} \frac{\eta}{1 + \lambda T_1} \right) (\lambda - d) - M_0^2 \right] = 0. \quad (\text{A.73})$$

Le facteur de gauche de cette équation donne lieu aux deux racines suivantes :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2T_1} \pm i\sqrt{\frac{\gamma'\eta}{T_1}}. \quad (\text{A.74})$$

Le facteur de droite se réécrit :

$$\left( -\lambda + d - \frac{\gamma'\eta}{3T_1(\lambda + 1/T_1)} \right) (\lambda - d) - M_0^2 = 0. \quad (\text{A.75})$$

Pour trouver des valeurs approchées des racines de cette équation, on va effectuer des hypothèses auto-consistantes sur leur ordre de grandeur. On utilisera pour cela le fait que  $\gamma'\eta \gg 1/T_1$ , ce qui est toujours vérifié dans le cas des lasers de classe B. Supposons tout d'abord que l'on ait  $\lambda \gg \sqrt{\gamma'\eta/T_1}$  (et donc aussi  $\lambda \gg 1/T_1$ ). Alors l'équation ci-dessus se réécrit :

$$(\lambda - d)^2 + M_0^2 = 0, \quad (\text{A.76})$$

d'où le couple de racines suivant :

$$\lambda_{3,4} = d \pm iM_0. \quad (\text{A.77})$$

On vérifie a posteriori que  $|\lambda_{3,4}| \simeq \gamma'\eta \gg \sqrt{\gamma'\eta/T_1}$ , ce qui garantit la validité de la démarche. De même, si l'on cherche maintenant une racine très petite devant  $d$ , on obtient :

$$\lambda_5 = -\left( \frac{1}{T_1} - \frac{\gamma'\eta}{3T_1} \frac{d}{d^2 + M_0^2} \right). \quad (\text{A.78})$$

Là encore, l'hypothèse initiale est vérifiée.

## A.5 Étude du régime unidirectionnel à l'arrêt

On s'intéresse au régime stationnaire unidirectionnel à l'arrêt. On cherche donc des solutions stationnaires correspondant par exemple à  $\epsilon = E_1/E_2 \ll 1$ . Les équations stationnaires du laser s'écrivent, pour  $\Omega = 0$  :

$$\begin{cases} 0 = dE_1 - m_1 E_2 \sin(\Phi + \theta_1) - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2} \frac{\sigma l}{T} E_1 E_2^2 \\ 0 = dE_2 + m_2 E_1 \sin(\Phi + \theta_2) - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2} \frac{\sigma l}{T} E_1^2 E_2 \\ 0 = -\frac{m_1}{2} \frac{E_2}{E_1} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{m_2}{2} \frac{E_1}{E_2} \cos(\Phi + \theta_2) \\ N_0 = N_{\text{seuil}} \left( 1 + \eta - \frac{aE_1^2 + aE_2^2}{2} \right) \end{cases} \quad (\text{A.79})$$

La troisième équation s'écrit :

$$\cos(\Phi + \theta_1) = \frac{m_2}{m_1} \epsilon^2 \cos(\Phi + \theta_2) \simeq 0 \quad (\text{A.80})$$

où la dernière égalité n'est valable qu'au premier ordre en  $\epsilon$ . On en déduit, toujours au premier ordre en  $\epsilon$  :

$$\sin(\Phi + \theta_1) = \pm 1 = S. \quad (\text{A.81})$$

La quatrième équation du système A.79 donne, toujours au premier ordre en  $\epsilon$  (et en considérant que  $m \ll \gamma$ ) :

$$aE_2^2 = 2\eta \quad (\text{A.82})$$

Les deux premières équations de A.79 se réécrivent alors :

$$\begin{cases} 0 = d\epsilon - m_1 S - \gamma\eta\epsilon \\ 0 = d + m_2\epsilon \sin(\Phi + \theta_2) - \gamma\eta\epsilon^2 \end{cases} \quad (\text{A.83})$$

On obtient :

$$d + m_2\epsilon \sin(\Phi + \theta_2) = -Sm_1\epsilon, \quad (\text{A.84})$$

d'où :

$$\epsilon = \frac{-Sm_1}{\gamma\eta} \quad (\text{A.85})$$

Comme on a  $\epsilon > 0$ , on en déduit :

$$S = \sin(\Phi + \theta_1) = -1, \quad (\text{A.86})$$

d'où finalement :

$$\epsilon = \frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1}{\gamma\eta}. \quad (\text{A.87})$$

En particulier, une condition d'existence de ce régime s'écrit :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1}{\gamma\eta} \ll 1. \quad (\text{A.88})$$

En utilisant les équations stationnaires pour  $N_0$  et  $N_1$  (équations A.42 et A.53), on obtient :

$$N_0 = N_{\text{seuil}} \quad \text{et} \quad N_1 = \frac{-m_1}{\gamma} N_{\text{seuil}} e^{-i\Phi}. \quad (\text{A.89})$$

On a par ailleurs :

$$d = \frac{m_1^2 - m_1 m_2 \sin(\Phi + \theta_2)}{\gamma\eta} = \frac{m_1^2 + m_1 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\gamma\eta}. \quad (\text{A.90})$$

On a également :

$$M_0 = \frac{m_1 \cos(\Phi + \theta_1) + \epsilon^2 m_2 \cos(\Phi + \theta_2)}{2\epsilon} = \frac{m_1 m_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{\gamma\eta}, \quad (\text{A.91})$$

et aussi :

$$\begin{aligned} M_1^2 &= \frac{Y [m_1 \cos(\Phi + \theta_1) + m_2 \cos(\Phi + \theta_2)]^2 - X [m_1^2 \cos^2(\Phi + \theta_1) - m_2^2 \cos^2(\Phi + \theta_2)]}{8Y} \\ &= [m_1 \cos(\Phi + \theta_1) + m_2 \cos(\Phi + \theta_2)] \frac{[m_1 \cos(\Phi + \theta_1) + \epsilon^2 m_2 \cos(\Phi + \theta_2)]}{4} \\ &= m_2 \cos(\Phi + \theta_2) \frac{\epsilon M_0}{2} = \frac{m_1 m_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{2\gamma\eta} M_0 = \frac{M_0^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

On a donc l'équation de stabilité suivante :

$$\left( -\lambda + d - \frac{\gamma\eta/2}{1 + \lambda T_1} \right) \left[ \frac{(\gamma\eta)^2 (1 - 4\epsilon^2)}{2(1 + \lambda T_1)^2} + (\lambda - d) \left( \lambda + \frac{3\gamma\eta/2}{1 + \lambda T_1} \right) \right] - M_0^2 \left( \lambda + \frac{3\gamma\eta/2}{1 + \lambda T_1} \right), \quad (\text{A.93})$$

On cherche des racines de cette équation ayant pour ordre de grandeur  $\omega_r$ . En première approximation, l'équation ci-dessus se réécrit (en utilisant le fait que  $M_0, d, 1/T_1 \ll \omega_r$ ) :

$$\left( -\lambda - \frac{\omega_r^2}{2\lambda} \right) \left[ \frac{\omega_r^4}{2\lambda^2} + \lambda \left( \lambda + \frac{3\omega_r^2}{2\lambda} \right) \right] = 0. \quad (\text{A.94})$$

On trouve deux racines simples et deux racines doubles à cette équation, à savoir :

$$\lambda_{1,2}^{(0)} = \pm i\omega_r \quad \text{et} \quad \lambda_{3,4}^{(0)} = \lambda_{5,6}^{(0)} = \pm i \frac{\omega_r}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.95})$$

Pour obtenir une information sur le signe de la partie réelle, on pose  $\lambda = \lambda^{(0)} + \Delta\lambda$ . On pose également  $D = \Delta\lambda + 1/T_1$ . Il vient :

$$\left( -\lambda^{(0)} - \Delta\lambda + d - \frac{\omega_r^2}{2\lambda^{(0)}} \left( 1 - \frac{D}{\lambda^{(0)}} \right) \right) \left[ \frac{\omega_r^4}{2\lambda^{(0)2}} \left( 1 - \frac{2D}{\lambda^{(0)}} \right) + (\lambda^{(0)} + \Delta\lambda - d) \left( \lambda^{(0)} + \Delta\lambda + \frac{3\omega_r^2}{2\lambda^{(0)}} \left( 1 - \frac{D}{\lambda^{(0)}} \right) \right) \right] - M_0^2 \left( \lambda^{(0)} + \Delta\lambda + \frac{3\omega_r^2}{2\lambda^{(0)}} \left( 1 - \frac{D}{\lambda^{(0)}} \right) \right) = 0, \quad (\text{A.96})$$

Considérons tout d'abord le cas  $\lambda^{(0)2} + \omega_r^2 = 0$ . Il vient :

$$\left[ \lambda^{(0)} D + \lambda^{(0)} \Delta\lambda + \lambda^{(0)} d \right] - 2M_0^2 = 0, \quad (\text{A.97})$$

d'où l'on déduit :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{T_1} + d \right) \pm i\omega_r \quad (\text{A.98})$$

Considérons maintenant le cas  $2\lambda^{(0)2} + \omega_r^2 = 0$ . Cela donne :

$$(-\Delta\lambda + d - D) \left[ -4D\lambda^{(0)} + \lambda^{(0)} (\Delta\lambda + 3D) - 2\lambda^{(0)} (\Delta\lambda - d) \right] + 2\lambda^{(0)} M_0^2 = 0, \quad (\text{A.99})$$

d'où :

$$(-2\Delta\lambda + d - 1/T_1) [-1/T_1 - 2\Delta\lambda + 2d] + 2M_0^2 = 0, \quad (\text{A.100})$$

Il vient :

$$4(\Delta\lambda)^2 - 2\Delta\lambda \left( 3d - \frac{2}{T_1} \right) + \left( d - \frac{1}{T_1} \right) \left( 2d - \frac{1}{T_1} \right) + 2M_0^2 = 0 \quad (\text{A.101})$$

Le discriminant (réduit) s'écrit :

$$\Delta' = d^2 - 8M_0^2 \quad (\text{A.102})$$

Lorsque  $d^2 - 8M_0^2 > 0$ , la condition de stabilité s'écrit :

$$\Delta\lambda = 3d + \sqrt{d^2 - 8M_0^2} < \frac{2}{T_1} \quad (\text{A.103})$$

Lorsque  $d^2 - 8M_0^2 < 0$ , elle s'écrit :

$$\Delta\lambda = 3d < \frac{2}{T_1} \quad (\text{A.104})$$

Une condition suffisante de stabilité est donc :

$$d < \frac{1}{2T_1} \quad (\text{A.105})$$

Une condition suffisante d'instabilité étant :

$$d > \frac{2}{3T_1} \quad (\text{A.106})$$

Lorsque  $\theta_1 - \theta_2$  est proche de 0, la condition de stabilité se réécrit, en supposant  $m_1 = m_2 = m$  :

$$\boxed{m < \sqrt{\frac{\gamma\eta}{4T_1}} = \frac{\omega_r}{2}} \quad (\text{A.107})$$

## A.6 Étude du régime d'automodulation à l'arrêt pour $m \gg \gamma\eta$ et $|\theta_1 - \theta_2| \ll 1$

On cherche dans cette partie à étudier le comportement du laser dans la zone intermédiaire entre la zone bidirectionnelle stable et la zone unidirectionnelle. On repart du système d'équation 1.54, en supposant  $m_1 = m_2 = m$  et  $|\theta_1 - \theta_2| \ll 1$ . Le système s'écrit alors (au prix d'un décalage de l'origine de  $\Phi$  de  $(\theta_1 + \theta_2)/2$  et en posant  $\delta_\theta = (\theta_1 - \theta_2)/2$ ) :

$$\begin{cases} \dot{Y} = -Y \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \sqrt{Y^2 - X^2} \left[ m \cos \Phi \delta_\theta - \frac{\sigma l}{T} \Re(N_1 e^{i\Phi}) \right] \\ \dot{X} = -X \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \sqrt{Y^2 - X^2} m \sin \Phi \\ \dot{\Phi} = m \frac{X \cos \Phi + Y \delta_\theta \sin \Phi}{\sqrt{Y^2 - X^2}} - \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \frac{\sigma l}{T} \Im(N_1 e^{i\Phi}) \\ \dot{N}_0 = W - \frac{N_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} Y \\ \dot{N}_1 = -\frac{N_1}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \sqrt{Y^2 - X^2} e^{-i\Phi} \end{cases} \quad (\text{A.108})$$

Si l'on suppose de plus que  $m \gg \gamma\eta$ , ce système se réécrit à l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \dot{Y} = 0 \\ \dot{X} = -\sqrt{Y^2 - X^2} m \sin \Phi \\ \dot{\Phi} = m \frac{X \cos \Phi}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \end{cases} \quad (\text{A.109})$$

Afin d'obtenir un système linéaire, on effectue le changement de variables suivant :

$$Z = -\sqrt{Y^2 - X^2} \sin \Phi \quad \text{et} \quad U = \sqrt{Y^2 - X^2} \cos \Phi \quad (\text{A.110})$$

On obtient :

$$\begin{cases} \dot{Y} = 0 \\ \dot{X} = mZ \\ \dot{Z} = -mX \\ \dot{U} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.111})$$

Ce système s'intègre de la manière suivante :

$$\begin{cases} Y = B \\ \ddot{X} = -m^2 X \Rightarrow X = A \sin(mt + \varphi) \\ Z = A \cos(mt + \varphi) + C \\ U = D \end{cases} \quad (\text{A.112})$$

De l'égalité  $Z^2 + U^2 = Y^2 - X^2$ , on tire :

$$C = 0 \quad \text{et} \quad D = \pm \sqrt{B^2 - A^2}, \quad (\text{A.113})$$

d'où finalement :

$$\begin{cases} Y = B \\ X = A \sin(mt + \varphi) \\ Z = A \cos(mt + \varphi) \\ U = \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} \quad \text{avec} \quad \epsilon = \pm 1 \end{cases} \quad (\text{A.114})$$

Les intensités des modes  $aE_{1,2}^2 = Y + (-1)^{2,1} X$  s'écrivent :

$$aE_{1,2}^2 = \frac{aB}{2} + \frac{(-1)^{2,1} aA \sin(mt + \varphi)}{2}. \quad (\text{A.115})$$

Pour déterminer la valeur des constantes  $A$  et  $B$ , on va maintenant insérer ces solutions dans les équations complètes du laser, en supposant que  $A$  et  $B$  sont des fonctions lentement variables par rapport à  $m$ . On écrira donc dans leur équation d'évolution qu'elles ne sont sensibles qu'à la valeur moyenne de  $N_0$  et  $N_1$ .

$$\dot{N}_1 = -\frac{N_1}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1}(U + iZ) \quad (\text{A.116})$$

On moyenne sur quelques périodes de  $m$  :

$$\langle \dot{N}_1 \rangle = -\frac{\langle N_1 \rangle}{T_1} - \epsilon \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \sqrt{B^2 - A^2} \quad (\text{A.117})$$

De même, on obtient :

$$\langle \dot{N}_0 \rangle = W - \frac{\langle N_0 \rangle}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} B \quad (\text{A.118})$$

On a également :

$$\begin{cases} \dot{B} = -B \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} \langle N_0 \rangle \right) - m\epsilon \sqrt{B^2 - A^2} \delta_\theta + \frac{\sigma l}{T} \langle N_1 \rangle \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} \\ \dot{A} = -A \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} \langle N_0 \rangle \right) \end{cases} \quad (\text{A.119})$$

On en déduit, en régime stationnaire (en excluant le cas  $A = 0$ ) :

$$\begin{cases} \gamma - \frac{\sigma l}{T} \langle N_0 \rangle = 0 \\ 0 = \left( -m\delta_\theta + \frac{\sigma l}{T} \langle N_1 \rangle \right) \sqrt{B^2 - A^2} \end{cases} \quad (\text{A.120})$$

d'où finalement, en posant  $\gamma' = \sigma l N_{\text{seuil}} / T$  :

$$\begin{cases} a\sqrt{B^2 - A^2} = \frac{4m|\delta_\theta|}{\gamma'} \\ \frac{aB}{2} = \eta + 1 - \frac{\gamma}{\gamma'} \end{cases} \quad (\text{A.121})$$

La différence de phase du laser a quant à elle l'expression suivante :

$$\dot{\Phi} = \frac{mX \cos \Phi}{\sqrt{Y^2 - X^2}} = \frac{mA\epsilon \sqrt{B^2 - A^2} \sin(mt + \varphi)}{B^2 - A^2 \sin^2(mt + \varphi)}. \quad (\text{A.122})$$

## A.7 Étude du régime stationnaire unidirectionnel en rotation

On ce place dans le cas des fortes rotations :

$$|\Omega| \gg m_{1,2}, \gamma\eta. \quad (\text{A.123})$$

On cherche les solutions stationnaires correspondant à un régime de fonctionnement unidirectionnel, c'est-à-dire  $|Y| - |X| \ll |Y| + |X|$ . On suppose par exemple que c'est le mode  $E_2$  qui domine, ce qui correspond à  $E_1/E_2 \ll 1$ . Les équations du laser s'écrivent, en régime stationnaire :

$$\begin{cases} 0 = dE_1 - m_1 E_2 \sin(\Phi + \theta_1) - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2} \frac{\sigma l}{T} E_1 E_2^2 \\ 0 = dE_2 + m_2 E_1 \sin(\Phi + \theta_2) - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2} \frac{\sigma l}{T} E_1^2 E_2 \\ 0 = \Omega - \frac{m_1}{2} \frac{E_2}{E_1} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{m_2}{2} \frac{E_1}{E_2} \cos(\Phi + \theta_2) \\ N_0 = N_{\text{seuil}} \left( 1 + \eta - \frac{aE_1^2 + aE_2^2}{2} \right) \end{cases} \quad (\text{A.124})$$

On fait l'hypothèse que  $E_1/E_2$  est du même ordre de grandeur que  $m/|\Omega|$ . Cette hypothèse sera vérifiée à la fin du calcul. La quatrième de ces équations donne, à l'ordre 0 en  $m/|\Omega|$  et  $m/\gamma$  :

$$aE_2^2 = 2\eta . \quad (\text{A.125})$$

La première de ces équations donne alors, à l'ordre 0 en  $m/|\Omega|$  et  $\gamma\eta/|\Omega|$  :

$$\sin(\Phi + \theta_1) = 0 . \quad (\text{A.126})$$

La troisième de ces équations donne alors, à l'ordre 1 :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1 \cos(\Phi + \theta_1)}{2\Omega} = \left| \frac{m_1}{2\Omega} \right| \quad (\text{A.127})$$

ce qui valide l'hypothèse initiale. À noter que  $\cos(\Phi + \theta_1) = \pm 1$  selon le signe de  $\Omega$ . La deuxième équation donne alors, à l'ordre 1 :

$$d = -m_2 \frac{E_1}{E_2} \sin(\Phi + \theta_2) = -\frac{m_1 m_2}{2\Omega} \cos(\Phi + \theta_1) \sin(\Phi + \theta_2) = \frac{m_1 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2\Omega} . \quad (\text{A.128})$$

Le paramètre  $M_0$  s'écrit dans ce régime :

$$M_0 = \frac{E_2 m_1 \cos(\Phi + \theta_1)}{2E_1} = \Omega . \quad (\text{A.129})$$

Le paramètre  $M_1$  s'écrit quant à lui :

$$M_1^2 = \frac{m_1 \cos(\Phi + \theta_1)}{4} [m_1 \cos(\Phi + \theta_1)] = \frac{m_1^2}{4} \quad (\text{A.130})$$

On a donc l'équation caractéristique de stabilité suivante :

$$\begin{aligned} & \left( -\lambda + d - \frac{\gamma\eta/2}{1 + \lambda T_1} \right) \left[ \frac{\gamma^2 \eta^2}{2(1 + \lambda T_1)^2} + (\lambda - d) \left( \lambda + \frac{3\gamma\eta/2}{1 + \lambda T_1} \right) \right] \\ & - \Omega^2 \left( \lambda + \frac{\gamma\eta}{1 + \lambda T_1} \right) - \frac{\gamma\eta/4}{1 + \lambda T_1} m_1^2 , \end{aligned} \quad (\text{A.131})$$

On cherche tout d'abord des solutions vérifiant  $\lambda T_1 \gg 1$ . L'équation se réécrit dans ce cas :

$$\left( -\lambda + d - \frac{\omega_r^2}{2\lambda} \right) \left[ \frac{\omega_r^4}{2\lambda^2} + (\lambda - d) \left( \lambda + \frac{3\omega_r^2}{2\lambda} \right) \right] - \Omega^2 \left( \lambda + \frac{\omega_r^2}{\lambda} \right) - \frac{\omega_r^2 m_1^2}{\lambda 4} . \quad (\text{A.132})$$

Si l'on suppose en plus que  $\lambda^2 \gg \omega_r^2$ , on obtient (en se rappelant aussi  $\Omega^2 \gg M_1^2$ ) :

$$(\lambda - d)^2 + \Omega^2 = 0 , \quad (\text{A.133})$$

d'où un premier couple de racines :

$$\lambda_{1,2} = d \pm i\Omega . \quad (\text{A.134})$$

Pour les racines vérifiant  $|\lambda| \simeq \omega_r$ , l'équation caractéristique s'écrit en première approximation (en utilisant  $\Omega^2 \gg \omega_r^2$ ) :

$$\Omega^2 (\lambda^2 + \omega_r^2) = 0 \quad (\text{A.135})$$

ce qui donne :

$$\lambda_{3,4}^{(0)} = \pm i\omega_r \quad (\text{A.136})$$

En écrivant  $\lambda = \lambda^{(0)} + \Delta\lambda$ , on obtient :

$$\Delta\lambda = \frac{\omega_r^2 d}{8\Omega^2} . \quad (\text{A.137})$$

d'où finalement :

$$\lambda_{3,4} = \frac{\omega_r^2 d}{8\Omega^2} \pm i\omega_r \quad (\text{A.138})$$

On cherche maintenant les racines vérifiant  $\lambda T_1 \simeq 1$ . L'équation caractéristique se réécrit :

$$\frac{\gamma^2 \eta^2}{4(1 + \lambda T_1)^2} + \Omega^2 = 0, \quad (\text{A.139})$$

d'où l'on obtient :

$$\lambda_{5,6} = -\frac{1}{T_1} \pm i \frac{\gamma \eta}{2T_1 \Omega}. \quad (\text{A.140})$$

La condition de stabilité issue du calcul des 6 racines de l'équation caractéristique est donc une fois encore  $d < 0$ , ce qui se réécrit :

$$\Omega \sin(\theta_1 - \theta_2) < 0. \quad (\text{A.141})$$

De la même manière, on obtient la condition de stabilité du régime correspondant à  $E_2/E_1 \ll 1$  :

$$\Omega \sin(\theta_1 - \theta_2) > 0. \quad (\text{A.142})$$

## A.8 Pertes différentielles induites par la rétrodiffusion à $\Omega$ grand

On considère ici un modèle simplifié qui ne tient en partie pas compte des effets de la compétition entre modes et du réseau de gain, et qui n'est valable qu'aux grandes vitesses de rotation (pour lesquelles on a en première approximation  $C = 1$ ,  $C$  étant la constante de couplage des équations de Lamb). On part des équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{E}_1}{dt} = i \frac{\tilde{m}_1}{2} \tilde{E}_2 + i \frac{\Omega}{2} \tilde{E}_1 \\ \frac{d\tilde{E}_2}{dt} = i \frac{\tilde{m}_2}{2} \tilde{E}_1 - i \frac{\Omega}{2} \tilde{E}_2 \end{cases} \quad (\text{A.143})$$

En dérivant la première équation par rapport au temps et en utilisant la deuxième, on obtient :

$$\frac{d^2 \tilde{E}_1}{dt^2} = i \frac{\tilde{m}_1}{2} \left( i \frac{\tilde{m}_2}{2} \tilde{E}_1 - i \frac{\Omega}{2} \tilde{E}_2 \right) + i \frac{\Omega}{2} \frac{d\tilde{E}_1}{dt} \quad (\text{A.144})$$

On fait de plus l'hypothèse des enveloppes lentement variables par rapport à  $\Omega$ , c'est-à-dire qu'on écrit les champs sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{E}_1 = E_1 e^{i\Omega t/2} \\ \tilde{E}_2 = E_2 e^{-i\Omega t/2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad |\ddot{E}_1| \ll |\Omega \dot{E}_1| \quad (\text{A.145})$$

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{E}_1}{dt} = \dot{E}_1 e^{i\Omega t/2} + i \frac{\Omega}{2} E_1 e^{i\Omega t/2} \\ \frac{d^2 \tilde{E}_1}{dt^2} = \ddot{E}_1 e^{i\Omega t/2} + i\Omega \dot{E}_1 e^{i\Omega t/2} - \frac{\Omega^2}{4} E_1 e^{i\Omega t/2} \end{cases} \quad (\text{A.146})$$

L'équation (A.144) devient alors :

$$\ddot{E}_1 + i\Omega \dot{E}_1 - \frac{\Omega^2}{4} E_1 = i \frac{\tilde{m}_1}{2} \left( i \frac{\tilde{m}_2}{2} E_1 - i \frac{\Omega}{2} E_2 e^{-i\Omega t} \right) + i \frac{\Omega}{2} \left( \dot{E}_1 + i \frac{\Omega}{2} E_1 \right) \quad (\text{A.147})$$

En utilisant l'hypothèse  $|\ddot{E}_1| \ll |\Omega \dot{E}_1|$ , on obtient :

$$i \frac{\Omega}{2} \dot{E}_1 = -\frac{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2}{4} E_1 + \frac{\Omega \tilde{m}_1}{4} E_2 e^{-i\Omega t} \quad (\text{A.148})$$

et finalement :

$$\dot{E}_1 = i \frac{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2}{2\Omega} E_1 - i \frac{\tilde{m}_1}{2} E_2 e^{-i\Omega t} \quad (\text{A.149})$$

Le terme de droite de cette équation représente la rétrodiffusion dans le référentiel tournant. Le terme de gauche donne quant à lui lieu à un coefficient de pertes (ou de gain) effectif donné par  $m_1 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)/(2\Omega)$ .

En répétant le même raisonnement pour  $E_2$ , on montre finalement l'existence d'une différence de pertes entre les modes contrapropagatifs induites par la rétrodiffusion et ayant pour expression :

$$\Delta = \frac{m_1 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\Omega}. \quad (\text{A.150})$$

## A.9 Étude du régime d'automodulation en rotation

On supposera dans cette partie que l'on a la relation  $|\theta_1 - \theta_2| \ll 1$ . Le comportement du laser en rotation peut alors être décrit en utilisant le même formalisme que celui développé pour l'étude du régime d'automodulation à l'arrêt. On part du système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \dot{Y} = -Y \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \sqrt{Y^2 - X^2} \left[ m \cos \Phi \delta_\theta - \frac{\sigma l}{T} \Re(N_1 e^{i\Phi}) \right] \\ \dot{X} = -X \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \sqrt{Y^2 - X^2} m \sin \Phi \\ \dot{\Phi} = \Omega + m \frac{X \cos \Phi + Y \delta_\theta \sin \Phi}{\sqrt{Y^2 - X^2}} - \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \frac{\sigma l}{T} \Im(N_1 e^{i\Phi}) \\ \dot{N}_0 = W - \frac{N_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} Y \\ \dot{N}_1 = -\frac{N_1}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \sqrt{Y^2 - X^2} e^{-i\Phi} \end{cases} \quad (\text{A.151})$$

Si l'on suppose de plus vérifiée la condition (moins contraignante que  $m \gg \gamma\eta$ ) suivante :

$$\frac{\nu^2}{m} \gg \gamma\eta \quad \text{où l'on a posé } \nu = \sqrt{m^2 + \Omega^2} \quad (\text{A.152})$$

alors ce système se réécrit à l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \dot{Y} = 0 \\ \dot{X} = -\sqrt{Y^2 - X^2} m \sin \Phi \\ \dot{\Phi} = \Omega + m \frac{X \cos \Phi}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \end{cases} \quad (\text{A.153})$$

Afin d'obtenir un système linéaire, on effectue le changement de variables suivant :

$$Z = -\sqrt{Y^2 - X^2} \sin \Phi \quad \text{et} \quad U = \sqrt{Y^2 - X^2} \cos \Phi \quad (\text{A.154})$$

On obtient :

$$\begin{cases} \dot{Y} = 0 \\ \dot{X} = mZ \\ \dot{Z} = -U\Omega - mX \\ \dot{U} = Z\Omega \end{cases} \quad (\text{A.155})$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ Z \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 \\ -m & 0 & -\Omega \\ 0 & \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Z \\ U \end{pmatrix} \quad (\text{A.156})$$

Les valeurs propres de cette matrice sont 0 et  $\pm\sqrt{\Omega^2 + m^2}$ . La solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \\ U \end{pmatrix} = \tilde{K} \begin{pmatrix} -\Omega \\ 0 \\ m \end{pmatrix} + \tilde{L} \begin{pmatrix} im \\ -\nu \\ i\Omega \end{pmatrix} e^{i\nu t} + \tilde{M} \begin{pmatrix} -im \\ -\nu \\ -i\Omega \end{pmatrix} e^{-i\nu t} \quad (\text{A.157})$$

Les grandeurs  $X$ ,  $Z$  et  $U$  étant réelles, on en déduit les relations suivantes sur  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{L}$  et  $\tilde{M}$  :

$$\tilde{K} = \tilde{K}^* \quad \text{et} \quad \tilde{L} = \tilde{M}^* \quad (\text{A.158})$$

On notera donc  $\tilde{K} = K$  et  $\tilde{L} = Le^{i\varphi}$  avec  $K$ ,  $L$  et  $\varphi$  réels. Il vient :

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \\ U \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} -\Omega \\ 0 \\ m \end{pmatrix} + Le^{i\varphi} \begin{pmatrix} im \\ -\nu \\ i\Omega \end{pmatrix} e^{i\nu t} + Le^{-i\varphi} \begin{pmatrix} -im \\ -\nu \\ -i\Omega \end{pmatrix} e^{-i\nu t} \quad (\text{A.159})$$

Cela donne :

$$\begin{cases} X = -K\Omega + imL \left[ e^{i(\nu t + \varphi)} - e^{-i(\nu t + \varphi)} \right] = -K\Omega + 2mL \sin(\nu t + \varphi) \\ Z = -L\nu \left[ e^{i(\nu t + \varphi)} + e^{-i(\nu t + \varphi)} \right] = -2L\nu \cos(\nu t + \varphi) \\ U = Km + L\Omega i \left[ e^{i(\nu t + \varphi)} - e^{-i(\nu t + \varphi)} \right] = Km + 2L\Omega \sin(\nu t + \varphi) \\ Y = B \end{cases} \quad (\text{A.160})$$

On pose  $A = -2L\nu$ . De l'égalité  $Z^2 + U^2 = Y^2 - X^2$ , on tire :

$$K = \epsilon \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{\nu} \quad (\text{A.161})$$

d'où finalement :

$$\begin{cases} X = -\frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} - \frac{m}{\nu} A \sin(\nu t + \varphi) \\ Z = A \cos(\nu t + \varphi) \\ U = \frac{m}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} - \frac{\Omega}{\nu} A \sin(\nu t + \varphi) \\ Y = B \end{cases} \quad (\text{A.162})$$

Pour déterminer la valeur des constantes  $A$  et  $B$ , on va maintenant insérer ces solutions dans les équations complètes du laser, en supposant que  $A$  et  $B$  sont des fonctions lentement variables par rapport à  $m$ . On écrira donc dans leur équation d'évolution qu'elles ne sont sensibles qu'à la valeur moyenne de  $N_0$  et  $N_1$ .

$$\dot{N}_1 = -\frac{N_1}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} (U + iZ) \quad (\text{A.163})$$

On moyenne sur quelques périodes de  $m$  :

$$\langle \dot{N}_1 \rangle = -\frac{\langle N_1 \rangle}{T_1} - \epsilon \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \frac{m}{\nu} \sqrt{B^2 - A^2} \quad (\text{A.164})$$

De même, on obtient :

$$\langle \dot{N}_0 \rangle = W - \frac{\langle N_0 \rangle}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} B \quad (\text{A.165})$$

On a également :

$$\begin{cases} \dot{B} = -B \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} \langle N_0 \rangle \right) - m\epsilon \sqrt{B^2 - A^2} \frac{m}{\nu} \delta_\theta + \frac{\sigma l}{T} \langle N_1 \rangle \epsilon \frac{m}{\nu} \sqrt{B^2 - A^2} \\ \dot{A} = -A \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} \langle N_0 \rangle \right) \end{cases} \quad (\text{A.166})$$

On en déduit, en régime stationnaire (en excluant le cas  $A = 0$ ) :

$$\begin{cases} \gamma - \frac{\sigma l}{T} \langle N_0 \rangle = 0 \\ 0 = \left( -m\delta_\theta + \frac{\sigma l}{T} \langle N_1 \rangle \right) \sqrt{B^2 - A^2} \end{cases} \quad (\text{A.167})$$

d'où finalement, en posant  $\gamma' = \sigma l N_{\text{seuil}}/T$  :

$$\begin{cases} a\sqrt{B^2 - A^2} = \frac{4\nu|\delta_\theta|}{\gamma'} \\ \frac{aB}{2} = \eta + 1 - \frac{\gamma}{\gamma'} \end{cases} \quad (\text{A.168})$$

Les intensités des deux modes s'écrivent alors :

$$aE_{1,2}^2 = \frac{aY + (-1)^{2,1}aX}{2} = \frac{aB}{2} + (-1)^{1,2} \left[ \frac{\Omega}{2\nu} \epsilon a \sqrt{B^2 - A^2} + \frac{m}{2\nu} aA \sin(\nu t + \varphi) \right], \quad (\text{A.169})$$

ce qui donne :

$$aE_{1,2}^2 = \frac{aB}{2} + (-1)^{1,2} \left[ \epsilon \frac{2\Omega|\delta_\theta|}{\gamma'} + \frac{m}{2\nu} aA \sin(\nu t + \varphi) \right]. \quad (\text{A.170})$$

On s'intéresse maintenant à la différence de phase. Celle-ci s'écrit :

$$\dot{\Phi} = \Omega + \frac{mX \cos \Phi}{\sqrt{Y^2 - X^2}} = \Omega + \frac{mXU}{Y^2 - X^2} = \frac{\Omega Y^2 - X(\Omega X - mU)}{Y^2 - X^2} \quad (\text{A.171})$$

On a par ailleurs :

$$\Omega X - mU = -\nu \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} \quad (\text{A.172})$$

Il vient :

$$\dot{\Phi} = A \frac{\Omega A - m \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} \sin(\nu t + \varphi)}{B^2 - \left[ \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} + \frac{m}{\nu} A \sin(\nu t + \varphi) \right]^2} \quad (\text{A.173})$$

Afin d'évaluer la réponse en fréquence du laser en anneau à état solide, on va calculer la moyenne temporelle de  $\dot{\Phi}$ . Pour cela, on va l'écrire sous la forme :

$$\dot{\Phi} = \frac{K}{B - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} - \frac{m}{\nu} A \sin(\nu t + \varphi)} + \frac{L}{B + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} + \frac{m}{\nu} A \sin(\nu t + \varphi)} \quad (\text{A.174})$$

On obtient :

$$(K+L)Y + (K-L)\frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} + (K-L)\frac{m}{\nu} A \sin(\nu t + \varphi) = \Omega A^2 - m \epsilon A \sqrt{B^2 - A^2} \sin(\nu t + \varphi) \quad (\text{A.175})$$

Cela donne :

$$K - L = -\nu \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} \quad (\text{A.176})$$

et aussi :

$$K + L = B\Omega \quad (\text{A.177})$$

d'où :

$$2\dot{\Phi} = \frac{B\Omega - \nu \epsilon \sqrt{B^2 - A^2}}{B - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} - \frac{m}{\nu} A \sin(\nu t + \varphi)} + \frac{B\Omega + \nu \epsilon \sqrt{B^2 - A^2}}{B + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2} + \frac{m}{\nu} A \sin(\nu t + \varphi)} \quad (\text{A.178})$$

On obtient :

$$\begin{aligned} 2\dot{\Phi} &= \frac{B\Omega - \nu \epsilon \sqrt{B^2 - A^2}}{B - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2}} \frac{1}{1 - \frac{\frac{m}{\nu(B - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2})} A \sin(\nu t + \varphi)}{1 - \frac{m}{\nu(B - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2})} A \sin(\nu t + \varphi)}} \\ &+ \frac{B\Omega + \nu \epsilon \sqrt{B^2 - A^2}}{B + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2}} \frac{1}{1 + \frac{\frac{m}{\nu(B + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2})} A \sin(\nu t + \varphi)}{1 + \frac{m}{\nu(B + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2})} A \sin(\nu t + \varphi)}} \end{aligned} \quad (\text{A.179})$$

ce qui se réécrit :

$$2\dot{\Phi} = \Omega \frac{\left(1 - \frac{\nu}{\Omega} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right) / \left(1 - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right)}{1 - \frac{\frac{mA}{\nu(B - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2})} \sin(\nu t + \varphi)}{1 - \frac{mA}{\nu(B - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2})} \sin(\nu t + \varphi)}} + \Omega \frac{\left(1 + \frac{\nu}{\Omega} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right) / \left(1 + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right)}{1 + \frac{\frac{mA}{\nu(B + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2})} \sin(\nu t + \varphi)}{1 + \frac{mA}{\nu(B + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2})} \sin(\nu t + \varphi)}} \quad (\text{A.180})$$

Cette expression se réécrit encore :

$$2\dot{\Phi} = \Omega \frac{\left(1 - \frac{\nu}{\Omega} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right) / \left(1 - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right)}{1 - U \sin(\nu t + \varphi)} + \Omega \frac{\left(1 + \frac{\nu}{\Omega} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right) / \left(1 + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right)}{1 - V \sin(\nu t + \varphi)} \quad (\text{A.181})$$

où l'on a introduit les notations suivantes :

$$U = \frac{mA}{\nu(B - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2})} \quad \text{et} \quad V = -\frac{mA}{\nu(B + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{B^2 - A^2})} \quad (\text{A.182})$$

On montre facilement que  $|U|$  et  $|V|$  sont inférieurs à 1. Cela permet d'utiliser la formule suivante :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - \alpha \sin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad \text{valable si } |\alpha| < 1 \quad (\text{A.183})$$

d'où la moyenne temporelle de  $\dot{\Phi}$  :

$$2 \langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega \frac{\left(1 - \frac{\nu}{\Omega} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right) / \left(1 - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right)}{\sqrt{1 - U^2}} + \Omega \frac{\left(1 + \frac{\nu}{\Omega} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right) / \left(1 + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right)}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (\text{A.184})$$

On a par ailleurs :

$$\sqrt{1 - U^2} = \left| \frac{\Omega}{\nu} \right| \left| \frac{1 - \frac{\nu}{\Omega} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}}{1 - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}} \right| \quad \text{et} \quad \sqrt{1 - V^2} = \left| \frac{\Omega}{\nu} \right| \left| \frac{1 + \frac{\nu}{\Omega} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}}{1 + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}} \right| \quad (\text{A.185})$$

d'où finalement :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\Phi} \rangle &= \frac{\nu}{2} \text{sign}(\Omega) \text{sign} \left[ \left(1 - \frac{\nu}{\Omega} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right) \right] \\ &+ \frac{\nu}{2} \text{sign}(\Omega) \text{sign} \left[ \left(1 + \frac{\nu}{\Omega} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Omega}{\nu} \epsilon \sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.186})$$

Dans le cas où l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sqrt{1 - \frac{A^2}{B^2}} < \frac{|\Omega|}{\nu} \quad (\text{A.187})$$

on obtient  $\langle \dot{\Phi} \rangle = \text{sign}(\Omega)\nu$ . Dans le cas contraire, on obtient  $\langle \dot{\Phi} \rangle = 0$ .

## A.10 Étude du régime de battement

### A.10.1 Établissement des équations d'évolution des grandeurs lentement variables

On part du système d'équations (1.54), en y ajoutant l'effet du dispositif stabilisateur ( $\gamma_1 - \gamma_2 = aK(E_1^2 - E_2^2)$ ) et en supposant pour simplifier  $m_1 = m_2 = m$ . Cela donne :

$$\begin{cases} \dot{Y} = -Y \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \sqrt{Y^2 - X^2} \left[ m \cos \left( \Phi + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) - \frac{\sigma l}{T} \Re(N_1 e^{i\Phi}) \right] - \frac{aKX^2}{2} \\ \dot{X} = -X \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - m \sqrt{Y^2 - X^2} \sin \left( \Phi + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) - \frac{aKXY}{2} \\ \dot{\Phi} = \Omega - \frac{m}{2} \sqrt{\frac{Y-X}{Y+X}} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{m}{2} \sqrt{\frac{Y+X}{Y-X}} \cos(\Phi + \theta_2) - \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \frac{\sigma l}{T} \Im(N_1 e^{i\Phi}) \\ \dot{N}_0 = W - \frac{N_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} Y \\ \dot{N}_1 = -\frac{N_1}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \sqrt{Y^2 - X^2} e^{-i\Phi} \end{cases} \quad (\text{A.188})$$

En faisant l'hypothèse  $|\Omega| \gg m$  et  $|\Omega| \gg \gamma\eta$ , on s'intéresse à une solution correspondant à un régime permanent où les grandeurs  $X$ ,  $Y$  et  $\Phi - \Omega t$  sont modulées à la fréquence  $\Omega$ . On supposera de plus que ce régime est quasiment bidirectionnel et faiblement modulé (régime de battement), ce qui permet finalement d'écrire les variables somme et différence d'intensité et différence de phase sous la forme suivante (voir partie 3.1.1) :

$$\begin{cases} X = C + x_M \\ Y = B + y_M \\ \Phi - \Omega t = F + \Phi_M \end{cases} \quad (\text{A.189})$$

où les termes  $x_M$ ,  $y_M$  et  $\Phi_M$  sont supposés osciller avec le temps à la fréquence angulaire  $\Omega$ , où  $B, C$  et  $F$  sont lentement variables par rapport à  $\Omega$  et avec les ordres de grandeur suivants :

$$|C|/B, |x_M|/B, |y_M|/B, |\Phi_M|, |\dot{F}/\Omega| \ll 1. \quad (\text{A.190})$$

On travaille par approximations successives. À l'ordre 0, on écrit le système A.189 comme suit :

$$\begin{cases} X^{(0)} = 0 \\ Y^{(0)} = B \\ \Phi^{(0)} = \Omega t \end{cases} \quad (\text{A.191})$$

Les quantités liées au gain  $N_0$  et  $N_1$  ne sont affectées que par les valeurs à l'ordre 0 de  $X, Y$  et  $\Phi$ , ce qui donne :

$$N_0 = WT_1 - \frac{aB}{2} N_{\text{seuil}}. \quad (\text{A.192})$$

Pour  $N_1$ , l'équation s'écrit :

$$\dot{N}_1 = -\frac{N_1}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} \sqrt{B^2 - C^2} e^{i\Omega t}. \quad (\text{A.193})$$

Celle-ci dépendant explicitement du temps, on utilise la méthode de la variation de la constante. La solution de l'équation homogène s'écrit  $N_1 = Ae^{-t/T_1}$ , d'où l'équation vérifiée par  $A$  :

$$\dot{A} = -\frac{aN_{\text{seuil}}}{4T_1} \sqrt{B^2 - C^2} e^{-i\Omega t + t/T_1} \quad (\text{A.194})$$

d'où :

$$A = \frac{aN_{\text{seuil}}}{4(1 - i\Omega T_1)} \sqrt{B^2 - C^2} e^{-i\Omega t + t/T_1} \quad (\text{A.195})$$

et finalement :

$$N_1 = -\frac{aBN_{\text{seuil}}}{4} \frac{1 + i\Omega T_1}{1 + \Omega^2 T_1^2} e^{-i\Omega t} \quad (\text{A.196})$$

Afin d'obtenir les équations d'évolutions pour les fonctions de modulation  $x_M$ ,  $y_M$  et  $\Phi_M$ , on injecte dans le membre de droite des équations du système A.188 les expressions à l'ordre 0 de  $X$ ,  $Y$  et  $\Phi$  ainsi que les expressions de  $N_0$  et  $N_1$ . En ne gardant que les termes oscillant à la fréquence  $\Omega$ , on obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{y}_M = -mB \cos\left(\Omega t + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \\ \dot{x}_M = -mB \sin\left(\Omega t + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \\ \dot{\Phi}_M = m \sin\left(\Omega t + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{A.197})$$

d'où, après intégration :

$$\begin{cases} y_M = -\frac{mB}{\Omega} \sin\left(\Omega t + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \\ x_M = \frac{mB}{\Omega} \cos\left(\Omega t + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \\ \Phi_M = -\frac{m}{\Omega} \cos\left(\Omega t + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{A.198})$$

Pour établir les équations régissant l'évolution des grandeurs lentement variables  $B$  et  $C$ , on repart du système complet A.188, on insère dans le membre de droite les expressions obtenues ci-dessus pour  $x_M$ ,  $y_M$ ,  $\Phi_M$ ,  $N_0$  et  $N_1$ , puis l'on effectue la moyenne temporelle sur quelques périodes de  $\Omega$ . On obtient (en posant  $\gamma' = \sigma l N_{\text{seuil}}/T$ ) :

$$\begin{cases} \dot{B} = -\left\langle \sqrt{(B + y_M)^2 - (C + x_M)^2} \left[ m \cos\left(\Omega t + \Phi_M + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{\gamma' a B}{4} \frac{1}{1 + \Omega^2 T_1^2} \right] \right\rangle \\ \quad - B \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{aK \langle (C + x_M)^2 \rangle}{2} \\ \dot{C} = -\left\langle \sqrt{(B + y_M)^2 - (C + x_M)^2} m \sin\left(\Omega t + \Phi_M + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right\rangle \\ \quad - C \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{aK \langle (C + x_M)(B + y_M) \rangle}{2} \end{cases} \quad (\text{A.199})$$

En ne gardant que les termes de moyenne non nulle (et en supposant de plus  $aK \langle (C + x_M)^2 \rangle = aKC^2$ , afin de tenir compte du fait que les modulations d'intensité à la fréquence  $\Omega$  sont filtrée par l'électronique de la boucle, on obtient finalement :

$$\begin{cases} \dot{B} = \frac{Cm^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{4\Omega} - \frac{\gamma' a B^2}{4} \frac{1}{1 + \Omega^2 T_1^2} - B \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{aKC^2}{2} \\ \dot{C} = \frac{Bm^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2\Omega} - C \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{aKBC}{2} \end{cases} \quad (\text{A.200})$$

## A.10.2 Existence du régime de battement

En régime stationnaire, et en utilisant l'hypothèse initiale  $m, \gamma\eta \ll |\Omega|$ , on obtient :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\gamma' a B^2}{4} \frac{1}{1 + \Omega^2 T_1^2} + dB \\ 0 = \frac{Bm^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2\Omega} + dC - \frac{aKBC}{2} \end{cases} \quad (\text{A.201})$$

où l'on a posé  $d = \sigma l N_0 / T - \gamma$ . Il vient :

$$\begin{cases} \frac{C}{B} = -\frac{m^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\Omega(2d - aKB)} \\ d = \frac{\gamma'}{4} \frac{aB}{1 + \Omega^2 T_1^2} \end{cases} \quad (\text{A.202})$$

Comme on a  $m \ll \gamma$ , on peut supposer  $\gamma = \gamma'$ . On suppose de plus  $aB \simeq 2\eta$ . L'inégalité :

$$d \ll \gamma\eta, \quad (\text{A.203})$$

permet de vérifier de façon auto-consistante cette hypothèse à partir de l'équation A.192. On a donc finalement :

$$\frac{C}{B} = \frac{m^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\Omega} \left( 2K\eta - \frac{\gamma\eta}{1 + \Omega^2 T_1^2} \right)^{-1}. \quad (\text{A.204})$$

### A.10.3 Stabilité du régime de battement

On part du système suivant pour l'étude de stabilité du régime de battement :

$$\begin{cases} \dot{B} = \frac{Cm^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{4\Omega} - \frac{\gamma aB^2}{4} \frac{1}{1 + \Omega^2 T_1^2} - B \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{aKC^2}{2} \\ \dot{C} = \frac{Bm^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2\Omega} - C \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) - \frac{aKBC}{2} \\ \dot{N}_0 = W - \frac{N_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} B \end{cases} \quad (\text{A.205})$$

On rappelle que :

$$d = \frac{\sigma l}{T} N_0 - \gamma = \frac{\gamma\eta}{2(1 + \Omega^2 T_1^2)}. \quad (\text{A.206})$$

On suppose que le couple  $(C, B, N_0)$  subit une petite variation  $(c, b, n_0) \exp(\lambda t)$ . On obtient alors :

$$\begin{cases} \lambda b = \frac{cm^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{4\Omega} - \frac{b\gamma\eta}{1 + \Omega^2 T_1^2} - b \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) + B \frac{\sigma l}{T} n_0 - aK C c \\ \lambda c = \frac{bm^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2\Omega} - c \left( \gamma - \frac{\sigma l}{T} N_0 \right) + C \frac{\sigma l}{T} n_0 - \frac{aK B c + aK C b}{2} \\ \lambda n_0 = -\frac{n_0}{T_1} - \frac{aN_{\text{seuil}}}{2T_1} b \end{cases} \quad (\text{A.207})$$

On obtient :

$$n_0 = -\frac{abN_{\text{seuil}}}{2(1 + \lambda T_1)}. \quad (\text{A.208})$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \lambda b = \frac{cm^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{4\Omega} - \frac{b\gamma\eta}{2(1 + \Omega^2 T_1^2)} - \frac{b\gamma\eta}{1 + \lambda T_1} - aK C c \\ \lambda c = \frac{bm^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{2\Omega} + \frac{c\gamma\eta}{2(1 + \Omega^2 T_1^2)} - \frac{b\gamma a C}{2(1 + \lambda T_1)} - \frac{aK B c + aK C b}{2} \end{cases} \quad (\text{A.209})$$

En négligeant les termes du type  $m/\Omega$  et  $C/B$ , on obtient la forme simplifiée suivante pour le déterminant de ce système :

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{\gamma\eta}{1 + \lambda T_1} + \frac{\gamma\eta}{2(1 + \Omega^2 T_1^2)} & 0 \\ 0 & -\lambda - K\eta + \frac{\gamma\eta}{2(1 + \Omega^2 T_1^2)} \end{vmatrix} \quad (\text{A.210})$$

Les valeurs de  $\lambda$  qui annulent ce déterminant sont donc les solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda + \frac{\gamma\eta}{1 + \lambda T_1} + \frac{\gamma\eta}{2(1 + \Omega^2 T_1^2)} = 0 \\ \lambda = -K\eta + \frac{\gamma\eta}{2(1 + \Omega^2 T_1^2)} \end{cases} \quad (\text{A.211})$$

La première équation se réduit, avec les approximations habituelles, à :

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{T_1} + \gamma\eta = 0, \quad (\text{A.212})$$

qui admet les racines suivantes :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2T_1} \pm i\omega_r. \quad (\text{A.213})$$

où l'on voit apparaître la fréquence de relaxation, définie par :

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\gamma\eta}{T_1}}. \quad (\text{A.214})$$

La seconde équation se résout immédiatement :

$$\lambda_3 = -K\eta + \frac{\gamma\eta}{2(1 + \Omega^2 T_1^2)} \quad (\text{A.215})$$

Pour que la solution considérée (régime de battement) soit stable, il faut que les parties réelles des valeurs propres  $\lambda_{1,2,3}$  soient négatives. C'est automatiquement le cas pour  $\lambda_{1,2}$ . Pour  $\lambda_3$ , cette condition s'écrit :

$$\boxed{K > \frac{\gamma}{2} \frac{1}{1 + \Omega^2 T_1^2}}. \quad (\text{A.216})$$

#### A.10.4 Non-linéarité de la réponse en fréquence

De même que l'on a établi les équations d'évolution des fonctions lentement variables  $B$  et  $C$  à partir des expressions des fonctions de modulation  $x_M$ ,  $y_M$  et  $\Phi_M$ , il est possible d'établir l'équation d'évolution de  $F$ . L'équation d'évolution de la phase dans le système A.188 s'écrit :

$$\dot{\Phi} = \Omega - \frac{m}{2} \sqrt{\frac{Y-X}{Y+X}} \cos(\Phi + \theta_1) + \frac{m}{2} \sqrt{\frac{Y+X}{Y-X}} \cos(\Phi + \theta_2) - \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - X^2}} \frac{\sigma l}{T} \Im(N_1 e^{i\Phi}) \quad (\text{A.217})$$

On remplace alors  $X$ ,  $Y$  et  $\Phi - \Omega t$  par leurs expressions en fonction des fonctions lentement variables  $B$ ,  $C$  et  $F$  et des fonctions modulées  $x_M$ ,  $y_M$  et  $\Phi_M$ . En moyennant sur quelques périodes de  $\Omega$ , on obtient :

$$\dot{F} = -\frac{m}{2} \left\langle \left(1 - \frac{x_M}{B}\right) \cos(\Omega t + \Phi_M + \theta_1) \right\rangle + \frac{m}{2} \left\langle \left(1 + \frac{x_M}{B}\right) \cos(\Omega t + \Phi_M + \theta_2) \right\rangle + \frac{\gamma\eta}{2\Omega T_1}. \quad (\text{A.218})$$

Cela donne :

$$\dot{F} = \frac{m}{2} \left\langle \frac{x_M}{B} [\cos(\Omega t + \theta_1) + \cos(\Omega t + \theta_2)] \right\rangle + \frac{m}{2} \langle \Phi_M [\sin(\Omega t + \theta_1) - \sin(\Omega t + \theta_2)] \rangle + \frac{\gamma\eta}{2\Omega T_1}, \quad (\text{A.219})$$

d'où finalement :

$$\dot{F} = \frac{m^2}{2\Omega} \left[ \cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right] + \frac{\gamma\eta}{2\Omega T_1}. \quad (\text{A.220})$$

Il est intéressant de noter que le second terme, toujours négatif, est dû au décalage dit "d'Adler". Il correspond au développement limité de  $\sqrt{\Omega^2 - \Omega_L^2}$ . Le premier terme, toujours positif, est un effet de la modulation en intensité des modes (winking). Le troisième terme, également toujours positif, est quant-à lui lié au réseau d'inversion de population. La réponse en fréquence du gyrolaser à état solide prend finalement la forme suivante :

$$\boxed{\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega + \frac{m^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2\Omega} + \frac{\gamma\eta}{2\Omega T_1}}. \quad (\text{A.221})$$

## A.11 Rotation réciproque induite par la non-planéité

On s'intéresse dans ce qui suit au calcul de l'angle de rotation réciproque induite par la non-planéité de la cavité dans le cas du démonstrateur décrit dans la partie 4.2.1. Les coordonnées des points s'écrivent (figure 4.15) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 86 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 71,5 \\ 35,67 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 14,5 \\ 35,67 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit les normales aux plans d'incidence :

$$(DAB)\perp \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (ABC)\perp \begin{pmatrix} 0 \\ -2,802.10^{-2} \\ 1 - 3,927.10^{-4} \end{pmatrix} \quad (BCD)\perp \begin{pmatrix} -1,753.10^{-2} \\ -3,514.10^{-2} \\ 1 - 7,713.10^{-4} \end{pmatrix} \quad (CDA)\perp \begin{pmatrix} -1,754.10^{-2} \\ 7,13.10^{-3} \\ 1 - 1,793.10^{-4} \end{pmatrix}$$

d'où les angles entre les plans d'incidence :

$$\theta_{AB} = 1,61^\circ \quad \theta_{BC} = 1,08^\circ \quad \theta_{CD} = 2,42^\circ \quad \theta_{DA} = 1,09^\circ \quad (\text{A.222})$$

$\theta_{AB}$  est l'angle entre les plans  $(DAB)$  et  $(ABC)$ .  $\theta_{BC}$  est l'angle entre les plans  $(ABC)$  et  $(BCD)$ .  $\theta_{CD}$  est l'angle entre les plans  $(BCD)$  et  $(CDA)$ .  $\theta_{DA}$  est l'angle entre les plans  $(CDA)$  et  $(DAB)$ . Les matrices des miroirs s'écrivent :

$$M_A = M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_C = M_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Jones totale dans le sens de parcours  $A^+ \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow A^+$  s'écrit [112] :

$$M_+ = M_A \cdot \mathfrak{R}(\theta_{DA}) \cdot M_D \cdot \mathfrak{R}(-\theta_{CD}) \cdot M_C \cdot \mathfrak{R}(\theta_{BC}) \cdot M_B \cdot \mathfrak{R}(-\theta_{AB}) = \begin{bmatrix} 0.9978266242 & -0.04688176960 \\ 0.01898503274 & -0.0008919905614 \end{bmatrix}$$

Dans le sens  $A^+ \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A^+$ , on a :

$$M_- = \mathfrak{R}(-\theta_{AB}) \cdot M_B \cdot \mathfrak{R}(\theta_{BC}) \cdot M_C \cdot \mathfrak{R}(-\theta_{CD}) \cdot M_D \cdot \mathfrak{R}(\theta_{DA}) \cdot M_A = \begin{bmatrix} 0.9978266241 & -0.01898503274 \\ 0.04688176960 & -0.0008919905614 \end{bmatrix}$$

La valeur propre non nulle commune à ces deux matrices est 0,99693, correspondant à une rotation effective d'environ  $4,5^\circ$  et à des pertes en intensités d'environ 0,6%. Il convient de noter que la convention utilisée ici, qui est celle de [112], n'est pas la même que celle que nous avons établie au chapitre 3. En particulier, dans le calcul présenté ci-dessus, la rotation Faraday change de signe avec le sens de parcours et la rotation réciproque ne change jamais de signe.



# Annexe B

## Fluctuations en température

On s'intéresse dans ce qui suit à la stabilité du facteur d'échelle sous l'effet des fluctuations en température. Le facteur d'échelle, noté  $S$ , est on le rappelle le coefficient de proportionnalité qui existe entre la vitesse angulaire du gyrolaser et la fréquence de battement. Il est donné par la formule :

$$S = \frac{4A}{\lambda L}, \quad (\text{B.1})$$

$A$  et  $L$  étant respectivement l'aire et la longueur optique de la cavité laser et  $\lambda$  étant la longueur d'onde (moyenne) d'émission laser dans le vide. Naturellement, la qualité d'un gyrolaser dépend directement de la stabilité (et de la répétabilité) en température de son facteur d'échelle  $S$ .

Dans le cas du gyrolaser à hélium-néon, la (relative) stabilité du facteur d'échelle en température est assurée par la stabilité des trois paramètres  $A$ ,  $\lambda$  et  $L$  indépendamment :

- la stabilité de  $A$  est garantie par l'utilisation pour le support de la cavité d'un bloc de matériau à très faible coefficient de dilatation (type *zerodur*) ;
- la stabilité de  $\lambda$  est garantie par la non-variation de la fréquence de la transition atomique utilisée ;
- la stabilité de  $L$  est assurée par un asservissement de la longueur de cavité sur cette transition atomique à l'aide d'une cale piézo-électrique.

Dans le cas du gyrolaser à état solide, il n'est pas possible de procéder de la même façon pour garantir la stabilité du facteur d'échelle, et ceci pour plusieurs raisons :

- la fréquence du maximum de la courbe de gain d'un milieu solide est usuellement soumise à d'importantes variations en température (-1,3 GHz/°C pour le Nd :YAG à 1,06  $\mu\text{m}$  entre -50°C et +100°C [127]), alors qu'elle est beaucoup plus stable dans le cas de l'atome de néon ;
- pour des ordres de grandeurs de cavité typiques des gyrolasers ( $\simeq 30$  cm), la largeur de la courbe de gain d'un milieu solide est usuellement de l'ordre de plusieurs dizaines d'intervalles spectraux libres (alors qu'elle est inférieure à un intervalle spectral libre dans le cas de l'atome de néon), ce qui ne permet pas d'utiliser le niveau de gain disponible comme signal d'erreur pour l'asservissement de la longueur de cavité (comme c'est le cas sur le gyrolaser à He-Ne) ;

- les variations en température de longueur optique sont usuellement beaucoup plus importantes dans les cristaux que dans les gaz (variations de longueur géométrique et d'indice optique), ce qui les rend plus difficiles à compenser à l'aide d'une cale piézo-électrique standard.

La possibilité de garantir la stabilité en température du facteur d'échelle du gyrolaser à état solide par un asservissement de la longueur de cavité comme il est fait dans le cas du gyrolaser à He-Ne doit donc être écartée et remplacée par une autre technique, que l'on présente ci-dessous et qui a fait l'objet d'un dépôt de brevet [184].

Les problèmes de fluctuation en température des lasers à état solide ont par ailleurs été étudiés en vue d'applications autres que gyrométriques. La société Lightwave Electronics propose par exemple un protocole de définition d'architecture d'un laser à état solide [185] ayant pour but de rendre égales les variations en température de la fréquence du maximum de la courbe de gain du milieu utilisé et de la fréquence de résonance des modes de la cavité laser, de manière à assurer une émission sans saut de mode sur une large plage de température.

On propose ici un protocole de définition d'architecture d'un gyrolaser à état solide garantissant la stabilité optimale du facteur d'échelle sur la plage de température d'utilisation usuelle des gyrolasers (typiquement entre  $-40^\circ\text{C}$  et  $+80^\circ\text{C}$ ). On présente ensuite un raffinement de ce protocole qui permet en plus de réduire ou supprimer les sauts de mode, au prix d'une architecture plus complexe.

Ce protocole fournit un moyen simple à mettre en œuvre et entièrement passif pour assurer la stabilité du facteur d'échelle dans un gyrolaser à état solide.

## B.1 Principe de fonctionnement

L'idée est de choisir, lors de la définition de l'architecture d'un gyrolaser à état solide, les différents composants ainsi que la taille de chacun d'entre eux de manière à assurer la stabilité en température du facteur d'échelle. En particulier, si la cavité est taillée dans un matériau de coefficient de dilatation  $\alpha_0$  et qu'elle contient un milieu amplificateur dont la fréquence centrale d'émission est notée  $\nu$  ainsi que des cristaux indexés par l'entier  $i$  (on désigne abusivement par le terme "cristal" tout élément optique susceptible d'être inséré dans la cavité et soumis à des variations de longueur et d'indice en température), dont la proportion dans la cavité est notée  $x_i$  (rapport de la longueur de cristal traversé au périmètre de la cavité) et l'indice optique  $n_i$ , les composants devront être choisis et dimensionnés de manière à satisfaire la relation suivante :

$$\left(2\alpha_0 + \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT}\right) \left[1 + \sum_i (n_i - 1)x_i\right] - \alpha_0 - \sum_i (n_i - 1)x_i\alpha_i - \sum_i \frac{dn_i}{dT}x_i = 0. \quad (\text{B.2})$$

Cette relation sera justifiée au paragraphe suivant. Nous présenterons ensuite un exemple de gyrolaser à état solide pour lequel cette relation est vérifiée. La possibilité de s'affranchir des sauts de modes caractéristiques de l'état solide sera ensuite discutée.

## B.2 Relation fondamentale entre les caractéristiques des différents composants

On se propose dans ce qui suit d'établir l'équation (B.2). Considérons pour cela une cavité quelconque, de périmètre  $L_0$  et d'aire  $A$ . Le facteur de forme  $H = A/L_0^2$  peut être considéré comme constant sous l'effet d'une dilatation (si les contraintes mécaniques auxquelles est soumis le gyrolaser respectent les symétries du dispositif). La cavité peut contenir des éléments optiques ou cristaux susceptibles de se dilater, la longueur (respectivement l'indice) du  $i$ -ème cristal étant notée  $L_i$  (respectivement  $n_i$ ). Soit  $\nu$  la fréquence d'émission du milieu amplificateur. L'aire de la cavité s'écrit  $HL_0^2$ , et sa longueur optique s'écrit  $L_0 + \sum_i (n_i - 1)L_i$ . Avec ces notations, le facteur d'échelle prend la forme suivante :

$$S = \frac{4HL_0^2}{c} \frac{\nu}{L_0 + \sum_i (n_i - 1)L_i}. \quad (\text{B.3})$$

La condition de stabilité du facteur d'échelle  $dS/dT=0$  s'écrit alors :

$$\left( 2L_0 \frac{dL_0}{dT} \nu + L_0^2 \frac{d\nu}{dT} \right) \left[ L_0 + \sum_i (n_i - 1)L_i \right] - L_0^2 \nu \left( \frac{dL_0}{dT} + \sum_i (n_i - 1) \frac{dL_i}{dT} + \sum_i \frac{dn_i}{dT} L_i \right) = 0, \quad (\text{B.4})$$

ce qui donne après division par  $\nu L_0^3$  :

$$\left( \frac{2}{L_0} \frac{dL_0}{dT} + \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT} \right) \left[ 1 + \sum_i (n_i - 1) \frac{L_i}{L_0} \right] - \frac{1}{L_0} \frac{dL_0}{dT} - \sum_i \frac{n_i - 1}{L_0} \frac{dL_i}{dT} - \sum_i \frac{dn_i}{dT} \frac{L_i}{L_0} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Soit  $x_i$  la fraction de périmètre de cavité occupée par le  $i$ -ème cristal, c'est-à-dire par définition  $x_i = L_i/L_0$ , avec  $x_i > 0$  et  $\sum_i x_i < 1$ . L'équation (B.5) devient :

$$\left( \frac{2}{L_0} \frac{dL_0}{dT} + \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT} \right) \left[ 1 + \sum_i (n_i - 1)x_i \right] - \frac{1}{L_0} \frac{dL_0}{dT} - \sum_i \frac{(n_i - 1)x_i}{L_i} \frac{dL_i}{dT} - \sum_i \frac{dn_i}{dT} x_i = 0. \quad (\text{B.6})$$

Introduisons enfin les coefficients de dilatation des différents éléments mis en jeu, notés  $\alpha_i$  et définis par  $\alpha_i = (1/L_i)dL_i/dT$ .  $\alpha_0$  est le coefficient de dilatation du matériau constituant le support de la cavité. On a alors :

$$\left( 2\alpha_0 + \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT} \right) \left[ 1 + \sum_i (n_i - 1)x_i \right] - \alpha_0 - \sum_i (n_i - 1)x_i \alpha_i - \sum_i \frac{dn_i}{dT} x_i = 0, \quad (\text{B.7})$$

qui est bien la relation énoncée plus haut.

## B.3 Un exemple simple de réalisation

Considérons une cavité carrée de périmètre  $L_0$ , taillée dans un matériau de coefficient de dilatation  $\alpha_0$  et contenant sur son chemin optique des cristaux de YAG de longueur totale  $L_Y$ , d'indice optique  $n_Y$  et de coefficient de dilatation  $\alpha_Y$ . Le milieu amplificateur est supposé être du Nd :YAG, émettant à la fréquence  $\nu = c/\lambda$  avec  $\lambda=1,06\mu\text{m}$ . Soit  $x$  la

fraction de cristal de YAG présente sur le chemin optique, c'est-à-dire  $x = L_Y/L_0$  (avec  $0 < x < 1$ ). L'équation fondamentale (B.2) s'écrit dans ce cas :

$$\left(2\alpha_0 + \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT}\right) [1 + (n_Y - 1)x] - \alpha_0 - (n_Y - 1)x\alpha_Y - \frac{dn_Y}{dT}x = 0. \quad (\text{B.8})$$

En résolvant cette équation pour la variable  $x$ , on obtient :

$$x = \frac{\alpha_0 + \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT}}{\frac{dn_Y}{dT} + (n_Y - 1) \left(\alpha_Y - 2\alpha_0 - \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT}\right)}. \quad (\text{B.9})$$

REMARQUE : on fait bien entendu ici l'hypothèse que la valeur de  $\alpha_0$  est telle que le dénominateur dans (B.9) ne s'annule pas. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point lorsqu'il sera question de supprimer les sauts de modes tout en maintenant le facteur d'échelle constant.

Pour le dispositif décrit dans ce paragraphe, on a les valeurs numériques suivantes :

$$\alpha_Y = 7,6 \text{ ppm}/^\circ\text{K}, \quad \frac{dn_Y}{dT} = 7,3 \text{ ppm}/^\circ\text{K}, \quad n_Y = 1,82, \quad \left(\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT}\right)_Y = -4,6 \text{ ppm}/^\circ\text{K}. \quad (\text{B.10})$$

En supposant que  $\alpha_0$  soit exprimé également en ppm/ $^\circ\text{K}$ , on peut écrire :

$$x = \frac{\alpha_0 - 4,6}{17,3 - 1,64\alpha_0}. \quad (\text{B.11})$$

De la condition  $0 < x < 1$ , on tire :

$$4,6 \text{ ppm}/^\circ\text{K} < \alpha_0 < 8,3 \text{ ppm}/^\circ\text{K}. \quad (\text{B.12})$$

On voit par ce raisonnement que la cavité doit être libre de se dilater suffisamment pour compenser les variations des autres paramètres. En particulier, l'utilisation du *zerodur* ne semble pas adaptée à ce type de dispositif. Un couple de solution typique de cette équation pourrait être  $\alpha_0 = 6,3 \text{ ppm}/^\circ\text{K}$  (cas de certains verres) et  $x = 0,25$  (7,5 cm de cristal de YAG dans une cavité de 30 cm).

## B.4 Suppression des sauts de modes en conservant le facteur d'échelle

L'hypothèse faite dans tout ce qui suit est que l'émission dans le gyrolaser à état solide est monomode, au sens où la différence de gain entre le mode le plus proche du maximum de la courbe de gain et les modes voisins est suffisamment importante pour empêcher ces derniers d'osciller (cela est typiquement vérifié dans le Nd :YAG pour des cavités en anneau de l'ordre de 30 cm lorsque celles-ci sont en rotation à plus de  $10^\circ/\text{s}$ ). Dans ce cas, il est possible de faire en sorte que le mode ayant le maximum de gain pour une température donnée conserve cette caractéristique sur une large plage de température, comme cela a été suggéré dans [185]. Pour cela, il faut conserver constant le rapport de

la fréquence du maximum de la courbe de gain  $\nu$  à l'intervalle spectral libre  $c/L$ . Cela s'écrit :

$$\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT} + \frac{1}{L} \frac{dL}{dT} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Avec la même cavité et les mêmes notations qu'au paragraphe 5, cette condition d'absence de saut de mode s'écrit :

$$\left[ L_0 + \sum_i (n_i - 1)L_i \right] \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT} + \frac{dL_0}{dT} + \sum_i \frac{dn_i}{dT} L_i + \sum_i (n_i - 1) \frac{dL_i}{dT} = 0, \quad (\text{B.14})$$

qui devient après division par  $L_0$  :

$$\left[ 1 + \sum_i (n_i - 1)x_i \right] \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT} + \alpha_0 + \sum_i \frac{dn_i}{dT} x_i + \sum_i (n_i - 1)x_i \alpha_i = 0. \quad (\text{B.15})$$

Cette équation exprime, comme on l'a vu, la condition d'absence de saut de mode. Dans le brevet précité déposé par Lightwave [185], il est proposé un laser (contenant un seul cristal intracavité ( $i = 1$ ) et dans une cavité supposée sans dilatation ( $\alpha_0 = 0$ )) qui vérifie cette équation. Dans notre cas, cette équation n'a de sens que si l'on a préalablement rempli la condition (B.2) de stabilité du facteur d'échelle. La vérification simultanée de ces deux conditions se réduit au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT} \\ \sum_i \left[ \frac{dn_i}{dT} - (n_i - 1)(\alpha_0 - \alpha_i) \right] x_i = 0 \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Il n'est pas toujours possible de remplir cette contrainte. Ainsi, si l'on reprend l'exemple simple du paragraphe 6 (présence de cristaux de YAG uniquement), la condition (B.16) est impossible à remplir, comme on peut s'en convaincre en remarquant qu'elle s'écrit (les valeurs numériques sont exprimées en ppm/°C) :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 4,6 \\ 7,3 - 0,82(\alpha_0 - 7,6) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

## B.5 Une réalisation sans saut de mode

On s'autorise dans ce qui suit l'utilisation de deux types d'éléments intracavité, repérés par les indices 1 et 2. L'équation (B.16) s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dT} \\ \left[ \frac{dn_1}{dT} - (n_1 - 1)(\alpha_0 - \alpha_1) \right] x_1 + \left[ \frac{dn_2}{dT} - (n_2 - 1)(\alpha_0 - \alpha_2) \right] x_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Supposons que le matériau 1 soit du YAG, incluant le milieu amplificateur (Nd-YAG à 1060 nm). Avec les chiffres donnés plus haut, on obtient :

$$\frac{dn_1}{dT} - (n_1 - 1)(\alpha_0 - \alpha_1) = 7,3 - 0,82(4,6 - 7,6) = 9,76 \text{ ppm/}^\circ\text{K} > 0 \quad (\text{B.19})$$

Il est donc nécessaire, pour satisfaire la condition (B.16), d'utiliser un matériau 2 vérifiant la condition :

$$\frac{dn_2}{dT} - (n_2 - 1)(\alpha_0 - \alpha_2) < 0 \quad (\text{B.20})$$

A titre d'exemple, si l'on utilise le verre PK51A produit par la société Schott, on a (données fournies par la société Schott sur notre demande) :

$$\alpha_2 = 12,7 \text{ ppm}/^\circ\text{K} , \frac{dn_2}{dT} = -7 \text{ ppm}/^\circ\text{K} , n_2 = 1,5 , \quad (\text{B.21})$$

d'où :

$$\frac{dn_2}{dT} - (n_2 - 1)(\alpha_0 - \alpha_2) = -3 \text{ ppm}/^\circ\text{K} < 0 \quad (\text{B.22})$$

Les longueurs des matériaux 1 et 2 utilisées doivent être dans le rapport inverse des coefficients calculés ci-dessus, pour que la relation (B.16) soit satisfaite. Dans l'exemple donné ici, on doit avoir  $x_1/x_2 = 3/9,76 = 0,3$ , soit par exemple 5 cm de YAG et 16 cm de PK51A. Naturellement, le support de la cavité doit être usiné dans un matériau vérifiant  $\alpha_0 = -(1/\nu)d\nu/dT = 4,6 \text{ ppm}/^\circ\text{K}$ , tel qu'un verre par exemple.

## B.6 Conclusion

On a proposé un processus de définition d'architecture pour un gyrolaser à état solide permettant de limiter fortement les variations du facteur d'échelle. Des exemples de réalisations ont été présentés. La possibilité de supprimer en plus les sauts de modes comme dans [185] sur le gyrolaser à état solide est démontrée théoriquement, même s'il apparaît que la prise en compte des contraintes spécifiques au facteur d'échelle rend ce dernier point plus difficile à réaliser que dans [185].

## **Liste des publications et bibliographie**



# Liste des publications

## Articles publiés dans des revues à comité de lecture

- S. SCHWARTZ, G. FEUGNET, P. BOUYER, E. LARIONTSEV, A. ASPECT and J.-P. POCHOLLE, Mode-Coupling Control in Resonant Devices : Application to Solid-State Ring Lasers, *Physical Review Letters* **97**, 093902 (2006).
- S. SCHWARTZ, M. COZZINI, C. MENOTTI, I. CARUSOTTO, P. BOUYER and S. STRINGARI, One-dimensional description of a Bose-Einstein condensate in a rotating closed-loop waveguide, *New Journal of Physics* **8**, 162 (2006).

## Dépôts de brevets pour le compte du groupe Thales

- S. SCHWARTZ, G. FEUGNET et J.-P. POCHOLLE, Gyrolaser à état solide stabilisé, Demande de brevet n° FR-0303645 et WO-2004-094952 (2003).
- G. FEUGNET, J.-P. POCHOLLE et S. SCHWARTZ, Gyrolaser à état solide stabilisé et à milieu laser anisotrope, Demande de brevet n° FR-0314598 et WO-2005-066586 (2003).
- S. SCHWARTZ, G. FEUGNET et J.-P. POCHOLLE, Gyrolaser à état solide stabilisé sans zone aveugle, Demande de brevet n° FR-0402707 (2004).
- S. SCHWARTZ, G. FEUGNET et J.-P. POCHOLLE, Gyrolaser à état solide stabilisé à quatre modes sans zone aveugle, Demande de brevet n° FR-0402706 (2004).
- G. FEUGNET, S. SCHWARTZ, J.-P. POCHOLLE, C. LARAT et F. GUTTY, Gyrolaser à état solide à facteur d'échelle stabilisé, Demande de brevet n° FR-0410659 et WO-2006-037795 (2004).
- G. FEUGNET, J.-P. POCHOLLE et S. SCHWARTZ, Gyrolaser à milieu solide semi-conducteur à structure verticale, Demande de brevet n° FR-0411816 et WO-2006-048398 (2004).

- S. SCHWARTZ, G. FEUGNET, J.-P. POCHOLLE, A. MIGNOT et B. STEINHAUSSER, Gyrolaser à état solide à modes contre-propagatifs orthogonaux, Demande de brevet n° FR-0512604 (2005).
- S. SCHWARTZ, G. FEUGNET et J.-P. POCHOLLE, Gyrolaser à état solide activé optiquement par biais alternatif, Demande de brevet n° FR-0512608 (2005).
- S. SCHWARTZ, F. GUTTY, J.-P. POCHOLLE et G. FEUGNET, Gyrolaser à état solide avec milieu à gain activé mécaniquement, Demande de brevet n° FR-0607394 (2006).

### **Communication dans une conférence internationale**

- S. SCHWARTZ, G. FEUGNET and J.-P. POCHOLLE, New trends in inertial sensors (invited paper), 12th International Conference on Laser Optics (LO'2006), St.Petersburg, Russia, June 26-30, 2006.

# Bibliographie

- [1] W. MACEK and D. DAVIS, *Rotation rate sensing with traveling-wave ring lasers*, Applied Physics Letters, 2 (3), p. 67 (1963).
- [2] G. SAGNAC, *L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 95, p. 708 (1913).
- [3] G. SAGNAC, *Sur la preuve de la réalité de l'éther lumineux par l'expérience de l'interféromètre tournant*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 95, p. 1410 (1913).
- [4] A. MICHELSON and H. GALE, *Astrophysical Journal*, 61, p. 137 (1925).
- [5] T. MAIMAN, *Stimulated Optical Radiation in Ruby*, Nature, 187, p. 493 (1960).
- [6] T. MAIMAN, *Optical maser action in ruby*, British Communications and Electronics, 7, p. 674 (1960).
- [7] B. DESSUS, J.-M. CATHERIN and J. MIGNE, *Effets non réciproques et couplages dans un laser en anneau*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 262, p. 1691 (1996).
- [8] J.-M. CATHERIN and B. DESSUS, *Traveling-Wave Laser Gyrocompass*, IEEE Journal of Quantum Electronics, QE-3 (11), p. 449 (1967).
- [9] F. ARONOWITZ, *Theory of a Traveling-Wave Optical Maser*, Physical Review, 139 (3A), p. A635 (1965).
- [10] F. ARONOWITZ and R. COLLINS, *Lock-In and Intensity-Phase Interaction in the Ring Laser*, Journal of Applied Physics, 41 (1), p. 130 (1970).
- [11] L. MENEGOZZI and W. LAMB, *Theory of a Ring Laser*, Physical Review A, 8 (4), p. 2103 (1973).
- [12] C. WEISS, W. KLISCHE, P. ERING and M. COOPER, *Instabilities and chaos of a single mode NH<sub>3</sub> ring laser*, Optics Communications, 52, p. 405 (1985).
- [13] W. KLISCHE and C. WEISS, *Instabilities and routes to chaos in a homogeneously broadened one- and two-mode ring laser*, Physical Review A, 31 (6), p. 4049 (1985).
- [14] I. McMACKIN, C. RADZEWICZ, M. BECK and M. RAYMER, *Instabilities and chaos in a multimode, standing-wave, cw dye laser*, Physical Review A, 38 (2), p. 820 (1988).
- [15] E. LARIONTSEV, *Switching of synchronized chaotic oscillations in a modulated solid-state ring laser*, Optics Express, 2 (5), p. 198 (1998).
- [16] L. KOTOMTSEVA, N. KRAVTSOV, E. LARIONTSEV and S. CHEKINA, *Chaotic synchronization and evolution of optical phase in a bidirectional solid-state ring laser*, Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 13, p. 279 (2003).

- [17] N. KRAVTSOV, P. PASHININ, S. SIDOROV, S. CHEKINA and V. FIRSOV, *Suppression of chaotic oscillations in a solid-state ring laser by a magnetic field*, Quantum Electronics, 33 (4), p. 321 (2003).
- [18] F. ARONOWITZ, *The Laser Gyro*, In *Laser Applications*, sous la direction de M. ROSS, vol. 1, pp. 133–200. Academic Press, New York and London (1971).
- [19] V. VALI and R. SHORTHILL, *Fiber ring interferometer*, Applied Optics, 15, p. 1099 (1976).
- [20] H. ARDITTY and H. LEFEVRE, *Sagnac effect in fiber gyroscopes*, Optics Letters, 6 (8), p. 401 (1981).
- [21] S. EZEKIEL and S. BALSAMO, *Passive ring resonator laser gyroscope*, Applied Physics Letters, 30, p. 478 (1977).
- [22] J. LI, Y. LAM and Y. ZHOU, *A fiber ring laser gyroscope based on Er-doped fiber pumped at 1480 nm*, Proceedings of SPIE, 3491, p. 920 (1998).
- [23] F. ZARINETCHI, S. SMITH and S. EZEKIEL, *Stimulated Brillouin fiber-optic laser gyroscope*, Optics Letters, 16 (4), p. 229 (1991).
- [24] K. TAGUCHI, K. FUKUSHIMA, A. ISHITANI and M. IKEDA, *Fundamental Characteristics of Semiconductor Ring Laser Gyroscopes*, Electrical Engineering in Japan, 132 (4), p. 73 (2000).
- [25] M. DENNIS, J.-C. DIELS and M. LAI, *Femtosecond ring dye laser : a potential new laser gyro*, Optics Letters, 16 (7), p. 529 (1991).
- [26] M. LAI, J.-C. DIELS and M. DENNIS, *Nonreciprocal measurements in femtosecond ring lasers*.
- [27] J.-C. DIELS, D. KUEHLKE, J. JAMES, T. DANG and X. MENG, *Progress towards a Compact, Solid State, Active Laser Gyroscope*, SPIE Conference on Commercial and Biomedical Applications of Ultrafast Lasers, San Jose, California, 3616, p. 136 (1999).
- [28] I. EFANOVA and E. LARIONTSEV, *Interaction of oppositely directed waves in a solid state ring laser*, Soviet Physics JETP, 28 (4), p. 802 (1968).
- [29] E. L. KLOCHAN, L. S. KORNIENKO, N. V. KRAVTSOV, E. G. LARIONTSEV and A. N. SHELAEV, *Oscillation regimes in a rotating solid-state ring laser*, Soviet Physics JETP, 38 (4), p. 669 (1974).
- [30] E. L. KLOCHAN, L. S. KORNIENKO, N. V. KRAVTSOV, E. G. LARIONTSEV and A. N. SHELAEV, *Generation regimes of solid-state ring laser*, ZhETF Pis. Red., 17 (8), p. 405 (1973).
- [31] E. L. KLOCHAN, L. S. KORNIENKO, N. V. KRAVTSOV, E. G. LARIONTSEV and A. N. SHELAEV, *Spectral Characteristics of a YAG-Nd<sup>3+</sup> Solid-State Continuous Ring Laser*, Radiotekhnika i Elektronika, 19, p. 2096 (1974).
- [32] E. L. KLOCHAN, L. S. KORNIENKO, N. V. KRAVTSOV, E. G. LARIONTSEV and A. N. SHELAEV, *Width of synchronization band in a solid-state ring laser*, JETP Letters, 21 (1), p. 13 (1975).
- [33] A. DOTSENKO and E. LARIONTSEV, *Beats in a solid-state ring laser*, Soviet Journal of Quantum Electronics, 7 (5), p. 616 (1977).

- [34] A. DOTSENKO, E. KLOCHAN, E. LARIONTSEV and O. FEDOROVICH, *Synchronization of modes of colliding waves and beats in a solid-state ring laser*, Radiophysics and Quantum Electronics, 21 (8), p. 792 (1979).
- [35] L. KORNIENKO, N. KRAVTSOV, O. NANIŃ and A. SHELAEV, *Solid-state ring laser with diffraction acoustooptic mode feedback*, Soviet Journal of Quantum Electronics, 11 (12), p. 1557 (1981).
- [36] A. DOTSENKO and E. LARIONTSEV, *Influence of a difference between the resonator Q factors on the interaction of opposite waves in solid-state ring lasers*, Soviet Journal of Quantum Electronics, 11 (7), p. 907 (1981).
- [37] A. DOTSENKO and E. LARIONTSEV, *Use of a feedback circuit for the improvement of the characteristics of a solid-state ring laser*, Soviet Journal of Quantum Electronics, 14 (1), p. 117 (1984).
- [38] A. DOTSENKO, L. S. KORNIENKO, N. V. KRAVTSOV, E. LARIONTSEV, O. NANIŃ and A. SHELAEV, *Use of a feedback loop for the stabilization of a beat regime in a solid-state ring laser*, Soviet Journal of Quantum Electronics, 16 (1), p. 58 (1986).
- [39] E. KLIMENKOVA and E. LARIONTSEV, *Use of self-pumping waves for weakening the competition between opposite waves in a ring laser*, Soviet Journal of Quantum Electronics, 16 (2), p. 283 (1986).
- [40] E. BELKINA, E. KLOCHAN and E. LARIONTSEV, *Amplitude characteristics of a solid-state ring laser with active mode locking*, Soviet Journal of Quantum Electronics, 16 (9), p. 1248 (1986).
- [41] E. KLOCHAN, E. LARIONTSEV, O. NANIŃ and A. SHELAEV, *Solid-state ring laser with a nonlinear absorber*, Soviet Journal of Quantum Electronics, 17 (7), p. 877 (1987).
- [42] N. KRAVTSOV, O. NANIŃ and A. SHELAEV, *Spatial separation of opposite waves in a ring laser*, Soviet Journal of Quantum Electronics, 17 (2), p. 251 (1987).
- [43] L. KORNIENKO, N. KRAVTSOV, E. LARIONTSEV and A. SHELAEV, *New methods of stabilizing solid-state ring lasers*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Fizicheskaya, 52 (6), p. 1236 (1988).
- [44] P. A. KHANDOKHIN and Y. I. KHANIN, *Instabilities in a solid-state ring laser*, Journal of the Optical Society of America B, 2, p. 226 (1985).
- [45] N. KRAVTSOV, E. LARIONTSEV and A. SHELAEV, *Oscillation Regimes of Ring Solid-State Lasers and Possibilities for Their Stabilization*, Laser Physics, 3 (1), p. 21 (1993).
- [46] N. KRAVTSOV and O. NANIŃ, *High-stability single-frequency solid-state lasers*, Quantum Electronics, 23 (4), p. 272 (1993).
- [47] I. ZOLOTOVERKH and E. LARIONTSEV, *Effect of the parameters of solid-state ring lasers on self-modulation oscillations*, Quantum Electronics, 23 (1), p. 56 (1993).
- [48] N. KRAVTSOV and E. LARIONTSEV, *Self-modulation oscillations and relaxation processes in solid-state ring lasers*, Quantum Electronics, 24 (10), p. 841 (1994).
- [49] I. ZOLOTOVERKH, D. KLIMENKO and E. LARIONTSEV, *Influence of periodic loss modulation on the dynamics of self-modulation oscillations in a solid-state ring laser*, Quantum Electronics, 26 (6), p. 609 (1996).

- [50] N. KRAVTSOV and E. LARIONTSEV, *The influence of frequency nonreciprocity on the emission dynamics of solid-state ring lasers*, Quantum Electronics, 30 (2), p. 105 (2000).
- [51] N. KRAVTSOV and E. LARIONTSEV, *Lasing regimes in solid-state ring lasers with modulated parameters*, Quantum Electronics, 34 (6), p. 487 (2004).
- [52] M. DENNIS and J.-C. DIELS, *Analysis of a ring-laser gyroscope with intracavity phase-conjugate coupling*, Applied Optics, 33 (9), p. 1659 (1994).
- [53] J.-P. POCHOLLE, P. GALLON, J. LECLERC and H. GIRAULT, *Gyromètre laser état solide comportant un bloc résonateur*, Demande de brevet n° WO-2002-097370 (2002).
- [54] S. SCHWARTZ, G. FEUGNET, P. BOUYER, E. LARIONTSEV, A. ASPECT and J.-P. POCHOLLE, *Mode-Coupling Control in Resonant Devices : Application to Solid-State Ring Lasers*, Physical Review Letters, 97, p. 093902 (2006).
- [55] S. WAN, L. SUN, X. MAO and Q. TIAN, *Experimental research on the diode pumped solid-state ring laser*, Proceedings of SPIE, 4913, p. 73 (2002).
- [56] M. ANDERSON, J. ENSHER, M. MATTHEWS, C. WIEMAN and E. CORNELL, Science Magazine, 269, p. 198 (1995).
- [57] K. DAVIS, M. MEWES, N. VAN DRUTEN, D. DURFEE, D. KURN and W. KETTERLE, Physical Review Letters, 75, p. 3969 (1995).
- [58] I. BLOCH, T. HÄNSCH and T. ESSLINGER, *Atom Laser with a cw Output Coupler*, Physical Review Letters, 82, p. 3008 (1999).
- [59] S. SCHWARTZ, M. COZZINI, C. MENOTTI, I. CARUSOTTO, P. BOUYER and S. STRINGARI, *One-dimensional description of a Bose-Einstein condensate in a rotating closed-loop waveguide*, New Journal of Physics, 8, p. 162 (2006).
- [60] M. FAUQUEMBERGUE, *Réalisation d'un dispositif de condensation de Bose-Einstein et de transport d'un échantillon cohérent d'atomes*, Thèse de doctorat, Université Paris XI (2004).
- [61] J.-F. RIOU, W. GUERIN, Y. LE COQ, M. FAUQUEMBERGUE, V. JOSSE, P. BOUYER and A. ASPECT, *Beam Quality of a Nonideal Atom Laser*, Physical Review Letters, 96, p. 070404 (2006).
- [62] R. RODLOFF, *Sagnac effect*, In *Optical Gyros and their Application*, chap. 2. North Atlantic Treaty Organization Research and Technology Organization (1999).
- [63] [www.epsic.ch](http://www.epsic.ch).
- [64] O. LODGE, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 184, p. 727 (1893).
- [65] O. LODGE, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 189, p. 149 (1897).
- [66] F. HARRESS, *Die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Körpern*, Thèse de doctorat, University of Jena (1912).
- [67] P. HARZER, Astronomische Nachrichten, 199, p. 377 (1914).
- [68] A. EINSTEIN, Astronomische Nachrichten, 199, p. 8 (1914).
- [69] H. WITTE, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 16, p. 143 (1914).

- [70] H. WITTE, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 16, p. 754 (1914).
- [71] M. VON LAUE, *Zum Versuch von Harreß*, Annalen der Physik, IV (62), p. 448 (1920).
- [72] L. SILBERSTEIN, Journal of the Optical Society of America, 5, p. 291 (1921).
- [73] Voir par exemple <http://www.newtonphysics.on.ca/faq/faq.html>.
- [74] V. VALI and R. SHORTHILL, *Passive Ring Interferometer*, Applied Optics, 15, p. 1099 (1976).
- [75] J. ZIMMERMANN and J. MERCERAU, Physical Review Letters, 14, p. 887 (1965).
- [76] D. ATWOOD, Physical Review Letters, 52, p. 1673 (1984).
- [77] F. RIEHLE et al., Physical Review Letters, 67, p. 177 (1991).
- [78] F. HASSELBACH and M. NICKLAUS, Physical Review A, 48, p. 143 (1993).
- [79] T. GUSTAVSON, P. BOUYER and M. KASEVICH, *Precision Rotation Measurements with an Atom Interferometer Gyroscope*, Physical Review Letters, 78, p. 2046 (1997).
- [80] D. HOLLEVILLE, *Conception et réalisation d'un gyromètre à atomes froids fondé sur l'effet Sagnac pour les ondes de matières*, Thèse de doctorat, Université Paris XI (2001), disponible en ligne sur <http://tel.ccsd.cnrs.fr>.
- [81] F. LEDUC, B. CANUEL, D. HOLLEVILLE, J. FILS, N. DIMARCQ, A. CLAIRON and A. LANDRAGIN, *First inertial measurements with a cold atom gyroscope*, Quantum Electronics Conference (IQEC), p. 1134 (2004).
- [82] Voir toutefois Jean-Claude Lehureau à ce sujet, [jean-claude.lehureau@thalesgroup.com](mailto:jean-claude.lehureau@thalesgroup.com).
- [83] G. MALYKIN, *The Sagnac effect : correct and incorrect explanations*, Physics - Uspekhi Russian Academy of Sciences, 43 (12), p. 1229 (2000).
- [84] A. EINSTEIN, Sitzungsber, Preußische Akademie der Wissenschaften, 2, p. 1030 (1914).
- [85] H. ZEGHLACHE, P. MANDEL, N. ABRAHAM, L. HOFFER, G. LIPPI and T. MELLO, *Bidirectional ring laser : Stability analysis and time-dependent solutions*, Physical Review A, 37, p. 470 (1988).
- [86] W. LAMB, *Theory of an Optical Maser*, Phys. Rev., 134, pp. A1429–A1450 (1964).
- [87] M. SARGENT III, M. SCULLY and W. LAMB, *Laser Physics*, Addison-Wesley, London (1974).
- [88] A. SIEGMAN, *Lasers*, University Science Books (1986).
- [89] Y. SHIMOSAKO and T. NUMAI, *Semiclassical Approach in the Analysis of Ring Laser*, Japanese Journal of Applied Physics, 39, p. 3983 (2000).
- [90] J. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons Ed. (1975).
- [91] J. GREFFET, *Électromagnétisme*, Cours de première année de l'École Supérieure d'Optique (1999).
- [92] R. SPREEUW, R. CENTENO NEELEN, N. VAN DRUTEN, E. ELIEL and J. WOERDMAN, *Mode coupling in a He-Ne ring laser with backscattering*, Physical Review A, 42 (7), p. 4315 (1990).

- [93] H. HAUS, H. STATZ and W. SMITH, *Frequency Locking of Modes in a Ring Laser*, IEEE Journal of Quantum Electronics, 21 (1), p. 78 (1985).
- [94] A. KAMINSKII, *Laser Crystals*, Springer-Verlag (1981).
- [95] K. FUHRMANN, N. HODGSON, F. HOLLINGER and H. WEBER, *Effective cross section of the Nd-YAG 1,0641- $\mu$ m laser transition*, Journal of Applied Physics, 62 (10), p. 4041 (1987).
- [96] Donnée fournie par la société CASIX, sur le site [http://www.casix.com/product/prod\\_cry\\_ndyag.html](http://www.casix.com/product/prod_cry_ndyag.html).
- [97] D. MESCHÉDE, *Optics, Light and Lasers*, Wiley-VCH (2004).
- [98] C. FABRE, *Photons et Atomes, Interaction Matière Rayonnement*, Cours pour le DEA de Physique Quantique et le Magistère Interuniversitaire de Physique de l'École Normale Supérieure (2001-2002).
- [99] C. FABRE, *Les lasers - Principes fondamentaux*, In *Les lasers et leurs applications scientifiques et médicales*, sous la direction de C. FABRE and J.-P. POCHOLLE. EDP Sciences (1996-2002), disponible en ligne sur <http://www.bibsciences.org>.
- [100] L. HOFFER and M. ABRAHAM, *Analysis of a coherent model for a homogeneously broadened bidirectional ring laser*, Optics communications, 74, p. 261 (1989).
- [101] T. DORSCHNER, H. HAUS, M. HOLZ, I. SMITH and H. STATZ, *Laser Gyro at Quantum Limit*, IEEE Journal of Quantum Electronics, 16 (12), p. 1376 (1980).
- [102] T. KANE and B. BYER, *Monolithic, unidirectional single-mode Nd-YAG ring laser*, Optics Letters, 10, p. 65 (1985).
- [103] A. ASPECT, C. FABRE and G. GRYNBERG, *Optique quantique 1 : Lasers*, Cours de l'École Polytechnique (2 tomes) (2000).
- [104] P. GLORIEUX, *Dynamique des lasers*, In *Les lasers et leurs applications scientifiques et médicales*, sous la direction de C. FABRE and J.-P. POCHOLLE. EDP Sciences (1996-2002), disponible en ligne sur <http://www.bibsciences.org>.
- [105] E. LACOT, *Dynamique Spectro-Temporelle des Lasers - Application à la spectroscopie et à l'imagerie*, Mémoire pour l'obtention du Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches de l'Université Joseph Fourier de Grenoble (2003).
- [106] R. ADLER, Proceedings of the I.R.E and Waves and Electrons, 34, p. 351 (1946).
- [107] S. SCHWARTZ, G. FEUGNET and J.-P. POCHOLLE, *Gyrolaser à état solide stabilisé*, Demande de brevet n° FR-0303645 et WO-2004-094952 (2003).
- [108] R. JONES, *A New Calculus for the Treatment of Optical Systems, I. Description and Discussion of the Calculus*, Journal of Optical Society of America, 31, pp. 488–493 (1941).
- [109] J.-P. PÉREZ, *Optique, Fondements et Applications*, Masson (1996).
- [110] L. PASTEUR, *Recherches sur la dissymétrie moléculaire des produits organiques. Leçons professées à la société chimique de Paris le 20 janvier et le 3 février 1860*, In *Œuvres de Pasteur*, sous la direction de L.-P. VALLÉRY-RADOT. Masson (1922).
- [111] F. BIRABEN, *Efficacité des systèmes unidirectionnels utilisables dans les lasers en anneau*, Optics Communications, 29, pp. 353–356 (1979).

- [112] A. NILSSON, E. GUSTAFSON and R. BYER, *Eigenpolarization theory of monolithic nonplanar ring oscillators*, IEEE Journal of Quantum Electronics, 25 (4), pp. 767–790 (1989).
- [113] P. CURIE, *Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique*, Journal de Physique (3<sup>ème</sup> série), 3, pp. 393–415 (1894).
- [114] A. NILSSON and R. BYER, *Unidirectional, monolithic planar ring laser with birefringence*, Brevet n° WO-1991-10273 (1991).
- [115] N. VANSTEENKISTE, *Réalisation d'un laser LNA monomode et asservi sur la transition  $2^3S_1 \rightarrow 2^3P$  de l'hélium 4 (1083nm) : utilisation pour quelques expériences de refroidissement radiatif d'atomes d'hélium 4 métastable*, Thèse de doctorat, Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'École normale supérieure (1989), disponible en ligne sur <http://tel.ccsd.cnrs.fr>.
- [116] G. FEUGNET, J.-P. POCHOLLE and S. SCHWARTZ, *Gyrolaser à état solide stabilisé et à milieu laser anisotrope*, Demande de brevet n° FR-0314598 et WO-2005-066586 (2003).
- [117] M. DENNIS and J.-C. DIELS, *Analysis of a ring-laser gyroscope with intracavity phase-conjugate coupling*, Applied Optics, 33 (9), p. 1659 (1994).
- [118] H. ZEGHLACHE, P. MANDEL, N. ABRAHAM, L. HOFFER, G. LIPPI and T. MELLO, *Bidirectional ring laser : Stability analysis and time-dependent solutions*, Physical Review A., 37, p. 470 (1988).
- [119] H. ZEGHLACHE and P. MANDEL, *Influence of detuning on the properties of laser equations*, Journal of the Optical Society of America B, 2, pp. 18–22 (1985).
- [120] M. CLERC and P. COULLET, *Chaotic alternation of waves in ring lasers*, Physical Review E, 60 (6), p. 6589 (1999).
- [121] Donnée fournie par la société Goodfellow, sur le site <http://www.goodfellow.com> (suivre les liens *Données techniques* puis *Propriétés des matériaux* puis *Invar*).
- [122] Donnée fournie par la société Northrop Grumman Space Technology, sur le site <http://www.st.northropgrumman.com/synoptics/>.
- [123] G. STEDMAN, Z. LI, C. ROWE, A. MCGREGOR and H. BILGER, *Harmonic analysis in a large ring laser with backscatter-induced pulling*, Physical Review A, 51 (6), p. 4944 (1995).
- [124] H. STATZ, T. DORSCHNER, M. HOLTZ and I. SMITH, *The Multioscillator Ring Laser Gyroscope*, In *Laser Handbook*, sous la direction de M. STITCH and M. BASS, pp. 229–332. Elsevier Science Publishers B.V. (1985).
- [125] K. OTSUKA, P. MANDEL, S. BIELAWSKI, D. DEROZIER and P. GLORIEUX, *Alternate time scale in multimode lasers*, Physical Review A., 46 (3) (1992).
- [126] J. ZAYHOWSKI, *The effects of spatial hole burning and energy diffusion on the single-mode operation of standing-wave lasers*, IEEE Journal of Quantum Electronics, 26 (12), p. 2052 (1990).
- [127] T. KUSHIDA, *Linewidths and Thermal Shifts of Spectral Lines in Neodymium-Doped Yttrium Aluminum Garnet and Calcium Fluorophosphate*, Physical Review, 185, pp. 500–508 (1969).

- [128] *IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros*, IEEE Standards, 647 (1995).
- [129] S. SCHWARTZ, G. FEUGNET and J.-P. POCHOLLE, *Gyrolaser à état solide stabilisé sans zone aveugle*, Demande de brevet n° FR-0402707 (2004).
- [130] F. BRETENAKER, B. LÉPINE, J.-C. COTTEVERTE and A. LE FLOCH, *Mean-Field Laser Magnetometry*, Physical Review Letters, 69 (6), p. 909 (1992).
- [131] Le composant évoqué est le LTZ1000, produit par la société Linear Technology et dont les spécifications peuvent être consultées sur le site <http://www.linear.com>.
- [132] J. ROLAND and J. LAMARRE, *Periodic Faraday Bias and Lock-In Phenomena in a Laser Gyro*, Applied Optics, 12 (7), p. 1460 (1973).
- [133] S. SCHWARTZ, G. FEUGNET and J.-P. POCHOLLE, *Gyrolaser à état solide activé optiquement par biais alternatif*, Demande de brevet n° FR-0512608 (2005).
- [134] H. DE LANG, *Eigenstates of Polarization in Lasers*, Philips Research Reports.
- [135] H. DE LANG, *Polarization Properties of Optical Resonators Passive and Active*, Thèse de doctorat, University of Utrecht (1966).
- [136] S. SCHWARTZ, G. FEUGNET and J.-P. POCHOLLE, *Gyrolaser à état solide stabilisé à quatre modes sans zone aveugle*, Demande de brevet n° FR-0402706 (2004).
- [137] K. ANDRINGA, *Laser gyroscope*, United States Patent n° 3,741,657 (1973).
- [138] W. CHOW, J. HAMBENNE, T. HUTCHINGS, V. SANDERS, M. SARGENT III and M. SCULLY, *Multioscillator Laser Gyros*, IEEE Journal of Quantum Electronics, 16 (9), p. 918 (1980).
- [139] I. SMITH and T. DORSCHNER, *Electromagnetic wave ring resonator*, United States Patent n° 4,110,045 (1978).
- [140] F. BRETENAKER, *Étude théorique et expérimentale des modes propres et états propres dans les lasers en anneau. Applications à la gyrométrie et à la détection d'effets petits*, Thèse de doctorat, Université de Rennes I (1992).
- [141] F. BRETENAKER and A. LE FLOCH, *Laser eigenstates in the framework of a spatially generalized Jones matrix formalism*, Journal of the Optical Society of America B, 8, p. 230 (1991).
- [142] M. VALLET, N. TRAN, P. TANGUY, A. LE FLOCH and F. BRETENAKER, *Ring-laser gyros with spatially resolved eigenstates*, Optics Letters, 19 (16), p. 1219 (1994).
- [143] M. VALLET, F. BRETENAKER, N. TRAN, P. TANGUY and A. LE FLOCH, *Spatially resolved eigenstates for traveling and standing waves in ring lasers*, Journal of the Optical Society of America B, 12 (1), p. 146 (1995).
- [144] M. ALOUINI, *Étude théorique et expérimentale des lasers solides  $Er^{3+}$  et  $Nd^{3+}$  : applications des lasers bi-fréquences aux télécommunications optiques et hyperfréquences*, Thèse de doctorat, Université de Rennes I (2001).
- [145] M. BRUNEL, O. EMILE, M. VALLET, F. BRETENAKER, A. LE FLOCH, L. FULBERT, J. MARTY, B. FERRAND and E. MOLVA, *Experimental and theoretical study of monomode vectorial lasers passively Q switched by a  $Cr^{4+}$  : yttrium aluminum garnet absorber*, Physical Review A, 60 (5), p. 4052 (1999).

- [146] Y. SUN, G. WANG, R. CONE, R. EQUALL and M. LEASK, *Symmetry considerations regarding light propagation and light polarization for coherent interactions with ions in crystals*, Physical Review B, 62 (23), p. 15443 (2000).
- [147] S. SCHWARTZ, F. GUTTY, J.-P. POCHOLLE and G. FEUGNET, *Gyrolaser à état solide avec milieu à gain activé mécaniquement*, Demande de brevet n° FR-0607394 (2006).
- [148] F. ARONOWITZ, *Fundamentals of the Ring Laser Gyro*, In *Optical Gyros and their Application*, chap. 3. North Atlantic Treaty Organization Research and Technology Organization (1999).
- [149] H. DANIELMEYER and W. NILSEN, *Spontaneous single-frequency output from a spatially homogeneous Nd-YAG laser*, Applied Physics Letters, 16 (3), p. 124 (1969).
- [150] H. DANIELMEYER, *Low-Frequency Dynamics of Homogeneous Four-Level cw Lasers*, Journal of Applied Physics, 41 (10), p. 4014 (1970).
- [151] H. DANIELMEYER and E. TURNER, *Electro-optic elimination of spatial hole burning in lasers*, Applied Physics Letters, 17 (12), p. 519 (1970).
- [152] E. WEISSTEIN, *MathWorld—A Wolfram Web Resource*, <http://mathworld.wolfram.com> (1999), voir notamment les articles `BesselFunctionoftheFirstKind`, `Gradient`, `TangentVector` et `EllipticCylindricalCoordinates`.
- [153] F. GUTTY, *Effets induits par le mouvement du cristal laser dans une modélisation du gyrolaser GESCA*, MEMO Thales NAV/05/009404 (2005).
- [154] R. LANGFORD, *État des recherches concernant les gyromètres à laser*, In *Les gyroscopes avancés*, p. 399. Mémorial de l'Artillerie française, 2<sup>ème</sup> fascicule (1965).
- [155] J. BARDEEN, Physics Today, 43, p. 25 (1990).
- [156] C. HEER, *Interferences of electromagnetic and matter waves in a nonpermanent gravitational field*, Bulletin of the American Physical Society, 6, p. 58 (1961).
- [157] C. HEER, *Commentaires sur un gyroscope à ondes corpusculaires*, In *Les gyroscopes avancés*, p. 394. Mémorial de l'Artillerie française, 2<sup>ème</sup> fascicule (1965).
- [158] L. PITAEVSKII and S. STRINGARI, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press Oxford (2003).
- [159] J. DALIBARD, *Mécanique quantique avancée*, Cours du DEA de Physique Quantique de l'École Normale Supérieure (1990-2000), disponible en ligne sur <http://www.lkb.ens.fr/~dalibard>.
- [160] P. FEATONBY, A. VIRDIS, A. LANDRAGIN, B. CANUEL and F. LEDUC, *Procédé et appareil de mesure de vitesse de rotation par interférométrie atomique*, Demande de brevet n° FR-0411768, déposée par Sagem et l'Observatoire de Paris (2004).
- [161] F. BLOCH, *Superfluidity in a Ring*, Physical Review A, 7, p. 2187 (1973).
- [162] M. MATTHEWS, B. ANDERSON, P. HALJAN, D. HALL, C. WIEMAN and E. CORNELL, Physical Review Letters, 83, p. 2498 (1999).
- [163] K. MADISON, F. CHEVY, W. WOHLLEBEN and J. DALIBARD, Physical Review Letters, 84, p. 806 (2000).
- [164] D. ROKHSAR, *Dilute Bose gas in a torus : vortices and persistent currents*, e-print cond-mat/9709212 (1997).

- [165] L. SALASNICH, A. PAROLA and L. REATTO, *Bosons in a toroidal trap : Ground state and vortices*, Physical Review A, 59 (4), p. 2990 (1999).
- [166] M. COZZINI, B. JACKSON and S. STRINGARI, *Vortex signatures in annular Bose-Einstein condensates*, Physical Review A, 73, p. 013603 (2006).
- [167] H. SAITO and M. UEDA, *Emergence of Bloch Bands in a Rotating Bose-Einstein Condensate*, Physical Review Letters, 93, p. 220402 (2004).
- [168] S. GUPTA, K. MURCH, K. MOORE, T. PURDY and D. STAMPER-KURN, *Bose-Einstein condensation in a circular waveguide*, Physical Review Letters, 95, p. 143201 (2005).
- [169] A. ARNOLD, C. GARVIE and E. RIIS, *A large magnetic storage ring for Bose-Einstein condensates*, Physical Review A, 73, p. 041606 (2006).
- [170] A. LEGGETT, *Bose-Einstein condensation in the alkali gases : Some fundamental concepts*, Review of Modern Physics, 73 (2), p. 307 (2001).
- [171] V. BRETIN, *Rotations d'un condensat de Bose-Einstein*, Thèse de doctorat, Laboratoire Kastler Brossel, Département de Physique de l'École normale supérieure (2004), disponible en ligne sur <http://tel.ccsd.cnrs.fr>.
- [172] A. RECATI, F. ZAMBELLI and S. STRINGARI, *Overcritical rotation of a trapped Bose-Einstein condensate*, Physical Review Letters, 86, p. 377 (2001).
- [173] R. KANAMOTO, H. SAITO and M. UEDA, *Stability of the quantized circulation of an attractive Bose-Einstein condensate in a rotating torus*, Physical Review A, 68, p. 043619 (2003).
- [174] L. LANDAU and E. LIFSHITZ, *Statistical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA (1969).
- [175] C. COHEN-TANNOUJJI, *Condensats de Bose-Einstein en rotation*, Notes du Cours au Collège de France (2001-2002), disponibles sur <http://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france>.
- [176] F. CHEVY, *Dynamique d'un condensat de Bose-Einstein*, Thèse de doctorat, Laboratoire Kastler Brossel, Département de Physique de l'École normale supérieure (2001), disponible en ligne sur <http://tel.ccsd.cnrs.fr>.
- [177] A. FETTER, *Theory of a dilute low-temperature trapped Bose condensate*, In *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, Proceedings of the international school of physics "Enrico Fermi", p. 201. IOS Press Ohmsha (1998).
- [178] S. MUNIZ, D. NAIK and C. RAMAN, *Bragg spectroscopy of vortex lattices in Bose-Einstein condensates*, Physical Review A, 73, p. 041605(R) (2006).
- [179] P. LEBOEUF and N. PAVLOFF, *Bose-Einstein beams : Coherent propagation through a guide*, Physical Review A, 64, p. 033602 (2001).
- [180] M. BORN and J. OPPENHEIMER, *Zur Quantentheorie der Molekeln*, Annalen der Physik (Leipzig), 84, p. 457 (1927).
- [181] C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU and F. LALOË, *Mécanique quantique*, Hermann (1973).
- [182] M. OLSHANII, *Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons*, Physical Review Letters, 81, p. 938 (1998).

- [183] S. CHU, J. BJORKHOLM, A. ASHKIN and A. CABLE, *Experimental Observation of Optically Trapped Atoms*, Physical Review Letters, 57, p. 314 (1986).
- [184] G. FEUGNET, S. SCHWARTZ, J.-P. POCHOLLE, C. LARAT and F. GUTTY, *Gyrolaser à état solide à facteur d'échelle stabilisé*, Demande de brevet n° FR-0410659 et WO-2006-037795 (2004).
- [185] J. KMETEC et al., *Mode-hop-free single frequency solid state laser*, United States Patent n° 6,614,818 (2003).