



HAL
open science

Etude de stabilité linéaire globale d'écoulement fortement décollé de couche limite de plaque plane

Frédéric Alizard

► **To cite this version:**

Frédéric Alizard. Etude de stabilité linéaire globale d'écoulement fortement décollé de couche limite de plaque plane. Sciences de l'ingénieur [physics]. Arts et Métiers ParisTech, 2007. Français. NNT : 2007ENAM0036 . pastel-00003596

HAL Id: pastel-00003596

<https://pastel.hal.science/pastel-00003596>

Submitted on 3 Apr 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

de

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE

D'ARTS ET MÉTIERS

Spécialité : Mécanique

présentée et soutenue publiquement

par

Frédéric ALIZARD

le 17 Decembre 2007

**ETUDE DE STABILITÉ LINÉAIRE GLOBALE D'ÉCOULEMENT
FORTEMENT DÉCOLLÉ DE COUCHE LIMITE DE PLAQUE PLANE.**

Directeur de thèse : **Pr. Alain LERAT**

Co-directeur de thèse : **Jean-Christophe ROBINET**

devant le jury composé de :

M. Uwe EHRENSTEIN Professeur à l'IRPHE, Marseille	Rapporteur
M. Gregoire CASALIS Professeur à l'ENSAE, Toulouse	Rapporteur
M. Jean-Christophe ROBINET Maître de conférences à l'ENSAM, Paris	Examinateur
M. Alain LERAT Professeur à l'ENSAM, Paris	Examinateur
M. Laurent JACQUIN Directeur du DAFE, ONERA Meudon	Examinateur
M. Ulrich RIST Professeur au IAG, Stuttgart (Allemagne)	Président

Laboratoire de Simulation Numérique en Mécanique des Fluides

ENSAM – CER de Paris

Remerciements.

Le SINUMEF. Je tenais tout d'abord à remercier Monsieur Lerat Alain, directeur du laboratoire SINUMEF, pour m'avoir accueilli durant ces trois années de thèse.

Bien sûr mes remerciements les plus sincères sont dédiés à Jean-Christophe Robinet, qui a pu partager toutes les étapes de cette thèse, et dont les longues discussions ont toujours été particulièrement fructueuses. En outre, cette thèse qui a été pour moi une grande source d'enseignements, n'aurait certainement pas été pareille sans son aide et ses conseils.

Je tenais aussi à remercier mes voisins de bureau successifs. Tout d'abord David et Pascal, dont la bonne humeur et l'humour un peu lourd, ont rendu mes journées au laboratoire particulièrement agréables et dont certains épisodes resteront des souvenirs inoubliables. Puis Xavier et Stefania, dont les concours de chant ont permis une fin de rédaction moins douloureuse.

Enfin, bien sûr je n'oublie pas Bertrand, Xavier, Fabrice, Thomas, Patrick, Mazen, Du Xi et Julien ainsi que tous les autres membres du laboratoire.

Les rapporteurs. Je remercie également les rapporteurs de cette thèse Messieurs Uwe Ehrenstein ainsi que Grégoire Casalis, qui ont accepté d'étudier ce travail, et dont les remarques pertinentes ont permis l'élaboration de la version définitive de ce mémoire. Une pensée est aussi dédiée à Monsieur Ulrich Rist du laboratoire de Stuttgart qui a fait le déplacement pour la soutenance de cette thèse et a accepté de m'accueillir au IAG à la suite de celle-ci.

Famille et amis. Et pour finir, je remercie quelques amis Jérôme le jeune papa et la mère Stéphanie, Trisan, Patrice et Marie-Camille d'être venus à cette soutenance, ainsi que mes parents.

Table des matières

Table des matières	v
Table des figures	xii
Introduction	1
I Etat de l'art et méthodes numériques employées.	5
1 Avant propos	7
1.1 Premières études de stabilité linéaire sur une couche limite de plaque plane. . .	7
1.1.1 Equation de l'énergie, mécanisme physique.	7
1.1.2 Premières analyses théoriques temporelles de Tollmien et Schlichting et validation expérimentale.	8
1.1.3 Analyse de stabilité spatiale.	10
1.1.4 Premières corrections faiblement non parallèles.	10
1.1.5 Premières simulations numériques directes, approches PSE.	11
1.1.6 Critère semi-empirique de la transition vers la turbulence basé sur des études de stabilité linéaire : la méthode e^n	11
1.2 Etudes de stabilité de couche limite décollée laminaire.	14
1.2.1 Travaux de thèse de Gaster des années 60.	14
1.2.2 Caractérisation des bulbes courts, analyses spatiales.	14
1.2.3 Caractérisation des bulbes longs.	15
1.2.4 Hypothèse d'une transition convective/absolue.	17
1.2.5 Etudes d'instabilité globale fortement non parallèles.	20
1.3 Contexte de l'étude présentée dans le mémoire.	23
2 L'étude de stabilité linéaire, d'une approche locale à une analyse globale.	25
2.1 Analyse locale.	26
2.1.1 Etude temporelle.	26
2.1.2 Etude spatiale.	26
2.1.3 Conditions limites.	27
2.2 Analyse globale : étude spatio-temporelle.	28
2.2.1 Conditions limites.	28
2.3 Méthodes numériques.	28
2.3.1 Discrétisation spatiale.	28
2.3.2 Méthodes de résolution.	31
2.4 Illustration sur un écoulement ouvert parallèle.	31

3	Présentation du code de simulation numérique directe 2D.	33
3.1	Formulation et discrétisation.	33
3.1.1	Avancement temporel.	33
3.1.2	Discrétisation spatiale.	34
3.1.3	Méthode de résolution	34
3.2	Cas de validation.	34
3.2.1	La couche limite de plaque plane.	34
3.2.2	La marche descendante.	36
 II Analyse de stabilité linéaire globale de couche limite de plaque plane bibimensionnelle, $\beta = 0$.		39
4	Etude du spectre, familles de modes globaux.	41
4.1	Discussions sur les conditions limites liées aux perturbations de vitesse.	42
4.2	Familles de modes globaux.	43
4.2.1	Présentation générale des modes globaux.	44
4.2.2	Etude de la famille M_{TS}	46
4.2.3	Analyse de la famille M_C	52
5	Analyse du régime asymptotique et transitoire.	57
5.1	Etude du régime asymptotique : réponse à un forçage harmonique.	57
5.1.1	Définition du problème.	57
5.1.2	Analyse de la sensibilité des modes globaux à un forçage réel : étude du pseudospectre.	57
5.2	Analyse du régime transitoire.	59
5.2.1	Aspects Théoriques.	59
5.2.2	Etude de la dynamique spatio-temporelle de la perturbation.	62
 III Analyse de stabilité linéaire locale et globale de couche limite dé- collée de plaque plane.		73
6	Analyse de stabilité linéaire parallèle et faiblement non parallèle.	75
6.1	Objet de l'étude.	75
6.2	Simulation numérique d'un écoulement décollé de plaque plane.	76
6.2.1	Échelles de référence, configuration et discrétisation.	76
6.2.2	Présentation des écoulements de base.	76
6.3	Analyse de stabilité linéaire spatiale et spatio-temporelle.	79
6.3.1	Etude des ondes convectives, nature de l'instabilité.	79
6.3.2	Analyse des propriétés locales convectives/absolues de l'instabilité.	82
7	Analyse de stabilité linéaire globale. Etude des perturbations bidimension- nelles, $\beta = 0$.	91
7.1	Présentation du problème.	91
7.1.1	Conditions limites.	91
7.1.2	Discrétisation.	91
7.2	Etude des modes globaux 2D.	92
7.2.1	Analyse du spectre : familles de modes F1, F2 et F3.	92
7.2.2	Etude des modes adjoints.	93

7.3	Analyse du régime transitoire.	100
7.3.1	Dimension de la base et calcul de $G(t)$	100
7.3.2	Première phase : mécanisme KH.	100
7.3.3	Deuxième phase : basse fréquence.	101
7.3.4	Etude de la dynamique de la perturbation optimale par DNS.	106
7.3.5	Construction d'un modèle réduit.	106
7.4	Analyse du régime asymptotique.	108
8	Analyse de stabilité linéaire globale. Etude des perturbations tridimensionnelles, $\beta \neq 0$.	113
8.1	Analyse du spectre et familles des modes globaux $3D$ pour D3.	113
8.1.1	Partie cohérente du spectre.	113
8.1.2	Illustration des modes globaux stationnaires M_{GS} et M_{Gort}	117
8.1.3	Etude préliminaire de M_{GS} en fonction de D1, D2 et D3.	117
8.2	Nature de l'instabilité des modes M_{GS} et M_{Gort}	120
8.2.1	Modélisation de l'écoulement à l'aide de profils de Falkner-Skan.	120
8.2.2	Nature du mode M_{GS}	121
8.2.3	Nature du mode M_{Gort}	126
	Discussion	128
	Conclusions et perspectives.	133
	 Annexes	 139
A	Principe de la méthode d'Arnoldi et approximation du pseudospectre.	141
A.1	Méthode d'Arnoldi.	141
A.2	Approximation du Pseudospectre par la matrice de Hessenberg.	142
B	Analyse de stabilité linéaire spatiale faiblement non-parallèle : PSE.	145
B.1	Hypothèses et équations.	145
B.2	Méthode de Résolution, problème lié à la pression.	146
B.3	Illustration sur la couche limite de Blasius.	147
C	Discrétisation spatiale : méthode spectrale, généralité et collocation.	149
C.1	Collocation spectrale Chebyshev.	151
C.2	Calcul de l'opérateur dérivation.	151
C.3	Analyse globale, traitement des modes parasites de pression.	152
C.4	Multi-Domains.	153
D	Hypothèse d'un phénomène de vortex shedding. Illustration par une simulation numérique directe préliminaire.	155
	Références Bibliographiques	159

Table des figures

1	Exemple d'écoulements décollés pouvant intervenir sur la lunette arrière d'une voiture (à droite), ou encore au bord d'attaque d'un profil d'aile en incidence.	2
2	Illustrations des deux types d'écoulements décollés. A droite (GIS), et à gauche (APG-induced separation).	2
3	Représentation expérimentale du IAG à Stuttgart de la configuration étudiée au cours de ce mémoire. La très forte instabilité liée au bulbe laminaire induit la présence de structures tourbillonnaires en aval de la bulle.	3
1.1	Les comparaisons à divers nombre de Reynolds, correspondant aux positions sur la plaque, entre les taux d'amplification temporelle obtenus par Schlichting et les résultats expérimentaux de Schubauer & Skramstad, sont représentées à droite. A gauche, les points expérimentaux de début et de fin d'amplification des ondes TS sont confrontés aux deux branches de la courbe neutre obtenues théoriquement par Schlichting (illustrations provenant de [81]).	9
1.2	Etude de stabilité linéaire d'une couche limite de Blasius, réalisée au laboratoire SINUMEF par une approche PSE, échelles multiples et parallèle. Les résultats sont confrontés aux valeurs obtenues par DNS de Fasel et aux expériences de Schubauer & Skramstad et Ross <i>et al.</i> [55].	12
1.3	La courbe neutre relative à la couche limite de Blasius est représentée à gauche, en fonction de la fréquence réduite $Fr = F \times 10^{-5}$ et du nombre de Reynolds Re basé sur l'épaisseur de déplacement. A droite, une illustration du critère e^n représentant l'amplification des ondes TS pour chaque fréquence. L'enveloppe de ces courbes définit la courbe $n = \max_F (N(x, F))$.	13
1.4	Représentation de la structure d'un écoulement de couche limite décollée laminaire par Horton en 1969.	15
1.5	Analyse locale de stabilité de profils de similitude de Falkner-Skan, de couche limite décélérée et accélérée (suivant le signe du gradient de pression réduit β . Notons que la courbe relative à $\beta = 0$ est la courbe neutre classique du profil de Blasius.) [55].	16
1.6	Critère d'apparition du vortex shedding pour P_{\max} égal à -0.24. Illustration issue de l'article de Pauley <i>et al.</i> [66]	17
1.7	Lignes de courant durant un cycle, issues de la simulation numérique directe de décollement de plaque plane, de Pauley <i>et al.</i> [66] à $Re_x = 1250544$, pour un certain profil de suction.	18
1.8	Evolution du paquet d'onde dans un plan espace temps, suivant une instabilité convective ou une instabilité absolue, à droite et à gauche respectivement.	19
1.9	Simulation numérique directe de Fasel [33] d'un décollement de plaque plane globalement instable.	21

1.10	Simulation numérique directe de Marquillie & Erhenstein de 2003 [62] d'un décollement globalement instable, au nombre de Reynolds 900.	21
1.11	Etude de stabilité possédant deux directions inhomogènes. A droite, le point de vue temporel généralisé. A gauche, le point de vue global, appliqué à un écoulement de base 2D, la troisième direction étant homogène.	22
1.12	Schéma illustrant les différentes orientations pouvant être adoptées dans les analyses de stabilité [79].	23
2.1	Comparaison des spectres obtenus par des analyses de stabilité linéaire globale et locale. La grille 2D est (30×45) suivant une longueur d'onde à $Re_{\delta^*} = 520$	32
2.2	Fonction propre \hat{u} du mode de Tollmien-Schlichting obtenue par l'analyse globale, suivant une longueur d'onde à $Re_{\delta^*} = 520$. Les contours représentent la partie réelle de \hat{u}	32
3.1	Présentation du cas de couche limite de plaque plane et validation.	35
3.2	Cas de validation sur un écoulement décollé associé à une marche descendante.	37
3.3	Comparaison des résultats obtenus via le code de simulation numérique directe (colorés) et ceux issus de Barkley <i>et al.</i> [8].	38
4.1	Spectres résultants de l'analyse de stabilité linéaire globale pour le champ $D1$, obtenus par les conditions limites (4.2) et (4.5), en fonction de la discrétisation.	45
4.2	Parties réelles des composantes de vitesse et de pression relatives aux modes globaux M_{TS}	47
4.3	Partie réelle des composantes de vitesse au mode global spécifique M_{TS} et aux modes globaux plus atténués.	48
4.4	Illustration de l'influence de la condition limite Rel2 en aval sur les modes M_{TS} . Le mode $\Omega_r \approx 0.071$ désigné par un cercle est ici représenté. Nous pouvons remarquer, sur la partie encadrée, la mauvaise définition de l'onde sur le bord du domaine.	49
4.5	Analyse du nombre d'onde pour D1, relatif aux modes M_{TS}	50
4.6	Analyse du taux d'amplification spatiale pour D1, relatif aux modes M_{TS}	51
4.7	Taux d'amplification spatiale corrigé et comparaison des fonctions propres locales pour M_{TS1}	51
4.8	Evolution des modes M_{TS} en fonction de la longueur du domaine.	53
4.9	Répartition des modes M_C pour D1, D2 et D3. Les lignes discontinues illustrent les positions théoriques des branches continues.	54
4.10	Influence de la discrétisation suivant y pour les modes M_C	55
5.1	Pseudospectre du champ D1. Les niveaux en ϵ son représentés suivant une échelle logarithmique : $-\log_{10}$. Les cercles illustrent les modes M_{TS}	58
5.2	Allure du profil de $G(t)$, si l'écoulement est convectivement stable ou non.	60
5.3	Evolution de la condition initiale (en rouge) d'un système dynamique d'ordre 2, en fonction de la base des vecteurs propres. Il apparaît que si ces derniers sont fortement non orthogonaux, la condition initiale peut être amenée à croître dans le transitoire.	61
5.4	Croissance transitoire de l'énergie liée aux modes M_{TS} pour $D1$, $D2$ et $D3$. Les traits pleins illustrent l'évolution de $G(t)$, les traits discontinus caractérisent l'évolution de l'énergie de la perturbation optimale correspondante.	63
5.5	Structure spatiale de la perturbation optimale, pour différents temps, associée à $D1$	63

5.6	Influence de la valeur de Ω_0 en entrée sur l'évolution de l'énergie liée à la perturbation optimale, pour <i>D1</i>	64
5.7	Illustration de l'influence de Ω_0 en entrée sur la dynamique spatio temporelle du paquet d'onde, pour <i>D1</i> . Les courbes d'énergie sont espacées de $\Delta t = 50$, entre $t = 0$ et $t = 700$. Les traits noirs mettent en valeur la position spatiale du paquet au temps initial.	65
5.8	Comparaison des paquets d'onde, représentés à travers des diagrammes espace temps, obtenus par l'analyse de stabilité globale, liée aux modes M_{TS} , et une méthode de "steepest descent", sous l'hypothèse d'un écoulement parallèle. Les traits noirs illustrent les bords du paquet associés à l'étude globale. La valeur de la vorticité à la paroi est utilisée pour l'approche globale. <i>D1</i> est considéré dans cette analyse.	67
5.9	Croissance transitoire de l'énergie liée aux modes M_{TS} , M_C , relatifs à l'ensemble P1, puis P2, associée aux modes de la partie cohérente du spectre 4.1(a) du champ <i>D1</i>	68
5.10	Spectre du champ <i>D1</i> pour un sous-espace de taille 1000. Un éclatement des "branches" associées aux modes M_C est observé pour une certaine valeur de Ω_i (illustré en rouge). Les modes TS sont représentés en bleu.	68
5.11	Etude de la convergence de la croissance transitoire $G(t)$ associée aux modes 5.10, relatifs à <i>D1</i> . L'évolution de la perturbation optimale pour 950 modes est représentée en traits discontinus. L'influence du mécanisme de Orr aux temps courts est illustrée par le premier pic.	68
5.12	Evolution de la perturbation optimale associée à 950 modes globaux de <i>D1</i> . La partie réelle de \hat{u} est représentée.	69
5.13	Evolution de l'énergie pour les nombres d'onde transverses $\beta = 0.1, 0.2$ et 0.5 , relatifs au champ <i>D1</i> . 1150 modes sont considérés.	71
5.14	Illustration de la perturbation optimale pour $\beta = 0.5$ à $t = 200$, du champ <i>D1</i>	71
6.1	Objet de l'étude : écoulement décollé laminaire de plaque plane.	76
6.2	Couche limite décollée de plaque plane issue de la simulation numérique, au nombre de Reynolds 200.	78
6.3	Paramètres de couche limite de l'écoulement décollé <i>D1</i> issu de la DNS, au nombre de Reynolds 200.	78
6.4	Courbe neutre relative à l'écoulement décollé étudié, dans le plan (Ω_r, x) . Les traits verticaux discontinus représentent les positions de décollement et de recollement.	80
6.5	Taux d'amplification spatial et longueur d'onde pour la pulsation $\Omega_r = 0.1$, correspondant à une fréquence réduite : $F_r = 520 \times 10^{-6}$. En trait noir continu, pointillé, celui calculé par la résolution du problème 1D (OS) ; en trait noir discontinu, celui issu des équations PSE.	81
6.6	Profils de vitesses et fonctions propres calculés par une approche locale, au point de décollement X_{sep} , pour la fréquence réduite : $F_r = 500 \times 10^{-6}$, correspondant à une pulsation $\Omega_r = 0.1$	82
6.7	Profils de vitesse et fonctions propres calculés par une approche locale, à l'abscisse où le point d'inflexion sur la vitesse longitudinale est le plus haut $x = 116$, pour la fréquence réduite : $F_r = 452 \times 10^{-6}$, correspondant à une pulsation $\Omega_r = 0.0904$	83
6.8	Analyse du critère e^n par une méthode PSE pour les champs <i>D1</i> et <i>D3</i>	83
6.9	Allure $\sigma(v_g)$ lorsque l'écoulement est instable convectivement.	86

6.10	Allure $\sigma(v_g)$ lorsque l'écoulement est marginalement instable absolu.	86
6.11	Allure $\sigma(v_g)$ lorsque l'écoulement est instable absolument.	86
6.12	Visualisation de la procédure de recherche du rayon de vitesse de groupe nulle.	87
6.13	Pincement des branches $\alpha_+(L)$ et $\alpha_-(L)$ en abaissant le contour d'intégration, variant de $\Omega_i = -0.05$ à -0.06 , associé au champ $D1$	88
6.14	Evolution du mode absolu en fonction des champs étudiés et de la pulsation.	88
7.1	Spectres issus de la résolution du problème aux valeurs propres pour les trois champs étudiés.	92
7.2	Caractérisation des familles de modes intervenant dans la dynamique de la perturbation. Analyse réalisée sur $D3$	94
7.3	Différentes composantes de la partie réelle du vecteur perturbation relatif à la famille $F1$ de $D3$	95
7.4	Illustration des profils locaux de \hat{u} , \hat{v} et \hat{p} associés à $D3$ du mode : $\Omega_r \approx 0.08$, de la famille $F1$. Nous pouvons observer la très forte amplification spatiale de la perturbation, ainsi que le changement de nature de l'instabilité le long de la couche de mélange. Ce dernier point illustre l'aspect localisé des fonctions propres associées aux modes $F1$ en aval de la bulle sur les figures 7.3.	96
7.5	Parties réelles des modes adjoints relatifs aux modes directs 7.2(a), 7.2(c) et 7.2(d) pour $D3$	99
7.6	Analyse de la croissance transitoire liée aux modes globaux de $D1$, $D2$ et $D3$.	102
7.7	Evolution temporelle de la perturbation optimale, associée au champ $D3$ et $L3$, au cours de la première phase. Un mécanisme de Kelvin-Helmholtz, lié à la zone de recirculation, est observé. La composante longitudinale de la perturbation u est représentée.	103
7.8	Evolution spatiale du paquet d'onde associé à la perturbation optimale de $D3$. La condition initiale est représentée en rouge. Nous pouvons observer la très forte amplification spatiale du paquet, le long de la couche de mélange.	104
7.9	Diagramme spatio-temporel lié à la fluctuation de vorticité à la paroi pour $D3$. Nous pouvons observer l'influence du non parallélisme par la courbure des bords du paquet d'onde.	104
7.10	Croissance transitoire pour des temps plus longs. Une basse fréquence très atténuée apparaît à $t \approx 1000$. Sa convergence, fortement dépendante du taux d'atténuation des modes les moins atténués, est délicate.	105
7.11	Représentation du spectre pour $D3$ et $L3$. L'écart entre les modes les moins atténués induit une basse fréquence.	105
7.12	Comparaison de l'évolution de l'énergie associée à la perturbation optimale, entre la décomposition en modes globaux et l'intégration des équations de Navier-Stokes. $D3$ est considéré pour la longueur $L3$	107
7.13	Illustration du paquet d'onde associé au champ $D3$ obtenu par simulation numérique directe, au temps où ce dernier atteint son maximum d'énergie : $t = 380$. La composante longitudinale de la perturbation u est représentée.	107
7.14	Représentation du pseudospectre pour le champ $D3$. Les valeurs de ϵ sont représentées suivant une échelle logarithmique : $-\log_{10}(\epsilon)$. Les longueurs $L1$ (en plein) et $L2$ (en traits discontinus) sont ici considérées. Les bassins de sensibilité sont similaires pour les deux domaines.	109
7.15	Valeur du résolvant (7.17) en fonction de la fréquence du forçage pour $D3$ et $L1$, $L2$ et $L3$	109

7.16	Représentation de l'énergie associée à la localité de $\hat{\mathbf{f}}_{opt}$ conduisant à une réponse optimale.	110
7.17	Représentation du champ instantané associé à $\sigma_c = 0.085$ et $\hat{\mathbf{f}}_{opt}$ pour D3. . .	110
8.1	Analyse du spectre pour une perturbation tridimensionnelle, associée au champ D3.	114
8.2	Parties réelles du mode global stationnaire M_{GS} pour le champ D3 et $\beta = 0.1$	115
8.3	Illustration des parties réelles des modes M_I et M_{Gort} pour le champ D3 et $\beta = 0.1$	116
8.4	Illustration des nappes d'iso-vorticité associées aux modes stationnaires. Une coupe suivant la direction transverse illustre la position des lignes de courant du champ de base.	118
8.5	Evolution des modes stationnaires en fonction du nombre d'onde transverse pour D3.	119
8.6	Evolution du mode global M_{GS} en fonction de β et du profil de suction.	120
8.7	Exemple d'écoulement décollé, modélisé à l'aide des profils de similitude de Falkner-Skan. Le nombre de Reynolds, basé sur l'épaisseur de déplacement en entrée, est de 67. b) représente le profil de gradient de pression réduit $\gamma(x)$, obtenu par les branches solutions de (8.1), illustrées sur a).	121
8.8	Illustration de la modélisation et de la méthode numérique multi-domaines utilisée.	122
8.9	Analyse du champ FS3, au nombre de Reynolds égal à 67 et $\beta = 0.04$	123
8.10	Evolution du taux d'amplification associé au mode global instable en fonction du nombre d'onde transverse et de la taille du décollement. Le nombre de Reynolds est de 67.	124
8.11	Critère de Rayleigh appliqué aux écoulements FS1, FS2, FS3 et FS4. Deux zones centrifuges se distinguent, notées $z1$ et $z2$	125
8.12	Evolution du maximum du taux d'amplification suivant β , en fonction du maximum en valeur absolue du déterminant de Rayleigh, associé à $z1$ et $z2$: $ \max_{\varphi \in (z1, z2)}(\Delta(\mathbf{x})) $	125
8.13	Influence du nombre de Reynolds basé sur x , sur le mode global stationnaire. L'échelle de référence est le $x = x_0$ en entrée, avec $x_0 = 0.05$	126
8.14	Repère cylindrique lié à l'analyse de l'instabilité de Görtler. Les iso-valeurs représentent la composante U du champ de base.	127
8.15	Analyse de Görtler au nombre de Reynolds basé sur δ^* égal à 67 et pour $\beta = 0.065$	129
8.16	Diagramme de bifurcation de notre écoulement décollé laminaire de plaque plane. La région <i>I</i> est stable monotoniquement. La région <i>II</i> n'est pas monotoniquement stable mais asymptotiquement stable. La région <i>III</i> est conditionnellement stable et dépend de la croissance transitoire, de l'amplitude de la perturbation initiale et de l'existence d'un attracteur des effets non linéaires. L'écoulement décollé peut alors bifurquer vers la région <i>IV</i> , ce qui est illustré sur la deuxième figure. Enfin, la région <i>IV3D</i> est globalement instable sous l'effet d'un mécanisme centrifuge	135
8.17	Comparaison des échelles de temps associées aux mécanismes de Kelvin-Helmoltz associé à une croissance algébrique et centrifuge associé à une croissance exponentielle.	136

8.18 Etude préliminaire de la structure spatiale du mode adjoint global $|\hat{u}|$ et $|\hat{w}|$ (en haut et en bas respectivement) pour le champ D3 avec $\beta = 0.1$, équivalent au vecteur propre à gauche du problème de stabilité linéaire globale. Nous pouvons remarquer que ce dernier est principalement localisé dans la bulle, indiquant une condition initiale optimale pour le déclenchement du mécanisme centrifuge. 137

A.1 Comparaison du pseudospectre obtenu par la résolution exacte (encadrée) et l'approximation à l'aide de la matrice de Hessenberg. L'écoulement de Poiseuille au nombre de Reynolds 10000 est considéré. Les nombres d'onde longitudinaux et transverses sont fixés à : $\alpha = 0.1$, $\beta = 0$. Les niveaux en ϵ sont représentés suivant une échelle logarithmique : $-\log_{10}$. Le sous espace considéré est de dimension 100. Deux cibles sont testées $\Omega_1 = (0.4, 0.0)$ et $\Omega_2 = (0.0, 0.2)$. Nous observons ainsi une superposition des résultats. 143

B.1 Influence du terme \tilde{p}_x et de δx_{min} sur le taux d'amplification des ondes TS d'une couche limite de Blasius à la fréquence $F = 0.7 \times 10^{-4}$ 148

C.1 Illustration en rouge des points utilisés pour l'imposition des contraintes sur la pression, dans le cas de perturbations bidimensionnelles. 153

C.2 Construction des ensembles pour une approche multi-domaines. 154

D.1 Evolution du champ décollé au nombre de Reynolds 213, sur une période. . . 157

D.2 Lignes de courant du champ moyen moyen. Les lignes de courant associées au champ convergé au nombre de Reynolds $Re = 200$ sont représentées en noir. . 158

D.3 Evolution temporelle de la vorticité à la paroi en $x = 85$, au nombre de Reynolds $Re = 213$ 158

Introduction

Lorsqu'une couche limite laminaire est soumise à l'influence d'un gradient de pression adverse, suffisamment élevé, celle-ci se "détache" de la paroi, créant ainsi un écoulement décollé laminaire.

Ces derniers ont fait l'objet de nombreuses recherches au cours du siècle passé, depuis les premières observations de Jones en 1938 jusqu'aux récentes simulations numériques directes de Ulrich Rist [71]. Sa présence au sein de nombreuses applications industrielles à bas nombre de Reynolds et ses multiples conséquences sur les performances aérodynamiques, suscitent cet intérêt majeur, aussi bien dans les domaines de l'ingénierie que les recherches académiques. Notamment, nous pouvons citer l'apparition de tels phénomènes au bord d'attaque d'un profil d'aile en incidence, ou encore sur la lunette arrière d'un profil de voiture, où les nombres de Reynolds, basés sur l'épaisseur de quantité de mouvement à la séparation, se situent entre 10^2 et 10^3 (figure 1 et [2]). Les propriétés fortement instables liées à la zone de recirculation vont alors contribuer aux phases de la transition vers la turbulence, agissant par la même occasion sur les efforts du profil considéré. En particulier, les structures tourbillonnaires ainsi engendrées, s'accompagnant d'un changement de la distribution de pression le long du profil, peuvent être à l'origine d'effets néfastes, comme un accroissement de la traînée ou encore une chute de la portance. Ainsi, la nécessité d'une augmentation des performances et de réduction des coûts, autorisèrent le développement d'outils de contrôle, comme des actionneurs ou encore une recherche d'optimisation de forme. Néanmoins, ces procédés restent encore de nos jours relativement empiriques. De ce fait, la compréhension des mécanismes déstabilisants liés aux différentes étapes de la transition vers la turbulence, associés à ces écoulements décollés, reste un enjeu majeur dans le domaine de la mécanique des fluides. Notamment, la détermination précise de l'influence de perturbations extérieures sur la réponse de l'écoulement pourrait permettre une optimisation des processus de contrôle, de manière à maîtriser, par exemple, la première bifurcation de celui-ci.

Par conséquent, nous nous proposons dans ce mémoire de nous intéresser à la détermination des mécanismes physiques mis en jeu, au cours de cette première bifurcation. Pour cela, nous adopterons une étude de stabilité linéaire globale, prenant en compte le fort degré de non parallélisme induit par la présence de la zone de recirculation. En particulier, l'essor de telles approches dans l'étude d'écoulements ouverts n'est finalement que relativement récent au moment où ce travail de thèse fut initié, et permis l'émergence de nouvelles perspectives, notamment à travers les recherches de Theofilis en 2003 [84]. Ainsi, ce type d'analyse pourrait se révéler judicieuse et originale sur de tels écoulements, par rapport aux études classiques reposant sur l'hypothèse de faible parallélisme, restreintes à une gamme de longueurs d'onde petites devant une échelle propre à l'inhomogénéité spatiale du champ. En outre, elle pourrait illustrer des comportements spécifiques, comme le déclenchement de larges phénomènes transitoires, ou encore certaines instationnarités [53], [89], non identifiées par les approches locales classiques [51], [50].

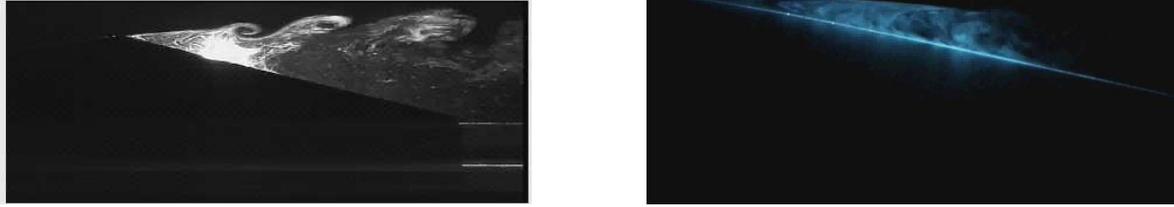


FIG. 1 – Exemple d’écoulements décollés pouvant intervenir sur la lunette arrière d’une voiture (à droite), ou encore au bord d’attaque d’un profil d’aile en incidence.

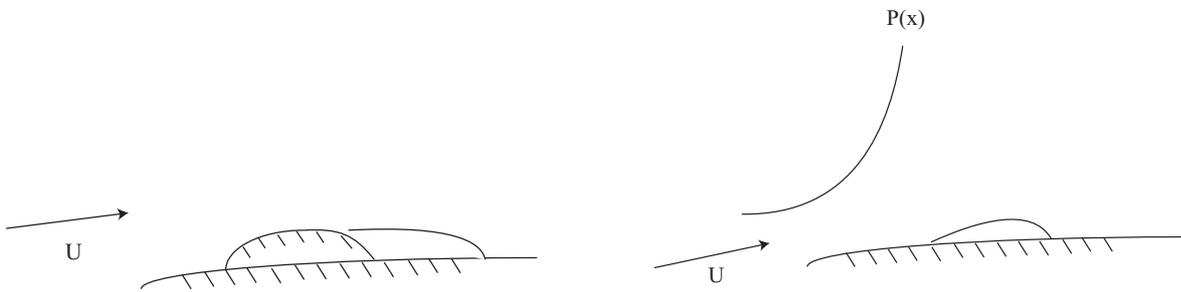


FIG. 2 – Illustrations des deux types d’écoulements décollés. A droite (GIS), et à gauche (APG-induced separation).

Afin de modéliser ce type d’écoulement, deux options sont envisageables. Nous nous référons pour cela à la distinction émise par Alving & Fernholz (1996) [6]. Soit la zone de recirculation est créée à l’aide d’un gradient de pression induit géométriquement, comme la présence d’une marche ou d’une bosse. Cette première catégorie, nommée par les auteurs précédents "geometry induced separation" (GIS), a fait l’objet de nombreuses recherches, en particulier du fait de sa facilité de mise en oeuvre. Soit le décollement est créé par l’imposition d’un gradient de pression adverse, au sein de l’écoulement libre. Cette deuxième catégorie, référencée par "adverse pressure gradient induce separation" (APG-induced separation), est plus délicate à réaliser et présente des degrés de liberté supplémentaires, comme la position du point de séparation qui n’est plus fixée géométriquement (figure 2). En outre, elle présente l’avantage de ne s’intéresser qu’à l’influence de la zone de recirculation et non aux effets dus à la géométrie, comme une courbure dans le cas d’une bosse. Notre analyse s’attachera donc à proposer différents scénarii de bifurcation associés à ce type de configuration (figure 3), à travers une étude de stabilité linéaire globale. Notre argumentaire s’axera ainsi suivant trois parties majeures. Tout d’abord, nous présenterons les diverses techniques de stabilité employées classiquement dans l’analyse d’écoulement ouvert. Cette première partie mettra ainsi en valeur les différents mécanismes mis en jeu au sein d’écoulement de couche limite attachée/décollée et reflétera la pertinence de notre étude associée à un décollement laminaire. Puis, nous introduirons les différentes notions utilisées, en considérant le cas simple d’une couche limite de plaque plane. Enfin, ce type d’étude sera appliqué au cas d’une couche limite décollée laminaire de plaque plane où différents mécanismes, liés à des bifurcations bidimensionnelles et tridimensionnelles, seront proposés.



FIG. 3 – Représentation expérimentale du IAG à Stuttgart de la configuration étudiée au cours de ce mémoire. La très forte instabilité liée au bulbe laminaire induit la présence de structures tourbillonnaires en aval de la bulle.

Première partie

Etat de l'art et méthodes numériques
employées.

Chapitre 1

Avant propos

1.1 Premières études de stabilité linéaire sur une couche limite de plaque plane.

1.1.1 Equation de l'énergie, mécanisme physique.

Les études théoriques et expérimentales de stabilité d'écoulement de couche limite de plaque plane, et sa transition vers la turbulence, ont fait l'objet de nombreuses recherches depuis le commencement du siècle dernier. En particulier, un des scénarii classiques consiste à considérer de faibles oscillations de fluctuations de vitesse et de pression, naissantes en amont de l'écoulement, comme la première étape menant à la turbulence. La compréhension de la naissance de ces oscillations fut et constitue encore un enjeu majeur dans le domaine de la mécanique des fluides.

Les travaux de Prandtl au début du 20^e siècle [70] établirent alors un concept fondamental, illustrant même les théories les plus récentes. Le raisonnement s'achemina de la manière suivante :

Considérons ici le cas d'un écoulement de couche limite de plaque plane laminaire, évoluant dans le plan (x, y) . Le champ de base ainsi défini, dont les mécanismes déstabilisants sont analysés, est supposé ne dépendre que d'une unique composante, la verticale à la paroi y . Soit U la composante du champ de vitesse suivant la direction de l'écoulement x et V sa composante normale, il vient donc :

$$\begin{aligned} U &= U(y), \\ V &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Les perturbations bidimensionnelles de vitesse et de pression sont prises comme des fonctions du temps, de x et de y :

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, t), \\ v &= v(x, y, t), \\ p &= p(x, y, t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

De ce fait, les champs de vitesse instantanés s'illustrent à travers le vecteur : ${}^t(U + \epsilon u, v)$ où $\epsilon \ll 1$. Par suite, les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.4}$$

et l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

où les termes d'ordre supérieur à 1 sont négligés et Re représente le nombre de Reynolds. Les équations (1.3), (1.4) et (1.5) régissent le comportement spatio-temporel des petites perturbations bidimensionnelles et servent de référence aux théories de stabilité locale. Une multiplication par u de (1.3) et v de (1.4) aboutit à la relation suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) &= \frac{1}{Re} \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \\ - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) - uv \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Une expression des transferts d'énergie cinétique entre le champ de base et les perturbations peut ainsi se déduire de (1.6), à l'aide d'une intégration suivant le domaine où celle-ci se situe et une prise de moyenne :

$$\frac{dE}{dt} = - \int \int \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} dx dy - \frac{1}{Re} \int \int \overline{\varpi \varpi} dx dy \quad (1.7)$$

avec ϖ la vorticité de la perturbation. Dès lors, la croissance ou l'atténuation des fluctuations dépendent de la prédominance des effets d'absorption d'énergie par la perturbation sur le champ de base et du taux de dissipation d  à la viscosité, exprimés respectivement par le premier et deuxième terme du membre de droite de l'équation (1.7). Soit la décomposition des fluctuations en modes normaux suivante :

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}(y) \exp [i\alpha (x - ct)], \\ v &= \tilde{v}(y) \exp [i\alpha (x - ct)] \end{aligned} \quad (1.8)$$

où c représente la vitesse de phase complexe égale à $\frac{\Omega}{\alpha}$ avec α le nombre d'onde et Ω la pulsation. Par conséquent, le tenseur de Reynolds \overline{uv} s'écrit :

$$\overline{uv} = \cos(\varphi_u - \varphi_v) |\tilde{u}| |\tilde{v}| \exp(c_i t) \quad (1.9)$$

où φ_u et φ_v correspondent aux phases de \tilde{u} et \tilde{v} ¹. Prandtl  mit alors l'hypothèse que la viscosité peut jouer un rôle déstabilisant au sein d'écoulement visqueux par un changement de phase entre \tilde{u} et \tilde{v} , aboutissant à un transfert d'énergie entre le champ de base et la perturbation, via le tenseur de Reynolds.

1.1.2 Premières analyses théoriques temporelles de Tollmien et Schlichting et validation expérimentale.

Les travaux théoriques allemands de l'entre-deux-guerres de Tollmien et Schlichting [87] [78] établirent les premiers résultats de stabilité linéaire de couche limite de plaque plane. Les équations (1.3), (1.4) sont reformulées à l'aide de ψ la fonction de courant :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.10)$$

¹Nous noterons ici, ainsi que dans la suite du mémoire, par les indices i et r la partie imaginaire et la partie réelle de la quantité spécifiée.

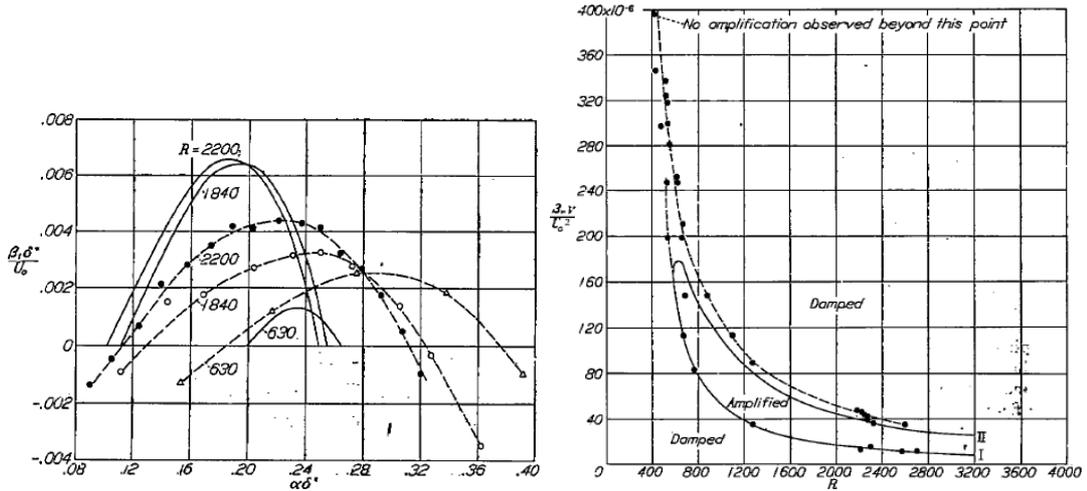


FIG. 1.1 – Les comparaisons à divers nombre de Reynolds, correspondant aux positions sur la plaque, entre les taux d’amplification temporelle obtenus par Schlichting et les résultats expérimentaux de Schubauer & Skramstad, sont représentées à droite. A gauche, les points expérimentaux de début et de fin d’amplification des ondes TS sont confrontés aux deux branches de la courbe neutre obtenues théoriquement par Schlichting (illustrations provenant de [81]).

Une décomposition en mode normaux $\psi = \tilde{\psi}(y) \exp[i\alpha(x - ct)]$ aboutit à la célèbre équation d’Orr-Sommerfeld :

$$\left[(U - c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{1}{i\alpha Re} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 \right] \tilde{\psi} = 0 \quad (1.11)$$

La résolution du problème de stabilité linéaire définit de cette manière un problème aux valeurs propres, avec c et $\psi(y)$, la valeur propre et la fonction propre. Les développements analytiques de Tollmien et Schlichting, reposant sur un point de vue temporel où $c \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, apportèrent alors une première vision théorique sur le comportement des ondes solutions de (1.11). En particulier, une étude approfondie du rôle de la viscosité à proximité de la couche critique, où la vitesse de phase égale la vitesse de l’écoulement, ont conduit à clarifier le rôle déstabilisant de celle-ci et d’établir les premières courbes neutres, situant les zones stables et instables dans un plan (Re, F) , le nombre de Reynolds et la fréquence réduite respectivement

². Cette dernière est calculée par l’expression $\frac{\Omega_r \nu}{U_0^2}$ avec ν la viscosité cinématique et U_0 une échelle de vitesse. Une validation expérimentale s’avéra néanmoins difficile à mettre en oeuvre. En effet, les transitions "naturelles" vers la turbulence d’écoulements ouverts tels que les couches limites, sont initiées par divers facteurs extérieurs comme par exemple un taux de turbulence résiduel, des ondes acoustiques ou encore l’état de surface de la plaque. Afin d’illustrer en soufflerie les mécanismes décrits par les auteurs précédents, il fallut contrôler expérimentalement cette transition vers la turbulence.

Les efforts expérimentaux de Schubauer & Skramstad de 1947 [81] permirent pour la première fois de confirmer les théories allemandes de l’entre-deux-guerres et édifia les premières

²Classiquement le nombre de Reynolds, dans l’étude des couches limites laminares de type Blasius, est basé sur l’épaisseur de déplacement δ^* . Il existe alors une bijection entre la position sur la plaque et le nombre de Reynolds via $\delta^* = 1.7208\sqrt{(x/Re)}$.

bases d'un scénario de transition vers la turbulence, basé sur le développement d'ondes bidimensionnelles auxquelles les deux auteurs ont cédé leur nom : ondes de Tollmien-Schlichting (notées TS dans la suite du mémoire). Les figures 1.1 illustrent les résultats obtenus par Schubauer & Skramstad. Il permet en outre de commenter les hypothèses formulées par les auteurs allemands. La description théorique du développement des ondes TS, les taux d'amplification, vitesse de phase en fonction du nombre de Reynolds et de la fréquence, s'appuyait sur une étude de stabilité temporelle. Par conséquent, le développement spatial des ondes TS nécessite une transformation des taux d'amplification expérimentaux, de manière à pouvoir les confronter aux résultats théoriques. Pour cela Schubauer & Skramstad utilisèrent la relation suivante :

$$\frac{u(x)}{u_0} = \exp \int_{t(x_0)}^{t(x)} \Omega_i dt \tag{1.12}$$

$$\Omega_i = c_r \frac{d \ln \frac{u}{u_0}}{dx}$$

L'évolution de l'amplitude de la perturbation fut alors mesurée suivant plusieurs positions le long de la plaque, à une distance à la paroi fixe. Par suite, le taux d'amplification temporelle s'en est déduit à l'aide de la vitesse de phase $c_r = \frac{\Omega_r}{\alpha}$. La comparaison de la figure 1.1 illustre un très bon accord entre la théorie et l'expérience, même relativement en aval de la plaque (nombre de Reynolds égal à 2200). En outre, le rapprochement des points expérimentaux de début et de fin d'amplification d'ondes TS, avec la courbe neutre obtenue par Schlichting, est assez remarquable en considérant les approximations réalisées et les faibles moyens numériques de l'époque, auxquels s'ajoutèrent la difficulté à obtenir de mesures précises expérimentalement.

1.1.3 Analyse de stabilité spatiale.

Une étude théorique de stabilité spatiale, où le nombre d'onde α serait pris comme complexe et la pulsation Ω réelle, paraît néanmoins plus adaptée à une comparaison avec l'expérience. En effet, la forme de la perturbation créée à l'aide d'un "ruban oscillant", donc une fréquence réelle dans l'expérience de Schubauer & Skramstad, suggère une évolution spatiale de la fluctuation. Cependant, cette idée n'émergea dans les travaux de Gaster qu'au cours des années 60 [37] et permit une comparaison directe entre les calculs théoriques et l'expérience en 1970 (Jordinson [52]). Cette confrontation établit, entre autre, un nombre de Reynolds critique, marquant le commencement de la zone instable, à 520.

Pourtant certaines incompréhensions, au cours de cette première phase de transition, demeurèrent. Notamment, les hautes fréquences et la valeur du nombre de Reynolds critique furent relativement mal calculées, le développement des ondes TS apparaissant légèrement en amont des prévisions théoriques. Une des explications pour expliquer ces différences s'appuya sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle dans les analyses théoriques, depuis les années 1930.

1.1.4 Premières corrections faiblement non parallèles.

Ainsi, les années 60 et 70 ont vu l'émergence de nombreuses études tentant de prendre en compte l'épaississement de la couche limite suivant x . La plupart d'entre elles se basèrent sur l'hypothèse d'une variation lente le long de la plaque, de l'enveloppe des perturbations par rapport à la partie oscillante. Le vecteur des fluctuations de vitesse $q = {}^t(u, v)$ et de pression

p s'écrivirent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} q &= \tilde{q}(X, y) \exp(\theta(x, t)) \\ p &= \tilde{p}(X, y) \exp(\theta(x, t)) \end{aligned} \tag{1.13}$$

avec X , la variable définie par $X = \epsilon x$ où $\epsilon \ll 1$. Un développement à l'ordre 1 en ϵ permet d'intégrer une influence de la composante verticale et des gradients suivant x du champ de vitesse dans les développements analytiques³. Nous pouvons citer par exemple les travaux de Bouthier [15], de Gaster [40] ou encore les analyses par échelles multiples de Saric & Nayfeh [77] et Bridges & Morris [16] qui ont suivi cette orientation. Toutes ces démarches autorisèrent une correction du nombre de Reynolds critique, relativement inférieur à celui obtenu par une analyse parallèle, et une meilleure description des ondes d'instabilité. En outre, l'influence de la quantité mesurée sur l'étude de stabilité a été mise en lumière à travers toutes ces publications. Plus précisément, les caractéristiques d'instabilité se sont révélées relativement dépendantes du paramètre mesuré, comme par exemple la vitesse horizontale, positionnée à une hauteur spécifique de la normale à paroi. Ceci présenta un certain intérêt dans les confrontations des résultats théoriques avec les recherches expérimentales, qui ont, par cette occasion, pu être affinées.

1.1.5 Premières simulations numériques directes, approches PSE.

Le développement des capacités informatiques et des algorithmes vers la fin des années 70 ont permis de confirmer les corrections non-parallèles de stabilité linéaire précédentes. Les simulations numériques directes⁴ de Fasel [31], reproduisant le type d'excitation par "ruban oscillant" en soufflerie, ont rendu possible l'expérimentation sur ordinateur, de la première phase de la transition vers la turbulence par les ondes TS. La confrontation des résultats obtenus par Fasel avec ceux de Gaster fut remarquable⁵. Néanmoins les DNS furent et restent encore de nos jours coûteuses et délicates à mettre en oeuvre. De plus, une étude théorique des phénomènes non linéaires, prenant en compte les effets non-parallèles, s'avéra fortement ardue par les méthodes précédentes. Dès lors, au milieu de années 80 émergea une nouvelle méthode numérique, astucieuse et peu coûteuse, consistant à transformer la résolution des équations de stabilité en un problème d'évolution en espace, calculé par une simple procédure de marche en x , communément appelé PSE⁶ (Herbert & Bertolotti [47]) (figure 1.2). En outre, cette approche autorisa une compréhension détaillée et efficace des effets linéaires et non linéaires, combinés à une correction faiblement non parallèle [48]. L'élaboration de scénarii de transition vers la turbulence, basés sur des études de stabilité et initiés par l'amplification d'ondes TS émergèrent. De plus, l'augmentation des moyens numériques donna lieu, à partir du milieu des années 90, à des confrontations pertinentes entre ces approches théoriques et des DNS de transition contrôlée. Les travaux de Rist & Fasel de 1995 [73] en sont une remarquable illustration.

1.1.6 Critère semi-empirique de la transition vers la turbulence basé sur des études de stabilité linéaire : la méthode e^n .

L'évaluation de l'abscisse de transition, noté x_t , présente un grand intérêt dans de nombreuses applications pratiques, notamment dans le domaine de l'aéronautique. Ainsi, Smith,

³L'approximation parallèle étant définie par l'ordre 0 de ce développement.

⁴notées DNS dans la suite du mémoire

⁵Cette étude fut affinée dans l'article de 1990 de Fasel & Konzelmann[32]

⁶Parabolized stability equations

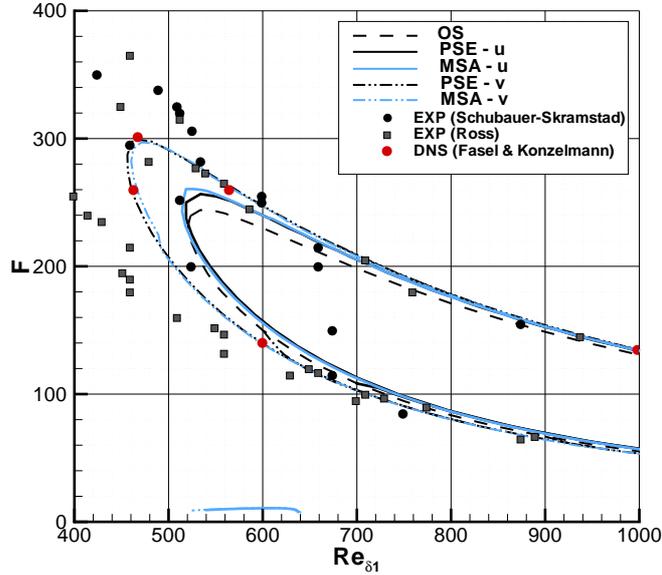


FIG. 1.2 – Etude de stabilité linéaire d’une couche limite de Blasius, réalisée au laboratoire SINUMEF par une approche PSE, échelles multiples et parallèle. Les résultats sont confrontés aux valeurs obtenues par DNS de Fasel et aux expériences de Schubauer & Skramstad et Ross *et al.* [55].

Gamberoni et Van Ingen introduisirent en 1956, une méthode semi-empirique, dite du e^n , qui étend les résultats de la théorie linéaire vus précédemment, en supposant que la transition naturelle arrive très rapidement après le début de la phase non linéaire d’évolution des ondes TS. Pour cela, un facteur N est défini de la manière suivante :

$$N(x, F) = \ln \left(\frac{A(x, F)}{A(x_0, F)} \right) = - \int_{x_0}^x \alpha_i(\epsilon) d\epsilon \quad (1.14)$$

où F la fréquence d’excitation, x_0 l’abscisse de début d’amplification des ondes TS à la fréquence F et α_i le taux d’amplification spatiale. La méthode e^n définit ainsi un ensemble de courbes $N(x, F)$ admettant une enveloppe :

$$n = \max_F (N(x, F)) \quad (1.15)$$

Suite à de nombreuses confrontations expérimentales, les auteurs constatèrent que la transition vers la turbulence s’établissait lorsque n atteignait 7, c’est-à-dire que les ondes TS s’étaient amplifiées d’une valeur de l’ordre de $e^7 \approx 1000$. Les figures 1.3(a,b,c,d) mettent en valeur l’illustration du critère e^n , réalisée via une analyse de stabilité linéaire parallèle et faiblement non-parallèle "PSE", sur la couche limite de Blasius. Les courbes neutres identifient le commencement des zones instables en fonction de la fréquence réduite le long de la plaque, les courbes $N(x, F)$ illustrant l’amplification des ondes TS correspondantes. L’enveloppe atteint la valeur de $n = 7$ pour le nombre de Reynolds égal à ≈ 2600 dans le cas parallèle, celui-ci étant légèrement abaissé par une correction faiblement non parallèle. La prise en compte de phénomènes extérieurs, comme par exemple le taux de turbulence résiduel, autorisa, au cours des années suivantes, l’affinement de ce critère, et son développement au sein de nombreuses entreprises aéronautiques comme Airbus.

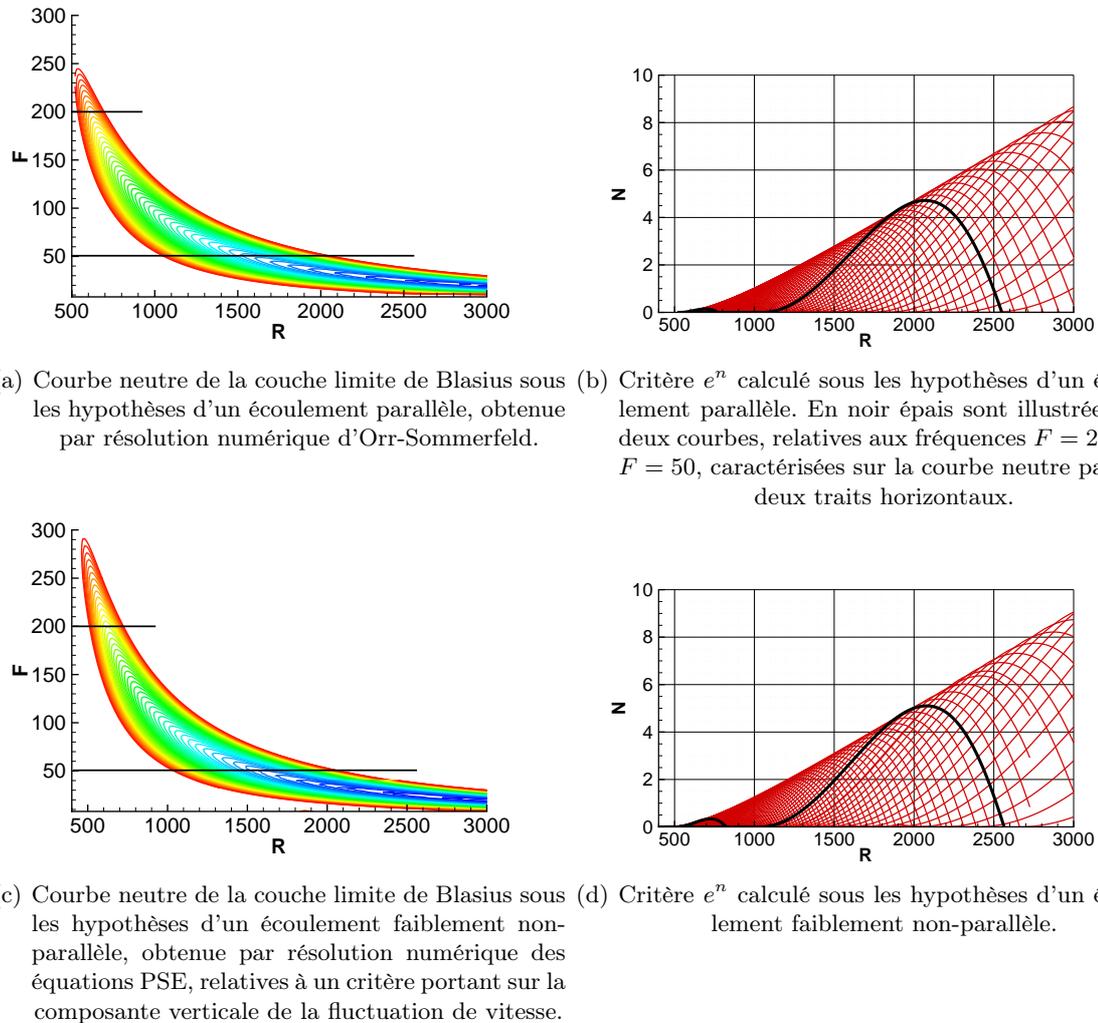


FIG. 1.3 – La courbe neutre relative à la couche limite de Blasius est représentée à gauche, en fonction de la fréquence réduite $Fr = F \times 10^{-5}$ et du nombre de Reynolds Re basé sur l'épaisseur de déplacement. A droite, une illustration du critère e^n représentant l'amplification des ondes TS pour chaque fréquence. L'enveloppe de ces courbes définit la courbe $n = \max_F (N(x, F))$.

Ces diverses études au cours du siècle dernier ont initié la mise en oeuvre de techniques et de théories sophistiquées d'analyses de stabilité, à travers cette configuration académique. Leurs évolutions ont rendu possible une meilleure compréhension des mécanismes d'instabilité pouvant conduire à la transition vers la turbulence et le développement d'outils de contrôle, dans le but de maintenir l'écoulement laminaire ou, du moins, de retarder la turbulence. Elles établirent ainsi un fondement théorique autorisant l'étude de phénomènes plus complexes comme l'apparition d'une zone décollée au sein d'une couche limite laminaire.

1.2 Etudes de stabilité de couche limite décollée laminaire.

1.2.1 Travaux de thèse de Gaster des années 60.

Les zones de recirculations naissantes au bord d'attaque de profils d'aile en incidence, à faibles vitesses, induisent une large zone décollée. Du fait des nombreuses conséquences sur les performances aérodynamiques qu'engendrent de tels phénomènes, ces écoulements furent l'objet de nombreuses études depuis le milieu du siècle dernier. Les premières expériences et travaux théoriques de thèse de Gaster constituèrent une classification fondamentale, donnant lieu à l'analyse de la structure et du comportement de deux variétés de bulbes, les courts et les longs [39].

La première famille est caractérisée par une faible zone de recirculation, dont la couche de mélange produit un rattachement turbulent. La distribution du champ de pression, résultante de la zone d'eau morte ainsi créée, n'affecte que légèrement la répartition des efforts, le long du profil (1.3). En outre, la diminution de la vitesse ou encore une augmentation de l'incidence, peut entraîner un élargissement, brusque ou progressif, de la zone décollée et induire un détachement de la couche de mélange beaucoup plus important, pouvant dans le pire des cas, couvrir la totalité du profil. La zone décollée passe alors d'un bulbe court à un bulbe long, classiquement appelé le phénomène du bursting. Dans ce cas, la répartition du champ de pression affecte considérablement les efforts agissant sur l'aile. En particulier, le phénomène du bursting a pour effet de provoquer une nette chute de portance ainsi qu'une augmentation de la traînée. La définition précise d'un critère de bursting inspira de nombreuses recherches, et reste de nos jours un sujet d'étude. Nous pouvons citer par exemple les expériences de Gaster, qui mirent en lumière une relation entre un paramètre de pression réduit P et la valeur du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement au point de décollement θ_s . P se détermine alors par la relation suivant : $P = (\theta_s^2/\nu) (\Delta U/\Delta x)$, avec (ΔU) une mesure de variation de vitesse en absence de décollement, obtenue à l'aide d'une transition forcée ⁷.

1.2.2 Caractérisation des bulbes courts, analyses spatiales.

Une excitation de l'écoulement, par ondes acoustiques, révéla deux propriétés différentes, associées aux espèces identifiées. Les mécanismes de transition de bulbe court semblèrent être liés à la déstabilisation de la couche de mélange par l'amplification exponentielle d'ondes bi-dimensionnelles, menant à un recollement turbulent. Cette déstabilisation s'apparenta à une instabilité non visqueuse, de type Kelvin-Helmoltz (notée KH dans la suite du mémoire) induit par la présence d'un point d'inflexion le long du profil décéléré puis décollé ⁸. Cette caractéristique est illustrée sur les figures 1.5(a) et 1.5(b) où un examen de profils de couche limite décélérée et accélérée est représenté. La propriété non-visqueuse de l'instabilité se distingue alors par l'aspect des courbes neutres des profils décélérés. En effet, contrairement à

⁷ ν étant la viscosité cinématique.

⁸théorème de Rayleigh

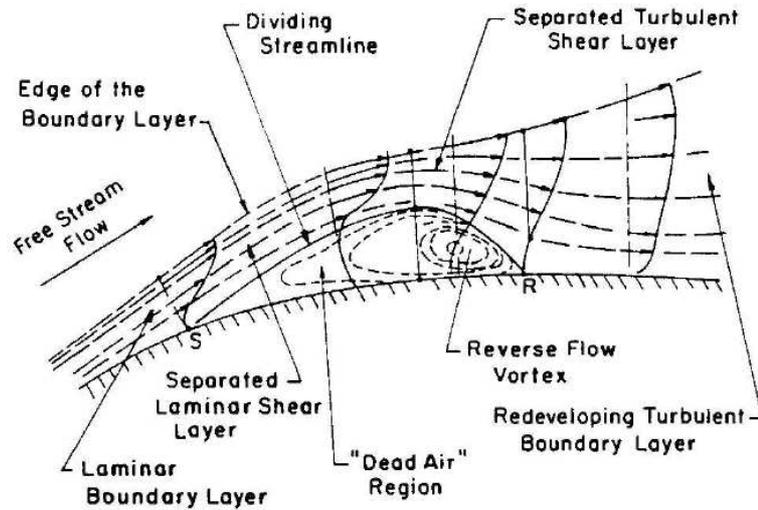
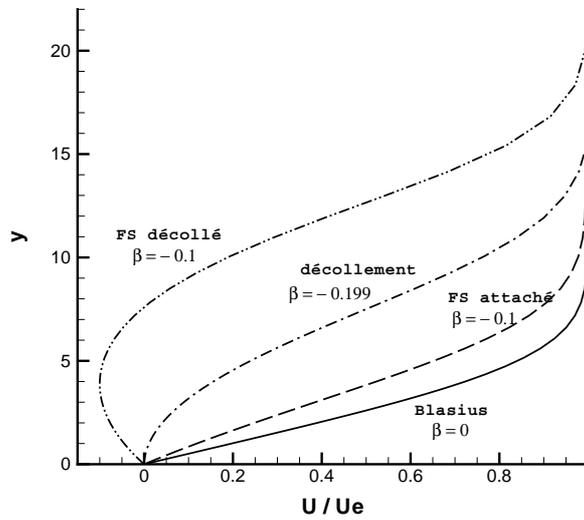


FIG. 1.4 – Représentation de la structure d'un écoulement de couche limite décollée laminaire par Horton en 1969.

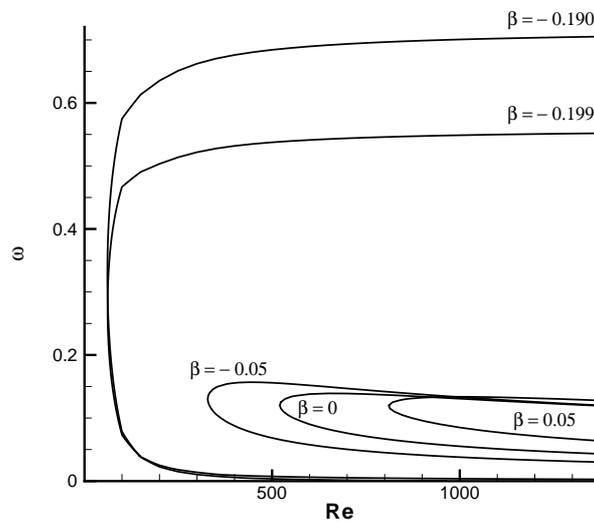
l'analyse de stabilité du profil de Blasius, celles-ci ne tendent pas à se refermer avec l'augmentation du nombre de Reynolds, mais, au contraire, la gamme de fréquences instables a tendance à s'élargir. La transition vers la turbulence d'une telle topologie de décollement est ainsi déterminée par des caractéristiques locales de l'écoulement, et est relativement bien comprise par les analyses de stabilité classiques. Les travaux expérimentaux de Gaster [39] et plus récemment de Dovgal [26] ou encore les DNS de transition contrôlée de Rist & Maucher [72], confortèrent ces hypothèses. La forte amplification des ondes KH au sein de la zone décollée se compara remarquablement à une analyse de stabilité locale. Enfin, la nécessité de prévoir l'abscisse de transition vers la turbulence, pour les applications industrielles, a fait l'objet de nombreuses études et permit d'illustrer l'efficacité de la méthode e^n vue dans le paragraphe précédent. Par exemple, les recherches expérimentales et numériques de Häggmark *et al.* de 2001 [49] établirent alors un bon consensus dans l'application de cette méthode pour des applications d'ingénierie.

1.2.3 Caractérisation des bulbes longs.

La deuxième série d'essais, relatifs au bulbe long, effectuée par Gaster dans la fin des années 60 [39] identifia un comportement fondamentalement différent de celui des bulbes courts. En effet, une diminution de la vitesse et une augmentation du paramètre de pression réduit amena à l'allongement du bulbe court, en un long. La réponse au forçage, par ondes acoustiques, souleva alors une difficulté dans la comparaison avec une étude de stabilité spatiale. Il apparut une basse fréquence, propre à l'écoulement, qui selon l'auteur induisait une modification des profils de vitesse du décollement, amenant à une impossibilité de caractériser la réponse en fréquence du bulbe long. Ce comportement du bulbe suscita de nombreuses hypothèses. Les simulations numériques directes des années 90 donnèrent ainsi lieu à de multiples études paramétriques, dans des configurations similaires à l'analyse expérimentale de Gaster. Par exemple, l'article de Pauley *et al.* [66] de 1990 s'est orienté sur l'influence d'un paramètre de pression réduit et d'autres facteurs tels que le nombre de Re ou encore la taille du décollement. Ces recherches ont mis en lumière une corrélation possible entre l'apparition d'arrachement de structures tourbillonnaires, nommées "vortex shedding", et un paramètre, P_{\max} lié au déclenchement du bursting. Ce dernier fut construit d'une manière assez semblable à Gaster :



(a) Profils de vitesse de Falkner-Skan pour divers paramètres de gradient de pression réduit notés β ici. Il est intéressant de distinguer l'apparition d'un point d'inflexion sur les profils de couche limite décélérées puis décollées.



(b) Evolution de la courbe neutre en fonction du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement, noté Re , et de la pulsation ω . Celle-ci étant liée par la fréquence réduite $Fr = \omega/Re$.

FIG. 1.5 – Analyse locale de stabilité de profils de similitude de Falkner-Skan, de couche limite décélérée et accélérée (suivant le signe du gradient de pression réduit β . Notons que la courbe relative à $\beta = 0$ est la courbe neutre classique du profil de Blasius.) [55].

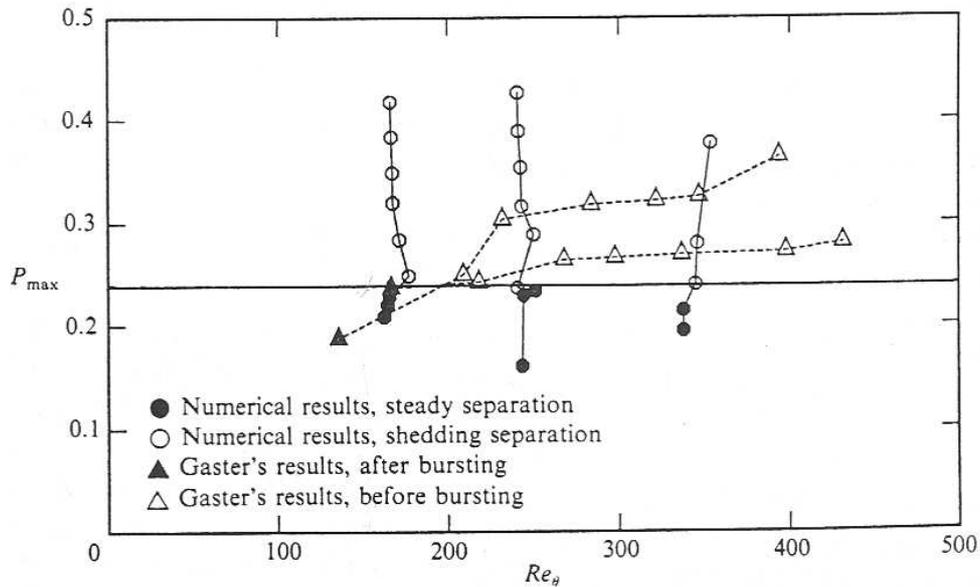


FIG. 1.6 – Critère d'apparition du vortex shedding pour P_{\max} égal à -0.24. Illustration issue de l'article de Pauley *et al.* [66]

$P_{\max} = (\theta_s^2/\nu) (du_i/dx)_{\max}$, où $(du_i/dx)_{\max}$ ne représente plus la variation de vitesse suivant la longueur de décollement, mais la valeur du gradient maximal à la paroi, sous l'hypothèse d'un écoulement potentiel. L'hypothèse d'une valeur de gradient de pression réduit critique, aboutissant à une transition bulbe court/bulbe long liée à la présence d'une instationnarité, fut proposée par l'auteur (voir figures 1.6 et 1.7).

Une suggestion, associée aux caractéristiques de l'instabilité, émergea alors pour expliquer certaines instationnarités de zone de recirculation laminaire.

1.2.4 Hypothèse d'une transition convective/absolue.

A travers les études précédentes, il fut supposé que les fluctuations se déplaçaient suivant le sens de l'écoulement. Par suite, une étude de stabilité spatiale indiquait les vitesses de phase, taux d'amplification et longueurs d'onde associés aux ondes d'instabilité. Néanmoins, de telles études spatiales s'avèrent, dans certaines configurations, erronées et il est alors nécessaire d'étudier le comportement spatio-temporel des perturbations. Deux catégories d'instabilité se distinguent ainsi au sein d'un écoulement ouvert, une instabilité convective et une instabilité absolue.

Les premières notions en mécanique des fluides d'instabilité convective et absolue sont apparues dès les années 60 [38] mais se développèrent essentiellement dans les années 80 à travers les travaux de Huerre & Monkewitz [51]. La réponse à une impulsion localisée en espace et en temps d'un écoulement ouvert fut considérée. Si l'énergie ainsi injectée, prenant la forme d'un paquet d'onde, est advectée tout en s'amplifiant en temps, suivant la direction de l'écoulement, celui-ci est convectivement instable. C'est le cas par exemple d'une couche limite de plaque plane de type Blasius, discutée dans les sections précédentes. Il vient qu'en absence totale de perturbations continues, l'écoulement reprendra son état initial. Un écoulement convectivement instable agit donc comme un amplificateur sélectif de bruit.

La présence d'une instabilité absolue illustre un comportement différent. Le paquet d'onde n'est dans ce cas plus advecté le long de l'écoulement, mais possède une dynamique intrinsèque,

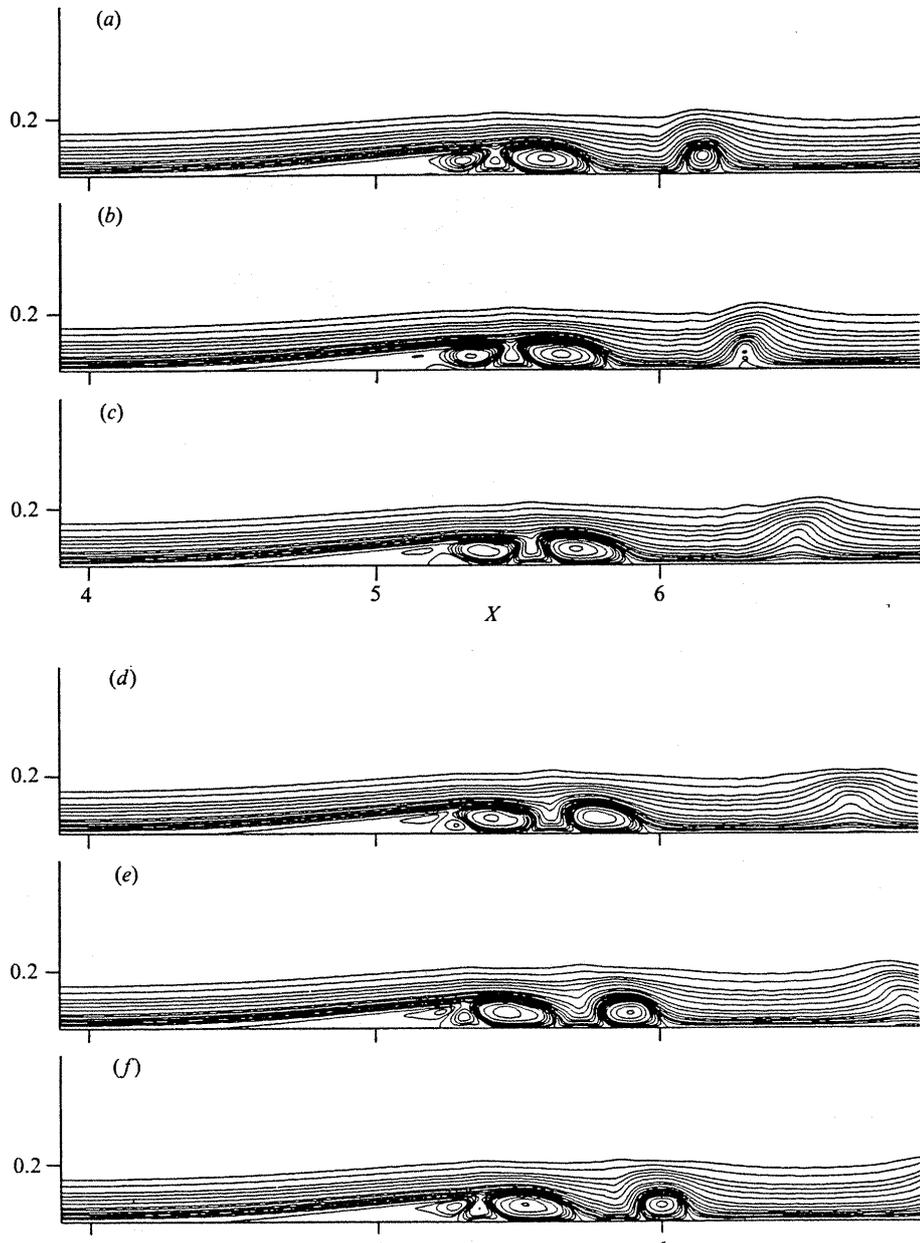


FIG. 1.7 – Lignes de courant durant un cycle, issues de la simulation numérique directe de décollement de plaque plane, de Pauley *et al.* [66] à $Re_x = 1250544$, pour un certain profil de suction.

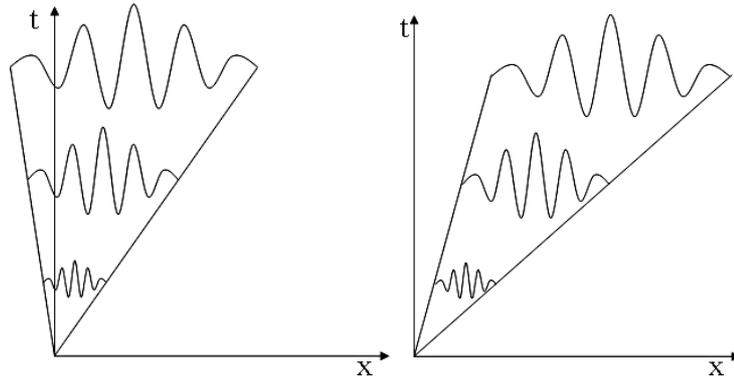


FIG. 1.8 – Evolution du paquet d'onde dans un plan espace temps, suivant une instabilité convective ou une instabilité absolue, à droite et à gauche respectivement.

très peu sensible au bruit extérieur. Il agit alors comme un oscillateur auto-entenu, battant à la fréquence de l'instabilité absolue. Les perturbations croissent sur place et contaminent par la même occasion tout l'écoulement. Ceci est mis en lumière sur la figure 1.8, où nous observons les deux comportements du paquet d'onde selon des diagrammes en espace et en temps, relatifs à une instabilité convective et absolue.

1.2.4.1 Notion d'instabilité globale à partir des analyses locales de stabilité absolue.

Ces concepts, valables pour des écoulements parallèles, ont par la suite été étendus à des écoulements faiblement non parallèles. L'enveloppe de la perturbation est donc prise comme dépendante faiblement de x . Par suite, le problème de stabilité définit un problème aux valeurs propres où les directions y et x sont prises comme des directions propres. A l'aide d'un développement WKB de la solution, Chomaz *et al.* ont établi [50] que l'existence d'une "poche" d'instabilité absolue au sein de l'écoulement est une condition nécessaire, mais non suffisante, d'apparition d'une "instabilité globale". Celle-ci induit alors un comportement intrinsèque à l'écoulement, imposant la formation de structures cohérentes à la fréquence de l'instabilité globale. Le mode global s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(X, y) \exp(-i\Omega_G t) \quad (1.16)$$

avec $\Re(\Omega_G)$ la pulsation à laquelle bat la perturbation et $\Im(\Omega_G)$, le taux de croissance. Ces derniers se déterminent par l'étude du point selle X_s dans le plan complexe (X_r, X_i) , via [22] :

$$\Omega_G = \Omega_0(X_s), \text{ avec } \frac{\partial \Omega_0}{\partial X}(X_s) \quad (1.17)$$

où $\Omega_0(x)$ désigne l'évolution du mode absolu local. En particulier, de telles analyses, par la suite développées au régime non linéaire (Chomaz & Couairon en 1997 [25]), ont pu expliquer le déclenchement de l'allée tourbillonnaire de Von Karman d'un sillage de cylindre (B. Pier 2002 [69]), où une bonne approximation de la fréquence de battement fut trouvée. Néanmoins, l'approximation de faible parallélisme s'est révélée délicate dans la prédiction du nombre de Reynolds critique.

Ce genre d'instabilité, issue d'une transition d'un régime convectif à absolu, pourrait être à l'origine de la basse fréquence observée à l'apparition d'une bulbe long par Gaster [39]. Ainsi, des études théoriques sur les propriétés locales de l'instabilité d'écoulements décollés

émergèrent dès les années 90. En particulier, l'analyse de Hammond & Redekopp [46] de 1998, reposant sur l'étude d'un bulbe modèle construit à l'aide d'une famille de profils de Falkner-Skan, a identifié la possibilité pour un écoulement décollé, de manifestation d'une instabilité globale. En outre, elle souligna l'importance de l'écoulement de retour, supérieur à 30 %, dans l'amorce de ce comportement. Une étude sur un profil analytique de Alam & Sandham [2] ajusta la dépendance en nombre de Reynolds de ce critère. Enfin, l'étude paramétrique de Rist & Maucher [74] affina l'importance des paramètres influant le déclenchement d'une instabilité absolue, comme par exemple la hauteur de la couche de mélange.

Malgré ces avancées importantes dans la compréhension de la dynamique d'écoulements décollés, aucune publication scientifique, jusqu'à aujourd'hui, n'a démontré clairement le lien entre la transition d'une instabilité convective à une absolue, et les propriétés d'un bulbe long. Toutefois, il semble clair qu'un décollement peut faire l'objet d'une instabilité extrinsèque, très sensible au bruit extérieur, liée à l'aspect fortement convectif des ondes d'instabilités KH, ou encore être caractérisé par une instabilité intrinsèque, régissant globalement le comportement des perturbations. En particulier, ce comportement globalement instable a été complètement identifié dans des configurations diverses faisant intervenir des zones de recirculation, à travers des confrontations entre simulations numériques directes et études de stabilité locales.

1.2.4.2 Illustration de comportements globaux à travers des simulations numériques directes d'écoulement décollé.

Les DNS de décollement se développant sur une plaque plane de Fasel & Postl [33] éclaircissent le comportement bidimensionnel d'un bulbe globalement instable et les travaux théoriques de Hammond & Redekopp [46] sur un écoulement réaliste. En effet, l'imposition d'une force de succion, induisant un large décollement, établit la transition d'un écoulement globalement stable, à celui de globalement instable. La figure 1.9(a) illustre ce phénomène, à l'aide d'une représentation de l'évolution spatio-temporelle de la valeur de la perturbation, liée à la vorticité à la paroi. Il apparaît alors un lâcher de structures cohérentes, ou encore "vortex shedding", synchronisées à la fréquence de l'instabilité globale (voir figure 1.9(b)).

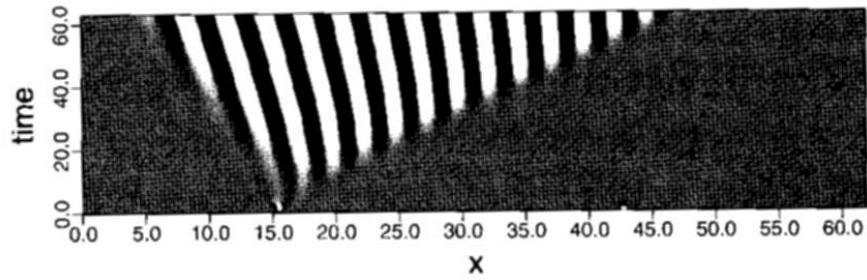
Une étude similaire, où la zone de recirculation est cr  e géométriquement, à l'aide de deux bosses, permettant la décélération puis l'accélération de l'écoulement, fut menée par Marquillie & Ehrenstein en 2003 [62]. Une instationnarité non forcée apparut à partir d'un certain nombre de Reynolds. La figure 1.10 représente la structure spatiale de la perturbation, suivant la vitesse longitudinale, liée à l'instabilité globale. De plus, une analyse locale, suivant les travaux de Couairon & Chomaz [25], autorisa une détermination théorique de la fréquence de l'instabilité globale. Celle-ci s'avéra identique à celle obtenue par une transformation de Fourier du signal issu de la simulation numérique directe.

Par conséquent, il paraît clair, malgré les hypothèses d'un écoulement faiblement inhomogène suivant x , qu'il peut exister un lien entre l'apparition d'un comportement intrinsèque du décollement et la présence d'une instabilité globale, caractérisée par une large zone absolument instable.

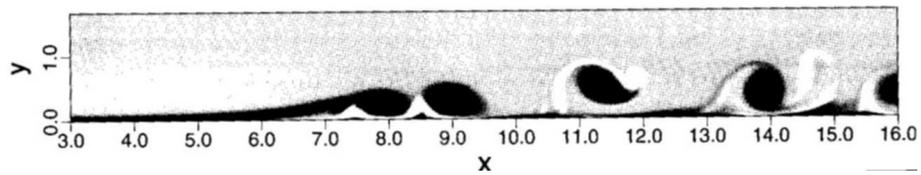
1.2.5 Etudes d'instabilité globale fortement non parallèles.

1.2.5.1 Premiers analyses temporelles de perturbations hétérogènes selon deux directions d'espace.

Avec le développement des moyens informatiques et l'élaboration d'algorithmes efficaces de résolution de problèmes aux valeurs propres, les recherches de stabilité d'écoulements plus complexes ont vu apparaître des analyses plus générales. Ainsi, afin de prendre en compte un

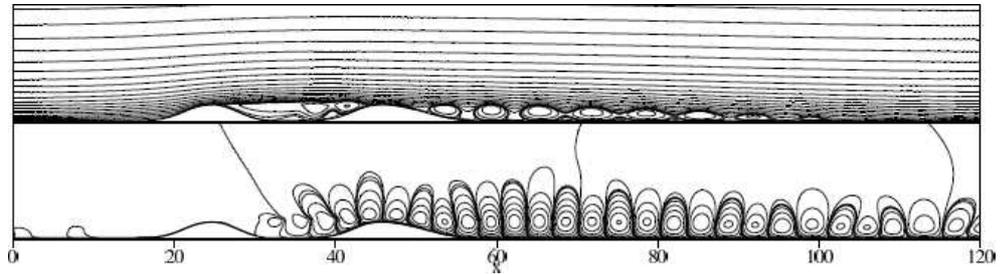


(a) Diagramme spatio-temporel construit à partir de la valeur de la perturbation à la paroi. Les perturbations ont ici tendance à remonter l'écoulement, caractéristique d'une instabilité absolue.

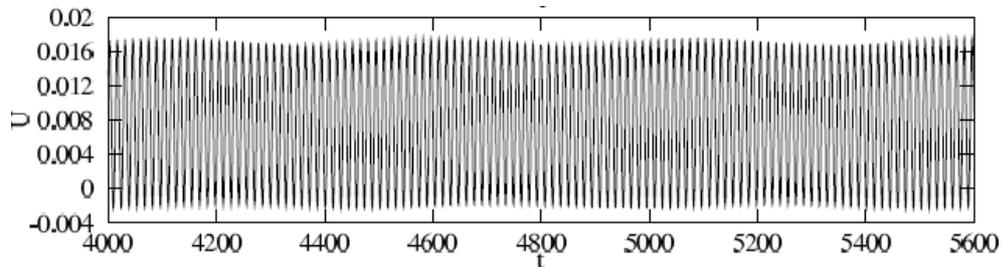


(b) Vue instantanée du champ de vorticité représentant un lâcher de structures tourbillonnaires.

FIG. 1.9 – Simulation numérique directe de Fasel [33] d'un décollement de plaque plane globalement instable.



(a) En haut, vue instantanée du comportement de la zone décollée, issue du calcul DNS. En bas, une représentation de la structure spatiale de la perturbation longitudinale, calculée par soustraction de la valeur moyenne et instantanée du champ.



(b) Evolution à $x = 40$ et $y = 1$ de la composante horizontale de vitesse, en fonction du temps, dans le régime établi.

FIG. 1.10 – Simulation numérique directe de Marquillie & Erhenstein de 2003 [62] d'un décollement globalement instable, au nombre de Reynolds 900.

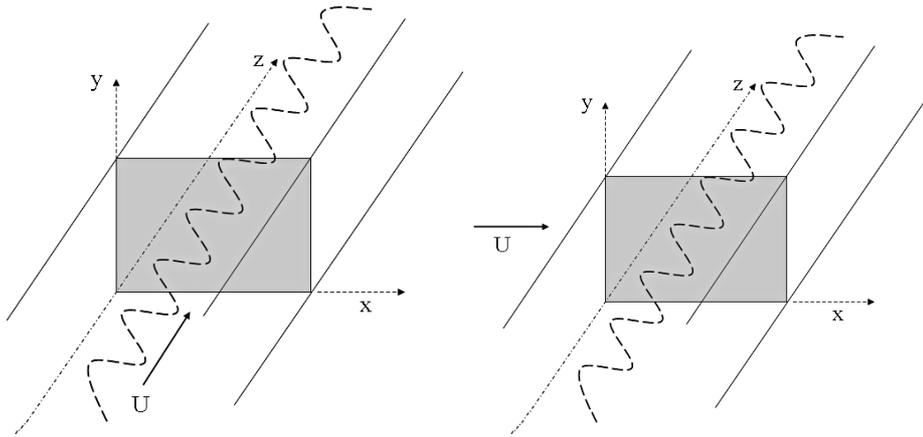


FIG. 1.11 – Etude de stabilité possédant deux directions inhomogènes. A droite, le point de vue temporel généralisé. A gauche, le point de vue global, appliqué à un écoulement de base 2D, la troisième direction étant homogène.

caractère plus hétérogène du champ de base, la décomposition suivante des perturbations est adoptée :

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \hat{\mathbf{q}}(x, y) \exp - i(\Omega_G t + \beta z) \\ p &= \hat{p}(x, y) \exp - i(\Omega_G t + \beta z) \end{aligned} \quad (1.18)$$

avec $\mathbf{q} = {}^t(u, v, w)$, le vecteur des perturbations relatif au champ de vitesse et p celui à la pression. Uniquement la direction z est considérée comme homogène avec β le nombre d'onde suivant celle-ci. Les équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées définissent ainsi un problème aux valeurs propres, avec Ω_G la valeur propre, où la taille du système est considérablement plus importante que les analyses de stabilité locales classiques. L'écoulement est donc temporellement instable si $\Im(\Omega_G)$ est positive. Ce type d'approche débuta à partir des années 90, où elle trouva un intérêt particulier dans les études de stabilité temporelle étendues à des écoulements plans. La perturbation fut alors prise totalement hétérogène selon un plan (x, y) (voir figure 1.11), et homogène suivant z , la direction de propagation de l'écoulement. L'étude d'un écoulement de Poiseuille généralisé de Tatsumi & Yoshimura de 1990 [83], où la taille de la boîte est prise en compte, en est un parfait exemple. Elle permit notamment de révéler l'influence des rapports d'aspect et des parois, sur le nombre de Reynolds critique. Une démarche semblable de Parker & Balachandar en 1998 [65] autorisa l'analyse d'un écoulement de coin, où pour la première fois aucune hypothèse sur la forme de la perturbation, pleinement 2D selon un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement, ne fut émise. Elle mit ainsi en évidence l'influence du coin sur l'instabilité visqueuse résultante.

1.2.5.2 Etudes de stabilité globale par une approche non parallèle.

Considérons maintenant les deux directions d'espace appartenant au plan de l'écoulement, comme des directions propres. Le système (1.18) définit ainsi un problème de stabilité linéaire globale pour des écoulements bidimensionnels, qui n'est plus restreint à une bande de longueurs d'onde, liée à l'hypothèse de faible non-parallélisme. De cette manière, l'écoulement est considéré comme globalement instable si et seulement si $\Im(\Omega_G)$ est positive. Cette approche, développée notamment par Theofilis [84], révéla des scénarii de bifurcations associés à des configurations relativement complexes. De plus, la structure spatiale de la perturbation est complètement déterminée par la forme de la fonction propre $\hat{\mathbf{q}}$. L'analogie entre l'analyse

issue des propriétés locales et l'étude globale non parallèle, lors de l'apparition d'un phénomène instationnaire propre à l'écoulement, paraît alors relativement évidente. Lorsqu'un mode global, issu de l'analyse de stabilité globale non parallèle, devient instable, il peut s'identifier comme l'équivalent de celui obtenu par des études convectives absolues locales via (1.17), à la correction non parallèle près. Nous pouvons par exemple citer le cas de l'instabilité globale du sillage de cylindre, analysée par les deux approches ([69], [43]). En particulier, l'approche globale pleinement non parallèle, s'est révélée fortement pertinente dans la détection précise du nombre de Reynolds critique, où l'approche locale échouait. Néanmoins, les nombres de Strouhal obtenus par les deux approches sont relativement identiques.

1.3 Contexte de l'étude présentée dans le mémoire.

Suite à nos précédentes discussions relatives aux études scientifiques antérieures, nous avons vu l'émergence de deux approches différentes dans l'analyse de stabilité d'écoulement ouvert. La première, la plus répandue jusqu'au début des années 90, s'appuya sur des analyses de stabilité locales et trouva de nombreuses validations expérimentales et numériques, via l'étude d'écoulement faiblement inhomogène selon une direction d'espace. Elle permit notamment de comprendre les premières phases de transition de couche limite, issues du développement des ondes TS, ou encore la forte amplification d'ondes KH au sein d'une couche limite décollée, pouvant conduire à un rattachement turbulent. Les phénomènes menant à la transition vers la turbulence étaient alors initiés par l'amplification de perturbations extérieures, associées au caractère convectivement instable de l'écoulement. En outre, les efforts dans la prise en compte du non-parallélisme se sont avérés fructueux, autorisant un raffinement des critères de transition et le développement d'outils de contrôle. D'autre part, les propriétés de stabilité locales, liées à la notion d'instabilité convective et absolue, de certaines configurations faisant intervenir de larges zones de recirculation, ont mis en valeur des comportements globaux. L'écoulement ne répondait plus comme un amplificateur de bruit, mais possédait une particularité intrinsèque, propre à celui-ci, très peu sensible au bruit extérieur.

Au début des années 90, les analyses de stabilité temporelles, généralisées à des écoulements plans, ainsi que le développement des moyens informatiques, ont mis en lumière la possibilité de résoudre de larges problèmes aux valeurs propres, avec deux directions d'espace non homogènes. De ce fait, à contrario de l'approche précédente, le raisonnement s'achemina

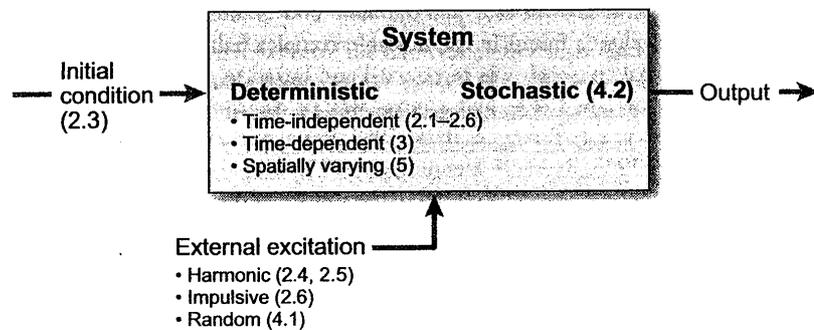


FIG. 1.12 – Schéma illustrant les différentes orientations pouvant être adoptées dans les analyses de stabilité [79].

non plus à identifier des propriétés locales, mais à étudier la stabilité de l'écoulement dans sa globalité.

Par conséquent, il apparaît intéressant d'approfondir les phénomènes que nous pouvons identifier à travers cette approche plus générale, notamment dans le but de les appliquer à des écoulements beaucoup plus complexes où l'hypothèse de non parallélisme n'est plus appropriée. De ce fait, ce mémoire s'orientera à une analyse de stabilité linéaire globale d'un écoulement fortement décollé de plaque plane. En particulier, notre démarche s'inspirera du schéma proposé par Schmid [79], résumant les différents points de vue qui peuvent être adoptés lors d'une étude de stabilité (figure 1.12). Plus spécifiquement, nous nous intéresserons à l'influence d'une condition initiale localisée en temps et espace au sein d'un tel écoulement, et à son développement spatio-temporel. Un autre point de vue consistera à quantifier globalement la sensibilité d'une excitation harmonique extérieure continue, sur le décollement. Ces travaux, qui feront l'objet de notre troisième partie, s'appuieront sur une première analyse associée à la couche limite de plaque plane, dont la richesse des écrits permettra d'illustrer les différents outils mis en oeuvre. Enfin, ces développements faisant intervenir de nombreuses méthodes et outils numériques, le prochain chapitre de cette première partie sera consacré à leur présentation.

Chapitre 2

L'étude de stabilité linéaire, d'une approche locale à une analyse globale.

Nous détaillons ici les approches de stabilité linéaire et les méthodes numériques qui seront employées au cours des prochaines parties de ce mémoire. Les diverses analyses proposées s'orienteront toutes vers l'étude de l'influence d'une petite perturbation au sein d'un écoulement bidimensionnel incompressible, appelé champ de base, afin de décrire la première de bifurcation de ce dernier. Les directions longitudinale, verticale et transverse sont notées par la suite x, y, z . Soit $\mathbf{U}(x, y) = U(x, y)\mathbf{e}_x + V(x, y)\mathbf{e}_y = (U, V)(x, y)$, les composantes de vitesse longitudinale et verticale du champ de base. Nous notons le vecteur perturbation : $\mathbf{q} = {}^t(\mathbf{u}, p)(x, y, z, t)$ avec t mettant en valeur la dépendance en temps. Prenons le cas général d'une perturbation tridimensionnelle : $\mathbf{u} = (u, v, w)$ où u, v, w représentent les composantes de fluctuations de vitesse suivant x, y et z , et enfin p caractérisant la pression. Le champ instantané est alors décomposé de la manière suivante : $\mathbf{Q} = {}^t(\mathbf{U}, 0, P) + \epsilon\mathbf{q}$, avec $\epsilon \ll 1$. De ce fait, l'évolution en espace et en temps d'une petite perturbation est décrite par la résolution du problème à l'ordre 1 en ϵ , issu de l'introduction de \mathbf{Q} dans les équations de Navier-Stokes incompressible :

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\mathbf{A}\mathbf{q} \quad (2.1)$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 + \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 + \frac{\partial V}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

avec $\mathcal{C}_1 = U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}$ et $\mathcal{C}_2 = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$

Nous allons maintenant détailler sous quelles hypothèses le problème (2.1) se ramène à une analyse de stabilité locale ou globale ⁹.

⁹La formulation primitive sera conservée au cours de toutes les analyses de stabilité. Cette dernière possède un avantage, en ne faisant intervenir uniquement des dérivées d'ordre 1 du champ de base. Ceux-ci seront principalement issus d'une simulation numérique directe, nous introduirons ainsi moins d'erreur en ne le dérivant qu'une seule fois.

2.1 Analyse locale.

Le système précédent peut se simplifier considérablement sous l'hypothèse d'un écoulement de base parallèle, c'est-à-dire $\mathbf{U} = (U, 0)(y)$. Cette considération s'avère pertinente dans les cas faiblement non parallèles, où finalement nous pouvons considérer que localement le parallélisme du champ de base est vérifié. L'étude nous restreint néanmoins à l'analyse d'une certaine bande de longueurs d'onde, petites devant une échelle caractérisant l'inhomogénéité de l'écoulement de base. Cependant, en se référant aux discussions du chapitre précédent, cette hypothèse est relativement bien vérifiée pour des couches limites de plaque plane, et même pour certains écoulements décollés. Une décomposition des perturbations en modes normaux est réalisée :

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(y) e^{i(-\Omega t + \alpha x + \beta z)} \quad (2.3)$$

où α et β désignent les nombres d'onde suivant x et z , et Ω la pulsation. L'écoulement de base étant purement bidimensionnel, la direction transverse est considérée comme homogène. Ainsi, dans les différentes approches présentées $\beta \in \mathfrak{R}$.

2.1.1 Etude temporelle.

2.1.1.1 Détails des opérateurs.

Le point de vue temporel consiste à traiter les nombres d'onde α et β comme réels, et la pulsation Ω comme complexe. Le problème (2.1) se simplifie en :

$$(\mathbf{A}_t - i\Omega\mathbf{B}_t) \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.4)$$

avec

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B} \text{ et } \mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 & \frac{\partial U}{\partial y} & 0 & i\alpha \\ 0 & \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 & i\beta \\ i\alpha & \frac{\partial}{\partial y} & i\beta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

avec ici $\mathcal{C}_1 = U i \alpha$ et $\mathcal{C}_2 = \frac{1}{Re} \left(-\alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right)$. Le problème de stabilité temporel définit un problème aux valeurs propres généralisé avec $i\Omega$, la valeur propre et $\tilde{\mathbf{q}}$, la fonction propre.

2.1.2 Etude spatiale.

2.1.2.1 Détails des opérateurs.

Cependant, un point de vue spatial est plus adapté dans l'étude de la propagation des ondes convectives¹⁰. Par conséquent, nous nous intéressons maintenant à la formulation spatiale du problème de stabilité local. Ainsi $\Omega \in \mathfrak{R}$ et $\alpha \in \mathcal{C}$. De ce fait, le système précédent (2.1) se ramène à un problème aux valeurs propres non linéaires en α :

$$(\mathbf{C}_0 + \alpha\mathbf{C}_1 + \alpha^2\mathbf{C}_2) \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.6)$$

¹⁰Ce détail est relaté dans notre premier chapitre.

avec

$$\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} -i\Omega - \mathcal{C}_3 & \frac{\partial U}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & -i\Omega - \mathcal{C}_3 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & -i\Omega - \mathcal{C}_3 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & i\beta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} iU & 0 & 0 & i \\ 0 & iU & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iU & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{Re} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Re} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Re} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{C}_3 = -\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right)$.

Enfin, en utilisant la méthode de la matrice compagnon, (2.6) peut se transformer en un problème aux valeurs propres linéaire classique. Nous posons $\tilde{\mathbf{q}}_1 = \alpha \tilde{\mathbf{q}}$ et $\mathcal{S} = (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}_1)$. De cette manière (2.6) peut s'écrire sous la forme :

$$(\mathbf{A}_s - \alpha \mathbf{B}_s) \mathcal{S} = 0 \quad (2.8)$$

où les opérateurs \mathbf{A}_s et \mathbf{B}_s sont :

$$\mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 & \mathbf{C}_1 \\ 0 & \mathcal{I}_d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{C}_2 \\ 0 & \mathcal{I}_d \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

L'analyse locale des ondes convectives revient donc à trouver la valeur propre α de (2.8) pour une valeur de $\Omega \in \Re$ et β , si la perturbation est tridimensionnelle. L'écoulement est spatialement instable localement ssi α_i est négatif.

Comme nous l'avons vu au cours du premier chapitre, il existe des méthodes spatiales permettant une correction des taux d'amplification et des longueurs d'onde, en prenant en compte les effets non-parallèles. Une des techniques les plus simples repose sur l'élaboration des équations PSE linéaires. L'annexe B comporte une explication détaillée de cette approche. Les études de stabilité spatiales seront ainsi confrontées à cette méthode faiblement non-parallèle, de manière à illustrer leur influence.

2.1.3 Conditions limites.

Les écoulements seront du type couche limite de plaque plane. Des conditions limites classiques d'adhérence à la paroi et d'atténuation des perturbations de vitesse à l'infini sont alors utilisées :

$$\tilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } y \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

La continuité de la pression est imposée sur la plaque et en écoulement libre :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } y \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

(2.10) et (2.11) ferment les systèmes (2.8) et (2.4). Dans la suite du mémoire, la relation de dispersion issue de l'analyse locale sera notée :

$$\mathcal{D}(\Omega, \alpha, \beta) = 0 \quad (2.12)$$

2.2 Analyse globale : étude spatio-temporelle.

2.2.0.1 Détails des opérateurs.

Nous nous plaçons ici dans un cadre plus général où l'hypothèse relative au parallélisme du champ de base n'est plus considérée. Par conséquent, nous n'imposons aucune structure spatiale à la perturbation, dans le plan de l'écoulement (x, y) . La forme d'onde suivante est ainsi adoptée : $\mathbf{q}(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{q}}(x, y) e^{i(-\Omega t + \beta z)}$. De ce fait, le problème (2.1) se formule en un problème aux valeurs propres en $i\Omega$:

$$(\mathbf{A} - i\Omega\mathbf{B}) \hat{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.13)$$

où les dérivées par rapport à z sont remplacées par $i\beta$. Les fonctions propres $\hat{\mathbf{q}}$ mettent en valeur le comportement spatial de la perturbation, tandis que Ω décrit son évolution temporelle. En particulier, si Ω_i est négative, la perturbation sera temporellement atténuée, si elle est positive, elle s'amplifiera. ⁽¹¹⁾.

2.2.1 Conditions limites.

Les conditions limites sur les perturbations de vitesse en aval et en amont, à employer dans l'analyse de stabilité globale d'écoulement ouvert, ne sont pas évidentes et font encore l'objet d'études récentes. Nous illustrerons, à la fin de cette partie, à travers un cas simple, un exemple de conditions limites pouvant être adoptées. Puis, un chapitre y sera consacré dans la seconde partie, relative à la couche limite. A la paroi et en écoulement libre les conditions limites (2.10) sont utilisées.

Enfin, aucune condition limite ne doit être imposée sur la pression dans le cas bidimensionnel. En effet, en écoulement incompressible, celle-ci peut être vue comme un multiplicateur de Lagrange assurant que l'écoulement est bien de divergence nulle. Dans la suite du mémoire, la relation de dispersion issue de l'analyse globale sera désignée par l'opérateur :

$$\mathcal{L}_G(\Omega, \beta) = 0 \quad (2.14)$$

2.3 Méthodes numériques.

2.3.1 Discrétisation spatiale.

2.3.1.1 Brève description.

Une méthode de collocation spectrale basée sur des polynômes de Chebyshev est utilisée pour la discrétisation des problèmes (2.8) et (2.13). Celle-ci est adaptée pour nos analyses de stabilité, permettant d'obtenir une grande précision, avec un nombre de points relativement restreint.

Ainsi, nous prenons une répartition de points de Gauss-Lobatto pour la définition des vecteurs perturbations. Celle-ci est caractérisée par la distribution suivante :

$$\xi_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j \in 0, \dots, N \quad (2.15)$$

où $\xi_j \in [-1, 1]$. L'approximation d'une fonction H sur $[-1, 1]$ est donc réalisée par le polynôme H_N :

$$H_N(x) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) H(x_k), \quad \text{où } H_N(\xi_j) = H(\xi_j) \quad (2.16)$$

¹¹Ces aspects seront complétés dans la prochaine partie, consacrée à l'étude de la couche limite.

Les $\varphi_j(\xi)$ sont alors déterminés par les formules des polynômes interpolateurs de Lagrange :

$$\varphi_j(\xi) = \left(\frac{1 - \xi^2}{\xi - \xi_j} \right) (-1)^{j+1} \frac{T'_N(\xi)}{N^2 c_j} \quad (2.17)$$

où T_N désigne le polynôme de Chebyshev de degré N . L'approximation de la dérivée de la fonction H est ainsi définie par un opérateur de dérivée, noté \mathbf{D} , dont les éléments sont :

$$D_{ij} = \varphi'_j(x_i), \quad 0 \leq i, j \leq N \quad (2.18)$$

ou encore

$$\begin{cases} D_{ij} = \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j \xi_i - \xi_j} \text{ pour } i \neq j \\ D_{ii} = -\frac{\xi_i}{2(1 - \xi_i^2)} \text{ pour } i \in \{1, \dots, N-1\} \\ D_{00} = -D_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6} \end{cases}$$

avec $c_i = 2$ pour $i = 0$, et $i = N$, $c_i = 1$ pour $i \in \{1..N-1\}$.

De ce fait, la dérivée de H aux $N + 1$ points du maillage est calculée par une simple multiplication de matrice :

$$(\mathbf{H})' = \mathbf{D}\mathbf{H} \text{ et } (\mathbf{H})'' = \mathbf{D}^2\mathbf{H} \quad (2.19)$$

Enfin, l'application de métriques aux opérateurs de dérivées permet de définir un domaine de calcul quelconque. Soit $\xi(x)$, la transformation associée à ce changement de grille. L'opérateur de dérivées associé à x , noté \mathbf{D}_x , se détermine simplement par une multiplication des métriques avec \mathbf{D} :

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, \text{ soit } \mathbf{D}_x = \mathbf{D} \diamond \left\{ \frac{d\xi}{dx} \right\}$$

où \diamond représente la multiplication point par point ¹².

Appliquons maintenant ces aspects théoriques au problème de stabilité local (2.5) ¹³.

2.3.1.2 Application au problème local.

Soit la transformation $y(\eta)$, où η définit la grille de Gauss-Lobatto. Soit $\tilde{\mathbf{q}}_N$, la représentation discrète de $\tilde{\mathbf{q}}$:

$$\tilde{\mathbf{q}}_N(y) = \sum_{k=0}^{N_y} \varphi_k(x) \tilde{\mathbf{q}}(y) \quad (2.20)$$

où $N_y + 1$ désigne le nombre de points de collocation. Notons \mathbf{D}_y , l'opérateur de dérivation suivant y , de taille $(N_y + 1) \times (N_y + 1)$. Soit le vecteur \mathbf{U}_N , composé des valeurs de U suivant la grille de Gauss-Lobatto. Enfin, nous noterons $\mathcal{I}_{\mathbf{d}}$ et $\mathbf{0}$, la matrice identité et la matrice

¹²chaque terme d'une ligne l de la matrice est multiplié par le terme $v(l)$ du vecteur qui est situé sur la même ligne.

¹³Le lecteur pourra se référer à l'annexe C pour plus de détails concernant les méthodes spectrales. Cette description s'inspire de la présentation de Peyret dans [67].

nulle. Les opérateurs de stabilité locale \mathbf{A}_t et \mathbf{B}_t sont ainsi représentés par les matrices $(\mathbf{A}_t)_N$ et $(\mathbf{B}_t)_N$ de tailles $16 \times (N_y + 1) \times (N_y + 1)$, suivantes :

$$(\mathbf{A}_t)_N = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 & \mathbf{D}_y \mathbf{U}_N & \mathbf{0} & i\alpha \mathcal{I}_d \\ \mathbf{0} & \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 & i\beta \mathcal{I}_d \\ i\alpha \mathcal{I}_d & \mathbf{D}_y & i\beta \mathcal{I}_d & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et } (\mathbf{B}_t)_N = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{I}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

avec $\mathcal{C}_1 = \mathbf{U}_N i\alpha$ et $\mathcal{C}_2 = \frac{1}{Re} (-\alpha^2 \mathcal{I}_d + \mathbf{D}_y^2 - \beta^2 \mathcal{I}_d)$

2.3.1.3 Application au problème global.

Nous pouvons généraliser la méthode précédente pour un problème dépendant de deux directions d'espace, notées x et y . Soit $N_x + 1$ et $N_y + 1$, le nombre de points suivant x et y . Le vecteur perturbation $\hat{\mathbf{q}}$ peut donc être représenté par $\hat{\mathbf{q}}_M$:

$$\hat{\mathbf{q}}_M(x, y) = \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_y} \varphi_k(x) \varphi_l(y) \hat{\mathbf{q}}(x, y) \quad (2.22)$$

Soit \mathbf{D}_x et \mathbf{D}_y , les opérateurs de dérivées suivant x et y , et $\mathbf{U}_M, \mathbf{V}_M$ les représentations discrètes du champ de base. Enfin, (2.13) sont définis par les matrices \mathbf{A}_M et \mathbf{B}_M de taille $16 \times (M \times M)$, avec $M = (N_y + 1) \times (N_x + 1)$. Par conséquent, le problème de stabilité globale s'écrit :

$$\mathbf{B}_M = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{I}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A}_M = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 + \mathbf{D}_x \mathbf{U}_M & \mathbf{D}_y \mathbf{U}_M & \mathbf{0} & \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_x \mathbf{V}_M & \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 + \mathbf{D}_y \mathbf{V}_M & \mathbf{0} & \mathbf{D}_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 & -i\beta \mathcal{I}_d \\ \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_y & -i\beta \mathcal{I}_d & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

avec $\mathcal{C}_1 = \mathbf{U}_M \mathbf{D}_x + \mathbf{V}_M \mathbf{D}_y$ et $\mathcal{C}_2 = \frac{1}{Re} (\mathbf{D}_x^2 + \mathbf{D}_y^2 - \beta^2 \mathcal{I}_d)$

2.3.1.4 Grilles utilisées.

La discrétisation suivant y , dans le cas local et global, est réalisée par la transformation suivante, adaptée aux écoulements de couche limite :

$$y(\eta) = \frac{a(1-\eta)}{(b+\eta)} \quad (2.24)$$

avec $a = \frac{y_i L_y}{(L_y - 2y_i)}$ et $b = 1 + 2\frac{a}{L_y}$

où L_y représente la valeur maximale de y et y_i , celle où $E((N_y + 1)/2)$ points de collocation sont concentrés.

La discrétisation suivant x est réalisée à l'aide de la transformation suivante :

$$x = 0.5L_x(1 - \xi) \quad (2.25)$$

où x varie entre 0 et L_x .

2.3.2 Méthodes de résolution.

Une méthode de type QR , de la librairie Lapack est utilisée pour la résolution des problèmes de stabilité locale discrétisés. En outre, un algorithme de Newton est implémenté dans la résolution du problème local pour converger sur une valeur propre particulière. Cette technique autorise un suivi de mode efficace dans le plan (β, Re, Ω) . Notons que les illustrations des courbes d'amplification et des courbes neutres relatives à une analyse spatiale locale, vues au premier chapitre, sont issues des formulations présentées.

Le problème de stabilité globale (2.23) étant de taille trop large pour être résolu par une méthode QR , un algorithme d'Arnoldi est utilisé pour sa résolution. En effet, les maillages utilisés feront intervenir des matrices de tailles situées entre ≈ 25000 et ≈ 36000 pour une perturbation bidimensionnelle ou tridimensionnelle ¹⁴. Cette approche est détaillée dans l'annexe A.1.

2.4 Illustration sur un écoulement ouvert parallèle.

Nous pouvons illustrer les méthodes locales et globales, à travers un cas test où les deux analyses doivent aboutir à des résultats identiques. Nous considérons pour cela un écoulement parallèle, issu d'un profil de similitude de Blasius. Nous nous plaçons sur la courbe neutre, au nombre de Reynolds $Re_{\delta^*} = 520$ et un nombre d'onde $\alpha_r = 0.3134$. La pulsation correspondante à une analyse locale est égale à $\Omega_r = 0.125$. Afin de simuler cette longueur d'onde via une étude globale, nous considérons un domaine de longueur $L_x = \frac{2\pi}{\alpha_r}$ et les conditions limites relatives aux fluctuations de vitesse suivantes :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - i\alpha_r \hat{u} = 0 \text{ et } \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - i\alpha_r \hat{v} = 0 \quad (2.26)$$

Nous imposons ainsi le comportement périodique de l'onde. Nous comparons alors le spectre obtenu par l'analyse de stabilité locale temporelle, et le spectre issu de l'étude globale. Nous retrouvons ici, le mode de Tollmien-Schlichting, ainsi qu'un début de branche continue (figure 2.4). En outre, le mode de Tollmien-Schlichting est représenté sur la figure 2.4, où la forme de la fonction d'amplitude est retrouvée par l'analyse globale. Ce cas test, relativement simple, permet tout de même d'illustrer le type de conditions limites que nous pouvons adopter dans l'analyse bidimensionnelle et de proposer une certaine validation des méthodes présentées.

¹⁴Une taille mémoire de l'ordre de 10 Go et 20 Go est ainsi nécessaire pour la résolution du problème (2.23) associé à une perturbation 2D et 3D, pour les calculs présentés dans les prochaines parties.

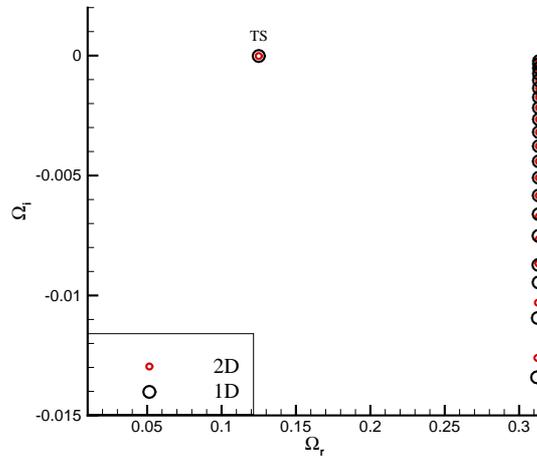


FIG. 2.1 – Comparaison des spectres obtenus par des analyses de stabilité linéaire globale et locale. La grille 2D est (30×45) suivant une longueur d'onde à $Re_{\delta^*} = 520$.

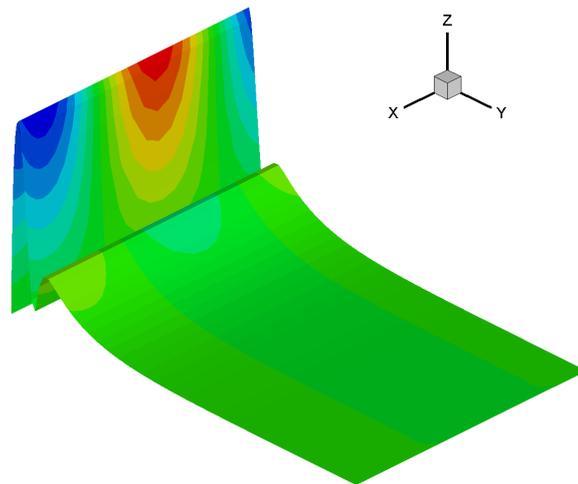


FIG. 2.2 – Fonction propre \hat{u} du mode de Tollmien-Schlichting obtenue par l'analyse globale, suivant une longueur d'onde à $Re_{\delta^*} = 520$. Les contours représentent la partie réelle de \hat{u}

Chapitre 3

Présentation du code de simulation numérique directe 2D.

3.1 Formulation et discrétisation.

L'élaboration des champs de base est réalisée à l'aide d'un code Navier-Stokes incompressible 2D. Une formulation vorticité, fonction de courant est adoptée :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (3.1)$$

$$\Delta \psi = \omega$$

avec ω la vorticité et ψ la fonction de courant. La fonction de courant et la vorticité sont reliées au champ de vitesse par les relations :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Cette formulation pr esente l'avantage de v erifier intrins equement la divergence nulle du champ de base.

3.1.1 Avancement temporel.

Une m ethode semi-implicite, bas ee sur un sch ema de Crank-Nicholson pour les termes de diffusion et sur un sch ema explicite Adams-Bashforth d'ordre 2 pour les termes d'advection, autorise une r esolution instationnaire des  equations (3.1). En particulier, l'implication des termes visqueux permet un choix moins contraignant sur le pas de temps. Nous d ecomposons ainsi l' equation relative à la vorticité en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \mathcal{A}_d(\omega) + \mathcal{V}_i(\omega), \\ \text{où } \mathcal{A}_d(\omega) &= -u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} \text{ et } \mathcal{V}_i(\omega) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Soit Δt , le pas de temps, le sch ema d'int egration temporelle, notée AB2/CN s' ecrit alors :

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} \mathcal{A}_d(\omega^n) - \frac{1}{2} \mathcal{A}_d(\omega^{n-1}) + \frac{1}{2} (\mathcal{V}_i(\omega^{n+1}) + \mathcal{V}_i(\omega^n)) \quad (3.4)$$

où l'exposant n est relatif au temps $n \times \Delta t$.

3.1.2 Discrétisation spatiale.

De manière à raffiner le maillage dans les zones de forts gradients, une transformation de coordonnées est employée. Soit ξ et η les variables spatiales dans le domaine de calcul cartésien, régulier. Le domaine physique, irrégulier cartésien, est alors ramené dans le domaine de calcul à l'aide des formulations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Un schéma classique aux différences finies d'ordre 2 basé sur des développements de Taylor, est utilisé pour la discrétisation des équations suivant ξ et η . Soit la quantité T définie dans l'espace de calcul, où $T_{i,j}$ représente la valeur de T en $\xi(i)$ et $\eta(j)$. Nous approchons les dérivées par les opérateurs suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \xi} &= \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{\xi(i+1) - \xi(i-1)}, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{\eta(j+1) - \eta(j-1)} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} &= \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\xi(i+1) - \xi(i-1))^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\eta(j+1) - \eta(j-1))^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1.3 Méthode de résolution

Nous avons à résoudre à chaque pas de temps un système implicite pour la vorticité et un problème de Poisson pour la fonction de courant. Le schéma utilisé étant sur trois points selon chaque direction, nous avons par conséquent deux systèmes tridiagonaux par blocs à résoudre à l'itération n . Un algorithme de Thomas est utilisé pour la résolution de ces derniers [35], la phase de descente est effectuée au début de l'algorithme, permettant une unique phase de remontée à chaque pas.

Nous allons maintenant détailler les conditions limites utilisées, à travers deux cas tests, la couche limite et la marche descendante.

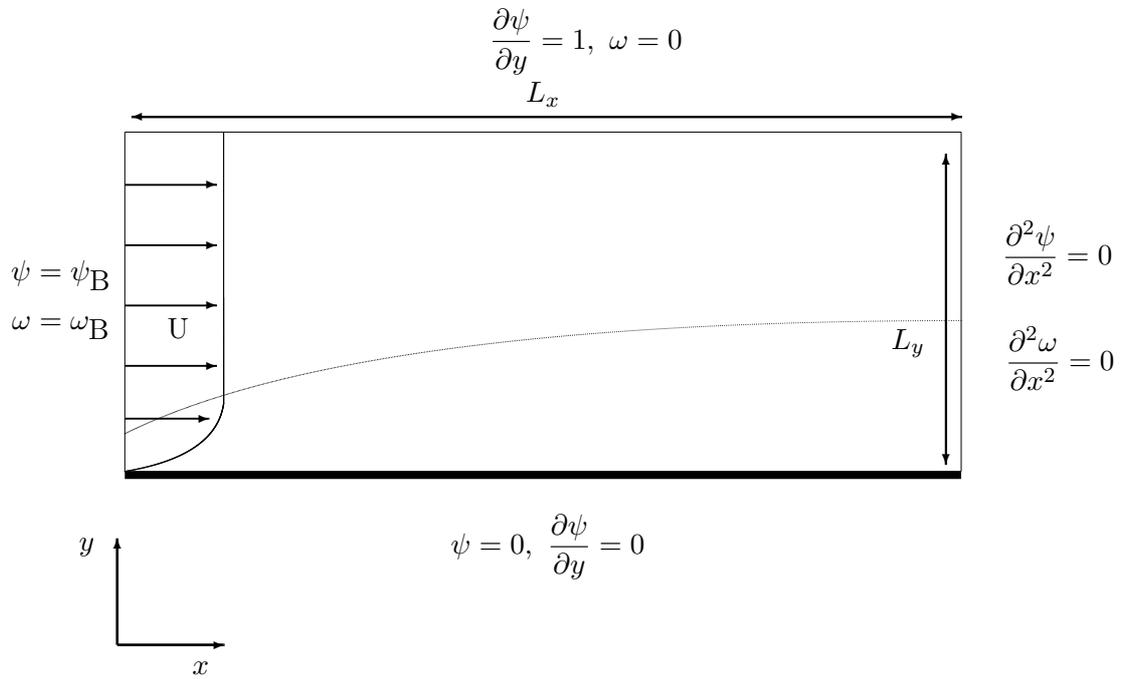
3.2 Cas de validation.

3.2.1 La couche limite de plaque plane.

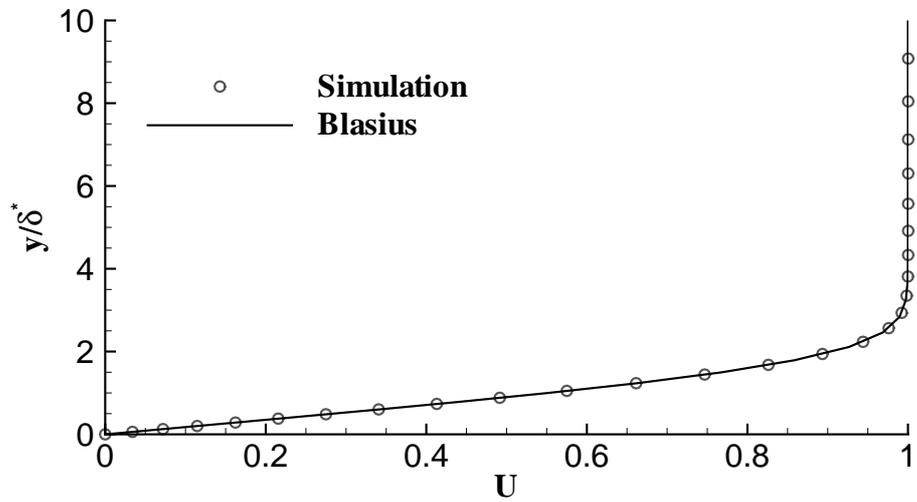
3.2.1.1 Conditions limites.

Au cours de la deuxième partie de ce mémoire, nous analyserons le cas d'une couche limite de plaque plane, convectivement instable. La configuration est représentée sur la figure 3.1(a).

Un profil de similitude de Blasius, noté par ψ_B et ω_B , est imposé en entrée du domaine, autorisant un développement de la couche limite le long de la plaque. Les conditions limites sont illustrées sur la figure 3.1(a). Des conditions similaires sont utilisées dans [17]. Nous pouvons remarquer le problème lié à la paroi, où nous avons deux conditions à imposer sur ψ . Néanmoins, nous pouvons en déduire une condition sur ω . En effet, l'introduction d'un point



(a) Illustration de la configuration associée à la couche limite.



(b) Comparaison en $x = 400$ entre le profil de vitesse longitudinale issu de la simulation numérique directe et la solution de similitude de Blasius. Un point sur cinq est représenté.

FIG. 3.1 – Présentation du cas de couche limite de plaque plane et validation.

fictif en dessous de la paroi, associé aux conditions limites liées à ψ , aboutit à :

$$\omega_{i,1} = \frac{2\psi_{i,2}}{(\Delta\eta)^2} \left(\frac{\partial\eta}{\partial y} \right)^2 \quad (3.7)$$

$$\text{avec } \Delta\eta = (\eta(j+1) - \eta(j-1))^2$$

Cette formule, dite de Thom, permet une approximation à l'ordre 2 de la vorticité à la paroi.

3.2.1.2   chelles de référence et comparaison avec un profil de Blasius.

Notre longueur de référence est basée sur l'épaisseur de déplacement en entrée δ^* . La vitesse de référence est prise égale à la vitesse en écoulement libre. Nous nous plaçons au nombre de Reynolds égal à 610, sur un domaine de longueurs $L_y = 25$ et $L_x = 500$. Un maillage (500×150) est utilisé. La grille est uniforme suivant x et raffinée à la paroi suivant y . Soit le résidu R , basé sur le maximum de vorticité :

$$R = \max |w^{n+1} - w^n| \quad (3.8)$$

Après une convergence sur R de l'ordre de 10^{-13} , nous comparons le profil de vitesse obtenu en $x = 400$ au profil de similitude de Blasius. Le résultat est mis en valeur sur la figure 3.1(b). Nous pouvons observer que les points issus de la simulation numérique directe co  cident avec la solution de référence.

3.2.2 La marche descendante.

3.2.2.1 Conditions limites.

Nous nous intéresserons au cours de la troisième partie de ce mémoire    un écoulement décollé de plaque plane. Afin de valider notre code DNS sur ce type d'écoulement, une simulation est effectuée sur un cas classique de marche descendante, dont les résultats sont bien document  s dans la littérature. La configuration et les conditions limites adoptées sont représentées sur la figure 3.2(a).

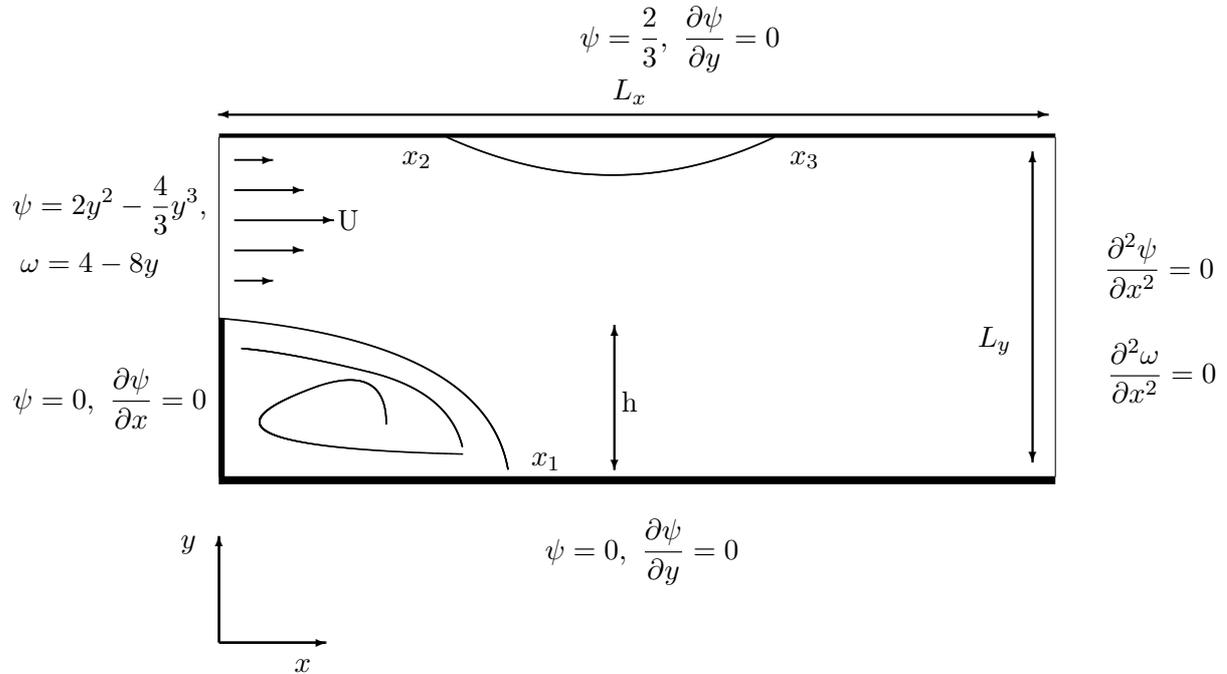
3.2.2.2   chelles de référence et comparaison avec les résultats de Barkley *et al.* .

Nous confronterons ici nos résultats à une simulation numérique directe réalisée par Barkley *et al.* [8] à l'aide d'un code en éléments spectraux. La longueur de référence est basée sur la hauteur de la marche. Nous fixons ici les longueurs de domaine à $L_x = 60$, $L_y = 2$ et $h = 1$. Enfin, un profil parabolique est imposé sur la vitesse longitudinale en entrée : $U(y) = 4y(1-y)$. Un maillage 350×151 est utilisé. La grille est uniforme suivant y et d  raffin  e suivant les 50 derniers points de x .

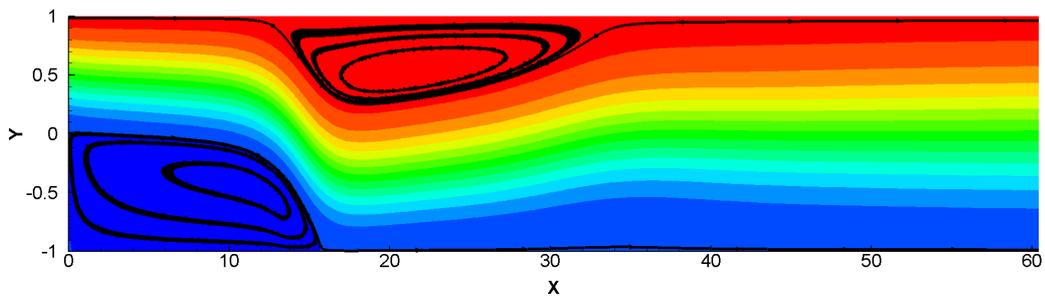
Après une convergence sur R    10^{-13} , l'écoulement présente deux larges zones de recirculation, dont les points de recollement et de décollement sont notés par x_1 , x_2 et x_3 (figure 3.2).

Ces derniers sont confrontés pour quatre nombre de Reynolds, aux résultats obtenus par Barkley *et al.* [8]. La comparaison entre les deux codes de calcul est mise en lumière à travers la figure 3.3. Les points de décollement et de recollement s'avèrent ainsi être en accord avec ceux obtenus par Barkley *et al.* [8].

Par conséquent, nous pouvons être relativement confiants quant aux cas étudiés au cours des deux prochaines parties.



(a) Illustration de la configuration liée à la marche descendante.



(b) Vitesse U et lignes de courant associées aux zones de recirculation, issues d'une simulation numérique directe au nombre de Reynolds : $Re = 1100$.

FIG. 3.2 – Cas de validation sur un écoulement décollé associé à une marche descendante.

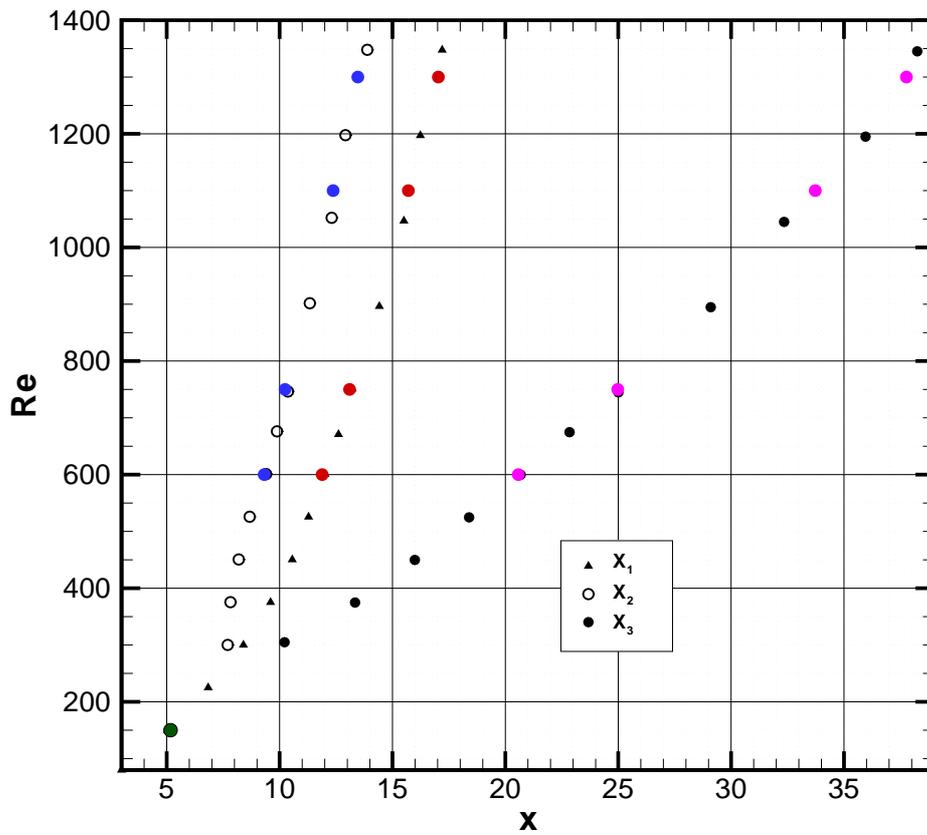


FIG. 3.3 – Comparaison des résultats obtenus via le code de simulation numérique directe (colorés) et ceux issus de Barkley *et al.* [8].

Deuxième partie

Analyse de stabilité linéaire globale de
couche limite de plaque plane
bibimensionnelle, $\beta = 0$.

Chapitre 4

Etude du spectre, familles de modes globaux.

Le contexte de ce mémoire se situe dans l'étude de stabilité linéaire globale, d'écoulements ouverts et plus particulièrement de couche limite attachée et décollée. Les théories classiques reposent sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle ou faiblement non parallèle. Les propriétés de stabilité locales déterminent ainsi la réaction de l'écoulement à un certain forçage. Avant une analyse détaillée de la classique couche limite de plaque plane, nous allons tout d'abord nous attarder sur les différentes terminologies employées au cours de ce mémoire, caractérisant les phénomènes instables étudiés.

Les concepts locaux d'instabilité convective, absolue ([38], [51]), ont permis une meilleure compréhension de la dynamique des écoulements ouverts, comme les jets, les sillages, ou encore les couches limites. L'idée est ici d'étudier localement la réponse à une petite impulsion localisée en temps et en espace, dans un repère lié au laboratoire. Dans le cas où l'écoulement est convectivement instable, ce dernier relaxera vers son état d'origine, en l'absence de perturbations extérieures. Il agit comme un amplificateur sélectif de bruit, l'instabilité doit être continuellement excitée pour perdurer. Nous pouvons donc caractériser ce comportement comme un phénomène extrinsèque. A l'inverse, s'il existe une assez large zone où l'écoulement est absolument instable, une résonance peut apparaître, imposant une dynamique instable propre à celui-ci. Nous sommes alors en présence d'une instabilité globale, la moindre impulsion entraînant la bifurcation vers un état auto-entretenu à la fréquence globale [50]. Le phénomène observé est donc intrinsèque à l'écoulement ¹⁵.

Ces propriétés reposant sur une hypothèse de parallélisme ou de faible parallélisme, elles ne sont valables que pour une certaine gamme de longueurs d'onde, supposées faibles par rapport à une échelle de longueur spécifiant l'inhomogénéité spatiale. Il est ainsi intéressant d'étudier globalement, afin d'être exempt de toute hypothèse de parallélisme, la stabilité d'écoulements ouverts et d'identifier des propriétés intrinsèques et extrinsèques, analysées classiquement via des approches locales. La direction de l'écoulement x est donc prise comme une direction propre. Par conséquent, les modes globaux sont régis par l'analyse des ondes : $\hat{\mathbf{q}}(x, y) e^{-i\Omega t}$ où $\hat{\mathbf{q}} = {}^t(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p})$. $\hat{\mathbf{q}}$ décrit de cette manière la structure spatiale du mode global et Ω son comportement temporel. Ces derniers nécessitent le calcul du problème aux valeurs propres généralisé, issu des équations de Navier-Stokes linéarisées ¹⁶ :

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{q}} = i\Omega\mathbf{B}\hat{\mathbf{q}} \quad (4.1)$$

¹⁵Les concepts ont été illustrés dans la première partie. En outre, les principes théoriques seront appliqués et détaillés dans la troisième partie relative à la couche limite décollée.

¹⁶Les opérateurs sont détaillés dans la première partie.

Comme il a été observé dans la première partie, l’analogie entre les deux analyses lors de l’apparition d’un phénomène intrinsèque paraît relativement évidente. Lorsqu’un mode global, issu de l’analyse de stabilité globale, devient instable, il peut s’identifier comme l’équivalent de celui obtenu par des études convectives absolues locales, à la correction non parallèle près ([69], [43]).

Néanmoins, lorsque le comportement est extrinsèque, fortement dépendant des conditions extérieures, la caractérisation par une analyse de stabilité globale s’avère moins évidente. En outre, les études liées aux couches limites décollées, par exemple, où les deux phénomènes peuvent être présents, laissent entrevoir certaines difficultés. Il vient que l’analyse d’un écoulement purement convectivement instable et faiblement non parallèle se trouve particulièrement intéressante afin d’identifier des phénomènes extrinsèques, via une approche de stabilité globale.

Le cas où les deux approches sont valables et riches en littérature est la classique couche limite de plaque plane de Blasius. La partie suivante est donc consacrée à l’analyse des modes globaux de cet écoulement et à une confrontation avec les approches classiques locales. De manière à valider les résultats globaux, ils seront aussi confrontés à l’étude de stabilité globale de Ehrenstein & Gallaire [28] dans un cas similaire et s’appuieront principalement sur les travaux théoriques de Chomaz & Cossu ([24], [21]). L’organisation suivra le plan suivant : tout d’abord une étude des possibles conditions limites est présentée. Puis, une analyse spécifique des modes globaux est détaillée. Enfin, une analyse globale de la nature convective de l’instabilité, à travers une étude de la réponse à un forçage harmonique et la détermination de la dynamique du paquet d’onde, associée à une perturbation localisée en temps et en espace, est proposée. Nous concluons alors sur l’influence des modes globaux sur la dynamique spatio-temporelle de la perturbation, en fonction des excitations extérieures, sur cet écoulement spécifique, uniquement convectivement instable.

4.1 Discussions sur les conditions limites liées aux perturbations de vitesse.

L’analyse des modes globaux d’écoulements ouverts, issus d’une étude de stabilité linéaire globale, nécessite d’imposer des conditions limites sur les perturbations de vitesse, sur chaque bord du domaine considéré ¹⁷. D’une manière similaire à l’approche locale, la nullité à la paroi et une décroissance exponentielle en écoulement libre sont imposées pour les fluctuations de vitesse :

$$\hat{u} = 0, \hat{v} = 0 \tag{4.2}$$

Les valeurs des perturbations en entrée et en sortie de domaine s’avèrent plus délicates. En effet, les conditions limites à imposer sur ces bords particuliers doivent simuler de manière correcte les ondes d’instabilité que nous souhaitons étudier. Il semblerait que lorsque l’analyse de stabilité globale d’un phénomène intrinsèque à une partie de l’écoulement est souhaitée, les valeurs des conditions limites n’ont que peu d’influence sur le mode recherché. Nous pouvons par exemple citer l’article de Theofilis *et al.* [85] relatif à la tridimensionnalisation d’un décollement de plaque plane par un mode global instable. Ce dernier impose la nullité des fluctuations de vitesse en entrée et une extrapolation de ces quantités (4.3) en sortie de do-

¹⁷Le traitement de la pression est traité dans l’annexe C

maine.

$$\forall y \begin{cases} \hat{u}(n_x, y) = \frac{x(n_x) - x(n_x - 2)}{x(n_x - 1) - x(n_x - 2)} \hat{u}(x(n_x - 1), y) + \frac{x(n_x - 1) - x(n_x)}{x(n_x - 1) - x(n_x - 2)} \hat{u}(x(n_x - 2), y) \\ \hat{v}(n_x, y) = \frac{x(n_x) - x(n_x - 2)}{x(n_x - 1) - x(n_x - 2)} \hat{v}(x(n_x - 1), y) + \frac{x(n_x - 1) - x(n_x)}{x(n_x - 1) - x(n_x - 2)} \hat{v}(x(n_x - 2), y) \end{cases} \quad (4.3)$$

Des conditions limites similaires sont aussi utilisées par Chedevergne *et al.* [19], dans l'analyse du phénomène de vortex shedding pariétal (VSP), induisant des instationnarités dans les injecteurs de fusée. Les modes globaux identifiés par ces auteurs s'avèrent tous stables et prennent la forme d'une onde convective se propageant sur tout le domaine. Le phénomène définit alors un caractère fortement dépendant de l'excitation extérieure. Néanmoins, lorsque le phénomène étudié est de ce type, c'est-à-dire extrinsèque à l'écoulement, certains auteurs proposèrent d'imposer une solution plus physique en entrée et en sortie du domaine, afin de mieux simuler ces ondes particulières. Notamment, les auteurs [28] s'orientèrent vers ce type d'approche dans leurs analyses de la couche limite de plaque plane. Nous allons détailler brièvement le raisonnement adopté par ces derniers.

Afin d'imposer une structure physiquement correcte aux ondes convectives d'instabilité, par exemple les ondes TS dans le cas d'une couche limite, les auteurs proposèrent d'approcher de telles ondes à travers une condition limite de type Robin sur les bords amont et aval : $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = i\alpha \hat{u}$, avec α le nombre d'onde¹⁸. Le système de stabilité globale à résoudre, étant un problème temporel, où $i\Omega$ est la valeur propre, il faut alors transformer la relation spatiale précédente, de manière à faire intervenir la pulsation complexe. De ce fait, le nombre d'onde α est approché par une transformation de type Gaster [36] :

$$\alpha \approx \alpha_{0,r} + \frac{\partial \alpha_r}{\partial \Omega_r}(\Omega_0)(\Omega - \Omega_0) \quad (4.4)$$

où Ω_0 désigne une pulsation autour de laquelle le développement est réalisé¹⁹. La relation (4.4) peut être déterminée par une analyse locale classique où la valeur de α_0 se déduit de la relation de dispersion $D(\Omega_0, \alpha_0) = 0$. En substituant le nombre d'onde (4.4) dans la relation de Robin, les conditions limites aux extrémités sont déterminées par :

$$c_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = i [(\Omega - \Omega_0) + c_0 \alpha_{0,r}] \hat{u} \quad (4.5)$$

avec $c_0 = 1/\frac{\partial \alpha_r}{\partial \Omega_r}(\Omega_0)$ possédant la dimension d'une vitesse de groupe. La relation (4.5) autorise par conséquent un certain degré de liberté sur les nombres d'onde simulés et impose une solution physique sur les conditions limites aux ondes d'instabilité.

L'étude de stabilité linéaire globale du prochain paragraphe révélera, en outre, la pertinence de ces conditions limites.

4.2 Familles de modes globaux.

Nous nous plaçons dans le cas où la couche limite est convectivement instable sur toute l'étendue du domaine. Le nombre de Reynolds Re_{δ^*} , basé sur l'épaisseur de déplacement en

¹⁸L'étude du profil de Blasius, de la partie précédente, conforte la pertinence de cette idée.

¹⁹L'influence de ce paramètre est discutée dans les prochaines sections.

amont et la vitesse extérieure, est fixé à 610 ²⁰. Les longueurs du domaine suivant les directions horizontales et verticales sont fixées à $L_x = 400$ et $L_y = 20$ ²¹. Le calcul de stabilité linéaire globale est effectué sur une grille Chebyshev/Chebyshev (180×45)²². Ce champ sera noté par $D1$, par la suite. Dans un premier temps, les conditions limites (4.2) et (4.5) sont utilisées, en amont et aval de la plaque.

Un sous-espace de Krylov de taille 600, autorisant une bonne approximation d'une partie du spectre, est utilisé. Le résultat est illustré sur la figure 4.1. Nous observons alors uniquement des modes stables, ce qui est en accord avec le fait que notre écoulement est globalement stable. Afin de mettre en valeur les parties du spectre pertinentes, c'est-à-dire relativement cohérentes, une étude relative à la discrétisation suivant y et x est réalisée.

4.2.1 Présentation générale des modes globaux.

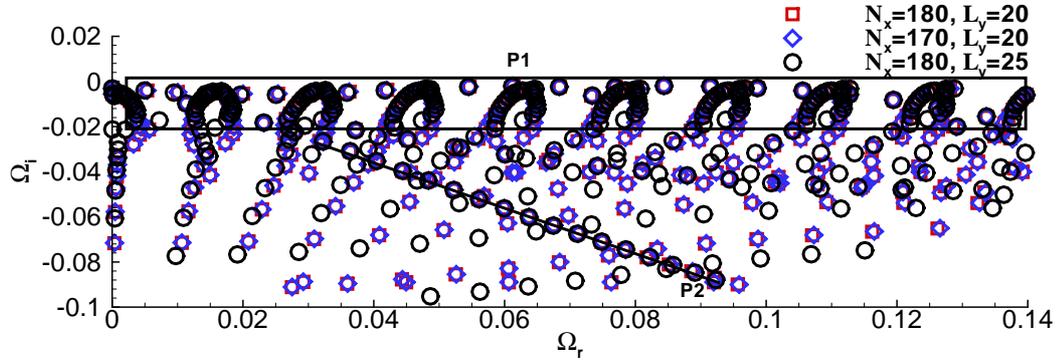
Deux parties relativement indépendantes, notées $P1$ et $P2$, se distinguent sur la figure 4.1(a). $P1$ définissant une zone des modes les moins stables et $P2$ des modes diagonaux assez atténués. Plus précisément, nous observons trois familles de modes de natures différentes, deux appartenant à $P1$ et une propre à $P2$. Un agrandissement de la partie $P1$ met en lumière ses deux familles de modes globaux 4.1(b). Une première, notée M_{TS} par la suite, caractérisée par les symboles carrés, espacés de manière relativement uniforme le long de toutes les fréquences. Une deuxième, notée M_C , symbolisée par une répartition verticale des modes, représentés par des triangles, espacés aussi de manière régulière sur l'axe des pulsations réelles. L'allure des fonctions propres associées à chacun des modes appartenant à M_{TS} , M_C et $P2$ éclaire plus spécifiquement ce classement (figures 4.1, 4.2 et 4.3).

La figure 4.2 représente deux modes caractéristiques de M_{TS} , un relatif à une grande longueur d'onde, noté M_{TS1} avec $\Omega_r \approx 0.068$ et un autre, noté M_{TS2} avec $\Omega_r \approx 0.113$ plus haute fréquence. La structure spatiale de la perturbation s'identifie bien à une onde se propageant sur tout le domaine. En particulier, elle semble être caractéristique d'une onde TS, identifiée classiquement par les analyses locales. En outre, nous pouvons constater la relative bonne définition de l'onde aux bords, mettant en valeur la bonne approximation des conditions limites (4.5). Un mode M_{TS} relativement singulier, à la pulsation $\Omega_r \approx 0.073$, symbolisé par un cercle sur la figure 4.1(b) est représenté sur la figure 4.2(a). Ce dernier, présent plutôt en aval de plaque, possède un aspect similaire à ceux vus précédemment. Il appartient donc à la même famille. L'influence de la valeur de Ω_0 en entrée du domaine est aussi analysée et figure sur 4.1(b). Le développement précédent est réalisé pour $\Omega_0 = 0.08$. Une valeur légèrement supérieure, égale à 0.1, est confrontée à cette dernière. Il apparaît ainsi qu'uniquement les modes M_{TS} sont influencés par la valeur de Ω_0 , et plus particulièrement les taux d'amplification. Nous en donnerons une explication dans la suite de cette partie, à travers l'étude de la dynamique du paquet d'onde. Comme nous l'avons vu ci-dessus, le choix de la condition limite de sortie est un sujet de discussion. Un calcul où la relation (4.3) est imposée en $x = 400$ illustre la pertinence de la condition de Neumann utilisée précédemment. En effet, une branche de modes discrets relativement similaires aux modes M_{TS} est retrouvée, mais la structure de l'onde en aval de la plaque est nettement moins bien définie (figure 4.4). La condition basée sur la transformation de Gaster est donc employée dans toute la suite de cette partie. Enfin, nous pouvons constater que la hauteur choisie à $L_y = 20$ paraît suffisante, pour

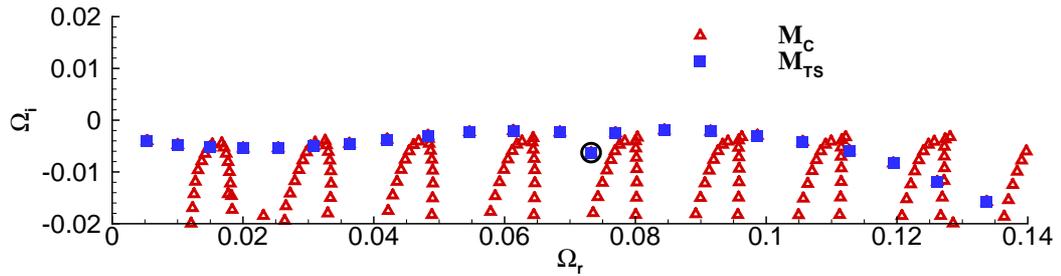
²⁰Une valeur se situant au delà du nombre de Reynolds critique ≈ 520 , et une configuration similaire à [28]

²¹imposant un nombre de Reynolds Re_{δ^*} en sortie de 1050. Les courbes neutres parallèles et non parallèles sont illustrées dans la première partie du mémoire.

²²Le calcul du champ de base est détaillé dans la partie précédente. Une interpolation du type B-splines est utilisée pour se placer dans la grille spectrale. Un tel maillage nécessite 10 Go de mémoire.



(a) Spectre général. Les parties encadrée et soulignée illustrent les zones cohérentes.



(b) Zoom du spectre sur la partie P1.

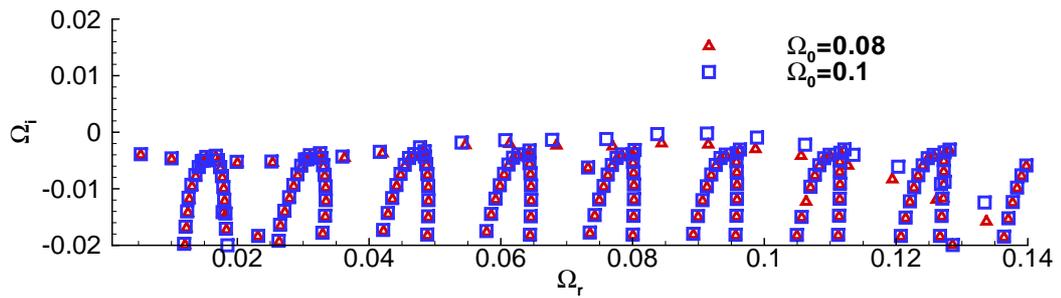
(c) Influence de la valeur de Ω_0 sur la partie P1.

FIG. 4.1 – Spectres résultants de l'analyse de stabilité linéaire globale pour le champ $D1$, obtenus par les conditions limites :(4.2) et (4.5), en fonction de la discrétisation.

l'application des conditions limites (4.1). Ces résultats peuvent se comparer à ceux obtenus par [28] où seulement les modes M_{TS} sont étudiés.

Les modes M_C présentent un caractère différent. Ils possèdent une structure d'onde, dont la propagation s'étend également sur toute la plaque, mais singularisée par une forte concentration de l'énergie pour des valeurs élevées de y . Une illustration de M_C pour $\Omega \approx 0.08 - i0.009$ est représentée sur la figure 4.3(b).

Nous finirons la description du spectre par la dernière famille associée à $P2$. Les modes liés à celle-ci, nettement plus atténués que les précédents, prennent la forme d'une onde, dont la composante suivant x est représentée sur la figure 4.3(c). Son inclinaison tend alors à la création de structures plus allongées suivant la direction de l'écoulement.

Nous allons maintenant étudier plus particulièrement les modes appartenant à $P1$, les moins atténués du spectre. Une confrontation avec des analyses classiques permettront d'apporter un éclairage sur la signification de ces derniers.

Afin de mettre en évidence la nature propre aux ondes TS associées aux modes M_{TS} , et en particulier le lien avec l'analyse de stabilité locale, une étude des nombres d'onde, des taux d'amplification spatiale et des fonctions propres locales est effectuée. Puis, une hypothèse sur l'origine des modes M_C est proposée. Enfin, l'influence des modes P2 sera discutée à la fin de cette partie.

4.2.2 Etude de la famille M_{TS} .

Les deux modes caractéristiques, M_{TS1} et M_{TS2} , servent d'illustration à la nature de la famille M_{TS} dans les sections suivantes.

4.2.2.1 Analyse du nombre d'onde.

La structure spatiale des fluctuations de vitesse est décomposée de la manière suivante :

$$\hat{u} = |\hat{u}| \exp(i\Theta_u(x, y)), \text{ et } \hat{v} = |\hat{v}| \exp(i\Theta_v(x, y)) \quad (4.6)$$

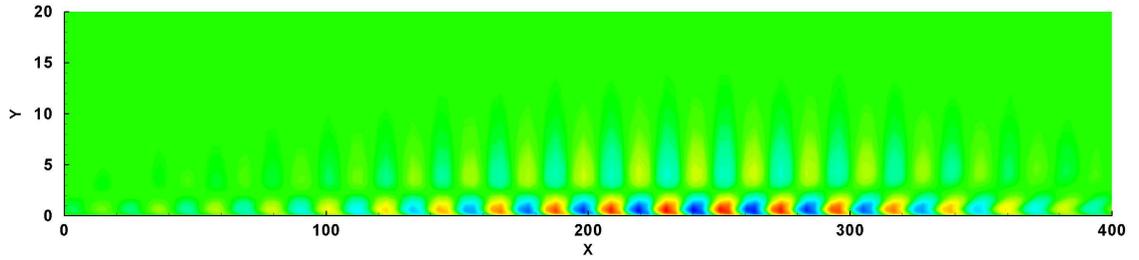
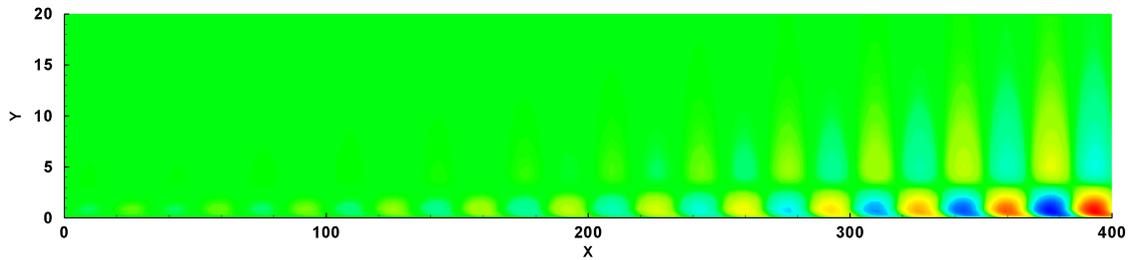
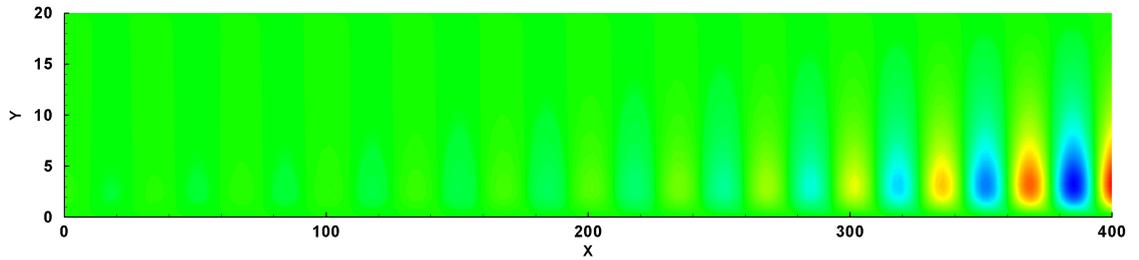
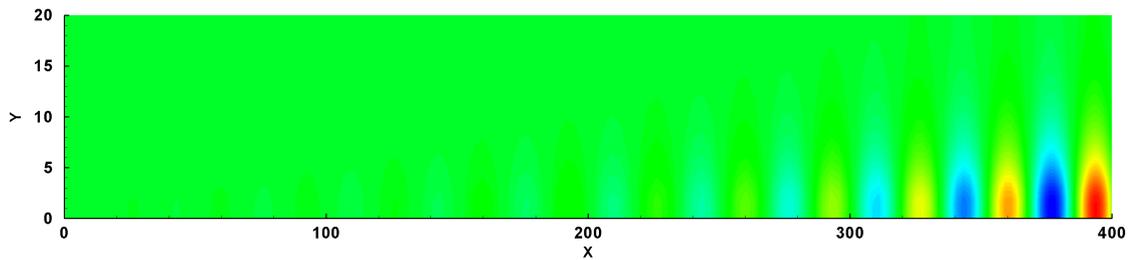
avec Θ_u et Θ_v les phases relatives aux perturbations de vitesse suivant x et y . La phase de l'onde peut ainsi être déterminée via la structure spatiale des modes globaux par les relations suivantes :

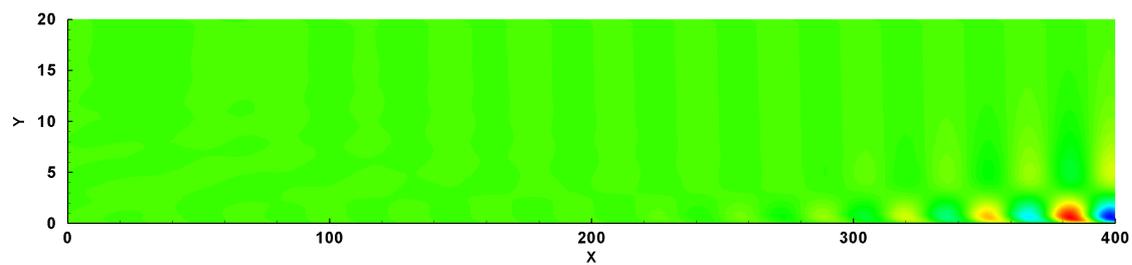
$$\begin{aligned} \Theta_u &= \arctan \left(\frac{\hat{u}_i}{\hat{u}_r} \right), \\ \Theta_v &= \arctan \left(\frac{\hat{v}_i}{\hat{v}_r} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Le nombre d'onde se déduisant de la phase par :

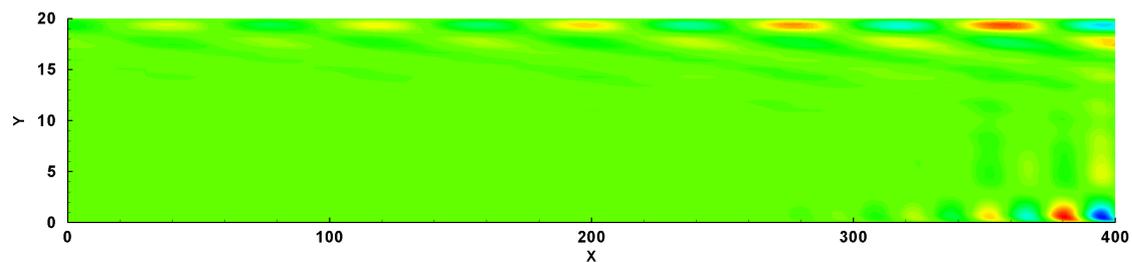
$$\begin{aligned} \alpha_{r_u} &= \frac{\partial \Theta_u(x, y)}{\partial x}, \\ \alpha_{r_v} &= \frac{\partial \Theta_v(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nous retrouvons ici une caractéristique propre aux études de stabilité non parallèle ou faiblement non parallèle. En effet, il devient nécessaire de définir un critère de mesure pour le nombre d'onde, associé au non parallélisme de la méthode. De ce fait, nous devons fixer la valeur de y où la quantité est mesurée. Le même phénomène est présent expérimentalement [76], numériquement lors de simulations numériques directes [32] ou encore théoriquement par des

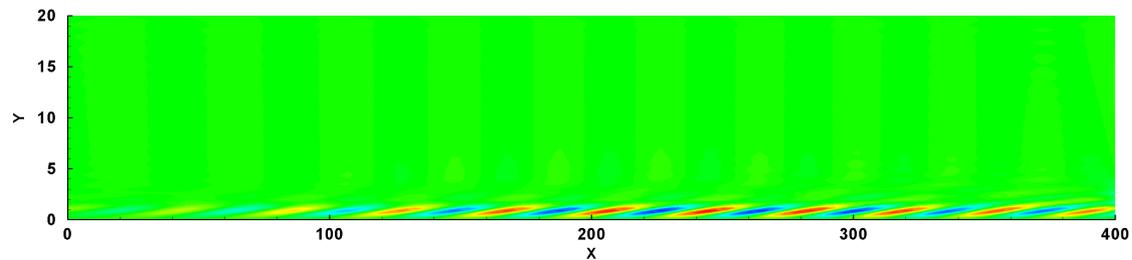
(a) Composante \hat{u} pour le mode M_{TS2} avec $\Omega_r \approx 0.113$.(b) Composante \hat{u} pour le mode M_{TS1} avec $\Omega_r \approx 0.068$.(c) Composante \hat{p} pour le mode M_{TS1} avec $\Omega_r \approx 0.068$.(d) Composante \hat{p} pour le mode M_{TS1} avec $\Omega_r \approx 0.068$.FIG. 4.2 – Parties réelles des composantes de vitesse et de pression relatives aux modes globaux M_{TS} .



(a) Composante \hat{u} pour le mode $\Omega_r \approx 0.073$ des modes M_{TS} .

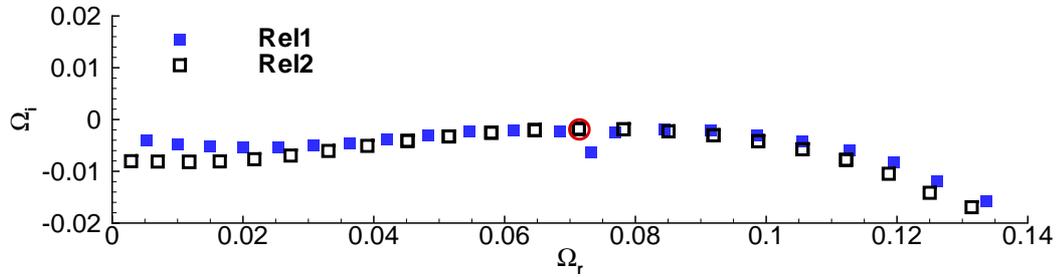


(b) Composante \hat{u} pour le mode $\Omega \approx 0.080 - i0.009$ des modes M_C .

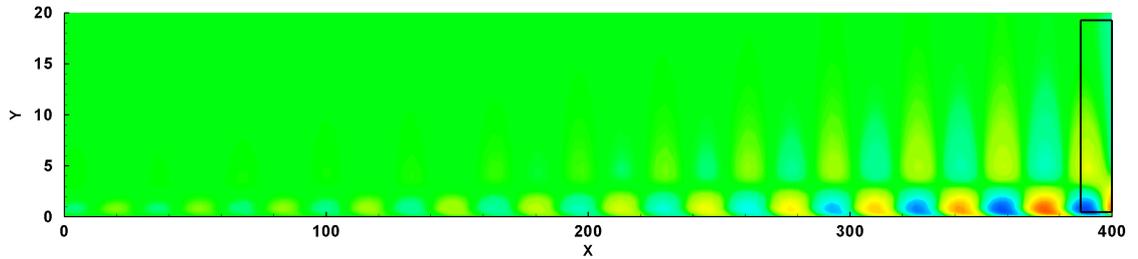


(c) Composante \hat{u} pour le mode $\Omega \approx 0.052 - i0.048$ des modes P2.

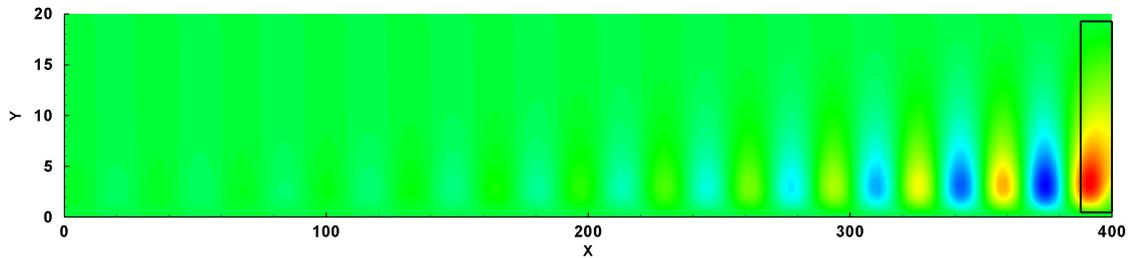
FIG. 4.3 – Partie réelle des composantes de vitesse au mode global spécifique M_{TS} et aux modes globaux plus atténués.



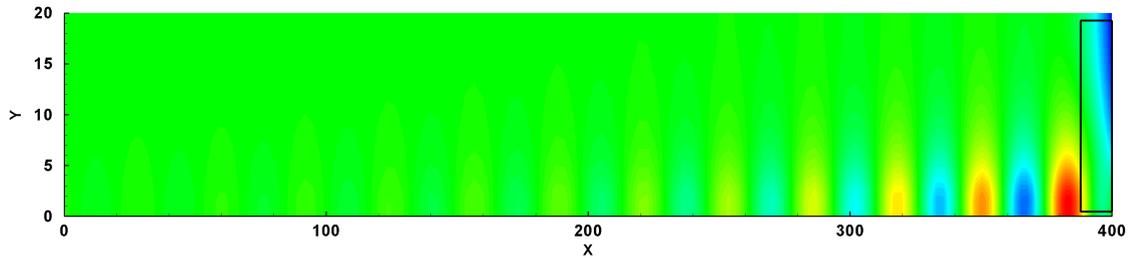
(a) Comparaison des spectres relatifs aux modes M_{TS} obtenus par les relations (4.5) et (4.3), notées par Rel1 et Rel2 respectivement.



(b) Composante \hat{u} .

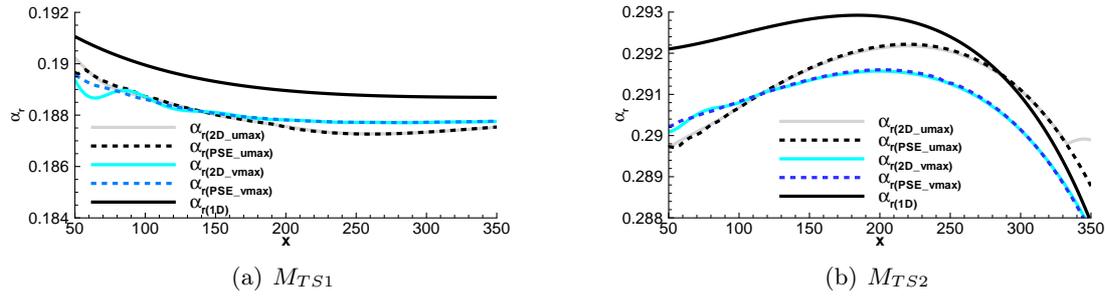


(c) Composante \hat{v} .



(d) Composante \hat{p} .

FIG. 4.4 – Illustration de l'influence de la condition limite Rel2 en aval sur les modes M_{TS} . Le mode $\Omega_r \approx 0.071$ désigné par un cercle est ici représenté. Nous pouvons remarquer, sur la partie encadrée, la mauvaise définition de l'onde sur le bord du domaine.


 FIG. 4.5 – Analyse du nombre d'onde pour D1, relatif aux modes M_{TS} .

analyses faiblement non parallèles [40]²³. Nous considérons ici deux critères assez classiques d'études de stabilité non parallèle, basés sur la position verticale où le maximum de la norme de la fluctuation est atteint, pour chaque x . Ces positions, dépendantes ainsi de $\hat{u}(x, y)$ et de $\hat{v}(x, y)$, sont désignées par $y_{u_{\max}}$ et $y_{v_{\max}}$ respectivement. Les nombres d'onde caractéristiques à \hat{u} et \hat{v} sont alors notés par α_{r_u} et α_{r_v} . Afin de révéler la nature spécifique des ondes TS, aux modes M_{TS} , nous vérifions si les nombres d'onde α_r issus de l'analyse globale vérifient la relation de dispersion locale, propre au mode TS. Pour cela α_r est calculé via une étude de stabilité linéaire locale parallèle et une approche faiblement non parallèle, reposant sur les équations PSE linéaires²⁴. Cette dernière est particulièrement appropriée dans l'analyse des effets non parallèles associés à une couche limite de plaque plane ([48]). La comparaison est ainsi étudiée pour les modes M_{TS1} et M_{TS2} et leurs pulsations complexes respectives. De sorte à ne pas être influencé par les conditions limites dans l'analyse globale et le transitoire associé à l'approche PSE, la confrontation est réalisée entre $x = 50$ et $x = 350$. Au regard des résultats présentés sur la figure 4.5, il paraît évident que les nombres d'onde issus de l'analyse de stabilité globale s'apparentent parfaitement à de classiques modes TS.

4.2.2.2 Analyse du taux d'amplification spatiale.

Une démarche similaire est réalisée sur l'étude des taux d'amplification spatiale des modes M_{TS} . Nous utilisons ici les mêmes critères de non parallélisme que précédemment. Soit les fonctions d'amplitude associées à ces modes spécifiques A_u et A_v , relatives à \hat{u} et \hat{v} :

$$A_u(x) = |\hat{u}(x, y_{u_{\max}})|, \quad (4.9)$$

$$A_v(x) = |\hat{v}(x, y_{v_{\max}})|$$

Les taux d'amplification spatiale $-\alpha_i$ sont déterminés par les relations suivantes :

$$\alpha_{i_u} = -\frac{1}{A_u} \frac{dA_u}{dx}, \quad (4.10)$$

$$\alpha_{i_v} = -\frac{1}{A_v} \frac{dA_v}{dx}$$

Au vu de la figure 4.6, la comparaison s'avère particulièrement pertinente. Il est intéressant de vérifier aussi la possibilité de retrouver la position de la courbe neutre associée aux ondes

²³ ce détail est évoqué au cours de la première partie.

²⁴ notées simplement PSE par la suite

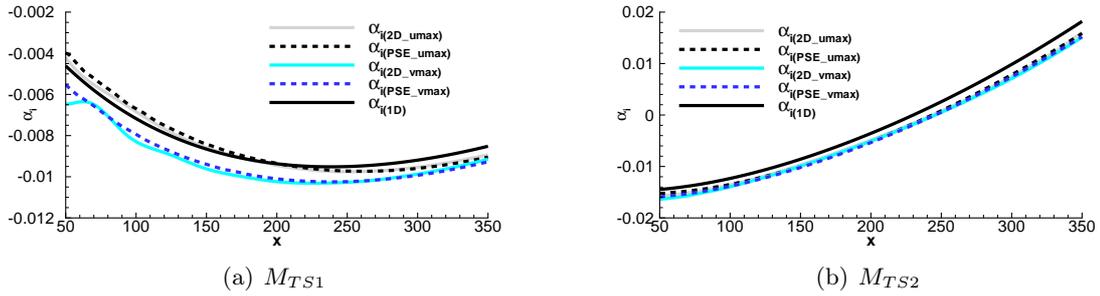
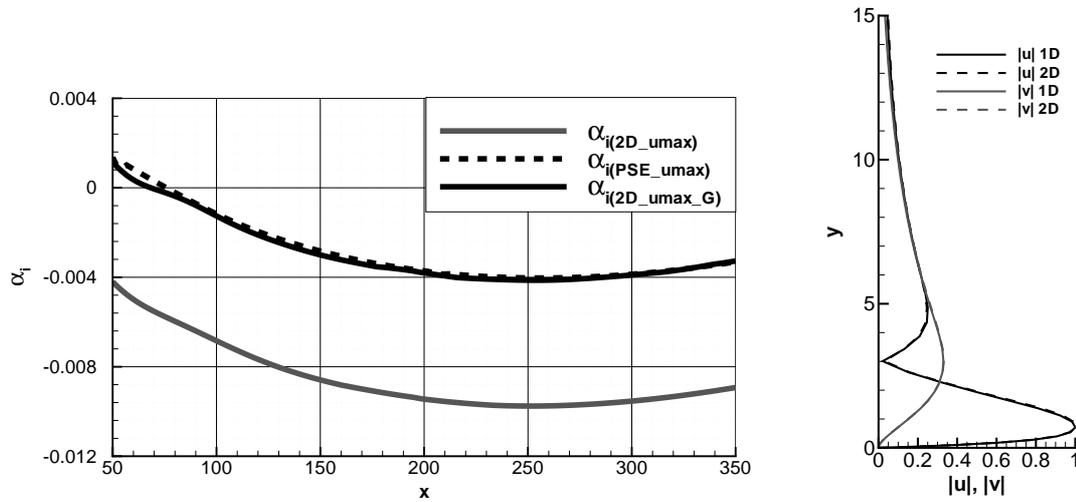

 FIG. 4.6 – Analyse du taux d'amplification spatiale pour D1, relatif aux modes M_{TS} .

 (a) Taux d'amplification spatiale corrigé. La position de la courbe neutre, pour la pulsation $\Omega_r \approx 0.068$, est retrouvée. (b) Comparaison des modules des fonctions propres locales en $x = 260$.

 FIG. 4.7 – Taux d'amplification spatiale corrigé et comparaison des fonctions propres locales pour M_{TS1} .

TS, à l'aide des modes globaux M_{TS} . Ces modes, possédant une pulsation complexe et non réelle, il est nécessaire de transformer les ondes spatio-temporelles M_{TS} en mode spatiaux. Pour cela, ces derniers sont écrits de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{q}}(x, y) \exp(-i\Omega t) = \hat{\mathbf{q}}(x, y) \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\Omega_i}{v_G} dx - i\Omega_r t\right) \quad (4.11)$$

où $v_G = \partial\Omega_r/\partial\alpha_r$ désigne la vitesse de groupe, obtenue par différences finies, à l'aide de deux modes adjacents. Le taux d'atténuation temporelle est par conséquent modifié en une contribution au taux d'amplification spatiale, par une transformation de Gaster²⁵. Une approche PSE, basée sur la fréquence réelle du mode M_{TS1} , est ainsi comparée au taux d'amplification spatiale transformé, issu de l'analyse globale. Il apparaît sur la figure 4.7(a), que la position de la courbe neutre pour la pulsation réelle $\Omega_r = 0.068$ est retrouvée.

²⁵Cette transformation est ici pertinente du fait des faibles taux d'amplification spatiaux.

4.2.2.3 Analyse de la fonction propre locale.

Une dernière comparaison porte sur un profil local de la fonction propre. Pour cela, le mode M_{TS1} sert d'illustration et est examiné pour $x = 260$. Les fonctions propres locales étant beaucoup moins sensibles aux effets non parallèles et possédant plutôt une évolution lente suivant x , uniquement la comparaison avec une analyse $1D$ est illustrée sur la figure 4.7(b). Pour cette dernière quantité, les modes M_{TS} se comparent encore une fois remarquablement bien avec le mode local TS .

Les comparaisons précédentes confortent donc bien l'origine des modes M_{TS} , possédant toutes les caractéristiques d'une onde TS, obtenue par les approches classiques. En particulier, la structure spatiale de ces modes globaux vérifie parfaitement la relation de dispersion locale, obtenue par l'analyse du mode TS.

Étudions maintenant les paramètres influant la répartition de ces modes globaux dans l'espace (Ω_r, Ω_i) .

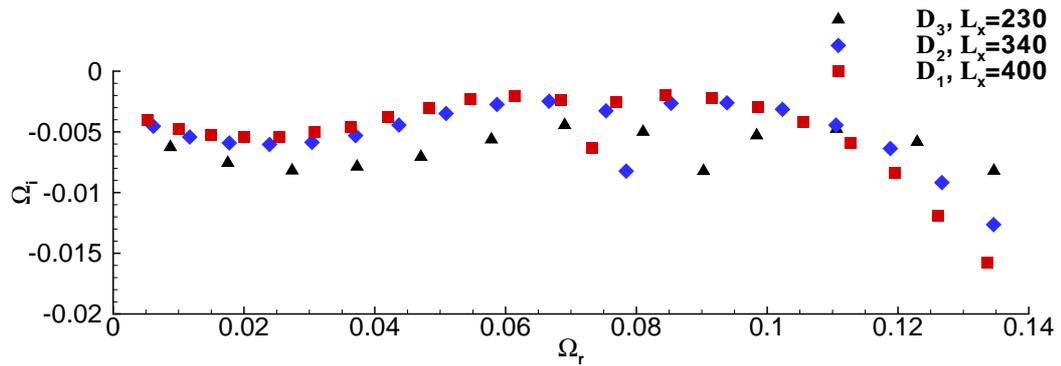
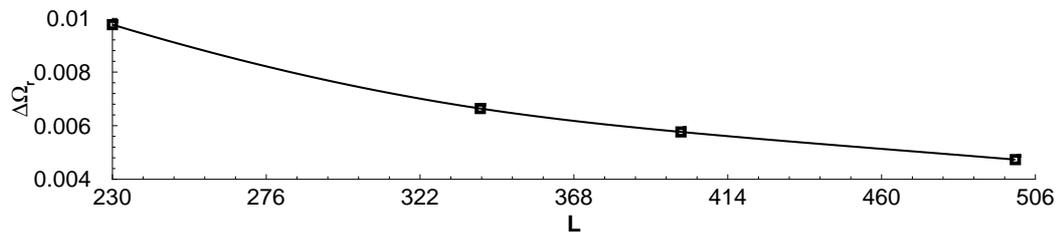
4.2.2.4 Analyse des paramètres influant la répartition des modes M_{TS} .

Au vu du premier spectre représenté sur la figure 4.1, il paraît clair que la répartition des modes M_{TS} n'est en aucun cas dépendante de la discrétisation.

Afin d'examiner l'influence de la taille du domaine sur la répartition des modes M_{TS} , deux autres longueurs sont considérées. Soit $D2$ et $D3$, des domaines de longueurs 340 et 230. Le même calcul que précédemment est réalisé. La distribution des modes M_{TS} pour $D1$, $D2$ et $D3$, est représentée sur la figure 4.8(a). Il apparaît nettement que la répartition des modes dépend explicitement du domaine considéré. En particulier, la distance en fréquence entre chaque mode global tend à se réduire avec l'augmentation de la plaque. Nous pouvons alors supposer que l'écart entre les modes est dimensionné par une échelle caractéristique, propre à l'étendue des modes globaux. Or la structure des modes M_{TS} existe sur tout l'espace d'une plaque infinie et n'est pas uniquement localisée sur une partie de celle-ci. De cette manière, la branche de modes discrets pourrait avoir tendance à devenir une branche quasi continue lorsque x tend vers l'infini. Une première étude soulignant cette caractéristique est révélée sur la figure 4.8(b). L'évolution $\Delta\Omega_r(L_x)$ semble confirmer cette tendance, dans la perspective d'un domaine infini.

4.2.3 Analyse de la famille M_C .

Nous allons maintenant nous intéresser à la famille M_C . Ces branches particulières, faites de deux composantes, une verticale et une légèrement inclinée, pourraient nous rappeler les branches continues qui apparaissent dans les analyses de stabilité temporelles locales. De plus, la structure des fonctions propres, composées de nœuds et de ventres, au sein de la partie uniforme du champ de base, semblerait conforter cette hypothèse (figure 4.3(b)). Afin de valider cette suggestion, nous allons estimer théoriquement les localités de ces branches, sous l'hypothèse d'un écoulement complètement uniforme ($V = 0$). Plaçons-nous pour cela dans le cadre du problème $1D$, où la position de la branche continue est déterminée par : $\Omega_r/\alpha_r = U$, avec U la vitesse extérieure. Cette dernière étant notre vitesse de référence, il vient que $U = 1$ et par conséquent $\Omega_r = \alpha_r$ ([44]). Nous pouvons maintenant supposer que les conditions limites appliquées en amont et en aval ainsi que la troncature liée à taille du domaine fixent un nombre d'onde à $\alpha_r = 2\pi/L_x$. Par suite, les branches continues pourraient se localiser par les fréquences suivantes : $\Omega_r = N \times \alpha_r$ avec $N \in \mathbb{N}$. Les positions sont alors tracées, pour les spectres relatifs aux domaines $D1$, $D2$ et $D3$ sur la figure 4.9. Il semblerait ainsi que les localités concordent bien avec les positions des modes M_C . La définition correcte de ces "branches

(a) Répartition des modes M_{TS} pour $D1$, $D2$ et $D3$ (b) Ecart entre modes M_{TS} ($\Delta\Omega_r$) en fonction de la taille de domaine étudié : L_x .FIG. 4.8 – Evolution des modes M_{TS} en fonction de la longueur du domaine.

continues" paraît donc délicate et pourrait nécessiter une importante discrétisation suivant y , associée à une plus grande hauteur de domaine, d'une manière similaire à l'analyse 1D ([23]). Afin de mettre en lumière cette dernière remarque, une étude suivant la discrétisation y est réalisée. De manière à mieux définir ses modes dont une partie de l'influence est localisée pour de hautes valeurs de y , nous fixons la taille $L_y = 30$ et choisissons une grille de Gauss-Lobatto classique. Deux maillages sont considérés en y : $N_y = 50$ et $N_y = 60$. Le résultat est présenté sur la figure 4.10. Nous pouvons observer une meilleure définition des modes M_C en augmentant la résolution suivant y . Ce dernier point conforte l'influence de l'uniformité du champ de base, conduisant à l'apparition d'un équivalent des "branches continues". Nous pouvons souligner l'augmentation des ressources mémoires, atteignant 16 Go pour le maillage le plus important.

L'analyse des modes globaux les moins stables a donc permis une identification de ces derniers, révélant leur nature et leur origine, tout particulièrement pour les modes M_{TS} et M_C . L'origine des modes appartenant à P2 est encore à l'étude ; aucun lien avec les approches classiques n'a pour l'instant été identifié. Nous allons maintenant étudier comment ces modes peuvent intervenir dans la dynamique spatio-temporelle de la perturbation, à travers deux analyses. Tout d'abord nous verrons, à l'aide d'une étude asymptotique, la réaction de ces modes lorsque l'écoulement est soumis à un forçage extérieur continu. Puis, nous analyserons la réponse de la couche limite à une perturbation localisée en temps et en espace, par une étude du régime transitoire. Nous discuterons alors des phénomènes convectifs, extrinsèques, que nous pouvons observer à l'aide d'une étude de stabilité linéaire globale dans des écoulements uniquement convectivement instables.

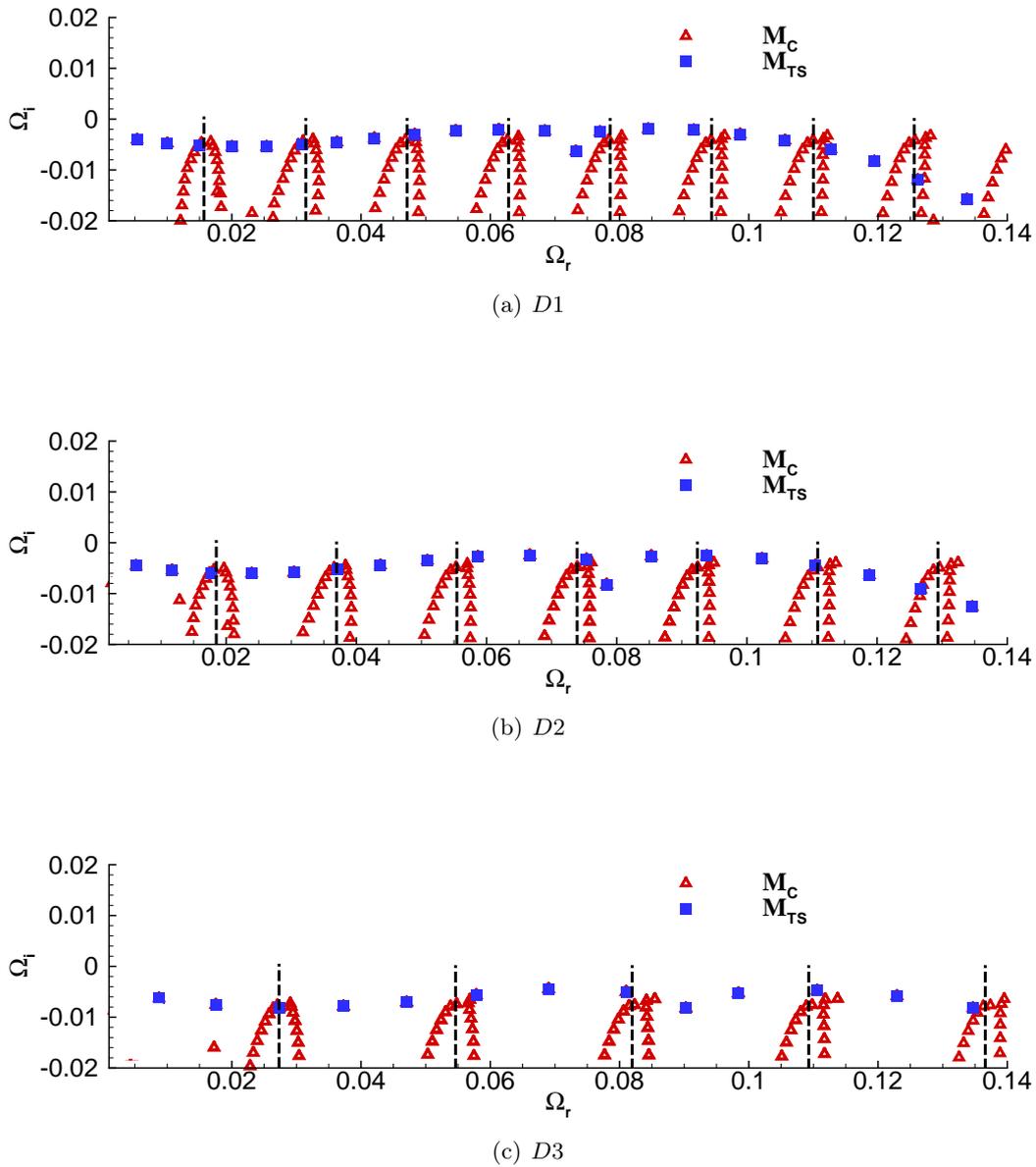
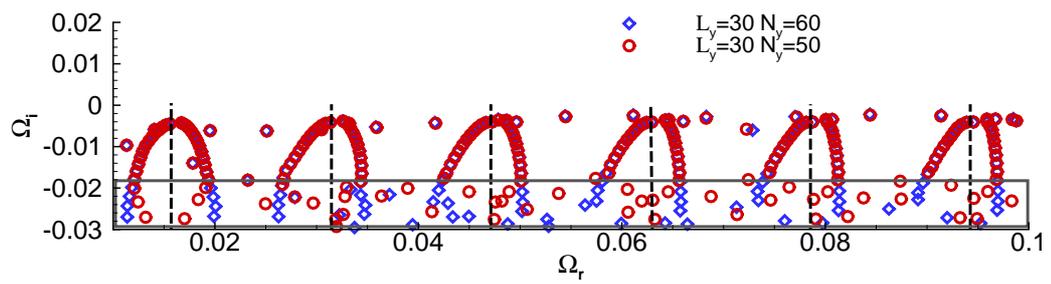


FIG. 4.9 – Répartition des modes M_C pour $D1$, $D2$ et $D3$. Les lignes discontinues illustrent les positions théoriques des branches continues.

FIG. 4.10 – Influence de la discrétisation suivant y pour les modes M_C .

Chapitre 5

Analyse du régime asymptotique et transitoire.

5.1 Etude du régime asymptotique : réponse à un forçage harmonique.

5.1.1 Définition du problème.

L'observation d'ondes d'instabilité TS peut être réalisée à l'aide de l'excitation de la couche limite, par un ruban vibrant dans les analyses expérimentales ou encore en imposant une vitesse sinusoïdale en temps, localisée en espace au cours des simulations numériques directes. Afin de modéliser ce type d'excitation, dans notre étude de stabilité globale, un terme source est ajouté au système résultant de la linéarisation des équations de Navier-Stokes. Soit $\mathbf{f}(x, y) e^{-i\sigma t}$ le vecteur associé au forçage suivant U et V . Le membre de droite définissant la forme spatiale de l'excitation et σ , la fréquence de cette dernière. Nous sommes alors amenés à résoudre le problème suivant :

$$\left(\mathbf{B} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{A} \right) \mathbf{q} = \mathbf{f} e^{-i\sigma t} \quad (5.1)$$

avec $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y, t)$ le vecteur des fluctuations de vitesse et de pression. La solution du problème (5.1) est : $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{\mathbf{L}t} + \hat{\mathbf{f}} e^{-i\sigma t}$ avec \mathbf{L} ayant pour expression dans la base de valeurs propres la matrice diagonale \mathbf{D} , composée des valeurs propres associées au problème homogène (4.1) : $D_{k,l} = -i\delta_{k,l}\Omega_k$ ²⁶, \mathbf{q}_0 une constante dépendante des conditions initiales, et $-(i\sigma\mathbf{B} - \mathbf{A})\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$. Or tous les modes globaux sont temporellement atténués, le régime asymptotique est ainsi gouverné par $\hat{\mathbf{f}} e^{-i\sigma t}$.

5.1.2 Analyse de la sensibilité des modes globaux à un forçage réel : étude du pseudospectre.

Dans le reste de l'analyse, nous introduisons la quantité : $\mathbf{P}(\sigma) = (i\sigma\mathbf{B} - \mathbf{A})^{-1}$. Les modes globaux possédant une nature extrinsèque, leur apparition dans la dynamique de la perturbation est liée à une excitation extérieure continue. Or, l'influence d'un forçage à une fréquence réelle sur les modes globaux est déterminée aux temps longs par $\hat{\mathbf{f}}$. Nous pouvons alors calculer, à l'aide de l'étude de la norme $\|\mathbf{P}(\sigma)\|$, les fréquences les plus sensibles à une

²⁶ $\delta_{k,l}$ représentant ici le symbole de Kronecker.

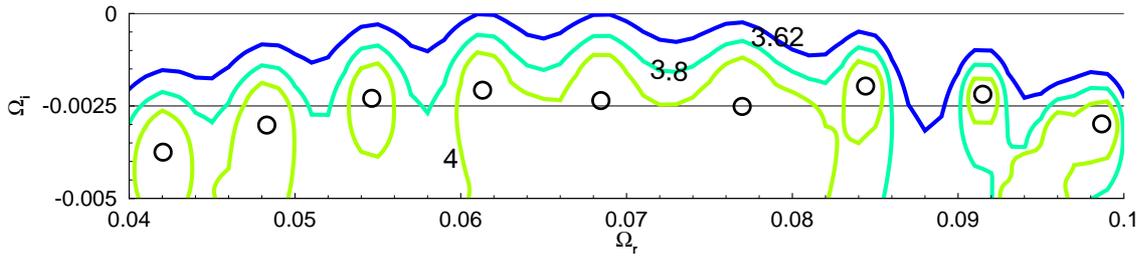


FIG. 5.1 – Pseudospectre du champ D1. Les niveaux en ϵ sont représentés suivant une échelle logarithmique : $-\log_{10}$. Les cercles illustrent les modes M_{TS} .

excitation extérieure. Cette sensibilité peut se déduire de l'étude des courbes niveaux définies par :

$$\lambda_\epsilon = \{ \sigma \in \mathbb{C}, \|\mathbf{P}(\sigma)\| \geq \epsilon^{-1} \} \quad (5.2)$$

Nous retrouvons ici le pseudospectre de l'opérateur de stabilité linéaire globale. Les courbes ϵ franchissant l'axe des fréquences réelles indiquent la sensibilité des modes globaux à ces dernières. Il est intéressant de remarquer qu'une telle étude revient à se ramener à un problème de sensibilité, classiquement utilisé dans les analyses locales. En outre, nous pouvons citer l'ouvrage de Schmid & Henningson [80] où la sensibilité d'un écoulement de Poiseuille est détaillée.

Nous choisissons ici la norme L_2 . Le calcul du pseudospectre nécessite donc le calcul de la valeur singulière minimale associée à l'opérateur de stabilité globale linéaire, en chaque point du plan complexe (Ω_r, Ω_i) . La taille de l'opérateur étant trop large, il est impossible d'obtenir une définition exacte de (5.2) pour des temps de calcul raisonnables. Une approximation de (5.2), basée sur la matrice de Hessenberg supérieure, issue de la méthode d'Arnoldi, est donc utilisée. Les détails d'une telle procédure sont décrits dans l'annexe A.2. Le résultat obtenu pour le champ $D1$ est mis en lumière sur la figure 5.1. Les lignes de niveaux épousent les modes M_{TS} , illustrés par des cercles. Nous retrouvons ici que la dynamique aux temps longs, de la perturbation, est dominée par des ondes TS. En outre, la figure 5.1 indique que les fréquences les plus sensibles se situent entre $\Omega_r = 0.06$ et 0.07 , la sensibilité étant quantifiée par la valeur de $\epsilon = 10^{-3.62}$. L'énergie à injecter pour faire vivre les modes M_{TS} sera donc minimale pour cette gamme de fréquences. Cette analyse de sensibilité globale révèle ici une illustration différente des ondes TS et apporte une signification physique sur l'implication des modes M_{TS} dans la dynamique spatio-temporelle de la perturbation, aux temps longs. Une telle étude pourrait s'avérer particulièrement efficace dans des cas fortement non parallèles où les analyses de stabilité classiques échouent.

Enfin, une dernière remarque sur les caractéristiques du pseudospectre 5.1 peut être émise, et servira d'introduction à la partie suivante. En effet, nous pouvons en fait considérer les iso-contours de ϵ significatifs comme des bassins de sensibilité associés aux ondes TS. Ainsi l'étendue de ces derniers peut prouver que les modes M_{TS} peuvent entrer en résonance, non pas uniquement en forçant le mode lui-même mais aussi son voisinage avec un bruit de l'ordre des niveaux en ϵ . De ce fait, il est observé ici qu'ils peuvent entrer en résonance via un forçage réel, illustrant leur émergence dans le régime asymptotique lorsque l'écoulement est soumis à un forçage harmonique extérieur. Cette étendue des bassins de sensibilité est fortement liée à la non normalité de l'opérateur de stabilité global. Nous pouvons donc expliquer mathématiquement l'intervention de ces modes dans le régime asymptotique par une entrée en résonance due à une fréquence réelle extérieure, issue de la non normalité de l'opéra-

teur de stabilité globale. Ce dernier point est détaillé plus particulièrement dans le prochain paragraphe.

5.2 Analyse du régime transitoire.

Les analyses de stabilité linéaire d'écoulements ouverts peuvent se distinguer au travers de deux approches. Tout d'abord, la réponse à un forçage extérieur continu, comme une excitation harmonique, peut être étudiée. Ce genre d'analyse, proche d'une étude de sensibilité, a fait l'objet du chapitre précédent et identifia une signification des modes globaux associés aux ondes TS. Un autre point de vue consiste à considérer la réponse de l'écoulement à une perturbation localisée en espace et en temps. Les études classiques de stabilité linéaire, reposant sur une hypothèse de faible parallélisme, se basent sur cette seconde approche. Elles permettent, en outre, d'identifier le caractère convectif ou absolu de l'instabilité. De ce fait, nous allons ici nous concentrer sur ce deuxième aspect, via une étude de stabilité linéaire globale, de sorte à identifier des spécificités propres à la nature convective de l'instabilité.

5.2.1 Aspects Théoriques.

5.2.1.1 Présentation du problème globale : mesure de l'instabilité convective par une étude de croissance transitoire.

Tout d'abord introduisons quelques notations. La perturbation est décomposée suivant une base de modes globaux :

$$\mathbf{q}(x, y, t) = \sum_{k=1}^N K_{k,0} e^{-i\Omega_k t} \hat{\mathbf{q}}_k(x, y) \quad (5.3)$$

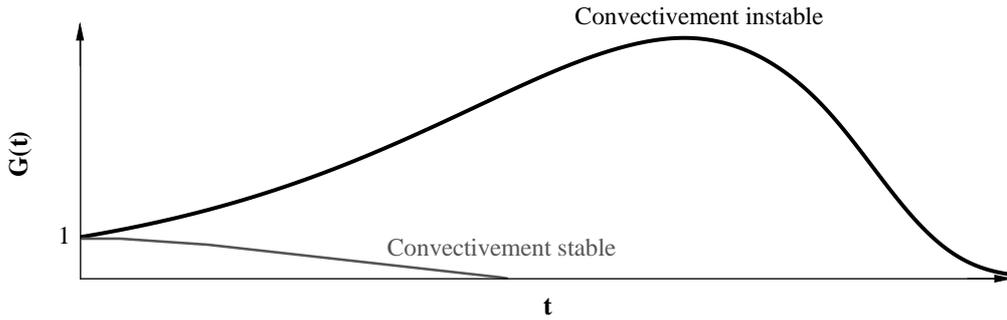
$$\text{et } \mathbf{q}_0 = \sum_{k=1}^N K_{k,0} \hat{\mathbf{q}}_k$$

où N désigne le nombre de modes globaux pris en compte et \mathbf{q}_0 la condition initiale. Par conséquent, l'évolution temporelle de cette dernière est gouvernée par les valeurs de $K_{k,0}$ et Ω_k selon chaque direction propre. Nous introduisons, pour la suite, les vecteurs \mathbf{K} de composantes :

$$(\mathbf{K})_k = K_{k,0} e^{-i\Omega_k t} \quad (5.4)$$

Revenons maintenant brièvement à la définition d'une instabilité convective. La dynamique spatio-temporelle de la perturbation, dans un repère lié au laboratoire, est similaire à un amplificateur de bruit. Dans un domaine de longueur fini, celle-ci va ainsi s'amplifier au cours du temps, tout en étant advectée le long de l'écoulement. Le champ va de ce fait relaxer vers son état initial, au bout d'un certain temps. Ce comportement peut donc être assimilé globalement comme un phénomène transitoire, associé à la dynamique de \mathbf{q} , au cours duquel une croissance de l'énergie propre à celle-ci apparaît. L'idée qui émergea théoriquement de Cossu & Chomaz en 1997 [24] est d'utiliser une analyse de croissance transitoire sur les modes globaux, afin de décrire globalement la nature convective de l'instabilité. Les études asymptotiques classiques, basées sur les propriétés du mode le plus instable, ne pouvant alors capter une telle physique. De manière à illustrer ce raisonnement, nous introduisons la quantité :

$$G(t) = \max_{\mathbf{q}_0} \frac{E(t)}{E(0)} \quad (5.5)$$


 FIG. 5.2 – Allure du profil de $G(t)$, si l'écoulement est convectivement stable ou non.

mesurant l'évolution de l'énergie liée à la perturbation \mathbf{q} , suivant toutes les conditions initiales \mathbf{q}_0 . Ainsi, en fonction du profil de $G(t)$ nous pouvons déterminer globalement si l'écoulement est convectivement instable ou non (voir figure 5.2).

En particulier, le profil de $G(t)$ va être fortement lié au degré de non normalité de l'opérateur linéaire globale. Nous pouvons illustrer cette idée à l'aide d'un système dynamique d'ordre 2.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{m} = \mathbf{C}\mathbf{m} \quad (5.6)$$

Avec \mathbf{C} une matrice d'ordre 2. Le vecteur solution de (5.6) est : $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 e^{c_1 t} + \mathbf{m}_2 e^{c_2 t}$ avec c_1 et c_2 les valeurs propres de \mathbf{C} . Considérons les valeurs propres stables et la base de vecteurs propres non orthogonale. Malgré la stabilité du système, la norme associée à la solution peut croître durant le transitoire. Ce phénomène est mis en lumière sur la figure 5.3. La croissance de l'énergie aux temps courts est donc révélatrice du degré de non normalité de l'opérateur ²⁷.

Décrivons maintenant brièvement le formalisme mathématique utilisé pour le calcul de $G(t)$.

5.2.1.2 Formalisme mathématique.

Soit $\mathbf{u}_j = (u, v)_j = \sum_{p=1}^N (\hat{u}, \hat{v})_p (K_j)_p$, une solution du champ de perturbation liée à la vitesse, décomposée dans la base de modes globaux, pour une certaine condition initiale. Nous définissons ainsi un produit scalaire \langle, \rangle_E , dont la norme associée $\|\mathbf{u}\|_E$ quantifie la mesure de l'énergie des perturbations et caractérise la non orthogonalité suivant x et y des vecteurs propres :

$$\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle_E = \int_0^{Ly} \int_0^{Lx} (\bar{u}_j u_i + \bar{v}_j v_i) dx dy \quad (5.7)$$

où \bar{u}_j désigne le complexe conjugué. La fonction $G(t)$, déterminant l'enveloppe relative au maximum d'énergie suivant les conditions initiales, est définie par :

$$G(t) = \max_{\mathbf{u}_0} \frac{\|\mathbf{u}(t)\|_E^2}{\|\mathbf{u}_0\|_E^2} \quad (5.8)$$

²⁷Ces idées d'études transitoires basées sur la non-normalité de l'opérateur de stabilité sont apparues au cours de années 90 (Trefethen *et al.* 1993 [88]). Elles ont permis alors d'élucider des phénomènes bypass liés à certains écoulements parallèles comme celui de Poiseuille.

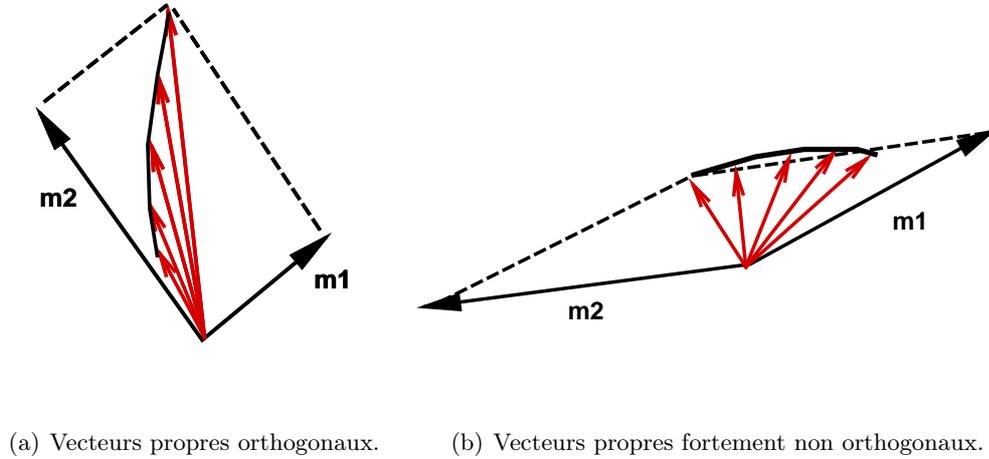


FIG. 5.3 – Evolution de la condition initiale (en rouge) d'un système dynamique d'ordre 2, en fonction de la base des vecteurs propres. Il apparaît que si ces derniers sont fortement non orthogonaux, la condition initiale peut être amenée à croître dans le transitoire.

Afin d'optimiser cette quantité, il est plus simple de se ramener à la norme hermitienne classique L_2 . Nous réécrivons pour cela l'expression précédente :

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_E = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^N \overline{(K_i)_p} (K_j)_k \langle \hat{\mathbf{u}}_i, \hat{\mathbf{u}}_j \rangle_E = \mathbf{K}_i^* \mathbf{A} \mathbf{K}_j \quad (5.9)$$

où $*$ désigne le transconjugué, et \mathbf{A} , la matrice des produits scalaires des fonctions propres, de composantes : $\langle \hat{\mathbf{u}}_i, \hat{\mathbf{u}}_j \rangle_E$. \mathbf{A} étant une matrice hermitienne, nous pouvons procéder à la décomposition de Cholesky suivante : $\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{F}$. Notons \mathbf{V} le vecteur défini par le changement de base : $\mathbf{V} = \mathbf{F} \mathbf{K}$. Le produit scalaire associé à l'énergie se détermine alors par les vecteurs \mathbf{V} à l'aide du produit scalaire hermitien \langle, \rangle_2 :

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_E = \mathbf{K}_i^* \mathbf{F}^* \mathbf{F} \mathbf{K}_j = \langle \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j \rangle_2 \quad (5.10)$$

En outre, au vu de (5.4), le comportement de $\mathbf{V}(t)$ est défini par :

$$\mathbf{V}(t) = (\mathbf{F} \exp(t\mathbf{D}) \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{V}_0 \quad (5.11)$$

$G(t)$ est donc égale à :

$$G(t) = \max_{\mathbf{u}_0} \frac{\|\mathbf{u}(t)\|_E^2}{\|\mathbf{u}_0\|_E^2} = \max_{\mathbf{V}_0} \frac{\|\mathbf{V}(t)\|_2^2}{\|\mathbf{V}_0\|_2^2} \quad (5.12a)$$

$$= \max_{\mathbf{V}_0} \frac{\|(\mathbf{F} \exp(t\mathbf{D}) \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{V}_0\|_2^2}{\|\mathbf{V}_0\|_2^2} \quad (5.12b)$$

$$= \|\mathbf{F} \exp(t\mathbf{D}) \mathbf{F}^{-1}\|_2^2 \quad (5.12c)$$

De ce fait, l'évolution de $G(t)$ est simplement gouvernée par le calcul de la valeur singulière principale de $\mathbf{F} \exp(t\mathbf{D}) \mathbf{F}^{-1}$ pour chaque temps²⁸. Nous pouvons ainsi suivre l'enveloppe de $G(t)$ par une simple procédure, basée uniquement sur les modes globaux issus du spectre global²⁹. Une telle analyse permet en particulier de trouver la perturbation initiale conduisant à une

²⁸ \mathbf{D} , de composantes $D_{k,l} = -i\delta_{k,l}\Omega_k$

²⁹Ceci peut encore être vu comme un procédé d'optimisation de l'énergie au cours du temps.

croissance de l'énergie maximale. Celle-ci est communément appelée la perturbation optimale. Ses composantes dans la base de modes globaux se déterminent par le calcul de \mathbf{K} en $t = 0$ égal à $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{V}_0$.

Nous allons dans la prochaine section appliquer ce formalisme aux modes globaux résultants de l'analyse de stabilité linéaire globale. Nous étudierons plus spécifiquement la forme de la perturbation optimale, conduisant à une croissance de l'énergie maximale. Dans un premier temps, la contribution des modes M_{TS} est évoquée.

5.2.2 Etude de la dynamique spatio-temporelle de la perturbation.

5.2.2.1 Modes M_{TS}

Analyse de la perturbation optimale. L'influence des modes M_{TS} dans le régime transitoire est étudiée à l'aide du formalisme décrit précédemment. L'étude aux temps courts est réalisée pour $D1$, $D2$ et $D3$. Les résultats relatifs à l'évolution de $G(t)$ sont représentés en trait plein sur la figure 5.4. Une assez faible croissance de l'énergie est observée (de l'ordre de 10), celle-ci se prolongeant pour des temps relativement longs. Une analyse de la structure spatiale et de l'évolution temporelle de la perturbation optimale est illustrée sur les figures 5.5 et 5.4 (en trait discontinu). La condition initiale, conduisant au maximum d'énergie, prend ainsi la forme d'un paquet d'onde, localisé en début de plaque. Ce dernier s'amplifie alors temporellement, tout en étant advecté le long du domaine. Puis, l'énergie commence à décroître lorsque le paquet d'onde sort du domaine de calcul. Nous retrouvons donc bien une caractéristique de l'instabilité convective, mesurée ici par une analyse de croissance transitoire basée sur les modes globaux. Cet aspect est aussi mis en valeur sur le diagramme spatio-temporel 5.8, lié à la vorticité à la paroi. Nous pouvons encore une fois remarquer la bonne approximation de la condition limite de sortie (4.5), autorisant une évacuation propre du paquet d'onde (figure 5.5c)). L'influence de la longueur de la plaque, illustrée sur la figure 5.4, présente par conséquent une certaine cohérence. L'évolution du paquet d'onde est identique pour $D1$, $D2$ et $D3$, jusqu'à $t \approx 300$, correspondant à son impact au bord de $D3$. Son énergie est de ce fait amenée à diminuer pour $D3$. Or le domaine $D2$ étant plus long, la perturbation optimale peut évoluer plus longtemps. Son énergie va donc continuer à augmenter jusqu'à atteindre l'aval de $D2$, et diminuer. Il en va de même pour $D1$. La dynamique spatio-temporelle du paquet d'onde, associée à cette perturbation optimale, se révèle ainsi indépendante de la longueur du domaine de calcul. Par conséquent, nous pouvons souligner une signification physique, associée à ces modes globaux, différente de celle proposée au cours du chapitre précédent. Les modes M_{TS} peuvent chacun être considérés comme une composante du paquet d'onde, décrit par la perturbation optimale. Nous pouvons remarquer qu'un tel phénomène pouvait être envisagé. En effet, la structure spatiale de chacun des modes M_{TS} possède des caractéristiques proches d'une onde plane, avec des nombres d'onde et des pulsations légèrement différentes. De cette manière, les interférences cr  e  es par l'ensemble de ces modes engendrent cette dynamique de paquet d'onde ([57]). En outre, ce type d'analyse permet d'apporter une interprétation sur l'influence de la valeur Ω_0 en amont. Le régime transitoire est étudié pour les deux valeurs de Ω_0 de $D1$, discutées précédemment (figure 4.1c). La distribution spatio-temporelle de la perturbation optimale est définie par les courbes :

$$E(x, t) = \int_0^{L_y} (|u(x, y, t)|^2 + |v(x, y, t)|^2) dy \quad (5.13)$$

et l'évolution de l'énergie, représentées sur les figure 5.7 et 5.6. Nous constatons que le paquet d'onde au temps $t = 0$ est situé légèrement plus en amont de la plaque pour $\Omega_0 = 0.1$. Celui-ci évolue alors sur un temps plus long, avant d'atteindre le bord aval de $D1$, induisant une énergie

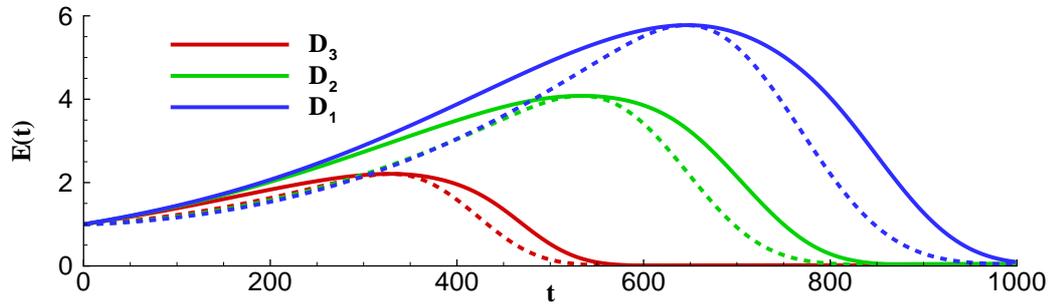


FIG. 5.4 – Croissance transitoire de l'énergie liée aux modes M_{TS} pour $D1$, $D2$ et $D3$. Les traits pleins illustrent l'évolution de $G(t)$, les traits discontinus caractérisent l'évolution de l'énergie de la perturbation optimale correspondante.

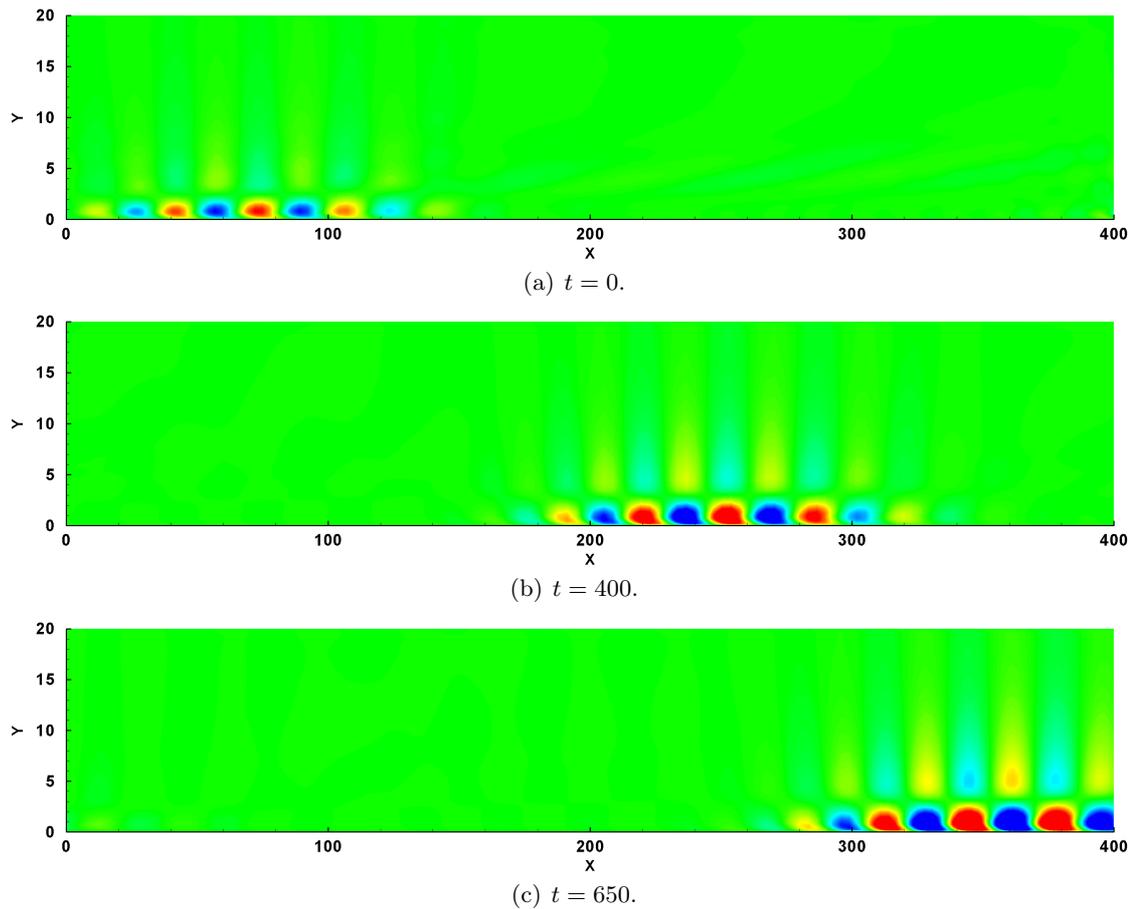


FIG. 5.5 – Structure spatiale de la perturbation optimale, pour différents temps, associée à $D1$.

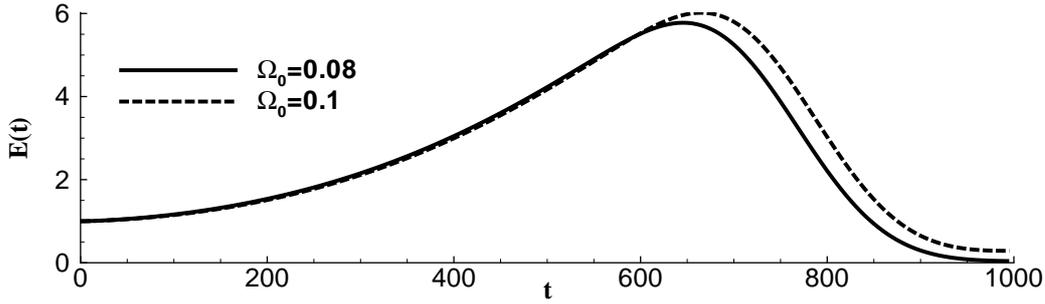


FIG. 5.6 – Influence de la valeur de Ω_0 en entrée sur l'évolution de l'énergie liée à la perturbation optimale, pour $D1$.

maximale plus forte pour cette valeur de Ω_0 . Néanmoins, la structure spatio-temporelle de la perturbation optimale n'apparaît pas dépendre de cette valeur. Celle-ci n'influe que légèrement sur la position initiale du paquet d'onde.

De manière à évaluer qualitativement la pertinence du paquet d'onde lié aux modes M_{TS} , une analyse classique de "steepest descent" est employée. La réponse à une impulsion localisée en $x = 0$ et $t = 0$ est étudiée sous l'hypothèse d'un écoulement parallèle. Une telle démarche fut l'objet d'articles de Gaster au cours des années 80 ([41] et ([42])).

Comparaison du paquet d'onde avec une approche classique. L'évolution en espace et en temps du paquet d'onde relatif au mode TS, sur le champ $D1$ est gouvernée par l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\Omega_r} \exp \left(i \left\{ \int_{x_0}^x \alpha(x', \Omega) dx' - \Omega t \right\} d\Omega \right) \quad (5.14)$$

où α et Ω satisfont la relation de dispersion locale, associée aux ondes TS, et x_0 la position du pulse. Une méthode de "steepest descent" est utilisée pour le calcul de (5.14). Bien que reposant sur une analyse asymptotique, elle définit relativement bien la dynamique même proche de la source ([41]). La solution de (5.14) est alors ³⁰ :

$$I \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \left[\frac{2\pi}{i \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \Omega^2}(x', \Omega^*) dx'} \right]^{1/2} \exp \left(i \left\{ \int_{x_0}^x \alpha(x', \Omega^*) - \Omega^* t \right\} \right) \quad (5.15)$$

avec Ω^* :

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega}(x', \Omega) dx' \Big|_{\Omega=\Omega^*} = t \quad (5.16)$$

Nous pouvons ainsi résoudre simplement (5.14) en chaque x . Une méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée pour converger sur $\text{Re}(\Omega)$, qui vérifie (5.16) pour chaque $\text{Im}(\Omega)$ ³¹. En chaque point du plan (x, t) , le taux d'amplification temporelle $(-\text{Im}(\int_{x_0}^x \alpha(x, \Omega^*) dx/t) + \text{Im}(\Omega^*))$ est alors obtenu. Les valeurs égales à 0 de ces derniers définissent par conséquent les bords du paquet d'onde. Le diagramme spatio-temporel, basé sur cette étude locale, est représenté sur la figure 5.8(b). L'écoulement n'étant que faiblement non parallèle, les bords du paquet se trouvent sur des rayons x/t à peu près constant. Ces derniers sont donc tracés dans l'étude globale, désignés par des traits noirs sur 5.8(a). Nous reportons alors ces rayons sur

³⁰ Les détails théoriques sont décrits dans [11].

³¹ Une méthode similaire est utilisée par Lingwood [58], pour un problème comparable.

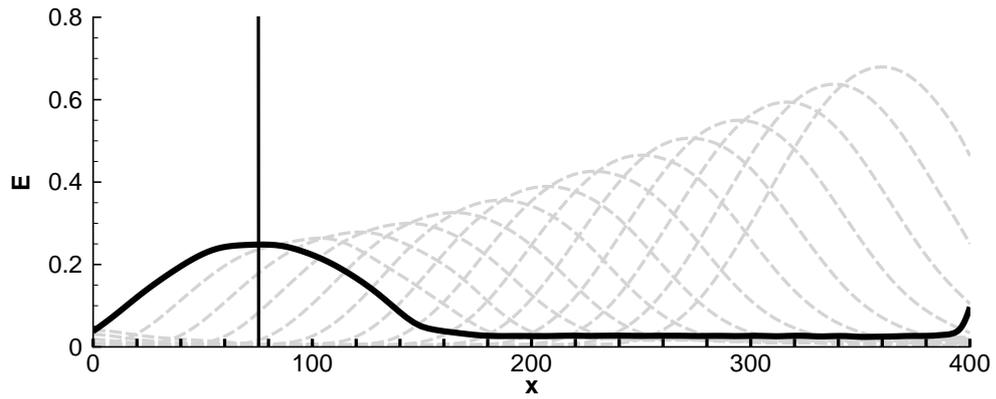
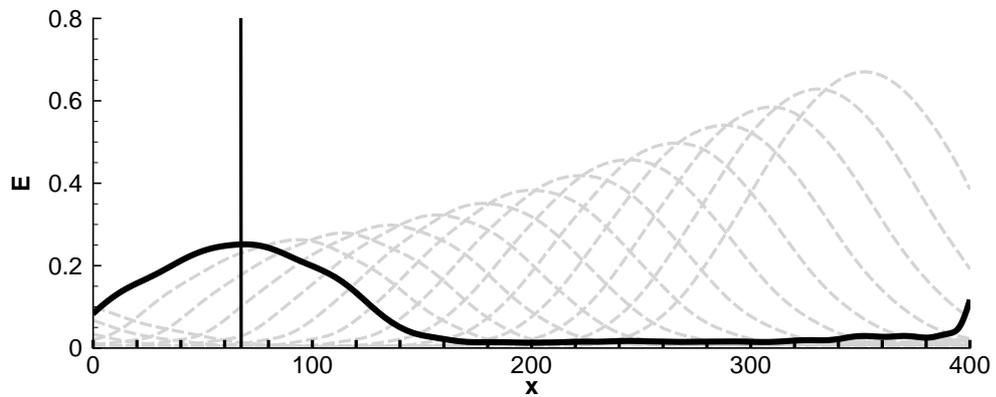
(a) $\Omega_0 = 0.08$.(b) $\Omega_0 = 0.1$.

FIG. 5.7 – Illustration de l'influence de Ω_0 en entrée sur la dynamique spatio temporelle du paquet d'onde, pour $D1$. Les courbes d'énergie sont espacées de $\Delta t = 50$, entre $t = 0$ et $t = 700$. Les traits noirs mettent en valeur la position spatiale du paquet au temps initial.

le diagramme issu de l'analyse locale 5.8(b). Il apparaît que les vitesses des bords du paquet semblent relativement bien correspondre. Par conséquent, l'étude de la perturbation optimale liée aux modes M_{TS} décrit convenablement le phénomène convectif associé aux ondes TS. Nous pouvons remarquer que ces résultats se comparent bien à ceux obtenus par Ehrenstein & Gallaire en 2005 [28], pour une configuration similaire et valident la démarche proposée sur ce cas relativement simple. Cette analyse s'étant relevée particulièrement pertinente pour les modes M_{TS} , il est intéressant d'étudier l'influence des modes M_C et $P2$ sur la dynamique aux temps courts de la perturbation optimale ³².

5.2.2.2 Ensemble des modes P1 et P2.

Première analyse des modes M_C et $P2$. Comme précédemment, nous pouvons considérer que les modes M_C et $P2$ arrivent à trouver une signification physique, en les considérant comme des composantes du paquet d'onde. De manière à identifier la contribution en énergie de chacune de ces familles, nous réalisons une étude de croissance transitoire. Tout d'abord, nous nous restreignons à la partie cohérente du spectre 4.1(a). L'ensemble des modes $P1$, dont 250 modes M_C , puis les 11 modes $P2$ seront ajoutés à la base de modes globaux.

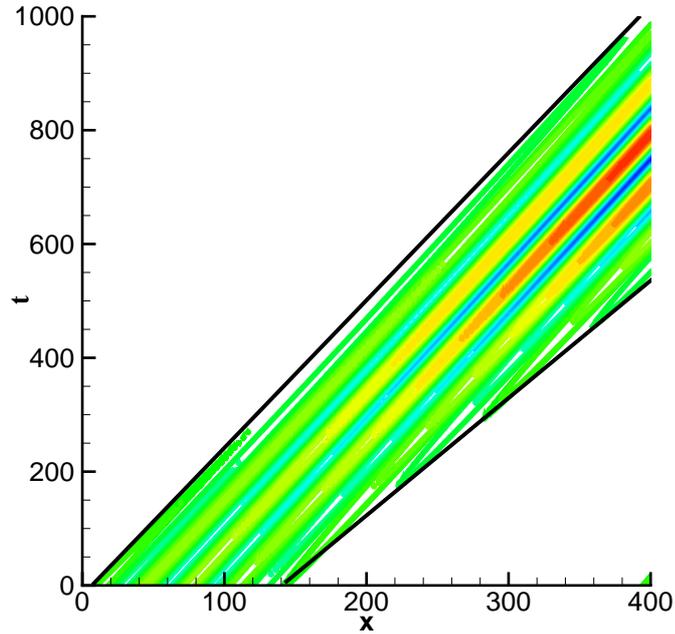
Le résultat est illustré sur la figure 5.9. Nous pouvons alors remarquer que les modes M_C et $P2$ contribuent à l'énergie sur une période de temps très court, qui se distingue par l'apparition d'un second maximum sur l'enveloppe $G(t)$. De ce fait, la prise en compte de modes très atténués dans la dynamique aux temps courts paraît pertinente. Par conséquent, nous allons maintenant considérer un sous-espace de Krylov de taille 1000.

Élargissement du sous-espace de Krylov. Nous obtenons le spectre illustré sur la figure 5.10. Nous pouvons observer un éclatement des modes M_C , à partir d'une certaine valeur de Ω_i ³³. Une définition correcte de ces derniers nécessitant un maillage trop important suivant y , nous nous restreindrons à la résolution du chapitre précédent (180×45). Le calcul de $G(t)$ est réalisé pour 800, 850, 900 et 950 modes, où l'enveloppe de l'énergie semble converger vers une valeur maximale. Nous retrouvons ici les particularités décrites précédemment, avec l'apparition d'un deuxième pic à $t = 60$ (figure 5.11). Néanmoins, celui-ci atteint un niveau nettement plus élevé contribuant à une augmentation de l'énergie liée à la perturbation optimale, à un seuil de $\frac{E(t)}{E(0)} = 60$. Son évolution au cours du temps, représentée par la figure 5.12, présente un mécanisme de Orr, où des structures de formes allongées, à contre courant, se redressent, tout en étant amplifiées sur une période T , très courte. Ce mécanisme appartient à une catégorie de phénomènes transitoires relativement classiques, dont les premiers travaux de Orr se situent au cours de l'année 1907 ([64]). La forme de la condition initiale et le cisaillement ambiant engendrent cette croissance de l'énergie particulière dans le transitoire. En outre, ce mécanisme a été récemment observé à travers un cas similaire par ÅKervik *et al.* et est en cours de publication au moment où ce mémoire est rédigé ⁽³⁴⁾. Puis, la perturbation optimale relaxe vers une dynamique de type Tollmien-Schlichting, similaire aux analyses asymptotiques classiques. Bien que la convergence des modes M_C ne soit pas vérifiée, cette étude révèle un comportement particulier sur les temps très courts et illustre une signification physique des modes $P2$ et M_C , associés à ce mécanisme d'Orr.

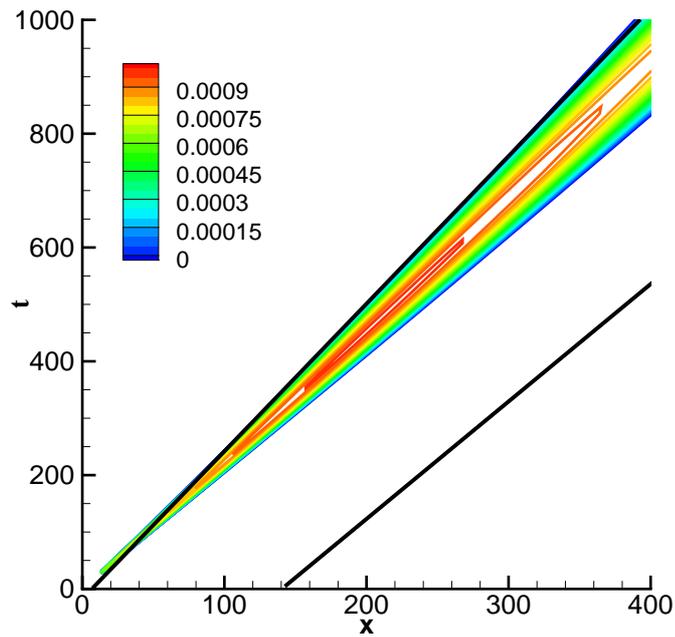
³²Cette étude a fait l'objet d'une conférence en 2006, BAIL [3] et d'une publication dans physics of fluids en 2007 [5].

³³Ceci est observé dans le premier spectre 4.1(a) illustrant la partie cohérente de celui-ci et sur le spectre 4.10.

³⁴communication privée avec Uwe Ehrenstein, Porquerolles 2007



(a) Global.



(b) Local.

FIG. 5.8 – Comparaison des paquets d'onde, représentés à travers des diagrammes espace temps, obtenus par l'analyse de stabilité globale, liée aux modes M_{TS} , et une méthode de "steepest descent", sous l'hypothèse d'un écoulement parallèle. Les traits noirs illustrent les bords du paquet associés à l'étude globale. La valeur de la vorticité à la paroi est utilisée pour l'approche globale. D1 est considéré dans cette analyse.

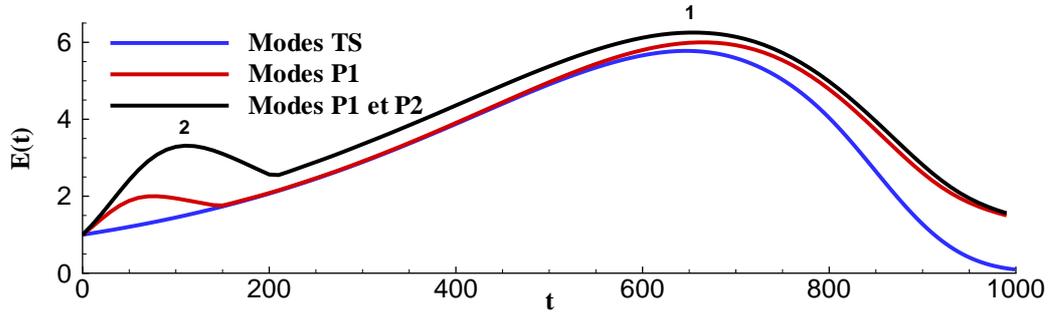


FIG. 5.9 – Croissance transitoire de l'énergie liée aux modes M_{TS} , M_C , relatifs à l'ensemble P1, puis P2, associée aux modes de la partie cohérente du spectre 4.1(a) du champ D1.

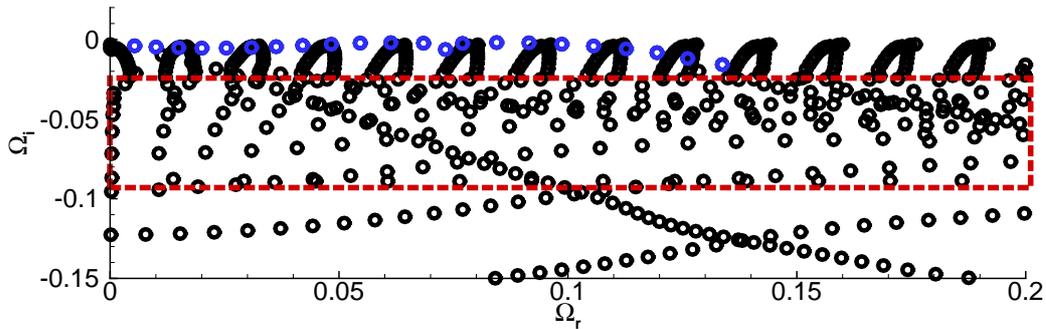


FIG. 5.10 – Spectre du champ D1 pour un sous-espace de taille 1000. Un éclatement des "branches" associées aux modes M_C est observé pour une certaine valeur de Ω_i (illustré en rouge). Les modes TS sont représentés en bleu.

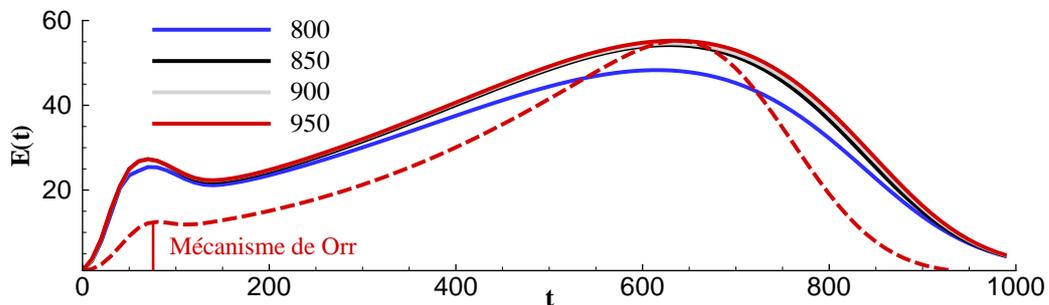


FIG. 5.11 – Etude de la convergence de la croissance transitoire $G(t)$ associée aux modes 5.10, relatifs à D1. L'évolution de la perturbation optimale pour 950 modes est représentée en traits discontinus. L'influence du mécanisme de Orr aux temps courts est illustrée par le premier pic.

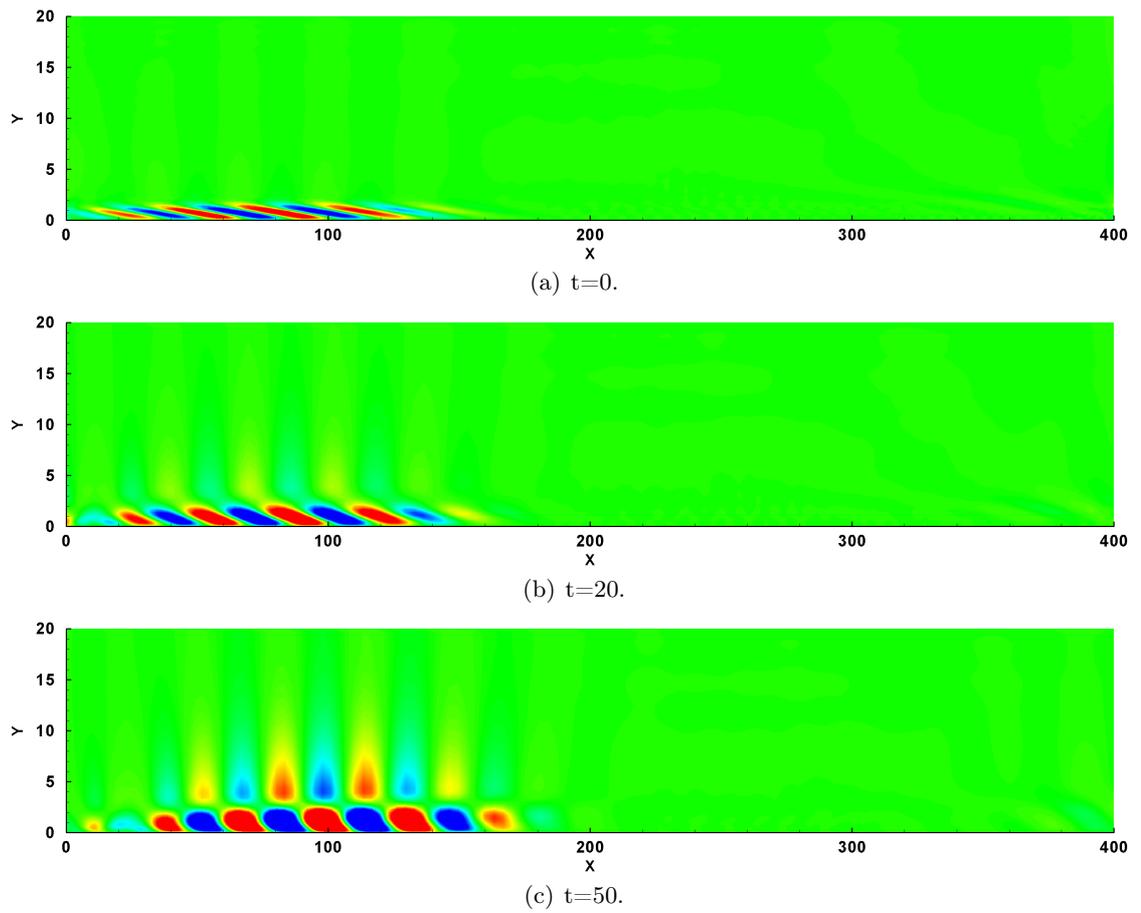
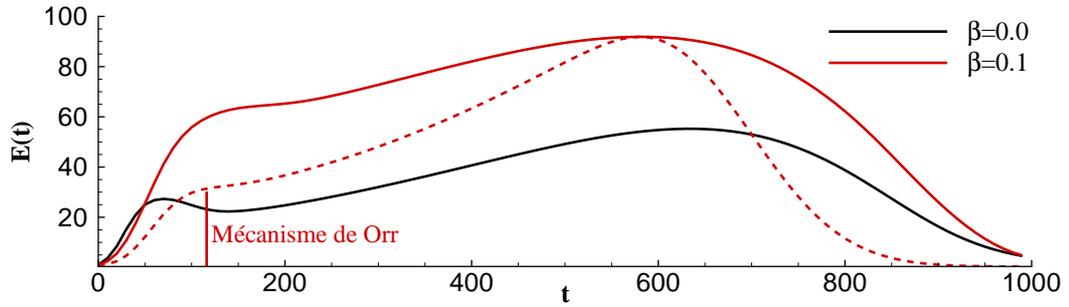


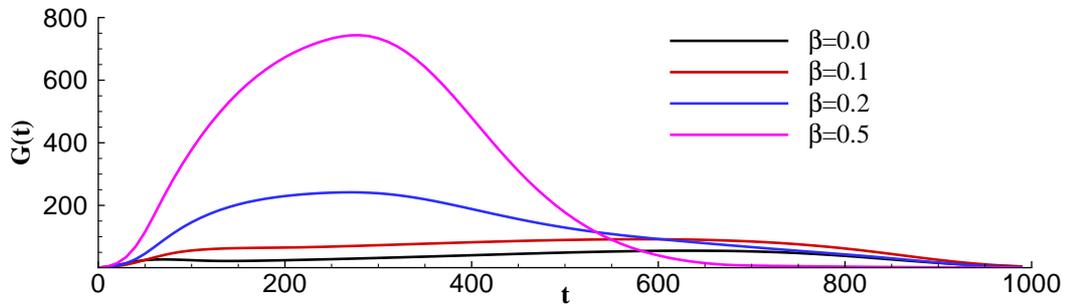
FIG. 5.12 – Evolution de la perturbation optimale associée à 950 modes globaux de D1. La partie réelle de \hat{u} est représentée.

Remarques et perspectives pour une perturbation tridimensionnelle, $\beta \neq 0$. Une dernière remarque peut ici être formulée. Ce mécanisme révéla la signification physique des modes M_C et P2, et illustra plus particulièrement pour l'ensemble M_C , la contribution de la composante longitudinale et normale des vecteurs de la base de modes globaux, dans la croissance transitoire de l'énergie. Une partie de l'influence des modes M_C se situant pour des valeurs élevées de y , contrairement aux modes M_{TS} et P2. En outre, cette famille de mode s'est trouvée appartenir à un équivalent des branches continues issues de l'analyse locale. Ainsi, leurs influences, au sein d'une perturbation tridimensionnelle, pourraient apparaître beaucoup plus pertinente et, plus spécifiquement, révéler peut-être un mécanisme du type "lift-up effect" [79]. Néanmoins, les calculs s'avèrent nettement plus complexes, faisant intervenir des tailles de mémoire pour le maillage précédent de l'ordre de 17 Go, et une définition correcte des modes M_C paraît difficile ³⁵. Des calculs préliminaires ont été réalisés pour $\beta = 0.1, 0.2$ et 0.5 . Un sous-espace de Krylov de taille 1500 est considéré. La croissance transitoire, résultante de ces modes globaux, est illustrée sur les figure 5.13(a) et 5.13(b). L'évolution de l'énergie pour $\beta = 0.1$ présente un mécanisme similaire à celui observé pour une perturbation bidimensionnelle. Notamment, le mécanisme de Orr est également présent, avec de niveaux plus importants (figure 5.13(a)). Les nombres d'onde transverses plus élevés font apparaître des croissances d'énergie plus importantes sur des temps courts et une disparition du pic lié au mécanisme TS (figure 5.13(b)). Une illustration de la perturbation optimale, au temps $t = 200$, située au maximum d'énergie, est présentée sur la figure 5.14. Nous pouvons distinguer l'influence de la composante \hat{u} , pouvant induire une élongation des structures suivant la direction longitudinale durant cette première période. Puis, une diminution nette de l'énergie vers $t = 600$ se distingue, ayant pour conséquence une relaxation vers un phénomène TS , bidimensionnel. Il semblerait ainsi que la dynamique tridimensionnelle d'une couche limite pourrait révéler des spécificités propres au "lift-up-effect". Plus spécifiquement, nous pourrions nous attendre à une combinaison des deux phénomènes transitoires, relatifs au mécanisme de Orr et au "lift-up-effect", comme il l'est suggéré dans l'étude de Farrell & Ioannou, à travers leur analyse théorique de phénomènes transitoires associés à des perturbations tridimensionnelles au sein d'écoulements visqueux cisailés ([30]). Cependant, la convergence d'un tel mécanisme n'est pas assurée et ces résultats ne sont qu'une étude préliminaire à la dynamique du paquet d'onde 3D. En particulier, il pourrait être plus adéquat d'utiliser une procédure d'optimisation basée sur un rebouclage entre les équations directes et adjointes, pour capter plus nettement ce processus [23].

³⁵se référer au chapitre précédent



(a) Evolution de l'énergie pour $\beta = 0.1$. La perturbation optimale est représentée en traits discontinus.



(b) Evolution de l'enveloppe de l'énergie, $G(t)$, pour $\beta = 0.1, 0.2$ et 0.5 .

FIG. 5.13 – Evolution de l'énergie pour les nombres d'onde transverses $\beta = 0.1, 0.2$ et 0.5 , relatifs au champ $D1$. 1150 modes sont considérés.

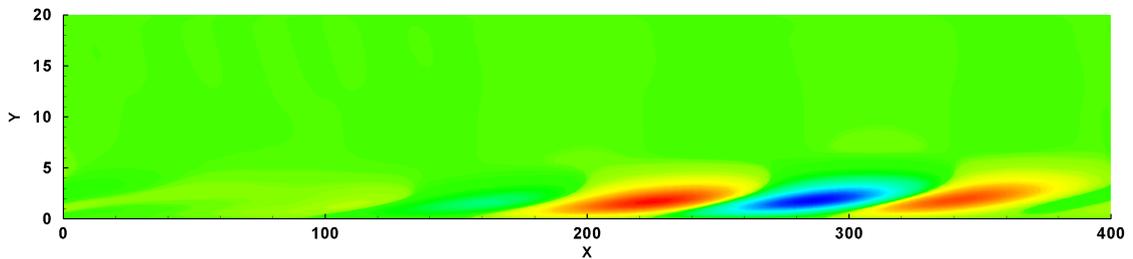


FIG. 5.14 – Illustration de la perturbation optimale pour $\beta = 0.5$ à $t = 200$, du champ $D1$.

Troisième partie

Analyse de stabilité linéaire locale et globale de couche limite décollée de plaque plane.

Chapitre 6

Analyse de stabilité linéaire parallèle et faiblement non parallèle.

6.1 Objet de l'étude.

L'étude précédente nous a permis d'introduire les différentes notions utilisées au cours d'une analyse de stabilité linéaire globale, à travers l'examen d'une couche limite de plaque plane. En particulier, une étude du comportement transitoire, associé aux modes globaux, a permis de retrouver la dynamique en espace et en temps d'une perturbation initiale. De plus, un calcul du pseudo-spectre a permis d'identifier l'influence des ondes TS dans le régime asymptotique, lorsque l'écoulement est soumis à un forçage harmonique continu.

Par conséquent, il paraît intéressant d'appliquer une telle approche à des cas où le non-parallélisme peut avoir une influence significative sur la dynamique instable de l'écoulement. Le cas d'une couche limite décollée en est un parfait exemple. De ce fait, cette troisième partie est consacrée à une analyse de stabilité linéaire globale d'un écoulement fortement décollé laminaire, semblable à l'illustration 6.1.

En outre, une étude préliminaire sur les propriétés locales de l'écoulement mettra en valeur les différents mécanismes déstabilisants observés via l'analyse globale. Notre étude s'orientera alors à élaborer divers scénarii liés à la première bifurcation de l'écoulement, où l'influence de perturbations bidimensionnelles et tridimensionnelles sera considérée.

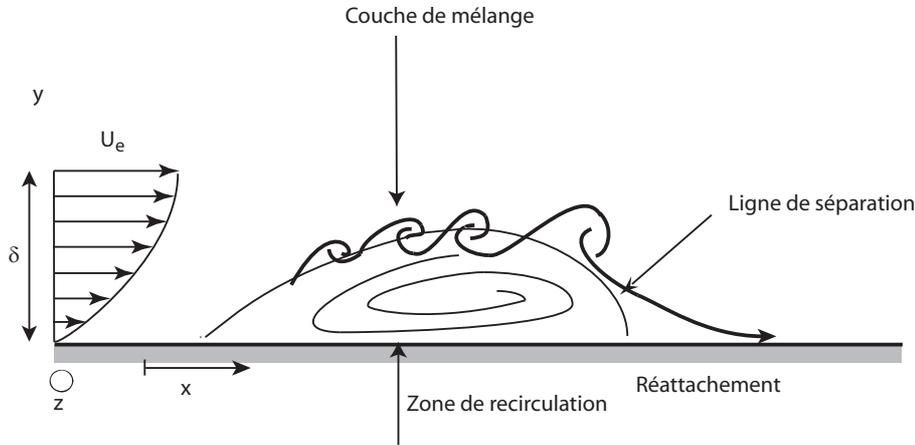


FIG. 6.1 – Objet de l'étude : écoulement décollé laminaire de plaque plane.

6.2 Simulation numérique d'un écoulement décollé de plaque plane.

6.2.1 Échelles de référence, configuration et discrétisation.

L'échelle de longueur de référence est prise égale à l'épaisseur de déplacement δ^* , à l'entrée du domaine. La vitesse de référence correspond à la vitesse maximale extérieure.

Notre étude s'orientant vers l'analyse de décollement laminaire, nous nous plaçons ici dans une configuration à bas nombre de Reynolds, où l'amont de l'écoulement n'est pas influencé par le développement d'ondes instables TS. Ainsi, le nombre de Reynolds est fixé à 200, en deçà du nombre de Reynolds critique d'une couche limite de Blasius ≈ 520 . La longueur de la plaque est fixée à 500, la hauteur à 30^{36} .

Enfin une grille (700×150) est utilisée pour la résolution des équations de Navier-Stokes 2D en formulation (ψ, ω) .

6.2.2 Présentation des écoulements de base.

6.2.2.1 Condition limite supérieure : vitesse d'aspiration.

La création du décollement est réalisée en imposant un profil spécifique de la composante verticale de la vitesse sur la condition limite supérieure, notée $V_{top}(x)$, à travers une condition de Dirichlet sur ψ . Une technique similaire est utilisée par Na & Moin [63] pour la création d'une couche limite décollée turbulente.

Dans le but de déterminer les effets du gradient de pression adverse, sur les propriétés de stabilité globale, trois profils de suction sont considérés 6.2(a).

³⁶Nous pouvons remarquer que la valeur de x en entrée du domaine peut aussi être utilisée comme échelle de référence, dans ce type de configuration. Notamment Pauley *et al.* [66] ont eu recours à cet adimensionnement. Dans notre cas, ce dernier est égal à $Re_x = 13508$.

Décollement	X_{sep}	X_R	$Re_{\theta_{sep}}$	l/θ_{sep}	\mathbf{m}	P_{max}	Re_x
D1	49.7	189	173	161	-0.086	-0.28	13508
D2	46.1	194	176	168	-0.117	-0.30	13508
D3	41	204	179	182	-0.127	-0.32	13508

TAB. 6.1 – Caractéristiques des écoulements décollés à $Re_{\delta^*} = 200$. X_{sep} et X_R désignent le point de décollement et de recollement. l se réfère à la longueur du décollement et θ représente l'épaisseur de quantité de mouvement.

Une convergence sur le résidu de l'ordre de 10^{-13} aboutit aux champs de base D1, D2 et D3, dont les longueurs de bulles sont référencées dans le tableau 6.1 ³⁷.

6.2.2.2 Présentation de D1, D2 et D3. Comparaison avec la littérature.

Une présentation des champs décollés est illustrée par la composante longitudinale de vitesse U , 6.2(b) et les paramètres de couche limite δ^* et H , sur la figure 6.3. En particulier, nous observons une augmentation de l'épaisseur de déplacement δ^* et du facteur de forme H au voisinage de la bulle. Puis, ces derniers relaxent vers des niveaux proches d'une couche limite de Blasius, en bout de plaque.

Afin de situer nos écoulements décollés par rapport à la littérature, deux paramètres sont considérés. Tout d'abord, le facteur de Thwaites $m = - \left[\frac{\theta^2}{U_e} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right]_{sep}$, où θ représente l'épaisseur de quantité de mouvement et U_e la vitesse extérieure, est calculé au point de séparation. Ce coefficient adimensionné reflète de manière significative la présence d'un décollement au sein de la plaque. Les résultats issus des simulations numériques directes s'avèrent varier entre -0.127 et -0.086 (table 6.1). Ces dernières se trouvent alors être en bon accord avec les valeurs obtenues par Pauley *et al.* [66] (entre -0.121 et -0.076) et Washito *et al.* [89] (entre -0.103 et -0.065) dans des configurations similaires. Considérons maintenant le paramètre $P_{max} = \frac{\theta_{sep}^2}{\nu} \left(\frac{du_i}{dx} \right)$, relatif à un gradient de pression adimensionné. Une valeur critique de P_{max} , associée à l'apparition de phénomènes instationnaires, est suggéré par [66] ³⁸. Le coefficient P_{max} obtenu au cours des simulations s'établit autour de -0.3 (table 6.1). Celui-ci est donc du même ordre de grandeur que [66]. Cependant, aucune instationnarité n'est identifiée pour D1, D2 et D3. Nous attribuons cette particularité au fait que le nombre de Reynolds est relativement inférieur à ceux étudiés par les auteurs précédents ³⁹. Néanmoins, les champs de base présentés semblent être en accord avec ceux de la littérature.

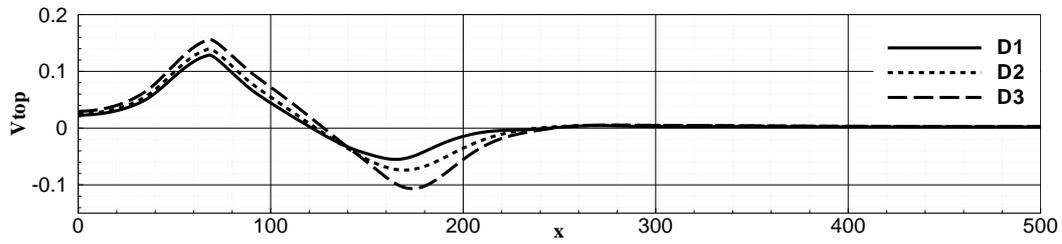
Par conséquent, la prise en compte de tels écoulements se révèle pertinente dans les analyses de stabilité des prochains paragraphes. Étudions tout d'abord les propriétés de stabilité locale de D1, D2 et D3. ⁴⁰

³⁷Le résidu basé sur le maximum de vorticité est décrit dans la partie 1.

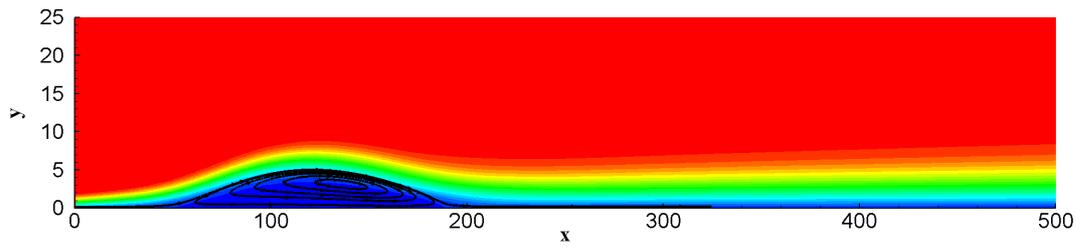
³⁸Cet aspect est abordé dans la première partie.

³⁹Leur recherche reposant sur des nombres de Reynolds basés sur x entre $Re_x = 60000$ et $Re_x = 240000$

⁴⁰Deux calculs supplémentaires pour chaque champ avec des grilles 500×150 et 500×170 révélèrent que les écoulements de base présentés sont indépendants de la discrétisation.



(a) Profils de succion pour les 3 décollements : D1, D2 et D3.



(b) Composante de vitesse longitudinale U de l'écoulement décollé D1.

FIG. 6.2 – Couche limite décollée de plaque plane issue de la simulation numérique, au nombre de Reynolds 200.

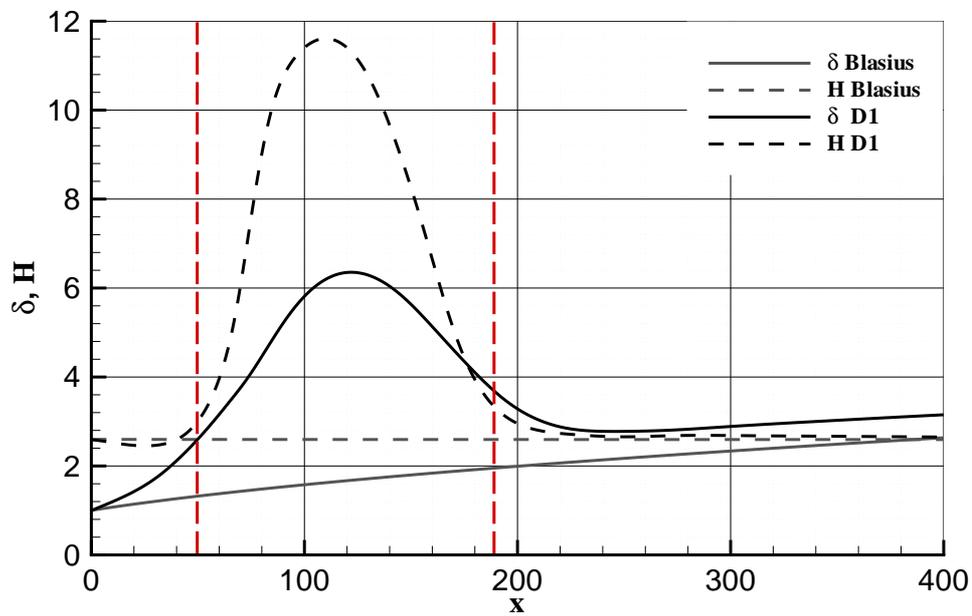


FIG. 6.3 – Paramètres de couche limite de l'écoulement décollé D1 issu de la DNS, au nombre de Reynolds 200.

6.3 Analyse de stabilité linéaire spatiale et spatio-temporelle.

6.3.1 Etude des ondes convectives, nature de l'instabilité.

6.3.1.1 Quelques rappels de méthodologie.

Un des scenarii classiques de déstabilisation de zones décollées repose sur l'amplification spatiale d'onde d'instabilité, dans une première phase bidimensionnelle convective. En particulier, cette première étape de la transition est relativement bien décrite par des analyses de stabilité locales [71] [73]. Pour cela, les perturbations de vitesse $\mathbf{u} = {}^t(u, v)$ et de pression p sont prises sous la forme de modes normaux suivantes :

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}(y) \exp [i(\alpha x - \Omega t)] \\ v &= \tilde{v}(y) \exp [i(\alpha x - \Omega t)] \text{ et} \\ p &= \tilde{p}(y) \exp [i(\alpha x - \Omega t)] \end{aligned} \quad (6.1)$$

En se référant aux discussions de la première partie de ce mémoire, nous adoptons un point de vue spatial. Ainsi, la fréquence Ω est réelle et le nombre d'onde α est complexe, et liés par la relation de dispersion $\mathcal{D}(\Omega, \alpha)$ ⁴¹.

Nous étudions alors l'évolution des taux d'amplification spatiaux $\sigma = -\alpha_i$ et des nombres d'onde α_r en fonction de la position x sur la plaque et de la pulsation Ω . En outre, une approche PSE ⁴² est aussi réalisée de manière à mesurer l'influence du non parallélisme sur les ondes spatiales. Les critères de non parallélisme, appliqués à la méthode PSE, sont basés sur l'énergie pour les taux d'amplification et le maximum local de \tilde{v} , pour la longueur d'onde λ . Ainsi :

$$\sigma = -\alpha_i + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x} \quad (6.2)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \alpha_r + \Re \left(\frac{1}{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial x} \right)$$

avec

$$\begin{aligned} v_m &= \max_y (|v|) \text{ et} \\ E &= \int |u|^2 + |v|^2 dy \end{aligned} \quad (6.3)$$

Enfin, 100 points de collocation spectrale suivant y sont consacrés à la discrétisation des équations PSE et de $\mathcal{D}(\Omega, \alpha)$ ⁴³.

6.3.1.2 Propriétés spatiales.

L'écoulement D1 est considéré pour illustrer les propriétés spatiales des ondes (6.2). La courbe neutre 6.4 met en lumière le caractère fortement instable lié à la zone décollée et la large bande de fréquences qui peut être excitée. En particulier, les fréquences instables peuvent atteindre ici des valeurs de $Fr = 1200 \times 10^{-6}$, correspondant à une pulsation de $\Omega = 0.24$ ⁴⁴. Cette dernière est à rapprocher de 300×10^{-6} associée à l'écoulement de Blasius.

⁴¹Les opérateurs correspondant sont décrits dans la première partie. Nous nous intéressons ici aux perturbations bidimensionnelles, $\beta = 0$.

⁴²Nous rappelons que l'étude PSE décrit ici une analyse PSE linéaire.

⁴³Le type de grille est détaillée dans la première partie.

⁴⁴La fréquence réduite est reliée à la pulsation par $Fr = \frac{\Omega 10^{-6}}{Re_{\delta^*}}$, avec $Re_{\delta^*} = 200$

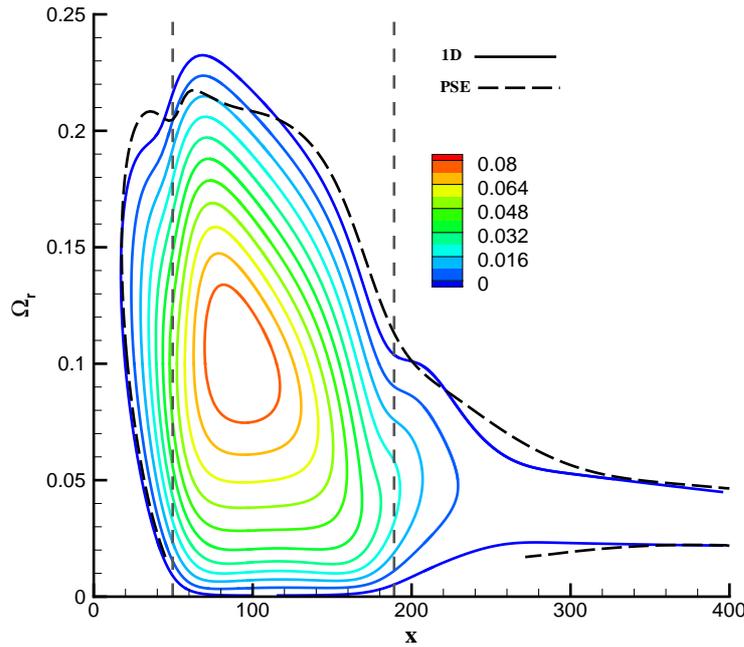
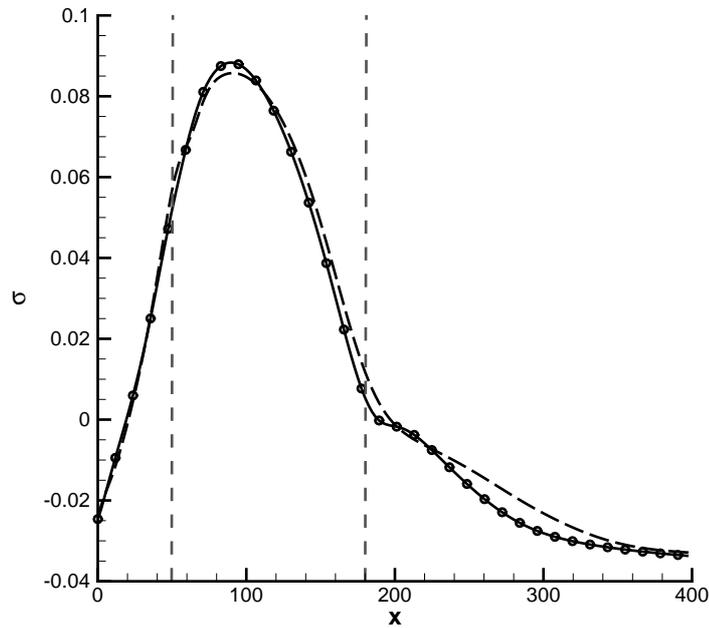


FIG. 6.4 – Courbe neutre relative à l’écoulement décollé étudié, dans le plan (Ω_r, x) . Les traits verticaux discontinus représentent les positions de décollement et de recollement.

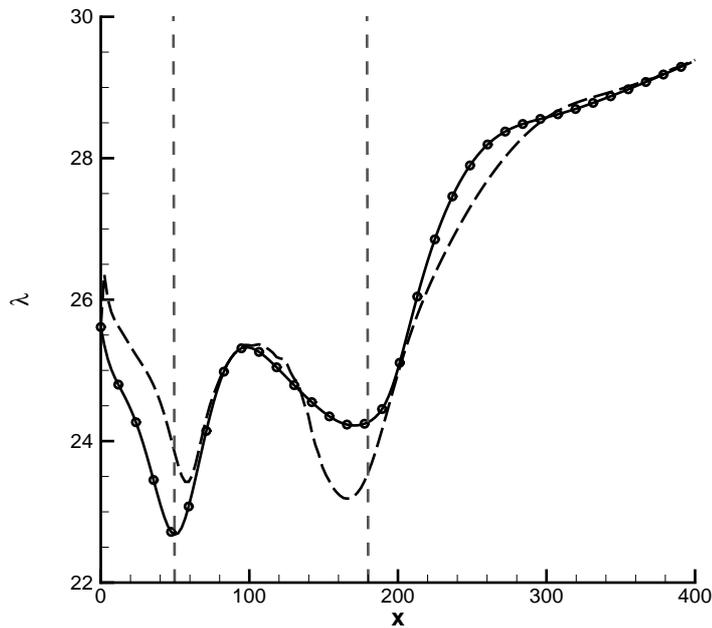
Plus spécifiquement, l’influence de la zone décollée sur σ et les longueurs d’onde $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha_r}$, est mise en lumière par une coupe de la courbe neutre 6.5 à $\Omega = 0.1$. Une forte augmentation du taux d’amplification spatial apparaît très nettement au sein de la bulle pouvant atteindre un ordre dix fois supérieur à celui d’une couche limite de Blasius. De plus, les longueurs d’onde subissent de violentes variations au sein de la zone de recirculation, induisant des changements de vitesse de phase des ondes : $v_\Phi = \Omega_r \lambda / 2\pi$, intenses. En particulier, celles-ci ont tendance à ralentir au voisinage de la bulle, lors d’une excitation à une fréquence donnée. Enfin, nous pouvons remarquer que les approches faiblement non parallèle et locale se rejoignent au bout du domaine. Ceci est en accord avec le fait que nous relaxons vers un écoulement de Blasius, où l’effet du non-parallélisme est moins significatif.

Ces spécificités, propres à σ et λ , peuvent être expliquées par le changement de nature de l’instabilité. En effet, cette nature se distingue par une contribution non visqueuse, associée à la présence d’un point d’inflexion sur les profils de vitesse décélérés et décollés ⁴⁵. L’onde d’instabilité peut ainsi s’apparenter à une onde KH se développant le long de la couche de mélange. Afin de mettre en lumière l’influence de la couche de mélange et la compétition entre les deux natures de l’instabilité, une étude de l’évolution des fonctions propres suivant x est réalisée. Deux profils caractéristiques de vitesse sont examinés, au point de décollement et au maximum du point d’inflexion. Les figures 6.6 et 6.7 expriment ici assez nettement les particularités spatiales de l’onde d’instabilité, au fur et à mesure que celle-ci se propage le long de la plaque. A l’abscisse X_{sep} , le profil de la composante longitudinale de la perturbation $|\tilde{u}|$ possède deux maxima entre $y = 0$ et $y = 4$. Un premier, correspondant à l’influence de la paroi, similaire au profil que l’on observe dans une couche limite de Blasius. Un deuxième, au niveau du point d’inflexion, associé à un mécanisme de Kelvin-Helmholtz. Les profils de $|\tilde{u}|$, $|\tilde{v}|$ et $|\tilde{p}|$ à l’abscisse où la position du point d’inflexion est située le plus haut par rapport à la

⁴⁵critère de Rayleigh



(a) Taux d'amplification spatiale. Le critère de non parallélisme pour les équations PSE est basé sur l'énergie.



(b) Longueur d'onde. Le critère de non parallélisme pour les équations PSE est basé sur le plus haut maximum local de la composante verticale de la perturbation de vitesse.

FIG. 6.5 – Taux d'amplification spatial et longueur d'onde pour la pulsation $\Omega_r = 0.1$, correspondant à une fréquence réduite : $F_r = 520 \times 10^{-6}$. En trait noir continu, pointillé, celui calculé par la résolution du problème 1D (OS) ; en trait noir discontinu, celui issu des équations PSE.

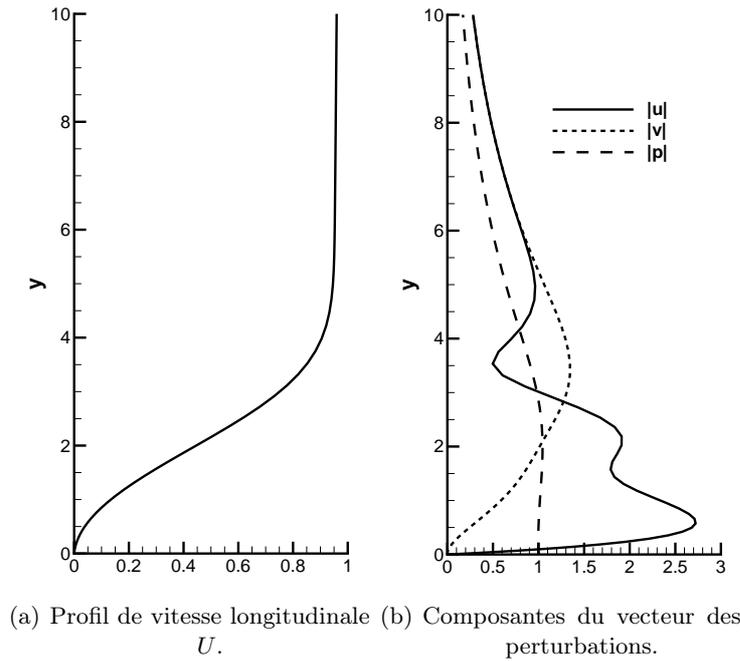


FIG. 6.6 – Profils de vitesses et fonctions propres calculés par une approche locale, au point de décollement X_{sep} , pour la fréquence réduite : $F_r = 500 \times 10^{-6}$, correspondant à une pulsation $\Omega_r = 0.1$.

paroi, sont particulièrement intéressants. En effet, nous observons un changement de nature de l’instabilité, qui apparaît complètement dominée par une origine inflexionnelle, non visqueuse. Le maximum relatif au point d’inflexion l’emporte alors sur celui d’origine visqueuse.

Nous pouvons souligner que ses caractéristiques sont semblables à celles observées par Rist *et al.* [73] [71] ou encore Theofilis *et al.* [84], dans des configurations similaires. Évidemment, ces approches reposant sur les équations linéarisées de Navier-Stokes, elles ne fournissent aucun renseignement sur les phénomènes non-linéaires. Néanmoins, nous pouvons quantifier l’influence de ces derniers, à l’aide du critère empirique e^n , discuté dans la première partie. Nous traçons ainsi les courbes d’amplitude associées à D1 et D3, issues d’une étude PSE. Celles-ci sont représentées sur la figure 6.8. Les niveaux atteignent ici des valeurs supérieures à 10 pour l’écoulement où la zone de recirculation est la plus intense. Des effets non linéaires peuvent ainsi être attendus dans une telle configuration et notamment aboutir à une certaine saturation de l’onde.

Enfin, nous avons remarqué, dans la première partie de ce mémoire, que certaines zones de recirculation possédant des écoulements de retour importants peuvent être l’objet d’une instabilité globale intrinsèque à la bulle. Ce comportement peut alors être lié aux propriétés locales de l’écoulement, associées au caractère convectif ou absolu du profil de vitesse étudié [50]. Une étude de stabilité locale spatio-temporelle est ainsi nécessaire pour déterminer de telles spécificités. De ce fait, la prochaine section est consacrée à une étude convective/absolue des différents profils de vitesse des écoulements D1, D2 et D3.

6.3.2 Analyse des propriétés locales convectives/absolues de l’instabilité.

Les notions d’instabilité convective et absolue, développées dans la physique des plasmas par Briggs [12] dans les années 60 et identifiées par Gaster en 1967 [38], mettent en lumière

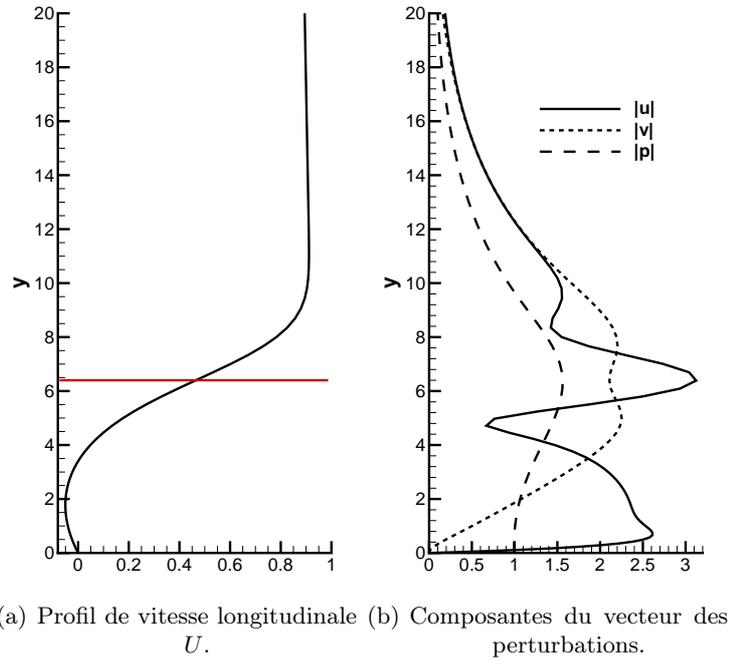


FIG. 6.7 – Profils de vitesse et fonctions propres calculés par une approche locale, à l'abscisse où le point d'inflexion sur la vitesse longitudinale est le plus haut $x = 116$, pour la fréquence réduite : $F_r = 452 \times 10^{-6}$, correspondant à une pulsation $\Omega_r = 0.0904$.

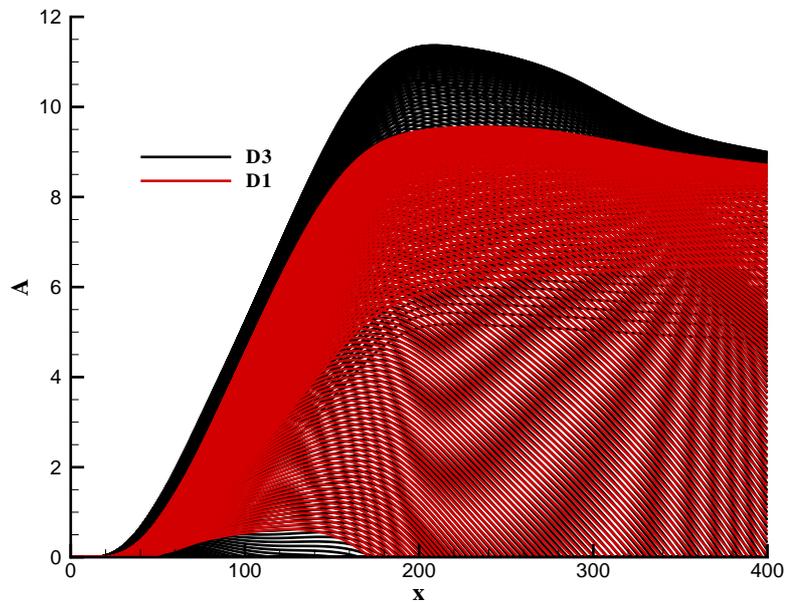


FIG. 6.8 – Analyse du critère e^n par une méthode PSE pour les champs D1 et D3.

deux évolutions distinctes, d'une perturbation localisée en espace et en temps, dans un milieu ouvert instable. En particulier, ces études montrent qu'une perturbation peut évoluer de deux manières différentes :

- La perturbation peut croître et se propager en aval de l'écoulement de telle sorte qu'en tout point de l'espace, celle-ci finit toujours par s'atténuer : c'est le cas d'une instabilité convective. Cet aspect a fait l'objet de la section précédente.
- la perturbation peut croître et contaminer tout l'écoulement : c'est le cas d'une instabilité absolue.

Les recherches de Huerre *et al.*, au cours des années 80 [51] ont alors permis le développement d'un formalisme mathématique, identifiant un critère associé à la transition d'une instabilité convective, absolue. Nous décrivons tout d'abord quelques aspects théoriques, liés à ce critère.

6.3.2.1 Quelques aspects théoriques.

A contrario de l'étude précédente, nous adoptons ici un point de vue spatio-temporel. Ainsi $\alpha \in \mathcal{C}$ et $\Omega \in \mathcal{C}$. En particulier, nous allons nous intéresser à la réponse à une impulsion localisée en temps et en espace au sein d'un écoulement ouvert. Celle-ci peut être déterminée par le calcul de la fonction de Green $G_a(x, t)$, définie par :

$$\mathcal{L}G_a(x, t) = \delta(x)(t) \tag{6.4}$$

Avec la condition de causalité : $G_a(x, t) = 0$ si $t < 0$

où \mathcal{L} désigne l'opérateur d'équations différentielles, associé à la relation de dispersion $\mathcal{D}(\alpha, \Omega)$. Si l'on suppose que l'écoulement de base est homogène suivant la direction de propagation x , la solution peut être recherchée sous une forme modale. La formulation dans l'espace physique de la transformée de Fourier-Laplace de la fonction de Green s'écrit alors :

$$G_a(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_L \int_F \frac{\exp[i(\alpha x - \Omega t)]}{D(\alpha, \Omega)} d\alpha d\Omega \tag{6.5}$$

où L représente le contour d'intégration suivant Ω et F celui relatif à α . Nous remarquerons que le choix du contour L devra se positionner au dessus des singularités du terme de l'intégral (6.5), de manière à respecter la condition de causalité⁴⁶. L'étude de la réponse de l'écoulement en espace et en temps revient donc à analyser le comportement de $G_a(x, t)$ défini par (6.5). L'écoulement est linéairement instable :

$$\text{S'il existe au moins un rayon } x/t = \text{constante où} \tag{6.6}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} G_a(x, t) \rightarrow \infty$$

Dans ce cas, l'écoulement est convectivement instable si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_a(x, t) \rightarrow 0 \text{ suivant le rayon } \frac{x}{t} = 0 \tag{6.7}$$

L'évolution de perturbation prend alors la forme d'un paquet d'onde s'amplifiant en temps et en espace, tout en étant advecté par l'écoulement. A contrario, l'écoulement est absolument instable si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_a(x, t) \rightarrow \infty \text{ suivant le rayon } \frac{x}{t} = 0 \tag{6.8}$$

⁴⁶Cet aspect est détaillé dans l'article [51]

Le paquet d'onde créé à l'instant initial n'est alors plus advecté hors du domaine, mais croît sur place, jusqu'à contaminer tout l'écoulement. Une étude asymptotique de l'intégrale (6.5) permet de déterminer le comportement de G_a , le long de chaque rayon spatio-temporel $v_g = x/t$. Cette dernière prend la forme d'une onde spatio-temporelle suivante :

$$G_a \approx t^{-1/2} \exp\{i[\alpha^*(v_g)v_g - \Omega^*(v_g)]t\} \quad (6.9)$$

où le couple (α^*, Ω^*) vérifie ⁴⁷

$$\mathcal{D}(\alpha^*, \Omega^*) = 0 \text{ et } \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \alpha}(\alpha^*, \Omega^*) = v_g \quad (6.10)$$

avec $v_g = x/t \in \Re$

L'analyse de la dynamique en espace et en temps de G_a revient à étudier l'évolution du taux d'amplification $\sigma(v_g)$ suivant chaque rayon v_g .

$$\sigma(v_g) = \Omega_i^*(v_g) - \alpha_i^*(v_g)v_g \quad (6.11)$$

Dans le cas où l'écoulement est instable, $\sigma(v_g^{max}) > 0$, trois cas associés à G_a (6.8) peuvent se présenter.

- Si $\sigma(0) < 0$, l'écoulement est convectivement instable.
- Si $\sigma(0) = 0$, l'écoulement est marginalement absolument stable.
- Si $\sigma(0) > 0$, l'écoulement est absolument instable.

Ce dernier point est illustré sur les figures 6.9, 6.10 et 6.11 où \mathcal{V}_g+ et \mathcal{V}_g- représentent les bords du paquet d'onde. De ce fait, un critère d'instabilité absolu peut être défini par une valeur positive de $\sigma(0) = \Omega_i^*(x/t = 0)$. Par conséquent, nous pouvons restreindre l'analyse au rayon $x/t = 0$, où le couple $(\alpha, \Omega) = (\alpha_a^*, \Omega_a^*)$ vérifie les relations suivantes :

$$\mathcal{D}(\alpha_a^*, \Omega_a^*) = 0 \text{ et } \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \alpha}(\Omega_a^*, \Omega_a^*) = 0 \quad (6.12)$$

(α_a^*, Ω_a^*) peut être alors déterminé en étudiant le pincement des branches spatiales α^+ et α^- , gouvernant le développement des ondes selon le sens de l'écoulement et à contre courant, dans le plan complexe (Ω_r, Ω_i) .

La procédure consiste à suivre l'évolution des branches α^+ et α^- en fonction de la fréquence Ω_r suivant le contour d'intégration L , positionné à $\Omega_i = cste$. Ce dernier est ensuite abaissé jusqu'au pincement des deux branches spatiales, indiquant la valeur du taux d'amplification absolu $\Im(\Omega_a^*)$ (figures 6.12(a), 6.12(b)). En outre, ce point particulier spécifie une singularité du terme de l'intégrale (6.5). Ainsi, de manière à respecter la condition de causalité, le contour L ne peut être abaissé au-delà de cette valeur. Cette remarque a un intérêt majeur, car elle rendrait alors inadéquate l'analyse de stabilité spatiale, en présence d'une instabilité absolue. Le lecteur pourra bien sûr se référer à [51] pour plus de détails.

6.3.2.2 Etude de la nature convective, absolue des profils associés aux champs D1, D2 et D3.

La procédure précédente est utilisée dans l'étude des écoulements décollés D1, D2 et D3. Nous illustrerons dans un premier temps la méthode sur le champ D1. Nous nous plaçons à un

⁴⁷Le contour d'intégration suit le chemin où la phase est stationnaire. Celle-ci détermine alors la contribution principale de l'intégrale (6.5) aux temps longs.

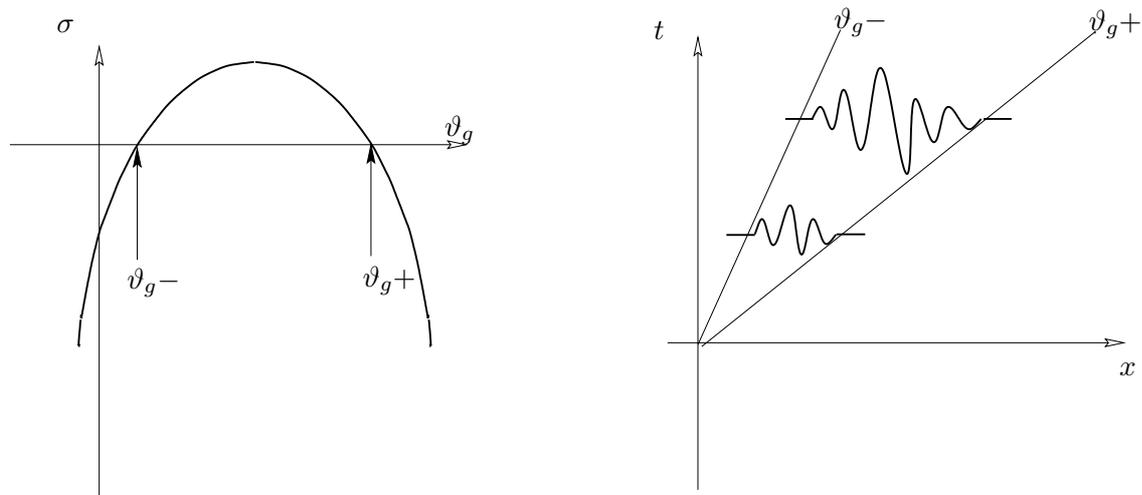


FIG. 6.9 – Allure $\sigma(v_g)$ lorsque l'écoulement est instable convectivement.

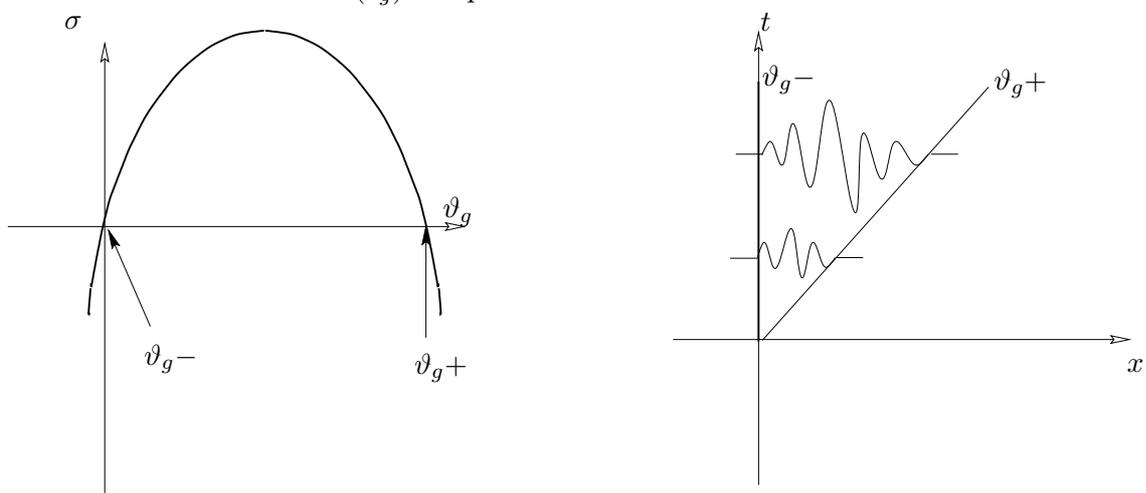


FIG. 6.10 – Allure $\sigma(v_g)$ lorsque l'écoulement est marginalement instable absolu.

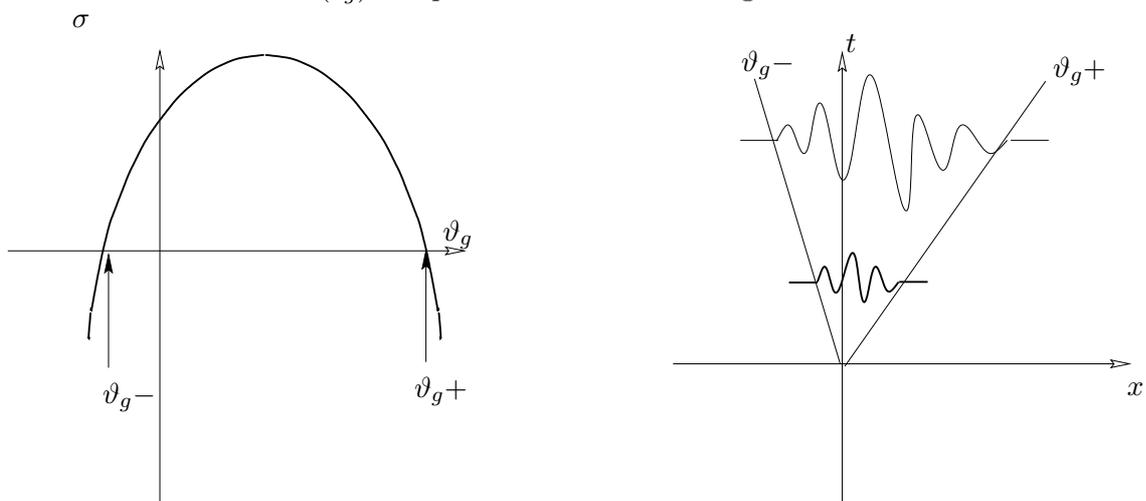
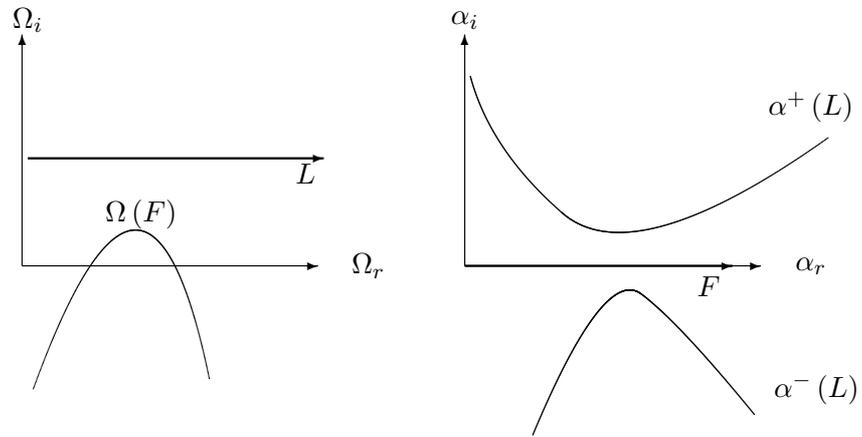
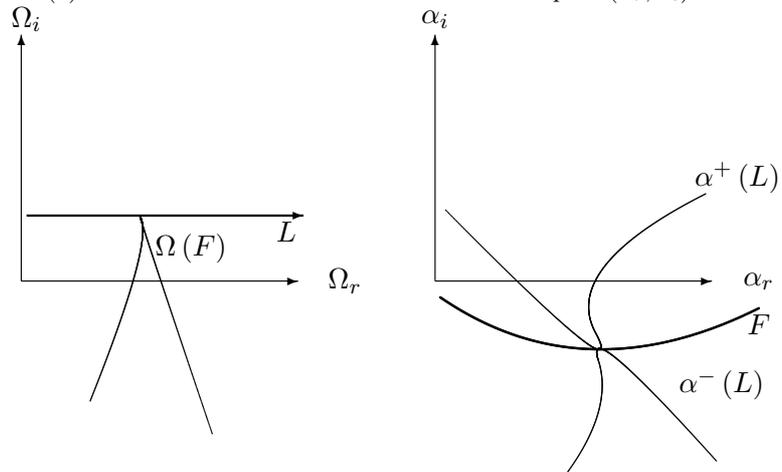


FIG. 6.11 – Allure $\sigma(v_g)$ lorsque l'écoulement est instable absolument.



(a) Positionnement de F sur l'axe réel dans le plan (α_r, α_i)



(b) Pincement des branches $\alpha^+(L)$ et $\alpha^-(L)$. Le contour L rencontre la singularité dans le plan complexe (Ω_r, Ω_i) .

FIG. 6.12 – Visualisation de la procédure de recherche du rayon de vitesse de groupe nulle.

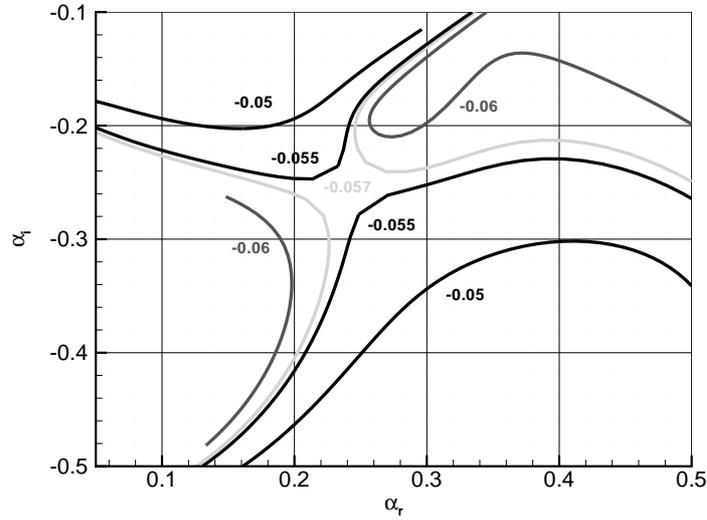
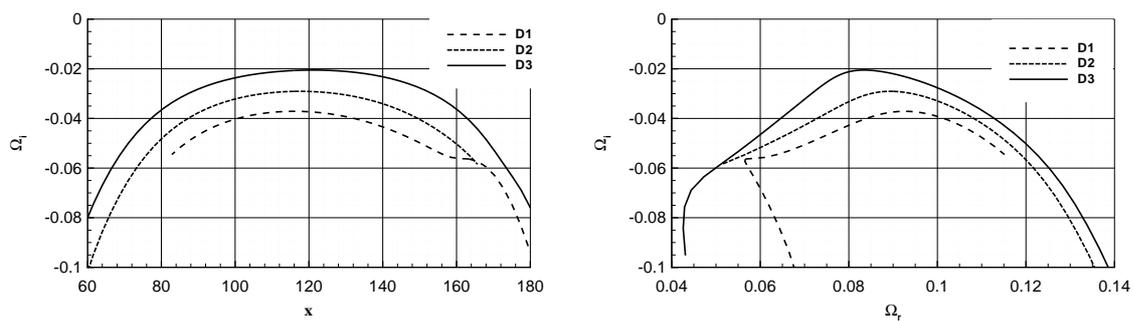


FIG. 6.13 – Pincement des branches $\alpha_+(L)$ et $\alpha_-(L)$ en abaissant le contour d'intégration, variant de $\Omega_i = -0.05$ à -0.06 , associé au champ $D1$.



(a) Evolution du taux d'amplification absolu, relatif au rayon $x/t = 0$, en fonction de la position sur la plaque, pour les champs $D1$, $D2$ et $D3$.
 (b) Evolution du taux d'amplification du mode absolu, en fonction de la pulsation Ω_r , pour les champs $D1$, $D2$ et $D3$.

FIG. 6.14 – Evolution du mode absolu en fonction des champs étudiés et de la pulsation.

voisinage où l'écoulement de retour atteint un maximum, soit $x = 160$. L'étude des branches spatiales $\alpha^+(L)$ et $\alpha^-(L)$, pour L positionné sur $\Omega_i = -0.05$, est illustrée sur la figure 6.13. La recherche de la vitesse de groupe nulle est alors réalisée en localisant le pincement entre ces deux branches spatiales, en abaissant au fur et à mesure le contour d'intégration L (voir figure 6.13).

Afin d'analyser l'évolution suivant x du taux de croissance du mode absolu, une méthode de Newton est utilisée pour converger sur le mode de vitesse de groupe nulle pour chaque position sur la plaque⁴⁸. Cette étude est réalisée pour les champs D1, D2 et D3. Il en résulte que les différents champs sont absolument stables (figures 6.14).

Cette analyse conforte ainsi la pertinence de l'étude de stabilité spatiale réalisée dans la section précédente. En outre, elle révèle un caractère globalement stable des écoulements D1, D2 et D3 ([50]). Néanmoins, les hypothèses de parallélisme peuvent s'avérer inadéquates pour un tel écoulement. En particulier, les basses fréquences ne peuvent être captées par une telle approche. De plus, l'analyse PSE associée à un tel écoulement est légèrement inadéquat du fait du caractère elliptique associé à un tel écoulement, et du fort écoulement de retour qui est présent, bien que celle-ci fournisse des résultats intéressants et ont déjà été utilisé par certains auteurs dans des configurations similaires [85].

Une étude de stabilité linéaire globale, similaire à celle effectuée lors de la deuxième partie de ce mémoire relative à la couche limite, où aucune hypothèse sur le parallélisme n'est formulée, peut s'avérer alors fortement intéressante et complémentaire à ces analyses locales.

Par conséquent, une telle étude est réalisée au cours des chapitres suivants. Elles mettront en valeur certains mécanismes physiques déstabilisants, bidimensionnels et tridimensionnels, que nous confronterons aux résultats des analyses locales. Enfin, tout cela nous amènera à proposer différents scénarii de déstabilisation, liés à la présence d'une zone de recirculation dans un écoulement laminaire.

⁴⁸Cette méthode est similaire à Rist & Maucher [74]

Chapitre 7

Analyse de stabilité linéaire globale. Etude des perturbations bidimensionnelles, $\beta = 0$.

7.1 Présentation du problème.

7.1.1 Conditions limites.

Nous allons maintenant analyser la dynamique en espace et en temps d'une petite perturbation, à l'aide d'une étude de stabilité linéaire globale. En se référant aux notions détaillées dans la deuxième partie, nous décomposons celle-ci dans une base de modes globaux. Ces derniers sont obtenus par la résolution du problème (7.1), où des conditions limites ferment le système ⁴⁹. En particulier, l'écoulement étant convectivement stable en entrée, la nullité des fluctuations de vitesse est imposée en $x = 0$. Puis, de manière à simuler convenablement la sortie des ondes, les conditions limites (4.5) sont imposées en aval ⁵⁰.

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{q}} = i\Omega\mathbf{B}\hat{\mathbf{q}} \quad (7.1)$$

Enfin, les conditions classiques à la paroi et sur la partie supérieure du domaine complètent (7.1).

7.1.2 Discrétisation.

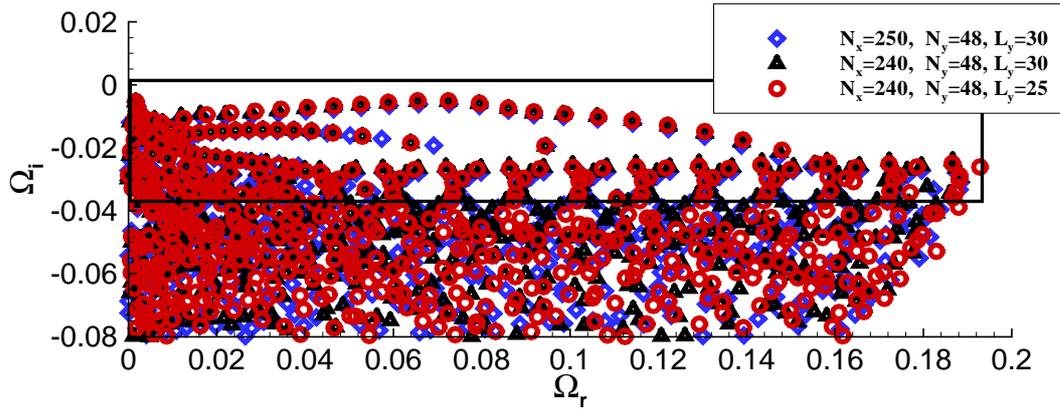
Afin d'étudier l'influence de la discrétisation spectrale Chebyshev/Chebyshev sur les modes globaux, trois maillages sont considérés. La figure 7.1(a), relative à D3, met en lumière la cohérence du spectre pour un maillage (250×48) . Cette grille et le spectre associé sont donc adoptés pour les analyses suivantes. ⁵¹ Dans un premier temps la longueur de domaine 400 est étudiée pour les trois champs..

Ce chapitre est consacré à l'influence de perturbations bidimensionnelles ($\beta = 0$).

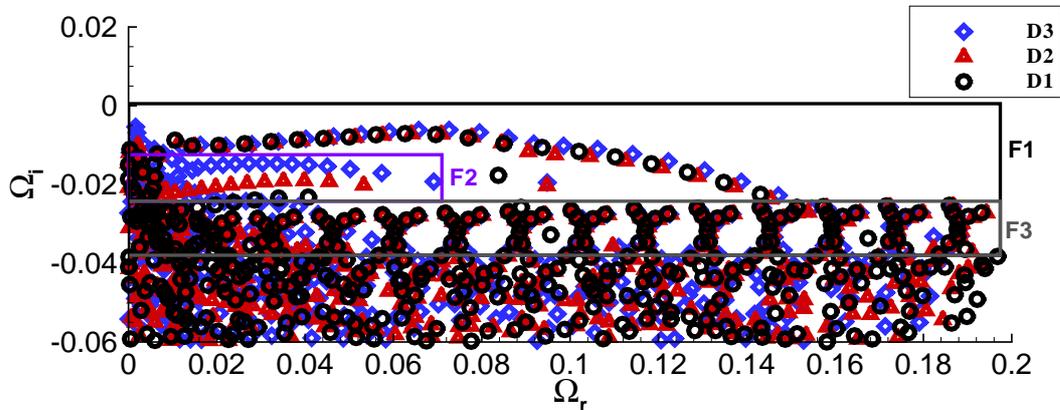
⁴⁹Se référer à la partie 1 pour le détail des opérateurs.

⁵⁰La valeur de Ω_0 en sortie n'affecte pas les résultats présentés ici. Deux valeurs ont été étudiées $\Omega_0 = 0.043$ et $\Omega_0 = 0.05$. Ceci pouvant être expliqué par le fait que la vitesse c_0 est à peu près constante pour une couche limite de plaque plane.

⁵¹Les calculs sont réalisés à l'aide d'un sous espace de Krylov de taille 850, permettant d'obtenir la partie la plus significative du spectre. La taille mémoire requise pour un tel problème est de l'ordre de 20 Go.



(a) Spectre obtenu pour une perturbation 2D relatif à l'écoulement D3. La zone encadrée illustre la partie convergée.



(b) Spectres pour D1, D2 et D3. Trois familles distinctes se précisent.

FIG. 7.1 – Spectres issus de la résolution du problème aux valeurs propres pour les trois champs étudiés.

7.2 Étude des modes globaux 2D.

Nous allons dans un premier temps réaliser une cartographie des différents modes globaux 2D susceptibles d'intervenir dans la dynamique de la perturbation.

7.2.1 Analyse du spectre : familles de modes F1, F2 et F3.

Les spectres associés à D1, D2 et D3 7.1(b) présentent des propriétés semblables. Notamment les différents modes globaux sont stables. Ce dernier point est donc en accord avec le fait que les écoulements étudiés soient stationnaires. En outre, nous pouvons souligner une certaine cohérence avec les résultats de stabilité locale, où aucune instabilité absolue n'est détectée.

De plus, il semble se distinguer trois familles de modes, notées F1, F2 et F3.

Tout d'abord, les modes appartenant à F1, les moins stables du spectre, peuvent être assimilés à des ondes de type Kelvin-Helmholtz. Les fonctions propres relatives aux perturbations de vitesse et de pression sont représentées sur les figures 7.2(a), 7.2(b) et 7.3. Le développement de la fluctuation est initié en amont de la couche de mélange, s'amplifiant le long de la

ligne de séparation, et relaxant vers une onde TS. Ce dernier point est illustré particulièrement par une étude des variations spatiales des modes F1. Celles-ci sont mises en valeur via le mode $\Omega_r \approx 0.08$, représenté sur les figures 7.4(a), 7.4(b) et 7.4(c). La famille F1 présente ainsi des caractéristiques similaires aux ondes spatiales observées dans le chapitre précédent. Plus spécifiquement, les propriétés inflexionnelles de l'instabilité, associées à la zone de recirculation, sont retrouvées. Nous pouvons enfin remarquer la très forte amplification spatiale, passant d'un maximum égal à 1, en $x = 100$, à 2000 en $x = 300$.

La deuxième famille F2 semble être caractérisée par l'aval de l'écoulement et non de la bulle elle-même (figure 7.2(c)). Ces modes, plus atténués temporellement, se situent principalement dans les basses fréquences.

Enfin, une dernière famille F3, nettement atténuée, se distingue des deux dernières, par une concentration de l'énergie de la perturbation, pour des valeurs élevées de y (figure 7.2(d)). Ils semblent proches des modes de branches continues issus de l'analyse locale.

Bien que les modes les moins stables soient caractérisés par des ondes KH, proches de l'analyse locale, il est intéressant de constater que des autres familles de modes peuvent aussi intervenir dans la dynamique spatio-temporelle de la perturbation. En effet, notre discussion de la partie relative à la couche limite, identifia une signification physique des modes globaux, en les considérant chacun d'entre eux comme une composante du paquet d'onde, définissant notre condition initiale. Leurs interférences suivant les deux directions d'espace, pouvaient alors simuler la dynamique aux temps courts de la perturbation.

De manière à évaluer ce comportement transitoire, une étude préliminaire est réalisée sur les modes propres adjoints.

7.2.2 Etude des modes adjoints.

L'analyse de l'adjoint de l'opérateur est classiquement utilisée pour des problèmes de réceptivité ou encore de contrôle. Néanmoins, la structure spatiale des fonctions propres adjointes peut nous apporter des renseignements sur la physique de la perturbation au cours du transitoire. En effet, celle-ci peut mettre en valeur la non-normalité de l'opérateur de stabilité globale. Or, nous avons remarqué dans notre deuxième partie, que le degré de non-normalité est lié à la croissance de l'énergie des perturbations aux temps courts.

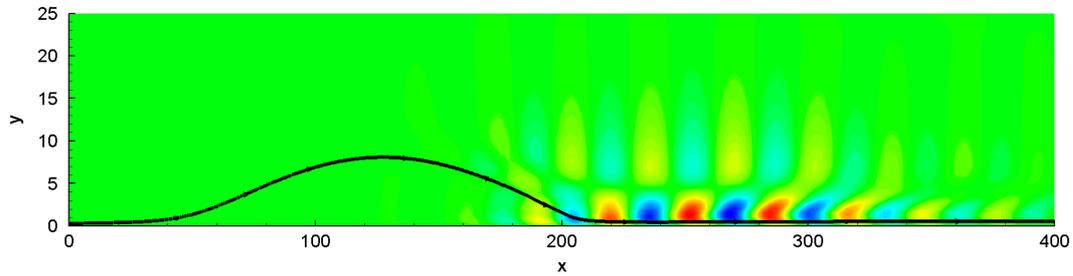
7.2.2.1 Un peu de théorie et choix du produit scalaire.

Cette caractéristique des modes adjoints est mise en valeur par la décomposition du vecteur perturbation suivante :

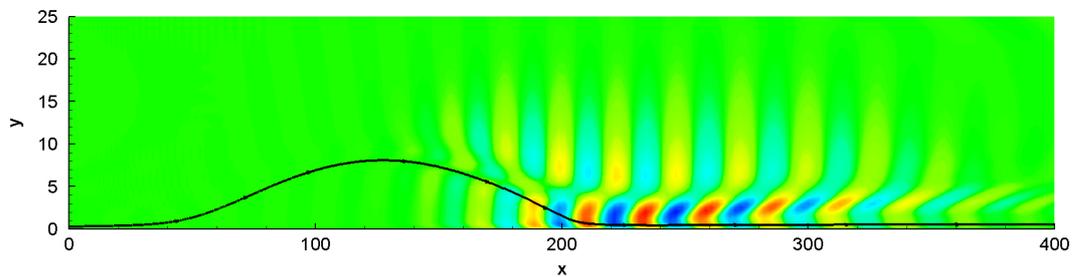
$$\mathbf{q}(x, y, t) = \sum_{k=1}^N K_{k,0} e^{-i\Omega_k t} \hat{\mathbf{q}}_k(x, y) \quad (7.2)$$

où $\hat{\mathbf{q}}_k = {}^t(\hat{u}, \hat{v}, \hat{p})_k$ représente les modes directs associés aux fluctuations de vitesse et de pression. Soit la condition initiale $\mathbf{q}_0 = \sum_{k=1}^N K_{k,0} \hat{\mathbf{q}}_k$. La base de modes globaux étant non orthogonale, nous utilisons par conséquent la condition de biorthogonalité pour déterminer les valeurs des composantes dans celle-ci [80] :

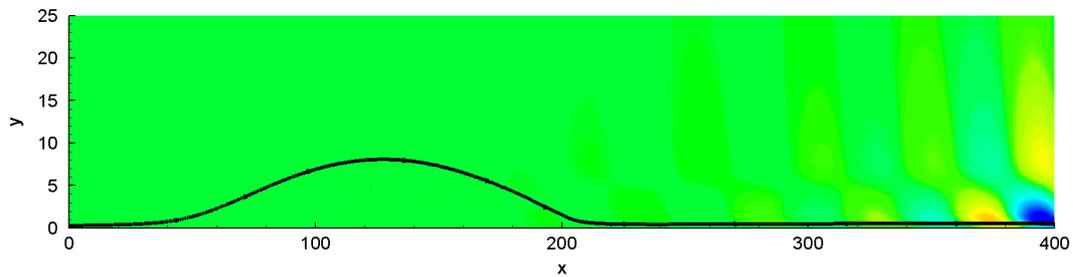
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_0, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle &= K_{k,0} \langle \hat{\mathbf{q}}_k, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle, \\ \Rightarrow K_{k,0} &= \frac{\langle \mathbf{q}_0, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle}{\langle \hat{\mathbf{q}}_k, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle} \end{aligned} \quad (7.3)$$



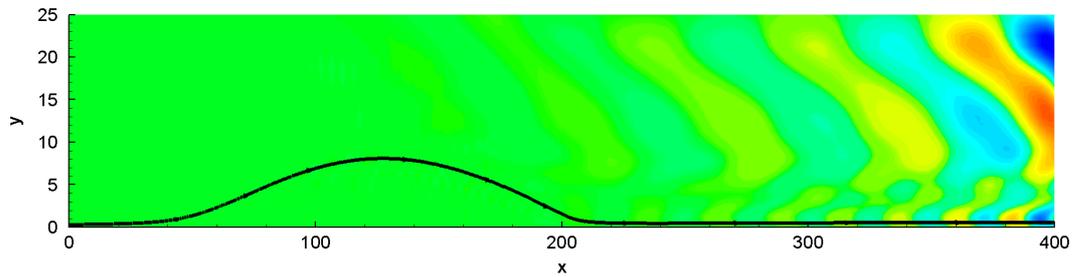
(a) Composante \hat{u} pour le mode $\Omega_r \approx 0.08$ de la famille F1.



(b) Composante \hat{u} pour le mode $\Omega_r \approx 0.122$ de la famille F1.



(c) Composante \hat{u} pour le mode $\Omega_r \approx 0.05$ de la famille F2.



(d) Composante \hat{u} pour le mode $\Omega_r \approx 0.086$ de la famille F3.

FIG. 7.2 – Caractérisation des familles de modes intervenant dans la dynamique de la perturbation. Analyse réalisée sur D3.

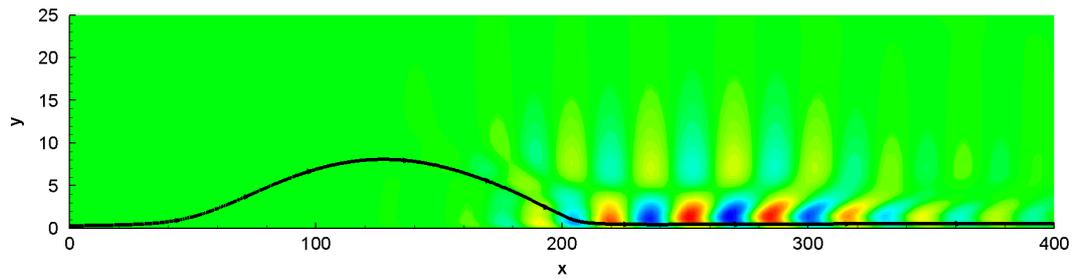
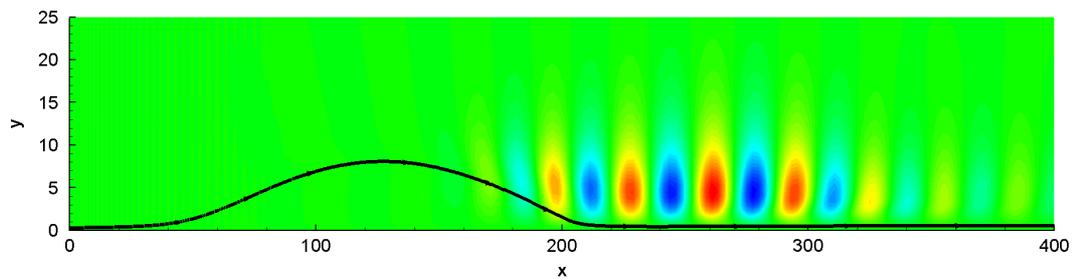
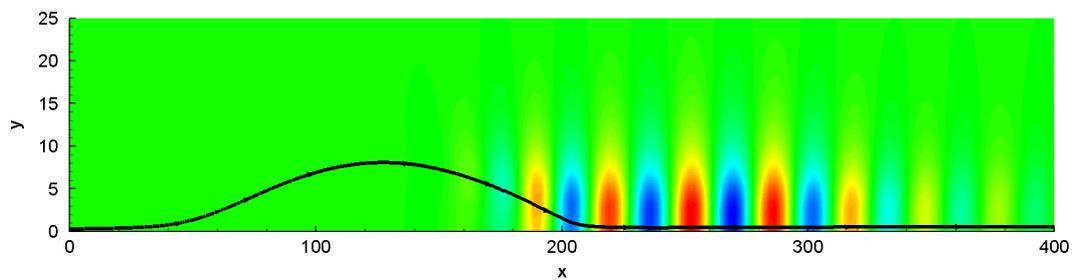
(a) Composante \hat{u} pour le mode $\Omega_r \approx 0.08$.(b) Composante \hat{v} pour le mode $\Omega_r \approx 0.08$.(c) Composante \hat{p} pour le mode $\Omega_r \approx 0.08$.

FIG. 7.3 – Différentes composantes de la partie réelle du vecteur perturbation relatif à la famille F1 de D3.

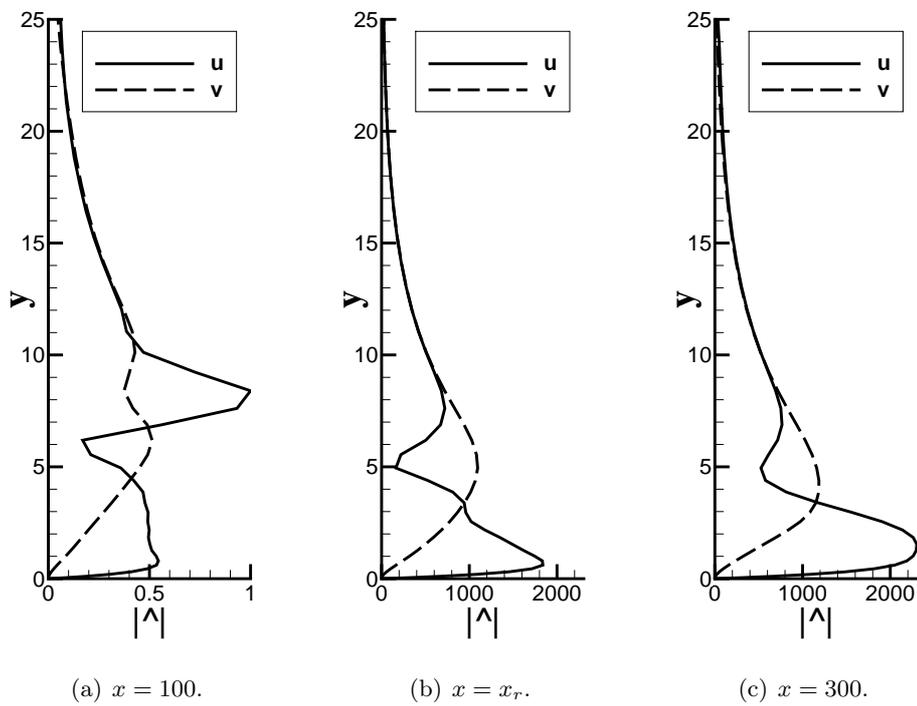


FIG. 7.4 – Illustration des profils locaux de \hat{u} , \hat{v} et \hat{p} associés à D3 du mode : $\Omega_r \approx 0.08$, de la famille F1. Nous pouvons observer la très forte amplification spatiale de la perturbation, ainsi que le changement de nature de l’instabilité le long de la couche de mélange. Ce dernier point illustre l’aspect localisé des fonctions propres associées aux modes F1 en aval de la bulle sur les figures 7.3.

où $\langle *, * \rangle$ représente le produit scalaire utilisé et $\hat{\mathbf{q}}_k^+ = {}^t (\hat{u}_k^+, \hat{v}_k^+, \hat{p}_k^+)$ les modes adjoints. Ces derniers sont déterminés par la relation :

$$\langle \hat{\mathbf{q}}_k^+, \mathcal{L}_G \hat{\mathbf{q}}_k \rangle = \langle \mathcal{L}_G^+ \hat{\mathbf{q}}_k^+, \hat{\mathbf{q}}_k \rangle \quad (7.4)$$

avec $\mathcal{L}_G = \mathbf{A} - \Omega_k \mathbf{B}$, l'opérateur direct ⁵², \mathcal{L}_G^+ , son adjoint. De ce fait, le comportement de la perturbation, soumise à une condition initiale $\hat{\mathbf{q}}_0$, est caractérisé par :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_k \frac{\langle \mathbf{q}_0, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle}{\langle \hat{\mathbf{q}}_k, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle} \hat{\mathbf{q}}_k e^{-i\Omega_k t} \quad (7.5)$$

L'équation (7.5) révèle alors un comportement très intéressant, lié aux propriétés spatiales du mode adjoint. Si les modes directs et adjoints sont fortement dissociés en espace, c'est-à-dire que le produit scalaire entre ces deux vecteurs est très faible, la perturbation subira une forte croissance dans le transitoire ([21]). De ce fait, le calcul des modes propres adjoints est réalisé, avant toute analyse de croissance transitoire.

La difficulté majeure réside dans le choix du produit scalaire : \langle, \rangle . Nous rappelons les équations de stabilité linéaire globale pour $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} \hat{u} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial U}{\partial y} + U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + V \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \right) - i\Omega \hat{u} = 0 \\ u \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial V}{\partial y} + U \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + V \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} \right) - i\Omega \hat{v} = 0 \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Nous allons considérer dans un premier temps le problème (7.6) comme continu. Ainsi, nous pouvons définir le produit scalaire suivant :

$$\langle \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}^+ \rangle_C = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} (\bar{\hat{u}} \hat{u}^+ + \bar{\hat{v}} \hat{v}^+ + \bar{\hat{p}} \hat{p}^+) dx dy \quad (7.7)$$

avec L_x et L_y les bornes du domaine et $\bar{}$ le conjugué complexe.

L'opérateur adjoint est obtenu par (7.4), à l'aide d'une série d'intégration par partie. $(\mathcal{L}_G^+)(\hat{\mathbf{q}}^+)$ définit donc le système :

$$\begin{aligned} \hat{u}^+ \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{v}^+ \frac{\partial V}{\partial x} - U \frac{\partial \hat{u}^+}{\partial x} - V \frac{\partial \hat{u}^+}{\partial y} - \frac{\partial \hat{p}^+}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}^+}{\partial y^2} \right) + i\Omega^* \hat{u}^+ &= 0 \\ \hat{u}^+ \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{v}^+ \frac{\partial V}{\partial y} - U \frac{\partial \hat{v}^+}{\partial x} - V \frac{\partial \hat{v}^+}{\partial y} - \frac{\partial \hat{p}^+}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}^+}{\partial y^2} \right) + i\Omega^* \hat{v}^+ &= 0 \\ -\frac{\partial \hat{u}^+}{\partial x} - \frac{\partial \hat{v}^+}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

⁵²Nous rappelons que \mathcal{L}_G désigne l'opérateur de stabilité linéaire globale.

auquel il faut ajouter les contraintes suivantes pour les conditions limites :

suivant x :

$$\begin{aligned} \text{pour } \hat{u}^+ \text{ et } \hat{u} : \left[\hat{u} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}^+}{\partial x} + \hat{p}^+ + U \hat{u}^+ \right) \right]_0^{L_x} = 0, \quad \left[\hat{u}^+ \left(-\frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{p} \right) \right]_0^{L_x} = 0 \\ \text{pour } \hat{v}^+ \text{ et } \hat{v} : \left[\hat{v} \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{v}^+}{\partial x} + U \hat{v}^+ \right) \right]_0^{L_x} = 0, \quad \left[\hat{v}^+ \left(-\frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) \right]_0^{L_x} = 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

suivant y :

$$\hat{u}^+ = \hat{u} = 0 \text{ et } \hat{v}^+ = \hat{v} = 0 \text{ en } 0 \text{ et } L_y$$

Ainsi, les équations (7.9), nous contraignent sur les conditions limites à adopter, en particulier suivant x .

De manière à être libres sur les conditions de bords, nous allons maintenant considérer le problème (7.6) comme discret. Nous pouvons alors prendre le produit scalaire Hermitien, noté \langle, \rangle_2 . Soit $\hat{\mathbf{q}}_M$, le vecteur de $3 \times M$ composantes représentant la solution discrète de $\hat{\mathbf{q}}$ ⁵³. Soit \mathcal{L}_{GM} , l'opérateur global discret. Les modes adjoints, définis par le produit scalaire précédent, sont :

$$\langle \hat{\mathbf{q}}_M^+, \mathcal{L}_{GM} \hat{\mathbf{q}}_M \rangle_2 = \langle \mathcal{L}_{GM}^* \hat{\mathbf{q}}_M^+, \hat{\mathbf{q}}_M \rangle_2 \quad (7.10)$$

où ici $*$ désigne le transconjugué. Les conditions limites sont donc intégrées naturellement à l'opérateur adjoint. Par conséquent, ce produit scalaire est adopté pour le calcul des modes adjoints⁵⁴.

7.2.2.2 Illustration sur le champ D3.

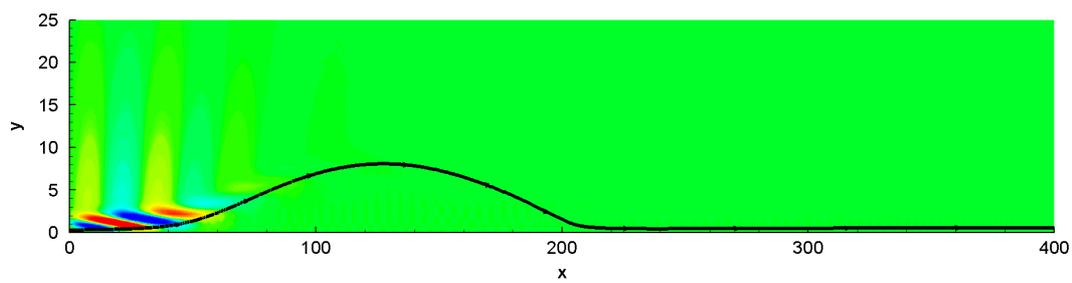
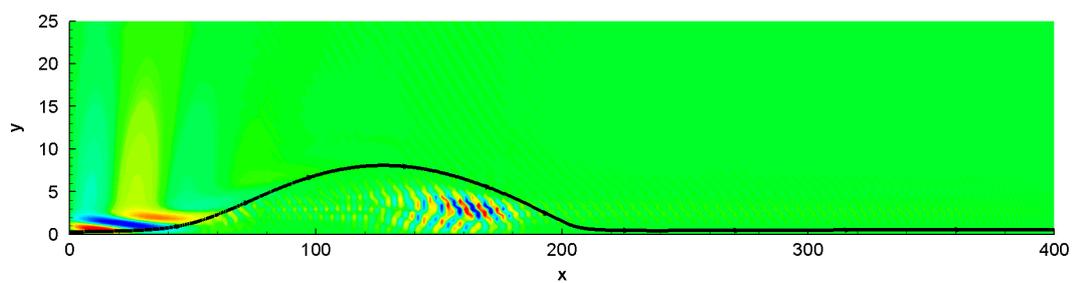
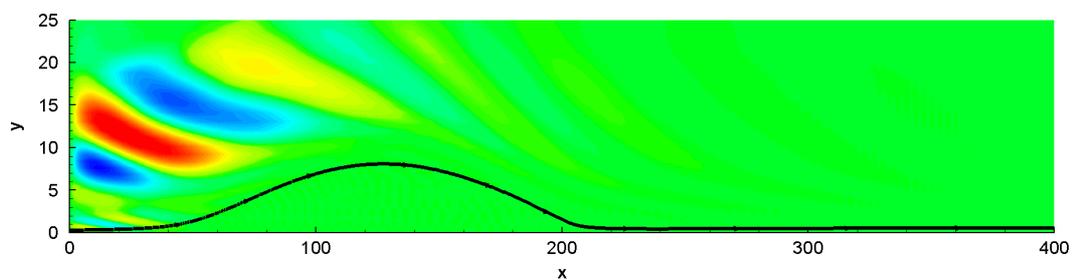
Nous considérons ici D3 pour l'illustration des modes adjoints. Les fonctions propres adjointes, associées au modes directs de F1, F2 et F3 (7.2(a), 7.2(c) et 7.2(d) respectivement), via leur complexe conjugué, sont représentées sur la figure 7.5. La structure spatiale du mode adjoint apparaît ici fortement disjointe du mode direct (figure 7.3) pour chaque famille de modes. Notamment, celui-ci se développe plutôt en amont de la bulle, possédant un maximum aux environs du point de décollement. Un point intéressant concerne le sens de propagation de l'onde. Celle-ci semble plutôt se propager suivant la direction inverse du mode direct. Ceci paraît être en accord avec les équations adjointes obtenues dans le cas continu (7.8), où les termes d'advection de la perturbation sont de signes opposés au problème direct. En outre, cette caractéristique pourrait illustrer un "retour d'informations", lié au mode adjoint.

Finalement, cette comparaison entre modes direct et adjoint, révèle le très fort degré de non-normalité de l'opérateur \mathcal{L}_G . Une croissance de l'énergie des perturbations, très significative, est alors attendue aux temps courts. En particulier, chaque famille va intervenir de manière non négligeable dans la dynamique de la perturbation sur cette période.

Une analyse du régime transitoire s'avère donc fortement pertinente et est effectuée dans la partie suivante. Enfin, nous pouvons souligner que les modes adjoints peuvent être employés dans une optique de contrôle, à travers la projection sur un modèle réduit, ou encore en indiquant l'emplacement où un forçage pourra être le plus efficace ([21]. [43]). Le premier point sera discuté dans la prochaine section.

⁵³La taille de M est définie par $M = ((N_x + 1) \times (N_y + 1))$

⁵⁴Nous pouvons remarquer que le calcul des modes adjoints revient alors à déterminer les vecteurs propres à gauche du problème de stabilité linéaire globale.

(a) Composante \hat{u}^+ pour F1.(b) Composante \hat{u}^+ pour F2.(c) Composante \hat{u}^+ pour F3.FIG. 7.5 – Parties réelles des modes adjoints relatifs aux modes directs 7.2(a), 7.2(c) et 7.2(d) pour $D3$.

7.3 Analyse du régime transitoire.

7.3.1 Dimension de la base et calcul de $G(t)$.

Notre approche du régime transitoire s'appuiera sur les notions étudiées dans la deuxième partie de ce mémoire. Nous réalisons ainsi une analyse de croissance transitoire sur les modes globaux présentés précédemment. De ce fait, la perturbation est décomposée suivant la relation (7.2). En outre, afin de déterminer l'influence de la taille du domaine, trois tailles sont considérées, désignées par L1, L2 et L3. Leurs longueurs respectives sont ici de 400, 425 et 450, où 250, 260 et 270 points de collocation en x sont considérés.

Afin de déterminer le nombre de modes globaux minimum, nécessaires à la description de la dynamique en espace et en temps de la perturbation, une étude de convergence, relative à la dimension de la base est réalisée. Nous considérons dans un premier temps le champ D3 et la longueur L1. La figure 7.6(a) illustre le résultat obtenu pour les 22 modes KH, 100, 200 et 300 modes. Ainsi, l'énergie semble atteindre une valeur convergée pour $N = 300$. Cette valeur est donc adoptée dans les analyses suivantes. Le comportement transitoire des écoulements D1, D2 et D3 pour L1, L2 et L3 présente alors des propriétés similaires. En particulier, nous observons une très forte croissance de l'énergie indépendante de la taille du domaine et dont l'augmentation est corrélée avec l'intensification des profils de suction appliqués (figure 7.6(c)).

Analysons maintenant en détail, cette phase spécifique.

7.3.2 Première phase : mécanisme KH.

Durant cette première phase, la majeure partie des modes globaux interviennent dans la dynamique de la perturbation. La figure 7.7 présente l'évolution spatiale de la perturbation optimale, pour les temps 0, 200, 380 et 700. Cette dernière, résultante des interférences entre les modes suivant les deux directions d'espace, prend alors la forme d'un paquet d'onde s'amplifiant en temps, tout en étant advecté le long de la plaque. Le mécanisme déstabilisant paraît être révélateur d'un phénomène de type Kelvin-Helmholtz. En outre, les courbes d'amplitude définies par :

$$E(x, t) = \int_0^{L_y} (|u(x, y, t)|^2 + |v(x, y, t)|^2) dy \quad (7.11)$$

sont représentées sur la figure 7.8. Un très fort accroissement spatial apparaît, possédant un maximum pour $x \approx 210$. Notamment, l'amplification s'avère supérieure à celle obtenue par le critère local e^n (de l'ordre de e^{11}). En effet, la comparaison entre les courbes 7.11 et le critère e^n paraît pertinente car elles représentent la même quantité, soit l'évolution spatiale d'une perturbation localisée en espace en amont de la bulle, ayant pour critère de non parallélisme une correction basée sur l'énergie. Cette forte amplification peut être caractérisée par le fait que des modes autres que (KH) interviennent dans la dynamique. Néanmoins, la position du maximum d'amplification spatiale paraît proche de celui obtenu par l'analyse locale (figure 6.8).

L'accroissement temporel de la perturbation optimale est illustré sur la figure 7.6(c). Il atteint ainsi un maximum pour $t = 380$, où le paquet d'onde se situe au point de rattachement de la bulle. L'origine non visqueuse de l'instabilité produit un pic d'énergie considérable de l'ordre de $\approx 10^8$. Cette valeur est à comparer à celle obtenue dans l'étude de la couche limite de l'ordre de $\approx 10^2$. Nous pouvons aussi remarquer que nous n'observons pas de phénomènes particuliers, sur les temps très courts, comme le mécanisme d'Orr, en couche limite. Par conséquent, la convergence nécessite un nombre de modes moins élevés.

Enfin, le comportement en espace et en temps de la perturbation optimale est mis en lumière à travers le diagramme spatio-temporel 7.9. L'influence du non-parallélisme, lié à la

présence de la zone de recirculation, est illustrée par la courbure des rayons associés aux bords du paquet d'onde au sein de la bulle, où celui-ci subit un ralentissement. Puis, en aval de la bulle, ces derniers ont tendance à se placer sur des rayons d'équation : $x/t = cste$. Ce dernier point est concordant avec la relaxation de l'écoulement vers une couche limite. En particulier, la vitesse du paquet en sortie du domaine est approximativement de ≈ 0.45 , proche de la valeur issue de la condition limite basée sur un développement autour de $\Omega_0 : \approx 0.43$, validant ainsi le type de condition prescrite sur le bord aval du domaine qui impose une sortie du paquet d'onde correcte.

7.3.3 Deuxième phase : basse fréquence.

Après $t = 1000$, l'évolution de l'énergie illustre un comportement différent. Un battement régulier, à basse fréquence, qui s'atténue au cours du temps, apparaît. Ceci est illustré sur la figure 7.10 pour le Champ D3 et L3. Une hypothèse peut être émise sur l'avènement d'un tel phénomène. Nous pouvons supposer qu'après la première phase, seulement un nombre restreint de modes intervient dans la dynamique de la perturbation, les autres ayant été totalement atténués temporellement. Considérons par exemple les deux modes les plus instables, situés à : $\Omega_r \approx 0.069$ et $\Omega_r \approx 0.075$, notés dans la suite par 1 et 2 (voir figure 7.11). Ces derniers peuvent être représentés par des ondes planes de la forme suivante :

$$\cos(k_1x - \Omega_1t) \text{ et } \cos(k_2x - \Omega_2t) \quad (7.12)$$

Les modes 1 et 2 possèdent ici des longueurs d'onde $2\pi/k_1$, $2\pi/k_2$ et des pulsations Ω_1 , Ω_2 relativement voisines. De ce fait, l'onde produite par interférences entre 1 et 2 est :

$$\cos((k_1 - k_2)x - (\Omega_1 - \Omega_2)t) \cos((k_1 + k_2)x - (\Omega_1 + \Omega_2)t) \quad (7.13)$$

où le membre de gauche définit une enveloppe dont l'amplitude varie lentement, et le membre de droite une onde variant rapidement. (7.13) peut ainsi être interprétée comme une série de paquets d'onde se déplaçant à une vitesse V :

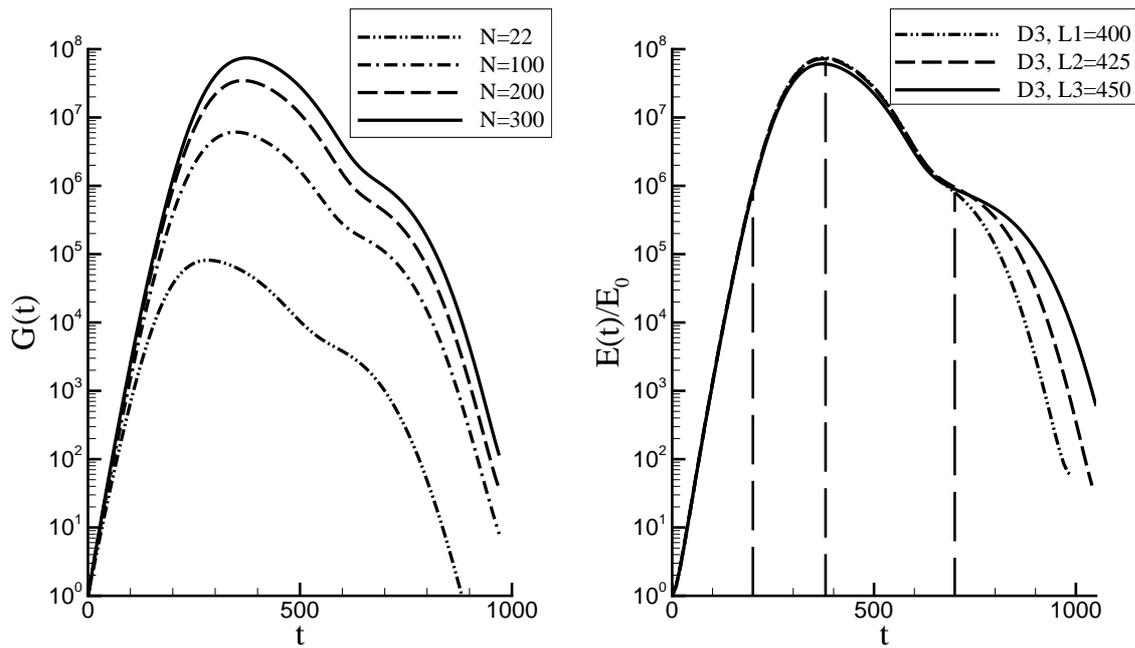
$$V = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{k_2 - k_1}$$

avec une période de : (7.14)

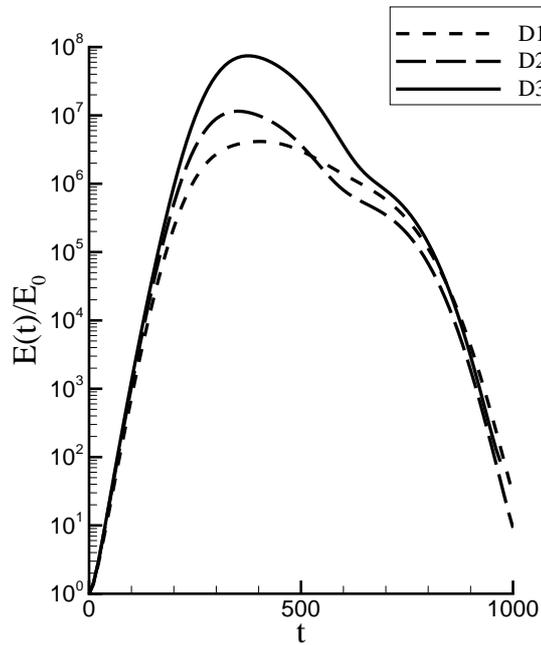
$$T = \frac{\delta\Omega}{2\pi}$$

où $\delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ [57]. L'écart entre les modes 1 et 2 établit une pulsation de $\delta\Omega_r \approx 0.0063$. Mesurons maintenant la période T associée à ce phénomène sur la figure 7.10. Nous obtenons une valeur de $T \approx 966$. La pulsation de cette basse fréquence est donc de $\delta\Omega = \frac{2\pi}{T} = 0.0065$. Cette dernière est ainsi très voisine de la valeur précédente. Par conséquent, nous pouvons en conclure que cette deuxième phase est le résultat de l'interférence entre les modes globaux les moins atténués. De ce fait, la basse fréquence du battement provient directement de la valeur de l'écart $\delta\Omega_r$ entre ces derniers. Il est intéressant de remarquer qu'un phénomène similaire a été observé dans une cavité ouverte par Åkervik *et al.* [1], bien que la physique de cette instationnarité basse fréquence soit différente. Celle-ci fut mise en évidence par une fluctuation de pression survenant à l'impact du paquet d'onde sur le bord de la cavité. L'écoulement ici est complètement ouvert, et aucune variation évidente du champ de pression n'est observée.

Cependant, ce cycle très basse fréquence ne représente pas nécessairement un phénomène physique, et n'est peut être qu'une conséquence de la troncature du domaine. En effet, il



(a) Convergence de l'énergie de la perturbation optimale en fonction du nombre de modes. Les 22 modes KH, puis 100, 200 et 300 sont considérés pour D3. L'énergie semble converger pour la dernière taille.
 (b) Courbes d'énergie associée à la perturbation optimale pour D3 et les tailles de domaines L1, L2 et L3.



(c) Énergie de la perturbation optimale pour D1, D2 et D3, où 300 modes globaux sont considérés. La longueur du domaine est fixée à L1.

FIG. 7.6 – Analyse de la croissance transitoire liée aux modes globaux de $D1$, $D2$ et $D3$.

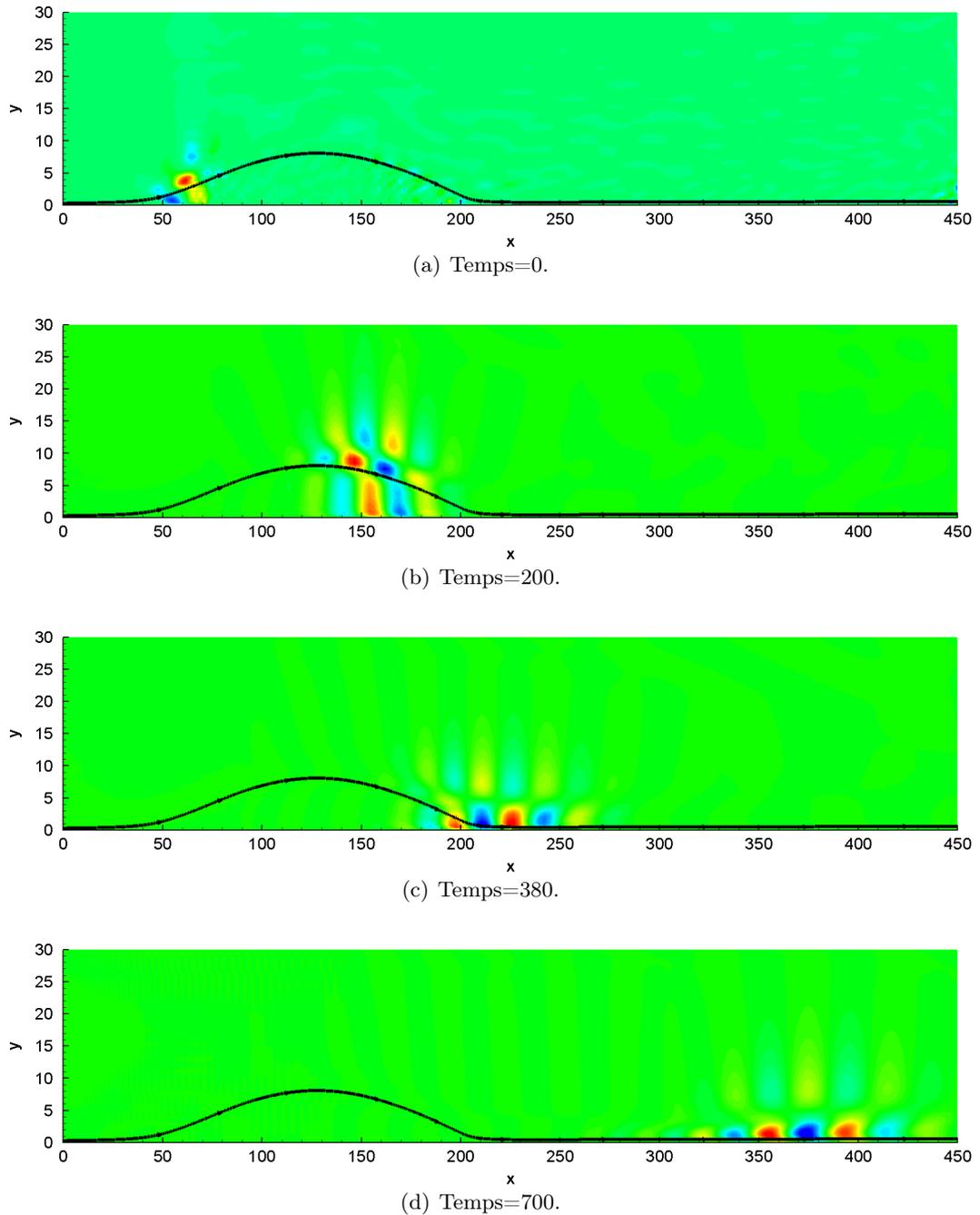


FIG. 7.7 – Evolution temporelle de la perturbation optimale, associée au champ D3 et L3, au cours de la première phase. Un mécanisme de Kelvin-Helmholtz, lié à la zone de recirculation, est observé. La composante longitudinale de la perturbation u est représentée.

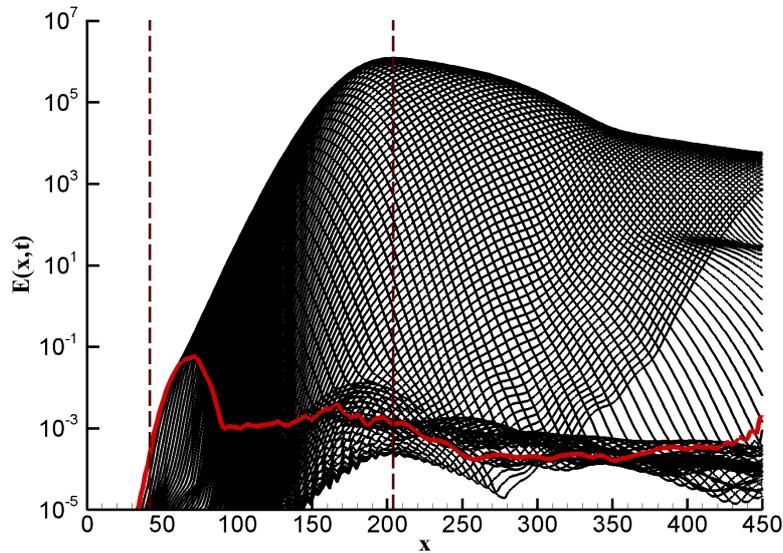


FIG. 7.8 – Evolution spatiale du paquet d’onde associé à la perturbation optimale de D3. La condition initiale est représentée en rouge. Nous pouvons observer la très forte amplification spatiale du paquet, le long de la couche de mélange.

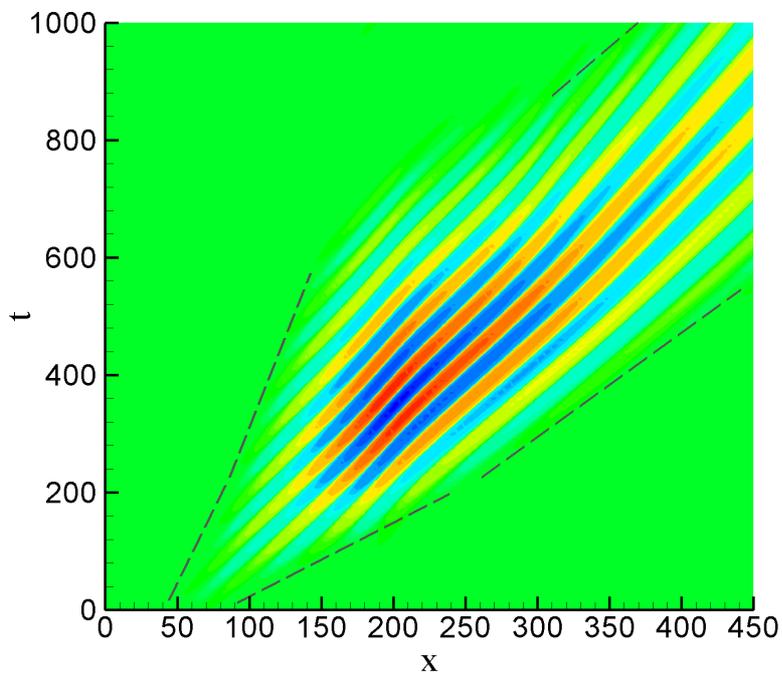


FIG. 7.9 – Diagramme spatio-temporel lié à la fluctuation de vorticité à la paroi pour D3. Nous pouvons observer l’influence du non parallélisme par la courbure des bords du paquet d’onde.

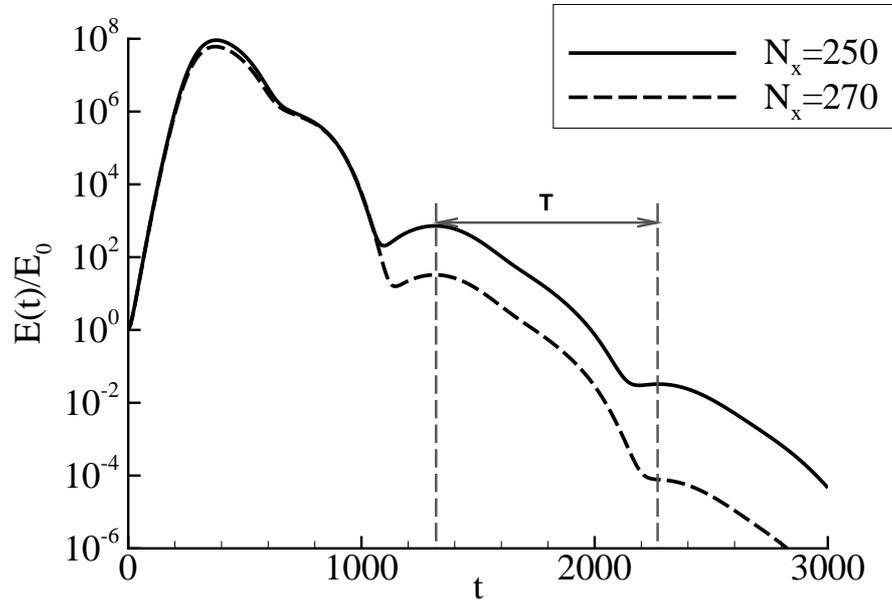


FIG. 7.10 – Croissance transitoire pour des temps plus longs. Une basse fréquence très atténuée apparaît à $t \approx 1000$. Sa convergence, fortement dépendante du taux d'atténuation des modes les moins atténués, est délicate.

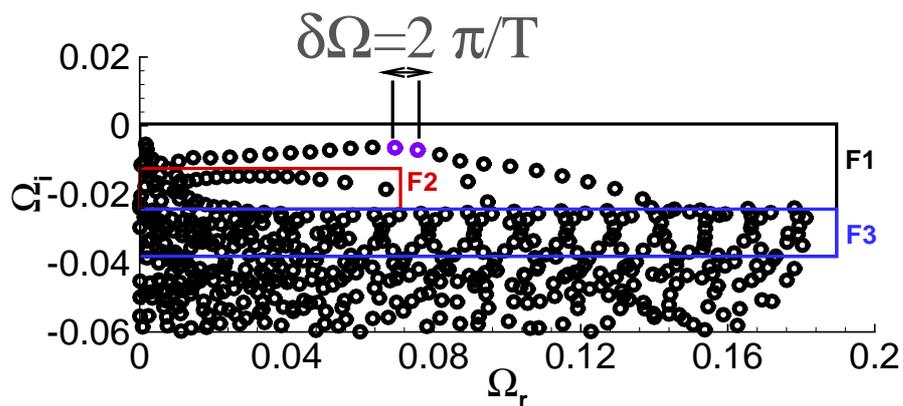


FIG. 7.11 – Représentation du spectre pour D3 et L3. L'écart entre les modes les moins atténués induit une basse fréquence.

a été observé, dans l'étude relative à la couche limite, que l'écart entre les modes étaient fortement lié à la longueur du domaine de calcul. Ainsi, si la distance entre ces derniers tend à se réduire indéfiniment, ce cycle ne pourra être observé. Des calculs supplémentaires sont alors nécessaires pour caractériser un tel phénomène. Néanmoins, afin de vérifier la pertinence de cette décomposition en modes globaux, une simulation numérique directe est réalisée.

7.3.4 Etude de la dynamique de la perturbation optimale par DNS.

La condition initiale obtenue par l'analyse globale est interpolée puis superposée au champ de base avec une très faible amplitude (de l'ordre de 10^{-8} par rapport à la vitesse maximale). Un pas de temps de 0.015 et une discrétisation 700×150 , sont utilisés pour l'intégration des équations de Navier-Stokes, en formulation vorticité, fonction de courant. Afin de s'affranchir d'une quelconque réflexion lors de l'impact du paquet d'onde sur la frontière aval, une zone tampon est placée au bout de la plaque. Celle-ci est située entre $x = 480$ et $x = 500$. Un terme source est donc ajouté sur l'équation de transport :

$$\text{Tamp}(w - w_{ref}) \tag{7.15}$$

avec w la vorticité, w_{ref} la valeur de la vorticité de référence, prise égale au champ convergé, et Tamp la fonction tampon. Tamp est fixée à zéro sur l'ensemble du domaine, exceptée entre $x = 480$ et $x = 500$ où un profil Gaussien est imposé. Ce procédé permet d'atténuer la perturbation lorsque celle-ci atteint la fin du domaine de calcul.

L'évolution de l'énergie associée à la perturbation optimale, est obtenue par soustraction entre le champ instantané et le champ de base. Une comparaison de $\frac{E(t)}{E_0}$ obtenue par DNS et l'analyse globale est présentée sur la figure 7.12. Analysons tout d'abord la première phase du transitoire.

Nous pouvons remarquer que l'amplification du paquet est relativement bien prédite par les 300 modes globaux les plus instables. La dynamique linéaire paraît alors tout de même pertinente, pour le niveau de perturbation injectée au sein de la simulation numérique direction. En particulier, la comparaison de la perturbation entre le résultat global et la DNS au maximum d'amplification, à $t = 380$ est satisfaisante (figure 7.13).

Enfin, la deuxième phase relative au battement basse fréquence n'est ici pas captée. Néanmoins, nous ne concluons pas sur la réalité physique de cette basse fréquence. Afin d'identifier si celle-ci est caractéristique d'une échelle propre au décollement ou non, des calculs complémentaires, sur des domaines plus longs et à plus haut nombre de Reynolds afin de s'approcher légèrement du seuil, s'avèrent nécessaires. En effet dans notre cas, celle-ci se révèle fortement atténuée et à des niveaux de résidu très bas, difficile à capter avec un code de faible précision.

Bien que nous ne puissions encore conclure sur l'existence de cette basse fréquence, nous pouvons néanmoins citer une étude récente réalisée par Uwe Ehrenstein sur un écoulement décollé provoqué par une bosse. Il observa alors la naissance d'une basse fréquence instable, provoquée par interférences entre modes globaux ([27]).

7.3.5 Construction d'un modèle réduit.

La comparaison entre l'étude DNS et le résultat de l'analyse de stabilité linéaire globale, conforte la pertinence de la décomposition de la perturbation dans une base de modes globaux. En effet, les effets linéaires de la première phase du transitoire, associés à la perturbation optimale, sont relativement bien simulés par la base des 300 modes globaux. Ainsi, celle-ci peut définir un "modèle réduit", permettant de reproduire la dynamique spatio-temporelle de n'importe quelle perturbation. Pour cela, considérons la condition initiale quelconque \mathbf{q}_0 .

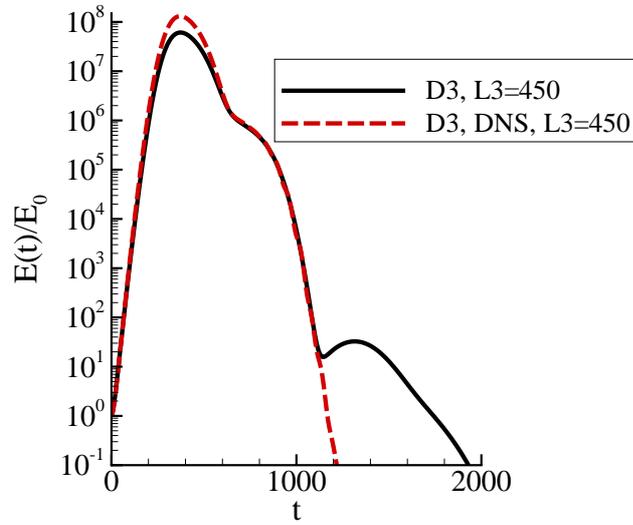


FIG. 7.12 – Comparaison de l'évolution de l'énergie associée à la perturbation optimale, entre la décomposition en modes globaux et l'intégration des équations de Navier-Stokes. D3 est considéré pour la longueur L_3 .

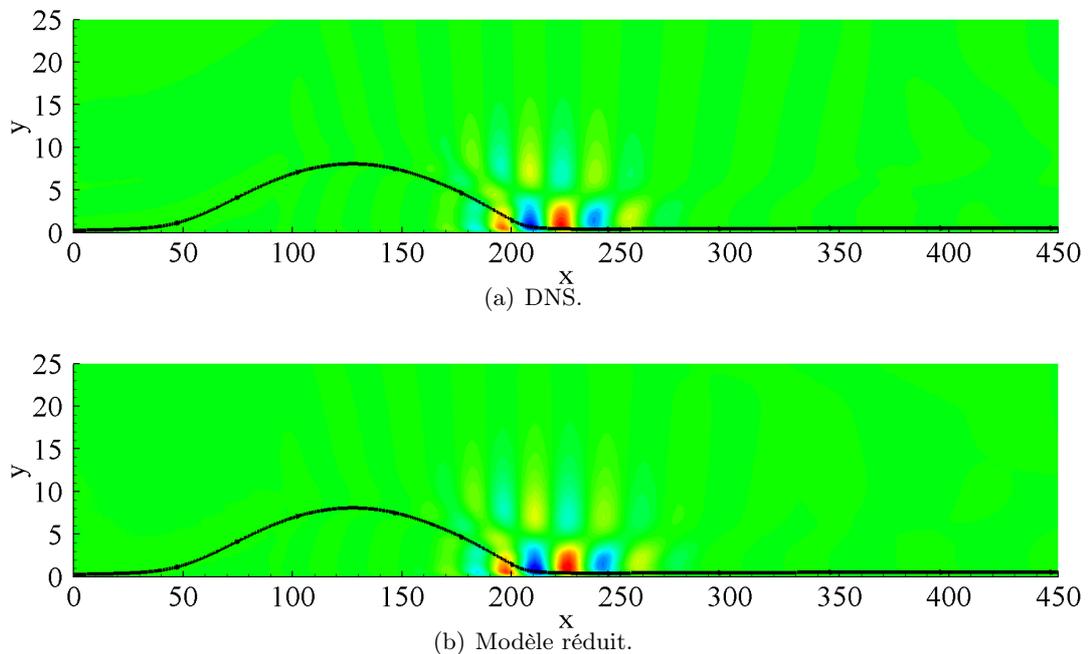


FIG. 7.13 – Illustration du paquet d'onde associé au champ D3 obtenu par simulation numérique directe, au temps où ce dernier atteint son maximum d'énergie : $t = 380$. La composante longitudinale de la perturbation u est représentée.

Nous pouvons alors déterminer les composantes de \mathbf{q}_0 , par une simple projection sur notre base de modes globaux. Soit $\mathbf{q}_{0,M}$ la représentation discrète de \mathbf{q}_0 . Ses composantes discrètes dans la base de modes globaux se déduisent par la relation :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{k},0} = \frac{\langle \hat{\mathbf{q}}_{0,M}, \mathbf{q}_{k,M}^+ \rangle_2}{\langle \hat{\mathbf{q}}_{k,M}, \mathbf{q}_{k,M}^+ \rangle_2} \quad (7.16)$$

De ce fait, le temps de calcul associé à ce modèle est considérablement plus court que l'intégration des équations DNS. La base de modes globaux et ses adjoints peuvent alors être utilisés dans une optique de contrôle en boucle fermée.

7.4 Analyse du régime asymptotique.

Les notions étudiées au cours de la deuxième partie ont révélé deux aspects liés aux modes globaux. D'une part, ces derniers pouvaient être considérés comme une composante du paquet d'onde, dans le but d'analyser la réponse à une perturbation localisée en espace et en temps. Cet aspect a fait l'objet de l'étude précédente. D'autre part, les modes globaux pouvaient fournir des renseignements sur la réponse de l'écoulement à un forçage harmonique continu. En particulier, l'analyse du pseudospectre déterminait le comportement asymptotique d'un tel forçage.⁵⁵

Le champ D3 est considéré dans la suite de cette partie. Le pseudospectre est représenté sur la figure 7.14. Il apparaît notamment que les niveaux ϵ sont considérablement plus importants que ceux rencontrés dans l'analyse de la couche limite de la première partie. Ces derniers atteignent ici une valeur de $\approx 10^{-7}$ pour les pulsations situées entre : $\Omega_r = 0.07$ et $\Omega_r = 0.09$ qui se trouvent être les plus sensibles aux fréquences extérieures. Nous pouvons remarquer que cette caractéristique souligne aussi le fort degré de non normalité de l'opérateur \mathcal{L}_G . Le bassin de sensibilité associé à ces ondes possède par conséquent une très large étendue. En outre, nous pouvons observer que ces bassins sont indépendants de la taille du domaine, indiquant un phénomène propre à la bulle.

Plus spécifiquement, les modes les plus sensibles sont associés à des ondes de type KH. Ce dernier point est en accord avec les analyses locales, où de telles ondes sont observées lorsque un écoulement décollé est soumis à une excitation harmonique ([73]). Les ondes KH peuvent ainsi facilement entrer en résonance même loin de la valeur propre.

De manière à visualiser la réponse en fréquence de D3, dans le régime asymptotique, une reconstruction du champ instantané est réalisée.

Nous décomposons ici aussi la solution dans une base de modes globaux. Soit le forçage réel $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}}(x, y) e^{-i\sigma t}$ avec σ la fréquence du forçage et $\hat{\mathbf{f}}$ la structure spatiale de ce dernier. Posons la quantité R , appelé le résolvant⁵⁶ :

$$R(\sigma) = \max_{\hat{\mathbf{f}}} \frac{\|\mathbf{q}\|_E}{\|\hat{\mathbf{f}}\|_E} = \|\mathbf{F}\mathbf{D}_{\mathbf{f}}(\sigma)\mathbf{F}^{-1}\|_2 \quad (7.17)$$

avec $D_{f_{l,k}} = \delta_{l,k} \left(\frac{1}{i\Omega_l - i\sigma} \right)$ et \mathbf{q} la solution de l'équation d'évolution des perturbations (2.1). Cette quantité va alors évaluer le forçage pouvant conduire à une résonance optimale. L'analyse de la quantité R peut être réalisée d'une manière analogue à celle relative à l'étude de

⁵⁵Les notations sont similaires à celles de la deuxième partie de ce mémoire.

⁵⁶Le produit scalaire est détaillé dans la première partie.

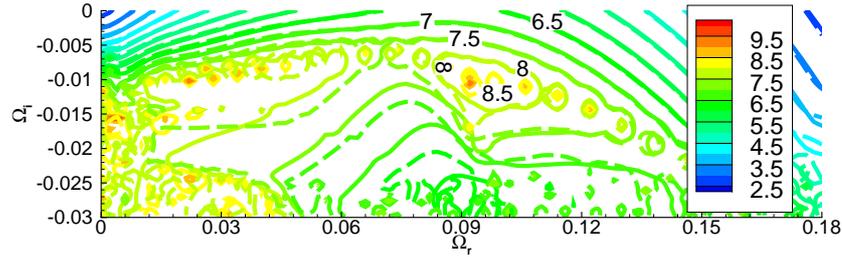


FIG. 7.14 – Représentation du pseudospectre pour le champ D3. Les valeurs de ϵ sont représentées suivant une échelle logarithmique : $-\log_{10}(\epsilon)$. Les longueurs L1 (en plein) et L2 (en traits discontinus) sont ici considérées. Les bassins de sensibilité sont similaires pour les deux domaines.

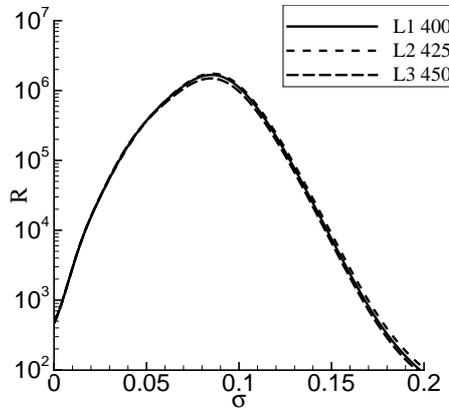


FIG. 7.15 – Valeur du résolvant (7.17) en fonction de la fréquence du forçage pour D3 et L1, L2 et L3.

la perturbation optimale. Ainsi R est évalué pour chaque fréquence σ , pour les domaines L1, L2 et L3 relatifs à D3. Le résultat est illustré sur la figure 7.15. Nous pouvons observer que la valeur de R est indépendante de la longueur du domaine, ce qui semble corrélé les valeurs des pseudospectres précédentes et la caractéristique propre à la bulle associée à la sensibilité à un forçage extérieur. En analysant la localité du forçage $\hat{\mathbf{f}}_{opt}$ conduisant à une réponse optimale pour $\sigma_c = 0.085$, nous pouvons observer que celle-ci se situe en amont de la bulle (figure 7.16). La solution asymptotique d'une réponse à un forçage $\hat{\mathbf{f}}_{opt}$ pour $\sigma_c = 0.085$, a pour expression dans la base de modes globaux ⁵⁷[80] :

$$\mathbf{K} = -\frac{\mathbf{I}_d}{(i\sigma_c \mathbf{I}_d + \mathbf{D})} \mathbf{K}_f e^{-i\sigma_c t} \quad (7.18)$$

avec \mathbf{K}_f , les composantes de $\hat{\mathbf{f}}_{opt}$ dans la base globale ⁵⁸.

Nous notons ici $\mathbf{Q}(x, y)$, le champ instantané et $\overline{\mathbf{Q}}$, le champ de base. L'évolution linéaire d'un forçage harmonique, aux temps longs est de la forme suivante :

$$\mathbf{Q}(x, y) = \overline{\mathbf{Q}}(x, y) + \epsilon \Re(\mathbf{q}) \quad (7.19)$$

⁵⁷Le champ étant globalement stable.

⁵⁸La matrice diagonale de valeurs propres \mathbf{D} est détaillée dans la première partie

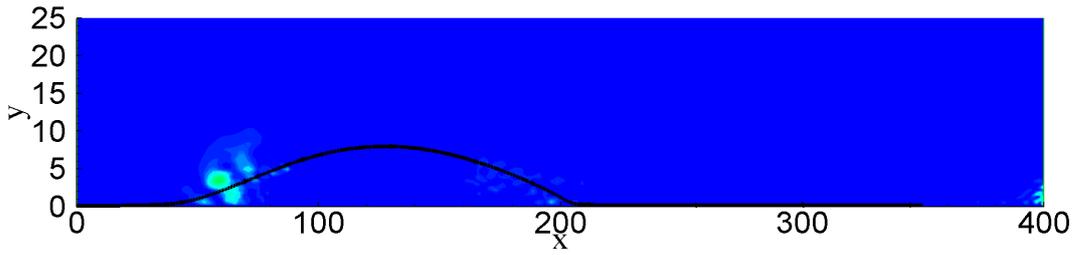


FIG. 7.16 – Représentation de l'énergie associée à la localité de $\hat{\mathbf{f}}_{opt}$ conduisant à une réponse optimale.

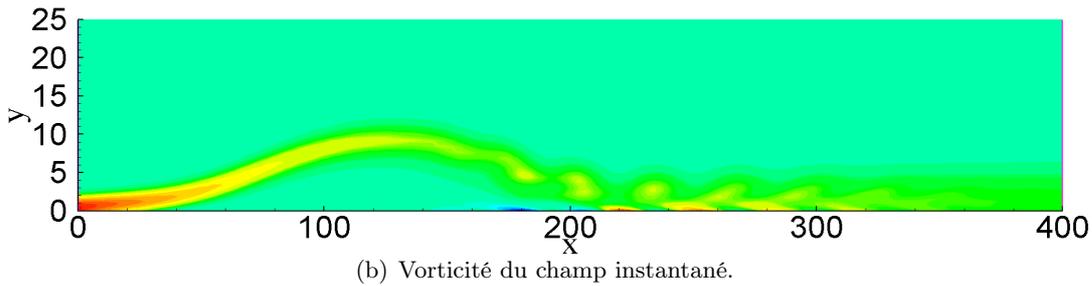
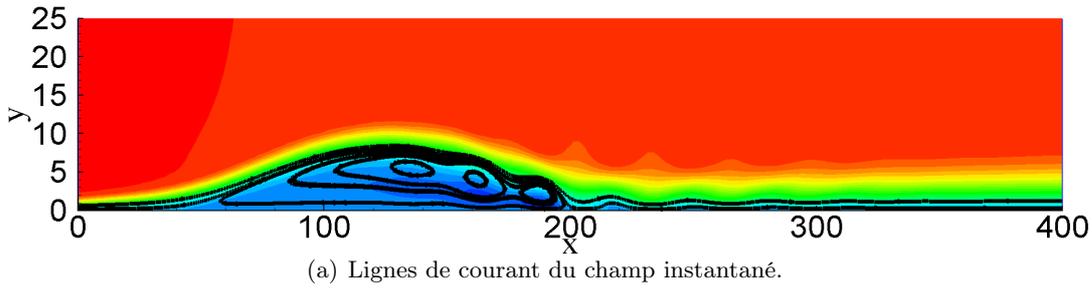


FIG. 7.17 – Représentation du champ instantané associé à $\sigma_c = 0.085$ et $\hat{\mathbf{f}}_{opt}$ pour D3.

avec \mathbf{q} la perturbation décomposée dans la base globale de composantes (7.18). Afin de visualiser la réponse un ϵ important, de l'ordre de 10%, est considéré malgré le fait que nous soyons qu'en régime linéaire.

Les lignes de courant et la vorticité du champ instantané, associé à $\sigma_c = 0.085$ et $\hat{\mathbf{f}}_{opt}$, sont représentées sur la figure 7.17 pour un temps spécifique. La zone de recirculation se divise ici en deux zones distinctes, conduisant à une rupture de la bulle. La réponse à un forçage harmonique se caractérise alors par un lâcher de structures sur la partie en aval de la bulle, à la pulsation σ_c . Nous observons en particulier une variation périodique du point de recollement, alors que le point de décollement reste quasi stationnaire. La vorticité caractérise aussi un phénomène de lâcher de structures tourbillonnaires associées à ce forçage spécifique.

L'étude du pseudospectre nous renseigne alors sur la valeur de la fréquence la plus efficace, conduisant à une rupture de la bulle. Ces propriétés globales, liées à la sensibilité aux fréquences, semblent ainsi être caractéristiques de la zone de recirculation indépendantes de la longueur du domaine.

Enfin, nous pouvons remarquer que le phénomène observé ressemble fortement aux simulations numériques directes 2D de bulbes instationnaires ([20],[89], [2] [66]). Une hypothèse

sur le déclenchement de l'instationnarité, liée à la sensibilité au bruit extérieur, peut alors être émise. En effet, les niveaux en ϵ étant très faibles, il peut être supposé que de petites perturbations, liées par exemple au bruit numérique, suffisent à exciter une des fréquences les plus sensibles. Par conséquent, il pourrait apparaître un phénomène instationnaire auto-entretenu et synchronisé à la fréquence d'un des bassins de sensibilité aux modes globaux, uniquement lié au bruit résiduel, déclenchant un phénomène de type "vortex shedding". De ce fait, un tel comportement sous-critique, pourrait être révélé par une étude globale de ce type. Nous pouvons remarquer que cette hypothèse avait été soulevée par Cossu & Chomaz [24], dans leur analyse théorique sur l'équation de Ginzburg Landau. En outre, cette dernière mettrait en valeur les conjectures faites par Washito *et al.* [89], Alam & Sandham [2] ou encore Kaiktsis *et al.* [53] dans le cas d'une marche descendante, sur la possibilité d'une instationnarité liée à une très forte instabilité convective. Une simulation numérique directe préliminaire, à plus haut nombre de Reynolds, est réalisée en annexe D, pour illustrer ce propos.

Chapitre 8

Analyse de stabilité linéaire globale. Etude des perturbations tridimensionnelles, $\beta \neq 0$.

L'analyse des perturbations bidimensionnelles révéla une nature convective de l'instabilité. Notamment un mécanisme de déstabilisation de type Kelvin-Helmholtz fut illustré dans le régime transitoire et asymptotique. Plus particulièrement, les écoulements D1, D2 et D3 s'avérèrent présenter de larges phénomènes transitoires et de très grandes sensibilités aux perturbations extérieures.

Néanmoins, certains auteurs ont identifié un mécanisme de bifurcation d'écoulements décollés, lié à un mode tridimensionnel stationnaire instable, dans des configurations diverses (marche descendante [8], bosse [34], ou encore une plaque plane à très bas nombre de Reynolds [85]). Contrairement aux analyses de stabilité locales et globales $2D$, il se pourrait qu'un phénomène tridimensionnel plus intense, puisse dominer la dynamique de l'écoulement aux temps longs. Une étude de stabilité linéaire globale tridimensionnelle est ainsi réalisée.

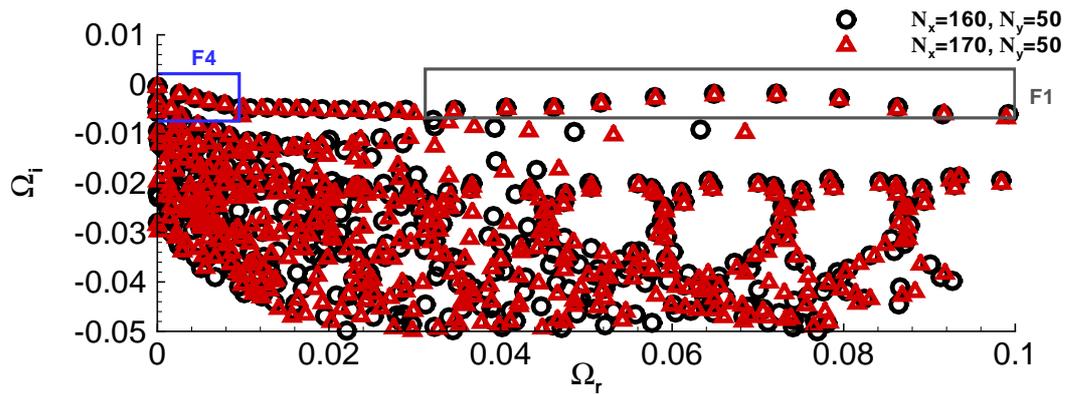
8.1 Analyse du spectre et familles des modes globaux $3D$ pour D3.

8.1.1 Partie cohérente du spectre.

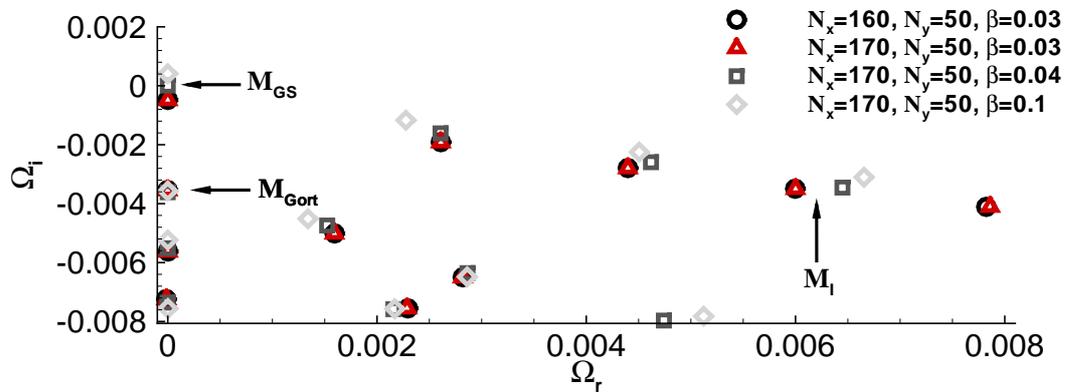
De manière à étudier la cohérence du spectre, deux maillages sont réalisés. L'influence de perturbations tridimensionnelles fait alors apparaître une plus grande diversité de modes 8.1(a), dont une partie semble dépendre de la discrétisation. Cependant, l'une d'entre elles, située dans les basses fréquences, se distingue du cas $2D$. Notée par F4 sur la figure 8.1(b), elle est composée d'une série de modes stationnaires et instationnaires, faiblement espacés et très basses fréquences. Plus particulièrement, un mode global stationnaire noté M_{GS} , devient instable pour un certain nombre d'onde transverse β .

Cette famille semble être particulièrement influencée par la zone de recirculation. En effet, trois modes, notés M_{GS} , M_{Gort} et M_I (voir la figure 8.1(b)), typiques de F4, sont représentés sur les figures 8.2 et 8.3. Les modes stationnaires sont caractérisés par des phénomènes grandes longueurs d'onde. Les modes instationnaires sont plutôt de courtes longueurs d'onde.

Notre analyse va alors principalement s'orienter dans l'étude de ces modes stationnaires, spécifiques aux perturbations $3D$.



(a) spectre complet associé à $D3$, pour une nombre d'onde transverse $\beta = 0.3$.



(b) Illustration de la famille F4, en fonction de β et de la discrétisation.

FIG. 8.1 – Analyse du spectre pour une perturbation tridimensionnelle, associée au champ $D3$.

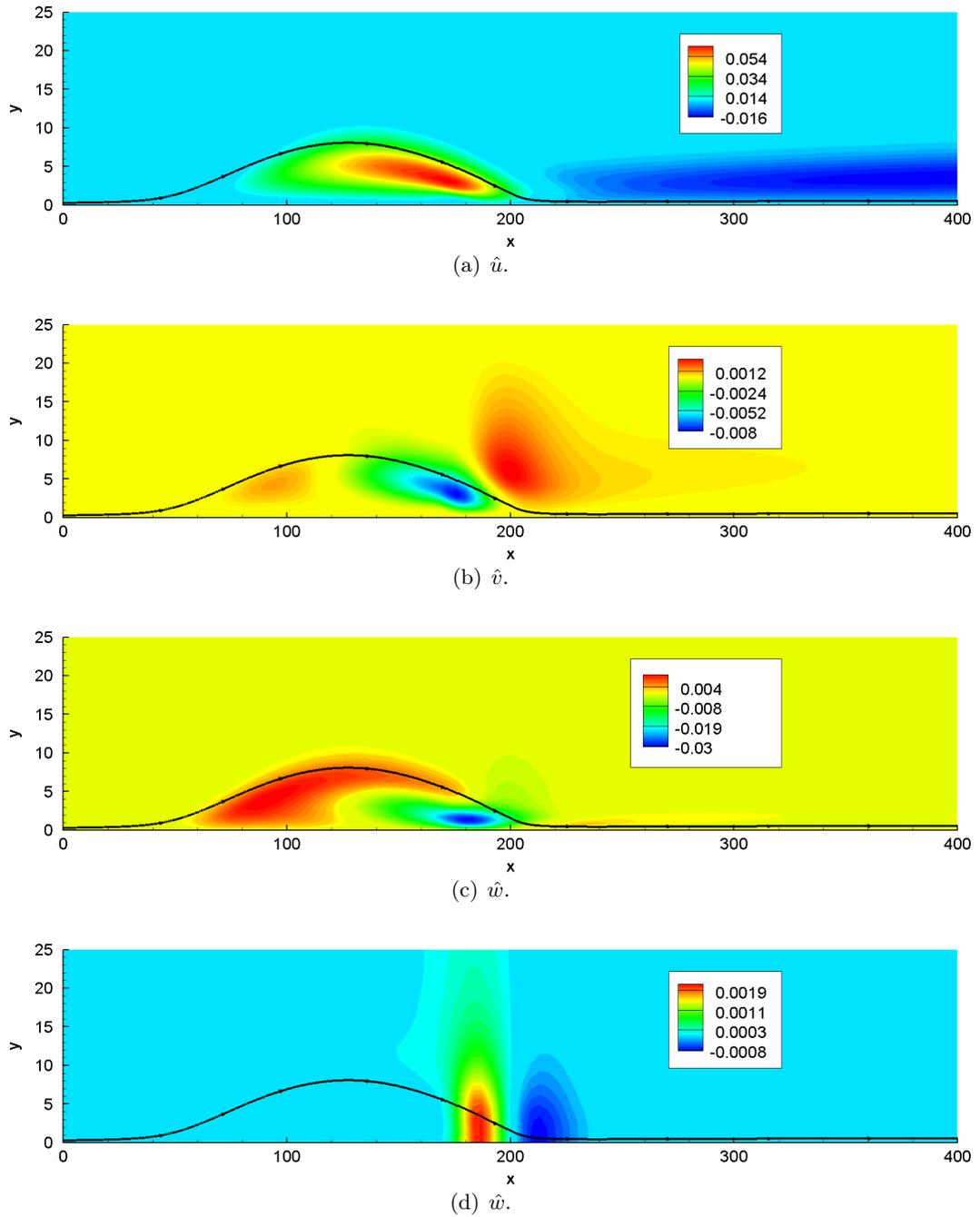
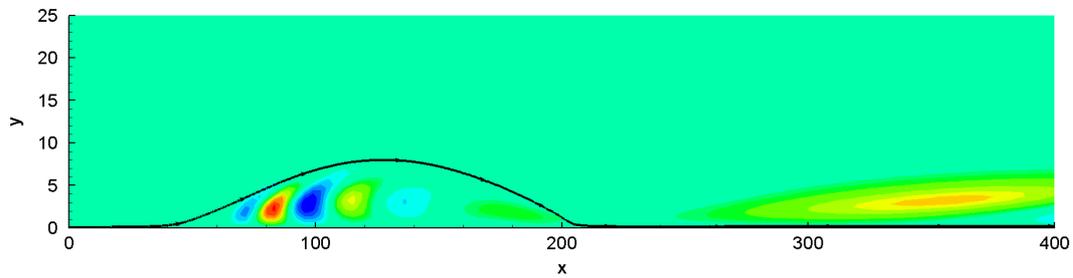
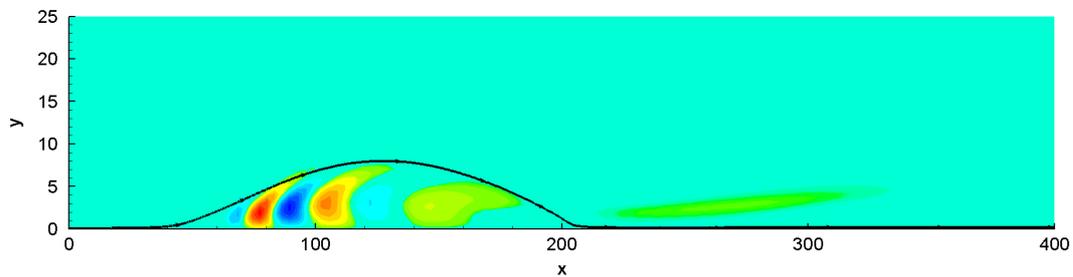


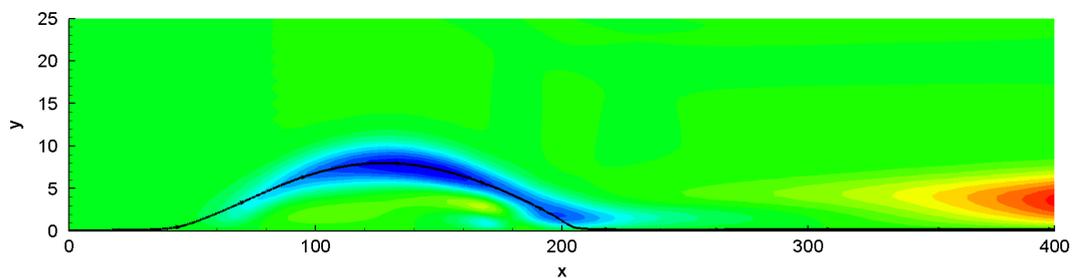
FIG. 8.2 – Parties réelles du mode global stationnaire M_{GS} pour le champ D3 et $\beta = 0.1$.



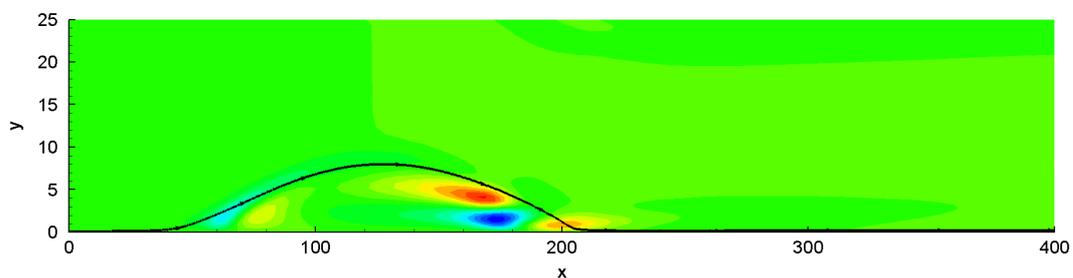
(a) composante \hat{u} du mode M_I .



(b) composante \hat{w} du mode M_I .



(c) composante \hat{u} du mode M_{Gort} .



(d) composante \hat{w} du mode M_{Gort} .

FIG. 8.3 – Illustration des parties réelles des modes M_I et M_{Gort} pour le champ D3 et $\beta = 0.1$.

8.1.2 Illustration des modes globaux stationnaires M_{GS} et M_{Gort} .

Nous considérons dans un premier temps le champ D3. De manière à comprendre l'influence des modes M_{GS} et M_{Gort} sur l'écoulement, une représentation des nappes d'iso-vorticité est illustrée sur les figures 8.4(a) et (b). Les deux modes prennent la forme de rouleaux, épousant les courbures des lignes de courant. En particulier, le mode M_{GS} est principalement concentré dans la bulle. Celui-ci présente une nature intrinsèque, dont le taux d'amplification devient instable pour une bande de nombres d'onde transverses 8.1(b). Une étude asymptotique révèle ainsi qu'une petite perturbation peut conduire à une bifurcation tridimensionnelle de l'écoulement. Il est intéressant de remarquer que l'apparition d'un tel mode global stationnaire instable est un phénomène finalement classique d'écoulements décollés ([8], [34], [85], [75] dans le cas de l'interaction choc/couche limite). En outre, nous pouvons souligner la pertinence d'une étude globale pour capter un tel phénomène, très grande longueur d'onde, ne pouvant être identifié par des analyses de stabilité locales.

Le mode M_{Gort} , quand à lui présente une nature plus convective, où nous pouvons distinguer une amplification spatiale des rouleaux, le long de la couche de mélange.

Néanmoins, une étude suivant le nombre d'onde transverse illustre une nature commune de ces deux modes. En effet, M_{GS} et M_{Gort} sont tous deux issus de la fusion de deux modes instationnaires complexes conjugués. La dynamique de cette partie du spectre est mise en lumière sur les figures 8.5(a) et (b). Afin de comprendre plus spécifiquement l'origine physique relative à M_{GS} et M_{Gort} , une première étude sur le mode M_{GS} est réalisée.

8.1.3 Etude préliminaire de M_{GS} en fonction de D1, D2 et D3.

8.1.3.1 Discussion des conditions limites en aval.

La discussion des conditions limites en aval, dans la seconde partie du mémoire, souligne l'influence de celles-ci sur les modes TS. Néanmoins, il a été remarqué que certains auteurs imposent des conditions d'extrapolation (4.3) sur les composantes de fluctuations de vitesse en sortie de domaine. En particulier, lorsque le phénomène considéré est intrinsèque, ce type de condition limite ne devrait pas avoir d'influence sur le mode global. De plus, cette dernière est plus simple à mettre en oeuvre dans une étude paramétrique. En effet, la condition basée sur l'approximation de la relation de dispersion locale (4.5), dépendante des valeurs de β et Re , doit être modifiée à chaque résolution. Afin d'illustrer la pertinence de la condition (4.3) sur un tel mode, trois conditions limites, notées par **C1**, **C2** et **C3** sont étudiées. Celles-ci sont définies par :

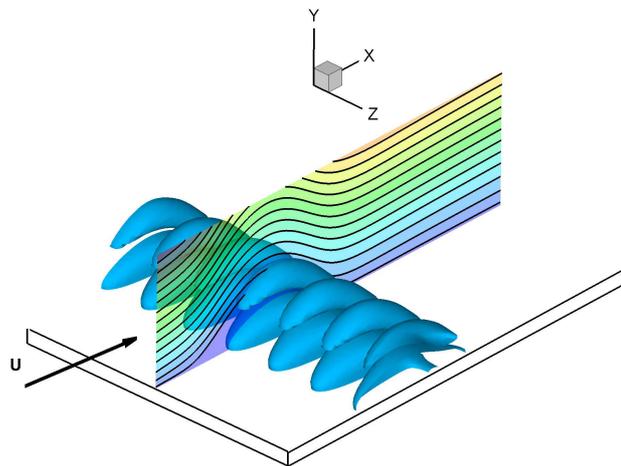
- **C1**, relation de Gaster (4.5), avec $L_x = 400$.
- **C2**, extrapolation d'ordre 2 (4.3), avec $L_x = 400$.
- **C2**, extrapolation d'ordre 2 (4.3), avec $L_x = 450$.

Conditions.	$\Omega_i \times 10^{-4}$
C1	-4.80411
C2	-4.80467
C3	-4.80280

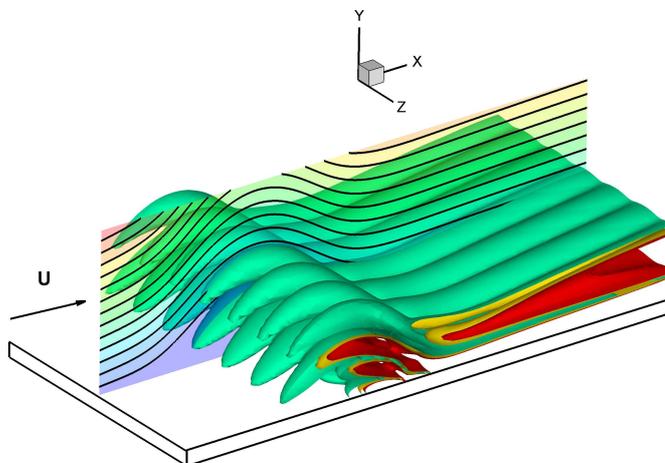
Nous considérons ici le champ D3 et fixons le nombre d'onde transverse à $\beta = 0.03$. Le résultat est illustré par le tableau ci-dessus et le spectre 8.5(a). Le taux d'amplification, lié au mode global M_{GS} , s'avèrent alors indépendant de la condition limite en aval. La condition limite basée sur une extrapolation (4.3) est donc adoptée pour l'analyse du mode M_{GS} .

8.1.3.2 Evolution de l'instabilité suivant D1, D2 et D3.

Le comportement du mode global M_{GS} est étudié pour les champs D1, D2 et D3. Les propriétés d'instabilité se révèlent dépendre fortement de l'intensité de la zone de recirculation. En effet, uniquement le décollement le plus intense est susceptible de se déstabiliser, les champs

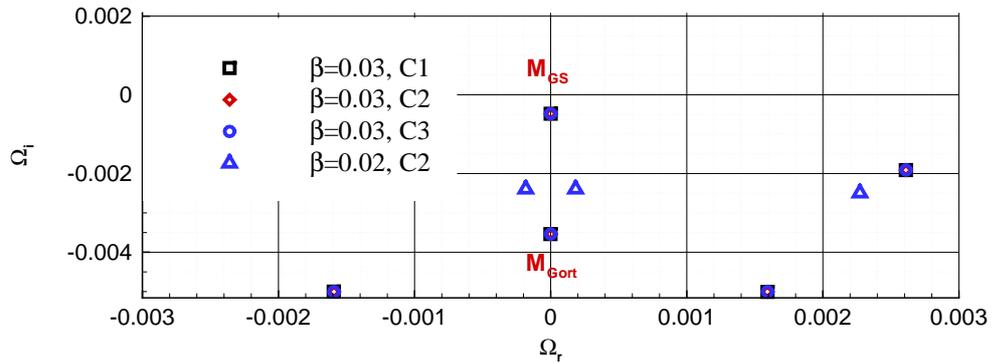


(a) Représentation des nappes d'iso-vorticité de la perturbation liée au mode M_{GS} , pour $\beta = 0.1$.

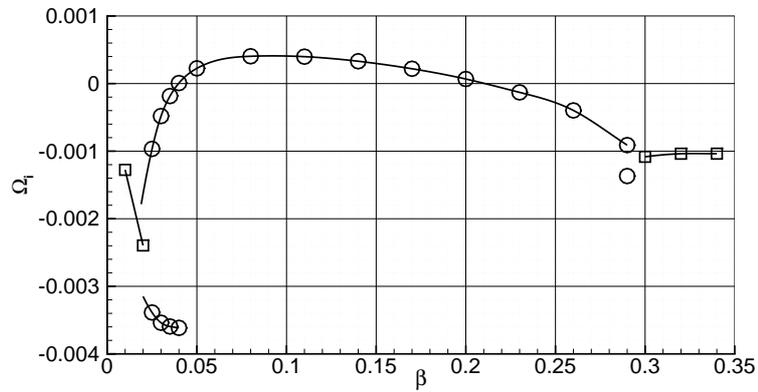


(b) Représentation des nappes d'iso-vorticité de la perturbation liée au mode M_{Gort} , pour $\beta = 0.04$.

FIG. 8.4 – Illustration des nappes d'iso-vorticité associées aux modes stationnaires. Une coupe suivant la direction transverse illustre la position des lignes de courant du champ de base.



(a) Agrandissement d'une partie de la famille F4 pour deux nombres d'onde transverses $\beta = 0.02$ et $\beta = 0.03$. Les différentes conditions limites de sortie sont référencées par C1, C2 et C3.



(b) Suivi des modes M_{Gort} et M_{GS} en fonction de β . Les modes instationnaires sont représentés par des carrés, les modes stationnaires par des cercles.

FIG. 8.5 – Evolution des modes stationnaires en fonction du nombre d'onde transverse pour D3.

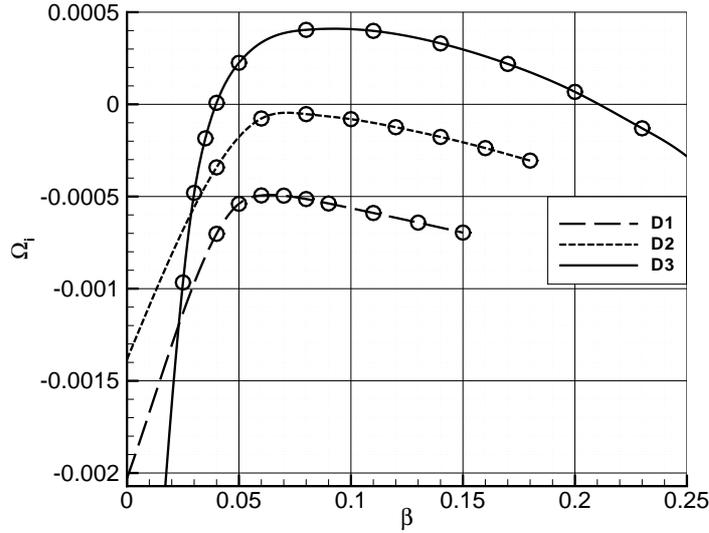


FIG. 8.6 – Evolution du mode global M_{GS} en fonction de β et du profil de suction.

D1 et D2 possédant des taux d'amplification temporelle négatifs. Une difficulté apparaît alors pour déterminer les paramètres influant sur de tels modes globaux. En effet, la procédure utilisée pour créer le décollement ne permet pas d'étudier indépendamment chaque facteur lié à la zone décollée, comme sa taille ou encore l'intensité maximale de l'écoulement de retour. Par conséquent, il est intéressant de modéliser un tel écoulement à l'aide de profils analytiques, simulant correctement les propriétés d'instabilité.

8.2 Nature de l'instabilité des modes M_{GS} et M_{Gort} .

8.2.1 Modélisation de l'écoulement à l'aide de profils de Falkner-Skan.

Nous suivons dans cette section la solution adoptée par Hammond & Redekopp [46], dans leur recherche d'instabilité globale d'écoulement décollé à partir de propriétés locales. De ce fait, les profils de similitude de Falkner-Skan sont utilisées pour modéliser un écoulement décollé de plaque plane. Les champs de vitesse sont calculés par :

$$\begin{aligned} f''' + f f'' + \gamma(1 - f'^2) &= 0 \\ f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f(\eta \rightarrow \infty) &= 1, \end{aligned} \tag{8.1}$$

avec la variable de similitude et la fonction de courant définies par

$$\eta = y \sqrt{\frac{Re}{(2-\gamma)}} x^{1-m}, \quad \psi(x, y) = f \sqrt{\frac{(2-\gamma)x^{1-m}}{Re}} U_e, \tag{8.2}$$

$$U(x, y) = \partial\psi/\partial y, \quad V(x, y) = -\partial\psi/\partial x$$

où U_e désigne une vitesse adimensionnée : $U/U_{ref} = x^m$, avec $m = \gamma/(2-\gamma)$, et γ le gradient de pression réduit. Un profil spécifique de $\gamma(x)$ permet la création d'une zone décollée au sein de la plaque plane (8.7(a)(b)). De sorte à se comparer aux résultats issus de l'analyse DNS,

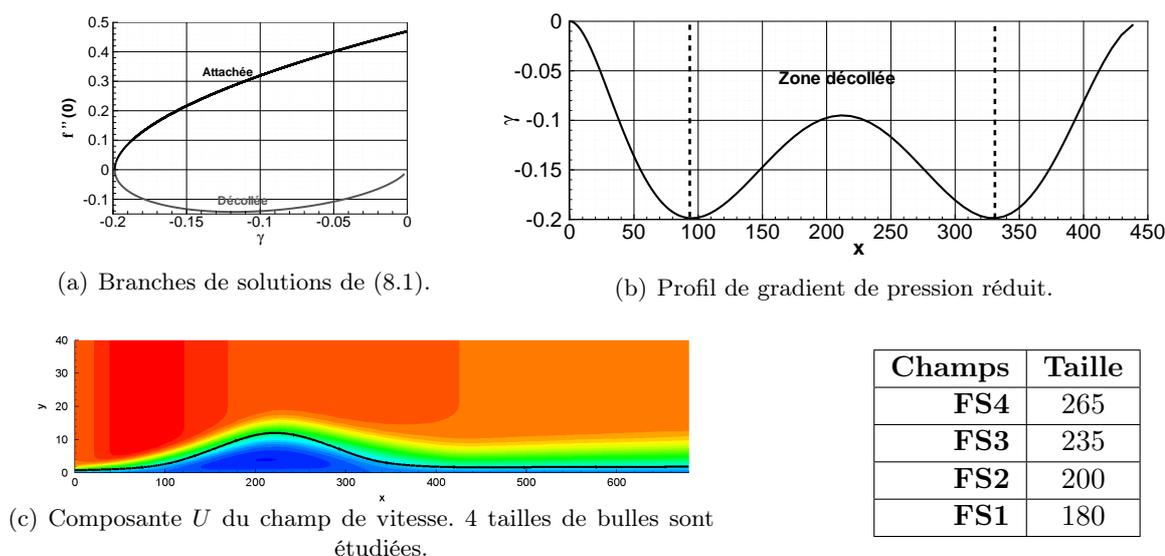


FIG. 8.7 – Exemple d'écoulement décollé, modélisé à l'aide des profils de similitude de Falkner-Skan. Le nombre de Reynolds, basé sur l'épaisseur de déplacement en entrée, est de 67. b) représente le profil de gradient de pression réduit $\gamma(x)$, obtenu par les branches solutions de (8.1), illustrées sur a).

l'échelle de longueur est fixée à l'épaisseur de déplacement en $x = 0$ et U_{ref} est égale à la vitesse extérieure U_0 . Nous nous plaçons dans un premier temps à très bas nombre de Reynolds $Re_{\delta^*} = 67$ ⁵⁹. Le champ modélisé est illustré sur la figure 8.7. La zone décollée s'étend de $x = 100$ à $x = 335$, puis le champ relaxe vers un profil de Blasius à partir de $x = 450$. Une telle procédure permet ainsi de contrôler la taille de la bulle, ainsi que ses caractéristiques locales et le nombre de Reynolds.

Quatre écoulements des équations de Falkner-Skan sont étudiés au nombre de Reynolds précédent. Les propriétés locales de la zone de recirculation, comme l'intensité de l'écoulement de retour, ou encore la position du point d'inflexion sont fixées. Uniquement, l'influence de la concentration des lignes de courant est recherchée, en modifiant la taille de la bulle. Les champs sont identifiés par la suite par $FS1$, $FS2$, $FS3$ et $FS4$, dont les tailles sont reportées dans le tableau 8.7(c).

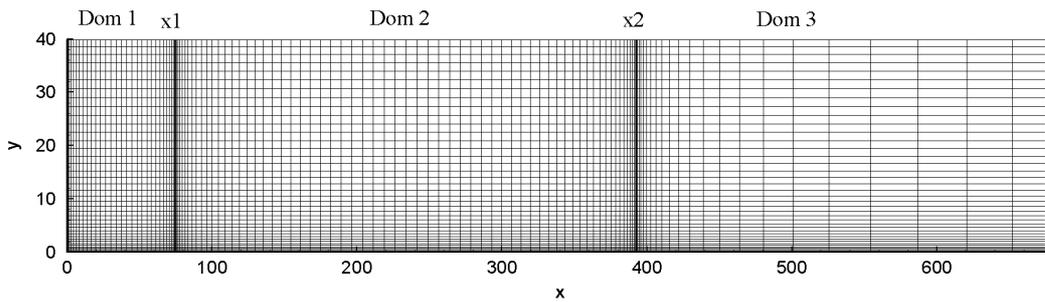
8.2.2 Nature du mode M_{GS} .

8.2.2.1 Choix de la méthode numérique.

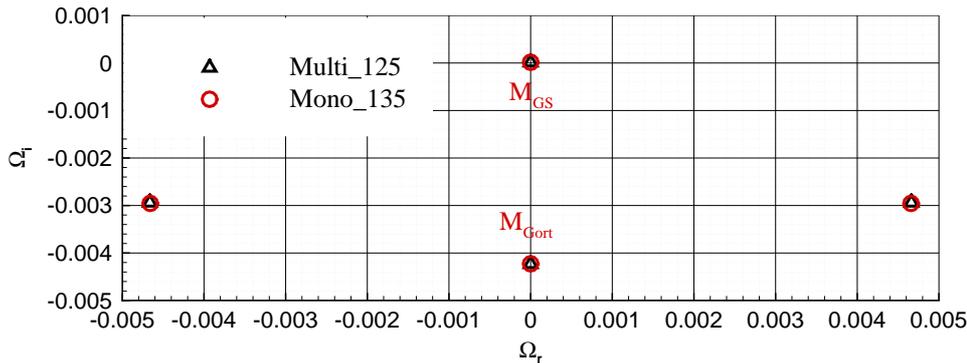
Nous nous intéressons dans cette partie au mode M_{GS} . En particulier, une étude paramétrique sur la taille de la bulle, le nombre d'onde transverse et le nombre de Reynolds est réalisée. Le maillage utilisé précédemment 170×50 est relativement coûteux en heures de calcul pour une telle analyse. Or il apparaît que le mode M_{GS} est uniquement concentré dans une partie de l'écoulement. Il semblerait alors intéressant d'utiliser une approche multi-domaines spectrale. Par conséquent, le champ considéré est divisé selon trois domaines, permettant de concentrer la précision associée à la bulle entre x_1 et x_2 , avec un nombre restreint de points⁶⁰. Une grille 125×50 8.8(b) est utilisée au cours de cette étude paramétrique. Une comparaison mono-domaine du mode M_{GS} où 135 points sont considérés, est plutôt satisfaisante 8.8(c). De

⁵⁹Le nombre de Reynolds basé sur x s'établit ici à 1500.

⁶⁰La méthode est décrite dans l'annexe C.



(a) Illustration de la décomposition en trois domaines.



(b) Comparaison mono-domaine pour FS1 à $\beta = 0.07$ au nombre de Reynolds 67.

FIG. 8.8 – Illustration de la modélisation et de la méthode numérique multi-domaines utilisée.

ce fait, cette grille est adoptée dans la suite de l'analyse. Enfin, nous pouvons remarquer que cette étude préliminaire d'une approche multi-domaines ouvrent des perspectives intéressantes dans la résolution de problèmes aux géométries plus complexes.

8.2.2.2 Evolution du mode M_{GS} avec la taille de la bulle.

Le spectre associé au champ $FS3$ pour $\beta = 0.04$, représenté sur la figure 8.9, illustre les similitudes avec le spectre relatif à D3 (figure 8.5(a)). En particulier, le mode global stationnaire est retrouvé, avec des niveaux comparables à ceux obtenus pour le cas précédent. La structure spatiale, mise en valeur par la composante \hat{w} 8.9(b) de la perturbation conforte les propos précédents. L'écoulement ainsi modélisé simule donc convenablement le phénomène instable relatif au mode M_{GS} . De ce fait, l'analyse de la dépendance de M_{GS} en fonction de $FS1$, $FS2$, $FS3$ et $FS4$ paraît pertinente.

L'évolution du taux d'amplification du mode M_{GS} , en fonction de la taille de la bulle et du nombre d'onde transverse est illustrée sur la figure 8.10. Il apparaît une forte dépendance entre la taille de la bulle, et l'intensité du taux d'amplification. En particulier, l'augmentation de la concentration de la bulle engendre un accroissement du taux d'amplification, accompagné d'un élargissement de la bande de nombre d'onde instable.

Ainsi, le mode M_{GS} se distingue par une origine physique très dépendante de la concentration des lignes de courant, associées à la zone de recirculation. Par conséquent, ce phénomène pourrait être interprété par une origine centrifuge de l'instabilité, liée à la forme des lignes de courant fermées [9]. Une telle hypothèse a déjà fait l'objet de recherches récentes sur des écoulements décollés. Nous pouvons citer l'article de Barkley *et al.* [8] dans le cas d'une marche descendante ou encore Gallaire *et al.* [34] pour un écoulement derrière une bosse. Néanmoins,

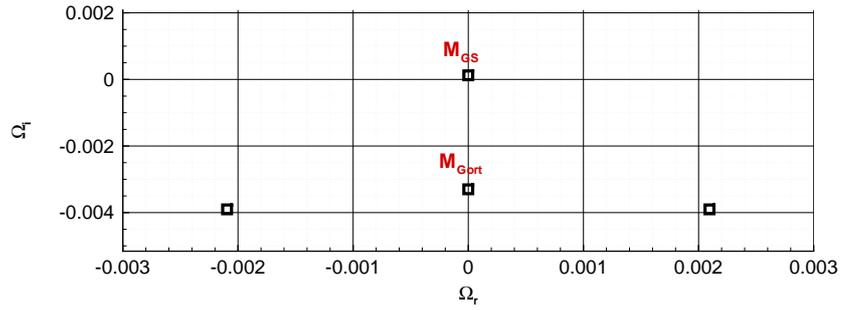
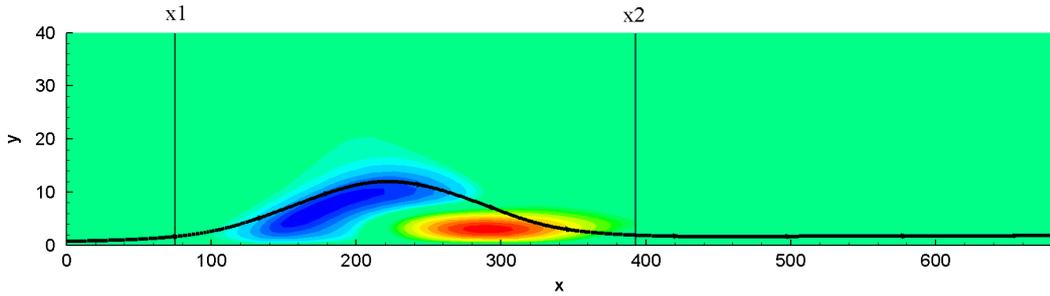

 (a) Spectre pour les modes M_{GS} et M_{Gort} .

 (b) Composante \hat{w} du modes M_{GS} . Celle-ci présente des propriétés similaires à celle obtenue dans l'analyse du champ issu d'une simulation numérique directe.

 FIG. 8.9 – Analyse du champ FS3, au nombre de Reynolds égal à 67 et $\beta = 0.04$.

il paraît intéressant de constater qu'une telle origine physique pourrait être responsable de la déstabilisation d'un décollement même en l'absence de phénomènes géométriques.

Dans le but de déterminer la pertinence de cette hypothèse, une étude de stabilité basée sur un critère de Rayleigh généralisé, est réalisée.

8.2.2.3 Origine centrifuge et non visqueuse pour le mode M_{GS} .

Notre étude s'appuiera principalement sur les résultats théoriques établis par Bayly [9], puis plus récemment par Sipp & Jacquin [82] qui généralisèrent le critère d'instabilité centrifuge de Rayleigh à des lignes de courants fermées quelconques. Leurs analyses s'appuyèrent sur la périodicité engendrée par la fermeture des lignes des courants. Une étude de Floquet sur ces dernières, associées aux petites perturbations issues des équations d'Euler linéarisées, permet ainsi de construire un mode d'instabilité non visqueux. L'écoulement est alors instable s'il existe une ligne de courant fermée, désignée par φ , où le déterminant de Rayleigh $\Delta(\mathbf{x})$:

$$\Delta(\mathbf{x}) = 2 \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x})}{\varrho(\mathbf{x})} \right) \varpi(\mathbf{x}) \quad (8.3)$$

vérifie le critère :

$$\max_{\varphi}(\Delta(\mathbf{x})) \leq 0 \quad (8.4)$$

avec ϱ le rayon de courbure local, V la norme de la vitesse et ϖ la valeur de la vorticité locale. La position sur la ligne de courant est indiquée ici par \mathbf{x} . Ce critère, classiquement utilisé dans l'analyse de tourbillons, a aussi permis d'identifier de fortes zones centrifuges au sein d'écoulements décollés, dans le cas d'une bosse [34] ou encore une marche [8] [10]. Par conséquent, il paraît intéressant d'étudier l'évolution des zones centrifuges éventuelles dans

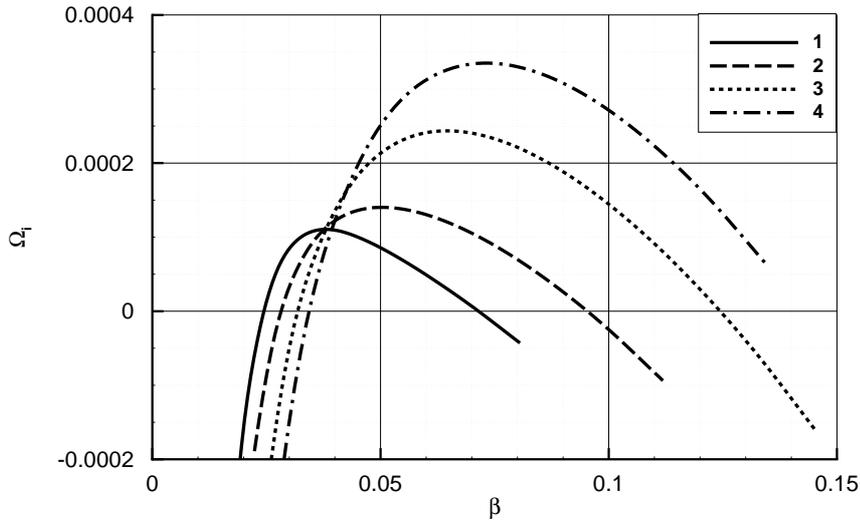


FIG. 8.10 – Evolution du taux d’amplification associé au mode global instable en fonction du nombre d’onde transverse et de la taille du décollement. Le nombre de Reynolds est de 67.

le cas de notre décollement de plaque plane. Le critère (8.4) est appliqué sur les champs FS1, FS2, FS3 et FS4. Nous constatons ici que (8.4) n’est vérifié pour aucun des champs précédents. Néanmoins, il apparaît deux larges zones centrifuges, notées $z1$ et $z2$, en amont et en aval de la bulle (figure 8.11). Ainsi, sur une période associée aux lignes de courant fermées, les particules de fluide vont ressentir fortement l’influence déstabilisante de ces zones. De manière à corroborer plus rigoureusement, l’évolution de ces aires d’instabilité centrifuge à notre mode global M_{GS} , une comparaison entre ses taux d’amplification temporelle Ω_i et le maximum en valeur absolue du déterminant de Rayleigh $|\max_{\varphi \in (z1, z2)}(\Delta(\mathbf{x}))|$, en $z1$ et $z2$, est examinée. Ainsi, l’augmentation de Ω_i semble suivre l’accroissement de $|\max_{\varphi \in (z1, z2)}(\Delta(\mathbf{x}))|$ (figure 8.12).

Enfin, de manière à conforter cette hypothèse d’instabilité centrifuge, non visqueuse, une étude suivant le nombre de Reynolds basé sur x en entrée de domaine, noté Re_x , est effectuée sur le champ $FS3$. Nous fixons ici la longueur du décollement et la valeur de $x = 0$, et nous nous intéressons à l’évolution du mode M_{GS} , en fonction du nombre de Reynolds. La courbe neutre 8.13 dans le plan (β, Re_x) illustre ici un comportement non visqueux classique. Un nombre de Reynolds critique, très bas apparaît à $Re_x = 790$ ⁶¹, et tend à s’élargir au fur et à mesure que ce dernier augmente.

En conclusion, le phénomène physique déstabilisant, lié au mode M_{GS} , semble bien être d’origine centrifuge. Ainsi, la courbure des lignes de courant fermées, associées à la bulle, peut déclencher la tridimensionnalisation, même en l’absence de structures géométriques⁶².

Revenons maintenant au deuxième mode stationnaire M_{Gort} (figure 8.4(b)). Nous avons remarqué dans les paragraphes précédents, que les modes M_{Gort} et M_{GS} , possédaient une origine commune, issue de la fusion de deux modes instationnaires complexes conjugués. En outre, pour une certaine bande de nombres d’onde transverses, M_{Gort} prenait la forme de rouleaux, s’amplifiant le long de la couche de mélange. Par conséquent, ce mode stationnaire,

⁶¹Celle grandeur peut être comparée à la valeur de 13500 de l’étude DNS précédente ou encore les valeurs de Pauley situées entre 60000 et 240000

⁶²Cette étude a fait l’objet d’une conférence IUTAM en 2007 [4]

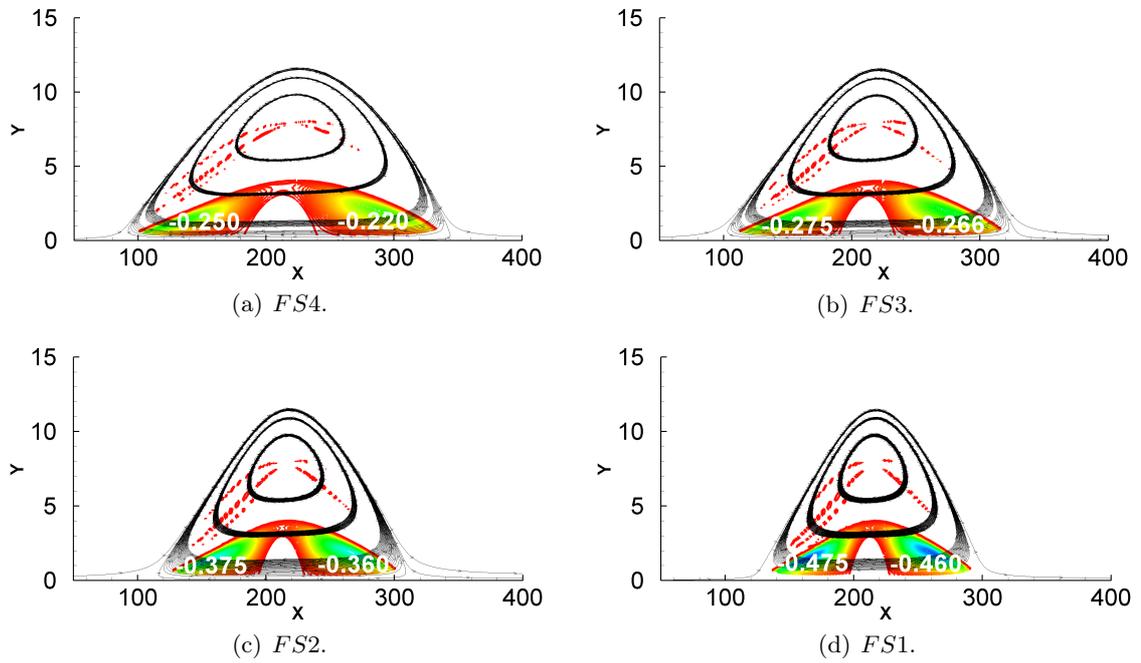


FIG. 8.11 – Critère de Rayleigh appliqué aux écoulements FS1, FS2, FS3 et FS4. Deux zones centrifuges se distinguent, notées $z1$ et $z2$.

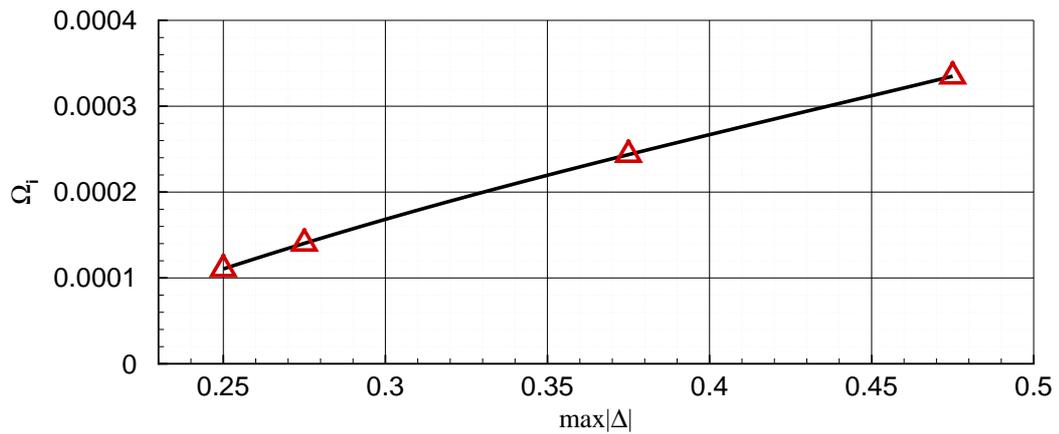


FIG. 8.12 – Evolution du maximum du taux d'amplification suivant β , en fonction du maximum en valeur absolue du déterminant de Rayleigh, associé à $z1$ et $z2$: $|\max_{\varphi \in (z1, z2)}(\Delta(\mathbf{x}))|$.

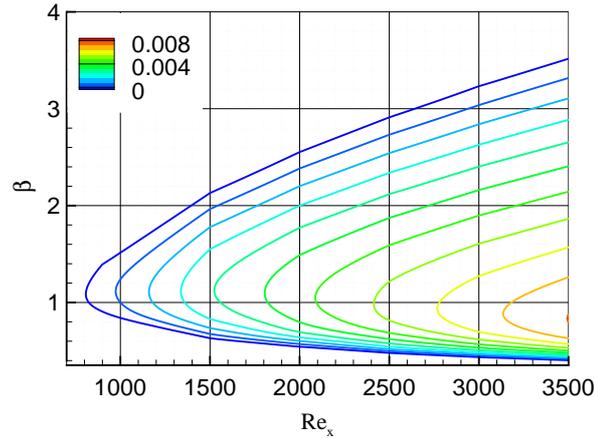


FIG. 8.13 – Influence du nombre de Reynolds basé sur x , sur le mode global stationnaire. L'échelle de référence est le $x = x_0$ en entrée, avec $x_0 = 0.05$.

stable possédant une nature convective, et probablement d'origine centrifuge comme M_{GS} , semblerait être pourvu de toutes les caractéristiques d'une instabilité de type Görtler. Une analyse préliminaire d'instabilité de Görtler est donc réalisée suivant une ligne de courant épousant la zone de recirculation.

8.2.3 Nature du mode M_{Gort} .

8.2.3.1 Formalisme : définition du repère et adimensionnement.

Nous suivrons ici le formalisme de Hall [45] et Bottaro & Zebib [14] dans leurs recherches sur l'influence de la courbure d'une paroi, sur une instabilité tridimensionnelle de couche limite. Le champ $FS2$ est considéré pour illustrer notre propos. Ainsi, nous nous plaçons dans un repère cylindrique local (u_r, u_θ, u_z) , associé à une ligne de courant φ_G proche de la ligne de séparation (figure 8.14). Soit R , le rayon de courbure local et δ^* notre échelle de longueur de référence. Le repère associé à φ_G est défini alors par :

$$\begin{cases} \tilde{x}\gamma = \Theta, \\ \tilde{y} = \left[\frac{(r - R)}{\delta^*} \right], \\ \tilde{z} = \frac{z}{\delta^*} \end{cases} \quad (8.5)$$

De manière à obtenir des échelles similaires suivant \tilde{x} et \tilde{y} , nous formulons les quantités en fonction des variables suivantes :

$$\begin{aligned} (X, Y, Z) &= (\tilde{x}, \tilde{y}Re^{1/2}, \tilde{z}Re^{1/2}) \\ (U, V, W) &= (V_\theta/U_0, V_rRe^{1/2}/U_0, V_z/U_0Re^{1/2}) \end{aligned} \quad (8.6)$$

avec $Re = U_0\delta^*/\nu$ le nombre de Reynolds, et ν désigne la viscosité cinématique. (V_θ, V_r, V_z) représentent ici les composantes du champ de vitesse suivant le repère cylindrique. L'instabilité

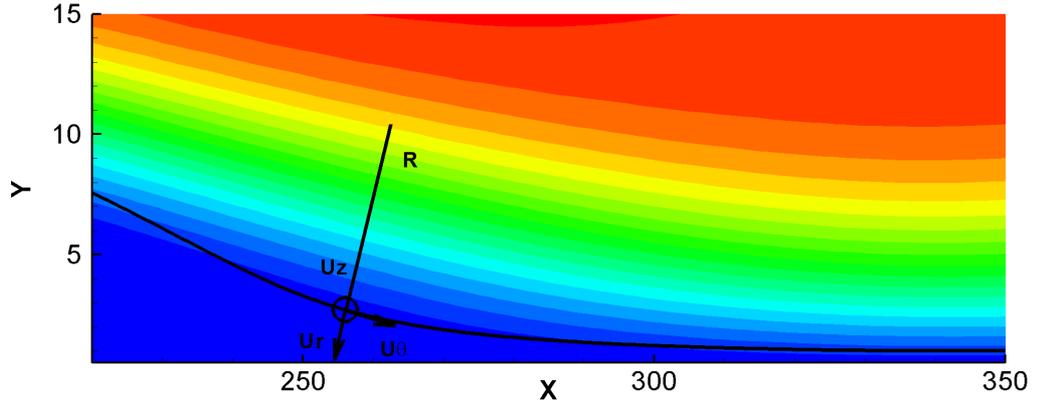


FIG. 8.14 – Repère cylindrique lié à l'analyse de l'instabilité de Görtler. Les iso-valeurs représentent la composante U du champ de base.

étant stationnaire, nous considérons la perturbation dans le repère (X, Y, Z) de la forme :

$$(u, v, w, p) = (\hat{u}\cos(\beta z), \hat{v}\cos(\beta z), \hat{w}\sin(\beta z), \hat{p}\cos(\beta z)) \quad (8.7)$$

avec β le nombre d'onde transverse. Enfin, en supposant une faible influence de la courbure et une origine non visqueuse de l'instabilité, le comportement spatial des petites perturbations dans le repère (X, Y, Z) au sein de l'écoulement $2D(U, V, 0)$, est régi par les équations :

$$U \frac{\partial \hat{u}}{\partial X} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial Y} + \beta \hat{w} = 0 \quad (8.8a)$$

$$U \frac{\partial \hat{u}}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \hat{u} + V \frac{\partial \hat{u}}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial Y} \hat{v} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial Y^2} - \beta^2 \hat{u} \quad (8.8b)$$

$$U \frac{\partial \hat{v}}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial X} \hat{u} + V \frac{\partial \hat{v}}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Y} \hat{v} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial Y} + GU \hat{u} = \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial Y^2} - \beta^2 \hat{v} \quad (8.8c)$$

$$U \frac{\partial \hat{w}}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \hat{w} + V \frac{\partial \hat{w}}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Y} \hat{w} - \beta \hat{p} = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial Y^2} - \beta^2 \hat{w} \quad (8.8d)$$

avec $G = 2\gamma Re^{1/2}$, le nombre de Görtler, caractérisant l'influence des effets de la courbure par rapport aux effets visqueux. Plus spécifiquement, les hautes valeurs de G imposeront une prédominance des effets de courbure sur ceux relatifs à la viscosité.

8.2.3.2 Méthodes numériques pour la résolution des équations de Görtler.

La trajectoire de la ligne de courant est déterminée par l'intégration de $\partial \mathbf{x} / \partial s = \mathbf{U}$, à l'aide d'un Runge-Kutta d'ordre 4, avec $\mathbf{x} = (x, y)$ le repère global associé à la plaque et s , la paramétrisation de cette ligne. Soit $\mathbf{x}_\varphi(s)$ la position de la ligne de courant qui nous intéresse. Le champ est alors interpolé suivant les normales à $\mathbf{x}_\varphi(s)$ pour chaque s .

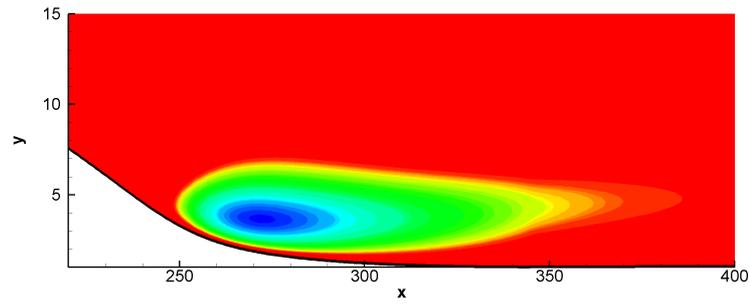
Les équations (8.8), définissant un problème parabolique en X , sont discrétisées par une méthode de collocation spectrale Chebyshev suivant Y , et intégrées suivant X via un Euler retardé.

8.2.3.3 Comparaison entre le mode M_{Gort} et l'intégration des équations de Görtler.

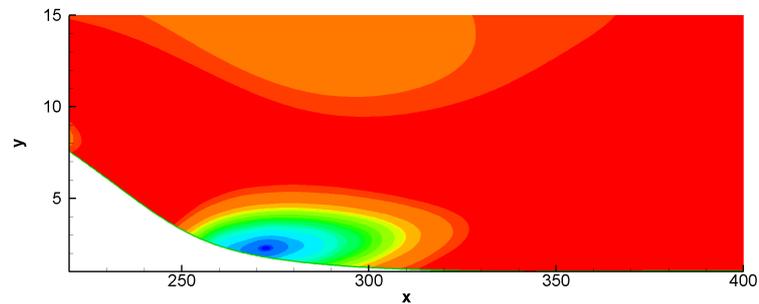
L'étude suivante est appliquée à l'écoulement FS2. Nous nous plaçons pour un nombre d'onde transverse de $\beta = 0.065$, où le mode M_{Gort} existe. La longueur d'onde transverse est ainsi égale à ≈ 100 , de l'ordre de grandeur de la moitié de la bulle.

Les équations de Görtler sont intégrées à partir de $x = 220$, au centre de la bulle (figure 8.14). Nous comparons alors les fonctions propres obtenues par intégration de (8.8), et celles issues de l'analyse de stabilité globale 8.15(a), 8.15(b), 8.15(c) et 8.15(d). Ils s'avèrent que la structure spatiale des composantes transverses et longitudinales des perturbations possèdent des similarités. En particulier, la composante transverse de la fluctuation de vitesse s'illustre dans les deux approches par une forte concentration au niveau du maximum de courbure 8.15(a) et 8.15(b). La tridimensionnalisation associée au mode M_{Gort} semble alors bien liée à la courbure des lignes de courant. Enfin, la structure allongée des composantes longitudinales, retrouvée dans l'analyse globale et par intégration des équations (8.8) (figures 8.15(c) et 8.15(d)), semble confirmer un mécanisme de type Görtler, associé à la présence des longs rouleaux stationnaires de M_{Gort} .

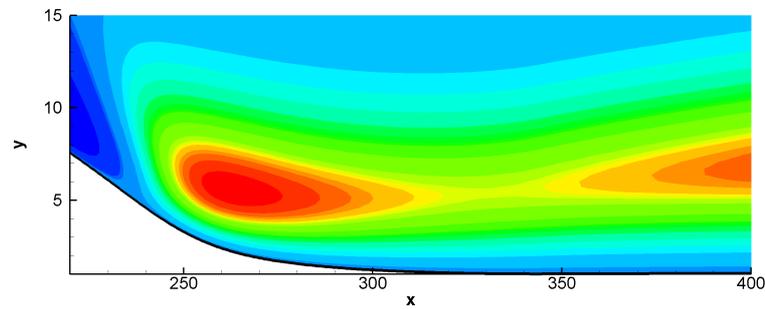
Cette étude préliminaire conforte ainsi l'origine centrifuge des modes M_{GS} et M_{Gort} , liée à la courbure des lignes de courant. Ce dernier, contrairement à M_{GS} ne définit pas un phénomène intrinsèque au décollement, mais plutôt une nature convective. Son existence dans le régime asymptotique est de ce fait conditionnée par le type de forçage appliqué à l'écoulement. Néanmoins, nous pouvons citer l'analyse LES de Wilson & Pauley [90] où une telle instabilité de Görtler est observée dans une configuration similaire.



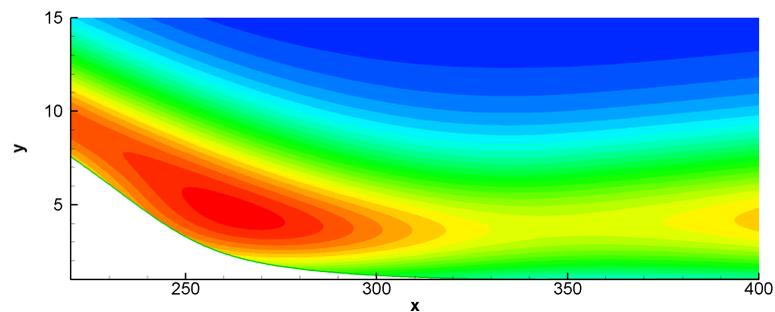
(a) Fonction propre relative à la direction transverse issue de l'intégration des équations de Görtler.



(b) Fonction propre relative à la direction transverse issue de l'étude de stabilité globale.



(c) Fonction propre relative à la direction longitudinale issue de l'intégration des équations de Görtler.



(d) Fonction propre relative à la direction longitudinale issue de l'étude de stabilité globale.

FIG. 8.15 – Analyse de Görtler au nombre de Reynolds basé sur δ^* égal à 67 et pour $\beta = 0.065$

Discussion

Ces études asymptotiques, liées à l'influence de perturbations tridimensionnelles illustrent une bifurcation spécifique des écoulements décollés étudiés. En particulier, un mécanisme d'origine centrifuge, associé à un mode global instable est observé. De ce fait, leur déstabilisation, fortement dépendante de la forme de la bulle et particulièrement de la courbure des lignes de courant, peut être dominée par un phénomène tridimensionnel. Ainsi, la bifurcation d'un tel écoulement va résulter d'une compétition intense entre cette instabilité tridimensionnelle intrinsèque, et une instabilité de Kelvin-Helmholtz bidimensionnelle, engendrant de très larges phénomènes transitoires. En outre, cette dernière pourrait produire une transition de type "bypass", invalidant l'analyse asymptotique du mode $3D$. Cette hypothèse pourrait être confortée en considérant les très faibles taux d'amplification associés à ce phénomène intrinsèque $3D$, ayant pour conséquence un développement très lent de cette instabilité.

Conclusions et perspectives.

Ce travail de thèse s'inscrit dans une contribution à la compréhension de la dynamique en espace et en temps d'une petite perturbation, au sein d'un écoulement décollé du type "adverse pressure gradient induced separation" (APG-induced separation). Notamment, une analyse de stabilité linéaire non parallèle, prenant en compte les diverses échelles associées aux structures instables, permet d'éclairer les différentes pistes liées à la première bifurcation de celui-ci. Ces résultats se sont principalement appuyés sur une analyse préliminaire d'une couche limite de plaque plane. Nous allons maintenant revenir plus en détail sur les différents mécanismes observés au cours de cette thèse et émettre quelques perspectives qui pourraient compléter le travail proposé.

La couche limite de plaque plane.

Mécanismes observés.

Cette étude préliminaire sur la couche limite de plaque plane, permet d'introduire les différentes notions théoriques, émises par Cossu & Chomaz [24] [21], liées à l'analyse de stabilité linéaire globale d'écoulement ouvert. En outre, les résultats présentés se confrontent relativement bien aux premières recherches réalisées en 2005 par Ehrenstein & Gallaire [28] sur un cas similaire et d'approfondir la compréhension physique d'une partie des modes globaux. Nous observons notamment la sensibilité des ondes convectives de Tollmien-Schlichting, ainsi que la réponse à une perturbation localisée en espace et en temps. En particulier, nous identifions trois mécanismes pouvant apparaître, suivant le type de condition initiale. Nous nous attardons dans un premier temps sur la dynamique du paquet d'onde bidimensionnelle. Tout d'abord, un comportement classique lié aux ondes de Tollmien-Schlichting est remarqué. Puis, lorsque la condition initiale de la perturbation s'oriente à "rebrousse-poil" par rapport à la direction de l'écoulement, un mécanisme de Orr, sous l'effet du cisaillement ambiant, se distingue, induisant un large phénomène transitoire sur les temps très courts. Enfin, dans un deuxième temps, l'influence d'une perturbation tridimensionnelle révèle un dernier mécanisme, proche d'un phénomène de "lift-up-effect". Ces diverses études soulignent l'influence de divers modes globaux, révélés par l'analyse de stabilité linéaire, et mettent en évidence l'implication d'un nombre très élevé de modes, même très atténués temporellement, dans la dynamique aux temps courts de cet écoulement. Ce dernier point illustre les travaux théoriques de Cossu & Chomaz, sur l'augmentation de la non normalité liée au degré de parallélisme de l'écoulement [24].

Perspectives.

Ainsi, la difficulté d'obtenir la dynamique spatio-temporelle exacte de la perturbation, aux temps très courts s'avère particulièrement délicat. Plus spécifiquement la possibilité de modéliser convenablement un phénomène de type "lift-up-effect" par une décomposition dans

une base de modes globaux, se révèle inaccessible par les moyens numériques mis à notre disposition. Nous pouvons ainsi proposer une démarche de contrôle optimale, basée sur un rebouclage entre les équations de stabilité linéaire directes et adjointes, dans le but de capter complètement la dynamique du paquet d'onde tridimensionnelle, durant les premiers instants du transitoire. Nous pouvons remarquer qu'une telle procédure est en cours de publication par Olivier Marquet *et al.* dans le cas d'un écoulement de canal [60] et une analyse légèrement similaire est réalisée par Barkley *et al.* pour un écoulement derrière une marche [13]. En outre, la richesse des écrits de cette dernière année basée sur la non normalité de l'opérateur global sur de tels écoulements fortement non parallèles ouvrent des perspectives intéressantes pour ce type d'analyse.

La couche limite fortement décollée de plaque plane.

Mécanismes observés.

La décomposition de la perturbation dans une base de modes globaux apparaît particulièrement pertinente dans le cas de la couche limite décollée de plaque plane, soumise à des perturbations bidimensionnelles. Notamment, contrairement au cas précédent, la dimension de la base se révèle convergée pour un nombre N , relativement restreint de modes ($N = 300$). Ceci pouvant être relié à l'apparition d'un non parallélisme plus prononcé, dû à la présence du décollement, par rapport au cas précédent. La dynamique de la perturbation optimale reflète alors un mécanisme de type Kelvin-Helmholtz, et autorise une mesure précise de l'amplification de cette dernière le long de la couche de mélange. Plus particulièrement, la prise en compte du non parallélisme et l'influence de modes autres que ceux relatifs à une onde de Kelvin-Helmholtz sont soulignées. Enfin, l'apparition d'une basse fréquence, naissante en aval de la bulle, se distingue sur des temps relativement importants, cette dernière résultant de l'interférence entre modes globaux les moins atténués temporellement.

L'influence de perturbations tridimensionnelles permet de mettre en évidence un comportement différent. Un mode global stationnaire instable apparaît pour un certain profil de succion, pouvant engendrer une tridimensionnalisation de l'écoulement. Un mécanisme centrifuge est souligné comme responsable de ce processus de déstabilisation. Un tel phénomène physique avait déjà été observé au sein d'écoulements décollés de type "geometry induced separation" [8] [34]. Néanmoins, il est intéressant de constater que ce mécanisme peut aussi se manifester dans des configurations "adverse pressure gradient induced separation", en l'absence de courbures géométriques. Par conséquent, notre étude de stabilité linéaire globale identifie deux types de scénarii éventuels, associés à la présence d'un tel décollement laminaire de plaque plane. Un large phénomène transitoire, induisant une importante croissance de la perturbation le long de la couche de mélange, pouvant conduire à une transition de cette dernière. Puis, un phénomène asymptotique, lié à un mécanisme centrifuge tridimensionnel. Nous pouvons alors résumer les possibilités associées à la première bifurcation d'un tel écoulement à travers le diagramme 8.16. Notamment, le scénario tridimensionnel peut s'avérer non pertinent dans certaines configurations, où le mécanisme de Kelvin-Helmholtz peut engendrer l'apparition d'une nouvelle bifurcation liée aux phénomènes non linéaires. Ce dernier point peut être conforté par l'étude des échelles de temps propres aux deux mécanismes. Ceci est illustré sur la figure 8.17 où est représenté le temps mis par le mode global instable $3D$ pour atteindre le même niveau d'énergie que celui issu du phénomène de croissance transitoire. De ce fait, nous pouvons supposer que le mode global instable $3D$ n'a pas le temps d'intervenir dans la dynamique spatio-temporelle de la perturbation avant une bifurcation de l'écoulement, due aux effets de croissance transitoire.

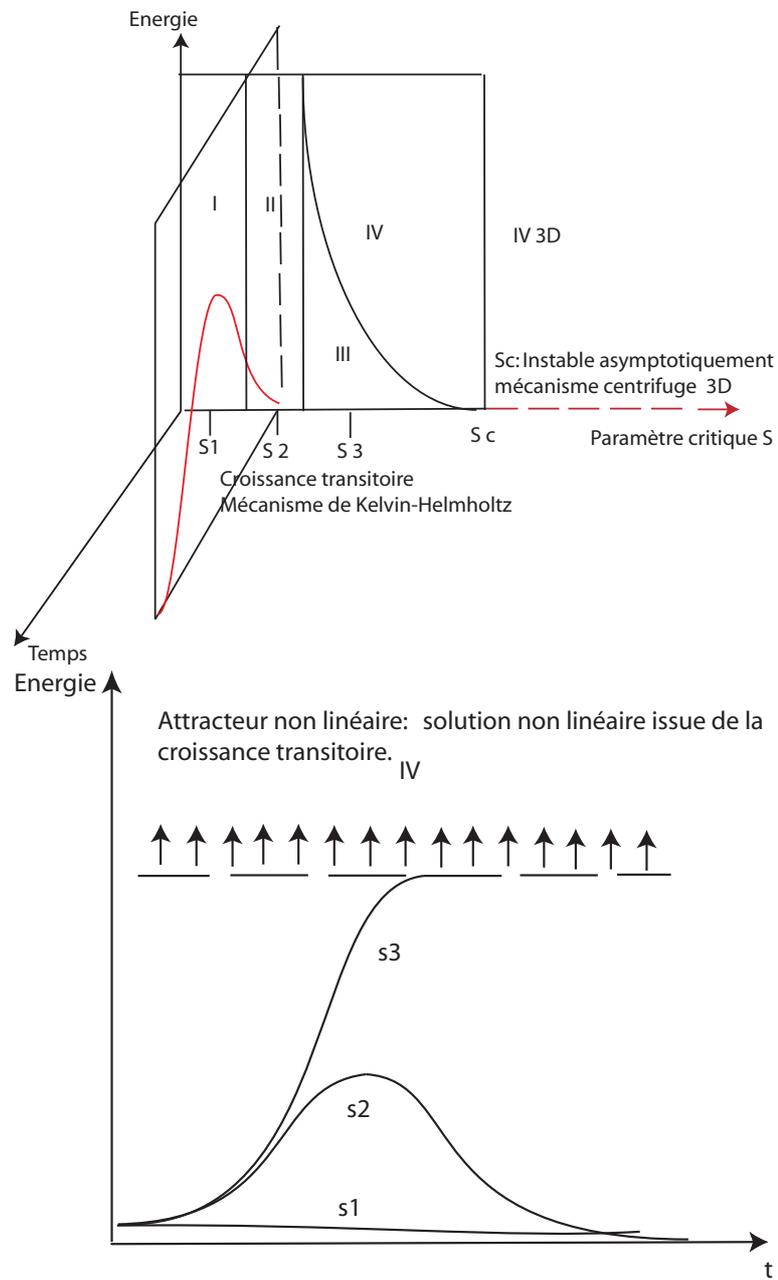


FIG. 8.16 – Diagramme de bifurcation de notre écoulement décollé laminaire de plaque plane. La région *I* est stable monotoniquement. La région *II* n'est pas monotoniquement stable mais asymptotiquement stable. La région *III* est conditionnellement stable et dépend de la croissance transitoire, de l'amplitude de la perturbation initiale et de l'existence d'un attracteur des effets non linéaires. L'écoulement décollé peut alors bifurquer vers la région *IV*, ce qui est illustré sur la deuxième figure. Enfin, la région *IV3D* est globalement instable sous l'effet d'un mécanisme centrifuge .

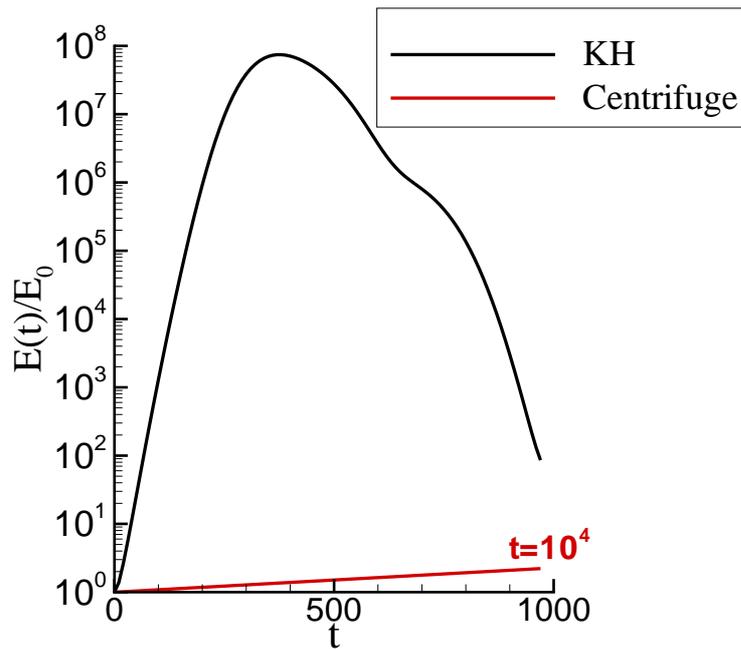


FIG. 8.17 – Comparaison des échelles de temps associées aux mécanismes de Kelvin-Helmholtz associé à une croissance algébrique et centrifuge associé à une croissance exponentielle.

Perspectives

Plusieurs perspectives peuvent donc être proposées. Tout d'abord, nous avons souligné les hauts niveaux d'énergie liés à la perturbation optimale, obtenus par la réduction de modèle. Ainsi, la prise en compte d'une saturation du paquet d'onde, à travers par exemple une équation d'amplitude, serait pertinente dans l'élaboration du modèle réduit. En outre, l'influence des effets non linéaires pourrait alors être déterminante dans la compréhension de la bifurcation d'un tel écoulement qui pourrait peut-être invalider le mécanisme asymptotique tridimensionnel. Ainsi, des simulations numériques directes plus approfondies, en faisant varier par exemple l'amplitude de la perturbation, seront alors nécessaires pour évaluer la pertinence des divers scénarii. En particulier, l'analyse de la pertinence de la perturbation optimale, à savoir si le système sélectionne plutôt cette perturbation qu'une autre, par simulation numérique directe, sera déterminante.

Puis, une étude de la sensibilité du mode instable 3D, similaire à celle proposée par Giannetti & Luchini [43] pourrait révéler un forçage pertinent pour déclencher cette instabilité globale. Une deuxième étude en cours de publication par Olivier Marquet est dédiée à une telle analyse de sensibilité sur un écoulement décollé au sein d'un canal [61].

Notamment, l'analyse du mode adjoint pourrait identifier une condition initiale optimale pour déclencher ce mécanisme centrifuge [29], afin d'atteindre des niveaux d'énergie élevés plus rapidement et peut être entrer en compétition avec le phénomène de Kelvin-Helmholtz (figure 8.18). Une première analyse représentée sur la figure 8.18 permet tout de même d'apporter une réponse préliminaire à l'influence du mode adjoint dans le déclenchement du mécanisme centrifuge. En effet, l'énergie du mode direct et de son adjoint paraît localisée relativement au même endroit contrairement aux modes F1, F2 et F3 étudiés dans la partie bidimensionnelle du décollement. Ainsi, le gain d'énergie attendu en injectant le mode adjoint ne doit être que substantiel.

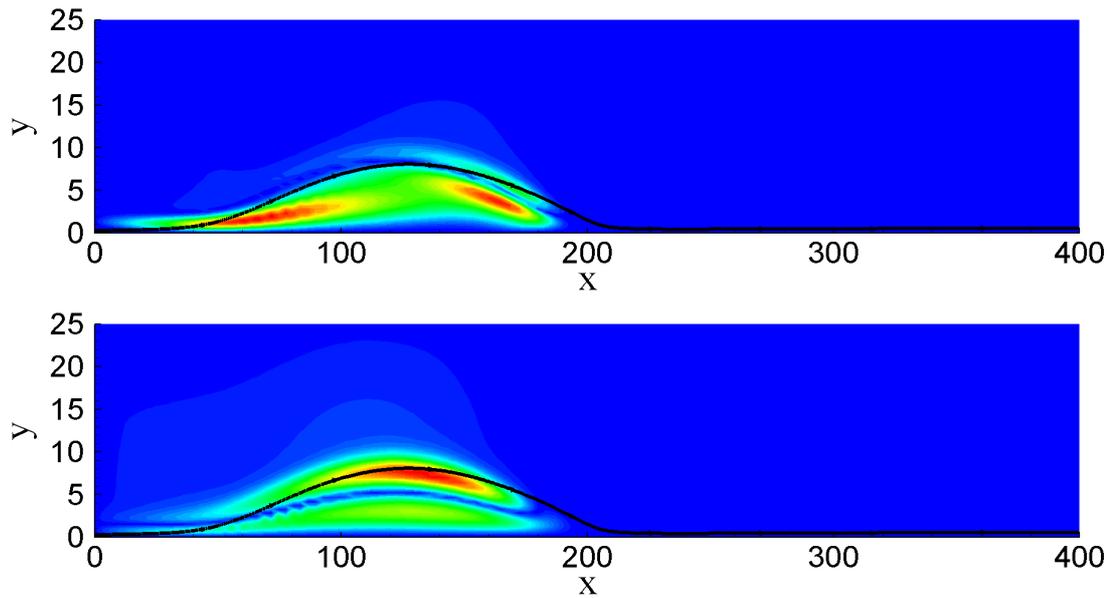


FIG. 8.18 – Etude préliminaire de la structure spatiale du mode adjoint global $|\hat{u}|$ et $|\hat{w}|$ (en haut et en bas respectivement) pour le champ D3 avec $\beta = 0.1$, équivalent au vecteur propre à gauche du problème de stabilité linéaire globale. Nous pouvons remarquer que ce dernier est principalement localisé dans la bulle, indiquant une condition initiale optimale pour le déclenchement du mécanisme centrifuge.

En outre, la réduction de modèle, associée à la base de modes globaux, pourrait aussi s'avérer pertinente, dans une optique de contrôle en boucle ouverte. Notamment, son utilisation dans l'élaboration d'actionneurs permettant de réduire cette forte augmentation d'énergie et ainsi retarder l'apparition de la turbulence, pourrait trouver certaines applications au sein de configurations industrielles.

Enfin, nous concluons sur une dernière remarque, relative aux catégories de bulbes identifiées dans la première partie. Les caractéristiques observées au cours de ce mémoire semblent être des propriétés de bulbes courts. Néanmoins, si nous nous référons aux travaux de Gaster [39], l'apparition d'une basse fréquence instable au sein d'un bulbe long paraissait être responsable de la modification du comportement de ce dernier. Or, nous avons remarqué un mécanisme provoqué par interférences entre modes globaux, aboutissant au déclenchement d'une basse fréquence amortie. Bien que l'existence physique de cette dernière n'ait pas encore été prouvée, il est possible qu'il y ait un lien entre la taille de la bulle et ce phénomène instationnaire global. Un éclaircissement de cette hypothèse constitue une perspective intéressante de ce travail.

Annexes

Annexe A

Principe de la méthode d'Arnoldi et approximation du pseudospectre.

A.1 Méthode d'Arnoldi.

Les problèmes aux valeurs propres résultants de l'analyse de stabilité linéaire globale font intervenir des matrices de très grandes tailles. Les méthodes classiques de type QR ne sont alors plus efficaces pour résoudre de tels systèmes. L'idée de la méthode d'Arnoldi est donc de projeter le problème original sur un sous espace de Krylov de dimension nettement inférieure, et de résoudre ce dernier dans cet espace.

Afin de simplifier les notations, le problème aux valeurs propres : $\mathbf{A}X = \lambda X$ est considéré, avec λ , la valeur propre et X le vecteur propre. La matrice \mathbf{A} est prise de dimension n . Soit le sous espace de Krylov \mathcal{K} de dimension k engendré par $\text{vect}(X_0, \mathbf{A}X_0, \dots, \mathbf{A}^k X_0)$ avec X_0 un vecteur de départ. Une projection orthonormale, à l'aide d'un processus d'orthogonalisation de la base précédente, de type Gram Schmidt est ici effectuée. Soit la base orthogonale \mathbf{V}_k , il vient :

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_k\mathbf{H}_k + f_k e_k^t \quad (\text{A.1})$$

où apparaît la matrice de Hessenberg supérieure \mathbf{H}_k ⁶³, et un résidu $f_k e_k^t$, où e_k est le $k^{\text{ième}}$ vecteur colonne de la matrice identité de dimension n : \mathbf{Id} . Le processus itératif consiste donc à annuler le résidu $f_k e_k^t$. La matrice \mathbf{H}_k est ainsi semblable au problème de départ et fournit une bonne approximation des valeurs propres de plus grand module.

L'algorithme utilisé au cours de cette thèse s'appuie sur la librairie ARPACK [54] utilisant une méthode "Implicitly Restarted Arnoldi", basée sur un choix judicieux de X_0 . Afin de se focaliser plus particulièrement sur la partie la plus significative du spectre, la méthode d'Arnoldi est combinée à une transformation "shift et inverse". Le problème aux valeurs propres précédent est transformé de la manière suivante :

Soit μ le paramètre de décalage, $\mathbf{A}X = \lambda X$ peut s'écrire : $\mathbf{A}X = (\mu - \lambda) X + \mu X$. D'où le problème original se transforme en : $\frac{1}{(\mathbf{A} - \mu\mathbf{Id})} = \frac{1}{\lambda - \mu} X$. La recherche des valeurs propres de plus grand module par la méthode d'Arnoldi, conduit donc à étudier le spectre voisinant la cible choisie.

Enfin, une décomposition LU de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})$ au début de l'algorithme permet d'obtenir un algorithme performant dans la construction du sous espace de Krylov, à l'aide d'une résolution successive du système linéaire : $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}) X = Y$.

⁶³Une matrice est sous la forme de Hessenberg supérieure si et seulement si ses composantes : $h_{i,j}$ sont nulles pour $i > j + 1$

A.2 Approximation du Pseudospectre par la matrice de Hessenberg.

Nous rappelons brièvement dans cette annexe, la définition du pseudospectre. Soit le problème aux valeurs propres généralisé issu de l'analyse de stabilité linéaire globale : $(\mathbf{A} - i\Omega\mathbf{B})\hat{\mathbf{q}} = 0$, avec Ω la pulsation complexe et $\hat{\mathbf{q}}$ la fonction propre. Pour une valeur ϵ , le pseudospectre Λ_ϵ relatif au problème précédent est défini par l'ensemble suivant :

$$\Lambda_\epsilon = \left\{ z \in \mathcal{C} : \left\| (z\mathbf{B} - \mathbf{A})^{-1} \right\| \geq \epsilon^{-1} \right\} \quad (\text{A.2})$$

En prenant la norme L_2 , il vient :

$$\Lambda_\epsilon = \{ z \in \mathcal{C} : \sigma_{\min}(z\mathbf{B} - \mathbf{A}) \leq \epsilon \} \quad (\text{A.3})$$

où σ_{\min} représente la plus petite valeur singulière. L'ensemble des niveaux ϵ nécessite alors un calcul de valeurs singulières en chaque point du plan complexe (Ω_r, Ω_i) . Un tel calcul est donc impossible pour les tailles de matrices considérées.

En s'appuyant sur les travaux numériques et théoriques de Tho & Trefethen [86] relatifs à l'approximation du pseudospectre, nous allons approcher ce dernier à l'aide de la matrice de Hessenberg. La démarche est analysée sur un cas $1D$ où le calcul exact n'est pas trop coûteux.

Pour cela, un écoulement de Poiseuille est considéré, discrétisé suivant 200 points de collocation spectrale. Le cas étudié est au nombre de Reynolds 10000 pour une valeur de $\alpha = 0.1$ et $\beta = 0$. Une méthode shift inverse est utilisée. Ainsi, en considérant par exemple une cible égale à 0, le pseudospectre associé au problème $(\mathbf{A} - i\Omega\mathbf{B})\hat{\mathbf{q}} = 0$, peut être approximé par l'inverse de la matrice de Hessenberg $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{-1}$ ([86]). Si une autre cible est choisie, un simple décalage suffit pour se ramener au problème précédent.

Une comparaison du pseudospectre obtenu par résolution du problème exact et l'approximation issue de la matrice de Hessenberg $\Lambda_\epsilon(\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{-1})$ est représentée sur la figure A.1, où un sous espace de Krylov de dimension 100 est utilisé. La dimension du sous espace est ainsi 6 fois inférieure au problème de départ.

Il peut être observé que l'approximation est relativement bonne, en particulier sur les niveaux les plus sensibles du pseudospectre. Une telle analyse est alors utilisée dans l'approche globale de la partie 1 et 2.

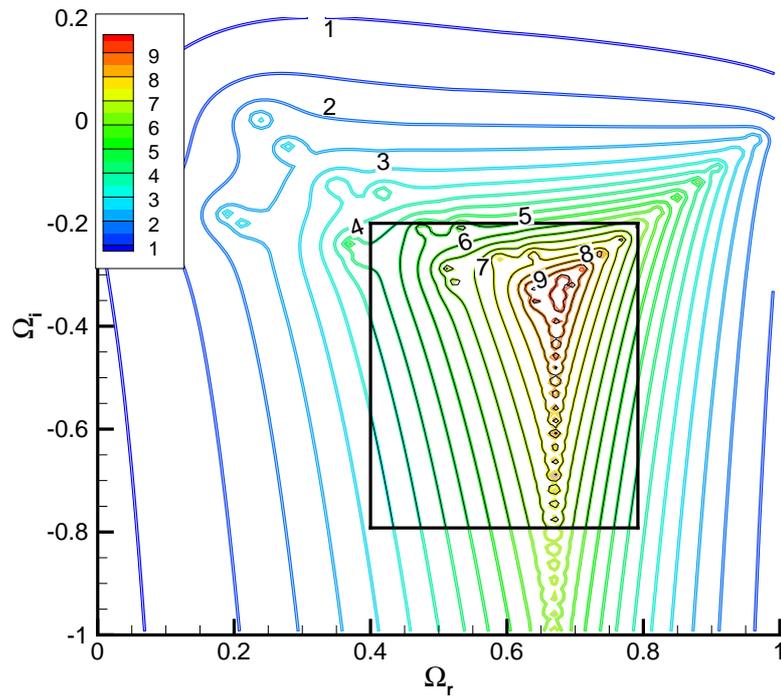


FIG. A.1 – Comparaison du pseudospectre obtenu par la résolution exacte (encadrée) et l’approximation à l’aide de la matrice de Hessianberg. L’écoulement de Poiseuille au nombre de Reynolds 10000 est considéré. Les nombres d’onde longitudinaux et transverses sont fixés à : $\alpha = 0.1$, $\beta = 0$. Les niveaux en ϵ sont représentés suivant une échelle logarithmique : $-\log_{10}$. Le sous espace considéré est de dimension 100. Deux cibles sont testées $\Omega_1 = (0.4, 0.0)$ et $\Omega_2 = (0.0, 0.2)$. Nous observons ainsi une superposition des résultats.

Annexe B

Analyse de stabilité linéaire spatiale faiblement non-parallèle : PSE.

Cette annexe sera consacrée à la présentation de la méthode PSE employée au cours du mémoire. Celle-ci s'appuie principalement sur les travaux de [7] et [56].

B.1 Hypothèses et équations.

Soit $\mathbf{q}(x, y, z, t) = {}^t(u, v, w, p)(x, y, z, t)$, le vecteur perturbation. La prise en compte de la dépendance en x , dans l'étude du problème spatial, nous amène à considérer la forme d'onde suivante :

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(x, y) e^{i\Theta(x, t)}$$

avec

$$\Theta = \int_{x_0}^x \alpha d\xi - \Omega t + \beta z$$

(B.1)

Les équations de Navier-Stokes linéarisées aboutissent alors au système suivant :

$$\begin{aligned} & -i\Omega\tilde{u} + \tilde{u}\frac{\partial U}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial U}{\partial y} + i\alpha\tilde{u}U + U\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + V\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{p}}{\partial x} + i\alpha\tilde{p} \\ & - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}i\alpha + i\frac{\partial\alpha}{\partial x}\tilde{u} - \alpha^2\tilde{u} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y^2} - \beta^2\tilde{u} \right) = 0 \end{aligned} \quad (B.2a)$$

$$\begin{aligned} & -i\Omega\tilde{v} + \tilde{u}\frac{\partial V}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial V}{\partial y} + i\alpha\tilde{v}U + U\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + V\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{p}}{\partial y} \\ & - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}i\alpha + i\frac{\partial\alpha}{\partial x}\tilde{v} - \alpha^2\tilde{v} + \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial y^2} - \beta^2\tilde{v} \right) = 0 \end{aligned} \quad (B.2b)$$

$$\begin{aligned} & -i\Omega\tilde{w} + i\alpha\tilde{w}U + U\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} + V\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y} + i\beta\tilde{p} \\ & - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}i\alpha + i\frac{\partial\alpha}{\partial x}\tilde{w} - \alpha^2\tilde{w} + \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y^2} - \beta^2\tilde{w} \right) = 0 \end{aligned} \quad (B.2c)$$

$$i\alpha\tilde{u} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\beta\tilde{w} = 0 \quad (B.2d)$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse, d'une évolution lente suivant la direction de l'écoulement. Nous introduisons pour cela une nouvelle échelle : $X = \epsilon x \sim y$, où ϵ est un petit

paramètre. Ainsi, $\frac{\partial}{\partial x}$, et V sont de l'ordre 1 en ϵ . Enfin, en suivant les travaux de [7], nous fixons son ordre de grandeur à $\epsilon \sim \frac{1}{Re}$.

La correction non parallèle à l'ordre 1 en ϵ aboutit au système suivant :

$$\mathbf{A}_p \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_p \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial y} + \mathbf{C}_p \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{q}}}{\partial^2 y} + \mathbf{D}_p \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.3})$$

avec :

$$\mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & 0 & i\alpha \\ \frac{\partial V}{\partial x} & c_1 + \frac{\partial V}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & i\beta \\ i\alpha & 0 & i\beta & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}_p = \begin{pmatrix} V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 1 \\ 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{Re} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{Re} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Re} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{D}_p = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 & 1 \\ 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\text{avec } c_1 = -i\Omega + i\alpha U + \frac{1}{Re} (+\alpha^2 + \beta^2)$$

Afin de séparer les échelles selon x , celle liée à la fonction d'amplitude et celle associée à l'exponentielle, Herbert *et al.* [48] proposèrent d'introduire une condition dite de normalisation :

$$\int_0^{L_y} (\tilde{u}\tilde{u}^* + \tilde{v}\tilde{v}^* + \tilde{w}\tilde{w}^*) dy = 0 \quad (\text{B.5})$$

où $*$ représente le transconjugué, et L_y la hauteur du domaine. Les équations (B.3) définissent ainsi un problème de condition initiale, où à chaque pas d'espace la condition (B.5), doit être vérifiée. De ce fait, la séparation des échelles liées aux fonctions d'amplitude et α est respectée.

B.2 Méthode de Résolution, problème lié à la pression.

Une méthode de collocation spectrale, décrite dans la partie 1, est utilisée pour la discrétisation suivant y . Un schéma d'Euler retardé permet ensuite l'avancement suivant x . Depuis les travaux de Li & Malik [56], il est connu que la nature des équations en formulation primitive n'est pas parabolique. Ce caractère elliptique provient du terme de dérivée de pression. De ce fait, nous sommes restreint sur le choix du pas, où celui-ci est contraint par :

$$\delta x_{min} = \frac{1}{|\alpha_r|} \quad (\text{B.6})$$

Plusieurs solutions existent pour remédier à ce problème. Nous pouvons en citer trois :

- Adapter l'avancement spatial à chaque pas, de manière à respecter la condition δx_{min} .
- Négliger le terme $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$, dans les équations (B.4).
- Ajouter un terme de l'ordre $O(\epsilon^2)$, permettant de supprimer la restriction du pas [7].

Nous nous concentrerons uniquement ici aux deux premières propositions. Enfin, une méthode de Newton autorise la convergence de (B.5) à chaque x .

B.3 Illustration sur la couche limite de Blasius.

Afin d'illustrer le propos précédent, un test classique sur les ondes TS d'une couche limite de Blasius est réalisée. Nous reprenons les paramètres et les notations des articles [56] et [7]. Les échelles de références sont ici :

- U_e , la vitesse en écoulement libre.
- $L = \sqrt{(\nu x_0/U_e)}$, avec x_0 la position initiale sur la plaque.

Nous définissons la fréquence adimensionnée suivante :

$$F = \frac{\nu}{U_e^2} \Omega \quad (\text{B.7})$$

avec ν , la viscosité cinématique. Le nombre de Reynolds est fixé à $Re = \frac{U_e L}{\nu} = 500$, et la fréquence à $F = 0.7 \times 10^{-4}$. Ainsi, le nombre d'onde en x_0 , obtenu par résolution de $\mathcal{D}(\Omega, \alpha) = 0$ est de 0.106. Nous nous intéressons ici à l'évolution du taux d'amplification suivant $Re = 500$ et $Re = 1000$, par intégration des équations PSE (B.3). En supposant une variation faible du nombre d'onde, le critère sur le pas est de $\delta x_{min} \approx 9.5$. Nous réalisons alors l'avancement en x , pour 3 pas d'espace avec ou sans $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$. Enfin, le critère de non parallélisme, noté γ est basé sur la position où $|\tilde{u}|$ atteint son maximum (B.8).

$$\sigma = -\alpha_i(x) + \text{Re} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \quad (\text{B.8})$$

Le résultat est illustré sur la figure B.1. Nous pouvons observer qu'en dessous du pas critique des oscillations apparaissent lorsque nous gardons le terme de pression. La suppression de ce dernier permet alors une diminution très significative de δx_{min} , en ne modifiant pas la valeur du taux d'amplification ⁶⁴. Ce choix est par conséquent adopté tout au long du mémoire ⁶⁵.

⁶⁴Cas similaire présenté dans [56] et [7].

⁶⁵la courbe neutre de Blasius montrée dans la première partie est réalisée par ce code PSE.

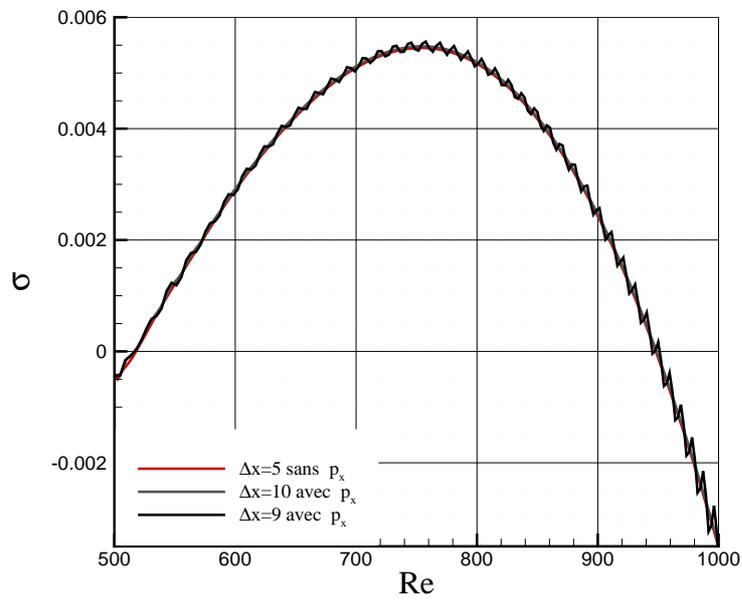


FIG. B.1 – Influence du terme \tilde{p}_x et de δx_{min} sur le taux d'amplification des ondes TS d'une couche limite de Blasius à la fréquence $F = 0.7 \times 10^{-4}$.

Annexe C

Discrétisation spatiale : méthode spectrale, généralité et collocation.

Les problèmes différentiels associés à l'étude de stabilité linéaire locale ou globale sont discrétisés par une méthode spectrale. Nous allons dans cette section détaillée plus rigoureusement, la méthode spectrale choisie. Nous nous plaçons dans un cadre général avec :

$$LH - f = 0 \quad (\text{C.1})$$

où L est un opérateur différentiel, et f le terme source. De manière à résoudre numériquement l'équation (C.1), nous discrétisons alors la quantité H , solution de (C.1). Par commodité, la quantité H ne dépend ici que d'une unique variable, notée x . H est alors approchée par H_N , via les N premiers termes d'une série, de la manière suivante :

$$H_N = \sum_{k=0}^N \hat{H}_k \varphi_k(x) \quad (\text{C.2})$$

Les $\varphi_k(x)$ sont appelées les fonctions de base formant ainsi une base de l'espace vectoriel considéré et \hat{H}_k , les coefficients d'expansion qui sont à déterminer. Nous définissons un produit scalaire, noté \langle, \rangle_s . Les fonctions de base sont choisies de sorte à former une base orthogonale, liée à ce produit scalaire :

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle_s = c_k \delta_{k,l} \quad (\text{C.3})$$

avec c_k une constante et $\delta_{k,l}$ le symbole de Kroenecker. Les méthodes spectrales sont alors définies à l'aide d'une quantité, appelée le résidu R_N , qui va permettre de minimiser l'erreur globalement, entre H_N et H :

$$R_N(x) = H - H_N \quad (\text{C.4})$$

$$\text{ou encore } R_N(x) = LH_N - f$$

L'idée consiste donc à annuler le résidu, via une base de fonctions tests, notées ϕ_i :

$$\langle R_N, \phi_i \rangle_s = 0 \quad (\text{C.5})$$

avec $i \in I_N$, où la dimension de l'espace I_N dépend de la méthode spectrale employée. Le choix de la méthode spectrale va ainsi reposer sur la sélection des fonctions tests. Trois types de méthode existent, Galerkin et Tau, où les fonctions tests sont égales aux fonctions de bases, puis les méthodes de collocation où $\phi_i = \delta(x - x_i)$, avec les points de collocation x_i . Dans

ce dernier cas, le résidu est par conséquent strictement égal à zéro aux points de collocation. Nous nous orientons dans ce mémoire sur cette dernière méthode. Nous résolvons ainsi le problème (C.1) directement dans l'espace physique.

Détaillons maintenant le choix des fonctions de base et de la grille des points de collocation. A la vue du choix des fonctions tests, les H_k sont pris comme étant les valeurs de H aux points de collocation x_i , avec ici $I_N = \{0, 1, \dots, N\}$. De ce fait, nous obtenons les fonctions de base $\varphi_k(x)$ qui vérifient l'égalité suivante :

$$H_N(x) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) H(x_k), \quad \begin{cases} \varphi_k(x) = \frac{\varpi(x)}{(x-x_k)\varpi'(x_k)} \\ \varpi(x) = A \prod_{i=0}^N (x-x_i), \quad A \neq 0 \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

On reconnaît ici la formule d'interpolation de Lagrange puisque $\varphi_k(x)$ peut se reformuler de la manière suivante :

$$\varphi_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^N \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}, \quad \begin{cases} \frac{\varpi(x)}{(x-x_k)} = A \prod_{i=0, i \neq k}^N (x-x_i) \\ \varpi'(x_k) = A \prod_{i=0, i \neq k}^N (x_k-x_i) \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

De ce fait, le système différentiel (C.1) peut être discrétisé à l'aide d'opérateurs de dérivées qui sont obtenus via ce polynôme. En effet, il est évident que :

$$\frac{d}{dx} = \sum_{k=0}^N \varphi'_k(x) H(x_k), \quad (\text{C.8})$$

ce qui en chaque point du maillage $x = x_i$, s'écrit :

$$\frac{d}{dx}(H_N)(x_i) = \sum_{k=0}^N \varphi'_k(x_i) H(x_k), \quad i = \{0, 1, \dots, N\} \quad (\text{C.9})$$

Posons $\mathbf{H} = (H(x_0), H(x_1), \dots, H(x_N))$, le vecteur solution, composé des valeurs de H aux points de collocation. Soit l'opérateur matriciel \mathbf{D} de taille $(N+1) \times (N+1)$, dont les éléments d_{ij} sont tels que :

$$d_{ij} = \varphi'_j(x_i), \quad 0 \leq i, j \leq N \quad (\text{C.10})$$

avec

$$\varphi'_j(x) = \frac{\varpi'(x)}{(x-x_j)\varpi'(x_j)} - \frac{\varpi(x)}{(x-x_j)^2\varpi'(x_j)} \quad (\text{C.11})$$

La dérivée de H aux $N+1$ points du maillage est alors obtenue par une simple multiplication de l'opérateur \mathbf{D} :

$$(\mathbf{H})' = \mathbf{D}\mathbf{H}, \quad (\text{C.12})$$

Il est trivial de remarquer que :

$$\mathbf{H}'' = \mathbf{D}^2\mathbf{H}, \quad (\text{C.13})$$

La rigidité de ce type de méthode réside dans le traitement de l'erreur commise entre la fonction H et son polynôme d'interpolation (H_N) , qui est de la forme :

$$H(x) = (H_N)(x) + \frac{H^{N+1}(\xi) \varpi(x)}{(N+1)! A}, \quad \xi = \xi(x) \in [a, b] \quad (\text{C.14})$$

Pour obtenir une précision suffisante, il faut minimiser le second terme du membre de droite de (C.14). Nous ne pouvons bien sûr pas modifier la fonction H , ni augmenter le nombre de points du maillage indéfiniment. Notre seul degré de liberté réside dans le choix du polynôme $\varpi(y)/A$, c'est-à-dire dans la grille qui va servir à l'interpolation. Il a été montré que cette erreur était minimale pour des grilles basées sur des polynômes de Chebyshev (grilles dites de Gauss ou de Gauss-Lobatto), dont les points correspondent aux racines de ces dits polynômes ([18]). Ce choix est appelé classiquement méthode de collocation spectrale Chebyshev.

C.1 Collocation spectrale Chebyshev.

Soit la base de polynômes de Chebyshev définis par : $T_k(x) = \cos(k \cos^{-1} \xi)$ avec $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ et $\xi \in [-1, 1]$. Les $N + 1$ extrema de T_N définissent les points dits de Gauss-Lobatto de la manière suivante :

$$\xi_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j \in 0, \dots, N \quad (\text{C.15})$$

Ces points illustrent la grille de discrétisation sur laquelle le problème (C.1) est résolu. Les fonctions de base sont alors caractérisées par :

$$\varphi_j'(\xi) = \left(\frac{1 - \xi^2}{\xi - \xi_j}\right) (-1)^{j+1} \frac{T_N'(\xi)}{N^2 c_j} \quad (\text{C.16})$$

où T_N' désigne la dérivée de T_N et où la suite c_n est définie par :

$$c_0 = c_N = 2, \quad c_j = 1, \text{ pour } j \in \{1..N-1\} \quad (\text{C.17})$$

C.2 Calcul de l'opérateur dérivation.

Dans ce cas, les composantes $D_{i,j}$ de l'opérateur de dérivation \mathbf{D} sont égales à :

$$D_{ij} = \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j (\xi_i - \xi_j)} \text{ pour } i \neq j$$

$$D_{ii} = -\frac{\xi_i}{2(1 - \xi_i^2)} \text{ pour } i \in \{1, \dots, N-1\}$$

$$D_{00} = -D_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6}$$

avec $c_i = 2$ pour $i = 0$ et $i = N$, $c_i = 1$ pour $i \in \{1..N-1\}$.

C.3 Analyse globale, traitement des modes parasites de pression.

Le traitement de la pression pour des écoulements incompressibles sur des domaines rectangulaires, via une méthode de collocation spectrale Chebyshev/Chebyshev, a fait l'objet de nombreuses études ([18], [67], [68]). En effet le problème de perturbation bidimensionnelle fait intervenir 8 modes parasites. Nous pouvons écrire la pression dans le domaine spectral, suivant la base de polynômes de Chebyshev de la forme suivante :

$$\hat{p}(x, y) = \sum_{l=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_x} T_k(x) T_l(y) \hat{p}_{k,l} \quad (\text{C.18})$$

avec $T_k(x) = \text{Cos}(k \text{Cos}^{-1} x)$. La perturbation de pression dans le système (2.13) n'apparaît uniquement sous la forme de gradient dans les équations pour $\beta = 0$. Par conséquent, les modes $T_{N_x}(x)T_0(y)$, $T_0(x)T_{N_y}(y)$ et $T_{N_x}(x)T_{N_y}(y)$ (modes ligne, colonne et échiquier) sont notés comme parasites car ils n'ont aucune influence sur le champ de perturbation de vitesse. A ces modes, nous pouvons ajouter les modes de coins, définis par $(1 \pm x)T'_{N_x}(1 \pm y)T'_{N_y}$, et le mode constant $T_0(x)T_0(y)$, représentant la valeur moyenne de la perturbation liée au champ de pression (les détails sont décrits dans [67], [18] and [68]) Le traitement de la pression revient alors à contraindre ces différents modes dans le système (2.13). Pour cela nous suivons le traitement réalisée par Philips & Roberts [68] dans leurs simulation numérique directe d'une cavité entraînée et une discussion privée avec Jérôme Hoepffner dans un problème de stabilité globale. Les modes ligne, colonne, échiquier et constant sont fixés à zéro :

$$\hat{p}_{0,0} = \hat{p}_{N_x,0} = \hat{p}_{N_x,N_y} = \hat{p}_{0,n_y} = 0. \quad (\text{C.19})$$

Utilisant une méthode de collocation spectrale, nous écrivons les relations (C.19) dans l'espace physique [67] :

$$\hat{p}_{i,j} = \frac{2}{N_x N_y} \frac{1}{c_i c_j} \sum_{p=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_y} \hat{p}(x_j, y_l) T_i(x_p) T_j(y_l) \frac{1}{c_p c_l} \quad (\text{C.20})$$

avec

$$c_k = \begin{cases} 2 & \text{si } k = 0 \text{ ou } N_x \text{ ou } N_y \\ 1 & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

De ce fait, nous imposons l'équation de continuité sur les bords du domaine A,B,C,D excepté en 4 points, où sont contraints les modes $T_{N_x}(x)T_0(y)$, $T_0(x)T_{N_y}(y)$, $T_{N_x}(x)T_{N_y}(y)$ et $T_0(x)T_0(y)$ (voir figure C.1), et sur les coins où cette dernière est automatiquement vérifiée.

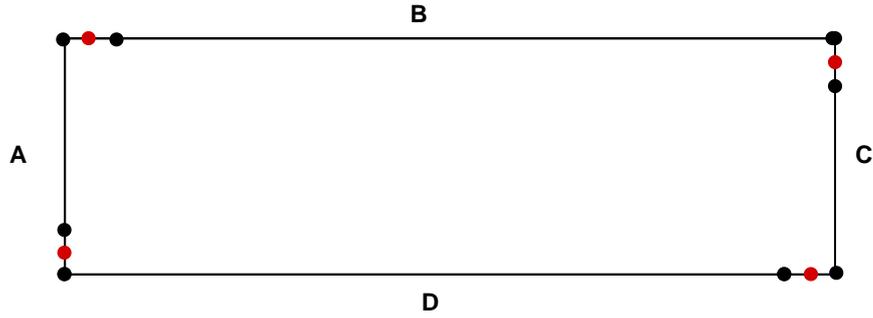


FIG. C.1 – Illustration en rouge des points utilisés pour l'imposition des contraintes sur la pression, dans le cas de perturbations bidimensionnelles.

C.4 Multi-Domaines.

Bien que les méthodes spectrales prennent en compte la globalité de l'écoulement, il peut s'avérer pertinent dans certains cas d'adapter la grille de Gauss-Lobatto, de manière à concentrer les points du maillage où la fonction propre est fortement localisée. Nous employons pour cela une méthode de multi-domaines. La performance d'une telle technique a fait l'objet d'une publication par Malik [59], dans une analyse de stabilité locale de couche limite supersonique.

Nous nous plaçons ici dans un cas global d'écoulement de type couche limite de plaque plane. Trois ensembles sont ici considérés, notés I, II et III. Le domaine physique est décomposé suivant ces trois ensembles, chacun possédant une répartition de Gauss-Lobatto. Considérons tout d'abord le cas *a*) de la figure C.2 et imaginons que nous souhaitons concentrer la résolution au sein de II. Nous écrivons ainsi les équations suivant chacun des ensembles :

$$(\mathcal{L}_G)_i \hat{\mathbf{q}}_i = 0, \quad i \in \{I, II, III\} \quad (\text{C.22})$$

où $(\mathcal{L}_G)_I$, $(\mathcal{L}_G)_{II}$ et $(\mathcal{L}_G)_{III}$ sont les opérateurs et $\hat{\mathbf{q}}_I$, $\hat{\mathbf{q}}_{II}$ et $\hat{\mathbf{q}}_{III}$ les vecteurs propres définis dans les domaines I, II et III. Des conditions d'interfaces en x_1 et x_2 permettent une communication entre I, II et III :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_i|_{x=x_j} - \hat{\mathbf{q}}_{i+1}|_{x=x_j} &= 0, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_i}{\partial x}|_{x=x_j} - \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{i+1}}{\partial x}|_{x=x_j} &= 0, \quad i \in \{I, II\}, \quad j \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

L'ordre des équations différentielles étudiées justifiant un raccord C_1 entre les domaines ([67]). Le problème aux valeurs propres peut être représenté d'une manière discrète sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{L}_G)_I & 0 & 0 \\ \text{interface} & 0 & 0 \\ 0 & \text{interface} & 0 \\ 0 & (\mathcal{L}_G)_{II} & 0 \\ 0 & \text{interface} & 0 \\ 0 & 0 & \text{interface} \\ 0 & 0 & (\mathcal{L}_G)_{III} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_M = 0 \quad (\text{C.24})$$

avec $\hat{\mathbf{q}}_M$ la représentation discrète de $\hat{\mathbf{q}} = {}^t(\hat{\mathbf{q}}_I, \hat{\mathbf{q}}_{II}, \hat{\mathbf{q}}_{III})$. Une telle procédure est employée au cours de la troisième partie sur l'influence d'une perturbation tridimensionnelle sur un

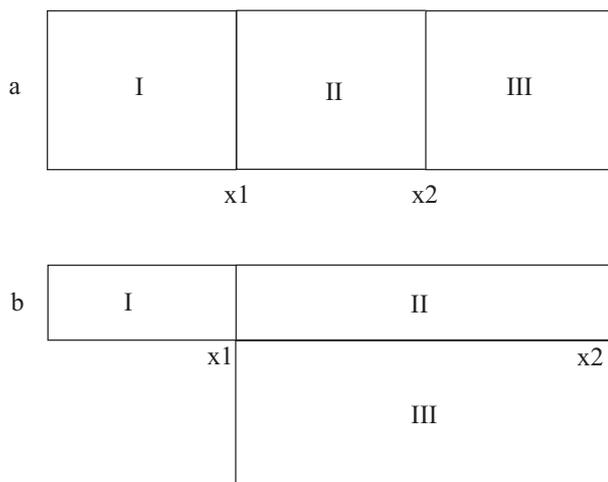


FIG. C.2 – Construction des ensembles pour une approche multi-domaines.

écoulement décollé. En outre, une approche similaire pourrait être étendue dans des cas plus compliqués, de manière à garder la précision spectrale. Le cas *b*) de la figure C.2 illustre un deuxième type de choix qui pourrait être par exemple adopté dans l'analyse d'une marche descendante.

Annexe D

Hypothèse d'un phénomène de vortex shedding. Illustration par une simulation numérique directe préliminaire.

Nous nous référons dans cette annexe aux notations utilisées au cours de la troisième partie de ce mémoire.

Cette annexe est une étude préliminaire relative à l'apparition de phénomènes instationnaires liés à une forte zone convective, au sein du champ de base. En effet, de nombreuses configurations, faisant intervenir de larges zones de recirculation, peuvent être sujettes à des mécanismes instationnaires, liés à la très forte nature convective de l'instabilité, et non par des propriétés absolues. Nous pouvons citer par exemple le cas d'un décollement derrière une marche, présentant à partir d'un certain nombre de Reynolds, des oscillations auto-entretenues, alors que celui-ci est globalement stable. Les calculs réalisés par Kaiktsis *et al.* [53] identifièrent un tel phénomène, résultant de la présence d'un faible bruit numérique lié à la discrétisation des équations. Cette instationnarité s'est néanmoins révélée propre à l'écoulement, c'est à dire indépendante des paramètres de la simulation. Une telle suggestion fut aussi mise en évidence par Washito *et al.* [89] dans le cas d'un décollement de plaque plane.

Une hypothèse peut alors être suggérée. Nous avons pu observer à travers l'analyse du pseudospectre du décollement de plaque plane D3, que certaines fréquences se révélaient extrêmement sensibles aux excitations extérieures. En outre, les valeurs les plus sensibles du pseudospectre, sont apparues indépendantes de la longueur du domaine, identifiant un phénomène propre à la zone de recirculation. Ainsi, il est possible qu'à partir d'un paramètre critique, comme le nombre de Reynolds ou encore l'intensité du profil de suction, l'écoulement, globalement stable, sélectionne une des fréquences les plus sensibles, déclenchant une instationnarité. Aussi faible que soit le bruit numérique, la très grande sensibilité induirait alors des oscillations auto entretenues.

Afin d'illustrer cette hypothèse, une simulation préliminaire est réalisée pour le profil de suction associé à D3 avec $L_x = 500$ et un nombre de Reynolds légèrement supérieur, fixé à 213. Un maillage 500×150 et un pas de temps de 0.015 sont utilisés ⁶⁶. Afin d'éviter toutes réflexions sur la condition limite en sortie de domaine, la zone tampon décrite dans l'analyse

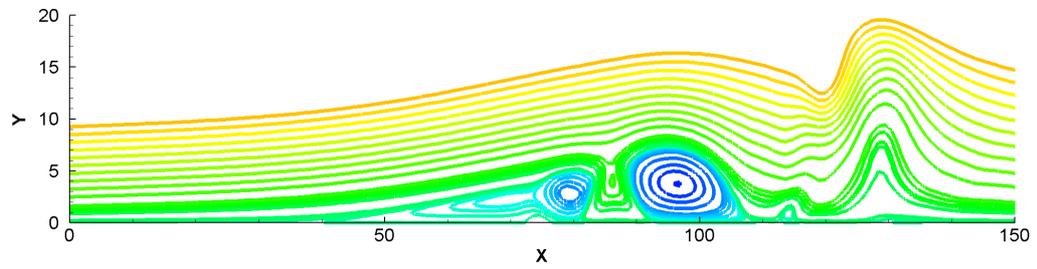
⁶⁶Nous pouvons comparer cette discrétisation à celle de Pauley *et al.* [66], dans un cas similaire. La résolution était alors de 256×128 , pour un ordre 2 en temps et en espace.

du régime transitoire, est utilisée au cours de cette simulation. La valeur de la vorticité de référence est prise égale à celle obtenue au nombre de Reynolds 200.

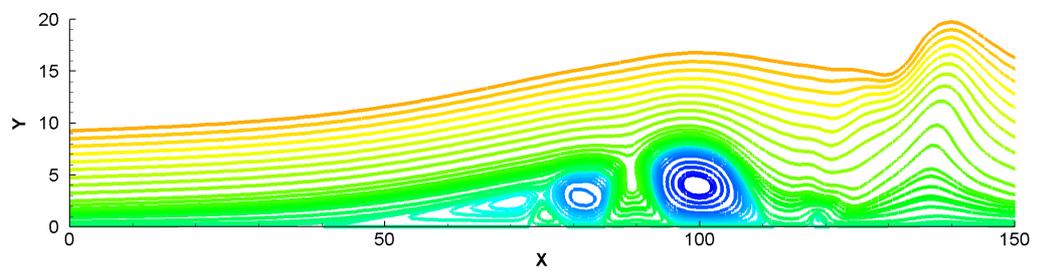
Après un régime transitoire, il apparaît une instationnarité liée au décollement. L'écoulement atteint par la suite un état saturé cyclique, caractérisé par un phénomène de vortex shedding, conduisant à une rupture de la zone de recirculation. Un cycle de l'écoulement instantané est représenté par les lignes de courant, sur la figure D.1. Celui-ci est caractérisé par l'apparition d'un tourbillon contra rotatif secondaire, se développant sur la figure D.1(a)   $x = 75$ qui pousse ainsi le tourbillon primaire, amenant un lâcher de structures à une certaine fréquence. Ce phénomène périodique se trouve ainsi être similaire à celui observé par Pauley *et al.* [66] représenté sur les figures 1.7, dans la première partie de ce mémoire et aux expériences du IAG, illustrées dans l'introduction (figure 3). Le champ moyen, présenté sur la figure D.2 met en lumière des propriétés classiques, liées à l'instationnarité du décollement. En particulier, l'étendue de celui-ci se trouve nettement inférieure au champ stationnaire calculé au nombre de Reynolds $Re = 200$. Une comparaison des lignes de courant du champ moyen et du champ stationnaire D3 sur la figure D.2 illustre cette spécificité, observée sur de nombreuses configurations d'écoulements décollés de la littérature ([62] dans le cas d'une bosse, [66], [2], [89]), pour une plaque plane). En outre, la topologie du champ moyen est similaire à celle décrite dans la littérature (Horton figure 1.4, Gaster [39], ou encore Pauley *et al.* [66] et Washito *et al.* [89]). Près du point de décollement, une large zone d'eau morte apparaît, puis l'amont de la bulle moyenne se distingue par une très forte zone de recirculation. Ces descriptions confortent l'hypothèse que l'écoulement calculé, possèdent des propriétés semblables aux études précédentes. Par conséquent, le phénomène devrait être identique.

Dans le but de déterminer précisément la fréquence du cycle relatif aux figures D.1, une étude temporelle est menée sur l'écoulement. L'évolution de la vorticité à la paroi au centre du décollement moyen, à $x = 85$, est analysée sur une durée totale de $T_s = 5000$. Le signal est représenté sur la figure D.3, où une fréquence principale semble se préciser. Une transformée de Fourier temporelle est ainsi appliquée sur le signal, sur la durée T_s . Une fréquence dominante se distingue à $f \approx 0.0106$. Cette dernière peut être comparée aux fréquences obtenues par Pauley *et al.* et Washito *et al.*, en se ramenant au nombre de Strouhal défini par : $S_t = f(\theta/u_e)_{sep}$, où θ représente l'épaisseur de quantité de mouvement et u_e la vitesse extérieure. Cette quantité est évaluée au point de décollement et a pour valeur : $S_t \approx 0.009$. Cette valeur semble se situer légèrement au dessus de celles obtenues par Pauley : 0.00686 et Washito : 0.00756. Le nombre de Reynolds est ici relativement inférieur à ceux étudiés par les auteurs précédents (variant de 330   800 en considérant l'épaisseur de déplacement en entrée du domaine comme l'échelle de longueur de référence), et l'abaissement de ce dernier pourrait expliquer cette légère augmentation ([89]).

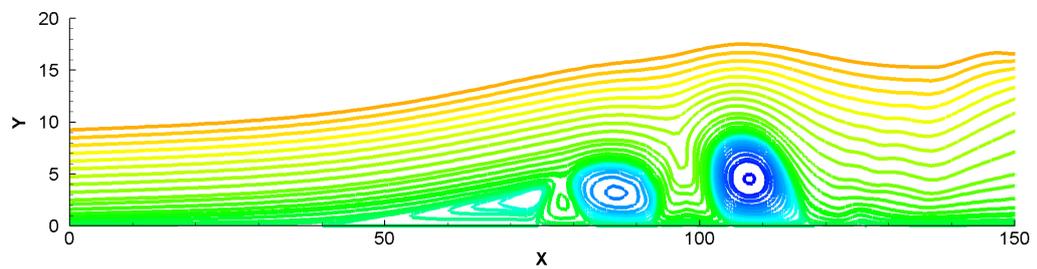
Calculons alors la pulsation du phénomène observé. Cette dernière est égale à $\Omega_r = 2\pi f \approx 0.067$. Nous pouvons ainsi remarquer que la valeur obtenue se situe dans la borne inférieure des fréquences les plus sensibles aux bruits extérieurs (figure 7.14). En supposant que le champ de base au nombre de Reynolds 213 ne soit que légèrement modifié par rapport à celui obtenu à $Re = 200$, il vient que le système semblerait sélectionner une des fréquences les plus sensibles, menant à un phénomène instationnaire auto-entretenu, même pour un écoulement globalement stable. Cette analyse DNS n'est encore qu'une étude préliminaire. Il faudrait notamment réaliser une série d'autres calculs pour évaluer l'influence de la discrétisation et de la taille du domaine sur la fréquence de l'instationnarité. Cependant, une étude du pseudospectre pourrait se révéler pertinente pour expliquer de tels phénomènes instationnaires, auto-entretenus, liés à la très forte sensibilité aux perturbations extérieures.



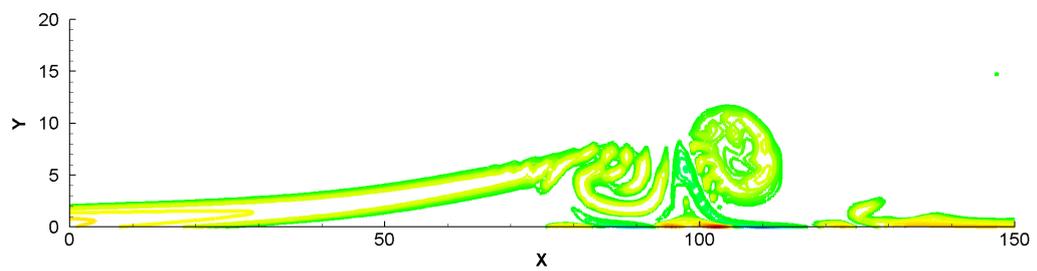
(a) Lignes de courant du champ instantané à $t=0$.



(b) Lignes de courant du champ instantané à $t=15$.



(c) Lignes de courant du champ instantané à $t=45$.



(d) Contour de vorticité du champ instantané à $t=45$.

FIG. D.1 – Evolution du champ décollé au nombre de Reynolds 213, sur une période.

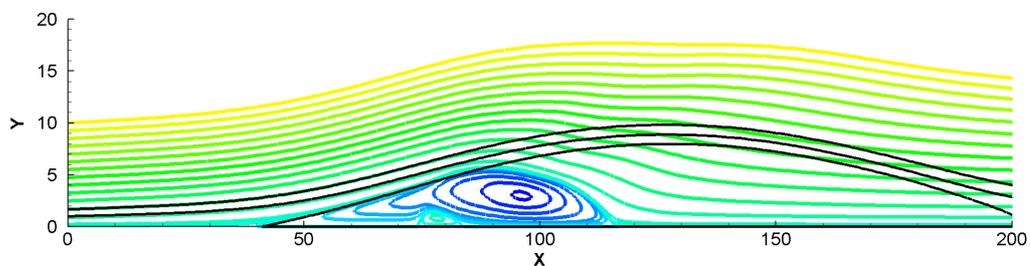


FIG. D.2 – Lignes de courant du champ moyen moyen. Les lignes de courant associées au champ convergé au nombre de Reynolds $Re = 200$ sont représentées en noir.

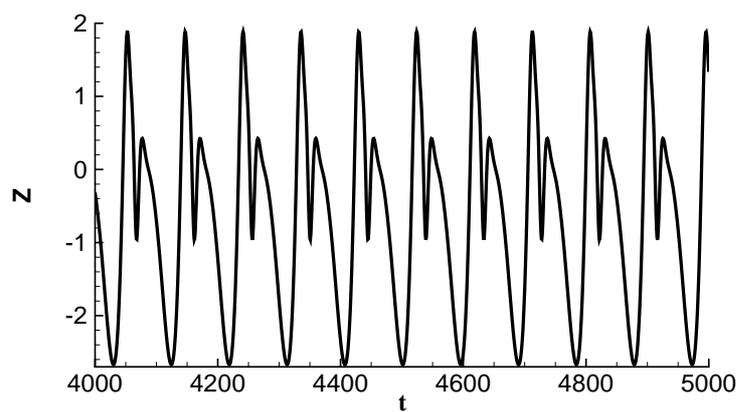


FIG. D.3 – Evolution temporelle de la vorticité à la paroi en $x = 85$, au nombre de Reynolds $Re = 213$.

Bibliographie

- [1] E. Å KERVIK, J. HOEPFFNER, U. EHRENSTEIN et U. HENNINGSON : Optimal growth, model reduction and control in a separated boundary layer flow using global eigenmodes. *J. Fluid Mech.*, 2007.
- [2] M. ALAM et N. D. SANDHAM : Direct numerical simulation of "short" laminar separation bubbles with turbulent reattachment. *J. Fluid Mech.*, 403:223–250, 1999.
- [3] F. ALIZARD et J.-C. ROBINET : Two dimensional temporal modes in nonparallel flows. Int. Conference on Boundary and Interior Layers, 2006.
- [4] F. ALIZARD et J.-C. ROBINET : Influence of 3d perturbations on separated flows. IUTAM Symposium on Unsteady Separated Flows and their Control, June 18-22, 2007, Corfu, Greece., 2007.
- [5] F. ALIZARD et J.-C. ROBINET : Spatially convective global modes in a boundary layer. *Physics of fluids*, 19:11, 2007.
- [6] A. E. ALVING et H. H. FERNHOLZ : Turbulence measurements around a mild separation bubble and downstream of reattachment. *J. Fluid Mech.*, 322:297–328, 1997.
- [7] P. ANDERSSON, D. S. HENNINGSON et A. HANIFI : On a stabilization procedure for the parabolic stability equations. *Journal of Engineering Mathematics*, 33:311–332, 1998.
- [8] D. BARKLEY, M. GOMES et D.H. GENDERSON : Three dimensional instability in flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.*, 473:167–189, 2002.
- [9] B. J. BAYLY : Three-dimensional centrifugal-type instabilities in inviscid two-dimensional flows. *Physics of Fluids*, 31:56–64, 1987.
- [10] J.-F. BEAUDOIN, O. CADOT, J.-L. AIDER et J.E. WESFREID : Three-dimensional stationary flow over a backward-facing step. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 23:147–155, 2004.
- [11] C. M. BENDER et S. A. ORSZAG : *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. International series in pure and applied mathematics., 1978.
- [12] R. J. BIRGGS : *Electron-Stream interaction with Plasmas*. MIT Press, 1964.
- [13] H.M. BLACKBURN, D. BARKLEY et S.J. SHERWIN : Convective and transient growth in flow over a backward facing step. *en soumission à J. Fluid Mech.*, 2007.
- [14] A. BOTTARO et A. ZEBIB : Görtler vortices promoted by wall roughness. *Fluid Dynamics research*, 19:343–362, 1997.
- [15] M. BOUTHIER : Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles. *Journal de Mécanique*, 12:599, 1972.
- [16] T. J. BRIDGES et P.J. MORRIS : Boundary layer stability calculations. *J. Fluid Mech.*, 30:3351–3358, 1987.
- [17] W.R. BRILEY : A numerical study of laminar separation bubbles using the Navier-Stokes equations. *J. Fluid Mech.*, 47:713–736, 1971.

- [18] C. CANUTO, M.Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI et T.A. ZANG : *Spectral methods in Fluid Dynamics*. Springer, 1988.
- [19] F. CHEDEVERGNE, G. CASALIS et Th. FERAILLE : Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection. *Physics of Fluids*, 18:014103, 2006.
- [20] X. J. CHEN, K. KIM et H. J. SUNG : Effects of local blowing from a slot on a laminar boundary layer. *Fluid Dynamics Research*, 2006.
- [21] J.-M. CHOMAZ : Global instabilities in spatially developing flows : non-normality and non linearity. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37:357–392, 2005.
- [22] J.M. CHOMAZ, P. HUERRE et L. G. REDEKOPP : A frequency selection criterion in spatially developing flows. *Studies in applied mathematics*, 84:119–144, 1991.
- [23] P. CORBETT et A. BOTTARO : Optimal perturbations for boundary layers subject to stream-wise pressure gradient. *Physics of Fluids*, 12:120–130, 1999.
- [24] C. COSSU et J.-M. CHOMAZ : Global measures of local convective instabilities. *Phys. Rev. Lett.*, 78:4387–4390, 1997.
- [25] A. COUAIROU et J.-M. CHOMAZ : Absolute and convective instabilities, front velocities and global modes in nonlinear systems. *Physica D*, 108:236–276, 1997.
- [26] A. V. DOGVAL, V. V. KOZLOV et A. MICHALKE : Laminar boundary layer separation : instability and associated phenomena. *Prog. Aerospace Sci.*, 30:61–94, 1994.
- [27] U. EHRENSTEIN : *In Porquerolles summer school, June 2007*, 2007.
- [28] U. EHRENSTEIN et F. GALLAIRE : On two dimensional temporal modes in spatially evolving open flows : the flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 78:4387–4390, 2005.
- [29] B. F. FARRELL : Optimal excitation of perturbations in viscous shear flow. *Physics of Fluids*, 31:2093–2102, 1988.
- [30] B. F. FARRELL et P. J. IOANNOU : Optimal excitation of three-dimensional perturbations in viscous constant shear flow. *Physics of Fluids*, 5:1390–1400, 1993.
- [31] H. FASEL : Investigation of the stability of boundary layers by a finite-difference model of the navier-stokes equations. *J. Fluid Mech.*, 78:355 – 383, 1976.
- [32] H. FASEL et U. KONZELMANN : Non-parallel stability of a flat-plate boundary layer using the complete navier-stokes equations. *J. Fluid Mech.*, 221:311–347, 1990.
- [33] H. FASEL et D. POSTL : Interaction of separation and transition in boundary layers : direct numerical simulations. *In Sixth IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, 2004.
- [34] F.GALLAIRE, M. MARQUILLIE et U. EHRENSTEIN : Three-dimensional transverse instabilities in detached boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 571:221–233, 2007.
- [35] C. A. FLETCHER : *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer, 1991.
- [36] M. GASTER : A note on the relation between temporally increasing and spatially increasing disturbances in hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.*, 14:222–224, 1962.
- [37] M. GASTER : On the generation of spatially growing waves in a boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 22:433–441, 1965.
- [38] M. GASTER : Growth of disturbances in both space and time. *Physics of Fluids*, 11:723–727, 1967.
- [39] M. GASTER : The structure and behaviour of laminar separation bubbles. Rapport technique, Ministry of technology, Aeronautical research council., 1969.

-
- [40] M. GASTER : On the effect of boundary layer growth on flow stability. *J. Fluid Mech.*, 102:127–140, 1974.
- [41] M. GASTER : Propagation of linear wave packets in laminar boundary layers. *AIAA J.*, 19:419–423, 1981.
- [42] M. GASTER : The development of a two-dimensional wavepacket in a growing boundary layer. *Proc. R. Soc. London*, 384:317–332, 1982.
- [43] F. GIANNETTI et P. LUCHINI : Structural sensitivity of the first instability of the cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, 581:167–197, 2007.
- [44] C.E GROSH et H. SALVEN : The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. Part 1. the spectrum and the eigenfunctions. *J. Fluid Mech.*, 87:33–54, 1978.
- [45] P. HALL : The linear development of görtler vortices in growing boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 130:41–58, 1982.
- [46] D.A. HAMMOND et L.G. REDEKOPP : Local and global instability properties of separation bubbles. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 17:145–64, 1998.
- [47] T. HERBERT et F.P. BERTOLOTTI : Stability analysis of non-parallel boundary layers. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 32, 1987.
- [48] T. HERBERT, F.P. BERTOLOTTI et P.R SPALART : Linear and nonlinear stability of the blasius boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 242:441–474, 1992.
- [49] C. P. HÄGGMARK, C. HILDINGS et D. S. HENNINGSON : A numerical and experimental study of a transitional separation bubble. *Aerosp. Sci. Technol.*, 5:317–328, 2001.
- [50] J.-M. Chomaz P. HUERRE et L.M. REDEKOPP. : A frequency selection criterion in spatially developing flows. *Study In Applied Mathematics*, 84:119–144, 1991.
- [51] P. HUERRE et P. A. MONKEWITZ : Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.*, 159:151–168, 1985.
- [52] R. JORDINSON : The flat plate boundary layer. part 1. numerical integration of the orr-sommerfeld equation,. *J. Fluid Mech.*, 43:801–811, 1970.
- [53] L. KAIKTSIS, G. KARNIADAKIS et A. ORSZAG : Unsteadiness and convective instabilities in two-dimensional flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.*, 321:157–187, 1996.
- [54] R.B. LEHOUCQ, D.C. SORENSEN et C. YANG : *ARPACK Users' Guide : Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*, October 1997.
- [55] L. LENOIR : Etude de stabilité d'écoulements faiblement non-parallèles par une méthode pse. Rapport technique, ENSAM Paris, 2006.
- [56] F. LI et M.R. MALIK : On the Nature of p.s.e Approximation. *J. Fluid Mech.*, 333:125–137, 1995.
- [57] M. J. LIDTHILL : Group velocity. *J. Inst. Maths Applics*, 1:1–28, 1964.
- [58] R. J. LINGWOOD : On the application of exp(n) methods to three-dimensional boundary-layer flows. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 18:581–620, 1999.
- [59] M.R. MALIK : Numerical methods for hypersonic boundary layer stability. *J. Comp. Physics*, 86:376–413, 1990.
- [60] O. MARQUET : Global measure of the amplifier behavior of a recirculation bubble. *En soumission à J. Fluid Mech.*, 2007.
- [61] O. MARQUET, M. LOMBARDI, D. SIPP, J.-M. CHOMAZ et L. JACQUIN : Direct and adjoint global modes of a recirculation bubble : Lift-up and convective nonnormalities. *En soumission à J. Fluid Mech.*, 2007.
-

- [62] M. MARQUILLIE et U. EHRENSTEIN : On the onset of nonlinear oscillations in a separating boundary-layer flow. *J. Fluid Mech.*, 490:166–188, 2003.
- [63] Y. NA et P. MOIN : The structure of wall-pressure fluctuations in turbulent boundary layers with adverse pressure gradient and separation. *J. Fluid Mech.*, 377:347–373, 1998.
- [64] W. M. ORR : The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. *Proc. R. Irish Acad. Ser. A.*, 27, 1907.
- [65] S. J. PARKER et S. BALACHANDAR : Viscous and inviscid instabilities of flow along a streamwise corner. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 13:231–270, 1999.
- [66] L. PAULEY, P. MOIN et W. REYNOLDS : The structure of two dimensional separation. *J. Fluid Mech.*, 220:397–411, 1990.
- [67] R. PEYRET : *Spectral methods for incompressible viscous flow*. Springer, 2002.
- [68] T. N. PHILLIPS et G. W. ROBERTS : The treatment of spurious pressure modes in spectral incompressible flow calculations. *J. Comput. Phys.*, 105:150–164, 1993.
- [69] B. PIER : On the frequency selection of finite-amplitude vortex shedding in the cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, 458:407–417, 2002.
- [70] L. PRANDTL : *The Mechanics of Viscous Fluids*. Springer, 1935.
- [71] U. RIST : Instability and transition mechanisms in laminar separation bubbles. *In Low Reynolds Number Aerodynamics on Aircraft Including Applications in Emerging UAV Technology*, Rhode-Saint-Genese, Belgium., 2003. VKI/RTO-LS.
- [72] U. RIST et H. FASEL : Direct numerical simulation of controlled transition in a flat plate boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 298:211–248, 1995.
- [73] U. RIST et U. MAUCHER : Direct numerical simulation of 2-d and 3-d instability waves in a laminar separation bubble. *AGARD-CP.*, 551:361–367, 1994.
- [74] U. RIST et U. MAUCHER : Investigations of time-growing instabilities in laminar separation bubbles. *Eur. J. Mech. B/Fluids.*, 21:495–509, 2002.
- [75] J.C ROBINET : Bifurcations in shock wave / laminar boundary layer interaction : Global instability approach. *J. Fluid Mech.*, 579:85–112, 2007.
- [76] J. A. ROSS, F. H. BARNES, J. G. BRUNS et M. A. S. ROSS : The flat plate boundary layer part 3 : Comparison of theory with experiment. *J. Fluid Mech.*, 43 pp. 819-832, 1970.
- [77] W.S. SARIC et A. NAYFEH : Nonparallel stability of boundary-layer flows. *Physics of Fluids*, 18:945, 1975.
- [78] H. SCHLICHTING : Zür entstehung des turbulenz bei der plattenströmung. *ZAMM*, 13, 1933.
- [79] P. J. SCHMID : Nonmodal stability theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 39:129–162, 2007.
- [80] P.J. SCHMID et D.S. HENNINGSON : *Stability and transition in shear flows*. Springer, 2001.
- [81] G. B. SCHUBAUER et H. K. SKRAMSTAD : Laminar-boundary layer oscillations and transition on flat plate. Rapport technique 909, NACA, 1948.
- [82] D. SIPP et L. JACQUIN : Three-dimensional centrifugal-type instabilities of two-dimensional flows in rotating systems. *Physics of Fluids*, 12:1740–1748, 2000.
- [83] T. TATSUMI et T. YOSHIMURA : Stability of the laminar flow in a rectangular duct. *J. Fluid Mech.*, 212:437–449, 1990.

- [84] V. THEOFILIS : Advances in global linear instability of nonparallel and three-dimensional flows. *Prog. in Aerospace Sciences*, 39:249–315, 2003.
- [85] V. THEOFILIS, S. HEIN et U. DALLMANN : On the origins of unsteadiness and three dimensionality in a laminar separation bubble. *Proc. R. Soc. London.*, 358:3229–3246, 2000.
- [86] K.-C. TOH et L. N. TREFETHEN : Calculation of pseudospectra by the Arnoldi iteration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17(1):1–15, 1996.
- [87] W. TOLLMIEN : General instability criterion of laminar velocity distributions. Rapport technique 792, NACA, 1935.
- [88] L. TREFETHEN, A. TREFETHEN, S. REDDY et T. DRISCOLL : Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261:578–584, 1993.
- [89] B. WASHITO, B.J. GEURTS et J.G.M. KUERTEN : Numerical simulation of separated boundary-layer flow. *J. Engineering Mathematics.*, 32:177–194, 1997.
- [90] P.G. WILSON et L. L. PAULEY : Two and three dimensional large-eddy simulations of a transitional separation bubble. *Physics of Fluids*, 10 (11):2932–2940, 1998.

Articles.

Spatially convective global modes in a boundary layer.

PHYSICS OF FLUIDS 19, 114105 2007. Abstract: .

The linear stability of a weakly nonparallel flow, the case of a flat plate boundary layer, is revisited by a linear global stability approach where the two spatial directions are taken as inhomogeneous, leading to a fully nonparallel stability method. The resulting discrete eigenvalues obtained by the fully nonparallel approach seem to be in agreement with classical Tollmien–Schlichting waves. Then the different modes are compared with classical linear stability approach and weakly nonparallel method based on linear parabolized stability equations PSEs. It is illustrated that the nonparallel correction provided by the linear global stability approach is well matched by linear PSE. Furthermore, physical interpretation of these spatio-temporal global modes is given where a real pulsation, which has more physical interest, is considered. In particular the use of a Gaster transformation and the pseudospectrum illustrate the local and global properties of these Tollmien–Schlichting modes. Finally, the contribution of different components of global modes normal and streamwise in the transient amplifying behavior associated with the convectively unstable boundary layer is analyzed and compared with a classical steepest descent method. Then, a discussion of an equivalent of the continuous branch is given.

Global instabilities and optimal growth in a separated boundary-layer flow.

submitted to J. Fluid Mech. Abstract: .

The instability mechanism of an absolutely stable flat plate laminar separation bubble is revisited through a global linear stability analysis. Three different suction profiles induce well defined separated zones with different intensities. In particular, the use of the non normality of the global linear stability operator and a global modes decomposition of the perturbation, whose spatial structures are studied, illustrate two distinct mechanisms associated to the separated flows: a strong transient 2D convective phenomenon and an asymptotic 3D globally unstable scenario, which takes the form of stationary flat roll structures in the transverse direction under the influence of a centrifugal mechanism. Moreover, the possibility to trigger the asymptotic 3D phenomenon will be discussed through a study of the time scales of the different mechanisms and the spatial structure of the corresponding adjoint mode. The difficulty of the centrifugal mechanism to emerge in practical configuration, which are strongly dominated by a Kelvin-Helmholtz instability, is thus illustrated.

Spatially convective global modes in a boundary layer

Frédéric Alizard^{a)} and Jean-Christophe Robinet^{b)}
SINUMEF Laboratory ENSAM CER de Paris, 151, Bd. de l'Hôpital, 75013 Paris, France

(Received 10 October 2006; accepted 9 October 2007; published online 12 November 2007)

The linear stability of a weakly nonparallel flow, the case of a flat plate boundary layer, is revisited by a linear global stability approach where the two spatial directions are taken as inhomogeneous, leading to a fully nonparallel stability method. The resulting discrete eigenvalues obtained by the fully nonparallel approach seem to be in agreement with classical Tollmien–Schlichting waves. Then the different modes are compared with classical linear stability approach and weakly nonparallel method based on linear parabolized stability equations (PSEs). It is illustrated that the nonparallel correction provided by the linear global stability approach is well matched by linear PSE. Furthermore, physical interpretation of these spatio-temporal global modes is given where a real pulsation, which has more physical interest, is considered. In particular the use of a Gaster transformation and the pseudospectrum illustrate the local and global properties of these Tollmien–Schlichting modes. Finally, the contribution of different components of global modes (normal and streamwise) in the transient amplifying behavior associated with the convectively unstable boundary layer is analyzed and compared with a classical steepest descent method. Then, a discussion of an equivalent of the continuous branch is given. © 2007 American Institute of Physics.

[DOI: [10.1063/1.2804958](https://doi.org/10.1063/1.2804958)]

I. INTRODUCTION

The development of Tollmien–Schlichting (called TS hereafter)^{1,2} convective instability waves in a flat plate boundary layer and the consequent transition to turbulence were studied in a series of experiments in Refs. 3–8 since the beginning of the last century and by numerical simulations in the second half of the 20th century.^{9,10} Early theoretical work attempted to explain the first phase of transition process in a linear stability approach where the so-called “parallel flow” assumption is used. The parallel flow approximation has been used extensively in theoretical studies of flow stability, so that the partial differential equations describing an arbitrary small disturbance of a basic nonparallel motion may be reduced to a more readily analyzed ordinary differential equation, the Orr–Sommerfeld (called OS hereafter) equation. However some discrepancies still remained between the OS theoretical predictions for the neutral stability curve and experimental results. Beginning in the 1970s, a series of nonparallel flow theories emerged.^{11–17} All these theories include an appreciation of the nonparallel effects which are due to the boundary layer growth. The nonparallel flow effects were included by means of a perturbation of the OS problem, with the slow variation of the basic boundary-layer flow being assumed to cause only a minor deviation from the parallel-flow predictions. The agreement between the theory and experiment was clearly improved by these weakly nonparallel approaches although not all the discrepancies were entirely resolved.

In the context of boundary-layer type flows, among the various nonparallel theories, the most successful effort to

date is the parabolic stability equation approach, introduced by Herbert and Bertolotti.¹⁸ Compared to the methods based on multiple scales, parabolized stability equation (PSE) approach permits us to easily evaluate at the same time the nonparallel and the nonlinear effects. By this approach, the stability equations are parabolic in the main direction of the basic flow, which permits to numerically solve a stability problem by a simple marching procedure in x . For a boundary-layer flow evolving on a flat plate, the instability modes predicted by PSE theory are in good quantitative agreement with the DNS results in both linear and nonlinear regimes.^{10,17,19–21} Before the development of the PSE theory, the only approach to solve the fully nonparallel and nonlinear boundary-layer transition problem was by direct numerical simulation (DNS).^{22–24}

The great progress in computer facilities in this last decade has had a profound impact on stability research. In particular, the possibility of recovering global intrinsic phenomenon where streamwise and normal directions are taken as eigendirections, thanks to a fully nonparallel approach has been successful (Ref. 25, referenced as BiGlobal in Ref. 26). Despite these remarkable accomplishments the relationship between global and local properties remains a prolific research area in the stability domain. Especially the possibility of identifying convective characteristics thanks to global properties was not clarified in realistic flows. Recent analysis on a flat plate boundary layer by Erhenstein and Gallaire²⁷ revealed the capacity to globally measure the transient amplifying behavior associated with a locally unstable convective boundary layer with a global linear stability analysis. Their study confirmed the Cossu and Chomaz theoretical work on the Ginzburg–Landau equations where the convective phenomenon was thought of as a superposition of initially excited non-normal stable global modes.²⁸ Such modes

^{a)} Author to whom correspondence should be addressed. Electronic mail: Frederic.Alizard@paris.ensam.fr

^{b)} Electronic mail: Jean-Christophe.Robinet@paris.ensam.fr

were stated as convective waves by some authors^{29,30} and identified as an extrinsic characteristic. Nevertheless clear identification of “convective” global stable modes and their influence on realistic convective flow are still not revealed. In particular, how they can be related to local convective properties as the position on the neutral curve and how they can be involved in a global response to a harmonic forcing provided by experimental actuators, for example? The first sections of this article will thus be devoted to answer to these interrogations with the classical convectively unstable boundary layer.

Furthermore, a complete analysis of the global mode non-normality combines the effects of the streamwise and normal directions. Then the spatio-temporal transient amplification behavior should reflect the influence of these two components. Consequently, the last part of this article is devoted to the contribution of these two components and their possible implication on convective unstable flow such as the flat plate boundary layer.

II. BASIC FLOW

So that the linear analysis of stability is carried out without assumption of parallelism for the base flow, the full Navier–Stokes equations are considered.

The two-dimensional dimensionless Navier–Stokes equations for an incompressible fluid are used in the stream function-vorticity formulation,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{and} \quad \Delta \psi = \omega. \quad (1)$$

The Reynolds number is based on exterior velocity and inflow displacement thickness value as references velocity and length, respectively. System (1) with ω the vorticity and ψ the stream function is thus closed by the following boundary conditions:

$$\partial \psi / \partial y = 1, \quad \omega = 0 \quad \text{and} \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial y = 0 \quad (2)$$

for the upper boundary and the wall, respectively. At the inflow and at the outflow, a Blasius profile and $\partial^2 \psi / \partial x^2 = 0$, $\partial^2 \omega / \partial x^2 = 0$ are imposed, respectively.

A second order finite differences scheme is used for the vorticity transport equation as well as the Poisson equation. An ADI factorization is employed to solve the transport equation and the Poisson equation is resolved by an ADI iteration process (Briley³¹). The grid used is uniform in the streamwise direction and geometrical in the normal direction.

The present paper is devoted to analyze a flat plate convectively unstable boundary layer flow. The Reynolds number based on the displacement thickness at the inlet is thus chosen to be equal to 610 higher than the critical Reynolds number $\text{Re} \approx 520$. A grid 450×150 on a domain length up to 500 and a normal extension of 25 provides an accurate basic flow converged at about 10^{-8} based on the maximum of the vorticity. The shape factor calculated all over the domain varies from 2.591 to 2.592 which is in accordance with the Blasius value.

III. TWO-DIMENSIONAL LINEAR BIGLOBAL STABILITY APPROACH

In this section the BiGlobal stability method, composed of the linearized Navier–Stokes equations where the streamwise and the normal directions are taken as eigendirections and closed by appropriated boundary conditions, is presented.

A. Eigenvalue problem

The proposed global linear stability analysis is based on the classical perturbations technique where the instantaneous flow (\mathbf{q}) is the superposition of the basic flow [$\mathbf{Q}=(U, V, P)^T$, with (U, V) , the velocity field and P the mean pressure], data of this problem and unknown perturbation ($\tilde{\mathbf{q}}$), $\mathbf{q}(x, y, t) = \mathbf{Q}(x, y) + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}}(x, y, t) + c.c.$, $\varepsilon \ll 1$. A wave form is taken for the perturbation: $\tilde{\mathbf{q}}(x, y, t) = \hat{\mathbf{q}}(x, y) \exp(-i\Omega t)$, where Ω is the circular global frequency and $\hat{\mathbf{q}}=(\hat{u}, \hat{v}, \hat{p})^T$ the two-dimensional amplitude function of the fluctuation. The linearized incompressible Navier–Stokes equations lead thus to the following partial differential equations:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0,$$

$$\left[L + \frac{\partial U}{\partial x} \right] \hat{u} + \hat{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - i\Omega \hat{u} = 0, \quad (3)$$

$$\left[L + \frac{\partial V}{\partial y} \right] \hat{v} + \hat{u} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} - i\Omega \hat{v} = 0,$$

where $L = -1/\text{Re}(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2) + U\partial/\partial x + V\partial/\partial y$. This kind of approach can be called as a global linear stability approach³² or BiGlobal approach.²⁶

B. Numerical method

The differential equations (3) are discretized by a spectral collocation method based on Chebyshev polynomials. The spectral grid 180×45 interpolated from the DNS grid using a third order spline interpolation routine gives a good accuracy for the concerned global modes. The discretized system (3) closed by boundary conditions (described below) and constraints on pressure define a generalized eigenvalues problem (see Appendix A),

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{q}} = i\Omega \mathbf{B} \hat{\mathbf{q}}, \quad (4)$$

with $i\Omega$ the eigenvalue and $\hat{\mathbf{q}}$ the eigenfunction. The problem (4) being too large to solve the entire spectrum, a shift and invert Arnoldi algorithm is used, providing a good approximation of the considered global modes. Hence, the original eigenvalues problem is convert into

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B} \hat{\mathbf{q}} = \mu \hat{\mathbf{q}}, \quad \mu = \frac{1}{i\Omega - \lambda}, \quad (5)$$

where λ is a shift parameter. Following the algorithm of Theofilis²⁶ and thanks to ARPACK routines³³ the Krylov subspace is generated by $\text{span}\{\mathbf{C}^k \mathbf{x}_0\}_{0 \leq k \leq n-1}$ with $\mathbf{C} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}$, \mathbf{x}_0 an initial vector and n the dimension of

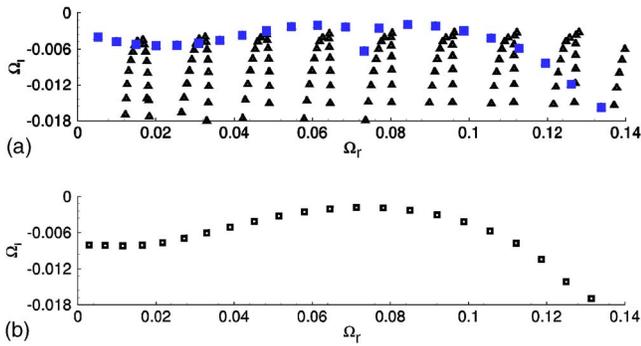


FIG. 1. (Color online) Spectra resulting from the linear global stability analysis of the boundary layer at Reynolds number equal to 610 for the domain $D3$ with the Gaster relation (8) at the outflow (a) and TS modes with the extrapolation (b).

the subspace. A LU decomposition of $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})$ at the beginning of the algorithm allows a fast generation of the Krylov subspace thanks to a successive resolution of the linear system $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Iterations on Krylov subspace of dimension 250 allowed to recover a sufficient part of the considered spectrum.

IV. GLOBAL TEMPORAL MODES ANALYSIS

Three domain lengths are studied 230, 340, 400 (corresponding to a variation on Reynolds number based on the displacement thickness from 610 to ~ 885 , ~ 995 , and ~ 1050 , respectively) and will be referred to as $D1$, $D2$, and $D3$ thereafter. The upper limit y_{\max} in the wall-normal variable is chosen to be $y_{\max} = 20$, that is 20 times the displacement thickness at inflow. One may hence be confident that this value is sufficiently large to not influence the results (see Appendix B 1).

A. Some discussions on boundary conditions

1. Boundary conditions for velocity disturbances

The set of admissible solutions of the partial differential system (3) must be supplemented by physically plausible boundary conditions. For a boundary layer flow, or more generally for any weakly nonparallel flow, the boundary conditions in the normal direction are identical to those imposed for a local analysis. At solid walls, viscous boundary conditions are imposed on all disturbance velocity component,

$$\hat{u} = \hat{v} = 0. \quad (6)$$

In the free-stream, exponential decay of all disturbance quantities is expected. The boundary condition (6) is thus imposed at the distance $y_{\max} = 20$ from the wall with homogeneous Dirichlet boundary conditions on all disturbance velocity components (see the analysis of the dependence of

the y_{\max} value in Appendix B 1). At inflow and outflow, the boundary conditions are not straightforward and depend on the physical configuration. When the global modes describe an intrinsic phenomenon spatially localized in the basic flow such as, for example, the global mode in a laminar separation bubble, see Ref. 34, the disturbance is generated within the examined basic flow field and exists without continuous excitation from the inflow. Homogeneous Dirichlet boundary conditions on the disturbance velocity components are then imposed at the inflow. At an outflow boundary, an ambiguity is encountered on the choice of the boundary conditions to be imposed on the disturbance velocity components. In order to impose the less restrictive condition, an extrapolation on the disturbance velocity components from the interior of the integration domain is performed.³⁴ Another possibility appears when the global modes describe an extrinsic phenomenon as convective instabilities which is a response to an excitation. As a result the global modes are spatially extended. In the last case, if the basic flow field is locally unstable all over the domain, the disturbance mode structure will extend from inflow to outflow boundaries. This phenomenon is examined in the following study on a convectively unstable boundary layer. As a consequence, boundary conditions which will simulate the well known Tollmien–Schlichting waves at the inflow and at the outflow have to be imposed on the velocity disturbances. The main idea is to transform the spatial problem obtained from the classical one-dimensional analysis into a temporal problem at the inflow and at the outflow. Consequently the streamwise derivative of the global mode is imposed at inflow and outflow through the Robin boundary condition $\partial\hat{u}/\partial x = i\alpha\hat{u}$, where the local dispersion relation $\alpha(\Omega)$ is approximated by a Gaster-type transformation,³⁵

$$\alpha \approx \alpha_{0,r} + \frac{\partial\alpha_r}{\partial\Omega_r}(\Omega_0)(\Omega - \Omega_0), \quad (7)$$

which is justified as long as the imaginary parts of α and Ω are small (r denoting the real part). For that the real frequency Ω_0 is chosen at inflow as well as outflow really near the neutral curve. The value of $\alpha_{0,r}$ is thus determined by solving the OS equation. Finally, the boundary conditions at inflow and outflow are²⁷

$$c_0 \frac{\partial\hat{u}}{\partial x} = i[(\Omega - \Omega_0) + c_0\alpha_{0,r}]\hat{u}, \quad (8)$$

where $c_0 = 1/\partial\alpha_r/\partial\Omega_r(\Omega_0)$ is a local group velocity calculated by finite differences of second order around Ω_0 . Here only the Tollmien–Schlichting mode corresponding to physical responses in the $x > 0$ direction will be taken into account in Eq. (7) in order to simulate wave propagation in the downstream direction. Similar justification has been provided by

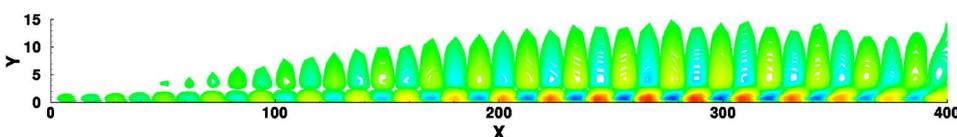


FIG. 2. (Color online) Real part of \hat{u} of the TS mode with $\Omega_r \approx 0.113$ resulting from the linear global stability analysis of the boundary layer at Reynolds number equal to 610 for the domain $D3$ with the extrapolation at the outflow.

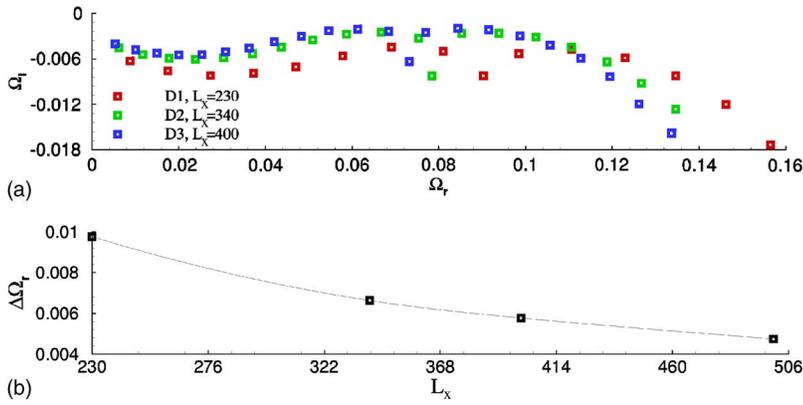


FIG. 3. (Color online) Top, spectrum resulting from the linear global stability analysis of the boundary layer at Reynolds number equal to 610 for domains $D1$, $D2$, and $D3$. Bottom, space variation between modes with the domain length, $\Delta\Omega_r=f(L_x)$. Another computation for $L_x=500$ is performed to clarify the tendency.

Lingwood³⁶ for the analysis of the pulse response by the steepest descent method in a boundary layer. However the development (7) obtained from the local dispersion analysis is justified only in the case where the mean flow is weakly nonparallel at inflow and outflow as the boundary layer.

Moreover it confines the obtained solution to the Tollmien-Schlichting waves only. Otherwise a more general outflow boundary condition for extrinsic phenomenon based on similar extrapolation condition as Theofilis²⁶ at the outflow has been used by Chedevergne *et al.*,²⁹

$$\forall y \begin{cases} \hat{u}(n_x, y) = \frac{x(n_x) - x(n_x - 2)}{x(n_x - 1) - x(n_x - 2)} \hat{u}(x_n - 1, y) + \frac{x(n_x - 1) - x(n_x)}{x(n_x - 1) - x(n_x - 2)} \hat{u}(x_n - 2, y) \\ \hat{v}(n_x, y) = \frac{x(n_x) - x(n_x - 2)}{x(n_x - 1) - x(n_x - 2)} \hat{v}(x_n - 1, y) + \frac{x(n_x - 1) - x(n_x)}{x(n_x - 1) - x(n_x - 2)} \hat{v}(x_n - 2, y) \end{cases} \quad (9)$$

Consequently, the influence of the two different outflow boundary conditions on the resulting eigenfunctions and spectrum will be examined.

2. The treatment of spurious pressure modes

The treatment of the pressure for incompressible flow using a Chebyshev/Chebyshev discretization is discussed in Refs. 37, 38, and 27. Constraints on pressure are integrated on the system (4), the spurious line, column, and checkerboard pressure modes as well as the constant mode are put to zero (details in Appendix B).

B. Spectrum and eigenfunctions

1. Boundary conditions evaluation

BiGlobal analyses are performed at Reynolds number 610 for $D3$ with the two different boundary conditions at the outflow: The extrapolation and the approximation of the local dispersion relation. The spectrum is composed of two distinct sets of modes; one set where all eigenfunctions decay exponentially following the normal axis and another set where the modes are aligned vertically and where an important part of the energy is concentrated on a large value of the y axis (Fig. 1). The stability of each temporal mode is in accordance with the fact that a boundary layer is convectively unstable but absolutely stable and consequently globally stable. The first set of modes seems to be reminiscent to

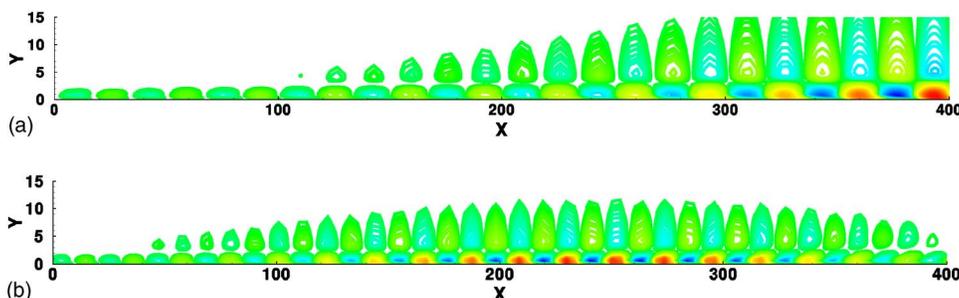


FIG. 4. (Color online) Real part of \hat{u} for two global TS modes of the domain $D3$: (a) $\Omega_r \approx 0.068$, (b) $\Omega_r \approx 0.113$.

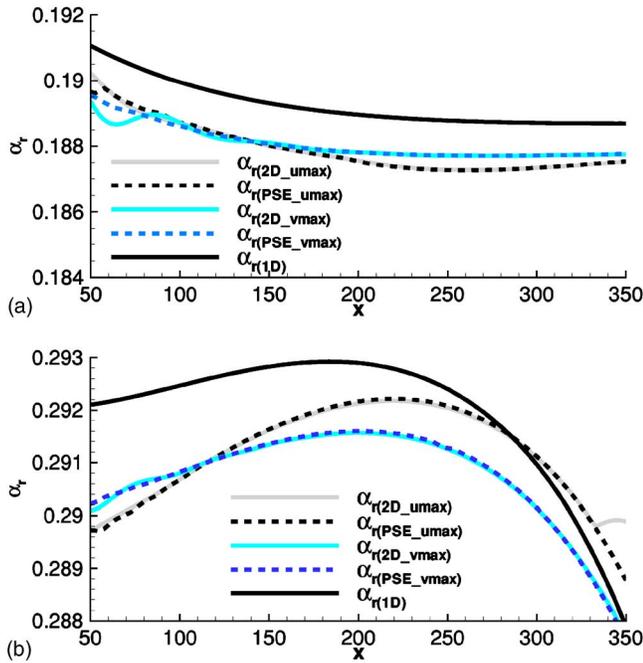


FIG. 5. (Color online) Comparison between PSE and BiGlobal approach for the wave number of the TS modes $\Omega_r \approx 0.068$ (a) and $\Omega_r \approx 0.113$ (b) for the domain $D3$. BiGlobal results are referenced by 2D.

a TS wave and will be noted as TS modes; the second set will be discussed in the last part. A comparison of the two boundary conditions on the TS modes is shown in Fig. 1. The structure seems to be quite similarly composed of a branch of discrete modes spaced uniformly and placed on the same level. Figures 2 and 4 illustrate eigenfunctions from the BiGlobal calculation with the extrapolation and the Gaster relation, respectively. The outflow structure is thus better defined with the second one. In this particular case where the parallel flow and the weak spatial amplification rate assumptions are verified, the approximation of the local dispersion relation (8) is more appropriated and is used for all the next results. (The influence of the value of Ω_0 at the inflow is discussed in Appendix A 2.)

2. Influence of the domain size

Figure 3 represents the branch of TS modes from the stability analysis. The difference between spectra depends explicitly on domain size (see Appendix B 2). The discretization of the frequency comes from the truncation of the domain. Indeed, the space between frequencies decreases when the domain length increases and asymptotically probably tends towards an almost continuous branch when the domain tends to infinity.

In order to understand the meaning of these spatio-temporal modes and their physical interpretations, the study is organized following two axes. First, each TS mode is analyzed independently and secondly, the transient behavior resulting from the non-normality of global TS modes, principally caused by the streamwise non-normality, is studied. Then an analysis of the other global modes and their possible implications in the transient dynamic are discussed.

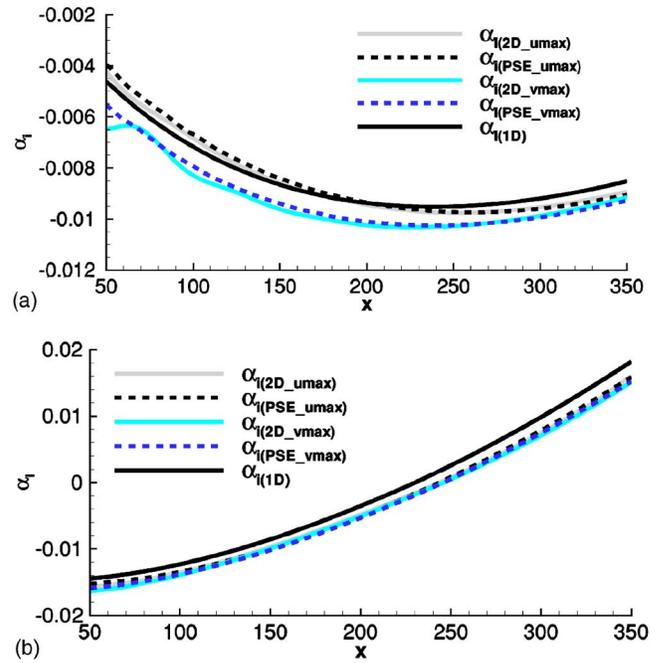


FIG. 6. (Color online) Comparison between PSE and BiGlobal approach for the spatial amplification rate $-\alpha_i$ of the TS modes $\Omega_r \approx 0.068$ (a) and $\Omega_r \approx 0.113$ (b) for the domain $D3$.

C. Comparison of TS modes from the linear BiGlobal stability analysis with linear PSE and one-dimensional linear stability analysis

For the domain $D3$, wave number, spatial growth rate, and eigenfunctions are compared with a one-dimensional linear stability analysis for two complex pulsations as well as weakly nonparallel linear approach PSE (linear PSE will be referred like PSE thereafter). The PSE method used is identical as^{39,40} in a similar flat plate configuration (consequently none curvature terms are considered). Two complex pulsations corresponding to a short wave mode and a long wave ($\Omega_r \approx 0.113$ and $\Omega_r \approx 0.068$, respectively) are analyzed.

1. Wave numbers

The perturbations can be written as $\hat{u} = |\hat{u}| \exp(i\Theta_u(x, y))$ and $\hat{v} = |\hat{v}| \exp(i\Theta_v(x, y))$, where Θ_u and Θ_v are the wave's phase relative to the disturbance following x and y , respectively. The phase defined on $[0, \pi]$ is found by the following relationships:

$$\Theta_u = \arctan\left(\frac{\hat{u}_i}{\hat{u}_r}\right), \quad \Theta_v = \arctan\left(\frac{\hat{v}_i}{\hat{v}_r}\right), \quad (10)$$

where r and i denote the real and the imaginary parts of the eigenfunction \hat{u} and \hat{v} . The phase is dependent on y , thus a criteria is necessary to measure the wave number. The value taken at the maximum of the modulus of the eigenfunction at each x position is retained. Finally the streamwise wave number α_r is calculated by

$$\alpha_{r_u} = \partial\Theta_u(x, y_{u \max})/\partial x, \quad \alpha_{r_v} = \partial\Theta_v(x, y_{v \max})/\partial x \quad (11)$$

with $y_{u \max}$ and $y_{v \max}$ the locations where $|\hat{u}|$ and $|\hat{v}|$ reach a maximum, respectively. The comparison with PSE is real-

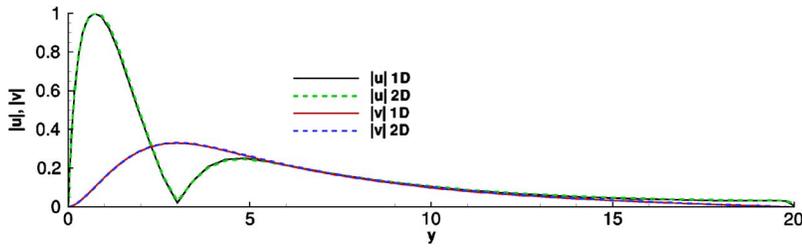


FIG. 7. (Color online) Comparison between one-dimensional and BiGlobal approaches for the modulus of the eigenfunction of the streamwise velocity perturbation for the TS mode $\Omega_r \approx 0.068$ of the domain $D3$.

ized for the two previous pulsations: $\Omega_r \approx 0.068$ and $\Omega_r \approx 0.113$ (Fig. 4). In order to not be influenced by the boundary conditions with the BiGlobal method and by the transient in the PSE approach the wavelengths obtained by the different linear methods, are compared in the part of the domain where x is varying from 50 to 350. A similar criteria to the one used in the BiGlobal method, to take into account the nonparallel correction is applied to PSE. Results shown in Figs. 5(a) and 5(b) illustrate the nonparallel correction provided by the fully nonparallel approach and give a good similarity with the PSE method.

2. Spatial amplification rates

The growth rates $-\alpha_i$ are determined from the BiGlobal approach using the formula

$$\alpha_i = - \frac{1}{A} \frac{dA}{dx}, \tag{12}$$

with A the amplification curves depending on the criteria used to characterize the nonparallelism. The same criteria for the nonparallel correction described in the previous section is used,

$$A(x) = |\hat{u}(y_{u \max})|, \quad A(x) = |\hat{v}(y_{v \max})|. \tag{13}$$

A comparison between the spatial growth rate obtained with PSE, BiGlobal, and the classical parallel approaches is shown in Fig. 6. Results illustrate the influence of the nonparallelism on the amplification rate. BiGlobal curves are clearly in accordance to the PSE approach.

3. Eigenfunction

In the classical nonparallel correction (PSE or multiscales analysis) the perturbation is decomposed into a slowly varying amplitude, the eigenfunction, and a fast varying complex phase with the Wentzel–Kramers–Brillouin (WKB) approximation.⁴¹ This assumption is well verified for a boundary layer by comparison with DNS (Fasel and Konzelmann¹⁰) multiscale analysis (Bridges and Morris¹⁴),

and PSE (Herbert and Bertolotti¹⁸). Then it could be expected that the most influence of the nonparallelism will be in the exponential part (wavelength and spatial amplification rate). Figure 7 illustrates this result. The comparison of the eigenfunction between a one-dimensional stability analysis and BiGlobal presents a good agreement. Similar results have been found in the DNS comparison.¹⁰

In these sections it has been illustrated that TS modes correspond well to TS waves and match perfectly with the local dispersion relation. However their physical interpretation is not clarified and particularly how these spatio-temporal modes can be related to the influence of a real frequency which has more physical interest. Then two possible cases are considered. At first a Gaster transformation is used in order to find the equivalent spatial modes. Then the sensitivity of global modes is analyzed to identify the global asymptotic response of the boundary layer to a harmonic real forcing.

D. Link with local approach, neutral curve

To obtain spatial modes it can be supposed that the temporal damping rate takes part in the spatial amplification of the perturbation and then may be determined the spatial unstable or stable nature of the mode. The mode is written as follows:

$$\hat{\mathbf{q}}(x,y) \exp(-i\Omega t) = \hat{\mathbf{q}}(x,y) \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{\Omega_i}{v_G} dx - i\Omega_r t\right). \tag{14}$$

A Gaster transformation is used to recover the spatial amplification rate (14) where v_G is the group velocity $\partial\Omega_r/\partial\alpha_r$, calculated by finite differences of second order with adjacent modes. The spatial amplification rate can thus be decomposed into two parts: one from the eigenfunction and another from the temporal amplification rate Ω_i/v_G . Figure 8 represents a comparison of spatial amplification rates $-\alpha_i$ between PSE and BiGlobal approaches where α_i is obtained from the eigenfunction only and from the correction Eq. (14). As shown in Fig. 8, the spatial approach is well corrected thanks

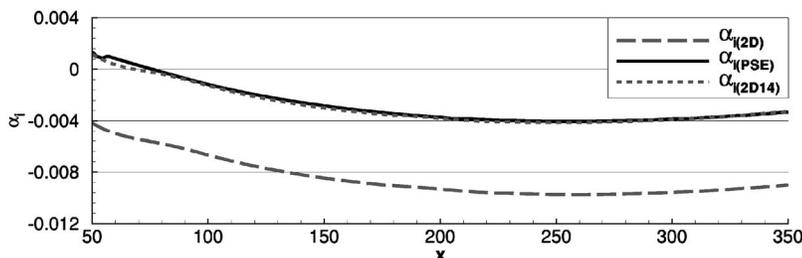


FIG. 8. A comparison of the spatial amplification rate $-\alpha_i$ with the real pulsation taken as $\Omega_r \approx 0.068$ (similar to a reduced frequency $Fr = 111 \times 10^{-6}$) in PSE and a correction (14) in the BiGlobal approach referenced as $\alpha_{i(2D14)}$. The lower long dashed curve represents the spatial amplification rate resulting only from the global eigenfunction. The nonparallel criteria is based on u_{\max} .

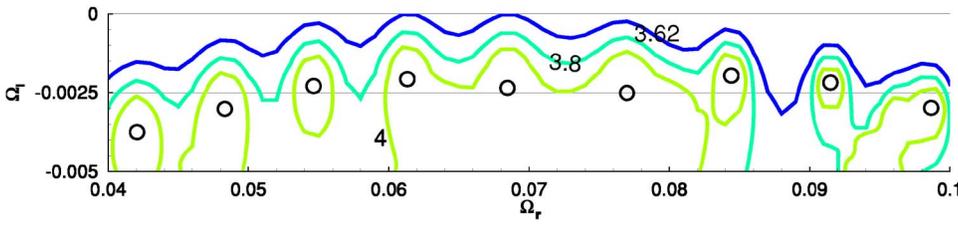


FIG. 9. (Color online) Contours of ϵ -pseudospectrum for the domain $L_x = 400$. Levels are presented in the logarithmic scale: $-\log_{10} \|\cdot\|_2$. Circles denote global TS modes location.

to the relation (14) which particularly recovers the position of the neutral curve.

E. Asymptotic behavior

In the previous parts it has been revealed that each of global modes verify the local dispersion relation and can be related to spatial waves thanks to a Gaster transformation. Otherwise, the classical analysis for the study of convective instability is to consider the asymptotic response of the flow to a harmonic forcing localized in space as vibrating ribbons, for example. The present analysis will thus be focused on the possibility from the BiGlobal calculation to determine the global harmonic frequency's receptivity of the boundary layer.

The temporal evolution of the flow due to a forcing term \mathbf{f} localized in space is determined with

$$\left(\mathbf{B} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{A} \right) \mathbf{q} = \mathbf{f} e^{i\sigma t}, \quad (15)$$

where σ is a real pulsation. Consequently the solution of Eq. (15) is $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{\mathbf{D}t} + \hat{\mathbf{f}} e^{i\sigma t}$ with \mathbf{D} the diagonal matrix of the generalized eigenvalue problem (4) and $(i\sigma \mathbf{B} - \mathbf{A}) \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$. All the temporal modes are temporally damped, and the flow is governed asymptotically by $\hat{\mathbf{f}} e^{i\sigma t}$. By introducing $\mathbf{P}(\sigma) = (i\sigma \mathbf{B} - \mathbf{A})^{-1}$, the norm $\|\mathbf{P}(\sigma)\|$ will thus show the global sensitivity to a harmonic forcing for the TS modes. This sensitivity can be evaluated by the use of the ϵ -pseudospectrum, $\lambda_\epsilon = \{\sigma \in \mathbb{C}, \|\mathbf{P}(\sigma)\| \geq \epsilon^{-1}\}$. The system is too large to solve the entire pseudospectrum λ_ϵ . The Hessenberg matrix resulting from the Arnoldi calculation is used as an approximation.⁴² Figure 9 presents the contours of λ_ϵ with $\|\cdot\|$ taken as the L_2 -norm. The sensitivity of a harmonic frequency is measured at the crossing of λ_ϵ with the real axis of the pulsation. It is interesting to see that even if the mode $\Omega_r \approx 0.084$ is less damped than $\Omega_r \approx 0.068$ it will be less sensitive to real pulsation. Consequently the pseudospectrum from the BiGlobal analysis reveals a global response to forcing of a convectively unstable boundary layer and brings a new physical interpretation of these particular global modes. This kind of BiGlobal analysis would then be powerful to identify which frequency can excite convective waves optimally in more complicated fully nonparallel flow as, for example, the separation bubble.³⁰ More particularly that kind of analysis could explain some global unsteadiness observed on separated flows even if the flow is globally stable.⁴³ Indeed the pseudospectrum and the very high sensitivity of the global mode could indicate a subcritical phenomenon. This strong sensitivity to external real perturbation could thus allow us to select sustained external excitation on the most

sensitive mode only thanks to slight background noise. Finally another way to interpret the influence of the TS modes is to consider each of them as a portion of a wave packet which is physically representative.

V. NON-NORMALITY ANALYSIS

A. Transient growth due to the TS waves

1. BiGlobal approach

In this section the wave packet dynamic provided by the non-normality of the eigenvectors related as TS waves is discussed. Indeed, the wave packet can be seen as a collection of initially excited non-normal global modes whose amplitudes decrease in time but whose superposition and interference produce large transient growing in time and moving in space as the relative phases of modes vary.^{28,32} Typically it is the case of the global TS modes studied in the previous section. The perturbation is expressed in a two-dimensional eigenvectors basis as follows:

$$\tilde{\mathbf{q}}(x, y, t) = \sum_{k=1}^N K_k^0 \exp(-i\Omega_k t) \hat{\mathbf{q}}_k(x, y). \quad (16)$$

N is the number of global modes taken into account. $\hat{\mathbf{q}}_k(x, y)$ and Ω_k are eigenvectors and eigenmodes, respectively. K_k^0 is the initial energy injected along each TS eigenvector. Then the maximum of the energy at time t of all possible initial conditions can be studied in an orthogonal basis (for more details, see Ref. 44),

$$\mathbf{G}(t) = \max_{K_k^0} \frac{E(t)}{E(0)} = \|\mathbf{F} \exp(t\mathbf{D}) \mathbf{F}^{-1}\|_2^2 \quad (17)$$

with $\mathbf{D}_{l,k} = -i\mathbf{I}_{lk}\Omega_k$, the diagonal matrix of eigenvalues. $\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{F}$ ($\star \simeq$ complex conjugate) is the Cholesky decomposition of the matrix of eigenvectors scalar product \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A}_{ij} = \int_0^{y_{\max}} \int_0^{L_x} (\hat{u}_i^* \hat{u}_j + \hat{v}_i^* \hat{v}_j) dx dy. \quad (18)$$

Consequently, the maximum energy amplification for time t is given by the highest singular value of the matrix $\mathbf{F} \exp(t\mathbf{D}) \mathbf{F}^{-1}$.^{45,46} The calculation also provides the optimal disturbances in the eigenvector basis thanks to a basis change. The transient growth is studied for the three domains considered $D1$, $D2$, and $D3$. The eigenvalues taken into account are shown in the spectrum Fig. 3 (13, 17, and 20 modes for $D1$, $D2$, and $D3$, respectively). The energy growth resulting is depicted in Fig. 10, in red, green, and blue for lengths 230, 340, and 400, respectively; dashed lines repre-

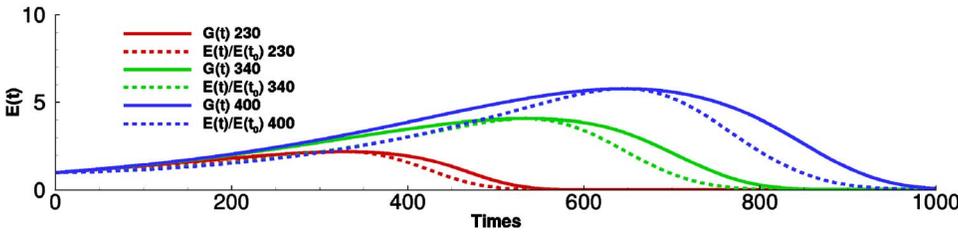


FIG. 10. (Color online) Energy curves resulting from the non-normal analysis of TS modes for the domains $D1$, $D2$, and $D3$. The dashed lines are the energy evolutions from the initial disturbances leading to a maximum of transient growth and the envelopes in full.

sent the evolution of initial disturbances leading to an optimal energy growth.

The optimal initial condition produced by the interferences between global modes thus takes the form of a well defined wave packet. The space-time evolution of the wave packet is represented in Fig. 11 and the space-time diagram in Fig. 12. The temporal amplification rate of the previous wave packet, characterized by the dashed energy curves illustrated in Fig. 10 appears independent of the domain length considered. A characteristic of convective instability of weakly nonparallel flow is recovered, and the disturbance is localized inside an almost constant ray and it is convected away as it amplifies (Huerre and Monkewitz⁴⁷).

2. Comparison with steepest descent method

To qualitatively evaluate the speed of the wave packet obtained by the global approach, the impulse response is estimated by the method of the steepest descent (Gaster⁴⁸). Thus the wave packet is solved as follows:

$$I = \int_{\Omega_r} \exp\left(i \left\{ \int_{x_0}^x \alpha(x', \Omega) dx' - \Omega t \right\} d\Omega\right), \tag{19}$$

where α and Ω satisfy the local dispersion relation related to the TS mode obtained under the assumption that the mean flow is locally parallel. Although the steepest descent method is an asymptotic approximation of Eq. (19), it provides a very good evaluation even near the source.⁴⁹ The solution of the above integral is then

$$I \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \left[\frac{2\pi}{i \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \Omega^2}(x', \Omega^*) dx'} \right]^{1/2} \exp\left(i \left\{ \int_{x_0}^x \alpha(x', \Omega^*) - \Omega^* t \right\}\right) \tag{20}$$

with Ω^* as

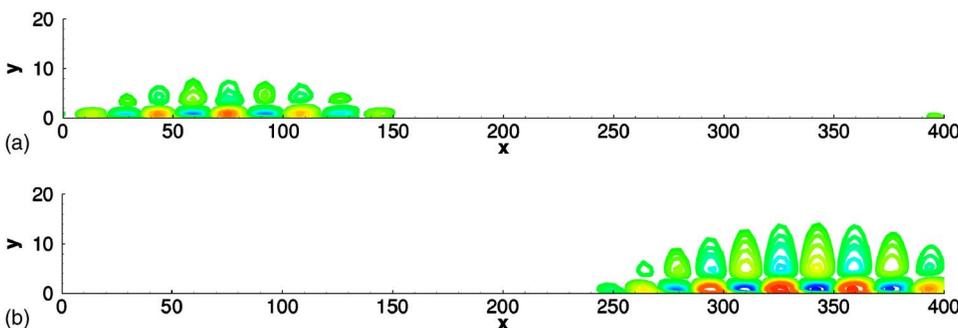


FIG. 11. (Color online) Wave packet resulting from the non-normality analysis of TS modes plotted at two times: 0 and 600 for the domain $D3$.

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega}(x', \Omega) dx' \Big|_{\Omega=\Omega^*} = t. \tag{21}$$

Finally, Eq. (19) can be solved for each streamwise position and the amplification rate can be determined. A Newton–Raphson iteration scheme is used to converge for a given $\text{Im}(\Omega)$ to a value $\text{Re}(\Omega)$ that satisfies Eq. (21). The same method is used by Lingwood³⁶ to compute the envelope of the amplitude of a Blasius boundary layer. The space-time diagram, Fig. 12, is plotted for only positive amplification rates values, $\{-\text{Im}[\int_{x_0}^x \alpha(x, \Omega^*) dx/t] + \text{Im}(\Omega^*)\}$. From Fig. 12, it can be seen that wave packet propagation is almost similar in both cases. Indeed the border of the wave packet starting at the beginning of the flat plate ends at time almost equal to 1000 for the two methods. The nonparallel correction due to the BiGlobal approach is weak for the wave packet speed propagation. Thus, the transient resulting from the non-normality of the TS eigenvectors simulates the behavior of the wave packet as it was computed by the previous method (Gaster⁴⁸). Then the comparison allows us to be confident that transient growth examined in this part is principally governed by the non-normality of the streamwise direction of the TS modes. Consequently the influence of normal direction from TS modes in the transient growth can be considered as weak.

Although the mechanism considered here allowed to obtain a global measure, with the value of $G(t)$, of the convective instability resulting from the TS modes of the flat plate boundary layer differs from the classical transient growth analysis of a boundary layer leading to a bypass transition. Indeed, it is well known that continuous spectrum of the OS equation for unbounded flow has a great influence on the transient behavior caused by the non-normality of the normal direction and particularly for 3D perturbations. Consequently it can be asked if the other global modes from the spectrum (see Fig. 1) can describe an equivalent of the continuous

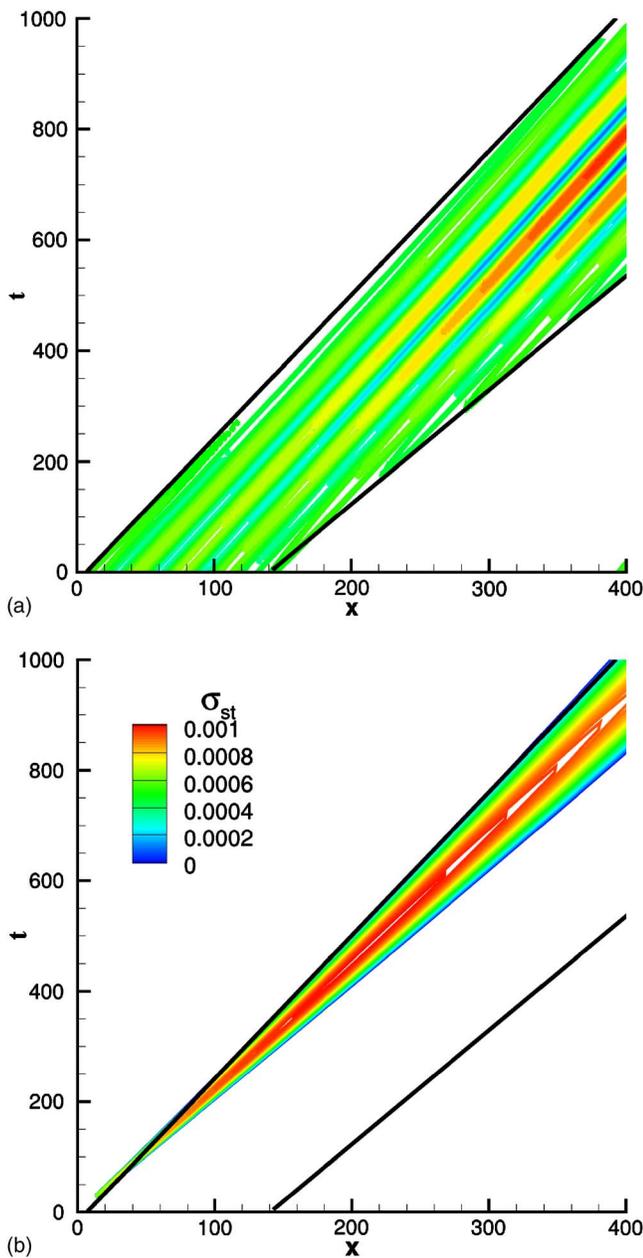


FIG. 12. (Color online) (a) Space-time diagram obtained from TS modes by the BiGlobal approach representing the evolution in space and time of the crests of the wave packet for the domain $D3$. (b) Space-time diagram obtained by the steepest descent approach representing positive values of amplification rate σ_{st} in space and time of the wave packet generated by a pulse at the beginning of the domain. The borders of the wave packet from the BiGlobal analysis are represented by black lines.

spectrum of the OS analysis and could possibly create transient energy thanks to the normal and streamwise directions.

B. Global modes that are similar as a continuous spectrum

In the next analysis it is supposed that the flow is parallel and the spatial amplification rate sufficiently small to be neglected. The continuous spectrum in the BiGlobal analysis is then similar to the OS equation, $\Omega_r/\alpha_r=U$, with U the exterior velocity, $U=1$, then $\Omega_r=\alpha_r$.⁵⁰ The truncation of the domain in the BiGlobal analysis imposes a minimal wave num-

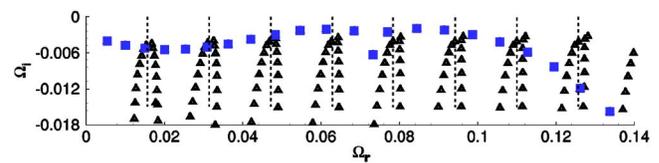


FIG. 13. (Color online) Positions of an equivalent of the continuous branch in the BiGlobal analysis illustrated by dotted vertical lines for $D3$.

ber equal to $\alpha_r=2\pi/L_x$ with L_x the domain length. Then it is plotted in Fig. 13 the position of the possible continuous branch from the BiGlobal equations, $\Omega_r=N\times\alpha_r$ with $N\in\mathbb{N}$ and the entire spectrum. The agreement is pretty clear between the positions of no TS modes and those of the supposed continuous spectrum. All calculations gave the same results. Thus a difficulty occurs for describing the wave packet of a boundary layer subjected to a 3D perturbation when the transient growth due to the continuous branch is larger⁵¹ and particularly for long transverse wave number thanks to a BiGlobal analysis. It can be thus supposed that there is a short time where these “continuous branches” can have an influence of the wave packet dynamic. Moreover it would be an ideal test to have a global measure of the transient amplification when the effects of the non-normality on the streamwise and normal directions are strongly combined.

VI. SUMMARY

This paper’s aim was to prove the ability of a linear global approach based on a two-dimensional linear BiGlobal stability analysis (spanwise wave number is fixed to zero) to recover convective instability properties of a boundary layer. A detailed study on the influence of the boundary conditions used in the literature and the treatment of the spurious pressure mode is well defined for the eigenvalue problem resulting from the discretized BiGlobal linear stability equations (3). More particularly, the choice of the boundary condition, based on the approximation of the local dispersion relation, appears more appropriated at the outflow. The structure of the global stable TS modes match perfectly with a nonparallel approach based on the linear PSE equations. Moreover the possibility of recovering local properties as the position on the neutral curve is clarified. Furthermore, a global characteristic of convective flow is illustrated on realistic flow. Indeed the use of the approximation of the pseudospectra determines the global sensitivity to a harmonic forcing in the asymptotic behavior and brings a new physical interpretation of these global modes. Finally, the comparison between transient growth energy resulting from the non-normality of TS modes and the steepest descent shows that the normal components contribution of the TS modes is weak. Then a discussion on an equivalence of the continuous branch where the contribution could be from the normal and streamwise components is opened. Particularly a study on their effect of such flow submitted to 3D perturbations should be interesting. Otherwise the present global modes discussions on such an academic configuration opens considerable prospects on more complicated flows as the separated boundary layer. More particularly, a similar analysis, as the sensitivity of

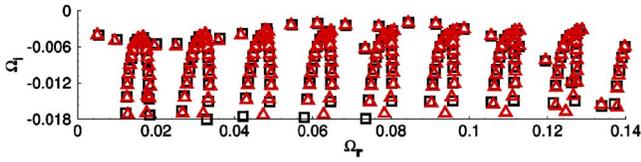


FIG. 14. (Color online) Deltas are associated with $y_{\max}=25$ and squares to $y_{\max}=20$.

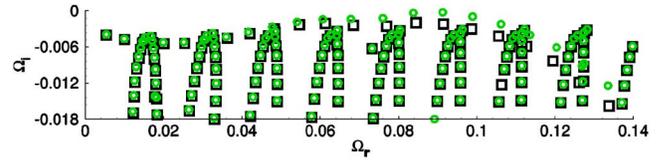


FIG. 16. (Color online) Circles are associated with $\Omega_0=0.1$ and squares to $\Omega_0=0.08$.

global modes, could explain some phenomenon as unsteadiness not revealed with the classical approach where the parallelism hypothesis cannot be relevant.

ACKNOWLEDGMENTS

Computing time was provided by the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS)-CNRS.

APPENDIX A: DETAILS ON THE NUMERICAL METHOD

1. Spectral method

The Chebyshev collocation spectral method is used to approximate the eigenfunctions \hat{u} , \hat{v} , and \hat{p} . The Gauss-Lobatto collocation points are considered. The differentiation matrices are noted as \mathcal{D}_x and \mathcal{D}_y (see the coefficients in Refs. 38 and 52). Then the eigenvalue problem (4) can be written as

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{D}_x \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{D}_y \\ \mathcal{D}_x & \mathcal{D}_y & \mathcal{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = i\Omega \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix}$$

with \mathcal{I} the identity matrix, and \mathcal{C} representing the constraints for the spurious pressure modes. The coefficients of the matrix \mathcal{A} are

$$\mathcal{A}_{11} = -\frac{1}{\text{Re}}(\mathcal{D}_x^2 + \mathcal{D}_y^2) + U\mathcal{D}_x + V\mathcal{D}_y + \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\mathcal{A}_{12} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\mathcal{A}_{21} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\mathcal{A}_{22} = -\frac{1}{\text{Re}}(\mathcal{D}_x^2 + \mathcal{D}_y^2) + U\mathcal{D}_x + V\mathcal{D}_y + \frac{\partial V}{\partial y}.$$

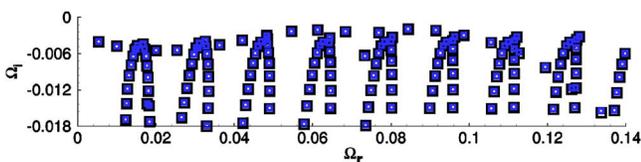


FIG. 15. (Color online) Circles are associated with $N_x=170$ and squares to $N_x=180$.

In order to map the boundary layer domain from the Gauss-Lobatto points defined between $[-1,1]$, a Jacobian matrix is applied on differentiation matrices. The transformation following the y axis keeps the points close to the wall.

2. Spurious pressure modes

The treatment of the pressure for incompressible flow using a Chebyshev/Chebyshev discretization is not quite obvious and more particularly for an eigenvalue problem. Some authors such as Theofilis²⁶ proposed using compatibility conditions for pressure based on momentum equation projection on the normal direction of the boundary condition. Otherwise, Ehrenstein and Gallaire²⁷ indicated imposing only constraints on spurious pressure modes in order to verify the incompressibility everywhere. In order to not be influenced by pressure boundary conditions, the second options is chosen. For that the same method as Philips and Roberts³⁷ in their DNS calculation of a lid driven cavity is used. In a Chebyshev polynomials basis the pressure can be written as

$$\hat{p}(x,y) = \sum_{l=0}^{n_y} \sum_{k=0}^{n_x} T_k(x)T_l(y)\hat{p}_{k,l} \tag{A1}$$

with $T_k(x)=\cos(k \cos^{-1}x)$. The pressure perturbation terms in the system (3) only occurs as a gradient in the momentum equation. Consequently modes $T_{n_x}(x)T_0(y)$, $T_0(x)T_{n_y}(y)$, and $T_{n_x}(x)T_{n_y}(y)$ (line, column, and checkerboard modes, respectively) are termed as spurious because they have no effect on the velocity perturbation. At these modes the corners modes defined by $(1\pm x)T'_{n_x}(1\pm y)T'_{n_y}$ and the constant mode $T_0(x)T_0(y)$ representing the mean value of the pressure perturbation (see Refs. 38, 52, and 37) has been added. Following the article of Philips and Roberts³⁷ the constant, line, column, and checkerboard modes are imposed at zero,

$$\hat{p}_{0,0} = \hat{p}_{n_x,0} = \hat{p}_{n_x,n_y} = \hat{p}_{0,n_y} = 0. \tag{A2}$$

A collocation spectral being used the relations (A2) have to be written in the physical space,

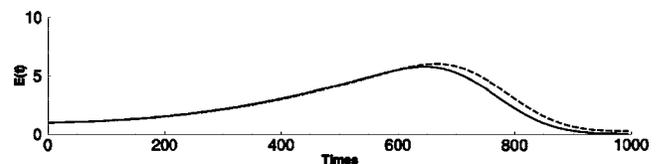


FIG. 17. Transient growth leading to the optimal energy for the two Ω_0 values. The dotted line $\Omega_0=0.1$ and the solid line $\Omega_0=0.08$.

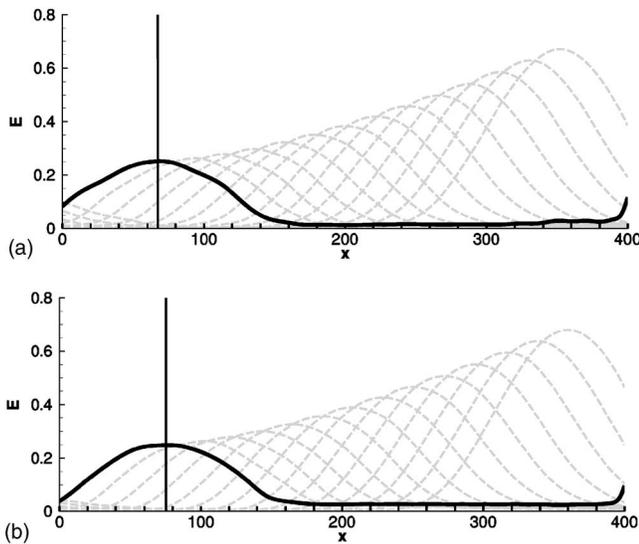


FIG. 18. Spatial evolution of the wave packet. The energy following the vertical axis is integrated for each streamwise position at times 0 until 700. The thick lines represent the initial condition and dotted lines the integration spaced in times of 50. Vertical lines define the spatial beginning of the wave packet. (a) $\Omega_0 \approx 0.1$, (b) $\Omega_0 \approx 0.08$.

$$\hat{p}_{i,j} = \frac{2}{n_x n_y} \frac{1}{c_i c_j} \sum_{p=0}^{n_x} \sum_{l=0}^{n_y} \hat{p}(x_j, y_l) T_i(x_p) T_j(y_l) \frac{1}{c_p c_l} \quad (\text{A3})$$

with

$$c_k = \begin{cases} 2 & \text{if } k = 0 \text{ or } n_x \text{ or } n_y \\ 1 & \text{if } k \geq 1. \end{cases} \quad (\text{A4})$$

Finally these constraints are imposed on collocation points adjacent to the corners. For the corner modes the continuity is not imposed because at these points the free divergence is completely defined (see Peyret³⁸). Finally the continuity equation is imposed on all other collocation points of the domain's borders.

APPENDIX B: DETAILS ON NUMERICAL PARAMETERS

The domain $D3$ is considered in the next results.

1. Influence of the upper boundary limit in the BiGlobal approach

In order to quantify the influence of the y_{\max} value and more particularly if this distance is far enough from the wall, another computation is performed on $y_{\max} = 25$. From the results shown in Fig. 14, the difference between the two computations is really weak. Consequently the upper boundary condition fixed at 20 seems to be quite far enough from the wall to not influence the presented results.

2. Influence of the discretization in the streamwise direction

In order to be trustful that the global modes are not influenced by the streamwise discretization, another computation is performed with $N_x = 170$ and compared with the re-

sults previously discussed on this article. Figure 15 illustrates thus that the spectrum is independent of the x discretization.

3. Influence of Ω_0 at inflow

In order to evaluate the influence of the Ω_0 value at the inflow boundary condition, a computation is performed with two different values: $\Omega_0 = 0.08$, corresponding to the results presented in the article, and $\Omega_0 = 0.1$. The comparison is shown in Fig. 16; the position and space between each frequency are almost identical and there is a small difference between the temporal amplification rate values. It can thus be supposed that the Ω_0 value does not have an influence on the interference creating the wave packet but can change slightly the position of the beginning of the development of this last one. To illustrate this last comment, a transient growth analysis is performed on the global modes corresponding to $\Omega_0 = 0.1$. Results are shown in Figs. 17 and 18, where the temporal and the spatial evolution of the wave packet are analyzed. The spatial evolution of the wave packet being provided with the energy value, $E(x, t) = \int_0^{\max} (|u(x, y, t)|^2 + |v(x, y, t)|^2) dy$, is defined on each streamwise position for each time. The envelope characterizes the spatial evolution of the wave packet. For the two different values of Ω_0 , the respective wave packets are identical but for $\Omega_0 = 0.1$ it begins in space before those characterized by $\Omega = 0.08$ (the beginning abscissa is defined by vertical lines in Fig. 18). Consequently, the wave packet evolves in a slightly longer time (Fig. 17). The described phenomenon is then independent of the Ω_0 value.

¹W. Tollmien, "Über die entstehung der turbulenz," Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 21 (1929) [NACA TM 609].

²H. Schlichting, "Zür entstehung des turbulenz bei der plattenströmung," Z. Angew. Math. Mech. **13**, 171 (1933).

³G. B. Schubauer and H. K. Skramstad, "Laminar-boundary layer oscillations and transition on flat plate," Technical Report No. 909, NACA (1948).

⁴C. C. Lin, *The Theory of Hydrodynamic Stability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1955).

⁵G. B. Schubauer and P. S. Klebanoff, "Contributions on the mechanisms of boundary-layer transition," Technical Report No. 1289, NACA (1956).

⁶P. S. Klebanoff and K. D. Tidstrom, "The evolution of amplified waves leading to transition in a boundary-layer with zero pressure gradient," Technical Report No. WA D195, Tech. Note U S Natl. Aeronaut. Space Adm. (1959).

⁷P. S. Klebanoff, K. D. Tidstrom, and L. M. Sargent, "The three-dimensional nature of boundary-layer instability," J. Fluid Mech. **12**, 1 (1962).

⁸J. A. Ross, F. H. Barnes, J. G. Bruns, and M. A. S. Ross, "The flat plate boundary layer part 3: Comparison of theory with experiment," J. Fluid Mech. **43**, 819 (1970).

⁹H. Fasel, "Investigation of the stability of boundary layers by a finite-difference model of the Navier-Stokes equations," J. Fluid Mech. **78**, 355 (1976).

¹⁰H. Fasel and U. Konzelmann, "Nonparallel stability of a flat-plate boundary layer using the complete Navier-Stokes equations," J. Fluid Mech. **221**, 311 (1990).

¹¹M. Bouthier, "Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles," J. Mec. **12**, 599 (1972).

¹²M. Gaster, "On the effect of boundary layer growth on flow stability," J. Fluid Mech. **102**, 127 (1974).

¹³A. H. Nayfeh, W. S. Saric, and D. T. Mook, "Stability of nonparallel flows," Arch. Mech. **26**, 401 (1974).

¹⁴W. S. Saric and A. Nayfeh, "Nonparallel stability of boundary-layer flows," Phys. Fluids **18**, 945 (1975).

¹⁵F. T. Smith, "On the nonparallel flow stability of the Blasius boundary

- layer," Proc. R. Soc. London, Ser. A **366**, 91 (1979).
- ¹⁶T. J. Bridges and P. J. Morris, "Boundary layer stability calculations," J. Fluid Mech. **30**, 3351 (1987).
- ¹⁷T. Herbert, F. P. Bertolotti, and P. R. Spalart, "Linear and nonlinear stability of the Blasius boundary layer," J. Fluid Mech. **242**, 441 (1992).
- ¹⁸T. Herbert and F. P. Bertolotti, "Stability analysis of nonparallel boundary layers," Bull. Am. Phys. Soc. **32**, 2079 (1987).
- ¹⁹R. D. Joslin, C. L. Streett, and C.-L. Chang, "Validation of three-dimensional incompressible spatial direct numerical simulation code, a comparison with linear stability and parabolic stability equations theories for boundary-layer transition on a flat plate," Technical Report No. TP-3205, NASA (1992).
- ²⁰R. D. Joslin, C. L. Streett, and C.-L. Chang, "Oblique-wave breakdown in an incompressible boundary layer computed by spatial DNS and PSE theory," in *Instability, Transition, and Turbulence*, edited by M. Y. Hussaini, A. Kumar, and C. L. Streett (Springer-Verlag, New York, 1992), pp. 304–310.
- ²¹R. D. Joslin, C. L. Streett, and C.-L. Chang, "Spatial direct numerical simulation of boundary-layer transition mechanisms: Validation of PSE theory," Theor. Comput. Fluid Dyn. **4**, 271 (1993).
- ²²E. Laurien and L. Kleiser, "Numerical simulation of boundary-layer transition and transition control," J. Fluid Mech. **199**, 403 (1989).
- ²³L. Kleiser and T. A. Zang, "Numerical simulation of transition in wall-bounded shear flows," Annu. Rev. Fluid Mech. **23**, 495 (1991).
- ²⁴M. M. Rai and P. Moin, "Direct numerical simulation of transition and turbulence in a spatially-evolving boundary layer," AIAA Pap. 91-1607 (1991).
- ²⁵R. S. Lin and M. R. Malik, "On the stability of attachment-line boundary layers. Part 1. The incompressible swept Hiemenz flow," J. Fluid Mech. **311**, 239 (1996).
- ²⁶V. Theofilis, "Advances in global linear instability of nonparallel and three-dimensional flows," Prog. Aerosp. Sci. **39**, 249 (2003).
- ²⁷U. Ehrenstein and F. Gallaire, "On two-dimensional temporal modes in spatially evolving open flows: The flat-plate boundary layer," J. Fluid Mech. **78**, 4387 (2005).
- ²⁸C. Cossu and J.-M. Chomaz, "Global measures of local convective instabilities," Phys. Rev. Lett. **78**, 4387 (1997).
- ²⁹F. Chedevergne, G. Casalis, and Th. Feraille, "Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection," Phys. Fluids **18**, 014103 (2006).
- ³⁰M. P. Simens, L. González, V. Theofilis, and R. Gómez Blanco, "On fundamental instability mechanisms of nominally two-dimensional separation bubbles," IUTAM Laminar Turbulent Transition Symposium VI Flows, Dec. 2004, Bangalore, India (2004).
- ³¹W. R. Briley, "A numerical study of laminar separation bubbles using the Navier–Stokes equations," J. Fluid Mech. **47**, 713 (1971).
- ³²J.-M. Chomaz, "Global instabilities in spatially developing flows: Non-normality and nonlinearity," Annu. Rev. Fluid Mech. **37**, 357 (2005).
- ³³R. B. Lehoucq, D. C. Sorensen, and C. Yang, *ARPACK Users' Guide, Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*, October (1997).
- ³⁴V. Theofilis, S. Hein, and U. Dallmann, "On the origins of unsteadiness and three dimensionality in a laminar separation bubble," Proc. R. Soc. London, Ser. A **358**, 3229 (2000).
- ³⁵M. Gaster, "A note on the relation between temporally increasing and spatially increasing disturbances in hydrodynamic stability," J. Fluid Mech. **14**, 222 (1962).
- ³⁶R. J. Lingwood, "On the application of exp(n) methods to three-dimensional boundary-layer flows," Eur. J. Mech. B/Fluids **18**, 581 (1999).
- ³⁷N. P. Timothy and W. R. Gareth, "The treatment of spurious pressure modes in spectral incompressible flow calculations," J. Comput. Phys. **105**, 150 (1993).
- ³⁸R. Peyret, *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow* (Springer, Berlin, 2002).
- ³⁹F. Li and M. R. Malik, "On the nature of the PSE approximation," J. Fluid Mech. **333**, 125 (1995).
- ⁴⁰T. Herbert, "Parabolized stability equations," Annu. Rev. Fluid Mech. **29**, 245 (1997).
- ⁴¹C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, International Series in Pure and Applied Mathematics (McGraw-Hill, New York, 1978).
- ⁴²K.-C. Toh and L. N. Trefethen, "Calculation of pseudospectra by the Arnoldi iteration," SIAM J. Sci. Comput. (USA) **17**, 1 (1996).
- ⁴³L. Kaiktsis, G. M. Em Karniadakis, and S. Orszag, "Unsteadiness and convective instabilities in two-dimensional flow over a backward facing step," J. Fluid Mech. **321**, 157 (1996).
- ⁴⁴P. J. Schmid and D. S. Henningson, *Stability and Transition in Shear Flows* (Springer, Berlin, 2001).
- ⁴⁵S. C. Reddy and D. S. Henningson, "Energy growth in viscous channel flows," J. Fluid Mech. **252**, 209 (1993).
- ⁴⁶K. M. Butler and B. F. Farrell, "Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow," Phys. Fluids A **4**, 1637 (1992).
- ⁴⁷P. Huerre and P. A. Monkewitz, "Absolute and convective instabilities in free shear layers," J. Fluid Mech. **159**, 151 (1985).
- ⁴⁸M. Gaster, "The development of a two-dimensional wavepacket in a growing boundary layer," Proc. R. Soc. London, Ser. A **384**, 317 (1982).
- ⁴⁹M. Gaster, "Propagation of linear wave packets in laminar boundary layers," AIAA J. **19**, 419 (1981).
- ⁵⁰C. E. Grosh and H. Salwen, "The continuous spectrum of the Orr–Sommerfeld equation. Part 1. The spectrum and the eigenfunctions," J. Fluid Mech. **87**, 33 (1978).
- ⁵¹P. J. Schmid, "Linear stability theory and bypass transition in shear flows," Phys. Plasmas **7**, 1788 (2000).
- ⁵²C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Springer, Berlin, 1988).

Global instabilities and optimal growth in a separated boundary-layer flow

Journal:	<i>Journal of Fluid Mechanics</i>
Manuscript ID:	JFM-07-S-0857
mss type:	Standard
Date Submitted by the Author:	04-Dec-2007
Complete List of Authors:	Robinet, J-C; ENSAM CER de Paris, SINUMEF Laboratory; SINUMEF Laboratory - ENSAM PARIS, 151 Alizard, Frédéric; ENSAM CER de PARIS, SINUMEF Laboratory
Keyword:	Instability, Separation < Boundary Layers, Transition to turbulence < Instability



Global instabilities and optimal growth in a separated boundary-layer flow

By **F. ALIZARD¹** AND **J.-CH. ROBINET¹**

¹SINUMEF Laboratory, ENSAM-ParisTech, 151, Boulevard de l'Hôpital, 75013 PARIS, FRANCE

(Received December 3th 2007 and in revised form XXXX)

The instability mechanism of an absolutely stable flat plate laminar separation bubble is revisited through a global linear stability analysis. Three different suction profiles induce well defined separated zones with different intensities.

In particular, the use of the non normality of the global linear stability operator and a global modes decomposition of the perturbation, whose spatial structures are studied, illustrate two distinct mechanisms associated to the separated flows: a strong transient 2D convective phenomenon and an asymptotic 3D globally unstable scenario, which takes the form of stationary flat roll structures in the transverse direction under the influence of a centrifugal mechanism.

Moreover, the possibility to trigger the asymptotic 3D phenomenon will be discussed through a study of the time scales of the different mechanisms and the spatial structure of the corresponding adjoint mode. The difficulty of the centrifugal mechanism to emerge in practical configuration, which are strongly dominated by a Kelvin-Helmholtz instability, is thus illustrated.

1. Introduction

When a laminar boundary layer encounters a sufficiently large pressure gradient, a laminar separation bubble (referenced as LSB hereafter) occurs. This fundamental phenomenon has been the subject of many investigations since the first observations of Jones (1934), the experiments of Gaster (1969) and the numerical simulation of Rist & Maucher (1994). This particular interest in fluid mechanics can be explained by the large number of related applications in many engineering configurations. For example, for low Reynolds number in the aerodynamics of airfoils and turbomachineries, or any kind of flow over a geometry variation like a step (Armaly *et al.* (1983)) or a bump, are particularly relevant in engineering problems which concern laminar separation boundary layer. A typical feature of LSB is its very unstable nature and its high sensitivity to background disturbances even at low Reynolds numbers (Dogval *et al.* (1994)), which could affect the aerodynamical performances causing an increase of the drag or a loss of lift on airfoils at angles of attack close to static stall values. Consequently, the understanding of the instability mechanisms related to a LSB stills a fundamental subject in order to optimize the control strategies as the development of accurate actuators. Nevertheless, an unique or universal feature associated to LSB does not exist. In particular, the dynamics of the LSB can be strongly affected by many features, as the shape of the bubble, being either short or long (Gaster (1969)), the local properties, being either convective or absolute (Hammond & Redekopp (1998)), and the topology of the separation, being a GIS or an APG induced

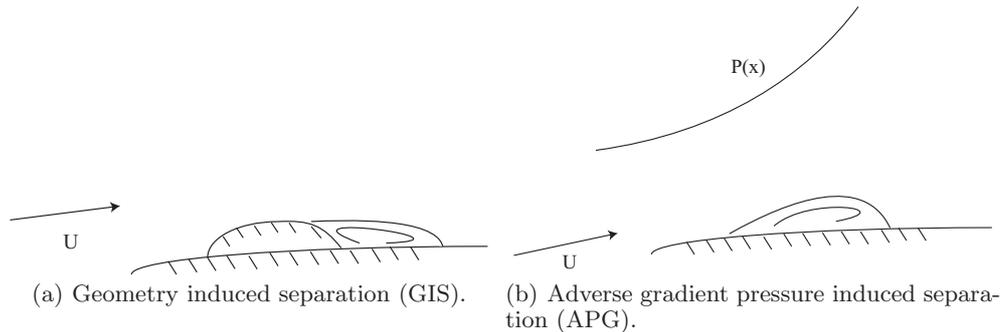


FIGURE 1. Different configurations for laminar separated flow.

separation one †, whose distinction was realized by Alving & Fernholz (1997) and is illustrated in the figure 1. However, the flow can be found to behave by two fundamentally different possible ways. A first possibility is that the instability mechanism associated to the LSB is governed by a strong convective instability originating from the shear layer. The transition process is thus started by the amplification of Kelvin-Helmholtz (referred as KH hereafter) waves traveling along the bubble. It is particularly the case of short bubbles (Gaster (1969)). The second possibility is the occurring of a more intrinsic phenomenon, which is less dependent on the background noise. This second phenomenon can appear in three different ways. First, the triggering of a low frequency oscillation of the detached boundary layer, called "flapping" (Dogval *et al.* (1994), Rist & Maucher (2002)). Its physical reason stills obscure, but seems to be correlated to a global instability as it is suggested in the direct numerical simulation of Marquillie & Ehrenstein (2003) of a flow at the rear of a bump. Second, a global unsteadiness from absolute instability (Pier (2002), Chomaz *et al.* (1991)) which can trigger a high frequency oscillation. That kind of phenomenon was identified in a detached zone confined between two bumps, by Marquillie & Ehrenstein (2003). And finally, a topological change of the bubble influenced by a global 3D instability which was identified by Theofilis (2003). The transition process will thus strongly depend on how the bubble will react facing the background disturbances, and on the influence of these different mechanisms.

The aim of this contribution is to revisit a few instability mechanisms associated to such flow with a global linear stability approach (Theofilis (2003)). Such methodology is thus relevant in such kind of configuration, where non-parallel effects could have an influence.

For that purpose, just the configuration APG will be treated, whose the advantage is to take into account only the influence of the bubble and not some additional geometry effects as the curvature of a bump. We will thus consider some 2D and 3D linear instability mechanisms associated to a LSB in a low Reynolds number regime where the flow is absolutely stable. Figure 2 illustrates the configuration of LSB which is studied in this paper. More specifically, the use of the non normality of the global linear stability operator (Schmid (2007)) and a decomposition into a global modes basis of the perturbation will be able to show two fundamental mechanisms, a transient 2D and an asymptotic 3D, associated to the first phase of the transition process of such flow. Nevertheless, the asymptotic scenario related to the 3D instability, whose physical nature will be specified, will be investigated through a study of the time scales of the different mechanisms and an analysis of the corresponding adjoint mode.

† for Geometry Induced separation and Adverse Pressure Gradient respectively

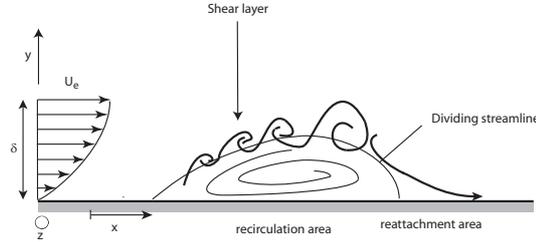


FIGURE 2. The APG laminar separated flow configuration adopted in the present study. The first destabilizing mechanisms are analyzed.

2. Problem formulation & numerical resolution

2.1. Base flow at $Re_{\delta^*} = 200$

2.1.1. Numerical aspects.

The 2D and 3D instability mechanisms of a two dimensional flat plate separated flow, called the base flow, are investigated. Coordinates x , y and z represent respectively the streamwise, normal and spanwise directions. The base flow, represented by $\mathbf{U}(x, y) = U(x, y)\mathbf{e}_x + V(x, y)\mathbf{e}_y$ where U and V are the streamwise and the normal components respectively, is computed by integrating the non-dimensional two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations in the vorticity/stream function formulation:

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} + U \frac{\partial \varpi}{\partial x} + V \frac{\partial \varpi}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} \right) \text{ and } \Delta \psi = \varpi, \quad (2.1)$$

where ϖ and ψ are the vorticity and the stream function respectively. The vorticity transport equation as well as the Poisson equation are discretized with a second order finite difference scheme. A semi implicit scheme of second order accuracy **AB2/CN** is used for the time integration, where the viscous terms are discretized implicitly and the advection terms explicitly. The implicit procedure is solved with a direct solver based on Thomas algorithm using the block tridiagonal matrix.

The displacement thickness at inflow δ^* and the maximum of the exterior velocity $U_i = \max_x U(x, L_y)$ are taken as the reference values. The Reynolds number is defined as $Re_{\delta^*} = U_i \delta^* / \nu$ and it is equal to 200.

The boundary conditions are illustrated in Figure 3, where ψ_B and ϖ_B refer to the Blasius profile. In order to create a well defined separated zone, a suction profile referenced as V_{top} is imposed on the upper boundary. A similar procedure is used by Na & Moin (1998) in their study of a turbulent detached boundary layer.

2.1.2. Base flows presentation.

In order to analyze the influence of the suction profile in the dynamic of the perturbation, three base flows are created (referenced as D1, D2 and D3) by increasing the suction profile. Finally $L_y = 30$, $L_x = 500$, and a grid (700×150) are used.

The suction profiles and D1 are illustrated in the figures 4(a) and 4(b). In order to compare the separated flows with those studied in the literature, two parameters are analyzed. At first, the factor $m = -[\theta^2 (\partial^2 u / \partial y^2) / U_i]_{sep}$, computed at the separation point, characterizes the presence of a separated zone. Then, the Reynolds number based on the momentum thickness is computed at the separation point ($Re_{\theta_{sep}}$) and whose the

4

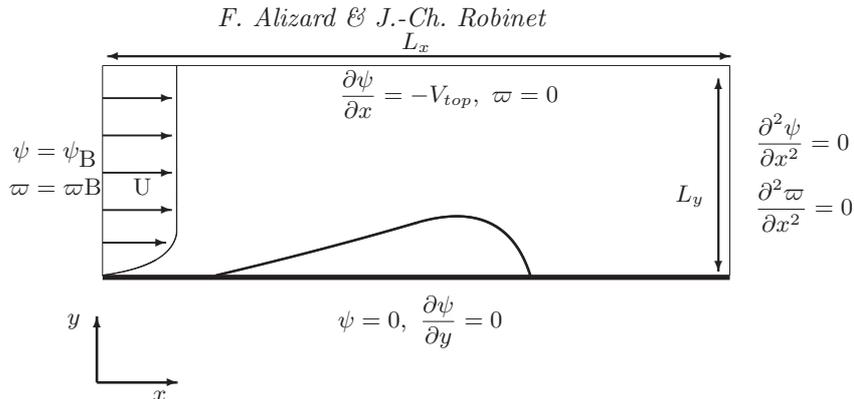
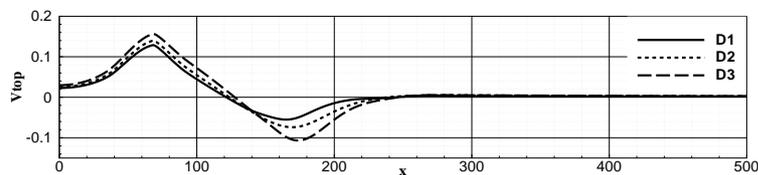
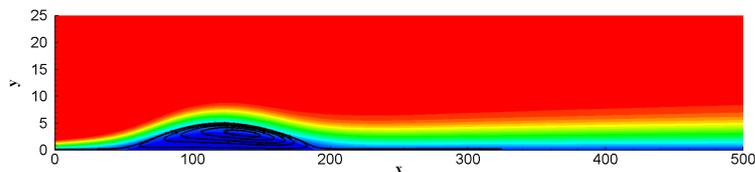


FIGURE 3. Computational domain and boundary conditions used for the computation of the base flow.



(a) Suction profiles based on normal velocity.



(b) U component of the base flow D1. The streamlines are represented by black lines.

FIGURE 4. Separated flow at Reynolds number $Re = 200$.

value is representative of some industrial application. These parameters are referenced in the table 1. The parameter m varies from -0.127 to -0.086 which is in accordance with those found by Washito *et al.* (1997) and Pauley *et al.* (1990) in similar configurations. The Reynolds number $Re_{\theta_{sep}}$ varies from 161 to 182 which is typical of a low Reynolds number configuration, whereas in industrial applications for laminar flat plate separated flows the typical values are between 10^2 and 10^3 (Alam & Sandham (1999)). Consequently, the base flows presented here are representative of laminar flat plate separated flows. The stability analysis will be thus relevant and illustrates generic bifurcation mechanisms associated to such flows.

2.1.3. Local analysis and convective/absolute properties.

In order to illustrate the local convective properties of D1, D2 and D3, a spatial study based on a parallel analysis (Orr-Sommerfeld noted OS thereafter) and linear PSE (noted PSE thereafter) method are realized. For the local analysis, the perturbation is decomposed as follows:

$$(u, v, p)^t = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})^t(y) \exp[i(\alpha x - \Omega t)] + c.c. \quad (2.2)$$

Base flows	X_{sep}	X_R	$Re_{\theta_{sep}}$	m
D1	49.7	189	161	-0.086
D2	46.1	194	168	-0.117
D3	41	204	182	-0.127

TABLE 1. Base flow characteristics at $Re_{\delta^*} = 200$. X_{sep} and X_R representing the separation and reattachment point respectively. θ is the momentum thickness.

where (u, v) are the velocity disturbances in the streamwise and normal directions and p is the pressure disturbance. The local dispersion relation based on OS is referenced as $\mathcal{D}(\Omega, \alpha; x)$, with α the complex wave number and Ω the real pulsation.

The spatial amplification rate is studied with a local approach with $\sigma = -\alpha_i$, and a PSE one with:

$$\sigma = -\alpha_i + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x} \quad (2.3)$$

where the non parallelism criterion is based on the energy: $E = \int (|u|^2 + |v|^2) dy$. A spectral collocation based on Chebyshev polynomials is used to discretize the normal axis for PSE and OS equations. 100 collocation points are considered. The x -marching procedure used, based on a backward Euler, for the PSE equations is similar to Li & Malik (1995).

The convective spatial analysis is illustrated by the neutral curve 5(a) and the eigenfunction at $x = 116$ and $\Omega = 0.0904$ associated to D1. We can observe the large range of pulsations that are spatially unstable. In particular, the flow is convectively stable at inflow and tends to a classical boundary layer's instability at the end of the flat plate where the non parallelism effects are less pronounced (PSE curve and OS curve being almost merged). Otherwise, the KH nature of the instability is illustrated by the eigenfunction profiles, where a typical aspect from the inflectional point is present (similar characteristics are present in the separated flows of Rist (2003) and Theofilis *et al.* (2000)). This particular point will be relevant in the comparison with the global linear approach. D2 and D3 are characterized by similar spatial convective properties. Finally, in order to test the globally stable nature of the flow for the two-dimensional perturbation, an absolute/convective study is realized for D1, D2 and D3. For this purpose, we analyze the response of a pulse with the assumption that the flow is locally parallel. This response can be determined by the following Green function:

$$G_a(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_L \int_F \frac{\exp[i(\alpha x - \Omega t)]}{D(\alpha, \Omega)} d\alpha d\Omega \quad (2.4)$$

with the causality condition : $G_a(x, t) = 0$ if $t < 0$

where L and F represent the integration contours of Ω and α respectively. The temporal amplification rate of the ray $x/t = 0$ is considered, where the pinch of the spatial branch $\alpha^+(\Omega)$ and $\alpha^-(\Omega)$, with $\Omega \in L$, occurs (Huerre & Monkewitz (1985)). The procedure for D1 is illustrated for $x = 160$. The pinch occurs for L where the values of Ω_i vary between -0.055 and -0.057 . A Newton-Raphson procedure is thus performed to converge for the zero group velocity $x/t = 0$. The absolute amplification rate is analyzed along the x -axis for D1, D2 and D3. The base flows are thus absolutely stable. The previous convective

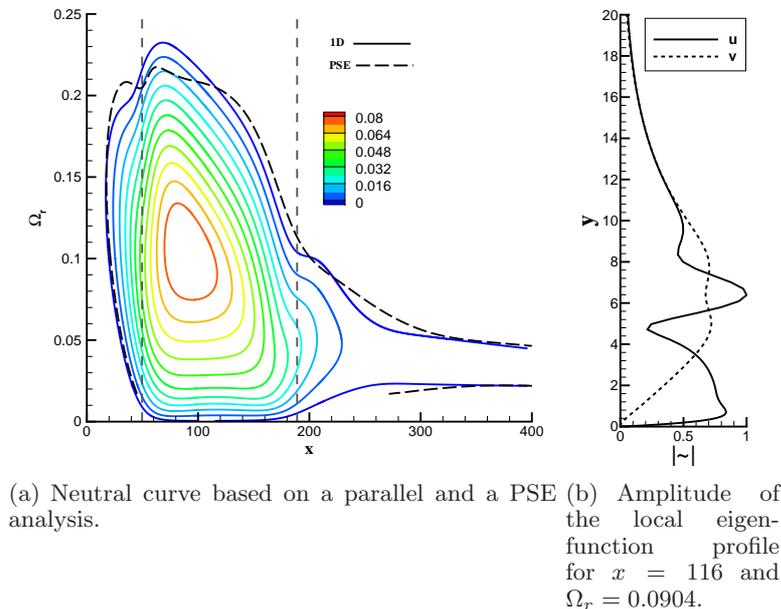


FIGURE 5. Spatial stability analysis associated to the base flow D1.

study is then relevant, and the globally stable nature of the flows can thus be expected under the local parallelism assumptions.

2.2. Global stability problem

2.2.1. Evolution equation and operators.

We investigate the evolution in space and time of every small perturbation introduced into the 2D flat plate separated flows occurring in the plane (x, y) . The transverse direction is referred as z . The instantaneous velocity and pressure fields are decomposed into a two-dimensional base flow $\mathbf{Q} = (\mathbf{U}, 0, P)^t$ and a two- or three-dimensional disturbance flow $\mathbf{q} = (u, v, w, p)$ as follows:

$$\mathbf{Q}(x, y) + \varepsilon \mathbf{q}(x, y, z, t) \quad (2.5)$$

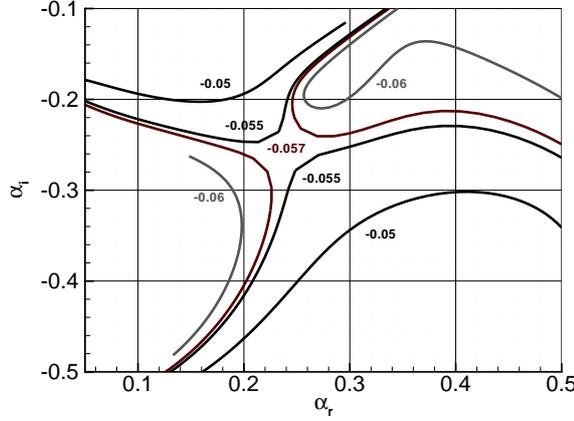
with $\varepsilon \ll 1$, the amplitude of the perturbations. The base flow is homogeneous in the spanwise direction z , the mathematical form of the perturbations can thus be written in the normal mode form:

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = (\mathbf{u}, p)^t(x, y, t; \beta) e^{i\beta z} + .c.c., \quad (2.6)$$

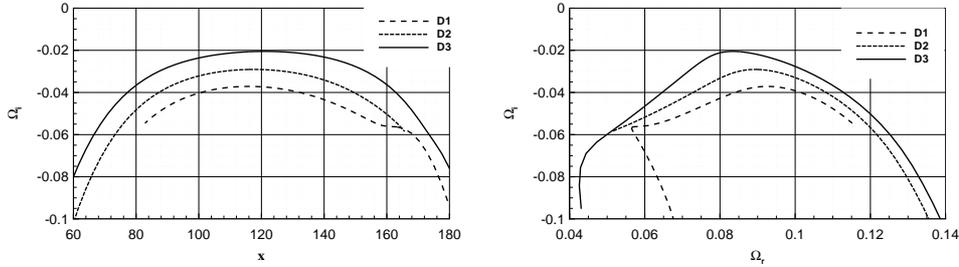
with $\mathbf{u} = (u, v, w)^t$, where u, v, w represent the streamwise, normal and spanwise components of the velocity perturbation, p the pressure perturbation and β denotes the transverse wave number.

The space and time dynamics of \mathbf{q} at the first order in ε can thus be described by the following evolution equation:

$$\begin{cases} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\mathbf{A} \mathbf{q}, \\ \mathbf{q}(x, y, t = 0; \beta) = \mathbf{q}_0 \end{cases} \quad (2.7)$$



(a) pinch branches location of $\alpha_+(L)$ and $\alpha_-(L)$, where the contour L is positioned at $\Omega_i = -0.05$ until -0.06 for D1 at $x = 160$.



(b) Absolute amplification rate evolution with the x -position. (c) Absolute amplification rate evolution with the real pulsation.

FIGURE 6. Local convective/absolute analysis for the base flows D1, D2 and D3.

where the operator \mathbf{A} and \mathbf{B} are deduced from the linearized Navier-Stokes equations:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 + \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 + \frac{\partial V}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 & i\beta \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & i\beta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

with $\mathcal{C}_1 = U\partial/\partial x + V\partial/\partial y$ representing the effect of the advection of the perturbation by the base flow and $\mathcal{C}_2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 - \beta^2)/Re$ the viscous diffusion effects. The boundary conditions close the system (2.7). The base flow being convectively stable at inflow and convectively unstable at the outflow, the nullity of the velocity perturbations and a Robin condition based on the approximation of the local dispersion relation are imposed at $x = 0$ and $x = L_x$ respectively †.

† Similar condition is used in Ehrenstein & Gallaire (2005) and Alizard & Robinet (2007b).

2.2.2. Global modes decomposition.

In order to study the space-time evolution of the perturbation initialized with \mathbf{q}_0 , \mathbf{q} is decomposed into a global modes basis of dimension N , solution of (2.7). Then:

$$\mathbf{q}(x, y, t) = \sum_{k=1}^N K_{k,0} e^{i(\beta z - \Omega_k t)} \hat{\mathbf{q}}_k(x, y; \beta) \quad (2.9)$$

$$\text{and } \mathbf{q}_0 = \sum_{k=1}^N K_{k,0} \hat{\mathbf{q}}_k$$

with $\hat{\mathbf{q}}_k(x, y) e^{-i\Omega_k t}$ the global modes. The complex circular frequency Ω_k drives the temporal evolution of the global mode k . In particular, when Ω_i is negative the global mode is damped temporally and if Ω_i is positive the global mode is amplified temporally. The spatial structure of each global mode, in the plane of the flow, is deduced from $\hat{\mathbf{q}}_k(x, y)$. $K_{k,0}$ represents the components of the initial condition of the perturbation into this global modes basis.

Finally, the global modes can be computed from the generalized eigenvalues problem resulting from (2.7):

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{q}} = i\Omega\mathbf{B}\hat{\mathbf{q}} \quad (2.10)$$

The problem (2.10) is discretized with a Chebyshev/Chebyshev collocation spectral method, the base flow is interpolated on the stability analysis grid by a cubic spline interpolation and the resulting eigenvalue problem is solved with a shift and invert Arnoldi algorithm integrated in the ARPACK library (Lehoucq *et al.* (1997)) †.

3. Two-dimensional perturbations: $\beta = 0$

3.1. Global modes family

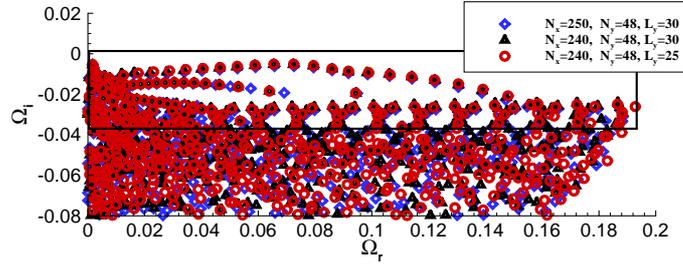
3.1.1. Direct modes

A spectral grid (250×48) and a Krylov subspace of dimension 850 allow to obtain a significative part of the converged spectrum. The stability domain's size, L_x , is fixed to 400. The converged part of the spectrum, illustrated for D3, is framed in the figure 7(a). Only these least damped global modes are taken into account in the next analysis.

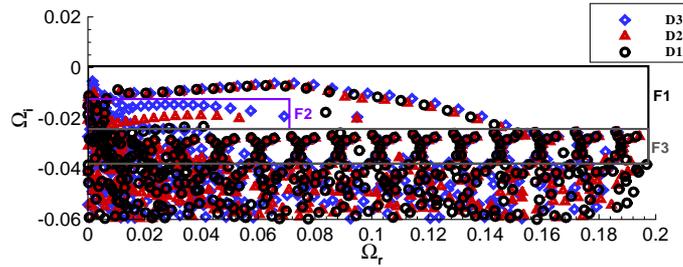
The different spectra for D1, D2 and D3 are represented in the figure 7(b). The different flows are thus globally stable which is concordant with the absolutely stable nature of the local profiles. In particular, three kinds of global modes seem to appear. The different families are referenced as F1, F2 and F3 thereafter. The distinction between F1, F2 and F3 can be inferred by considering the different spatial structure of their respective global modes. These last one are shown in Figure 8. The least damped global modes F1, are reminiscent of the classical KH/TS ‡ modes whose properties are similar to those observed with classical local approach (see Figure 5). Modes F1 are characterized by a strong spatial amplification due to an inflectional mechanism, along the shear layer, followed by a relaxation to a classical TS profile. This behaviour is shown in Figure 9, where the evolution of the local amplitude profiles of the eigenfunctions are depicted. These results are similar to the one obtained by the spatial analysis carried out in the previous section 2.1. Eigenmodes F2 present a different form, and are more specifically influenced by the

† The treatment of the pressure spurious modes is illustrated in Alizard & Robinet (2007b), Peyret (2002) and Phillips & Roberts (1993).

‡ TS as Tollmien-Schlichting



(a) Convergence of the spectrum for D3.



(b) Different families, F1, F2 and F3, of global modes associated to D1, D2 and D3.

FIGURE 7. Spectrum analysis of the base flows.

outflow. In particular, the convergence of this family is not straightforward. However, the discretization that we used seems to be sufficient to describe the dynamics of the perturbation \mathbf{q} . Finally, modes F3 are characterized by a concentration of the energy for high values of the normal direction y .

3.1.2. Adjoint modes

Before a more specific analysis about the dynamics of the initial condition, the study of the adjoint structure of the global modes can be found out to be relevant. Indeed, the spatial structure of the adjoint modes can bring information about the influence of each family in the transient dynamics. This property can be highlighted by the global decomposition (2.9). In order to illustrate this last comment, we write $K_{k,0}$ by using the biorthogonality condition (Schmid & Henningson (2001)) as follows:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_0, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle &= K_{k,0} \langle \hat{\mathbf{q}}_k, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle, \\ \Rightarrow K_{k,0} &= \frac{\langle \mathbf{q}_0, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle}{\langle \hat{\mathbf{q}}_k, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle} \end{aligned} \quad (3.1)$$

where $\langle *, * \rangle$ represents the inner product used and $\hat{\mathbf{q}}_k^+ = {}^t(\hat{u}_k^+, \hat{v}_k^+, \hat{p}_k^+)$, the adjoint modes, are determined by the relation:

$$\langle \hat{\mathbf{q}}_k^+, \mathcal{L}_G \hat{\mathbf{q}}_k \rangle = \langle \mathcal{L}_G^+ \hat{\mathbf{q}}_k^+, \hat{\mathbf{q}}_k \rangle \quad (3.2)$$

¶ A part of the appendix A is devoted to this last remark.

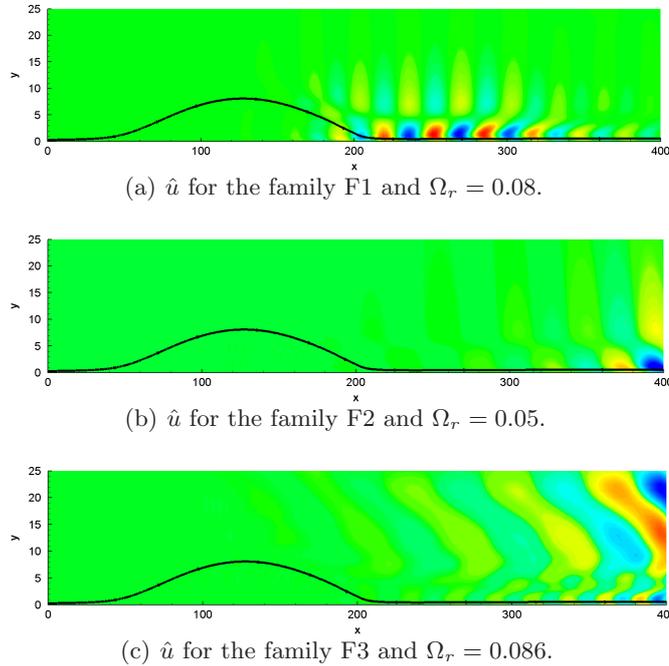


FIGURE 8. Streamwise component of the different families F1, F2 and F3 for D3.

with $\mathcal{L}_G = \mathbf{A} - i\Omega_k \mathbf{B}$, the direct global linear operator and \mathcal{L}_G^+ , his adjoint. Consequently, the behavior of the perturbation, induced by the initial condition \mathbf{q}_0 is characterized by:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_k \frac{\langle \mathbf{q}_0, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle}{\langle \hat{\mathbf{q}}_k, \hat{\mathbf{q}}_k^+ \rangle} \hat{\mathbf{q}}_k e^{-i\Omega_k t} \quad (3.3)$$

Thus, the equation (3.3) reveals a very interesting behavior associated to the spatial structure of the adjoint global modes. If the direct and adjoint global modes are strongly dissociated in space, then the inner product between them will be very weak. Consequently, a strong transient amplifying behavior can be expected (Chomaz (2005)).

We choose the hermitian inner product: $\langle *, * \rangle_2$ †. Thus, the adjoint modes are defined by the corresponding left eigenvectors of the global linear operator \mathcal{L}_G , which can be computed by considering the transconjugate operator. The adjoint of the global modes represented in Figure 8 are illustrated in Figure 10. It can be observed that all the adjoint modes of the families F1, F2 and F3 are strongly dissociated in space from their respective direct modes. Thus all the global modes can play a role in the space-time dynamics and therefore the evolution of an initial perturbation \mathbf{q}_0 , in the transient regime, is particularly relevant, a strong temporal amplifying behavior being expected.

3.2. Transient behavior & optimal growth.

In order to illustrate how these different global modes can act in the space-time dynamics of an initial condition and to confirm the previous remarks, we analyze the evolution of \mathbf{q}_0 which leads to the maximum energy growth. For this purpose, we introduce the quantity

† Similar strategy was used by Giannetti & Luchini (2007) in their global sensitivity study of the wake of a cylinder.

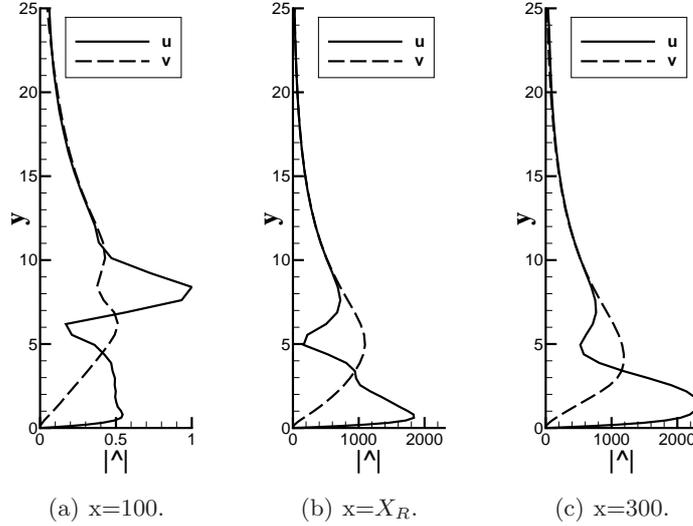


FIGURE 9. Contribution of the KH nature to the family F1. Evolution of the local profile along the flat plate, for D3 and $\Omega_r = 0.08$. The spatial instability evolves from an inflectional mechanism to a classical TS profile.

$G(t)$ defined by:

$$G(t) = \max_{\mathbf{q}_0} \frac{E(t)}{E(0)} \quad (3.4)$$

where $E(t)$ represents the energy of the perturbation. We can thus introduce the inner product as follows:

$$\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle_E = \int_0^{Ly} \int_0^{Lx} (\bar{u}_j u_i + \bar{v}_j v_i) dx dy \quad (3.5)$$

with $\bar{\cdot}$ the complex conjugate. Consequently, $G(t)$ is equal to:

$$G(t) = \max_{\mathbf{u}_0} \frac{\|\mathbf{u}(t)\|_E^2}{\|\mathbf{u}_0\|_E^2} \quad (3.6)$$

In order to maximize for each time the quantity $G(t)$, we write (3.6) into an orthogonal basis:

$$G(t) = \|\mathbf{F} \exp(t\mathbf{D}) \mathbf{F}^{-1}\|_2^2 \quad (3.7)$$

where F represents the Cholesky decomposition of the inner product matrix of components (3.5) and \mathbf{D} , the diagonal matrix of eigenvalues defined by $D_{k,l} = -i\delta_{k,l}\Omega_k$. As a consequence, the computation of the maximum singular value of $\|\mathbf{F} \exp(t\mathbf{D}) \mathbf{F}^{-1}\|_2$ for each time allows to determine $G(t)$ (Schmid & Henningson (2001)).

We have analyzed 4 N values for D3: just the 22 KH/TS modes, 100, 200 and 300 global modes. It can be observed from the figure 11(a) that $N = 300$ allows to obtain a converged value of $G(t)$. In particular, a very large transient growth phenomenon is observed which reaches $G(t) \approx 10^8$ at time $t = 380$. The energy evolution of the initial condition \mathbf{q}_0 leading to this maximum growth is represented in the figures 11(b) for three domains $L1 = 400$, $L2 = 425$ and $L3 = 450$ where $N_x = 250$, $N_x = 260$ and $N_x = 270$ are considered respectively. From the energy curves 11(b), the initial condition leading

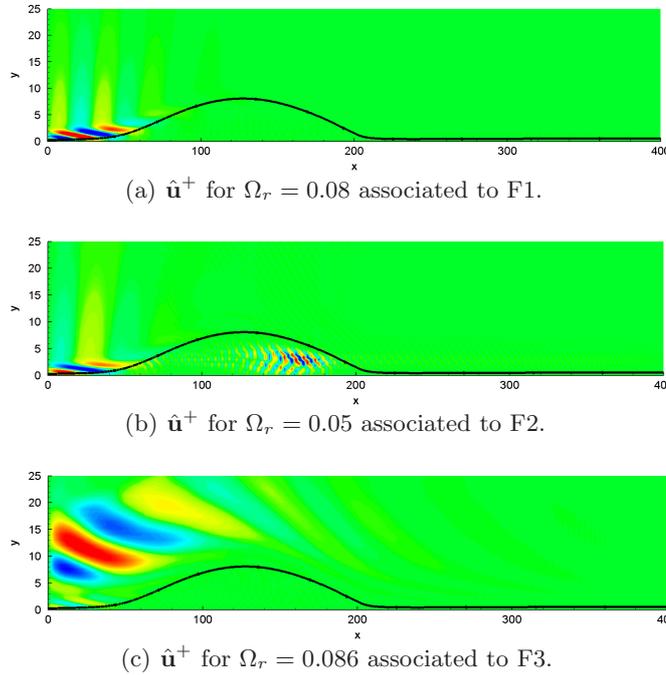


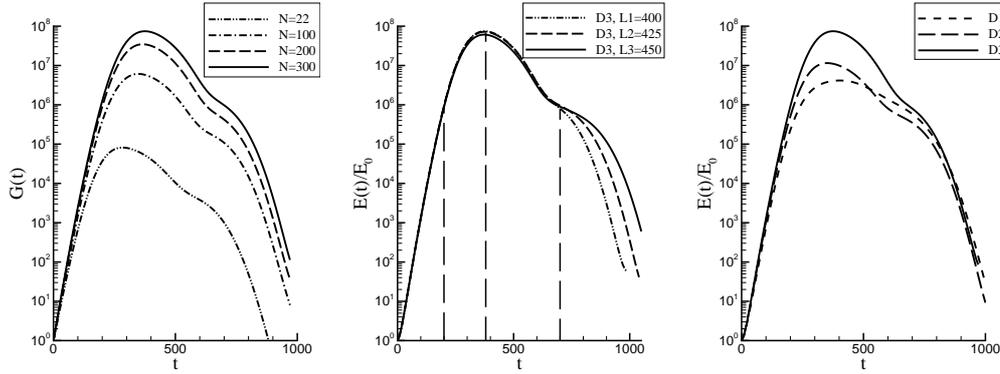
FIGURE 10. Adjoint modes analysis of the different family F1, F2 and F3 associated to D3.

to a maximum energy growth is independent of the domain's size. Thus the worst initial condition takes the form of a convective instability, where a wave packet is initialized at the front of the bubble and propagates along the shear layer, by means of a KH mechanism and finally relaxes in a typical TS mechanism. This point is illustrated by the spatial distribution of the perturbation in Figure 12, where the different times are depicted by vertical dotted lines in Figure 11(b). The convective phenomenon, associated to the shear layer, leads to a strong amplification of the energy, until it reaches a maximum at the end of the separated zone ($t = 380$ in figures 11(b) and 12(c)). This transient phenomenon associated to the convective instability is strongly related to the degree of non normality of the global operator \mathcal{L}_G which is theoretically demonstrated by Cossu & Chomaz (1997) and Chomaz (2005).

It is worth noticing that not only KH/TS modes from the F1 family can influence the transient dynamics of the perturbation but also the F2 and F3 families, where the contribution of the streamwise and the normal components of the global modes are taken into account. In order to get some insight into the space-time dynamics of the optimal initial condition, we have plotted in Figure 13 the spatial evolution of the wave packet, characterized by the energy curves:

$$E(x, t) = \int_0^{L_y} (|u(x, y, t)|^2 + |v(x, y, t)|^2) dy \quad (3.8)$$

and the x/t diagram based on the wall vorticity. From Figure 13(a), we can see the strong spatial amplification behaviour associated to this algebraic growth. Furthermore, the x/t diagram shown in Figure 13(b), has a shape which is typical of convective instability; nevertheless, it is interesting to identify the strong influence of the non parallelism, which is illustrated by the curvature of the borders of the wave packet. In particular, one can observe the strong non homogeneity of the flow with the change of the ray values re-



(a) Convergence of the energy envelope $G(t)$ with N associated to D3 for L1. (b) Energy curves leading to an optimal energy growth associated to D3 for L1, L2 and L3. (c) Energy curves leading to an optimal energy growth associated to D1, D2 and D3 for L1.

FIGURE 11. Evolution of the energy associated to the initial perturbation \mathbf{q}_0 for D1, D2 and D3 with the time t .

lated to the wave packet. This last one tends to decrease inside the bubble and accelerate when it is leaving the separated zone.

Moreover, in order to identify the influence of the suction profile in the intensity of this convective mechanism, the same procedure is applied for D1 and D2, with L1. The results are depicted in Figure 11(c). It is interesting to observe the increasing of the maximum energy growth with the intensity of the suction profile. This remark will be relevant in the section relative regarding the 3D asymptotic mechanism.

Furthermore, we have illustrated the influence of the global modes in the transient space and time dynamics of a particular initial condition \mathbf{q}_0 , localized at the front of the separated zone. More specifically, we measured globally the strong amplifying behaviour of \mathbf{q}_0 when this one is travelling along the shear layer. It is worth to notice the fact that no assumption about the parallelism of the base flow has been made is relevant from the strong spatial inhomogeneities of the base flow.

A last remark can be proposed about the global modes decomposition. This procedure allows here to analyze any initial condition through a projection of \mathbf{q}_0 into the global modes basis using the biorthogonality condition. Thus the global modes basis defined an efficient reduced models which can describe the linear space-time dynamics of any 2D initial condition (Åkervik *et al.* (2007)).

3.3. Asymptotic behaviour

Another way to illustrate the influence of these global modes is to consider the asymptotic regime. For that purpose, we add in the evolution equation (2.7) a forcing term $\mathbf{f}e^{-i\sigma t}$ with σ a real frequency. The action of this last one can, for example, simulate the presence of a vibrating ribbon. Consequently, the response of the perturbation in the plane (x, y) is governed by:

$$\left(\mathbf{B} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{A}\right) \mathbf{q} = \mathbf{f}e^{-i\sigma t} \quad (3.9)$$

The solution of the problem (3.9) is $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{\mathbf{D}t} + \hat{\mathbf{f}} e^{-i\sigma t}$ with \mathbf{q}_0 a constant representing the initial condition, and $-(i\sigma \mathbf{B} - \mathbf{A}) \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$. The flow is globally stable then all the global modes are temporally damped, therefore the solution of (3.9) for the long times is governed by: $\hat{\mathbf{f}} e^{-i\sigma t}$. We introduce the quantity $\mathbf{P}(\sigma) = (i\sigma \mathbf{B} - \mathbf{A})^{-1}$. The influence of

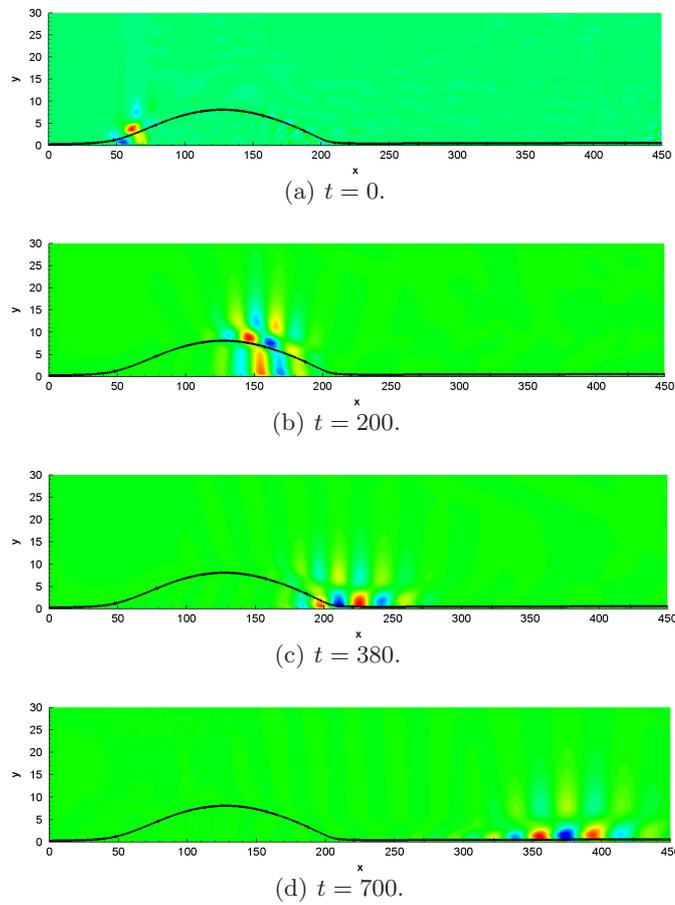
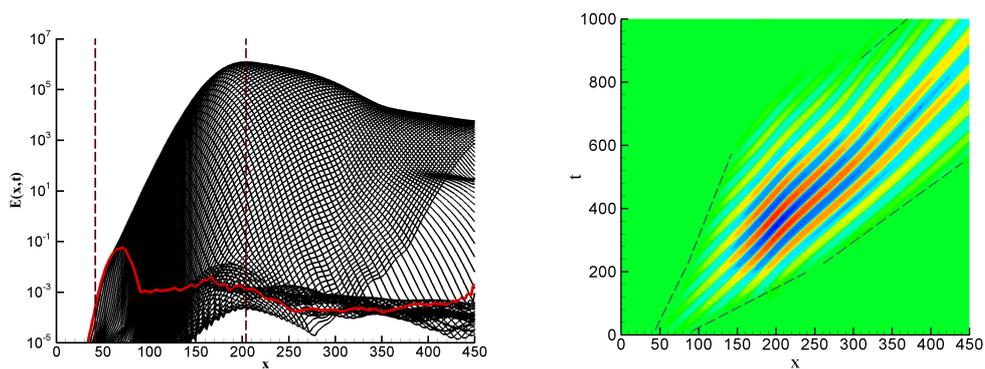
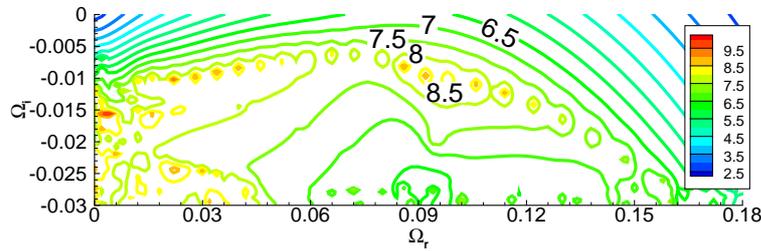


FIGURE 12. Evolution of the initial perturbation leading to an optimal transient growth associated to D3 and L3. The streamwise component is represented for different times illustrated by vertical dotted lines in the figure 11(b).



(a) Spatial evolution of the optimal perturbation. (b) space-time diagram of \mathbf{q}_0 , based on The red curve illustrates \mathbf{q}_0 . The dashed lines define the vorticity value at the wall. the position of X_{sep} and X_R .

FIGURE 13. Spatial and space-time evolution of the optimal perturbation for D3 and L3.

FIGURE 14. Pseudospectrum contours $-\log_{10}(\varepsilon)$ associated to D3 and L1.

an exterior real harmonic forcing is thus determined for long times by $\hat{\mathbf{f}}$. Consequently, it is possible to compute the sensitivity of a real exterior frequency through the analysis of the norm $\|\mathbf{P}(\sigma)\|$, with:

$$\lambda_\varepsilon = \{ \sigma \in \mathbb{C}, \|\mathbf{P}(\sigma)\| \geq \varepsilon^{-1} \} \quad (3.10)$$

We recover here the pseudospectrum of the global linear operator. The system being too large, an approximation of the pseudospectrum by the Hessenberg matrix resulting from the Arnoldi calculation is used (see Toh & Trefethen (1996)). The norm L_2 is considered. The result for D3 with L1 is illustrated in a logarithmic scale $-\log_{10}$ in the figure 14. The ε contours crossing the real frequency axis represent the sensitivity value to real forcing. A first remark can be done. We observe that the response of a real frequency is dominated by the global KH/TS modes. Consequently we recover that the asymptotic regime is governed by the KH/TS waves, as the spatial approaches predict. Moreover it indicates the very high global receptivity of these particular waves. Indeed, we found a value of 10^{-7} for the real pulsation located between 0.07 and 0.1 †. Thus it can be supposed that for strong separated flows some unsteadiness could be observed due to the very high sensitivity to real frequency even if the flow is globally stable, as for example the unsteadiness observed in a backward facing step flow Kaiktsis *et al.* (1996). Finally, the use of the pseudospectrum will be relevant in the arguments discussed in Appendix A.

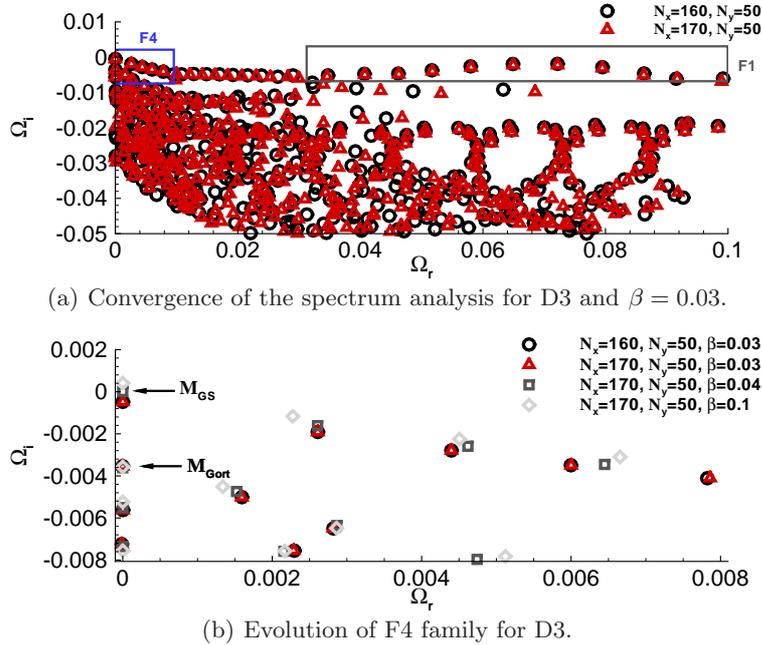
4. Three-dimensional perturbations $\beta \neq 0$

4.1. Asymptotic behaviour

In order to determine some 3D mechanisms, the present analysis will focus on the influence of three dimensional perturbation: $\beta \neq 0$. Since the 3D problem is defining a very large eigenvalues system, the previous discretization requires too large memories capacities. Consequently, we will limit to the study of low frequency modes which are rapidly converged. The spectral grid used is (170, 50).

This last remark is illustrated in Figure 15 for D3. Furthermore, a new converged family F4 of global modes appears being characterized by very low frequencies. In particular, some stationary modes referenced by M_{Gort} and M_{GS} can be observed. An interesting aspect is that the mode M_{GS} appears to be unstable for some β values. The 3D isovorticity contours associated to the modes M_{Gort} and M_{GS} are represented for two β values. These modes take the form of flat roll structures in the transverse direction, which follow the curvature of the streamlines of the base flow. M_{GS} is principally located inside the

† To compare with the flat plate convectively unstable boundary layer value of $10^{-3.6}$ by Alizard & Robinet (2007b)

FIGURE 15. Spectrum analysis for D3 and a 3D perturbation: $\beta \neq 0$.

bubble, whereas M_{Gort} has a spatial development. Therefore it can be supposed that these different 3D global modes are strongly affected by the curvature of the streamlines and may have a centrifugal origin, which is a three dimensional mechanism. In particular, M_{Gort} which is always stable seems to have a more marked convective nature similar to a Görtler instability. That kind of stationary phenomenon was observed in a similar configuration by Wilson & Pauley (1998) in their LES study ‡. M_{GS} , which becomes unstable, at $\beta = 0.04$ has a more intrinsic nature. Consequently, the asymptotic mechanism associated to the unstable stationary global mode M_{GS} seems to be similar to the one observed in GIS configuration by Gallaire *et al.* (2007) and Barkley *et al.* (2002) despite the absence of geometrical aspects. The previous authors proposed to analyze the influence of the centrifugal zones occurring in the closed streamlines defined by the recirculation area. In order to evaluate the influence of the eventual centrifugal zones, we study the evolution of the Rayleigh discriminant inside the bubble.

4.2. Nature of the instability.

A sufficient inviscid centrifugal condition based on a generalized Rayleigh criterion leads to the identification of unstable closed streamlines (Sipp & Jacquin (2000)). The Rayleigh discriminant is computed as follows:

$$\Delta(\mathbf{x}) = 2 \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x})}{\varrho(\mathbf{x})} \right) \varpi(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

where \mathbf{x} defines a point of the streamline considered, ϱ is the local radius of curvature, V the norm of the velocity and $\varpi(x)$ the vorticity. The flow is unstable if a closed streamline ψ exists where:

$$\max_{\psi}(\Delta(\mathbf{x})) \leq 0 \quad (4.2)$$

‡ The appendix B is devoted to this remark.

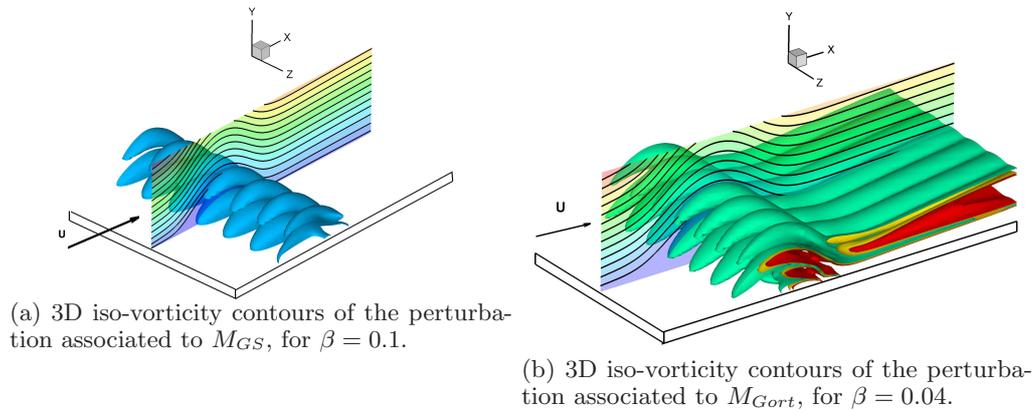


FIGURE 16. 3D isovorticity contours associated to the stationary modes M_{GS} and M_{Gort} of the family F4.

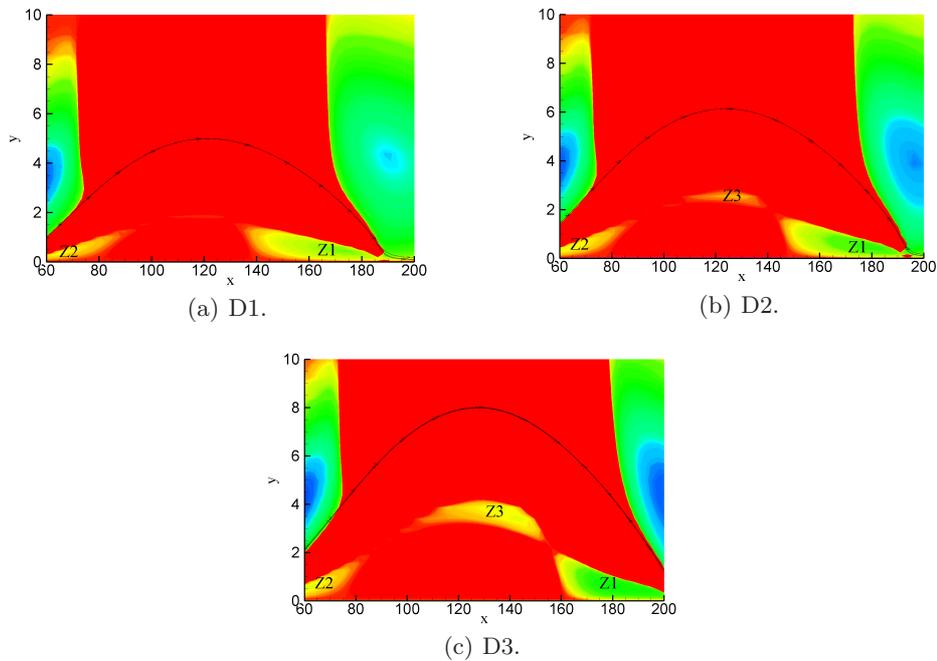


FIGURE 17. Evolution of the centrifugal zones Z1, Z2 and Z3 associated to negative values of 4.1 inside the bubbles D1, D2 and D3. Black lines represent the dividing streamlines.

Consequently, a study of the Rayleigh criterion's intensity is performed along closed streamlines for D1, D2 and D3. This analysis aims to explain that closed streamlines shape inside the bubble is a determining factor on the temporal amplification rate. The results are illustrated in Figure 17. It appears that the Rayleigh criterion is not clearly verified for D1, D2 and D3, nevertheless three centrifugal zones inside the bubble, defined by the negative values of (4.1) and referenced by Z1, Z2 and Z3 in Figure 17, are found. In particular, these regions associated to D1, D2 and D3 are respectively more and more expanded and stronger. Indeed, the minimal negative value of $\Delta(\mathbf{x})$, related to Z1 increases from -0.67×10^{-5} to -3.7×10^{-5} by increasing the suction profile intensity. An

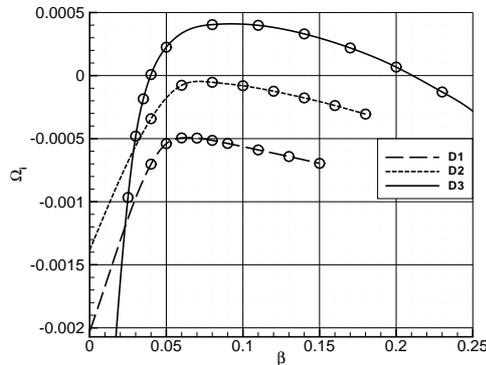


FIGURE 18. Evolution of the temporal growth rate Ω_i with the transverse wave number β for D1, D2 and D3.

analysis of the temporal growth rate evolution of the global mode M_{GS} with β for D1, D2 and D3 is plotted in Figure 18. The flow inside the recirculation area can thus feel more and more the influence of the centrifugal zones until it becomes marginally stable for D2 and unstable for D3. Therefore, it seems that there is a correlation between the intensity of the zone Z1, Z2 and Z3, and the instability associated to M_{GS} . Consequently, we can propose that even in this kind of configuration, without the geometry's influence of a bump or a step, a centrifugal mechanism can create a globally unstable phenomenon which takes the form of the stationary flat roll structures along the dividing streamlines (see Figure 16(a)) †

4.3. Three dimensional global adjoint mode analysis and time scales of the different mechanisms.

In this part, we study the configuration D3 where the centrifugal mechanism is unstable. In order to evaluate if the asymptotic centrifugal mechanism associated to the global unstable mode M_{GS} is relevant, a study is realized with the time scale based on the direct global mode and the structure of this corresponding adjoint mode. At first, we compare the time scale of the global mode M_{GS} with the large transient phenomenon associated to a KH mechanism. Consequently, we study the linear energy evolution of the perturbation by initializing the base flow with the direct global mode. Figure 19 represents the evolution of the energy:

$$\frac{E(t)}{E(0)} = \frac{\|\mathbf{u}(t)\|_E^2}{\|\mathbf{u}_0\|_E^2} \quad (4.3)$$

associated to the optimal 2D initial condition and the direct global mode M_{GS} for the transverse wave number related to the most amplified global temporal rate: $\beta = 0.1$. Thus it seems clear that the time associated with the exponential growth of the unstable mode M_{GS} is much longer than the time associated to the algebraic growth from the 2D KH mechanism ($\approx 10^4$ against 380). Then, one can question if the asymptotic dynamics of the centrifugal mechanism is relevant in this kind of configuration. Indeed stronger is the suction profile, more the transient growth related to the KH mechanism is important. In particular, even for marginally stable flow as D2, this transient phenomenon has very

† A parametric analysis based on Falkner-Skan profiles, realized by Alizard & Robinet (2007a), tends to confirm this hypothesis.

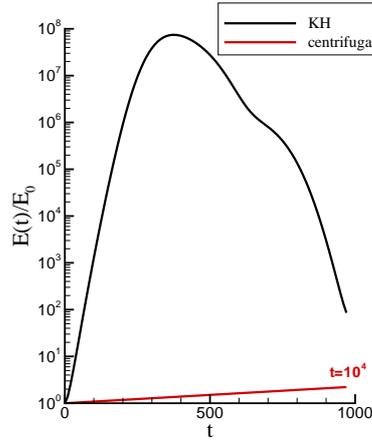


FIGURE 19. Time scales associated to the different mechanisms: asymptotic 3D centrifugal and transient 2D KH, for D3. $\beta = 0.1$ for the 3D unstable global mode.

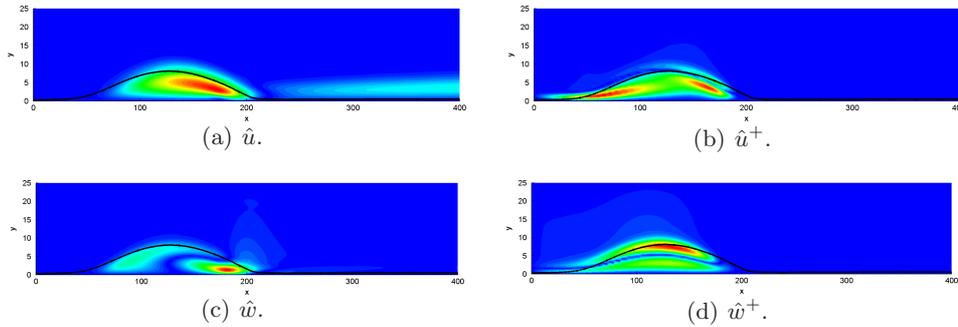


FIGURE 20. Adjoint modes analysis associated to the unstable global mode M_{GS} for $\beta = 0.1$ and D3.

high levels. In order to evaluate more precisely the possibility to optimize the triggering of this 3D mechanism, we study the structure of the adjoint mode. For this purpose, we refer to Farrell (1988), in which the author illustrates the possibility to trigger optimally the unstable mode by injecting the adjoint mode as the initial condition. This method would lead to a substantial energy gain only if there is a strong difference between the spatial structure of the direct and adjoint modes. Therefore, we compute the left eigenvector corresponding to M_{GS} . The figures 20 illustrate a comparison between the spatial structure of the direct and adjoint mode. It appears that there is no clear separation between these last ones. Consequently, the energy gain expected by injecting the adjoint mode should not be substantial. Then, this last remark confirms the difficulty for the asymptotic centrifugal 3D mechanism to exist in such configuration, and the possibility for the flow to bifurcate before to non linear dynamics induced by the strong transient KH mechanism.

5. Discussion and Prospects

The proposed approach identifies the instability mechanisms related to the response of a small perturbation localized in space and time or a harmonic forcing introduced into

a laminar flat plate separated flow. In particular, the global modes decomposition of the initial perturbation illustrates the space-time dynamics of a 2D perturbation introduced at the front of the separated zone and the influence of the different components of this particular basis. Such decomposition reveals the strong amplifying behaviour associated to the energy of the perturbation when it is traveling along the shear layer and the contribution of the different global modes families. The use of the non normality of the global linear stability operator from the linearized Navier-Stokes equations allows thus to globally measure the strong convective phenomenon associated to the bubble, without any assumptions about the spatial structure of the flow.

Furthermore, the 3D asymptotic analysis highlights the influence of a stationary unstable global mode, which appears in this particular configuration without geometrical aspects to be a consequence of a centrifugal mechanism similar to the ones observed in GIS configuration like a flow over a bump or a backward facing step. Consequently, we identify two distinct mechanisms which can occur in that particular configuration of laminar separated flows, in a range of Reynolds number of practical application. The response of a perturbation initialized at the beginning of the separated zone could bifurcate to a 3D instability through a centrifugal mechanism in the asymptotic regime. Nevertheless, the strong transient amplification of the initial perturbation associated to the traveling of the wave packet along the shear layer could invalidate the previous asymptotic scenario, and lead to a non linear bifurcation related to this KH mechanism before the triggering of the centrifugal mechanism. The diagram Figure 21 summarizes the last purpose. In particular, the study of the time scales related to the previous mechanism, and the spatial structure of the adjoint mode of the 3D globally unstable mechanism, consolidates this theory.

Otherwise, the high consuming memories capacities necessary to solve the eigenvalues problem makes difficult to study some 3D specific transient mechanism with a strategy based on global modes. Nevertheless, it could be supposed that there exists a 3D transient mechanism slightly stronger than the two dimensional. This possibility would thus make more difficult to trigger the asymptotic 3D centrifugal mechanism. Consequently, this remark consolidate the previous discussion about the asymptotic regime †.

Finally, the use of this fully non parallel approach, based on the global modes decomposition, could open new prospects in the analysis of different LSB. In particular, the flapping effect which occurs in some LSB configuration, unverified by classical convective/absolute analysis, could be thus to be studied by means of this methodology and perhaps reveals a global instability mechanism associated to this low frequency oscillation.

Computing time was provided by "Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS)-CNRS".

Appendix A. Times greater than 1000

The base flow D3 with the length L3 is examined in this appendix. At the leaving moment of the wave packet, another phenomenon appears which takes the form of a very low frequency unsteadiness. This phenomenon can be explained mathematically by recalling that during the short time transient growth all the global modes are involved in

† In order to identify such 3D transient mechanism a direct/adjoint optimization strategy could be realized (Corbett & Bottaro (1999)). Nevertheless, in this non local problem, this strategy necessitates to optimize at each time step the energy by solving the direct and adjoint linearized Navier-Stokes equations.

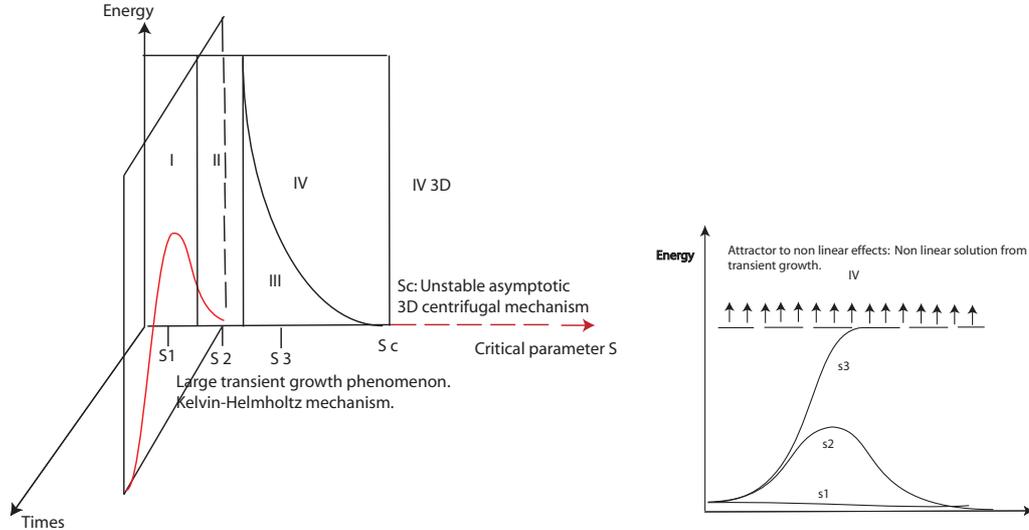


FIGURE 21. Possible scenario of bifurcation associated to laminar flat plate separated flows. The critical parameter s is for example the intensity of the suction profile or the Reynolds number. The region *I* is monotonically stable. The region *II* is not monotonically stable but asymptotically stable. The region *III* is conditionally stable and will depend of the transient growth, the amplitude of the initial perturbation and the existence of an attractor to non linear effects. The separated flow can thus bifurcate to the region *IV* which is illustrated to the right. The region *IV3D* is globally unstable with the three-dimensional centrifugal mechanism.

the space-time dynamics of the perturbation. Taking into account the temporal damping rate of each global mode, it can be supposed that for $t \geq 1000$ only a few global modes, the least damped, are still involved in the dynamics. For example, we can take the global modes belonging to the family F1 associated with the pulsation $\Omega_r \approx 0.069$ and $\Omega_r \approx 0.075$. It can be observed from the structure of the eigenmode related to the previous pulsation that they have a slightly different wave number. Therefore, the interference which is created with these two global modes can describe a series of wave packet at the frequency $\delta\Omega_r$, the difference between the real part of the associated pulsation (Lighthill (1964)). In order to confort these hypothesis, a comparison between the observed phenomenon in Figure 22 and the value of $\delta\Omega_r$ is thus realized. The period of the low frequency depicted in Figure 22 is $T \approx 960$. The corresponding pulsation is then $\frac{2\pi}{T} \approx 0.0065$. The value of $\delta\Omega_r$ from the spectrum 7(b) is ≈ 0.0063 which is very close to the previous one. As a consequence, we can be confident about the origin of this low frequency. A similar phenomenon was observed by Åkervik *et al.* (2007) in their study of the stability of an open rounded cavity flow. Nevertheless in this configuration it didn't seem to be physical. Indeed, this phenomenon is strongly affected by the temporal damping rate of the most unstable global modes, and a slight difference between their values can modify this low frequency. A computation with $N_x = 270$ is thus realized. We can observe from Figure 22 that the transient behaviour is found to be similar, but the low frequency phenomenon appears later. This can be explained by noticing that the temporal value of the damping rate is slightly higher, that is why the low frequency appears in a much longer time and tends to almost disappear. The difficulty to perfectly define the end of the transient dynamic can thus be explained by means of the pseudospectrum (3.10). The ε levels arounding the global modes of F1 take values around 10^{-9} . Never-

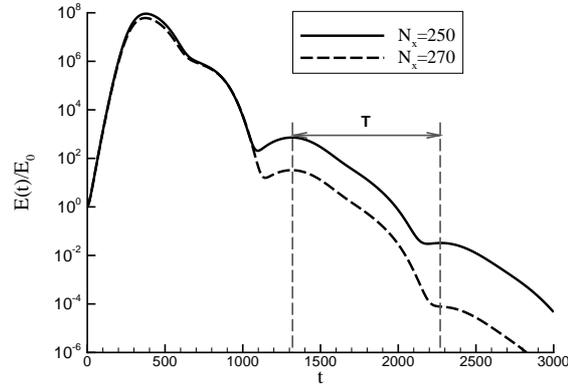


FIGURE 22. Energy analysis for two cases with different number of discretization point on the "x" axis.

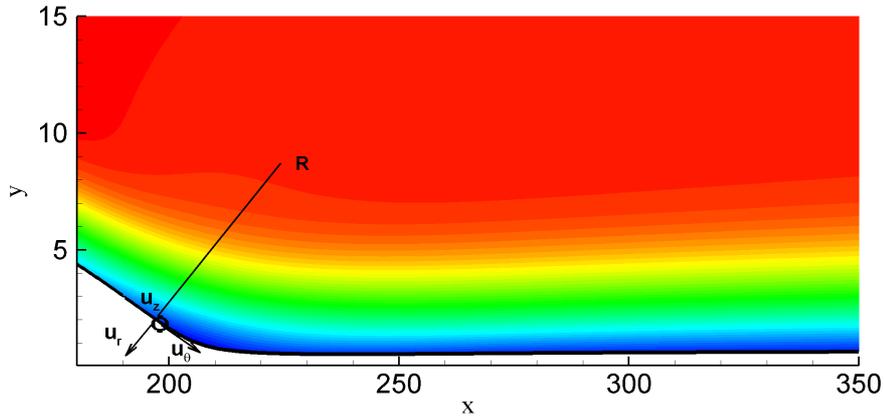


FIGURE 23. Cylindrical coordinate system following φ_G associated to the Görtler analysis. The U contours are illustrated.

theless, the previous grid seems to be sufficient to describe the most significant part of the convective phenomenon.

Appendix B. Görtler analysis.

In order to analyze the Görtler nature of the stable stationary global mode M_{Gort} , whose stationary flat role structures in the transverse direction recall the Görtler ones, a Görtler stability study is realized on the streamline around the bubble. For this purpose, we define a local cylindrical coordinate system (u_r, u_θ, u_z) , attached on a streamline φ_G around the separated zone as it is shown in Figure 23. Consequently, we follow the formalism of Hall (1982) in his analysis of the curvature of the wall in the three dimensional perturbations of a boundary layer. We note R the local radius of curvature and γ its respective local curvature parameter and δ^* the reference length.

The local axis associated to φ_G is thus defined by:

$$\begin{cases} \tilde{x}\gamma = \Theta, \\ \tilde{y} = \left[\frac{(r-R)}{\delta^*} \right], \\ \tilde{z} = \frac{z}{\delta^*} \end{cases} \quad (\text{B } 1)$$

In order to get similar length scales following \tilde{x} and \tilde{y} , we write these quantities as follows:

$$(X, Y, Z) = (\tilde{x}, \tilde{y}Re^{1/2}, \tilde{z}Re^{1/2}) \quad (\text{B } 2)$$

$$(U, V, W) = (V_\theta/U_0, V_rRe^{1/2}/U_0, V_z/U_0Re^{1/2})$$

where (V_θ, V_r, V_z) represents the base flow in the cylindrical axis and U_0 the reference velocity. The instability is stationary and three-dimensional then we consider the perturbation in (X, Y, Z) as follows:

$$(u, v, w, p) = (\hat{u}\cos(\beta z), \hat{v}\cos(\beta z), \hat{w}\sin(\beta z), \hat{p}\cos(\beta z)) \quad (\text{B } 3)$$

Finally, it is assumed that the nature of the instability is inviscid and that the curvature is small. The spatial behaviour of the perturbation in (X, Y, Z) , injected into the base flow $(U, V, 0)$ is thus governed by:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial X} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial Y} + \beta \hat{w} = 0 \quad (\text{B } 4a)$$

$$U \frac{\partial \hat{u}}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \hat{u} + V \frac{\partial \hat{u}}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial Y} v = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial Y^2} - \beta^2 \hat{u} \quad (\text{B } 4b)$$

$$U \frac{\partial \hat{v}}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial X} \hat{u} + V \frac{\partial \hat{v}}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Y} \hat{v} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial Y} + GU \hat{u} = \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial Y^2} - \beta^2 \hat{v} \quad (\text{B } 4c)$$

$$U \frac{\partial \hat{w}}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \hat{w} + V \frac{\partial \hat{w}}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Y} \hat{w} - \beta \hat{p} = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial Y^2} - \beta^2 \hat{w} \quad (\text{B } 4d)$$

where $G = 2\gamma Re^{1/2}$ is the Görtler number, characterizing the influence of viscous effects and the curvature. These equations are integrated by means of a backward Euler in the X direction, following ψ_G †, initialized at the middle of the bubble. Although the assumptions are strong in the Görtler equations, a comparison between the eigenfunctions from the global analysis and the Görtler analysis is realized for $\beta = 0.04$ (see Figure 16(b)). Even if the structures of the perturbation along ψ_G are not totally similar, they illustrate the same phenomenon associated to the influence of the curvature. In particular, a strong influence on the transverse component of the perturbation due to the curvature is recovered by the two analysis, indicating the three-dimensionality property associated to this instability. Moreover, the streamwise component takes the form of elongated structures which recall these long flat rolls as in the global approach. Consequently, even if the comparison is not particularly accurate, it is relevant to illustrate the strong influence of the curvature in this kind of centrifugal instability mechanism associated to this stationary mode.

† The streamlines being computed by integrating $\partial \mathbf{x} / \partial s = \mathbf{U}$, with s the parametrization of the line, and \mathbf{U} , the base flow.

24

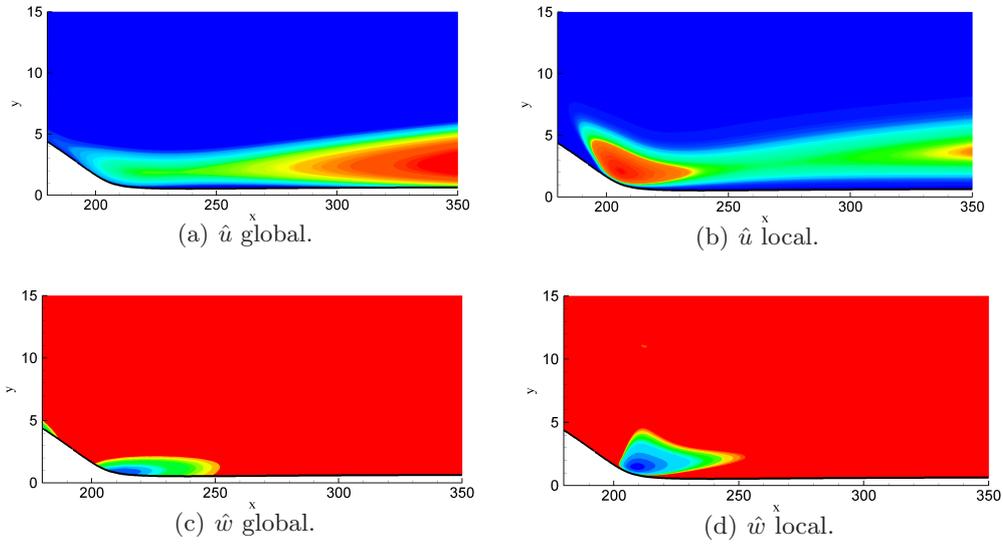
F. Alizard & J.-Ch. Robinet

FIGURE 24. Comparison of transverse and streamwise components of the perturbation for $\beta = 0.04$ for the mode M_{Gort} , between the global and the Görtler studies.

REFERENCES

- ÅKERVIK, E., HOEPFFNER, J., EHRENSTEIN, U. & HENNINGSON, U. 2007 Optimal growth, model reduction and control in a separated boundary layer flow using global eigenmodes. *J. Fluid Mech.* .
- ALAM, M. & SANDHAM, N. D. 1999 Direct numerical simulation of "short" laminar separation bubbles with turbulent reattachment. *J. Fluid Mech.* **403**, 223–250.
- ALIZARD, F. & ROBINET, J.-C. 2007a Influence of 3d perturbations on separated flows. IUTAM Symposium on Unsteady Separated Flows and their Control, June 18–22, 2007, Corfu, Greece.
- ALIZARD, F. & ROBINET, J.-C. 2007b Spatially convective global modes in a boundary layer. *Physics of Fluids* **19** (11).
- ALVING, A. E. & FERNHOLZ, H. H. 1997 Turbulence measurements around a mild separation bubble and downstream of reattachment. *J. Fluid Mech.* **322**, 297–328.
- ARMALY, B., DURST, F., PEREIRA, J. & SCHNUNG, B. 1983 Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow **127**, 473–496.
- BARKLEY, D., GOMES, M. & HENDERSON, D. 2002 Three dimensional instability in flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.* **473**, 167–189.
- CHOMAZ, J., HUERRE, P. & REDEKOPP, L. G. 1991 A frequency selection criterion in spatially developing flows. *Studies in applied mathematics* **84**, 119–144.
- CHOMAZ, J.-M. 2005 Global instabilities in spatially developing flows: non-normality and non linearity. *Annu. Rev. Fluid Mech* **37**, 357–392.
- CORBETT, P. & BOTTARO, A. 1999 Optimal perturbations for boundary layers subject to stream-wise pressure gradient. *Physics of Fluids* **12**, 120–130.
- COSSU, C. & CHOMAZ, J.-M. 1997 Global measures of local convective instabilities. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4387–4390.
- DOGVAL, A. V., KOZLOV, V. V. & MICHALKE, A. 1994 Laminar boundary layer separation: instability and associated phenomena. *Prog. Aerospace Sci.* **30**, 61–94.
- EHRENSTEIN, U. & GALLAIRE, F. 2005 On two dimensional temporal modes in spatially evolving open flows: the flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech.* **78**, 4387–4390.
- FARRELL, B. F. 1988 Optimal excitation of perturbations in viscous shear flow. *Physics of Fluids* **31**, 2093–2102.
- GALLAIRE, F., MARQUILLIE, M. & EHRENSTEIN, U. 2007 Three-dimensional transverse instabilities in detached boundary layers. *J. Fluid Mech.* **571**, 221–233.
- GASTER, M. 1969 The structure and behaviour of laminar separation bubbles. *Tech. Rep.*. Ministry of technology, Aeronautical research council.
- GIANNETTI, F. & LUCHINI, P. 2007 Structural sensitivity of the first instability of the cylinder wake. *J. Fluid Mech.* **581**, 167–197.
- HALL, P. 1982 The linear development of görtler vortices in growing boundary layers. *J. Fluid Mech.* **130**, 41–58.
- HAMMOND, D. & REDEKOPP, L. 1998 Local and global instability properties of separation bubbles. *Eur. J. Mech. B/Fluids* **17**, 14564.
- HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1985 Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.* **159**, 151–168.
- JONES, B. M. 1934 Stalling. *J. R. Aero. Soc* **38**, 753–770.
- KAIKTSIS, L., KARNIADAKIS, G. & ORSZAG, A. 1996 Unsteadiness and convective instabilities in two-dimensional flow over a backward-facing step. *J. Fluid Mech.* **321**, 157–187.
- LEHOUCQ, R., SORENSEN, D. & YANG, C. 1997 *ARPACK Users' Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*.
- LI, F. & MALIK, M. 1995 On the Nature of P.S.E Approximation. *J. Fluid Mech.* **333**, 125–137.
- LIGHTHILL, M. J. 1964 Group velocity. *J. Inst. Maths Applics* **1**, 1–28.
- MARQUILLIE, M. & EHRENSTEIN, U. 2003 On the onset of nonlinear oscillations in a separating boundary-layer flow. *J. Fluid Mech.* **490**, 166–188.
- NA, Y. & MOIN, P. 1998 The structure of wall-pressure fluctuations in turbulent boundary layers with adverse pressure gradient and separation. *J. FLuid Mech.* **377**, 347–373.
- PAULEY, L., MOIN, P. & REYNOLDS, W. 1990 The structure of two dimensional separation. *J. Fluid Mech.* **220**, 397–411.

- PEYRET, R. 2002 *Spectral methods for incompressible viscous flow.* Springer.
- PHILLIPS, T. N. & ROBERTS, G. W. 1993 The treatment of spurious pressure modes in spectral incompressible flow calculations. *J. Comput. Phys.* **105**, 150–164.
- PIER, B. 2002 On the frequency selection of finite-amplitude vortex shedding in the cylinder wake. *J. Fluid Mech.* **458**, 407–417.
- RIST, U. 2003 Instability and transition mechanisms in laminar separation bubbles. In *Low Reynolds Number Aerodynamics on Aircraft Including Applications in Emerging UAV Technology*. VKI/RTO-LS, Rhode-Saint-Genese, Belgium.
- RIST, U. & MAUCHER, U. 1994 Direct numerical simulation of 2-d and 3-d instability waves in a laminar separation bubble. *AGARD-CP.* **551**, 361–367.
- RIST, U. & MAUCHER, U. 2002 Investigations of time-growing instabilities in laminar separation bubbles. *Eur. J. Mech. B/Fluids.* **21**, 495–509.
- SCHMID, P. & HENNINGSON, D. 2001 *Stability and transition in shear flows.* Springer.
- SCHMID, P. J. 2007 Nonmodal stability theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **39**, 129–162.
- SIPP, D. & JACQUIN, L. 2000 Three-dimensional centrifugal-type instabilities of two-dimensional flows in rotating systems. *Physics of Fluids* **12**, 1740–1748.
- THEOFILIS, V. 2003 Advances in global linear instability of nonparallel and three-dimensional flows. *Prog. in Aerospace Sciences* **39**, 249–315.
- THEOFILIS, V., HEIN, S. & DALLMANN, U. 2000 On the origins of unsteadiness and three dimensionality in a laminar separation bubble. *Proc. R. Soc. London.* **358**, 3229–3246.
- TOH, K.-C. & TREFETHEN, L. N. 1996 Calculation of pseudospectra by the Arnoldi iteration. *SIAM Journal on Scientific Computing* **17** (1), 1–15.
- WASHITO, B., GEURTS, B. & KUERTEN, J. 1997 Numerical simulation of separated boundary-layer flow. *J. Engineering Mathematics.* **32**, 177–194.
- WILSON, P. & PAULEY, L. L. 1998 Two and three dimensional large-eddy simulations of a transitional separation bubble. *Physics of Fluids* **10** (11), 2932–2940.

Etude de stabilité linéaire globale d'écoulement fortement décollé de couche limite de plaque plane.

Résumé :

La compréhension des mécanismes de transition d'écoulements décollés laminaires trouve un intérêt particulier de par sa présence au sein de nombreuses applications industrielles. Notamment, la prédiction précise de la première bifurcation associée à un tel écoulement et la construction de modèles réduits, pourrait autoriser des développements d'outils de contrôle efficaces, permettant une augmentation des performances aérodynamiques des profils considérés. Dans ce cadre, nous proposons à travers ce mémoire une analyse de stabilité originale, prenant en compte le caractère fortement non parallèle de l'écoulement. En particulier, une étude de stabilité linéaire "globale", sur une configuration académique d'écoulement décollé de plaque plane, révèle l'influence des modes globaux bidimensionnels et tridimensionnels, dans la dynamique en espace et en temps de la perturbation, en fonction du type de forçage appliqué. En outre, une telle étude identifie des mécanismes non détectés par les approches classiques, comme une très large amplification transitoire 2D de la perturbation le long de la couche de mélange, et un mécanisme centrifuge pouvant conduire à une tridimensionnalisation du décollement. Enfin, la décomposition de la perturbation dans la base de modes globaux s'avère une réduction de modèle pertinente, dans l'objectif d'un contrôle efficace.

Mots-clés : *écoulement décollé laminaire, stabilité linéaire globale, mécanismes 2D et 3D, réduction de modèle.*

Global linear stability analysis of a flat plate separated flow.

Abstract:

The understanding of the transition mechanisms of laminar separated flows, which occur in many industrial applications, has a particular scientific interest. Notably, an accurate prediction of the first bifurcation and the development of reduced models associated to the dynamic of the perturbation could allow an optimization of the control procedure and increase the aerodynamic performances. In this context, we propose through this work an original stability analysis which takes into account the non parallelism effects of the flow. In particular, a global linear stability analysis on a flat plate separated flow, identify the influence of 2D and 3D global modes in the space and time dynamics of the perturbation. More specifically, a such study identify mechanisms not revealed by the classical approaches, as a large 2D transient amplifying behavior along the shear layer and a centrifugal mechanism leading to a 3D bifurcation of the separated flow. Finally, the global modes decomposition leads to an efficient reduced model in order to develop control strategies.

Keywords: *laminar separated flow, global linear stability, 2D and 3D mechanisms, reduced models.*