



A posteriori error analysis for Hydro-Mechanical couplings and implementation in Code_Aster

Sébastien Meunier

► To cite this version:

Sébastien Meunier. A posteriori error analysis for Hydro-Mechanical couplings and implementation in Code_Aster. Mathematics [math]. Ecole des Ponts ParisTech, 2007. English. NNT: . pastel-00003314

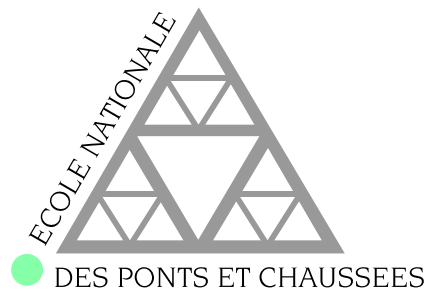
HAL Id: pastel-00003314

<https://pastel.hal.science/pastel-00003314>

Submitted on 17 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité : Mathématiques, Informatique

par **Sébastien MEUNIER**

Sujet : Analyse d'erreur *a posteriori* pour les couplages Hydro-Mécaniques
et mise en œuvre dans *Code_Aster*

Soutenue le 23 novembre 2007
devant le jury composé de :

Président :	Patrick Le Tallec
Rapporteurs :	Serge Nicaise
	Andreas Veesser
Examineurs :	Yves Achdou
	Christine Bernardi
	Clément Chavant
	Gérald Nicolas
Directeur de thèse :	Alexandre Ern

Cette thèse a été effectuée conjointement au CERMICS de l'ENPC et au département SINETICS d'EDF R&D sous la forme d'un contrat CIFRE.

Analyse d'erreur *a posteriori* pour les couplages Hydro-Mécaniques et mise en œuvre dans *Code_Aster*

Résumé : On s'intéresse à l'analyse de méthodes d'approximation par éléments finis en espace et différences finies en temps pour des problèmes Hydro-Mécaniques (HM) couplés intervenant dans la théorie de la poroélasticité linéaire quasi-statique. Après avoir rappelé les bases physiques de cette théorie, on propose un cadre adapté pour mener l'étude mathématique des versions stationnaire et instationnaire du problème HM. Pour la version stationnaire, après avoir étudié le caractère bien posé du problème aux niveaux continu et discret et effectué l'analyse d'erreur *a priori*, on réalise l'analyse d'erreur *a posteriori* en utilisant deux techniques différentes adaptées pour l'estimation en norme H_x^1 sur la pression et sur les déplacements respectivement. Les propriétés classiques de fiabilité et d'optimalité sont démontrées pour les estimateurs d'erreur associés. Quelques expérimentations numériques, réalisées dans *Code_Aster*, illustrent les résultats théoriques. Pour la version instationnaire, on établit d'abord un résultat de stabilité pour le problème continu. Puis, on présente une analyse d'erreur *a priori* optimale utilisant les techniques de projection elliptique. Enfin, l'analyse d'erreur *a posteriori* est réalisée en utilisant deux approches différentes : une approche directe et une approche par reconstruction elliptique. La première est adaptée pour l'estimation en norme $L_t^2(H_x^1)$ sur la pression et la deuxième est adaptée pour l'estimation en norme $L_t^\infty(H_x^1)$ sur les déplacements et en norme $L_t^\infty(L_x^2)$ sur la pression. Des expérimentations numériques, réalisées dans *Code_Aster*, viennent compléter les résultats théoriques.

Mots-clés : Équations aux dérivées partielles, méthode des éléments finis, analyse d'erreur *a priori*, analyse d'erreur *a posteriori*, couplages Hydro-Mécaniques, *Code_Aster*, qualité des études, poromécanique.

A posteriori error analysis for Hydro-Mechanical couplings and implementation in *Code_Aster*

Abstract : We analyse approximations by finite elements in space and finite differences in time of coupled Hydro-Mechanical (HM) problems related to the quasi-static linear poroelasticity theory. The physical bases of this theory are briefly restated and an abstract setting is proposed to perform the mathematical study of the stationary and unstationary versions of the HM problem. For the stationary version, the well-posedness of the continuous and discrete problems are established and the *a priori* error analysis is performed. Then, we propose the *a posteriori* error analysis by using two different techniques suited to estimate the displacement error and the pressure error, respectively, both in the H_x^1 -norm. The classical properties of reliability and optimality are proved for the associated error estimators. Some numerical experiments using *Code_Aster* illustrate the theoretical results. For the unstationary version, we first establish a

stability result for the continuous problem. Then, we present an optimal *a priori* error analysis using elliptic projection techniques. Finally, the *a posteriori* error analysis is performed by using two different approaches : a direct approach and an elliptic reconstruction approach. The first is suited to estimate the pressure error in the $L_t^2(H_x^1)$ -norm and the second is suited to estimate the displacement error in the $L_t^\infty(H_x^1)$ -norm and the pressure error in the $L_t^\infty(H_x^1)$ -norm. Numerical experiments using *Code_Aster* complete the theoretical results.

Keywords : Partial differential equations, finite element method, *a priori* error analysis, *a posteriori* error analysis, Hydro-Mechanical couplings, *Code_Aster*, quality assessment, poromechanics.

AMS Classification : 65M60, 65M15, 74F10

Remerciements

En premier lieu, je remercie Alexandre Ern pour avoir encadré mon travail de thèse avec une attention constante. Grâce à ses grandes compétences scientifiques mais aussi grâce à ses qualités d'écoute et de pédagogie, l'expérience du doctorat s'est révélée très fructueuse et enrichissante à son contact. Je remercie également Gérard Nicolas et Olivier Boiteau pour m'avoir accompagné dans ma découverte de *Code_Aster* et pour avoir toujours répondu avec patience à mes nombreux questionnements mathématiques, physiques ou informatiques. Je suis particulièrement reconnaissant envers ces trois personnes de m'avoir constamment soutenu et encouragé durant la thèse.

Je remercie Jean-Louis Vaudescal, Françoise Waeckel et Olivier Dubois de leur accueil au sein du groupe *Analyse et Modèles Numériques* du département SINETICS d'EDF R&D et de m'avoir donné les moyens me permettant de valoriser mes travaux. Je remercie Bernard Lapeyre et Serge Piperno pour m'avoir réservé le même sort au CERMICS à l'ENPC.

Je suis reconnaissant à Messieurs Serge Nicaise et Andreas Veesser de l'attention qu'ils ont portée à mes travaux en acceptant la tâche de rapporteur. Je suis honoré que Monsieur Patrick Le Tallec préside le jury de cette thèse et que Madame Christine Bernardi et Monsieur Yves Achdou y participent. Je remercie également Messieurs Yves Achdou et Patrick Goblet pour avoir contribué au suivi de cette thèse en participant aux réunions techniques faisant le point régulièrement sur l'avancée de mon travail.

Merci à Clément Chavant, Sylvie Granet et Roméo Fernandes d'avoir prêté un regard attentif à l'évolution de mes travaux. Ils ont toujours répondu à mes nombreuses questions avec beaucoup de gentillesse et m'ont fait bénéficier de leur expérience de *Code_Aster*. Merci également à Pierre Badel pour l'intérêt qu'il porte à mes travaux.

Je remercie les membres du groupe *Analyse et Modèles Numériques* et particulièrement Thierry Fouquet pour ses compétences de numéricien et pour m'avoir aidé à me dégager de situations apparemment bloquées.

Je n'oublie pas mes différents partenaires de bureau, à EDF et à l'ENPC. Je remercie particulièrement Georges Kolomvos pour son aide précieuse en Unix et en $\text{\LaTeX}$ et pour sa bonne humeur constante et communicative. Merci également à Ahmad Elhajj, Hervé Galicher et Pierre Sochala pour la bonne ambiance du bureau et à Sébastien Boyaval, David Doyen, Tony Lelièvre, Annette Stephansen et Pierre Tardif d'Hamonville pour les discussions scientifiques enrichissantes que nous avons eues.

Je remercie Madame Leïla Reille pour m'avoir offert l'opportunité d'enseigner les mathématiques à l'ESIEE pendant deux années. Ce fut une expérience très enrichissante.

Je salue mes partenaires de course à pieds d'EDF Christian Sobrado et François Turbault pour les joggings (dynamiques !) et pour avoir ensemble défendu vaillamment nos couleurs lors de différentes compétitions. Merci également à Gabriel Stoltz pour ses précieux conseils !

Enfin, j'adresse un profond remerciement à mes amis et à ma famille qui m'ont toujours écouté et épaulé.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Modélisation des géomatériaux	1
1.2	Une application : le stockage souterrain des déchets radioactifs	4
1.3	Un outil logiciel : <i>Code_Aster</i>	6
1.4	Les sources d'erreur dans une modélisation numérique	13
1.5	Objectifs de la thèse	20
1.6	Plan de la thèse	21
2	Modélisation des couplages Hydro-Mécaniques	23
2.1	Bases physiques du modèle	23
2.2	Adimensionnement	29
2.3	Cadre abstrait	32
2.4	Application à la modélisation Hydro-Mécanique	35
3	Analyse du problème stationnaire	37
3.1	Le problème continu	37
3.2	Le problème discret	40
3.3	Analyse d'erreur <i>a priori</i>	42
3.4	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i>	43
3.5	Application à la modélisation Hydro-Mécanique	51
3.6	Résultats numériques	54
4	Analyse du problème instationnaire	57
4.1	Le problème continu	58

4.2	Le problème discret	59
4.3	Analyse d'erreur <i>a priori</i>	62
4.4	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i>	64
4.5	Application à la modélisation Hydro-Mécanique	74
4.6	Résultats numériques	78
4.7	Extension aux modélisations non linéaires	80
5	Conclusion	87

Introduction

1.1	Modélisation des géomatériaux	1
1.2	Une application : le stockage souterrain des déchets radioactifs.....	4
1.3	Un outil logiciel : <i>Code_Aster</i>	6
1.3.1	Présentation générale	7
1.3.2	Un code industriel.....	9
1.3.3	Le module THHM.....	11
1.4	Les sources d'erreur dans une modélisation numérique	13
1.4.1	Erreurs de modélisation	14
1.4.2	Erreurs de discrétisation	15
1.4.3	Erreurs de résolution	20
1.5	Objectifs de la thèse	20
1.6	Plan de la thèse	21

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'évaluation de l'erreur de discrétisation pour des méthodes d'éléments finis en espace et de différences finies en temps appliquées à des problèmes de géomatériaux dans le cadre de la théorie des milieux poreux élastiques. Après avoir rappelé les fondements de cette théorie, on présente dans ce chapitre introductif une application à l'étude du stockage souterrain des déchets radioactifs et un outil logiciel développé par EDF R&D possédant notamment un module de résolution de problèmes géomécaniques : *Code_Aster*. On détaille ensuite les différentes erreurs intervenant dans la résolution numérique de problèmes physiques, parmi lesquelles l'erreur de discrétisation fait l'objet d'une attention particulière dans cette thèse. On décrit brièvement différentes techniques basées sur l'estimation d'erreur *a posteriori* permettant d'évaluer l'erreur de discrétisation pour des problèmes modèles stationnaire et instationnaire. Enfin, on présente les objectifs de cette thèse et le plan du mémoire.

1.1 Modélisation des géomatériaux

On s'intéresse à des matériaux constitués d'un squelette solide et d'un réseau de pores, qui, s'ils sont connectés entre eux, permettent le passage d'un fluide interstitiel. Le comportement de ce fluide peut alors influencer sur celui du squelette et réciproquement. De nombreux matériaux

présentent cette caractéristique parmi lesquels les matériaux minéraux comme les sols et les roches, les matériaux organiques comme le bois ou les os et les matériaux industriels comme certains joints d'étanchéité. Dans cette thèse, l'accent porte sur la modélisation des sols et des roches.

La modélisation d'un sol, constitué d'un squelette minéral déformable et d'un espace poreux interstitiel occupé par un seul constituant fluide (eau) ou par deux constituants (eau et air), peut s'effectuer sous des hypothèses raisonnables dans le cadre du milieu continu poreux. Le milieu poreux est vu comme la superposition de deux milieux continus : le squelette solide et la phase fluide ; voir la figure 1.1. Le squelette peut être d'homogénéité et de cohésion variables. Un milieu cohérent est un milieu pour lequel les effets de surface et les forces entre les particules ont une grande influence sur les caractéristiques : le milieu a l'apparence d'un solide et ne se désagrège pas sous l'effet de la pesanteur ou d'autres forces appliquées (par exemple : les argiles ou les bétons). Un milieu peu cohérent (ou sol grenu) est, par opposition, un sol pour lequel les caractéristiques géotechniques sont déterminées par les forces de volume ou de pesanteur, comme les sables. Les modèles physiques auxquels on s'intéresse dans cette thèse sont pertinents pour des milieux cohérents. Entre les éléments solides du squelette, on trouve des pores. On distingue les pores

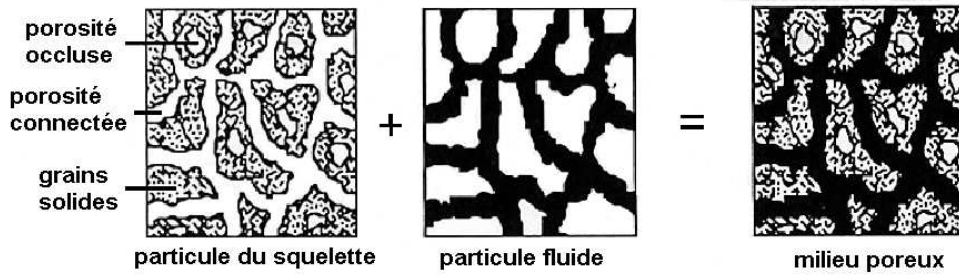


Fig. 1.1. Le milieu poreux vu comme une superposition de deux milieux continus : le squelette solide et la phase fluide.

fermés qui n'échangent pas de matière avec leurs voisins et les pores connectés entre lesquels des échanges se produisent. On parle respectivement de porosité occluse et de porosité connectée. La porosité du milieu correspond uniquement aux pores connectés. On suppose que ces pores peuvent être occupés par deux constituants au maximum, chacun coexistant dans deux phases au maximum, l'une liquide et l'autre gazeuse. On considère que les fluides interstitiels occupant les pores sont l'air, l'hydrogène ou l'eau (pouvant être présente sous forme liquide ou vapeur). On dit que le milieu est *saturé* si l'espace interstitiel est uniquement occupé par de l'eau en phase liquide. On dit que le milieu poreux est *non saturé* dans le cas contraire.

Le milieu poreux possède une cinématique repérée par celle du squelette et les aspects thermodynamiques sont traités dans le cadre des systèmes ouverts. Les sollicitations envisagées sont de type thermique, hydraulique et mécanique. Les sollicitations thermiques peuvent être dues à la présence de sources de chaleur au sein du milieu poreux, telles que des déchets radioactifs stockés. Les sollicitations hydrauliques sont liées à l'écoulement de un ou plusieurs fluides à travers le milieu poreux. Les sollicitations mécaniques peuvent être causées par des contraintes mécaniques imposées, telles que le creusement d'ouvrages, ou par des contraintes intrinsèques telles que la consolidation naturelle du sol par gravité. Lorsque les trois phénomènes sont traités

de manière couplée, le cadre est celui dit de la Thermo-Hydro-Mécanique, noté THM dans le cas saturé et THHM dans le cas non saturé. La première théorie sur les couplages Hydro-Mécaniques dans les milieux poreux et notamment sur le phénomène de consolidation a été établie par Terzaghi dans les années 1920. Il s'est intéressé aux expériences d'une éponge remplie d'eau et d'une colonne d'argile ou de sable soumise à une charge constante sans possibilité d'échappée latérale. Il a ainsi posé les bases de la théorie de la consolidation de façon empirique [vT25, vT36]. Le premier modèle Hydro-Mécanique saturé (HM) a été développé de manière rigoureuse par Biot dans les années 1950, après quelques travaux préliminaires d'avant-guerre [Bio41]. Sa formalisation dans le cadre de la mécanique des milieux continus, la justification thermodynamique des grandeurs introduites et son intégration dans les codes de calcul datent seulement du début des années 1990 ; voir en particulier les travaux de Coussy [Cou04]. Le modèle de Biot a également été étendu au cadre de la THHM afin de prendre en compte les effets conjoints du transport de chaleur et de masse du fluide dans le milieu poreux déformable.

On s'intéresse dans cette thèse avant tout au modèle HM saturé. L'objectif est d'étudier le champ de déplacements et la distribution de pression dans une structure élastique. On se place dans l'hypothèse de déformations quasi-statiques, c'est-à-dire qu'on néglige les effets d'inertie dans le comportement mécanique comme pour le comportement hydraulique. Deux approches sont alors possibles. La première consiste à s'intéresser aux lois microscopiques régissant les phénomènes à l'échelle du pore pour en déduire les lois macroscopiques à l'échelle du milieu poreux. Cette approche est relativement bien établie pour des milieux poreux saturés. La seconde approche, plus ancienne, consiste à supposer que les principes de la mécanique des milieux continus restent applicables au niveau macroscopique. La concordance des résultats des deux approches a été démontrée dans certaines situations [ASP77, BOFM89, MTL96] et on retient ici la seconde approche. On écrit les équations d'équilibre mécanique et de conservation de la masse du fluide s'écoulant dans la structure. Le concept de contraintes totales σ , spécifique à la théorie des milieux poreux, traduit les effets couplés des déformations et du flux hydraulique. L'hypothèse de Terzaghi, qui suppose une partition des contraintes, permet de relier les contraintes totales aux contraintes effectives σ' (induites par les déformations de la structure) et aux contraintes de pression σ_p (induites par le fluide) sous la forme

$$\sigma = \sigma' + \sigma_p.$$

Le comportement mécanique élastique est formulé par la loi de Hooke pour les contraintes effectives sous la forme

$$\sigma'(u) = \lambda_1(\nabla \cdot u)I_d + 2\lambda_2\varepsilon(u),$$

où u désigne le champ de déplacements du squelette, $\varepsilon(u)$ le tenseur des taux de déformation, λ_1 et λ_2 sont les coefficients de Lamé et I_d désigne le tenseur identité d'ordre d , où d est la dimension spatiale ($d = 2$ ou 3). Les contraintes de pression sont reliées à la pression de manière linéaire, *via* le coefficient de Biot supposé constant b , sous la forme

$$\sigma_p = -bpI_d,$$

où p désigne la pression hydraulique. L'équilibre mécanique quasi-statique du squelette s'écrit

$$\nabla \cdot \sigma'(u) - b\nabla p + \rho_{\text{ref}}F^m = 0, \quad (1.1)$$

où ρ_{ref} désigne la masse volumique homogénéisée et F^m la force de gravité. Pour le comportement hydraulique, on écrit la conservation de la masse de fluide suivie au cours de l'écoulement et on suppose que le flux hydraulique obéit à la loi de Darcy. On aboutit ainsi à l'équation

$$\partial_t \left(\frac{1}{M} p + b \nabla \cdot u \right) - \nabla \cdot (\kappa \nabla p) = -\nabla \cdot (\kappa \rho F^m), \quad (1.2)$$

où on a introduit le module de Biot M , la perméabilité hydraulique κ , la masse volumique du liquide ρ (supposée constante) et la force de gravité F^m . Ce sont les équations (1.1) et (1.2), complétées par des conditions limites et des conditions initiales, qui constituent le point de départ des travaux ci-dessous.

1.2 Une application : le stockage souterrain des déchets radioactifs

Une application de la modélisation présentée ci-dessus est l'étude du stockage profond des déchets de Haute Activité à Vie Longue (HAVL) résultant de l'utilisation de matière nucléaire pour la production d'énergie en centrales nucléaires, de la recherche ou de la médecine. Pour les centrales nucléaires, les déchets radioactifs HAVL sont notamment le combustible usé et sa gaine protectrice. Une fois séparées du combustible usé, les gaines sont compactées sous forme de galettes puis placées dans un conteneur en acier. Le combustible usé subit, quant à lui, un retraitement, c'est-à-dire une séparation en différents composants : la plus grande partie est constituée d'uranium et de plutonium recyclables en MOX (mélange d'uranium et de plutonium utilisé dans certains réacteurs), ainsi qu'une faible proportion de déchets ultimes (produits de fission et actinides mineurs, non valorisables dans l'état actuel de la technique). Les déchets ultimes sont conditionnés dans une pâte vitreuse inaltérable, pour assurer la stabilisation, puis coulés dans des conteneurs en acier.

En France, la loi Bataille, votée en 1991, porte sur la gestion des déchets nucléaires. Cette loi a impulsé un effort de recherche considérable selon 3 axes : l'axe 1 porte sur la séparation/transmutation, l'axe 2 sur le stockage en couches géologiques profondes et l'axe 3 sur l'entreposage. Le stockage souterrain en couches géologiques profondes occupe une place importante dans le dispositif de la nouvelle loi sur les déchets nucléaires du 28 juin 2006. Le stockage consiste à entreposer les conteneurs en profondeur (entre 400 et 700 mètres) au sein de formations géologiques propices (stabilité géologique, faible perméabilité, faible gradient de charge hydraulique), les modalités de la réversibilité de l'opération n'ayant pas encore été tranchées. Le dispositif est illustré à la figure 1.2. Il est constitué d'un réseau de galeries d'accès et de manutention, desservant des séries de puits horizontaux où sont disposés les déchets. L'extension horizontale de la partie souterraine peut être de quelques kilomètres carrés. L'accès en est assuré au moyen de puits verticaux, dont le nombre est limité afin d'éviter qu'ils ne constituent des chemins préférentiels pour une remontée éventuelle des radionucléides. Le stockage souterrain a pour impératif de confiner la radioactivité, c'est-à-dire d'interdire ou de limiter à un niveau acceptable le transport des matières radioactives vers l'environnement. On entend par niveau acceptable le maintien d'expositions de la biosphère aux rayonnements ionisants inférieures aux réglementations en vigueur. Le système de confinement est constitué de 2 ou 3 barrières successives, selon l'option retenue, illustrées à la figure 1.3. Ces barrières ont des rôles complémentaires et sont conçues pour être aussi durables et efficaces que possible :

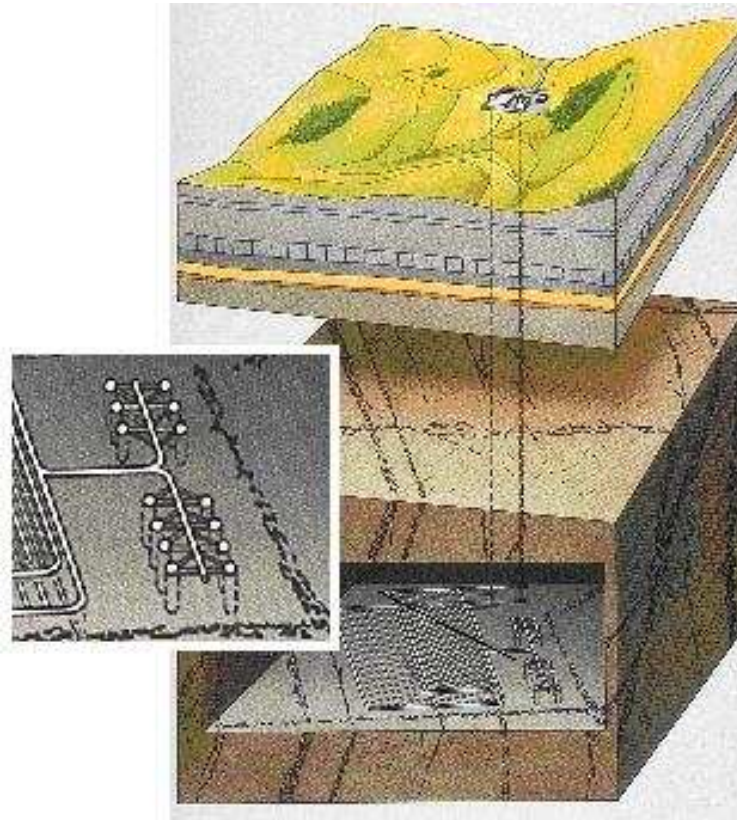


Fig. 1.2. Ouvrage de stockage souterrain dans son ensemble.

- le colis de déchets, constitué d'une matrice, d'un conteneur et d'un surconteneur,
- la barrière ouvragée,
- la barrière géologique.

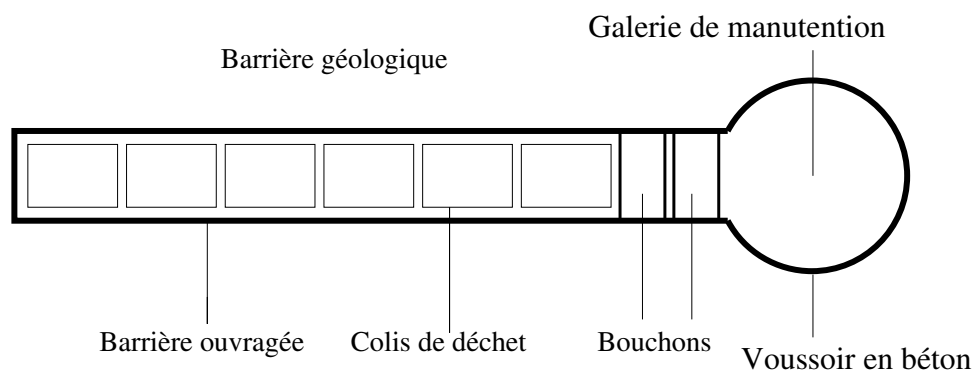


Fig. 1.3. Galerie, puits et colis situés en profondeur.

Le *colis*, plus qu'un simple «emballage», est un objet de haute technologie chargé d'assurer un premier rôle dans le confinement de la radioactivité. Le contenu actif des radionucléides

ne représente qu'environ 15% de son tonnage, la matrice adaptée au déchet et le conteneur comptant pour 85%. La fonction essentielle du colis est de confiner la radioactivité sur l'échelle de temps pour laquelle il a été conçu, supérieure à quelques milliers d'années. À plus long terme, les conteneurs de déchets vont inévitablement se corroder sous l'action des eaux interstitielles présentes dans les milieux géologiques. Cela va conduire au relâchement de faibles quantités de radionucléides autour du colis.

La *barrière ouvragée* a pour fonction de limiter les flux d'eau autour des colis, de retarder leur dégradation et la migration ultérieure des radionucléides une fois les colis dégradés. Elle est constituée d'argile compactée sous forme de pastilles afin de faciliter sa mise en place dans un site de stockage. Le gonflement occasionné par la resaturation en eau de ce matériau permet de garantir le scellement des vides initialement présents entre les pastilles. Les matériaux constitutifs de la barrière ouvragée doivent posséder des propriétés thermo-hydro-mécaniques peu sensibles à des évolutions au cours du temps de la température, de la teneur en eau et de la composition chimique des eaux de l'environnement.

La *barrière géologique* a pour fonction de limiter la diffusion et d'assurer la rétention des radionucléides en champ proche du site de stockage initial jusqu'à une décroissance suffisante de leur radioactivité. En effet, les radionucléides libérés par dégradation du colis vont en partie interagir avec la surface des matériaux les environnant (barrière ouvragée mais également barrière géologique) et pour certains s'y fixer. Une autre partie va migrer de la zone de stockage et diffuser lentement dans l'environnement. La circulation des eaux souterraines est clairement un facteur essentiel susceptible de favoriser le transport des radionucléides. Le premier critère de choix de la roche hôte du site de stockage est donc lié à la prévision des mouvements d'eau au sein de celle-ci au cours du temps.

Les questions soulevées par le stockage souterrain de déchets radioactifs sont bien sûr nombreuses. La contribution que peuvent apporter les scientifiques concerne avant tout la possibilité de sa réalisation technique dans le cadre législatif en vigueur et la prédiction du comportement de l'ensemble du site de stockage sur une échelle de temps correspondant à l'obtention d'un niveau de radioactivité suffisamment faible des déchets, c'est-à-dire environ un million d'années. Plusieurs rapports sur l'état d'avancement de la recherche sont disponibles sur le site <http://www.andra.fr>, dont la référence [And06] qui propose un éclairage sur la loi de programme du 28 juin 2006. Le lecteur intéressé pourra également consulter l'ouvrage [CEA06].

1.3 Un outil logiciel : *Code_Aster*

EDF doit garantir la maîtrise technique et économique de ses moyens de production d'électricité. La sûreté et la disponibilité des installations industrielles et de génie civil nécessitent d'étayer les décisions relatives à leur exploitation par des études de mécanique au sens large. Ces études recourent à la simulation numérique avec le logiciel *Code_Aster* (Analyse de Structures et Thermo-mécaniques pour des Études et des Recherches), développé en interne. L'organisation autour de cette plate-forme de modélisation en calcul de structures capitalise le savoir-faire d'EDF en matière de modélisation des phénomènes physiques mis en jeu, de leurs traitements numériques et des méthodes d'analyse associées.

Pour répondre à la problématique du devenir des produits issus du combustible nucléaire utilisé dans ses centrales, EDF étudie la possibilité du stockage souterrain à grande profondeur des déchets ultimes au sein de *Code_Aster*. Les simulations des différentes phases de creusement des galeries, puis d'évolution au cours du temps des produits stockés, ont lieu en utilisant des modélisations THHM qui visent à restituer la complexité du comportement des milieux poreux. Dans ce paragraphe, on propose de présenter succinctement l'organisation générale de *Code_Aster*, de mettre en lumière son caractère industriel et de décrire brièvement son module de simulation numérique THHM. Pour plus de détails sur les modélisations THHM, on pourra consulter la documentation technique [Meu05] réalisée au début de cette thèse.

1.3.1 Présentation générale

L'objectif de ce paragraphe est de présenter *Code_Aster* et d'en esquisser l'architecture générale. Une documentation exhaustive du code peut être trouvée sur son site Internet <http://www.code-aster.org>.

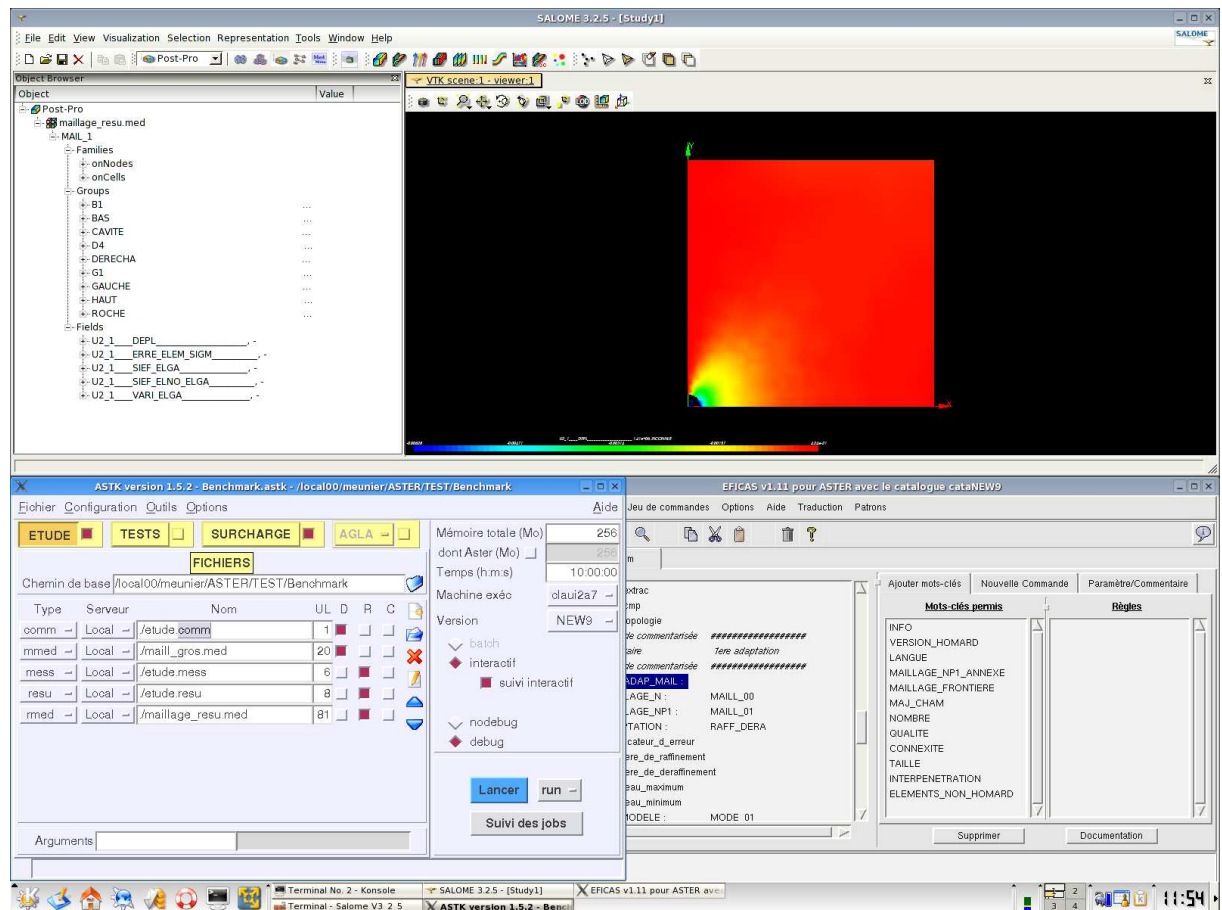


Fig. 1.4. Exemple d'étude réalisée avec *Code_Aster*.

Code_Aster est développé depuis 1989 par EDF R&D. Le code est un outil généraliste de calcul des structures par éléments finis, dont le domaine d'application essentiel est la mécanique des solides déformables, mais il permet également la modélisation de phénomènes hydrauliques, thermiques et acoustiques dont les effets peuvent induire des déformations mécaniques. Il couvre une large palette d'applications allant de la mécanique quasi-statique, à la dynamique rapide en passant par la modélisation des géomatériaux. *Code_Aster* compte en version 8 environ 1 400 000 lignes de code source, le tout reposant sur un gestionnaire de la mémoire (JEVEUX), un superviseur de commandes et un moteur de calcul éléments finis. Le code source est composé de routines Fortran, de fonctions C, de catalogues Python et d'une base conséquente de cas tests (plus de 1600 en version 8). Les fonctions C réalisent certaines tâches «système» impossibles en Fortran 77 telles que l'allocation dynamique et la mesure de temps. On distingue deux sortes de catalogues :

- les catalogues de commandes paramétrant le superviseur,
- les catalogues d'options paramétrant les calculs élémentaires, pris en charge par les routines de nom générique `texxxx`.

Le gestionnaire de mémoire permet de manipuler (création, sauvegarde, destruction, libération de la mémoire, copie ...) des structures de données qui seront ensuite échangées par les commandes. Le superviseur sert à enchaîner les différentes commandes. Le moteur de calcul éléments finis exécute les algorithmes indépendamment de la formulation des éléments. Le schéma 1.5 illustre l'architecture informatique générale simplifiée du code.

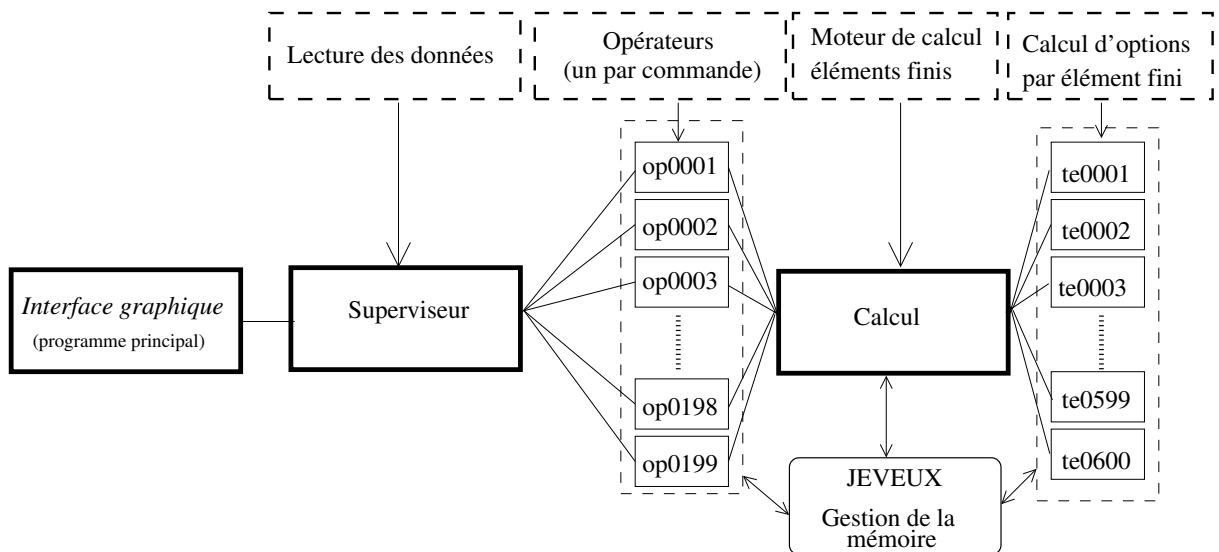


Fig. 1.5. Architecture informatique globale de *Code_Aster*.

La démarche pour réaliser une étude avec *Code_Aster* consiste en l'enchaînement d'un certain nombre de commandes s'appuyant sur le langage Python. Les paramètres d'entrée d'une étude sont un fichier de commandes et un maillage d'éléments finis.

Le fichier de commandes comporte classiquement plusieurs étapes dont la lecture du maillage, la définition du problème physique étudié, la résolution du problème et le post-

traitement du calcul. Un exemple d'une partie de fichier de commandes pour un calcul de désaturation d'un milieu poreux est donné à la figure 1.6. On y observe la définition de constantes (*VISCOLIQ*, *VISCOGAZ*, ...) et d'une liste d'instants (*INST1*), la lecture du maillage (*MAIL*), le choix d'une modélisation Thermo-Hydraulique non saturée en déformations planes (nommée *D_PLAN_THVD*) et la définition du matériau étudié (*MATERBO*). En sortie, un fichier résultat et un fichier message sont produits. Le fichier résultat fournit les champs de résultats attendus par le fichier de commandes. Le fichier message regroupe les messages d'erreur éventuels lors de l'exécution des commandes, la durée en temps CPU de chaque commande et le coût global du calcul. L'utilisateur est grandement aidé dans la phase de conception de son maillage et de son fichier de commandes par différents outils. La plate-forme Salomé, co-développée par EDF en partenariat avec d'autres industriels, fournit un outil facile d'emploi de génération de maillage, de réalisation d'études et de post-traitement des résultats. Le lecteur intéressé peut obtenir des renseignements supplémentaires sur cette plate-forme à l'adresse Internet <http://www.salome-platform.org>. Pour la conception du fichier de commandes, il n'est pas nécessaire à l'utilisateur de *Code_Aster* de connaître la syntaxe exacte de toutes les commandes (plus de 200 en version 8). L'outil Efficas (Éditeur de Fichier de Commandes et Analyseur Sémantique) permet d'éviter les fautes de syntaxe et simplifie grandement la phase de conception du fichier de commandes.

1.3.2 Un code industriel

Code_Aster propose une panoplie de modélisations multiphysiques et de méthodes d'analyse adaptée aux besoins d'EDF. Il est ouvert, en évolution constante et soumis aux règles d'Assurance Qualité (AQ).

Depuis 1989, le code est développé par une équipe centrale d'une vingtaine d'ingénieurs qui se consacre à la cohérence et à la qualité de la plate-forme, de l'architecture à la mise en exploitation au travers d'outils de gestion de configuration, d'acceptation des évolutions et de retour d'expérience. Elle est épaulée par plusieurs équipes internes EDF de projets applicatifs et de prestataires de services externes. Les missions de ces équipes sont doubles :

- amélioration constante des fonctionnalités du code,
- développement de nouvelles modélisations et techniques numériques.

Les équipes de développement s'appuient pour cela notamment sur des innovations théoriques suscitées par la recherche en interne, par des partenariats universitaires ou avec des industriels partageant les mêmes problématiques. Le code est diffusé librement, sous licence GNU-GPL. Le site Internet <http://www.code-aster.org> est particulièrement actif et constitue un retour d'expérience précieux pour EDF. Cette démarche d'ouverture permet également une validation indépendante du code et d'en accroître la qualité. Le code est proposé sous 3 formes différentes.

- La version d'*exploitation* est qualifiée (sous AQ), validée indépendamment et abondamment documentée. Sa durée de vie de deux années voit ses sous-versions semestrielles se décliner au rythme des maintenances correctives et des compléments de validation et de documentation.
- La version de *développement* s'enrichit hebdomadairement de corrections, d'améliorations et d'innovations. Les nouveautés sont documentées et la non régression du code est assurée. De cette version naît la version d'exploitation tous les deux ans.
- La version *libre* est éditée en code source et exécutable Linux sur le site Internet et provient, après conditionnement, de la version de développement du moment.

```

DEBUT(CODE=_F(NOM='WTNP115A',NIV_PUB_WEB='INTERNET'),DEBUG=_F(SDVERI='OUI'))
PRE_IDEAS();
INST1=DEFI_LIST_REEL(DEBUT=0.0,INTERVALLE=_F(JUSQU_A=1000.,NOMBRE=1,));
MAIL=LIRE_MALLAGE();
MAIL=DEFI_GROUP(reuse =MAIL,MAILLAGE=MAIL,
                CREA_GROUP_NO=( _F(GROUP_MA='BAS',),_F(GROUP_MA='HAUT',),
                                _F(GROUP_MA='GAUCHE',),_F(GROUP_MA='DROIT',),
                                _F(GROUP_MA='BO',),),));
MODELE=AFFE_MODELE(MAILLAGE=MAIL,
                   AFPE=_F(TOUT='OUI',PHENOMENE='MECANIQUE',
                           MODELISATION='D_PLAN_THVD',),);
UN=DEFI_CONSTANTE(VALE=1.0,);
ZERO=DEFI_CONSTANTE(VALE=0.0,);
VISCOLIQ=DEFI_CONSTANTE(VALE=1.E-3,);
VISCOGAZ=DEFI_CONSTANTE(VALE=1.8E-05,);
DVISCOL=DEFI_CONSTANTE(VALE=0.0,);
DVISCOG=DEFI_CONSTANTE(VALE=0.0,);
...
MATERBO=DEFI_MATERIAU(ELAS=_F(E=5.15,NU=0.2,RHO=2670.0,ALPHA=0.,),
                      COMP_THM = 'LIQU_VAPE',
                      THM_LIQU=_F(RHO=1000.0,
                                   UN_SUR_K=0.,
                                   ALPHA=0.,
                                   CP=4180.0,
                                   VISC=VISCOLIQ,
                                   D_VISC_TEMP=DVISCOL,),
                      THM_GAZ=_F(MASS_MOL=0.02896,
                                   CP=1017.0,
                                   VISC=VISCOGAZ,
                                   D_VISC_TEMP=ZERO,),
                      THM_VAPE_GAZ=_F(MASS_MOL=0.018,
                                       CP=1900.0,
                                       VISC=VISCOGAZ,
                                       D_VISC_TEMP=ZERO,),
                      THM_INIT=_F(TEMP=300.0,PRES1=0.0,PRES2=0.,PORO=0.3,PRES_VAPE=3700.0,),
                      THM_DIFFU=_F(R_GAZ=8.315,
                                   RHO=2200.0,
                                   CP=1050.0,
                                   BIOT_COEF=1.0,
                                   SATU_PRES=SATUBO,
                                   D_SATU_PRES=DSATBO,
                                   PESA_X=0.0,PESA_Y=0.0,PESA_Z=0.0,
                                   PERM_IN=KINTBO,
                                   PERM_LIQU=UN,
                                   D_PERM_LIQU_SATU=ZERO,
                                   PERM_GAZ=UN,
                                   D_PERM_SATU_GAZ=ZERO,
                                   D_PERM_PRES_GAZ=ZERO,
                                   LAMB_T=LAMBT,
                                   LAMB_S=LAMBS,
                                   D_LB_S=DLS,
                                   LAMB_CT=0.5),);
...
FIN();

```

Fig. 1.6. Partie d'un fichier de commandes pour *Code_Aster*.

Le travail présenté dans la suite de cette thèse s'insère dans la version de développement et l'impact de la restitution dans *Code_Aster* des nouveautés théoriques acquises dans le cadre de cette thèse sera précisé par la suite.

Les caractéristiques présentées ci-dessus d'un grand code industriel tel que *Code_Aster* permettent de concevoir que l'insertion d'une nouvelle chaîne de calculs n'est pas chose aisée ! En effet, il faut tout d'abord comprendre l'organisation générale du code et les mécanismes mis en jeu. Le développeur dans *Code_Aster* doit également respecter un certain nombre de règles avant de pouvoir modifier le code source. Pour cela, des outils de développement et de gestion du code source ont été conçus. Ils permettent notamment de vérifier la cohérence de la restitution souhaitée par le développeur : inspection des sources, des catalogues, des cas tests, absence de conflits avec d'autres restitutions, non régression des résultats de cas tests existants.

1.3.3 Le module THHM

Parmi la panoplie de fonctionnalités du code, le module de simulation numérique THHM est né en 1995 avec une première fonctionnalité, intégrée dans la version 3 (1996) du code, de modélisation THM 2D et 3D des milieux saturés avec une loi de comportement mécanique élastique. Le choix effectué dans le module THHM est une interpolation *quadratique* pour les déplacements et une interpolation *linéaire* à la fois pour les pressions et la température. Ce choix a été justifié sur un cas de consolidation en dimension 1 et en milieu saturé par Chavant [Cha01b] et sera justifié mathématiquement dans cette thèse au chapitre 4 dans le cadre de l'analyse d'erreur *a priori*. En 1999, pour la première version THHM, une intégration *classique* a été utilisée, à savoir de Gauß pour une discrétisation spatiale en quadrangles, ou de Gauß-Hammer pour une discrétisation spatiale en triangles. Depuis lors, d'autres méthodes d'intégration numérique ont été testées et incorporées dans le code.

- L'intégration *lumpée* : afin de diminuer certaines oscillations numériques sur les inconnues du problème (déplacements, pression) dues à la violation du principe du maximum discret pour des problèmes de type « choc » (non-compatibilité des conditions aux limites et des conditions initiales), on choisit les sommets de l'élément fini comme points d'intégration en déplacements et en pression.
- L'intégration *sélective* : pour pallier la dégradation des résultats (perte de précision par diffusion excessive) pour des problèmes où les phénomènes mécaniques prédominent, lors de l'utilisation de l'intégration lumpée, une intégration sélective a été proposée. Elle consiste à intégrer les termes faisant intervenir une dérivée temporelle et les termes de couplage aux sommets, les autres étant intégrés aux points de Gauß intérieurs.

De nombreuses lois de comportement mécanique sont incorporées dans le module THHM afin de tenir compte de la spécificité des géomatériaux (entre autres Cam-Clay, modèle de Barcelone, Laigle). La variété des phénomènes hydrauliques est également traitée par des modèles complexes basés sur l'expression de lois d'écoulement non linéaires pour les 2 constituants possibles au sein du milieu poreux. Une équation thermique exprime le principe de conservation de l'énergie. Les échanges entre phases sont régis par les lois d'équilibre de la thermodynamique. Les mécanismes de diffusion au sein des mélanges gazeux (air sec et eau vapeur) et liquide (air dissous et eau liquide) sont régis par des lois de Fick. On observe que, dans le cas le plus général, on s'intéresse à des problèmes multi-physiques, complexes et non-linéaires. La figure 1.7 illustre un

calcul d'excavation d'une galerie circulaire, réalisé à l'aide d'une modélisation HM instationnaire non linéaire saturée du module THHM de *Code_Aster*.

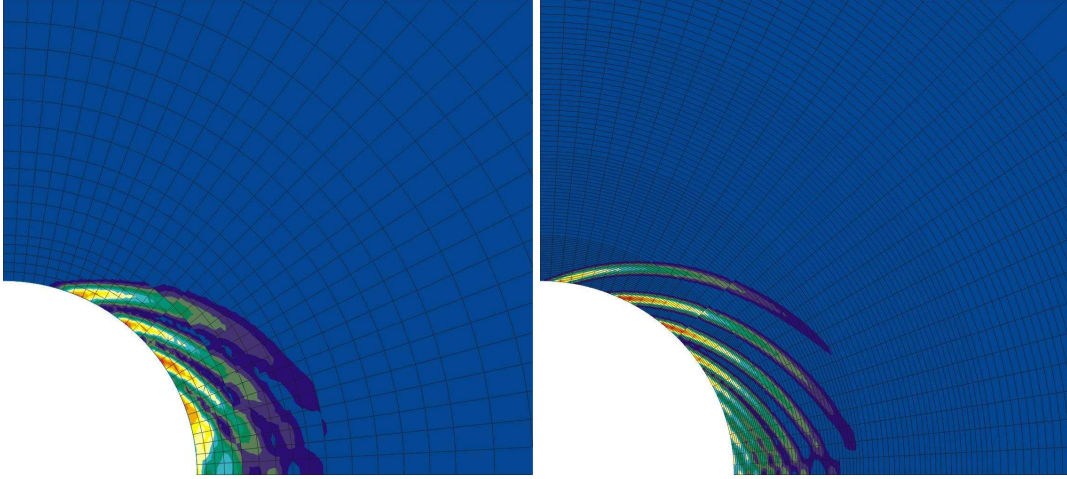


Fig. 1.7. Zones de fissuration dans un calcul d'excavation : à gauche, calcul sur un maillage grossier ; à droite, calcul sur un maillage raffiné autour de la zone d'excavation.

La résolution numérique des problèmes THHM se fait de manière totalement couplée au sein de *Code_Aster* avec un algorithme de Newton. Le lecteur intéressé trouvera une présentation plus détaillée du module THHM dans la documentation de référence du code [Cha01a, Cha01b]. Dans les applications industrielles, la résolution numérique des problèmes THHM peut faire apparaître de multiples difficultés telles que la convergence de l'algorithme de Newton (choix du critère de convergence, éventuelle absence de convergence), la très grande sensibilité des calculs à la discrétisation spatio-temporelle ou les oscillations dans les résultats. Plusieurs pistes sont évoquées pour parer ces difficultés, sans être véritablement tranchées. On peut repenser la résolution totalement couplée des problèmes THHM au sein de *Code_Aster* au profit d'un chaînage des calculs ou bien s'intéresser à des méthodes numériques autres que celles par éléments finis telles que les méthodes par volumes finis, préférentiellement choisies dans les problèmes où dominent les effets hydrauliques. Cette problématique sort du champ d'étude de cette thèse d'une part parce qu'on traitera essentiellement des couplages Hydro-Mécaniques linéaires et d'autre part parce qu'on suppose que les données du problème garantissent l'existence d'une solution suffisamment régulière en espace et en temps (ce qui exclut par exemple les incompatibilités entre conditions aux limites et conditions initiales qui sont sources de difficultés).

Au-delà de la problématique du stockage profond des déchets nucléaires, le module THHM est également adapté aux autres besoins en simulation numérique d'EDF comme par exemple l'étude de l'étanchéité des enceintes de confinement des centrales nucléaires ou de la tenue des barrages.

1.4 Les sources d'erreur dans une modélisation numérique

Comme dans toute modélisation numérique, le résultat d'un calcul THHM ne fournit pas un rendu exact du comportement physique réel qu'il est censé représenter. La solution calculée est toujours entachée d'erreurs. Le terme *erreur* n'est pas à prendre ici au sens de faute (faute de raisonnement dans la méthode ou instruction fautive dans l'algorithme de résolution) mais plutôt au sens d'imprécision inévitable. L'erreur d'approximation, c'est-à-dire la différence entre la solution exacte et la solution calculée, peut avoir plusieurs origines. Cette section en dresse une brève revue, en distinguant les erreurs de résolution numérique, de discrétisation et de modélisation. Dans l'optique d'améliorer la résolution d'un problème, on préconise généralement de s'intéresser dans cet ordre aux erreurs. La contribution de cette thèse portera exclusivement sur les erreurs de discrétisation.

La maîtrise des erreurs passant par leur estimation, l'analyse d'erreur *a posteriori* constitue dans de nombreux cas une technique efficace d'estimation d'erreur à partir uniquement de la solution calculée et des données du problème. Elle s'oppose en cela à l'estimation d'erreur *a priori*, qui fait intervenir la solution exacte du problème dans les estimations. Pour être utile en vue d'améliorer la modélisation numérique, l'estimation d'erreur *a posteriori* doit présenter les 3 caractéristiques suivantes :

- fiabilité : l'estimation fournit une majoration globale (en espace et en temps) d'une norme de l'erreur,
- optimalité : l'estimation se décompose en estimateurs d'erreur locaux en temps et en espace et ceux-ci fournissent des bornes inférieures de l'erreur d'approximation locale, garantissant ainsi que les estimateurs d'erreur locaux ne «surévaluent» pas trop l'erreur.
- efficacité numérique : l'évaluation numérique des estimateurs d'erreur doit être d'un coût faible par rapport à l'étape de résolution numérique du problème.

L'estimation d'erreur *a posteriori* est à l'origine d'algorithmes de raffinement adaptatif de la discrétisation qui permettent souvent de diminuer (parfois d'optimiser) le coût des calculs. La construction de maillages s'adaptant automatiquement à la solution permet pour un nombre de degrés de liberté fixé d'augmenter la précision ou pour une précision donnée de diminuer le nombre de degrés de liberté. Un raisonnement similaire peut s'appliquer à l'adaptation de la discrétisation temporelle pour les modèles instationnaires même si la mise en œuvre est plus délicate. Dans le cadre de *Code_Aster*, l'estimation d'erreur *a posteriori* peut être couplée avec l'outil de maillage adaptatif HOMARD, initialement conçu pour les logiciels de calcul d'EDF mais pouvant également être interfacé avec d'autres logiciels. Le lecteur intéressé pourra trouver des renseignements sur les principes de fonctionnement de HOMARD à l'adresse <http://www.code-aster.org/outils/homard>. Une documentation complète [Nic05] est également disponible.

On propose ci-dessous un exemple d'adaptation de maillages réalisé à l'aide de HOMARD pour un problème de mécanique quasi-statique réalisé dans *Code_Aster*. On considère une pièce encastree sur son côté gauche. On choisit une loi de comportement mécanique du matériau de type Von Mises isotrope. Un chargement mécanique est imposé sur le haut de la seconde bosse. On observe que le maillage initial, illustré à la figure 1.8, est assez grossier.

On présente à la figure 1.9 une série de maillages raffinés sur la base des estimateurs d'erreur implantés dans *Code_Aster* pour la mécanique quasi-statique. On remarque que le maillage est

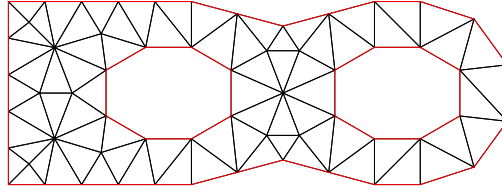


Fig. 1.8. Maillage initial.

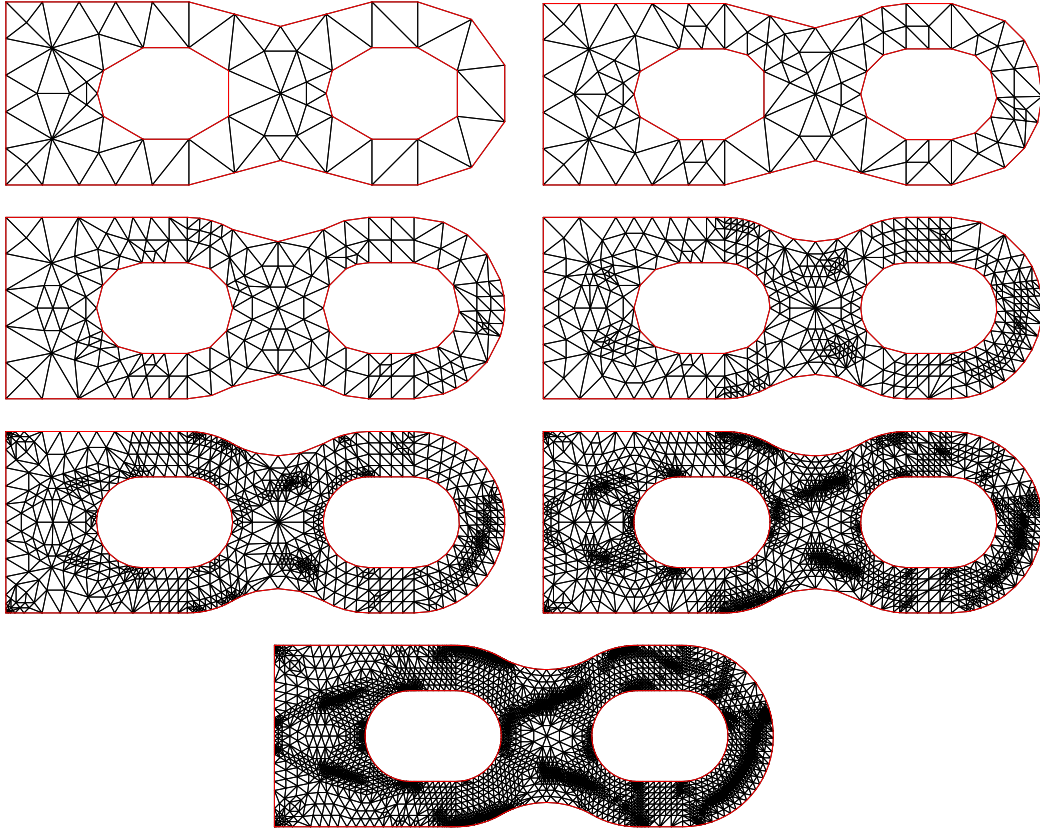


Fig. 1.9. Exemple de raffinement adaptatif de maillage par HOMARD.

raffiné dans des zones qu'il était difficile de prévoir *a priori* par une simple analyse physique du problème. De plus, la frontière de la pièce étudiée est approchée fidèlement car au fil des adaptations, les nouveaux nœuds sont placés sur le véritable bord.

1.4.1 Erreurs de modélisation

Face à un problème physique, l'ingénieur doit d'abord choisir un modèle permettant de formaliser en équations les processus mis en jeu et s'assurer (si possible) que le modèle obtenu soit bien posé, c'est-à-dire qu'il admette une et une seule solution. La modélisation consiste en l'écriture de lois de conservation, d'équilibre ou de comportement. Elle fait généralement appel

à des hypothèses simplificatrices et ne rend compte que partiellement de la réalité physique du problème. De plus, le modèle fait intervenir des paramètres qui sont le résultat de mesures expérimentales ou qui proviennent eux-mêmes d'une approximation. La précision sur ces données paramétriques est, en quelque sorte, imposée à l'ingénieur numéricien et il ne peut agir sur elle.

Une possibilité afin de réduire les erreurs de modélisation dues aux incertitudes paramétriques consiste, lorsqu'on connaît une partie de l'évolution du système, à faire appel aux techniques de *problèmes inverses*. Ces techniques sont traitées par exemple dans l'ouvrage d'Isakov [Isa98]. Les problèmes inverses apparaissent dans de nombreux domaines tels que la chimie (détermination des constantes de réaction), l'hydrogéologie (identification des conductivités hydrauliques) ou l'acoustique sous-marine (détermination de la forme d'un obstacle). D'autres exemples d'application sont exposés dans l'ouvrage de Kirsch [Kir96]. L'assimilation de données propose également la confrontation d'un modèle théorique aux observations expérimentales de l'état d'un système. Elle permet d'améliorer la connaissance (passée, présente et future) de l'état d'un système physique à partir de la donnée concomitante d'observations sur le système et de sa connaissance théorique par la simulation numérique. Elle est notamment utilisée en météorologie où les modèles font intervenir un grand nombre de paramètres et où les observations sont nombreuses. Le lecteur pourra consulter les travaux de Bouttier et Courtier [BC97], de Ide, Bennett, Courtier, Ghil et Lorenc [IBC⁺99] et ceux de Talagrand [Tal97] pour une introduction. Par ailleurs, des techniques d'estimation *a posteriori*, introduites par Braack et Ern [BE03], permettent également d'analyser les erreurs de modélisation et d'adapter le modèle par zones.

1.4.2 Erreurs de discrétisation

Une fois choisi le modèle, force est de constater que celui-ci n'admet pas, en général, de solution qui puisse être facilement évaluée. L'ingénieur doit donc se contenter d'en chercher une solution approchée et pour cela, il fait appel à des méthodes d'approximation dont les plus classiques (éléments finis, volumes finis, différences finies) fournissent une discrétisation en temps et en espace des équations du modèle. Par exemple, dans la méthode des éléments finis, la solution du problème modèle est approchée par une combinaison linéaire de fonctions élémentaires polynomiales. Cette approximation est naturellement source d'erreurs que l'ingénieur cherche à estimer et à diminuer. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, la littérature sur l'estimation de l'erreur de discrétisation par les méthodes d'analyse d'erreur *a posteriori* est abondante. Les bases en furent jetées dans les travaux pionniers de Babuška et Rheinboldt [BR78].

Pour les problèmes stationnaires, on suppose pour fixer les idées qu'on s'intéresse au problème suivant (complété par des conditions aux limites de type Neumann homogène pour simplifier) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \nabla \cdot \phi(u) = f \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

où ϕ représente un opérateur de diffusion (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) et où la donnée f est dans $L^2(\Omega)$. Ayant construit une famille de maillages $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ du domaine Ω , on désigne par u_h la solution du problème (1.3) approché par une méthode d'éléments finis dans un cadre conforme ($u_h \in H^1(\Omega)$). Même si les travaux de cette thèse porteront sur des estimations *a posteriori* de type résidu, il est utile à ce stade introductif de décrire brièvement un éventail plus large de techniques d'estimation d'erreur *a posteriori*.

- **Méthode par résidus** : Cette technique a été introduite par Babuška et Rheinboldt [BR78]. Verfürth [Ver96] en a proposé une revue relativement exhaustive. Pour tout $v \in V$, on définit le résidu ρ de la solution approchée u_h en v par

$$\rho(u_h; v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \rho_T(u_h; v),$$

avec les contributions locales

$$\rho_T(u_h; v) = (f - \nabla \cdot \phi(u_h), v)_{0,T} + (\phi(u_h) \cdot n_T, v)_{0,\partial T},$$

où n_T désigne la normale extérieure à la maille T . Pour un sous-ensemble $R \subset \Omega$ et un entier $s \geq 0$, l'indice $_{s,R}$ fait référence au produit scalaire dans $H^s(R)$ ($L^2(R)$ pour $s = 0$) ou à la norme associée. Soit F une face intérieure du maillage, c'est-à-dire telle qu'il existe deux mailles T_1 et T_2 dans $\mathcal{T}_h$ avec $F = T_1 \cap T_2$. On désigne par n_1 et n_2 les normales extérieures à T_1 et T_2 , respectivement. On définit le saut de la composante normale de $\phi(u_h)$ à travers F par

$$[\![\phi(u_h) \cdot n]\!] = \phi(u_h)|_{T_1} \cdot n_1 + \phi(u_h)|_{T_2} \cdot n_2. \quad (1.4)$$

Pour une face F située au bord, on pose simplement $[\![\phi(u_h) \cdot n]\!] = \phi(u_h)|_T \cdot n$ où T est l'élément de $\mathcal{T}_h$ dont F est une face. Cette définition du saut est illustrée à la figure 1.10. Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on définit l'estimateur d'erreur local à la maille T par

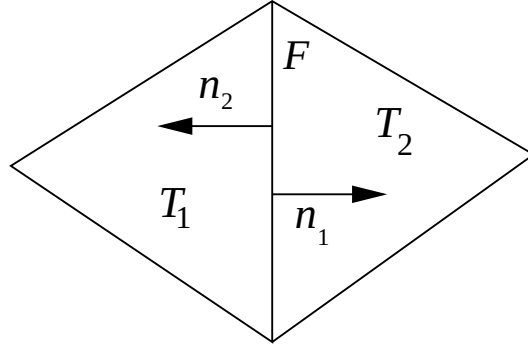


Fig. 1.10. Exemple de face intérieure de maillage.

$$\eta_T = h_T \|f - \nabla \cdot \phi(u_h)\|_{0,T} + h_T^{1/2} \|[\![\phi(u_h) \cdot n]\!]\|_{0,\partial T}, \quad (1.5)$$

où h_T désigne le diamètre de la maille T . On remarque que η_T est composé d'un terme faisant intervenir le résidu de l'équation (1.3) évalué dans chaque maille et d'un terme faisant intervenir le saut de l'opérateur de diffusion aux interfaces de la maille. On dispose de la propriété de fiabilité suivante

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\Omega} \leq c_1 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2},$$

où c_1 est une constante réelle indépendante de h . Si on s'intéresse au problème de Laplace où $\phi(u) = -\nabla u$, on peut montrer également la propriété d'optimalité suivante : il existe une constante c_2 , indépendante de h , telle que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\eta_T \leq c_2 (\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\Delta_T} + h_T \|f - f_h\|_{0,\Delta_T}),$$

où Δ_T est un macro-élément centré autour de T et f_h la fonction constante par morceaux égale à la moyenne de f sur chaque maille.

- **Méthode par dualité** : Cette méthode qui remonte aux travaux de Johnson [Joh87] et de Becker et Rannacher [BR01] permet d'estimer l'erreur d'approximation *via* une fonctionnelle $\psi : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ qui fait intervenir des quantités intéressant plus spécifiquement l'ingénieur, comme par exemple une moyenne de déplacement dans une sous-région du domaine physique ou une moyenne de contraintes sur une interface. Sous des hypothèses adéquates, on dispose de l'estimation suivante

$$|\psi(u) - \psi(u_h)| \leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T \omega_T,$$

où les quantités η_T sont définies en (1.5) et où les quantités ω_T font intervenir la solution d'un problème dual auxiliaire posé sur l'ensemble du domaine physique. Ce problème dual est rétrograde en temps dans le cas instationnaire.

- **Méthode hiérarchique** : Cette technique, introduite par Bank et Weiser [BW85], consiste à enrichir l'espace d'approximation, noté V_h , par une augmentation du degré des polynômes d'interpolation ou par un raffinement uniforme et global du maillage. Cet enrichissement donne naissance à un espace des échelles fluctuantes, noté V_h^f , et à un espace d'approximation enrichi V_h^e sous la forme

$$V_h^e = V_h \oplus V_h^f.$$

Les estimateurs d'erreur sont ensuite évalués en fonction de la solution d'un problème auxiliaire posé sur l'espace des échelles fluctuantes. Sous certaines hypothèses (notamment l'hypothèse dite de saturation qui affirme que l'espace V_h^e fournit une meilleure approximation de la solution exacte que V_h), on montre une propriété d'équivalence de l'erreur globale et de l'estimateur d'erreur *a posteriori*; voir les travaux de Bornemann, Erdmann et Kornhuber [BEK96] et ceux de Dörfler et Nochetto [DN02] où on montre que l'hypothèse de saturation peut être vérifiée en examinant le terme d'oscillation des données. Depuis les travaux de Bank et Weiser portant sur un problème elliptique symétrique défini positif discrétisé par des éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$, une littérature abondante s'est développée sur le sujet. La formalisation des travaux précédents dans un cadre abstrait, avec estimations d'erreur *a priori* et *a posteriori*, a été proposée par Achchab, Agouzal, Baranger et Maitre [AABM98]. Un exemple sur la formulation mixte de plus bas degré du problème de Poisson est également présenté. L'enrichissement conduit à résoudre un problème résiduel global. Pour éviter ce coût élevé, Hoppe et Wohlmuth [WH99] proposent une méthode de décomposition permettant de résoudre uniquement des problèmes résiduels locaux. L'ouvrage d'Ainsworth et Oden [AO00] fournit une revue relativement détaillée de l'estimation d'erreur *a posteriori* de type hiérarchique.

- **Méthode par flux équilibrés** : Sous ce nom générique, on peut regrouper un ensemble de méthodes nécessitant la construction d'un flux approché $\hat{\phi}(u_h)$ dont la divergence est

de carré sommable et approche le terme source f avec précision. L'estimateur d'erreur est alors basé sur l'écart entre $\phi(u_h)$ et $\hat{\phi}(u_h)$. L'origine de ces méthodes remonte aux travaux de Prager et Synge [PS47] où une décomposition de l'erreur est proposée en utilisant une reconstruction du flux dont la divergence est exactement le terme source. Ces idées ont été étendues dans le cadre de l'estimation en loi de comportement par Ladevèze [Lad75, Lad77]; voir également les travaux de Ladevèze et Leguillon [LL83]. L'approche de Ladevèze est basée sur la notion d'erreur en relation de comportement et sur des techniques adaptées de construction de champs admissibles. Pour le problème classique de l'élasticité quasi-statique, l'idée consiste à construire, à partir de la solution discrète et des données, un couple déplacements-contraintes *admissible*, c'est-à-dire vérifiant exactement les conditions d'admissibilité cinématique et statique. En effet, les approximations issues de la méthode des éléments finis ne vérifient généralement pas ces conditions puisque la contrainte discrète n'est pas en équilibre avec les charges données. La construction du couple admissible est un point délicat de cette méthode. L'erreur en loi de comportement est ensuite définie comme l'écart entre la contrainte éléments finis et la contrainte obtenue par la construction ci-dessus. Récemment, le développement de ces méthodes a été poursuivi dans plusieurs directions : la formalisation du cadre mathématique, l'extension à une classe de problèmes plus larges et le développement de techniques de reconstruction locale du flux ne nécessitant pas de calculs coûteux. On pourra par exemple consulter les travaux de Destuynder et Métivet [DM99], de Neittaanmäki et Repin [NR04], de Luce et Wohlmuth [LW04], de Braess et Schöberl [BS06], de Nicaise, Witowski et Wohlmuth [NWW06], de Cochez-Dhondt et Nicaise [CDN07] et de Ern, Stephansen et Vohralík [ESV07].

- **Méthode de Zienkiewicz-Zhu (ZZ)** : Le principe de la méthode ZZ est d'utiliser la solution discrète afin d'approcher localement le gradient de la solution exacte. La technique a été introduite par Zienkiewicz et Zhu [ZZ87] pour des problèmes d'élasticité linéaire 2D. Elle a ensuite été étendue aux problèmes 2D non linéaires de viscoplasticité [ZLH88] et d'élastoplasticité [BZ99] ainsi qu'aux problèmes 3D d'élasticité linéaire et de viscoplasticité incompressible [BF04]. Les estimateurs d'erreur locaux sont définis comme la distance entre un gradient reconstruit de la solution exacte, noté $G_h u_h$, et le gradient de la solution discrète de la manière suivante

$$\eta_T = \|G_h u_h - \nabla u_h\|_{0,T},$$

pour tout $T \in \mathcal{T}_h$. Cette technique présente l'intérêt de la simplicité de mise en œuvre à un coût faible. Cependant, elle dispose généralement d'une caution théorique moindre, même si des propriétés de fiabilité ont été établies par Bartels et Carstensen [BC02].

Dans *Code_Aster*, plusieurs estimateurs d'erreur sont implantés : un estimateur d'erreur spatiale en résidu pour l'élastoplasticité [Des05] et pour la thermique transitoire [Boi02], un estimateur d'erreur par dualité pour la mécanique quasi-statique [Del06] et un estimateur d'erreur de type ZZ pour des problèmes d'élasticité 2D [Des94].

L'estimation d'erreur *a posteriori* pour les problèmes instationnaires est un sujet particulièrement pertinent car les processus dépendant du temps interviennent dans une large gamme d'applications physiques telles que les phénomènes de diffusion, d'écoulements de fluides ou d'électromagnétisme. Cependant, elle constitue encore un sujet d'étude en développement. La littérature sur l'estimation d'erreur *a posteriori* pour les problèmes paraboliques (linéaires) est

relativement étendue. Les premiers travaux se restreignent à l'adaptation en temps. Par exemple, Johnson, Nie et Thomée [JNT90] présentent une analyse *a posteriori* dans le cas linéaire pour le schéma d'Euler implicite en temps. Nochetto, Savaré et Verdi [NSV00] proposent une étude *a posteriori* pour des problèmes paraboliques non linéaires. Picasso [Pic98] a effectué une des premières analyses *a posteriori* pour une discrétisation «espace-temps». Les estimations sont établies sous l'hypothèse restrictive que les maillages sont emboîtés en temps, ce qui interdit dans la pratique tout déraffinement. Un algorithme d'adaptation des paramètres de discrétisation est exposé et testé numériquement. Verfürth [Ver05] propose également une analyse *a posteriori* pour un problème d'advection-diffusion-réaction instationnaire discrétisé par une méthode d'éléments finis «espace-temps». L'accent porte sur la robustesse des estimateurs en régime d'advection dominante, ce qui conduit à des estimations globales en espace. Les travaux de Bergam, Bernardi et M'Ghazli [BBM05] ont conduit à des estimateurs *a posteriori* «espace-temps» permettant de raffiner ou déraffiner le maillage en temps, avec des propriétés de fiabilité et d'optimalité permettant de développer une stratégie d'adaptation du pas de temps et du maillage. Des algorithmes d'adaptation ont été proposés et mis en œuvre par exemple par Nicaise et Soualem [NS05] et Chen et Feng [CF04].

Les estimations d'erreur décrites ci-dessous pour les problèmes paraboliques fournissent des estimations d'erreur convergeant de manière optimale en espace par rapport à l'erreur en norme $L_t^2(H_x^1)$ (L^2 en temps, H^1 en espace). Une nouvelle approche, récemment introduite par Makridakis et Nochetto [MN03] et analysée plus en détails par Lakkis et Makridakis [LM06], est basée sur la technique de reconstruction elliptique et permet d'obtenir des estimateurs d'erreur pour la norme $L_t^\infty(L_x^2)$ (L^∞ en temps et L^2 en espace) avec optimalité de la convergence. Cette méthode, qui sera décrite plus en détail dans la suite, peut être considérée comme la contre-partie dans le cadre *a posteriori* de la méthode de projection elliptique introduite par Wheeler [Whe73] pour l'analyse d'erreur *a priori*. Elle fait intervenir un champ auxiliaire continu, noté U , qui vérifie les 2 propriétés suivantes :

- la différence $U - u_h$ entre le champ auxiliaire et la solution numérique peut être évaluée *via* des estimations d'erreur *a posteriori* dans un cadre stationnaire,
- la différence $u - U$ entre la solution continue et le champ auxiliaire satisfait une version modifiée de l'équation parabolique originale, dont le second membre dépend de $U - u_h$; en utilisant les propriétés de stabilité du problème continu, on obtient un contrôle de $u - U$ par $U - u_h$.

D'autres approches pour obtenir des estimations d'erreur *a posteriori* dans la norme $L_t^\infty(L_x^2)$ pour les problèmes paraboliques peuvent être trouvées, entre autres, dans les travaux d'Eriksson et Johnson [EJ91, EJ95] et de Thomée [Tho97] basés sur des techniques de dualité, dans le travail de Babuška, Feistauer et Šolín [BFŠ01] utilisant une double intégration en temps, et dans le travail de Verfürth [Ver98] pour les équations paraboliques quasi-linéaires.

D'autres problèmes instationnaires ont été étudiés, tels que ceux de Stokes et de propagation des ondes par Bernardi et Süli [BS05]. Pour le problème de Stokes, Bernardi et Verfürth considèrent une discrétisation temporelle d'Euler implicite et une discrétisation spatiale par des éléments finis conformes [BV04]. L'analyse d'erreur *a posteriori* fournit des estimateurs dont la convergence est optimale dans la norme $L_t^2(H_x^1)$ (L^2 en temps et H^1 en espace) pour la vitesse. Karakatsani et Makridakis [KM06] considèrent une semi-discrétisation spatiale par éléments finis ou par volumes finis. Des estimations d'erreur d'ordre optimal en norme $L_t^\infty(L_x^2)$ et $L_t^\infty(H_x^1)$ pour la vitesse sont démontrées en utilisant la technique des opérateurs de reconstruction de Stokes.

1.4.3 Erreurs de résolution

Les erreurs de résolution sont liées à la machine (ordinateur) utilisée et aux algorithmes itératifs mis en œuvre. Les erreurs machine sont dues au fait qu'un ordinateur ne peut représenter les nombres réels qu'avec un nombre fini de chiffres. Par ailleurs, les algorithmes itératifs mis en œuvre peuvent également être sources d'erreur car le critère de convergence retenu peut conduire à une solution numérique parfois très éloignée de la solution réellement convergée. Le critère de convergence résulte en général d'un compromis entre coût de calcul et précision. En effet, le temps de calcul peut facilement devenir un facteur limitant. L'augmentation de la puissance des machines, notamment à architecture parallèle, constitue un élément de réponse à ce problème. La maîtrise des erreurs de résolution sort du champ d'investigation de cette thèse qui s'appuiera sur le savoir-faire actuellement implanté dans *Code_Aster*. En particulier, dans le cadre de la poroélasticité linéaire qui fera l'objet principal de cette thèse, la convergence des algorithmes de résolution est assurée.

1.5 Objectifs de la thèse

Le principal objectif de cette thèse est de proposer une analyse d'erreur *a posteriori* pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles formés de deux équations dans lesquelles une inconnue, notée u , est gouvernée par une équation elliptique et l'autre, notée p , par une équation de type parabolique. L'application visée est le système de la poroélasticité (1.1)-(1.2), issu de la modélisation HM, dont on rappelle ici les équations

$$-\nabla \cdot \sigma'(u) + b\nabla p = \rho_{\text{ref}} F^m, \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \quad (1.6)$$

$$\partial_t \left(\frac{1}{M} p + b\nabla \cdot u \right) - \nabla \cdot (\kappa \nabla p) = -\nabla \cdot (\kappa \rho F^m), \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \quad (1.7)$$

muni de conditions limites et de conditions initiales et où $\sigma'(u) = \lambda_1(\nabla \cdot u)I_d + 2\lambda_2\varepsilon(u)$. Ici Ω représente le domaine en espace et T un temps fini de simulation. Pour simplifier, on restreindra l'analyse à des conditions limites de Dirichlet homogènes en déplacements et en pression, l'extension à des conditions mixtes Dirichlet-Neumann ne posant pas de réelles difficultés.

On montrera au chapitre 2 que la norme de stabilité naturelle du problème (1.6)-(1.7) est pour tout $t \in [0, T]$,

$$\sup_{s \in [0, t]} \|u(s, \cdot)\|_{1, \Omega} + \sup_{s \in [0, t]} \|p(s, \cdot)\|_{0, \Omega} + \left(\int_0^t \|p(s, \cdot)\|_{1, \Omega}^2 ds \right)^{1/2}. \quad (1.8)$$

Chacun des 3 termes ci-dessus correspond à la norme canonique des espaces $L_t^\infty(H_x^1)$, $L_t^\infty(L_x^2)$ et $L_t^2(H_x^1)$ respectivement. On observera que la norme de stabilité (1.8) assure un contrôle instantané sur les oscillations spatiales des déplacements, sur la valeur instantanée de la moyenne quadratique spatiale de la pression et un contrôle *en moyenne en temps* des oscillations spatiales de pression.

La discrétisation du problème (1.6)-(1.7) sera réalisée par un schéma d'Euler-Galerkin, c'est-à-dire par une méthode d'éléments finis conformes en espace et un schéma d'Euler implicite en temps, ce qui correspond au choix numérique effectué dans *Code_Aster*. L'extension de

l'analyse à une discrétisation temporelle par un θ -schéma ne soulève pas de nouveaux problèmes théoriques. De plus, pour la discrétisation spatiale, comme il est usuel dans les codes éléments finis traitant de la poroélasticité, on choisit une interpolation de degré 2 pour les déplacements et de degré 1 pour la pression ou plus généralement d'un degré plus élevé pour les déplacements que pour la pression. Ce choix sera justifié mathématiquement au chapitre 3.

On effectuera l'analyse d'erreur *a posteriori* pour l'approximation Euler-Galerkin du problème (1.6)-(1.7) sous l'hypothèse que les maillages sont constants en temps. Même si cette hypothèse est restrictive, elle est raisonnable pour au moins deux raisons.

- Pour les problèmes HM, l'analyse mathématique dans le cas de maillages dépendant du temps pose des difficultés techniques, dues au choix de la dérivée temporelle des déplacements comme fonction test, que l'on ne rencontre pas dans le cas de problèmes paraboliques comme l'équation de la chaleur. On reviendra sur ce point dans le chapitre 4.
- Dans la pratique, les stratégies d'adaptation des paramètres de discrétisation spatio-temporels font encore l'objet de développement et sont délicates à mettre en œuvre (problèmes de réinterpolation des inconnues sur maillages variables). La restitution informatique dans un code industriel tel que *Code_Aster* ne serait pas envisageable dans le cadre de cette thèse.

Deux analyses d'erreur *a posteriori* sont proposées ci-après. La première est une extension au problème (1.6)-(1.7) de celle menée par Bergam, Bernardi et M'Ghazli [BBM05] pour l'équation de la chaleur. L'estimation *a posteriori* qui est obtenue convient afin de contrôler l'erreur sur la pression en norme $L_t^2(H_x^1)$. Cependant, la convergence en espace de cet estimateur est sous-optimale pour l'erreur $L_t^\infty(H_x^1)$ en déplacement et pour l'erreur $L_t^\infty(L_x^2)$ en pression. Cette difficulté se pose en des termes analogues pour l'équation de la chaleur où la convergence des estimateurs obtenus par approche directe est sous-optimale pour l'erreur en norme $L_t^\infty(L_x^2)$. La technique de reconstruction elliptique [LM06] permet de résoudre ce problème. Notre idée a donc été d'étendre cette analyse à la modélisation HM afin d'obtenir de nouveaux estimateurs d'erreur dont la convergence est optimale par rapport à l'erreur sur les déplacements en norme $L_t^\infty(H_x^1)$ et sur la pression en norme $L_t^\infty(L_x^2)$.

1.6 Plan de la thèse

Le reste de ce mémoire est composé de 4 chapitres.

Dans le chapitre 2, on présente quelques notions élémentaires relatives à la théorie des milieux poreux permettant de formuler le problème HM, c'est-à-dire les équations classiques du système de la poroélasticité linéaire quasi-statique en milieu saturé. On aboutit à un système d'équations décrivant les effets couplés des déplacements et de la pression du liquide s'écoulant dans un géomatériau. On introduit ensuite les 2 versions (stationnaire et instationnaire) du problème modèle. Les déplacements et la pression pouvant admettre des ordres de grandeur très différents, on propose un adimensionnement du système couplé HM. Enfin, on introduit un cadre abstrait afin de simplifier l'analyse mathématique effectuée dans les chapitres suivants et afin de donner une portée plus générale à notre étude.

Dans le chapitre 3, on effectue l'analyse mathématique du problème abstrait stationnaire. Les analyses d'erreur *a priori* et *a posteriori* seront utiles pour le problème instationnaire traité

au chapitre suivant. On montre d'abord le caractère bien posé du problème continu. Puis, on introduit la discrétisation du problème par une méthode d'éléments finis conformes et on effectue l'analyse d'erreur *a priori*, ce qui permet d'introduire deux projections de Riesz qui interviendront ultérieurement dans le cas instationnaire. On propose ensuite une analyse d'erreur *a posteriori* par deux techniques différentes. La première est une méthode directe basée sur les techniques de résidu développées pour les problèmes elliptiques, permettant de garantir une convergence optimale des estimateurs pour l'estimation de l'erreur sur la pression en norme H^1 . La seconde est une méthode par dualité, permettant sous certaines hypothèses d'obtenir des estimateurs avec une convergence optimale pour l'erreur sur les déplacements en norme H^1 . Pour chacune des deux méthodes, des résultats de fiabilité et d'optimalité sont établis. Quelques expérimentations numériques, toutes réalisées dans *Code_Aster*, viennent illustrer les analyses d'erreur *a priori* et *a posteriori*.

Dans le chapitre 4, on propose l'analyse mathématique du problème abstrait instationnaire. On montre un résultat de stabilité pour le problème continu (garantissant l'unicité de la solution forte) qui permet d'identifier la structure mathématique du problème instationnaire. On énonce ensuite un résultat d'analyse d'erreur *a priori* dont la preuve est inspirée de la technique de projection elliptique de Wheeler [Whe73]. L'analyse *a priori* des approximations Euler–Galerkin pour le problème de consolidation de Biot a été réalisée par Murad, Loula, et al. [ML92, ML94, MTL96]. Le problème examiné ici est légèrement différent car on ne suppose pas que le module de Biot est grand, c'est-à-dire qu'on n'omet pas le terme de dérivée temporelle de la pression dans (1.7). Par ailleurs, l'analyse d'erreur *a posteriori* est réalisée en utilisant une méthode directe et une méthode par reconstruction elliptique. La méthode directe repose directement sur la stabilité du problème continu et fournit une estimation fiable pour les déplacements dans la norme $L_t^\infty(H_x^1)$ et pour la pression dans les normes $L_t^\infty(L_x^2)$ et $L_t^2(H_x^1)$. Cependant la convergence des estimations en espace pour l'erreur sur les déplacements dans la norme $L_t^\infty(H_x^1)$ et pour l'erreur sur la pression dans la norme $L_t^\infty(L_x^2)$ n'est pas optimale. La méthode par reconstruction elliptique permet de recouvrer cette optimalité. On présente enfin des résultats numériques tous obtenus dans le cadre de *Code_Aster* validant l'analyse d'erreur *a priori* et illustrant la performance des différents estimateurs d'erreur *a posteriori*.

Le chapitre 5 dresse la conclusion de ce travail de thèse et propose quelques perspectives.

La plupart des résultats présentés aux chapitres 3 et 4 est contenue dans la référence [EM07] soumise pour publication. Ces résultats ont également été présentés à diverses conférences [Meu06a, Meu06b, Meu07a, Meu07b].

Modélisation des couplages Hydro-Mécaniques

2.1 Bases physiques du modèle	23
2.1.1 Notations	23
2.1.2 Équations constitutives	25
2.1.3 Le problème modèle	28
2.2 Adimensionnement	29
2.2.1 Cas instationnaire	31
2.2.2 Cas stationnaire	32
2.3 Cadre abstrait	32
2.4 Application à la modélisation Hydro-Mécanique	35

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases physiques du modèle Hydro-Mécanique (HM) auquel on s'intéresse dans cette thèse. On introduit les différentes notions physiques nécessaires à la formulation des équations HM. On effectue ensuite l'adimensionnement du problème HM. On propose également un cadre abstrait permettant de simplifier l'étude mathématique menée dans les chapitres suivants et de donner une portée plus générale aux résultats.

2.1 Bases physiques du modèle

Dans toute cette thèse, on se place dans le cadre de la poroélasticité linéaire. On considère un milieu poreux Ω , de frontière Γ , saturé par de l'eau liquide, avec un comportement mécanique élastique linéaire. Le comportement du fluide influe sur celui du squelette et réciproquement. La dimension spatiale est implicitement choisie égale à 3, sauf mention contraire. L'indice supérieur 0 devant une quantité désigne de manière générale sa valeur à l'instant initial.

2.1.1 Notations

On introduit d'abord quelques concepts physiques et quelques notations nécessaires à l'écriture du problème. On adopte une représentation lagrangienne par rapport au squelette. Les coordonnées $x = x_s(t)$ à l'instant t sont celles d'un point matériel attaché au squelette et les

opérateurs de dérivation sont définis par rapport à ces coordonnées. Par la suite, la dépendance des champs descriptifs en (x, t) ne sera pas explicitée, sauf si nécessaire. Les variables d'état du problème sont le champ de déplacements $u = (u_x, u_y, u_z)^t$ et la pression du liquide p .

Si on note $d\Omega_\phi$ la partie du volume infinitésimal de milieu poreux $d\Omega$ occupée par le fluide dans la configuration courante, la porosité eulérienne φ est définie par

$$\varphi = \frac{d\Omega_\phi}{d\Omega}.$$

La porosité varie donc entre 0 et 1. On remarque que ce concept de porosité est de nature *eulérienne*, au sens où il est défini sur la configuration actuelle de l'élément de volume (sans faire appel à une configuration particulière choisie comme référence).

On peut également normaliser $d\Omega_\phi$ par le volume infinitésimal à l'instant initial $d\Omega^0$. On obtient ainsi la porosité dite *lagrangienne* :

$$\phi = \frac{d\Omega_\phi}{d\Omega^0}.$$

On définit le tenseur des déformations linéarisé

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^t), \quad (2.1)$$

à valeurs dans $\mathbb{R}^{3,3}$. On note

$$\varepsilon_V = \text{Tr}(\varepsilon) = \nabla \cdot u. \quad (2.2)$$

Le jacobien $J = 1 + \varepsilon_V$ de la transformation du squelette représente la dilatation volumique, c'est-à-dire le rapport $d\Omega/d\Omega^0$ entre les volumes de la particule de squelette dans les configurations actuelle et initiale. On observe alors que

$$\phi = J\varphi.$$

La quantité ε_V peut s'exprimer sous la forme :

$$\varepsilon_V = \frac{d\Omega - d\Omega^0}{d\Omega^0}.$$

On fait l'hypothèse que la transformation du squelette est infinitésimale, ce qui autorise l'approximation $J \approx 1$. On peut ainsi confondre la porosité eulérienne et la porosité lagrangienne lorsque ces quantités apparaissent en tant que telles [CDE03]. Cependant, le calcul des variations infinitésimales de ces deux quantités nécessite plus de précautions. On a la relation suivante :

$$d\phi = d(J\varphi) = Jd\varphi + \varphi d\varepsilon_V \approx d\varphi + \varphi d\varepsilon_V. \quad (2.3)$$

On note ρ la masse volumique de l'eau liquide, supposée constante. On définit l'apport massique volumique en eau $\delta\rho$ par :

$$\delta\rho = \rho ((1 + \varepsilon_V)\varphi - \varphi^0), \quad (2.4)$$

Il représente la masse de fluide apportée entre l'instant initial et actuel, normalisée par le volume élémentaire dans la configuration initiale. L'apport massique permet de définir la masse volumique globale vue par rapport à la configuration de référence, notée ρ_{ref} . Cette dernière est normalisée par le volume infinitésimal à l'instant initial $d\Omega^0$. On a

$$\rho_{\text{ref}} = \rho_{\text{ref}}^0 + \delta\rho,$$

où ρ_{ref}^0 désigne la masse volumique homogénéisée à l'instant initial, obtenue en tenant compte des masses volumiques du squelette et du fluide.

Le tenseur des contraintes σ , à valeurs dans $\mathbb{R}^{3,3}$, est utilisé afin d'exprimer l'équilibre mécanique du squelette. Dans le cadre de l'hypothèse de Terzaghi, il se décompose en la somme d'un tenseur des contraintes effectives, σ' , et d'un tenseur de contraintes de pression, σ_p , sous la forme

$$\sigma = \sigma' + \sigma_p. \quad (2.5)$$

Le tenseur des contraintes effectives σ' résulte uniquement des déformations du squelette. Le tenseur σ_p rend compte du travail des forces de pression associé au changement de volume induit par les déplacements du squelette. Dans la suite, on suppose que le tenseur du travail des forces de pression est sphérique et s'écrit sous la forme $\sigma_p I_3$, où σ_p est maintenant un scalaire et I_3 désigne le tenseur identité de $\mathbb{R}^{3,3}$.

On note v la vitesse du liquide et $v_s = \partial_t u$ celle du squelette dans un référentiel fixe en temps. On introduit la masse volumique apparente de l'eau normalisée par rapport au volume dans la configuration actuelle

$$\rho' = \rho\varphi.$$

Le flux massique hydraulique est défini par :

$$M_{\text{Iq}} = \rho'(v - v_s). \quad (2.6)$$

Ce vecteur est destiné à calculer le débit de masse hydraulique et est également appelé vecteur courant relatif (par rapport au squelette) de masse de l'eau.

2.1.2 Équations constitutives

Étant donné un temps de simulation T , on est maintenant en mesure de formuler les équations constitutives du problème modèle. On résout un problème d'équilibre mécanique (bilan de quantité de mouvement pour le squelette et le fluide) et un problème d'évolution en hydraulique (bilan de masse fluide). On rappelle que le traitement de ces deux problèmes est complètement couplé dans *Code_Aster*. Par la suite, on rappelle à titre indicatif et entre crochets les unités des grandeurs physiques. Néanmoins, cela ne préjuge pas du choix d'unités fait dans *Code_Aster*.

L'équilibre mécanique se formule classiquement de la manière suivante [Cou04]

$$\nabla \cdot \sigma + \rho_{\text{ref}} F^m = 0 \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega, \quad (2.7)$$

où F^m désigne la force de gravité. On observera que sous l'hypothèse de déformations quasi-statiques, les effets d'inertie dans la structure, représentés par le terme $\rho_{\text{ref}} \partial_{tt} u$, ont été négligés. Dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope, on a

$$\sigma' = \lambda_1 \varepsilon_V I_3 + 2\lambda_2 \varepsilon,$$

où λ_1 et λ_2 sont les coefficients de Lamé. Ce sont des coefficients phénoménologiques dépendant du matériau dont est constitué le squelette solide dans le milieu poreux. Le coefficient λ_1 décrit

la compressibilité du matériau. Des valeurs très grandes du rapport λ_1/λ_2 correspondent à un matériau pratiquement incompressible. Ce cas ne rentre pas dans le cadre des travaux ci-dessous. Par la suite, il sera commode d'exprimer le tenseur des contraintes effectives en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν sous la forme

$$\sigma' = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_V I_3 + \varepsilon \right].$$

Les relations entre module de Young, coefficient de Poisson et coefficients de Lamé sont les suivantes

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & \lambda_2 &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ E &= \lambda_2 \frac{3\lambda_1 + 2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, & \nu &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Grâce au postulat de Terzaghi, en différentiant la relation (2.5), on obtient

$$d\sigma' = d\sigma - d\sigma_p I_3. \quad (2.8)$$

En utilisant une formulation de Bishop, on écrit :

$$d\sigma_p = -bdp, \quad (2.9)$$

où b est le coefficient de Biot, supposé constant. Il renseigne sur la contrainte macroscopique mobilisée lorsqu'on augmente la pression de pore en bloquant la déformation volumique ($\varepsilon_V = 0$). La relation (2.9) est écrite sous forme différentielle car c'est sous cette forme qu'elle est utilisée dans le schéma d'intégration en temps dans *Code_Aster*. L'équilibre mécanique s'écrit donc

$$\nabla \cdot \sigma'(u) - b\nabla p + \rho_{\text{ref}} F^m = 0.$$

On détaille maintenant brièvement l'établissement de l'équation de conservation de la masse fluide [DB02]. On considère un système matériel de milieu poreux occupant le volume de contrôle élémentaire V^0 dans la configuration initiale. Adoptant le point de vue lagrangien par rapport au squelette, on suit ce système dans la transformation du squelette. Il occupe à l'instant t le volume de contrôle élémentaire V . Par définition, V^0 et V contiennent les mêmes particules de squelette et donc la même masse de solide. En revanche, en raison du mouvement relatif du fluide par rapport au squelette, la masse de fluide contenue dans V diffère de celle contenue dans V^0 . On désigne par m la masse d'eau contenue dans le volume de contrôle élémentaire V . On a :

$$m = \int_V \rho \varphi dV = \int_{V^0} \rho \phi dV^0.$$

Il vient donc :

$$d_t^s m = \int_{V^0} d_t^s (\rho \phi) dV^0 = \int_V \frac{1}{J} d_t^s (\rho \phi) dV, \quad (2.10)$$

où la dérivée $d_t^s = \partial_t + v_s \cdot \nabla$ renvoie à une dérivée particulière suivant les mouvements de la particule de squelette. Une seconde façon de calculer la variation de m consiste à écrire qu'elle est due au flux relatif de masse fluide à travers la frontière du système¹. Grâce à (2.6), on obtient :

¹ Rappelons que celle-ci évolue en fonction de la transformation du squelette. C'est donc le flux relatif de fluide par rapport au squelette qui intervient dans (2.11)

$$d_t^s m = - \int_{\partial V} \rho \varphi (v - v_s) \cdot n d\Gamma = - \int_V \nabla \cdot M_{\text{Iq}} dV. \quad (2.11)$$

En rapprochant (2.10) et (2.11), on obtient une équation scalaire exprimant localement la conservation de la masse d'eau :

$$d_t^s(\delta\rho) + J\nabla \cdot M_{\text{Iq}} = 0.$$

Dans la mesure où on fait l'hypothèse que la variation temporelle du déplacement est faible ($v_s = 0$), d_t^s peut se confondre avec la dérivée partielle par rapport au temps ∂_t . On rappelle que l'hypothèse de transformation infinitésimale du squelette autorise également l'approximation $J \approx 1$. Le bilan de masse fluide s'écrit donc [Ger73] :

$$\partial_t(\delta\rho) + \nabla \cdot M_{\text{Iq}} = 0. \quad (2.12)$$

Pour le comportement du fluide, on utilise la loi de Darcy

$$\frac{M_{\text{Iq}}}{\rho} = \kappa (-\nabla p + \rho F^m), \quad (2.13)$$

où κ désigne la conductivité hydraulique. Cette dernière n'est pas directement une donnée et sa valeur est connue à partir de la formule suivante :

$$\kappa = \frac{K^{\text{int}}(\varphi)}{\mu(T)}.$$

On a introduit les quantités suivantes :

- $K^{\text{int}}[\text{m}^2]$ est la perméabilité intrinsèque caractéristique du milieu poreux. Cette quantité est fonction de la porosité ;
- $\mu [\text{Pa.s}]$ désigne la viscosité dynamique du liquide. Cette quantité est fonction de la température.

L'équation hydraulique (2.12) se réécrit en tenant compte de la définition de $\delta\rho$ et du fait que ρ est constante,

$$\partial_t \phi - \nabla \cdot (\kappa \nabla p) = -\rho \nabla \cdot (\kappa F^m).$$

En utilisant des arguments thermodynamiques, on montre que l'évolution de la porosité est régie dans le cadre isotherme par l'expression

$$d\varphi = (b - \varphi) \left(d\varepsilon_V + \frac{1}{K_s} dp \right). \quad (2.14)$$

Cette équation a été établie dans le cadre de la thermo-poro-élasticité linéaire [Cou04, CCDV99]. Dans cette équation, on voit apparaître d'une part le coefficient de Biot introduit par l'équation (2.9) et d'autre part le module de compressibilité des grains solides $K_s [\text{Pa}]$, supposé constant. L'apparition du même coefficient b dans les 2 équations résulte de l'égalité des dérivées croisées d'un potentiel thermodynamique. Pour la porosité lagrangienne, en utilisant (2.2) et (2.3), on obtient :

$$d\phi = b d(\nabla \cdot u) + \frac{1}{M} dp, \quad (2.15)$$

où on a posé

$$\frac{1}{M} = \frac{b - \phi}{K_s}.$$

Le module de Biot M [Pa] renseigne sur la variation de volume des pores induite par une déformation macroscopique en condition drainée ($p = 0$). Il est supposé constant ici. On remarque dans l'équation (2.15) l'apparition d'un terme lié au déplacement qui induit le couplage entre le déplacement et la pression du liquide.

2.1.3 Le problème modèle

Dans ce paragraphe, on présente le problème modèle, issu des équations de la poroélasticité présentées au paragraphe précédent, auquel on s'intéresse dans cette thèse. Les inconnues du problème couplé HM sont :

- le champ de déplacement u (3 inconnues scalaires) ;
- le champ de pression p (1 inconnue scalaire) ;

soit au total 4 inconnues scalaires. On dispose pour les déterminer des 4 équations suivantes :

- les équations d'équilibre (3 équations scalaires)

$$\nabla \cdot \sigma'(u) - b \nabla p + \rho_{\text{ref}} F^m = 0,$$

- l'équation de diffusion de la masse fluide (1 équation scalaire)

$$\partial_t \phi - \nabla \cdot (\kappa \nabla p) = -\rho \nabla \cdot (\kappa F^m),$$

où les équations d'état du squelette sont

$$\begin{cases} \sigma'(u) = \lambda_1 (\nabla \cdot u) I_3 + \lambda_2 (\nabla u + \nabla u^t), \\ d\phi = b d(\nabla \cdot u) + \frac{1}{M} dp. \end{cases}$$

En éliminant la porosité lagrangienne ϕ , le problème modèle consiste donc à trouver un champ de déplacement $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ et un champ de pression $p : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\boxed{\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma'(u) + b \nabla p &= f, & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t(\frac{1}{M} p + b \nabla \cdot u) - \nabla \cdot (\kappa \nabla p) &= g, & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \end{aligned}} \quad \begin{aligned} (2.16a) \\ (2.16b) \end{aligned}$$

où $f = \rho_{\text{ref}} F^m$ et $g = -\rho \nabla \cdot (\kappa F^m)$ sont des données. Le système (2.16a)–(2.16b) est complété par une condition initiale que nous ne précisons pas dans le cas général (voir [Sho00, Sho02]).

Pour les conditions aux limites, on considère dans le cas le plus général une double partition de la frontière sous la forme

$$\Gamma = \Gamma_D^M \cup \Gamma_N^M = \Gamma_D^H \cup \Gamma_N^H.$$

On suppose que les déplacements du milieu poreux sont imposés sur la partie Γ_D^M et que les contraintes mécaniques sont imposées sur la partie Γ_N^M . On suppose que la pression de liquide est imposée sur la partie Γ_D^H et que le flux hydraulique est imposé sur la partie Γ_N^H . Les conditions aux limites pour la partie mécanique du modèle s'écrivent donc :

$$\begin{cases} u = u_D, & \text{sur } \Gamma_D^M, \\ (\sigma'(u) - b p \chi_S I_3) \cdot n = \sigma_{\text{nor}}, & \text{sur } \Gamma_N^M, \end{cases} \quad (2.17)$$

où on a noté $\Gamma_S = \Gamma_N^M \cap \Gamma_N^H$, de fonction caractéristique χ_S , la portion de la frontière où les contraintes et le flux hydraulique sont imposés. Pour la partie hydraulique, on a

$$\begin{cases} p = p_D, & \text{sur } \Gamma_D^H, \\ M_{lq} \cdot n = M_{lq,nor}, & \text{sur } \Gamma_N^H. \end{cases} \quad (2.18)$$

Une analyse mathématique du système (2.16a)–(2.16b), portant sur l’existence et l’unicité de solutions forte et faible dans le cadre de la théorie des équations d’évolution linéaires dégénérées dans les espaces de Hilbert, a été effectuée par Showalter [Sho00, Sho02]. Bien que le problème d’évolution (2.16a)–(2.16b) soit essentiellement de type parabolique sous des hypothèses minimales de régularité sur les données, on l’appelle ci-après problème couplé elliptique-parabolique pour souligner le fait que l’équation (2.16a) est de type elliptique pour le déplacement et l’équation (2.16b) est de type parabolique pour la pression. De plus, dans le cadre de cette thèse, on ne s’intéresse qu’à des solutions fortes du problème (2.16a)–(2.16b), c’est-à-dire avec suffisamment de régularité en temps pour pouvoir considérer les valeurs instantanées de ces équations pour tout $t \in [0, T]$. Dans ces conditions, la condition initiale peut être spécifiée sur la pression, le déplacement initial résultant de l’équation mécanique (2.16a) à $t = 0$.

On s’intéresse également à la version stationnaire du problème modèle précédent

$$\boxed{\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma'(u) + b \nabla p &= f, & \text{dans } \Omega, \\ -\nabla \cdot (\kappa \nabla p) &= g, & \text{dans } \Omega, \end{aligned}} \quad \begin{aligned} (2.19a) \\ (2.19b) \end{aligned}$$

où les différents champs descriptifs ne dépendent que de la variable d’espace. Ce problème est complété par les conditions aux limites (2.17)–(2.18).

2.2 Adimensionnement

Le problème modèle fait intervenir deux inconnues, les déplacements et la pression du liquide, dont les ordres de grandeur peuvent être très différents. On propose donc dans ce paragraphe une mise à l’échelle des équations constituant le problème modèle, qui servira de point de départ à l’analyse mathématique. On observera que cette mise à l’échelle n’est pas utilisée dans l’étape de résolution numérique. Les estimations d’erreur *a posteriori* seront donc obtenues sur le problème adimensionné, puis redimensionnées en vue de leur utilisation dans *Code_Aster*.

Pour toute variable a , on note a^* la variable adimensionnée correspondante. Par exemple, pour la pression hydraulique p , on a la relation

$$p = P p^*,$$

où P désigne une pression caractéristique. Les variables du problème sont

Variable	Signification	Unité	Grandeur caractéristique
t	instant	s	T_c
x	vecteur position	m	L
u	déplacement du squelette	m	U
p	pression hydraulique	Pa	P

où la dernière colonne donne les notations pour les grandeurs caractéristiques. Les paramètres phénoménologiques, supposés constants ici pour simplifier, sont

Paramètre	Signification	Unité
E	module de Young	Pa
ν	coefficient de Poisson	-
κ	conductivité hydraulique	$\text{m}^2 \cdot \text{Pa}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
M	module de Biot	Pa
b	coefficient de Biot	-

On considère enfin les données

Donnée	Signification	Unité
f	terme source mécanique	$\text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}$
g	terme source hydraulique	s^{-1}
u_0	déplacement initial	m
p_0	pression initiale	Pa
σ_{nor}	contrainte mécanique au bord	Pa
ϕ_{nor}	flux hydraulique au bord	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

On introduit les opérateurs de dérivation spatiale et temporelle par rapport aux variables adimensionnées. Pour tout $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ (on rappelle que d désigne la dimension spatiale du problème), on note $\partial_j^* v$ la dérivée partielle de v selon sa j -ème composante spatiale adimensionnée et ∂_t^* la dérivée partielle de v par rapport à sa composante temporelle adimensionnée. On a

$$\begin{aligned}\partial_t v &= \frac{1}{T_c} \partial_t^* v, \\ \partial_j v &= \frac{1}{L} \partial_j^* v, \\ \nabla \cdot v &= \frac{1}{L} \nabla^* \cdot v.\end{aligned}$$

On rappelle qu'on suppose le comportement mécanique du squelette élastique. Le tenseur des contraintes effectives $\sigma'(u)$ s'écrit donc

$$\begin{aligned}\sigma'(u) &= \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\nabla \cdot u) I_3 + \varepsilon(u) \right] \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \frac{U}{L} (\nabla^* \cdot u^*) I_3 + \frac{U}{L} \varepsilon^*(u^*) \right] \\ &= \frac{EU}{L} \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\nabla^* \cdot u^*) I_3 + \frac{1}{1+\nu} \varepsilon^*(u^*) \right] \\ &= \frac{EU}{L} \sigma'^*(u^*),\end{aligned}$$

où on a posé

$$\sigma'^*(u^*) = \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\nabla^* \cdot u^*) I_3 + \frac{1}{1+\nu} \varepsilon^*(u^*),$$

et où

$$\varepsilon^*(u^*) = \frac{1}{2}(\nabla^* u^* + (\nabla^* u^*)^t), \quad (2.20)$$

désigne le tenseur des déformations adimensionné.

On rappelle que $\nu \in]0, 1/2[$ et que les cas $\nu \rightarrow 1/2$ et $\nu \rightarrow 0$ sont exclus par hypothèse.

2.2.1 Cas instationnaire

On s'intéresse ici à la version instationnaire du problème modèle. Les équations décrivant le comportement du système sont

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma'(u) + b \nabla p = f, & \text{dans } [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t \left(\frac{1}{M} p + b \nabla \cdot u \right) - \kappa \Delta p = g, & \text{dans } [0, T] \times \Omega. \end{cases}$$

L'équation de mécanique se réécrit

$$-\frac{EU}{LP} \nabla^* \cdot \sigma'^*,* (u^*) + b \nabla^* p^* = \frac{L}{P} f. \quad (2.21)$$

On propose la stratégie de mise à l'échelle suivante. L'utilisateur choisit deux quantités : l'échelle de longueur L et l'échelle de pression P . L'échelle de longueur L est déterminée par la géométrie du modèle. L'échelle de pression P est déterminée par les conditions limites de Dirichlet imposées sur la pression ou éventuellement par les conditions initiales. Pour la partie mécanique, on impose

$$U = \frac{LP}{E}. \quad (2.22)$$

Alternativement, l'utilisateur peut choisir l'échelle de longueur L et l'échelle de déplacement U (par exemple par le biais d'une condition aux limites) et déduit de (2.22) l'échelle de pression P . Par ailleurs, l'équation hydraulique s'écrit

$$\frac{1}{T_c} \partial_t^* \left(\frac{P}{M} p^* + b \frac{U}{L} \nabla^* \cdot u^* \right) - \kappa \frac{P}{L^2} \Delta^* p^* = g.$$

Compte tenu de la relation (2.22), l'égalité précédente se réécrit

$$\partial_t^* \left(\frac{E}{M} p^* + b \nabla^* \cdot u^* \right) - \frac{\kappa T_c E}{L^2} \Delta^* p^* = \frac{T_c E}{P} g.$$

Le temps caractéristique T_c est choisi tel que

$$T_c = \frac{L^2}{\kappa M}.$$

On obtient ainsi le système adimensionné

$$\boxed{\begin{aligned} & -\nabla^* \cdot \sigma'^*,* (u^*) + b \nabla^* p^* = f^*, & \text{dans } [0, T^*] \times \Omega^*, \\ & \partial_t^* \left(\frac{E}{M} p^* + b \nabla^* \cdot u^* \right) - \frac{E}{M} \Delta^* p^* = g^*, & \text{dans } [0, T^*] \times \Omega^*, \end{aligned}} \quad (2.23a)$$

$$(2.23b)$$

avec

$$f^* = \frac{L}{P}f, \quad (2.24)$$

$$g^* = \frac{E}{M} \frac{L^2}{\kappa P} g. \quad (2.25)$$

De plus, $T^* = \frac{1}{T_c}T$ et Ω^* est l'image de Ω par une homothétie de rapport $\frac{1}{L}$. Le cadre d'application de la modélisation HM est en général celui où $E \sim M$ et $T^* \sim 1$.

2.2.2 Cas stationnaire

On s'intéresse maintenant à la version stationnaire du problème modèle. Les équations décrivant le comportement du système sont

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma'(u) + b \nabla p = f, & \text{dans } \Omega, \\ -\kappa \Delta p = g, & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

complétées par des conditions aux limites. On procède comme ci-dessus : l'utilisateur choisit L et P puis évalue U selon (2.22) (ou choisit L et U et évalue P selon (2.22)). L'équation mécanique est traitée comme dans le paragraphe précédent. On dispose donc de l'équation (2.23a). L'équation hydraulique s'écrit

$$-\kappa \frac{P}{L^2} \Delta^* p^* = g. \quad (2.26)$$

On obtient ainsi le système adimensionné

$$\boxed{\begin{aligned} -\nabla^* \cdot \sigma'^*(u^*) + b \nabla^* p^* &= f^*, & \text{dans } \Omega^*, \\ -\frac{E}{M} \Delta^* p^* &= g^*, & \text{dans } \Omega^*, \end{aligned}} \quad (2.27a)$$

$$(2.27b)$$

où f^* et g^* sont définis par (2.24)–(2.25). La multiplication de l'équation hydraulique par le facteur E/M peut sembler un peu artificielle car le paramètre M n'intervient pas dans une modélisation stationnaire. Elle est introduite afin que (2.27a)–(2.27b) fournisse bien la version stationnaire de (2.23a)–(2.23b). De plus, Ω^* est à nouveau l'image de Ω par une homothétie de rapport $\frac{1}{L}$.

2.3 Cadre abstrait

Dans cette section, on présente un cadre abstrait pour l'étude des problèmes modèles adimensionnés introduits ci-dessus, à savoir les problèmes (2.23a)–(2.23b) et (2.27a)–(2.27b).

Soit V_a et V_d deux espaces de Hilbert respectivement équipés de formes bilinéaires symétriques, continues et coercives a et d . Les normes induites par ces formes sont respectivement notées

$$\|\cdot\|_a \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_d.$$

Soit V'_a et V'_d les espaces duaux respectivement de V_a et V_d munis des produits de dualité notés

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_a \quad \text{et} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_d,$$

et des normes

$$\|\cdot\|'_a = \sup_{0 \neq v \in V_a} \frac{|\langle \cdot, v \rangle_a|}{\|v\|_a} \quad \text{et} \quad \|\cdot\|'_d = \sup_{0 \neq q \in V_d} \frac{|\langle \cdot, q \rangle_d|}{\|q\|_d}.$$

Soit L_a et L_d des espaces de Hilbert équipés respectivement des produits scalaires

$$(\cdot, \cdot)_{L_a} \quad \text{et} \quad (\cdot, \cdot)_{L_d},$$

avec les injections continues et denses

$$\begin{aligned} V_a &\hookrightarrow L_a, \\ V_d &\hookrightarrow L_d. \end{aligned}$$

En identifiant L_a et L_d avec leur espace dual, on dispose des injections suivantes :

$$\begin{aligned} V_a &\hookrightarrow L_a \equiv L'_a \hookrightarrow V'_a, \\ V_d &\hookrightarrow L_d \equiv L'_d \hookrightarrow V'_d. \end{aligned}$$

Soit c une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive sur $L_d \times L_d$ induisant une norme $\|\cdot\|_c$ telle qu'il existe deux constantes $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 < +\infty$ telles que pour tout $q \in V_d$,

$$\gamma_1 \|q\|_{L_d} \leq \|q\|_c \leq \gamma_2 \|q\|_{L_d}.$$

Par ailleurs, on note $\tilde{\gamma}$ la constante de continuité de l'injection $V_d \hookrightarrow L_d$, c'est-à-dire que pour tout $q \in V_d$,

$$\|q\|_{L_d} \leq \tilde{\gamma} \|q\|_d.$$

On a donc la relation, pour tout $q \in V_d$,

$$\|q\|_c \leq \gamma \|q\|_d,$$

avec $\gamma = \gamma_2 \tilde{\gamma}$. Finalement, soit b une forme bilinéaire continue sur $V_a \times L_d$ avec une constante de continuité $\tilde{\beta}$, à savoir, pour tout $(v, q) \in V_a \times L_d$,

$$|b(v, q)| \leq \tilde{\beta} \|v\|_a \|q\|_{L_d}. \quad (2.28)$$

On a donc

$$|b(v, q)| \leq \beta \|v\|_a \|q\|_c, \quad (2.29)$$

avec $\beta = \tilde{\beta} \gamma_1^{-1}$. On utilisera surtout les constantes β , $\tilde{\beta}$, γ et $\tilde{\gamma}$ aux chapitres 3 et 4.

Pour un espace de Hilbert Z de fonctions définies sur Ω équipé d'une norme $\|\cdot\|_Z$, $L_t^2(Z)$ désigne l'espace vectoriel de fonctions f de l'espace et du temps telles que pour tout $t \in [0, T]$, $f(t) := f(t, \cdot)$ est dans Z et $f(t)$ est de carré intégrable sur $[0, T]$, à savoir

$$\int_0^T \|f(s)\|_Z^2 ds < +\infty.$$

De manière similaire, $H_t^1(Z)$ désigne le sous-espace de $L_t^2(Z)$ de fonctions f dont la dérivée temporelle au sens des distributions, $\partial_t f$, est de carré intégrable sur $[0, T]$, à savoir

$$\int_0^T \|\partial_t f(s)\|_Z^2 ds < +\infty.$$

On observe que les fonctions de $H_t^1(Z)$ admettent des valeurs ponctuelles dans Z pour tout $t \in [0, T]$.

Étant donné $f \in H_t^1(V'_a)$, $g \in H_t^1(V'_d)$ et $p_0 \in V_d$, on cherche la solution $(u, p) \in H_t^1(V_a) \times H_t^1(V_d)$ telle que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$a(u, v) - b(v, p) = \langle f, v \rangle_a, \quad \forall v \in V_a, \quad (2.30a)$$

$$c(\partial_t p, q) + b(\partial_t u, q) + d(p, q) = \langle g, q \rangle_d, \quad \forall q \in V_d, \quad (2.30b)$$

complétée par la condition initiale

$$p(0) := p_0.$$

On remarque que dans le cadre présent, l'équation (2.30a) est valide jusqu'à $t = 0$ et détermine ainsi de manière unique la valeur initiale de u en fonction de p_0 et $f(0)$. En posant $u_0 := u(0) \in V_a$, l'estimation *a priori*

$$\|u_0\|_a \leq \beta \|p_0\|_c + \|f(0)\|_a,$$

se déduit aisément en prenant $v := u_0$ dans (2.30a).

On considère également la version stationnaire du problème (2.30a)-(2.30b). Étant donné $\bar{f} \in V'_a$ et $\bar{g} \in V'_d$, on cherche la solution $(\bar{u}, \bar{p}) \in V_a \times V_d$ telle que

$$a(\bar{u}, v) - b(v, \bar{p}) = \langle \bar{f}, v \rangle_a, \quad \forall v \in V_a, \quad (2.31a)$$

$$d(\bar{p}, q) = \langle \bar{g}, q \rangle_d, \quad \forall q \in V_d. \quad (2.31b)$$

On introduit les opérateurs différentiels (en espace) associés aux formes bilinéaires a , b , c et d . Pour cela, on définit les opérateurs continus suivants :

$$\begin{aligned} A &\in \mathcal{L}(V_a; V'_a), & B &\in \mathcal{L}(V_a; L_d), & B^\dagger &\in \mathcal{L}(L_d; V'_a), \\ C &\in \mathcal{L}(L_d; L_d), & D &\in \mathcal{L}(V_d; V'_d), \end{aligned}$$

tels que pour tout $(v, w) \in V_a \times V_a$, pour tout $(q, r) \in L_d \times L_d$ et pour tout $(s, y) \in V_d \times V_d$,

$$\begin{aligned} \langle Av, w \rangle_a &= -a(v, w), & (Bv, q)_{L_d} &= b(v, q), & \langle B^\dagger q, v \rangle_a &= b(v, q), \\ (Cq, r)_{L_d} &= c(q, r), & \langle Ds, y \rangle_d &= -d(s, y). \end{aligned}$$

On observe que C est en fait un opérateur d'ordre 0. Avec cette notation, le problème (2.30a)-(2.30b) consiste à chercher $(u, p) \in H_t^1(V_a) \times H_t^1(V_d)$ tel que

$$-Au - B^\dagger p = f, \quad (2.32a)$$

$$C\partial_t p + B\partial_t u - Dp = g, \quad (2.32b)$$

ces égalités étant valables pour presque tout $t \in [0, T]$ dans V'_a et V'_d respectivement. Dans le cas stationnaire, le problème modèle (2.31a)-(2.31b) consiste à chercher $(\bar{u}, \bar{p}) \in V_a \times V_d$ tel que

$$-A\bar{u} - B^\dagger \bar{p} = \bar{f}, \quad (2.33a)$$

$$-D\bar{p} = \bar{g}, \quad (2.33b)$$

ces égalités étant valables dans V'_a et V'_d respectivement.

2.4 Application à la modélisation Hydro-Mécanique

Les problèmes (2.23a)–(2.23b) et (2.27a)–(2.27b) rentrent dans le cadre abstrait introduit ci-dessus. Pour des raisons de simplicité, on considère des conditions aux limites de Dirichlet homogènes à la fois pour les déplacements et la pression sur toute la frontière Γ . En posant

$$\begin{aligned} V_a &= [H_0^1(\Omega^*)]^3, & L_a &= [L^2(\Omega^*)]^3, \\ V_d &= H_0^1(\Omega^*), & L_d &= L^2(\Omega^*), \end{aligned}$$

on définit les formes bilinéaires

$$\begin{aligned} a(u^*, v^*) &= \int_{\Omega^*} \sigma'^*(u^*) : \varepsilon^*(v^*), & b(v^*, p^*) &= \int_{\Omega^*} b p^* \nabla^* \cdot v^*, \\ c(p^*, q^*) &= \int_{\Omega^*} \frac{E}{M} p^* q^*, & d(p^*, q^*) &= \int_{\Omega^*} \frac{E}{M} \nabla^* p^* \cdot \nabla^* q^*. \end{aligned}$$

La coercivité de a sur $V_a \times V_a$ résulte de la première inégalité de Korn, la coercivité de d sur $V_d \times V_d$ résultant de l'inégalité de Poincaré. On rappelle ci-dessous ces deux inégalités.

Lemme 2.1 (Poincaré). *Il existe une constante $c_p^* > 0$ telle que*

$$\forall v^* \in H_0^1(\Omega^*), \quad c_p^* \|v^*\|_{0,\Omega^*} \leq \|\nabla^* v^*\|_{0,\Omega^*}.$$

Lemme 2.2 (Korn). *Il existe une constante $c_k^* > 0$ telle que*

$$\forall v^* \in H_0^1(\Omega^*)^3, \quad c_k^* \|v^*\|_{1,\Omega^*} \leq \|\varepsilon^*(v^*)\|_{0,\Omega^*}.$$

Pour tout $v^* \in V_a$, on a

$$\|v^*\|_a^2 = \int_{\Omega^*} \sigma'^*(v^*) : \varepsilon^*(v^*) = \int_{\Omega^*} \left(\frac{1}{1+\nu} \varepsilon^*(v^*)^2 + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\nabla^* \cdot v^*)^2 \right).$$

En particulier, on a

$$\|\nabla^* \cdot v^*\|_{0,\Omega^*}^2 \leq \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\nu} \|v^*\|_a^2.$$

La forme bilinéaire b est clairement continue sur $V_a \times L_d$ avec

$$\beta = b \left(\frac{M}{E} \right)^{1/2} \left(\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\nu} \right)^{1/2}.$$

Par ailleurs, $\gamma = (c_p^*)^{-1}$ et $\tilde{\gamma} = (M/E)^{1/2} (c_p^*)^{-1}$. On obtient enfin les opérateurs A , B , $B^\dagger$, C et D sous la forme

$$\begin{aligned} Au^* &= \nabla^* \cdot \sigma'^*(u^*) = \frac{L}{P} \nabla \cdot \sigma'(u), \\ Bu^* &= b \nabla^* \cdot u^* = \frac{E}{P} b \nabla \cdot u, \\ B^\dagger p^* &= -b \nabla^* p^* = -\frac{L}{P} b \nabla p, \\ Cp^* &= \frac{E}{M} p^* = \frac{E}{MP} p, \\ Dp^* &= \frac{E}{M} \Delta^* p^* = \frac{E}{M} \frac{L^2}{P} \Delta p. \end{aligned}$$

Analyse du problème stationnaire

3.1	Le problème continu	37
3.2	Le problème discret	40
3.3	Analyse d'erreur <i>a priori</i>	42
3.4	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i>	43
3.4.1	Le résidu	44
3.4.2	Fiabilité	44
3.4.3	Optimalité	46
3.4.4	Amélioration de l'estimation d'erreur <i>a posteriori</i>	49
3.5	Application à la modélisation Hydro-Mécanique	51
3.5.1	Expression des estimateurs d'erreur <i>a posteriori</i>	52
3.5.2	Mise en œuvre dans <i>Code_Aster</i>	53
3.6	Résultats numériques	54

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'analyse mathématique du problème modèle (2.31a)-(2.31b) et à son approximation par éléments finis conformes. On rappelle que le problème continu consiste à chercher $(\bar{u}, \bar{p}) \in V_a \times V_d$ tel que

$$a(\bar{u}, v) - b(v, \bar{p}) = \langle \bar{f}, v \rangle_a, \quad \forall v \in V_a, \quad (3.1a)$$

$$d(\bar{p}, q) = \langle \bar{g}, q \rangle_d, \quad \forall q \in V_d, \quad (3.1b)$$

avec des données $\bar{f} \in V'_a$ et $\bar{g} \in V'_d$. On renvoie à la section 2.3 pour les hypothèses mathématiques sur les formes bilinéaires a , b , c et d et les espaces fonctionnels V_a et V_d .

On étudie le caractère bien posé du problème continu et de son approximation par éléments finis. On propose ensuite une analyse d'erreur *a priori* et *a posteriori* du problème discret et une illustration numérique des résultats théoriques obtenus grâce à *Code_Aster*.

3.1 Le problème continu

On fixe le problème générique suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in V \text{ tel que} \\ \forall y \in V, \quad \mathbf{a}(\bar{x}, y) = \mathbf{f}(y), \end{cases} \quad (3.2)$$

où V est un espace de Hilbert muni d'une norme $\|\cdot\|_V$ et $\mathbf{f} \in V'$. Pour déterminer les conditions sous lesquelles le problème (3.2) est bien posé, on rappelle les deux principaux résultats qui sont le théorème de Lax-Milgram qui donne une condition suffisante et le théorème de Banach-Nečas-Babuška qui donne les conditions nécessaires et suffisantes. Pour la preuve de ces théorèmes, on pourra consulter par exemple [EG04].

Théorème 3.1 (Lax-Milgram). *Si la forme bilinéaire $\mathbf{a}$ est coercive, i.e., s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$\forall x \in V, \quad \mathbf{a}(x, x) \geq \alpha \|x\|_V^2,$$

le problème (3.2) est bien posé. En particulier, on a l'estimation

$$\forall \mathbf{f} \in V', \quad \|\bar{x}\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{f}\|_{V'}.$$

Théorème 3.2 (Banach-Nečas-Babuška). *Le problème (3.2) est bien posé si et seulement si*

1. *il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$\forall x \in V, \quad \sup_{y \in V} \frac{\mathbf{a}(x, y)}{\|y\|_V} \geq \alpha \|x\|_V,$$

2. *on a*

$$\forall y \in V, \quad \left(\forall x \in V, \mathbf{a}(x, y) = 0 \right) \Rightarrow (y = 0).$$

Dans ces conditions, on a l'estimation

$$\forall \mathbf{f} \in V', \quad \|\bar{x}\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{f}\|_{V'}.$$

Pour l'étude du problème (3.1a)-(3.1b), on utilise le théorème de Banach-Nečas-Babuška. On pose

$$V = V_a \times V_d,$$

muni de la norme naturelle

$$\|\cdot\|_V^2 = \|\cdot\|_a^2 + \|\cdot\|_d^2.$$

On définit la forme bilinéaire continue $\mathbf{a}$, pour tout $(x, y) = ((u, p), (v, q)) \in V \times V$, par

$$\mathbf{a}(x, y) = a(u, v) - b(v, p) + d(p, q), \quad (3.3)$$

et la forme linéaire continue $\mathbf{f}$ pour tout $y = (v, q) \in V$ par

$$\mathbf{f}(y) = \langle \bar{f}, v \rangle_a + \langle \bar{g}, q \rangle_d.$$

Sous cette forme, les problèmes (3.1a)-(3.1b) et (3.2) sont clairement équivalents.

Théorème 3.3. *Le problème (3.1a)-(3.1b) est bien posé.*

Preuve. Pour montrer la première condition du théorème 3.2, il suffit de montrer qu'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que pour tout $x = (u, p) \in V$, il existe $\tilde{y} = (\tilde{v}, \tilde{q}) \in V$ tel que

$$\begin{cases} \|\tilde{y}\|_V \leq c_1 \|x\|_V, \\ \mathbf{a}(x, \tilde{y}) \geq c_2 \|x\|_V^2. \end{cases} \quad (3.4)$$

En effet, si tel est le cas, on a

$$\sup_{y \in V} \frac{\mathbf{a}(x, y)}{\|y\|_V} \geq \frac{\mathbf{a}(x, \tilde{y})}{\|\tilde{y}\|_V} \geq \frac{c_2 \|x\|_V^2}{c_1 \|x\|_V} \geq \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \|x\|_V.$$

Soit $x = (u, p) \in V$. Comme d est continue symétrique et coercive sur $V_d \times V_d$ et que b est continue sur $V_a \times L_d$, le problème auxiliaire

$$\begin{cases} \text{Trouver } \psi \in V_d \text{ tel que} \\ \forall q \in V_d, \quad d(\psi, q) = b(u, q) \end{cases}$$

admet une unique solution, d'après le théorème de Lax-Milgram. Celle-ci satisfait l'estimation *a priori* $\|\psi\|_d \leq \beta\gamma \|u\|_a$ car

$$\begin{aligned} \|\psi\|_d^2 &= b(u, \psi) \leq \beta \|u\|_a \|\psi\|_d \\ &\leq \beta\gamma \|u\|_a \|\psi\|_d. \end{aligned}$$

On a grâce à la symétrie de d ,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}((u, p), (u, \psi + p)) &= a(u, u) - b(u, p) + d(p, \psi + p) \\ &= \|u\|_a^2 + \|p\|_d^2 \\ &= \|x\|_V^2. \end{aligned}$$

On a de plus

$$\begin{aligned} \|(u, \psi + p)\|_V &\leq \|u\|_a + \|\psi\|_d + \|p\|_d \\ &\leq (1 + \beta\gamma) (\|u\|_a + \|p\|_d) \\ &\leq \sqrt{2}(1 + \beta\gamma) \|x\|_V. \end{aligned}$$

On montre maintenant la seconde condition du théorème 3.2. Soit $y := (v, q) \in V$. Supposons qu'on ait pour tout $x := (u, p) \in V$,

$$\mathbf{a}((u, p), (v, q)) = 0.$$

En prenant $p = 0$ et $u = v$ dans (3.3), on obtient $v = 0$ grâce à la coercivité de a . En prenant ensuite $p = q$, on obtient $q = 0$.

Le théorème 3.2 assure donc que le problème (3.1a)-(3.1b) est bien posé. $\square$

On peut établir le caractère bien posé du problème (3.1a)-(3.1b) sans passer par le théorème 3.2 en utilisant sa structure bloc. En effet, la coercivité des formes bilinéaires a et d implique que les

opérateurs $A \in \mathcal{L}(V_a; V'_a)$ et $D \in \mathcal{L}(V_d; V'_d)$ définis dans la section 2.3 sont des isomorphismes. Puisque le problème (3.1a)-(3.1b) consiste à chercher $(\bar{u}, \bar{p}) \in V_a \times V_d$ tel que

$$\begin{aligned} -A\bar{u} - B^\dagger \bar{p} &= \bar{f}, \\ -D\bar{p} &= \bar{g}, \end{aligned}$$

on en déduit que son unique solution est donnée par

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -A^{-1}(\bar{f} - B^\dagger D^{-1} \bar{g}), \\ \bar{p} &= -D^{-1} \bar{g}. \end{aligned}$$

3.2 Le problème discret

Dans cette section, on introduit la version discrétisée du problème (3.1a)-(3.1b) par une méthode d'éléments finis de Lagrange conformes. Soit $\{V_{ah}\}_{h>0}$ et $\{V_{dh}\}_{h>0}$ deux familles de sous-espaces respectivement de V_a et V_d de dimension finie. Le paramètre

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T,$$

fait référence à la taille des maillages $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$. Pour toute maille $T \in \mathcal{T}_h$, on définit son diamètre

$$h_T = \text{diam } T = \max_{x_1, x_2 \in T} \|x_1 - x_2\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Le problème discret consiste à chercher $\bar{u}_h \in V_{ah}$ et $\bar{p}_h \in V_{dh}$ tels que

$$\boxed{\begin{aligned} a(\bar{u}_h, v_h) - b(v_h, \bar{p}_h) &= \langle \bar{f}, v_h \rangle_a, & \forall v_h \in V_{ah}, \\ d(\bar{p}_h, q_h) &= \langle \bar{g}, q_h \rangle_d, & \forall q_h \in V_{dh}. \end{aligned}} \quad \begin{aligned} (3.5a) \\ (3.5b) \end{aligned}$$

Grâce à la coercivité des formes bilinéaires a et d , on montre facilement le résultat suivant.

Théorème 3.4. *Le problème approché (3.5a)-(3.5b) est bien posé.*

Le problème discret (3.5a)-(3.5b) peut être reformulé en utilisant un opérateur de projection de Riesz

$$\mathfrak{R}_h : V_a \times V_d \rightarrow V_{ah} \times V_{dh},$$

tel que pour tout $(v, q) \in V_a \times V_d$, la fonction $\mathfrak{R}_h(v, q) := (\mathfrak{R}_{ah}(v, q), \mathfrak{R}_{dh}(q))$ est définie par

$$a(v - \mathfrak{R}_{ah}(v, q), v_h) - b(v_h, q - \mathfrak{R}_{dh}(q)) = 0, \quad \forall v_h \in V_{ah}, \quad (3.6)$$

$$d(q - \mathfrak{R}_{dh}(q), q_h) = 0, \quad \forall q_h \in V_{dh}. \quad (3.7)$$

Il est clair que $(\bar{u}_h, \bar{p}_h)$ satisfait (3.5a)-(3.5b) si et seulement si

$$\bar{u}_h = \mathfrak{R}_{ah}(\bar{u}, \bar{p}) \quad \text{et} \quad \bar{p}_h = \mathfrak{R}_{dh}(\bar{p}).$$

Les propriétés d'approximation de l'opérateur $\mathfrak{R}_h$ sont les suivantes. Un résultat analogue est établi dans [ML92].

Lemme 3.1. *Pour tout $(v, q) \in V_a \times V_d$, on a*

$$\|v - \mathfrak{R}_{ah}(v, q)\|_a \leq \inf_{v_h \in V_{ah}} \|v - v_h\|_a + \tilde{\beta} \|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_{L_d}, \quad (3.8)$$

$$\|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_d = \inf_{q_h \in V_{dh}} \|q - q_h\|_d. \quad (3.9)$$

Preuve. On démontre d'abord la propriété (3.9). Pour tout $q \in V_d$, comme $\mathfrak{R}_{dh}(q) \in V_{dh}$, on a

$$\|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_d \geq \inf_{q_h \in V_{dh}} \|q - q_h\|_d.$$

D'autre part, pour tout $q_h \in V_{dh}$, comme $q - \mathfrak{R}_{dh}(q)$ est dans l'espace vectoriel orthogonal à V_{dh} et $q_h - \mathfrak{R}_{dh}(q) \in V_{dh}$, le théorème de Pythagore assure que

$$\|q - q_h\|_d^2 = \|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_d^2 + \|\mathfrak{R}_{dh}(q) - q_h\|_d^2 \geq \|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_d^2.$$

En particulier, on a

$$\inf_{q_h \in V_{dh}} \|q - q_h\|_d^2 \geq \|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_d^2,$$

ce qui fournit (3.9). Pour établir (3.8), on considère l'opérateur $\mathfrak{R}_{ah}^\diamond : V_a \rightarrow V_{ah}$ défini de telle sorte que pour tout $v \in V_a$,

$$a(v - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_{ah}.$$

De la même manière que ci-dessus, on montre que

$$\|v - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v)\|_a = \inf_{v_h \in V_{ah}} \|v - v_h\|_a.$$

On observe ensuite que, puisque $\mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v)$ et $\mathfrak{R}_{ah}(v, q)$ sont dans V_{ah} ,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{R}_{ah}(v, q) - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v)\|_a^2 &= a(\mathfrak{R}_{ah}(v, q) - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v), \mathfrak{R}_{ah}(v, q) - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v)) \\ &= a(\mathfrak{R}_{ah}(v, q) - v, \mathfrak{R}_{ah}(v, q) - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v)) \\ &\quad + a(v - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v), \mathfrak{R}_{ah}(v, q) - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v)) \\ &= -b(\mathfrak{R}_{ah}(v, q) - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v), q - \mathfrak{R}_{dh}(q)) \\ &\leq \tilde{\beta} \|\mathfrak{R}_{ah}(v, q) - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v)\|_a \|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_{L_d}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\|\mathfrak{R}_{ah}(v, q) - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v)\|_a \leq \tilde{\beta} \|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_{L_d}$ ce qui donne, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|v - \mathfrak{R}_{ah}(v, q)\|_a &\leq \|v - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v)\|_a + \|\mathfrak{R}_{ah}(v, q) - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v)\|_a \\ &\leq \|v - \mathfrak{R}_{ah}^\diamond(v)\|_a + \tilde{\beta} \|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_{L_d}, \end{aligned}$$

menant directement à (3.8). $\square$

L'estimation (3.8) est optimale pour le premier terme du membre de droite dans le sens où ce dernier minore également le membre de gauche. L'optimalité du second terme fera, quant à elle, l'objet de la section suivante.

3.3 Analyse d'erreur *a priori*

Pour déduire du lemme 3.1 les taux asymptotiques de convergence pour l'erreur d'approximation en fonction du paramètre h quand la solution exacte est suffisamment régulière, on introduit les hypothèses suivantes.

Hypothèse 3.1. Il existe des constantes c_1 et c_2 , des réels strictement positifs s_a et s_d , et des sous-espaces $W_a \subset V_a$ et $W_d \subset V_d$ respectivement équipés des normes $\|\cdot\|_{W_a}$ et $\|\cdot\|_{W_d}$, tels que indépendamment de h ,

$$\forall v \in W_a, \quad \inf_{v_h \in V_{ah}} \|v - v_h\|_a \leq c_1 h^{s_a} \|v\|_{W_a}, \quad (3.10)$$

$$\forall q \in W_d, \quad \inf_{q_h \in V_{dh}} \|q - q_h\|_d \leq c_2 h^{s_d} \|q\|_{W_d}. \quad (3.11)$$

Hypothèse 3.2. Il existe une constante c_3 et un réel strictement positif δ tels que pour tout $r \in L_d$, la solution unique $\phi \in V_d$ du problème dual $d(q, \phi) = (r, q)_{L_d}$ pour tout $q \in V_d$, est telle qu'il existe $\phi_h \in V_{dh}$ satisfaisant

$$\|\phi - \phi_h\|_d \leq c_3 h^\delta \|r\|_{L_d}. \quad (3.12)$$

L'hypothèse 3.1 est classique dans le contexte des approximations par éléments finis. L'hypothèse 3.2 est une propriété de régularité elliptique associée à la forme bilinéaire d sur V_d . Cette hypothèse est exprimée ici sous forme abrégée, l'expression usuelle consistant à supposer que la solution duale ϕ est dans un sous-espace Y_d de V_d où l'estimation d'interpolation (3.12) est valide sous la forme

$$\|\phi - \phi_h\|_d \leq c_3 h^\delta \|\phi\|_{Y_d}.$$

L'hypothèse 3.2 sera également utilisée dans les analyses d'erreur *a priori* et *a posteriori* du problème instationnaire au chapitre 4. Pour l'analyse d'erreur *a posteriori* (stationnaire et instationnaire), une expression plus fine localisée sur les éléments du maillage sera introduite au paragraphe 3.4.4 (voir hypothèse 3.4).

On utilise d'ores et déjà la conséquence importante suivante de l'hypothèse 3.2

$$\|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_{L_d} \leq c_3 h^\delta \|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_d. \quad (3.13)$$

En effet, en procédant comme dans le lemme de Aubin-Nitsche, on définit ϕ comme la solution duale associée à $r := q - \mathfrak{R}_{dh}(q)$ et en observant que $d(r, \phi_h) = 0$ pour $\phi_h \in V_{dh}$, on obtient

$$\|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_{L_d}^2 = (r, r)_{L_d} = d(r, \phi) = d(r, \phi - \phi_h) \leq \|r\|_d \|\phi - \phi_h\|_d,$$

d'où (3.13) s'ensuit aisément. Une conséquence importante de (3.8), (3.10) et (3.13) est que pour tout $(v, q) \in W_a \times W_d$,

$$\|v - \mathfrak{R}_{ah}(v, q)\|_a \leq c_1 h^{s_a} \|v\|_{W_a} + \tilde{\beta} c_2 c_3 h^{s_d + \delta} \|q\|_{W_d}.$$

Il est raisonnable d'équilibrer les deux sources d'erreur dans $\|v - \mathfrak{R}_{ah}(v, q)\|_a$. Ceci motive l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3.3. $s_a = s_d + \delta =: s$.

Dans le cadre des hypothèses 3.1–3.3, le lemme 3.1 fournit pour tout $(v, q) \in W_a \times W_d$,

$$\|v - \mathfrak{R}_{ah}(v, q)\|_a \leq h^s(c_1\|v\|_{W_a} + \tilde{\beta}c_2c_3\|q\|_{W_d}), \quad (3.14a)$$

$$\|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_{L_d} \leq h^s c_2 c_3 \|q\|_{W_d}, \quad (3.14b)$$

$$\|q - \mathfrak{R}_{dh}(q)\|_d \leq h^{s-\delta} c_2 \|q\|_{W_d}. \quad (3.14c)$$

En conséquence, dès que la solution exacte du problème stationnaire (3.1a)–(3.1b) est suffisamment régulière, à savoir

$$(\bar{u}, \bar{p}) \in W_a \times W_d,$$

l'erreur $\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_d$ converge asymptotiquement en $h^{s-\delta}$ tandis que l'erreur $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{L_d}$ converge asymptotiquement en h^s . Puisque δ est strictement positif, ceci signifie que l'erreur $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{L_d}$ converge plus rapidement que $\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_d$.

3.4 Analyse d'erreur *a posteriori*

Dans cette section, on présente l'analyse d'erreur *a posteriori* du problème discret (3.5a)–(3.5b) par la méthode des résidus. On démontre notamment deux propriétés importantes relatives aux estimations d'erreur *a posteriori* : la fiabilité et l'optimalité. Comme il est usuel dans l'analyse d'erreur *a posteriori*, on suppose dans cette section que les données $(\bar{f}, \bar{g})$ sont suffisamment régulières, à savoir dans $L_a \times L_d$. On introduit les opérateurs A_{el} , $B_{\text{el}}^\dagger$ et D_{el} , qui sont en fait les versions localisées aux mailles des opérateurs A , $B^\dagger$ et D introduits à la section 2.3. On suppose que les formes bilinéaires peuvent être localisées comme suit : pour tout $(v, q) \in V_a \times V_d$ et pour tout $(\xi, \zeta) \in V_a \times V_d$ tel que $A_{\text{el}}\xi \in L_a$ et $D_{\text{el}}\zeta \in L_d$,

$$a(\xi, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [-(A_{\text{el}}\xi, v)_{L_a(T)} + (J_a\xi, v)_{L_a(\partial T)}], \quad (3.15)$$

$$d(\zeta, q) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [-(D_{\text{el}}\zeta, q)_{L_d(T)} + (J_d\zeta, q)_{L_d(\partial T)}]. \quad (3.16)$$

Ici, pour une maille $T \in \mathcal{T}_h$, $L_a(T)$ et $L_d(T)$ sont des versions locales des espaces L_a et L_d respectivement, $(\cdot, \cdot)_{L_a(\partial T)}$ et $(\cdot, \cdot)_{L_d(\partial T)}$ sont des produits scalaires pour les fonctions définies sur la frontière ∂T de T et J_a et J_d sont des opérateurs de saut tels que $J_a\xi = 0$ si $A\xi \in L_a$ et $J_d\zeta = 0$ si $D\zeta \in L_d$. De plus, on suppose que pour tout $v \in V_a$ et pour tout $\zeta \in L_d$ tel que $B_{\text{el}}^\dagger\zeta \in L_a$,

$$b(v, \zeta) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(v, B_{\text{el}}^\dagger\zeta)_{L_a(T)} + (J_b\zeta, v)_{L_a(\partial T)}], \quad (3.17)$$

avec $J_b\zeta = 0$ si $B^\dagger\zeta \in L_a$. On suppose enfin qu'il existe deux opérateurs d'interpolation de type Clément $i_{ah} : V_a \rightarrow V_{ah}$ et $i_{dh} : V_d \rightarrow V_{dh}$ tels que pour tout $(v, q) \in V_a \times V_d$,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [h_T^{-2}\|v - i_{ah}(v)\|_{L_a(T)}^2 + h_T^{-1}\|v - i_{ah}(v)\|_{L_a(\partial T)}^2] \leq c_4\|v\|_a^2, \quad (3.18)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [h_T^{-2}\|q - i_{dh}(q)\|_{L_d(T)}^2 + h_T^{-1}\|q - i_{dh}(q)\|_{L_d(\partial T)}^2] \leq c_5\|q\|_d^2. \quad (3.19)$$

Cette hypothèse abstraite est classique dans le contexte de l'estimation d'erreur *a posteriori*; voir, par exemple [Ver96, EG04].

3.4.1 Le résidu

On reprend les notations relatives au problème générique (3.2).

Définition 3.1. Soit $y \in V := V_a \times V_d$. On définit le résidu de la solution approchée $\bar{x}_h = (\bar{u}_h, \bar{p}_h)$ en y par

$$\rho(\bar{x}_h; y) = \mathbf{f}(y) - \mathbf{a}(\bar{x}_h, y). \quad (3.20)$$

On observe que le résidu est lié à l'erreur d'approximation par la relation

$$\rho(\bar{x}_h; y) = \mathbf{a}(\bar{x} - \bar{x}_h, y).$$

La relation d'orthogonalité de Galerkin s'écrit sous la forme

$$\forall y_h \in V_h := V_{ah} \times V_{dh}, \quad \rho(\bar{x}_h; y_h) = 0. \quad (3.21)$$

On définit les résidus et les sauts par élément suivants

$$\begin{aligned} R_{\bar{u}h} &= \bar{f} + A_{\text{el}}\bar{u}_h + B_{\text{el}}^\dagger \bar{p}_h, & J_{\bar{u}h} &= J_a \bar{u}_h - J_b \bar{p}_h, \\ R_{\bar{p}h} &= \bar{g} + D_{\text{el}} \bar{p}_h, & J_{\bar{p}h} &= J_d \bar{p}_h. \end{aligned}$$

Lemme 3.2. Pour tout $y = (v, q) \in V$, on a

$$\rho(\bar{x}_h; y) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(R_{\bar{u}h}, v)_{L_a(T)} - (J_{\bar{u}h}, v)_{L_a(\partial T)}] + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(R_{\bar{p}h}, q)_{L_d(T)} - (J_{\bar{p}h}, q)_{L_d(\partial T)}].$$

Preuve. Soit $y = (v, q) \in V$. On a

$$\begin{aligned} \rho(\bar{x}_h; y) &= a(\bar{u} - \bar{u}_h, v) - b(v, \bar{p} - \bar{p}_h) + d(\bar{p} - \bar{p}_h, q) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[(\bar{f} + A_{\text{el}}\bar{u}_h + B_{\text{el}}^\dagger \bar{p}_h, v)_{L_a(T)} - (J_a \bar{u}_h, v)_{L_a(\partial T)} + (J_b \bar{p}_h, v)_{L_a(\partial T)} \right] \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[(\bar{g} + D_{\text{el}} \bar{p}_h, q)_{L_d(T)} - (J_d \bar{p}_h, q)_{L_d(\partial T)} \right], \end{aligned}$$

ce qui fournit l'égalité voulue. $\square$

3.4.2 Fiabilité

On définit les estimateurs d'erreur

$$\mathcal{E}_{\bar{u}} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[h_T^2 \|R_{\bar{u}h}\|_{L_a(T)}^2 + h_T \|J_{\bar{u}h}\|_{L_a(\partial T)}^2 \right], \quad (3.22)$$

$$\mathcal{E}_{\bar{p}, r} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2r} \left[h_T^2 \|R_{\bar{p}h}\|_{L_d(T)}^2 + h_T \|J_{\bar{p}h}\|_{L_d(\partial T)}^2 \right], \quad (3.23)$$

où $r \geq 0$ est un paramètre réel.

Théorème 3.5 (Fiabilité). *On a*

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a^2 + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_d^2 \leq 2\alpha^{-2}c_4\mathcal{E}_{\bar{u}} + 2\alpha^{-2}c_5\mathcal{E}_{\bar{p},0}. \quad (3.24)$$

Preuve. De la première condition du théorème 3.2, on déduit

$$\alpha\|\bar{x} - \bar{x}_h\|_V \leq \sup_{y \in V} \frac{\mathbf{a}(\bar{x} - \bar{x}_h, y)}{\|y\|_V}.$$

En utilisant la définition (3.20) du résidu et en appliquant la relation d'orthogonalité (3.21), on obtient pour tout $y_h = (v_h, q_h) \in V_h$ (y_h sera choisi en fonction de y ci-dessous),

$$\begin{aligned} \alpha\|\bar{x} - \bar{x}_h\|_V &\leq \sup_{y=(v,q) \in V} \frac{\mathbf{a}(\bar{x} - \bar{x}_h, y - y_h)}{\|y\|_V} \\ &= \sup_{y \in V} \frac{\rho(\bar{x}_h; y - y_h)}{\|y\|_V} \\ &\leq \sup_{y \in V} \frac{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\|R_{\bar{u}h}\|_{L_a(T)}\|v - v_h\|_{L_a(T)} + \|J_{\bar{u}h}\|_{L_a(\partial T)}\|v - v_h\|_{L_a(\partial T)}]}{\|y\|_V} \\ &\quad + \sup_{y \in V} \frac{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\|R_{\bar{p}h}\|_{L_d(T)}\|q - q_h\|_{L_d(T)} + \|J_{\bar{p}h}\|_{L_d(\partial T)}\|q - q_h\|_{L_d(\partial T)}]}{\|y\|_V} \\ &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [h_T^2\|R_{\bar{u}h}\|_{L_a(T)}^2 + h_T\|J_{\bar{u}h}\|_{L_a(\partial T)}^2] \right)^{1/2} \\ &\quad \times \sup_{y \in V} \frac{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2}\|v - v_h\|_{L_a(T)}^2 + h_T^{-1}\|v - v_h\|_{L_a(\partial T)}^2 \right)^{1/2}}{\|y\|_V} \\ &\quad + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [h_T^2\|R_{\bar{p}h}\|_{L_d(T)}^2 + h_T\|J_{\bar{p}h}\|_{L_d(\partial T)}^2] \right)^{1/2} \\ &\quad \times \sup_{y \in V} \frac{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2}\|q - q_h\|_{L_d(T)}^2 + h_T^{-1}\|q - q_h\|_{L_d(\partial T)}^2 \right)^{1/2}}{\|y\|_V}. \end{aligned}$$

Pour chaque $y \in V$, on peut choisir y_h résultant des propriétés d'interpolation (3.18)-(3.19) pour obtenir

$$\alpha\|\bar{x} - \bar{x}_h\|_V \leq c_4^{1/2}\mathcal{E}_{\bar{u}}^{1/2} + c_5^{1/2}\mathcal{E}_{\bar{p},0}^{1/2},$$

ce qui complète la preuve. $\square$

De par l'inégalité $\|q\|_c \leq \gamma\|q\|_d$, on déduit de (3.24) une estimation *a posteriori* pour l'erreur en pression en norme $\|\cdot\|_c$,

$$\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_c^2 \leq 2\gamma^2\alpha^{-2}c_4\mathcal{E}_{\bar{u}} + 2\gamma^2\alpha^{-2}c_5\mathcal{E}_{\bar{p},0}.$$

Remarque 3.1. Dans (3.22) et (3.23), la contribution des termes de saut est restreinte aux faces intérieures de T et aux faces de la frontière sur lesquelles les fonctions de V_a ou V_d ne sont pas

nulles (parce qu'on y impose une condition de type Neumann). Pour alléger l'écriture, ce point n'a pas été explicité. Il le sera au paragraphe 3.5.1 lorsqu'on donnera les expressions des estimateurs pour la modélisation HM.

3.4.3 Optimalité

On s'intéresse maintenant à l'optimalité des estimateurs d'erreur (3.22)–(3.23), à savoir qu'on établit une propriété de minoration locale de l'erreur par ces estimateurs. On utilise pour cela la technique des fonctions bulles introduite par Verfürth [Ver94, Ver96]. On introduit au préalable quelques notations. On désigne par $\mathcal{F}_h^i$ l'ensemble des faces intérieures du maillage et par $\mathcal{F}_h^\partial$ l'ensemble des faces situées sur le bord du domaine. Pour une maille $T \in \mathcal{T}_h$ donnée, on note $\mathcal{F}_T$ l'ensemble des faces de T et on pose

$$\mathcal{F}_T^i = \mathcal{F}_h^i \cap \mathcal{F}_T, \quad \mathcal{F}_T^\partial = \mathcal{F}_h^\partial \cap \mathcal{F}_T.$$

On introduit les versions locales $\mathcal{E}_{\bar{u},T}$ et $\mathcal{E}_{\bar{p},r,T}$, pour un réel $r \geq 0$, des estimateurs (3.22)–(3.23),

$$\mathcal{E}_{\bar{u}} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_{\bar{u},T}, \quad \mathcal{E}_{\bar{p},r} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_{\bar{p},r,T}, \quad (3.25)$$

avec

$$\mathcal{E}_{\bar{u},T} = h_T^2 \|R_{\bar{u}h}\|_{L_a(T)}^2 + h_T \|J_{\bar{u}h}\|_{L_a(\partial T)}^2, \quad (3.26)$$

$$\mathcal{E}_{\bar{p},r,T} = h_T^{2r} \left[h_T^2 \|R_{\bar{p}h}\|_{L_a(T)}^2 + h_T \|J_{\bar{p}h}\|_{L_d(\partial T)}^2 \right]. \quad (3.27)$$

On suppose que les formes bilinéaires a , b , c et d peuvent être localisées par élément sous la forme

$$\begin{aligned} a(v, w) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_T(v, w), & b(v, q) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} b_T(v, q), \\ c(q, r) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} c_T(q, r), & d(s, t) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} d_T(s, t). \end{aligned}$$

Ceci induit une localisation des normes $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_c$ et $\|\cdot\|_d$ sous la forme

$$\begin{aligned} \|v\|_a^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{a,T}^2, \\ \|q\|_c^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q\|_{c,T}^2, \\ \|s\|_d^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|s\|_{d,T}^2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \|v\|_{a,T}^2 &= a_T(v, v), \\ \|q\|_{c,T}^2 &= c_T(q, q), \\ \|s\|_{d,T}^2 &= d_T(s, s). \end{aligned}$$

Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, lorsque les données $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont polynomiales, les résidus par élément $R_{\bar{u}h}$ et $R_{\bar{p}h}$ sont par construction dans des espaces de dimension finie notés respectivement $P_a(T)$ et $P_d(T)$. Ici, P_a et P_d sont les espaces polynomiaux avec lesquels les espaces d'approximation V_{ah} et V_{dh} ont été construits. Pour une face F dans le maillage, les restrictions des résidus de saut $J_{\bar{u}h}$ et $J_{\bar{p}h}$ à F sont dans des espaces polynomiaux notés respectivement $P_a(F)$ et $P_d(F)$. Dans ce chapitre, on désigne désormais par $x \lesssim y$ l'inégalité $x \leq cy$ avec une constante c strictement positive et indépendante du maillage. Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on suppose qu'il existe deux fonctions bulles $\nu_{a,T} \in V_a$ et $\nu_{d,T} \in V_d$ avec des supports localisés sur T telles que pour tout $v \in P_a(T)$ et pour tout $q \in P_d(T)$,

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_a(T)}^2 &\lesssim (\nu_{a,T}v, v)_{L_a(T)}, \\ \|\nu_{a,T}v\|_{L_a(T)} + h_T \|\nu_{a,T}v\|_{a,T} &\lesssim \|v\|_{L_a(T)}, \\ \|q\|_{L_d(T)}^2 &\lesssim (\nu_{d,T}q, q)_{L_d(T)}, \\ \|\nu_{d,T}q\|_{L_d(T)} + h_T \|\nu_{d,T}q\|_{d,T} &\lesssim \|q\|_{L_d(T)}. \end{aligned}$$

De plus, pour une face $F \subset \partial T$, on suppose qu'il existe deux fonctions bulles $\nu_{a,F} \in V_a$ et $\nu_{d,F} \in V_d$ aux supports localisés sur F et deux opérateurs de prolongement $\pi_{a,F}$ et $\pi_{d,F}$ de fonctions définies sur F sur l'ensemble des fonctions définies sur Δ_F formé de un ou deux éléments de $\mathcal{T}_h$ auxquels F appartient, tels que pour tout $v \in P_a(F)$ et pour tout $q \in P_d(F)$,

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_a(F)}^2 &\lesssim (\nu_{a,F}v, v)_{L_a(F)}, \\ h_T^{-1/2} \|\pi_{a,F}(\nu_{a,F}v)\|_{L_a(\Delta_F)} + h_T^{1/2} \|\pi_{a,F}(\nu_{a,F}v)\|_{a,\Delta_F} &\lesssim \|v\|_{L_a(F)}, \\ \|q\|_{L_d(F)}^2 &\lesssim (\nu_{d,F}q, q)_{L_d(F)}, \\ h_T^{-1/2} \|\pi_{d,F}(\nu_{d,F}q)\|_{L_d(\Delta_F)} + h_T^{1/2} \|\pi_{d,F}(\nu_{d,F}q)\|_{d,\Delta_F} &\lesssim \|q\|_{L_d(F)}. \end{aligned}$$

Pour $r \geq 0$, on introduit également l'espace des fonctions totalement discontinues

$$P_{\text{td},h}^r = \{v_h \in L^2(\mathcal{T}_h) / \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in \mathbb{P}_r(T)\}.$$

On note Π_h^r le projecteur L^2 -orthogonal sur $P_{\text{td},h}^r$ (on utilisera les mêmes notations lorsqu'on applique la projection composante par composante pour des fonctions à valeurs vectorielles).

Théorème 3.6 (Optimalité). *Soit $r_1 \geq 0$ et $r_2 \geq 0$. Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on a*

$$\mathcal{E}_{\bar{u},T} \lesssim \sum_{T' \in \Delta_T} \left(h_T^2 \|\bar{f} - \bar{f}_h\|_{L_a(T')}^2 + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{a,T'}^2 + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{c,T'}^2 \right), \quad (3.28)$$

$$\mathcal{E}_{\bar{p},0,T} \lesssim \sum_{T' \in \Delta_T} \left(h_T^2 \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L_d(T')}^2 + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{d,T'}^2 \right), \quad (3.29)$$

où $\bar{f}_h = \Pi_h^{r_1} \bar{f}$ et $\bar{g}_h = \Pi_h^{r_2} \bar{g}$ et où Δ_T désigne l'ensemble des mailles qui partagent au moins une face avec T .

Preuve. Soit $T \in \mathcal{T}_h$. On majore d'abord $\|\bar{f} + A_{\text{el}}\bar{u}_h + B_{\text{el}}^\dagger \bar{p}_h\|_{L_a(T)}^2$. Par simple inégalité triangulaire, on a

$$\|\bar{f} + A_{\text{el}}\bar{u}_h + B_{\text{el}}^\dagger \bar{p}_h\|_{L_a(T)}^2 \lesssim \|\bar{f}_h + A_{\text{el}}\bar{u}_h + B_{\text{el}}^\dagger \bar{p}_h\|_{L_a(T)}^2 + \|\bar{f} - \bar{f}_h\|_{L_a(T)}^2.$$

On pose $\omega_h = \bar{f}_h + A_{\text{el}}\bar{u}_h + B_{\text{el}}^\dagger\bar{p}_h$. Il s'agit maintenant de contrôler $\|\omega_h\|_{L_a(T)}^2$. Puisque ω_h est un polynôme, on a

$$\begin{aligned} \|\omega_h\|_{L_a(T)}^2 &\lesssim \left(\nu_{a,T}\omega_h, \bar{f}_h + A_{\text{el}}\bar{u}_h + B_{\text{el}}^\dagger\bar{p}_h \right)_{L_a(T)} \\ &\lesssim \|\bar{f} - \bar{f}_h\|_{L_a(T)} \|\omega_h\|_{L_a(T)} + \left(\nu_{a,T}\omega_h, \bar{f} + A_{\text{el}}\bar{u}_h + B_{\text{el}}^\dagger\bar{p}_h \right)_{L_a(T)} \\ &\lesssim \|\bar{f} - \bar{f}_h\|_{L_a(T)} \|\omega_h\|_{L_a(T)} + \left(\nu_{a,T}\omega_h, A_{\text{el}}(\bar{u}_h - \bar{u}) + B_{\text{el}}^\dagger(\bar{p}_h - \bar{p}) \right)_{L_a(T)} \\ &\lesssim \|\bar{f} - \bar{f}_h\|_{L_a(T)} \|\omega_h\|_{L_a(T)} + a_T(\bar{u} - \bar{u}_h, \nu_{a,T}\omega_h) - b_T(\nu_{a,T}\omega_h, \bar{p} - \bar{p}_h). \end{aligned}$$

D'où

$$\|\omega_h\|_{L_a(T)}^2 \lesssim \|\bar{f} - \bar{f}_h\|_{L_a(T)} \|\omega_h\|_{L_a(T)} + h_T^{-1} \|\omega_h\|_{L_a(T)} (\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{a,T} + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{c,T}).$$

Finalement, on obtient

$$\|\bar{f} + A_{\text{el}}\bar{u}_h + B_{\text{el}}^\dagger\bar{p}_h\|_{L_a(T)}^2 \lesssim \|\bar{f} - \bar{f}_h\|_{L_a(T)}^2 + h_T^{-2} (\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{a,T}^2 + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{c,T}^2). \quad (3.30)$$

Soit F une face de la maille T . On majore maintenant la quantité $\|J_{\bar{u}h}\|_{L_a(F)}$. On pose $\psi_F = \nu_{a,F}J_{\bar{u}h}$. On observe que $J_{\bar{u}h}$ est un polynôme. En remarquant que $J_a\bar{u} - J_b\bar{p} = 0$ sur F et que la fonction $\pi_{a,F}\psi_F$ est nulle sur le bord de Δ_F et est continue sur F , on peut intégrer par parties comme suit :

$$\begin{aligned} \|J_{\bar{u}h}\|_{L_a(F)}^2 &\lesssim (\nu_{a,F}J_{\bar{u}h}, J_{\bar{u}h})_{L_a(F)} = (\psi_F, J_{\bar{u}h})_{L_a(F)} = (\pi_{a,F}\psi_F, J_{\bar{u}h})_{L_a(F)} \\ &\lesssim \sum_{T' \in \Delta_F} \left[a_{T'}(\bar{u}_h - \bar{u}, \pi_{a,F}\psi_F) - b_{T'}(\pi_{a,F}\psi_F, \bar{p}_h - \bar{p}) \right. \\ &\quad \left. + (A_{\text{el}}(\bar{u}_h - \bar{u}), \pi_{a,F}\psi_F)_{L_a(T')} + (\pi_{a,F}\psi_F, B_{\text{el}}^\dagger(\bar{p}_h - \bar{p}))_{L_a(T')} \right] \\ &\lesssim \sum_{T' \in \Delta_F} \left[(\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{a,T'} + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{c,T'}) h_T^{-1/2} \|J_{\bar{u}h}\|_{L_a(F)} \right. \\ &\quad \left. + \|R_{\bar{u}h}\|_{L_a(T')} h_T^{1/2} \|J_{\bar{u}h}\|_{L_a(F)} \right]. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$h_T^{1/2} \|J_{\bar{u}h}\|_{L_a(F)} \lesssim \sum_{T' \in \Delta_F} [\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{a,T'} + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{c,T'} + \|R_{\bar{u}h}\|_{L_a(T')} h_T],$$

ce qui permet de conclure.

La seconde estimation du théorème se montre de manière semblable. Par simple inégalité triangulaire, on a

$$\|R_{\bar{p}h}\|_{L_d(T)}^2 = \|\bar{g} + D_{\text{el}}\bar{p}_h\|_{L_d(T)}^2 \lesssim \|\bar{g}_h + D_{\text{el}}\bar{p}_h\|_{L_d(T)}^2 + \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L_d(T)}^2.$$

On pose $\omega_h = \bar{g}_h + D_{\text{el}}\bar{p}_h$. Il s'agit maintenant de contrôler $\|\omega_h\|_{L_d(T)}^2$. Puisque ω_h est un polynôme, on a

$$\begin{aligned}
\|\omega_h\|_{L_d(T)}^2 &\lesssim (\nu_{d,T}\omega_h, \bar{g}_h + D_{\text{el}}\bar{p}_h)_{L_d(T)} \\
&\lesssim \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L_d(T)} \|\omega_h\|_{L_d(T)} + (\nu_{d,T}\omega_h, \bar{g} + D_{\text{el}}\bar{p}_h)_{L_d(T)} \\
&\lesssim \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L_d(T)} \|\omega_h\|_{L_d(T)} + (\nu_{d,T}\omega_h, -D_{\text{el}}(\bar{p} - \bar{p}_h))_{L_d(T)} \\
&\lesssim \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L_d(T)} \|\omega_h\|_{L_d(T)} + d_T(\bar{p} - \bar{p}_h, \nu_{d,T}\omega_h).
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|\omega_h\|_{L_d(T)}^2 \leq \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L_d(T)}^2 + h_T^{-2} \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{d,T}^2.$$

Soit F une face de la maille T . On majore maintenant la quantité $\|J_{\bar{p}h}\|_{L_d(F)}$. On pose $\psi_F = \nu_{d,F}J_{\bar{p}h}$. On observe que $J_{\bar{p}h}$ est un polynôme. En remarquant que $J_d\bar{p} = 0$ sur F et que la fonction $\pi_{d,F}\psi_F$ est nulle sur le bord de Δ_F et est continue sur F , on peut intégrer par parties comme suit :

$$\begin{aligned}
\|J_{\bar{p}h}\|_{L_d(F)}^2 &\leq (\nu_{d,F}J_{\bar{p}h}, J_{\bar{p}h})_{L_d(F)} \\
&\leq \sum_{T' \in \Delta_F} [d_{T'}(\bar{p}_h - \bar{p}, \pi_{d,F}\psi_F) + (D_{\text{el}}(\bar{p}_h - \bar{p}), \pi_{d,F}\psi_F)_{L_d(T')}] \\
&\leq \sum_{T' \in \Delta_F} [\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{d,T'} h_T^{-1/2} \|J_{\bar{p}h}\|_{L_d(F)} + \|R_{\bar{p}h}\|_{L_d(T')} h_T^{1/2} \|J_{\bar{p}h}\|_{L_d(F)}].
\end{aligned}$$

On a donc

$$h_T^{1/2} \|J_{\bar{p}h}\|_{L_d(F)} \leq \sum_{T' \in \Delta_F} [\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{d,T'} + \|R_{\bar{p}h}\|_{L_d(T')} h_T],$$

ce qui fournit le résultat souhaité. $\square$

Remarque 3.2. *En combinant les résultats de l'analyse d'erreur a priori (3.14a), (3.14b) et (3.14c) avec les résultats d'optimalité du théorème 3.6, on observe que la convergence de la borne supérieure de l'inégalité (3.24) est optimale pour $\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_d^2$, sous des conditions portant sur l'approximation des données $\bar{f}$ et $\bar{g}$ examinées ci-dessous, mais est sous-optimale pour $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a^2$ (et pour $\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_c^2$). Ceci motive une amélioration de l'analyse d'erreur a posteriori effectuée au paragraphe suivant.*

On suppose que $\bar{f} \in H^{s-1}(\Omega^*)$ et on prend $r_1 = s - 1$ (on rappelle que s est défini dans l'hypothèse 3.3). Dans ce cas, le terme $h_T^2 \|\bar{f} - \bar{f}_h\|_{L_a(T)}^2$ dans (3.28) est du même ordre que $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{a,T}^2 + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{c,T}^2$. De même, on suppose que $\bar{g} \in H^{s-\delta-1}(\Omega^*)$ et on prend $r_2 \geq s - \delta - 1$. Dans ce cas, le terme $h_T^2 \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L_d(T)}^2$ est supérieur ou égal à $\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{d,T}^2$. Par exemple, pour $k = 2$ et $l = 1$, on obtient $s = 2$ et $\delta = 1$; donc $\bar{f} \in H^1(\Omega^*)$ et $\bar{g} \in L^2(\Omega^*)$.

3.4.4 Amélioration de l'estimation d'erreur *a posteriori*

Dans ce paragraphe, on propose une analyse d'erreur *a posteriori* permettant d'obtenir l'optimalité de la convergence des estimateurs d'erreur pour l'estimation *a posteriori* de l'erreur $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a$. L'analyse requiert un raffinement de l'hypothèse 3.2 en localisant la propriété d'approximation sur les éléments du maillage.

Hypothèse 3.4. Il existe une constante c_6 et un réel strictement positif δ tels que pour tout $r \in L_d$, l'unique solution $\phi \in V_d$ du problème dual $d(q, \phi) = (r, q)_{L_d}$ pour tout $q \in V_d$, est telle qu'il existe $\phi_h \in V_{dh}$ satisfaisant

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2\delta} [h_T^{-2} \|\phi - \phi_h\|_{L_d(T)}^2 + h_T^{-1} \|\phi - \phi_h\|_{L_d(\partial T)}^2] \leq c_6 \|r\|_{L_d}^2. \quad (3.31)$$

On dispose alors du résultat suivant :

Théorème 3.7. *On a*

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a^2 \leq 2c_4 \mathcal{E}_{\bar{u}} + 2\tilde{\beta}^2 c_6 \mathcal{E}_{\bar{p}, \delta}. \quad (3.32)$$

Preuve. On estime dans un premier temps la quantité $\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{L_d}$. Soit ϕ la solution duale associée à la donnée $r := \bar{p} - \bar{p}_h$ dans l'hypothèse 3.4. Alors

$$\|r\|_{L_d}^2 = (r, r)_{L_d} = d(r, \phi) = d(r, \phi - \phi_h),$$

pour tout $\phi_h \in V_{dh}$. En utilisant (3.16) et (3.31), on obtient

$$\begin{aligned} d(r, \phi - \phi_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (-D_{\text{el}} r, \phi - \phi_h)_{L_d(T)} + (J_d r, \phi - \phi_h)_{L_d(\partial T)} \\ &\leq \mathcal{E}_{p, \delta}^{1/2} c_6^{1/2} \|r\|_{L_d}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{L_d}^2 = \|r\|_{L_d}^2 \leq c_6 \mathcal{E}_{\bar{p}, \delta}.$$

Par ailleurs, on observe que

$$\begin{aligned} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a &= \sup_{0 \neq v \in V_a} \frac{a(\bar{u} - \bar{u}_h, v)}{\|v\|_a} \\ &= \sup_{0 \neq v \in V_a} \left(\frac{a(\bar{u} - \bar{u}_h, v) - b(v, \bar{p} - \bar{p}_h)}{\|v\|_a} \right) + \tilde{\beta} \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{L_d} \\ &= \sup_{0 \neq v \in V_a} \left(\frac{a(\bar{u} - \bar{u}_h, v - i_{ah}(v)) - b(v - i_{ah}(v), \bar{p} - \bar{p}_h)}{\|v\|_a} \right) + \tilde{\beta} \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{L_d}, \end{aligned}$$

car $i_{ah}(v) \in V_{ah}$. En utilisant (3.15), (3.17) et (3.18), on obtient

$$\begin{aligned} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a^2 &\leq 2c_4 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[h_T^2 \|A_{\text{el}}(\bar{u} - \bar{u}_h) + B_{\text{el}}^\dagger(\bar{p} - \bar{p}_h)\|_{L_a(T)}^2 + h_T \|J_a(\bar{u} - \bar{u}_h) - J_b(\bar{p} - \bar{p}_h)\|_{L_a(\partial T)}^2 \right] \\ &\quad + 2\tilde{\beta}^2 \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{L_d}^2 \\ &\leq 2c_4 \mathcal{E}_{\bar{u}} + 2\tilde{\beta}^2 c_6 \mathcal{E}_{\bar{p}, \delta}. \end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat souhaité. $\square$

En s'inspirant de la preuve du théorème 3.6, on montre aisément le résultat d'optimalité suivant

$$\mathcal{E}_{\bar{p}, \delta, T} \lesssim \sum_{T' \in \Delta_T} \left(h_T^{2+2\delta} \|\bar{g} - \bar{g}_h\|_{L_d(T')}^2 + h_T^{2\delta} \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{L_d(T')}^2 \right). \quad (3.33)$$

En combinant les résultats de l'analyse d'erreur *a priori* (3.14a), (3.14b) et (3.14c) avec les résultats d'optimalité (3.28) et (3.33), on observe que la convergence de la borne supérieure de l'inégalité (3.32) est optimale, sous des conditions portant sur l'approximation des données $\bar{f}$ et $\bar{g}$.

3.5 Application à la modélisation Hydro-Mécanique

Dans cette section, on présente l'application de la théorie développée précédemment dans le cas où l'on s'intéresse au système de la poroélasticité (2.19a)-(2.19b).

On considère le problème discret (3.5a)–(3.5b) avec le déplacement (resp. la pression) approché en espace par des éléments finis continus de Lagrange de degré $k \geq 1$ (resp. $l \geq 1$). Alors, l'hypothèse 3.1 est valable pour

$$\begin{aligned} s_a &= k, & s_d &= l, \\ W_a &= [H_0^1(\Omega^*) \cap H^{k+1}(\mathcal{T}_h)]^3, & W_d &= H_0^1(\Omega^*) \cap H^{l+1}(\mathcal{T}_h), \end{aligned}$$

où pour $m \geq 0$, $H^m(\mathcal{T}_h)$ désigne l'espace de Sobolev brisé d'ordre m . L'hypothèse 3.2 signifie que pour tout $r \in L^2(\Omega^*)$, l'unique solution $\phi^* \in H_0^1(\Omega^*)$ du problème dual

$$\int_{\Omega^*} \frac{E}{M} \nabla^* \phi^* \cdot \nabla^* q^* = \int_{\Omega^*} r^* q^*, \quad \forall q^* \in H_0^1(\Omega^*),$$

est dans $H^{1+\delta}(\Omega^*)$. Ainsi, dans le cas où Ω^* est convexe, (3.12) est valable avec $\delta = 1$ (dans le cas général, on a toujours $\delta \geq 1/2$). En conséquence, l'hypothèse 3.3 implique

$$k = l + 1,$$

c'est-à-dire que l'interpolation polynomiale pour le déplacement est d'un degré supérieure à celle de la pression. Le choix le plus courant en pratique est $k = 2$ et $l = 1$, c'est-à-dire que des polynômes continus de degré 2 par morceaux sont utilisés pour approcher le champ de déplacement et des polynômes continus affines par morceaux sont utilisés pour approcher le champ de pression. Dans ce cas, $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{1,\Omega}$ et $\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{0,\Omega}$ convergent au second ordre en espace tandis que $\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{1,\Omega}$ converge au premier ordre en espace. Ces résultats seront illustrés à la section 3.6. Les opérateurs A_{el} et D_{el} sont tels que pour tout $\xi \in [H_0^1(\Omega^*) \cap H^1(\mathcal{T}_h)]^3$, pour tout $\zeta \in H_0^1(\Omega^*) \cap H^1(\mathcal{T}_h)$, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$A_{\text{el}} \xi|_T = \nabla^* \cdot (\sigma'^*(\xi|_T)) \quad \text{et} \quad D_{\text{el}} \zeta|_T = \frac{E}{M} \Delta^*(\zeta|_T),$$

où on a défini $H^1(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega^*) / \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in H^1(T)\}$. L'opérateur $B_{\text{el}}^\dagger$ est tel que pour tout $\zeta \in L^2(T^*)$, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$B_{\text{el}}^\dagger \zeta|_T = -b \nabla^*(\zeta|_T).$$

Dans le contexte de la modélisation HM où $V_a = [H_0^1(\Omega^*)]^3$ et $V_d = H_0^1(\Omega^*)$, l'opérateur d'interpolation usuel de Clément [Clé75, Ber89] (modifié pour prendre en compte des conditions de Dirichlet homogènes au bord) ou l'opérateur d'interpolation de Scott–Zhang [SZ90] peuvent être utilisés pour satisfaire les propriétés d'interpolation (3.18)–(3.19). Pour un domaine Ω^* convexe, l'hypothèse 3.4 est également vérifiée avec $\delta = 1$, il suffit pour cela de prendre pour ϕ_h l'interpolé de Lagrange de ϕ . Enfin, les fonctions bulles utilisées dans les preuves de l'optimalité des estimateurs peuvent être construites comme décrit par Verfürth [Ver94].

3.5.1 Expression des estimateurs d'erreur *a posteriori*

On donne ici l'expression des estimateurs d'erreur *a posteriori* (3.26)–(3.27), tels qu'ils ont été implantés dans *Code_Aster*. L'analyse d'erreur *a posteriori* est effectuée sur le système adimensionné (2.27a)–(2.27b) du paragraphe 2.2.2. Les formules (3.26)–(3.27) sont donc appliquées aux quantités adimensionnées puis réécrites en vraie dimension, car ce sont celles-ci qui sont disponibles dans *Code_Aster*. On détaille l'expression en variables dimensionnées des estimateurs (3.26)–(3.27). Le premier terme de (3.26) est

$$\begin{aligned} h_{T^\star}^2 \|R_{\bar{u}_h}^\star\|_{0,T^\star}^2 &= h_{T^\star}^2 \|\bar{f}^\star + A_{\text{el}} \bar{u}_h^\star + B_{\text{el}}^\dagger \bar{p}_h^\star\|_{0,T^\star}^2 \\ &= \frac{h_T^2}{L^2} \left\| \frac{L}{P} (\bar{f} + \nabla \cdot \sigma'(\bar{u}_h) - b \nabla \bar{p}_h) \right\|_{0,T}^2 \frac{1}{L^d} \\ &= h_T^2 \frac{1}{P^2 L^d} \|\bar{f} + \nabla \cdot \sigma'(\bar{u}_h) - b \nabla \bar{p}_h\|_{0,T}^2. \end{aligned}$$

Le second terme est, pour toute face intérieure $F^\star \subset \partial T^\star$,

$$\begin{aligned} h_{T^\star} \|J_{\bar{u}_h}\|_{0,F^\star}^2 &= h_{T^\star} \|\llbracket \sigma'^\star(\bar{u}_h) \cdot n \rrbracket\|_{0,F^\star}^2 \\ &= \frac{h_T}{L} \|\llbracket \frac{1}{P} (\sigma'(\bar{u}_h) \cdot n) \rrbracket\|_{0,F}^2 \frac{1}{L^{d-1}} \\ &= h_T \frac{1}{P^2 L^d} \|\llbracket \sigma'(\bar{u}_h) \cdot n \rrbracket\|_{0,F}^2. \end{aligned}$$

On rappelle que l'opérateur de saut $\llbracket \cdot \rrbracket$ est défini par l'égalité (1.4). Le premier terme de (3.27) est nul car, dans *Code_Aster*, $\bar{g}_h$ est proportionnel à la divergence de la gravité et $\bar{p}_h$ est affine. Comme $\bar{p}_h$ est affine, on observe également que $J_b \bar{p}_h = 0$. Le second terme est

$$\begin{aligned} h_{T^\star} \|J_{\bar{p}_h}\|_{0,F^\star}^2 &= h_{T^\star} \|\llbracket \frac{E}{M} \nabla^\star \bar{p}_h^\star \cdot n \rrbracket\|_{0,F^\star}^2 \\ &= \frac{h_T}{L} \frac{E^2}{M^2} \frac{L^2}{P^2} \|\llbracket \nabla \bar{p}_h \cdot n \rrbracket\|_{0,F}^2 \frac{1}{L^{d-1}} \\ &= h_T \frac{E^2}{P^2 L^{d-2} M^2 \kappa^2 \rho^2} \|\llbracket M_{\text{lq},h} \cdot n \rrbracket\|_{0,F}^2. \end{aligned}$$

On rappelle que M_{lq} désigne le flux hydraulique dans *Code_Aster*, donné par

$$M_{\text{lq}} = \kappa \rho (-\nabla p + \rho F^m).$$

On utilise le flux hydraulique dans les estimateurs précédents plutôt que le gradient de pression car cette quantité est plus aisément accessible dans les routines élémentaires de *Code_Aster*.

Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on rappelle que $\mathcal{F}_T^i$ (resp. $\mathcal{F}_T^\partial$) désigne l'ensemble des faces de T situées à l'intérieur (resp. sur la frontière) du maillage. On définit

$$\mathcal{E}_{\bar{u},T} = h_T^2 \frac{1}{P^2 L^d} \|\bar{f} + \nabla \cdot \sigma'(\bar{u}_h) - b \nabla \bar{p}_h\|_{0,T}^2 + h_T \frac{1}{P^2 L^d} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^i} \|\llbracket \sigma'(\bar{u}_h) \cdot n \rrbracket\|_{0,F}^2 \quad (3.34)$$

$$+ h_T \frac{1}{P^2 L^d} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^\partial \cap \Gamma_N^M} \|\sigma_{\text{nor}} - (\sigma'(\bar{u}_h) \cdot n - b \bar{p}_h n)\|_{0,F}^2,$$

$$\mathcal{E}_{\bar{p},0,T} = h_T \frac{E^2}{P^2 L^{d-2} M^2 \kappa^2 \rho^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^i} \|\llbracket M_{\text{lq},h} \cdot n \rrbracket\|_{0,F}^2 \quad (3.35)$$

$$+ h_T \frac{E^2}{P^2 L^{d-2} M^2 \kappa^2 \rho^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^\partial \cap \Gamma_N^H} \|M_{\text{lq,nor}} - M_{\text{lq},h} \cdot n\|_{0,F}^2,$$

$$\mathcal{E}_{\bar{p},1,T} = h_T^3 \frac{E^2}{P^2 L^d M^2 \kappa^2 \rho^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^i} \|\llbracket M_{\text{lq},h} \cdot n \rrbracket\|_{0,F}^2 \quad (3.36)$$

$$+ h_T^3 \frac{E^2}{P^2 L^d M^2 \kappa^2 \rho^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^\partial \cap \Gamma_N^H} \|M_{\text{lq,nor}} - M_{\text{lq},h} \cdot n\|_{0,F}^2.$$

On a en fait considéré une formulation des estimateurs d'erreur *a posteriori* dans un cadre un peu plus général que celui du problème (3.1a)-(3.1b) où des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en déplacements et en pression sont imposées sur toute la frontière Γ . L'expression des estimateurs d'erreur *a posteriori* donnée ci-dessus permet, outre les conditions de Dirichlet homogènes, de prendre également en compte les conditions aux limites de Neumann non-homogènes, telles qu'elles sont définies par les formules (2.17) et (2.18).

On donne enfin l'expression adimensionnée de la norme $\|\cdot\|_V$, qui est utilisée dans la section 3.6 pour le calcul des indices d'efficacité des estimateurs d'erreur. Pour tout $(v, q) \in V_a \times V_d$, on pose

$$\|v\|_a^2 = \frac{E^2}{P^2 L^d} \left(\int_{\Omega} \lambda_1 (\nabla \cdot v)^2 + 2 \int_{\Omega} \lambda_2 \varepsilon(v)^2 \right),$$

$$\|q\|_d^2 = \frac{1}{P^2 L^{d-2}} \frac{E}{M} \int_{\Omega} (\nabla q)^2.$$

3.5.2 Mise en œuvre dans *Code_Aster*

Une nouvelle modélisation HM stationnaire correspondant au problème (2.19a)-(2.19b) a d'abord dû être implantée dans *Code_Aster* car la modélisation 2D stationnaire n'était pas disponible (en effet, il n'y a guère d'applications industrielles relevant de ce cadre). La modélisation est effective pour les mailles 2D triangulaires et quadrangulaires. L'extension aux mailles 3D (tétraèdres, pentaèdres, hexaèdres) et aux modélisations axisymétriques ne poserait aucune difficulté supplémentaire.

Un nouveau catalogue d'éléments finis a été défini. Il comporte les éléments triangulaires et quadrangulaires. L'intégration est faite de manière *classique*, au sens défini dans l'introduction au paragraphe 1.3.3. On rappelle qu'il s'agit d'une intégration de Gauss pour une discrétisation spatiale en quadrangles, ou de Gauss-Hammer pour une discrétisation spatiale en triangles. Pour les quadrangles (resp. les triangles), l'intégration volumique se fait à l'aide d'une famille à 9 (resp.

6) points de Gauß. L'intégration surfacique est réalisée par une intégration comportant 4 points de Gauß. Les options de l'élément fini (particulièrement celles de résolution) sont identiques à celles du catalogue pour les éléments finis de la modélisation 2D instationnaire du code.

3.6 Résultats numériques

On considère sur le domaine $[0, 1] \times [0, 1]$ la solution analytique suivante du problème (2.19a)-(2.19b) avec les conditions aux limites de Dirichlet correspondantes,

$$u(x, y) = - \begin{bmatrix} \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{bmatrix}, \quad p(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y),$$

avec $\kappa = b = 1$. On obtient

$$\begin{aligned} f &= 0, \\ g &= \pi(\cos(\pi x) \sin(\pi y), \sin(\pi x) \cos(\pi y))^t. \end{aligned}$$

Les coefficients de Lamé sont $\lambda_1 = 1/(4\pi)$ et $\lambda_2 = 1/(8\pi)$, ce qui donne un coefficient de Poisson $\nu = 1/3$ et un module de Young $E = 1/(3\pi)$. On choisit le module de Biot $M = 1/(3\pi)$ et la masse volumique $\rho = 1$.

Les taux de convergence en espace sont évalués sur des séries de triangulations structurées raffinées uniformément et basées sur un pas de maillage de la frontière h_0 . On note

$$\eta_1 = (\mathcal{E}_{\bar{u}})^{1/2}, \quad \eta_2 = (\mathcal{E}_{\bar{p}})^{1/2} \quad \text{et} \quad \eta_3 = (\mathcal{E}_{\bar{p},1})^{1/2}.$$

Les constantes c_i sont prises égales à 1 (elles pourraient être déterminées de façon plus précise). Par ailleurs, on n'a pas pris en compte dans les tests numériques la contribution à l'estimateur d'erreur de l'erreur d'interpolation sur les conditions de Dirichlet en déplacement; l'estimation de cette erreur ne pose pas de problème particulier. On définit les indices d'efficacité

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{eff}} &= \frac{\eta_1 + \eta_2}{\|\bar{x} - \bar{x}_h\|_V}, & \mathcal{J}_{\text{eff}} &= \frac{\eta_1 + \eta_3}{\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a}, \\ \mathcal{I}_{\text{eff}}^* &= \frac{\eta_1 + \eta_2}{\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a}, & \mathcal{J}_{\text{eff}}^* &= \frac{\eta_1 + \eta_3}{\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a + \|\bar{p} - \bar{p}_h\|_c}. \end{aligned}$$

Le tableau 3.1 présente les résultats de convergence sous raffinement spatial pour l'erreur d'approximation mesurée dans différentes normes. Tous les taux de convergence expérimentaux concordent avec ceux prédits par l'analyse d'erreur *a priori*. Une observation importante est que l'erreur totale est dominée par l'erreur en norme H^1 sur la pression. Par ailleurs, les taux de convergence observés dans le tableau 3.2 pour les estimateurs d'erreur concordent avec les prédictions théoriques. L'indice d'efficacité $\mathcal{I}_{\text{eff}}$ prend des valeurs comprises entre 3 et 5, ce qui signifie que l'estimateur $\eta_1 + \eta_2$ se comporte de manière satisfaisante pour estimer l'erreur sur la pression dans la norme H^1 . Comme prévu, la situation est différente si l'on cherche à contrôler l'erreur sur les déplacements en norme H^1 . Comme cela est reflété par l'indice d'efficacité $\mathcal{I}_{\text{eff}}^*$ qui augmente lorsque le maillage est raffiné, cette dernière erreur converge plus vite vers 0 que les

h_0^{-1}	$\ \bar{u} - \bar{u}_h\ _a$	$\ \bar{p} - \bar{p}_h\ _d$	$\ \bar{x} - \bar{x}_h\ _V$	$\ \bar{p} - \bar{p}_h\ _c$
4	1.08e-2 –	6.73e-1 –	6.83e-1 –	5.28e-2 –
8	3.21e-3 1.74	3.61e-1 0.90	3.65e-1 0.91	1.54e-2 1.77
16	8.47e-4 1.92	1.85e-1 0.97	1.86e-1 0.97	4.05e-3 1.93
32	2.15e-4 1.98	9.29e-2 0.99	9.31e-2 0.99	1.03e-3 1.98
64	5.39e-5 1.99	4.65e-2 1.00	4.66e-2 1.00	2.58e-4 1.99
128	1.35e-5 2.00	2.33e-2 1.00	2.33e-2 1.00	6.45e-5 2.00

Tableau 3.1. Erreurs et taux de convergence sous raffinement spatial.

h_0^{-1}	η_1	η_2	η_3	$\mathcal{I}_{\text{eff}}$	$\mathcal{I}_{\text{eff}}^*$	$\mathcal{J}_{\text{eff}}$	$\mathcal{J}_{\text{eff}}^*$
4	7.67e-2 –	2.27 –	7.27e-1 –	3.43	217.89	74.69	12.64
8	2.78e-2 1.46	1.44 0.66	2.26e-1 1.69	4.02	456.93	79.00	13.59
16	8.39e-3 1.73	7.92e-1 0.86	6.14e-2 1.88	4.31	944.63	82.35	14.24
32	2.26e-3 1.89	4.12e-1 0.94	1.59e-2 1.95	4.45	1927.59	84.34	14.59
64	5.82e-4 1.96	2.10e-1 0.98	4.02e-3 1.98	4.51	3898.26	85.42	14.78
128	1.47e-4 1.99	1.06e-1 0.99	1.01e-3 1.99	4.54	7842.19	85.98	14.87

Tableau 3.2. Estimations d'erreur *a posteriori*, taux de convergence et indices d'efficacité sous raffinement spatial.

estimateurs déduits par l'approche directe. On remarque que les indices d'efficacité $\mathcal{J}_{\text{eff}}$ et $\mathcal{J}_{\text{eff}}^*$ pour l'approche par dualité prennent des valeurs assez grandes, mais admettent un comportement asymptotique raisonnable car ils sont pratiquement indépendants du maillage. Le fait que $\mathcal{J}_{\text{eff}}^*$ soit sensiblement inférieur à $\mathcal{J}_{\text{eff}}$ montre que l'erreur $\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_c$ domine l'erreur $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_a$.

Analyse du problème instationnaire

4.1	Le problème continu	58
4.2	Le problème discret	59
4.3	Analyse d'erreur <i>a priori</i>	62
4.4	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i>	64
4.4.1	Approche directe	64
4.4.2	Amélioration des estimations en utilisant la reconstruction elliptique	70
4.5	Application à la modélisation Hydro-Mécanique	74
4.5.1	Expression des estimations d'erreur <i>a posteriori</i>	74
4.5.2	Mise en œuvre dans <i>Code_Aster</i>	78
4.6	Résultats numériques	78
4.7	Extension aux modélisations non linéaires	80
4.7.1	Le cas test	81
4.7.2	Résultats numériques	82

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'analyse mathématique du problème modèle (2.30a)-(2.30b) et à son approximation par une méthode d'Euler-Galerkin. Rappelons que le problème continu consiste à chercher une solution forte $(u, p) \in H_t^1(V_a) \times H_t^1(V_d)$ telle que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$a(u, v) - b(v, p) = \langle f, v \rangle_a, \quad \forall v \in V_a, \quad (4.1a)$$

$$c(\partial_t p, q) + b(\partial_t u, q) + d(p, q) = \langle g, q \rangle_d, \quad \forall q \in V_d, \quad (4.1b)$$

avec la donnée $p_0 \in V_d$ et les membres de droite $f \in H_t^1(V'_a)$ et $g \in H_t^1(V'_d)$. On observera que l'équation (4.1a) est en fait satisfaite pour tout $t \in [0, T]$ de par les hypothèses de régularité qui sont faites. On renvoie à la section 2.3 pour la définition des opérateurs et des espaces ci-dessus. Dans le cas de la poroélasticité, une analyse mathématique d'une version plus générale du système (4.1a)–(4.1b) basée sur la théorie des équations d'évolution linéaires dégénérées dans les espaces de Hilbert a été effectuée par Showalter [Sho00, Sho02].

L'approximation d'Euler-Galerkin consiste en une méthode d'éléments finis conformes en espace et un schéma d'Euler implicite en temps. On présente d'abord l'analyse d'erreur *a priori*. Puis, deux analyses d'erreur *a posteriori* sont réalisées, fournissant des majorations de l'erreur d'approximation où toutes les constantes sont explicitées. La première analyse repose directement

sur la stabilité du problème continu et peut être utilisée pour estimer le terme dominant associé à la composante p dans la norme en énergie. Celle-ci sera identifiée ci-dessous comme étant

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_a^2 + \frac{1}{2}\|p(t)\|_c^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|p(s)\|_d^2 ds.$$

La seconde analyse est une extension de la technique de reconstruction elliptique introduite par Makridakis et Nochetto [MN03] pour les problèmes linéaires paraboliques. Elle est utilisée ici pour obtenir une estimation d'erreur *a posteriori* pour la composante u dans la norme en énergie qui ait un taux de convergence optimal par rapport au pas du maillage. Des résultats numériques sont présentés pour illustrer la performance des différents estimateurs.

4.1 Le problème continu

Le premier résultat est une estimation *a priori* pour la solution forte. Ceci nous permet d'identifier la norme de stabilité naturelle (ou norme en énergie) pour le problème (4.1a)-(4.1b).

Proposition 4.1. *Pour tout $t \in [0, T]$, on a*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u(t)\|_a^2 + \frac{1}{2}\|p(t)\|_c^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|p(s)\|_d^2 ds \\ & \leq 2 \left(2 \sup_{s \in [0, T]} \|f(s)\|'_a + \int_0^T \|\partial_t f(s)\|'_a ds \right)^2 + \int_0^T \|g(s)\|_d^2 ds + \|u_0\|_a^2 + \|p_0\|_c^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Preuve. Puisque (u, p) est une solution forte, pour presque tout $t \in [0, T]$, $v = \partial_t u$ appartient à V_a et $q = p$ appartient à V_d . En utilisant ces fonctions tests dans (4.1a)-(4.1b), on obtient

$$\frac{1}{2}d_t\|u\|_a^2 + \frac{1}{2}d_t\|p\|_c^2 + \|p\|_d^2 = \langle f, \partial_t u \rangle_a + \langle g, p \rangle_d.$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}d_t\|u\|_a^2 + \frac{1}{2}d_t\|p\|_c^2 + \frac{1}{2}\|p\|_d^2 \leq \langle f, \partial_t u \rangle_a + \frac{1}{2}\|g\|_d^2.$$

Soit $t \in [0, T]$. En intégrant l'inégalité précédente sur $[0, t]$ et en intégrant par parties en temps le terme $\langle f, \partial_t u \rangle_a$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u(t)\|_a^2 + \frac{1}{2}\|p(t)\|_c^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|p(s)\|_d^2 ds \\ & \leq \langle f(t), u(t) \rangle_a - \langle f(0), u(0) \rangle_a - \int_0^t \langle \partial_t f(s), u(s) \rangle_a ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|g(s)\|_d^2 ds + \frac{1}{2}\|u_0\|_a^2 + \frac{1}{2}\|p_0\|_c^2. \end{aligned}$$

On en déduit que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_a^2 + \frac{1}{2}\|p(t)\|_c^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|p(s)\|_d^2 ds \leq A\sigma_T(u) + B^2,$$

avec $\sigma_T(u) = \sup_{s \in [0, T]} \|u(s)\|_a$,

$$A = 2 \sup_{s \in [0, T]} \|f(s)\|_a + \int_0^T \|\partial_t f(s)\|_a ds \quad \text{et} \quad B^2 = \frac{1}{2} \int_0^T \|g(s)\|_d^2 ds + \frac{1}{2} \|u_0\|_a^2 + \frac{1}{2} \|p_0\|_c^2.$$

D'où, $\frac{1}{2} \sigma_T(u)^2 \leq A \sigma_T(u) + B^2$ de telle sorte que $\sigma_T(u)^2 \leq 4(A^2 + B^2)$. On aboutit à

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_a^2 + \frac{1}{2} \|p(t)\|_c^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|p(s)\|_d^2 ds \leq A^2 + \frac{1}{4} \sigma_T(u)^2 + B^2 \leq 2(A^2 + B^2),$$

ce qui mène à (4.2). $\square$

Remarque 4.1. La proposition 4.1 reste valable dans un cadre légèrement plus général où $g \in L_t^2(V_d)$, $p_0 \in L_d$ et $p \in L_t^2(V_d) \cap H_t^1(L_d)$.

Remarque 4.2. La proposition 4.1 signifie que la norme naturelle de stabilité contrôle le déplacement dans la norme $L_t^\infty(H_x^1)$ et la pression dans les normes $L_t^\infty(L_x^2)$ et $L_t^2(H_x^1)$. Ce résultat de stabilité repose sur le fait que l'équation de la conservation de la quantité de mouvement peut être testée par la dérivée temporelle du déplacement. On remarque qu'un autre choix de fonctions test pour le problème (4.1a)–(4.1b) est possible. En effet, en dérivant l'équation (4.1a) par rapport au temps et en choisissant comme fonctions test $v = \partial_t u$ et $q = \partial_t p$, la norme de stabilité qui se dégage est pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|p(t)\|_d^2 + \int_0^t \|\partial_t u(s)\|_a^2 ds + \int_0^t \|\partial_t p(s)\|_c^2 ds.$$

Travailler avec cette norme demande davantage de régularité sur la solution et les données du problème.

4.2 Le problème discret

Le problème (4.1a)–(4.1b) est approché par un schéma d'Euler-Galerkin, à savoir par des éléments finis conformes en espace et un schéma d'Euler implicite en temps. Soit $\{V_{ah}\}_{h>0}$ et $\{V_{dh}\}_{h>0}$ deux familles de sous-espaces respectivement de V_a et V_d de dimensions finies. Le paramètre h fait référence à la taille des maillages $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$. Soit

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

une suite d'instants discrets et pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on pose

$$\tau_n = t_n - t_{n-1} \quad \text{et} \quad I_n = [t_{n-1}, t_n].$$

Pour une fonction de l'espace et du temps, l'indice supérieur n indique la valeur prise par cette fonction à l'instant t_n . Par exemple, $u^n := u(t_n, \cdot) \in V_a$.

Le problème discret consiste à chercher $\{u_h^n\}_{n=1}^N \in [V_{ah}]^N$ et $\{p_h^n\}_{n=1}^N \in [V_{dh}]^N$ tels que pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$\boxed{\begin{aligned} a(u_h^n, v_h) - b(v_h, p_h^n) &= (f_h^n, v_h)_{L_a}, & \forall v_h \in V_{ah}, \\ c(\delta_t p_h^n, q_h) + b(\delta_t u_h^n, q_h) + d(p_h^n, q_h) &= (g_h^n, q_h)_{L_d}, & \forall q_h \in V_{dh}, \end{aligned}} \quad \begin{aligned} (4.3a) \\ (4.3b) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\delta_t u_h^n &= \tau_n^{-1}(u_h^n - u_h^{n-1}), \\ \delta_t p_h^n &= \tau_n^{-1}(p_h^n - p_h^{n-1}).\end{aligned}$$

Étant donné $(u_{0h}, p_{0h}) \in V_{ah} \times V_{dh}$, la condition initiale est $(u_h^0, p_h^0) := (u_{0h}, p_{0h})$. Les données

$$\begin{aligned}\{f_h^n\}_{n=1}^N &\in [L_a]^N \subset [V_a']^N, \\ \{g_h^n\}_{n=1}^N &\in [L_d]^N \subset [V_d']^N.\end{aligned}$$

sont respectivement des approximations de $\{f^n\}_{n=1}^N$ et $\{g^n\}_{n=1}^N$.

Lemme 4.1. *Le problème discret est bien posé.*

Preuve. Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, les équations (4.3a)–(4.3b) constituent un système linéaire carré pour les composantes de (u_h^n, p_h^n) une fois des bases de V_{ah} et V_{dh} choisies, de telle sorte qu'il suffit de prouver l'unicité de la solution discrète. En testant avec $v_h = u_h^n - u_h^{n-1}$ et $q_h = \tau_n p_h^n$ et en utilisant le fait que

$$a(x, x - y) = \frac{1}{2}a(x, x) + \frac{1}{2}a(x - y, x - y) - \frac{1}{2}a(y, y),$$

grâce à la symétrie de la forme bilinéaire a (avec une propriété similaire pour la forme bilinéaire c), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_h^n\|_a^2 + \frac{1}{2}\|u_h^n - u_h^{n-1}\|_a^2 + \frac{1}{2}\|p_h^n\|_c^2 + \frac{1}{2}\|p_h^n - p_h^{n-1}\|_c^2 + \tau_n\|p_h^n\|_d^2 \\ = \frac{1}{2}\|u_h^{n-1}\|_a^2 + (f_h^n, u_h^n - u_h^{n-1})_{L_a} + \frac{1}{2}\|p_h^{n-1}\|_c^2 + \tau_n(g_h^n, p_h^n)_{L_d}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{1}{2}\|u_h^n\|_a^2 + \frac{1}{2}\|p_h^n\|_c^2 + \frac{1}{2}\tau_n\|p_h^n\|_d^2 \leq \frac{1}{2}\|u_h^{n-1}\|_a^2 + \frac{1}{2}\|f_h^n\|_{L_a}^2 + \frac{1}{2}\|p_h^{n-1}\|_c^2 + \frac{1}{2}\tau_n\|g_h^n\|_{L_d}^2.$$

Ceci prouve l'unicité de la solution du système linéaire carré. $\square$

La preuve du lemme 4.1 suggère comment le schéma discret (4.3a)–(4.3b) pourrait être modifié si des maillages dépendants du temps étaient utilisés. Dans ce cas, on travaille avec deux familles $\{V_{ah}^n\}_{n=0}^N$ et $\{V_{dh}^n\}_{n=0}^N$ de sous-espaces de dimension finie de telle sorte que pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, $V_{ah}^n \subset V_a$ et $V_{dh}^n \subset V_d$. Le schéma discret prend la forme (4.3a)–(4.3b) avec des fonctions tests $v_h \in V_{ah}^n$ et $q_h \in V_{dh}^n$. Malheureusement, l'argumentation déployée dans la preuve ci-dessus doit être revue car il n'est plus possible d'utiliser $v_h = u_h^n - u_h^{n-1}$ comme fonction test puisqu'en général $v_h \notin V_{ah}^n$ (sauf si l'hypothèse restrictive $V_{ah}^{n-1} \subset V_{ah}^n$ est vérifiée pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$). Pour contourner cette difficulté, on considère l'opérateur de projection de Riesz $\mathfrak{R}_{ah}^{n\Diamond} : V_a \rightarrow V_{ah}^n$ défini de telle sorte que pour tout $v \in V_a$,

$$a(v - \mathfrak{R}_{ah}^{n\Diamond}(v), v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_{ah}^n, \quad (4.4)$$

et on définit

$$\delta_t u_h^n = \tau_n^{-1}(u_h^n - \mathfrak{R}_{ah}^{n\Diamond}(u_h^{n-1})).$$

Alors, en procédant comme dans la preuve du lemme 4.1 avec les fonctions tests

$$\begin{aligned} v_h &= u_h^n - \mathfrak{R}_{ah}^{n\Diamond}(u_h^{n-1}) \in V_{ah}^n, \\ q_h &= \tau_n p_h^n \in V_{dh}^n, \end{aligned}$$

et en observant que $a(u_h^n, v_h) = a(u_h^n, u_h^n - u_h^{n-1})$ puisque $u_h^n \in V_{ah}^n$, la même estimation de stabilité est retrouvée.

On rappelle les opérateurs différentiels (en espace) associés aux formes bilinéaires a , b , c et d introduits dans la section 2.3,

$$\begin{aligned} A &\in \mathcal{L}(V_a; V'_a), & B &\in \mathcal{L}(V_a; L_d), & B^\dagger &\in \mathcal{L}(L_d; V'_a) \\ C &\in \mathcal{L}(L_d; L_d), & D &\in \mathcal{L}(V_d; V'_d), \end{aligned}$$

tels que pour tout $(v, w) \in V_a \times V_a$, pour tout $(q, r) \in L_d \times L_d$ et pour tout $(s, y) \in V_d \times V_d$,

$$\begin{aligned} \langle Av, w \rangle_a &= -a(v, w), & (Bv, q)_{L_d} &= b(v, q), & \langle B^\dagger q, v \rangle_a &= b(v, q), \\ (Cq, r)_{L_d} &= c(q, r), & \langle Ds, y \rangle_d &= -d(s, y), \end{aligned}$$

où l'opérateur $B^\dagger$ est l'adjoint de B . On observe que C est en fait un opérateur d'ordre zéro. Avec ces notations, le problème (4.1a)–(4.1b) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} -Au - B^\dagger p &= f, \\ C\partial_t p + B\partial_t u - Dp &= g, \end{aligned}$$

ces égalités restant valables pour presque tout $t \in [0, T]$ dans V'_a et V'_d respectivement. La version discrète des opérateurs ci-dessus sera également utilisée :

$$\begin{aligned} A_h &\in \mathcal{L}(V_{ah}; V_{ah}), & B_h &\in \mathcal{L}(V_{ah}; V_{dh}), \\ B_h^\dagger &\in \mathcal{L}(V_{dh}; V_{ah}), & D_h &\in \mathcal{L}(V_{dh}; V_{dh}), \end{aligned}$$

tels que pour tout $(v_h, w_h) \in V_{ah} \times V_{ah}$, pour tout $(q_h, y_h) \in V_{dh} \times V_{dh}$,

$$\begin{aligned} (A_h v_h, w_h)_{L_a} &= -a(v_h, w_h), & (B_h v_h, q_h)_{L_d} &= b(v_h, q_h), \\ (B_h^\dagger q_h, v_h)_{L_a} &= b(v_h, q_h), & (D_h q_h, y_h)_{L_d} &= -d(q_h, y_h). \end{aligned}$$

Comme on travaille en dimension finie, les crochets de dualité ont été remplacés par les produits scalaires dans L_a et L_d . Le problème discret (4.3a)–(4.3b) peut être réécrit sous la forme

$$-A_h u_h^n - B_h^\dagger p_h^n = f_h^n, \tag{4.5}$$

$$C\delta_t p_h^n + B_h \delta_t u_h^n - D_h p_h^n = g_h^n, \tag{4.6}$$

ces égalités étant valables pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$ dans V_{ah} et V_{dh} respectivement. Pour un usage ultérieur, on pose

$$f_h^0 := -A_h u_{0h} - B_h^\dagger p_{0h}, \tag{4.7}$$

de telle sorte que (4.5) reste valable pour $n = 0$.

4.3 Analyse d'erreur *a priori*

Comme il est d'usage, l'analyse d'erreur *a priori* est réalisée sous l'hypothèse que la solution exacte est suffisamment régulière, à savoir

$$u \in C_t^1(W_a) \cap C_t^2(V_a), \quad p \in C_t^1(W_d) \cap C_t^2(L_d).$$

Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on définit

$$\begin{aligned} C_1^n(u, p) &= 2\gamma^2 \gamma_2^4 c_2^2 c_3^2 \sup_{s \in I_n} \|\partial_t p(s)\|_{W_d}^2 + 2\beta^2 \gamma^2 (c_1 \sup_{s \in I_n} \|\partial_t u(s)\|_{W_a} + \tilde{\beta} c_2 c_3 \sup_{s \in I_n} \|\partial_t p(s)\|_{W_d})^2, \\ C_2^n(u, p) &= \frac{1}{2} \gamma^2 \sup_{s \in I_n} \|\partial_{tt}^2 p(s)\|_c^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \gamma^2 \sup_{s \in I_n} \|\partial_{tt}^2 u(s)\|_a^2, \\ C^n(f, g) &= \frac{1}{2} \|f^n - f_h^n\|_a^2 + \tau_n \|g^n - g_h^n\|_d^2. \end{aligned}$$

De plus, on suppose que les données initiales u_{0h} et p_{0h} sont choisies telles que

$$\|u_0 - u_{0h}\|_a \leq c_7 h^s \|u_0\|_{W_a} \quad \text{et} \quad \|p_0 - p_{0h}\|_c \leq c_8 h^s \|p_0\|_{W_d}, \quad (4.8)$$

et on définit

$$C(u_0, p_0) = (c_1 + c_7)^2 \|u_0\|_{W_a}^2 + (\tilde{\beta}^2 c_2^2 c_3^2 + \frac{1}{2} (\gamma_2 c_2 c_3 + c_8)^2) \|p_0\|_{W_d}^2.$$

Un choix possible est de poser $u_{0h} = \mathfrak{R}_{ah}(u_0, p_0)$ et $p_{0h} = \mathfrak{R}_{dh}(p_0)$, auquel cas on peut prendre $C(u_0, p_0) = 0$.

Théorème 4.1. *Dans le cadre précédent, on a pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \|u^n - u_h^n\|_a^2 + \frac{1}{4} \|p^n - p_h^n\|_c^2 \\ & \leq h^{2s} C(u_0, p_0) + \sum_{m=1}^n C^m(f, g) + \sum_{m=1}^n [\tau_m h^{2s} C_1^m(u, p) + \tau_m^3 C_2^m(u, p)] \\ & \quad + h^{2s} (c_1^2 \|u^n\|_{W_a}^2 + (\tilde{\beta}^2 + \frac{1}{2} \gamma_2^2) c_2^2 c_3^2 \|p^n\|_{W_d}^2), \end{aligned} \quad (4.9)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \frac{1}{8} \tau_m \|p^m - p_h^m\|_d^2 & \leq h^{2s} C(u_0, p_0) + \sum_{m=1}^n C^m(f, g) + \sum_{m=1}^n [\tau_m h^{2s} C_1^m(u, p) + \tau_m^3 C_2^m(u, p)] \\ & \quad + \sum_{m=1}^n \frac{1}{4} \tau_m h^{2(s-\delta)} c_2^2 \|p^m\|_{W_d}^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Preuve. (i) Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on estime dans un premier temps les quantités

$$\eta_{ah}^n = \mathfrak{R}_{ah}(u^n, p^n) - u_h^n \quad \text{et} \quad \eta_{dh}^n = \mathfrak{R}_{dh}(p^n) - p_h^n.$$

On observe que pour tout $v_h \in V_{ah}$,

$$a(\eta_{ah}^n, v_h) - b(v_h, \eta_{dh}^n) = \langle f^n - f_h^n, v_h \rangle_a,$$

et que pour tout $q_h \in V_{dh}$,

$$\begin{aligned} & c(\eta_{dh}^n - \eta_{dh}^{n-1}, q_h) + b(\eta_{ah}^n - \eta_{ah}^{n-1}, q_h) + \tau_n d(\eta_{dh}^n, q_h) \\ &= \tau_n \langle g^n - g_h^n, q_h \rangle_d + c(\theta_{dh}^n, q_h) + b(\theta_{ah}^n, q_h), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \theta_{dh}^n &= \mathfrak{R}_{dh}(p^n) - \mathfrak{R}_{dh}(p^{n-1}) - \tau_n \partial_t p^n, \\ \theta_{ah}^n &= \mathfrak{R}_{ah}(u^n, p^n) - \mathfrak{R}_{ah}(u^{n-1}, p^{n-1}) - \tau_n \partial_t u^n. \end{aligned}$$

En testant avec $v_h := \eta_{ah}^n - \eta_{ah}^{n-1} \in V_{ah}$ (puisqu'on travaille avec des maillages indépendants du temps) et $q_h := \eta_{dh}^n \in V_{dh}$, on obtient après quelques manipulations algébriques élémentaires

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\eta_{ah}^n\|_a^2 + \frac{1}{2} \|\eta_{ah}^n - \eta_{ah}^{n-1}\|_a^2 + \frac{1}{2} \|\eta_{dh}^n\|_c^2 + \frac{1}{2} \|\eta_{dh}^n - \eta_{dh}^{n-1}\|_c^2 + \tau_n \|\eta_{dh}^n\|_d^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\eta_{ah}^{n-1}\|_a^2 + \frac{1}{2} \|\eta_{dh}^{n-1}\|_c^2 + \langle f^n - f_h^n, \eta_{ah}^n - \eta_{ah}^{n-1} \rangle_a + \tau_n \langle g^n - g_h^n, \eta_{dh}^n \rangle_d + c(\theta_{dh}^n, \eta_{dh}^n) \\ & \quad + b(\theta_{ah}^n, \eta_{dh}^n). \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{2} \|\eta_{ah}^n\|_a^2 + \frac{1}{2} \|\eta_{dh}^n\|_c^2 + \frac{1}{4} \tau_n \|\eta_{dh}^n\|_d^2 \leq \frac{1}{2} \|\eta_{ah}^{n-1}\|_a^2 + \frac{1}{2} \|\eta_{dh}^{n-1}\|_c^2 + C^n(f, g) + \tau_n^{-1} \gamma^2 \|\theta_{dh}^n\|_c^2 + \tau_n^{-1} \beta^2 \gamma^2 \|\theta_{ah}^n\|_a^2.$$

(ii) On estime maintenant les quantités θ_{dh}^n et θ_{ah}^n . On observe que

$$\theta_{dh}^n = - \int_{I_n} [\partial_t p(s) - \mathfrak{R}_{dh}(\partial_t p(s))] ds - \int_{I_n} (s - t_{n-1}) \partial_{tt}^2 p(s) ds.$$

Ainsi, grâce aux hypothèses de régularité sur la solution exacte et à l'estimation (3.14b),

$$\|\theta_{dh}^n\|_c \leq \gamma_2 \tau_n h^s c_2 c_3 \sup_{s \in I_n} \|\partial_t p(s)\|_{W_d} + \frac{1}{2} \tau_n^2 \sup_{s \in I_n} \|\partial_{tt}^2 p(s)\|_c.$$

De manière similaire, en utilisant (3.14a),

$$\|\theta_{ah}^n\|_a \leq \tau_n h^s (c_1 \sup_{s \in I_n} \|\partial_t u(s)\|_{W_a} + \tilde{\beta} c_2 c_3 \sup_{s \in I_n} \|\partial_t p(s)\|_{W_d}) + \frac{1}{2} \tau_n^2 \sup_{s \in I_n} \|\partial_{tt}^2 u(s)\|_a.$$

Par conséquent,

$$\tau_n^{-1} \gamma^2 \|\theta_{dh}^n\|_c^2 + \tau_n^{-1} \beta^2 \gamma^2 \|\theta_{ah}^n\|_a^2 \leq \tau_n h^{2s} C_1^m(u, p) + \tau_n^3 C_2^m(u, p).$$

En sommant les estimations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\eta_{ah}^n\|_a^2 + \frac{1}{2} \|\eta_{dh}^n\|_c^2 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{4} \tau_m \|\eta_{dh}^m\|_d^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|\eta_{ah}^0\|_a^2 + \frac{1}{2} \|\eta_{dh}^0\|_c^2 + \sum_{m=1}^n [C^m(f, g) + \tau_m h^{2s} C_1^m(u, p) + \tau_m^3 C_2^m(u, p)]. \end{aligned}$$

(iii) On estime maintenant les erreurs initiales η_{ah}^0 et η_{dh}^0 . Dans le cas où $u_{0h} = \mathfrak{R}_{ah}(u_0, p_0)$ et $p_{0h} = \mathfrak{R}_{dh}(p_0)$, il est clair que $\eta_{ah}^0 = 0$ et $\eta_{dh}^0 = 0$. Dans le cas général, on utilise l'inégalité triangulaire pour déduire

$$\|\eta_{dh}^0\|_c = \|\mathfrak{R}_{dh}(p_0) - p_{0h}\|_c \leq \|\mathfrak{R}_{dh}(p_0) - p_0\|_c + \|p_0 - p_{0h}\|_c \leq h^s(\gamma_2 c_2 c_3 + c_8) \|p_0\|_{W_d}.$$

De manière similaire,

$$\|\eta_{ah}^0\|_a \leq \|\mathfrak{R}_{ah}(u_0, p_0) - u_0\|_a + \|u_0 - u_{0h}\|_a \leq h^s((c_1 + c_7) \|u_0\|_{W_a} + \tilde{\beta} c_2 c_3 \|p_0\|_{W_d}).$$

Donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\eta_{ah}^n\|_a^2 + \frac{1}{2} \|\eta_{dh}^n\|_c^2 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{4} \tau_m \|\eta_{dh}^m\|_d^2 \\ & \leq h^{2s} C(u_0, p_0) + \sum_{m=1}^n [C^m(f, g) + \tau_m h^{2s} C_1^m(u, p) + \tau_m^3 C_2^m(u, p)]. \end{aligned}$$

(iv) On déduit aisément le résultat souhaité de l'inégalité triangulaire et des estimations (3.14a)–(3.14b)–(3.14c). $\square$

Le théorème 4.1 montre que dès que la solution exacte est suffisamment régulière et modulo les erreurs d'approximation des données, $\|u^n - u_h^n\|_a + \|p^n - p_h^n\|_c$ converge à l'ordre s en espace et au premier ordre en temps, tandis que $(\sum_{m=1}^n \tau_m \|p^m - p_h^m\|_d^2)^{1/2}$ converge à l'ordre $(s - \delta)$ en espace et au premier ordre en temps.

4.4 Analyse d'erreur *a posteriori*

Cette section est consacrée à l'analyse d'erreur *a posteriori* pour le schéma discret (4.3a)–(4.3b). Deux estimations sont démontrées. La première repose directement sur la stabilité du problème continu et fournit une estimation d'erreur adaptée pour la mesure de l'erreur sur p dans la norme $L_t^2(V_d)$. La seconde est basée sur une adaptation de la technique de reconstruction elliptique de Makridakis et Nochetto et fournit une estimation d'erreur adaptée à la mesure de l'erreur en u dans la norme $L_t^\infty(V_a)$ et l'erreur en p dans la norme $L_t^\infty(L_d)$. On suppose dans cette section que la donnée (f, g) est dans $L_t^2(L_a) \times L_t^2(L_d)$.

4.4.1 Approche directe

L'analyse d'erreur *a posteriori* repose sur la stabilité du problème continu. Par conséquent, on réécrit le schéma discret comme des équations valables presque partout dans $[0, T]$ plutôt qu'aux instants discrets $\{t_n\}_{n=1}^N$. Dans ce but, soit $u_{h\tau}$ (resp., $p_{h\tau}$) la fonction continue et affine par morceaux en temps telle que pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, $u_{h\tau}(t_n) = u_h^n$ (resp., $p_{h\tau}(t_n) = p_h^n$). On observe que $\partial_t u_{h\tau}$ et $\partial_t p_{h\tau}$ sont définis presque partout dans $[0, T]$ et sont constants sur chaque intervalle en temps I_n . De manière similaire, soit $f_{h\tau}$ la fonction continue et affine par morceaux en temps telle que pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, $f_{h\tau}(t_n) = f_h^n$. On a également besoin

de considérer des fonctions constantes par morceaux en temps, à savoir $\pi^0 p_{h\tau}$ (resp., $\pi^0 g_{h\tau}$) égales à p_h^n (resp., g_h^n) sur I_n pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$. Avec les notations ci-dessus, le schéma discret (4.3a)–(4.3b) fournit presque partout dans $[0, T]$,

$$a(u_{h\tau}, v_h) - b(v_h, p_{h\tau}) = (f_{h\tau}, v_h)_{L_a}, \quad \forall v_h \in V_{ah}, \quad (4.11)$$

$$c(\partial_t p_{h\tau}, q_h) + b(\partial_t u_{h\tau}, q_h) + d(\pi^0 p_{h\tau}, q_h) = (\pi^0 g_{h\tau}, q_h)_{L_d}, \quad \forall q_h \in V_{dh}. \quad (4.12)$$

Pour formuler l'estimation d'erreur *a posteriori*, il est commode d'introduire le résidu de Galerkin $\mathfrak{G}_a$ (resp., $\mathfrak{G}_d$) qui est une fonction continue et affine par morceaux en temps à valeurs dans V'_a (resp., une fonction constante par morceaux en temps à valeurs dans V'_d) telle que presque partout dans $[0, T]$,

$$\langle \mathfrak{G}_a, v \rangle_a = (f_{h\tau}, v)_{L_a} - a(u_{h\tau}, v) + b(v, p_{h\tau}), \quad \forall v \in V_a, \quad (4.13)$$

$$\langle \mathfrak{G}_d, q \rangle_d = (\pi^0 g_{h\tau}, q)_{L_d} - c(\partial_t p_{h\tau}, q) - b(\partial_t u_{h\tau}, q) - d(\pi^0 p_{h\tau}, q), \quad \forall q \in V_d. \quad (4.14)$$

On définit les estimateurs d'erreur sur les données, d'erreur en espace et d'erreur en temps par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f, g) &= \int_0^T \|(g - \pi^0 g_{h\tau})(s)\|_d^2 ds + \left(2 \sup_{s \in [0, T]} \|(f - f_{h\tau})(s)\|_a + \int_0^T \|\partial_t(f - f_{h\tau})(s)\|_a ds \right)^2, \\ \mathcal{E}_{\text{dat}} &= \|u_0 - u_{0h}\|_a^2 + \|p_0 - p_{0h}\|_c^2 + 4\mathcal{E}(f, g), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\mathcal{E}_{\text{spc}} = \sum_{m=1}^N 4\tau_m \|\mathfrak{G}_d^m\|_d^2 + 4 \left(2 \sup_{0 \leq m \leq N} \|\mathfrak{G}_a^m\|_a + \sum_{m=1}^N \|\mathfrak{G}_a^m - \mathfrak{G}_a^{m-1}\|_a \right)^2, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{E}_{\text{tim}} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{3} \tau_m \|p_h^m - p_h^{m-1}\|_d^2. \quad (4.17)$$

On rappelle que $\mathfrak{G}_a^m = \mathfrak{G}_a(t_m)$, etc.

Théorème 4.2. *Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,*

$$\frac{1}{2} \|u^n - u_h^n\|_a^2 + \frac{1}{2} \|p^n - p_h^n\|_c^2 + \int_0^{t_n} \frac{1}{4} \|(p - p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds + \int_0^{t_n} \frac{1}{2} \|(p - \pi^0 p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds \leq \mathcal{E}_{\text{dat}} + \mathcal{E}_{\text{spc}} + \mathcal{E}_{\text{tim}}. \quad (4.18)$$

Remarque 4.3. *On a conservé le terme $\int_0^{t_n} \frac{1}{2} \|(p - \pi^0 p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds$ dans l'estimation d'erreur car il sera utile afin d'établir l'optimalité de l'estimateur d'erreur en temps $\mathcal{E}_{\text{tim}}$.*

Preuve. On pose $\xi = u - u_{h\tau}$, $\zeta = p - p_{h\tau}$ et $\tilde{\zeta} = p - \pi^0 p_{h\tau}$. On observe que presque partout dans $[0, T]$,

$$\begin{aligned} a(\xi, v) - b(v, \zeta) &= \langle f - f_{h\tau} + \mathfrak{G}_a, v \rangle_a, \quad \forall v \in V_a, \\ c(\partial_t \zeta, q) + b(\partial_t \xi, q) + d(\tilde{\zeta}, q) &= \langle g - \pi^0 g_{h\tau} + \mathfrak{G}_d, q \rangle_d, \quad \forall q \in V_d. \end{aligned}$$

En testant pour presque tout $t \in [0, T]$ avec $v := \partial_t \xi$ et $q = \zeta$, on obtient

$$\frac{1}{2} d_t \|\xi\|_a^2 + \frac{1}{2} d_t \|\zeta\|_c^2 + \frac{1}{2} \|\zeta\|_d^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\zeta}\|_d^2 = \langle f - f_{h\tau} + \mathfrak{G}_a, \partial_t \xi \rangle_a + \langle g - \pi^0 g_{h\tau} + \mathfrak{G}_d, \zeta \rangle_d + \frac{1}{2} \|p_{h\tau} - \pi^0 p_{h\tau}\|_d^2,$$

où on a utilisé le fait que grâce à la symétrie de d ,

$$d(\zeta, \tilde{\zeta}) = \frac{1}{2}d(\zeta, \zeta) + \frac{1}{2}d(\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}) - \frac{1}{2}d(\zeta - \tilde{\zeta}, \zeta - \tilde{\zeta}).$$

Puisque $f - f_{h\tau} + \mathfrak{G}_a \in H_t^1(V'_a)$ et $g - \pi^0 g_{h\tau} + \mathfrak{G}_d \in L_t^2(V'_d)$, on peut procéder comme dans la preuve de la proposition 4.1 et en déduire pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$ la majoration

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u^n - u_h^n\|_a^2 + \frac{1}{2}\|p^n - p_h^n\|_c^2 + \int_0^{t_n} \frac{1}{4}\|(p - p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds + \int_0^{t_n} \frac{1}{2}\|(p - \pi^0 p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds \\ & \leq \mathcal{E}_{\text{dat}} + \int_0^T 4\|\mathfrak{G}_d(s)\|_d^2 ds + 4 \left(2 \sup_{s \in [0, T]} \|\mathfrak{G}_a(s)\|_a + \int_0^T \|\partial_t \mathfrak{G}_a(s)\|_a ds \right)^2 \\ & \quad + \int_0^T \|(p_{h\tau} - \pi^0 p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds. \end{aligned}$$

Les second et troisième termes à droite fournissent $\mathcal{E}_{\text{spc}}$ et le dernier terme fournit $\mathcal{E}_{\text{tim}}$. La majoration finale (4.18) résulte du fait que $\mathfrak{G}_a$ est affine par morceaux en temps, $\mathfrak{G}_d$ est constant par morceaux en temps, et que pour tout $s \in I_m$,

$$(p_{h\tau} - \pi^0 p_{h\tau})(s) = \tau_m^{-1}(s - t_m)(p_h^m - p_h^{m-1}). \square$$

Remarque 4.4. *Le taux de convergence en espace de la borne supérieure dans (4.18) est optimal pour $\int_0^{t_n} \frac{1}{2}\|(p - p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds$, mais ne l'est pas pour $\frac{1}{2}\|u^n - u_h^n\|_a^2 + \frac{1}{2}\|p^n - p_h^n\|_c^2$.*

Afin de localiser l'estimateur d'erreur spatiale $\mathcal{E}_{\text{spc}}$, on localise les formes bilinéaires a , b et d à l'aide des opérateurs A_{el} , $B_{\text{el}}^\dagger$ et D_{el} et on considère les termes de saut J_a , J_b et J_d comme dans la section 3.4. Pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$, on définit les résidus R_{uh}^m , R_{ph}^m et les sauts J_{uh}^m , J_{ph}^m par

$$R_{uh}^m = f_h^m + A_{\text{el}} u_h^m + B_{\text{el}}^\dagger p_h^m, \quad J_{uh}^m = J_a u_h^m - J_b p_h^m, \quad (4.19)$$

$$R_{ph}^m = g_h^m - C \delta_t p_h^m - B_{\text{el}} \delta_t u_h^m + D_{\text{el}} p_h^m, \quad J_{ph}^m = J_d p_h^m, \quad (4.20)$$

où on a également introduit la version localisée B_{el} de l'opérateur B , A_{el} , $B_{\text{el}}^\dagger$ et D_{el} étant déjà définis à la section 3.4. Pour $m = 0$, R_{uh}^0 et J_{uh}^0 sont définis de manière similaire. On définit également pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$, les estimateurs d'erreur en espace

$$\mathcal{E}_u^m = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [h_T^2 \|R_{uh}^m\|_{L_a(T)}^2 + h_T \|J_{uh}^m\|_{L_a(\partial T)}^2], \quad (4.21)$$

$$\mathcal{E}_{p,r}^m = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2r} [h_T^2 \|R_{ph}^m\|_{L_d(T)}^2 + h_T \|J_{ph}^m\|_{L_d(\partial T)}^2], \quad (4.22)$$

où $r \geq 0$ est un paramètre réel. On utilise également la version incrémentale en temps de ces estimateurs, à savoir pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$,

$$\mathcal{E}_u^m(\delta_t) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tau_m^2 [h_T^2 \|\delta_t R_{uh}^m\|_{L_a(T)}^2 + h_T \|\delta_t J_{uh}^m\|_{L_a(\partial T)}^2],$$

$$\mathcal{E}_{p,r}^m(\delta_t) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2r} \tau_m^2 [h_T^2 \|\delta_t R_{ph}^m\|_{L_d(T)}^2 + h_T \|\delta_t J_{ph}^m\|_{L_d(\partial T)}^2],$$

où

$$\begin{aligned}\delta_t R_{uh}^m &= \tau_m^{-1}(R_{uh}^m - R_{uh}^{m-1}), & \delta_t J_{uh}^m &= \tau_m^{-1}(J_{uh}^m - J_{uh}^{m-1}), \\ \delta_t R_{ph}^m &= \tau_m^{-1}(R_{ph}^m - R_{ph}^{m-1}), & \delta_t J_{ph}^m &= \tau_m^{-1}(J_{ph}^m - J_{ph}^{m-1}).\end{aligned}$$

Enfin, comme dans la section 3.4, on suppose qu'il existe deux opérateurs d'interpolation de type Clément $i_{ah} : V_a \rightarrow V_{ah}$ et $i_{dh} : V_d \rightarrow V_{dh}$ tels que pour tout $(v, q) \in V_a \times V_d$,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [h_T^{-2} \|v - i_{ah}(v)\|_{L_a(T)}^2 + h_T^{-1} \|v - i_{ah}(v)\|_{L_a(\partial T)}^2] \leq c_4 \|v\|_a^2, \quad (4.23)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [h_T^{-2} \|q - i_{dh}(q)\|_{L_d(T)}^2 + h_T^{-1} \|q - i_{dh}(q)\|_{L_d(\partial T)}^2] \leq c_5 \|q\|_d^2. \quad (4.24)$$

Proposition 4.2. *Dans le cadre ci-dessus, pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$,*

$$\|\mathfrak{G}_a^m\|_a'^2 \leq c_4 \mathcal{E}_u^m, \quad (4.25)$$

et pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$,

$$\|\mathfrak{G}_a^m - \mathfrak{G}_a^{m-1}\|_a'^2 \leq c_4 \mathcal{E}_u^m(\delta_t), \quad (4.26)$$

$$\|\mathfrak{G}_d^m\|_d'^2 \leq c_5 \mathcal{E}_{p,0}^m. \quad (4.27)$$

Donc,

$$\mathcal{E}_{\text{spc}} \leq \sum_{m=1}^N 4c_5 \tau_m \mathcal{E}_{p,0}^m + 16c_4 \sup_{0 \leq m \leq N} \mathcal{E}_u^m + 8c_4 \left(\sum_{m=1}^N (\mathcal{E}_u^m(\delta_t))^{1/2} \right)^2. \quad (4.28)$$

Preuve. On observe que

$$\|\mathfrak{G}_a^m\|_a' = \sup_{0 \neq v \in V_a} \frac{\langle \mathfrak{G}_a^m, v \rangle_a}{\|v\|_a} = \sup_{0 \neq v \in V_a} \frac{\langle \mathfrak{G}_a^m, v - i_{ah}(v) \rangle_a}{\|v\|_a},$$

puisque (4.11) et (4.13) impliquent que $\langle \mathfrak{G}_a^m, v_h \rangle_a = 0$ pour tout $v_h \in V_{ah}$. On a par ailleurs

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{G}_a^m, v - i_{ah}(v) \rangle_a &= (f_h^m, v - i_{ah}(v))_{L_a} - a(u_h^m, v - i_{ah}(v)) + b(v - i_{ah}(v), p_h^m) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f_h^m, v - i_{ah}(v))_{L_a(T)} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [-(A_{\text{el}} u_h^m, v - i_{ah}(v))_{L_a(T)} + (J_a u_h^m, v - i_{ah}(v))_{L_a(\partial T)}] \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(v - i_{ah}(v), B_{\text{el}}^\dagger p_h^m)_{L_a(T)} + (J_b p_h^m, v - i_{ah}(v))_{L_a(\partial T)}].\end{aligned}$$

On déduit alors

$$\begin{aligned}
& \langle \mathfrak{G}_a^m, v - i_{ah}(v) \rangle_a \\
& \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\|f_h^m + A_{\text{el}} u_h^m + B_{\text{el}}^\dagger p_h^m\|_{L_a(T)} \|v - i_{ah}(v)\|_{L_a(T)} + \|J_{uh}^m\|_{L_a(\partial T)} \|v - i_{ah}(v)\|_{L_a(T)} \right] \\
& \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[h_T^2 \|f_h^m + A_{\text{el}} u_h^m + B_{\text{el}}^\dagger p_h^m\|_{L_a(T)}^2 + h_T \|J_{uh}^m\|_{L_a(\partial T)}^2 \right] \right)^{1/2} \\
& \quad \times \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[h_T^{-2} \|v - i_{ah}(v)\|_{L_a(T)}^2 + h_T^{-1} \|v - i_{ah}(v)\|_{L_a(\partial T)}^2 \right] \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On a donc, en utilisant l'estimation (4.23),

$$\frac{\langle \mathfrak{G}_a^m, v - i_{ah}(v) \rangle_a}{\|v\|_a} \leq (\mathcal{E}_u^m)^{1/2} c_4^{1/2},$$

ce qui mène à l'estimation (4.25). Les estimations (4.26) et (4.27) se montrent de manière semblable. Finalement, (4.28) résulte de la définition de $\mathcal{E}_{\text{spc}}$. $\square$

On s'intéresse maintenant à l'optimalité des estimateurs d'erreur en espace et en temps déduits ci-dessus, à savoir si ces quantités fournissent des bornes inférieures pour les erreurs estimées dans l'équation (4.18). On commence par l'optimalité de l'estimateur d'erreur en temps.

Proposition 4.3. *On a l'estimation suivante*

$$\mathcal{E}_{\text{tim}} \leq 2 \int_0^T \|(p - p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds + 2 \int_0^T \|(p - \pi^0 p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds.$$

Preuve. On observe que

$$\mathcal{E}_{\text{tim}} = \int_0^T \|(p_{h\tau} - \pi^0 p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds,$$

et on utilise l'inégalité triangulaire. $\square$

Pour étudier l'optimalité de l'estimateur d'erreur spatiale, on considère les trois termes du membre de droite de (4.28). Chacun peut être majoré en utilisant la technique des fonctions bulles introduite par Verfürth [Ver94, Ver96]. On reprend les notations et les hypothèses introduites dans le paragraphe 3.4.3. On introduit la version localisée des estimateurs $\mathcal{E}_u^m$, $\mathcal{E}_u^m(\delta_t)$, $\mathcal{E}_{p,r}^m$ et $\mathcal{E}_{p,r}^m(\delta_t)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_u^m &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_{u,T}^m, & \mathcal{E}_u^m(\delta_t) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_{u,T}^m(\delta_t), \\
\mathcal{E}_{p,r}^m &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_{p,r,T}^m,
\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{E}_{u,T}^m = h_T^2 \|R_{uh}^m\|_{L_a(T)}^2 + h_T \|J_{uh}^m\|_{L_a(\partial T)}^2, \quad m \geq 0, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{E}_{u,T}^m(\delta_t) = \tau_m^2 [h_T^2 \|\delta_t R_{uh}^m\|_{L_a(T)}^2 + h_T \|\delta_t J_{uh}^m\|_{L_a(\partial T)}^2], \quad m \geq 1, \quad (4.30)$$

$$\mathcal{E}_{p,r,T}^m = h_T^{2r} [h_T^2 \|R_{ph}^m\|_{L_d(T)}^2 + h_T \|J_{ph}^m\|_{L_d(\partial T)}^2], \quad m \geq 1. \quad (4.31)$$

On désigne par $x \lesssim y$ l'inégalité $x \leq cy$ avec une constante strictement positive indépendante de la description en espace et en temps.

Proposition 4.4. *Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, soit Δ_T l'ensemble des éléments du maillage qui partagent au moins une face avec T . Alors, on a*

$$\mathcal{E}_{u,T}^m \lesssim \sum_{T' \in \Delta_T} [h_T^2 \|f^m - f_h^m\|_{L_a(T')}^2 + \|u^m - u_h^m\|_{a,T'}^2 + \|p^m - p_h^m\|_{c,T'}^2], \quad (4.32)$$

$$\mathcal{E}_{u,T}^m(\delta t) \lesssim \sum_{T' \in \Delta_T} \tau_m^2 [h_T^2 \|\delta_t f^m - \delta_t f_h^m\|_{L_a(T')}^2 + \|\delta_t u^m - \delta_t u_h^m\|_{a,T'}^2 + \|\delta_t p^m - \delta_t p_h^m\|_{c,T'}^2], \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \tau_m \mathcal{E}_{p,0,T}^m &\lesssim \sum_{T' \in \Delta_T} h_T^2 \int_{I_m} \left[\|(g - \pi^0 g_{h\tau})(s)\|_{L_d(T')}^2 + \tau_m^2 \|\delta_t u^m - \delta_t u_h^m\|_{a,T'}^2 \right. \\ &\quad \left. + \tau_m^2 \|\delta_t p^m - \delta_t p_h^m\|_{c,T'}^2 + h_T^{-2} \|(p - \pi^0 p_{h\tau})(s)\|_{d,T'}^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Preuve. En posant $\psi_T = \nu_{a,T} R_{uh}^m$, on obtient

$$\begin{aligned} \|R_{uh}^m\|_{L_a(T)}^2 &\lesssim (R_{uh}^m, \psi_T)_{L_a(T)} = (f_h^m - f^m, \psi_T)_{L_a(T)} + (A_{\text{el}}(u_h^m - u^m) + B_{\text{el}}^\dagger(p_h^m - p^m), \psi_T)_{L_a(T)} \\ &= (f_h^m - f^m, \psi_T)_{L_a(T)} + a_T(u^m - u_h^m, \psi_T) - b_T(\psi_T, p^m - p_h^m), \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$h_T \|R_{uh}^m\|_{L_a(T)} \lesssim h_T \|f_h^m - f^m\|_{L_a(T)} + \|u^m - u_h^m\|_{a,T} + \|p^m - p_h^m\|_{c,T}.$$

De manière similaire, en utilisant $\psi_F = \nu_{a,F} J_{uh}^m$, on obtient

$$\begin{aligned} (J_{uh}^m, \psi_F)_{L_a(F)} &= \sum_{T' \in \Delta_F} [a_{T'}(u_h^m - u^m, \pi_{a,F} \psi_F) - b_{T'}(\pi_{a,F} \psi_F, p_h^m - p^m) + (R_{uh}^m, \pi_{a,F} \psi_F)_{L_a(T')} \\ &\quad + (f^m - f_h^m, \pi_{a,F} \psi_F)_{L_a(T')}], \end{aligned}$$

d'où (4.32) s'en déduit aisément. L'estimation (4.33) se démontre de manière semblable. On démontre maintenant l'estimation (4.34). On a

$$\tau_m h_T^2 \|R_{ph}^m\|_{L_d(T)}^2 = \int_{I_m} h_T^2 \|R_{ph}^m\|_{L_d(T)}^2 ds.$$

En posant $\psi_T = \nu_{d,T} R_{ph}^m$, on obtient, pour tout $s \in I_m$,

$$\begin{aligned} \|R_{ph}^m\|_{L_d(T)}^2 &\lesssim (R_{ph}^m, \psi_T)_{L_d(T)} \\ &\lesssim (g_h^m - C \delta_t p_h^m - B_{\text{el}} \delta_t u_h^m + D_{\text{el}} p_h^m, \psi_T)_{L_d(T)} \\ &\quad - (g(s) - C \partial_t p(s) - B_{\text{el}} \partial_t u(s) + D_{\text{el}} p(s), \psi_T)_{L_d(T)}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \tau_m h_T^2 \|R_{ph}^m\|_{L_d(T)}^2 &\lesssim h_T^2 \int_{I_m} \left[(g_h^m - g(s), \psi_T)_{L_d(T)} - (C(p_h^m - p^m - p_h^{m-1} + p^{m-1}), \psi_T)_{L_d(T)} \right. \\ &\quad \left. - (B_{el}(u_h^m - u^m - u_h^{m-1} + u^{m-1}), \psi_T)_{L_d(T)} + d(p(s) - p_h^m, \psi_T) \right] ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \tau_m h_T^2 \|R_{ph}^m\|_{L_d(T)}^2 &\lesssim h_T^2 \int_{I_m} \left[\|(g - \pi^0 g_{h\tau})(s)\|_{L_d(T)}^2 ds + \|u^m - u_h^m - u^{m-1} + u_h^{m-1}\|_{a,T}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|p^m - p_h^m - p^{m-1} + p_h^{m-1}\|_{c,T}^2 + h_T^{-2} \|(p - \pi^0 p_{h\tau})(s)\|_{d,T}^2 \right] ds. \end{aligned}$$

De manière similaire, en utilisant $\psi_F = \nu_{d,F} J_{ph}^m$, on obtient, pour tout $s \in I_m$,

$$\begin{aligned} (J_{ph}^m, \psi_F)_{L_d(F)} &= \sum_{T' \in \Delta_F} [c_{T'}(\delta_t(p^m - p_h^m), \pi_{d,F} \psi_F) + b_{T'}(\delta_t(u^m - u_h^m), \pi_{d,F} \psi_F) \\ &\quad + d_{T'}(p(s) - p_h^m, \pi_{d,F} \psi_F) - (R_{ph}^m, \pi_{d,F} \psi_F)_{L_d(T')} \\ &\quad + (g_h^m - g(s), \pi_{d,F} \psi_F)_{L_d(T')}] , \end{aligned}$$

d'où (4.34) s'en déduit aisément. $\square$

Les estimations (4.32)–(4.33)–(4.34) montrent que les différents termes majorant $\mathcal{E}_{\text{spc}}$ dans (4.28) fournissent des minoration quasi-locales en espace pour l'erreur d'approximation à chaque instant discret et à l'instant précédent. Cette difficulté est directement liée au fait que l'analyse repose sur la norme naturelle de stabilité pour le problème continu qui fournit un contrôle sur la composante u seulement dans la norme $L_t^\infty(V_a)$. Un travail théorique plus approfondi est requis pour traiter cette question. Dans le cadre de cette thèse, on vérifiera uniquement dans les expérimentations numériques présentées dans la section 4.6 que si la solution exacte a un comportement régulier en temps, $\mathcal{E}_{\text{spc}}$ converge également de manière optimale.

4.4.2 Amélioration des estimations en utilisant la reconstruction elliptique

Pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, on définit la reconstruction elliptique de $(u_h^n, p_h^n) \in V_{ah} \times V_{dh}$ comme les fonctions $(U^n, P^n) \in V_a \times V_d$ telles que

$$a(U^n, v) - b(v, P^n) = a(u_h^n, P_{ah}v) - b(P_{ah}v, p_h^n), \quad \forall v \in V_a, \quad (4.35)$$

$$d(P^n, q) = d(p_h^n, P_{dh}q) - b(\delta_t u_h^n, q - P_{dh}q), \quad \forall q \in V_d, \quad (4.36)$$

où P_{ah} (resp., P_{dh}) désigne la projection L_a -orthogonale de V_a sur V_{ah} (resp., la projection L_d -orthogonale de V_d sur V_{dh}). Pour $n = 0$, on utilise la convention que $\delta_t u_h^0 = 0$ et $\delta_t p_h^0 = 0$. On observe que

$$AU^n + B^\dagger P^n = A_h u_h^n + B_h^\dagger p_h^n, \quad (4.37)$$

$$DP^n = D_h p_h^n + (B - B_h) \delta_t u_h^n. \quad (4.38)$$

En effet, pour tout $q \in V_d$,

$$\begin{aligned}\langle DP^n, q \rangle_d &= -d(P^n, q) = -d(p_h^n, P_{dh}q) + b(\delta_t u_h^n, q - P_{dh}q) \\ &= (D_h p_h^n, P_{dh}q)_{L_d} + ((B - B_h)\delta_t u_h^n, q)_{L_d} \\ &= (D_h p_h^n + (B - B_h)\delta_t u_h^n, q)_{L_d},\end{aligned}$$

puisque $D_h p_h^n \in V_{dh}$. La preuve de l'équation (4.37) est similaire. En effet, pour tout $v \in V_a$, on a

$$\begin{aligned}\langle AU^n + B^\dagger P^n, v \rangle_a &= -a(U^n, v) + b(v, P^n) \\ &= -a(u_h^n, P_{ah}v) + b(P_{ah}v, p_h^n) \\ &= (A_h u_h^n, P_{ah}v)_{L_a} + (B_h^\dagger p_h^n, P_{ah}v)_{L_a} \\ &= (A_h u_h^n, v)_{L_a} + (B_h^\dagger p_h^n, v)_{L_a}.\end{aligned}$$

L'idée clé pour estimer les erreurs $\|u^n - u_h^n\|_a$ et $\|p^n - p_h^n\|_c$ est de considérer les décompositions

$$\begin{aligned}u^n - u_h^n &= \omega_u^n - \rho_u^n, & \omega_u^n &= U^n - u_h^n, & \rho_u^n &= U^n - u^n, \\ p^n - p_h^n &= \omega_p^n - \rho_p^n, & \omega_p^n &= P^n - p_h^n, & \rho_p^n &= P^n - p^n.\end{aligned}$$

Les quantités ω_u^n et ω_p^n peuvent être bornées par les estimations d'erreur *a posteriori* pour le problème stationnaire, tandis que les quantités ρ_u^n et ρ_p^n peuvent être estimées grâce à la stabilité du problème continu en fonction de ω_u^n et ω_p^n et d'autres quantités calculables. Comme dans le paragraphe 3.4.4, on fait appel à l'hypothèse de régularité 3.4 qu'on rappelle ci-dessous.

Hypothèse 4.1. Il existe une constante c_6 et un réel strictement positif δ tels que pour tout $r \in L_d$, l'unique solution $\phi \in V_d$ du problème dual $d(q, \phi) = (r, q)_{L_d}$ pour tout $q \in V_d$, est telle qu'il existe $\phi_h \in V_{dh}$ satisfaisant

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2\delta} [h_T^{-2} \|\phi - \phi_h\|_{L_d(T)}^2 + h_T^{-1} \|\phi - \phi_h\|_{L_d(\partial T)}^2] \leq c_6 \|r\|_{L_d}^2. \quad (4.39)$$

On estime d'abord les quantités ω_u^n et ω_p^n en fonction des estimateurs d'erreur en espace $\mathcal{E}_u^m$ et $\mathcal{E}_{p,r}^m$ définis par (4.21) et (4.22) respectivement. Ces équations définissent $\mathcal{E}_u^m$ pour $m \geq 0$ et $\mathcal{E}_{p,r}^m$ pour $m \geq 1$. Pour $m = 0$, on pose

$$R_{ph}^0 = (D_{el} - D_h)p_{0h} \quad \text{et} \quad J_{ph}^0 = J_d p_h^0. \quad (4.40)$$

Lemme 4.2. Dans le cadre ci-dessus, on a pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$,

$$\|\omega_u^n\|_a^2 \leq 2c_4 \mathcal{E}_u^n + 2\tilde{\beta}^2 c_6 \mathcal{E}_{p,\delta}^n, \quad (4.41)$$

$$\|\omega_p^n\|_c^2 \leq \gamma_2^2 c_6 \mathcal{E}_{p,\delta}^n. \quad (4.42)$$

Preuve. (i) Estimation de $\|\omega_p^n\|_{L_d}$. Soit ϕ la solution duale associée à la donnée $r := \omega_p^n$ dans l'hypothèse 4.1. Alors,

$$\|\omega_p^n\|_{L_d}^2 = (r, r)_{L_d} = d(r, \phi) = d(r, \phi - \phi_h),$$

puisque grâce à (4.36), $d(r, \phi_h) = d(P^n - p_h^n, \phi_h) = 0$ pour $\phi_h \in V_{dh}$. En utilisant (3.16) et (4.39), on arrive à

$$\|\omega_p^n\|_{L_d}^2 \leq c_6 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2\delta} [h_T^2 \|D_{\text{el}} \omega_p^n\|_{L_d(T)}^2 + h_T \|J_d \omega_p^n\|_{L_d(\partial T)}^2].$$

En utilisant (4.6) et (4.38), on obtient pour $n \geq 1$, et sur chaque $T \in \mathcal{T}_h$,

$$D_{\text{el}} \omega_p^n = D_{\text{el}} P^n - D_{\text{el}} p_h^n = D_h p_h^n + (B_{\text{el}} - B_h) \delta_t u_h^n - D_{\text{el}} p_h^n = -R_{ph}^n,$$

et cette relation est également valable pour $n = 0$ par définition de R_{ph}^0 . De plus, pour tout $n \geq 0$, $J_d P^n = 0$ puisque $DP^n \in V_{dh} \subset L_d$. En conséquence,

$$\|\omega_p^n\|_{L_d}^2 \leq c_6 \mathcal{E}_{p,\delta}^n,$$

si bien que

$$\|\omega_p^n\|_c^2 \leq \gamma_2^2 c_6 \mathcal{E}_{p,\delta}^n.$$

(ii) Estimation de $\|\omega_u^n\|_a$. On observe que

$$\begin{aligned} \|\omega_u^n\|_a &= \sup_{0 \neq v \in V_a} \frac{a(\omega_u^n, v)}{\|v\|_a} \leq \sup_{0 \neq v \in V_a} \left(\frac{a(\omega_u^n, v) - b(v, \omega_p^n)}{\|v\|_a} \right) + \tilde{\beta} \|\omega_p^n\|_{L_d} \\ &\leq \sup_{0 \neq v \in V_a} \left(\frac{a(\omega_u^n, v - i_{ah}(v)) - b(v - i_{ah}(v), \omega_p^n)}{\|v\|_a} \right) + \tilde{\beta} \|\omega_p^n\|_{L_d}. \end{aligned}$$

grâce à (4.35) puisque $i_{ah}(v) \in V_{ah}$. En utilisant (3.15), (3.17) et (3.18), on obtient

$$\|\omega_u^n\|_a^2 \leq 2c_4 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [h_T^2 \|A_{\text{el}} \omega_u^n + B_{\text{el}}^\dagger \omega_p^n\|_{L_a(T)}^2 + h_T \|J_a \omega_u^n - J_b \omega_p^n\|_{L_a(\partial T)}^2] + 2\tilde{\beta}^2 \|\omega_p^n\|_{L_d}^2.$$

Grâce à (4.5) et (4.37), $AU^n + B^\dagger P^n = A_h u_h^n + B_h^\dagger p_h^n = -f_h^n$ de telle sorte que sur chaque $T \in \mathcal{T}_h$,

$$A_{\text{el}} \omega_u^n + B_{\text{el}}^\dagger \omega_p^n = AU^n + B^\dagger P^n - A_{\text{el}} u_h^n - B_{\text{el}}^\dagger p_h^n = -R_{uh}^n.$$

De plus, $J_a \omega_u^n - J_b \omega_p^n = -J_{uh}^n$ puisque $AU^n + B^\dagger P^n \in L_a$. Ceci fournit (4.41). $\square$

On s'intéresse maintenant aux quantités ρ_u^n et ρ_p^n . On définit les estimateurs d'erreur sur les données, d'erreur en espace et d'erreur en temps par

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\text{dat}} = \|U^0 - u_0\|_a^2 + \|P^0 - p_0\|_c^2 + 2\mathcal{E}(f, g), \quad (4.43)$$

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\text{spc}} = \sum_{m=1}^N \tau_m^{-1} [2\gamma^2 c_6 (\gamma_2^2 + 2\beta^2 \tilde{\beta}^2) \mathcal{E}_{p,\delta}^m(\delta_t) + 4\beta^2 \gamma^2 c_4 \mathcal{E}_u^m(\delta_t)], \quad (4.44)$$

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\text{tim}} = \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^2 \tau_1 \|C \delta_t p_h^1 + B_{\text{el}} \delta_t u_h^1 - D_h p_{0h} - g_h^1\|_{L_d}^2 + \sum_{m=2}^N \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^2 \tau_m^3 \|\delta_t (C \delta_t p_h^m + B_{\text{el}} \delta_t u_h^m - g_h^m)\|_{L_d}^2, \quad (4.45)$$

où on a introduit, pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p,\delta}^m(\delta_t) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_{p,\delta,T}^m(\delta_t) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2\delta} \tau_m^2 [h_T^2 \|\delta_t R_{ph}^m\|_{L_d(T)}^2 + h_T \|\delta_t J_{ph}^m\|_{L_d(\partial T)}^2]. \end{aligned}$$

Lemme 4.3. *On a pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,*

$$\frac{1}{2}\|\rho_u^n\|_a^2 + \frac{1}{2}\|\rho_p^n\|_c^2 \leq \widehat{\mathcal{E}}_{\text{dat}} + \widehat{\mathcal{E}}_{\text{spc}} + \widehat{\mathcal{E}}_{\text{tim}}. \quad (4.46)$$

Preuve. Les estimations pour ρ_u^n et ρ_p^n résultent des propriétés de stabilité du problème continu. Ainsi, il est une nouvelle fois commode de traiter les équations valides presque partout dans $[0, T]$ plutôt qu'aux instants discrets $\{t_n\}_{n=0}^N$. Soit U_τ (resp., P_τ) la fonction continue et affine par morceaux en temps telle que pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, $U_\tau^n = U^n$ (resp., $P_\tau^n = P^n$). Soit $\omega_{u\tau}$ et $\omega_{p\tau}$ construits d'une manière similaire à partir de $\{\omega_u^n\}_{n=0}^N$ et $\{\omega_p^n\}_{n=0}^N$. On définit

$$\rho_{u\tau} = U_\tau - u \quad \text{et} \quad \rho_{p\tau} = P_\tau - p.$$

On observe que pour presque tout $t \in [0, T]$ et pour tout $v \in V_a$,

$$\begin{aligned} a(\rho_{u\tau}, v) - b(v, \rho_{p\tau}) &= a(U_\tau, v) - b(v, P_\tau) - (f, v)_{L_a} \\ &= a(u_{h\tau}, P_{ah}v) - b(P_{ah}v, p_{h\tau}) - (f, v)_{L_a} \\ &= (f_{h\tau}, P_{ah}v)_{L_a} - (f, v)_{L_a} = (f_{h\tau} - f, v)_{L_a}, \end{aligned}$$

tandis que pour tout $q \in V_d$,

$$\begin{aligned} c(\partial_t \rho_{p\tau}, q) + b(\partial_t \rho_{u\tau}, q) + d(\rho_{p\tau}, q) &= c(\partial_t P_\tau, q) + b(\partial_t U_\tau, q) + d(P_\tau, q) - (g, q)_{L_d} \\ &= c(\partial_t \omega_{p\tau}, q) + b(\partial_t \omega_{u\tau}, q) + (D\pi^0 P_\tau, q)_{L_d} + d(P_\tau, q) + (\pi^0 g_{h\tau} - g, q)_{L_d} \\ &= c(\partial_t \omega_{p\tau}, q) + b(\partial_t \omega_{u\tau}, q) + (D(\pi^0 P_\tau - P_\tau), q)_{L_d} + (\pi^0 g_{h\tau} - g, q)_{L_d}, \end{aligned}$$

où $\pi^0 P_\tau$ est une fonction constante par morceaux en temps égale à P^n sur I_n pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$. En effet, sur chaque intervalle de temps I_n ,

$$\begin{aligned} c(\partial_t p_{h\tau}, q) + b(\partial_t u_{h\tau}, q) &= (C\delta_t p_h^n + B\delta_t u_h^n, q)_{L_d} \\ &= (g_h^n + D_h p_h^n - B_h \delta_t u_h^n + B\delta_t u_h^n, q)_{L_d} = (g_h^n + DP^n, q)_{L_d}. \end{aligned}$$

En testant les équations ci-dessus avec $v := \partial_t \rho_{u\tau}$ et $q := \rho_{p\tau}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d_t\|\rho_{u\tau}\|_a^2 + \frac{1}{2}d_t\|\rho_{p\tau}\|_c^2 + \|\rho_{p\tau}\|_d^2 &= (f_{h\tau} - f, \partial_t \rho_{u\tau})_{L_a} + c(\partial_t \omega_{p\tau}, \rho_{p\tau}) + b(\partial_t \omega_{u\tau}, \rho_{p\tau}) \\ &\quad + (D(\pi^0 P_\tau - P_\tau), \rho_{p\tau})_{L_d} + (\pi^0 g_{h\tau} - g, \rho_{p\tau})_{L_d}, \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d_t\|\rho_{u\tau}\|_a^2 + \frac{1}{2}d_t\|\rho_{p\tau}\|_c^2 &\leq (f_{h\tau} - f, \partial_t \rho_{u\tau})_{L_a} + \gamma^2\|\partial_t \omega_{p\tau}\|_c^2 + \beta^2\gamma^2\|\partial_t \omega_{u\tau}\|_a^2 + \tilde{\gamma}^2\gamma_1^{-2}\|D(\pi^0 P_\tau - P_\tau)\|_c^2 + \|\pi^0 g_{h\tau} - g\|_d^2. \end{aligned}$$

En procédant comme dans la preuve de la proposition 4.1, on obtient pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$ la majoration

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\rho_u^n\|_a^2 + \frac{1}{2}\|\rho_p^n\|_c^2 &\leq \widehat{\mathcal{E}}_{\text{dat}} + \int_0^T 2\gamma^2\|\partial_t \omega_{p\tau}(s)\|_c^2 ds + \int_0^T 2\beta^2\gamma^2\|\partial_t \omega_{u\tau}(s)\|_a^2 ds \\ &\quad + \int_0^T 2\tilde{\gamma}^2\gamma_1^{-2}\|D(\pi^0 P_\tau - P_\tau)(s)\|_c^2 ds. \end{aligned}$$

Les second et troisième termes dans la borne supérieure fournissent l'estimateur d'erreur en espace $\widehat{\mathcal{E}}_{\text{spc}}$ grâce au fait que $\omega_{p\tau}$ et $\omega_{u\tau}$ sont affines par morceaux en temps de telle sorte que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\partial_t \omega_{p\tau}(s)\|_c^2 ds &= \sum_{m=1}^N \tau_m^{-1} \|\omega_p^m - \omega_p^{m-1}\|_c^2, \\ \int_0^T \|\partial_t \omega_{u\tau}(s)\|_a^2 ds &= \sum_{m=1}^N \tau_m^{-1} \|\omega_u^m - \omega_u^{m-1}\|_a^2. \end{aligned}$$

Par linéarité et en procédant comme dans la preuve du lemme 4.2, on obtient

$$\begin{aligned} \|\omega_u^m - \omega_u^{m-1}\|_a^2 &\leq 2c_4 \mathcal{E}_u^m(\delta_t) + 2\tilde{\beta}^2 c_6 \mathcal{E}_{p,\delta}^m(\delta_t), \\ \|\omega_p^m - \omega_p^{m-1}\|_c^2 &\leq \gamma_2^2 c_6 \mathcal{E}_{p,\delta}^m(\delta_t). \end{aligned}$$

Finalement, le dernier terme dans la borne supérieure fournit l'estimateur d'erreur en temps $\widehat{\mathcal{E}}_{\text{tim}}$ puisque

$$\int_0^T \|D(\pi^0 P_\tau - P_\tau)(s)\|_c^2 ds = \sum_{m=1}^N \frac{1}{3} \tau_m \|D(P^m - P^{m-1})\|_c^2,$$

et pour tout $m \geq 0$, $DP^m = D_{\text{el}} p_h^m - R_{ph}^m$. $\square$

Théorème 4.3. *Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,*

$$\frac{1}{4} \|u^n - u_h^n\|_a^2 + \frac{1}{4} \|p^n - p_h^n\|_c^2 \leq \widehat{\mathcal{E}}_{\text{dat}} + \widehat{\mathcal{E}}_{\text{spc}} + \widehat{\mathcal{E}}_{\text{tim}} + c_4 \mathcal{E}_u^n + c_6 \left(\frac{1}{2} \gamma_2^2 + \tilde{\beta}^2\right) \mathcal{E}_{p,\delta}^n. \quad (4.47)$$

Preuve. Conséquence du lemme 4.2, du lemme 4.3 et de l'inégalité triangulaire. $\square$

4.5 Application à la modélisation Hydro-Mécanique

Dans cette section, on présente l'application de la théorie développée précédemment dans le cas où on s'intéresse au système de la poroélasticité (2.16a)-(2.16b). Lorsque des éléments finis de Lagrange de degré $k \geq 2$ sont utilisés pour approcher le déplacement et des éléments finis continus de degré $k-1$ sont utilisés pour approcher la pression, $\|u^n - u_h^n\|_{1,\Omega}$ et $\|p^n - p_h^n\|_{0,\Omega}$ convergent à l'ordre k en espace et au premier ordre en temps, tandis que $(\sum_{m=1}^n \tau_m \|p^m - p_h^m\|_{1,\Omega}^2)^{1/2}$ converge à l'ordre $(k-1)$ en espace et au premier ordre en temps.

4.5.1 Expression des estimations d'erreur *a posteriori*

L'analyse d'erreur *a posteriori* est effectuée sur le système adimensionné (2.23a)-(2.23b) du paragraphe 2.2.1. Comme dans le cas stationnaire, on a implanté une formulation des estimateurs d'erreur *a posteriori* dans un cadre un peu plus général que celui du problème (2.30a)-(2.30b) où des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en déplacements et en pression sont imposées sur toute la frontière Γ . L'expression des estimateurs d'erreur *a posteriori* donnée ci-dessous permet, outre les conditions de Dirichlet homogènes, de prendre également en compte les conditions

aux limites de Neumann non-homogènes, telles qu'elles sont définies par les formules (2.17) et (2.18). On donne également l'expression de la norme de stabilité nécessaire pour le calcul des indices d'efficacité dans la section suivante.

Estimateurs d'erreur en espace.

Pour les estimateurs d'erreur *a posteriori* relatifs à la partie mécanique, on a pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{u,T}^m &= h_T^2 \frac{1}{P^2 L^d} \|f^m + \nabla \cdot \sigma'(u_h^m)\|_{0,T}^2 + h_T \frac{1}{P^2 L^d} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^i} \|\llbracket \sigma'(u_h^m) \cdot n \rrbracket\|_{0,F}^2 \\ &\quad + h_T \frac{1}{P^2 L^d} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^\partial \cap \Gamma_N^M} \|\sigma_{\text{nor}}^m - (\sigma'(u_h^m) \cdot n - b p_h^m n)\|_{0,F}^2, \\ \mathcal{E}_{u,T}^m(\delta_t) &= h_T^2 \frac{1}{P^2 L^d} \|f^m - f^{m-1} + \nabla \cdot \sigma'(u_h^m - u_h^{m-1}) - b \nabla(p_h^m - p_h^{m-1})\|_{0,T}^2 \\ &\quad + h_T \frac{1}{P^2 L^d} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^i} \|\llbracket \sigma'(u_h^m - u_h^{m-1}) \cdot n \rrbracket\|_{0,F}^2 \\ &\quad + h_T \frac{1}{P^2 L^d} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^\partial \cap \Gamma_N^M} \|\sigma_{\text{nor}}^m - \sigma_{\text{nor}}^{m-1} - (\sigma'(u_h^m - u_h^{m-1}) \cdot n - b(p_h^m - p_h^{m-1})n)\|_{0,F}^2.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\tau_m^{-1} \mathcal{E}_{u,T}^m(\delta_t) &= \frac{h_T^2}{\tau_m} \frac{1}{P^2 L^{d-2} \kappa M} \|f^m - f^{m-1} + \nabla \cdot \sigma'(u_h^m - u_h^{m-1}) - b \nabla(p_h^m - p_h^{m-1})\|_{0,T}^2 \\ &\quad + \frac{h_T}{\tau_m} \frac{1}{P^2 L^{d-2} \kappa M} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^i} \|\llbracket \sigma'(u_h^m - u_h^{m-1}) \cdot n \rrbracket\|_{0,F}^2 \\ &\quad + \frac{h_T}{\tau_m} \frac{1}{P^2 L^{d-2} \kappa M} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^\partial \cap \Gamma_N^M} \|\sigma_{\text{nor}}^m - \sigma_{\text{nor}}^{m-1} - (\sigma'(u_h^m - u_h^{m-1}) \cdot n - b(p_h^m - p_h^{m-1})n)\|_{0,F}^2.\end{aligned}$$

On détaille maintenant l'expression des estimateurs d'erreur relatifs à la partie hydraulique. On rappelle que dans *Code_Aster* l'interpolation de la pression est linéaire, ce qui fait disparaître le terme Dp_h^m . Dans les applications visées, le terme g_h^m disparaît également car il est proportionnel à la divergence de la gravité. On a pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned}\tau_m \mathcal{E}_{p,0,T}^m &= \tau_m h_T^2 \frac{E^2}{P^2 L^d \kappa M} \left\| \frac{1}{M} \delta_t p_h^m + b \nabla \cdot (\delta_t u_h^m) \right\|_{0,T}^2 + \tau_m h_T \frac{E^2}{P^2 L^d \kappa \rho^2 M} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^i} \|\llbracket M_{\text{iq},h}^m \cdot n \rrbracket\|_{0,F}^2 \\ &\quad + \tau_m h_T \frac{E^2}{P^2 L^d \kappa \rho^2 M} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^\partial \cap \Gamma_N^H} \|M_{\text{iq,nor}}^m - M_{\text{iq},h}^m \cdot n\|_{0,F}^2.\end{aligned}$$

Preuve. En choisissant $r = 0$, le premier terme de (4.22), multiplié par τ_m^* , est

$$\begin{aligned}
\tau_m^* h_{T^*}^2 \|R_{ph}^{m,*}\|_{0,T^*}^2 &= \tau_m^* h_{T^*}^2 \|C\delta_{t^*} p_h^{m,*} + B\delta_{t^*} u_h^{m,*}\|_{0,T^*}^2 \\
&= \frac{\tau_m}{T} \frac{h_T^2}{L^2} \left\| \frac{E}{M} \frac{T}{P} \delta_t p_h^m + b \frac{LT}{U} \nabla \cdot (\delta_t u_h^m) \right\|_{0,T}^2 \frac{1}{L^d} \\
&= \frac{\tau_m}{T} \frac{h_T^2}{L^2} \frac{E^2 T^2}{P^2} \left\| \frac{1}{M} \delta_t p_h^m + b \nabla \cdot (\delta_t u_h^m) \right\|_{0,T}^2 \frac{1}{L^d} \\
&= \tau_m h_T^2 \frac{E^2}{P^2 L^d \kappa M} \left\| \frac{1}{M} \delta_t p_h^m + b \nabla \cdot (\delta_t u_h^m) \right\|_{0,T}^2.
\end{aligned}$$

Pour toute face intérieure $F^* \subset \partial T^*$, le second terme de (4.22), multiplié par τ_m^* , est

$$\begin{aligned}
\tau_m^* h_{T^*} \|J_{ph}^{m,*}\|_{0,F^*}^2 &= \tau_m^* h_{T^*} \left\| \frac{E}{M} \nabla^* p_h^{m,*} \cdot n \right\|_{0,F^*}^2 \\
&= \frac{\tau_m}{T} \frac{h_T}{L} \left\| \frac{E}{M} \frac{L}{P} \nabla p_h^m \cdot n \right\|_{0,F}^2 \frac{1}{L^{d-1}} \\
&= \tau_m h_T \frac{E^2 \kappa}{M P^2 L^d} \|\nabla p_h^m \cdot n\|_{0,F}^2 \\
&= \tau_m h_T \frac{E^2}{P^2 L^d \kappa \rho^2 M} \|M_{lq,h}^m \cdot n\|_{0,F}^2.
\end{aligned}$$

□

De même, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{p,1,T}^m &= h_T^4 \frac{E^2}{P^2 L^d \kappa^2 M^2} \left\| \frac{1}{M} \delta_t p_h^m + b \nabla \cdot (\delta_t u_h^m) \right\|_{0,T}^2 + h_T^3 \frac{E^2}{P^2 L^d M^2 \kappa^2 \rho^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^i} \|M_{lq,h}^m \cdot n\|_{0,F}^2 \\
&\quad + h_T^3 \frac{E^2}{P^2 L^d M^2 \kappa^2 \rho^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^{\partial} \cap \Gamma_N^H} \|M_{lq,nor}^m - M_{lq,h}^m \cdot n\|_{0,F}^2.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on a

$$\begin{aligned}
\tau_1^{-1} \mathcal{E}_{p,1,T}^1(\delta_t) &= \frac{h_T^4}{\tau_1} \frac{E^2}{P^2 L^{d-2} \kappa^3 M^3} \left\| \frac{1}{M} \delta_t p_h^1 + b \nabla \cdot (\delta_t u_h^1) - \kappa D_h p_h^0 \right\|_{0,T}^2 \\
&\quad + \frac{h_T^3}{\tau_1} \frac{E^2}{P^2 L^{d-2} \kappa^3 M^3 \rho^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^i} \|M_{lq,h}^1 - M_{lq,h}^0\|_{0,F}^2 \\
&\quad + \frac{h_T^3}{\tau_1} \frac{E^2}{P^2 L^{d-2} \kappa^3 M^3 \rho^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^{\partial} \cap \Gamma_N^H} \|M_{lq,nor}^1 - M_{lq,nor}^0 - (M_{lq,h}^1 - M_{lq,h}^0)\|_{0,F}^2,
\end{aligned}$$

puisque

$$D_h p_h^0 = \frac{MP}{EL^2} (D_h p_h^0)^*.$$

Pour tout $m \in \llbracket 2, N \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned}
& \tau_m^{-1} \mathcal{E}_{p,1,T}^m(\delta_t) \\
&= \frac{h_T^4}{\tau_m} \frac{E^2}{P^2 L^{d-2} \kappa^3 M^3} \left\| \frac{1}{M} \frac{p_h^m - 2p_h^{m-1} + p_h^{m-2}}{\tau_m} + b \frac{\nabla \cdot u_h^m - 2\nabla \cdot u_h^{m-1} + \nabla \cdot u_h^{m-2}}{\tau_m} \right\|_{0,T}^2 \\
&+ \frac{h_T^3}{\tau_m} \frac{E^2}{P^2 L^{d-2} \kappa^3 M^3 \rho^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^i} \|M_{\text{q},h}^1 - M_{\text{q},h}^0\|_{0,F}^2 \\
&+ \frac{h_T^3}{\tau_m} \frac{E^2}{P^2 L^{d-2} \kappa^3 M^3 \rho^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T^0 \cap \Gamma_N^H} \|M_{\text{q},\text{nor}}^1 - M_{\text{q},\text{nor}}^0 - (M_{\text{q},h}^1 - M_{\text{q},h}^0)\|_{0,F}^2.
\end{aligned}$$

Estimateurs d'erreur en temps.

L'estimateur temporel pour la méthode directe est tel que pour tout $m \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\tau_m^* \|p_h^{m,*} - p_h^{m-1,*}\|_d^2 = \tau_m \frac{E}{P^2 L^d \rho^2 \kappa} \|M_{\text{q},h}^m - M_{\text{q},h}^{m-1}\|_{0,\Omega}^2.$$

L'estimateur temporel pour la méthode par reconstruction elliptique est tel que

$$\tau_1^* \|C\delta_{t*} p_h^{1,*} + B\delta_{t*} u_h^{1,*} - D_h p_h^{0,*}\|_{L_d}^2 = \tau_1 \frac{E^2}{P^2 L^{d-2} \kappa M} \left\| \frac{1}{M} \delta_t p_h^1 + b \nabla \cdot (\delta_t u_h^1) - \kappa D_h p_h^0 \right\|_{0,\Omega}^2,$$

et pour tout $m \in \llbracket 2, N \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
& (\tau_m^*)^3 \|\delta_{t*} (C\delta_{t*} p_h^{m,*} + B\delta_{t*} u_h^{m,*})\|_{L_d}^2 \\
&= \tau_m \frac{E^2}{P^2 L^{d-2} \kappa M} \left\| \frac{1}{M} \frac{p_h^m - 2p_h^{m-1} + p_h^{m-2}}{\tau_m} + b \frac{\nabla \cdot u_h^m - 2\nabla \cdot u_h^{m-1} + \nabla \cdot u_h^{m-2}}{\tau_m} \right\|_{0,\Omega}^2.
\end{aligned}$$

Norme de stabilité.

On donne maintenant l'expression de la norme de stabilité utilisée pour le calcul des indices d'efficacité. On a pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned}
\|u^n - u_h^n\|_a^2 &= \frac{E^2}{P^2 L^d} \left(\int_{\Omega} \lambda_1 \nabla \cdot (u^n - u_h^n)^2 + 2 \int_{\Omega} \lambda_2 \varepsilon(u^n - u_h^n)^2 \right), \\
\|p^n - p_h^n\|_c^2 &= \frac{E}{P^2 L^d M} \int_{\Omega} (p^n - p_h^n)^2.
\end{aligned}$$

Pour la norme $L_t^2(V_d)$ de la pression, on utilise une formule d'intégration de Simpson en temps.

Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^{t_n} \|(p - p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds \right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{m=1}^n \tau_m \int_{\Omega} \frac{\kappa E}{6P^2 L^d} \left[\nabla(p^m - p_h^m)^2 + 4\nabla(p^{m-\frac{1}{2}} - p_h^{m-\frac{1}{2}})^2 + \nabla(p^{m-1} - p_h^{m-1})^2 \right] \right]^{1/2},
\end{aligned}$$

où on a noté $p_h^{m-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (p_h^m + p_h^{m-1})$. Enfin,

$$\left[\int_0^{t_n} \|(p - \pi^0 p_{h\tau})(s)\|_d^2 ds \right]^{1/2} = \left[\sum_{m=1}^n \tau_m \int_{\Omega} \frac{\kappa E}{P^2 L^d} \nabla(p^m - p_h^m)^2 \right]^{1/2}.$$

4.5.2 Mise en œuvre dans *Code_Aster*

Les estimateurs d'erreur pour le problème HM instationnaire sont mis en œuvre dans *Code_Aster* et enrichissent ceux implantés pour le problème HM stationnaire. Les routines de calcul des estimateurs d'erreur en espace **erhmv*.f** (terme résiduel de l'estimateur), **erhms*.f** (terme de saut aux interfaces), **erhmb*.f** (terme pour la condition de Neumann au bord) et **te0497.f** (somme des différents termes) sont communes aux deux problèmes et sont intégrées dans l'opérateur de post-traitement **CALC_ELEM**. Pour les termes composant l'estimateur d'erreur en temps, leur calcul est effectué dans l'opérateur de résolution des problèmes **THHM**, **STAT_NON_LINE**, afin de faciliter la mise en œuvre d'une éventuelle procédure d'adaptation automatique de la discrétisation temporelle. Les estimateurs d'erreur sur les données $\hat{\mathcal{E}}_{\text{dat}}$ n'ont pas été implantés.

4.6 Résultats numériques

On considère sur le domaine $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ la solution analytique suivante du problème (2.16a)-(2.16b) avec les conditions aux limites de Dirichlet correspondantes,

$$u(t, x, y) = -\frac{\exp(-At)}{2\pi} \begin{bmatrix} \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{bmatrix}, \quad p(t, x, y) = \exp(-At) \sin(\pi x) \sin(\pi y),$$

avec $A = \frac{2\pi^2\kappa}{b+\frac{1}{M}}$, $\kappa = 0.05$, $b = 0.75$, $\frac{1}{M} = \frac{3}{28}$. Les coefficients de Lamé sont $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{8}$, ce qui donne un coefficient de Poisson $\nu = 0.4$ et un module de Young $E = \frac{7}{20}$. Les taux de convergence en espace sont évalués sur une série de triangulations structurées basées sur un pas de maillage à la frontière h_0 et raffinées uniformément.

Les tableaux 4.1 et 4.2 présentent les résultats de convergence (sous raffinement spatial et temporel respectivement) pour des erreurs d'approximation mesurées dans différentes normes. Tous les taux de convergence concordent avec ceux prédits par l'analyse d'erreur *a priori*. Une observation importante est que l'erreur globale est dominée par l'erreur en norme $L_t^2(H_x^1)$ sur la pression.

h_0^{-1}	$\ u - u_{h\tau}\ _a$	$\ p - p_{h\tau}\ _c$	$(\int_0^T \ p - p_{h\tau}\ _d^2)^{1/2}$	$(\int_0^T \ p - \pi^0 p_{h\tau}\ _d^2)^{1/2}$
4	8.12e-3 -	5.66e-3 -	2.75e-2 -	2.75e-2 -
8	2.15e-3 1.92	1.49e-3 1.92	1.45e-2 0.92	1.45e-2 0.92
16	5.34e-4 2.01	3.73e-4 2.00	7.33e-3 0.98	7.33e-3 0.98
32	1.32e-4 2.02	9.21e-5 2.01	3.68e-3 0.99	3.68e-3 0.99

Tableau 4.1. Erreurs à l'instant final et taux de convergence sous raffinement spatial ; $T = 0.1$, $\tau = 2.50\text{e-}4$.

Pour évaluer l'estimation d'erreur *a posteriori* obtenue avec l'approche directe, voir (4.18), on évalue les quantités

τ	$\ u - u_{h\tau}\ _a$	$\ p - p_{h\tau}\ _c$	$(\int_0^T \ p - p_{h\tau}\ _d^2)^{1/2}$	$(\int_0^T \ p - \pi^0 p_{h\tau}\ _d^2)^{1/2}$
0.25	5.10e-3 -	5.64e-3 -	1.68e-2 -	1.81e-2 -
0.2	4.13e-3 0.94	4.55e-3 0.96	1.39e-2 0.84	1.48e-2 0.93
0.1	2.12e-3 0.96	2.31e-3 0.98	7.58e-3 0.87	7.74e-3 0.93
0.05	1.07e-3 0.99	1.16e-3 0.99	4.24e-3 0.83	4.26e-3 0.86

Tableau 4.2. Erreurs à l'instant final et taux de convergence sous raffinement temporel ; $T=1$, $h_0 = 1/128$.

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \left(\sum_{m=1}^N \tau_m \mathcal{E}_{p,0}^m \right)^{1/2}, & \eta_2 &= \sup_{0 \leq m \leq N} (\mathcal{E}_u^m)^{1/2}, \\
\eta_3 &= \sum_{m=1}^N (\mathcal{E}_u^m(\delta_t))^{1/2}, & \eta_4 &= \left(\sum_{m=1}^N \tau_m \|p_h^m - p_h^{m-1}\|_d^2 \right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{4.48}$$

ainsi que les indices d'efficacité

$$\mathcal{I}_{\text{eff}} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4}{(\int_0^T [\|p - p_{h\tau}\|_d^2 + \|p - \pi^0 p_{h\tau}\|_d^2])^{1/2}}, \quad \mathcal{I}_{\text{eff}}^* = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4}{\|u^N - u_h^N\|_a + \|p^N - p_h^N\|_c}. \tag{4.49}$$

On rappelle que η_1 , η_2 et η_3 sont associés à l'estimateur d'erreur spatial et que η_4 est associé à l'estimateur d'erreur temporelle. Les tableaux 4.3 et 4.4 présentent les résultats obtenus sous raffinement spatial et temporel, respectivement. Tous les taux de convergence observés concordent avec les prédictions théoriques. De plus, l'indice d'efficacité $\mathcal{I}_{\text{eff}}$ prend des valeurs entre 2 et 3, indiquant que les estimateurs proposés se comportent de manière satisfaisante pour contrôler l'erreur sur la pression dans la norme $L_t^2(H_x^1)$. Ce résultat montre qu'en l'absence de comportement singulier en temps, le terme η_3 (qui n'avait pas fait l'objet d'une majoration par l'erreur dans l'analyse théorique) ne conduit pas à sur-estimer l'erreur. Celui-ci est d'ailleurs inférieur aux contributions des deux autres termes η_1 et η_2 . Par ailleurs, on observe comme attendu que la situation est assez différente si l'on essaie de contrôler l'erreur sur les déplacements dans la norme $L_t^\infty(H_x^1)$. Comme cela est reflété par l'indice d'efficacité $\mathcal{I}_{\text{eff}}^*$ qui augmente lorsque le maillage est raffiné, cette dernière erreur converge plus vite vers 0 que l'estimateur d'erreur déduit de l'approche directe.

h_0^{-1}	η_1	η_2	η_3	η_4	$\mathcal{I}_{\text{eff}}$	$\mathcal{I}_{\text{eff}}^*$
4	6.34e-2 -	9.53e-2 -	8.17e-3 -	1.45e-3 -	3.13	11.43
8	3.33e-2 0.93	2.57e-2 1.89	2.75e-3 1.57	7.67e-4 0.92	2.18	15.33
16	1.71e-2 0.96	6.63e-3 1.96	7.13e-4 1.94	3.89e-4 0.98	1.70	23.81
32	8.62e-3 0.98	1.68e-3 1.98	1.80e-4 1.99	1.96e-4 0.99	1.45	41.19

Tableau 4.3. Estimations d'erreur *a posteriori* utilisant l'approche directe et taux de convergence sous raffinement spatial ; $T = 0.1$, $\tau = 2.50\text{e-}4$.

τ	η_1	η_2	η_3	η_4		$\mathcal{I}_{\text{eff}}$	$\mathcal{I}_{\text{eff}}^*$
0.25	4.33e-3	1.07e-4	1.15e-4	4.70e-2	—	1.48	4.80
0.2	4.37e-3	1.02e-4	1.04e-4	3.85e-2	0.90	1.51	4.95
0.1	4.45e-3	9.93e-5	8.25e-5	2.01e-2	0.93	1.62	5.58
0.05	4.49e-3	1.02e-4	7.38e-5	1.03e-2	0.96	1.77	6.69

Tableau 4.4. Estimations d'erreur *a posteriori* utilisant l'approche directe et taux de convergence sous raffinement temporel; $T = 1$, $h_0 = 1/128$.

Pour évaluer l'estimation d'erreur *a posteriori* en utilisant la reconstruction elliptique, voir (4.47), on évalue les quantités

$$\eta_5 = \left(\sum_{m=1}^N \tau_m^{-1} (\mathcal{E}_{p,1}^m(\delta_t) + \mathcal{E}_u^m(\delta_t)) \right)^{1/2}, \quad (4.50)$$

$$\eta_6 = \left(\tau_1 \|C\delta_t p_h^1 + B\delta_t u_h^1 - D_h p_{0h} - g_h^1\|_c^2 + \sum_{m=2}^N \tau_m^3 \|\delta_t(C\delta_t p_h^m + B\delta_t u_h^m - g_h^m)\|_c^2 \right)^{1/2}, \quad (4.51)$$

$$\eta_7 = (\mathcal{E}_u^N)^{1/2}, \quad (4.52)$$

$$\eta_8 = (\mathcal{E}_{p,1}^N)^{1/2}, \quad (4.53)$$

ainsi que l'indice d'efficacité

$$\mathcal{J}_{\text{eff}} = \frac{\eta_5 + \eta_6 + \eta_7 + \eta_8}{\|u^N - u_h^N\|_a + \|p^N - p_h^N\|_c}. \quad (4.54)$$

On rappelle que η_5 est associé à l'estimateur d'erreur en espace et que η_6 est associé à l'estimateur d'erreur en temps. De plus, η_7 et η_8 contrôlent l'erreur entre la solution discrète et sa reconstruction elliptique; voir le lemme 4.2. Le tableau 4.5 présente les résultats obtenus sous raffinement spatial. Les ordres de convergence observés concordent assez bien avec les prédictions théoriques. On observe une légère super-convergence pour η_5 et une légère sous-convergence pour η_7 sur les maillages (très) grossiers. La quantité η_6 , qui est reliée à l'erreur temporelle, reste à une valeur quasi constante et suffisamment petite sous raffinement spatial. Finalement, on observe que l'indice d'efficacité est assez grand, particulièrement sur les maillages grossiers.

4.7 Extension aux modélisations non linéaires

Dans cette section, on propose une extension de l'analyse d'erreur *a posteriori* présentée ci-dessus à l'étude de problèmes de géomécanique non linéaires à vocation industrielle. La non-linéarité provient de l'équation hydraulique. D'une part, la masse volumique du liquide dépend de la pression hydraulique par la relation

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K_{\text{li}}}, \quad (4.55)$$

h_0^{-1}	η_5		η_6		η_7		η_8		$\mathcal{J}_{\text{eff}}$
4	1.34e-0	–	1.14e-2	–	1.55e-2	–	2.18e-2	–	169.43
8	2.01e-1	2.74	7.82e-3	–	5.70e-3	1.44	5.83e-3	1.90	120.26
16	4.36e-2	2.21	7.58e-3	–	1.79e-3	1.67	1.50e-3	1.96	97.49
32	1.04e-2	2.07	7.55e-3	–	4.93e-4	1.86	3.77e-4	1.98	19.59

Tableau 4.5. Estimations d'erreur *a posteriori* utilisant la reconstruction elliptique et taux de convergence sous raffinement spatial ; $T = 1$, $\tau = 0.1$.

où K_{Iq} désigne le module de compressibilité du liquide. D'autre part, la porosité dépend des déformations et de la pression par la relation (2.14), rappelée ci-dessous

$$d\varphi = (b - \varphi) \left(d\varepsilon_V + \frac{1}{K_s} dp \right). \quad (4.56)$$

La simulation numérique est réalisée à l'aide de la modélisation HM instationnaire implantée dans *Code_Aster*. Pour le détail de cette modélisation, le lecteur pourra consulter la documentation de référence du code [Cha01a, Cha01b]. On propose dans cette section un exemple d'adaptation de maillages pilotée par les estimateurs d'erreur *a posteriori* obtenus par la méthode directe.

4.7.1 Le cas test

Le cas test étudié est inspiré du benchmark proposé par Chavant et Millard [CM07] disponible à l'adresse http://www.gdrmomas.org/ex_qualifications.html. La motivation industrielle qui sous-tend ce cas test est la nécessité de mieux connaître l'endommagement induit par les travaux d'excavation dans le milieu naturel pour la mise en place d'un site de stockage de déchets nucléaires.

Il s'agit d'étudier une cavité cylindrique en massif géologique infini. Par symétrie, on restreint l'étude du problème à un quart de plan. La géométrie du problème est illustrée à la figure 4.1. On se place dans le cadre de déformations planes par rapport à la direction z perpendiculaire au plan de la figure. L'échelle de temps de la simulation est $T = 1.5 \times 10^6$ s ≈ 17 jours. L'état de contraintes initial est anisotrope. La loi de comportement mécanique choisie est une loi élastique dont les paramètres sont le module de Young $E = 5800$ MPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Les paramètres physiques utiles pour l'adimensionnement des estimateurs d'erreur proposé au paragraphe 4.5.1 sont

$$\kappa = 1.02 \times 10^{-16} \text{ m}^2 \cdot \text{Pa}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \frac{1}{M} = 2.69 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}, \quad \rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

On choisit la longueur caractéristique $L = 60$ m et la pression caractéristique $P = 5$ MPa, ce qui donne $U = 5.17$ cm. Les conditions aux limites sont

- Sur Γ_1 :
- Si $0 \leq t \leq T$:

$$\sigma_{rr} = (-11 \cos^2 \theta - 15.4 \sin^2 \theta) \left(1 - \frac{t}{T}\right) \text{ MPa},$$

$$\sigma_{r\theta} = -4.4 \cos \theta \sin \theta \left(1 - \frac{t}{T}\right) \text{ MPa},$$

$$p = 4.7 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \text{ MPa}.$$

– Si $t \geq T$:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = p = 0.$$

- Sur Γ_2 : $u_x = 0$ et $M_{\text{Iq}} = 0$.
- Sur Γ_3 : $\sigma_{yy} = -15.4 \text{ MPa}$ et $p = 4.7 \text{ MPa}$.
- Sur Γ_4 : $\sigma_{yy} = -11 \text{ MPa}$ et $p = 4.7 \text{ MPa}$.
- Sur Γ_5 : $u_y = 0$ et $M_{\text{Iq}} = 0$.

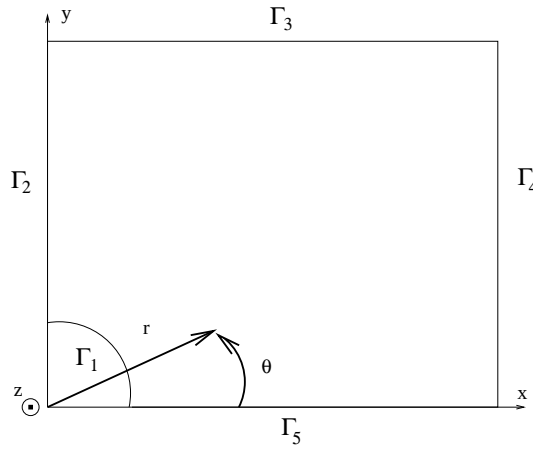


Fig. 4.1. Géométrie du problème.

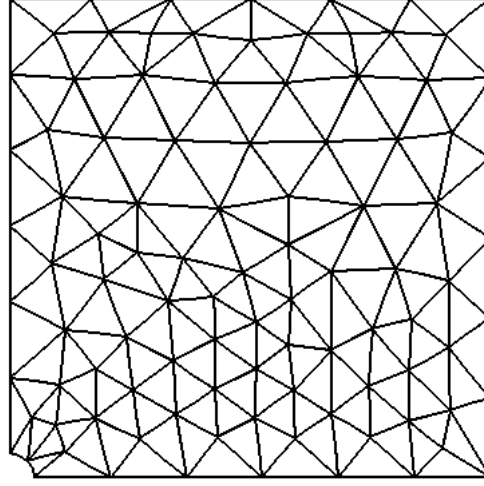
On observe que le problème est posé sur un domaine qui n'est pas convexe, ce qui ne pose pas de difficulté car les estimateurs de la méthode directe n'utilisent pas la propriété de régularité elliptique.

4.7.2 Résultats numériques

Le maillage initial, illustré à la figure 4.2, est construit de manière assez grossière pour observer les raffinements proposés par les estimateurs d'erreur en espace. Pour la discrétisation temporelle, on considère une subdivision uniforme en $N = 15$ intervalles. Les estimateurs d'erreur locaux en espace et globaux en temps sont définis à l'instant final t_N pour toute maille $T \in \mathcal{T}_h$ par

$$\eta_T = \left(\sum_{m=1}^N \tau_m \mathcal{E}_{p,0,T}^m \right)^{1/2} + \sup_{0 \leq m \leq N} (\mathcal{E}_{u,T}^m)^{1/2} + \sum_{m=1}^N (\mathcal{E}_{u,T}^m(\delta_t))^{1/2}.$$

Pour des raisons informatiques liées à *Code_Aster*, l'estimateur η_T est évalué sans tenir compte du terme portant sur les conditions de Neumann. La figure 4.3 présente une série de maillages

**Fig. 4.2.** Maillage initial.

raffinés par HOMARD en choisissant comme critère de raffiner 5% des éléments dont l'estimateur d'erreur est le plus élevé. Le champ de pression calculé sur les maillages raffinés est illustré à la figure 4.4. On observe que le profil de pression au voisinage de l'excavation est mal capturé sur les maillages grossiers. On donne également dans le tableau 4.6 les valeurs des estimateurs d'erreur en espace η_1 , η_2 et η_3 et de l'estimateur en temps η_4 définis par les formules (4.48) sur une série de maillages raffinés. On remarque que les valeurs des indicateurs en espace η_1 , η_2 et η_3 décroissent

Nombre de mailles	η_1	η_2	η_3	η_4
196	1.25e-1	4.24e-1	4.24e-1	9.19e-7
278	2.65e-2	7.63e-2	7.64e-2	1.24e-6
392	1.76e-2	3.46e-2	3.46e-2	1.31e-6
564	1.50e-2	2.00e-2	2.00e-2	1.32e-6
890	1.13e-2	1.18e-2	1.18e-2	1.34e-6
1368	9.09e-3	7.72e-3	7.72e-3	1.34e-6
2268	7.04e-3	4.69e-3	4.69e-3	1.36e-6
3762	5.16e-3	2.84e-3	2.84e-3	1.36e-6
6200	3.97e-3	1.87e-3	1.88e-3	1.36e-6
10042	3.02e-3	1.17e-3	1.17e-3	1.36e-6

Tableau 4.6. Estimations d'erreur *a posteriori* utilisant l'approche directe et convergence sous raffinement spatial ; $\tau = 1e5$ s.

comme attendu. L'indicateur en temps η_4 augmente pour des maillages grossiers puis se stabilise lorsque les maillages deviennent très fins. Celui-ci reste négligeable devant les estimateurs d'erreur en espace. Par ailleurs, on observe que le maillage est raffiné automatiquement autour de la zone d'excavation, qui est la zone physique d'intérêt.

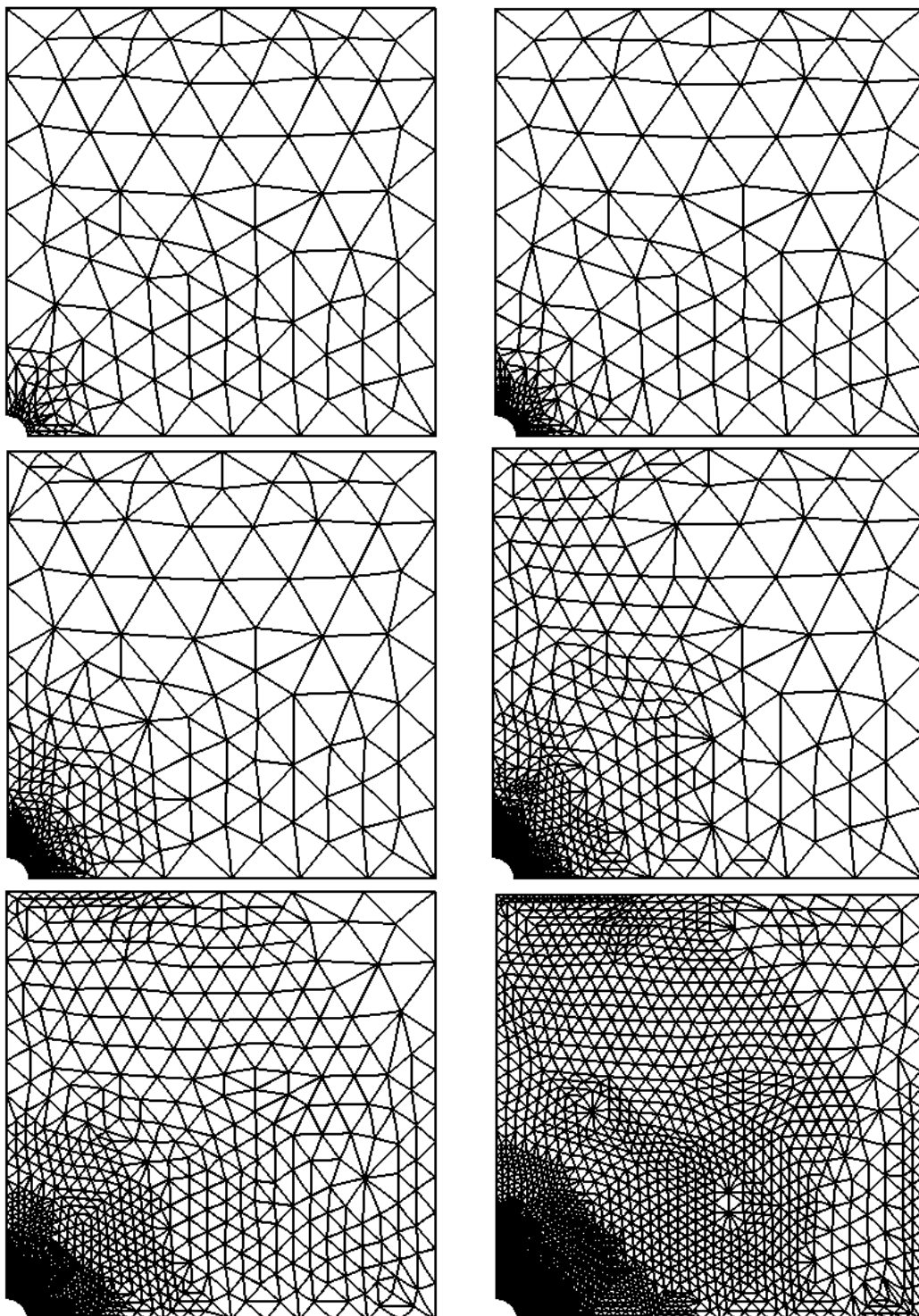


Fig. 4.3. Raffinement adaptatif du maillage.

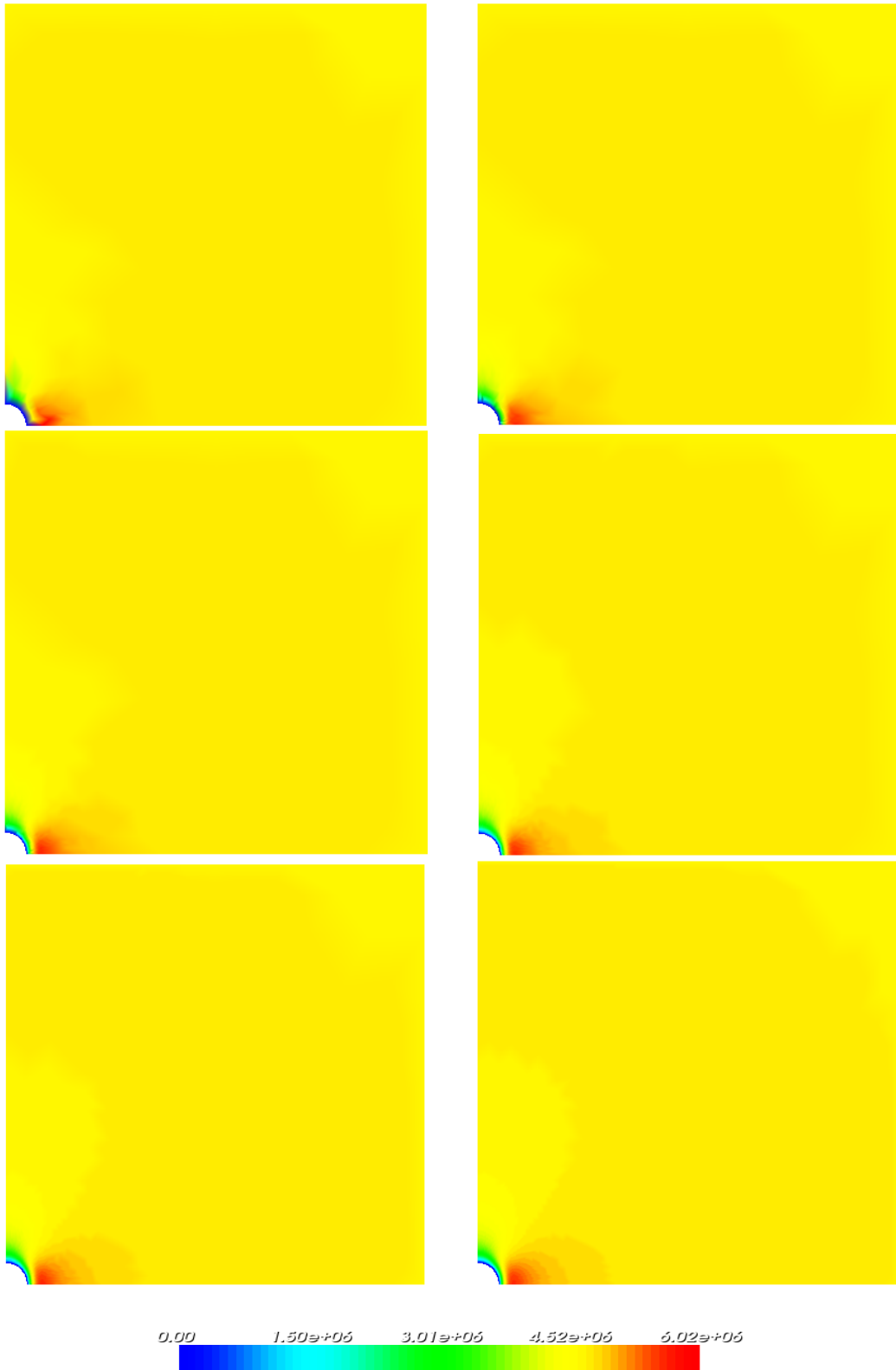


Fig. 4.4. Champs de pression sur les maillages raffinés.

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'analyse d'erreur *a priori* et *a posteriori* de méthodes d'approximation par des éléments finis en espace et par des différences finies en temps pour des problèmes Hydro-Mécaniques issus de la théorie de la poroélasticité.

Dans le chapitre 2, on a présenté les bases physiques du modèle HM étudié dans cette thèse. On a proposé un adimensionnement du système d'équations couplées pour les versions stationnaire et instationnaire du modèle. On a également introduit un cadre abstrait permettant de simplifier l'analyse mathématique et de donner une portée plus générale aux résultats.

Dans le chapitre 3, on s'est intéressé à l'analyse de la version stationnaire du problème modèle, dont on a considéré une discrétisation par une méthode d'éléments finis de Lagrange conformes. On a proposé l'analyse d'erreur *a posteriori* par deux méthodes différentes : une méthode directe basée sur la stabilité du problème continu et une méthode par dualité. Les propriétés de fiabilité et d'optimalité des estimateurs d'erreur ont été démontrées. La méthode directe est adaptée pour estimer l'erreur sur la pression dans la norme H^1 et la méthode par dualité pour estimer l'erreur sur les déplacements dans la norme H^1 . Les estimateurs *a posteriori* ont été implantés dans *Code_Aster*. Quelques illustrations numériques sur un cas test avec solution analytique ont été présentées.

Dans le chapitre 4, on s'est intéressé à l'analyse de la version instationnaire du problème modèle. On a établi un résultat de stabilité pour le problème continu permettant d'identifier la norme de stabilité naturelle. On a ensuite considéré la discrétisation du problème par une méthode d'éléments finis de Lagrange conformes en espace et par un schéma d'Euler implicite en temps. Après avoir effectué l'analyse d'erreur *a priori* (utilisant notamment les techniques de projection elliptique), l'analyse d'erreur *a posteriori* a été menée en utilisant deux méthodes : une méthode directe basée sur la norme de stabilité du problème continu et une méthode par reconstruction elliptique. On a dans les deux cas obtenu des estimations d'erreur *a posteriori* fiables et délivrant des majorations globales de l'erreur d'approximation où toutes les constantes dans les estimations ont été identifiées, ce qui est particulièrement intéressant dans les simulations numériques ayant pour objectif l'évaluation de la performance des sites de stockage de déchets. Des propriétés d'optimalité ont également été établies dans le cas de l'approche directe pour les 3 termes de l'estimateur d'erreur spatiale. La méthode directe est adaptée pour l'estimation de l'erreur sur la pression dans la norme $L_t^2(H_x^1)$ et la méthode par reconstruction elliptique est adaptée pour l'estimation sur les déplacements dans la norme $L_t^\infty(H_x^1)$ et pour l'estimation sur la pression dans

la norme $L_t^\infty(L_x^2)$. Même si elle présente un intérêt mathématique, la méthode par reconstruction elliptique ne semble pas être efficace afin d'évaluer l'erreur d'approximation car dans les cas tests que nous avons considérés, les indices d'efficacité sont très grands. On recommande plutôt d'utiliser la méthode directe qui semble plus fiable, avec des indices d'efficacité compris entre 3 et 4. Enfin, on a proposé l'application de la méthode directe à l'étude d'un cas d'excavation pour le stockage des déchets nucléaires.

Les travaux présentés dans ce mémoire pourraient être poursuivis dans les directions suivantes :

- tester les estimateurs obtenus sur des domaines concaves (par exemple en L) où l'hypothèse de régularité elliptique n'est plus valide,
- étendre l'analyse mathématique du problème modèle instationnaire aux maillages dépendant du temps,
- approfondir l'étude de la méthode par reconstruction elliptique afin d'essayer de réduire les indices d'efficacité,
- réaliser des simulations numériques avec adaptation de maillages pilotée par les estimateurs d'erreur *a posteriori* sur divers cas tests industriels,
- étendre tant que faire se peut le champ d'application des travaux aux problèmes non linéaires.

Bibliographie

- [AABM98] B. Achchab, A. Agouzal, J. Baranger and J. F. Maitre. Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique. Application aux éléments finis mixtes. *Numer. Math.*, volume 80, number 2 : 159–179, 1998.
- [AO00] M. Ainsworth and J. T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000.
- [And06] Andra. Loi de programme du 28 juin 2006, octobre 2006.
- [ASP77] J.L. Auriault and E. Sanchez-Palencia. Étude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. *J. Mécanique*, volume 16 : 575–603, 1977.
- [BFŠ01] I. Babuška, M. Feistauer and P. Šolín. On one approach to a posteriori error estimates for evolution problems solved by the method of lines. *Numer. Math.*, volume 89, number 2 : 225–256, 2001.
- [BR78] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 15, number 4 : 736–754, 1978.
- [BW85] R. E. Bank and A. Weiser. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Math. Comp.*, volume 44, number 170 : 283–301, 1985.
- [BC02] S. Bartels and C. Carstensen. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. II. Higher order FEM. *Math. Comp.*, volume 71, number 239 : 971–994 (electronic), 2002.
- [BR01] R. Becker and R. Rannacher. An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numer.*, volume 10 : 1–102, 2001.
- [BBM05] A. Bergam, C. Bernardi and Z. Mghazli. A posteriori analysis of the finite element discretization of some parabolic equations. *Math. Comp.*, volume 74, number 251 : 1117–1138, 2005.
- [Ber89] C. Bernardi. Optimal finite-element interpolation on curved domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 26, number 5 : 1212–1240, 1989.
- [BS05] C. Bernardi and E. Süli. Time and space adaptivity for the second-order wave equation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, volume 15, number 2 : 199–225, 2005.
- [BV04] C. Bernardi and R. Verfürth. A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, volume 38, number 3 : 437–455, 2004.

- [Bio41] M. A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, volume 12 : 155–169, 1941.
- [Boi02] O. Boiteau. Indicateur d'erreur spatiale en résidu pour la thermique transitoire. Manuel de référence de *Code_Aster* R4.10.03, EDF, juin 2002.
- [BEK96] F. Bornemann, B. Erdmann and R. Kornhuber. A posteriori error estimates for elliptic problems in two and three space dimensions. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 33, number 3 : 1188–1204, 1996.
- [BZ99] B. Boroomand and O. C. Zienkiewicz. Recovery procedures in error estimation and adaptivity. II. Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, volume 176, number 1-4 : 127–146, 1999. New advances in computational methods (Cachan, 1997).
- [BF04] R. Boussetta and L. Fourment. A posteriori error estimation and three-dimensional adaptive remeshing : application to error control of non-steady metal forming simulations. In *International conference on numerical methods in industrial forming processes*, Ohio State, 2004. NUMIFORM 04.
- [BC97] P. Bouttier and F. Courtier. Data assimilation, concepts and methods. Training course notes of ECMWF, European Centre for Medium-range Weather Forecasts, Reading, U.K., 1997.
- [BE03] M. Braack and A. Ern. A posteriori control of modeling errors and discretization errors. *Multiscale Model. Simul.*, volume 1, number 2 : 221–238 (electronic), 2003.
- [BS06] D. Braess and J. Schöberl. Equilibrated residual error estimator for Maxwell's equations. Preprint, RICAM 2006-19, 2006. Austrian Acad. Sciences.
- [BOFM89] S. Brahim-Otsmane, G.A. Francfort and F. Murat. Homogenization in Thermoelasticity. In *Random Media and Composites*, pages 13–45, 1989.
- [CEA06] Clefs CEA. Déchets radioactifs, des solutions en progrès continu, hiver 2005–2006.
- [CDE03] X. Chateau, L. Dormieux and A. Ern. *Mécanique numérique*. Cours de l'École nationale des ponts et chaussées, 2003.
- [Cha01a] C. Chavant. *Modèles de comportement THHM*. Document de référence Aster R7.01.11-A, 2001.
- [Cha01b] C. Chavant. *Modélisations THHM. Généralités et algorithmes*. Document de référence Aster R7.01.10-A, 2001.
- [CCDV99] C. Chavant, P. Charles, Th. Duforestel and F. Voldoire. *Thermo-hydro-mécanique des milieux poreux non saturés dans le Code_Aster*. Document Aster HI-74/99/011/A, 1999.
- [CM07] C. Chavant and A. Millard. Simulation d'excavation en comportement hydro-mécanique fragile. Technical report, EDF R&D/AMA,CEA-DEN/SEMT, juin 2007.
- [CF04] Z. Chen and J. Feng. An adaptive finite element algorithm with reliable and efficient error control for linear parabolic problems. *Math. Comp.*, volume 73, number 247 : 1167–1193 (electronic), 2004.
- [Clé75] Ph. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. RAIRO Analyse Numérique*, volume 9, number R-2 : 77–84, 1975.

- [CDN07] S. Cochez-Dhondt and S. Nicaise. Equilibrated error estimators for discontinuous Galerkin methods. Technical report, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2007.
- [Cou04] O. Coussy. *Poromechanics*. John Wiley & Sons, 2004.
- [Del06] J. Delmas. Estimateurs d'erreurs en quantités d'intérêt dans *Code_Aster*. Compte rendu AMA CR-AMA-06.066, EDF, avril 2006.
- [Des94] X. Desroches. Estimateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz en élasticité 2D. Manuel de référence de *Code_Aster* R4.10.01-A, EDF, avril 1994.
- [Des05] X. Desroches. Estimateur d'erreur en résidu. Manuel de référence de *Code_Aster* R4.10.02-B, EDF, avril 2005.
- [DM99] P. Destuynder and B. Métivet. Explicit error bounds in a conforming finite element method. *Math. Comp.*, volume 68, number 228 : 1379–1396, 1999.
- [DN02] Willy Dörfler and Ricardo H. Nochetto. Small data oscillation implies the saturation assumption. *Numer. Math.*, volume 91, number 1 : 1–12, 2002.
- [DB02] L. Dormieux and E. Bourgeois. *Introduction à la mécanique des milieux poreux*. Presses de l'École nationale des ponts et chaussées, 2002.
- [EJ91] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems. I. A linear model problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 28, number 1 : 43–77, 1991.
- [EJ95] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems. II. Optimal error estimates in $L_\infty L_2$ and $L_\infty L_\infty$. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 32, number 3 : 706–740, 1995.
- [EG04] A. Ern and J.L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, Volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [EM07] A. Ern and S. Meunier. *A posteriori* error analysis of Euler-Galerkin approximations to coupled elliptic-parabolic problems. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 2007. submitted.
- [ESV07] A. Ern, A. F. Stephansen and M. Vohralík. Improved energy norm a posteriori error estimation based on flux reconstruction for discontinuous Galerkin methods. Technical report, CERMICS/ENPC, 2007.
- [Ger73] P. Germain. *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson, 1973.
- [IBC⁺99] K. Ide, A. Bennett, P. Courtier, M. Ghil and A. Lorenc. Unified notation for data assimilation : operational, sequential and variational. *J. Meteor. Soc. Japan*, volume 75 : 181–189, 1999.
- [Isa98] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*, Volume 127 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Joh87] C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [JNT90] C. Johnson, Y. Y. Nie and V. Thomée. An a posteriori error estimate and adaptive timestep control for a backward Euler discretization of a parabolic problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 27, number 2 : 277–291, 1990.

- [KM06] F. Karakatsani and Ch. Makridakis. *A posteriori* estimates for approximations of time-dependent Stokes equations. *IMA J. Numer. Anal.*, 2006.
- [Kir96] A. Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Volume 120 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [LL83] P. Ladevèze and D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 20, number 3 : 485–509, 1983.
- [Lad75] P. Ladevèze. *Comparaison de modèles de milieux continus*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1975.
- [Lad77] P. Ladevèze. Nouvelles procédures d'estimation d'erreur relative à la méthode des éléments finis et applications. In *Journées éléments finis*, 1977.
- [LM06] O. Lakkis and Ch. Makridakis. Elliptic reconstruction and a posteriori error estimates for fully discrete linear parabolic problems. *Math. Comp.*, volume 75, number 256 : 1627–1658 (electronic), 2006.
- [LW04] R. Luce and B. I. Wohlmuth. A local a posteriori error estimator based on equilibrated fluxes. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 42, number 4 : 1394–1414 (electronic), 2004.
- [MN03] Ch. Makridakis and R. H. Nochetto. Elliptic reconstruction and a posteriori error estimates for parabolic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 41, number 4 : 1585–1594 (electronic), 2003.
- [Meu05] S. Meunier. Modélisation Thermo-Hydro-Mécanique dans *Code_Aster* : Équations et discrétisation. Note interne EDF HI-23/05/018/A, EDF, avril 2005.
- [Meu06a] S. Meunier. Analyse de méthodes éléments finis pour des problèmes couplés Hydro-Mécaniques. In *38ème Congrès National d'Analyse Numérique*, Guidel, 2006. CANUM 2006.
- [Meu06b] S. Meunier. Analysis of finite element methods for coupled Hydro-Mechanical problems. In *European conference on computational fluid dynamics*, Egmond aan Zee, Pays-Bas, 2006. ECCOMAS06.
- [Meu07a] S. Meunier. Analyse de méthodes éléments finis pour des problèmes couplés Hydro-Mécaniques. In *Congrès National de mathématiques appliquées et industrielles*, Praz-sur-ary, 2007. CANUM 2007.
- [Meu07b] S. Meunier. Analysis of finite element methods for coupled Hydro-Mechanical problems. In *SIAM conference on mathematical & computational issues in the geosciences*, Santa Fe, États-Unis, 2007. SIAM GS07.
- [ML92] M. A. Murad and A. F. D. Loula. Improved accuracy in finite element analysis of Biot's consolidation problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, volume 95, number 3 : 359–382, 1992.
- [ML94] M. A. Murad and A. F. D. Loula. On stability and convergence of finite element approximations of Biot's consolidation problem. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, volume 37, number 4 : 645–667, 1994.
- [MTL96] M. A. Murad, V. Thomée and A. F. D. Loula. Asymptotic behavior of semidiscrete finite-element approximations of Biot's consolidation problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 33, number 3 : 1065–1083, 1996.

- [NR04] P. Neittaanmäki and S. Repin. *Reliable methods for computer simulation*, Volume 33 of *Studies in Mathematics and its Applications*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004. Error control and a posteriori estimates.
- [NS05] S. Nicaise and N. Soualem. A posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the heat equation. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, volume 39, number 2 : 319–348, 2005.
- [NWW06] S. Nicaise, K. Witowski and B.I. Wohlmuth. An a posteriori error estimator for the Lamé equation based on H(div)-conforming stress approximations. Technical report, Universität Stuttgart, 2006.
- [Nic05] G. Nicolas. Logiciel HOMARD - Volume 1 - Présentation générale. Note interne EDF HI-23/04/005, EDF, février 2005.
- [NSV00] R. H. Nochetto, G. Savaré and C. Verdi. A posteriori error estimates for variable time-step discretizations of nonlinear evolution equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, volume 53, number 5 : 525–589, 2000.
- [Pic98] M. Picasso. Adaptive finite elements for a linear parabolic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, volume 167, number 3-4 : 223–237, 1998.
- [PS47] W. Prager and J. L. Synge. Approximations in elasticity based on the concept of function space. *Quart. Appl. Math.*, volume 5 : 241–269, 1947.
- [SZ90] R. L. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, volume 54, number 190 : 483–493, 1990.
- [Sho00] R. E. Showalter. Diffusion in poro-elastic media. *J. Math. Anal. Appl.*, volume 251, number 1 : 310–340, 2000.
- [Sho02] R. E. Showalter. Diffusion in deformable media. In *Resource recovery, confinement, and remediation of environmental hazards (Minneapolis, MN, 2000)*, Volume 131 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 115–129. Springer, New York, 2002.
- [Tal97] O. Talagrand. Assimilation of Observations, an introduction. *J. Meteor. Soc. Japan*, volume 75 : 191–209, 1997.
- [Tho97] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, Volume 25 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [Ver94] R. Verfürth. A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. In *Proceedings of the Fifth International Congress on Computational and Applied Mathematics (Leuven, 1992)*, Volume 50, pages 67–83, 1994.
- [Ver98] R. Verfürth. A posteriori error estimates for nonlinear problems. $L^r(0, T; L^p(\Omega))$ -error estimates for finite element discretizations of parabolic equations. *Math. Comp.*, volume 67, number 224 : 1335–1360, 1998.
- [Ver05] R. Verfürth. Robust a posteriori error estimates for nonstationary convection-diffusion equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 43, number 4 : 1783–1802 (electronic), 2005.
- [Ver96] R. Verfürth. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. Wiley-Teubner Series in advances in numerical mathematics. John Wiley & Sons and B.G. Teubner, 1996.

- [vT25] K. von Terzaghi. *Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage*. Leipzig F. Deuticke, 1925.
- [vT36] K. von Terzaghi. *Theoretical Soil Mechanics*. Wiley, New York, 1936.
- [Whe73] M. Wheeler. *A priori* L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, volume 10 : 723–759, 1973.
- [WH99] B. I. Wohlmuth and R. H. W. Hoppe. A comparison of a posteriori error estimators for mixed finite element discretizations by Raviart-Thomas elements. *Math. Comp.*, volume 68, number 228 : 1347–1378, 1999.
- [ZLH88] O. C. Zienkiewicz, Y. C. Liu and G. C. Huang. Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, volume 25, number 1 : 23–42, 1988.
- [ZZ87] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, volume 24, number 2 : 337–357, 1987.