



HAL
open science

Dynamique d'un film d'eau de pluie sur un hauban de pont soumis au vent.

Cécile Lemaitre

► **To cite this version:**

Cécile Lemaitre. Dynamique d'un film d'eau de pluie sur un hauban de pont soumis au vent.. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Polytechnique X, 2006. Français. NNT : . pastel-00003072v2

HAL Id: pastel-00003072

<https://pastel.hal.science/pastel-00003072v2>

Submitted on 27 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Polytechnique
Laboratoire d'Hydrodynamique

Thèse présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Spécialité : Mécanique

par

Cécile LEMAITRE

Dynamique d'un film d'eau de pluie sur un hauban de pont soumis au vent

soutenue le 10 novembre 2006 devant le jury composé de :

M. Laurent LIMAT	Rapporteur	ESPCI, Paris
M. Christian CREMONA	Rapporteur	LCPC, Paris
M. Olivier FLAMAND	Examineur	CSTB, Nantes
M. Yu ZHOU	Examineur	Hong Kong Polytechnic University
M. Bruno RADIGUET	Invité	BOUYGUES Construction
M. Pascal HÉMON	Co-directeur de thèse	LadHyX, Ecole Polytechnique
M. Emmanuel DE LANGRE	Directeur de thèse	LadHyX, Ecole Polytechnique

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mes "chefs", Pascal et Emmanuel qui ont encadré cette thèse de manière exemplaire. Je salue leur humanité, leurs encouragements, leur fermeté parfois, leur intuition et leur compétence : ils m'ont tant apporté. En résumé, je les recommande chaudement aux futures générations de thésards.

Je remercie Christian Crémona, Laurent Limat, Olivier Flamand, Yu Zhou et Bruno Radiguet d'avoir accepté d'être membres de mon jury et d'avoir interagi avec moi avant, pendant et après ma soutenance.

Ces trois ans et demi furent un réel plaisir dans ce laboratoire à l'ambiance chaleureuse qui tient beaucoup à la personnalité de Patrick et Jean-Marc.

L'environnement scientifique y est exceptionnel et je tiens à remercier tout particulièrement Jean-Marc Chomaz, toujours disponible et solidaire ; il m'a beaucoup apporté que ce soit dans mes travaux de recherche, dans mes enseignements comme au plan humain. Mille merci Jimmy ! Je remercie aussi les deux Paul, Patrick, Cédric, Maher, Alan, Remi et les autres pour les échanges et l'aide qu'ils m'ont apportés. Merci à Sabine pour ses conseils éclairés. Merci à Tonio et Dani pour le consulting en mécanique (auto) et bricolage en tout genre. Les pauses-thé avec Dani resteront un très bon souvenir. Je rejoins donc moi aussi le fan-club du LadHyX.

Merci à Françoise Santi du Département de Mathématique du CNAM d'avoir réalisé plusieurs calculs qui ont servi à cette thèse.

Enseigner à Polytechnique a été très enrichissant et formateur sous la houlette d'Antoine Chaigne, Gilles Bouchet, Jean-Marc Chomaz, Xavier Boutillon, Alexandre Stegner et Thomas Dubos et grâce au soutien technique et sympathique de William Gilbert et Ali Bodzetine.

Je remercie Bruno Radiguet et Bouygues Travaux Publics pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse et leur soutien financier au LadHyX.

Grâce au programme franco-hongkongais Procore nous avons pu réaliser une expérience importante pour cette thèse et initier une coopération avec la Hong Kong Polytechnic University. I thank Yu Zhou and Jeff Huang for their warm welcome in Hong Kong and their support for elaborating a new experiment there.

Merci aux relecteurs, Jean, Papa, Nicolas. Merci aux aides-cuisinier marathoniens, Papa et Nicolas et aux logisticiens de la soutenance. Merci à ma famille et à tous mes amis qui ont accompagné cette thèse dans les moments heureux et les moments plus difficiles. Merci à Dom, à Nicolas, à mon Papa et à ma Maman. Merci aussi à Rantanplan.

Summary

Chapter 1 On cable-stayed bridges, inclined cables connect the pylons to the vehicle deck. It is well known that these cables can vibrate due to wind, but since the late 1970's it has been observed that the onset of cable vibration can also be caused by rain, due to a different mechanism, Hikami & Shiraishi (1988).

These Rain-Wind-Induced Vibrations (RWIV) only happen for a limited interval of wind speed, U . The cables are usually inclined with respect to the wind direction, with a yaw angle β ; the RWIV also happen for a limited interval of β .

Rain is an essential parameter since the vibrations cease when it no longer rains. It is observed that rainwater organizes into two water rivulets running along a cable subject to RWIV. Laboratory experiments show that the existence and the position of the rivulets depend on U and β .

The aeroelastic models of Yamaguchi (1990) and Cosentino *et al.* (2003), which describe the interaction between the rivulets, the cable and the wind, reproduce the characteristics of the RWIV in terms of wind speed and yaw angle. Nevertheless, these models assume the existence and the position of the rivulets to be known. The mechanical characteristics of the rivulets are moreover extrapolated from experimental measurements.

Alam & Zhou (2006) have recently conducted an experiment to study the characteristics of the wake around a static cylinder with two running rivulets. They have shown that the aerodynamic forces on the cylinder are strongly amplified for an interval of the wind speed U . In that interval, the vortex shedding frequency f deviates from the Strouhal law, which predicts a proportionality with the wind speed, $f \propto U$. The preceding models cannot explain these results.

Chapter 2 To study the existence and the positioning of the rivulets on a static cable, we focus on the hydrodynamics of a water film surrounding a cylinder, subjected to gravity, surface tension and a wind load. By applying the lubrication assumptions to the Navier-Stokes equations, we obtain an equation for the evolution of the film thickness.

The numerical resolution of this equation shows the appearance of two rivulets, starting from a homogeneous film. The linearization of the equation gives a spatial distribution of the growth rate of the film, which then predicts the position of appearance of the rivulets on the cylinder, as a function of the wind speed and the cylinder inclination. We therefore show that the parameter which controls the existence and the position of the rivulets is the Froude number, comparing wind and gravity effects.

We also derive an equation for the shape of the rivulets from the film equation, that produces aspect ratios very close to reality. By balancing friction forces on a rivulet and surface tension forces at the triple lines, we express a maximal Weber number (comparing wind and surface tension effects) above which the rivulet is

pulled away from the cylinder.

The theoretical predictions are in good agreement with new experiments we conducted as well as with the previous experiments of the literature.

The existence of the rivulets can thus be expressed in terms of an interval of the Weber number, $\Delta W e^{exist}$.

Chapter 3 To explain Alam's experiment, we, as a first step, set up a similar experiment that shows the vibration of the rivulets for certain wind speeds. We then assume that a rivulet possesses vibration modes due to the surface-tension-induced stiffness of the free surface : 'capillary' sloshing modes. We then estimate the frequency of the fundamental mode with the Rayleigh method. The obtained value is in very good agreement with the value measured in our experiment.

We then present a model coupling the lowest capillary mode of the rivulets with the wake around a cylinder. The studied variable of the wake, here the transverse fluctuating aerodynamic force on the cylinder, C_y , is governed by the van der Pol equation. The resolution of the resulting coupled differential system shows lock-in of the shedding frequency onto the rivulets' eigenfrequency when the wind speed is appropriate. In the lock-in zone, a strong amplification of C_y occurs. The results are in good agreement with Alam's experiments.

Lock-in is limited to another interval of Weber number, $\Delta W e^{lock}$.

Chapter 4 Finally, we investigate whether the rivulets-wake lock-in can explain some cases of RWIV. For this aim, we compare the domain of existence of the rivulets, $\Delta W e^{exist}$, with the lock-in domain, $\Delta W e^{lock}$, for scales involved in the RWIV. These two domains overlap, so rivulets-wake lock-in may occur for certain wind configurations. In that case, the cable would thus be excited at the eigenfrequency of the rivulets.

We estimate this frequency for rivulet dimensions typical of RWIV. It is found to be much more important than the frequency of cable vibrations due to rain. If the estimated value is correct, a rivulets-wake lock-in cannot explain RWIV. To definitively exclude this possibility, an experiment should be conducted to measure the eigenfrequency of a rivulet such as those observed during RWIV.

Résumé

Chapitre 1 Les haubans sont des câbles inclinés qui relient les pylônes du pont au tablier où circulent les véhicules. Les haubans peuvent vibrer par temps de vent, phénomène bien connu et assez bien expliqué, mais depuis la fin des années 1970, on sait que les haubans peuvent également vibrer par temps de pluie selon un mécanisme différent, Hikami & Shiraishi (1988).

Ces vibrations induites par le vent et par la pluie (Rain-Wind-Induced Vibrations, RWIV), n'ont lieu que pour un intervalle limité de vitesse de vent, U . Les câbles sont en général inclinés par rapport à la direction du vent, d'un angle de dérapage β ; il existe un intervalle limité d'angle β pour lesquels les RWIV peuvent se produire.

La pluie est un paramètre indispensable puisque lorsqu'il ne pleut plus, les vibrations cessent. On observe que l'eau de pluie s'organise en deux filets d'eau ruisselant le long du hauban sujet aux RWIV. Des expériences en laboratoire montrent que l'existence et la position des filets dépendent de U et de β .

Les modèles aéroélastiques de Yamaguchi (1990) et Cosentino *et al.* (2003) décrivant l'interaction entre les filets, le câble et le vent permettent de reproduire les caractéristiques des RWIV en termes de vitesse de vent et d'angle de dérapage. Cependant, ces modèles supposent l'existence des filets et leur position connue. Les caractéristiques mécaniques des filets sont en outre extrapolées de mesures expérimentales.

Alam & Zhou (2006) ont réalisé une nouvelle expérience étudiant les caractéristiques du sillage autour d'un cylindre statique parcouru par deux filets d'eau. Ils ont montré que pour un intervalle précis de vitesse de vent, U , les forces aérodynamiques s'exerçant sur le cylindre étaient grandement amplifiées. Concomitamment, la fréquence de détachement tourbillonnaire f déviait de la loi de Strouhal, qui prévoit une proportionnalité avec la vitesse, $f \propto U$. Les modèles antérieurs ne permettent pas d'expliquer cette expérience.

Chapitre 2 Pour étudier l'existence et le positionnement des filets, nous nous sommes intéressés à l'hydrodynamique d'un film d'eau enveloppant un cylindre, soumis à la gravité, la tension de surface et un chargement de vent. En écrivant les équations de Navier-Stokes et en faisant les hypothèses de lubrification, nous avons obtenu une équation d'évolution de l'épaisseur du film. La résolution numérique de cette équation montre l'apparition de deux filets à partir d'un film homogène. La linéarisation de l'équation donne une distribution spatiale de taux de croissance du film qui permet de prévoir le lieu d'apparition des filets sur le cylindre en fonction de la vitesse du vent et de l'inclinaison du cylindre par rapport à la gravité et au vent. Nous avons ainsi montré que le paramètre contrôlant l'existence et la position des filets est le nombre de Froude,

qui compare l'effet du vent et l'effet de la gravité.

Nous avons également calculé la forme des filets à partir de l'équation de film, qui donne des rapports d'aspect très proches de la réalité. Par un calcul simple comparant la force de friction et les forces de tension de surface au niveau des lignes triples, nous avons donné l'expression d'un nombre de Weber maximal (comparant effet du vent et tension surfacique) au-delà duquel un filet est arraché.

Les prévisions théoriques sont en bon accord avec de nouvelles expériences que nous avons réalisées, ainsi qu'avec les expériences antérieures de la littérature.

L'existence des filets est limitée à un intervalle du nombre de Weber, $\Delta W e^{exist}$.

Chapitre 3 Pour rendre compte des expériences d'Alam, nous réalisons dans un premier temps une expérience similaire qui montre la vibration des filets pour certaines vitesses de vent. Nous supposons ensuite que les filets présentent des modes de vibration du fait de la raideur induite par la tension de surface : des modes de ballonnement capillaire. Nous calculons la fréquence propre du mode le plus bas grâce à la méthode de Rayleigh. Cette fréquence est en très bon accord avec les valeurs obtenues dans nos expériences.

Nous présentons alors un modèle de couplage entre le mode fondamental de ballonnement du filet d'eau et le sillage d'air derrière un cylindre. La grandeur de sillage étudiée, ici la force aérodynamique transverse exercée sur le cylindre, C_y , est régie par l'équation de van der Pol. La résolution du système différentiel couplé résultant montre un accrochage de la fréquence de détachement tourbillonnaire sur la fréquence propre des filets lorsque la vitesse de l'air est adéquate. Dans la zone d'accrochage, il résulte une forte amplification de C_y . Les résultats du modèle sont en bon accord avec les expériences d'Alam.

L'accrochage ne peut avoir lieu que dans un intervalle de nombre de Weber, $\Delta W e^{coupl}$.

Chapitre 4 Nous nous demandons finalement si l'accrochage filets-sillage peut expliquer certains cas de RWIV. Pour cela, nous comparons le domaine d'existence des filets sur un hauban par temps de vent, $\Delta W e^{exist}$, avec le domaine d'existence du couplage filets-sillage, à l'échelle des RWIV, $\Delta W e^{coupl}$. Ces deux domaines se recouvrent, donc un accrochage filets-sillage peut avoir lieu dans certaines conditions de vent. Dans ce cas, les haubans seraient excités à la fréquence propre des filets.

Nous estimons cette fréquence pour des dimensions de filets typiques des RWIV. Elle est beaucoup plus importante que les fréquences de vibration des haubans par temps de vent et de pluie. Si la fréquence calculée est correcte, les RWIV ne peuvent donc pas être expliquées par un couplage filets-sillage. Pour exclure définitivement cette possibilité, il faudrait réaliser une expérience visant à mesurer la fréquence propre d'un filet d'eau en conditions RWIV.

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Vibrations induites par le vent et par la pluie (RWIV)	4
1.1.1	Les haubans de pont	4
1.1.2	Phénoménologie des RWIV	4
1.1.3	Les filets d'eau	9
1.2	Mécanismes et modèles pour les RWIV	13
1.2.1	Excitation de câbles par le vent seul	13
1.2.2	Galop à deux degrés de liberté	19
1.3	Des résultats expérimentaux inexplicables	26
1.4	Problématique de la thèse	29
1.4.1	Modélisation hydrodynamique des filets	29
1.4.2	Modélisation du couplage filet-sillage	29
1.4.3	Deux configurations modèles : cas (I) et (II)	30
2	Dynamique des filets	31
2.1	Evolution d'un film d'eau sous l'action du vent	32
2.1.1	Notations	32
2.1.2	Equations de Navier-Stokes et conditions aux limites	33
2.1.3	Hypothèses de lubrification	34
2.1.4	Coefficients de pression et friction	35
2.1.5	Résolution numérique	36
2.1.6	Résumé de la section	38
2.2	Critère d'apparition des filets	42
2.2.1	Linéarisation de l'équation de film	42
2.2.2	Cas simplifié : câble orienté dans la direction du vent	44
2.2.3	Cas général	49
2.2.4	Résumé de la section	54
2.3	Forme des filets	55
2.3.1	Résolution de l'équation de film démoillé stationnaire	55
2.3.2	Angle de contact	58
2.3.3	Forme des filets dans les cas (I) et (II)	58
2.3.4	Résumé de la section	60
2.4	Critère d'arrachage des filets	61

2.5	Intervalle d'existence des filets	63
2.6	Conclusion	65
3	Interaction des filets avec le sillage	67
3.1	Vibration des filets	68
3.1.1	Détection expérimentale de la vibration des filets	68
3.1.2	Modes de ballonnement capillaire d'un filet	71
3.1.3	Résumé de la section	74
3.2	Une modélisation du couplage sillage-filets	75
3.2.1	Premier degré de liberté : les filets	75
3.2.2	Second degré de liberté : le sillage oscillant	76
3.2.3	Couplage entre les deux degrés de liberté	76
3.2.4	Résumé de la section	83
3.3	Résolution de l'équation de couplage et discussion	84
3.3.1	Etude de stabilité de l'équation linéarisée non amortie	84
3.3.2	Résolution de l'équation non-linéaire avec amortissement	88
3.3.3	Comparaison avec les expériences	91
3.3.4	Sensibilité aux coefficients	91
3.3.5	Résumé de la section	95
3.4	Intervalle de couplage filets-sillage	97
3.5	Conclusion	98
4	Discussion, conclusion et perspectives	99
4.1	Discussion	100
4.1.1	Intervalle d'existence des filets	100
4.1.2	Intervalle de couplage filets-sillage	100
4.1.3	Comparaison avec les expériences RWIV	101
4.1.4	Un couplage filet-sillage peut-il expliquer certaines RWIV ?	101
4.2	Conclusion	105
4.3	Perspectives	109
4.3.1	Saturation des oscillations des filets	109
4.3.2	Sensibilité de l'écoulement d'air	109
4.3.3	Modèle tridimensionnel	110
A	Détails de calcul et procédures expérimentales	117
A.1	Les deux configurations étudiées	118
A.1.1	Cas (I) : Cas typique des RWIV	118
A.1.2	Cas (II) : Expérience modèle	118
A.2	Calculs détaillés de l'équation de lubrification	120
A.2.1	Notations du modèle	120
A.2.2	Équations de Navier-Stokes et conditions aux limites	121
A.2.3	Adimensionnement et hypothèses de lubrification	123
A.3	Lien entre le débit et l'épaisseur	127

A.4	Calcul de la forme des filets	129
A.5	Réponse de l'oscillateur de van der Pol à un forçage	132
A.6	Mesure de la position des filets dans la configuration (II)	133
A.7	Expérience pour la détection du mouvement des filets	135
A.8	Synthèse des expériences mesurant la position des filets	137
B	Articles	139

Chapitre 1

Introduction

Toujours plus longs, toujours plus hauts! Chaque année un nouveau pont à haubans est inauguré qui bat un nouveau record : hauteur de pylône, longueur de travée, longueur totale enjambée. En conséquence des structures de plus en plus élancées sont mises en place que ce soit le tablier sur lequel circulent les véhicules, les pylônes qui supportent le tablier ou les haubans, câbles inclinés qui relient les pylônes au tablier. Ces structures sont d'autant plus sujettes aux vibrations qu'elles sont longues et il importe d'empêcher ou minimiser ces vibrations pour des raisons de sécurité et de coût d'entretien.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la stabilité des haubans de pont. Il est connu que les haubans peuvent vibrer sous l'effet d'un mouvement du tablier ou sous l'effet du vent. Depuis la fin des années 1970, on sait qu'il peuvent également vibrer sous l'effet conjoint du vent et de la pluie selon un mécanisme différent et encore mal compris.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord les caractéristiques connues des vibrations induites par le vent et par la pluie des haubans de pont, section 1.1. Puis nous exposons les modèles permettant d'expliquer ces vibrations, section 1.2 et nous mettons en évidence leurs limites. Ces modèles ne permettent pas d'expliquer une expérience récente, section 1.3. Dans la section 1.4, la problématique de cette thèse sera alors présentée.

1.1 Vibrations induites par le vent et par la pluie (RWIV)

1.1.1 Les haubans de pont

Les ponts modernes sont essentiellement de deux types : les ponts suspendus et les ponts à haubans. Les ponts suspendus, figure 1.1(a), sont constitués de deux câbles principaux, les porteuses, desquels pendent des câbles secondaires, les suspentes, qui retiennent le tablier où circulent les véhicules. Les porteuses sont reliées aux berges par deux points d'ancrages, les culées. Ce sont les culées qui supportent la plus grosse partie de l'ouvrage. Lorsque le terrain des berges ne permet pas l'aménagement de tels ancrages, on préfère aux ponts suspendus les ponts à haubans.

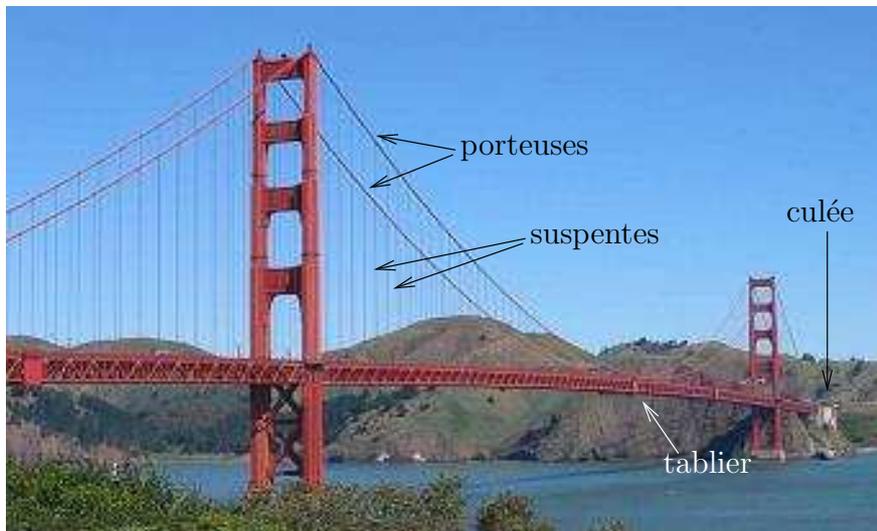
Dans les ponts haubanés, figure 1.1(b), le tablier est supporté par un faisceau de câbles inclinés, les haubans, qui sont directement rattachés aux pylônes. Le poids du tablier est ainsi supporté par les pylônes. Ce type de pont est dit auto-équilibré. Il permet ainsi d'enjamber de grandes distances, si suffisamment de pylônes sont présents.

Les haubans sont constitués de fils d'aciers torsadés, les torons, qui présentent un très grande résistance à la traction. Les torons sont protégés par une gaine cylindrique en polyéthylène haute densité ou en inox (figure 1.3). Le diamètre extérieur de la gaine, D , mesure entre 10 et 20 cm. Les haubans sont inclinés par rapport à l'horizontale, d'un angle $0 < \alpha < 90^\circ$, figure 1.2. En cas de vent, ils présentent en outre une inclinaison par rapport au vent. On appelle angle de dérapage $-90 < \beta < 90^\circ$ l'angle entre le plan vertical contenant le hauban et le plan normal à la direction du vent.

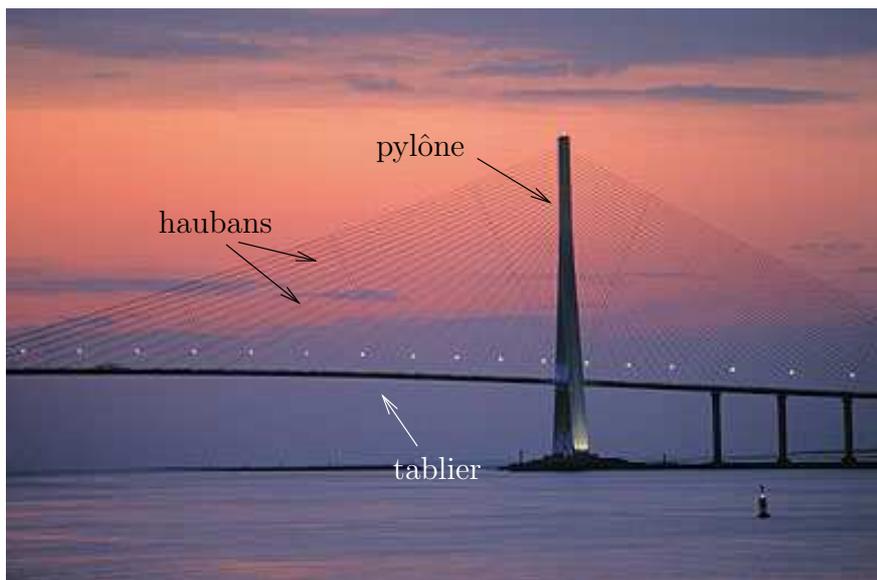
1.1.2 Phénoménologie des RWIV

Les haubans de pont peuvent vibrer sous l'effet du vent. Ceci est expliqué par plusieurs mécanismes différents, qui relèvent du domaine de l'aéroélasticité. Les concepteurs de pont connaissent ces phénomènes et dimensionnent leurs ponts de manière à éviter ces vibrations pour les conditions habituelles de vent. Cependant, à la fin des années 1970, Wianecki (1979) a observé la vibration des haubans du pont de Brotonne (Normandie) par temps de pluie et de vent. Il a souligné que les vibrations cessaient lorsqu'il ne pleuvait plus, alors que les conditions de vent étaient inchangées. Dix ans plus tard, Hikami & Shiraishi (1988) ont observé à nouveau ce phénomène qui fut désormais connu sous le nom de vibrations induites par le vent et par la pluie (Rain-Wind-Induced Vibrations, RWIV). Ces vibrations écourtent la durée de vie des haubans et il faut les remplacer plus souvent, ce qui ne compromet pas la sécurité du pont mais induit un surcoût de maintenance.

Hikami a étudié les RWIV sur le pont Meikonishi (port de Nagoya, Japon) et Schwarzkopf & Sedlacek (2003) ont observé les haubans du pont Ilverich (au-



(a)



(b)

FIG. 1.1 – (a) Pont suspendu : le Golden Gate Bridge construit en 1937 traverse la baie de San Francisco (Californie, USA), photographie de P. Craig ; (b) Pont haubané : Le Pont de Normandie, inauguré en 1995, relie le Havre à Honfleur, photographie d'E. Bénard.

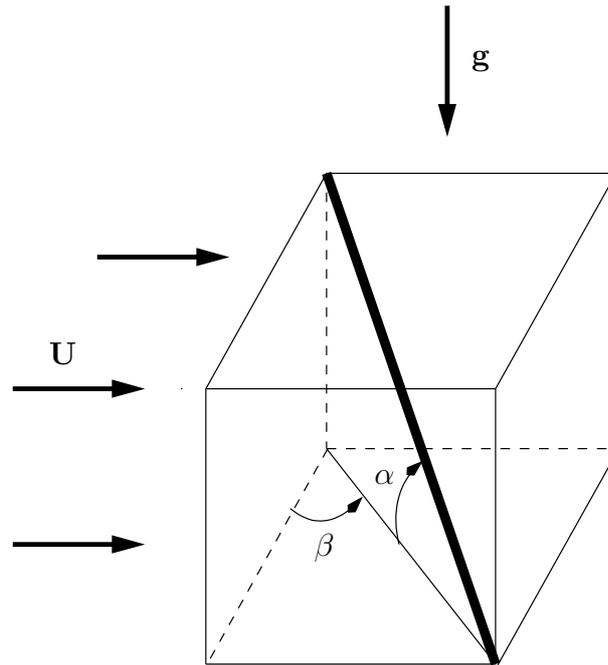


FIG. 1.2 – La géométrie des RWIV est complexe. Les haubans forment un angle α par rapport à l’horizontale et β par rapport au vent.

toroute A44, Allemagne) : les vibrations peuvent être de très grande amplitude, jusqu’à 5 fois le diamètre du câble. Seuls les haubans inclinés dans le sens du vent sont concernés, $0 < \beta < 90^\circ$ (fig. 1.2) et les amplitudes les plus grandes sont observées pour $20 < \beta < 45^\circ$. Les vibrations sont en général transverses au vent, c’est-à-dire dans le plan vertical du hauban pour une direction de vent horizontale, Hikami & Shiraishi (1988). Les haubans sont excités selon des modes de vibration bas, avec des fréquences comprises entre $1 < f < 7$ Hz.

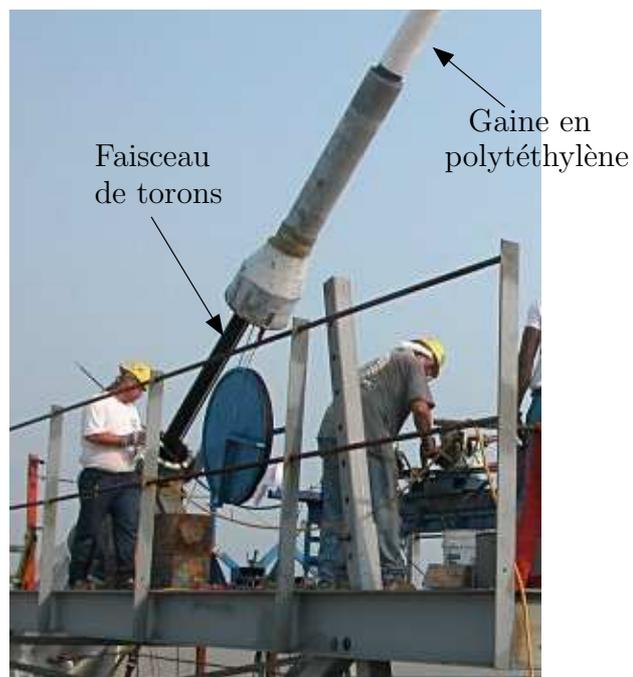
Les vitesses de vent nécessaires pour déclencher les RWIV, de l’ordre de $U = 10$ m/s, sont plus petites que celles nécessaires aux vibrations sans pluie. Elles sont comprises entre $U_{min} \approx 5$ m/s et $U_{max} \approx 17$ m/s. En dehors de cet intervalle, les vibrations n’ont pas lieu. Le nombre de Reynolds,

$$Re_g = UD/\nu_g, \quad (1.1)$$

ν_g étant la viscosité cinématique de l’air, varie en conséquence entre $7 \times 10^4 < Re_g < 2 \times 10^5$, pour un diamètre $D = 2 \times 10^{-1}$ m. La valeur du nombre de Reynolds Re_g a un impact sur l’état de la couche limite de l’écoulement d’air à proximité de la paroi du câble. Pour de faibles nombres de Reynolds (régime sous-critique), la couche limite est laminaire; pour de grands nombres de Reynolds (régime super-critique), la couche limite est turbulente. Entre ces deux régimes, se trouve le régime trans-critique ($8 \times 10^4 < Re_g < 3 \times 10^5$ pour un cylindre lisse),



(a)



(b)

FIG. 1.3 – Les haubans de pont sont constitués de faisceaux de torons recouverts d’une gaine cylindrique. (a) Faisceau de torons ; (b) Faisceau de torons en cours de recouvrement par une gaine en polyéthylène. Photos tirées du site web ”[http ://frank.itlab.us/bridge/cable.html](http://frank.itlab.us/bridge/cable.html)”.

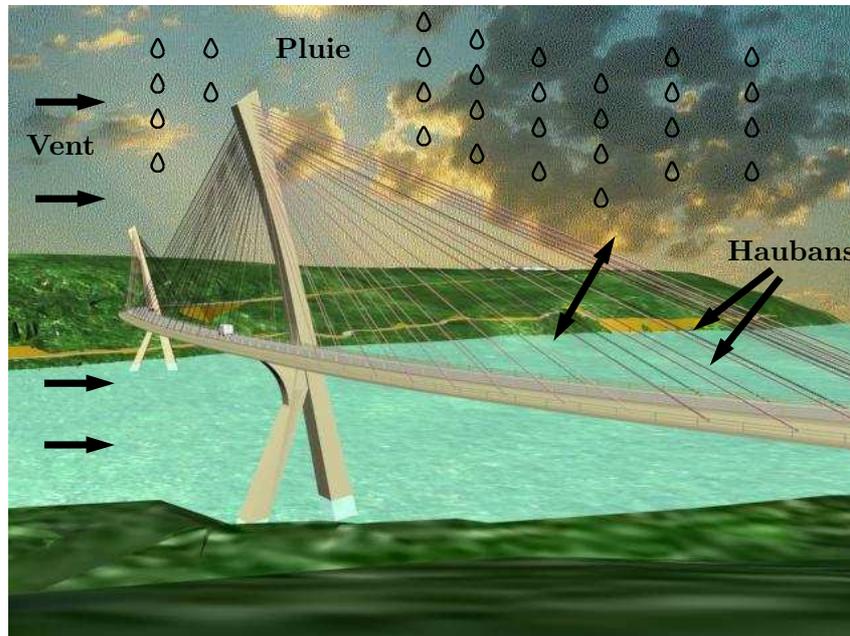


FIG. 1.4 – Seuls les haubans déclinant dans le sens du vent sont soumis aux RWIV. Futur pont à haubans de Terenez (Bretagne). ”<http://www.presquile-crozon.com/actualite/pont-de-terenez.htm>”.

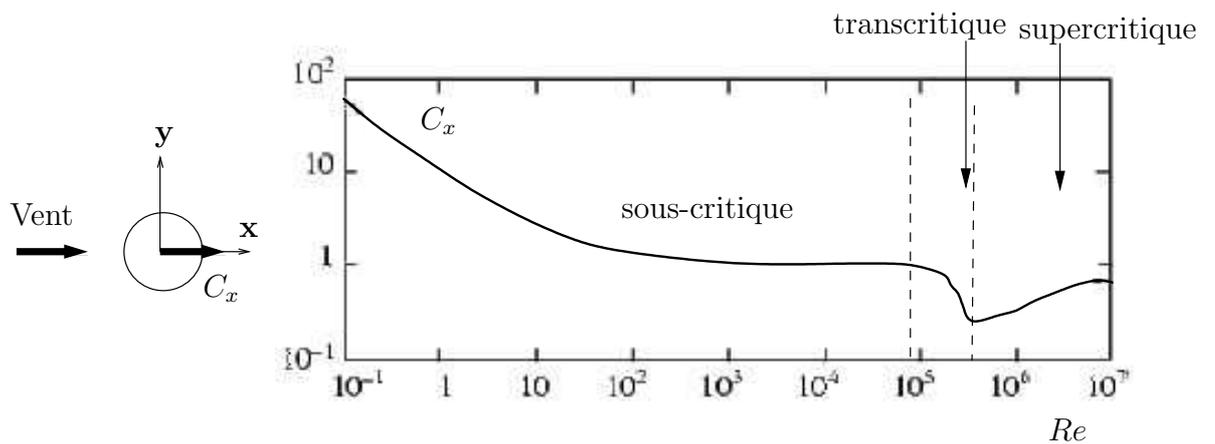


FIG. 1.5 – Évolution du coefficient de traînée C_x en fonction du nombre de Reynolds Re_g . D’après Hémon (2006) et Fage & Warsap (1930).

où la couche limite a un comportement complexe. Dans cette zone, la force qui s'exerce sur le cylindre dans la direction du vent, la traînée, subit une chute brutale, figure 1.5. Lors des RWIV, le nombre de Reynolds est donc sous-critique ou trans-critique.

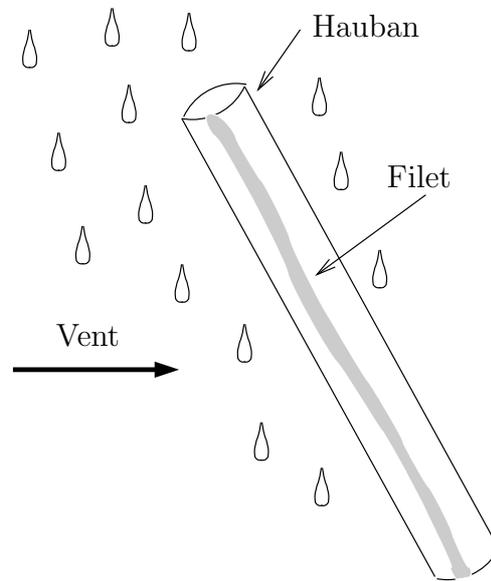


FIG. 1.6 – Deux filets d'eau apparaissent le long des haubans sujets aux RWIV.

En cas de RWIV, la pluviosité est modérée, entre 0.40 et 2.39 mm/h selon Schwarzkopf (2004). On observe que l'eau de pluie ne ruisselle pas uniformément autour du hauban. L'écoulement se concentre en deux ruisselets le long du hauban, figure 1.6. Les deux ruisselets ou filets sont toujours présents lors des RWIV, Hikami & Shiraishi (1988), Schwarzkopf (2004).

Pour mieux comprendre le phénomène, les RWIV ont été reproduites en laboratoire. Le temps étant peu pluvieux dans les conditions réelles, la pluie était reproduite par des douches ou des brumisateurs. Hikami & Shiraishi (1988) ont mesuré la force aérodynamique instationnaire verticale F s'exerçant sur un câble de diamètre $D = 140$ mm, libre de vibrer. Les tests ont été menés avec et sans pluie pour différentes vitesses de vent, grâce à un dispositif embarqué sur le câble. En l'absence de pluie la force était toujours amortissante, c'est-à-dire qu'elle s'opposait à la vitesse du câble ($F < 0$ sur la figure 1.7). Lorsqu'il pleuvait, il existait un intervalle de vitesse de vent ($9 < U < 13$ m/s) pour lequel la force était amplificatrice car elle s'exerçait dans le sens de la vitesse ($F > 0$).

1.1.3 Les filets d'eau

Lors des observations sur des ponts, deux filets d'eau étaient toujours présents le long des haubans soumis aux RWIV. La formation des filets ainsi que leur

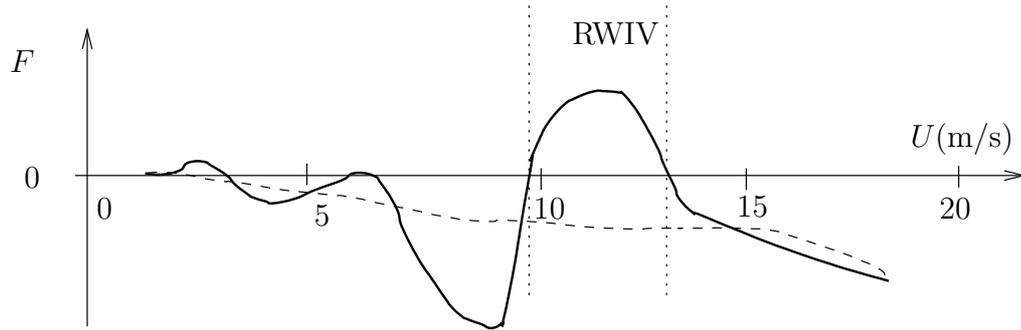


FIG. 1.7 – Force F verticale s'exerçant sur un câble avec ou sans pluie en fonction de la vitesse de vent. Si F est positive, c'est une force excitatrice. C'est une force amortissante dans le cas contraire. (—) sans pluie, (—) avec pluie. D'après Hikami & Shiraishi (1988).

position ont été étudiées plus en détail lors d'expériences en soufflerie.

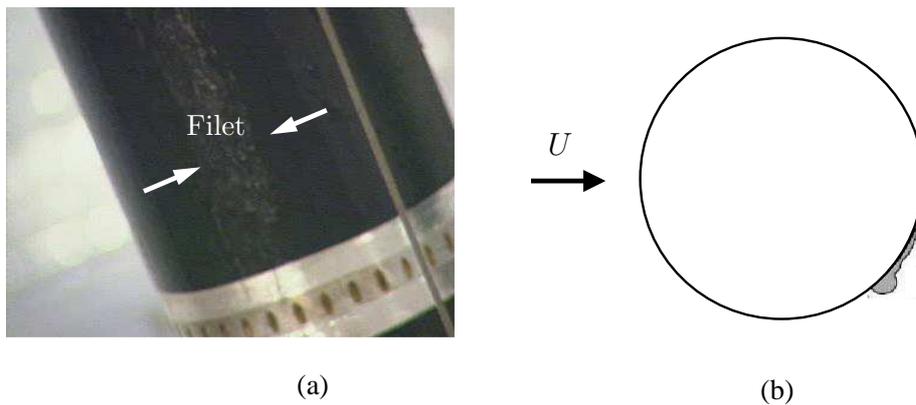


FIG. 1.8 – (a) Filet 'haut' apparaissant lors des RWIV reproduites par Flamand ; photographie d'Olivier Flamand, CSTB, Nantes (communication privée). (b) les filets d'eau sont composés d'une large partie plate et d'une bosse qui évolue sur la partie plate lors des vibrations du câble ; d'après Schwarzkopf (2004).

Cosentino (2002) puis Schwarzkopf (2004) ont mesuré les dimensions des filets en conditions RWIV. Les diamètres, $D = 140$ et 110 mm respectivement, ainsi que les caractéristiques structurales des câbles (masse, amortissement) étaient très réalistes. L'eau était projetée sur le câble par le biais de douches. Les deux auteurs ont montré que les filets sont des objets aplatis, figure 1.8, de rapport d'aspect $h_{max}/L \leq 0.1$, tableau 1.1.

Lors de l'oscillation du câble, un filet évolue sous la forme d'une bosse liquide

	h_{max} (mm)	L (mm)	h_{max}/L
Cosentino (2002)	0.5	30	0.02
Schwarzkopf (2004)	1.5	15	0.1

TAB. 1.1 – Dimension des filets d’eau lors des RWIV. h_{max} : épaisseur maximale ; L : largeur ; h_{max}/L : rapport d’aspect.

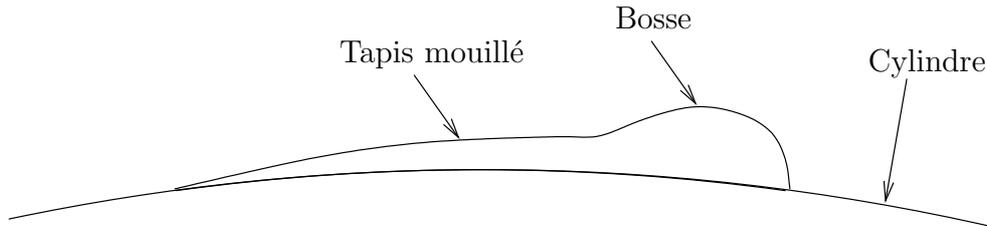


FIG. 1.9 – Lors de l’oscillation du câble, le filet est constitué d’une bosse liquide se déplaçant sur un tapis d’eau. D’après Schwarzkopf (2004).

se déplaçant sur un ‘tapis’ d’eau, figure 1.9. Les bords du tapis ne bougent pas. La taille de la bosse par rapport à la largeur du tapis est variable en fonction du débit. Dans la suite document, nous appellerons filet l’ensemble formé par le tapis liquide et par la bosse.

Hikami & Shiraishi (1988), ont arrosé d’eau un câble en polyéthylène de diamètre $D = 140$ mm. En l’absence d’écoulement d’air, ils ont observé la présence d’un filet en dessous du câble, que nous appellerons ‘filet gravitaire’. Lorsque le câble est exposé à un écoulement d’air, ce filet bas se déplace vers l’aval et un filet apparaît en haut du câble.

L’existence de ce filet haut a été étudiée expérimentalement sur des câbles statiques par Xu *et al.* (2002) et Bosdogianni & Olivari (1996) : celle-ci est limitée à un intervalle d’angle $0 < \beta < 180^\circ$ (figure 1.2). Les filets existent au dessus de $U > 7.5$ m/s. Ils existent encore pour $U = 15$ m/s.

La position des filets haut et bas a été mesurée par Hikami & Shiraishi (1988), Matsumoto *et al.* (1992), Bosdogianni & Olivari (1996), Seidel & Dinkler (2004), Wang *et al.* (2005) et Gu & Du (2005), sur un câble fixe, pour différentes inclinaisons de câble α et β et différentes vitesses de vent : la position moyenne des filets est proche des points de décollement de l’écoulement d’air autour d’un cylindre sec, Bosdogianni & Olivari (1996) et Wang *et al.* (2005).

L’importance relative des deux filets a été étudiée expérimentalement par Hikami & Shiraishi (1988). Il a formé séparément le filet haut et le filet bas sur un câble initialement placé dans un écoulement d’air en versant de l’eau sur la surface du câble aux endroits où les filets se positionnent en RWIV : le câble entre en vibration lorsque seul le filet haut est présent, alors qu’il reste immobile si le

filet bas est seul présent. Il en a conclu que seul le filet haut joue un rôle dans l'instabilité.

1.2 Mécanismes et modèles pour les RWIV

Depuis la découverte des vibrations induites par le vent et par la pluie dans les années 1980, plusieurs hypothèses ont été émises pour tenter d'expliquer le phénomène. Dans cette section, nous présentons dans un premier temps les modèles classiques pour la vibration de câbles sous l'effet du vent seul. Puis, nous décrivons les modèles expliquant les vibrations par temps de pluie.

1.2.1 Excitation de câbles par le vent seul

L'étude de la vibration de structures telles que les haubans sous l'effet du vent est l'objet de l'aéroélasticité. Un câble plongé dans un écoulement d'air est soumis à un champ de pression (contrainte normale à la surface du câble) et à un champ de friction (contrainte tangentielle) qui induisent des forces aérodynamiques sur le câble. Si le câble se déforme sous l'action de ces forces, les conditions aux limites de l'écoulement sont changées. Les forces aérodynamiques sont alors affectées, ce qui a une influence sur la déformation de la structure, Simiu & Scanlan (1996). Si les forces ont pour effet d'amplifier la déformation, on dit qu'une instabilité aéroélastique opère. Dans la suite de cette section, nous présentons deux types très classiques d'instabilité aéroélastique affectant les câbles par temps de vent.

Vibrations induites par détachement tourbillonnaire (VIV)

Un cas typique d'instabilité aéroélastique est la vibration des câbles provoquée par le détachement tourbillonnaire (Vortex-Induced Vibrations, VIV). À partir d'un nombre de Reynolds de 40 environ, et pour une grande plage du nombre de Reynolds, l'écoulement derrière un cylindre fixe fluctue au cours du temps. Ceci est dû au fait que des tourbillons sont lâchés alternativement de part et d'autre du cylindre, par rapport à la direction moyenne du vent. Les tourbillons sont émis au niveau des points de décollement avec une période T_{dt} et présentent une périodicité spatiale, figure 1.10, et forment les allées de Bénard-Von Karman.

La fréquence de détachement tourbillonnaire, $f_f = 1/T_{dt}$ est proportionnelle à la vitesse de l'écoulement d'air U en l'absence de couplage : c'est la loi de Strouhal

$$f_f = St U/D , \quad (1.2)$$

où D est le diamètre du cylindre. Le nombre de Strouhal St ne dépend que de la forme de la section de cylindre, et ce pour une large gamme du nombre de Reynolds. Pour un cylindre circulaire, il est égal à $St = 0.2$ environ.

Si le cylindre est libre de vibrer ou de se déformer, une interaction avec le sillage est possible lorsque la fréquence de détachement tourbillonnaire approche une fréquence propre du cylindre f_s (figure 1.11), $f_f \approx f_s$.

Ainsi, si on augmente la vitesse de l'écoulement du fluide à partir de faibles vitesses, la fréquence de détachement tourbillonnaire augmente jusqu'à être proche

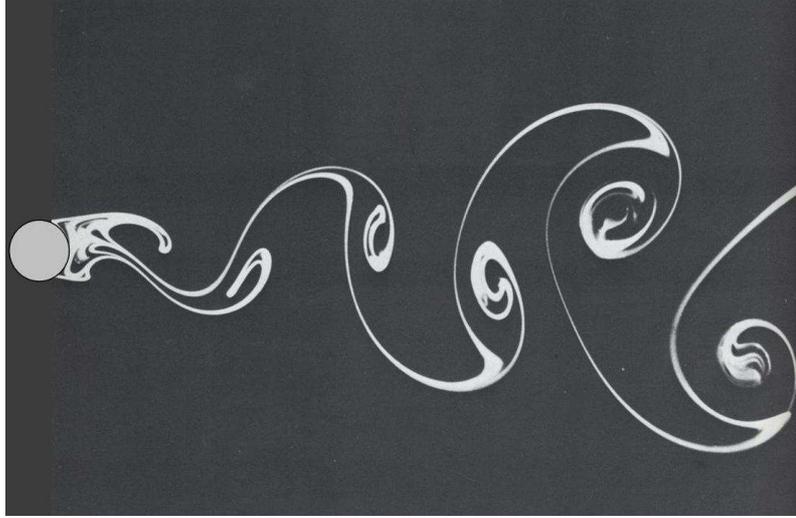


FIG. 1.10 – Allées de Bénard-Von Karman ($Re_g = 140$). Pour un grand intervalle du nombre de Reynolds, le sillage instationnaire de l'écoulement d'air derrière un cylindre est une succession de tourbillons lâchés alternativement d'un côté et de l'autre du cylindre. D'après van Dyke (1982).

de f_s . Les deux fréquences se confondent alors pour un intervalle ΔU , au delà duquel f_f augmente à nouveau avec U . Dans l'intervalle ΔU , le détachement tourbillonnaire s'accroche au mode propre de la structure : on dit qu'on est en régime d'accrochage. L'intervalle ΔU est appelé la largeur d'accrochage. Dans la zone d'accrochage, le cylindre vibre et son amplitude est maximale lorsque $f_f = f_s$.

Si le cylindre est incliné par rapport à l'écoulement d'un angle $0 < \beta < 30^\circ$, figure 1.12, le détachement tourbillonnaire reste approximativement orthogonal au cylindre et la loi de Strouhal reste valable en considérant la vitesse normale au cylindre U_N et en choisissant encore le diamètre du cylindre D comme dimension caractéristique, Ramberg (1983)

$$f_f = St U_N / D . \quad (1.3)$$

Le mécanisme de VIV pourrait s'appliquer aux RWIV en considérant que la présence des filets a pour conséquence une augmentation du diamètre du câble $D + 2h_{max}$. La fréquence de détachement tourbillonnaire en présence de pluie f'_f

$$f'_f = \frac{St U}{D + 2h_{max}} \approx \frac{St U}{D} \left(1 - 2 \frac{h_{max}}{D} \right) \approx 0.95 f_f \quad (1.4)$$

est très proche de la fréquence sans pluie f_f ($h_{max} = 10^{-3}$ m et $D = 2 \cdot 10^{-1}$ dans le cas des RWIV). Supposons que le câble, parcouru par les filets, est sujet à des vibrations de type VIV à la fréquence $f_0 \approx f'_f$. S'il cesse de pleuvoir et que les

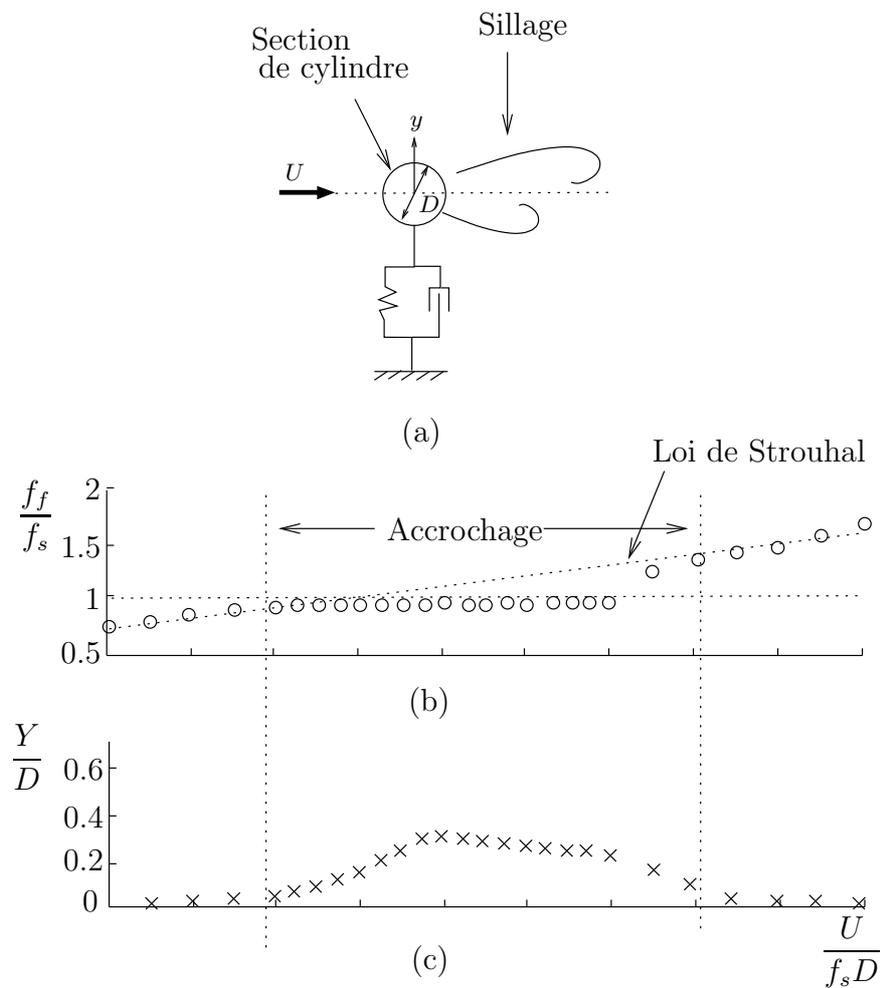


FIG. 1.11 – Vibrations induites par détachement tourbillonnaire. (a) La dynamique du cylindre, de diamètre D et de fréquence propre f_s , est représentée par un oscillateur amorti dans la direction transverse (y) de l'écoulement U . (b) Valeurs de la fréquence mesurée dans le sillage f_f en fonction de la vitesse de l'écoulement d'air U . (c) Valeurs de l'amplitude du déplacement du cylindre Y en fonction de U . D'après Facchinetti (2003).

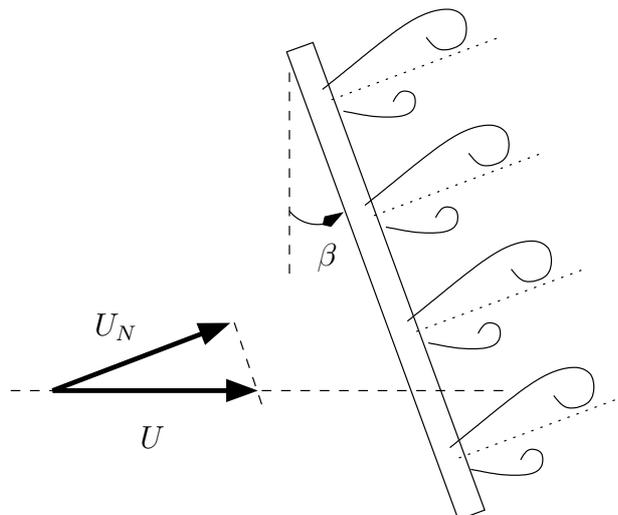


FIG. 1.12 – Cylindre incliné par rapport à l'écoulement d'un angle $90^\circ - \beta$. Pour de faibles valeurs de β , on remplace la vitesse U par la vitesse normale $U_N = U \cos \beta$ dans la loi de Strouhal.

conditions de vent restent inchangées, la fréquence de détachement tourbillonnaire devient f_f et est encore très proche de la fréquence propre du câble. Le câble devrait continuer d'osciller, contrairement aux observations expérimentales. Le mécanisme de VIV ne peut donc à lui seul expliquer les RWIV.

Galop de den Hartog

Un deuxième type classique d'instabilité aéroélastique est le galop à un degré de liberté décrit par den Hartog (1985).

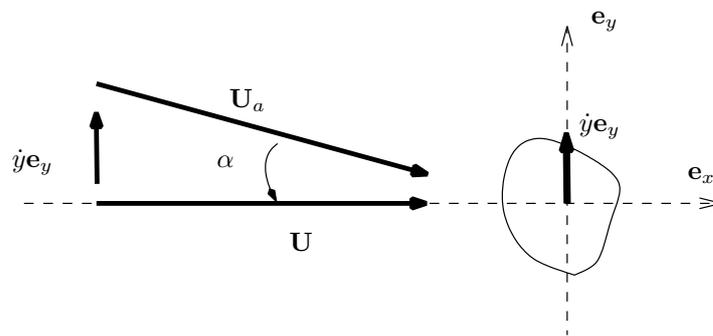
Soit un cylindre de section quelconque plongé dans un écoulement d'air. Supposons que le cylindre est soumis à un mouvement initial, par exemple sous l'effet, d'une turbulence. L'écoulement autour du cylindre va en conséquence être modifié. En réaction, l'écoulement d'air induit une force aérodynamique, F_y , sur la structure, figure 1.13(a). Si la force amplifie le mouvement initial, une instabilité aéroélastique se produit, que l'on appelle excitation induite par un mouvement (Movement-Induced Excitation), Naudascher & Rockwell (1994).

L'équation du mouvement par unité de longueur de cylindre s'écrit

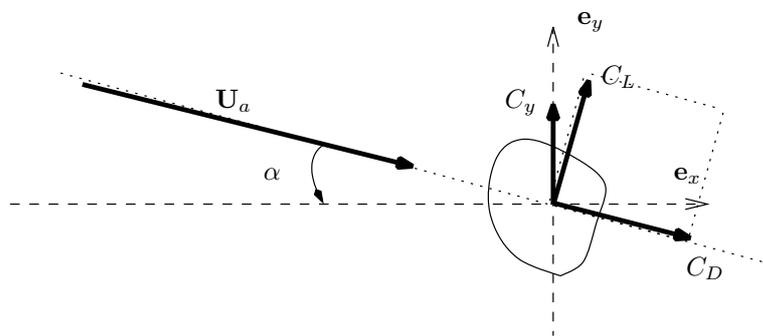
$$m\ddot{y} + \lambda_s \dot{y} + m\omega_y^2 y = F_y , \quad (1.5)$$

où m est la masse par unité de longueur, λ_s l'amortissement structural et ω_y^2 la fréquence propre du cylindre dans la direction \mathbf{e}_y .

La force F_y est adimensionnée et exprimée pour les valeurs instantanées de la



(a)



(b)

FIG. 1.13 – Cylindre de section quelconque en translation de vitesse \dot{y} dans un écoulement d'air de vitesse \mathbf{U} , avec un angle d'attaque α . Dans un référentiel lié au cylindre, la vitesse du vent est \mathbf{U}_a

vitesse de vent U_a et de l'angle d'attaque α , dans un référentiel lié au cylindre

$$F_y = \frac{1}{2}\rho_g U_a^2 D C_y(\alpha) , \quad \mathbf{U}_a = \begin{pmatrix} U \\ -\dot{y} \end{pmatrix} , \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\dot{y}}{U}\right) \quad (1.6)$$

où ρ_g est la masse volumique de l'air et D le diamètre du cylindre. Le coefficient de force transverse, C_y , peut être exprimé dans le référentiel instantané lié au vent, figure 1.13(b),

$$C_y = C_D \sin \alpha + C_L \cos \alpha \quad (1.7)$$

où C_D est le coefficient de traînée et C_L est le coefficient de portance. L'écoulement d'air est supposé non confiné ou les frontières très éloignées. La force F_y ne dépend donc pas de la position y du cylindre. Elle dépend donc uniquement de la vitesse \dot{y} . Le mouvement est supposé lent par rapport à la vitesse de défilement des particules fluides, $\dot{y} \ll U$, de sorte que la fréquence réduite est petite devant 1, $f_r \ll 1$, Hémon (2006). La force instantanée, F_y est linéarisée autour de $\dot{y} = 0$,

$$\begin{aligned} F_y &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_{\dot{y}=0} \dot{y} \\ &= \frac{1}{2}\rho_g D \left(\frac{dU_a^2}{d\dot{y}} C_y(\alpha) + U_a^2 \frac{dC_y(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\dot{y}} \right)_{\dot{y}=0} \dot{y} \\ &= -\frac{1}{2}\rho_g D U C'_{y0} \dot{y} \end{aligned} \quad (1.8)$$

où $C'_{y0} = (dC_y/d\alpha)_{\alpha=0}$ est la dérivée de la force aérodynamique adimensionnelle s'exerçant sur le cylindre selon l'axe (Oy), pour un angle d'attaque moyen nul.

La structure est donc soumise à un amortissement ajouté λ_a

$$m\ddot{y} + (\lambda_s + \lambda_a)\dot{y} + m\omega_y^2 y = 0 , \quad \lambda_a = \frac{1}{2}\rho_g U D C'_{y0} . \quad (1.9)$$

Si le gradient de force transverse est négatif, $C'_{y0} < 0$, il existe donc une vitesse critique

$$U_c = \frac{-2\lambda_s}{\rho_g D C'_{y0}} , \quad (1.10)$$

au delà de laquelle l'amortissement total, $\lambda = \lambda_s + \lambda_a$, est négatif. A l'aide de l'équation (1.7), on obtient le critère d'instabilité de den Hartog (1985)

$$C'_{y0} = C_D + \frac{dC_L}{d\alpha} < 0 . \quad (1.11)$$

Le galop de den Hartog ne permet pas d'expliquer la vibration de câbles plongés dans un écoulement purement transverse. En effet, le coefficient de portance sur des section circulaire est indépendant de l'angle d'attaque, $\frac{dC_L}{d\alpha} = 0$ et le coefficient de traînée est toujours positif $C_D > 0$. Pour des câbles inclinés par

rapport au vent, qui de surcroît sont soumis à un écoulement trans-critique, fig. 1.5, deux caractéristiques que l'on retrouve dans les RWIV, MacDonald & Larose (2006) ont montré qu'une instabilité de type galop pouvait avoir lieu. La pluie n'intervient pas dans ce mécanisme même si la présence de filets d'eau au voisinage des points de décollement peut induire un décalage de la zone trans-critique vers les faibles nombres de Reynolds, fig. 1.5. Dans cette thèse, nous ne nous intéressons qu'aux vibrations induites effectivement par la pluie.

Lors des RWIV, les filets sont toujours présents. Or, le déplacement des filets, sous l'effet du mouvement du câble, n'est pas négligeable par rapport à la variation d'angle d'attaque apparent due au mouvement du câble. En effet, d'après les mesures de Cosentino (2002), la variation maximale d'angle d'attaque due à l'oscillation du câble vaut $\alpha_{max} = \arctan(\dot{y}_{max}/U) \approx 4^\circ$, alors que les filets oscillent avec une amplitude $\phi = 10^\circ$. Le galop de den Hartog ne peut donc pas être utilisé directement pour expliquer les RWIV. Il faut alors rajouter un degré de liberté lié au mouvement des filets.

1.2.2 Galop à deux degrés de liberté

Les modèles présentés dans cette section prennent en considération le mouvement des filets. Le déplacement du filet autour du câble est modélisé comme un degré de liberté supplémentaire.

Modèle de Yamaguchi

Yamaguchi (1990) a été le premier à proposer un modèle de galop à deux degrés de liberté pour les RWIV, un pour le déplacement vertical du câble et un pour le déplacement angulaire du filet haut. Le système différentiel couplé s'écrit

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + ky &= F_y \\ I\ddot{\phi} &= M \end{aligned} \quad (1.12)$$

où m est la masse du câble par unité de longueur, k sa raideur, I le moment d'inertie par unité de longueur de filet. La force transverse instantanée F_y et le moment de tangage M du câble dépendent de la vitesse relative \mathbf{U}_a et de l'angle d'attaque α^* ,

$$\mathbf{U}_a = \begin{pmatrix} U + R\dot{\phi} \cos(\beta + \phi) \\ \dot{y} + R\dot{\phi} \sin(\beta + \phi) \end{pmatrix}, \quad \alpha^* = \arctan \left(\frac{\dot{y} + R\dot{\phi} \sin(\beta + \phi)}{U + R\dot{\phi} \cos(\beta + \phi)} \right). \quad (1.13)$$

Les efforts aérodynamiques sont adimensionnés,

$$\begin{aligned} F_y &= -\frac{1}{2}\rho_g U_a^2 (d + D) \{C_D(\alpha) \sin \alpha^* + C_L(\alpha) \cos \alpha^*\}, \\ M &= \frac{1}{2}\rho_g U_a^2 (d + D)^2 C_M(\alpha), \end{aligned} \quad (1.14)$$

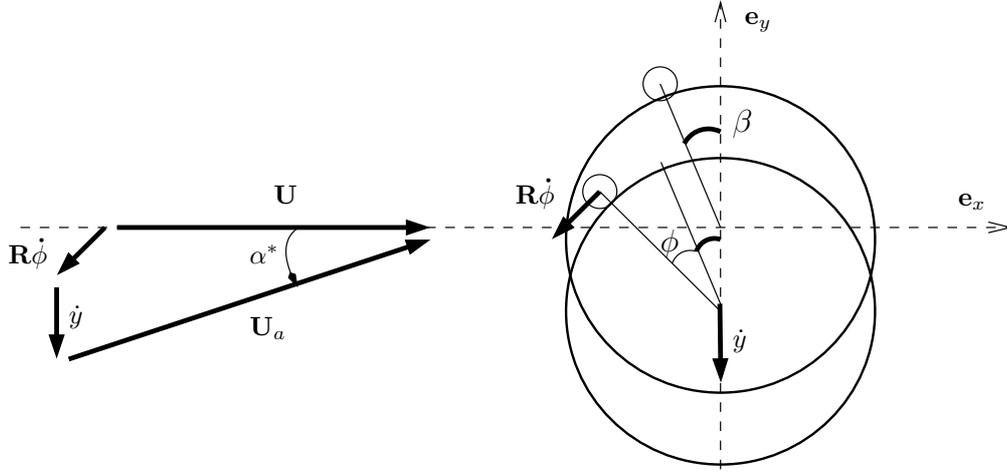


FIG. 1.14 – Notations du modèle à deux degrés de liberté de Yamaguchi. D'après Yamaguchi (1990).

où les coefficients adimensionnels de traînée C_D , de portance C_L et de moment C_M sont exprimés pour l'angle d'attaque $\alpha = -\phi + \alpha^*$. La fréquence réduite est encore supposée petite, $f_r \ll 1$, donc les vitesses de translation \dot{y} et de rotation $R\dot{\phi}$ du cylindre sont faibles devant la vitesse d'écoulement du fluide U , d'où

$$\mathbf{U}_a \approx \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \approx -\phi + \frac{\dot{y}}{U} + \frac{R\dot{\phi} \sin \beta}{U}. \quad (1.15)$$

En conséquence, les efforts sont linéarisés par rapport à ϕ , \dot{y}/U et $R\dot{\phi}/U$ et l'équation du système devient,

$$[M] \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} + [C] \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + [K] \begin{pmatrix} y \\ \phi \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Les matrices de masse $[M]$, d'amortissement $[C]$ et de raideur $[K]$ s'expriment,

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} \omega_y^2 & -\frac{1}{2m} \rho_g (d+D) U^2 \frac{dC_L}{d\alpha} \\ 0 & \frac{1}{2I} \rho_g (d+D)^2 U^2 \frac{dC_M}{d\alpha} \end{bmatrix},$$

$$[C] = \frac{1}{2} \rho_g (d+D) U \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \left(C_D + \frac{dC_L}{d\alpha} \right) & \frac{(d+D) \sin \beta}{2m} \left(C_D + \frac{dC_L}{d\alpha} \right) \\ -\frac{(d+D)}{I} \frac{dC_M}{d\alpha} & -\frac{(d+D)^2 \sin \beta}{2I} \frac{dC_M}{d\alpha} \end{bmatrix}.$$

Il résulte donc un amortissement ainsi qu'une raideur ajoutés dans les équations (1.12). Du fait de la raideur aérodynamique ajoutée (élément $K_{2,2}$ de la matrice

[K]), le filet se comporte comme un oscillateur dont la fréquence, ω_ϕ , est proportionnelle à la vitesse du vent

$$\omega_\phi = \sqrt{\frac{K_{2,2}}{M_{2,2}}} = \sqrt{\frac{1}{2I} \rho_g \frac{dC_M}{d\alpha}} (d + D)U \quad (1.17)$$

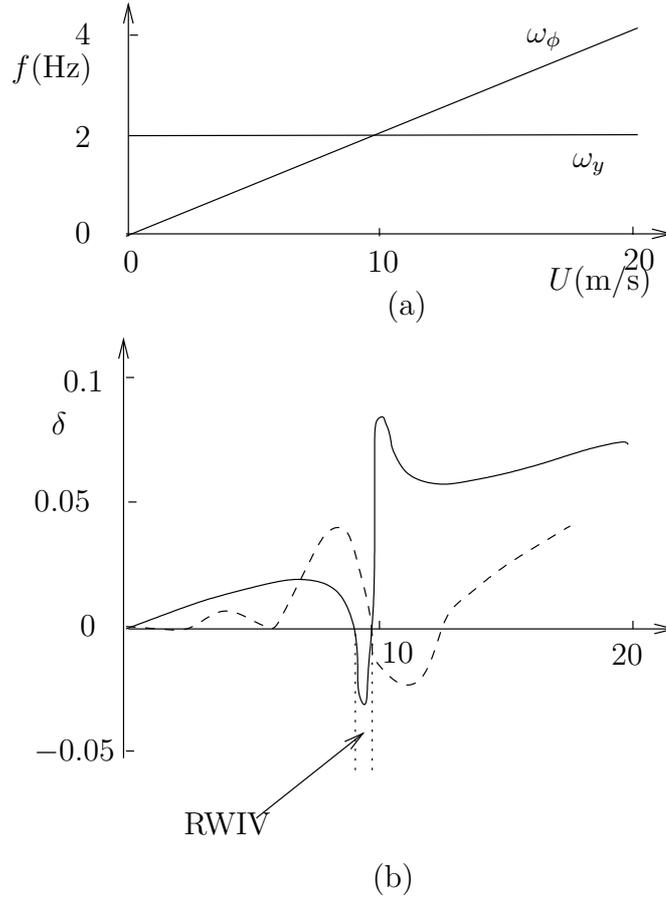


FIG. 1.15 – Galop à deux degrés de liberté. Un déplacement du câble ajouté à un déplacement du filet sur la surface du câble entraîne un amortissement et une raideur aérodynamiques qui peuvent être déstabilisants. (a) Fréquence en fonction de la vitesse du vent U . Ici, ω_ϕ est la pulsation aérodynamique associée à la rotation du filet et ω_y la pulsation propre du câble dans la direction y . (b) Amortissement aérodynamique du câble en fonction de U . (—) Modèle de Yamaguchi ; (---) Expériences de Hikami & Shiraiishi (1988). D'après Yamaguchi (1990).

Le système (1.16) peut être résolu numériquement. On montre ainsi que pour une gamme de vitesse autour de $U = 10$ m/s, la fréquence ω_ϕ approche la

fréquence propre du câble ω_y et l'amortissement aérodynamique du câble devient négatif, figure 1.15. Si l'amortissement est négatif, le système est instable et le mouvement du câble est entretenu. L'intervalle de vitesse pour lequel il y a instabilité est qualitativement en accord avec les valeurs auxquelles ont lieu les RWIV, figure 1.15.

En revanche, ce modèle est bidimensionnel et ne permet pas de rendre compte de la limitation des RWIV à un intervalle réduit d'angle de dérapage β .

Modèle de Cosentino

Cosentino *et al.* (2003) ont eux aussi proposé un modèle de galop à deux degrés de liberté (translation du câble et rotation du filet haut), mais, contrairement à Yamaguchi, les efforts aérodynamiques s'exerçant sur le filet résultent d'une analyse locale en termes de pression et de friction. Ils ont notamment tenu compte de la légère modification des champs de pression et friction du fait de la présence des filets, figure 1.16(a). Il en résulte une raideur aérodynamique non-linéaire dans l'équation du filet.

Dans ce modèle, un terme d'amortissement a été introduit dans l'équation d'oscillateur qui gouverne le filet. Suivant Peube & Sadat (1993), le coefficient d'amortissement par unité de largeur et de longueur, f_c , a été déterminé par des raisonnements hydrodynamiques : l'amortissement est supposé provenir du cisaillement à la paroi,

$$f_c \dot{x} = \mu \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (1.18)$$

où x est le déplacement du centre de gravité du filet sur la paroi, μ est la viscosité dynamique de l'eau, \dot{v} est la vitesse eulérienne des particules d'eau et η est la distance à la paroi, figure 1.16(b). Le gradient de vitesse est supposé constant sur toute la hauteur du filet, de sorte que,

$$\left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \approx \frac{x}{h_G} \quad (1.19)$$

où h_G est la hauteur du centre de gravité. Pour une section de filet telle que le centre de gravité se trouve au tiers de la hauteur du filet $h_G = h_{max}/3$, le coefficient d'amortissement est égal à,

$$f_c \approx \frac{3\mu}{h_{max}} \quad (1.20)$$

La résolution numérique du système différentiel obtenu permet de retrouver les caractéristiques principales des RWIV en termes de gamme de vitesse et d'angle de dérapage, figure 1.17.

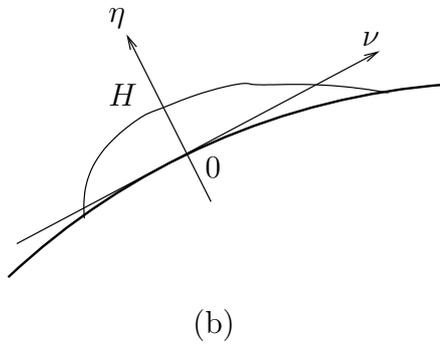
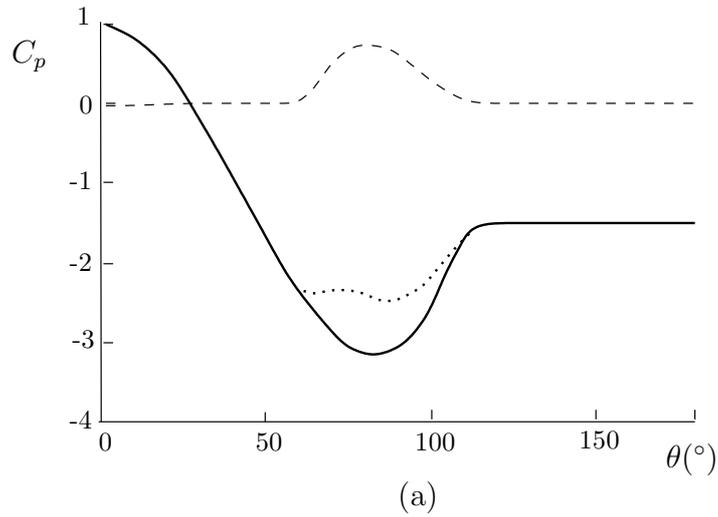


FIG. 1.16 – (a) Distribution du coefficient de pression autour d'un cylindre. L'angle θ désigne l'azimut et est pris nul au point d'arrêt. (–) C_{p0} , sans filets; (\cdots) C_{p1} , en présence de filets; (– –) $C_{p1} - C_{p0}$. (b) Filet, d'épaisseur maximale h_{max} , sur un câble. D'après Cosentino *et al.* (2003).

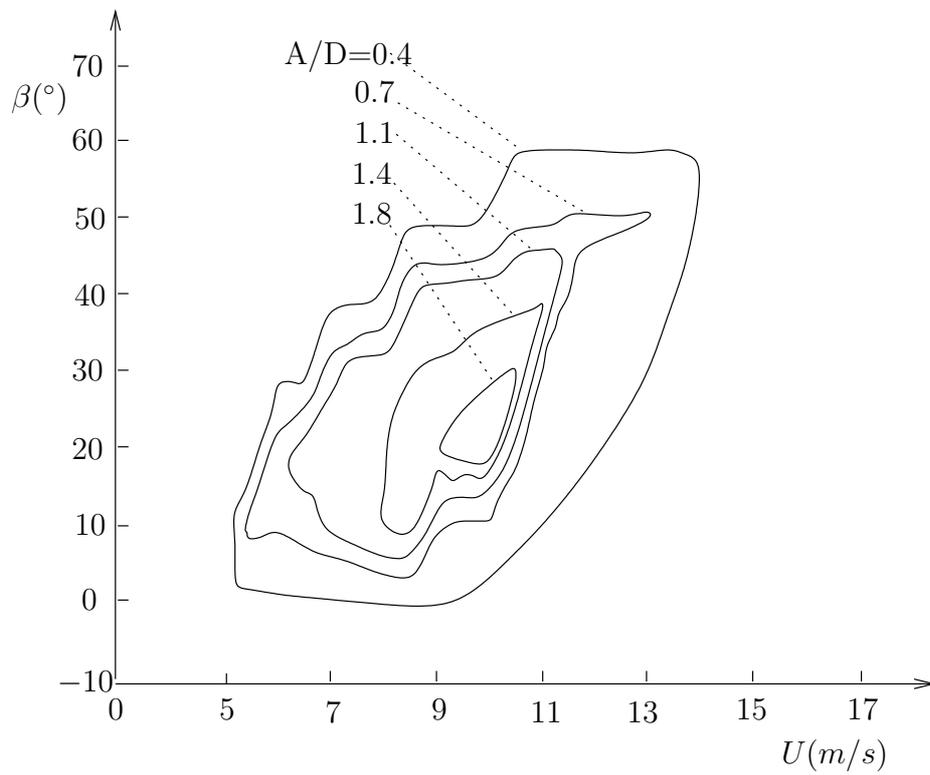


FIG. 1.17 – Amplitude de vibration A , normalisée par le diamètre D , du câble en fonction de l'angle de dérapage β et la vitesse du vent U . D'après Cosentino *et al.* (2003).

Le galop à plusieurs degrés de liberté que propose Yamaguchi (1990), incluant un degré de liberté pour le mouvement des filets est un modèle satisfaisant pour expliquer les RWIV. Il prédit notamment l'existence d'une vitesse de vent maximale au delà de laquelle, les RWIV cessent. Le modèle de Cosentino (2002) prédit en plus l'intervalle d'angle de dérapage hors duquel les RWIV n'ont pas lieu. Cependant, dans ces deux modèles, la position et les dimensions des filets sont supposées connues.

1.3 Des résultats expérimentaux inexplicés

Alam & Zhou (2006) ont étudié les caractéristiques du sillage d'un écoulement d'air derrière un cylindre parcouru par des filets d'eau et les ont comparées aux caractéristiques observées sans filets.

Dans ces expériences, une soufflerie crée un écoulement d'air dans lequel est plongé un cylindre de cuivre, de diamètre $D = 2.25$ cm, incliné de $\alpha = 80^\circ$ par rapport à l'horizontale, dans la direction de l'écoulement, $\beta = 90^\circ$ (fig. 1.2). De l'eau coule sur la surface du cylindre avec un débit de $\dot{v} = 25L/h$. Du fait de l'écoulement d'air, le cylindre est soumis à une force. Cette force se décompose en une composante dans la direction de l'écoulement, la force de traînée F_x , et en une composante transverse, $F_y = \overline{F}_y + F'_y(t)$. La symétrie circulaire du cylindre a en général pour conséquence une force de transverse nulle en moyenne, $\overline{F}_y = 0$.

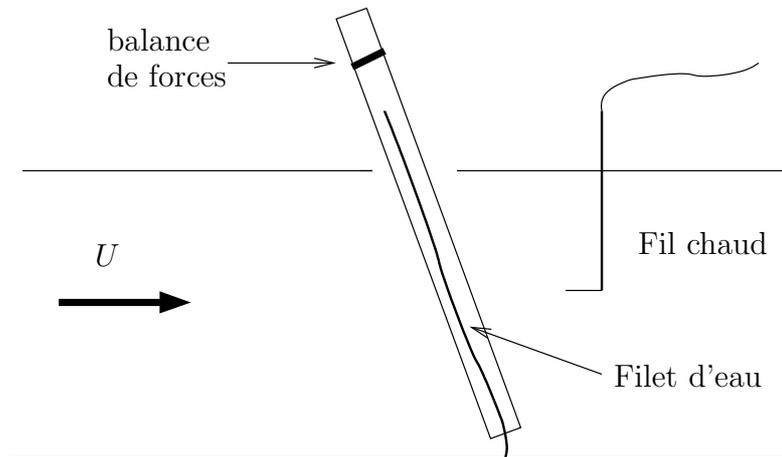


FIG. 1.18 – Les efforts s'exerçant sur le cylindre sont mesurés à l'aide d'une balance de forces. Les composantes périodiques du sillage sont mesurées avec un anémomètre à fil chaud. D'après Alam & Zhou (2006).

L'amplitude de la force transverse fluctuante F'_y a été mesurée à l'aide d'une balance de forces, figure 1.18. La fréquence de détachement tourbillonnaire f est mesurée en aval du cylindre à l'aide d'un anémomètre à fil chaud.

Les résultats concernant les mesures d'effort produits par l'écoulement sur le cylindre ont été reportés sur la figure 1.19(a). On constate une très forte amplification de la force transverse fluctuante en présence de filets, sur un intervalle de vitesse compris entre 4 et 6 m/s.

Les mesures de la fréquence de détachement tourbillonnaire f en fonction de la vitesse de l'écoulement d'air sont tracés sur la figure 1.19(b). Dans le cas où les filets d'eau sont présents, on peut constater un écart à la loi de Strouhal, éq. (1.2), dans l'intervalle $4 < U < 6$ m/s, sur lequel la force transverse est amplifiée.

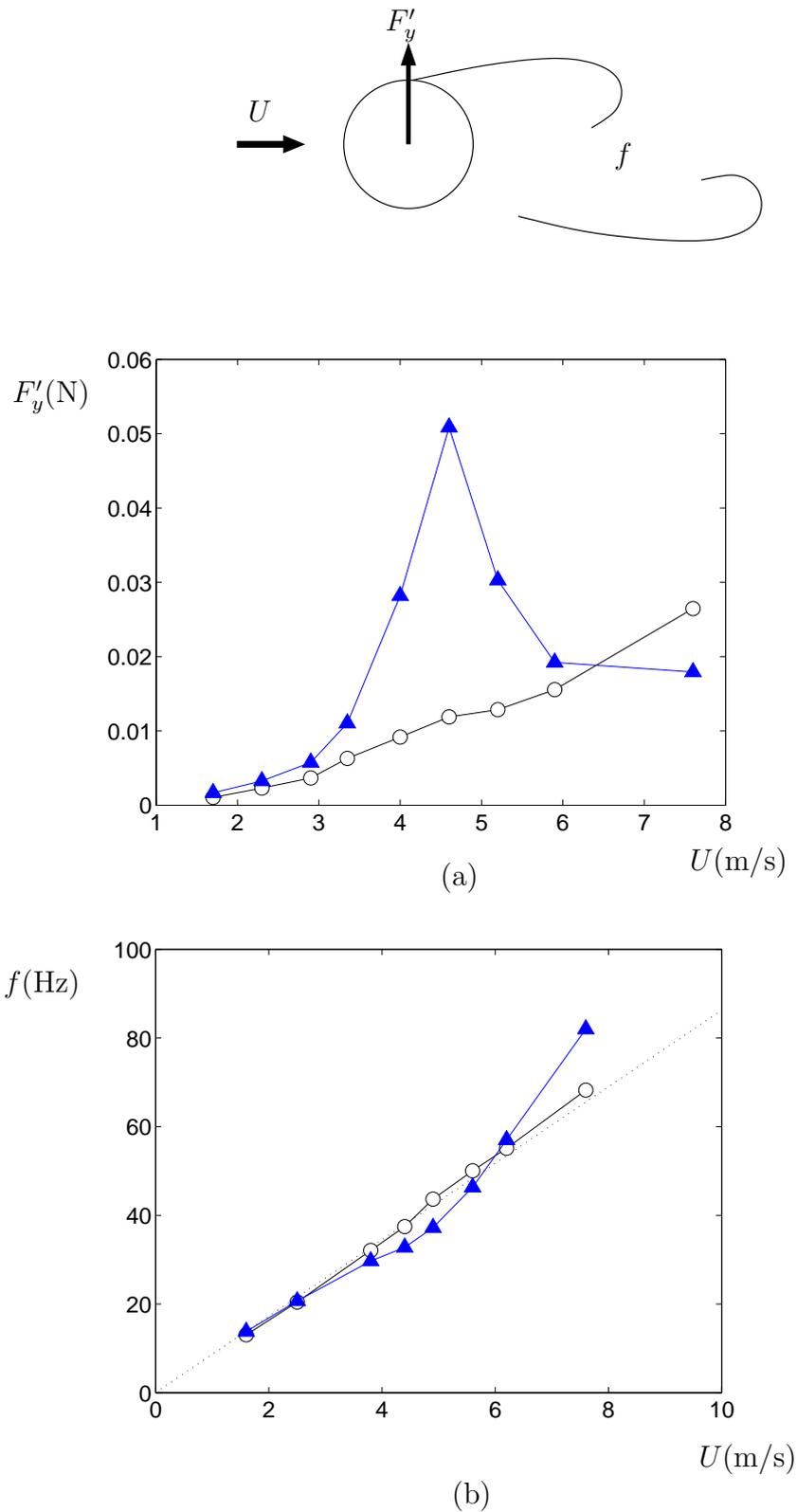


FIG. 1.19 – (a) Valeurs de la force transverse fluctuante F'_y s'exerçant sur le cylindre en fonction de la vitesse de l'écoulement d'air U . (b) Fréquence du détachement tourbillonnaire f mesurée par fil chaud en fonction de U . (▲) : en présence de filets; (○) : en l'absence de filets; (---) : loi de Strouhal. D'après Alam & Zhou (2006).

Ces fréquences sont légèrement plus faibles que celles attendues.

Ces mesures montrent que les filets perturbent le sillage dans certaines conditions de vitesse. L'écart à la loi de Strouhal n'est pas explicable par un mécanisme de galop qui ne prend pas en compte la dynamique oscillante du sillage. Les mesures présentent des similitudes avec les vibration induites par détachement tourbillonnaire présentées à la section 1.2.1, bien que le cylindre soit fixe.

1.4 Problématique de la thèse

1.4.1 Modélisation hydrodynamique des filets

La vibration par temps de pluie des haubans est toujours accompagnée de deux filets d'eau qui ruissellent le long du câble.

Les modèles existants dont ceux exposés dans la section 1.2 supposent tous la présence des filets. Quelles sont les conditions d'existence de ces filets ? Comment expliquer la vitesse basse U_{min} en dessous de laquelle les filets n'existent pas ? Quel phénomène les fait disparaître au delà d'une vitesse maximale U_{max} ?

De plus, les modèles supposent que la position des filets est connue. Cette position, qui a été étudiée expérimentalement, varie en fonction de la vitesse du vent et de l'inclinaison du câble. Étant donnée la géométrie complexe du système, à quoi correspond ce que les expérimentateurs appellent un filet "haut" ou filet "amont" ? Quels sont les paramètres physiques qui déterminent leur position ?

Enfin, les dimensions des filets, qui sont utilisées dans les modèles, proviennent des résultats expérimentaux. Quels sont les effets physiques qui déterminent la forme des filets ?

Pour répondre à ces questions, nous nous sommes intéressés à la dynamique d'un film d'eau soumis à un écoulement d'air. Dans le chapitre 2, nous présentons donc un nouveau modèle hydrodynamique qui permet de prévoir l'apparition des filets. La position des filets en fonction de la vitesse du vent et de l'inclinaison du câble peut alors être calculée. La forme des filets est également accessible à partir du modèle. Nous proposerons ensuite un critère d'arrachage des filets.

1.4.2 Modélisation du couplage filet-sillage

L'expérience d'Alam & Zhou (2006), prouve que la présence des filets peut perturber le sillage d'air pour certaines valeurs de la vitesse de l'écoulement.

Les modèles de galop exposés dans la section 1.2 ne permettent pas d'expliquer ces expériences, puisqu'ils ne prennent pas en compte la dynamique oscillante de l'écoulement d'air. Le comportement non conforme à la loi de Strouhal du sillage en présence de filets ne peut pas non plus être dû à des VIV classiques puisque le cylindre est fixe. Cependant, il est possible que la dynamique du sillage se couple, non avec le cylindre, mais avec les filets.

Dans le chapitre 3, nous présentons dans un premier temps une nouvelle expérience permettant de mettre en évidence un comportement des filets synchrone avec la dynamique du sillage sous certaines conditions.

Les modèles de galop à deux degrés de liberté ne considèrent pas de raideur intrinsèque au mouvement des filets. Nous supposons au contraire que les filets possèdent une raideur vibratoire due à la tension de surface eau-air. La fréquence propre des filets sera en conséquence estimée.

Nous développons alors un modèle de couplage entre le mode fondamental de vibration des filets et le sillage oscillant. Les paramètres spécifiques du système différentiel couplé obtenu sont évalués.

Les résultats du modèle sont en bon accord avec les expériences d'Alam & Zhou (2006).

Le couplage entre la dynamique des filets et le sillage oscillant peut donc générer une force transverse périodique sur un cylindre. Nous nous demanderons en conclusion, si ce phénomène peut expliquer certains cas de RWIV.

1.4.3 Deux configurations modèles : cas (I) et (II)

Pour appuyer nos raisonnements, nous considérons dans la suite du document deux configurations

Cas (I)

Une configuration typique des vibrations des haubans induites par le vent et par la pluie. Le rayon du câble modèle est de $R = 10^{-1}$ m. La vitesse typique du vent est de $U = 10$ m/s.

En section, les filets d'eau ont une largeur $L = 10^{-2}$ m et une hauteur maximale $h_{max} = 10^{-3}$ m.

Cas (II)

Une configuration aux dimensions réduites, caractéristique des expériences d'Alam & Zhou (2006), ainsi que des expériences réalisées dans le cadre de cette thèse au LadHyX. Le cylindre modèle est à l'échelle un dixième, $R = 10^{-2}$ m et la vitesse est deux fois moindre $U = 5$ m/s.

Les dimensions des filets dépendent entre autres choses du débit d'eau injecté. Elles sont différentes dans les expériences du LadHyX ($L = 3 \times 10^{-3}$ m, $h_{max} = 10^{-3}$ m) et dans l'expérience d'Alam ($L = 5 \times 10^{-3}$ m, $h_{max} = 2 \times 10^{-3}$ m).

Ces deux cas sont détaillés en annexe A.1. Tous les paramètres adimensionnels introduits lors de cette thèse y sont calculés dans les deux cas.

Chapitre 2

Dynamique des filets

Par temps de vent, des filets d'eau peuvent apparaître le long d'un câble mouillé. La présence de ces filets est toujours constatée lors des vibrations induites par le vent et par la pluie. Par conséquent, nous commencerons par étudier les conditions d'existence des filets.

Pour cela, nous développons dans la section 2.1 un modèle hydrodynamique basé sur la théorie de la lubrification. Nous linéarisons ensuite le modèle obtenu pour prévoir la position des filets, section 2.2. Dans la section 2.3, nous calculons la forme des filets. Enfin, dans la section 2.4 est proposé un critère simple d'arrachement des filets quand la vitesse de vent est suffisamment élevée et nous obtenons un intervalle d'existence simultanée de deux filets, section 2.5.

Une partie des résultats de ce chapitre a fait l'objet de deux publications Lemaitre *et al.* (2006*b*) et Lemaitre *et al.* (2006*a*), qui sont jointes en annexe B.

2.1 Evolution d'un film d'eau sous l'action du vent

Reisfeld & Bankoff (1992) ont étudié la dynamique d'un film d'eau autour d'un cylindre sous l'effet de la gravité et de la tension de surface. Ils ont développé un modèle dans le cadre de la théorie de la lubrification et ont obtenu une équation aux dérivées partielles décrivant l'épaisseur du film en espace et en temps.

En suivant la même approche que Reisfeld, nous présentons dans cette section un modèle bidimensionnel de film mince évoluant autour d'un cylindre sous l'action d'un chargement de vent.

2.1.1 Notations

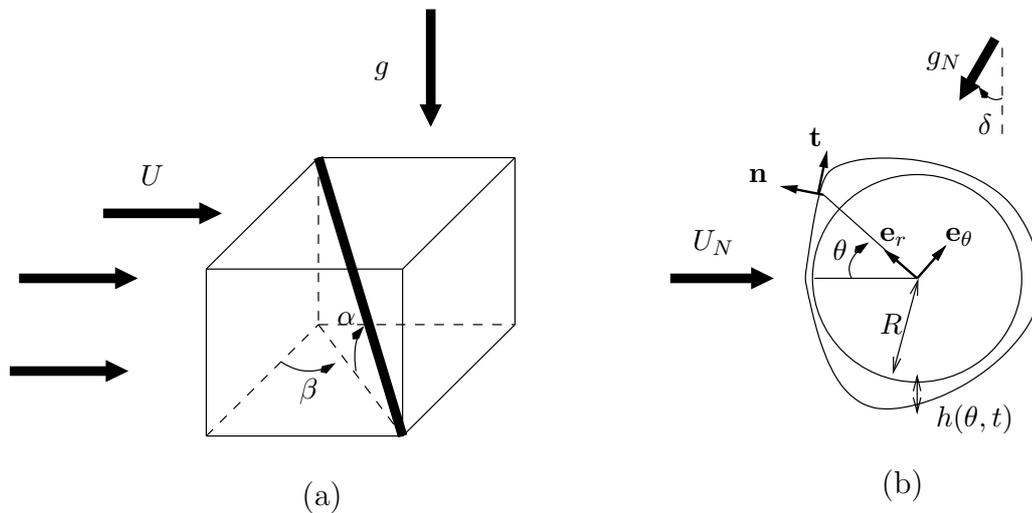


FIG. 2.1 – Notations du modèle. (a) Le câble est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le plan vertical contenant le câble forme un angle β par rapport au plan normal à la vitesse du vent \mathbf{U} . (b) Dans une section de cylindre, le film d'épaisseur h est soumis à un vent de vitesse normale U_N et à la composante normale de la gravité g_N .

Nous considérons un cylindre de rayon R , incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Un écoulement d'air de vitesse U forme un angle de dérapage β avec le cylindre, comme indiqué sur la figure 2.1(a). Un mince film d'eau d'épaisseur caractéristique h_0 , ruisselle autour du cylindre. On se place dans une section de cylindre. La vitesse de vent projetée sur un plan normal à l'axe du cylindre, \mathbf{U}_N ,

a une norme U_N et le projeté de la gravité, \mathbf{g}_N , une norme g_N ,

$$U_N = U \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}, \quad g_N = g \cos \alpha. \quad (2.1)$$

Les vecteurs \mathbf{U}_N et \mathbf{g}_N forment un angle $\delta + \pi/2$ qui s'exprime en fonction de l'inclinaison du câble et de l'angle de dérapage

$$\delta = \arctan(\sin \alpha \tan \beta). \quad (2.2)$$

La position d'un point du film d'eau est donnée en coordonnées polaires. L'origine du repère est située au centre du cylindre. L'azimut θ est mesuré à partir de la direction normale de vent U_N . Le film d'eau d'épaisseur $h(\theta, t)$ est supposé continu autour du cylindre, $h > 0$.

2.1.2 Equations de Navier-Stokes et conditions aux limites

Le film d'eau est soumis à la gravité g_N , la tension de surface γ et l'action du vent de vitesse U_N . Les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles sont écrites pour le film d'eau

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \rho g_N - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où \mathbf{v} est le champ de vitesse dans le film d'eau, ρ la masse volumique, p le champ de pression et μ la viscosité dynamique de l'eau. Ces équations sont écrites dans le repère $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$. Dans ce repère, la position d'une particule d'eau est exprimée par $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ($R \leq r \leq R + h$) et sa vitesse se décompose en $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$.

Les conditions aux limites associées sont les suivantes : (i) les particules d'eau ne glissent pas sur la paroi du cylindre, $u(R) = v(R) = 0$; (ii) l'interface eau-air est une surface matérielle que les particules d'eau ne peuvent traverser. La vitesse normale d'une particule d'eau sur l'interface est donc égale à la vitesse normale de l'interface, $u = \partial_t h + (v/r)\partial_\theta h$; (iii) la contrainte normale est discontinue à travers l'interface eau-air du fait de la tension de surface

$$(\sigma_g - \sigma) \cdot \mathbf{n} = \mathcal{K} \gamma \mathbf{n}, \quad \sigma = -p\mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \quad \sigma_g = -p_g(\theta)\mathbf{I} + \tau_g, \quad (2.4)$$

où σ_g et σ sont les tenseurs des contraintes de l'air et de l'eau respectivement, γ est la tension de surface eau-air, \mathbf{I} le tenseur identité, p_g la pression de l'air à l'interface et τ_g le tenseur visqueux de l'air. La courbure $\mathcal{K}(\theta)$ de la surface libre du film s'écrit

$$\mathcal{K}(\theta) = \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{(R + h)^2 + 2(\partial_\theta h)^2 - (R + h)\partial_\theta^2 h}{[(R + h)^2 + (\partial_\theta h)^2]^{3/2}}. \quad (2.5)$$

Dans tout le document, les notations ∂_θ et ∂_ξ désigneront une dérivation partielle par rapport à l'espace et les notations ∂_t et ∂_T , une dérivation par rapport au temps. L'ordre de la dérivation, n , sera indiqué par un exposant, ∂^n .

2.1.3 Hypothèses de lubrification

Nous faisons maintenant les hypothèses de lubrification : (a) le film d'eau a une épaisseur caractéristique h_0 faible comparé au rayon du câble, $h_0 \ll R$, (b) l'épaisseur du film varie lentement avec l'azimut, $\partial_\theta h \ll R$. Comme Reisfeld & Bankoff (1992), les grandeurs du problème sont adimensionnées par des grandeurs construites avec la viscosité de l'eau,

$$\begin{aligned} U &= \frac{R}{\nu} u, \quad V = \frac{h_0}{\nu} v, \quad T = \frac{\nu}{Rh_0} t, \\ P &= \frac{h_0^3}{\rho\nu^2 R} p, \quad \xi = \frac{r - R}{h_0}, \quad H = \frac{h}{h_0}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La pression et la friction de l'air sont adimensionnées de manière classique en faisant apparaître les coefficients de pression et de friction

$$C_p = \frac{p_g}{\frac{1}{2}\rho U_N^2}, \quad C_f = \frac{\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}_g \cdot \mathbf{n}}{\frac{1}{2}\rho U_N^2}. \quad (2.7)$$

Lorsque les équations sont mises sous forme adimensionnelle, le petit paramètre $\varepsilon = h_0/R$ apparaît ainsi que les nombres suivant

$$G = \frac{g_N h_0^3}{3\nu^2}, \quad S = \frac{\gamma h_0^4}{3\rho\nu^2 R^3}, \quad \mathcal{P} = \frac{\rho_g U_N^2 h_0^3}{6\rho\nu^2 R}. \quad (2.8)$$

Ces nombres sans dimension comparent l'action de la gravité, la tension de surface et l'action du vent respectivement à l'effet de la viscosité. Seuls les termes d'ordre zéro en ε sont conservés dans les équations et nous obtenons les équations valables à l'intérieur du film d'eau (calculs en annexe A.2)

$$\begin{aligned} \partial_\xi P &= 0, \\ -3 \cos(\theta - \delta) - \partial_\theta P + \partial_\xi^2 V &= 0, \\ \partial_\xi U + \partial_\theta V &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec les conditions aux limites en $\xi = 0$

$$U = V = 0 \quad (2.10)$$

et en $\xi = H$

$$\begin{aligned} U &= \partial_T H + V \partial_\theta H, \\ -3\mathcal{P}C_p + P &= 3S \left(\frac{1}{\varepsilon} - H - \partial_\theta^2 H \right), \\ 3\mathcal{P} \frac{C_f}{\varepsilon} - \partial_\xi V &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les équations dans le film sont combinées aux équations aux limites pour obtenir l'équation d'évolution de l'épaisseur du film d'eau en espace et en temps

$$\partial_T H + \partial_\theta \left\{ -G \cos(\theta - \delta) H^3 + S (\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H) H^3 - \mathcal{P} \partial_\theta (C_p) H^3 + \frac{3\mathcal{P}}{2\varepsilon} C_f H^2 \right\} = 0 . \quad (2.12)$$

Pour $\mathcal{P} = 0$, l'équation (2.12) est identique à l'équation '4.17' de Reisfeld & Bankoff (1992). Inversement, si $G = 0$, si de plus C_p et C_f sont indépendants de θ et en faisant tendre R vers l'infini, nous retrouvons l'équation '2.31' de Oron *et al.* (1997).

L'équation (2.12) est une équation aux dérivées partielles non linéaire du quatrième ordre que l'on peut écrire sous la forme d'une équation de conservation

$$\partial_T H + \partial_\theta \{f\} = 0 . \quad (2.13)$$

Le flux local d'épaisseur f comporte quatre termes dus à la gravité, la tension de surface, la pression et la friction produites par l'écoulement d'air dont l'importance relative est mesurée par les valeurs des nombres sans dimension G , S et \mathcal{P} .

Notons que le paramètre ε a été conservé dans le terme de friction de l'équation (2.12). En effet, le rapport des termes de pression et de friction est d'ordre de grandeur $\mathcal{R} = \text{pression/friction} \approx \varepsilon C_p^{max} / C_f^{max} \approx 10^{-1}$ dans le cas (I) et $\mathcal{R} \approx 1$ dans le cas (II) (annexe A.1), car $C_f^{max} \approx 10^{-2}$ et $C_p^{max} \approx 1$ pour un nombre de Reynolds $Re_g = U_N D / \nu = 10^5$, Achenbach (1968). On ne peut donc pas négliger un terme devant l'autre.

La valeur des nombres adimensionnels dans le cas des RWIV (cas (I), annexe A.1) est présentée dans le tableau 2.1. On observe que le nombre de tension de surface S est faible comparé aux autres nombres adimensionnels.

Auteurs	ε	G	S	\mathcal{P}	\mathcal{P}/ε
Hikami & Shiraishi (1988)					
Grandeur nature	7×10^{-3}	4×10^2	4×10^{-3}	43	2×10^2
Soufflerie	7×10^{-3}	4×10^2	4×10^{-3}	43	2×10^2
Flamand (1995)	6×10^{-3}	4×10^2	3×10^{-3}	38	2×10^2
Matsumoto <i>et al.</i> (1995)	6×10^{-3}	4×10^2	3×10^{-3}	29	10^2

TAB. 2.1 – Valeurs des paramètres calculées d'après la littérature.

2.1.4 Coefficients de pression et friction

Pour résoudre l'équation modèle (2.12), il faut connaître la valeur des coefficients de pression et de friction tout autour du cylindre. Or le cylindre a la

particularité de présenter un angle de dérapage par rapport au vent. De plus les filets d'eau modifient légèrement la forme de la section du câble ainsi que les conditions aux limites de l'écoulement d'air.

Inclinaison du câble par rapport au vent

Bursnall & Loftin (1951) ont mesuré le champ de pression produit par un écoulement d'air autour d'un cylindre incliné pour différents nombres de Reynolds normaux $Re_{g,N} = U_N D / \nu$. Sur la figure 2.2 est représentée la distribution du coefficient de pression pour différentes inclinaisons pour des nombres de Reynolds trans-critiques et super-critiques. On voit que la position du minimum de pression dépend peu de l'inclinaison et varie essentiellement avec la valeur du nombre de Reynolds. En conséquence, nous utiliserons dans la suite des coefficients de pression et friction mesurés en écoulement transverse.

Effet des filets

Lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds de l'écoulement autour d'un cylindre, la traînée varie faiblement jusqu'à une valeur critique $Re_{g,min}$, où elle chute brutalement : c'est la crise de traînée. Au delà d'un nombre de Reynolds $Re_{g,max}$, la traînée augmente légèrement avec le nombre Reynolds. La valeur de $Re_{g,min}$ dépend de l'état de surface du cylindre. Fage & Warsap (1930) ont mesuré la traînée sur un cylindre en présence de rugosités d'épaisseur ϵ en fonction du nombre de Reynolds, figure 2.3.

Plus les rugosités sont grosses, plus le nombre de Reynolds auquel a lieu la crise de traînée est faible. Les filets qui se forment par temps de pluie sur un cylindre soumis au vent peuvent être vus comme des rugosités d'épaisseur relative $\epsilon/D = 5 \times 10^{-3}$ dans le cas (I) et $\epsilon/D = 5 \times 10^{-2}$ dans le cas (II). Pour ces rapports d'aspect, le nombre de Reynolds critique vaut $Re_{g,min} \approx 5 \times 10^4$ dans le cas (I) et en extrapolant $Re_{g,min} \approx 2 \times 10^4$ dans le cas (II). En conséquence, les conditions RWIV sont trans-critiques et le cas expérimental (II) est juste en dessous de la zone critique.

2.1.5 Résolution numérique

L'équation (2.12) n'est pas résoluble analytiquement. Nous l'avons donc résolue numériquement, à l'aide d'une méthode pseudo-spectrale (décomposition de Fourier en espace et schéma d'Adams-Bashforth en temps), pour un film d'eau d'épaisseur initialement constante en espace.

Pour ce qui est du chargement du vent sur un cylindre mouillé, nous faisons l'hypothèse qu'il est proche du chargement qui s'exercerait sur un cylindre sec en écoulement transverse. Nous utilisons donc la distribution de pression et de

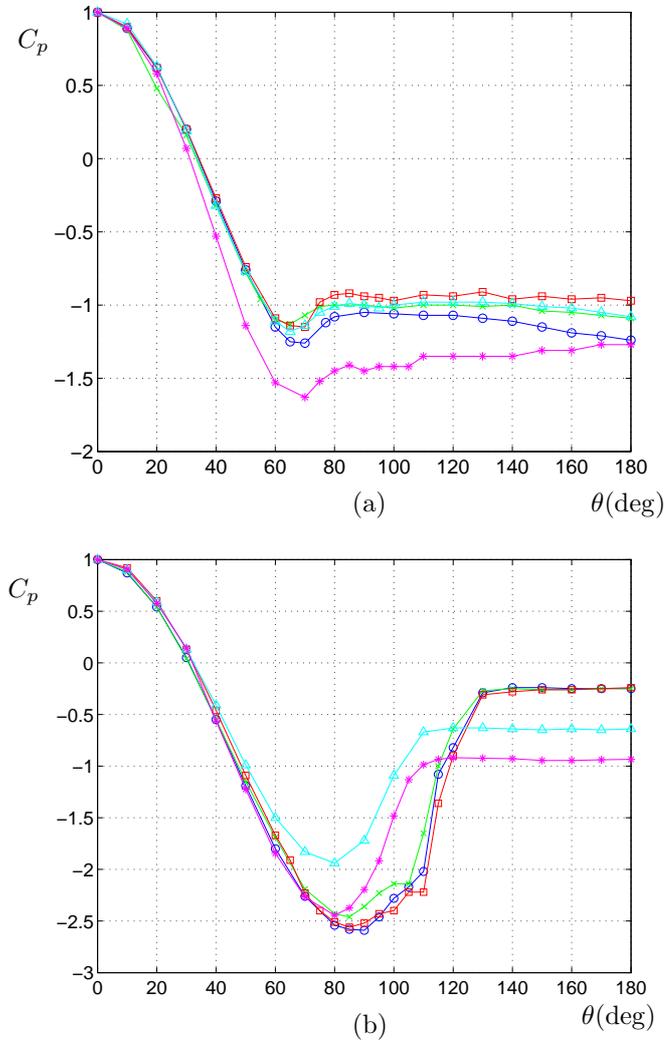


FIG. 2.2 – Distribution du coefficient de pression autour d'un cylindre incliné par rapport à l'écoulement pour des nombre de Reynolds normaux (a) trans-critiques $1.02 \times 10^5 < Re_{g,N} < 2.00 \times 10^5$ et (b) super-critiques $3.45 \times 10^5 < Re_{g,N} < 3.98 \times 10^5$. Les inclinaisons varient entre $\beta = 0$ et 60° : (o) $\beta = 0$, (\times) $\beta = 15$, (\square) $\beta = 30$, (\triangle), $\beta = 45$ et (*) $\beta = 60^\circ$. L'azimut θ est mesuré à partir du point d'arrêt. D'après Bursnall & Loftin (1951).

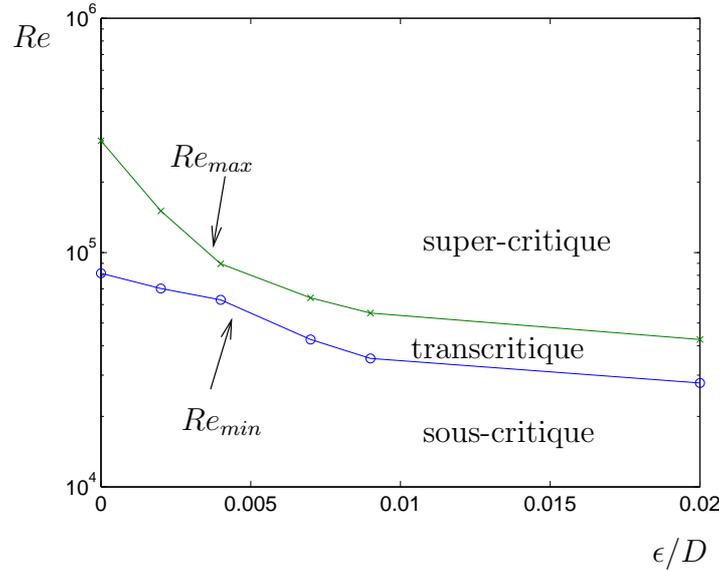


FIG. 2.3 – Valeurs des nombres de Reynolds minimaux et maximaux encadrant la zone de chute de traînée en fonction de l'épaisseur des rugosités ramenées au diamètre du câble ϵ/D . D'après Fage & Warsap (1930).

friction mesurées par Achenbach (1968) pour un nombre de Reynolds de $Re_g = 10^5$, caractéristique des RWIV, figure 2.4.

Sur la figure 2.5, est présentée l'évolution d'un film d'eau en fonction du temps dans les conditions modèles des RWIV (jeu de paramètre (I), Annexe A.1) et avec la gravité normale orthogonale à la vitesse normale, soit $\delta = 0$, éq. (2.2). On observe l'apparition de deux protubérances, croissant avec le temps, que l'on identifie comme la trace bidimensionnelle des filets. Sous l'action de la gravité, le filet bas croît légèrement plus vite que le filet haut. Leur position est proche des points de décollement, ce qui est conforme aux observations expérimentales de Bosdogianni & Olivari (1996) et Verwiebe & Ruscheweyh (1998).

Notre modèle hydrodynamique permet donc de rendre compte de l'apparition de filets d'eau à partir d'un film mince initialement homogène soumis à l'action d'un chargement extérieur de vent.

2.1.6 Résumé de la section

En écrivant les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles pour un film d'eau enrobant un cylindre, soumis à un chargement de vent, et en appliquant les hypothèses de lubrification, nous avons obtenu une équation d'évolution en temps et en espace de l'épaisseur du film.

La résolution numérique de cette équation dans les conditions RWIV montre

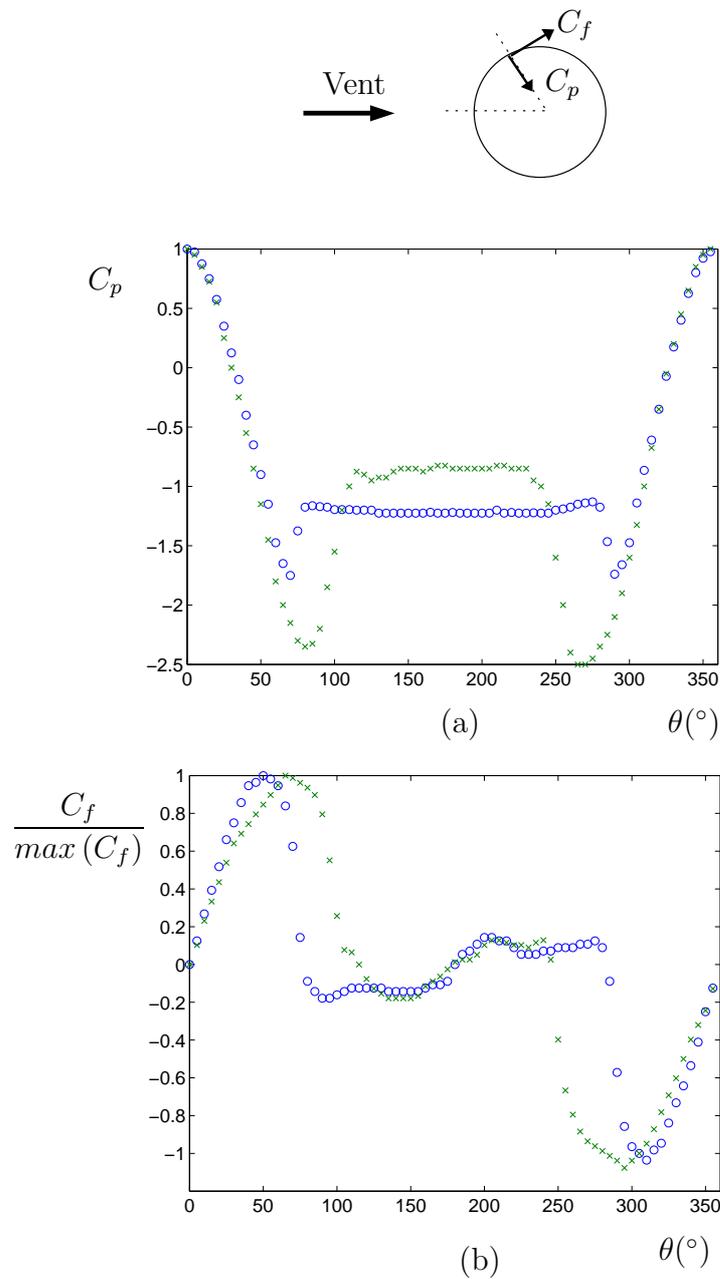


FIG. 2.4 – Distribution du chargement de vent autour d'un cylindre lisse et sec. (o) Mesures d'Achenbach (1968) pour un nombre de Reynolds trans-critique au sens de la crise de traînée ($Re_g = 10^5$); (\times) mesure pour un nombre de Reynolds super-critique ($Re_g = 3.6 \times 10^6$). (a) Coefficients de pression; (b) coefficients de friction renormalisés par leur valeur maximale. Le maximum du coefficient de friction trans-critique est de $\max(C_f) = 1.7 \cdot 10^{-2}$ et de $4.1 \cdot 10^{-3}$ dans le cas super-critique.

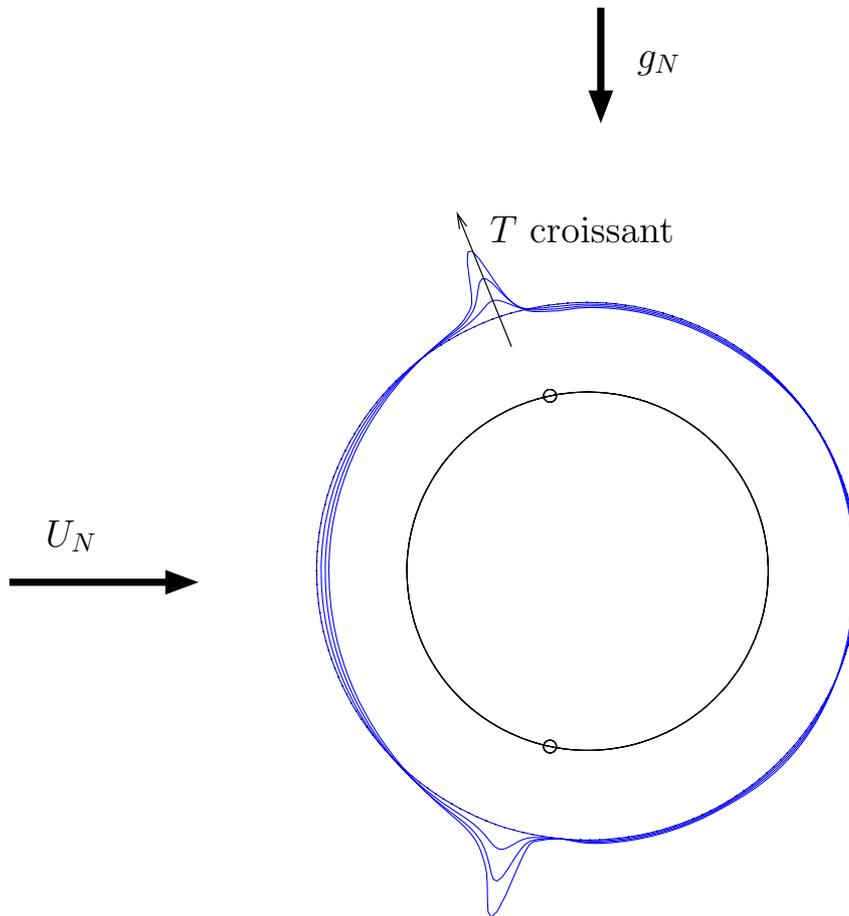


FIG. 2.5 – Résolution numérique de l'équation (2.12) à partir d'un film homogène soumis à la gravité, à la tension de surface et au vent. La vitesse du vent projetée dans une section de cylindre, U_N , et la gravité projetée, g_N , sont ici orthogonales, c'est-à-dire que l'angle δ est nul, ce qui correspond par exemple à $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 45^\circ$, fig. 2.1 et éq. (2.2). Les valeurs de paramètre sont représentatives des RWIV, jeu de paramètre (I) (Annexe A.1). Le film est représenté aux instants $T = 0, 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}$ et $1.5 \cdot 10^{-4}$. L'épaisseur du film est grossie 500 fois. Deux filets apparaissent au voisinage des points de décollement de l'écoulement d'air autour du cylindre sec, identifiés par Achenbach (1968) et reportés sur la figure (o).

l'apparition de deux protubérances dans un film initialement homogène : les filets.

2.2 Critère d'apparition des filets

Dans la section précédente, nous avons développé un modèle décrivant l'évolution d'un film d'eau autour d'un cylindre sous l'action de la gravité, de la tension de surface et du chargement dû au vent. Nous avons résolu numériquement l'équation obtenue pour des temps courts. A partir d'un film homogène, deux protubérances apparaissent. Elles croissent jusqu'à violer l'hypothèse de lubrification. Par ailleurs, le modèle n'autorise pas le démouillage du film, alors que dans la réalité, on observe un assèchement du câble de part et d'autre des filets. Cependant, on peut supposer que les filets vont se stabiliser à l'endroit où le modèle de lubrification prévoit leur apparition aux temps courts.

Dans cette section, nous linéarisons l'équation de lubrification pour obtenir un critère simple d'existence de deux filets. L'équation linéarisée nous permet en outre de prévoir la position des filets.

2.2.1 Linéarisation de l'équation de film

L'équation (2.12) peut être redimensionnée pour faire disparaître un nombre adimensionnel en rééchelonnant le temps avec la gravité et en définissant une nouvelle variable, $\tau = GT$. On obtient alors une nouvelle équation d'évolution de l'épaisseur

$$\begin{aligned} \partial_\tau H - \partial_\theta \{ \cos(\theta - \delta) H^3 \} + Bo^{-1} \partial_\theta \{ (\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H) H^3 \} \\ - \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 \partial_\theta \left\{ \partial_\theta (C_p) H^3 - \frac{3}{2\varepsilon} C_f H^2 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

où le nombre de Bond Bo compare la gravité et la tension de surface, le nombre de masse \mathcal{M} est le rapport entre la masse volumique de l'air et celle de l'eau, et le nombre de Froude normal F_{RN} compare l'action du vent et de la gravité,

$$Bo = \frac{G}{S} = \frac{\rho g_N R^3}{\gamma h_0}, \quad \mathcal{M} = \frac{\rho_g}{\rho}, \quad F_{RN} = \frac{U_N}{\sqrt{g_N R}}. \quad (2.15)$$

Nous nous intéressons à un film initialement homogène, $H(\theta, 0) = 1$ que nous observons aux temps courts, alors que l'épaisseur reste proche de son état initial, $H(\theta, t) = 1 + H'(\theta, t)$ avec $\max_\theta |H'| \ll 1$. Nous reportons cette expression dans l'équation (2.14) et linéarisons pour obtenir

$$\partial_\tau H = r(\theta), \quad (2.16)$$

où r est le taux de croissance de l'épaisseur aux temps courts, qui dépend de l'espace,

$$r(\theta) = -\sin(\theta - \delta) + \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 \mathcal{F}(\theta), \quad \text{avec } \mathcal{F}(\theta) = \partial_\theta^2 C_p - \frac{3}{2\varepsilon} \partial_\theta C_f. \quad (2.17)$$

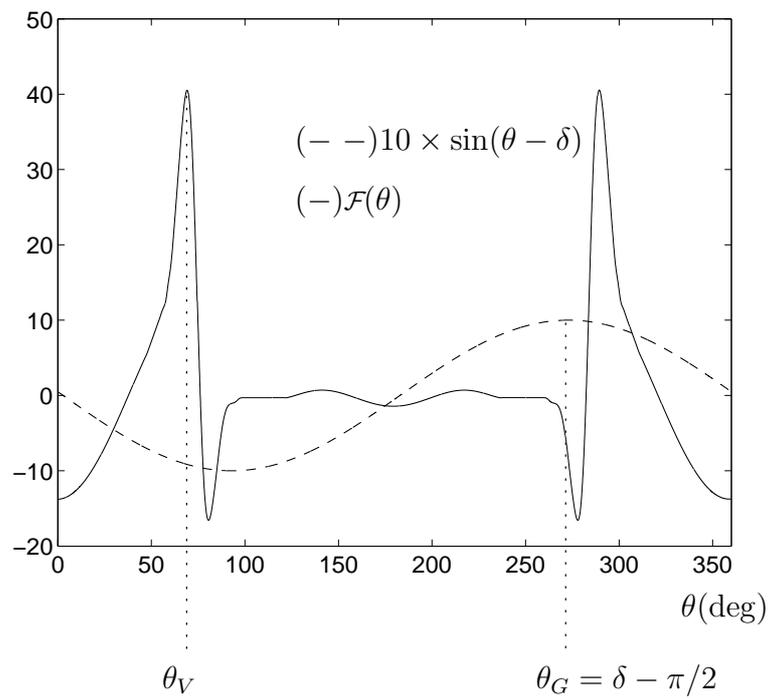


FIG. 2.6 – Forme des deux termes du taux de croissance, équation (2.17) (–) terme en sinus dû à la gravité (– –) terme dû au vent. L'angle δ est choisi légèrement supérieur à zéro pour cet exemple.

Le taux de croissance r présente trois maxima relatifs : le maximum de la fonction $\sin(\theta - \delta)$ en $\theta = \delta - \pi/2$, et les maxima de la fonction \mathcal{F} en $\theta = \theta_V$ et $2\pi - \theta_V$, figure 2.6. La position du maximum absolu dépend de la valeur du nombre de Froude $\mathcal{M}F_{RN}^2$. Pour de faibles nombres de Froude, $\mathcal{M}F_{RN}^2 \ll 1$, le maximum absolu est celui du terme en sinus. Pour des nombres de Froude importants, $\mathcal{M}F_{RN}^2 \gg 1$, il y a deux maxima absolus égaux, dus à la fonction \mathcal{F} .

A ce stade, nous faisons l'hypothèse que les filets apparaissent et se stabilisent après démouillage aux endroits où le taux de croissance local est maximum.

Lorsque l'on augmente la valeur du nombre de Froude, on passe d'un unique filet "gravitaire", $\mathcal{M}F_{RN}^2 \ll 1$, puisque la fonction sinus ne présente qu'un maximum sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ en $\theta = \theta_G$, à deux filets contrôlés par le vent $\mathcal{M}F_{RN}^2 \gg 1$ en $\theta = \theta_V$ et $\theta = 2\pi - \theta_V$. L'existence d'un deuxième filet et la position des filets dépend donc de la valeur du nombre de Froude. La position des filets résulte donc d'une compétition entre les effets de gravité et les effets dus au vent. Il existe donc un nombre de Froude critique qui sépare un régime contrôlé par la gravité et un régime contrôlé par le vent. La transition entre les deux régimes de positionnement des filets est brusque : elle a lieu lorsque le maximum du terme de gravité et le maximum du terme dû au vent sont égaux,

$$\max_{\theta \in [0, 180]} [\sin(\theta - \delta)] = \max_{\theta \in [0, 180]} \left[\frac{1}{2} \mathcal{M}F_{RN}^2 \mathcal{F}(\theta) \right]. \quad (2.18)$$

Ceci conduit à définir une valeur minimum du nombre de Froude normal pour l'existence simultanée des deux filets

$$(\mathcal{M}F_{RN}^2)_{min} = \frac{2}{\max_{\theta \in [0, 180]} [\mathcal{F}(\theta)]}. \quad (2.19)$$

Le nombre de Froude absolu $F_R = U/\sqrt{gR}$ correspondant s'écrit

$$(\mathcal{M}F_R^2)_{min} = \frac{2 \cos \alpha}{(\cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) \max_{\theta \in [0, 180]} [\mathcal{F}(\theta)]}. \quad (2.20)$$

en exprimant U_N et g_N en fonction de α et β , éq. (2.1).

2.2.2 Cas simplifié : câble orienté dans la direction du vent

Pour raisonner plus aisément, nous considérons dans ce paragraphe le cas simplifié où l'angle que forment la vitesse normale au câble et la gravité est de $\delta = \pi/2$ (vent et gravité colinéaires), figure 2.7. Cela correspond par exemple au cas

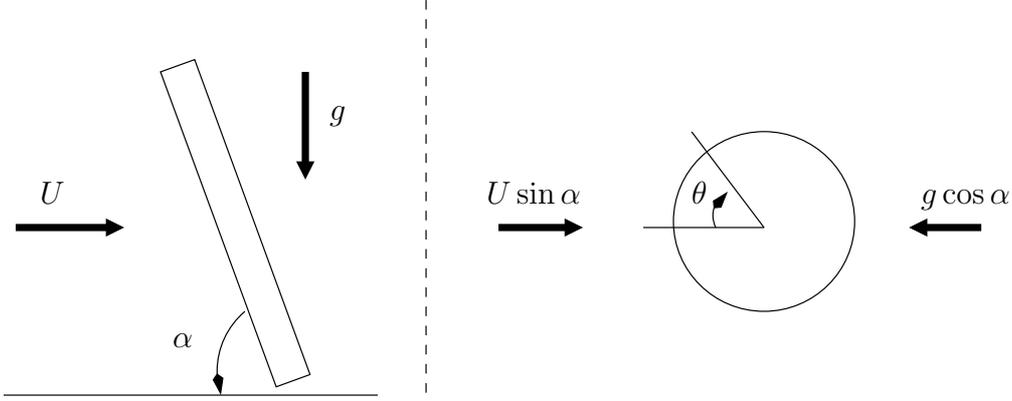


FIG. 2.7 – Configuration simplifiée, $\beta = \pi/2$. La vitesse du vent, la gravité et l'axe du cylindre sont coplanaires. En conséquence, la vitesse et la gravité ramenées à une section de cylindre sont colinéaires de sens opposés.

où $\beta = \pi/2$ (vent, gravité et câble coplanaires) et une inclinaison α quelconque. Le taux de croissance s'écrit alors

$$r(\theta) = \cos(\theta) + \frac{1}{2} \mathcal{M}F_{RN}^2 \mathcal{F}(\theta) , \quad (2.21)$$

La forme du taux de croissance est représentée en coordonnées polaires sur la figure 2.8 pour trois valeurs du nombre de Froude normal. Pour cela, nous avons utilisé les mesures de pression et de friction d'Achenbach (1968), pour un nombre de Reynolds $Re_g = 10^5$.

Pour $\mathcal{M}F_{RN}^2 = 0$, r ne possède qu'un maximum ; donc un seul filet gravitaire existe en $\theta = 0^\circ$. Pour $\mathcal{M}F_{RN}^2 = 0.01$, r possède trois maxima relatifs, mais le maximum absolu est encore en $\theta = 0^\circ$; donc le filet gravitaire existe encore mais deux autres filets émergent en $\theta = \pm 68.2^\circ$. Lorsque $\mathcal{M}F_{RN}^2 = 10$, r possède deux maxima d'égale importance en $\theta = \pm 68.2^\circ$; donc deux filets contrôlés par le vent existent, symétriques par rapport à la direction du vent.

Si l'on considère une distribution de pression et de friction super-critique, (mesures d'Achenbach pour $Re_g = 3.6 \cdot 10^6$), les filets se positionnent plus en aval aux grands nombres de Froude : $\theta = \pm 92.3^\circ$.

Mesure de la position des filets

Le modèle décrit précédemment, éq. 2.17, permet de prévoir l'existence d'un ou deux filets ainsi que leur position sur un cylindre plongé dans un écoulement d'air. Pour vérifier la validité du modèle, nous mesurons dans cette section la position des filets dans le cas simplifié qui correspond au jeu de paramètre (II), annexe A.1.

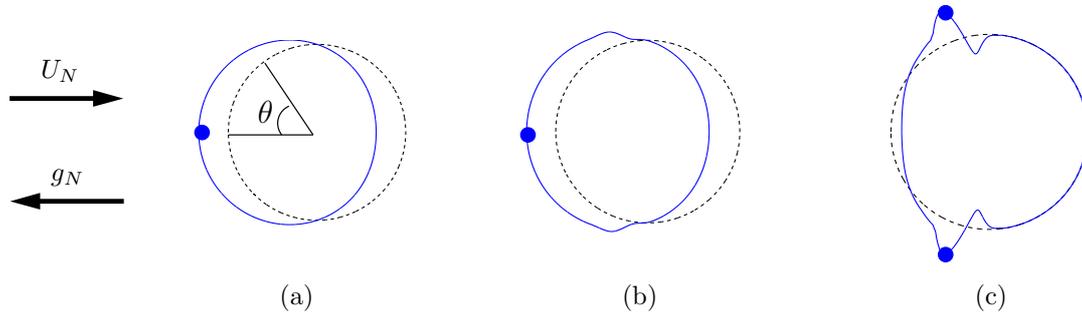


FIG. 2.8 – Taux de croissance relatif sur un film uniforme autour d’un cylindre sous l’action simultanée de la gravité et du chargement de vent. (—) Taux de croissance vu comme une fonction polaire d’amplitude arbitraire; (---) niveau de référence; (●) position du taux de croissance maximum, où le ou les filets vont apparaître. (a) $\mathcal{M}F_{RN}^2 = 0$: un unique filet dû à la gravité croissant à $\theta = 0^\circ$, (b) $\mathcal{M}F_{RN}^2 = 0.01$, (c) $\mathcal{M}F_{RN}^2 = 10$: deux filets dus au vent, croissant à $\theta = \pm 68.2^\circ$.

Nous avons mis en place une expérience dans le Mechanical Engineering Department de la Hong Kong Polytechnic University. Des mesures complémentaires ont été réalisées par la suite par Md. M. Alam et Y. Zhou, Lemaitre *et al.* (2006a).

Un cylindre est suspendu dans une soufflerie, fig. 2.9(a). Son rayon est de $R = 7.5$ ou 11 mm. Il est incliné par rapport à l’horizontale d’un angle $\alpha = 87.5$, 80 ou 55° . L’angle de dérapage vaut $\beta = 90^\circ$ (fig. 1.2). Un film liquide (de l’eau ou du lait) ruisselle autour du cylindre. Le débit est de $\dot{v} = 3.6 \times 10^{-3}$ L/s ou $\dot{v} = 6.9 \times 10^{-3}$ L/s. Le dispositif et la procédure expérimentale sont décrits plus en détail dans l’annexe A.6.

Lorsque l’écoulement d’air est déclenché à la vitesse U , deux filets d’eau symétriques par rapport à la direction de l’air se forment, fig. 2.10(a). Le cylindre est filmé de côté et la position angulaire du filet visible est déterminée par un traitement géométrique des images, fig. 2.10(b). Plusieurs vitesses d’écoulement sont testées dans l’intervalle $0 < U < 15$ m/s.

La position angulaire des filets en fonction de la vitesse U est représentée sur la figure 2.11 pour chacune des trois inclinaisons. Dans tous les cas, la position angulaire des filets est une fonction croissante de la vitesse. Pour une vitesse nulle, un seul filet existe sous le cylindre. Lorsqu’un écoulement d’air règne, deux filets apparaissent symétriquement par rapport à la direction de l’écoulement. Plus la vitesse est grande, plus les filets se trouvent en aval. Au delà d’une vitesse de saturation, qui dépend de l’inclinaison du cylindre, la position des filets est constante.

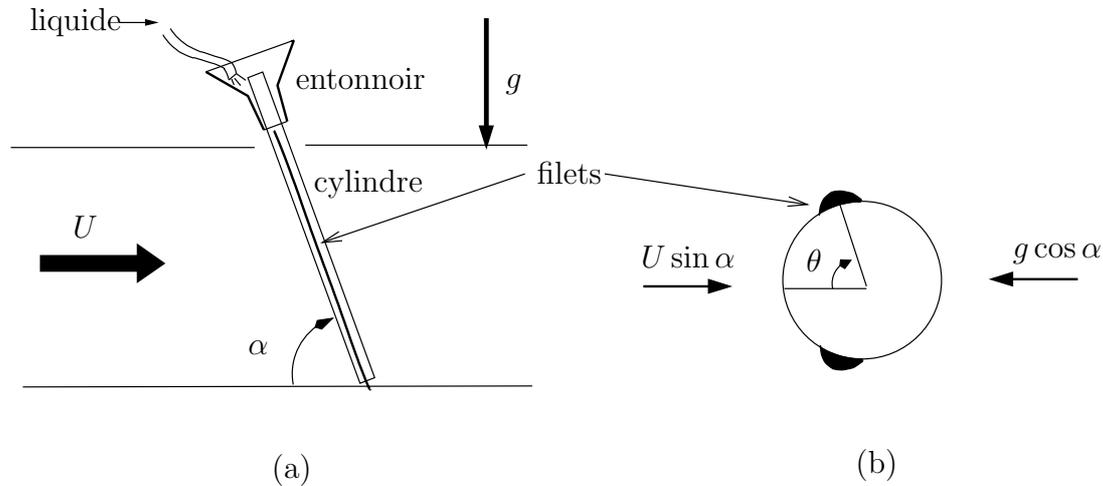


FIG. 2.9 – Montage expérimental pour la mesure de la position des filets. (a) Vue de côté; (b) vue en coupe perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Comparaison entre le modèle et les expériences

Sur la figure 2.12 est présentée la position des filets mesurée lors des expériences et la position du maximum du taux de croissance $r(\theta)$, éq. (2.17), en fonction du nombre de Froude.

A nombre de Froude égal, les résultats expérimentaux se superposent raisonnablement. Le début et la fin de la zone de nombre de Froude pour lequel la position angulaire croît est la même pour les trois mesures. Ceci confirme que le nombre de Froude est le paramètre qui contrôle la position des filets.

Dans les deux cas, modèle et expérience, on observe deux régimes : un régime gravitaire à petit nombre de Froude pour lequel un seul filet est présent en dessous du cylindre ; un régime régi par le vent à grand nombre de Froude pour lequel deux filets sont présents au niveau des points de décollement. Entre ces deux régimes, les filets ont des positions intermédiaires. Le début de la transition est bien prévu par le modèle, mais l'intervalle de nombre de Froude d'établissement est plus large dans la réalité. Les expériences confirment qu'après la transition, la position des filets ne dépend plus du nombre de Froude.

La position dictée par le vent selon le modèle est légèrement inférieure aux valeurs observées expérimentalement. Ceci peut être dû à une perturbation des champs de pression et de friction par les filets. Les filets peuvent notamment provoquer une transition à la turbulence de la couche limite. Nous avons donc calculé la position des filets pour un chargement de vent super-critique d'après Achenbach (1968), figure 2.4. De fait, les points expérimentaux sont encadrés par les valeurs théoriques calculées avec un chargement de vent trans-critique et

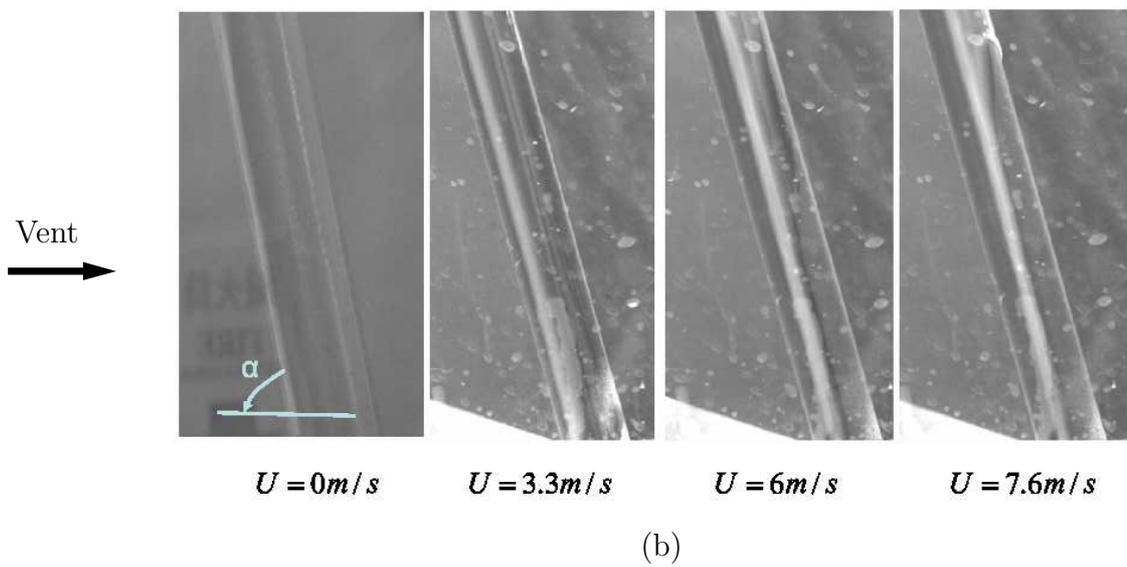
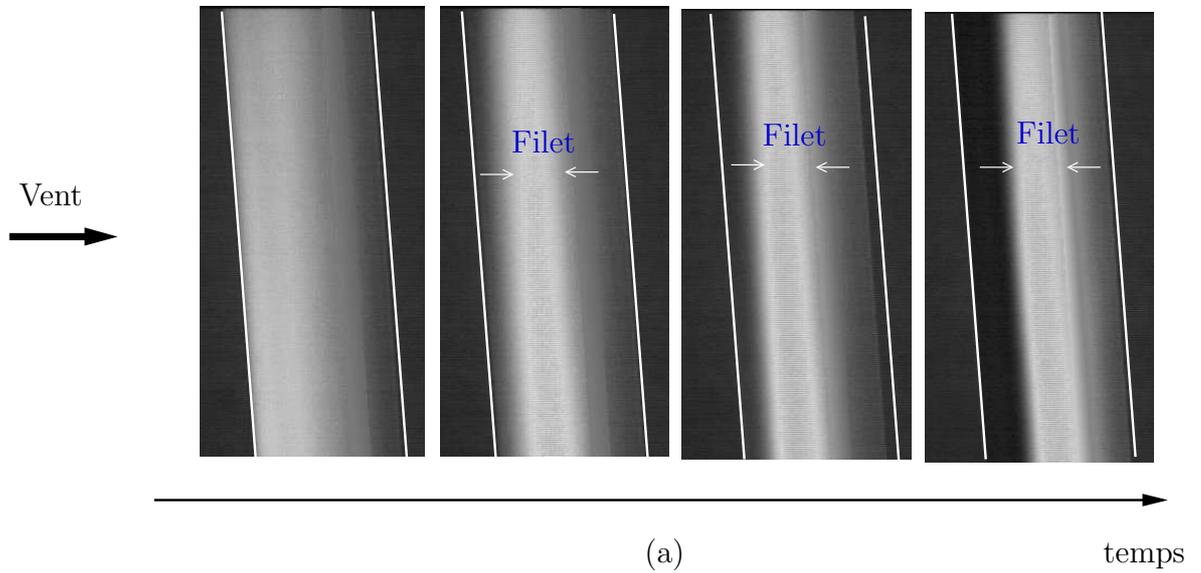


FIG. 2.10 – (a) Evolution d'un film de lait sur un cylindre noir à partir du moment où la soufflerie est déclenchée. (b) Position des filets pour différentes vitesses d'écoulement d'air, d'après Alam & Zhou (2006).

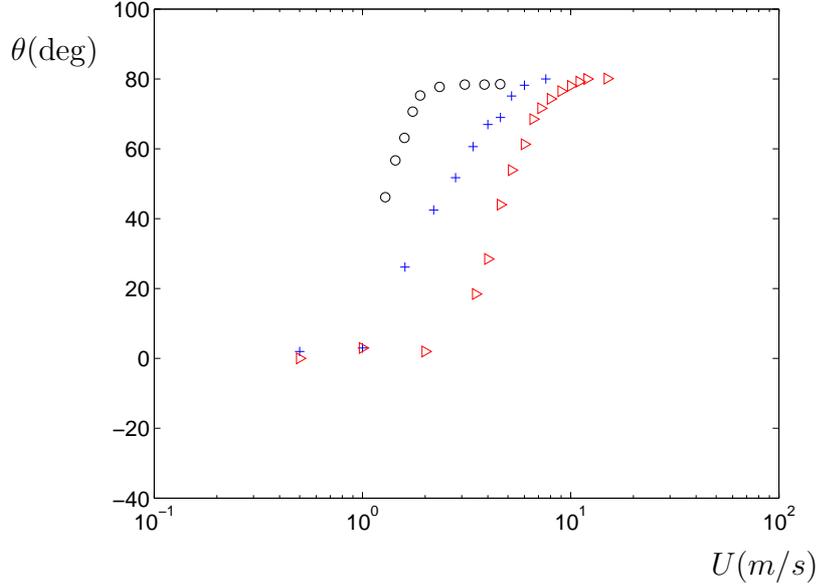


FIG. 2.11 – Position des filets en fonction de la vitesse de l'écoulement d'air pour différentes inclinaisons α et différents rayons R de cylindre. (\circ) $\alpha = 87.5^\circ$ et $R = 7.5$ mm ; (+) $\alpha = 80^\circ$ et $R = 11$ mm ; (\triangleright) $\alpha = 55^\circ$ et $R = 11$ mm.

super-critique.

Malgré sa simplicité, le modèle est en bon accord qualitatif avec les expériences. Pour un rayon de câble et une inclinaison donnés, le modèle permet de prévoir la vitesse de vent, au dessus de laquelle deux filets existent à proximité des points de décollement.

2.2.3 Cas général

Dans le cas général, l'angle de dérapage β prend des valeurs entre 0 et $\pi/2$, donc l'angle δ , entre la vitesse normale U_N et la gravité normale g_N , est quelconque, éq (2.2).

Pour comparer les diverses configurations tridimensionnelles, il est plus pratique de présenter la position des filets par rapport à la projection du vecteur gravité sur le plan de section, figure 2.13. C'est la représentation qu'a choisie la plupart des expérimentateurs antérieurs qui ont utilisé un quadrillage collé sur le cylindre pour accéder facilement à l'angle ϕ . L'angle ϕ est lié à l'angle θ par l'intermédiaire de l'angle δ ,

$$\phi = \delta + \pi/2 - \theta . \quad (2.22)$$

Hikami & Shiraishi (1988), Matsumoto *et al.* (1992), Seidel & Dinkler (2004), Wang *et al.* (2005) et Gu & Du (2005) ont étudié la dépendance de la position

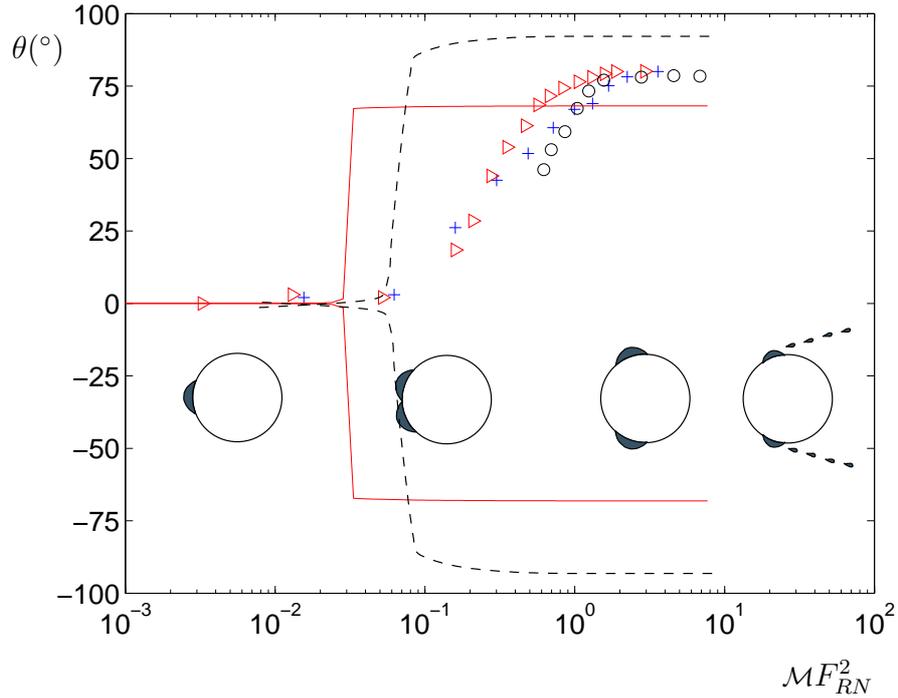


FIG. 2.12 – Position du ou des filets en fonction du nombre adimensionnel $\mathcal{M}F_{RN}^2$, défini par l'équation (2.15). Aux faibles nombres de Froude F_{RN} , un seul filet existe en $\theta = 0^\circ$; au delà d'un Froude critique, deux filets symétriques apparaissent dont la position évolue vers l'aval jusqu'à atteindre une valeur de saturation; aux grands nombres de Froude, les filets sont arrachés. (–) modèle avec un chargement de vent trans-critique, $Re_g = 10^5$; (– –) modèle avec un chargement de vent super-critique, $Re_g = 3.6 \times 10^6$, fig 2.4. (o) $\alpha = 87.5^\circ$ et $R = 7.5$ mm; (+) $\alpha = 80^\circ$ et $R = 11$ mm; (\triangleright) $\alpha = 55^\circ$ et $R = 11$ mm.

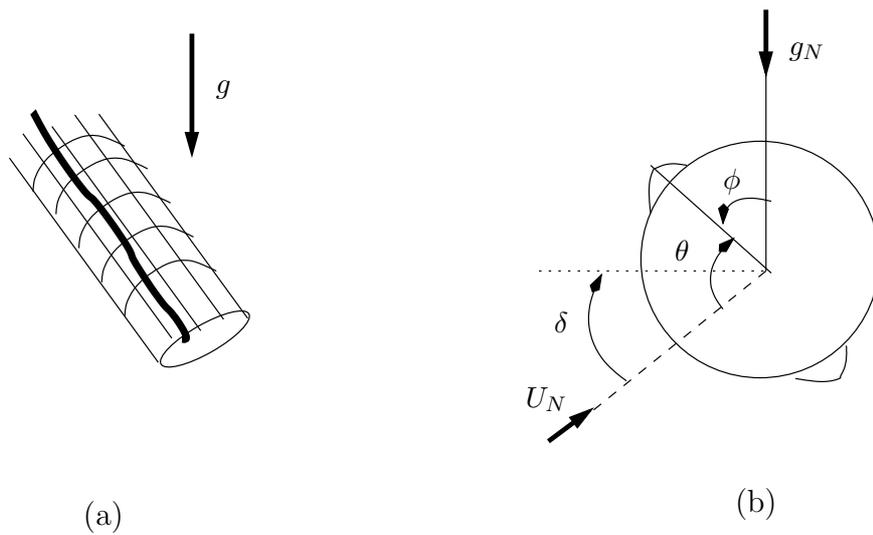


FIG. 2.13 – Les angles sont mesurés à partir de la verticale projetée, angle ϕ . (a) Les expérimentateurs utilisent une mire collée sur le cylindre; (b) Définition de l'angle ϕ à partir de l'angle θ qui est, lui, mesuré par rapport à la direction projetée du vent.

avec la vitesse de l'écoulement d'air pour une configuration (α, β) et un débit d'eau donnés sur un cylindre fixe. Wang *et al.* (2005) ont en outre étudié l'influence de l'angle β , ainsi que l'influence du débit \dot{v} . Les caractéristiques principales de ces expériences sont synthétisées dans le tableau A.6

Apparition d'un second filet

Sur la figure 2.14, sont représentées les données relatives à l'apparition d'un deuxième filet, en plus du filet gravitaire. En effet, du fait de la gravité, un filet se forme toujours sous le cylindre, aussi petite soit la vitesse du vent. Pour les tests réalisés à plusieurs vitesses, nous n'avons représenté que le point correspondant à la vitesse minimale.

Le nombre de Froude minimal d'existence théorique est en dessous de tous les points expérimentaux. Ceci valide l'expression (2.19) issue de notre modèle de lubrification : il donne une borne inférieure très réaliste pour l'existence de deux filets.

Position des filets en fonction de la position du câble dans l'espace

La vitesse intervient doublement dans la position des filets prévue par notre modèle : d'une part à travers le nombre de Froude et d'autre part à travers le nombre de Reynolds pour l'état de la couche limite (écoulement trans- ou super-critique). Pour cette raison, nous avons effectué à chaque fois les calculs avec un

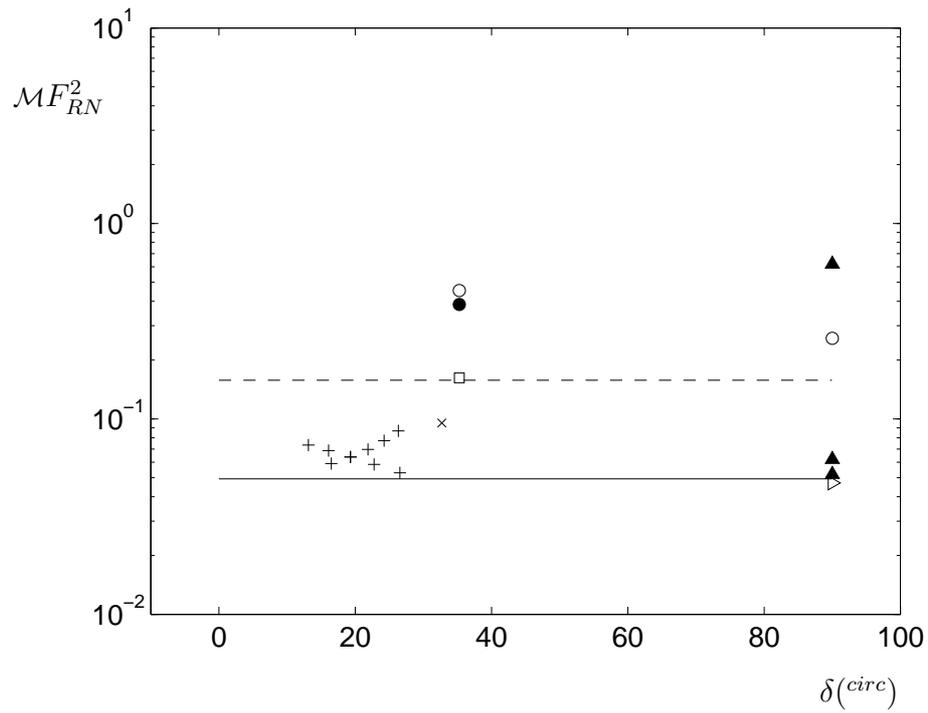


FIG. 2.14 – Valeurs du nombre de Froude normal F_{RN} lors des expériences de la littérature et valeur théorique du nombre de Froude minimal pour l’existence des deux filets, éq. (2.19). Les points expérimentaux reportés correspondent aux vitesses minimales d’apparition des deux filets. (–) chargement de vent trans-critique et (– –) chargement de vent super-critique. Mesures de (\square) Hikami & Shiraishi (1988), (\times) Matsumoto *et al.* (1992), (\triangleright) Seidel & Dinkler (2004), (\circ) et (\bullet) Wang *et al.* (2005), (+) Gu & Du (2005) et (\blacktriangle) mesures décrites à la section 2.2.2.

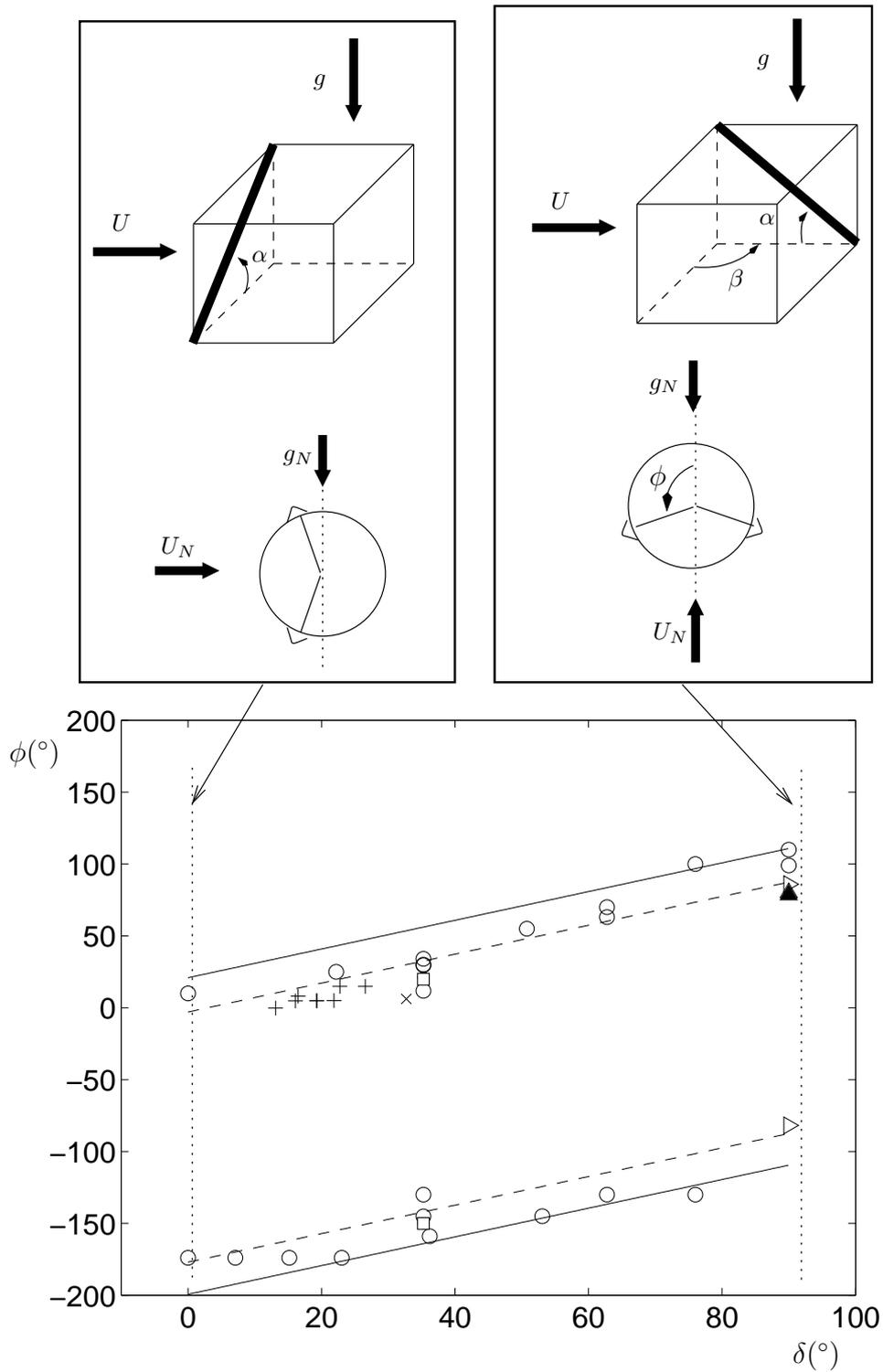


FIG. 2.15 – Position des filets mesurée à partir de la verticale projetée. Les points expérimentaux reportés correspondent aux mesures faites à grandes vitesses de vent. Mesures de (\square) Hikami & Shiraishi (1988), (\times) Matsumoto *et al.* (1992), (\triangleright) Seidel & Dinkler (2004), (\circ) Wang *et al.* (2005), (+) Gu & Du (2005) et (\blacktriangle) mesures décrites à la section 2.2.2. Prédiction théoriques (section 2.2.1) pour un chargement de vent trans- et super-critique, (—) et (---) respectivement.

chargement trans-critique puis avec un chargement super-critique.

La position des filets en fonction de la valeur de l'angle δ est présentée sur la figure 2.15. Pour les tests à plusieurs vitesses U , seuls les points expérimentaux correspondants aux vitesses maximales sont reportés sur la figure car elles correspondent à une position fortement dominée par le vent. Les expériences de Wang *et al.* (2005) pour différents angles de dérapage β sont en très bon accord avec les valeurs théoriques. Les autres résultats expérimentaux de Hikami & Shiraishi (1988), Matsumoto *et al.* (1992), Seidel & Dinkler (2004), Wang *et al.* (2005) et Gu & Du (2005) à vitesse ou débit variable sont en relativement bon accord.

2.2.4 Résumé de la section

En linéarisant l'équation de lubrification, nous avons obtenu la distribution spatiale du taux de croissance $r(\theta)$ d'épaisseur du film. La position des maxima de r dépend de la valeur du nombre de Froude, qui compare l'effet de la gravité à l'effet du vent.

En supposant que les filets se stabilisent à l'endroit où r est maximal, nous avons pu évaluer le nombre de Froude critique au delà duquel deux filets existent, ainsi que leur position.

Les résultats sont en bon accord avec les nouvelles expériences présentées ici, ainsi qu'avec les expériences antérieures.

2.3 Forme des filets

Le modèle développé dans le paragraphe 2.1 permet de définir la position où les filets vont apparaître. Cependant, le modèle ne peut gérer aux temps longs ni la violation de l'hypothèse de lubrification, ni le démouillage de part et d'autre d'un filet de sorte que la forme finale du filet reste à calculer. Nous présentons dans ce paragraphe un calcul simplifié de cette forme.

2.3.1 Résolution de l'équation de film démouillé stationnaire

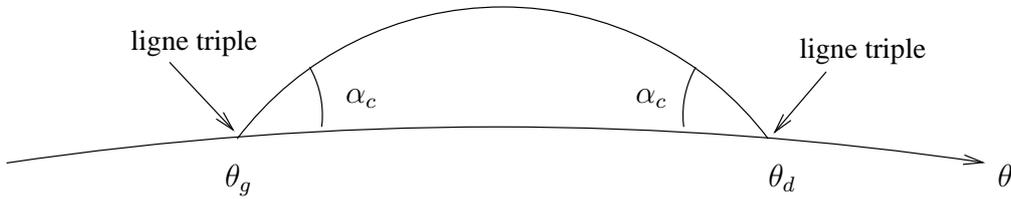


FIG. 2.16 – Section de filet démouillé à gauche et à droite sur un câble.

Nous considérons un filet sur un cylindre. Le filet, situé entre θ_g et θ_d , est supposé symétrique par rapport à $\theta_m = (\theta_g + \theta_d)/2$. Les angles que forment la surface du filet à gauche et à droite avec la paroi, appelés angles de contact, α_c , sont donc égaux, figure 2.16.

Nous nous plaçons en conditions stationnaires, c'est-à-dire une fois que les filets sont formés et que leur forme n'évolue plus au cours du temps. Nous supposons en outre que le nombre de Froude est grand, $F_{RN} \gg 1$. La gravité est donc négligée. Nous supposons en revanche que la tension de surface n'est pas négligeable. Enfin pour obtenir une solution approchée, nous ne prenons pas en compte la friction, même si elle joue un très grand rôle dans la croissance des filets. L'équation (2.14) devient alors

$$Bo^{-1} \partial_\theta [(\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H) H^3] = \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 \partial_\theta [\partial_\theta (C_p) H^3] . \quad (2.23)$$

Les conditions aux limites associées sont

$$H(\theta_g) = 0 , \quad H(\theta_d) = 0 , \quad \partial_\theta H(\theta_g) = \tan(\alpha_c)/\varepsilon , \quad \partial_\theta H(\theta_d) = -\tan(\alpha_c)/\varepsilon . \quad (2.24)$$

Après intégration de (2.23) par rapport à θ , utilisation de la condition sur le bord gauche, $H(\theta_g) = 0$ et division par H^3 , on obtient

$$\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H = \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 Bo \partial_\theta (C_p) . \quad (2.25)$$

Nous intégrons encore une fois par rapport à θ

$$H + H_{2\theta} = \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 Bo C_p + K , \quad (2.26)$$

où K est une constante. Pour simplifier la résolution de l'équation (2.26), le minimum de pression autour des points de décollement est modélisé par un cosinus, figure 2.17,

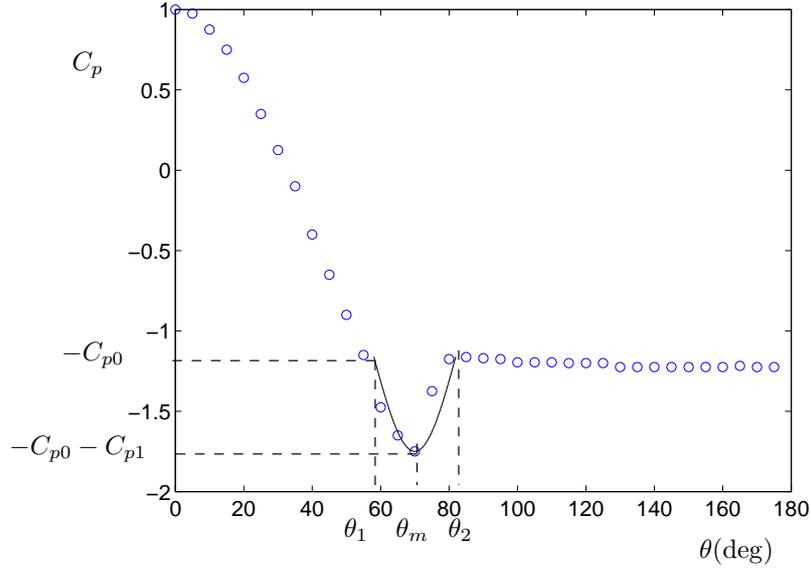


FIG. 2.17 – La pression présente un minimum dans la zone du point de décollement. Le coefficient de pression (o) est approché par une fonction cosinus (–).

$$C_p(\theta) = -C_{p0} \cos \left(\pi \frac{\theta - \theta_m}{\theta_2 - \theta_1} \right) - C_{p1} . \quad (2.27)$$

L'équation à résoudre maintenant s'écrit

$$\begin{aligned} H + H_{2\theta} &= -\alpha \cos(a\theta + b) - \beta , \\ H(\theta_g) &= 0 , \\ \partial_\theta H(\theta_g) &= \tan(\alpha_c)/\varepsilon , \\ \partial_\theta H(\theta_d) &= -\tan(\alpha_c)/\varepsilon , \end{aligned} \quad (2.28)$$

La condition d'épaisseur nulle à droite, $H(\theta_d) = 0$, devra en outre être respectée. Les variables a , b , α et β désignent

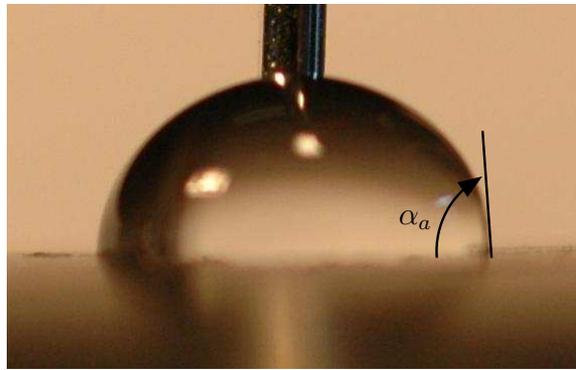
$$\begin{aligned} a\theta + b &= \pi \frac{\theta - \theta_m}{\theta_2 - \theta_1} , \\ \alpha &= \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 Bo C_{p0} , \quad \beta = \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 Bo C_{p1} - K . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Après résolution, on trouve

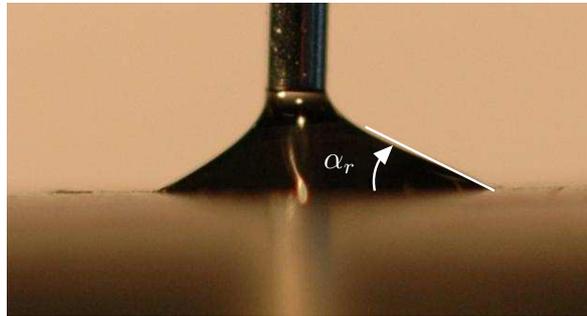
$$H(\theta) = \gamma \cos \theta + \delta \sin \theta + \frac{\alpha}{a^2 - 1} \cos(a\theta + b) - \beta, \quad (2.30)$$

où γ , δ et β sont des constantes que l'on détermine avec les conditions aux limites (2.28)b-d et dont l'expression est donnée en annexe A.4.

Pour une largeur $L = R(\theta_d - \theta_g)$ donnée, la forme du filet $h(\theta) = h_0 H(\theta)$ tirée de l'équation (2.30) dépend de la valeur de l'angle de contact α_c . En conséquence, le rapport d'aspect h_{max}/L du filet dépend de α_c . Nous mesurons cet angle dans le cas (I) à la section suivante.



(a)



(b)

FIG. 2.18 – Mesure de l'angle d'avancé et de l'angle de recul d'une goutte d'eau placée sur une gaine de hauban en polyéthylène. La technique consiste à "remplir" doucement une goutte avec une seringue ; les angles de contact augmentent jusqu'à atteindre l'angle d'avancé où la ligne de contact se met en mouvement et la goutte s'étale. (a) Goutte dont la ligne de contact est à la limite de l'avancé ; (b) goutte vidée au maximum avant rétractation de la ligne triple.

2.3.2 Angle de contact

L'angle de contact est l'angle que forme la surface libre du filet avec la paroi du cylindre, au niveau de la ligne triple, figure 2.16. La valeur de α_c dépend des efforts qui s'exercent sur le filet et n'est pas connue a priori. En revanche, cette valeur est comprise entre deux valeurs extrêmes, l'angle de recul α_r et l'angle d'avancée α_a qui dépendent du matériau du cylindre et de la composition des deux fluides, ici l'eau et l'air. L'angle de recul est l'angle minimum en dessous duquel la ligne triple se déplace et le filet se rétracte. L'angle d'avancée est l'angle maximum au dessus duquel la ligne triple se déplace et le filet s'étale.

Pour mesurer les angles α_r et α_a dans le cas (I), nous avons formé une goutte d'eau sur une gaine de hauban en polyéthylène. Pour faire varier les angles de contact, nous avons rempli puis vidé la goutte à l'aide d'une seringue dont le débit était contrôlé par un pousse-seringue micrométrique. Lorsqu'on remplissait (resp. vidait) la goutte, l'angle de contact (la goutte était axisymétrique) augmentait (resp. diminuait) jusqu'à atteindre l'angle α_a (resp. α_r) ; la goutte s'étalait (resp. se rétractait) brusquement et l'angle de contact retrouvait une valeur inférieure (resp. supérieure). Sur la figure 2.18(a) est présentée une photographie de la goutte juste avant étalement et sur la figure 2.18(b) la goutte juste avant qu'elle se rétracte. Les angles d'avancée et de recul sont estimés à $\alpha_r = 25^\circ$ et $\alpha_a = 87^\circ$.

Dans le cas (II), des matériaux différents ont été employés : plexiglas peint dans le cas (II)a et cuivre dans le cas (II)b. Nous n'avons pas mesuré les angles de contact associés.

2.3.3 Forme des filets dans les cas (I) et (II)

Pour chacun des deux cas (I) et (II), nous avons fixé la largeur du filet $L = R(\theta_d - \theta_g)$ et avons calculé l'épaisseur maximale h_{max} , avec l'équation (2.30), pour différentes valeurs de α_c . Nous avons retenu la valeur de α_c pour laquelle le rapport d'aspect h_{max}/L était le plus proche de la réalité.

Dans le cas (I), la largeur d'un filet est de $L = R(\theta_d - \theta_g) = 10^{-2}$ m et le rapport d'aspect $h_{max}/L = 0.1$. L'angle de contact correspondant est de l'ordre de $\alpha_c = 20^\circ$, qui est trop petit. Nous avons donc choisi l'angle de contact le plus faible possible, $\alpha_c = \alpha_r = 25^\circ$. La forme du filet pour cet angle de contact est tracée sur la figure 2.19(a). Le rapport d'aspect correspondant $h_{max}/L \approx 0.12$ est réaliste.

Dans le cas (II) les angles de contact n'ont pas été mesurés. Lors des expériences réalisées au LadHyX (section 3.1.1) et celle de Md. M. Alam (section 1.3), les cylindres étaient constitués de matériaux différents. En outre, les débits d'eau n'étaient pas les mêmes. Le débit d'eau dans un film d'eau entourant un cylindre impose l'épaisseur du film, h_0 (annexe A.3). Si l'on considère les filets comme étant l'accumulation de l'eau d'un film au voisinage des points de décollement de l'écoulement d'air, la taille des filets est directement liée au débit.

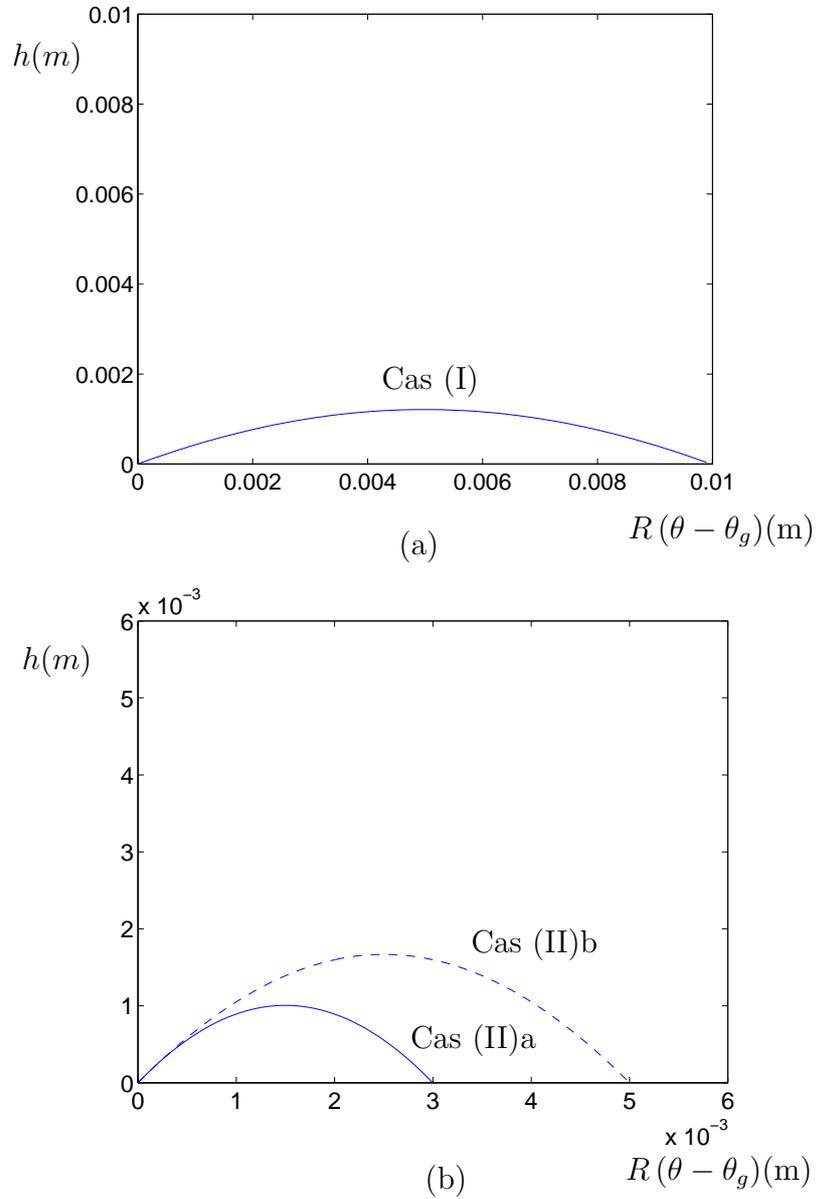


FIG. 2.19 – Forme d'un filet sur un cylindre soumis à la pression et à la tension de surface. Épaisseur dimensionnelle $h = h_0 H$, obtenue avec l'équation (2.30), en fonction de l'angle azimutal. (a) Conditions de RWIV, cas (I), $\alpha_c = 25^\circ$; (b) expériences simplifiées, $\alpha_c = 52^\circ$ (—) cas (II)a et (---) cas (II)b.

Les filets n'avaient donc pas les mêmes dimensions. Dans le cas (II), il faut donc distinguer les deux expériences.

Pour le cas (II)a (section 3.1.1), la largeur des filets est de $L = R(\theta_d - \theta_g) = 3$ mm, figure 3.1(b) et l'épaisseur maximale est estimée à $h_{max} = 1$ mm. L'angle de contact qui permet de réunir ces conditions est de l'ordre de $\alpha_c = 52^\circ$.

Lors des expériences de Md. M. Alam, cas (II)b, la largeur était $L = 5$ mm, figure 2.10(b). Si nous supposons un rapport d'aspect analogue au cas (II)a, $h_{max}/L = 0.33$, la hauteur des filets est $h_{max} = 1.7$ mm. L'angle de contact doit encore être égal à $\alpha_c = 52^\circ$.

La forme correspondant aux filets dans les cas (II)a et b est tracée sur la figure 2.19(b). Nous n'avons pas mesuré les angles d'avancée et de recul dans le cas (II) car plusieurs matériaux ont été utilisés.

2.3.4 Résumé de la section

En résolvant l'équation de film avec démouillage en conditions stationnaires, nous avons obtenu l'expression de la forme des filets. Cette expression est en accord avec les dimensions des filets observés lorsque l'on fixe l'angle de contact à une valeur α_c qui est différente dans les cas (I) et (II). Ceci est dû à la différence de matériaux constituant les cylindres. Dans le cas (I), la valeur de α_c a été confirmée expérimentalement.

2.4 Critère d'arrachage des filets

Les RWIV ne se produisent que dans un intervalle de vitesse de vent limité. Des filets ont toujours été observés lors des vibrations. L'intervalle de vitesse où l'on peut observer les RWIV est donc inclus dans l'intervalle de vitesse où des filets peuvent exister sur le câble. Dans le paragraphe 2.2, nous avons mis à jour une borne inférieure de vitesse pour l'existence des filets. Nous cherchons maintenant une borne supérieure.

Supposons qu'il y aura arrachage lorsque la force de friction agissant sur le filet compensera les forces de tension de surface au niveau des lignes triples.

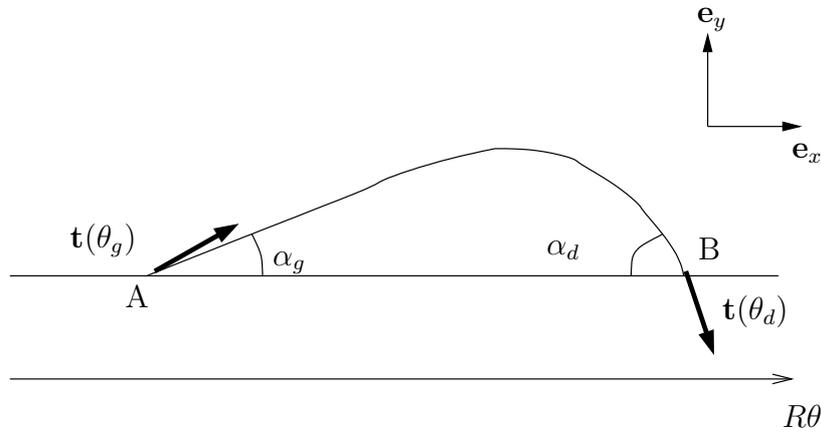


FIG. 2.20 – Filet sur un support soumis à l'action du vent. Le filet a un angle de contact à gauche α_g et un angle de contact à droite α_d .

Considérons un filet sur un support, figure 2.20. La force de friction agissant sur la surface du filet s'exprime

$$\mathbf{F}_f = \frac{1}{2} \rho_g U_N^2 \int_{\theta_g}^{\theta_d} C_f(\theta) R d\theta \mathbf{e}_x . \quad (2.31)$$

Aux points triples A et B s'exercent respectivement

$$-\gamma \mathbf{t}(\theta_g) = -\gamma \cos \alpha_g \mathbf{e}_x - \gamma \sin \alpha_g \mathbf{e}_y \quad \text{et} \quad -\gamma \mathbf{t}(\theta_d) = \gamma \cos \alpha_d \mathbf{e}_x - \gamma \sin \alpha_d \mathbf{e}_y , \quad (2.32)$$

de sorte que la résultante des forces de tension de surface suivant \mathbf{e}_x s'écrit

$$\mathbf{F}_{TS} \cdot \mathbf{e}_x = \gamma (\cos \alpha_d - \cos \alpha_g) . \quad (2.33)$$

Si l'on se place à la limite de l'arrachage, le filet est sur le point de se déplacer, les angles de contact sont égaux à gauche à l'angle de recul $\alpha_g = \alpha_r$ et à droite à l'angle d'avancée $\alpha_d = \alpha_a$.

Le bilan des forces suivant \mathbf{e}_x s'écrit

$$(\mathbf{F}_f + \mathbf{F}_{TS}) \cdot \mathbf{e}_x \approx 0 \quad (2.34)$$

d'où la vitesse d'arrachage des filets

$$U_{N,max} = \sqrt{\frac{\gamma(\cos \alpha_r - \cos \alpha_a)}{\frac{1}{2}\rho_g L \overline{C}_f}}, \quad (2.35)$$

où $L = R(\theta_d - \theta_g)$ est la largeur du filet et le coefficient de friction moyen,

$$\overline{C}_f = \frac{1}{\theta_d - \theta_g} \int_{\theta_g}^{\theta_d} C_f(\theta) d\theta \quad (2.36)$$

Le nombre sans dimension qui compare l'effet d'un écoulement d'air avec la tension d'une surface libre est le nombre de Weber

$$We_N = \rho_g U_N^2 R / \gamma \quad (2.37)$$

Le nombre de Weber critique pour l'arrachage est alors

$$We_{N,max} = \frac{2(\cos \alpha_r - \cos \alpha_a) R}{\overline{C}_f} \frac{R}{L} \quad (2.38)$$

Le nombre de Weber maximal dépend donc de la largeur du filet. Il dépend en outre du matériau constituant la gaine de hauban à travers les angles d'avancée et de recul. Ceci est cohérent avec les expériences de Flamand (1995) qui a observé qu'un second filet pouvait se former sur un câble en polyéthylène pollué par de la suie, alors qu'il ne se formait pas sur un câble propre, les autres paramètres, α , β , U étant inchangés.

Le filet a une largeur $L = 1$ cm et le câble un rayon $R = 10^{-1}$ m (Cas (I)) d'où la position des bords $\theta_g = 67^\circ$ et $\theta_d = 73^\circ$. Les angles d'avancée et de recul pour de l'eau sur une gaine en polyéthylène valent $\alpha_r = 25^\circ$ et $\alpha_a = 87^\circ$ (section 2.3). Le coefficient de friction moyen est estimé à $\overline{C}_f \approx 7 \times 10^{-3}$ d'après les mesures d'Achenbach pour le nombre de Reynolds $Re_g = 10^5$,

La vitesse à laquelle a lieu l'arrachage vaut $U_{N,max} \approx 36$ m/s. Cette valeur doit être supérieure à la vitesse maximale à laquelle les RWIV peuvent avoir lieu, ce qui est cohérent avec les observations de Hikami & Shiraishi (1988) qui observe une vitesse maximale de $U_{max} = 15$ m/s.

2.5 Intervalle d'existence des filets

Dans la section 2.2 nous avons montré que deux filets d'eau existent simultanément le long d'un cylindre incliné lorsque le vent est suffisamment fort pour vaincre la gravité. Cette borne inférieure d'existence est représentée par un nombre de Froude critique.

Lorsque le vent est trop fort, les forces de tension de surface qui retiennent le filet au niveau des lignes triples sont dépassées par les forces de friction et l'eau du filet est éjectée vers l'aval. Cette borne supérieure d'existence est représentée par un nombre de Weber critique, section 2.4.

Pour comparer ces deux bornes, nous exprimons dans cette section la borne inférieure sous la forme d'un nombre de Weber. Le nombre de Froude normal et nombre de Weber normal sont liés par l'équation

$$We_N = \mathcal{M}F_{RN}^2 \left(\frac{R}{\ell_c} \right)^2 \cos \alpha, \quad (2.39)$$

où $\ell_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ est la longueur capillaire. Le nombre de Weber minimal pour l'apparition d'un deuxième filet s'écrit donc

$$We_{N,min} = \frac{2 \cos \alpha}{\mathcal{M} \mathcal{F}_{\theta}} \left(\frac{R}{\ell_c} \right)^2. \quad (2.40)$$

Sur la figure 2.21 sont présentés les nombres de Weber correspondant aux expériences ainsi que les nombres de Weber minimal et maximal prévus par le modèle de positionnement des filets, éq. (2.40), et le modèle d'arrachage, éq. (2.38). Comme $We_{N,min}$ dépend de l'inclinaison du câble, nous avons reporté l'angle α en abscisse. Seules les expériences de Hikami & Shiraishi (1988), Matsumoto *et al.* (1992), Seidel & Dinkler (2004) et Gu & Du (2005), ont été retenues car les câbles avaient des diamètres comparables $D \approx 0.13$ m, annexe A.8. Lorsque plusieurs vitesses ont été testées, seules les vitesses minimale et maximale ont été retenues. Les valeurs prévues par nos modèles d'apparition et d'arrachage encadrent de manière très satisfaisante les résultats expérimentaux.

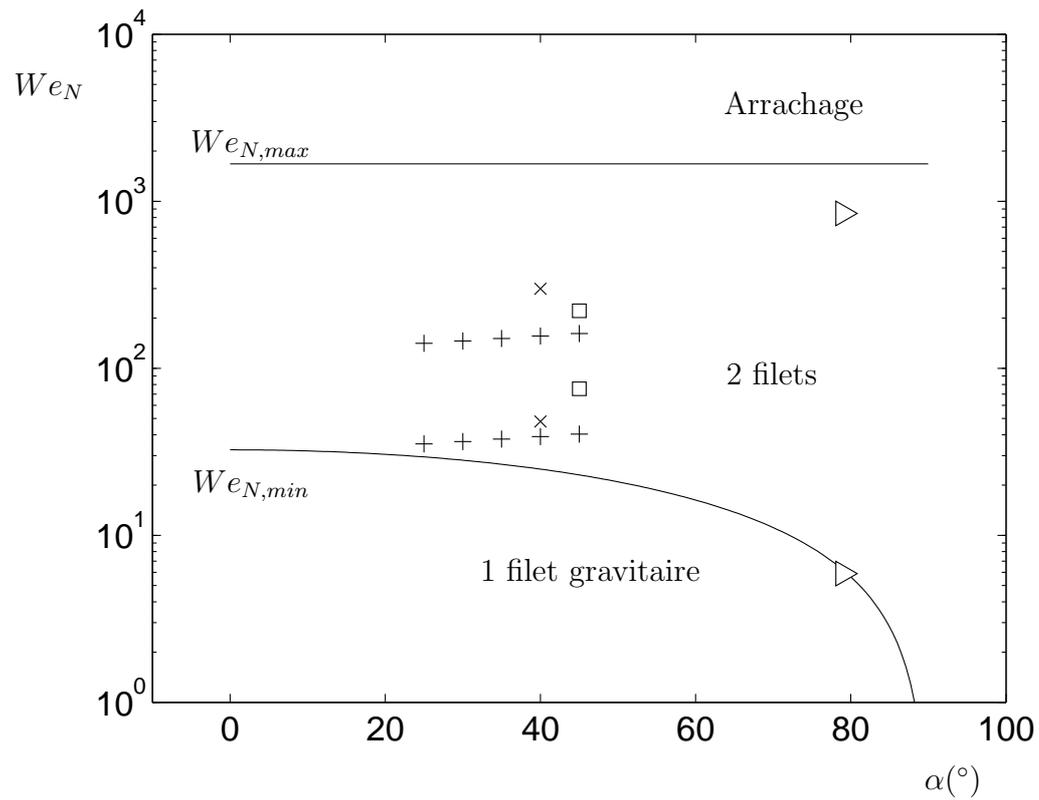


FIG. 2.21 – Nombre de Weber normal, éq. (2.37), en fonction de l’inclinaison du câble α . Comparaison des valeurs expérimentales extrêmes avec les valeurs théoriques, d’existence des filets dans le cas (I). Mesures de (\square) Hikami & Shiraishi (1988), (\times) Matsumoto *et al.* (1992), (\triangleright) Seidel & Dinkler (2004) et ($+$) Gu & Du (2005). (–) Bornes inférieure et supérieure d’existence des deux filets, calculées avec un chargement de vent transcritique $Re_g = 10^5$.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'aspect hydrodynamique des filets d'eau réputés responsables des vibrations induites par le vent et par la pluie. Les filets ont été considérés comme l'évolution continue d'un mince film d'eau autour d'un cylindre soumis à la gravité et à un écoulement d'air. Le modèle de lubrification que nous avons développé a permis de prévoir que le lieu d'apparition des filets résulte d'une compétition entre gravité et chargement de vent au travers du nombre de Froude. Au delà d'un nombre de Froude critique, les filets se positionnent au niveau des points de décollement de l'écoulement d'air autour du cylindre. Ces résultats théoriques ont été corroborés par de nouvelles expériences ainsi que par des résultats expérimentaux antérieurs.

Après simplification de l'équation de lubrification, nous avons pu calculer la forme des filets dont le rapport de forme concorde très bien avec les observations. Le nombre de Froude critique correspond à une limite basse en vitesse pour l'apparition d'un deuxième filet, le filet dit 'haut' ou 'aval', qui est indispensable pour que les RWIV se produisent.

En équilibrant la force résultant de la friction et la force résultant de la tension de surface, nous avons pu prédire une limite haute en vitesse de vent pour l'existence des filets.

Chapitre 3

Interaction des filets avec le sillage

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la position des filets résulte d'une compétition entre la gravité et le vent, quantifiée par le nombre de Froude. Lorsque le nombre de Froude est assez grand, les filets se positionnent près des points de décollement, lieu où l'écoulement d'air est le plus réceptif aux perturbations, section 4.3.2. Dès lors, malgré sa petite taille et donc sa faible masse, un filet peut perturber significativement l'écoulement. En retour, s'il fluctue, l'écoulement va perturber le filet. Ces constatations laissent à penser qu'un couplage est possible.

Dans la section 3.1, nous nous intéresserons à la dynamique de vibration des filets. Puis, nous présenterons un modèle de couplage entre les filets et le sillage oscillant, section 3.2. Nous discuterons les résultats de ce modèle dans la section 3.3. Finalement, nous définirons dans la section 3.4 un intervalle pour lequel un couplage filets-sillage a lieu.

3.1 Vibration des filets

Les expériences d'Alam & Zhou (2006) (section 1.4.2) mettent en évidence une forte amplification de la force transverse fluctuante agissant sur le cylindre, lorsqu'il est parcouru par des filets d'eau, pour certaines valeurs de la vitesse de l'écoulement d'air. Ces observations nous conduisent à penser qu'un phénomène d'accrochage se produit entre l'écoulement et un autre oscillateur présent lors de l'expérience. Le cylindre étant rigide, donc de fréquence propre très élevée, ce n'est donc pas lui qui interagit avec le sillage contrairement aux VIV classiques. Nous émettons l'idée que ce sont les filets qui jouent le rôle d'oscillateurs. Lors de son expérience, Alam n'a pas cherché à mettre en évidence la vibration des filets. Dans le paragraphe qui suit, nous réalisons au LadHyX une expérience similaire lors de laquelle nous cherchons à mettre en évidence l'oscillation des filets.

3.1.1 Détection expérimentale de la vibration des filets

Nous présentons ici une expérience visant à détecter une éventuelle vibration des filets pour différentes vitesses de vent.

Dispositif expérimental

Un cylindre de diamètre $D = 2$ cm est suspendu dans une soufflerie produisant un écoulement d'air de vitesse U , figure 3.1(a). Il est incliné de $\alpha = 83^\circ$ par rapport à l'horizontale et $\beta = 90^\circ$. De l'eau colorée ruisselle autour du cylindre qui est blanc. Deux filets d'eau symétriques se forment sous l'effet de l'écoulement d'air. L'expérience est réalisée pour plusieurs vitesses d'écoulement, proches de $U = 5$ m/s. Un des deux filets est filmé de côté à l'aide d'une caméra rapide.

On étudie l'évolution en temps du niveau de gris du signal lumineux en deux points, figure 3.1(b) : au point A , situé sur le bord du filet pour des raisons de contraste ; le second point B est choisi sur une zone sèche du cylindre et sert de témoin.

Résultats expérimentaux et interprétation

Nous avons calculé la transformée de Fourier des signaux $s_A(t)$ et $s_B(t)$, pour les différentes vitesses U testées. Sur la figure 3.2 est représentée la norme de la FFT (Fast Fourier Transform calculée avec le logiciel Matlab) en fonction de la fréquence.

En dessous de $U = 5.3$ m/s, aucune fréquence ne se distingue du bruit. Au delà de cette valeur, un pic apparaît dans le spectre associé au point A . Cela signifie que pour certaines vitesses, donc certaines fréquences de détachement tourbillonnaire, le filet vibre.

Dans l'intervalle des vitesses pour lesquelles un pic existe, la fréquence croît avec la vitesse, $f = 57$ Hz pour $U = 5.3$ m/s et $f = 65$ Hz pour $U = 5.5$ m/s.

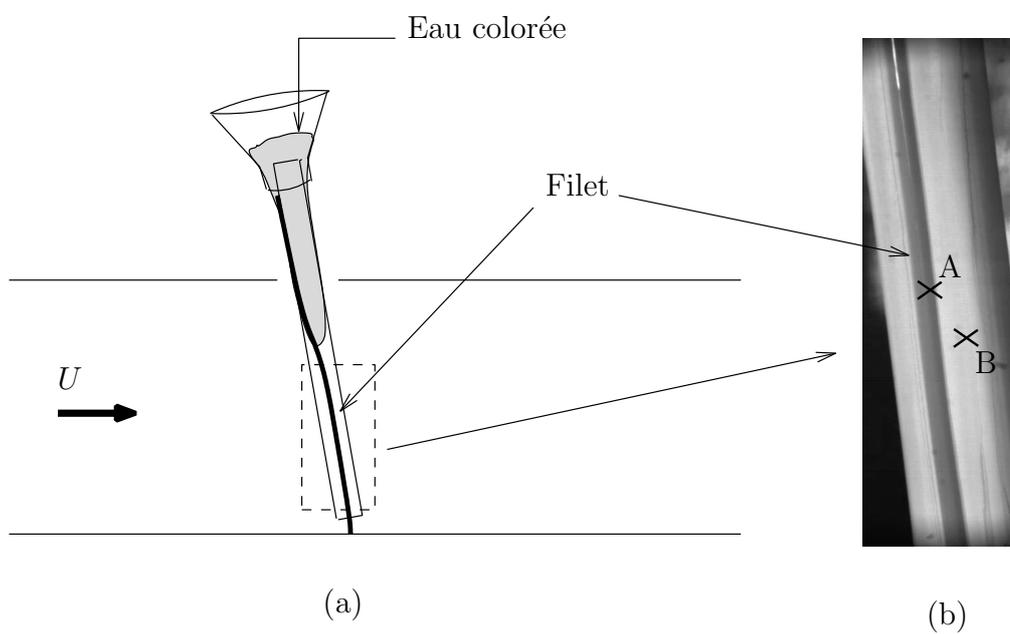


FIG. 3.1 – (a) Dispositif expérimental pour la mise en évidence d’une vibration des filets. (b) Photo d’un filet pour une vitesse d’écoulement d’air $U = 4.4$ m/s. Le point A se trouve sur le filet et le point B sur une zone sèche du cylindre.

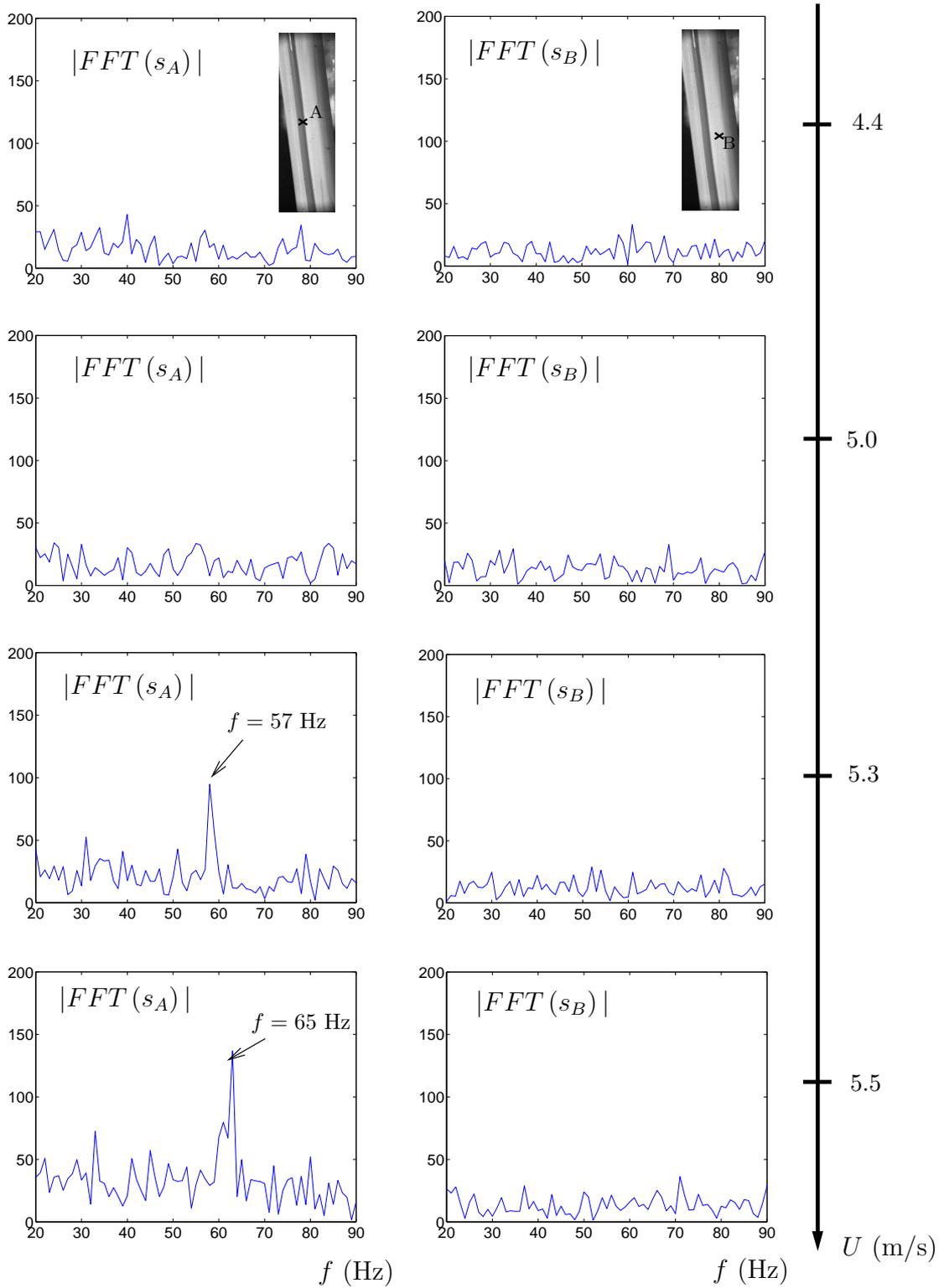


FIG. 3.2 – Spectre des signaux lumineux enregistrés en plusieurs points pour différentes vitesses d'écoulement d'air $U = 4.4, 5.0, 5.3$ et 5.5 m/s. $|FFT(s_A)|$: Signal enregistré au point A, sur le bord du filet, ; $|FFT(s_B)|$: Signal au point B sur une zone sèche du cylindre, fig. 3.1.

Comparons ces fréquences de vibration avec la fréquence de détachement tourbillonnaire f_{dt} . Pour la vitesse $U = 5.3$ m/s, $f_{dt} = 53$ Hz. Lorsque $U = 5.5$ m/s, $f_{dt} = 55$ Hz. Lorsque la vibration des filets a lieu, elle se fait à une fréquence donc proche de la fréquence de détachement tourbillonnaire.

Ces résultats nous conduisent à penser que les filets ont un comportement d'oscillateurs qui entrent en vibration lorsqu'on les excite à une fréquence qui leur est propre.

3.1.2 Modes de ballottement capillaire d'un filet

L'expérience décrite au paragraphe 3.1.1 montre que les filets d'eau vibrent lorsqu'ils sont excités à certaines fréquences. On songe donc à des modes propres de vibration de la surface libre du filet. Intéressons-nous à la vibration d'une goutte, système dont les caractéristiques sont proches de celles d'un filet.

Modes de vibration d'une goutte

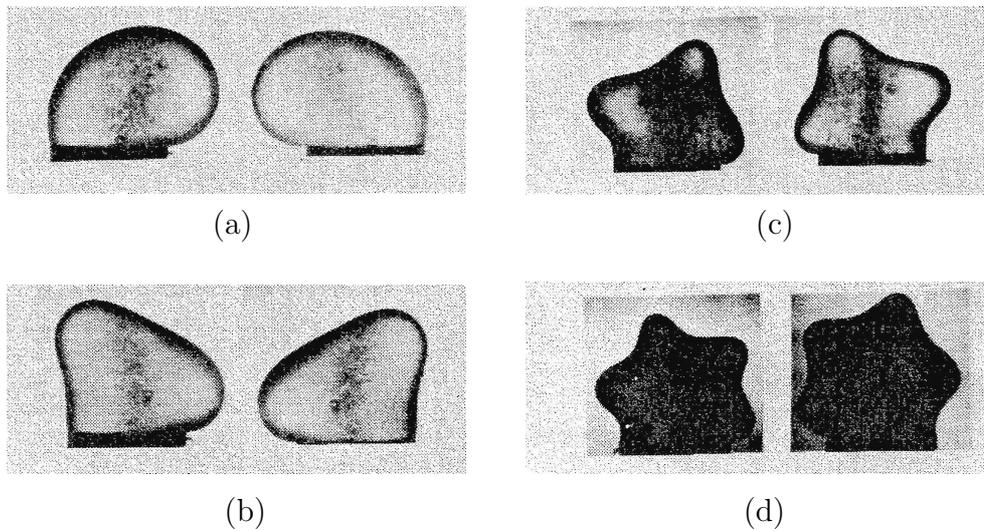


FIG. 3.3 – Modes de vibration d'une goutte posée sur un support vibrant horizontalement (a) Premier mode; (b) deuxième mode; (c) troisième mode; (d) quatrième mode. D'après Bisch (1981).

Dans la littérature, il existe des travaux portant sur des gouttes oscillantes. Bisch (1981) a notamment étudié expérimentalement le comportement d'une goutte posée sur un support vibrant horizontalement. Il a mis à jour l'existence de modes de vibration de la surface de la goutte, figure 3.3. Ces modes vibratoires sont dus à la raideur de la surface libre induite par la tension superficielle, γ .

Nous appellerons ce phénomène ballotement capillaire, par analogie avec le ballotement gravitaire, Ibrahim (2005).

Modes de vibration d'un filet

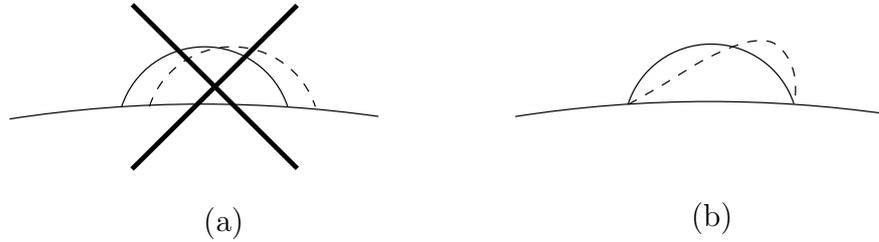


FIG. 3.4 – Lors de sa vibration, on suppose que le filet se déforme sans que ses bords ne bougent.

A l'exemple d'une goutte, un filet d'eau peut être sujet au ballotement capillaire. Nous supposons que, lors de sa vibration, le filet se déforme mais que ses bords ne se déplacent pas, figure 3.4.

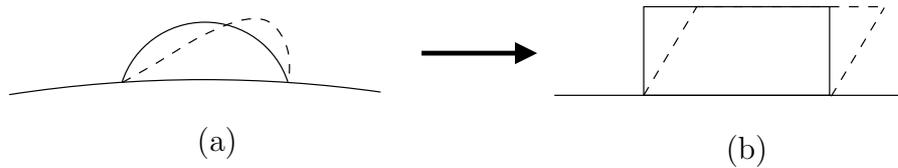


FIG. 3.5 – La section du filet est modélisée par un rectangle qui se déforme en parallélogramme lors de sa vibration.

Nous assimilons dans la suite le filet à un rectangle de hauteur h_{max} et de largeur L . La déformation du filet se produit par cisaillement du rectangle en parallélogramme, figure 3.5.

Fréquence propre

On peut évaluer la fréquence propre du premier mode de vibration d'un filet grâce à la méthode de Rayleigh, den Hartog (1985) et Volterra & Zachmanoglou (1965). La section du filet, figurée par un rectangle, a une hauteur h_{max} et une longueur L , figure 3.6. Lors de la déformation, le déplacement ζ d'un point du filet dépend alors de sa hauteur y et du temps t

$$\zeta(y, t) = d(t) \frac{y}{h_{max}} \mathbf{e}_x, \quad (3.1)$$

où $d(t)$ est une fonction sinusoïdale de faible amplitude et y/h_{max} est la déformée modale du filet.

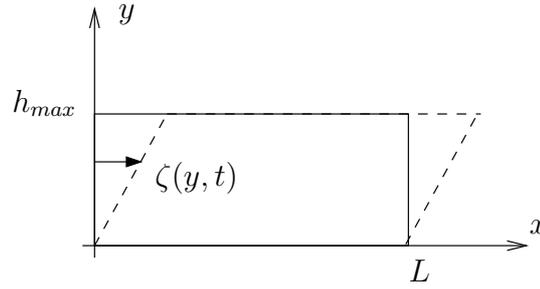


FIG. 3.6 – Notations pour la détermination de la fréquence du premier mode de ballottement capillaire.

Nous évaluons l'énergie potentielle par unité de longueur de filet, E_p , associée à la déformation du filet. Elle est égale à l'énergie qu'il a fallu fournir pour faire varier le périmètre ℓ de la section, De Gennes *et al.* (2002)

$$E_p = \gamma \Delta \ell . \quad (3.2)$$

La variation de périmètre s'exprime en fonction de $d(t)$ et h_{max} ,

$$\Delta \ell = 2 \left(\sqrt{h_{max}^2 + d^2} - h_{max} \right) \approx \frac{d^2}{h_{max}} , \quad (3.3)$$

d'où

$$E_p = \frac{\gamma}{h_{max}} d^2 . \quad (3.4)$$

Cette forme est identifiée avec l'expression $E_p = \frac{1}{2} K d^2$ et l'on obtient une expression de la raideur modale,

$$K = \frac{2\gamma}{h_{max}} . \quad (3.5)$$

L'énergie cinétique par unité de longueur E_c s'exprime

$$E_c = \frac{1}{2} \int \dot{\zeta}^2 dm , \quad (3.6)$$

où $\dot{\zeta}$ est la vitesse d'une particule fluide du filet et $dm = \rho L dy$ sa masse. En utilisant l'équation (3.1) et intégrant sur la hauteur, on obtient,

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^{h_{max}} \rho L \left(\dot{\zeta} \frac{y}{h_{max}} \right)^2 dy = \frac{\rho h_{max} L}{6} \dot{\zeta}^2 . \quad (3.7)$$

Après identification avec l'expression $E_c = \frac{1}{2} M \dot{\zeta}^2$, on peut exprimer la masse modale M ,

$$M = \frac{\rho h_{max} L}{3} . \quad (3.8)$$

Nous en déduisons une approximation de la fréquence du premier mode de ballottement, $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K/M}$,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6\gamma}{\rho h_{max}^2 L}} \quad (3.9)$$

Dans le cas (II)a, la largeur des filet est de $L = 3$ mm et l'épaisseur maximale de $h_{max} = 1$ mm. La fréquence propre est alors estimée à

$$f_0 \approx 61 \text{ Hz} \quad . \quad (3.10)$$

Ceci est tout à fait cohérent avec les fréquences de vibration mesurées, $f = 57$ et $f = 65$ Hz (paragraphe 3.1.1).

Pour le cas (II)b, la largeur vaut $L = 5$ mm et la hauteur des filets $h_{max} = 2$ mm. La fréquence propre vaut donc

$$f_0 \approx 30 \text{ Hz} \quad . \quad (3.11)$$

Cette dernière valeur sera renseignée dans le modèle présenté à la section 3.2 pour une comparaison quantitative avec les expériences d'Alam & Zhou (2006).

3.1.3 Résumé de la section

Grâce à une nouvelle expérience en soufflerie, nous avons montré que des filets d'eau ruisselant le long d'un cylindre sous l'effet d'un écoulement d'air peuvent vibrer pour certaines vitesses d'écoulement d'air U . La fréquence de vibration croît avec U et est proche de la fréquence de détachement tourbillonnaire.

Nous avons ensuite étudié les modes de vibration d'un filet d'eau induits par la tension de surface : les modes de ballottement capillaire. Grâce à une étude énergétique, nous avons obtenu une expression de la fréquence propre du mode fondamental faisant intervenir la tension de surface ainsi que les dimensions du filet. La valeur obtenue dans le cas (II)a correspondant à l'expérience présentée dans le paragraphe 3.1.1 est très réaliste.

3.2 Une modélisation du couplage sillage-filets

L'expérience décrite au paragraphe 3.1.1, cas (II)a, et celle d'Alam & Zhou (2006), cas (II)b, suggèrent une interaction entre l'écoulement d'air et les filets dans une gamme réduite de vitesse. Nous avons en conséquence élaboré un modèle pour décrire cette interaction. Pour cela, nous avons représenté l'oscillateur que constitue le sillage par l'équation de van der Pol et le filet par un oscillateur linéaire amorti.

3.2.1 Premier degré de liberté : les filets

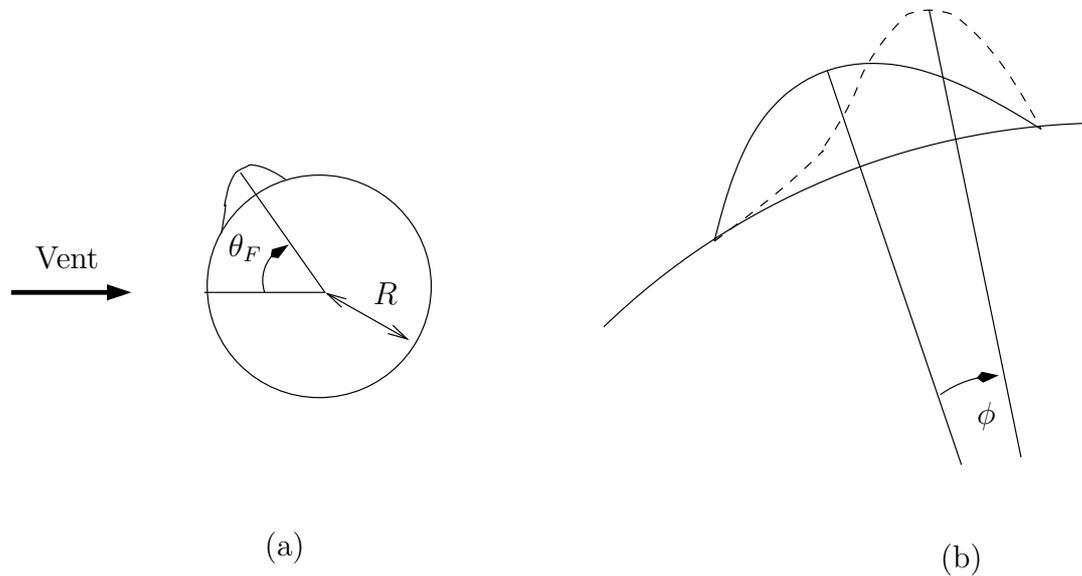


FIG. 3.7 – Déplacement du maximum de l'épaisseur d'un filet selon son mode de ballottement fondamental.

Nous supposons que les sollicitations extérieures excitent principalement le premier mode de ballottement des filets. Nous écrivons l'équation d'oscillation de ce mode. Le déplacement du maximum d'épaisseur par rapport à sa position moyenne s'écrit $R\phi(t)$, figure 3.7. La masse modale, M , est utilisée, éq. (3.8). La raideur modale, K , est exprimée en fonction de la masse et la pulsation propre $\omega_0 = 2\pi f_0$, $K = M\omega_0^2$. Les vibrations peuvent être amorties sous l'effet de la viscosité dans le filet ou de la friction de l'air avec un coefficient par unité de longueur r .

L'équation d'oscillation du filet s'écrit donc

$$M \left(R\ddot{\phi} \right) + r \left(R\dot{\phi} \right) + M\omega_0^2 (R\phi) = 0 . \quad (3.12)$$

Le temps est adimensionné par la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur filet et après simplification, l'équation suivante est obtenue

$$\ddot{\phi} + \lambda \dot{\phi} + \phi = 0, \quad (3.13)$$

où $\lambda = 3r/(\rho h_{max} L \omega_0)$.

3.2.2 Second degré de liberté : le sillage oscillant

Le détachement tourbillonnaire (paragraphe 1.2.1) dans le sillage du cylindre est un phénomène périodique. En conséquence, la force qu'exerce l'écoulement sur le cylindre fluctue avec la même période.

On décrit classiquement la dynamique du sillage oscillant par l'équation de van der Pol, Bishop & Hassan (1964)

$$\ddot{q} + \varepsilon \Omega_{St} (q^2 - 1) \dot{q} + \Omega_{St}^2 q = 0, \quad (3.14)$$

où q désigne une grandeur du sillage et Ω_{St} est la pulsation du sillage, $\Omega_{St} = 2\pi St U_N/D$.

C'est une équation d'oscillateur non-linéaire amorti. L'amortissement est négatif, $-\varepsilon$, mais le terme non-linéaire $\varepsilon^2 \dot{q}$ garantit une saturation d'amplitude $q_0 = 2$. Si l'on donne une légère amplitude initiale à la variable q , elle évoluera vers un cycle limite dans l'espace des phases (q, \dot{q}) .

Comme dans le travail de Hartlen & Currie (1970), q désignera dans la suite l'amplitude du coefficient de force transverse fluctuante $C_y(t)$, figure 3.9, ramenée à l'amplitude sans accrochage C_{y0} ,

$$q(t) = \frac{2C_y(t)}{C_{y0}}. \quad (3.15)$$

3.2.3 Couplage entre les deux degrés de liberté

Du fait du détachement tourbillonnaire, les grandeurs de l'écoulement d'air varient périodiquement. Nous pouvons modéliser ceci par une rotation périodique des champs de pression et de friction moyens autour du cylindre. Dans cette représentation, la direction de la force de traînée oscille à la fréquence de détachement tourbillonnaire avec une faible amplitude $\Theta(t)$, figure 3.10(b),

$$\Theta(t) \ll 1 \quad (3.16)$$

Du fait de cette rotation, une force transverse apparaît dont l'amplitude adimensionnée, C_y , s'exprime en fonction du coefficient de traînée moyen C_D , figure 3.10(b),

$$C_y = -C_D \sin \Theta \approx -C_D \Theta, \quad (3.17)$$

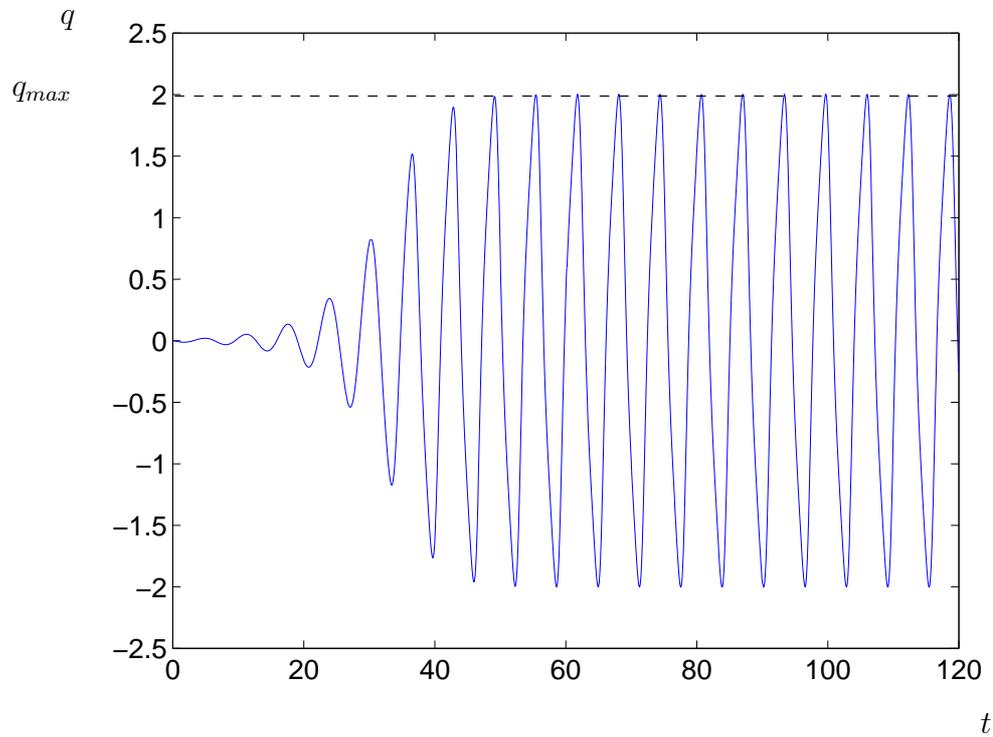


FIG. 3.8 – Evolution selon l'équation de van der Pol de la variable de sillage q en fonction du temps adimensionné, pour $\Omega_{St} = 1$, $\varepsilon = 0.3$, $q(0) = 0.01$.

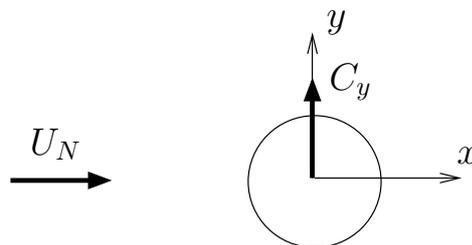


FIG. 3.9 – Coefficient de force transverse fluctuante C_y s'appliquant sur le cylindre du fait de l'instationnarité de l'écoulement d'air.

d'où

$$\Theta = -\frac{C_{y0}q}{2C_D}. \quad (3.18)$$

Action du sillage sur un filet

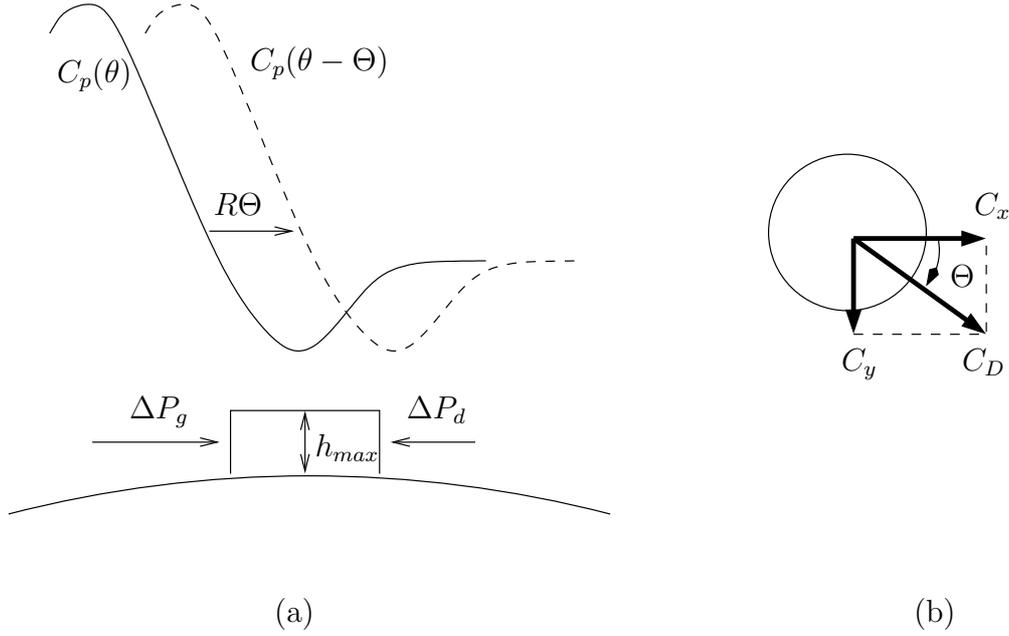


FIG. 3.10 – Effet d'une rotation Θ du champ de pression C_p sur un filet.

Si le champ de pression effectue une rotation Θ ,

$$C_p(\theta) \rightarrow C_p(\theta - \Theta), \quad (3.19)$$

une surpression s'établit à gauche ΔP_g et une dépression à droite ΔP_d , fig. 3.10(a). Une force F s'exerce donc sur le filet,

$$F = (\Delta P_g - \Delta P_d) h_{max} = \frac{1}{2} \rho_g U_N^2 (\Delta C_p^g - \Delta C_p^d) h_{max}, \quad (3.20)$$

où ρ_g et U_N sont la masse volumique et la vitesse amont de l'écoulement d'air. En utilisant l'équation (3.16), la variation des coefficients de pression à gauche ΔC_p^g et à droite ΔC_p^d du filet s'exprime

$$\begin{aligned} \Delta C_p^g &\approx -\Theta \partial_\theta C_p|_g, \\ \Delta C_p^d &\approx -\Theta \partial_\theta C_p|_d, \end{aligned} \quad (3.21)$$

d'où

$$F = -\frac{1}{2}\rho_g U_N^2 h_{max} \Theta (\partial_\theta C_p|_g - \partial_\theta C_p|_d) . \quad (3.22)$$

Cette force est injectée dans le second membre de l'équation (3.12) et l'on obtient après adimensionnement l'équation du filet

$$\ddot{\phi} + \lambda \dot{\phi} + \phi = -B \Omega^2 q$$

dans lequel $B = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\mathcal{M}}{St^2} \frac{C_{y0}}{C_D} \frac{R}{L} (\partial_\theta C_p|_d - \partial_\theta C_p|_g) ,$ (3.23)

où $\mathcal{M} = \rho_g/\rho$ est le rapport des masses volumiques air-eau et où l'on a fait apparaître la pulsation réduite Ω , de Langre (2006),

$$\Omega = St U_r = \frac{St 2\pi U_N}{\omega_0 D} \quad (3.24)$$

Action des filets sur le sillage

Les filets sont des protubérances qui peuvent forcer le décollement de la couche limite. Lorsque le maximum des filets se déplace d'un angle ϕ , nous supposons que le champ de pression effectue une rotation du même angle, figure 3.11.

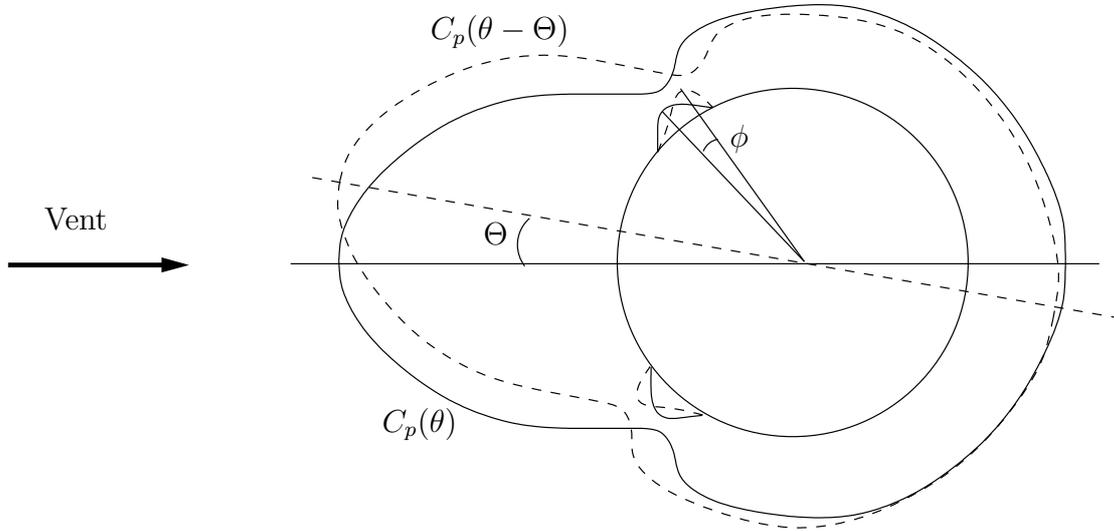


FIG. 3.11 – Le déplacement du maximum d'épaisseur des filets produit une rotation du champ de pression.

Cependant la réaction du sillage n'est pas instantanée et nécessite un temps de retard τ pour que l'écoulement se réorganise,

$$\Theta(t) = \phi(t - \tau) . \quad (3.25)$$

En utilisant l'équation (3.18), on obtient l'équation de rétroaction

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \varepsilon\Omega (q^2 - 1) \dot{q} + \Omega^2 q &= -A\Omega^2 \phi(t - \tau) , \\ \text{avec ici } A &= \frac{2C_D}{C_{y0}} . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le système différentiel couplé que nous étudions dorénavant est le suivant

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \lambda\dot{\phi} + \phi &= -B\Omega^2 q , \\ \ddot{q} + \varepsilon\Omega (q^2 - 1) \dot{q} + \Omega^2 q &= -A\Omega^2 \phi(t - \tau) , \\ \text{avec } A &= \frac{2C_D}{C_{y0}} , \\ B &= \frac{3}{4\pi^2} \frac{\mathcal{M}}{St^2} \frac{C_{y0}}{C_D} \frac{R}{L} (\partial_\theta C_p|_d - \partial_\theta C_p|_g) . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Valeur des coefficients du système différentiel couplé

Pour évaluer les coefficients de couplage entre les oscillateurs que constituent les filets et l'oscillateur sillage, nous nous plaçons dans le cas (II)b, typique des expériences d'Alam. Le rayon du cylindre vaut $R \approx 1$ cm et la largeur des filets $L = 5$ mm.

Le coefficient de force transverse hors accrochage est proche de $C_{y0} = 0.5$, Blevins (1977). Le coefficient de traînée vaut typiquement $C_D \approx 1$, figure 1.5. La dérivée du coefficient de pression au voisinage du minimum sur une largeur de $\Delta\theta = L/R$ est de $\partial_\theta C_p|_d = -\partial_\theta C_p|_g = 3.5$ (d'après Achenbach (1968), $Re_g = 10^5$). Le nombre de Strouhal pour les nombres de Reynolds impliqués, $Re_g \approx 10^4$, vaut environ $St \approx 0.2$.

Pour ces valeurs, les coefficients de couplage sont donc égaux à

$$B = 1.6 \cdot 10^{-2} \quad A = 4.0 . \quad (3.28)$$

Le coefficient d'amortissement d'un filet est choisi arbitrairement, $\lambda = 0.1$. Dans le cas de vibrations de cylindres induites par détachement tourbillonnaire, Facchinetti *et al.* (2004) a évalué le coefficient de non linéarité de l'oscillateur de van der Pol à $\varepsilon = 0.3$. Nous adoptons cette valeur.

Estimation du retard du sillage

Nous avons supposé que le sillage réagissait avec retard à un déplacement des filets et avons introduit le temps τ dans les équations (3.26) et (3.27)b. Ce temps de retard peut être mis sous la forme

$$\tau = \alpha \frac{\pi}{\Omega} , \quad (3.29)$$

où α est un coefficient adimensionnel de retard. Pour évaluer ce coefficient de retard, nous étudions la réponse d'un écoulement d'air autour d'un cylindre tournant périodiquement autour de son axe.

Un calcul numérique laminaire bidimensionnel a été réalisé par Françoise Santi du Département de Mathématiques du CNAM. Le code de calcul utilisé est décrit par Hémon & Santi (2002). Il s'agit d'une résolution des équations de Navier-Stokes en écoulement laminaire incompressible, instationnaire et bidimensionnel autour d'un cylindre tournant périodiquement sur son axe, figure 3.12.

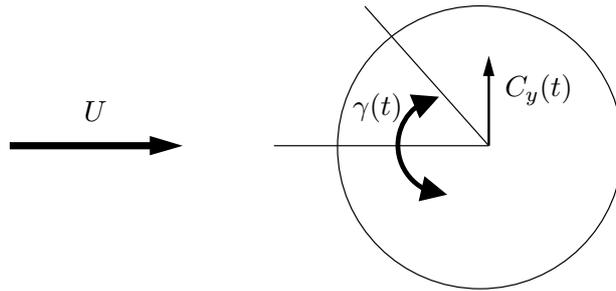


FIG. 3.12 – Cylindre oscillant en rotation dans un écoulement d'air transverse. Le cylindre oscille autour de son axe avec une pulsation Ω et une amplitude $\gamma_0 = 0.122$ rad, de sorte que le déplacement angulaire du cylindre s'exprime, $\gamma(t) = \gamma_0 \cos(\Omega t)$. La force transverse fluctuante harmonique, C_y , qui en résulte est en retard de phase, $C_y = C_{y0} \cos(\Omega t - \varphi)$. Le déphasage φ est estimé grâce à une résolution numérique des équations de Naviers-Stokes décrivant l'écoulement d'air.

Le nombre de Reynolds effectif $Re_g = 180$ est certes beaucoup plus faible que nos deux cas, cas (I), $Re_g = 10^5$ et cas (II), $Re_g = 10^4$, mais le détachement tourbillonnaire à l'origine des Allées Von Karman est déjà présent.

La fréquence de forçage choisie est la fréquence de détachement tourbillonnaire, $\gamma(t) = \gamma_0 \cos(\Omega t)$, avec une amplitude $\gamma_0 = 0.122$ rad. Dans ce cas, le coefficient de force transverse instantané résultant est pratiquement harmonique $C_y(t) = C_{y0} \cos(\Omega t - \varphi)$ et présente un déphasage de $\varphi > 0$ par rapport au forçage, figure 3.13. Le retard du sillage se déduit aisément de la figure 3.13.

$$\varphi = \frac{2\pi t_R}{T} = 5.85 \text{ rad} \quad (3.30)$$

Le retard φ de la force transverse a deux origines : d'une part, la rotation du cylindre est perçue par l'écoulement avec un retard $\Omega\tau$; d'autre part, l'oscillateur de van der Pol répond avec un déphasage ψ à un forçage harmonique,

$$\varphi = \psi + \Omega\tau . \quad (3.31)$$

Le déphasage de van der Pol est égal à $\psi = \pi/2$ lorsque le forçage a lieu à la fréquence propre de l'oscillateur, voir annexe A.5.

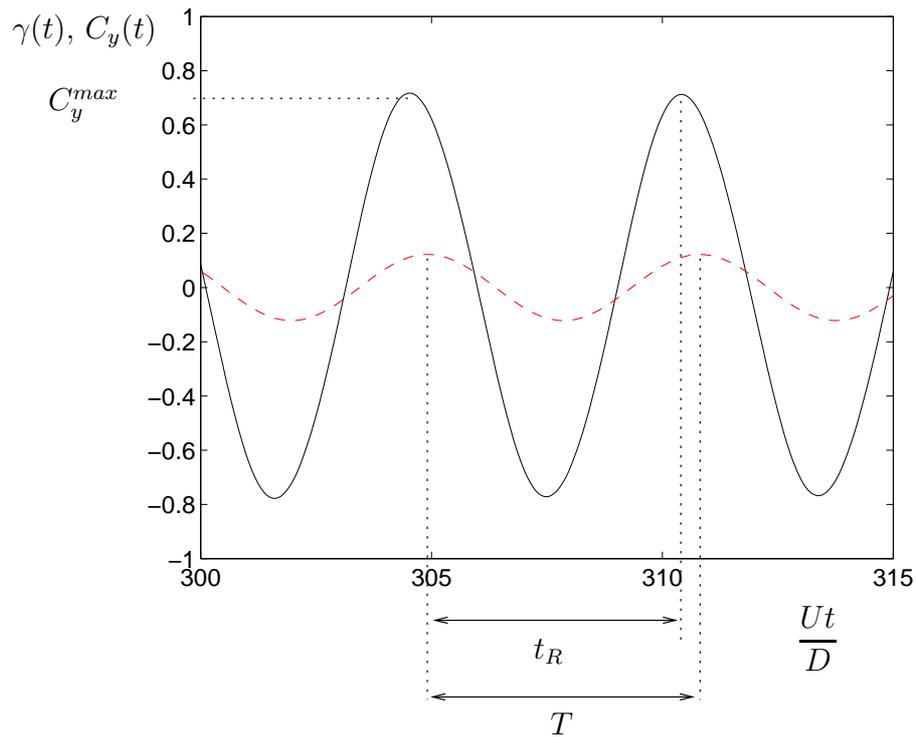


FIG. 3.13 – Réponse d'un écoulement d'air soumis à un cylindre en rotation périodique autour de son axe. (—) Déplacement angulaire du cylindre $\gamma(t)$, (---) coefficient de force transverse fluctuante résultant $C_y(t)$. Le temps est adimensionné par le temps caractéristique U_N/D que met une particule de fluide à parcourir une longueur égale au diamètre D du cylindre à la vitesse de l'écoulement U_N . La force transverse réagit avec un retard de t_R , légèrement inférieur à la période commune T .

Nous pouvons donc estimer le coefficient adimensionnel de retard défini dans le paragraphe précédent,

$$\alpha = \frac{\Omega\tau}{\pi} = \frac{\varphi - \psi}{\pi} \approx 1.36 . \quad (3.32)$$

3.2.4 Résumé de la section

En supposant que les efforts sur les filets excitent principalement le premier mode, chaque filet a été modélisé par un oscillateur harmonique amorti dont les paramètres correspondent au premier mode de vibration. L'évolution de la force transverse fluctuante a été modélisée par l'équation de van der Pol.

Nous avons ensuite couplé ces deux équations. Nous avons ainsi estimé l'effet de la rotation du champ de pression sur la forme des filets. Puis nous avons supposé qu'une déformation des filets entraînait en retour un déplacement des points de décollement et une rotation du champ de pression.

La réaction du champ de pression à une déformation des filets n'est pas instantanée. Le retard a été estimé grâce au calcul numérique de la réponse d'un écoulement d'air autour d'un cylindre tournant périodiquement sur lui-même.

3.3 Résolution de l'équation de couplage et discussion

Dans la section 3.2, un modèle de couplage entre la dynamique des filets et la dynamique du sillage oscillant a été élaboré. Le système différentiel obtenu est résolu dans la section suivante. Pour accéder au comportement fréquentiel du système, nous effectuons d'abord une analyse de stabilité linéaire, puis, par résolution du système complet, nous étudions l'amplitude de la force transverse fluctante et l'amplitude du déplacement des filets.

3.3.1 Etude de stabilité de l'équation linéarisée non amortie

En 2006, de Langre a montré que le phénomène d'accrochage, notamment appliqué au système couplé sillage-câble de Facchinetti *et al.* (2004), pouvait être expliqué grâce à une analyse de stabilité linéaire. Comme de Langre (2006), nous effectuons dans un premier temps une analyse de stabilité linéaire du modèle obtenu dans la section 3.2.3.

Analyse de stabilité linéaire

Pour cela, nous linéarisons le système (3.27) et négligeons l'amortissement dans les deux équations,

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} + \phi &= -B\Omega^2 q, \\ \ddot{q} + \Omega^2 q &= -A\Omega^2 \phi(t - \tau).\end{aligned}\tag{3.33}$$

Nous recherchons des solutions sous la forme de modes normaux, $(\phi, q) = (\phi_0, q_0) e^{i\omega t}$. Le système qui en résulte,

$$\begin{aligned}(1 - \omega^2) \phi_0 + B\Omega^2 q_0 &= 0 \\ A\Omega^2 e^{-i\omega\tau} \phi_0 + (\Omega^2 - \omega^2) q_0 &= 0\end{aligned}\tag{3.34}$$

admet des solutions (ϕ_0, q_0) non trivialement nulles si son déterminant est nul. Nous en déduisons l'équation de dispersion

$$D(\omega) = \omega^4 - (\Omega^2 + 1) \omega^2 + \Omega^2 [1 - AB\Omega^2 e^{-i\omega\tau}] = 0.\tag{3.35}$$

Les solutions $\omega(\Omega)$ de cette équation sont des modes de comportement du système couplé. Pour chaque valeur de Ω , l'équation est résolue à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson (Press *et al.* (1992)), avec un coefficient de couplage $AB = 2.1 \cdot 10^{-2}$, éq. (3.28), et un coefficient de retard $\alpha = 1.36$, éq. (3.32). Les valeurs de Ω sont choisies dans l'intervalle $0 \leq \Omega \leq 3$.

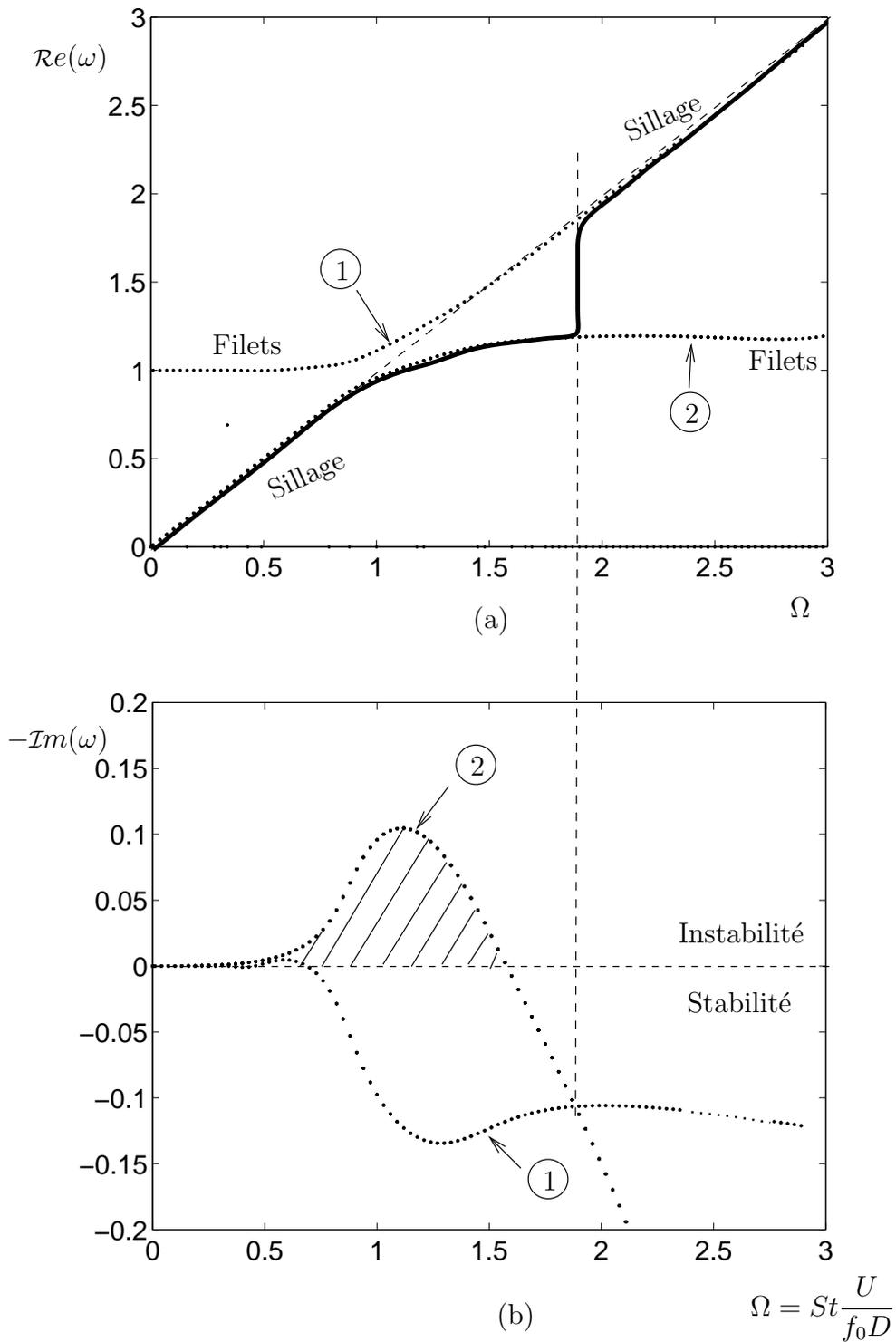


FIG. 3.14 – Deux des quatre modes solutions de l'équation (3.35), les modes ① et ②, ont leur partie réelle positive. (a) Partie réelle (b) Opposé de la partie imaginaire. Le mode dominant est marqué en gras sur la figure (a).

Deux des quatre solutions ont une partie réelle positive, $\mathcal{R}e(\omega) > 0$. Sur la figure 3.14 est représentée la partie réelle et la partie imaginaire de ces deux modes notés ① et ②.

Si l'on examine les parties réelles, figure 3.14(a), on voit que :

* pour des valeurs $\Omega \lesssim 0.5$, la partie réelle du mode ① est constante et proche de 1. Il correspond donc à une oscillation du filet suivant sa pulsation propre ω_0 . Le mode ② varie proportionnellement à Ω , ce qui correspond à une oscillation du sillage de fréquence proportionnelle à la vitesse U_N , conformément à la loi de Strouhal.

* Pour des valeurs de $\Omega \gtrsim 1.85$, le comportement des modes s'inverse : ① correspond au sillage oscillant suivant la loi de Strouhal et ② au filet oscillant à sa pulsation propre.

* Pour $0.5 \lesssim \Omega \lesssim 1.85$, les deux modes se rapprochent.

Lorsque l'on étudie les parties imaginaires des modes, figure 3.14(b), on observe que :

* pour des valeurs $\Omega \lesssim 0.5$, la partie imaginaire des deux modes est très proche de zéro, indiquant qu'ils sont marginalement stables.

* Pour $0.5 \lesssim \Omega \lesssim 1.55$, le mode ② est instable ($\mathcal{I}m(\omega) < 0$), alors que le mode ① est stable.

* Pour $1.55 \lesssim \Omega \lesssim 85$, les deux modes sont stables, mais le mode ① est plus amorti que le mode ②, $\mathcal{I}m(\omega_1) > \mathcal{I}m(\omega_2) > 0$. Au delà de $\Omega \gtrsim 1.85$ c'est le mode ② qui est le plus amorti, $\mathcal{I}m(\omega_2) > \mathcal{I}m(\omega_1) > 0$.

Mode dominant le comportement du système couplé linéaire

La zone $0.5 \lesssim \Omega \lesssim 1.85$, pour laquelle les parties réelles des deux modes se rapprochent et la partie imaginaire du mode ② devient négative, correspond à un flottement par couplage de modes, Blevins (1977). Dans la zone d'accrochage, c'est le mode le plus instable, ou le moins amorti qui régit le système couplé. Comme indiqué sur la figure 3.14(a) par un trait gras, pour $\Omega \lesssim 2$, le système se comporte selon le mode ②. A $\Omega \approx 1.85$ se produit un changement de mode dominant et le système se comporte selon le mode ①.

Comparaison avec les fréquences mesurées par Alam & Zhou (2006)

La fréquence de détachement tourbillonnaire mesurée par Alam & Zhou (2006) en présence de filets est comparée à la partie réelle du mode dominant sur la figure 3.15. Les fréquences expérimentales et les vitesses de vent ont été adimensionnées par la fréquence propre $f_0 = 30$ Hz, calculée à la section (3.1.1). Le mode dominant est bien centré suivant l'axe des abscisses et également suivant l'axe des ordonnées par rapport aux fréquences mesurées ce qui signifie que f_0 a été correctement évaluée. La largeur d'accrochage prévue par le modèle linéaire est en outre en bon accord avec la largeur réelle. Le modèle linéarisé est donc

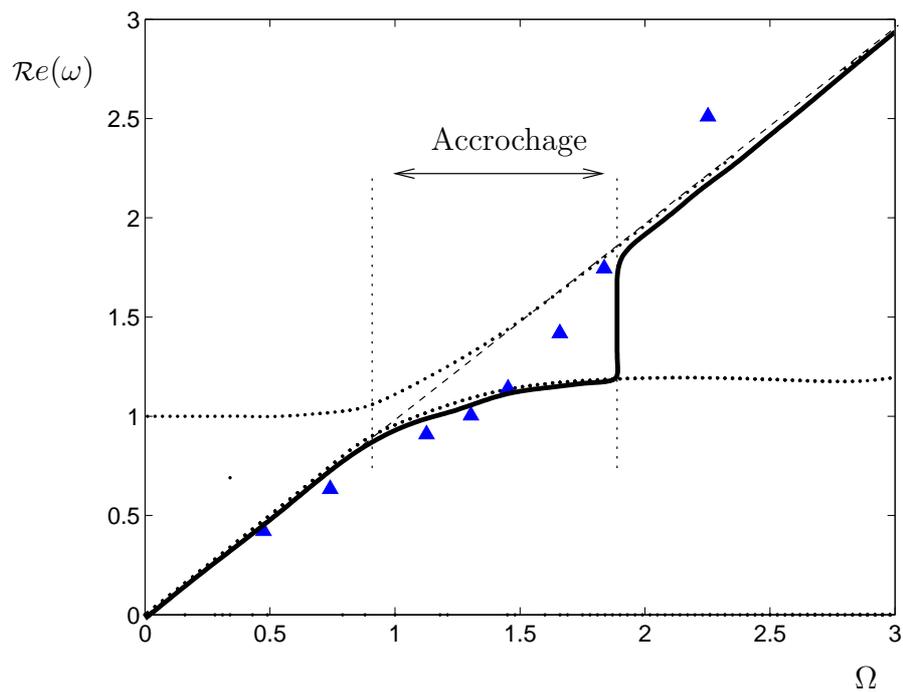


FIG. 3.15 – Comparaison du mode dominant qui gouverne le système linéaire couplé dans l'accrochage avec les mesures de fréquence du détachement tourbillonnaire effectuées par Alam & Zhou (2006). (\cdots) mode ① et mode ②; en gras, mode dominant (mode ② pour $\Omega \lesssim 2$ et mode ① au delà); ($--$) loi de Strouhal; (Δ) expériences.

adapté à une première étude fréquentielle du système.

Cependant l'étude du système linéarisé non amorti (3.33) ne nous permet pas d'accéder aux amplitudes de vibration. Pour cela, il faut réintroduire le terme non linéaire dans l'équation de van der Pol, ainsi que le terme d'amortissement visqueux dans l'équation des filets, et résoudre le système complet (3.27).

3.3.2 Résolution de l'équation non-linéaire avec amortissement

L'étude de stabilité linéaire sans amortissement a mis en évidence un accrochage en fréquence entre les deux degrés de liberté pour un intervalle de vitesse correspondant à la déstabilisation du mode de sillage. Le système linéarisé (3.33), ne permet pas de connaître les amplitudes de vibration du sillage et des filets. Pour les calculer, il faut considérer le système différentiel complet, dont la non linéarité dans l'équation (3.27)b a un effet saturant.

Nous nous intéressons à des pulsations proches de 1, valeur pour laquelle on s'attend à un accrochage, $0 < \Omega < 3$. Pour chaque valeur de Ω , le système (3.27) est résolu numériquement par utilisation de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, Rao (1995). Les paramètres du système sont identiques aux valeurs choisies pour la résolution de l'équation linéarisée, $A = 4$, $B = 1.6 \cdot 10^{-2}$ et $\alpha = 1.36$.

Comparaison au mode dominant issu de l'analyse de stabilité linéaire

La fréquence obtenue est comparée à la fréquence du système linéaire non amorti décrit dans la section précédente, figure 3.16. Les deux fréquences sont en bon accord, même si, lors de l'accrochage, la fréquence obtenue par résolution directe est légèrement plus faible que celle issue de l'analyse linéaire. La largeur d'accrochage linéaire est en outre plus grande que la largeur donnée par résolution directe de l'équation (3.27).

Résultats

Notre modèle conduit à une déviation à la loi de Strouhal de la fréquence de détachement tourbillonnaire, fig. 3.17. Cet accrochage en fréquence est concomitant d'une forte amplification du coefficient de force transverse renormalisée q . Ce qui est qualitativement en accord avec les observations expérimentales. Selon que l'on résout les équations (3.27) en augmentant la vitesse ou en la faisant décroître, les résultats sont différents : le système a un comportement hystérétique.

Cependant, l'amplitude de vibration des filets donnée par le modèle est trop grande $\phi_{max} = 60^\circ$ puisqu'elle va à l'encontre de l'hypothèse que le filet se déplace

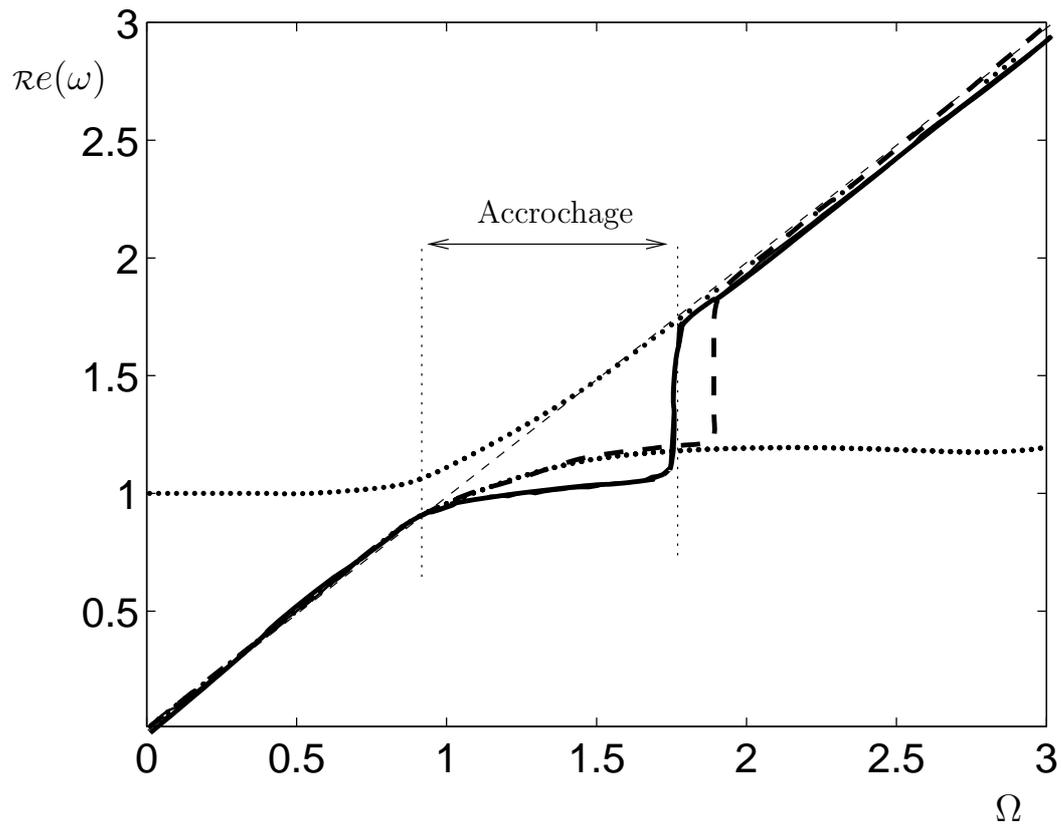


FIG. 3.16 – Comparaison entre le mode dominant issu de l'analyse de stabilité linéaire et la fréquence obtenue par résolution du système différentiel non linéaire. (\cdots) Modes solutions du système linéarisé (3.33); ($--$) mode dominant pour le système linéarisé; ($-$) fréquence du système différentiel non linéaire (3.27).

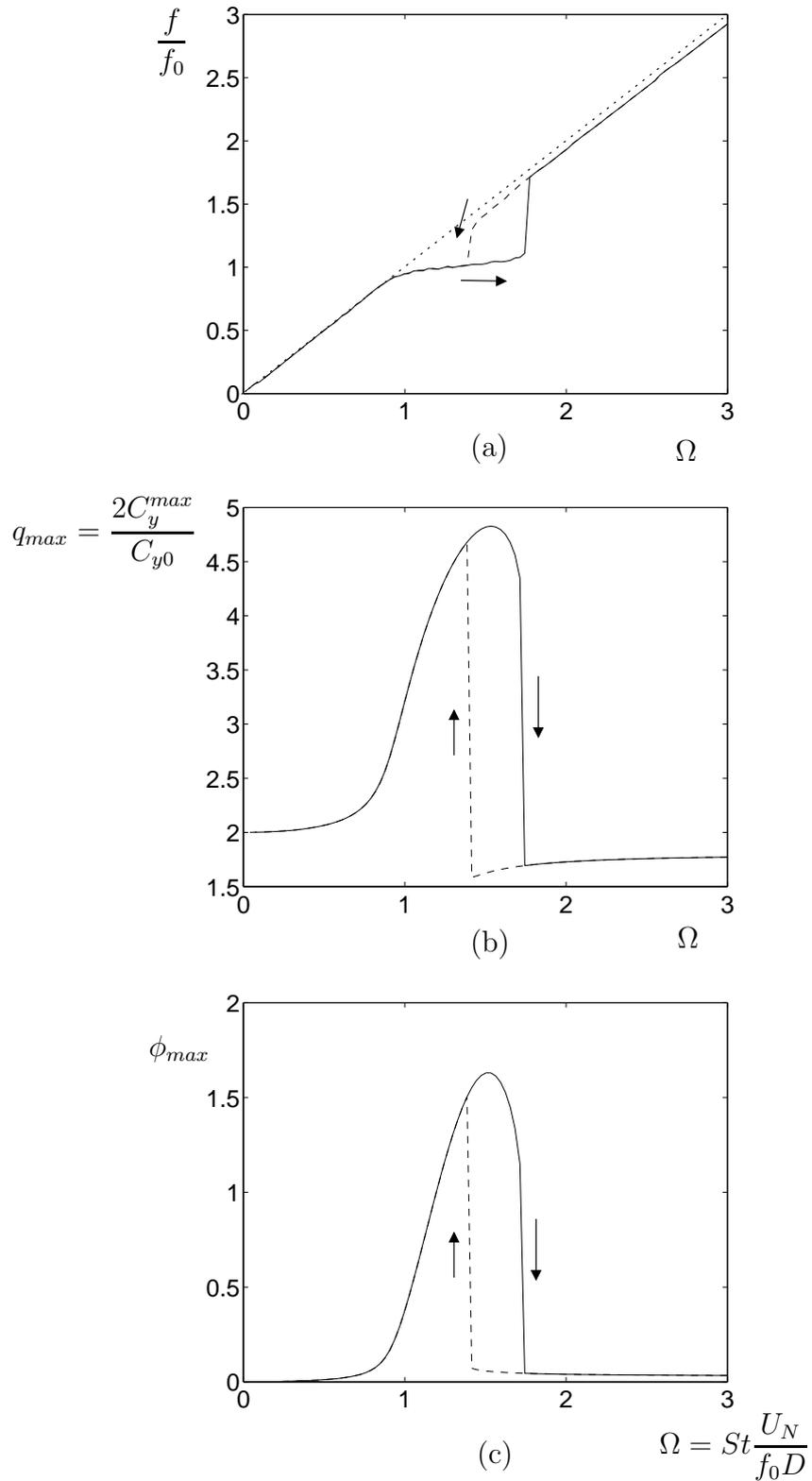


FIG. 3.17 – Résultat du modèle de couplage entre les filets et le sillage. (a) Fréquence du détachement tourbillonnaire f en fonction de la vitesse, U_N ; (\cdots) loi de Strouhal; (b) amplitude q_{max} de la force transverse fluctuante; (c) amplitude angulaire de vibration d'un filet ϕ_{max} . La résolution avec une vitesse croissante (—) et avec une vitesse décroissante (---) met en évidence une hystérèse.

peu, équation (3.16) et que les lignes triples sont fixes. Ceci peut être dû à une mauvaise estimation d'un des paramètres du système.

3.3.3 Comparaison avec les expériences

Les figures 3.18(a) et (b) montrent une comparaison quantitative entre le modèle et les expériences d'Alam, pour une fréquence propre des filets de $f_0 = 30$ Hz, éq. (3.11), et un nombre de Strouhal $St = 0.2$. Sur la figure 3.18(a), on voit que la courbe modèle est bien centrée horizontalement et verticalement par rapport aux points expérimentaux, ce qui valide la fréquence théorique calculée au paragraphe 3.1.2. La largeur d'accrochage du modèle est en outre en très bon accord avec la largeur expérimentale. Cependant, la valeur maximale du coefficient de force transverse est sous-estimée.

3.3.4 Sensibilité aux coefficients

L'amplitude de vibration d'un filet lors de l'accrochage donnée par le modèle n'est pas réaliste. C'est pourquoi nous étudions dans cette section l'effet de plusieurs paramètres du système sur les amplitudes du filet et du sillage oscillant.

Retard du sillage

La valeur du coefficient de retard du sillage a été estimée par un calcul numérique, section 3.2.3. Sur la figure 3.19 sont présentées les solutions de l'équation (3.27) pour différentes valeurs de α .

On voit que plus α est grand, plus la largeur d'accrochage est grande, or la largeur obtenue pour $\alpha = 1.36$ est satisfaisante, section 3.3.3. Si l'amplitude du sillage augmente avec α , l'amplitude de vibration des filets, que l'on voudrait voir diminuer, augmente également. Il n'est donc pas pertinent de modifier le coefficient de retard α .

Amortissement

La valeur du coefficient d'amortissement λ de l'oscillateur-filet a été choisie arbitrairement. Sur la figure 3.20, nous avons fait varier λ .

Une augmentation de l'amortissement produit une baisse de l'amplitude de vibration des filets, ce qui est souhaité, mais aussi du sillage, que l'on préférerait voir augmenter. De plus, la largeur d'accrochage, tout-à-fait conforme pour $\lambda = .1$, est d'autant plus faible que l'amortissement est fort. L'amortissement du filet n'est pas un paramètre efficace pour améliorer le modèle (3.27).

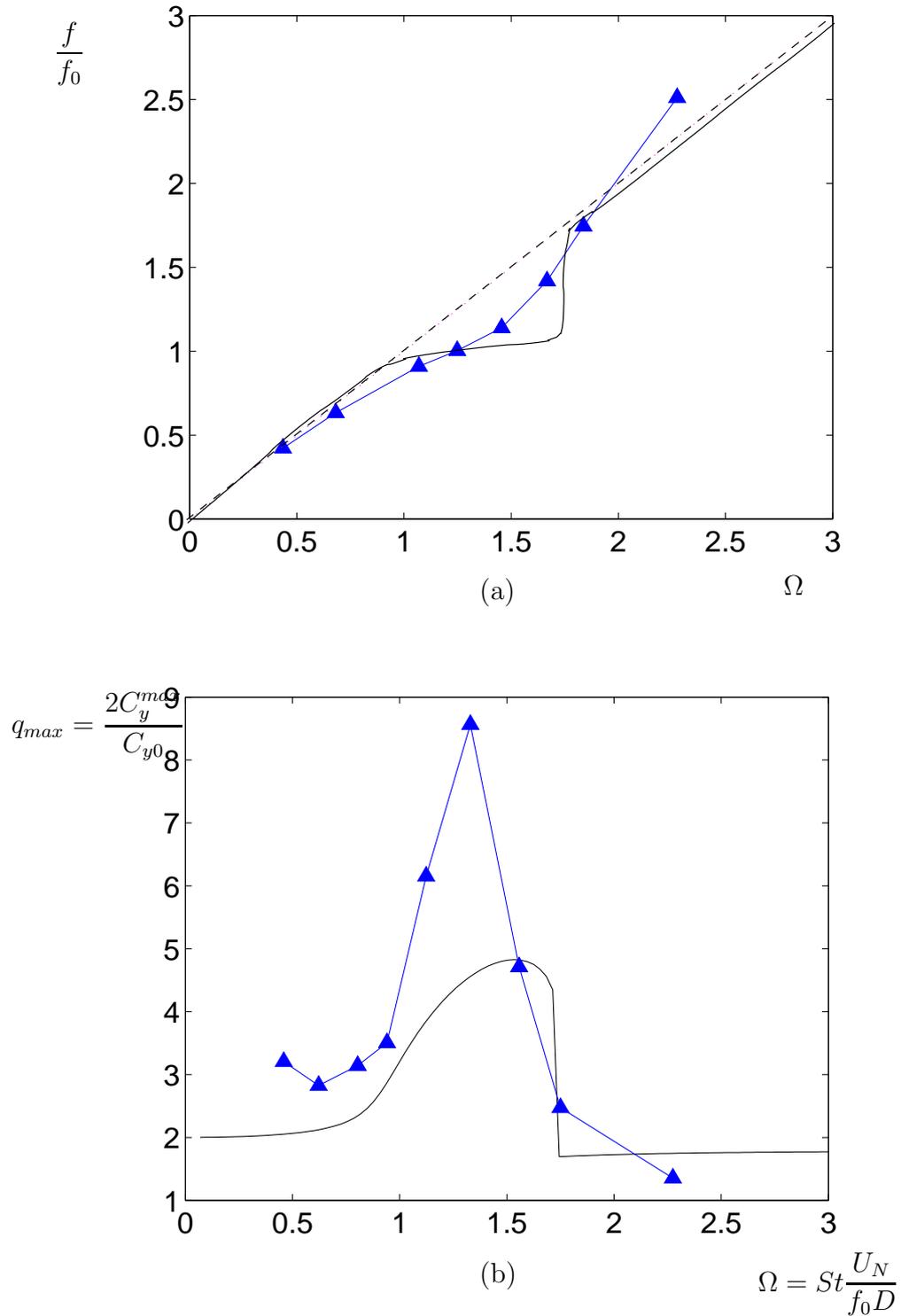


FIG. 3.18 – Comparaison entre les résultats du modèle de couplage filets-sillage et les expériences d'Alam & Zhou (2006). (a) Fréquence du détachement tourbillonnaire f en présence de filets en fonction de la vitesse de l'écoulement U_N . (b) Amplitude d'oscillation de la variable de sillage q en présence de filets en fonction la vitesse de l'écoulement U_N . (—) Solution du modèle (3.27); (Δ) expériences; (---) loi de Strouhal.

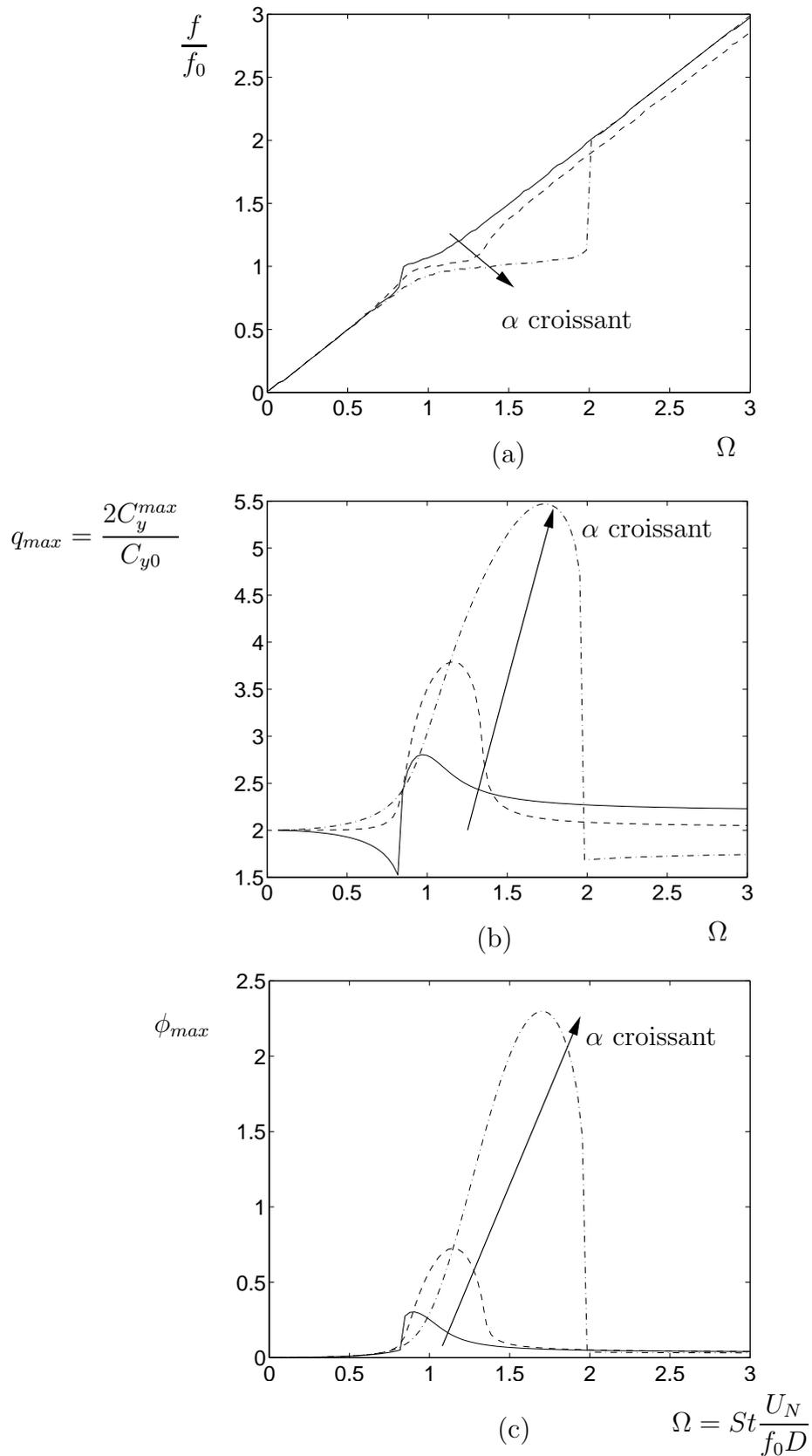


FIG. 3.19 – Solutions du modèle (3.27) pour différentes valeurs du coefficient de retard α . Les calculs ont été menés pour les valeurs $\alpha = 0.5, 1$ et 1.5 . (a) Fréquence de détachement tourbillonnaire en fonction de la vitesse; (\cdots) loi de Strouhal. (b) amplitude de la force transverse fluctuante. (c) amplitude de vibration d'un filet.

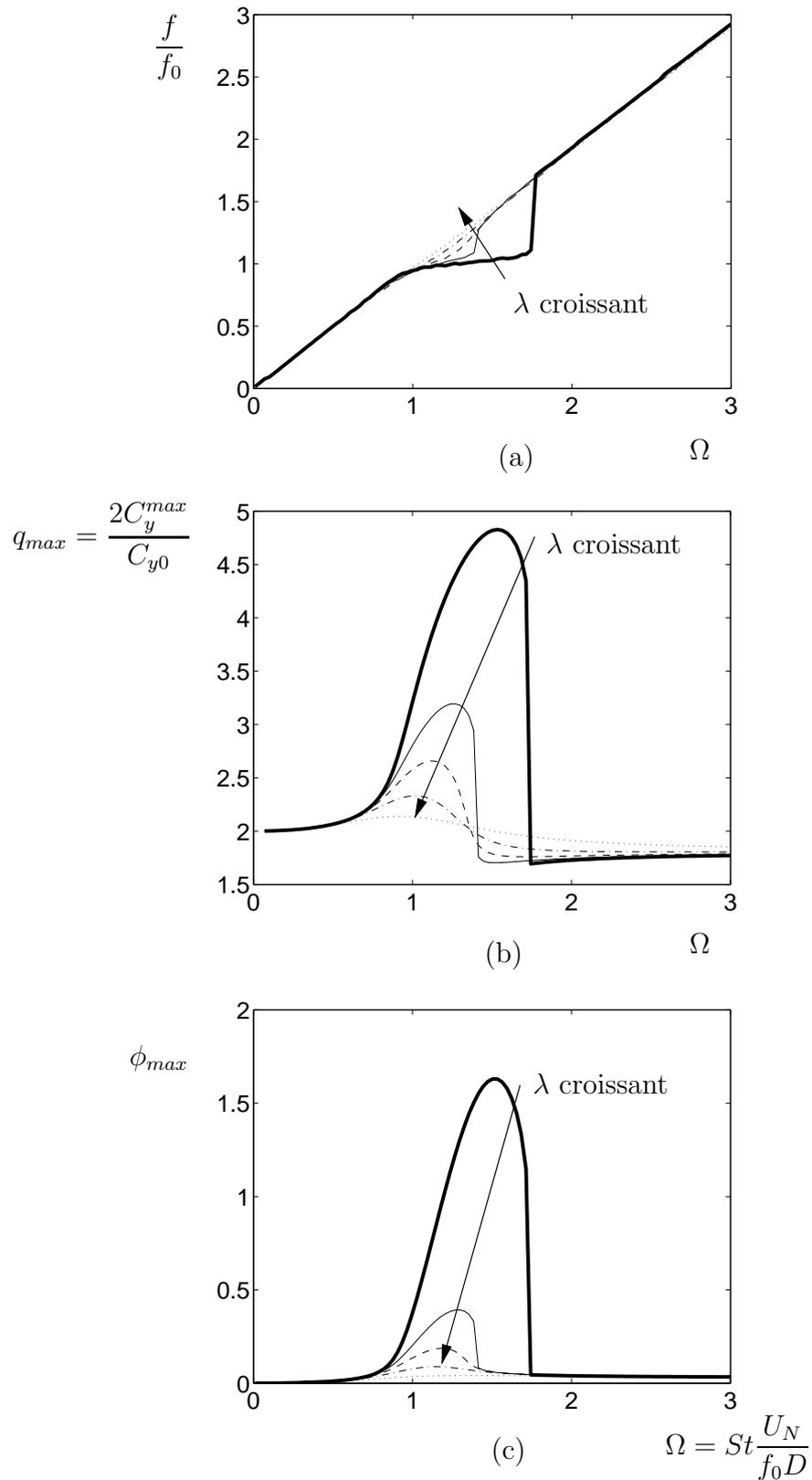


FIG. 3.20 – Solutions du modèle (3.27) pour différentes valeurs de l’amortissement des filets. Les calculs ont été menés pour les valeurs $\lambda = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$ et 1 . (a) Fréquence du détachement tourbillonnaire en fonction de la vitesse ; (\cdots) loi de Strouhal. (b) amplitude de la force transverse fluctuante. (c) amplitude de vibration d’un filet.

Coefficients de couplage

La largeur d'accrochage donnée par le modèle est en très bon accord avec les expériences. Dans le paragraphe 3.3.2, nous avons montré que cette largeur dépend du produit AB . La largeur de la zone d'accrochage est imposée par le facteur AB (paragraphe 3.3.1).

Pour évaluer l'impact d'une variation des coefficients de couplage A et B , nous les faisons varier sans faire varier leur produit AB .

Sur la figure 3.21, on voit que la variation des coefficients à produit AB constant n'a strictement aucune influence sur la fréquence ni sur l'amplitude du sillage. En revanche, l'amplitude de vibration des filets varie fortement : une augmentation de A l'atténue grandement. La valeur A que nous avons choisie est donc vraisemblablement sous-évaluée.

3.3.5 Résumé de la section

La résolutions de l'équation de couplage linéarisée, en l'absence d'amortissement, met en évidence l'existence de deux modes normaux de comportement pour le système filets-sillage. La comparaison des résultats avec la fréquence mesurée par Alam dans le cas (II)b montre que l'étude linéaire rend bien compte du comportement fréquentiel du système.

Puis, nous avons résolu numériquement l'équation de couplage non-linéaire avec amortissement. La fréquence du système couplé montre un phénomène d'accrochage lorsque la fréquence de détachement tourbillonnaire approche de la fréquence propre du filet. Dans la zone d'accrochage, la force transverse fluctuante est amplifiée et les filets vibrent. Ces résultats sont en bon accord avec les résultats expérimentaux d'Alam & Zhou (2006).

Cependant, l'amplitude de vibration du filet est peu réaliste. C'est pourquoi nous avons testé la sensibilité du modèle aux paramètres intervenant dans l'équation de couplage. Une augmentation du coefficient de couplage A , qui quantifie la réaction du sillage à un déplacement des filets, conduit à une diminution de l'amplitude de vibration des filets sans affecter aucunement la force transverse fluctuante, ni la fréquence de détachement tourbillonnaire. Il a donc vraisemblablement été sous-évalué.

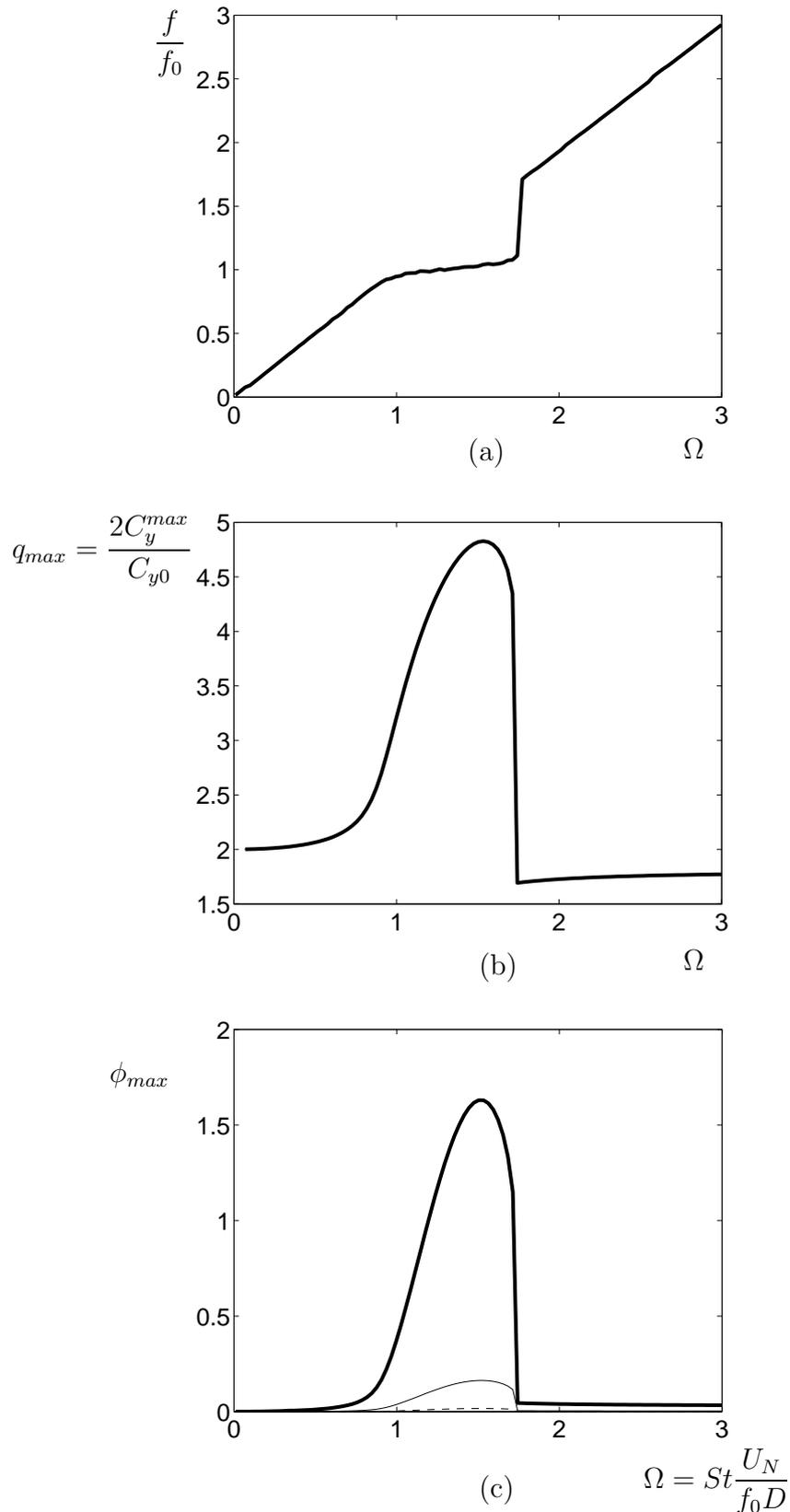


FIG. 3.21 – Solutions du modèle (3.27) pour différentes valeurs des coefficients de couplage A et B . (–), trait épais, $A = 4.0$, $B = 1.6 \cdot 10^{-2}$; (—), trait fin, $A = 4.0 \times 10$, $B = 1.6 \cdot 10^{-2}/10$; (---) $A = 4.0 \times 100$, $B = 1.6 \cdot 10^{-2}/100$. (a) Fréquence du détachement tourbillonnaire. (b) amplitude de la force transverse fluctuante. (c) amplitude de vibration d'un filet.

3.4 Intervalle de couplage filets-sillage

L'accrochage filets-sillage résulte de l'interaction entre un phénomène dû à la tension de surface eau-air, le ballotement capillaire des filets et un phénomène intrinsèque à l'écoulement d'air, le détachement tourbillonnaire. Cette interaction peut être exprimée par un nombre de Weber.

La pulsation de Strouhal Ω est liée au nombre de Weber normal par l'équation (2.37). En remplaçant la fréquence propre du filet par son expression (3.9) on obtient

$$We_N = \frac{6}{\pi^2} \frac{R^3}{h_{max}^2 L} \frac{\mathcal{M}}{St^2} \Omega^2 \quad (3.36)$$

La largeur d'accrochage $\Delta\Omega = [\Omega_{min} \ \Omega_{max}]$ donnée par le modèle est très réaliste. Nous pouvons exprimer cette largeur en terme de nombre de Weber. En conséquence, l'accrochage entre le filet et le sillage se produit dans l'intervalle

$$\frac{6}{\pi^2} \frac{R^3}{h_{max}^2 L} \frac{\mathcal{M}}{St^2} \Omega_{min}^2 < We_N < \frac{6}{\pi^2} \frac{R^3}{h_{max}^2 L} \frac{\mathcal{M}}{St^2} \Omega_{max}^2 . \quad (3.37)$$

3.5 Conclusion

Les expériences d'Alam & Zhou (2006) montrent une amplification de la force s'exerçant sur un cylindre parcouru par des filets pour un intervalle limité de vitesse de vent. Lors d'une nouvelle expérience, nous avons montré que les filets vibraient pour certaines vitesses.

Nous basant sur ces résultats, nous avons supposé une interaction entre filets et sillage instationnaire associé au détachement tourbillonnaire.

Le mode de vibration fondamental associé à la tension de surface eau-air a été représenté par un oscillateur harmonique amorti dont la fréquence a été calculée par la méthode de Rayleigh. Le sillage a été représenté par l'oscillateur de van der Pol.

Pour coupler ces deux degrés de liberté, nous avons considéré le sillage oscillant comme une rotation périodique du sillage moyen. Une rotation du sillage entraîne une force puis une rotation des filets. En réaction, le déplacement des filets induit une rotation des points de décollement et plus généralement une rotation du sillage dans son ensemble.

La résolution du système différentiel obtenu montre un accrochage entre les deux degrés de liberté, durant lequel la force s'exerçant sur le cylindre est grandement accentuée. Ceci permet d'expliquer l'expérience de laboratoire d'Alam & Zhou (2006).

Chapitre 4

Discussion, conclusion et perspectives

Dans le chapitre 3, nous avons montré qu'une interaction entre des filets ruisselant sur un cylindre et un écoulement d'air environnant pouvait générer une importante force transverse périodique sur le cylindre. On peut se demander si le mécanisme de couplage décrit à cette occasion, appliqué à un hauban de pont explique certains cas de vibrations induites par le vent et par la pluie. Pour cela nous allons comparer l'intervalle d'existence des filets avec l'intervalle de couplage filets-sillage.

Suite à cette discussion, nous concluons et suggérerons des développements futurs à ce travail de thèse.

4.1 Discussion

Il faut distinguer deux intervalles de vitesse : l'intervalle d'existence des filets sur un cylindre immobile et l'intervalle de vitesse dans lequel un accrochage filets-sillage peut avoir lieu. Dans la suite, nous comparons ces intervalles en fonction des dimensions des filets.

4.1.1 Intervalle d'existence des filets

Dans le chapitre 2, nous avons mis à jour l'existence d'un nombre de Froude minimal pour que deux filets d'eau existent simultanément sur un câble fixe. Puis, nous avons mis en évidence un nombre de Froude maximal, au-delà duquel les filets étaient chassés du câble sous l'effet de la friction. On peut réexprimer le domaine d'existence des filets en terme de nombre de Weber, qui compare l'action d'un écoulement d'air avec la tension de surface. Pour cela, remarquons que le nombre de Froude normal et le nombre de Weber normal sont liés par

$$We_N = \mathcal{M}F_{RN}^2 \left(\frac{R}{\ell_c} \right)^2 \cos \alpha \quad (4.1)$$

où $\ell_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ est la longueur capillaire. Les filets existent pour l'intervalle

$$\frac{2 \cos \alpha}{\max_{\theta} \mathcal{F}} \left(\frac{R}{\ell_c} \right)^2 < We_N^{exist} < \frac{2 (\cos \alpha_r - \cos \alpha_a) R}{C_f} \frac{R}{L}. \quad (4.2)$$

Le nombre de Weber minimal pour l'existence des filets fait intervenir la longueur capillaire. Ceci provient du fait qu'à basses vitesses, l'existence des filets résulte de la compétition entre la gravité et le vent. En revanche, la borne haute en vitesse au delà de laquelle les filets n'existent plus est le résultat d'une compétition entre la friction, donc l'effet du vent, et la tension de surface aux lignes triples. Le nombre de Weber est donc plus approprié que le nombre de Froude pour cette vitesse.

Le nombre de Weber minimal théorique pour l'existence des filets ne dépend pas de la taille des filets. En revanche, le nombre de Weber maximal varie avec l'inverse de la largeur des filets $We_{N,max}^{exist} \propto 1/L$. C'est-à-dire que plus un filet est large, plus la vitesse d'arrachage est faible.

4.1.2 Intervalle de couplage filets-sillage

Dans le chapitre 3, nous avons montré qu'un phénomène d'accrochage se produit lorsque la fréquence de détachement tourbillonnaire approche la fréquence propre des filets. L'accrochage a lieu dans un intervalle de fréquence de détachement tourbillonnaire adimensionnée par la fréquence propre des filets

$[\Omega_{min} \ \Omega_{max}]$. La fréquence Ω fait intervenir la vitesse de vent et la tension de surface eau-air. Il est donc naturel d'exprimer l'intervalle d'accrochage en terme de nombre de Weber,

$$\frac{6}{\pi^2} \frac{R^3}{h_{max}^2 L} \frac{\mathcal{M}}{St^2} \Omega_{min}^2 < We_N^{coupl} < \frac{6}{\pi^2} \frac{R^3}{h_{max}^2 L} \frac{\mathcal{M}}{St^2} \Omega_{max}^2 \quad (4.3)$$

Les deux limites sont inversement proportionnelles à la largeur des filets $We_{N,min/max}^{coupl} \propto 1/L$. En conséquence, plus la largeur des filets est importante, plus les vitesses pour lesquelles l'accrochage a lieu sont petites.

4.1.3 Comparaison avec les expériences RWIV

Pour comparer les valeurs théoriques du nombre de Weber avec les résultats expérimentaux, remarquons que les valeurs extrêmes de We_N^{exist} et We_N^{coupl} dépendent de la largeur des filets L , du rayon R mais aussi de l'inclinaison du câble α .

Nous avons donc présenté sur la figure 4.1 les résultats expérimentaux de Seidel & Dinkler (2004) pour un rayon de $R = 5.5 \cdot 10^{-2}$ m et une inclinaison $\alpha = 79^\circ$, ainsi que les nombres de Weber minimaux et maximaux prévus par les modèles présentés aux chapitres 2 et 3, en fonction de la largeur des filets, L , adimensionnée par le rayon du câble, R .

On voit que le domaine d'existence des filets et le domaine d'existence d'un accrochage filets-sillage se recouvrent. Il peut donc y avoir un couplage filets-sillage sur un hauban de pont soumis au vent et à la pluie. De fait, un point expérimental se trouve dans la zone d'accrochage.

4.1.4 Un couplage filet-sillage peut-il expliquer certaines RWIV ?

Un filet d'eau de largeur typique $L = 10^{-2}$ m et de hauteur $h_{max} = 10^{-3}$ m ruisselant sur un cylindre de rayon $R = 5.5 \cdot 10^{-2}$ m, tel un hauban de pont peut interagir avec un écoulement d'air environnant. Une forte amplification de la force transverse fluctuante en résulte alors, pouvant éventuellement provoquer un mouvement du cylindre. Le câble est alors excité à la fréquence propre des filets, f_0 .

Ce mécanisme peut-il expliquer certains cas de vibrations induites par le vent et par la pluie ?

Fréquence propre d'un filet d'eau typique des RWIV

La fréquence propre de ballonnement capillaire correspondante peut être estimée grâce à l'équation (3.9),

$$f_0 \approx 33 \text{ Hz} . \quad (4.4)$$

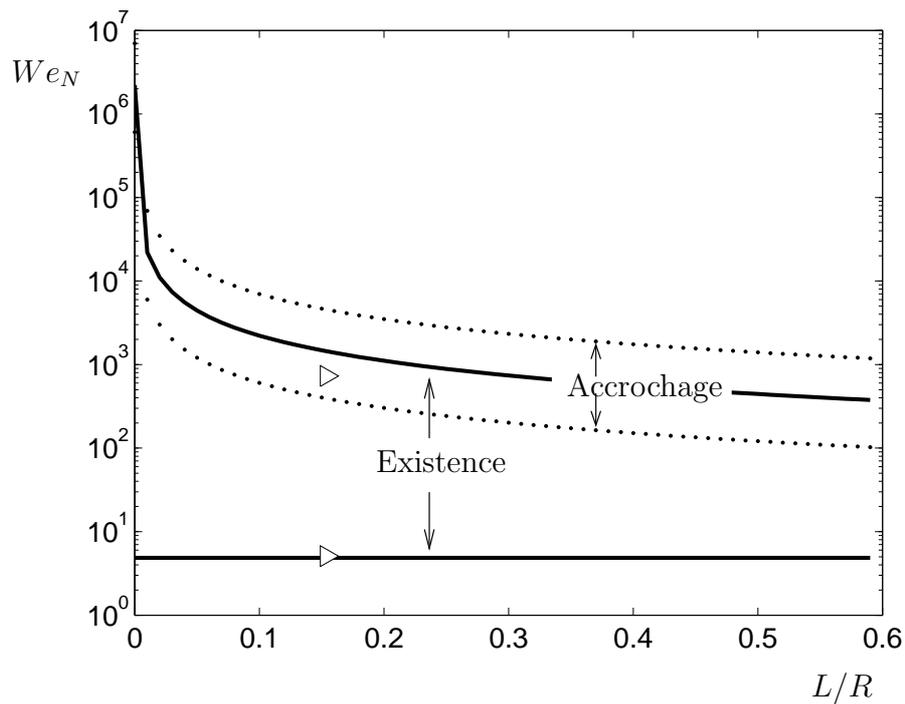


FIG. 4.1 – Nombre de Weber en fonction de la largeur du filet ramenée au rayon du câble. Expériences de (\triangleright) Seidel & Dinkler (2004). Le rayon du câble est de $R = 5.5 \times 10^{-2}$ m, son inclinaison de $\alpha = 79^\circ$ et la largeur des filets supposée de $L = 10^{-2}$ m. (—) Nombres de Weber minimal et maximal théoriques pour l'existence des filets. (\cdots) Nombres de Weber minimal et maximal théoriques pour l'accrochage.

Cette fréquence est beaucoup plus élevée que la fréquence de vibration des haubans par temps de vent et de pluie, qui est de l'ordre de 1 Hz.

Si la valeur de la fréquence est juste, les RWIV ne peuvent donc pas être expliquées par un accrochage filets-sillage pour les dimensions de filet mesurées par Cosentino (2002) et Schwarzkopf (2004).

Détermination expérimentale de la fréquence propre d'un filet en conditions RWIV

Pour exclure définitivement le mécanisme d'accrochage bidimensionnel filets-sillage comme déclenchement des RWIV, il faudrait valider la valeur de la fréquence propre calculée avec la méthode de Rayleigh, éq. (4.4).

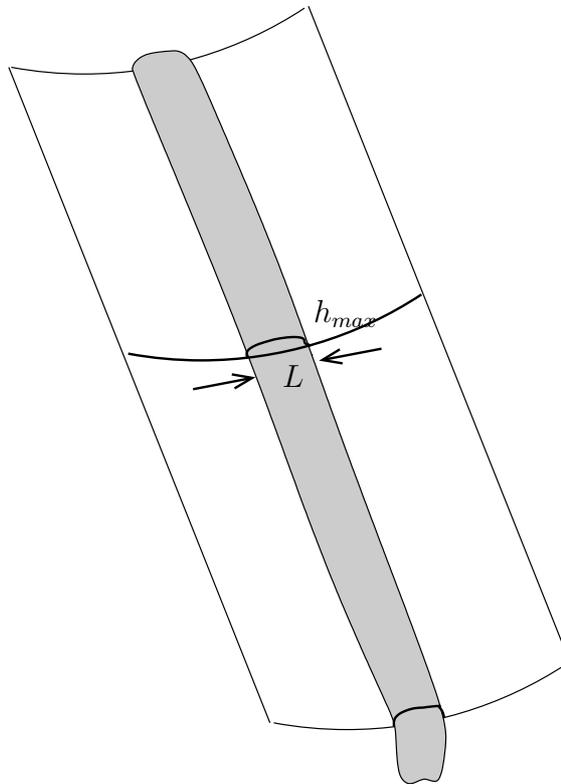


FIG. 4.2 – Expérience pour déterminer la fréquence propre d'un filet d'eau ruisselant sur une gaine de hauban.

Pour cela, nous proposons une nouvelle expérience dont nous donnons ici le protocole. Un filet ruisselle dans la concavité d'un support incurvé, figure 4.2. Le support peut être l'intérieur d'une gaine de hauban.

En réglant la courbure du support et le débit d'eau de manière appropriée, on peut imposer une largeur et une hauteur de filet conforme au cas (I). La longueur du support doit être grande devant la largeur du filet.

Le filet est excité sur une large bande de fréquence, soit au moyen d'un jet d'air impulsionnel, soit par un impact sur le support. L'excitation doit être homogène sur la longueur du support. Elle ne doit pas être trop intense pour que les lignes triples ne se déplacent pas.

De la même manière qu'à la section 3.1.1, le filet est filmé et le signal lumineux en un point du filet est analysé en fréquence. Plusieurs fréquences ressortent dans le spectre du signal; la plus basse est la fréquence du premier mode de ballonnement capillaire, que l'on peut ainsi déterminer.

4.2 Conclusion

L'objectif de cette thèse était de mieux comprendre la vibration des haubans de pont par temps de vent et de pluie. Les haubans de pont sont des câbles inclinés (d'un angle α par rapport à l'horizontale) qui relient les pylônes du pont au tablier, où circulent les véhicules. Les haubans peuvent vibrer par temps de vent, phénomène bien connu et bien expliqué, mais depuis la fin des années 1970, on sait que les haubans peuvent également vibrer par temps de pluie et de vent selon un mécanisme différent, Hikami & Shiraishi (1988).

Ces vibrations induites par le vent et par la pluie (Rain-Wind-Induced Vibrations, RWIV), n'ont lieu que dans un intervalle limité de vitesse de vent. De plus, seuls les câbles inclinés dans le sens du vent y sont sujets. Les câbles présentent en général un angle de dérapage, β , par rapport au vent et il existe un intervalle limité de cet angle pour lesquels les RWIV peuvent se produire.

La pluie est un paramètre indispensable puisque lorsqu'il ne pleut plus, les vibrations cessent. On observe que l'eau de pluie s'organise en deux filets d'eau, l'un plutôt haut, l'autre plutôt bas, ruisselant le long du hauban sujet aux RWIV. Ces filets oscillent autour du câble à la même fréquence que le câble. Les filets sont plats, avec un facteur de forme épaisseur sur largeur de 0.1. Leur position dépend de la vitesse du vent et de l'angle de dérapage.

Alam & Zhou (2006) ont réalisé une nouvelle expérience étudiant les caractéristiques du sillage autour d'un cylindre statique parcouru par deux filets d'eau. Ils ont montré que pour un intervalle précis de vitesse d'écoulement d'air, U , les forces aérodynamiques s'exerçant sur le cylindre étaient grandement amplifiées. Simultanément, la fréquence de détachement tourbillonnaire f déviait de la loi de Strouhal qui prévoit une proportionnalité avec la vitesse, $f \propto U$. Les modèles antérieurs ne permettent pas d'expliquer ces résultats.

Nous avons distingué dans la suite deux configurations typiques, le cas (I) à l'échelle des RWIV et le cas (II) à l'échelle de l'expérience d'Alam.

Les modèles aéroélastiques de Yamaguchi (1990) et Cosentino *et al.* (2003) décrivant l'interaction entre les filets, le câble et le vent permettent de reproduire les caractéristiques des RWIV en termes de vitesse de vent et d'angle de dérapage. Cependant, ces modèles supposent l'existence des filets et leur position connue. Les caractéristiques mécaniques des filets sont en outre extrapolées de mesures expérimentales. Nous avons donc choisi de développer un modèle hydrodynamique pour les filets, chapitre 2.

Nous avons considéré un mince film d'eau enrobant un cylindre, soumis à la gravité, la tension de surface et un chargement de vent. En écrivant les équations de Navier-Stokes et en faisant les hypothèses de lubrification, nous avons obtenu l'équation (2.12) qui décrit l'évolution de l'épaisseur du film d'eau. En résolvant numériquement cette équation, on voit, à partir d'un film d'épaisseur constante, apparaître deux protubérances sur le film : ce sont les filets.

En linéarisant l'équation précédente, nous avons obtenu une expression du taux de croissance $r(\theta)$ du film en fonction de l'espace. L'importance des maxima relatifs de r et leur position dépendent de la valeur du nombre de Froude, qui compare l'effet du vent et de la gravité, et des angles α et β . Nous avons ensuite supposé que les filets se stabilisaient aux endroits où r est maximum et avons ainsi pu prévoir un nombre de Froude minimal, $F_{R,min}$, pour l'existence simultanée de deux filets, ainsi que leur position sur le cylindre. Ces résultats sont en bon accord avec une nouvelle expérience présentée ici, ainsi qu'avec les expériences antérieures de la littérature.

L'équation (2.12) peut être résolue pour le cas d'un filet statique soumis à la pression du vent et la tension de surface. L'expression de la forme du filet qui en résulte est en très bon accord les rapports d'aspect des cas (I) et (II). La valeur de l'angle de contact alors imposée dans le cas (I) est tout à fait compatible avec les angles d'avancée et de recul que nous avons mesurés pour de l'eau sur une gaine de hauban en polyéthylène.

Enfin, nous avons obtenu une expression de la vitesse d'arrachage d'un filet en équilibrant la résultante de la friction du vent s'exerçant sur le filet et la force de tension de surface s'exerçant aux lignes triples. Cette limite haute pour l'existence des filets s'exprime naturellement avec le nombre de Weber, We_{max}^{exist} , comparant l'effet du vent avec la tension surfacique.

En réexprimant $F_{R,min}$ en termes de nombre de Weber, We_{min}^{exist} , nous avons obtenu un intervalle d'existence des filets : $[We_{min}^{exist}, We_{max}^{exist}]$. Tous les points expérimentaux sont inclus dans cet intervalle.

Si l'on considère un hauban de pont parcouru par des filets et balayé par le vent, trois degrés de liberté sont présents dans le système : le déplacement du câble, la déformation des filets et la fluctuation du sillage. Nous avons présenté dans l'introduction deux grands mécanismes liant ces degrés deux à deux.

* Les vibrations induites par détachement tourbillonnaire pour lesquelles un couplage opère entre câble et sillage oscillant et qui décrit une déstabilisation du système pour certaines vitesses de vent.

* Le galop à deux degrés de liberté qui couple le déplacement du cylindre et le déplacement des filets, le vent n'intervenant que par sa composante moyenne. Ce modèle prévoit un amortissement négatif pour certaines conditions de vent.

Dans le chapitre 3, nous avons élaboré un nouveau modèle qui couple la dynamique vibratoire des filets avec la dynamique oscillante du sillage. En effet, les résultats d'Alam & Zhou (2006) laissent à penser que l'écoulement d'air autour du cylindre se couple avec un oscillateur présent dans l'expérience. Cela ne peut être le cylindre car il est très rigide. Nous avons alors réalisé une expérience qui montre que ce sont les filets qui vibrent pour certaines vitesses d'écoulement d'air U . Leur fréquence croît avec U et elle est proche de la fréquence de détachement tourbillonnaire.

Comme c'est le cas pour une goutte, un filet possède des modes propres de vibration du fait de la tension de surface eau-air. Nous avons estimé la fréquence du premier mode grâce à la méthode de Rayleigh. Elle est très proche des fréquences mesurées juste avant.

Nous avons modélisé le sillage oscillant par l'oscillateur de van der Pol écrit pour la force transverse instationnaire, C_y , s'exerçant sur le cylindre. Les filets sont décrits par un oscillateur harmonique, avec un amortissement λ , dont les paramètres correspondent au premier mode de vibration.

Une modélisation du couplage entre les deux oscillateurs, sillage et filets, a ensuite été proposée. Pour cela l'écoulement fluctuant lié au détachement tourbillonnaire est vu comme le résultat d'une rotation périodique de l'écoulement moyen autour du cylindre, ce qui induit la force transverse instationnaire C_y .

- 1) Si le champ de pression tourne, les filets se déforment, donc le lieu de leur hauteur maximale tourne.
- 2) En réaction, si le maximum des filets tourne, les points de décollement, qui sont forcés par les protubérances que constituent les filets, se déplacent. Plus généralement, nous avons supposé que le champ de pression tourne, mais qu'il réagit avec un retard, quantifié par le paramètre α .

Le système différentiel (3.27) est donc obtenu, où A et B quantifient le couplage entre les deux degrés de liberté.

Nous avons dans un premier temps effectué une analyse de stabilité linéaire de l'équation (3.27) qui montre un flottement par couplage du mode associé aux filets avec le mode associé au sillage. Cette analyse rend bien compte du comportement fréquentiel du système couplé et est en bon accord avec la fréquence de détachement tourbillonnaire mesurée par Alam.

Nous avons résolu numériquement l'équation (3.27) non-linéaire avec amortissement. La fréquence résultante montre une déviation à la loi de Strouhal, lorsque la fréquence de détachement tourbillonnaire approche la fréquence propre des filets. Concomitamment, la force transverse est fortement amplifiée. Ceci est en bon accord avec les mesures d'Alam. La largeur d'accrochage théorique est notamment très réaliste. Cependant, l'amplitude de vibration des filets prévue par le modèle est trop forte.

Nous avons donc étudié la sensibilité du modèle aux paramètres intervenant dans l'équation (3.27). Plus le coefficient de retard α est grand, alors plus la largeur d'accrochage est importante et plus les amplitudes de vibration sont importantes. Plus l'amortissement des filets λ est grand, plus la largeur d'accrochage est faible ; les amplitudes du sillage et des filets diminuent avec λ . Lorsque l'on augmente A , en maintenant le produit AB constant, la largeur d'accrochage ne varie pas ; la fréquence du système est de plus inchangée, tout comme l'amplitude du sillage oscillant. En revanche, l'amplitude de vibration des filets diminue. La valeur de A est donc vraisemblablement sous-estimée dans notre modèle de couplage.

Nous nous sommes finalement demandés si l'accrochage filets-sillage pouvait expliquer certains cas de RWIV.

Pour cela, nous avons comparé le domaine d'existence des filets sur un hauban par temps de vent, $[W_{min}^{exist}, W_{max}^{exist}]$, avec le domaine de couplage filets-sillage, $[W_{min}^{coupl}, W_{max}^{coupl}]$, dans le cas (I). Ces deux domaines se recouvrent, donc un accrochage filets-sillage peut avoir lieu dans certaines conditions de vent.

Cependant, la fréquence d'accrochage obtenue par la méthode de Rayleigh dans ce cas vaut $f_0 \approx 33$ Hz. Les haubans seraient alors excités à cette fréquence. Celle-ci est plus importante que les fréquences observées dans le cas des RWIV, de l'ordre de 1 Hz. Si cette fréquence est correcte, les RWIV ne peuvent pas être expliquées par un couplage filets-sillage. Pour exclure définitivement cette hypothèse, il faudrait réaliser une expérience visant à mesurer la fréquence propre d'un filet d'eau de dimensions observées lors des RWIV.

4.3 Perspectives

Pour poursuivre ce travail, plusieurs pistes sont à explorer.

4.3.1 Saturation des oscillations des filets

Dans la section 3.3.2, nous avons observé que l'amplitude de vibration des filets donnée par notre modèle est trop grande. Pour limiter cette amplitude, on pourrait introduire un terme saturant dans l'équation du filet, par exemple par un terme de Duffing, Nayfeh & Mook (1979),

$$\ddot{\phi} + \lambda \dot{\phi} + \phi + \delta \phi^3 = 0, \quad \delta > 0. \quad (4.5)$$

Ceci limitera la vibration des filets mais cela modifiera également a priori le comportement du sillage.

4.3.2 Sensibilité de l'écoulement d'air

Dans la section 2.2, nous avons montré que pour un nombre de Froude suffisamment grand, les filets se positionnent au niveau des points de décollement de la couche limite sur le cylindre.

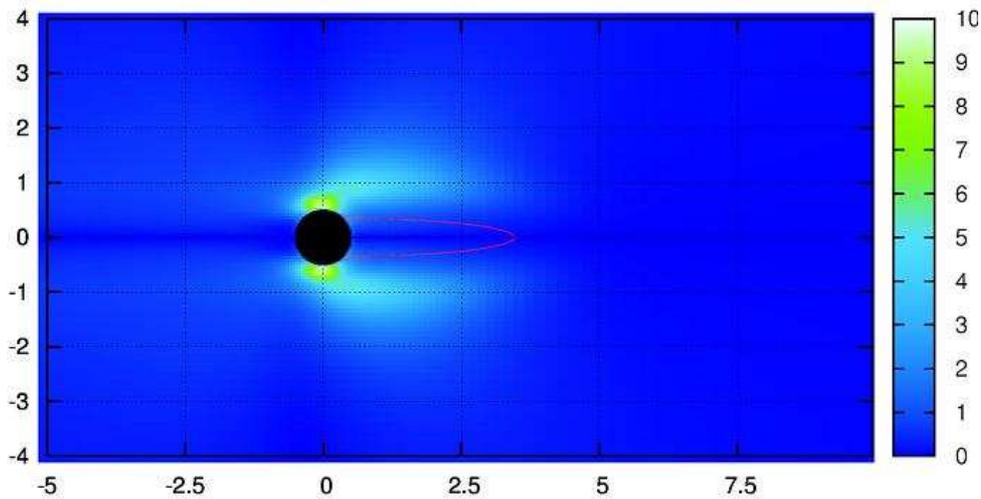


FIG. 4.3 – Distribution spatiale de la norme de la pression adjointe, qui quantifie le niveau d'amplitude de la réponse en fonction des coordonnées du point où l'on perturbe. D'après Giannetti & Luchini (2003).

Giannetti & Luchini (2003) se sont intéressés à la sensibilité de l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre. En utilisant les équations de Navier-Stokes bi-dimensionnelles linéarisées, ils ont étudié la réponse du mode de détachement

tourbillonnaire en fonction du lieu où on le perturbe. Pour cela, ils ont calculé le mode adjoint (Schmid & Henningson (2001)), qui quantifie l'intensité de cette réponse. En faisant varier le lieu de la perturbation, ils ont obtenu une cartographie de la sensibilité de l'écoulement à une perturbation, représentée figure 4.3.

L'amplitude de la réponse est maximale lorsque l'on perturbe au niveau des points de décollement. Ceci s'explique physiquement par le fait que la structure du sillage oscillant est déterminée par la création de vorticité au niveau des points de décollement, vorticité qui est advectée vers l'aval. On conçoit donc qu'une perturbation en ce point produise une grande réponse en aval.

Le nombre de Reynolds utilisé par Giannetti, $Re_g = 50$, est très inférieur à celui des RWIV, $Re_g \approx 10^5$ (Cas (I)). Cependant on peut supposer que le comportement du sillage reste qualitativement le même et que les points de décollement restent les endroits les plus réceptifs.

Le déplacement des filets, qui sont situés précisément au voisinage des points de décollement, a donc vraisemblablement un effet plus important et plus complexe qu'une simple rotation de l'écoulement d'air. Dans l'équation du sillage (3.27)b, le coefficient de forçage A devrait être plus grand. Des termes de couplage d'une autre forme pourraient également être envisagés.

4.3.3 Modèle tridimensionnel

Si le modèle présenté au chapitre 3, décrivant l'interaction possible entre filets et sillage, permet d'expliquer une expérience de laboratoire bien contrôlée, il ne permet pas d'expliquer les RWIV telles qu'on les observe communément.

Peut-être cela tient-il au caractère bidimensionnel du modèle. Nous n'avons considéré en effet que les vibrations transverses du filet. Nous avons de plus supposé que les tourbillons étaient lâ  ch  s perpendiculairement à l'axe du cylindre ; ceci est vrai pour les faibles angles de dérapage β . Pour les grandes valeurs de β , le détachement tourbillonnaire devient tridimensionnel et l'on s'attend à ce que les filets soient excités dans leur longueur. Les ondes longitudinales résultant feraient peut-être intervenir des fréquences plus faibles que la fréquence fondamentale transverse des filets, éventuellement proches des premières fréquences propres des haubans. La dynamique du câble devrait dans ce cas être prise en compte : il faudrait alors rajouter un degré de liberté au modèle, figure 4.4.

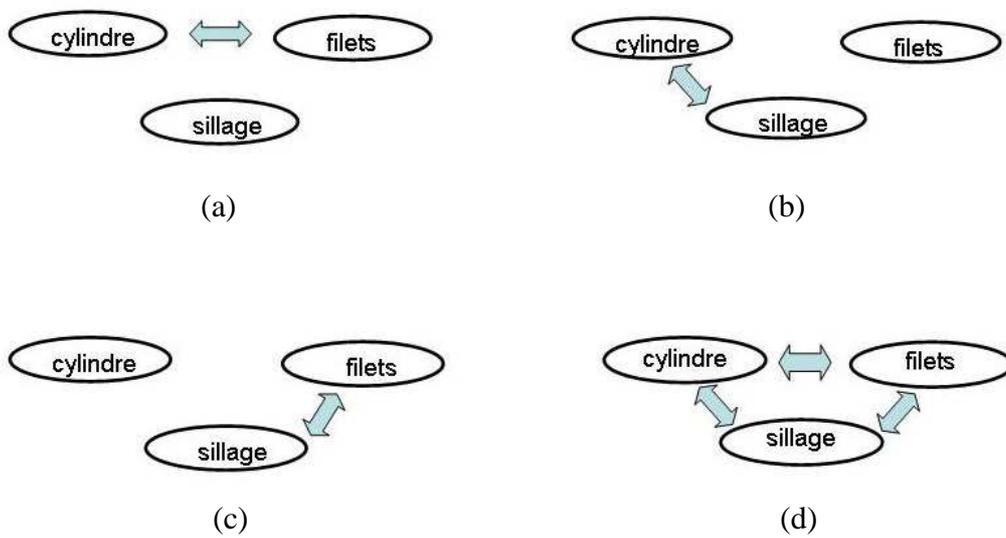


FIG. 4.4 – Récapitulatif des modèles. (a) Galop à deux degrés de liberté, Yamaguchi (1990). (b) Vibration induites par détachement tourbillonnaire, Williamson & Govardhan (2004). (c) Couplage filets-sillage, modèle du Chapitre 3 de cette thèse. (d) Couplage à trois degrés de libertés.

Bibliographie

- ACHENBACH, E. 1968 Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in a cross-flow up to $re = 5 \times 10^6$. *Journal of Fluid Mechanics* **34(4)**, 625–639.
- ALAM, M. & ZHOU, Y. 2006 Fluid dynamics around an inclined cylinder with water running. Submitted to the *Journal of Fluid Mechanics* (private communication).
- BISCH, C. 1981 Les modes de vibrations axiales et tangentielles d'une sphère semi-libre. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris* (**293**)II, 107–110.
- BISHOP, R. & HASSAN, A. 1964 The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid. In *Proceedings of the Royal Society of London*, , vol. A **277**, pp. 51–75.
- BLEVINS, R. 1977 *Flow-Induced Vibration*. Van Nostrand Reinhold, New York.
- BOSDOGIANNI, A. & OLIVARI, D. 1996 Wind- and rain-induced oscillations of cables of stayed bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **64**, 171–185.
- BURSNALL, W. & LOFTIN, L. 1951 Experimental investigation of the pressure distribution about a yawed circular cylinder in the critical reynolds number range. *Tech. Rep.* 2463. NACA TN.
- COSENTINO, N. 2002 Rain-wind induced vibrations of stay cables. PhD thesis, Bologna.
- COSENTINO, N., FLAMAND, O. & CECCOLI, C. 2003 Rain-wind induced vibration of inclined stay cables. part II :mechanical modeling and parameter characterisation. *Wind and Structures* pp. 485–498.
- DE GENNES, G., BROCHARD-WYART, F. & QUÉRÉ, D. 2002 *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin.
- VAN DYKE, M. 1982 *An Album of Fluid Motion*. The Parabolic Press.

- FACCHINETTI, M. L., DE LANGRE, E. & BIOLLEY, F. 2004 Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures* **19**(2), 123–140.
- FACCHINETTI, N. 2003 Un modèle phénoménologique des vibrations induites par détachement tourbillonnaire. PhD thesis, École Polytechnique.
- FAGE, A. & WARSAP, J. 1930 *British Aeronautical Research Council, Reports & Memoranda No 1283*.
- FLAMAND, O. 1995 Rain-wind induced vibration of cables. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **57**, 353–362.
- GIANNETTI, F. & LUCHINI, P. 2003 Receptivity of the circular cylinder's first instability. In *Proc. 5th Eur. Fluid Mech. Conf., Toulouse, France*, pp. 1–14.
- GU, M. & DU, X. 2005 Experimental investigation of rain-wind-induced vibration of cables in cable-stayed bridges and its mitigation. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **93**(1), 79–95.
- HARTLEN, R. & CURRIE, I. 1970 Lift-oscillator model of vortex-induced vibration. *Journal of the Engineering Mechanics Division* **69**(EM5), 577–591.
- DEN HARTOG, J. 1985 *Mechanical Vibrations*. Dover Publications, Inc. New York.
- HÉMON, P. 2006 *Vibrations Couplées avec le Vent*. Éditions de l'École Polytechnique.
- HÉMON, P. & SANTI, F. 2002 On the aeroelastic behaviour of rectangular cylinders in cross-flow. *Journal of Fluid and Structures* **16**(7), 855–889.
- HIKAMI, Y. & SHIRAISHI, N. 1988 Rain-wind induced vibrations of cables in cable-stayed bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **29**, 409–418.
- IBRAHIM, R. 2005 *Liquid Sloshing Dynamics : Theory and Applications*. Cambridge University Press.
- DE LANGRE, E. 2006 Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter. *Journal of Fluids and Structures* **22**(6-7), 783–791.
- LEMAITRE, C., ALAM, M., HÉMON, P., DE LANGRE, E. & ZHOU, Y. 2006a Rainwater rivulets on a cable subject to wind. *Comptes-rendus Mécaniques* **334**, 158–163.

- LEMAITRE, C., HÉMON, P. & DE LANGRE, E. 2006*b* Thin water film around a cable subject to wind. Accepted by the Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics.
- MACDONALD, J. & LAROSE, G. 2006 A unified approach to aerodynamic damping and drag/lift instabilities, and its application to dry inclined cable galloping. *Journal of Fluids and Structures* **22**(2), 229–252.
- MATSUMOTO, M., SAITOH, T., KITAZAWA, M., SHIRATO, H. & NISHIZAKI, T. 1995 Response characteristics of rain-wind induced vibration of stay-cables of cable-stayed bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **57**, 323–333.
- MATSUMOTO, M., SHIRAISHI, N. & SHIRATO, H. 1992 Rain-wind induced vibration of cables of cable-stayed bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **43**, 2011.
- NAUDASCHER, E. & ROCKWELL, D. 1994 *Flow-induced vibrations*. A.A. Balkema, Rotterdam.
- NAYFEH, A. & MOOK, D. 1979 *Nonlinear Oscillations*. Wiley Interscience, New-York.
- ORON, A., DAVIS, S. & BANKOFF, S. 1997 Long-scale evolution of thin liquid films. *Reviews of Modern Physics* **69**(3), 931–980.
- PEUBE, J. & SADAT, H. 1993 Oscillations aéroélastiques des haubans de ponts à haubans sous les effets conjugués du vent et de la pluie. *Tech. Rep.*. Université de Poitiers.
- PRESS, W., TEUKOLSKY, S., VETTERLING, W. & FLANNERY, B. 1992 *Numerical Recipes in FORTRAN*. Cambridge University Press.
- RAMBERG, S. 1983 The effects of yaw and finite length upon the vortex wakes of stationary and vibrating circular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* **128**, 81–107.
- RAO, S. 1995 *Mechanical Vibrations*. Addison-Wesley Publishing Company.
- REISFELD, B. & BANKOFF, S. 1992 Non-isothermal flow of a liquid film on a horizontal cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **236**, 167–196.
- SCHMID, P. J. & HENNINGSON, D. S. 2001 *Stability and Transition in Shear Flows*. New York : Springer-Verlag.
- SCHWARZKOPF, D. 2004 Regen-wind-induzierte Schwingungen. PhD thesis, Institut für Stahlbau, RWTH Aachen.

- SCHWARZKOPF, D. & SEDLACEK, G. 2003 Characterization of the main parameters of rain-wind-induced vibrations. In *11th International Conference on Wind Engineering, Lubbock, Texas*.
- SEIDEL, C. & DINKLER, D. 2004 Mode switching of rain-wind-induced vibrations. In *21st International Congress of Theoretical And Applied Mechanics, Warsaw, Poland*.
- SIMIU, E. & SCANLAN, R. 1996 *Wind effect on structures*. John Wiley & Sons, Inc.
- VERWIEBE, C. & RUSCHEWEYH, H. 1998 Recent research results concerning the exciting mechanisms of rain-wind-induced vibrations. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **74-76**, 1005–1013.
- VOLTERRA, E. & ZACHMANOGLU, E. 1965 *Dynamics of vibrations*. Merrill.
- WANG, Z., ZHOU, Y., HUANG, J. & XU, Y. 2005 Fluid dynamics around an inclined cylinder with running water rivulets. *Journal of Fluids and Structures* **(21)1**, 49–64.
- WIANECKI, J. 1979 Cables wind excited vibrations of cable-stayed bridges. In *Proceedings of the 5th International Conference of Wind Engineering, Colorado* (ed. P. P. Oxford-New York), pp. 1381–1393.
- WILLIAMSON, C. & GOVARDHAN, R. 2004 Vortex-induced vibrations. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36**, 413–455.
- XU, Y., ZHOU, Y., WANG, Z. & WANG, L. 2002 Rivulet formation on an inclined cylinder and its effects on the near-wake. In *International Mechanical Engineering Conference and Exposition, New Orleans, Louisiana, USA*.
- YAMAGUCHI, H. 1990 Analytical study on growth mechanism of rain vibration of cables. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **33**, 73–80.

Annexe A

Détails de calcul et procédures expérimentales

A.1 Les deux configurations étudiées

Dans les modèles que nous décrivons et les raisonnements que nous menons, les variables et les nombres adimensionnels sont évalués dans deux configurations typiques. La première correspond au cas, grandeur réelle, des vibrations induites par le vent et par la pluie. La deuxième correspond à des expériences en laboratoire réalisées à Hong Kong et au LadHyX, à l'échelle un dixième.

A.1.1 Cas (I) : Cas typique des RWIV

Les gaines des haubans de pont ont typiquement un rayon de $R = 10^{-1}$ m. La vitesse de vent pour lesquelles les vibrations induites par le vent et la pluie (RWIV) sont observées est de l'ordre de $U = 10$ m/s. Le nombre de Reynolds en incidence normale correspondant est de $Re_g = 2RU/\nu_g \approx 10^5$. Ce nombre est trans-critique au sens de la crise de traînée.

Le paramètre de lubrification $\varepsilon = h_0/R = 10^{-3}$ est très petit devant 1 pour une épaisseur caractéristique $h_0 = 10^{-4}$ m.

Les paramètres sans dimension correspondant au modèle de film mince valent alors :

$$G = \frac{gh_0^3}{3\nu^2} = 3.3 \quad S = \frac{\gamma h_0^4}{3\rho\nu^2 R^3} = 2.4 \cdot 10^{-6} \quad \mathcal{P} = \frac{\rho_g U^2 h_0^3}{6\rho\nu^2 R} = 2 \cdot 10^{-1} \quad (\text{A.1})$$

et dans la notation redimensionnée par la gravité :

$$Bo^{-1} = \frac{\gamma h_0}{\rho g R^3} = 7.4 \cdot 10^{-7} \quad \mathcal{M}F_R^2 = \frac{\rho_g}{\rho} \left(\frac{U^2}{Rg} \right) = 1.2 \cdot 10^{-1} \quad (\text{A.2})$$

où l'accélération de la pesanteur vaut $g = 9.81$ m/s⁻², la viscosité de l'eau $\nu = 10^{-6}$ m²/s, la tension de surface eau-air $\gamma = 7.3 \cdot 10^{-2}$ N/m, la masse volumique de l'eau $\rho = 10^3$ kg/m³, la masse volumique de l'air $\rho_g = 1.2$ kg/m³ et la viscosité de l'air $\nu_g = 1.5 \cdot 10^{-5}$ m²/s.

L'épaisseur maximale des filets vaut $h_{max} = 10^{-3}$ m et leur largeur est de $L = 10^{-2}$ m, ce qui correspond à un rapport d'aspect $h_{max}/L = 0.1$. La fréquence propre associée au mode fondamental de ballotement capillaire vaut alors f_0 .

A.1.2 Cas (II) : Expérience modèle

Nous avons réalisé des expériences au LadHyX ainsi qu'au Mechanical Engineering Department de la Hong Kong Polytechnic University qui ont été complétées par Md M. Alam et Y. Zhou. Dans tous les cas, un cylindre rigide a été suspendu dans une soufflerie sur lequel nous avons fait ruisseler un liquide.

Les configurations étudiées sont simplifiées par rapport au cas des RWIV. Le cylindre est aligné dans la direction du vent, l'angle de dérapage est de $\beta =$

$\pi/2$, figure 1.2. Il décline dans la direction du vent par analogie avec les RWIV Hikami & Shiraishi (1988). Le cylindre est légèrement incliné par rapport à la verticale.

Le diamètre des cylindres est plus petit, typiquement $R = 10^{-2}$ m et les vitesses de vent plus faibles, de l'ordre de $U = 5$ m/s, de sorte que le nombre de Reynolds varie autour de $Re_g = 2RU/\nu_g \approx 10^4$. Le nombre de Reynolds est sous-critique au sens de la crise de traînée.

Le paramètre de lubrification, si l'on considère encore une épaisseur caractéristique $h_0 = 10^{-4}$ m est plus grand $\varepsilon = h_0/R = 10^{-2}$.

Les nombres adimensionnels correspondant au modèle de film mince peuvent être calculés :

$$G = \frac{gh_0^3}{3\nu^2} = 3.27 \quad S = \frac{\gamma h_0^4}{3\rho\nu^2 R^3} = 2.4 \cdot 10^{-3} \quad \mathcal{P} = \frac{\rho_g U^2 h_0^3}{6\rho\nu^2 R} = 10^{-1} \quad (\text{A.3})$$

et dans la notation redimensionnée par la gravité :

$$Bo^{-1} = \frac{\gamma h_0}{\rho g R^3} = 7.4 \cdot 10^{-4} \quad \mathcal{M}F_R^2 = \frac{\rho_g}{\rho} \left(\frac{U^2}{Rg} \right) = 3.1 \cdot 10^{-1} \quad (\text{A.4})$$

Lors des expériences réalisées au LadHyX et celle d'Alam, un débit d'eau différent a été utilisé. Les filets n'avaient donc pas les mêmes dimensions (annexe A.3) dans les deux cas. En conséquence, les fréquences propres de ballonnement capillaire sont différentes :

* Cas (II)a : au LadHyX, l'épaisseur maximale des filets vaut $h_{max} = 10^{-3}$ m et leur largeur est de $L = 3 \times 10^{-3}$ m, soit un rapport d'aspect $h_{max}/L = 0.33$. Il en résulte une fréquence propre, $f_0 \approx 61$ Hz.

* Cas (II)b : les filets formés par Alam avaient une largeur $L = 5 \times 10^{-3}$ m. Si nous supposons que le rapport d'aspect est le même qu'au LadHyX, $h_{max}/L = 0.33$, il vient $h_{max} = 2 \times 10^{-3}$ m. La fréquence propre vaut donc $f_0 \approx 30$ Hz.

A.2 Calculs détaillés de l'équation de lubrification

A.2.1 Notations du modèle

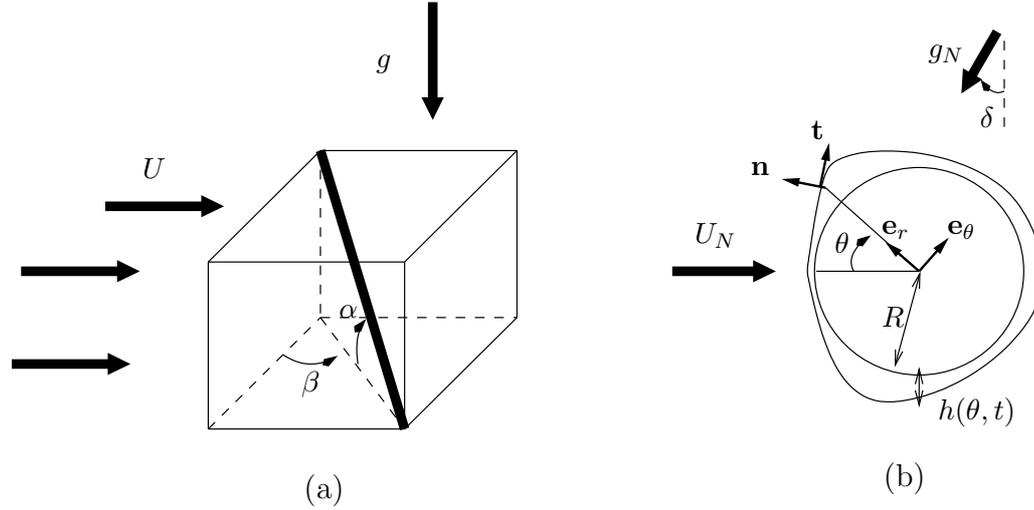


FIG. A.1 – Notations du modèle. (a) Le câble forme un angle α par rapport à l'horizontale et un angle β par rapport au vent ; (b) Dans une section de cylindre, le film d'épaisseur h est balayé par une vitesse normale de vent U_N et une gravité normale g_N .

Nous considérons un cylindre de rayon R , incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Un écoulement d'air de vitesse U forme un angle de dérapage β avec le cylindre, comme indiqué sur la figure 2.1(a). Un mince film d'eau d'épaisseur caractéristique h_0 , ruisselle autour du cylindre. On se place dans une section de cylindre. La vitesse de vent projetée sur un plan normal à l'axe du cylindre, \mathbf{U}_N , a une norme U_N et le projeté de la gravité, \mathbf{g}_N , une norme de g_N ,

$$U_N = U \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \sin^2 \alpha} , \quad g_N = g \cos \alpha . \quad (\text{A.5})$$

Les vecteurs \mathbf{U}_N et \mathbf{g}_N forment un angle $\delta + \pi/2$ qui s'exprime en fonction de l'inclinaison du câble et de l'angle de dérapage

$$\delta = \arctan(\sin \alpha \tan \beta) . \quad (\text{A.6})$$

La position d'un point du film d'eau est donnée en coordonnées polaires. L'origine du repère est située au centre du cylindre. L'azimut θ est mesuré à partir de la direction normale de vent U_N . Le film d'eau d'épaisseur $h(\theta, t)$ est supposé continu autour du cylindre, $h > 0$.

A.2.2 Équations de Navier-Stokes et conditions aux limites

Le film d'eau est soumis à la gravité g_N , la tension de surface γ et l'action du vent de vitesse U_N .

Equations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles sont écrites pour le film d'eau

$$\begin{aligned}\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \rho \mathbf{g}_N - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} , \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 ,\end{aligned}\tag{A.7}$$

où \mathbf{v} est le champ de vitesse dans le film d'eau, ρ la masse volumique, p le champ de pression et μ la viscosité dynamique de l'eau. Ces équations sont écrites dans le repère $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$. Dans ce repère, la position d'une particule d'eau est exprimée par $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ($R \leq r \leq R+h$) et sa vitesse se décompose en $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$. Les équations de Navier-Stokes s'écrivent en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}\rho \left(\partial_t u + u \partial_r u + \frac{v}{r} \partial_\theta u - \frac{v^2}{r} \right) &= \rho \mathbf{g}_N \cdot \mathbf{e}_r - \partial_r p + \mu \left(\Delta u - \frac{2\partial_\theta v}{r^2} - \frac{u}{r^2} \right) , \\ \rho \left(\partial_t v + u \partial_r v + \frac{v}{r} \partial_\theta v + \frac{uv}{r} \right) &= \rho \mathbf{g}_N \cdot \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial_\theta p}{r} + \mu \left(\Delta v + \frac{2\partial_\theta u}{r^2} - \frac{v}{r^2} \right) , \\ \frac{\partial_r(ru)}{r} + \frac{\partial_\theta v}{r} &= 0 ,\end{aligned}\tag{A.8}$$

où l'opérateur Δ appliqué à un scalaire s signifie

$$\Delta s = \frac{\partial_r(r\partial_r s)}{r} + \frac{\partial_\theta^2 s}{r^2} .\tag{A.9}$$

Les notations ∂_θ et ∂_ξ désignent une dérivation partielle par rapport à l'espace et les notations ∂_t et ∂_T , une dérivation par rapport au temps. L'ordre de la dérivation n , est indiqué par un exposant, ∂^n .

Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées sont les suivantes : (i) les particules d'eau ne glissent pas sur la paroi du cylindre, $u(R) = v(R) = 0$; (ii) l'interface eau-air est une surface matérielle que les particules d'eau ne peuvent traverser. La vitesse normale d'une particule d'eau sur l'interface est donc égale à la vitesse normale de l'interface, $u = \partial_t h + (v/r)\partial_\theta h$;

(iii) la contrainte normale est discontinue à travers l'interface eau-air du fait de la tension de surface

$$(\sigma_g - \sigma) \cdot \mathbf{n} = \kappa \gamma \mathbf{n} \quad , \quad \sigma = -p \mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad , \quad \sigma_g = -p_g(\theta) \mathbf{I} + \tau_g \quad , \quad (\text{A.10})$$

où σ_g et σ sont les tenseurs des contraintes de l'air et de l'eau respectivement, γ la tension de surface eau-air, \mathbf{I} le tenseur identité, p_g la pression de l'air à l'interface et τ_g le tenseur visqueux de l'air. La courbure $\kappa(\theta)$ de la surface libre du film s'écrit

$$\kappa(\theta) = \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{(R+h)^2 + 2(\partial_\theta h)^2 - (R+h)\partial_\theta^2 h}{[(R+h)^2 + (\partial_\theta h)^2]^{3/2}} \quad . \quad (\text{A.11})$$

Le tenseur des contraintes du liquide s'exprime

$$\sigma = \begin{bmatrix} -p + 2\mu \partial_r u & \mu \left(\partial_r v + \frac{\partial_\theta u}{r} - \frac{v}{r} \right) \\ \mu \left(\partial_r v + \frac{\partial_\theta u}{r} - \frac{v}{r} \right) & -p + 2\mu \left(\frac{\partial_\theta v}{r} + \frac{u}{r} \right) \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{A.12})$$

La tension de surface induit un saut de la contrainte normale à l'interface eau-air

$$\mathbf{n} \cdot (\sigma_g - \sigma) \cdot \mathbf{n} = \gamma \kappa \quad (\text{A.13})$$

qui une fois développé donne

$$\begin{aligned} -p_g + p - \frac{2\mu}{N^2 r} \left\{ (u + \partial_\theta v) \left[\left(\frac{\partial_\theta h}{r} \right)^2 - 1 \right] - \partial_\theta h \left(r \partial_r \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial_\theta u}{r} \right) \right\} \\ = \frac{\gamma}{N^3} \left(\frac{1}{r} + 2 \frac{(\partial_\theta h)^2}{r^3} - \frac{\partial_\theta^2 h}{r^2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La contrainte tangentielle, elle, est continue à travers l'interface car la tension superficielle est supposée homogène sur toute l'interface

$$\mathbf{t} \cdot (\sigma_g - \sigma) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad , \quad (\text{A.15})$$

qui s'exprime en coordonnées polaires

$$\mathbf{t} \cdot \sigma_g \cdot \mathbf{n} - \frac{\mu}{N^2} \left\{ -\frac{4\partial_\theta h}{r^2} (u + \partial_\theta v) + \left[1 - \left(\frac{\partial_\theta h}{r} \right)^2 \right] \left(r \partial_r \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial_\theta u}{r} \right) \right\} = 0 \quad . \quad (\text{A.16})$$

A.2.3 Adimensionnement et hypothèses de lubrification

Adimensionnement des équations de Navier-Stokes

Nous définissons maintenant les variables sans dimension

$$\begin{aligned} U &= \frac{R}{\nu} u, & V &= \frac{h_0}{\nu} v, & T &= \frac{\nu}{Rh_0} t, \\ P &= \frac{h_0^3}{\rho\nu^2 R} p, & \xi &= \frac{r-R}{h_0}, & H &= \frac{h}{h_0}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Nous notons $\varepsilon = h_0/R$ et multiplions les équations (A.8)a,b,c par $\frac{h_0^4}{\rho\nu^2 R}$, $\frac{h_0^3}{\rho\nu^2}$ et $\frac{h_0 R}{\nu}$ respectivement, pour obtenir

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \left(\partial_T U + U \partial_\xi U + \frac{V \partial_\theta U}{1 + \varepsilon \xi} - \frac{V^2}{\varepsilon (1 + \varepsilon \xi)} \right) &= -3\varepsilon G \sin(\theta - \delta) - \partial_\xi P \\ &+ \varepsilon^2 \partial_\xi \left(\frac{\partial_\xi [(1 + \varepsilon \xi) U]}{1 + \varepsilon \xi} \right) + \frac{\varepsilon^4 \partial_\theta^2 U}{(1 + \varepsilon \xi)^2} - \frac{2\varepsilon^3 \partial_\theta V}{(1 + \varepsilon \xi)^2}, \\ \varepsilon \left(\partial_T V + U \partial_\xi V + \frac{V \partial_\theta V}{1 + \varepsilon \xi} + \frac{\varepsilon UV}{1 + \varepsilon \xi} \right) &= -3G \cos(\theta - \delta) - \frac{\partial_\theta P}{1 + \varepsilon \xi} \\ &+ \partial_\xi \left(\frac{\partial_\xi [(1 + \varepsilon \xi) V]}{1 + \varepsilon \xi} \right) + \frac{\varepsilon^2 \partial_\theta^2 V}{(1 + \varepsilon \xi)^2} + \frac{2\varepsilon^3 \partial_\theta U}{(1 + \varepsilon \xi)^2}, \\ \partial_\xi [(1 + \varepsilon \xi) U] + \partial_\theta V &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

où le nombre de gravité G compare l'effet de la gravité par rapport à la viscosité

$$G = \frac{g_N h_0^3}{3\nu^2}. \quad (\text{A.19})$$

Adimensionnement des conditions aux limites

La pression et la friction de l'air sont adimensionnées de manière classique en faisant apparaître les coefficients de pression et de friction

$$C_p = \frac{p_g}{\frac{1}{2}\rho U_N^2}, \quad C_f = \frac{\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}}{\frac{1}{2}\rho U_N^2}. \quad (\text{A.20})$$

Après adimensionnement de l'équation (A.14) on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\rho U_N^2 C_p + \frac{\rho\nu^2 R}{h_0^3} P - \frac{2\mu}{N^2 (R + h_0 \xi)} \left\{ \left(\frac{\nu}{R} U + \frac{\nu}{h_0} \partial_\theta V \right) \left[\left(\frac{h_0 \partial_\theta H}{R + h_0 \xi} \right)^2 - 1 \right] \right. \\ \left. - h_0 \partial_\theta H \left[\frac{(R + h_0 \xi) \nu}{h_0^2} \partial_\xi \left(\frac{V}{R + h_0 \xi} \right) + \frac{\nu}{R} \frac{\partial_\theta U}{R + h_0 \xi} \right] \right\} \\ = \frac{\gamma}{N^3} \left(\frac{1}{R + h_0 \xi} + 2 \frac{h_0^2 (\partial_\theta H)^2}{(R + h_0 \xi)^3} - \frac{h_0 \partial_\theta^2 H}{(R + h_0 \xi)^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

où le facteur N a été adimensionné

$$N = \left[1 + \varepsilon^2 \frac{(\partial_\theta H)^2}{(1 + \varepsilon \xi)^2} \right]^{1/2}. \quad (\text{A.22})$$

On adimensionne l'équation (A.16)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho U_N^2 C_f - \frac{\mu}{N^2} \left\{ -\frac{4h_0 \partial_\theta H}{(R + h_0 \xi)^2} \left(\frac{\nu}{R} U + \frac{\nu}{h_0} \partial_\theta V \right) \right. \\ \left. + \left[1 - \left(\frac{h_0 \partial_\theta H}{(R + \varepsilon \xi)} \right)^2 \right] \left[(R + h_0 \xi) \frac{\nu}{h_0^2} \partial_\xi \left(\frac{V}{R + h_0 \xi} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\nu}{R} \frac{\partial_\theta U}{R + h_0 \xi} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Nous multiplions les deux expressions (A.21) et (A.23) par $\frac{h_0^3}{\rho \nu^2 R}$ et $\frac{h_0^2}{\rho \nu^2}$ et obtenons les conditions aux limites à l'interface $\xi = H$ sous forme adimensionnelle

$$\begin{aligned} -3\mathcal{P}C_p + \mathcal{P} - \frac{2\varepsilon^2 \partial_\theta H}{N^2 (1 + \varepsilon H)} \left\{ (\varepsilon U + \partial_\theta V) \left[\left(\frac{\varepsilon \partial_\theta H}{1 + \varepsilon H} \right)^2 - \frac{1}{\partial_\theta H} \right] \right. \\ \left. - (1 + \varepsilon H) \left[\partial_\xi \left(\frac{V}{1 + \varepsilon \xi} \right) \right]_{\xi=H} - \frac{\varepsilon^2 \partial_\theta U}{1 + \varepsilon H} \right\} \\ = \frac{3\bar{S}\varepsilon^3}{N^3} \left[\frac{1}{\varepsilon (1 + \varepsilon H)} + 2 \frac{\varepsilon (\partial_\theta H)^2}{(1 + \varepsilon H)^3} - \frac{\partial_\theta^2 H}{(1 + \varepsilon H)^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} 3\frac{\mathcal{P}}{\varepsilon} C_f - \frac{1}{N^2} \left\{ -\frac{4\varepsilon^2 \partial_\theta H}{(1 + \varepsilon H)^2} (\varepsilon U + \partial_\theta V) \right. \\ \left. + \left[1 - \left(\frac{\varepsilon \partial_\theta H}{1 + \varepsilon H} \right)^2 \right] \left((1 + \varepsilon H) \left[\partial_\xi \left(\frac{V}{1 + \varepsilon \xi} \right) \right]_{\xi=H} + \frac{\varepsilon^2 \partial_\theta U}{1 + \varepsilon H} \right) \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$U = \partial_T H + \frac{V \partial_\theta H}{1 + \varepsilon H},$$

où $\bar{S} = \frac{h_0 \gamma}{3\rho \nu^2}$ et le nombre de pression \mathcal{P} est défini par

$$\mathcal{P} = \frac{\rho_g U_N^2 h_0^3}{6\rho \nu^2 R}. \quad (\text{A.25})$$

A l'interface eau-câble, la condition de non-glissement s'écrit

$$U = V = 0. \quad (\text{A.26})$$

Hypothèses de lubrification

Nous supposons maintenant que le paramètre $\varepsilon = h_0/R$ est très petit devant 1

$$\varepsilon = \frac{h_0}{R} \ll 1 . \quad (\text{A.27})$$

Nous supposons en outre que les variables adimensionnelles U , V , P , H et leurs dérivées sont de l'ordre de 1. Seuls les termes dominants en ε dans les équations (A.24) sont conservés et nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_\xi P &= 0 , \\ -3G \cos(\theta - \delta) - \partial_\theta P + \partial_\xi^2 V &= 0 , \\ \partial_\xi U + \partial_\theta V &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Sur l'interface eau-air, les conditions aux limites deviennent

$$\begin{aligned} -3\mathcal{P}C_p + P &= 3S \left(\frac{1}{\varepsilon} - H - \partial_\theta^2 H \right) , \\ 3\frac{\mathcal{P}}{\varepsilon}C_f - \partial_\xi V &= 0 , \\ U &= \partial_T H + V\partial_\theta H , \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

où S est défini par $S = \varepsilon^3 \bar{S}$ pour conserver les termes de tension de surface. Sur la surface du cylindre la conditions est inchangée, $U = V = 0$.

Nous allons maintenant combiner les équations (A.28)c et (A.29)c et écrire une forme alternative de la conservation de la masse. Nous intégrons (A.28)c entre $\xi = 0$ et H et utilisons la condition (A.26)

$$U = - \int_{\xi=0}^H \partial_\theta V d\xi . \quad (\text{A.30})$$

Nous remplaçons cette expression de U dans (A.29)c et obtenons une nouvelle expression de la conservation de la masse

$$\partial_T H + V\partial_\theta H + \int_{\xi=0}^H \partial_\theta V d\xi = 0 , \quad (\text{A.31})$$

que l'on simplifie en

$$\partial_T H + \partial_\theta \left[\int_{\xi=0}^H V d\xi \right] = 0 . \quad (\text{A.32})$$

Avec (A.29)a, nous exprimons la pression à l'interface eau-air

$$P = 3S \left(\frac{1}{\varepsilon} - H - \partial_\theta^2 H \right) + P_g , \quad (\text{A.33})$$

que nous remplaçons dans (A.29)b, ce qui donne

$$-3G \cos(\theta - \delta) - \partial_\theta \left[3S \left(\frac{1}{\varepsilon} - H - \partial_\theta^2 H \right) + 3\mathcal{P}C_p \right] + \partial_\xi^2 V = 0 . \quad (\text{A.34})$$

Nous intégrons deux fois par rapport à ξ

$$V = \frac{3}{2} [G \cos(\theta - \delta) - S (\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H) + \mathcal{P}\partial_\theta C_p] \xi^2 + K\xi + K' , \quad (\text{A.35})$$

où K et K' sont constants par rapport à ξ . Pour $\xi = 0$, $V = 0$, donc $K' = 0$. L'équation (A.29)b donne la valeur de l'autre constante et nous obtenons

$$V = \frac{3}{2} [G \cos(\theta - \delta) - S (\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H) + \mathcal{P}\partial_\theta C_p] (\xi^2 - 2H\xi) + \frac{3\mathcal{P}C_f}{\varepsilon} \xi . \quad (\text{A.36})$$

En développant V dans (A.32) nous obtenons finalement

$$\partial_T H + \partial_\theta \left\{ [-G \cos(\theta - \delta) + S (\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H) - \mathcal{P}\partial_\theta C_p] H^3 + \frac{3\mathcal{P}C_f}{2\varepsilon} H^2 \right\} = 0 . \quad (\text{A.37})$$

A.3 Lien entre le débit et l'épaisseur

L'épaisseur d'un film d'eau ruisselant autour d'un cylindre vertical dépend du débit d'eau injecté en haut du dispositif. On considère l'écoulement stationnaire

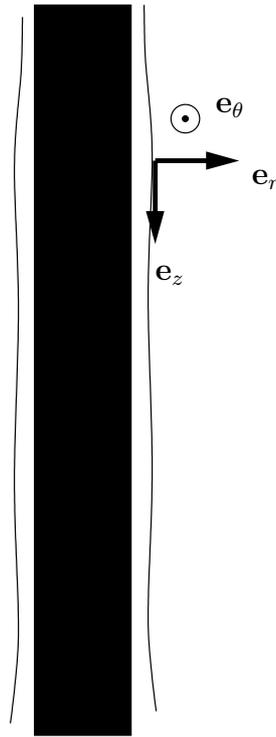


FIG. A.2 – Notations pour le calcul de l'épaisseur d'un film d'eau homogène ruisselant autour d'un cylindre vertical.

d'un film axisymétrique autour d'un cylindre vertical sous l'action de la gravité et de la viscosité, la tension de surface étant négligée, fig. A.2. Le débit volumique \dot{V} est connu et on souhaite calculer l'épaisseur du film. On suppose que le champ de vitesse $\mathbf{v} = u(r, z)\mathbf{e}_z$ est parabolique

$$u(r, z) = a(r, z)r^2 + b(z)r + c(z) . \quad (\text{A.38})$$

On introduit cette expression dans les équations de Navier-Stokes stationnaires

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} &= 0 , \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

ce qui se traduit en coordonnées cylindriques par

$$\begin{aligned}
 \partial_z u &= 0 , \\
 \partial_r p &= 0 , \\
 \partial_\theta p &= 0 , \\
 \rho g - \partial_z p + \mu \left[\frac{\partial_r (r \partial_r u)}{r} \right] &= 0 .
 \end{aligned} \tag{A.40}$$

Les conditions aux limites de non glissement à la paroi et de continuité des contraintes normale et tangentielle à l'interface eau-air (la tension de surface est négligée) se traduisent par

$$\begin{aligned}
 u(r = R) &= 0 , \\
 p(r = R + h_0, z) &= 0 , \\
 \partial_r u(r = R + h_0) &= 0 .
 \end{aligned} \tag{A.41}$$

On obtient aussi l'expression suivante pour la vitesse

$$u(r) = \frac{\rho g h_0^2}{2\mu} \left[- \left(\frac{r}{h_0} \right)^2 + 2 \left(1 + \frac{R}{h_0} \right) \frac{r}{h_0} - \frac{R}{h_0} \left(2 + \frac{R}{h_0} \right) \right] . \tag{A.42}$$

Le débit s'écrit $\dot{V} = \int_R^{R+h_0} 2\pi u(r) r dr$ et h_0 est solution du polynôme

$$5h_0^4 + 8h_0^3 - \frac{12\mu\dot{V}}{\pi\rho g} = 0 , \tag{A.43}$$

qui a une unique racine réelle positive. Dans le cas de l'expérience de mesure de la position des filets présentée dans la section 2.2.2 ($R = 1.5 \cdot 10^{-2}/2$ m et $\dot{V} = 3.6 \cdot 10^{-6}$ m³/s), 2.2.2

$$h_0 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m} \tag{A.44}$$

Cette valeur est compatible avec les hypothèses de lubrification, puisque l'épaisseur du film ramenée au rayon du cylindre vaut $\varepsilon = \frac{h_0}{R} = 2 \cdot 10^{-2} \ll 1$.

A.4 Calcul de la forme des filets

Nous considérons l'équation

$$Bo^{-1} \partial_\theta \{ (\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H) H^3 \} = \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 \partial_\theta \{ \partial_\theta (C_p) H^3 \} \quad (\text{A.45})$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} H(\theta_g) &= 0 , \\ H(\theta_d) &= 0 , \\ \partial_\theta H(\theta_g) &= \tan(\alpha_c)/\varepsilon , \\ \partial_\theta H(\theta_d) &= -\tan(\alpha_c)/\varepsilon . \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Après intégration de (A.45) par rapport à θ , utilisation de la condition sur le bord droit, $H(\theta_d) = 0$ et division par H^3 , on obtient

$$\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H = \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 Bo \partial_\theta (C_p) . \quad (\text{A.47})$$

Nous intégrons encore une fois par rapport à θ

$$H + \partial_\theta^2 H = \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 Bo C_p + K , \quad (\text{A.48})$$

où K est une constante.

Le minimum de pression autour des points de décollement est modélisée par un cosinus, figure A.3

$$\begin{aligned} C_p(\theta) &= -C_{p0} \cos \left(\pi \frac{\theta - \theta_m}{\theta_2 - \theta_1} \right) - C_{p1} , \\ C_{p0} &= 0.4 , \quad C_{p1} = 1.35 , \quad \theta_m = 70^\circ , \quad \theta_1 = 58^\circ , \quad \theta_2 = 82^\circ . \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

L'équation à résoudre maintenant s'écrit

$$\begin{aligned} H + \partial_\theta^2 H &= -\alpha \cos(a\theta + b) - \beta , \\ H(\theta_g) &= 0 , \\ \partial_\theta H(\theta_g) &= \tan(\alpha_c)/\varepsilon , \\ \partial_\theta H(\theta_d) &= -\tan(\alpha_c)/\varepsilon , \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

où les variables a , b , α et β désignent

$$\begin{aligned} a\theta + b &= \pi \frac{\theta - \theta_m}{\theta_2 - \theta_1} , \\ \alpha &= \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 Bo C_{p0} \quad \beta = \frac{1}{2} \mathcal{M} F_{RN}^2 Bo C_{p1} - K . \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

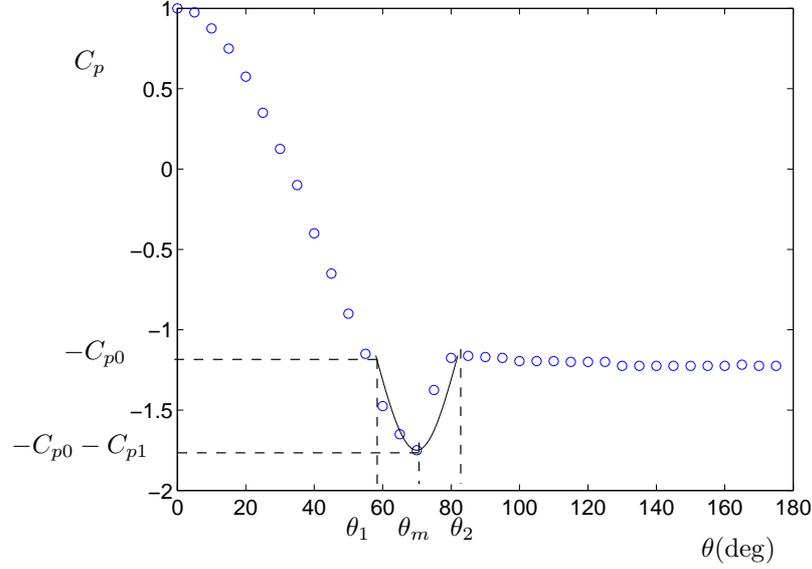


FIG. A.3 – La pression présente un minimum dans la zone du point de décollement. Le coefficient de pression (o) est approché par une fonction cosinus (-).

La solution de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière

$$H(\theta) = \gamma \cos \theta + \delta \sin \theta + \frac{\alpha}{a^2 - 1} \cos(a\theta + b) - \beta , \quad (\text{A.52})$$

où γ , δ et β sont des constantes que l'on détermine avec les conditions aux limites (A.50)b-d

$$\begin{aligned} H(\theta) &= \gamma (\cos \theta - \cos \theta_g) + \delta (\sin \theta - \sin \theta_g) \\ &\quad + \frac{\alpha}{a^2 - 1} [\cos(a\theta + b) - \cos(a\theta_g + b)] , \\ \gamma &= \frac{\frac{\tan \alpha_c}{\varepsilon} (\cos \theta_g + \cos \theta_d) + \frac{a\alpha}{a^2 - 1} \{ \sin(a\theta_g + b) \cos \theta_d - \sin(a\theta_d + b) \cos \theta_g \}}{\sin(\theta_d - \theta_g)} , \\ \delta &= \frac{\frac{\tan \alpha_c}{\varepsilon} (\sin \theta_g + \sin \theta_d) + \frac{a\alpha}{a^2 - 1} \{ \sin(a\theta_g + b) \sin \theta_d - \sin(a\theta_d + b) \sin \theta_g \}}{\sin(\theta_d - \theta_g)} . \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

On vérifie que $H(\theta_d) = 0$, en utilisant $\theta_d = 2\theta_m - \theta_g$, par symétrie, et $a\theta_m + b = 0$.

Le volume par unité de longueur de filet s'exprime

$$\begin{aligned}
 V = \int_{\theta_g}^{\theta_d} h_0 H(\theta) R d\theta = & -\frac{\alpha h_0 R}{a^2 - 1} \left[2 \frac{\sin(a\theta_g + b)}{a} - (\theta_d - \theta_g) \cos(a\theta_g + b) \right] \\
 & + \left\{ \frac{h_0 R \tan \alpha_c}{\varepsilon} + \frac{a h_0 R \alpha \sin(a\theta_g + b)}{a^2 - 1} \right\} \left[2 - (\theta_d - \theta_g) \frac{(1 + \cos(\theta_d - \theta_g))}{\sin(\theta_d - \theta_g)} \right].
 \end{aligned}
 \tag{A.54}$$

A.5 Réponse de l'oscillateur de van der Pol à un forçage

Lorsque l'oscillateur de van der Pol est soumis à un forçage harmonique $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$, il répond avec un déphasage ψ . L'équation de van der Pol en présence de forçage s'écrit,

$$\ddot{q} + \varepsilon\Omega (q^2 - 1) \dot{q} + \Omega^2 q = f(t) . \quad (\text{A.55})$$

Nous cherchons les solutions de (A.55) sous la forme $q = q_0 \cos(\omega t - \psi)$ d'amplitude q_0 et en déphasage de ψ par rapport au forçage, Facchinetti (2003). On injecte cette expression dans l'équation (A.55), on développe et on néglige la composante super-harmonique dans le terme non-linéaire,

$$q^2 \dot{q} = -q_0^3 \cos^2(\omega t) \sin(\omega t) = -\frac{q_0^3}{4} (\sin(\omega t) + \sin(3\omega t)) \approx -\frac{q_0^3}{4} \sin(\omega t) . \quad (\text{A.56})$$

Les facteurs des fonctions de base $(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ doivent être nuls

$$\begin{aligned} (\Omega^2 - \omega^2)q_0 - f_0 \cos \psi &= 0 , \\ -\varepsilon\Omega\omega \left(\frac{q_0^2}{4} - 1 \right) q_0 + f_0 \sin \psi &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

En combinant ces deux équations, on obtient une expression du déphasage,

$$\tan \psi = \frac{\varepsilon\Omega\omega}{\Omega^2 - \omega^2} \left(\frac{q_0^2}{4} - 1 \right) . \quad (\text{A.58})$$

Lorsque la pulsation ω est proche de Ω , le retard de phase de la réponse q par rapport au forçage f vaut $\psi = \pi/2$.

A.6 Mesure de la position des filets dans la configuration (II)

Nous avons mis en place une expérience dans le Mechanical Engineering Department de la Hong Kong Polytechnic University. Des mesures complémentaires ont été réalisées par la suite par Md. M. Alam et Y. Zhou, Lemaitre *et al.* (2006a).

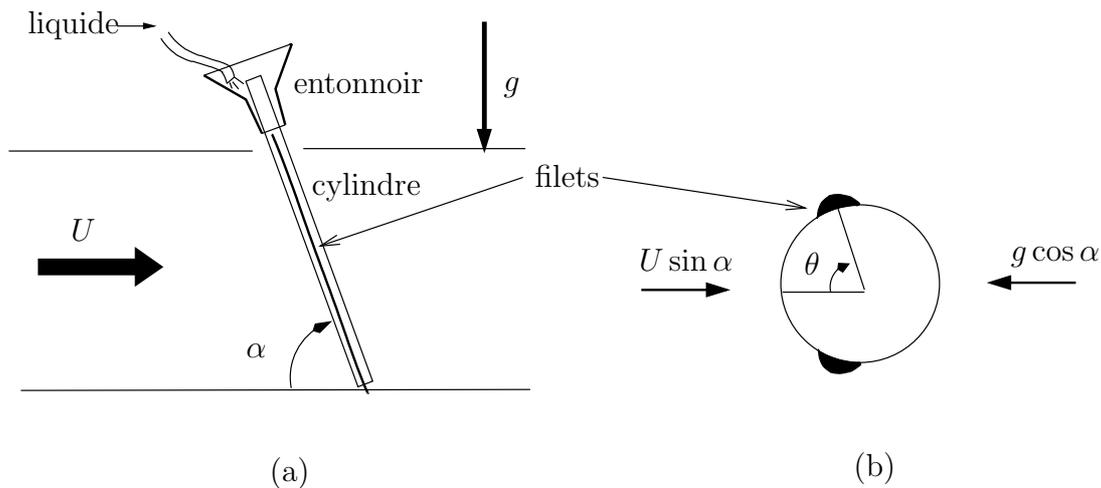


FIG. A.4 – Montage expérimental pour la mesure de la position des filets. (a) Vue de côté; (b) vue en section.

La soufflerie utilisée est du type Eiffel à veine fermée. Le niveau de turbulence dans la veine d'essai est de l'ordre de $N = 1\%$. La longueur de la veine est 90 cm et sa section est de 30×30 cm.

Plusieurs cylindres sont utilisés, $R = 7.5$ et $R = 11$ mm, et ce pour plusieurs inclinaisons, $\alpha = 87.5$, 80 et 55° . L'angle de dérapage vaut $\beta = 90^\circ$. Nous avons testé plusieurs vitesses d'écoulement d'air, U , entre 0 et 15 m/s.

Un liquide (du lait ou de l'eau) ruisselle autour du cylindre, figure A.4(a). Un réservoir situé en hauteur alimente le dispositif en liquide par gravité. Le liquide passe dans un entonnoir concentrique au cylindre et séparé de celui-ci par des aiguilles de manière à garantir un espace constant et générer un film homogène. Le débit est estimé en récoltant le liquide dans un récipient qui est pesé, vide et plein au bout d'une durée chronométrée; il est de $\dot{v} = 3.6 \times 10^{-6}$ m³/s.

Un film homogène est d'abord créé autour du cylindre, puis la soufflerie est mise en marche. Le côté amont du film s'amincit et deux excroissances, les filets, apparaissent le long du cylindre, symétriquement par rapport à la direction de l'écoulement d'air. La face amont du cylindre s'assèche finalement, alors que la zone située en aval des filets reste mouillée.

Le dispositif est éclairé avec des lampes halogènes et est filmé de côté avec une caméra rapide. La position des filets est obtenue en traitant les images filmées.

A.7 Expérience pour la détection du mouvement des filets

Un cylindre de diamètre $D = 2$ cm est suspendu dans une soufflerie de type Eiffel à veine fermée dont la section carrée a une largeur de 170 mm et dont le niveau de turbulence est de 1.1%, figure A.5(a). On fait varier la vitesse d'écoulement autour de $U = 5$ m/s, vitesse où l'accrochage est attendu d'après les résultats obtenus par Alam & Zhou (2006). On mesure la vitesse grâce à un tube de Pitot et un capteur de pression anémométrique. Le cylindre est recouvert d'une laque blanche et de l'eau ruisselle depuis le haut du cylindre grâce à un entonnoir de diamètre légèrement supérieur à celui du cylindre et des aiguilles à coudre placées entre l'entonnoir et le cylindre garantissent un espace homogène sur la circonférence. L'eau est légèrement chargée en surfactant (liquide vaisselle) de manière à augmenter la mouillabilité du liquide sur le cylindre et éviter que les filets ne méandrent. L'alimentation en eau se fait par effet siphon à partir d'un réservoir surélevé par rapport à la soufflerie.

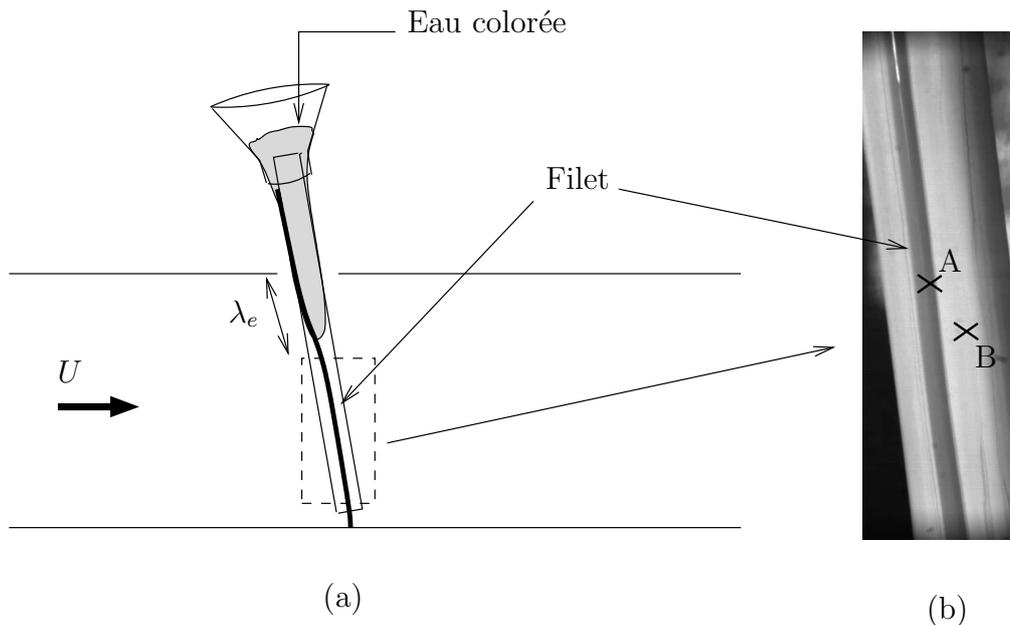


FIG. A.5 – (a) Dispositif expérimental pour la mise en évidence d'une vibration des filets. (b) Photo d'un filet pour une vitesse d'écoulement d'air $U = 4.4$ m/s.

Pour une vitesse de vent donnée, un fort débit d'eau est injecté de sorte que tout le cylindre se mouille. Puis le débit est réduit. Deux filets symétriques par rapport à $\theta = 0$ apparaissent alors. Le cylindre est sec en amont et en aval des filets. Une longueur d'établissement λ_e existe : à l'extérieur de la veine, un seul

filet gravitaire existe qui se sépare en deux à mesure qu'il pénètre dans le coeur de la veine. Au delà de λ_e , deux filets rectilignes contrôlés par le vent existent. La longueur d'établissement est d'autant plus faible que la vitesse de vent est élevée. On visualise un filet en filmant le dispositif de côté avec une caméra rapide (300 images par seconde) et deux lampes halogènes (500 et 1000W) en éclairage direct. On se concentre sur la demi-hauteur basse, où le filet est stabilisé. De l'encre de chine est injectée manuellement vers $\theta = 0$ par seringue de manière à distinguer avec un contraste important les filets colorés en noir sur le cylindre blanc. On étudie l'évolution du niveau de gris sur le bord du filet $s_A(t)$ et sur une zone sèche du cylindre $s_B(t)$, figure A.5(b).

A.8 Synthèse des expériences mesurant la position des filets

Auteurs	R (m)	U (m/s)	$\alpha(^{\circ})$	$\beta(^{\circ})$	Filet	ψ (L/s)
Hikami & Shirahishi (1988), Fig. 14	$7 \cdot 10^{-2}$	0,16	45	45	haut/bas	
Matsumoto <i>et al.</i> (1992), Fig. 18(b)	$7.5 \cdot 10^{-2}$	7,20	40	45	haut	0,013
Gu & Du (2005), Fig. 9(a)	$6 \cdot 10^{-2}$	7,12	[25, 45]	35	haut	
Gu & Du (2005), Fig. 9(b)	$6 \cdot 10^{-2}$	6,12	30	[25, 45]	haut	
Saddi & Dinkler (2004), Fig. 2	$5.5 \cdot 10^{-2}$	2,25	79	90	haut/bas	
Wang <i>et al.</i> (2005), Fig. 4	$2.25 \cdot 10^{-2}$	9	45	[0, 90]	haut/bas	$2.2 \cdot 10^{-3}$
Wang <i>et al.</i> (2005), Fig. 5	$2.25 \cdot 10^{-2}$	8,14	45	0, 20, 45	haut	$2.2 \cdot 10^{-3}$
Wang <i>et al.</i> (2005), Fig. 6	$2.25 \cdot 10^{-2}$	6,16	45	45	haut/bas	[$3.9 \cdot 10^{-4}$, $2.2 \cdot 10^{-3}$]
Lemaître <i>et al.</i> (2006a), Fig. 3(b)	$7.5 \cdot 10^{-3}$	[0, 4, 2]	87.5	90	haut/bas	$3.6 \cdot 10^{-3}$
Lemaître <i>et al.</i> (2006a), Fig. 3(b)	$1.1 \cdot 10^{-2}$	[0, 7, 6]	80	90	haut/bas	$6.9 \cdot 10^{-3}$
Lemaître <i>et al.</i> (2006a), Fig. 3(b)	$1.1 \cdot 10^{-2}$	0, 15	55	90	haut/bas	$6.9 \cdot 10^{-3}$

FIG. A.6 – Synthèse des expériences, nouvelles et anciennes, visant à mesurer la position des filets.

Annexe B

Articles

Rainwater rivulets on a cable subject to wind

Cécile Lemaitre^a, Md. Mahmud Alam^b, Pascal Hémon^a, Emmanuel de Langre^{a,*},
Yu Zhou^b

^a *Département de Mécanique, LadHyX, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France*

^b *Department of Mechanical Engineering, The Hong Kong Polytechnic University, Hung Hom, Kowloon, Hong Kong*

Received 18 December 2005; accepted 19 January 2006

Available online 28 February 2006

Presented by Pierre Perrier

Abstract

Rainwater rivulets appear on inclined cables of cable-stayed bridges when wind and rain occur simultaneously. In a restricted range of parameters this is known to cause vibrations of high amplitudes on the cable. The mechanism underlying this effect is still under debate but the role of rainwater rivulets is certain. We use a standard lubrication model to analyse the dynamics of a water film on a cylinder under the effect of gravity and wind load. A simple criterion is then proposed for the appearance and position of rivulets, where the Froude number is the control parameter. Experiments with several geometries of cylinder covered with water in a wind tunnel show the evolution of the rivulets with the Froude number. Comparison of the prediction by the model with these experimental data shows that the main mechanism of rivulet formation and positioning is captured. **To cite this article: C. Lemaitre et al., C. R. Mécanique 334 (2006).**

© 2006 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Filets d'eau de pluie sur un câble soumis au vent. Des filets d'eau de pluie apparaissent sur les haubans inclinés de ponts lorsque le vent et la pluie sont présents simultanément. Pour certaines conditions ceci peut causer des vibrations de grandes amplitudes de ces haubans. Le mécanisme précis à l'origine de cet effet est encore l'objet de débat, mais le rôle de ces filets est certain. Nous utilisons un modèle de film mince pour analyser la dynamique d'un film d'eau sur un cylindre, sous l'action de la gravité et du chargement dû au vent. Un critère simple est proposé pour prédire l'apparition et la position des filets, dans lequel le nombre de Froude est le paramètre de contrôle. Des expériences avec différents cylindres couverts d'eau et placés dans une soufflerie montrent l'évolution de ces filets avec le nombre de Froude. La comparaison entre les prédictions du modèle et les données expérimentales permet d'affirmer que le mécanisme principal de création et de positionnement des filets est décrit par ce modèle. **Pour citer cet article : C. Lemaitre et al., C. R. Mécanique 334 (2006).**

© 2006 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Keywords: Vibrations; Rain; Wind; Rivulet; Cylinder

Mots-clés: Vibrations; Vent; Pluie; Filet; Cylindre

* Corresponding author.

E-mail address: delangre@ladhyx.polytechnique.fr (E. de Langre).

Version française abrégée

On considère le cas simplifié d'un câble incliné dans le sens du vent, Fig. 1(a) et on étudie l'évolution d'un film liquide sur la surface du cylindre, Fig. 1(b). A l'aide d'un modèle de film mince combinant le modèle de Reisfeld [8] et d'Oron [9] on déduit l'équation d'évolution de l'épaisseur, Éq. (3), en fonction des efforts de gravité, de tension superficielle (nombre de Bond) et ceux dûs au vent (nombre de Froude). Le modèle simple proposé en Section 3 est fondé sur l'hypothèse que les filets vont apparaître, sur un film uniforme, au lieu où la croissance du film est maximale. Cette croissance, Éq. (4), peut être simplement analysée en fonction du nombre de Froude, Fig. 2. On montre alors que pour de faibles vitesses de vent un filet se forme au vent du cylindre, et qu'il se divise en deux filets qui vont se fixer près des points de séparation au dessus d'un nombre de Froude critique, Éq. (5). Dans la Section 4 on présente les résultats d'une série d'essais en soufflerie avec un cylindre couvert d'un film d'eau ruisselant, pour différents diamètres de cylindre et angles d'inclinaison, Fig. 3(a). La position des filets est suivie par une technique optique. La comparaison entre les prédictions du modèle et les points expérimentaux, Fig. 3(b), montre que la transition entre les deux régimes est bien observée dans l'expérience et prédite par les calculs. L'utilisation de valeurs de coefficients de pression et de friction correspondant à un écoulement subcritique et supercritique permet d'encadrer les résultats expérimentaux.

1. Introduction

Cables of cable-stayed bridges can experience strong vibrations under the combined effect of rain and wind [1]. This is commonly referred to as Rain Wind Induced Vibration (RWIV) and has been the subject of significant work in recent years, because of its importance in the design of long bridges [2–7]. In this phenomenon the dynamics of the vibrating cable and of the oscillating wind wake are coupled through the dynamics of rivulets, by a mechanism that is still under debate. These rivulets are formed from the film of rainwater flowing along inclined cables. It is common knowledge in this field [5,7], that their position on the cable seems close to the separation point of the external wind flow, and that a rivulet appears on the upper side of the cable only if the wind velocity is sufficiently high [1]. The existence of such rivulets is known to be essential to the occurrence of RWIV [2,5].

We investigate the condition for the appearance of rivulets and the relation between their position and the physical parameters of the system such as wind velocity, surface tension, viscosity of water, thickness of the water film, cable diameter and inclination. In Section 2 the equation governing the dynamics of a thin film of liquid on a cylinder subjected to wind is derived. This allows us, in Section 3, to propose a simple criterion to estimate the position of the rivulets. The predictions based on the criterion are then compared with new experimental data in Section 4.

2. Dynamics of a film under wind load

To analyse the formation of rivulets we consider a thin liquid film on a cylinder, flowing along the cylinder axis. Its shape is influenced by the effect of gravity, surface tension and wind load. A simplified configuration is considered, where the cylinder declines in the direction of wind. Typical orders of magnitudes of the parameters in our case are a ratio of film thickness to the cylinder radius of 10^{-2} , a Reynolds number for the wind flow of about 10^4 while the Reynolds number for the flow of rainwater along the cylinder is about 10^2 .

In this section we derive the equation satisfied by the local thickness of the film, noted $h(\theta, t)$, in a given cross-section of the cylinder, Fig. 1(b). The forces acting on the film in that plane are gravity, of magnitude $g \sin \alpha$ where α is the inclination of the cable, and wind load, due to an upstream uniform velocity noted v_∞ , which reduces to $v = v_\infty \cos \alpha$ in the cross-section plane. The resulting wind load is defined by the local pressure $p(\theta)$ and the local friction shear force $\tau(\theta)$, acting respectively on the instantaneous normal and tangent to the surface of the liquid film, Fig. 1(b).

We follow an approach similar to that used in [8]. These authors derived the equation of motion of a liquid film on a cylinder under the action of gravity and surface tension. The addition of pressure and friction forces due to the air flow follows the approach used in [9] for the case of a film on a flat surface. The derivation is done in the framework of lubrication where both the relative film thickness h/R and its gradient $h_{,\theta}/R$ are small. We also neglect here the effect of the water velocity in the direction of the cylinder axis, normal to the plane of Fig. 1(b). The dimensionless quantities that are relevant to that case are, following [8]

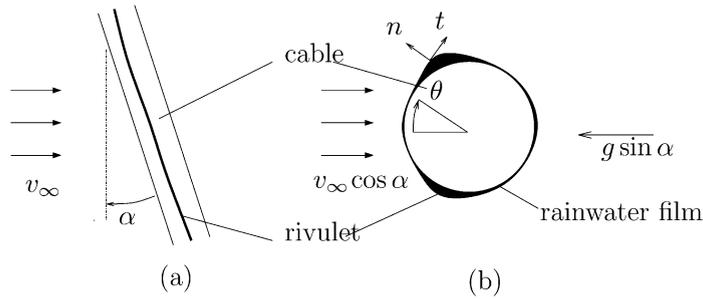


Fig. 1. Rivulet of rainwater flowing along an inclined cable subjected to wind: (a) side view; (b) cross-section.
 Fig. 1. Filet d'eau de pluie s'écoulant le long d'un câble incliné soumis au vent : (a) vue de côté ; (b) coupe.

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{gh_0^3}{3v^2}, & S &= \frac{\gamma h_0^4}{3\rho_L v^2 R^3}, & \mathcal{M} &= \frac{\rho}{\rho_L}, & \mathcal{P} &= \frac{v^2 h_0^3}{6v^2 R} \\
 C_P &= \frac{2p}{\rho v^2}, & C_F &= \frac{2\tau}{\rho v^2}, & T &= \frac{v}{Rh_0} t
 \end{aligned} \tag{1}$$

and $\varepsilon = h_0/R$, $H = h/h_0$, where h_0 is a reference film thickness, γ is the surface tension, ν is the viscosity of the liquid, ρ and ρ_L are the densities of air and water, C_P and C_F being the pressure and friction coefficient. Keeping only the terms at the leading order in ε in a derivation identical to that of [8] leads here to the equation governing the dynamics of the film [10,11]

$$H_{,T} = G \sin \alpha (H^3 \sin \theta)_{,\theta} - S [H^3 (H_{,\theta} + H_{,\theta\theta\theta})]_{,\theta} + \mathcal{M}\mathcal{P} \left[H^3 C_{P,\theta} - H^2 \frac{3}{2\varepsilon} C_F \right]_{,\theta} \tag{2}$$

where $(,)$ stands for differentiation. It should be noted here that the friction coefficient C_F being of the order of 10^{-2} , which is similar to that of ε in practice, the last term C_F/ε needs to be kept at this order, as in [9]. When \mathcal{P} is set to zero (no wind), Eq. (2) is identical to that of [8]. Conversely, when G is set to zero and when C_P and C_F do not depend on θ , in the limit of large cable radius the equation of [9] for the dynamics of a plane film subjected to air flow is obtained from Eq. (2).

Another dimensionless form, of more practical use, can be defined by rescaling the time variable by gravity, $\tau = GT \sin \alpha$, so that Eq. (2) now reads

$$H_{,\tau} = (H^3 \sin \theta)_{,\theta} - Bo^{-1} [H^3 (H_{,\theta} + H_{,\theta\theta\theta})]_{,\theta} + \frac{1}{2} \mathcal{M} F_R^2 \left[H^3 C_{P,\theta} - H^2 \frac{3}{2\varepsilon} C_F \right]_{,\theta} \tag{3}$$

where the Bond number $Bo = G/S = \rho_L g R^3 \sin \alpha / (\gamma h_0)$ and the Froude number $F_R^2 = \mathcal{P}/G = v^2 / (gR \sin \alpha)$ are now used. In order to compare the effect of gravity, surface tension and wind load on the dynamics of the film, the following order of magnitude of the parameters can be used: $v^2 = 10 \text{ m}^2/\text{s}^2$, $\sin \alpha = 0.1$, $R = 10^{-2} \text{ m}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $\gamma = 10^{-1} \text{ N/m}$, $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, $\mathcal{M} = 10^{-3}$. This results in $Bo^{-1} = 10^{-2}$ and $\mathcal{M} F_R^2 = 1$, showing that all terms in Eq. (3) play a role, but that the effect of surface tension is not dominant.

3. Position of rivulets

If a uniform film on the cylinder is subjected to the effect of gravity and of wind load its evolution is governed by Eq. (3). To estimate the location of rivulets that will result from this evolution we may simply compare the local growth rate of the film thickness, as defined by the right-hand side term of Eq. (3), on all points around the cylinder. This growth rate, on a film of uniform thickness $H = 1$ reduces to

$$r(\theta) = \cos \theta + \frac{1}{2} \mathcal{M} F_R^2 \left[C_{P,\theta\theta} - \frac{3}{2\varepsilon} C_{F,\theta} \right] \tag{4}$$

We now assume that a rivulet will grow and eventually stabilize through non-linear effects at the location, noted θ_R , where the local growth rate of a uniform film, $r(\theta)$, is maximum.

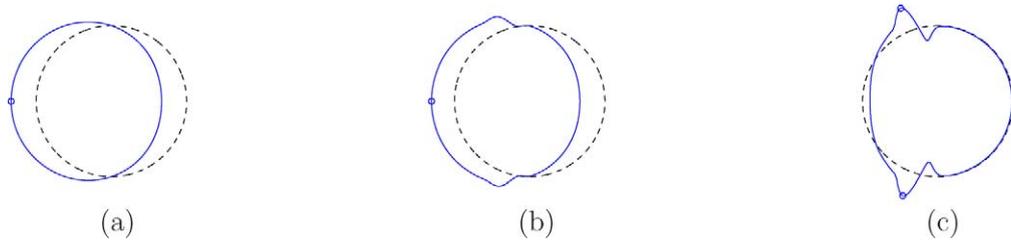


Fig. 2. Comparative local growth rate on a uniform thin film around a cylinder under the combined action of gravity and wind load. (—) growth rate, shown as a polar function with arbitrary scale. (o) position of the maximum of growth rate, θ_R , where the rivulet appears. (a) $\mathcal{M}F_R^2 = 0$: rivulet resulting from gravity, growing at $\theta_R = 0$. (b) $\mathcal{M}F_R^2 = 0.01$, (c) $\mathcal{M}F_R^2 = 10$: rivulet resulting from wind load, growing at $\theta_R/\pi = 0.38$.

Fig. 2. Taux de croissance relatif sur un film uniforme autour d'un cylindre sous l'action simultanée de la gravité et du chargement du vent (—) taux de croissance vu comme une fonction polaire et d'amplitude arbitraire (o) position du taux de croissance maximum, θ_R , où le filet va apparaître. (a) $\mathcal{M}F_R^2 = 0$: filet dû à la gravité, croissant à $\theta_R = 0$. (b) $\mathcal{M}F_R^2 = 0,01$, (c) $\mathcal{M}F_R^2 = 10$: filet dû au vent, croissant à $\theta_R/\pi = 0,38$.

Using Eq. (4) the growth rate is plotted as a function of the position around the cylinder, for several values of the Froude number, Fig. 2. As this parameter is increased the position of the maximum of the growth rate shifts from the front of the cylinder, $\theta_R = 0$, where gravity dominates for $\mathcal{M}F_R^2 \ll 1$, to an angle noted $\theta_R = \theta_R^{\max}$ for $\mathcal{M}F_R^2 \gg 1$. This shift results from the competition between the two terms of Eq. (4), the last one depending on the Froude number. Using the data of [12] for the coefficients $C_P(\theta)$ and $C_F(\theta)$, which depend on the range of Reynolds number, we have typically, $\theta_R^{\max}/\pi = 0.38$ in the subcritical range and $\theta_R^{\max}/\pi = 0.51$ in the supercritical range. This is close, though not identical, to the position of the separation point on a cylinder without film. Though the Reynolds number considered here is only 10^4 we give results for subcritical and supercritical conditions as this may apply for practical cases.

The transition between the two regimes, i.e., one rivulet at $\theta_R = 0$ or two symmetrical rivulets at $\theta_R = \theta_R^{\max}$ can be estimated by comparing the value of the growth rate $r(\theta)$ at these two points. This yields a simple critical value of the control parameter

$$(\mathcal{M}F_R^2)_C = \frac{2(1 - \cos \theta_R^{\max})}{C_{P,\theta\theta}(\theta_R^{\max}) - \frac{3}{2\varepsilon} C_{F,\theta}(\theta_R^{\max})} \tag{5}$$

This allows us to predict a transition at $(\mathcal{M}F_R^2)_C = 0.05$ and $(\mathcal{M}F_R^2)_C = 0.1$ for subcritical or supercritical values of the pressure and friction coefficients, respectively.

4. Comparison with experiments

A new set of experiments has been performed at the Mechanical Engineering Department of Hong Kong Polytechnic University. The set-up is presented on Fig. 1(a). An inclined cylinder in a wind tunnel is covered with a thin film of colored water (milk) that is fed at the top by a funnel. The position of the rivulets is measured optically. The Froude number, which was found in the model above to be the main control parameter, is varied by changing the flow velocity v_∞ from 0 to 15 m/s, the inclination of the cylinder α from 2.5 to 35 degrees, or the radius of the cylinder R from 7.5 to 11 mm. The flow rate is such that the film thickness on the vertical cylinder without wind is $h_0 \simeq 10^{-4}$ m, so that the ratio is $\varepsilon \simeq 10^{-2}$.

Fig. 3(b) shows the evolution of the position of the rivulet with the Froude number. For a given radius and inclination angle, when the flow velocity is increased it is observed that the windward rivulet, originally at $\theta = 0$, splits in two rivulets that migrate to a position that does not change for higher Froude numbers, about $\theta_R/\pi = 0.44$. This transition occurs between $\mathcal{M}F_R^2 = 0.1$ and $\mathcal{M}F_R^2 = 1$. The results of experiments with different diameters and inclination angles follow the same trend when the Froude number is used as the control parameter, Fig. 3(b).

The prediction resulting from the model based in the maximum of the growth rate is shown on the same graph. Two cases are shown, using subcritical or supercritical values of the pressure and friction coefficients. In the experiments the Reynolds number is such that only subcritical conditions would be expected on a dry cylinder. Still, because of the presence of a rivulet near the separation point a transition may occur, so that supercritical data should also be considered [13]. The experimental positions of the rivulets for high velocities fall between the values given by the

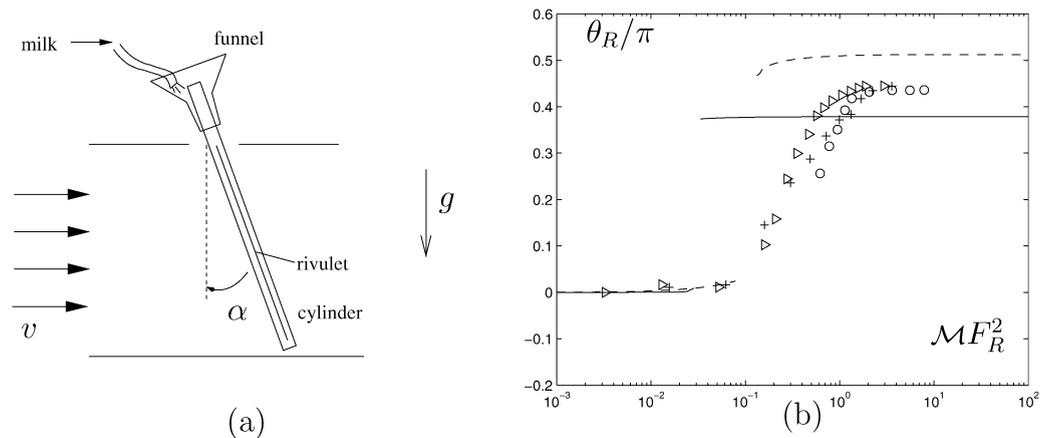


Fig. 3. Position of the rivulets on a cylinder inclined in the leeward direction. (a) Experimental set-up. (b) Experimental data: (o), $\alpha = 2.5$ deg, $R = 7.5$ mm; (\triangleright), $\alpha = 10$ deg, $R = 11$ mm; (+), $\alpha = 35$ deg, $R = 11$ mm. A symmetrical rivulet exists at $-\theta_R$ but is not shown here for clarity. Proposed model based on the maximum of the growth rate of a uniform film, Eq. (4): (—) prediction using subcritical data on the pressure and friction coefficients; (- -) prediction using supercritical data.

Fig. 3. Position des filets sur un cylindre incliné vers l'aval. (a) Montage expérimental (b) Résultats expérimentaux (o), $\alpha = 2,5$ deg, $R = 7,5$ mm ; (\triangleright), $\alpha = 10$ deg, $R = 11$ mm ; (+), $\alpha = 35$ deg, $R = 11$ mm. Un filet symétrique existe à $-\theta_R$ mais n'est pas montré dans un souci de clarté. Modèle proposé fondé sur le maximum de taux de croissance sur un film uniforme, Éq. (4) : (—) prédiction avec des données de coefficients de pression et de pression souscritiques (- -) prédiction avec des données dans le domaine supercritique.

model. The transition predicted in the model, using Eq. (5), is observed for lower values of the Froude number than in the experiment.

By comparing the model proposed here with experimental data it is shown that the appearance of rivulets can be explained by a balance between gravity and wind load, the Froude number being the relevant parameter to scale these effects. The equilibrium shape of a rivulet may only be computed by considering the full non-linear effect in the film equation (3) and in contact angles at the boundaries of the film if it dries in some regions of the cylinder surface. Yet the overall position seems to depend more on the variation of the external load than on local non-linear effects. In terms of practical applications to cables in cable-stayed bridges the present formulations can easily be extended to account for a cable inclination that is not the direction of wind. Moreover, for higher cable diameter, typically $R = 0.1$ m on bridges the Reynolds number is such that supercritical data on wind load should be used.

Acknowledgements

The authors acknowledge the financial support of the France-Hong Kong PROCORE joint research program 07708UE on Rain–Wind Induced Vibrations of cables.

References

- [1] Y. Hikami, N. Shiraishi, Rain–wind induced vibrations of cables in cable-stayed bridges, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 29 (1988) 409–418.
- [2] H. Yamaguchi, Analytical study on growth mechanism of rain vibration of cables, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 33 (1990) 73–80.
- [3] M. Matsumoto, N. Shiraishi, M. Kitawaza, C. Knisely, H. Shirato, Y. Kim, M. Sujii, Aerodynamic behaviour of inclined circular cylinders cable aerodynamics, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 33 (1990) 63–72.
- [4] O. Flamand, Rain–wind induced vibration of cables, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 57 (1995) 353–362.
- [5] A. Bosdogianni, D. Olivari, Wind- and rain-induced oscillations of cables of stayed bridges, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 64 (1996) 171–185.
- [6] N. Cosentino, O. Flamand, C. Ceccoli, Rain–wind induced vibration of inclined stay cables. Part I: Experimental investigation and physical explanation, *Wind and Structures* 6 (2003) 471–484.
- [7] Z.J. Wang, Y. Zhou, J.F. Huang, Y.L. Xu, Fluid dynamics around an inclined cylinder with running water rivulets, *Journal of Fluids and Structures* 21 (1) (2005) 49–64.
- [8] B. Reisfeld, S.G. Bankoff, Non-isothermal flow of a liquid film on a horizontal cylinder, *Journal of Fluid Mechanics* 236 (1992) 167–196.

- [9] A. Oron, S.H. Davis, S.G. Bankoff, Long-scale evolution of thin liquid films, *Reviews of Modern Physics* 69 (3) (1997) 931–980.
- [10] C. Lemaitre, P. Hémon, E. de Langre, Thin film around a cable subject to wind, in: 4th European African Conference on Wind Engineering, Prague, Czech Republic, July 2005, pp. 202–203.
- [11] C. Lemaitre, E. de Langre, P. Hémon, Évolution d'un film d'eau autour d'un hauban de pont sous l'action du vent, in: Congrès Français de Mécanique, August 2005, paper 810.
- [12] E. Achenbach, Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in a cross-flow up to $Re = 5 \times 10^6$, *Journal of Fluid Mechanics* 34 (4) (1968) 625–639.
- [13] E. Szechenyi, Supercritical Reynolds number simulation for two-dimensional flow over circular cylinders, *Journal of Fluid Mechanics* 70 (3) (1975) 529–542.

Thin water film around a cable subject to wind

C. Lemaitre, P. Hémon^{*}, E. de Langre

Department of mechanics, LadHyX, CNRS-Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

Abstract

Cables of cable-stayed bridges can experience rain-wind-induced vibrations (RWIV). This instability involves lower frequencies and higher amplitudes than classical vortex-induced vibrations. Furthermore, RWIV is restricted to a certain range of wind velocities, unlike linear 1 dof galloping. When flowing along the cables, the water gathers near the separation points to form one or two rivulets. Former studies which have described the coupling between the rivulets' motion and the cable motion assume the existence of the rivulet. In this paper, we address the conditions for the formation of the rivulets. A two-dimensional model is developed within the lubrication theory, describing the evolution of a thin film subjected to gravity, surface tension, wind and motion of the cylinder. Numerical simulations show the appearance of the rivulets that are reputedly responsible for the instability. The position at which the rivulets appear is found to vary with the wind speed and the predictions of the model are in good agreement with new experimental data.

Key words: rain-wind-induced vibrations, cylinder, rivulet, film dynamics, lubrication theory

1 Introduction

On cable-stayed bridges, inclined cables connect the pylons to the deck, Fig. 1. The cables can experience vibrations which are due to the presence of both rain and wind (rain-wind-induced vibrations, RWIV). First reported by Hikami and Shiraishi (1988)[7], this particular type of instability happens under conditions of moderate rain and rather low wind speed, typically 10 m/s,

^{*} Tel.: +33 1 69 33 39 33; fax: +33 1 69 33 30 30

Email address: pascal.hemon@ladhyx.polytechnique.fr (P. Hémon).

and vibrations cease when the rain stops. Unlike the instabilities due solely to wind, RWIV are not fully understood. Observations in full-scale as well as experiments conducted in wind tunnels show that RWIV occurs only in cables declining in the direction of the wind. The vibrations are generally cross-wind, Hikami and Shiraishi (1988)[7]. The amplitudes of such vibrations are higher, and the frequencies lower, than those of vortex-induced vibrations, Hikami and Shiraishi (1988)[7]. Furthermore, this is a velocity-restricted phenomenon, unlike the linear one-degree-of-freedom galloping of Den Hartog (1985)[4], for which there is no maximum wind speed.

In unstable cases, the water flows around the cable and one to two rivulets form near the separation points of the air-flow around the dry cylinder, Bosdogianni and Olivari (1996) [3]. The two rivulets oscillate circumferentially, at the same frequency as the cable motion, Hikami and Shiraishi (1988)[7]. Some sine waves travel along the upper rivulet, whereas the bottom rivulet stays rectilinear, Wang et al. (2005)[18]. Authors agree that the presence of the upper rivulet is required for the instability to take place, Matsumoto et al. (1995) [11] and Bosdogianni and Olivari (1996) [3]. It is unclear, however, whether the circumferential motion of the upper rivulet is necessary or not. Experiments by Verwiebe and Ruscheweyh (1998) [17] and Flamand (1995) [5] tend to show that an artificial rivulet fixed on the cylinder, exposed to a RWIV-like wind, does not provoke instability. On the contrary, Bosdogianni and Olivari (1996) [3] and Matsumoto et al. (1995) [11] observe vibrations of the cable in similar experiments.

RWIV causes fatigue and necessitates earlier replacement of the cables. Countermeasures to avoid this phenomenon that are based on the disorganisation of the rivulets have been studied. Flamand (1995) [5] and more recently Gu (2005) [6] have tested several solutions such as a wire spiralling around the cable.

Some models intended to describe the coupling between the upper rivulet and the cable motion have been developed. Yamaguchi presented in 1990 [19] a galloping model with two-degrees of freedom, which has been extended more recently by Peil et al. [13], [14] to more degrees-of-freedom.

These models assume the existence of at least the upper rivulet. In this article, the conditions for the appearance of the rivulets are investigated. A new model is presented in section 2 that describes the evolution of a thin water film around a moving cable subject to wind. Numerical results from this model are discussed in section 3. In section 4, the position of the rivulets predicted by the model is compared to data from new experiments.

The details for the derivation of the model may be found in [10]. Some more experiments and a simple criterion for determining the existence and the position of the rivulets are presented in [9].

2 Model

This section presents a new two-dimensional model based on lubrication theory. The model describes the behaviour of a thin water film in a cylindrical configuration, evolving under the effect of gravity, surface tension, wind and motion of the support. Reisfeld and Bankoff (1992) [15] derived the equations for a thin film surrounding a cylinder, subject to gravity and surface tension. Following a similar approach we modelled the actions of wind and cable motion on the film, by considering them as an external forcing.

2.1 Geometry and notations

A thin film of thickness $h(\theta)$ is considered, surrounding a horizontal cylinder of radius R , Fig. 2. The film is assumed to be continuous: there is no dewetting and the quantity of matter is constant (no drop break-off). It has a characteristic thickness h_o . It is subject to gravity $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$ and to a homogeneous surface tension, γ , independent of θ . If an inclined cylinder were considered instead of a horizontal one, the effective gravity would be lower. The wind blows from the left with a horizontal upstream velocity $\mathbf{v}_{g\infty} = v_{g\infty}\mathbf{e}_x$ that produces pressure and friction coefficients $C_p(\theta)$ and $C_f(\theta)$ respectively at each point on the film surface. As the rain-wind-induced vibrations are mostly transverse to the wind direction, the cable may undergo a vertical motion. Its displacement, $\mathbf{y} = y\mathbf{e}_y$, has a characteristic amplitude y_o and its evolution in time, with a characteristic time T_y , is described by a function f , $y(t) = y_o f(t/T_y)$, which is assumed to be twice differentiable. The function f might be a sine-function ; the time T_y would then be its period. The acceleration of the cable produces an added gravity that depends on time,

$$\mathbf{g}_a = -\ddot{y}\mathbf{e}_y = -\frac{y_o}{T_y^2} f''\left(\frac{t}{T_y}\right) \mathbf{e}_y . \quad (1)$$

2.2 Navier-Stokes and boundary conditions

The Navier-Stokes equations are written for the water film,

$$\begin{cases} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho(\mathbf{g} + \mathbf{g}_a) - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} , \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 , \end{cases} \quad (2)$$

where \mathbf{v} is the velocity field in the water film, ρ is the water density, p is the pressure in the film and μ is the dynamic viscosity of water. In the local frame $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$, the position of a water particle is expressed as $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ($R \leq r \leq R+h$) and its velocity decomposes into $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$. The Navier-Stokes equations are written in cylindrical coordinates, see eq. (A.1) in the appendix.

In the whole paper, partial differentiation in space and time will be noted ∂_θ , ∂_ξ , ∂_t and ∂_T . The order of differentiation, n , will be indicated by superscripts, ∂^n .

The associated boundary conditions are: (i) the water particles do not slip on the cable,

$$u = v = 0 . \quad (3)$$

(ii) the water-air interface is a material surface that no water particle can cross. The normal velocity of a water particle on the interface is thus equal to the normal velocity of the interface,

$$u = \partial_t h + \frac{v}{r} \partial_\theta h . \quad (4)$$

(iii) the jump in the normal shear stress is balanced by the surface tension, [2],

$$(\sigma_g - \sigma) \cdot \mathbf{n} = \kappa \gamma \mathbf{n} , \quad \sigma = -p\mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] , \quad \sigma_g = -p_g(\theta)\mathbf{I} + \tau_g , \quad (5)$$

where σ_g and σ are the stress tensors of the gas and the water respectively, γ is the surface tension, \mathbf{I} is the identity tensor, p_g is the air pressure at the interface and τ_g is the viscous stress tensor of air. At each point of the water-air interface, the normal and tangential vectors read,

$$\mathbf{t} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial_\theta h}{r} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \right) , \quad \mathbf{n} = \frac{1}{N} \left(\mathbf{e}_r - \frac{\partial_\theta h}{r} \mathbf{e}_\theta \right) , \quad N = \left(1 + \frac{(\partial_\theta h)^2}{r^2} \right)^{1/2} . \quad (6)$$

The curvature $\kappa(\theta)$ of the free surface of the film is, [8],

$$\kappa(\theta) = \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{(R+h)^2 + 2(\partial_\theta h)^2 - (R+h)\partial_\theta^2 h}{[(R+h)^2 + (\partial_\theta h)^2]^{3/2}} . \quad (7)$$

The boundary conditions are thus expressed in cylindrical coordinates, which may be found in the appendix, eq. (A.3).

2.3 Lubrication and dimensionless equations

The assumptions of lubrication are now made: (a) The Reynolds number based on the film thickness is close to one, $Re_h = h_o v / \nu \approx 1$. (b) The film is thin compared to the cable radius, $h_o \ll R$. (c) The film thickness h evolves 'slowly' with θ , $\partial_\theta h \ll R$. As a consequence, the following dimensionless variables are defined for the liquid

$$\begin{aligned} U &= \frac{R}{\nu} u, & V &= \frac{h_o}{\nu} v, & T &= \frac{\nu}{Rh_o} t, \\ P &= \frac{h_o^3}{\rho \nu^2 R} p, & \xi &= \frac{r - R}{h_o}, & H &= \frac{h}{h_o}. \end{aligned} \quad (8)$$

They are based on viscosity scales and are assumed to be of the order of one.

An external wind load is acting on the water surface. This load is nondimensionalized with the classic pressure coefficient and a normalized friction coefficient which has been divided by its maximum value,

$$C_f = \frac{\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}_g \cdot \mathbf{n}}{\frac{1}{2} \rho_g v_{g\infty}^2}, \quad \bar{C}_f = \frac{C_f}{\max(C_f)}. \quad (9)$$

When writing the Navier-Stokes and the boundary condition equations in a nondimensional form, eq. (A.4) and (A.5) of the appendix, the small parameter $\varepsilon = h_o/R$ and the following dimensionless numbers appear

$$\begin{aligned} G &= \frac{gh_o^3}{3\nu^2}, & S &= \frac{\gamma h_o^4}{3\rho \nu^2 R^3}, & \mathcal{A} &= \frac{y_o h_o^3}{3\nu^2 T_y^2}, & \Omega_y &= \frac{2\pi R h_o}{\nu T_y}, \\ \mathcal{P} &= \frac{\rho_g v_{g\infty}^2 h_o^3}{6\rho \nu^2 R}, & \mathcal{F} &= \frac{\rho_g v_{g\infty}^2 h_o^2 \max(C_f)}{4\rho \nu^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

The numbers G , S , \mathcal{A} , \mathcal{P} and \mathcal{F} compare the actions of gravity, surface tension, cable acceleration, air pressure and air friction respectively, to the action of water viscosity. The reduced pulsation Ω_y compares the cable motion characteristic time to the viscous time.

Only the terms of leading order in ε are retained, yielding the linearized

Navier-Stokes equations

$$\begin{aligned}
\partial_\xi P &= 0 , \\
-3 \left(G + \mathcal{A}f'' \left(\frac{\Omega_y T}{2\pi} \right) \right) \cos \theta - \partial_\theta P + \partial_\xi^2 V &= 0 , \\
\partial_\xi U + \partial_\theta V &= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

and the linearized boundary condition equations

$$\begin{aligned}
U|_{\xi=0} &= V|_{\xi=0} = 0 , \\
U|_{\xi=H} &= \partial_T H + V|_{\xi=H} \partial_\theta H , \\
-3\mathcal{P} C_p + P|_{\xi=H} &= 3S \left(\frac{1}{\varepsilon} - H - \partial_\theta^2 H \right) , \\
2\mathcal{F} \overline{C}_f - (V_\xi)|_{\xi=H} &= 0 .
\end{aligned} \tag{12}$$

Equation (11c) is integrated between $\xi = 0$ and $\xi = H$; the condition $U|_{\xi=0} = 0$ is then used,

$$U = - \int_{\xi=0}^H \partial_\theta V d\xi . \tag{13}$$

This is injected into equation (12b) and condensed into

$$\partial_T H + \partial_\theta \left[\int_{\xi=0}^H V d\xi \right] = 0 . \tag{14}$$

The pressure in the water film P is independent of ξ (equation (11a)). The expression for P given by equation (12c) is thus valid in the whole film and is injected into equation (11b),

$$\partial_\xi^2 V = 3(G + \mathcal{A}f'') \cos \theta + \partial_\theta \left[3S \left(\frac{1}{\varepsilon} - H - \partial_\theta^2 H \right) + 3\mathcal{P}C_p \right] . \tag{15}$$

This last equation is integrated twice with respect to ξ and equations (12a) and (12d) are used to obtain

$$V = \frac{3}{2} \left[(G + \mathcal{A}f'') \cos \theta - S(\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H) + \mathcal{P} \partial_\theta (C_p) \right] (\xi^2 - 2H\xi) + 2\mathcal{F} \overline{C}_f \xi . \tag{16}$$

This expression for the azimuthal velocity is replaced in equation (14) and we finally obtain

$$\begin{aligned}
\partial_T H + \partial_\theta \left\{ - [G + \mathcal{A}f'' (\Omega_y T / 2\pi)] H^3 \cos \theta + S(\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H) H^3 \right. \\
\left. - \mathcal{P} \partial_\theta (C_p) H^3 + \mathcal{F} \overline{C}_f H^2 \right\} = 0 .
\end{aligned} \tag{17}$$

This is an equation of conservation of the thickness H , with a flux g ,

$$\begin{aligned} \partial_T H + \partial_\theta g &= 0 , \\ g &= \left[- (G + \mathcal{A}f'') \cos \theta + S(\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H) - \mathcal{P}\partial_\theta(C_p) \right] H^3 + \mathcal{F}\overline{C}_f H^2 . \end{aligned} \quad (18)$$

For $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{P} = 0$ and $\mathcal{F} = 0$, equation (17) is the same as that presented by Reisfeld and Bankoff (1992) [15], equation (4.16). The form of the air friction term is consistent with equation (2.31) of Oron et al. (1997) [12] for a thin film on a plane.

3 Evolution of a film under a wind load

In this section, equation (17) is solved in the range of typical parameter for rain-wind-induced vibrations. It is assumed here that the wind load on the film is the same as the wind load that would apply around the dry cable. The values of the wind load around a dry cable are supposed to apply along the local normal and tangent vectors of the water film. The Reynolds number based on the cable diameter in RWIV conditions is

$$Re_g = \frac{2Rv_{g\infty}}{\nu_g} \approx 10^5 , \quad (19)$$

where ν_g is the air viscosity, the typical cable radius being $R = 0.1$ m and the typical wind speed $v_{g\infty} = 10$ m/s. Achenbach (1968)[1] measured the pressure and friction distributions produced by an air flow on a smooth cylinder oriented in the cross-flow direction. His results at the same Reynolds number are used for the computations, Fig. 3.

The control parameters of equation (17) have been computed for experiments from the literature in Table 1, with a typical water thickness of $h_o = 5 \times 10^{-4}$ m. It is remarkable that the pressure number \mathcal{P} and the friction number \mathcal{F} are of the same order of magnitude. The friction of air will consequently have a major effect on the dynamics of the film and cannot be neglected.

Equation (17) is a partial differential equation of the fourth order that is nonlinear with non-constant coefficients. It is thus not solvable analytically and numerical computations are needed. The computations are carried out with a pseudo-spectral method: a Fourier spectral method in space and an Adams-Bashforth scheme of the fourth order in time. Fig. 4 shows a resolution of equation (17) with a static cable, $\mathcal{A} = 0$ and the other parameters computed from Flamand (1995) [5]. At the initial time, the thickness of the film is constant in space, $H(0, \theta) = 1$. The resolution in space is of $N_x = 128$

points and the time step is $dT = 10^{-6}$. At the top and at the bottom of the cylinder, two water bulges form, which are the bidimensional traces of the rivulets. They are located in the neighbourhood of the separation points that would be exhibited by the air flow around the dry cylinder. The bulges' size increases until the lubrication assumptions are violated. Under the effect of gravity the bottom protuberance grows faster than the upper one. As observed by Reisfeld and Bankoff (1992)[15], a cusp is bound to appear at $\theta = 3\pi/2$ under gravity action, but its formation is slower than the dynamics of formation of the rivulets due to wind loads.

In order to study the relative effects of friction and pressure, the two following artificial cases are considered:

(i) A film of initial constant thickness is subjected to surface tension ($S = 3.0 \times 10^{-3}$) and pressure ($\mathcal{P} = 3.8 \times 10^1$), the other terms of equation (17) being set to zero ($G = 0$, $\mathcal{A} = 0$ and $\mathcal{F} = 0$).

(ii) Another computation is done in which only the terms due to surface tension ($S = 3.0 \times 10^{-3}$) and friction ($\mathcal{F} = 1.6 \times 10^2$) are retained ($G = 0$, $\mathcal{A} = 0$ and $\mathcal{P} = 0$).

The same numerical parameters as above are implemented ($N_x = 128$, $dT = 10^{-6}$) to give the results which are presented on Fig. 5. Both computations show the appearance and growth of two rivulets in the region of the separation points. The rivulets created by friction grow with a characteristic time similar to the time necessary to form the rivulets under pressure. Moreover, the rivulets due to pressure are located slightly upstream of the friction generated rivulets. The action of friction appears to be of same importance as the pressure action in the rivulet generation.

4 Position of the rivulets

In this section, we focus on the position at which the rivulets are formed. A new experiment has been conducted in the Mechanical Engineering Department of the Hong Kong Polytechnic University. A black cylinder continuously coated with milk, which flows from a funnel reservoir, is hung in a wind tunnel. The cylinder is fixed, slightly inclined from the vertical at an angle $\alpha = 2.5^\circ$, declining without yaw in the wind direction, Fig. 6. The setup is video-recorded from the side and optically treated to access to the position of the rivulets, θ_r .

In sections 2 and 3, the gravity was orthogonal to the wind direction. On the contrary, in the experimental configuration, the projection of the gravity on a plane normal to the cylinder axis, $g \sin \alpha$, is parallel to the projected wind

direction, $v_{g\infty}$, Fig. 6(b), and our model reads

$$\partial_T H + \partial_\theta \left\{ \left[-G \sin \alpha \sin \theta + S \left(\partial_\theta H + \partial_\theta^3 H \right) - \mathcal{P} \partial_\theta (C_p) \right] H^3 + \mathcal{F} \overline{C}_f H^2 \right\} = 0. \quad (20)$$

Note that there is no term due to the acceleration of the cylinder, since it is static in the experiment.

The position of the thickness maxima can be computed for several wind speeds by using the numerical method presented in the previous section. The cylinder radius is $R = 7.5 \cdot 10^{-3}$ m and the tested wind speed ranges from $v_{g\infty} = 0$ to 10 m/s so that the Reynolds number of the airflow based on the diameter is subcritical $Re_g = 2Rv_{g\infty}/\nu_g = 0$ to 10^4 . However, the rivulets are located close to the separation points so that transition might occur due to a rugosity effect, Szechenyi (1975) [16] and the flow might become supercritical. Therefore, the computations have been conducted both for subcritical and supercritical wind loads (see the pressure and friction distributions for both the cases on Fig. 3). The pressure and the friction numbers \mathcal{P} and \mathcal{F} are proportional to the square of the wind velocity. In Fig. 7, the position of the rivulets, θ_r is plotted as a function of $v_{g\infty}^2$.

The theoretical results are found to be in good agreement with the experiments. In the absence of airflow, a single rivulet exists at $\theta_r = 0^\circ$. When the wind tunnel is turned on, the competition of gravity with wind pressure and friction results in the formation of one or two rivulets, whose positions depend on the wind speed. At low airspeed, only one rivulet forms at $\theta_r = 0^\circ$; when the speed is increased, the single rivulet splits up into two symmetrical rivulets; the rivulets move leeward as the flow speed is further augmented; a maximum position $\theta_r = \theta_{max}$ is then reached. The experimental saturation angle $\theta_{max}^{exp} = 78^\circ$ is bounded by the sub- and supercritical values, $\theta_{max}^{sub} = 68^\circ$ and $\theta_{max}^{sup} = 91^\circ$, which may indicate that laminar-turbulent transition of the boundary layer occurs.

5 Conclusion

We have presented here a model that describes for the first time the evolution of a water film around a cylinder under the action of wind and cylinder motion. This model recovers well the appearance of the two water rivulets that are claimed to be responsible for rain-wind-induced vibration of cables of cable-stayed bridges. In accordance with previous experimental observations, the rivulets form in the region of the separation points of the air flow around the dry cable under the combined effect of air pressure and friction. The friction is shown to play a significant role in the generation of

the rivulets. In rain-wind-induced vibrations, the lift force is related to the position of the rivulets for which we provided here a predictive model. The angular position of the rivulets, θ_r , has been also investigated experimentally. The angle θ_r is found to be an increasing function of the wind velocity for low velocities where gravity is progressively overcome by wind action. For higher velocities however, the position is independent of the wind velocity and experimental results range between the values computed with subcritical and supercritical aerodynamic pressure data.

6 Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge the kind help of J. Huang, Dr. M. Alam and Pr. Y. Zhou from Hong Kong Polytechnic University as well as the financial support of the France-Hong Kong PROCORE joint research program 07708UE on Rain-wind-Induced Vibrations of cables, which made the experiments possible.

References

- [1] Achenbach, E., Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in a cross-flow up to $Re = 5 \times 10^6$. *Journal of Fluid Mechanics*, 34(4) (1968) pp. 625-639.
- [2] Batchelor, G.K., *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press (1994) p. 64.
- [3] Bosdogianni, A., Olivari, D., Wind- and rain-induced oscillations of cables of stayed bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 64 (1996) pp. 171-185.
- [4] Den Hartog, J.P., *Mechanical vibrations*. Dover Publications, Inc. New-York, (1985) pp. 299-304.
- [5] Flamand, O., Rain-wind-induced vibration of cables. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 57 (1995) pp. 353-362.
- [6] Gu, M., Du, X., Experimental investigation of rain-wind-induced vibration of cables in cable-stayed bridges and its mitigation. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 93(1) (2005) pp. 79-95.
- [7] Hikami, Y., Shiraishi, N., Rain-wind-induced vibrations of cables in cable-stayed bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 29 (1988) pp. 409-418.

- [8] Ibrahim, R.A., Liquid sloshing dynamics. Cambridge University Press (2005), p.8.
- [9] Lemaitre, C., Alam, M., Hémon, P., De Langre, E., Zhou, Y., Rainwater rivulets on a cable subject to wind. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Mécanique*, 334(3) (2006) pp. 158-163.
- [10] Lemaitre, C., Dynamique d'un film d'eau sur un hauban de pont soumis au vent. PhD thesis, Ecole Polytechnique, France, (2006).
- [11] Matsumoto, M., Saitoh, T., Kitazawa, M., Shirato, H., Nishizaki, T., Response characteristics of rain-wind-induced vibration of stay-cables of cable-stayed bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 57 (1995) pp. 323-333.
- [12] Oron, A., Davis, S.H., Bankoff, S.G., Long-scale evolution of thin liquid films. *Reviews of Modern Physics*, 69(3) (1997) pp. 931-980.
- [13] Peil, U., Nahrath, N., Modeling of rain-wind-induced vibrations. *Wind and Structures*, 6(1) (2003) pp. 41-52.
- [14] Peil, U., Nahrath, N., Dreyer, O., Modeling of rain-wind-induced vibrations. *The 11th International Conference on Wind Engineering*, Lubbock, Texas, (2003) pp. 389-396.
- [15] Reisfeld, B., Bankoff, S.G., Non-isothermal flow of a liquid film on a horizontal cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 236 (1992) pp. 167-196.
- [16] Szechenyi, E., Supercritical Reynolds number simulation for two-dimensional flow over circular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 70(3) (1975) pp. 529-542.
- [17] Verwiebe, C., Ruscheweyh, H., Recent research results concerning the exciting mechanisms of rain-wind-induced vibrations. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 74-76 (1998) pp. 1005-1013.
- [18] Wang, Z.J., Zhou, Y. Huang, J.F., Xu, Y.L., Fluid dynamics around an inclined cylinder with running water rivulets. *Journal of Fluids and Structures*, 21(1) (2005) pp. 49-64.
- [19] Yamaguchi, H. Analytical study on growth mechanism of rain vibration of cables. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 33 (1990) pp. 73-80.

A Appendix

In the local frame $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ the Navier-Stokes equations (2) read,

$$\begin{aligned}
\rho \left(\partial_t u + u \partial_r u + \frac{v}{r} \partial_\theta u - \frac{v^2}{r} \right) &= \rho (\mathbf{g} + \mathbf{g}_a) \cdot \mathbf{e}_r \\
&\quad - \partial_r p + \mu \left(\Delta u - \frac{2\partial_\theta v}{r^2} - \frac{u}{r^2} \right) \\
\rho \left(\partial_t v + u \partial_r v + \frac{v}{r} \partial_\theta v + \frac{uv}{r} \right) &= \rho (\mathbf{g} + \mathbf{g}_a) \cdot \mathbf{e}_\theta \\
&\quad - \partial_\theta p + \mu \left(\Delta v - \frac{2\partial_\theta u}{r^2} - \frac{v}{r^2} \right) \\
\frac{\partial_r(ru)}{r} + \frac{\partial_\theta v}{r} &= 0
\end{aligned} \tag{A.1}$$

where the operator Δ applied on a scalar s signifies

$$\Delta s = \frac{\partial_r(r\partial_r s)}{r} + \frac{\partial_\theta^2 s}{r^2}. \tag{A.2}$$

The boundary conditions on the air-water interface at $r = R + h$, eq. (5), are also expressed in cylindrical coordinates,

$$\begin{aligned}
-p_g + p - \frac{2\mu}{N^2 r} \left\{ (u + \partial_\theta v) \left[\left(\frac{\partial_\theta h}{r} \right)^2 - 1 \right] \right. \\
\left. - \partial_\theta h \partial_r \left(r \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial_\theta u}{r} \right) \right\} &= \frac{\gamma}{N^3} \left(\frac{1}{r} + 2 \frac{(\partial_\theta h)^2}{r^3} - \frac{\partial_\theta^2 h}{r^2} \right), \\
t_g - \frac{\mu}{N^2} \left\{ -\frac{4\partial_\theta h}{r^2} (u + \partial_\theta v) \right. \\
&\quad \left. + \left[1 - \left(\frac{\partial_\theta h}{r} \right)^2 \right] \left(r \partial_r \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial_\theta u}{r} \right) \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Once put into a nondimensional form, the Navier-Stokes equations (A.1), be-

come

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 \left(\partial_T U + U \partial_\xi U + \frac{V \partial_\theta U}{1 + \varepsilon \xi} - \frac{V^2}{\varepsilon (1 + \varepsilon \xi)} \right) &= -3\varepsilon G \sin \theta - \partial_\xi P \\
&+ \varepsilon^2 \partial_\xi \left(\frac{\partial_\xi [(1 + \varepsilon \xi) U]}{1 + \varepsilon \xi} \right) + \frac{\varepsilon^4 \partial_\theta^2 U}{(1 + \varepsilon \xi)^2} - \frac{2\varepsilon^3 \partial_\theta V}{(1 + \varepsilon \xi)^2}, \\
\varepsilon \left(\partial_T V + U \partial_\xi V + \frac{V \partial_\theta V}{1 + \varepsilon \xi} + \frac{\varepsilon UV}{1 + \varepsilon \xi} \right) &= -3G \cos \theta - \frac{\partial_\theta P}{1 + \varepsilon \xi} \\
&+ \partial_\xi \left(\frac{\partial_\xi [(1 + \varepsilon \xi) V]}{1 + \varepsilon \xi} \right) + \frac{\varepsilon^2 \partial_\theta^2 V}{(1 + \varepsilon \xi)^2} + \frac{2\varepsilon^3 \partial_\theta U}{(1 + \varepsilon \xi)^2}, \\
\partial_\xi [(1 + \varepsilon \xi) U] + \partial_\theta V &= 0.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

By nondimensionalizing eq. (A.3) and (4), the boundary conditions on the water-air interface, $\xi = H$, become

$$\begin{aligned}
-3\mathcal{P}C_p + P - \frac{2\varepsilon^2 \partial_\theta H}{N^2 (1 + \varepsilon H)} \left\{ (\varepsilon U + \partial_\theta V) \left[\left(\frac{\varepsilon \partial_\theta H}{1 + \varepsilon H} \right)^2 - \frac{1}{\partial_\theta H} \right] \right. \\
\left. - (1 + \varepsilon H) \partial_\xi \left(\frac{V}{1 + \varepsilon \xi} \right) - \frac{\varepsilon^2 \partial_\theta U}{1 + \varepsilon H} \right\} \\
= \frac{3\bar{S}\varepsilon^3}{N^3} \left[\frac{1}{\varepsilon (1 + \varepsilon H)} + 2 \frac{\varepsilon (\partial_\theta H)^2}{(1 + \varepsilon H)^3} - \frac{\partial_\theta^2 H}{(1 + \varepsilon H)^2} \right], \\
2\mathcal{F}\bar{C}_f - \frac{1}{N^2} \left\{ -\frac{4\varepsilon^2 \partial_\theta H}{(1 + \varepsilon H)^2} (\varepsilon U + \partial_\theta V) \right. \\
\left. + \left[1 - \left(\frac{\varepsilon \partial_\theta H}{1 + \varepsilon H} \right)^2 \right] \left((1 + \varepsilon H) \partial_\xi \left(\frac{V}{1 + \varepsilon \xi} \right) + \frac{\varepsilon^2 \partial_\theta U}{1 + \varepsilon H} \right) \right\} = 0, \\
U = \partial_T H + \frac{V \partial_\theta H}{1 + \varepsilon H}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

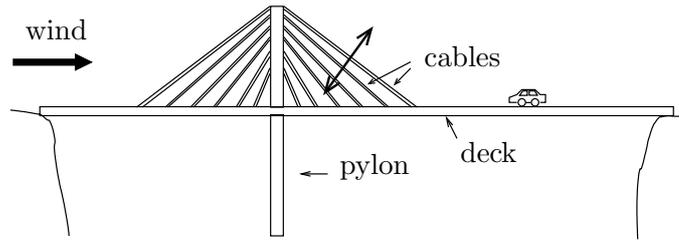


Figure 1. Cable-stayed bridge. Only cables declining in the wind direction undergo RWIV.

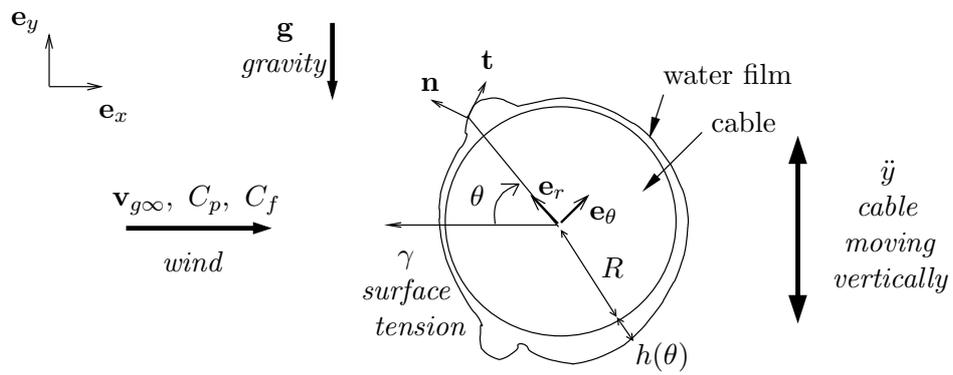


Figure 2. Water film around a cable subject to gravity, surface tension and swept by wind.

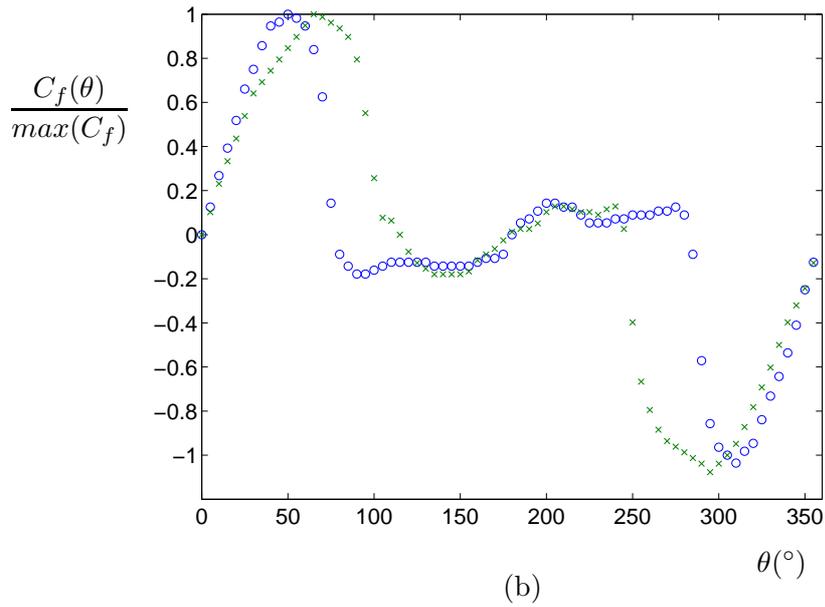
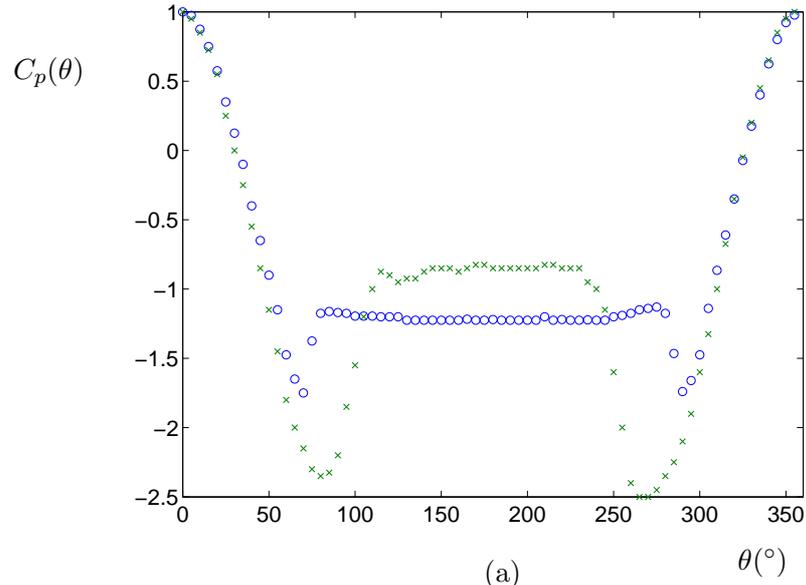


Figure 3. Distribution of the wind load around a smooth dry cylinder at (\circ) $Re_g = 10^5$ and (\times) $Re_g = 3.6 \cdot 10^6$, measured by Achenbach (1968)[1].(a) Pressure coefficients, (b) Normalized friction coefficients. The maximum of the subcritical friction coefficient is $\max(C_f) = 1.7 \cdot 10^{-2}$ and $\max(C_f) = 4.1 \cdot 10^{-3}$ in the supercritical case.

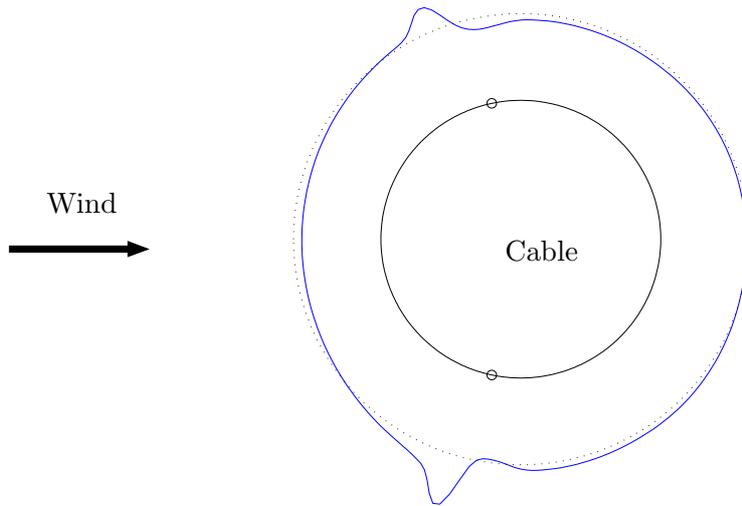


Figure 4. Numerical solution of equation (17) starting from a homogeneous film, subjected to gravity, surface tension and wind. The cable radius is $R = 0.08$ m. The film thickness shown is one hundred times the actual thickness. (\cdots) Film at $t = 0$ s ; ($-$) Film at $t = 6.9 \times 10^{-3}$ s ($T = 1.7 \times 10^{-5}$); (\circ) Separation points of the air flow around the dry cable.

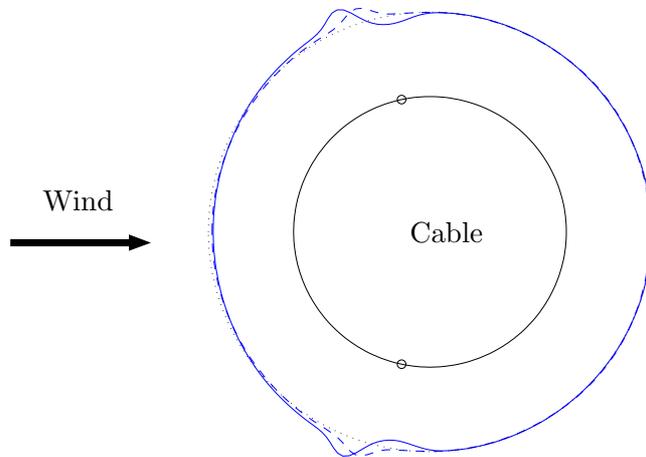


Figure 5. Comparison of pressure and friction actions. The cable radius is $R = 0.08$ m. The films shown at $t = 6.9 \times 10^{-3}$ s ($T = 1.7 \times 10^{-5}$) are one hundred times the actual size. ($-$) Film evolving under pressure and surface tension only; ($--$) Film evolving under friction and surface tension only; (\circ) Separation points of the air flow around the dry cable.

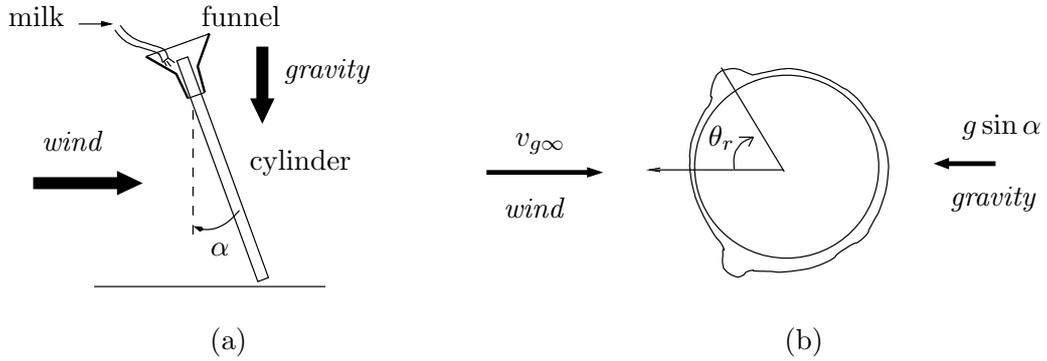


Figure 6. Experimental setup for the study of the position at which the rivulets appear. In a wind tunnel, a cylinder is inclined in the direction of the flow. It is covered with milk that is fed from the top through a funnel. (a) Side view (b) A cylinder section.

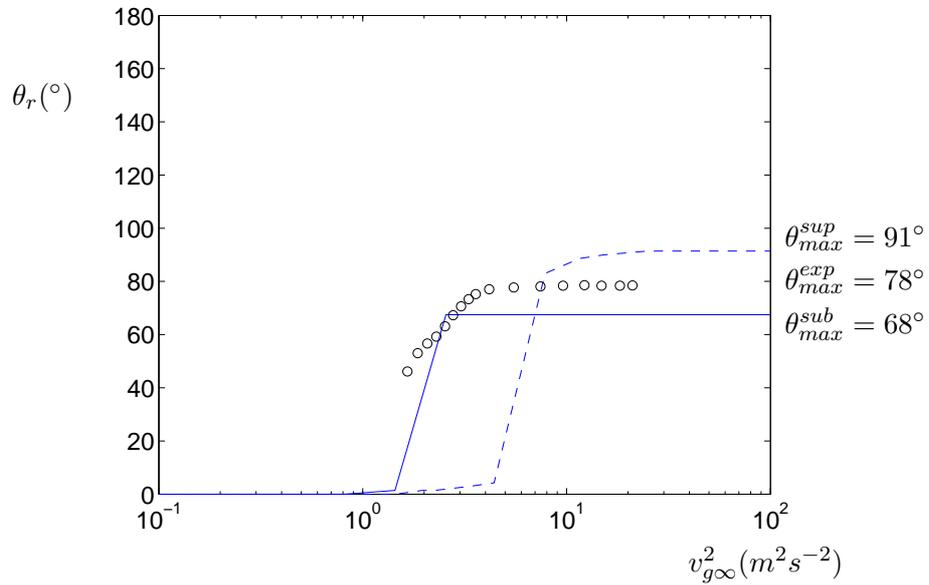


Figure 7. Position θ_r of one rivulet as a function of the wind speed $v_{g\infty}$. A second rivulet exists at the symmetrical position $-\theta_r$. Experimental results (\circ). Theoretical results for subcritical coefficients ($-$) and for supercritical coefficients ($--$).

Table 1
Parameter values for experiments from the literature.

Authors	ε	G	S	\mathcal{A}	Ω_y	\mathcal{P}	\mathcal{F}
Hikami [7]							
Full-scale	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^2$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	27	$4.4 \cdot 10^2$	43	$1.6 \cdot 10^2$
Wind tunnel	$7.1 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^2$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	4.6	$2.2 \cdot 10^2$	43	$1.6 \cdot 10^2$
Flamand [5]	$6.3 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^2$	$3.0 \cdot 10^{-3}$	7.5	$2.5 \cdot 10^2$	38	$1.6 \cdot 10^2$
Matsumoto [11]	$5.9 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^2$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	2.2	$1.5 \cdot 10^2$	29	$1.3 \cdot 10^2$